HAAR ALFRÉD

ÖSSZEGYŰJTÖTT MUNKÁI

ALFRED HAAR

GESAMMELTE ARBEITEN

HAAR ALFRÉD

ÖSSZEGYŰJTÖTT MUNKÁI

Haar Alfréd (1885—1933) egyike azoknak a matematikusoknak, akiknek a munkássága a matematika legújabb fejlődésére általánosan elismerten nagy hatással volt. Áll ez az ortogonális függvénysorokra és a variációszámításra vonatkozó munkásságára, de egészen különleges mértékben áll ez a folytonos csoportokra vonatkozó, egyben utolsó munkájára, amely egyébként székfoglaló tanulmánya volt a Magyar Tudományos Akadémián.

Összegyűjtött munkáinak kiadásával a Magyar Tudományos Akadémia könnyen hozzáférhetővé kívánja tenni Haar Alfréd teljes életművét s egyben méltó módon kíván megemlékezni kiváló volt tagjáról.

A kötet, melyet Szőkefalvi-Nagy Béla professzor rendezett sajtó alá, Haar rövid életrajzával kezdődik, majd következnek dolgozatai tárgykörök szerinti csoportosításban: Halmazelmélet — Ortogonális függvénysorok és szinguláris integrálok — Analitikus függvények — Parciális differenciálegyenletek —Variációszámítás — Függvényapproximációk és lineáris egyenlőtlenségek — Diszkrét csoportok és függvényalgebrák — Folytonos csoportok.

Az egyes dolgozatcsoportok elé jegyezetek vannak illesztve, amelyek az illető vizsgálatokra vagy mások által végzett közvetlen folytatásukra vonatkoznak.

Minthogy Haar cikkeit magyarul és németül publikálta, természetes volt összegyűjtött munkái kiadásának nyelvéül e két nyelvet választani. Némelyik dolgozata magyarul és németül is megjelent, ezek mindkét változatban szerepelnek. Három dolgozata csak magyarul jelent meg, ezek német fordítása az I. függelékben található. A II. függelék Haarnak a Bolyai-féle abszolút geometria jelentőségéről tartott előadását tartalmazza. A III. függelékben két megemlékezés található Haar Alfrédről: az egyik tanártársától, Riesz Frigyestől, a másik a Haar és Riesz által alapított szegedi *Acta Scientiarum Mathematicarum* folyóirat szerkesztőségétől.



Alfred Haar 1885—1933

Haar Alfréd összegyűjtött munkái

*

Alfred Haar gesammelte Arbeiten

ALFRED HAAR
Gesammelte Arbeiten

Im Auftrage der Ungarischen Akademie der Wissenschaften
herausgegeben von

BÉLA SZŐKEFALVI-NAGY
ord. Mitglied der Ungarischen Akademie der Wissenschaften

Verlag der Akademie der Wissenschaften
Budapest, 1959

HAAR ALFRÉD
összegyűjtött munkái

A Magyar Tudományos Akadémia megbízásából
sajtó alá rendezte

SZŐKEFALVI-NAGY BÉLA
a Magyar Tudományos Akadémia rendes tagja

Akadémiai Kiadó
Budapest, 1959

Lektorok

Egerváry Jenő † és Turán Pál,

a Magyar Tud. Akad. r. tagjai

Bevezetés

Haar Alfréd egyike azoknak a matematikusoknak, akiknek a munkássága a matematika legújabb fejlődésére általánosan elismerten nagy hatással volt. Áll ez az ortogonális függvénysorokra és a variációszámításra vonatkozó munkásságára, de egészen különleges mértékben áll ez a folytonos csoportokra vonatkozó, egyben utolsó munkájára, amely egyébként székfoglaló tanulmánya volt a Magyar Tudományos Akadémián. Korai halála megakadályozta, hogy alapvető felfedezése következményeinek kiaknázásában maga is részt vegyen.

A Magyar Tudományos Akadémia már évekkel ezelőtt elhatározta, hogy kiadja Haar Alfréd összegyűjtött munkáit; a kiadás most, röviddel Haar halálának 25-ik évfordulója után valósul meg. Ez a 25 év elegendő volt ahhoz, hogy Haar tudományos teljesítményének egész jelentősége tisztán kibontakozzék.

Haar Alfréd rövid életrajza után dolgozatainak jegyzékét közöljük, időrendi sorrendben. Ezután következnek maguk a dolgozatok, az alábbi, tárgykörök szerinti csoportosításban:

A. Halmazelmélet.
B. Ortogonális függvénysorok és szinguláris integrálok.
C. Analitikus függvények.
D. Parciális differenciálegyenletek.
E. Variációszámítás.
F. Függvényapproximációk és lineáris egyenlőtlenségek.
G. Diszkrét csoportok és függvényalgebrák.
H. Folytonos csoportok.

Az egyes dolgozatcsoportok elé néhány, az illető vizsgálatokra vagy mások által végzett közvetlen folytatásukra vonatkozó jegyzetet illesztettünk be, természetesen a teljességre való minden igény nélkül.

A dolgozatokat nem szedtük újra, hanem az eredetiekről fotografikus úton készítettünk másolatot. Tekintettel arra, hogy Haar (egy francia-nyelvű *Comptes Rendus*-cikken kívül) kizárólag magyarul és németül publikált, természetes volt összegyűjtött munkái kiadásának nyelvéül e két nyelvet választani. Némelyik dolgozat magyarul is és németül is megjelent, ezeket mindkét változatban felvettük. Van három olyan közleménye, amely (legalább is teljes alakjában) csak magyarul jelent meg, ezeket az I. függelékben németre lefordítva is közöljük. A II. függelék részleteket tartalmaz Haarnak az 1923. évi szegedi egyetemi évzáró közgyűlésen tartott előadásából, ebben Haar a Bolyai-féle abszolút geometria jelentőségét méltatja felfedezésének 100-ik évfordulóján. Tekintettel arra, hogy ez az előadás nem új eredményekről számol be, elegendőnek tartottuk a magyar eredetiben való leközlését. A III. függelékben két olyan megemlékezést közlünk Haar Alfrédról, amelyek mint kutatót és embert méltatják: az egyik szegedi professzortársának, Riesz Frigyesnek beszéde Haar ravatalánál,

a másik a szegedi *Acta Scientiarum Mathematicarum* folyóirat szerkesztőségének megemlékezése. A két megemlékezés egyike magyar, a másika német nyelvű, kölcsönös lefordításuktól eltekintettünk.

Haar Alfrédtől könyv nem jelent meg. Azonban több igen gondosan megírt jegyzetet készített, részben saját előadásaira való előkészületként, részben hallgatóinak használatára (Számelmélet, Algebra, Determinánsok és quadratikus formák, Vektor- és tenzoranalízis, Felsőbb geometria, Felületelmélet, Elemi függvénytan, Differenciálegyenletek, Variációszámítás, Valószínűségszámítás). Noha ezek az egyetemi előadások sok eredeti részletet tartalmaznak, s mint egyetemi tankönyvek ma is beválnának, a jelen összegyűjtött munkák közé való felvételükről már csak terjedelmük miatt sem lehetett szó.

Einleitung

Alfred Haar ist einer der Mathematiker, deren Werk auf die neueste Entwicklung der Mathematik einen allgemein anerkannten großen Einfluß ausgeübt hat. Das gilt für seine Arbeiten über orthogonale Funktionenreihen und Variationstheorie und insbesondere für seine letzte Arbeit über kontinuierliche Gruppen, die übrigens seine Antrittsarbeit an der Ungarischen Akademie der Wissenschaften war. Der zu frühe Tod hat ihm nicht gestattet, in der Ausbeute der Folgerungen seiner grundlegenden Entdeckung selbst teilzunehmen.

Die Ungarische Akademie der Wissenschaften hat schon vor Jahren beschlossen, die Gesammelten Arbeiten von Alfred Haar herauszugeben; und jetzt, kurz nach der 25. Jahreswende seines Todes wird dieser Plan verwirklicht. Die verflossenen 25 Jahren haben genügt, daß die ganze Bedeutung der wissenschaftlichen Leistungen von Alfred Haar nun in aller Klarheit erscheint.

Nach dem kurzen Lebenslauf von Alfred Haar findet man die Liste seiner Arbeiten in chronologischer Anordnung. Dann folgen die Arbeiten selbst, in folgender Gruppierung nach Gegenständen:

A. Mengentheorie.
B. Orthogonale Funktionenreihen und singuläre Integrale.
C. Analytische Funktionen.
D. Partielle Differentialgleichungen.
E. Variationsrechnung.
F. Approximationen von Funktionen und lineare Ungleichungen.
G. Diskrete Gruppen und Funktionenalgebren.
H. Kontinuierliche Gruppen.

Vor die einzelnen Gruppen der Aufsätze haben wir einige, diese Arbeiten selbst oder ihre unmittelbare Fortsetzung durch andere Verfasser betreffende Notizen gestellt, natürlich ohne jeden Anspruch auf Vollständigkeit.

Die Arbeiten wurden nicht neugesetzt, sondern auf photographischem Wege neugedruckt. Da Haar (mit Ausnahme einer *Comptes-Rendus*-Note) ausschließlich in ungarischer und deutscher Sprache publiziert hat, war es natürlich, auch für die vorliegende Ausgabe seiner Gesammelten Werke diese beiden Sprachen zu wählen. Einige seiner Arbeiten erschienen sowohl in ungarischer wie in deutscher Sprache, diese werden hier in beiden Varianten aufgenommen. Drei Arbeiten wurden (mindestens in ihrer vollständigen Form) nur in ungarischer Sprache mitgeteilt, eine deutsche Übersetzung findet man im Anhang I. Anhang II enthält Teile aus einem Vortrag von Haar, den er 1933 anläßlich der 100. Jahreswende der Entdeckung der absoluten Geometrie durch J. Bolyai über die Bedeutung dieser Theorie in einer Universitätssitzung in Szeged gehalten hat. Da aber dieser Vortrag keine neuen

eigenen Ergebnisse enthielt, haben wir uns begnügt, ihn nur im ungarischen Original aufzunehmen. Als Anhang III findet man zwei Nachrufe, die Alfred Haar als Forscher und Menschen würdigen; der eine ist die Rede seines Szegeder Kollegen Prof. Friedrich Riesz an der Bahre von Haar, der andere wurde von der Redaktion der *Acta Scientiarum Mathematicarum* in dieser Zeitschrift veröffentlicht. Der erste ist in ungarischer, der zweite in deutscher Sprache; von ihrer beiderseitigen Übersetzung haben wir abgesehen.

Von Haar ist kein Buch erschienen. Er hat aber mehrere, sehr gründlich geschriebene Vorlesungsausarbeitungen angefertigt, teils als Vorbereitung zu seinen eigenen Vorlesungen, teils zum Gebrauch seiner Zuhörer (Zahlentheorie, Algebra, Determinanten und quadratische Formen, Vektor- und Tensoranalysis, Höhere Geometrie, Flächentheorie, Elementare Funktionentheorie, Differentialgleichungen, Variationsrechnung, Wahrscheinlichkeitstheorie). Obwohl diese manches Originale enthalten und als Universitäts-Lehrbücher sich auch heute noch gut bewähren würden, konnte man — schon wegen ihres Umfangs — nicht an ihre Aufnahme in diese Gesammelten Werke denken.

Haar Alfréd rövid életrajza

Haar Alfréd életének első szakaszára vonatkozólag álljon itt a doktori disszertációjához mellékelt rövid »életrajza«:

> »Én Haar Alfréd, 1885. október 11-én születtem Budapesten, Haar Ignác földbirtokos és neje, szül. Fuchs Emma fiaként. Szülővárosomban, az evangélikus gimnáziumba jártam, amelyet 1903-ban az érettségi bizonyítvánnyal hagytam el. 1904 húsvétja óta a budapesti egyetemen matematikai, fizikai és csillagászati előadásokat hallgattam. 1905 őszén a göttingai egyetemre iratkoztam be.
>
> Budapesten Beke, báró Eötvös, Fröhlich, Kürschák, Rados, Scholtz, Göttingában Carathéodory, Hilbert, Klein, Minkowski, Prandtl, Runge, Schwarzschild, Voigt, Zermelo előadásain ill. szemináriumain vettem részt. Mindezeket az urakat el nem múló hálám illeti. Különösképpen mélyen lekötelezve érzem magam azonban Hilbert titkos tanácsos úrnak azért a sokoldalú ösztönzésért és sokrétű tanításért, amelyet egész göttingai tanulmányi időm alatt előadásai és személyes érintkezés révén nyujtott; állandó ösztönző érdeklődéséért legmélyebb hálámat fejezem ki.«

Tegyük ehhez hozzá, hogy a gimnáziumban Rátz László, a *Középiskolai Matematikai Lapok* érdemes szerkesztője volt a matematika-tanára. Ennek a lapnak Haar is szorgalmas munkatársa volt középiskolás korában. Az előző évben érettségizettek számára évenként tartott országos »Eötvös Loránd matematikai verseny«-en 1903 őszén Haar Alfréd nyerte az első díjat. Ez a siker jegyezte el az érettségije után először vegyészmérnök-hallgatónak beiratkozott fiatalembert végleg a matematikával.

A doktori szigorlatot 1909. június 16-án tette le a göttingai egyetem bölcsészeti karán, disszertációjának Hilbert volt a referense. Alig néhány hónap múlva, még 1909-ben ugyanez a kar magántanárrá habilitálta.

Miután rövid ideig a zürichi műegyetem helyettes tanára volt, 1912-ben a Budapestre meghívott Fejér Lipót utódjaként a kolozsvári egyetem egyik matematika—fizika tanszékére nevezték ki, először nyilvános renkívüli tanárrá; majd 1917-ben nyilvános rendes tanárrá; a másik tanszék tanára Riesz Frigyes volt.

Az első világháború után Erdélynek Magyarországtól való elcsatolása következtében az addigi kolozsvári egyetem tanárainak el kellett hagyniok e várost és előbb átmenetileg Budapesten, majd 1920-tól Szegeden folytatták működésüket. Haar Alfréd és Riesz Frigyes az új szegedi egyetemi matematikai szemináriumot — amelyet később Bolyai Intézetnek neveztek el — hamarosan nemzetközi tekintélyű új matematikai centrummá fejlesztették: ebben nagy szerepet játszott az a folyóirat, az *Acta Scientiarum Mathematicarum*,

amelyet Haar és Riesz 1922-ben alapítottak (mint az egyetem *Acta*-inak matematikai szekcióját).

Egyetemi előadásainak tárgyát Haar leginkább az algebra, számelmélet, analitikus geometria, mechanika, differenciálegyenletek, variációszámítás, folytonos csoportok elmélete területeiről választotta. Elsőrangú egyetemi előadó volt, előadásai világosságban, logikus felépítésben mintaszerűek voltak.

A Magyar Tudományos Akadémia 1931-ben Haart levelező tagjává választotta.

Egyetemi tanári működését Szegeden egészen az 1933. március 16-án bekövetkezett haláláig folytatta. A gyilkos betegség (gyomorrák) okozta halál életének legalkotóbb szakaszában, 48-ik életévében, néhány hónapos szenvedés után ragadta el az élők sorából. Szülővárosában, Budapesten van eltemetve.

Kurzer Lebenslauf von Alfred Haar

Für die erste Lebensperiode von Alfred Haar möge hier der seiner Göttinger Inauguraldissertation beigefügter kurzer »Lebenslauf« stehen :

> »Ich, Alfred Haar, wurde als Sohn des Gutbesitzers Ignatz Haar und seiner Ehegattin Emma geb. Fuchs am 11. Oktober 1885 in Budapest geboren. In meiner Heimatsstadt besuchte ich das evangelische Gymnasium, das ich 1903 mit dem Zeugnis der Reife verließ. Von Ostern 1904 hörte ich an der Universität in Budapest Vorlesungen über Mathematik, Physik und Astronomie. Im Herbst 1905 bezog ich die Universität in Göttingen.
>
> Teilgenommen habe ich an Vorlesungen resp. Seminaren der Herren Beke, Baron Eötvös, Fröhlich, Kürschák, Rados, Scholtz, in Budapest. Carathéodory, Hilbert, Klein, Minkowski, Prandtl, Runge, Schwarzschild, Voigt, Zermelo, in Göttingen.
>
> Allen diesen Herren gilt mein dauernder Dank. Insbesondere fühle ich mich aber Herrn Geheimrat Hilbert für die vielseitige Anregung und mannigfaltige Belehrung, die er mir während meiner ganzen Göttinger Studienzeit in Vorlesungen und im persönlichen Verkehr zuteilwerden ließ tief verpflichtet; für sein stetes förderndes Interesse spreche ich ihm meinen innigsten Dank aus.«

Wir fügen hinzu, daß im Gymnasium sein Mathematiklehrer L. Rátz, der würdige Herausgeber der *Középiskolai Matematikai Lapok* (»Mathematische Mittelschul-Blätter«) war. Haar selbst war während seiner Mittelschuljahren ein eifriger Mitarbeiter dieser Zeitschrift. Beim mathematischen Landes-Wettbewerb »Roland Eötvös«, der jährlich für die Abiturienten vom Vorjahr veranstaltet wurde, hat 1903 Alfred Haar den ersten Preis gewonnen. Es war dieser Erfolg, der den (nach der Reifeprüfung zuerst als Chemiker die Technische Universität Budapest besuchenden) jungen Mann endgültig mit der Mathematik verbunden hat.

Die Doktorprüfung hat er am 16. Juni 1909 an der philosophischen Fakultät der Universität Göttingen bestanden, der Referent seiner Dissertation war David Hilbert. Einige Monate später, noch im Jahre 1909, hat ihn dieselbe Fakultät zum Privatdozenten habilitiert.

Nach einer kurzen Tätigkeit als stellvertretender Professor der Mathematik an der Technischen Hochschule in Zürich wurde Haar 1912 zum Nachfolger von Leopold Fejér (der nach Budapest berufen wurde) an einem der mathematischen Lehrstühle der Universität Kolozsvár ernannt (zuerst als außerordentlicher, dann 1917 als ordentlicher Professor). Der Professor am anderen Lehrstuhl war Friedrich Riesz.

Am Ende des ersten Weltkrieges mußten infolge der Abtrennung Siebenbürgens von Ungarn die Professoren der bisherigen Universität Kolozsvár die Stadt verlassen. Nach einer

kurzen Übergangsperiode in Budapest setzten sie seit 1920 ihre Lehrtätigkeit in Szeged fort. Alfred Haar und Friedrich Riesz haben das mathematische Seminar der neuen Universität Szeged — das später den Namen »Bolyai-Institut« bekommen hat — bald zu einem mathematischen Zentrum von internationalem Ruf entwickelt: eine wichtige Rolle hat darin die Zeitschrift *Acta Scientiarum Mathematicarum* gespielt, die Haar und Riesz 1922 (als eine der Sektionen der *Acta* der Universität) begründet haben.

Den Gegenstand seiner Universitätsvorlesungen hat Haar meistens aus dem Gebiet der Algebra, der Zahlentheorie, der analytischen Geometrie, der Mechanik, der partiellen Differentialgleichungen, der Variationsrechnung und der Theorie der kontinuierlichen Gruppen gewählt. Er war ein ausgezeichneter Vortragender. Hinsichtlich Klarheit und logischen Aufbaus waren seine Vorträge immer musterhaft.

Die Ungarische Akademie der Wissenschaften hat Haar 1931 zum korrespondierenden Mitglied gewählt.

Seine Tätigkeit als Professor an der Universität Szeged hat er bis zu seinem Tode entfaltet. Der durch eine tückische Krankheit (Magenkrebs) versursachte Tod hat ihn in Szeged am 16. März 1933 nach einige Monate langem Leiden, inmitten einer produktiven Arbeitsperiode, im Alter von 48 Jahren aus den Reihen der Lebenden entrissen. Er wurde in seiner Heimatstadt Budapest beigesetzt.

Haar Alfréd dolgozatai megjelenésük sorrendjében
Die Arbeiten von Alfred Haar in der Reihenfolge ihrer Erscheinung

Rövidítések — Abkürzungen

(Ezeket később is állandóan használjuk. — Diese werden auch in folgendem stets gebraucht.

Acta Sci. Math. = *Acta Scientiarum Mathematicarum* (= *Acta Litterarum ac Scientiarum Regiae Universitatis Hungaricae Francisco Josephinae, sectio Scientiarum Mathematicarum*), Szeged
Göttinger Nachr. = *Nachrichten der K. Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen, Mathematisch—Physikalische Klasse*
J. f. Math. = *Journal für die reine und angewandte Mathematik*
Mat. Term. Ért. = *Mathematikai és Természettudományi Értesítő*, Budapest
Mat. Fiz. Lapok = *Matematikai és Fizikai Lapok*, Budapest
Math. Ann. = *Mathematische Annalen*
Math. Zeitschr. = *Mathematische Zeitschrift*

1. Die Randwertaufgabe der Differentialgleichung $\Delta\Delta U = 0$, *Göttinger Nachr.*, **1907**, 280—287.
2. Egyszerűen rendezett halmazokról, *Mat. Term. Ért.*, **27** (1909), 138—151 (Haar Alfréd és König Dénes).
3. Zur Theorie der Spannungszustände in plastischen und sandartigen Medien, *Göttinger Nachr.*, **1909**, 204—218 (Alfred Haar und Theodor v. Kármán).
4. Zur Theorie der orthogonalen Funktionensysteme (Inaugural-Dissertation zur Erlangung der Doktorwürde der hohen philosophischen Fakultät der Georg-August-Universität zu Göttingen, vorgelegt von Alfred Haar aus Budapest), **1909**, 1—49.
5. Zur Theorie der orthogonalen Funktionensysteme (Erste Mitteilung), *Math. Ann.*, **69** (1910), 331—371.
6. Zur Theorie der orthogonalen Funktionensysteme (Zweite Mitteilung), *Math. Ann.*, **71** (1911), 38—53.
7. Über einfach geordnete Mengen, *J. f. Math.*, **139** (1911), 16—28 (Alfred Haar und Dénes König).
8. Über die Legendre'sche Reihe, *Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo*, **32** (1911), 132—142.
9. Egy ortogonális függvényrendszerről, *Mat. Term. Ért.*, **32** (1914) 60—68.
10. Über analytische Funktionen mit singulärer Linie, *Göttinger Nachr.*, **1914**, 115—123.
11. A kettős integrálok variátiójáról, *Mat. Term. Ért.*, **35** (1917), 1—19.
12. Reihenentwicklungen nach Legendreschen Polynomen, *Math. Ann.*, **78** (1918), 121—136.
13. Die Minkowskische Geometrie und die Annäherung an stetige Funktionen, *Math. Ann.*, **78** (1918), 294—311.
14. A lineáris egyenlőtlenségekről, *Mat. Term. Ért.*, **36** (1918), 279—296.
15. Über die Variation der Doppelintegrale, *J. f. Math.*, **149** (1919), 1—18.

16. Über eine Verallgemeinerung des Du Bois-Reymond'schen Lemmas, *Acta Sci. Math.*, **1** (1922), 33—38.
17. Über die Konvergenz von Funktionenfolgen, *Acta Sci. Math.*, **1** (1923), 167—179.
18. Über lineare Ungleichungen, *Acta Sci. Math.*, **2** (1924), 1—14.
19. Über asymptotische Entwicklungen von Funktionen, *Math. Ann.*, **96** (1926), 69—107.
20. Über das Plateausche Problem, *Math. Ann.*, **97** (1926), 124—158.
21. Über reguläre Variationsprobleme, *Acta Sci. Math.*, **3** (1927), 224—234.
22. Sur l'unicité des solutions des équations aux dérivées partielles, *Comptes Rendus Acad. Sci. Paris*, **187** (1928), 23—25.
23. Zur Charakteristikentheorie, *Acta Sci. Math.*, **4** (1928), 103—114.
24. Über adjungierte Variationsprobleme und adjungierte Extremalflächen, *Math. Ann.*, **100** (1928), 481—502.
25. Über einige Eigenschaften der orthogonalen Funktionensysteme, *Math. Zeitschr.*, **31** (1929), 128—137.
26. Über Eindeutigkeit und Analyzität der Lösungen partieller Differentialgleichungen, *Atti del Congresso Internationale dei Matematici, Bologna 3—10 Settembre 1922*, **3** (1930), 5—10.
27. Zur Variationsrechnung. Drei Vorträge gehalten am Mathematischen Seminar der Hamburgischen Universität (23—25. Juli 1929), *Abhandlungen aus dem Mathematischen Seminar der Hamburgischen Universität*, **8** (1930), 1—27.
28. Über die Multiplikationstabelle der orthogonalen Funktionensysteme, *Math. Zeitschr.*, **31** (1930), 769—798.
29. A csoportkarakterisztikák elméletéről, *Mat. Fiz. Lapok*, **38** (1931), 132—145.
30. A csoportkarakterisztikák elméletéről (Második közlemény), *Mat. Fiz. Lapok*, **39** (1932), 6—16.
31. Über unendliche kommutative Gruppen, *Math. Zeitschr.*, **33** (1932), 129—159.
32. Über die Gruppencharaktere gewisser unendlichen Gruppen, *Acta Sci. Math.*, **5** (1932), 172—186.
33. A folytonos csoportok elméletéről, *Mat. Term. Ért.*, **49** (1932), 287—307.
34. Der Maßbegriff in der Theorie der kontinuierlichen Gruppen, *Annals of Mathematics*, (2) **34** (1933), 147—169.
35. Über die Multiplikationstabelle der unitär-orthogonalen Funktionensysteme, *Annali della R. Scuola Normale Superiore di Pisa (Scienze Fisiche e Matematiche)*, (2) **2** (1933), 21—40.

A

Halmazelmélet — Mengentheorie

A1. Egyszerűen rendezett halmazokról, *Mat. Term. Ért.*, **27** (1909), 138—151 (Haar Alfréd és König Dénes). *[17—30]*

A2. Über einfach geordnete Mengen, *J. f. Math.*, **139** (1911), 16—28 (Alfred Haar und Dénes König). *[31—43]*

*

A két közlemény azonos tartalmú, az eredményeket a két szerző közösen találta, a kidolgozás König Dénes munkája.

*

Die zwei Veröffentlichungen haben den gleichen Inhalt; die Ergebnisse wurden von beiden Verfassern zusammen gefunden, die Abfassung ist die Arbeit von Dénes König.

EGYSZERŰEN RENDEZETT HALMAZOKRÓL.

HAAR ALFRÉD és KŐNIG DÉNES-től.[1]

E dolgozat egyik czélja tetszőleges, egyszerűen rendezett halmazok esetére általánosítani a lineáris pontsokaságokra vonatkozó főbb tételeket. Kiváltképen a BOLZANO-WEIERSTRASS,[2] HEINE-BOREL[3] és a CANTOR-BENDIXSON-féle[4] tételek általánosítása jön itt tekintetbe.

Dolgozatunk azonban még egy más problémát is megold, mely ily módon jellemezhető. CANTOR a következő fontos tételt bizonyította be:[5]

A 0 és 1 közt fekvő valós számok halmazának (0-t és 1-et beleszámítva) rendtypusa, θ következő két tulajdonságával egyértelműleg értelmezve van:

a) θ perfekt;

b) θ tartalmaz egy benne mindenütt sűrűn fekvő, megszámlálható részlettypust.

Ha tehát a lineáris pontsokaságok typusait mint e θ részlettypusait értelmezzük, akkor a lineáris pontsokaságok egy osztályára vonatkozó tételeknek — az ezen osztályt jellemző

---

[1] A közösen nyert eredmények kidolgozását KŐNIG DÉNES végezte.

[2] E tétel szokásos bizonyításának történetére vonatkozólag lásd CANTOR: Mathematische Annalen, XXIII. k., 455. l.

[3] HEINE: Crelle Journal, LXXIV. k., 188. l. — BOREL: Ann. de l'Éc. Norm. (3), XII. k., 51. l. és Leçons sur la théorie des fonctions, 42. l. E tétel történetére vonatkozólag l. még LEBESGUE: Bull. des Sciences Math. (2), XXXI. k., 129. l.

[4] CANTOR: Math. Ann., XXI. k., 575. l. és XXIII. k., 471. l.; Acta Mathematica, II. k., 414. l. — BENDIXSON: Acta Mathematica, II. k., 415. l.

[5] Math. Ann., XLVI. k., 511. l.

tulajdonságon kívül — kizárólag az *a)* és *b)* tulajdonságokból kell következniök.

Ámde épenséggel nem ez az az út, melyet a pontsokaságok elméletének felépítésekor követtek. Ellenkezőleg: a bizonyítások nagy része az *intervallumok hosszának* fogalmán alapszik. Ha θ-t *a)*-val és *b)*-vel definiáljuk, akkor semmiesetre sem lehet θ intervallumaihoz egy-egy valós számot (θ-elemet) egyértelműleg hozzárendelni, minthogy θ, e definiczió szerint minden (belső elemekből alkotott) elempárjára vonatkozólag egyformán viselkedik; egy ilyen elempárnak sincs — önmagában tekintve — olyan tulajdonsága, melyet nem osztana meg minden más ily elempárral. θ intervallumainak csak az által tulajdonítható *hosszúság*, hogy θ elemeit *speciális alakban* (mint tizedes törteket stb.) veszszük fel és így θ-t nem az *a)* és *b)* tulajdonságokkal definiáljuk.

A módszerek tisztaságának szempontjából azonban kívánatosnak látszik a lineáris pontsokaságok elméletét kizárólag az *a)* és *b)* tulajdonságokra alapítani. Dolgozatunk megmutatja, hogy ez valóban lehetséges: az intervallumok hosszának fogalmát be sem vezetjük és így általános bizonyításaink, ha azokat a lineáris continuumra alkalmazzuk, a lineáris pontsokaságok elméletének legfőbb tételeire a kivánt bizonyításokat adják.

*

Mindenekelőtt összeállítjuk a definiczióket és a használandó jelölések magyarázatát.[1]

«Egyszerűen rendezett halmaz» helyett, minthogy más halmazok nem is fognak szerepelni, röviden «halmaz»-t írunk. Egy halmaz részlethalmazainak elemeit mindig ugyanoly sorrendben tekintjük, mint a melyben ezek az eredeti halmazban szerepelnek, a nélkül, hogy ezt mindig megemlítenők.

Az M halmaz oly részlethalmazát, mely minden a-t megelőző M-elemet tartalmaz, ha a-t tartalmazza, az M «*szelet*»-ének

[1] V. ö. Cantor utóljára említett dolgozatán kívül F. Hausdorff munkáit, különösen: Leipziger Berichte, LVIII. k., 123. l. és Math. Ann., LXV. k., 439. l. — L. továbbá Riesz Frigyes: Math. Ann., LXI. k., 406. l.

nevezzük. Míg az oly részlethalmaz, mely minden a-val együtt valamennyi a-t követő elemet is tartalmazza: «*maradék*»-a az M-nek.

Az M egy meghatározott a elemét megelőző elemek összessége: a definiczió szerint M-nek egy szelete, melyet $A(a)$-val jelölünk. Ép így $R(a)$ az M azon maradéka, mely az a-t követő elemekből áll (a maga sem $A(a)$-nak, sem $R(a)$-nak nem eleme).[1] Az M halmaz a és b eleme ($a \prec b$) között fekvő elemek összességét (a, b)-vel jelöljük; sem a, sem b nem eleme (a, b)-nek. M azon részlethalmazát, mely (a, b) elemeit, továbbá a-t és b-t tartalmazza, $[a, b]$-vel jelöljük. Az M halmaznak (a, b), $A(a)$ ás $R(a)$ jelekkel jelölt részlethalmazait közös néven M «*intervallum*»-ainak nevezzük. A c elemet tartalmazó intervallumot c «*környezet*»-ének nevezzük.

Ha az M egy h eleme oly tulajdonságú, hogy — bármily h-t követő elem is az a — mindig (h, a) számossága nagyobb $\mathfrak{m}$-nél (és nem egyenlő $\mathfrak{m}$-mel), akkor h-t az «M $\mathfrak{m}$-*edrendű baloldali sűrűsödési helyé*»-nek (vagy elemének) mondjuk. Ha viszont minden (a, h)-alakú intervallum számossága nagyobb $\mathfrak{m}$-nél, akkor a h: «*az M $\mathfrak{m}$-edrendű jobboldali sűrűsödési helye*». Ha általában vagy minden (a, h), vagy minden (h, b) intervallum tartalmaz elemet, azaz vagy $A(h)$-ban nincs utolsó, vagy $R(h)$-ban nincs első elem, akkor h az M-nek «*jobb- (illetve bal-) oldali sűrűsödési helye*». Az M egy eleme sűrűsödési hely tehát, ha minden környezete tartalmaz még rajta kívül elemet.

Ha M' az M egy tetszőleges részlethalmaza, akkor ép így definiálhatók az «*M'-nek (M-ben lévő) jobb- és baloldali $\mathfrak{m}$-edrendű sűrűsödési helyei*»; az M-nek h eleme az M'-nek $\mathfrak{m}$-edrendű jobb- (bal-) oldali sűrűsödési helye, ha minden (a, h) (minden (h, a)) intervallum *az M'-nek* «$\mathfrak{m}$-nél több» elemét tartalmazza, bármily h-t megelőző (h-t követő) eleme is a az M-nek.

Az M minden A szelete, ép úgy, mint minden R maradéka, az M egy $\{M = A + R\}$ felbontását határozza meg. E fel-

[1] A «szelet» és «maradék» szavak a CANTOR-féle «Abschnitt», «Rest» és a HAUSDORFF-féle «Anfangsstück» és «Endstück» szavaknak felelnek meg. Az $A(a)$ és $R(a)$ jel helyett HAUSDORFF az M^a és M_a jeleket használja.

bontást, ha A-ban nincs utolsó és R-ben nincs első elem, az M egy «*hézag*»-ának nevezzük és pedig *akkor is, ha A vagy B egyáltalában nem tartalmaz elemet.* Ily módon minden halmaz, melyben nincs első elem ($A=0$, $R=M$), vagy melyben nincs utolsó elem ($A=M$, $R=0$), tartalmaz (legalább egy) hézagot. A hézag (ném.: *Lücke*) fogalmát, mely ebben az elméletben ép oly fontos szerepet játszik, mint a sűrűsödési elem fogalma, HAUSDORFFnak köszönjük.[1] Ép úgy, mint a sűrűsödési helyeknek, a hézagoknak is tulajdoníthatunk bizonyos számosságokat, mint rendszámokat: az $\{M=A+R\}$ hézag $\mathfrak{m}$-*edrendű jobb- (bal-) oldali hézaga M-nek*, ha A minden maradékának (R minden szeletének) számossága nagyobb mint $\mathfrak{m}$.

A rendszámot itt oly módon vezettük be, hogy ha $\mathfrak{m}$ a definicziót kielégíti, akkor kielégíti minden kisebb számosság is. A rendszám továbbá általában függ attól, hogy a sűrűsödési elemet (hézagot) mint jobb vagy mint baloldali sűrűsödési elemet (hézagot) tekintjük-e. A megelőzők szerint minden utolsó elem nélküli szelet (első elem nélküli maradék) vagy egy sűrűsödési helyet határoz meg, t. i. a megfelelő maradék (szelet) első (utolsó) elemét, vagy egy hézagot, a szerint, hogy van-e ily első (utolsó) elem, vagy pedig nincsen.

Egy halmaz «*(önmagában) zárt*», ha nem tartalmaz hézagot.[2]

Az M egy részlethalmaza, M': «*M-ben zárt*», ha M'-nek minden (M-beli) sűrűsödési helye: eleme M'-nek.

Egy halmaz «*önmagában sűrű*», ha minden eleme sűrűsödési eleme e halmaznak.[3]

M-nek egy önmagában sűrű részlethalmaza, M' «*perfekt*», ha mind önmagában, mind pedig M-ben zárt.

---

[1] Lineáris pontsokaságokra hasonló fogalmat *(lacuna)* már BETTAZZI bevezetett. (Annali di Matematica [2], XVI. k., 149. l.)

[2] E definiczió nem egyezik meg azzal, melyet CANTOR ád az «Abgeschlossenheit» számára. (Math. Ann., XLVI. k., 510. l.) Ez utóbbi a hézagoknak csak két fajtáját zárja ki. A continuum részlettypusai esetére azonban — CANTOR csak ezeket tárgyalja — a két definiczió megegyezik egymással.

[3] Az M egy részlethalmazáról, M'-ről is csak akkor mondjuk, hogy önmagában sűrű, ha minden eleme M'-nek sűrűsödési eleme. Az még nem elégséges, hogy M' minden eleme sűrűsödési eleme legyen M-nek.

Ha M-nek egy részlethalmaza, R, oly tulajdonságú, hogy az M minden oly intervalluma, mely M-elemet tartalmaz, R-elemet is tartalmaz, akkor azt mondjuk, hogy R «*az M-ben mindenütt sűrű*».[1]

*

A BOLZANO-WEIERSTRASS-féle tétel első általánosítása[2] most már következőképen hangzik:

A) Minden végtelen halmaznak, M-nek, van vagy egy sűrűsödési eleme, vagy egy hézaga.

A tétel bebizonyítása céljából kimutatjuk, hogy M-nek van vagy egy szelete utolsó elem nélkül, vagy egy maradéka első elem nélkül. Ha M-nek nincs első eleme, M maga egy első elem nélküli maradéka önmagának. Legyen tehát a_1 első eleme e halmaznak. Ha most $R(a_1)$-ben nincs első elem, tételünk helyes; legyen tehát a_2 az $R(a_1)$ első eleme, tehát M második eleme és így tovább. Ha a tételünk nem helyes, akkor az $a_1, a_2, a_3, \ldots$ sorozat nem szakadhat meg és így ezek M-nek egy utolsó elem nélküli szeletét alkotják. Tételünk ily módon be van bizonyítva.

Hogy a nyert eredményt határozottabb alakban mondhassuk ki, oly tételre van szükségünk, mely lineáris pontsokaságok esetére közvetetlenül a HEINE-BOREL-féle tételnek felel meg. A HEINE-BOREL-féle tétel ezen első általánosítása a következő:

B) Legyen N egy tetszőleges zárt halmaz és M ennek oly része, mely mind önmagában, mint N-ben zárt.[3]

---

[1] E definiczió nem egyezik meg azzal, melyet HAUSDORFF adott az «*in M überall dicht*» fogalom számára. Ez utóbbi definiczió szerint csak «(mindenütt) sűrű» halmaz tartalmazhat benne mindenütt sűrűn «fekvő» részlethalmazt. Sűrű halmazok esetére azonban — HAUSDORFF csak ezeket tárgyalja — a két definiczió egymással megegyezik.

[2] E tétel következő általánosítása is érvényes: «*Zárt M halmaz minden végtelen részletsokaságának (M'-nek) van M-ben legalább egy sűrűsödési helye*». (E tétel akkor is érvényes, ha a zártságot CANTOR értelmében használjuk.) E sűrűsödési hely nem okvetlenül eleme az M'-nek.

[3] Abból, hogy N zárt és M az N-ben zárt, már következik, hogy M önmagában is zárt.

Ha az N halmaz bizonyos i intervallumainak I halmaza olyan, hogy M minden eleme ezen intervallumok valamelyikében fekszik, akkor ezen I intervallum-halmazból kiválasztható egy véges $(i_1, i_2, \ldots, i_n)$ részlethalmaz úgy, hogy M minden eleme már ezen n intervallum valamelyikében bent feküdjék.[1]

E tétel bizonyításakor részben azt a gondolatmenetet fogjuk követni, melynek segítségével LEBESGUE[2] a megfelelő tételt lineáris pontsokaságok esetére bebizonyította.[3]

Az M halmaz egy a elemét «*elérhető*»-nek akarjuk nevezni, ha az I intervallum-halmazból kiválasztható véges számú $i'_1, i'_2, \ldots, i'_\nu$ intervallum úgy, hogy a, valamint M-nek minden a-t megelőző eleme e ν intervallum valamelyikében bent fekszik. Ekkor a «az $i'_1, i'_2, \ldots, i'_\nu$ intervallumokkal» érhető el. Világos, hogy az elérhető elemek M-nek egy szeletét alkotják, melyet A-val jelölünk. M többi eleme a megfelelő B maradékot alkotja. Először is kimutatjuk, hogy B nem tartalmazhat elemet ($B=0$).

Miután M-ben nincs hézag, azért vagy A-ban (mely $\neq 0$) van utolsó elem, vagy B-ben első.

Felveszszük *először* is, hogy A-ban van utolsó elem: a_u és $i_1, i_2, \ldots, i_n$-nel jelöljük I azon intervallumait, melyekkel

---

[1] E tételt már JOURDAIN *kimondotta* (Messenger of Mathematics, XXXVI. k., 67. l.) Ott azonban a tétel nem is igaz, mitnhogy JOURDAIN a «closed» (zárt) és «closed with respect to N» (N-ben zárt) kifejezéseket CANTOR értelmében használja. Valóban például az $\Omega+{}^*\Omega$ typusú halmazokra (Ω a harmadik számosztály első száma) megadható bizonyos intervallumainak kivánt tulajdonságú oly rendszere, mely nem pótolható egy ugyanilyen véges intervallumrendszerrel. Az $\Omega+{}^*\Omega$ typus, bár hézaga van, CANTOR értelmében mégis zárt: minden ω-sornak és minden ${}^*\omega$-sornak van limese. A HEINE-BOREL tétel JOURDAIN-féle bizonyítása (id. h., 63. l.) használja a continuum *b)* tulajdonságát (l. e dolgozat első lapját) és így nem igen általánosítható tetszőleges halmazok esetére.

[2] Leçons sur l'intégration, 105. l.

[3] RIESZ FRIGYES ugyanezen az úton bebizonyította a *B)* tételt abban a specziális esetben, midőn 1) N «perfekt és összefüggő», továbbá 2) M az N intervalluma (i. h. 415. l.). Erre az esetre bizonyításunk egyik lényeges pontja fölösleges. Példák megadásával kimutatható, hogy M-re és N-re vonatkozólag tett megszorításaink szükségesek a tétel helyességéhez.

a_u elérhető; a_u maga legyen például i_n-nek eleme. Ha volna B-nek első b_e eleme, akkor jelöljük az ezt magába záró I-intervallumot i_{n+1}-gyel. Ekkor b_e az $i_1, i_2, \ldots, i_n, i_{n+1}$ intervallumokkal elérhető volna, már pedig a feltevés szerint egy B-elem sem érhető el. B-nek tehát ezen első esetben nem lehet első eleme. Kimutatjuk, hogy, feltéve, hogy $B \neq 0$, a_u a B-nek (baloldali) sűrűsödési eleme N-ben.[1] N azon elemei, melyek valamely B-elemet követnek, N-nek egy B' maradékát alkotják; N megfelelő szelete legyen A'. B'-nek, ép úgy, mint B-nek, nem lehet első eleme, és így, minthogy N zárt, A'-nak van utolsó eleme. Ez sűrűsödési eleme N-ben B'-nek és így B-nek, tehát M-nek is. Minthogy pedig M az N-ben zárt, azért A' ezen utolsó eleme: eleme M-nek és így (nem lévén B'-nek eleme) eleme A-nak is, és pedig (minthogy B'-nek sűrűsödési eleme) nem egyéb, mint A-nak utolsó eleme, a_u, a mely tehát valóban sűrűsödési eleme B-nek. Tehát, mint a_u minden környezetének, i_n-nek is kell egy B-elemet tartalmaznia, a mely B-elem feltevésünkkel ellentétben (az $i_1, i_2, \ldots, i_n$ intervallumokkal) elérhető eleme volna M-nek.

Másodszor tegyük fel, hogy A-nak nincs utolsó eleme. Ekkor a megelőzők teljes analógiájára kimutatható, hogy — ha B egyáltalában tartalmaz elemet — B első eleme b_e jobboldali sűrűsödési helye A-nak *N-ben*. Azon I-intervallum, i', mely b_e-t tartalmazza, ily módon mindenesetre tartalmazza A-nak egy elemét. Ha ez az A-elem az $i'_1, i'_2, \ldots, i'_k$ intervallumokkal érhető el, akkor b_e elérhető az $i'_1, i'_2, \ldots, i'_k, i'$ intervallumokkal. És ez az eredmény ismét ellentmond azon feltevésünknek, mely szerint B elemei nem elérhetők.

A $B \neq 0$ feltevés tehát mindkét esetben ellentmondáshoz vezet, azaz: $M = A$ és M minden eleme elérhető. Ha M utolsó eleme az $i_1, i_2, \ldots, i_n$ intervallumokkal érhető el (hiszen M-nek, mint zárt halmaznak, van utolsó eleme), akkor I ezen $(i_1, i_2, \ldots, i_n)$ részlethalmazának megvan a kívánt tulajdonsága és tételünk be van bizonyítva.

---

[1] A következőkben épen az fontos, hogy a_u az *N-ben is* sűrűsödési helye B-nek; hogy M-ben az, az világos.

A bebizonyított tétel nem általánosítható közvetlenül arra az esetre, midőn N nem zárt (s a mikor, mint a B_1) tételben, a hézagok is intervallumokba volnának zárandók); ez csak a «relativ zártság» definíciójának módosításával történhetnék. Lehetséges azonban ez az általánosítás abban a specziális esetben — és épen erre lesz még szükségünk —, midőn $M=N$. T. i. utolsó bizonyításunknak csaknem szó szerint való ismétlésével bebizonyítható a következő tétel:

B_1) Ha az M halmaz bizonyos i intervallumainak I halmaza olyan, hogy M minden eleme és minden hézaga ezen i intervallumok valamelyikében bent van,[1] *akkor van ezen I-nek egy oly véges részlethalmaza $(i_1, i_2, \ldots, i_n)$, hogy M minden eleme és minden hézaga már ezen n intervallum valamelyikében bentfoglaltatik.*

E tétel alapján az A) tételnek a következő határozottabb alak adható:

A_1) Ha az M halmaz számossága, $\mathfrak{m} > \mathfrak{p}$ és[2] $\mathfrak{p} = 2\mathfrak{p}$, *akkor M-ben mindenesetre van vagy egy $\mathfrak{p}$-edrendű sűrűsödési elem, vagy egy $\mathfrak{p}$-edrendű hézag.*

Ha tételünk nem volna helyes, M minden eleme és minden hézaga M oly intervallumában is tartalmaztatnék, melynek számossága nem volna nagyobb, mint $\mathfrak{p}$. Utolsó tételünk szerint akkor van az intervallumoknak egy ugyanily tulajdonságú *véges* $(i_1, i_2, \ldots, i_\nu)$ rendszere is. Ha ezen intervallumok szá-

---

[1] Arra vonatkozólag, hogy egy hézag mikor «van bent egy intervallumban», definicióképen a következő megállapodásokat fogadjuk el:

a) $\{A+B\}$ hézag, ha A is, B is tartalmaz elemet, akkor és csak akkor van bent egy intervallumban, ha ez az intervallum A-ból is, B-ből is tartalmaz elemet;

b) $\{0+B\}$ hézag minden $A(x)$ intervallumban és csakis ezekben tartalmaztatik;

c) $\{A+0\}$ hézag minden $R(x)$ intervallumban és csakis ezekben tartalmaztatik.

[2] V. ö. Kőnig Dénes: Rend. Circ. Mat. Palermo, XXVII. k., 339. l. Zermelo: «Wohlordnungssatz»-át egész dolgozatunkban nem alkalmazzuk. Felhasználása egyébként nem egyszerűsítené a bizonyításokat. A Zermelo-féle «Auswahl-Prinzip»-et *használjuk.*

mossága rendre $\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2, \ldots, \mathfrak{p}_\nu$, akkor, minthogy M minden eleme egy i_k $(k=1, 2, \ldots, \nu)$ intervallumban bent van,

$$\mathfrak{m} \leqq \mathfrak{p}_1+\mathfrak{p}_2+\cdots+\mathfrak{p}_\nu. \tag{1}$$

Másrészt, összeadva a

$$\mathfrak{p} \geqq \mathfrak{p}_k \quad (k=1, 2, \ldots, \nu)$$

egyenlőtlenségeket, azt nyerjük, hogy

$$\nu\mathfrak{p} \geqq \mathfrak{p}_1+\mathfrak{p}_2+\cdots+\mathfrak{p}_\nu$$

vagyis, minthogy, ha $\mathfrak{p}=2\mathfrak{p}$, akkor egyszersmind $\nu\mathfrak{p}=\mathfrak{p}$:

$$\mathfrak{m} > \mathfrak{p} \geqq \mathfrak{p}_1+\mathfrak{p}_2+\cdots+\mathfrak{p}_\nu.$$

Ez az eredmény ellentmond (1)-nek és így tételünk ki van mutatva.

Arra az esetre, midőn M-ben nincs hézag, innen ezt a következendőkre fontos speciális eredményt nyerjük:

A_2) *Minden* $\mathfrak{m}$*-nél nagyobb számosságú zárt halmaz tartalmaz legalább egy* $\mathfrak{m}$*-edrendü sűrűsödési elemet, feltéve, hogy* $\mathfrak{m}=2\mathfrak{m}$.

Hogy most már a CANTOR-BENDIXSON-féle tétel általánosításához jussunk, a LINDELÖF-féle bizonyítás[1] analogiájára akarunk következtetni. A sűrűsödési, illetve kondenzációs elemek zártságának itt a most következő két tétel felel meg:

C) Ha $M^{(\mathfrak{m})}$ *a zárt* M *halmaz* $\mathfrak{m}$*-edrendű sűrűsödési elemeinek halmaza, akkor* $M^{(\mathfrak{m})}$ *is zárt.*

Tegyük fel t. i., hogy $M^{(\mathfrak{m})}$-ben van egy hézag:

$$M^{(\mathfrak{m})} = A'+B',$$

hol tehát A'-ben nincs utolsó, B'-ben nincs első elem. Legyen A az M azon elemeinek összessége, melyeket még A'-elem követ, míg B azokat az M-elemeket tartalmazza, melyeket vala-

[1] Comptes Rendus, CXXXVIII. köt., 697. l. és Acta Mathematica XXIX. köt., 183. lap.

mely B'-elem megelőz. Közvetlenül látnivaló, hogy A szelete az M-nek, B maradéka az M-nek. Ha még Q-val jelöljük M azon elemeinek összességét, melyek sem A-ban, sem B-ben nincsenek bent, akkor $M^{(\mathfrak{m})}$ létezőnek feltételezett hézaga M következő beosztását definiálja:

$$M = A + Q + B.$$

Itt A' része A-nak, B' pedig B-nek. A-nak nincs utolsó, B-nek nincs első eleme, minthogy A'-re és B'-re a megfelelő tulajdonság érvényes. Ezért Q mindenesetre tartalmaz elemet, hiszen különben $\{M = A + B\}$ hézaga volna M-nek. Ha Q-ban nem volna első elem, akkor $\{M = A + (Q + B)\}$ volna M egy hézaga. Legyen tehát q_1 első eleme Q-nak. Ha a az M-nek q_1-et megelőző tetszőleges eleme (tehát A-nak eleme), akkor A definíciója szerint van A'-nak oly a' eleme, mely a-t követi s így az (a, q_1) intervallumban fekszik; a' (mint A'-nak, tehát $M^{(\mathfrak{m})}$-nek eleme) az M $\mathfrak{m}$-edrendű sűrűsödési helye s így (a, q_1)-nek, mint a' minden környezetének, a számossága nagyobb mint $\mathfrak{m}$. Ez érvényes, bármily q_1-et megelőző elem is az a, tehát q_1 az M-nek jobboldali $\mathfrak{m}$-edrendű sűrűsödési eleme volna. Ez azonban lehetetlen: $M^{(\mathfrak{m})}$ minden eleme vagy A-nak, vagy B-nek eleme (a szerint, hogy A'-nak, vagy B'-nek eleme) és Q-elem nem lehet $\mathfrak{m}$-edrendű sűrűsödési hely. Ez az ellentmondás mutatja, hogy feltevésünk, mely szerint $M^{(\mathfrak{m})}$ hézagot tartalmaz, nem lehet helyes.

D) Az $M^{(\mathfrak{m})}$ halmaz M-ben zárt.

Legyen M-nek h eleme sűrűsödési eleme $M^{(\mathfrak{m})}$-nek; a egy tetszőleges h-t megelőző, b egy tetszőleges h-t követő eleme M-nek. Akkor vagy minden (a, h), vagy minden (h, b) intervallum tartalmaz $M^{(\mathfrak{m})}$-elemeket és így (mint egy $\mathfrak{m}$-edrendű sűrűsödési elem minden környezete) egyszersmind «$\mathfrak{m}$-nél több» M-elemet is. Ez pedig épen azt mondja, hogy h $\mathfrak{m}$-edrendű sűrűsödési elem, vagyis eleme $M^{(\mathfrak{m})}$-nek. Ezzel a tétel tehát be van bizonyítva.

Kiemeljük még, hogy a *C)* és *D)* tételekben $\mathfrak{m}$ egészen tetszőleges számosságot jelent.

A Cantor-Bendixson-féle tétel bizonyításában a következő

lépés annak a kimutatása volna, hogy $M^{(m)}$ önmagában sűrű,[1] illetve, hogy $D = M - M^{(m)}$ számossága egy bizonyos határon alúl marad. Azonban annak a tételnek, hogy a kondenzációs pontok halmaza a continuum részletsokaságaiban mindenütt sűrű, LINDELÖF-féle bizonyítása az intervallum hosszának fogalmán alapszik és így nem általánosítható tetszőleges halmaz esetére.

A lineáris continuum *b)* tulajdonságának (l. az első lapot) megfelelő általánosabb «számossági» tulajdonság követelésével azonban a pontsokaságok elméletének ezen eredményeit is sikerül tetszőleges halmazokra átvinni, és pedig az intervallumhossz fogalmának bevezetése nélkül. Kiindulunk t. i. egy oly N halmazból, mely egy benne mindenütt sűrűn fekvő $\aleph_\gamma$-számosságú R részlethalmazt tartalmaz és vizsgálatainkat ezen N halmaz részlethalmazaira (M) vonatkoztatjuk.[2] R számosságának a következőkben csupán az a tulajdonsága fog szerepelni, hogy egyenlő a négyzetével (tehát kétszeresével is). *Csak* e miatt veszszük fel e számosságot, mint alefet.[3]

Ha $\aleph_\gamma$ ez a kitüntetett számosság, akkor M-nek $\aleph_\gamma$-adrendű sűrűsödési elemei közvetlenül a lineáris continuum kondenzációs pontjainak felelnek meg. És pedig érvényes mindenekelőtt a következő tétel, mely a tulajdonképeni magva az általánosított CANTOR-BENDIXSON-féle tételnek.

E) Legyen N oly halmaz, mely egy benne mindenütt sűrűn fekvő $\aleph_\gamma$-számosságú R részlethalmazt tartalmaz és M az N-nek tetszőleges önmagában zárt részlethalmaza. M azon elemeinek halmaza, $D = M - M^{(\aleph_\gamma)}$, melyek nem $\aleph_\gamma$-adrendű sűrűsödési elemei M-nek, nem lehet $\aleph_\gamma$-nál nagyobb számosságú.

---

[1] Tetszőleges m-re e tétel nem is igaz (hiszen véges m-re ez már a continuum részeire sem igaz); így például az $\Omega\omega+1$ typusú, tehát zárt halmazok $\aleph_0$-adrendű sűrűsödési elemei (a «kondenzációs elemek») $\omega+1$-typusú halmazt alkotnak; ez tehát nem lehet önmagában sűrű.

[2] Ha például N a BERNSTEIN-féle ultracontinuum (l. doktori dissertációját, Göttingen, 1901. és Math. Ann., LXI. k., 117. l.), akkor $\aleph_\gamma = \aleph_1$.

[3] L. a jegyzetet az A_1 tételhez.

Legyen d a D-nek tetszőleges eleme. A d-t megelőző $M^{(\aleph_\gamma)}$-elemek közt van egy *utolsó:* c_1. Ha t. i. — bármily d-t megelőző $M^{(\aleph_\gamma)}$-elem volna is m — minden (m, d) intervallum tartalmazná $M^{(\aleph_\gamma)}$-nak elemeit, akkor d sűrűsödési eleme volna $M^{(\aleph_\gamma)}$-nak M-ben és így — a D) tétel szerint — d az $M^{(\aleph_\gamma)}$-nak és nem D-nek volna eleme. Ép így van a d-t követő $M^{(\aleph_\gamma)}$-elemek között egy *első*, c_2. Ilyen módon D minden eleme, d meghatározza M-nek oly (c_1, c_2) intervallumát, melyben d bentfekszik, a mely azonban $M^{(\aleph_\gamma)}$-elemet nem tartalmaz. Kimutatjuk, hogy a c_1 és c_2 közt fekvő M-elemek számossága: $\overline{\overline{(c_1, c_2)}} \leqq \aleph_\gamma$. E célból két esetet kell megkülönböztetnünk.

1. eset. Van M-nek egy c_1-et közvetlenül követő eleme, c_1'. Ekkor $\overline{\overline{[c_1', d]}} \leqq \aleph_\gamma$, mert különben a zárt[1] $[c_1', d]$ halmaznak okvetlenül kellene egy $M^{(\aleph_\gamma)}$-elemet tartalmaznia (A_2) tétel); már pedig sem (c_1', d) nem tartalmaz $M^{(\aleph_\gamma)}$-elemet, sem c_1' vagy d nem eleme $M^{(\aleph_\gamma)}$-nak. Tehát egyszersmind $\overline{\overline{(c_1, d)}} \leqq \aleph_\gamma$.

2. eset. Egy M-elem sem követi közvetlenül c_1-et, tehát c_1 baloldali sűrűsödési eleme M-nek. Bármily eleme is ekkor a a (c_1, d)-nek, van M-nek oly eleme, a_1, hogy $c_1 \prec a_1 \prec a \prec d$ Ily módon (c_1, a) mindig tartalmaz még egy M-elemet és így egy R-elemet, r-et is. Tehát (c_1, d) minden a-eleme N-nek egy (r, d) intervallumában foglaltatik, hol r az R eleme. Ezen intervallumok halmazának számossága (hol hiszen d mindre ugyanaz), R-re vonatkozó feltevésünk szerint, $\leqq \aleph_\gamma$. Másrészt egy ily (r, d)-intervallum sem tartalmazhatja $\aleph_\gamma$-nál több elemét (c_1, d)-nek, mert különben — az A_2)-tétel szerint — $[r, d]$-nek egy

---

[1] Ha $[c_1', d]$-nek volna egy hézaga: $\{[c_1', d] = A + B\}$, akkor

$$M = (A(c_1') + A) + (B + R(d))$$

M-nek volna hézaga, pedig feltettük, hogy M zárt. Az $A(x)$ $R(x)$, $[\ldots]$ jelölés itt az M-re vonatkozik.

$M^{(\aleph_\gamma)}$-elemet kellene tartalmaznia. Így tehát, ép úgy, mint az első esetben, $\overline{\overline{(c_1, d)}} \leqq \aleph_\gamma \aleph_\gamma = \aleph_\gamma$.

Hasonlóképen kimutatható, hogy $\overline{\overline{(d, c_2)}} \leqq \aleph_\gamma$ és így valóban $\overline{\overline{(c_1, c_2)}} \leqq 2\aleph_\gamma = \aleph_\gamma$.

Könnyen kitűnik, hogy D-nek különböző d elemeihez tartozó (c_1, c_2)-intervallumok vagy azonosak, vagy nem tartalmaznak közös elemet (a d_1-hez és d_2-höz ily módon tartozó két intervallum azonos, ha (d_1, d_2)-ben nincs $M^{(\aleph_\gamma)}$-elem és csakis ekkor). Minden ily (c_1, c_2) tartalmaz egy M-elemet, d-t és így egy R-elemet is. A megelőzők szerint továbbá két különböző (c_1, c_2) intervallum különböző R-elemeket tartalmaz. A (c_1, c_2)-intervallumok halmazának számossága nem lehet tehát nagyobb, mint $\overline{\overline{R}} = \aleph_\gamma$. Eredményeink így foglalhatók össze:

a) minden D-elem M-nek egy (c_1, c_2)-intervallumában fekszik;

b) minden (c_1, c_2)-intervallumban legfeljebb $\aleph_\gamma$ D-elem van;

c) legfeljebb $\aleph_\gamma$ ily (c_1, c_2)-intervallum van.

D számossága tehát legfeljebb $\aleph_\gamma \aleph_\gamma = \aleph_\gamma$ és az *E)* tétel be van bizonyítva.

Innen most már rögtön nyerjük, hogy

F) $M^{(\aleph_\gamma)}$ *önmagában zárt.*

Valóban: $M^{(\aleph_\gamma)}$ tetszőleges m elemének bármely környezete okvetlenül tartalmazza $M^{(\aleph_\gamma)}$-nak más elemét is; e környezet t. i., mint $\aleph_\gamma$-adrendű sűrűsödési elem környezete, $\aleph_\gamma$-nál több M-elemet tartalmaz, és így nem állhat (m kivételével sem) csupa D-elemből, minthogy, mint épen láttuk, $\overline{D} \leqq \aleph_\gamma$.

A *C)*, *D)*, *E)* és *F)* tételek összefoglalásával a CANTOR-BENDIXSON-féle tétel általánosításaképen a következő végeredményt mondhatjuk ki:

G) Legyen N oly halmaz, mely egy benne mindenütt sűrűn fekvő $\aleph_\gamma$-számosságú részlethalmazt tartalmaz.

N minden zárt részlethalmaza, M, két részből tehető össze, melyek közül az egyik (P) perfekt, a másik (D) legfeljebb $\aleph_\gamma$-számosságú. A perfekt rész: M-nek M-beli $\aleph_\gamma$-adrendű sűrűsödési elemeinek halmaza.

Példák megadásával kimutatható, hogy, ha P perfektségét megőrizzük, az itt szereplő $\aleph_\gamma$-számosság általánosságban nem pótolható egy kisebb számossággal.

Megemlítjük még, hogy tételeinket lehető legáltalánosabb alakjukban mondtuk ki; a szereplő megszorítások szükségessége többé-kevésbbé egyszerű példákkal igazolható.

(A M. T. Akadémia III. osztályának 1908 decz. 14.-én tartott üléséből.)

Über einfach geordnete Mengen*).

Von Herrn *Alfred Haar* in Göttingen und Herrn *Dénes König* in Budapest.

Das eine Ziel der vorliegenden Arbeit ist es, die Hauptsätze der Theorie der linearen Punktmengen auf die Theorie der einfach geordneten Mengen auszudehnen. Insbesondere kommen hier der *Bolzano-Weierstraß*sche**), der *Heine-Borel*sche***) und der *Cantor-Bendixson*sche†) Satz in Betracht.

Es wird aber auch gleichzeitig ein anderes Problem gelöst, das man folgendermaßen charakterisieren kann. *Cantor* hat folgenden wichtigen Satz bewiesen: Der Ordnungstypus θ der Menge aller reellen Zahlen zwischen 0 und 1 (einschließlich der Grenzen) ist durch folgende Eigenschaften eindeutig festgelegt††):

α) θ ist perfekt,

β) θ enthält einen in ihm überall dichten abzählbaren Ordnungstypus.

Definiert man daher die Ordnungstypen der linearen Punktmengen als Teiltypen dieses θ, so müssen alle Sätze, die sich auf eine Klasse von linearen Punktmengen beziehen, — außer der charakteristischen Eigenschaft dieser Klasse — allein aus den Eigenschaften α) und β) ableitbar sein.

*) Die gemeinschaftlich gefundenen Resultate wurden von *D. König* ausgearbeitet.

**) Über den üblichen Beweis des Satzes siehe die historischen Bemerkungen bei *Cantor*: Math. Ann. Bd. 23, S. 455.

***) *Heine*: Dieses Journal Bd. 74, S. 188. — *Borel*: Ann. de l'Éc. norm. (3) Bd. 12, S. 51 und Leçons sur la théorie des fonctions, S. 42. Vgl. auch die historischen Bemerkungen von *Lebesgue*: Bull. des Sciences Math. (2) Bd. 31, S. 129.

†) *Cantor*: Math. Ann. Bd. 21, S. 575 und Bd. 23, S. 471; Acta Math. Bd. 2 S. 414. — *Bendixson*: Acta Math. Bd. 2, S. 415.

††) Math. Ann. Bd. 46, S. 511.

Doch ist dies nicht der Weg, der bei dem Aufbau der Theorie der Punktmengen benutzt wurde. Im Gegenteil: der größte Teil der Beweise beruht auf dem Begriffe der *Strecke*. Wenn man aber θ durch die Eigenschaften α) und β) definiert, so kann man keineswegs zu jedem Intervall von θ eine reelle Zahl (ein Element von θ) eindeutig zuordnen, da θ zufolge dieser Definition in bezug auf jedes seiner (von inneren Elementen gebildeten) Elementenpaare dasselbe Verhalten aufweist; keines dieser Paare besitzt, an sich betrachtet, eine solche Eigenschaft, die ein beliebiges anderes Elementenpaar dieser Art nicht besitzen würde. Den Intervallen von θ kann eine Länge nur auf die Weise zugeordnet werden, daß man die Elemente von θ in *spezieller Form* (etwa in Dezimalbruchentwicklung) annimmt, und folglich θ nicht durch die Eigenschaften α) und β) definiert.

Die Reinheit der Methode fordert aber einen Aufbau der Theorie der linearen Punktmengen, der sich ausschließlich auf die Eigenschaften α) und β) stützt. Unsere Arbeit zeigt, daß dies in der Tat möglich ist; da wir den Begriff der Strecke gar nicht einführen, liefern unsere allgemeinen Beweise auf das Kontinuum angewendet eine Ableitung der Hauptsätze der linearen Punktmengen, die die gestellte Forderung erfüllt.

Wir stellen vor allem die Definitionen und die Erklärungen der Bezeichnungen zusammen*).

Statt „*einfach geordnete Menge*“ sagen wir schlechtweg „*Menge*“, da andere Mengen gar nicht in Betracht kommen. Die Elemente einer Teilmenge einer Menge betrachten wir immer in derselben Reihenfolge, wie in der ursprünglichen Menge, ohne dies bei jeder Gelegenheit hervorzuheben.

Eine Teilmenge der Menge M, die so beschaffen ist, daß sie alle Elemente, die einem Element a vorangehen, enthält, falls sie a enthält, nennen wir einen *Abschnitt* von M. Analog heiße eine Teilmenge *Rest* von M, wenn sie auch jedes auf a folgende Element enthält, falls sie das Element a enthält.

Die Gesamtheit der Elemente von M, die einem Element, etwa a, vorangehen, bilden nach dieser Definition einen Abschnitt von M, den

*) Vgl. außer der letztgenannten Arbeit von *Cantor* die Arbeiten von *Hausdorff*, insbesondere: Berichte d. math.-phys. Kl. d. K. Sächs. Ges. d. W., Bd. 58, S. 123 und Math. Ann. Bd. 65, S. 439. — Vgl. auch *F. Riesz*: Math. Ann. Bd. 61, S. 406.

wir mit $A(a)$ bezeichnen. In gleicher Weise sei $R(a)$ derjenige Rest von M, der alle auf a folgenden Elemente von M enthält (a selbst ist weder in $A(a)$ noch in $R(a)$ enthalten)*). Die Menge der Elemente von M, die dem Element a folgen, dem Element b ($a < b$) aber vorangehen, bezeichnen wir mit (a,b); weder a noch b sind Elemente von (a,b). Jene Teilmenge von M, die die Elemente von (a,b) ferner die beiden Elemente a und b enthält, bezeichnen wir mit $[a,b]$. Die mit den Symbolen $A(a)$, $R(a)$, (a,b) bezeichneten Teilmengen von M mögen — mit gemeinsamem Namen — *Intervalle* von M genannt werden. Ein Intervall, das das Element c enthält, ist eine *Umgebung* dieses Elementes.

Wenn ein Element h von M so beschaffen ist, daß — wie auch das auf h folgende Element a gewählt ist — die Mächtigkeit jedes (h,a) *größer als* (und nicht gleich) $\mathfrak{m}$ ist, *so nennen wir h ein linksseitiges Verdichtungselement* $\mathfrak{m}$*-ter Ordnung von M.* Wenn entsprechend jedes Intervall (a,h), $(a < h)$ eine größere Mächtigkeit als $\mathfrak{m}$ besitzt, so heiße h *ein rechtsseitiges Verdichtungselement* $\mathfrak{m}$*-ter Ordnung der Menge M.* Wenn überhaupt entweder jedes (a,h) oder jedes (h,b) $(a < h < b)$ Elemente besitzt, d. h. wenn entweder in $A(h)$ kein letztes oder in $R(h)$ kein erstes Element vorhanden ist, so nennen wir h ein *rechts-*, bzw. *linksseitiges* Verdichtungselement von M. Ein Element h von M ist also ein Verdichtungselement, wenn jede Umgebung dieses Elementes auch ein anderes Element enthält.

Ist M' eine beliebige Teilmenge von M, so kann man in derselben Weise die *rechts-*, bzw. *linksseitigen Verdichtungselemente* $\mathfrak{m}$*-ter Ordnung von* M' *in* M definieren; ein Element h von M heiße rechts- (bzw. links-) seitiges Verdichtungselement $\mathfrak{m}$-ter Ordnung von M' in M, wenn die Menge der Elemente von M', die in einem beliebigen Intervall (a,h) (bzw. (h,b)) von M enthalten sind, eine *größere* Mächtigkeit als $\mathfrak{m}$ besitzt, wie auch das dem h vorangehende (bzw. auf h folgende) Element a (bzw. b) gewählt ist.

Jeder Abschnitt A und jeder Rest R von M definiert eine Zerlegung $\{M = A + R\}$ von M. Diese Zerlegung nennen wir eine *Lücke*, wenn A kein letztes und R kein erstes Element besitzt und zwar auch dann, wenn A *oder* R *gar kein Element enthält.* Auf diese Weise enthält jede Menge

*) Die in der *Cantor*schen Terminologie — der wir hier folgen — als Abschnitt und Rest bezeichneten Begriffe heißen bei *Hausdorff Anfangsstück* und *Endstück*. Statt $A(a)$ und $R(a)$ schreibt *Hausdorff* M^a und M_a.

M, die entweder kein erstes Element besitzt ($A=0, R=M$) oder kein letztes Element besitzt ($A=M, R=0$), mindestens eine Lücke. Man verdankt den Begriff der Lücke, der in dieser Theorie genau so wichtig ist wie der Begriff des Verdichtungselementes, den Arbeiten von *F. Hausdorff**). Man kann auch den Lücken in ähnlicher Weise wie den Verdichtungselementen eine Mächtigkeit als Ordnungsmächtigkeit zuordnen: die Lücke $\{M=A+R\}$ heiße eine rechtsseitige (bzw. linksseitige) Lücke $\mathfrak{m}$-ter Ordnung von M, wenn jeder Rest von A (bzw. jeder Abschnitt von R) eine größere Mächtigkeit, als $\mathfrak{m}$ besitzt.

Die Ordnung $\mathfrak{m}$ eines Verdichtungselementes bzw. einer Lücke wurde in der Weise eingeführt, daß, wenn $\mathfrak{m}$ die Definition befriedigt, auch jede kleinere Mächtigkeit diese Eigenschaft aufweist. Der Begriff der Ordnungsmächtigkeit hängt außerdem noch davon ab, ob man das Element (oder die Lücke) als rechtsseitiges oder linksseitiges Verdichtungselement (oder Lücke) betrachtet. Jeder Abschnitt ohne letztes Element (bzw. jeder Rest ohne erstes Element) definiert entweder ein Verdichtungselement, nämlich das erste (letzte) Element des entsprechenden Restes (bzw. Abschnittes), oder — falls ein solches Element nicht existiert — eine Lücke.

Eine Menge heißt *in sich abgeschlossen*, wenn sie keine Lücke besitzt**) (absolute Abgeschlossenheit).

Eine Teilmenge M' von M heiße *in M abgeschlossen*, wenn jedes Verdichtungselement von M' in M Element von M' ist (relative Abgeschlossenheit).

Eine Menge heiße *in sich dicht*, wenn jedes ihrer Elemente ein Verdichtungselement ist***).

Eine in sich dichte Teilmenge M' von M heiße *perfekt*, wenn sie sowohl in sich, wie auch in M abgeschlossen ist.

---

*) Für lineare Punktmengen hat schon *Bettazzi* einen analogen Begriff (lacuna) eingeführt. (Annali di Matematica (2) Bd. 16, S. 149.)

**) Diese Definition stimmt nicht mit der von *Cantor* für die Abgeschlossenheit gegebenen Definition (Math. Ann. Bd. 46, S. 510) überein, indem diese nur die Existenz von zwei Arten von Lücken ausschließt. Für die Teiltypen des Linearkontinuums — bei *Cantor* werden nur diese behandelt — stimmen jedoch beide Definitionen überein.

***) Von einer Teilmenge M' von M sagen wir nur dann, daß sie in sich dicht ist, wenn jedes Element von M' Verdichtungselement von M' ist. Es genügt noch nicht, daß jedes Element von M' Verdichtungselement von M ist.

34

Wenn eine Teilmenge R von M so beschaffen ist, daß jedes Intervall von M, das Elemente von M enthält, auch Elemente von R enthält, so sagen wir, *daß R in M überall dicht ist**).

Die erste Verallgemeinerung**) des *Weierstraß-Bolzano*schen Satzes lautet nun wie folgt:

A) *Jede unendliche Menge M besitzt entweder ein Verdichtungselement oder eine Lücke.*

Um den Satz zu beweisen, zeigen wir, daß M entweder einen Abschnitt ohne letztes Element oder einen Rest ohne erstes Element besitzt. Wenn M kein erstes Element besitzt, so ist M selbst ein Rest von M ohne erstes Element. Es sei daher a_1 das erste Element von M. Wenn es in $R(a_1)$ kein erstes Element gibt, so ist unser Satz schon bewiesen; es sei daher a_2 das erste Element von $R(a_1)$, d. h. das zweite Element von M, usf. Wäre unsere Behauptung nicht richtig, so könnte die Elementenfolge $a_1, a_2, \ldots$ nicht abbrechen, und dann bilden diese Elemente einen Abschnitt von M ohne letztes Element. Damit ist unser Satz bewiesen.

Um das so gewonnene Resultat in bestimmterer Form ausdrücken zu können, brauchen wir einen Satz, der dem bekannten *Heine-Borel*schen Satze der Punktmengentheorie entspricht. Die erste Verallgemeinerung dieses Theorems lautet folgendermaßen:

B) *Sei N eine beliebige abgeschlossene Menge und M eine Teilmenge, die sowohl in sich, wie auch in N abgeschlossen ist****).

Wenn eine bestimmte Intervallmenge I von Intervallen i der Menge N so beschaffen ist, daß jedes Element von M in (mindestens) einem Intervalle dieser Menge liegt, so kann man aus dieser Intervallmenge I eine end-

*) Diese Definition stimmt nicht mit der *Hausdorff*schen überein. Nach seiner Definition kann nur eine überall dichte Menge eine *in ihr* überall dichte Teilmenge besitzen. Im Falle einer überall dichten Menge — *Hausdorff* behandelt nur solche Fälle — stimmen beide Definitionen überein.

**) Es gilt auch die folgende Verallgemeinerung dieses Satzes: *Jede unendliche Teilmenge M' einer abgeschlossenen Menge M besitzt mindestens ein Verdichtungselement.* (Dieser Satz gilt auch, wenn die Abgeschlossenheit im *Cantor*schen Sinne definiert ist.) Dieses Verdichtungselement muß nicht Element von M' sein.

***) Aus dem Umstande, daß N abgeschlossen und M in N abgeschlossen ist, folgt schon, daß M in sich abgeschlossen ist.

liche Teilmenge $(i_1, i_2, \ldots i_\nu)$ *so herausgreifen, daß jedes Element von M Element eines dieser* ν *Intervalle ist**).

Bei dem Beweise dieses Satzes benutzen wir ein teilweise ähnliches Verfahren, wie es *Lebesgue***) bei dem Beweise des analogen Satzes für Punktmengen verwendet hat***).

Das Element a der Menge M heiße *erreichbar*, wenn man aus der Intervallmenge I eine endliche Teilmenge $i'_1, i'_2, \ldots i'_n$ derart herausgreifen kann, daß a und jedes diesem Elemente vorangehende Element von M in einem dieser Intervalle eingeschlossen ist; wir sagen a ist „vermöge der Intervalle $i_1, \ldots i'_n$" erreichbar. Es ist unmittelbar klar, daß die erreichbaren Elemente einen Abschnitt von M bilden, den wir mit A bezeichnen. Die übrigen Elemente von M bilden den entsprechenden Rest B. Wir zeigen vorab, daß B kein Element enthält $(B=0)$.

Da M keine Lücke enthält, so besitzt entweder A ein letztes Element (da $A \neq 0$ ist) oder B ein erstes Element.

Wir nehmen *erstens* an, A besäße ein letztes Element a_l und bezeichnen mit $i_1, \ldots i_n$ jene Teilmenge von I, vermöge deren a_l erreichbar ist; a_l sei etwa im Intervalle i_n enthalten. Besitzt nun B ein erstes Element b_e, so bezeichnen wir mit i_{n+1} ein Intervall von I, das b_e enthält. Dann

---

*) Dieser Satz wurde schon von *Jourdain* ausgesprochen (Messenger of Mathematics, Bd. 34, S. 67). Bei ihm ist aber, wie es Herr *Jourdain* in einer brieflichen Mitteilung jetzt in freundlicher Weise zugibt, der Satz nicht richtig, da er die Ausdrücke „closed" (abgeschlossen) und „closed with respect to N" (abgeschlossen in N) im *Cantor*schen Sinne benutzt. In der Tat, für die Mengen vom Ordnungstypus $\Omega + {}^*\Omega$ (wo Ω die erste Zahl der dritten Zahlenklasse bedeutet) kann man eine Intervallmenge von der verlangten Eigenschaft angeben, die durch ein endliches Intervallsystem dieser Art nicht ersetzbar ist. Der Ordnungstypus $\Omega + {}^*\Omega$ besitzt zwar eine Lücke, ist aber im *Cantor*schen Sinne abgeschlossen. Der *Jourdain*sche Beweis des *Heine-Borel*schen Satzes (a. a. O. S. 63) benutzt die Eigenschaft β) des Linearkontinuums (vgl. S. 16) und scheint daher auf allgemeine Mengen nicht anwendbar zu sein.

**) Leçons sur l'intégration (Paris 1904) S. 105.

***) *F. Riesz* hat auf demselben Wege den Satz B) in dem speziellen Falle bewiesen, daß

1°) N „perfekt und zusammenhängend" ist,

2°) M ein Intervall von N ist (a. a. O. S. 415). In diesem Falle wird ein wesentlicher Punkt unseres Beweises überflüssig. Durch Angabe von Beispielen kann man zeigen, daß die für M und N gemachten Voraussetzungen zur Richtigkeit des Satzes auch notwendig sind.

ist b_e vermöge der Intervalle $i_1, \ldots i_n, i_{n+1}$ erreichbar, und dies ist im Widerspruch mit der Annahme, daß kein Element von B erreichbar ist. B besitzt daher in diesem Falle sicherlich kein erstes Element. Wir zeigen nun, daß wenn $B \neq 0$ ist, a_l linksseitiges Verdichtungselement von B in N ist*). Jene Elemente von N, die irgendeinem Elemente von B folgen, bilden einen Rest B' von N; der entsprechende Abschnitt von N sei A'. B' kann in gleicher Weise wie B kein erstes Element besitzen, folglich — da N abgeschlossen ist — besitzt A' ein letztes Element. Dieses ist ein Verdichtungselement von B' in N und daher von B, also von M. Da aber M in N abgeschlossen ist, so ist dieses letzte Element von A' auch Element von M, und folglich (da es nicht Element von B' sein kann) auch Element von A, und da es Verdichtungselement von B' ist, kann es nichts anderes sein, wie das letzte Element a_l von A. Dieses ist daher in der Tat Verdichtungselement von B in N. Jede Umgebung von a_l und daher auch i_n enthält also mindestens ein Element von B; dieses Element ist also im Widerspruch mit unserer Annahme, erreichbar.

Wir nehmen *zweitens* an, A besäße kein letzes Element. Wir zeigen in gleicher Weise wie früher, daß wenn $B \neq 0$ ist, das erste Element b_e von B Verdichtungselement von A *in* N ist. Jenes Intervall i' von I, welches b_e enthält, muß daher mindestens ein Element von A enthalten. Wenn dieses Element von A vermöge der Intervalle $i_1', \ldots i_n'$ erreichbar ist, so ist b_e vermöge der Intervalle $i_1', \ldots i_n', i'$ erreichbar — im Widerspruch mit unserer Annahme, daß kein Element von B erreichbar ist.

Die Annahme $B \neq 0$ führt also in jedem denkbaren Falle zum Widerspruch: es ist daher $M = A$ und jedes Element von M ist erreichbar. Ist das letzte Element von M (ein solches muß wegen der Abgeschlossenheit von M stets existieren) vermöge der Intervalle $i_1, \ldots i_n$ erreichbar, so besitzt diese Teilmenge von I die geforderten Eigenschaften, und damit ist unser Satz bewiesen.

Der soeben bewiesene Satz ist auf den Fall, daß N nicht abgeschlossen ist, nicht unmittelbar übertragbar; dies wäre nur mit einer Modifikation des Begriffes der „relativen Abgeschlossenheit" möglich. In dem speziellen Falle aber, daß $M = N$ ist, ist jene Verallgemeinerung un-

*) Im folgenden ist es eben wichtig, daß a_l Verdichtungselement von B in N ist; daß es in M ein solches ist, ist unmittelbar klar.

mittelbar möglich. Es läßt sich nämlich durch beinahe wörtliche Wiederholung unseres letzten Beweisganges folgender Satz ableiten:

B_1) *Wenn eine Intervallmenge I von Intervallen i einer Menge M so beschaffen ist, daß jedes Element und jede Lücke von M in mindestens einem dieser Intervalle eingeschlossen ist*), so kann man eine endliche Teilmenge* $(i_1, \ldots i_n)$ *von I derart angeben, daß jedes Element und jede Lücke von M in mindestens einem dieser n Intervalle enthalten ist.*

Auf Grund dieses Satzes kann man dem Satze A) folgende bestimmtere Form geben.

A_1) *Ist die Mächtigkeit von M* $\mathfrak{m} > \mathfrak{p}$ *und**)* $\mathfrak{p} = 2\mathfrak{p}$, *so existiert in M mindestens eine Lücke oder ein Verdichtungselement von der* $\mathfrak{p}$*-ten Ordnung.*

Wäre unser Satz nicht richtig, so könnte man jedes Element und jede Lücke von M in ein Intervall einschließen, dessen Mächtigkeit nicht größer als $\mathfrak{p}$ ist. Nach unserem letzten Satze gibt es dann eine endliche Menge von Intervallen $i_1, \ldots i_n$ von derselben Beschaffenheit. Bezeichnen wir die Mächtigkeit dieser Intervalle bzw. mit $\mathfrak{p}_1, \ldots \mathfrak{p}_n$, so ist — da jedes Element von M Element eines dieser Intervalle ist —

$$\text{(1.)} \qquad \mathfrak{m} \leqq \mathfrak{p}_1 + \cdots + \mathfrak{p}_n .$$

Andererseits folgt aus den Ungleichungen

$$\mathfrak{p} \geqq \mathfrak{p}_k \qquad (k = 1, \ldots n)$$

durch Addition

$$n\mathfrak{p} \geqq \mathfrak{p}_1 + \cdots + \mathfrak{p}_n$$

und folglich — da wegen $\mathfrak{p} = 2\mathfrak{p}$ auch $\mathfrak{p} = n\mathfrak{p}$ ist —

$$\mathfrak{m} > \mathfrak{p} \geqq \mathfrak{p}_1 + \cdots + \mathfrak{p}_n .$$

Dies ist aber mit (1.) im Widerspruch und damit ist unser Satz bewiesen.

---

*) Wir treffen folgende Festsetzungen darüber, wann „eine Lücke in einem Intervall enthalten ist“:

a) Die Lücke $\{M = A + B\}$, wo A und B von Null verschieden sind, ist dann und nur dann in einem Intervall enthalten, wenn das Intervall Elemente sowohl von A als auch von B enthält;

b) die Lücke $\{M = 0 + B\}$ ist in allen Intervallen $A(x)$ und nur in diesen —

c) die Lücke $\{M = A + 0\}$ ist in allen Intervallen $R(x)$ und nur in diesen enthalten.

**) Vgl. *D. König*: Rend. del Circ. mat. di Palermo, Bd. 27, S. 339. Den Wohlordnungssatz von *Zermelo* wenden wir in dieser Arbeit nicht an; er würde die Beweise nicht vereinfachen. Das *Zermelo*sche Auswahlprinzip wird aber an mehreren Stellen benutzt.

Für den Fall, daß M keine Lücken enthält, erhalten wir das Resultat:

A_2) *Jede abgeschlossene Menge, deren Mächtigkeit größer als* $\mathfrak{m}$ *ist, besitzt mindestens ein Verdichtungselement von der Ordnung* $\mathfrak{m}$, *vorausgesetzt daß* $\mathfrak{m} = 2\mathfrak{m}$ *ist.*

Wir gelangen nun zur Verallgemeinerung des *Cantor-Bendixson*schen Satzes, indem wir dem Beweisgang von *Lindelöf**) folgen. Der Abgeschlossenheit der Häufungs-, bzw. Kondensationselemente entspricht hier der folgende Satz:

C) *Ist* $M^{(\mathfrak{m})}$ *die Menge der Verdichtungselemente* $\mathfrak{m}$*-ter Ordnung der abgeschlossenen Menge* M, *so ist* $M^{(\mathfrak{m})}$ *abgeschlossen.*

Nehmen wir nämlich an, $M^{(\mathfrak{m})}$ besäße eine Lücke:

$$M^{(\mathfrak{m})} = A' + B',$$

wo also A' kein letztes, B' kein erstes Element besitzt. Sei A die Menge gebildet von jenen Elementen von M, denen noch ein Element von A' folgt, B die Menge gebildet von jenen Elementen von M, denen ein Element von B' vorangeht; es ist offenbar A ein Abschnitt, B ein Rest von M. Bezeichnen wir mit Q die Menge jener Elemente von M, die weder in A noch in B enthalten sind, so definiert die hypothetische Lücke von $M^{(\mathfrak{m})}$ die folgende Einteilung von M:

$$M = A + Q + B.$$

Hierbei ist A' Teilmenge von A, B' Teilmenge von B. A besitzt kein letztes, B kein erstes Element, da A' und B' die entsprechenden Eigenschaften besitzen. Q enthält also jedenfalls ein Element, da sonst die Zerlegung $\{M = A + B\}$ eine Lücke von M definieren würde. Besäße Q kein erstes Element, so wäre durch die Zerlegung $\{M = A + (Q + B)\}$ eine Lücke von M definiert. Sei q_1 das erste Element von Q. Ist a ein beliebiges Element von M, das q_1 vorangeht, dann besitzt — nach der Definition der Menge A — A' ein Element a', das a folgt und daher im Intervall (a, q_1) liegt; a' ist Verdichtungselement $\mathfrak{m}$-ter Ordnung von M, da es doch Element von $M^{(\mathfrak{m})}$ ist, und daher ist die Mächtigkeit von (a, q_1), einer Umgebung von a', größer als $\mathfrak{m}$. Dies gilt, wie auch das q_1 vorangehende Element a gewählt ist; daher wäre q_1 rechtsseitiges Verdichtungselement $\mathfrak{m}$-ter Ordnung von M. Dies ist aber unmöglich: jedes Element von $M^{(\mathfrak{m})}$ ist Element von A oder B

*) Comptes Rendus de l'Acad. des Sciences, Paris, t. 138, p. 697 und Acta Math., Bd. 29, S. 183.

(je nachdem es Element von A' oder B' ist) und ein Element von Q kann kein Verdichtungselement $\mathfrak{m}$-ter Ordnung von M sein. Dieser Widerspruch zeigt, daß unsere Annahme, $M^{(\mathfrak{m})}$ besitze Lücken, unhaltbar ist. —

D) *Die Menge $M^{(\mathfrak{m})}$ ist in M abgeschlossen.*

Das Element h von M möge Verdichtungselement von $M^{(\mathfrak{m})}$ sein; a sei ein beliebiges h vorangehendes, b ein h folgendes Element von M. Es enthält entweder jedes Intervall (a,h) oder jedes Intervall (h,b) Elemente von $M^{(\mathfrak{m})}$ und daher (als eine Umgebung eines Verdichtungselementes $\mathfrak{m}$-ter Ordnung) eine Teilmenge von M, deren Mächtigkeit größer als $\mathfrak{m}$ ist. Mit anderen Worten: h ist Verdichtungselement $\mathfrak{m}$-ter Ordnung, d. h. Element von $M^{(\mathfrak{m})}$. Der Satz ist damit bewiesen.

Es sei hervorgehoben, daß in den Sätzen C) und D) $\mathfrak{m}$ eine ganz willkürliche Mächtigkeit bedeutet.

Der nächste Schritt bei der Ableitung des verallgemeinerten *Cantor-Bendixson*schen Satzes wäre nun der Beweis, daß $M^{(\mathfrak{m})}$ in sich dicht ist*), und daß die Mächtigkeit, von $D = M - M^{(\mathfrak{m})}$ kleiner als eine bestimmte Mächtigkeit ist. Der *Lindelöf*sche Beweis des Satzes, daß die Menge der Kondensationspunkte eine in sich dichte Menge bildet, stützt sich aber wesentlich auf den Streckenbegriff und ist daher auf beliebige Mengen nicht übertragbar.

Es gelingt aber, auch diese Resultate auf beliebige Mengen zu übertragen, indem man statt der Eigenschaft β) (vgl. S. 16) eine entsprechende allgemeinere Eigenschaft zugrunde legt und zwar ohne den Streckenbegriff einzuführen. Wir betrachten zu diesem Zwecke eine Menge N, die eine Teilmenge R von der Mächtigkeit $\aleph_\gamma$ enthält, die überall dicht in N verteilt ist, und beschäftigen uns ausschließlich mit den Teilmengen M dieser Menge N**). Es kommt nur die Eigenschaft der Mächtigkeit von R in den folgenden Untersuchungen in Betracht, daß sie ihrem

*) Im Falle einer beliebigen Mächtigkeit ist der Satz gar nicht richtig (für Teile des Kontinuums gilt er schon für endliche $\mathfrak{m}$ nicht); es bilden beispielsweise die Verdichtungselemente $\aleph_0$-ter Ordnung der (abgeschlossenen) Mengen vom Ordnungstypus $\Omega\omega + 1$ („die Kondensationselemente") eine Menge vom Typus $\omega + 1$, die also nicht in sich dicht ist.

**) Ist z. B. N das *Bernstein*sche Ultrakontinuum (s. Diss. Göttingen 1901
40 und Math. Ann. Bd. 61, S. 117), so ist $\aleph_\gamma = \aleph_1$.

Quadrate (und also auch ihrem Doppelten) gleich ist; dies ist allein der Grund, aus dem wir sie als ein Aleph annehmen.

Ist nun $\aleph_\gamma$ jene ausgezeichnete Mächtigkeit, so entsprechen die Verdichtungselemente von der Ordnung $\aleph_\gamma$ den Kondensationspunkten des Linearkontinuums. Es gilt der folgende Satz, der der Kern des verallgemeinerten *Cantor-Bendixson*schen Satzes ist:

E) *Sei N eine Menge, die eine in N überall dichte Teilmenge R von der Mächtigkeit $\aleph_\gamma$ enthält und M eine beliebige (in sich) abgeschlossene Teilmenge von N. Die Mächtigkeit der Menge $D = M - M^{(\aleph_\gamma)}$ jener Elemente von M, die keine Verdichtungselemente $\aleph_\gamma$-ter Ordnung von M sind, ist kleiner oder höchstens gleich $\aleph_\gamma$.*

Sei d ein beliebiges Element von D. Die Menge der Elemente von $M^{(\aleph_\gamma)}$, die dem Element d vorangehen, muß ein *letztes* Element c_1 haben. Wenn nämlich — wie auch das d vorangehende Element m von $M^{(\aleph_\gamma)}$ gewählt ist — jedes Intervall (m,d) mindestens ein Element von $M^{(\aleph_\gamma)}$ enthalten würde, so wäre d Verdichtungselement von $M^{(\aleph_\gamma)}$ in M und folglich wäre — nach Satz D) — d Element von $M^{(\aleph_\gamma)}$ und nicht von D. In gleicher Weise zeigt man, daß unter den auf d folgenden Elementen von $M^{(\aleph_\gamma)}$ ein *erstes* Element existiert, das wir etwa mit c_2 bezeichnen. Auf diese Weise bestimmt jedes Element d von D ein Intervall (c_1, c_2) von M, in dem d enthalten ist, in dem aber kein Element von $M^{(\aleph_\gamma)}$ liegt. Wir zeigen, daß die Mächtigkeit der Menge der Elemente von M, die zwischen c_1 und c_2 liegen, $\overline{\overline{(c_1, c_2)}} \leqq \aleph_\gamma$ ist. Wir unterscheiden zu diesem Zwecke zwei Fälle:

1. Fall. M besitzt ein unmittelbar auf c_1 folgendes Element c_1'. Dann ist $\overline{\overline{[c_1', d]}} \leqq \aleph_\gamma$, da widrigenfalls die abgeschlossene*) Menge $[c_1', d]$ ein Element von $M^{(\aleph_\gamma)}$ enthalten würde (Satz A_2); es enthält aber weder das Intervall (c_1', d) ein solches Element, noch sind c_1' und d Elemente von $M^{(\aleph_\gamma)}$. Es ist daher auch $\overline{\overline{(c_1, d)}} \leqq \aleph_\gamma$.

2. Fall. Es gibt kein Element von M, das unmittelbar c_1 folgen würde, d. h. c_1 ist linksseitiges Verdichtungselement von M. Ist also a

*) Hätte $[c_1', d]$ eine Lücke: $\{[c_1', d] = A + B\}$ so würde

$$M = (A(c_1') + A) + (B + R(d))$$

eine Lücke von M definieren, da sowohl A wie auch B Elemente enthalten müßten. Dies ist ein Widerspruch damit, daß wir M als abgeschlossen angenommen haben. Die Bezeichnungen $A(x)$, $R(x)$, $[\ldots]$ beziehen sich auf M.

ein willkürliches Element von (c_1, d), so gibt es ein Element a_1 von M derart, daß $c_1 < a_1 < a < d$. Auf diese Weise enthält (c_1, a) stets ein Element von M, also auch von R, das wir mit r bezeichnen. Es liegt daher jedes Element a von (c_1, d) in einem Intervall (r, d) der Menge N, wo r Element der Menge R ist. Die Mächtigkeit der Menge dieser Intervalle (wo d immer dasselbe bleibt) ist $\leqq \aleph_\gamma$ infolge unseren Annahmen über R. Andrerseits ist die Mächtigkeit der Menge aus jenen Elementen von (c_1, d), die im Intervall (r, d) liegen, kleiner oder höchstens gleich $\aleph_\gamma$, da sonst — infolge des Satzes A_2) — $[r, d]$ ein Element von $M^{(\aleph_\gamma)}$ enthalten müßte. Es ist daher, analog wie im ersten Falle, $\overline{\overline{(c_1, d)}} \leqq \aleph_\gamma \aleph_\gamma = \aleph_\gamma$.

In gleicher Weise können wir zeigen, daß $\overline{\overline{(d, c_2)}} \leqq \aleph_\gamma$ ist, und es ist daher in der Tat $\overline{\overline{(c_1, c_2)}} \leqq 2\aleph_\gamma = \aleph_\gamma$.

Man sieht leicht, daß die zu verschiedenen Elementen d von D gehörigen Intervalle (c_1, c_2) entweder identisch sind, oder aber gar keine gemeinschaftlichen Elemente besitzen (die zu d_1 und d_2 gehörigen Intervalle sind dann und nur dann identisch, wenn (d_1, d_2) kein Element von $M^{(\aleph_\gamma)}$ enthält). Jedes Intervall (c_1, c_2) enthält ein Element d von M und daher auch ein Element von R. Nach dem vorangehenden enthalten verschiedene Intervalle (c_1, c_2) verschiedene Elemente von R. Die Mächtigkeit der Menge der Intervalle (c_1, c_2) kann daher nicht größer sein als $\overline{\overline{R}} = \aleph_\gamma$. Zusammenfassend können wir daher sagen, daß

a) jedes Element von D in einem Intervall (c_1, c_2) von M liegt,

b) in jedem Intervall (c_1, c_2) höchstens $\aleph_\gamma$ Elemente von D liegen,

c) die Mächtigkeit der Menge dieser Intervalle (c_1, c_2) kleiner oder gleich $\aleph_\gamma$ ist.

Die Mächtigkeit von D ist daher höchstens gleich $\aleph_\gamma \aleph_\gamma = \aleph_\gamma$, und damit ist Satz E) bewiesen.

Daraus schließen wir aber unmittelbar, daß

F) $M^{(\aleph_\gamma)}$ *in sich dicht ist.*

In der Tat, jede Umgebung eines beliebigen Elementes m von $M^{(\aleph_\gamma)}$ enthält sicherlich noch ein Element von $M^{(\aleph_\gamma)}$; diese Umgebung enthält nämlich — als Umgebung eines Verdichtungselementes $\aleph_\gamma$-ter Ordnung — eine Teilmenge von M, deren Mächtigkeit größer als $\aleph_\gamma$ ist, und kann daher (auch mit Ausnahme von m) nicht aus lauter Elementen von D be-
42 stehen, da — wie wir soeben gesehen haben — $\overline{\overline{D}} \leqq \aleph_\gamma$ ist.

Fassen wir nun die Sätze C), D), E) und F) zusammen, so können wir als Verallgemeinerung des *Cantor-Bendixson*schen Satzes das folgende Theorem aussprechen:

G) *Sei N eine Menge, die eine in N überall dichte Teilmenge von der Mächtigkeit $\aleph_\gamma$ enthält. Jede abgeschlossene Teilmenge M von N läßt sich aus zwei Teilen zusammensetzen, von denen der eine (P) perfekt, der andere aber (D) eine nicht größere Mächtigkeit als $\aleph_\gamma$ besitzt. Der perfekte Bestandteil besteht aus den Verdichtungselementen $\aleph_\gamma$-ter Ordnung von M in M.*

Durch Angabe von Beispielen läßt sich zeigen, daß bei Beibehaltung der Perfektheit von P die hier auftretende Mächtigkeit $\aleph_\gamma$ im allgemeinen durch keine kleinere zu ersetzen ist.

Schließlich sei noch bemerkt, daß wir unsere Sätze möglichst allgemein ausgesprochen haben; die Notwendigkeit der gemachten Voraussetzungen kann nämlich durch mehr oder weniger einfache Beispiele gezeigt werden*).

---

*) Die Resultate der vorliegenden Arbeit wurden in wesentlich unveränderter Form am 14. Dezember 1908 der ungar. Akademie der Wissenschaften vorgelegt.

B

Ortogonális függvénysorok és szinguláris integrálok
Orthogonale Funktionenreihen und singuläre Integrale

B1. Zur Theorie der orthogonalen Funktionensysteme (Erste Mitteilung), *Math. Ann.*, **69** (1910), 331—371. *[47—87]*

B2. Zur Theorie der orthogonalen Funktionensysteme (Zweite Mitteilung), *Math. Ann.*, **71** (1911), 38—53. *[88—103]*

B3. Egy orthogonális függvényrendszerről, *Mat. Term. Ért.*, **32** (1914), 60—68. *[104—112]*

B4. Über die Legendre'sche Reihe, *Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo*, **32** (1911), 132—142. *[113—123]*

B5. Reihenentwicklungen nach Legendreschen Polynomen, *Math. Ann.*, **78** (1918), 121—136. *[124—139]*

B6. Über die Konvergenz von Funktionenfolgen, *Acta Sci. Math.*, **1** (1923), 167—179. *[140—152]*

B7. Über einige Eigenschaften der orthogonalen Funktionensysteme, *Math. Zeitschr.*, **31** (1929), 128—137. *[153—162]*

*

Első idevágó dolgozata Haarnak göttingai doktori disszertációja, amely lényegében azonos alakban a *Mathematische Annalen*ben is megjelent; az utóbbi változatban közöljük (B1). Ebben a dolgozatban, többek között, Lebesguenek a Fourier-sorok divergenciájára vonatkozó vizsgálatai analógiájára vizsgálja a Sturm—Liouville-féle és a gömbfüggvényekből álló függvényrendszereket; itt ismerteti továbbá először az azóta róla elnevezett, nevezetes tulajdonságokkal rendelkező ortogonális függvényrendszert. A B2 dolgozat, amely Haar göttingai egyetemi magántanári habilitációs dolgozata, a Sturm—Liouville-féle sorok vizsgálatát folytatja. A róla elnevezett ortogonális függvényrendszer vizsgálatára visszatér a magyar nyelvű B3 dolgozatban, ennek németre való fordítása az I. függelékben található. Két dolgozat (B4 és B5) a Legendre-sorokkal foglalkozik. Míg az eddig felsorolt dolgozatok többé-kevésbé speciális függvényrendszereket, függvénysorozatokat vizsgálnak, a B6 dolgozat a szinguláris integrálok általános elméletével kapcsolatban általános integrálható függvényekből álló sorozatokkal, a B7 dolgozat pedig általános ortogonális függvényrendszerek egyes tulajdonságaival foglalkozik.

Haarnak az ortogonális függvényrendszerek szorzótáblázataira vonatkozó dolgozatai módszerüket tekintve a végtelen csoportokra vonatkozó dolgozataihoz állanak közelebb, ezért ezeket ugyanabba az F dolgozatcsoportba soroltuk.

A *Haar-féle ortogonális függvényrendszerrel* kapcsolatos kiterjedt irodalomból utalunk a következő dolgozatokra ill. monográfiára:

H. Weyl, Über beschränkte quadratische Formen, deren Differenz vollstetig ist, *Rendiconti del Circolo Mat. di Palermo*, **27** (1909), 373—392.

G. Faber, Über die Orthogonalfunktionen des Herrn Haar, *Jahresbericht d. Deutschen Math.-Vereinigung*, **19** (1910), 104—112.

H. Rademacher, Einige Sätze über Reihen von allgemeinen Orthogonalfunktionen, *Math. Annalen*, **87** (1922), 112—138.

J. L. Walsh, A property of Haar's system of orthonormal functions, *Math. Ann.*, **90** (1923), 38—45.

J. L. Walsh, A closed set of normal orthogonal functions, *American Journal of Math.*, **45** (1923), 5—24.

J. Schauder, Eine Eigenschaft des Haarschen Orthogonalsystems, *Math. Zeitschr.*, **28** (1928), 317—320.

H. W. Ellis—Israel Halperin, Haar functions and the basic problem for Banach spaces, *Journal London Math. Soc.*, **31** (1956), 28—39.

St. Kaczmarz—H. Steinhaus, *Theorie der Orthogonalreihen* (Warszawa—Lwów, 1935).

A B7 dolgozattal kapcsolatban pedig utalunk különösen a következő dolgozatra:

A. Bloch—G. Pólya, Abschätzung des Betrages einer Determinante, *Vierteljahresschrift d. Naturforsch. Ges. Zürich*, **78** (1933), 27—33.

*

Die erste diesbezügliche Arbeit von Haar ist seine Göttinger Inauguraldissertation, die in wesentlichem unverändert auch in den *Mathematischen Annalen* veröffentlicht wurde; wir bringen hier die zweite Variante (B1). In dieser Arbeit betrachtet er u. a. — in Analogie zu den Untersuchungen von Lebesgue über die Divergenz der Fourierschen Reihen — die Divergenzeigenschaften der Reihen nach Sturm—Liouvilleschen Funktionen und nach Kugelfunktionen, und hier führt er zum erstenmal das als »Haarsche Orthogonalsystem« bekannte, bemerkenswerte Eigenschaften besitzende, orthogonale Funktionensystem ein. Die Arbeit B2 ist Haars Göttinger Habilitationsschrift, in der er die Untersuchung der Sturm—Liouvilleschen Reihen weiterführt. Zur Untersuchung des nach ihm benannten orthogonalen Funktionensystems kehrt er in einer Arbeit in ungarischer Sprache zurück (B3); eine deutsche Übersetzung dieser Arbeit findet man in Anhang I. In zwei Arbeiten, B4 und B5, beschäftigt er sich mit den Legendreschen Reihen. Während die bisher angeführten Arbeiten sich alle mit mehr oder weniger speziellen Funktionensystemen und Funktionenreihen beschäftigen, untersucht die Arbeit B6 — im Zusammenhang mit der Theorie der singulären Integrale — Folgen integrierbarer Funktionen vom allgemeinen Typ, endlich stellt die Arbeit B7 einige Eigenschaften der allgemeinen orthogonalen Funktionensysteme fest.

Die Arbeiten von Haar über die Multiplikationstabellen von orthogonalen Funktionensystemen stehen — was ihre Methoden anbetrifft — seinen Arbeiten über unendliche Gruppen näher; deswegen wurden diese in Gruppe F aufgenommen.

Aus der mit dem *Haarschen Orthogonalsystem* in Zusammenhang stehenden Literatur sei z. B. auf Arbeiten von H. Weyl, G. Faber, H. Rademacher, J. L. Walsh, J. Schauder und H. W. Ellis—I. Halperin, sowie auf die Monographie von St. Kaczmarz und H. Steinhaus hingewiesen.

Im Zusammenhang mit der Arbeit B7 sei auf den Aufsatz von A. Bloch—G. Pólya hingewiesen. (Literaturangaben im ungarischen Text.)

Zur Theorie der orthogonalen Funktionensysteme.*)

(Erste Mitteilung.)

Von

Alfred Haar in Göttingen.

Inhalt.

Seite

Einleitung 331

Kapitel I.

Divergente Reihen.

§ 1. Ein allgemeines Kriterium 335
§ 2. Anwendung auf die Sturm-Liouvilleschen Reihen 339
§ 3. Anwendung auf die Kugelfunktionen 345

Kapitel II.

Theorie der Summation.

§ 1. Ein Hilfssatz 349
§ 2. Anwendung auf die Theorie der trigonometrischen und Sturm-Liouvilleschen Reihen 352
§ 3. Die Summation der Sturm-Liouvilleschen Reihen 356
§ 4. Verallgemeinerungen 359

Kapitel III.

Über eine Klasse von orthogonalen Funktionensystemen.

§ 1. Das orthogonale Funktionensystem χ 361
§ 2. Entwicklungen nach dem orthogonalen Funktionensystem χ 363
§ 3. Weitere Eigenschaften des orthogonalen Funktionensystems χ 368
§ 4. Verschiedene Verallgemeinerungen 369

Einleitung.

In der Theorie der Reihenentwicklung der reellen Funktionen spielen die sog. *orthogonalen Funktionensysteme* eine führende Rolle. Man versteht darunter ein System von unendlichvielen Funktionen $\varphi_1(s), \varphi_2(s), \cdots$, die in

*) Die vorliegende Arbeit ist, bis auf unwesentliche Änderungen, ein Abdruck meiner im Juli 1909 erschienenen Göttinger Inauguraldissertation.

bezug auf die beliebige meßbare Punktmenge M die *Orthogonalitätseigenschaft*

$$\int_{(M)} \varphi_p(s)\,\varphi_q(s)\,ds = 0 \qquad (p+q,\ p,q=1,2,\cdots),$$

$$\int_{(M)} (\varphi_p(s))^2 ds = 1 \qquad (p=1,2,\cdots)$$

besitzen, wobei die Integrale im Lebesgueschen Sinne genommen sind; erfüllen sie noch die sog. *Vollständigkeitsrelation*

$$\int_{(M)} (u(s))^2 ds = \left\{\int_{(M)} u(s)\varphi_1(s)\,ds\right\}^2 + \left\{\int_{(M)} u(s)\varphi_2(s)\,ds\right\}^2 + \cdots$$

identisch für alle in der Punktmenge M nebst ihrem Quadrate integrierbaren Funktionen $u(s)$, so nennen wir das System nach Hilbert ein *vollständiges orthogonales Funktionensystem* oder auch kürzer ein *vollständiges Orthogonalsystem* des Integrationsbereiches M.

Die formal gebildete unendliche Reihe

$$\varphi_1(s)\int_{(M)} f(t)\,\varphi_1(t)\,dt + \varphi_2(s)\int_{(M)} f(t)\,\varphi_2(t)\,dt + \cdots$$

nennen wir die *Fourier-Reihe* von $f(s)$ in bezug auf das orthogonale Funktionensystem $\varphi_1(s)$, $\varphi_2(s)$, $\cdots$.

Das einfachste Orthogonalsystem ist das Sysem der trigonometrischen Funktionen (für das Intervall $0 \leqq s \leqq 2\pi$)

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}},\ \frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos s,\ \ \frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin s,\ \cdots,\ \ \frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos ns,\ \ \frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin ns,\ \cdots.$$

Eine große und interessante Klasse von orthogonalen Funktionensystemen entspringt aus dem sog. *Eigenwertproblem* der sich selbst adjungierten Differentialgleichungen. Dieses Problem besteht darin, diejenigen Werte des Parameters λ zu bestimmen, für die die Differentialgleichung

$$\frac{d}{dx}\left(p(x)\frac{du}{dx}\right) + q(x)\,u + \lambda u = 0$$

eine Lösung besitzt, die an zwei Stellen, etwa $x=\alpha$ und $x=\beta$, homogene Randbedingungen erfüllt, beispielsweise

$$u(\alpha) = 0 \quad \text{und} \quad u(\beta) = 0,$$

oder

$$\frac{du}{dx} - hu = 0 \quad \text{für} \quad x=\alpha, \quad \text{und} \quad \frac{du}{dx} + Hu = 0 \quad \text{für} \quad x=\beta.$$

Man zeigt nun, daß es, wenn die Funktionen $p(x)$ und $q(x)$ bestimmte Stetigkeitsbedingungen befriedigen, stets abzählbar viele solche Parameterwerte gibt, und daß die zugehörigen Lösungen ein vollständiges ortho-

gonales Funktionensystem des betrachteten Intervalles bilden. Insbesondere ist der sog. *reguläre* Fall wichtig, wo die Funktion $p(x)$ im Intervall (inkl. der Grenzen) nicht verschwindet. Man bezeichnet die so erhaltenen Funktionen als ein *Sturm-Liouvillesches Funktionensystem*. Der Fall, daß die Funktion $p(x)$ an dem einen oder an beiden Enden des Intervalls $[\alpha, \beta]$ verschwindet, ist nicht minder wichtig; die *Kugelfunktionen* und die *Besselschen Funktionen* befriedigen bekanntlich eine solche Differentialgleichung.

Wenn wir die klassisch gewordene Theorie der trigonometrischen Reihe betrachten, so sehen wir, daß sich die Resultate dieser Theorie in vier Klassen gruppieren. An erster Stelle ist die

Konvergenztheorie zu nennen, die die Aufgabe hat, hinreichende Bedingungen für eine Funktion aufzustellen, damit ihre trigonometrische Reihe konvergiere. Diesen Untersuchungen steht die

Divergenztheorie zur Seite, die sie in mannigfacher Weise ergänzt; sie zieht die Grenzen, wie weit die Konvergenztheorie vorzudringen überhaupt imstande ist. Das wichtigste Resultat dieser Theorie ist der Satz von Du Bois-Reymond, der die Existenz einer stetigen Funktion aussagt, deren trigonometrische Reihe nicht konvergiert. Damit wird aber eine

Summationstheorie notwendig, die berufen ist, in den Fällen der Divergenz einen Ersatz zu leisten. In der Tat sind verschiedene Summationsmethoden bekannt, mit deren Hilfe man die trigonometrischen Reihen aller stetigen Funktionen „summieren" kann. Die moderne Summationstheorie der trigonometrischen Reihen wurde von L. Fejér begründet; später wurden verschiedene Resultate von Poisson und Riemann von verschiedenen Autoren als Summationsmethoden gedeutet. Die letzten und schwierigsten Probleme liefert dann die

Eindeutigkeitstheorie, die mit ihrem Hauptproblem — unter welchen Umständen eine konvergente trigonometrische Reihe die Fourier-Reihe der dargestellten Funktion ist — den Schlußstein der ganzen Theorie bildet. Durch die berühmten Arbeiten von Riemann, Cantor und Du Bois-Reymond ist man bereits in der Lage, auch diese Fragen zu beantworten.

Was nun die Theorie der mit den trigonometrischen Funktionen nahe verwandten orthogonalen Funktionen, die aus Differentialgleichungen zweiter Ordnung entspringen, betrifft, so ist bis jetzt nur die Konvergenztheorie derselben behandelt worden. Durch eine Reihe von Arbeiten*) wurde der Beweis erbracht, daß die in der Theorie der trigonometrischen Reihen angegebenen Bedingungen auch hier hinreichen, um die Konvergenz der Reihe zu sichern. Nur die Theorie der Kugelfunktionen ist über diese Resultate hinaus gefördert worden durch eine kürzlich er-

*) Von den vielen Arbeiten, die sich mit dieser Frage beschäftigen, nenne ich nur die neueren Untersuchungen von Stekloff, Zaremba, Kneser, Hilbert und Hobson.

schienene Arbeit von Herrn Fejér*), in der der Verfasser die Summationstheorie dieses Funktionensystems behandelt.

In der vorliegenden Arbeit beschäftigen wir uns mit der *Divergenztheorie und mit der Summationstheorie der orthogonalen Funktionensysteme.*

Im Kapitel I wird die Divergenztheorie behandelt; § 1 gibt eine allgemeine hinreichende Bedingung an, vermöge deren man in vielen Fällen zu einem gegebenen orthogonalen Funktionensystem eine stetige Funktion konstruieren kann, deren Fourier-Reihe in bezug auf dieses Orthogonalsystem nicht konvergiert. In § 2 und § 3 wird dieser Satz auf die Theorie der Sturm-Liouvilleschen Funktionen und auf die Kugelfunktionen angewandt zur Konstruktion einer stetigen Funktion, die nach diesen Funktionensystemen nicht entwickelbar ist.

Kapitel II ist der Summationstheorie gewidmet; in § 1 wird ein allgemeiner Hilfssatz bewiesen, auf Grund dessen die Umkehrung des im § 1 des ersten Kapitels bewiesenen Satzes möglich wird. § 2 und § 3 geben die Anwendung dieses Hilfssatzes auf die Sturm-Liouvilleschen Reihen. Man erhält das Resultat, das die Verallgemeinerung eines für trigonometrische Reihen von L. Fejér bewiesenen Satzes ist, daß, wenn man eine stetige Funktion — die nötigenfalls noch bestimmte Randbedingungen befriedigt — in eine Sturm-Liouvillesche Reihe entwickelt und aus den Partialsummen s_n dieser Reihe die arithmetischen Mittel

$$s_1, \frac{s_1+s_2}{2}, \frac{s_1+s_2+s_3}{3}, \ldots, \frac{s_1+s_2+\cdots+s_n}{n}, \ldots$$

bildet, die so definierte Funktionenfolge gleichmäßig gegen die gegebene Funktion konvergiert. § 4 gibt ein allgemeines Kriterium, das zu entscheiden gestattet, ob ein gegebenes Summationsverfahren so beschaffen ist, daß mit seiner Hilfe die in bezug auf ein vorgelegtes Orthogonalsystem gebildeten Fourier-Reihen aller Funktionen, die im „Bereiche" dieses Orthogonalsystems liegen, summierbar sind.

Die Untersuchungen des Kapitels I legen die Frage nahe: Gibt es überhaupt ein orthogonales Funktionensystem, das so beschaffen ist, daß *jede stetige Funktion auf die Fouriersche Weise in eine gleichmäßig konvergente Reihe entwickelbar ist,* die nach den Funktionen dieses Systems fortschreitet? Wir werden im dritten Kapitel eine *ganze Klasse* von Orthogonalsystemen kennen lernen, die diese Eigenschaften besitzen. Diese Funktionensysteme sind aber auch von anderen Gesichtspunkten interessant, vermöge einer Reihe von Eigenschaften, die diese Klasse auszeichnet. Diese Eigenschaften weisen darauf hin, daß es bei manchen Problemen, wo die Orthogonalsysteme nur als Hilfsmittel angewandt

*) Math. Annalen Bd. 67, S. 76.

werden, zweckmäßig sein wird, eben diese besonderen Systeme heranzuziehen, wodurch man in vielen Fällen zu einer einfacheren Darstellung des Beweisganges gelangt. In vielen Fällen aber erfordert die Natur der Aufgabe selbst die Anwendung eines solchen speziellen Funktionensystems, ohne das die Lösung der Aufgabe nicht möglich erscheint.

Kapitel I.

Divergente Reihen.

Bilden die im Intervall $[\alpha, \beta]$ definierten Funktionen

$$\varphi_1(s), \varphi_2(s), \cdots, \varphi_n(s), \cdots$$

ein vollständiges orthogonales Funktionensystem, so heiße die formal gebildete Reihe

$$\varphi_1(s)\int_\alpha^\beta f(t)\varphi_1(t)\,dt + \varphi_2(s)\int_\alpha^\beta f(t)\varphi_2(t)\,dt + \cdots$$

die *Fourier-Reihe* der Funktion $f(s)$ in bezug auf dieses Orthogonalsystem. Brechen wir diese unendliche Reihe bei dem n^{ten} Gliede ab, so erhalten wir die endliche Summe

$$\varphi_1(s)\int_\alpha^\beta f(t)\varphi_1(t)\,dt + \cdots + \varphi_n(s)\int_\alpha^\beta f(t)\varphi_n(t)\,dt,$$

die wir fortan mit $[f(s)]_n$ bezeichnen wollen. Schreiben wir der Kürze halber

$$K_n(s, t) = \varphi_1(s)\varphi_1(t) + \varphi_2(s)\varphi_2(t) + \cdots + \varphi_n(s)\varphi_n(t),$$

so ist

$$[f(s)]_n = \int_\alpha^\beta K_n(s, t) f(t)\,dt.$$

§ 1.

Ein allgemeines Kriterium.

Wir legen unseren Untersuchungen ein beliebiges orthogonales Funktionensystem des Intervalls $[\alpha, \beta]$ zugrunde:

$$\varphi_1(s), \varphi_2(s), \cdots.$$

Wir bezeichnen mit a eine beliebige Stelle dieses Intervalls und betrachten die unendlichvielen Zahlen

$$\omega_n = \int_\alpha^\beta |K_n(a, t)|\,dt;$$

wenn die so definierten Zahlen ω_n nicht alle unterhalb einer endlichen Grenze liegen, d. h. wenn man aus der Reihe

$$\omega_1, \omega_2, \omega_3, \cdots$$

eine Teilreihe

$$\omega_{\nu_1} \leqq \omega_{\nu_2} \leqq \omega_{\nu_3} \leqq \cdots$$

herausgreifen kann, deren Elemente über alle Grenzen wachsen, so kann man stets eine stetige Funktion angeben, deren Fourier-Reihe in bezug auf das zugrunde gelegte Orthogonalsystem an der Stelle $s = a$ divergiert.

Die Konstruktion dieser Funktion $F(s)$ geschieht in drei Schritten.

1) Wir konstruieren *zuerst* die nebst ihren Quadraten integrierbaren Funktionen

$$v_{\nu_1}(s), v_{\nu_2}(s), v_{\nu_3}(s), \cdots,$$

die durch die Gleichung

$$v_{\nu_p}(s) = \text{Vorzeichen von } K_{\nu_p}(a, s)$$

definiert sind; d. h.

$$\begin{aligned} v_{\nu_p}(s) &= 1, \text{ wenn } K_{\nu_p}(a, s) > 0 \\ &= -1, \quad \text{„} \qquad\quad < 0 \\ &= 0, \quad \text{„} \qquad\quad = 0; \end{aligned}$$

es ist also stets

$$v_{\nu_p}(t)\, K_{\nu_p}(a, t) = |K_{\nu_p}(a, t)|,$$

und folglich haben wir in unserer Bezeichnungsweise

$$[v_{\nu_p}(a)]_{\nu_p} = \int_\alpha^\beta |K_{\nu_p}(a, t)|\, dt = \omega_{\nu_p}.$$

Die Funktionen $v_{\nu_p}(s)$, die überall den Betrag $\leqq 1$ haben, besitzen also die Eigenschaft, daß die ν_p^{te} Teilsumme ihrer Fourier-Reihe an der Stelle $s = a$ den Wert ω_{ν_p} hat.

2) Sodann konstruieren wir eine Folge stetiger Funktionen

$$f_{\nu_1}(s), f_{\nu_2}(s), f_{\nu_3}(s), \cdots,$$

die dem Betrage nach kleiner als 1 bleiben und so beschaffen sind, daß

$$\int_\alpha^\beta (v_{\nu_p}(s) - f_{\nu_p}(s))^2\, ds < \delta_p \qquad (p = 1,2,3,\cdots).$$

wobei δ_p eine beliebig kleine positive Größe bedeutet.*)

*) Die Konstruktion dieser Funktionen bietet gar keine Schwierigkeit. Man kann z. B. folgendermaßen verfahren: Nehmen wir der Einfachheit halber an, daß $[0, 2\pi]$ das betrachtete Intervall sei, was ja keine wesentliche Einschränkung ist; wir setzen:

$$f_{\nu_p}(r, s) = \int_0^{2\pi} \frac{1 - r^2}{1 - 2r\cos(s - t) + r^2}\, v_{\nu_p}(t)\, dt \qquad (0 < r < 1).$$

Bilden wir die ν_p^{te} Teilsumme der Entwicklung von $f_{\nu_p}(s)$, so ist:

$$|[f_{\nu_p}(a)]_{\nu_p}| = \left|\int_\alpha^\beta K_{\nu_p}(a,t) f_{\nu_p}(t)\,dt\right|$$

$$= \left|\int_\alpha^\beta K_{\nu_p}(a,t) v_{\nu_p}(t)\,dt - \int_\alpha^\beta K_{\nu_p}(a,t)\,(v_{\nu_p}(t) - f_{\nu_p}(t)\,dt\right|$$

$$\geqq \omega_{\nu_p} - \left|\int_\alpha^\beta K_{\nu_p}(a,t)\,(v_{\nu_p}(t) - f_{\nu_p}(t))\,dt\right|$$

$$\geqq \omega_{\nu_p} - \sqrt{\int_\alpha^\beta (K_{\nu_p}(a,t))^2\,dt \int_\alpha^\beta (v_{\nu_p}(t) - f_{\nu_p}(t))^2\,dt}.$$

Wählen wir nun die Größe δ_p so, daß

$$\sqrt{\delta_p \int_\alpha^\beta (K_{\nu_p}(a,t))^2\,dt} < \frac{\omega_{\nu_p}}{2}$$

ist, so ist also

$$|[f_{\nu_p}(a)]_{\nu_p}| > \frac{\omega_{\nu_p}}{2}.$$

Mit anderen Worten, die stetigen Funktionen $f_{\nu_p}(s)$, die dem Betrage nach kleiner als 1 bleiben, besitzen die Eigenschaft, daß die ν_p^{te} Teilsumme ihrer Fourier-Reihe an der Stelle $s = a$ größer als $\frac{\omega_{\nu_p}}{2}$ ausfällt.

3) Wir gelangen nun zu der gesuchten Funktion $F(s)$ durch folgende Überlegung: Die ν_1^{te} Teilsumme der Fourier-Entwicklung der stetigen Funktion

$$F'(s) = f_{\nu_1}(s)$$

ist an der Stelle $s = a$ dem Betrage nach größer als $\frac{\omega_{\nu_1}}{2}$. Wenn diese Reihe an dieser Stelle nicht divergiert, so kann man eine Zahl G' so bestimmen, daß alle Teilsummen der Fourier-Reihe von $F'(s)$ für $s = a$ kleiner als G' sind, d. h. daß

$$|[F'(a)]_n| < G' \qquad (n = 1, 2, 3, \cdots).$$

In der Theorie der trigonometrischen Reihen wird gezeigt, daß die stetigen Funktionen $f_{\nu_p}(r,s)$ dem Betrage nach kleiner als das Maximum von $|v_{\nu_p}(s)|$ bleiben, und daß

$$\lim_{r=1} \int_0^{2\pi} [f_{\nu_p}(r,s) - v_{\nu_p}(s)]^2\,ds = 0$$

ist. Man kann daher r so bestimmen, daß $f_{\nu_p}(r,s)$ alle gestellten Forderungen erfüllt.

Wir greifen dann aus der Reihe der Indizes

$$\nu' = \nu_1, \nu_2, \nu_3, \cdots \tag{1}$$

einen Index, den wir etwa mit ν'' bezeichnen wollen, derart heraus, daß

$$\omega_{\nu''} > 6 \cdot 4(G' + 1)$$

ist, und bilden dann mit der zugehörigen Funktion $f_{\nu''}(s)$ die stetige Funktion

$$F''(s) = f_{\nu'}(s) + \tfrac{1}{4} f_{\nu''}(s).$$

Ist die Fourier-Reihe dieser stetigen Funktion $F''(s)$ nicht divergent, so kann man eine Zahl G'' bestimmen, daß für jedes n

$$|[F''(a)]_n| < G''$$

ist. Sodann bestimmen wir in der Indizes-Reihe (1) einen Index ν''' derart, daß das zugehörige

$$\omega_{\nu'''} > 6 \cdot 4^2(G'' + 2)$$

ist, und bilden die Funktion

$$F'''(s) = f_{\nu'}(s) + \tfrac{1}{4} f_{\nu''}(s) + \tfrac{1}{4^2} f_{\nu'''}(s).$$

Auf diese Weise fahren wir fort: wenn die Fourier-Reihe der stetigen Funktion

$$F^{(q-1)} = f_{\nu'}(s) + \tfrac{1}{4} f_{\nu''}(s) + \cdots + \tfrac{1}{4^{q-2}} f_{\nu^{(q-1)}}(s)$$

an der Stelle $s = a$ nicht divergiert, so bestimmen wir $G^{(q-1)}$ derart, daß für jedes n

$$|[F^{(q-1)}(a)]_n| < G^{(q-1)} \tag{2}$$

ist, und greifen dann aus der Reihe (1) einen Index $\nu^{(q)}$ heraus, sodaß

$$\omega_{\nu^{(q)}} > 6 \cdot 4^{q-1}(G^{(q-1)} + q - 1) \tag{3}$$

ist; die Möglichkeit dieser Auswahl ist durch die Annahme gewährleistet, daß die ω_{ν_p} über alle Grenzen wachsen.

Ich behaupte nun, daß die *unendliche Reihe*

$$F(s) = f_{\nu'}(s) + \tfrac{1}{4} f_{\nu''}(s) + \cdots + \tfrac{1}{4^{q-1}} f_{\nu^{(q)}}(s) + \cdots$$

eine stetige Funktion darstellt, deren Fourier-Reihe in bezug auf das betrachtete Orthogonalsystem an der Stelle $s = a$ divergiert.

Die gleichmäßige Konvergenz der Reihe $F(s)$ folgt unmittelbar aus dem Umstande, daß alle $f_{\nu^{(q)}}$ dem Betrage nach kleiner als 1 bleiben. Um die Divergenz der Fourier-Reihe von $F(s)$ bei $s = a$ zu beweisen, zeigen wir, daß die *Zahlenfolge*

$$[F(a)]_{\nu'}, [F(a)]_{\nu''}, [F(a)]_{\nu'''}, \cdots$$

über alle Grenzen wächst. Um etwa $[F(a)]_{\nu(q)}$ abzuschätzen, zerlegen wir die Funktion $F(s)$ in drei Summanden, wie das in der Formel

$$F(s)=\left(f_\nu(s)+\cdots+\frac{1}{4^{q-2}}f_{\nu(q-1)}(s)\right)+\frac{1}{4^{q-1}}f_{\nu(q)}(s)+\left(\frac{1}{4^q}f_{\nu(q+1)}(s)+\cdots\right)$$

durch die angebrachten Klammern angedeutet ist, und betrachten die $\nu^{(q)\text{te}}$ Teilsumme der Fourier-Reihe jedes einzelnen Summanden an der Stelle $s=a$. Der erste Summand — der in unserer Bezeichnungsweise $F^{(q-1)}(s)$ ist — liefert in dem Ausdrucke für $[F(a)]_{\nu(q)}$ einen Betrag, der wegen der Ungleichung (2) kleiner als $G^{(q-1)}$ ist. Der letzte Summand ist dem Betrage nach kleiner als $\frac{1}{3\cdot 4^{q-1}}$ und der von ihm gelieferte Betrag ist daher kleiner als $\frac{\omega_{\nu(q)}}{3\cdot 4^{q-1}}$ *). Da schließlich

$$|f_{\nu(q)}(a)]_{\nu(q)}|>\frac{\omega_{\nu(q)}}{2}$$

ist, so folgt daraus

$$|[F(a)]_{\nu(q)}|>\frac{\omega_{\nu(q)}}{2\cdot 4^{q-1}}-G^{(q-1)}-\frac{\omega_{\nu(q)}}{3\cdot 4^{q-1}}=\frac{\omega_{\nu(q)}}{6\cdot 4^{q-1}}-G^{q-1}.$$

Zufolge der Ungleichung (3) ist daher

$$|[F(a)]_{\nu(q)}|>q-1.$$

Damit ist aber unsere Behauptung bewiesen.

Die Bedingung, daß die ω_n nicht unterhalb einer von n unabhängigen Grenze bleiben, erweist sich also als *hinreichend*, damit eine stetige Funktion existiere, deren Fourier-Reihe in bezug auf das betrachtete Orthogonalsystem nicht konvergiert. Wir werden im nächsten Abschnitte sehen, daß diese Bedingung für eine sehr ausgedehnte Klasse von Orthogonalsystemen auch *notwendig* ist.

§ 2.

Anwendung auf die Sturm-Liouvilleschen Reihen.**)

Der soeben abgeleitete Satz findet eine unmittelbare Anwendung auf die Theorie der Sturm-Liouvilleschen Reihen.

*) In der Tat, es ist, wenn $\varphi(s)$ eine beliebige Funktion bedeutet, die im ganzen Intervall $[\alpha,\beta]$ dem Betrage nach kleiner als M ist,

$$|[\varphi(a)]_{\nu(q)}|=\left|\int_\alpha^\beta K_{\nu(q)}(a,t)\,\varphi(t)\,dt\right|\leqq M\int_\alpha^\beta|K_{\nu(q)}(a,t)|\,dt=M\omega_{\nu(q)}.$$

**) Mit einer ähnlichen Methode hat Herr Lebesgue eine stetige Funktion konstruiert, deren trigonometrische Reihe divergent bezw. nicht gleichmäßig konvergent ist. (Cf. Lebesgue, Séries trigonométriques, S. 87.) In einer kürzlich in den Annales de Toulouse (3e série, t. I) erschienenen Abhandlung hat Herr Lebesgue seine Resultate verallgemeinert. Man findet daselbst manche Berührungspunkte mit der vorliegenden Arbeit.

Sind die Koeffizienten $p(x)$ und $q(x)$ der sich selbst adjungierten Differentialgleichung

$$L(u) \equiv \frac{d}{dx}\left(p(x)\frac{du}{dx}\right) + qu + \lambda u = 0 \tag{4}$$

im ganzen Intervall $[\alpha, \beta]$ (einschließlich der Grenzen) von Null verschieden, so kann man den Parameter λ — auf unendlichviele Weisen — so bestimmen, daß die vorgelegte Gleichung eine Lösung besitzt, die die Randbedingungen

$$\frac{du}{dx} - hu = 0 \text{ für } x = \alpha, \quad \frac{du}{dx} + Hu = 0 \text{ für } x = \beta \tag{5}$$

befriedigt. Die so erhaltenen unendlichvielen Funktionen

$$u_1(x), u_2(x), u_3(x), \cdots$$

bilden ein vollständiges orthogonales Funktionensystem; wir wollen sie der Kürze halber ein *Sturm-Liouvillesches Orthogonalsystem* nennen und bemerken sofort, daß man statt der Randbedingungen (5) ein beliebiges anderes Paar von homogenen Randbedingungen wählen kann.

Um das Orthogonalsystem $u_n(x)$ zu studieren, wenden wir auf die vorgelegte Differentialgleichung eine in dieser Theorie übliche Transformation an, die von Liouville herrührt. Wir setzen

$$z = \int_\alpha^x (p(x))^{-\frac{1}{2}} dx \qquad v(z) = (p(x))^{\frac{1}{4}} u(x).$$

Unsere Differentialgleichung geht dann in die neue Differentialgleichung

$$\frac{d^2v}{dz^2} + Qu + \lambda v = 0 \tag{4'}$$

über, wobei $Q(z)$ eine durch die Funktionen $p(x), q(x)$ leicht ausdrückbare Funktion bedeutet.

Die Randbedingungen werden

$$\frac{dv}{dz} - h'v = 0 \text{ für } z = 0, \quad \frac{dv}{dz} + H'v = 0 \text{ für } z = \pi, \tag{5'}$$

wobei wir der Einfachheit halber

$$\int_\alpha^\beta (p(x))^{-\frac{1}{2}} dx = \pi$$

angenommen haben — was man ja durch eine Multiplikation der unabhängigen Variablen mit einer Konstanten stets erreichen kann; h' und H' sind zwei Konstanten, die man durch die h, H leicht ausdrücken kann. Wir bezeichnen die Sturm-Liouvilleschen Funktionen, die aus der Differentialgleichung (4') entspringen, mit

$$v_1(z), v_2(z), v_3(z), \cdots$$

und zeigen vorab, daß es eine *stetige Funktion gibt, deren Fourier-Reihe in bezug auf dieses Orthogonalsystem nicht konvergiert.*

Wir benutzen zu diesem Zwecke eine von Liouville herrührende und von Hobson*) verschärfte asymptotische Darstellung des n^{ten} Gliedes dieses Funktionensystems, das wir gleich so normiert denken, daß

$$\int_0^\pi (v_n(z))^2\, dz = 1$$

ist. Es ist dann für jede Stelle des Intervalls $[0, \pi]$

$$v_n(z) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cos nz \left\{1 + \frac{\alpha_n(z)}{n^2}\right\} + \sin nz \left\{\frac{\beta(z)}{n} + \frac{\gamma_n(z)}{n^2}\right\},$$

wobei die Funktionen $\alpha_n(z)$, $\gamma_n(z)$ und $\beta(z)$ unterhalb einer von n und z unabhängigen Grenze A bleiben. Um nun die Existenz einer stetigen Funktion zu beweisen, deren Fourier-Reihe an der Stelle $z = a$ divergiert, genügt es — nach dem im § 1 abgeleiteten Satze — zu zeigen, daß die Größen

$$\int_0^\pi |K_n(a, t)|\, dt = \int_0^\pi |v_1(a)\, v_1(t) + \cdots + v_n(a)\, v_n(t)|\, dt$$

über alle Grenzen wachsen. Wir setzen zu diesem Zwecke

$$K_n(a, t) = \frac{2}{\pi} \sum_{p=1,\cdots,n} \cos pa \cos pt + \Phi_n(a, t)$$

und beweisen, daß $|\Phi_n(a, t)|$ unterhalb einer von n, a und t unabhängigen Grenze bleibt,

$$\int_0^\pi \left| \sum_{p=1,\cdots,n} \cos pa \cos pt \right| dt$$

aber über alle Grenzen wächst. Bildet man nämlich $\Phi_n(a, t)$, so erhält man erstens die Reihen

$$(6) \qquad \sqrt{\frac{2}{\pi}} \left\{\beta(t) \sum_{p=1,\cdots,n} \frac{\cos pa \sin pt}{p} + \beta(a) \sum_{p=1,\cdots,n} \frac{\cos pt \sin pa}{p}\right\}$$

und zweitens drei endliche trigonometrische Reihen, deren p^{te} Glieder bzw. die Nenner p^2, p^3, p^4 haben. Da die Zähler jedes Gliedes dieser letzten Reihen absolut genommen kleiner als A^2 sind, so sind diese Reihen dem Betrage nach sicherlich kleiner als $A^2 \sum_{p=1,2,\cdots} \frac{1}{p^2}$. Um nun auch zu

*) Cf. Hobson, Proceedings of the London Mathematical Society, Ser. 2, Bd. 6 (1908), S. 349.

zeigen, daß die Reihen (6) oder — was damit gleichbedeutend ist — die Reihen

$$\sum_{p=1,\cdots,n} \frac{\cos pa \sin pt}{p} \quad \text{bzw.} \quad \sum_{p=1,\cdots,n} \frac{\cos pt \sin pa}{p}$$

unterhalb einer von n, a und t unabhängigen Grenze bleiben, zerlegen wir

$$\sum_{p=1,\cdots,n} \frac{\cos pa \sin pt}{p} = \frac{1}{2}\left\{ \sum_{p=1,\cdots,n} \frac{\sin p(t+a)}{p} + \sum_{p=1,\cdots,n} \frac{\sin p(t-a)}{p} \right\},$$

$$\sum_{p=1,\cdots,n} \frac{\cos pt \sin pa}{p} = \frac{1}{2}\left\{ \sum_{p=1,\cdots,n} \frac{\sin p(t+a)}{p} + \sum_{p=1,\cdots,n} \frac{\sin p(a-t)}{p} \right\}.$$

Da aber die Reihe $\sum_{p=1,2,\cdots} \frac{\sin pt}{p}$ die Fourier-Reihe der Funktion $\frac{\pi - t}{2}$ ist, so bleiben die Summen $\left| \sum_{p=1,\cdots,n} \frac{\sin pt}{p} \right|$ — wie in der Theorie der trigonometrischen Reihen gelehrt wird*) — unterhalb einer von t und n unabhängigen oberen Grenze, und damit ist gezeigt, daß $|\Phi_n(a, t)|$ endlich bleibt.

Es bleibt noch übrig zu beweisen, daß die Größen

$$\omega_n = \int_0^\beta \left| \sum_{p=1,\cdots,n} \cos pt \cos pa \right| dt$$

mit wachsendem n unendlich groß werden. Wir verfahren zu diesem Zwecke ähnlich wie es Herr Lebesgue an der oben genannten Stelle tut.

Um die Rechnungen abzukürzen, nehmen wir an, daß die frei gewählte Stelle $z = a$ zwischen 0 und $\frac{\pi}{2}$ liegt, d. h.:

$$0 < \delta < a < \frac{\pi}{2} - \delta^{**}).$$

Nun ist

$$2 \sum_{p=1,\cdots,n} \cos pt \cos pa = \frac{\sin (2n+1)\frac{t+a}{2}}{2 \sin \frac{t+a}{2}} + \frac{\sin (2n+1)\frac{t-a}{2}}{2 \sin \frac{t-a}{2}} - 1;$$

da aber der erste Summand in dieser Formel für jeden in Betracht kommenden Wert von n und t absolut genommen kleiner als die kleinere

*) Vgl. etwa Kneser, Math. Ann. Bd. 60, S. 402.

**) Wäre dies nicht der Fall, so müßte man das Integral ω_ν erst in geringer Weise abändern, um unsere weiteren Überlegungen anwenden zu können; da es uns aber nur darauf ankommt, zu zeigen, daß es stetige Funktionen gibt, deren Sturm-Liouvillesche Reihe nicht konvergiert, so ist diese Einschränkung unwesentlich.

der beiden Größen $\left|\frac{1}{2\sin\frac{\delta}{2}}\right|$ und $\left|\frac{1}{2\sin\left(\frac{3\pi}{4}-\frac{\delta}{2}\right)}\right|$ bleibt, so genügt es offenbar nachzuweisen, daß

$$\omega_n' = \int_0^{\pi} \left| \frac{\sin\frac{(2n+1)(t-a)}{2}}{\sin\frac{t-a}{2}} \right| dt = \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{\pi-a}{2}} \left| \frac{\sin(2n+1)\vartheta}{\sin\vartheta} \right| d\vartheta$$

mit wachsendem n unendlich groß wird. Es ist nun offenbar

$$\int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{\pi-a}{2}} \left| \frac{\sin(2n+1)\vartheta}{\sin\vartheta} \right| dt > \int_0^{\frac{\pi-a}{2}} \left| \frac{\sin(2n+1)\vartheta}{\vartheta} \right| d\vartheta .$$

Betrachten wir nun die Intervalle, in denen

$$|\sin(2n+1)\vartheta| > \sin\frac{\pi}{8} = \mu$$

ist;

$$i_p = \left[\pi\frac{\frac{1}{8}+p}{2n+1},\ \pi\frac{\frac{7}{8}+p}{2n+1} \right]$$

ist ein solches Intervall; da

$$\int_{(i_p)} \frac{\mu}{\vartheta} d\vartheta = \mu \log\left(1+\frac{6}{8p+1}\right)$$

ist, so ist sicherlich

$$\omega_n' \geqq \mu \sum_{p=1,\cdots,\nu} \log\left(1+\frac{6}{8p+1}\right),$$

wobei ν die kleinste ganze Zahl bedeutet von der Eigenschaft, daß $\pi\frac{\left(\frac{7}{8}+\nu\right)}{2n+1} \leqq \frac{\pi-a}{2}$. Nun wächst aber diese Zahl ν — die noch von n abhängt — mit wachsendem n über alle Grenzen; da ferner die unendliche Reihe

$$\sum_{p=1,2,\cdots} \log\left(1+\frac{6}{8p+1}\right)$$

divergiert*), so kann man n so groß wählen, daß ω_n größer als eine beliebige Zahl wird.

*) Man beweist die Divergenz dieser Reihe von positiven Gliedern am einfachsten, indem man zeigt, daß das Produkt $p\log\left(1+\frac{6}{8p+1}\right)$ für $p=\infty$ den Grenzwert $\frac{3}{4}$ hat.

Daraus können wir aber — auf Grund unseres allgemeinen Satzes in § 1 — schließen, daß es eine stetige Funktion $F(z)$ gibt, deren Fourier-Reihe in bezug auf die $v_n(z)$ an der Stelle $z = a$ divergiert.

Nachdem wir die Existenz dieser stetigen Funktion $F(z)$ bewiesen haben, ist es nun leicht zu zeigen, daß *die in bezug auf die* $u_n(x)$ *gebildete Fourier-Reihe der stetigen Funktion*

$$\overline{F}(x) = (p(x))^{-\frac{1}{4}} F\left(\int_\alpha^x (p(x))^{-\frac{1}{2}}\, dx\right)$$

divergent ist. Da nämlich vermöge unserer Substitution

$$v_n(z) = (p(x))^{\frac{1}{4}} u_n(x), \quad dz = (p(x))^{-\frac{1}{2}}\, dx$$

ist, so finden wir

$$\int_\alpha^\beta \overline{F}(x) u_n(x)\, dx = \int_\alpha^\beta (p(x))^{-\frac{1}{4}} F\left(\int_\alpha^x p(x)^{-\frac{1}{2}}\, dx\right) (p(x))^{-\frac{1}{4}} v_n(z)\, dx$$

$$= \int_0^\pi F(z)\, v_n(z)\, dz.$$

Da aber die Reihe

$$\sum_{n=1,2,\cdots} v_n(z) \int_0^\pi F(z)\, v_n(z)\, dz$$

an der Stelle $z = a$ divergiert, so gilt dasselbe auch von der Reihe

$$\sum_{n=1,2,\cdots} u_n(x) \int_\alpha^\beta \overline{F}(x)\, u_n(x)\, dx = (p(x))^{-\frac{1}{4}} \sum_{n=1,2,\cdots} v_n(z) \int_0^\pi F(z)\, v_n(z)\, dz$$

an der Stelle $x = b$, die vermöge der Transformation

$$z = \int_\alpha^x (p(x))^{-\frac{1}{4}}\, dx$$

der Stelle $z = a$ entspricht*). Damit ist unsere Behauptung bewiesen.

---

*) Daß es eine solche Stelle b gibt, für die $a = \int_\alpha^b p(x)^{-\frac{1}{4}}\, dx$ ist, wenn $0 < a < \pi$, folgt unmittelbar daraus, daß die stetige Funktion $z = \int_\alpha^x p(x)^{-\frac{1}{4}}\, dx$ an den Stellen $x = \alpha$, bezw. $x = \beta$ die Werte 0 bezw. π annimmt; es muß daher zwischen α und β eine Stelle b existieren, wo sie den zwischen 0 und π liegenden Wert a annimmt.

§ 3.

Anwendung auf die Kugelfunktionen.

Als n^{te} Kugelfunktion oder n^{tes} Legendre-Polynom $P_n(x)$ bezeichnet man diejenige Lösung der Differentialgleichung

$$\frac{d}{dx}\left((1-x^2)\frac{dy}{dx}\right)+n(n+1)y=0, \tag{7}$$

die an den Stellen $x=-1$ und $x=+1$ endlich bleibt. Sind n und m verschieden, so ist

$$\int_{-1}^{+1} P_n(x)\,P_m(x)\,dx=0,$$

und es ist üblich, die $P_n(x)$ so zu normieren, daß

$$\int_{-1}^{+1}(P_n(x))^2\,dx=\frac{2}{2n+1}$$

ist. Das System der Legendre-Polynome ist kein Sturm-Liouvillesches Orthogonalsystem, da in der Differentialgleichung (7) der Koeffizient von $\frac{d^2y}{dx^2}$ an den Stellen $x=1$ und $x=-1$ verschwindet. Wir wollen zeigen, daß es stetige Funktionen gibt, deren Kugelfunktionenreihe divergiert.

Setzen wir, wie früher

$$K_n(x,t)=\sum_{p=0,1,2,\cdots,n}\frac{2p+1}{2}\,P_p(x)\,P_p(t),$$

so ist die n^{te} Teilsumme der Kugelfunktionenreihe einer Funktion $f(x)$:

$$[f(x)]_n=\int_{-1}^{+1}K_n(x,t)\,f(t)\,dt,$$

und wir haben daher zu zeigen, daß die unendlich vielen Größen $\int_{-1}^{+1}|K_n(x,t)|\,dt$ nicht unterhalb einer von n unabhängigen Grenze bleiben. Wir zeigen dies für die Stelle $x=0$.

Eine wohlbekannte Formel lehrt*), daß

$$K_n(x,t)=\frac{n+1}{2}\,\frac{P_{n+1}(x)\,P_n(t)-P_n(x)\,P_{n+1}(t)}{x-t}$$

*) Vgl. Christoffel, Journal für Mathematik Bd. 55, S. 73.

ist; und da $P_n(0)$ für jeden ungeraden Index verschwindet, genügt es zu beweisen, daß die Größen

$$\omega_{2n} = \frac{2n+1}{2} |P_{2n}(0)| \int_{-1}^{+1} \left| \frac{P_{2n+1}(t)}{t} \right| dt$$

mit wachsendem n unendlich groß werden. Wir wenden zu diesem Zweke die oft gebrauchte Approximationsformel an:

$$P_n(\cos\theta) = \sqrt{\frac{2}{n\pi \sin\theta}} \left[\cos\left(\left(n+\frac{1}{2}\right)\theta - \frac{\pi}{4}\right) + \frac{\alpha_n(\theta)}{n} \right],$$

die innerhalb des Intervalls $[-1+\varepsilon, 1-\varepsilon]$ für jeden Wert des Index n die Kugelfunktionen darstellt, wobei ε eine von Null verschiedene positive Zahl bedeutet; die Funktionen $a_n(\theta)$ bleiben unterhalb einer von n und θ unabhängigen Grenze, wenn $\cos\theta$ im Intervall $[-1+\varepsilon, 1-\varepsilon]$ variiert. Diese Formel zeigt unmittelbar, daß

$$\lim_{n=\infty} L \sqrt{n\pi} |P_{2n}(0)| = 1$$

ist, und daraus folgt, daß die ω_{2n} sicherlich über alle Grenzen wachsen, wenn die Größen

$$\sqrt{2n+1} \int_{-1}^{+1} \left| \frac{P_{2n+1}(t)}{t} \right| dt > \sqrt{2n+1} \int_{0}^{-\frac{1}{\sqrt{2}}} \left| \frac{P_{2n+1}(t)}{t} \right| dt = \omega'_{2n}$$

mit wachsendem n unendlich groß werden. Um dies nachzuweisen, setzen wir

$$t = \cos\left(\vartheta + \frac{\pi}{2}\right) = -\sin\vartheta.$$

Wir erhalten

$$\omega'_{2n} = \sqrt{2n+1} \int_{0}^{\frac{\pi}{4}} \left| \frac{P_{2n+1}\left(\cos\left(\vartheta+\frac{\pi}{2}\right)\right)}{\sin\vartheta} \cos\vartheta \right| d\vartheta;$$

da aber im ganzen Intervall $\left[0, \frac{\pi}{4}\right]$

$$\cos\vartheta \geqq \frac{1}{\sqrt{2}} \quad \text{und} \quad \sin\vartheta \leqq \vartheta$$

ist, so finden wir

$$\omega'_{2n} > \sqrt[4]{2} \int_{0}^{\frac{\pi}{4}} \left| \frac{\sqrt{\frac{2n+1}{2}} \cos\vartheta \, P_{2n+1}\left(\cos\left(\vartheta+\frac{\pi}{2}\right)\right)}{\vartheta} \right| d\vartheta.$$

Es ist aber zufolge unserer Approximationsformel

$$\sqrt{\frac{2n+1}{2}}\cos\vartheta\, P_{2n+1}\left(\cos\left(\vartheta+\frac{\pi}{2}\right)\right)=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\left(\cos\left(\left(2n+\frac{3}{2}\right)\left(\vartheta+\frac{\pi}{2}\right)-\frac{\pi}{4}\right)+\frac{\alpha_{2n+1}\left(\vartheta+\frac{\pi}{2}\right)}{2n+1}\right)$$

$$=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\left((-1)^{n+1}\sin\left(2n+\frac{3}{2}\right)\vartheta+\frac{\alpha_{2n+1}\left(\vartheta+\frac{\pi}{2}\right)}{2n+1}\right)$$

Setzen wir zur Abkürzung $\sin\frac{\pi}{8}=\mu$ und wählen fortan n so groß, daß $\left|\frac{\alpha_{2n+1}\left(\vartheta+\frac{\pi}{2}\right)}{2n+1}\right|<\frac{\mu}{2}$ ist für jeden Wert von ϑ, der im Intervall $\left[0,\frac{\pi}{4}\right]$ liegt. Ist ϑ zwischen den Grenzen $\pi\frac{\frac{1}{8}+p}{2n+\frac{3}{2}}$ und $\pi\frac{\frac{7}{8}+p}{2n+\frac{3}{2}}$ eingeschlossen, wobei p eine ganze Zahl bedeutet, so ist sicherlich

$$\left|\sin\left(2n+\frac{3}{2}\right)\vartheta\right|>\mu$$

und da $\left|\frac{\alpha_{2n+1}\left(\vartheta+\frac{\pi}{2}\right)}{2n+1}\right|<\frac{\mu}{2}$ ist, so finden wir

$$\sqrt{\frac{2n+1}{2}}\cos\vartheta\, P_{2n+1}\left(\cos\left(\vartheta+\frac{\pi}{2}\right)\right)>\frac{\mu}{2\sqrt{\pi}}.$$

Wir haben folglich für das zwischen diesen Grenzen genommene Integral:

$$\int_{(i_p)}\left|\frac{\sqrt{\frac{2n+1}{2}}\cos\vartheta\, P_{2n+1}\left(\cos\left(\vartheta+\frac{\pi}{2}\right)\right)}{\vartheta}\right|d\vartheta>\frac{\mu}{2\sqrt{\pi}}\log\left(1+\frac{6}{8p+1}\right).$$

Nun liegen aber die Intervalle $\left[\pi\frac{\frac{1}{8}+p}{2n+\frac{3}{2}},\ \pi\frac{\frac{7}{8}+p}{2n+\frac{3}{2}}\right]$ im Intervall $\left[0,\frac{\pi}{4}\right]$, sowie $0\leqq p\leqq\frac{n-1}{2}$ ist, und wir erhalten also

$$\omega'_{2n}>\frac{\sqrt[4]{2}\mu}{2\sqrt{\pi}}\sum_{p=1,2,\cdots,\frac{n-1}{2}}\log\left(1+\frac{6}{8p+1}\right).$$

Aus der Divergenz der unendlichen Reihe $\sum_{p=1,\cdots} \log\left(1+\frac{6}{8p+1}\right)$ folgt aber unmittelbar, daß die ω'_{2n} über alle Grenzen wachsen, und damit ist unsere Behauptung bewiesen.

Unser allgemeines Kriterium ist ohne jede Schwierigkeit auch in solchen Fällen anwendbar, wo man die Orthogonalreihen mit irgend einem *Summationsverfahren „summieren"* will. Man versteht darunter folgendes: Die unendlichvielen in der Punktmenge M definierten Funktionen

$$a_1(n),\ a_2(n),\ a_3(n),\ \cdots$$

besitzen die Eigenschaft, daß für einen bestimmten Wert, etwa für $n=n_0$, der Häufungsstelle der Punktmenge M ist,

$$L_{n=n_0}\, a_p(n) = 1 \qquad (p=1,2,3,\cdots)$$

ist. Betrachten wir nun eine beliebige unendliche Reihe

$$u_1 + u_2 + u_3 + \cdots,$$

die aber so beschaffen ist, daß die Reihe

$$a_1(n)u_1 + a_2(n)u_2 + a_3(n)u_3 + \cdots$$

für jeden Wert von n, der der Punktmenge M angehört, konvergiert. Existiert nun der Limes:

$$S = L_{n=n_0}\,(a_1(n)u_1 + a_2(n)u_2 + a_3(n)u_3 + \cdots),$$

so sagen wir, daß *die vorgelegte Reihe mit Hilfe der durch die Funktionen $a_p(n)$ gegebenen Summationsmethode summierbar ist, und ordnen ihr S als „Summe" zu.*

Wenn die unendlichen Reihen:

$$K(n;\, a,\, t) = a_1(n)\,\varphi_1(a)\,\varphi_1(t) + a_2(n)\,\varphi_2(a)\,\varphi_2(t) + \cdots$$

für jeden in Betracht kommenden Wert von n konvergieren, so liefern die Untersuchungen des § 1 den folgenden Satz: *Ist*

$$\text{lim. sup.} \int_\alpha^\beta |K(n;\, a,\, t)|\, dt = \infty,$$

so kann man eine stetige Funktion angeben, deren Fourier-Reihe (in bezug auf die $\varphi_p(s)$) an der Stelle $s=a$ mit Hilfe des durch das Funktionensystem $a_p(n)$ gegebenen Summationsverfahrens nicht summierbar ist.

Kapitel II.

Theorie der Summation.

Ist

$$\varphi_1(s),\ \varphi_2(s),\ \cdots,\ \varphi_n(s),\cdots$$

ein beliebiges im Intervall $[\alpha, \beta]$ definiertes orthogonales Funktionensystem, so sagen wir, daß eine im Intervall $[\alpha, \beta]$ definierte Funktion $f(s)$ dem *„Bereiche"* dieses Funktionensystems angehört, wenn man zu jeder beliebig kleinen Zahl δ n Konstanten $c_1, \cdots, c_n$ so bestimmen kann, daß im ganzen Intervall

$$|f(s) - c_1\varphi_1(s) - c_2\varphi_2(s) - \cdots - c_n\varphi_n(s)| < \delta$$

ist. Die Menge dieser Funktionen $f(s)$ bildet den *Bereich* des vorgelegten Orthogonalsystems. Dieser Begriff spielt in der Summationstheorie eine überaus wichtige Rolle, da man nur für Funktionen des Bereiches die Fourier-Reihe so summieren kann, daß die durch Summation entstandene Funktionenfolge gleichmäßig konvergent sei. Übrigens ist dieser Begriff des Bereiches bei den bekannten Beispielen ein sehr umfassender; beispielsweise besteht er bei den trigonometrischen Funktionen, bei den Legendre-Polynomen oder auch bei einem beliebigen Orthogonalsystem, das aus einer Differentialgleichung entspringt, aus allen stetigen Funktionen, die nötigenfalls noch bestimmte Randbedingungen befriedigen. Allgemein können wir sagen: sind alle *analytischen* Funktionen nach den Funktionen eines Orthogonalsystems entwickelbar, so gehören alle *stetigen* Funktionen des Intervalls — vermöge des bekannten Weierstraßschen Satzes — zu dem Bereiche dieses Funktionensystems.

§ 1.

Ein Hilfssatz.

Wir haben im Kapitel I bewiesen, daß man, wenn das vorgelegte orthogonale Funktionensystem eine bestimmte Bedingung erfüllt, immer eine stetige Funktion angeben kann, deren in bezug auf dieses System gebildete Fourier-Reihe an einer gegebenen Stelle divergiert. Wir werden jetzt zeigen, daß diese Bedingung für diejenigen Orthogonalsysteme, deren Bereich alle stetigen Funktionen umfaßt, auch *notwendig* ist, damit eine solche Funktion existiere. Zu diesem Zwecke beweisen wir folgenden einfachen Hilfssatz*):

*) Als Spezialfall dieses Satzes ergibt sich ein von Herrn H. Lebesgue ausgesprochenes Theorem (Rendiconti del Circolo matematico di Palermo Bd. 26 (1908), S. 325).

Jeder Funktion $f(s)$ einer bestimmten Funktionenklasse möge eine Reihe reeller Funktionen $f_1(s), f_2(s), \cdots$ zugeordnet sein; in Zeichen

$$f(s) \sim f_1(s), f_2(s), \cdots.$$

Diese Zuordnung besitze folgende Eigenschaften:

A) *Ist*

$$f(s) \sim f_1(s), f_2(s), \cdots$$

und

$$g(s) \sim g_1(s), g_2(s), \cdots,$$

so ist

$$f(s) + g(s) \sim f_1(s) + g_1(s), f_2(s) + g_2(s), \cdots.$$

B) *Es sei für jedes s stets $|f_p(s)|$ kleiner als die obere Grenze von $|f(s)|$ multipliziert mit einer Größe M, die für alle Funktionen der Klasse dieselbe ist: $|f_p(s)| < M \cdot \operatorname{Max} |f(s)|$.*

Wenn nun $f'(s), f''(s), \cdots$ eine Reihe von Funktionen sind, die gleichmäßig in s gegen die Funktion $f(s)$ konvergieren, und wenn die zu $f^{(n)}(s)$ vermöge unserer Zuordnung zugeordnete Funktionenfolgen gleichmäßig in s bezw. gegen $F^{(n)}(s)$ konvergieren, d. h. gleichmäßig in s die Limesgleichungen bestehen

$$\lim_{p=\infty} f_p^{(n)}(s) = F^{(n)}(s), \tag{8}$$

so konvergiert die zu $f(s)$ zugeordnete Funktionenfolge gleichmäßig gegen eine Funktion $F(s)$, und es ist

$$\lim_{n=\infty} F^{(n)}(s) = F(s).$$

Aus der Konvergenz der Reihe $f'(s), f''(s), \cdots$ gegen die Funktion $f(s)$ folgt nämlich, daß bei hinreichend großen q und q':

$$|f^{(q)}(s) - f^{(q')}(s)| < \varepsilon$$

ist, wie klein auch ε gewählt sei; da ferner, wegen unserer ersten Annahme, die zu der Funktion $f^{(q)}(s) - f^{(q')}(s)$ zugeordnete Reihe aus den Differenzen $f_p^{(q)}(s) - f_p^{(q')}(s)$ besteht, so folgt aus der zweiten Annahme, daß

$$|f_p^{(q)}(s) - f_p^{(q')}(s)| < \varepsilon M \tag{9}$$

ist für genügend große q und q' und beliebiges p. Da aber die Limesgleichungen (8) bestehen, so können wir zu den festgewählten Indizes q, q' den Index p noch so groß wählen, daß

$$|F^{(q')}(s) - f_p^{(q')}(s)| < \varepsilon \quad \text{und} \quad |F^{(q)}(s) - f_p^{(q)}(s)| < \varepsilon$$

wird. Aus den letzten drei Ungleichungen folgt aber durch Addition

$$|F^{(q)}(s) - F^{(q')}(s)| < (M+2)\varepsilon$$

und diese Ungleichung sagt aus, daß *die Funktionen $F^{(n)}(s)$ gleichmäßig gegen eine Funktion $F(s)$ konvergieren.*

Um zu zeigen, daß diese Funktion $F(s)$ der gleichmäßige Limes der zu $f(s)$ zugeordneten Funktionenfolge $f_1(s), f_2(s), \cdots$ ist, bemerken wir, daß bei genügend großem n und beliebigem p

$$|f_p^{(n)}(s) - f_p(s)| < \varepsilon M$$

ausfällt. Dies folgt aus unseren Annahmen A) und B) genau so, wie die oben abgeleitete Ungleichung (9). Wir wählen n überdies so groß, daß

$$|F(s) - F^{(n)}(s)| < \varepsilon$$

ist, und bestimmen dann zu diesem festen Index n eine Größe P derart, daß

$$|F^{(n)}(s) - f_p^{(n)}(s)| < \varepsilon$$

ist, sowie $p > P$ ist. Durch Addition der letzten drei Ungleichungen erkennen wir, daß

$$|F(s) - f_p(s)| < (M+2)\varepsilon$$

ist für jedes hinreichend große p; damit aber ist unser Satz bewiesen*).

Wir wollen aus diesem Satz sofort eine wichtige Folgerung ziehen.

Wir ordnen jeder Funktion $f(s)$ die Funktionen $f_p(s)$ zu, die im ganzen Intervall $[\alpha, \beta]$ den Wert haben, den die p^{te} Teilsumme der in bezug auf das Orthogonalsystem $\varphi_1(s), \varphi_2(s), \cdots$ gebildeten Fourier-Reihe von $f(s)$ an einer beliebigen Stelle, etwa $s = a$, annimmt:

$$f_p(s) = [f(a)]_p = \int_\alpha^\beta K_p(a, t) f(t)\, dt.$$

Diese Zuordnung erfüllt offenbar die Bedingung A). Ist aber noch außerdem

$$\int_\alpha^\beta |K_p(a, t)|\, dt < M,$$

wo M eine von p unabhängige Zahl bedeutet, so ist auch unsere zweite Annahme B) erfüllt. Verstehen wir unter $\varphi(s)$ irgend ein endliches Aggregat unserer Orthogonalfunktionen

$$\varphi(s) = a_1 \varphi_1(s) + \cdots + a_n \varphi_n(s),$$

so konvergiert offenbar die zu $\varphi(s)$ zugeordnete Funktionenfolge gleichmäßig gegen den Wert dieser Funktion an der Stelle $s = a$. Ist nun $f(s)$ eine beliebige Funktion des Bereiches unseres Orthogonalsystems, so können wir aus den soeben betrachteten Funktionen $\varphi(s)$ eine gleichmäßig

*) Man beachte, daß bei dem Beweise dieses Satzes der Umstand, daß die auftretenden Funktionen nur von einer Veränderlichen abhängen, gar nicht benutzt wurde. Der Satz bleibt daher richtig, wenn alle vorkommenden Funktionen von mehreren unabhängigen Variablen abhängen.

gegen $f(s)$ konvergente Folge $\varphi'(s)$, $\varphi''(s)$, $\cdots$ herausgreifen. Nach dem soeben bewiesenen Hilfssatze muß dann auch die zu $f(s)$ zugeordnete Reihe

$$[f(a)]_1, [f(a)]_2, \cdots$$

gegen $f(a)$ konvergieren. Damit ist aber gezeigt, daß, *wenn*

$$\int_\alpha^\beta |K_p(a,t)|\,dt < M \qquad (p=1,2,3,\cdots)$$

ist, die Fourier-Reihe jeder Funktion, die dem Bereiche dieses Orthogonalsystems angehört, an der Stelle $s=a$ konvergiert. Dieser Satz lehrt, daß in dem sehr allgemeinen Falle, daß der Bereich unseres Orthogonalsystems alle stetigen Funktionen enthält, die S. 336 gegebene hinreichende Bedingung für die Existenz einer nach diesem Orthogonalsystem nicht entwickelbaren stetigen Funktion auch *notwendig* ist.

§ 2.

Anwendung auf die Theorie der trigonometrischen und Sturm-Liouvilleschen Reihen.

Mit Rücksicht auf die folgenden Ausführungen wollen wir vorab zwei Sätze aus der klassischen Theorie der trigonometrischen Reihen auf Grund unseres Hilfssatzes S. 350 ableiten:

1) Durch das sog. Poissonsche Integral

$$f_r(s) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{1-r^2}{1-2r\cos(s-t)+r^2} f(t)\,dt$$

wird jeder Funktion $f(s)$ eine Funktionenmemge $f_r(s)$ zugeordnet. Diese Zuordnung erfüllt offenbar die Annahme A) unseres Hilfssatzes. Da aber

$$\frac{1-r^2}{1-2r\cos(s-t)+r^2}$$

stets positiv ist, wenn $r<1$ ist, und da infolgedessen

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left|\frac{1-r^2}{1-2r\cos(s-t)+r^2}\right| dt$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left\{1+2\sum_{n=1,2,\cdots} r^n\cos n(s-t)\right\} dt = 1$$

ist, für jeden in Betracht kommenden Wert von r und s, so folgt, daß $f_r(s)$ absolut genommen kleiner als das Maximum von $|f(s)|$ ist, wie auch r und s gewählt sind. Mit anderen Worten, die durch das Poissonsche

Integral gegebene Zuordnung erfüllt auch die Annahme B). Bekanntlich ist aber für jeden Wert $r < 1$

$$f_r(s) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\,dt$$

$$+ \frac{1}{\pi}\sum_{n=1,2,\cdots} r^n \left\{\cos ns \int_0^{2\pi} f(t)\cos nt\,dt + \sin ns \int_0^{2\pi} f(t)\sin nt\,dt\right\},$$

wobei die rechts stehende Reihe für $r < 1$ absolut und gleichmäßig konvergiert. Wir sehen daraus, daß die zu den Funktionen $\cos ns$ bezw. $\sin ns$ zugeordneten Funktionenmengen gleichmäßig gegen diese Funktionen konvergieren, wenn der Parameter r gegen 1 konvergiert. Eine unmittelbare Folge davon ist, daß, wenn $\Phi(s)$ ein beliebiges trigonometrisches Polynom bedeutet:

$$\Phi(s) = a_0 + a_1 \cos s + a_1' \sin s + \cdots + a_n \cos ns + a_n' \sin ns,$$

die zu ihm zugeordnete Funktionenmenge gleichmäßig gegen $\Phi(s)$ konvergiert. Bedeutet nun $F(s)$ irgend eine stetige Funktion mit der Periode 2π, so kann man aus den trigonometrischen Polynomen eine Folge $\Phi'(s)$, $\Phi''(s)$, $\cdots$ herausgreifen, die gleichmäßig gegen $F(s)$ konvergiert. Unser Hilfssatz lehrt aber*), daß dann auch *die zu $F(s)$ zugeordneten Funktionen*

$$F_r(s) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{1-r^2}{1-2r\cos(s-t)+r^2} F(t)\,dt$$

für $r = 1$ gleichmäßig gegen $F(s)$ konvergieren, wenn $F(s)$ eine stetige periodische Funktion bedeutet.

2) *Die Fejérsche Summationsmethode der trigonometrischen Reihen.* Ist $F(s)$ eine periodische Funktion, so braucht bekanntlich die Reihe

$$[F(s)]_n = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{\sin\frac{2n+1}{2}(s-t)}{\sin\frac{s-t}{2}} F(t)\,dt$$

nicht zu konvergieren. Setzen wir aber

$$[F^*(s)]_n = \frac{[F(s)]_0 + [F(s)]_1 + \cdots + [F(s)]_{n-1}}{n},$$

so konvergiert, wie Herr Fejér gezeigt hat, die Folge dieser $[F^*(s)]_n$

*) Der Umstand, daß die zugeordnete Funktionenmenge nicht abzählbar, sondern von der Mächtigkeit des Kontinuums ist, ist offenbar unwesentlich.

gleichmäßig gegen $F(s)$. In der Tat man findet durch eine einfache Rechnung

$$[F^*(s)]_n = \frac{1}{2n\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\sin^2 n\frac{s-t}{2}}{\sin^2 \frac{s-t}{2}} F(t)\, dt.$$

Durch diese Formel ist jeder Funktion $F(s)$ die Funktionenfolge $[F^*(s)]_n$ zugeordnet; diese Zuordnung erfüllt die Annahme A), und da

$$\frac{1}{2n\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\sin^2 n\frac{s-t}{2}}{\sin^2 \frac{s-t}{2}}\, dt = 1$$

ist, ist auch die Annahme B) erfüllt. Man sieht auch leicht ein, daß die zu den trigonometrischen Polynomen zugeordneten Funktionenfolgen gleichmäßig gegen diese Funktionen konvergieren. Daraus folgt aber auf Grund unseres Hilfssatzes und des oben genannten Weierstraßschen Theorems der Satz von Herrn Fejér.

3) Wir machen schließlich noch eine Anwendung von unserem Hilfssatze auf die *Konvergenztheorie der Sturm-Liouvilleschen Reihen.*

An den Bezeichnungen des vorigen Kapitels (S. 340) festhaltend, betrachten wir das dort behandelte Sturm-Liouvillesche Orthogonalsystem $v_1(z), v_2(z), \cdots$ und setzen wieder

$$K_n(z,t) = v_1(z)\, v_1(t) + \cdots + v_n(z)\, v_n(t).$$

Wir haben (S. 341) bewiesen, daß die Differenz:

$$\Phi_n(z,t) = K_n(z,t) - \frac{2}{\pi} \sum_{p=1,\cdots,n} \cos pz \cos pt$$

dem Betrage nach unterhalb einer von n, z und t unabhängigen oberen Grenze Φ liegt; daraus schließen wir, daß die durch das Integral

$$(10)\quad f_n(z) = \int_0^{\pi} \Big\{ K_n(z,t) - \frac{2}{\pi} \sum_{p=1,\cdots,n} \cos pz \cos pt \Big\} f(t)\, dt = \int_0^{\pi} \Phi_n(z,t) f(t)\, dt$$

gegebene Zuordnung die Voraussetzungen unseres Hilfssatzes befriedigt. Bedeutet nun $\varphi(z)$ irgend eine *analytische* Funktion, die also dem Bereiche *beider* Orthogonalsysteme

$$1, \cos z, \cos 2z, \cdots, \quad \text{und} \quad v_1(z), v_2(z), v_3(z), \cdots$$

angehört, so konvergieren bekanntlich beide Integrale:

$$\frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \sum_{p=1,\cdots,n} \cos pz \cos pt\, \varphi(t)\, dt \quad \text{und} \quad \int_0^{\pi} K_n(z,t)\, \varphi(t)\, dt$$

mit wachsendem n gleichmäßig gegen $\varphi(x)$, da die Fourier-Reihen dieser Funktionen in bezug auf beide Orthogonalsysteme gleichmäßig konvergieren. Folglich hat das Integral

$$\int_0^\pi \Phi_n(x, t)\, \varphi(t)\, dt$$

den Grenzwert Null. Unser Hilfssatz lehrt nun, daß das Integral (10) auch dann gegen Null konvergiert, wenn $f(x)$ eine beliebige Funktion ist, die durch die Funktionen $\varphi(x)$ gleichmäßig approximierbar ist. Mit anderen Worten, unser Integral konvergiert gegen Null, wenn $f(x)$ eine beliebige stetige Funktion ist. Es folgt daraus unmittelbar der folgende Satz:

Sei $f(x)$ eine beliebige stetige Funktion; *die Fourier-Reihe dieser Funktion in bezug auf das Orthogonalsystem* $v_1(x), v_2(x), \cdots$ *konvergiert bezw. divergiert, je nachdem die Kosinus-Reihe dieser Funktion konvergent oder divergent ist.*

Ist nun $F(x)$ eine *beliebige* im Lebesgueschen Sinne integrierbare Funktion, so konstruieren wir eine Folge von *stetigen* Funktionen: $f'(x)$, $f''(x), \cdots$ derart, daß

$$\lim_{p=\infty} \int_0^\pi |F(x) - f^{(p)}(x)|\, dx = 0$$

ist. Es ist dann offenbar für jedes p

$$\left|\int_0^\pi \Phi_n(x, t)\, F(t)\, dt\right| \leqq \Phi \int_0^\pi |F(t) - f^{(p)}(t)|\, dt + \left|\int_0^\pi \Phi_n(x, t)\, f^{(p)}(t)\, dt\right|.$$

Aus dieser Ungleichung schließen wir mit Hilfe des soeben bewiesenen Satzes, daß

$$\lim_{n=\infty} \int_0^\pi \Phi_n(x, t)\, F(t)\, dt = 0$$

ist, d. h. *die Sturm-Liouvillesche Entwicklung einer integrablen Funktion ist an einer Stelle konvergent bezw. divergent, je nachdem die Kosinus-Reihe dieser Funktion an dieser Stelle konvergent oder divergent ist***).

Man sieht auch sofort, wie diese Sätze eventuell zu modifizieren sind, wenn man statt der Randbedingungen (5) (S. 340) irgend ein anderes Paar von homogenen Randbedingungen zugrunde legt.

---

*) Bei Zugrundelegung der Randbedingungen (5) bezw. (5') umfaßt nämlich der Bereich des Funktionensystems $v_1(x), v_2(x), \cdots$ *alle* stetigen Funktionen.

**) Diese Bemerkung gestattet einen neuen Beweis des Satzes, daß es stetige Funktionen gibt, deren Sturm-Liouvillesche Reihen divergieren.

§ 3.

Die Summation der Sturm-Liouvilleschen Reihen.

Wir wollen nun zeigen, daß die von Herrn Fejér auf die trigonometrischen Reihen angewandte Summationsmethode bei den Sturm-Liouvilleschen Reihen mit demselben Erfolg anwendbar ist.

Wir halten an den Bezeichnungen des § 2 des ersten Kapitels fest und betrachten im Intervall $[\alpha, \beta]$ die Eigenfunktionen $u_1(x), u_2(x), \cdots$ der Differentialgleichung

$$L(u) \equiv \frac{d}{dx}\left(p\frac{du}{dx}\right) + qu + \lambda u = 0, \tag{4}$$

$$(p(x) > 0 \text{ im Intervall } [\alpha, \beta])$$

mit einem Paar von homogenen Randbedingungen

$$\frac{du}{dx} - hu = 0 \text{ für } x = \alpha \text{ und } \frac{du}{dx} + Hu = 0 \text{ für } x = \beta. \tag{5}$$

Die Eigenfunktionen der vermöge der Liouvilleschen Transformation aus (4) entstehenden Differentialgleichung mögen wiederum mit $v_1(z)$, $v_2(z), \cdots$ bezeichnet werden. Wegen der S. 344 abgeleiteten Relationen zwischen den beiden Orthogonalsystemen $u_n(x)$ und $v_n(z)$ genügt es offenbar, sich auf dieses letzte System zu beschränken, da die für diese erhaltenen Resultate ohne jede Schwierigkeit auf das Funktionensystem $u_n(x)$ übertragbar sind.

Sei $f(z)$ eine beliebige Funktion, deren Fourier-Reihe

$$\sum_{n=1,2,\cdots} v_n(z) \int_0^\pi f(z)\, v_n(z)\, dt$$

ist; wir betrachten die *aus den Teilsummen dieser Reihe gebildeten arithmetischen Mittel*

$$[f^*(z)]_1 = [f(z)]_1,\ [f^*(z)]_2 = \frac{[f(z)]_1 + [f(z)]_2}{2},$$

$$[f^*(z)]_3 = \frac{[f(z)]_1 + [f(z)]_2 + [f(z)]_3}{3}, \cdots.$$

Setzen wir nun in gleicher Weise wie früher

$$K_n^*(z, t) = \frac{K_1(z, t) + K_2(z, t) + \cdots + K_n(z, t)}{n}, \tag{11}$$

so ist

$$[f_n^*(z)]_n = \int_0^\pi K_n^*(z, t) f(t)\, dt.$$

Ordnen wir nun jeder Funktion $f(z)$ die so definierten Funktionen

$$[f^*(z)]_1, [f^*(z)]_2, [f^*(z)]_3, \cdots$$

zu, so befriedigt diese Zuordnung offenbar die Annahme A) unseres Hilfssatzes S. 350. Ist außerdem $f(z) = v_n(z)$, so ist die zu $v_n(z)$ zugeordnete Funktionenfolge:

$$0, 0, \cdots, 0, \frac{v_n(z)}{n}, \frac{2v_n(z)}{n+1}, \cdots, \frac{pv_n(z)}{n+p}, \cdots$$

und wir sehen, daß diese Funktionenfolge für $p = \infty$ gleichmäßig gegen $v_n(z)$ konvergiert. Es folgt daraus auch unmittelbar, daß, wenn $v(z)$ ein endliches Aggregat von der Form

$$v(z) = a_1 v_1(z) + \cdots + a_n v_n(z)$$

(mit konstanten Koeffizienten a) bedeutet, die dieser Funktion zugeordnete Funktionenfolge gleichmäßig gegen $v(z)$ konvergiert. Erfüllt nun diese Zuordnung auch die Annahme B) unseres Hilfssatzes, so kann man daraus schließen, daß *die Fourier-Reihe jeder Funktion, die im Bereiche des orthogonalen Funktionensystems $v_n(z)$ liegt, durch die Methode des arithmetischen Mittels summierbar ist.*

Es genügt aber, um dies zu zeigen, offenbar zu beweisen, daß das Integral

$$\int_0^\pi |K_n^*(z, t)|\, dt$$

unterhalb einer von n und z unabhängigen Grenze M bleibt. Nun ist aber (cf. S. 341)

$$K_n(z, t) = \frac{2}{\pi} \sum_{p=1,\cdots,n} \cos pz \cos pt + \Phi_n(z, t),$$

und wir haben an jener Stelle gezeigt, daß $\Phi_n(z, t)$ unterhalb einer von n, z und t unabhängigen Grenze bleibt. Da aber

$$K_n^*(z, t) = \frac{\sum_{p=1} \cos pz \cos pt + \sum_{p=1,2} \cos pz \cos pt + \cdots + \sum_{p=1,\cdots,n} \cos pz \cos pt}{n}$$

$$+ \frac{\Phi_1(z, t) + \cdots + \Phi_n(z, t)}{n}$$

ist, so folgt daraus, daß $\int_0^\pi |K_n^*(z, t)|\, dt$ sicherlich unterhalb einer endlichen Grenze liegt, da

$$\int_0^{\pi} \left| \frac{\sum_{p=1} \cos pz \cos pt + \cdots + \sum_{p=1,\cdots,n} \cos pz \cos pt}{n} \right| dt$$

$$= \frac{1}{2n} \int_0^{\pi} \left| -(n+1) + \frac{1}{2} \left\{ \frac{\sin^2(n+1)\frac{z+t}{2}}{\sin^2 \frac{z+t}{2}} + \frac{\sin^2(n+1)\frac{z-t}{2}}{\sin^2 \frac{z-t}{2}} \right\} \right| dt$$

$$\leqq \frac{n+1}{2n}\pi + \frac{1}{4n} \int_0^{\pi} \left| \frac{\sin^2(n+1)\frac{z+t}{2}}{\sin^2 \frac{z+t}{2}} + \frac{\sin^2(n+1)\frac{z-t}{2}}{\sin^2 \frac{z-t}{2}} \right| dt$$

$$= \frac{n+1}{2n}\pi + \frac{n+1}{4n}\pi = \frac{3(n+1)}{4n}\pi$$

ist, und $\frac{\Phi_1(z,t) + \cdots + \Phi_n(z,t)}{n}$ kleiner als eine von n, z, t unabhängige Zahl bleibt.

Damit ist gezeigt, daß auch die zweite Annahme unseres Hilfssatzes erfüllt ist, und wir erhalten das Resultat*):

Die Sturm-Liouvillesche Entwicklung einer Funktion, die im Bereiche des betrachteten Sturm-Liouvilleschen Orthogonalsystems liegt, ist stets durch die Methode des arithmetischen Mittels summierbar.

Legt man die Randbedingungen (5) zugrunde, so besteht der Bereich des betrachteten Orthogonalsystems aus allen stetigen Funktionen (da alle zweimal differenzierbaren Funktionen, die die Randbedingung (5) erfüllen, entwickelbar sind); daraus folgt der folgende Satz: *Entwickelt man eine stetige Funktion $f(x)$ auf die Fouriersche Weise in eine Reihe, die nach den die Randbedingungen* (5) *erfüllenden Eigenfunktionen der Differentialgleichung* (4) *fortschreitet, so konvergiert die Folge der arithmetischen Mittel $[f^*(x)]_n$ gleichmäßig gegen die Funktion $f(x)$***).

Legt man statt der Randbedingungen (5) ein anderes Paar von Bedingungen zugrunde, etwa

$$u(\alpha) = 0 \quad \text{und} \quad u(\beta) = 0, \tag{12}$$

so kann man in genau derselben Weise den Satz beweisen, daß die Folge

*) Natürlich kann man diesen Satz auch aus dem Satze S. 355 ableiten, doch scheint es zweckmäßig zu sein, diesen sehr verallgemeinerungsfähigen Weg einzuschlagen.

**) Eine unmittelbare Folge dieses Satzes ist, daß, wenn die Sturm-Liouvillesche Reihe einer stetigen Funktion $f(s)$ an der Stelle $s = a$ konvergiert, ihre Summe gleich $f(a)$ ist.

der arithmetischen Mittel $[f^*(x)]_n$ gleichmäßig gegen $f(x)$ konvergiert, wenn $f(x)$ im Bereich der $u_n(x)$ liegt. Dabei ist aber zu beachten, daß der Bereich jetzt aus den stetigen Funktionen gebildet wird, die an den Stellen $x = \alpha$ und $x = \beta$ verschwinden, d. h.: *Entwickelt man eine die Randbedingung* (12) *erfüllende stetige Funktion nach den Eigenfunktionen der Differentialgleichung* (4), *die die Randbedingung* (12) *befriedigen, so ist diese Reihe nach der üblichen Terminologie „einfach unbestimmt", d. h. die aus den Partialsummen* $[f(s)]_n$ *gebildete Folge der arithmetischen Mittel* $\frac{[f(s)]_1 + \cdots + [f(s)]_n}{n}$ *konvergiert gleichmäßig gegen die Funktion* $f(s)$. Entsprechend ist der Satz zu modifizieren, wenn man ein anderes Paar von homogenen Randbedingungen zugrunde legt.

§ 4.

Verallgemeinerungen.

Die Untersuchungen dieses Kapitels sind unmittelbar auf die Entwicklung von Funktionen mehrerer Veränderlichen anwendbar, da unser Hilfssatz — der die alleinige Grundlage der Beweise dieses Abschnittes ist — auch in diesen allgemeineren Fällen richtig bleibt. (Cf. S. 350.)

Brechen wir die formal gebildete Fourier-Reihe einer Funktion $f(s, \sigma)$ in bezug auf das Orthogonalsystem $\varphi_1(s), \varphi_2(s), \cdots$

$$(13) \qquad \sum_{(p)} \sum_{(q)} \varphi_p(s)\, \varphi_q(\sigma) \int_\alpha^\beta \int_\alpha^\beta f(t, \tau)\, \varphi_p(t)\, \varphi_q(\tau)\, dt\, d\tau$$

bei dem Gliede mit den Indizes n, m ab, so bezeichnen wir die so erhaltene endliche Summe mit $[f(s, \sigma)]_{n,m}$:

$$[f(s, \sigma)]_{n,m} = \sum_{p=1,\cdots,n,\ q=1,\cdots,m} \varphi_p(s)\varphi_q(\sigma) \int_\alpha^\beta \int_\alpha^\beta f(t, \tau)\, \varphi_p(t)\, \varphi_q(\tau)\, dt\, d\tau.$$

In unserer Bezeichnungsweise (S. 335) ist

$$(13') \qquad [f(s, \sigma)]_{n,m} = \int_\alpha^\beta \int_\alpha^\beta K_n(s, t) K_m(\sigma, \tau) f(t, \tau)\, dt\, d\tau.$$

Erfüllt diese Zuordnung die Bedingungen unseres Hilfssatzes, so können wir schließen, daß die Entwicklung jeder Funktion zweier Variabler, die im Bereiche unseres Orthogonalsystems liegt, gleichmäßig gegen diese Funktion konvergiert.

Kehren wir nun zu den Sturm-Liouvilleschen Funktionensystemen zurück; man zeigt leicht, daß für dieses System die Formel (13') die Voraussetzung B) unseres Hilfssatzes nicht erfüllt. Die Zuordnung

$$(14) \qquad [f^*(s,\sigma)]_{n,n} = \int_0^\pi \int_0^\pi K_n^*(s,t)\, K_n^*(\sigma,\tau)\, f(t,\tau)\, dt\, d\tau,$$

wobei $K^*(s,t)$ die durch die Formel (11) S. 356 definierte Funktion bedeutet, befriedigt aber beide Voraussetzungen unseres Hilfssatzes, da wir gezeigt haben, daß

$$\int_0^\pi |K_n^*(s,t)|\, dt$$

unterhalb einer von n, s und t unabhängigen oberen Grenze liegt. Es folgt daraus unmittelbar, daß die durch (14) definierte Funktionenfolge *gleichmäßig gegen $f(s,\sigma)$ konvergiert, wenn diese Funktion im Bereiche des betrachteten Sturm-Liouvilleschen Systems liegt.*

Es entspricht dieser Tatsache das folgende Summationsverfahren: *Aus den Teilsummen $[f]_{n,m}$, der zweifach unendlichen Reihe* (13) *bilde man die einfache Folge:*

$$(15) \qquad [f^*]_{n,n} = \frac{1}{n^2} \sum_{p=1,\cdots,n} \sum_{q=1,\cdots,n} [f]_{p,q} \qquad (n = 1, 2, \cdots).$$

Liegt nun die Funktion $f(s,\sigma)$ im Bereiche des betrachteten Sturm-Liouvilleschen Funktionensystems, so konvergiert die Folge (15) *gleichmäßig gegen $f(s,\sigma)$**).

Wir machen schließlich noch eine Anwendung von unserem Hilfssatze auf die allgemeine Theorie der Summation von Orthogonalreihen. Es sei ein Summationsverfahren durch die unendlichvielen Funktionen

$$a_1(n),\ a_2(n),\ a_3(n),\ \cdots$$

gegeben; wenn die Summe:

$$K(n;\, a,\, t) = \sum_{p=1,2,\cdots} a_p(n)\, \varphi_p(a)\, \varphi_p(t)$$

konvergiert, so ist die notwendige und hinreichende Bedingung, daß die Fourier-Reihe jeder Funktion, die dem Bereich des vorgelegten Orthogonalsystems angehört, mit Hilfe dieses Summationsverfahrens an der Stelle a „summierbar" sei, daß das Integral

$$\int_\alpha^\beta |K(n;\, a,\, t)|\, dt$$

unterhalb einer von n unabhängigen oberen Grenze bleibt.

---

*) Man könnte statt der einfachen Folge $[f^*]_{n,n}$ auch eine Doppelfolge $[f^*]_{n,m}$ von derselben Eigenschaft definieren, doch diese „einfache" Summation ist der anderen vorzuziehen.

Kapitel III.

Über eine Klasse von orthogonalen Funktionensystemen.

Zweck dieses Abschnittes ist es, eine Klasse von orthogonalen Funktionensystemen zu behandeln, die, neben einer Reihe von sonstigen merkwürdigen Eigenschaften, besonders dadurch ausgezeichnet sind, daß die in bezug auf diese Systeme gebildeten *Fourier-Reihen jeder stetigen Funktion konvergieren und die Funktion darstellen.* In den §§ 1—3 betrachten wir den einfachsten Repräsentanten dieser Klasse; § 4 wird dann die Verallgemeinerung der gewonnenen Sätze auf weitere Systeme geben.

§ 1.

Das orthogonale Funktionensystem χ.

Das vollständige orthogonale Funktionensystem χ, den einfachsten Repräsentanten jener Klasse von Orthogonalsystemen, definieren wir wie folgt:

Es sei $\chi_0(s) = 1$ im ganzen Intervall $[0, 1]$ einschließlich der Grenzen; sodann sei:

$$\begin{aligned} \chi_1(s) &= \;\;1 \quad \text{für} \quad 0 \leqq s < \tfrac{1}{2}, \\ &= -1 \quad \text{für} \quad \tfrac{1}{2} < s \leqq 1 . \end{aligned}$$

Wir setzen ferner:

$$\begin{aligned} \chi_2^{(1)}(s) &= \;\sqrt{2} \;\text{ und }\; \chi_2^{(2)}(s) = \;\;0 \;\text{ für }\; 0 \leqq s < \tfrac{1}{4}, \\ &= -\sqrt{2} \qquad\quad = \;\;0 \;\;„ \;\; \tfrac{1}{4} < s < \tfrac{1}{2}, \\ &= \;\;0 \qquad\quad = \;\sqrt{2} \;\;„ \;\; \tfrac{1}{2} < s < \tfrac{3}{4}, \\ &= \;\;0 \qquad\quad = -\sqrt{2} \;\;„ \;\; \tfrac{3}{4} < s \leqq 1 . \end{aligned}$$

Auf diese Weise fahren wir fort; allgemein definieren wir die Funktionen unseres Systems folgendermaßen: Wir teilen das Intervall $[0, 1]$ in 2^n gleiche Teile und bezeichnen diese Teilintervalle der Reihe nach mit $i_n^{(1)}, i_n^{(2)}, \cdots, i_n^{(2^n)}$. Wir setzen nun:

$$\begin{aligned} \chi_n^{(k)} &= \;\;0 \quad \text{innerhalb der Intervalle } \; i_n^{(1)}, i_n^{(2)}, \cdots, i_n^{(2k-2)}; \\ &= \;\sqrt{2^{n-1}} \quad \text{innerhalb des Intervalles } \; i_n^{(2k-1)}; \\ &= -\sqrt{2^{n-1}} \quad \text{innerhalb des Intervalles } \; i_n^{(2k)}; \\ &= \;\;0 \quad \text{innerhalb der Intervalle } \; i_n^{(2k+1)}, \cdots, i_n^{(2^n)} \\ &\qquad (k = 1, 2, \cdots, 2^{n-1}). \end{aligned}$$

An den Stellen 0 und 1 erteilen wir jeder Funktion $\chi_n^{(k)}(s)$, die im Intervall $\left[0, \frac{1}{2^n}\right]$ bezw. $\left[1-\frac{1}{2^n}, 1\right]$ konstant ist, den Wert zu, den sie bezw. in diesen Intervallen annimmt. Demnach ist $\chi_n^{(k)}(s)$ eine streckenweise konstante Funktion, die mit der Ausnahme der Stellen $\frac{2k-2}{2^n}, \frac{2k-1}{2^n}, \frac{2k}{2^n}$, wo sie einen endlichen Sprung erleidet, überall stetig ist. Wir setzen nun fest, daß $\chi_n^{(k)}$ an diesen Stellen gleich dem arithmetischen Mittel der Werte sei, die sie in den beiden daselbst zusammenstoßenden Intervallen annimmt.

Wir behaupten nun, daß die so definierten abzählbar unendlichvielen Funktionen

$$\chi: \qquad \chi_0(s),\ \chi_1(s),\ \chi_2^{(1)}(s),\ \chi_2^{(2)}(s),\ \chi_3^{(1)}(s),\ \chi_3^{(3)}(s),\ \cdots$$

ein vollständiges orthogonales Funktionensystem bilden. In der Tat, sind $\chi_n^{(k)}(s)$ und $\chi_\nu^{(\varkappa)}(s)$ zwei verschiedene Funktionen des Systems χ und ist $n > \nu$, so besitzt $\chi_\nu^{(\varkappa)}(s)$ in dem ganzen Intervall, wo $\chi_n^{(k)}(s)$ von Null verschieden ist, einen konstanten Wert. Es ist daher

$$\int_0^1 \chi_n^{(k)}(s)\,\chi_\nu^{(\varkappa)}(s)\,ds = \text{const.} \int_0^1 \chi_n^{(k)}(s)\,ds = 0,$$

woraus man unmittelbar schließt, daß das Funktionensystem χ die *Orthogonalitätseigenschaft* besitzt. Um zu zeigen, daß auch die *Vollständigkeitsrelation* erfüllt ist, genügt es offenbar zu beweisen, daß jede im Lebesgueschen Sinne integrierbare Funktion $f(s)$, die für alle in Betracht kommenden Wertepaare n, k die Relation

$$\int_0^1 f(s)\,\chi_n^{(k)}(s)\,ds = 0 \tag{16}$$

befriedigt, bis auf eine Nullmenge identisch verschwindet. Betrachten wir zu diesem Zwecke die Funktion

$$F(s) = \int_0^s f(s)\,ds;$$

wegen der Gleichung

$$\int_0^1 f(s)\,\chi_0(s)\,ds = 0$$

ist

$$F(1) = 0.$$

Die letzte Gleichung liefert in Verbindung mit der Gleichung

$$\int_0^1 f(s)\,\chi_1(s)\,ds = \int_0^{\frac{1}{2}} f(s)\,ds - \int_{\frac{1}{2}}^1 f(s)\,ds$$

die Aussage, daß $F\left(\frac{1}{2}\right) = 0$ ist. Daraus und aus den Gleichungen

$$\int_0^1 f(s)\,\chi_2^{(1)}(s)\,ds = \sqrt{2}\left\{\int_0^{\frac{1}{4}} f(s)\,ds - \int_{\frac{1}{4}}^{\frac{1}{2}} f(s)\,ds\right\} = 0,$$

$$\int_0^1 f(s)\,\chi_2^{(2)}(s)\,ds = \sqrt{2}\left\{\int_{\frac{1}{2}}^{\frac{3}{4}} f(s)\,ds - \int_{\frac{3}{4}}^{1} f(s)\,ds\right\} = 0$$

schließen wir, daß

$$F\left(\frac{1}{4}\right) = F\left(\frac{3}{4}\right) = 0$$

ist, usf. Man kann auf diese Weise folgern, daß die Funktion $F(s)$ stets gleich Null ist, wenn s ein endlicher Dualbruch von der Form $\frac{1}{2^{p_1}} + \cdots + \frac{1}{2^{p_n}}$ ist, und diese Punkte bilden eine überall dichte Punktmenge. Bekanntlich ist aber die Funktion $F(s)$ eine stetige Funktion, und es ist mit Ausschluß einer Menge vom Maße Null

$$f(s) = \frac{d}{ds}(F(s)).$$

Wir schließen daraus, daß $F(s)$ im ganzen Intervall $[0, 1]$ identisch verschwindet, und daß auch $f(s)$ — von einer Punktmenge vom Maße Null abgesehen — überall Null ist. Damit ist auch die Vollständigkeit des betrachteten Orthogonalsystems bewiesen und gezeigt, daß *jede integrierbare Funktion, die die Relationen* (16) *befriedigt, mit Ausschluß einer Nullmenge verschwindet.*

§ 2.

Entwicklungen nach dem orthogonalen Funktionensystem χ.

Wir kommen nun zu dem wichtigsten Punkte dieser Untersuchung, indem wir zeigen, daß die *in bezug auf das soeben definierte Orthogonalsystem χ gebildete Fourier-Reihe jeder im Intervall* $[0, 1]$ *stetigen Funktion $f(s)$ gleichmäßig gegen diese Funktion konvergiert.*

Brechen wir die unendliche Reihe

$$\chi_0(s)\int_0^1 f(t)\,\chi_0(t)\,dt + \chi_1(s)\int_0^1 f(t)\,\chi_1(t)\,dt + \cdots$$

$$+ \chi_n^{(1)}(s)\int_0^1 f(t)\,\chi_n^{(1)}(t)\,dt + \cdots + \chi_n^{(p)}(s)\int_0^1 f(t)\,\chi_n^{(p)}(t)\,dt + \cdots$$

bei irgend einem Glied, etwa bei $\chi_n^{(p)}(s)\int_0^1 f(t)\,\chi_n^{(p)}(t)\,dt$, ab; wir erhalten eine endliche Summe, die wir fortan mit $[f(s)]_n^{(p)}$ bezeichnen:

$$[f(s)]_n^{(p)} = \chi_0(s)\int_0^1 f(t)\,\chi_0(t)\,dt + \cdots + \chi_n^{(p)}(s)\int_0^1 f(t)\,\chi_n^{(p)}(t)\,dt.$$

Setzen wir analog wie früher

$$K_n^{(p)}(s,t) = \chi_0(s)\,\chi_0(t) + \cdots + \chi_n^{(1)}(s)\,\chi_n^{(1)}(t) + \cdots + \chi_n^{(p)}(s)\,\chi_n^{(p)}(t),$$

so ist

$$[f(s)]_n^{(p)} = \int_0^1 K_n^{(p)}(s,t)\,f(t)\,dt.$$

Die letzte Gleichung definiert unendlichviele Funktionen zweier Variabler

$$K_0(s,t),\ K_1(s,t),\ K_2^{(1)}(s,t),\ K_2^{(2)}(s,t),\ \cdots$$

und wir wenden uns nun zu der Untersuchung der Eigenschaften dieser Funktionen.

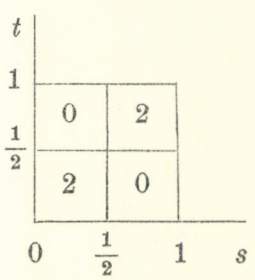
Die in dem Quadrate $0 \leqq s \leqq 1,\ 0 \leqq t \leqq 1$ definierte Funktion $K_0(s,t)$ ist überall gleich 1. Die Funktion $\chi_1(s)\,\chi_1(t)$ ist innerhalb der Quadrate

$$Q_{11}: 0 \leqq s \leqq \tfrac{1}{2},\ 0 \leqq t \leqq \tfrac{1}{2} \quad \text{und} \quad Q_{22}: \tfrac{1}{2} \leqq s \leqq 1,\ \tfrac{1}{2} \leqq t \leqq 1$$

gleich 1, in den anderen beiden Quadraten

$$Q_{12}\cdot \tfrac{1}{2} \leqq s \leqq 1,\ 0 \leqq t \leqq \tfrac{1}{2} \quad \text{und} \quad Q_{21}: 0 \leqq s \leqq \tfrac{1}{2},\ \tfrac{1}{2} \leqq t \leqq 1$$

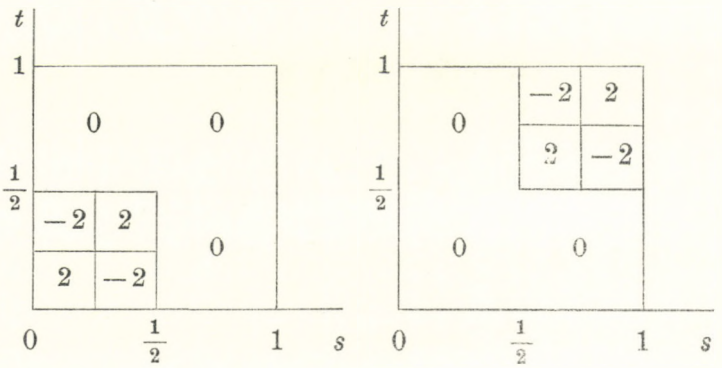
gleich -1; daher ist $K_1(s,t)$ in Q_{11} und Q_{22} gleich 2, in Q_{12}, Q_{21} aber gleich Null.



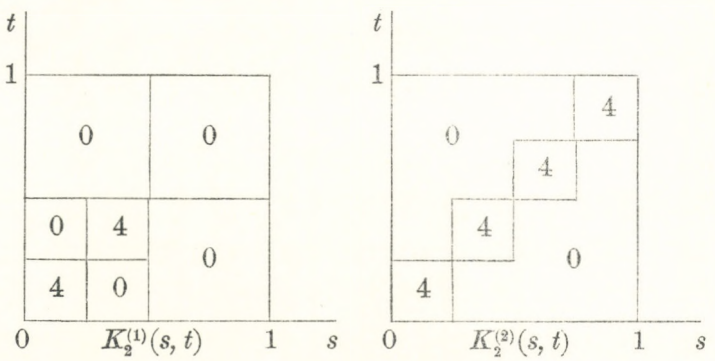
$K_1(s,t)$

An den Geraden $s = \frac{1}{2}$ bezw. $t = \frac{1}{2}$ ist die Funktion $K_1(s,t)$ natürlich gleich dem arithmetischen Mittel der Werte, die sie in den daselbst zusammenstoßenden Quadraten annimmt. Um noch $K_2^{(1)}(s,t)$ und $K_2^{(2)}(s,t)$

zu erhalten, zeichnen wir in der Figur die Werte an, die die Funktionen $\chi_2^{(1)}(s)\chi_2^{(1)}(t)$ bezw. $\chi_2^{(2)}(s)\chi_2^{(2)}(t)$ annehmen.



Die Werte von $K_2^{(1)}(s,t)$ und $K_2^{(2)}(s,t)$ sind daher graphisch durch die Figuren



dargestellt. Daraus ist schon das Bildungsgesetz der Funktionen $K_n^{(p)}(s,t)$ ersichtlich: Um den Wertevorrat der Funktion $K_n^{(2^n-1)}(s,t)$ zu erhalten, teilen wir das Einheitsquadrat Q in 2^{2^n} gleiche Teilquadrate; in den Teilquadraten $q_1, \cdots, q_{2^n}$, die an der Diagonale $s=t$ des Quadrates Q liegen, ist

$$K_n^{(2^n-1)} = 2^n;$$

innerhalb der anderen Quadrate ist $K_n^{(2^n-1)}$ gleich Null. An den Stellen, wo diese Funktion einen Sprung erleidet, nimmt sie das arithmetische Mittel der Werte an, die sie in den daselbst zusammenstoßenden Quadraten besitzt. Um nun etwa $K_{n+1}^{(p)}(s,t)$ zu erhalten, teilen wir jedes der p ersten Teilquadrate $q_1, q_2, \cdots, q_p$ der vorigen Einteilung, die an der Diagonale $s=t$ liegen, in vier gleiche Quadrate ein, wie es die Figur andeutet:

$$q_\varkappa = q_\varkappa^{(1,1)} + q_\varkappa^{(1,2)} + q_\varkappa^{(2,1)} + q_\varkappa^{(2,2)} \qquad (\varkappa = 1, \cdots, p).$$

$q_\varkappa^{(2,1)}$	$q_\varkappa^{(2,2)}$
$q_\varkappa^{(1,1)}$	$q_\varkappa^{(1,2)}$

$q_\varkappa$

Dann ist $K_{n+1}^{(p)}(s,t)$ durch folgendes Gesetz gegeben: In den Teilquadraten $q_\varkappa^{(1,1)}$, $q_\varkappa^{(2,2)}$ ist $K_{n+1}^{(p)}(s,t) = 2^{n+1}$; in den Teilquadraten $q_\varkappa^{(1,2)}$, $q_\varkappa^{(2,1)}$ aber gleich 0. Innerhalb jedes anderen Quadrates ist $K_{n+1}^{(p)}(s,t) = K_n^{(2^n-1)}(s,t)$*). An den Stellen, wo $K_{n+1}^{(p)}(s,t)$ unstetig wird (d. h. an denjenigen Stellen s, t, wo die eine der Größen s und t ein endlicher Dualbruch von der Form $\frac{1}{2^{p_1}} + \cdots + \frac{1}{2^{n+1}}$ ist), bestimmen wir sie nach der oben erwähnten Regel.

Um die Richtigkeit dieses Gesetzes nachzuweisen, nehmen wir an, es sei für $K_n^{(2^n-1)}(s,t)$ richtig; es ist nun

$$K_{n+1}^{(1)}(s,t) = K_n^{(2^n-1)}(s,t) + \chi_{n+1}^{(1)}(s)\,\chi_{n+1}^{(1)}(t).$$

Da aber $\chi_{n+1}^{(1)}(s)$ nur im Intervalle $0 \leqq s \leqq \frac{1}{2^n}$ von Null verschieden ist, so kann $K_{n+1}^{(1)}(s,t)$ nur in dem Quadrate

$$0 \leqq s \leqq \frac{1}{2^n}, \quad 0 \leqq t \leqq \frac{1}{2^n}$$

d. h. in q_1 von $K_n^{(2^n-1)}(s,t)$ verschieden sein. Da aber

$$\begin{aligned} \chi_{n+1}^{(1)}(s)\,\chi_{n+1}^{(1)}(t) = \quad & 2^n \text{ ist in den Teilquadraten } q_1^{(1,1)}, q_1^{(2,2)}, \\ = -\,& 2^n \text{ ist in den Teilquadraten } q_1^{(1,2)}, q_1^{(2,1)}, \end{aligned}$$

so folgt, daß $K_{n+1}^{(1)}(s,t)$ den soeben angegebenen Wert hat:

$$\begin{aligned} K_{n+1}^{(1)}(s,t) &= 2^{n+1} \text{ in } q_1^{(1,1)}, q_1^{(2,2)} \\ &= 0 \quad\;\; \text{in } q_1^{(1,2)}, q_1^{(2,1)}. \end{aligned}$$

Bezeichnen wir mit $f(s)$ eine beliebige im Lebesgueschen Sinne integrierbare Funktion, die im Intervall [0, 1] definiert ist, und mit $s = a$ eine beliebige Stelle des Intervalls. Es ist dann

$$[f(a)]_n^{(p)} = \int_0^1 K_n^{(p)}(a,t) f(t)\,dt;$$

nehmen wir für den Augenblick an, daß a kein endlicher Dualbruch von der obigen Form sei, so ist die Funktion $K_n^{(p)}(a,t)$ von t überall gleich Null mit Ausnahme eines Intervalls $i_n^{(p)}$, dessen Länge $l_n^{(p)}$ gleich $\frac{1}{2^{n-1}}$

*) d. h. gleich 2^n in den Teilquadraten $q_{p+1}, \cdots, q_{2^n}$ und gleich 0, wenn der Punkt s, t nicht in einem dieser Quadrate liegt.

oder $\frac{1}{2^n}$ ist. In diesem Intervall $i_n^{(p)}$ ist aber $K_n^{(p)}(a,t) = \frac{1}{l_n^{(p)}}$ und wir finden daher

$$[f(a,t)]_n^{(p)} = \frac{1}{l_n^{(p)}} \int_{(i_n^{(p)})} f(t)\,dt.$$

Ist hingegen a ein endlicher Dualbruch, so ist $K_n^{(p)}(s,t)$ in einem Intervalle $\bar{i}_n^{(p)}$ von Null verschieden, dessen Länge

$$\bar{l}_n^{(p)} = \frac{1}{2^{n-2}} \quad \text{oder} \quad = \frac{1}{2^{n-1}}$$

ist; der Wert von $K_n^{(p)}(s,t)$ in diesem Intervall ist aber gleich $\frac{1}{\bar{l}_n^{(p)}}$, und wir erhalten daher auch in diesem Falle

$$[f(a)]_n^{(p)} = \frac{1}{\bar{l}_n^{(p)}} \int_{(\bar{i}_n^{(p)})} f(t)\,dt.$$

In beiden Fällen ist daher die Länge des Integrationsintervalls — das den Punkt $t = a$ enthält — gleich dem reziproken Wert des vor dem Integral stehenden Faktors.

Nun konvergieren aber $l_n^{(p)}$ und $\bar{l}_n^{(p)}$ mit wachsendem n gegen Null, und es konvergieren daher die Partialsummen $[f(a)]_n^{(p)}$ gegen

$$\underset{n=\infty}{L} \frac{1}{l_n^{(p)}} \int_{(i_n^{(p)})} f(t)\,dt.$$

Da die Intervalle $i_n^{(p)}$ sich mit wachsendem n in den Punkt $t = a$ zusammenziehen, so ist dieser Grenzwert nichts anderes als der Wert des Differentialquotienten von $\int_0^s f(t)\,dt$ nach s an der Stelle $s = a$:

$$\underset{n=\infty}{L} \frac{1}{l_n^{(p)}} \int_{(i_n^{(p)})} f(t)\,dt = \left[\frac{d}{ds}\left(\int_0^s f(t)\,dt\right)\right]_{s=a},$$

und wir haben das Resultat: *Ist $f(s)$ eine beliebige Funktion, so konvergieren die Teilsummen ihrer Entwicklung an jeder Stelle $s = a$, wo der Differentialquotient $\frac{d}{ds}\left(\int_0^s f(t)\,dt\right)$ existiert, und stellen diesen Wert dar.*

Da aber — nach einem Satze von Lebesgue —

$$\frac{d}{ds}\left(\int_0^s f(t)\,dt\right)$$

mit Ausnahme einer Menge vom Maße Null überall existiert und mit $f(s)$ übereinstimmt, so folgt daraus: *die Entwicklung einer willkürlichen Funktion nach den Funktionen unseres Orthogonalsystems konvergiert an jeder Stelle mit Ausnahme einer Punktmenge vom Maße Null.*

Ist aber $f(s)$ an jeder Stelle des Intervalls stetig, so ist bekanntlich für jede Stelle ohne Ausnahme

$$f(s) = \frac{d}{ds}\left(\int_0^s f(t)\,dt\right),$$

d. h. *die Fourier-Entwicklung einer beliebigen stetigen Funktion (in bezug auf unser Orthogonalsystem χ) konvergiert an jeder Stelle des Intervalls* [0, 1].*)

§ 3.

Weitere Eigenschaften des orthogonalen Funktionensystems χ.

Wir wollen jetzt einige weitere Eigenschaften unseres Funktionensystems ableiten, die jenen Sätzen der Theorie der trigonometrischen Reihen entsprechen, die man dort durch verschiedene Summationsmethoden erhält.

Aus dem Umstande, daß die Funktionen $K_n^{(p)}(s, t)$ stets positiv sind, schließen wir folgenden Satz:

Bleibt die im Intervall [0, 1] *im Lebesgueschen Sinne integrierbare Funktion $f(s)$ zwischen den Grenzen m und M:*

$$m \leqq f(s) \leqq M,$$

so bleiben auch alle Teilsummen der in bezug auf χ gebildeten Fourier-Reihe von $f(s)$ zwischen diesen Grenzen:

$$m \leqq [f(s)]_n^{(p)} \leqq M.$$

In der Tat, es ist z. B.

$$[f(s)]_n^{(p)} = \int_0^1 K_n^{(p)}(s, t) f(t)\,dt \leqq M \int_0^1 K_n^{(p)}(s, t)\,dt = M.$$

Es sei nun $s = a$ eine beliebige Stelle des Intervalls [0, 1]. Da bei genügend großem n die Funktionen $K_n^{(p)}(a, t)$ sicherlich verschwinden, wenn

$$0 \leqq t \leqq a - \varepsilon$$

oder wenn

$$a + \varepsilon \leqq t \leqq 1$$

*) In einer kürzlich in den „Jahresberichten der deutschen Mathematiker-Vereinigung" (1910) erschienenen Note hat Herr Faber mein Orthogonalsystem zum Gegenstande seiner Untersuchungen gemacht und leitet meine Sätze von neuem ab. Sein Beweisverfahren ist aber von dem hier gegebenen nicht wesentlich verschieden.

ist, wie klein auch die positive Zahl ε gewählt ist, so ist

$$[f(a)]_n^{(p)} = \int_{a-\varepsilon}^{a+\varepsilon} K_n^{(p)}(a,t) f(t)\, dt,$$

sobald n eine bestimmte Grenze überschreitet. Da in dieser Formel das Verhalten der Funktion $f(s)$ in den Intervallen $0 \leqq s \leqq a-\varepsilon$ bezw. $a+\varepsilon \leqq s \leqq 1$ gar nicht zum Ausdruck kommt, schließen wir daraus, daß *die Konvergenz der in bezug auf χ gebildeten Fourier-Reihe einer willkürlichen Funktion an der Stelle $s = a$ nur von dem Verhalten dieser Funktion in der Umgebung dieser Stelle abhängt.*

Stimmen die Funktionen $f(s)$ und $g(s)$ in einem noch so kleinen Intervalle überein, so kann man einen Index N so angeben, daß, sobald $n > N$ ist, alle $[f(s)]_n^{(p)}$ und $[g(s)]_n^{(p)}$ in diesem Intervall ebenfalls übereinstimmen.

In Verbindung mit dem Hauptsatze des vorigen Paragraphen liefern diese letzten Ergebnisse den folgenden Satz: *Die in bezug auf χ gebildete Fourier-Reihe einer Funktion $f(s)$ konvergiert an jeder Stetigkeitsstelle von $f(s)$ gegen diese Funktion.*

§ 4.

Verschiedene Verallgemeinerungen.

Wir können das soeben konstruierte Orthogonalsystem in verschiedenen Richtungen verallgemeinern, ohne seine wesentlichen Eigenschaften zu zerstören. Wir wollen jetzt einige dieser Verallgemeinerungen andeuten.

Wir können vorab ein allgemeineres Einteilungsverfahren der s-Achse zur Konstruktion eines ähnlichen Orthogonalsystems in folgender Weise benutzen: Die erste Funktion des Systems sei wiederum gleich 1; sodann wählen wir eine beliebige Stelle im Intervall $[0, 1]$, etwa α_1, und konstruieren eine Funktion $\bar{\chi}_1(s)$, die in den Intervallen $[0, \alpha_1]$ bezw. $[\alpha_1, 1]$ konstant ist und außerdem die beiden Bedingungen

$$\int_0^1 \bar{\chi}_1(s)\, ds = 0, \quad \int_0^1 (\bar{\chi}_1(s))^2\, ds = 1$$

befriedigt. Wir wählen sodann zwei Stellen $\alpha_1^{(1)}$ und $\alpha_2^{(2)}$ bezw. in den Intervallen $[0, \alpha_1]$ und $[\alpha_1, 1]$ beliebig, und bestimmen die Funktionen $\bar{\chi}_2^{(1)}(0)$ und $\bar{\chi}_2^{(2)}(s)$ durch die folgende Regel: $\bar{\chi}_2^{(1)}(s)$ verschwinde in $[\alpha_1, 1]$ und nehme in den Intervallen $[0, \alpha_2^{(1)}]$ und $[\alpha_2^{(1)}, \alpha_1]$ je einen konstanten Wert an, die so gewählt sein mögen, daß

$$\int_0^1 \bar{\chi}_2^{(1)}(s)\, ds = 0, \quad \int_0^1 (\bar{\chi}_2^{(1)}(s))^2 ds = 1$$

ist. $\overline{\chi}_2^{(2)}(s)$ verschwinde aber in $[0, \alpha_1]$ und nehme in den Intervallen $[\alpha_1, \alpha_2^{(2)}]$ und $[\alpha_1^{(2)}, 1]$ je einen konstanten Wert an, die so gewählt seien, daß die Relationen

$$\int_0^1 \overline{\chi}_2^{(2)}(s)\, ds = 0, \qquad \int_0^1 (\overline{\chi}_2^{(2)}(s))^2\, ds = 1$$

erfüllt sind. Nun wählen wir vier Stellen $\alpha_3^{(1)}, \alpha_3^{(2)}, \alpha_3^{(3)}, \alpha_3^{(4)}$, die bezw. in den Intervallen $[0, \alpha_2^{(1)}], \cdots, [\alpha_2^{(2)}, 1]$ liegen mögen, und konstruieren in entsprechender Weise die Funktionen $\overline{\chi}_3^{(1)}(s), \cdots, \overline{\chi}_3^{(4)}(s)$; und so fahren wir fort. Wir setzen wiederum fest, daß an den Sprungstellen die Funktionen immer gleich dem arithmetischen Mittel der Werte seien, die sie in den daselbst zusammenstoßenden Intervallen annehmen.

Bilden die so gewählten Stellen $\alpha_n^{(p)}$ eine überall dichte Punktmenge, so können wir in genau derselben Weise wie früher S. 362 schließen, daß das so *definierte Orthogonalsystem vollständig ist.* Um zu zeigen, daß dieses Funktionensystem auch die Eigenschaft besitzt, daß alle stetigen Funktionen auf die Fouriersche Weise in eine Reihe entwickelbar sind, die nach den Funktionen dieses Systems fortschreitet, bemerken wir, daß die Funktionen

$$\overline{K}_n^{(p)}(s, t) = \overline{\chi}_0(s)\, \overline{\chi}_0(t) + \cdots + \overline{\chi}_n^{(1)}(s)\, \overline{\chi}_n^{(1)}(t) + \cdots + \overline{\chi}_n^{(p)}(s)\, \chi_n^{p)}(t)$$

für jedes Wertepaar n, p positiv bleiben und daß

$$\int_0^1 \overline{K}_n^{(p)}(s, t)\, dt = 1$$

ist. Bezeichnen wir also wiederum mit $[f(s)]_n^{(p)}$ die endliche Summe, die wir erhalten, wenn wir die Fourier-Reihe der Funktion $f(s)$ bei dem Gliede $\overline{\chi}_n^{(p)}(s) \int_0^1 f(t)\, \overline{\chi}_n^{(p)}(t)\, dt$ abbrechen, so ist

$$[f(s)]_n^{(p)} = \int_0^1 \overline{K}_n^{(p)}(s, t)\, f(t)\, dt; \tag{17}$$

und da die Funktionen $\overline{K}_n^{(p)}(s, t)$ stets positiv sind, so schließen wir daraus, daß $[f(s)]_n^{(p)}$ stets zwischen dem Maximum und Minimum von $f(s)$ bleibt. M. a. W. die vermöge der Gleichung (17) gegebene Zuordnung erfüllt alle Bedingungen unseres Hilfssatzes S. 350, woraus folgt, daß die *in bezug auf das betrachtete Orthogonalsystem gebildete Fourier-Reihe einer beliebigen Funktion $f(s)$ gleichmäßig gegen diese Funktion konvergiert, wenn $f(s)$ in dem Bereiche des Orthogonalsystems liegt.*

Nun ist aber unmittelbar klar, daß jedes endliche Aggregat unserer Orthogonalfunktionen eine streckenweise konstante Funktion ist; umgekehrt

ist aber auch jede streckenweise konstante Funktion, die nur an endlich vielen Stellen $\alpha_n^{(p)}$ einen Sprung erleidet und an einer solchen Stelle gleich dem arithmetischen Mittel der Werte ist, die sie in den daselbst zusammenstoßenden Intervallen annimmt, ein endliches Aggregat unserer Orthogonalfunktionen. Da aber die Sprungstellen $\alpha_n^{(p)}$ überall dicht im Intervall $[0, 1]$ verteilt sind, so sehen wir unmittelbar, daß man jede stetige Funktion durch eine solche streckenweise konstante Funktion beliebig approximieren kann. Damit ist aber gezeigt, daß *der Bereich unseres Orthogonalsystems alle stetigen Funktionen umfaßt, und daher konvergiert die Fourier-Reihe jeder stetigen Funktion gleichmäßig im ganzen Intervall.* Es macht auch gar keine weiteren Schwierigkeiten, den Beweis zu erbringen, daß die Reihe jeder integrierbaren Funktion mit Ausschluß einer Nullmenge überall konvergent ist.

Eine weitere Verallgemeinerung unseres Orthogonalsystems könnten wie dadurch erhalten, daß wir statt der Zweiteilung der Intervalle eine Dreiteilung oder Vierteilung usw. vornehmen; dann definieren wir in gleicher Weise wie früher ein vollständiges orthogonales Funktionensystem, indem wir bei jeder Teilung der Intervalle ein endliches System von streckenweise konstanten Funktionen konstruieren, die auf jeder vorhergehenden Funktion orthogonal stehen und die in den geteilten Intervallen je konstante Werte annehmen. Definiert man — was ja stets möglich ist — bei *jeder* Einteilung eine solche Anzahl von Funktionen, daß keine nicht identisch verschwindende streckenweise konstante Funktion existiert, die auf allen *bisher* definierten Funktionen orthogonal steht und nur an den Einteilungspunkten *dieser* Einteilung einen endlichen Sprung erleidet, so sind — wenn die Einteilungspunkte eine überall dichte Punktmenge bilden — die so erhaltenen Funktionensysteme in dem allgemeinen Sinne vollständig, daß jede im Lebesgueschen Sinne integrierbare Funktion, die auf allen Funktionen des Systems orthogonal steht, mit Ausnahme einer Menge vom Maße Null verschwindet. Sie alle besitzen die oben angegebene Konvergenzeigenschaft, und schließlich gilt auch der Satz, daß die Konvergenz der Fourier-Reihe (in bezug auf diese Funktionensysteme) einer Funktion an einer Stelle nur von dem Verhalten der Funktion in der Umgebung dieser Stelle abhängt.

Zur Theorie der orthogonalen Funktionensysteme.

(Zweite Mitteilung.)*)

Von

Alfred Haar in Göttingen.

Einleitung.

In der Theorie der Reihenentwicklungen nach einem orthogonalen Funktionensystem kann man zwei Arten von Fragestellungen unterscheiden.

Man denkt sich *erstens* eine Funktion $f(s)$ gegeben und bildet in bezug auf das gegebene Orthogonalsystem

$$\varphi_1(s),\ \varphi_2(s),\ \varphi_3(s),\ \cdots \qquad \left\{ \begin{array}{l} \int_0^1 \varphi_p(s)\,\varphi_q(s)\,ds = 0 \quad (p \neq q), \\ \int_0^1 \varphi_p{}^2(s)\,ds = 1 \quad (p = 1, 2, \cdots) \end{array} \right\}$$

die Fourier-Reihe dieser Funktion

$$(1) \qquad \varphi_1(s)\int_0^1 f(t)\,\varphi_1(t)\,dt + \varphi_2(s)\int_0^1 f(t)\,\varphi_2(t)\,dt + \cdots;$$

man sucht nun solche Eigenschaften der Funktion $f(s)$ zu bestimmen, vermöge deren man über die Konvergenz, Divergenz und Summierbarkeit der Reihe (1) entscheiden kann. Zu wesentlich tieferen und schwierigeren Sätzen gelangt man aber

durch die *zweite* Fragestellung. Man denkt sich dabei eine nach den Funktionen des gegebenen Orthogonalsystems fortschreitende überall konvergente Reihe

$$(2) \qquad \varphi(s) = a_1\,\varphi_1(s) + a_2\,\varphi_2(s) + a_3\,\varphi_3(s) + \cdots$$

(mit konstanten Koeffizienten $a_1, a_2, \cdots$) gegeben, die eine Funktion $\varphi(s)$ darstellt, und fragt, welche Eigenschaften sich daraus für die dargestellte

*) Die vorliegende Arbeit ist bis auf unwesentliche Änderungen mit meiner im Dezember 1909 der Göttinger philosophischen Fakultät vorgelegten Habilitationsschrift identisch.

Funktion ableiten lassen. Insbesondere ob die Koeffizienten der Reihe (2) die Fourier-Koeffizienten dieser Funktion sind, d. h. ob

$$a_p = \int_0^1 \varphi(t)\,\varphi_p(t)\,dt \qquad (p = 1, 2, \cdots)$$

ist, und — was ein spezieller Fall dieser Frage ist — ob alle Koeffizienten der Reihe (2) verschwinden müssen, wenn $\varphi(s)$ überall gleich Null ist.

Diese zweite Art von Problemstellung rührt von Riemann her, der zuerst die hier aufgeworfenen Fragen für den Fall der trigonometrischen Reihen in seiner berühmten Habilitationsschrift in Angriff nahm. Die daran anknüpfenden Arbeiten von Cantor und Du Bois-Reymond beantworten insbesondere die zuletzt gestellten Fragen.

Was nun die Theorie der allgemeinen orthogonalen Funktionensysteme, insbesondere die mit den trigonometrischen Funktionen nahe verwandten Sturm-Liouvilleschen Funktionen*) betrifft, so hat man sich bis jetzt ausschließlich mit der ersten Art von Fragestellung beschäftigt; ja man beschränkte sich sogar mit geringen Ausnahmen einfach darauf, Eigenschaften der Funktion $f(s)$ anzugeben, auf Grund deren man auf die Konvergenz der Reihe (1) schließen konnte. Ich habe in meiner Inauguraldissertation**) die Divergenztheorie und Summationstheorie der allgemeinen Orthogonalsysteme in Angriff genommen. Für die Sturm-Liouvilleschen Systeme ergab sich dabei***) das Resultat, daß *die Differenz der n^{ten} Teilsumme der Fourier-Reihe und der Sturm-Liouvilleschen Reihe einer im Lebesgueschen Sinne integrablen Funktion an jeder Stelle gegen Null konvergiert*, woraus ich schloß, daß *die auf die Fouriersche Manier gebildete Sturm-Liouvillesche Reihe einer Funktion an einer Stelle konvergent, diver-*

*) Man gelangt zu diesen Funktionensystemen aus dem sogenannten Eigenwertproblem der Differentialgleichungen. Dieses Problem besteht darin, diejenigen Werte des Parameters λ zu bestimmen, bei denen die Differentialgleichung

$$\frac{d}{dx}\left(p(x)\frac{du}{dx}\right) + q(x)\,u + \lambda u = 0 \qquad (p(x) > 0)$$

eine Lösung besitzt, die an zwei Stellen, etwa $x = \alpha$ und $x = \beta$ homogene Randbedingungen erfüllt, beispielsweise

$$\frac{du}{dx} - hu = 0 \quad \text{für} \quad x = \alpha \quad \text{und} \quad \frac{du}{dx} + Hu = 0 \quad \text{für} \quad x = \beta.$$

Man zeigt nun, daß es, wenn die Funktionen $p(x)$ und $q(x)$ bestimmte Stetigkeitsbedingungen befriedigen, stets abzählbar viele solche Parameterwerte gibt und daß die zugehörigen Lösungen ein vollständiges orthogonales Funktionensystem bilden.

**) „Zur Theorie der orthogonalen Funktionensysteme", Dissertation, Göttingen. Abgedruckt Math. Ann. 69 (1910), S. 331—371.

***) Vergl. S. 30 meiner Dissertation (S. 355 des genannten Annalenbandes).

*gent bzw. summierbar ist, je nachdem die in ähnlicher Weise gebildete Kosinusreihe dieser Funktion an dieser Stelle konvergent, divergent bzw. summierbar ist**).*

Das Hauptziel der vorliegenden Arbeit ist nun, die Theoreme jener für trigonometrische Reihen auf Riemann zurückgehenden Theorie für die allgemeinen Sturm-Liouvilleschen Reihen zu entwickeln. Es gelingt, alle Sätze dieser Theorie in sinngemäßer Weise auf diese Funktionensysteme zu übertragen; insbesondere beweisen wir

den *Cantorschen Eindeutigkeitssatz*, d. h. den Satz, daß alle Koeffizienten der Sturm-Liouvilleschen Reihe

$$a_1 u_1(x) + a_2 u_2(x) + a_3 u_3(x) + \cdots$$

verschwinden, wenn die Reihe überall Null darstellt.**)

Ferner wird das Analogon des *Du Bois-Reymondschen Satzes* abgeleitet, der aussagt, daß die Koeffizienten der überall konvergenten Reihe

$$u(x) = a_1 u_1(x) + a_2 u_2(x) + a_3 u_3(x) + \cdots$$

auf die Fouriersche Manier aus $u(x)$ gebildet werden, wenn diese Funktion dem Betrage nach für jeden Wert von x unterhalb einer oberen Grenze bleibt.

Schließlich erhält man die den Riemannschen Bedingungen für die Darstellbarkeit durch eine trigonometrische Reihe analogen notwendigen und hinreichenden Bedingungen für die Darstellbarkeit einer Funktion durch eine Sturm-Liouvillesche Reihe.

Die Grundlage dieser ganzen Untersuchung ist aber ein Satz, der in dieser Theorie dieselbe Rolle spielt, wie das bekannte *Riemannsche Theorem* in der Lehre der trigonometrischen Reihen. Der betreffende Satz Riemanns, der das Hauptresultat seiner Abhandlung bildet, ist folgender: Die trigonometrische Reihe mit gegen Null konvergierenden Koeffizienten

$$f(x) = \sum_{n=0,1,2,\cdots} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$

konvergiere an der Stelle $x = a$. Riemann bildet daraus, indem er jede trigonometrische Funktion in dieser Reihe durch den zugehörigen negativen *Eigenwert*, d. h. durch $-n^2$, dividiert***), eine neue Reihe

---

*) Dieser in meiner Dissertation bewiesene Satz enthält als Spezialfälle die Theoreme, die seitdem von Herrn W. Stekloff in seiner Note „Solution générale du problème de développement d'une fonction arbitraire...", Roma Acc. Linc. Rend. 1910, auf andere Weise abgeleitet wurden.

**) Dieser Satz wurde für die nach den Legendreschen Polynomen fortschreitenden Reihen von Dini bewiesen. Diese Reihen sind aber keine regulären Sturm-Liouvilleschen Reihen, da in der Differentialgleichung der Legendre-Polynome $p(x) = 1 - x^2$ für $x = \pm 1$ verschwindet.

***) Es ist nämlich

$$\frac{d^2 \cos nx}{dx^2} + n^2 \cos nx = 0, \qquad \frac{d^2 \sin nx}{dx^2} + n^2 \sin nx = 0.$$

$$F(x) = -\sum_{n=0,1,2,\cdots}' \frac{a_n \cos nx + b_n \sin nx}{n^2},$$

die offenbar gleichmäßig konvergiert und eine stetige Funktion darstellt; er zeigt nun, daß

$$\lim_{\delta=0} \frac{F(a+\delta) - 2F(a) + F(a-\delta)}{\delta^2} = f(a)$$

ist. — Betrachten wir nun ein beliebiges Sturm-Liouvillesches Funktionensystem

$$v_1(z),\ v_2(z),\ v_3(z),\ \cdots,$$

das etwa aus der Differentialgleichung

$$\frac{d^2v}{dz^2} + Qv + \lambda v = 0$$

entspringt*), und sei λ_n der zu $v_n(z)$ gehörige Eigenwert. Wir werden dann im Anschluß an das obige Theorem folgenden Satz beweisen:

Ist $a_1, a_2, a_3, \cdots$ eine gegen Null konvergierende Zahlenfolge und konvergiert die Reihe

$$f(z) = a_1 v_1(z) + a_2 v_2(z) + a_3 v_3(z) + \cdots \tag{3}$$

an der Stelle $z = a$, so konvergiert die neue Reihe, die wir dadurch erhalten, daß wir in (3) *jede Funktion durch den zugehörigen negativen Eigenwert $(-\lambda_n)$ dividieren*

$$F(z) = -\frac{a_1}{\lambda_1} v_1(z) - \frac{a_2}{\lambda_2} v_2(z) - \frac{a_3}{\lambda_3} v_3(z) - \cdots$$

absolut und gleichmäßig für jedes z und stellt daher eine stetige Funktion $F(z)$ dar. Wir beweisen ferner die Limesgleichung

$$\lim_{\delta=0} \left(\frac{F(a+\delta) - 2F(a) + F(a-\delta)}{\delta^2} + Q(a)\, F(a) \right) = f(a).$$

Man leitet aus diesem allgemeinen Theorem sodann mit Leichtigkeit die oben genannten Verallgemeinerungen des Cantorschen und Du Bois-Reymondschen Satzes ab.

§ 1.

Die Verallgemeinerung des Riemannschen Theorems.

Um das Orthogonalsystem $u_1(x), u_2(x), \cdots$ zu studieren, das aus der Differentialgleichung (mit analytischen Koeffizienten $p(x)$, $q(x)$)

$$\frac{d}{dx}\left(p(x)\frac{du}{dx}\right) + q(x)u + \lambda u = 0 \qquad (p(x) > 0) \tag{4}$$

*) Es ist keine wesentliche Einschränkung, daß wir die Differentialgleichung in dieser speziellen Form angenommen haben, da sich die allgemeine Gleichung durch eine einfache Transformation auf diese Form bringen läßt, vgl. S. 52 der vorliegenden Arbeit.

bei der Randbedingung

$$(5) \qquad \frac{du}{dx} - hu = 0 \text{ für } x = \alpha \quad \text{und} \quad \frac{du}{dx} + Hu = 0 \text{ für } x = \beta$$

entspringt, wenden wir auf die vorgelegte Differentialgleichung eine in dieser Theorie übliche Transformation an, die von Liouville herrührt. Wir setzen

$$z = \int_\alpha^x (p(x))^{-\frac{1}{2}} dx, \qquad v(z) = (p(x))^{\frac{1}{4}} u(x).$$

Unsere Differentialgleichung geht dann in die neue Differentialgleichung

$$(4') \qquad \frac{d^2v}{dz^2} + Qv + \lambda v = 0$$

über, wobei $Q(z)$ eine durch die Funktionen $p(x)$, $q(x)$ leicht ausdrückbare analytische Funktion bedeutet. Die Randbedingungen werden

$$(5') \qquad \frac{dv}{dz} - h'v = 0 \text{ für } z = 0, \quad \frac{dv}{dz} + H'v = 0 \text{ für } z = \pi,$$

wobei wir der Einfachheit halber

$$\int_\alpha^\beta (p(x))^{-\frac{1}{2}} dx = \pi$$

angenommen haben, was man ja durch eine Multiplikation der unabhängigen Variablen stets erreichen kann. Wir bezeichnen die Sturm-Liouvilleschen Funktionen, die aus der Differentialgleichung (4') entspringen, mit

$$v_1(z), \; v_2(z), \; v_3(z), \; \cdots,$$

die zugehörigen Eigenwerte mit λ_n und beweisen unsere auf S. 40 und 41 ausgesprochenen Theoreme vorab für dieses Funktionensystem.

Wir nehmen zu diesem Zwecke an, daß die unendliche Reihe

$$f(z) = a_1 v_1(z) + a_2 v_2(z) + a_3 v_3(z) + \cdots,$$

deren Koeffizienten $a_1, a_2, a_3, \cdots$ gegen Null konvergieren, an der Stelle $z = a$ konvergiert und bilden — zunächst ganz formal — die unendliche Reihe

$$(6) \qquad F(z) = -\frac{a_1 v_1(z)}{\lambda_1} - \frac{a_2 v_2(z)}{\lambda_2} - \frac{a_3 v_3(z)}{\lambda_3} - \cdots,$$

von der wir behaupten, daß sie *absolut und für jeden in Betracht kommenden Wert von z gleichmäßig konvergiert.* Um dies zu zeigen, benutzen wir eine von Liouville herrührende und von Hobson*) verschärfte asymptotische

*) London Math. Soc. Proc. (2) 6 (1908), S. 349.

Darstellung des n^{ten} Gliedes unseres Orthogonalsystems und des n^{ten} Eigenwertes:

$$(7)\qquad v_n(z) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\cos nz + \frac{\beta(z)\sin nz}{n} + \frac{\alpha_n(z)}{n^2},$$
$$\lambda_n = \left(n + \frac{\gamma_n}{n}\right)^2,$$

wobei die analytischen Funktionen $\beta(z)$, $\alpha_n(z)$ und die Größen γ_n unterhalb einer von n und z unabhängigen Grenze A bleiben.

Aus diesen Formeln entnehmen wir unmittelbar, daß die Funktionen $v_n(z)$ unterhalb einer von n und z unabhängigen oberen Grenze bleiben und daß die Summe der reziproken Eigenwerte

$$\frac{1}{\lambda_1} + \frac{1}{\lambda_2} + \frac{1}{\lambda_3} + \cdots$$

absolut konvergiert; daraus schließen wir, daß die Reihe (6) absolut und gleichmäßig konvergiert und eine stetige Funktion $F(z)$ darstellt.

Um den Gedankengang nicht zu unterbrechen, bemerken wir schon hier, daß die unendliche Reihe

$$\sum_{n=1,2,\cdots}\left(1 - \frac{n^2}{\lambda_n}\right)$$

absolut konvergiert, da ihr n^{tes} Glied für hinreichend große Werte von n dem Betrage nach kleiner als

$$\frac{A(2n^2+A)}{n^2\left(n-\frac{A}{n}\right)^2}$$

ist.

Führen wir zur Abkürzung für den zweiten mittleren Differenzenquotienten einer beliebigen Funktion $\Phi(z)$ an der Stelle $z = a$ die Bezeichnung

$$\frac{D''_\delta\,\Phi(a)}{\delta^2} = \frac{\Phi(a+\delta) - 2\Phi(a) + \Phi(a-\delta)}{\delta^2}$$

ein, so lautet der die *Verallgemeinerung des Riemannschen Theorems darstellende Satz*, den wir nun beweisen wollen, folgendermaßen:

$$(8)\qquad \lim_{\delta=0}\left\{\frac{D''_\delta F(a)}{\delta^2} + Q(a)\,F(a)\right\} = f(a).$$

Der Grundgedanke des Beweises ist der, daß man von der Reihe

$$(6')\qquad F(a) = -\sum_{n=1,2,3,\cdots}\frac{a_n}{\lambda_n}v_n(a) = -\sum_{n=1,2,3,\cdots}\frac{a_n}{\lambda_n}\left(\sqrt{\frac{2}{\pi}}\cos na + \frac{\beta(a)\sin na}{n} + \frac{\alpha_n(a)}{n^2}\right)$$

sukzessiv bestimmte Teile abspaltet, bei denen man leicht den Limes des zweiten mittleren Differenzenquotienten berechnen kann, bis man zu einem Rest gelangt, auf den unmittelbar das Riemannsche Theorem anwendbar ist.

Unser Beweis zerfällt danach in drei Teile.

Wir berechnen *zuerst* den in (8) angedeuteten Limes für die unendliche Reihe

$$F_1(z) = -\sum_{n=1,2,\cdots} \frac{a_n}{\lambda_n} \frac{\alpha_n(z)}{n^2},$$

die das letzte Glied von $F(z)$ darstellt und deren absolute und gleichmäßige Konvergenz aus der für alle n und z gültigen Ungleichung $|\alpha_n(z)| < A$ folgt. Bilden wir nun den (8) analogen Limes für das n^{te} Glied dieser Reihe, so finden wir — mit Rücksicht darauf, daß $v_n(z)$ die Differentialgleichung (4′) befriedigt — nach einer kleinen Rechnung:

$$(9)\quad w_n(z) = -\frac{1}{n^2\lambda_n}\left[\frac{d^2\alpha_n(z)}{dz^2} + Q(z)\alpha_n(z)\right] = \left(1-\frac{n^2}{\lambda_n}\right)\left[\sqrt{\frac{2}{\pi}}\cos nz + \frac{\beta(z)}{n}\sin nz\right]$$
$$+\frac{1}{\lambda_n}\left[\lambda_n\frac{\alpha_n(z)}{n^2} + \frac{\beta''(z)}{n}\sin nz + 2\beta'(z)\cos nz\right.$$
$$\left. + Q(z)\left(\sqrt{\frac{2}{\pi}}\cos nz + \frac{\beta(z)}{n}\sin nz\right)\right],$$

wobei $\beta'(z)$ und $\beta''(z)$ die Ableitungen von $\beta(z)$ nach z bedeuten. Aus der bewiesenen absoluten Konvergenz der Reihen

$$\sum\left(1-\frac{n^2}{\lambda_n}\right), \quad \sum\frac{1}{\lambda_n}$$

und aus dem Umstande, daß die in eckigen Klammern stehenden Ausdrücke unterhalb einer von n und z unabhängigen Grenze bleiben, schließen wir unmittelbar, daß die unendliche Reihe

$$\sum_{n=1,2,\cdots} a_n w_n(z)$$

absolut und gleichmäßig konvergiert. Aus denselben Gründen ist auch die Reihe

$$\sum_{n=1,2,\cdots} a_n \frac{Q(z)\,\alpha_n(z)}{n^2\lambda_n}$$

gleichmäßig konvergent, woraus unmittelbar die gleichmäßige Konvergenz der Reihe

$$-\sum_{n=1,2,\cdots}\frac{a_n}{n^2\lambda_n}\frac{d^2\alpha_n(z)}{dz^2} = \sum_{n=1,2,\cdots} a_n w_n(z) + \sum_{n=1,2,\cdots}\frac{a_n}{n^2\lambda_n}Q(z)\,\alpha_n(z)$$

folgt, die also den Limes des zweiten Differenzenquotienten von $F_1(z)$ an der Stelle $z = a$ darstellt, und wir erhalten folglich:

$$(10)\qquad -\lim_{\delta=0}\left\{\frac{D''_\delta}{\delta^2}\sum_{n=1,2,\cdots}\frac{a_n}{\lambda_n}\frac{\alpha_n(a)}{n^2} + Q(a)\sum_{n=1,2,\cdots}\frac{a_n}{\lambda_n}\frac{\alpha_n(a)}{n^2}\right\} = \sum_{n=1,2,\cdots} a_n w_n(a).$$

Um in ähnlicher Weise den entsprechenden Limes für die Funktion

$$F_2(z) = -\sum_{n=1,2,\cdots} \frac{a_n}{\lambda_n}\left[\sqrt{\frac{2}{\pi}}\cos nz + \frac{\beta(z)}{n}\sin nz\right]$$

zu berechnen, beachten wir, daß für zwei beliebige Funktionen $f(z)$ und $\varphi(z)$ die Identität

$$D''_\delta(f(z)\cdot\varphi(z)) = f(z+\delta)D''_\delta\varphi(z) + [\varphi(z)-\varphi(z-\delta)][f(z+\delta)-f(z-\delta)] + \varphi(z)D''_\delta f(z)$$

gilt. Wenden wir diese Identität auf die Funktion $F_2(z)$ für die Stelle $z = a$ an, so erhalten wir, wenn wir noch zur Abkürzung

$$K_n(a,\delta) = \sin n(a+\delta)D''_\delta\beta(a) + [\beta(a)-\beta(a-\delta)][\sin n(a+\delta)-\sin n(a-\delta)]$$

setzen, die Relation

$$(11)\quad -\frac{D''_\delta F_2(a)}{\delta^2} = \frac{D''_\delta}{\delta^2}\sum_{n=1,2,\cdots}\frac{a_n}{\lambda_n}\sqrt{\frac{2}{\pi}}\cos na + \beta(a)\frac{D''_\delta}{\delta^2}\sum_{n=1,2,\cdots}\frac{a_n}{\lambda_n}\frac{\sin na}{n} + \frac{1}{\delta^2}\sum_{n=1,2,\cdots}\frac{a_n}{\lambda_n n}K_n(a,\delta).$$

Der *zweite* Teil unseres Beweises besteht nun darin, daß wir zeigen, daß

$$(12)\quad \lim_{\delta=0}\frac{1}{\delta^2}\sum_{n=1,2,\cdots}\frac{a_n}{\lambda_n n}K_n(a,\delta) = \beta''(a)\sum_{n=1,2,\cdots}\frac{a_n}{\lambda_n}\frac{\sin na}{n} + 2\beta'(a)\sum_{n=1,2,\cdots}\frac{a_n}{\lambda_n}\cos na$$

ist. In der Tat, die beiden rechtsstehenden unendlichen Reihen

$$\sum_{n=1,2,\cdots}\frac{a_n}{\lambda_n}\frac{\sin nz}{n} \quad\text{und}\quad \sum_{n=1,2,\cdots}\frac{a_n}{\lambda_n}\cos nz$$

konvergieren für jeden Wert von z gleichmäßig, und es stellt daher die erste den Limes der unendlichen Reihe

$$\sum_{n=1,2,\cdots}\frac{a_n}{\lambda_n}\frac{\sin n(z+\delta)}{n}$$

für $\delta = 0$, die zweite aber den Limes der unendlichen Reihe

$$\sum_{n=1,2,\cdots}\frac{a_n}{\lambda_n n}\frac{[\sin n(z+\delta)-\sin n(z-\delta)]}{2\delta}$$

für $\delta = 0$ dar. Daraus folgt aber mit Rücksicht auf die zweimalige Differenzierbarkeit der Funktion $\beta(z)$ unmittelbar die Limesgleichung (12).

Wir führen den Beweis unseres Satzes zu Ende, indem wir *drittens* zeigen, daß auch der Limes der ersten beiden Glieder in (11) existiert, d. h. indem wir die Limesgleichung

$$\lim_{\delta=0}\left\{\frac{D''_\delta}{\delta^2}\sum_{n=1,2,\cdots}\frac{a_n}{\lambda_n}\sqrt{\frac{2}{\pi}}\cos na+\beta(a)\frac{D''_\delta}{\delta^2}\sum_{n=1,2,\cdots}\frac{a_n}{\lambda_n}\frac{\sin na}{n}\right\} \tag{13}$$

$$=-\sum_{n=1,2,\cdots}\frac{a_n n^2}{\lambda_n}\sqrt{\frac{2}{\pi}}\cos na-\beta(a)\sum_{n=1,2,\cdots}\frac{a_n n}{\lambda_n}\sin na$$

beweisen. Zu diesem Zwecke bemerken wir, daß der links unter dem Limeszeichen stehende Ausdruck sich auf die Form

$$-\sum_{n=1,2,\cdots}\left[\frac{a_n}{\lambda_n}n^2\sqrt{\frac{2}{\pi}}\cos na+\beta(a)\frac{a_n n}{\lambda_n}\sin na\right]\left(\frac{\sin n\frac{\delta}{2}}{n\frac{\delta}{2}}\right)^2$$

bringen läßt. Schreiben wir für den Augenblick A_n für den Ausdruck in den eckigen Klammern, so läuft unsere Behauptung auf den Beweis der Limesgleichung

$$\lim_{\delta=0}\sum_{n=1,2,\cdots}A_n\left(\frac{\sin n\frac{\delta}{2}}{n\frac{\delta}{2}}\right)^2=\sum_{n=1,2,\cdots}A_n$$

hinaus. Das ist aber genau der Satz, den Riemann in seiner Habilitationsschrift beweist (vgl. Werke, S. 245).

Durch Addition der Limesgleichungen (10), (12) und (13) ergibt sich aber

$$\lim_{\delta=0}\left\{\frac{D''_\delta F(a)}{\delta^2}+Q(a)F(a)\right\}=\sum_{n=1,2,\cdots}a_n v_n(a)=f(a);$$

damit ist unser Satz in allen Teilen bewiesen.

Wir können aus diesem Satze eine Anwendung auf die Darstellbarkeit einer Funktion durch eine Sturm-Liouvillesche Reihe machen:

Wir sagen im Anschluß an die analogen Definitionen von Riemann, daß die Funktion $f(z)$ durch die Sturm-Liouvillesche Reihe

$$\sum_{n=1,2,\cdots}b_n v_n(z)$$

„darstellbar" ist, wenn die unendliche Reihe

$$F(z)=-\sum_{n=1,2,\cdots}\frac{b_n}{\lambda_n}v_n(z)$$

eine stetige Funktion $F(z)$ definiert, die so beschaffen ist, daß

$$\lim_{\delta=0}\left\{\frac{D''_\delta F(z)}{\delta^2}+Q(z)F(z)\right\}=f(z)$$

ist. Es ergibt sich dann aus unserem allgemeinen Theorem der folgende

ÜBER DIE LEGENDRE'SCHE REIHE.

Von **Alfred Haar** (Göttingen).

(Aus einem an Herrn FEJÉR geschriebenen Brief).

. . . . . .

Sie haben in ihrer Arbeit: *Über die* LAPLACE'*sche Reihe* [1]) die Frage aufgeworfen, ob eine stetige Funktion existiert, deren LEGENDRE'sche Reihe mit Hülfe der Methode der ersten arithmetischen Mittel nicht summierbar ist.

Die allgemeinen notwendigen und hinreichenden Bedingungen, die ich seither für diese Art von Fragestellungen in meiner Dissertation [2]) gegeben habe, gestatten unschwer, diese Frage zu beantworten, und ich gelange zu dem folgenden Resultat:

Sei $f(x)$ *eine im Intervall* $[-1, 1]$ *definierte, einschliesslich der Grenzen stetige Funktion von* x; *entwickelt man diese Funktion auf die* FOURIER'*sche Weise in eine nach den* LEGENDRE'*schen Polynomen* $P_n(x)$ *fortschreitende Reihe*

$$(1)\quad a_0P_0(x)+a_1P_1(x)+\cdots+a_nP_n(x)+\cdots \quad \left(a_n=\frac{2n+1}{2}\int_{-1}^{1}f(x)P_n(x)\,dx\right)$$

und bezeichnet die $(n+1)$*-te Teilsumme dieser Reihe mit* $f_n(x)$:

$$f_n(x)=a_0P_0(x)+a_1P_1(x)+\cdots+a_nP_n(x),$$

so konvergiert die Folge der aus diesen Funktionen $f_n(x)$ *gebildeten « ersten arithmetischen Mittel »*

$$f_n^{*}(x)=\frac{f_0(x)+f_1(x)+\cdots+f_n(x)}{n+1}$$

für jeden Wert von x *innerhalb des betrachteten Intervalls* $-1<x<1$ *gegen die Funktion* $f(x)$; *mit anderen Worten: die unendliche Reihe* (1) *ist unter den gemachten Voraussetzungen für jeden Wert von* x *zwischen* -1 *und* $+1$ *mit Hülfe der Methode des ersten arithmetischen Mittels summierbar.*

Ihr, in der erwähnten Annalenarbeit bewiesenes Resultat — die Folge der aus den Teilsummen $f_n(x)$ gebildeten *zweiten* arithmetischen Mittel konvergiert im ganzen Inter-

---

[1]) Mathematische Annalen, Bd. LXVII (1909), S. 76-109.

[2]) *Zur Theorie der orthogonalen Funktionensysteme* (Göttingen 1909); abgedruckt in den Mathematischen Annalen, Bd. LXIX (1910), S. 331-371.

Rend. Circ. Matem. Palermo, t. XXXII (2° sem. 1911). — Stampato il 20 luglio 1911.

vall $[-1, 1]$ *einschliesslich der Grenzen* gegen $f(x)$ — ist selbstverständlich für jeden *inneren Punkt* des betrachteten Intervalls in meinem soeben ausgesprochenen Satze enthalten [3]).

Die Frage über die Konvergenz der Folge $f_n^*(x)$ an den Stellen $x = \pm 1$ lasse ich unentschieden [4]).

Das Theorem meiner Dissertation das bei dem Beweis des oben ausgesprochenen Satzes zur Anwendung gelangt, lautet nun wie folgt [5]): Sei

$$\varphi_0(x), \quad \varphi_1(x), \quad \varphi_2(x), \quad \varphi_3(x), \quad \cdots$$

ein im Intervall $[-1, 1]$ definiertes normiertes orthogonales Funktionensystem

$$\int_{-1}^{+1} \varphi_n(x)\varphi_m(x)\,dx = \begin{cases} 1 & \text{für } n = m \\ 0 & \text{für } n \neq m \end{cases} \qquad (n, m = 0, 1, 2, 3, \ldots)$$

von der Beschaffenheit, dass man jede in diesem Intervall definierte stetige Funktion $f(x)$ durch diese Orthogonalfunktionen mit beliebiger Genauigkeit approximieren kann [6]): d. h. dass man zu jeder positiven Grösse δ endlich viele reelle Grössen $b_0, b_1, \ldots, b_n$ so bestimmen kann, dass im ganzen Intervall $[-1, 1]$

$$|f(x) - b_0\varphi_0(x) - b_1\varphi_1(x) - b_2\varphi_2(x) - \cdots - b_n\varphi_n(x)| < \delta$$

ist. Führen wir nun die folgenden Bezeichnungen

$$K_n(\bar{x}, x) = \varphi_0(\bar{x})\varphi_0(x) + \varphi_1(\bar{x})\varphi_1(x) + \cdots + \varphi_n(\bar{x})\varphi_n(x),$$

$$K_n^*(\bar{x}, x) = \frac{1}{n+1}\left(K_0(\bar{x}, x) + K_1(\bar{x}, x) + \cdots + K_n(\bar{x}, x)\right)$$

ein, so ist die inbezug auf unser Orthogonalsystem gebildete FOURIER'sche Reihe der stetigen Funktion $f(x)$

$$\varphi_0(\bar{x})\int_{-1}^{+1} f(x)\varphi_0(x)\,dx + \varphi_1(\bar{x})\int_{-1}^{+1} f(x)\varphi_1(x)\,dx + \cdots + \varphi_n(\bar{x})\int_{-1}^{+1} f(x)\varphi_n(x)\,dx + \cdots$$

an der Stelle $\bar{x}$ mit Hülfe der Methode des ersten arithmetischen Mittels summierbar,

---

3) Was die *Gleichmässigkeit* der Konvergenz betrifft, so haben Sie in bezug auf die 2. arithmetischen Mittel der LEGENDRE'schen Reihe einer für $-1 \leq x \leq 1$ stetigen Funktion $f(x)$ bewiesen, dass diese im gesammten Intervall $-1 \leq x \leq 1$ gleichmässig gegen $f(x)$ konvergieren; aus den Untersuchungen dieses Briefes können Sie ersehen, dass die ersten arithmetischen Mittel gewiss gleichmässig in jedem Intervall $-1 + \varepsilon \leq x \leq 1 - \varepsilon$ $(\varepsilon > 0)$ gegen $f(x)$ konvergieren.

4) Es bleibt eben deshalb unentschieden, ob die ersten arithmetischen Mittel der LAPLACE'schen Reihe einer auf der Einheitskugel überall stetigen Funktion an einer willkürlichen Stelle dieser Kugel konvergieren oder nicht.

5) Vgl. S. 27 und 36 meiner Dissertation [loc. cit. 2)] und S. 350 und 360 des erwähnten Annalenbandes.

6) In der Terminologie meiner Dissertation ausgedrückt: deren Bereich alle stetigen Funktionen umfasst.

sowie die unendlich vielen Grössen

$$\int_{-1}^{+1} |K_n^*(\bar{x}, x)|\, dx$$

für jedes n unterhalb einer von n unabhängigen oberen Grenze G liegen.

Setzen wir nun speziell

$$\varphi_n(x) = \sqrt{\frac{2n+1}{2}}\, P_n(x), \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots)$$

wobei $P_n(x)$ das n-te LEGENDRE'sche Polynom bedeutet, so läuft meine Behauptung darauf hinaus, dass die mit diesen Funktionen gebildeten Ausdrücke $K_n^*(\bar{x}, x)$ für jedes n die Bedingungen

$$\int_{-1}^{+1} |K_n^*(\bar{x}, x)|\, dx < G \tag{2}$$

erfüllen, sowie $\bar{x}$ irgend eine Zahl zwischen -1 und $+1$ bedeutet [7]).

Ich beweise dieses Theorem in vier Schritten.

1) Da $\bar{x}$ ein *innerer* Punkt des Intervalls $[-1, 1]$ ist, so kann man eine von Null verschiedene positive Zahl ε derart bestimmen, dass

$$\bar{x} - \varepsilon > -1 \quad \text{und} \quad \bar{x} + \varepsilon < 1$$

ist; d. h., dass das Intervall $[\bar{x} - \varepsilon, \bar{x} + \varepsilon]$ innerhalb des Intervalls $[-1, 1]$ liegt. Wir zeigen nun *vorab,* dass die beiden Integrale

$$\int_{-1}^{\bar{x}-\varepsilon} |K_n^*(\bar{x}, x)|\, dx, \qquad \int_{\bar{x}+\varepsilon}^{1} |K_n^*(\bar{x}, x)|\, dx$$

für jeden Wert von n unterhalb einer von n unabhängigen oberen Grenze bleiben. Ich wende zu diesem Ende die bekannte Formel von CHRISTOFFEL an [8])

$$K_n(\bar{x}, x) = \frac{n+1}{2} \frac{P_{n+1}(\bar{x})P_n(x) - P_n(\bar{x})P_{n+1}(x)}{\bar{x} - x}.$$

Da in den Intervallen $[-1, \bar{x}-\varepsilon]$ bezw. $[\bar{x}+\varepsilon, 1]$ die Differenz $|\bar{x} - x|$ grösser als ε ist, so findet man

$$\begin{cases} \displaystyle\int_{-1}^{\bar{x}-\varepsilon} |K_n(\bar{x}, x)|dx \leqq \frac{1}{\varepsilon}\frac{n+1}{2}\left\{|P_{n+1}(\bar{x})|\int_{-1}^{\bar{x}-\varepsilon}|P_n(x)|dx + |P_n(\bar{x})|\int_{-1}^{\bar{x}-\varepsilon}|P_{n+1}(x)|dx\right\} \\ \displaystyle\int_{\bar{x}+\varepsilon}^{1} |K_n(\bar{x}, x)|dx \leqq \frac{1}{\varepsilon}\frac{n+1}{2}\left\{|P_{n+1}(\bar{x})|\int_{\bar{x}+\varepsilon}^{1}|P_n(x)|dx + |P_n(\bar{x})|\int_{\bar{x}+\varepsilon}^{1}|P_{n+1}(x)|dx\right\}; \end{cases} \tag{3}$$

---

7) Dass man durch LEGENDRE'sche Polynome jede im Intervall $[-1, +1]$ stetige Funktion beliebig approximieren kann, ist eine unmittelbare Folge des Umstandes, dass man jede ganze Potenz von x (etwa x^n) als eine lineare Kombination endlich vieler LEGENDRE'scher Polynome mit bestimmten Zahlenkoeffizienten darstellen kann.

8) CHRISTOFFEL, *Über die* GAUSS*sche Quadratur und eine Verallgemeinerung derselben* [Journal für die reine und angewandte Mathematik, Bd. LV (1858), S. 61-82], S. 73.

also sind beide Integrale (3) für jedes n kleiner als

$$\frac{n+1}{2\varepsilon}\left\{|P_{n+1}(\bar{x})|\int_{-1}^{1}|P_n(x)|\,dx+|P_n(\bar{x})|\int_{-1}^{1}|P_{n+1}(x)|\,dx\right\}.$$

Aus der bekannten SCHWARZ'schen Ungleichung schliesst man aber

$$\int_{-1}^{1}|P_n(x)|\,dx\leq\sqrt{2\int_{-1}^{1}(P_n(x))^2\,dx}=\sqrt{\frac{4}{2n+1}}.$$

Um $P_n(\bar{x})$ bezw. $P_{n+1}(\bar{x})$ abzuschätzen, wende ich eine oft gebrauchte Approximationsformel an, wobei ich $\bar{x}$ durch $\cos\bar{\vartheta}$ ersetze:

$$P_n(\bar{x})=\sqrt{\frac{2}{n\pi\sin\bar{\vartheta}}}\left[\cos\left(\left(n+\frac{1}{2}\right)\bar{\vartheta}-\frac{\pi}{4}\right)+\frac{\alpha_n(\bar{\vartheta})}{n}\right],$$

die für jeden *inneren* Punkt $\bar{x}$ des Intervalls $[-1, 1]$ gilt. Die Zahlen $\alpha_n(\bar{\vartheta})$ bleiben für jedes n unterhalb einer obern Grenze g; es ist folglich

$$|P_n(\bar{x})|\leq\sqrt{\frac{2}{n\pi\sin\bar{\vartheta}}}\left[1+\frac{g}{n}\right]$$

und daher sind die beiden unter (3) stehenden Integrale sicherlich kleiner als

$$\frac{n+1}{2\varepsilon}\sqrt{\frac{2}{\pi\sin\bar{\vartheta}}}\left\{\sqrt{\frac{1}{n+1}}\left(1+\frac{g}{n+1}\right)\sqrt{\frac{4}{2n+1}}+\sqrt{\frac{1}{n}}\left(1+\frac{g}{n}\right)\sqrt{\frac{4}{2(n+1)+1}}\right\}.$$

Dieser Ausdruck bleibt für jeden Wert von n unterhalb einer von n unabhängigen obern Grenze G_1 (wegen der Ungleichung $-1<\cos\bar{\vartheta}<1$ kann $\sin\bar{\vartheta}$ nicht gleich Null werden). Daraus kann man aber unmittelbar schliessen, dass auch die beiden Integrale

$$(4)\qquad \int_{-1}^{\bar{x}-\varepsilon}|K_n^*(\bar{x},\,x)|\,dx<G_1,\qquad \int_{\bar{x}+\varepsilon}^{1}|K_n^*(\bar{x},\,x)|\,dx<G_1$$

bleiben und zwar für jeden Wert von n.

Um also meinen ausgesprochenen Satz zu beweisen, genügt es, nachzuweisen, dass unter den gemachten Voraussetzungen die unendlich vielen Zahlen

$$\int_{\bar{x}-\varepsilon}^{\bar{x}+\varepsilon}|K_n^*(\bar{x},\,x)|\,dx$$

unterhalb einer obern Grenze liegen, wobei ε irgend eine beliebig kleine positive Grösse bedeutet. Da $\bar{x}=\cos\bar{\vartheta}$ im Intervall $[-1+\eta, 1-\eta]$ liegt ($\eta>0$), so kann man eine positive von Null verschiedene Zahl η_1 derart angeben, dass das entsprechende $\bar{\vartheta}$ zwischen η_1 und $\pi-\eta_1$ liegt. Ich wähle nun die *kleinste* Zahl η_1 dieser Art. Das Intervall $[\bar{x}-\varepsilon,\ \bar{x}+\varepsilon]$ geht bei der Substitution $x=\cos\vartheta$ in eine Umgebung $[\bar{\vartheta}-\varepsilon',\ \bar{\vartheta}+\varepsilon'']$ der Stelle $\bar{\vartheta}$ über; sei ε_1 die grössere der beiden positiven Zahlen ε' und ε''. Man findet dann offenbar

$$(5)\qquad \int_{\bar{x}-\varepsilon}^{\bar{x}+\varepsilon}|K_n^*(\bar{x},\,x)|dx=\int_{\bar{\vartheta}-\varepsilon'}^{\bar{\vartheta}+\varepsilon''}|K_n^*(\cos\bar{\vartheta},\,\cos\vartheta)|\,|\sin\vartheta|d\vartheta\leq\int_{\bar{\vartheta}-\varepsilon_1}^{\bar{\vartheta}+\varepsilon_1}|K_n^*(\cos\bar{\vartheta},\,\cos\vartheta)|d\vartheta.$$

Es genügt daher, da ε_1 mit ε gegen Null konvergiert zu zeigen, dass das Integral (5) für irgend einen beliebig kleinen Wert von ε_1 unterhalb einer von n unabhängigen Grenze bleibt; ich wähle speziell ε_1 derart, dass $\varepsilon_1 < \frac{\eta_1}{2}$ sei.

2) Um dies Integral zu behandeln, wende ich eine von HEINE herrührende asymptotische Darstellung der Kugelfunktionen an [9]), die folgendermassen lautet: Sei δ eine positive Zahl $< \pi$, und ϑ irgend eine Stelle des Intervalls

$$\delta \leqq \vartheta \leqq \pi - \delta.$$

Es gilt für alle diese Stellen ϑ die Formel ($n = 1, 2, 3, \ldots$)

$$P_n(\cos\vartheta) = \sqrt{\frac{2}{n\pi\sin\vartheta}}\left\{\cos\omega_n + \frac{1}{8n}[\operatorname{cotg}\vartheta\sin\omega_n - 2\cos\omega_n] + \frac{\beta_n(\vartheta)}{n^2}\right\},$$

wobei zur Abkürzung $\omega_n = \left(n + \frac{1}{2}\right)\vartheta - \frac{\pi}{4}$ gesetzt ist und die unendlich vielen Funktionen $\beta_n(\vartheta)$ bleiben unterhalb einer von n und ϑ unabhängigen Grösse B.

Aus dieser Formel kann man leicht eine asymptotische Darstellung des Produktes $\frac{2n+1}{2} P_n(\cos\bar{\vartheta}) P_n(\cos\vartheta)$ herstellen, indem man beachtet, dass $\operatorname{cotg}\vartheta$ für $\delta \leqq \vartheta \leqq \pi - \delta$ kleiner als eine bestimmte Zahl bleibt. Diese Darstellung ist gültig, sowie die beiden Zahlen ϑ und $\bar{\vartheta}$ die Ungleichungen

$$\delta \leqq \vartheta \leqq \pi - \delta, \qquad \delta \leqq \bar{\vartheta} \leqq \pi - \delta \tag{6}$$

erfüllen. Setzen wir analog zur Abkürzung $\bar{\omega}_n = \left(n + \frac{1}{2}\right)\bar{\vartheta} - \frac{\pi}{4}$, so lautet diese Formel:

$$\begin{cases} \dfrac{2n+1}{2} P_n(\cos\bar{\vartheta}) P_n(\cos\vartheta) = \dfrac{2}{\pi} \dfrac{1}{\sqrt{\sin\bar{\vartheta}\sin\vartheta}} \Big\{\cos\omega_n \cos\bar{\omega}_n \\ \quad + \dfrac{1}{8n}[\operatorname{cotg}\bar{\vartheta}\cos\omega_n \sin\bar{\omega}_n + \operatorname{cotg}\vartheta\cos\bar{\omega}_n \sin\omega_n] + \dfrac{\gamma_n(\vartheta, \bar{\vartheta})}{n^2}\Big\}, \quad (n = 1, 2, 3, \ldots) \end{cases} \tag{7}$$

wobei also $\gamma_n(\vartheta, \bar{\vartheta})$ für jeden die Ungleichungen (6) befriedigenden Wert von ϑ und $\bar{\vartheta}$ unterhalb einer von n, ϑ, $\bar{\vartheta}$ unabhängigen Grösse Γ_1 bleibt. Ich definiere noch der Symmetrie halber die Funktion $\gamma_0(\vartheta, \bar{\vartheta})$ für $\delta \leqq \vartheta \leqq \pi - \delta$, $\delta \leqq \bar{\vartheta} \leqq \pi - \delta$, derart, dass

$$\frac{1}{2} P_0(\cos\bar{\vartheta}) P_0(\cos\vartheta) = \frac{2}{\pi} \frac{1}{\sqrt{\sin\vartheta\sin\bar{\vartheta}}} \{\cos\omega_0 \cos\bar{\omega}_0 + \gamma_0(\vartheta, \bar{\vartheta})\}$$

wird.

Diese Formeln können zur Abschätzung des Integrals (5) benutzt werden, in dem $\bar{\vartheta}$ eine Stelle des Intervalls $[\eta_1, \pi - \eta_1]$ bedeutet und inbezug auf die Variable ϑ über das ganz im Innern von $[0, \pi]$ liegende Intervall $[\bar{\vartheta} - \varepsilon_1, \bar{\vartheta} + \varepsilon_1]$ integriert wird. Ich kann daher wegen $\varepsilon_1 < \frac{\eta_1}{2}$, die positive Grösse $\delta = \frac{\eta_1}{2}$ derart bestimmen, dass

9) HEINE, *Kugelfunktionen* (Berlin, Reimer 1879), S. 178.

für $\bar{\mathfrak{x}}$ und alle in Betracht kommenden Werte von $\mathfrak{x}$ die Ungleichungen

$$\delta = \frac{\eta_1}{2} < \bar{\mathfrak{x}} < \pi - \frac{\eta_1}{2} = \pi - \delta, \qquad \delta = \frac{\eta_1}{2} \leqq \mathfrak{x} \leqq \pi - \frac{\eta_1}{2} = \pi - \delta$$

gelten, und schliesse aus der Formel (7) durch Summation, dass für alle solche Wertepaare

$$K_n(\cos\bar{\mathfrak{x}}, \cos\mathfrak{x}) = \frac{2}{\pi}\frac{1}{\sqrt{\sin\bar{\mathfrak{x}}\sin\mathfrak{x}}}\Big\{\sum_{\nu=0,1,\ldots,n}\cos\omega_\nu\cos\bar{\omega}_\nu$$

$$+\frac{1}{8}\sum_{\nu=1,\ldots,n}\frac{1}{\nu}[\operatorname{cotg}\bar{\mathfrak{x}}\cos\omega_\nu\sin\bar{\omega}_\nu+\operatorname{cotg}\mathfrak{x}\cos\bar{\omega}_\nu\sin\omega_\nu]+\gamma_0(\mathfrak{x},\bar{\mathfrak{x}})+\sum_{\nu=1,\ldots,n}\frac{\gamma_\nu(\mathfrak{x},\bar{\mathfrak{x}})}{\nu^2}\Big\}.$$

Ich setze noch zur Abkürzung (für $n = 0, 1, 2, \ldots$)

$$\mathrm{K}_n(\bar{\mathfrak{x}}, \mathfrak{x}) = \sum_{\nu=0,1,\ldots,n}\cos\omega_\nu\cos\bar{\omega}_\nu,$$

$$k_n(\bar{\mathfrak{x}}, \mathfrak{x}) = \sum_{\nu=1,\ldots,n}\frac{1}{\nu}[\operatorname{cotg}\bar{\mathfrak{x}}\cos\omega_\nu\sin\bar{\omega}_\nu + \operatorname{cotg}\mathfrak{x}\cos\bar{\omega}_\nu\sin\omega_\nu]$$

und entsprechend

$$\mathrm{K}_n^*(\bar{\mathfrak{x}}, \mathfrak{x}) = \frac{1}{n+1}\sum_{\nu=0,1,\ldots,n}\mathrm{K}_\nu(\bar{\mathfrak{x}}, \mathfrak{x}), \qquad k_n^*(\bar{\mathfrak{x}}, \mathfrak{x}) = \frac{1}{n+1}\sum_{\nu=1,\ldots,n}k_\nu(\bar{\mathfrak{x}}, \mathfrak{x})$$ [10])

und finde daher, für die in Betracht kommenden Wertepaare $\mathfrak{x}$, $\bar{\mathfrak{x}}$

$$|K_n^*(\cos\bar{\mathfrak{x}}, \cos\mathfrak{x})| \leqq \frac{2}{\pi}\frac{1}{\sqrt{\sin\bar{\mathfrak{x}}\sin\mathfrak{x}}}\Big\{|\mathrm{K}_n^*(\bar{\mathfrak{x}}, \mathfrak{x})|+\frac{1}{8}|k_n^*(\bar{\mathfrak{x}}, \mathfrak{x})|+|\gamma_0|+\Gamma_1\sum_{\nu=1,2,\ldots,\infty}\frac{1}{\nu^2}\Big\}.$$

Das Integral

$$\int_{\bar{\mathfrak{x}}-\varepsilon_1}^{\bar{\mathfrak{x}}+\varepsilon_1}|K_n^*(\cos\bar{\mathfrak{x}}, \cos\mathfrak{x})|\,d\mathfrak{x}$$

bleibt also sicherlich unterhalb einer von n unabhängigen Grenze, wenn dies für die Integrale

$$\int_{\bar{\mathfrak{x}}-\varepsilon_1}^{\bar{\mathfrak{x}}+\varepsilon_1}|\mathrm{K}_n^*(\bar{\mathfrak{x}}, \mathfrak{x})|\,d\mathfrak{x} \quad \text{und} \quad \int_{\bar{\mathfrak{x}}-\varepsilon_1}^{\bar{\mathfrak{x}}+\varepsilon_1}|k_n^*(\bar{\mathfrak{x}}, \mathfrak{x})|\,d\mathfrak{x}$$

der Fall ist.

3) Ich zeige nun *drittens,* dass die unendlich vielen Zahlen

$$\int_{\bar{\mathfrak{x}}-\varepsilon_1}^{\bar{\mathfrak{x}}+\varepsilon_1}|k_n^*(\bar{\mathfrak{x}}, \mathfrak{x})|\,d\mathfrak{x}$$

für jedes n kleiner als eine bestimmte Zahl G_3 bleiben. Dies geschieht am einfachsten durch Berücksichtigung der Relationen

$$\cos\omega_\nu = \frac{1}{\sqrt{2}}\left[\cos\nu\mathfrak{x}\left(\cos\frac{\mathfrak{x}}{2}+\sin\frac{\mathfrak{x}}{2}\right)+\sin\nu\mathfrak{x}\left(\cos\frac{\mathfrak{x}}{2}-\sin\frac{\mathfrak{x}}{2}\right)\right],$$

$$\sin\omega_\nu = \frac{1}{\sqrt{2}}\left[\cos\nu\mathfrak{x}\left(\sin\frac{\mathfrak{x}}{2}-\cos\frac{\mathfrak{x}}{2}\right)+\sin\nu\mathfrak{x}\left(\cos\frac{\mathfrak{x}}{2}+\sin\frac{\mathfrak{x}}{2}\right)\right],$$

[10]) Die letzte Formel gilt natürlich nur für $n = 1, 2, 3, \ldots$; wir setzen der Symmetrie halber $k_0(\mathfrak{x}, \bar{\mathfrak{x}}) = 0$, $k_0^*(\bar{\mathfrak{x}}, \mathfrak{x}) = 0$.

die für $k_n(\bar{\mathfrak{x}}, \mathfrak{x})$ die folgende Zerlegung geben:

$$(8)\quad \begin{cases} \sqrt{2}\, k_n(\bar{\mathfrak{x}}, \mathfrak{x}) = \operatorname{cotg}\frac{\bar{\mathfrak{x}}}{2}\left(\cos\frac{\mathfrak{x}}{2} + \sin\frac{\mathfrak{x}}{2}\right)\sum_{\nu=1,\dots,n}\frac{\cos\nu\mathfrak{x}\sin\bar{\omega}_\nu}{\nu} \\ \quad + \operatorname{cotg}\frac{\bar{\mathfrak{x}}}{2}\left(\cos\frac{\mathfrak{x}}{2} - \sin\frac{\mathfrak{x}}{2}\right)\sum_{\nu=1,\dots,n}\frac{\sin\nu\mathfrak{x}\sin\bar{\omega}_\nu}{\nu} \\ \quad + \operatorname{cotg}\frac{\mathfrak{x}}{2}\left(\sin\frac{\mathfrak{x}}{2} - \cos\frac{\mathfrak{x}}{2}\right)\sum_{\nu=1,\dots,n}\frac{\cos\nu\mathfrak{x}\cos\bar{\omega}_\nu}{\nu} \\ \quad + \operatorname{cotg}\frac{\mathfrak{x}}{2}\left(\cos\frac{\mathfrak{x}}{2} + \sin\frac{\mathfrak{x}}{2}\right)\sum_{\nu=1,\dots,n}\frac{\sin\nu\mathfrak{x}\cos\bar{\omega}_\nu}{\nu}. \end{cases}$$

Ich betrachte nun irgend eine der hier auftretenden vier Summen etwa:

$$\sqrt{2}\, k_n'(\bar{\mathfrak{x}}, \mathfrak{x}) = \sum_{\nu=1,\dots,n}\frac{\cos\nu\mathfrak{x}\sin\bar{\omega}_\nu}{\nu}.$$

Es ist offenbar

$$\sqrt{2}\int_{\bar{\mathfrak{x}}-\varepsilon_1}^{\bar{\mathfrak{x}}+\varepsilon_1}|k_n'(\bar{\mathfrak{x}}, \mathfrak{x})|\,d\mathfrak{x} = \int_{\bar{\mathfrak{x}}-\varepsilon_1}^{\bar{\mathfrak{x}}+\varepsilon_1}\left|\sum_{\nu=1,\dots,n}\frac{\cos\nu\mathfrak{x}\sin\bar{\omega}_\nu}{\nu}\right|d\mathfrak{x} \leqq \int_0^{\pi}\left|\sum_{\nu=1,\dots,n}\frac{\cos\nu\mathfrak{x}\sin\bar{\omega}_\nu}{\nu}\right|d\mathfrak{x},$$

und die Anwendung der SCHWARZ'schen Ungleichung ergibt

$$\sqrt{2}\int_{\bar{\mathfrak{x}}-\varepsilon_1}^{\bar{\mathfrak{x}}+\varepsilon_1}|k_n'(\bar{\mathfrak{x}}, \mathfrak{x})|\,d\mathfrak{x} \leqq \sqrt{\pi\int_0^{\pi}\left(\sum_{\nu=1,\dots,n}\frac{\cos\nu\mathfrak{x}\sin\bar{\omega}_\nu}{\nu}\right)^2 d\mathfrak{x}} = \sqrt{\pi\,\frac{\pi}{2}\sum_{\nu=1,\dots,n}\frac{\sin^2\bar{\omega}_\nu}{\nu^2}} \leqq \frac{\pi^2}{\sqrt{12}}.$$

In derselben Weise erhalte ich für die Integrale der anderen in (8) auftretenden endlichen Summen dieselbe Ungleichung; daraus und aus dem Umstande, dass die Faktoren dieser Summen in (8) für alle in Betracht kommenden Werte von $\mathfrak{x}$ und $\bar{\mathfrak{x}}$ unterhalb einer festen Grenze bleiben, schliesse ich also, dass $\int_{\bar{\mathfrak{x}}-\varepsilon_1}^{\bar{\mathfrak{x}}+\varepsilon_1}|k_n(\bar{\mathfrak{x}}, \mathfrak{x})|\,d\mathfrak{x}$ und damit auch

$$\int_{\bar{\mathfrak{x}}-\varepsilon_1}^{\bar{\mathfrak{x}}+\varepsilon_1}|k_n^*(\bar{\mathfrak{x}}, \mathfrak{x})|\,d\mathfrak{x}$$

für alle Werte von n kleiner als eine bestimmte Grösse G_3 bleibt.

4) Ich bringe den Beweis meiner Behauptung zu Ende, indem ich *viertens* zeige, dass die unendlich vielen Zahlen

$$\int_{\bar{\mathfrak{x}}-\varepsilon_1}^{\bar{\mathfrak{x}}+\varepsilon_1}|K_n^*(\bar{\mathfrak{x}}, \mathfrak{x})|\,d\mathfrak{x} < G_4$$

bleiben, wobei G_4 eine von n unabhängige Grösse bedeutet. Durch Anwendung der Formeln

$$\begin{aligned} 2\cos\omega_n\cos\bar{\omega}_n &= \cos(\omega_n + \bar{\omega}_n) + \cos(\omega_n - \bar{\omega}_n) \\ &= \sin\left(n+\tfrac{1}{2}\right)(\mathfrak{x}+\bar{\mathfrak{x}}) + \cos\left(n+\tfrac{1}{2}\right)(\mathfrak{x}-\bar{\mathfrak{x}}) \\ &= \cos\frac{\mathfrak{x}+\bar{\mathfrak{x}}}{2}\sin n(\mathfrak{x}+\bar{\mathfrak{x}}) + \sin\frac{\mathfrak{x}+\bar{\mathfrak{x}}}{2}\cos n(\mathfrak{x}+\bar{\mathfrak{x}}) \\ &\quad + \cos\frac{\mathfrak{x}-\bar{\mathfrak{x}}}{2}\cos n(\mathfrak{x}-\bar{\mathfrak{x}}) - \sin\frac{\mathfrak{x}-\bar{\mathfrak{x}}}{2}\sin n(\mathfrak{x}-\bar{\mathfrak{x}}) \end{aligned}$$

bringt man die Funktion $K_n(x, \bar{x})$ auf die folgende Form:

$$2K_n(x, \bar{x}) = \cos\frac{x+\bar{x}}{2}\sum_{\nu=0,1,\ldots,n}\sin\nu(x+\bar{x}) + \sin\frac{x+\bar{x}}{2}\sum_{\nu=0,1,\ldots,n}\cos\nu(x+\bar{x})$$
$$+\cos\frac{x-\bar{x}}{2}\sum_{\nu=0,1,\ldots,n}\cos\nu(x-\bar{x}) - \sin\frac{x-\bar{x}}{2}\sum_{\nu=0,1,\ldots,n}\sin\nu(x-\bar{x}).$$

Bezeichnen wir die endlichen Summen

$$\sum_{\nu=0,1,\ldots,n}\sin\nu u \quad \text{und} \quad \sum_{\nu=0,1,\ldots,n}\cos\nu u$$

bezw. mit $s_n(u)$ und $S_n(u)$ und die daraus abgeleiteten arithmetischen Mittel

$$\frac{s_0(u)+s_1(u)+\cdots+s_n(u)}{n+1} \quad \text{und} \quad \frac{S_0(u)+S_1(u)+\cdots+S_n(u)}{n+1}$$

bezw. mit $s_n^*(u)$ und $S_n^*(u)$, so finden wir unmittelbar

$$(9)\quad \begin{cases} 2K_n^*(x, \bar{x}) = \cos\dfrac{x+\bar{x}}{2}s_n^*(x+\bar{x}) + \sin\dfrac{x+\bar{x}}{2}S_n^*(x+\bar{x}) \\ \qquad +\cos\dfrac{x-\bar{x}}{2}S_n^*(x-\bar{x}) - \sin\dfrac{x-\bar{x}}{2}s_n^*(x-\bar{x}). \end{cases}$$

Schliesslich kann man noch die Funktionen $s_n^*(u)$ und $S_n^*(u)$ in geschlossener Form darstellen [11]); es ist

$$(10)\quad \begin{cases} s_n^*(u) = \dfrac{\cos\frac{u}{2}}{2\sin\frac{u}{2}} - \dfrac{1}{4(n+1)}\dfrac{\sin(n+1)u}{\sin^2\frac{u}{2}}, \\ S_n^*(u) = \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2(n+1)}\dfrac{\sin^2(n+1)\frac{u}{2}}{\sin^2\frac{u}{2}}, \end{cases}$$

und diese Ausdrücke können dazu benutzt werden, um zu zeigen, dass die vier Integrale

$$I_n' = \int_{\bar{x}-\varepsilon_1}^{\bar{x}+\varepsilon_1}\left|\sin\frac{x+\bar{x}}{2}S_n^*(x+\bar{x})\right|dx, \qquad I_n'' = \int_{\bar{x}-\varepsilon_1}^{\bar{x}+\varepsilon_1}\left|\cos\frac{x-\bar{x}}{2}S_n^*(x-\bar{x})\right|dx$$
$$I_n''' = \int_{\bar{x}-\varepsilon_1}^{\bar{x}+\varepsilon_1}\left|\cos\frac{x+\bar{x}}{2}s_n^*(x+\bar{x})\right|dx, \qquad I_n'''' = \int_{\bar{x}-\varepsilon_1}^{\bar{x}+\varepsilon_1}\left|\sin\frac{x-\bar{x}}{2}s_n^*(x-\bar{x})\right|dx$$

für jeden Wert von n kleiner als eine bestimmte Zahl bleiben. Es ist offenbar

$$I_n' \leqq \int_{\bar{x}-\varepsilon_1}^{\bar{x}+\varepsilon_1}|S_n^*(x+\bar{x})|dx \quad \text{und} \quad I_n'' \leqq \int_{\bar{x}-\varepsilon_1}^{\bar{x}+\varepsilon_1}|S_n^*(x-\bar{x})|dx$$

[11]) FEJÉR, *Untersuchungen über* FOURIER*sche Reihen* [Mathematische Annalen, Bd. LVIII (1904), S. 51-69.

und da die Funktion $S_n^*(u)$, wie die Darstellung (10) zeigt für jeden Wert des Argumentes wesentlich positiv ausfällt

$$(11) \qquad I_n' \leqq \int_{-3\pi-\bar{\vartheta}}^{3\pi-\bar{\vartheta}} S_n^*(\vartheta+\bar{\vartheta})\,d\vartheta \quad \text{und} \quad I_n'' \leqq \int_{\bar{\vartheta}-\pi}^{\bar{\vartheta}+\pi} S_n^*(\vartheta-\bar{\vartheta})\,d\vartheta,$$

da wegen $\varepsilon_1 < \pi$, $0 < \bar{\vartheta} < \pi$ offenbar $\bar{\vartheta} - \varepsilon_1 > -3\pi - \bar{\vartheta}$, $\bar{\vartheta} + \varepsilon_1 < 3\pi - \bar{\vartheta}$, $\bar{\vartheta} - \varepsilon_1 > \bar{\vartheta} - \pi$, $\bar{\vartheta} + \varepsilon_1 < \bar{\vartheta} + \pi$ ist.

Nun sind aber die hier stehenden Integrale nach der Definition der Funktion $S_n^*(u)$ bezw. gleich

$$\frac{1}{n+1}\sum_{\nu=0,1,\ldots,n}\int_{-3\pi-\bar{\vartheta}}^{3\pi-\bar{\vartheta}} S_\nu(\vartheta+\bar{\vartheta})\,d\vartheta, \quad \text{bezw.} \quad \frac{1}{n+1}\sum_{\nu=0,1,\ldots,n}\int_{\bar{\vartheta}-\pi}^{\bar{\vartheta}+\pi} S_\nu(\vartheta-\bar{\vartheta})\,d\vartheta;$$

und da für jeden Wert von ν

$$\int_{-3\pi-\bar{\vartheta}}^{3\pi-\bar{\vartheta}} S_\nu(\vartheta+\bar{\vartheta})\,d\vartheta = \int_{-3\pi-\bar{\vartheta}}^{3\pi-\bar{\vartheta}} \{1+\cos(\vartheta+\bar{\vartheta})+\cdots+\cos\nu(\vartheta+\bar{\vartheta})\}\,d\vartheta = 6\pi$$

$$\int_{\bar{\vartheta}-\pi}^{\bar{\vartheta}+\pi} S_\nu(\vartheta-\bar{\vartheta})\,d\vartheta = \int_{\bar{\vartheta}-\pi}^{\bar{\vartheta}+\pi} \{1+\cos(\vartheta-\bar{\vartheta})+\cdots+\cos\nu(\vartheta-\bar{\vartheta})\}\,d\vartheta = 2\pi$$

ist, so folgt daraus,

$$\int_{-3\pi-\bar{\vartheta}}^{3\pi-\bar{\vartheta}} S_n^*(\vartheta+\bar{\vartheta})\,d\vartheta = 6\pi, \qquad \int_{\bar{\vartheta}-\pi}^{\bar{\vartheta}+\pi} S_n^*(\vartheta-\bar{\vartheta})\,d\vartheta = 2\pi.$$

Daraus schliesse ich aber wegen (11)

$$I_n' \leqq 6\pi, \qquad I_n'' \leqq 2\pi.$$

Ich zeige nun schliesslich, dass auch die Integrale I_n''' und I_n'''' unterhalb einer von n unabhängigen Grenze bleiben. In der Tat, es ist wegen (10)

$$I_n''' \leqq \int_{\bar{\vartheta}-\varepsilon_1}^{\bar{\vartheta}+\varepsilon_1} |s_n^*(\vartheta+\bar{\vartheta})|\,d\vartheta = \int_{\bar{\vartheta}-\varepsilon_1}^{\bar{\vartheta}+\varepsilon_1} \left| \frac{\cos\frac{\vartheta+\bar{\vartheta}}{2}}{2\sin\frac{\vartheta+\bar{\vartheta}}{2}} - \frac{1}{4(n+1)} \frac{\sin(n+1)(\vartheta+\bar{\vartheta})}{\sin^2\frac{\vartheta+\bar{\vartheta}}{2}} \right| d\vartheta.$$

Da der Punkt $\bar{\vartheta}$ die Ungleichungen

$$\eta_1 \leqq \bar{\vartheta} \leqq \pi - \eta_1 \qquad (\eta_1 > 0)$$

befriedigt, so muss in diesem Integral ϑ sicherlich innerhalb des Intervalls $[\eta_1 - \varepsilon_1, \pi - \eta_1 + \varepsilon_1]$ variieren:

$$\eta_1 - \varepsilon_1 \leqq \vartheta \leqq \pi - \eta_1 + \varepsilon_1.$$

Folglich ist

$$\eta_1 - \frac{\varepsilon_1}{2} \leqq \frac{\vartheta+\bar{\vartheta}}{2} \leqq \pi - \eta_1 + \frac{\varepsilon_1}{2}.$$

Da wir aber $\varepsilon_1 < \frac{\eta_1}{2}$ gewählt haben, so ist

$$\frac{3\eta_1}{4} < \frac{\vartheta+\bar{\vartheta}}{2} < \pi - \frac{3\eta_1}{4}.$$

Bleibt aber $\frac{x+\bar{x}}{2}$ zwischen den Grenzen $\frac{3\eta_1}{4}$ und $\pi - \frac{3\eta_1}{4}$ so kann man eine positive Grösse G_5 derart bestimmen, dass für alle diese Werte von $(x+\bar{x})$

$$\left|\frac{1}{4\sin^2\frac{x+\bar{x}}{2}}\right| \quad \text{und} \quad \left|\frac{1}{2\sin\frac{x+\bar{x}}{2}}\right| < G_5$$

ausfalle; es ist daher

$$I'''_n \leqq G_5 \int_{\bar{y}-\varepsilon_1}^{\bar{y}+\varepsilon_1} \left\{\left|\cos\frac{x+\bar{x}}{2}\right| + \frac{1}{n+1}\left|\sin(n+1)(x+\bar{x})\right|\right\} dx$$

$$\leqq G_5\left\{2\varepsilon_1 + \frac{2\varepsilon_1}{n+1}\right\}.$$

Diese Formel zeigt, dass I'''_n für jeden Wert von n eine bestimmte positive Grösse nicht übersteigt. Betrachten wir schliesslich

$$I''''_n = \int_{\bar{y}-\varepsilon_1}^{\bar{y}+\varepsilon_1}\left|\sin\frac{x-\bar{x}}{2}s_n(x-\bar{x})\right|dx = \int_{\bar{y}-\varepsilon_1}^{\bar{y}+\varepsilon_1}\left|\sin\frac{x-\bar{x}}{2}\left\{\frac{\cos\frac{x-\bar{x}}{2}}{2\sin\frac{x-\bar{x}}{2}} - \frac{1}{4(n+1)}\cdot\frac{\sin(n+1)(x-\bar{x})}{\sin^2\frac{x-\bar{x}}{2}}\right\}\right|dx$$

$$\leqq \frac{1}{2}\int_{\bar{y}-\varepsilon_1}^{\bar{y}+\varepsilon_1}\left|\cos\frac{x-\bar{x}}{2}\right|dx + \frac{1}{4(n+1)}\int_{\bar{y}-\varepsilon_1}^{\bar{y}+\varepsilon_1}\left|\frac{2\sin(n+1)\frac{x-\bar{x}}{2}}{\sin\frac{x-\bar{x}}{2}}\right|\left|\cos(n+1)\frac{x-\bar{x}}{2}\right|dx,$$

so sehen wir unmittelbar, dass das erste Integral in dieser Zerlegung kleiner als ε_1 ist. Um das zweite Integral abzuschätzen, bemerke ich, dass die Funktion $\frac{\sin\nu u}{\sin u}$, wo ν eine ganze Zahl bedeutet, dem Betrage nach kleiner als ν ist (für jeden Wert des Argumentes u). In der Tat bezeichnen wir mit M_ν das absolute Maximum dieser Funktion, so lehrt die Formel

$$\frac{\sin\nu u}{\sin u} = \frac{\sin(\nu-1)u}{\sin u}\cos u + \frac{\sin u}{\sin u}\cos(\nu-1)u$$

unmittelbar, dass

$$M_\nu \leqq M_{\nu-1} + 1$$

ist; und da $M_1 = 1$ ist, so findet man $M_\nu \leqq \nu$.

Danach ist

$$\frac{1}{2(n+1)}\int_{\bar{y}-\varepsilon_1}^{\bar{y}+\varepsilon_1}\left|\frac{\sin(n+1)\frac{x-\bar{x}}{2}}{\sin\frac{x-\bar{x}}{2}}\right|\left|\cos(n+1)\frac{x-\bar{x}}{2}\right|dx \leqq \frac{1}{2(n+1)}\int_{\bar{y}-\varepsilon_1}^{\bar{y}+\varepsilon_1}(n+1)\,dx = \varepsilon_1$$

und folglich

$$I''''_n \leqq 2\varepsilon_1$$

und dies zeigt, dass I_n''' für jeden Wert von n unterhalb einer bestimmten Grösse liegt.

Aus der Formel (9) folgt nun unmittelbar, dass auch die unendlich vielen Zahlen

$$2\int_{\bar{\zeta}-\varepsilon_1}^{\bar{\zeta}+\varepsilon_1} |K_n^*(\bar{z}, z)|\, dz$$

eine bestimmte Grösse nicht übersteigen, da doch dieses Integral kleiner als

$$I_n' + I_n'' + I_n''' + I_n''''$$

ist.

Damit ist meine Behauptung in allen Teilen bewiesen.

Göttingen, im Februar 1911.

ALFRED HAAR.

Reihenentwicklungen nach Legendreschen Polynomen.

Von

Alfred Haar in Kolozsvár (Klausenburg).

In der Theorie der Reihenentwicklungen reeller Funktionen einer Veränderlichen, spielen nebst den trigonometrischen Reihen diejenigen Reihen die Hauptrolle, die nach den sogenannten *Legendreschen Polynomen* oder Kugelfunktionen einer Variabeln fortschreiten.

Man definiert bekanntlich das n^{te} Legendresche Polynom

$$P_n(x) \qquad (n=0, 1, 2, \ldots)$$

als ein Polynom n^{ter} Ordnung, das in dem Intervall $[-1, 1]$ die folgende Orthogonalitätseigenschaft

$$\int_{-1}^{1} P_n(x)\, x^m\, dx = 0 \qquad (m=0, 1, 2, \ldots, n-1)$$

besitzt und es ist üblich $P_n(x)$ so zu normieren, daß

$$\int_{-1}^{1} P_n(x)^2\, dx = \frac{2}{2n+1}$$

ausfällt.

Ist nun $f(x)$ eine im Intervall $[-1, 1]$ definierte Funktion, von der nur vorausgesetzt werden muß, daß sie im betrachteten Intervall im Lebesgueschen Sinne integrierbar ist, und setzen wir

$$a_\nu = \frac{2\nu+1}{2} \int_{-1}^{1} f(\bar{x})\, P_\nu(\bar{x})\, d\bar{x} \qquad (\nu=0, 1, 2, \ldots),$$

so wird die formal gebildete Reihe

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu P_\nu(x)$$

die *Legendresche Reihe* der Funktion $f(x)$ genannt, und es entsteht die

Frage nach der Konvergenz, Divergenz bzw. Summabilität dieser Reihe an einer Stelle des betrachteten Intervalls.

Ich werde im folgenden zeigen, daß wenn man

$$x = \cos \vartheta$$

setzt, *die Legendresche Reihe* einer Funktion

$$f(x) = f(\cos \vartheta),$$

von der wir noch voraussetzen, *daß ihr Quadrat* $[f(x)]^2$ *im Intervall* $[-1, 1]$ *im Lebesgueschen Sinne integrierbar ist*, d. h. die Reihe

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu P_\nu(x) = \sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu P_\nu(\cos \vartheta) \tag{1}$$

an jeder inneren Stelle des betrachteten Intervalls

$$-1 < x < 1 \quad \text{also} \quad 0 < \vartheta < \pi$$

sich genau so verhält, wie die gewöhnliche cos.*-Reihe der Funktion* $f(\cos \vartheta)$ an der entsprechenden Stelle, so daß man die Fragen über Konvergenz bzw. Divergenz der Legendreschen Reihe mit Hilfe der Theoreme über Fouriersche Reihen beantworten kann.

Das angedeutete Theorem, das diese Zurückführung ermöglicht, lautet wie folgt:

Es bedeute $f(x)$ *eine im Intervall* $[-1, 1]$ *definierte samt ihrem Quadrate im Lebesgueschen Sinne integrierbare Funktion; entwickelt man die im Intervall* $0 \leqq \vartheta \leqq \pi$ *definierte Funktion* $f(\cos \vartheta)$ *in eine* cos.*-Reihe, indem man*

$$\alpha_\nu = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(\cos \bar{\vartheta}) \cos \nu \bar{\vartheta} \, d\bar{\vartheta} \qquad (\nu = 0, 1, 2, \ldots)$$

setzt und die unendliche Reihe

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} \alpha_\nu \cos \nu \vartheta \tag{2}$$

bildet, so konvergiert die Differenz der n^{ten} *Teilsumme der Legendreschen Reihe* (1)

$$s_n(\vartheta) = \sum_{\nu=0}^{n} a_\nu P_\nu(\cos \vartheta)$$

und der cos.*-Reihe* (2)

$$\sigma_n(\vartheta) = \sum_{\nu=0}^{n} \alpha_\nu \cos \nu \vartheta$$

an jeder inneren Stelle des Intervalls $0 \leqq \vartheta \leqq \pi$ *gegen Null; d. h. es ist*

$$\lim_{n=\infty} [s_n(\vartheta) - \sigma_n(\vartheta)] = 0, \quad \text{für} \quad 0 < \vartheta < \pi.$$

Aus diesem Satze folgt unmittelbar, daß die Legendresche Reihe der Funktion $f(\cos\vartheta)$ an einer inneren Stelle des Intervalls $[0, \pi]$ konvergent bzw. divergent ist, je nachdem die cos.-Reihe dieser Funktion an dieser Stelle konvergent oder divergent ist, und daß im Falle der Konvergenz beide Reihen dieselben Summen liefern.*) Es übertragen sich insbesondere alle die klassischen hinreichenden Bedingungen der Konvergenz der Fourierschen Reihe sofort auf die Legendresche Reihe für jede innere Stelle des betrachteten Intervalls, falls das Quadrat der entwickelten Funktion integrierbar ist.

Die vorliegende Arbeit enthält den Beweis dieses Theorems.

§ 1.

Zusammenstellung einiger Sätze aus der Theorie der trigonometrischen Reihen.

Wir stellen zuerst diejenigen Sätze aus der Theorie der Fourierschen Reihen zusammen, die bei dem Beweise unseres Satzes Anwendung finden.

Bekanntlich ist

$$\sum_{\nu=0}^{n} \sin \nu u = \frac{\cos\frac{u}{2}}{2\sin\frac{u}{2}} - \frac{\cos\left(n+\frac{1}{2}\right)u}{2\sin\frac{u}{2}},$$

$$\sum_{\nu=0}^{n} \cos \nu u = \frac{1}{2} + \frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)u}{2\sin\frac{u}{2}}.$$

Daraus schließen wir unmittelbar, daß für jeden Wert von n und u die Ausdrücke

$$\text{(I)} \qquad \left|\sin\frac{u}{2}\right| \left|\sum_{\nu=0}^{n} \sin \nu u\right|, \qquad \left|\sin\frac{u}{2}\right| \left|\sum_{\nu=0}^{n} \cos \nu u\right|$$

kleiner als 1 ausfallen.

Wenn ferner ε irgend eine positive Zahl $< \pi$ bedeutet, und u die Ungleichung

$$-2\pi + \varepsilon \leqq u \leqq 2\pi - \varepsilon$$

erfüllt, so bleibt jedenfalls auch

$$\text{(II)} \qquad \left|\sin\frac{u}{4}\sum_{\nu=0}^{n} \cos \nu u\right| = \left|\frac{1}{2}\sin\frac{u}{4} + \frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)u}{4\cos\frac{u}{4}}\right|$$

unterhalb einer von n und u unabhängigen oberen Grenze.

*) Um so mehr gilt der entsprechende Satz, wenn man die Reihen (1) und (2) mit Hilfe der Methode der arithmetischen Mitteln summiert.

In gleicher Weise schließen wir, daß, wenn v irgendeine Stelle des Intervalls $[\varepsilon, 2\pi - \varepsilon]$ bedeutet

$$\varepsilon \leqq v \leqq 2\pi - \varepsilon, \qquad (0 < \varepsilon < \pi),$$

die beiden Summen

$$\text{(III)} \qquad \left| \sum_{\nu=0}^{n} \cos \nu v \right| \quad \text{und} \quad \left| \sum_{\nu=0}^{n} \sin \nu v \right|$$

unterhalb einer von n und v unabhängigen endlichen Grenze bleiben.

Entsprechende Resultate ergeben sich endlich für die Summen

$$\text{(IV)} \qquad \left| \sum_{\nu=1}^{n} \frac{\sin \nu u}{\nu} \right| \quad \text{und} \quad \left| \sum_{\nu=1}^{n} \frac{\cos \nu u}{\nu} \right|.$$

Die erste dieser Summen (IV) bleibt bekanntlich für jeden Wert n und u unterhalb einer festen Grenze.*)

Aus der Identität

$$2 \sin \frac{u}{2} \sum_{\nu=1}^{n} \frac{\cos \nu u}{\nu} = -\sin \frac{u}{2} + \frac{\sin\left(n + \frac{1}{2}\right) u}{n} + \sum_{\nu=1}^{n-1} \frac{\sin\left(\nu + \frac{1}{2}\right) u}{\nu(\nu+1)}$$

schließt man sofort, daß

$$\text{(V)} \qquad \left| \sin \frac{u}{2} \sum_{\nu=1}^{n} \frac{\cos \nu u}{\nu} \right|$$

für jeden Wert von u,

$$\text{(VI)} \qquad \left| \sum_{\nu=1}^{n} \frac{\cos \nu v}{\nu} \right|$$

hingegen für solche Werte von v, die der Ungleichung

$$\varepsilon \leqq v \leqq 2\pi - \varepsilon \qquad (0 < \varepsilon < \pi)$$

unterworfen sind, unterhalb einer von n unabhängigen oberen Grenze bleibt.

Wir werden bei dem Beweis unserer Behauptung noch von dem folgenden Satze der Theorie der Fourierschen Reihen Gebrauch machen.

$\varphi(\vartheta)$ sei eine im Intervall $[-\pi, \pi]$ definierte im Lebesgueschen Sinne integrierbare Funktion. Wir entwickeln diese Funktion $\varphi(\vartheta)$, sowie die Funktion

$$\Phi(\vartheta) = \varphi(\vartheta) \left| \sqrt{\sin \vartheta} \right|$$

*) Diese Tatsache wurde zuerst von Kneser bewiesen: „Beiträge zur Sturm-Liouvilleschen Darstellung willkürlicher Funktionen". Math. Ann. 60, § 1.

in Fouriersche Reihen, deren n^{te} Teilsumme

$$\varphi_n(\vartheta) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi-\vartheta}^{\pi-\vartheta} \varphi(\alpha+\vartheta) \frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)\alpha}{2\sin\frac{\alpha}{2}}\, d\alpha$$

bzw.

$$\Phi_n(\vartheta) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi-\vartheta}^{\pi-\vartheta} \varphi(\alpha+\vartheta)\,|\sqrt{\sin(\alpha+\vartheta)}| \frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)\alpha}{2\sin\frac{\alpha}{2}}\, d\alpha$$

ist. Ist nun ϑ irgendeine zwischen Null und π liegende Zahl $(0<\vartheta<\pi)$, so konvergiert die Differenz

$$\Phi_n(\vartheta) - |\sqrt{\sin\vartheta}|\,\varphi_n(\vartheta)$$

mit wachsendem n gegen Null.

Die Richtigkeit dieser Behauptung ist eine unmittelbare Folge des Lebesgueschen Satzes, daß die Fourierschen Konstanten einer willkürlichen im Lebesgueschen Sinne integrierbaren Funktion $F(\vartheta)$:

$$\int_a^b F(\alpha)\cos n\alpha\, d\alpha \quad \text{und} \quad \int_a^b F(\alpha)\sin n\alpha\, d\alpha$$

mit wachsendem n gegen Null streben.*)

In der Tat, man kann die betrachtete Differenz auf die folgende Form bringen:

$$\Phi_n(\vartheta) - |\sqrt{\sin\vartheta}|\,\varphi_n(\vartheta) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi-\vartheta}^{\pi-\vartheta} \sin\left(n+\frac{1}{2}\right)\alpha \cdot \varphi(\alpha+\vartheta) \frac{|\sqrt{\sin(\alpha+\vartheta)}| - |\sqrt{\sin\vartheta}|}{\sin\frac{\alpha}{2}}\, d\alpha;$$

da die Funktion

$$\frac{|\sqrt{\sin(\alpha+\vartheta)}| - |\sqrt{\sin\vartheta}|}{\sin\frac{\alpha}{2}}$$

im betrachteten Intervall eine stetige Funktion von α ist (die an der Stelle $\alpha = 0$ den endlichen Wert $\frac{\cos\vartheta}{|\sqrt{\sin\vartheta}|}$ annimmt), so stellt

$$\varphi(\alpha+\vartheta) \frac{|\sqrt{\sin(\alpha+\vartheta)}| - |\sqrt{\sin\vartheta}|}{\sin\frac{\alpha}{2}}$$

eine im Lebesgueschen Sinne integrierbare Funktion dar, und das ange-

*) Lebesgue: Leçons sur les séries trigonométriques, S. 61.

schriebene Integral strebt — nach dem soeben genannten Lebesgueschen Satze — gegen Null.

Diese für Fouriersche Reihen bewiesene Bemerkung gilt natürlich auch für die cos.-Reihe einer im Intervall $[0, \pi]$ definierten Funktion. Um dies einzusehen, genügt es, die Werte unserer Funktion $\varphi(\vartheta)$ im Intervall $[-\pi, 0]$ derart abzuändern, daß die nach dieser Modifikation entstehende Funktion eine gerade Funktion sei. Dann gehen die Fourier-Reihen dieser Funktion und der, aus dieser durch Multiplikation mit $|\sqrt{\sin\vartheta}|$ entstandenen geraden Funktion in die cos.-Reihen der im Intervall $[0, \pi]$ definierten Funktionen

$$\varphi(\vartheta) \quad \text{und} \quad \Phi(\vartheta) = |\sqrt{\sin\vartheta}|\, \varphi(\vartheta)$$

über und man erhält das nämliche Resultat für diese cos.-Reihen, wie oben für die Fourierschen Reihen.

§ 2.

Zurückführung des Beweises auf die Abschätzung eines Integrals.

Auf Grund der zuletzt gemachten Bemerkung werden wir die Legendresche Reihe der Funktion $f(x)$

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu P_\nu(x) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{2\nu+1}{2} P_\nu(x) \int_{-1}^{1} f(\bar{x})\, P_\nu(\bar{x})\, d\bar{x},$$

die wir nach Einführung der Variabeln

$$x = \cos\vartheta \quad \text{und} \quad \bar{x} = \cos\bar{\vartheta}$$

in der Form

$$(1) \qquad \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{2\nu+1}{2} P_\nu(\cos\vartheta) \int_0^{\pi} f(\cos\bar{\vartheta})\, P_\nu(\cos\bar{\vartheta}) \sin\bar{\vartheta}\, d\bar{\vartheta}$$

schreiben können, nicht direkt mit der cos.-Reihe dieser Funktion $f(\cos\vartheta)$

$$(2) \qquad \frac{2}{\pi} \sum_{\nu=0}^{\infty} \cos\nu\vartheta \int_0^{\pi} f(\cos\bar{\vartheta}) \cos\nu\bar{\vartheta}\, d\bar{\vartheta}$$

vergleichen, sondern mit der cos.-Reihe der Funktion $|\sqrt{\sin\vartheta}|\, f(\cos\vartheta)$, deren n^{te} Partialsumme

$$\sigma_n'(\vartheta) = \frac{2}{\pi} \sum_{\nu=0}^{n} \cos\nu\vartheta \int_0^{\pi} f(\cos\bar{\vartheta})\, |\sqrt{\sin\bar{\vartheta}}| \cos\nu\bar{\vartheta}\, d\bar{\vartheta}$$

ist. Wir bezeichnen — wie in der Einleitung — die n^{te} Teilsumme der Reihen (1) und (2) bzw. mit $s_n(\vartheta)$ und $\sigma_n(\vartheta)$. Da, zufolge der letzten Bemerkung, für jede innere Stelle des Intervalls $[0, \pi]$,

$$\lim_{n=\infty} [\sigma_n'(\vartheta) - |\sqrt{\sin \vartheta}|\, \sigma_n(\vartheta)] = 0$$

ist, so reduziert sich unser Theorem, dessen Aussage durch die Limesgleichung

$$\lim_{n=\infty} [s_n(\vartheta) - \sigma_n(\vartheta)] = 0 \qquad (0 < \vartheta < \pi)$$

formulierbar ist, auf die folgende Limesgleichung:

$$\lim_{n=\infty} [s_n(\vartheta)\, |\sqrt{\sin \vartheta}| - \sigma_n'(\vartheta)] = 0.$$

Mit anderen Worten, es ist — wie eine leichte Umrechnung der letzten Gleichung zeigt — zu beweisen, daß das folgende Integral:

$$\int_0^\pi f(\cos \bar{\vartheta})\, |\sqrt{\sin \bar{\vartheta}}| \sum_{\nu=0}^{n} \left\{ \frac{2\nu+1}{2} P_\nu(\cos \vartheta)\, P_\nu(\cos \bar{\vartheta})\, |\sqrt{\sin \vartheta}\, \sqrt{\sin \bar{\vartheta}}| - \frac{2}{\pi} \cos \nu \vartheta \cos \nu \bar{\vartheta} \right\} d\bar{\vartheta}$$

mit wachsendem n gegen Null konvergiert, falls ϑ eine *innere Stelle* des Intervalls $[0, \pi]$ — $f(x)$ aber eine solche im Intervall $[-1, 1]$ definierte Funktion bedeutet, für die das im Lebesgueschen Sinne genommene Integral

$$\int_{-1}^{1} [f(x)]^2\, dx = \int_0^\pi [f(\cos \vartheta)]^2 \sin \vartheta\, d\vartheta$$

existiert.

Setzen wir zur Abkürzung

$$L_n(\vartheta, \bar{\vartheta}) = \sum_{\nu=0}^{n} \frac{2\nu+1}{2} P_\nu(\cos \vartheta)\, P_\nu(\cos \bar{\vartheta})\, |\sqrt{\sin \vartheta}\, \sqrt{\sin \bar{\vartheta}}|,$$

$$D_n(\vartheta, \bar{\vartheta}) = \frac{2}{\pi} \sum_{\nu=0}^{n} \cos \nu \vartheta \cos \nu \bar{\vartheta},$$

so lautet also unsere Behauptung:

$$\lim_{n=\infty} \int_0^\pi \{L_n(\vartheta, \bar{\vartheta}) - D_n(\vartheta, \bar{\vartheta})\}\, f(\cos \bar{\vartheta})\, |\sqrt{\sin \bar{\vartheta}}|\, d\bar{\vartheta} = 0. \tag{3}$$

Diese Limesgleichung ist jedenfalls für den Fall erfüllt, daß $f(x)$ ein Polynom bedeutet. Denn in diesem Falle konvergieren die cos.-Reihen — wie die einfachsten Sätze der Theorie der Fourierschen Reihen lehren — der Funktionen $f(\cos \vartheta)$ und $|\sqrt{\sin \vartheta}|\, f(\cos \vartheta)$ an jeder inneren Stelle des

Intervalls $[0, \pi]$ gegen den entsprechenden Funktionswert; die Legendresche Reihe eines Polynoms besitzt natürlich nur endlich viele von Null verschiedene Koeffizienten und stellt ebenfalls das betreffende Polynom dar; daher konvergiert die durch (3) dargestellte Differenz beider Reihen gegen Null.

Wir werden beweisen, *daß für ein festes* ϑ $(0 < \vartheta < \pi)$ *die unendlich vielen Zahlen*

$$\int_0^{\pi} [L_n(\vartheta, \overline{\vartheta}) - D_n(\vartheta, \overline{\vartheta})]^2 \, d\overline{\vartheta}$$

unterhalb einer von n unabhängigen oberen Grenze G bleiben, und wollen vorab zeigen, daß daraus, mit Rücksicht auf die letzte Bemerkung, die Richtigkeit der Gleichung (3) für jede Funktion $f(x)$ bewiesen werden kann, deren Quadrat im Lebesgueschen Sinne integrierbar ist.*)

Ist nämlich $f(x)$ eine im Intervall $[-1, 1]$ definierte Funktion dieser Art, so können wir zu jeder noch so kleinen positiven Zahl δ ein Polynom $p(x)$ derart bestimmen, daß das Integral

$$(4) \qquad \int_{-1}^{1} [f(x) - p(x)]^2 \, dx = \int_0^{\pi} [f(\cos\vartheta) - p(\cos\vartheta)]^2 \sin\vartheta \, d\vartheta < \delta$$

ausfalle.**) Da nun für dieses Polynom $p(x)$

$$\lim_{n=\infty} \int_0^{\pi} \{L_n(\vartheta, \overline{\vartheta}) - D_n(\vartheta, \overline{\vartheta})\} \, p(\cos\overline{\vartheta}) \left| \sqrt{\sin\overline{\vartheta}} \right| d\vartheta = 0$$

ist, so gilt

$$\lim_{n=\infty} \int_0^{\pi} \{L_n(\vartheta, \overline{\vartheta}) - D_n(\vartheta, \overline{\vartheta})\} \, f(\cos\overline{\vartheta}) \left| \sqrt{\sin\overline{\vartheta}} \, d\overline{\vartheta} \right.$$

$$= \lim_{n=\infty} \int_0^{\pi} \{L_n(\vartheta, \overline{\vartheta}) - D_n(\vartheta, \overline{\vartheta})\} \, [f(\cos\overline{\vartheta}) - p(\cos\overline{\vartheta})] \left| \sqrt{\sin\overline{\vartheta}} \right| d\overline{\vartheta} \, .$$

---

*) Man kann die Richtigkeit dieser Behauptung — indem man von den Funktionen auf ihre Fourierschen Koeffizienten zurückgeht — auch aus dem Hilbertschen Satze entnehmen, daß eine beschränkte Linearform von unendlich vielen Veränderlichen eine stetige Funktion ist. Vgl. Hilbert: Grundzüge einer allgemeinen Theorie der linearen Integralgleichungen. Leipzig 1912, S. 148.

**) Die Möglichkeit ein Polynom dieser Art zu bestimmen, folgt unmittelbar aus der Tatsache, daß die n^{te} Teilsumme der Legendreschen Reihe von $f(x)$ ein Polynom n^{ten} Grades $p_n(x)$ ist, und es ist

$$\lim_{n=\infty} \int_{-1}^{1} [f(x) - p_n(x)]^2 \, dx = 0.$$

Wegen der bekannten Schwarzschen Ungleichung ist aber — mit Rücksicht auf (4) —

$$\left| \int_0^\pi \{L_n(\vartheta,\bar{\vartheta}) - D_n(\vartheta,\bar{\vartheta})\}\,[f(\cos\bar{\vartheta}) - p(\cos\bar{\vartheta})]\,|\sqrt{\sin\bar{\vartheta}}|\,d\bar{\vartheta} \right| \leqq \sqrt{G\delta},$$

woraus man — da δ eine beliebig kleine Zahl bedeutet — unmittelbar schließen kann, daß

$$\lim_{n=\infty} \int_0^\pi \{L_n(\vartheta,\bar{\vartheta}) - D_n(\vartheta,\bar{\vartheta})\}\,f(\cos\bar{\vartheta})\,|\sqrt{\sin\bar{\vartheta}}|\,d\bar{\vartheta} = 0$$

ist. Es genügt daher, um unseren Satz zu beweisen, zu zeigen, daß die unendlich vielen Zahlen

$$\int_0^\pi \{L_n(\vartheta,\bar{\vartheta}) - D_n(\vartheta,\bar{\vartheta})\}^2\,d\bar{\vartheta} \qquad (0<\vartheta<\pi)$$

unterhalb einer oberen Grenze bleiben.

Ist nun δ irgend eine positive Zahl, von der Eigenschaft, daß die festgewählte Stelle ϑ noch innerhalb des Intervalls $[2\delta,\ \pi-2\delta]$ liegt:

$$2\delta \leqq \vartheta \leqq \pi - 2\delta,$$

so kann man ohne jede Schwierigkeit zeigen, daß die beiden Integrale

$$\int_0^\delta \{L_n(\vartheta,\bar{\vartheta}) - D_n(\vartheta,\bar{\vartheta})\}^2\,d\bar{\vartheta} \text{ und } \int_{\pi-\delta}^\pi \{L_n(\vartheta,\vartheta) - D_n(\vartheta,\bar{\vartheta})\}^2\,d\bar{\vartheta}$$

unterhalb einer von n unabhängigen oberen Grenze bleiben. Wir beweisen dies etwa für das erste dieser Integrale.

Auf Grund der Schwarzschen Ungleichung ist

$$\int_0^\delta \{L_n - D_n\}^2\,d\bar{\vartheta} \leqq \int_0^\delta L_n^2\,d\bar{\vartheta} + \int_0^\delta D_n^2\,d\bar{\vartheta} + 2\left(\int_0^\delta L_n^2\,d\bar{\vartheta}\int_0^\delta D_n^2\,d\bar{\vartheta}\right)^{\frac{1}{2}};$$

es genügt also zu diesem Ende zu zeigen, daß die unendlich vielen Zahlen:

$$\int_0^\delta \{L_n(\vartheta,\bar{\vartheta})\}^2\,d\bar{\vartheta} \text{ und } \int_0^\delta \{D_n(\vartheta,\bar{\vartheta})\}^2\,d\bar{\vartheta}$$

nicht ins Unendliche wachsen.

Nun ist aber

$$D_n(\vartheta,\bar{\vartheta}) = \frac{2}{\pi}\sum_{\nu=0}^{n} \cos\nu\vartheta\,\cos\nu\bar{\vartheta} = \frac{1}{\pi}\sum_{\nu=0}^{n} \cos\nu(\vartheta+\bar{\vartheta}) + \frac{1}{\pi}\sum_{\nu=0}^{n} \cos\nu(\vartheta-\bar{\vartheta});$$

da für die in Betracht kommenden Werte von ϑ und $\bar{\vartheta}$,

$$2\delta \leqq \vartheta \leqq \pi - 2\delta, \qquad 0 \leqq \bar{\vartheta} \leqq \delta,$$

die Argumente $\vartheta + \bar{\vartheta}$ und $\vartheta - \bar{\vartheta}$ die Ungleichungen

$$\delta < \vartheta + \bar{\vartheta} \leqq \pi - \delta, \qquad \delta \leqq \vartheta - \bar{\vartheta} < \pi - \delta$$

erfüllen, so bleiben die Summen

$$\sum_{\nu=0}^{n} \cos \nu(\vartheta + \bar{\vartheta}), \qquad \sum_{\nu=0}^{n} \cos \nu(\vartheta - \bar{\vartheta}),$$

(vgl. III im § 1) unterhalb einer von n unabhängigen oberen Grenze; um so mehr gilt dies für das Integral

$$\int_0^{\delta} \{D_n(\vartheta, \bar{\vartheta})\}^2 d\bar{\vartheta} = \frac{1}{\pi^2} \int_0^{\delta} \left\{ \sum_{\nu=0}^{n} \cos \nu(\vartheta + \bar{\vartheta}) + \sum_{\nu=0}^{n} \cos \nu(\vartheta - \bar{\vartheta}) \right\}^2 d\bar{\vartheta}.$$

Wir betrachten nun das Integral

$$\int_0^{\delta} \{L_n(\vartheta, \bar{\vartheta})\}^2 d\bar{\vartheta}$$

und wenden die bekannte Formel von Christoffel an*)

$$L_n(\vartheta, \bar{\vartheta}) = \frac{n+1}{2} \frac{P_{n+1}(\cos \bar{\vartheta}) P_n(\cos \vartheta) - P_n(\cos \bar{\vartheta}) P_{n+1}(\cos \vartheta)}{\cos \bar{\vartheta} - \cos \vartheta} \left| \sqrt{\sin \vartheta \sin \bar{\vartheta}} \right|.$$

Das betrachtete Integral bleibt — wiederum auf Grund der Schwarzschen Ungleichung — jedenfalls unterhalb einer von n unabhängigen oberen Grenze, falls dies für die beiden Integrale

$$(5) \qquad \begin{aligned} &\int_0^{\delta} \left\{ \frac{n+1}{2} \frac{P_{n+1}(\cos \bar{\vartheta}) P_n(\cos \vartheta)}{\cos \bar{\vartheta} - \cos \vartheta} \sqrt{\sin \vartheta \sin \bar{\vartheta}} \right\}^2 d\bar{\vartheta}, \\ &\int_0^{\delta} \left\{ \frac{n+1}{2} \frac{P_n(\cos \bar{\vartheta}) P_{n+1}(\cos \vartheta)}{\cos \bar{\vartheta} - \cos \vartheta} \sqrt{\sin \vartheta \sin \bar{\vartheta}} \right\}^2 d\bar{\vartheta} \end{aligned}$$

der Fall ist. Nun ist aber, da $|\cos \bar{\vartheta} - \cos \vartheta|$ für die in Betracht kommenden Wertsysteme oberhalb einer positiven Grenze $\eta (> 0)$ bleibt, das erste dieser beiden Integrale jedenfalls kleiner als

$$\left(\frac{n+1}{2\eta}\right)^2 [P_n(\cos \vartheta)]^2 |\sin \vartheta| \int_0^{\delta} [P_{n+1}(\cos \bar{\vartheta})]^2 \sin \bar{\vartheta} \, d\bar{\vartheta},$$

*) Christoffel: „Über die Gaußische Quadratur und eine Verallgemeinerung derselben". Journal für die reine und angewandte Mathematik Bd. 55 (1858).

das zweite hingegen kleiner als

$$\left(\frac{n+1}{2\eta}\right)^2 [P_{n+1}(\cos\vartheta)]^2 \,|\sin\vartheta| \int_0^{\delta} [P_n(\cos\bar{\vartheta})]^2 \sin\bar{\vartheta}\, d\bar{\vartheta}.$$

Da schließlich für jedes n

$$\int_0^{\delta} [P_n(\cos\bar{\vartheta})]^2 \sin\bar{\vartheta}\, d\bar{\vartheta} \leqq \int_{-1}^{1} [P_n(\bar{x})]^2\, d\bar{x} = \frac{2}{2n+1}$$

ist, so sind die fraglichen Integrale jedenfalls kleiner als

$$\left(\frac{n+1}{2\eta}\right)^2 \frac{2}{2n+3} [P_n(\cos\vartheta)]^2 \quad \text{bzw.} \quad \left(\frac{n+1}{2\eta}\right)^2 \frac{2}{2n+1} [P_{n+1}(\cos\vartheta)]^2.$$

Um diese Zahlen abzuschätzen, wende ich die bekannte Laplacesche Approximationsformel an

$$P_n(\cos\vartheta) = \sqrt{\frac{2}{n\pi\sin\vartheta}} \left[\cos\left(\left(n+\frac{1}{2}\right)\vartheta - \frac{\pi}{4}\right) + \frac{\alpha_n(\vartheta)}{n}\right],$$

die für jeden *inneren* Punkt ϑ des Intervalls $[0, \pi]$ gilt. Die unendlich vielen Zahlen $\alpha_n(\vartheta)$ bleiben für jedes n unterhalb einer oberen Grenze g; es ist folglich

$$|P_n(\cos\vartheta)| \leqq \sqrt{\frac{2}{n\pi\sin\vartheta}} \left[1 + \frac{g}{n}\right],$$

und daher sind die beiden unter (5) stehenden Integrale sicherlich kleiner als

$$\left(\frac{n+1}{2\eta}\right)^2 \frac{2}{2n+3} \frac{2}{n\pi\sin\vartheta} \left[1+\frac{g}{n}\right]^2 \text{bzw.} \left(\frac{n+1}{2\eta}\right)^2 \frac{2}{2n+1} \frac{2}{(n+1)\pi\sin\vartheta} \left[1+\frac{g}{n+1}\right]^2.$$

Diese Ausdrücke aber bleiben für jedes n unterhalb einer Grenze; daraus schließen wir also daß dasselbe auch für das Integral

$$\int_0^{\delta} \{L_n(\vartheta, \bar{\vartheta})\}^2\, d\bar{\vartheta},$$

und damit auch für das Integral

$$\int_0^{\delta} \{L_n(\vartheta, \bar{\vartheta}) - D_n(\vartheta, \bar{\vartheta})\}^2\, d\bar{\vartheta}$$

statt hat. In derselben Weise kann gezeigt werden, daß

$$\int_{\pi-\delta}^{\pi} \{L_n(\vartheta, \bar{\vartheta}) - D_n(\vartheta, \bar{\vartheta})\}^2\, d\bar{\vartheta}$$

ebenfalls unterhalb einer, von n unabhängigen, Grenze bleibt.

§ 3.

Beweis des Theorems.

Wir bringen unseren Beweis zu Ende, indem wir zeigen, daß auch das Integral

$$\int_{\delta}^{\pi-\delta} \{L_n(\vartheta, \overline{\vartheta}) - D_n(\vartheta, \overline{\vartheta})\}^2 d\overline{\vartheta}$$

unterhalb einer von n unabhängigen oberen Grenze liegt. Wir werden sogar zeigen, daß der Integrand

$$L_n(\vartheta, \overline{\vartheta}) - D_n(\vartheta, \overline{\vartheta})$$

dem absoluten Betrage nach unterhalb einer von n unabhängigen Grenze bleibt, wenn ϑ jene bestimmte Stelle des Intervalls $[2\delta, \pi - 2\delta]$, $\overline{\vartheta}$ hingegen irgend eine Stelle des Intervalls $[\delta, \pi - \delta]$ bedeutet.*)

Um dies darzutun wende ich eine von Heine herrührende asymptotische Darstellung der Kugelfunktionen an**), die folgendermaßen lautet: Sei δ eine positive Zahl $< \pi$, und $\overline{\vartheta}$ irgend eine Stelle des Intervalls $[\delta, \pi - \delta]$. Es gilt für alle diese Stellen die Formel:

$$P_n(\cos\overline{\vartheta}) = \sqrt{\frac{2}{n\pi \sin\overline{\vartheta}}} \left\{ \cos\overline{\omega}_n + \frac{1}{8n}[\operatorname{cotg}\overline{\vartheta} \sin\overline{\omega}_n - 2\cos\overline{\omega}_n] + \frac{\beta_n(\overline{\vartheta})}{n^2} \right\},$$

wobei zur Abkürzung

$$\overline{\omega}_n = \left(n + \frac{1}{2}\right)\overline{\vartheta} - \frac{\pi}{4}$$

gesetzt ist, und die unendlich vielen Funktionen $\beta_n(\overline{\vartheta})$ bleiben unterhalb einer von n und $\overline{\vartheta}$ unabhängigen Größe.***) Aus dieser Formel, die natürlich auch für die, durch die Ungleichung

$$2\delta \leqq \vartheta \leqq \pi - 2\delta$$

---

*) Man kann aus diesem Umstande auf eine Verallgemeinerung unseres Theorems schließen, indem daraus die Richtigkeit unserer Behauptung für jede Funktion $f(\cos\vartheta)$ folgt, die die folgenden beiden Bedingungen erfüllt:

1. die Funktion ist im Intervall $[\delta, \pi - \delta]$ im Lebesgueschen Sinne integrierbar;
2. das Quadrat der Funktion besitzt in den Intervallen $[0, \delta]$ und $[\pi - \delta, \pi]$ ein Lebesguesches Integral.

**) Heine, Kugelfunktionen (Berlin 1879), S. 178.

***) Eine obere Grenze für $\beta_n(\overline{\vartheta})$ kann man aus der von Stieltjes (Annales de la Faculté des Sciences de Toulouse (1) 4 (1890)) aufgestellten Formel entnehmen.

eingeschränkte Stelle ϑ gilt, kann man leicht eine asymptotische Darstellung des Produktes

$$\frac{2n+1}{2} P_n(\cos\bar{\vartheta})\, P_n(\cos\vartheta)$$

herstellen, indem man beachtet, daß $|\operatorname{cotg}\vartheta|$ und $|\operatorname{cotg}\bar{\vartheta}|$ für die in Betracht kommenden Werte von ϑ und $\bar{\vartheta}$ kleiner als eine bestimmte Zahl bleiben. Setzen wir entsprechend zur Abkürzung

$$\omega_n = \left(n+\frac{1}{2}\right)\vartheta - \frac{\pi}{4},$$

so lautet die fragliche Darstellung

$$\frac{2n+1}{2} P_n(\cos\bar{\vartheta})\, P_n(\cos\vartheta) = \frac{2}{\pi}\,\frac{1}{\left|\sqrt{\sin\bar{\vartheta}\,\sin\vartheta}\right|}\left\{\cos\omega_n\cos\bar{\omega}_n + \frac{1}{8n}\left[\operatorname{cotg}\bar{\vartheta}\cos\omega_n\sin\bar{\omega}_n + \operatorname{cotg}\vartheta\cos\bar{\omega}_n\sin\omega_n\right] + \frac{\gamma_n(\vartheta,\bar{\vartheta})}{n^2}\right\}$$
$$(n=1,2,3,\ldots),$$

wobei also $|\gamma_n(\vartheta,\bar{\vartheta})|$ für alle in Betracht kommenden Werte von ϑ und $\bar{\vartheta}$ unterhalb einer von n, ϑ, $\bar{\vartheta}$ unabhängigen Grenze bleibt. Ich definiere noch der Symmetrie halber für $\delta \leqq \bar{\vartheta} \leqq \pi-\delta$ und $2\delta \leqq \vartheta \leqq \pi - 2\delta$ die Funktion $\gamma_0(\vartheta,\bar{\vartheta})$ derart, daß

$$\frac{1}{2} P_0(\cos\bar{\vartheta})\, P_0(\cos\vartheta) = \frac{2}{\pi}\,\frac{1}{\left|\sqrt{\sin\vartheta\,\sin\bar{\vartheta}}\right|}\left\{\cos\omega_0\cos\bar{\omega}_0 + \gamma_0(\vartheta,\bar{\vartheta})\right\}$$

wird. Durch Summation ergibt sich nun:

$$(6)\quad \frac{\pi}{2}\left\{L_n(\vartheta,\bar{\vartheta}) - D_n(\vartheta,\bar{\vartheta})\right\} = \sum_{\nu=0}^{n}\left[\cos\omega_\nu\cos\bar{\omega}_\nu - \cos\nu\vartheta\cos\nu\bar{\vartheta}\right] + \frac{1}{8}\sum_{\nu=1}^{n}\frac{\left[\operatorname{cotg}\bar{\vartheta}\cos\omega_\nu\sin\bar{\omega}_\nu + \operatorname{cotg}\vartheta\cos\bar{\omega}_\nu\sin\omega_\nu\right]}{\nu} + \gamma_0(\vartheta,\bar{\vartheta}) + \sum_{\nu=1}^{n}\frac{\gamma_\nu(\vartheta,\bar{\vartheta})}{\nu^2}.$$

Ich behaupte nun, daß jede der rechts stehenden drei Summen dem Betrage nach unterhalb einer — vom Index n unabhängigen — Größe bleiben, falls ϑ und $\bar{\vartheta}$ die oben aufgeschriebenen Ungleichungen erfüllen. Für die letzte dieser Summen

$$\sum_{\nu=1}^{n}\frac{\gamma_\nu(\vartheta,\bar{\vartheta})}{\nu^2}$$

ist dies eine unmittelbare Folge der Tatsache, daß die Funktionen $\gamma_\nu(\vartheta, \bar{\vartheta})$ für jeden Wert von ν die verlangte Eigenschaft aufweisen.

Um dasselbe von der zweiten der oben auftretenden Summen

$$\sum_{\nu=1}^{n} \frac{1}{\nu} [\operatorname{cotg} \bar{\vartheta} \cos \omega_\nu \sin \bar{\omega}_\nu + \operatorname{cotg} \vartheta \cos \bar{\omega}_\nu \sin \omega_\nu]$$

nachzuweisen, genügt es — in Anbetracht dessen, daß $|\operatorname{cotg} \vartheta|$ und $|\operatorname{cotg} \bar{\vartheta}|$ unterhalb fester Grenzen bleiben — zu zeigen, daß die folgenden Summen

$$\left| \sum_{\nu=1}^{n} \frac{1}{\nu} [\cos \omega_\nu \sin \bar{\omega}_\nu] \right| \quad \text{und} \quad \left| \sum_{\nu=1}^{n} \frac{1}{\nu} [\cos \bar{\omega}_\nu \sin \omega_\nu] \right|,$$

die aus den Summen

$$(7) \qquad \begin{aligned} \frac{1}{2} \sum_{\nu=1}^{n} \frac{\sin(\omega_\nu + \bar{\omega}_\nu)}{\nu} &= -\frac{1}{2} \sum_{\nu=1}^{n} \frac{\cos\left(\nu + \frac{1}{2}\right)(\vartheta + \bar{\vartheta})}{\nu}, \\ \frac{1}{2} \sum_{\nu=1}^{n} \frac{\sin(\omega_\nu - \bar{\omega}_\nu)}{\nu} &= \frac{1}{2} \sum_{\nu=1}^{n} \frac{\sin\left(\nu + \frac{1}{2}\right)(\vartheta - \bar{\vartheta})}{\nu} \end{aligned}$$

durch Addition bzw. Subtraktion entstehen, für alle in Betracht kommenden Werte von ϑ und $\bar{\vartheta}$, unterhalb derselben, von n unabhängigen Grenze bleiben. Nun lassen sich aber, wenn wir zur Abkürzung

$$\vartheta + \bar{\vartheta} = v, \qquad \vartheta - \bar{\vartheta} = u$$

setzen, die beiden letzten Summen in folgender Weise zerlegen:

$$\begin{aligned} \sum_{\nu=1}^{n} \frac{\cos\left(\nu + \frac{1}{2}\right)(\vartheta + \bar{\vartheta})}{\nu} &= \cos \frac{v}{2} \sum_{\nu=1}^{n} \frac{\cos \nu v}{\nu} - \sin \frac{v}{2} \sum_{\nu=1}^{n} \frac{\sin \nu v}{\nu}, \\ \sum_{\nu=1}^{n} \frac{\sin\left(\nu + \frac{1}{2}\right)(\vartheta - \bar{\vartheta})}{\nu} &= \sin \frac{u}{2} \sum_{\nu=1}^{n} \frac{\cos \nu u}{\nu} + \cos \frac{u}{2} \sum_{\nu=1}^{n} \frac{\sin \nu u}{\nu}. \end{aligned}$$

Da aber v die Ungleichung

$$3\delta \leqq v \leqq 2\pi - 3\delta$$

befriedigt, so bleiben (cf. IV und VI im § 1) die Summen

$$\left| \sum_{\nu=1}^{n} \frac{\cos \nu v}{\nu} \right| \quad \text{und} \quad \left| \sum_{\nu=1}^{n} \frac{\sin \nu v}{\nu} \right|$$

unterhalb einer festen von n unabhängigen Grenze; dasselbe gilt (cf. IV und V im § 1) für jedes u von den Ausdrücken

$$\left|\sin\frac{u}{2}\sum_{\nu=1}^{n}\frac{\cos\nu u}{\nu}\right| \quad \text{und} \quad \left|\sum_{\nu=1}^{n}\frac{\sin\nu u}{\nu}\right|.$$

Damit ist aber gezeigt, daß die Summen (7), und folglich auch die Summe

$$\left|\sum_{\nu=1}^{n}\frac{1}{\nu}\left[\operatorname{cotg}\bar{\vartheta}\cos\omega_\nu\sin\bar{\omega}_\nu+\operatorname{cotg}\vartheta\cos\bar{\omega}_\nu\sin\omega_\nu\right]\right|$$

für jeden in Betracht kommenden Wert von ϑ und $\bar{\vartheta}$ unterhalb einer festen Grenze bleiben.

Wir betrachten endlich die erste in (6) auftretende Summe

$$(8)\qquad \sum_{\nu=0}^{n}\left[\cos\omega_\nu\cos\bar{\omega}_\nu-\cos\nu\vartheta\cos\nu\bar{\vartheta}\right],$$

die durch Addition aus den Summen

$$\frac{1}{2}\sum_{\nu=0}^{n}\left[\cos(\omega_\nu+\bar{\omega}_\nu)-\cos\nu(\vartheta+\bar{\vartheta})\right]-\frac{1}{2}\sum_{\nu=0}^{n}\left[\sin\left(\nu+\frac{1}{2}\right)(\vartheta+\bar{\vartheta})-\cos\nu(\vartheta+\bar{\vartheta})\right],$$

$$\frac{1}{2}\sum_{\nu=0}^{n}\left[\cos(\omega_\nu-\bar{\omega}_\nu)-\cos\nu(\vartheta-\bar{\vartheta})\right]=\frac{1}{2}\sum_{\nu=0}^{n}\left[\cos\left(\nu+\frac{1}{2}\right)(\vartheta-\bar{\vartheta})-\cos\nu(\vartheta-\bar{\vartheta})\right]$$

entsteht. Der absolute Betrag der ersten dieser beiden Summen, die man in der Form

$$\frac{1}{2}\left(\sin\frac{v}{2}-1\right)\sum_{\nu=0}^{n}\cos\nu v+\frac{1}{2}\cos\frac{v}{2}\sum_{\nu=0}^{n}\sin\nu v$$

schreiben kann, bleibt wegen der Ungleichung

$$3\delta\leqq v=\vartheta+\bar{\vartheta}\leqq 2\pi-3\delta$$

(vgl. III im § 1) unterhalb einer festen Zahl. Die zweite dieser Summen bringen wir auf die folgende Form:

$$\sin\frac{u}{4}\sum_{\nu=0}^{n}\sin\left(\nu+\frac{1}{4}\right)u=\sin\frac{1}{4}u\cos\frac{1}{4}u\sum_{\nu=0}^{n}\sin\nu u+\sin^2\frac{u}{4}\sum_{\nu=0}^{n}\cos\nu u$$

$$=\frac{1}{2}\sin\frac{u}{2}\sum_{\nu=0}^{n}\sin\nu u+\sin^2\frac{u}{4}\sum_{\nu=0}^{n}\cos\nu u;$$

da $\vartheta-\bar{\vartheta}=u$ jedenfalls die Ungleichung

$$-\pi+3\delta\leqq u\leqq\pi-3\delta$$

erfüllt, so erkennen wir auf Grund von I und II des § 1, daß die Summen

$$\left|\sin\frac{u}{2}\sum_{\nu=0}^{n}\sin\nu u\right| \quad \text{und} \quad \left|\sin\frac{u}{4}\sum_{\nu=0}^{n}\cos\nu u\right|$$

die verlangte Eigenschaft besitzen.

Damit ist also gezeigt, daß die Summe (8) ebenfalls unterhalb einer festen Grenze bleibt.

Es bleibt also auch die ganze unter (6) stehende Summe für alle in Betracht kommenden Werte von ϑ und $\bar{\vartheta}$ unterhalb einer festen auch von n nicht abhängenden oberen Grenze, womit der Beweis unseres Theorems in allen Teilen erbracht ist.

Aus den vorangehenden Überlegungen ergibt sich — in Anbetracht dessen, daß die gemachten Abschätzungen gleichmäßig gelten, wenn ϑ irgend eine Stelle des Intervalls $[2\delta, \pi - 2\delta]$ bedeutet — daß die Differenz der beiden Reihen (1) und (2) im Teilintervall $[\varepsilon, \pi - \varepsilon]$ $(\varepsilon > 0)$ gleichmäßig gegen Null konvergiert.

In Verbindung mit den Sätzen der Theorie der trigonometrischen Reihen, liefert unser Theorem — sofern es sich um innere Punkte des Intervalls $[0, \pi]$ handelt — ohne weiteres die entsprechenden Resultate für die Legendresche Reihe. In diesem Sinne sind die Ergebnisse von mannigfachen Untersuchungen, die insbesondere in den letzten Jahren von verschiedenen Autoren über diese Reihe angestellt wurden, in meinem Satze als Spezialfall enthalten.

Über die Konvergenz von Funktionenfolgen.

Von Alfred Haar in Szeged.

Um die Theorie der Reihenentwicklungen auf eine möglichst allgemeine Grundlage zu stellen, habe ich in meiner Inauguraldissertation[1]) die linearen Funktionaloperationen in den Dienst dieser Theorie herangezogen. Möge es sich nämlich um die Entwicklung einer willkürlichen Funktion nach den Funktionen eines orthogonalen Funktionensystems oder nach noch allgemeineren Funktionen handeln, wie es in der Theorie von Herrn *Lebesgue* über singuläre Integrale der Fall ist, so kann man in ganz abstrakter Weise die formal gebildeten Reihen dadurch fassen, dass man eine distributive Zuordnung zu Grunde legt, die jeder Funktion $f(s)$ einer gewissen Funktionenklasse eine Folge von Funktionen

$$f_1(s), f_2(s), \ldots, f_n(s), \ldots$$

zuordnet. Die Distributivität dieser Zuordnung drückt sich durch die Tatsache aus, dass, wenn zu der Funktion $f(s)$ die obige Funktionenfolge, zu der Funktion $g(s)$ aber die Folge: $g_1(s)$, $g_2(s), \ldots, g_n(s), \ldots$ zugeordnet ist, der Funktion $af(s)+bg(s)$, wo a und b beliebige Konstanten bedeuten, die Folge der Funktionen $af_n(s)+bg_n(s)$ entspricht.

Ich habe in meiner erwähnten Arbeit erkannt, dass aus der Tatsache, dass für gewisse Funktionen $f(s)$ diese Funktion der Limes der ihr zugeordneten Funktionenfolge ist, das Entsprechende für einen umfassenderen Bereich von Funktionen folgt, falls die zu Grunde gelegte Zuordnung eine bestimmte Eigenschaft aufweist. So bewies ich,[2]) dass falls die Zuordnung so beschaffen ist, dass eine Konstante M existiert, so dass für jedes in Betracht

[1]) „Zur Theorie der orthogonalen Funktionensysteme" Göttingen 1909; erschienen in den Math. Annalen, Bd. 69. S. 331—371.

[2]) l. c. p. 349—351.

kommende $f(s)$, für alle n und s die Funktionen $|f_n(s)|$ stets kleiner als $M.\,max|f(s)|$ sind, so kann aus dem Bestehen der Limesgleichung

$$\lim_{n=\infty} f_n(s) = f(s) \qquad (1)$$

für gewisse $f(s)$, das Bestehen derselben Gleichung für jede solche Funktion gefolgert werden, die gleichmässig durch jene $f(s)$ (für die die obige Gleichung gilt) beliebig genau approximierbar ist. Mit anderen Worten, die Gesamtheit der Funktionen $f(s)$, für die (1) richtig ist, ist eine abgeschlossene in dem Sinne, dass sie alle Funktionen enthält, die sich als gleichmässiger Limes einer Funktionenfolge, deren Funktionen ihr angehören, ergeben. So kann z. B. — falls die Zuordnung die erwähnte Eigenschaft besitzt — aus der Tatsache, dass (1) für alle Polynome besteht, dasselbe für alle stetige Funktionen geschlossen werden, wodurch die Frage der Entwickelbarkeit einer stetigen Funktion auf die, von viel einfacheren Funktionen zurückgeführt wird, und die Theorie der gleichmässigen Approximation in den Dienst der Theorie der Reihenentwicklungen gestellt wird.

Diese Untersuchungen gestatten aber schwerlich die Entwickelbarkeit von unstetigen Funktionen anzugreifen. Dies ist eben der Zweck der vorliegenden Arbeit, in der ich eine Eigenschaft der Zuordnung angeben werde, auf Grund deren man z. B. aus dem Umstande, dass die Limesgleichung (1) etwa für jedes Polynom richtig ist, schliessen kann, dass diese für alle beschränkten Funktionen richtig bleibt mit etwaiger Ausnahme einer Punktmenge vom Masse Null. Damit gewinnt man einen Satz, der in diesem Gedankenkreis auf die Entwickelbarkeit der allgemeinen beschränkten Funktionen schliessen lässt. Die erhaltenen Kriterien stehen in enger Berührung mit der wichtigen Theorie von Herrn *Lebesgue* über singuläre Integrale [3])

Die Methode, die ich dabei benutze, ist eine Weiterentwicklung des Begriffes der mittleren Konvergenz, (convergence en moyenne), die Herr *E. Fischer* eingeführt hat und den Mittelpunkt seiner schönen Untersuchungen über orthogonale Funktionen bildet.[4]) Nach Herrn *Fischer* heisst bekanntlich eine Funktionenfolge

[3]) *H. Lebesgue:* Sur les intégrales singulières, Annales de Toulouse 3. S., I. p. 25—117.

[4]) *E. Fischer:* Sur la convergence en moyenne. Comptes Rendus. 13 mai 1907.

$f_1(s), f_2(s), \ldots, f_n(s), \ldots$ im Mittel gegen die Funktion $f(s)$ konvergent, wenn die Integrale

$$\int (f(s)-f_n(s))^2\, ds$$

(genommen über den Definitionsbereich der Funktionen) mit wachsendem n gegen Null streben. Dieser Begriff wurde von Herrn *F. Riesz* verallgemeinert[5]), indem er die vorgelegte Funktionenfolge $f_n(s)$ im Bezug auf den Exponenten p gegen $f(s)$ „stark" konvergent nennt, wenn

$$\lim_{n=\infty} \int (f(s)-f_n(s))^p\, ds = 0. \qquad (p > 1)$$

Ich führe nun den folgenden Begriff ein, der als eine natürliche Verallgemeinerung dieser „mittleren" Konvergenz zu betrachten ist.

Es sei $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n, \ldots$ *eine nicht abnehmende Folge positiver Zahlen. Die in der abgeschlossenen Punktmenge* $\mathfrak{M}$ *(vom positiven Mass) definierten Funktionen*

$$f_n(s) \qquad (n = 1, 2, 3, \ldots)$$

heissen in dieser Punktmenge in Bezug auf das Exponentensystem $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n, \ldots$ *im Mittel gegen die Funktion* $f(s)$ *konvergent, wenn*

$$\lim_{n=\infty} \left\{ \int_{(\mathfrak{M})} (f(s)-f_n(s))^{\lambda_n}\, ds \right\}^{\frac{1}{\lambda_n}} = 0$$

ist. Sind alle Exponenten gleich p, so ergeben sich die früheren Begriffsbildungen; in diesen Fällen folgt — wie bekannt — keineswegs, dass die Folge $f_n(s)$ im gewöhnlichen Sinne gegen $f(s)$ konvergiert; ja man kann mit Leichtigkeit Beispiele konstruieren, wo dies an keiner Stelle der Fall ist. Wenn aber die Exponentenreihe der $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n, \ldots$ über alle Grenzen wächst und zwar so, dass die Grössen

$$\frac{\log n}{\lambda_n} \qquad (n = 1, 2, 3, \ldots)$$

unterhalb einer von n unabhängigen oberen Grenze bleiben, so kann man — wie in § 1 gezeigt wird — aus der Konvergenz im Mittel in Bezug auf ein solches Exponentensystem schliessen dass für fast alle s in $\mathfrak{M}$

$$\lim_{n=\infty} f_n(s) = f(s)$$

ist.

---

[5]) *F. Riesz:* Untersuchungen über Systeme integrierbarer Funktionen. Math. Annalen Bd. 69. S. 449—497.

Auf Grund dieses Hilfssatzes leite ich in § 2 einen Satz über die Konvergenz von Funktionenfolgen ab, der für die Entwickelbarkeit von allgemeinen beschränkten Funktionen ungefähr ebensoviel aussagt, wie der oben erwähnte Satz meiner Dissertation für die stetigen Funktionen. An Stelle der gleichmässigen Konvergenz tritt die hier entwickelte mittlere Konvergenz, wodurch man Aussagen über Entwickelbarkeit solcher Funktionen gewinnt, die in diesem Sinne durch die einfachsten Funktionen beliebig genau approximierbar sind.

§ 1. Ein Hilfssatz.

Es sei $\mathfrak{M}$ eine abgeschlossene Punktmenge vom positiven Mass; die in dieser Punktmenge definierten Funktionen

$$F_1(s), F_2(s), \ldots, F_n(s), \ldots$$

mögen so beschaffen sein, dass das Integral

$$\int_{(\mathfrak{M})} |F_n(s)|^n \, ds$$

im Lebesgue'schen Sinne existiert und die Zahlenfolge

$$\delta_n = \left\{ \int_{(\mathfrak{M})} |F_n(s)|^n \, ds \right\}^{\frac{1}{n}}$$

mit wachsendem n gegen Null strebt. Unter diesen Bedingungen konvergiert die zu Grunde gelegte Funktionenfolge fast überall gegen Null, d. h. es gilt die Limesgleichung

$$\lim_{n=\infty} F_n(s) = 0$$

für jede Stelle s in $\mathfrak{M}$ mit etwaiger Ausnahme einer Punktmenge vom Masse Null.

Um diesen Satz zu beweisen, betrachten wir irgendeine positive Zahl ε und bezeichnen mit $\mathfrak{m}_n(\varepsilon)$ diejenige Teilmenge von $\mathfrak{M}$ in der

$$|F_n(s)| \geqq \varepsilon$$

ist; sei $m_n(\varepsilon)$ das Mass dieser Punktmenge. Dann ist

$$\delta_n^n = \int_{(\mathfrak{M})} |F_n(s)|^n \, ds \geqq m_n(\varepsilon)\, \varepsilon^n$$

und daher

$$\sqrt[n]{m_n(\varepsilon)} \leqq \frac{\delta_n}{\varepsilon}.$$

Auf Grund unserer Annahme über die Zahlenfolge δ_n folgt aus dieser Ungleichung

$$\lim_{n=\infty} \sqrt[n]{m_n(\varepsilon)} = 0,$$

und daraus die Konvergenz der unendlichen Reihe

$$m_1(\varepsilon) + m_2(\varepsilon) + \ldots + m_n(\varepsilon) + \ldots$$

Der N-te Rest dieser Reihe

$$m_N(\varepsilon) + m_{N+1}(\varepsilon) + m_{N+2}(\varepsilon) + \ldots$$

wird daher für hinreichend grosse Werte von N kleiner als irgendeine positive Grösse η. Mit anderen Worten, die Vereinigungsmenge der Mengen

$$\mathfrak{m}_N(\varepsilon),\ \mathfrak{m}_{N+1}(\varepsilon),\ \mathfrak{m}_{N+2}(\varepsilon), \ldots$$

hat für hinreichend grosse Werte des Zeigers N ein beliebig kleines Mass. Dies bedeutet aber, dass jede Funktion der Folge

$$|F_N(s)|,\ |F_{N+1}(s)|,\ |F_{N+2}(s)|, \ldots$$

mit Ausnahme dieser Vereinigungsmenge, deren Mass η nicht überschreitet, kleiner als ε ausfällt; daraus folgt, dass der limes superior der Funktionenfolge

$$|F_1(s)|,\ |F_2(s)|, \ldots,\ |F_n(s)|, \ldots$$

jedenfalls kleiner als ε ist, mit etwaiger Ausnahme einer Punktmenge, deren Mass η nicht übersteigt. Da η beliebig klein angenommen werden kann, so ergiebt sich daraus das Resultat, dass

$$\limsup_{n=\infty} |F_n(s)|$$

mit Ausnahme einer Punktmenge vom Masse Null kleiner als ε ausfällt bei jeder Wahl der positiven Zahl ε. Es sei nun $\mathfrak{m}(\varepsilon)$ diejenige Punktmenge (vom Masse Null) in der

$$\limsup_{n=\infty} |F_n(s)| \geqq \varepsilon$$

ist, und $\mathfrak{m}$ die Vereinigungsmenge der Mengen

$$\mathfrak{m}\left(\tfrac{1}{2}\right),\ \mathfrak{m}\left(\tfrac{1}{3}\right),\ \mathfrak{m}\left(\tfrac{1}{4}\right), \ldots,\ \mathfrak{m}\left(\tfrac{1}{n}\right), \ldots$$

Das Mass dieser Menge $\mathfrak{m}$ — als Vereinigungsmenge von abzählbar vielen Nullmengen — ist jedenfalls gleich Null; ausserhalb dieser Menge kann aber $\limsup_{n=\infty} |F_n(s)|$ nicht von Null verschieden sein, da $\mathfrak{m}$ alle Stellen enthält in denen dieser limes superior grösser als $\frac{1}{n}$ ist, wobei n irgendeine positive ganze Zahl bedeutet. D. h. die zu Grunde gelegte Funktionenfolge konvergiert an jeder Stelle, die ausserhalb der Punktmenge $\mathfrak{m}$ (vom Masse Null) gelegen ist, gegen Null, womit unsere Behauptung bewiesen ist.

Der Gedanke, der diesem Satze zu Grunde liegt, ist eine sinngemässe Übertragung auf Funktionenfolgen eines Verfahrens, der nach *Bernoulli* benannt zur Bestimmung des Maximums einer Funktion dient. Bekanntlich konvergiert, wenn $f(s)$ irgendeine Funktion bedeutet, deren Potenzen integrierbar sind, die Zahlenfolge

$$\left\{ \int_{(\mathfrak{M})} |f(s)|^n \, ds \right\}^{\frac{1}{n}}$$

gegen das „wesentliche" Maximum der Funktion $|f(s)|$, d. h. gegen die kleinste Zahl M von der Beschaffenheit, dass diejenige Punktmenge, in der $|f(s)| > M$ ist, das Mass Null besitzt. Aus dieser Tatsache folgt unmittelbar, dass aus der Limesgleichung

$$\lim_{n=\infty} \left\{ \int_{(\mathfrak{M})} |f(s)|^n \, ds \right\}^{\frac{1}{n}} = 0$$

für fast alle s

$$f(s) = 0$$

folgt. Unser Satz lehrt nun, wenn man in das n-te Glied der letzten Zahlenfolge $f(s)$ durch $F_n(s)$ ersetzt aus dem Bestehen der so erhaltenen Limesgleichung für die Grenzfunktion dieser Funktionenfolge $F_n(s)$ die entsprechende Tatsache gefolgert werden kann.

Unser Satz gestattet eine nicht uninteressante Verallgemeinerung, die die Tragweite des Resultates überblicken lässt.

Es sei

$$\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n, \ldots$$

eine zunehmende Folge positiver Zahlen von der Beschaffenheit, dass die Grössen

$$\frac{\log n}{\lambda_n} \quad (n = 1, 2, 3, \ldots)$$

unterhalb einer von n unabhängigen oberen Grenze C bleiben. Wenn die Funktionen $F_n(s)$ so beschaffen sind, dass die Grössen

$$\delta_n = \left\{ \int_{(\mathfrak{M})} |F_n(s)|^{\lambda_n} \, ds \right\}^{\frac{1}{\lambda_n}}$$

mit wachsendem n gegen Null konvergieren, so folgt wiederum für fast alle s

$$\lim_{n=\infty} F_n(s) = 0.$$

In der Tat, man erkennt — genau wie oben — wenn man wiederum mit $\mathfrak{m}_n(\varepsilon)$ diejenige Punktmenge bezeichnet, in der

$|F_n(s)| \geqq \varepsilon$ ist und mit $m_n(\varepsilon)$ das Mass dieser Punktmenge, dass

$$\delta_n^{\lambda_n} = \int_{(\mathfrak{M})} |F_n(s)|^{\lambda_n} ds \geqq m_n(\varepsilon)\, \varepsilon^{\lambda_n},$$

also

$$m_n(\varepsilon) \leqq \left(\frac{\delta_n}{\varepsilon}\right)^{\lambda_n}.$$

Wählen wir den Zeiger n so gross, dass die Ungleichung

$$\delta_n \leqq \varepsilon\, e^{-2C}$$

statthabe, so ist für solche n

$$m_n(\varepsilon) \leqq e^{-2C\lambda_n}$$

also, — wegen unserer Annahme $\log n \leqq C\lambda_n$ —

$$m_n(\varepsilon) < e^{-2\log n} = \frac{1}{n^2}.$$

Daraus folgt wiederum die Konvergenz der unendlichen Reihe

$$m_1(\varepsilon) + m_2(\varepsilon) + \ldots + m_n(\varepsilon) + \ldots$$

und daraus — wörtlich wie oben — die Tatsache, dass die Funktionenfolge $F_n(s)$ fast überall gegen Null konvergiert.

In der Terminologie, die wir in der Einleitung eingeführt haben, können wir unser Resultat folgendermassen formulieren:

Wenn die Funktionenfolge

$$F_1(s), F_2(s), \ldots, F_n(s), \ldots$$

in Bezug auf das Exponentensystem

$$\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n, \ldots,$$

das die Bedingung

$$\left|\frac{\log n}{\lambda_n}\right| < C \qquad (n = 1, 2, 3 \ldots)$$

erfüllt, (wobei C eine von n unabhängige Zahl bedeutet) *in der Punktmenge* $\mathfrak{M}$ *im Mittel gegen eine Funktion* $F(s)$ *konvergiert, so gilt für alle Stellen im* $\mathfrak{M}$, *mit etwaiger Ausnahme einer Nullmenge die Limesgleichung*

$$\lim_{n=\infty} F_n(s) = F(s).$$

Nicht uninteressant ist die Tatsache, dass der soeben bewiesene Satz nicht mehr richtig bleibt, wenn die Exponenten λ_n so beschaffen sind, dass die Grössen $\frac{\log n}{\lambda_n}$ über alle Grenzen wachsen. Um dies darzulegen, nehmen wir

$$\lim_{n=\infty} \frac{\log n}{\lambda_n} = \infty$$

an und konstruieren eine Folge von Funktionen $F_n(s)$, die auf der Peripherie eines Kreises (K) definiert sind, an keiner Stelle gegen Null konvergieren und so beschaffen sind, dass

$$\lim_{n=\infty} \left\{ \int_{(K)} |F_n(s)|^{\lambda_n} \, ds \right\}^{\frac{1}{\lambda_n}} = 0$$

ist. Zu diesem Ende verfahren wir, wie folgt:

$F_1(s)$ sei auf der gesamten Kreisperipherie, deren Länge wir der Einfachheit halber gleich 1 annehmen, gleich 1; $F_2(s)$ sei auf einem Halbbogen (K_2) gleich 1; auf dem anderen Halbbogen gleich 0. An den einen Endpunkt von K_2 legen wir einen Kreisbogen K_3 von der Länge $1/3$ an, der ganz ausserhalb von K_2 liegt; auf diesem Bogen sei $F_3(s)$ gleich 1, sonst überall gleich Null. An den Endpunkt von K_3 legen wir ausserhalb von K_3 einen Bogen K_4 von der Länge $1/4$ an; auf diesem sei $F_4(s)$ gleich 1, sonst überall gleich 0, und so fahren wir fort. Wegen der Divergenz der harmonischen Reihe werden die Kreisbögen

$$K_1, K_2, K_3, \ldots, K_n, \ldots,$$

von denen jeder am Endpunkt des vorangehenden beginnt und die n-te von der Länge $\frac{1}{n}$ ist, jeden Punkt des Kreises unendlich oft überdecken. Da $F_n(s)$ auf K_n gleich 1 ist (sonst überall gleich 0), so folgt, dass an jeder Stelle s des Kreisumfanges unendlichviele Funktionen unserer Folge den Wert 1 haben, d. h. die Folge konvergiert an keiner Stelle gegen Null. Andererseits ist

$$\left\{ \int_{(K)} |F_n(s)|^{\lambda_n} \, ds \right\}^{\frac{1}{\lambda_n}} = \left\{ \int_{(K_n)} |F_n(s)|^{\lambda_n} \, ds \right\}^{\frac{1}{\lambda_n}} = \left(\frac{1}{n}\right)^{\frac{1}{\lambda_n}} = e^{-\frac{\log n}{\lambda_n}},$$

und diese Grössen streben — zufolge unserer Annahme — in der Tat gegen Null.

Es soll noch besonders hervorgehoben werden, dass wir bei dem Beweise unseres Theorems nirgends die Voraussetzung gemacht haben, dass $\mathfrak{M}$ eine *lineare* Punktmenge ist. Satz und Beweis bleiben richtig, wenn $\mathfrak{M}$ eine mehrdimensionale abgeschlossene Punktmenge bedeutet, die auftretenden Funktionen folglich von mehreren Veränderlichen abhängen. Wir haben es vorgezogen statt den unabhängigen Veränderlichen, in den über die Punktmenge $\mathfrak{M}$ genommenen Integralen als Integrationsvariable die Veränderliche s einzuführen, die den allgemeinen Punkt der Menge $\mathfrak{M}$ bezeichnet; an dieser Bezeichnungsweise halten wir auch weiterhin fest.

§ 2. Ein Satz über die Konvergenz von Funktionenfolgen.

Auf Grund des vorangehenden Hilfssatzes kann man den Beweis eines Theorems erbringen, der die sinngemässe Verallgemeinerung eines Satzes ist, den ich in meiner Dissertation ausgesprochen habe.

Ich bewies in der genannten Arbeit den folgenden Satz:

Jeder Funktion $f(s)$ einer bestimmten Funktionenklasse möge eine Folge von Funktionen $f_1(s), f_2(s), \ldots, f_n(s), \ldots$ zugeordnet sein; in Zeichen

$$f(s) \sim f_1(s), f_2(s), \ldots, f_n(s), \ldots$$

Diese Zuordnung besitze folgende Eigenschaften:

Ist

$$f(s) \sim f_1(s), f_2(s), \ldots, f_n(s), \ldots$$

und

$$g(s) \sim g_1(s), g_2(s), \ldots, g_n(s), \ldots$$

so ist

$$f(s)+g(s) \sim f_1(s)+g_1(s), f_2(s)+g_2(s), \ldots, f_n(s)+g_n(s), \ldots$$

Es sei für jedes s stets $|f_p(s)|$ kleiner als die obere Grenze von $|f(s)|$ multipliziert mit einer Grösse M, die für alle Funktionen der Klasse dieselbe ist.

Wenn nun $f'(s), f''(s), \ldots f^{(n)}(s), \ldots$ eine Folge von Funktionen ist, die gleichmässig gegen die Funktion $f(s)$ konvergieren und wenn die zu $f^{(n)}(s)$ vermöge unserer Zuordnung zugeordneten Funktionenfolgen gleichmässig in s bezw. gegen $F^{(n)}(s)$ konvergieren, d. h. gleichmässig in s die Limesgleichungen bestehen

$$\lim_{p=\infty} f_p^{(n)}(s) = F^{(n)}(s),$$

so konvergiert die zu $f(s)$ zugeordnete Funktionen olge gleichmässig gegen eine Funktion $F(s)$ und es ist

$$\lim_{n=\infty} F^{(n)}(s) = F(s).$$

Mit Hilfe dieses Satzes konnte ich verschiedene Probleme aus der Theorie der *Fourier*'schen und *Sturm-Liouville*'schen Reihen erledigen, insbesondere ein Summationsverfahren angeben, mit dessen Hilfe — in voller Analogie zu dem *Fejér*'schen Verfahren für *Fourier*'sche Reihen einer Veränderlichen — die *Fourier*'sche und *Sturm-Liouville*'sche Doppelreihe jeder stetigen Funktion zweier Variabler summierbar ist, ein Problem, das seither von verschiedenen Seiten behandelt worden ist.

Auf Grund des Hilfssatzes des vorangehenden Paragraphen beweise ich nun das folgende Theorem:

Jeder Funktion $f(s)$ einer bestimmten Funktionenklasse möge eine Folge von Funktionen $f_1(s), f_2(s), \ldots, f_n(s), \ldots$ zugeordnet sein. Diese Zuordnung besitze folgende Eigenschaften:

A) Wenn der Funktion $f(s)$ die Folge $f_1(s), f_2(s), \ldots, f_n(s), \ldots$ zugeordnet ist, der Funktion $g(s)$ aber die Folge $g_1(s), g_2(s), \ldots, g_n(s), \ldots$, so soll der Funktion $af(s) + bg(s)$, wo a und b beliebige Konstanten bedeuten, die Folge

$$af_1(s) + bg_1(s),\ af_2(s) + bg_2(s),\ \ldots,\ af_n(s) + bg_n(s),\ \ldots$$

zugeordnet sein.

B) Es existiert eine Folge von zunehmenden positiven Zahlen $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n, \ldots$ von der Beschaffenheit, dass die Grössen

$$\frac{\log n}{\lambda_n}$$

für jedes n unterhalb einer von n unabhängigen oberen Grenze bleiben und eine feste Zahl M, so dass für jede Funktion unserer Funktionenklasse und für alle Indizes n die Ungleichung

$$\left\{\int_{\mathfrak{M}} |f_n(s)|^{\lambda_n} ds\right\}^{\frac{1}{\lambda_n}} \leqq M \left\{\int_{\mathfrak{M}} |f(s)|^{\lambda_n} ds\right\}^{\frac{1}{\lambda_n}}$$

richtig sei.

Wenn einerseits die Funktionen $f'(s), f''(s), \ldots, f^{(m)}(s), \ldots$ solche Funktionen unserer Klasse bedeuten, die in Bezug auf das Exponentensystem $\lambda_1, \lambda_2, \ldots \lambda_n, \ldots$ in der Punktmenge $\mathfrak{M}$ im Mittel gegen eine Funktion $f(s)$ unserer Klasse konvergieren und wenn andererseits die zu jeder der betrachteten Funktionen $f^{(m)}(s)$ vermöge unserer Zuordnung zugeordneten Funktionen in Bezug auf das Exponentensystem $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n, \ldots$ im Mittel gegen diese Funktion konvergieren, so konvergiert die der Funktion $f(s)$ zugeordnete Funktionenfolge im Mittel (in Bezug auf $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n, \ldots$) *gegen $f(s)$; mit anderen Worten es folgt aus den Limesgleichungen*

$$\lim_{m=\infty} \left\{\int_{(\mathfrak{M})} |f(s) - f^{(m)}(s)|^{\lambda_m} ds\right\}^{\frac{1}{\lambda_m}} = 0$$

und

$$\lim_{n=\infty} \left\{\int_{(\mathfrak{M})} |f^{(m)}(s) - f_n^{(m)}(s)|^{\lambda_n} ds\right\}^{\frac{1}{\lambda_n}} = 0,\ (m = 1, 2, 3, \ldots)$$

die Limesgleichung

$$\lim_{n=\infty} \left\{\int_{(\mathfrak{M})} |f(s) - f_n(s)|^{\lambda_n} ds\right\}^{\frac{1}{\lambda_n}} = 0,$$

d. h es gilt mit etwaiger Ausnahme einer Nullmenge

$$\lim_{n=\infty} f_n(s) = f(s).$$

Der soeben ausgesprochene Satz gilt a fortiori — diesem Umstand begegnen wir in den meisten Anwendungen — wenn die den Funktionen $f^{(m)}(s)$ zugeordneten Funktionenfolgen $f_n^{(m)}(s)$ $(n = 1, 2, 3, \ldots)$ gleichmässig gegen $f^{(m)}(s)$ konvergieren, denn aus der gleichmässigen Konvergenz folgt unmittelbar die Konvergenz im Mittel in Bezug auf jedes Exponentensystem.

Um unseren Satz zu beweisen, bestimmen wir zu jeder noch so kleinen positiven Zahl ε einen Index m derart, dass

$$\left\{ \int_{(\mathfrak{R})} |f(s) - f^{(m)}(s)|^{\lambda_m} ds \right\}^{\frac{1}{\lambda_m}} < \varepsilon$$

sei, was zufolge unserer Annahme über die Konvergenz der Funktionen im Mittel gegen $f(s)$ jedenfalls möglich ist. Alsdann ist — wegen der Eigenschaft *B)* unserer Zuordnung — für jedes n

$$\left\{ \int_{(\mathfrak{R})} |f_n^{(m)}(s) - f_n(s)|^{\lambda_n} ds \right\}^{\frac{1}{\lambda_n}} < M\varepsilon,$$

da — wegen *A)* — der Funktion $f^{(m)}(s) - f(s)$ die Folge $f_n^{(m)}(s) - f_n(s)$ $(n = 1, 2, 3, \ldots)$ zugeordnet ist. Endlich bestimmen wir einen Index N derart, dass für alle $n > N$ die Ungleichung

$$\left\{ \int |f^{(m)}(s) - f_n^{(m)}(s)|^{\lambda_n} ds \right\}^{\frac{1}{\lambda_n}} < \varepsilon$$

statthabe, was auf Grund unserer Annahme über die Konvergenz der Folge $f_n^{(m)}(s)$ $(n = 1, 2, 3, \ldots)$ im Mittel gegen $f^{(m)}(s)$ sicher möglich ist. Durch Addition der letzten drei Ungleichungen folgt unter Benutzung einer bekannten Ungleichung[6]) für hinreichend grosse n

$$\left\{ \int_{(\mathfrak{R})} |f(s) - f_n(s)|^{\lambda_n} ds \right\}^{\frac{1}{\lambda_n}} =$$

$$= \left\{ \int_{(\mathfrak{R})} |(f(s) - f^{(m)}(s)) + (f^{(m)}(s) - f_n^{(m)}(s)) + (f_n^{(m)}(s) - f_n(s))|^{\lambda_n} ds \right\}^{\frac{1}{\lambda_n}} \leq$$

$$< (M + 2)\varepsilon$$

---

[6]) Es handelt sich um die für $p > 1$ gültige Ungleichung

$$\left\{ \int_{(\mathfrak{R})} (\varphi_1(s) + \varphi_2(s))^p ds \right\}^{\frac{1}{p}} \leq \left\{ \int_{(\mathfrak{R})} (\varphi_1(s))^p ds \right\}^{\frac{1}{p}} + \left\{ \int_{(\mathfrak{R})} (\varphi_2(s))^p ds \right\}^{\frac{1}{p}}$$

die im wesentlichen auf Minkowski zurückgeht; vgl. auch *F. Riesz*. l. c. p. 456.

Daraus folgt aber, dass der Integralmittelwert

$$\left\{\int_{(\mathfrak{M})} |f(s)-f_n(s)|^{\lambda_n}\, ds\right\}^{\frac{1}{\lambda_n}}$$

mit wachsendem n gegen Null strebt und auf Grund unseres Hilfssatzes, dass die Funktionen $f_1(s), f_2(s), \ldots, f_n(s), \ldots$, mit etwaiger Ausnahme einer Nullmenge überall gegen $f(s)$ konvergieren.

Bei den Anwendungen dieses Satzes hat man grösstenteils mit solchen Fällen zu tun, in denen die zu Grunde gelegte Funktionenklasse alle Funktionen umfasst, deren sämtliche positiven Potenzen im *Lebesgue*'schen Sinne integrierbar sind, oder wenigstens diejenigen Funktionen, deren absoluter Betrag unterhalb einer festen Grenze bleibt (die sog. beschränkten Funktionen). Wenn sodann die Zuordnung die Bedingungen unseres Satzes erfüllt und etwa jeder stetigen Funktion eine solche Funktionenfolge zuordnet, die in Bezug auf das fragliche Exponentensystem im Mittel gegen diese Funktion konvergiert, so gilt dieselbe Tatsache auch für jede beschränkte Funktion bez. für jede Funktion deren sämtliche Potenzen integrierbar sind. Man erkennt dies durch Heranziehung der bekannten Tatsache,[7]) dass man zu jeder solchen Funktion $f(s)$ und zu jedem positiven Exponenten p eine stetige Funktion $\varphi(s)$ derart bestimmen kann, dass das Integral

$$\left\{\int_{(\mathfrak{M})} |f(s)-\varphi(s)|^{p}\, ds\right\}^{\frac{1}{p}} = \delta_p$$

beliebig klein ausfalle; setzt man $p = \lambda_m$, $\varphi(s) = f^{(m)}(s)$ und lässt δ_p gegen Null konvergieren, so gewinnt man damit eine Folge von stetigen Funktionen

$$f'(s), f''(s), \ldots, f^{(m)}(s), \ldots$$

die in Bezug auf das vorgelegte Exponentensystem im Mittel gegen $f(s)$ konvergieren, woraus auf Grund des Hauptsatzes dieses Paragraphen unsere Behauptung unmittelbar folgt.

---

[7]) Diese Tatsache wird in der Theorie der *Lebesgue*'schen Integrale häufig angewandt; einen einfachen Beweis findet man in der genannten Arbeit von *F. Riesz* (p. 459) wo $\varphi(s)$ als eine Funktion angenommen wird, die in einer endlichen Anzahl von Intervallen verschiedene Werte annimmt. Der Übergang von diesen streckenweise konstanten Funktionen zu den stetigen Funktionen ist unmittelbar klar. Übrigens kann die erwähnte Tatsache auch aus dem *Lusin*'schen Satze (Comptes Rendus, t. 154 (1912) p. 1688.) gefolgert werden, nach dem zu jeder messbaren Funktion $f(s)$ eine stetige Funktion konstruiert werden kann, die mit Ausnahme einer Punktmenge vom beliebig kleinen Mass mit $f(s)$ übereinstimmt.

Man erkennt auch, dass der Schluss richtig bleibt, sowie die vorgelegte Zuordnung so beschaffen ist, dass sie zu gewissen Funktionen $\varphi(s)$ eine solche Funktionenfolge zuordnet, die im Mittel (in Bezug auf $\lambda_1, \lambda_2, \ldots \lambda_m, \ldots$) gegen diese Funktion konvergiert, falls diese Funktionen $\varphi(s)$ die Eigenschaft besitzen, dass zu jeder in beliebig hoher Potenz integrierbaren Funktion $f(s)$ eine unter ihnen sich finden lässt, dass das Integral

$$\left\{\int_{(\mathfrak{R})} |f(s)-\varphi(s)|^p \, ds\right\}^{\frac{1}{p}}$$

für irgend eine pos. Zahl p beliebig klein ausfalle. Alle Polynome, alle differenzierbare, oder alle streckenweise konstante Funktionen erfüllen offenbar diese Bedingung ebenfalls.

Die in der vorliegenden Note bewiesenen Sätze sind in mannigfacher Weise anwendbar, insbesondere auf die Theorie der Entwicklungen einer willkürlichen Funktion nach den Funktionen eines orthogonalen Funktionensystems, sowie auf die etwas allgemeinere Theorie der singulären Integrale. Auf diese Anwendungen hoffe ich demnächst zurückkommen zu können.

Über einige Eigenschaften der orthogonalen Funktionensysteme.

Von

Alfred Haar in Szeged.

Einleitung.

1. Die klassischen Beispiele der orthogonalen Funktionensysteme — die trigonometrischen Funktionen, die Legendreschen Polynome — besitzen die wohlbekannte Oszillationseigenschaft. Ordnet man das System in der herkömmlichen Weise, so verschwindet die n-te Funktion genau $(n-1)$-mal innerhalb des Innervalls, für das die Orthogonalitätsrelation gilt. Diese Eigenschaft ist keineswegs eine Folge der Orthogonalität dieser Funktionen; in der Tat hat Herr Kellogg in der Einleitung einer Arbeit[1]), in der er ein höchst interessantes hinreichendes Kriterium für solche Oszillationseigenschaften beweist, ein Beispiel dreier zueinander orthogonalen stetigen Funktionen angegeben, von denen keine mehr als einmal verschwindet.

Will man sich daher Aufklärung über den geometrischen Verlauf der Funktionen eines orthogonalen Funktionensystems verschaffen, und will man insbesondere feststellen, in welchem Maße jene für die erwähnten Beispiele geltenden Oszillationseigenschaften auf beliebige orthogonale Funktionensysteme übertragbar sind, so muß man zunächst die Frage nach der Anzahl und Lage der Nullstellen aufgeben und das oszillatorische Verhalten in anderer Weise charakterisieren. Nun besitzt man bekanntlich in der Totalvariation ein Maß für die Oszillation, und auf diese Weise wird man auf den Gedanken geführt, die Totalvariation der Funktionen eines Orthogonalsystems zu untersuchen.

Hierüber beweisen wir den folgenden

Satz 1. *Es seien*

$$\varphi_1(x),\ \varphi_2(x),\ \ldots,\ \varphi_n(x)$$

[1]) American Journal of Mathematics **38** (1916), S. 1—5.

n im Intervall $0 \leqq x \leqq 1$ definierte normierte Orthogonalfunktionen, d. h. es sei

$$\int_0^1 (\varphi_p(x))^2 dx = 1, \quad \int_0^1 \varphi_p(x)\varphi_q(x)dx = 0; \quad p \gtrless q, \quad p, q = 1, 2, \ldots, n.$$

Die Totalvariation mindestens einer dieser Funktionen ist größer oder gleich $\sqrt{n}$, falls n eine gerade Zahl ist, und größer oder gleich $\sqrt{n - \frac{1}{n}}$, falls n ungerade ist.

Dieser Satz gibt uns ein Mittel, ein unendliches Orthogonalsystem von Funktionen von beschränkter Schwankung nach der Größe der Totalvariationen zu ordnen, da die Anzahl derjenigen Funktionen des Systems, deren Totalvariation unterhalb einer gegebenen Schranke bleibt, endlich ist.

2. Die Methode, mit deren Hilfe ich diesen Satz beweise, liefert für Orthogonalsysteme, deren Funktionen im Definitionsintervall dem Betrage nach unterhalb einer festen Schranke bleiben, d. h. für welche

$$|\varphi_p(x)| \leqq M; \quad p = 1, 2, \ldots, n, \quad 0 \leqq x \leqq 1 \tag{1}$$

ist[2]), ein Resultat über die Anzahl der Nullstellen bzw. derjenigen Stellen, wo ein Zeichenwechsel stattfindet. Unter M können wir die genaue obere Schranke des Systems verstehen. Von einer stetigen Funktion sagen wir, daß sie an einer Stelle ihr Vorzeichen wechselt, falls sie in beliebiger Nähe dieser Stelle sowohl positive als auch negative Werte annimmt. Dementsprechend setzen wir fest, *daß eine unstetige Funktion an einer Stelle ihr Vorzeichen ändert, falls in jeder hinreichend kleinen Umgebung dieser Stelle die Funktion sowohl positive als auch negative Werte an je einer Punktmenge vom positiven Maße annimmt.* Für stetige Funktionen ist dies der übliche Begriff des Zeichenwechsels; für unstetige Funktionen benötigen wir diese allgemeine Fassung dem Umstande gemäß, daß man den Wertevorrat der vorgelegten Orthogonalfunktionen an einer Nullmenge beliebig abändern kann. Es gilt der folgende

Satz 2. *Wenn die n im Intervall $0 \leqq x \leqq 1$ definierten normierten Orthogonalfunktionen $\varphi_1(x), \varphi_2(x), \ldots, \varphi_n(x)$ die Bedingung (1) erfüllen, d. h. dem Betrage nach unterhalb einer vom Zeiger unabhängigen Schranke bleiben, so gibt es unter diesen Funktionen mindestens eine, die an mindestens*

$$\left[\frac{4}{27}\frac{n}{M^4}\right]$$

verschiedenen Stellen ihr Vorzeichen ändert.

---

[2]) Man beachte, daß wegen der Normierung des Orthogonalsystems $M \geqq 1$ sein muß.

Als Spezialfall ergibt sich daraus ein Satz, den Herr Plancherel[3]) über die Nullstellen eines unendlichen Systems von stetigen Orthogonalfunktionen abgeleitet hat.

Der letzte Satz ist einer Verallgemeinerung fähig, wenn man den folgenden Begriff einführt: Wir sagen, daß die *Funktion* $y = \varphi(x)$ *die Gerade* $y = \mu$ *an einer Stelle durchsetzt, falls an dieser Stelle die Funktion* $\varphi(x) - \mu$ *ihr Vorzeichen ändert.* Über die Anzahl dieser Stellen gilt der

Satz 3. *Wenn die vorgelegten n Orthogonalfunktionen die Voraussetzungen des Satzes 2. erfüllen, und wenn* μ *der Bedingung*

$$|\mu| < \frac{1}{M} \leqq 1$$

genügt, so gibt es unter diesen Orthogonalfunktionen mindestens eine, welche die Gerade $y = \mu$ *an mindestens*

$$\left[\frac{4}{27}\frac{(1-|\mu|M)^3}{M(M-|\mu|)(M+|\mu|)^2}n\right]$$

verschiedenen Stellen durchsetzt.

§ 1.

Die Totalvariation der Funktionen eines Orthogonalsystems.

3. Der gemeinsame Ausgangspunkt der Beweise dieser Sätze ist die bekannte Besselsche Ungleichung: Ist $f(x)$ eine beliebige im Intervall $0 \leqq x \leqq 1$ definierte Funktion, die samt ihrem Quadrate integrierbar ist, so gilt die Ungleichung

$$\left(\int_0^1 f(x)\,\varphi_1(x)\,dx\right)^2 + \left(\int_0^1 f(x)\,\varphi_2(x)\,dx\right)^2 + \ldots + \left(\int_0^1 f(x)\,\varphi_n(x)\,dx\right)^2 \leqq \int_0^1 (f(x))^2\,dx,$$

wobei $\varphi_1(x), \varphi_2(x), \ldots, \varphi_n(x)$ ein beliebiges normiertes Orthogonalsystem (im obigen Intervall) bedeuten. Wir wenden diese Ungleichung auf k Funktionen $f_1(x), f_2(x), \ldots, f_k(x)$ an (die zweckmäßigste Wahl der natürlichen Zahl k werden wir später angeben), und erhalten durch Addition:

$$\sum_{p=1}^{k}\left(\int_0^1 f_p\varphi_1\,dx\right)^2 + \sum_{p=1}^{k}\left(\int_0^1 f_p\varphi_2\,dx\right)^2 + \ldots + \sum_{p=1}^{k}\left(\int_0^1 f_p\varphi_n\,dx\right)^2 \leqq \int_0^1 (f_1^2 + f_2^2 + \ldots + f_k^2)\,dx.$$

---

[3]) Math. Annalen 68 (1910), S. 270—278.

Daher muß mindestens eine der links stehenden Summen kleiner oder gleich

$$\frac{1}{n}\int_0^1 (f_1^2+f_2^2+\ldots+f_k^2)\,dx$$

ausfallen; mit anderen Worten, es besitzt mindestens eine der vorgelegten n Orthogonalfunktionen — wir bezeichnen diese durch Unterdrücken des Zeigers mit $\varphi(x)$ — die Eigenschaft, daß

$$\sum_{p=1}^{k}\Big(\int_0^1 f_p(x)\,\varphi(x)\,dx\Big)^2 \leqq \frac{1}{n}\int_0^1 (f_1^2+f_2^2+\ldots+f_k^2)\,dx$$

ist. Die Funktionen $f_p(x)$ wählen wir nun folgendermaßen: Wir teilen das Intervall $0 \leqq x \leqq 1$ in k gleiche Teile und setzen $f_p(x)$ gleich 1 innerhalb und gleich 0 außerhalb des p-ten Teilintervalls, d. h.

$$f_p(x) = 0 \quad \text{für} \quad 0 \leqq x < \frac{p-1}{k} \quad \text{und} \quad \frac{p}{k} < x \leqq 1,$$

$$= 1 \quad \text{für} \quad \frac{p-1}{k} \leqq x \leqq \frac{p}{k}.$$

Die letzte Ungleichung liefert die Aussage, daß *mindestens eine der n vorgelegten normierten Orthogonalfunktionen die Ungleichung*

$$\sum_{p=1}^{k}\Big(\int_{\frac{p-1}{k}}^{\frac{p}{k}} \varphi\,dx\Big)^2 \leqq \frac{1}{n} \tag{2}$$

befriedigt (freilich erhält man im allgemeinen für verschiedene Werte von k verschiedene Funktionen des Orthogonalsystems). Wir werden zeigen, daß — bei passender Wahl der natürlichen Zahl k — die Totalvariation dieser Funktion für gerades n nicht kleiner als $\sqrt{n}$, für ungerades n aber nicht kleiner als $\sqrt{n-\frac{1}{n}}$ ist.

4. Zu diesem Ende benutzen wir einen Satz, der eine Beziehung zwischen der Totalvariation, dem Integral einer Funktion und dem Integral des Quadrates der Funktion liefert. Die betreffende Tatsache ist eine geringfügige Verallgemeinerung eines sehr interessanten Satzes, den Herr Walsh[4]) zum Studium des von mir in meiner Dissertation eingeführten Orthogonalsystems herangezogen hat. Obwohl man den fraglichen Satz leicht aus dem Walshschen ableiten kann, erlaube ich mir hier einen independenten Beweis anzugeben, der wegen seiner Kürze nicht uninteressant zu sein scheint.

---

[4]) Math. Annalen **90** (1923), S. 38—45.

Es sei $f(x)$ eine in einem Intervall von der Länge l definierte Funktion, die daselbst samt ihrem Quadrat integrierbar ist:

$$\int_{(l)} f(x)\,dx = \alpha, \quad \int_{(l)} (f(x))^2\,dx = \beta^2;$$

dann gilt für die Totalvariation v dieser Funktion in diesem Intervall die Ungleichung:

$$v^2 \geqq \frac{4}{l^2}(\beta^2 l - \alpha^2). \tag{3}$$

In der Tat ist die betrachtete Funktion $f(x)$ stetig, und bezeichnet man mit M bzw. m das Maximum bzw. das Minimum dieser Funktion, so ist für alle x

$$(f(x) - M)(f(x) - m) \leqq 0,$$

folglich

$$\int_{(l)} (f(x) - M)(f(x) - m)\,dx = \beta^2 - (M+m)\alpha + Mml \leqq 0. \tag{4}$$

Hieraus folgt unmittelbar

$$\frac{(M-m)^2 l}{4} \geqq \beta^2 - (M+m)\alpha + \frac{(M+m)^2 l}{4} = \frac{\beta^2 l - \alpha^2}{l} + \left(\frac{M+m}{2}\sqrt{l} - \frac{\alpha}{\sqrt{l}}\right)^2,$$

also

$$(M-m)^2 \geqq \frac{4}{l^2}(\beta^2 l - \alpha^2), \tag{5}$$

um so mehr die behauptete Ungleichung (3). Ist die Funktion $f(x)$ nicht stetig, so bleibt die Ungleichung (4) und damit auch (5) bestehen, falls M bzw. m das sogenannte Lebesguesche Maximum bzw. Minimum von $f(x)$ bedeutet; d. h. M ist die untere Grenze derjenigen Größen, für welche die Ungleichung $f(x) > M$ höchstens an einer Punktmenge vom Maße Null statthat, und analog wird m definiert. Da die Totalvariation jedenfalls nicht kleiner als die Differenz $M - m$ ist, so ist die fragliche Ungleichung (3) in voller Allgemeinheit bewiesen.

5. Wir wenden nun die Ungleichung (3) auf die oben gefundene Funktion $\varphi(x)$ des vorgelegten Orthogonalsystems und auf das Intervall $\frac{p-1}{k} \leqq x \leqq \frac{p}{k}$ von der Länge $\frac{1}{k}$ an und erhalten, wenn wir die Totalvariation dieser Funktion in diesem Intervall mit v_p bezeichnen, die Abschätzung

$$v_p^2 \geqq 4k^2\left(\frac{1}{k}\int_{\frac{p-1}{k}}^{\frac{p}{k}} \varphi^2\,dx - \left(\int_{\frac{p-1}{k}}^{\frac{p}{k}} \varphi\,dx\right)^2\right).$$

Mit Rücksicht auf (2) und auf $\int_0^1 \varphi^2\,dx = 1$ folgt daraus durch Addition:

$$v_1^2 + v_2^2 + \ldots + v_k^2 \geqq 4k\left(1 - \frac{k}{n}\right);$$

daher gilt für die Totalvariation V von $\varphi(x)$ im Gesamtintervall $0 \leqq x \leqq 1$ die Ungleichung

$$V \geqq v_1 + v_2 + \ldots + v_k \geqq \sqrt{4k\left(1 - \frac{k}{n}\right)}.$$

In dieser Ungleichung ist die positive ganze Zahl k noch willkürlich (wie bemerkt, hängt $\varphi(x)$ von k ab); die günstigste Wahl von k ist für ein gerades n offenbar $k = \frac{n}{2}$, für ein ungerades n aber $k = \frac{n-1}{2}$ $\left(\text{oder } \frac{n+1}{2}\right)$. Bei dieser Wahl von k erhält man aus der letzten Ungleichung im ersten Fall $V \geqq \sqrt{n}$, im zweiten Fall aber $V \geqq \sqrt{n - \frac{1}{n}}$, womit Satz 1. bewiesen ist[5]).

§ 2.

Zeichenwechsel der Funktionen eines Orthogonalsystems.

6. Um zu dem zweiten in der Einleitung ausgesprochenen Satz zu gelangen, nehmen wir an, daß die vorgelegten n normierten Orthogonalfunktionen für $0 \leqq x \leqq 1$ der Ungleichung

$$|\varphi_p(x)| \leqq M \qquad (p = 1, 2, \ldots, n)$$

genügen; wir werden zeigen, daß diejenige Funktion $\varphi(x)$ dieses Systems, die wir in 3. erhielten, bei passender Wahl von k an mindestens $\left[\frac{4}{27}\frac{n}{M^4}\right]$ verschiedenen Stellen ihr Vorzeichen ändert. Zu diesem Zweck betrachten wir die k Teilintervalle:

$$\frac{p-1}{k} \leqq x \leqq \frac{p}{k} \qquad (p = 1, 2, \ldots, k), \tag{6}$$

und teilen diese in zwei Klassen L' und L'' wie folgt ein: Ist $\varphi(x)$ stetig, so reihen wir ein Teilintervall in die Klasse L' ein, falls $\varphi(x)$ daselbst entweder überall nicht negativ oder überall nicht positiv ist. Ist aber $\varphi(x)$ nicht stetig, so weisen wir ein Teilintervall der Klasse L' zu, falls $\varphi(x)$ daselbst entweder fast[6]) überall nicht negativ, oder fast überall nicht positiv ist; es sei k' die Anzahl dieser Teilintervalle. Die übrigen Teilintervalle — ihre Anzahl ist $k'' = k - k'$ — gehören der zweiten Klasse L'' an. In jedem Teilintervalle dieser zweiten Klasse nimmt daher die Funktion $\varphi(x)$ sowohl positive als auch negative Werte an den Punkten je einer Punktmenge vom positiven Maße an. Ist $\varphi(x)$ stetig, so muß sie daher

[5]) Ob die so erhaltene untere Schranke für die Totalvariation von n normierten Orthogonalfunktionen sich noch vergrößern läßt, bleibt unentschieden. Die oben mit $f_1, f_2, \ldots, f_k$ bezeichneten Funktionen — wenn man sie mit $\sqrt{k}$ multipliziert — liefern ein Beispiel von k normierten Orthogonalfunktionen in $0 \leqq x \leqq 1$, die durchweg eine Totalvariation $\leqq 2\sqrt{k}$ besitzen.

[6]) D. h. überall mit eventueller Ausnahme einer Punktmenge vom Maße Null.

innerhalb jedes dieser Teilintervalle mindestens eine Nullstelle besitzen derart, daß in deren beliebiger Nähe die Funktion $\varphi(x)$ sowohl positive als auch negative Werte annimmt. Ist aber $\varphi(x)$ nicht stetig, so muß *innerhalb* jedes Teilintervalles von L'' mindestens eine Stelle von der Beschaffenheit existieren, daß in jeder hinreichend kleinen Umgebung dieser Stelle die Funktion $\varphi(x)$ sowohl positive als auch negative Werte an Punktmengen vom positiven Maße annimmt. Denn man erkennt mit Leichtigkeit, indem man jenes Teilintervall halbiert, daß, falls der Halbierungspunkt selbst nicht die gewünschte Eigenschaft besitzt, einer der Hälften dieses Intervalls dieselbe Eigenschaft zukommt wie dem halbierten Teilintervall selbst, d. h. $\varphi(x)$ nimmt darauf sowohl positive als auch negative Werte an Punktmengen vom positivem Maße an. Durch Fortsetzung dieses Verfahrens gelangt man zu einem Grenzpunkt, der gewiß die geforderte Eigenschaft besitzt. Die Tatsache, daß einer der so erhaltenen Punkte *innerhalb* des betrachteten Teilintervalls liegt, folgt aus dem Umstande, daß, wenn man von den Enden dieses Teilintervalls ein hinreichend kleines Intervall wegläßt, das so erhaltene Intervall noch immer jene Eigenschaft besitzt, daß nämlich $\varphi(x)$ daselbst sowohl negative als auch positive Werte an Punktmengen vom positiven Maße annimmt.

Auf Grund dieser Überlegung können wir also schließen, daß innerhalb jedes zu der Klasse L'' gehörigen Teilintervalls mindestens eine Stelle liegt, an der — nach der in der Einleitung gegebenen Definition — die Funktion $\varphi(x)$ ihr Vorzeichen ändert. Die Anzahl ν dieser Stellen ist also größer oder gleich k'':

$$\nu \geqq k''.$$

7. Für jedes Teilintervall l' der ersten Klasse L' gilt die Ungleichung

$$\int_{(l')} \varphi^2\, dx \leqq M \int_{(l')} |\varphi|\, dx = M \left| \int_{(l')} \varphi\, dx \right|;$$

für jedes Teilintervall l'' der zweiten Klasse wenden wir die triviale Ungleichung

$$\int_{(l'')} \varphi^2\, dx \leqq \frac{M^2}{k}$$

an. Durch Addition aller dieser Ungleichungen erhält man

$$1 = \int_0^1 \varphi^2\, dx \leqq k'' \frac{M^2}{k} + M \sum \left| \int_{(l')} \varphi\, dx \right|,$$

wobei die Summation rechter Hand auf alle Teilintervalle l' der Klasse L' zu erstrecken ist. Um so mehr gilt

$$1 \leqq k'' \frac{M^2}{k} + M \sum_{p=1}^{k} \left| \int_{\frac{p-1}{k}}^{\frac{p}{k}} \varphi\, dx \right|.$$

Die Schwarzsche Ungleichung liefert in Verbindung mit (2) unmittelbar

$$(7) \qquad \sum_{p=1}^{k} \left| \int_{\frac{p-1}{k}}^{\frac{p}{k}} \varphi \, dx \right| \leqq \sqrt{\frac{k}{n}},$$

folglich ist

$$(8) \qquad \nu \geqq k'' \geqq \frac{k}{M^2}\left(1 - M\sqrt{\frac{k}{n}}\right).$$

Dieses Resultat gilt für jede natürliche Zahl k, d. h. man kann bei gegebenen k eine Funktion des vorgelegten Orthogonalsystems angeben, die an mindestens $\frac{k}{M^2}\left(1 - M\sqrt{\frac{k}{n}}\right)$ Stellen ihr Vorzeichen wechselt.

Wir gehen endlich zur Bestimmung des günstigsten Wertes von k über. Da das Maximum der Funktion $\frac{x}{M^2}\left(1 - M\sqrt{\frac{x}{n}}\right)$ für $x = \frac{4}{9}\frac{n}{M^2}$ angenommen wird, so liegt der Gedanke nahe, für k die zu diesem Werte nächstliegende natürliche Zahl zu nehmen; wir setzen etwa

$$k = \frac{4}{9}\frac{n}{M^2} + \theta,$$

wobei $0 \leqq \theta < 1$ ist. Alsdann liefert die Ungleichung (8)

$$\nu \geqq \frac{1}{M^2}\left(\frac{4}{9}\frac{n}{M^2} + \theta\right)\left(1 - \sqrt{\frac{4}{9} + \theta\frac{M^2}{n}}\right);$$

da ferner

$$\frac{4}{9} + \theta\frac{M^2}{n} \leqq \left(\frac{2}{3} + \frac{3}{4}\theta\frac{M^2}{n}\right)^2$$

ist, so finden wir

$$\nu \geqq \frac{1}{M^2}\left(\frac{4}{9}\frac{n}{M^2} + \theta\right)\left(\frac{1}{3} - \frac{3}{4}\theta\frac{M^2}{n}\right) = \frac{4}{27}\frac{n}{M^4} - \frac{3}{4}\frac{\theta^2}{n} > \frac{4}{27}\frac{n}{M^4} - 1.$$

Hieraus folgt die Behauptung des Satzes 2:

$$\nu \geqq \left[\frac{4}{27}\frac{n}{M^4}\right],$$

in Anbetracht dessen, daß ν seiner Bedeutung nach eine ganze Zahl ist[7]).

---

[7]) Als Korollar erhält man den Satz, *daß, falls keine der n im Intervall* $0 \leqq x \leqq 1$ *definierten Orthogonalfunktionen an mehr als ν Stellen ihr Vorzeichen ändert, das Maximum des absoluten Betrages mindestens einer dieser Funktionen größer oder gleich*

$$\sqrt[4]{\frac{4}{27}\frac{n}{\nu+1}}$$

sein muß.

8. Wir kommen endlich zum Beweis des Satzes 3. Zu diesem Ende ziehen wir wiederum die in 3. angegebene Funktion $\varphi(x)$ heran und bezeichnen mit μ eine Größe, die der Ungleichung $|\mu| < \frac{1}{M}$ und folglich — wegen $M \geqq 1$ — auch der Ungleichung $|\mu| < M$ genügt. Die Teilintervalle (6) ordnen wir wiederum in zwei Klassen L'_μ und L''_μ ein, wobei wir ein Teilintervall in die Klasse L'_μ reihen, falls daselbst die Funktion $\varphi(x) - \mu$ entweder fast überall nichtnegativ oder fast überall nichtpositiv ist; die übrigen Teilintervalle bilden die Klasse L''_μ. Ist k'_μ bzw. k''_μ die Anzahl der Teilintervalle dieser Klassen, so erkennt man — wörtlich wie oben —, daß die Anzahl der Stellen, wo $\varphi(x) - \mu$ das Vorzeichen ändert, größer oder gleich k''_μ ist; d. h. es ist $\nu_\mu \geqq k''_\mu$, wenn man — in der Terminologie der Einleitung — mit ν_μ die Anzahl derjenigen Stellen bezeichnet, an denen $\varphi(x)$ die horizontale Gerade von der Ordinate μ durchsetzt.

Für jedes Teilintervall l'_μ der ersten Klasse L'_μ gilt die Ungleichung:

$$\int_{(l'_\mu)} \varphi^2\,dx = \int_{(l'_\mu)} \varphi(\varphi-\mu)\,dx + \mu \int_{(l'_\mu)} \varphi\,dx \leqq \left|\int_{(l'_\mu)} \varphi(\varphi-\mu)\,dx\right| + |\mu| \left|\int_{(l'_\mu)} \varphi\,dx\right|$$

$$\leqq M \int_{(l'_\mu)} |\varphi-\mu|\,dx + |\mu| \left|\int_{(l'_\mu)} \varphi\,dx\right| = M\left|\int_{(l'_\mu)} \varphi\,dx - \frac{\mu}{k}\right| + |\mu| \left|\int_{(l'_\mu)} \varphi\,dx\right|;$$

für ein Intervall l''_μ der zweiten Klasse L''_μ wenden wir wiederum die Ungleichung

$$\int_{(l''_\mu)} \varphi^2\,dx \leqq \frac{M^2}{k}$$

an. Durch Addition aller dieser Ungleichungen folgt

$$1 = \int_0^1 \varphi^2\,dx \leqq k''_\mu \frac{M^2}{k} + M \sum \left|\int_{(l'_\mu)} \varphi\,dx - \frac{\mu}{k}\right| + |\mu| \sum \left|\int_{(l'_\mu)} \varphi\,dx\right|,$$

wobei die Summation rechts auf alle $k'_\mu = k - k''_\mu$ Teilintervalle der Klasse L'_μ zu erstrecken ist. Daraus entnimmt man unmittelbar

$$1 \leqq k''_\mu \frac{M^2}{k} + (k - k''_\mu)\frac{M|\mu|}{k} + (M + |\mu|) \sum \left|\int_{(l'_\mu)} \varphi\,dx\right|,$$

um so mehr

$$1 \leqq k''_\mu \frac{M(M-|\mu|)}{k} + M|\mu| + (M+|\mu|) \sum_{p=1}^{k} \left|\int_{\frac{p-1}{k}}^{\frac{p}{k}} \varphi\,dx\right|.$$

Man erhält daher mit Rücksicht auf (7)

$$\nu_\mu \geqq k''_\mu \geqq \frac{k}{M(M-|\mu|)}\left(1 - M|\mu| - (M+|\mu|)\sqrt{\frac{k}{n}}\right).$$

9. Setzen wir der Kürze halber

$$a = \frac{1 - M|\mu|}{M(M - |\mu|)}, \qquad b = \frac{M + |\mu|}{1 - M|\mu|} \frac{1}{\sqrt{n}}$$

(wegen der für μ gemachten Voraussetzungen ist $0 < a \leqq 1$, $b > 0$), so kommt es noch darauf an, in der Formel

$$\nu_\mu \geqq a k (1 - b\sqrt{k})$$

die günstigste Wahl für die natürliche Zahl k zu treffen. Dies wird durch die ganze Zahl

$$k = \frac{4}{9b^2} + \theta$$

erreicht, wobei $0 \leqq \theta < 1$ ist, da die obige Funktion von k an der Stelle $\frac{4}{9b^2}$ ihren Maximalwert erreicht. Wir erhalten, analog wie in 7.,

$$\nu_\mu \geqq a\left(\frac{4}{9b^2} + \theta\right)\left(1 - b\sqrt{\frac{4}{9b^2} + \theta}\right) \geqq a\left(\frac{4}{9b^2} + \theta\right)\left(1 - \left(\frac{2}{3} + \frac{3}{4} b^2 \theta\right)\right)$$

$$= \frac{4a}{27b^2} - \frac{3}{4} a b^2 \theta^2.$$

Die Behauptung des Satzes 3:

$$\nu_\mu \geqq \left[\frac{4a}{27b^2}\right] \tag{9}$$

folgt daraus unmittelbar, da für solche Werte der Größen n, M, μ, welche die Ungleichung

$$\frac{4a}{27b^2} \geqq 1$$

erfüllen (für andere Werte ist (9) trivial), wegen $0 < a \leqq 1$ und $0 \leqq \theta < 1$

$$\frac{3}{4} a b^2 \theta^2 \leqq \frac{1}{9} a^2 \theta^2 < 1$$

und daher

$$\nu_\mu > \frac{4a}{27b^2} - 1$$

gilt. Damit ist auch Satz 3 bewiesen.

(Eingegangen am 28. März 1929.)

C

Analitikus függvények — Analytische Funktionen

C1. Über analytische Funktionen mit singulärer Linie, *Göttinger Nachr.*, 1914, 115—123. *[165—173]*

C2. Über asymptotische Entwicklungen von Funktionen, *Math. Ann.*, **96** (1926), 69—107. *[174—212]*

*

A két dolgozat témája meglehetősen eltérő: C1-ben olyan analitikus függvények szétbontásáról ill. integrálelőállításáról van szó, amelyek szingularitásai egy görbén fekszenek, C2-ben viszont a Laplace-transzformációt használja fel függvények aszimptotikus viselkedésének vizsgálására.

A C2 dolgozat eredményeire támaszkodik a következő, Haar ösztönzésére készült dolgozat:

St. Lipka, Über asymptotische Entwicklungen der Mittag-Lefflerschen Funktion $E_\alpha(x)$, *Acta Sci. Math.*, **3** (1927), 211—223.

Felhasználja a C2 dolgozat eredményeit a következő cikk is:

T. v. Stachó, Operationskalkül von Heaviside und Laplacesche Transformation, *Acta Sci. Math.*, **3** (1927), 107—120.

A C2 dolgozatot részletesen tárgyalja, és eredményeit továbbfejleszti G. Doetsch nagy monográfiájában: *Handbuch der Laplace-Transformation*, Bd. I. *Theorie der Laplace-Transformation*, Bd. II. *Anwendungen der Laplace-Transformation* (Basel 1950, 1955).

*

Die zwei Arbeiten behandeln ziemlich verschiedene Themen: in C1 wird die Zerlegung bzw. Integraldarstellung von solchen analytischen Funktionen behandelt, deren Singularitäten auf einer Kurve liegen, in C2 wird aber die Laplace-Transformation zur Untersuchung des asymptotischen Verhaltens von Funktionen angewendet.

An die Ergebnisse von C2 lehnt sich eine, auf Anregung von Haar angefertigte Arbeit von St. Lipka sowie eine Arbeit von T. v. Stachó; die Arbeit C2 wird in der großen Monographie über Laplace-Transformation von G. Doetsch eingehend behandelt und ihre Ergebnisse weiterentwickelt (s. die Angaben im ungarischen Text).

Über analytische Funktionen mit singulärer Linie.

Von

Alfred Haar in Kolozsvár (Klausenburg).

Vorgelegt von Herrn Hilbert in der Sitzung am 7. Februar 1914.

Im Folgenden stelle ich zwei Theoreme über analytische Funktionen mit wesentlich singulärer Linie auf, die — wie mir scheint — zu den Grundlagen der Theorie dieser Funktionen gehören.

Der erste dieser Sätze gestattet eine Art „Zerspaltung" der Singularität, indem er die Möglichkeit der Zerlegung einer Funktion mit singulärer Linie in Addenden gewährleistet, von denen jeder einzelne nur einen Teil der früheren Singularitätenkurve als wesentlich singuläre Linie besitzt. Der zweite Satz hingegen gibt eine kanonische Entwicklung von Funktionen mit wesentlich singulärer Linie, die an jeder Stelle außerhalb dieser Linie gilt, und die in dieser Theorie eine ähnliche Rolle spielt, wie die Potenzreihe in der Theorie der ganzen Funktionen.

Ich beschränke mich in dieser vorläufigen Mitteilung auf den möglichst einfachsten Fall, wo die Singularitäten auf einem analytischen Kurvenstück liegen, und hoffe auf die Anwendungen dieser Sätze an anderer Stelle zurückkommen zu können.

Theorem I. *Sei $F(z)$ eine Funktion der komplexen Veränderlichen z, die außerhalb des doppelpunktlosen analytischen Kurvenstückes k (dessen Endpunkte A_1 und A_2 sein mögen), überall regulär analytisch ist, und es sei B irgend ein innerer Punkt von k; wir bezeichnen die beiden Kurvenstücke A_1B bez. A_2B mit k_1 bez. k_2. Alsdann läßt sich die Funktion $F(z)$ als Summe zweier Funktionen $F_1(z)$ und $F_2(z)$ darstellen*

$$F(z) = F_1(z) + F_2(z),$$

von denen die erste $F_1(z)$ überall außerhalb des Kurvenstückes k_1, die zweite $F_2(z)$ aber überall außerhalb des Kurvenstückes k_2 regulär analytisch ist[1]).

Theorem II. *Sei wiederum $F(z)$ eine Funktion der komplexen Veränderlichen z, die außerhalb des doppelpunktlosen analytischen Kurvenstückes k überall regulär analytisch ist. Alsdann existieren unendlichviele längst der Kurve k definierte stetige Funktionen*

$$f_1(\xi), f_2(\xi), f_3(\xi), \ldots, f_n(\xi), \ldots$$

so, daß für jede Stelle z, die nicht auf der Kurve k liegt, die unendliche Reihe

$$(II) \quad F(\infty) + \int_{(k)} \frac{df_1(\xi)}{\xi - z} + \int_{(k)} \frac{df_2(\xi)}{(\xi - z)^2} + \cdots + \int_{(k)} \frac{df_n(\xi)}{(\xi - z)^n} + \cdots$$

konvergiert und die Funktion $F(z)$ darstellt; hierbei sind die Integrale im Stieltjes'schen Sinne genommen.

Ein Spezialfall dieses allgemeinen Satzes wurde bereits — ungefähr gleichzeitig — von den Herren Pompeiu[2]) und Hellinger[3]) bewiesen, die die weitere Annahme über die Funktion $F(z)$ machen, daß sie in der ganzen Ebene, dem absoluten Betrage nach, unterhalb einer festen Grenze bleibt; sie zeigen, daß in diesem Falle schon die ersten zwei Glieder der Reihe (II)

$$\text{const.} + \int_{(k)} \frac{df(\xi)}{\xi - z}$$

zur Darstellung solcher Funktionen hinreichen. Darüber hinaus bewies Herr Hellinger, daß der letzte Ausdruck auch zur Darstellung solcher Funktionen hinreicht, die in der Umgebung ihrer singulären Linie k von geringerer als erster Ordnung unendlich werden.

Ich erblicke als wesentlichstes Moment in meinem Theorem II eben den Umstand, daß die Natur der Singularität der Funktion $F(z)$ keiner Einschränkung unterworfen ist, und nur angenommen wird, daß sämtliche singuläre Stellen dieser Funktion auf der

---

1) Wir bemerken, daß wir von der Funktion $F(z)$ weder Eindeutigkeit voraussetzen, noch annehmen müssen, daß k eine wesentlich singuläre Linie dieser Funktion ist (natürlich kann k eine wesentlich singuläre Linie sein). Wir setzen nur voraus, daß $F(z)$ ein solcher Zweig einer analytischen Funktion ist, dessen sämtliche singuläre Stellen auf der Kurve k liegen.

2) Comptes Rendus. 1909.

3) Journal für reine und angewandte Mathematik. 1909.

Kurve k liegen; in diesem allgemeinen Falle kommt man natürlich mit einem endlichen Teil der Reihe nicht aus.

I.

Den Beweis des ersteren der obgenannten Sätze erbringen wir in drei Schritten:

1. Durch den Punkt B der Kurve k ziehen wir eine gerade Linie g, die die Kurve k im Punkte B nicht berührt; es seien C und C' zwei Punkte auf dieser Geraden, die durch den Punkt B von einander getrennt werden und außerdem so nahe an den Punkt B liegen, daß das Geradenstück $\overline{CC'}$ mit der Kurve k außer B keinen anderen Punkt gemein hat.

Wir betrachten nun die Werte, die die gegebene Funktion $F(z)$ auf der Strecke $\overline{CC'}$ annimmt, und konstruieren eine Hülfsfunktion $\omega(z)$, deren einzige singuläre Stelle der Punkt B ist, die an keiner Stelle den Wert Null annimmt, und so beschaffen ist, daß das Produkt

$$|F(z)\,\omega(z)|$$

gegen Null zustrebt, wenn z auf der Geraden g gegen den Punkt B konvergiert.

Die Konstruktion dieser Funktion $\omega(z)$ bietet keine Schwierigkeiten. Man erkennt nämlich unmittelbar, durch Anwendung einer konformen Abbildung, die die Gerade g in die reelle Axe und den Punkt B ins Unendliche wirft, daß diese Konstruktion auf die folgende, in mannigfacher Weise lösbare Aufgabe, zurückgeführt wird:

Gesucht ist eine nirgends verschwindende ganze transcendente Funktion, die für jeden reellen Wert der Veränderlichen dem absoluten Betrage nach größer ausfällt, als eine für alle reellen Werte willkürlich gegebene reelle stetige Funktion an derselben Stelle.

2. Wir betrachten nun die Funktion

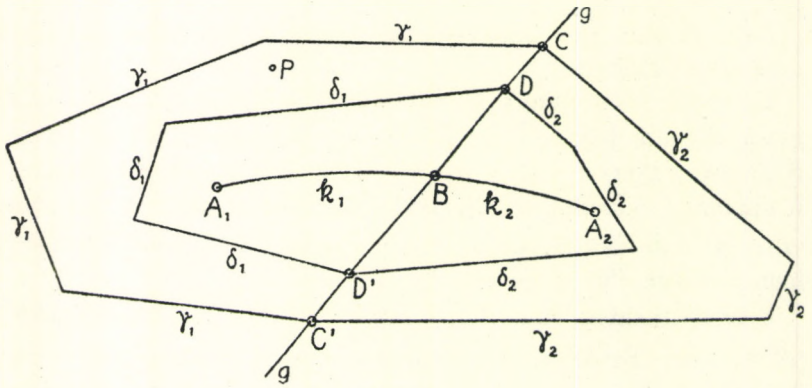
$$G(z) = \omega(z)\,F(z),$$

die ebenfalls außerhalb der Kurve k überall regulär analytisch ist und beweisen unser Theorem I vorab für diese Funktion.

Zu diesem Ende verbinden wir die beiden Punkte C und C' der Geraden g mittels einer regulären Kurve[1]) — etwa eines

1) Darunter verstehe ich eine, sich nicht schneidende, aus endlichvielen analytischen Kurvenstücken aufgebaute Kurve.

Polygonzuges — γ_1 so, daß die aus γ_1 und aus dem Geradenstück $\overline{CC'}$ bestehende geschlossene Kurve das Kurvenstück k_1 umschließt.



Figur 1.

Wir betrachten nun den Ausdruck

$$(1) \qquad \frac{1}{2i\pi}\int_{(\gamma_1)} \frac{G(\zeta)}{\zeta - z}\,d\zeta + \frac{1}{2i\pi}\int_{C'}^{C} \frac{G(\zeta)}{\zeta - z}\,d\zeta$$

und behaupten, daß derselbe außerhalb der geschlossenen Kurve $\overline{CC'}\gamma_1$ eine solche analytische Funktion darstellt, deren analytische Fortsetzung (über die Kurve $\overline{CC'}\gamma_1$ hinaus) nur auf dem Kurvenstück k_1 singuläre Stellen aufweist.

In der Tat, ist z eine Stelle außerhalb der geschlossenen Kurve $\overline{CC'}\gamma_1$, so existieren beide der obgenannten Integrale ($G(\zeta)$ ist ja eine stetige Funktion auf $\overline{CC'}$) und es stellt ihre Summe eine außerhalb dieser geschlossenen Kurve reguläre analytische Funktion dar. Um zu zeigen, daß diese Funktion über diese Kurve hinaus bis an das Kurvenstück k_1 analytisch fortsetzbar ist, verfahren wir folgendermaßen:

Sei P irgendein Punkt innerhalb oder auf der geschlossenen Kurve $\overline{CC'}\gamma_1$, der aber nicht auf k_1 liegt. Wir ziehen sodann eine neue geschlossene reguläre Kurve — etwa wieder einen Polygonzug —, die k_1 umschließend ganz im Inneren der geschlossenen Kurve $\overline{CC'}\gamma_1$ verläuft, den Punkt P im Äußeren hat, und außerdem so beschaffen ist, daß ein Teil ihrer Begrenzung mit einem Stücke $\overline{DD'}$ der Geraden g übereinstimmt.

Bezeichnet nun δ_1 denjenigen Teil dieser Kurve, der von $\overline{DD'}$ verschieden ist — daß also die ganze geschlossene Kurve aus der Strecke $\overline{DD'}$ und aus der Kurve δ_1 besteht — so betrachten wir den Ausdruck

$$\frac{1}{2i\pi}\int_{(\delta_1)}\frac{G(\zeta)}{\zeta-z}\,d\zeta+\frac{1}{2i\pi}\int_{D'}^{D}\frac{G(\zeta)}{\zeta-z}\,d\zeta,$$

der nun außerhalb der Kurve $\overline{DD'}\,\delta_1$ — also insbesondere im Punkte P — jedenfalls eine analytische Funktion darstellt. Außerdem stimmt diese Funktion im Äußeren der geschlossenen Kurve $\overline{CC'}\,\gamma_1$ mit der durch den Ausdruck (1) daselbst definierten analytischen Funktion überein, wie man sich durch Anwendung des Cauchy'schen Integraltheorems auf die geschlossene Kurve $\overline{CD}\,\delta_1\,\overline{D'C'}\,\gamma_1$, innerhalb deren $G(z)$ regulär ist, leicht überzeugt.

Daher ist die analytische Fortsetzung der durch den Ausdruck (1) außerhalb $\overline{CC'}\,\gamma_1$ definierten analytischen Funktion im Punkte P regulär analytisch; also ist diese Funktion in der Tat eine Funktion, die außerhalb des Kurvenstückes k_1 keine Singularitäten aufweist.

Verbinden wir analogerweise die Punkte C und C' durch ein ähnliches Kurvenstück γ_2 so, daß die entstehende geschlossene Kurve $\overline{CC'}\,\gamma_2$ das Kurvenstück k_2 umschließt, so sehen wir in derselben Weise, daß der Ausdruck

$$\frac{1}{2i\pi}\int_{(\gamma_2)}\frac{G(\zeta)}{\zeta-z}\,d\zeta+\int_{C}^{C'}\frac{G(\zeta)}{\zeta-z}\,d\zeta \tag{2}$$

außerhalb der geschlossenen Kurve $\overline{CC'}\,\gamma_2$ eine solche analytische Funktion darstellt, deren analytische Fortsetzung nur auf dem Kurvenstück k_2 singuläre Stellen aufweisen kann.

Da aber die Summe der beiden Ausdrücke (1) und (2), außerhalb der durch die Kurvenstücke γ_1 und γ_2 gebildeten geschlossenen Kurve mit der gegebenen Funktion $G(z)$ übereinstimmt, so folgt diese Übereinstimmung für jede Stelle, wo die betrachteten drei Funktionen regulär sind, d. h. überall außerhalb der Kurve k. Mit anderen Worten, wir haben unsre Funktion $G(z)$ in zwei Addenden $G_1(z)$ und $G_2(z)$ zerlegt

$$G(z) = G_1(z)+G_2(z),$$

von denen die erste nur auf k_1, die zweite nur auf k_2 singulär werden kann.

3. Durch Division der letzten Gleichung durch $\omega(z)$, folgt

$$F(z) = F_1(z) + F_2(z),$$

wobei zur Abkürzung

$$F_1(z) = \frac{G_1(z)}{\omega(z)} \text{ und } F_2(z) = \frac{G_2(z)}{\omega(z)}$$

gesetzt ist. Da aber $\omega(z)$ nur die eine singuläre Stelle B — den Punkt, wo die Kurven k_1 und k_2 zusammenstoßen — besitzt, da ferner $\omega(z)$ an jeder Stelle von Null verschieden ist, so folgt, daß $F_1(z)$ außerhalb k_1, und $F_2(z)$ außerhalb k_2 regulär analytisch ist.

Damit ist unser Theorem I bewiesen.

Man sieht auch unmittelbar ein, daß man aus der soeben gewonnenen Zerlegung

$$F(z) = F_1(z) + F_2(z)$$

alle Zerlegungen der verlangten Art dadurch erhält, daß man zu der Funktion $F_1(z)$ eine beliebige Funktion, die nur an der Stelle B singulär wird, addiert, und dieselbe Funktion von $F_2(z)$ subtrahiert.

II.

1. Unsre zweite Behauptung ist in dem Falle, wo die Kurve k mit dem zwischen -1 und $+1$ gelegenen Teile der reellen Axe zusammenfällt, eine unmittelbare Folge eines von Herrn C. Neumann herrührenden Theorems[1]), das folgendermaßen lautet:

Wir bezeichnen mit $P_n(x)$ das Legendre'sche Polynom n-ter Ordnung, mit $Q_n(x)$ die entsprechende Funktion zweiter Art, die also durch die Formeln

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n (x^2-1)^n}{dx^n};$$

$$Q_n(x) = \frac{1}{2} \int_{-1}^{1} \frac{P_n(y)}{x-y} dy = \frac{1}{2^{n+1}} \int_{-1}^{1} \frac{(y^2-1)^n}{(x-y)^{n+1}} dy$$

definiert sind. Alsdann gilt die Darstellung

$$\frac{1}{\bar{\zeta}-\bar{z}} = P_0(\bar{\zeta})\, Q_0(\bar{z}) + 3 P_1(\bar{\zeta})\, Q_1(\bar{z}) + 5 P_2(\bar{\zeta})\, Q_2(\bar{z}) + \cdots$$
$$+ (2n+1) P_n(\bar{\zeta})\, Q_n(\bar{z}) + \cdots,$$

1) Vgl. Heine: Handbuch der Kugelfunktionen, 2. Aufl., Bd. I. S. 197.

falls $\bar{\zeta}$ innerhalb $\bar{z}$ außerhalb derselben Ellipse liegt, deren Brennpunkte mit den Punkten $z = \pm 1$ der komplexen Ebene übereinstimmen.

Bedeutet daher $\bar{F}(\bar{z})$ eine Funktion, die außerhalb der Strecke $[-1, +1]$ überall regulär analytisch ist, so schließt man in bekannter Weise, indem man die obige Reihe mit $\bar{F}(\bar{\zeta})$ multipliziert und über einen passend gewählten Weg integriert, die Darstellbarkeit der Funktion $\bar{F}(\bar{z})$ durch die folgende Reihe

$$(\text{II}') \quad \bar{F}(\bar{z}) = \frac{1}{2i\pi}\int F(\bar{\zeta})\, Q_0(\bar{\zeta})\, d\bar{\zeta} + \frac{1}{2i\pi}\sum_{n=0}^{\infty}(2n+1)\int \bar{F}(\bar{\zeta})\, P_n(\bar{\zeta})\, d\bar{\zeta}\,.\, Q_n(\bar{z})$$

$$= \text{const.} + \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2^{n+1}}\int_{-1}^{+1}\frac{A_n(y^2-1)^n}{(\bar{z}-y)^{n+1}}\,dy,$$

wobei die Konstante A_n zur Abkürzung für

$$\frac{2n+1}{2i\pi}\int \bar{F}(\bar{\zeta})\, P_n(\bar{\zeta})\, d\bar{\zeta}$$

geschrieben ist. Da aber diese Reihe in jedem, die reelle Strecke $[-1, +1]$ nicht enthaltendem Gebiet gleichmäßig konvergiert und von der verlangten Form ist, so ist unser Theorem für den vorliegenden Spezialfall damit bewiesen.

Der Beweis unsres allgemeinen Theorems II gestaltet sich nun folgendermaßen:

2. Wir bemerken vorab, daß die n-te Kugelfunktion zweiter Art

$$Q_n(\bar{z}) = \frac{1}{2^{n+1}}\int_{-1}^{1}\frac{(y^2-1)^n}{(\bar{z}-y)^{n+1}}\,dy$$

im Unendlichen von der $(n+1)$-ten Ordnung verschwindet, ferner, daß sie in der durch die Strecke $[-1, +1]$ aufgeschnittenen Ebene überall regulär analytisch ist und nur an den Stellen $\bar{z} = \pm 1$ eine logarithmische Singularität besitzt. Daraus folgt, daß zu jeder noch so kleinen positiven Zahl δ eine Konstante C_n derart existiert, daß für jede Stelle $\bar{z}$ der komplexen Ebene die Ungleichung

$$|Q_n(\bar{z})| < \frac{C_n}{\bar{r}^{\delta}}$$

besteht, wobei $\bar{r}$ die Entfernung des Punktes $\bar{z}$ von der Strecke $[-1, +1]$ bedeutet.

3. Um nun für unsre vorgelegte Funktion $F(z)$, die außerhalb der analytischen Kurve k überall regulär

analytisch ist, die entsprechende Darstellung zu gewinnen, bilden wir konform die, durch die Kurve k aufgeschnittene z Ebene, auf die, durch die Strecke $[-1, +1]$ aufgeschnittene $\bar{z}$ Ebene ab, wobei wir annehmen, daß die beiden unendlich fernen Punkte in einander übergehen. Es seien

$$z = \varphi(\bar{z}) \text{ bez. } \bar{z} = \psi(z)$$

die korrespondierenden Funktionen, die die Abbildung der z Ebene auf die $\bar{z}$ Ebene, bez. die die Abbildung der $\bar{z}$ Ebene auf die z Ebene vermittelt. Dann ist die Funktion von $\bar{z}$

$$\bar{F}(\bar{z}) = F(\varphi(\bar{z}))$$

überall außerhalb der Strecke $[-1, +1]$ regulär analytisch und läßt sich daher in eine Reihe von der Form (II′) entwickeln, die an jeder solchen Stelle konvergiert. Daher gilt an jeder Stelle z außerhalb der Kurve k für unsre Funktion $F(z)$ die konvergente Entwicklung

$$(II'') \qquad F(z) = \text{const.} + \sum_{n=0}^{\infty} A_n Q_n(\psi(z)).$$

Nun verhalten sich aber die Funktionen $Q_n(\psi(z))$ in der Nachbarschaft der Kurve k ähnlich, wie die Funktionen $Q_n(\bar{z})$ in der Nachbarschaft der Strecke $[-1, +1]$. In der Tat, aus den allgemeinen Prinzipien der konformen Abbildung schließt man leicht, in Anbetracht dessen, daß die Kurve k analytisch vorausgesetzt ist, daß die Funktion $\psi(z)$ über die Kurve k hinaus analytisch fortsetzbar ist und daß der Differentialquotient $\left|\frac{d\bar{z}}{dz}\right|$ unterhalb einer endlichen Grenze bleibt. Daraus folgert man aber ohne Schwierigkeit in Folge der über $Q_n(\bar{z})$ geltenden entsprechenden Tatsache, daß $Q_n(\psi(z))$ in der Umgebung der singulären Linie k von geringerer als 1-ter Ordnung unendlich wird. Daraus folgt, nach dem in der Einleitung erwähnten Satze des Herrn Hellinger, daß es längst der Kurve k definierte stetige Funktionen $q_n(\xi)$ gibt, so, daß der Ausdruck

$$\int_{(k)} \frac{dq_n(\xi)}{z-\xi}$$

an jeder Stelle außerhalb k mit $Q_n(\psi(z))$ übereinstimmt.

3. Wenden wir schließlich auf das Integral

$$\int_{(k)} \frac{dq_n(\xi)}{z-\xi}$$

n-mal Produktintegration an, so geht dieses Integral in ein Integral von der Form

$$\int_{(k)} \frac{dg_n(\zeta)}{(z-\zeta)^{n+1}}$$

über [1]), da die bei der Produktintegration auftretenden Randglieder, wegen dem Umstande, daß $Q_n(\psi(z))$ im Unendlichen von $(n+1)$-ter Ordnung verschwindet, sicherlich hinausfallen müssen.

Es erhält daher die Reihe (II″) die verlangte Form

$$F(z) = \text{const.} + \sum_{n=0}^{\infty} \int_{(k)} \frac{A_n\, dg_n(\zeta)}{(z-\zeta)^{n+1}} = \text{const.} + \sum_{n=0}^{\infty} \int_{(k)} \frac{df_n(\zeta)}{(z-\zeta)^{n+1}}$$

und gibt daher die im Theorem II behauptete Darstellung der Funktion $F(z)$, die überall außerhalb der singulären Linie k gilt.

1) Die Funktion $g_n(\zeta)$ wird durch n-malige Integration aus der Funktion $q_n(\zeta)$ abgeleitet, und ist daher sicherlich eine stetige Funktion.

Über asymptotische Entwicklungen von Funktionen.

Von

Alfred Haar in Szeged (Ungarn).

Einleitung.

Zu den Problemen, die man am häufigsten in der mathematischen Analysis begegnet, gehört das Studium des asymptotischen Verhaltens einer Funktion $f(x)$, die für hinreichend große Werte der Veränderlichen definiert ist. Formuliert man die Aufgabe in voller Allgemeinheit, so kann es sich nur darum handeln, das asymptotische Verhalten einer vorgelegten Funktion durch das entsprechende Verhalten anderer, einfacherer, Funktionen zu charakterisieren. Ein analoges Problem tritt auf, wenn eine Zahlenfolge $f_1, f_2, \ldots, f_n, \ldots$ vorgelegt ist, deren allgemeines Glied für große Werte des Zeigers untersucht werden soll. Zur Behandlung dieser letzten Aufgabe dient eine sehr allgemeine und fruchtbare Methode, die von G. Darboux in einer berühmten Abhandlung[1]) ausgearbeitet wurde und vielfach als *Methode von Darboux* bezeichnet wird, obwohl der fundamentale Gedanke schon in älteren Arbeiten, namentlich in Untersuchungen von Laplace, Cauchy und Riemann, aufzufinden ist. Es ist das Ziel der vorliegenden Arbeit, ein *analoges Verfahren zur Bestimmung des asymptotischen Verhaltens von Funktionen zu entwickeln, das für Funktionen dasselbe leistet, wie die Darbouxsche Methode für Zahlenfolgen.* In Anlehnung an diese klassischen Untersuchungen gewinne ich eine Methode, die — in gleicher Weise, wie jene für Zahlenfolgen — geeignet ist, in sehr allgemeinen Fällen zur asymptotischen Entwicklung von Funktionen zu führen.

Um den Gedankengang des zu befolgenden Verfahrens mit der Darbouxschen Methode in Verbindung zu setzen, sei kurz an diese erinnert. Mit

[1]) Mémoire sur l'approximation des fonctions de très grands nombres et sur une classe étendue de développements en série. Journal de mathématiques pures et appliquées. (3), 4, S. 5—56 und S. 377—416 (1878).

der vorgelegten Zahlenfolge $f_1, f_2, \ldots, f_n, \ldots$ bilde man ihre erzeugende Funktion:

$$\Phi(z) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n z^n;$$

gelingt es, eine andere Potenzreihe

$$\Phi^*(z) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n^* z^n$$

mit demselben Konvergenzkreis vom Radius r anzugeben, die so beschaffen ist, daß die Randfunktion der durch die Differenz $\Phi(z) - \Phi^*(z)$ dargestellten analytischen Funktion auf dem Konvergenzkreis k-mal stetig differenzierbar ist, so gilt die Limesgleichung:

$$\lim_{n=\infty} r^n n^k (f_n - f_n^*) = 0,$$

die zur gesuchten asymptotischen Entwicklung führt. Der Kern dieser Methode besteht in der Erkenntnis, daß die Singularitäten der erzeugenden Funktion — und zwar diejenigen, die auf dem Konvergenzkreis liegen — charakteristisch für das asymptotische Verhalten der vorgelegten Zahlenfolge sind. Darboux untersucht in der erwähnten Abhandlung in ausführlicher Weise den Fall, in dem $\Phi(z)$ auf dem Konvergenzkreis nur algebraische Singularitäten besitzt, und macht sodann eine Reihe von höchst bemerkenswerten Anwendungen.

Es liegt nun der Gedanke nahe, wenn statt einer Zahlenfolge $f_1, f_2, \ldots, f_n, \ldots$ eine Funktion $f(x)$ der kontinuierlichen Veränderlichen vorgelegt ist, zum Studium ihres Verhaltens für große Werte der Variablen an Stelle der durch die obige Summe definierten erzeugenden Funktion, die durch das Integral

$$\int_0^{\infty} f(x) z^x dx$$

dargestellte Funktion heranzuziehen. Schreibt man — um auf eine bequemere Form zu gelangen — e^{-z} an Stelle von z, so erhält man den Ausdruck:

$$\varphi(z) = \int_0^{\infty} e^{-zx} f(x) dx$$

und der Grundgedanke der folgenden Untersuchungen besteht darin, daß diese Funktion von z — bzw. ihre Singularitäten — in gleicher Weise das asymptotische Verhalten von $f(x)$ bestimmen, wie die obige erzeugende Funktion $\Phi(z)$ das Verhalten der Zahlenfolge $f_1, f_2, \ldots, f_n, \ldots$.

Bekanntlich spielt das so erhaltene Integral in verschiedenen Gebieten der Analysis eine wichtige Rolle; es wird als *Laplacesche* (oft auch Abelsche) *Transformierte* der Funktion $f(x)$ bezeichnet; andere Autoren ziehen

die Bezeichnung Determinanten-Funktion vor. Ich erwähne an dieser Stelle nur den schönen Vortrag von Herrn S. Pincherle[2]) auf dem Mathematiker-Kongreß in Rom, in dem auch auf einen Zusammenhang des asymptotischen Verhaltens von $f(x)$ mit der Laplaceschen Transformierten hingewiesen wird, sowie einen wichtigen Satz des Herrn E. Landau[3]), der die Konvergenzabszisse des obigen Integrals mit dem asymptotischen Verhalten der Funktion $f(x)$ in Verbindung bringt. Auch die berühmten Untersuchungen Poincarés über die asymptotischen Entwicklungen der Lösungen linearer Differentialgleichungen machen von der Laplaceschen Transformation Gebrauch, aber in einer Weise, die gänzlich verschieden von unserem Verfahren ist[4]).

Wir werden vor allem zeigen (§ 1), daß wenn zwei Funktionen $f(x)$ und $f^*(x)$ gegeben sind (wir nehmen der Einfachheit halber an, daß sie für alle positiven Werte von x definiert, stetig und in jedem endlichen Intervall von beschränkter Schwankung sind), die so beschaffen sind, daß die Differenz ihrer Laplaceschen Transformierten

$$\varphi(z) - \varphi^*(z) = \int_0^\infty e^{-zx} f(x)\,dx - \int_0^\infty e^{-zx} f^*(x)\,dx$$

regulär analytisch für alle Werte von x ist, deren reeller Teil größer als eine reelle Konstante a ausfällt[5]) und auf der Geraden $\Re(z) = a$ solche Randwerte besitzt, die k-mal stetig differenzierbar sind, die Limesgleichung

$$\lim_{x=\infty} e^{-ax} x^k (f(x) - f^*(x)) = 0$$

gilt, falls für das Verhalten von $\varphi(z) - \varphi^*(z)$ im Unendlichen noch eine

---

[2]) Alcune spigolature nel campo delle funzioni determinanti. Atti del IV. congresso dei matematici. Roma 1905, S. 44.

[3]) Über die Grundlagen der Theorie der Fakultätenreihen, Sitzungsber. d. bayr. Akad., Math.-phys. Klasse, **36** (1906), S. 151–218.

[4]) Die schönen Untersuchungen von Herrn Hj. Mellin über asymptotische Reihen stehen in näherer Berührung mit der vorliegenden Arbeit, da in diesen ein dem Laplaceschen analoges Integral angewandt wird. Ein prinzipieller Unterschied besteht darin, daß sich Herr Mellin auf analytische Funktionen, die in einem bestimmten Winkel definiert sind, beschränkt. Wir verweisen auf seine zusammenfassende Arbeit: Abriß einer allgemeinen und einheitlichen Theorie der asymptotischen Reihen. Wissenschaftliche Vorträge, gehalten auf dem V. Kongreß der skandinavischen Mathematiker. Helsingfors 1923, S. 1–17. — Die Laplacesche Transformation wurde in den letzten Jahren von den Herren F. Bernstein und G. Doetsch in einer Reihe von interessanten Arbeiten zum Studium gewisser Funktionalgleichungen herangezogen; sie benutzen den Ausdruck Oberfunktion bzw. Unterfunktion für $f(x)$ bzw. $\varphi(z)$.

[5]) Zufolge der oben durchgeführten Transformation der unabhängigen Veränderlichen spielen jetzt die Vertikalen die Rolle, die bei der erzeugenden Funktion $\Phi(z)$ die konzentrischen Kreise hatten.

Zusatzbedingung erfüllt ist, die wir als den *Fourierschen Charakter* dieser Funktion bezeichnen, da sie für die Gültigkeit der sog. Fourierschen Integralformel charakteristisch ist (S. 77).

Dem Vorgange Darboux's entsprechend beschäftigen wir uns sodann (§ 2) mit dem Fall, in dem die Laplacesche Transformierte $\varphi(z)$ einer Funktion $f(x)$ so beschaffen ist, daß diejenige singuläre Stelle (bzw. Stellen), deren reeller Teil möglichst groß ist, eine algebraische bzw. logarithmische Singularität ist, im Unendlichen aber die oben erwähnten Zusatzbedingungen erfüllt sind. Wir stellen in diesem Falle die volle asymptotische Entwicklung der Funktion $f(x)$ auf (S. 85 und 86), und gelangen auf diese Weise zu fertigen Formeln, die in verschiedenen Anwendungen in bequemer und rascher Weise zum Ziele führen.

Die Anwendbarkeit der dargelegten Methode und der erhaltenen Resultate ist eine äußerst mannigfaltige. Es zeigt sich, daß eine große Menge der in der Literatur behandelten asymptotischen Entwicklungen in einfachster Weise sich auf diesem Weg ergeben. Anwendungen auf lineare Differentialgleichungen, auf die Theorie der Gammafunktionen und der Besselschen Funktionen, sowie auf die allgemeine Theorie der Funktionen komplexer Variablen ergeben sich ohne prinzipielle Schwierigkeiten. Ich werde in folgenden Mitteilungen insbesondere Anwendungen auf die Theorie der linearen partiellen Differentialgleichungen vom parabolischen und hyperbolischen Typus darlegen und dabei das alte Problem des *„Endverlaufes"* in der Theorie der Wärmeleitung behandeln.

Die Anwendungen, die in der vorliegenden Arbeit zusammengestellt sind, verfolgen lediglich den Zweck, die Tragweite und Kraft des dargelegten Verfahrens zu illustrieren. Zu diesem Ende habe ich zunächst zwei altbekannte Beispiele: die asymptotische Entwicklung der Besselschen Funktion (§ 3) und das Laplacesche Problem der Funktionen großer Zahlen, d. h. die asymptotische Entwicklung des durch das Integral

$$\int_0^1 e^{x F(t)} G(t)\, dt$$

dargestellten Funktion (§ 4) herangezogen. Durch Anwendung der in § 2 aufgestellten Formeln gewinne ich die bekannten Entwicklungen der Theorie der Besselschen Funktionen ohne jede Mühe, für das Laplacesche Problem aber explizite Ausdrücke, die — wie mir scheint — sowohl für theoretische Untersuchungen, wie auch für numerische Rechnungen geeignet sind[6]).

[6]) Von der ausgedehnten Literatur dieses Problems sei hier nur auf die elegante Behandlung von O. Perron hingewiesen: Über die näherungsweise Berechnung der Funktionen großer Zahlen. Sitzungsberichte der Bayerischen Akademie der Wissenschaften. Math.-phys. Klasse 1917, S. 191—219.

Außer diesen beiden klassischen Aufgaben behandle ich (§ 3) die von Herrn Hardy in einer schönen Arbeit[7]) in Angriff genommene asymptotische Entwicklung der durch die Potenzreihe

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{k^s\, k!}$$

definierten ganzen Funktion, falls x längs eines Strahles, der im ersten oder vierten Quadranten liegt, ins Unendliche rückt, und zeige, daß die Hardyschen Resultate das erste Glied der von mir gewonnenen Entwicklung bilden, ferner ein Problem der Theorie der Reihenentwicklungen nach Besselschen Funktionen (§ 4), das mit den üblichen Methoden nicht ohne Schwierigkeiten zu behandeln wäre.

Auf die oben erwähnten Anwendungen aus der Theorie der partiellen Differentialgleichungen hoffe ich später zurückzukommen.

§ 1.

Laplacesche Transformation und asymptotische Entwicklungen.

1. Wir legen unseren Untersuchungen eine für alle positiven Werte von x definierte Funktion $f(x)$ zugrunde, die stetig und in jedem endlichen Intervall von beschränkter Schwankung ist, und betrachten ihre Laplacesche Transformierte

$$\varphi(z) = \int_0^{\infty} e^{-zx} f(x)\, dx. \tag{1}$$

Wenn dieses Integral für den (der Einfachheit halber reell angenommenen) Wert $z = \sigma_0$ konvergiert, so konvergiert es bekanntlich für jeden Wert von z, dessen reeller Teil größer als derjenige von σ_0 ist, und zwar ist diese Konvergenz eine gleichmäßige in jedem Winkel $< \pi$, mit dem Punkt $z = \sigma_0$ als Scheitelpunkt, dessen Halbierende zur positiven reellen Achse parallel läuft. Daraus wird in gewohnter Weise geschlossen, daß das Konvergenzgebiet des betrachteten Integrals eine Halbebene ist, in der $\varphi(z)$ eine reguläre analytische Funktion darstellt.

In dieser Halbebene betrachten wir die Vertikale $\Re(z) = \sigma > \sigma_0$ und *nehmen an, daß die Funktion $\varphi(z)$ längs dieser Geraden so beschaffen ist, daß das Integral*

$$\frac{1}{2i\pi} \int_{\sigma - i\infty}^{\sigma + i\infty} e^{(z-\sigma)x} \varphi(z)\, dz = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{itx} \varphi(\sigma + it)\, dt \tag{2}$$

[7]) On the zeroes of certain classes of integral Taylor series. London Proc. (2), 2, S. 332–335 und 401–431.

existiert, und zwar gleichmäßig für alle x, die eine bestimmte Größe X übersteigen. Dann ist für diese Werte von x

$$f(x) = \frac{1}{2i\pi} \int_{\sigma - i\infty}^{\sigma + i\infty} e^{zx} \varphi(z)\, dz. \tag{3}$$

Bei etwas modifizierten Annahmen ist diese Umkehrungsformel — und ähnliche dieser Art — in der Literatur von verschiedenen Autoren aufgestellt und angewandt worden. Schon Herr Pincherle hat in einer bekannten Abhandlung[8]) unter bestimmten Einschränkungen über $f(x)$ diese Formel abgeleitet; Herr Hamburger[9]) bewies sie sodann unter der Annahme, daß das Integral (1) für $z = \sigma_0$ absolut konvergiert. Für unsere Zwecke, da es sich eben darum handelt, aus den Eigenschaften der Funktion $\varphi(z)$ auf diejenige von $f(x)$ zu schließen, ist es wichtig, daß keine Annahmen über das Verhalten von $f(x)$ im Unendlichen gemacht werden, statt dessen die gleichmäßige Konvergenz des Integrals (2) verlangt wird.

Um unter dieser Bedingung die Umkehrungsformel abzuleiten, setzen wir zur Abkürzung:

$$F(x) = \int_0^x e^{-\sigma_0 x} f(x)\, dx;$$

wegen der Konvergenz des Integrals (1) für $z = \sigma_0$ bleibt $|F(x)|$ für jeden Wert von x kleiner als eine feste Zahl. Durch Produktintegration erhält man für $\Re(z) > \sigma_0$:

$$\varphi(z) = \int_0^\infty e^{-(z-\sigma_0)x} \frac{dF}{dx}\, dx = (z - \sigma_0) \int_0^\infty e^{-(z-\sigma_0)x} F(x)\, dx,$$

wobei das letzte Integral für die betrachteten Werte von z *absolut* konvergiert. Setzen wir noch zur Abkürzung

$$\Phi^*(z) = \frac{\varphi(z)}{z - \sigma_0}, \qquad F^*(x) = e^{\sigma_0 x} F(x),$$

so ergibt sich aus

$$\Phi^*(z) = \int_0^\infty e^{-zx} F^*(x)\, dx \tag{4}$$

die Umkehrungsformel[10])

$$F^*(x) = \frac{1}{2i\pi} \lim_{\omega = \infty} \int_{\sigma - i\omega}^{\sigma + i\omega} e^{zx} \Phi^*(z)\, dz \qquad (\sigma > \sigma_0) \tag{5}$$

---

[8]) Sur les fonctions déterminantes. Annales de l'École Normale Supérieure **22** (1905), S. 1—69.

[9]) Über eine Riemannsche Formel aus der Theorie der Dirichletschen Reihen. Math. Zeitschr. **6** (1920), S. 6.

[10]) Dies ist eben der Fall, den Herr Hamburger in seiner a. a. O. genannten Arbeit behandelt.

als eine unmittelbare Folge des Fourierschen Integrals. In der Tat folgt[11]) wegen der absoluten Konvergenz des Integrals (4) für $z = \sigma > \sigma_0$

$$e^{-\sigma x} F^*(x) = \frac{1}{\pi} \lim_{\omega = \infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\sigma \xi} F^*(\xi) \frac{\sin \omega (\xi - x)}{\xi - x} d\xi$$

an jeder Stelle $x > 0$ (da $F^*(x)$ differenzierbar ist). Hieraus ergibt sich durch eine leichte Umformung

$$e^{-\sigma x} F^*(x) = \frac{1}{2\pi} \lim_{\omega = \infty} \int_{0}^{\infty} e^{-\sigma \xi} F^*(\xi) \left\{ \int_{-\omega}^{\omega} e^{-it(\xi - x)} dt \right\} d\xi$$

$$= \frac{1}{2\pi} \lim_{\omega = \infty} \int_{-\omega}^{\omega} \left\{ \int_{0}^{\infty} e^{-\sigma \xi} F^*(\xi) e^{-it(\xi - x)} d\xi \right\} dt,$$

da die Umkehrung der Integrationsfolgen wegen der angenommenen absoluten Integrabilität des Integranden gestattet ist. Hieraus entnimmt man unmittelbar

$$F^*(x) = \frac{1}{2\pi} \lim_{\omega = \infty} \int_{-\omega}^{\omega} e^{(\sigma + it)x} \left\{ \int_{0}^{\infty} e^{-(\sigma + it)\xi} F^*(\xi) d\xi \right\} dt$$

$$= \frac{1}{2\pi} \lim_{\omega = \infty} \int_{-\omega}^{\omega} e^{(\sigma + it)x} \Phi^*(\sigma + it) dt,$$

womit die Formel (5) erwiesen ist. Die so gewonnene Gleichung

$$(5') \qquad e^{\sigma_0 x} F(x) = \frac{1}{2i\pi} \lim_{\omega = \infty} \int_{\sigma - i\omega}^{\sigma + i\omega} e^{zx} \frac{\varphi(z)}{z - \sigma_0} dz$$

führt nun zu unserer Behauptung durch die folgende Überlegung: Schreibt man zur Abkürzung[12]):

$$(2^*) \qquad f^*(x) = \frac{1}{2i\pi} \int_{\sigma - i\infty}^{\sigma + i\infty} e^{(z - \sigma_0)x} \varphi(z) dz,$$

---

[11]) Vgl. C. Jordan, Cours d'Analyse (3. Aufl.) 2, S. 278.

[12]) Aus den für das Integral (2) gemachten Voraussetzungen folgt nicht nur die Existenz des Integrals

$$\int_{\sigma - i\infty}^{\sigma + i\infty} e^{(z - \sigma_0)x} \varphi(z) dz = e^{(\sigma - \sigma_0)x} \int_{\sigma - i\infty}^{\sigma + i\infty} e^{(z - \sigma)x} \varphi(z) dz,$$

sondern auch die Tatsache, daß es in jedem endlichen Intervall

$$x_1 \leqq x \leqq x_2$$

gleichmäßig konvergiert, sobald x_1 und x_2 größer als X ausfallen.

so folgt — falls x_1 und x_2 größer als X sind —

$$\int_{x_1}^{x_2} f^*(x)\,dx = \frac{1}{2i\pi}\int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} \frac{e^{(z-\sigma_0)x_2} - e^{(z-\sigma_0)x_1}}{z-\sigma_0}\,\varphi(z)\,dz,$$

da die Umkehrung der Integrationsfolgen wegen der angenommenen gleichmäßigen Konvergenz des Integrals (2) für $x > X$ gestattet ist. Das heißt es ist

$$\int_{x_1}^{x_2} f^*(x)\,dx = F(x_2) - F(x_1) = \int_{x_1}^{x_2} e^{-\sigma_0 x} f(x)\,dx,$$

und wegen der Stetigkeit der Funktionen $f(x)$ und $f^*(x)$

$$f^*(x) = e^{-\sigma_0 x} f(x).$$

Hieraus folgt aber mit Rücksicht auf (2^*) unsere Umkehrungsformel

$$f(x) = \frac{1}{2i\pi}\int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} e^{zx}\,\varphi(z)\,dz.$$

2. Bevor wir weitere Schlüsse aus dieser Umkehrungsformel ziehen, wollen wir zwei Fälle hervorheben, in denen das Integral

$$\int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} e^{(z-\sigma)x}\,\varphi(z)\,dz = \int_{-\infty}^{\infty} e^{itx}\,\varphi(\sigma+it)\,dt$$

gleichmäßig in x konvergent ist, da sie in den folgenden Untersuchungen häufig auftreten werden. Dies findet jedenfalls statt, wenn

a) $\varphi(\sigma+it)$ bei $t = \pm\infty$ absolut integrabel ist, da sodann für jeden Wert von x

$$\left|\int_{\alpha}^{\beta} e^{itx}\,\varphi(\sigma+it)\,dt\right| \leqq \int_{\alpha}^{\beta} |\varphi(\sigma+it)|\,dt$$

ist, oder wenn

b) die Ableitung $\varphi'(\sigma+it)$ für $t = \pm\infty$ absolut integrabel und

$$\lim_{t=\pm\infty} \varphi(\sigma+it) = 0$$

ist. In der Tat ist

$$\left|\int_{\alpha}^{\beta} e^{itx}\varphi(\sigma+it)\,dt\right| = \left|\frac{e^{it\beta}\varphi(\sigma+i\beta) - e^{it\alpha}\varphi(\sigma+i\alpha)}{ix} - \frac{1}{x}\int_{\alpha}^{\beta} e^{itx}\varphi'(\sigma+it)\,dt\right|$$

$$\leqq \frac{1}{x}\left\{|\varphi(\sigma+i\beta)| + |\varphi(\sigma+i\alpha)| + \int_{\alpha}^{\beta} |\varphi'(\sigma+it)|\,dt\right\},$$

und diese Ungleichung lehrt, daß für alle Werte von $|x|$, die oberhalb

einer positiven Grenze liegen, dieses Integral kleiner als eine von x unabhängige Größe δ wird, falls die Grenzen α und β hinreichend große positive bzw. negative Zahlen bedeuten.

Die gleichmäßige Konvergenz der Integrale von der Form

$$(6) \qquad \int_a^\infty e^{itx}\psi(t)\,dt \quad \text{bzw.} \quad \int_{-\infty}^a e^{itx}\psi(t)\,dt$$

spielt bekanntlich eine wichtige Rolle, wenn es sich darum handelt, nachzuweisen, ob die Fouriersche Integralformel für die Funktion $\psi(t)$ gültig ist. Deshalb wollen wir der Kürze halber sagen, daß die Funktion $\psi(t)$ *bei* $t=\infty$ *bzw. bei* $t=-\infty$ *für alle* $x \geqq X$ *den Fourierschen Charakter hat, wenn das entsprechende Integral für diese Werte von* x *gleichmäßig konvergiert, d. h. wenn man zu jeder noch so kleinen Zahl* δ *eine positive Grenze* ω *derart bestimmen kann, daß für alle* $x \geqq X$

$$\left|\int_\alpha^\beta e^{ixt}\psi(t)\,dt\right| < \delta$$

ausfällt, sobald $\alpha \geqq \omega$ *und* $\beta \geqq \omega$ *bzw.* $\alpha \leqq -\omega$ *und* $\beta \leqq -\omega$ *ist*[13]).

Beispielsweise hat die Funktion

$$\frac{e^{t}}{\sigma+it}$$

(wo σ eine reelle Größe bedeutet) sowohl bei $t=\infty$ als auch bei $t=-\infty$ für jeden positiven Wert von x den Fourierschen Charakter; es ist nämlich:

$$\int_\alpha^\beta e^{itx}\frac{e^{it}}{\sigma+it}\,dt = \frac{1}{1+x}\left\{\frac{e^{i\beta(1+x)}}{i(\sigma+i\beta)} - \frac{e^{i\alpha(1+x)}}{i(\sigma+i\alpha)} + \int_\alpha^\beta \frac{e^{it(1+x)}}{(\sigma+it)^2}\,dt\right\},$$

aus der die erwähnte Gleichmäßigkeit für jedes positive x unmittelbar folgt.

Aus der gleichmäßigen Konvergenz der Integrale (6) (für $x \geqq X$) folgen — in bekannter Weise — die Limesgleichungen

$$\lim_{x=\infty}\int_a^\infty e^{itx}\psi(t)\,dt = 0 \quad \text{bzw.} \quad \lim_{x=\infty}\int_{-\infty}^a e^{itx}\psi(t)\,dt = 0,$$

falls die Funktion $\psi(t)$ in jedem endlichen Intervall integrabel ist[14]).

3. Entscheidend für die folgenden Entwicklungen ist der Umstand, wie weit nach links in der obigen Umkehrungsformel die Integrationsgerade

---

[13]) Die Voraussetzung der Umkehrformel (gleichmäßige Konvergenz des Integrals (2)) besteht in dem Fourierschen Charakter von $\varphi(\sigma+it)$ bei $t=\pm\infty$.

[14]) Um unnötige Komplikationen zu vermeiden, benutzen wir in der vorliegenden Arbeit überall den Lebesgueschen Integralbegriff. Bei Zugrundelegung des Riemannschen Integrals wäre absolute Integrabilität erforderlich.

verschiebbar ist, d. h. die Frage nach der kleinsten reellen Zahl a, für die die Formel

$$f(x)=\frac{1}{2i\pi}\int_{a-i\infty}^{a+i\infty} e^{zx}\varphi(z)\,dz$$

noch gilt. Hierzu sei folgendes bemerkt. Sei a eine reelle Größe $<\sigma$ von der folgenden Beschaffenheit: Die Funktion $\varphi(z)$ ist

I. für alle Werte von z, deren reeller Teil größer als a ausfällt, regulär analytisch;

II. sie besitzt Randwerte[15]) längs der Geraden $\Re(z)=a$, die eine solche Funktion $\varphi(a+it)$ der Ordinate t bestimmen, deren Betrag in jedem endlichen Intervall von t beschränkt und die bei $t=\pm\infty$ für hinreichend große Werte von x vom Fourierschen Charakter ist;

III. die Integrale

$$\int_{a+i\omega}^{\sigma+i\omega} e^{zx}\varphi(z)\,dz \quad \text{und} \quad \int_{a-i\omega}^{\sigma-i\omega} e^{zx}\varphi(z)\,dz$$

streben (bei hinreichend großen Werten von x) gegen Null, falls ω über alle Grenzen wächst.

Sind diese Bedingungen erfüllt, so gilt noch

$$f(x)=\frac{1}{2i\pi}\int_{a-i\infty}^{a+i\infty} e^{zx}\varphi(z)\,dz=\frac{e^{ax}}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{itx}\varphi(a+it)\,dt.$$

In der Tat, wendet man das Cauchysche Theorem auf das Rechteck mit den Ecken[16])

$$a-i\omega_1,\quad \sigma-i\omega_1,\quad \sigma+i\omega_2,\quad a+i\omega_2$$

---

[15]) Der Begriff des Randwertes ist dabei wie folgt zu verstehen: Die Funktion $\varphi(z)$ besitzt an der Stelle $z_0=a+it_0$ den Randwert A_0, wenn man zu jeder positiven Zahl δ eine Größe ε derart bestimmen kann, daß für jedes z, dessen reeller Teil größer als a ist, die Ungleichung

$$|A_0-\varphi(z)|<\delta$$

eine Folge der Ungleichung

$$|z-z_0|<\varepsilon$$

ist.

[16]) Die Anwendbarkeit des Cauchyschen Theorems im vorliegenden Falle ergibt sich aus folgender Überlegung: Aus der Annahme, daß die Randwerte eine beschränkte Funktion bilden, folgt die Beschränktheit der Funktion $\varphi(z)$ selbst in dem betrachteten Rechteck. Wendet man daher den Cauchyschen Satz auf das Rechteck mit den Ecken

$$a+\varepsilon-i\omega_1,\quad \sigma-i\omega_1,\quad \sigma+i\omega_2,\quad a+\varepsilon+i\omega_2 \qquad (\varepsilon>0)$$

an (auf dessen Peripherie $\varphi(z)$ regulär analytisch ist), so erhält man durch den

an, so folgt — da innerhalb des Rechtecks $\varphi(z)$ regulär analytisch ist —

$$\int_{a-i\omega_1}^{a+i\omega_2} e^{zx}\varphi(z)\,dz = \int_{\sigma-i\omega_1}^{\sigma+i\omega_2} e^{zx}\varphi(z)\,dz + \int_{a-i\omega_1}^{\sigma-i\omega_1} e^{zx}\varphi(z)\,dz + \int_{\sigma+i\omega_2}^{a+i\omega_2} e^{zx}\varphi(z)\,dz,$$

woraus mit Rücksicht auf die Bedingung III durch den Grenzübergang $\omega_1 = \infty$ und $\omega_2 = \infty$ unsere Behauptung folgt.

Erfüllt $\varphi(z)$ alle oben aufgezählten Bedingungen, so gilt — nach der am Schluß von 2., S. 9 gemachten Bemerkung —

$$\lim_{x=\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{itx}\varphi(a+it)\,dt = 0,$$

d. h. es ist

$$\lim_{x=\infty} e^{-ax} f(x) = 0,$$

und wir gelangen zu dem folgenden Satz, der die Grundlage unserer Untersuchungen bildet:

Es sei $f(x)$ eine für alle positiven Werte von x definierte Funktion, die in jedem endlichen Intervall stetig und von beschränkter Schwankung ist. Wir nehmen ferner an, daß ihre Laplacesche Transformierte

$$\varphi(z) = \int_0^{\infty} e^{-zx} f(x)\,dx$$

die folgenden Eigenschaften[17]) *besitzt:*

I. *Sie ist für alle Werte von $z = \sigma + it$, deren reeller Teil größer als a ist, regulär analytisch, und es besitzt die Funktion $\varphi(\sigma + it)$ der reellen Veränderlichen t bei $t = \pm\infty$ für hinreichend große Werte von x den Fourierschen Charakter.*

II. *Sie besitzt längs der Geraden $\Re(z) = a$ Randwerte, die eine solche Funktion definieren, deren Betrag in jedem endlichen Intervall beschränkt ist und die bei $t = \pm\infty$ für hinreichend große x vom Fourierschen Charakter ist.*

III. *Die Integrale*

$$\int_{a+i\omega}^{\sigma+i\omega} e^{zx}\varphi(z)\,dz \quad \text{und} \quad \int_{a-i\omega}^{\sigma-i\omega} e^{zx}\varphi(z)\,dz$$

streben bei hinreichend großen Werten von x gegen Null, falls ω über alle Grenzen wächst.

Grenzübergang $\varepsilon = 0$ die gewünschte Formel, da wegen der Beschränktheit der auftretenden Funktionen die Limesgleichungen

$$\lim_{\varepsilon=0} \int_{a+\varepsilon-i\omega_1}^{a+\varepsilon+i\omega_2} e^{zx}\varphi(z)\,dz = \int_{a-i\omega_1}^{a+i\omega_2} e^{zx}\varphi(z)\,dz, \qquad \lim_{\varepsilon=0} \int_{a+\varepsilon\pm i\omega}^{\sigma\pm i\omega} e^{zx}\varphi(z)\,dz = \int_{a\pm i\omega}^{\sigma\pm i\omega} e^{zx}\varphi(z)\,dz$$

gelten.

[17]) Im folgenden werden diese Eigenschaften als Bedingungen I, II, III zitiert.

Unter diesen Bedingungen gilt die Limesgleichung:

$$\lim_{x=\infty} e^{-ax} f(x) = 0 .$$

4. Wir nehmen jetzt an, daß die Laplacesche Transformierte $\varphi(z)$ von $f(x)$ — außer den in dem vorangehenden Satz aufgestellten Bedingungen I, II, III — noch der weiteren Bedingung unterworfen ist, *daß die Randfunktion* $\varphi(a+it)$ *n-mal differenzierbar ist, die so gewonnenen Funktionen*:

$$\varphi(a+it), \quad \varphi'(a+it), \quad \varphi''(a+it), \quad \ldots, \quad \varphi^{(n-1)}(a+it)$$

für $t = \pm\infty$ *den Grenzwert Null haben und* $\varphi^{(n)}(a+it)$ *in jedem endlichen Intervall der Variablen t integrabel, bei* $t = \pm\infty$ *aber für hinreichend große Werte von x vom Fourierschen Charakter ist*[18]).

Unter diesen Bedingungen gilt die schärfere asymptotische Formel:

$$\lim_{x=\infty} x^n e^{-ax} f(x) = 0 ,$$

denn es ist bei den gemachten Annahmen

$$e^{-ax} f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{itx} \varphi(a+it)\, dt = -\frac{1}{2\pi x} \int_{-\infty}^{\infty} e^{itx} \varphi'(a+it)\, dt$$

$$= \frac{1}{2\pi x^2} \int_{-\infty}^{\infty} e^{itx} \varphi''(a+it)\, dt = \ldots = \frac{(-1)^n}{2\pi x^n} \int_{-\infty}^{\infty} e^{itx} \varphi^{(n)}(a+it)\, dt ,$$

woraus nach der am Schluß von 2. (S. 77) gemachten Bemerkung unsere Behauptung unmittelbar folgt.

Es sei noch bemerkt, daß die dargelegte Methode anwendbar bleibt, wenn die vorgelegte Funktion nicht für alle positiven Werte von x, sondern nur für solche definiert ist, die größer als eine untere Grenze X sind. Wenn man nämlich $f(x)$ für $x \leqq X$ gleich Null setzt und das asymptotische Verhalten der so erhaltenen Funktion nach der vorangehenden Methode untersucht, so handelt es sich um das Studium der Funktion

$$\varphi(z) = \int_{X}^{\infty} e^{-zx} f(x)\, dx .$$

Wir werden sogar sehen, daß selbst in Fällen, wo die Funktion $f(x)$ für alle positiven x definiert ist, häufig zweckmäßig ist, statt des ursprünglichen Integrals (1) auf dieses letzte Integral zurückzugreifen, was ja da-

[18]) Man beachte, daß aus dem Umstande, daß die n-te Ableitung $\varphi^{(n)}(a+it)$ bei $t = \pm\infty$ den Fourierschen Charakter besitzt und die Ableitungen $\varphi(a+it)$, $\varphi'(a+it)$, $\ldots$, $\varphi^{(n-1)}(a+it)$ für $t = \pm\infty$ gegen Null streben, der Fouriersche Charakter von $\varphi^{(n-1)}(a+it)$, $\varphi^{(n-2)}(a+it)$, $\ldots$, $\varphi(a+it)$ bewiesen werden kann.

mit gleichbedeutend ist, statt des asymptotischen Verhaltens von $f(x)$ das Verhalten derjenigen Funktion zu studieren, die für $x \leqq X$ verschwindet, für $x > X$ aber mit $f(x)$ übereinstimmt.

§ 2.

Die einfachsten Singularitäten der Laplaceschen Transformierten.

5. Die vorangehenden Untersuchungen zeigen den Zusammenhang zwischen dem asymptotischen Verhalten einer Funktion und den funktionentheoretischen Eigenschaften ihrer Laplaceschen Transformierten in voller Analogie mit der sogenannten Darbouxschen Methode, die das asymptotische Verhalten einer Zahlenfolge $f_1, f_2, \ldots, f_n, \ldots$ mit den funktionentheoretischen Eigenschaften ihrer erzeugenden Funktion $\sum f_n z^n$ in Verbindung setzt. Wie bei der Anwendung der Darbouxschen Methode der erste Schritt die Bestimmung des Konvergenzkreises der erzeugenden Funktion ist, so wird im folgenden der erste Schritt die Bestimmung der unteren Grenze a derjenigen Abszissen sein, für die die Laplacesche Transformierte die Bedingungen I und III unseres Satzes S. 79 erfüllt. Obwohl auf dieser Grenzgeraden keine singulären Stellen der Funktion $\varphi(z)$ liegen müssen, so werden in den folgenden Anwendungen dennoch hauptsächlich solche Fälle auftreten, wo das Verhalten der Laplaceschen Transformierten im Unendlichen keine wesentlichen Schwierigkeiten bietet und die Grenzgerade $\Re(z) = a$ einfach dadurch bestimmt ist, daß auf ihr singuläre Punkte von $\varphi(z)$ von einfachem Charakter liegen. Dies führt auf die Frage, das asymptotische Verhalten von $f(x)$ zu bestimmen, falls $\varphi(z)$ auf der erwähnten Grenzgeraden singuläre Stellen vom algebraischen Charakter (in endlicher Anzahl) aufweist, im Unendlichen aber alle aufgestellten Forderungen erfüllt. Dieses Vorgehen entspricht genau dem, was Darboux in seiner berühmten Abhandlung unternommen hat, und wir gelangen zu dem folgenden Satz:

Die Funktion

$$\varphi(z) = \int_0^\infty e^{-zx} f(x)\, dx$$

erfülle für $\Re(z) > a$ *die Bedingungen* I *und* III *unseres Satzes S* 79; *auf der Geraden* $\Re(z) = a$ *selbst gestatte die Funktion* $\varphi(z)$ *bzw. ihre Randwerte die folgende Zerlegung:*

$$\varphi(z) = \frac{1}{(z - z_0)^\varrho} + \psi(z) \qquad (z = a + it),$$

wobei $z_0 = a + it_0$ *ein Punkt der Geraden ist, die Funktion* $\psi(a + it)$ *aber eine* n*-mal differenzierbare Funktion von* t *bedeutet von der Be-*

schaffenheit, daß $|\psi^{(n)}(a+it)|$ *in jedem endlichen Intervall von* t *beschränkt ist; die Ableitungen*

$$\varphi(a+it),\ \varphi'(a+it),\ \ldots,\ \varphi^{(n-1)}(a+it)$$

mögen für $t=\pm\infty$ *den Grenzwert Null haben, und schließlich besitze* $\varphi^{(n)}(a+it)$ *bei* $t=\pm\infty$ *für hinreichend große* x *den Fourierschen Charakter.*

Unter diesen Bedingungen gilt die asymptotische Formel:

$$\lim_{x=\infty} x^n e^{-ax}\left[f(x)-\frac{1}{\Gamma(\varrho)}e^{z_0 x}x^{\varrho-1}\right]=0;$$

ϱ *bedeutet hierbei eine beliebige reelle oder komplexe Größe, die weder Null noch eine negative ganze Zahl ist.*

Wir beweisen diesen Satz, indem wir zeigen werden, daß die Laplacesche Transformierte $\Phi(z)$ der Funktion

$$F(x)=\frac{1}{\Gamma(\varrho)}e^{z_0 x}x^{\varrho-1}$$

für $\Re(z)>a$ die erwähnten Bedingungen I und III erfüllt, daß sie eine Zerlegung von der Form

$$\Phi(z)=\frac{1}{(z-z_0)^{\varrho}}+\Psi(z)$$

gestattet, wo $\Psi(z)$ eine *ganze transzendente Funktion* ist, und schließlich daß $\Phi(z)$ und *alle* Ableitungen $\Phi^{(n)}(z)$ auf der Geraden $\Re(z)=a$ bei $t=\pm\infty$ den Fourierschen Charakter besitzen und gegen Null streben, wenn t über alle Grenzen wächst.

Auf Grund dieser Tatsache ergibt sich nämlich die obige Behauptung, wenn man den Satz S. 80 auf die Funktion

$$f(x)-\frac{1}{\Gamma(\varrho)}e^{z_0 x}x^{\varrho-1}$$

anwendet, deren Laplacesche Transformierte

$$\varphi(z)-\Phi(z)=\psi(z)-\Psi(z)$$

alle Bedingungen jenes Theorems erfüllt.

Wenn der reelle Teil von ϱ positiv ist, so ist unsere Behauptung eine unmittelbare Folge der fundamentalen Formel der Theorie der Γ-Funktionen

$$(7)\qquad \Phi(z)=\frac{1}{\Gamma(\varrho)}\int_0^{\infty}e^{-zx}e^{z_0 x}x^{\varrho-1}\,dx=\frac{1}{(z-z_0)^{\varrho}}.$$

Die Funktion $\Psi(z)$ ist also identisch Null und der Fouriersche Charakter von $\Phi(z)$ und ihrer Ableitungen ist eine Folge (nach einer S. 76 gemachten Bemerkung) des Umstandes, daß die Integrale

$$\int_{a+i\omega}^{a+i\infty} |\Phi^{(n)}(z)|\,dz \quad \text{bzw.} \quad \int_{a-i\infty}^{a-i\omega} |\Phi^{(n)}(z)\,dz \quad (n=1, 2, 3, \ldots)$$

absolut konvergieren, wenn $-\omega < t_0 < \omega$ ist.

Eine etwas umständlichere Diskussion erfordert der Fall, wo $\Re(\varrho) < 0$ ausfällt.

In diesem Falle betrachten wir die Laplacesche Transformierte der Funktion $\frac{1}{\Gamma(\varrho)} e^{z_0 x} x^{\varrho-1}$ zwischen den Grenzen 1 und ∞, also

$$\Phi(z) = \frac{1}{\Gamma(\varrho)} \int_1^\infty e^{-(z-z_0)x} x^{\varrho-1}\,dx \qquad \Re(z) > \Re(z_0) = a. \tag{8}$$

Auch dieses Integral wird in der Theorie der Γ-Funktionen vielfach behandelt. Durch zweimalige Produktintegration ergibt sich zunächst

$$\Phi(z) = \frac{1}{\Gamma(\varrho)} \left\{ \frac{e^{-(z-z_0)}}{z-z_0} + (\varrho-1)\frac{e^{-(z-z_0)}}{(z-z_0)^2} + \frac{(\varrho-1)(\varrho-2)}{(z-z_0)^2} \int_1^\infty e^{-(z-z_0)x} x^{\varrho-3}\,dx \right\}, \tag{8'}$$

woraus man unmittelbar erkennt, daß die Bedingungen I und III erfüllt sind, da für $z = \sigma + it$, $\sigma > a = \Re(z_0)$ das erste Glied in dieser Summe nach der Bemerkung S. 77 bei $t = \pm\infty$ den Fourierschen Charakter besitzt, die beiden andern Glieder aber absolut integrable Funktionen von t (im Intervall $-\infty < t < \infty$) darstellen.

Man überzeugt sich ferner durch eine einfache Überlegung, daß für jeden Wert von z_0, der von z verschieden ist

$$\Phi(z) = \frac{1}{\Gamma(\varrho)(z-z_0)^\varrho} \left\{ \int_{z-z_0}^1 e^{-x} x^{\varrho-1}\,dx + \int_1^\infty e^{-x} x^{\varrho-1}\,dx \right\}$$

ist, wobei das erste Integral längs eines Weges zu nehmen ist, der die negative reelle Achse nicht trifft. Für reelle positive Werte von $z - z_0$ folgt diese Relation aus der Definition von $\Phi(z)$, wenn man in dem Integral (8) die neue Integrationsvariable $(z - z_0)x$ einführt; für andere Werte von $(z - z_0)$ aus dem Umstande, daß in der längs der reellen

negativen Achse aufgeschnittenen Ebene $e^{-z}z^{\varrho-1}$ eine reguläre analytische Funktion darstellt[19]). Beachtet man noch, daß

$$\int_{z-z_0}^{1} e^{-x}x^{\varrho-1}\,dx = \int_{z-z_0}^{1}\sum_{\nu=0}^{\infty}(-1)^{\nu}\frac{x^{\nu+\varrho-1}}{\nu!}\,dx = \sum_{\nu=0}^{\infty}(-1)^{\nu}\frac{1-(z-z_0)^{\nu+\varrho}}{\nu!\,(\nu+\varrho)}$$

ist, so ergibt sich in Anbetracht der bekannten Formel[20])

$$\Gamma(\varrho) = \sum_{\nu=0}^{\infty}(-1)^{\nu}\frac{1}{\nu!\,(\nu+\varrho)} + \int_{1}^{\infty} e^{-x}x^{\varrho-1}\,dx$$

(ϱ keine negative ganze Zahl) die Relation

$$(9)\qquad \Phi(z) = \frac{1}{(z-z_0)^{\varrho}} - \frac{1}{\Gamma(\varrho)}\sum_{\nu=0}^{\infty}(-1)^{\nu}\frac{(z-z_0)^{\nu}}{\nu!\,(\nu+\varrho)} = \frac{1}{(z-z_0)^{\varrho}} + \Psi(z),$$

in der die unendliche Summe tatsächlich eine ganze Funktion von z darstellt.

Um schließlich das Verhalten von $\Phi(z)$ auf der Geraden $\Re(z) = a$ zu untersuchen, bemerke man, daß das Integral (8) wegen $\Re(\varrho) \leqq 0$ auch noch für die Werte $z = a + it$ absolut konvergiert; daraus folgt nach einem bekannten Satze, der die Übertragung des Abelschen Satzes über Potenzreihen auf die Laplaceschen Integrale ist, die Relation

$$\Phi(a+it) = \frac{1}{\Gamma(\varrho)}\int_{1}^{\infty} e^{-i(t-t_0)x}x^{\varrho-1}\,dx,$$

aus der man durch wiederholte Produktintegration die folgende Formel gewinnt:

$$\Gamma(\varrho)\,\Phi(a+it) = \left[\frac{e^{-i(t-t_0)}}{i(t-t_0)} + (\varrho-1)\frac{e^{-i(t-t_0)}}{(i(t-t_0))^2}\right.$$

$$\left. + (\varrho-1)(\varrho-2)\frac{e^{-i(t-t_0)}}{(i(t-t_0))^3} + \ldots + (\varrho-1)(\varrho-2)\ldots(\varrho-n)\frac{e^{-i(t-t_0)}}{(i(t-t_0))^{n+1}}\right]$$

$$+ \frac{(\varrho-1)(\varrho-2)\ldots(\varrho-n-1)}{(i(t-t_0))^{n+1}}\int_{1}^{\infty} e^{-i(t-t_0)x}x^{\varrho-n-2}\,dx.$$

Bilden wir nun die n-te Ableitung $\Phi^{(n)}(a+it)$, so erkennt man, daß

[19]) Die rechte Seite der letzten Gleichung stellt nämlich eine solche Funktion dar, die eindeutig regulär analytisch ist, falls $z - z_0$ nicht gleich einer negativen reellen Zahl oder Null ist und die mit der ebenfalls analytischen Funktion $\Phi(z)$ übereinstimmt, falls $z - z_0$ gleich einer positiven reellen Zahl ist; daraus folgt die Übereinstimmung beider Funktionen.

[20]) Vgl. etwa N. Nielsen, Handbuch der Theorie der Gammafunktionen, S. 143.

die eckige Klammer in der obigen Darstellung durch n-malige Differentiation in eine Summe von der Form

$$\sum_{\nu=1}^{2n+1} \alpha_\nu \frac{e^{-i(t-t_0)}}{(t-t_0)^\nu}$$

übergeht, wobei die $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{2n+1}$ Konstante bedeuten; dieser Ausdruck hat nach der S. 76 und 77 gemachten Bemerkung bei $t = \pm\infty$ (für hinreichend große x) den Fourierschen Charakter. Die n-te Ableitung des zweiten Gliedes in der obigen Darstellung von $\Phi(a+it)$ hat die Form

$$\sum_{\nu=1}^{n+1} \frac{\beta_\nu}{(t-t_0)^{n+\nu}} \int_1^\infty e^{-i(t-t_0)x} x^{\varrho-\nu-1}\, dx,$$

da die Ableitungen des Integrals wegen der gleichmäßigen Konvergenz sämtlicher auftretenden Integrale durch Differentiation des Integranden gewonnen werden. Alle Integrale in diesem Ausdruck sind dem Betrage nach unterhalb einer von t unabhängigen Grenze; daraus folgt die absolute Integrabilität im Unendlichen der durch diese Summe dargestellten Funktion, also ihr Fourierscher Charakter bei $t = \pm\infty$.

Es zeigen auch die entwickelten Formeln die Konvergenz der Ableitungen $\Phi^{(n)}(a+it)$ gegen Null, falls t über alle Grenzen wächst. Damit ist unsere Behauptung in allen Teilen bewiesen.

In derselben Weise ergibt sich der etwas allgemeinere Satz, daß wenn *die Laplacesche Transformierte $\varphi(z)$ der betrachteten Funktion $f(x)$ für $\Re(z) > a$ die Bedingungen des vorangehenden Satzes erfüllt, auf der Geraden $\Re(z) = a$ aber in der folgenden Form darstellbar ist*:

$$\varphi(z) = \sum_{\varkappa=1}^{\nu} \frac{a_\varkappa}{(z-z_\varkappa)^{\varrho_\varkappa}} + \psi(z),$$

wobei $z_\varkappa = a + it_\varkappa$ Punkte dieser Geraden, die Exponenten $\varrho_\varkappa$ aber weder Null noch negative ganze Zahlen sind, wenn ferner die n-te Ableitung $\psi^{(n)}(a+it)$ in jedem endlichen Intervall von t vom beschränkten Betrage ist, die Funktionen

$$\varphi(a+it),\ \varphi'(a+it),\ \ldots,\ \varphi^{(n-1)}(a+it)$$

für $t = \pm\infty$ den Grenzwert Null haben und schließlich $\varphi^{(n)}(a+it)$ bei $t = \pm\infty$ den Fourierschen Charakter besitzt, so besteht die folgende asymptotische Formel:

$$\lim_{x=\infty} x^n e^{-ax}\left[f(x) - \sum_{\varkappa=1}^{\nu} \frac{a_\varkappa}{\Gamma(\varrho_\varkappa)} e^{z_\varkappa x} x^{\varrho_\varkappa - 1}\right] = 0.$$

6. Der wesentliche Punkt der vorangehenden Untersuchungen ist die Diskussion des analytischen Charakters der Laplaceschen Transformierten der Funktion $e^{z_0 x} x^{\varrho-1}$, falls ϱ nicht Null und keine negative ganze Zahl ist. Wir wollen jetzt diese ausgeschlossenen Fälle untersuchen und annehmen, daß $\varrho = -k$ eine negative ganze Zahl oder Null ist. Dies führt zur Behandlung der Funktion:

$$\Phi(z) = \int_1^\infty e^{-zx} e^{z_0 x} x^{-k-1}\, dx \qquad (k = 0, 1, 2, \ldots).$$

Durch wiederholte partielle Integration erhält man — ähnlich wie im vorangehenden Falle — die Formel:

$$\Phi(z) = \frac{e^{-(z-z_0)}}{z-z_0} - (k+1)\frac{e^{-(z-z_0)}}{(z-z_0)^2} + (k+1)(k+2)\frac{e^{-(z-z_0)}}{(z-z_0)^3}$$
$$- + \ldots + (-1)^n (k+1)(k+2)\ldots(k+n)\frac{e^{-(z-z_0)}}{(z-z_0)^{n+1}}$$
$$-(-1)^n \frac{(k+1)(k+2)\ldots(k+n+1)}{(z-z_0)^{n+1}} \int_1^\infty e^{-(z-z_0)x} x^{-k-n-2}\, dx,$$

aus der man, wie oben, erkennt, daß $\Phi(z)$ alle Forderungen, die für das Verhalten im Unendlichen gestellt sind, erfüllt, sowohl für $\Re(z) > \Re(z_0) = a$, wie auch längs der Geraden $\Re(z) = a$. Wiederum gilt die Darstellung

$$\Phi(z) = (z-z_0)^k \left\{ \int_{z-z_0}^1 e^{-x} x^{-k-1}\, dx + \int_1^\infty e^{-x} x^{-k-1} \right\} dx$$

(wobei der Integrationsweg wie oben zu wählen ist), aus der man mit Rücksicht auf die Relation

$$\int_{z-z_0}^1 e^{-x} x^{-k-1}\, dx = \sum_{(\nu)}{}' (-1)^\nu \frac{1-(z-z_0)^{\nu-k}}{\nu!\,(\nu-k)} + \frac{(-1)^{k+1}}{k!}\log(z-z_0),$$

in der die Summe auf alle ganzzahligen Werte von ν mit Ausnahme von $\nu = k$ zu erstrecken ist, erkennt, daß $\Phi(z)$ eine Zerlegung von der Form:

$$\Phi(z) = (-1)^{k+1}\frac{(z-z_0)^k}{k!}\log(z-z_0) + \Psi(z)$$

gestattet, in der $\Psi(z)$ eine ganze transzendente Funktion ist. Durch eine wörtliche Übertragung des Beweisganges, der auf den Satz S. 81 dieses Abschnittes führte, gelangt man aus dieser Zerlegung zu dem folgenden Resultat:

Die Laplacesche Transformierte $\varphi(z)$ der Funktion $f(x)$ erfülle die Bedingungen I *und* III (S. 79) *für* $\Re(z) > a$; *auf der Geraden* $\Re(z) = a$ *gestatte* $\varphi(z)$ *bzw. ihre Randwerte die Zerlegung*:

$$\varphi(z) = (z-z_0)^k \log(z-z_0) + \psi(z) \qquad (z_0 = a + it_0),$$

wobei k eine positive ganze Zahl oder Null bedeutet und die Funktion $\psi(a+it)$ von t so beschaffen ist, daß ihre n-te Ableitung $\psi^{(n)}(a+it)$ dem Betrage nach in jedem endlichen Intervall beschränkt bleibt; es mögen die Funktionen

$$\varphi(a+it),\quad \varphi'(a+it),\ \ldots,\quad \varphi^{(n-1)}(a+it)$$

für $t=\pm\infty$ den Grenzwert Null haben und $\varphi^{(n)}(a+it)$ bei $t=\pm\infty$ den Fourierschen Charakter (für hinreichend große x) besitzen. Unter diesen Bedingungen gilt die asymptotische Formel:

$$\lim_{x=\infty} x^n e^{-\alpha x}\left[f(x)+(-1)^k k!\, e^{z_0 x} x^{-k-1}\right]=0\,.$$

7. Durch diesen Satz erhält man den asymptotischen Charakter der Funktion $f(x)$, falls ihre Laplacesche Transformierte in einem Punkte der kritischen Geraden eine logarithmische Singularität aufweist, im Unendlichen aber alle gestellten Forderungen erfüllt. *Es liegt nun nahe, noch den allgemeinen Fall zu untersuchen, daß $\varphi(z)$ längs der Geraden $\Re(z)=a$ eine Zerlegung*

$$\varphi(z)=\frac{\log(z-z_0)}{(z-z_0)^\varrho}+\psi(z)$$

gestattet, wobei ϱ keine negative ganze Zahl bedeutet, $|\psi^{(n)}(a+it)|$ wiederum in jedem endlichen Intervall von t beschränkt bleibt, und $\varphi(z)$ für $\Re(z)>a$ die Bedingungen I und III, für $\Re(z)=a$ aber — wie in den vorangehenden Fällen — die Bedingungen erfüllt, daß

$$\lim_{t=\pm\infty}\varphi^{(\nu)}(a+it)=0\qquad(\nu=1,2,\ldots,n-1)$$

ist und $\varphi^{(n)}(a+it)$ bei $t=\pm\infty$ den Fourierschen Charakter besitzt. *Man zeigt unschwer, daß unter diesen Bedingungen:*

$$\lim_{x=\infty} x^n e^{-ax}\left[f(x)+\frac{1}{\Gamma(\varrho)}e^{z_0 x}x^{\varrho-1}\left(\log x-\frac{\Gamma'(\varrho)}{\Gamma(\varrho)}\right)\right]=0$$

ist.

In der Tat, ist der reelle Teil von ϱ positiv, so erhält man für $\Re(z)>\Re(z_0)=a$ durch Differentiation der Gleichung (7) nach ϱ:

$$\int_0^\infty e^{-zx}e^{z_0 x}x^{\varrho-1}\log x\,dx=\frac{\Gamma'(\varrho)}{(z-z_0)^\varrho}-\frac{\Gamma(\varrho)}{(z-z_0)^\varrho}\log(z-z_0)\,.$$

Wenn dagegen $\Re(\varrho)<0$, ϱ aber keine negative ganze Zahl ist, so ergibt sich in ähnlicher Weise aus (9):

$$\int_1^\infty e^{-zx}e^{z_0 x}x^{\varrho-1}\log x\,dx$$

$$=\frac{\Gamma'(\varrho)}{(z-z_0)^\varrho}-\frac{\Gamma(\varrho)}{(z-z_0)^\varrho}\log(z-z_0)+\sum_{\nu=0}^{\infty}(-1)^\nu\frac{(z-z_0)^\nu}{\nu!\,(\nu+\varrho)^2}\,,$$

da die Differentiation unter dem Integralzeichen wegen der gleichmäßigen Konvergenz der resultierenden Integrale gestattet ist.

Man kann nun die Funktionen:

$$\Phi(z) = \int_0^\infty e^{-zx} e^{z_0 x} x^{\varrho-1} \log x \, dx \qquad (\Re(\varrho) > 0)$$

bzw.

$$\Phi(z) = \int_1^\infty e^{-zx} e^{z_0 x} x^{\varrho-1} \log x \, dx \qquad (\Re(\varrho) < 0)$$

einer ähnlichen Diskussion unterwerfen, wie es in 5. mit der dort mit $\Phi(z)$ bezeichneten Funktion geschah. Man überzeugt sich, daß diese Funktionen für $\Re(z) > a$ regulär analytisch, für $z = a + it$ aber bei $t = \pm\infty$ den Fourierschen Charakter besitzen. Daraus folgt aber, daß, *wenn die Laplacesche Transformierte* $\varphi(z)$ *von* $f(x)$ *längs der Geraden* $\Re(z) = a$ *die Zerlegung*:

$$\varphi(z) = \frac{\Gamma'(\varrho)}{(z-z_0)^\varrho} - \frac{\Gamma(\varrho)}{(z-z_0)^\varrho} \log(z - z_0) + \psi(z)$$

gestattet $(\varrho \neq 0, -1, -2, \ldots)$, *wobei* $|\psi^{(n)}(a+it)|$ *in jedem endlichen Intervall von* t *beschränkt bleibt,* $\varphi(z)$ *aber die Bedingungen* I *und* III (S. 79) *für* $\Re(z) > a$ *erfüllt, für* $z = a + it$ *aber so beschaffen ist, daß*

$$\lim_{t=\pm\infty} \varphi^{(\nu)}(a+it) = 0 \qquad (\nu = 0, 1, 2, \ldots, n-1)$$

ist, und $\varphi^{(n)}(a+it)$ *bei* $t = \pm\infty$ *den Fourierschen Charakter besitzt, die asymptotische Formel*:

$$\lim_{x=\infty} x^n e^{-\alpha x} [f(x) - e^{z_0 x} x^{\varrho-1} \log x] = 0$$

richtig ist.

Durch Kombination dieses Ergebnisses mit dem in 5. gewonnenen Resultat erhält man die zu Beginn von 7. aufgestellte Behauptung.

8. Dieser letzte Satz ergibt sich aus den beiden vorangehenden (vgl. 5. und 6.) durch ein Verfahren, das vielfach mit Vorteil angewandt werden kann; es besteht in der Anwendung der folgenden Formel, die das Multiplikationsgesetz der Laplaceschen Transformation angibt[21]). Ist

$$\varphi_1(z) = \int_a^\infty e^{-zx} f_1(x) \, dx, \qquad \varphi_2(z) = \int_a^\infty e^{-zx} f_2(x) \, dx,$$

so ist

$$\varphi(z) = \varphi_1(z) \, \varphi_2(z) = \int_{2a}^\infty e^{-zx} f(x) \, dx,$$

[21]) Diese leicht verifizierbare Formel tritt häufig in allen Untersuchungen — beispielsweise in der Wahrscheinlichkeitsrechnung — auf, bei denen die Laplacesche Transformation eine Rolle spielt; vgl. Horn: Journal für die reine und angewandte Mathematik **144**, S. 170.

wobei

$$f(x) = \int_a^{x-a} f_1(\xi) f_2(x-\xi)\, d\xi \tag{10}$$

gesetzt ist, falls die auftretenden Integrale absolut konvergieren. Nehmen wir an, daß $\varphi_1(z)$ im Punkte $z = z_0$ eine algebraische Singularität (wie in 5.), $\varphi_2(z)$ aber eine logarithmische (wie in 6.) besitzt, so hat $\varphi(z)$ die Singularität der in 7. behandelten Art und das asymptotische Verhalten von $f(x)$ — das unschwer diskutierbar ist — liefert den letzten Satz. Überhaupt lehrt die Formel (10) das asymptotische Verhalten einer Funktion, deren Laplacesche Transformierte als ein Produkt dargestellt ist, wenn man das asymptotische Verhalten der zu den einzelnen Faktoren gehörigen Funktionen kennt.

Das Ergebnis unserer Untersuchungen besteht in der Erkenntnis, daß — falls die Laplacesche Transformierte $\varphi(z)$ einer Funktion $f(x)$ die erwähnten Bedingungen im Unendlichen erfüllt — der funktionentheoretische Charakter dieser Transformierten bzw. ihre singulären Stellen und zwar diejenigen, deren reeller Teil möglichst groß ist, ausschlaggebend für das asymptotische Verhalten der zugehörigen Funktion $f(x)$ ist. Die behandelten Fälle betreffen Singularitäten von algebraisch-logarithmischem Charakter; es ließe sich auch der Fall behandeln, in dem die Laplacesche Transformierte eine exponentielle Singularität $\left(\text{von der Form } e^{-\frac{1}{z}}\right)$ aufweist. Man hat zu diesem Ende die Formel:

$$\int_0^\infty e^{-zx} \frac{\cos \lambda \sqrt{x}}{\sqrt{x}}\, dx = \sqrt{\frac{\pi}{z}}\, e^{\frac{-\lambda^2}{4z}}$$

heranzuziehen; in der Tat ist das asymptotische Verhalten der Funktion $\frac{\cos \lambda \sqrt{x}}{\sqrt{x}}$ eine total verschiedene von den bisher betrachteten. Es wäre auch des Interesses wert, zu untersuchen, welches asymptotische Verhalten einer Singularität von der Form $\frac{[\log (z-z_0)]^s}{(z-z_0)^\varrho}$ entspricht.

Wir wollen auf diese Fragen hier nicht weiter eingehen, sondern an einigen klassischen Beispielen zeigen, wie einfach die dargelegte Methode zur Bestimmung asymptotischer Ausdrücke zum Ziele führt.

§ 3.

Beispiele und Anwendungen (Potenzreihen).

9. Wir werden uns zunächst mit dem asymptotischen Verhalten einiger (beständig konvergenten) Potenzreihen

$$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n + \ldots$$

beschäftigen, wenn x längs eines vom Nullpunkte ausgehenden Strahles ins Unendliche rückt. Wenn die unendliche Reihe

$$(11) \qquad \varphi_0(z) = \frac{a_0}{z} + \frac{1!\,a_1}{z^2} + \frac{2!\,a_2}{z^3} + \ldots + \frac{n!\,a_n}{z^{n+1}} + \ldots$$

für hinreichend große $|z|$ konvergiert, so stellt sie die Laplacesche Transformierte der Funktion $f(x)$ (für positive reelle Werte der Veränderlichen) dar, d. h. es ist

$$\varphi_0(z) = \int_0^\infty e^{-zx} f(x)\,dx.$$

Dies folgt, mit Rücksicht auf die Relation:

$$\int_0^\infty e^{-zx} x^{-n}\,dx = \frac{n!}{z^{n+1}},$$

unmittelbar aus einem bekannten Satz[22]) über die Integration von unendlichen Reihen.

Wir machen nun die Annahme, daß die Reihe (11) für $|z| > R$ konvergent ist; die Funktion $\varphi_0(z)$ ist alsdann im Unendlichen regulär und gleich Null; ihre Ableitungen verschwinden von mindestens zweiter Ordnung. Folglich sind alle Bedingungen, die wir in den Sätzen des vorangehenden Abschnittes für das Verhalten im Unendlichen gestellt haben, erfüllt; namentlich ist die Funktion $\varphi_0(z)$ und alle ihre Ableitungen auf jeder Geraden vom Fourierschen Charakter, und es ist auch die Bedingung III (S. 79) für jedes a und σ erfüllt. Es kommen daher bei der Behandlung des asymptotischen Verhaltens von $f(x)$ nur die im Endlichen gelegenen singulären Punkte von $\varphi_0(z)$ in Betracht, und zwar in erster Reihe diejenigen, deren reeller Teil möglichst groß ist.

Wenn die unabhängige Veränderliche längs eines vom Nullpunkte ausgehenden Strahles ins Unendliche rückt, der mit der positiven reellen Achse den Winkel θ bildet, d. h. wenn

$$x = |x|\,e^{i\theta}$$

ist, so handelt es sich um das asymptotische Verhalten der Funktion

$$a_0 + a_1|x|\,e^{i\theta} + a_2|x|^2 e^{2i\theta} + \ldots + a_n|x|^n e^{ni\theta} + \ldots,$$

deren Laplacesche Transformierte — nach dem Obigen — die Funktion

$$\varphi_\theta(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n!\,a_n\,e^{ni\theta}}{z^{n+1}} = e^{-i\theta}\,\varphi_0(e^{-i\theta}z)$$

ist. Da sich $\varphi_\theta(z)$ im Unendlichen wie $\varphi_0(z)$ verhält, so sind für das asymptotische Verhalten von $f(x)$ längs des betrachteten Strahles die-

[22]) Vgl. etwa Bromwich, An Introduction to the Theorie of infinite series, S. 453.

jenigen singulären Stellen von $\varphi_\theta(x)$ ausschlaggebend, deren reeller Teil möglichst groß ist. Nach der letzten Gleichung sind diese Stellen diejenigen singulären Punkte unserer Funktion $\varphi_0(z)$, die man durch die folgende Konstruktion gewinnt: Man betrachte denjenigen vom Nullpunkte ausgehenden Strahl, der den Winkel $(-\theta)$ mit der positiven reellen Achse bildet (d. h. das Spiegelbild des betrachteten Strahles in bezug auf die reelle Achse), und bewege eine Gerade senkrecht auf diesen Strahl (bzw. auf seine Verlängerung) vom Unendlichweiten ausgehend, bis man auf eine singuläre Stelle von $\varphi_0(z)$ stößt. Die auf dieser Geraden gelegenen singulären Punkte von $\varphi_0(z)$ entsprechen den singulären Punkten von $\varphi_\theta(z)$ mit größtmöglichem Realteil.

In dem ziemlich allgemeinen Falle, daß $\varphi_0(z)$ nur Singularitäten von der im § 2 behandelten algebraisch-logarithmischen Art besitzt, und auf jeder Geraden nur endlich viele singuläre Punkte dieser Funktion liegen, beherrscht man — nach den vorangehenden Entwicklungen — das asymptotische Verhalten von $f(x)$ längs jedes Strahles.

Die soeben erwähnte Konstruktion, die die Lage der „*ausschlaggebenden*“ singulären Stelle von $\varphi_0(z)$ angibt, falls die unabhängige Veränderliche längs eines Strahles ins Unendliche rückt, liefert bereits verschiedene Sätze, die Phragmén und Lindelöf in ihrer grundlegenden Arbeit „Sur une extension d'un principe classique de l'Analyse ...“ (Acta math. **31**) abgeleitet haben. Unsere Resultate gestatten aber in bestimmter Hinsicht ein tieferes Eindringen in das asymptotische Verhalten der analytischen Funktionen, da sie nicht nur die Lage, sondern auch den Charakter der Singularitäten der Laplaceschen Transformierten berücksichtigen. Auf Anwendungen dieser Art hoffe ich in einer späteren Mitteilung zurückzukommen.

10. Ein Beispiel für den soeben behandelten Fall liefert die Besselsche Funktion

$$J(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(k!)^2} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k},$$

deren Laplacesche Transformierte von Lipschitz berechnet wurde. Man verifiziert leicht die Relation

$$\varphi_0(z) = \int_0^\infty e^{-zx} J(x)\, dx = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{(2k)!}{2^{2k}(k!)^2} \frac{1}{z^{2k+1}}$$

$$= \frac{1}{z} \sum_{k=0}^{\infty} \binom{-\frac{1}{2}}{k} \frac{1}{z^{2k}} = \frac{1}{\sqrt{1+z^2}},$$

mit deren Hilfe man die asymptotische Entwicklung der Besselschen Funktion ohne Mühe, wie folgt, auswerten kann: Die singulären Stellen der

Funktion $\varphi_0(z)$ sind die Punkte $z = \pm i$, die algebraische Singularitäten $(-\frac{1}{2})$-ter Ordnung sind. Subtrahiert man daher von $\varphi_0(z)$ den Ausdruck

$$\frac{1}{\sqrt{z-i}}\frac{1}{\sqrt{2i}}\left[1+\sum_{k=1}^{n}(-1)^k\frac{1\cdot3\cdot5\ldots(2k-1)}{1\cdot2\cdot3\ldots k}\frac{1}{2^k}\left(\frac{z-i}{2i}\right)^k\right]$$

$$=\frac{1}{\sqrt{z-i}}\frac{1}{\sqrt{2i\pi}}\sum_{k=0}^{n}\frac{i^k}{2^k}\frac{\Gamma\left(k+\frac{1}{2}\right)}{k!}(z-i)^k,$$

in dem der Faktor von $\frac{1}{\sqrt{z-i}}$ die n-te Teilsumme der Taylorschen Entwicklung der Funktion $\frac{1}{\sqrt{z+i}}$ ist, so verschwindet die Differenz an der Stelle $z = i$ von der $(n+\frac{1}{2})$-ten Ordnung, daher ist die n-te Ableitung dieser Differenz bei $z = i$ stetig. Subtrahiert man in analoger Weise

$$\frac{1}{\sqrt{z+i}}\frac{1}{\sqrt{-2i\pi}}\sum_{k=0}^{n}\frac{(-i)^k}{2^k}\frac{\Gamma\left(k+\frac{1}{2}\right)}{k!}(z+i)^k,$$

so findet dasselbe an der Stelle $z = -i$ statt. Folglich gestattet die Laplacesche Transformierte $\varphi_0(z)$ eine Zerlegung von der folgenden Form:

$$\varphi_0(z)=\frac{1}{\sqrt{z^2+1}}=\frac{1}{\sqrt{2i\pi}}\sum_{k=0}^{n}\frac{i^k}{2^k}\frac{\Gamma\left(k+\frac{1}{2}\right)}{k!}(z-i)^{k-\frac{1}{2}}$$

$$+\frac{1}{\sqrt{-2i\pi}}\sum_{k=0}^{n}\frac{(-i)^k}{2^k}\frac{\Gamma\left(k+\frac{1}{2}\right)}{k!}(z+i)^{k-\frac{1}{2}}+\psi(z),$$

wobei die n-te Ableitung von $\psi(z)$ überall, auch an den Stellen $z = \pm i$, stetig bleibt. Da im Unendlichen $\varphi_0(z)$ regulär und gleich Null ist, so sind wiederum alle Bedingungen, die wir im vorangehenden Abschnitt für das Verhalten der Laplaceschen Transformierten im Unendlichen aufgestellt haben, erfüllt, und der Satz (S. 85) liefert das Resultat:

$$\lim_{x=\infty} x^n\left[J(x)-\frac{1}{\sqrt{2i\pi}}\sum_{k=0}^{n}\frac{i^k}{2^k}\frac{\Gamma\left(k+\frac{1}{2}\right)}{k!}\frac{e^{ix}}{\Gamma\left(\frac{1}{2}-k\right)}x^{-k-\frac{1}{2}}\right.$$

$$\left.-\frac{1}{\sqrt{-2i\pi}}\sum_{k=0}^{n}\frac{(-i)^k}{2^k}\frac{\Gamma\left(k+\frac{1}{2}\right)}{k!}\frac{e^{-ix}}{\Gamma\left(\frac{1}{2}-k\right)}x^{-k-\frac{1}{2}}\right]=0,$$

oder, indem man $e^{\frac{i\pi}{2}}$ an der Stelle von i schreibt, die Formel:

$$\lim_{x=\infty} x^n\left[J(x)-\sqrt{\frac{2}{\pi x}}\sum_{k=0}^{n}\frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}+k\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}-k\right)}\frac{1}{2^k k!}\frac{\cos\left(x-\frac{\pi}{4}+k\frac{\pi}{2}\right)}{x^k}\right]=0,$$

und dies ist die bekannte asymptotische Darstellung der Besselschen Funktion, falls x längs der reellen Achse ins Unendliche rückt.

Will man noch eine Abschätzung für die Differenz

$$F_n(x) = J(x) - \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \sum_{k=0}^{n} \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}+k\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}-k\right)} \frac{1}{2^k k!} \frac{\cos\left(x - \frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2}\right)}{x^k}$$

gewinnen, so setze man in der letzten Formel $n+2$ an Stelle von n; aus der so gewonnenen Gleichung

$$\lim_{x=\infty} x^{n+2}\left[F_n(x) - \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \sum_{k=n+1,\,n+2} \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}+k\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}-k\right)} \frac{1}{2^k k!} \frac{\cos\left(x - \frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2}\right)}{x^k}\right] = 0$$

erhellt unmittelbar, daß

$$F_n(x) = O\left(\frac{1}{x^{n+\frac{3}{2}}}\right)$$

ist.

Noch einfacher gestaltet sich die Rechnung, wenn die unabhängige Veränderliche längs eines Strahles, der den Winkel θ mit der positiven reellen Achse bildet, ins Unendliche rückt: $x = |x| e^{i\theta}$. Man findet als Laplacesche Transformierte in diesem Falle die Funktion

$$\varphi_\theta(z) = e^{-i\theta}\varphi_0(e^{-i\theta}z) = \frac{1}{\sqrt{z^2 + e^{2i\theta}}},$$

deren singuläre Stellen

$$z = \pm i e^{i\theta} = \mp \sin\theta \pm i\cos\theta$$

sind. Ohne Einschränkung der Allgemeinheit kann $0 < \theta < \pi$ angenommen werden; alsdann ist $z_0 = -i e^{i\theta} = \sin\theta - i\cos\theta$ die „ausschlaggebende" singuläre Stelle, und eine leichte Rechnung zeigt, daß die Differenz

$$\frac{1}{\sqrt{z^2 + e^{2i\theta}}} = \frac{1}{\sqrt{-2i\pi e^{i\theta}}} \sum_{k=0}^{n} \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}+k\right)}{2^k k!} \frac{1}{(i e^{i\theta})^k} (z + i e^{i\theta})^{k-\frac{1}{2}}$$

an der Stelle $z = z_0$ von der $(n+\frac{1}{2})$-ten Ordnung verschwindet. Da auf der Geraden $\Re(z) = \Re(-i e^{i\theta}) = \sin\theta$ keine weiteren Singularitäten von $\varphi_\theta(z)$ liegen, so folgt, daß auf dieser Geraden $\varphi_\theta(z)$ in eine Summe von der Form

$$\varphi_\theta(z) = \frac{1}{\sqrt{z^2 + e^{2i\theta}}} = \frac{1}{\sqrt{-2i\pi e^{i\theta}}} \sum_{k=0}^{n} \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}+k\right)}{2^k k!} \frac{1}{(i e^{i\theta})^k} (z + i e^{i\theta})^{k-\frac{1}{2}} + \psi(z)$$

zerlegbar ist, wobei noch die n-te Ableitung von $\psi(z)$ stetig bleibt. Unser Satz (S. 85) liefert unmittelbar den Ausdruck

$$\frac{1}{\sqrt{-2i\pi e^{i\theta}}} \sum_{k=0}^{n} \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}+k\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}-k\right)} \frac{1}{2^k k!} \frac{1}{(i e^{i\theta})^k} \frac{e^{-ie^{i\theta}|x|}}{|x|^{k+\frac{1}{2}}}$$

als asymptotische Annäherung der Besselschen Funktion, wenn die unabhängige Variable x längs des Strahles $x = |x| e^{i\theta}$ ins Unendliche rückt. Führt man x an Stelle von $|x| e^{i\theta}$ ein, so ergibt sich der bekannte Ausdruck

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi x}} \sum_{k=0}^{n} \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}+k\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}-k\right)} \frac{1}{2^k k!} \frac{e^{-i\left(x+k\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{4}\right)}}{x^k}$$

und eine einfache Betrachtung, die wörtlich wie in dem obigen Falle geführt werden kann, lehrt, daß der Fehler wiederum von der Ordnung $x^{-(n+\frac{3}{2})}$ ist.

Die asymptotische Entwicklung der Besselschen Funktionen höherer Ordnung

$$J_\lambda(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!\,\Gamma(\lambda+k+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{\lambda+2k}$$

ist in derselben Weise durchführbar; man hat nur auf die von Heine[23]) herrührende Formel

$$\varphi_0(z) = \int_0^\infty e^{-zx} J_\lambda(x)\, dx = \frac{(\sqrt{1+z)^2}-z)^\lambda}{\sqrt{1+z^2}}$$

Bezug zu nehmen, die die Laplacesche Transformierte dieser Funktionen angibt. Diese Funktion $\varphi_0(z)$ ist wiederum regulär analytisch, mit Ausnahme der Stellen $z = \pm i$, wo sie algebraische Singularitäten aufweist. Durch Reihenentwicklungen in der Umgebung dieser singulären Stellen kann man wiederum eine endliche Summe von der Form

$$s_n(z) = \sum_{k=0}^{n} (a_k (z-i)^{k-\frac{1}{2}} + \bar{a}_k (z+i)^{k-\frac{1}{2}})$$

bestimmen von der Beschaffenheit, daß die Differenz $\varphi_0(z) - s_n(z)$ für $z = \pm i$ von der $(n+\frac{1}{2})$-ten Ordnung verschwindet. Die Anwendung des Satzes (S. 85) liefert dann unmittelbar die bekannte asymptotische Entwicklung, und man sieht, daß ihre Berechnung nichts als die Bestimmung der Koeffizienten von gewissen Potenzentwicklungen elementarer Art erfordert.

---

[23]) Theorie der Kugelfunktionen **1**, S. 243, 2. Aufl. Berlin 1878.

11. Wir wollen zweitens ein Beispiel behandeln, in dem die Laplacesche Transformierte keine elementare Funktion ist, und betrachten zu diesem Zwecke die Potenzreihe

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{k^s\, k!},$$

in der s eine beliebige komplexe Größe (die nicht gleich einer positiven ganzen Zahl ist) sein kann. Die asymptotische Entwicklung dieser Funktion wurde von Herrn Hardy in Angriff genommen; in seiner in der Einleitung angeführten Abhandlung zeigt er, daß, falls x längs eines vom Nullpunkte ausgehenden Strahles ins Unendliche rückt, der im ersten oder vierten Quadranten liegt, die Formel

$$f(x) = \frac{e^x}{x^s}(1 + \varepsilon_x) \qquad \left(-\frac{\pi}{2} < \arg x < \frac{\pi}{2}\right)$$

gilt, wobei ε_x gegen Null strebt, und entwickelt sodann die entsprechende Formel für den Fall, daß der fragliche Strahl im zweiten oder dritten Quadranten liegt. Wir werden mit Hilfe unserer Methode nicht nur die obige Formel von Herrn Hardy ableiten, sondern die volle asymptotische Entwicklung der Funktion $f(x)$ gewinnen.

Als Laplacesche Transformierte findet man nämlich im vorliegenden Falle

$$\varphi_0(z) = \int_0^{\infty} e^{-zx} f(x)\, dx = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^s} \frac{1}{z^{k+1}};$$

da diese Reihe für $|z| > 1$ konvergiert, so handelt es sich bei der Bestimmung der fraglichen asymptotischen Entwicklung nur um die Diskussion der im Endlichen gelegenen Singularitäten der Funktion $\varphi_0(z)$. Die Funktion

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{z^k}{k^s}$$

wurde in der Literatur vielfach untersucht; eine ausführliche Behandlung ihrer Singularitäten findet man in dem trefflichen Buche E. Lindelöfs: Sur le calcul des résidus (S. 138), wo gezeigt wird, daß die einzige im Endlichen gelegene singuläre Stelle dieser Funktion der Punkt $z = 1$ ist; in der Umgebung dieser Stelle gestattet die betrachtete Funktion eine Zerlegung von der Form:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{z^k}{k^s} = \Gamma(1 - s)\left(\log \frac{1}{z}\right)^{s-1} + \Psi(z),$$

wobei $\Psi(z)$ an der Stelle $z = 1$ regulär analytisch ist. Daher sind die

singulären Stellen unserer Funktion $\varphi_0(z)$ die Punkte $z=0$ und $z=1$, und in der Umgebung des letzteren gilt eine Darstellung

$$\varphi_0(z)=\frac{\Gamma(1-s)}{z}(\log z)^{s-1}+\psi(z),$$

wobei $\psi(z)$ an der Stelle $z=1$ regulär analytisch ist. Daraus erkennt man, daß, wenn x längs eines Strahles ins Unendliche rückt, der im ersten oder vierten Quadranten liegt, d. h. wenn

$$x=|x|e^{i\theta}, \qquad -\frac{\pi}{2}<\theta<\frac{\pi}{2}$$

ist, so ist — nach der in 9. angegebenen Konstruktion — die „ausschlaggebende" Singularität der entsprechenden Laplaceschen Transformierten $\varphi_\theta(z)$ diejenige, die aus der singulären Stelle $z=1$ von $\varphi_0(z)$ entspringt. Da $\varphi_0(z)$ an dieser Stelle eine Singularität von der im § 2 behandelten Art besitzt, so liefern unsere dort entwickelten Formeln (S. 85) die volle asymptotische Entwicklung. Um dies ins Einzelne zu verfolgen, bemerken wir, daß die Laplacesche Transformierte

$$\varphi_\theta(z)=e^{-i\theta}\varphi_0(e^{-i\theta}z)$$

die beiden singulären Stellen $z=0$ und $z=e^{i\theta}$ besitzt, und in der Umgebung der letzteren eine Darstellung von der Form

$$\varphi_\theta(z)=\frac{\Gamma(1-s)}{z}(\log z-i\theta)^{s-1}+\psi_1(z)$$

gültig ist, wobei $\psi_1(z)$ regulär analytisch an der Stelle $z=e^{i\theta}$ ist. Daher ist die Funktion $\varphi_\theta(z)$ für $\Re(z)>\cos\theta$ regulär analytisch, erfüllt im Unendlichen — da sie dort ebenfalls regulär analytisch ist — samt ihren sämtlichen Ableitungen alle gestellten Forderungen, und besitzt an der Stelle $z=e^{i\theta}$ eine Singularität von der beschriebenen Art.

Um daher die fragliche asymptotische Entwicklung zu gewinnen, entwickeln wir die Funktion

$$\frac{\Gamma(1-s)}{z}(\log z-i\theta)^{s-1}$$

in der Umgebung der Stelle $z=e^{i\theta}$; eine leichte Rechnung ergibt

$$\frac{\Gamma(1-s)}{z}(\log z-i\theta)^{s-1}$$

$$=\frac{\Gamma(1-s)}{e^{is\theta}}\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k e^{-ik\theta}(z-e^{i\theta})^k\cdot\left[(z-e^{i\theta})\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k+1}e^{-ik\theta}(z-e^{i\theta})^k\right]^{s-1}$$

$$=\frac{\Gamma(1-s)}{e^{is\theta}}(z-e^{i\theta})^{s-1}\sum_{k=0}^{\infty}c_k e^{-ik\theta}(z-e^{i\theta})^k,$$

wobei man die Koeffizienten $c_1, c_2, \ldots, c_k, \ldots$ durch Multiplikation der obigen Potenzreihen berechnen kann. In geschlossener Form erhält man für c_k den Ausdruck

$$c_k = \frac{1}{k!}\frac{d^k}{dz^k}\left[\frac{1}{z}\left(\frac{\log z}{z-1}\right)^{s-1}\right] \quad \text{für} \quad z=1.$$

Wenn nun $\Re(s)$ zwischen den ganzen Zahlen g und $g+1$ gelegen ist

$$g < \Re(s) < g+1,$$

so verschwindet die Differenz

$$\frac{\Gamma(1-s)}{z}(\log z - i\theta)^{s-1} - \frac{\Gamma(1-s)}{e^{is\theta}}(z-e^{i\theta})^{s-1}\sum_{k=0}^{n} c_k e^{-ik\theta}(z-e^{i\theta})^k$$

an der Stelle $z=e^{i\theta}$ von der $(n+s)$-ten Ordnung, d. h. es ist — falls n so groß gewählt ist, daß $n+g>0$ ausfällt — die $(n+g)$-te Ableitung dieser Differenz an der betrachteten Stelle noch stetig. Unsere Funktion $\varphi_\theta(z)$ gestattet daher in der Umgebung der Stelle $z=e^{i\theta}$ (also insbesondere längs der Geraden $\Re(z)=\cos\theta$) eine Zerlegung von der Form:

$$\varphi_\theta(z) = \frac{\Gamma(1-s)}{e^{is\theta}}\sum_{k=0}^{n} c_k e^{-ik\theta}(z-e^{i\theta})^{k+s-1} + \psi_2(z),$$

wobei noch die $(n+g)$-te Ableitung von $\psi_2(z)$ eine stetige Funktion ist.

Unser Satz (S. 85) liefert daher die asymptotische Gleichung

$$\lim_{x=\infty} x^{n+g}e^{-|x|\cos\theta}\left[f(|x|e^{i\theta}) - \frac{\Gamma(1-s)}{e^{is\theta}}\sum_{k=0}^{n}\frac{c_k e^{-ik\theta}}{\Gamma(1-k-s)}\frac{e^{e^{i\theta}|x|}}{|x|^{k+s}}\right] = 0,$$

d. h. es ist — wenn man x statt $|x|e^{i\theta}$ einführt

$$\lim_{x=\infty} x^{n+g}e^{-x}\left[f(x) - \frac{\Gamma(1-s)e^x}{x^s}\sum_{k=0}^{n}\frac{c_k}{\Gamma(1-k-s)}\frac{1}{x^k}\right] = 0.$$

Diese Beziehung gilt für solche Werte von x

$$-\frac{\pi}{2} < \theta = \arg x < \frac{\pi}{2}.$$

Für ganzzahlige Werte von s kann man ebenfalls die entsprechenden Formeln entwickeln, da das Verhalten der Reihe $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{x^k}{k^s}$ an der Stelle $x=1$ für diesen Fall bereits aus Resultaten von Kummer entnommen werden kann. Es würde auch keine Schwierigkeiten bieten, in analoger Weise das asymptotische Verhalten der allgemeineren Funktionen

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{x^k}{(k+a)^s k!},$$

mit denen sich Herr Hardy in der erwähnten Arbeit beschäftigt, zu bestimmen, da man — wie Herr Lindelöf in den letzten Zeilen seines erwähnten Werkes bemerkt — die Singularitäten der Funktion

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{z^k}{(k+a)^s}$$

mit analogen Mitteln diskutieren kann, wie im Falle $a = 0$.

Hingegen versagen unsere Entwicklungen, falls x längs eines im zweiten oder dritten Quadranten verlaufenden Strahles ins Unendliche rückt, da in diesem Falle die „ausschlaggebende" Singularität der Laplaceschen Transformierten die Stelle $z = 0$ ist. Diese Singularität ist nicht mehr vom algebraischen Charakter und — obwohl sich aus den Lindelöfschen Untersuchungen verschiedene Schlüsse auf das Verhalten von $\varphi_0(z)$ in der Umgebung des Nullpunktes ergeben — so scheinen mir diese noch nicht auszureichen, um die volle asymptotische Entwicklung der obigen Funktion zu liefern.

§ 4.

Beispiele und Anwendungen. (Bestimmte Integrale.)

12. Für das bekannte Laplacesche Problem der „Funktionen großer Zahlen" gewinnt man mit unserer Methode recht durchsichtige Formeln. Hier handelt es sich bekanntlich um die Funktion

$$f(x) = \int_0^1 e^{x F(t)} G(t)\, dt,$$

wobei wir der Einfachheit halber die Strecke $0 \leqq t \leqq 1$ als Integrationsintervall genommen haben. Die Laplacesche Transformierte ist in diesem Falle

$$\varphi(z) = \int_0^{\infty} e^{-zx} f(x)\, dx = \int_0^1 \frac{G(t)}{z - F(t)}\, dt. \tag{12}$$

Wir können annehmen — ohne die Allgemeinheit einzuschränken —, daß $F(t)$ an der Stelle $t = 0$ verschwindet, und daß für alle andern im Integrationsintervall gelegenen Werte von t diese Funktion einen negativen reellen Teil besitzt:

$$F(0) = 0, \quad \Re(F(t)) < 0 \quad \text{für} \quad 0 < t \leqq 1,$$

da der allgemeine Fall auf diesen zurückführbar ist. Wir machen noch die Annahme, daß die Funktionen $F(t)$ und $G(t)$ im Integrationsintervall (einschließlich der Grenzen) reguläre analytische Funktionen sind, und können leicht erkennen, wo die singulären Stellen der Funktion $\varphi(z)$

liegen. Für unsere Zwecke ist übrigens schon die triviale Bemerkung ausreichend, daß die Funktion $\varphi(z)$ mit Ausnahme der Stelle $z = 0$ für alle Werte der unabhängigen Veränderlichen, deren reeller Teil größer oder gleich Null ist, regulär analytisch ist, da etwaige singuläre Stellen offenbar nur dort liegen können, wo der Nenner des Integranden von (12) verschwindet. Da ferner $\varphi(z)$ für $z = \infty$ regulär und gleich Null ist, so erkennt man — wie im vorangehenden Abschnitte —, daß für das asymptotische Verhalten von $f(x)$ der Charakter der singulären Stelle $z = 0$ der Funktion $\varphi(z)$ ausschlaggebend ist. Da das Integral

$$\int_{\varepsilon}^{1} \frac{G(t)}{z - F(t)}\, dt$$

für jedes positive ε (< 1) eine bei $z = 0$ reguläre analytische Funktion darstellt, so kann man sich bei der Untersuchung des Verhaltens von $\varphi(z)$ im Nullpunkt auf die Funktion

$$\int_{0}^{\varepsilon} \frac{G(t)}{z - F(t)}\, dt$$

beschränken, wobei ε beliebig klein gewählt werden kann.

Um nun diese Untersuchung in voller Allgemeinheit durchzuführen, nehmen wir an, daß $F(t)$ für $t = 0$ von der p-ten Ordnung verschwindet:

$$F(t) = t^p (\gamma_0 + \gamma_1 t + \gamma_2 t^2 + \ldots) \qquad (\gamma_0 \neq 0),$$

und führen als neue Integrationsveränderliche

$$\tau = \sqrt[p]{F(t)} = t \sqrt[p]{\gamma_0 + \gamma_1 t + \gamma_2 t^2 + \ldots}$$

ein. Da sich aus diesem Zusammenhang t als eine für hinreichend kleine Werte von τ konvergente Potenzreihe ergibt, so geht — für hinreichend kleine ε — das Integral

$$\int_{0}^{\varepsilon} \frac{G(t)}{z - F(t)}\, dt$$

in einen Ausdruck von der Form:

$$\int_{0}^{\lambda} \frac{c_0 + c_1 \tau + c_2 \tau^2 + \ldots + c_n t_n + \cdots}{z - \tau^p}\, d\tau$$

über, wobei

$$c_0 + c_1 \tau + c_2 \tau^2 + \ldots + c_n \tau^n + \ldots = G(t) \frac{dt}{d\tau} = \frac{G(t)}{\frac{d}{dt}\left(\sqrt[p]{F(t)}\right)}$$

gesetzt ist, und als Integrationsweg der Kurvenbogen zu nehmen ist, der vermöge der Abbildung $\tau(t) = \tau$ der reellen Strecke $0 \leqq t \leqq 1$ entspricht[24]). Der sog. Bürmannsche Lehrsatz[25]) liefert übrigens den folgenden expliziten Ausdruck für die Koeffizienten c_n:

$$c_n = \frac{1}{n!} \frac{d^n}{dt^n} \left[G(t) \left(\frac{t}{\sqrt[p]{F(t)}} \right)^{n+1} \right]_{t=0}. \tag{13}$$

Wir zeigen zunächst, daß wenn $\mathfrak{P}(\tau)$ irgendeine für die in Betracht kommenden Werte von τ konvergente Potenzreihe bedeutet, das Integral

$$\int_0^\lambda \frac{\tau^{p(n+1)}}{z - \tau^p} \mathfrak{P}(\tau)\, d\tau \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots)$$

eine solche Funktion der komplexen Veränderlichen z darstellt, deren n-te Ableitung an der singulären Stelle $z = 0$ noch stetig bleibt. Diese Behauptung ist mit der Tatsache identisch, daß die Funktion

$$\int_0^\lambda \left(\frac{\tau^p}{z - \tau^p} \right)^{n+1} \mathfrak{P}(\tau)\, d\tau$$

an der Stelle $z = 0$ stetig ist. Die durch Produktintegration gewonnene Formel

$$np \int_0^\lambda \left(\frac{\tau^p}{z - \tau^p} \right)^{n+1} \mathfrak{P}(\tau)\, d\tau$$

$$= \frac{\lambda^{p\,n+1}}{(z - \lambda^p)^n} \mathfrak{P}(\tau) - \int_0^\lambda \left(\frac{\tau^p}{z - \tau^p} \right)^n ((pn + 1)\mathfrak{P}(\tau) + \tau \mathfrak{P}'(\tau))\, d\tau$$

lehrt die Richtigkeit der Behauptung für jedes ganzzahlige n, falls sie für

---

[24]) Wir nehmen ε so klein, daß dieser Integrationsweg ein doppelpunktloser offener analytischer Kurvenzug ist.

[25]) Es kommt die folgende Form des fraglichen Satzes zur Anwendung: Die an der Stelle $t = 0$ regulär analytische Funktion $\omega(t)$ möge bei $t = 0$ von der ersten Ordnung verschwinden; ist $\Omega(t)$ eine beliebige bei $t = 0$ reguläre Funktion, so gilt für hinreichend kleine $|\omega(t)|$ die Darstellung

$$\frac{\Omega(t)}{\omega'(t)} = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (\omega(t))^n,$$

wobei zur Abkürzung

$$c_n = \frac{1}{n!} \frac{d^n}{dt^n} \left[\Omega(t) \left(\frac{t}{\omega(t)} \right)^{n+1} \right]_{t=0}$$

gesetzt ist. ($\Omega(t) = G(t)$, $\omega(t) = \sqrt[p]{F(t)} = \tau$).

$n = 0$ bewiesen werden kann; in diesem Falle aber erkennt man die Stetigkeit unmittelbar auf Grund der Relation:

$$\int_0^\lambda \frac{\tau^p}{z-\tau^p}\,\mathfrak{P}(\tau)\,d\tau = -\frac{1}{p}\,\lambda\,\mathfrak{P}(\lambda)\log(z-\lambda^p) + \frac{1}{p}\int_0^\lambda (\mathfrak{P}(\tau)+\tau\,\mathfrak{P}'(\tau))\log(z-\tau^p)\,d\tau.$$

Wir schließen aus diesem Umstande, daß die Laplacesche Transformierte $\varphi(z)$ die folgende Zerlegung gestattet:

$$\varphi(z) = \sum_{\nu=0}^{pn+p-1} c_\nu \int_0^\lambda \frac{\tau^\nu}{z-\tau^p}\,d\tau + \psi(z), \tag{14}$$

wobei $\psi(z) = \int_0^\lambda \frac{\sum_{\nu=pn+p}^{\infty} c_\nu \tau^\nu}{z-\tau^p}\,d\tau$ eine solche Funktion bedeutet, deren n-te Ableitung an der Stelle $z = 0$ stetig ist, und es handelt sich nun darum, den singulären Charakter der Funktionen

$$J_\nu(z) = \int_0^\lambda \frac{\tau^\nu}{z-\tau^p}\,d\tau \qquad (\nu = 0, 1, 2, \ldots)$$

an der Stelle $z = 0$ zu untersuchen.

Für $\nu = p-1$ erhält man unmittelbar:

$$J_{p-1}(z) = \frac{1}{p}(\log z - \log(z-\lambda^p));$$

in Verbindung mit der Gleichung

$$J_{p-1+kp} = z^k \int_0^\lambda \frac{\tau^{p-1}}{z-\tau^p}\,d\tau - \int_0^\lambda \tau^{p-1}\,\frac{z^k-\tau^{kp}}{z-\tau^p}\,d\tau$$

$$= z^k J_{p-1}(z) - \left[\frac{\lambda^p}{p}\,z^{k-1} + \frac{\lambda^{2p}}{2p}\,z^{k-2} + \frac{\lambda^{3p}}{3p}\,z^{k-3} + \ldots + \frac{\lambda^{kp}}{kp}\right]$$

erkennt man daraus sofort, daß die Differenz

$$J_{p-1+kp} - \frac{z^k}{p}\log z \qquad (k = 0, 1, 2, \ldots)$$

in der Umgebung der Stelle $z = 0$ eine reguläre analytische Funktion darstellt.

Ist aber

$$\nu \not\equiv (p-1) \pmod p,$$

so kann man, um die fragliche Singularität zu untersuchen, folgendermaßen verfahren: Man bestimme zunächst denjenigen Winkel

$$2(\varkappa+1)\frac{\pi}{p}<\theta\leqq 2\varkappa\frac{\pi}{p},$$

in dem der Integrationsweg der Integrale $J_\nu(z)$ (für hinreichend kleine ε) verläuft[26]) und führe sodann eine neue Integrationsvariable ξ vermöge

$$\tau=\sqrt[p]{\xi}$$

ein, wobei derjenige Wert der Wurzel zu nehmen ist, dessen Argument in demselben Winkel liegt. Für $J_\nu(z)$ ergibt sich sodann der Ausdruck:

$$J_\nu(z)=\frac{1}{p}\int_0^{\lambda^p}\frac{\xi^{\frac{\nu+1}{p}-1}}{z-\xi}\,d\xi$$

und der Integrationsweg ist wiederum ein doppelpunktloser analytischer Kurvenzug, falls ε hinreichend klein gewählt war. Erstreckt man aber dieses Integral längs einer Schleife (C), die vom Punkte λ^p ausgehend und den Nullpunkt einmal im positiven Sinne umkreisend den früheren Integrationsweg einschließt und zum Punkt λ^p zurückführt, so erhält man — nach einer häufig angewandten Schlußweise — falls z außerhalb dieser Schleife liegt:

$$u(z)=\frac{1}{p}\int_{(C)}\frac{\xi^{\frac{\nu+1}{p}-1}}{z-\xi}\,d\xi=\left(e^{\frac{2i\pi(\nu+1)}{p}}-1\right)J_\nu(z).$$

Nun stellt aber jenes Integral, falls z innerhalb jener Schleife (C) liegt, eine daselbst reguläre analytische Funktion $v(z)$ dar und die Differenz $u(z)-v(z)$ ist leicht auszuwerten, wenn man eine Schleife (C') zur Hilfe heranzieht, die ähnlich wie (C) gelegen, aber innerhalb (C) verläuft. Es ergibt sich nämlich, falls z zwischen beiden Schleifen liegt:

$$v(z)-u(z)=\frac{1}{p}\int_{(C)}\frac{\xi^{\frac{\nu+1}{p}-1}}{z-\xi}\,d\xi-\frac{1}{p}\int_{(C')}\frac{\xi^{\frac{\nu+1}{p}-1}}{z-\xi}\,d\xi,$$

woraus man, in Anbetracht dessen, daß $\xi^{\frac{\nu+1}{p}-1}$ in dem durch beide Schleifen begrenzten Gebiete regulär analytisch ist, die Relation

$$v(z)-u(z)=-\frac{2i\pi}{p}z^{\frac{\nu+1}{p}-1}$$

[26]) Man beachte, daß die Abbildungsfunktion

$$\tau=\sqrt[p]{F(t)}$$

und ihre Umkehrung in der Umgebung des Nullpunktes regulär analytisch ist.

entnimmt, d. h. es ist:

$$u(z) = \left(e^{2i\pi\frac{\nu+1}{p}} - 1\right) J_\nu(z) = \frac{2i\pi}{p} z^{\frac{\nu+1}{p}-1} + v(z),$$

wo $v(z)$ eine im Nullpunkte reguläre analytische Funktion bedeutet.

Zusammenfassend erhalten wir das folgende Resultat: Ist

$$\nu \not\equiv (p-1) \pmod p,$$

so ist die Differenz

$$J_\nu(z) - \frac{2i\pi}{p} \frac{1}{e^{2i\pi\frac{\nu+1}{p}} - 1} z^{\frac{\nu+1}{p}-1} = J_\nu(z) - \frac{\pi}{p} \frac{e^{-i\pi\frac{\nu+1}{p}}}{\sin(\nu+1)\frac{\pi}{p}} z^{\frac{\nu+1}{p}-1}$$

eine in der Umgebung der Stelle $z = 0$ reguläre, analytische Funktion, wobei für die p-te Wurzel der oben festgesetzte Wert zu nehmen ist, ist aber

$$\nu \equiv (p-1) \pmod p,$$

so ist

$$J_\nu(z) - \frac{1}{p} z^{\frac{\nu+1}{p}-1} \log z$$

an der Stelle $z = 0$ regulär analytisch. In Verbindung mit der Formel (14) ergibt sich hieraus, daß unsere Laplacesche Transformierte in die folgende Summe zerlegbar ist:

$$\varphi(z) = \frac{\pi}{p} \sum_{\substack{\nu=0 \\ \nu \not\equiv (p-1) \pmod p}}^{pn+p-1}{}' c_\nu \frac{e^{-i\pi\frac{\nu+1}{p}}}{\sin(\nu+1)\frac{\pi}{p}} z^{\frac{\nu+1}{p}-1} + \frac{1}{p} \sum_{k=0}^{n} c_{kp+p-1} z^k \log z + \Psi(z),$$

wobei die erste Summe nur auf solche Werte von ν zu erstrecken ist, die nicht kongruent $(p-1)$ modulo p sind, und $\Psi(z)$ eine solche Funktion bezeichnet, deren n-te Ableitung an der Stelle $z = 0$ stetig bleibt. Die Formeln, die wir im § 2 entwickelt haben, liefern daher die asymptotische Gleichung:

$$\lim_{x=\infty} x^n \left[f(x) - \frac{\pi}{p} \sum_{\substack{\nu=0 \\ \nu \not\equiv (p-1) \pmod p}}^{pn+p-1}{}' c_\nu \frac{e^{-i\pi\frac{\nu+1}{p}}}{\sin(\nu+1)\frac{\pi}{p}} \frac{1}{\Gamma\left(1-\frac{\nu+1}{p}\right)} \frac{1}{x^{\frac{\nu+1}{p}}} + \frac{1}{p} \sum_{k=0}^{n} (-1)^k c_{kp+p-1} \frac{k!}{x^{k+1}} \right] = 0,$$

wobei die auftretenden Koeffizienten c_n durch die Gleichung (13) in expliziter Form gegeben sind.

Es scheint mir, daß diese Lösung des Laplaceschen Problems der Funktionen großer Zahlen an Übersichtlichkeit und Einfachheit nichts zu wünschen übrig läßt; es sei noch bemerkt, daß in dem Falle, daß die oben mit $G(t)$ bezeichnete Funktion an der Stelle $t = 0$ nicht regulär, sondern von der Form

$$G(t) = t^s g(t)$$

ist, wobei $g(t)$ eine für $t = 0$ reguläre analytische Funktion bedeutet, nach demselben Verfahren ähnliche asymptotische Formeln erhältlich sind.

13. Wie in der Theorie der Fourierschen Reihen die Integrale

$$\int_0^{2\pi} F(t) \cos x t \, dt \quad \text{bzw.} \quad \int_0^{2\pi} F(t) \sin x t \, dt,$$

so spielen in der Theorie der Besselschen Reihen die Integrale

$$\int_0^1 F(t) J(xt) \, dt \tag{15}$$

eine wichtige Rolle und es ist daher des Interesses wert, ihr asymptotisches Verhalten zu studieren. Mit Hilfe der Formel von Lipschitz (S. 91) erhält man als Laplacesche Transformierte des obigen Ausdruckes die Funktion:

$$\int_0^1 \frac{F(t)}{\sqrt{z^2 + t^2}} \, dt,$$

die im Unendlichen wiederum regulär analytisch und gleich Null ist, so daß die im Endlichen gelegenen singulären Stellen dieser Funktion den asymptotischen Charakter des Ausdruckes (15) bestimmen. Wir beschränken uns auf den Fall, daß $F(t)$ ein Polynom ist, d. h. wir wollen uns mit dem asymptotischen Verhalten der Ausdrücke

$$f_m(x) = \int_0^1 t^m J(xt) \, dt$$

beschäftigen, was — nach der vorangehenden Bemerkung — mit dem Studium der Singularitäten der Funktionen

$$\varphi_m(z) = \int_0^1 \frac{t^m}{\sqrt{z^2 + t^2}} \, dt$$

äquivalent ist. Nun kann man diese Integrale ohne Schwierigkeiten auswerten; es ergeben sich verschiedenartige Resultate, je nachdem m eine gerade oder ungerade Zahl ist. Für ein ungerades m

$$m = 2k + 1$$

ergibt sich

$$\varphi_{2k+1}(z) = (a_0^{(2k+1)} z^{2k} + a_2^{(2k+1)} z^{2k-2} + a_4^{(2k+1)} z^{2k-4} + \ldots + a_{2k}^{(2k+1)}) \sqrt{z^2+1} - a_0^{(2k+1)} z^{2k+1},$$

wobei zur Abkürzung:

$$a_{2k}^{(2k+1)} = \frac{1}{2k+1}, \quad a_{2k-2p}^{(2k+1)} = (-1)^p \frac{2k(2k-2)(2k-4)\ldots(2k-2p+2)}{(2k+1)(2k-1)(2k-3)\ldots(2k-2p+1)}$$

$$(p = 1, 2, \ldots, k)$$

gesetzt ist. Ist aber m eine gerade Zahl

$$m = 2k,$$

so erhält man

$$\varphi_{2k}(z) = (a_2^{(2k)} z^{2k-2} + a_4^{(2k)} z^{2k-4} + a_6^{(2k)} z^{2k-6} + \ldots + a_{2k}^{(2k)}) \sqrt{z^2+1} - a_2^{(2k)} z^{2k} (\log(1+\sqrt{z^2+1}) - \log z),$$

wobei zur Abkürzung

$$a_{2k}^{(2k)} = \frac{1}{2k}; \quad a_{2k-2p}^{(2k)} = (-1)^p \frac{(2k-1)(2k-3)(2k-5)\ldots(2k-2p+1)}{2k(2k-2)(2k-4)\ldots(2k-2p)}$$

$$(p = 1, 2, \ldots, k-1)$$

gesetzt ist[27]).

Mit Hilfe dieser Formeln können wir die asymptotische Entwicklung der Ausdrücke $f_m(x)$ auf Grund der im § 2 entwickelten Sätze sofort angeben. Man kann zunächst an der Hand dieser Formeln nochmals verifizieren, daß $\varphi_m(z)$ im Unendlichen regulär analytisch ist, und man sieht, daß für ein ungerades m die Stellen $z = \pm i$ —, für ein gerades m aber $z = \pm i$ und $z = 0$ die singulären Stellen dieser Funktion sind. Ist $m = 2k+1$, so entwickle man $\varphi_{2k+1}(z)$ in der Umgebung der Stellen $z = \pm i$; man erhält Potenzreihen von der Form:

$$\varphi_{2k+1}(z) = \sqrt{z-i} \sum_{\nu=0}^{\infty} \alpha_\nu^{(2k+1)} (z-i)^\nu = \sqrt{z+i} \sum_{\nu=0}^{\infty} \bar{\alpha}_\nu^{(2k+1)} (z+i)^\nu,$$

deren Koeffizienten $\alpha_\nu^{(2k+1)}$ bzw. $\bar{\alpha}_\nu^{(2k+1)}$ sich als einfache Ausdrücke der $a_0^{(2k+1)}, a_2^{(2k+1)}, \ldots, a_{2k}^{(2k+1)}$ ergeben. Danach ist $\varphi_{2k+1}(z)$ in die Summe

$$\varphi_{2k+1}(z) = \sqrt{z-i} \sum_{\nu=0}^{n} \alpha_\nu^{(2k+1)} (z-i)^\nu + \sqrt{z+i} \sum_{\nu=0}^{n} \bar{\alpha}_\nu^{(2k+1)} (z+i)^\nu + \psi(z)$$

[27]) Diese Formeln ergeben sich aus den beiden leicht verifizierbaren Relationen:

$$\int \frac{t^{2k+1}}{\sqrt{t^2+1}} dt = (a_0^{(2k+1)} + a_2^{(2k+1)} t^2 + \ldots + a_{2k}^{(2k+1)} t^{2k}) \sqrt{t^2+1},$$

$$\int \frac{t^{2k}}{\sqrt{t^2+1}} dt = t(a_2^{(2k)} + a_4^{(2k)} t^2 + \ldots + a_{2k}^{(2k)} t^{2k-2}) \sqrt{t^2+1} - a_2^{(2k)} \log(t + \sqrt{t^2+1}).$$

zerlegbar, in der $\psi(z)$ eine solche Funktion bezeichnet, deren $(n+1)$-ter Differentialquotient an den Stellen $z = \pm i$ stetig bleibt (an jeder anderen Stelle ist diese Funktion regulär analytisch). Wir erhalten folglich auf Grund der im § 2 gewonnenen Sätze für $f_{2k+1}(x)$ die folgende Annäherung:

$$\sum_{\nu=0}^{n} \frac{\alpha_\nu^{(2k+1)} e^{ix} + \bar{\alpha}_\nu^{(2k+1)} e^{-ix}}{\Gamma\left(-\frac{1}{2}-\nu\right)} \frac{1}{x^{\nu+\frac{3}{2}}}$$

und eine Überlegung, die wörtlich wie im Falle der Besselschen Funktion (S. 93) geführt werden kann, zeigt, daß der Fehler von der Ordnung $\frac{1}{x^{n+2}}$ ist.

Ist aber m eine gerade Zahl: $m = 2k$, so hat $\varphi_{2k}(z)$ außer $z = \pm i$ noch $z = 0$ als singuläre Stelle. Der Beitrag, den diese letzte Singularität in der asymptotischen Entwicklung von $f_{2k}(x)$ liefert, ist nach dem Satz S. 18

$$-a_2^{(2k)} \frac{(2k)!}{x^{2k+1}}.$$

Um die volle asymptotische Entwicklung zu gewinnen, entwickle man in der Umgebung der Stellen $z = \pm i$ den daselbst singulären Bestandteil von $\varphi_{2k}(z)$. Da

$$\log\left(1 + \sqrt{z^2+1}\right) = \sum_{\nu=1}^{\infty} (-1)^{\nu-1} \frac{\left(\sqrt{z^2+1}\right)^\nu}{\nu}$$

ist, so hat man zu diesem Ende nur die Funktion

$$\sqrt{z^2+1}\left[\left(a_2^{(2k)} z^{2k-2} + a_4^{(2k)} z^{2k-4} + \ldots + a_{2k}^{(2k)} - a_2^{(2k)}\right)\left(1 + \frac{1+z^2}{3} + \frac{(1+z^2)^2}{5} + \ldots\right.\right.$$

nach Potenzen von $z - i$ bzw. $z + i$ zu entwickeln; sind die so erhaltenen Reihen

$$\sqrt{z-i} \sum_{\nu=0}^{\infty} \alpha_\nu^{(2k)} (z-i)^\nu \quad \text{bzw.} \quad \sqrt{z+i} \sum_{\nu=0}^{\infty} \bar{\alpha}_\nu^{(2k)} (z+i)^\nu,$$

so lautet die asymptotische Näherung für $f_{2k}(x)$ wie folgt:

$$-a_2^{(2k)} \frac{(2k)!}{x^{2k+1}} + \sum_{\nu=0}^{n} \frac{\alpha_\nu^{(2k)} e^{ix} + \bar{\alpha}_\nu^{(2k)} e^{-ix}}{\Gamma\left(-\frac{1}{2}-\nu\right)} \frac{1}{x^{\nu+\frac{3}{2}}}$$

und der Fehler ist wiederum von der Ordnung $\frac{1}{x^{n+2}}$.

Ich habe mich, bei dieser ersten Anwendung des dargelegten Verfahrens, auf die in den letzten beiden Abschnitten behandelten Beispiele

beschränkt, da diese — wie mir scheint — geeignet sind, auf die Tragweite der Methode Licht zu werfen. Beispiele dieser Art könnte man in großer Menge angeben; es führen z. B. der Integralsinus und die verwandten Funktionen die Mittag-Lefflerschen E-Funktionen durch Laplacesche Transformation auf elementare Funktionen, woraus man ihre asymptotischen Entwicklungen unmittelbar entnehmen kann. Die in der Theorie der Gammafunktionen auftretenden asymptotischen Entwicklungen sind Spezialfälle der in 12. behandelten Aufgabe. Ich glaube mich nicht mit diesen bekannten Aufgaben weiter beschäftigen zu sollen und werde in folgenden Arbeiten solche Anwendungen des dargelegten Verfahrens entwickeln, die zu wesentlich neuen Resultaten führen.

(Eingegangen am 6. 8. 1925.)

[Anmerkung während der Korrektur.] Herr Carathéodory macht mich in freundlicher Weise darauf aufmerksam, daß sich die letzte Formel auf S. 103, die bei der Behandlung des Laplaceschen Problems der Funktionen großer Zahlen mittels der dargelegten Methode resultiert, auf die folgende einfache Form bringen läßt:

$$\lim_{x=\infty} x^n \left[f(x) - \frac{\pi}{p} \sum_{\nu=0}^{pn+p-1} e^{-i\pi\frac{\nu+1}{p}} \Gamma\left(\frac{\nu+1}{p}\right) c_\nu \frac{1}{x^{\frac{\nu+1}{p}}} \right] = 0 .$$

Diese Formel wurde — wie ich aus derselben Mitteilung entnehme — von Herrn Woldemar Jacobi gefunden, und befindet sich in seiner (nicht gedruckten) Dissertation: „Über die näherungsweise Berechnung von Funktionen großer Zahlen". Heidelberg 1922.

(29. 1. 1926.)

D

Parciális differenciálegyenletek — Partielle Differentialgleichungen

D1. Die Randwertaufgabe der Differentialgleichung $\Delta\Delta U = 0$, *Göttinger Nachr.*, 1907, 280—287. *[215—222]*

D2. Zur Theorie der Spannungszustände in plastischen und sandartigen Medien, *Göttinger Nachr.*, 1909, 204—218 (Alfred Haar und Theodor v. Kármán). *[223—237]*

D3. Sur l'unicité des solutions des équations aux dérivées partielles, *Comptes Rendus Acad. Sci. Paris*, 187 (1928), 23—26. *[238—241]*

D4. Zur Charakteristikentheorie, *Acta Sci. Math.*, 4 (1928), 103—114. *[242—253]*

D5. Über Eindeutigkeit und Analyzität der Lösungen partieller Differentialgleichungen, *Atti del Congresso Internazionale dei Matematici, Bologna 3—10 Settembre 1928*, 3 (1930), 5—10. *[254—259]*

*

Haar első közleménye a D1 dolgozat, ebben a $\Delta\Delta U = 0$ differenciálegyenlet kerületiérték-problémáját integrálegyenletre való visszavezetéssel tárgyalja, felhasználva Hilbertnek az integrálegyenletekre és azoknak a Dirichlet-problémával való kapcsolataira röviddel azelőtt kidolgozott módszereit és eredményeit. Kármán Tódorral közösen írt D2 dolgozata a kontinuumok mechanikájának határterületeire eső kérdésekkel foglalkozik; a tárgyalást egy alkalmas variációs elvre alapozza. A D3—D5 dolgozatok a parciális differenciálegyenletek általános elméletét fejlesztik tovább. A D3 dolgozathoz J. Hadamard rövid megjegyzést fűzött, amelyet a szerző szíves engedélyével Haar cikkével együtt leközlünk.

A D4 dolgozattal kapcsolatban álló irodalomból megemlítjük a következő két cikket (az utóbbi a D4 dolgozat egy nem kielégítő bizonyítását korrekttel helyettesíti):

T. Ważewski, Über die Bedingungen der Existenz der Integrale partieller Differentialgleichungen erster Ordnung, *Math. Zeitschr.*, 43 (1938), 522—532.

A. Pliś, Characteristics of non-linear partial differential equations, *Bulletin de l'Acad. Polonaise des Sciences*, 2 (1954), 419—422.

*

Die Arbeit A1 ist die erste Mitteilung von Haar; in dieser behandelt er das Randwertproblem der Differentialgleichung $\Delta\Delta U = 0$ durch Zurückführung auf eine Integralgleichung; dabei benützt er die kurz vorher durch Hilbert ausgearbeiteten Methoden und Ergebnisse über Integralgleichungen und ihre Zusammenhänge mit dem Dirichletschen Problem. Die zusammen mit Th. von Kármán verfaßte Arbeit D2 beschäftigt sich mit gewissen Fragen aus Grenzgebieten der Mechanik der Kontinua; die Behandlung ist auf einem geeigneten

Variationsprinzip aufgebaut. Die Arbeiten D3—D5 sind Beiträge zur allgemeinen Theorie der partiellen Differentialgleichungen; der Note D3 hat J. Hadamard eine kurze Bemerkung zugefügt, die hier — mit der freundlichen Zustimmung des Verfassers — zusammen mit der Note von Haar abgedruckt wird.

Aus der mit der Arbeit D4 im Zusammenhang stehenden Literatur sei auf die Aufsätze von T. Ważewski und A. Pliś hingewiesen (s. den ungarischen Text; bei Pliś wird ein nicht ausreichender Beweis der Arbeit D4 durch einen korrekten ersetzt).

Die Randwertaufgabe der Differentialgleichung $\Delta\Delta U = 0$.

Von

Alfred Haar in Göttingen.

Vorgelegt von Herrn D. Hilbert in der Sitzung vom 7. Juli 1907.

Verschiedene Probleme der Mathematik und der mathematischen Physik haben die Aufmerksamkeit auf die Randwertaufgabe der Potentialgleichung:

$$\Delta U = 0$$

gelenkt. Durch eine Reihe von Arbeiten — ich nenne nur diejenigen von C. Neumann[1]), H. A. Schwarz[2]), H. Poincaré[3]), D. Hilbert[4]) — wurde der Beweis erbracht, daß eine und nur eine Lösung dieser Gleichung existiert, die auf einer geschlossenen Kurve gegebene stetige Randwerte annimmt. Nach Erledigung dieses Problems wandten sich die Mathematiker zu der allgemeinen linearen Differentialgleichung 2. Ordnung vom elliptischen Typus, um auch in diesem Falle die analogen Fragen zu beantworten; ich erwähne nur die Abhandlung von D. Hilbert[5]), an die die vorliegende Arbeit anknüpft.

---

1) C. Neumann: „Ueber die Integration der Differentialgleichung

$$\frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\Phi}{\partial y^2} = 0\text{“}.$$

Crelle's Journal, Bd. 59, S. 335.

2) H. A. Schwartz: Gesammelte Abhandlungen, Bd. II, S. 157.

3) H. Poincaré: American Journal of Mathematic, Bd. XII, S. 211.

4) D. Hilbert: „Ueber das Dirichlet'sche Prinzip“, Crelle's Journal, Bd. 129, S. 65.

5) D. Hilbert: „Grundzüge einer allgemeinen Theorie der linearen Integralgleichungen“. (Zweite Mitteilung.) Diese Nachrichten 1904, S. 213.

Durch diese Arbeiten sind aber die Randwertaufgaben, die in der mathematischen Physik auftreten, nicht erschöpft. In der Elastizitätstheorie spielt die Differentialgleichung:

$$\Delta\Delta U = \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} + 2\frac{\partial^4 u}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 u}{\partial y^4} = 0$$

eine sehr wichtige Rolle; es wird hier der Nachweis erfordert, daß diese Gleichung eine Lösung besitzt, die innerhalb einer — gewissen Stetigkeitsbedingungen genügenden — Kurve regulär analytisch ist, und deren Randwerte, und die Werte ihrer Ableitung nach der inneren Normale auf dieser Kurve, gegebene stetige Funktionen sind[1]). Durch die Anwendung der Integralgleichungen gelang es mir den Beweis dieser Tatsache zu erbringen; ich beschränke mich an dieser Stelle auf eine kurze Andeutung des Gedankenganges meines Beweises.

In der (x, y) Ebene denken wir uns eine geschlossene Kurve C durch die Gleichungen:

$$x = a(s)$$
$$y = b(s)$$

gegeben, wobei wir annehmen, daß die periodischen Funktionen $a(s)$ und $b(s)$ dreimal stetig differenzierbar sind. Wir konstruieren die Greensche Funktion zweiter Art[2]) $G(x, y; \xi, \eta)$ der Potentialgleichung für diese Kurve C, die in Bezug auf x, y innerhalb C der Differentialgleichung:

$$\Delta G = 0$$

genügt, an der Stelle $x = \xi$, $y = \eta$ logarithmisch unendlich wird, und deren, in Richtung der inneren Normalen genommene Ableitung auf C einen von s unabhängigen Wert besitzt. Rücken die Punkte x, y bezw. ξ, η in die Randpunkte $a(s), b(s)$ bezw. $a(t)$, $b(t)$ der Kurve C, so mögen die betreffenden Werte dieser Greenschen Funktion mit $G(s, t)$ bezeichnet werden.

In der Potentialtheorie wird gezeigt, daß wenn $p(s)$ und $q(s)$ zwei stetige periodische Funktionen sind — ihre Periode möge

1) Vergl. die Preisaufgabe der Pariser Academie (Comptes Rendus 1905, S. 1145).

Von den vielen Abhandlungen, die sich mit dieser Differentialgleichung beschäftigen, erwähne ich nur die neu erschienenen Arbeiten von G. Fubini (Rendiconti del Circolo Mathematico di Palermo XXIII (1907) S. 59) und S. Zaremba (Bulletin de l'academie du Cracovie 1907, S. 148).

2) cf. D. Hilbert: „Grundzüge einer allgemeinen Theorie der linearen Integralgleichungen" (Dritte Mitteilung). Diese Nachrichten 1905, S. 309.

mit der Periode von $a(s)$ und $b(s)$ übereinstimmen —, die den Relationen:

$$\int_{(C)} q(s)\, ds = 0$$

$$p(t) + \frac{1}{2\pi}\int_{(C)} G(s,t)\, q(s)\, ds = \text{const.}$$

genügen, eine innerhalb C reguläre Potentialfunktion existiert, die auf C die Randwerte $p(s)$ annimmt, und deren normale Ableitung auf C mit der Funktion $q(s)$ übereinstimmt [1]).

Setzen wir jetzt zur Abkürzung:

$$(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2 = r^2(x, y; \xi, \eta),$$

so sind:

$$r^2(x, y; \xi, \eta)\, lr(x, y; \xi, \eta) \text{ und } r^2(x, y; \xi, \eta)$$

für jeden Wert der Parameter ξ und η Lösungen der Differentialgleichung:

(1) $$\Delta\Delta U = 0.$$

Daher stellt das über die Randkurve C erstreckte Integral:

$$U(x,y) = \int_{(C)} r^2(x, y; a(t), b(t))\, lr(x, y; a(t), b(t))\, \varphi(t)\, dt + \int_{(C)} r^2(x, y; a(t), b(t))\, \psi(t)\, dt$$

— wobei $\varphi(t)$ und $\psi(t)$ beliebige stetige Funktionen bedeuten mögen — eine innerhalb C reguläre Lösung unserer Differentialgleichung dar, deren Randwerte auf C durch die Formel:

$$U(s) = \int_{(C)} r^2(s,t)\, lr(s,t)\, \varphi(t)\, dt + \int_{(C)} r^2(s,t)\, \psi(t)\, dt,$$

und deren normale Ableitung durch:

$$\frac{dU}{dn} = \int_{(C)} \frac{\partial r^2(s,t)\, lr(s,t)}{\partial n}\, \varphi(t)\, dt + \int_{(C)} \frac{\partial r^2(s,t)}{\partial n}\, \psi(t)\, dt$$

dargestellt wird, wobei:

$$r(a(s), b(s); a(t), b(t)) = r(s,t),$$

$$\left[\frac{\partial r^2(x, y; a(t), b(t))}{\partial n}\right]_{\substack{x = a(s) \\ y = b(s)}} = \frac{\partial r^2(s,t)}{\partial n}$$

gesetzt ist. —

1) cf. D. Hilbert: l. c. S. 310.

Um nun eine Lösung unserer Differentialgleichung zu konstruieren, deren Randwerte auf C mit der gegebenen dreimal stetig differenzierbaren Funktion $f(s)$, und deren Ableitung nach der inneren Normale daselbst mit $g(s)$ übereinstimmt, genügt es die Funktionen φ und ψ so zu bestimmen, daß eine reguläre Potentialfunktion existiere, die auf der Kurve C die Randwerte:

$$f(s) - U(s)$$

annimmt, und deren normale Ableitung gleich:

$$g(s) - \frac{\partial U}{\partial n}$$

wird. Ist nämlich $u(x, y)$ diese Potentialfunktion, so ist

$$U(x, y) + u(x, y)$$

offenbar eine unsere Bedingungen erfüllende Lösung der Differentialgleichung (1). —

Damit aber eine solche Potentialfunktion existiere, ist nach unseren früheren Bemerkungen hinreichend, daß die Relationen:

$$\int_{(C)} \left(g(s) - \frac{\partial U}{\partial n}\right) ds = 0$$

$$f(s) - U(s) = -\frac{1}{2\pi} \int_{(C)} G(s,t) \left(g(t) - \frac{\partial U}{\partial n}\right) dt$$

erfüllt seien. Diese Relationen geben zwei Integralgleichungen für die unbekannte Funktionen $\varphi(t)$, $\psi(t)$, auf deren Lösung unser Problem zurückgeführt ist. — Führen wir zur Abkürzung die Bezeichnungen ein:

$$K(s,t) = \frac{1}{2\pi} \int_{(C)} G(s, \sigma) \frac{\partial r^2(\sigma, t)\, lr(\sigma, t)}{\partial n} d\sigma$$

$$\mathsf{K}(s,t) = r^2(s,t) + \frac{1}{2\pi} \int_{(C)} G(s, \sigma) \frac{\partial r^2(\sigma, t)}{\partial n} d\sigma$$

$$L(s) = \int_{(C)} \frac{\partial r^2(s,t)\, lr(s,t)}{\partial n} dt$$

$$\Delta(s) = \int_{(C)} \frac{\partial r^2(s,t)}{\partial n} dt,$$

so lauten unsere Integralgleichungen:

$$\int_{(C)} (r^2(s,t)\, lr(s,t) + K(s,t))\, \varphi(t)\, dt + \int_{(C)} \mathsf{K}(s,t)\, \psi(t)\, dt$$

(2)
$$= f(s) + \frac{1}{2\pi} \int_{(C)} G(s,t)\, g(t)\, dt$$

(3) $$\int_{(C)} L(s)\, \varphi(s)\, ds + \int_{(C)} \Lambda(s)\, \psi(s)\, ds = \int_{(C)} g(s)\, ds.$$

Ich bemerke, daß die letzte Gleichung keine Integralgleichung im gewöhnlichen Sinne ist, sie ist mit einer Gleichung für die Fourier-Koeffizienten der Funktionen $\varphi(s)$ und $\psi(s)$ äquivalent. Bezeichnen wir nämlich mit $x_0, x_1, x_2, \ldots$ bezw. mit $y_0, y_1 y_2, \ldots$ die Fourier-Koeffizienten dieser Funktionen:

$$x_0 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \varphi(s)\, ds; \quad x_{2p-1} = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \varphi(s) \cos ps\, ds;$$

$$x_{2p} = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \varphi(s) \sin ps\, ds$$

$$y_0 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \psi(s)\, ds; \; y_{2p-1} = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \psi(s) \cos ps\, ds;$$

$$y_{2p} = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \psi(s) \sin ps\, ds$$

— indem wir der Einfachheit halber die Gesamtlänge der Kurve C gleich 2π nehmen — und entsprechend:

$$l_0 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} L(s)\, ds, \quad \lambda_0 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \Lambda(s)\, ds; \quad g_0 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} g(s)\, ds,$$

so ist jene Gleichung mit der Gleichung:

(3′) $$l_0 x_0 + \lambda_0 y_0 = g_0$$

äquivalent. Die erste Integralgleichung ist eine Integralgleichung erster Art mit den zwei unbekannten Funktionen φ und ψ; sie ist mit einem linearen Gleichungssystem für die Fourier-Koeffizienten dieser Funktionen äquivalent, denen noch die Bedingung (3′) auferlegt wird. Herr Prof. Hilbert hat in seiner Vorlesung über Integralgleichungen im S.S. 1906, für die Behandlung der Integralgleichung:

$$F(s) = \int_{(C)} lr(s,t)\, \Phi(t)\, dt$$

eine Methode angegeben, die auch in diesem Falle zum Ziele führt; sie besteht darin, daß man diese Integralgleichung auf ein System linearer Gleichungen mit unendlich vielen Unbekannten der von Herrn Hilbert in seiner vierten Mitteilung[1]) behandelten Art zurückführt. — In der Integralgleichung (2) kommt aber noch eine andere Funktion $\psi(s)$ vor, wodurch erreicht wird, daß es unendlich viele Funktionenpaare $\varphi(s)$, $\psi(s)$ gibt, die jene Integralgleichung befriedigen. — Es ist zweckmäßig diese Willkür dazu zu benutzen, ein solches Lösungspaar herauszugreifen daß:

$$x_0 = 0, \text{ und } y_2 = y_3 = \cdots = 0$$

sein soll. Ich beweise dann, indem ich das genannte Hilbertsche Verfahren anwende, folgenden Satz:

Entweder gibt es bei beliebig gewählten dreimal stetig differenzierbaren Funktionen $f(s)$ und $g(s)$ ein Lösungssystem unserer Integralgleichungen (2) und (3), oder aber es besitzen die zugehörigen homogenen Gleichungen:

$$2a) \qquad \int_{(C)} (r^2(s,t) lr(s,t) + K(s,t))\,\varphi(t)\,dt + \int_{(C)} \mathsf{K}(s,t)\,\psi(t)\,dt = 0$$

$$3a) \qquad \int_{(C)} L(s)\,\varphi(s)\,ds + \int_{(C)} \Lambda(s)\,\psi(s)\,ds = 0$$

ein nicht verschwindendes Lösungssystem, bei dem

$$x_0 = 0 \text{ und } y_2 = y_3 = \cdots = 0$$

ist, wo x_p und y_p die frühere Bedeutung haben. Die Randwertaufgabe der vorgelegten Differentialgleichung kann als bewiesen betrachtet werden, wenn die zweite Alternative ausgeschlossen wird. —

Um dies zu erreichen betrachte ich die Funktion:

$$U(x,y) = \int_{(C)} r^2(x,y;a(t),b(t))\,lr\,\varphi(t)\,dt + \int_{(C)} r^2(x,y;a(t),b(t))\,\psi(t)\,dt,$$

wo $\varphi(t)$ und $\psi(t)$ Lösungen der homogenen Gleichungen (2a) und (3a) sind. Dann drücken diese Gleichungen aus, daß eine innerhalb C reguläre Potentialfunktion $u(x,y)$ existiert, die in ihren Randwerten und in den Werten der normalen Ableitung mit $U(x,y)$ übereinstimmt. Da aber $U(x,y)$ und $u(x,y)$ innerhalb (C) reguläre Lösungen der Differentialgleichung:

$$1) \qquad \Delta\Delta U = 0$$

1) D. Hilbert. Diese Nachrichten 1906, S. 219.

sind, so folgt — nach einem bekannten Satze[1]) — daß diese Funktionen identisch sind, und daher ist die Funktion $U(x, y)$ eine Potentialfunktion. Mit Rücksicht auf die Relationen:

$$\Delta(r^2(x, y; \xi, \eta)\, lr(x. y; \xi, \eta)) = 4\, lr(x, \eta; \xi, \eta) + 4,$$
$$\Delta(r^2(x, y; \xi, \eta)) = 4,$$

erhält man daraus die Gleichung:

$$\int_{(C)} lr(x, y; a(t), b(t))\, \varphi(t)\, dt = 0,$$

woraus man schließt, daß $\varphi(t)$ identisch verschwinden muß, und man zeigt dann leicht, daß auch $y_0 = 0$ und $y_1 = 0$ ist, d. h. $\psi(t)$ gleich Null ist. Damit ist aber die zweite Alternative ausgeschlossen und der Beweis des Satzes erbracht, daß die vorgelegte Differentialgleichung (1) stets eine Lösung besitzt, deren Randwerte auf der Kurve C und deren Ableitung nach der inneren Normale gegebene dreimal stetig differenzierbare Funktionen sind.

Um nun die Randwertaufgabe für beliebige stetige Randbedingungen zu lösen, konstruieren wir eine Lösung $H(x, y; \xi, \eta)$, die im Bezuge auf x, y die Differentialgleichung (1) befriedigt, und deren Randwerte auf C, nebst ihrer normalen Ableitung mit den entsprechenden Werten von $r^2(x, y; \xi, \eta)\, lr(x, y; \xi, \eta)$ übereinstimmt. Die Existenz dieser Funktion ist durch das vorhergehende Resultat sichergestellt, wenn die Randkurve dreimal stetig differenzierbar ist; an dieser Bedingung halten wir fest.

Der Funktion:

$$\Gamma(x, y; \xi, \eta) = H(x, y; \xi, \eta) - r^2(x, y; \xi, \eta)\, lr(x, y; \xi, \eta),$$

die auf C samt ihrer normalen Ableitung verschwindet, kommen alle wesentlichen Eigenschaften der Greenschen Funktion der Potentialgleichung zu; insbesondere ist sie symmetrisch in den Variablenpaare x, y und ξ, η, und abgeschlossen.

Man kann dann — indem man eine der Greenschen Formel analoge Formel für die Gleichung (1) benutzt[2]) — durch diese Funktion $\Gamma(x, y; \xi, \eta)$ eine Lösung der vorgelegten Differentialgleichung darstellen, deren Randwerte und Werte der Ableitung nach der inneren Normale auf C gegebene stetige Funktionen sind, womit die behandelte Randwertaufgabe für

---

1) Vgl. etwa Voigt: Theoretische Physik. Band I, S. 203.
2) Vgl. etwa Voigt: Theoretische Physik. Band I, S. 204.

dreimal stetig differenzierbare Randkurven vollständig erledigt ist.

Die nun definierte Funktion $\Gamma(x, y; \xi, \eta)$ gestattet auch die Lösung der Randwertaufgabe der Differentialgleichungen:

$$\Delta\Delta U = f(x, y)$$
$$\Delta\Delta U = \lambda U.$$

Man zeigt auf eine Weise, die sehr ähnlich dem Beweise ist, den Herr Hilbert bei den entsprechenden Sätzen der partiellen Differentialgleichungen zweiter Ordnung anwendet, daß die erste Gleichung stets eine Lösung besitzt, die auf der Randkurve C samt ihrer normalen Ableitung verschwindet. Die zweite Gleichung hat nur bei abzählbar vielen λ-Werten eine solche Lösung; diese Werte von λ, die sich im Endlichen nirgends häufen, kann man die Eigenwerte dieser Differentialgleichung nennen, die zugehörigen, die Randbedingungen erfüllende Funktionen die Eigenfunktionen dieser Differentialgleichung. Man kann dann leicht zeigen, daß diese Eigenfunktionen ein vollständiges Orthogonalsystem bilden, und daß sich jede viermal stetig differenzierbare Funktion, die jene Randbedingung erfüllt, in eine geichmäßig konvergente Reihe entwickelbar ist, die nach den Eigenfunktionen dieser Differentialgleichung fortschreitet.

Zur Theorie der Spannungszustände in plastischen und sandartigen Medien.

Von

Alfred Haar und **Theodor v. Kármán** in Göttingen.

Eingereicht von F. Klein.

In den folgenden Ausführungen versuchen wir die gemeinschaftlichen Grundlagen zweier Sondergebiete der Mechanik der Kontinua zu entwickeln, die man als Plastizitätstheorie und Theorie des Erddrucks zu bezeichnen pflegt. Diese Theorien hängen in ihrer jetzigen Form ziemlich lose mit den übrigen Ausführungen der Mechanik der Kontinua zusammen und die Aufstellung der Gleichungen[1]), die zur Lösung der — zumeist aus technischen Gesichtspunkten wichtigen — Probleme hinreichen sollen, erfordert eine Anzahl unabhängiger und ziemlich willkürlicher Annahmen. Es gelingt nun durch Anwendung eines Minimalprinzipes ein vollständiges Gleichungssystem für die Gleichgewichtszustände in plastisch deformierbaren und sandartigen Massen nur auf Grund der physikalischen Erfahrungstatsachen, durch welche diese Medien sozusagen definiert waren, streng abzuleiten. Wir gewinnen dadurch eine Uebersicht der verschiedenen Arten von Spannungszuständen, die in den be-

1) Die Gleichungen der Plastizitätstheorie wurden auf Grund der Versuche von Tresca, von B. de St. Venant (Journal de Math. Bd. 16 (1871) p. 308) und M. Lévy (ibid. p. 369 und Comptes Rendus Paris. Bd. 70 (1870) p. 1323) abgeleitet. Auf den Unterschied zwischen ihren und unseren Ergebnissen kommen wir S. 13 zurück. Eine ausführliche Theorie der „pulverulenten“ (sandartigen) Medien gab J. Boussinesq. (Mém. couronnés par l'acad. de Bruxelles, Bd. 40, 1876). Die diesbez. Theorien von M. Rankine (Phil. Trans., 1857. p. 9) und M. Lévy (Journal de Math. Bd. 18, (1873) p. 241) beschränken sich auf die „Grenzzustände des Gleichgewichts“.

treffenden Medien möglich sind und ein vollständiges System von Gleichungen für die Bestimmung derselben. Andererseits sehen wir aber die Eigenart unserer Ergebnisse darin, daß wir durch ein einziges Variationsprinzip Probleme beherrschen können, bei denen die Verhältnisse — wie es bei physikalischen Problemen häufig der Fall ist — in verschiedenen Bereichen durch verschiedene Differentialgleichungen reguliert werden.

§ 1.

Ueber ein Minimalprinzip der Elastizitätstheorie und die Grenzen des elastischen Zustandes.

Mit Rücksicht auf die folgenden Ausführungen wollen wir vorab ein bekanntes Prinzip der Elastizitätstheorie — welches oft nach Castigliano benannt wird — für rein elastische, isotrope Medien in folgender Form aussprechen:

Es seien an der Begrenzung eines isotropen elastischen Mediums die Spannungen gegeben. Wir betrachten die Energiedichte der Verzerrung W ausschließlich als Funktion der 6 Spannungsgrößen X_x, Y_y, Z_z, X_y, Y_z, Z_x. Es wird nun der wirklich stattfindende Gleichgewichtszustand unter allen möglichen Spannungsverteilungen, die nur den drei Gleichgewichtsgleichungen[1])

$$(1)\qquad \begin{aligned} \frac{\partial X_x}{\partial x}+\frac{\partial X_y}{\partial y}+\frac{\partial X_z}{\partial z} &= 0\\ \frac{\partial Y_x}{\partial x}+\frac{\partial Y_y}{\partial y}+\frac{\partial Y_z}{\partial z} &= 0\\ \frac{\partial Z_x}{\partial x}+\frac{\partial Z_y}{\partial y}+\frac{\partial Z_z}{\partial z} &= 0, \end{aligned}$$

und den an der Begrenzung durch die gegebenen Spannungen festgelegten Randbedingungen genügen, dadurch bestimmt, daß das über das Gesamtgebiet erstreckte Integral $I = \iiint W(X_x, Y_y, Z_z, X_y, Y_z, Z_x)\, dx\, dy\, dz$ ein Minimum wird.

Um dies zu zeigen, wollen wir die Lagrangeschen Faktoren, die den Nebenbedingungen (1) zugeschrieben werden sollen,

1) Wir beschränken uns der Einfachheit halber auf den Fall fehlender Massenkräfte.

mit u, v, w bezeichnen. Alsdann erhalten wir durch Variation das Gleichungssystem

$$
\begin{aligned}
u_x &= \frac{\partial W}{\partial X_x} & u_y + v_x &= \frac{\partial W}{\partial X_y} \\
v_y &= \frac{\partial W}{\partial Y_y} & v_z + w_y &= \frac{\partial W}{\partial Y_z} \\
w_z &= \frac{\partial W}{\partial Z_z} & w_x + u_z &= \frac{\partial W}{\partial Z_x}.
\end{aligned} \tag{2}
$$

Bei isotropen, elastischen Medien, die dem Hookeschen Gesetze gehorchen, wird $2W$ folgende quadratische Form der 6 Spannungsgrößen

$$2W = \frac{1}{E} P^2 + \frac{1}{\mu} Q,$$

wo P und Q als Abkürzung für folgende zwei Orthogonalinvarianten der Spannungsgrößen

$$
\begin{aligned}
P &= X_x + Y_y + Z_z \\
Q &= X_y^2 + Y_z^2 + Z_x^2 - X_x Y_y - Y_y Z_z - Z_z X_x
\end{aligned}
$$

stehen und die Konstante E (Youngscher Modul) mit den Lamé-schen Konstanten λ und μ durch die Beziehung $E = \frac{\mu(3\lambda + 2\mu)}{\lambda + \mu}$ zusammenhängt. In diesem Falle sind die Größen

$$\frac{\partial W}{\partial X_x}, \frac{\partial W}{\partial Y_y}, \frac{\partial W}{\partial Z_z}, \frac{\partial W}{\partial X_y}, \frac{\partial W}{\partial Y_z}, \frac{\partial W}{\partial Z_x}$$

gleich den Formänderungskomponenten $x_x, y_y, z_z, x_y, y_z, z_x$ und das Gleichungssystem (2) sagt aus, daß diese aus drei Funktionen u, v, w in bekannter Weise hergeleitet werden können.

Durch Elimination der Faktoren u, v, w gelangt man zu den bekannten drei Kompatibilitätsgleichungen, die mit den Gleichgewichtsgleichungen und Randbedingungen zusammen die Spannungen eindeutig festlegen. Wir schreiben sie in der folgenden Form:

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial^2}{\partial x \partial y}\left(\frac{\partial W}{\partial X_y}\right) &= \frac{\partial^2}{\partial y^2}\left(\frac{\partial W}{\partial X_x}\right) + \frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(\frac{\partial W}{\partial Y_y}\right) \\
\frac{\partial^2}{\partial y \partial z}\left(\frac{\partial W}{\partial Y_z}\right) &= \frac{\partial^2}{\partial z^2}\left(\frac{\partial W}{\partial Y_y}\right) + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\left(\frac{\partial W}{\partial Z_z}\right) \\
\frac{\partial^2}{\partial z \partial x}\left(\frac{\partial W}{\partial Z_x}\right) &= \frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(\frac{\partial W}{\partial Z_z}\right) + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\left(\frac{\partial W}{\partial X_x}\right).
\end{aligned} \tag{3}
$$

In dem zweidimensionalen Falle, wo die Gleichgewichtsgleichungen durch den Airyschen Ansatz identisch erfüllt werden, kann man die Airysche Funktion F in das Integral I einführen und dies liefert wohl die einfachste Ableitung für die Gleichung $\Delta\Delta F = 0$, der die Ainysche Funktion bei isotropen Medien genügt, wie es von Herrn Klein gelegentlich eines Vortrages im math.-phys. Seminar in Göttingen im W/S. 1908/9 bemerkt wurde.

Andererseits sei bemerkt, daß man bei Medien, für welche W nicht als quadratische Form in den X_x..... angenommen werden kann, sondern auch Glieder höherer Ordnung enthält, statt der Verzerrungsenergie die sog. Ergänzungsarbeit W' zum Minimum gemacht werden muß. Diese beiden Funktionen W und W' sind durch die Beziehung

$$W + W' = \frac{\partial W'}{\partial X_x} X_x + \frac{\partial W'}{\partial Y_y} Y_y + \frac{\partial W'}{\partial Z_z} Z_z + \frac{\partial W'}{\partial X_y} X_y + \frac{\partial W'}{\partial Y_z} Y_z + \frac{\partial W'}{\partial Z_x} Z_x$$

miteinander verbunden. Als Lagrangesche Differentialgleichungen der so bestimmten Variationsaufgabe erhalten wir analogerweise die entsprechenden Kompatibilitätsgleichungen.

Die Erfahrungstatsachen weisen nun eindeutig darauf hin, daß der durch die 6 Gleichungen (1) und (3) festgelegte rein elastische Zustand — auch annähernd — nur bis zu gewissen Grenzen möglich ist. Diese Grenzen bei verschiedenartigen Materialien zu bestimmen, gehört zu den wichtigsten Fragen der experimentellen Festigkeitslehre. Es genügt uns aber allgemein zu sagen, daß — wie fast alle Versuche zeigen — der elastische Zustand dadurch beschränkt wird, daß zwischen den Spannungskomponenten gewisse Ungleichungen bestehen müssen. So haben die Versuche mit sog. plastisch deformierbaren Körpern als für diese Medien kennzeichnend festgestellt, daß sie nur so lange in dem rein elastischen Deformationszustande beharren können, bis die größte Schubspannung einen festen, dem Stoffe charakteristischen Wert erreicht; bei sandartigen Massen hat man die Grenze dadurch bestimmt, daß die Richtung der resultierenden Spannung in Bezug auf jedes Flächenelement innerhalb eines bestimmten Kegels, des sog. „Reibungskegels“ liegt, dessen Axe mit der Normale des Flächenelements zusammenfällt. Welche Vorstellungen man sich aber auch auf Grund der physikalischen Versuche über die „Elastizitätsgrenze“ bilden mag, jeden-

falls müssen diese Bedingungen bei isotropen Materialien durch eine Anzahl von Ungleichungen zwischen den orthogonalen Invarianten der Spannungsgrößen ausgedrückt werden können.

Die wichtigste Frage, die uns hier entgegentritt und die den Hauptgegenstand unserer Ausführungen bildet, ist die, wie der Gleichgewichtszustand bestimmt wird, falls die Gleichungssysteme (1) und (3) keine Lösung zulassen, die den für das gerade vorliegende Material physikalisch gegebenen Ungleichungen im ganzen Gebiete genügt?

§ 2.

Mathematische Hülfssätze.

Diese und ähnliche Probleme der mathematischen Physik führen auf Aufgaben der Variationsrechnung [1]), die wir im einfachsten Falle etwa folgendermaßen formulieren können.

Unter allen Funktionen $U(x, y, z)$, die auf dem Rande eines Gebietes G gegebene Randbedingungen befriedigen und außerdem innerhalb des Gebietes überall eine gegebene Differentialungleichung — die wir der Einfachheit halber von der ersten Ordnung annehmen —

$$F\left(U, \frac{\partial U}{\partial x}, \frac{\partial U}{\partial y}, \frac{\partial U}{\partial z}\right) \leqq 0$$

erfüllen, bestimme man diejenige, die das Integral

$$J = \iiint_{(G)} f\left(U, \frac{\partial U}{\partial x}, \frac{\partial U}{\partial y}, \frac{\partial U}{\partial z}\right) dx\, dy\, dz$$

zum Minimum macht.

Es kommt vor allem darauf an, die notwendigen Bedingungen unseres Problems abzuleiten, die die Lagrangeschen Gleichungen einer gewöhnlichen Variationsaufgabe ersetzen. Sie werden durch folgenden Satz geliefert:

Sei $\overline{U}(x, y, z)$ die gesuchte Funktion; ist dann in einem Teilgebiete g von G

$$F\left(\overline{U}, \frac{\partial \overline{U}}{\partial x}, \frac{\partial \overline{U}}{\partial y}, \frac{\partial \overline{U}}{\partial z}\right) \leqq -\delta \quad (\delta > 0), \tag{4}$$

so muß überall in g die Variation von J verschwinden, d. h. $\overline{U}$

1) Man vergleiche die interessanten Ausführungen von E. Zermelo (Jahresbericht der Math. Vereinigung, Bd. 11), wo verschiedene geometrischen Aufgaben dieser Art behandelt werden.

befriedigt daselbst die Lagrangesche Gleichung des gewöhnlichen Variationsproblems, welches entsteht, wenn wir von der Nebenbedingung absehen, d. h. die Gleichung:

$$L \equiv \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial \frac{\partial U}{\partial x}}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial \frac{\partial U}{\partial y}}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial f}{\partial \frac{\partial U}{\partial z}}\right)-\frac{\partial f}{\partial U}=0.$$

In der Tat, wenn in dem Gebiete g die Ungleichung (4) befriedigt ist, so können wir eine positive Größe η so bestimmen, daß die Ungleichung

$$F\left(\overline{U}+\varepsilon V, \frac{\partial(\overline{U}+\varepsilon V}{\partial x}, \frac{\partial(\overline{U}+\varepsilon V)}{\partial y}, \frac{\partial(\overline{U}+\varepsilon V)}{\partial z}\right)\leqq 0$$

für jedes hinreichend kleine positive oder negative ε erhalten bleibt, wenn V eine in g definierte Funktion bedeutet, die so beschaffen ist, daß sie nebst ihren ersten Ableitungen in dem ganzen Gebiete g dem Betrage nach kleiner als η ausfällt. Wir wählen die Funktion V insbesondere so, daß sie nebst ihren ersten Differentialquotienten auf dem Rande des Gebietes g verschwindet und bilden sodann mit der überall stetig differenzierbaren Funktion $U(\varepsilon)$ — die innerhalb g gleich $\overline{U}+\varepsilon V$ ist, außerhalb von g mit $\overline{U}$ übereinstimmt — das Integral

$$J(\varepsilon)=\iiint_{(G)} f\left\{U(\varepsilon), \frac{\partial U(\varepsilon)}{\partial x}, \frac{\partial U(\varepsilon)}{\partial y}, \frac{\partial U(\varepsilon)}{\partial z}\right\} dx\,dy\,dz.$$

Wir schreiben

$$J(\varepsilon)=\iiint_{(G-g)} f\left(\overline{U}, \frac{\partial \overline{U}}{\partial x}, \frac{\partial \overline{U}}{\partial y}, \frac{\partial \overline{U}}{\partial z}\right) dx\,dy\,dz$$
$$+\iiint_{(g)} f\left(\overline{U}+\varepsilon V, \frac{\partial(\overline{U}+\varepsilon V)}{\partial x}, \cdots\right) dx\,dy\,dz.$$

Bedeutet $\overline{U}$ die Lösung unserer Variationsaufgabe, so muß für hinreichend kleine, sowohl positive als negative ε $J(\varepsilon)\geqq J(0)$ sein, woraus man unmittelbar schließt, daß die Variation des an zweiter Stelle geschriebenen Integrals verschwinden muß — d. h. daß $\overline{U}$ in dem Gebiete g die Differentialgleichung (6) befriedigt.

Die Lösung unseres Variationsproblems setzt sich daher aus Lösungen der beiden Differentialgleichungen $L=0$ und $F=0$ zusammen, d. h. sie befriedigt in jedem Punkte von G die eine dieser beiden Differentialgleichungen.

Aehnliche Ueberlegung gestatten auch die Behandlung allgemeinerer Variationsprobleme mit mehreren unbekannten Funktionen und mehreren Ungleichungen als Nebenbedingungen. Wir wollen als charakteristisches Beispiel den nächsteinfachsten Fall zweier unbekannten Funktionen und zweier Ungleichungen anführen:

Unter allen Funktionspaaren $U_1(x, y, z)$, $U_2(x, y, z)$, die die beiden Differentialungleichungen

$$F_1\left(U_1, \frac{\partial U_1}{\partial x}, \cdots, U_2, \frac{\partial U_2}{\partial x}, \cdots\right) \leqq 0,$$

$$F_2\left(U_1, \frac{\partial U_1}{\partial x}, \cdots, U_2, \frac{\partial U_2}{\partial x}, \cdots\right) \leqq 0$$

befriedigen, bestimme man dasjenige, welches das Integral

$$J = \iiint f\left(U_1, \frac{\partial U_1}{\partial x}, \cdots, U_2, \frac{\partial U_2}{\partial x}, \cdots\right) dx\, dy\, dz$$

zum Minimum macht.

Die entsprechenden notwendigen Bedingungen werden durch folgenden Satz geliefert:

Sind $\overline{U}_1$, $\overline{U}_2$ die gesuchten Funktionen, so gelten

a) in allen Gebieten, wo die beiden mit diesen Funktionen gebildeten Ungleichungen

$$\overline{F}_1 = F_1\left(\overline{U}_1, \frac{\partial \overline{U}_1}{\partial x}, \cdots, \overline{U}_2, \frac{\partial \overline{U}_2}{\partial x}, \cdots\right) < 0,$$

$$\overline{F}_2 = F_2\left(\overline{U}_1, \frac{\partial \overline{U}_1}{\partial x}, \cdots, \overline{U}_2, \frac{\partial \overline{U}_2}{\partial x}, \cdots\right) < 0$$

(mit Ausschluß des Gleichungszeichens) befriedigt sind, für $\overline{U}_1$, $\overline{U}_2$ die Lagrangeschen Gleichungen des gewöhnlichen Variationsproblems ohne jede Nebenbedingung.

b) α) In allen Gebieten, wo

$$\overline{F}_1 = 0,$$

$$\overline{F}_2 < 0$$

ist, befriedigt unser Lösungssystem die Lagrangesche Gleichung des folgenden gewöhnlichen Variationsproblems: Es ist

$$J = \iiint f\left(U_1, \frac{\partial U_1}{\partial x}, \cdots, U_2, \frac{\partial U_2}{\partial x}, \cdots\right) dx\, dy\, dz$$

zum Minimum zu machen mit der Nebenbedingung

$$F_1\left(U_1, \frac{\partial U_1}{dx}, \cdots, U_2, \frac{\partial U_2}{\partial x}, \cdots\right) = 0.$$

β) In allen Gebieten, wo

$$\overline{F}_1 < 0,$$
$$\overline{F}_2 = 0$$

ist, befriedigen $\overline{U}_1, \overline{U}_2$ die Lagrangeschen Gleichungen des entsprechenden Variationsproblems, wo nun $F_2 = 0$ als Nebenbedingung zu betrachten ist.

Mit anderen Worten: man hat für diese Gebiete je ein Variationsproblem zu lösen, in dem die eine der Ungleichungen in die entsprechende Gleichung ausartet und diese und nur diese allein als Nebenbedingung berücksichtigt wird.

Schließlich bleiben Gebiete, in welchen beide Ungleichungen in die entsprechenden Gleichungen ausarten, mit anderen Worten: das Lösungssystem befriedigt in jedem Punkte entweder eines der bisher abgeleiteten Gleichungssysteme oder aber

c) die beiden Gleichungen

$$\overline{F}_1 = 0,$$
$$\overline{F}_2 = 0$$

Man beweist diesen Satz durch vollständig analoge Ueberlegungen, die zum Beweis des vorangehenden einfachen Satzes führten und man sieht auch unmittelbar, wie der Satz für den Fall mehrerer Unbekannten und Ungleichungen zu verallgemeinern wäre [1]).

Wie wir schon darauf hingewiesen haben, finden wir diese an und für sich einfachen Ueberlegungen deshalb beachtenswert, weil sie die Zusammenfassung gewisser physikalischer Probleme in ein einziges Variationsprinzip ermöglichen, bei welchen in verschiedenen Bereichen verschiedene Differentialgleichungen maßgebend sind. Insbesondere finden sie in den folgenden Zeilen eine unmittelbare Anwendung auf zwei physikalische Probleme.

---

1) Zur besonderen Veranschaulichung des obigen Satzes diene folgende einfache Aufgabe: man suche jene kürzeste Verbindung zweier Punkte, die ganz außerhalb zweier sich schneidender Kugeln liegt. Man erkennt leicht, daß diese nur aus geraden Linien, Hauptkreisen der Kugeln und Teilen der gemeinsamen Schnittkurve dieser letzteren bestehen kann.

§ 3.

Anwendung auf die Theorie der plastischen Medien.

Unter dem Begriffe „Plastizität" wollen wir folgende zwei physikalischen Eigenschaften zusammenfassen, welche für gewisse Materialien wenigstens annähernd zutreffen.

Erstens betrachten wir als charakteristisches Merkmal der plastischen Medien, daß sie ihre Isotropie bei bleibenden Formänderungen nicht verlieren. Wir nehmen im Zusammenhang damit an, daß die Abhängigkeit der Verzerrungsenergie von den Spannungsgrößen auch durch dauernde Formänderungen nicht modifiziert wird. Somit gewinnen wir die Grundlage zur Anwendung unseres Minimalprinzipes sowohl für rein elastische, als für plastisch deformierte Bereiche des Körpers, falls wir nur die im § 1 erwähnten Ungleichungen gebührend berücksichtigen.

Das zweite Merkmal der plastischen Medien liefern diese Ungleichungen selbst. Wir erwähnten bereits, daß die Grenze des elastischen Zustandes dadurch bestimmt wird, daß die größte Schubspannung einen festen Wert K nicht überschreiten kann. Wir verstehen nun unter plastischen Medien solche Stoffe, bei denen dieser obere Grenzwert der Schubspannung auch bei dauernden Formänderungen konstant bleibt. Bei den meisten Stoffen, besonders Metallen, die man in praxi als plastisch zu bezeichnen pflegt, wird die Elastizitätsgrenze durch die bleibenden Formänderungen etwas erhöht, so daß unser Ansatz nur eine Annäherung an die Wirklichkeit bildet. Dieser Ansatz läuft nun darauf hinaus, daß keine der drei aus den drei Hauptspannungen $\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3$ gebildeten Differenzen dem absoluten Betrage nach größer als die Konstante $2K$ ausfällt. Die Hauptspannungen erhält man in den Spannungskomponenten ausgedrückt als Wurzeln der kubischen Gleichung

$$(5) \qquad \begin{vmatrix} X_x-\Delta & X_y & X_z \\ Y_x & Y_y-\Delta & Y_z \\ Z_x & Z_y & Z_z-\Delta \end{vmatrix} = 0.$$

Die drei Ungleichungen kann man geeigneter Weise so umgestalten, daß man die kubische Gleichung für die Werte

$$(\Delta_1-\Delta_2)^2,\ (\Delta_2-\Delta_3)^2,\ (\Delta_3-\Delta_1)^2$$

bildet und fordert, daß alle drei Wurzeln dieser Gleichung kleiner oder höchstens gleich $4K^2$ seien. Diese Gleichung lautet

$$z(z-P+3Q)^2-\Delta = 0,$$

wo P und Q die im § 1 erwähnten Invarianten, Δ die Diskriminante der kubischen Gleichung (5) bezeichnet.

Somit haben wir folgendes Variationsproblem:

Unter allen Funktionensystemen $X_x, Y_y, Z_z, X_y, Y_z, Z_x$, die den drei Gleichgewichtsgleichungen (1) und den Ungleichungen

$$(\Lambda_1 - \Lambda_2)^2 \leqq 4K^2,$$
$$(\Lambda_2 - \Lambda_3)^2 \leqq 4K^2,$$
$$(\Lambda_3 - \Lambda_1)^2 \leqq 4K^2$$

und die an der Begrenzung gewissen durch die dort gegebenen Spannungen gelieferten Randbedingungen genügen, wird dasjenige System den tatsächlich stattfindenden Gleichgewichtszustand ergeben, welches das Integral

$$\iiint W(X_x, Y_y, Z_z, X_y, Y_z, Z_x)\, dx\, dy\, dz$$

zum Minimum macht.

Gemäß den Hülfssätzen des § 2 können wir über die Lösung des Problems folgendes aussagen:

a) Ist das Lösungssystem in einem Teilbereiche A des Gesamtgebietes so beschaffen, daß keine der Größen $(\Lambda_1 - \Lambda_2)^2$, $(\Lambda_2 - \Lambda_3)^2$ $(\Lambda_3 - \Lambda_1)^2$ ihre zulässige Grenze erreicht, so befriedigen die Funktionen $X_x, \ldots, Z_x$ daselbst die Lagrangeschen Gleichungen des Variationsproblems ohne Ungleichungen. Wie im § 1 gezeigt wurde, sind die Lagrangeschen Gleichungen dieser Variationsaufgabe die drei Kompatibilitätsgleichungen der gewöhnlichen Elastizitätstheorie und diese bestimmen mit den drei Gleichgewichtsgleichungen die 6 unbekannten Funktionen. Das Gebiet A sei daher als der rein elastische Teil des Körpers bezeichnet.

b) Betrachten wir nun einen Teilbereich B, wo in jedem Punkte eine der genannten Größen, etwa $(\Lambda_1 - \Lambda_2)^2$ gleich $4K^2$ ist, die anderen jedoch kleiner ausfallen. Unser Lehrsatz des § 2 lehrt, daß in einem solchen Bereiche die Lagrangeschen Differentialgleichungen des Variationsproblems erfüllt sind, bei welchem außer den drei Gleichgewichtsgleichungen noch die Gleichung

$$(\Lambda_1 - \Lambda_2)^2 - 4K^2 = 0$$

oder — was damit gleichbedeutend ist — die Gleichung

$$\Phi = 4K^2(4K^2 - P + 3Q)^2 - \Delta = 0$$

als Nebenbedingung zu berücksichtigen ist, die beiden anderen Ungleichungen jedoch außer Acht gelassen werden.

Bezeichnen wir mit $\tau(x, y, z)$ den Lagrangeschen Faktor dieser letzten Nebenbedingung, so erhalten wir — wenn wir die Lagrangeschen Faktoren der Gleichgewichtsgleichungen analog wie bei der Ableitung der Kompatibilitätsgleichungen der Elastizitätstheorie eliminieren — folgendes Gleichungssystem:

$$
(6)\quad
\begin{aligned}
\frac{\partial^2}{\partial x\,\partial y}\left(\frac{\partial(W+\tau\Phi)}{\partial X_y}\right) &= \frac{\partial^2}{\partial y^2}\left(\frac{\partial(W+\tau\Phi)}{\partial X_x}\right)+\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(\frac{\partial(W+\tau\Phi)}{\partial Y_y}\right)\\
\frac{\partial^2}{\partial y\,\partial z}\left(\frac{\partial(W+\tau\Phi)}{\partial Y_z}\right) &= \frac{\partial^2}{\partial z^2}\left(\frac{\partial(W+\tau\Phi)}{\partial Y_y}\right)+\frac{\partial^2}{\partial y^2}\left(\frac{\partial(W+\tau\Phi)}{\partial Z_z}\right)\\
\frac{\partial^2}{\partial z\,\partial x}\left(\frac{\partial(W+\tau\Phi)}{\partial Z_x}\right) &= \frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(\frac{\partial(W+\tau\Phi)}{\partial Z_z}\right)+\frac{\partial^2}{\partial z^2}\left(\frac{\partial(W+\tau\Phi)}{\partial X_x}\right).
\end{aligned}
$$

Dieses System liefert mit den drei Gleichgewichtsgleichungen und der Gleichung $\Phi = 0$ zusammen ein bestimmtes Gleichungssystem für die 6 Spannungskomponenten und für die Funktion τ.

Ein durch diese Gleichungen regulierter Spannungszustand, den wir später noch näher charakterisieren wollen, sei als „halbplastisch" bezeichnet[1]).

c) Sind schließlich in einem Bereiche C zwei der Ungleichungen in die entsprechenden Gleichungen ausgeartet, etwa

$$
(7)\qquad
\begin{aligned}
(A_1-A_2)^2 &= 4K^2,\\
(A_2-A_3)^2 &= 4K^2,
\end{aligned}
$$

so folgt daraus unmittelbar, daß $A_1 = A_3$ sein muß, d. h. daß das sog. „Spannungsellipsoid" in jedem Punkte von C eine Rotationsfläche ist. Da dies zwei reelle Bedingungen für die Koeffizienten der Gleichung (5), d. h. für die Spannungskomponenten liefert, so erhalten wir mit einer der Gleichungen (7) und den drei Gleichgewichtsbedingungen zusammen wieder ein System von sechs Differentialgleichungen für die sechs Spannungsgrößen. Diesen Zustand wollen wir „vollplastisch" nennen; es sei bemerkt, daß die Gleichungen, die diesen extremen Zu-

1) Man beachte, daß die Gleichungen (6) — die die Kompatibilitätsgleichungen der Elastizitätstheorie ersetzen — für $\tau = 0$ in die Gleichungen (3) S. 3 übergehen, so daß man ein gemeinschaftliches Gleichungssystem der elastischen und halbplastischen Spannungszustände erhält, wenn man zu den 3 Gleichgewichtsgleichungen und den Gleichungen (6) die Gleichung $\tau\Phi = 0$ hinzufügt.

stand regulieren, vom Energieansatz und daher von den ursprünglichen elastischen Konstanten des Stoffes unabhängig sind.

Bei der plastischen Deformation eines ursprünglich rein elastischen Körpers können wir daher im allgemeinen drei verschiedene Bereiche unterscheiden, in denen je verschiedene Arten von Spannungsverteilungen auftreten. Die Grenzen der Bereiche werden lediglich durch den stetigen Uebergang der Spannungen gegeben.

Wir wollen noch kurz auf den „halbplastischen" Zustand zurückkommen. Für einen solchen Bereich haben wir das Variationsproblem

$$\iiint W(X_x, \ldots, Z_x)\, dx\, dy\, dz = \text{Min.}$$

mit den Nebenbedingungen

$$\begin{cases} \dfrac{\partial X_x}{\partial x} + \dfrac{\partial X_y}{\partial y} + \dfrac{\partial X_z}{\partial z} = 0, \\ \dfrac{\partial Y_x}{\partial x} + \dfrac{\partial Y_y}{\partial y} + \dfrac{\partial Y_z}{\partial z} = 0, \\ \dfrac{\partial Z_x}{\partial x} + \dfrac{\partial Z_y}{\partial y} + \dfrac{\partial Z_z}{\partial z} = 0 \end{cases}$$

und

$$4K^3(4K^3 - P + 3Q)^2 - \Delta = 0$$

zum Minimum zu machen. Bezeichnen wir die Lagrangeschen Faktoren der Gleichgewichtsgleichungen ähnlich wie in § 1 mit u, v, w, so können wir diese als drei zusätzliche Unbekannte betrachten und die Lösung dadurch charakterisieren, daß wir die Beziehungen zwischen u, v, w und den $X_x, Y_y, \ldots Z_x$ angeben. Wir haben in § 1 gesehen, daß beim elastischen Problem u, v, w, als die elastischen Verschiebungen gedeutet werden konnten; ähnlich können wir sagen, daß wir den halbplastischen Zustand uns vorstellen können, als entstanden durch Verschiebungen, welche jenen drei Lagrangeschen Faktoren u, v, w gleich sind und welche wegen der oben abgeleiteten Bedingungen mit den Spannungen folgendermaßen zusammenhängen:

Wir bilden die den Verschiebungen u, v, w, entsprechenden Deformationsgrößen

$$\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial v}{\partial y}, \frac{\partial w}{\partial z}, \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right), \left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}\right), \left(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z}\right)$$

und bezeichnen die Hauptdeformationen, d. h. die Wurzeln der kubischen Gleichung

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial u}{\partial x}-\lambda, & \left(\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial x}\right), & \left(\frac{\partial w}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial z}\right) \\ \left(\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial x}\right), & \frac{\partial v}{\partial y}-\lambda, & \left(\frac{\partial v}{\partial z}+\frac{\partial w}{\partial y}\right) \\ \left(\frac{\partial w}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial z}\right), & \left(\frac{\partial v}{\partial z}+\frac{\partial w}{\partial y}\right), & \frac{\partial w}{\partial z}-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

mit $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$. Alsdann können wir folgendes aussagen:

1) $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ fallen gerade so, wie bei dem elastischen Spannungszustande, in die Richtungen der drei Hauptspannungen $\Lambda_1, \Lambda_2, \Lambda_3$.

2) Sind etwa Λ_1 und Λ_3 die zwei extremen Hauptspannungen deren Differenz $\pm 2K$ beträgt, so hängen der Mittelwert dieser beiden Spannungen $\frac{\Lambda_1+\Lambda_3}{2}$ und die dritte (mittlere) Hauptspannung Λ_2 mit den Größen $\frac{\lambda_1+\lambda_3}{2}$ bezw. λ_2 durch dieselbe Relationen zusammen, wie die rein elastischen Deformationsgrößen und Spannungen. Es gelten also die Relationen

$$\frac{\lambda_1+\lambda_3}{2} = \frac{1}{E}(\Lambda_1+\Lambda_2+\Lambda_3)-\frac{1}{2\mu}\left(\Lambda_2+\frac{\Lambda_1+\Lambda_3}{2}\right)$$

$$\lambda_2 = \frac{1}{E}(\Lambda_1+\Lambda_2+\Lambda_3)-\frac{1}{2\mu}(\Lambda_1+\Lambda_3).$$

Aus diesen Relationen folgt, daß der den Verschiebungen u, v, w entsprechenden Dilatation

$$\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z} = \lambda_1+\lambda_2+\lambda_3$$

die Größenordnung der elastischen Dilatationen zukommt. Dagegen betrachten St. Venant und M. Lévy in ihren Ableitungen der Gleichungen der „Plasticodynamique“ [1]) die plastischen Medien als inkompressibel — eine Annäherung, welche augenscheinlich nur dann zulässig ist, falls die plastischen Wege sehr groß gegen die elastischen Verschiebungen ausfallen. Dies wird aber gerade in den meist interessanten Fällen, wo elastische und plastische Bereiche gleichzeitig neben einander auftreten, kaum der Fall sein. Wir glauben durch unsere Gleichungen der Wirklichkeit gerade in diesen Fällen näher zu kommen.

1) Vgl. B. de St. Venant, Comptes Rendus Bd. 70, 72, 74 (1870—1872), Journal de Math., Bd. 16 (1871) p. 473. M. Lévy, Comptes Rendus, Bd. 70 (1870).

§ 4.

Die Problemstellungen der Erddruckstheorie.

Durch dieselbe Methode, die wir an dem Beispiele der Plastizitätstheorie dargelegt haben, könnte man auch zu einer systematischen Behandlung der Spannungszustände in sandartigen Massen gelangen. Diese Medien werden — wie bereits erwähnt — physikalisch dadurch charakterisiert, daß die Richtung der Spannung in Bezug auf jedes Flächenelement nicht außerhalb eines Reibungskegels (von vorgegebener Winkelöffnung) fallen kann; mathematisch läuft diese Bedingung wieder auf ein System von Ungleichungen hinaus, die besagen, daß das Verhältnis zweier beliebiger Hauptspannungen zwischen zwei bestimmten positiven Grenzwerten K und $\frac{1}{K}$ liegt. Bezeichnen wir die Hauptspannungen wiederum mit $\Lambda_1, \Lambda_2, \Lambda_3$ so gilt

$$\frac{\Lambda_1}{\Lambda_2}+\frac{\Lambda_2}{\Lambda_1} \leqq K+\frac{1}{K},$$

$$\frac{\Lambda_2}{\Lambda_3}+\frac{\Lambda_3}{\Lambda_2} \leqq K+\frac{1}{K},$$

$$\frac{\Lambda_3}{\Lambda_1}+\frac{\Lambda_1}{\Lambda_3} \leqq K+\frac{1}{K}.$$

Durch diese Ungleichungen wird der rein elastische Zustand in einer sandartigen Masse umgrenzt. Im Gegensatz zur Plastizitätstheorie beschränken sich aber unsere sicheren Kenntnisse gerade nur auf die Grenzen des elastischen Zustandes ohne über die Gesetzmäßigkeiten der elastischen Formänderungen selbst Aufschluß zu geben[1]). Es fehlt namentlich ein sicherer Ansatz für die Verzerrungsenergie. Bei Kenntnis eines solchen Ansatzes würden unsere Ausführungen ohne Schwierigkeit auf dieses Gebiet übertragen werden können und zu ganz bestimmten Gleichungssystemen für die drei Arten der möglichen Spannungszustände führen. Nun sind aber die Gleichungen für den extremen Fall, falls zwei Ungleichungen in Gleichungen ausarten, vollständig unabhängig vom Ansatze für die Verzerrungsenergie und so erhalten wir für diesen Spannungszustand auch bei sandartigen Massen ein vollständig bestimmtes System von 6 Differentialgleichungen für die 6 unbekannten Spannungsgrößen. Wir haben

1) Vgl. F. Kötter, Jahresbericht der Math. Vereinigung, Bd. 2 (1893).

wieder ein Rotationsellipsoid als Spannungsellipsoid in jedem Punkte und das Verhältnis der zwei gleichen Hauptspannungen zu der dritten wird durch die Konstante K bezw. $\frac{1}{K}$ bestimmt. Es sei bemerkt, daß diese Resultate mit den Annahmen, die in der technischen Literatur z. B. bei Behandlung der Grenzzustände eines gestützten Erdreiches zumeist gestellt werden, vollständig übereinstimmen.

Die Theorie des Erddrucks liefert aber noch eine andere Art von Problemstellungen. Bei den bisherigen Ausführungen beschränkten wir uns auf den Fall an der Begrenzung gegebenen Spannungen; die technisch wichtigen Fragen der Erddrucktheorie fordern aber gerade die Bestimmung der an der Begrenzung anzubringenden Kräfte, bei welchen ein Gleichgewicht noch stattfinden kann[1]). Diese Probleme — z. B. die Frage des sog. aktiven und passiven Erddruckes — führen auf Variationsprobleme mit variablen Randbedingungen.

Auf diese Fragen kommen wir demnächst zurück.

---

1) Vgl. dazu F. Kötter l. c.

ANALYSE MATHÉMATIQUE. — *Sur l'unicité des solutions des équations aux dérivées partielles.* Note de M. **Alfred Haar.**

Considérons l'équation aux dérivées partielles $q = f(p, z, x, y)$ où, suivant l'habitude, p, q désignent les dérivées premières de la fonction $z(x, y)$. Si les dérivées premières du second membre $f(p, z, x, y)$ vérifient la condition de Lipschitz, la théorie classique des caractéristiques fournit une solution se réduisant pour $y = 0$, $x_1 \leqq x \leqq x_2$ à une fonction $\varphi(x)$ arbitrairement donnée

$$z(x, 0) = \varphi(x) \tag{1}$$

à condition que la fonction $\varphi(x)$ admette dans l'intervalle (x_1, x_2) une dérivée seconde continue. Il résulte aussi de cette théorie que l'équation proposée ne possède aucune autre solution *dérivable deux fois* et satisfaisant à la condition (1). La condition soulignée joue un rôle essentiel dans la théorie des caractéristiques, car pour établir les équations différentielles des caractéristiques on fait appel à cette dérivabilité en cause de sorte que, *a priori*, il n'est pas impossible qu'il existe une seconde solution, dérivable celle-là une fois seulement, et vérifiant la condition (1).

Ces considérations m'ont conduit à examiner si l'unicité de la solution est assurée sous la seule hypothèse — inhérente à la nature du problème — que la solution admette des dérivées premières. Dans cet ordre d'idées, nous sommes arrivés à démontrer le théorème suivant :

Théorème. — *Supposons que la fonction $f(p, z, x, y)$ soit continue dans le domaine*

$$x_1 \leqq x \leqq x_2, \qquad 0 \leqq y \leqq y_0, \qquad z_1 \leqq z \leqq z_2, \qquad p_1 \leqq p \leqq p_2,$$

et que, par rapport aux dernières variables, on ait la condition de Lipschitz

$$|f(p, z, x, y) - f(\bar{p}, \bar{z}, x, y)| \leqq \mathrm{L}|p - \bar{p}| + \mathrm{M}|z - \bar{z}|.$$

Supposons, en outre, que $\varphi(x)$ et sa dérivée $\varphi'(x)$ vérifient au sens strict les inégalités

$$z_1 < \varphi(x) < z_2, \qquad p_1 < \varphi'(x) < p_2,$$

pour $x_1 \leqq x \leqq x_2$. Dans ces conditions, $|\delta|$ étant un nombre suffisamment petit,

deux solutions de l'équation donnée, qui satisfont à la condition (1) *et qui ont des dérivées premières continues par rapport à x et y, sont identiques dans le quadrilatère* Σ *limité par les droites*

$$y = 0, \qquad y = \frac{1}{L}(x - x_1), \qquad y = -\frac{1}{L}(x - x_2), \qquad y = \delta.$$

En effet, la différence $Z(x, y)$ des deux solutions supposées vérifierait, pour $|y|$ assez petit, l'inégalité

$$|Q| \leqq L|P| + M|Z|$$

$\left(\text{où } \frac{\partial Z}{\partial x} = P, \frac{\partial Z}{\partial y} = Q\right)$ et l'on aurait

$$Z(x, 0) = 0 \qquad \text{pour} \qquad x_1 \leqq x \leqq x_2.$$

Pour conclure de là le théorème énoncé, il faut faire usage du lemme suivant :

LEMME. — *Si, dans le triangle*

$$\xi_1 \leqq x \leqq \xi_2, \qquad y \leqq \frac{1}{L}(x - \xi_1), \qquad y \geqq -\frac{1}{L}(x - \xi_2),$$

la fonction $Z(x, y)$ *est telle que :*

1° *ses dérivées premières sont continues ;*

2° $|Q| \leqq L|P| + M|Z|$;

3° $Z(x, 0) = 0$ *pour* $\xi_1 \leqq x \leqq \xi_4$;

alors elle est identiquement nulle dans ce triangle.

Il suffit de démontrer ce lemme pour le cas $L = M = 1$ auquel le cas général se réduit immédiatement. Considérons (dans l'hypothèse $L = M = 1$) la fonction $e^{-2y}Z(x, y)$; nous allons montrer qu'elle ne saurait avoir de maximum positif (ni de minimum négatif) dans le triangle en question. Supposons, en effet, que la fonction admette un maximum positif au point (x_0, y_0). Comme elle s'annule sur la droite $y = 0$, ce point est situé ailleurs. La différentiation suivant deux directions parallèles aux côtés du triangle conduit à la double inégalité

$$e^{-2y_0}(Q_0 \pm P_0 - 2Z_0) \geqq 0,$$

d'où, en choisissant convenablement le signe,

$$2Z_0 \leqq Q_0 - |P_0|.$$

Cette inégalité, combinée avec $Q_0 \leqq |P_0| + |Z_0|$, donne $2Z_0 \leqq |Z_0|$, ce qui contredit l'hypothèse $Z_0 > 0$.

Par un procédé classique, le théorème d'unicité ainsi obtenu peut immédiatement être généralisé au cas où l'équation proposée a la forme

$$F(p, q, z, x, y) = 0,$$

et où la condition (1) est remplacée par celle-ci : la solution doit passer par une courbe donnée qui n'est pas une caractéristique de l'équation, à supposer que la fonction F et la courbe donnée jouissent de certaines propriétés de dérivabilité.

Considérons, en particulier, le cas où la fonction est analytique par rapport à toutes les variables et la courbe donnée également analytique. La méthode de Cauchy fournit alors une solution sous forme de série entière et notre théorème permet d'énoncer le corollaire suivant :

Si une fonction à dérivées premières continues vérifie une équation analytique aux dérivées partielles du premier ordre et passe par une courbe analytique qui n'appartient pas aux caractéristiques de l'équation, elle est elle-même analytique dans le voisinage de cette courbe.

Nos résultats sont susceptibles de généralisation pour un nombre quelconque de variables indépendantes ainsi que pour les systèmes d'équations aux dérivées partielles. Nous y reviendrons dans un travail plus développé.

Observations sur la Note précédente, par M. **Hadamard**.

Il y a lieu de noter que le raisonnement qui précède permet de limiter en valeur absolue la différence Z de deux solutions de l'équation, dans le quadrilatère Σ, du moment qu'on a un maximum m de $|Z|$ sur le segment (x_1, x_2) de l'axe des x (et cela toujours moyennant les mêmes hypothèses simples relatives à f). Il montre, en effet, que le maximum de $|Z|e^{-2y}$ — ou, plus généralement, celui de $|Z|e^{-\alpha y}$, en désignant par α un nombre quelconque plus grand que 1, — ne peut avoir lieu que sur l'axe des x, de sorte que $|Z| \leq me^{\alpha y}$.

On sait que la question de l'unicité des solutions des équations aux dérivées partielles a été résolue, dans un cas assez général et particulièrement important — celui des équations linéaires à coefficients analytiques — par un théorème connu de M. Holmgren. Les développements annoncés par M. Haar feront certainement faire un pas nouveau à cette question.

Il est à craindre, toutefois, que leur portée dans ce sens ne soit limitée

par la remarque précédente : complétant le résultat de M. Haar sous le point de vue de la « compréhension » (au sens des logiciens), elle tend à en restreindre l' « extension ». On voit, en effet, que, si une méthode analogue à celle de l'auteur s'applique à des cas plus généraux, elle conduira, elle aussi, à une limitation de la solution en fonction des données. Or nous savons (voir nos *Yale Lectures*, I, n° 18, p. 33-34) qu'une telle limitation est impossible pour l'équation de Laplace $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0$ (laquelle relève, par contre, de l'analyse de M. Holmgren).

(Extrait des *Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences*, t. 187, p. 23, séance du 2 juillet 1928.)

GAUTHIER-VILLARS, IMPRIMEUR-LIBRAIRE DES COMPTES RENDUS DES SÉANCES DE L'ACADÉMIE DES SCIENCES.
84475-28 Paris, — Quai des Grands-Augustins, 55.

Zur Charakteristikentheorie.

Von Alfred Haar in Szeged.

Einleitung.

Um die in der vorliegenden Note behandelte Frage zu beleuchten, wollen wir einige kritische Bemerkungen über die klassische Theorie der partiellen Differentialgleichung

$$F(p, q, z, x, y) = 0 \tag{I}$$

vorausschicken, wo — wie üblich — die ersten Ableitungen der unbekannten Funktion $z(x, y)$ nach x bzw. y mit p bzw. q bezeichnet wurden. Um Schwierigkeiten, an die es hier nicht ankommt, vorzubeugen, wollen wir annehmen, dass alle partiellen Ableitungen zweiter Ordnung der Funktion $F(p, q, z, x, y)$ für die in Betracht kommenden Wertsysteme stetige Funktionen der fünf Argumente sind.

Vermöge der Charakteristikentheorie wird der Gleichung (I) das folgende System von 5 gewöhnlichen Differentialgleichungen zugeordnet:[1])

$$\begin{aligned} &\frac{dx}{dt} = F_p, \quad \frac{dy}{dt} = F_q, \quad \frac{dz}{dt} = pF_p + qF_q, \\ &\frac{dp}{dt} = -(F_x + pF_z), \quad \frac{dq}{dt} = -(F_y + qF_z), \end{aligned} \tag{II}$$

und man interpretiert die die Bedingung $F(p, q, z, x, y) = 0$ erfüllenden Lösungen von (II) als die charakteristischen Streifen von (I). Die Grundlage der Charakteristikentheorie ist die folgende Tatsache:

Ist $z = \varphi(x, y)$ eine Lösung von (I), *deren Ableitungen zweiter Ordnung in einer Umgebung der Stelle x_0, y_0 existieren,*

[1]) Wir bezeichnen — wie üblich — die partiellen Ableitungen einer Funktion durch Hinzufügung der entsprechenden Indizes.

$$z_0 = \varphi(x_0, y_0), \quad p_0 = \varphi_x(x_0, y_0), \quad q_0 = \varphi_y(x_0, y_0),$$

sind ferner die Ableitungen zweiter Ordnung von $F(p, q, z, x, y)$ *stetige Funktionen in der Umgebung der Stelle* x_0, y_0, z_0, p_0, q_0, *so dass die Gleichungen* (II) *eine Lösung* $x(t), y(t), z(t), p(t), q(t)$ *besitzen, für die*

$$x(0) = x_0, \; y(0) = y_0, \; z(0) = z_0, \; p(0) = p_0, \; q(0) = q_0$$

ist, so ist für hinreichend kleine $|t|$

$$z(t) = \varphi(x(t), y(t)), \; p(t) = \varphi_x(x(t), y(t)), \; q(t) = \varphi_y(x(t), y(t)),$$

d. h. die betrachtete Lösung von (I) *„enthält" den charakteristischen Streifen, den die Lösungen von* (II) *definieren.*

Auf diesen Satz stützt sich die Integrationstheorie von (I), die natürlich auch einen Existenzbeweis für die Lösbarkeit dieser Gleichung liefert, und zwar den allgemeinsten der überhaupt gegeben wurde. Ich betone noch, dass *die Existenz der zweiten Abteitungen von* $\varphi(x, y)$ bei dem Beweise des obigen Satzes *unerlässlich ist;* diese Tatsache ist in verschiedenen Lehrbüchern — auch in den allerneusten — oft übersehen worden und führte daher zu Schlüssen (beispielsweise über die Unizität der Lösungen von (I)), die nicht statthaft sind.

Wir bezeichnen mit

$$\begin{gathered} x = x(t; x_0, y_0, z_0, p_0, q_0), \; y = y(t; x_0, y_0, z_0, p_0, q_0), \\ z = z(t; x_0, y_0, z_0, p_0, q_0), \; p = p(t; x_0, y_0, z_0, p_0, q_0), \\ q = q(t; x_0, y_0, z_0, p_0, q_0) \end{gathered} \tag{III}$$

diejenigen Lösungen von (II), die für $t = 0$ bzw. in x_0, y_0, z_0, p_0, q_0 übergehen. Unter der gemachten Annahme, dass alle zweiten Ableitungen von F in einer Umgebung (U) der Stelle x_0, y_0, z_0, p_0, q_0 stetige Funktionen sind, existieren *alle* ersten Ableitungen der obigen Funktionen (III) nach den Veränderlichen $t, x_0, y_0, z_0, p_0, q_0$ in einer gewissen Umgebung der betrachteten Stelle.

Um den Hauptsatz dieser Theorie in exakter Weise formulieren zu können, betrachten wir eine Kurve im x, y, z-Raume

$$x = \bar{x}(\tau), \; y = \bar{y}(\tau), \; z = \bar{z}(\tau), \tag{IV}$$

wo $\bar{x}(\tau), \bar{y}(\tau), \bar{z}(\tau)$ in einem Intervall $\tau' \leqq \tau \leqq \tau''$ stetig differenzierbare Funktionen bedeuten, und bestimmen einen hindurchgehenden Streifen, indem wir $\bar{p}(\tau)$ und $\bar{q}(\tau)$ aus den Gleichungen

$$\frac{d\bar{z}}{d\tau} = \bar{p}\,\frac{d\bar{x}}{d\tau} + \bar{q}\,\frac{d\bar{y}}{d\tau}, \quad F(\bar{p}, \bar{q}, \bar{z}, \bar{x}, \bar{y}) = 0 \tag{IV'}$$

berechnen; wir nehmen an, dass diese Berechnung möglich ist, und dass man solche stetige Funktionen $\bar{p}(\tau)$, $\bar{q}(\tau)$ gewinnt, dass der Wertevorrat der 5 Funktionen $\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}, \bar{p}, \bar{q}$ (für die betrachteten Werte von τ) in der obigen Umgebung *(U)* liegt.

Alsdann sind

$$X(t, \tau) = x(t; \bar{x}(\tau), \bar{y}(\tau), \bar{z}(\tau), \bar{p}(\tau), \bar{q}(\tau)),$$
$$Y(t, \tau) = y(t; \bar{x}(\tau), \bar{y}(\tau), \bar{z}(\tau), \bar{p}(\tau), \bar{q}(\tau)),$$
$$Z(t, \tau) = z(t; \bar{x}(\tau), \bar{y}(\tau), \bar{z}(\tau), \bar{p}(\tau), \bar{q}(\tau))$$

(für die betrachteten Werte von t und τ) jedenfalls stetige Funktionen der beiden Variablen, die in Bezug auf t differenzierbar sind und das Gleichungssystem (II) befriedigen. Wenn ferner weder der Streifen

$$x = \bar{x}(\tau), \quad y = \bar{y}(\tau), \quad z = \bar{z}(\tau), \quad p = \bar{p}(\tau), \quad q = \bar{q}(\tau),$$

noch irgendein Teil desselben charakteristisch ist, so stellt

$$x = X(t, \tau), \quad y = Y(t, \tau), \quad z = Z(t, \tau) \qquad \text{(V)}$$

eine Fläche dar, da die Parameterlinien $t =$ konst. und $\tau =$ konst. verschieden sind. *Unter der weiteren Annahme, dass X, Y, Z auch nach τ differenzierbar sind*, kann man auf eine sinnreiche (von CAUCHY herrührende) Weise zeigen, dass die Fläche (V) eine (die Kurve (IV) enthaltende) Lösung der vorgelegten Gleichung (I) darstellt. Um die Existenz dieser Ableitungen zu sichern, muss man — da die in (III) vorkommenden Funktionen nach allen Veränderlichen differenzierbar sind — eine Annahme über $\bar{p}(\tau)$, $\bar{q}(\tau)$ machen, etwa die Differenzierbarkeit dieser Funktionen. Da diese Funktionen aus (IV') berechnet wurden, so ist diese Bedingung erfüllt, falls $\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}$ *zweimal stetig differenzierbare* Funktionen sind. Man gewinnt also den Satz, dass *falls die angegebenen Bedingungen erfüllt sind, $\bar{x}(\tau)$, $\bar{y}(\tau)$, $\bar{z}(\tau)$ aber zweimal stetig differenzierbare Funktionen bedeuten, die keine Charakteristik darstellen, so besitzt die vorgelegte Gleichung* (I) *eine Lösung $z = \varphi(x, y)$, für die*

$$\bar{z}(\tau) = \varphi(\bar{x}(\tau), \bar{y}(\tau))$$

ist.

In den üblichen Darstellungen dieser Theorie wird häufig die zweimalige Differenzierbarkeit der gegebenen Kurve (IV) ausser Acht gelassen und man begnügt sich mit der Annahme, dass

$\bar{x}(\tau)$, $\bar{y}(\tau)$, $\bar{z}(\tau)$ einmal differenzierbare Funktionen sind. Freilich ist dieser Schluss anfechtbar, da man daraus nicht schliessen kann, dass die aus (IV') berechneten Funktionen $\bar{p}(\tau)$, $\bar{q}(\tau)$ differenzierbar sind, folglich, dass die durch die Charakteristikentheorie gelieferte Fläche (V) Ableitungen besitzt. Daher kann auch keine Rede davon sein, dass diese Fläche eine Lösung der partiellen Differentialgleichung (I) darstellt. Dies ist ein bemerkenswerter Umstand; obwohl die vorgelegte Differentialgleichung nur Ableitungen erster Ordnung enthält, *so genügt für die vorgelegte Kurve die Forderung der einmaligen Differenzierbarkeit nicht* um stets zu einer Lösung zu gelangen, wenigstens nicht auf den durch die Charakteristikentheorie gelieferten Weg.

Dadurch wird nun die Frage nahe gelegt, ob dieser Umstand im Wesen des Problems liegt oder nur eine Eigenschaft der Behandlungsweise (durch die geschilderte Charakteristikentheorie) ist? Es handelt sich also um die Frage, ob es Lösungen der Differentialgleichung (I) gibt, die durch die Charakteristikentheorie nicht geliefert werden können; solche Lösungen können allerdings nicht zweimal differenzierbar sein, was aber auch gar nicht nötig ist.

Die vorliegende Note enthält das Resultat, dass die aufgeworfene Frage verneinend zu beantworten ist für eine sehr allgemeine Klasse von Differentialgleichungen (I). Die Grundidee unseres Beweises kann natürlich nicht aus der Charakteristikentheorie entspringen; es müssen allgemeinere, umfassendere Sätze über die Lösungen von (I) gewonnen werden um zu diesem Satz zu gelangen; diese sollen im § 1 entwickelt werden.

§ 1. Hülfssätze.[2])

Die Grundlage unserer Betrachtungen ist das folgende

Lemma. *Es sei $z(x, y)$ eine im Dreieck*

$$y \geqq 0,\ y \geqq (x-x'),\ y \leqq -(x-x''),\ (x'' > x')$$

definierte Funktion, deren erste Ableitungen nach x und y (die wir mit p und q bezeichnen) daselbst stetige Funktionen sind, und es

[2]) [Anmerkung während der Korrektur.] Die in diesem §. gewonnenen Sätze schliessen sich unmittelbar an die Resultate an, die ich kürzlich in den *Comptes Rendus* (2. Juli 1928) veröffentlicht habe. („Sur l'unicité des solutions....“). Vgl. auch insbesondere die anschliessenden Bemerkungen von Herrn HADAMARD.

sei für jede Stelle dieses Gebietes

$$|q| \leqq |p| + |z|. \qquad (U)$$

Ist M der Maximalwert der Funktion $|z(x, y)|$ *längs der Seite* $y = 0$ *des Dreiecks, d. h.*

$$|z(x, 0)| \leqq M, \quad \text{für} \quad x' \leqq x \leqq x'',$$

so ist an jeder Stelle des betrachteten Dreiecks

$$|z(x, y)| \leqq M e^{y}.$$

In der Tat, würde es eine Stelle (x_0, y_0) innerhalb dieses Dreiecks oder auf der Peripherie desselben geben, wo etwa

$$z(x_0, y_0) > M e^{y_0}$$

wäre, so wäre auch für hinreichend kleine positive δ

$$z(x_0, y_0) > M e^{(1+\delta) y_0}.$$

Wir denken uns eine positive Grösse δ von dieser Beschaffenheit fixiert und betrachten die Funktion

$$Z(x, y) = e^{-(1+\delta) y} z(x, y),$$

die ebenfalls im obigen Dreieck definiert ist und ihr Maximum jedenfalls nicht auf der Geraden $y = 0$ annimmt, da ja für $y = 0$

$$Z(x, 0) = z(x, 0) \leqq M,$$

für $x = x_0$, $y = y_0$ aber

$$Z(x_0, y_0) > M$$

ist. Es sei x_1, y_1 diejenige Stelle, wo $Z(x, y)$ ihren Maximalwert (der also $> M$ ist) annimmt. Da dieser Punkt nicht auf der Geraden $y = 0$ liegen kann, so ist jedenfalls für hinreichend kleine positive h

$$Z(x_1, y_1) \geqq Z(x_1 - h, y_1 - h),$$

und

$$Z(x_1, y_1) \geqq Z(x_1 + h, y_1 - h),$$

da die Punkte $(x_1 - h, y_1 - h)$ und $(x_1 + h, y_1 - h)$ für hinreichend kleine positive h innerhalb oder auf der Peripherie des betrachteten Dreiecks liegen. Daher ist für $h = 0$

$$\frac{dZ(x_1 - h, y_1 - h)}{dh} \leqq 0, \quad \frac{dZ(x_1 + h, y_1 - h)}{dh} \leqq 0,$$

d. h. es ist für $x = x_1$, $y = y_1$

$$\frac{\partial Z}{\partial y} + \frac{\partial Z}{\partial x} = e^{-(1+\delta) y} (q + p - (1 + \delta) z) \geqq 0,$$

$$\frac{\partial Z}{\partial y} - \frac{\partial Z}{\partial x} = e^{-(1+\delta) y} (q - p - (1 + \delta) z) \geqq 0.$$

Daraus folgt aber, dass

$$q(x_1, y_1) - |p(x_1, y_1)| \geqq (1+\delta)\, z(x_1, y_1)$$

ist; diese Ungleichung liefert aber in Verbindung mit der angenommenen Ungleichung *(U)* — aus der unmittelbar

$$q - |p| \leqq |z(x, y)|$$

folgt — die Ungleichung

$$|z(x_1, y_1)| \geqq (1+\delta)\, z(x_1, y_1).$$

Diese Ungleichung ist aber mit $\delta > 0$ und $z(x_1, y_1) > 0$ im Widerspruch; die letzte Ungleichung muss statthaben, da ja

$$Z(x_1, y_1) = e^{-(1+\delta) y_1} z(x_1, y_1) > M \geqq 0$$

ist. In genau derselben Weise zeigt man die Unmöglichkeit der Ungleichung

$$z(x_0, y_0) < -M e^{y_0},$$

womit unser Lemma bewiesen ist.

Der soeben bewiesene Satz ist einer geringen Verallgemeinerung fähig, wenn man an Stelle der Veränderlichen x, y durch die Relationen

$$x = A\bar{x},\ y = B\bar{y}$$

(wobei A und B positive Konstanten bedeuten) neue Variable einführt. Man erhält auf diese Weise — wenn man zur Abkürzung $\frac{B}{A} = L$ einführt — den folgenden Satz:

Es sei $z(x, y)$ eine im Dreieck

$$y \geqq 0, \quad y \geqq \frac{1}{L}(x - x'), \quad y \leqq -\frac{1}{L}(x - x'')$$
$$x' < x'', \quad L > 0$$

definierte Funktion, deren erste Ableitungen nach x und y daselbst stetige Funktionen sind, und es sei für jede Stelle dieses Gebietes

$$|q| \leqq L|p| + B|z|, \quad (B > 0).$$

Ist M der Maximalwert der Funktion $|z(x, y)|$ längs der Geraden $y = 0$, so ist für jede Stelle des betrachteten Dreiecks

$$|z(x, y)| \leqq M e^{By}.$$

Dieser Satz bleibt offenbar richtig, wenn die Funktion $z(x, y)$ nur für solche Stellen des obigen Dreiecks definiert ist, deren

y-Koordinate unterhalb einer positiven Grenze y'' bleibt, d. h. wenn der Definitionsbereich dieser Funktion das durch die Geraden

$$y=0, \quad y=\frac{1}{L}(x-x'), \quad y=-\frac{1}{L}(x-x''), \quad y=y''$$

begrenzte Viereck ist, da der obige Beweis wörtlich auch für diesen Fall gilt.

Wir betrachten nun eine partielle Differentialgleichung von der Form

$$q+f(p,z,x,y)=0 \tag{1}$$

und nehmen, an, dass die Funktion $f(p,z,x,y)$ stetig in dem durch die Ungleichungen

$$x'\leqq x\leqq x'', \quad 0\leqq y\leqq y'', \tag{2'}$$
$$z'\leqq z\leqq z'', \quad p'\leqq p\leqq p'' \tag{2''}$$

definierten Bereich ist, und in Bezug auf die Veränderlichen z und p die Lipschitzsche Bedingung erfüllt:

$$|f(p,z,x,y)-f(\bar{p},\bar{z},x,y)|\leqq L_1|p-\bar{p}|+L_2|z-\bar{z}|, \tag{3}$$

wobei L_1 und L_2 positive Konstante bedeuten. Es seien ferner $z_1(x,y)$ und $z_2(x,y)$ zwei Lösungen der partiellen Differentialgleichung (1), (mit *stetigen* Ableitungen 1. Ordnung,) die für solche Werte von x und y definiert sind, die die Ungleichungen (2') erfüllen und so beschaffen sind, dass daselbst die Ungleichungen

$$z'\leqq z_1(x,y)\leqq z'', \quad p'\leqq p_1(x,y)\leqq p'',$$
$$z'\leqq z_2(x,y)\leqq z'', \quad p'\leqq p_2(x,y)\leqq p''$$

statthaben, wobei zur Abkürzung

$$p_1=\frac{\partial z_1}{\partial x}, \quad q_1=\frac{\partial z_1}{\partial y}, \quad p_2=\frac{\partial z_2}{\partial x}, \quad q_2=\frac{\partial z_2}{\partial y}$$

gesetzt wurde. Man erhält durch Subtraktion

$$|q_1-q_2|=|f(p_1,z_1,x,y)-f(p_2,z_2,x,y)|$$
$$\leqq L_1|p_1-p_2|+L_2|z_1-z_2|$$

und das oben gewonnene Resultat angewandt auf die Funktion $z=z_1-z_2$ liefert den folgenden

Satz: *Sind die Voraussetzungen, die wir für die Differentialgleichung* (1) *und für die Lösungen* $z_1(x,y)$, $z_2(x,y)$ *derselben gemacht haben, erfüllt, und bezeichnen wir mit* M *das Maximum der Funktion*

$$|z_1(x,0)-z_2(x,0)|$$

für $x' \leqq x \leqq x''$, *so gilt für jede Stelle des durch die Geraden*

$$y=0, \quad y=\frac{1}{L_1}(x-x'), \quad y=-\frac{1}{L_1}(x-x''), \quad y=y''$$

begrenzten Viereckes die Ungleichung

$$|z_1(x,y)-z_2(x,y)| \leqq M e^{L_2 y}.$$

Die Bedeutung dieses Satzes besteht darin, dass man für die Differenz zweier Lösungen von (1) im obigen Viereck eine obere Schranke gewinnt auf Grund der maximalen Abweichung dieser Lösungen längs der Geraden $y=0$. Der Satz enthält die Aussage *über die Stetigkeit der Lösungen als Funktionen-Funktion der Anfangswerte betrachtet,* indem wir als Anfangswerte diejenige Werte betrachten, die die Lösung für $y=0$ annimmt.

Wir haben unseren Satz für Differentialgleichungen von der Form (1) und Anfangswerte längs $y=0$ abgeleitet. Durch eine wohlbekannte Schlussweise kann man dieses Resultat auf Gleichungen von der Form (I) und auf solche Anfangsdaten übertragen, die nicht Charakteristiken von (I) sind.

Es sei noch hervorgehoben, dass die Existenz der Ableitungen zweiter Ordnung der fraglichen Lösungen nicht vorausgesetzt wurde; unser Satz ist also unabhängig davon, ob diese Lösungen durch die Charakteristikentheorie gewonnen werden können.

§ 2. Anwendung auf die Charakteristikentheorie.

Um den vorangehenden Satz auf die Charakteristikentheorie anzuwenden, nehmen wir der Einfachheit halber an, und um Schwierigkeiten, auf die es hier nicht ankommt, zu vermeiden, dass alle partiellen Ableitungen der in der Differentialgleichung

$$q+f(p,z,x,y)=0 \tag{1}$$

auftretenden Funktion $f(p,z,x,y)$ für alle reellen Werte von p, z, x, y stetig sind, und dass die Ableitungen erster Ordnung dem Betrage nach unterhalb einer positiven Grenze L bleiben. Die Lipschitzsche Bedingung (3) ist dann erfüllt und es lautet das zugehörige Differentialgleichungssystem der Charakteristiken wie folgt:

$$\frac{dx}{dt}=f_p,\quad \frac{dy}{dt}=1,\quad \frac{dz}{dt}=pf_p+q,$$
$$\frac{dp}{dt}=-(f_x+pf_z),\quad \frac{dq}{dt}=-(f_y+qf_z). \tag{4}$$

Wir bezeichnen mit

$$x=x(t;x_0,y_0,z_0,p_0,q_0),\ y=t+y_0,\ z=z(t;x_0,y_0,z_0,p_0,q_0),$$
$$p=p(t;x_0,y_0,z_0,p_0,q_0),\ q=q(t;x_0,y_0,z_0,p_0,q_0) \tag{4'}$$

dasjenige Lösungssystem von (4), das für $t=0$ bzw. in x_0, y_0, z_0, p_0, q_0 übergeht. Die Variable t variiert dabei in einer Umgebung von $t=0$, die natürlich noch von der Wahl von x_0, y_0, z_0, p_0, q_0 abhängt. Wenn wir aber diese Grössen einer Einschränkung von der Form

$$|x_0|\leqq C,\ |y_0|\leqq C,\ |z_0|\leqq C,\ |p_0|\leqq C,\ |q_0|\leqq C$$

unterwerfen (wo unter C irgendeine positive Konstante zu verstehen ist), so existiert sicherlich eine nur von C abhängende positive Grösse T derart, dass die Funktionen (4') für $|t|\leqq T$ definiert sind; diese Funktionen sind natürlich nach allen Veränderlichen einmal stetig differenzierbar.

Wir betrachten eine stetig differenzierbare Kurve in der x,z-Ebene; ihre Gleichung sei

$$x=\tau,\ y=0,\ z=\bar{z}(\tau),\quad 0\leqq\tau\leqq\tau'',$$

und konstruieren nach den Vorschriften der Charakteristikentheorie die hindurchgehende Integralfläche von (1), wie folgt: Wir berechnen vorab den durch die Kurve hindurchgehenden Integralstreifen

$$p=\frac{d\bar{z}}{d\tau}=\bar{p}(\tau),\quad q=-f\left(\frac{d\bar{z}}{d\tau},\bar{z}(\tau),\tau,0\right)=\bar{q}(\tau);$$

die fragliche Fläche ist gegeben durch die Gleichungen

$$\begin{aligned} x&=x(t;\tau,0,\bar{z}(\tau),\bar{p}(\tau),\bar{q}(\tau))=X(t,\tau)\\ y&=t\qquad\qquad\qquad\qquad\quad =Y(t,\tau)\\ z&=z(t;\tau,0,\bar{z}(\tau),\bar{p}(\tau),\bar{q}(\tau))=Z(t,\tau). \end{aligned} \tag{5}$$

Bestimmen wir die Grösse C derart, dass für $0\leqq\tau\leqq\tau''$ die Funktionen τ, $\bar{z}(\tau)$, $\bar{p}(\tau)$, $\bar{q}(\tau)$ dem Betrage nach kleiner als C ausfallen, so sind die obigen Funktionen (5) für $0\leqq\tau\leqq\tau''$, $0\leqq t\leqq T$ jedenfalls definiert und stellen eine Fläche dar, die die vorgelegte

Kurve (für $t=0$) enthält. Die ersten Ableitungen dieser Funktionen (5) nach t sind stetige Funktionen; wenn auch die ersten Ableitungen nach τ existieren, so stellt die Fläche (5) bekanntlich die gesuchte Integralfläche dar. Hiezu ist jedenfalls hinreichend (nicht notwendig), dass die vorgelegte Kurve, d. h. die Funktion $\bar{z}(\tau)$ zweimal stetig differenzierbar sei, da dann die Differenzierbarkeit von $\bar{p}(\tau)$, $\bar{q}(\tau)$ unmittelbar, die Differenzierbarkeit der Funktionen (5) aber aus dem Umstande folgt, dass die Funktionen (4') nach allen Argumenten einmal differenzierbar sind.[3]) Lässt man aber die Annahme über die zweimalige Differenzierbarkeit von $\bar{z}(\tau)$ fallen, so kann es vorkommen — und zwar ist dies als der allgemeine Fall zu betrachten — dass die Fläche (5) bzw. die Funktion $z=\varphi(x, y)$, die man aus den Gleichungen (5) durch Elimination von t und τ erhält,[4]) keine partiellen Ableitungen erster Ordnung besitzt und daher auch keine Lösung der Differentialgleichung (1) darstellt. Wir wollen nun untersuchen, ob in diesem Falle, in dem also die Charakteristikentheorie versagt, die vorgelegte partielle Differentialgleichung überhaupt eine Lösung besitzt, die die gegebene Kurve enthält, wobei wir als Lösung eine die Differentialgleichung erfüllende Funktion mit stetigen Ableitungen erster Ordnung betrachten; wir werden sehen, dass *die gestellte Frage zu verneien ist.*

Wir betrachten daher in einem solchen Falle die Fläche (5) und ziehen zur Hülfe eine Funktionenfolge $\bar{z}_n(\tau)$, (wobei $n=1, 2, 3, \ldots$ ist) heran, deren Funktionen im obigen Intervall $0 \leqq \tau \leqq \tau''$ definierte *zweimal stetig differenzierbare* Funktionen sind von der Beschaffenheit, dass die Limesgleichungen

$$\bar{z}_n(\tau) \to \bar{z}(\tau), \quad \frac{d\bar{z}_n(\tau)}{d\tau} \to \frac{d\bar{z}(\tau)}{d\tau} \quad \text{für } n \to \infty \tag{6}$$

gleichmässig bestehen. Setzt man zur Abkürzung für jedes $n=1, 2, 3, \ldots$

---

[3]) Dass man die Gleichung der Fläche (5) — bzw. eines Teiles derselben — auf die Form $z=\varphi(x, y)$ bringen kann, beweist man bekanntlich indem man auf die Relation $\frac{d}{d\tau} X(0, \tau)=1$ Bezug nimmt.

[4]) Die Möglichkeit dieser Elimination muss natürlich vorausgesetzt werden, um zu Lösungen zu gelangen.

$$\bar{p}_n(\tau) = \frac{d\bar{z}_n}{d\tau},\ \bar{q}_n(\tau) = -f\left(\frac{d\bar{z}_n}{d\tau},\ \bar{z}(\tau),\ \tau,\ 0\right),$$

so stellt für jedes n die Fläche

$$\begin{aligned} x &= x(t;\tau, 0, \bar{z}_n(\tau), \bar{p}_n(\tau), \bar{q}_n(\tau)) = X_n(t,\tau),\\ y &= t \qquad\qquad\qquad\qquad\quad = Y_n(t,\tau),\\ z &= z(t;\tau, 0, \bar{z}_n(\tau), \bar{p}_n(\tau), \bar{q}_n(\tau)) = Z_n(t,\tau) \end{aligned}$$

jedenfalls eine stetig differenzierbare Lösung von (1) dar, die durch die Kurve $y=0$, $z=z_n(x)$ hindurchgeht. Wir nehmen an, dass die Gleichungen dieser Flächen (wenigstens für hinreichend grosse n), sowie die Gleichung der Fläche (5) für solche Werte der Veränderlichen x, y, die der Ungleichungen

$$x' \leqq x \leqq x'', \quad 0 \leqq y \leqq y''$$

genügen, auf die Form

$$z = \varphi_n(x,y), \text{ bzw. } z = \varphi(x,y)$$

gebracht werden können. Die Limesgleichung

$$\varphi_n(x,y) \to \varphi(x,y) \quad \text{für } n \to \infty$$

ist eine unmittelbare Folge der Stetigkeit der Funktionen (4') und der Annahme (6); es ist ferner für jedes n

$$\varphi_n(x,0) = \bar{z}_n(x).$$

Würde es nun eine Lösung $\Phi(x,y)$ von (1) (mit stetigen ersten Ableitungen) geben, definiert für dieselben Werte von x, y, die längs der Geraden $y=0$ mit $\varphi(x,y)$ übereinstimmt:

$$\Phi(x,0) = \varphi(x,0) = z(x),$$

und bezeichnen wir das Maximum der Funktion $|z(x) - \bar{z}_n(x)|$ mit M_n, so würde der letzte Satz des § 1. die folgende Tatsache ergeben: In einem Viereck von der dort angegebenen Art gilt — zufolge unserer Annahme, dass die ersten Ableitungen der Funktion $f(p,z,x,y)$ dem Betrage nach kleiner als L bleiben — die Ungleichung

$$|\Phi(x,y) - \varphi_n(x,y)| \leqq M_n e^{Ly}.$$

Da aber die Grössen M_n mit wachsendem n gegen Null streben, so folgt daraus, dass in diesem Gebiet

$$\varphi_n(x,y) \to \Phi(x,y), \quad \text{für } n \to \infty$$

d. h. es ist

$$\Phi(x,y) = \varphi(x,y).$$

Mit anderen Worten *es kann* — unter den gemachten Voraussetzungen — *in dem betrachteten Viereck keine von* $\varphi(x, y)$ *verschiedene Lösung von* (1) *geben, die längs* $y = 0$ *mit* $\bar{z}(x)$ *übereinstimmt.* Wenn daher — wie angenommen — diese Funktion $\varphi(x, y)$ — die durch die Charakteristikentheorie gelieferte Funktion — keine Ableitungen besitzt, so hat die vorgelegte partielle Differentialgleichung (1) keine Lösung dieser Art.

Wir haben uns auf Differentialgleichungen von der Form (1) beschränkt, auf die man die allgemeine Form (I) vermöge eines vielfach angewandten Verfahrens zurückführen kann. Dies würde keine wesentlichen Schwierigkeiten verursachen; es wäre aber interessant das gewonnene Resultat von den weiteren einschränkenden Annahmen, die wir zu Beginn dieses § gemacht haben, zu befreien, wobei — wie mir scheint — neue Schwierigkeiten auftreten.

(*Eingegangen am 16. Juli 1928*)

A. Haar (Szeged - Ungheria)

ÜBER EINDEUTIGKEIT UND ANALYZITÄT DER LÖSUNGEN PARTIELLER DIFFERENTIALGLEICHUNGEN

I.

Es ist das Ziel meines Vortages eine Methode darzulegen, die es gestattet, diejenigen Sätze, die man an die Spitze der Theorie der gewöhnlichen Differentialgleichungen stellt, in sinngemässer Weise auf partielle Differentialgleichungen erster Ordnung zu übertragen. Es handelt sich dabei im wesentlichen um die Übertragung der folgenden bekannten Tatsachen: Wenn die rechte Seite der gewöhnlichen Differentialgleichung

$$\frac{dy}{dx} = F(x, y)$$

in einem Gebiet der x, y-Ebene stetig ist und die Lipschitzsche Bedingung erfüllt, so wird gezeigt, nachdem man die Existenz einer Lösung, die durch einen gegebenen Punkt dieses Gebietes hindurchgeht, bewiesen hat:

1°) dass es *nur* eine Lösung dieser Art gibt;

2°) dass, falls die in der Differentialgleichung rechts stehende Funktion einen Parameter α stetig enthält, $(F = F(x, y, \alpha))$ so ist die fragliche Lösung eine stetige Funktion dieses Parameters.

Wie steht es mit den Analoga dieser Sätze in der Theorie der partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung? Wir schreiben diese — um charakteristische Mannigfaltigkeiten zu vermeiden — in die Form:

$$\frac{\partial u}{\partial y} = F\left(\frac{\partial u}{\partial x}, u, x, y\right); \qquad (u = u(x, y)) \tag{1}$$

das sog. Cauchysche Problem lautet bekanntlich, wie folgt: man sucht eine Lösung $u(x, y)$, die für $y = 0$ in eine gegebene Funktion $f(x)$ übergeht. Die Lösung dieses Problems wird durch die Charakteristikentheorie (unter geringeren Annahmen, als durch die Cauchy-Kowalewskischen Majorantenmethode) geliefert, da dabei — beiläufig bemerkt — nur die Existenz der zweiten Ableitungen der Funktionen F und f für die in Betracht kommenden Wertsysteme vorausgesetzt wird. Was aber die *Eindeutigkeit* der Lösung betrifft, so liefert die Charakteristikentheorie nur den Satz, dass es unter *den zweimal differenzierbaren Funktionen* $u(x, y)$ nur eine geben, kann, die die Differentialgleichung (1) und

die Randbedingung $u(x, 0)=f(x)$ erfüllt. Diese zweimalige Differezierbarkeit ist dabei unerlässlich, da der Satz, dass jede Lösung von (1) von Charakteristiken umsponnen wird, nur für zweimal differenzierbare Lösungen abgeleitet werden kann. Freilich kann man sich mit diesem Eindeutigkeitssatz nicht begnügen; sie lässt ja die Frage offen, ob nicht eine andere — allerdings nur einmal differenzierbare — Lösung von (1) existiert, die dieselbe Randbedingung erfüllt.

Noch viel weniger vermag die Charakteristikentheorie die zweite oben für gewöhnliche Differentialgleichungen dargelegte Frage für die Gleichung (1) zu beantworten, da ja zunächst unentschieden bleibt, ob durch die Charakteristikentheorie alle Lösungen von (1) geliefert werden. Um daher die aufgeworfenen Fragen in der nötigen Allgemeinheit behandeln zu können, muss man die Charakteristikentheorie verlassen, und die Theorie auf eine umfassendere Grundlage stützen.

II.

Der bekannte von C. JORDAN herrührende Eindeutigkeitsbeweis für gewöhnliche Differentialgleichungen beruht auf das Studium einer Differentialungleichung, deren Lösungen analysiert werden. In entsprechender Weise stütze ich meine Untersuchungen auf einen Satz über partielle Differentialungleichungen von der Form

$$\left|\frac{\partial u}{\partial y}\right| \leqq A\left|\frac{\partial u}{\partial x}\right| + B|u| + \delta,$$

wobei A, B, δ positive Konstanten-, $u(x, y)$ aber eine in dem durch die Geraden

$$y=0, \quad y=\frac{1}{A}(x-x'), \quad y=-\frac{1}{A}(x-x'') \qquad (x'<x'')$$

begrenzten Dreieck stetig nach x und y differenzierbare Funktion bedeutet. Es gilt nun der folgende Satz:

Bedeutet M das Maximum der Funktion $|u(x, y)|$ längs der Geraden $y=0$, d. h.

$$|u(x, 0)| \leqq M, \qquad x' \leqq x \leqq x''$$

so gilt an jeder Stelle x, y, die innerhalb des obigen Dreiecks liegt, die Ungleichung

$$|u(x, y)| \leqq Me^{By} + \delta\frac{e^{By}-1}{B}.$$

Der Beweis dieses Satzes ist absolut elementar; setzt man der Kürze halber $A=B=1$ (man kann den allgemeinen Fall sofort auf diesen zurückführen), so beruht der Beweis auf die einfache Tatsache, dass für jedes positive λ die Hülfsfunktion

$$e^{-(1+\lambda)y}[u(x, y)-\delta(e^{y}-1)]$$

ihren Maximalwert (in dem betrachteten Dreieck) auf der Geraden $y=0$ annehmen muss.

1°) Setzt man $M=0$ und $\delta=0$, so sagt der Satz aus, dass die längs $y=0$ verschwindenden Lösungen der Differentialungleichung

$$\left|\frac{\partial u}{\partial y}\right| \leqq A\left|\frac{\partial u}{\partial x}\right| + B|u|$$

im ganzen obigen Dreieck identisch verschwinden müssen. Ich habe diesen Fall des Satzes kürzlich in den *Comptes Rendus* bewiesen (2 Juli 1928), und daraus den fraglichen Eindeutigkeitssatz in voller Allgemeinheit abgeleitet. Die Differenz zweier Lösungen der partiellen Differentialgleichung (1), die für $y=0$ dieselben Randwerte annehmen, erfüllt nämlich eine Ungleichung der obigen Art, falls die Funktion $F\left(\frac{\partial u}{\partial x}, u, x, y\right)$ in Bezug auf ihre ersten beiden Argumente der Lipschitzschen Bedingung genügt — was wir annehmen wollen. Da ferner diese Differenz für $y=0$ verschwindet, so folgt ihr identisches Verschwinden im obigen Dreieck, also der fragliche Eindeutigkeitssatz. Insbesondere konnte ich daraus schliessen, dass jede *einmal stetig differenzierbare Lösung einer analytischen Differentialgleichung, die durch eine analytische Kurve, die keine Charakteristik ist, hindurchgeht, selbst analytisch ist* — ein Satz, der merkwürdiger Weise bisher unbewiesen blieb.

2°) Setzt man $\delta=0$, M aber beliebig, so erhält man einen Satz den Herr HADAMARD in einer Bemerkung, die er meiner genannten Note anschloss, hervorhob. Angewandt auf die Differenz zweier Lösungen der Differentialgleichung (1) liefert die so erhaltene Ungleichung für die fragliche Differenz:

$$|u(x, y)| \leqq Me^{By},$$

d. h. die Tatsache, dass die Lösungen von (1) (im obigen Dreieck) stetig von den Randwerten abhängen, die sie längs der Geraden $y=0$ annehmen.

3°) Setzt man drittens $M=0$, so erhält man den fraglichen Stetigkeitssatz. Ist nämlich $u(x, y)$ eine Lösung von (1), $U(x, y)$ aber eine (im obigen Dreieck stetig differenzierbare) Funktion, die diese Differentialgleichung bis auf einen Fehler von der Grösse δ befriedigt, d. h.

$$\frac{\partial U}{\partial y} = F\left(\frac{\partial U}{\partial x}, U, x, y\right) + \omega(x, y)$$

wobei $|\omega(x, y)| \leqq \delta$ ist und ist ferner $u(x, 0) = U(x, 0)$ für $x' \leqq x \leqq x''$, so erfüllt die Differenz $v = U-u$ eine Ungleichung von der Form

$$\left|\frac{\partial v}{\partial y}\right| \leqq A\left|\frac{\partial v}{\partial x}\right| + B|v| + \delta,$$

falls F der entsprechenden Lipschitzschen Bedingung genügt. Wir erhalten daher für die betrachtete Differenz im obigen Dreieck die Ungleichung

$$|U-u| \leqq \delta\frac{e^{By}-1}{B};$$

sie zeigt, dass $U-u$ mit $\delta=0$ gleichmässig gegen Null strebt. Man kann diesen Satz in leichter Weise so umformen, dass man in F in stetiger Weise einen Parameter einführt, und erhält dann die stetige Dependenz der Lösungen (sofern diese überhaupt existieren) von diesem Parameter.

Die Übertragung dieser Sätze auf den Fall, dass statt den Randwerten längs $y=0$ eine beliebige nichtcharakteristische Kurve gegeben ist, bietet keine Schwierigkeiten.

III.

Bei der Übertragung der dargelegten Sätze auf partielle Differentialgleichungen erster Ordnung mit mehr als zwei unabhängigen Veränderlichen treten keine wesentlichen neuen Schwierigkeiten auf. Betrachten wir etwa den Fall dreier unabhängigen Variabler x, y, z; es handelt sich lediglich darum, das oben erwähnte Lemma über die Lösungen einer partiellen Differentialungleichung auf diesen Fall zu verallgemeinern. Dies führt auf die Untersuchung der folgenden Ungleichung:

$$\left|\frac{\partial u}{\partial t}\right| \leqq \left|\frac{\partial u}{\partial x}\right| + \left|\frac{\partial u}{\partial y}\right| + |u| + \delta \qquad u=u(x,y,z),\ \delta>0,$$

da man durch Einführung neuer Variabler unmittelbar auf diese Form gelangt. Wir betrachten *eine Lösung $u(x,y,z)$ dieser Ungleichung* (mit stetigen partiellen Ableitungen erster Ordnung), *die für $z=0$ in einem Gebiet g der x,y-Ebene so beschaffen ist, dass daselbst*

$$|u(x,y,0)| \leqq M$$

ist. Alsdann gilt — in voller Analogie zu dem obigen Ergebnis — *in einem Gebiet G des x, y, z-Raumes die Ungleichung*

$$|u(x,y,z)| \leqq Me^z + \delta(e^z-1),$$

wobei das Gebiet G wie folgt definiert ist: Für jeden Punkt von G ist $z \geqq 0$; das Gebiet g der x, y-Ebene liegt auf dem Rande von G und es besitzt das Gebiet G die Eigenschaft, dass, falls x, y, z ein Punkt von G ist, der nicht in g liegt ($z>0$), so gehören für hinreichend kleine positive h die 4 Punkte mit den Koordinaten

$$x \pm h, \qquad y \pm h, \qquad z-h$$

ebenfalls dem Gebiete G an. Vorausgesetzt ist dabei, dass die Lösung $u(x,y,z)$ in G stetige Ableitungen erster Ordnung besitzt.

Der Beweis dieses Satzes ist dem unter II. dargelegten analog; aus ihm lassen sich alsdann die entsprechenden Resultate für partielle Differentialgleichungen erster Ordnung mit drei unabhängigen Veränderlichen ableiten, insbesondere der Eindeutigkeitssatz und der erwähnte Stetigkeissatz.

Geht man zu Systemen von Differentialgleichungen über, so treten neue Schwierigkeiten auf. Wir betrachten nur den Fall eines linearen homogenen

Differentialgleichungssystem — die Anzahl der Gleichungen möge der Einfachheit halber zwei sein — also ein System von der Form:

$$\frac{\partial u}{\partial y} = a_{11}\frac{\partial u}{\partial x} + a_{12}\frac{\partial v}{\partial x} + b_{11}u + b_{12}v,$$
$$\frac{\partial v}{\partial y} = a_{21}\frac{\partial u}{\partial x} + a_{22}\frac{\partial v}{\partial x} + b_{21}u + b_{22}v.$$

Wenn die Koeffizienten a_{ik}, b_{ik} *analytische Funktionen* von x, y sind, so ist der betreffende Eindeutigkeitssatz von Herrn HOLMGREN bewiesen (1). Für den Fall eines hyperbolischen Gleichungssystem, d. h. für den Fall, dass die Gleichung zweiten Grades

$$\begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

für jedes in Betracht kommende x, y verschiedene reelle Wurzel besitzt, ist dieser Eindeutigkeitssatz unter der Eischränkung, dass die a_{ik} *stetige Ableitungen erster und zweiter Ordnung besitzen*, von Herrn PERRON in einer kürzlich erschienenen Arbeit bewiesen (2). Ich will noch zeigen, dass aus meinem Lemma dieser letztere Satz sich unmittelbar ergibt, unter der geringeren Voraussetzung, dass *nur die ersten Ableitungen der Funktionen a_{ik} existieren und stetig sind.* Man kann nämlich unter dieser Voraussetzung in bekannter Weise an Stelle von u, v durch eine lineare homogene Transformation neue Funktionen U, V einführen, die ein Differentialgleichungssystem von der Form

$$\frac{\partial U}{\partial y} = A_1\frac{\partial U}{\partial x} + B_{11}U + B_{12}V,$$
$$\frac{\partial V}{\partial y} = A_2\frac{\partial V}{\partial x} + B_{12}U + B_{22}V$$

erfüllen. Bezeichnen wir nun mit M_U bezw. M_V die Maxima der Funktionen $|U(x, y)|$ bezw. $|V(x, y)|$, so folgen aus den obigen Gleichungen unmittelbar zwei Differentialungleichungen von der folgenden Form:

$$\left|\frac{\partial U}{\partial y}\right| \leqq A\left|\frac{\partial U}{\partial x}\right| + B|U| + BM_V,$$
$$\left|\frac{\partial V}{\partial y}\right| \leqq A\left|\frac{\partial V}{\partial x}\right| + B|V| + BM_U.$$

Daraus kann man mit Hülfe des in II. dargelegten Satzes unmittelbar entnehmen, dass, falls

$$U(x, 0) = V(x, 0) = 0 \qquad (x' \leqq x \leqq x'')$$

ist, in einem bestimmten in jenem Satz genau präzisierten Gebiete, die Maxima der Funktionen $|U|$ und $|V|$ den Ungleichungen

$$M_U \leqq M_V(e^{By_1} - 1),$$
$$M_V \leqq M_U(e^{By_2} - 1)$$

---

(1) Öfversigt of Kongl. Vetenskaps-Akademiens 1901, S. 91-103.

(2) Mathematische Zeitschrift, Bd. 27, (1928), S. 549-564.

genügen, wobei y_1 bezw. y_2 die Ordinate desjenigen Punktes bezeichnet, wo die Funktionen $|U|$ bezw. $|V|$ ihren Maximalwert annehmen. Daraus folgt aber das Verschwinden von M_U und M_V d. h. das identische Verschwinden von U und V in hinreichender Nähe der Geraden $y=0$.

Auf die Beweise dieser Resultate, sowie insbesondere auf die Bedeutung und Verallgemeinerung des zuletzt erwähnten Satzes über Differentialgleichungssysteme komme ich in einer ausführlicheren Arbeit zurück.

E

Variációszámítás — Variationsrechnung

E1. A kettős integrálok variációjáról, *Mat. Term. Ért.*, **35** (1917), 1—19. *[263—281]*

E2. Über die Variation der Doppelintegrale, *J. f. Math.*, **149** (1919), 1—18. *[282—299]*

E3. Über eine Verallgemeinerung des Du Bois-Reymond'schen Lemmas, *Acta Sci. Math.*, **1** (1922), 33—38. *[300—305]*

E4. Über das Plateausche Problem, *Math. Ann.*, **97** (1926), 124—158. *[306—340]*

E5. Über reguläre Variationsprobleme, *Acta Sci. Math.*, **3** (1927), 224—234. *[341—351]*

E6. Über adjungierte Variationsprobleme und adjungierte Extremalflächen, *Math. Ann.*, **100** (1928), 481—502. *[352—373]*

E7. Zur Variationsrechnung. Drei Vorträge gehalten am Mathematischen Seminar der Hamburgischen Universität (23—25. Juli 1929), *Abhandlungen aus dem Mathematischen Seminar der Hamburgischen Universität*, **8** (1930), 1—27. *[374—400]*

*

E1 és E2 magyar és németnyelvű változatai ugyanannak a dolgozatnak ; ez tartalmazza Haar variációszámításra vonatkozó nevezetes vizsgálatainak első eredményeit, a kettős integrálok variációjáról. Ebben a dolgozatban jelenik meg (egyelőre a kétdimenziós esetre) az a lemma, amelyet azóta általánosan »Haar-lemmának« neveznek az irodalomban ; ez a lemma a többdimenziós variációproblémákban hasonló alapvető jelentőségű, mint a klasszikus Du Bois-Reymond-féle lemma az egydimenziós variációproblémákban. Az E3 dolgozat a Du Bois-Reymond-féle lemmának egy másik irányú általánosítását adja. Az E4 dolgozat a »Haar-lemmát« a minimálfelületekre vonatkozó Plateau-probléma megoldásában használja fel. E fundamentális lemma által nyújtott lehetőségeket használja ki az E5 dolgozat a reguláris variációproblémák tárgyalásában (e dolgozat implicite tartalmazza a lemma egy megfordítását is). Az E6 dolgozat ugyanezen lemma alapján tárgyalja az ún. adjungált variációproblémákat. A hamburgi egyetemen tartott előadássorozatában (E7) Haar áttekinti a variációszámítás területén végzett saját munkásságát és másoknak ahhoz csatlakozó vizsgálatait és kifejti nézeteit e vizsgálatok további lehetőségeiről.

Haar e dolgozatainak hatása, alapvető jelentőségűek lévén, természetesen nagy és állandó jellegű. Az E5 és E7 dolgozatokban maga Haar idézi néhány, kutatásaihoz közvetlenül csatlakozó szerző munkáját (L. Lichtenstein, Gergely Jenő, Szücs Adolf, Radó Tibor, J. Schauder, Neumann János, C. Carathéodory), ezek közül Gergely dolgozata Haar vezetése alatt készült doktori disszertáció. Radó Tibor Ergebnisse-füzetében : *On the problem of Plateau* (Berlin, 1933) részletesen ismerteti Haar variációszámítási vizsgálatait és azoknak mások által való folytatásait, 1933-ig. A későbbi irodalomból említsük meg a következő dolgozatokat :

M. Coral, On the necessary conditions for the minimum of a double integral, *Duke Math. Journal*, 3 (1937), 585—592.

L. M. Graves, On the lemma of Haar in the calculus of variations, *Bulletin of the American Math. Society*, 45 (1939), 666—667.

Sólyi Antal, A Haar-féle variációs lemma és alkalmazásai, *Mat. Fiz. Lapok*, 48 (1941), 285—311; Über das Haarsche Lemma in der Variationsrechnung und seine Anwendungen, *Acta Sci. Math.*, 11 (1946), 1—16.

C. B. Morrey, Jr., Multiple integral problems in the calculus of variations and related topics, *University of California Publications in Mathematics*, New Series, 1 (1943), No. 1, pp. 1—130.

*

E1 und E2 sind Varianten in ungarischer und deutscher Sprache einer Arbeit über die Variation der Doppelintegrale, die die ersten Ergebnisse der wichtigen Untersuchungen von Haar auf dem Gebiet der Variationsrechnung enthält. In dieser Arbeit beweist er das Lemma (einstweilen nur für den zweidimensionalen Fall), welches seitdem in der Literatur allgemein als »Haarsche Lemma« bezeichnet wird; dieses Lemma ist in den mehrdimensionalen Variations problemen von ähnlicher grundlegender Wichtigkeit wie das klassische Lemma von Du Bois-Reymond in den eindimensionalen Variationsproblemen. E3 verallgemeinert das Du Bois-Reymondsche Lemma in einer anderen Richtung. E4 benützt das »Haarsche Lemma« in der Lösung des Problems von Plateau über Minimalflächen. Von den durch dieses Lemma eröffneten Möglichkeiten macht die Arbeit E5 in der Behandlung der regulären Variationsprobleme Gebrauch (diese Arbeit enthält — auf implizite Weise — auch eine Umkehrung des Lemmas). Ebenfalls auf Grund dieses Lemmas behandelt die Arbeit E6 die sog. adjungierten Variationsprobleme. In seinen an der Universität Hamburg gehaltenen drei Vorträgen (E7) gibt Haar einen Überblick über seine eigene Arbeiten auf dem Gebiet der Variationsrechnung sowie über die anschließenden Arbeiten anderer Verfasser und entfaltet seine eigene Ansichten über die weiteren Möglichkeiten dieser Untersuchungen.

Diese Arbeiten von Haar haben — entsprechend ihrer grundlegenden Bedeutung — einen großen und dauernden Einfluß auf die weitere Entwicklung der Variationsrechnung ausgeübt. In E5 und E7 nennt Haar selber eine Reihe von Arbeiten anderer Verfasser, die sich unmittelbar an seine Untersuchungen anschließen (L. Lichtenstein, E. Gergely, A. Szücs, T. Radó, J. Schauder, J. von Neumann, C. Carathéodory); die Arbeit von E. Gergely ist eine bei Haar angefertigte Doktordissertation. In seinem Ergebnisse-Heft über das Plateausche Problem *(On the problem of Plateau*, Berlin 1933), berichtet T. Radó ausführlich über die Untersuchungen von Haar in der Variationstheorie, sowie über die anschließenden Untersuchungen anderer Verfasser bis 1933. Aus der späteren reichen Literatur nennen wir insbesondere die Arbeiten von M. Coral, L. M. Graves, A. Sólyi, C. B. Morrey, Jr. (s. die Literaturangaben im ungarischen Text).

A KETTŐS INTEGRÁLOK VARIATIÓJÁRÓL.

HAAR ALFRÉD-tól.

A variatioszámítás alaptételén — a mennyiben olyan problémákról van szó, a melyekben az ismeretlen függvény csak egy változótól függ — a következő, Du Bois Reymond-tól eredő, lemmát szokás érteni:

Ha $u(x)$ folytonos függvénye az x-nek az $x_1 \leqq x \leqq x_2$ intervallumban és ha

$$\int_{x_1}^{x_2} u(x) \frac{d\zeta}{dx} dx = 0,$$

mindazokra a $\zeta(x)$ függvényekre nézve, melyek intervallumunkban folytonosan differentiálhatók és az intervallum határain eltűnnek, akkor $u(x) = \text{const.}$

E tétel segélyével minden nehézség nélkül levezethető a variatioszámítás úgynevezett Euler-Lagrange-féle differentiálegyenlete, anélkül, hogy a variatioprobléma megoldásáról egyebet kellene feltételezni, mint azt, hogy első differentiálhányadosa folytonos függvény.

Ezzel ellentétben a variatioszámítás ama legegyszerűbb feladatainál, melyeknél az ismeretlen függvény két független változótól függ, eddigelé nem sikerült a keresett függvény számára differentiálegyenleteket felállítani a nélkül a — teljesen természetellenes — megszorítás nélkül, hogy a keresett függvény második differentiálhányadosai is létezzenek. Hadamard[1] egy egyszerű példával kimutatta, hogy ebben az esetben az első variatio eltünéséből nem következik a keresett függvény má-

[1] Comptes Rendus (1907) T. 144. p. 1092—1093.

sodik differentiálhányadosainak létezése; az HADAMARD-féle példából nyomban kitűnik, hogy egy kettős integrál első variatiója eltűnhetik, anélkül, hogy a benne szereplő függvény második differentiálhányadosai léteznének.

Ezek után első pillanatra lehetetlennek tűnik fel egy kettős integrál első variatiójának eltünését további megszorítás nélkül, differentiálegyenletek segélyével kifejezni; más szóval a megfelelő variatioprobléma megoldására differentiálegyenleteket levezetni anélkül, hogy e megoldás második differentiálhányadosának létezését feltételeznők. Ennek daczára sikerül egy ilyen differentiálegyenlet levezetése egy olyan tétel segélyével, mely mindenben analog a fent említett DU BOIS REYMOND-féle tétellel s a mely a kétváltozós függvények elméletében ugyanazt a szerepet játszsza, mint amaz az egyváltozós függvények körében.

Ez a tétel, melynek bebizonyítása legfőbb czélja ennek a dolgozatnak, a következőképen hangzik:

Ha $u(x, y)$ *és* $v(x, y)$ *olyan függvényei az* x *és* y *független változóknak, melyek egy megadott* T *tartomány belsejében folytonosak, és ha*

$$\iint_{(T)} \left(u \frac{\partial \zeta}{\partial x} + v \frac{\partial \zeta}{\partial y} \right) dxdy = 0$$

mindazokra a $\zeta(x, y)$ *függvényekre nézve, melyek e tartomány határán eltűnnek, belsejében pedig* x *és* y *szerint folytonosan differentiálhatók, akkor — bármely a* T *tartomány belsejében fekvő zárt görbét jelöl* G *— a következő integrál:*

$$\int_{(G)} (udy - vdx)$$

értéke zérussal egyenlő. Más szóval a mondott feltételek mellett *létezik egy oly* $\omega(x, y)$ *függvény, melynek első differentiálhányadosai tartományunkban folytonosak s a mely kielégíti a*

$$\frac{\partial \omega}{\partial x} = -v(x, y), \quad \frac{\partial \omega}{\partial y} = u(x, y)$$

egyenleteket.

E dolgozat 1. §-a ennek a tételnek bizonyítását tartalmazza.

A 2. §-ban a

$$\iint_{(T)} f(p, q, x, y)\, dxdy = \min. \quad \text{és} \quad \iint_{(T)} f(p, q, z, x, y)\, dxdy = \min.$$

variatioproblémákkal foglalkozunk, a hol — mint szokásos — a $z(x, y)$ ismeretlen függvény első differentiálhányadosait p- és q-val jelöltük.

Az első §-ban levezetett tétel segélyével e variatioproblémák olyan megoldásai számára, melyek a T tartományban folytonos első differentiálhányadosokkal birnak, minden további megszorítás nélkül oly differentiálegyenletrendszert vezetünk le, mely az első esetben két-, a második esetben pedig három differentiálegyenletből áll. Ezekben az egyenletekben az ismeretlen megoldáshoz az első esetben *egy*, a második esetben pedig *két* segédfüggvény járul, úgy hogy mindkét esetben az egyenletek száma megegyezik a meghatározandó függvények számával.

Dolgozatunk végén kérdéstételünk nehány általánosítására utalunk, a melyek a variatioszámítás általánosabb problémáinál hasonló szerepet játszanak, mint az 1. §-ban levezetett tételünk a kettős integrálokra vonatkozó legegyszerűbb variatioproblémánál.

1. §.

A bevezetésben kimondott tételünket *négy* lépésben bizonyítjuk be.

1°) Kimutatjuk *először*, hogy a mondott feltételek mellett a következő integrál:

$$\iint_{(T)} \left(u \frac{\partial \zeta}{\partial x} + v \frac{\partial \zeta}{\partial y} \right) dxdy$$

akkor is eltűnik, ha a T tartomány határán eltünő $\zeta(x, y)$ függvény első differentiálhányadosainak e tartomány belsejé-

ben fekvő valamely reguláris görbe[1] *mentén véges szakadásuk van, a tartomány egyéb pontjában pedig a hely folytonos függvényei.*

Hogy ezt kimutathassuk, választunk egy positiv M számot úgy, hogy az

$$u(x, y), \quad v(x, y), \quad \frac{\partial \zeta}{\partial x}, \quad \frac{\partial \zeta}{\partial y}$$

függvények absolut értékeinek maximuma a T tartományban e M határ alatt maradjon; ezután pedig azt a görbe-darabot, a melynek mentén $\frac{\partial \zeta}{\partial x}$ és $\frac{\partial \zeta}{\partial y}$ szakadásossá válik, körülveszszük egy olyan zárt reguláris görbével — például zárt polygonvonallal — a mely ugyancsak a tartomány belsejében fekszik és egy δ nagyságú t területet határol el. Természetesen ez a zárt görbe megválasztható úgy, hogy ez a terület tetszésszerinti kicsiny legyen. A $\bar{\zeta}(x, y)$ segédfüggvényt ezek után úgy választjuk meg, hogy az a T tartomány ama részében, mely a t-n kívül fekszik, $\zeta(x, y)$-nal egyezzék meg; *t belsejében pedig* $\bar{\zeta}(x, y)$-ról csak azt kötjük ki, hogy x és y szerinti differentiálhányadosai folytonosak és absolut értékben M-nél kisebbek legyenek.[2] Mivel $\bar{\zeta}(x, y)$ — e constructio értelmében — a T tartomány határán eltünik és annak belsejében folytonos differentiálhányadosokkal bir, azért feltevésünk értelmében

$$\iint_{(T)} \left(u \frac{\partial \bar{\zeta}}{\partial x} + v \frac{\partial \bar{\zeta}}{\partial y} \right) dxdy = 0;$$

ennélfogva

$$\iint_{(T)} \left(u \frac{\partial \zeta}{\partial x} + v \frac{\partial \zeta}{\partial y} \right) dxdy =$$

$$= \iint_{(t)} \left(u \left(\frac{\partial \zeta}{\partial x} - \frac{\partial \bar{\zeta}}{\partial x} \right) + v \left(\frac{\partial \zeta}{\partial y} - \frac{\partial \bar{\zeta}}{\partial y} \right) \right) dxdy.$$

---

[1] Az alkalmazásokban ez a vonaldarab egyenes vonalakból fog állani.

[2] E segédfüggvény létezése nyilvánvaló.

Ámde az

$$u,\ v,\ \frac{\partial\zeta}{\partial x},\ \frac{\partial\zeta}{\partial y},\ \frac{\partial\bar{\zeta}}{\partial x},\ \frac{\partial\bar{\zeta}}{\partial y}$$

függvények absolut értékre nézve M-nél kisebbek s a t tartomány területe δ-val egyenlő; ezért az utóbbi integrál absolut értéke kisebb vagy egyenlő

$$4M^2\delta\text{-val},$$

s így egyszersmind

$$\left|\iint_{(T)}\left(u\frac{\partial\zeta}{\partial x}+v\frac{\partial\zeta}{\partial y}\right)dxdy\right| \leqq 4M^2\delta.$$

Minthogy pedig δ tetszés szerint kicsinynyé tehető, azért ez utóbbi egyenletből nyomban következik, hogy

$$\iint_{(T)}\left(u\frac{\partial\zeta}{\partial x}+v\frac{\partial\zeta}{\partial y}\right)dxdy = 0.$$

2°) Kimutatjuk *másodszor*, hogy az

$$\int_{(Q)}(udy - vdx)$$

integrál értéke zérussal egyenlő, ha Q olyan négyzetet jelent, mely T belsejében fekszik s melynek oldalai a coordinata-tengelyekkel párhuzamosak.

E végből — alkalmas módon — új változókat vezetek be, melyek bizonyos szempontból a poláris coordinatákhoz hasonlóknak mondhatók, a melyeknél azonban concentrikus és hasonló helyzetű négyzetek játszszák azt a szerepet, a melylyel a polár-coordinatáknál a kezdőpont körüli körök birnak. Jelöljük O-val derékszögű coordinatarendszerünk kezdőpontját s legyen P a sík egy tetszésszerinti pontja, melynek coordinatái x és y. Az új változók egyike legyen már most az a ϑ szög, a melyet az OP irány a positiv x-tengelylyel bezár. Második változóul (ϱ) pedig annak a négyzetnek féloldalhosszát vezetjük be, melynek középpontja O, oldalai az x-, illetőleg az y-tengelylyel párhuzamosak s a mely áthalad a P ponton; ez a ϱ coordinata mindig positiv.

A most bevezetett új coordináták elseje a P pont CARTESIUS-féle coordinatáiból a

$$\operatorname{tg} \vartheta = \frac{y}{x} \tag{1}$$

képlet segélyével számítható ki. A másik coordinata számára különböző kifejezéseket nyerünk, a szerint, a mint ϑ a következő négy egyenlőtlenség:

$$\overset{\text{I}}{-\frac{\pi}{4} \leqq \vartheta \leqq \frac{\pi}{4}}, \quad \overset{\text{II}}{\frac{\pi}{4} \leqq \vartheta \leqq \frac{3\pi}{4}}, \quad \overset{\text{III}}{\frac{3\pi}{4} \leqq \vartheta \leqq \frac{5\pi}{4}}, \quad \overset{\text{IV}}{\frac{5\pi}{4} \leqq \vartheta \leqq \frac{7\pi}{4}}$$

elsejét, másodikát, harmadikát, vagy negyedikét elégíti ki.

Ez a négy egyenlőtlenség a síkot négy quadransra bontja, a melyet rendre I-, II-, III-, IV-gyel akarunk jelölni. Az egyes quadransokban a következő kifejezések adódnak új változóink számára:

$$\begin{array}{llll} \text{Az I. quadransban:} & x = \varrho; & \text{tehát} & y = \varrho \operatorname{tg} \vartheta; \\ \text{a II.} \quad \text{«} & y = \varrho; & \text{«} & x = \varrho \operatorname{ctg} \vartheta; \\ \text{a III.} \quad \text{«} & x = -\varrho; & \text{«} & y = -\varrho \operatorname{tg} \vartheta; \\ \text{a IV.} \quad \text{«} & y = -\varrho; & \text{«} & x = -\varrho \operatorname{ctg} \vartheta. \end{array} \tag{2}$$

Ennélfogva a

$$\frac{\partial(x, y)}{\partial(\varrho, \vartheta)} = \frac{\partial x}{\partial \varrho}\frac{\partial y}{\partial \vartheta} - \frac{\partial x}{\partial \vartheta}\frac{\partial y}{\partial \varrho}$$

függvénydeterminánsnak számára is különböző kifejezések adódnak a különböző quadransokban. Könnyen belátható, hogy

$$\frac{\partial(x, y)}{\partial(\varrho, \vartheta)} = \frac{\varrho}{\cos^2 \vartheta} \quad \text{az I. és III. quadransban;}$$

$$= \frac{\varrho}{\sin^2 \vartheta} \quad \text{a II. és IV.} \quad \text{«} \quad .$$

Legyen már most $f(x, y)$ az x és y változóknak adott függvénye és vezessük be (1) és (2) formuláink segélyével ezek helyébe az ott értelmezett ϱ és ϑ változókat. Függvényünk ekkor a ϱ és ϑ valamely függvényébe $(f(\varrho, \vartheta))$ megy át. Ha függvényünk x és y szerinti differentiálhányadosait ez új változók szerinti differentiálhányadosaival fejezzük ki, természetesen különböző összefüggésekre jutunk, a szerint, a mint a kérdéses pont az I., II., III. vagy IV. quadransban fekszik.

Jelesen ha pontunk az I. vagy III. quadransban fekszik, akkor

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial x} &= \pm\frac{\partial f}{\partial \varrho} \mp \frac{\partial f}{\partial \vartheta}\frac{\sin\vartheta\cos\vartheta}{\varrho},\\ \frac{\partial f}{\partial y} &= \pm\frac{\partial f}{\partial \vartheta}\frac{\cos^2\vartheta}{\varrho},\end{aligned} \tag{3}$$

a hol mindenütt a felső, illetőleg az alsó előjel veendő, a szerint, a mint a pont az I. vagy III. quadransban fekszik.

Ha pedig pontunk a II. vagy IV. quadrans pontja, akkor

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial x} &= \mp\frac{\partial f}{\partial \vartheta}\frac{\sin^2\vartheta}{\varrho},\\ \frac{\partial f}{\partial y} &= \pm\frac{\partial f}{\partial \varrho} \pm \frac{\partial f}{\partial \vartheta}\frac{\sin\vartheta\cos\vartheta}{\varrho},\end{aligned} \tag{4}$$

a hol ismét a felső, illetőleg az alsó előjel veendő, a szerint, a mint pontunk a II. vagy IV. quadransban fekszik.

Szükségünk lesz még az

$$\iint_{(T)}\left(u\frac{\partial\zeta}{\partial x}+v\frac{\partial\zeta}{\partial y}\right)dxdy$$

integrál transformálására új coordinatáinkra.

Jelöljük T_{I}-, T_{II}-, T_{III}-, T_{IV}-gyel T tartományunk ama részeit, a melyek az I., II., III. illetőleg a IV. quadransban fekszenek. Tekintettel a (3) és (4) alatti formulákra, az utóbbi integrál ekkor a következő négy integrál összegébe megy át:

$$\begin{aligned}&\iint_{(T_{\mathrm{I}})}\left\{u\left(\frac{\partial\zeta}{\partial\varrho}-\frac{\partial\zeta}{\partial\vartheta}\frac{\sin\vartheta\cos\vartheta}{\varrho}\right)+v\left(+\frac{\partial\zeta}{\partial\vartheta}\frac{\cos^2\vartheta}{\varrho}\right)\right\}\frac{\varrho}{\cos^2\vartheta}d\varrho d\vartheta+\\ &+\iint_{(T_{\mathrm{II}})}\left\{u\left(-\frac{\partial\zeta}{\partial\vartheta}\frac{\sin^2\vartheta}{\varrho}\right)+v\left(\frac{\partial\zeta}{\partial\varrho}+\frac{\partial\zeta}{\partial\vartheta}\frac{\sin\vartheta\cos\vartheta}{\varrho}\right)\right\}\frac{\varrho}{\sin^2\vartheta}d\varrho d\vartheta+\\ &+\iint_{(T_{\mathrm{III}})}\left\{u\left(-\frac{\partial\zeta}{\partial\varrho}+\frac{\partial\zeta}{\partial\vartheta}\frac{\sin\vartheta\cos\vartheta}{\varrho}\right)+v\left(-\frac{\partial\zeta}{\partial\vartheta}\frac{\cos^2\vartheta}{\varrho}\right)\right\}\frac{\varrho}{\cos^2\vartheta}d\varrho d\vartheta+\\ &+\iint_{(T_{\mathrm{IV}})}\left\{u\left(\frac{\partial\zeta}{\partial\vartheta}\frac{\sin^2\vartheta}{\varrho}\right)+v\left(-\frac{\partial\zeta}{\partial\varrho}-\frac{\partial\zeta}{\partial\vartheta}\frac{\sin\vartheta\cos\vartheta}{\varrho}\right)\right\}\frac{\varrho}{\sin^2\vartheta}d\varrho d\vartheta.\end{aligned}$$

Ezek után az előkészületek után visszatérünk eredeti állításunk bebizonyítására, hogy ugyanis:

$$\int_{(Q)} (u dy - v dx) = 0,$$

ha Q a T tartomány belsejében fekvő olyan négyzetet jelöl, melynek oldalai a coordinatatengelyekkel párhuzamosak.

Legyen e végből Q_1 és Q_2 két concentrikus négyzet, melynek oldalai az előírt irányokkal párhuzamosak. Coordinata-eltolással elérhetjük, hogy coordinatáink kezdőpontja e négyzetek közös középpontjába essék. Feltesszük, hogy a Q_1 és Q_2 négyzetek a T tartomány belsejében fekszenek és hogy oldalhosszuk felét a_1-gyel, illetőleg a_2-vel jelöljük ($a_1 < a_2$). Állításunkat ezekre a négyzetekre a következőképen bizonyítjuk be:

Az x, y változók helyébe az (1) és (2) képletek értelmében a ϱ és ϑ változókat vezetjük be s ezek segélyével definiáljuk a következő ζ függvényt:

ζ a Q_2 négyzet külsejében s a Q_1 négyzet belsejében mindenütt zérussal egyenlő; e két négyzet között elterülő tartományban pedig ζ a ϱ változó valamely tetszésszerinti folytonosan differentiálható függvénye, mely a $\varrho = a_1$ és $\varrho = a_2$ helyeken (azaz a Q_1 és Q_2 négyzetek kerületén) eltűnik s ezeken a helyeken e függvény ϱ szerinti differentiálhányadosa is zérussal egyenlő. Az így definiált ζ függvény nyilván az olyan négyzetek mentén, melyek Q_1-, illetőleg Q_2-vel concentrikusak s hasonló fekvésűek, állandó értéket vesz fel. Függvényünk továbbá a T tartomány belsejében mindenütt folytonos; ϑ szerinti differentiálhányadosa mindenütt zérussal egyenlő, ϱ szerinti differentiálhányadosa pedig ugyancsak folytonos függvénye a helynek. Ha ezt a függvényt mint az eredeti változók x és y függvényét tekintjük, az így keletkezett függvény $\zeta(x, y)$ természetesen szintén folytonos, míg az x és y szerinti differentiálhányadosai, $\frac{\partial \zeta}{\partial x}$ és $\frac{\partial \zeta}{\partial y}$ — mint azt a (3) és (4) alatti formulák mutatják — ugyancsak folytonos függvényei a helynek ama pontok esetleges kivételével, melyek a sík fentemlített négy quadransa egyikének határán fekszenek. Ezek azok a helyek, a hol ϑ értéke $\pm \frac{\pi}{4}$ vagy $\pm 3\frac{\pi}{4}$.

Más szóval a $\frac{\partial \zeta}{\partial x}$ és $\frac{\partial \zeta}{\partial y}$ differentiálhányadosoknak amaz egyenesek mentén, melyek a Q_1 és Q_2 négyzetek megfelelő szögpontjait összekötik, véges szakadásuk lehet, e négy vonaldarabon kívül azonban mindenütt folytonos függvényei x és y-nak.

Az 1°) alatti megjegyzés értelmében a következő integrál

$$\iint_{(T)} \left(u \frac{\partial \zeta}{\partial x} + v \frac{\partial \zeta}{\partial y} \right) dxdy = 0,$$

mihelyt ζ az imént definiált függvények egyikét jelenti.

Ha ismét a ϱ és ϑ változókat vezetjük be és tekintettel vagyunk arra, hogy mindenütt $\frac{\partial \zeta}{\partial \vartheta} = 0$, akkor nyomban látjuk, hogy utolsó egyenletünk a következő alakot veszi fel:

$$\iint_{(T_I)} u \frac{\partial \zeta}{\partial \varrho} \frac{\varrho}{\cos^2 \vartheta} d\varrho d\vartheta + \iint_{(T_{II})} v \frac{\partial \zeta}{\partial \varrho} \frac{\varrho}{\sin^2 \vartheta} d\varrho d\vartheta -$$

$$- \iint_{(T_{III})} u \frac{\partial \zeta}{\partial \varrho} \frac{\varrho}{\cos^2 \vartheta} d\varrho d\vartheta - \iint_{(T_{IV})} v \frac{\partial \zeta}{\partial \varrho} \frac{\varrho}{\sin^2 \vartheta} d\varrho d\vartheta = 0,$$

a hol ismét T_I, T_{II}, T_{III}, T_{IV} a T tartománynak a sík megfelelő quadransában fekvő részeit jelentik s e tartományoknak minden egyes integrálban csak ama része veendő tekintetbe, a mely a Q_1 és Q_2 négyzetek közé esik, mivel Q_2 külsejében és Q_1 belsejében ζ, s ezzel együtt $\frac{\partial \zeta}{\partial \varrho}$ is, zérussal egyenlő.

Ha még rövidség kedveért a következő jelöléseket vezetjük be:

$$\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} u \frac{\varrho}{\cos^2 \vartheta} d\vartheta = u_1(\varrho), \quad - \int_{\frac{3\pi}{4}}^{\frac{5\pi}{4}} u \frac{\varrho}{\cos^2 \vartheta} d\vartheta = u_2(\varrho),$$

$$\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} v \frac{\varrho}{\sin^2 \vartheta} d\vartheta = v_1(\varrho), \quad - \int_{\frac{5\pi}{4}}^{\frac{7\pi}{4}} v \frac{\varrho}{\sin^2 \vartheta} d\vartheta = v_2(\varrho),$$

akkor utolsó egyenletünk a következőbe megy át:

$$\int_{\alpha_1}^{\alpha_2} \frac{\partial \zeta}{\partial \varrho} \left(u_1(\varrho) + u_2(\varrho) + v_1(\varrho) + v_2(\varrho) \right) d\varrho = 0.$$

Minthogy azonban $\zeta(\varrho)$ a ϱ változónak egy tetszésszerinti folytonosan differentiálható függvénye, mely csak annak a megszorításnak van alávetve, hogy az $[\alpha_1\ \alpha_2]$ intervallum végpontjaiban deriváltjával együtt eltűnjék, azért a közönséges Du Bois Reymond-féle tétel alkalmazásával fenti egyenletünkből nyomban következtetjük, hogy

$$u_1(\varrho) + u_2(\varrho) + v_1(\varrho) + v_2(\varrho) = \text{const.}$$

Vizsgáljuk meg ez összefüggés baloldalán álló összeg egyes tagjainak jelentését. Jelöljük e végből rendre

$$l_{\text{I}}^{(\varrho)}\text{-},\ l_{\text{II}}^{(\varrho)}\text{-},\ l_{\text{III}}^{(\varrho)}\text{-},\ l_{\text{IV}}^{(\varrho)}\text{-}$$

val ama $Q^{(\varrho)}$ négyzetnek az I-, II-, III-, IV-, síknegyedbe eső oldalát, a melynek féloldalhossza ϱ-val egyenlő, a mely a Q_1 és Q_2 négyzetekkel concentrikus s melynek oldalai e négyzetek oldalaival párhuzamosak ($Q_1 = Q^{(\alpha_1)}$, $Q_2 = Q^{(\alpha_2)}$). Ekkor nyilván

$$u_1(\varrho) = \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} u \frac{\varrho}{\cos^2\vartheta}\, d\vartheta = \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} u d(\varrho\ \operatorname{tg}\vartheta) = \int_{(l_{\text{I}}^{(\varrho)})} u dy.$$

Mivel pedig az $l_{\text{I}}^{(\varrho)}$ oldal párhuzamos az y-tengelylyel, azért

$$\int_{(l_{\text{I}}^{(\varrho)})} v dx = 0,$$

s ennélfogva

$$u_1(\varrho) = \int_{(l_{\text{I}}^{(\varrho)})} (u dy - v dx).$$

Analog módon nyerjük, hogy

$$u_2(\varrho) = -\int_{\frac{3\pi}{4}}^{\frac{5\pi}{4}} u \frac{\varrho}{\cos^2\vartheta}\, d\vartheta = \int_{\frac{3\pi}{4}}^{\frac{5\pi}{4}} u\, d(-\varrho \operatorname{tg}\vartheta) =$$

$$= \int_{(l_{\text{III}}^{(\varrho)})} u dy = \int_{(l_{\text{III}}^{(\varrho)})} (u dy - v dx).$$

Hasonló számítással adódik:

$$v_1(\varrho) = \int_{(l_{II}^{(\varrho)})} (udy - vdx), \quad v_2(\varrho) = \int_{(l_{IV}^{(\varrho)})} (udy - vdx).$$

Ezt az utóbbi négy egyenletet összeadva, ered:

$$u_1(\varrho) + u_2(\varrho) + v_1(\varrho) + v_2(\varrho) = \int_{(Q^{(\varrho)})} (udy - vdx) = \text{const.},$$

minthogy $l_I^{(\varrho)}$, $l_{II}^{(\varrho)}$, $l_{III}^{(\varrho)}$, $l_{IV}^{(\varrho)}$ a $Q^{(\varrho)}$ négyzet oldalait jelölik.

Ez az egyenlet azt mutatja, hogy ha az

$$\int (udy - vdx)$$

integrált bármely olyan négyzet mentén számítjuk ki, melynek oldalai a tengelyekkel párhuzamosak, mindig ugyanazt az értéket kapjuk. Mivel feltételeink értelmében $u(x, y)$ és $v(x, y)$ folytonos függvények, azért az imént nyert állandó érték szükségképen zérus, hiszen integrálunk értékét tetszés szerint kicsinynyé tehetjük azáltal, hogy a megfelelő négyzetet elég kicsinynek választjuk.

Ezzel fenti állításunkat, mely szerint

$$\int_{(Q)} (udy - vdx) = 0,$$

teljesen bebizonyítottuk.

3°) *Harmadszor* kimutatjuk, hogy az

$$\int_{(P)} (udy - vdx)$$

integrál értéke akkor is zérussal egyenlő, ha az integrálás olyan P parallelogramma kerületén történik, melynek oldalai a coordinatatengelyekkel párhuzamosak.

Állításunk közvetlen visszavezethető a 2°) alatt levezetett tételre abban az esetben, ha a P parallelogramma oldalhosszai commensurabilisek, azaz, ha viszonyuk két egészszám hányadosával egyenlő. Valóban, ez esetben parallelogrammánk véges számú olyan négyzetből tehető össze, melyeknek oldalai ismét a kivánt

irányokkal párhuzamosak; a P parallelogramma mentén vett integrál ennek a felosztásnak megfelelően, véges összeg alakjában jelenik meg, melynek egyes tagjai, ama négyzetek mentén vett integrálok, a melyekből P-t felépítettük. Minthogy pedig ez utóbbi integrálok mindegyike — a 2°) alatti tétel alapján — zérussal egyenlő, azért a P parallelogramma kerületén vett integrál értéke is zérus.

Ha a P parallelogramma oldalhosszai incommensurabilisek, akkor P nem építhető fel a fentebb jelzett módon végesszámú négyzetből. Ez esetben azonban a következőképen járhatunk el: megközelítjük P parallelogrammánkat tetszésszerinti pontossággal egy olyan $P_1, P_2, \ldots P_n, \ldots$ parallelogrammákból álló sorozattal, mely parallelogrammák mindegyikének oldalhosszai commensurabilisek, a melyek mentén véve tehát integrálunkat: az zérust ad eredményül. Az $u(x, y)$ és $v(x, y)$ folytonosságából nyomban következik, hogy

$$\int_{(P)} (u dy - v dx) = \lim_{n=\infty} \int_{(P_n)} (u dy - v dx),$$

s ennélfogva csakugyan

$$\int_{(P)} (u dy - v dx) = 0.$$

Ezzel tehát kimutattuk, hogy a kérdéses integrál eltűnik minden olyan parallelogramma mentén, mely a T tartomány belsejében fekszik s melynek oldalai a coordinata-tengelyekkel párhuzamosak.

Ennek alapján könnyen átlátható az is, hogy integrálunk minden olyan *zárt görbe mentén is eltűnik, a mely a T tartomány belsejében fekszik és végesszámú olyan vonaldarabból épül fel, melyek felváltva az x- és az y-tengelyekkel párhuzamosak.* Valóban bármely tartomány, melynek határát végesszámú ilyen vonaldarab alkotja, felépíthető végesszámú olyan parallelogrammából, melynek oldalai szintén a tengelyekkel párhuzamosak. Minthogy integrálunk értéke zérus e parallelogrammák mindegyikének kerületére vonatkozólag, azért az integrálnak el kell tűnnie akkor is, ha ama görbe mentén vesszük, mely az e parallelogrammákból felépülő tartományt határolja.

4°) Ez utolsó megjegyzés alapján tételünk minden nehézség nélkül bizonyítható be.

Legyen ugyanis O a T tartomány valamely fix-, A pedig valamely változó pontja. E két pontot tört vonallal kapcsoljuk össze, a mely természetesen T belsejében fekszik és végesszámú olyan vonaldarabból áll, melyek felváltva az x-, illetőleg y-tengelylyel párhuzamosak. Ha már most bármely ilyen törtvonal mentén számítjuk ki az

$$\int_O^A (udy - vdx)$$

integrált, nyilván mindig ugyanarra az eredményre jutunk, hiszen ennek az integrálnak értéke bármely ilyen *zárt* törtvonal mentén zérussal egyenlő. Legyenek x és y az A pont coordinatái, integrálunk ilyen módon az x, y változók valamely $\omega(x, y)$ függvényét szolgáltatja:

$$\omega(x, y) = \int_O^A (udy - vdx),$$

mely a T tartomány belsejében van értelmezve (integrátiós útul *egyelőre* csak a fent leírt törtvonalak vehetők). Az $u(x, y)$ és $v(x, y)$ függvények folytonossága következtében az $\omega(x, y)$ függvény is folytonos; számítsuk ki e függvény első deriváltjait.

Kössük össze e végből az O és A pontokat olyan törtvonallal, mely — mint elébb — véges számú vonaldarabból áll, melyek felváltva az x, illetőleg y-tengelylyel párhuzamosak, úgy, hogy e törtvonal utolsó (az A pontot tartalmazó) darabja az x-tengelylyel legyen párhuzamos. Nyilvánvaló, hogy elegendő kis h értékre nézve:

$$\omega(x+h, y) - \omega(x, y) = \int_{x, y}^{x+h, y} (udy - vdx),$$

a hol az integratio útja az az egyenes vonal, mely az (x, y) és $(x+h, y)$ pontokat összekapcsolja. Ez egyenes mentén azonban $y = \text{const.}$ s így

$$\frac{\omega(x+h, y) - \omega(x, y)}{h} = -\frac{1}{h} \int_{x, y}^{x+h, y} vdx.$$

Ebből határátmenetből nyomban adódik, hogy

$$\frac{\partial \omega}{\partial x} = -v(x, y).$$

Ha pedig az O és A pontokat olyan törtvonallal kötjük össze, mely ismét a tengelyekkel párhuzamos egyenes darabokból áll, melyek közül azonban az utolsó az y-tengelylyel párhuzamos. akkor teljesen hasonló megfontolásokkal nyerjük, hogy

$$\frac{\partial \omega}{\partial y} = u(x, y).$$

Más szóval, a fent definiált $\omega(x, y)$ függvénynek a T tartományban folytonos első deriváltjai vannak és pedig

$$\frac{\partial \omega}{\partial x} = -v(x, y), \quad \frac{\partial \omega}{\partial y} = u(x, y);$$

azaz feltevéseinkből kifolyólag u *és* v — *előjelüktől eltekintve* — *egyazon* $\omega(x, y)$ *függvény* y-, *illetőleg* x-*szerinti differentiálhányadosai.* Ebből nyomban következik, hogy az

$$\int (u dy - v dx) = \int \left(\frac{\partial \omega}{\partial x} dx + \frac{\partial \omega}{\partial y} dy \right)$$

integrálnak minden zárt görbe mentén vett értéke zérussal egyenlő.

Ezzel tételünk minden részében beigazolást nyert.

Feltevésünknek tehát, mely az

$$\iint_{(T)} \left(u \frac{\partial \zeta}{\partial x} + v \frac{\partial \zeta}{\partial y} \right) dx dy$$

integrál eltünését követelte, ha $\zeta(x, y)$ a T határán eltünő, T belsejében pedig folytonos első differentiálhányadosokkal biró függvényt jelent, az a következménye, hogy az integrandus függvénydeterminánsalakjában írható:

$$u \frac{\partial \zeta}{\partial x} + v \frac{\partial \zeta}{\partial y} = \frac{\partial \zeta}{\partial x} \frac{\partial \omega}{\partial y} - \frac{\partial \zeta}{\partial y} \frac{\partial \omega}{\partial x} = \frac{\partial (\zeta, \omega)}{\partial (x, y)}.$$

2. §.

Az 1. §-ban levezetett tétel a kétváltozós függvények körében ugyanazzal a szereppel bir, mint a Du Bois Reymond-féle lemma az egyváltozós függvények elméletében.

E tétel segélyével a kettős integrál első variatiójának eltünési feltételét differentiálegyenletek alakjában fejezhetjük ki, a nélkül, hogy feltételeznők, hogy a megoldás második differentiálhányadosai léteznek.

Hogy ezt kimutathassuk, foglalkozzunk egyelőre a

$$\iint_{(T)} f(p, q, x, y)\, dxdy = \min.$$

variatioproblémával (adott kerületi értékek mellett), a melyben — mint szokásos — p-vel és q-val jelöltük az ismeretlen $z(x, y)$ függvény differentiálhányadosait:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = p, \qquad \frac{\partial z}{\partial y} = q.$$

f-et argumentumainak minden tekintetbe jövő értékeinél a p, q, x, y analytikus függvényének tételezzük fel.

Legyen $z = z(x, y)$ ennek a variatioproblémának valamely megoldása, melyről csak azt tesszük fel, hogy a T tartomány belsejében folytonos első differentiálhányadosokkal bir; a variatioszámításban kimutatják, hogy ekkor a

$$\iint_{(T)} \left(\frac{\partial f}{\partial p} \frac{\partial \zeta}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial q} \frac{\partial \zeta}{\partial y} \right) dxdy$$

integrál eltűnik, ha $\zeta(x, y)$ a T tartományban értelmezett olyan függvényt jelöl, mely e tartomány határán eltűnik s melynek első differentiálhányadosai a T belsejében léteznek és folytonosak. Minthogy az ebben az integrálban fellépő

$$u(x, y) = \frac{\partial f}{\partial p} \quad \text{és} \quad v(x, y) = \frac{\partial f}{\partial q}$$

függvények folytonosak, azért az 1. §-ban kimutatott tételből kifolyólag következtethetjük, hogy létezik a T tartományban

értelmezett olyan $\omega(x, y)$ függvény, melynek x és y szerinti első deriváltjai e tartományban folytonos függvények s a mely függvény azzal a tulajdonsággal bir, hogy

$$\frac{\partial \omega}{\partial x} = -\frac{\partial f}{\partial q}, \quad \frac{\partial \omega}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial p}.$$

Más szóval: *az ismeretlen $z = z(x, y)$ függvény kielégíti az $\omega(x, y)$ segédfüggvénynyel egyetemben ezt a két elsőrendű differentiálegyenletből álló egyenletrendszert.*

Általában ez $\omega(x, y)$ függvény második deriváltjai nem léteznek; ha ezek léteznek, akkor egyenletrendszerünkből az $\omega(x, y)$ függvény eliminálásával nyomban levezethetjük a $z(x, y)$ számára a variatioszámítás úgynevezett LAGRANGE-féle differentiálegyenletét. Általában azonban csak annyi következik, hogy a fentebbi variatioproblémának minden *olyan $z(x, y)$ megoldása, melynek első deriváltjai a T tartományban folytonos függvények, kielégíti a következő differentiálegyenletrendszert:*

$$\frac{\partial f}{\partial p} = \frac{\partial \omega}{\partial y}, \quad \frac{\partial f}{\partial q} = -\frac{\partial \omega}{\partial x}.$$

Ha a variatioprobléma integrandusában a keresett függvény $z(x, y)$ explicite is fellép, akkor a megfelelő differentiálegyenletrendszer már nem annyira egyszerű. Ez esetben — ismét anélkül, hogy az ismeretlen $z(x, y)$ függvény második deriváltjainak létezését feltételeznők — három differentiálegyenletből álló rendszerre jutunk, a mely a $z(x, y)$ függvényen kivül még két segédfüggvényt — $\omega(x, y)$-, és $\Omega(x, y)$-t — tartalmaz.

Ha ugyanis $z(x, y)$ olyan megoldását jelenti a

$$\iint_{(T)} f(p, q, z, x, y)\, dxdy = \min.$$

variatioproblémának, melynek első differentiálhányadosai (a p és q függvények) a T tartományban folytonosak, akkor — a variatioszámítás egy ismert tételének értelmében — a

$$\iint_{(T)} \left(\frac{\partial f}{\partial p} \frac{\partial \zeta}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial q} \frac{\partial \zeta}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial z} \zeta \right) dxdy \qquad (5)$$

integrál eltűnik, ha $\zeta(x, y)$ a T tartományban értelmezett olyan függvényt jelöl, mely e tartomány határán eltűnik, első differentiálhányadosai pedig a T belsejében folytonos függvények.

Legyen rövidség kedvéért

$$2\Omega(x, y) = \int_0^x \int_0^y \frac{\partial f}{\partial z}\, dxdy;$$

az így értelmezett $\Omega(x, y)$ segédfüggvénynek x és y szerinti első differentiálhányadosai a T tartományban nyilván folytonos függvények s egyszersmind az $\Omega(x, y)$ vegyes második differentiálhányadosa is létezik és folytonos:

$$2\frac{\partial^2 \Omega}{\partial x \partial y} = \frac{\partial f}{\partial z}.$$

Mivel a $\zeta(x, y)$ a T tartomány határán eltűnik, azért fennállanak a következő egyenlőségek:

$$\iint_{(T)} \zeta \frac{\partial f}{\partial z}\, dxdy = 2\iint_{(T)} \zeta \frac{\partial^2 \Omega}{\partial x \partial y}\, dxdy = -$$

$$-2\iint_{(T)} \frac{\partial \zeta}{\partial x}\frac{\partial \Omega}{\partial y}\, dxdy = -2\iint_{(T)} \frac{\partial \zeta}{\partial y}\frac{\partial \Omega}{\partial x}\, dxdy,$$

melyeknek tekintetbevételével (5) alatti feltételünk a következő alakban írható:

$$\iint_{(T)} \left\{ \left(\frac{\partial f}{\partial p} - \frac{\partial \Omega}{\partial y} \right) \frac{\partial \zeta}{\partial x} + \left(\frac{\partial f}{\partial q} - \frac{\partial \Omega}{\partial x} \right) \frac{\partial \zeta}{\partial y} \right\} dxdy = 0.$$

Minthogy a zárójelekben álló

$$u(x, y) = \frac{\partial f}{\partial p} - \frac{\partial \Omega}{\partial y} \quad \text{és} \quad v(x, y) = \frac{\partial f}{\partial q} - \frac{\partial \Omega}{\partial x}$$

függvények a T tartományban értelmezett folytonos függvények, azért az 1. §-ban bebizonyított tétel alapján következtethetjük, hogy létezik a T-ben értelmezett olyan $\omega(x, y)$ függvény, mely-

nek első deriváltjai e tartományban folytonos függvények s a mely azzal a tulajdonsággal bir, hogy

$$\frac{\partial f}{\partial p} - \frac{\partial \Omega}{\partial y} = \frac{\partial \omega}{\partial y}, \quad \frac{\partial f}{\partial q} - \frac{\partial \Omega}{\partial x} = -\frac{\partial \omega}{\partial x}.$$

Más szóval: *variatioproblémánknak minden olyan megoldása, melynek első differentiálhányadosai a T tartományban folytonos függvények, két segédfüggvénynyel* ($\omega(x, y)$- és $\Omega(x, y)$-nal) *egyetemben* — melyek mindketten a T-ben folytonos első deriváltakkal birnak s ezenfelül a második, a $\Omega(x, y)$ függvényre vonatkozóan T-ben a vegyes második differentiálhányados is létezik és folytonos — *kielégíti a következő három differentiálegyenletből álló simultán egyenletrendszert:*

$$\frac{\partial f}{\partial p} = \frac{\partial \omega}{\partial y} + \frac{\partial \Omega}{\partial y}, \quad \frac{\partial f}{\partial q} = -\frac{\partial \omega}{\partial x} + \frac{\partial \Omega}{\partial x}, \quad \frac{\partial f}{\partial z} = 2\frac{\partial^2 \Omega}{\partial x \partial y}.$$

Ez egyenletrendszer felállításával feladatunk — amely a kettős integrál első variatiója eltűnésének differentiálegyenletekbe való átírását követelte anélkül, hogy a megoldás második differentiálhányadosainak létezését feltételeznők — teljes megoldást nyert.

Ez a differentiálegyenletrendszer a variatioszámítás további kiépítésére ugyanúgy alapul vehető, mint a LAGRANGE-féle differentiálegyenlet, a melynek levezetésénél a keresett függvény második deriváltjainak létezését is fel kell tételezni.

*

Az a probléma, a melyre az 1. §-ban levezetett tétel válaszolt, valamint a bizonyításnál követett gondolatmenet, több irányban általánosítható; ezek az általánosítások egyrészt önmagukban is érdekesek, másrészt pedig a 2. §-ban tárgyalt variatioprobléma természetes általánosításainak analog tárgyalása folytán szükségképen rájuk jutunk. Ez általánosítások közül kettőt említek:

I. Legyenek $u(x, y)$, $v(x, y)$, $w(x, y)$ a T tartományban definiált folytonos függvények; tegyük fel továbbá, hogy az

$$\iint_{(T)} \left(u \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2} + 2v \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x \partial y} + w \frac{\partial^2 \zeta}{\partial y^2} \right) dxdy$$

integrál értéke zérussal egyenlő, ha $\zeta(x, y)$ olyan függvényt jelent, mely a T határán eltűnik és a melynek a T belsejében az x és y változók szerinti első és második differentiálhányadosai folytonos függvények; mi következik e feltevésekből az u, v, w függvényekre?

II. Legyen T egy háromdimensiós tartomány, $u(x, y, z)$ $v(x, y, z)$, $w(x, y, z)$ pedig e tartományban definiált folytonos függvényei az x, y és z változóknak. Tegyük fel továbbá, hogy az

$$\iiint_{(T)} \left(u \frac{\partial \zeta}{\partial x} + v \frac{\partial \zeta}{\partial y} + w \frac{\partial \zeta}{\partial \zeta} \right) dxdydz$$

integrál értéke zérussal egyenlő, ha $\zeta(x, y, z)$ olyan függvényt jelent, mely T határán eltűnik, s a melynek x, y és z szerinti első differentiálhányadosai e tartomány belsejében folytonos függvények; mi következik e feltevésekből az u, v, w függvényekre?

(A M. T. Akadémia III. osztályának 1916 április 10.-én tartott üléséből.)

Über die Variation der Doppelintegrale.

Von Herrn *Alfred Haar* in Klausenburg (Kolozsvár).

Unter dem Fundamentalsatz der Variationsrechnung pflegt man — soweit es sich um Probleme handelt, bei denen die unbekannten Funktionen nur von einer Veränderlichen abhängen — das folgende von *P. Du Bois Reymond* herrührende Theorem zu verstehen:

Ist $u(x)$ eine Funktion von x, welche stetig ist im Intervall $x_1 \leqq x \leqq x_2$ und ist

$$\int_{x_1}^{x_2} u(x) \frac{d\zeta}{dx} dx = 0$$

für alle Funktionen $\zeta(x)$, welche in x_1 und x_2 verschwinden und eine stetige Ableitung im betrachteten Intervall besitzen, so ist $u(x) = \text{const.}$

Mit Hilfe dieses Theorems leitet man bekanntlich in der Variationsrechnung aus dem Verschwinden der ersten Variation die *Euler-Lagrange*schen Differentialgleichungen ab, wobei man außer der Existenz und Stetigkeit der ersten Ableitung der Lösungen, keine weiteren Annahmen über den Charakter dieser Funktionen zu machen braucht.

Wenn man hingegen diejenigen einfachsten Probleme der Variationsrechnung betrachtet, bei denen die unbekannte Funktion von zwei unabhängigen Veränderlichen abhängt, so ist es bisher nicht gelungen, das Problem in Differentialgleichungen umzusetzen ohne die — ganz unnatürliche — Einschränkung zu machen, daß die Lösung eine zweimal stetig differenzierbare Funktion ihrer Veränderlichen sein soll. In der Tat kann

in diesem Falle — wie Herr *Hadamard* durch ein einfaches Beispiel gezeigt hat*) — aus dem Verschwinden der ersten Variation nicht auf die Existenz der zweiten Ableitungen der unbekannten Funktion geschlossen werden; in dem von Herrn *Hadamard* angegebenen überaus einfachen Beispiel kann man unmittelbar einsehen, daß die erste Variation eines Doppelintegrals ganz wohl verschwinden kann, ohne daß die Lösung zweite Ableitungen irgendwelcher Art besitzen müßte.

Nach dieser *Hadamard*schen Bemerkung schien es zunächst unmöglich, das Verschwinden der ersten Variation, ohne weitere Annahmen, in Differentialgleichungen umzusetzen, m. a. W. für die Lösung des Variationsproblems, ohne die Existenz der zweiten Ableitungen vorauszusetzen, Differentialgleichungen abzuleiten. Dennoch gelingt dies mit Hilfe eines Theorems, das in voller Analogie mit dem oben erwähnten *Du Bois Reymond*schen Lemma bei Problemen, bei denen zwei unabhängige Veränderliche auftreten, dieselbe Rolle spielt, wie der Fundamentalsatz der Variationsrechnung bei Problemen mit einer unabhängigen Veränderlichen.

Dieses Theorem, dessen Ableitung das Hauptziel der vorliegenden Arbeit bildet, lautet, wie folgt:

Sind $u(x,y)$ und $v(x,y)$ zwei Funktionen der unabhängigen Veränderlichen x und y, welche in einem Bereiche $\mathfrak{B}$ stetig sind, und ist

$$\iint_{(\mathfrak{B})} \left(u\frac{\partial\zeta}{\partial x}+v\frac{\partial\zeta}{\partial y}\right)dxdy=0$$

für alle Funktionen $\zeta(x,y)$, welche auf der Berandung des Bereiches $\mathfrak{B}$ verschwinden und innerhalb $\mathfrak{B}$ stetige Ableitungen erster Ordnung besitzen, so ist das längs irgendeiner im Innern von $\mathfrak{B}$ verlaufenden geschlossenen Kurve C genommene Integral

$$\int_{(C)}(udy-vdx)=0;$$

mit anderen Worten: *es existiert unter den gemachten Voraussetzungen eine Funktion $\omega(x,y)$, die in unserem Bereiche $\mathfrak{B}$ samt ihren Ableitungen erster*

*) Comptes Rendus, Bd. 144, S. 1092—1093. Ein anderes Beispiel — wo es sich sogar um ein reguläres Variationsproblem handelt — gab *L. Lichtenstein*. Math. Ann. Bd. 69, S. 514—516.

Ordnung stetig ist und deren Ableitungen nach x und y bezw. mit den Funktionen $-v(x,y)$ und $u(x,y)$ übereinstimmen:

$$\frac{\partial \omega}{\partial x} = -v(x,y), \qquad \frac{\partial \omega}{\partial y} = u(x,y).$$

§ 1 der vorliegenden Arbeit enthält den Beweis dieses Theorems.

Im § 2 behandeln wir die Variationsprobleme

$$\iint_{(\mathfrak{B})} f(p,q,x,y)\,dx\,dy = \text{min.} \quad \text{und} \quad \iint_{(\mathfrak{B})} f(p,q,z,x,y)\,dx\,dy = \text{min.}$$

$$\left(p = \frac{\partial z}{\partial x}, \qquad q = \frac{\partial z}{\partial y}\right).$$

Auf Grund des im § 1 bewiesenen Theorems gelingt, es für jede Lösung dieser Variationsprobleme, deren erste Ableitungen stetige Funktionen des Ortes im Bereiche $\mathfrak{B}$ sind, *ohne weitere Annahmen über diese Funktionen zu machen*, ein System von Differentialgleichungen aufzustellen, das im ersten Falle aus zwei, im zweiten Falle aber aus drei Differentialgleichungen besteht. Es treten zu der Funktion $z(x,y)$ im ersten Falle eine, im zweiten Falle zwei unbestimmte Hilfsfunktionen hinzu, so daß in beiden Fällen die Anzahl der Gleichungen mit der Anzahl der zu bestimmenden Funktionen übereinstimmt.

Am Ende der Arbeit stellen wir einige Verallgemeinerungen unsrer Fragestellung auf, die bei den entsprechenden Problemen der Variationsrechnung eine analoge Rolle spielen, wie unser Theorem des § 1 bei den einfachsten Problemen dieser Art.

§ 1.

Den Beweis des oben ausgesprochenen Theorems erbringen wir in vier Schritten.

1.) Wir zeigen *zuerst*, daß zufolge unsrer Annahme das Integral

$$\iint_{(\mathfrak{B})} \left(u\frac{\partial \zeta}{\partial x} + v\frac{\partial \zeta}{\partial y}\right) dx\,dy$$

auch dann gleich Null ausfällt, wenn die auf der Berandung von $\mathfrak{B}$ verschwindende Funktion $\zeta(x,y)$ *eine Kante aufweist.* Ich verstehe darunter,

1*

daß ein regulärer Kurvenzug*) (etwa eine Gerade) innerhalb $\mathfrak{B}$ existiert, längs dessen die Ableitungen $\frac{\partial \zeta}{\partial x}$ und $\frac{\partial \zeta}{\partial y}$ (die sonst überall stetige im Bereiche $\mathfrak{B}$ definierte Funktionen sind) endliche Sprünge erleiden.

Um dies darzutun, bezeichnen wir mit M eine positive Größe, die größer ist, als die absoluten Maxima der vier Funktionen

$$u(x,y), \quad v(x,y), \quad \frac{\partial \zeta}{\partial x}, \quad \frac{\partial \zeta}{\partial y}$$

im Bereiche $\mathfrak{B}$, und umgeben den Kurvenzug, längs dessen die letzten beiden Funktionen unstetig werden, durch eine reguläre geschlossene Kurve (etwa einen Polygonzug), die ganz im Inneren von $\mathfrak{B}$ verlaufend ein Bereich $\mathfrak{b}$ vom Flächeninhalt δ umgrenzt. Natürlich können wir diese geschlossene Kurve derart bestimmen, daß dieser Flächeninhalt beliebig klein ausfällt. Sodann konstruieren wir eine Hilfsfunktion $\bar{\zeta}(x,y)$, die in dem außerhalb $\mathfrak{b}$ liegenden Teil des ursprünglichen Bereichs $\mathfrak{B}$ mit $\zeta(x,y)$ übereinstimmt, innerhalb $\mathfrak{b}$ aber von $\zeta(x,y)$ verschieden ist und daselbst stetige ersten Ableitungen besitzt, deren absoluten Beträge unterhalb M liegen**). Da diese Hilfsfunktion auf der Berandung von $\mathfrak{B}$ verschwindet, innerhalb $\mathfrak{B}$ aber stetige Ableitungen erster Ordnung aufweist, so ist zufolge unsrer Voraussetzung

$$\iint_{(\mathfrak{B})} \left(u \frac{\partial \bar{\zeta}}{\partial x} + v \frac{\partial \bar{\zeta}}{\partial y} \right) dx\,dy = 0,$$

und daraus folgt unmittelbar

$$\iint_{(\mathfrak{B})} \left(u \frac{\partial \zeta}{\partial x} + v \frac{\partial \zeta}{\partial y} \right) dx\,dy = \iint_{(\mathfrak{b})} \left(u \left(\frac{\partial \zeta}{\partial x} - \frac{\partial \bar{\zeta}}{\partial x} \right) + v \left(\frac{\partial \zeta}{\partial y} - \frac{\partial \bar{\zeta}}{\partial y} \right) \right) dx\,dy.$$

Da aber alle Funktionen

$$u, \quad v, \quad \frac{\partial \zeta}{\partial x}, \quad \frac{\partial \zeta}{\partial y}, \quad \frac{\partial \bar{\zeta}}{\partial x}, \quad \frac{\partial \bar{\zeta}}{\partial y}$$

dem absoluten Betrage nach kleiner als M ausfallen und δ den Flächen-

---

*) Bei der Anwendung wird dieser Kurvenzug eine gerade Linie sein.

**) Die Existenz dieser Hilfsfunktion ist ohne weiteres klar.

inhalt des Bereiches $\mathfrak{b}$ bedeutet, so ist das letzte Integral dem Betrage nach sicherlich kleiner als

$$4M^2\delta;$$

also ist jedenfalls

$$\left|\iint\limits_{(\mathfrak{B})}\left(u\frac{\partial\zeta}{\partial x}+v\frac{\partial\zeta}{\partial y}\right)dx\,dy\right|\leqq 4M^2\delta.$$

Daraus folgt aber, da δ eine beliebig kleine positive Größe bedeutet,

$$\iint\limits_{(\mathfrak{B})}\left(u\frac{\partial\zeta}{\partial x}+v\frac{\partial\zeta}{\partial y}\right)dx\,dy=0.$$

2.) Wir beweisen *zweitens*, daß *das Integral*

$$\int\limits_{(Q)}(u\,dy-v\,dx)$$

verschwindet, wenn Q den Rand irgendeines innerhalb $\mathfrak{B}$ liegenden Quadrates bedeutet, dessen Seiten den Koordinatenachsen parallel sind.

Zu diesem Ende führe ich ein besonderes Koordinatensystem ein, das in bestimmter Hinsicht den Polarkoordinaten ähnlich ist, wobei aber konzentrische und ähnlich orientierte Quadrate diejenige Rolle spielen, die bei den Polarkoordinaten den konzentrischen Kreisen um den Anfangspunkt zukommt. Es sei nämlich (x,y) ein gewöhnliches rechtwinkliges Koordinatensystem und O sein Anfangspunkt. Ist P ein willkürlicher Punkt der Ebene, dessen Cartesische Koordinaten x und y sein mögen, so definieren wir die eine der neuen Koordinaten als den Winkel ϑ, den die Richtung OP mit der positiven x-Achse bildet. Als andre Koordinate ϱ, die wir stets positiv rechnen, nehmen wir die halbe Seitenlänge desjenigen um O als Mittelpunkt beschriebenen Quadrates, dessen Seiten den Achsen parallel gerichtet sind und das durch den Punkt P hindurchgeht.

Die erste der jetzt definierten Koordinaten ϑ ergibt sich aus den Cartesischen Koordinaten vermöge der Formel

$$(1.)\qquad tg\,\vartheta=\frac{y}{x}.$$

Für unsre zweite Koordinate ϱ hingegen erhalten wir verschiedene Aus-

drücke, je nachdem ϑ die eine der vier folgenden Ungleichungen erfüllt:

$$\begin{array}{cccc} \text{I.} & \text{II.} & \text{III.} & \text{IV.} \\ -\frac{\pi}{4} \leqq \vartheta \leqq \frac{\pi}{4}, & \frac{\pi}{4} \leqq \vartheta \leqq \frac{3\pi}{4}, & \frac{3\pi}{4} \leqq \vartheta \leqq \frac{5\pi}{4}, & \frac{5\pi}{4} \leqq \vartheta \leqq \frac{7\pi}{4}. \end{array}$$

Durch diese 4 Ungleichungen wird die Ebene in 4 Quadranten zerlegt, die wir bezw. mit I, II, III, IV bezeichnen wollen. Für jeden dieser 4 Quadranten finden wir die folgenden Ausdrücke für unsre zweite Koordinate ϱ:

$$(2.) \qquad \begin{array}{llll} \text{In} & \text{I. ist} & x = \varrho & \text{also } y = \varrho\, tg\, \vartheta, \\ \text{,,} & \text{II. ,,} & y = \varrho & \text{,, } x = \varrho\, ctg\, \vartheta, \\ \text{,,} & \text{III. ,,} & x = -\varrho & \text{,, } y = -\varrho\, tg\, \vartheta, \\ \text{,,} & \text{IV. ,,} & y = -\varrho & \text{,, } x = -\varrho\, ctg\, \vartheta. \end{array}$$

Dementsprechend erhält auch die Funktionaldeterminante

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(\varrho,\vartheta)} = \frac{\partial x}{\partial \varrho}\frac{\partial y}{\partial \vartheta} - \frac{\partial x}{\partial \vartheta}\frac{\partial y}{\partial \varrho}$$

in den 4 verschiedenen Quadranten verschiedene Ausdrücke. Eine leichte Rechnung ergibt:

$$\begin{aligned} \frac{\partial(x,y)}{\partial(\varrho,\vartheta)} &= \frac{\varrho}{\cos^2\vartheta} \text{ in den Quadranten I. und III.,} \\ &= \frac{\varrho}{\sin^2\vartheta} \text{ ,, ,, ,, II. ,, IV.} \end{aligned}$$

Ist nun $f(x,y)$ eine beliebige differenzierbare Funktion der beiden Variablen x und y und führen wir statt dieser unsre neuen, vermöge der Gleichungen (1.) und (2.) definierten Variablen ein, so geht $f(x,y)$ in eine Funktion von ϱ und ϑ über. Drücken wir die Ableitungen dieser Funktion nach den ursprünglichen Veränderlichen durch die Ableitungen nach den neuen Variablen aus, so erhalten wir naturgemäß verschiedene Relationen, je nachdem, in welchem der 4 Quadranten der Punkt (x,y) liegt. Auf diese Weise erhalten wir, falls x,y die Koordinaten eines Punktes des I. oder III. Quadranten bedeutet

$$(3.) \qquad \begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x} &= \pm\frac{\partial f}{\partial \varrho} \mp \frac{\partial f}{\partial \vartheta}\frac{\sin\vartheta\cos\vartheta}{\varrho}, \\ \frac{\partial f}{\partial y} &= \pm\frac{\partial f}{\partial \vartheta}\frac{\cos^2\vartheta}{\varrho}, \end{aligned}$$

wobei überall das obere bezw. untere Vorzeichen zu nehmen ist, je nachdem der Punkt (x, y) im I. oder III. Quadranten liegt. Entsprechend ergibt sich für Punkte des II. und IV. Quadranten

$$(4.) \qquad \begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x} &= \mp \frac{\partial f}{\partial \vartheta} \frac{\sin^2 \vartheta}{\varrho}, \\ \frac{\partial f}{\partial y} &= \pm \frac{\partial f}{\partial \varrho} \pm \frac{\partial f}{\partial \vartheta} \frac{\sin \vartheta \cos \vartheta}{\varrho}, \end{aligned}$$

wobei wiederum überall das obere bezw. untere Vorzeichen zu nehmen ist, je nachdem der Punkt im II. oder IV. Quadranten liegt.

Schließlich transformieren wir noch das über $\mathfrak{B}$ erstreckte Integral

$$\iint_{(\mathfrak{B})} \left(u \frac{\partial \zeta}{\partial x} + v \frac{\partial \zeta}{\partial y} \right) dx\, dy$$

auf unsre neuen Koordinanten.

Bezeichnen wir mit $\mathfrak{B}_{\mathrm{I}}$, $\mathfrak{B}_{\mathrm{II}}$, $\mathfrak{B}_{\mathrm{III}}$, $\mathfrak{B}_{\mathrm{IV}}$ diejenigen Teile des Bereiches $\mathfrak{B}$, die bezw. in den I., II., III., IV. Quadranten der Ebene liegen, so geht mit Rücksicht auf die Formeln (3.) und (4.) das letzte Integral in die Summe der folgenden 4 Integrale über:

$$\begin{aligned} &\iint_{(\mathfrak{B}_{\mathrm{I}})} \left\{ u \left(\frac{\partial \zeta}{\partial \varrho} - \frac{\partial \zeta}{\partial \vartheta} \frac{\sin \vartheta \cos \vartheta}{\varrho} \right) + v \frac{\partial \zeta}{\partial \varrho} \frac{\cos^2 \vartheta}{\varrho} \right\} \frac{\varrho}{\cos^2 \vartheta} d\varrho\, d\vartheta + \\ &\iint_{(\mathfrak{B}_{\mathrm{II}})} \left\{ u \left(-\frac{\partial \zeta}{\partial \vartheta} \frac{\sin^2 \vartheta}{\varrho} \right) + v \left(\frac{\partial \zeta}{\partial \varrho} + \frac{\partial \zeta}{\partial \vartheta} \frac{\sin \vartheta \cos \vartheta}{\varrho} \right) \right\} \frac{\varrho}{\sin^2 \vartheta} d\varrho\, d\vartheta + \\ &+ \iint_{(\mathfrak{B}_{\mathrm{III}})} \left\{ u \left(-\frac{\partial \zeta}{\partial \varrho} + \frac{\partial \zeta}{\partial \vartheta} \frac{\sin \vartheta \cos \vartheta}{\varrho} \right) + v \left(-\frac{\partial \zeta}{\partial \vartheta} \frac{\cos^2 \vartheta}{\varrho} \right) \right\} \frac{\varrho}{\cos^2 \vartheta} d\varrho\, d\vartheta + \\ &+ \iint_{(\mathfrak{B}_{\mathrm{IV}})} \left\{ u \left(\frac{\partial \zeta}{\partial \vartheta} \frac{\sin^2 \vartheta}{\varrho} \right) + v \left(-\frac{\partial \zeta}{\partial \varrho} - \frac{\partial \zeta}{\partial \vartheta} \frac{\sin \vartheta \cos \vartheta}{\varrho} \right) \right\} \frac{\varrho}{\sin^2 \vartheta} d\varrho\, d\vartheta. \end{aligned}$$

Nach diesen Vorbereitungen kehren wir zu dem Beweise unsrer Behauptung zurück, daß das Integral

$$\int_{(Q)} (u\, dy - v\, dx)$$

verschwindet, wenn Q irgendein ganz im Innern von $\mathfrak{B}$ liegendes Quadrat bedeutet, dessen Seiten bezw. der x-und y-Achse parallel gerichtet sind.

Es seien also Q_1 und Q_2 zwei konzentrische und ähnlich orientierte Quadrate, deren Seiten die verlangten Richtungen besitzen. Wir verlegen dann durch eine Koordinatenverschiebung den Anfangspunkt unsres Koordinatensystems in den gemeinsamen Mittelpunkt dieser Quadrate, deren halbe Seitenlänge α_1 bezw. α_2 sein mögen ($\alpha_1 < \alpha_2$). Wir nehmen noch an, daß beide Quadrate innerhalb des Bereiches $\mathfrak{B}$ liegen, und beweisen nun unsre Behauptung für diese Quadrate wie folgt:

Auf Grund der Formeln (1.) und (2.) führen wir statt x und y die dort definierten Variablen ϱ und ϑ ein und definieren dann mit Hilfe dieser Veränderlichen eine Funktion ζ von folgender Art:

ζ sei außerhalb des Quadrates Q_2 und innerhalb des Quadrates Q_1 überall gleich Null; in dem zwischen den Quadraten Q_1 und Q_2 liegenden ringförmigen Gebiet sei ζ eine willkürliche stetige und stetig differenzierbare Funktion der Koordinate ϱ allein, die für $\varrho = \alpha_1$ und $\varrho = \alpha_2$ samt ihrer Ableitung verschwindet. Diese Funktion nimmt offenbar längs den Quadraten, die mit Q_1 und Q_2 konzentrisch und diesen ähnlich orientiert sind, konstante Werte an. Unsre Funktion ist innerhalb des Bereiches $\mathfrak{B}$ überall stetig; ihre Ableitung nach ϑ ist überall gleich Null und nach unsrer Definition ist auch die Ableitung nach ϱ eine stetige Funktion des Ortes. Fassen wir diese Funktion als Funktion der ursprünglichen Koordinaten x und y auf, so ist die so entstehende Funktion $\zeta(x,y)$ natürlich wiederum stetig; ihre Ableitungen $\frac{\partial \zeta}{\partial x}$ und $\frac{\partial \zeta}{\partial y}$ sind — wie die Formeln (3.) und (4.) zeigen — ebenfalls stetige Funktionen des Ortes, mit Ausnahme derjenigen Stellen, wo zwei Quadranten der Ebene zusammenstoßen; das sind aber diejenigen Stellen, wo ϑ einen der 4 Werte $\pm\frac{\pi}{4}, \pm 3\frac{\pi}{4}$ annimmt. Mit anderen Worten die Ableitungen $\frac{\partial \zeta}{\partial x}$ und $\frac{\partial \zeta}{\partial y}$ können endliche Sprünge längs derjenigen Geraden erleiden, die die entsprechenden Ecken der Quadrate Q_1 und Q_2 verbinden; außerhalb dieser 4 Strecken sind diese Ableitungen stetige Funktionen von x und y.

Auf Grund der zuerst gemachten Bemerkung können wir also schließen, daß das Integral:

$$\iint\limits_{(\mathfrak{B})} \left(u\frac{\partial\zeta}{\partial x} + v\frac{\partial\zeta}{\partial y}\right) dx\,dy = 0$$

sein muß, sowie ζ eine der soeben konstruierten Funktionen bedeutet.

Mit Benutzung der Veränderlichen ϱ und ϑ und in Anbetracht dessen, daß überall $\frac{\partial\zeta}{\partial\vartheta} = 0$ ist, geht unser letztes Integral in die Summe der vier folgenden über:

$$\iint\limits_{(\mathfrak{B}_\mathrm{I})} u\frac{\partial\zeta}{\partial\varrho}\frac{\varrho}{\cos^2\vartheta}\,d\varrho\,d\vartheta + \iint\limits_{(\mathfrak{B}_\mathrm{II})} v\frac{\partial\zeta}{\partial\varrho}\frac{\varrho}{\sin^2\vartheta}\,d\varrho\,d\vartheta$$

$$-\iint\limits_{(\mathfrak{B}_\mathrm{III})} u\frac{\partial\zeta}{\partial\varrho}\frac{\varrho}{\cos^2\vartheta}\,d\varrho\,d\vartheta - \iint\limits_{(\mathfrak{B}_\mathrm{IV})} v\frac{\partial\zeta}{\partial\varrho}\frac{\varrho}{\sin^2\vartheta}\,d\varrho\,d\vartheta = 0;$$

hierbei bedeuten wieder $\mathfrak{B}_\mathrm{I}$, $\mathfrak{B}_\mathrm{II}$, $\mathfrak{B}_\mathrm{III}$, $\mathfrak{B}_\mathrm{IV}$ diejenigen Teile des Bereiches $\mathfrak{B}$, die in den entsprechenden Quadranten der Ebene liegen, und es kommt jedesmal nur derjenige Teil dieser Bereiche in Betracht, der zwischen den Quadraten Q_1 und Q_2 liegt, da außerhalb Q_2 und innerhalb Q_1 $\zeta = 0$ ist.

Führen wir noch zur Abkürzung die folgenden Bezeichnungen ein:

$$\int\limits_{-\pi/4}^{\pi/4} u\frac{\varrho}{\cos^2\vartheta}\,d\vartheta = u_1(\varrho), \qquad -\int\limits_{3\pi/4}^{5\pi/4} u\frac{\varrho}{\cos^2\vartheta}\,d\vartheta = u_2(\varrho),$$

$$\int\limits_{\pi/4}^{3\pi/4} v\frac{\varrho}{\sin^2\vartheta}\,d\vartheta = v_1(\varrho), \qquad -\int\limits_{5\pi/4}^{7\pi/4} v\frac{\varrho}{\sin^2\vartheta}\,d\vartheta = v_2(\varrho),$$

so geht unsre letzte Gleichung in die folgende über:

$$\int\limits_{\alpha_1}^{\alpha_2} \frac{\partial\zeta}{\partial\varrho}\left(u_1(\varrho) + u_2(\varrho) + v_1(\varrho) + v_2(\varrho)\right) d\varrho = 0.$$

Da aber $\zeta(\varrho)$ eine willkürliche Funktion der Veränderlichen ϱ bedeutet, die nur der Einschränkung unterworfen ist, im Intervall $\alpha_1 \leqq \varrho \leqq \alpha_2$ samt ihrer Ableitung stetig zu sein und in den Endpunkten dieses Intervalls samt ihrer Ableitung zu verschwinden, so folgt aus dem bekannten *Du Bois Reymond*schen Lemma

$$u_1(\varrho) + u_2(\varrho) + v_1(\varrho) + v_2(\varrho) = \text{const.}$$

Wir schreiten nun zur Untersuchung der Bedeutung der einzelnen Glieder dieser Summe. Wir bezeichnen zu diesem Zwecke bezw. mit

$$l_\mathrm{I}^{(\varrho)},\ l_\mathrm{II}^{(\varrho)},\ l_\mathrm{III}^{(\varrho)},\ l_\mathrm{IV}^{(\varrho)}$$

die in den Quadranten I, II, III, IV liegenden Seiten desjenigen Quadrates $Q^{(\varrho)}$, dessen halbe Seitenlänge gleich ϱ ist und das den Quadraten Q_1 und Q konzentrisch und ähnlich orientiert ist. Dann ist offenbar

$$u_1(\varrho) = \int_{-\pi/4}^{\pi/4} u \frac{\varrho}{\cos^2\vartheta}\, d\vartheta = \int_{(l_{\mathrm{I}}^{(\varrho)})} u\, d(\varrho \operatorname{tg}\vartheta) = \int_{(l_{\mathrm{I}}^{(\varrho)})} u\, dy,$$

und da für die der y-Achse parallel laufende Seite $l_{\mathrm{I}}^{(\varrho)}$ offenbar

$$\int_{(l_{\mathrm{I}}^{(\varrho)})} v\, dx = 0$$

ist, so können wir schreiben:

$$u_1(\varrho) = \int_{(l_{\mathrm{I}}^{(\varrho)})} (u\, dy - v\, dx).$$

Ganz analog ergibt sich

$$u_2(\varrho) = -\int_{3\pi/4}^{5\pi/4} u \frac{\varrho}{\cos^2\vartheta}\, d\vartheta = \int_{(l_{\mathrm{III}}^{(\varrho)})} u\, d(-\varrho \operatorname{tg}\vartheta) = \int_{(l_{\mathrm{III}}^{(\varrho)})} u\, dy = \int_{(l_{\mathrm{III}}^{(\varrho)})} (u\, dy - v\, dx);$$

und man erhält in gleicher Weise

$$v_1(\varrho) = \int_{(l_{\mathrm{II}}^{(\varrho)})} (u\, dy - v\, dx), \quad v_2(\varrho) = \int_{(l_{\mathrm{IV}}^{(\varrho)})} (u\, dy - v\, dx).$$

Durch Addition der zuletzt gewonnenen vier Gleichungen erhalten wir das Resultat

$$u_1(\varrho) + u_2(\varrho) + v_1(\varrho) + v_2(\varrho) = \int_{(Q^{(\varrho)})} (u\, dy - v\, dx) = \text{const.}$$

in Anbetracht dessen, daß $l_{\mathrm{I}}^{(\varrho)}$, $l_{\mathrm{II}}^{(\varrho)}$, $l_{\mathrm{III}}^{(\varrho)}$, $l_{\mathrm{IV}}^{(\varrho)}$ die vier Seiten des Quadrates $Q^{(\varrho)}$ bezeichnen. Diese Gleichung lehrt aber, daß das Integral

$$\int (u\, dy - v\, dx)$$

erstreckt über irgendein Quadrat um den Anfangspunkt, dessen Seiten den Koordinatenachsen parallel laufen, stets denselben Wert annimmt. Aus der Stetigkeit der Funktionen $u(x, y)$ und $v(x, y)$ kann sofort geschlossen werden, daß dieser Wert von Null nicht verschieden sein kann, da man

dieses Integral unter jede Grenze herabdrücken kann, indem man das Quadrat hinreichend klein wählt.

Damit ist aber die oben aufgestellte Behauptung

$$\int_{(Q)}(u\,dy - v\,dx) = 0$$

vollständig bewiesen.

3.) Wir zeigen *drittens*, daß das Integral

$$\int_{(R)}(u\,dy - v\,dx)$$

auch dann gleich Null sein muß, wenn der *Integrationsweg R ein Parallelogramm ist, dessen Seiten den Koordinatenachsen parallel gerichtet sind.*

Diese Behauptung kann man unmittelbar auf den in 2^0) bewiesenen Satz zurückführen, falls die Seitenlängen des Rechtecks R kommensurabel sind, d. h. sich verhalten wie zwei ganze Zahlen. In der Tat, es läßt sich in diesem Falle das Rechteck aus einer endlichen Anzahl von Quadraten aufbauen, deren Seiten wiederum die vorgeschriebenen Richtungen aufweisen. Das über R erstreckte Integral geht daher in eine endliche Summe von Integralen (genommen über die einzelnen Quadrate) über. Da jedes dieser letzteren Integrale — zufolge des soeben bewiesenen Satzes — verschwindet, so ist auch das über unser Parallelogramm R erstreckte Integral gleich Null.

Falls die Seitenlängen des Parallelogramms R inkommensurabel sind, so kann man die oben ausgeführte Zerlegung in Quadrate nicht durchführen; wohl kann man aber das Parallelogramm R durch solche Rechtecke $R_1, R_2, \ldots, R_n, \ldots$ beliebig approximieren, deren Seitenlängen kommensurabel sind, für die also das Integral verschwindet. Zufolge der Stetigkeit der Funktionen $u(x, y)$ und $v(x, y)$ ist aber

$$\lim_{n=\infty} \int_{(R_n)}(u\,dy - v\,dx) = \int_{(R)}(u\,dy - v\,dx),$$

woraus man unmittelbar schließt, daß

$$\int_{(R)}(u\,dy - v\,dx) = 0$$

sein muß.

Damit ist also das Verschwinden des fraglichen Integrals für jedes Rechteck bewiesen, das innerhalb $\mathfrak{B}$ liegt und dessen Seiten den Koordinatenachsen parallel gerichtet sind.

Daraus folgt aber auch, daß *unser Integral auch für einen solchen geschlossenen Integrationsweg verschwinden muß, der* — ganz innerhalb $\mathfrak{B}$ verlaufend — *aus einer endlichen Anzahl von Geradenstücken, die der x- oder y-Achse parallel sind, besteht.* In der Tat, man kann jedes Gebiet, das durch eine endliche Anzahl solcher Geraden begrenzt ist, aus Rechtecken aufbauen, deren Seiten wiederum den Achsen parallel sind. Da für jedes dieser Rechtecke unser Integral gleich Null ist, so muß es auch für die Begrenzung des aus diesen Rechtecken aufgebauten Gebietes verschwinden.

4.) Auf Grund der letzten Tatsache bietet der Beweis unseres Theorems keine Schwierigkeiten.

Es sei nämlich O ein fester, P ein variabler Punkt unseres Bereiches $\mathfrak{B}$. Wir zeichnen irgendeinen Linienzug, der — wie oben — aus einer endlichen Anzahl von Geradenstücken besteht, die abwechselnd der x- und y-Achse parallel sind, ganz im Innern von $\mathfrak{B}$ liegt und vom Punkte O bis zum Punkte P hinführt. Bilden wir nun das Integral

$$\int_O^P (u\,dy - v\,dx)$$

längs irgendeines dieser Linienzüge, so erhalten wir stets denselben Wert, da dieses Integral für einen geschlossenen Linienzug dieser Art verschwindet. Sind x, y die Koordinaten des Punktes P, so erhalten wir auf diese Weise eine Funktion des Ortes

$$\omega(x, y) = \int_O^P (u\,dy - v\,dx),$$

die für jeden Punkt innerhalb $\mathfrak{B}$ definiert ist. (Als Integrationsweg kann *zunächst* nur ein Linienzug der beschriebenen Art zugelassen werden.) Diese Funktion $\omega(x, y)$ ist, zufolge der angenommenen Stetigkeit der Funktionen $u(x, y)$ und $v(x, y)$, selbst stetig; wir schreiten nun zur Berechnung ihrer Ableitungen erster Ordnung.

Um $\frac{\partial \omega}{\partial x}$ zu berechnen, führen wir vom Punkte O zum Punkte P einen Linienzug, der wiederum aus einer endlichen Anzahl von Strecken besteht, die den Achsen parallel sind, von der Beschaffenheit, daß der letzte (den Punkt P enthaltende) Zug dieser Kurve der x-Achse parallel sein möge. Dann ist offenbar — für ein hinreichend kleines h —

$$\omega(x+h, y) - \omega(x, y) = \int_{x,y}^{x+h,y} (u\,dy - v\,dx),$$

wobei als Integrationsweg diejenige gerade Linie genommen ist, die die Punkte (x, y) und $(x+h, y)$ verbindet. Da längs dieser Geraden $y = \text{const.}$ ist, so finden wir

$$\frac{\omega(x+h, y) - \omega(x, y)}{h} = -\frac{1}{h}\int_{x,y}^{x+h,y} v\,dx.$$

Daraus ergibt sich durch den Grenzübergang $h = 0$

$$\frac{\partial \omega}{\partial x} = -v(x, y).$$

In derselben Weise findet man — indem man von O nach P einen Linienzug der beschriebenen Art legt, dessen letzter Zug der y-Achse parallel ist — die Ableitung nach y

$$\frac{\partial \omega}{\partial y} = u(x, y).$$

Mit anderen Worten, die oben *definierte Funktion* $\omega(x, y)$ *besitzt stetige Ableitungen nach* x *und* y, *und es ist*

$$\frac{\partial \omega}{\partial x} = -v(x, y), \qquad \frac{\partial \omega}{\partial y} = u(x, y),$$

d. h. auf Grund der gemachten Voraussetzungen folgt, *daß* u *und* v — *abgesehen vom Vorzeichen — die Ableitungen derselben Funktion nach* y *bezw.* x *sind.* Daraus folgt aber sofort, daß *das Integral*

$$\int (u\,dy - v\,dx) = \int \left(\frac{\partial \omega}{\partial x}\,dx + \frac{\partial \omega}{\partial y}\,dy\right)$$

für jeden geschlossenen Integrationsweg — der natürlich innerhalb $\mathfrak{B}$ verlaufen muß — *verschwindet.*

Damit ist unser Theorem in allen Teilen bewiesen.

Unsere Voraussetzung, die das Verschwinden des Integrals

$$\iint_{(\mathfrak{B})} \left(u \frac{\partial \zeta}{\partial x} + v \frac{\partial \zeta}{\partial y} \right) dx\, dy$$

verlangte, für jede nach x und y stetig differenzierbare und auf der Berandung von $\mathfrak{B}$ verschwindende Funktion ζ, hat also zur Folge, daß der Integrand in der Form einer Funktionaldeterminante geschrieben werden kann:

$$u \frac{\partial \zeta}{\partial x} + v \frac{\partial \zeta}{\partial y} = \frac{\partial \zeta}{\partial x} \frac{\partial \omega}{\partial y} - \frac{\partial \zeta}{\partial y} \frac{\partial \omega}{\partial x} = \frac{\partial (\zeta, \omega)}{\partial (x, y)}.$$

§ 2.

Unser im § 1. abgeleitetes Theorem spielt in der Theorie der Funktionen zweier unabhängigen Variablen eine entsprechende Rolle, wie das *Du Bois Reymond*sche Lemma in der Theorie der Funktionen einer Veränderlichen.

Man kann mit Hilfe unseres Theorems die Bedingung des Verschwindens der ersten Variation eines Doppelintegrals in Differentialgleichungen umsetzen, ohne die Existenz der zweiten Ableitungen der Lösungen des entsprechenden Variationsproblems vorauszusetzen.

Um dies darzutun, behandeln wir zunächst bei gegebenen Randbedingungen das Variationsproblem

$$\iint_{(\mathfrak{B})} f(p, q, x, y)\, dx\, dy = \text{min.},$$

wo — wie üblich — p und q die Ableitungen der gesuchten Funktion $z(x, y)$ bedeuten:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = p, \qquad \frac{\partial z}{\partial y} = q.$$

f möge eine analytische Funktion für die in Betracht kommenden Wertesysteme p, q, x, y bedeuten.

Ist die Funktion $z = z(x, y)$ die Lösung dieses Variationsproblems, von der wir nur voraussetzen, daß *sie stetige Ableitungen erster Ordnung* innerhalb $\mathfrak{B}$ besitzt, so zeigt man in der Variationsrechnung, daß das Integral

$$\iint_{(\mathfrak{B})} \left(\frac{\partial f}{\partial p} \frac{\partial \zeta}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial q} \frac{\partial \zeta}{\partial y} \right) dx\, dy$$

stets verschwinden muß, sowie $\zeta(x, y)$ eine willkürliche innerhalb $\mathfrak{B}$ definierte stetige und stetig differenzierbare Funktion bedeutet, die auf der Berandung von $\mathfrak{B}$ verschwindet. Da in diesem Integral

$$u(x, y) = \frac{\partial f}{\partial p} \text{ und } v(x, y) = \frac{\partial f}{\partial q}$$

stetige Funktionen von x und y sind, so folgt aus unserem Theorem die Existenz einer innerhalb $\mathfrak{B}$ definierten stetigen Funktion $\omega(x, y)$, die daselbst stetige Ableitungen erster Ordnung besitzt und so beschaffen ist, daß

$$\frac{\partial \omega}{\partial x} = -\frac{\partial f}{\partial q}, \quad \frac{\partial \omega}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial p}$$

ausfällt. Mit anderen Worten, *die unbekannte Funktion $z = z(x, y)$ befriedigt in Gemeinschaft mit dieser Hilfsfunktion $\omega(x, y)$ das eben aufgeschriebene System von zwei Differentialgleichungen erster Ordnung.*

Im allgemeinen existieren die zweiten Ableitungen der Funktion $\omega(x, y)$ nicht; ist dies aber dennoch der Fall, so resultiert aus unseren Gleichungen durch Elimination von $\omega(x, y)$ sofort die bekannte *Lagrange*sche Differentialgleichung zweiter Ordnung der Variationsrechnung. Allgemein kann man aber nur schließen, daß wenn $z(x, y)$ eine in $\mathfrak{B}$ nach x und y stetig differenzierbare Lösung des obigen Variationsproblems ist, diese Funktion das Differentialgleichungssystem 1. Ordnung

$$\frac{\partial f}{\partial p} = \frac{\partial \omega}{\partial y}, \quad \frac{\partial f}{\partial q} = -\frac{\partial \omega}{\partial x}$$

befriedigt.

Wenn der Integrand des Variationsproblems die unbekannte Funktion z explizite enthält, so ist das entsprechende Differentialgleichungssystem nicht mehr so einfach. Man gelangt in diesem Falle, ohne die Existenz der zweiten Ableitungen der Funktion $z(x, y)$ vorauszusetzen, zu einem Gleichungssystem, das aus drei Differentialgleichungen besteht und das die Funktion $z(x, y)$ und zwei weitere Hilfsfunktionen $\omega(x, y)$ und $\Omega(x, y)$ enthält in folgender Weise:

Wenn $z(x, y)$ eine solche Lösung des Variationsproblems

$$\iint_{(\mathfrak{B})} f(p, q, z, x, y)\, dx\, dy = \min.$$

(bei gegebenen Randbedingungen) bedeutet, deren erste Ableitungen stetige Funktionen im Bereiche $\mathfrak{B}$ sind, so ist — wie man in der Variationsrechnung zeigt — das Integral

$$(5.) \qquad \iint_{(\mathfrak{B})} \left(\frac{\partial f}{\partial p}\frac{\partial \zeta}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial q}\frac{\partial \zeta}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial z}\zeta\right) dx\,dy$$

stets gleich Null, sowie $\zeta(x, y)$ eine auf der Berandung von $\mathfrak{B}$ verschwindende Funktion bedeutet, die innerhalb $\mathfrak{B}$ stetige Ableitungen nach x und y besitzt. Wir setzen nun zur Abkürzung

$$2\Omega(x, y) = \int_a^x \int_b^y \frac{\partial f}{\partial z}\, dx\, dy;$$

diese Hilfsfunktion $\Omega(x, y)$ besitzt offenbar stetige Ableitungen nach x und y, und es existiert auch der gemischte Differentialquotient zweiter Ordnung

$$2\frac{\partial^2 \Omega}{\partial x \partial y} = \frac{\partial f}{\partial z}.$$

Da die Funktion $\zeta(x, y)$ auf der Berandung von $\mathfrak{B}$ verschwindet, so bestehen offenbar die Relationen

$$\iint_{(\mathfrak{B})} \zeta \frac{\partial f}{\partial z}\, dx\, dy = 2\iint_{(\mathfrak{B})} \zeta \frac{\partial^2 \Omega}{\partial x \partial y}\, dx\, dy = -2\iint_{(\mathfrak{B})} \frac{\partial \zeta}{\partial x}\frac{\partial \Omega}{\partial y}\, dx\, dy$$
$$= -2\iint_{(\mathfrak{B})} \frac{\partial \zeta}{\partial y}\frac{\partial \Omega}{\partial x}\, dx\, dy;$$

und unsre Bedingung (5.) erhält die folgende Form:

$$\iint_{(\mathfrak{B})} \left\{\left(\frac{\partial f}{\partial p} - \frac{\partial \Omega}{\partial y}\right)\frac{\partial \zeta}{\partial x} + \left(\frac{\partial f}{\partial q} - \frac{\partial \Omega}{\partial x}\right)\frac{\partial \zeta}{\partial y}\right\} dx\, dy = 0.$$

Da die beiden in Klammern stehenden Ausdrücke

$$u(x, y) = \frac{\partial f}{\partial p} - \frac{\partial \Omega}{\partial y} \text{ und } v(x, y) = \frac{\partial f}{\partial q} - \frac{\partial \Omega}{\partial x}$$

stetige Funktionen von x und y sind, so folgt aus der letzten Gleichung, auf Grund unseres im § 1. bewiesenen Theorems, die Existenz einer nach x und y im Bereiche $\mathfrak{B}$ stetig differenzierbaren Funktion $\omega(x, y)$ von der Eigenschaft, daß

$$\frac{\partial f}{\partial p} - \frac{\partial \Omega}{\partial y} = \frac{\partial \omega}{\partial y}, \qquad \frac{\partial f}{\partial q} - \frac{\partial \Omega}{\partial x} = -\frac{\partial \omega}{\partial x}.$$

Mit anderen Worten: *Jede Lösung des vorgelegten Variationsproblems, die stetige*

Ableitungen 1. Ordnung besitzt, erfüllt in Gemeinschaft mit zwei Hilfsfunktionen $\omega(x, y)$ *und* $\Omega(x, y)$, *die beide in* $\mathfrak{B}$ *nach* x *und* y *stetig differenzierbar sind, für die zweite auch noch der gemischte Differentialquotient zweiter Ordnung existiert und stetig ist, das folgende simultane System von drei Differentialgleichungen:*

$$\frac{\partial f}{\partial p} = \frac{\partial \omega}{\partial y} + \frac{\partial \Omega}{\partial y}, \qquad \frac{\partial f}{\partial q} = -\frac{\partial \omega}{\partial x} + \frac{\partial \Omega}{\partial x}, \qquad \frac{\partial f}{\partial z} = 2\frac{\partial^2 \Omega}{\partial x \partial y}.$$

Durch die Aufstellung dieses Gleichungssystems — das das vorangehende als Spezialfall enthält — ist das Problem, das Verschwinden der ersten Variation eines Doppelintegrals in Differentialgleichungen umzusetzen, *ohne die Existenz der zweiten Ableitungen vorauszusetzen*, vollständig gelöst.

Ich bemerke noch, daß man das soeben gewonnene Differentialgleichungssystem in gleicher Weise bei der Weiterführung der Variationsrechnung zugrunde legen kann, wie die übliche *Euler-Langrange*sche Differentialgleichung, bei deren Herleitung man die Existenz der zweiten Ableitungen der Lösungen voraussetzen muß.

Die Fragestellung, die durch unser im § 1. bewiesenes Theorem beantwortet wurde, sowie die Methode des Beweisganges gestattet Verallgemeinerungen in verschiedenen Richtungen. Obwohl diese einerseits ein selbständiges Interesse beanspruchen, so wird man andrerseits durch die entsprechende Behandlung der analogen Probleme der Variationsrechnung auf sie geführt. Es mögen hier zwei Probleme dieser Art gestellt werden.

I. Das Integral

$$\iint_{(\mathfrak{B})} \left(u \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2} + 2v \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x \partial y} + w \frac{\partial^2 \zeta}{\partial y^2} \right) dx\, dy$$

verschwinde, sowie $u(x, y)$, $v(x, y)$, $w(x, y)$ gegebene stetige —, $\zeta(x, y)$ aber eine beliebige Funktion bedeutet, die auf der Berandung von $\mathfrak{B}$ samt ihren Ableitungen erster Ordnung verschwindet und innerhalb $\mathfrak{B}$ stetige Ableitungen 1. und 2. Ordnung besitzt; was kann aus diesem Umstande für die Funktionen u, v, w gefolgert werden?

II. Es bedeute G ein dreidimensionales Gebiet, $u(x, y, z)$, $v(x, y, z)$, $w(x, y, z)$ Funktionen von x, y, z, die in diesem Gebiet stetig sind; es möge ferner

$$\iiint_{(G)} \left(u \frac{\partial \zeta}{\partial x} + v \frac{\partial \zeta}{\partial y} + w \frac{\partial \zeta}{\partial z} \right) dx\, dy\, dz = 0$$

sein, sowie $\zeta(x, y, z)$ irgendeine auf der Begrenzung von G verschwindende und innerhalb G nach x, y, z stetig differenzierbare Funktion bedeutet; was kann aus diesem Umstande für die Funktionen u, v, w geschlossen werden?*)

*) Die Resultate dieser Note wurden der ungarischen Akademie der Wissenschaften in ihrer Sitzung vom 10. April 1916 vorgelegt.

Über eine Verallgemeinerung des Du Bois Reymond'schen Lemma's.

VON ALFRED HAAR.

Das bekannte Lemma, das Du Bois Reymond[1]) zur Begründung der Variationsrechnung aufstellte, ist wegen seiner Wichtigkeit vielfach behandelt worden. Von den neueren Beweisen erwähne ich nur die von *Hilbert*[2]) und *Jacobsthal*[3]), sowie diejenigen die *Hadamard* in seinem Lehrbuch gegeben hat. Ich möchte in den folgenden Zeilen eine neue Methode zur Begründung dieses Lemma's auseinandersetzen, die besonders rasch zum Ziel führt. Mit dieser Methode beweise ich zuerst das Lemma selbst, sodann seine bekannten Verallgemeinerungen, die von Zermelo herrühren [4]) Zum Schlusse wende ich diese Methode an zur Ableitung eines Satzes, der — wie mir scheint — neu ist; dieser Satz wirft ein neues Licht auf den Zusammenhang eines linearen Differentialausdruck's

$$L[\eta] \equiv \eta^{(k)}(x) + p_1(x)\,\eta^{(k-1)}(x) + p_2(x)\,\eta^{(k-2)}(x) + \ldots + p_{k-1}(x)\,\eta'(x) + p_k(x)\,\eta(x)$$

(wo die $p_1(x), p_2(x), \ldots p_k(x)$ beliebig oft differentierbare Funktionen bedeuten) und des zugehörigen adjungierten Differentialausdruck's

$$\Lambda[\eta] \equiv \eta^{(k)} - (p_1\,\eta)^{(k-1)} + (p_2\,\eta)^{(k-2)} - \ldots + (-1)^k (p_k\,\eta)\,.$$

Ich beweise nämlich, dass, wenn $u(x)$ eine im Intervall $[a, b]$ stetige Funktion bedeutet, von der Beschaffenheit, dass das Integral

---

[1]) Mathematische Annalen Bd. 15 (1879) p. 564.

[2]) s. Bolza: Lehrbuch der Variationsrechnung p. 28.

[3]) Archiv für Mathematik. (Berliner math. Ges). 1910.

[4]) Mathematische Annalen Bd. 58 (1904) p. 558.

$$\int_a^b u(x)\ L[\eta(x)]\,dx$$

stets verschwindet, wenn $\eta(x)$ *irgendeine* im Intervall $[a, b]$ k-mal stetig differentierbare Funktion bedeutet, die an den Endpunkten dieses Intervalls samt ihren ersten $(k-1)$ Ableitungen verschwindet, so ist $u(x)$ selbst k-mal differenzierbar und eine Lösung der Differentialgleichung

$$\Lambda[u] = 0.$$

I. Die im Intervall $[a, b]$ definierte stetige Funktion $u(x)$ erfülle die Bedingung

$$\int_a^b u(x)\frac{d\eta}{dx}dx = 0$$

für jede im Intervall $[a, b]$ stetig differenzierbare und an den Endpunkten des Intervalls verschwindende Funktion $\eta(x)$. Nach dem fraglichen Lemma muss dann $u(x) = \text{const.}$ sein; dies beweise ich, wie folgt:

Sind α und β zwei beliebige im betrachteten Intervall gelegene Stellen $(\alpha < \beta)$, so betrachte ich diejenige Funktion, die für $a \leqq x \leqq \alpha$ und $\beta \leqq x \leqq b$ gleich Null ist, für $\alpha \leqq x \leqq \beta$ aber mit der Funktion $(x-\alpha)^2(x-\beta)^2$ übereinstimmt. Diese Funktion ist im ganzen Intervall $[a, b]$ stetig differenzierbar und verschwindet an den Endpunkten dieses Intervalls. Demzufolge ist für jedes den Ungleichungen $a \leqq \alpha < \beta \leqq b$ unterworfene α, β

$$\omega(\alpha, \beta) = \int_\alpha^\beta u(x)\frac{d}{dx}[(x-\alpha)^2(x-\beta)^2]\,dx = 0.$$

Diese Funktion $\omega(\alpha, \beta)$ ist nach den Parametern α, β jedenfalls differenzierbar und man findet leicht für den gemischten zweiten Differenzialquotienten den Ausdruck

$$\frac{\partial^2 \omega}{\partial\alpha\,\partial\beta} = 4\int_\alpha^\beta u(x)\frac{d}{dx}[(x-\alpha)(x-\beta)]\,dx = 0.$$

Wendet man dasselbe Verfahren auf dieses Integral an, so erhält man

$$\frac{\partial^4 \omega}{\partial\alpha^2\,\partial\beta^2} = 4[u(\beta)-u(\alpha)] = 0.$$

D. h. $u(\alpha) = u(\beta)$ also $u(x) = \text{const.}$ w. z. b. w.

II. Durch Induktionsschluss kann man das *verallgemeinerte Du Bois Reymondsche Lemma* auf Grund dieser Methode folgendermassen beweisen:

Die im Intervall $[a, b]$ stetige Funktion $u(x)$ erfülle die Bedingung

$$\int_a^b u(x) \frac{d^k \eta}{d x^k} d x = 0, \tag{1}$$

wobei nun $\eta(x)$ irgendeine in diesem Intervall k-mal stetig differenzierbare Funktion bedeutet, die an den Endpunkten dieses Intervalls samt ihren ersten $(k-1)$ Ableitungen verschwindet. Dann gilt offenbar für jedes den Ungleichungen $a \leqq \alpha < \beta \leqq b$ unterworfene α, β

$$\omega(\alpha, \beta) = \int_\alpha^\beta u(x) \frac{d^k}{d x^k} [(x-\alpha)^{k+1} (x-\beta)^{k+1}] d x = 0, \tag{2}$$

da die Funktion, die für $a \leqq x \leqq \alpha$ und $\beta \leqq x \leqq b$ gleich Null, für $\alpha \leqq x \leqq \beta$ aber gleich $(x-\beta)^{k+1} (x-\beta)^{k+1}$ ist, die Bedingungen die in Gleichung (1) für $\eta(x)$ gestellt sind, erfüllt. Aus der letzten Gleichung folgt aber — wie oben —

$$-\frac{\partial^2 \omega}{\partial \alpha \partial \beta} = (k+1)^2 \int_\alpha^\beta u(x) \frac{d^k}{d x^k} [(x-\alpha)^k (x-\beta)^k] d x = 0. \tag{3}$$

Differenziert man diese Gleichung nach β, so ergiebt sich — wie eine leichte Rechnung zeigt —

$$(k-1)!(\beta-\alpha)^k u(\beta) + (-1)^k \int_\alpha^\beta u(x) \frac{d^k}{d x^k} [(x-\alpha)^k (x-\beta)^{k-1}] d x = 0.$$

Diese Gleichung lehrt aber — da das zweite Glied eine nach β stetig differenzierbare Funktion bedeutet — dass die Funktion $u(x)$ an jeder Stelle — mit etwaiger Ausnahme der Stelle $x = \alpha$ — eine stetige Ableitung besitzt. Da aber α selbst beliebig im Intervall $[a, b]$ gewählt sein kann, so folgt daraus dass $u(x)$ im ganzen Intervall $[a, b]$ eine stetige Ableitung $u'(x)$ besitzt. Aus Gleichung (3) folgt nun durch Produktintegration

$$\int_\alpha^\beta u'(x) \frac{d^{k-1}}{d x^{k-1}} [(x-\alpha)^k (x-\beta)^k] d x = 0.$$

Diese letzte Formel ist der Gleichung (2) vollständig analog; wenden wir auf diese den obigen Schluss nochmals an, so ergiebt sich die Existenz und Stetigkeit der zweiten Ableitung $u''(x)$ der Funktion $u(x)$ und diese erfüllt die Bedingung

$$\int_{\alpha}^{\beta} u''(x) \frac{d^{k-2}}{dx^{k-2}} [(x-\alpha)^{k-1} (x-\beta)^{k-1}] \, dx = 0, \text{ u. s. f.}$$

Durch Fortsetzung dieses Verfahrens beweist man die Existenz der 3 ten, 4-ten, . . ., k-ten Ableitung der Funktion $u(x)$; die letzte erfüllt die Bedingung

$$\int_{\alpha} u^{(k)}(x) [(x-\alpha)(x-\beta)] \, dx = 0$$

für jedes α, β, und ist demzufolge identisch gleich Null. Aus $u^{(k)}(x) = 0$ folgt aber, dass die Funktion $u(x)$ ein Polynom $(k-1)$-ten Grades ist.

Es ist bemerkenswert an diesem Verfahren, dass zuerst die Differenzierbarkeit der Funktion bewiesen wird, und daraus auf die Bauart der Funktion geschlossen wird.

III. Eben dieser Umstand ermöglicht es den folgenden Satz zu beweisen, der als weitergehende Verallgemeinerung des Du Bois Reymondschen Lemmas zu betrachten ist:

Es sei

$$L[\eta] = \eta^{(k)}(x) + p_1(x) \eta^{(k-1)}(x) + p_2(x) \eta^{(k-2)}(x) + \ldots + p_k(x) \eta(x)$$

irgendein linearer Differentialausdruck, dessen Koeffizienten $p_1(x)$, $p_2(x)$, . . ., $p_k(x)$ im Intervall $[a, b]$ beliebig oft differenzierbare Funktionen sein mögen. Ist nun $u(x)$ eine im Intervall $[a, b]$ definierte stetige Funktion von der Beschaffenheit, dass das Integral

$$\int_{a}^{b} u(x) L[\eta] \, dx$$

stets verschwindet, wenn $\eta(x)$ irgendeine im Intervall $[a, b]$ k-mal stetig differenzierbare Funktion bedeutet, die an den Endpunkten dieses Intervalls samt ihren ersten $(k-1)$ Ableitungen verschwindet, so ist $u(x)$ selbst k-mal differenzierbar und eine Lösung der zu $L[\eta] = 0$ adjungierten Differentialgleichung

$$\Lambda(u) \equiv u^{(k)} - (p_1 u)^{(k-1)} + (p_2 u)^{(k-2)} - \ldots + (-1)^k p_k u = 0.$$

Um dies darzutun, führen wir in unsrer Bedingungsgleichung statt $\eta(x)$ die in II. benutzte Funktion ein, wodurch wir zu der Formel

$$\int_{\alpha}^{\beta} u(x)\, L\,[(x-\alpha)^{k+1}(x-\beta)^{k+1}]\, dx = 0$$

gelangen. Die Anwendung der Operation $\frac{\partial^2}{\partial\alpha\,\partial\beta}$ führt sodann zur Gleichung:

$$\int_{\alpha}^{\beta} u(x)\, L\,[(x-\alpha)^{k}(x-\beta)^{k}]\, dx = 0. \tag{4}$$

Differenzieren wir diese Gleichung nach β, so ergibt sich:

$$(k-1)!\,(\beta-\alpha)^{k}\,u(\beta) + (-1)^{k}\int_{\alpha}^{\beta} u(x)\, L\,[(x-\alpha)^{k}(x-\beta)^{k-1}]\, dx = 0,$$

woraus wiederum die Existenz und Stetigkeit der ersten Ableitung der Funktion $u(x)$ im ganzen Intervall $[a, b]$ folgt, da α eine beliebige Stelle dieses Intervalls sein kann. Diese letzte Gleichung aber ist von der folgenden Form:

$$(\beta-\alpha)^{k}\,u(\beta) = \int_{\alpha}^{\beta} u(x)[c_0(x)+c_1(x)\beta+c_2(x)\,\beta^2+\ldots+c_{k-1}(x)\beta^{k-1}]\,dx,$$

wobei $c_0, c_1, \ldots, c_{k-1}$ beleibig oft differenzierbare Funktionen bedeuten. Differenziert man diese Gleichung nach β, so ergiebt sich die folgende Gleichung:

$$\frac{d}{d\beta}[(\beta-\alpha)^{k}\,u(\beta)] = u(\beta)\,[c_0(\beta)+c_1(\beta)\,\beta+\ldots+c_{k-1}(\beta)\,\beta^{k-1}] + \\ + \int_{\alpha}^{\beta} u(x)\,[c_1(x)+2\,c_2(x)\,\beta+\ldots]\,dx,$$

woraus wiederum auf die Existenz der zweiten Ableitung von $u(x)$ geschlossen werden kann. Durch Fortsetzung dieses Verfahrens beweist man successive die Existenz der weiteren Ableitungen dieser Funktion.

Auf Grund dieser Tatsache kann man Gleichung (4) durch Produktintegration auf die folgende Form bringen:

$$\int_{\alpha}^{\beta} \Lambda[u](x-\alpha)^k (x-\beta)^k \, dx = 0.$$

Wenden wir auf diese Gleichung k-mal die Operation $\frac{\partial^2}{\partial \alpha \partial \beta}$ an, d. h. bilden wir die Gleichung

$$\frac{\partial^{2k}}{\partial \alpha^k \partial \beta^k} \int_{\alpha}^{\beta} \Lambda[u](x-\alpha)^k (x-\beta)^k dx = 0,$$

so ergiebt sich — wie man leicht erkennt —

$$\int_{\alpha}^{\beta} \Lambda[u] \, dx = 0$$

für jedes α, β, woraus unsre Behauptung $\Lambda[u] = 0$ unmittelbar folgt.

Über das Plateausche Problem.

Von

Alfred Haar in Szeged (Ungarn).

Einleitung.

Riemann widmete der Theorie der Minimalflächen eine grundlegende Abhandlung; von ihm rührt einer der schönsten Sätze dieses Ideenkreises her, der einer der Ausgangspunkte der gesamten Theorie wurde. Dieser Satz findet eine Anwendung in der folgenden Lösung des bekannten Plateauschen Problems.

Unter dem Plateauschen Problem versteht man die Aufgabe, die Existenz einer solchen Lösung der partiellen Differentialgleichung

$$\left[1+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2\right]\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}-2\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}+\left[1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2\right]\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0$$

zu beweisen, daß die entsprechende Fläche im xyz-Raume eine vorgelegte Raumkurve C enthalte; diese Fläche ist bekanntlich eine Minimalfläche, indem der von der gegebenen Raumkurve begrenzte Teil einen kleineren Flächeninhalt besitzt als der entsprechende Teil irgendeiner andern durch diese Raumkurve hindurchgehenden Fläche.

Dieses Problem wurde für solche Raumkurven C, deren Projektion auf die xy-Ebene konvex ist, und die so beschaffen sind, daß keine ihrer Schmiegungsebenen auf der xy-Ebene senkrecht steht, zuerst von Herrn S. Bernstein in tiefsinnigen Untersuchungen mit Hilfe seiner Normalreihen in Angriff genommen[1]). Ohne dieses Hilfsmittel behandelt Herr Ch. Müntz in einer ausführlichen Abhandlung[2]) dasselbe Problem, in der er auch auf verschiedene Lücken der Bernsteinschen Arbeit — die bereits Herr

[1]) „Sur les surfaces définies au moyen de leur courbure moyenne ou totale." Annales de l'École Normale (3) **27** (1910) und „Sur les équations du calcul des variations." Annales de l'École Normale (3) **29** (1912).

[2]) „Die Lösung des Plateauschen Problems über konvexen Bereichen." Mathematische Annalen **94** (1925).

Lichtenstein in seinem Enzyklopädieartikel (Neuere Entwicklung der Theorie partieller Differentialgleichungen vom elliptischen Typus, S. 1326, Anmerkung 127) bemängelt — hinweist; eine Replik[3]) Bernsteins ist kürzlichst erschienen. Gegen den Müntzschen Beweis hat neuerdings Herr Radó einen wesentlichen Einwand veröffentlicht[4]). Während diese Autoren durch sukzessive Näherung das Integral der Differentialgleichung zu gewinnen suchen, teile ich im folgenden eine wesentlich verschiedene Lösungsmethode durch Heranziehung der direkten Methode der Variationsrechnung mit, und glaube daher mich an dieser Stelle mit der erwähnten Diskussion über die angeführten Arbeiten nicht beschäftigen zu müssen.

Die strenge Theorie dieser direkten Methode ist eine der schönsten Schöpfungen Hilberts; an seine Untersuchungen, die für den Fall der Potentialtheorie ausgearbeitet sind, schließen eine Reihe von Arbeiten an, die, soweit es sich um Variationsprobleme von Doppelintegralen handelt, zum größten Teil das Ziel verfolgen, die Randwertaufgabe der linearen partiellen Differentialgleichungen auf gleichem Weg zu behandeln. Der Ausgangspunkt ist stets derselbe. Wenn ein reguläres Variationsproblem

$$\iint F\left(\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}\right) dx\, dy = \text{Min.}$$

bei gegebenen Randbedingungen vorgelegt ist, so bestimmt man die Extremalfunktion $z(x, y)$ mit Hilfe einer Minimalfolge

$$z_1(x, y),\ z_2(x, y), \ldots, z_n(x, y), \ldots$$

(deren Funktionen die gegebene Randbedingung erfüllen), die so beschaffen ist, daß der limes

$$\lim_{n=\infty} \iint F\left(\frac{\partial z_n}{\partial x}, \frac{\partial z_n}{\partial y}\right) dx\, dy$$

gleich der unteren Grenze des Wertevorrates des betrachteten Integrals (bei den gegebenen Randbedingungen) ist. Die Weiterführung der Hilbertschen Methoden beruht im wesentlichen auf zwei verschiedenen Gedanken, die wegen des Umstandes notwendig werden, daß die Minimalfolge keineswegs konvergieren muß. Der eine Gedanke besteht darin, daß man die Minimalfolge durch eine spezielle ersetzt, deren gleichmäßige Konvergenz man beweisen kann; diese Idee wurde zuerst von den Herren B. Levi und H. Lebesgue in höchst eleganter Weise durchgeführt; später ist derselbe Gedanke von Herrn Courant mit großem Erfolg angewandt worden.[5]) Der

[3]) „Sur l'intégration des équations aux dérivées partielles du type elliptique." Mathematische Annalen **95** (1926).

[4]) Mathematische Annalen **96** (1926).

[5]) Die Ritzsche Methode benutzt denselben Gedanken; freilich ist die Konvergenz der Minimalfolge bei den von Ritz behandelten Problemen eine Folge des Um-

zweite Gedanke, den man den Arbeiten von Herrn G. Fubini verdankt, besteht darin, auf die gleichmäßige Konvergenz zu verzichten und statt dessen die Existenz mit Hilfe einer Minimalfolge zu beweisen, die nur fast überall konvergiert. Diese Arbeiten von Herrn Fubini sind in verschiedener Hinsicht grundlegend geworden; mit Recht verweist er darauf, daß die wahre Schwierigkeit nicht in der Konstruktion der Extremalfunktion besteht, sondern in dem Beweise, daß sie Differentialquotienten besitzt[6]).

Auf das Plateausche Problem wurde die Hilbertsche Methode von Herrn Lebesgue in seiner berühmten These[7]) angewandt; er bezeichnet seine Resultate als Vorbereitungen zum Plateauschen Problem. Für dieselben Randkurven, wie Herr Bernstein, beweist er die Existenz einer Funktion $z(x, y)$, die der Lipschitzschen Bedingung genügt, auf der die gegebene Randkurve einen Flächenteil vom minimalen Inhalt abgrenzt. Freilich ist dabei der Flächeninhalt in dem dort festgelegten Sinne zu verstehen, und nur neuere Untersuchungen zeigen die Identität des Lebesgueschen Inhaltsbegriffes mit dem üblichen Doppelintegral; die Frage, ob die erhaltene Funktion die Plateausche Differentialgleichung befriedigt, ist gleichbedeutend damit, ob sie überhaupt zweite Ableitungen besitzt; diese Frage bleibt unentschieden.

2. In der vorliegenden Arbeit wird der Beweis des Plateauschen Problems mit Hilfe der direkten Methode der Variationsrechnung geführt, für dieselben Randkurven, die in den erwähnten Untersuchungen von Lebesgue und Bernstein auftreten.

Wir beginnen unsere Untersuchungen mit einem Hilfssatz, der in der heute üblichen Terminologie die Halbstetigkeit nach unten des Integrals

$$\iint F\left(\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}\right) dx\, dy$$

aussagt, falls das entsprechende Variationsproblem regulär ist, d. h. die Bedingungen

$$\frac{\partial^2 F}{\partial p^2}\frac{\partial^2 F}{\partial q^2} - \left(\frac{\partial^2 F}{\partial p \partial q}\right)^2 > 0 \qquad \frac{\partial^2 F}{\partial p^2} > 0$$

---

standes, daß das zugrunde gelegte Integral die zweiten Ableitungen der unbekannten Funktion enthält, in welchen Fällen eine Verallgemeinerung des bekannten Osgoodschen Satzes anwendbar ist. Auf diesen glättenden Einfluß der höheren Ableitungen habe ich in einem Vortrag in der mathematischen Gesellschaft in Göttingen (26. Juli 1910) aufmerksam gemacht.

[6]) „Sul principio di minimo di Dirichlet." Annali di Matematica (3) **15** (1908) S. 125.

[7]) „Intégrale, Longueur, Aire." Annali di Matematica (3) **7** (1902).

für alle Wertsysteme p, q erfüllt sind. Die schönen Untersuchungen, die Herr L. Tonelli in bezug auf die direkte Methode bei eindimensionalen Variationsproblemen angestellt hat, weisen auf die Wichtigkeit hin, die der Halbstetigkeit in diesem Gedankenkreis zukommt. Sodann wird die Extremalfunktion selbst konstruiert mit Hilfe eines Verfahrens, das für alle regulären Variationsprobleme anwendbar ist. Ein wesentliches Hilfsmittel ist dabei ein Satz topologischer Natur; von einem Spezialfall dieses Satzes macht bereits Herr Hilbert Gebrauch, und die erwähnten Untersuchungen von H. Lebesgue und S. Bernstein enthalten ebenfalls Sätze ähnlicher Art. Ich gelangte zur Aufstellung dieses Satzes, indem ich das Ziel verfolgte, die oben erwähnte Lebesguesche Konstruktion der Extremalfläche durch eine andere zu ersetzen, die von der speziellen Natur des Plateauschen Variationsproblems keinen Gebrauch macht. Den Beweis dieses wichtigen Hilfssatzes hat auf meine Anregung Herr T. Radó in eleganter Weise erbracht[8]).

§ 2 ist der Ableitung von Differentialgleichungssystemen gewidmet, denen die in § 1 konstruierte Extremalfunktion genügt. Da von dieser Funktion zunächst nur bekannt ist, daß sie der Lipschitzschen Bedingung genügt, so kann man nicht unmittelbar zur Ableitung der Euler-Lagrangeschen Differentialgleichung schreiten. Es kommen dabei Überlegungen von der Art zur Anwendung, wie die in meiner im Journal für Mathematik **149** (1919) erschienenen Arbeit „Über die Variation von Doppelintegralen". Ich habe daselbst, ohne die Existenz der zweiten Ableitungen der Extremalfunktion vorauszusetzen, auf Grund der Stetigkeit der ersten Ableitungen, aus dem Verschwinden der ersten Variation für die Extremalfunktion ein partielles Differentialgleichungssystem erster Ordnung abgeleitet, in dem außer der Extremalfunktion noch eine Hilfsfunktion auftritt. Freilich sind die entsprechenden Entwicklungen in der vorliegenden Arbeit etwas verwickelter, da auch die Stetigkeit der ersten Ableitungen der Extremalfunktion nicht angenommen werden darf. Die wertvollen Untersuchungen, die Herr H. Rademacher[9]) über die Differenzierbarkeit der Funktionen zweier Variablen, die der Lipschitzschen Bedingung genügen, veröffentlicht hat, helfen über die neuen Schwierigkeiten hinweg.

Im letzten Abschnitt wird endlich die Analytizität der Extremalfunktion bewiesen und damit gezeigt, daß sie der üblichen partiellen Differentialgleichung genügt. Dabei wende ich dieselbe Schlußweise an,

---

[8]) „Geometrische Betrachtungen über zweidimensionale reguläre Variationsprobleme." Acta scientiarum universitatis Franc. Jos. Szeged 2 (1926).

[9]) „Über partielle und totale Differenzierbarkeit von Funktionen mehrerer Variablen." I und II. Mathematische Annalen 79 und 81 (1919 und 1920).

mit welcher Herr Radó[10]) gezeigt hat, daß jede einmal stetig differenzierbare Extremalfunktion analytisch ist; dieser Beweis beruht auf klassischen, auf Riemann und Weierstraß zurückgehenden Sätzen über Minimalflächen.

Als interessantes Moment in dem vorliegenden Beweise des Plateauschen Problems erblicke ich, daß darin neben geometrischen — und zwar teils flächentheoretischen, teils topologischen — Sätzen die feinen Resultate der von Herrn Lebesgue herrührenden Theorie der reellen Funktionen zur Anwendung gelangen.

In meinen Untersuchungen und bei der Redaktion der vorliegenden Arbeit wurde ich von Herrn Dr. Tibor Radó lebhaft unterstützt. Ihm verdanke ich außer dem bereits erwähnten Beweis des Satzes im § 1 verschiedene literarische Hinweise, die mir von großem Nutzen waren.

§ 1.

Konstruktion der Extremalfunktion.

3. Bevor wir unser eigentliches Problem angreifen, wollen wir zwei Hilfssätze begründen; diese treten naturgemäß auf, sowie man die Existenz der Lösungen eines Variationsproblems mit der direkten Methode zu beweisen versucht. Obwohl in der vorliegenden Arbeit die folgenden Hilfssätze nur für den speziellen Fall des Plateauschen Variationsproblems benutzt werden, so scheint es dennoch angemessen zu sein, diese Sätze gleich für alle regulären Variationsprobleme abzuleiten, da dadurch der wahre Kern des Beweises besser hervortritt. Wir betrachten daher eine Funktion $F(p, q)$, die für alle reellen Werte der Veränderlichen p, q analytisch ist und den Bedingungen

$$\frac{\partial^2 F}{\partial p^2}\frac{\partial^2 F}{\partial q^2} - \left(\frac{\partial^2 F}{\partial p\,\partial q}\right)^2 > 0, \qquad \frac{\partial^2 F}{\partial p^2} > 0$$

genügt, und beweisen vorab zur Vorbereitung den folgenden

Hilfssatz I. *Die in einem Gebiet — etwa in einem Quadrat Q der xy-Ebene — definierten Funktionen*

$$f_1(x, y),\ f_2(x, y),\ \ldots,\ f_n(x, y),\ \ldots$$

mögen daselbst stetige erste Ableitungen $\frac{\partial f_n}{\partial x}, \frac{\partial f_n}{\partial y}$ besitzen und gleichmäßig in Q gegen eine Grenzfunktion $f(x, y)$ streben, deren erste Ableitungen $\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}$ ebenfalls stetige Funktionen in Q sein mögen; es gilt die Ungleichung:

$$\liminf_{n=\infty} \iint_Q F\left(\frac{\partial f_n}{\partial x}, \frac{\partial f_n}{\partial y}\right) dx\,dy \geqq \iint_Q F\left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}\right) dx\,dy.$$

[10]) „Über den analytischen Charakter der Minimalflächen." Mathematische Zeitschrift 24 (1925).

Ist insbesondere $F=(1+p^2+q^2)^{\frac{1}{2}}$, so drückt dieser Satz eine einfache Tatsache über den Flächeninhalt aus; Herr Lebesgue hat bereits diese Eigenschaft des Flächeninhaltes hervorgehoben und mit Anwendung seiner Definition des Flächeninhaltes bewiesen[11]). Der folgende Beweis (den ich gleich für den allgemeinen Fall führe) kann in dem erwähnten Spezialfall $F=(1+p^2+q^2)^{\frac{1}{2}}$ in recht einfacher Weise geometrisch gedeutet werden.

Setzen wir zur Abkürzung

$$(1)\qquad F(p,q)-F(\alpha,\beta)-\frac{\partial F(\alpha,\beta)}{\partial\alpha}(p-\alpha)-\frac{\partial F(\alpha,\beta)}{\partial\beta}(q-\beta)=\frac{1}{2}R(p,q;\alpha,\beta),$$

so ist nach dem Taylorschen Lehrsatze

$$(1')\qquad R(p,q;\alpha,\beta)=\left(\frac{\partial^2F}{\partial\alpha^2}\right)_{\substack{\alpha=\tilde\alpha\\ \beta=\tilde\beta}}(p-\alpha)^2+2\left(\frac{\partial^2F}{\partial\alpha\,\partial\beta}\right)_{\substack{\alpha=\tilde\alpha\\ \beta=\tilde\beta}}(p-\alpha)(q-\beta)+\left(\frac{\partial^2F}{\partial\beta^2}\right)_{\substack{\alpha=\tilde\alpha\\ \beta=\tilde\beta}}(q-\beta)^2,$$

wobei die Zwischenwerte $\tilde\alpha$, $\tilde\beta$ mittels einer geeignet gewählten Größe θ, die zwischen 0 und 1 liegt, in der folgenden Form darstellbar sind:

$$\tilde\alpha=\theta\alpha+(1-\theta)p,\qquad \tilde\beta=\theta\beta+(1-\theta)q.$$

Zufolge der über $F(p,q)$ gemachten Annahmen ist für alle Werte von p, q, α, β die Funktion $R(p,q;\alpha,\beta)\geqq 0$. Betrachten wir nun irgendein innerhalb Q liegendes, von einer regulären und doppelpunktlosen Kurve K begrenztes Gebiet T, dessen Inhalt wir durch denselben Buchstaben bezeichnen; die Ungleichung

$$\begin{aligned}\iint_T F\left(\frac{\partial f}{\partial x},\frac{\partial f}{\partial y}\right)dx\,dy&\geqq\iint_T\left[F(\alpha,\beta)+\frac{\partial F}{\partial\alpha}\left(\frac{\partial f}{\partial x}-\alpha\right)+\frac{\partial F}{\partial\beta}\left(\frac{\partial f}{\partial y}-\beta\right)\right]dx\,dy\\&=\left[F(\alpha,\beta)-\alpha\frac{\partial F}{\partial\alpha}-\beta\frac{\partial F}{\partial\beta}\right]T+\frac{\partial F}{\partial\alpha}\int_K f(x,y)\,dy-\frac{\partial F}{\partial\beta}\int_K f(x,y)\,dx\\&=J_T(\alpha,\beta),\end{aligned}$$

[11]) S. 344 der in [7]) angeführten Abhandlung. Es ist das Verdienst von Herrn L. Tonelli, die Wichtigkeit der Halbstetigkeit des Integrals bei der Anwendung der direkten Methode der Variationsrechnung hervorgehoben zu haben. Vgl. sein inhaltsreiches Werk „Fondamenti di calcolo delle variazioni I. II., Bologna.

[Anmerkung während der Korrektur.] Für den speziellen Fall des Plateauschen Variationsproblems folgt dieser Hilfssatz, sowie auch der folgende Hilfssatz II, aus den wichtigen Ergebnissen, die Herr L. Tonelli kürzlichst (nach Einreichen der vorliegenden Arbeit) über den Flächeninhalt veröffentlicht hat. Vgl. „Sulla quadratura delle superficie". Atti della Reale Accademia dei Lincei (6) **3** (1926), S. 357, 445, 633.

in der die rechte Seite eine analytische Funktion von α und β darstellt, gilt für alle Werte dieser Veränderlichen. Wir bezeichnen mit m die obere Grenze von $\left|\frac{\partial f}{\partial x}\right|$ und $\left|\frac{\partial f}{\partial y}\right|$ in Q und beschränken uns auf solche Werte von α und β, deren Betrag unterhalb m liegt; es sei endlich M so groß gewählt, daß

$$\left|\frac{\partial^2 F}{\partial \alpha^2}\right| \leqq M, \quad \left|\frac{\partial^2 F}{\partial \alpha\, \partial \beta}\right| \leqq M, \quad \left|\frac{\partial^2 F}{\partial \beta^2}\right| \leqq M$$

sei, sowie $|\alpha| \leqq m$, und $|\beta| \leqq m$ ist. Alsdann erhalten wir für die Differenz

$$\iint_T F\left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}\right) dx\, dy - J_T(\alpha, \beta) = \frac{1}{2} \iint_T R\left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}; \alpha, \beta\right) dx\, dy$$

mit Rücksicht auf (1′) die folgende Ungleichung:

$$\iint_T F\left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}\right) dx\, dy - J_T(\alpha, \beta) \leqq \frac{M}{2} \iint_T \left(\left|\frac{\partial f}{\partial x} - \alpha\right| + \left|\frac{\partial f}{\partial y} - \beta\right|\right)^2 dx\, dy,$$

da die Zwischenwerte $\tilde{\alpha} = \theta\alpha + (1-\theta)\frac{\partial f}{\partial x}$, $\tilde{\beta} = \theta\beta + (1-\theta)\frac{\partial f}{\partial y}$ dieselben Ungleichungen $|\tilde{\alpha}| \leqq m$, $|\tilde{\beta}| \leqq m$ erfüllen. Nun wählen wir für α bzw. β solche Werte, die dem Wertevorrat der Funktionen $\frac{\partial f}{\partial x}$ bzw. $\frac{\partial f}{\partial y}$ in T angehören; und bezeichnen mit ω irgendeine Zahl, die größer als die Oszillationen der stetigen Funktionen $\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}$ in T ist. Man gelangt zu der Ungleichung:

$$\iint_T F\left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}\right) dx\, dy - J_T(\alpha, \beta) \leqq 2M\omega^2 T$$

und damit zu dem Resultat, daß, wenn das Gebiet T so klein ist, daß daselbst die Oszillation der Funktionen $\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}$ kleiner als δ ist, die Größen α und β derart bestimmbar sind, daß

$$\iint_T F\left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}\right) dx\, dy - J_T(\alpha, \beta) \leqq 2M\delta^2 T$$

sei, während die Ungleichung

$$\iint_T F\left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}\right) dx\, dy \geqq J_T(\alpha, \beta)$$

für jedes Gebiet T und für alle Werte von α, β erfüllt ist.

Wir zerlegen nun unser Quadrat Q, dessen Inhalt wir durch denselben Buchstaben bezeichnen, durch äquidistante und zu den Seiten parallele Gerade in kongruente Quadrate

$$q_1, q_2, \ldots, q_k, \ldots, q_N,$$

so daß in jedem die fragliche Oszillation kleiner als die beliebig kleine Zahl δ sei. Sodann bestimmen wir — was nach dem Vorangehenden möglich ist — die Größen

$$\alpha_k,\ \beta_k \qquad (k = 1, 2, \ldots, N)$$

derart, daß

$$0 \leqq \iint\limits_{q_k} F\left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}\right) dx\, dy - J_{q_k}(\alpha_k, \beta_k) \leqq 2 M \delta^2 \frac{Q}{N}$$

ausfalle. Durch Summation über k ergibt sich daraus

$$(2) \quad \iint\limits_{Q} F\left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}\right) dx\, dy \geqq \sum_{k=1}^{N} J_{q_k}(\alpha_k, \beta_k) \geqq \iint\limits_{Q} F\left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}\right) dx\, dy - 2MQ\delta^2.$$

Nun betrachten wir irgendeine unserer Funktionen $f_n(x, y)$ und bilden zu ihr die entsprechenden Ausdrücke:

$$J_{q_k}^{(n)}(\alpha, \beta) = \left[F(\alpha, \beta) - \alpha \frac{\partial F}{\partial \alpha} - \beta \frac{\partial F}{\partial \beta}\right] \frac{Q}{N} + \frac{\partial F}{\partial \alpha} \int\limits_{q_k} f_n(x, y)\, dy - \frac{\partial F}{\partial \beta} \int\limits_{q_k} f_n(x, y)\, dx;$$

die Ungleichungen

$$(3) \qquad J_{q_k}^{(n)}(\alpha, \beta) \leqq \iint\limits_{q_k} F\left(\frac{\partial f_n}{\partial x}, \frac{\partial f_n}{\partial y}\right) dx\, dy$$

gelten wiederum für alle Werte von k, α und β; sie gelten auch, wenn man darin α bzw. β durch die oben gewählten Größen α_k, β_k ersetzt. Nun kann man bei festem k den Zeiger n so groß wählen, daß $J_{q_k}^{(n)}(\alpha_k, \beta_k)$ sich beliebig wenig von $J_{q_k}(\alpha_k, \beta_k)$ unterscheidet, da die Differenz beider Ausdrücke

$$J_{q_k}(\alpha_k, \beta_k) - J_{q_k}^{(n)}(\alpha_k, \beta_k) = \frac{\partial F(\alpha_k, \beta_k)}{\partial \alpha_k} \int\limits_{q_k} (f - f_n)\, dy - \frac{\partial F(\alpha_k, \beta_k)}{\partial \beta_k} \int\limits_{q_k} (f - f_n)\, dx$$

wegen der angenommenen gleichmäßigen Konvergenz der Funktionenfolge $f_n(x, y)$ gegen $f(x, y)$ mit wachsendem n gegen Null strebt. Wir wählen n so groß, daß für alle Werte $k = 1, 2, \ldots, N$ diese Differenz dem Betrage nach kleiner als $\frac{2MQ\delta^2}{N}$ sei, und erhalten durch Summation über k die Ungleichung:

$$-2MQ\delta^2 \leqq \sum_{k=1}^{N} J_{q_k}(\alpha_k, \beta_k) - \sum_{k=1}^{N} J_{q_k}^{(n)}(\alpha_k, \beta_k) \leqq 2MQ\delta^2.$$

Mit Rücksicht auf die Ungleichungen (2) und (3) können wir daher schließen, daß für hinreichend große Werte von n

$$\iint_Q F\left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}\right) dx\,dy - 2MQ\delta^2 \leqq \sum_{k=1}^{N} J_{q_k}(\alpha_k, \beta_k)$$

$$\leqq 2MQ\delta^2 + \iint_Q F\left(\frac{\partial f_n}{\partial x}, \frac{\partial f_n}{\partial y}\right) dx\,dy,$$

d. h.

$$\iint_Q F\left(\frac{\partial f_n}{\partial x}, \frac{\partial f_n}{\partial y}\right) dx\,dy \geqq \iint_Q F\left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}\right) dx\,dy - 4MQ\delta^2$$

ist. Da δ eine beliebig kleine positive Größe bedeuten kann, so folgt daraus

$$\liminf_{n=\infty} \iint_Q F\left(\frac{\partial f_n}{\partial x}, \frac{\partial f_n}{\partial y}\right) dx\,dy \geqq \iint_Q F\left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}\right) dx\,dy,$$

w. z. b. w.

4. Durch dasselbe Verfahren beweist man den folgenden etwas allgemeineren

Hilfssatz II.[12]) *Die in Q definierten Funktionen*

$$f_1(x, y),\ f_2(x, y),\ \ldots,\ f_n(x, y),\ \ldots$$

mögen daselbst die Lipschitzsche Bedingung erfüllen und gleichmäßig in Q gegen die Grenzfunktion $f(x, y)$ streben, die ebenfalls der Lipschitzschen Bedingung genügt; es gilt die Ungleichung:

$$\liminf_{n=\infty} \iint_Q F\left(\frac{\partial f_n}{\partial x}, \frac{\partial f_n}{\partial y}\right) dx\,dy \geqq \iint_Q F\left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}\right) dx\,dy.$$

Um den Beweis in diesem allgemeinen Falle zu erbringen, zerlege man Q — wie oben — in die kongruenten Quadrate

$$q_1, q_2, \ldots, q_k, \ldots, q_N$$

und führe wiederum zur Abkürzung die oben mit $J_{q_k}(\alpha, \beta)$ bzw. $J^{(n)}_{q_k}(\alpha, \beta)$ bezeichneten Ausdrücke ein. Da $f(x, y)$ und $f_n(x, y)$ der Lipschitzschen Bedingung genügen, so sind die ersten Ableitungen dieser Funktionen beschränkte meßbare Funktionen in Q;[13]) daher gelten die bekannten Formeln über die Umkehrung der Integrationsfolgen, und es ist

$$\iint_{q_k} \frac{\partial f}{\partial x}\, dx\,dy = \int_{q_k} f\,dy, \qquad \iint_{q_k} \frac{\partial f}{\partial y}\, dx\,dy = -\int_{q_k} f\,dy.$$

---

[12]) Für den speziellen Fall des Flächeninhaltes folgt dieser Satz aus den Untersuchungen von Z. de Geöcze; vgl. seine Thèse: „Quadrature des surfaces courbes." Teubner, 1909. Vgl. auch Anm. [11]).

[13]) Vgl. die in [9]) angeführte erste Arbeit von Herrn Rademacher S. 347.

Setzt man daher — wie oben —

$$J_{q_k}(\alpha,\beta)=\iint\limits_{q_k}\Big[F(\alpha,\beta)+\frac{\partial F}{\partial\alpha}\Big(\frac{\partial f}{\partial x}-\alpha\Big)+\frac{\partial F}{\partial\beta}\Big(\frac{\partial f}{\partial y}-\beta\Big)\Big]\,dx\,dy$$

$$=\Big[F(\alpha\beta)-\alpha\frac{\partial F}{\partial\alpha}-\beta\frac{\partial F}{\partial\beta}\Big]\frac{Q}{N}+\frac{\partial F}{\partial\alpha}\int\limits_{q_k}f\,dy-\frac{\partial F}{\partial\beta}\int\limits_{q_k}f\,dx$$

und entsprechend die mit den Funktionen $f_n(x,y)$ gebildeten Ausdrücke $J^{(n)}_{q_k}(\alpha,\beta)$, so ergeben sich wiederum aus der Taylorschen Entwicklung (1) der Funktion $F(p,q)$, mit Rücksicht auf die für diese Funktion geltenden Ungleichungen, die für alle Werte von α,β richtigen Beziehungen

$$(4)\qquad\begin{aligned}&\iint\limits_{q_k}F\Big(\frac{\partial f}{\partial x},\frac{\partial f}{\partial y}\Big)\,dx\,dy\ \geqq J_{q_k}(\alpha,\beta),\\&\iint\limits_{q_k}F\Big(\frac{\partial f_n}{\partial x},\frac{\partial f_n}{\partial y}\Big)\,dx\,dy\geqq J^{(n)}_{q_k}(\alpha,\beta).\end{aligned}$$

Wir werden zeigen, daß man bei hinreichend großem Wert von N die Größen

$$\alpha_k,\quad\beta_k\qquad\qquad(k=1,2,\ldots,N)$$

derart bestimmen kann, daß die Differenz

$$\iint\limits_{Q}F\Big(\frac{\partial f}{\partial x},\frac{\partial f}{\partial y}\Big)\,dx\,dy-\sum_{k=1}^{N}J_{q_k}(\alpha_k,\beta_k)$$

beliebig klein wird.

Man bestimme zu diesem Ende bei jedem festen N diejenigen Größen $\alpha_1^{(N)},\ \alpha_2^{(N)},\ \ldots,\ \alpha_N^{(N)}$, für die die Quadratsumme

$$\sum_{k=1}^{N}\iint\limits_{q_k}\Big[\frac{\partial f}{\partial x}-\alpha_k^{(N)}\Big]^2\,dx\,dy$$

ein Minimum wird; die so erhaltenen Größen

$$\alpha_k^{(N)}=\frac{N}{Q}\iint\limits_{q_k}\frac{\partial f}{\partial x}\,dx\,dy\qquad\qquad(k=1,2,\ldots,N)$$

sind dem Betrage nach nicht größer, als die obere Grenze m der ersten Differentialquotienten der Funktion $f(x,y)$, die — zufolge unserer Annahme — die Lipschitzsche Bedingung erfüllt. Bezeichnen wir mit $\alpha^{(N)}(x,y)$ irgendeine Funktion (Treppenfunktion), die in jedem der Quadrate $q_1,\ q_2,\ \ldots,\ q_N$ konstant ist, so macht unter diesen Funktionen diejenige das Integral

$$\iint\limits_{Q}\Big[\frac{\partial f}{\partial x}-\alpha^{(N)}(x,y)\Big]^2\,dx\,dy$$

zum Minimum, die in den Quadraten q_k gleich den oben bestimmten Größen $\alpha_k^{(N)}$ ist. Nun muß dieses Minimum mit wachsendem N gegen Null streben, da — wie bekannt — die Gesamtheit aller dieser Treppenfunktionen $\alpha^{(N)}(x, y)$ ein vollständiges Funktionensystem bildet[14]). D. h. man kann N so groß wählen, daß die zu diesem N gehörenden Größen $\alpha_k^{(N)}$ die entsprechende Integralsumme

$$\sum_{k=1}^{N} \iint_{q_k} \left[\frac{\partial f}{\partial x} - \alpha_k^{(N)}\right]^2 dx\,dy$$

beliebig klein machen. In derselben Weise kann man bei hinreichend großem N die Größen

$$\beta_1^{(N)}, \beta_2^{(N)}, \ldots, \beta_N^{(N)},$$

deren Betrag ebenfalls kleiner als m ist, so bestimmen, daß

$$\sum_{k=1}^{N} \iint_{q_k} \left[\frac{\partial f}{\partial y} - \beta_k^{(N)}\right]^2 dx\,dy$$

beliebig klein wird; wir nehmen an, daß N so groß gewählt ist, daß beide Summen kleiner als die beliebig vorgeschriebene Größe δ sind.

Die Taylorsche Entwicklung (1) der Funktion $F(p, q)$ liefert daher für diese Werte von $\alpha_k^{(N)}$, $\beta_k^{(N)}$ — mit Rücksicht auf (1′) — die Ungleichung

$$\iint_{q_k} F\left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}\right) dx\,dy - J_{q_k}(\alpha_k^{(N)}, \beta_k^{(N)}) = \frac{1}{2}\iint_{q_k} R\left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial f};\ \alpha_k^{(N)}, \beta_k^{(N)}\right) dx\,dy$$

$$\leqq M \iint_{q_k} \left\{\left(\frac{\partial f}{\partial x} - \alpha_k^{(N)}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y} - \beta_k^{(N)}\right)^2\right\} dx\,dy,$$

wobei wir — wie oben — mit M den größten Wert der Funktionen $\left|\frac{\partial^2 F}{\partial \alpha^2}\right|$, $\left|\frac{\partial^2 F}{\partial \alpha\,\partial \beta}\right|$, $\left|\frac{\partial^2 F}{\partial \beta^2}\right|$ bezeichnen für solche Werte von α, β, deren Betrag nicht größer als m ist[15]). Summiert man über $k = 1, 2, \ldots, N$, so erhält man die Ungleichung

$$(5) \qquad \iint_{Q} F\left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}\right) dx\,dy - \sum_{k=1}^{N} J_{q_k}(\alpha_k^{(N)}, \beta_k^{(N)}) \leqq 2M\delta.$$

---

[14]) Es gilt sogar mehr, denn diese besten Approximationen $\alpha^{(N)}(x, y)$ konvergieren mit wachsendem N fast überall gegen $\frac{\partial f}{\partial x}$. Durch Benutzung dieses Umstandes kann der folgende Beweis zwar abgekürzt werden, es scheint mir aber interessant, daß schon die mittlere Konvergenz zum Ziele führt und der erwähnte, ziemlich tiefliegende Satz der Lebesgueschen Theorie nicht herangezogen werden muß.

[15]) Da nämlich sowohl $\frac{\partial f}{\partial x}$ bzw. $\frac{\partial f}{\partial y}$, wie auch die Größen $\alpha_k^{(N)}$ bzw. $\beta_k^{(N)}$ dem Betrage nach kleiner als m sind, so gilt dasselbe auch für die Zwischenstellen, die in der Darstellung (1′) von R auftreten.

Eine wörtliche Wiederholung des Beweises des vorangehenden Hilfssatzes führt uns wiederum zum Ziel. Wegen der gleichmäßigen Konvergenz der Funktionenfolge $f_n(x, y)$ gegen $f(x, y)$ kann man bei festem N den Zeiger n so groß wählen, daß alle Differenzen

$$J_{q_k}(\alpha_k^{(N)}, \beta_k^{(N)}) - J_{q_k}^{(n)}(\alpha_k^{(N)}, \beta_k^{(N)}) = \frac{\partial F}{\partial \alpha_k^{(N)}} \int_{q_k} (f - f_n)\, dy - \frac{\partial F}{\partial \beta_k^{(N)}} \int_{q_k} (f - f_n)\, dx$$

dem Betrage nach kleiner als $\frac{2M\delta}{N}$ werden; durch Summation über k und Addition zu der letzten Ungleichung (5) erhält man daraus

$$\iint_Q F\left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}\right) dx\, dy - \sum_{k=1}^{N} J_{q_k}^{(n)}(\alpha_k^{(N)}, \beta_k^{(N)}) \leqq 4M\delta.$$

Mit Rücksicht auf die für alle Werte von α, β geltende Ungleichung (4) ergibt sich

$$\iint_Q F\left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}\right) dx\, dy \leqq \iint_Q F\left(\frac{\partial f_n}{\partial x}, \frac{\partial f_n}{\partial y}\right) dx\, dy + 4M\delta,$$

woraus — da δ beliebig klein gewählt werden kann — unser Hilfssatz unmittelbar folgt.

Die soeben bewiesenen Hilfssätze bleiben richtig — wie man sich leicht überzeugt — für alle Bereiche, die man durch endlich viele Quadrate beliebig approximieren kann.

5. Wir legen unseren Untersuchungen eine geschlossene, doppelpunktlose Raumkurve C zugrunde

$$x = \xi(t), \quad y = \eta(t), \quad z = \zeta(t),$$

die so beschaffen ist, *daß der Tangens des Winkels, den irgendeine Ebene, die wenigstens drei Punkte dieser Kurve enthält, mit der xy-Ebene bildet, dem Betrage nach unterhalb einer endlichen Grenze Δ liegt.* Die Projektion der Raumkurve C auf die xy-Ebene ist notwendigerweise eine konvexe Kurve c, und man kann in elementarer Weise zeigen, daß, falls $\xi(t)$, $\eta(t)$, $\zeta(t)$ zweimal stetig differenzierbare Funktionen sind, außerdem die Determinante $\xi'(t)\,\eta''(t) - \eta'(t)\,\xi''(t)$ stets von Null verschieden ist, die obige Bedingung erfüllt ist. Wir werden als *Steilheit* der Ebene $z = ax + by + c$ den Ausdruck $|tg\varphi| = |\sqrt{a^2 + b^2}|$ bezeichnen, wo φ den mit der xy-Ebene eingeschlossenen Winkel bedeutet; die Steilheit ist der Maximalwert des Differenzenquotienten

$$\left| \frac{(ax_1 + by_1 + c) - (ax_2 + by_2 + c)}{[(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2]^{\frac{1}{2}}} \right|.$$

Es handelt sich zunächst darum, die Existenz einer innerhalb c definierten Funktion $z(x, y)$ zu beweisen, die der Lipschitzschen Bedingung genügt und so beschaffen ist, daß die Fläche $z = z(x, y)$ die Raumkurve C enthält und einen kleineren Flächeninhalt besitzt, als irgendeine andere durch die Raumkurve C hindurchgehende Fläche. Herr Lebesgue hat — wie in der Einleitung bemerkt — den Beweis der Existenz einer solchen Fläche skizziert[16]); obwohl dabei der Flächeninhalt zunächst als limes inferior der Flächeninhalte der gegen die Fläche konvergierenden Polyederfolgen definiert ist, so ist dies in den vorliegenden Fällen äquivalent mit dem Doppelintegral (es bezeichne t das von c berandete Gebiet):

$$\iint_t \left[1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}} dx\, dy,$$

so daß die Lebesgueschen Resultate direkt auf unsere Untersuchungen anwendbar sind. Das Plateausche Problem ist damit darauf zurückgeführt — wie Herr Lebesgue selbst bemerkt —, die Existenz der höheren Ableitungen dieser Fläche zu beweisen. Es soll trotzdem im folgenden ein von dem Lebesgueschen Verfahren verschiedener Weg zum Beweis der Existenz der obigen Funktion gegeben werden, der nicht nur im Falle des Plateauschen Problems, sondern bei allen regulären Variationsproblemen (von der in den Hilfssätzen I, II beschriebenen Art) zum Ziele führt.

Wir verfahren zu diesem Zwecke wie folgt: Wir betrachten alle innerhalb t definierten Funktionen $f(x, y)$, die der Bedingung $f(\xi(t), \eta(t)) = \zeta(t)$ unterworfen und so beschaffen sind, daß der Differenzenquotient

$$\frac{f(x_1, y_1) - f(x_2, y_2)}{[(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2]^{\frac{1}{2}}}$$

dem Betrage nach kleiner als $\Delta + 1$ ausfalle[17]), wobei (x_1, y_1) bzw. (x_2, y_2) zwei beliebige Punkte innerhalb t bedeuten. Wir bilden sodann für jede dieser Funktionen das Integral

$$\iint_t F\left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}\right) dx\, dy;$$

da die Ableitungen $\frac{\partial f}{\partial x}$, $\frac{\partial f}{\partial y}$ fast überall existieren und dem Betrage nach kleiner als $\Delta + 1$ sind, so folgt, daß alle diese Integrale dem Betrage nach unterhalb einer oberen Schranke bleiben. Es sei d der Limes inferior dieser Integralwerte. Wenn dieser Minimalwert d für keine Funktion $f(x, y)$

[16]) a. a. O. S. 348—351.

[17]) Die Gesamtheit dieser Funktionen möge mit (G) bezeichnet werden; übrigens kann man statt $\Delta + 1$ jede Größe, die größer als Δ ist, verwenden.

der obigen Konkurrenz (G) erreicht wird, so können wir eine Folge $f_1(x, y), f_2(x, y), \ldots, f_n(x, y), \ldots$ derart bestimmen, daß

$$\lim_{n=\infty} \int\int_t F\left(\frac{\partial f_n}{\partial x}, \frac{\partial f_n}{\partial y}\right) dx\, dy = d$$

ist. Wir können auch annehmen, daß diese Funktionenfolge in t gleichmäßig gegen eine Grenzfunktion $z(x, y)$ strebt, da man — nach einem vielfach angewandten Satze — aus jeder Folge von Funktionen, die so beschaffen sind, daß ihre Differenzenquotienten dem Betrage nach unterhalb derselben Schranke bleiben, eine gleichmäßig konvergente Folge herausgreifen kann. Diese Grenzfunktion $z(x, y)$ gehört wiederum der obigen Konkurrenz an, da die entsprechende Fläche die Kurve C enthält und der Differenzenquotient

$$\left| \frac{z(x_1, y_1) - z(x_2, y_2)}{[(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2]^{\frac{1}{2}}} \right| \leqq A + 1$$

sein muß. Daher ist jedenfalls

$$\int\int_t F\left(\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}\right) dx\, dy \geqq d.$$

Andererseits folgt aus dem Hilfssatze II — da $z(x, y)$ der gleichmäßige Limes der obigen Funktionen $f_n(x, y)$ ist —

$$\int\int_t F\left(\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}\right) dx\, dy \leqq d,$$

woraus man schließt, daß

$$\int\int_t F\left(\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}\right) dx\, dy = d$$

sein muß.

Es liefert daher die so erhaltene Funktion $z(x, y)$ ein Minimum für das betrachtete Integral, innerhalb der obigen Konkurrenz (G). Wir werden nun zeigen, daß diese Funktion das *absolute Minimum* jenes Integrals liefert, d. h. daß die Ungleichung

$$\int\int_t F\left(\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}\right) dx\, dy \leqq \int\int_t F\left(\frac{\partial \tilde{z}}{\partial x}, \frac{\partial \tilde{z}}{\partial y}\right) dx\, dy$$

besteht, wobei $\tilde{z}(x, y)$ irgendeine in t definierte Funktion bedeutet, die der Lipschitzschen Bedingung (mit *irgendeiner* Lipschitzschen Konstanten) genügt und der Beschränkung $\tilde{z}(\xi(t), \eta(t)) = \zeta(t)$ unterworfen ist.

6. Zu diesem Ende beweisen wir vorab, daß *es keine Ebene geben kann, die einen inneren Punkt* P_0 (mit den Koordinaten $x_0, y_0, z_0 = z(x_0, y_0)$)

der Fläche $z = z(x, y)$ von der Randkurve C trennt; d. h. daß jede Ebene, die P_0 nicht enthält, so beschaffen ist, daß man P_0 durch eine Flächenkurve mit dem Rand C verbinden kann, ohne die Ebene zu treffen. Wäre nämlich

$$z = \alpha x + \beta y + \gamma$$

eine solche trennende Ebene, so könnte man um den Punkt x_0, y_0 der xy-Ebene ein ganz innerhalb c liegendes Gebiet g angeben, auf dessen Rand die Gleichung $z(x, y) = \alpha x + \beta y + \gamma$ richtig wäre, während im Punkte x_0, y_0 selbst $z(x_0, y_0) - \alpha x_0 - \beta y_0 - \gamma$ von Null verschieden, etwa positiv ausfiele. Wegen der Stetigkeit der Funktion $z(x, y)$ würden dann alle Ebenen

$$z = \alpha x + \beta y + \gamma + \delta$$

dieselbe Eigenschaft besitzen, sofern δ eine hinreichend kleine positive Zahl bedeutet, da auf dem Rande von g $z(x, y) - (\alpha x + \beta y + \gamma + \delta)$ negativ, im Punkte x_0, y_0 aber diese Differenz positiv wäre. Wir bezeichnen mit g_δ diejenige Umgebung der Stelle x_0, y_0, in der $z(x, y) > \alpha x + \beta y + \gamma + \delta$ ist, mit γ_δ den Rand dieses Gebietes[18]); auf γ_δ ist $z(x, y) = \alpha x + \beta y + \gamma + \delta$. Man kann jedenfalls δ derart wählen, daß das Maß der Punktmenge γ_δ gleich Null wird, da bekanntlich die Punktmenge, in der eine meßbare Funktion den Wert δ annimmt, für fast alle δ eine Nullmenge ist.

Wir betrachten nun diejenige Funktion $f(x, y)$, die in dem Gebiete g_δ mit der linearen Funktion $\alpha x + \beta y + \gamma + \delta$, in der Komplementärmenge g_δ' von g_δ aber mit der Funktion $z(x, y)$ übereinstimmt, und behaupten, daß diese stetige Funktion $f(x, y)$ der obigen Konkurrenz (G) angehört, und dem betrachteten Integral einen kleineren Wert als d erteilt. Die Richtigkeit der Ungleichung

$$\left| \frac{f(x_1, y_1) - f(x_2, y_2)}{[(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2]^{\frac{1}{2}}} \right| \leqq A + 1 \tag{6}$$

folgt nämlich unmittelbar, wenn beide Punkte (x_1, y_1) und (x_2, y_2) der Komplementärmenge g_δ' angehören, da daselbst $f(x, y)$ mit $z(x, y)$ übereinstimmt. Sind aber (x_1, y_1) und (x_2, y_2) solche Punkte, die dem Gebiet g_δ oder dessen Rande γ_δ angehören, so ist dieser Differenzenquotient — da innerhalb g_δ $f(x, y)$ eine lineare Funktion ist — gleich dem Differenzenquotienten

$$\left| \frac{f(x_1', y_1') - f(x_2', y_2')}{[(x_1' - x_2')^2 + (y_1' - y_2')^2]^{\frac{1}{2}}} \right|,$$

[18]) γ_δ gehört der Komplementärmenge von g_δ in bezug auf t an; diese Komplementärmenge wird im folgenden mit g_δ' bezeichnet.

wobei (x_1', y_1') und (x_2', y_2') solche Punkte sind, in denen die durch die Punkte (x_1, y_1) und (x_2, y_2) gelegte Gerade den Rand γ_δ des Gebietes g_δ trifft. Daraus folgt wiederum die Richtigkeit der Ungleichung (6), da γ_δ der Punktmenge g_δ' angehört. Ist endlich (x_1, y_1) ein Punkt von g_δ' und (x_2, y_2) ein Punkt von g_δ, so beweist man die fragliche Ungleichung durch Einschachtelung eines Punktes (x_3, y_3), der gemeinsamer Punkt der die Punkte (x_1, y_1) und (x_2, y_2) verbindenden Strecke mit dem Rand γ_δ von g_δ ist und zwischen diesen beiden Punkten liegt; denn es gelten nach dem Vorangehenden die beiden Ungleichungen

$$|f(x_1, y_1) - f(x_3, y_3)| \leqq (\Delta + 1)[(x_1 - x_3)^2 + (y_1 - y_3)^2]^{\frac{1}{2}},$$
$$|f(x_3, y_3) - f(x_2, y_2)| \leqq (\Delta + 1)[(x_2 - x_3)^2 + (y_2 - y_3)^2]^{\frac{1}{2}},$$

woraus durch Addition die Ungleichung (6) folgt.

Da ferner $f(x, y)$ außerhalb des ganz im Inneren von c gelegenen Gebietes g_δ mit $z(x, y)$ übereinstimmt, so gilt die Relation $f(\xi(t), \eta(t)) = \zeta(t)$, da dieselbe für $z(x, y)$ richtig war. Damit ist gezeigt, daß $f(x, y)$ tatsächlich eine Funktion der obigen Konkurrenz (G) ist. Wir vergleichen nun das Integral

$$\iint_t F\left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}\right) dx\, dy = \iint_{g_\delta} F\left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}\right) dx\, dy + \iint_{g_\delta' - \gamma_\delta} F\left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}\right) dx\, dy$$

mit dem entsprechenden Integral

$$\iint_t F\left(\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}\right) dx\, dy = \iint_{g_\delta} F\left(\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}\right) dx\, dy + \iint_{g_\delta' - \gamma_\delta} F\left(\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}\right) dx\, dy;$$

die angedeutete Zerlegung ist gerechtfertigt in Anbetracht des Umstandes, daß γ_δ eine Nullmenge und Bestandteil von g_δ' ist. Innerhalb $g_\delta' - \gamma_\delta$ stimmen die beiden Funktionen $z(x, y)$ und $f(x, y)$ überein, es gilt daher für jede solche Stelle $\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial x}$, $\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial y}$ (mit etwaiger Ausnahme einer Nullmenge); daher ist

$$\iint_{g_\delta' - \gamma_\delta} F\left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}\right) dx\, dy = \iint_{g_\delta' - \gamma_\delta} F\left(\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}\right) dx\, dy.$$

Es erübrigt daher nur zu zeigen, daß

$$(6') \qquad \iint_{g_\delta} F\left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}\right) dx\, dy < \iint_{g_\delta} F\left(\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}\right) dx\, dy$$

ist, wobei in g_δ $f(x, y) = \alpha x + \beta y + \gamma + \delta$ ist und $z(x, y)$ auf dem Rand

von g_δ dieselben Werte wie $f(x,y)$ annimmt. Die Anwendung der Taylorschen Entwicklung (1) liefert nun unmittelbar

$$(1'')\quad F\left(\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}\right) = F(\alpha,\beta) + \frac{\partial F(\alpha,\beta)}{\partial \alpha}\left(\frac{\partial z}{\partial x} - \alpha\right) + \frac{\partial F(\alpha,\beta)}{\partial \beta}\left(\frac{\partial z}{\partial y} - \beta\right) + R,$$

wobei R für alle in Betracht kommenden Werte positiv (>0) ausfällt. Da ferner

$$\iint\limits_{g_\delta}\left(\frac{\partial z}{\partial x} - \alpha\right) dx\,dy = \iint\limits_{g_\delta}\frac{\partial (z-f)}{\partial x}\,dx\,dy = 0,$$

$$\iint\limits_{g_\delta}\left(\frac{\partial z}{\partial y} - \beta\right) dx\,dy = \iint\limits_{g_\delta}\frac{\partial (z-f)}{\partial y}\,dx\,dy = 0$$

ist[19]), so ergibt sich die Ungleichung $(6')$, indem man das über g_δ genommene Integral der in der Relation $(1'')$ stehenden Ausdrücke bildet. Es würde daher die der betrachteten Konkurrenz (G) angehörige Funktion $f(x,y)$ unserem Integral einen kleineren Wert als d erteilen, dies ist aber unmöglich. Damit ist gezeigt, daß, wie auch die Konstanten α, β, γ gewählt sind, die Differenz $z(x,y) - \alpha x - \beta y - \gamma$ nur dann in allen Randpunkten eines innerhalb c gelegenen Gebietes g_δ verschwinden kann, wenn sie in jedem Punkte dieses Gebietes gleich Null ist, oder — was damit gleichbedeutend ist — daß, falls die Ungleichung

$$m \leqq z(x,y) - \alpha x - \beta y - \gamma \leqq M$$

auf dem Rand eines Gebietes gilt, so gilt sie auch für jeden Punkt dieses Gebietes. Geometrisch drückt dies die Tatsache aus, daß die Fläche $z = z(x,y)$ von keiner Ebene in einer geschlossenen Kurve durchsetzt werden kann.

7. Für solche Flächen bzw. Funktionen gilt ein bemerkenswerter Satz rein topologischer Natur, der — wie mir scheint — in verschiedenen Untersuchungen dieser Art mit Erfolg anwendbar ist. Ich gelangte zu seiner Aufstellung lediglich zu dem Zwecke, um zu zeigen, daß die oben konstruierte Funktion $z(x,y)$ das absolute Minimum des betrachteten

---

[19]) Ist nämlich $f^*(x,y)$ diejenige *stetige* Funktion, die in g_δ mit $(z-f)$ übereinsimmt, in g'_δ aber überall gleich Null ist, so liefert die Produktintegration (da c eine konvexe Kurve ist)

$$\iint\limits_{t}\frac{\partial f^*}{\partial x}\,dx\,dy = \iint\limits_{g_\delta}\frac{\partial (z-f)}{\partial x}\,dx\,dy = \int\limits_{c} f^*\,dy = 0,$$

$$\iint\limits_{t}\frac{\partial f^*}{\partial y}\,dx\,dy = \iint\limits_{g_\delta}\frac{\partial (z-f)}{\partial y}\,dx\,dy = -\int\limits_{c} f^*\,dy = 0.$$

Integrals liefert. Herr Radó hat auf meine Anregung einen eleganten Beweis dieses Satzes gefunden und mit Anwendungen auf die Variationsrechnung kürzlich veröffentlicht[20]). Dieser Satz lautet folgendermaßen:

Die innerhalb und auf c definierte stetige Funktion $z(x,y)$ erfülle die Bedingung, daß bei jeder Wahl der Konstanten a, b, c und in jedem innerhalb c gelegenen Gebiete die Ungleichung

$$m \leqq z(x,y) - \alpha x - \beta y - \gamma \leqq M$$

statthat, wenn diese Ungleichung für alle Randpunkte des Gebietes richtig ist; es besitze ferner diejenige Raumkurve (Randkurve) C der entsprechenden Fläche, deren Projektion auf die xy-Ebene die Kurve c ist, die Eigenschaft, daß jede Ebene, die mindestens drei Punkte mit dieser Kurve gemein hat, eine kleinere Steilheit als Δ besitzt. Dann gilt für alle Punktepaare $(x_1, y_1), (x_2, y_2)$ innerhalb c die Ungleichung:

$$\left| \frac{z(x_1,y_1) - z(x_2,y_2)}{[(x_1-x_2)^2 + (y_1-y_2)^2]^{\frac{1}{2}}} \right| < \Delta.$$

Mit Hilfe dieses Lemmas kann man in einfacher Weise die Richtigkeit der Ungleichung

$$\iint_t F\left(\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}\right) dx\,dy < \iint_t F\left(\frac{\partial \tilde{z}}{\partial x}, \frac{\partial \tilde{z}}{\partial y}\right) dx\,dy$$

zeigen, wobei $z(x,y)$ die oben konstruierte Funktion, $\tilde{z}(x,y)$ aber irgendeine innerhalb und auf c definierte, von $z(x,y)$ *verschiedene* Funktion bedeutet, die der Lipschitzschen Bedingung genügt und auf c dieselben Randwerte wie $z(x,y)$ besitzt. In der Tat, die für alle reellen Werte von ε definierte Funktion

$$\varphi(\varepsilon) = \iint_t F\left(\frac{\partial(z+\varepsilon(\tilde{z}-z))}{\partial x}, \frac{\partial(z+\varepsilon(\tilde{z}-z))}{\partial y}\right) dx\,dy$$

erfüllt für alle ε die Ungleichung

$$\frac{d^2\varphi}{d\varepsilon^2} > 0;$$

---

[20]) Für Polyederflächen ist dieser Satz von Herrn H. Lebesgue (a. a. O. S. 349) bewiesen; für stetig gekrümmte Flächen benutzt ihn Herr S. Bernstein, S. 235 der ersten in Anmerkung [1]) genannten Arbeit. Für die vorliegenden Untersuchungen ist es entscheidend, den Satz in voller Allgemeinheit zu besitzen. In seiner ersten Arbeit über diesen Gegenstand: „Über das Dirichletsche Prinzip" (Jahresbericht d. deutschen Mathematiker-Vereinigung 8 (1900)) deutet Herr Hilbert einen Weg für die Behandlung der gewöhnlichen Randwertaufgabe der Potentialtheorie an, der manche Analogie mit diesem Satze aufweist. Vgl. auch [8]).

es ist nämlich

$$\frac{d^2\varphi}{d\varepsilon^2} = \iint_t \left[\frac{\partial^2 F}{\partial p^2} \left(\frac{\partial(\tilde{z}-z)}{\partial x} \right)^2 + 2 \frac{\partial^2 F}{\partial p \partial q} \frac{\partial(\tilde{z}-z)}{\partial x} \frac{\partial(\tilde{z}-z)}{\partial y} + \frac{\partial^2 F}{\partial q^2} \left(\frac{\partial(\tilde{z}-z)}{\partial y} \right)^2 \right] dx\, dy,$$

wobei der Kürze halber $p = \frac{\partial(z+\varepsilon(\tilde{z}-z))}{\partial x}$, $q = \frac{\partial(z+\varepsilon(\tilde{z}-z))}{\partial y}$ gesetzt ist. Der Integrand ist wegen der angenommenen Regularität des Variationsproblems nicht negativ und verschwindet nur an solchen Stellen, wo die ersten Ableitungen von $\tilde{z}-z$ gleich Null sind; daher ist jenes Integral sicher positiv, da die stetige Funktion $\tilde{z}-z$ nicht identisch verschwinden kann. An der Stelle $\varepsilon = 0$ muß ferner die Funktion $\varphi(\varepsilon)$ ein relatives Minimum besitzen, da für hinreichend kleine ε die Funktion $z+\varepsilon(\tilde{z}-z)$ so beschaffen ist, daß ihr Differenzenquotient dem Betrage nach kleiner als $\Delta+1$ ausfällt, in dieser Konkurrenz (G) aber die Funktion $z(x,y)$ den kleinsten Wert dem betrachteten Integral erteilt, d. h. es muß für $\varepsilon = 0$ $\frac{d\varphi}{d\varepsilon} = 0$ sein. In Verbindung mit $\frac{d^2\varphi}{d\varepsilon^2} > 0$ (für jedes ε) ergibt sich daraus, daß $\varphi(\varepsilon)$ an der Stelle $\varepsilon = 0$ ein absolutes Minimum hat; insbesondere ist

$$\varphi(0) < \varphi(1),$$

und dies ist unsere Behauptung.

Wir gelangen damit zu einer Extremalfunktion, die der Lipschitzschen Bedingung genügt und dem betrachteten Integral einen kleineren Wert erteilt als irgendeine andere der Lipschitzschen Bedingung genügende Funktion, die dieselben Randwerte auf c annimmt. In den folgenden Abschnitten soll für den Fall des Plateauschen Variationsproblems gezeigt werden, daß diese Extremalfunktion an jeder inneren Stelle von t analytisch ist und die bekannte partielle Differentialgleichung befriedigt.

§ 2.

Ableitung der Differentialgleichungen, denen die Extremalfunktion genügt.

8. Obwohl die Untersuchungen dieses Abschnittes ebenfalls für alle regulären Variationsprobleme gelten, so beschränken wir uns doch der Einfachheit halber auf das Plateausche Variationsproblem und schreiten zur Ableitung von gewissen Differentialgleichungssytemen, denen die im vorangehenden Abschnitt konstruierte Extremalfläche $z(x,y)$ genügt. Da die Funktion $z(x,y)$ der Lipschitzschen Bedingung genügt, so existieren — wie Herr Rademacher in seiner erwähnten Abhandlung gezeigt hat — fast überall in t die Ableitungen

$$\frac{\partial z}{\partial x} = p(x,y), \qquad \frac{\partial z}{\partial y} = q(x,y),$$

die beschränkte, meßbare Funktionen sind. Wir führen zur Abkürzung die Bezeichnung

$$w = [1 + p^2 + q^2]^{\frac{1}{2}}$$

ein, und bezeichnen mit R irgendein innerhalb c liegendes Rechteck, dessen Seiten den Koordinatenachsen parallel sind; es gilt der folgende Satz:

Es existieren drei stetige Funktionen $\omega_1(x,y)$, $\omega_2(x,y)$, $\omega_3(x,y)$, *die in R definiert sind und der Lipschitzschen Bedingung genügen, von der Beschaffenheit, daß die Extremalfunktion* $z(x,y)$ *in Gemeinschaft mit diesen Hilfsfunktionen fast überall in R die folgenden drei Differentialgleichungssysteme befriedigt*:

$$\text{(A)} \qquad \frac{q}{w} = \frac{\partial \omega_1}{\partial x}, \quad \frac{p}{w} = -\frac{\partial \omega_1}{\partial y},$$

$$\text{(B)} \qquad \frac{1+p^2}{w} = \frac{\partial \omega_2}{\partial x}, \quad \frac{pq}{w} = \frac{\partial \omega_2}{\partial y},$$

$$\text{(C)} \qquad \frac{pq}{w} = \frac{\partial \omega_3}{\partial x}, \quad \frac{1+q^2}{w} = \frac{\partial \omega_3}{\partial y}.$$

Unter der Annahme, daß die Ableitungen p und q stetige Funktionen sind, habe ich die Gleichungen (A) in einer älteren Arbeit[21]) durch Heranziehung eines Hilfssatzes (dessen Verallgemeinerung der hauptsächliche Punkt dieses Abschnittes ist) abgeleitet. Es war dabei mein Ziel, das Verschwinden der ersten Variation in Differentialgleichungen umzusetzen, ohne die Existenz der Ableitungen zweiter Ordnung anzunehmen, und ich beschränkte mich dabei auf die Annahme, daß die ersten Ableitungen der Extremalfunktion stetige Funktionen sind. Die Gleichungen (B) und (C) wurden von Herrn T. Radó auf meine Anregung in einer kürzlich erschienenen Arbeit[22]), unter derselben Annnahme, mit Hilfe desselben Satzes abgeleitet, durch eine strenge Diskussion derjenigen Methode, die bei älteren Autoren als Variation der unabhängigen Variablen bezeichnet wird. Es handelt sich nun darum, zu beweisen, daß diese Differentialgleichungen *fast* überall gültig sind, falls man die Annahme der Stetigkeit der Ableitungen p und q fallen läßt und nur annimmt, daß die Extremalfunktion der Lipschitzschen Bedingung genügt.

Um die Gleichungen (A) abzuleiten, bedienen wir uns der üblichen

---

[21]) Journal für Mathematik **149** (1919). Herr L. Lichtenstein gab am Schlusse seiner Arbeit „Bemerkungen über das Prinzip der virtuellen Verrückungen in der Hydrodynamik inkompressibler Flüssigkeiten". (Annales de la société polonaise de mathématique 1924, S. 20—28) einen äußerst einfachen und eleganten Beweis meines daselbst benutzten Hilfssatzes.

[22]) „Bemerkung über die Differentialgleichungen zweidimensionaler Variationsprobleme", Acta scientiarum universitatis Franc. Joseph. Szeged **2** (1925).

Form der ersten Variation. Es bezeichne $\zeta(x, y)$ eine beliebige in t definierte stetige Funktion, die der Lipschitzschen Bedingung genügt und auf der Kurve c verschwindet; aus der Extremaleigenschaft der Funktion $z(x, y)$ folgt das Bestehen der Ungleichung:

$$\iint_t [1+p^2+q^2]^{\frac{1}{2}}\, dx\, dy \leqq \iint_t \left[1+\left(p+\varepsilon\frac{\partial\zeta}{\partial x}\right)^2+\left(q+\varepsilon\frac{\partial\zeta}{\partial y}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}} dx\, dy$$

für jeden Wert der Konstante ε, aus der man in bekannter Weise die Gleichung

$$\text{(a)} \qquad \iint_t \frac{1}{w}\left[p\frac{\partial\zeta}{\partial x}+q\frac{\partial\zeta}{\partial y}\right] dx\, dy = 0$$

ableitet, die für jede Funktion $\zeta(x, y)$ (von der beschriebenen Art) besteht.

Um die Gleichungen (B) und (C) abzuleiten, bedienen wir uns der entsprechenden Relationen, die sich vermöge der Variation der unabhängigen Variablen ergeben. Sie lauten folgendermaßen: es gelten für dieselben Funktionen $\zeta(x, y)$ die Gleichungen

$$\text{(b)} \qquad \iint_t \frac{1}{w}\left[(1+q^2)\frac{\partial\zeta}{\partial x}-pq\frac{\partial\zeta}{\partial y}\right] dx\, dy = 0,$$

$$\text{(c)} \qquad \iint_t \frac{1}{w}\left[pq\frac{\partial\zeta}{\partial x}-(1+p^2)\frac{\partial\zeta}{\partial y}\right] dx\, dy = 0.$$

Der Beweis dieser Relationen ist fast wörtlich derselbe wie bei Herrn Radó in dem Falle stetiger Ableitungen; er soll in Kürze mitgeteilt werden.

Wir zeichnen in einer Hilfsebene, in der ξ, η die rechtwinkligen Koordinaten bedeuten, diejenige konvexe Kurve γ, die vermöge der Transformation $x = \xi$, $y = \eta$ der Kurve c entspricht, und definieren vermöge der Gleichungen

$$x = \xi + \varepsilon\zeta(\xi, \eta), \qquad y = \eta, \qquad z = z(\xi, \eta)$$

bei jedem festen Wert des Parameters ε eine Fläche F_ε, die im xyz-Raum ausgebreitet ist; dabei ist der Punkt ξ, η stets innerhalb γ veränderlich. Man wähle nun $|\varepsilon| < \frac{1}{M}$, wobei M die obere Schranke des Differenzenquotienten

$$\left|\frac{\zeta(\xi_1, \eta)-\zeta(\xi_2, \eta)}{\xi_1-\xi_2}\right|$$

bedeutet, falls (ξ_1, η) und (ξ_2, η) innere Punkte des von der Kurve γ berandeten Gebietes τ sind; dann ist $\xi + \varepsilon\zeta(\xi, \eta)$ bei jedem η eine monoton wachsende Funktion von ξ, und die Gleichungen

$$(7) \qquad x = \xi + \varepsilon\zeta(\xi, \eta) \qquad y = \eta$$

vermitteln eine ein-eindeutige Transformation des Gebietes τ der ξ, η-Ebene auf das Gebiet t der xy-Ebene, wobei in Anbetracht dessen, daß $\zeta(\xi, \eta)$ auf der Kurve γ verschwindet, dem Rand γ von τ der Rand c von t entspricht. Daraus folgt aber, daß man die Gleichung jeder dieser Flächen F_ε auf die Form $z = z(x, y; \varepsilon)$ bringen kann, wobei $z(x, y; \varepsilon)$ bei jedem — in Betracht kommenden — Werte von ε eine in t definierte eindeutige Funktion von x, y darstellt. Man zeigt auch ohne Schwierigkeit, daß diese Funktionen der Lipschitzschen Bedingung genügen. In der Tat, man erhält die Funktion $z(x, y; \varepsilon)$, indem man in $z(\xi, \eta)$ die Veränderlichen ξ und η durch diejenigen Ausdrücke von x, y ersetzt, die sich durch Auflösung des Gleichungssystems (7) ergeben. Da ferner $\zeta(\xi, \eta)$ der Lipschitzschen Bedingung genügt, so folgt nach dem Hauptsatz der in der Einleitung angeführten Arbeit von Herrn Rademacher durch Differentiation der Gleichungen (7) nach x, y, daß fast überall in τ die Relationen

$$\frac{\partial \xi}{\partial x} = \frac{1}{1 + \varepsilon \frac{\partial \zeta}{\partial \xi}}, \qquad \frac{\partial \xi}{\partial y} = \frac{-\varepsilon \frac{\partial \zeta}{\partial \eta}}{1 + \varepsilon \frac{\partial \zeta}{\partial \xi}}, \qquad \frac{\partial \eta}{\partial x} = 0, \qquad \frac{\partial \eta}{\partial y} = 1$$

bestehen. Daraus schließt man aber mit Rücksicht darauf, daß $\zeta(\xi, \eta)$ ebenfalls der Lipschitzschen Bedingung genügt, auf die Beziehungen:

$$\frac{\partial z(x, y; \varepsilon)}{\partial x} = \frac{\partial z(\xi, \eta)}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial z(\xi, \eta)}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial x} = \frac{p(\xi, \eta)}{1 + \varepsilon \frac{\partial \zeta}{\partial \xi}},$$

$$\frac{\partial z(x, y; \varepsilon)}{\partial y} = \frac{\partial z(\xi, \eta)}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial y} + \frac{\partial z(\xi, \eta)}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial y} = q(\xi, \eta) - \frac{\varepsilon p(\xi, \eta)}{1 + \varepsilon \frac{\partial \zeta}{\partial \xi}} \frac{\partial \zeta}{\partial \eta},$$

die wiederum für fast alle Punkte in τ richtig sind.

Man beachte nun, daß für $\varepsilon = o$ die Fläche F_ε in unsere Extremalfläche übergeht[28]). Daraus folgt auf Grund der Extremaleigenschaft, daß die Funktion

$$\Phi(\varepsilon) = \iint_t \left[1 + \left(\frac{\partial z(x, y; \varepsilon)}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z(x, y; \varepsilon)}{\partial y}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}} dx\, dy$$

(die für hinreichend kleine Werte von $|\varepsilon|$ definiert ist) an der Stelle $\varepsilon = o$ ein Minimum hat, und daher ist der Differentialquotient $\Phi'(o)$ gleich Null. Führen wir an Stelle von x, y wiederum die durch Gleichung (7) definierten Veränderlichen ξ und η ein, so ergibt sich

[28]) Alle Flächen F_ε enthalten die Raumkurve C, da, falls ξ, η die Koordinaten irgendeines Punktes von γ bezeichnen, die Transformationsgleichungen (7) wegen $\zeta(\xi, \eta) = 0$ in die Identität $x = \xi$, $y = \eta$ übergehen.

$$\Phi(\varepsilon)=\iint_{\tau}\left[\left(1+\varepsilon\frac{\partial\zeta}{\partial\xi}\right)^2+p^2+\left(q\left(1+\varepsilon\frac{\partial\zeta}{\partial\xi}\right)-\varepsilon p\frac{\partial\zeta}{\partial\eta}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}}d\xi\,d\eta,$$

da die Funktionaldeterminante

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(\xi,\eta)}=1+\varepsilon\frac{\partial\zeta}{\partial\xi}$$

stets positiv und nach einem Satze von Herrn Rademacher[24]) die Einführung der neuen Veränderlichen gerechtfertigt ist. Eine leichte Rechnung ergibt:

$$\Phi'(o)=\iint_{\tau}\frac{1}{w}\left[\frac{\partial\zeta}{\partial\xi}+q\left(q\frac{\partial\zeta}{\partial\xi}-p\frac{\partial\zeta}{\partial\eta}\right)\right]d\xi\,d\eta$$

$$=\iint_{t}\frac{1}{w}\left[(1+q^2)\frac{\partial\zeta}{\partial x}-pq\frac{\partial\zeta}{\partial y}\right]dx\,dy=0,$$

womit die Relation (b) bewiesen ist. Der Beweis von (c) ergibt sich durch Vertauschung der Rolle der beiden Veränderlichen x und y.

9. Die Integralrelationen (a), (b), (c) sind Beziehungen von der Form:

$$\iint_{t}\left[u(x,y)\frac{\partial\zeta}{\partial x}+v(x,y)\frac{\partial\zeta}{\partial y}\right]dx\,dy=0,$$

wobei $u(x,y)$ und $v(x,y)$ gegebene Funktionen bedeuten, die beschränkt und meßbar sind, $\zeta(x,y)$ aber eine willkürliche Funktion bedeutet, die der Lipschitzschen Bedingung genügt und auf der Randkurve c verschwindet. Man gelangt aus diesen Beziehungen zu den Differentialgleichungen (A), (B), (C) durch Anwendung des folgenden Satzes, den wir nun beweisen wollen:

Sind $u(x,y)$ und $v(x,y)$ zwei Funktionen der unabhängigen Veränderlichen x und y, die in t beschränkt und meßbar sind, und ist

$$\iint_{t}\left[u\frac{\partial\zeta}{\partial x}+v\frac{\partial\zeta}{\partial y}\right]dx\,dy=0$$

für alle Funktionen $\zeta(x,y)$, welche auf dem Rand c von t verschwinden und innerhalb t die Lipschitzsche Bedingung erfüllen, so existiert eine in R definierte, der Lipschitzschen Bedingung genügende Funktion $\omega(x,y)$, von der Beschaffenheit, daß für fast alle Punkte dieses Gebietes die Differentialgleichungen:

$$\frac{\partial\omega}{\partial x}=-v(x,y),\quad \frac{\partial\omega}{\partial y}=u(x,y)$$

erfüllt sind.

[24]) S. 359 der ersten in [9]) angeführten Arbeit.

Dieser Satz ist die Verallgemeinerung des entsprechenden Resultates, das ich in meiner angeführten Arbeit gewonnen habe, und kann durch analoge Hilfsmittel bewiesen werden.

Zu diesem Ende führe ich (in etwas allgemeinerer Weise als in der genannten Arbeit) ein besonderes Koordinatensystem ein, das in bestimmter Hinsicht den Polarkoordinaten ähnlich ist, wobei aber konzentrische und ähnliche Rechtecke diejenige Rolle spielen, die bei den Polarkoordinaten den konzentrischen Kreisen zukommt.

Um den Punkt P_0 (dessen Koordinaten x_0, y_0 sein mögen) als Mittelpunkt sei ein Rechteck konstruiert, dessen Seiten den Koordinatenachsen parallel sind; die Seitenlängen dieses Rechteckes bezeichnen wir mit $2a$ und $2b$ und führen zur Abkürzung den spitzen Winkel α ein, für den

$$\cos\alpha = \frac{a}{(a^2+b^2)^{\frac{1}{2}}}, \quad \sin\alpha = \frac{b}{(a^2+b^2)^{\frac{1}{2}}}$$

ist. Wir denken uns alle Rechtecke um den Punkt P_0 als Mittelpunkt gezeichnet, deren Seiten den Koordinatenachsen parallel laufen und die dem obigen Rechteck ähnlich sind; jeder Punkt P (der von P_0 verschieden ist) liegt auf dem Umfange eines dieser Rechtecke, und wir definieren unsere neuen Koordinaten wie folgt: Die eine Koordinate des Punktes P (dessen Cartesische Koordinaten x und y sind) sei der Winkel θ, den die Gerade P_0P mit der positiven x-Achse bildet, d. h. es sei

$$\operatorname{tg}\theta = \frac{y-y_0}{x-x_0};$$

als zweite Koordinate ϱ nehmen wir die (stets positiv gerechnete) halbe Länge der Diagonale desjenigen der obigen Rechtecke, der durch den Punkt P hindurchgeht. Je nachdem θ eine der vier folgenden Ungleichungen

I	II	III	IV
$-\alpha \leqq \theta \leqq \alpha$,	$\alpha \leqq \theta \leqq \pi-\alpha$,	$\pi-\alpha \leqq \pi+\alpha$,	$\pi+\alpha \leqq \theta \leqq 2\pi-\alpha$

erfüllt, erhält man die folgenden Ausdrücke für ϱ:

In I ist $\varrho = \frac{x-x_0}{\cos\alpha}$ also $x = x_0 + \varrho\cos\alpha$ und $y = y_0 + \varrho\cos\alpha\operatorname{tg}\theta$,

„ II „ $\varrho = \frac{y-y_0}{\sin\alpha}$ „ $y = y_0 + \varrho\sin\alpha$ „ $x = x_0 + \varrho\sin\alpha\operatorname{cotg}\theta$,

„ III „ $\varrho = -\frac{x-x_0}{\cos\alpha}$ „ $x = x_0 - \varrho\cos\alpha$ „ $y = y_0 - \varrho\cos\alpha\operatorname{tg}\theta$,

„ IV „ $\varrho = -\frac{y-y_0}{\sin\alpha}$ „ $y = y_0 - \varrho\sin\alpha$ „ $x = x_0 - \varrho\sin\alpha\operatorname{cotg}\theta$.

Dementsprechend ist die Funktionaldeterminante

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(\varrho,\theta)} = \varrho\frac{\cos^2\alpha}{\cos^2\theta}, \text{ wenn die Ungleichung I oder III } -,$$

$$= \frac{\varrho\sin^2\alpha}{\sin^2\theta}, \quad \text{„ „ „ II „ IV } -,$$

erfüllt ist.

10. Nach diesen Vorbereitungen definieren wir eine Funktion $\zeta(x,y)$ in folgender Weise: Wir denken uns um den Punkt P_0 (der innerhalb c liegen möge) zwei ähnliche Rechtecke r_1 und r_2 der oben beschriebenen Art konstruiert, die beide innerhalb des Gebietes t liegen; die Länge der Diagonalen sei $2\varrho_1$ bzw. $2\varrho_2$ $(\varrho_1 < \varrho_2)$. Die Funktion $\zeta(x,y)$ sei nun außerhalb des Rechteckes r_2 und innerhalb des Rechteckes r_1 gleich Null; in dem zwischen den beiden Rechtecken liegenden ringförmigen Gebiet sei $\zeta(x,y)$ gleich einer willkürlichen stetig differenzierbaren Funktion der Koordinate ϱ allein: $\zeta(x,y) = w(\varrho)$, die für $\varrho = \varrho_1$ und $\varrho = \varrho_2$ verschwindet. Diese Funktion $\zeta(x,y)$ ist stetig und genügt offenbar der Lipschitzschen Bedingung, da ihre Ableitungen $\frac{\partial\zeta}{\partial x}$ und $\frac{\partial\zeta}{\partial y}$ nur längs der Diagonalen unserer Rechtecke unstetig werden können. Da ferner $\zeta(x,y)$ auf der Randkurve c jedenfalls verschwindet, so gilt für alle diese Funktionen

$$\iint_t \left[u\frac{\partial\zeta}{\partial x} + v\frac{\partial\zeta}{\partial y}\right] dx\,dy = 0. \tag{8}$$

Wir führen jetzt für x und y unsere Veränderlichen ϱ und θ ein. Da die Ableitung von ζ nach θ überall gleich Null ist, so findet man in einfacher Weise

$$\frac{\partial\zeta}{\partial x} = \frac{w'(\varrho)}{\cos\alpha}, \quad \frac{\partial\zeta}{\partial y} = 0, \quad \text{bzw.} \quad \frac{\partial\zeta}{\partial x} = -\frac{w'(\varrho)}{\cos\alpha}, \quad \frac{\partial\zeta}{\partial y} = 0,$$

wenn die Ungleichung I bzw. III stattfindet, und

$$\frac{\partial\zeta}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial\zeta}{\partial y} = \frac{w'(\varrho)}{\sin\alpha}, \quad \text{bzw.} \quad \frac{\partial\zeta}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial\zeta}{\partial y} = -\frac{w'(\varrho)}{\sin\alpha},$$

wenn die Ungleichung II bzw. IV statthat. Durch Einführung der Veränderlichen ϱ und θ gewinnt man aus (8) die Relation

$$\cos\alpha \int_{\varrho_1}^{\varrho_2}\int_{-\alpha}^{\alpha} \frac{\varrho\,u\,w'(\varrho)}{\cos^2\theta}\,d\varrho\,d\theta + \sin\alpha \int_{\varrho_1}^{\varrho_2}\int_{\alpha}^{\pi-\alpha} \frac{\varrho\,v\,w'(\varrho)}{\sin^2\theta}\,d\varrho\,d\theta$$

$$- \cos\alpha \int_{\varrho_1}^{\varrho_2}\int_{\pi-\alpha}^{\pi+\alpha} \frac{\varrho\,u\,w'(\varrho)}{\cos^2\theta}\,d\varrho\,d\theta - \sin\alpha \int_{\varrho_1}^{\varrho_2}\int_{\pi+\alpha}^{2\pi-\alpha} \frac{\varrho\,v\,w'(\varrho)}{\sin^2\theta}\,d\varrho\,d\theta = 0. \tag{9}$$

Zufolge der Ungleichung $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$ sind die in den Integranden auftretenden Funktionen

$$\frac{\varrho u}{\cos^2\theta}, \qquad \frac{\varrho v}{\sin^2\theta}$$

beschränkt und meßbar in den entsprechenden Integrationsbereichen; die erste dieser Funktionen in den durch die Ungleichungen

$$\varrho_1 \leqq \varrho \leqq \varrho_2, \qquad -\alpha \leqq \theta \leqq \alpha$$

und

$$\varrho_1 \leqq \varrho \leqq \varrho_2, \qquad \pi - \alpha \leqq \theta \leqq \pi + \alpha,$$

die zweite aber in den durch die Ungleichungen

$$\varrho_1 \leqq \varrho \leqq \varrho_2, \qquad \alpha \leqq \theta \leqq \pi - \alpha$$

und

$$\varrho_1 \leqq \varrho \leqq \varrho_2, \qquad \pi + \alpha \leqq \theta \leqq 2\pi - \alpha$$

bedingten Gebieten. Es existieren daher für fast alle ϱ (im Intervall $\varrho_1 \leqq \varrho \leqq \varrho_2$) die Integrale

$$\cos\alpha \int_{-\alpha}^{\alpha} \frac{\varrho u}{\cos^2\theta}\, d\theta, \qquad \sin\alpha \int_{\alpha}^{\pi-\alpha} \frac{\varrho v}{\sin\cdot\theta}\, d\theta,$$

$$-\cos\alpha \int_{\pi-\alpha}^{\pi+\alpha} \frac{\varrho u}{\cos^2\theta}\, d\theta, \qquad -\sin\alpha \int_{\pi+\alpha}^{2\pi-\alpha} \frac{\varrho v}{\sin^2\theta}\, d\theta$$

und stellen vier meßbare und beschränkte Funktionen von ϱ dar, die wir bzw. mit $f_1(\varrho)$, $f_2(\varrho)$, $f_3(\varrho)$, $f_4(\varrho)$ bezeichnen. Nach dem bekannten Theorem von Herrn Fubini kann die Beziehung (9) auf die folgende Form gebracht werden:

$$(10) \qquad \int_{\varrho_1}^{\varrho_2} [f_1(\varrho) + f_2(\varrho) + f_3(\varrho) + f_4(\varrho)]\, w'(\varrho)\, d\varrho = 0.$$

Die durch die Gleichung:

$$f(\varrho) = \int_{\varrho_1}^{\varrho} [f_1(\varrho) + f_2(\varrho) + f_3(\varrho) + f_4(\varrho)]\, d\varrho - \frac{\varrho - \varrho_1}{\varrho_2 - \varrho_1} \int_{\varrho_1}^{\varrho_2} [f_1(\varrho) + f_2(\varrho) + f_3(\varrho) + f_4(\varrho)]\, d\varrho$$

definierte total stetige Funktion $f(\varrho)$ verschwindet für $\varrho = \varrho_1$, $\varrho = \varrho_2$ und besitzt an fast allen Stellen des Intervalls $\varrho_1 \leqq \varrho \leqq \varrho_2$ einen Differentialquotienten:

$$f'(\varrho) = [f_1(\varrho) + f_2(\varrho) + f_3(\varrho) + f_4(\varrho)] - \frac{1}{\varrho_2 - \varrho_1} \int_{\varrho_1}^{\varrho_2} [f_1(\varrho) + f_2(\varrho) + f_3(\varrho) + f_4(\varrho)]\, d\varrho.$$

Wegen (10) gilt daher — da $\int_{\varrho_1}^{\varrho_2} w'(\varrho)\,d\varrho = w(\varrho_2) - w(\varrho_1) = 0$ ist — die Gleichung

$$\int_{\varrho_1}^{\varrho_2} f'(\varrho)\,w'(\varrho)\,d\varrho = 0$$

für alle, an den Stellen $\varrho = \varrho_1$ und $\varrho = \varrho_2$ verschwindende Funktionen $w(\varrho)$, die im Intervall $\varrho_1 \leqq \varrho \leqq \varrho_2$ einmal stetig differenzierbar sind, um so mehr für diejenigen, die daselbst zweimal stetig differenzierbar sind. Durch Produktintegration (die wegen der Totalstetigkeit von $f(\varrho)$ gestattet ist) erhält man — mit Rücksicht auf $f(\varrho_1) = f(\varrho_2) = 0$ — die Gleichung

$$\int_{\varrho_1}^{\varrho_2} f(\varrho)\,w''(\varrho)\,d\varrho = 0\,,$$

woraus man mit Hilfe des bekannten Du Bois Reymondschen Satzes der Variationsrechnung unmittelbar schließt, daß $f(\varrho)$ eine lineare Funktion ist und daher die Summe

$$f_1(\varrho) + f_2(\varrho) + f_3(\varrho) + f_4(\varrho)$$

für fast alle Werte von ϱ (im betrachteten Intervall) derselben Konstanten gleich sein muß.

Um die Bedeutung dieser Formel zu erkennen, bezeichnen wir mit r_ϱ dasjenige der oben um P_0 als Mittelpunkt konstruierten Rechtecke, dessen Diagonale die Länge 2ϱ besitzt. Wenn man die Seiten dieses Rechteckes, die bzw. in den durch die Ungleichungen I, II, III, IV bedingten Gebieten liegen, bzw. mit $l_I^{(\varrho)}$, $l_{II}^{(\varrho)}$, $l_{III}^{(\varrho)}$, $l_{IV}^{(\varrho)}$ bezeichnet, so verifiziert man leicht die folgenden Zusammenhänge:

$$f_1(\varrho) = \cos\alpha \int_{-\alpha}^{\alpha} \frac{\varrho\,u}{\cos^2\theta}\,d\theta = \int_{l_I^{(\varrho)}} u\,dy = \int_{l_I^{(\varrho)}} u\,dy - v\,dx,$$

$$f_2(\varrho) = \sin\alpha \int_{\alpha}^{\pi-\alpha} \frac{\varrho\,v}{\sin^2\theta}\,d\theta = -\int_{l_{II}^{(\varrho)}} v\,dx = \int_{l_{II}^{(\varrho)}} u\,dy - v\,dx,$$

$$f_3(\varrho) = -\cos\alpha \int_{\pi-\alpha}^{\pi+\alpha} \frac{\varrho\,u}{\cos^2\theta}\,d\theta = \int_{l_{III}^{(\varrho)}} u\,dy = \int_{l_{III}^{(\varrho)}} u\,dy - v\,dx,$$

$$f_4(\varrho) = -\sin\alpha \int_{\pi+\alpha}^{2\pi-\alpha} \frac{\varrho\,v}{\sin^2\theta}\,d\theta = -\int_{l_{IV}^{(\varrho)}} v\,dx = \int_{l_{IV}^{(\varrho)}} u\,dy - v\,dx.$$

Durch Addition dieser Beziehungen resultiert daher die Tatsache, daß für

fast alle Werte von ϱ, die im Intervalle $\varrho_1 \leqq \varrho \leqq \varrho_2$ liegen, das über die Peripherie des Rechteckes r_ϱ erstreckte Integral

$$\int_{r_\varrho} u\,dy - v\,dx$$

denselben Wert annimmt. Man zeigt leicht, daß dieser konstante Wert gleich Null ist. In der Tat, die Größen ϱ_1 und ϱ_2 sind nur der Bedingung unterworfen, daß die entsprechenden Rechtecke $r_{\varrho_1} = r_1$ und $r_{\varrho_2} = r_2$ noch innerhalb c liegen; insbesondere kann ϱ_1 beliebig klein gewählt werden. Aus unserem soeben gewonnenen Resultat ergibt sich daher, daß man unterhalb jeder positiven Schranke eine Größe ϱ derart finden kann, daß das letzte Integral jenen konstanten Wert annimmt. Wegen der Beschränktheit von u und v konvergiert aber dieses Integral gegen Null, falls ϱ gegen Null strebt, woraus man unmittelbar schließt, daß die fragliche Konstante gleich Null sein muß.

Wir können unser Resultat folgendermaßen formulieren: *Um den Punkt P_0 (der innerhalb c liegt) als Mittelpunkt konstruieren wir irgendeine einparametrige Schar von ähnlichen und ähnlich orientierten Rechtecken, deren Seiten den Koordinatenachsen parallel sind, und betrachten nur diejenigen Rechtecke dieser Schar, die innerhalb c liegen; unter den für $u(x, y)$, $v(x, y)$ gemachten Voraussetzungen existiert das Integral:*

$$\int u\,dy - v\,dx$$

erstreckt über die Peripherie dieser Rechtecke für fast alle Rechtecke dieser Schar und ist gleich Null.

11. Man gelangt aus diesem Ergebnis zu unserem Satz S. 146 durch eine zweifache Anwendung eines bekannten Theorems von Herrn G. Fubini über mehrdimensionale meßbare Mengen[25]).

Wir betrachten zu diesem Ende alle Rechtecke r, deren Seiten den Koordinatenachsen parallel sind und die innerhalb c liegen. Zur Festlegung jedes dieser Rechtecke mögen die Koordinaten ihrer Mittelpunkte x_0, y_0 und die halben Seitenlängen a, b dienen; deuten wir x_0, y_0 a, b, als rechtwinklige Koordinaten in einem vierdimensionalen Raum, so erhalten wir eine daselbst meßbare Punktmenge $\mathfrak{M}$. Erstreckt man das Integral

$$\int_r u\,dy - v\,dx$$

längs des Umfanges jedes dieser Rechtecke, so erhält man eine in $\mathfrak{M}$ definierte meßbare Funktion $\Omega(x_0, y_0, a, b)$. Das vorangehende Resultat lehrt nun, daß, wenn man x_0, y_0 und das Verhältnis $\frac{a}{b}$ festhält, d. h. wenn

[25]) Vgl. etwa C. Carathéodory: Reelle Funktionen. Leipzig 1918, S. 627 u. 628.

man sich auf den Durchschnitt der Punktmenge $\mathfrak{M}$ mit der „Geraden“ $x_0 = \text{konst.}$, $y_0 = \text{konst.}$, $\frac{a}{b} = \text{konst.}$ beschränkt, die Funktion $\Omega(x_0, y_0, a, b)$ in dieser eindimensionalen Punktmenge fast überall gleich Null ist. Da dies für alle Werte von x_0, y_0, $\frac{a}{b}$ richtig ist, so folgt, daß jene vierdimensionale Ausnahmemenge $\mathfrak{M}_0$, in der $\Omega(x_0, y_0, a, b)$ nicht gleich Null ist, sicherlich vom Maße Null sein muß, da sie meßbar ist und alle Durchschnitte mit jenen „Geraden“ das (lineare) Maß Null besitzen.

Als Anfangspunkt bzw. Endpunkt jedes dieser Rechtecke r betrachten wir die Punkte mit den Koordinaten $x_0 - a$, $y_0 - b$ bzw. $x_0 + a$, $y_0 + b$. Halten wir etwa den Anfangspunkt fest und lassen den Endpunkt variieren, so erhält man in dem obigen vierdimensionalen Raum eine zweidimensionale „Ebene“: $x_0 - a = \text{konst.}$, $y_0 - b = \text{konst.}$ Jede dieser Ebenen kann natürlich Punkte der Ausnahmemenge $\mathfrak{M}_0$ enthalten; nach dem erwähnten Satze von Fubini muß es aber solche Anfangspunkte von Rechtecken, d. h. solche „Ebenen“ $x_0 - a = \text{konst.}$, $y_0 - b = \text{konst.}$ geben, deren Durchschnitt mit $\mathfrak{M}_0$ vom (zweidimensionalen) Maße Null ist. Es gilt noch mehr, indem diejenigen „Ebenen“ bzw. Anfangspunkte, für die dies nicht der Fall ist, selbst eine (zweidimensionale) Punktmenge vom Maße Null bilden. Da in jeder dieser „Ebenen“ die Lage eines Punktes durch den Endpunkt des entsprechenden Rechteckes bestimmt ist, so sind wir zu dem folgenden Resultate gelangt:

Erstreckt man das Integral

$$\int u\,dy - v\,dx$$

längs des Rechteckes mit dem Anfangspunkt A und dem Endpunkt B (dessen Seiten den Koordinatenachsen parallel sind und das ganz innerhalb t liegt), so gilt für fast alle A in t die Tatsache, daß diejenigen Stellen B, für die dieses Integral nicht gleich Null ist, eine Punktmenge vom Maße Null bilden.

Ein entsprechender Satz gilt, wenn man die Rolle des Anfangspunktes und Endpunktes vertauscht; daraus folgt auch die *für fast alle Punkte A von t geltende Tatsache, daß das obige Integral erstreckt über irgendein innerhalb t liegendes Rechteck, dessen Seiten den Koordinatenachsen parallel sind und das in A einen Eckpunkt hat, stets verschwindet, es sei denn, daß der A gegenüberliegende Eckpunkt des Rechtecks in einer Punktmenge vom Maße Null liegt.*

12. Man erstrecke nun das Integral $\int u\,dy$ längs des innerhalb t liegenden Stückes einer zur y-Achse parallelen Geraden; bekanntlich existiert dieses Integral *für fast alle* Geraden dieser Art. Dasselbe findet statt, wenn man das Integral $\int v\,dx$ längs der zur x-Achse parallelen

Geraden erstreckt. Die Punktmenge $\mathfrak{M}_0'$, die aus den Punkten dieser Ausnahmegeraden (längs deren die obigen Integrale nicht existieren) gebildet wird, ist daher eine Nullmenge. Wenn die Punkte A, B dieser Nullmenge nicht angehören, so existiert das Integral

$$\int_A^B u\,dy - v\,dx,$$

wobei als Integrationsweg zwei zusammenstoßende Seiten desjenigen Rechteckes genommen sind, dessen Anfangspunkt bzw. Endpunkt A bzw. B ist.

Wir betrachten nun irgendein Rechteck R, das innerhalb t liegt und dessen Seiten den Koordinatenachsen parallel sind; durch Weglassung der Punkte der obigen Nullmenge $\mathfrak{M}_0'$ erhält man eine mit dem Rechteck R maßgleiche Punktmenge. Es sei A ein Punkt dieser Punktmenge von der Beschaffenheit, daß das Integral

$$\int u\,dy - v\,dx,$$

erstreckt über den Umfang aller Rechtecke, deren Seiten zu den Koordinatenachsen parallel sind und in A eine Ecke haben, stets gleich Null ausfalle, mit Ausnahme bestimmter solcher Rechtecke, bei denen aber der dem Punkt A gegenüberliegende Eckpunkt in einer Menge $\tilde{\mathfrak{M}}_0$ vom Maße Null liegt. Das vorher gewonnene Resultat lehrt, daß fast alle Punkte von t diese Eigenschaft besitzen. Nach dem erwähnten Fubinischen Theorem ist der Durchschnitt der Punktmenge $\tilde{\mathfrak{M}}_0 + \mathfrak{M}_0'$ mit fast allen zur x- bzw. y-Achse parallelen Geraden eine (lineare) Nullmenge. Wir bezeichnen mit $\mathfrak{M}_0''$ diejenige Punktmenge, die von den Punkten jener zur x- bzw. y-Achse parallelen Geraden gebildet wird, an denen die obige Bedingung nicht statthat; $\mathfrak{M}_0''$ ist ebenfalls eine Nullmenge[26]).

Der Punkt P mit den Koordinaten x, y liege innerhalb des Rechteckes R und gehöre der Nullmenge $\mathfrak{M}_0'$ nicht an; die Koordinaten des festen Punktes A mögen mit x_A, y_A bezeichnet werden. Wir definieren eine Funktion $\omega(x, y)$ vermöge der beiden Ausdrücke:

$$(11)\quad -\int_{x_A}^{x} v(x, y_A)\,dx + \int_{y_A}^{y} u(x, y)\,dy = \int_{y_A}^{y} u(x_A, y)\,dy - \int_{x_A}^{x} v(x, y)\,dx,$$

die — zufolge der oben festgesetzten Wahl der Punkte A und P — an fast allen Stellen derjenigen Punktmenge übereinstimmen, die aus R durch Weglassung von $\mathfrak{M}_0''$ entsteht. Diejenige Teilmenge von $R - \mathfrak{M}_0''$, an der die Beziehung (11) nicht besteht, besitzt nämlich — zufolge der Kon-

[26]) $\mathfrak{M}_0''$ ist also diejenige Punktmenge, die gebildet wird von jenen zu den Koordinatenachsen parallelen Geraden, deren Durchschnitt mit den Nullmengen $\tilde{\mathfrak{M}}_0$ und $\mathfrak{M}_0'$ ein positives (lineares) Maß besitzt.

struktion von $\mathfrak{M}_0''$ — die Eigenschaft, daß ihr Durchschnitt mit *jeder* zur x- bzw. y-Achse parallelen Geraden eine Nullmenge ist. Aus der Beschränktheit der Funktionen $u(x, y)$, $v(x, y)$ folgt unmittelbar, daß der erste Ausdruck längs jeder zur y-Achse parallelen Geraden, die bei der Bildung von $\mathfrak{M}_0'$ nicht benutzt wurde, stetig ist und eine solche Funktion von y darstellt, deren Ableitung nach y an fast allen Stellen existiert und gleich $u(x, y)$ ist. Da dies für fast alle Werte von x statthat[27]), so ist diejenige (zweidimensionale) Punktmenge, in der die Gleichung

$$\frac{\partial \omega}{\partial y} = u(x, y)$$

nicht gilt, eine Nullmenge. In gleicher Weise zeigt man, durch Heranziehung des zweiten Ausdruckes von $\omega(x, y)$ in (11), daß für fast alle Punkte in R die Gleichung

$$\frac{\partial \omega}{\partial x} = -v(x, y)$$

besteht.

Der Definitionsbereich $\tilde{\mathfrak{M}}$ der Funktion $\omega(x, y)$ ist zunächst — wie bemerkt — diejenige Punktmenge, die aus $R - \mathfrak{M}_0''$ entsteht durch Weglassen derjenigen Nullmenge, an der (11) nicht gilt. Um zu zeigen, daß $\omega(x, y)$ in $\tilde{\mathfrak{M}}$ der Lipschitzschen Bedingung genügt, verfahre man wie folgt: Es seien P_1 und P_2 zwei Stellen von $\tilde{\mathfrak{M}}$; mit Q bezeichnen wir den Schnittpunkt der durch P_1 hindurchgehenden zur x-Achse parallelen Geraden mit der durch P_2 hindurchgehenden zur y-Achse parallelen Geraden. Natürlich muß Q nicht notwendigerweise $\tilde{\mathfrak{M}}$ angehören; man kann aber — da $\tilde{\mathfrak{M}}$ mit R maßgleich ist — in beliebiger Nähe von Q einen solchen Punkt S bestimmen, der $\tilde{\mathfrak{M}}$ angehört und außerdem so beschaffen ist, daß seine Projektionen auf den Geraden P_1Q und P_2Q (die wir mit S_1 bzw. S_2 bezeichnen) ebenfalls $\tilde{\mathfrak{M}}$ angehören, da diejenigen Punkte dieser beiden Geraden, die $\tilde{\mathfrak{M}}$ nicht angehören, Nullmengen bilden. Die Differenz $\omega(P_1) - \omega(P_2)$ kann alsdann durch das Integral $\int u\,dy - v\,dx$ dargestellt werden, erstreckt auf den gebrochenen Polygonzug $P_1S_1SS_2P_2$; daraus folgt aber unmittelbar die Ungleichung

$$|\omega(P_1) - \omega(P_2)| \leqq M(\overline{P_1S_1} + \overline{S_1S} + \overline{SS_2} + \overline{S_2P_2}) = M(\overline{P_1Q} + \overline{P_2Q}),$$

wobei M die obere Schranke der Funktionen $|u(x, y)|$ und $|v(x, y)|$ bedeutet. Mit Rücksicht auf $\overline{P_1Q} + \overline{P_2Q} \leqq \sqrt{2}\ \overline{P_1P_2}$ lehrt die letzte Bedingung, daß $\omega(x, y)$ in $\tilde{\mathfrak{M}}$ tatsächlich der Lipschitzschen Bedingung genügt. Man kann endlich an den Ausnahmestellen — an denen $\omega(x, y$

[27]) Die Abszissen der bei der Bildung von $\mathfrak{M}_0$ benutzten zur y-Achse parallelen Geraden bilden nämlich eine Nullmenge.

nicht definiert ist, d. h. in $R - \mathfrak{M}$ — solche Werte vorschreiben, daß die so ergänzte Funktion $\omega(x, y)$ die Lipschitzsche Bedingung im ganzen Rechteck R erfüllt.

Damit ist unsere Behauptung in allen Teilen bewiesen.

§ 3.

Beweis der Analytizität der Extremalfunktion.

13. Wir haben noch zu beweisen, daß die im ersten Abschnitt konstruierte Extremalfunktion — von der wir nur gezeigt haben, daß sie der Lipschitzschen Bedingung genügt — an jeder inneren Stelle des Gebietes t analytisch ist. Wir gelangen zu diesem Resultat durch dieselben Schlüsse, mit deren Hilfe Herr Radó[28]) gezeigt hat, daß jede einmal stetig differenzierbare Extremalfunktion bzw. Extremalfläche, die bei gegebener Begrenzung möglichst kleinen Flächeninhalt hat, analytisch ist, indem wir die Rademacherschen Sätze über die Differentialquotienten der Funktionen, die die Lipschitzsche Bedingung befriedigen, heranziehen. Die geometrische Bedeutung des folgenden Verfahrens besteht — wie Herr Radó a. a. O. bemerkt — in einer Anwendung des *Riemannschen Satzes*, daß die Minimalfläche durch jede Schar paralleler Ebenen in den Kurven einer Isothermenschar geschnitten wird.

Es sei R irgendein ganz innerhalb t liegendes Rechteck, dessen Seiten den Koordinatenachsen parallel sind. Das Resultat des vorangehenden Abschnittes lehrt die Existenz dreier in R definierten Funktionen $\omega_1(x, y)$, $\omega_2(x, y)$, $\omega_3(x, y)$, die der Lipschitzschen Bedingung genügen und so beschaffen sind, daß fast überall in R die Differentialgleichungen

$$\text{(A)} \qquad \frac{1}{w}\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial \omega_1}{\partial x}, \qquad \frac{1}{w}\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{\partial \omega_1}{\partial y},$$

$$\text{(B)} \qquad \frac{1}{w}\left[1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2\right] = \frac{\partial \omega_2}{\partial x}, \qquad \frac{1}{w}\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial \omega_2}{\partial y},$$

$$\text{(C)} \qquad \frac{1}{w}\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial \omega_3}{\partial x}, \qquad \frac{1}{w}\left[1+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2\right] = \frac{\partial \omega_3}{\partial y},$$

$$\left(w^2 = 1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2\right)$$

bestehen.

Durch die Abbildung

$$\text{(12)} \qquad X = x, \qquad Y = \omega_3(x, y)$$

wird das Rechteck R umkehrbar eindeutig auf ein Gebiet G der X, Y-Ebene abgebildet, da die Funktion $\omega_3(x, y)$ bei jedem festen x eine monoton

[28]) a. a. O. [10]) und [22]).

wachsende Funktion von y ist. Dies folgt leicht aus dem Umstande, daß für fast alle Punkte von R

$$\frac{\partial \omega_3}{\partial y} = \frac{1}{w}\left[1+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2\right] \geqq \frac{1}{\sqrt{1+2\Delta^2}} = \tilde{\Delta}$$

ist, wenn Δ die in § 1 bestimmte obere Grenze des Differenzenquotienten der Funktion $z(x, y)$ bedeutet. Man schließt nämlich aus dieser Ungleichung, daß für fast alle Werte von x die Ungleichung

$$\omega_3(x, y') - \omega_3(x, y'') \geqq \tilde{\Delta}(y' - y'') \qquad (y' > y'')$$

richtig ist, da für fast alle x die Funktion $\omega_3(x, y)$ als Funktion von y betrachtet, für jeden Wert dieser Veränderlichen — mit etwaiger Ausnahme einer (linearen) Nullmenge — eine Ableitung besitzt, die nicht kleiner als $\tilde{\Delta}$ ausfällt. Wegen der Stetigkeit von $\omega_3(x, y)$ kann sodann die letzte Ungleichung für alle Werte von x gefolgert werden, womit die fragliche Monotonität bewiesen ist. Da die Abbildung des Gebietes R der x, y-Ebene auf das Gebiet G der X, Y-Ebene ein-eindeutig ist, so definiert die Transformation (12) — oder was damit gleichbedeutend ist — die Gleichung

$$Y = \omega_3(X, y)$$

eine innerhalb G erklärte stetige Funktion $y(X, Y)$, von der man leicht zeigen kann, daß sie der Lipschitzschen Bedingung genügt. In der Tat, sind x_0, y_0 und x_1, y_1 zwei beliebige Stellen des Gebietes R und setzen wir zur Abkürzung

$$X_0 = x_0, \quad Y_0 = \omega_3(x_0, y_0); \quad X_1 = x_1, \quad Y_1 = \omega_3(x_1, y_1),$$

so gilt für fast alle Stellen x_0, y_0 die Gleichung[29])

$$Y_1 - Y_0 = \frac{\partial \omega_3(x_0, y_0)}{\partial x_0}(x_1 - x_0) + \frac{\partial \omega_3(x_0, y_0)}{\partial y_0}(y_1 - y_0) + \sqrt{(x_1 - x_0)^2 + (y_1 - y_0)^2}\,\bar{R}(x_1 - x_0,\ y_1 - y_0),$$

wobei die Funktion $\bar{R}$ gegen Null strebt, falls der Punkt x_1, y_1 zu dem Punkt x_0, y_0 konvergiert. Da $\frac{\partial \omega_3}{\partial y}$ für fast alle Punkte größer als $\tilde{\Delta}$ ausfällt, so folgt daraus — wiederum für fast alle Stellen —

$$y_1 - y_0 = \frac{1}{\frac{\partial \omega_3(x_0, y_0)}{\partial y_0}}\left\{(Y_1 - Y_0) - \frac{\partial \omega_3(x_0, y_0)}{\partial x_0}(x_1 - x_0) - \sqrt{(x_1 - x_0)^2 + (y_1 - y_0)^2}\,\bar{R}\right\},$$

woraus man — mit Rücksicht darauf, daß, falls der Punkt (x_1, y_1) gegen

[29]) vgl. H. Rademacher, a. a. O. [9]), S. 347, Gleichung (27).

(x_0, y_0) strebt, der entsprechende Punkt $X_1 = x_1, Y_1$ des Gebietes G gegen den Punkt $X_0 = x_0, Y_0$ strebt — auf die Richtigkeit der Beziehungen

$$(13) \qquad \frac{\partial y}{\partial Y} = \frac{1}{\frac{\partial \omega_3}{\partial y}} = \frac{w}{1+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}, \qquad \frac{\partial y}{\partial X} = -\frac{\frac{\partial \omega_3}{\partial x}}{\frac{\partial \omega_3}{\partial y}} = -\frac{\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial z}{\partial y}}{1+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}$$

schließt, die für fast alle Stellen X, Y des Gebietes G gültig ist, da jede Nullmenge von R vermöge der Transformation (12) wiederum in eine Nullmenge übergeführt wird.

Fassen wir nun die Funktionen $z(x, y)$, $\omega_1(x, y)$, $\omega_2(x, y)$ als Funktionen der Variablen X, Y auf; wir erhalten auf diese Weise drei in dem Gebiet G der X, Y-Ebene definierte Funktionen

$$Z(X, Y) = z(x, y), \qquad \Omega_1(X, Y) = \omega_1(x, y), \qquad \Omega_2(X, Y) = \omega_2(x, y),$$

die der Lipschitzschen Bedingung genügen. Nach dem erwähnten Satze von Herrn Rademacher existieren fast überall in G die partiellen Ableitungen dieser Funktionen, und es ist (fast überall) mit Rücksicht auf (A), (B), (C) und (13)

$$\frac{\partial Z}{\partial X} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial X} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial X} = \frac{\frac{\partial z}{\partial x}}{1+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}, \qquad \frac{\partial Z}{\partial Y} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial Y} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial Y} = \frac{\frac{\partial z}{\partial y} w}{1+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2},$$

$$\frac{\partial \Omega_1}{\partial X} = \frac{\partial \omega_1}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial X} + \frac{\partial \omega_1}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial X} = \frac{\frac{\partial z}{\partial y} w}{1+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}, \qquad \frac{\partial \Omega_1}{\partial Y} = \frac{\partial \omega_1}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial Y} + \frac{\partial \omega_1}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial Y} = -\frac{\frac{\partial z}{\partial x}}{1+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2},$$

$$\frac{\partial \Omega_2}{\partial X} = \frac{\partial \omega_2}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial X} + \frac{\partial \omega_2}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial X} = \frac{w}{1+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}, \qquad \frac{\partial \Omega_2}{\partial Y} = \frac{\partial \omega_2}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial Y} + \frac{\partial \omega_2}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial Y} = \frac{\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial z}{\partial y}}{1+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2},$$

da die Transformation (12) Nullmengen in Nullmengen überführt. Aus diesen Gleichungen entnimmt man mit Rücksicht auf (13) die Beziehungen:

$$\frac{\partial Z}{\partial X} = -\frac{\partial \Omega_1}{\partial Y}, \qquad \frac{\partial y}{\partial X} = -\frac{\partial \Omega_2}{\partial Y},$$

$$\frac{\partial Z}{\partial Y} = \frac{\partial \Omega_1}{\partial X}, \qquad \frac{\partial y}{\partial Y} = \frac{\partial \Omega_2}{\partial X}.$$

Es genügen daher die Funktionenpaare $Z(X, Y)$, $\Omega_1(X, Y)$ und $y(X, Y)$, $\Omega_2(X, Y)$ den Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen; nach einem wichtigen Satze aber, der von Herrn De la Vallée Poussin[30]) und Herrn

[30]) „Réduction des intégrales doubles de Lebesgue" Bulletin de l'Académie Royale de Belgique (Sciences) 1910.

Rademacher[31]) gefunden wurde, sind die den Lipschitzschen Bedingungen genügenden Lösungen dieser Gleichungen analytische, und zwar harmonische Funktionen. Folglich ist auch die aus den Gleichungen

$$x = X, \quad y = y(X, Y)$$

berechnete Funktion $Y = Y(x, y)$ eine in R erklärte *analytische* Funktion, da

$$\frac{\partial y}{\partial Y} = \frac{w}{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}$$

stets von Null verschieden ist. Man erkennt nun unmittelbar, indem man in der analytischen Funktion $Z(X, Y)$ die Argumente X, Y durch x bzw. durch die analytische Funktion $Y(x, y)$ ersetzt, daß die so entstehende Funktion, die mit unserer Extremalfunktion $z(x, y)$ übereinstimmt, eine analytische Funktion von x, y ist.

Damit ist unser Satz in allen Teilen bewiesen, und man kann für $z(x, y)$ die übliche Euler-Lagrangesche Differentialgleichung der Minimalflächen ableiten, indem man etwa $\omega_1(x, y)$ aus den beiden Gleichungen (A) eliminiert.

[31]) „Über streckentreue und winkeltreue Abbildung." Mathematische Zeitschrift 4 (1919).

(Eingegangen am 14. 3. 1926.)

Über reguläre Variationsprobleme.

Von Alfred Haar in Szeged.

Bekanntlich ist der sogenannte Du Bois Reymondsche Einwand in der Theorie der Doppelintegrale tiefgreifender als in der Theorie der einfachen Integrale. Während man nämlich bei den letzteren mit Hülfe des Du Bois Reymondschen Lemmas zeigen kann, dass jede einmal stetig differenzierbare Extremalfunktion (unter recht allgemeinen Voraussetzungen über den Integranden des Variationsproblems) eine stetige zweite Ableitung besitzt und daher die Euler-Lagrangesche Differentialgleichung erfüllt, so gilt der entsprechende Satz für Doppelintegrale nicht. Auf diesen wichtigen Umstand hat zuerst Herr Hadamard hingewiesen;[1]) er zeigte (an der Hand eines sehr einfachen Beispiels), dass die erste Variation eines Doppelintegrales verschwinden kann, ohne dass die entsprechende Extremalfunktion zweite Ableitungen besitzen müsste. Da damit die übliche Euler-Lagrangesche Differentialgleichung hinfällig wird, so entstand das Problem, das Verschwinden der ersten Variation in anderer Weise in Gleichungen umzusetzen.

Diese Frage behandelte ich in einer Arbeit im *Journal für die reine und angewandte Mathematik*[2]) durch Heranziehung eines

[1]) *Comptes Rendus* Bd. 144, S. 1092—1093. Ein anderes Beispiel, — wo es sich sogar um ein reguläres Variationsproblem handelt — gab L. Lichtenstein, *Math. Ann.* Bd. 69, S. 514—516.

[2]) Über die Variation der Doppelintegrale, *Journal für die reine und angewandte Mathematik* Bd. 149, S. 1—18. — Einen einfachen Beweis (nebst Anwendungen auf die Hydrodynamik) des genannten Hülfsatzes gab L. Lichtenstein in seiner Arbeit: Bemerkungen über das Prinzip der virtuellen Verrückungen in der Hydrodynamik (*Annales de la société polonaise de mathématique* 1924, S. 20—28). — Auf Variationsprobleme mit variierender Begrenzungslinie wurden meine Resultate von E. Gergely in seiner Dissertation angewandt (Über die Variation von Doppelintegralen mit variierender Be-

Hülfssatzes, dem — wie mir scheint — in der Theorie der Doppelintegrale dieselbe Rolle zukommt, wie dem Du Bois Reymondschen Lemma bei den einfachen Integralen. Für Variationsprobleme von der Form

$$\iint_C f(p, q, x, y)\, dx\, dy \quad \left(\frac{\partial z(x, y)}{\partial x} = p, \quad \frac{\partial z(x, y)}{\partial y} = q\right)$$

(bei vorgeschriebenen Randbedingungen) bewies ich, *ohne die Existenz der zweiten Ableitungen der Extremalfunktion vorauszusetzen,* dass jede einmal stetig differenzierbare Extremalfunktion in Gemeinschaft mit einer stetig differenzierbaren Hülfsfunktion $Z(x, y)$ die folgenden Differentialgleichungen erster Ordnung

$$\frac{\partial Z}{\partial x} = f_q\left(\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}, x, y\right), \quad \frac{\partial Z}{\partial y} = -f_p\left(\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}, x, y\right)$$

befriedigt, und einen entsprechenden Satz für den Fall, dass im Integranden des Variationsproblems die unbekannte Funktion auftritt.

Dieses Resultat führt in natürlicher Weise auf den Gedanken, die weiteren Ergebnisse der Variationsrechnung, die man in der klassischen Theorie gestützt auf die Euler-Lagrangesche Differentialgleichung 2. Ordnung entwickelt, auf Grund meines oben angegebenen Differentialgleichungsystems erster Ordnung abzuleiten, womit der Vorteil verbunden ist, dass die gewonnenen Sätze für alle Extremalfunktionen, nicht nur für die zweimal differenzierbaren gelten. Aus diesem Gedanken entsprang die vorliegende Note, in der ich mich mit regulären Variationsproblemen der obigen Form beschäftige; es zeigt sich, dass die Sätze, die man auf Grund meines Gleichungssystems gewinnt, keineswegs komplizierter sind als die entsprechenden, die sich aus der üblichen Euler-Lagrangeschen Gleichung ergeben, an Allgemeinheit aber umfassender sind,

grenzungslinie, *diese Acta* Bd. II, S. 139—146). — T. Radó bewies (Über den analytische Charakter der Minimalflächen, *Math. Zeitschrift* Bd. 24, S. 321—327.) auf derselben Grundlage die Analytizität der Minimalflächen; derselbe leitete zwei andere Gleichungssysteme auf Grund meines Hülfsatzes für die Extremalfläche ab (Bemerkungen über die Differentialgleichungen zweidimensionaler Variationsprobleme, *diese Acta* Bd. II, S. 147—156). — Die entsprechenden Untersuchungen für dreifache Integrale wurden von A. Szücs durchgeführt (Sur la variation des intégrales triples et le théorème de Stokes, *diese Acta* Bd. III, S. 81—95) — Eine Erweiterung des genannten Hülfsatzes ist endlich eine wesentliche Stütze meiner Lösung des Plateauschen Problems. (Über das Plateausche Problem, *Math. Ann.*Z1 Bd. 97, S. 4—158).

da die Existenz der zweiten Ableitungen der Extremalfunktion nirgends vorausgesetzt wird.

Auf Grund einer einfachen Bemerkung (vgl. **1.**), die die Verallgemeinerung eines bekannten STEINERschen Satzes über den Flächeninhalt auf reguläre Variationsprobleme ist, zeige ich (in **2.**), dass im Falle eines regulären Variationsproblems jede Lösung meines Differentialgleichungsystems ein absolutes Minimum des Variationsproblems liefert; daraus folgen (vgl. **3.**) bestimmte Eindeutigkeitssätze, die — wie mir scheint — auch in den allereinfachsten Fällen neu sind. In **4.** gebe ich endlich eine Anwendung auf das besondere aus dem PLATEAUschen Problem entspringende Differentialgleichungsystem.

1. Unsere Entwicklungen fussen auf der folgenden Bemerkung. Die Funktion

$$f(p, q, x, y)$$

möge für alle reellen Werte von p, q und für solche Werte von x, y definiert sein, die in einem von einer doppeltpunktlosen Kurve umrandeten Gebiet G der xy-Ebene liegen; wir nehmen an, dass die zweiten Ableitungen dieser Funktion nach p und q existieren und so beschaffen sind, dass die Ungleichungen[3])

$$f_{pp} > 0, \quad f_{pp} f_{qq} - f_{pq}^2 = \frac{\partial^2 f}{\partial p^2} \frac{\partial^2 f}{\partial q^2} - \left(\frac{\partial^2 f}{\partial p \partial q}\right)^2 > 0 \tag{1}$$

an jeder Stelle des Definitionsbereiches von $f(p, q, x, y)$ statthaben. Es sei ferner $z(x, y)$ irgendeine Funktion der beiden reellen Veränderlichen x, y, die im Gebiet G der xy-Ebene definiert und daselbst samt ihren ersten Ableitungen $\frac{\partial z}{\partial x} = p, \frac{\partial z}{\partial y} = q$ stetig ist; wir betrachten das Integral

$$I[z] = \iint_G f(p, q, x, y)\, dx\, dy. \tag{2}$$

Mit Hülfe dieser Bezeichnung können wir die in Frage stehende Bemerkung wie folgt formulieren:

Sind $z_1(x, y)$ und $z_2(x, y)$ zwei im Gebiet G definierte Funktionen, die samt ihren ersten Ableitungen

$$\frac{\partial z_1}{\partial x} = p_1, \quad \frac{\partial z_1}{\partial y} = q_1, \quad \frac{\partial z_2}{\partial x} = p_2, \quad \frac{\partial z_2}{\partial y} = q_2$$

[3]) Wir bezeichnen — wie üblich — die partiellen Ableitungen einer Funktion durch Hinzufügung der entsprechenden Indices.

daselbst stetig sind, θ aber irgendeine zwischen 0 *und* 1 *gelegene Zahl,* $0<\theta<1$, *so gilt die Ungleichung*

$$I[(1-\theta)z_1+\theta z_2]\leqq(1-\theta)I[z_1]+\theta I[z_2], \tag{3}$$

wobei das Gleichheitszeichen nur dann statthat, wenn die Differenz der beiden Funktionen $z_1(x, y)$ *und* $z_2(x, y)$ *konstant ist.*

In der Tat, man findet — wenn man zur Abkürzung $(1-\theta)p_1+\theta p_2=\bar{p}$, $(1-\theta)q_1+\theta q_2=\bar{q}$ setzt — durch zweimalige Differentiation der Definitionsgleichung

$$\varphi(\theta)=I[(1-\theta)z_1+\theta z_2]=$$

$$=\iint_G f\big((1-\theta)p_1+\theta p_2,\ (1-\theta)q_1+\theta q_2,\ x, y\big)\,dx\,dy$$

nach θ:

$$\varphi'(\theta)=\iint_G\big\{f_p(\bar{p}, \bar{q}, x, y)(p_2-p_1)+f_q(\bar{p}, \bar{q}, x, y)(q_2-q_1)\big\}\,dx\,dy \tag{4}$$

und

$$\varphi''(\theta)=\iint_G\big\{f_{pp}(\bar{p}, \bar{q}, x, y)(p_2-p_1)^2+$$

$$+2f_{pq}(\bar{p}, \bar{q}, x, y)(p_2-p_1)(q_2-q_1)+f_{qq}(\bar{p}, \bar{q}, x, y)(q_2-q_1)^2\big\}\,dx\,dy.$$

Zufolge der Ungleichungen (1) ist der Integrand stets nicht-negativ und nur dann Null, wenn

$$p_1=p_2 \text{ und } q_1=q_2$$

ist. Es ist daher für jedes θ

$$\varphi''(\theta)\geqq 0, \tag{3'}$$

wobei das Gleichheitszeichen nur dann statthaben kann, falls überall in G $p_1=p_2$, $q_1=q_2$ ist, d. h. die Differenz der Funktionen $z_1(x, y)$ und $z_2(x, y)$ eine Konstante ist. In diesem trivialen Falle ist für jedes θ

$$\varphi''(\theta)=0,$$

also ist $\varphi(\theta)$ eine lineare Funktion von θ, d. h. es ist

$$\varphi(\theta)=(1-\theta)\varphi(0)+\theta\varphi(1),$$

woraus unmittelbar

$$I[(1-\theta)z_1+\theta z_2]=(1-\theta)I[z_1]+\theta I[z_2]$$

folgt. Schliessen wir diesen Fall aus, so drückt die nunmehr leicht ableitbare Ungleichung

$$\varphi(\theta)<(1-\theta)\varphi(0)+\theta\varphi(1) \text{ für } 0<\theta<1,$$

die mit unserer Behauptung (3) identisch ist, die geometrische Tatsache aus, dass bei einer nach unten konvexen Kurve jeder

Kurvenbogen unterhalb der die Endpunkte verbindenden Sehne liegt. Analytisch folgt dies aus der Bemerkung, dass die Funktion

$$\varphi(\theta) \quad (1-\theta)\varphi(0)-\theta\varphi(1),$$

die für $\theta=0$ und $\theta=1$ verschwindet, innerhalb des Intervalles $0\leqq\theta\leqq 1$ nirgends positiv oder Null sein kann, da sie im entgegengesetzten Fall an einer *inneren* Stelle dieses Intervalls einen Maximum haben müsste, was aber mit der soeben für alle diese θ abgeleiteten Ungleichung $\varphi''(\theta)>0$ im Widerspruch steht.

Damit ist unsre Ungleichung (3) bewiesen, d. h. es ist für $0\leqq\theta\leqq 1$

$$\iint_G f\big((1-\theta)p_1+\theta p_2,\,(1-\theta)q_1+\theta q_2,\,x,\,y\big)\,dx\,dy\leqq$$

$$\leqq(1-\theta)\iint_G f(p_1,q_1,x,y)\,dx\,dy+\theta\iint_G f(p_2,q_2,x,y)\,dx\,dy.$$

Insbesondere ergibt unsere Bemerkung für $\theta=\frac{1}{2}$ das Resultat

$$I\left[\frac{z_1+z_2}{2}\right]\leqq\frac{1}{2}\,(I[z_1]+I[z_2]),$$

oder

$$\iint_G f\left(\frac{p_1+p_2}{2},\,\frac{q_1+q_2}{2},\,x,\,y\right)dx\,dy\leqq$$

$$\leqq\frac{1}{2}\left(\iint_G f(p_1,q_1,x,y)\,dx\,dy+\iint_G f(p_2,q_2,x,y)\right)dx\,dy.$$

Wählt man

$$f=\sqrt{1+p^2+q^2},$$

so ist die Ungleichung (1) offenbar erfüllt und das Integral (2) stellt den Flächeninhalt des über G gelegenen Teiles der Fläche $z=z(x,y)$ dar. Die letzte Ungleichung drückt alsdann eine wohlbekannte, von Steiner[4]) bewiesene Eigenschaft des Flächeninhaltes aus, und unsere soeben abgeleitete Ungleichung (3) ist eine Verallgemeinerung dieses Steinerschen Satzes auf reguläre Variationsprobleme.

2. Auf Grund der vorangehenden Bemerkung können wir nun den folgenden Satz beweisen:

Die im Gebiet G definierten Funktionen

$$z(x,y) \text{ und } Z(x,y),$$

[4]) Gesammelte Werke S. 298.

die samt ihren ersten Ableitungen stetige Funktionen von x, y sind, mögen Lösungen des Differentialgleichungssystems

$$\frac{\partial Z}{\partial x} = f_q\left(\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}, x, y\right), \quad \frac{\partial Z}{\partial y} = -f_p\left(\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}, x, y\right) \tag{5}$$

sein; alsdann liefert $z(x, y)$ ein absolutes Minimum des Variationsproblems

$$\iint_G f\left(\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}, x, y\right) dx\, dy = \text{Min.}$$

bei festen Randbedingungen, d. h. es gilt die Ungleichung

$$\iint_G f\left(\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}, x, y\right) dx\, dy < \iint_G f\left(\frac{\partial \bar{z}}{\partial x}, \frac{\partial \bar{z}}{\partial y}, x, y\right) dx\, dy$$

für jede von $z(x, y)$ verschiedene Funktion $\bar{z}(x, y)$, die auf dem Rande von G dieselben Randwerte annimmt wie $z(x, y)$.

Zum Beweis betrachten wir unsere Funktion

$$\varphi(\theta) = I[(1-\theta)z + \theta\bar{z}];$$

da — wie wir soeben gesehen haben — für jeden im Intervall $0 \leqq \theta \leqq 1$ gelegenen Wert von θ die zweite Ableitung $\varphi''(\theta) > 0$ ist,[5]) so ist für $0 < \theta \leqq 1$

$$\varphi(\theta) > \varphi(0) + \varphi'(0)\,\theta,$$

insbesondere für $\theta = 1$

$$\varphi(1) > \varphi(0) + \varphi'(0). \tag{6}$$

Die Gleichung (4) ergibt aber, wenn man z_1 durch z und z_2 durch $\bar{z}$ ersetzt und zur Abkürzung $z(x, y) - \bar{z}(x, y) = \zeta(x, y)$ einführt, die Relation

$$\varphi'(0) = \iint_G \left\{ f_p\left(\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}, x, y\right)\frac{\partial \zeta}{\partial x} + f_q\left(\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}, x, y\right)\frac{\partial \zeta}{\partial y}\right\} dx\, dy,$$

die mit Rücksicht auf das Differentialgleichungssystem (5) auf die folgende Form gebracht werden kann:

$$\varphi'(0) = \iint_G \left(\frac{\partial Z}{\partial x}\frac{\partial \zeta}{\partial y} - \frac{\partial Z}{\partial y}\frac{\partial \zeta}{\partial x}\right) dx\, dy. \tag{7}$$

In dieser Formel sind $Z(x, y)$ und $\zeta(x, y)$ in G definierte samt ihren ersten Ableitungen stetige Funktionen, von denen die zweite,

[5]) Da z und $\bar{z}$ verschiedene Funktionen sind, die auf dem Rande von G übereinstimmen, so kann die Differenz dieser Funktionen keine Konstante sein; es gilt daher die Ungleichung (3') mit Ausschluss des Gleichheitszeichens.

$\zeta(x, y)$ auf dem Rande dieses Gebietes verschwindet. Man kann nun unschwer zeigen, dass das Integral (7) gleich Null ist. In der Tat, wenn die Funktion $Z(x, y)$ zweimal stetig differenzierbar ist, so folgt unsere Behauptung unmittelbar durch Produktintegration, da

$$\iint_G \frac{\partial Z}{\partial x}\frac{\partial \zeta}{\partial y}\,dx\,dy = \iint_G \frac{\partial Z}{\partial y}\frac{\partial \zeta}{\partial x}\,dx\,dy = -\iint_G \zeta \frac{\partial^2 Z}{\partial x\,\partial y}\,dx\,dy$$

ist. Besitzt aber $Z(x, y)$ keine Ableitungen zweiter Ordnung, so approximiere man diese Funktion durch eine Folge zweimal stetig differenzierbarer Funktionen, etwa durch eine Polynomfolge

$$Z_1(x, y),\ Z_2(x, y), \ldots, Z_n(x, y), \ldots$$

von der Art, dass gleichmässig in G die Limesgleichungen

$$\lim_{n\to\infty} Z_n(x, y) = Z(x, y),$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\partial Z_n(x, y)}{\partial x} = \frac{\partial Z(x, y)}{\partial x}, \qquad \lim_{n\to\infty} \frac{\partial Z_n(x, y)}{\partial y} = \frac{\partial Z(x, y)}{\partial y}$$

statthaben. Es ist sodann

$$\iint_G \left\{\frac{\partial Z}{\partial x}\frac{\partial \zeta}{\partial y} - \frac{\partial Z}{\partial y}\frac{\partial \zeta}{\partial x}\right\} dx\,dy = \lim_{n\to\infty} \iint_G \left\{\frac{\partial Z_n}{\partial x}\frac{\partial \zeta}{\partial y} - \frac{\partial Z_n}{\partial y}\frac{\partial \zeta}{\partial x}\right\} dx\,dy = 0,$$

womit das Verschwinden des Integrals (7) in allen Fällen bewiesen ist. Es ist daher $\varphi'(0) = 0$ und die Ungleichung (6) zeigt, dass $\varphi(1) > \varphi(0)$ ist, d. h. es ist

$$I[\bar{z}] > I[z]$$

und dies ist der oben ausgesprochene Satz.

3. Mit Hilfe der Ungleichungen (3) können wir nun zeigen, dass unter den gemachten Voraussetzungen *das Variationsproblem*

$$\iint_G f\left(\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}, x, y\right) dx\,dy = \text{Min.}$$

bei gegebenen Randbedingungen nur eine Lösung besitzen kann.

Sind nämlich $z_1(x, y)$ und $z_2(x, y)$ zwei verschiedene im Gebiet G definierte, samt ihren ersten Ableitungen stetige Funktionen, die beide auf dem Rande dieses Gebietes die gegebenen Randwerte besitzen und dem obigen Integral denselben Wert m erteilen:

$$I[z_1] = \iint_G f\left(\frac{\partial z_1}{\partial x}, \frac{\partial z_1}{\partial y}, x, y\right) dx\,dy =$$

$$= I[z_2] = \iint_G f\left(\frac{\partial z_2}{\partial x}, \frac{\partial z_2}{\partial y}, x, y\right) dx\,dy = m,$$

so ist nach Ungleichung (3)

$$I[(1-\theta)z_1+\theta z_2]<(1-\theta)I[z_1]+\theta I[z_2]=m.$$

Die Ungleichung gilt in der schärferen Form (mit Ausschluss des Gleichheitszeichens), da zufolge unserer Annahmen die Differenz z_1-z_2 nicht konstant sein kann. Da ferner die Funktion

$$(1-\theta)z_1+\theta z_2=z_1+\theta(z_2-z_1)$$

dieselben Randwerte besitzt wie z_1 und z_2, so folgt aus der letzten Ungleichung, dass m nicht der Minimalwert des betrachteten Integrals bei den gegebenen Randwerten sein kann, womit unsere Behauptung (dass der Minimalwert dem Integral nicht durch zwei Funktionen der Konkurrenz erteilt wird) bewiesen ist.

Durch Kombination dieses Satzes mit dem in **2.** gewonnenen Resultat gelangt man zu dem folgenden Eindeutigkeitssatz:

Es erfülle $f(p, q, x, y)$ die in **1.** *angegebenen Bedingungen; wir nehmen an, dass die Funktionenpaare*

$$z_1(x, y) \text{ und } Z_1(x, y)$$

bzw.

$$z_2(x, y) \text{ und } Z_2(x, y)$$

(von denen nur einmalige Differenzierbarkeit nach x un y vorausgesetzt wird) das Differentialgleichungssystem

$$\frac{\partial Z}{\partial x}=f_q\left(\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}, x, y\right), \quad \frac{\partial Z}{\partial y}=-f_p\left(\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}, x, y\right) \tag{5}$$

befriedigen, ferner, dass die Randwerte der Funktionen $z_1(x, y)$ und $z_2(x, y)$ in jedem Randpunkte von G übereinstimmen; dann gilt für jede Stelle in G

$$z_1(x. y)=z_2(x, y)$$

und

$$Z_1(x, y)-Z_2(x, y)=konst.$$

Dieser Satz ist — wie mir scheint — schon für den Fall eines linearen Differentialgleichungssystems neu. Setzt man nämlich

$$f(p, q, x, y)=\frac{1}{2}\{a(x, y)p^2+2b(x, y)pq+c(x, y)q^2\},$$

wo $a(x, y)$, $b(x, y)$, $c(x, y)$ in G definierte stetige Funktionen bedeuten, die die Ungleichung

$$a(x, y)\,c(x, y)-(b(x, y))^2>0$$

befriedigen, so erfüllt $f(p, q, x, y)$ die geforderten Bedingungen unseres Satzes. *Für das lineare Differentialgleichungssystem*

$$\frac{\partial Z}{\partial x}=b(x, y)\frac{\partial z}{\partial x}+c(x, y)\frac{\partial z}{\partial y}, \quad \frac{\partial Z}{\partial y}=-a(x, y)\frac{\partial z}{\partial x}-b(x, y)\frac{\partial z}{\partial y}$$

gilt daher der Eindeutigkeitssatz, d. h. wenn man auf demRande von G die Randwerte von $z(x, y)$ vorschreibt, so kann es höchstens eine samt ihren Ableitungen erster Ordnung stetige Funktion $z(x, y)$ mit diesen Randwerten geben, die das zuletzt angeschriebene Differentialgleichungssystem befriedigt und die zugehörige Funktion $Z(x, y)$ ist bis auf einen konstanten Addenden eindeutig festgelegt.

Aus den bekannten Eindeutigkeitssätzen der Theorie der elliptischen Differentialgleichungen würde dieser Satz nur dann folgen, wenn man ausser der Differenzierbarkeit der Koeffizienten $a(x, y)$, $b(x, y)$, $c(x, y)$ auch die Existenz der zweiten Ableitungen von $z(x, y)$ voraussetzen würde. Es wäre auch vom Interesse, diesen Eindeutigkeitssatz (ohne diese Einschränkungen) auf das allgemeine lineare elliptische Differentialgleichungssystem

$$\frac{\partial Z}{\partial x} = \alpha(x, y)\frac{\partial z}{\partial x} + \beta(x, y)\frac{\partial z}{\partial y}, \quad \frac{\partial Z}{\partial y} = \gamma(x, y)\frac{\partial z}{\partial x} + \delta(x, y)\frac{\partial z}{\partial y},$$
$$\alpha\delta - \beta\gamma > 0$$

zu übertragen.

4. Wir nehmen jetzt an, dass die Funktion f nur die Variablen p und q enthält (von x und y aber unabhängig ist) und dass für alle Werte der Veränderlichen p, q die Ungleichungen

$$f_{pp} > 0, \quad f_{pp}f_{qq} - f_{pq}^2 > 0 \tag{1}$$

erfüllt sind. Wir zeigten in **2.,** dass jede nach x und y stetig differenzierbare Lösung $z(x, y)$ des Differentialgleichungssystems

$$\frac{\partial Z}{\partial x} = f_q\left(\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}\right), \quad \frac{\partial Z}{\partial y} = -f_p\left(\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}\right) \tag{5}$$

ein absolutes Minimum für das Integral

$$\iint_G f\left(\frac{\partial \bar{z}}{\partial x}, \frac{\partial \bar{z}}{\partial y}\right) dx\, dy$$

liefert, wenn zur Konkurrenz diejenigen Funktionen $\bar{z}(x, y)$ zugelassen werden, die in G samt ihren ersten Ableitungen stetig sind und auf der Berandung von G dieselben Randwerte wie $z(x, y)$ annehmen. Für die Extremalfunktionen dieses Variationsproblems beweis aber T. Radó,[6]) in Anlehnung an meine in der Einleitung genannten Arbeit, dass sie in Gemeinschaft mit zwei weiteren Hilfsfunktionen $\omega_1(x, y)$, $\omega_2(x, y)$ (die in G ebenfalls einmal stetig

[6]) *Diese Acta* Bd. II, S. 147—156.

differenzierbar sind) die folgenden zwei Differentialgleichungssysteme befriedigt:

$$\frac{\partial \omega_1}{\partial x}=\frac{\partial z}{\partial x} f_q\left(\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}\right), \qquad \frac{\partial \omega_1}{\partial y}=f\left(\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}\right)-\frac{\partial z}{\partial x} f_p\left(\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}\right) \quad (5')$$

$$\frac{\partial \omega_2}{\partial x}=f\left(\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}\right)-\frac{\partial z}{\partial y} f_q\left(\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}\right), \qquad \frac{\partial \omega_2}{\partial y}=\frac{\partial z}{\partial y} f_p\left(\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}\right). \quad (5'')$$

Daraus folgt nun, dass, falls die Funktion $f(p, q)$ die Ungleichung (1) erfüllt, jede Lösung des Systems (5) auch Lösung der Differentialsysteme (5′) und (5″) ist. Diese Tatsache ist deshalb vom Interesse, da man diese letzten Gleichungen aus den Gleichungen (5) nur dann durch einfaches Umrechnen ableiten kann, falls man die zweimalige Differenzierbarkeit von $z(x, y)$ voraussetzt; auch bleibt es fraglich, ob ohne diese Annahme die Radóschen Gleichungen aus meinen Gleichungen (5) auch in dem Falle ableitbar sind, wo die Ungleichung (1) nicht erfüllt ist.

Als Anwendung dieser Betrachtungen beweisen wir noch den folgenden Satz.

Es seien $z(x, y)$ und $Z(x, y)$ in G definierte einmal stetig differenzierbare Funktionen von x, y, die das Differentialgleichungssystem

$$\frac{\partial Z}{\partial x}=\frac{\frac{\partial z}{\partial y}}{\sqrt{1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}}, \qquad \frac{\partial Z}{\partial y}=-\frac{\frac{\partial z}{\partial x}}{\sqrt{1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}} \quad (8)$$

befriedigen; dann sind $z(x, y)$ und $Z(x, y)$ analytische Funktionen von x und y.

Dieser Satz — ein vollkommenes Analogon der bekannten Tatsache, dass die stetig differenzierbaren Lösungen der Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen analytisch sind — ist eine unmittelbare Folge eines schönen Satzes von T. Radó über den analytischen Charakter der Minimalflächen.[7]) Setzt man nämlich

$$f=\sqrt{1+p^2+q^2},$$

so ist offenbar die Ungleichung (1) erfüllt und es gehen die Gleichungen (5) in das System (8) über. Zufolge der soeben gemachten Bemerkung folgt dann die Existenz zweier Hülfsfunktionen (mit

[7]) Vgl. die in der Anmerkung [2]) genannten beiden Arbeiten dieses Verfassers.

stetigen ersten Ableitungen) $\omega_1(x, y)$ und $\omega_2(x, y)$, die gemeinsam mit $z(x, y)$ die beiden Differentialsysteme

$$\frac{\partial \omega_1}{\partial x} = \frac{\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial z}{\partial y}}{\sqrt{1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}}, \quad \frac{\partial \omega_1}{\partial y} = \frac{1+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}{\sqrt{1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}}, \tag{8'}$$

$$\frac{\partial \omega_2}{\partial x} = \frac{1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2}{\sqrt{1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}}, \quad \frac{\partial \omega_2}{\partial y} = \frac{\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial z}{\partial y}}{\sqrt{1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}}, \tag{8''}$$

befriedigen. T. Radó zeigt nun in der erwähnten Arbeit, dass jede in einem Gebiet einmal stetig differenzierbare Funktion $z(x, y)$, welche zusammen mit drei Hilfsfunktionen $Z(x, y)$, $\omega_1(x, y)$, $\omega_2(x, y)$ die Gleichungen (8), (8'), (8'') befriedigt, analytisch ist, womit unsere Behauptung bewiesen ist.

(Eingegangen am 13. Oktober 1927.)

Über adjungierte Variationsprobleme und adjungierte Extremalflächen.

Von

Alfred Haar in Szeged.

Das Vorbild für die Entwicklung desjenigen Teiles der Variationsrechnung, in dem die unbekannten Funktionen von einer Veränderlichen abhängen, war stets die Theorie der geodätischen Linien auf krummen Flächen, die von Gauß begründet und insbesondere von Darboux ausgebildet wurde. Nicht nur die Untersuchungen von Jacobi und Kneser — an denen man den Einfluß der Theorie der geodätischen Linien klar erkennt —, sondern auch die direkte Methode der Behandlung von Variationsproblemen, die man den berühmten Arbeiten Hilberts verdankt, fußen auf der genannten Theorie[1]).

Was nun jenen Teil der Variationsrechnung betrifft, in dem die unbekannte Funktion von zwei unabhängigen Veränderlichen abhängt, so findet man in der Flächentheorie einen besonderen Fall desselben mit großer Ausführlichkeit behandelt: die Minimalflächen, deren Theorie in einer Reihe von klassischen Arbeiten entwickelt wurde. Dabei denken wir nicht an die mit diesen Flächen zusammenhängenden Existenzfragen (Plateausches Problem), sondern in erster Reihe an Theoreme, die sich mit der Minimalfläche „im kleinen" beschäftigen, die sich also aus dem Verschwinden der ersten Variation ergeben.

Es liegt nun der Gedanke nahe, diesen Teil der Flächentheorie für die Variationsrechnung nützlich zu machen bzw. die in der Theorie der Minimalflächen erhaltenen Resultate auf allgemeinere Variationsprobleme zu übertragen, in Analogie dessen, was für die Theorie der geodätischen

[1]) Hilbert benutzt in erster Reihe das Beispiel der geodätischen Linie, um seine Methode darzulegen (Über das Dirichletsche Prinzip, Jahresbericht d. deutschen Math. Ver. 8, S. 184).

Linien bereits vollzogen wurde. In der Tat gelingt dies für Variationsprobleme von der Form

$$\delta \iint f\left(\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}\right) dx\, dy = 0 \tag{1}$$

(wo der Integrand nur die Ableitungen der unbekannten Funktion enthält); dabei bedarf es natürlich einer *neuen Begriffsbildung*, in analoger Weise wie der Transversalitätsbegriff eingeführt werden mußte, um die Theorie der geodätischen Linien auf die Variationsrechnung übertragen zu können. In den folgenden Untersuchungen ist es der Begriff des *adjungierten Variationsproblems und der adjungierten Extremalfläche*, der die Übertragung der Sätze über Minimalflächen auf Variationsprobleme von der obigen Form ermöglicht.

In dem erwähnten Teil der Theorie der Minimalflächen spielt nämlich der von Bonnet eingeführte Begriff der adjungierten Minimalflächen eine fundamentale Rolle. Freilich wird diese Zuordnung, die jeder Minimalfläche eine andere Minimalfläche adjungiert, gewöhnlich in der Weise angegeben und studiert, daß man in der bekannten Weierstraßschen Darstellung der Minimalflächen (die jeder Minimalfläche in bestimmter Weise eine analytische Funktion zuordnet) die daselbst auftretende Funktion einer komplexen Veränderlichen durch das i-fache dieser Funktion ersetzt — eine Behandlungsweise, die zur Verallgemeinerung kaum brauchbar gemacht werden kann.[2]) Wenn man aber den Begriff der adjungierten Minimalfläche von der Weierstraßschen Darstellung befreit, d. h. wenn man die adjungierte Fläche in allgemeinen Gaußschen Koordinaten untersucht, so gelangt man leicht zu einer solchen Form derselben, die einer Verallgemeinerung auf Variationsprobleme von der oben angegebenen Art fähig ist.

Indem man auf diese Weise zu jeder Extremalfläche des Variationsproblems (1) eine adjungierte Fläche zuordnet, gelangt man zu dem springenden Punkt der folgenden Untersuchungen; diese adjungierte Fläche ist nämlich im allgemeinen Falle keine Extremalfläche des Variationsproblems (1), wohl aber eines anderen Variationsproblems, des adjungierten Variationsproblems, das in einfacher Weise aus dem ursprünglichen ableitbar ist. Man erhält auf diese Weise eine Zuordnung, die jedem Variationsproblem von der Form (1) ein Problem derselben Form zuordnet; diese Beziehung ist involutorisch, und das Problem der Minimalflächen ist eben dadurch ausgezeichnet, daß es ein sich selbst adjungiertes Problem ist (§ 1).

Untersucht man nun die Abbildung einer Extremalfläche von (1) auf ihre adjungierte Fläche (§ 2), so gelangt man zu den Verallgemeinerungen

[2]) Auch die ursprüngliche Bonnetsche Definition der adjungierten Minimalfläche benutzt ein ganz spezielles Koordinatensystem auf der Fläche (Comptes Rendus 1853, p. 532).

der erwähnten klassischen Sätze der Theorie der Minimalflächen. Von den so erhaltenen Resultaten wollen wir die folgenden hervorheben:

In der Theorie der Minimalflächen gilt der Satz, daß jede Minimalfläche in ihre adjungierte verbiegbar ist. In unserem allgemeineren Ideenkreis gilt der Satz, daß man auf der Extremalfläche und auf ihrer adjungierten eine solche nichteuklidische Maßbestimmung, die nur von den entsprechenden Variationsproblemen abhängt, einführen kann, daß die fragliche Abbildung in diesem Sinne eine Verbiegung ist. Damit gewinnt man das Resultat, daß durch jedes Variationsproblem in ganz bestimmter Weise eine Maßbestimmung auf seinen Extremalflächen festgelegt ist (die nur in dem Falle der Minimalflächen mit der gewöhnlichen Bogenlänge übereinstimmt); das Variationsintegral selbst wird der Flächeninhalt bei Zugrundelegung dieser Definition der Bogenlängen. Wenn man in dieser Maßbestimmung isotherme Parameter einführt, so erhält man ein Differentialgleichungssystem für die Koordinaten der Extremalfläche, das von besonders einfacher Art ist und zum Studium dieser Flächen äußerst geeignet ist. Diese Sätze sind die Verallgemeinerung der bekannten Sätze über die Darstellung der Minimalflächen durch Potentialfunktionen, und diese Differentialgleichungen leisten — wie mir scheint — auch in der weiteren Theorie des Variationsproblems (1) gute Dienste.

§ 1.

Begriff und Haupteigenschaften der adjungierten Extremalfläche und des adjungierten Variationsproblems.

1. Bezeichnungen und Voraussetzungen. Wir legen unseren Untersuchungen ein Variationsproblem von der Form

$$\delta \iint f(z_x, z_y)\, dx\, dy = 0 \tag{1}$$

zugrunde und betrachten irgendeine Extremalfläche $z = z(x, y)$ desselben; wir setzen zur Abkürzung[3])

$$z_x = p, \quad z_y = q.$$

Um elegantere Formeln zu gewinnen, schreiben wir die Gleichung dieser Extremalfläche durch Einführung zweier Parameter u, v in der Form

$$x = \xi(u, v), \quad y = \eta(u, v), \quad z = \zeta(u, v)$$

und setzen

$$p_1 = \begin{vmatrix} \eta_u & \zeta_u \\ \eta_v & \zeta_v \end{vmatrix}, \quad p_2 = \begin{vmatrix} \zeta_u & \xi_u \\ \zeta_v & \xi_v \end{vmatrix}, \quad p_3 = \begin{vmatrix} \xi_u & \eta_u \\ \xi_v & \eta_v \end{vmatrix}. \tag{2}$$

[3]) Wir bezeichnen im folgenden die Ableitungen einer Funktion durch Hinzufügung der entsprechenden Indizes.

Es ist dann

$$\zeta(u,v) = z(\xi(u,v), \eta(u,v)) \quad \text{und} \quad p = -\frac{p_1}{p_3}, \quad q = -\frac{p_2}{p_3},$$

und das vorgelegte Variationsproblem geht — wenn man noch die Bezeichnung

$$F(p_1, p_2, p_3) = p_3 f\left(-\frac{p_1}{p_3}, -\frac{p_2}{p_3}\right) \tag{3}$$

einführt — in das folgende Problem über:

$$\delta \iint F(p_1, p_2, p_3)\, du\, dv = 0. \tag{I}$$

Wir nehmen an, daß die Integranden $f(p,q)$ und $F(p_1, p_2, p_3)$ für alle in Betracht kommenden Werte der Argumente hinreichend oft differenzierbare Funktionen sind; die letztere ist außerdem homogen vom ersten Grade. Folglich ist

$$p_1 F_{p_1} + p_2 F_{p_2} + p_3 F_{p_3} = F,$$

und es bestehen — wie man sich leicht überzeugt — die Relationen

$$F_{p_1} = -f_p, \quad F_{p_2} = -f_q, \quad F_{p_3} = f - p f_p - q f_q. \tag{3'}$$

Es zeigen diese Formeln, daß die Ableitungen $F_{p_1}, F_{p_2}, F_{p_3}$ homogene Funktionen 0-ten Grades von p_1, p_2, p_3 sind und daher von der Wahl der Parameter u, v unabhängig sind.

2. Definition der adjungierten Extremalfläche. Die Euler-Lagrangeschen Differentialgleichungen des Variationsproblems (I) lauten:

$$\frac{\partial}{\partial u}\frac{\partial F}{\partial \xi_u} + \frac{\partial}{\partial v}\frac{\partial F}{\partial \xi_v} = 0, \quad \frac{\partial}{\partial u}\frac{\partial F}{\partial \eta_u} + \frac{\partial}{\partial v}\frac{\partial F}{\partial \eta_v} = 0, \quad \frac{\partial}{\partial u}\frac{\partial F}{\partial \zeta_u} + \frac{\partial}{\partial v}\frac{\partial F}{\partial \zeta_v} = 0.$$

Mit Rücksicht auf die leicht verifizierbaren Relationen

$$\frac{\partial F}{\partial \xi_u} = \begin{vmatrix} \eta_v & \zeta_v \\ F_{p_2} & F_{p_3} \end{vmatrix}, \quad \frac{\partial F}{\partial \eta_u} = \begin{vmatrix} \zeta_v & \xi_v \\ F_{p_3} & F_{p_1} \end{vmatrix}, \quad \frac{\partial F}{\partial \zeta_u} = \begin{vmatrix} \xi_v & \eta_v \\ F_{p_1} & F_{p_2} \end{vmatrix},$$

$$\frac{\partial F}{\partial \xi_v} = -\begin{vmatrix} \eta_u & \zeta_u \\ F_{p_2} & F_{p_3} \end{vmatrix}, \quad \frac{\partial F}{\partial \eta_v} = -\begin{vmatrix} \zeta_u & \xi_u \\ F_{p_3} & F_{p_1} \end{vmatrix}, \quad \frac{\partial F}{\partial \zeta_v} = -\begin{vmatrix} \xi_u & \eta_u \\ F_{p_1} & F_{p_2} \end{vmatrix},$$

kann man diese Euler-Lagrangeschen Differentialgleichungen durch Einführung dreier Hilfsfunktionen

$$\bar{\xi}(u,v), \quad \bar{\eta}(u,v), \quad \bar{\zeta}(u,v)$$

(die bis auf einen konstanten Addenden eindeutig bestimmt sind) durch das folgende Differentialgleichungssystem erster Ordnung ersetzen[4]):

[4]) Es ist dies diejenige Form der Euler-Lagrangeschen Differentialgleichung, die man aus dem Verschwinden der ersten Variation *ohne die Existenz der zweiten Ableitungen der Extremalfunktion vorauszusetzen* ableiten kann. Vgl. meine Arbeit „Über die Variation der Doppelintegrale", Journal für die reine u. angew. Math. **149**, S. 1–18. Indem ich diese Differentialgleichungen für den Fall der Minimalflächen aufstellte, erkannte ich, daß die auftretenden Hilfsfunktionen mit den Koordinaten der Bonnetschen adjungierten Minimalfläche übereinstimmen, und dieser Umstand führte mich zu den Begriffsbildungen der vorliegenden Untersuchungen.

$$(II)\qquad \begin{aligned} \bar{\xi}_u &= \begin{vmatrix} \eta_u & \zeta_u \\ F_{p_2} & F_{p_3} \end{vmatrix}, \quad \bar{\eta}_u = \begin{vmatrix} \zeta_u & \xi_u \\ F_{p_3} & F_{p_1} \end{vmatrix}, \quad \bar{\zeta}_u = \begin{vmatrix} \xi_u & \eta_u \\ F_{p_1} & F_{p_2} \end{vmatrix}, \\ \bar{\xi}_v &= \begin{vmatrix} \eta_v & \zeta_v \\ F_{p_2} & F_{p_3} \end{vmatrix}, \quad \bar{\eta}_v = \begin{vmatrix} \zeta_v & \xi_v \\ F_{p_3} & F_{p_1} \end{vmatrix}, \quad \bar{\zeta}_v = \begin{vmatrix} \xi_v & \eta_v \\ F_{p_1} & F_{p_2} \end{vmatrix}. \end{aligned}$$

Schreibt man diese Gleichungen in der folgenden Form

$$(III)\qquad d\bar{\xi} = F_{p_3}\,d\eta - F_{p_2}\,d\zeta,\quad d\bar{\eta} = F_{p_1}\,d\zeta - F_{p_3}\,d\xi,\quad d\bar{\zeta} = F_{p_2}\,d\xi - F_{p_1}\,d\eta,$$

so erkennt man unmittelbar — in Anbetracht dessen, daß die Ausdrücke $F_{p_1}, F_{p_2}, F_{p_3}$ von der Wahl der Parameter u, v unabhängig sind —, daß die Fläche

$$x = \bar{\xi}(u, v), \qquad y = \bar{\eta}(u, v), \qquad z = \bar{\zeta}(u, v)$$

bis auf eine Parallelverschiebung eindeutig festgelegt ist, insbesondere von der Wahl der Parameter u, v unabhängig ist. Wir nennen diese Fläche die *in bezug auf das vorgelegte Variationsproblem adjungierte Fläche der betrachteten Extremalfläche*[5]).

Vermöge der Gleichungen (III) ist nicht nur die adjungierte Fläche selbst definiert, sondern es ist auch eine Abbildung dieser Fläche auf die ursprüngliche Extremalfläche festgelegt, indem wir Punkte mit denselben Parameterwerten u, v einander entsprechen lassen.

Wir führen endlich der Symmetrie wegen die folgenden Bezeichnungen ein:

$$(\bar{2})\qquad \bar{p}_1 = \begin{vmatrix} \bar{\eta}_u & \bar{\zeta}_u \\ \bar{\eta}_v & \bar{\zeta}_v \end{vmatrix}, \quad \bar{p}_2 = \begin{vmatrix} \bar{\zeta}_u & \bar{\xi}_u \\ \bar{\zeta}_v & \bar{\xi}_v \end{vmatrix}, \quad \bar{p}_3 = \begin{vmatrix} \bar{\xi}_u & \bar{\eta}_u \\ \bar{\xi}_v & \bar{\eta}_v \end{vmatrix}$$

Man erhält — mit Rücksicht auf die Gleichungen (II) —

$$\bar{p}_1 = \begin{vmatrix} F_{p_1}\zeta_u - F_{p_3}\xi_u & F_{p_2}\xi_u - F_{p_1}\eta_u \\ F_{p_1}\zeta_v - F_{p_3}\xi_v & F_{p_2}\xi_v - F_{p_1}\eta_v \end{vmatrix} = F_{p_1}^2 \begin{vmatrix} \eta_u & \zeta_u \\ \eta_v & \xi_v \end{vmatrix} + F_{p_1}F_{p_2} \begin{vmatrix} \zeta_u & \xi_u \\ \zeta_v & \xi_v \end{vmatrix} +$$

$$+ F_{p_1}F_{p_3} \begin{vmatrix} \xi_u & \eta_u \\ \xi_v & \eta_v \end{vmatrix} = F_{p_1}(p_1 F_{p_1} + p_2 F_{p_2} + p_3 F_{p_3}) = F F_{p_1},$$

---

[5]) Man erkennt unschwer, daß diese Definition im Falle der Minimalflächen

$$F = \sqrt{p_1^2 + p_2^2 + p_3^2}$$

mit der üblichen Festlegung der adjungierten Minimalfläche übereinstimmt. Führt man nämlich auf der Minimalfläche isotherme Koordinaten ein

$$\xi_u^2 + \eta_u^2 + \zeta_u^2 = \xi_v^2 + \eta_v^2 + \zeta_v^2, \qquad \xi_u\xi_v + \eta_u\eta_v + \zeta_u\zeta_v = 0,$$

so gehen die Gleichungen (II) in die folgenden über:

$$\begin{aligned} \bar{\xi}_u &= -\xi_v, & \bar{\eta}_u &= -\eta_v, & \bar{\zeta}_u &= -\zeta_v, \\ \bar{\xi}_v &= \xi_u, & \bar{\eta}_v &= \eta_u, & \bar{\zeta}_v &= \zeta_u, \end{aligned}$$

d. h. ξ und $\bar{\xi}$, η und $\bar{\eta}$, ζ und $\bar{\zeta}$ sind konjugierte Potentialfunktionen; dies ist eben die übliche Definition der adjungierten Minimalfläche.

und in gleicher Weise die Gleichungen

$$\bar{p}_2 = F F_{p_2}, \quad \bar{p}_3 = F F_{p_3}, \tag{4}$$

die zu der Proportion

$$\bar{p}_1 : \bar{p}_2 : \bar{p}_3 = F_{p_1} : F_{p_2} : F_{p_3} \tag{5}$$

führen.

3. Definition des adjungierten Variationsproblems. Für das Folgende ist nun die Tatsache von entscheidender Wichtigkeit, daß die soeben definierten *adjungierten Flächen* der Extremalflächen des vorgelegten Variationsproblems die *Extremalflächen eines neuen Variationsproblems sind, das durch das ursprüngliche Variationsproblem völlig bestimmt und von der Wahl der Extremalfläche unabhängig ist.* Wir werden dieses Variationsproblem — das zu dem ursprünglichen *adjungierte Variationsproblem* — einfach charakterisieren und den involutorischen Charakter dieser Beziehung beweisen, indem wir zeigen werden, daß die in bezug auf dieses letztere Variationsproblem adjungierten Flächen der Extremalflächen dieses Variationsproblems die Extremalflächen des ursprünglichen Problems sind.

Um dies klar zu erkennen, wollen wir zunächst x, y als unabhängige Variable nehmen und annehmen, daß die Gleichung der zu der Extremalfläche $z = z(x, y)$ adjungierten Fläche

$$\bar{x} = \bar{\xi}(x, y), \quad \bar{y} = \bar{\eta}(x, y), \quad \bar{z} = \bar{\zeta}(x, y)$$

auf die Form

$$\bar{z} = \bar{z}(\bar{x}, \bar{y})$$

gebracht werden kann. Mit anderen Worten, wir betrachten einen Teil der Extremalfläche, wo die Determinante

$$\bar{p}_3 = \begin{vmatrix} \bar{\xi}_x & \bar{\eta}_x \\ \bar{\xi}_y & \bar{\eta}_y \end{vmatrix} = F F_{p_3} = f(f - p f_p - q f_q)$$

von Null verschieden ist. Alsdann sind — wenn man zur Abkürzung

$$\bar{p} = \frac{\partial \bar{z}}{\partial \bar{x}}, \quad \bar{q} = \frac{\partial \bar{z}}{\partial \bar{y}}$$

einführt — mit Rücksicht auf die Gleichungen $(\overline{2})$, $(3')$ und (4)

$$\begin{aligned} \bar{p} &= -\frac{\bar{p}_1}{\bar{p}_3} = -\frac{F_{p_1}}{F_{p_3}} = \frac{f_p}{f - p f_p - q f_q}, \\ \bar{q} &= -\frac{\bar{p}_2}{\bar{p}_3} = -\frac{F_{p_2}}{F_{p_3}} = \frac{f_q}{f - p f_p - q f_q}. \end{aligned} \tag{6}$$

Es zeigen diese Gleichungen die Tatsache (die man auch aus den Gleichungen (5) entnehmen kann), daß die Richtung der Flächennormalen $(\bar{p}, \bar{q})$ in einem Punkte der adjungierten Fläche nur von der Richtung der Nor-

malen (p, q) im entsprechenden Punkte der Extremalfläche abhängt. Man verifiziert ohne Schwierigkeit die Formel

$$\frac{\partial(\bar{p}, \bar{q})}{\partial(p, q)} = \frac{f}{(f - pf_p - qf_q)^3}(f_{pp}f_{qq} - f_{pq}^2);$$

ist dieser Ausdruck von Null verschieden — was wir von nun an annehmen wollen —, so kann man die Gleichungen (6), die man in die eine Gleichung

$$\bar{p}\,dp + \bar{q}\,dq = \frac{df}{f - pf_p - qf_q} \tag{6'}$$

vereinigen kann, nach p und q auflösen. Man erhält eine durchsichtige Lösungsformel, die die Symmetrie der beiden Variablenpaare p, q und $\bar{p}, \bar{q}$ klar hervortreten läßt, in folgender Weise: Wir denken uns p, q durch $\bar{p}, \bar{q}$ ausgedrückt und definieren die Funktion $\bar{f}(\bar{p}, \bar{q})$ durch die folgende Gleichung:

$$\bar{f}(\bar{p}, \bar{q}) = \frac{1}{f - pf_p - qf_q}, \tag{7}$$

dann ist, — in voller Analogie zu (6), —

$$p = \frac{\bar{f}_{\bar{p}}}{\bar{f} - \bar{p}\bar{f}_{\bar{p}} - \bar{q}\bar{f}_{\bar{q}}}, \qquad q = \frac{\bar{f}_{\bar{q}}}{\bar{f} - \bar{p}\bar{f}_{\bar{p}} - \bar{q}\bar{f}_{\bar{q}}}. \tag{$\bar{6}$}$$

In der Tat, bringt man die Definitionsgleichung (7) — mit Rücksicht auf (6) — auf die Form

$$f(p, q)\,\bar{f}(\bar{p}, \bar{q}) = 1 + p\bar{p} + q\bar{q}, \tag{8}$$

so erhält man unmittelbar

$$\bar{f}\,df + f\,d\bar{f} = (\bar{p}\,dp + \bar{q}\,dq) + (p\,d\bar{p} + q\,d\bar{q})$$

und wegen (6') und (7)

$$p\,d\bar{p} + q\,d\bar{q} = f\,d\bar{f} = f(\bar{f}_{\bar{p}}\,d\bar{p} + \bar{f}_{\bar{q}}\,d\bar{q}),$$

d. h.

$$p = f\bar{f}_{\bar{p}}, \qquad q = f\bar{f}_{\bar{q}}. \tag{9}$$

Führt man diese Ausdrücke von p, q in die rechte Seite der Gleichung (8) ein, so ergibt sich

$$f = \frac{1}{\bar{f} - \bar{p}\bar{f}_{\bar{p}} - \bar{q}\bar{f}_{\bar{q}}}. \tag{$\bar{7}$}$$

Durch Einsetzen dieses Ausdruckes an Stelle von f in den Gleichungen (9) erhält man die behauptete Gleichung ($\bar{6}$).

Wir können unsere Formeln folgendermaßen zusammenfassen:

Unterwirft man die Größen p, q den Bedingungen

$$f \neq 0, \quad f - pf_p - qf_q \neq 0, \quad f_{pp}f_{qq} - f_{pq}^2 \neq 0 \tag{10}$$

und führt die Größen $\bar{p}, \bar{q}$ durch die Gleichungen

$$(6) \qquad \bar{p} = \frac{f_p}{f - pf_p - qf_q}, \qquad \bar{q} = \frac{f_q}{f - pf_p - qf_q},$$

die Funktion $\bar{f}(\bar{p}, \bar{q})$ aber durch die Gleichung

$$(7) \qquad \bar{f}(\bar{p}, \bar{q}) = \frac{1}{f - pf_p - qf_q},$$

oder (was damit gleichbedeutend ist)

$$(8) \qquad f(p, q)\, \bar{f}(\bar{p}, \bar{q}) = 1 + p\bar{p} + q\bar{q}$$

ein, so wird

$$(\bar{6}) \qquad p = \frac{\bar{f}_{\bar{p}}}{\bar{f} - \bar{p}\bar{f}_{\bar{p}} - \bar{q}\bar{f}_{\bar{q}}}, \qquad q = \frac{\bar{f}_{\bar{q}}}{\bar{f} - \bar{p}\bar{f}_{\bar{p}} - \bar{q}\bar{f}_{\bar{q}}},$$

ferner

$$(\bar{7}) \qquad f = \frac{1}{\bar{f} - \bar{p}\bar{f}_{\bar{p}} - \bar{q}\bar{f}_{\bar{q}}}$$

und

$$(9) \qquad \bar{f}_{\bar{p}} = \frac{p}{f}, \qquad \bar{f}_{\bar{q}} = \frac{q}{f},$$

$$(\bar{9}) \qquad f_p = \frac{\bar{p}}{\bar{f}}, \qquad f_q = \frac{\bar{q}}{\bar{f}}.$$

Es bestehen daher diese Zusammenhänge zwischen den Ableitungen $\frac{\partial z}{\partial x} = p$, $\frac{\partial z}{\partial y} = q$ einer Extremalfläche des Variationsproblems

$$(1) \qquad \delta \iint f(z_x, z_y)\, dx\, dy = 0$$

und den Ableitungen $\bar{z}_{\bar{x}} = \bar{p}$, $\bar{z}_{\bar{y}} = \bar{q}$ ihrer adjungierten Fläche $\bar{z} = \bar{z}(\bar{x}, \bar{y})$. Wir werden zeigen, daß diese Funktion eine Extremalfunktion des Variationsproblems

$$(\bar{1}) \qquad \delta \iint \bar{f}(\bar{z}_{\bar{x}}, \bar{z}_{\bar{y}})\, d\bar{x}\, d\bar{y} = 0$$

ist, das wir als das zu (1) *adjungierte Variationsproblem* bezeichnen wollen.

4. Fortsetzung. Man kann den Zusammenhang zwischen den Integranden $f(p, q)$ und $\bar{f}(\bar{p}, \bar{q})$ des ursprünglichen und des adjungierten Variationsproblems in eleganter Weise geometrisch charakterisieren. Zu diesem Ende betrachten wir in einem Raum, in dem X, Y, Z die rechtwinkligen Koordinaten bezeichnen, die Fläche zweiter Ordnung

$$Z^2 = X^2 + Y^2 + 1$$

und denken daselbst den Integranden des ursprünglichen Variationsproblems durch die Fläche

$$(11) \qquad Z = f(X, Y)$$

realisiert. Aus den elementaren Formeln der analytischen Geometrie entnimmt man unmittelbar, daß der Pol der im Punkte X, Y, Z dieser letzten Fläche gezogenen Tangentialebene in bezug auf die obige Fläche zweiter Ordnung die folgenden Koordinaten besitzt:

$$\overline{X} = \frac{f_X}{f - Xf_X - Yf_Y}, \qquad \overline{Y} = \frac{f_Y}{f - Xf_X - Yf_Y}, \qquad \overline{Z} = \frac{1}{f - Xf_X - Yf_Y}.$$

Durch Elimination von X, Y erhalten wir aus diesen Gleichungen

$$\overline{Z} = \overline{f}(\overline{X}, \overline{Y}), \tag{12}$$

wobei $\overline{f}(\overline{X}, \overline{Y})$ eben der Integrand des adjungierten Variationsproblems ist. D. h. *die durch die Integranden der beiden Variationsprobleme* (des ursprünglichen und des adjungierten) *festgelegten Flächen* (11) *und* (12) *sind polarreziproke Flächen in bezug auf die betrachtete Fläche zweiter Ordnung.*

Daraus erkennt man (was übrigens schon aus der völligen Symmetrie der Formeln (6), (7), ($\overline{6}$), ($\overline{7}$) folgt) den *involutorischen Charakter des Adjungierens*; d. h. bildet man das adjungierte Variationsproblem des Variationsproblems ($\overline{1}$), so gelangt man zu dem ursprünglichen (1) zurück[6]).

Unsere Formeln werden eleganter, wenn man statt der bisher benutzten x, y wieder allgemeine Parameter u, v als unabhängige Veränderliche einführt, was — nach den Bezeichnungen in 1. — darauf hinauskommt, statt $f(p, q)$ die Funktion $F(p_1, p_2, p_3) = p_3 f\left(-\frac{p_1}{p_3}, -\frac{p_2}{p_3}\right)$ als Integranden des Variationsproblems zu nehmen. In entsprechender Weise setzen wir für den Integranden des adjungierten Problems

$$\overline{F}(\overline{p}_1, \overline{p}_2, \overline{p}_3) = \overline{p}_3 \overline{f}\left(-\frac{\overline{p}_1}{\overline{p}_3}, -\frac{\overline{p}_2}{\overline{p}_3}\right). \tag{$\overline{3}$}$$

Die Relationen (6), (7) und ($\overline{6}$), ($\overline{7}$) erhalten dann die folgende einfache Form (mit Rücksicht auf (3′))

$$\overline{p}_1 = \overline{F} F_{p_1}, \qquad \overline{p}_2 = \overline{F} F_{p_2}, \qquad \overline{p}_3 = \overline{F} F_{p_3}, \tag{13}$$

$$p_1 = F \overline{F}_{\overline{p}_1}, \qquad p_2 = F \overline{F}_{\overline{p}_2}, \qquad p_3 = F \overline{F}_{\overline{p}_3}, \tag{$\overline{13}$}$$

die man natürlich auch unabhängig vom Vorangehenden, wie folgt begründen kann: Da nämlich $F_{p_1}, F_{p_2}, F_{p_3}$ homogene Funktionen 0-ter Ordnung sind,

---

[6]) Auch die Ungleichungen (10) sind symmetrisch aufgebaut; denn man verifiziert unschwer die Relation

$$(f_{pp} f_{qq} - f_{pq}^2)\,(\overline{f}_{\overline{p}\overline{p}}\,\overline{f}_{\overline{q}\overline{q}} - \overline{f}_{\overline{p}\overline{q}}^{\,2}) = \left(\frac{1}{f\overline{f}}\right)^4,$$

so daß jene Ungleichungen — mit Rücksicht auf (7) — äquivalent mit der Aussage sind, daß $f(p, q)$ und $\overline{f}(\overline{p}, \overline{q})$ endlich und von Null verschieden sind.

so kann man vermöge der Gleichungen der ersten Zeile bzw. aus der Proportion $\bar{p}_1 : \bar{p}_2 : \bar{p}_3 = F_{p_1} : F_{p_2} : F_{p_3}$ die Größen $\frac{p_1}{p_3}$ und $\frac{p_2}{p_3}$ durch $\frac{\bar{p}_1}{\bar{p}_3}$ und $\frac{\bar{p}_2}{\bar{p}_3}$ ausdrücken; alsdann liefert etwa die dritte Gleichung $\overline{F}$ als homogene Funktion erster Ordnung von $\bar{p}_1, \bar{p}_2, \bar{p}_3$.[7]) Komponiert man die Gleichungen (13) — die man auch in der Form

$$\bar{p}_1 dp_1 + \bar{p}_2 dp_2 + \bar{p}_3 dp_3 = \overline{F}\, dF$$

schreiben kann — bzw. mit p_1, p_2, p_3, so ergibt sich

$$p_1 \bar{p}_1 + p_2 \bar{p}_2 + p_3 \bar{p}_3 = F\overline{F}$$

und daraus

$$\overline{F}\, dF + F\, d\overline{F} = (\bar{p}_1 dp_1 + \bar{p}_2 dp_2 + \bar{p}_3 dp_3) + (p_1 d\bar{p}_1 + p_2 d\bar{p}_2 + p_3 d\bar{p}_3).$$

Folglich ist

$$F\, d\overline{F} = p_1 d\bar{p}_1 + p_2 d\bar{p}_2 + p_3 d\bar{p}_3,$$

und dies ist der Inhalt der Gleichungen $(\overline{13})$.

Bezeichnen wir daher — wie in 2. — mit p_1, p_2, p_3 bzw. $\bar{p}_1, \bar{p}_2, \bar{p}_3$ die Unterdeterminanten der aus der ursprünglichen Extremalfläche bzw. aus ihrer adjungierten Fläche gebildeten Matrix

$$\begin{pmatrix} \xi_u & \eta_u & \zeta_u \\ \xi_v & \eta_v & \zeta_v \end{pmatrix} \text{ bzw. } \begin{pmatrix} \bar{\xi}_u & \bar{\eta}_u & \bar{\xi}_u \\ \bar{\xi}_v & \bar{\eta}_v & \bar{\xi}_v \end{pmatrix},$$

so besteht nach (5) die Proportion $\bar{p}_1 : \bar{p}_2 : \bar{p}_3 = F_{p_1} : F_{p_2} : F_{p_3}$. Führt man daher in der soeben angegebenen Weise die Funktion $\overline{F}(\bar{p}_1, \bar{p}_2, \bar{p}_3)$ ein, so gilt nach $(\overline{13})$ die analoge Proportion

$$(\overline{5}) \qquad p_1 : p_2 : p_3 = \overline{F}_{\bar{p}_1} : \overline{F}_{\bar{p}_2} : \overline{F}_{\bar{p}_3}.$$

Dabei ist natürlich vorausgesetzt, daß man sich auf ein solches Stück der ursprünglichen Extremalfläche beschränkt, daß die Bestimmung von $\overline{F}$ aus den Gleichungen (13) möglich ist, d. h. daß man $\frac{p_1}{p_3}$ und $\frac{p_2}{p_3}$ aus der aus diesen entspringenden Proportion durch $\frac{\bar{p}_1}{\bar{p}_3}$ und $\frac{\bar{p}_2}{\bar{p}_3}$ ausdrücken kann; die Bedingungen hierfür sind in (10) bzw. in der Anmerkung [6]) angegeben worden.

5. **Die adjungierte Fläche als Extremalfläche des adjungierten Variationsproblems.** Um den Zusammenhang zwischen adjungierten Flächen und adjungiertem Variationsproblem darzulegen, greifen wir auf die Definitionsgleichung dieser Flächen zurück, die wir in der Form

$$(\text{III}) \quad d\bar{\xi} = F_{p_2} d\eta - F_{p_3} d\zeta, \quad d\bar{\eta} = F_{p_3} d\zeta - F_{p_1} d\xi, \quad d\bar{\zeta} = F_{p_1} d\xi - F_{p_2} d\eta$$

[7]) Auf eine andere einfache Berechnung von $\overline{F}(\bar{p}_1, \bar{p}_2, \bar{p}_3)$ wird in 6. hingewiesen.

zugrunde legen, und berechnen die analog aufgebauten Ausdrücke

$$\bar{F}_{\bar{p}_3}d\bar{\eta} - \bar{F}_{\bar{p}_2}d\bar{\xi}, \quad \bar{F}_{\bar{p}_1}d\bar{\xi} - \bar{F}_{\bar{p}_3}d\bar{\xi}, \quad \bar{F}_{\bar{p}_2}d\bar{\xi} - \bar{F}_{\bar{p}_1}d\bar{\eta}.$$

Eine einfache Rechnung ergibt mit Rücksicht auf (III) und ($\overline{13}$) die Gleichungen

$$\bar{F}_{\bar{p}_3}d\bar{\eta} - \bar{F}_{\bar{p}_2}d\bar{\xi} = \frac{1}{F}[p_3(F_{p_1}d\zeta - F_{p_3}d\xi) - p_2(F_{p_2}d\xi - F_{p_1}d\eta)]$$

$$= \frac{1}{F}[-(p_1F_{p_1}+p_2F_{p_2}+p_3F_{p_3})d\xi + F_{p_1}(p_1d\xi + p_2d\eta + p_3d\zeta)] = -d\xi,$$

und in gleicher Weise

$$(\overline{\text{III}}) \qquad \bar{F}_{\bar{p}_1}d\bar{\xi} - \bar{F}_{\bar{p}_3}d\bar{\xi} = -d\eta, \quad \bar{F}_{\bar{p}_2}d\bar{\xi} - \bar{F}_{\bar{p}_1}d\bar{\eta} = -d\zeta.$$

Ausführlicher geschrieben lauten diese Gleichungen folgendermaßen:

$$(\overline{\text{II}}) \qquad \begin{aligned} -\xi_u &= \begin{vmatrix} \bar{\eta}_u & \bar{\xi}_u \\ \bar{F}_{\bar{p}_2} & \bar{F}_{\bar{p}_3} \end{vmatrix}, \quad -\eta_u = \begin{vmatrix} \bar{\xi}_u & \bar{\xi}_u \\ \bar{F}_{\bar{p}_3} & \bar{F}_{\bar{p}_1} \end{vmatrix}, \quad -\zeta_u = \begin{vmatrix} \bar{\xi}_u & \bar{\eta}_u \\ \bar{F}_{\bar{p}_1} & \bar{F}_{\bar{p}_2} \end{vmatrix}, \\ -\xi_v &= \begin{vmatrix} \bar{\eta}_v & \bar{\xi}_v \\ \bar{F}_{\bar{p}_2} & \bar{F}_{\bar{p}_3} \end{vmatrix}, \quad -\eta_v = \begin{vmatrix} \bar{\xi}_v & \bar{\xi}_v \\ \bar{F}_{\bar{p}_3} & \bar{F}_{\bar{p}_1} \end{vmatrix}, \quad -\zeta_v = \begin{vmatrix} \bar{\xi}_v & \bar{\eta}_v \\ \bar{F}_{\bar{p}_1} & \bar{F}_{\bar{p}_2} \end{vmatrix}. \end{aligned}$$

Aus diesen Gleichungen folgen aber durch Elimination von ξ, η, ζ die Gleichungen

$$\frac{\partial}{\partial u}\begin{vmatrix} \bar{\eta}_v & \bar{\xi}_v \\ \bar{F}_{\bar{p}_2} & \bar{F}_{\bar{p}_3} \end{vmatrix} - \frac{\partial}{\partial v}\begin{vmatrix} \bar{\eta}_u & \bar{\xi}_u \\ \bar{F}_{\bar{p}_2} & \bar{F}_{\bar{p}_3} \end{vmatrix} = \frac{\partial}{\partial u}\begin{vmatrix} \bar{\xi}_v & \bar{\xi}_v \\ \bar{F}_{\bar{p}_3} & \bar{F}_{\bar{p}_1} \end{vmatrix} - \frac{\partial}{\partial v}\begin{vmatrix} \bar{\xi}_u & \bar{\xi}_u \\ \bar{F}_{\bar{p}_3} & \bar{F}_{\bar{p}_1} \end{vmatrix}$$

$$= \frac{\partial}{\partial u}\begin{vmatrix} \bar{\xi}_v & \bar{\eta}_v \\ \bar{F}_{\bar{p}_1} & \bar{F}_{\bar{p}_2} \end{vmatrix} - \frac{\partial}{\partial v}\begin{vmatrix} \bar{\xi}_u & \bar{\eta}_u \\ \bar{F}_{\bar{p}_1} & \bar{F}_{\bar{p}_2} \end{vmatrix} = 0,$$

die mit den Euler-Lagrangeschen Differentialgleichungen des adjungierten Variationsproblems

$$(\bar{\text{I}}) \qquad \delta\int\int \bar{F}(\bar{p}_1, \bar{p}_2, \bar{p}_3)\,du\,dv = 0$$

übereinstimmen. Daher sind die adjungierten Flächen tatsächlich Lösungen des adjungierten Variationsproblems.

Die Gleichungen ($\overline{\text{II}}$) zeigen aber weiter, daß die in bezug auf das soeben angeschriebene Variationsproblem gebildete adjungierte Fläche der Extremalfläche $x = \bar{\xi}(u, v)$, $y = \bar{\eta}(u, v)$, $z = \bar{\zeta}(u, v)$ diejenige Fläche ist, deren Gleichung

$$x = -\xi(u, v), \quad y = -\eta(u, v), \quad z = -\zeta(u, v),$$

d. h. das Spiegelbild der ursprünglichen Extremalfläche in bezug auf den Koordinatenanfangspunkt.

Wir gelangen daher zu dem folgenden Resultat:

Die in bezug auf das Variationsproblem

$$\text{(I)} \qquad \delta \iint F(p_1, p_2, p_3)\, du\, dv = 0$$

gebildete adjungierte Fläche irgendeiner Extremalfläche dieses Problems ist Extremalfläche des adjungierten Variationsproblems

$$\text{(Ī)} \qquad \delta \iint \bar{F}(\bar{p}_1, \bar{p}_2, \bar{p}_3)\, du\, dv = 0;$$

bildet man zu dieser Fläche in bezug auf dieses Variationsproblem die adjungierte Fläche, so erhält man das Spiegelbild der ursprünglichen Extremalfläche in bezug auf den Koordinatenanfangspunkt; diese Fläche ist offenbar ebenfalls Extremalfläche des ursprünglichen Variationsproblems.

§ 2.

Über die Abbildung einer Extremalfläche auf ihre adjungierte Fläche.

6. Invarianz des Variationsintegrals. Wie bereits in 2. bemerkt wurde, es liefern die Gleichungen

$$\text{(III)} \quad d\bar{\xi} = \bar{F}_{\bar{p}_3} d\eta - \bar{F}_{\bar{p}_2} d\zeta, \quad d\bar{\eta} = \bar{F}_{\bar{p}_1} d\zeta - \bar{F}_{\bar{p}_3} d\xi, \quad d\bar{\zeta} = \bar{F}_{\bar{p}_2} d\xi - \bar{F}_{\bar{p}_1} d\eta,$$

die zur Definition der adjungierten Fläche dienten, gleichzeitig eine Abbildung zwischen diesen Flächen, indem wir Punkte beider Flächen, die zu denselben Parameterwerten gehören, einander entsprechen lassen; wir beschäftigen uns im Folgenden mit dieser Abbildung.

Aus der obigen Definition der adjungierten Fläche entnahmen wir in 2. die Relationen

$$(4) \quad \bar{p}_1 = F(p_1, p_2, p_3) F_{p_1}, \quad \bar{p}_2 = F(p_1, p_2, p_3) F_{p_2}, \quad \bar{p}_3 = F(p_1, p_2, p_3) F_{p_3};$$

andererseits gilt auf Grund der Definition des adjungierten Variationsproblems die Gleichung

$$(13) \quad \bar{p}_1 = \bar{F}(\bar{p}_1, \bar{p}_2, \bar{p}_3) F_{\bar{p}_1}, \quad \bar{p}_2 = \bar{F}(\bar{p}_1, \bar{p}_2, \bar{p}_3) F_{\bar{p}_2}, \quad \bar{p}_3 = \bar{F}(\bar{p}_1, \bar{p}_2, \bar{p}_3) F_{\bar{p}_3}.$$

Folglich ist

$$(14) \qquad F(p_1, p_2, p_3) = \bar{F}(\bar{p}_1, \bar{p}_2, \bar{p}_3)$$

oder (für jedes Gebiet G):

$$\iint_G F(p_1, p_2, p_3)\, du\, dv = \iint_G \bar{F}(\bar{p}_1, \bar{p}_2, \bar{p}_3)\, du\, dv,$$

d. h. das *Integral des ursprünglichen Variationsproblems, erstreckt über einen Teil einer Extremalfläche desselben, ist gleich dem Integral des adjungierten Variationsproblems, erstreckt über den entsprechenden Teil der adjungierten Fläche.*

Die Gleichung (14) gibt ein bequemes Mittel zur Herstellung des adjungierten Variationsproblems. Man erhält nämlich den Integranden

$\bar{F}(\bar{p}_1, \bar{p}_2, \bar{p}_3)$, wenn man aus den Gleichungen (4) p_1, p_2, p_3 durch $\bar{p}_1, \bar{p}_2, \bar{p}_3$ ausdrückt und diese Ausdrücke an Stelle der Argumente in die Funktion $F(p_1, p_2, p_3)$ einsetzt.

7. Entsprechende Richtungen. Aus der Definitionsgleichung (III) der adjungierten Fläche folgt unmittelbar die Relation

$$d\xi\, d\bar{\xi} + d\eta\, d\bar{\eta} + d\zeta\, d\bar{\xi} = 0,$$

d. h. *jedem Linienelement auf einer Extremalfläche entspricht auf der adjungierten Fläche ein Linienelement, das auf diesem senkrecht steht.*

8. Invarianz einer nichteuklidischen Bogenlänge. Um auf eine wesentlich tiefer liegende Eigenschaft der fraglichen Abbildung zu gelangen, erinnern wir an die bekannte Tatsache, daß jede Minimalfläche in ihre adjungierte Fläche verbiegbar ist. Dies ist natürlich bei allgemeinen Variationsproblemen nicht zu erwarten; wohl kann man aber auf der Extremalfläche bzw. auf der adjungierten Fläche eine nichteuklidische Maßbestimmung, die nur von dem entsprechenden Variationsproblem abhängig ist, derart angeben, daß im Sinne dieser Maßbestimmungen unsere Abbildung eine Verbiegung ist.

Um zu diesen Maßbestimmungen zu gelangen, verfahren wir, wie folgt: Wir bezeichnen mit a, b, c zunächst beliebige, später zu bestimmende Größen und betrachten die Matrix

$$\begin{pmatrix} a\,d\xi & b\,d\eta & c\,d\zeta \\ a\,F_{p_1} & b\,F_{p_2} & c\,F_{p_3} \end{pmatrix};$$

durch Anwendung der bekannten Laplaceschen Identität erhalten wir — mit Rücksicht auf III —

$$\begin{aligned}(a^2 d\xi^2 + b^2 d\eta^2 + c^2 d\zeta^2)(a^2 F_{p_1}^2 + b^2 F_{p_2}^2 + c^2 F_{p_3}^2) \\ - (a^2 F_{p_1} d\xi + b^2 F_{p_2} d\eta + c^2 F_{p_3} d\eta)^2 \\ = \begin{vmatrix} b\,d\eta & c\,d\zeta \\ b\,F_{p_2} & c\,F_{p_3} \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} c\,d\zeta & a\,d\xi \\ c\,F_{p_3} & a\,F_{p_1} \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} a\,d\xi & b\,d\eta \\ a\,F_{p_1} & b\,F_{p_2} \end{vmatrix}^2 \\ = b^2 c^2 d\bar{\xi}^2 + c^2 a^2 d\bar{\eta}^2 + a^2 b^2 d\bar{\xi}^2.\end{aligned}$$

Wir bringen auf der linken Seite das quadratische Glied zum Verschwinden, indem wir $a^2 F_{p_1}, b^2 F_{p_2}, c^2 F_{p_3}$ bzw. gleich p_1, p_2, p_3 wählen d. h.

$$a^2 = \frac{p_1}{F_{p_1}}, \quad b^2 = \frac{p_2}{F_{p_2}}, \quad c^2 = \frac{p_3}{F_{p_3}}$$

setzen; da bei dieser Wahl von a, b, c

$$a^2 F_{p_1}^2 + b^2 F_{p_2}^2 + c^2 F_{p_3}^2 = p_1 F_{p_1} + p_2 F_{p_2} + p_3 F_{p_3} = F$$

wird, so ergibt die obige Laplacesche Identität

$$F\left(\frac{p_1}{F_{p_1}}d\xi^2+\frac{p_2}{F_{p_2}}d\eta^2+\frac{p_3}{F_{p_3}}d\zeta^2\right)=\frac{p_1p_2p_3}{F_{p_1}F_{p_2}F_{p_3}}\left(\frac{F_{p_1}}{p_1}d\bar{\xi}^2+\frac{F_{p_2}}{p_2}d\bar{\eta}^2+\frac{F_{p_3}}{p_3}d\bar{\zeta}^2\right).$$

Nun liefern aber die Relationen (13), ($\overline{13}$) in Verbindung mit der Gleichung (14) die Zusammenhänge

$$(13')\qquad \frac{p_1}{F_{p_1}}=F^2\frac{\overline{F}_{\bar{p}_1}}{\bar{p}_1},\quad \frac{p_2}{F_{p_2}}=F^2\frac{\overline{F}_{\bar{p}_2}}{\bar{p}_2},\quad \frac{p_3}{F_{p_3}}=F^2\frac{\overline{F}_{\bar{p}_3}}{\bar{p}_3}.$$

Wir können daher die rechtsstehende quadratische Form auf die folgende Gestalt bringen

$$F\sqrt{\frac{p_1p_2p_3}{F_{p_1}F_{p_2}F_{p_3}}}\sqrt{\frac{\overline{F}_{\bar{p}_1}\overline{F}_{\bar{p}_2}\overline{F}_{\bar{p}_3}}{\bar{p}_1\bar{p}_2\bar{p}_3}}\left(\frac{\bar{p}_1}{\overline{F}_{\bar{p}_1}}d\bar{\xi}^2+\frac{\bar{p}_2}{\overline{F}_{\bar{p}_2}}d\bar{\eta}^2+\frac{\bar{p}_3}{\overline{F}_{\bar{p}_3}}d\bar{\zeta}^2\right).$$

Damit gewinnen wir aber die Relation

$$\sqrt{\frac{F\,F_{p_1}F_{p_2}F_{p_3}}{p_1p_2p_3}}\left(\frac{p_1}{F_{p_1}}d\xi^2+\frac{p_2}{F_{p_2}}d\eta^2+\frac{p_3}{F_{p_3}}d\zeta^2\right)$$
$$=\sqrt{\frac{\overline{F}\,\overline{F}_{\bar{p}_1}\overline{F}_{\bar{p}_2}\overline{F}_{\bar{p}_3}}{\bar{p}_1\bar{p}_2\bar{p}_3}}\left(\frac{\bar{p}_1}{\overline{F}_{\bar{p}_1}}d\bar{\xi}^2+\frac{\bar{p}_2}{\overline{F}_{\bar{p}_2}}d\bar{\eta}^2+\frac{\bar{p}_3}{\overline{F}_{\bar{p}_3}}d\bar{\zeta}^2\right),$$

und diese liefert eben das Gewünschte.

Wir denken uns nämlich auf der ursprünglichen Extremalfläche eine nichteuklidische Maßbestimmung derart eingeführt, daß das Differential der Bogenlänge

$$ds^2=\sqrt{\frac{F\,F_{p_1}F_{p_2}F_{p_3}}{p_1p_2p_3}}\left(\frac{p_1}{F_{p_1}}d\xi^2+\frac{p_2}{F_{p_2}}d\eta^2+\frac{p_3}{F_{p_3}}d\zeta^2\right)$$

sei und definieren in gleicher Weise auf der adjungierten Fläche als Differential der Bogenlänge

$$d\bar{s}^2=\sqrt{\frac{\overline{F}\,\overline{F}_{\bar{p}_1}\overline{F}_{\bar{p}_2}\overline{F}_{\bar{p}_3}}{\bar{p}_1\bar{p}_2\bar{p}_3}}\left(\frac{\bar{p}_1}{\overline{F}_{\bar{p}_1}}d\bar{\xi}^2+\frac{\bar{p}_2}{\overline{F}_{\bar{p}_2}}d\bar{\eta}^2+\frac{\bar{p}_3}{\overline{F}_{\bar{p}_3}}d\bar{\zeta}^2\right);$$

diese beiden Definitionen sind völlig *symmetrisch*, indem die Maßbestimmung auf der Extremalfläche in gleicher Weise aus der Gleichung dieser Fläche und aus dem ursprünglichen Variationsproblem aufgebaut ist, wie die Maßbestimmung auf der adjungierten Fläche aus dieser Fläche bzw. aus dem adjungierten Variationsproblem. Wir sind daher zu dem folgenden Satz gelangt:

Bei Zugrundelegung dieser nichteuklidischen Maßbestimmungen ist die Abbildung der Extremalfläche auf die adjungierte Fläche eine Verbiegung.

9. Das Variationsintegral als nichteuklidischer Flächeninhalt. Die beiden Differentialformen ds^2 und $d\bar{s}^2$ sind gleichzeitig reell bzw. rein imaginär. Denn es folgt mit Hilfe der auf Grund der Relationen (13), ($\overline{13}$) und (14) leicht verifizierbaren Gleichung

$$\frac{F F_{p_1} F_{p_2} F_{p_3}}{p_1 p_2 p_3} \frac{\overline{F}\,\overline{F}_{\overline{p}_1}\overline{F}_{\overline{p}_2}\overline{F}_{\overline{p}_3}}{\overline{p}_1\overline{p}_2\overline{p}_3} = \frac{1}{F^4} > 0,$$

daß die beiden in ds^2 bzw. $d\bar{s}^2$ auftretenden Wurzeln gleichzeitig reell bzw. rein imaginär sind. Wir wollen im letzteren Falle die obige Definition der Bogenlängen mit i multipliziert als Fundamentalform unserer Maßbestimmungen nehmen, um in jedem Falle reelle Bogenlängen zu erhalten. Dementsprechend setzen wir

$$(15)\qquad \begin{aligned} \lambda_1 &= \sqrt{\pm \frac{F F_{p_1} F_{p_2} F_{p_3}}{p_1 p_2 p_3}}\,\frac{p_1}{F_{p_1}}, \quad \lambda_2 = \sqrt{\pm \frac{F F_{p_1} F_{p_2} F_{p_3}}{p_1 p_2 p_3}}\,\frac{p_2}{F_{p_2}}, \quad \lambda_3 = \sqrt{\pm \frac{F F_{p_1} F_{p_2} F_{p_3}}{p_1 p_2 p_3}}\,\frac{p}{F_{p}} \\ \bar{\lambda}_1 &= \sqrt{\pm \frac{\overline{F}\,\overline{F}_{\overline{p}_1}\overline{F}_{\overline{p}_2}\overline{F}_{\overline{p}_3}}{\overline{p}_1\overline{p}_2\overline{p}_3}}\,\frac{\overline{p}_1}{\overline{F}_{\overline{p}_1}}, \quad \bar{\lambda}_2 = \sqrt{\pm \frac{\overline{F}\,\overline{F}_{\overline{p}_1}\overline{F}_{\overline{p}_2}\overline{F}_{\overline{p}_3}}{\overline{p}_1\overline{p}_2\overline{p}_3}}\,\frac{\overline{p}_2}{\overline{F}_{\overline{p}_2}}, \quad \bar{\lambda}_3 = \sqrt{\pm \frac{\overline{F}\,\overline{F}_{\overline{p}_1}\overline{F}_{\overline{p}_2}\overline{F}_{\overline{p}_3}}{\overline{p}_1\overline{p}_2\overline{p}_3}}\,\frac{\overline{p}_3}{\overline{F}_{\overline{p}}} \end{aligned}$$

wo *überall* das positive bzw. negative Vorzeichen zu nehmen ist; wir nehmen dasjenige Vorzeichen, das für $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \bar{\lambda}_1, \bar{\lambda}_2, \bar{\lambda}_3$ reelle Werte liefert. Dann sind die Größen $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ bis auf ihr Vorzeichen eindeutig bestimmt (wir werden darüber später verfügen). Da ferner — wegen (13′) —

$$\lambda_1\bar{\lambda}_1 = \lambda_2\bar{\lambda}_2 = \lambda_3\bar{\lambda}_3 = F^2\sqrt{\frac{1}{F^4}},$$

so wollen wir die Vorzeichen von $\bar{\lambda}_1, \bar{\lambda}_2, \bar{\lambda}_3$ derart bestimmen, daß

$$(16)\qquad \lambda_1\bar{\lambda}_1 = \lambda_2\bar{\lambda}_2 = \lambda_3\bar{\lambda}_3 = 1$$

ausfällt.

Schreiben wir nun in Anlehnung an die Flächentheorie

$$(17)\qquad \begin{aligned} E^* &= \lambda_1\xi_u^2 + \lambda_2\eta_u^2 + \lambda_3\zeta_u^2, \qquad G^* = \lambda_1\xi_v^2 + \lambda_2\eta_v^2 + \lambda_3\zeta_v^2, \\ F^* &= \lambda_1\xi_u\xi_v + \lambda_2\eta_u\eta_v + \lambda_3\zeta_u\zeta_v, \end{aligned}$$

und entsprechend für die adjungierte Fläche

$$(\overline{17})\qquad \begin{aligned} \bar{E}^* &= \bar{\lambda}_1\bar{\xi}_u^2 + \bar{\lambda}_2\bar{\eta}_u^2 + \bar{\lambda}_3\bar{\xi}_u^2, \qquad \bar{G}^* = \bar{\lambda}_1\bar{\xi}_v^2 + \bar{\lambda}_2\bar{\eta}_v^2 + \bar{\lambda}_3\bar{\xi}_v^2, \\ \bar{F}^* &= \bar{\lambda}_1\bar{\xi}_u\bar{\xi}_v + \bar{\lambda}_2\bar{\eta}_u\bar{\eta}_v + \bar{\lambda}_3\bar{\xi}_u\bar{\xi}_v, \end{aligned}$$

so kann man die Integrale

$$\iint |\sqrt{E^*G^* - F^{*2}}|\,du\,dv \quad \text{bzw.} \quad \iint |\sqrt{\bar{E}^*\bar{G}^* - F^{*2}}|\,du\,dv$$

bei Zugrundelegung der oben angegebenen Maßbestimmungen *als die nichteuklidischen Flächeninhalte* der Extremalfläche bzw. der adjungierten

Fläche betrachten. Für die Integranden erhält man einen bemerkenswerten Ausdruck; in der Tat, wendet man die Laplacesche Identität auf die Matrix

$$\begin{pmatrix} \sqrt{\lambda_1}\,\xi_u & \sqrt{\lambda_2}\,\eta_u & \sqrt{\lambda_3}\,\zeta_u \\ \sqrt{\lambda_1}\,\xi_v & \sqrt{\lambda_2}\,\eta_v & \sqrt{\lambda_3}\,\zeta_v \end{pmatrix}$$

an, so ergibt sich

$$|E^* G^* - F^{*2}| = |\lambda_1 \lambda_2 p_3^2 + \lambda_2 \lambda_3 p_1^2 + \lambda_3 \lambda_1 p_2^2| = F^2,$$

und wir erhalten das folgende Resultat

$$\iint |\sqrt{E^* G^* - F^{*2}}|\, du\, dv = \iint F\, du\, dv,$$

d. h. *das vorgelegte Variationsintegral, erstreckt auf einen Teil der Extremalfläche, ist gleich dem nichteuklidischen Flächeninhalt dieses Flächenstückes bei Zugrundelegung der oben angegebenen Maßbestimmung.*

Wir bemerken noch, daß man die Größen $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ in der folgenden Form schreiben kann

$$\lambda_1 = \sqrt{\pm \frac{p_1}{p_2 p_3} : \frac{\bar{p}_1}{\bar{p}_2 \bar{p}_3}}, \quad \lambda_2 = \sqrt{\pm \frac{p_2}{p_3 p_1} : \frac{\bar{p}_2}{\bar{p}_3 \bar{p}_1}}, \quad \lambda_3 = \sqrt{\pm \frac{p_3}{p_1 p_2} : \frac{\bar{p}_3}{\bar{p}_1 \bar{p}_2}}$$

und entsprechend die Größen $\bar{\lambda}_1, \bar{\lambda}_2, \bar{\lambda}_3$, welche Formeln den symmetrischen Charakter dieser Größen zeigen.

10. Isotherme Parameter. Ein Blick auf die Formeln (15) zeigt, daß die Größen $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ homogene Funktionen 0-ten Grades von p_1, p_2, p_3 sind. Dies hat zur Folge — da das Verhältnis der Funktionaldeterminanten p_1, p_2, p_3 bei Einführung neuer Veränderlichen an Stelle der u, v ungeändert bleibt — daß $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ von der Wahl der Parameter u, v unabhängige Funktionen auf der vorgelegten Extremalfläche bedeuten.

Wir wollen nun statt u, v neue Parameter α, β

$$\alpha = \alpha(u, v), \qquad \beta = \beta(u, v)$$

derart einführen, daß die beiden Relationen

$$\lambda_1 \xi_\alpha^2 + \lambda_2 \eta_\alpha^2 + \lambda_3 \zeta_\alpha^2 = \lambda_1 \xi_\beta^2 + \lambda_2 \eta_\beta^2 + \lambda_3 \zeta_\beta^2$$
$$\lambda_1 \xi_\alpha \xi_\beta + \lambda_2 \eta_\alpha \eta_\beta + \lambda_3 \zeta_\alpha \zeta_\beta = 0$$

bestehen. Dies ist stets möglich; denn ein klassischer Satz der Theorie der Differentialformen lehrt, daß wenn $\alpha(u, v)$ und $\beta(u, v)$ Lösungen des Differentialgleichungssystems

$$\beta_u = \frac{F^* \alpha_u - E^* \alpha_v}{\sqrt{E^* G^* - F^{*2}}}, \qquad \beta_v = \frac{G^* \alpha_u - F^* \alpha_v}{\sqrt{E^* G^* - F^{*2}}}$$

bedeuten, die quadratische Differentialform

$$\lambda_1 d\xi^2 + \lambda_2 d\eta^2 + \lambda_3 d\zeta^2 = E^* du^2 + 2F^* du\, dv + G^* dv^2$$

in $$\theta(\alpha, \beta)(d\alpha^2 + d\beta^2)$$

übergeht, wobei $\theta(\alpha, \beta)$ eine Funktion von α, β bedeutet. Führen wir daher solche α, β als neue Parameter ein, so wird

$$E^* = G^*, \quad F^* = 0.$$

Solche Parameter bezeichnen wir als *isotherme Parameter in unserer nichteuklidischen Maßbestimmung* auf der vorgelegten Extremalfläche, die Kurven $\alpha =$ konst. bzw. $\beta =$ konst. aber als isotherme Kurven.

In isothermen Parametern (in diesem Sinne) nehmen die Differentialgleichungen unseres Variationsproblems eine besonders einfache Gestalt an, die das Studium dieser Flächen sehr erleichtert. Es handelt sich dabei um das Analogon des bekannten Weierstraßschen Satzes, daß die Gleichungen einer Minimalfläche in isothermen Parametern (im gewöhnlichen Sinne) Potentialfunktionen sind.

Setzen wir zur Abkürzung

$$X = \sqrt{\lambda_1}(\xi_\alpha + i\,\xi_\beta), \quad Y = \sqrt{\lambda_2}(\eta_\alpha + i\,\eta_\beta), \quad Z = \sqrt{\lambda_3}(\zeta_\alpha + i\,\zeta_\beta),$$

so kann man die Gleichungen $E^* = G^*$, $F^* = 0$, die für die Wahl der Parameter α, β charakteristisch sind, in die eine Gleichung

$$X^2 + Y^2 + Z^2 = 0 \tag{18}$$

zusammenfassen. Da ferner — wegen der Invarianz unserer Bogenlänge — gleichzeitig auch $\overline{E}^* = \overline{G}^*$, $\overline{F}^* = 0$ ist, so gilt, wenn wir die entsprechende Abkürzung

$$\overline{X} = \sqrt{\overline{\lambda}_1}(\overline{\xi}_\alpha + i\,\overline{\xi}_\beta), \quad \overline{Y} = \sqrt{\overline{\lambda}_2}(\overline{\eta}_\alpha + i\,\overline{\eta}_\beta), \quad \overline{Z} = \sqrt{\overline{\lambda}_3}(\overline{\xi}_\alpha + i\,\overline{\xi}_\beta)$$

einführen, in gleicher Weise

$$\overline{X}^2 + \overline{Y}^2 + \overline{Z}^2 = 0. \tag{19}$$

Endlich liefert die Gleichung in Nr. 7

$$d\xi\, d\overline{\xi} + d\eta\, d\overline{\eta} + d\zeta\, d\overline{\xi} = 0$$

in Verbindung mit den Relationen $\lambda_1 \overline{\lambda}_1 = \lambda_2 \overline{\lambda}_2 = \lambda_3 \overline{\lambda}_3 = 1$ die Gleichung:

$$X\overline{X} + Y\overline{Y} + Z\overline{Z} = 0. \tag{20}$$

Aus den Gleichungen (18), (19), (20) folgt aber ohne Schwierigkeit die Proportionalität der Größen X, Y, Z mit den Größen $\overline{X}, \overline{Y}, \overline{Z}$, d. h. es ist — wenn t den Proportionalitätsfaktor bedeutet —

$$\overline{X} = tX, \quad \overline{Y} = tY, \quad \overline{Z} = tZ.$$

Um den Faktor t zu bestimmen, ziehen wir die Gleichungen (II) heran, die wir in der folgenden Form schreiben:

$$\frac{\overline{X}}{\sqrt{\lambda_1}} = t\sqrt{\lambda_1}\,X = F_{p_3}\frac{Y}{\sqrt{\lambda_2}} - F_{p_2}\frac{Z}{\sqrt{\lambda_3}}, \qquad \frac{\overline{Y}}{\sqrt{\lambda_2}} = t\sqrt{\lambda_2}\,Y = F_{p_1}\frac{Z}{\sqrt{\lambda_3}} - F_{p_3}\frac{X}{\sqrt{\lambda_1}},$$

$$\frac{\overline{Z}}{\sqrt{\lambda_3}} = t\sqrt{\lambda_3}\,Z = F_{p_2}\frac{X}{\sqrt{\lambda_1}} - F_{p_1}\frac{Y}{\sqrt{\lambda_2}}.$$

Aus diesem homogenen Gleichungssystem in X, Y, Z folgt das Verschwinden der Determinante

$$\begin{vmatrix} -t\sqrt{\lambda_1} & \frac{F_{p_3}}{\sqrt{\lambda_2}} & -\frac{F_{p_2}}{\sqrt{\lambda_3}} \\ -\frac{F_{p_3}}{\sqrt{\lambda_1}} & -t\sqrt{\lambda_2} & \frac{F_{p_1}}{\sqrt{\lambda_3}} \\ \frac{F_{p_2}}{\sqrt{\lambda_1}} & -\frac{F_{p_1}}{\sqrt{\lambda_2}} & -t\sqrt{\lambda_3} \end{vmatrix}$$

$$= -\sqrt{\lambda_1\lambda_2\lambda_3}\,t^3 - \left(\sqrt{\frac{\lambda_1}{\lambda_2\lambda_3}}F_{p_1}^2 + \sqrt{\frac{\lambda_2}{\lambda_3\lambda_1}}F_{p_2}^2 + \sqrt{\frac{\lambda_3}{\lambda_1\lambda_2}}F_{p_3}^2\right)t.$$

In der soeben erhaltenen Gleichung[8]) für t

$$\lambda_1\lambda_2\lambda_3 t^2 + (\lambda_1 F_{p_1}^2 + \lambda_2 F_{p_2}^2 + \lambda_3 F_{p_3}^2) = 0$$

sind aber die beiden Koeffizienten einander gleich, denn man findet ohne Mühe

$$\lambda_1 F_{p_1}^2 + \lambda_2 F_{p_2}^2 + \lambda_3 F_{p_3}^2 = \sqrt{\pm\frac{F\,F_{p_1}F_{p_2}F_{p_3}}{p_1p_2p_3}}\,(p_1F_{p_1} + p_2F_{p_2} + p_3F_{p_3}) = \lambda_1\lambda_2\lambda_3.$$

Daher ist

$$t^2 + 1 = 0, \quad \text{d. h. } t = \pm i$$

und

$$\overline{X} = \pm iX, \qquad \overline{Y} = \pm iY, \qquad \overline{Z} = \pm iZ.$$

Die wegen (16) damit äquivalenten Gleichungen

$$\bar{\xi}_\alpha + i\bar{\xi}_\beta = \pm i\lambda_1(\xi_\alpha + i\xi_\beta), \qquad \bar{\eta}_\alpha + i\bar{\eta}_\beta = \pm i\lambda_2(\eta_\alpha + i\eta_\beta),$$
$$\bar{\zeta}_\alpha + i\bar{\zeta}_\beta = \pm i\lambda_3(\zeta_\alpha + i\zeta_\beta)$$

zeigen zunächst, daß man durch passende Wahl der Vorzeichen von $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ erreichen kann — da man über diese noch frei verfügt — daß in diesen Gleichungen das obere Vorzeichen statthabe. Alsdann wird — da $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ reell sind —

$$\text{(IV)} \qquad \begin{aligned} \bar{\xi}_\beta &= \lambda_1\xi_\alpha, & \bar{\eta}_\beta &= \lambda_2\eta_\alpha, & \bar{\zeta}_\beta &= \lambda_3\zeta_\alpha, \\ \bar{\xi}_\alpha &= -\lambda_1\xi_\beta, & \bar{\eta}_\alpha &= -\lambda_2\eta_\beta, & \bar{\zeta}_\alpha &= -\lambda_3\zeta_\beta. \end{aligned}$$

Wir sind daher zu dem folgenden Analogon des oben genannten Weierstraßschen Satzes gelangt:

---

[8]) t muß offenbar von Null verschieden sein, da die Annahme $t = 0$ auf $\bar{\xi} = \text{konst.}$, $\bar{\eta} = \text{konst.}$, $\bar{\zeta} = \text{konst.}$ führt.

Sind α, β in der zugrunde gelegten nichteuklidischen Maßbestimmung isotherme Parameter, so nehmen die Differentialgleichungen unseres Variationsproblems die einfache Gestalt (IV) *an, wobei $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ die unter* (15) *angegebenen Ausdrücke sind.*

11. Umkehrung des vorangehenden Satzes. *Verstehen wir unter $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ die in* (15) *angegebenen Ausdrücke, wobei $F(p_1, p_2, p_3)$ eine homogene Funktion ersten Grades, p_1, p_2, p_3 aber die Unterdeterminanten der Matrix*

$$\begin{pmatrix} \xi_\alpha & \eta_\alpha & \zeta_\alpha \\ \xi_\beta & \eta_\beta & \zeta_\beta \end{pmatrix}$$

bedeuten, und sind diese Funktionen ξ, η, ζ solche Lösungen des Differentialgleichungssystems

$$\text{(IV)} \qquad \begin{aligned} \bar{\xi}_\beta &= \lambda_1 \xi_\alpha, & \bar{\eta}_\beta &= \lambda_2 \eta_\alpha, & \bar{\zeta}_\beta &= \lambda_3 \zeta_\alpha, \\ \bar{\xi}_\alpha &= -\lambda_1 \xi_\beta, & \bar{\eta}_\alpha &= -\lambda_2 \eta_\beta, & \bar{\zeta}_\alpha &= -\lambda_3 \zeta_\beta, \end{aligned}$$

für die

$$\text{(21)} \qquad \begin{gathered} \lambda_1 \xi_\alpha^2 + \lambda_2 \eta_\alpha^2 + \lambda_3 \zeta_\alpha^2 = \lambda_1 \xi_\beta^2 + \lambda_2 \eta_\beta^2 + \lambda_3 \zeta_\beta^2, \\ \lambda_1 \xi_\alpha \xi_\beta + \lambda_2 \eta_\alpha \eta_\beta + \lambda_3 \zeta_\alpha \zeta_\beta = 0 \end{gathered}$$

ist, so ist $x = \xi(\alpha, \beta)$, $y = \eta(\alpha, \beta)$, $z = \zeta(\alpha, \beta)$ eine Extremalfläche des Variationsproblems $\delta \iint F(p_1, p_2, p_3)\, d\alpha\, d\beta = 0$.

Setzt man nämlich für einen Augenblick

$$P_1 = \sqrt{\lambda_2 \lambda_3}\, \frac{p_1}{F}, \qquad P_2 = \sqrt{\lambda_3 \lambda_1}\, \frac{p_2}{F}, \qquad P_3 = \sqrt{\lambda_1 \lambda_2}\, \frac{p_3}{F},$$

so erkennt man sofort das Bestehen der folgenden Gleichungen

$$P_1 \sqrt{\lambda_1}\, \xi_\alpha + P_2 \sqrt{\lambda_2}\, \eta_\alpha + P_3 \sqrt{\lambda_3}\, \zeta_\alpha = 0, \quad P_1 \sqrt{\lambda_1}\, \xi_\beta + P_2 \sqrt{\lambda_2}\, \eta_\beta + P_3 \sqrt{\lambda_3}\, \zeta_\beta = 0,$$
$$\pm (P_1^2 + P_2^2 + P_3^2) = 1.$$

Die vektorielle Bedeutung dieser Gleichungen besteht darin, daß der Vektor vom Betrage Eins $(\varepsilon P_1, \varepsilon P_2, \varepsilon P_3)$, wo $\varepsilon = 1$ oder $\varepsilon = i$ ist, senkrecht auf den Vektoren $(\sqrt{\lambda_1}\, \xi_\alpha, \sqrt{\lambda_2}\, \eta_\alpha, \sqrt{\lambda_3}\, \zeta_\alpha)$ und $(\sqrt{\lambda_1}\, \xi_\beta, \sqrt{\lambda_2}\, \eta_\beta, \sqrt{\lambda_3}\, \zeta_\beta)$ steht, die wegen (21) von gleicher Länge sind und selbst aufeinander senkrecht stehen. Daraus folgt aber, daß das vektorielle Produkt des obigen Einheitsvektors mit jeder dieser letzteren Vektoren bis auf das Vorzeichen mit dem anderen dieser letzteren Vektoren übereinstimmt; d. h.

$$\begin{aligned} \sqrt{\lambda_1}\, \xi_\alpha &= \pm \varepsilon (P_3 \sqrt{\lambda_2}\, \eta_\beta - P_2 \sqrt{\lambda_3}\, \zeta_\beta), & \sqrt{\lambda_1}\, \xi_\beta &= \mp \varepsilon (P_3 \sqrt{\lambda_2}\, \eta_\alpha - P_2 \sqrt{\lambda_3}\, \zeta_\alpha), \\ \sqrt{\lambda_2}\, \eta_\alpha &= \pm \varepsilon (P_1 \sqrt{\lambda_3}\, \zeta_\beta - P_3 \sqrt{\lambda_1}\, \xi_\beta), & \sqrt{\lambda_2}\, \eta_\beta &= \mp \varepsilon (P_1 \sqrt{\lambda_3}\, \zeta_\alpha - P_3 \sqrt{\lambda_1}\, \xi_\alpha), \\ \sqrt{\lambda_3}\, \zeta_\alpha &= \pm \varepsilon (P_2 \sqrt{\lambda_1}\, \xi_\beta - P_1 \sqrt{\lambda_2}\, \eta_\beta), & \sqrt{\lambda_3}\, \zeta_\beta &= \mp \varepsilon (P_2 \sqrt{\lambda_1}\, \xi_\alpha - P_1 \sqrt{\lambda_2}\, \eta_\alpha), \end{aligned}$$

wobei entweder überall das obere oder überall das untere Vorzeichen zu nehmen ist. Beachtet man aber die auf Grund von (15) leicht verifizierbaren Relationen

$$P_1\sqrt{\lambda_2\lambda_3} = \pm F_{p_1}, \qquad P_2\sqrt{\lambda_3\lambda_1} = \pm F_{p_2}, \qquad P_3\sqrt{\lambda_1\lambda_2} = \pm F_{p_3},$$

so ergeben die letzten Gleichungen durch Multiplikation mit $\sqrt{\lambda_1}$ bzw. $\sqrt{\lambda_2}$, $\sqrt{\lambda_3}$ in Verbindung mit dem zugrunde gelegten Differentialgleichungssystem

$$\begin{aligned}
\bar{\xi}_\beta &= \pm\,\varepsilon(F_{p_3}\eta_\beta - F_{p_2}\zeta_\beta), & \bar{\xi}_\alpha &= \pm\,\varepsilon(F_{p_3}\eta_\alpha - F_{p_2}\zeta_\alpha),\\
\bar{\eta}_\beta &= \pm\,\varepsilon(F_{p_1}\zeta_\beta - F_{p_3}\xi_\beta), & \bar{\eta}_\alpha &= \pm\,\varepsilon(F_{p_1}\zeta_\alpha - F_{p_3}\xi_\alpha),\\
\bar{\zeta}_\beta &= \pm\,\varepsilon(F_{p_2}\xi_\beta - F_{p_1}\eta_\beta), & \bar{\zeta}_\alpha &= \pm\,\varepsilon(F_{p_2}\xi_\alpha - F_{p_1}\eta_\alpha).
\end{aligned}$$

Diese Gleichungen lehren aber (nach den Ergebnissen in 1.), daß die Funktionen ξ, η, ζ tatsächlich eine Extremalfläche des fraglichen Variationsproblems darstellen. Aus der Realität der auftretenden Funktionen folgt übrigens $\varepsilon = 1$; daher sind $\bar{\xi}, \bar{\eta}, \bar{\zeta}$ die Koordinaten der adjungierten Fläche oder des Spiegelbildes dieser Fläche in bezug auf den Koordinatenanfangspunkt.

12. Analogon eines Darbouxschen Satzes. Bekanntlich bewies Darboux den schönen Satz, daß falls zwei Flächen so ineinander verbiegbar sind, daß die entsprechenden Linienelemente aufeinander senkrecht stehen, so sind diese Flächen adjungierte Minimalflächen. Dieser Satz besitzt in unserem Ideenkreis das folgende Analogon:

Es seien $F(p_1, p_2, p_3)$ *und* $\overline{F}(\overline{p}_1, \overline{p}_2, \overline{p}_3)$ *die Integranden adjungierter Variationsprobleme; wir führen auf den gegebenen Flächen*

$$x = \xi(u, v), \qquad y = \eta(u, v), \qquad z = \zeta(u, v),$$

bzw.

$$x = \bar{\xi}(u, v), \qquad y = \bar{\eta}(u, v), \qquad z = \bar{\zeta}(u, v)$$

nichteuklidische Maßbestimmungen ein, indem wir die Bogenlängen durch die quadratischen Differentialformen

$$ds^2 = \lambda_1 d\xi^2 + \lambda_2 d\eta^2 + \lambda_3 d\zeta^2$$

bzw.

$$d\bar{s}^2 = \bar{\lambda}_1 d\bar{\xi}^2 + \bar{\lambda}_2 d\bar{\eta}^2 + \bar{\lambda}_3 d\bar{\xi}^2$$

definieren, wobei $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ *bzw.* $\bar{\lambda}_1, \bar{\lambda}_2, \bar{\lambda}_3$ *die in* (15) *angegebenen Ausdrücke sind* ($\lambda_1\bar{\lambda}_1 = \lambda_2\bar{\lambda}_2 = \lambda_3\bar{\lambda}_3 = 1$). *Ist die vorgelegte Abbildung zwischen beiden Flächen bei Zugrundelegung dieser Maßbestimmungen eine Verbiegung und sind ferner entsprechende Linienelemente auf beiden Flächen stets orthogonal zueinander, so sind die gegebenen Flächen Extremalflächen der entsprechenden Variationsprobleme, und die eine Fläche ist die adjungierte Fläche der anderen oder deren Spiegelbild in bezug auf den Koordinatenanfangspunkt.*

In der Tat, führt man auf der ersten der gegebenen Flächen — wie in 9. — in bezug auf die zugrunde gelegte Maßbestimmung isotherme Parameter α, β ein, so daß

$$E^* = \lambda_1 \xi_\alpha^2 + \lambda_2 \eta_\alpha^2 + \lambda_3 \zeta_\alpha^2 = \lambda_1 \xi_\beta^2 + \lambda_2 \eta_\beta^2 + \lambda_3 \zeta_\beta^2 = G^*,$$
$$F^* = \lambda_1 \xi_\alpha \xi_\beta + \lambda_2 \eta_\alpha \eta_\beta + \lambda_3 \zeta_\alpha \zeta_\beta = 0,$$

so wird infolge unserer Annahmen gleichzeitig auch

$$\bar{E}^* = \bar{\lambda}_1 \bar{\xi}_\alpha^2 + \bar{\lambda}_2 \bar{\eta}_\alpha^2 + \bar{\lambda}_3 \zeta_\alpha^2 = \bar{\lambda}_1 \bar{\xi}_\beta^2 + \bar{\lambda}_2 \bar{\eta}_\beta^2 + \bar{\lambda}_3 \zeta_\beta^2 = \bar{G}^* = E^* = G^*,$$
$$\bar{F}^* = \bar{\lambda}_1 \bar{\xi}_\alpha \bar{\xi}_\beta + \bar{\lambda}_2 \bar{\eta}_\alpha \bar{\eta}_\beta + \bar{\lambda}_3 \bar{\zeta}_\alpha \bar{\zeta}_\beta = 0.$$

Setzt man wiederum zur Abkürzung

$$\sqrt{\lambda_1}(\xi_\alpha + i\xi_\beta) = X, \quad \sqrt{\lambda_2}(\eta_\alpha + i\eta_\beta) = Y, \quad \sqrt{\lambda_3}(\zeta_\alpha + i\zeta_\beta) = Z,$$
$$\sqrt{\bar{\lambda}_1}(\bar{\xi}_\alpha + i\bar{\xi}_\beta) = \bar{X}, \quad \sqrt{\bar{\lambda}_2}(\bar{\eta}_\alpha + i\bar{\eta}_\beta) = \bar{Y}, \quad \sqrt{\bar{\lambda}_3}(\bar{\zeta}_\alpha + i\bar{\zeta}_\beta) = \bar{Z},$$

so lauten die obigen Gleichungen einfach

$$X^2 + Y^2 + Z^2 = 0, \quad \bar{X}^2 + \bar{Y}^2 + \bar{Z}^2 = 0;$$

außerdem ist — infolge der angenommenen Orthogonalität der entsprechenden Linienelemente —

$$X\bar{X} + Y\bar{Y} + Z\bar{Z} = 0.$$

Daraus folgt wiederum — wie in 9 —

$$\bar{X} = tX, \quad \bar{Y} = tY, \quad \bar{Z} = tZ, \tag{22}$$

wo noch der Proportionalitätsfaktor t zu bestimmen ist. Zunächst folgt aus den letzten Relationen durch Quadrieren der Beträge und Addieren

$$\bar{E}^* + \bar{G}^* = |t|^2 (E^* + G^*).$$

Daher ist

$$|t| = 1, \quad t = \cos\tau + i \sin\tau,$$

wo τ reell ist. Alsdann liefern die Gleichungen (22) mit Rücksicht auf die Realität von $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ die Beziehungen

$$\bar{\xi}_\alpha = \lambda_1(\xi_\alpha \cos\tau - \xi_\beta \sin\tau),$$
$$\bar{\eta}_\alpha = \lambda_2(\eta_\alpha \cos\tau - \eta_\beta \sin\tau),$$
$$\bar{\zeta}_\alpha = \lambda_3(\zeta_\alpha \cos\tau - \zeta_\beta \sin\tau).$$

Komponiert man diese Gleichungen mit $\xi_\alpha, \eta_\alpha, \zeta_\alpha$, so ergibt sich links wegen der Orthogonalität der entsprechenden Linienelemente Null, also

$$0 = E^* \cos\tau - F^* \sin\tau = E^* \cos\tau,$$

d. h. es ist $\cos\tau = 0$ also $t = \pm i$, und wir gelangen aus (22) zu dem folgenden Gleichungssystem

$$\bar{\xi}_\beta = \pm \lambda_1 \xi_\alpha, \quad \bar{\eta}_\beta = \pm \lambda_2 \eta_\alpha, \quad \bar{\zeta}_\beta = \pm \lambda_3 \zeta_\alpha,$$
$$\bar{\xi}_\alpha = \mp \lambda_1 \xi_\beta, \quad \bar{\eta}_\alpha = \mp \lambda_2 \eta_\beta, \quad \bar{\zeta}_\alpha = \mp \lambda_3 \zeta_\beta.$$

Da ferner $E^* = G^*$ und $F^* = 0$ ist, so lehrt der in 11. bewiesene Satz, daß die durch die Funktionen $\xi(\alpha, \beta), \eta(\alpha, \beta), \zeta(\alpha, \beta)$ dargestellte Fläche eine Extremalfläche des Variationsproblems

$$\delta \iint F(p_1, p_2, p_3)\, d\alpha\, d\beta = 0$$

ist, und die durch $\bar{\xi}, \bar{\eta}, \bar{\zeta}$ dargestellte Fläche ihre adjungierte Fläche oder deren Spiegelbild in bezug auf den Nullpunkt.

Wir haben im Vorangehenden diejenigen Sätze der Theorie der Minimalflächen auf unser zugrunde gelegtes Variationsproblem übertragen, in denen nur die ersten Ableitungen der Extremalflächen auftreten. Tatsächlich erfordern unsere Sätze nicht die Existenz der zweiten Ableitungen der Extremalfunktion, wie in Anmerkung [4]) betont wurde. Es wäre aber auch von Interesse, solche Eigenschaften der Minimalflächen zu übertragen, in denen die zweiten Ableitungen auftreten, beispielsweise zu untersuchen, wie die Verallgemeinerung des bekannten Bonnetschen Satzes in unserem Ideenkreis lautet, der die Abbildung der Krümmungskurven der Minimalfläche auf die Asymptotenkurven der adjungierten Fläche aussagt.

(Eingegangen am 14. 12. 1927.)

Zur Variationsrechnung.

Drei Vorträge von ALFRED HAAR in Szeged (Ungarn),
gehalten im Mathematischen Seminar der Hamburgischen Universität
(23.—25. Juli 1929).

In der Variationsrechnung ist die Theorie derjenigen Probleme, in denen nur eine unabhängige Veränderliche auftritt, mit großer Vollkommenheit ausgebildet; damit ist auch das Vorbild zur Ausbildung der Theorie der Probleme mit mehreren unabhängigen Veränderlichen geschaffen. In einem — allerdings besonders wichtigen — Spezialfall sind auch die Probleme mit mehreren unabhängigen Veränderlichen mit großer Ausführlichkeit behandelt worden; dies ist der Fall eines quadratischen Variationsproblems, das bekanntlich auf eine lineare Differentialgleichung führt. Man besitzt — dank den bahnbrechenden Arbeiten von HILBERT und den daran anschließenden Untersuchungen — sogar mehrere Methoden, um diesen Fall zu beherrschen.

Wesentlich schwieriger ist aber die Theorie derjenigen Probleme, die nicht auf lineare Differentialgleichungen führen; das bekannte Plateausche Problem der Minimalflächen ist wohl das einfachste Beispiel dieser Art. Meine eigenen Untersuchungen über Variationsrechnung betreffen eben diesen allgemeinen Fall; ich habe in verschiedenen Arbeiten den Versuch gemacht, diese Probleme anzugreifen. Ausgehend von den ersten Fragen der Variationsrechnung, betreffend die Aufstellung der zum Problem gehörigen Differentialgleichungen, gelangte ich zu einer Auffassung bzw. zu einer Behandlungsweise dieser Theorie, die — wie mir scheint — sowohl bei der Aufstellung der weiteren Kriterien als auch bei den Existenzsätzen (Plateausches Problem) von Nutzen ist. Die Einladung der Hamburgischen Universität zu einer Reihe von Vorträgen über Variationsrechnung begrüßte ich besonders freudig, zumal ich in der letzten Zeit einige Resultate fand, die meine älteren Ergebnisse ergänzen bzw. es gestatten, diese auf weitere bisher nicht behandelte Fälle zu übertragen. Ich will mich meiner Aufgabe im folgenden in dem Sinne entledigen, daß ich einen Überblick über meine eigenen Arbeiten aus dem Gebiete der Variationsrechnung und die daran anschließenden Untersuchungen anderer gebe und dabei insbesondere die einheitliche Methode, deren ich mich bediente, und das Ziel, das mir vor Augen schwebte, klar hervortreten lasse. Einige Hinweise auf offene Fragen in dieser Richtung, die bisher nicht behandelt worden sind, sollen zeigen, wie ich mir die Weiterentwicklung dieser Untersuchungen vorstelle.

§ 1. Die erste Variation.

1. Der Ausgangspunkt der Variationsrechnung ist die Theorie der ersten Variation; ihr Verschwinden ist die erste notwendige Bedingung der Variationsrechnung. In der klassischen Behandlungsweise dieser Disziplin gelangt man daraus zu den bekannten Euler-Lagrangeschen Differentialgleichungen, die das Fundament der gesamten Theorie bilden. Bei der Herleitung dieser Differentialgleichungen tritt aber ein wesentlicher Unterschied auf, je nachdem man es mit Problemen mit einer oder mit mehreren unabhängigen Veränderlichen zu tun hat. Im ersteren Falle gelangt man nämlich aus dem Verschwinden der ersten Variation zu den fraglichen Differentialgleichungen, ohne wesentliche einschränkende Annahmen über den Charakter der Lösungen zu machen, dank dem folgenden wohlbekannten Lemma von P. DU BOIS REYMOND: Gilt für eine feste Funktion $u(x)$ die Bedingung[1])

$$\int_{a_1}^{a_2} u(x)\, X'(x)\, dx = 0$$

für alle im Intervall $a_1 \leqq x \leqq a_2$ definierte, daselbst stetig differenzierbare Funktionen $X(x)$, welche in a_1 und a_2 verschwinden, so ist $u(x) =$ konst., falls $u(x)$ stetig ist; ist $u(x)$ nicht stetig, aber beschränkt und integrabel, so gilt $u(x) =$ konst. für fast alle Stellen des betrachteten Intervalls.

Liegt aber ein Variationsproblem vor, in dem die unbekannte Funktion von zwei oder mehreren Veränderlichen abhängt — wir denken nur an den einfachsten Fall, wo nur die ersten Ableitungen der unbekannten Funktion im Variationsproblem auftreten —, so kann man aus dem Verschwinden der ersten Variation die Euler-Lagrangesche Differentialgleichung des Problems nur unter der — ganz unnatürlichen — Einschränkung ableiten, daß die fragliche Lösung eine zweimal differenzierbare Funktion ihrer Veränderlichen ist. In der Tat, es zeigt ein von Herrn HADAMARD[2]) angegebenes einfaches Beispiel, daß in diesen Fällen die erste Variation wohl verschwinden kann, ohne daß die fragliche Lösung zweite Ableitungen irgendwelcher Art besitzen müßte. Man erkennt daraus, daß *bei Variationsproblemen mit zwei oder mehreren unabhängigen Variablen die Euler-Lagrangesche Differentialgleichung nicht mehr dieselbe Rolle spielt, wie im Falle einer unabhängigen Veränderlichen*, indem diese Gleichungen nicht das genaue Äquivalent des Verschwindens der ersten Variation darstellen. Damit ist man zwangsgemäß auf die Aufgabe geführt, das Verschwinden der ersten Variation

[1]) Wir bezeichnen stets die Ableitungen einer Funktion einer Veränderlichen durch Akzente, partielle Ableitungen durch Hinzufügung der entsprechenden Indizes.

[2]) Comptes Rendus Bd. 144, S. 1092—1093.

in anderer Weise in Differentialgleichungen umzusetzen, ohne die erwähnte Einschränkung über die Existenz der höheren Ableitungen zu machen.

Ich erkannte (zuerst nur für den Fall zweier unabhängigen Veränderlichen), — und dies war der Ausgangspunkt meiner Untersuchungen —, daß dies in der Tat möglich ist mit Hilfe eines Lemmas, dem in der Theorie der Doppelintegrale eine ähnliche Rolle zukommt, wie dem oben erwähnten Du Bois Reymondschen Theorem im Falle einfacher Integrale. Dieser Satz lautet wie folgt:

Sind $u(x, y)$ und $v(x, y)$ zwei in einem Gebiete G der x, y-Ebene definierte Funktionen von der Beschaffenheit, daß das Integral

$$\iint_G (u\zeta_x + v\zeta_y)\, dx\, dy = 0 \tag{1}$$

ist für alle Funktionen $\zeta(x, y)$, welche auf dem Rande von G verschwinden und innerhalb G beschränkte Ableitungen 1. Ordnung besitzen, so existiert, falls u und v stetig sind, eine Funktion $\omega(x, y)$, die in G samt ihren Ableitungen 1. Ordnung stetig ist, so daß überall in G

$$u = \omega_y, \quad v = -\omega_x$$

ist; wird von u und v nur Beschränktheit und Meßbarkeit vorausgesetzt, so existiert eine in G der Lipschitzschen Bedingung genügende Funktion $\omega(x, y)$, für die die letzten Gleichungen fast überall in G gelten.

Mit Rücksicht auf Symmetrie und spätere Anwendungen können wir dieses Resultat auch so formulieren, daß aus den für $u(x, y)$ und $v(x, y)$ gemachten Voraussetzungen *die Existenz zweier Funktianen $U(x, y)$ und $V(x, y)$ folgt, so daß das Differentialgleichungssystem 1. Ordnung*

$$u = U_y, \quad v = V_x, \quad U + V = 0 \tag{I}$$

überall bzw. fast überall erfüllt ist.

2. Mein ursprünglicher Beweis dieses Satzes — ich habe den ersten Teil im 199. Band des Journals für die reine und angewandte Mathematik[3]), den zweiten Teil aber, den ich bei meiner Lösung des Plateauschen Problems benötigte, im 97. Band der Math. Annalen[4]) veröffentlicht — benutzt ein besonderes, in bestimmter Hinsicht den Polarkoordinaten ähnliches Koordinatensystem. Einen einfacheren Beweis gab L. LICHTENSTEN[5]) und später — mit Hilfe der Legendreschen

[3]) „Über die Variation der Doppelintegrale", S. 1—18.

[4]) „Über das Plateausche Problem", S. 124—158.

[5]) Annales de la Société Polonaise de Mathématiques, Cracovie, 1924.

Polynome — J. SCHAUDER[6]). Mit Benutzung eines in dieser letztgenannten Arbeit enthaltenen Gedankens kann man den Beweis meines Satzes in überaus einfacher Form erbringen, die ich an dieser Stelle deshalb darlegen möchte, da man — wie ich kürzlich gefunden habe — auf diese Weise auch den Beweis des analogen Satzes für drei und mehrere unabhängige Veränderlichen erbringen kann, eine Frage, die ich vor 12 Jahren in meiner ersten Mitteilung über diesen Gegenstand als Problem hingestellt habe.

Wir nehmen der Einfachheit halber an, daß u und v stetige Funktionen sind; es genügt offenbar — wie Herr SCHAUDER bemerkt — den Satz für das Rechteck R: $a \leqq x \leqq a'$, $b \leqq y \leqq b'$ zu beweisen. Wir setzen $\zeta = X(x)\,Y(y)$ in R und $\zeta = 0$ außerhalb R, wo $X(x)$ bzw. $Y(y)$ eine beliebige für $a \leqq x \leqq a'$ bzw. $b \leqq y \leqq b'$ definierte stetig differenzierbare Funktion bedeutet, für die $X(a) = X(a') = 0$, $Y(b) = Y(b') = 0$ ist. Unsere Bedingung (1) erhält die Form

$$\int_a^{a'}\int_b^{b'} (u\,X'\,Y + v\,X\,Y')\,dx\,dy = 0,$$

die man durch Einführung der Funktion

$$\psi(x, y) = \int_a^x v(\xi, y)\,d\xi + \int_b^y u(x, \eta)\,d\eta$$

durch Produktintegration auf die Form

$$\int_a^{a'}\int_b^{b'} X'\,Y'\,\psi(x, y)\,dx\,dy = \int_a^{a'} X'\left\{\int_b^{b'} Y'\,\psi(x, y)\,dy\right\}dx = 0$$

bringen kann. Die Anwendung des Du Bois Reymondschen Lemmas liefert zunächst das Ergebnis, (da $X(x)$ nur den Voraussetzungen dieses Lemmas gemäß eingeschränkt ist), daß die Funktion

$$\int_b^{b'} Y'\,\psi(x, y)\,dy$$

konstant ist, d. h., daß für jedes x

$$\int_b^{b'} Y'\,[\psi(x, y) - \psi(a, y)]\,dy = 0$$

ist. Die nochmalige Anwendung desselben Lemmas ergibt, daß die Differenz $\psi(x, y) - \psi(a, y)$ von y unabhängig ist, d. h. es ist

[6]) „Über die Umkehrung eines Satzes aus der Variationsrechnung", Acta Litt. ac Scient. Univ. Szeged, Bd. 4, S. 38—50.

$$\psi(x, y) - \psi(a, y) = \psi(x, b) - \psi(a, b),$$

woraus mit Rücksicht auf die Definition von $\psi(x, y)$ unmittelbar

$$\int_a^x [v(\xi, y) - v(\xi, b)]\, d\xi + \int_b^y [u(x, \eta) - u(a, \eta)]\, d\eta = 0$$

folgt. Setzt man daher

$$U(x, y) = \int_b^y u(x, \eta)\, d\eta - \int_a^x v(\xi, b)\, d\xi,$$

$$V(x, y) = \int_a^x v(\xi, y)\, d\xi - \int_b^y u(a, \eta)\, d\eta,$$

so ergibt sich einerseits

$$U + V = 0,$$

andererseits aber

$$U_y = u(x, y), \qquad V_x = v(x, y)$$

und damit ist unsere Behauptung bewiesen.

Man erkennt auch unschwer, daß falls man u und v nicht als stetig, sondern nur als beschränkt und meßbar vorausgesetzt, diese Relationen fast überall gelten.

3. Mit Rücksicht auf spätere Anwendungen (vgl. § 2) fügen wir hier noch eine Bemerkung hinzu, die zu einer geringfügigen Verallgemeinerung des soeben bewiesenen Satzes führt. Es gilt nämlich auch der folgende Satz: *Sind* $u(x, y)$, $v(x, y)$, $w(x, y)$ *drei im Gebiete* G *definierte stetige Funktionen von der Beschaffenheit, daß das Integral*

$$\iint_G (u\zeta_x + v\zeta_y + w\zeta)\, dx\, dy = 0 \tag{2}$$

ist für alle Funktionen $\zeta(x, y)$, *die auf dem Rande von* G *verschwinden und innerhalb* G *beschränkte Ableitungen 1. Ordnung besitzen, so existieren drei Funktionen* $U(x, y)$, $V(x, y)$, $W(x, y)$ *von der Beschaffenheit, daß die Ableitungen* U_y, V_x, W_{xy} *überall in* G *vorhanden sind und die Relationen*

$$\begin{gathered} U + V + W = 0, \\ u = U_y, \qquad v = V_x, \qquad w = -W_{xy} \end{gathered} \tag{II}$$

statthaben.

Man beweist dies entweder durch wörtliche Übertragung des obigen Beweises, oder — wie ich es in meiner in [3]) angeführten Arbeit getan habe — durch direkte Zurückführung auf den soeben behandelten Fall.

4. Der soeben bewiesene Satz führt — wie wir sehen werden — zu einer befriedigenden Theorie der ersten Variation bei solchen Variationsproblemen, in denen die unbekannte Funktion von zwei unabhängigen Veränderlichen abhängt. Obwohl ich mich in der Hauptsache nur mit solchen Variationsproblemen beschäftigen werde, so möchte ich dennoch den entsprechenden Satz, der bei Problemen mit drei und mehreren unabhängigen Variablen die Umsetzung des Verschwindens der ersten Variation in ein Differentialgleichungssystem ermöglicht, ableiten. Es handelt sich dabei um die Aufstellung der Bedingungen, denen drei in einem Gebiete G des x, y, z-Raumes definierte stetige Funktionen $u(x, y, z)$, $v(x, y, z)$, $w(x, y, z)$ genügen müssen, falls das Integral

$$\iiint_G (u\zeta_x + v\zeta_y + w\zeta_z)\, dx\, dy\, dz = 0 \tag{3}$$

ist für jede Funktion $\zeta(x, y, z)$, die in G stetige Ableitungen 1. Ordnung besitzt und auf dem Rande von G verschwindet. Der oben gegebene Beweis für den Fall zweier Variabler ist ohne Schwierigkeit auch auf diesen Fall anwendbar; in der Tat, indem wir uns wiederum auf ein Parallelepipedon

$$a \leqq x \leqq a', \quad b \leqq y \leqq b', \quad c \leqq z \leqq c'$$

beschränken (der allgemeine Fall ist ja auf diesen zurückführbar) und $\zeta = X(x)\,Y(y)\,Z(z)$ setzen ($X(a) = X(a') = Y(b) = Y(b') = Z(c) = Z(c') = 0$), so erhält (3) die Form

$$\int_a^{a'}\int_b^{b'}\int_c^{c'} (u\,X'YZ + v\,XY'Z + w\,XYZ')\, dx\, dy\, dz = 0;$$

führt man zur Abkürzung

$$\psi(x, y, z) = \int_b^y\int_c^z u(x, \eta, \zeta)\, d\eta\, d\zeta + \int_c^z\int_a^x v(\xi, y, \zeta)\, d\zeta\, d\xi + \int_a^x\int_b^y w(\xi, \eta, z)\, d\xi\, d\eta$$

ein, so ergibt sich durch Produktintegration

$$\int_a^{a'}\int_b^{b'}\int_c^{c'} X'Y'Z'\psi(x,y,z)\, dx\, dy\, dz = \int_a^{a'} X'\left\{\int_b^{b'}\int_c^{c'} Y'Z'\,\psi(x,y,z)\, dy\, dz\right\} dx = 0.$$

Da $X(x)$ die Voraussetzungen des Du Bois Reymondschen Lemmas erfüllt, so folgt hieraus, daß $\int_b^{b'}\int_c^{c'} Y'Z'\,\psi(x, y, z)\, dy\, dz =$ konstant, d. h.

$$\int_b^{b'}\int_c^{c'} Y'Z'\,(\psi(x,y,z)-\psi(a,y,z))\,dy\,dz = 0$$

ist. Die Wiederholung derselben Schlußweise ergibt, daß (bei jedem x)

$$\int_c^{c'} Z'\,(\psi(x,y,z)-\psi(a,y,z))\,dz$$

von y unabhängig, also

$$\int_c^{c'} Z'\,[\psi(x,y,z)-\psi(a,y,z)-\psi(x,b,z)+\psi(a,b,z)]\,dz = 0$$

ist, woraus endlich in gleicher Weise folgt, daß der in eckigen Klammern stehende Ausdruck von z unabhängig ist. D. h. es ist

$$\begin{aligned}&\psi(x,y,z)-\psi(a,y,z)-\psi(x,b,z)+\psi(a,b,z)\\ &=\psi(x,y,c)-\psi(a,y,c)-\psi(x,b,c)+\psi(a,b,c),\end{aligned}$$

oder, mit Rücksicht auf die Definition von $\psi(x,y,z)$,

$$\int_b^y\int_c^z (u(x,\eta,\zeta)-u(a,\eta,\zeta))\,d\eta\,d\zeta+\int_c^z\int_a^x (v(\xi,y,\zeta)-v(\xi,b,\zeta))\,d\zeta\,d\xi$$
$$+\int_a^x\int_b^y (w(\xi,\eta,z)-w(\xi,\eta,c))\,d\xi\,d\eta = 0.$$

Setzt man daher

$$U(x,y,z) = \int_b^y\int_c^z u(x,\eta,\zeta)\,d\eta\,d\zeta - \frac{1}{2}\int_c^z\int_a^x v(\xi,b,\zeta)\,d\zeta\,d\xi - \frac{1}{2}\int_a^x\int_b^y w(\xi,\eta,c)\,d\xi\,d\eta,$$

$$V(x,y,z) = \int_c^z\int_a^x v(\xi,y,\zeta)\,d\zeta\,d\xi - \frac{1}{2}\int_a^x\int_b^y w(\xi,\eta,c)\,d\xi\,d\eta - \frac{1}{2}\int_b^y\int_c^z u(a,\eta,\zeta)\,d\eta\,d\zeta,$$

$$W(x,y,z) = \int_a^x\int_b^y w(\xi,\eta,z)\,d\xi\,d\eta - \frac{1}{2}\int_b^y\int_c^z u(a,\eta,\zeta)\,d\eta\,d\zeta - \frac{1}{2}\int_c^z\int_a^x v(\xi,b,\zeta)\,d\zeta\,d\xi,$$

so erhält man unmittelbar

$$\text{(III)} \qquad \begin{gathered} U+V+W=0, \\ U_{yz}=u, \qquad V_{zx}=v, \qquad W_{xy}=w. \end{gathered}$$

Mit anderen Worten, *wenn die stetigen Funktionen* u, v, w *die Bedingung* (3) *erfüllen, so genügen sie in Gemeinschaft mit drei Hilfsfunktionen* U, V, W *den letzten Gleichungen.*

Man erkennt auch ohne Schwierigkeiten, daß dieser Beweis ohne weiteres auf den Fall von mehr als drei unabhängigen Veränderlichen übertragbar ist.

5. Zu diesem Ergebnis sei noch folgendes bemerkt:

In den Elementen der Analysis wird gezeigt, daß aus dem Bestehen der Relation (3) (für alle Funktionen $\zeta(x, y, z)$ der genannten Art) die Divergenzgleichung

$$(3') \qquad u_x+v_y+w_z=0$$

folgt, falls u, v, w Ableitungen 1. Ordnung besitzen. HILBERT bezeichnete gelegentlich eine solche unterbestimmte Differentialgleichung (1 Gleichung, 3 unbekannte Funktionen) als eine diophantische Differentialgleichung; die in der Vektoranalysis gegebene Darstellung solcher Funktionen in der Form des curls eines Vektorfeldes $(\alpha(x, y, z), \beta(x, y, z), \gamma(x, y, z))$

$$(3'') \qquad u=\beta_z-\gamma_y, \qquad v=\gamma_x-\alpha_z, \qquad w=\alpha_y-\beta_x$$

nennt HILBERT eine *integrallose Lösung* von (3'). Eine andere integrallose Lösung von (3') wird durch die obigen Formeln (III) dargestellt. Diese kann aber — wie eben gezeigt — direkt aus der Bedingung (3) ohne die Annahme der Existenz der Ableitungen von u, v, w abgeleitet werden; es ist mir aber nicht gelungen, dasselbe für die Darstellung (3'') zu erreichen, und es scheint mir recht fraglich zu sein, ob der entsprechende Satz überhaupt richtig ist[7]).

6. Auf die *Umkehrung* dieser Sätze habe ich zuerst in meiner Note: „Über reguläre Variationsprobleme“[8]) hingewiesen. Eine eingehende Behandlung erhielt diese Frage in der erwähnten Arbeit von SCHAUDER. Es handelt sich dabei darum (ich beschränke mich auf den Fall von zwei Veränderlichen), ob aus den Relationen (I) bzw. (II) die Richtigkeit der Gleichungen $\iint_G (u\zeta_x+v\zeta_y)dxdy=0$ bzw. $\iint_G (u\zeta_x+v\zeta_y+w\zeta)dxdy=0$

[7]) Einen Vorstoß in dieser Richtung enthält die inhaltsreiche Arbeit von A. SZÜCS: „Sur la variation des intégrales triples et le théorème de Stokes“, Acta Litt. ac Scient. Univ. Szeged, Bd. 3, S. 81—95.

[8]) Acta Litt. ac Scient. Univ. Szeged, Bd. 3, S. 224—234; insbesondere S. 229—230.

für alle Funktionen ζ der angegebenen Art folgt, d. h. ob stets aus $U+V=0$ die Beziehung $\iint_G (U_y \zeta_x + V_x \zeta_y)\, dx\, dy = 0$ bzw. aus $U+V+W=0$ die Relation $\iint_G (U_y \zeta_x + V_x \zeta_y - W_{xy} \zeta)\, dx\, dy = 0$ folgt. Falls die gemischten zweiten Ableitungen von U und V vorhanden sind, so folgt dies in einfacher Weise durch Produktintegration. Wenn aber diese Ableitungen nicht existieren, so kann man, falls u und v, d. h. U_y und V_x stetig sind, wie folgt verfahren: Man approximiere U etwa durch eine Polynomfolge $U^{(n)}(x, y)$ derart, daß die Limesgleichungen $U_x^{(n)} \to U_x$, $U_y^{(n)} \to U_y$ gleichmäßig in G statthaben und setze $U^{(n)} + V^{(n)} = 0$ bzw. $U^{(n)} + V^{(n)} + W = 0$. Dann gilt auch gleichmäßig in G (in beiden Fällen)

$$V_x^{(n)} \to V_x, \qquad V_y^{(n)} \to V_y \qquad (n \to \infty),$$

und die gemischte Ableitung 2. Ordnung $V_{xy}^{(n)}$ ist ebenfalls vorhanden. Daraus folgt aber nach der vorangehenden Bemerkung, daß

$$\iint_G (U_y^{(n)} \zeta_x + V_x^{(n)} \zeta_y)\, dx\, dy = 0,$$

bzw.

$$\iint_G (U_y^{(n)} \zeta_x + V_x^{(n)} \zeta_y - W_{xy} \zeta)\, dx\, dy = 0$$

ist und durch den Grenzübergang $n \to \infty$ die Richtigkeit der Relationen (1) bzw. (2).

Der Beweis, den Herr SCHAUDER für diese Tatsache gab, ist weniger einfach; er setzt aber die Stetigkeit von u und v nicht voraus und gilt für alle beschränkten und meßbaren Funktionen $u(x, y)$ und $v(x, y)$.

§ 2. Die allgemeine Problemstellung und die zweite Variation.

1. Die vorangehenden Ergebnisse setzen uns in den Stand, für die Extremalfunktion eines Variationsproblems mit zwei oder mehreren unabhängigen Veränderlichen ein Differentialgleichungssystem abzuleiten, *ohne die Existenz der höheren* (im Variationsproblem nicht vorkommenden) *Ableitungen vorauszusetzen*. Wir betrachten zu diesem Ende bei gegebenen Randbedingungen das Variationsproblem

$$\iint_G F(p, q, z, x, y)\, dx\, dy = \text{Min.}, \tag{4}$$

wobei — wie üblich — p, q die ersten Ableitungen der gesuchten Funktion $z(x, y)$ bezeichnen:

$$p = z_x, \qquad q = z_y.$$

Ist $z(x, y)$ eine Lösung dieses Problems, deren erste Ableitungen in G stetig oder wenigstens beschränkt und meßbar sind, so folgt für diese Funktion in bekannter Weise die Richtigkeit der Beziehung

$$\iint_G (F_p \zeta_x + F_q \zeta_y + F_z \zeta)\, dx\, dy = 0,$$

wobei $\zeta(x, y)$ irgendeine auf dem Rande von G verschwindende Funktion bedeutet, die innerhalb G stetige Ableitungen erster Ordnung besitzt. Daraus folgt nach dem vorher bewiesenen *die Existenz dreier Hilfsfunktionen U, V, W, so daß überall (bzw. fast überall) in G das Differentialgleichungssystem*

$$\text{(IV)} \quad F_p = U_y, \quad F_q = V_x, \quad F_z = -W_{xy}, \quad U+V+W = 0$$

erfüllt ist. Würde man die Existenz der zweiten Ableitungen von $z(x, y)$ voraussetzen, so könnte man daraus unmittelbar die Euler-Lagrangesche Differentialgleichung des Problems

$$(4') \quad L(z_{xx}, z_{xy}, z_{yy}, z_x, z_y, z, x, y) \equiv \frac{\partial}{\partial x} F_p + \frac{\partial}{\partial y} F_q - F_z = 0$$

ableiten. Das obige Differentialgleichungssystem ist aber für *alle Extremalfunktionen gültig,* die Euler-Lagrangesche Gleichung nur für zweimal differenzierbare. In dem Falle, daß der Integrand F des Variationsproblems selbst nicht zweimal differenzierbar nach p und q ist, kann von der Euler-Lagrangeschen Gleichung nicht die Rede sein, es bleiben hingegen die Gleichungen (IV) richtig.

Dieselben Bemerkungen beziehen sich auf den Fall von dreifachen Integralen. Ist ein solches Variationsproblem vorgelegt (wir nehmen der Einfachheit halber an, daß der Integrand nur die drei Ableitungen 1. Ordnung p_1, p_2, p_3 der unbekannten Funktion $z(x_1, x_2, x_3)$ enthält)

$$\iiint_G F(p_1, p_2, p_3, x_1, x_2, x_3)\, dx_1\, dx_2\, dx_3 = \text{Min.} \quad (z_{x_1} = p_1, z_{x_2} = p_2, z_{x_3} = p_3),$$

so erhält man in gleicher Weise, ohne die Existenz der zweiten Ableitungen von $z(x_1, x_2, x_3)$ vorauszusetzen, für die Extremalfunktion das Differentialgleichungssystem

$$\text{(V)} \quad F_{p_1} = U_{x_2 x_3}(x_1, x_2, x_3), \quad F_{p_2} = V_{x_3 x_1}(x_1, x_2, x_3), \quad F_{p_3} = W_{x_1 x_2}(x_1, x_2, x_3)$$
$$U+V+W = 0,$$

das als Ersatz für die Euler-Lagrangesche Differentialgleichung dient.

2. Man wird auf diese Weise auf den Gedanken geführt, *die weiteren Entwicklungen der Variationsrechnung* — die Theorie der zweiten Variation, die Weierstraßschen hinreichenden Kriterien etc. — *statt, wie üblich, auf die Euler-Lagrangeschen Differentialgleichungen, auf die Differentialgleichungs-*

systeme (IV) *bzw.* (V) *zu stützen.* Man erhält dadurch nicht nur den Vorteil einer größeren Allgemeinheit, sondern es werden die Resultate, wie mir scheint, in eleganterer und durchsichtigerer Form erscheinen: man operiert dabei wohl mit einem Differentialgleichungssystem statt mit einer Differentialgleichung, aber dieses ist von der ersten Ordnung. Die Euler-Lagrangesche Gleichung ist ja nur das Eliminationsresultat dieses Systems, wenn man die Hilfsfunktionen wegschafft.

Die Gleichungen (IV) für zwei unabhängige Veränderliche werden besonders einfach, wenn die unbekannte Funktion im Variationsproblem selbst nicht vorkommt ($F = F(p, q, x, y)$); man erhält statt (IV) einfach

$$F_p = \omega_y, \qquad F_q = -\omega_x.$$

Im Falle der Potentialtheorie ($F = \frac{1}{2}(p^2+q^2)$) sind dies eben die Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen; die Hilfsfunktion ω ist das konjugierte Potential. Analog wird im Falle der Minimalflächen ($F = (1+p^2+q^2)^{\frac{1}{2}}$) die Hilfsfunktion — wie wir später sehen werden — in einfachem Zusammenhange mit der adjungierten Minimalfläche stehen.

Die Aufstellung des entsprechenden Differentialgleichungssystems für den Fall, daß mehrere unbekannte Funktionen im Variationsproblem auftreten, bietet keine neuen Schwierigkeiten. Hingegen erfordert der Fall, daß der Integrand höhere Ableitungen der unbekannten Funktion enthält, die Beantwortung einer entsprechenden Kategorie von Fragen, von denen ich hier die einfachste anführe: Es seien $u(x, y)$, $v(x, y)$, $w(x, y)$ in einem Gebiete G definierte stetige Funktionen von der Beschaffenheit, daß das Integral

$$\iint_G (u\,\zeta_{xx} + 2v\,\zeta_{xy} + w\,\zeta_{yy})\,dx\,dy = 0$$

ist, sowie $\zeta(x, y)$ eine beliebige solche Funktion bedeutet, welche auf dem Rande von G samt ihren Ableitungen 1. Ordnung verschwindet und innerhalb G stetige Ableitungen 2. Ordnung besitzt; was kann aus diesem Umstande für die Funktionen u, v, w gefolgert werden?

Wir lassen diese Fragen außer Acht und beschäftigen uns nur mit Variationsproblemen von der Form (4).

3. Der Ursprung der Theorie der *zweiten Variation* ist die einfache Tatsache, daß, falls die Funktion $z(x, y)$ eine Lösung des Variationsproblems (4) ist, das Integral

$$\delta^2 I = \iint_G \{F_{pp}\zeta_x^2 + 2F_{pq}\zeta_x\zeta_y + F_{qq}\zeta_y^2 + 2F_{pz}\zeta_x\zeta + 2F_{qz}\zeta_y\zeta + F_{zz}\zeta^2\}\,dx\,dy \geqq 0$$

sein muß für jede Funktion $\zeta(x, y)$, die auf dem Rande von G verschwindet und innerhalb G beschränkte Ableitungen 1. Ordnung besitzt. Daraus ergibt

sich zuerst als notwendige Bedingung die sog. Legendresche Bedingung der Variationsrechnung

$$F_{pp} \geqq 0. \qquad F_{pp} F_{qq} - F_{pq}^2 \geqq 0. \tag{5}$$

In dieser Ungleichung treten nur die ersten Ableitungen der Extremalfunktion auf, und der schöne Beweis, den Herr MASON[9]) für diese Tatsache gab, setzt in der Tat die Existenz der zweiten Ableitungen nicht voraus; dieser Beweis paßt geradezu in den Rahmen meiner Untersuchungen.

Die weiteren, tiefer liegenden Fragen der Theorie der zweiten Variation sind ganz anderer Natur. Diese Theorie — die Jacobi-Clebschsche Theorie — enthält Aussagen über die Lösungen der zu der vorgelegten Extremalfunktion gehörigen Jacobischen Differentialgleichung (auch akzessorische Gleichung genannt), die man aus der Euler-Lagrangeschen Differentialgleichung (4′) durch das in der Algebra als Polarisation bezeichnete Verfahren erhält; diese lautet bekanntlich:

$$\frac{\partial L}{\partial z_{xx}} \tilde{z}_{xx} + \frac{\partial L}{\partial z_{xy}} \tilde{z}_{xy} + \frac{\partial L}{\partial z_{yy}} \tilde{z}_{yy} + \frac{\partial L}{\partial z_x} \tilde{z}_x + \frac{\partial L}{\partial z_y} \tilde{z}_y + \frac{\partial L}{\partial z} \tilde{z} = 0, \tag{6}$$

wobei $\tilde{z}(x, y)$ als unbekannte Funktion zu betrachten ist. Man beweist in der klassischen Variationsrechnung durch eine Kette von ziemlich umständlichen Umformungen hierüber den folgenden Satz: Ist die Legendresche Bedingung (5) in der schärferen Form erfüllt[10]) und besitzt diese Differentialgleichung (6) eine Lösung, welche in G nirgends verschwindet, so ist die zweite Variation $\delta^2 I$ für jede zulässige Funktion $\zeta(x, y)$ positiv; besitzt aber (6) eine Lösung, welche entlang einer ganz in G gelegenen geschlossenen Kurve verschwindet, so kann man durch passende Wahl von $\zeta(x, y)$ die zweite Variation gleich Null, sogar negativ machen.

Dieser Satz ist natürlich nur für zweimal differenzierbare Extremalfunktionen gültig; es treten ja in (6) die Ableitungen z_{xx}, z_{xy}, z_{yy} auf. Ich möchte nun zeigen, wie man auf Grund meines Differentialgleichungssystems (VI) ohne diese Annahme zu einem entsprechenden Resultat gelangen kann; dabei wird sich zeigen, daß die dazu führenden Entwicklungen sich einfacher und, wie mir scheint, eleganter gestalten, als in der klassischen Behandlungsweise.

4. Der erste Schritt ist die Aufstellung des *zu dem System* (IV) *gehörigen polarisierten Differentialgleichungssystems.* Man verfährt dabei nach der algebraischen Analogie; man differenziere jede der Gleichungen

[9]) „A necessary condition for an extremum of a double integral", Bulletin of the American Math. Soc., Bd. 13, S. 293—298.

[10]) d. h., wenn in der Legendreschen Ungleichung das Ungleichheitszeichen gilt.

nach den unbekannten Funktionen z, U, V, W und nach ihren auftretenden Ableitungen und multipliziere die erhaltenen Ausdrücke bzw. mit den neu einzuführenden Funktionen $\tilde{z}(x, y)$, $\tilde{U}(x, y)$, $\tilde{V}(x, y)$, $\tilde{W}(x, y)$ bzw. mit deren entsprechenden Ableitungen. Man erhält auf diese Weise das (zu den Lösungen z, U, V, W von (IV) gehörige) „polarisierte" System:

$$\text{(VI)} \qquad \begin{aligned} F_{pp}\,\tilde{z}_x + F_{pq}\,\tilde{z}_y + F_{pz}\,\tilde{z} &= \tilde{U}_y, \\ F_{qp}\,\tilde{z}_x + F_{qq}\,\tilde{z}_y + F_{qz}\,\tilde{z} &= \tilde{V}_x, \\ F_{zp}\,\tilde{z}_x + F_{zq}\,\tilde{z}_y + F_{zz}\,\tilde{z} &= -\tilde{W}_{xy}, \\ \tilde{U} + \tilde{V} + \tilde{W} &= 0. \end{aligned}$$

Dieses in $\tilde{z}$, $\tilde{U}$, $\tilde{V}$, $\tilde{W}$ lineare Differentialgleichungssystem spielt im folgenden dieselbe Rolle, wie die Jacobische Gleichung (6) in der üblichen Behandlungsweise der zweiten Variation; wenn die auftretenden Funktionen Ableitungen 2. Ordnung besitzen würden, so könnte man daraus die Gleichung (6) ableiten. Ich beweise nun den folgenden Satz:

Besitzt (VI) *ein solches Lösungssystem* $\tilde{z}$, $\tilde{U}$, $\tilde{V}$, $\tilde{W}$, *daß* $\tilde{z}(x, y)$ *in* G *nirgends verschwindet, und ist die Legendresche Bedingung* (5) *in der schärferen Form erfüllt, so ist die zweite Variation* $\delta^2 I$ *für alle zulässigen Funktionen* $\zeta(x, y)$ *positiv.*

Der Beweis ergibt sich in einfacher Weise aus der folgenden Identität, die man in der Theorie der Kegelschnitte begegnet: Ist

$$K(x_1, x_2, x_3) = \sum_{i,k=1}^{3} a_{ik}\, x_i\, x_k$$

eine ternäre quadratische Form und

$$K(x_1, x_2, x_3; y_1, y_2, y_3) = \sum_{i,k=1}^{3} a_{ik}\, x_i\, y_k$$

die zugehörige Bilinearform, so gilt

$$\begin{aligned} y_3^2\, K(x_1, x_2, x_3) - 2\, x_3\, y_3\, K(x_1, x_2, x_3; y_1, y_2, y_3) + x_3^2\, K(y_1, y_2, y_3) \\ = a_{11} \begin{vmatrix} x_1 & x_3 \\ y_1 & y_3 \end{vmatrix}^2 + 2\, a_{12} \begin{vmatrix} x_1 & x_3 \\ y_1 & y_3 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} x_2 & x_3 \\ y_2 & y_3 \end{vmatrix} + a_{22} \begin{vmatrix} x_2 & x_3 \\ y_2 & y_3 \end{vmatrix}^2 \end{aligned}$$

In der Tat, betrachten wir die quadratische Form mit den Koeffizienten

$$a_{11} = F_{pp},\ a_{22} = F_{qq},\ a_{33} = F_{zz},\ a_{12} = a_{21} = F_{pq},$$
$$a_{13} = a_{31} = F_{pz},\ a_{23} = a_{32} = F_{qz}$$

und setzen

$$x_1 = \zeta_x,\ x_2 = \zeta_y,\ x_3 = \zeta,$$

wobei $\zeta(x, y)$ eine beliebige zulässige Variation bezeichnet, ferner

$$y_1 = \tilde{z}_x,\ y_2 = \tilde{z}_y,\ \ y_3 = \tilde{z},$$

wobei $\tilde{z}(x, y)$ die im Satze postulierte Lösung von (VI) bedeutet, die in G von Null verschieden ist, so findet man, in Anbetracht dessen, daß die zu dieser quadratischen Form gehörigen Linearformen

$$\begin{aligned} a_{11}\, y_1 + a_{12}\, y_2 + a_{13}\, y_3 &= F_{pp}\, \tilde{z}_x + F_{pq}\, \tilde{z}_y + F_{pz}\, \tilde{z} = \tilde{U}_y, \\ a_{21}\, y_1 + a_{22}\, y_2 + a_{23}\, y_3 &= F_{qp}\, \tilde{z}_x + F_{qq}\, \tilde{z}_y + F_{qz}\, \tilde{z} = \tilde{V}_x, \\ a_{31}\, y_1 + a_{32}\, y_2 + a_{33}\, y_3 &= F_{zp}\, \tilde{z}_x + F_{zq}\, \tilde{z}_y + F_{zz}\, \tilde{z} = -\tilde{W}_{xy} \end{aligned}$$

sind, unmittelbar

$$\begin{aligned} K(x_1, x_2, x_3;\ y_1, y_2, y_3) &= \tilde{U}_y\, \zeta_x + \tilde{V}_x\, \zeta_y - \tilde{W}_{xy}\, \zeta, \\ K(y_1, y_2, y_3) &= \tilde{U}_y \tilde{z}_x + \tilde{V}_x\, \tilde{z}_y - \tilde{W}_{xy}\, \tilde{z}. \end{aligned}$$

Man erhält daher aus der obigen Identität für $K(x_1, x_2, x_3)$, das mit dem Integranden der zweiten Variation $\delta^2 I$ übereinstimmt, den Ausdruck

$$\begin{aligned} &\tilde{U}_y \frac{2\zeta\, \zeta_x \tilde{z} - \zeta^2 \tilde{z}_x}{\tilde{z}^2} + \tilde{V}_x \frac{2\zeta\, \zeta_y \tilde{z} - \zeta^2 \tilde{z}_y}{\tilde{z}^2} - \tilde{W}_{xy} \frac{\zeta^2 \tilde{z}}{\tilde{z}^2} \\ &+ F_{pp} \frac{(\zeta_x \tilde{z} - \zeta \tilde{z}_x)^2}{\tilde{z}^2} + 2 F_{pq} \frac{(\zeta_x \tilde{z} - \zeta \tilde{z}_x)(\zeta_y \tilde{z} - \zeta \tilde{z}_y)}{\tilde{z}^2} + F_{qq} \frac{(\zeta_y \tilde{z} - \zeta \tilde{z}_y)^2}{\tilde{z}^2} \\ (7) \quad &= \tilde{U}_y \left(\frac{\zeta^2}{\tilde{z}}\right)_x + \tilde{V}_x \left(\frac{\zeta^2}{\tilde{z}}\right)_y - W_{xy} \frac{\zeta^2}{\tilde{z}} \\ &\qquad + \tilde{z}^2 \left\{ F_{pp} \left(\left(\frac{\zeta}{\tilde{z}}\right)_x\right)^2 + 2 F_{pq} \left(\frac{\zeta}{\tilde{z}}\right)_x \left(\frac{\zeta}{\tilde{z}}\right)_y + F_{qq} \left(\left(\frac{\zeta}{\tilde{z}}\right)_y\right)^2 \right\}. \end{aligned}$$

Nun ist aber, wie in 6, § 1, gezeigt, wegen $\tilde{U} + \tilde{V} + \tilde{W} = 0$

$$\int_G \int \left\{ \tilde{U}_y \left(\frac{\zeta^2}{\tilde{z}}\right)_x + \tilde{V}_x \left(\frac{\zeta^2}{\tilde{z}}\right)_y - \tilde{W}_{xy} \frac{\zeta^2}{\tilde{z}} \right\} dx\, dy = 0,$$

folglich für jede zulässige Funktion $\zeta(x, y)$ (die nicht identisch verschwindet)

$$\delta^2 I > 0,$$

da der in (7) in $\{\}$ stehende Ausdruck wegen der Legendreschen Bedingung für alle x, y positiv ist. Damit ist der oben ausgesprochene Satz bewiesen.

Besitzen aber die polarisierten Gleichungen (VI) ein solches System von Lösungen, $\tilde{z}$, $\tilde{U}$, $\tilde{V}$, $\tilde{W}$, daß $\tilde{z}(x, y)$ entlang einer geschlossenen, innerhalb G liegenden Kurve C verschwindet, so setzte man — wie in der klassischen Theorie — $\zeta = \tilde{z}$ innerhalb C und $\zeta = 0$ außerhalb C. Dann ist offenbar

$$\delta^2 I = \int_C \int (\tilde{z}_x\, \tilde{U}_y + \tilde{z}_y\, \tilde{V}_x - \tilde{z}\, \tilde{W}_{xy})\, dx\, dy = 0$$

und man kann auch mit Hilfe des bekannten von H. A. SCHWARZ herrührenden Verfahrens eine solche zulässige Variation konstruieren, für die $\delta^2 I < 0$ ausfällt.

Die Übertragung dieser Sätze auf den Fall von dreifachen Integralen bietet keine wesentlichen Schwierigkeiten. Hingegen verlangt der Fall von mehreren unbekannten Funktionen eine eingehendere Behandlung. Auch wäre es recht interessant, die Weierstraßsche Theorie bzw. die Hilbertsche Theorie des unabhängigen Integrals gestützt auf das Gleichungssystem (IV) zu entwickeln; ich glaube, daß dadurch die Theorie an Eleganz und Durchsichtigkeit gewinnen würde.

§ 3. Reguläre Variationsprobleme.

1. Indem wir jetzt die oben berührten Fragen — bei denen es sich um die Aufstellung der Kriterien der Variationsrechnung handelte — verlassen, wenden wir uns anderen Untersuchungen zu, welche zeigen werden, welchen Nutzen man aus dem Gleichungssystem (IV) bei der Begründung bestimmter Existenztheoreme der Variationsrechnung ziehen kann.

Wir müssen daher die zu behandelnden Variationsprobleme einschränken und beschäftigen uns[11]) (obwohl ein Teil der folgenden Resultate auch für allgemeinere Fälle gilt) mit Problemen von der Form

$$I[z] = \iint_G F(p, q, x, y)\, dx\, dy = \text{Min.} \tag{8}$$

und nehmen an, daß der Integrand F für alle reellen Werte von p, q und für solche Werte von x, y definiert ist, die in G liegen, ferner, daß die zweiten Ableitungen von F nach p und q existieren und so beschaffen sind, daß die Ungleichungen

$$F_{pp} > 0, \qquad F_{pp} F_{qq} - F_{pq}^2 > 0$$

im ganzen Definitionsbereich von F statthaben. Solche Variationsprobleme bezeichnet man als *reguläre*.

Wir beginnen mit einer einfachen Bemerkung, die die Verallgemeinerung eines bekannten Steinerschen Satzes über den Flächeninhalt auf reguläre Variationsprobleme ist. Es seien $z_1(x, y)$, $z_2(x, y)$ zwei in G definierte Funktionen, die samt ihren Ableitungen $\frac{\partial z_1}{\partial x} = p_1$, $\frac{\partial z_1}{\partial y} = q_1$, $\frac{\partial z_2}{\partial x} = p_2$, $\frac{\partial z_2}{\partial y} = q_2$ daselbst stetig sind, θ aber irgendeine zwischen 0 und 1 gelegene Zahl. Wir betrachten die Funktion:

$$f(\theta) = I[(1-\theta) z_1 + \theta z_2] = I[z_1 + \theta (z_2 - z_1)];$$

[11]) Die folgenden Sätze über reguläre Variationsprobleme habe ich in meiner unter [5]) genannten Arbeit dargelegt.

setzt man zur Abkürzung $\overline{p} = (1-\theta)\,p_1 + \theta p_2$, $\overline{q} = (1-\theta)\,q_1 + \theta q_2$, so erhält man unmittelbar

$$\frac{d^2 f}{d\theta^2} = \iint_G \{F_{pp}(\overline{p}, \overline{q})\,(p_2 - p_1)^2 + 2F_{pq}(\overline{p}, \overline{q})\,(p_2 - p_1)\,(q_2 - q_1) + F_{qq}(\overline{p}, \overline{q})\,(q_2 - q_1)^2\}\,dx\,dy,$$

woraus — wegen der angenommenen Regularität des vorgelegten Variationsproblems — für jedes θ

$$\frac{d^2 f}{d\theta^2} \geqq 0 \tag{9}$$

folgt. Das Gleichheitszeichen kann nur statthaben, falls die Differenz $z_1 - z_2$ konstant ist; in diesem Falle ist $f(\theta)$ eine lineare Funktion von θ. Schließen wir diesen Fall aus, so folgen aus (9) die Ungleichungen

$$f(\theta) > f(0) + \theta f'(0) \quad \text{und} \quad f(\theta) < (1-\theta) f(0) + \theta f(1), \tag{9'}$$

deren geometrischer Inhalt die Tatsache ist, daß eine nach unten konvexe Kurve oberhalb ihrer Tangente, bzw. daß ein Bogen dieser Kurve unterhalb der die Endpunkte verbindenden Sehne liegt. Die zweite dieser Ungleichungen

$$I[(1-\theta)\,z_1 + \theta z_2] < (1-\theta)\,I[z_1] + \theta I[z_2] \tag{9''}$$

drückt für $F = (1 + p^2 + q^2)^{\frac{1}{2}}$, $\theta = \frac{1}{2}$ eine wohlbekannte, von STEINER bewiesene Eigenschaft des Flächeninhalts aus. Man erkennt auch, daß die obige Ableitung gültig bleibt, falls p_1, q_1, p_2, q_2 nicht stetig, sondern nur beschränkt und meßbar sind.

2. Aus dieser Bemerkung folgt nun ohne Schwierigkeiten, *daß jede Lösung* $z(x, y)$, $\omega(x, y)$ *des Gleichungssystems*

$$F_p = \omega_y, \qquad F_q = -\omega_x \tag{10}$$

ein absolutes Minimum des regulären Variationsproblems (8) *bei gegebenen Randbedingungen liefert.* In der Tat, es folgt aus der ersten Ungleichung (9') — wenn man an Stelle von z_1 die fragliche Lösung $z(x, y)$ von (10), an Stelle von z_2 aber eine beliebige andere Funktion $z + \zeta$, welche dieselben Randwerte wie z besitzt, einsetzt —

$$f(1) > f(0) + f'(0), \qquad (f(0) = I[z],\ f(1) = I[z + \zeta])$$

da die Differenz beider Funktionen nicht konstant ist. Mit Rücksicht auf

$$f'(0) = \iint_G (F_p(p, q)\zeta_x + F_q(p, q)\zeta_y)\, dx\, dy$$
$$= \iint_G (\omega_y \zeta_x - \omega_x \zeta_y)\, dx\, dy = 0$$

ergibt sich daraus

$$f(1) > f(0),$$

d. h.

$$I[z] < I[z + \zeta].$$

Eine andere Folge der oben gewonnenen einfachen Ungleichungen ist die Tatsache, daß *das reguläre Variationsproblem* (8) *bei gegebenen Randwerten nur eine Lösung haben kann.* Denn jede Lösung des Variationsproblems — da sie auch Lösung von (10) ist — liefert ein absolutes Minimum; würde dieser Minimalwert m für zwei verschiedene Funktionen z_1 und z_2 (mit denselben Randwerten) angenommen werden, so erhielte man aus (9″)

$$I[(1-\theta)z_1 + \theta z_2] < m,$$

d. h. einen Widerspruch, da alle Funktionen $(1-\theta)z_1 + \theta z_2$ dieselben Randwerte wie z_1 und z_2 besitzen.

3. Die Kombination der vorangehenden beiden Tatsachen liefert das Ergebnis, daß *das Gleichungssystem* (10) *bei gegebenen Randwerten für* $z(x, y)$ *nur eine Lösung besitzen kann,* falls F die Bedingungen der Regularität erfüllt. Dieser Satz ist — wie mir scheint — schon für den Fall eines linearen Differentialgleichungssystems, das man erhält, indem man

$$F = a(x, y)p^2 + 2b(x, y)pq + c(x, y)q^2 \qquad a > 0,\ ac - b^2 > 0$$

setzt, neu. Die Eindeutigkeitssätze der Theorie der elliptischen Differentialgleichungen enthalten diesen Satz nur in dem Falle, daß a, b, c differenzierbare Funktionen von x, y sind. Insbesondere ergibt sich aus diesem Resultat ein Satz von Herrn DE LA VALLÉS POUSSIN über die Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen[12]), den ich bei meiner Lösung des Plateauschen Problems angewandt habe. Da nämlich — wie bemerkt — die vorangehenden Entwicklungen richtig bleiben, falls nur p, q beschränkt und meßbar sind, so folgt, daß die Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen (bei gegebenen Randwerten für z) nur *eine* Lösung besitzen

[12]) „Reduction des intégrales doubles de Lebesgue", Bulletin de l'Académie Royale de Belgique (1910); vgl. auch H. RADEMACHER: „Über streckentreue und winkeltreue Abbildung", Math. Zeitschrift, Bd. 4 (1919), S. 131—138.

können, die der Lipschitzschen Bedingung genügt, d. h. die dieser Bedingung genügenden Lösungen sind analytische Funktionen.

Eine andere Folge, die ich aus diesen Ergebnissen auf Grund eines von Herrn T. RADÓ[13]) aufgestellten Satzes über Minimalflächen ziehen konnte, ist die folgende: Erfüllen die einmal stetig differenzierbaren Funktionen z und ω das System

$$\frac{p}{\sqrt{1+p^2+q^2}} = \omega_y, \qquad \frac{q}{\sqrt{1+p^2+q^2}} = -\omega_x,$$

so sind z und ω analytische Funktionen.

In der erwähnten Arbeit von Herrn J. SCHAUDER sind diese Sätze in verschiedenen Richtungen verallgemeinert worden.

4. Ein anderer Satz über reguläre Variationsprobleme, den ich bei dem Beweise des Existenzsatzes brauchen werde, wird ebenfalls mit Hilfe der Ungleichung (9″) bewiesen. Es handelt sich um die *Halbstetigkeit* des Integrals $I[z]$; dieser Begriff spielt bekanntlich in den Untersuchungen von Herrn L. TONELLI über einfache Integrale eine wichtige Rolle. Er tritt naturgemäß auf, wenn man die Existenz der Extremalfunktion mit der direkten Methode der Variationsrechnung beweisen will, und kann nur im Falle eines quadratischen Variationsproblems umgangen werden. Der betreffende Satz — ich verweise auf den Beweis, den ich im § 1 meiner unter [4]) genannten Arbeit gegeben habe — lautet, wie folgt:

Die im Gebiete G definierte Funktion $z(x, y)$, sowie die gleichmäßig gegen z strebenden Funktionen $z_1(x, y), z_2(x, y), \cdots, z_n(x, y), \cdots$ mögen daselbst die Lipschitzsche Bedingung erfüllen; alsdann gilt die Ungleichung

$$\liminf_{n=\infty} I[z_n] \geqq I[z]. \tag{11}$$

Für den Fall des Plateauschen Problems $F = (1+p^2+q^2)^{\frac{1}{2}}$ drückt dieser Satz eine einfache Tatsache über den Flächeninhalt aus, den bereits Herr LEBESGUE in seiner berühmten Thèse bewiesen hat; mein eigener Beweis — den ich für reguläre Variationsprobleme von der Form (8) entwickelte — ist ohne Schwierigkeiten auf allgemeinere Fälle übertragbar. Auf dem internationalen Mathematikerkongreß in Bologna trug Herr L. TONELLI einen Beweis vor, der statt der Lipschitzschen Bedingung für die auftretenden Funktionen die geringere Annahme der absoluten Stetigkeit voraussetzt. Endlich hat Herr T. RADÓ[14]) vor kurzem

[13]) „Über den analytischen Charakter der Minimalflächen", Math. Zeitschrift, Bd. 24 (1925), S. 321—327.

[14]) „Über zweidimensionale reguläre Variationsprobleme.", Math. Annalen, Bd. 101 (1929), S. 620—632.

durch Verschmelzung der Ansätze von Z. GEÖCZE mit meinen Methoden einen sehr einfachen Beweis dieses Satzes gewonnen.

§ 4. Der Existenzsatz.

1. Auf Grund der vorangehenden Ergebnisse kann die Existenz der Lösung eines regulären Variationsproblems von der Form

$$(8') \qquad I[z] = \iint_G F(p, q)\, dx\, dy = \text{Min.}$$

bei gegebenen Randbedingungen für sehr allgemeine Gebiete bewiesen werden. Diese Frage ist mit der Lösbarkeit des entsprechenden Differentialgleichungssystems (10), in der also x, y explizite nicht auftreten (falls die Randwerte der Funktion z vorgeschrieben sind), identisch. Das fragliche Gebiet bzw. die vorgeschriebenen Randwerte seien, wie folgt, beschaffen[15]: *Auf einer konvexen Kurve C der x, y-Ebene sei eine stetige Folge von Randwerten derart gegeben, daß die Steilheit jeder Ebene, welche diese Raumkurve in wenigstens drei getrennten Punkten schneidet, unterhalb einer festen endlichen Schranke Δ liegt. Alsdann gibt es eine in dem durch C berandeten Gebiete G definierte, der Lipschitzschen Bedingung genügende Funktion $z(x, y)$, welche auf C die vorgeschriebenen Randwerte annimmt und fast überall in G in Gemeinschaft mit einer Hilfsfunktion $\omega(x, y)$ das System* (10) *befriedigt, d. h., welche dem Integral* (8′) *einen kleineren Wert erteilt als irgendeine andere, der Lipschitzschen Bedingung genügende Funktion mit denselben Randwerten.*

Ich bediene mich bei dem Beweise dieses Satzes der von HILBERT geschaffenen direkten Methode der Variationsrechnung, die man bisher bei Problemen mit zwei unabhängigen Veränderlichen nur im Falle linearer Differentialgleichungen (d. h. im Falle quadratischer Variationsprobleme) mit Erfolg anwenden konnte. Die Konstruktion der Extremalfunktion geschieht, wie folgt: Wir wählen irgendeine Größe Δ', die größer als Δ ist (etwa $\Delta' = \Delta + 1$), und betrachten die Gesamtheit derjenigen Funktionen, die in G der Lipschitzschen Bedingung mit der Konstanten Δ' genügen und auf C die vorgeschriebenen Randwerte annehmen. (Daß es solche Funktionen gibt, folgt aus der Bemerkung, daß die Potentialfunktion mit den vorgeschriebenen Randwerten der verlangten Lipschitzschen Bedingung genügt.) Es sei d die untere Grenze des Integrals $I[z]$ für die Funktionen dieser Konkurrenz. Es gibt dann in dieser Kon-

[15]) Der hier angedeutete Beweis dieses Satzes ist im § 1 meiner unter [4]) angeführten Arbeit enthalten. Betreffend der weiteren Literatur verweise ich auf die Einleitung der genannten Arbeit. — Unter der Steilheit einer Ebene wird der Tangens des spitzen Winkels verstanden, den die Ebene mit der x, y-Ebene einschließt.

kurrenz eine Folge $z_n(x, y)\,(n = 1, 2, 3, \cdots)$ derart, daß $I[z_n] \to d$ gilt. Wir können annehmen, daß z_n gleichmäßig gegen eine Funktion $z(x, y)$ strebt, da man aus einer Funktionenfolge, deren Funktionen der Lipschitzschen Bedingung mit derselben Konstanten Δ' genügen, stets eine gleichmäßig konvergente Teilfolge herausgreifen kann. Die Grenzfunktion $z(x,y)$ genügt derselben Lipschitzschen Bedingung; daher ist $I[z] \geqq d$, andererseits ist aber wegen der Halbstetigkeit (11) des regulären Variationsproblems $I[z] \leqq \lim_{n=\infty} I[z_n] = d$, folglich $I(z) = d$.

2. Es kommt nun alles darauf hinaus, zu zeigen, daß diese Funktion $z(x, y)$ — die das Integral $I[z]$ in der oben definierten Konkurrenz zum Minimum macht — die Extremalfunktion des vorgelegten Variationsproblems ist, d. h., daß $I[z] < I[z + \zeta]$ ist, wobei ζ *irgendeine* auf C verschwindende Funktion bedeutet, die in G der Lipschitzschen Bedingung (mit *irgendeiner* Lipschitzschen Konstanten) genügt. Ich beweise dies in meiner genannten Abhandlung, indem ich zeige, daß — wie auch die Konstanten α, β, γ gewählt sind — die Differenz

$$z(x, y) - (\alpha x + \beta y + \gamma)$$

— in der Terminologie von Herrn LEBESGUE — eine in G monotone Funktion darstellt. (Eine Funktion $Z(x, y)$ wird in G als monoton bezeichnet, wenn folgendes gilt: Sobald am Rande irgendeines Teilgebietes G' von G eine Ungleichung $m \leqq Z(x, y) \leqq M$ erfüllt ist, so besteht diese Ungleichung auch im ganzen Teilgebiet G'.) Ich möchte an dieser Stelle statt des — übrigens recht einfachen — Beweises nur den geometrischen Gedankengang skizzieren. Wäre auf dem Rand eines innerhalb G gelegenen Gebietes G' etwa $z(x, y) - (\alpha x + \beta y + \gamma) \leqq M$, und für einen inneren Punkt x_0, y_0 von G' $z(x_0, y_0) - (\alpha x_0 + \beta y_0 + \gamma) > M$, so würde die Ebene $z = \alpha x + \beta y + \gamma - M$ den Punkt x_0, y_0 der Fläche $z = z(x, y)$ von der Randkurve trennen, die Ebene daher die Fläche in einer geschlossenen Kurve durchsetzen. Es sei c die Projektion dieser Schnittkurve auf der x, y-Ebene und g das berandete Gebiet; wir setzen $\bar{z}(x, y)$ gleich der obigen linearen Funktion $(\alpha x + \beta y + \gamma - M)$ innerhalb g und gleich $z(x, y)$ außerhalb g. Man erkennt zunächst unschwer, daß $\bar{z}(x, y)$ wiederum der Lipschitzschen Bedingung mit derselben Lipschitzschen Konstanten Δ' genügt[16]), ferner die Richtigkeit der Ungleichung

[16]) Die Richtigkeit der Ungleichung

$$\frac{\bar{z}(x_1, y_1) - \bar{z}(x_2, y_2)}{[(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2]^{\frac{1}{2}}} \leqq \Delta'$$

folgt nämlich unmittelbar, falls beide Punkte x_1, y_1 und x_2, y_2 dem Gebiete g, oder beide dem Gebiete $G - g$ angehören, und kann im entgegengesetzten Falle leicht hierauf zurückgeführt werden (S. 138—139, a. a. O. [4]).

$$\iint_g F(z_x, z_y)\, dx\, dy > \iint_g F(\bar{z}_x, \bar{z}_y)\, dx\, dy.$$

In der Tat, $\bar{z}$ ist innerhalb g eine lineare Funktion, daher jedenfalls Lösung des Gleichungssystems (10); folglich erteilt $\bar{z}$ dem betrachteten Integral in g einen kleineren Wert als irgendeine andere Funktion mit denselben Randwerten. Daraus folgt aber

$$I[\bar{z}] = \iint_g F(\bar{z}_x, \bar{z}_y)\, dx\, dy + \iint_{G-g} F(z_x, z_y)\, dx\, dy$$

$$< \iint_g F(z_x, z_y)\, dx\, dy + \iint_{G-g} F(z_x, z_y)\, dx\, dy = d,$$

in Widerspruch damit, daß d die untere Grenze der Werte ist, die dem Integral $I[z]$ von den Funktionen erteilt wird, welche der Lipschitzschen Bedingung mit der Konstanten Δ' genügen und auf C die vorgeschriebenen Randwerte annehmen.

3. Für Funktionen bzw. Flächen, die dieser Monotonitätsbedingung genügen, gilt ein bemerkenswerter Satz topologischer Natur, der — wie mir scheint — in verschiedenen Untersuchungen dieser Art mit Erfolg anwendbar ist. Ich gelangte zu seiner Aufstellung lediglich zu dem Zwecke, um die Extremaleigenschaft der oben konstruierten Funktion zu beweisen. Herr RADÓ bewies[17]) auf meine Anregung diesen Satz in recht eleganter, wenn auch nicht ganz einfacher Weise. Einen überraschend einfachen und kurzen Beweis dieses Satzes fand Herr J. v. NEUMANN aus dem Anlasse dieser Vorträge in Hamburg[18]). Der Satz lautet folgendermaßen: *Es sei $z(x, y)$ eine in G definierte stetige Funktion, die so beschaffen ist, daß*

a) *bei jeder Wahl der Konstanten α, β, γ die Differenz $z(x, y) - (\alpha x + \beta y + \gamma)$ eine monotone Funktion in G ist,*

b) *ihre Randwerte so beschaffen sind, daß die Steilheit jeder Ebene, die drei getrennte Randpunkte der entsprechenden Fläche enthält, unterhalb einer endlichen Schranke Δ bleibt.*

Dann genügt $z(x, y)$ in G der Lipschitzschen Bedingung mit der Konstanten Δ.

Mit Hilfe dieses Satzes kann man in einfacher Weise die Richtigkeit der Ungleichung

$$I[z] < I[z_1] \tag{12}$$

beweisen, wobei z die oben konstruierte Funktion, die nach dem vorangehenden der Lipschitzschen Bedingung mit der Konstanten Δ genügt,

[17]) „Geometrische Betrachtungen über zweidimensionale reguläre Variationsprobleme", Acta Litt. ac Scient. Univ. Szeged, Bd. 2, (1926), S. 228—253.

[18]) Erscheint demnächst in diesen Abhandlungen.

z_1 aber irgendeine in G definierte von z verschiedene Funktion mit denselben Randwerten bedeutet, die der Lipschitzschen Bedingung mit irgendeiner Konstanten genügt. In der Tat, die in § 3 betrachtete Funktion

$$f(\theta) = I[z + \theta(z_1 - z)]$$

ist für jedes θ — wie bemerkt — von unten konvex; sie besitzt an der Stelle $\theta = 0$ jedenfalls ein relatives Minimum, da für ein hinreichend kleines θ die Funktion $z + \theta(z_1 - z)$ der Lipschitzschen Bedingung mit der oben gewählten Konstanten $\Delta'(\Delta' > \Delta)$ genügt und in dieser Konkurrenz die Funktion z den kleinsten Wert dem fraglichen Integral erteilt. Aus der Konvexität folgt aber, daß $f(\theta)$ an der Stelle $\theta = 0$ ein absolutes Minimum hat; daher ist $f(0) < f(1)$, und dies ist die Behauptung (12).

4. Damit ist gezeigt, daß diese Funktion $z(x, y)$ dem Integral (8′) einen kleineren Wert erteilt als irgendeine andere, der Lipschitzschen Bedingung genügende Funktion, die dieselben Randwerte annimmt. Diese Funktion ist daher Lösung des entsprechenden Gleichungssystems (10), womit unser Existenzsatz bewiesen ist.

Herr Radó hat vor kurzem einen wertvollen Beitrag zu diesem Beweise geliefert[19]). Er zeigt, daß die oben konstruierte Funktion $z(x, y)$ außer den Eigenschaften a) und b) des in 3. ausgesprochenen Satzes auch noch der folgenden Bedingung genügt:

c) Bezeichnet G_{hk} das Gebiet, das aus G durch Parallelverschiebung um den Vektor mit den Komponenten h und k hervorgeht, so ist die Differenz $z(x, y) - z(x - h, y - k)$ im gemeinsamen Teilgebiet von G und G_{hk} monoton bei jeder Wahl von h und k.

Herr Radó ersetzt dann den obigen Hilfssatz durch die viel einfachere Tatsache, daß aus den Annahmen a), b), c) für $z(x, y)$ die Lipschitzsche Bedingung mit der Konstanten Δ für diese Funktion folgt. Diese Modifikation meines ursprünglichen Beweisganges ist äußerst interessant, obwohl damit — in Anbetracht der Einfachheit des v. Neumannschen Beweises des fraglichen Hilfssatzes — kaum an Kürze gewonnen wird.

5. Ich möchte noch eine Bemerkung über die weiteren Differentialgleichungssysteme hinzufügen, denen die soeben konstruierte Extremalfunktion genügt. Diese spielen insbesondere in der Theorie der Minimalflächen eine wichtige Rolle. Man gelangt zu diesen durch eine Methode, die bei älteren Autoren als *Variation der unabhängigen Veränderlichen* bezeichnet wird. Der Grundgedanke dieser Methode ist der folgende: In einer ξ, η-Ebene sei Γ die konvexe Kurve, die vermöge der Transformation $x = \xi$, $y = \eta$ der Kurve C entspricht; vermöge der Gleichungen

[19]) A. a. O. [14]).

$$x = \xi + \varepsilon\zeta(\xi, \eta), \quad y = \eta, \quad z = z(\xi, \eta) \qquad (\xi, \eta \text{ in } \Gamma)$$

(wobei $\zeta(\xi, \eta)$ eine zulässige Variation bezeichnet) wird für jedes ε eine Fläche im x-, y-, z-Raume definiert. Man erkennt ohne Mühe, daß für hinreichend kleine ε die Gleichung dieser Fläche auf die Form $z = \varphi(x, y; \varepsilon)$ gebracht werden kann, und es ist $\varphi(x, y; 0) = z(x, y)$; dabei ist $\varphi(x, y; \varepsilon)$ für jedes solche ε eine in G definierte der Lipschitzschen Bedingung genügende Funktion, die dieselben Randwerte wie $z(x, y)$ besitzt. Die Tatsache, daß $I[\varphi(x, y; \varepsilon)] \geqq I[z]$ ist, führt dann zu einem neuen Differentialgleichungssystem, das wie folgt lautet:

$$(10') \qquad qF_q - F = \frac{\partial \omega_2}{\partial x}, \qquad qF_p = -\frac{\partial \omega_2}{\partial y},$$

wobei $\omega_2(x, y)$ eine Hilfsfunktion bedeutet. In analoger Weise erhält man durch „Variation" der unabhängigen Variablen y

$$(10'') \qquad pF_q = \frac{\partial \omega_3}{\partial x}, \qquad pF_p - F = -\frac{\partial \omega_3}{\partial y}.$$

Diese Systeme wurden — unter Annahme der Stetigkeit der Ableitungen p, q — auf meine Anregung von Herrn T. RADÓ abgeleitet[20]). Ich habe sodann diesen Beweis bei meiner Lösung des Plateauschen Problems auf den etwas allgemeineren Fall übertragen, wo $z(x, y)$ nur der Lipschitzschen Bedingung unterworfen ist, durch Heranziehung der Rademacherschen Sätze über solche Funktionen[21]).

§ 5. Das Plateausche Problem und die adjungierten Extremalfunktionen.

1. Obwohl durch das letzte Resultat das reguläre Variationsproblem (8′) als gelöst zu betrachten ist, so entsteht dennoch eine weitere Frage in Zusammenhang mit der Euler-Lagrangeschen Differentialgleichung des Problems: *Besitzt die gewonnene Lösung Ableitungen zweiter Ordnung,* d. h. ist durch den Existenzsatz auch die entsprechende Differentialgleichung 2. Ordnung gelöst? Ohne weitere Voraussetzungen über den Integranden $F(p, q)$ (bzw. über die Existenz der Ableitungen höherer Ordnung dieser Funktion) kann diese Frage offenbar nicht bejaht werden. Ist $F(p, q)$ analytisch, so hängt diese Frage innig mit dem von HILBERT aufgestellten Theorem zusammen, daß jede Lösung eines

[20]) „Bemerkung über die Differentialgleichungen zweidimensionaler Variationsprobleme", Acta Litt. ac Scient. Univ. Szeged, Bd. 2 (1925), S. 147—156.

[21]) „Über partielle und totale Differenzierbarkeit von Funktionen mehrerer Variablen" I. und II., Math. Annalen, Bd. 79 (1919), S. 340—359, und 81 (1920), S. 52—63.

regulären analytischen Variationsproblems selbst analytisch ist. Die verschiedenen Beweise dieses Theorems sind aber für unseren Fall nicht anwendbar; sie alle setzen bereits die Existenz der zweiten Ableitungen der Extremalfunktion voraus. Nur *in dem* — allerdings besonders interessanten — *Falle der Minimalflächen* (den Fall eines quadratischen Variationsproblems lasse ich außer Acht) *kann ich beweisen, daß die oben konstruierte Extremalfunktion in der Tat analytisch ist, also eine vollständige Lösung des Plateauschen Problems liefert.*

Der Grundgedanke dieses Beweises ist derselbe, mit dessen Hilfe Herr Radó gezeigt hat[22]), daß jede einmal stetig differenzierbare Minimalfläche analytisch ist. Hier handelt es sich darum, dieselbe Tatsache unter der etwas geringeren Voraussetzung zu beweisen, daß die fragliche Extremalfunktion nur der Lipschitzschen Bedingung genügt. Wir gehen von den für die Extremalfunktion $z(x, y)$ gewonnenen drei Gleichungssystemen (10), (10′), (10″) aus, die für den Fall des Plateauschen Problems $F = (1+p^2+q^2)^{\frac{1}{2}}$, wie folgt lauten:

$$(13)\qquad \begin{aligned} \frac{q}{F} &= \frac{\partial \omega_1}{\partial x}, & \frac{1+p^2}{F} &= \frac{\partial \omega_2}{\partial x}, & \frac{pq}{F} &= \frac{\partial \omega_3}{\partial x}, \\ \frac{p}{F} &= -\frac{\partial \omega_1}{\partial y}, & \frac{pq}{F} &= \frac{\partial \omega_2}{\partial y}, & \frac{1+q^2}{F} &= \frac{\partial \omega_3}{\partial y}. \end{aligned}$$

Diese Gleichungen gelten natürlich nur fast überall im Gebiete G; die auftretenden Funktionen z, ω_1, ω_2, ω_3 sind Lipschitz-Funktionen, mit deren Differentialquotienten 1. Ordnung man bekanntlich gerade so rechnen kann, wie im Falle der stetigen Ableitungen. Das von Herrn Radó angewandte Verfahren besteht in der Einführung isothermer Parameter auf der Minimalfläche, durch Anwendung des bekannten Riemannschen Satzes, demzufolge die Minimalfläche durch eine Schar paralleler Ebenen in den Kurven einer Isothermenschar geschnitten wird. Führt man nämlich durch die Beziehungen

$$x = X, \qquad \omega_3(x, y) = Y$$

neue Veränderliche ein, so überzeugt man sich leicht, daß dadurch eine ein-eindeutige Abbildung festgelegt ist[23]). Man erkennt auch unschwer, daß die daraus berechnete Funktion $y = y(X, Y)$, sowie die Funktionen

$$Z(X, Y) = z(x, y),$$
$$\Omega_1(X, Y) = \omega_1(x, y), \quad \Omega_2(X, Y) = \omega_2(x, y), \quad \Omega_3(X, Y) = \omega_3(x, y)$$

[22]) A. a. O. [13]).

[23]) S. 156 a. a. O.[4]).

der Lipschitzschen Bedingung genügen. Eine formale Umrechnung der Gleichungssysteme (13) liefert für diese Funktionen die Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen

$$\frac{\partial Z}{\partial X} = -\frac{\partial \Omega_1}{\partial Y}, \quad \frac{\partial Z}{\partial Y} = \frac{\partial \Omega_1}{\partial X}; \qquad \frac{\partial y}{\partial X} = -\frac{\partial \Omega_2}{\partial Y}, \quad \frac{\partial y}{\partial Y} = \frac{\partial \Omega_2}{\partial X}.$$

Daraus folgt aber, daß $y(X, Y)$, $Z(X, Y)$ analytische Funktionen von X, Y sind; folglich ist die aus den Gleichungen $x = X$, $y = y(X, Y)$, $z = Z(X, Y)$ durch Elimination von X, Y entstehende Gleichung $z = z(x, y)$, d. h. die Gleichung unserer Extremalfläche, ebenfalls analytisch.

2. Es ist mir leider nicht gelungen, durch eine ähnliche Schlußweise für andere reguläre Variationsprobleme die Existenz der 2. Ableitungen der Extremalfunktionen zu beweisen, obwohl es recht möglich ist, daß diese Art der Zurückführung auf lineare Gleichungssysteme bei einer weiteren Klasse von Problemen zum Ziele führt. Der hier entwickelte formale Apparat führte mich aber zu einem Begriff, der bei allgemeinen Variationsproblemen eine ähnliche Rolle spielt, wie der Begriff der adjungierten Minimalfläche für den Fall $F = (1+p^2+q^2)^{\frac{1}{2}}$. Ich möchte zum Schluß diese Begriffsbildung hier kurz auseinandersetzen.

Der Symmetrie halber führen wir im Variationsproblem (8′) — die Bedingung der Regularität lassen wir fallen — homogene Koordinaten u, v ein, indem wir $x = \xi(u, v)$, $y = \eta(u, v)$, $z = \zeta(u, v)$ setzen; führt man die Bezeichnungen

$$p_1 = \begin{vmatrix} \eta_u & \zeta_u \\ \eta_v & \zeta_v \end{vmatrix}, \qquad p_2 = \begin{vmatrix} \zeta_u & \xi_u \\ \zeta_v & \xi_v \end{vmatrix}, \qquad p_3 = \begin{vmatrix} \xi_u & \eta_u \\ \xi_v & \eta_v \end{vmatrix}$$

ein, so gelangt man zu einem Variationsproblem von der Form

$$(14) \qquad \delta \iint f(p_1, p_2, p_3)\, du\, dv = 0, \quad \left(f = p_3 F\left(-\frac{p_1}{p_3}, -\frac{p_2}{p_3}\right)\right),$$

wobei der Integrand die bekannte Homogeneitätsbedingung $p_1 f_{p_1} + p_2 f_{p_2} + p_3 f_{p_3} = f$ erfüllt. Indem man bei diesem Problem mit drei unbekannten Funktionen das Verschwinden der ersten Variation in der obigen Weise in Differentialgleichungssysteme umsetzt, gelangt man zu den folgenden Beziehungen (wir bezeichnen die auftretenden drei Hilfsfunktionen mit $\overline{\xi}, \overline{\eta}, \overline{\zeta}$):

$$(15) \qquad \begin{aligned} \overline{\xi}_u &= \begin{vmatrix} \eta_u & \zeta_u \\ f_{p_2} & f_{p_3} \end{vmatrix}, \quad \overline{\eta}_u = \begin{vmatrix} \zeta_u & \xi_u \\ f_{p_3} & f_{p_1} \end{vmatrix}, \quad \overline{\zeta}_u = \begin{vmatrix} \xi_u & \eta_u \\ f_{p_1} & f_{p_2} \end{vmatrix}, \\ \overline{\xi}_v &= \begin{vmatrix} \eta_v & \zeta_v \\ f_{p_2} & f_{p_3} \end{vmatrix}, \quad \overline{\eta}_v = \begin{vmatrix} \zeta_v & \xi_v \\ f_{p_3} & f_{p_1} \end{vmatrix}, \quad \overline{\zeta}_v = \begin{vmatrix} \xi_v & \eta_v \\ f_{p_1} & f_{p_2} \end{vmatrix}, \end{aligned}$$

die man auf die einfache Form

$$d\bar{\xi} = f_{p_3}\, d\eta - f_{p_2}\, d\zeta, \qquad d\bar{\eta} = f_{p_1}\, d\zeta - f_{p_3}\, d\xi, \qquad d\bar{\zeta} = f_{p_2}\, d\xi - f_{p_1}\, d\eta$$

bringen kann. Diese Gleichungen sind übrigens nur eine symmetrische Schreibweise der Gleichungen (10), (10′), (10″) des vorangehenden Paragraphen. Es folgt aus diesen Beziehungen, daß *zu jeder Extremalfläche E des Variationsproblems* (14) *eine bis auf eine Parallelverschiebung eindeutig festgelegte Fläche* $\bar{E}$

$$x = \bar{\xi}(u, v), \qquad y = \bar{\eta}(u, v), \qquad z = \zeta(u, v)$$

gehört, die ich als die zu E adjungierte Extremalfläche bezeichne, da diese im Falle des Plateauschen Problems genau der von BONNET eingeführten adjungierten Minimalfläche entspricht. Bezeichnet man die Unterdeterminanten der Matrix

$$\begin{pmatrix} \xi_u & \eta_u & \zeta_u \\ \xi_v & \eta_v & \zeta_v \end{pmatrix}$$

bzw. mit $\bar{p}_1, \bar{p}_2, p_3$, so zeigt man durch eine einfache Rechnung, daß alle zu den Extremalflächen von (14) adjungierten Flächen Extremalflächen eines anderen Variationsproblems derselben Form

$$\overline{(14)} \qquad \delta \int\int \bar{f}(\bar{p}_1, \bar{p}_2, p_3)\, du\, dv = 0$$

sind; man erhält den Integranden dieses Variationsproblems (ich nenne es das zu (14) *adjungierte Variationsproblem*) durch Elimination von p_1, p_2, p_3 aus den Gleichungen

$$\bar{p}_1 = \bar{f} f_{p_1}, \qquad \bar{p}_2 = \bar{f} f_{p_2}, \qquad \bar{p}_3 = \bar{f} f_{p_3},$$
$$p_1 = f \bar{f}_{\bar{p}_1}, \qquad p_2 = f \bar{f}_{\bar{p}_2}, \qquad p_3 = f \bar{f}_{\bar{p}_3}.$$

Die Beziehung zwischen (14) und $\overline{(14)}$ ist *involutorisch* (das Plateausche Problem ist in diesem Sinne sich selbst adjungiert) und es war mein Ziel, *die bekannten Sätze über adjungierte Minimalflächen auf diese Weise auf allgemeine Variationsprobleme zu übertragen.*

Ich hatte dabei nicht bemerkt, daß die Berührungstransformation, die (14) in $\overline{(14)}$ überführt, im wesentlichen dieselbe ist, die Herr C. CARATHÉODORY in zwei, für die Transformationstheorie der Variationsprobleme fundamentalen Arbeiten[24]) eingeführt hat. Seine Untersuchungen

[24]) „Über die kanonischen Veränderlichen in der Variationsrechnung der mehrfachen Integrale", Math. Annalen, Bd. 85 (1922), S. 78—88; „Über ein Reziprozitätsgesetz der verallgemeinerten Legendreschen Transformation", Math. Annalen, Bd. 86 (1922), S. 272—275.

— die übrigens für den Fall beliebig vieler unbekannten Funktionen und Veränderlichen gelten — sind neuerdings in äußerst eleganter Form dargelegt, wobei auch auf den Zusammenhang mit meinen Untersuchungen hingewiesen wird[25]).

3. Die bekannten Sätze der Flächentheorie über adjungierte Minimalflächen enthalten Aussagen über die Abbildung dieser Flächen aufeinander (entsprechende Linienelemente stehen aufeinander senkrecht. die Abbildung ist eine Verbiegung, usw.). Ich möchte noch einige Andeutungen geben über die Verallgemeinerung dieser Sätze auf das Variationsproblem (14). Vermöge der obigen Definition von $\bar{E}$ ist nämlich eine Abbildung einer Extremalfläche auf ihre adjungierte Fläche festgelegt; *entsprechende Linienelemente sind auch jetzt orthogonal und die Abbildung ist in einem bestimmten nichteuklidischen Sinne wiederum eine Verbiegung.* Die Bogenlänge ist dabei, wie folgt, definiert: man setze

$$d s^2 = \sqrt{\frac{f f_{p_1} f_{p_2} f_{p_3}}{p_1 p_2 p_3}} \left\{ \frac{p_1}{f_{p_1}} d\xi^2 + \frac{p_2}{f_{p_2}} d\eta^2 + \frac{p_3}{f_{p_3}} d\zeta^2 \right\}$$
$$= E^* du^2 + 2 F^* du dv + G^* dv^2$$

und entsprechend für die adjungierte Fläche (wobei natürlich $\bar{f}$ die Rolle von f übernimmt); alsdann wird bei der fraglichen Abbildung $ds^2 = d\bar{s}^2$. Das vorgelegte Variationsproblem selbst ist das nichteuklidische Flächenmaß bei Zugrundelegung dieser Maßbestimmung: $f(p_1, p_2, p_3) = \sqrt{E^* G^* - F^{*2}}$. Führt man in diesem Sinne isotherme Parameter ein ($E^* = G^*$, $F^* = 0$), so erhält das Gleichungssystem (15) eine überaus einfache Form, die der Cauchy-Riemannschen Gleichung nahe verwandt ist, usf.

Der Hauptgedanke in diesen Verallgemeinerungen ist die Tatsache, daß jedes Variationsproblem (14) auf seinen Extremalflächen eine ganz bestimmte Maßbestimmung festlegt. die innig mit der obigen Abbildung zusammenhängt.

Es war mein Ziel, in diesen formalen Entwicklungen zu zeigen, daß das Gleichungssystem, das ich an Stelle der Euler-Lagrangeschen Gleichungen setze, nicht nur bei Existenzsätzen, sondern auch beim Studium von Differentialeigenschaften im kleinen mit Nutzen anwendbar ist. Man erhält sogar vermöge der symmetrischen Bauart jenes Systems in durchsichtigerer Weise diese Ergebnisse, als bei Benutzung der Euler-Lagrangeschen Gleichungen.

[25]) C. Carathéodory: „Über die Variationsrechnung bei mehrfachen Integralen", Acta Litt. ac Scient. Univ. Szeged, Bd. 4 (1929), S. 193—216.

F

Függvényapproximációk és lineáris egyenlőtlenségek
Approximation von Funktionen und lineare Ungleichungen

F1. Die Minkowskische Geometrie und die Annäherung an stetige Funktionen, *Math. Ann.*, **78** (1918), 294—311. *[403—420]*

F2. A lineáris egyenlőtlenségekről, *Mat. Term. Ért.*, **36** (1918), 179—296. *[421—438]*

F3. Über lineare Ungleichungen, *Acta Sci. Math.*, **2** (1924), 1—14. *[439—452]*

*

Az F1 dolgozat a folytonos függvények polinomokkal való megközelítésének Csebisev-féle elméletéhez csatlakozik és azt vizsgálja, milyen feltételek mellett érvényes ez az elmélet akkor is, ha a polinomok (azaz az 1, x, x^2, ... függvények véges lineáris kapcsolatai) helyébe más, lineárisan független, $f_0(x)$, $f_1(x)$, $f_2(x)$, ... folytonos függvények véges lineáris kapcsolatai lépnek. Tárgyalásában a konvex testek Minkowski-féle elméletéből vett segédeszközöket is felhasznál. F2 és F3 ugyanannak a dolgozatnak magyar- és németnyelvű változata. Ebben a dolgozatban ugyancsak a konvex testek elméletének elemeire alapozva egyszerű módon újra bizonyítja és továbbfejleszti Farkas Gyulának és H. Minkowskinak a lineáris egyenlőtlenségekre vonatkozó eredményeit.

A F1 dolgozattal kapcsolatos irodalomból emeljük ki N. I. Ahijezer könyvét az approximációk elméletéről, amely Haar tételére új bizonyítást ad (a könyv orosznyelvű eredeti kiadása 1947-ben jelent meg, magyar nyelvű kiadása *Előadások az approximáció elméletéről* címmel 1951-ben jelent meg Budapesten).

Az F2—F3 dolgozathoz közvetlenül csatlakozik Farkas Gyula egy dolgozata: Egyenlőtlenségek alkalmazásának új módjai, *Mat. Term. Ért.*, **36** (1918), 297—308.

*

Die Arbeit F1 schließt sich an die Tschebyscheffsche Theorie der Approximationen stetiger Funktionen durch Polynome an und untersucht, unter welchen Bedingungen diese Theorie auch gültig bleibt, wenn die Polynome (d. h. die endlichen linearen Verbindungen der Funktionen 1, x, x^2, ...) durch endliche lineare Verbindungen allgemeinerer, gegebener, stetiger Funktionen $f_0(x)$, $f_1(x)$, $f_2(x)$, ... ersetzt werden. In der Beweisführung werden u. a. Hilfsmittel aus der Minkowskischen Theorie der konvexen Körper herangezogen. F2 und F3 sind Varianten in ungarischer und in deutscher Sprache einer Arbeit, in der — ebenfalls auf Grund der Elemente der Theorie der konvexen Körper — die Ergebnisse von J. Farkas und H. Minkowski über lineare Ungleichungen auf einfache Weise neu bewiesen und weiterentwickelt werden.

Aus der sich der Arbeit F1 anschließenden Literatur sei insbesondere auf das Werk von N. I. Achieser über Approximationstheorie verwiesen, in dem für den Satz von Haar ein neuer Beweis gegeben wird (die russische Originalausgabe dieses Buches erschien 1947, eine deutsche Übersetzung wurde 1953 in Berlin unter dem Titel: *Vorlesungen über Approximationstheorie* herausgegeben).

An die Arbeiten F2—F3 schließt sich unmittelbar ein Aufsatz von J. Farkas.

Die Minkowskische Geometrie und die Annäherung an stetige Funktionen.

Dem Andenken an Hermann Minkowski gewidmet.

Von

Alfred Haar in Kolozsvár (Klausenburg).

1. Minkowski hat in seiner „Geometrie der Zahlen“ die Grundlagen einer neuen nicht-Euklidischen Geometrie entworfen. „Wie die Bolyai-Lobatschefskysche Geometrie“ — schreibt Hilbert in seiner Gedächtnisrede auf Minkowski — „in verschiedenen mathematischen Disziplinen, besonders in der Theorie der analytischen Funktionen mit linearen Transformationen in sich die fruchtbarste Anwendung findet, so zeigt sich die Minkowskische Geometrie besonders für die Zahlentheorie von hervorragender Bedeutung.“

Durch die zahlentheoretischen Anwendungen ist aber die Fruchtbarkeit der Minkowskischen Geometrie nicht erschöpft. Sie findet eine wichtige Anwendung — wie in der vorliegenden Arbeit gezeigt wird — in der Theorie der reellen Funktionen, bei Problemen in denen es sich um die Annäherung einer stetigen Funktion durch ein System gegebener Funktionen handelt; zu diesen Fragen gehört insbesondere das vielbehandelte Tschebyscheffsche Problem. Deutet man Aufgaben dieser Art geometrisch in einem mehrdimensionalen Raum, und wendet dabei Minkowskis Geometrie an, so erhalten Sätze dieses Gedankenkreises ein anschauliches geometrisches Bild.

Wir werden uns in dieser Note größtenteils mit Annäherungen beschäftigen, bei denen als Maß der Annäherung das von Tschebyscheff eingeführte ist*). Dabei werden sich durch rein geometrische Betrachtungen die ursprünglichen Tschebyscheffschen Resultate ergeben — die in unserer

*) Das *Tschebyscheffsche Maß* der Annäherung wird bekanntlich folgendermaßen definiert: Ist $\mathfrak{M}$ eine beliebige beschränkte abgeschlossene Punktmenge, $f(P)$ und $F(P)$ daselbst definierte stetige Funktionen, so wird das Maximum von $|f(P)+F(P)|$

Zeit von den Herren Kirchberger*) und Borel**) neu begründet wurden — sowie auch die daran anschließenden schönen Untersuchungen der Herren Tonelli***) und J. W. Young†); man erhält auf diese Weise außerdem Theoreme von weit größerer Allgemeinheit, die ein einheitliches Bild dieser Probleme ermöglichen. Außer den von Minkowski geschaffenen Begriffen kommt dabei insbesondere ein Satz von Herrn Carathéodory über kleinste konvexe Bereiche zur Anwendung, mit dessen Untersuchungen über positive harmonische Funktionen die vorliegende Arbeit manche Berührungspunkte aufweist.††)

I. Der Eichkörper der Tschebyscheffschen Annäherung. Existenz der Lösungen.

2. Wir legen unseren Untersuchungen irgend eine beschränkte abgeschlossene Punktmenge $\mathfrak{M}$ eines Raumes von beliebiger Dimensionzahl zugrunde, und bezeichnen mit P irgend einen Punkt dieser Menge. Wir betrachten ferner $n+1$ in dieser Punktmenge definierte Funktionen:

$$f(P),\ f_1(P),\ f_2(P),\ \ldots,\ f_n(P)$$

und setzen voraus, daß diese Funktionen in $\mathfrak{M}$ stetig und linear unabhängig sind, d. h. daß außer dem trivialen Wertsystem

---

(wobei P irgend einen Punkt von $\mathfrak{M}$ bedeuten kann) als Maß der Approximation der Funktion $f(P)$ durch die Funktion $-F(P)$ bezeichnet. Sind insbesondere

$$f_1(P),\ f_2(P),\ \ldots,\ f_n(P)$$

n in der Punktmenge $\mathfrak{M}$ definierte stetige Funktionen, und gibt es ein Wertsystem $a_1, a_2, \ldots, a_n$ derart, daß das Maximum von

$$|f(P) + x_1 f_1(P) + \cdots + x_n f_n(P)|$$

— wobei $x_1, \ldots, x_n$ beliebige reelle Konstanten bedeuten — stets größer oder gleich dem Maximum von

$$|f(P) + a_1 f_1(P) + \cdots + a_n f_n(P)|$$

ist, so wird die Funktion $-(a_1 f_1(P) + \cdots + a_n f_n(P))$ eine *Tschebyscheff'sche Annäherung* in $\mathfrak{M}$ der Funktion $f(P)$ durch das Funktionensystem $x_1 f_1(P) + \cdots + x_n f_n(P)$ genannt.

*) „Über Tschebyscheffsche Annäherungsmethoden". Math. Ann. 57 (1903).

**) „Leçons sur les fonctions de variables réelles", S. 82. Vgl. auch M. Fréchet: „Sur l'approximation des fonctions continues . . .". Annales de l'École Normale Supérieure. III. Bd. 25 (1908).

***) „I polinomi d'approssimazione di Tchebychev." Annali di Matematica. III. Bd. XV (1908).

†) „General theory of approximation by functions involving a given number of arbitrary parameters." Trans. of the Am. Math. Society. Bd. 8 (1907).

††) „Über den Variabilitätsbereich der Koeffizienten von Potenzreihen, die gegebene Werte nicht annehmen." Math. Ann. 64 (1907), und „Über den Variabilitätsbereich der Fourierschen Konstanten von positiven harmonischen Funktionen." Rend. del Circ. Mat. di Palermo. Bd. 32 (1911).

$$x = x_1 = x_2 = \cdots = x_n = 0$$

kein anderes Wertsystem $x, x_1, x_2, \ldots, x_n$ existiert, für das die Funktion

$$xf(P) + x_1 f_1(P) + x_2 f_2(P) + \cdots + x_n f_n(P)$$

für jeden Punkt der Menge $\mathfrak{M}$ gleich Null ausfällt.

Unter diesen Voraussetzungen fassen wir diejenigen Wertsysteme

$$a, a_1, a_2, \ldots, a_n$$

ins Auge, für die das Maximum der in $\mathfrak{M}$ stetigen Funktion

$$|af(P) + a_1 f_1(P) + a_2 f_2(P) + \cdots + a_n f_n(P)|$$

kleiner oder gleich 1 ausfällt. Betrachten wir die zugehörigen Punkte

$$x = a, \; x_1 = a_1, \; x_2 = a_2, \; \cdots, \; x_n = a_n$$

eines $(n+1)$-dimensionalen Raumes, in dem $x, x_1, \ldots, x_n$ die gewöhnlichen Punktkoordinaten bedeuten, so *bildet die Gesamtheit der so erhaltenen Punkte einen ganz im Endlichen gelegenen konvexen Körper* $\mathfrak{K}$.*)

In der Tat, aus der vorausgesetzten Stetigkeit der Funktionen $f, f_1, \ldots, f_n$, folgt unmittelbar, daß die betrachteten Wertsysteme $a, a_1, \ldots, a_n$ eine abgeschlossene Punktmenge bilden. Sind ferner

$$a', a_1', \ldots, a_n' \quad \text{und} \quad a'', a_1'', \ldots, a_n''$$

irgend zwei Punkte, die $\mathfrak{K}$ angehören, für die also die Maxima der Funktionen

$$|a'f(P) + a_1' f_1(P) + \cdots + a_n' f_n(P)| \quad \text{und} \quad |a''f(P) + a_1'' f_1(P) + \cdots + a_n'' f_n(P)|$$

nicht größer als 1 ausfallen, so gehört — sobald θ eine die Ungleichung

$$0 \leqq \theta \leqq 1$$

erfüllende Zahl bedeutet — der Punkt mit den Koordinaten

$$a = \theta a' + (1-\theta)a'', \; a_1 = \theta a_1' + (1-\theta)a_1'', \; \ldots, \; a_n = \theta a_n' + (1-\theta)a_n''$$

ebenfalls dem Körper $\mathfrak{K}$ an, denn es besteht die Ungleichung

$$|af(P) + a_1 f_1(P) + \cdots + a_n f_n(P)| \leqq \theta |a'f(P) + a_1' f_1(P) + \cdots + a_n' f_n(P)| + (1-\theta)|a''f(P) + a_1'' f_1(P) + \cdots + a_n'' f_n(P)| \leqq 1.$$

---

*) Eine abgeschlossene Punktmenge unseres $(n+1)$-dimensionalen Raumes ist ein konvexer Körper, wenn sie die folgende Eigenschaft besitzt: Sind

$$x', x_1', \ldots, x_n' \quad \text{und} \quad x'', x_1'', \ldots, x_n''$$

irgend zwei Punkte dieser Punktmenge, so gehört der Punkt mit den Koordinaten

$$x = \theta x' + (1-\theta)x'', \; x_1 = \theta x_1' + (1-\theta)x_1'', \; \ldots, \; x_n = \theta x_n' + (1-\theta)x_n''$$

— sowie θ irgend eine die Ungleichung $0 \leqq \theta \leqq 1$ erfüllende Zahl bedeutet — ebenfalls dieser Punktmenge an.

Ein konvexer Körper ist „ganz im Endlichen gelegen", wenn die Koordinaten seiner Punkte dem absoluten Betrage nach unterhalb einer festen Grenze bleiben.

Es erübrigt noch zu zeigen, daß sämtliche Koordinaten jedes Punktes von $\mathfrak{K}$ unterhalb einer festen oberen Grenze liegen.*)

Im entgegengesetzten Falle würden unendlich viele Wertsysteme

$$a^{(\nu)}, a_1^{(\nu)}, \ldots, a_n^{(\nu)} \qquad (\nu = 1, 2, \ldots)$$

existieren, die alle die Bedingung

$$|a^{(\nu)} f(P) + a_1^{(\nu)} f_1(P) + \cdots + a_n^{(\nu)} f_n(P)| \leqq 1$$

für jeden Punkt P von $\mathfrak{M}$ erfüllen, von der Beschaffenheit, daß die absolut größte Zahl des ν^{ten} Wertsystems mit wachsendem ν über alle Grenzen wächst. Es sei $\alpha^{(\nu)}$ gleich der größten der positiven Zahlen

$$|a^{(\nu)}|, |a_1^{(\nu)}|, \ldots, |a_n^{(\nu)}|; \qquad (\nu = 1, 2, \ldots)$$

bilden wir für jedes ν die Quotienten

$$c^{(\nu)} = \frac{a^{(\nu)}}{\alpha^{(\nu)}}, \; c_1^{(\nu)} = \frac{a_1^{(\nu)}}{\alpha^{(\nu)}}, \; \cdots, \; c_n^{(\nu)} = \frac{a_n^{(\nu)}}{\alpha^{(\nu)}},$$

so ist eine dieser Größen sicherlich gleich ± 1, während alle anderen dem Betrage nach nicht größer als 1 ausfallen; es gilt ferner für jeden Punkt P von $\mathfrak{M}$ die Ungleichung:

$$|c^{(\nu)} f(P) + c_1^{(\nu)} f_1(P) + \cdots + c_n^{(\nu)} f_n(P)| \leqq \frac{1}{\alpha^{(\nu)}}$$

und es ist

$$\lim_{\nu = \infty} \alpha^{(\nu)} = \infty.$$

Von den unendlich vielen Wertsystemen

$$c^{(\nu)}, c_1^{(\nu)}, \ldots, c_n^{(\nu)} \qquad (\nu = 1, 2, \ldots)$$

können wir in mannigfacher Weise eine konvergente Teilreihe herausgreifen; da ferner für jedes ν mindestens eine der Größen $c^{(\nu)}, \ldots, c_n^{(\nu)}$ gleich ± 1 ist, so können wir diese Auswahl derart vollziehen, daß der Limes der betrachteten Teilreihe

$$c, c_1, \ldots, c_n,$$

mindestens eine Zahl enthält, die ebenfalls gleich ± 1 ist, also von Null verschieden ausfällt. Es würde dann dementsprechend für jeden Punkt von $\mathfrak{M}$

$$c f(P) + c_1 f_1(P) + \cdots + c_n f_n(P) = 0$$

sein, im Gegensatz zu unserer Voraussetzung.

Damit ist also gezeigt, daß $\mathfrak{K}$ in der Tat ein ganz im Endlichen gelegener konvexer Körper ist.

---

*) Eine ähnliche Betrachtung wird bei Herrn F. Riesz in seiner Arbeit: „Sur certains systèmes singuliers d'équations intégrales", Annales de l'École Norm. Sup. III. Bd. 28 (1911), auf ein analoges Problem angewandt.

Die *Begrenzung**) dieses konvexen Körpers wird durch diejenigen Wertsysteme $a, a_1, \ldots, a_n$ gebildet, für die das Maximum von

$$|af(P) + a_1 f_1(P) + \cdots + a_n f_n(P)| \tag{1}$$

genau gleich 1 ist.

Ist nämlich jenes Maximum kleiner als 1, so bleibt — wegen der vorausgesetzten Stetigkeit der Funktionen $f, f_1, \ldots, f_n$ — diese Bedingung erhalten, falls man das zugehörige Wertsystem $a, a_1, \ldots, a_n$, zwischen hinreichend engen Grenzen variiert, d. h. der entsprechende Punkt ist ein innerer Punkt von $\mathfrak{K}$. Wenn aber jenes Maximum gleich 1 ist, so gibt es eine Stelle P_0 in $\mathfrak{M}$, so daß

$$|af(P_0) + a_1 f_1(P_0) + \cdots + a_n f_n(P_0)| = 1$$

wird; mindestens eine der Funktionen $f, f_1, \ldots, f_n$ muß daher an der Stelle P_0 von Null verschieden sein; ist etwa $f(P_0) \gtrless 0$, so wird das Maximum von

$$|(a+\delta)f(P) + a_1 f_1(P) + \cdots + a_n f_n(P)|,$$

wenn man das Vorzeichen von δ passend wählt, jedenfalls größer als 1 ausfallen. Mit andern Worten, der Punkt mit den Koordinaten

$$a + \delta, a_1, \ldots, a_n$$

liegt außerhalb des Körpers $\mathfrak{K}$, falls das Vorzeichen von δ passend gewählt ist und es ist also der Punkt $a, a_1, \ldots, a_n$ — als Häufungspunkt von äußeren Punkten — ein Grenzpunkt von $\mathfrak{K}$.

Der Körper $\mathfrak{K}$ ist schließlich *symmetrisch* um den Nullpunkt; d. h. mit dem Punkt $a, a_1, \ldots, a_n$ gehört ihm auch der Punkt mit den Koordinaten $-a, -a_1, \ldots, -a_n$ an.

Zusammenfassend können wir also sagen, daß *diejenigen Punkte unseres* $(n+1)$ *dimensionalen Raumes, deren Koordinaten* $a, a_1, \ldots, a_n$ *so beschaffen sind, daß das Maximum von* (1) *nicht größer als* 1 *ausfällt, einen ganz im Endlichen gelegenen konvexen Körper um den Nullpunkt als Symmetriepunkt ausfüllen, dessen Begrenzung aus denjenigen Punkten besteht, für die jenes Maximum genau gleich* 1 *ist.*

3. Wir betrachten nun diejenige *Minkowskische Geometrie* in der der soeben gewonnene konvexe Körper $\mathfrak{K}$ die Rolle des *Eichkörpers* spielt. Diese Geometrie ist also durch die folgenden Eigenschaften charakterisiert: Die Entfernung jedes Punktes des Eichkörpers vom Nullpunkt ist gleich 1; um die Entfernung eines beliebigen Punktes vom Nullpunkt zu erhalten, konstruiere man diejenigen konvexen Körper $\mathfrak{K}_M$, die aus $\mathfrak{K}$ vermöge

*) Die „*Begrenzung*“ oder „*Oberfläche*“ eines konvexen Körpers wird durch diejenigen Punkte des Körpers gebildet, die Häufungsstellen von Punkten, die nicht dem Körper angehören, sind.

einer „Dilatation“ um den Nullpunkt entstehen. Die Koordinaten der Punkte von $\mathfrak{K}_M$ ergeben sich also aus den Koordinaten der Punkte von $\mathfrak{K}$, indem man diese mit der positiven Größe M multipliziert, d. h. wenn $a, a_1, \ldots, a_n$ irgend ein Punkt von $\mathfrak{K}$ ist, so ist $Ma, Ma_1, \ldots, Ma_n$ ein Punkt von $\mathfrak{K}_M$. Offenbar ist $\mathfrak{K}_M$ für jeden positiven Wert von M ebenfalls ein endlicher konvexer Körper um den Nullpunkt, dessen Begrenzung durch diejenigen Wertsysteme $a, a_1, \ldots, a_n$ gebildet ist, für die das Maximum der Funktion (1) genau gleich M ausfällt, während für das Innere von $\mathfrak{K}_M$ jenes Maximum kleiner als M ist. Man erkennt auch, daß jeder Punkt $x, x_1, \ldots, x_n$ des Raumes auf der Begrenzung desjenigen Körpers dieser einparametrigen Körperschar $\mathfrak{K}_M$ liegt, dessen Parameterwert M das Maximum von $|xf(P) + x_1 f_1(P) + \cdots + x_n f_n(P)|$ liefert. Dieser Parameterwert möge der „Entfernung“ des betreffenden Punktes vom Nullpunkte gleich sein; es besteht also die Begrenzung des konvexen Körpers $\mathfrak{K}_M$ aus denjenigen Punkten, deren „Entfernung“ vom Nullpunkte gleich M ist.

Das *Tschebyscheffsche Problem* verlangt nun diejenigen Wertsysteme $x_1, x_2, \ldots, x_n$ zu bestimmen, für die das Maximum von

$$|f(P) + x_1 f_1(P) + x_2 f_2(P) + \cdots + x_n f_n(P)|$$

möglichst klein wird; da dieses Maximum in unserer Geometrie die „Entfernung“ des Punktes

$$x = 1, x_1, x_2, \ldots, x_n$$

vom Nullpunkte bedeutet, so kommt dies darauf hinaus, diejenigen Punkte der n dimensionalen Ebene

$$x = 1$$

zu bestimmen, deren „Entfernung“ vom Nullpunkte möglichst klein ist. Diese Punkte erhalten wir durch die folgende Konstruktion:

Wir konstruieren diejenige Stützebene*) unseres Eichkörpers $\mathfrak{K}$, deren Gleichung die Form

$$x = d$$

besitzt $(d > 0)$; dann ist offenbar die Ebene

$$x = 1$$

*) Betrachten wir irgend eine beschränkte abgeschlossene Punktmenge; sind $u, u_1, \ldots, u_n$ irgend welche Größen, die nicht alle gleich Null sind, so hat der Ausdruck

$$ux + u_1 x_1 + \cdots + u_n x_n,$$

wobei $x, x_1, \ldots, x_n$ die Koordinaten irgend eines Punktes der betrachteten Menge sein können, ein bestimmtes Maximum; ist dies $= d$, so wird

$$ux + u_1 x_1 + \cdots + u_n x_n = d$$

eine *Stützebene* der zugrunde gelegten abgeschlossenen Punktmenge genannt. Zu jedem Wertsystem $u, u_1, \ldots, u_n$ (außer dem trivialen $u = u_1 = \cdots = u_n = 0$) *gehört* daher eine und nur eine Stützebene. (Minkowski: „Volumen und Oberfläche“, Math. Ann. 57.)

eine Stützebene desjenigen Körpers der oben konstruierten Schar $\mathfrak{K}_M$, für den

$$M = \frac{1}{d}$$

ist. Diejenigen Punkte dieses konvexen Körpers $\mathfrak{K}_{\frac{1}{d}}$, die auf der Stützebene $x = 1$ liegen, bilden ebenfalls einen endlichen konvexen Bereich von der Beschaffenheit, daß die Minkowskische Entfernung jedes dieser Punkte vom Nullpunkt $= \frac{1}{d}$ ist. Da jeder andere Punkt der Ebene $x = 1$ außerhalb dieses konvexen Körpers liegt, so ist seine Minkowskische Entfernung vom Nullpunkt jedenfalls größer als $\frac{1}{d}$. Die Punkte des betrachteten Bereiches sind daher diejenigen Punkte der Ebene $x = 1$, deren Entfernung vom Nullpunkt möglichst klein ist; daher sind die zugehörigen Wertsysteme

$$1, a_1, a_2, \ldots, a_n$$

— und nur diese — die Lösungen des Tschebyscheffschen Problems.

Wir erkennen also, daß das Tschebyscheffsche Problem unter den gemachten Voraussetzungen ($f, f_1, \ldots, f_n$ stetig und linear unabhängig in $\mathfrak{M}$) mindestens eine Lösung zuläßt. Man kann auch leicht zeigen, daß die zweite Annahme unwesentlich ist. In der Tat, wenn eine lineare Abhängigkeit

$$cf(P) + c_1 f_1(P) + \cdots + c_n f_n(P) = 0$$

bestehen würde, wo $c \gtrless 0$ wäre, so würde es ein Wertsystem $a_1, \ldots, a_n$ geben, für das das Maximum von

$$|f(P) + a_1 f_1(P) + \cdots + a_n f_n(P)|$$

gleich Null wäre und dieses Wertsystem ist gewiß eine Lösung des Prolems. Wenn aber in der obigen Relation $c = 0$ ist, so können wir von den Funktionen $f_1, f_2, \ldots, f_n$ diejenigen fortlassen, die als lineare Kombination (mit konstanten Koeffizienten) aus den übrigbleibenden darstellbar sind. Auf diese Weise gelangen wir zu Funktionen, die linear unabhängig sind; wenden wir daher das Ergebnis unserer Untersuchungen auf die Funktion $f(P)$ und auf die nun erhaltenen Funktionen an, so ergibt sich — in Anbetracht dessen, daß alle Funktionen von der Form

$$x_1 f_1(P) + \cdots + x_n f_n(P)$$

auch als lineares Aggregat (mit konstanten Koeffizienten) unserer neuen Funktionen darstellbar sind und umgekehrt — die Lösbarkeit des Tschebyscheffschen Problems für die Annäherung der Funktion $f(P)$ durch die Funktionen $f_1(P), f_2(P), \ldots, f_n(P)$.

Wir erhalten also das folgende Theorem:

Sind $f(P), f_1(P), \ldots, f_n(P)$ in einer abgeschlossenen Punktmenge $\mathfrak{M}$ definierte stetige Funktionen, so existiert ein Wertsystem $a_1, a_2, \ldots, a_n$ derart, daß das Maximum der Funktion

$$|f(P) + a_1 f_1(P) + \cdots + a_n f_n(P)|$$

nicht größer ist als das Maximum von

$$|f(P) + x_1 f_1(P) + \cdots + x_n f_n(P)|,$$

*wie auch die reellen Konstanten $x_1, \ldots, x_n$ gewählt sind; das Wertsystem $a_1, \ldots, a_n$ liefert also das Minimum jener Maxima.**)

Wir werden später (III und IV) die notwendigen und hinreichenden Bedingungen dafür aufstellen, daß *nur ein* derartiges Wertsystem existiere.

Bei den vorangehenden — wie auch bei den folgenden — Untersuchungen bedeutet $\mathfrak{M}$ irgendeine abgeschlossene Punktmenge des ein- oder mehrdimensionalen Raumes. Wir erwähnen nur den interessanten Spezialfall, in dem $\mathfrak{M}$ aus einer endlichen Anzahl von Punkten $P_1, P_2, \ldots, P_m$ besteht; die Funktionen $f, f_1, f_2, \ldots, f_n$ repräsentieren sodann m Wertsysteme

$$f(P_\nu), f_1(P_\nu), \ldots, f_n(P_\nu) \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, m)$$

und die soeben gelöste Aufgabe liefert einen leicht formulierbaren Satz über die approximative Lösung eines linearen Gleichungssystems.

II. Die reziproke Polare des Eichkörpers. Andere Annäherungen.

4. Indem wir nun wieder die lineare Unabhängigkeit der Funktionen $f(P), f_1(P), \ldots, f_n(P)$ voraussetzen, können wir den konvexen Körper $\mathfrak{K}$ noch in einer anderen Weise geometrisch interpretieren; zu dieser neuen geometrischen Deutung, der bei der Weiterführung unserer Untersuchungen eine entscheidende Rolle zukommt, gelangen wir durch die folgende Überlegung:

Es sei $a, a_1, \ldots, a_n$ irgendein Punkt der Begrenzung von $\mathfrak{K}$; für dieses Wertsystem ist also: 1) für jeden Punkt P von $\mathfrak{M}$

$$-1 \leqq a f(P) + a_1 f_1(P) + \cdots + a_n f_n(P) \leqq 1;$$

---

*) Dieser Satz wurde für den speziellen Fall, daß die Funktionen $f(P), f_1(P), \ldots f_n(P)$ in einem Intervall definierte Funktionen einer Veränderlichen sind von J. W. Young a. a. O. unter der weiteren Einschränkung bewiesen, daß jede der unendlich vielen Funktionen

$$x_1 f_1(P) + \cdots + x_n f_n(P)$$

($x_1, \ldots, x_n$ beliebige reelle Größen, von denen mindestens eine von Null verschieden ist) in dem zugrunde gelegten Intervall höchstens $n-1$ Nullstellen besitzt, wobei *eine Nullstelle an der kein Zeichenwechsel stattfindet, doppelt zu zählen ist.*

während 2) ein Punkt P_0 in $\mathfrak{M}$ existiert, für den

$$af(P_0) + a_1 f_1(P_0) + \cdots + a_n f_n(P_0)$$

gleich $+1$ oder -1 ausfällt.

Fassen wir nun die Gesamtheit derjenigen Punkte unseres $(n+1)$-dimensionalen Raumes ins Auge, deren Koordinaten $x, x_1, \ldots, x_n$ durch die Gleichungen

$$x = f(P),\ x_1 = f_1(P),\ \ldots,\ x_n = f_n(P),$$

bzw.

$$x = -f(P),\ x_1 = -f_1(P),\ \ldots,\ x_n = -f_n(P)$$

erklärt sind, wobei P die Menge $\mathfrak{M}$ durchläuft. Die auf diese Weise definierte Punktmenge $\mathfrak{F}$ ist offenbar abgeschlossen; sie ist ferner symmetrisch um den Nullpunkt. Die Ebene

$$ax + a_1 x_1 + \cdots + a_n x_n = 1 \tag{2}$$

besitzt die folgenden Eigenschaften:

1) ist $x^{(\mathfrak{F})}, x_1^{(\mathfrak{F})}, \ldots, x_n^{(\mathfrak{F})}$ ein der Punktmenge $\mathfrak{F}$ angehörender Punkt, so ist

$$ax^{(\mathfrak{F})} + a_1 x_1^{(\mathfrak{F})} + \cdots + a_n x_n^{(\mathfrak{F})} \leqq 1;$$

2) es existiert ein Punkt der Punktmenge $\mathfrak{F}$, für den

$$ax^{(\mathfrak{F})} + a_1 x_1^{(\mathfrak{F})} + \cdots + a_n x_n^{(\mathfrak{F})} = 1$$

ist. Mit anderen Worten, die betrachtete Ebene ist eine *Stützebene* der Punktmenge $\mathfrak{F}$. Es sei nun $\overline{\mathfrak{K}}$ der kleinste konvexe Körper, der die Punktmenge $\mathfrak{F}$ enthält*); dieser Körper ist offenbar symmetrisch um den Nullpunkt, da bereits $\mathfrak{F}$ diese Eigenschaft besaß. Unsere Ebene (2) ist sicherlich auch eine Stützebene von $\overline{\mathfrak{K}}$. Nun ist aber diese Ebene die Polarebene des Punktes $a, a_1, \ldots, a_n$ in bezug auf die Einheitskugel um den Anfangspunkt:

$$x^2 + x_1^2 + \cdots + x_n^2 = 1 \tag{3}$$

und es ergibt sich also, daß *die Polarebenen* (in bezug auf diese Kugel) *der Begrenzungspunkte des konvexen Körper* $\mathfrak{K}$ *Stützebenen von* $\overline{\mathfrak{K}}$ *sind.* Man erkennt unmittelbar, daß man auf diese Weise *sämtliche* Stützebenen von $\overline{\mathfrak{K}}$ erhält. Sind nämlich $u, u_1, \ldots, u_n$ irgendwelche Größen, die nicht alle gleich Null sind, so besitzt $\mathfrak{K}$ — da der Anfangspunkt ein innerer

*) Der kleinste konvexe Körper, der eine abgeschlossene Punktmenge enthält, besteht aus denjenigen Punkten, die allen, die gegebene Punktmenge enthaltenden konvexen Körpern angehören. Die Stützebenen einer abgeschlossenen Punktmenge- und des kleinsten konvexen Körpers, der sie enthält, sind dieselben. Diese Definitionen rühren von Minkowski her. („Volumen und Oberfläche". Math. Ann. 57 (1903).

Punkt dieses Körpers ist — sicherlich einen Randpunkt $a, a_1, \ldots, a_n$ derart, daß

$$\frac{u}{a} = \frac{u_1}{a_1} = \cdots = \frac{u_n}{a_n}$$

sei; ist λ der gemeinschaftliche Wert dieser Brüche, so ist — auf Grund des soeben Bewiesenen —

$$ax + a_1x_1 + \cdots + a_nx_n = 1,$$

oder

$$ux + u_1x_1 + \cdots + u_nx_n = \lambda$$

die zugehörige Stützebene von $\overline{\mathfrak{K}}$, die andererseits die Polarebene des Punktes $a, a_1, \ldots, a_n$ ist.

Wir zeigen, daß auch umgekehrt *die Polarebene jedes Punktes der Begrenzung von* $\overline{\mathfrak{K}}$ (in bezug auf die Kugel (3)) *eine Stützebene von* $\mathfrak{K}$ *ist.*

In der Tat, ist $\bar{a}, \bar{a}_1, \ldots, \bar{a}_n$ irgendein Punkt der Begrenzung von $\overline{\mathfrak{K}}$, so liegt dieser sicherlich auf einer Stützebene dieses konvexen Körpers, also auf der Polarebene eines Randpunktes von $\mathfrak{K}$. Es enthält daher — auf Grund der einfachsten Sätze über polare Reziprozität — die Polarebene dieses Punktes $\bar{a}, \bar{a}_1, \ldots, \bar{a}_n$

$$\bar{a}x + \bar{a}_1x_1 + \cdots + \bar{a}_nx_n = 1 \tag{4}$$

jedenfalls denjenigen Punkt von $\mathfrak{K}$, dessen Polarebene durch den Punkt $\bar{a}, \bar{a}_1, \ldots, \bar{a}_n$ hindurchgeht. Wenn daher diese letzte Ebene keine Stützebene von $\mathfrak{K}$ wäre, so hätte dieser konvexe Körper eine Stützebene, deren Gleichung

$$\bar{a}x + \bar{a}_1x_1 + \cdots + \bar{a}_nx_n = d$$

wäre, wobei $d > 1$ sein müßte. Ist nun $a, a_1, \ldots, a_n$ ein solcher Punkt der Begrenzung von $\mathfrak{K}$, der dieser Stützebene angehört, für den also

$$a\bar{a} + a_1\bar{a}_1 + \cdots + a_n\bar{a}_n = d$$

ist, so müßte — nach dem vorher Bewiesenen —

$$ax + a_1x_1 + \cdots + a_nx_n = 1$$

ein Stützebene von $\overline{\mathfrak{K}}$ sein, d. h. für jeden Punkt von $\overline{\mathfrak{K}}$ müßte die Ungleichung

$$ax + a_1x_1 + \cdots + a_nx_n \leqq 1$$

stattfinden. Da dies für den Punkt $\bar{a}, \bar{a}_1, \ldots, \bar{a}_n$ nicht der Fall ist, so sind wir zu einem Widerspruch gelangt und (4) ist in der Tat die Gleichung einer Stützebene von $\mathfrak{K}$; man erkennt auch — wörtlich wie oben — daß man auf diese Weise sämtliche Stützebenen von $\mathfrak{K}$ erhält.

Die beiden ganz im Endlichen gelegenen konvexen Körper $\mathfrak{K}$ *und* $\overline{\mathfrak{K}}$ *sind daher polar reziproke Figuren in bezug auf die Kugel*

$$x^2 + x_1^2 + \cdots + x_n^2 = 1;$$

*d. h. die Begrenzungspunkte des einen Körpers sind die Pole der Stützebenen des anderen Körpers und umgekehrt.**)

5. Die vorangehenden Überlegungen gestatten eine analoge Behandlung vieler ähnlicher Probleme, von denen wir einige hier andeuten wollen.

Betrachten wir etwa einerseits diejenigen Wertsysteme $a, a_1, \ldots, a_n$, für die die Ungleichung

$$af(P) + a_1 f_1(P) + \cdots + a_n f_n(P) \leqq 1,$$

andrerseits diejenigen Wertsysteme, für die die Ungleichung

$$af(P) + a_1 f_1(P) + \cdots + a_n f_n(P) \geqq -1$$

für jeden Punkt P der Menge $\mathfrak{M}$ statthat, so erkennt man durch eine ähnliche Überlegung, wie wir in 2. angestellt haben, daß die Gesamtheiten dieser Wertsysteme im $(n+1)$-dimensionalen Raum je einen im Endlichen gelegenen konvexen Körper erfüllen, wenn die in $\mathfrak{M}$ stetigen Funktionen $f(P), f_1(P), \ldots, f_n(P)$ so beschaffen sind, daß für jedes Wertsystem $x, x_1, \ldots, x_n$ (außer dem trivialen $x = x_1 = \cdots = x_n = 0$) der Ausdruck

$$xf(P) + x_1 f_1(P) + \cdots + x_n f_n(P) \tag{5}$$

eine solche Funktion darstellt, die nicht überall in $\mathfrak{M}$ größer oder gleich Null ausfällt.**) Die vorangehenden Betrachtungen zeigen auch, daß die polare Reziproke in bezug auf die Kugel (3) des ersten der so erhaltenen konvexen Körper derjenige kleinste konvexe Körper ist, der die Punktmenge

$$x = f(P), \quad x_1 = f_1(P), \quad \ldots, \quad x_n = f_n(P)$$

enthält; die polare Reziproke des zweiten konvexen Körpers ergibt sich auf dieselbe Weise aus der Punktmenge:

$$x = -f(P), \quad x_1 = -f_1(P), \quad \ldots, \quad x_n = -f_n(P).$$

In ähnlicher Weise ergibt sich auch, daß die Gesamtheit derjenigen Wertsysteme, für die die *Schwankung****) in $\mathfrak{M}$ der Funktion (5) kleiner oder gleich 1 ist, wiederum einen im Endlichen gelegenen konvexen Körper erfüllen, falls dieser Ausdruck (5) für kein Wertsystem $x, x_1, \ldots, x_n$ (außer dem trivialen $x = x_1 = \cdots = x_n = 0$) eine solche Funktion darstellt, die in $\mathfrak{M}$ konstant ist. Unter derselben Bedingung erfüllen auch diejenigen

*) Solche konvexe Körper betrachtet schon Minkowski in seiner posthumen Abhandlung: „Theorie der konvexen Körper insbesondere Begründung ihres Oberflächenbegriffs." Gesammelte Abhandlungen (Nachlaß), Bd. II, S. 130; er führt daselbst für solche Körper den Namen *„polare Körper"* ein (vgl. S. 146, l. c.).

**) Die Funktionen

$$\cos ks, \quad \sin ks \qquad (k = 1, 2, \ldots, n)$$

erfüllen im Intervall $0 \leqq s \leqq 2\pi$ offenbar diese Bedingung; daraus resultiert ein Satz von Carathéodory (l. c.).

***) Unter der *Schwankung* einer stetigen Funktion versteht man den absoluten Betrag der Differenz ihres größten und kleinsten Wertes.

Wertsysteme einen im Endlichen gelegenen konvexen Körper, für die die *Totalvariation* von (5) nicht größer als 1 ist. Diesen konvexen Körpern kommt die Rolle des Eichkörpers zu, falls man statt des Tschebyscheffschen Maßes der Annäherung die Schwankung oder die Totalvariation als Maß der Approximation wählt.

Bei diesen Untersuchungen würden dann die polaren Reziproken dieser Körper in bezug auf die Kugel (3) wieder eine Rolle spielen. Man erkennt z. B. ohne Schwierigkeit, daß die polare Reziproke des ersten der jetzt aufgestellten konvexen Körper derjenige kleinste konvexe Körper ist, der die Punktmenge

$$x = f(P) - f(Q),\ x_1 = f_1(P) - f_1(Q),\ \ldots,\ x_n = f_n(P) - f_n(Q)$$

enthält, wobei P und Q unabhängig voneinander die Punktmenge $\mathfrak{M}$ durchlaufen.

III. Die eindeutige Lösbarkeit des Tschebyscheffschen Problems. Die aufgestellte Bedingung ist hinreichend.

6. Anknüpfend an die vorangehenden geometrischen Entwicklungen werden wir nun die notwendigen und hinreichenden Bedingungen dafür aufstellen, daß die Tschebyscheffsche Annäherung jeder in $\mathfrak{M}$ stetigen Funktion $f(P)$, die nicht in der Form

$$x_1 f_1(P) + \cdots + x_n f_n(P)$$

darstellbar ist, durch die Funktionen eindeutig sei; d. h. daß für jede solche Funktion $f(P)$ ein und nur ein Wertsystem existiere, für das das Maximum von

$$|f(P) + x_1 f_1(P) + \cdots + x_n f_n(P)|$$

seinen kleinsten Wert annimmt.

Wir werden zunächst eine hinreichende Bedingung hierfür aufstellen und in IV. zeigen, daß diese Bedingung auch notwendig ist.

Zu diesem Ende kehren wir zu unserem Eichkörper $\mathfrak{K}$ zurück, der aus denjenigen Punkten $a, a_1, \ldots, a_n$ besteht, für die das Maximum der stetigen Funktion

$$|af(P) + a_1 f_1(P) + \cdots + a_n f_n(P)|$$

nicht größer als 1 ausfällt. Wir haben gesehen, daß man die Tschebyscheffsche Annäherung der Funktion $f(P)$ durch die Funktionen $x_1 f_1(P) + \cdots + x_n f_n(P)$ erhält, wenn man diejenigen Punkte des konvexen Körpers $\mathfrak{K}$ bestimmt, die auf derjenigen Stützebene liegen, deren Gleichung

$$x = d$$

ist ($d > 0$). Damit die Tschebyscheffsche Annäherung eindeutig sei, ist also notwendig und hinreichend, daß diese Stützebene nur einen Punkt des Körpers $\mathfrak{K}$ enthalte.

Wir betrachten nun die polare Reziproke $\overline{\mathfrak{K}}$ dieses Körpers $\mathfrak{K}$ in bezug auf die Kugel (3). Der Pol der Ebene $x = d$ ist der Punkt $\bar{A}$ mit den Koordinaten

$$x = \frac{1}{d}, \quad x_1 = x_2 = \cdots = x_n = 0,$$

der auf der Begrenzung von $\overline{\mathfrak{K}}$ liegt. Die Polarebenen derjenigen Punkte von $\mathfrak{K}$, die auf der oben betrachteten Stützebene liegen, enthalten offenbar alle den Punkt $\bar{A}$; umgekehrt ist der Pol jeder durch $\bar{A}$ gehenden Stützebene von $\overline{\mathfrak{K}}$ ein gemeinsamer Punkt von $\mathfrak{K}$ und seiner Stützebene $x = d$. Daraus ergibt sich also, daß die Stützebene $x = d$ dann und nur dann nur einen Punkt mit dem Körper $\mathfrak{K}$ gemein hat, wenn durch den Punkt $\bar{A}$ nur eine Stützebene des konvexen Körpers $\overline{\mathfrak{K}}$ hindurchgeht.

Wir werden sehen, daß dies stets der Fall ist, *wenn es außer dem trivialen Wertsystem* $x_1 = \cdots = x_n = 0$ *kein anderes Wertsystem* $x_1, \cdots, x_n$ *gibt, für das die in* $\mathfrak{M}$ *stetige Funktion*

$$x_1 f_1(P) + \cdots + x_n f_n(P)$$

an mehr als $n - 1$ *Stellen dieser Punktmenge verschwindet, d. h. wenn jede dieser unendlichvielen Funktionen höchstens* $n - 1$ *verschiedene Nullstellen in* $\mathfrak{M}$ *besitzt.*

Bei dem Beweise dieser Behauptung werden wir von einem wichtigen Satze von Carathéodory Gebrauch machen, demzufolge die Punkte des kleinsten konvexen Körpers, der eine abgeschlossene Punktmenge enthält als Schwerpunkte von Massenbelegungen auf dieser Menge gedeutet werden können, wobei alle Massen positiv sind und die Gesamtmasse 1 besitzen: seine Beweisführung ergibt auch, daß — wenn dieser kleinste konvexe Körper ein n-dimensionaler Körper ist — jeder innere Punkt des Körpers als Schwerpunkt von höchstens $n + 1$ positiven Massen, jeder Punkt der Begrenzung aber schon als Schwerpunkt von n positiven Massen angesehen werden kann, die sämtlich in Punkten der in Frage stehenden abgeschlossenen Punktmenge angebracht sind.*)

Wir legen nun durch den Punkt $\bar{A}\left(\frac{1}{d}, 0, \cdots, 0\right)$ des konvexen Körpers $\overline{\mathfrak{K}}$ *eine* Stützebene an diesen Körper. Die gemeinsamen Punkte dieser Ebene mit $\overline{\mathfrak{K}}$ bilden einen konvexen Körper $\overline{\mathfrak{K}}_n$, dessen Dimensionszahl — in unserem Falle — höchstens gleich n ist; dieser Körper ist — wie Carathéodory a. a. O. zeigt — der kleinste konvexe Körper, der diejenige abgeschlossene Punktmenge enthält, die aus den gemeinsamen Punkten der Punktmenge $\mathfrak{F}$ und der betrachteten Stützebene besteht. Der betrach-

*) Carathéodory a. a. O.

tete Punkt $\bar{A}$ ist jedenfalls ein Punkt dieses konvexen Körpers $\mathfrak{K}_n$ und wir wollen zeigen, daß — zufolge unserer Annahme über die Funktionen $f_1(P), \ldots, f_n(P)$ — $\bar{A}$ ein *innerer* Punkt von $\overline{\mathfrak{K}}_n$ ist, also nicht auf der Begrenzung dieses n-dimensionalen konvexen Körpers liegt. Im entgegengesetzten Falle nämlich könnte dieser Punkt $\bar{A}$, nach dem oben genannten Carathéodoryschen Satze, als Schwerpunkt von $\nu (\nu \leqq n)$ positiven Massen gedeutet werden, die in Punkten der Punktmenge $\mathfrak{F}$ angebracht sind. Da die Punktmenge $\mathfrak{F}$ aus den Punkten besteht, deren Koordinaten

$$x = f(P), \; x_1 = f_1(P), \; \ldots, \; x_n = f_n(P),$$

bzw.

$$x = -f(P), \; x_1 = -f_1(P), \; \ldots, \; x_n = -f_n(P)$$

sind (P beliebiger Punkt in $\mathfrak{M}$), so würde es demzufolge n Punkte*) P_1, $P_2, \ldots, P_n$ der Punktmenge $\mathfrak{M}$ und n nicht negative Konstanten λ_1, $\lambda_2, \ldots, \lambda_n$ von der Summe 1 geben, derart, daß

$$\begin{aligned}
\frac{1}{d} &= \lambda_1 \varepsilon_1 f(P_1) + \lambda_2 \varepsilon_2 f(P_2) + \cdots + \lambda_n \varepsilon_n f(P_n) \\
0 &= \lambda_1 \varepsilon_1 f_1(P_1) + \lambda_2 \varepsilon_2 f_1(P_2) + \cdots + \lambda_n \varepsilon_n f_1(P_n) \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
0 &= \lambda_1 \varepsilon_1 f_n(P_1) + \lambda_2 \varepsilon_2 f_n(P_2) + \cdots + \lambda_n \varepsilon_n f_n(P_n)
\end{aligned}$$

wird; in diesen Gleichungen sind die Größen $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n$ gleich $+1$ oder -1, je nachdem der entsprechende Punkt, an dem die positive Masse λ_1 bzw. $\lambda_2, \ldots, \lambda_n$ angebracht wird, dem ersten oder zweiten Teile der Punktmenge $\mathfrak{F}$ angehört. Aus den letzten n Gleichungen dieses Gleichungssystems würde man aber auf das Verschwinden der Determinante

$$\begin{vmatrix}
f_1(P_1) & f_1(P_2) & \cdots & f_1(P_n) \\
f_2(P_1) & f_2(P_2) & \cdots & f_2(P_n) \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
f_n(P_1) & f_n(P_2) & \cdots & f_n(P_n)
\end{vmatrix}$$

schließen, und daraus, daß ein nicht triviales Wertsystem $x_1, x_2, \ldots, x_n$ existiert, für das die Funktion

$$x_1 f_1(P) + x_2 f_2(P) + \cdots + x_n f_n(P)$$

an den n Stellen $P_1, P_2, \ldots, P_n$ der Menge $\mathfrak{M}$ verschwindet — im Widerspruch mit unserer Annahme.

Ist nun

$$(6) \qquad u x + u_1 x_1 + \cdots + u_n x_n = 1$$

---

* In dem Falle, daß $\nu < n$ ist, wähle man die fehlenden $n - \nu$ Punkte von $\mathfrak{F}$ beliebig und belege diese mit der Masse Null.

irgendeine von der betrachteten Stützebene verschiedene Ebene, die den Punkt $\bar{A}$ enthält, so können — da $\bar{A}$ ein innerer Punkt von $\overline{\mathfrak{K}}_n$ ist — nicht sämtliche Punkte von $\overline{\mathfrak{K}}_n$ auf derselben Seite dieser Ebene liegen. Da aber $\overline{\mathfrak{K}}_n$ ein Teil von $\overline{\mathfrak{K}}$ ist, so folgt daraus, daß die Ebene (6) auch keine Stützebene von $\overline{\mathfrak{K}}$ sein kann, und wir erhalten daher das Resultat, daß unter den gemachten Voraussetzungen durch den Punkt $\bar{A}$ nur eine Stützebene des Körpers $\overline{\mathfrak{K}}$ hindurchgeht.

Damit ist also die Eindeutigkeit der Tschebyscheffschen Annäherung durch das Funktionensystem $f_1(P), \ldots, f_n(P)$ für jede in $\mathfrak{M}$ stetige Funktion $f(P)$ bewiesen, die nicht in der Form

$$x_1 f_1(P) + \cdots + x_n f_n(P)$$

darstellbar ist; ist aber $f(P)$ in dieser Form darstellbar, so ist dies — wiederum wegen unserer zugrunde gelegten Annahme*) über die Funktionen $f_1(P), \ldots, f_n(P)$ — nur auf eine einzige Art möglich und das entsprechende Wertsystem $x_1, \ldots, x_n$ liefert die einzige Tschebyscheffsche Annäherung in diesem Falle.

*Erfüllen***) daher die Funktionen $f_1(P), \ldots, f_n(P)$ die Bedingung, daß mit Ausnahme des Wertsystems $x_1 = x_2 = \ldots = x_n = 0$, jede der unendlich vielen in $\mathfrak{M}$ stetigen Funktionen*

$$x_1 f_1(P) + \cdots + x_n f_n(P)$$

in der Menge $\mathfrak{M}$ höchstens $n-1$ verschiedene Nullstellen besitzt (aus dieser Bedingung folgt bereits die lineare Unabhängigkeit der betrachteten Funktionen), *so gibt es für jede in $\mathfrak{M}$ stetige Funktion $f(P)$ ein und nur ein Wertsystem, für das das Maximum der Funktion*

$$|f(P) + x_1 f_1(P) + \cdots + x_n f_n(P)|$$

*seinen kleinsten Wert annimmt.****)

---

*) Da für jedes nicht triviale Wertsystem $x_1, \ldots, x_n$ die Funktion

$$x_1 f_1(P) + \cdots + x_n f_n(P)$$

in $\mathfrak{M}$ höchstens $n-1$ Nullstellen besitzt, so folgt aus dieser Annahme die lineare Independenz dieser Funktionen in $\mathfrak{M}$ und daher kann $f(P)$ nicht auf zwei verschiedene Arten als lineares Aggregat der Funktionen $f_1(P), \ldots, f_n(P)$ darstellbar sein.

**) Unter den in der Anmerkung *) S. 301 gemachten Voraussetzungen ist ein entsprechender Satz von J. W. Young a. a. O. bewiesen worden.

***) Die Potenzen $1, s, s^2, \ldots, s^{n-1}$ erfüllen in jedem Intervall —, die Funktionen

$$1, \quad \cos ks, \quad \sin ks \qquad (k = 1, 2, \ldots, n)$$

erfüllen in dem Intervall $0 \leqq s \leqq 2\pi$ die Bedingungen unseres Theorems; daraus ergibt sich der ursprüngliche Satz von Tschebyscheff und der Satz von Fréchet (l. c.).

IV. Die aufgestellte Bedingung ist notwendig für die eindeutige Lösbarkeit des Tschebyscheffschen Problems.

7. Wir zeigen endlich, daß die zuletzt gewonnene hinreichende Bedingung auch notwendig ist, d. h. *wenn ein Wertsystem* $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ *existiert, dessen Größen nicht alle gleich Null sind, von der Beschaffenheit, daß die in* $\mathfrak{M}$ *stetige Funktion*

$$F_0(P) = \alpha_1 f_1(P) + \alpha_2 f_2(P) + \cdots + \alpha_n f_n(P)$$

in dieser Punktmenge (mindestens) *n verschiedene Nullstellen*

$$P_1, P_2, \ldots P_n$$

besitzt, so existiert eine in $\mathfrak{M}$ *stetige Funktion* $f(P)$, *deren Tschebyscheffsche Annäherung durch die betrachteten Funktionen nicht eindeutig ist.*

Diese Funktion $f(P)$ konstruieren wir, wie folgt:

Auf Grund unserer Voraussetzungen besitzt das lineare homogene Gleichungssystem

$$x_1 f_1(P_q) + x_2 f_2(P_q) + \cdots + x_n f_n(P_q) = 0 \quad (q = 1, 2 \ldots, n)$$

die nicht triviale Lösung

$$x_1 = \alpha_1, \quad x_2 = \alpha_2, \ldots, \quad x_n = \alpha_n;$$

daher besitzt auch das transponierte Gleichungssystem eine Lösung, d. h. es existiert ein Wertsystem $c_1, c_2, \ldots, c_n$ (dessen Größen nicht alle gleich Null sind), das für jedes q die Gleichungen

$$c_1 f_q(P_1) + c_2 f_q(P_2) + \cdots + c_n f_q(P_n) = 0 \quad (q = 1, 2, \ldots, n)$$

befriedigt. Lassen wir aus diesen Gleichungen diejenigen Glieder, für die der entsprechende Koeffizient c gleich Null ist, fort, so erhalten wir — indem wir nötigenfalls die Reihenfolge der Punkte $P_1, P_2 \ldots, P_n$ umordnen — ein Wertsystem $c_1, c_2, \ldots, c_\nu$, dessen Größen sämtlich von Null verschieden sind und für das die Gleichungen

$$c_1 f_q(P_1) + c_2 f_q(P_2) + \cdots + c_\nu f_q(P_\nu) = 0 \qquad (\nu \leqq n)$$

bestehen. Da diese homogene Relation für jede der Funktionen $f_1, f_2, \ldots, f_n$ richtig ist, so gilt sie auch für jede lineare Kombination dieser Funktionen mit konstanten Koeffizienten, d. h. es ist

$$c_1 F(P_1) + c_2 F(P_2) + \cdots + c_\nu F(P_\nu) = 0, \tag{7}$$

wobei

$$F(P) = x_1 f_1(P) + x_2 f_2(P) + \cdots + x_n f_n(P)$$

gesetzt ist.

Es sei nun $f(P)$ eine willkürliche, in $\mathfrak{M}$ definierte stetige Funktion, die zunächst nur der Bedingung unterworfen wird, an den Stellen

$P_1, P_2, \ldots, P_\nu$ gleich $+1$ oder -1 zu sein, je nachdem die entsprechende Größe c_1, bzw. $c_2, \ldots, c_\nu$ positiv oder negativ ist; es ist also für jedes q

$$c_q f(P_q) = |c_q| > 0 \qquad (q = 1, 2 \ldots \nu).$$

Man kann nun leicht zeigen, daß in diesem Falle das Maximum der Funktion

$$|f(P) + x_1 f_1(P) + \cdots + x_n f_n(P)|, \tag{8}$$

wie auch die Konstanten $x_1, x_2, \ldots, x_n$ gewählt sind, größer oder gleich 1 ausfallen muß. Denn im entgegengesetzten Falle müßte die Funktion

$$F(P) = x_1 f_1(P) + \cdots + x_n f_n(P)$$

an jeder der Stellen $P_1, P_2, \ldots, P_\nu$ das entgegengesetzte Vorzeichen als $f(P)$ besitzen, d. h. es müßte jedes der Produkte

$$c_1 F(P_1), \quad c_2 F(P_2) \ldots, \quad c_\nu F(P_\nu)$$

negativ sein, was mit der Relation (7) im Widerspruch steht.

Unterwerfen wir daher die Funktion $f(P)$ der Einschränkung in der Punktmenge $\mathfrak{M}$ dem absoluten Betrage nach nirgends größer als 1 zu sein, so erreicht das Maximum von (8) seinen kleinstmöglichsten Wert $(= 1)$ jedenfalls für das Wertsystem

$$x_1 = x_2 = \cdots = x_n = 0;$$

dieses Wertsystem liefert also eine Tschebyscheffsche Annäherung der Funktion $f(P)$ durch die Funktionen $x_1 f_1(P) + \cdots + x_n f_n(P)$.

Wir müssen die Funktion $f(P)$ noch einer weiteren Ungleichung unterwerfen, damit wir eine zweite Tschebyscheffsche Annäherung erhalten. Wir betrachten zu diesem Ende die Funktion

$$F_0(P) = \alpha_1 f_1(P) + \alpha_2 f_2(P) + \cdots + \alpha_n f_n(P),$$

die an den Stellen $P_1, P_2, \ldots, P_\nu$ der Menge $\mathfrak{M}$ gleich Null ist, und wir können annehmen, daß die Konstanten $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_n$, von denen mindestens eine nicht Null ist, so gewählt sind, daß für jeden Punkt P in $\mathfrak{M}$

$$|F_0(P)| \leqq 1$$

sei, was man ja nötigenfalls durch Multiplikation stets erreichen kann.

Die in $\mathfrak{M}$ stetige Funktion $f(P)$, deren Werte an den Stellen $P_1, P_2, \ldots, P_\nu$ vorgeschrieben wurden, und die überall in $\mathfrak{M}$ die Ungleichung

$$-1 \leqq f(P) \leqq 1$$

erfüllt, wird in derselben Punktmenge $\mathfrak{M}$ noch der Ungleichung

$$-1 - F_0(P) \leqq f(P) \leqq 1 - F_0(P)$$

unterworfen; diese Ungleichung ist mit den obigen beiden Bedingungen in Einklang. Da nun für jeden Punkt P von $\mathfrak{M}$

$$|f(P) + F_0(P)| \leqq 1$$

ist (an den Stellen $P_1, P_2, \ldots, P_\nu$ gilt das Gleichheitszeichen), so folgt — wie oben — daß

$$x_1 = \alpha_1, \quad x_2 = \alpha_2, \quad x_n = \alpha_n$$

ein zweites — von dem obigen verschiedenes — Wertsystem ist, für das das Maximum von (8) seinen kleinsten Wert (= 1) annimmt. Mit anderen Worten, die Tschebyscheffsche Annäherung der soeben konstruierten Funktion $f(P)$ durch die Funktionen $f_1(P), \ldots, f_n(P)$ ist nicht eindeutig.

Wir erhalten also das folgende Theorem:

Die notwendige und hinreichende Bedingung dafür, daß zu jeder in $\mathfrak{M}$ stetigen Funktion $f(P)$ ein und nur ein Wertsystem $x_1, x_2, \ldots, x_n$ existiere, für das das Minimum der Funktion

$$|f(P) + x_1 f_1(P) + x_2 f_2(P) + \cdots + x_n f_n(P)|$$

seinen kleinsten Wert annimmt, ist die, daß mit Ausnahme des trivialen, Wertsystems $x_1 = x_2 \cdots = x_n = 0$ für kein anderes Wertsystem die in $\mathfrak{M}$ stetige Funktion $x_1 f_1(P) + x_2 f_2(P) + \cdots + x_n f_n(P)$ in dieser Punktmenge mehr als $n - 1$ Nullstellen besitze.

Ist $\mathfrak{M}$ ein zweidimensionales Gebiet, so sind die Bedingungen unseres Satzes für $n \geqq 2$ nie erfüllt. In der Tat, man kann in diesem Falle die Größen $x_1, \ldots, x_n$ derart bestimmen, daß die Funktion $x_1 f_1(P) + \cdots + x_n f_n(P)$ an einer inneren Stelle dieses Gebietes positiv, an einer anderen inneren Stelle aber negativ ausfalle; es muß daher diese stetige Funktion an unendlich vielen Stellen den Wert Null annehmen.

Für zwei- (und mehr-) dimensionale Gebiete also existiert kein Funktionensystem

$$f_1(P), \quad f_2(P), \ldots, \quad f_n(P) \qquad (n \geqq 2)$$

*von der Beschaffenheit, daß die Tschebyscheffsche Annäherung jeder stetigen Funktion in diesem Gebiet durch diese Funktionen eindeutig sei.**)

*) Daß die Polynome von zwei Veränderlichen keine eindeutige Tschebyscheffsche Annäherung liefern, hat bereits Tonelli a. a. O. bewiesen.

A LINEARIS EGYENLŐTLENSÉGEKRŐL.

HAAR ALFRÉD-tól.

A linearis egyenlőtlenségek elmélete FARKAS GYULÁ-tól [1] és MINKOWSKI HERMANN-tól [2] ered. Egymástól függetlenül és különböző utakon jutottak el az elmélet két főtételéhez: a linearis egyenlőtlenségek alaptételéhez és azok parameteres megoldásához.

A jelen dolgozat első czélja ezeket az eredményeket más módon levezetni. A többdimensiós tér geometriájának egyszerű tételei azok, a melyekre a fent említett tételek visszavezethetők, ha a határozatlanokat s ezekkel együtt a közöttük fennálló egyenlőtlenségeket czélszerű módon geometriailag interpretáljuk. A kérdéses geometriai tételek a convex testek tulajdonságairól szólnak; [3] az erre vonatkozó legegyszerűbb megállapításokon

---

[1] «A FOURIER-féle mechanikai elv alkalmazásai.» (Mathematikai és Természettudományi Értesítő, XII. k. 1895.) «A FOURIER-féle mechanikai elv alkalmazásának algebrai alapjáról.» (Mathematikai és Physikai Lapok, V. k. 1896.) «Paraméteres módszer FOURIER mechanikai elvéhez.» (Mathematikai és Physikai Lapok, VII. k. 1898.) «Theorie der einfachen Ungleichungen.» (Journal für die reine und angewandte Mathematik. Bd. 124. 1901.)

[2] «Geometrie der Zahlen.» 39—45. oldal.

[3] Az n-dimensiós tér valamely z á r t ponthalmazát c o n v e x t e s t n e k mondjuk, ha az a következő tulajdonsággal bir: Ha az

$$x_1', x_2', \ldots, x_n' \quad \text{és} \quad x_1'', x_2'', \ldots, x_n''$$

coordinatájú pontok a ponthalmazhoz tartoznak, akkor minden olyan pont, melynek coordinatái:

$$x_1 = \varepsilon x_1' + (1-\varepsilon) x_1'', \quad x_2 = \varepsilon x_2' + (1-\varepsilon) x_2'', \ldots, \quad x_n = \varepsilon x_n' + (1-\varepsilon) x_n'',$$

— a hol ε tetszésszerinti, 1-nél kisebb positiv számot jelent — ugyancsak a ponthalmazhoz tartozik.

kivül egy CARATHÉODORY-tól eredő szép tétel nyer e dolgozatban alkalmazást.[1]

Ennek a geometriai módszernek alkalmazásával egyrészt igen egyszerű módon adódnak a régi FARKAS-MINKOWSKI-féle tételek, másrészt ezek a tételek új eredményekkel egészülnek ki.

1. §. A homogen linearis egyenlőtlenségek alaptétele.

Vizsgálataink kiinduló pontjául az $u_1, u_2, \ldots, u_n$ határozatlanok között fennálló homogen linearis egyenlőtlenségek valamely rendszerét választjuk:

$$\vartheta_k(u_1, u_2, \ldots, u_n) \equiv a_{k1}u_1 + a_{k2}u_2 + \cdots + a_{kn}u_n \geqq 0. \quad (k=1, 2, \ldots)$$

Rendszerünk véges számú vagy végtelen sok ilyen egyenlőtlenségből áll; az utóbbi esetben azonban feltételezzük, hogy rendszerünk

---

A tér bármely zárt és egészen a végesben fekvő ponthalmazát végtelen sok convex test tartalmazza. Azoknak a pontoknak összessége, melyek mindezeknek a testeknek pontjai, ismét convex testet alkot; ez az adott ponthalmazt tartalmazó legkisebb convex test. Ezek a definitiók MINKOWSKI-tól származnak; annál meglepőbb, hogy ő a linearis egyenlőtlenségek elméletét nem a convex testek segélyével, hanem majdnem tisztán algebrai megfontolásokkal építette fel.

[1] CARATHÉODORY kérdéses tétele a következő:

Ha $x_1, x_2, \ldots, x_n$ az n-dimensiós tér valamely zárt ponthalmazát tartalmazó legkisebb convex test valamely pontjának coordinatái, akkor ezek a következő alakban állíthatók elő: található az illető zárt ponthalmazban $(n+1)$ pont, melyeknek coordinatái

$$x_1^{(q)}, \quad x_2^{(q)}, \ldots, \quad x_n^{(q)}, \qquad (q=1, 2, \ldots n+1)$$

és $n+1$ nem negativ szám, $\mu^{(q)}$, melyek összege 1

$$\sum_{q=1}^{n+1} \mu^{(q)} = 1,$$

úgy, hogy

$$x_k = \sum_{q=1}^{n+1} \mu^{(q)} x_k^{(q)} \qquad (k=1, 2, \ldots, n).$$

Más szóval: a kérdéses legkisebb convex test bármely pontja felfogható mint az illető zárt ponthalmaz bizonyos, legfeljebb $(n+1)$ számú pontjának súlypontja, ha ezekben a pontokban megfelelő positiv tömegeket helyezünk el. (Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo T. 32. 1911.)

«*zárt*» s ezen a következő tulajdonságot értjük: Tekintsük az n-dimensiós térben (melyben $x_1, x_2, \ldots, x_n$ CARTESIUS-féle coordinatákat jelentenek) azokat a p_k pontokat, melyeknek coordinatái

$$x_1 = a_{k1}, \quad x_2 = a_{k2}, \ldots, \quad x_n = a_{kn}; \qquad (k=1, 2, \ldots)$$

ha az ilyen módon értelmezett p_k pontok halmaza zárt, azaz, ha a p_k pontok bármely torlódási helye ugyancsak ehhez a ponthalmazhoz tartozik, akkor a $\vartheta_k \geqq 0$ egyenlőtlenségekről azt mondjuk, hogy «zárt» rendszert alkotnak. Nyilvánvaló, hogy az egyenlőtlenségek minden oly rendszere, mely csak véges számú egyenlőtlenségből áll, zártnak tekinthető, hiszen ebben az esetben csak véges számú p_k pontra jutunk, melyeknek torlódási pontjuk nincs.[1]

Az általánosság megszorítása nélkül feltételezhetjük, hogy létezik olyan $\bar{u}_1, \bar{u}_2, \ldots, \bar{u}_n$ értékrendszer, melynél

$$\vartheta_k (\bar{u}_1, \bar{u}_2, \ldots, \bar{u}_n) > 0; \qquad (k=1, 2, \ldots)$$

ellenkező esetben ugyanis az eredeti egyenlőtlenségek rendszeréből könnyű szerrel olyan rendszerre térhetnénk át, melyben a határozatlanok száma n-nél kisebb.[2]

n-dimensiós terünk ama P_k pontjai tehát, melyeknek coordinatái:

$$x_1 = \frac{a_{k1}}{\vartheta_k (\bar{u}_1, \ldots, \bar{u}_n)} = A_{k1}, \quad x_2 = \frac{a_{k2}}{\vartheta_k (\bar{u}_1, \ldots, \bar{u}_n)} = A_{k2}, \ldots,$$

$$x_n = \frac{a_{kn}}{\vartheta_k (\bar{u}_1, \ldots, \bar{u}_n)} = A_{kn} \qquad (k=1, 2, \ldots)$$

mindannyian az $(n-1)$-dimensiós

$$\bar{u}_1 x_1 + \bar{u}_2 x_2 + \cdots + \bar{u}_n x_n = 1 \qquad (\bar{s})$$

síkban feküsznek. Mivel pedig — feltételünk szerint — $\vartheta_k (\bar{u}_1, \ldots, \bar{u}_n) > 0$, azért geometriailag ez azt jelenti, hogy coordinata-rendszerünk kezdőpontjából — O-ból — a p_k pontok

---

[1] Az adott egyenlőtlenségeknek nem is kell tehát megszámlálható halmazt alkotniok; számosságuk a continuum számossága is lehet.

[2] L. MINKOWSKI: Id. helyen 44. oldal.

felé rajzolt félegyenesek ezt az $(\bar{s})$ síkot metszik; ezek a metszéspontok a P_k pontok.

Eredeti egyenlőtlenségeink rendszere nem lényegesen különbözik a

$$\frac{\vartheta_k(u_1, u_2, \ldots, u_n)}{\vartheta_k(\bar{u}_1, \bar{u}_2, \ldots, \bar{u}_n)} \equiv A_{k1}u_1 + A_{k2}u_2 + \cdots + A_{kn}u_n \geqq 0 \quad (k=1, 2, \ldots)$$

rendszertől, hiszen ezek akkor és csak akkor teljesülnek, ha az eredetiek és viszont; az együtthatók teljesítik az

$$A_{k1}\bar{u}_1 + A_{k2}\bar{u}_2 + \cdots + A_{kn}\bar{u}_n = 1$$

egyenletet.

Interpretáljuk geometriailag egyenlőtlenségeink jelentőségét. Jelöljék e végből az

$$u_1 = U_1 + \bar{u}_1, \quad u_2 = U_2 + \bar{u}_2, \ldots, \quad u_n = U_n + \bar{u}_n$$

számok adott egyenlőtlenségeink valamely megoldását és legyen rövidség kedvéért

$$\theta_k(U_1, U_2, \ldots, U_n) \equiv \frac{\vartheta_k(U_1+\bar{u}_1, U_2+\bar{u}_2, \ldots, U_n+\bar{u}_n)}{\vartheta_k(\bar{u}_1, \bar{u}_2, \ldots, \bar{u}_n)} \equiv$$
$$\equiv A_{k1}U_1 + A_{k2}U_2 + \cdots + A_{kn}U_n + 1, \quad (k=1, 2, \ldots)$$

úgy, hogy az $U_1, U_2, \ldots, U_n$ értékrendszer megoldása a

$$\theta_k(U_1, U_2, \ldots, U_n) \geqq 0$$

egyenlőtlenségeknek. Keressük már most az

$$U_1x_1 + U_2x_2 + \cdots + U_nx_n + 1 = 0$$

egyenletű síknak (melynek tehát $U_1, U_2, \ldots, U_n$ a síkkoordinatái) metszését azokkal az egyenesekkel, melyek O-t (coordinatarendszerünk kezdőpontját) a P_k pontokkal összekötik. Ezeknek a pontoknak coordinatái nyilván

$$x_1 = \varrho A_{k1}, \quad x_2 = \varrho A_{k2}, \ldots, \quad x_n = \varrho A_{kn},$$

a hol

$$\varrho = -\frac{1}{A_{k1}U_1 + A_{k2}U_2 + \cdots + A_{kn}U_n}. \quad (k=1, 2, \ldots) \quad (1)$$

Mivel pedig

$$\vartheta_k(U_1,\ U_2,\ldots,\ U_n) \geqq 0,$$

azaz

$$A_{k1}U_1+A_{k2}U_2+\cdots+A_{kn}U_n \geqq -1,$$

azért ρ számértéke nem fekhetik 0 és 1 között s ez azt mondja ki, hogy a kérdéses síknak egyeneseinkkel való metszéspontja nem fekszik az O és P_k pontok között.

Ennélfogva ha az $U_1+\bar{u}_1,\ U_2+\bar{u}_2,\ldots,\ U_n+\bar{u}_n$ számok egyenlőtlenségeinket kielégítik, akkor az a sík, a melynek síkcoordinatái $U_1,\ U_2,\ldots,U_n$, az OP_k egyenesek mindegyikét olyan pontban metszi, mely nem fekszik az OP_k vonaldarab belsejében; viszont nyomban átlátható, hogy ha az

$$U_1x_1+U_2x_2+\cdots+U_nx_n+1=0$$

síknak az OP_k vonaldarabokkal nincs közös pontja, akkor az $U_1+\bar{u}_1,\ U_2+\bar{u}_2,\ldots,\ U_n+\bar{u}_n$ számok adott egyenlőtlenségeink megoldásai. Ugyanis feltevésünk azt jelenti, hogy az (1) egyenlet által meghatározott ρ érték nem fekszik 0 és 1 között, azaz $\vartheta_k(U_1,\ U_2,\ldots,\ U_n) \geqq 0$ és így — a ϑ_k formák definitiója értelmében —

$$\vartheta_k\,(U_1+\bar{u},\ U_2+\bar{u}_2,\ldots,\ U_n+\bar{u}_n) \geqq 0. \quad (k=1,\ 0,\ldots)$$

Más szóval: egyenlőtlenségeink összes megoldásait megkapjuk, ha az OP_k vonaldarabokat nem metsző síkok síkcoordinatáihoz rendre az $\bar{u}_1,\ \bar{u}_2,\ldots,\ \bar{u}_n$ mennyiségeket hozzáadjuk. Ezek a síkok azonban — melyek tehát ilyetén módon egyenlőtlenségeink összes megoldásait képviselik — még másképpen is jellemezhetők.

A P_k pontok ugyanis valamennyien az $(\bar{s})$ síkban fekszenek; jelöljük $\bar{\mathfrak{R}}$-sal ebben az $(n-1)$-dimensiós síkban azt a legkisebb convex tartományt, a mely ezeket a pontokat tartalmazza. Ha a $\bar{\mathfrak{R}}$ minden pontját O-val összekötjük, az így nyert vonaldarabok összessége egy n-dimensiós convex testet határoz meg; jelöljük ezt $\mathfrak{R}$-val. Ha tehát $\bar{x}_1,\ \bar{x}_2,\ldots,\ \bar{x}_n$ a $\bar{\mathfrak{R}}$ általános pontjának coordinatái, akkor a $\mathfrak{R}$ általános pontjának coordinatáit az

$$x_1=\varepsilon\bar{x}_1,\quad x_2=\varepsilon\bar{x}_2,\ldots,\ x_n=\varepsilon\bar{x}_n \qquad (2)$$

képletek adják meg, a hol ε minden értéket felvesz 0 és 1 között. Állítjuk, hogy a szóban forgó síkok, melyek a fent vázolt módon egyenlőtlenségeink megoldásait szolgáltatják, azok, a melyek $\mathfrak{K}$-t nem metszik.[1]

Könnyen átlátható ugyanis, hogy, ha az

$$U_1x_1+U_2x_2+\cdots+U_nx_n+1=0 \tag{3}$$

sík nem metszi a $\mathfrak{K}$-t, azaz, ha a $\mathfrak{K}$ minden pontjára nézve az $U_1x_1+\cdots+U_nx_n+1$ kifejezés ugyanazon előjelű, akkor, mivel az $x_1=x_2=\cdots=x_n=0$ pont pontja $\mathfrak{K}$-nak, $\mathfrak{K}$ minden pontjára nézve

$$U_1x_1+U_2x_2+\cdots+U_nx_n+1\geqq 0.$$

Minthogy $P_k\,(k=1, 2,\ldots)$ bizonyára pontja a $\mathfrak{K}$-nak, azért

$$\Theta_k\,(U_1,\ U_2\ldots,\ U_n)\geqq 0,$$

s így a (3) sík valóban a szóban forgó síkok valamelyike. Viszont, ha a (3) sík az OP_k vonaldarabokat nem metszi, akkor Carathéodory-nak a bevezetésben említett tétele segélyével könnyen kimutatható, hogy e sík a $\mathfrak{K}$-t sem metszi. E tétel értelmében ugyanis az $(n-1)$ dimensiós $\bar{\mathfrak{K}}$ convex-test tetszésszerinti pontjának coordinatái a következő alakban írhatók:

$$\bar{x}_1=\sum_{(k)}\mu_kA_{1k},\quad \bar{x}_2=\sum_{(k)}\mu_kA_{2k},\ldots,\quad \bar{x}_n=\sum_{(k)}\mu_kA_{nk},$$

a hol a μ_k számok közül legfeljebb n számú különbözik a zérustól s ezek positivek és összegük 1-gyel egyenlő. Mivel feltételünk szerint síkunk nem metszi az OP_k vonaldarabokat, azért

---

[1] Az

$$\alpha_1x_1+\alpha_2x_2+\cdots+\alpha_nx_n+\alpha_{n+1}=0$$

síkról akkor mondjuk, hogy *nem metszi a* $\mathfrak{K}$*-t*, ha e ponthalmaz minden pontjára nézve vagy

$$\alpha_1x_1+\alpha_2x_2+\cdots+\alpha_nx_n+\alpha_{n+1}\geqq 0,$$

vagy pedig — ugyancsak $\mathfrak{K}$ minden pontjára nézve —

$$\alpha_1x_1+\alpha_2x_2+\cdots+\alpha_nx_n+\alpha_{n+1}\leqq 0.$$

($\mathfrak{K}$-nak egy nem metsző síkjával tehát még lehet közös pontja)

$$\vartheta_k(U_1,\ U_2,\ldots,\ U_n) \equiv U_1A_{k1}+U_2A_{k2}+\cdots+U_nA_{kn}+1 \geqq 0;$$
$$(k=1,\ 2,\ldots)$$

ennélfogva a $\overline{\mathfrak{K}}$ minden $\overline{x}_1,\ \overline{x}_2,\ldots,\ \overline{x}_n$ pontjára fennáll az

$$U_1\overline{x}_1+U_2\overline{x}_2+\cdots+U_n\overline{x}_n+1\geqq 0$$

egyenlőtlenség. Annál inkább fennáll tehát az

$$U_1x_1+U_2x_2+\cdots+U_nx_n+1\geqq 0$$

egyenlőtlenség, ha $x_1,\ x_2,\ldots,\ x_n$ helyébe a (2) alatti értékeket helyettesítjük, azaz tehát áll a $\mathfrak{K}$ valamennyi pontjára. Ennélfogva csakugyan minden olyan sík, mely az OP_k vonaldarabokat nem metszi, a $\mathfrak{K}$-t sem metszi. Azok a síkok, a melyek a $\mathfrak{K}$ convex testet nem metszik, szolgáltatják tehát a fenti értelemben egyenlőtlenségeink megoldásait.

A

$$\vartheta\ (u_1,\ u_2,\ldots,u_n) \equiv a_1u_2+a_2u_2+\cdots+a_nu_n \geqq 0$$

egyenlőtlenséget az adott ($\vartheta_k \geqq 0$) egyenlőtlenségek *következményének* mondjuk, ha azt az utóbbiak minden megoldása kielégíti. Ha tehát $\vartheta \geqq 0$ adott rendszerünk következménye, akkor bizonyára $\vartheta\ (\bar{u}_1,\ \bar{u}_2,\ldots,\ \bar{u}_n) > 0$[1] és általában a

$$\vartheta\ (U_1+\bar{u}_1,\ U_2+\bar{u}_2,\ldots,\ U_n+\bar{u}_n) \geqq 0$$

egyenlőtlenséget, vagy az ettől csak egy positiv factorban különböző (s így vele æquivalens)

$$\vartheta\ (U_1,\ U_2,\ldots,\ U_n) \equiv \frac{\vartheta\ (U_1+\bar{u}_1, U_2+\bar{u}_2,\ldots,\ U_n+\bar{u}_n)}{\vartheta\ (\bar{u}_1,\ \bar{u}_2,\ldots,\ \bar{u}_n)} \equiv$$
$$\equiv A_1U_1+A_2U_2+\cdots+A_nU_n+1\geqq 0$$

egyenlőtlenséget azoknak a síkoknak síkcoordinatái

$$(U_1,\ U_2,\ldots,\ U_n)$$

---

[1] Mivel ugyanis $\bar{u}_1,\ \bar{u}_2,\ldots,\ \bar{u}_n$ kielégítik a $\vartheta_k>0$ egyenlőtlenségeket, azért ezek érvényben maradnak akkor is, ha a határozatlanokat az $\bar{u}_1,\ldots,\ \bar{u}_n$ értékrendszerhez elég közel választjuk. Ha már most $\vartheta\ (\bar{u}_1,\ldots,\bar{u}_n)=0$ volna, akkor léteznék az $\bar{u}_1,\ldots,\ \bar{u}_n$ értékrendszer bármely környezetében olyan értékrendszer, melynél $\vartheta<0$ volna.

elégítik ki, melyek $\mathfrak{K}$-t nem metszik. Minthogy itt

$$A_1 = \frac{a_1}{a_1\bar{u}_1+\cdots+a_n\bar{u}_n}, \ldots, \quad A_n = \frac{a_n}{a_1\bar{u}_1+\cdots+a_n\bar{u}_n},$$

azért

$$A_1\bar{u}_1+A_2\bar{u}_2+\cdots+A_n\bar{u}_n = 1,$$

azaz az $A_1, A_2, \ldots, A_n$ coordinatájú P pont is az $(\bar{s})$ síkban fekszik. A $\theta \geqq 0$ egyenlőtlenség azt mondja ki, hogy ha $\vartheta \geqq 0$ adott rendszerünk következménye, akkor azok a síkok, a melyek $\mathfrak{K}$-t nem metszik, az OP vonaldarabot sem metszik. Ebből következik azonban, hogy P a $\bar{\mathfrak{K}}$ tartományban fekszik. Ellenkező esetben ugyanis az OP egyenes minden pontja — az O pont kivételével — a $\mathfrak{K}$ convex test külső pontja volna s így az OP vonaldarab minden pontján át olyan síkot lehetne fektetni, mely a $\mathfrak{K}$-t nem metszené.[1] Ez a sík nem metszené a $\mathfrak{K}$-t, de volna az OP vonaldarabbal közös pontja, a mi az előzők szerint lehetetlen.

P tehát valóban pontja $\bar{\mathfrak{K}}$-nak; coordinatái $(A_1, A_2, \ldots, A_n)$ ennélfogva a Carathéodory-féle tétel értelmében a következő alakban írhatók:

$$A_1 = \sum_{(k)} \mu_k A_{1k}, \quad A_2 = \sum_{(k)} \mu_k A_{2k}, \ldots, \quad A_n = \sum_{(k)} \mu_k A_{nk}, \quad \left(\sum_{(k)} \mu_k = 1\right),$$

a hol a nem-negativ μ_k számok közül ismét legfeljebb n nem zérus. Ennek folytán identikusan fennáll a

$$O(u_1, u_2, \ldots, u_n) \equiv \sum_{(k)} u_k O_k(u_1, u_2, \ldots, u_n)$$

összefüggés; minthogy pedig a $\vartheta(u_1+\bar{u}_1, u_2+\bar{u}_2, \ldots, u_n+\bar{u}_n)$ illetőleg $\vartheta_k(u_1+\bar{u}_1, u_2+\bar{u}_2, \ldots, u_n+\bar{u}_n)$ formák csak egy-egy positiv factorban különböznek a megfelelő $\theta(u_1, u_2, \ldots, u_n)$ illetőleg $\theta_k(u_1, u_2, \ldots, u_n)$ formáktól, azért arra az eredményre jutunk, hogy h a a

$$\vartheta(u_1, u_2, \ldots, u_n) \geqq 0$$

---

[1] L. például Carathéodory id. helyen.

homogen linearis egyenlőtlenség következménye az ugyanilyen egyenlőtlenségekből álló

$$\vartheta_k(u_1, u_2, \ldots, u_n) \geqq 0$$

zárt rendszernek, akkor léteznek olyan nemnegativ λ_k mennyiségek, *melyek közül legfeljebb n számú nem egyenlő zérussal, hogy*

$$\vartheta(u_1, u_2, \ldots, u_n) \equiv \sum_{(k)} \lambda_k \vartheta_k(u_1, u_2, \ldots, u_n).$$

2. §. Az inhomogen linearis egyenlőtlenségek alaptétele.

Az előzőkben tárgyalt fejtegetések és eredmények kiterjeszthetők inhomogen linearis egyenlőtlenségekből álló rendszerre.

Jelölje e végből $\vartheta_k(u_1, u_2, \ldots, u_n)$ az $u_1, u_2, \ldots, u_n$ határozatlanok inhomogen linearis kifejezését:

$$\vartheta_k(u_1, u_2, \ldots, u_n) \equiv a_{k1}u_1 + a_{k2}u_2 + \cdots + a_{kn}u_n + a_{k\,n+1};$$

az így nyert

$$\vartheta_k(u_1, u_2, \ldots, u_n) \geqq 0 \qquad (k=1, 2, \ldots) \qquad (4)$$

egyenlőtlenségekről szintén feltesszük, hogy zárt rendszert alkotnak, (ezuttal $n+1$ dimensiósat) és hogy létezik olyan $\bar{u}_1, \bar{u}_2, \ldots, \bar{u}_n$ értékrendszer, melynél

$$\vartheta_k(\bar{u}_1, \bar{u}_2, \ldots, \bar{u}_n) > 0; \qquad (k=1, 2, \ldots).$$

Inhomogen egyenlőtlenségeink geometriai jelentésére a következőképpen jutunk:

Vezessük be ismét a következő jelöléseket:

$$O_k(U_1, U_2, \ldots, U_n) \equiv \frac{\vartheta_k(U_1+\bar{u}_1, U_2+\bar{u}_2, \ldots, U_n+\bar{u}_n)}{\vartheta_k(\bar{u}_1, \bar{u}_2, \ldots, \bar{u}_n)} \equiv$$

$$\equiv \frac{a_{k1}U_1 + a_{k2}U_2 + \cdots + a_{kn}U_n}{\vartheta_k(\bar{u}_1, \bar{u}_2, \ldots, \bar{u}_n)} + 1. \qquad (k=1, 2, \ldots)$$

Ha tehát az $U_1+\bar{u}_1, U_2+\bar{u}_2, \ldots, U_n+\bar{u}_n$ értékrendszer a (4) alatti egyenlőtlenségeket kielégíti, akkor

$$\boldsymbol{\theta}_k(U_1, U_2, \ldots, U_n) \geqq 0; \qquad (k=1, 2, \ldots)$$

és viszont. Ezeket az egyenlőtlenségeket pedig — mint fentebb láttuk — azoknak és csakis azoknak a síkoknak a síkcoordinatái elégítik ki, a melyek nem metszik az OP_k vonaldarabokat, a hol most P_k azt a pontot jelöli, melynek coordinatái

$$x_1 = \frac{a_{k1}}{\vartheta_k(\bar{u}_1, \ldots, \bar{u}_n)}, \quad x_2 = \frac{a_{k2}}{\vartheta_k(\bar{u}_1, \ldots, \bar{u}_n)}, \ldots, \quad (k=1, 2, \ldots)$$

$$x_n = \frac{a_{kn}}{\vartheta_k(\bar{u}_1, \ldots, \bar{u}_n)}.$$

Ha $\mathfrak{K}$-val jelöljük azt a legkisebb convex testet, a mely az O és P_k pontokat tartalmazza, akkor kimutatható, teljesen úgy, mint az előző §-ban, hogy a kérdéses síkok azok, a melyek a $\mathfrak{K}$-t nem metszik. A

$$\vartheta(u_1, u_2, \ldots, u_n) \equiv a_1u_1 + a_2u_2 + \cdots + a_nu_n + a_{n+1} \geqq 0$$

egyenlőtlenséget ismét az adott ($\vartheta_k \geqq 0$) rendszer következményének mondjuk, ha azt az utóbbiak minden megoldása teljesíti. Közvetlenül átlátható, hogy az $U_1 + \bar{u}_1$, $U_2 + \bar{u}_2, \ldots$, $U_n + \bar{u}_n$ értékrendszer akkor és csak akkor elégíti ki a

$$\vartheta(U_1 + \bar{u}_1, U_1 + \ldots, U_n + \bar{u}_n) \geqq 0$$

egyenlőtlenséget, ha megoldása a

$$\theta(U_1, U_2, \ldots, U_n) \equiv \frac{\vartheta(U_1 + \bar{u}_1, U_2 + \bar{u}_2, \ldots, U_n + \bar{u}_n)}{\vartheta(\bar{u}_1, \bar{u}_2, \ldots, \bar{u}_n)} \equiv$$

$$\equiv \frac{a_1U_1 + a_2U_2 + \cdots + a_nU_n}{\vartheta(\bar{u}_1, \bar{u}_2, \ldots, \bar{u}_n)} + 1 \geqq 0$$

egyenlőtlenségnek. Ennélfogva $\vartheta \geqq 0$ akkor és csak akkor következménye a $\vartheta_k \geqq 0$ rendszernek, ha minden olyan sík síkcoordinatái, mely a $\mathfrak{K}$-t nem metszi, teljesíti a

$$\theta(U_1, U_2, \ldots, U_n) \geqq 0$$

egyenlőtlenséget s ebből ismét folyik, hogy az a P pont, melynek coordinatái

$$x_1 = \frac{a_1}{\vartheta(\bar{u}_1, \ldots, \bar{u}_n)}, \quad x_2 = \frac{a_2}{\vartheta(\bar{u}_1, \ldots, \bar{u}_n)}, \ldots,$$

$$x_n = \frac{a_n}{\vartheta(\bar{u}_1, \ldots, \bar{u}_n)}$$

a $\mathfrak{K}$ convex test pontja.

Minthogy jelen esetben $\mathfrak{K}$ az O és a P_k pontokat tartalmazó legkisebb convex test, azért a CARATHÉODORY-féle tétel értelmében léteznek olyan nem-negativ számok: μ_0 és μ_k, melyek közül legfeljebb $n+1$ nem egyenlő zérussal és összegük egyet ad, úgy hogy

$$\frac{a_1}{\vartheta(\bar{u}_1,\ldots,\bar{u}_n)} = \mu_0 \cdot 0 + \sum_{(k)} \mu_k \frac{a_{k1}}{\vartheta_k(\bar{u}_1,\ldots,\bar{u}_n)},$$

$$\frac{a_2}{\vartheta(\bar{u}_1,\ldots,\bar{u}_n)} = \mu_0 \cdot 0 + \sum_{(k)} \mu_k \frac{a_{k2}}{\vartheta_k(\bar{u}_1,\ldots,\bar{u}_n)},$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\frac{a_n}{\vartheta(\bar{u}_1,\ldots,\bar{u}_n)} = \mu_0 \cdot 0 + \sum_{(k)} \mu_k \frac{a_{kn}}{\vartheta_k(\bar{u}_1,\ldots,\bar{u}_n)}.$$

Ennélfogva

$$\Theta(u_1, u_2,\ldots, u_n) \equiv \sum_{(k)} \mu_k \Theta_k(u_1, u_2,\ldots, u_n) + \mu_0;$$

ugyanis a jobb- és baloldalon álló linearis kifejezésekben a megfelelő határozatlanok együtthatóinak egyezését az utolsó egyenletek igazolják; az absolut tagok megegyezése pedig az

$$1 = \mu_0 + \sum_{(k)} \mu_k$$

összefüggésből következik. Identitásunkat az eredeti ϑ és ϑ_k kifejezésekre átírva ered

$$\vartheta(U_1+\bar{u}_1,\ U_2+\bar{u}_2,\ldots,\ U_n+\bar{u}_n) \equiv$$

$$\equiv \vartheta(\bar{u}_1,\ldots.\ \bar{u}_n) \sum_{(k)} \mu_k \frac{\vartheta_k(U_1+\bar{u}_1,\ U_2+\bar{u}_2,\ldots,\ U_n+\bar{u}_n)}{\vartheta_k(\bar{u}_1,\ \bar{u}_2,\ldots,\ \bar{u}_n)} +$$

$$+ \mu_0 \vartheta(\bar{u}_1\ldots,\ \bar{u}_n).$$

Mivel pedig az itt fellépő $\vartheta_k(\bar{u}_1,\ldots,\bar{u}_n)$ és $\vartheta(\bar{u}_1,\ldots,\bar{u}_n)$ számok positivak, következik, hogy ha az *inhomogen*

$$\vartheta(u_1,\ u_2,\ldots,\ u_n) \geqq 0$$

egyenlőtlenség következménye az ugyanilyen

$$\vartheta_k(u_1,\ u_2,\ldots,\ u_n) \geqq 0 \qquad (k=1,\ 2,\ldots)$$

egyenlőtlenségekből álló zárt rendszernek, akkor léteznek olyan nem-negativ λ_0 és λ_k mennyi-

ségek, *melyek közül legfeljebb* $n+1$ *különbözik a zerustól* hogy

$$\vartheta(u_1, u_2, \ldots, u_n) \equiv \sum_{(k)} \lambda_k \vartheta_k(u_1, u_2, \ldots, u_n) + \lambda_0.$$

Viszont közvetlen látnivaló, hogy ha a ϑ kifejezés ilyen módon előállítható a ϑ_k linearis kifejezésekből, akkor a $\vartheta \geqq 0$ egyenlőtlenség valóban következménye a $\vartheta_k \geqq 0$ egyenlőtlenségeknek.

3. §. Linearis egyenlőtlenségek parameteres megoldása.

Térjünk vissza homogen egyenlőtlenségeinkre, és szorítkozzunk egyelőre arra az esetre, a mikor rendszerünk véges számú egyenlőtlenségből áll.

$$\vartheta_k(u_1, u_2, \ldots, u_n) = a_{k1}u_1 + a_{k2}u_2 + \cdots + a_{kn}u_n \geqq 0. \quad (k=1, 2, \ldots \nu)$$

A P_k pontokat tartalmazó legkisebb convex tartomány — $\overline{\mathfrak{K}}$ — ez esetben véges számú sík által határolt polyeder és így a $\mathfrak{K}$ convex test határát ugyancsak véges számú $(n-1)$-dimensiós sík alkotja. Ezek egyike az

$$\bar{u}_1x_1 + \bar{u}_2x_2 + \cdots + \bar{u}_nx_n = 1$$

egyenletű $(\bar{s})$ sík, úgy, hogy $\mathfrak{K}$ minden pontjának coordinatái teljesítik a

$$-\bar{u}_1x_1 - \bar{u}_2x_2 - \cdots - \bar{u}_nx_n + 1 \geqq 0$$

egyenlőtlenséget; $\mathfrak{K}$ többi határsíkja áthalad az O ponton; ezek egyenletei legyenek:

$$u_1^{(q)}x_1 + u_2^{(q)}x_2 + \cdots + u_n^{(q)}x_n = 0, \quad (q=1, 2, \ldots N)$$

a hol az $u_1^{(q)}, u_2^{(q)}, \ldots, u_n^{(q)}$ együtthatók már úgy vannak választva, hogy $\mathfrak{K}$ minden pontjára nézve

$$u_1^{(q)}x_1 + u_2^{(q)}x_2 + \cdots + u_n^{(q)}x_n \geqq 0 \quad (q=1, 2, \ldots N)$$

legyen. Ennélfogva a $\mathfrak{K}$ test minden pontjának coordinatái — és csakis ezek — kielégítik a következő $N+1$ számú egyenlőtlenségből álló rendszert:

$$\begin{aligned} u_1^{(q)}x_1 + u_2^{(q)}x_2 + \cdots + u_n^{(q)}x_n &\geqq 0, \quad (q=1, 2, \ldots N) \\ -\bar{u}_1x_1 - \bar{u}_2x_2 - \cdots - \bar{u}_nx_n + 1 &\geqq 0. \end{aligned} \tag{5}$$

Eredeti egyenlőtlenségeink valamennyi megoldását — mint láttuk —, azoknak a síkoknak síkcoordinatáiból nyertük, melyek $\mathfrak{K}$-t nem metszik, azaz ha $U_1+\bar{u}_1$, $U_2+\bar{u}_2,\ldots$, $U_n+\bar{u}_n$ a $\vartheta_k \geqq 0$ egyenlőtlenségek valamely megoldását jelentik, akkor a $\mathfrak{K}$ convex test minden pontjának coordinatái teljesítik az

$$U_1x_1+U_2x_2+\cdots+U_nx_n+1 \geqq 0 \tag{6}$$

egyenlőtlenséget és viszont. Más szóval az

$$U_1+\bar{u}_1,\ U_2+\bar{u}_2,\ldots,\ U_n+\bar{u}_n$$

értékrendszer akkor és csak akkor megoldása a $\vartheta_k \geqq 0$ egyenlőtlenségeknek, ha a (6) alatti egyenlőtlenség következménye az (5) alatti $N+1$ számú egyenlőtlenségeknek. Ennek pedig szükséges és elegendő feltétele, a 2. §-ban levezetett tétel értelmében, hogy létezzenek olyan nem-negativ mennyiségek $\lambda^{(q)}$, $(q = 1, 2,\ldots N)$ λ, és λ_0 (a melyek közül legfeljebb $n+1$ nem zérus), hogy identikusan teljesüljön a következő relatio:

$$U_1x_1+U_2x_2+\cdots+U_nx_n+1 \equiv \sum_{q=1}^{N}\lambda^{(q)}(u_1^{(q)}x_1+u_2^{(q)}x_2+\cdots+u_n^{(q)}x_n)+$$
$$+\bar{\lambda}(-\bar{u}_1x_1-\bar{u}_2x_2-\cdots-\bar{u}_nx_n+1)+\lambda_0;$$

azaz részletesen kiírva:

$$U_1=\sum_{q=1}^{N}\lambda^{(q)}u_1^{(q)}-\bar{\lambda}\bar{u}_1,\quad U_2=\sum_{q=1}^{N}\lambda^{(q)}u_2^{(q)}-\bar{\lambda}\bar{u}_2,\ldots,$$
$$U_n=\sum_{q=1}^{N}\lambda^{(q)}u_n^{(q)}-\bar{\lambda}\bar{u}_n,\quad 1=\bar{\lambda}+\lambda_0.$$

Ennélfogva megadott homogen egyenlőtlenségeink minden u_1, $u_2,\ldots$, u_n megoldása az

$$u_1^{(q)},\ u_2^{(q)},\ldots,\ u_n^{(q)} \qquad (q=1, 2,\ldots N)$$

és az

$$\bar{u}_1,\ \bar{u}_2,\ldots\ \bar{u}_n \tag{7}$$

megoldások felhasználásával a következő alakban állítható elő:

$$u_1 = \sum_{q=1}^{N} \lambda^{(q)} u_1^{(q)} + \lambda_0 \bar{u}_1, \quad u_2 = \sum_{q=1}^{N} \lambda^{(q)} u_2^{(q)} + \lambda_0 \bar{u}_2, \ldots,$$
$$u_n = \sum_{q=1}^{N} \lambda^{(q)} u_n^{(q)} + \lambda_0 \bar{u}_n, \tag{8}$$

a hol $\lambda^{(q)}$ és λ_0 nem-negativ számokat jelölnek. Fordítva közvetlenül látható, hogy ha $\lambda^{(q)}$ és λ_0 nem-negativ számok, akkor az utolsó egyenleteink által értelmezett minden $u_1, u_2, \ldots u_n$ értékrendszer a $\vartheta_k \geqq 0$ egyenlőtlenségek megoldását szolgáltatja. A (8) alatti formulák tehát a megadott egyenlőtlenségek *általános megoldását* tartalmazzák nem-negativ parameterek segélyével. Az ebben szereplő (7) alatti megoldások lényegileg azok, a melyeket Minkowski legszélsőbb megoldásoknak nevez («äusserste Lösungen») s a melyek ilyen módon egyszerű geometriai jelentést kaptak.

Nem okoz nehézséget az itt levezetett parameteres megoldást általánosítani inhomogen egyenlőtlenségekre, vagy végtelen sok homogen egyenlőtlenségből álló zárt rendszerre, mely utóbbi esetben természetesen az előállításban felhasznált speciális (legszélsőbb) megoldások száma is végtelen lehet.

4. §. Az integralegyenlőtlenségek alaptétele.

Fejtegetéseink gondolatkörébe vág a következő problema: Legyenek $a_1(x), a_2(x), \ldots, a_\nu(x)$ és $a(x)$ az $\alpha \leqq x \leqq \beta$ intervallumban értelmezett folytonos függvények és tekintsük a folytonos $u(x)$ függvényeknek azt az összességét, a mely kielégíti a következő ν-számú integral-egyenlőtlenséget:

$$\int_\alpha^\beta a_1(x)\, u(x)\, dx \geqq 0, \quad \int_\alpha^\beta a_2(x)\, u(x)\, dx \geqq 0, \ldots,$$
$$\int_\alpha^\beta a_\nu(x)\, u(x)\, dx \geqq 0;$$

az

$$\int_\alpha^\beta a(x)\, u(x)\, dx \geqq 0$$

egyenlőtlenséget a megelőzők *következményének* mondjuk, ha minden olyan folytonos $u(x)$ függvény, mely amazokat kielégíti, ezt is teljesíti.

Foglalkozzunk csak azzal az esettel, a melyben az $a_1(x),\ldots,$ $a_\nu(x)$ függvények linearisan függetlenek: alaptételünk ez esetben úgy szól, hogy — a mondott feltételek mellett — $a(x)$ a következő alakba írható:

$$a(x) \equiv \lambda_1 a_1(x) + \lambda_2 a_2(x) + \cdots + \lambda_\nu a_\nu(x),$$

a hol $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_\nu$ nem-negativ állandókat jelölnek.

A kifejtendő bizonyításból kitűnik, hogy a tétel érvényes marad akkor is, ha az adott függvények valamely két-, vagy többdimensiós (T) tartományban értelmezett folytonos függvények s az integratio ebben a (T) tartományban történik. Erre a körülményre Farkas professor úr volt szives figyelmemet felhívni.

Állításunkat a következőképpen bizonyítjuk:

A $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_\nu$ számokat a következő linearis egyenletrendszerből számítjuk ki:

$$\int_\alpha^\beta a_1(x)\, a(x)\, dx = \lambda_1 \int_\alpha^\beta a_1(x)^2\, dx + \lambda_2 \int_\alpha^\beta a_1(x)\, a_2(x)\, dx + \cdots +$$
$$+ \lambda_\nu \int_\alpha^\beta a_1(x)\, a_\nu(x)\, dx,$$

$$\int_\alpha^\beta a_2(x)\, a(x)\, dx = \lambda_1 \int_\alpha^\beta a_2(x)\, a_1(x)\, dx + \lambda_2 \int_\alpha^\beta a_2(x)^2\, dx + \cdots +$$
$$+ \lambda_\nu \int_\alpha^\beta a_2(x)\, a_\nu(x)\, dx,$$

— — — — — — — — — — — — —

$$\int_\alpha^\beta a_\nu(x)\, a(x)\, dx = \lambda_1 \int_\alpha^\beta a_\nu(x)\, a_1(x)\, dx + \lambda_2 \int_\alpha^\beta a_\nu(x)\, a_2(x)\, dx + \cdots +$$
$$+ \lambda_\nu \int_\alpha^\beta a_\nu(x)^2\, dx.$$

Ennek az egyenletrendszernek determinansa nem egyéb, mint az $x_1, x_2, \ldots, x_n$ határozatlanok következő quadratikus formájának:

$$\sum_{p=1}^{\nu}\sum_{q=1}^{\nu} x_p x_q \int_\alpha^\beta a_p(x)\, a_q(x)\, dx \equiv$$

$$\equiv \int_\alpha^\beta [x_1 a_1(x) + x_2 a_2(x) + \cdots + x_\nu a_\nu(x)]^2\, dx$$

determinansa; mivel pedig feltételünk szerint az $a_1(x)\ a_2(x), \ldots, a_\nu(x)$ függvények linearisan függetlenek, azért az $x_1, x_2, \ldots, x_\nu$ határozatlanok minden értékénél positiv (nem nulla) e quadratikus forma értéke és így determinansa nem tünik el. Ennek folytán a szóban forgó egyenletrendszerből $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_\nu$ csakugyan meghatározhatók. Ha még rövidség kedvéért bevezetjük a következő jelölést:

$$\omega(x) \equiv a(x) - \lambda_1 a_1(x) - \lambda_2 a_2(x) - \cdots - \lambda_\nu a_\nu(x),$$

akkor a $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_\nu$ meghatározására felállított egyenletrendszert a következőképpen írhatjuk:

$$\int_\alpha^\beta a_1(x)\,\omega(x)\,dx = 0, \quad \int_\alpha^\beta a_2(x)\,\omega(x)\,dx = 0, \ldots, \quad \int_\alpha^\beta a_\nu(x)\,\omega(x)\,dx = 0.$$

Ezek az egyenletek pedig azt mondják ki, hogy úgy az $\omega(x)$, mint a $-\omega(x)$ függvény kielégíti a kiinduló pontul szolgáló integral-egyenlőtlenségeinket. Ennélfogva szükségképpen fennállanak az

$$\int_\alpha^\beta a(x)\,\omega(x)\,dx \geqq 0 \quad \text{és} \quad -\int_\alpha^\beta a(x)\,\omega(x)\,dx \geqq 0$$

egyenlőtlenségek is, a melyekből az

$$\int_\alpha^\beta a(x)\,\omega(x)\,dx = 0$$

relatio következik. Ha ebben $a(x)$ helyébe az

$$\omega(x) + \lambda_1 a_1(x) + \lambda_2 a_2(x) + \cdots + \lambda_\nu a_\nu(x)$$

összeget írjuk, az

$$\int_{\sigma}^{\beta} \omega(x)^2\, dx = 0$$

egyenletre jutunk s ez azt mutatja, hogy $\omega(x) \equiv 0$, azaz

$$a(x) = \lambda_1 a_1(x) + \lambda_2 a_2(x) + \cdots + \lambda_\nu a_\nu(x).$$

Hátra van még annak a kimutatása, hogy ezek a $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_\nu$ számok nem negativok. Hogy ezt például λ_1-re kimutathassuk, oldjuk meg a következő $\nu-1$ egyenletből álló linearis egyenletrendszert:[1]

$$\int_{\alpha}^{\beta} a_2(x)\, a_1(x)\, dx = \mu_2 \int_{\alpha}^{\beta} a_2(x)^2\, dx + \mu_3 \int_{\alpha}^{\beta} a_2(x)\, a_3(x)\, dx + \cdots + \mu_\nu \int_{\alpha}^{\beta} a_2(x)\, a_\nu(x)\, dx;$$

$$\int_{\alpha}^{\beta} a_3(x)\, a_1(x)\, dx = \mu_2 \int_{\alpha}^{\beta} a_3(x)\, a_2(x)\, dx + \mu_3 \int_{\alpha}^{\beta} a_3(x)^2\, dx + \cdots + \mu_\nu \int_{\alpha}^{\beta} a_3(x)\, a_\nu(x)\, dx;$$

$$\int_{\alpha}^{\beta} a_\nu(x)\, a_1(x)\, dx = \mu_2 \int_{\alpha}^{\beta} a_\nu(x)\, a_2(x)\, dx + \mu_3 \int_{\alpha}^{\beta} a_\nu(x)\, a_3(x)\, dx + \cdots + \mu_\nu \int_{\alpha}^{\beta} a_\nu(x)^2\, dx.$$

Ha ismét, mint elébb, bevezetjük a következő rövidítést:

$$\overline{\omega}(x) \equiv a_1(x) - \mu_2 a_2(x) - \mu_3 a_3(x) - \cdots - \mu_\nu a_\nu(x),$$

akkor nyomban látható, hogy egyenletrendszerünk a következő alakot ölti:

$$\int_{\alpha}^{\beta} a_2(x)\, \overline{\omega}(x)\, dx = 0, \quad \int_{\alpha}^{\beta} a_3(x)\, \overline{\omega}(x)\, dx = 0, \ldots, \quad \int_{\alpha}^{\beta} a_\nu(x)\, \overline{\omega}(x)\, dx = 0;$$

[1] Hogy ennek a linearis egyenletrendszernek determinansa nem tűnik el, az ugyanúgy mutatható ki, mint az előző egyenletrendszer esetében.

mivel továbbá

$$\int_\alpha^\beta a_1(x)\,\overline{\omega}(x)\,dx = \int_\alpha^\beta \overline{\omega}(x)^2\,dx > 0\,^1,$$

azért ezek az összefüggések azt mutatják, hogy $\overline{\omega}(x)$ is kielégíti adott integral-egyenlőtlenségeinket. Ennélfogva ez a függvény teljesíti az

$$\int_\alpha^\beta a(x)\,\overline{\omega}(x)\,dx \geqq 0$$

egyenlőtlenséget is; ámde

$$\int_\alpha^\beta a(x)\,\overline{\omega}(x)\,dx = \int_\alpha^\beta [\lambda_1 a_1(x) + \lambda_2 a_2(x) + \cdots + \lambda_\nu a_\nu(x)]\,\overline{\omega}(x)\,dx =$$

$$= \lambda_1 \int_\alpha^\beta \overline{\omega}(x)^2\,dx \geqq 0;$$

s így valóban $\lambda_1 \geqq 0$.

Ezzel alaptételünk integral-egyenlőtlenségek esetében is bebizonyítást nyert.

---

[1] Az $\int_\alpha^\beta \overline{\omega}(x)^2\,dx$ integral értéke nem lehet nulla, mert ez esetben

$$\overline{\omega}(x) \equiv a_1(x) - \mu_2 a_2(x) - \mu_3 a_3(x) - \cdots - \mu_\nu a_\nu(x) = 0$$

volna s így az $a_1(x)$, $a_2(x), \ldots, a_\nu(x)$ függvények nem lennének lineárisan függetlenek.

(A M. Tud. Akadémia III. osztályának 1917 deczember 10.-i meg nem tartott ülésére bejelentve, 1918 márczius hó 18.-i ülésén előterjesztve.)

Über lineare Ungleichungen.

Von Alfred Haar in Szeged.

Die Theorie der linearen Ungleichungen wurde von H. Minkowski[1]) und J. Farkas[2]) zuerst entwickelt; beide Verfasser gelangen auf gänzlich verschiedene Weise zu den beiden Hauptsätzen dieser Theorie; die eine betrifft diejenigen Ungleichungen, die als Folge von gegebenen Ungleichungen zu betrachten sind, die andere, die Parameterdarstellung der Lösungen. Von der neueren Literatur mögen die interessanten Behandlungen desselben Gegenstandes von L. L. Dines[3]) und W. B. Carver[4]) erwähnt werden, die ebenfalls zu den erwähnten Resultaten gelangen mit Hülfe von Methoden, die von denen Minkowski's und Farkas' verschieden sind.

Das Ziel der vorliegenden Arbeit — die bereits im Jahre 1917 der ungarischen Akademie der Wissenschaften vorgelegt und in der Zeitschrift dieser Akademie (Mathematikai és Természettudományi Értesítő) in ungarischer Sprache im Jahre 1918 (Bd. 34.) veröffentlicht wurde — ist, diese Theorie in neuer Weise zu begründen. Es zeigt sich, dass diese Theorie auf ganz einfache Sätze der mehrdimensionalen Geometrie zurückführbar ist, wenn man die Ungleichungen und die Unbestimmten passend geometrisch interpretiert. Es handelt sich dabei um Sätze, die den konvexen Körper betreffen; ausser den einfachsten Tatsachen über diese Körper gelangt ein schöner Satz von C. Carathéodory[5]) zur Anwendung. Merkwürdigerweise verlässt Minkowski in seinem genannten Werke eben an dieser Stelle die geometrische Interpre-

[1]) Geometrie der Zahlen. S. 39—45.

[2]) Journal für die reine und angewandte Mathematik Bd. 124. 1901.

[3]) Annals of Mathematics. vol. 20. S. 191.

[4]) Annals of Mathematics. vol. 23. S. 212.

[5]) Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo T. 32. 1911.

tation, obwohl das ganze Buch sonst dieser Denkungsart gewidmet ist.

Ich gelange auf der geschilderten Weise nicht nur zu den erwähnten Sätzen von MINKOWSKI und FARKAS, sondern es ergiebt sich auch eine Ergänzung derselben.

§ 1. Linear homogene Ungleichungen.

Wir legen unsren Untersuchungen ein System von linearen homogenen Ungleichungen

$$\vartheta_k(u_1, u_2, \ldots, u_n) \equiv a_{k1}u_1 + a_{k2}u_2 + \ldots + a_{kn}u_n \geqq 0. \quad (k=1, 2, \ldots)$$

zwischen den Unbestimmten $u_1, u_2, \ldots, u_n$ zu Grunde. Das System besteht aus endlich vielen oder aus unendlich vielen Ungleichungen, im letzteren Falle setzen wir voraus, dass es *„abgeschlossen"* ist, worunter wir die folgende Eigenschaft verstehen: Betrachten wir im n-dimensionalen Raume (in dem $x_1, x_2 \ldots, x_n$ Cartesische Koordinaten bedeuten) die Punkte p_k mit dem Koordinaten

$$x_1 = a_{k1}, \quad x_2 = a_{k2}, \ldots, \quad x_n = a_{kn}; \quad (k=1, 2, \ldots)$$

wenn die Punktmenge, gebildet von diesen Punkten p_k, eine abgeschlossene ist, so soll das System der Ungleichungen $\vartheta_k \geqq 0$ ein *abgeschlossenes* genannt werden.

Ohne Einschränkung der Allgemeinheit können wir voraussetzen, dass ein Wertsystem $\bar{u}_1, \bar{u}_2, \ldots, \bar{u}_n$ von der Beschaffenheit existiert, dass für alle k

$$\vartheta_k(\bar{u}_1, \bar{u}_2, \ldots, \bar{u}_n) > 0$$

sei; widrigenfalls liesse sich das Problem auf ein System von Ungleichungen reduzieren, in dem die Anzahl der Unbekannten kleiner als n ist [6])

Betrachten wir nun diejenigen Punkte P_k des n-dimensionalen Raumes, deren Koordinaten

$$x_1 = \frac{a_{k1}}{\vartheta_k(\bar{u}_1, \bar{u}_2, \ldots, \bar{u}_n)} = A_{k1}, \quad x_2 = \frac{a_{k2}}{\vartheta_k(\bar{u}_1, \bar{u}_2, \ldots, \bar{u}_n)} = A_{k2}, \ldots,$$

$$x_n = \frac{a_{kn}}{\vartheta_k(\bar{u}_1, \bar{u}_2, \ldots, \bar{u}_n)} = A_{kn}$$

sind; sie liegen alle in der $(n-1)$-dimensionalen Ebene $(\bar{E})$, deren Gleichung

$$\bar{u}_1 x_1 + \bar{u}_2 x_2 + \ldots + \bar{u}_n x_n = 1$$

ist. Die Annahme $\vartheta_k(u_1, u_2, \ldots, u_n) > 0$ bedeutet geometrisch, dass

[6]) C. f. MINKOWSKY l. c. p. 44.

die Strahlen, die den Anfangspunkt O des Koordinatensystems mit den Punkten p_k verbinden, diese Ebene $\bar{E}$ durchstossen; die Durchstossungspunkte sind die Punkte P_k.

Das vorgelegte System von Ungleichungen ist mit dem System

$$\frac{\vartheta_k(u_1, u_2, \ldots, u_n)}{\vartheta_k(\bar{u}_1, \bar{u}_2, \ldots, \bar{u}_n)} \equiv A_{k1}u_1 + A_{k2}u_2 + \ldots + A_{kn}u_n \geqq 0 \quad (k=1, 2, \ldots)$$

offenbar aequivalent; die Koeffizienten dieses neuen Systems erfüllen die folgenden Gleichungen:

$$A_{k1}\bar{u}_1 + A_{k2}\bar{u}_2 + \ldots + A_{kn}\bar{u}_n = 1 \quad (k=1, 2. \ldots)$$

Wir wollen nun dieses System von Ungleichungen geometrisch deuten. Zu diesem Ende bezeichnen wir mit

$$u_1 = U_1 + \bar{u}_1, \quad u_2 = U_2 + \bar{u}_2, \ldots, \quad u_n = U_n + \bar{u}_n$$

irgendeine Lösung unsrer Ungleichungen, und es sei der Kürze halber

$$\Theta_k(U_1, U_2, \ldots, U_n) = \frac{\vartheta_k(U_1 + \bar{u}_1, U_2 + \bar{u}_2, \ldots, U_n + \bar{u}_n)}{\vartheta_k(\bar{u}_1, \bar{u}_2, \ldots, \bar{u}_n)} =$$
$$= A_{k1}U_1 + A_{k2}U_2 + \ldots + A_{kn}U_n + 1; \quad (k=1, 2, \ldots)$$

das System $U_1, U_2, \ldots, U_n$ ist sodann eine Lösung der Ungleichungen

$$\Theta_k(U_1, U_2, \ldots, U_n) \geqq 0. \quad (k=1, 2, \ldots)$$

Wir suchen nun die Schnittpunkte der Ebene

$$U_1x_1 + U_2x_2 + \ldots + U_nx_n + 1 = 0$$

mit denjenigen Geraden, die den Anfangspunkt O des Koordinatensystems mit den Punkten P_k verbinden. Die Koordinaten dieser Schnittpunkte sind offenbar

$$x_1 = \varrho A_{k1}, \quad x_2 = \varrho A_{k2}, \ldots, \quad x_n = \varrho A_{kn},$$

wobei zur Abkürzung

$$\varrho = -\frac{1}{A_{k1}U_1 + A_{k2}U_2 + \ldots + A_{kn}U_n} \quad (k=1, 2, \ldots n) \quad (1)$$

gesetzt ist. Da aber — zufolge unsrer Annahme —

$$\Theta_k(U_1, U_2, \ldots, U_n) \geqq 0,$$

d. h.

$$A_{k1}U_1 + A_{k2}U_2 + \ldots + A_{kn}U_n \geqq -1$$

ist, so folgt, dass ϱ nicht zwischen 0 und 1 liegt; mit anderen Worten der Schnittpunkt der in Frage stehenden Ebene mit der Geraden OP_k liegt nicht zwischen den Punkten O und P_k.

Das erhaltene Resultat — dass, falls $U_1+\bar{u}_1, U_2+\bar{u}_2, \ldots, U_n+\bar{u}_n$ ein Lösungssystem der vorgelegten Ungleichungen ist, die Ebene

mit den Ebenenkoordinaten $U_1, U_2, \ldots, U_n$ mit den Strecken OP_k keinen gemeinsamen Punkt besitzt — ist umkehrbar. In der Tat, wenn die betrachtete Ebene die Strecken OP_k nicht durchsetzt, so liegt die durch Formel (1) erklärte Grösse ϱ nicht zwischen 0 und 1, d. h. es ist

$$\vartheta_k(U_1, U_2, \ldots, U_n) \geqq 0$$

und folglich

$$\vartheta_k(U_1 + \bar{u}_1, U_2 + \bar{u}_2, \ldots, U_n + \bar{u}_n) \geqq 0 \quad (k = 1, 2, \ldots).$$

Mit anderen Worten: wir erhalten die Lösungen der vorgelegten Ungleichungen durch Hinzufügung der Grössen $\bar{u}_1$, bez. $\bar{u}_2, \ldots, \bar{u}_n$ zu den Ebenenkoordinaten derjenigen Ebenen, die die Strecken OP_k nicht durchsetzen.

Die fraglichen Ebenen sind aber noch in einer anderen Weise charakterisierbar. Die Punkte P_k liegen alle in derselben Ebene; wir bezeichnen mit $\bar{\mathfrak{K}}$ in dieser $(n-1)$-dimensionalen Ebene denjenigen kleinsten konvexen Körper, der diese Punkte enthält. Verbinden wir alle Punkte von $\bar{\mathfrak{K}}$ mit O, so bilden die so erhaltenen Strecken einen n-dimensionalen konvexen Körper, den wir mit $\mathfrak{K}$ bezeichnen. Sind $\bar{x}_1, \bar{x}_2, \ldots, \bar{x}_n$ die Koordinaten eines allgemeinen Punktes von $\bar{\mathfrak{K}}$, so ergeben sich die Koordinaten der Punkte von $\mathfrak{K}$ aus der Formel

$$x_1 = \varepsilon \bar{x}_1, \quad x_2 = \varepsilon \bar{x}_2, \ldots, \quad x_n = \varepsilon \bar{x}_n, \tag{2}$$

wobei ε alle Werte zwischen 0 und 1 annimmt. Wir behaupten dass die fraglichen Ebenen, die in der dargelegten Weise die Lösungen der vorgelegten Ungleichungen darstellen, diejenigen sind, die mit dem konvexen Körper $\mathfrak{K}$ keinen gemeinsamen Punkt haben.

In der Tat, wenn die Ebene

$$U_1 x_1 + U_2 x_2 + \ldots + U_n x_n + 1 = 0 \tag{3}$$

den Körper $\mathfrak{K}$ nicht schneidet, d. h wenn der Ausdruck $U_1 x_1 + U_2 x_2 + \ldots + U_n x_n + 1$ für alle Punkte des Körpers dasselbe Vorzeichen besitzt, so muss — da der Punkt $x_1 = x_2 = \ldots = x_n = 0$ in $\mathfrak{K}$ enthalten ist — für alle Punkte von $\mathfrak{K}$ die Ungleichung

$$U_1 x_1 + U_2 x_2 + \ldots + U_n x_n + 1 \geqq 0$$

bestehen. Da die Punkte P_k $(k = 1, 2, \ldots)$ jedenfalls dem Körper $\mathfrak{K}$ angehören, so ist

$$\Theta_k(U_1, U_2, \ldots, U_n) \geqq 0,$$

und folglich ist die Ebene (3) eine der fraglichen Ebenen. Umgekehrt, wenn die Ebene (3) die Strecken OP_k nicht durchsetzt, so lässt sich auf Grund des in der Einleitung erwähnten Satzes von Herrn CARATHÉODORY leicht zeigen, dass diese Ebene den konvexen Körper $\mathfrak{K}$ nicht schneidet. Zufolge dieses Satzes kann man nämlich die Koordinaten irgendeines Punktes des $(n-1)$-dimensionalen konvexen Körpers $\bar{\mathfrak{K}}$ in folgender Form schreiben:

$$\bar{x}_1 = \sum_{(k)} \mu_k A_{k1}, \quad \bar{x}_2 = \sum_{(k)} \mu_k A_{k2}, \ldots, \quad \bar{x}_n = \sum_{(k)} \mu_k A_{kn},$$

wobei $\mu_1, \mu_2, \ldots \mu_k, \ldots$ nicht negative Zahlen von der Summe 1 bedeuten, von denen höchstens n von Null verschieden sind. Da unsre Ebene die Strecken OP_k nicht durchsetzt, so folgt

$$\Theta_k(U_1, U_2, \ldots, U_n) \equiv A_{k1}U_1 + A_{k2}U_2 + \ldots + A_{kn}U_n + 1 \geqq 0; \quad (k = 1, 2, \ldots)$$

es gilt daher für jeden Punkt $\bar{x}_1, \bar{x}_2, \ldots, \bar{x}_n$ von $\bar{\mathfrak{K}}$

$$U_1\bar{x}_1 + U_2\bar{x}_2 + \ldots + U_n\bar{x}_n + 1 \geqq 0.$$

Um so mehr gilt daher die Ungleichung

$$U_1x_1 + U_2x_2 + \ldots + U_nx_n + 1 \geqq 0,$$

falls an Stelle von $x_1, x_2, \ldots, x_n$ die durch (2) dargestellten Werte eingeführt werden, d. h. für jeden Punkt des konvexen Körpers $\mathfrak{K}$. Daher schneidet jede Ebene, die die Strecken OP_k nicht durchsetzt, auch den Körper $\mathfrak{K}$ nicht, und es liefern in dem oben dargelegten Sinne diejenigen Ebenen die Lösungen der vorgelegten Ungleichungen, die $\mathfrak{K}$ nicht schneiden.

Die Ungleichung

$$\vartheta(u_1, u_2, \ldots, u_n) \equiv a_1u_1 + a_2u_2 + \ldots + a_nu_n \geqq 0$$

wird eine Folge der vorgelegten Ungleichungen ($\vartheta_k \geqq 0$) genannt, wenn alle Lösungen der letzteren Ungleichungen die Ungleichung $\vartheta \geqq 0$ erfüllen. Ist dies der Fall, so muss jedenfalls[7])

$$\vartheta(\bar{u}_1, \bar{u}_2, \ldots, \bar{u}_n) > 0$$

sein, und es wird die Ungleichung

$$\vartheta(U_1 + \bar{u}_1, U_2 + \bar{u}_2, \ldots, U_n + \bar{u}_n) \geqq 0$$

---

[7]) Da die Grössen $\bar{u}_1, \bar{u}_2, \ldots, \bar{u}_n$ die Ungleichungen $\vartheta_k > 0$ erfüllen, so bleiben diese Ungleichungen richtig, wenn man die Variablen hinreichend nahe an das Wertsystem $\bar{u}_1, \bar{u}_2, \ldots, \bar{u}_n$ wählt. Wäre nun $\vartheta(\bar{u}_1, \bar{u}_2, \ldots, \bar{u}_n) = 0$, so würde man in beliebiger Nähe des Wertsystems $\bar{u}_1, \bar{u}_2, \ldots, \bar{u}_n$ ein solches Wertsystem bestimmen können, für das $\vartheta < 0$ ausfällt.

oder die mit ihr aequivalente

$$\Theta(U_1, U_2, \ldots, U_n) \equiv \frac{\vartheta(U_1+\bar{u}_1, U_2+\bar{u}_2, \ldots, U_n+\bar{u}_n)}{\vartheta(\bar{u}_1, \bar{u}_2, \ldots, \bar{u}_n)} =$$
$$= A_1U_1 + A_2U_2 + \ldots + A_nU_n + 1 \geqq 0$$

befriedigt durch die Ebenenkoordinaten

$$(U_1, U_2, \ldots, U_n)$$

derjenigen Ebenen, die $\mathfrak{K}$ nicht schneiden. Da

$$A_1 = \frac{a_1}{a_1\bar{u}_1 + a_2\bar{u}_2 + \ldots + a_n\bar{u}_n}, \ldots, \quad A_n = \frac{a_n}{a_1\bar{u}_1 + a_2\bar{u}_2 + \ldots + a_n\bar{u}_n}$$

ist, so gilt

$$A_1\bar{u}_1 + A_2\bar{u}_2 + \ldots + A_n\bar{u}_n = 1,$$

d. h. der Punkt P mit den Koordinaten $A_1, A_2, \ldots, A_n$ liegt in der Ebene $\bar{E}$. Wenn die Ungleichung $\vartheta \geqq 0$ eine Folge des vorgelegten Systems ist, so können daher die Ebenen, die den konvexen Körper $\mathfrak{K}$ nich durchsetzen, die Strecke OP auch nicht schneiden. Daraus schliessen wir, dass P ein Punkt von $\bar{\mathfrak{K}}$ sein muss. Widrigenfalls würde jeder Punkt der Strecke OP ausserhalb $\mathfrak{K}$ liegen und man könnte durch jeden inneren Punkt dieser Strecke eine $\mathfrak{K}$ nicht schneidende Ebene hindurchlegen. Diese Ebene würde $\mathfrak{K}$ nicht schneiden, hätte aber mit OP einen Punkt gemein — im Widerspruch mit dem Vorangehendem.

Da P ein Punkt von $\bar{\mathfrak{K}}$ ist, so kann man seine Koordinaten $A_1, A_2, \ldots, A_n$ nach dem erwähnten Satze CARATHÉODORY's in folgender Form schreiben

$$A_1 = \sum_{(k)} \mu_k A_{1k}, \quad A_2 = \sum_{(k)} \mu_k A_{2k}, \ldots, \quad A_n = \sum_{(k)} \mu_k A_{nk},$$

wobei

$$\sum_{(k)} \mu_k = 1,$$

und von den nicht negativen Grössen μ_k höchstens n von Null verschieden sind. Es gilt daher die Identität

$$\Theta(u_1, u_2, \ldots, u_n) = \sum_{(k)} \mu_k \Theta_k(u_1, u_2, \ldots, u_n);$$

da die Formen

$\vartheta(u_1+\bar{u}_1, u_2+\bar{u}_2, \ldots, u_n+\bar{u}_n)$ bzw. $\vartheta_k(u_1+\bar{u}_1, u_2+\bar{u}_2, \ldots, u_n+\bar{u}_n)$

nur in einem positiven Faktor von den entsprechenden Formen

$$\Theta(u_1, u_2, \ldots, u_n) \text{ bzw. } \Theta_k(u_1, u_2, \ldots, u_n)$$

verschieden sind, so gelangen wir zu dem folgenden Resultat:

Wenn die Ungleichung

$$\vartheta(u_1, u_2, \ldots, u_n) \geqq 0$$

eine Folge des abgeschlossenen Systems von Ungleichungen

$$\vartheta_k(u_1, u_2, \ldots, u_n) \geqq 0 \qquad (k = 1, 2, \ldots)$$

ist, so existieren solche nicht negative Grössen λ_k, *von denen höchstens n von Null verschieden* sind, dass identisch in den $u_1, u_2, \ldots, u_n$

$$\vartheta(u_1, u_2, \ldots, u_n) \equiv \sum_{(k)} \lambda_k \vartheta_k(u_1, u_2, \ldots, u_n).$$

§ 2. Inhomogene Ungleichungen.

Die vorangehenden Resultate können in einfacher Weise auf ein System von inhomogenen linearen Ungleichungen übertragen werden.

Zu diesem Zwecke bezeichnen wir mit

$$\vartheta_k(u_1, u_2, \ldots, u_n) \equiv a_{k1}u_1 + a_{k2}u_2 + \ldots + a_{kn}u_n + a_{kn+1} \geqq 0 \quad (4)$$
$$(k = 1, 2, \ldots)$$

ein abgeschlossenes System von inhomogenen Ungleichungen und nehmen an, dass ein Wertsystem $\bar{u}_1, \bar{u}_2, \ldots, \bar{u}_n$ existiert, für das

$$\vartheta_k(\bar{u}_1, \bar{u}_2, \ldots, \bar{u}_n) > 0 \qquad (k = 1, 2, \ldots),$$

ausfällt. Wir gelangen zur geometrischen Interpretation unserer inhomogenen Ungleichungen in folgender Weise: Wir setzen wiederum zur Abkürzung

$$\Theta_k(U_1, U_2, \ldots, U_n) \equiv \frac{\vartheta_k(U_1 + \bar{u}_1, U_2 + \bar{u}_2, \ldots, U_n + \bar{u}_n)}{\vartheta_k(\bar{u}_1, \bar{u}_2, \ldots, \bar{u}_n)} \equiv$$

$$\equiv \frac{a_{k1}U_1 + a_{k2}U_2 + \ldots + a_{kn}U_n}{\vartheta_k(\bar{u}_1, \bar{u}_2, \ldots, \bar{u}_n)} + 1. \qquad (k = 1, 2, \ldots)$$

Erfüllt das Wertsystem $U_1 + \bar{u}_1, U_2 + \bar{u}_2, \ldots, U_n + \bar{u}_n$ die Ungleichungen (4), so gilt

$$\Theta_k(U_1, U_2, \ldots, U_n) \geqq 0$$

und umgekehrt. Diese Ungleichungen werden — nach den Vorangehenden — von den Ebenenkoordinaten derjenigen Ebenen befriedigt, die die Strecken OP_k nicht schneiden, wobei jetzt P_k den Punkt mit den Koordinaten

$$x_1 = \frac{a_{k1}}{\vartheta_k(\bar{u}_1, \ldots, \bar{u}_n)}, \quad x_2 = \frac{a_{k2}}{\vartheta_k(\bar{u}_1, \ldots, \bar{u}_n)}, \ldots,$$

$$x_n = \frac{a_{kn}}{\vartheta_k(\bar{u}_1, \ldots, \bar{u}_n)} \qquad (k = 1, 2, \ldots)$$

bedeutet. Bezeichnen wir mit $\mathfrak{K}$ den kleinsten konvexen Körper, der die Punkte O und P_k enthält, so zeigt man in gleicher Weise, wie es im vorangehenden § geschah, dass die fraglichen Ebenen diejenigen sind, die $\mathfrak{K}$ nicht schneiden. Die Ungleichung

$$\vartheta(u_1, u_2, \ldots, u_n) \equiv a_1 u_1 + a_2 u_2 + \ldots + a_n u_n + a_{n+1} \geqq 0$$

wird wiederum als eine Folge der vorgelegten Ungleichungen $\vartheta_k \geqq 0$ bezeichnet, wenn sie durch alle Lösungen dieser letzteren Ungleichungen befriedigt wird. Das Wertsystem $U_1+\bar{u}_1, U_2+\bar{u}_2, \ldots, U_n+\bar{u}_n$ erfüllt offenbar dann und nur dann die Ungleichung

$$\vartheta(U_1+\bar{u}_1, U_2+\bar{u}_2, \ldots, U_n+\bar{u}_n) \geqq 0,$$

falls die Ungleichung

$$\Theta(U_1, U_2, \ldots, U_n) \equiv \frac{\vartheta(U_1+\bar{u}_1, U_2+\bar{u}_2, \ldots, U_n+\bar{u}_n)}{\vartheta(\bar{u}_1, \bar{u}_2 \ldots, \bar{u}_n)} \equiv$$

$$\equiv \frac{a_1 U_1 + a_2 U_2 + \ldots + a_n U_n}{\vartheta(\bar{u}_1, \bar{u}_2, \ldots, \bar{u}_n)} + 1 \geqq 0$$

befriedigt ist. Daher ist $\vartheta \geqq 0$ dann und nur dann eine Folge der Ungleichungen $\vartheta_k \geqq 0$, wenn die Ebenenkoordinaten aller den Körper $\mathfrak{K}$ nicht schneidenden Ebenen die Ungleichung

$$\Theta(U_1, U_2, \ldots, U_n) \geqq 0$$

befriedigen; daraus folgt wiederum, dass der Punkt P, dessen Koordinaten

$$x_1 = \frac{a_1}{\vartheta(\bar{u}_1, \ldots, \bar{u}_n)}, \quad x_2 = \frac{a_2}{\vartheta(\bar{u}_1, \ldots, \bar{u}_n)}, \ldots, \quad x_n = \frac{a_n}{\vartheta(\bar{u}_1, \ldots, \bar{u}_n)}$$

sind, dem konvexen Körper $\mathfrak{K}$ angehört.

Da im vorliegenden Falle $\mathfrak{K}$ der kleinste konvexe Körper ist, der die Punkte O und P_k enthält, so gibt es nach dem Satze von Carathéodory nichtnegative Zahlen μ_0 und μ_k mit der Summe 1, von denen höchstens $n+1$ von Null verschieden sind, so dass

$$\frac{a_1}{\vartheta(\bar{u}_1, \ldots, \bar{u}_n)} = \mu_0 . 0 + \sum_{(k)} \mu_k \frac{a_{k1}}{\vartheta_k(\bar{u}_1, \ldots, \bar{u}_n)},$$

$$\frac{a_2}{\vartheta(\bar{u}_1, \ldots, \bar{u}_n)} = \mu_0 . 0 + \sum_{(k)} \mu_k \frac{a_{k2}}{\vartheta_k(\bar{u}_1, \ldots, \bar{u}_n)},$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\frac{a_n}{\vartheta(\bar{u}_1, \ldots, \bar{u}_n)} = \mu_0 . 0 + \sum_{(k)} \mu_k \frac{a_{kn}}{\vartheta_k(\bar{u}_1, \ldots, \bar{u}_n)}.$$

Daher ist

$$\Theta(u_1, u_2, \ldots, u_n) \equiv \sum_{(k)} \mu_k \Theta_k(u_1, u_2, \ldots, u_n) + \mu_0;$$

die Identität der Koeffizienten der Unbestimmten $u_1, u_2, \ldots, u_k$ auf beiden Seiten der Gleichung gewährleisten die zuletzt aufgestellten Beziehungen; die von den $u_1, u_2, \ldots, u_n$ freien Glieder stimmen überein wegen der Relation

$$1 = \mu_0 + \sum_{(k)} \mu_k.$$

Aus der abgeleiteten Identität folgt für die ursprünglichen Ausdrücke ϑ und ϑ_k

$$\vartheta(U_1 + \overline{u}_1, U_2 + \overline{u}_2 \ldots, U_n + \overline{u}_n) \equiv$$

$$\equiv \vartheta(\overline{u}_1, \ldots, \overline{u}_n) \sum_{(k)} \mu_k \frac{\vartheta_k(U_1 + \overline{u}_1, U_2 + \overline{u}_2, \ldots, U_n + \overline{u}_n)}{\vartheta_k(\overline{u}_1, \overline{u}_2, \ldots, \overline{u}_n)} +$$

$$+ \mu_0 \vartheta(\overline{u}_1, \ldots, \overline{u}_n).$$

Da die auftretenden Faktoren $\vartheta(\overline{u}_1, \ldots, \overline{u}_n)$ und $\vartheta_k(\overline{u}_1, \ldots, \overline{u}_n)$ alle positiv sind, so gelangen wir zu dem Resultat (dessen Umkehrung trivial ist), dass falls die inhomogene Ungleichung

$$\vartheta(u_1, u_2, \ldots, u_n) \geqq 0$$

eine Folge des abgeschlossenen Systems von inhomogenen Ungleichungen

$$\vartheta_k(u_1, u_2, \ldots, u_n) \geqq 0 \qquad (k = 1, 2, \ldots)$$

ist, so existieren solche nicht-negative Grössen λ_0 und λ_k, *von denen höchstens* $n+1$ *von Null verschieden sind,* dass die Identität

$$\vartheta(u_1, u_2, \ldots, u_n) \equiv \sum_{(k)} \lambda_k \vartheta_k(u_1, u_2, \ldots, u_n) + \lambda_0$$

besteht.

§ 3. Lösung der linearen Ungleichungen durch Parameterdarstellung.

Wir kehren nun zu dem Falle der homogenen Ungleichungen zurück und beschränken uns auf den Fall, dass das vorgelegte System aus endlich vielen Ungleichungen besteht

$$\vartheta_k(u_1, u_2, \ldots, u_n) \equiv a_{k1}u_1 + a_{k2}u_2 + \ldots + a_{kn}u_n \qquad (k = 1, 2, \ldots \nu).$$

Der konvexe Körper $\mathfrak{K}$ ist in diesem Falle ein durch endlich viele $(n-1)$ dimensionale Ebenen begrenzter Polyeder. Die Ebene $(\bar{E})$, deren Gleichung

$$\overline{u}_1 x_1 + \overline{u}_2 x_2 + \ldots + \overline{u}_n x_n = 1$$

st, ist jedenfalls eine dieser Begrenzungsebenen von $\mathfrak{K}$, daher gilt

für alle Punkte von $\mathfrak{K}$ die Ungleichung

$$-\bar{u}_1 x_1 - \bar{u}_2 x_2 - \ldots - \bar{u}_n x_n + 1 \geqq 0.$$

Alle übrigen Begrenzungsebenen von $\mathfrak{K}$ gehen durch den Punkt O; ihre Gleichungen seien

$$u_1^{(q)} x_1 + u_2^{(q)} x_2 + \ldots + u_n^{(q)} x_n = 0, \qquad (q = 1, 2, \ldots N)$$

wobei die Koeffizienten $u_1^{(q)}, v_2^{(q)}, \ldots, u_n^{(q)}$ so gewählt sein mögen, dass für die Punkte von $\mathfrak{K}$

$$u_1^{(q)} x_1 + u_2^{(q)} x_2 + \ldots + u_n^{(q)} x_n \geqq 0 \qquad (q = 1, 2, \ldots N)$$

ausfalle. Die Koordinaten der Punkte von $\mathfrak{K}$ — und nur diese — erfüllen daher die folgenden $N + 1$ Ungleichungen:

$$u_1^{(q)} x_1 + u_2^{(q)} x_2 + \ldots + u_n^{(q)} x_n \geqq 0 \qquad (q = 1, 2, \ldots N)$$

$$-u_1 x_1 - u_2 x_2 - \ldots - u_n x_n + 1 \geqq 0. \qquad (5)$$

Wir erhielten sämtliche Lösungen unsrer ursprünglichen Ungleichungen aus den Ebenenkoordinaten der Ebenen, die $\mathfrak{K}$ nicht schneiden, d. h. wenn $U_1 + \bar{u}_1, U_2 + \bar{u}_2, \ldots, U_n + \bar{u}_n$ eine Lösung der Ungleichungen $\vartheta_k \geqq 0$ bedeutet, so erfüllen die Koordinaten jedes Punktes von $\mathfrak{K}$ die Ungleichung

$$U_1 x_1 + U_2 x_2 + \ldots + U_n x_n + 1 \geqq 0, \qquad (6)$$

und umgekehrt.

Mit anderen Worten, das Wertsystem

$$U_1 + \bar{u}_1, \; U_2 + \bar{u}_2, \ldots, U_n + \bar{u}_n$$

ist dann und nur dann eine Lösung der Ungleichungen $\vartheta_k \geqq 0$, wenn die Ungleichung (6) eine Folge der $(N+1)$ Ungleichungen (5) ist. Nach dem Vorangehenden ist die notwendige und hinreichende Bedingung hierfür die Existenz solcher nicht-negativer Grössen $\lambda^{(q)}$ $(q = 1, 2, \ldots N)$, $\bar{\lambda}$ und λ_0 (von denen höchstens $n + 1$ von Null verschieden sind), dass die folgende Identität besteht

$$U_1 x_1 + U_2 x_2 + \ldots + U_n x_n + 1 \equiv \sum_{q=1}^{N} \lambda^{(q)} (u_1^{(q)} x_1 + u_2^{(q)} x_2 + \ldots + u_n^{(q)} x_n) +$$

$$+ \bar{\lambda} (-\bar{u}_1 x_1 - \bar{u}_2 x_2 - \ldots - \bar{u}_n x_n + 1) + \lambda_0,$$

oder ausführlich ausgeschrieben:

$$U_1 = \sum_{q=1}^{N} \lambda^{(q)} u_1^{(q)} - \bar{\lambda}\bar{u}_1, \quad U_2 = \sum_{q=1}^{N} \lambda^{(q)} u_2^{(q)} - \bar{\lambda}\bar{u}_2, \ldots,$$

$$U_n = \sum_{q=1}^{N} \lambda^{(q)} u_n^{(q)} - \bar{\lambda}\bar{u}_n, \quad 1 = \bar{\lambda} + \lambda_0.$$

Daher kann man jede Lösung $u_1, u_2, \ldots, u_n$ der vorgelegten Ungleichungen vermöge der Lösungen

$$u_1^{(q)},\ u_2^{(q)},\ \ldots,\ u_u^{(q)} \qquad (q=1, 2, \ldots N)$$

und

$$\bar{u}_1,\ \bar{u}_2,\ \ldots,\ \bar{u}_n \tag{7}$$

in der folgenden Form darstellen:

$$u_1 = \sum_{q=1}^{N} \lambda^{(q)} u_1^{(q)} + \lambda_0 \bar{u}_1, \quad u_2 = \sum_{q=1}^{N} \lambda^{(q)} u_2^{(q)} + \lambda_0 \bar{u}_2, \ldots,$$

$$u_n = \sum_{q=1}^{N} \lambda^{(q)} u_n^{(q)} + \lambda_0 \bar{u}_n, \tag{8}$$

wobei $\lambda^{(q)}$ und λ_0 nicht negative Zahlen bedeuten. Die Umkehrung dieses Satzes ist evident. Es stellen daher die Formeln (8) die allgemeinste Lösung der vorgelegten Ungleichungen dar mit Hülfe nicht-negativer Parameter. Die speziellen Lösungen (7) sind im Wesentlichen identisch mit den *„äussersten Lösungen"* Minkowski's, die auf diese Weise eine neue geometrische Deutung erhalten haben.

§ 4. Integralungleichungen.

Das folgende Problem steht im engen Zusammenhange mit den vorangehenden Untersuchungen:

Unter Zugrundelegung der im Intervall $\alpha \leqq x \leqq \beta$ definierten stetigen Funktionen

$$a_1(x),\ a_2(x),\ \ldots,\ a_\nu(x) \text{ und } a(x)$$

betrachten wir die Gesamtheit aller stetigen Funktionen $u(x)$ die die folgenden Integralungleichungen befriedigen:

$$\int_\alpha^\beta a_1(x)\, u(x)\, dx \geqq 0, \quad \int_\alpha^\beta a_2(x)\, u(x)\, dx \geqq 0, \ldots, \quad \int_\alpha^\beta a_\nu(x)\, u(x)\, dx \geqq 0;$$

die Ungleichung

$$\int_\alpha^\beta a(x)\, u(x)\, dx \geqq 0;$$

wird eine *Folge* der Vorangehenden genannt, wenn sie durch alle stetigen Funktionen befriedigt wird, die die vorangehenden Ungleichungen erfüllen.

Wir nehmen an, dass die Funktionen $a_1(x),\ a_2(x), \ldots, a_\nu(x)$ linear independent sind und behaupten, dass in diesem Falle die Funktion $a(x)$ in der folgenden Form darstellbar ist:

$$a(x) \equiv \lambda_1 a_1(x) + \lambda_2 a_2(x) + \ldots + \lambda_\nu a_\nu(x),$$

wobei $\lambda_1,\ \lambda_2, \ldots, \lambda_\nu$ nicht negative Konstanten bedeuten.

Wir beweisen unsre Behauptung, wie folgt:

Die Grössen $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_\nu$ berechnen wir aus dem folgenden linearen Gleichungssystem:

$$\int_\alpha^\beta a_1(x)\, a(x)\, dx = \lambda_1 \int_\alpha^\beta a_1(x)^2\, dx + \lambda_2 \int_\alpha^\beta a_1(x)\, a_2(x)\, dx + \ldots + \lambda_\nu \int_\alpha^\beta a_1(x)\, a_\nu(x)\, dx,$$

$$\int_\alpha^\beta a_2(x)\, a(x)\, dx = \lambda_1 \int_\alpha^\beta a_2(x)\, a_1(x)\, dx + \lambda_2 \int_\alpha^\beta a_2(x)^2\, dx + \ldots + \lambda_\nu \int_\alpha^\beta a_2(x)\, a_\nu(x)\, dx,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\int_\alpha^\beta a_\nu(x)\, a(x)\, dx = \lambda_1 \int_\alpha^\beta a_\nu(x)\, a_1(x)\, dx + \lambda_\nu \int_\alpha^\beta a_\nu(x)\, a_2(x)\, dx + \ldots + \lambda_\nu \int_\alpha^\beta a_\nu(x)^2\, dx.$$

Die Determinante dieses Gleichungssystems ist identisch mit der Determinante der folgenden quadratischen Form

$$\sum_{p,q=1}^{\nu} x_p x_q \int_\alpha^\beta a_p(x)\, a_q(x)\, dx =$$

$$= \int_\alpha^\beta [x_1 a_1(x) + x_2 a_2(x) + \ldots + x_\nu a_\nu(x)]^2\, dx;$$

wegen der angenommenen linearen Independenz der Funktionen $a_1(x), a_2(x), \ldots, a_\nu(x)$ ist diese Form positiv definit, woraus das Nichtverschwinden jener Determinante gefolgert werden kann. Führen wir noch zur Abkürzung die Bezeichnung

$$\omega(x) \equiv a(x) - \lambda_1 a_1(x) - \lambda_2 a_2(x) - \ldots - \lambda_\nu a_\nu(x)$$

ein, so kann man das zur Bestimmung der $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_\nu$ dienende Gleichungssystem folgendermassen schreiben:

$$\int_\alpha^\beta a_1(x)\, \omega(x)\, dx = 0, \int_\alpha^\beta a_2(x)\, \omega(x)\, dx = 0, \ldots, \int_\alpha^\beta a_\nu(x)\, \omega(x)\, dx = 0.$$

Es erfüllt daher sowohl $\omega(x)$, wie auch $-\omega(x)$ das zu Grunde gelegte System von linearen Integralungleichungen. Es

gelten demzufolge die Beziehungen

$$\int_\alpha^\beta a(x)\,\omega(x)\,dx \geqq 0 \quad \text{und} \quad -\int_\alpha^\beta a(x)\,\omega(x)\,dx \geqq 0,$$

d. h. es ist

$$\int_\alpha^\beta a(x)\,\omega(x)\,dx = 0.$$

Führen wir in dieser Gleichung an Stelle von $a(x)$ den Ausdruck $\omega(x) + \lambda_1 a_1(x) + \lambda_2 a_2(x) + \ldots + \lambda_\nu a_\nu(x)$ ein, so ergiebt sich

$$\int_\alpha^\beta \omega(x)^2\,dx = 0,$$

woraus man schliesst, dass $\omega(x) \equiv 0$, d. h.

$$a(x) = \lambda_1 a_1(x) + \lambda_2 a_2(x) + \ldots + \lambda_\nu a_\nu(x)$$

ist.

Wir haben noch zu zeigen, dass die Grössen $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_\nu$ nicht-negative Zahlen sind. Um dies etwa für λ_1 nachzuweisen, bestimmen wir $\mu_2, \mu_3, \ldots, \mu_\nu$ aus dem folgenden linearen Gleichungssystem, dessen Determinante — wie eine ganz analoge Überlegung zeigt, wie die, die wir für das Gleichungssystem, das zur Bestimmung der $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_\nu$ diente, angestellt haben — von Null verschieden ist:

$$\int_\alpha^\beta a_2(x)\,a_1(x)\,dx = \mu_2 \int_\alpha^\beta a_2(x)^2\,dx + \mu_3 \int_\alpha^\beta a_2(x)\,a_3(x)\,dx + \ldots + \mu_\nu \int_\alpha^\beta a_2(x)\,a_\nu(x)\,dx$$

$$\int_\alpha^\beta a_3(x)\,a_1(x)\,dx = \mu_2 \int_\alpha^\beta a_3(x)\,a_2(x)\,dx + \mu_3 \int_\alpha^\beta a_3(x)^2\,dx + \ldots + \mu_\nu \int_\alpha^\beta a_3(x)\,a_\nu(x)\,dx,$$

. . . . . .

$$\int_\alpha^\beta a_\nu(x)\,a_1(x)\,dx = \mu_2 \int_\alpha^\beta a_\nu(x)\,a_2(x)\,dx + \mu_3 \int_\alpha^\beta a_\nu(x)\,a_3(x)\,dx + \ldots + \mu_\nu \int_\alpha^\beta a_\nu(x)^2\,dx$$

Führen wir — wie früher — die Abkürzung

$$\overline{\omega}(x) \equiv a_1(x) - \mu_2 a_2(x) - \mu_3 a_3(x) - \ldots - \mu_\nu a_\nu(x)$$

ein, so erhält unser Gleichungssystem die folgende einfache Form:

$$\int_\alpha^\beta a_2(x)\,\overline{\omega}(x)\,dx = 0,\quad \int_\alpha^\beta a_3(x)\,\overline{\omega}(x)\,dx = 0,\ \ldots,\quad \int_\alpha^\beta a_\nu(x)\,\overline{\omega}(x)\,dx = 0;$$

da ferner

$$\int_\alpha^\beta a_1(x)\,\overline{\omega}(x)\,dx = \int_\alpha^\beta \overline{\omega}(x)^2\,dx > 0$$ [8])

ist, so zeigen diese Beziehungen, dass $\overline{\omega}(x)$ eine Lösung unsrer Integralungleichungen ist. Daher erfüllt diese Funktion auch die Ungleichung

$$\int_\alpha^\beta a(x)\,\omega(x)\,dx \geqq 0;$$

da aber

$$\int_\alpha^\beta a(x)\,\overline{\omega}(x)\,dx = \int_\alpha^\beta [\lambda_1 a_1(x) + \lambda_2 a_2(x) + \ldots + \lambda_\nu a_\nu(x)]\,\overline{\omega}(x)\,dx =$$

$$= \lambda_1 \int_\alpha^\beta \overline{\omega}(x)^2\,dx \geqq 0$$

ist, so folgt in der Tat $\lambda_1 \geqq 0$, womit unsre Behauptung bewiesen ist.

---

[8]) Das Integral $\int_\alpha^\beta \overline{\omega}(x)^2\,dx$ kann nicht gleich Null sein, da in diesem Falle

$$\overline{\omega}(x) \equiv a_1(x) - \mu_2 a_2(x) - \mu_3 a_3(x) - \ldots - \mu_\nu a_\nu(x) \equiv 0$$

sein müsste, im Widerspruch mit der angenommenen linearen Independenz der Funktionen $a_1(x), a_2(x), \ldots, a_\nu(x)$.

G

Diszkrét csoportok és függvényalgebrák — Diskrete Gruppen und Funktionenalgebren

G1. Über die Multiplikationstabelle der orthogonalen Funktionensysteme, *Math. Zeitschr.*, **31** (1930), 769—798. *[456—485]*

G2. Über unendliche kommutative Gruppen, *Math. Zeitschr.*, **33** (1931), 129—159. *[486—516]*

G3. Über die Multiplikationstabelle der unitär-orthogonalen Funktionensysteme, *Annali della R. Scuola Normale Superiore di Pisa (Scienze Fisiche e Matematiche)*, Serie II, **2** (1933), 21—40. *[517—536]*

G4. A csoportkarakterisztikák elméletéről, *Mat. Fiz. Lapok*, **38** (1931), 132—145. *[537—550]*

G5. A csoportkarakterisztikák elméletéről (Második közlemény), *Mat. Fiz. Lapok*, **39** (1932), 6—16. *[551—561]*

G6. Über die Gruppencharaktere gewisser unendlichen Gruppen, *Acta Sci. Math.*, **5** (1932), 172—186. *[562—576]*

*

A véges bázisú hiperkomplex számrendszerek szorzótáblázatának analógiájára Haar bevezeti egy (korlátos függvényekből álló) $\{\varphi_p(x)\}$ teljes ortonormált függvényrendszer szorzótáblázatának a fogalmát: a szorzótáblázat a $\varphi_p(x)\cdot\varphi_q(x) = \sum_r c_{pqr}\varphi_r(x)$ kifejtések együtthatóiból alkotott (c_{pqr}) végtelen köbös matrix. A G1 dolgozat arra az E. Fischer által felvetett kérdésre ad választ, hogy milyen (belső szerkezeti) feltételek mellett lesz egy adott végtelen köbös matrix valamely valós függvényekből álló ortonormált függvényrendszer szorzótáblázata; a G3 dolgozat ugyanezt a kérdést a komplexértékű ortonormált rendszerek esetére tárgyalja. Szorosan kapcsolódik ehhez a problémakörhöz a megszámlálhatóan végtelen sok elemű kommutatív $\mathfrak{G}$ csoportok karaktereiről szóló G2 dolgozat. Ha ugyanis $A_1, A_2, \ldots A_p, \ldots$ e csoport elemei, akkor arról a (c_{pqr}) matrixról, melynek a c_{pqr} eleme 1-gyel ill. 0-val egyenlő aszerint amint az A_p és A_q csoportelemek szorzata egyenlő az A_r csoportelemmel vagy sem, könnyen konstatálható, hogy eleget tesz a komplex értékű ortonormált rendszerek szorzótáblázatait jellemző tulajdonságoknak, található tehát egy alkalmas mérhető halmazon olyan $\{\chi_{A_p}(x)\}$ teljes ortonormált függvényrendszer, amelyre a $\chi_{A_p}(x)\cdot\chi_{A_q}(x) = \chi_{A_pA_q}(x)$ összefüggés teljesül. E függvények értékei minden rögzített x pontban a $\mathfrak{G}$ csoport egy „karakterét" szolgáltatják.

A G4 és G5 dolgozatok a véges, nem feltétlenül kommutatív csoportok karaktereinek Frobenius által megalapozott elméletét, és a karaktereknek a csoport matrixelőállításaival való kapcsolatait új módszerrel tárgyalják. Ez a módszer alkalmazható bizonyos típusú, megszámlálhatóan végtelen sok elemű kommutatív csoportok esetében is (G6).

A G4 és G5 dolgozatok döntő módon arra a tételre támaszkodnak, hogy felcserélhető (véges) normális matrixok mindig szimultán (azaz ugyanazzal az unitér matrixszal való transz-

formálás révén) diagonális alakra hozhatók. A G1, G2, G3, G6 dolgozatok viszont a tételnek a Hilbert tér esetére való, Neumann Jánostól származó általánosítására támaszkodnak.

A G4 és G5 dolgozatok német nyelvű fordítását lásd az I. függelékben.

Haarnak az ortogonális függvényrendszerek szorzótáblázataira vonatkozó G1, G3 dolgozataihoz közvetlenül csatlakoznak a következő dolgozatok :

Szőkefalvi-Nagy Béla (Béla Sz.-Nagy), Izomorf függvényrendszerekről, *Mat. Term. Ért.*, **54** (1936), 712—735; Önmagában zárt orthogonális függvényrendszer szorzótáblázatáról, *Mat. Term. Ért.*, **55** (1937), 574—591; Über isomorphe vollständige Funktionensysteme, *Math. Zeitschr.*, **43** (1937), 1—16 ; Über in sich abgeschlossene Funktionensysteme, *Math. Zeitschr.*, **43** (1937), 17—31 ; Bedingungen für die Multiplikationstabelle eines in sich abgeschlossenen orthogonalen Funktionensystems, *Annali della R. Scuola Normale Superiore di Pisa (Scienze Fisiche e Matematiche)*, Serie II, **6** (1937), 211—224.

A G2 dolgozathoz közvetlenül csatlakozó dolgozatok :

Béla Sz.-Nagy, Zur Theorie der Charaktere Abelscher Gruppen, *Math. Ann.*, **114** (1937), 373—384 ;.

H. Freudenthal, Die Haarschen Orthogonalsysteme von Gruppencharakteren im Lichte der Pontrjaginschen Dualitätstheorie, *Compositio Mathematica*, **5** (1938), 354—356.

*

Zur Analogie der Multiplikationstabelle eines hyperkomplexen Zahlensystems mit endlich vielen Haupteinheiten führt Haar den Begriff der Multiplikationstabelle eines (aus beschränkten Funktionen bestehenden) vollständigen Orthogonalsystems $\{\varphi_p(x)\}$ ein ; diese ist die unendliche kubische Matrix (c_{pqr}) $(p, q, r = 1, 2, \ldots)$, gebildet durch die Koeffizienten der Entwicklungen $\varphi_p(x) \cdot \varphi_q(x) = \sum_r c_{pqr} \varphi_r(x)$. Die Arbeit G1 gibt eine Lösung des von E. Fischer gestellten Problems, diejenigen unendlichen, kubischen, reellen Matrizen (c_{pqr}) durch innere strukturelle Eigenschaften zu charakterisieren, die als Multiplikationstabellen zu reellwertigen Orthogonalsystemen gehören. Die Arbeit G3 löst dasselbe Problem im komplexen Fall. Im engen Zusammenhang mit diesem Problemkreis steht die Arbeit G2 über die Charaktere einer Abelschen Gruppe $\mathfrak{G}$ mit abzählbar unendlich vielen Elementen. Sind nämlich $A_1, A_2, A_3, \ldots$ die Elemente der Gruppe $\mathfrak{G}$, so genügt die Matrix (c_{pqr}), deren Elementen c_{pqr} gleich 1 oder 0 ist, je nachdem, ob das Produkt der Gruppenelemente A_p und A_q gleich dem Gruppenelement A_r ist oder nicht, den für die Multiplikationstabellen komplexwertiger Orthonormalsysteme charakteristischen Bedingungen ; folglich existiert bei einer gewissen meßbaren Menge ein vollständiges Orthonormalsystem $\{\chi_{A_p}(x)\}$ mit der Multiplikationseigenschaft $\chi_{A_p}(x) \cdot \chi_{A_q}(x) = \chi_{A_p} \chi_{A_q}(x)$. Die Werte dieser Funktionen liefern in jedem festen Punkt x je einen »Charakter« der Gruppe $\mathfrak{G}$.

Die Arbeiten G4 und G5 bieten eine neue Herleitung der Haupttatsachen der von Frobenius stammenden Theorie der Charaktere endlicher, nicht notwendigerweise Abelscher Gruppen sowie der Beziehungen der Charaktere zu den Matrixdarstellungen dieser Gruppen. Diese neue Methode kann sogar auf gewisse abzählbar unendliche, nicht notwendigerweise Abelsche Gruppen : angewendet werden. Diese Verallgemeinerung der Theorie bildet den Gegenstand der Arbeit G6.

Die Arbeiten G4 und G5 stützen sich auf den Satz der linearen Algebra, daß vertauschbare (endliche) normale Matrizen simultan (d. h. durch dieselbe unitäre Transformation) auf

Diagonalform gebracht werden können. Die Arbeiten G1, G2, G3 und G6 stützen sich hingegen auf die (von J. von Neumann stammenden) Verallgemeinerung dieses Satzes für normale Operatoren des Hilbertschen Raumes.

Eine deutsche Übersetzung der (nur in ungarischer Sprache mitgeteilten) Arbeiten G4 und G5 findet man im Anhang I.

An die Arbeiten von Haar über die Multiplikationstabellen von Orthonormalsystemen schließt sich eine Reihe von Arbeiten von Béla Sz.-Nagy an (s. den ungarischen Text). Die Ergebnisse der Arbeit G2 über Charaktere unendlicher Abelscher Gruppen wurden, mit anderen Methoden, in Arbeiten von Béla Sz.-Nagy und H. Freudenthal (s. den ungarischen Text) neu gewonnen und ergänzt.

Uber die Multiplikationstabelle der orthogonalen Funktionensysteme.

Von

Alfred Haar in Szeged.

Einleitung.

1. Das Problem, das wir in der vorliegenden Arbeit behandeln, entspringt aus einer Analogie der orthogonalen Funktionensysteme mit den hyperkomplexen Zahlensystemen von n Haupteinheiten $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n$, worauf kurz hingewiesen werden soll.

Bekanntlich spielen in der Theorie dieser Zahlensysteme diejenigen Größen γ_{pqr} eine fundamentale Rolle, vermöge deren man das Produkt zweier Haupteinheiten definiert:

$$\varepsilon_p \varepsilon_q = \sum_{r=1}^{n} \gamma_{pqr} \varepsilon_r \qquad (p, q = 1, 2, \ldots, n);$$

den Ausgangspunkt dieser Theorie bilden ja eben diejenigen Beziehungen, die diese γ_{pqr} erfüllen müssen, damit die so definierte Multiplikation assoziativ sei; man kann aber geradezu die ganze Disziplin der hyperkomplexen Systeme als die Theorie solcher kubischen Matrizen (γ_{pqr}) auffassen. Eine wegen ihrer Wichtigkeit vielfach behandelte Frage ist die Aufstellung und Diskussion aller Zahlensysteme mit kommutativer Multiplikation, die die nächstliegendste Verallgemeinerung der gewöhnlichen komplexen Größen sind.

Die in einer beliebigen meßbaren Punktmenge $\mathfrak{M}$ definierten Funktionen eines orthogonalen Funktionensystems $\varphi_1(s), \varphi_2(s), \ldots, \varphi_n(s), \ldots$ spielen in gewisser Hinsicht in der Gesamtheit der Funktionen $f(s)$, die in $\mathfrak{M}$ samt ihrem Quadrat integrierbar sind, eine ähnliche Rolle, wie die Haupteinheiten in einem hyperkomplexen Zahlensystem, indem man in bekannter Weise die Fourierschen Koeffizienten

$$a_p = \int_{\mathfrak{M}} f(s)\, \varphi_p(s)\, ds \qquad (p = 1, 2, 3, \ldots)$$

als Bestimmungsstücke der Funktion $f(s)$ betrachtet, und in diesem Sinne

$$f(s) \sim \sum_{p=1}^{\infty} a_p \varphi_p(s)$$

ansetzt. Legt man diese Auffassung zugrunde, so werden — in Analogie mit der soeben erwähnten Tatsache über hyperkomplexe Systeme mit endlichvielen Haupteinheiten — in der Theorie der orthogonalen Funktionensysteme die Fourierschen Koeffizienten der Produkte $\varphi_p(s)\,\varphi_q(s)$, d. h. die Größen

$$c_{pqr} = \int_{\mathfrak{M}} \varphi_p(s)\,\varphi_q(s)\,\varphi_r(s)\,ds \qquad (p, q, r = 1, 2, 3, \ldots), \tag{1}$$

die in den Entwicklungen

$$\varphi_p(s)\,\varphi_q(s) \sim \sum_{r=1}^{\infty} c_{pqr}\,\varphi_r(s)$$

auftreten, die ähnliche Rolle spielen, wie die eben mit γ_{pqr} bezeichneten Größen in der Theorie der hyperkomplexen Zahlen. Wir wollen die unendliche kubische Matrix (c_{pqr}) als die *Multiplikationstabelle des Orthogonalsystems* $\varphi_p(s)$ bezeichnen, wobei vorausgesetzt ist, daß die Integrale (1) existieren, was bei einem willkürlichen Orthogonalsystem nicht der Fall zu sein braucht. Beachtet man noch, daß die Funktionen eines Orthogonalsystems in dieser Auffassung als die unendlichvielen Haupteinheiten eines *kommutativen* Zahlensystems zu betrachten sind, so gelangt man in voller Analogie zu der oben erwähnten algebraischen Fragestellung zu dem folgenden Problem, das vor etwa zwei Jahrzehnten von meinem Freund Ernst Fischer in mündlichen Gesprächen, die mich zu den vorliegenden Untersuchungen anregten, gestellt wurde:

Welchen Bedingungen müssen die unendlichvielen Größen c_{pqr} genügen, damit ein solches orthogonales Funktionensystem existiere, dessen Multiplikationstabelle durch diese Größen gebildet wird?

Es liegt dieser Fragestellung die Auffassung zugrunde, daß man im Besitze dieser Bedingungen bzw. im Besitze solcher Größen c_{pqr}, die diesen Bedingungen genügen, das zugehörige Orthogonalsystem durch *innere Eigenschaften* charakterisiert hat. Da ferner die fraglichen Bedingungen, wie die folgenden Untersuchungen zeigen werden, einen algebraischen Charakter haben (freilich in der Algebra von unendlichvielen Unbestimmten), so gelangt man zu einer algebraischen Theorie der orthogonalen Funktionensysteme und die erwähnte Analogie legt den Gedanken nahe, daß die wesentlichen Eigenschaften eines Orthogonalsystems sich in entsprechenden algebraischen Eigenschaften seiner Multiplikationstabelle widerspiegeln.

2. Wir beschäftigen uns im folgenden ausschließlich mit Orthogonalsystemen von der Beschaffenheit, daß der absolute Betrag jeder Funktion

des Systems fast überall unterhalb einer endlichen Schranke liegt, die aber nicht für alle Funktionen des Systems dieselbe zu sein braucht; d. h. es gilt für alle s in $\mathfrak{M}$ mit Ausnahme einer Menge vom Maße Null

$$|\varphi_p(s)| \leqq M_p \qquad (p = 1, 2, 3, \ldots).$$

Ein solches System bezeichnen wir als ein *beschränktes* Orthogonalsystem; daß man bei der Behandlung des genannten Problems eine Einschränkung über die Natur der Orthogonalfunktionen machen muß, folgt ja schon aus der oben gemachten Bemerkung, daß die Existenz der Multiplikationstabelle, d. h. der Integrale (1) für ein beliebiges Orthogonalsystem nicht gewährleistet ist.

Es wird sich ferner als zweckmäßig erweisen, einen etwas allgemeineren Begriff als die gewöhnliche Orthogonalität heranzuziehen; wir werden auch Systeme von unendlichvielen beschränkten Funktionen $\omega_1(s), \omega_2(s), \ldots, \omega_p(s), \ldots$ betrachten, welche in einem Intervall $a \leqq s \leqq b$ definiert und so beschaffen sind, daß diese gemeinschaftlich mit einer im selben Intervall definierten nichtabnehmenden Funktion $\sigma(s)$ die Beziehungen

$$\int_a^b \omega_p(s)\,\omega_q(s)\,d\sigma(s) = \delta_{pq} = \begin{cases} 0 & \text{für } p \gtrless q, \\ 1 & \text{für } p = q \end{cases}$$

erfüllen, wobei das Integral ein Stieltjessches ist. Wir sagen, die *Funktionen $\omega_p(s)$ bilden in bezug auf $\sigma(s)$ ein beschränktes Orthogonalsystem*; dieser Begriff, der übrigens, wie wir sehen werden, leicht auf den ursprünglichen Begriff der Orthogonalität zurückführbar ist, tritt in der Literatur in Verbindung mit der Hilbertschen Theorie der quadratischen Formen von unendlichvielen Veränderlichen auf. Wir werden der Einfachheit halber (was übrigens keine wesentliche Einschränkung ist) solche verallgemeinerte Orthogonalsysteme nur in dem Falle behandeln, wo alle $\omega_p(s)$ stetige Funktionen sind.

Das gewöhnliche Orthogonalsystem $\varphi_p(s)$ heißt *vollständig* oder *abgeschlossen*[1]), wenn die sog. Vollständigkeitsrelation

$$(2) \qquad \int_{\mathfrak{M}} u(s)\,v(s)\,ds = \sum_{k=1}^{\infty} \left(\int_{\mathfrak{M}} \varphi_k(s)\,u(s)\,ds\right)\left(\int_{\mathfrak{M}} \varphi_k(s)\,v(s)\,ds\right)$$

für alle Funktionen $u(s)$, $v(s)$, die samt ihren Quadraten im Lebesgueschen Sinne integrierbar sind, erfüllt ist; bekanntlich genügt es, das Bestehen der obigen Relation für stetige Funktionen $u(s)$, $v(s)$ voraus-

[1]) Die Eigenschaften eines Orthogonalsystems, für die man ursprünglich die Bezeichnungen „abgeschlossen" bzw. „vollständig" einführte, erwiesen sich später, bei Benutzung des Lebesgueschen Integralbegriffs, als äquivalent. Ich benutze in dieser Arbeit vornehmlich den ersten Ausdruck mit Rücksicht auf den in 3. eingeführten Begriff des „in sich abgeschlossenen" Orthogonalsystems.

zusetzen. In gleicher Weise wird das im Intervall $a \leqq s \leqq b$ definierte, in bezug auf die nichtabnehmende Funktion $\sigma(s)$ orthogonale Funktionensystem $\omega_p(s)$ als *abgeschlossen* bezeichnet, wenn für jedes stetige Funktionenpaar $u(s)$, $v(s)$ (im betrachteten Intervall) die Relation

$$(2') \qquad \int_a^b u(s)\, v(s)\, ds = \sum_{k=1}^{\infty} \int_a^b \omega_k(s)\, u(s)\, d\sigma(s) \int_a^b \omega_k(s)\, v(s)\, d\sigma(s)$$

erfüllt ist. Als Fouriersche Koeffizienten einer willkürlichen Funktion $f(s)$ bezeichnet man in diesem Falle die Größen $\int_a^b f(s)\, \omega_p(s)\, d\sigma(s)$ und dementsprechend werden wir wiederum die Fourierschen Koeffizienten der Produkte $\omega_p(s)\, \omega_q(s)$, d. h. die Größen

$$(1') \qquad c_{pqr} = \int_a^b \omega_p(s)\, \omega_q(s)\, \omega_r(s)\, d\sigma(s) \qquad (p, q, r = 1, 2, 3, \ldots)$$

als die *Multiplikationstabelle* dieses in bezug auf $\sigma(s)$ orthogonalen Funktionensystems bezeichnen.

3. Wir beginnen mit der Aufzählung einiger einfachen Eigenschaften der Multiplikationstabelle eines abgeschlossenen beschränkten Orthogonalsystems, die sowohl für den ursprünglichen Begriff als auch für die Orthogonalität in bezug auf $\sigma(s)$ statthaben. In erster Reihe nennen wir die *Symmetrie* in den Indizes, d. h. die Beziehungen

$$c_{pqr} = c_{prq} = c_{qpr} = c_{qrp} = c_{rpq} = c_{rqp},$$

einerlei, ob die Größen c_{pqr} durch (1) oder (1′) definiert sind. Wir betrachten ferner die unendlichvielen quadratischen Formen von unendlichvielen Veränderlichen

$$(3) \qquad C_p(x_1, x_2, x_3, \ldots) = C_p(x) = \sum_{\alpha, \beta=1}^{\infty} c_{p\alpha\beta}\, x_\alpha\, x_\beta \qquad (p = 1, 2, 3, \ldots);$$

die zugehörigen Matrizen bezeichnen wir stets mit denselben Buchstaben, ohne die Unbestimmten hinzuzuschreiben. Man erkennt unmittelbar, daß jede dieser Formen *beschränkt* ist, d. h. alle „Abschnitte“ von $C_p(x)$ erfüllen die Ungleichung

$$\sum_{\alpha, \beta=1}^{n} c_{p\alpha\beta}\, x_\alpha\, x_\beta = \int_{\mathfrak{M}} \varphi_p(s)\, [x_1 \varphi_1(s) + x_2 \varphi_2(s) + \ldots + x_n \varphi_n(s)]^2\, ds$$
$$\leqq M_p (x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2),$$

bzw.

$$= \int_a^b \omega_p(s)\, [x_1 \omega_1(s) + x_2 \omega_2(s) + \ldots + x_n \omega_n(s)]^2\, d\sigma(s)$$
$$\leqq \operatorname{Max}(|\omega_p(s)|)\, (x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2),$$

mit Rücksicht darauf, daß $\sigma(s)$ eine nichtabnehmende Funktion bedeutet; folglich ist die Hilbertsche Theorie der quadratischen Formen von unendlichvielen Veränderlichen auf unseren Fall anwendbar. Nach den Hilbertschen Faltungssätzen (vgl. 3. § 1 dieser Arbeit) ist die quadratische Form, deren Matrix das formal gebildete Produkt der Matrizen C_p und C_q ist, d. h. die Matrix, deren allgemeines Element

$$\sum_{k=1}^{\infty} c_{p\alpha k}\, c_{q k \beta} = \sum_{k=1}^{\infty} \int_{\mathfrak{M}} \varphi_p(s)\, \varphi_\alpha(s)\, \varphi_k(s)\, ds \int_{\mathfrak{M}} \varphi_q(s)\, \varphi_\beta(s)\, \varphi_k(s)\, ds$$

bzw.

$$= \sum_{k=1}^{\infty} \int_a^b \omega_p(s)\, \omega_\alpha(s)\, \omega_k(s)\, d\sigma(s) \int_a^b \omega_q(s)\, \omega_\beta(s)\, \omega_k(s)\, d\sigma(s)$$

ist, ebenfalls beschränkt. Setzt man in der Vollständigkeitsrelation (2) $u(s) = \varphi_p(s)\, \varphi_\alpha(s)$, $v(s) = \varphi_q(s)\, \varphi_\beta(s)$ bzw. in (2′) für $u(s)$ und $v(s)$ die stetigen Funktionen $\omega_p(s)\, \omega_\alpha(s)$ bzw. $\omega_q(s)\, \omega_\beta(s)$ ein, so erkennt man, daß die so entstandene quadratische Form — wir bezeichnen sie mit $C_p C_q(x)$ —

$$C_p C_q(x) = \sum_{\alpha,\beta=1}^{\infty} x_\alpha x_\beta \int_{\mathfrak{M}} \varphi_p(s)\, \varphi_q(s)\, \varphi_\alpha(s)\, \varphi_\beta(s)\, ds$$

bzw.

$$= \sum_{\alpha,\beta=1}^{\infty} x_\alpha x_\beta \int_a^b \omega_p(s)\, \omega_q(s)\, \omega_\alpha(s)\, \omega_\beta(s)\, d\sigma(s)$$

ist. Die Vertauschung der Indizes liefert das Resultat

$$C_p C_q(x) = C_q C_p(x),$$

d. h. die Vertauschbarkeit der in (3) definierten quadratischen Formen bzw. der zugehörigen Matrizen.

Bezeichnet man die Fourierschen Koeffizienten der Funktion $f(s) = 1$ mit $e_1, e_2, e_3, \ldots$, d. h. setzt man

$$e_p = \int_{\mathfrak{M}} \varphi_p(s)\, ds \quad \text{bzw.} \quad e_p = \int_a^b \omega_p(s)\, d\sigma(s),$$

so erkennt man unmittelbar (indem man in (2) bzw. in (2′) $u = v = 1$ einsetzt) die Konvergenz der unendlichen Reihe $e_1^2 + e_2^2 + e_3^2 + \ldots$, ferner — indem man in (2) $u = 1$, $v = \varphi_p(s)\, \varphi_q(s)$ bzw. in (2′) $u = 1$, $v = \omega_p(s)\, \omega_q(s)$ einsetzt — die Richtigkeit der Relationen

$$\sum_{k=1}^{\infty} e_k\, c_{pqk} = \delta_{pq} \qquad (p, q = 1, 2, 3, \ldots).$$

Man kann diese Beziehungen durch Einführung der Einheitsmatrix

$$\mathsf{E} = (\delta_{pq})$$

in der Form der Matrizengleichung

$$e_1 C_1 + e_2 C_2 + e_3 C_3 + \ldots = \mathsf{E}$$

schreiben.

Bei der Ableitung dieser Tatsachen haben wir von den Vollständigkeitsrelationen (2) bzw. (2′) nur insofern Gebrauch gemacht, daß wir ihre Richtigkeit für die Fälle

$$(4)\quad \begin{cases} u = 1, \quad v = \varphi_p(s)\,\varphi_q(s) \quad \text{und} \quad u = \varphi_p(s)\,\varphi_\alpha(s), \quad v = \varphi_\beta(s)\,\varphi_q(s) \\ \text{bzw.} \\ u = 1, \quad v = \omega_p(s)\,\omega_q(s) \quad \text{und} \quad u = \omega_p(s)\,\omega_\alpha(s), \quad v = \omega_\beta(s)\,\omega_q(s) \end{cases}$$

benutzt haben. Die erwähnten Tatsachen bleiben also auch dann richtig, *wenn die Relationen* (2) *bzw.* (2′) *nicht für alle Funktionen* $u(s)$, $v(s)$, *sondern nur für diese Funktionen* (4) *gültig sind.* Dies bedeutet mit anderen Worten, daß man die Abgeschlossenheit der vorgelegten Systeme $\varphi_p(s)$ bzw. $\omega_p(s)$ aufgibt und statt deren eine geringere Voraussetzung einführt, die damit gleichbedeutend ist, daß man annimmt, daß — im Falle des Orthogonalsystems $\varphi_p(s)$ — die Produkte $\varphi_p(s)\,\varphi_q(s)$ sowie die Funktion $f(s) = 1$ durch lineare Aggregate der $\varphi_p(s)$ im Mittel beliebig genau angenähert werden können, d. h. so, daß

$$\int_{\mathfrak{M}} [\varphi_p(s)\,\varphi_q(s) - a_1^{(p,q)}\varphi_1(s) - a_2^{(p,q)}\varphi_2(s) - \ldots - a_n^{(p,q)}\varphi_n(s)]^2\,ds < \varepsilon,$$

$$\int_{\mathfrak{M}} [1 - a_1\varphi_1(s) - a_2\varphi_2(s) - \ldots - a_n\varphi_n(s)]^2\,ds < \varepsilon$$

ausfalle, wobei ε eine beliebig kleine positive Größe bedeutet; im Falle des Systems $\omega_p(s)$ bedeutet die Annahme die Existenz solcher Größen, daß

$$\int_a^b [\omega_p(s)\,\omega_q(s) - a_1^{(p,q)}\omega_1(s) - a_2^{(p,q)}\omega_2(s) - \ldots - a_n^{(p,q)}\omega_n(s)]^2\,d\sigma(s) < \varepsilon,$$

$$\int_a^b [1 - a_1\omega_1(s) - a_2\omega_2(s) - \ldots - a_n\omega_n(s)]^2\,d\sigma(s) < \varepsilon$$

sei. Ein Orthogonalsystem dieser Art wollen wir in beiden Fällen als *in sich abgeschlossen* bezeichnen. Das Bestehen der Vollständigkeitsrelationen (2) bzw. (2′) für die Funktionen $u = v = 1$ und $u = v = \varphi_p(s)\,\varphi_q(s)$ bzw. $u = v = \omega_p(s)\,\omega_q(s)$ ist die Bedingung dafür, daß das betreffende Orthogonalsystem in sich abgeschlossen sei, da daraus die Richtigkeit dieser Relationen für die Funktionen (4) folgt und umgekehrt.

Wir können diese Tatsachen wie folgt zusammenfassen: *Die Multiplikationstabelle* (c_{pqr}) *eines beschränkten und in sich abgeschlossenen* (*also auch eines abgeschlossenen*) *Orthogonalsystems ist stets so beschaffen, daß*

I. *die Symmetriebedingungen*

$$c_{pqr} = c_{prq} = c_{qpr} = c_{qrp} = c_{rpq} = c_{rqp}$$

erfüllt sind,

II. *die unendlichvielen quadratischen Formen von unendlichvielen Unbestimmten*

$$C_p(x) = \sum_{\alpha,\beta=1}^{\infty} c_{p\alpha\beta} x_\alpha x_\beta$$

beschränkt und vertauschbar sind,

III. *ein System von Größen* $e_1, e_2, e_3, \ldots$ *von konvergenter Quadratsumme existiert, für die die Matrizengleichung*

$$\sum_{p=1}^{\infty} e_p C_p = \mathsf{E}$$

statthat. Dieselben Bedingungen sind erfüllt, wenn (c_{pqr}) *die Multiplikationstabelle eines stetigen und in sich abgeschlossenen, in bezug auf eine nichtabnehmende Funktion orthogonalen Funktionensystems bedeutet.*

Wir zitieren in der Folge diese drei Eigenschaften als Bedingungen I bzw. II, III.

⊙

4. Es ist das Ziel der vorliegenden Arbeit zu zeigen, daß diese Eigenschaften, die sich als *notwendige Bedingungen für die Multiplikationstabelle eines solchen Orthogonalsystems* erwiesen, auch *hinreichend* sind. Es gelten nämlich die folgenden Sätze:

Satz 1. *Erfüllen die Größen* c_{pqr} $(p, q, r = 1, 2, 3, \ldots)$ *die obigen Bedingungen* I, II, III, *so existieren stets solche in einem Intervall* $a \leqq s \leqq b$ *definierte stetige Funktionen* $\omega_p(s)$ $(p = 1, 2, 3, \ldots)$, *die in bezug auf eine im selben Intervall definierte nichtabnehmende Funktion* $\sigma(s)$ *ein abgeschlossenes orthogonales Funktionensystem bilden:*

$$\int_a^b \omega_p(s)\,\omega_q(s)\,d\sigma(s) = \delta_{pq},$$

dessen Multiplikationstabelle aus den vorgelegten Größen c_{pqr} *besteht:*

$$\int_a^b \omega_p(s)\,\omega_q(s)\,\omega_r(s)\,d\sigma(s) = c_{pqr}.$$

Satz 2. *Erfüllen die Größen* c_{pqr} *die Bedingungen* I, II, III, *so existiert stets ein in* $a \leqq s \leqq b$ *definiertes beschränktes und in sich abgeschlossenes (gewöhnliches) Orthogonalsystem* $\varphi_p(s)$, *dessen Multiplikationstabelle mit der kubischen Matrix* (c_{pqr}) *übereinstimmt, d. h. für*

welches

$$\int_a^b \varphi_p(s)\,\varphi_q(s)\,ds = \delta_{pq}, \qquad \int_a^b \varphi_p(s)\,\varphi_q(s)\,\varphi_r(s)\,ds = c_{par}$$

ist [2]).

Die Grundlage der Beweise dieser Sätze ist die Hilbertsche Theorie der quadratischen Formen von unendlichvielen Veränderlichen [3]). Ich habe mir erlaubt, in einem einleitenden Paragraphen diejenigen Sätze dieser Theorie zusammenzustellen, von denen ich in den folgenden Untersuchungen Gebrauch mache, und finde dabei Gelegenheit die in den folgenden Paragraphen benutzten Bezeichnungen zu erläutern. Einer soeben erschienenen Arbeit von Herrn J. v. Neumann [4]) entnehme ich einen wichtigen Gedanken, den ich im § 2 anwende (vgl. 1. 2. § 2). Satz 10 der genannten Abhandlung steht in enger Berührung mit der im § 2 der vorliegenden Arbeit gegebenen Konstruktion des Funktionensystems $\omega_p(s)$. Die oben ausgesprochenen Sätze werden im § 3 bewiesen. In einer Schlußbemerkung führe ich den Begriff der *isomorphen Orthogonalsysteme* ein; die über solche Orthogonalsysteme angegebenen Sätze gedenke ich in einer anderen Arbeit zu beweisen.

§ 1.

Zusammenstellung einiger Sätze aus der Theorie der quadratischen Formen von unendlichvielen Veränderlichen.

1. Um den Gedankengang unserer Untersuchungen nicht unterbrechen zu müssen, wollen wir diejenigen Sätze der genannten Theorie zusammenstellen, auf denen unser Beweis fußt. Die Grundlage bildet die Hilbertsche Theorie der beschränkten reellen quadratischen Formen von unendlichvielen Veränderlichen; es sei

$$K(x_1, x_2, x_3, \ldots) = K(x) = \sum_{\alpha,\beta=1}^{\infty} k_{\alpha\beta}\, x_\alpha\, x_\beta$$

eine solche Form, wobei die Unbestimmten der Bedingung unterworfen sind, daß ihre Quadratsumme

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + \ldots = \mathsf{E}(x)$$

---

[2]) In der Schlußbemerkung (§ 4) wird darauf hingewiesen, wie man den Begriff der Orthogonalität modifizieren muß, damit man — bei Vermeidung des Stieltjesschen Integralbegriffes — zu einem *abgeschlossenen* Funktionensystem mit der Multiplikationstabelle (c_{pqr}) gelangt.

[3]) Dargelegt in der 4. Mitteilung der „Grundzüge einer allgemeinen Theorie der linearen Integralgleichungen", Göttinger Nachrichten 1906, S. 157–227.

[4]) „Zur Algebra der Funktionaloperatoren und Theorie der normalen Operatoren", Math. Annalen **102** (1929), S. 370–427.

konvergent ist; die zugehörige symmetrische unendliche Matrix $(k_{\alpha\beta})$ (die wir beschränkte Matrix nennen) bezeichnen wir stets mit demselben Buchstaben, ohne die Unbestimmten hinzuzuschreiben. Insbesondere ist $\mathsf{E} = (\delta_{\alpha\beta})$ die Einheitsmatrix ($\mathsf{E}(x)$ die Einheitsform), wobei — wie üblich — $\delta_{\alpha\beta} = 0$ für $\alpha \leqq \beta$ und $\delta_{\alpha\alpha} = 1$ gesetzt ist.

Wir formulieren das fundamentale Theorem dieser Theorie in der folgenden — für unsere Anwendungen bequemsten — Form:

Jede beschränkte, reelle quadratische Form läßt sich durch ein Stieltjessches Integral folgendermaßen darstellen:

$$K(x) = \int_m^M \mu \, d\sigma(\mu; x),$$

wobei

$$\sigma(\mu; x) = \sum_{\alpha,\beta=1}^{\infty} \sigma_{\alpha\beta}(\mu) \, x_\alpha x_\beta$$

für jeden Wert von μ im Intervall $m \leqq \mu \leqq M$ eine beschränkte quadratische Form bedeutet, deren Wertevorrat so beschaffen ist, daß $\sigma(\mu; x)$ bei jedem zulässigen Wertsystem der $x_1, x_2, x_3, \ldots$ eine nichtabnehmende, an jeder inneren Stelle des Intervalls von links stetige Funktion von μ darstellt, die den Gleichungen

$$\sigma(m; x) = 0, \qquad \sigma(M; x) = \mathsf{E}(x)$$

genügt.

Eine Stelle $\mu = \mu_0$ gehört dem Spektrum der vorgelegten Form an, wenn es kein $\varepsilon > 0$ gibt derart, daß im Intervall $\mu_0 - \varepsilon \leqq \mu \leqq \mu_0 + \varepsilon$ alle $\sigma_{\alpha\beta}(\mu)$ konstant sind; ist μ eine Stelle des Spektrums, so gibt es ein Wertsystem $x_1, x_2, x_3, \ldots$, für das $K(x) = \mu_0$ ist. Die dem Spektrum nicht angehörenden Werte sind durch die Eigenschaft charakterisiert, daß zu jeder solchen Stelle μ_1 eine beschränkte symmetrische Matrix K existiert, so daß

$$(K - \mu_1 \mathsf{E})\,\mathsf{K} = \mathsf{K}\,(K - \mu_1 \mathsf{E}) = \mathsf{E}$$

ist.

Es gelten für $m \leqq \mu_1 \leqq \mu_2 \leqq M$ die Matrizengleichungen

$$(5) \qquad (\sigma_{\alpha\beta}(\mu_1))\,(\sigma_{\alpha\beta}(\mu_2)) = (\sigma_{\alpha\beta}(\mu_2))\,(\sigma_{\alpha\beta}(\mu_1)) = (\sigma_{\alpha\beta}(\mu_1)),$$

aus denen die für alle stetigen Funktionen $u(\mu)$, $v(\mu)$ geltenden Beziehungen

$$(5') \qquad \int_m^M u(\mu)\, v(\mu)\, d\sigma_{\alpha\beta}(\mu) = \sum_{k=1}^{\infty} \int_m^M u(\mu)\, d\sigma_{\alpha k}(\mu) \int_m^M v(\mu)\, d\sigma_{k\beta}(\mu)$$

folgen, die man als Hilbertsche Vollständigkeitsrelationen bezeichnet [5]).

[5]) Satz 32 und 33 der in [3]) angeführten Abhandlung von Hilbert.

Die Matrizengleichungen (5) sind Spezialfälle der Beziehungen (5′); sie ergeben sich, wenn man

$$u(\mu)=1 \quad \text{für} \quad m \leqq \mu \leqq \mu_1, \qquad u(\mu)=0 \quad \text{für} \quad \mu_1 < \mu \leqq M$$

und

$$v(\mu)=1 \quad \text{für} \quad m \leqq \mu \leqq \mu_2, \qquad v(\mu)=0 \quad \text{für} \quad \mu_2 < \mu \leqq M$$

setzt. Umgekehrt folgt aus (5) die Richtigkeit von (5′) für Treppenfunktionen $u(\mu)$ und $v(\mu)$ unmittelbar und sodann in bekannter Weise für alle solche Funktionen, die man durch streckenweise konstante Funktionen approximieren kann, insbesondere für alle stetigen Funktionen.

2. Als Einzelform bezeichnet Hilbert eine beschränkte quadratische Form $E(x)$, deren Matrix der Bedingung $E^2 = E$ genügt. Über solche Formen gilt die folgende Bemerkung, die uns im folgenden von Nutzen sein wird.

Genügen die nicht identisch verschwindenden[6]) Einzelformen $E_1(x)$, $E_2(x), \ldots, E_n(x)$ den Bedingungen

$$E_p E_q = E_q E_p = 0 \quad \text{für} \quad p \gtrless q,$$

so enthält das Spektrum der quadratischen Form

$$K(x) = a_1 E_1(x) + a_2 E_2(x) + \ldots + a_n E_n(x)$$

die Stellen $a_1, a_2, \ldots, a_n$.

Würde nämlich etwa a_p nicht dem Spektrum von $K(x)$ angehören, so könnte man eine beschränkte Matrix K angeben, so daß

$$(K - a_p \mathsf{E})\,\mathsf{K} = (a_1 E_1 + a_2 E_2 + \ldots + a_n E_n - a_p \mathsf{E})\,\mathsf{K} = \mathsf{E}$$

wäre; daraus folgt aber durch Multiplikation mit E_p

$$E_p = 0,$$

im Widerspruch mit unserer Annahme. Insbesondere folgt aus dieser Bemerkung, daß falls $K(x)$ positiv definit ist, alle Koeffizienten a_p nicht negativ sein müssen, da das Spektrum — wie oben bemerkt — dem Wertevorrat der Form angehört.

Es ist auch leicht zu zeigen, daß das Spektrum von $K(x)$ außer den Stellen a_p nur noch die Null enthalten kann; setzt man nämlich (für $\lambda \neq 0, a_1, a_2, \ldots, a_n$)

$$\mathsf{K} = \sum_{p=1}^{n} \frac{a_p}{\lambda(a_p - \lambda)} E_p - \frac{1}{\lambda}\mathsf{E},$$

so findet man unmittelbar $(K - \lambda \mathsf{E})\,\mathsf{K} = \mathsf{E}$.

---

[6]) Die Matrix, deren sämtliche Elemente Null sind — man bezeichnet sie mit 0 —, ist die identisch verschwindende Matrix.

3. Der sogenannte erste Hilbertsche Faltungssatz enthält die Aussage, daß falls $A = (a_{\alpha\beta})$ und $B = (b_{\alpha\beta})$ zwei beschränkte Matrizen sind, so ist es auch die Matrix

$$AB = \Big(\sum_{k=1}^{\infty} a_{\alpha k} b_{k\beta}\Big);$$

ist $C = (c_{\alpha\beta})$ eine dritte Matrix dieser Art, so lehrt der sogenannte zweite Faltungssatz, daß $(AB)C = A(BC)$ ist. Sind die symmetrischen Matrizen A und B vertauschbar, so ist die Matrix $AB = BA$ ebenfalls symmetrisch; die zugehörige quadratische Form bezeichnen wir mit $AB(x)$ oder $BA(x)$.

Wir sagen mit Herrn F. Riesz[7]), daß eine Folge von symmetrischen Matrizen $A^{(n)} = (a_{\alpha\beta}^{(n)})$ $(n = 1, 2, 3, \ldots)$ gegen die Matrix $A = (a_{\alpha\beta})$ konvergiert, falls für alle α, β

$$\lim_{n=\infty} a_{\alpha\beta}^{(n)} = a_{\alpha\beta}$$

ist und falls eine von n unabhängige Größe M existiert derart, daß für jedes Wertsystem der $x_1, x_2, x_3, \ldots$ die Ungleichungen

$$|A^{(n)}(x)| = \Big|\sum_{\alpha,\beta=1}^{\infty} a_{\alpha\beta}^{(n)} x_\alpha x_\beta\Big| \leqq M\,\mathsf{E}(x)$$

erfüllt sind. Man zeigt unschwer[8]), daß wenn in diesem Sinne die Limesgleichung $A^{(n)} \to A$ statthat, B aber eine beliebige beschränkte Matrix bedeutet, so gilt auch

$$A^{(n)}B \to AB \quad \text{und} \quad BA^{(n)} \to BA.$$

4. Mit Hilfe dieses letzten Satzes ergibt sich in einfacher Weise das folgende Resultat über die Spektraldarstellung vertauschbarer Formen[9]):

Sind $K'(x)$ und $K''(x)$ vertauschbare Formen, deren Spektraldarstellung

$$K'(x) = \int_{m'}^{M'} \mu'\, d\sigma(\mu'; x) \quad \text{bzw.} \quad K''(x) = \int_{m''}^{M''} \mu''\, d\sigma(\mu''; x)$$

ist, so sind die beiden Formen von unendlichvielen Veränderlichen

$$\sigma'(\mu'; x) \quad \text{und} \quad \sigma''(\mu''; x)$$

bei jedem in Betracht kommenden Wert der Parameter μ' und μ'' ebenfalls vertauschbar.

Denn es folgt zunächst wegen der angenommenen Vertauschbarkeit von K' und K'' die Vertauschbarkeit der beiden Matrizen

$$f(K') = c_0' K'^{\nu} + c_1' K'^{\nu-1} + \ldots + c_{\nu-1}' K' + c_\nu' \mathsf{E},$$

$$g(K'') = c_0'' K''^{\lambda} + c_1'' K''^{\lambda-1} + \ldots + c_{\lambda-1}'' K'' + c_\lambda'' \mathsf{E}.$$

---

[7]) „Les systèmes d'équations linéaires à une infinité d'inconnues", Paris 1913, S. 107.

[8]) Vgl. F. Riesz, a. a. O. S. 128.

[9]) Vgl. J. v. Neumann, a. a. O. [4]) S. 400 unten.

Es sei nun $f_n(\mu')$ $(n = 1, 2, 3, \ldots)$ eine monoton wachsende Folge von Polynomen, die gegen diejenige streckenweise konstante Funktion konvergiert, die für $m' \leqq \mu' \leqq \mu_0'$ gleich 1, für $\mu_0' < \mu' \leqq M'$ gleich 0 ist und es sei analog $g_m(\mu'')$ eine monoton wachsende Folge von Polynomen, so daß

$$\lim_{m=\infty} g_m(\mu'') = 1 \qquad \text{für} \quad m'' \leqq \mu'' \leqq \mu_0'',$$
$$\lim_{m=\infty} g_m(\mu'') = 0 \qquad \text{für} \quad \mu_0'' < \mu'' \leqq M'';$$

dann gelten die Limesgleichungen

$$\begin{aligned} K_n' &= f_n(K') \to \sigma'(\mu_0'), \\ K_m'' &= f_m(K'') \to \sigma''(\mu_0''), \end{aligned} \qquad n \to \infty,$$

wobei $\sigma'(\mu_0')$ bzw. $\sigma''(\mu_0'')$ die zu den quadratischen Formen $\sigma'(\mu_0'; x)$ bzw. $\sigma''(\mu_0''; x)$ gehörende Matrix bezeichnet.

Wird in der Relation

$$K_n' K_m'' = K_m'' K_n'$$

zunächst m festgehalten und der Grenzübergang $n \to \infty$ vollzogen, so erhält man (durch Anwendung des in 3. erwähnten Satzes)

$$\sigma'(\mu_0') K_m'' = K_m'' \sigma'(\mu_0');$$

der Grenzübergang $m \to \infty$ liefert die zu beweisende Relation

$$\sigma'(\mu_0') \sigma''(\mu_0'') = \sigma''(\mu_0'') \sigma'(\mu_0').$$

5. Noch eine Bemerkung über das Stieltjessche Integral, das ja schon in der Hilbertschen Spektraldarstellung auftritt. Es kommen in der vorliegenden Arbeit solche Integrale

$$\int f(s)\, dg(s)$$

vor, in denen $g(s)$ eine nichtabnehmende Funktion bedeutet, $f(s)$ aber nicht notwendig stetig ist, sondern eventuell Unstetigkeiten erster Art besitzen kann. Die Verallgemeinerung des ursprünglichen Stieltjesschen Begriffes, mit dem wir hier auskommen, ist das sogenannte Stieltjes-Riemannsche Integral; für die Existenz des obigen Integrals in diesem Sinne ist es notwendig und hinreichend, daß man bei jedem $\varepsilon > 0$ diejenigen Stellen, an denen $f(s)$ einen größeren Sprung als ε erleidet, in endlichviele Intervalle so einschließen kann, daß die Summe der Zuwächse von $g(s)$ in diesen Intervallen beliebig klein sei[10]).

[10]) Über das Stieltjes-Riemannsche Integral vgl. H. Lebesgue: „Leçons sur l'intégration", 2. Auflage, Paris 1925, S. 271–290, insbesondere S. 275–277.

§ 2.

Konstruktion des Funktionensystems ω_p.

1. Wir legen unseren Untersuchungen die unendlichvielen beschränkten quadratischen Formen

$$C_p(x) = \sum_{\alpha,\beta=1}^{\infty} c_{p\alpha\beta} x_\alpha x_\beta \qquad (p = 1, 2, 3, \ldots)$$

zugrunde, welche die in der Einleitung genannten Bedingungen I, II, III erfüllen. In diesem Paragraphen wird übrigens nur die Bedingung II — die die Vertauschbarkeit der Matrizen C_p aussagt — benutzt und es bleiben alle Entwicklungen dieses Paragraphen richtig, wenn die $C_p(x)$ nicht quadratische, sondern vertauschbare beschränkte Hermitesche Formen der unendlichvielen Veränderlichen $x_1, x_2, x_3, \ldots$ bedeuten. Durch Anwendung des Hilbertschen Theorems stellen wir jede dieser Formen durch ein Stieltjessches Integral dar:

$$C_p(x) = \int_{m_p}^{M_p} \mu_p \, d\sigma^{(p)}(\mu_p; x), \tag{6}$$

wobei die zugehörigen Spektralformen

$$\sigma^{(p)}(\mu_p; x) = \sum_{\alpha\beta=1}^{\infty} \sigma_{\alpha\beta}^{(p)}(\mu_p) x_\alpha x_\beta \qquad (m_p \leqq \mu_p \leqq M_p)$$

die in 1. § 1 angegebenen Eigenschaften besitzen, und es sind alle diese Einzelformen miteinander vertauschbar (vgl. 4. § 1). Aus der Menge dieser Formen greifen wir eine abzählbare, überall dicht liegende Teilmenge heraus, indem wir für jedes p eine abzählbare, im Intervall $m_p \leqq \mu_p \leqq M_p$ überall dichte Punktmenge $\mu_p^{(1)}, \mu_p^{(2)}, \mu_p^{(3)}, \ldots$ bestimmen; wir bezeichnen diese Punktmenge mit $\mathfrak{M}_p$. Die Gesamtheit der Einzelformen

$$\sigma^{(p)}(\mu_p^{(q)}; x) \qquad (p, q = 1, 2, 3, \ldots)$$

wollen wir in irgendeiner Reihenfolge mit

$$E_1(x), E_2(x), E_3(x), \ldots, E_n(x), \ldots \tag{7}$$

bezeichnen; wir nehmen der Einfachheit halber an, daß eine dieser $E_n(x)$ die Einheitsform $\mathsf{E}(x)$ ist. Nach dem Vorgange von Herrn J. v. Neumann[11]) werden wir aus diesen Formen andere Einzelformen aufbauen, die „der Größe“ nach geordnet sind; das folgende Verfahren, um zu diesen Einzelformen zu gelangen — ein analoges Verfahren wird in der Theorie der hyperkomplexen Größen auf die Idempotente angewandt — unterscheidet sich nur in der Bezeichnungsweise von dem des Herrn v. Neumann.

[11]) S. 401 der in [4]) angeführten Arbeit.

Wir erinnern an die bekannte Cantorsche triadische Punktmenge und führen eine Bezeichnungsweise der dabei auftretenden Intervalle ein, die uns von Nutzen sein wird. Das Intervall $0 \leqq \lambda \leqq 1$ denken wir uns in drei gleiche Teile geteilt und das mittlere (offene) Intervall[12]) — wir bezeichnen es mit J_{11} — herausgegriffen; dies ist bekanntlich der erste Schritt der Cantorschen Konstruktion. Der zweite Schritt besteht darin, daß man die beiden übriggebliebenen Intervalle in drei gleiche Teile teilt und die mittleren Intervalle herausgreift; die ersten zwei Schritte liefern daher drei Teilintervalle, die wir in der natürlichen Reihenfolge mit J_{21}, J_{22}, J_{23} bezeichnen; J_{22} ist also mit J_{11} identisch. Dieses Verfahren wird nun fortgesetzt; der dritte Schritt — die analoge Dreiteilung der übriggebliebenen vier Teilintervalle — führt (wenn man die vorher erhaltenen drei Intervalle mitzählt) zu sieben Teilintervallen, die wir in der natürlichen Reihenfolge mit $J_{31}, J_{32}, J_{33}, J_{34}, J_{35}, J_{36}, J_{37}$ bezeichnen, wobei also $J_{32} = J_{21}$, $J_{34} = J_{22} = J_{11}$, $J_{36} = J_{23}$ ist. Auf diese Weise fahre man fort; nach dem n-ten Schritt gelangt man zu $2^n - 1$ Teilintervallen, die wir — wiederum in der natürlichen Reihenfolge — mit

$$J_{n\,m} \qquad (m = 1, 2, 3, \ldots, 2^{n-1})$$

bezeichnen. Die Bezeichnungsweise ist also so gewählt, daß für $m_1 < m_2$ das Intervall $J_{n\,m_1}$ dem Intervall $J_{n\,m_2}$ vorangeht, ferner ist

$$J_{n\,m} = J_{n+k,\,2^k m} \qquad (k = 1, 2, 3, \ldots).$$

Aus den Einzelformen (7) bzw. aus den zugehörigen Matrizen E_n bauen wir nun neue Matrizen $E_{n\,m}$ wie folgt auf: Wir setzen

$$E_{11} = E_1,$$

$$E_{21} = E_2 E_{11}, \quad E_{22} = E_{11}, \quad E_{23} = E_{11} + E_2(\mathsf{E} - E_{11}),$$

und definieren rekursiv

$$\begin{aligned}
&E_{n1} = E_n E_{n-1,1}, \quad E_{n2} = E_{n-1,1},\\
&E_{n3} = E_{n-1,1} + E_n(E_{n-1,2} - E_{n-1,1}), \quad E_{n4} = E_{n-1,2},\\
&\cdots\cdots\cdots

die Beziehungen

$$E_{nm} = E_{n+k,\,2^k m} \qquad (k = 1, 2, 3, \ldots)$$

gelten, ferner (durch Induktionsschluß), daß die Matrizen E_{nm} ganz und rational durch die vorgelegten $E_1, E_2, \ldots, E_n$ ausdrückbar sind. Daher sind die E_{nm} miteinander und mit den Matrizen (7) vertauschbar.

2. Wir ordnen nun jedem Punkt des Intervalls $0 \leqq \lambda \leqq 1$, der *innerhalb* des obigen Intervalls J_{nm} liegt, die Form $E_{nm}(x)$ zu und zeigen, daß durch diese Zuordnung für jedes Wertsystem der $x_1, x_2, x_3, \ldots$ eine in λ nicht abnehmende Funktion definiert ist, die natürlich innerhalb jedes Intervalls J_{nm} konstant ist. In der Tat, ist $\lambda_1 < \lambda_2$ und liegen beide Stellen innerhalb eines der obigen Intervalle, so wird für ein hinreichend großes n der Punkt λ_1 in J_{nm_1}, λ_2 in J_{nm_2} liegen, wobei $m_1 \leqq m_2$ ist. Unsere Behauptung ist daher in den für alle $x_1, x_2, x_3, \ldots$ geltenden Ungleichungen

$$0 \leqq E_{n1}(x) \leqq E_{n2}(x) \leqq \ldots \leqq E_{n,\,2^n-1}(x) \leqq \mathsf{E}(x) \tag{9}$$

enthalten, die man durch Induktionsschluß folgendermaßen verifizieren kann: Aus der Konstruktion der E_{nm} folgen unmittelbar die Beziehungen

$$E_{n,\,2k} - E_{n,\,2k-1} = (\mathsf{E} - E_n)\,(E_{n-1,\,k} - E_{n-1,\,k-1}),$$
$$E_{n,\,2k+1} - E_{n,\,2k} = E_n\,(E_{n-1,\,k+1} - E_{n-1,\,k})$$

und

$$\mathsf{E} - E_{n,\,2^n-1} = (\mathsf{E} - E_{n-1,\,2^{n-1}-1})\,(\mathsf{E} - E_n), \qquad E_{n1} = E_n E_{n-1},$$

woraus man durch Schluß von $n-1$ auf n unmittelbar erkennt, daß die in diesen Beziehungen links stehenden Matrizen Einzelmatrizen sind, da das Produkt vertauschbarer Einzelformen wieder eine Einzelform ist. Die Richtigkeit der Ungleichungen (9) folgt aus der Tatsache, daß eine Einzelform positiv definit oder semidefinit ist.

In ganz analoger Weise wird gezeigt, daß für $m_1 \leqq m_2$

$$E_{nm_1} E_{nm_2} = E_{nm_1} \tag{10}$$

ist, indem man die E_{nm} durch die Matrizen $E_{n-1,\,m}$ und E_n ausdrückt und die entsprechende Tatsache für die Matrizen $E_{n-1,\,m}$ als richtig voraussetzt (für E_{11} ist sie ja trivial). Insbesondere folgt hieraus (für $m_1 = m_2$), daß alle Formen E_{nm} Einzelformen sind; wir notieren noch die folgende Relation, die durch Addition der Definitionsgleichungen (8) entspringt,

$$\begin{aligned} E_n &= E_{n1} + (E_{n3} - E_{n2}) + (E_{n5} - E_{n4}) + \ldots + (E_{n,\,2^n-1} - E_{n,\,2^n-2}) \\ &= E_{n,\,2^n-1} - (E_{n,\,2^n-2} - E_{n,\,2^n-3}) - \ldots - (E_{n4} - E_{n3}) - (E_{n2} - E_{n1}), \end{aligned} \tag{11}$$

die im folgenden eine wichtige Rolle spielt.

Indem wir den Intervallen J_{nm} die entsprechenden Formen E_{nm} zuordnen, haben wir — wie oben bewiesen — bei jedem Wertsystem der

$x_1, x_2, x_3, \ldots$ eine nicht abnehmende Funktion von λ in der Punktmenge, die aus der Vereinigung dieser Intervalle besteht, definiert. Da diese Vereinigungsmenge überall dicht im Intervall $0 \leqq \lambda \leqq 1$ ist, so kann man mit Leichtigkeit den Definitionsbereich auf dieses ganze Intervall erweitern; man kann auch erreichen, daß die entstehende ebenfalls monotone Funktion an jeder Stelle von links stetig sei. Ist nämlich $\sigma(\lambda; x)$ die zum Punkte λ zugeordnete Form, wobei zunächst λ einem der Intervalle J_{nm} angehört, λ_0 aber ein Punkt der Komplementärmenge, so bestimme man eine gegen λ_0 strebende monoton wachsende Folge $\lambda_1 < \lambda_2 < \ldots < \lambda_k < \ldots$, so daß jedes λ_k in einem der Intervalle J_{nm} liegt, und setze

$$\sigma(\lambda_0; x) = \lim_{k=\infty} \sigma(\lambda_k; x).$$

Wegen der Monotonität von $\sigma(\lambda; x)$ in der obigen Punktmenge folgt unmittelbar, daß dieser Grenzwert unabhängig von der speziellen Wahl der gegen λ_0 wachsend strebenden Folge λ_k ist, ferner — da alle Formen $E_{nm}(x)$ und damit auch $\sigma(\lambda; x)$ kleiner als $\mathsf{E}(x)$ sind —, daß die obige Limesgleichung für die entsprechenden Matrizen die Limesgleichung

$$\sigma(\lambda_k) \to \sigma(\lambda_0) \qquad k \to \infty \tag{12}$$

in dem in 3. § 1 festgesetzten Sinne zur Folge hat. Wir setzen noch $\sigma(0; x) = 0$ und zeigen, daß $\sigma(1; x) = \mathsf{E}(x)$ sein muß. In der Tat, wäre für irgendein Wertsystem $\sigma(1; x) = \mathsf{E}(x) - \delta$, wo $\delta > 0$ ist, so wäre — wegen der Monotonität von $\sigma(\lambda; x)$ in λ — für alle zulässigen Wertepaare n, m $E_{nm}(x) \leqq \mathsf{E}(x) - \delta$, also — wie man aus der zweiten Form der Relation (11) unmittelbar entnimmt — für alle n

$$E_n(x) \leqq E_{n2^n-1}(x) \leqq \mathsf{E}(x) - \delta,$$

in Widerspruch damit, daß eine der Formen $E_n(x)$ die Einheitsform ist.

Setzen wir

$$\sigma(\lambda; x) = \sum_{\alpha, \beta=1}^{\infty} \sigma_{\alpha\beta}(\lambda)\, x_\alpha x_\beta,$$

so sind die Matrizenrelationen

$$(\sigma_{\alpha\beta}(\lambda_1))\,(\sigma_{\alpha\beta}(\lambda_2)) = (\sigma_{\alpha\beta}(\lambda_1)) \qquad \lambda_1 \leqq \lambda_2 \tag{13}$$

für solche λ_1 und λ_2, die den Intervallen J_{nm} angehören, mit den Gleichungen (10) identisch. Es übertragen sich nun diese Relationen unmittelbar auf alle Punkte des Intervalls $0 \leqq \lambda \leqq 1$ durch passende Anwendung des in 3. § 1 genannten Satzes auf die Limesgleichung (12).

3. Ein offenes Teilintervall von $0 \leqq \lambda \leqq 1$ bezeichnen wir als *Konstanzintervall* von $\sigma(\lambda; x)$, falls für zwei beliebige Punkte λ' und λ'' dieses Intervalls die Gleichung $\sigma(\lambda'; x) = \sigma(\lambda''; x)$ bei jedem zulässigen Wertsystem der $x_1, x_2, x_3, \ldots$ statthat und falls dieses Intervall nicht echter

Teil eines größeren Intervalls derselben Art ist. (Die obigen Intervalle J_{nm} sind entweder selbst Konstanzintervalle oder Teile von Konstanzintervallen.) Da zufolge dieser Definition die Konstanzintervalle nicht ineinandergreifen, so ist ihre Menge endlich oder abzählbar; wir bezeichnen sie in irgendeiner Reihenfolge mit i_k $(k = 1, 2, 3, \ldots)$ und den Mittelpunkt des k-ten Konstanzintervalls mit h_k.

Wir betrachten nun irgendeine der Einzelformen $E_n(x)$ und schreiben für diese die Relation (11) in der Form

$$(11') \quad E_n(x) = (\sigma(\lambda_1; x) - \sigma(0; x)) + (\sigma(\lambda_3; x) - \sigma(\lambda_2; x)) + (\sigma(\lambda_5; x) - \sigma(\lambda_4; x)) + \ldots + (\sigma(\lambda_{2^n-1}; x) - \sigma(\lambda_{2^n-2}; x)),$$

wobei $\lambda_1 \leqq \lambda_2 \leqq \lambda_3 \leqq \ldots \leqq \lambda_{2^n-1}$ ist und jeder der Punkte λ_k einem Intervall J_{nm}, also um so mehr einem Konstanzintervall angehört. Man kann annehmen, daß diese λ_k alle verschieden sind, sogar in verschiedenen Konstanzintervallen liegen, da im entgegengesetzten Falle die entsprechenden Glieder in der Darstellung $(11')$ identisch in den x verschwinden würden. Es möge etwa λ_k dem Konstanzintervall i_{n_k} angehören; wir können annehmen, daß es mit dem Mittelpunkt h_{n_k} dieses Intervalls zusammenfällt, und es ist $h_{n_1} < h_{n_2} < h_{n_3} < \ldots$.

Es sei nun $f_n(\lambda)$ diejenige streckenweise konstante Funktion, die gleich 1 ist in den endlichvielen *abgeschlossenen Intervallen*

$$0 \leqq \lambda \leqq h_{n_1}, \quad h_{n_2} \leqq \lambda \leqq h_{n_3}, \quad h_{n_4} \leqq \lambda \leqq h_{n_5}, \quad \ldots,$$

sonst aber überall gleich 0, so daß die endlichvielen Sprungstellen dieser Funktion in die Mittelpunkte gewisser Konstanzintervalle fallen. Mit Hilfe dieser Funktionen kann man die Gleichung $(11')$ in der Form eines Stieltjesschen Integrals, wie folgt schreiben:

$$E_n(x) = \int_0^1 f_n(\lambda)\, d\sigma(\lambda; x).$$

Wir wenden nun diese Darstellung für diejenigen Formen $E_n(x)$ an, die — bei der Konstruktion dieser Formen in 1. § 2 — aus $\sigma^{(p)}(\mu_p; x)$ entstanden sind, indem darin für μ_p die Punkte $\mu_p^{(q)}$ $(q = 1, 2, 3, \ldots)$ der in $m_p \leqq \mu_p \leqq M_p$ überall dichten Punktmenge $\mathfrak{M}_p$ eingesetzt wurden. Es ergibt sich in dieser Weise für jede dieser Formen eine Darstellung

$$(14) \qquad \sigma^{(p)}(\mu_p^{(q)}; x) = \int_0^1 f_p(\lambda, \mu_p^{(q)})\, d\sigma(\lambda; x),$$

wobei für jeden der Menge $\mathfrak{M}_p$ angehörenden Wert von $\mu_p^{(q)}$ die Funktion $f_p(\lambda, \mu_p^{(q)})$ dieselben Eigenschaften besitzt, wie die oben mit $f_n(\lambda)$ bezeichnete Funktion: sie ist streckenweise konstant (ihr Wert ist überall 0

oder 1) und ihre endlichvielen Sprungstellen fallen in die Mittelpunkte gewisser Konstanzintervalle von $\sigma(\lambda; x)$. Wichtig für das Folgende ist die Tatsache, daß aus $\mu_p^{(q_1)} > \mu_p^{(q_2)}$ die für alle λ geltende Ungleichung

$$F(\lambda) = f_p(\lambda, \mu_p^{(q_1)}) - f_p(\lambda, \mu_p^{(q_2)}) \geqq 0$$

folgt.

In der Tat, die Funktion $F(\lambda)$ ist ebenfalls eine streckenweise konstante Funktion, deren endlichviele Sprungstellen nur die obigen Mittelpunkte der Konstanzintervalle sein können. Ferner kann diese Funktion nur die Werte $0, +1, -1$ annehmen; wir werden eben zeigen, daß sie nirgends gleich -1 ist. Wäre nämlich $F(\lambda) = -1$ in den endlichvielen Intervallen

$$h_{m_k} \leqq \lambda \leqq h_{m_{k+1}} \qquad (k = 1, 2, \ldots, \nu) \tag{15}$$

und gleich $+1$ für

$$h_{m'_k} \leqq \lambda \leqq h_{m'_{k+1}} \qquad (k = 1, 2, \ldots, \nu'), \tag{15'}$$

anderswo aber gleich Null, so hätte man

$$\sigma^{(p)}(\mu_p^{(q_1)}; x) - \sigma^{(p)}(\mu_p^{(q_2)}; x) = \int_0^1 F(\lambda)\, d\sigma(\lambda; x)$$

$$= \sum_{k=1}^{\nu'} [\sigma(h_{m'_{k+1}}; x) - \sigma(h_{m'_k}; x)] - \sum_{k=1}^{\nu} [\sigma(h_{m_{k+1}}; x) - \sigma(h_{m_k}; x)].$$

Nun ist einerseits die links stehende Form positiv definit, andererseits erfüllen die rechts in eckigen Klammern stehenden Formen mit Rücksicht darauf, daß die in (15) und (15′) angegebenen Intervalle keinen gemeinsamen Punkt haben, wegen (13) die Bedingungen des in 2. § 1 erwähnten Hilfssatzes (d. h. jede dieser Formen ist eine Einzelform, und das Produkt je zweier ist $= 0$). Folglich müßte — falls es in der Tat Intervalle gibt, wo $F(\lambda) = -1$ ist — der Wert (-1) dem Spektrum der links stehenden Form angehören, in Widerspruch damit, daß diese Form positiv definit ist.

4. Wir betrachten in der λ, μ-Ebene das Rechteck $0 \leqq \lambda \leqq 1$, $m_p \leqq \mu \leqq M_p$; indem wir in unserer Funktion $f_p(\lambda, \mu_p^{(q)})$ den Parameter $\mu_p^{(q)}$ als zweite unabhängige Veränderliche auffassen, können wir sagen, daß die Funktion $f_p(\lambda, \mu)$ in einer überall dichten Punktmenge des obigen Rechtecks definiert ist, nämlich in denjenigen Punkten λ, μ, deren μ-Koordinate der in $m_p \leqq \mu \leqq M_p$ überall dichten Punktmenge $\mathfrak{M}_p$ angehört. Die zuletzt abgeleitete Eigenschaft von f_p ermöglicht es, die Definition dieser Funktion auf das ganze Rechteck zu erweitern. Da nämlich $f_p(\lambda, \mu)$ bei jedem festen λ eine in $\mathfrak{M}_p$ definierte nicht abnehmende Funktion von μ ist, die nur die Werte 0, 1 annimmt, so ist an einer $\mathfrak{M}_p$ nicht angehörenden Stelle der Wert dieser Funktion durch die Forderung, daß sie von links stetig

sei, eindeutig festgelegt. Mit anderen Worten, wir setzen fest, daß, wenn μ der Menge $\mathfrak{M}_p$ nicht angehört, $f_p(\lambda, \mu) = 0$ sei, falls für alle $\mathfrak{M}_p$ angehörenden $\mu_p^{(q)}$, die kleiner als μ sind, $f_p(\lambda, \mu_p^{(q)}) = 0$ ist; im entgegengesetzten Falle, wo es also einen Wert $\mu_p^{(q)}$, der $\mathfrak{M}_p$ angehört und kleiner als μ ist, gibt, für den $f_p(\lambda, \mu_p^{(q)}) = 1$ ist, setzen wir $f_p(\lambda, \mu) = 1$. Fügen wir noch die Festsetzung $f_p(\lambda, m_p) = 0$ (für alle λ) hinzu, so ist die Funktion $f_p(\lambda, \mu)$ an jeder Stelle des obigen Rechtecks eindeutig festgelegt. Ihre Haupteigenschaften sind die folgenden:

1°. sie nimmt nur die Werte 0 und 1 an;

2°. gehört $\mu_p^{(q)}$ der in $m_p \leqq \mu_p^{(q)} \leqq M_p$ überall dichten Menge $\mathfrak{M}_p$ an, so ist $f_p(\lambda, \mu_p^{(q)})$, als Funktion von λ aufgefaßt, in endlichvielen abgeschlossenen Intervallen gleich 1;

3°. für jedes feste λ ist $f_p(\lambda, \mu)$, als Funktion von μ betrachtet, eine für $\mu = m_p$ verschwindende, nicht abnehmende Funktion.

Daraus folgt, daß bei jedem festen λ diejenigen Werte von μ, für die $f_p(\lambda, \mu) = 0$ ist, ein abgeschlossenes oder offenes Intervall bilden, falls nicht m_p der einzige solche Wert von μ ist. Daher *muß es zu jedem λ einen Wert μ_0*

$$\mu_0 = \omega_p(\lambda)$$

geben derart, daß für jedes (im Intervall $[m_p, M_p]$ gelegenen) $\mu < \omega_p(\lambda)$ *die Funktion $f_p(\lambda, \mu) = 0$, für jedes $\mu > \omega_p(\lambda)$ aber die Funktion $f_p(\lambda, \mu) = 1$ ist.* Die auf diese Weise im Intervall $0 \leqq \lambda \leqq 1$ definierten Funktionen $\omega_p(\lambda)$ spielen im folgenden eine wichtige Rolle; wir beweisen über diese vorab den folgenden Satz:

5. *Jede der Funktionen $\omega_p(\lambda)$, die offenbar für jedes p der Ungleichung*

$$m_p \leqq \omega_p(\lambda) \leqq M_p \qquad (0 \leqq \lambda \leqq 1)$$

genügt, ist an jeder Stelle, die von den Mittelpunkten der Konstanzintervalle von $\sigma(\lambda; x)$ verschieden ist, stetig; sie besitzt an jeder der letztgenannten Stellen — falls sie nicht daselbst ebenfalls stetig ist — eine Diskontinuität erster Art, d. h. es existieren die rechts- und linksseitigen Grenzwerte $\omega_p(\lambda + 0)$ und $\omega_p(\lambda - 0)$ auch an diesen Stellen; die Anzahl derjenigen Unstetigkeitsstellen, wo der Sprung von ω_p, d. h. $|\omega_p(\lambda + 0) - \omega_p(\lambda - 0)|$ eine gegebene positive Größe übersteigt, ist endlich.

Den ersten Teil dieser Behauptung — die Stetigkeit von $\omega_p(\lambda)$ an einer Stelle λ_0, die von den Mittelpunkten jener Konstanzintervalle verschieden ist — zeigt man folgendermaßen:

Wäre $\omega_p(\lambda)$ an der Stelle λ_0 nicht stetig, so könnte man eine gegen λ_0 strebende Folge λ_n $(n = 1, 2, 3, \ldots)$ derart angeben, daß

$$\omega = \lim_{n=\infty} \omega_p(\lambda_n)$$

von $\omega_p(\lambda_0)$ verschieden ist; wir nehmen etwa $\omega > \omega_p(\lambda_0)$ an. Da der Wertevorrat der Funktion $\omega_p(\lambda)$ zwischen den Grenzen m_p und M_p liegt, die Punktmenge $\mathfrak{M}_p$ aber überall dicht in diesem Intervall ist, so gibt es solche dieser Menge $\mathfrak{M}_p$ angehörenden Werte $\mu_p^{(q)}$, die zwischen $\omega_p(\lambda_0)$ und ω liegen. Wir denken uns eine solche herausgewählt, so daß also

$$\omega_p(\lambda_0) < \mu_p^{(q)} < \omega$$

ist, und beschränken uns auf so große Werte von n, für die

$$\omega_p(\lambda_n) > \mu_p^{(q)} \tag{16}$$

ist. Aus der am Ende von 4. gegebenen Definition der Funktion $\omega_p(\lambda)$ folgt nun unmittelbar, daß

$$f_p(\lambda_0, \mu_p^{(q)}) = 1$$

sein muß; da andererseits die Funktion $f_p(\lambda, \mu_p^{(q)})$, als Funktion der einen Veränderlichen λ betrachtet, an der Stelle $\lambda = \lambda_0$ stetig ist (ihre Unstetigkeitsstellen können ja nur in die Mittelpunkte der Konstanzintervalle fallen), so gilt auch für hinreichend große n

$$f_p(\lambda_n, \mu_p^{(q)}) = 1 .$$

Daraus folgt aber auf Grund der Definition von $\omega_p(\lambda)$

$$\mu_p^{(q)} \geqq \omega_p(\lambda_n),$$

in Widerspruch mit der Ungleichung (16).

In gleicher Weise wird die Annahme $\omega < \omega_p(\lambda_0)$ ad absurdum geführt.

6. Es sei zweitens λ_0 der Mittelpunkt h_k eines der obigen Konstanzintervalle. Ist $\omega_p(\lambda)$ an dieser Stelle nicht stetig, so kann man eine *monoton wachsend* gegen λ_0 strebende Folge λ_n' und eine *monoton abnehmend* gegen λ_0 strebende Folge λ_n'' derart bestimmen, daß die beiden Grenzwerte

$$\lim_{n=\infty} \omega_p(\lambda_n') = \omega' \quad \text{und} \quad \lim_{n=\infty} \omega_p(\lambda_n'') = \omega''$$

verschieden ausfallen; wir nehmen etwa $\omega' > \omega''$ an (der Fall $\omega' < \omega''$ wird genau so behandelt). Wir können noch annehmen, daß ω' das Maximum der Grenzwerte $\lim_{n=\infty} \omega_p(\lambda_n')$ ist, wobei λ_n' wachsend gegen λ_0 strebt, und analog, daß ω'' das Minimum der Grenzwerte $\lim_{n=\infty} \omega_p(\lambda_n'')$ ist, wobei λ_n'' abnehmend gegen λ_0 strebt.

Es sei nun wiederum $\mu_p^{(q)}$ *irgendeine Stelle* der Menge $\mathfrak{M}_p$, die zwischen ω' und ω'' liegt:

$$\omega'' < \mu_p^{(q)} < \omega' . \tag{17}$$

Man kann unschwer zeigen, daß $f_p(\lambda, \mu_p^{(q)})$ (als Funktion von λ allein betrachtet) an der Stelle $\lambda = \lambda_0$ unstetig ist, und zwar ist für hinreichend kleine positive ε

$$f_p(\lambda', \mu_p^{(q)}) = 0 , \quad \text{falls} \quad \lambda_0 - \varepsilon \leqq \lambda' < \lambda_0 , \tag{18'}$$

und

$$f_p(\lambda'', \mu_p^{(q)}) = 1 , \quad \text{falls} \quad \lambda_0 \leqq \lambda'' \leqq \lambda'' + \varepsilon \tag{18''}$$

ist. Denn im entgegengesetzten Falle könnte man — da $f_p(\lambda, \mu_p^{(q)})$ in endlichvielen abgeschlossenen Intervallen gleich 1, anderswo gleich 0 ist — ein Intervall $\lambda_0 - \delta \leqq \lambda' \leqq \lambda_0$ angeben, $(\delta > 0)$, wo $f_p(\lambda', \mu_p^{(q)}) = 1$, bzw. ein Intervall $\lambda_0 < \lambda'' \leqq \lambda_0 + \delta$, wo $f_p(\lambda', \mu_p^{(q)}) = 0$ ist. Daraus würde aber folgen, daß für hinreichend große n

$$f_p(\lambda_n', \mu_p^{(q)}) = 1 \quad \text{bzw.} \quad f_p(\lambda_n'', \mu_p^{(q)}) = 0$$

ist; folglich wäre — mit Rücksicht auf die Definition der Funktion $\omega_p(\lambda)$ —

$$\omega_p(\lambda_n') \leqq \mu_p^{(q)} \quad \text{bzw.} \quad \omega_p(\lambda_n'') \geqq \mu_p^{(q)} ,$$

also auch — indem man zur Grenze $n = \infty$ übergeht —

$$\omega' \leqq \mu_p^{(q)} \quad \text{bzw.} \quad \omega'' \geqq \mu_p^{(q)} ,$$

in Widerspruch damit, daß $\mu_p^{(q)}$ der Ungleichung (17) gemäß gewählt wurde.

Es sei nun $\bar{\lambda}_1' < \bar{\lambda}_2' < \ldots < \bar{\lambda}_n' < \ldots$ eine beliebige andere wachsend gegen λ_0 strebende Folge; dann ist einerseits — da ω' das Maximum der obigen Grenzwerte bedeutet — für hinreichend große n

$$\omega_p(\bar{\lambda}_n') < \omega' + \delta , \tag{19'}$$

wie auch die positive Größe δ gewählt ist $(n = n(\delta))$; andererseits ist aber — ebenfalls für hinreichend große n — $\bar{\lambda}_n'$ im Intervall (18') gelegen, also

$$f_p(\bar{\lambda}_n', \mu_p^{(q)}) = 0 ,$$

folglich

$$\omega_p(\bar{\lambda}_n') \geqq \mu_p^{(q)} .$$

Dies gilt für *alle* $\mu_p^{(q)}$, die der Ungleichung (17) genügen. Da die Menge $\mathfrak{M}_p$ überall dicht ist[13]), so folgt daraus für jedes positive δ die Richtigkeit der

[13]) $\mathfrak{M}_p$ ist überall dicht im Intervall $[m_p, M_p]$, also um so mehr im Intervall $[\omega', \omega'']$.

Ungleichung

$$\omega_p(\bar{\lambda}_n') > \omega' - \delta \tag{19''}$$

für hinreichend große n. Der Vergleich der Ungleichungen (19') und (19'') ergibt

$$\lim_{n=\infty} \omega_p(\bar{\lambda}_n') = \omega',$$

womit gezeigt ist, daß die Funktion $\omega_p(\lambda)$ an der betrachteten Stelle λ_0 von links stetig ist, und in genau derselben Weise kann man zeigen, daß diese Funktion von rechts stetig ist. Wir schreiben in gewohnter Weise

$$\omega_p(\lambda_0 - 0) = \omega', \qquad \omega_p(\lambda_0 + 0) = \omega''.$$

Die letzte Behauptung unseres Satzes ist eine Konsequenz der oben dargelegten Tatsache, daß, falls $\omega_p(\lambda_0 - 0)$ und $\omega_p(\lambda_0 + 0)$ voneinander verschieden sind, für jede zwischen diesen beiden Grenzwerten liegende Stelle $\mu_p^{(q)}$ der Menge $\mathfrak{M}_p$ die Funktion $f_p(\lambda, \mu_p^{(q)})$ an der Stelle $\lambda = \lambda_0$ unstetig sein muß. In der Tat, da $\mathfrak{M}_p$ überall dicht im Intervall $[m_p, M_p]$ ist, so können wir bei vorgelegtem $\delta > 0$ *endlichviele Punkte* von $\mathfrak{M}_p$

$$\mu_p^{(1)}, \mu_p^{(2)}, \ldots, \mu_p^{(n)} \tag{20}$$

derart herausgreifen, daß in jedem Teilintervall von $[m_p, M_p]$ von der Länge δ mindestens eine dieser herausgegriffenen Stellen liegt. Ist daher λ_0 eine solche Unstetigkeitsstelle von $\omega_p(\lambda)$, wo der Sprung $|\omega_p(\lambda_0 - 0) - \omega_p(\lambda_0 + 0)|$ größer als δ ist, so liegt eine der obigen Größen (20) zwischen $\omega_p(\lambda_0 - 0)$ und $\omega_p(\lambda_0 + 0)$; folglich ist jede solche Stelle λ_0 gleichzeitig Sprungstelle einer der endlichvielen Funktionen (von λ)

$$f_p(\lambda, \mu_p^{(1)}),\ f_p(\lambda, \mu_p^{(2)}),\ \ldots,\ f_p(\lambda, \mu_p^{(n)}).$$

Da aber jede dieser Funktionen nur endlichviele Unstetigkeitsstellen hat, so ist die Anzahl der Stellen λ_0, an denen $\omega_p(\lambda)$ einen größeren Sprung als δ erleidet, ebenfalls endlich.

Damit sind alle unsere Behauptungen über das Verhalten der Funktionen $\omega_p(\lambda)$ bewiesen[14]).

§ 3.

Beweis der in der Einleitung ausgesprochenen Sätze.

1. Um auf Grund der im vorangehenden Paragraphen gegebenen Konstruktion der Funktionen $\omega_p(\lambda)$ zu dem Beweise unserer in der Einleitung aufgestellten Sätze zu gelangen, beweisen wir die Richtigkeit der folgenden

[14]) Man erkennt auch unschwer, daß an einer Unstetigkeitsstelle λ_0 der Wert der Funktion $\omega_p(\lambda)$ gleich dem kleineren der Grenzwerte $\omega_p(\lambda_0 - 0)$ und $\omega_p(\lambda_0 + 0)$ ist.

Relation:

$$C_p(x) = \int_0^1 \omega_p(\lambda)\, d\sigma(\lambda; x) \qquad (p = 1, 2, 3, \ldots). \tag{21}$$

Man erkennt zunächst unmittelbar — auf Grund der am Schluß von § 1 gemachten Bemerkung — die Existenz des rechts stehenden Stieltjes-Riemannschen Integrals. Denn die Sprungstellen von $\omega_p(\lambda)$ liegen in den Mittelpunkten der Konstanzintervalle von $\sigma(\lambda; x)$; jede solche Sprungstelle kann daher in ein Intervall eingeschlossen werden, in dem die Variation von $\sigma(\lambda; x)$ gleich Null ist. Da ferner die Anzahl derjenigen Sprungstellen von $\omega_p(\lambda)$, wo der Sprung größer als eine vorgelegte positive Größe δ ist, endlich ist, so folgt, daß man diese Stellen in endlichviele Intervalle einschließen kann derart, daß die Summe der Zuwächse von σ in diesen Intervallen gleich Null ist; — d. h. das am Ende von § 1 angegebene Kriterium ist sicherlich erfüllt.

Um (21) zu beweisen, ziehen wir die Darstellung (6) von $C_p(x)$ heran:

$$C_p(x) = \int_{m_p}^{M_p} \mu_p\, d\sigma^{(p)}(\mu_p; x), \tag{6}$$

wobei die rechte Seite der Grenzwert der Summe

$$\sum_{k=1}^{n} \mu_p^{(k-1)} [\sigma^{(p)}(\mu_p^{(k)}; x) - \sigma^{(p)}(\mu_p^{(k-1)}; x)]$$

ist, wenn die Anzahl der Teilungspunkte unbegrenzt derartig wächst, daß das Maximum von $\mu_p^{(k)} - \mu_p^{(k-1)}$ gegen Null konvergiert. Wir können annehmen, daß diese Teilungspunkte

$$\mu_p^{(0)} < \mu_p^{(1)} < \mu_p^{(2)} < \ldots < \mu_p^{(n)}$$

Punkte der in $m_p \leqq \mu_p \leqq M_p$ überall dichten Menge $\mathfrak{M}_p$ sind, und es sei ε der größte Wert der Differenzen $\mu_p^{(k)} - \mu_p^{(k-1)}$. Wir erhalten für die obige endliche Summe — mit Rücksicht auf (14) — die Darstellung

$$S_\varepsilon = \int_0^1 \sum_{k=1}^{n} \mu_p^{(k-1)} [f_p(\lambda, \mu_p^{(k)}) - f_p(\lambda, \mu_p^{(k-1)})]\, d\sigma(\lambda; x).$$

Die im Integranden stehende endliche Summe ist auf Grund der in 4. § 2 gegebenen Definition der Funktion $\omega_p(\lambda)$ leicht abzuschätzen. Denn es sind bei jedem λ offenbar alle Differenzen

$$f_p(\lambda, \mu_p^{(k)}) - f_p(\lambda, \mu_p^{(k-1)}) \qquad (k = 1, 2, \ldots, n)$$

bis auf eine gleich Null; diese nicht verschwindende Differenz ist, falls $\omega_p(\lambda)$ von den Größen $\mu_p^{(0)}, \mu_p^{(1)}, \ldots, \mu_p^{(n)}$ verschieden ist, diejenige, für die $\mu_p^{(k-1)} < \omega_p(\lambda) < \mu_p^{(k)}$ ist; falls aber $\omega_p(\lambda) = \mu_p^{(k-1)}$ ist, so ist die fragliche Differenz entweder diejenige, für die $\mu_p^{(k-1)} = \omega_p(\lambda) < \mu_p^{(k)}$, oder diejenige,

für die $\mu_p^{(k-2)} < \omega_p(\lambda) = \mu_p^{(k-1)}$ ist, und der Wert des entsprechenden Gliedes in jener Summe ist gleich $\mu_p^{(k-1)}$ bzw. $\mu_p^{(k-2)}$, da die fragliche Differenz $= 1$ ist. Wir erhalten folglich bei jedem λ für den Integranden die Abschätzung

$$\omega_p(\lambda) - \varepsilon < \sum_{k=1}^{n} \mu_p^{(k-1)} [f_p(\lambda; \mu_p^{(k)}) - f_p(\lambda; \mu_p^{(k-1)})] \leqq \omega_p(\lambda),$$

da das fragliche $\mu_p^{(k-1)}$ bzw. $\mu_p^{(k-2)}$ zwischen diesen Grenzen liegt. Da $\sigma(\lambda; x)$ nichtabnehmend und $\int_0^1 d\sigma(\lambda; x) = \mathsf{E}(x)$ ist, so folgt daraus unmittelbar

$$\int_0^1 \omega_p(\lambda)\, d\sigma(\lambda; x) - \varepsilon \mathsf{E}(x) < S_\varepsilon \leqq \int_0^1 \omega_p(\lambda)\, d\sigma(\lambda; x),$$

also (indem man zur Grenze $\varepsilon = 0$ übergeht) unsere Behauptung (21).

2. Um die weiteren Entwicklungen in einfachster Form darstellen zu können, wollen wir an Stelle der bisher betrachteten Funktionen $\omega_p(\lambda)$ andere Funktionen $\tilde{\omega}_p(\lambda)$ einführen, die stetig sind und für die die Relationen (21) richtig bleiben. Dies geschieht ohne Schwierigkeit mit Rücksicht auf den Umstand, daß die Unstetigkeitsstellen der Funktionen $\omega_p(\lambda)$ in die Mittelpunkte der Konstanzintervalle von $\sigma(\lambda; x)$ fallen. Ist nämlich λ_0 irgendeine Stelle, an der $\omega_p(\lambda)$ einen Sprung erleidet, so wähle man ε $(\varepsilon = \varepsilon(\lambda_0) > 0)$ so klein, daß das Intervall $[\lambda_0 - \varepsilon, \lambda_0 + \varepsilon]$ ein echter Teil des entsprechenden Konstanzintervalls (dessen Mittelpunkt λ_0 ist) sei. In diesem Intervall ersetze man $\omega_p(\lambda)$ durch die lineare Funktion

$$\frac{\omega_p(\lambda_0+\varepsilon) - \omega_p(\lambda_0-\varepsilon)}{2\varepsilon}\lambda - \frac{(\lambda_0-\varepsilon)\omega_p(\lambda_0+\varepsilon) - (\lambda_0+\varepsilon)\omega_p(\lambda_0-\varepsilon)}{2\varepsilon}$$

$$(\lambda_0 - \varepsilon \leqq \lambda \leqq \lambda_0 + \varepsilon).$$

Führt man diese Konstruktion für alle Sprungstellen von $\omega_p(\lambda)$ aus, so gelangt man zu einer offenbar überall stetigen Funktion $\tilde{\omega}_p(\lambda)$, für die

$$\int_0^1 [\tilde{\omega}_p(\lambda) - \omega_p(\lambda)]\, d\sigma(\lambda; x) = 0$$

ist, da ja jedes solche Intervall, in dem $\tilde{\omega} - \omega$ nicht überall verschwindet, echter Teil eines Intervalls ist, in dem $\sigma(\lambda; x)$ konstant bleibt. Daraus folgt die Beziehung

$$C_p(x) = \int_0^1 \tilde{\omega}_p(\lambda)\, d\sigma(\lambda; x), \tag{22}$$

d. h. es gelten für alle p, α, β die Relationen

$$c_{p\alpha\beta} = \int_0^1 \tilde{\omega}_p(\lambda)\, d\sigma_{\alpha\beta}(\lambda).$$

3. Aus diesen Relationen erhält man unmittelbar die entsprechenden Darstellungen für die Formen

$$C_p C_\alpha(x) = \sum_{\alpha,\beta,k=1}^{\infty} c_{p\alpha k} c_{qk\beta} x_\alpha x_\beta = \sum_{\alpha,\beta=1}^{\infty} \Big(\sum_{k=1}^{\infty} \int_0^1 \tilde{\omega}_p(\lambda)\, d\sigma_{\alpha k}(\lambda) \int_0^1 \tilde{\omega}_q(\lambda)\, d\sigma_{k\beta}(\lambda) \Big) x_\alpha x_\beta .$$

Man hat zu diesem Ende nur zu beachten, daß aus den für die Matrizen $\sigma_{\alpha\beta}(\lambda)$ geltenden Relationen (13) — wie in 1. § 1 bemerkt — die Hilbertsche Vollständigkeitsrelation (5′), d. h.

$$(5') \qquad \int_0^1 u(\lambda)\, v(\lambda)\, d\sigma_{\alpha\beta}(\lambda) = \sum_{k=1}^{\infty} \int_0^1 u(\lambda)\, d\sigma_{\alpha k}(\lambda) \int_0^1 v(\lambda)\, d\sigma_{k\beta}(\lambda)$$

für jedes Paar von stetigen Funktionen $u(\lambda)$, $v(\lambda)$ folgt. Setzt man darin $u(\lambda) = \tilde{\omega}_p(\lambda)$, $v(\lambda) = \tilde{\omega}_q(\lambda)$, so ergibt sich

$$(23) \qquad C_p C_q(x) = \int_0^1 \tilde{\omega}_p(\lambda)\, \tilde{\omega}_q(\lambda)\, d\sigma(\lambda; x);$$

durch Wiederholung dieses Verfahrens erhält man die Darstellungen

$$(24) \quad C_p C_q C_r(x) = \sum_{\alpha,\beta,k,l=1}^{\infty} c_{p\alpha k} c_{qkl} c_{rl\beta} x_\alpha x_\beta = \int_1^1 \tilde{\omega}_p(\lambda)\, \tilde{\omega}_q(\lambda)\, \tilde{\omega}_r(\lambda)\, d\sigma(\lambda, x).$$

4. Auf Grund dieser Formeln können wir unseren Satz wie folgt beweisen: Wir ziehen unsere Bedingung III heran, die wir in der Form

$$\sum_{p=1}^{\infty} e_p c_{p\alpha\beta} = \delta_{\alpha\beta}$$

schreiben, wobei also $e_1, e_2, e_3, \ldots$ ein Wertsystem von konvergenter Quadratsumme ist. Berücksichtigt man die Bedingung I des zu beweisenden Satzes ($c_{pqr} = c_{prq} = \ldots = c_{rqp}$), so erkennt man die Richtigkeit der Gleichungen

$$C_p(e) = \sum_{\alpha,\beta=1}^{\infty} c_{p\alpha\beta} e_\alpha e_\beta = \sum_{\beta=1}^{\infty} \delta_{p\beta} e_\beta = e_p,$$

$$C_p C_q(e) = \sum_{\alpha,\beta,k=1}^{\infty} c_{p\alpha k} c_{qk\beta} e_\alpha e_\beta = \sum_{k=1}^{\infty} \delta_{pk} \delta_{qk} = \delta_{pq},$$

$$C_p C_q C_r(e) = \sum_{\alpha,\beta,k,l=1}^{\infty} c_{p\alpha k} c_{qkl} c_{rl\beta} e_\alpha e_\beta = \sum_{k,l=1}^{\infty} \delta_{pk} \delta_{rl} c_{qkl} = c_{pqr}.$$

(Die Vertauschbarkeit der Reihenfolge der verschiedenen Summationen ist durch die Hilbertschen Faltungssätze gerechtfertigt.)

Mit Rücksicht auf diese Relationen erhalten wir aus den Darstellungen (23) und (24), wenn wir noch zur Abkürzung die Funktion

$$\tilde{\sigma}(\lambda) = \sigma(\lambda; e) = \sum_{\alpha,\beta=1}^{\infty} \sigma_{\alpha\beta}(\lambda)\, e_\alpha e_\beta$$

einführen, die Gleichungen

$$(25)\qquad \begin{aligned} &\int_0^1 \tilde{\omega}_p(\lambda)\,\tilde{\omega}_q(\lambda)\,d\tilde{\sigma}(\lambda) = \delta_{pq},\\ &\int_0^1 \tilde{\omega}_p(\lambda)\,\tilde{\omega}_q(\lambda)\,\tilde{\omega}_r(\lambda)\,d\tilde{\sigma}(\lambda) = c_{pqr}; \end{aligned}$$

dabei ist $\tilde{\sigma}(\lambda)$ eine im Intervall $0 \leqq \lambda \leqq 1$ definierte nicht abnehmende Funktion. D. h. die stetigen Funktionen $\tilde{\omega}_p(\lambda)$ bilden im Intervall $0 \leqq \lambda \leqq 1$ ein in bezug auf die nicht abnehmende Funktion $\tilde{\sigma}(\lambda)$ orthogonales Funktionensystem, dessen Multiplikationstabelle aus den vorgelegten Größen c_{pqr} besteht.

5. Wir haben noch zu zeigen, daß dieses Orthogonalsystem ein abgeschlossenes ist, d. h. daß für jede in $0 \leqq \lambda \leqq 1$ stetige Funktion $u(\lambda)$ die Relation[15])

$$(26)\qquad \int_0^1 u^2(\lambda)\,d\tilde{\sigma}(\lambda) = \sum_{k=1}^{\infty}\Big(\int_0^1 u(\lambda)\,\tilde{\omega}_k(\lambda)\,d\tilde{\sigma}(\lambda)\Big)^2$$

gilt. Zu diesem Ende betrachten wir die quadratische Form[16])

$$U(x) = \sum_{\alpha,\beta=1}^{\infty} u_{\alpha\beta}\,x_\alpha\,x_\beta = \int_0^1 u(\lambda)\,d\sigma(\lambda, x),$$

die wegen der Beschränktheit von $u(\lambda)$ ebenfalls beschränkt ist. Die Anwendung der Vollständigkeitsrelation (5′) liefert unmittelbar

$$U^2(x) = \sum_{\alpha,\beta,k=1}^{\infty} u_{\alpha k}\,u_{k\beta}\,x_\alpha\,x_\beta = \int_0^1 u^2(\lambda)\,d\sigma(\lambda; x),$$

$$UC_p(x) = \sum_{\alpha,\beta,k=1}^{\infty} u_{\alpha k}\,c_{pk\beta}\,x_\alpha\,x_\beta = \int_0^1 u(\lambda)\,\omega_p(\lambda)\,d\sigma(\lambda; x),$$

so daß unsere Behauptung (26) mit der Relation

$$U^2(e) = \sum_{p=1}^{\infty}(UC_p(e))^2$$

äquivalent ist. Nun ist aber — mit Rücksicht auf I und III —

$$UC_p(e) = \sum_{\alpha,\beta,k=1}^{\infty} u_{\alpha k}\,c_{pk\beta}\,e_\alpha\,e_\beta = \sum_{\alpha,k=1}^{\infty} \delta_{pk}\,u_{\alpha k}\,e_\alpha = \sum_{\alpha=1}^{\infty} u_{\alpha p}\,e_\alpha,$$

und daher in der Tat

$$U^2(e) = \sum_{p=1}^{\infty}\Big(\sum_{\alpha=1}^{\infty} u_{\alpha p}\,e_\alpha\Big)^2 = \sum_{p=1}^{\infty}(UC_p(e))^2.$$

Damit ist unser Satz 1 in allen seinen Teilen bewiesen.

---

[15]) Bekanntlich ist diese Relation mit der Vollständigkeitsrelation (2′) äquivalent.

[16]) d. h. wir setzen $u_{\alpha\beta} = \int_0^1 u(\lambda)\,d\sigma_{\alpha\beta}(\lambda)$.

6. Nach einer Bemerkung von Herrn Lebesgue[17]) kann man jedes Stieltjessche Integral auf mannigfache Weise auf gewöhnliche Integrale zurückführen. Im vorliegenden Falle, wo es sich um Integrale $\int_0^1 f(\lambda)\,d\tilde{\sigma}(\lambda)$ mit stetigem $f(\lambda)$ und nicht abnehmendem $\tilde{\sigma}(\lambda)$ handelt, ist die folgende Zurückführung die bequemste. Man ordne jeder stetigen Funktion $f(\lambda)$ eine Funktion $F(s)$, die im Intervall

$$a = \tilde{\sigma}(0) \leqq s \leqq \tilde{\sigma}(1) = b \tag{27}$$

definiert ist, wie folgt zu: Ist s_0 ein solcher Wert, der an einer einzigen Stelle λ_0 von $\tilde{\sigma}(\lambda)$ angenommen wird, so setze man

$$F(s_0) = f(\lambda_0);$$

nimmt $\tilde{\sigma}(\lambda)$ den Wert s_1 an mehreren Stellen an, also an jeder (inneren) Stelle eines Intervalls, so bezeichne man (um die Gedanken zu fixieren) mit λ_1 den Mittelpunkt dieses Intervalls und setze

$$F(s_1) = f(\lambda_1).$$

Ist endlich s_2 ein solcher Wert im obigen Intervall (27), den $\tilde{\sigma}(\lambda)$ nicht annimmt, so gibt es jedenfalls einen Wert λ_2 derart, daß

$$\tilde{\sigma}(\lambda_2 - o) \leqq s_2 \leqq \tilde{\sigma}(\lambda_2 + 0)$$

ausfalle; in diesem Falle setze man $F(s_2) = f(\lambda_2)$.

Für die so definierte Funktion gilt offenbar

$$\int_a^b F(s)\,ds = \int_0^1 f(\lambda)\,d\tilde{\sigma}(\lambda), \tag{28}$$

wobei das linksstehende Integral ein gewöhnliches Integral im Riemannschen Sinne ist, wie man sich durch den Vergleich der endlichen Summen, deren Grenzwert die beiden Integrale sind, leicht überzeugt. Die Unstetigkeitsstellen von $F(s)$ hängen nur von $\tilde{\sigma}(\lambda)$ ab; ist ferner λ_2 eine Sprungstelle von $\tilde{\sigma}(\lambda)$, so ist das Intervall $\tilde{\sigma}(\lambda_2 - 0) \leqq s \leqq \tilde{\sigma}(\lambda_2 + 0)$ ein Konstanzintervall aller dieser Funktionen $F(s)$. Man erkennt auch unmittelbar, daß diese Zuordnung der Funktionen $F(s)$ zu jeder stetigen Funktion $f(\lambda)$ (natürlich bei festem $\tilde{\sigma}(\lambda)$) distributiv ist und daß dem Produkte $f_1(\lambda) f_2(\lambda)$ zweier stetigen Funktionen das Produkt $F_1(s) F_2(s)$ der entsprechenden zugeordneten Funktionen zugeordnet ist.

Bezeichnen wir daher die zu den Funktionen $\tilde{\omega}_p(\lambda)$ vermöge der obigen Konstruktion zugeordneten Funktionen mit $\Omega_p(s)$, so gelten — mit Rück-

[17]) Vgl. Lebesgue a. a. O. [10]), S. 252–261.

sicht auf (25) — die Beziehungen

$$\int_a^b \Omega_p(s)\,\Omega_q(s)\,ds = \delta_{pq}, \qquad \int_a^b \Omega_p(s)\,\Omega_q(s)\,\Omega_r(s)\,ds = c_{pqr},$$

d. h. die beschränkten, im Riemannschen Sinne integrierbaren Funktionen $\Omega_p(s)$ bilden ein im Intervall $a \leqq s \leqq b$ definiertes gewöhnliches orthogonales Funktionensystem, mit der kubischen Matrix (c_{pqr}) als Multiplikationstabelle.

Daß dieses Orthogonalsystem (in der Terminologie der Einleitung) in sich abgeschlossen ist, erkennt man unmittelbar, indem man in der Relation (26) an Stelle von $u(\lambda)$ die Funktionen $\tilde{\omega}_p(\lambda)\,\tilde{\omega}_q(\lambda)$ bzw. 1 einsetzt. Die resultierenden Gleichungen nehmen, wenn man statt den $\tilde{\omega}_p$ wiederum die Ω_p einführt, die folgende Form an:

$$\int_a^b (\Omega_p(s)\,\Omega_q(s))^2\,ds = \sum_{k=1}^{\infty} \Big(\int_a^b \Omega_p(s)\,\Omega_q(s)\,\Omega_k(s)\,ds\Big)^2$$

bzw.

$$\int_a^b 1 \cdot ds = \sum_{k=1}^{\infty} \Big(\int_a^b \Omega_p(s)\,ds\Big)^2,$$

deren Inhalt eben die fragliche Eigenschaft des Systems $\Omega_p(s)$ ist.

Damit ist die Existenz eines in sich abgeschlossenen, beschränkten Orthogonalsystems mit der Multiplikationstabelle c_{pqr} bewiesen (Satz 2).

Man beachte noch, daß (falls die Funktion $\tilde{\sigma}(\lambda)$ nicht überall stetig ist), jede unserer Orthogonalfunktionen $\Omega_p(s)$ in den endlichvielen oder abzählbarvielen Intervallen $\tilde{\sigma}(\lambda_2 - 0) \leqq s \leqq \tilde{\sigma}(\lambda_2 + 0)$, wo λ_2 irgendeine Sprungstelle von $\tilde{\sigma}(\lambda)$ bedeutet, konstant ist.

§ 4.

Schlußbemerkungen. Isomorphe Orthogonalsysteme.

Der zuletzt bewiesene Satz gewährleistet die Existenz eines in sich abgeschlossenen Orthogonalsystems, das im allgemeinen nicht abgeschlossen zu sein braucht. Ja, man kann unschwer eine kubische Matrix (c_{pqr}) angeben, die den Bedingungen I, II, III genügt (für die also die Sätze 1 und 2 gelten), und von der man zeigen kann, daß ein zugehöriges abgeschlossenes Orthogonalsystem (in gewöhnlichem Sinne), dessen Multiplikationstabelle aus diesen Größen c_{pqr} gebildet ist, nicht existiert. Will man daher bei allen solchen c_{pqr} mit einem abgeschlossenen Funktionensystem operieren, so hat man die Orthogonalität entweder in der obigen Weise (also in bezug auf $\tilde{\sigma}(\lambda)$) zu fassen, oder aber — wenn man Stieltjessche Integrale vermeiden will — in einer anderen Weise, die ebenfalls in der Literatur bereits aufgetreten ist. Diese Modifikation des Orthogonalitätsbegriffes ist die folgende: Man greife aus dem Definitions-

bereich $\mathfrak{M}$ des beschränkten Funktionensystems $\varphi_1(s), \varphi_2(s), \varphi_3(s), \ldots$ eine endliche oder abzählbare Punktmenge $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ heraus und ordne jeder dieser Stellen eine positive Größe l_1 bzw. $l_2, \ldots, l_n, \ldots$ hinzu, deren Summe konvergiert; an Stelle des Orthogonalitätsbegriffes treten die Relationen

$$\int_{\mathfrak{M}} \varphi_p(s)\,\varphi_q(s)\,ds + \sum_{n=1}^{\infty} l_n\,\varphi_p(a_n)\,\varphi_q(a_n) = \delta_{pq} \quad (p, q = 1, 2, 3, \ldots)$$

und es bietet keine Schwierigkeit, den Begriff der Abgeschlossenheit oder Vollständigkeit zu übertragen.

Auf Grund unseres Satzes 2 erkennt man unschwer, daß man, falls man diesen modifizierten Orthogonalitätsbegriff zugrunde legt, zu jedem den Bedingungen I, II, III genügenden Größensystem c_{pqr} ein abgeschlossenes Funktionensystem konstruieren kann mit der kubischen Matrix (c_{pqr}) als Multiplikationstabelle. Man hat zu diesem Ende nur die erwähnte Tatsache zu beachten, daß jede der im Satze 2 auftretenden Funktionen $\Omega_p(s)$ in bestimmten endlichvielen oder abzählbarvielen Intervallen — deren Länge wir in irgendeiner Reihenfolge mit $l_1, l_2, l_3, \ldots$ bezeichnen — konstant bleibt. Ändert man — falls nötig — den Wert dieser Funktionen an den Anfangsstellen dieser Intervalle — wir bezeichnen diese Stellen mit $a_1, a_2, a_3, \ldots$ — derart, daß $\Omega_p(a_n)$ gleich dem Wert von $\Omega_p(s)$ im angrenzenden Konstanzintervall sei, so erkennt man, daß die in dieser Weise modifizierten Funktionen in der Punktmenge, die aus dem ursprünglichen Definitionsintervall durch Fortlassung dieser Konstanzintervalle entsteht, die letztgenannten modifizierten Orthogonalitätseigenschaften erfüllen; und es ist auch leicht zu zeigen, daß die so erhaltenen Funktionen in dieser Punktmenge die modifizierte Vollständigkeitsrelation befriedigen.

2. Es liegt diesen Untersuchungen die Auffassung zugrunde, daß die Multiplikationstabelle die wesentlichen Eigenschaften des zugehörigen Orthogonalsystems enthält. Zwei Orthogonalsysteme, deren Multiplikationstabellen übereinstimmen, sollen daher in ihren wesentlichen Eigenschaften übereinstimmen. Wir nennen solche Orthogonalsysteme *isomorph*; die Bedingungen der *Isomorphie* zweier Orthogonalsysteme, $\Omega'_p(s')$ bzw. $\Omega''_p(s'')$, deren Definitionsbereich $\mathfrak{M}'$ bzw. $\mathfrak{M}''$ ist, lauten daher wie folgt:

$$\int_{\mathfrak{M}'} \Omega'_p(s')\,\Omega'_q(s')\,\Omega'_r(s')\,ds' = \int_{\mathfrak{M}''} \Omega''_p(s'')\,\Omega''_q(s'')\,\Omega''_r(s'')\,ds''$$

$$(p, q, r = 1, 2, 3, \ldots)$$

und analog in den anderen Fällen.

Ein Licht auf den Zusammenhang zwischen isomorphen Orthogonalsystemen wirft der folgende Satz:

Die beiden abgeschlossenen und beschränkten Orthogonalsysteme: das in der Punktmenge $\mathfrak{M}'$ definierte System $\Omega_p'(s')$ und das in $\mathfrak{M}''$ definierte System $\Omega_p''(s'')$ seien isomorph. Es müssen in diesem Falle $\mathfrak{M}'$ und $\mathfrak{M}''$ dasselbe Maß besitzen und diese beiden Orthogonalsysteme erzeugen eine Zuordnung, die jeder meßbaren Teilmenge $\mathfrak{m}'$ von $\mathfrak{M}'$ eine maßgleiche Teilmenge $\mathfrak{m}''$ von $\mathfrak{M}''$ zuordnet derart, daß elementenfremden Teilmengen $\mathfrak{m}_1'$ und $\mathfrak{m}_2'$ von $\mathfrak{M}'$ solche Teilmengen $\mathfrak{m}_1''$ und $\mathfrak{m}_2''$ von $\mathfrak{M}''$ zugeordnet sind, deren gemeinsamer Teil eine Nullmenge ist, und die der Vereinigungsmenge $\mathfrak{m}_1' + \mathfrak{m}_2'$ zugeordnete Teilmenge von $\mathfrak{M}''$ bis auf eine Nullmenge mit $\mathfrak{m}_1'' + \mathfrak{m}_2''$ übereinstimmt; diese Zuordnung ist so beschaffen, daß, wie auch das Polynom $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ von beliebig vielen Veränderlichen, und die Größen a, b gewählt sind, derjenigen Teilmenge $\mathfrak{m}'$ von $\mathfrak{M}'$, in der

$$a \leqq f(\Omega_1', \Omega_2', \ldots, \Omega_n') \leqq b$$

ist, diejenige (ihr maßgleiche) Teilmenge $\mathfrak{m}''$ von $\mathfrak{M}''$ zugeordnet ist, in der

$$a \leqq f(\Omega_1'', \Omega_2'', \ldots, \Omega_n'') \leqq b$$

ist. Die Umkehrung dieses Satzes ist trivial.

Den Beweis dieses Satzes und anderer Sätze dieser Art gedenke ich an einer anderen Stelle darzulegen.

(Eingegangen am 27. November 1929.)

Über unendliche kommutative Gruppen.

Von

Alfred Haar in Szeged.

Einleitung.

1. Die Lehre der endlichen Abelschen Gruppen verdankt man in erster Reihe den grundlegenden Arbeiten von Frobenius, Stickelberger und Weber; die Gruppencharaktere spielen in dieser Theorie eine ausgezeichnete und überaus wichtige Rolle. Man gelangt zu diesem Begriff, indem man ein System von komplexen Zahlen zu bestimmen sucht, das mit einer vorgelegten kommutativen Gruppe n-ter Ordnung isomorph ist, wenn man als Verknüpfungsregel die Multiplikation ansieht. Ein Gruppencharakter besteht daher aus n Größen, deren jede eine n-te Einheitswurzel ist, und man zeigt, daß die Anzahl der verschiedenen Charaktere ebenfalls gleich n ist, ferner, daß die so erhaltene quadratische Matrix — wenn man sie noch mit $\sqrt{n}$ dividiert — eine unitäre ist. Das wesentlichste Hilfsmittel, vermöge deren man diese Sätze beweist, ist die sogenannte Basis der Gruppe; die Schwierigkeit besteht eben in dem Beweise der Existenz einer Basis.

Es ist das Ziel der vorliegenden Arbeit, die Theorie der Gruppencharaktere auf solche kommutative Gruppen zu übertragen, welche aus abzählbar unendlich vielen Elementen bestehen; solche Gruppen kommen in den verschiedensten Zweigen der Algebra und der Zahlentheorie häufig vor. Die erste Schwierigkeit, die dabei auftritt, rührt davon her, daß bei solchen unendlichen Gruppen im allgemeinen das Analogon der Basis fehlt. Betrachtet man etwa die Gesamtheit der reellen (positiven und negativen) rationalen Zahlen, so bilden diese eine kommutative Gruppe, wenn man die *Addition* als Verknüpfungsregel ansieht (das Einheitselement ist dabei die Null); man zeigt aber unschwer, daß diese Gruppe keine Basis besitzt. Mit anderen Worten, es ist nicht möglich, eine solche Teilmenge $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots$ der rationalen Zahlen zu finden, daß vermöge dieser jede rationale Zahl r in *eindeutiger Weise* in der Form $r = m_1 \alpha_1 + m_2 \alpha_2 + m_3 \alpha_3 + \ldots$ darstell-

bar sei, wobei $m_1, m_2, m_3, \ldots$ endlich viele (positive oder negative) ganze Zahlen bedeuten[1]).

Andererseits liefert aber die *unendliche zyklische Gruppe*, die aus den positiven und negativen Potenzen eines Elementes A besteht:

$$\ldots A^{-2}, A^{-1}, A^0 = E, A^1, A^2, \ldots$$

ein Beispiel, wo man das Analogon der Gruppencharaktere unmittelbar angeben kann. Ordnet man dem Element $A^n (n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$ die Funktion

$$e^{2i\pi ns} \qquad (0 \leqq s \leqq 1)$$

zu, so sind bei jedem Wert von s den Gruppenelementen solche Größen zugeordnet, welche offenbar mit der vorgelegten Gruppe isomorph sind, wenn man die Multiplikation als Verknüpfungsregel ansieht. Das obige unitär-orthogonale Funktionensystem spielt daher in diesem Falle eine ähnliche Rolle, wie die durch die Gruppencharaktere definierte unitäre Matrix bei den endlichen Abelschen Gruppen. Die Anzahl der „Darstellungen" der obigen unendlichen Gruppe ist daher nicht abzählbar unendlich groß, wie man es auf Grund der Analogie mit den endlichen Gruppen erwarten könnte; ja es werden sogar die isomorphen Darstellungen durch die obigen Funktionen nicht einmal erschöpft; darin besteht eben der große Unterschied zwischen der Theorie der endlichen und unendlichen kommutativen Gruppen.

2. Durch das obige Beispiel der unendlichen zyklischen Gruppe wird der Gedanke nahegelegt, die Frage zu stellen, *ob nicht zu jeder aus abzählbar unendlich vielen Elementen bestehenden kommutativen Gruppe ein isomorphes unitär-orthogonales Funktionensystem existiert*? Bekanntlich bezeichnet man ein (etwa im Intervall $0 \leqq s \leqq 1$ definiertes) Funktionensystem

$$\mathsf{X}_1(s), \mathsf{X}_2(s), \mathsf{X}_3(s), \ldots, \mathsf{X}_n(s), \ldots$$

als ein unitär-orthogonales System, falls die Beziehungen

$$\int_0^1 \mathsf{X}_p(s)\, \overline{\mathsf{X}}_q(s)\, ds = \delta_{pq} = \begin{cases} 1, & \text{für } p = q, \\ 0, & \text{für } p \gtrless q \end{cases}$$

statthaben, wobei $\overline{\mathsf{X}}_q(s)$ die zu $\mathsf{X}_q(s)$ konjugiert komplexe Funktion bezeichnet. In gleicher Weise sagen wir, daß die für $0 \leqq s \leqq 1$ definierten Funktionen

$$\chi_1(s), \chi_2(s), \chi_3(s), \ldots, \chi_n(s), \ldots$$

---

[1]) In der Tat, es sei n eine beliebige ganze Zahl und $\mu_1 \alpha_1 + \mu_2 \alpha_2 + \mu_3 \alpha_3 + \ldots$ die Darstellung von $\frac{r}{n}$; wegen der angenommenen Eindeutigkeit der Darstellung durch die obige Basis $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots$ würde daraus, falls $r = m_1 \alpha_1 + m_2 \alpha_2 + \ldots$ die Darstellung von r ist, folgen, daß $m_1 = n \mu_1$, d. h. daß m_1 durch jede ganze Zahl teilbar ist.

ein unitär-orthogonales System in bezug auf die reelle nichtabnehmende Funktion $\sigma(s)$ (definiert im selben Intervall) bilden, falls

$$\int_0^1 \chi_p(s)\,\bar{\chi}_q(s)\,d\sigma(s) = \delta_{pq} \qquad (p, q = 1, 2, 3, \ldots)$$

ist.

Die oben gestellte Frage steht im engen Zusammenhange mit einem Problem, das ich — allerdings für reelle orthogonale Funktionensysteme — in meiner kürzlich erschienenen Arbeit „Über die Multiplikationstabelle der orthogonalen Funktionensysteme" behandelt habe[2]). Ähnliche Betrachtungen, wie die daselbst entwickelten, führen mich in der vorliegenden Arbeit zu den beiden folgenden Sätzen, die für die hier behandelten unendlichen Gruppen ein volles Analogon dessen liefern, was in der Theorie der endlichen Abelschen Gruppen durch die Gruppencharaktere geleistet wird.

Satz I. *Es seien*

$$E, A, B, C, \ldots$$

die Elemente einer aus abzählbar unendlich vielen Elementen bestehenden kommutativen Gruppe; E sei das Einheitselement. Es existiert ein System von Funktionen

$$\chi_E(s) = 1,\ \chi_A(s),\ \chi_B(s),\ \chi_C(s), \ldots,$$

definiert im Intervall $0 \leqq s \leqq 1$, ferner eine im selben Intervall definierte reelle nicht abnehmende Funktion $\sigma(s)$ mit den folgenden Eigenschaften:

1. *jede dieser Funktionen ist im betrachteten Intervall überall stetig mit etwaiger Ausnahme einer abzählbaren Punktmenge, wo sie einen endlichen Sprung besitzen können; ferner ist für alle Stellen des Intervalls*

$$|\chi_A(s)| = |\chi_B(s)| = |\chi_C(s)| = \ldots = 1,$$

2. *es gilt für jedes Paar von Gruppenelementen A, B und für alle s die Beziehung*

$$\chi_A(s)\,\chi_B(s) = \chi_{AB}(s),$$

d. h. die obigen Funktionen sind mit der vorgelegten Gruppe isomorph; insbesondere ist daher $\chi_{A^{-1}}(s) = \bar{\chi}_A(s)$;

3. *es gelten die Integralrelationen*

$$\int_0^1 \chi_A(s)\,\bar{\chi}_B(s)\,d\sigma(s) = \delta_{A,B} = \begin{cases} 1 & \text{für } A = B, \\ 0 & \text{für } A \neq B, \end{cases}$$

d. h. die Funktionen $\chi_A(s)$ bilden ein unitär-orthogonales System in bezug auf $\sigma(s)$;

---

[2]) Math. Zeitschr. **31** (1930), S. 769—798.

4. *es gilt endlich die sogenannte Vollständigkeitsrelation*

$$\int_0^1 u(s)\,v(s)\,d\sigma(s) = \sum_{(A)} \int_0^1 u(s)\,\chi_A(s)\,d\sigma(s) \int_0^1 v(s)\,\bar{\chi}_A(s)\,d\sigma(s)$$

für jedes Paar von stetigen Funktionen $u(s)$, $u(s)$, wobei die Summation auf alle Gruppenelemente A zu erstrecken ist.

3. Eine unendliche Gruppe, bei der jedes Element so beschaffen ist, daß eine endliche Potenz dieses Elementes (diese Potenz muß natürlich nicht für alle Elemente dieselbe sein) gleich dem Einheitselement ist, bezeichne ich als *uneigentlich unendliche Gruppe.* Eine *eigentlich unendliche Gruppe* besitzt daher mindestens ein Element, dessen sämtliche Potenzen voneinander verschieden sind. Für eine aus *abzählbar vielen Elementen bestehende eigentlich unendliche kommutative Gruppe $E, A, B, C, \ldots$ gilt der folgende*

Satz II. *Es existiert ein System von Funktionen*

$$\mathsf{X}_E(s) = 1,\ \mathsf{X}_A(s),\ \mathsf{X}_B(s),\ \mathsf{X}_C(s), \ldots$$

definiert im Intervall $0 \leqq s \leqq 1$ mit den folgenden Eigenschaften:

1. *jede dieser Funktionen ist mit etwaiger Ausnahme einer höchstens abzählbar unendlichen Punktmenge, wo sie eventuell einen endlichen Sprung erleidet, überall stetig, und es ist für alle s*

$$|\mathsf{X}_A(s)| = |\mathsf{X}_B(s)| = |\mathsf{X}_C(s)| = \ldots = 1;$$

2. *es gilt für jedes Paar von Gruppenelementen A, B und für alle s die Beziehung*

$$\mathsf{X}_A(s)\,\mathsf{X}_B(s) = \mathsf{X}_{AB}(s);$$

3. *es gelten die Orthogonalitätsrelationen*

$$\int_0^1 \mathsf{X}_A(s)\,\bar{\mathsf{X}}_B(s)\,ds = \delta_{A,B};$$

ferner

4. *die Vollständigkeitsrelation*

$$\int_0^1 u(s)\,v(s)\,ds = \sum_{(A)} \int_0^1 u(s)\,\mathsf{X}_A(s)\,ds \int_0^1 v(s)\,\bar{\mathsf{X}}_B(s)\,ds$$

für jedes Paar von stetigen Funktionen $u(s)$, $v(s)$.

Die Funktionen $\mathsf{X}_A(s)$ werden als *Gruppencharaktere der vorgelegten eigentlich unendlichen kommutativen Gruppe* bezeichnet[3]).

[3]) Betreffend des entsprechenden Satzes bei uneigentlichen Gruppen vgl. die Schlußbemerkungen in § 3.

4. Der soeben ausgesprochene Satz ist in doppelter Hinsicht von Interesse. Einerseits liefert er eine treue Darstellung jeder eigentlich unendlichen kommutativen Gruppe durch ein unitär-orthogonales Funktionensystem; *andererseits gelangt man vermöge dieses Satzes zu neuen, bisher nicht aufgedeckten Orthogonalsystemen,* die durch algebraische Eigenschaften charakterisiert sind und von diesem Gesichtspunkte aus mit dem Fourierschen System $e^{2i\pi ns}$ nahe verwandt sind. Es handelt sich nun darum, die Eigenschaften dieser Funktionensysteme zu untersuchen; man gelangt dabei zu solchen Eigenschaften, die — abgesehen natürlich vom Fourierschen System — kein anderes bisher bekanntes Orthogonalsystem besitzt. Im letzten Paragraphen der vorliegenden Arbeit beschäftigen wir uns mit solchen Untersuchungen. Für das Fouriersche System gilt z. B. die bemerkenswerte Tatsache, daß jede Funktion dieses Systems der Funktionalgleichung

$$f(s)f(t) = f(s+t)$$

genügt. Analoges gilt für die soeben erhaltenen Gruppencharaktere; es gilt nämlich der folgende[4])

Satz III. *Es seien* $\mathsf{X}_A(s), \mathsf{X}_B(s), \mathsf{X}_C(s), \ldots$ *die im Satze* II *angegebenen Gruppencharaktere einer eigentlich unendlichen kommutativen Gruppe. Es existieren zwei feste, nur von der Gruppe abhängige, für* $0 \leqq s,\ t \leqq 1$ *definierte Funktionen*

$$u(s,t) \quad \text{und} \quad v(s,t),$$

so daß für jedes Gruppenelement A die Beziehungen

$$\mathsf{X}_A(s)\,\mathsf{X}_A(t) = \mathsf{X}_A(u(s,t))$$

fast überall richtig sind; mit anderen Worten, die Gruppencharaktere besitzen ein gemeinsames Multiplikationstheorem. Analog gilt fast überall (für jedes A)

$$\mathsf{X}_A(s)\,\overline{\mathsf{X}}_A(t) = \mathsf{X}_A(v(s,t)).$$

5. Wie bereits bemerkt, ist die Methode, mit der diese Sätze bewiesen werden, dieselbe, die ich in meiner oben angeführten Arbeit angewendet habe, nämlich die von Hilbert begründete Theorie der quadratischen Formen von unendlichvielen Veränderlichen. In § 1 wird die vorgelegte Gruppe durch ein System von unendlichen Matrizen dargestellt; dies ist nichts anderes, als die bei endlichen Gruppen wohlbekannte Darstellung durch eine Substitutionsgruppe. § 2 bringt die Konstruktion der Gruppencharaktere. Die Sätze I und II werden im § 3 bewiesen; § 4 enthält den Beweis des Satzes III, ferner einige weitere Eigenschaften der in diesem Satz mit $u(s,t)$ und $v(s,t)$ bezeichneten Funktionen.

---

[4]) Dies entspricht bei endlichen Abelschen Gruppen der bekannten Tatsache, daß das Produkt zweier Gruppencharaktere wiederum ein Gruppencharakter ist.

§ 1.

Über die reguläre Darstellung unendlicher Gruppen.

1. Wir legen unseren Untersuchungen eine kommutative Gruppe zugrunde, die aus abzählbar unendlich vielen Elementen besteht; wir wenden zur Bezeichnung der Elemente der Gruppe große lateinische Buchstaben $E, A, B, \ldots, P, Q, \ldots$ an, das Einheitselement sei stets E. Unseren Ausgangspunkt bildet die in der Gruppentheorie vielfach angewandte einfachste Darstellung einer Gruppe als Substitutionsgruppe oder — was damit gleichbedeutend ist — die Darstellung durch die zugehörigen (in unserem Falle natürlich unendlichen) Matrizen. Die fragliche Darstellung ist bekanntlich die folgende:

Man ordnet jedem Element der Gruppe eine Unbestimmte zu (wir bezeichnen diese bzw. mit $x_A, x_B, x_C, \ldots$) und betrachten die Substitutionen

$$\begin{pmatrix} x_A, x_B, x_C, \ldots \\ x_{AP}, x_{BP}, x_{CP}, \ldots \end{pmatrix},$$

wobei P irgendein Element der Gruppe ist; man zeigt leicht, daß die Gesamtheit dieser Substitutionen eine mit der vorgelegten Gruppe isomorphe Gruppe bildet. Man gelangt aus dieser Darstellung durch Einführung eines neuen Systems von Unbestimmten $x'_A, x'_B, x'_C, \ldots$ zu einer Darstellung der Gruppe durch lineare Transformationen, indem man dem Gruppenelement P die Transformation

$$x'_A = x_{AP}, \quad x'_B = x_{BP}, \quad x'_C = x_{CP}, \ldots$$

zuordnet; daher bilden auch die Matrizen dieser Transformationen eine Gruppe, welche zu der vorgelegten holoedrisch isomorph ist. Wir bezeichnen diese Matrizen in herkömmlicher Weise mit $(A), (B), (C), \ldots$. Man kann übrigens das allgemeine Element dieser Matrizen leicht angeben; setzen wir

$$(A) = (c^{(A)}_{P,Q}), \quad (B) = (c^{(B)}_{P,Q}), \quad (C) = (c^{(C)}_{P,Q}), \ldots,$$

wobei P und Q alle Gruppenelemente durchlaufen, so finden wir unmittelbar

$$c^{(A)}_{P,PA} = 1, \quad c^{(A)}_{P,Q} = 0 \quad \text{für} \quad Q \neq PA$$

oder — indem man das Symbol $\delta_{P,Q}$ einführt ($\delta_{P,P} = 1$, $\delta_{P,Q} = 0$ für $P \neq Q$)

$$c^{(A)}_{P,Q} = \delta_{PA,Q}. \tag{1}$$

Man erkennt daraus unmittelbar, daß dem Einheitselement der Gruppe die Einheitsmatrix zugeordnet ist, ferner — was für das Folgende von Wichtigkeit sein wird — daß, falls A vom Einheitselement verschieden ist, alle *Diagonalelemente* $c^{(A)}_{P,P}$ *der entsprechenden Matrix* (A) *verschwinden.* Die Matrizen (A) sind *unendliche orthogonale,* also *beschränkte* Matrizen, und man kann auch ohne Mühe durch Anwendung der Hilbertschen

Faltungssätze durch einfache Rechnung verifizieren (was übrigens aus dem Vorangehenden bereits folgt), daß die Komposition dieser Matrizen mit der vorgelegten Gruppe isomorph ist, d. h. es gilt

$$(A)(B) = (AB),$$

für $B = A^{-1}$ erhält man insbesondere

$$(A^{-1}) = (A)^{-1}.$$

2. Ist die vorgelegte Gruppe kommutativ, so sind die soeben konstruierten Matrizen vertauschbar; es gilt ferner die Tatsache, daß jede beschränkte Matrix $U = (u_{P,Q})$ (mit reellen oder komplexen Elementen), die mit jeder der obigen Matrizen $A, B, C, \ldots$ vertauschbar ist, in der Form

$$(U) = \sum_{(A)} \gamma_A (A) \tag{2}$$

darstellbar ist, wobei die Quadratsumme der Beträge der Koeffizienten γ_A konvergiert[5]).

In der Tat[6]), es folgt aus der Beziehung $(A)(U) = (U)(A)$, mit Rücksicht auf (1), unmittelbar für jedes P, Q

$$\sum_{(K)} c^{(A)}_{P,K}\, u_{K,Q} = \sum_{(K)} u_{P,K}\, c^{(A)}_{K,Q}, \quad \text{d. h.} \quad u_{PA,Q} = u_{P,QA^{-1}},$$

also auch (für $P = E$) $u_{A,Q} = u_{E,QA^{-1}}$. Setzt man daher zur Abkürzung $\gamma_A = u_{E,A}$, so folgt die Konvergenz der Reihe $\sum_{(A)} |\gamma_A|^2$ aus der angenommenen Beschränktheit der Matrix (U); ferner ist

$$\sum_{(A)} \gamma_A\, c^{(A)}_{P,Q} = \sum_{(A)} \gamma_A\, \delta_{PA,Q} = \gamma_{P^{-1}Q} = u_{E,P^{-1}Q} = u_{P,Q},$$

und dies ist unsere Behauptung (2).

Insbesondere folgt hieraus $u_{PP} = \gamma_E$, d. h. *sämtliche Diagonalelemente einer mit allen (A) vertauschbaren beschränkten Matrix (U) haben denselben Wert.*

3. Die Diskussion der Spektra der Matrizen (A) ist leicht durchzuführen. Aus der Orthogonalität dieser Matrizen folgt zunächst, daß das Spektrum nur aus solchen Werten bestehen kann, deren absoluter Betrag gleich 1 ist. Ist A ein Gruppenelement von unendlicher Ordnung (d. h. keine Potenz von A ist gleich dem Einheitselement), so kann man zeigen, daß jeder Wert λ, dessen Betrag gleich 1 ist, dem Spektrum von (A) an-

---

[5]) Vgl. auch J. v. Neumann: „Zur Algebra der Funktionaloperationen", Math. Annalen **102** (1930), S. 419.

[6]) Es bedeuten — in üblicher Weise — die Bezeichnungen $\sum_{(A)}$ bzw. $\sum_{(P,Q)}$ usw., daß die Summation auf alle Elemente bzw. Elementenpaare der Gruppe zu erstrecken ist.

gehört. Wäre dies nämlich nicht der Fall, so würde die Matrix $(A)-\lambda(E)$ eine beschränkte Reziproke besitzen; d. h. es würde eine beschränkte Matrix $(U)=(u_{P,Q})$ existieren, so daß (für alle P, Q)

$$(3) \qquad \sum_{(K)}(c^{(A)}_{P,K}-\lambda\delta_{P,K})u_{K,Q}=u_{PA,Q}-\lambda u_{P,Q}=\delta_{P,Q}$$

ausfällt. Daraus ergibt sich aber ein Widerspruch folgendermaßen: Aus der obigen Relation entspringen, wenn man darin für P sukzessive die Elemente $Q, QA, QA^2, \ldots, QA^{n-1}+Q, \ldots$ einsetzt, die Beziehungen

$$u_{QA,Q}=1+\lambda u_{Q,Q},\ u_{QA^2,Q}=\lambda u_{QA,Q}, \ldots, u_{QA^n,Q}=\lambda u_{QA^{n-1},Q},$$

d. h.

$$u_{QA^n,Q}=\lambda^{n-1}(1+\lambda u_{Q,Q}).$$

Da ferner wegen der Beschränktheit von (U) die Quadratsumme $\sum_{(K)}|u_{K,Q}|^2$ konvergiert — also um so mehr auch die Summe $\sum_{n=1}^{\infty}|u_{QA^n,Q}|^2$ —, so muß, da $|\lambda|=1$ ist, $u_{Q,Q}=-\frac{1}{\lambda}$ sein, d. h. alle Diagonalelemente von (U) haben denselben Wert $=-\frac{1}{\lambda}$.

Durch Induktion folgt hieraus für jedes Gruppenelement P und für $n=0, 1, 2, 3, \ldots$ die Richtigkeit der Gleichung

$$u_{P,PA^n}=-\frac{1}{\lambda^{n+1}}.$$

Nimmt man nämlich die Richtigkeit dieser Relation für den Exponenten n an und setzt in (3) PA^{n+1} an Stelle von Q, so ergibt sich

$$-\frac{1}{\lambda^{n+1}}=u_{PA,PA^{n+1}}=\lambda u_{P,PA^{n+1}},\ \text{d. h. } u_{P,PA^{n+1}}=-\frac{1}{\lambda^{n+2}}.$$

Es wäre daher für jedes ganzzahlige n

$$|u_{P,PA^n}|=1,$$

was wegen der Beschränktheit von (U) unmöglich ist.

4. Ist aber (A) ein Gruppenelement von der endlichen Ordnung n, so besteht das Spektrum von (A) aus den n-ten Einheitswurzeln. In der Tat, sind $\lambda_1=1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ die fraglichen Einheitswurzeln, so folgt aus der Identität

$$(\mu(A)-(E))(\mu(A)-\lambda_2(E))\ldots(\mu(A)-\lambda_n(E))=(\mu^n-1)(E)$$

unmittelbar, daß, falls μ^n+1 ist, die Matrix $\mu(A)-(E)$ eine beschränkte Reziproke besitzt, d. h. daß das Spektrum von (A) nur aus den n-ten Einheitswurzeln bestehen kann. Daß umgekehrt jede n-te Einheitswurzel λ dem Spektrum von (A) angehört, erkennt man am einfachsten, indem man das zugehörige homogene Gleichungssystem betrachtet. Dieses lautet:

$$(4) \qquad \lambda x_P=x_{PA},$$

wobei P alle Elemente der Gruppe durchläuft. Setzt man

$$x_E = 1, \quad x_A = \lambda, \quad x_{A^2} = \lambda^2, \ldots, \quad x_{A^{n-1}} = \lambda^{n-1}$$

und für alle übrigen Variablen $x_Q = 0$ $(Q \neq E, A, A^2, \ldots, A^{n-1})$, so ist das obige Gleichungssystem (mit Rücksicht auf $\lambda^n = 1$, $A^n = E$) offenbar erfüllt, woraus unsere Behauptung unmittelbar folgt.

Für das Folgende ist die Tatsache von Wichtigkeit, daß, falls A wiederum ein Gruppenelement von unendlicher Ordnung bedeutet, das homogene Gleichungssystem (4) bei keinem λ eine Lösung besitzen kann, d. h. die Matrix (A) besitzt kein Punktspektrum. (Ein Wertsystem x_P wird — wie stets in dieser Theorie — nur dann als Lösung betrachtet, falls die Quadratsumme $\sum_{(P)} |x_P|^2$ konvergent ist.) Im entgegengesetzten Falle erhielte man nämlich durch Quadrierung der Beträge der Gleichungen (4) und Addition: $|\lambda| = 1$, was ja bereits aus dem Umstande folgt, daß das Spektrum von (A) aus diesen Werten besteht. Würde es eine nichttriviale Lösung von (4) geben und etwa $x_Q \neq 0$ sein, so wäre

$$x_{AQ} = \lambda x_Q, \quad x_{A^2Q} = \lambda^2 x_Q, \ldots, \quad x_{A^nQ} = \lambda^n x_Q, \ldots .$$

Da alle Elemente A^nQ $(n = 0, 1, 2, \ldots)$ voneinander verschieden sind, so müßte die Reihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} |x_{A^nQ}|^2 = \sum_{n=0}^{\infty} |\lambda^n|^2 |x_Q|^2$$

als Teilreihe der konvergenten Reihe $\sum_{(P)} |x_P|^2$ ebenfalls konvergent sein, was wegen $|\lambda| = 1$ nicht der Fall ist.

Wir können diese Tatsachen, wie folgt, zusammenfassen:

Ist (A) ein Gruppenelement von unendlicher Ordnung, so besteht das Spektrum der zugehörigen Matrix (A) aus allen Werten vom Betrage 1, *und das zugehörige homogene Gleichungssystem* (4) *ist stets unlösbar; ist aber A ein Gruppenelement von der endlichen Ordnung n, so besteht das Spektrum von (A) aus allen n-ten Einheitswurzeln, und es besitzt das Gleichungssystem* (4) *bei solchen Werten von λ eine nichttriviale Lösung.*

§ 2.

Konstruktion der Gruppencharaktere.

1. Es ist bequem, an Stelle der orthogonalen Matrix (A) die zugehörige unendliche Bilinearform zu betrachten; d. h. wir setzen — indem wir zwei Variablenreihen x_P und y_Q einführen —

$$A(x, y) = \sum_{(P,Q)} c_{P,Q}^{(A)} x_P y_Q .$$

Auf diese Formen wenden wir einen Satz an, der gleichzeitig von den Herren J. v. Neumann und A. Wintner gefunden wurde[7]); die fragliche liche Tatsache ist ein genaues Analogon der Hilbertschen Spektraldarstellung der quadratischen Formen von unendlich vielen Veränderlichen für orthogonale (bzw. unitäre) Formen und lautet folgendermaßen:

Zu jeder reellen orthogonalen (bzw. unitären) Form von unendlich vielen Veränderlichen $U(x, y)$ gehört eine Schar von vertauschbaren beschränkten Hermiteschen Einzelformen

$$\sigma(\mu; x, y) = \sum_{(P,Q)} \sigma_{P,Q}(\mu)\, x_P\, y_Q \qquad (0 \leqq \mu \leqq 1)$$

mit den folgenden Eigenschaften:

α) es gelten für $0 \leqq \mu_1 \leqq \mu_2 \leqq 1$ die Matrizengleichungen:

$$(\sigma_{P,Q}(\mu_1))\,(\sigma_{P,Q}(\mu_2)) = (\sigma_{P,Q}(\mu_2))\,(\sigma_{P,Q}(\mu_1)) = (\sigma_{P,Q}(\mu_1));$$

β) bezeichnet $\bar{x}_P$ den konjugierten Wert von x_P, so stellen die Hermiteschen Formen

$$\sigma(\mu; x, \bar{x}) = \sum_{(P,Q)} \sigma_{P,Q}(\mu)\, x_P\, \bar{x}_Q \qquad (\overline{\sigma_{P,Q}(\mu)} = \sigma_{Q,P}(\mu)),$$

bei jedem festen zulässigen Wert der Unbestimmten x_P eine nicht abnehmende, an jeder inneren Stelle des Intervalls $0 \leqq \mu \leqq 1$ von links stetige Funktion von μ dar, welche außerdem den Gleichungen

$$\sigma(0; x, \bar{x}) = 0, \qquad \sigma(1; x, \bar{x}) = \sum_{(P)} |x_P|^2$$

---

[7]) A. Wintner, „Zur Theorie der beschränkten Bilinearformen", Math. Zeitschr. **30** (1929), S. 228—282; insbesondere S. 269. J. v. Neumann, „Allgemeine Eigenwerttheorie Hermitescher Funktionaloperatoren", Math. Annalen **102** (1929), S. 49—132; insbesondere S. 111.

Anmerkung während der Korrektur. Man kann die Anwendung des fraglichen Satzes übrigens leicht vermeiden und die folgenden Schlüsse direkt auf die Hilbertsche Spektraldarstellung der Hermiteschen Formen gründen. Aus der Orthogonalität unserer Matrizen (P) folgt nämlich in wohlbekannter Weise, daß

$$P_1 = \frac{(P) + (P^{-1})}{2} \quad \text{und} \quad P_2 = \frac{(P) - (P^{-1})}{2i}$$

vertauschbare Hermitesche Matrizen sind, und es ist $(P) = P_1 + iP_2$. Wendet man daher den in § 2 meiner angeführten Arbeit bewiesenen Satz auf die unendlich vielen vertauschbaren Matrizen $A_1, A_2, B_1, B_2, C_1, C_2, \ldots$ an, so gelangt man auf Grund der simultanen Spektraldarstellung dieser Formen direkt zu der Formel (9) der vorliegenden Arbeit.

Den soeben skizzierten Weg werde ich bei einer anderen Gelegenheit, bei der Behandlung der Multiplikationstabelle der allgemeinen unitär-orthogonalen Funktionensysteme (vgl. die Schußbemerkung der vorliegenden Arbeit), einschlagen; ich habe es vorgezogen, zum Zwecke des hier vorliegenden Spezialfalls den fraglichen Hilfssatz heranzuziehen.

genügt. Mit Hilfe dieser Formenschar läßt sich die vorgelegte orthogonale Form durch das Stieltjessche Integral

$$U(x, y) = \int_0^1 e^{2i\pi\mu} d\sigma(\mu; x, y)$$

darstellen.

Man erkennt leicht, wie man aus der vorgelegten orthogonalen Form $U(x, y)$ unmittelbar zu der zugehörigen Hermiteschen Form

$$\mathfrak{U}(x, y) = \int_0^1 \mu\, d\sigma(\mu; x, y)$$

gelangen kann. Die beschränkte Form

$$(5)\quad \mathfrak{U}_n(x, y) = \frac{1}{2i}\left\{(U - U^{-1}) - \frac{1}{2}(U^2 - U^{-2}) + \ldots + \frac{(-1)^{n-1}}{n}(U^n - U^{-n})\right\}$$
$$= \int_0^1 \left\{\sin 2\pi\mu - \frac{1}{2}\sin 4\pi\mu + \ldots + \frac{(-1)^{n-1}}{n}\sin 2n\pi\mu\right\} d\sigma(\mu; x, y)$$

ist offenbar eine Hermitesche, da wegen der Orthogonalität (und Realität) von U (also auch von $U^2, U^3, \ldots, U^n$) Inverse und Transponierte übereinstimmen. Nach einem wohlbekannten Satz der Theorie der Fourierschen Reihen bleiben die Teilsummen der unendlichen Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} \sin 2n\pi\mu \qquad (0 \leqq \mu \leqq 1)$$

dem Betrage nach unterhalb einer festen (auch von μ unabhängigen) Schranke M. Daher ist auch für jedes n die Hermitesche Form

$$|\mathfrak{U}_n(x, \bar{x})| \leqq M \sum_{(P)} |x_P|^2,$$

und es gilt in der Terminologie von Herrn F. Riesz[8]) die Limesgleichung

$$\mathfrak{U}_n \to \mathfrak{U}.$$

Wendet man diese Betrachtungen auf alle Elemente $A, B, C, \ldots$ der vorgelegten kommutativen Gruppe an, so erhält man für die entsprechenden orthogonalen Bilinearformen eine Darstellung der obigen Art

$$(6)\qquad A(x, y) = \int_0^1 e^{2i\pi\mu} d\sigma^{(A)}(\mu; x, y).$$

Die zugehörigen Hermiteschen Formen

$$\mathfrak{A}(x, y) = \int_0^1 \mu\, d\sigma^{(A)}(\mu; x, y)$$

---

[8]) F. Riesz, „Les systèmes d'équations linéaires à une infinité d'inconnues", Paris 1913, S. 107.

(wobei A alle Gruppenelemente durchläuft) sind alsdann ebenfalls vertauschbar. Denn aus der Vertauschbarkeit der Matrizen (A) und (B) folgt offenbar dieselbe Eigenschaft für die wie oben in (5) konstruierten Matrizen $(\mathfrak{A}_n)$, $(\mathfrak{B}_n)$, und daraus für deren Limites und $(\mathfrak{A})$, $(\mathfrak{B})$.

2. Auf die so erhaltenen Hermiteschen Formen bzw. auf die zugehörigen Scharen von Einzelformen

$$\sigma^{(A)}(\mu; x, y), \quad \sigma^{(B)}(\mu; x, y), \quad \sigma^{(C)}(\mu; x, y), \ldots$$

wende ich nun die im § 2 meiner in der Einleitung angeführten Arbeit im Anschluß an Untersuchungen von J. v. Neumann gewonnenen Resultate an, die — wie daselbst ausdrücklich bemerkt — nicht nur für reelle symmetrische, sondern auch für Hermitesche Formen gültig sind. Aus der Vertauschbarkeit der Formen $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \mathfrak{C}, \ldots$ folgt vorab, daß sämtliche obigen Einzelformen (bei jedem Wert von μ) vertauschbar sind. Wir greifen sodann eine abzählbare, im Intervall $0 \leqq \mu \leqq 1$ überall dichte Punktmenge $\mathfrak{M}$ heraus, die aus den Größen $\mu^{(1)}, \mu^{(2)}, \mu^{(3)}, \ldots$ besteht, und betrachten die Formen

$$\sigma^{(A)}(\mu^{(k)}; x, y), \quad \sigma^{(B)}(\mu^{(k)}; x, y), \ldots \quad (k = 1, 2, 3, \ldots); \tag{7}$$

nach dem Vorgange von Herrn J. v. Neumann [9]) konstruieren wir dazu (wörtlich wie in 2., § 2 a. a. O. [2])) eine Schar von Einzelformen

$$\sigma(\lambda; x, y) = \sum_{(P,Q)} \sigma_{P,Q}(\lambda)\, x_P\, y_Q \qquad (0 \leqq \lambda \leqq 1),$$

welche die obigen Eigenschaften $\alpha)$ und $\beta)$ besitzt, mit deren Hilfe man die Formen (7) durch ein Stieltjessches Integral

$$\begin{aligned} \sigma^{(A)}(\mu^{(k)}; x, y) &= \int_0^1 f_A(\lambda, \mu^{(k)})\, d\sigma(\lambda; x, y), \\ \sigma^{(B)}(\mu^{(k)}; x, y) &= \int_0^1 f_B(\lambda, \mu^{(k)})\, d\sigma(\lambda; x, y), \text{ usf.} \end{aligned} \tag{8}$$

darstellen kann. Die Haupteigenschaften der für $0 \leqq \lambda \leqq 1$, $0 \leqq \mu \leqq 1$ definierten Funktionen $f_A(\lambda, \mu)$, $f_B(\lambda, \mu)$, $f_C(\lambda, \mu), \ldots$ sind die folgenden (vgl. 3. und 4., § 2 a. a. O. [2])):

1. jede dieser Funktionen nimmt nur die Werte 0 und 1 an;

2. gehört $\mu^{(k)}$ der obigen Menge $\mathfrak{M}$ an, so ist $f_A(\lambda, \mu^{(k)})$, $f_B(\lambda, \mu^{(k)})$, $f_C(\lambda, \mu^{(k)}), \ldots$, als Funktion von λ aufgefaßt, in endlich vielen abgeschlossenen Intervallen gleich 1;

3. für jedes feste λ ist jede dieser Funktionen, als Funktion von μ aufgefaßt, eine für $\mu = 0$ verschwindende, nicht abnehmende Funktion.

---

[9]) A. a. O. [5]), S. 401.

Wir definieren endlich die Funktionen

$$\omega_A(\lambda),\ \omega_B(\lambda),\ \omega_C(\lambda), \ldots$$

vermöge der folgenden Vorschrift: Es sei

$$f_A(\lambda, \mu) = 0 \quad \text{für} \quad 0 \leqq \mu < \omega_A(\lambda),$$
$$f_A(\lambda, \mu) = 1 \quad \text{für} \quad \omega_A(\lambda) < \mu \leqq 1.$$

Die wichtigsten Eigenschaften dieser Funktionen sind in 5., § 2 meiner genannten Arbeit bewiesen. Bezeichnet man als Konstanzintervall von $\sigma(\lambda; x, y)$ ein offenes Teilintervall von $0 \leqq \lambda \leqq 1$, falls für zwei beliebige Punkte λ' und λ'' dieses Teilintervalls die Gleichung $\sigma(\lambda'; x, y) = \sigma(\lambda''; x, y)$ bei allen zulässigen Werten der Unbestimmten x_P, y_Q statthat und falls dieses Intervall nicht echter Teil eines größeren Intervalls derselben Art ist, so lautet der fragliche Satz folgendermaßen:

Die im Intervall $0 \leqq \lambda \leqq 1$ definierten Funktionen $\omega_A(\lambda)$ sind an solchen Stellen, welche von den Mittelpunkten der Konstanzintervalle von $\sigma(\lambda; x, y)$ verschieden sind, stetig; sie besitzen an den letztgenannten Mittelpunkten — falls sie daselbst nicht ebenfalls stetig sind — eine Diskontinuität erster Art, d. h. es existieren die rechts- und linksseitigen Grenzwerte $\omega_A(\lambda - 0)$ und $\omega_A(\lambda + 0)$; die Anzahl derjenigen Unstetigkeitsstellen, wo der Sprung von $\omega_A(\lambda)$ eine gegebene positive Größe übersteigt, ist endlich.

3. Auf Grund dieser Tatsachen kann man die Richtigkeit der Relationen

$$A(x, y) = \int_0^1 e^{2i\pi\omega_A(\lambda)}\, d\sigma(\lambda; x, y)$$

in ähnlicher Weise beweisen wie die entsprechenden Beziehungen (27) im § 3 meiner erwähnten Arbeit. In der Tat, es folgt zunächst die Existenz des rechts stehenden Stieltjesschen Integrals aus der letzten Eigenschaft der Funktionen $\omega_A(\lambda)$, die sich unmittelbar auf die Funktion $e^{2i\pi\omega_A(\lambda)}$ überträgt. Ferner folgt aus der Formel (6), daß $A(x, y)$ gleich dem Grenzwert der Summe

$$\sum_{k=1}^{n} e^{2i\pi\mu_k}[\sigma^{(A)}(\mu_k; x, y) - \sigma^{(A)}(\mu_{k-1}; x, y)]$$

ist, wenn die Anzahl der Teilungspunkte μ_k unbegrenzt derartig wächst, daß das Maximum von $\mu_k - \mu_{k-1}$ gegen Null konvergiert. Wir können annehmen, daß diese Teilungspunkte

$$\mu_0 < \mu_1 < \mu_2 < \ldots < \mu_n$$

der obigen in $[0, 1]$ überall dichten Punktmenge $\mathfrak{M}$ angehören, und es sei ε der größte Wert der Differenzen $\mu_k - \mu_{k-1}$. Für die obige endliche

Summe ergibt sich — mit Rücksicht auf (8) — die Darstellung

$$S_\varepsilon = \int_0^1 \sum_{k=1}^{n} e^{2i\pi\mu_k}[f_A(\lambda, \mu_k) - f_A(\lambda, \mu_{k-1})]\, d\sigma(\lambda; x, y).$$

Die im Integranden stehende endliche Summe ist auf Grund der Eigenschaften der Funktionen $f_A(\lambda, \mu)$ bzw. auf Grund der Definition von $\omega_A(\lambda)$ leicht abzuschätzen. Denn es sind bei jedem λ offenbar alle Differenzen

$$f_A(\lambda, \mu_k) - f_A(\lambda, \mu_{k-1}) \qquad (k = 1, 2, \ldots, n)$$

bis auf eine gleich Null; diese nichtverschwindende Differenz (ihr Wert ist gleich 1) ist, falls $\omega_A(\lambda)$ von den Größen $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_n$ verschieden ist, diejenige, für die $\mu_{k-1} < \omega_A(\lambda) < \mu_k$; ist aber $\omega_A(\lambda) = \mu_{k-1}$, so ist die fragliche Differenz entweder diejenige, für die $\mu_{k-1} = \omega_A(\lambda) < \mu_k$, oder diejenige, für die $\mu_{k-2} < \omega_A(\lambda) = \mu_{k-1}$ ist, je nachdem $f_A(\lambda, \omega_A(\lambda)) = 0$ oder $= 1$ ist. In allen Fällen hat der Integrand von S_ε die Form

$$e^{2i\pi[\omega_A(\lambda) + \nu_A(\lambda)]} d\sigma(\lambda; x, y),$$

wobei $|\nu_A(\lambda)| < \varepsilon$ ist, da das fragliche μ_{k-1} bzw. μ_k jedenfalls zwischen den Grenzen $\omega_A(\lambda) - \varepsilon$ und $\omega_A(\lambda) + \varepsilon$ liegt. Folglich ist die Differenz

$$\int_0^1 e^{2i\pi\omega_A(\lambda)} d\sigma(\lambda; x, y) - S_\varepsilon = \int_0^1 e^{2i\pi\omega_A(\lambda)}(1 - e^{2i\pi\nu_A(\lambda)})\, d\sigma(\lambda; x, y)$$

dem Betrage nach kleiner als

$$\int_0^1 |1 - e^{2i\pi\nu_A(\lambda)}|\, |d\sigma(\lambda; x, y)| \leqq \int_0^1 4\pi^2 |\nu_A(\lambda)|^2 |d\sigma(\lambda; x, y)|$$
$$\leqq 4\pi^2\varepsilon^2 \int_0^1 |d\sigma(\lambda; x, y)|,$$

d. h. es ist, da jeder Koeffizient $\sigma_{P,Q}(\lambda)$ von $\sigma(\lambda; x, y)$ eine Funktion von beschränkter Schwankung ist,

$$A(x, y) = \lim_{\varepsilon = 0} S_\varepsilon = \int_0^1 e^{2i\pi\omega_A(\lambda)} d\sigma(\lambda; x, y). \tag{9}$$

4. Das wesentliche in der soeben abgeleiteten Formel ist die Tatsache, daß man für die zu den verschiedenen Elementen $A, B, C, \ldots$ der vorgelegten Gruppe gehörenden Bilinearformen eine *simultane* Spektraldarstellung gewinnt in dem Sinne, daß die in den Darstellungen dieser Formen $A(x, y)$, $B(x, y)$, $C(x, y)$, ... auftretende Schar von Spektralformen $\sigma(\lambda; x, y)$ dieselbe ist. Die einzelnen Elemente der Gruppe werden durch die daneben stehenden Faktoren

$$e^{2i\pi\omega_A(\lambda)}, \; e^{2i\pi\omega_B(\lambda)}, \; e^{2i\pi\omega_C(\lambda)}, \ldots$$

charakterisiert. Jede dieser Funktionen ist — wie oben für die Exponenten $\omega_A(\lambda)$, $\omega_B(\lambda)$, $\omega_C(\lambda)$, ... festgestellt — an jeder Stelle mit etwaiger Ausnahme der Mittelpunkte der Konstanzintervalle von $\sigma(\lambda; x, y)$ stetig. Innerhalb dieser Konstanzintervalle kann man aber den Wertevorrat dieser Funktionen beliebig abändern, da dadurch der Wert des Integrals (9) nicht beeinflußt wird. Ist etwa $\alpha < \lambda < \beta$ ein solches Konstanzintervall (an den Stellen α, β sind die Funktionen $\omega_A(\lambda)$ stetig), so wollen wir daselbst der Einfachheit halber die Funktionen $\omega_A(\lambda)$ durch die folgende Vorschrift festsetzen: Es sei

$$\omega_A(\lambda) = \omega_A(\alpha), \quad \text{für} \quad \alpha \leqq \lambda \leqq \frac{\alpha+\beta}{2},$$

$$\omega_A(\lambda) = \omega_A(\beta), \quad \text{für} \quad \frac{\alpha+\beta}{2} < \lambda \leqq \beta,$$

d. h. wir setzen fest, daß $\omega_A(\lambda)$ an den Sprungstellen von links stetig sei.

Die zugehörigen Funktionen

$$\chi_A(\lambda) = e^{2i\pi\omega_A(\lambda)} \qquad (0 \leqq \lambda \leqq 1),$$

wobei A alle Elemente der vorgelegten Gruppe durchläuft, bezeichnen wir als die *zum Element A gehörenden Gruppencharaktere.*

Diese Funktionen, deren Betrag überall gleich 1 *ist, sind mit Ausnahme einer höchsten abzählbaren Punktmenge stetig. Jede (etwaige) Unstetigkeitsstelle ist Mittelpunkt eines solchen Intervalls, in dessen rechter und linker Hälfte diese Funktionen konstant sind; an den Unstetigkeitsstellen selbst sind diese Funktionen von links stetig.*

5. Auf eine Eigenschaft der Spektralform

$$\sigma(\lambda; x, y) = \sum_{(P,Q)} \sigma_{P,Q}(\lambda)\, x_P\, y_Q$$

sei noch besonders hingewiesen. Die Darstellung (9) lehrt, daß diese Form bei jedem Wert von λ mit allen Bilinearformen $A(x, y)$, $B(x, y)$, $C(x, y)$, .. vertauschbar ist. Man erkennt dies unmittelbar aus der bekannten Tatsache, daß aus der Eigenschaft α) (vgl. 1. dieses Paragraphen) die sogenannte Hilbertsche Vollständigkeitsrelation

$$(10) \qquad \int_0^1 u(\lambda)\, v(\lambda)\, d\sigma_{P,Q}(\lambda) = \sum_{(K)} \int_0^1 u(\lambda)\, d\sigma_{P,K}(\lambda) \int_0^1 v(\lambda)\, d\sigma_{K,Q}(\lambda)$$

folgt, wobei $u(\lambda)$ und $v(\lambda)$ solche Funktionen bedeuten, die man durch Treppenfunktionen beliebig genau gleichmäßig approximieren kann. Aus dieser Vertauschbarkeit ergibt sich auf Grund der in 2., § 1 gemachten Bemerkung, daß alle Diagonalelemente der Spektralform bei jedem Wert von λ übereinstimmen, d. h. es gelten die Beziehungen

$$\sigma_{A,A}(\lambda) = \sigma_{B,B}(\lambda) = \sigma_{C,C}(\lambda) = \ldots.$$

6. Eng verknüpft mit den Darstellungsformeln (9) ist die Theorie des im vorigen Paragraphen betrachteten linearen Gleichungssystems (4). Mit Rücksicht auf die aus (9) entspringenden Formeln

$$(9') \qquad c_{P,Q}^{(A)} = \delta_{PA,Q} = \int_0^1 \chi_A(\lambda)\, d\sigma_{P,Q}(\lambda)$$

kann man die Gleichungen (4) in der folgenden Form schreiben:

$$\lambda x_P = \sum_{(K)} x_K \int_0^1 \chi_A(\lambda)\, d\sigma_{P,K}(\lambda),$$

wobei P alle Elemente der Gruppe durchläuft.

Man zeigt nun in derselben Weise wie in der Hilbertschen Theorie der symmetrischen quadratischen Formen, daß, falls irgendeine der Funktionen $\sigma_{P,Q}(\lambda)$ an einer Stelle $\lambda = \lambda_0$ unstetig wird (die Unstetigkeit kann nur eine Diskontinuität erster Art sein), so besitzt das obige Gleichungssystem für $\lambda = \lambda_0$ eine nicht identisch verschwindende Lösung. In der Tat, setzt man für alle Elemente K der Gruppe (bei hinreichend kleinem positiven h)

$$x_K(h) = \int_{\lambda_0-h}^{\lambda_0+h} d\sigma_{K,Q}(\lambda) = \sigma_{K,Q}(\lambda_0+h) - \sigma_{K,Q}(\lambda_0-h),$$

so wird mit Rücksicht auf die Hilbertsche Vollständigkeitsrelation (10)

$$(11) \qquad \sum_{(K)} x_K(h) \int_0^1 \chi_A(\lambda)\, d\sigma_{P,K}(\lambda) = \int_{\lambda_0-h}^{\lambda_0+h} \chi_A(\lambda)\, d\sigma_{P,Q}(\lambda).$$

Nun ist aber wegen des Hermiteschen Charakters der Spektralform

$$\sum_{(K)} |x_K(h)|^2 = \sum_{(K)} \int_{\lambda_0-h}^{\lambda_0+h} d\sigma_{K,Q}(\lambda) \int_{\lambda_0-h}^{\lambda_0+h} d\bar{\sigma}_{K,Q}(\lambda) = \sum_{(K)} \int_{\lambda_0-h}^{\lambda_0+h} d\sigma_{K,Q}(\lambda) \int_{\lambda_0-h}^{\lambda_0+h} d\sigma_{Q,K}(\lambda)$$
$$= \int_{\lambda_0-h}^{\lambda_0+h} d\sigma_{Q,Q}(\lambda) = \sigma_{Q,Q}(\lambda_0+h) - \sigma_{Q,Q}(\lambda_0-h) \leqq 1.$$

Geht man daher in den Gleichungen (11) zur Grenze $h = 0$ über, so werden die linken Seiten — wenn man zur Abkürzung

$$(12) \qquad x_K = \lim_{h=0} x_K(h) = \sigma_{K,Q}(\lambda_0+0) - \sigma_{K,Q}(\lambda_0-0) \qquad (x_P \neq 0)$$

einführt —

$$\sum_{(K)} c_{P,K}^{(A)} x_K.$$

Da ferner an der Stelle λ_0 die Funktion $\chi_A(\lambda)$ stetig ist (die Unstetigkeitsstellen liegen ja in den Mittelpunkten der Konstanzintervalle aller $\sigma_{P,Q}(\lambda)$), so ist der Grenzwert der rechten Seiten der Gleichungen (11)

$$\chi_A(\lambda_0)[\sigma_{P,Q}(\lambda_0+0) - \sigma_{P,Q}(\lambda_0-0)] = \chi_A(\lambda_0) x_P,$$

d. h. das durch (12) definierte, nicht identisch verschwindende Größensystem x_K ist in der Tat eine Lösung der Gleichungen (4) für $\lambda = \chi_A(\lambda_0)$.

Ist aber A ein Element von unendlicher Ordnung, so kann — wie im vorigen Paragraphen bewiesen wurde — das Gleichungssystem (4) bei keinem Wert von λ lösbar sein. *Eine unendliche Gruppe, welche mindestens ein Element von unendlicher Ordnung besitzt, bezeichnen wir als eigentlich unendliche Gruppe.* Bei einer eigentlich unendlichen Gruppe sind daher in der simultanen Spektraldarstellung (9) der zu den Gruppenelementen gehörenden Bilinearformen alle Koeffizienten $\sigma_{P,Q}(\lambda)$ der Spektralform überall stetige Funktionen von λ.

§ 3.

Gruppeneigenschaft, Orthogonalität und Vollständigkeit der Gruppencharaktere.

1. Die *Gruppeneigenschaft* der Funktionen $\chi_A(\lambda)$ ergibt sich aus der folgenden Bemerkung:

Ist $u(\lambda)$ eine beliebige (komplexwertige) Funktion, welche mit etwaiger Ausnahme der Mittelpunkte der Konstanzintervalle von $\sigma(\lambda; x, y)$ überall stetig ist und welche bei jedem Wertsystem der Unbestimmten x_P, y_P die Beziehung

$$\int_0^1 u(\lambda)\, d\sigma(\lambda; x, y) = 0,$$

d. h. die unendlich vielen Gleichungen

$$\int_0^1 u(\lambda)\, d\sigma_{P,Q}(\lambda) = 0$$

erfüllt, so ist an jeder Stelle außerhalb der Konstanzintervalle $u(\lambda) = 0$.

In der Tat, es folgen zunächst mit Rücksicht auf den Hermiteschen Charakter der Spektralform $\sigma(\lambda; x, y)$ (für alle Gruppenelemente P, Q) die Gleichungen

$$\int_0^1 \overline{u}(\lambda)\, d\sigma_{P,Q}(\lambda) = 0,$$

wo — wie stets — $\overline{u}(\lambda)$ den zu $u(\lambda)$ konjugiert komplexen Wert bezeichnet. Auf Grund der Hilbertschen Vollständigkeitsrelation (10) schließt man daraus, daß

$$\int_0^1 u(\lambda)\, \overline{u}(\lambda)\, d\sigma_{P,Q}(\lambda) = \sum_{(K)} \int_0^1 u(\lambda)\, d\sigma_{P,K}(\lambda) \int_0^1 \overline{u}(\lambda)\, d\sigma_{K,Q}(\lambda) = 0$$

ist, d. h. es ist für alle x_P

$$\int_0^1 |u(\lambda)|^2\, d\sigma(\lambda; x, \overline{x}) = 0. \tag{13}$$

Ist nun λ_0 eine beliebige Stelle, die nicht jenen Konstanzintervallen angehört, d. h. eine Stelle von der Eigenschaft, daß es ein zugehöriges Wertsystem $x_P^{(0)}$ gibt derart, daß die (reelle) nichtabnehmende Funktion $\sigma(\lambda; x^{(0)}, \bar{x}^{(0)})$ von λ in jeder noch so kleinen Umgebung von λ nicht konstant ist, so kann die Funktion $u(\lambda)$ an dieser Stelle nicht von Null verschieden sein. Wäre dies nämlich der Fall, so könnte man wegen der angenommenen Stetigkeit von $u(\lambda)$ an dieser Stelle eine Umgebung $(\lambda_0 - \delta, \lambda_0 + \delta)$ abgrenzen, in der $|u(\lambda)| \geqq \varepsilon > 0$ ausfällt; folglich wäre

$$\int_0^1 |u(\lambda)|^2 d\sigma(\lambda; x^{(0)}, \bar{x}^{(0)}) \geqq \int_{\lambda_0-\delta}^{\lambda_0+\delta} |u(\lambda)|^2 d\sigma(\lambda; x, y)$$
$$\geqq \varepsilon^2 [\sigma(\lambda_0 + \delta; x^{(0)}, \bar{x}^0) - \sigma(\lambda_0 - \delta, x^0, \bar{x}^0)] > 0,$$

in Widerspruch mit (13).

Es seien A, B zwei beliebige Elemente der vorgelegten Gruppe; (A), (B) bzw. $A(x, y)$, $B(x, y)$ die zugehörigen unendlichen Matrizen bzw. Bilinearformen. Aus den Relationen (9)

$$A(x, y) = \int_0^1 \chi_A(\lambda)\, d\sigma(\lambda; x, y), \qquad B(x, y) = \int_0^1 \chi_B(\lambda)\, d\sigma(\lambda; x, y)$$

folgt unmittelbar (wiederum durch Anwendung der Vollständigkeitsrelation (10)), daß die Matrix der Bilinearform

$$\int_0^1 \chi_A(\lambda)\, \chi_B(\lambda)\, d\sigma(\lambda; x, y)$$

gleich dem Produkt $(A)(B)$ ist. Da aber nach der Konstruktion dieser Matrizen $(A)(B) = (AB)$ ist, so folgt, daß die obige Bilinearform mit der zu dem Element AB zugeordneten Form

$$\int_0^1 \chi_{AB}(\lambda)\, d\sigma(\lambda; x, y)$$

identisch ist. Daraus schließen wir, auf Grund der soeben vorausgeschickten Bemerkung, daß an jeder Stelle λ, die nicht innerhalb eines der Konstanzintervalle von $\sigma(\lambda; x, y)$ liegt,

$$\chi_A(\lambda)\, \chi_B(\lambda) = \chi_{AB}(\lambda) \tag{14}$$

sein muß.

Man erkennt auch unschwer, daß diese Beziehungen auch dann richtig bleiben, wenn λ *innerhalb* eines Konstanzintervalls liegt. Denn an irgendeiner Stelle dieses Konstanzintervalls ist der Wert aller auftretenden Funktionen gleich dem Werte dieser Funktionen an dem einen Endpunkt dieses Intervalls, für den die obige Beziehung bereits bewiesen ist.

Aus der Gruppeneigenschaft (14) der Funktionen $\chi_A(\lambda)$ folgt unmittelbar, wenn man darin B mit dem Einheitselement E zusammenfallen läßt, daß

$\chi_E(\lambda) = 1$ sein muß. Sind ferner A und B inverse Elemente, d. h. $AB = E$, so ergibt sich daraus $\chi_A(\lambda)\chi_{A^{-1}}(\lambda) = 1$, oder, da der absolute Betrag von $\chi_A(\lambda)$ für jedes λ gleich 1 ist,

$$\chi_{A^{-1}}(\lambda) = \overline{\chi_A(\lambda)}. \tag{14'}$$

2. Die *Orthogonalität* der Gruppencharaktere ist eine Folge der Tatsache, daß, falls C nicht das Einheitselement der Gruppe ist, alle Diagonalelemente der zugehörigen Matrix (C) verschwinden (vgl. 1., § 1). Mit Rücksicht auf (9') erhält man daraus die Relationen

$$\int_0^1 \chi_C(\lambda)\, d\sigma_{P,P}(\lambda) = 0, \qquad (C \neq E),$$

welche für alle Elemente P gelten. Die so erhaltenen Gleichungen sind aber nicht verschieden, da — wie in 5., § 2 bemerkt wurde — alle Diagonalelemente der Spektralform $\sigma(\lambda; x, y)$ bei jedem λ übereinstimmen. Setzt man daher, um dies anzudeuten, zur Abkürzung

$$\sigma_{AA}(\lambda) = \sigma_{BB}(\lambda) = \sigma_{CC}(\lambda) = \ldots = \tilde{\sigma}(\lambda),$$

so reduzieren sich die obigen Gleichungen auf die folgenden:

$$\int_0^1 \chi_C(\lambda)\, d\tilde{\sigma}(\lambda) = 0 \qquad (C \neq E). \tag{15}$$

Man erhält die Funktion $\tilde{\sigma}(\lambda)$, indem man in der Spektralform $\sigma(\lambda; x, \bar{x})$ eine Unbestimmte gleich Eins, alle übrigen gleich Null setzt. Daher ist $\tilde{\sigma}(\lambda)$ eine reelle, nicht abnehmende Funktion von λ, die im Falle eigentlich unendlicher Gruppen sogar überall stetig ist (vgl. 6., § 2).

Es seien nun A und B zwei verschiedene Elemente der vorgelegten Gruppe. Durch Kombination der Beziehungen (14), (14'), (15) erhält man unmittelbar

$$\int_0^1 \chi_A(\lambda)\,\bar{\chi}_B(\lambda)\, d\tilde{\sigma}(\lambda) = \int_0^1 \chi_A(\lambda)\,\chi_{B^{-1}}(\lambda)\, d\tilde{\sigma}(\lambda) = \int_0^1 \chi_{AB^{-1}}(\lambda)\, d\tilde{\sigma}(\lambda) = 0,$$

da $AB^{-1} \neq E$ ist. Ist aber $A = B$, so wird

$$\int_0^1 \chi_A(\lambda)\,\bar{\chi}_A(\lambda)\, d\tilde{\sigma}(\lambda) = \tilde{\sigma}(1) - \tilde{\sigma}(0) = 1,$$

da $\tilde{\sigma}(\lambda)$ mit der Spektralform übereinstimmt, wenn man darin die Unbestimmten wie oben spezialisiert.

Die soeben erhaltenen Eigenschaften der Gruppencharaktere, die man in die Gleichung

$$\int_0^1 \chi_A(\lambda)\,\bar{\chi}_B(\lambda)\, d\tilde{\sigma}(\lambda) = \delta_{A,B} \tag{16}$$

zusammenfassen kann, drücken die Tatsache aus, daß die *Gruppencharaktere ein unitär-orthogonales Funktionensystem bilden in bezug auf die nichtabnehmende (reelle) Funktion* $\tilde{\sigma}(\lambda)$.

3. Wir zeigen ferner, daß für jedes Paar von stetigen Funktionen $u(\lambda), v(\lambda)$ (definiert im Intervall $0 \leqq \lambda \leqq 1$) die Relation

$$(17) \qquad \int_0^1 u(\lambda)\, v(\lambda)\, d\tilde{\sigma}(\lambda) = \sum_{(A)} \int_0^1 u(\lambda)\, \chi_A(\lambda)\, d\tilde{\sigma}(\lambda) \int_0^1 v(\lambda)\, \bar{\chi}_A(\lambda)\, d\tilde{\sigma}(\lambda)$$

gilt, die man bekanntlich als *Vollständigkeit oder Abgeschlossenheit* bezeichnet. Wir beweisen die obige Relation wie folgt[10]):

Wegen der angenommenen Stetigkeit von $u(\lambda)$ und $v(\lambda)$ sind die beiden Bilinearformen

$$U(x, y) = \int_0^1 u(\lambda)\, d\sigma(\lambda; x, y) = \sum_{(P,Q)} u_{P,Q}\, x_P\, y_Q,$$

$$V(x, y) = \int_0^1 v(\lambda)\, d\sigma(\lambda; x, y) = \sum_{(P,Q)} v_{P,Q}\, x_P\, y_Q$$

offenbar beschränkt und vertauschbar. Durch Komposition erhält man aus diesen die ebenfalls beschränkte Form

$$UV(x, y) = \int_0^1 u(\lambda)\, v(\lambda)\, d\sigma(\lambda; x, y) = \sum_{(P,Q)} \Big(\sum_{(K)} u_{P,K}\, v_{K,Q} \Big)\, x_P\, y_Q.$$

In derselben Weise erhält man durch Komposition dieser Formen mit

$$A(x, y) = \int_0^1 \chi_A(\lambda)\, d\sigma(\lambda; x, y) = \sum_{(P,Q)} c_{P,Q}^{(A)}\, x_P\, y_Q$$

die Bilinearform

$$UA(x, y) = \int_0^1 u(\lambda)\, \chi_A(\lambda)\, d\sigma(\lambda; x, y),$$

die man (wegen der Vertauschbarkeit von U mit A) auch in der Form

$$\sum_{(P,Q,K)} u_{P,K}\, c_{K,Q}^{(A)}\, x_P\, y_Q = \sum_{(P,Q)} u_{P,Q A^{-1}}\, x_P\, y_Q$$

oder

$$\sum_{(P,Q,K)} c_{P,K}^{(A)}\, u_{K,Q}\, x_P\, y_Q = \sum_{(P,Q)} u_{P A,Q}\, x_P\, y_Q$$

schreiben kann.

In gleicher Weise ergibt sich

$$\int_0^1 v(\lambda)\, \chi_A(\lambda)\, d\sigma(\lambda; x, y) = \sum_{(P,Q)} v_{P,Q A^{-1}}\, x_P\, y_Q = \sum_{(P,Q)} v_{P A,Q}\, x_P\, y_Q.$$

---

[10]) Vgl. den analogen Beweis auf S. 794 meiner angeführten Arbeit [2]).

Setzen wir in diesen Formeln etwa $x_C = y_C = 1$, alle übrigen Unbestimmten gleich 0, so erhalten wir (da dabei $\sigma(\lambda; x, y)$ in $\tilde{\sigma}(\lambda)$ übergeht)

$$\int_0^1 u(\lambda)\, v(\lambda)\, d\tilde{\sigma}(\lambda) = \sum_{(K)} u_{C,K}\, v_{K,C},$$

$$\int_0^1 u(\lambda)\, \chi_A(\lambda)\, d\tilde{\sigma}(\lambda) = u_{C,CA^{-1}}, \qquad \int_0^1 v(\lambda)\, \chi_A(\lambda)\, d\tilde{\sigma}(\lambda) = v_{CA,C}.$$

Aus der letzten Gleichung ergibt sich aber, wenn man A durch A^{-1} ersetzt,

$$\int_0^1 v(\lambda)\, \bar{\chi}_A(\lambda)\, d\tilde{\sigma}(\lambda) = v_{CA^{-1},C}.$$

Daher ist in der Tat

$$\sum_{(A)} \int_0^1 u(\lambda)\, \chi_A(\lambda)\, d\tilde{\sigma}(\lambda) \int_0^1 v(\lambda)\, \bar{\chi}_A(\lambda)\, d\tilde{\sigma}(\lambda) = \sum_{(A)} u_{C,CA^{-1}}\, v_{CA^{-1},C}$$

$$= \sum_{(K)} u_{C,K}\, v_{K,C} = \int_0^1 u(\lambda)\, v(\lambda)\, d\tilde{\sigma}(\lambda).$$

Damit sind alle Behauptungen des in der Einleitung ausgesprochenen ersten Satzes bewiesen.

4. Der Übergang zu gewöhnlichen Integralen[11]) geschieht in bekannter Weise auf Grund einer Bemerkung von Herrn Lebesgue. Wir wollen dies insbesondere in dem Falle eigentlich unendlicher Gruppen durchführen, wo die obige nichtabnehmende Funktion $\tilde{\sigma}(\lambda)$ überall stetig ist.

Es sei $f(\lambda)$ eine beliebige im Intervall $0 \leqq \lambda \leqq 1$ definierte Funktion von ähnlicher Art wie die Gruppencharaktere $\chi_A(\lambda)$, d. h. es sei $f(\lambda)$ stetig mit etwaiger Ausnahme gewisser Stellen, in deren Umgebung $\tilde{\sigma}(\lambda)$ konstant und $f(\lambda)$ nur von links stetig ist. Man ordne jeder solchen Funktion $f(\lambda)$ eine Funktion $F(s)$ (definiert im selben Intervall), wie folgt zu: Ist s ein solcher, der Ungleichung

$$0 = \tilde{\sigma}(0) \leqq s \leqq \tilde{\sigma}(1) = 1$$

genügender Wert, welcher von der stetigen, nichtabnehmenden Funktion $\tilde{\sigma}(\lambda)$ an einer einzigen Stelle λ angenommen wird, so setze man

$$F(s) = F(\sigma(\lambda)) = f(\lambda);$$

nimmt hingegen $\tilde{\sigma}(\lambda)$ den Wert s an mehr als einer Stelle an, also an den Stellen eines abgeschlossenen Intervalls $\lambda_1 \leqq \lambda \leqq \lambda_2$, so setze man

$$F(s) = f(\lambda_1).$$

Man erkennt unmittelbar, daß es höchstens abzählbar unendlich viele Werte s der zweiten Art gibt, ferner daß die soeben konstruierte Funk-

[11]) Vgl. S. 795, a. a. O. [2]).

tion $F(s)$ nur an diesen Stellen unstetig sein kann, und endlich — da $\tilde{\sigma}(\lambda)$ nicht abnehmend ist — daß $F(s)$ an den etwaigen Unstetigkeitsstellen noch von links stetig ist. Diese Zuordnung besitzt die Eigenschaft der Distributivität und ist außerdem offenbar so beschaffen, daß dem Produkte $f_1(\lambda) f_2(\lambda)$ zweier Funktionen das Produkt $F_1(s) F_2(s)$ der entsprechenden zu $f_1(\lambda)$ bzw. $f_2(\lambda)$ zugeordneten Funktionen $F_1(s)$ bzw. $F_2(s)$ entspricht. Ist schließlich $F(s)$ eine beliebige im Intervall $0 \leqq s \leqq 1$ definierte stetige Funktion, so kann man dazu eine ebenfalls stetige Funktion $f(\lambda)$ $(0 \leqq \lambda \leqq 1)$ so konstruieren, daß die zu $f(\lambda)$ vermöge der obigen Vorschrift zugeordnete Funktion mit $F(s)$ übereinstimmt; diese Funktion ist im allgemeinen nicht eindeutig bestimmt; sie wird aber eindeutig festgelegt, wenn man noch die Zusatzbedingung hinzufügt, daß sie in den Konstanzintervallen von $\tilde{\sigma}(\lambda)$ selbst konstant sei.

Bei dieser Zuordnung gilt offenbar

$$\int_0^1 f(\lambda)\, d\tilde{\sigma}(\lambda) = \int_0^1 F(s)\, ds, \tag{18}$$

wie man sich durch den Vergleich der endlichen Summen, deren Grenzwert die beiden auftretenden Integrale sind, leicht überzeugt.

5. Bezeichnet man daher die zu den Gruppencharakteren $\chi_A(\lambda)$, $\chi_B(\lambda)$, $\chi_C(\lambda), \ldots$ vermöge der obigen Konstruktion zugeordneten Funktionen bzw. mit $\mathsf{X}_A(s), \mathsf{X}_B(s), \mathsf{X}_C(s), \ldots$, so sind alle so erhaltenen Funktionen, deren Betrag ebenfalls überall gleich Eins ist, mit Ausnahme einer höchstens abzählbaren Punktmenge stetig; jede Unstetigkeitsstelle ist ein solcher Wert, den die obige Funktion $\tilde{\sigma}(\lambda)$ an allen Stellen eines Intervalls (von positiver Länge) annimmt, und unsre Funktionen sind an den Unstetigkeitsstellen von links stetig. Die Gruppeneigenschaft

$$\mathsf{X}_A(s)\, \mathsf{X}_B(s) = \mathsf{X}_{AB}(s)$$

ist eine unmittelbare Folge der Relation (14), da die Werte aller Funktionen $\mathsf{X}_A(s)$ an einer Stelle s mit den Werten der entsprechenden Funktionen $\chi_A(\lambda)$ an einer zu s zugeordneten Stelle λ übereinstimmen. In gleicher Weise ergibt sich die Orthogonalitätseigenschaft

$$\int_0^1 \mathsf{X}_A(s)\, \overline{\mathsf{X}}_B(s)\, ds = \delta_{A,B}$$

aus (16), mit Rücksicht auf die Relation (18).

Endlich resultiert die für irgendein Paar von stetigen Funktionen $U(s)$, $V(s)$ gültige Vollständigkeitsrelation

$$\int_0^1 U(s)\, V(s)\, ds = \sum_{(A)} \int_0^1 U(s)\, \mathsf{X}_A(s)\, ds \int_0^1 V(s)\, \overline{\mathsf{X}}_A(s)\, ds \tag{19}$$

aus der entsprechenden für die $\chi_A(\lambda)$ aufgestellten Relation (17), indem man diejenigen stetigen Funktionen $u(\lambda)$ und $v(\lambda)$ heranzieht, zu denen vermöge der obigen Konstruktion die Funktionen $U(s)$ bzw. $V(s)$ zugeordnet sind.

Die Zusammenfassung dieser Ergebnisse liefert den zweiten Satz der Einleitung. Es sei noch bemerkt, daß der Übergang zu gewöhnlichen Integralen in analoger Weise auch bei uneigentlichen unendlichen Gruppen möglich ist ($\tilde{\sigma}(\lambda)$ nicht stetig); es geht aber dabei die Vollständigkeit des resultierenden isomorphen Orthogonalsystems verloren. An Stelle dieser Eigenschaft tritt der Begriff der Abgeschlossenheit „in sich", den ich in meiner erwähnten Arbeit über die Multiplikationstabelle der Orthogonalsysteme zu einem ähnlichen Zwecke eingeführt habe.

§ 4.

Das Multiplikationstheorem der Gruppencharaktere.

1. Wir nehmen im folgenden an, daß die zugrunde gelegte kommutative Gruppe eigentlich unendlich ist (obwohl ein Teil der folgenden Untersuchungen auch für uneigentlich unendliche Gruppen richtig bleibt), und wollen einige interessante Eigenschaften des zugehörigen vollständigen Orthogonalsystems $\mathsf{X}_A(s)$ ableiten. Man würde zunächst auf Grund der in § 1 (vgl. **3.** und **4.**) gegebenen Diskussion der Spektra der zugehörigen Matrizen (A) ohne Schwierigkeiten erkennen, daß der Wertevorrat von $\mathsf{X}_A(s)$, falls A ein Gruppenelement von unendlicher Ordnung bezeichnet, alle Werte vom Betrage gleich Eins erschöpft mit etwaiger Ausnahme einer Nullmenge; ist aber A ein Element von der endlichen Ordnung n, so besteht der Wertevorrat von $\mathsf{X}_A(s)$ nur aus den n-ten Einheitswurzeln.

Man erkennt auch unmittelbar, daß die Gruppencharaktere durch die in Satz II angegebenen Eigenschaften nicht eindeutig festgelegt sind[12]). Ist nämlich

$$s' = w(s)$$

eine im Intervall $0 \leqq s \leqq 1$ definierte reelle, meßbare Funktion, die eine maßtreue Abbildung zwischen s und s' vermittelt, d. h. die jede meßbare Teilmenge des obigen Intervalls in eine Punktmenge vom selben Maße überführt, so bilden die Funktionen

$$\mathsf{X}_A(w(s)),\ \mathsf{X}_B(w(s)),\ \mathsf{X}_C(w(s)),\ \ldots$$

ebenfalls ein unitär orthogonales vollständiges System, das mit der vorgelegten Gruppe isomorph ist. Auf die Frage, ob man durch solche Trans-

[12]) Bei endlichen Abelschen Gruppen entspricht dies einer Vertauschung der Zeilen derjenigen (in der Einleitung erwähnten unitären) Matrix, deren Zeilen durch die einzelnen Gruppencharaktere gebildet sind.

formationen alle Gruppencharaktere einer vorgelegten Gruppe aus einem Gruppencharakter erhalten kann, komme ich in einer späteren Mitteilung zurück, in der ich die entsprechenden Probleme bei Zugrundelegung der allgemeinen Multiplikationstabelle behandeln werde. Ich bemerke nur noch, daß man im vorliegenden Falle auch in der folgenden Weise aus einem Gruppencharakter ein weiteres Funktionensystem derselben Art ableiten kann: Es sei s_0 eine feste Stelle des Intervalls $0 \leqq s \leqq 1$; ich betrachte das System

$$\mathsf{X}'_A(s) = \mathsf{X}_A(s_0)\,\mathsf{X}_A(s) \qquad (A \text{ jedes Element der Gruppe}).$$

Es folgt dann unmittelbar, daß alle im Satze II angegebenen Eigenschaften des Funktionensystems $\mathsf{X}_A(s)$ auch für $\mathsf{X}'_A(s)$ gelten; man wird dadurch im Zusammenhang mit der soeben gemachten Bemerkung auf den Gedanken geführt, ob man nicht eine Funktion $w(s)$ der oben genannten Art finden kann, so daß für alle Elemente der Gruppe die Beziehung

$$\mathsf{X}_A(s_0)\,\mathsf{X}_A(s) = \mathsf{X}_A(w(s))$$

gilt? Wir wollen zeigen, daß dies tatsächlich der Fall ist.

2. Die folgende Formel, die wir zu diesem Zweck heranziehen, ist eine einfache Anwendung des bekannten Parsevalschen Theorems. Es seien $x(s)$ und $y(s)$ zwei für $0 \leqq s \leqq 1$ definierte Funktionen, deren Betrag daselbst quadratisch integrierbar ist; wir setzen

$$x(s) \sim \sum_{(A)} x_A\,\mathsf{X}_A(s), \qquad \text{d. h.} \quad x_A = \int_0^1 x(s)\,\overline{\mathsf{X}}_A(s)\,ds,$$

$$y(s) \sim \sum_{(A)} y_A\,\mathsf{X}_A(s), \qquad \text{d. h.} \quad y_A = \int_0^1 y(s)\,\overline{\mathsf{X}}_A(s)\,ds;$$

das Produkt $x(s)\,y(s)$ ist integrierbar (natürlich nicht notwendigerweise quadratisch integrierbar), und es gilt für jedes Gruppenelement A die Formel

$$\int_0^1 x(s)\,y(s)\,\overline{\mathsf{X}}_A(s)\,ds = \sum_{(K)} x_K\,y_{AK^{-1}}, \tag{20}$$

wobei die rechts stehende Summe auf alle Gruppenelemente K zu erstrecken ist. Dies ergibt sich unmittelbar durch Anwendung der Vollständigkeitsrelation (19) auf die quadratisch integrierbaren Funktionen $U(s) = y(s)\,\overline{\mathsf{X}}_A(s)$, $V(s) = x(s)$; man erhält nämlich

$$\int_0^1 x(s)\,y(s)\,\overline{\mathsf{X}}_A(s)\,ds = \sum_{(K)} \int_0^1 x(s)\,\overline{\mathsf{X}}_K(s)\,ds \int_0^1 y(s)\,\overline{\mathsf{X}}_A(s)\,\mathsf{X}_K(s)\,ds$$

$$= \sum_{(K)} x_K\,y_{AK^{-1}}.$$

3. Wir bezeichnen die Entwicklungskoeffizienten der Funktion $f(s) = s$ mit u_A, d. h. wir setzen

$$u_A = \int_0^1 s\, \overline{\chi}_A(s)\, ds, \qquad s \sim \sum_{(A)} u_A \chi_A(s).$$

Es sei ferner t_0 eine beliebige Stelle des Intervalls $[0, 1]$; wir betrachten diejenige Funktion $u(s, t_0)$, deren Entwicklungskoeffizienten die Größen $u_A \chi_A(t_0)$ sind, für welche also

$$u(s, t_0) \sim \sum_{(A)} u_A \chi_A(t_0) \chi_A(s), \qquad \text{d. h.} \quad \int_0^1 u(s, t_0)\, \overline{\chi}_A(s)\, ds = u_A \chi_A(t_0)$$

ist. Die Existenz dieser Funktionen folgt aus dem bekannten Riesz-Fischerschen Satz; $u(s, t_0)$ ist eine *quadratisch integrierbare reelle Funktion* von s. Man erkennt dies, indem man diejenigen Glieder der obigen unendlichen Summe, die zu inversen Gruppenelementen A und A^{-1} gehören, zusammenfaßt, und beachtet, daß wegen $u_{A^{-1}} = \bar{u}_A$

$$u_A \chi_A(t_0) \chi_A(s) + u_{A^{-1}} \chi_{A^{-1}}(t_0) \chi_{A^{-1}}(s) = u_A \chi_A(t_0) \chi_A(s) + \bar{u}_A \overline{\chi}_A(t_0) \chi_A(s)$$

reell ist, mit Rücksicht auf die bekannte Tatsache, daß die fragliche unendliche Summe jedenfalls im Mittel gegen $u(s, t_0)$ konvergiert. Führt man diese Konstruktion für alle Stellen t_0 des Intervalls $[0, 1]$ aus, so gelangt man zu einer *reellen symmetrischen* Funktion $u(s, t)$ der beiden Veränderlichen s, t, die im Quadrat $0 \leqq s, t \leqq 1$ definiert ist. Wir denken uns zunächst die Stelle t_0 fest gewählt und berechnen auf Grund der in **2.** gemachten Bemerkung die Entwicklungskoeffizienten der Potenzen dieser Funktion $u(s, t_0)$, d. h. die Größen

$$\int_0^1 u(s, t_0)^n\, \overline{\chi}_A(s)\, ds \qquad (n = 1, 2, 3, \ldots),$$

wobei A irgendein Gruppenelement bezeichnet. Für $n = 1$ erhält man ex definitione

$$\int_0^1 u(s, t_0)\, \overline{\chi}_A(s)\, ds = u_A \chi_A(t_0);$$

für $n = 2$ ergibt sich aus (20), wenn man darin $x(s) = y(s) = u(s, t_0)$ einsetzt:

$$\begin{aligned} \int_0^1 u(s, t_0)^2\, \overline{\chi}_A(s)\, ds &= \sum_{(K)} u_K \chi_K(t_0)\, u_{AK^{-1}} \chi_{AK^{-1}}(t_0) \\ &= \sum_{(K)} \chi_A(t_0) \int_0^1 s\, \overline{\chi}_K(s)\, ds \int_0^1 s\, \overline{\chi}_A(s)\, \chi_K(s)\, ds \\ &= \chi_A(t_0) \int_0^1 s^2\, \overline{\chi}_A(s)\, ds. \end{aligned}$$

Aus der Konvergenz der Quadratsumme

$$\sum_{(A)} \left| \chi_A(t_0) \int_0^1 s^2 \overline{\chi}_A(s)\, ds \right|^2 = \int_0^1 s^4\, ds$$

folgt daher, daß das Quadrat der Funktion $u(s, t_0)^2$ integrierbar ist und die nochmalige Anwendung der Formel (20) für $x(s) = u(s, t_0)$, $y(s) = u(s, t_0)^2$ ergibt in gleicher Weise

$$\begin{aligned}\int_0^1 u(s, t_0)^3 \overline{\chi}_A(s)\, ds &= \sum_{(K)} \chi_K(t_0) \int_0^1 s\, \overline{\chi}_K(s)\, ds \cdot \chi_{AK^{-1}}(t_0) \int_0^1 s^2\, \overline{\chi}_{AK^{-1}}(s)\, ds \\ &= \chi_A(t_0) \sum_{(K)} \int_0^1 s\, \overline{\chi}_K(s)\, ds \int_0^1 s^2\, \overline{\chi}_A(s)\, \chi_K(s)\, ds \\ &= \chi_A(t_0) \int_0^1 s^3\, \overline{\chi}_A(s)\, ds .\end{aligned}$$

Durch Wiederholung desselben Verfahrens erhält man für jedes ganzzahlige n

$$\int_0^1 u(s, t_0)^n\, \overline{\chi}_A(s)\, ds = \chi_A(t_0) \int_0^1 s^n\, \overline{\chi}_A(s)\, ds .$$

Ist $f(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \ldots + a_n z^n$ ein beliebiges Polynom, so folgt daraus

$$\int_0^1 f(u(s, t_0))\, \overline{\chi}_A(s)\, ds = \chi_A(t_0) \int_0^1 f(s)\, \overline{\chi}_A(s)\, ds , \tag{21}$$

also insbesondere für das Einheitselement E der Gruppe ($\chi_E(s) = 1$)

$$\int_0^1 f(u(s, t_0))\, ds = \int_0^1 f(s)\, ds .$$

4. Aus dieser Relation oder — was damit gleichbedeutend ist — aus den Beziehungen

$$\int_0^1 u(s, t_0)^n\, ds = \int_0^1 s^n\, ds = \frac{1}{n+1}$$

kann man eine wichtige Eigenschaft der Funktion $u(s, t_0)$ entnehmen. Nach einem Satze von C. N. Haskins[13]) besitzt nämlich diejenige Punktmenge, in der

$$\alpha \leqq u(s, t_0) \leqq \beta$$

---

[13]) Vgl. den eleganten Beweis von D. Jackson, Proof of a theorem of Haskins, Transactions of the American Mathematical Society **17** (1916), S. 178—180. — Aus der bekannten Tatsache, daß

$$\left\{ \int f(s)^n\, ds \right\}^{\frac{1}{n}}$$

mit wachsendem n gegen das wesentliche Maximum von $f(s)$ strebt, folgt die Richtigkeit der Ungleichung $|u(s, t_0)| \leqq 1$ für fast alle s.

ist (wobei α und β irgendwelche Größen bedeuten, die zwischen 0 und 1 liegen), das Maß $\beta - \alpha$. Daraus könnte man ohne Schwierigkeit schließen, daß (bei festem t_0) die Abbildung $s' = u(s, t_0)$ eine maßtreue ist; eine Konsequenz dieser Tatsache ist die Richtigkeit der Beziehung

$$\int_0^1 F(u(s, t_0))\, ds = \int_0^1 F(s)\, ds, \tag{22}$$

wobei F irgendeine meßbare und beschränkte Funktion bedeutet. Im folgenden wird diese Beziehung nur für solche beschränkte Funktionen $F(s)$ verwendet, welche — wie z. B. die Gruppencharaktere — für $0 \leqq s \leqq 1$ definiert und so beschaffen sind, daß sie mit Ausnahme einer abzählbaren Punktmenge überall stetig sind, an den etwaigen Unstetigkeitspunkten aber einen endlichen Sprung erleiden und von links stetig sind.

Für solche Funktionen $F(s)$ kann die obige Relation (22) direkt folgendermaßen bewiesen werden: Da $F(s)$ jedenfalls der ersten Baireschen Klasse angehört, so kann man, analog wie bei dem Jacksonschen Beweise des Haskinsschen Satzes, eine solche Folge von Polynomen

$$f_1(s), f_2(s), \ldots, f_n(s), \ldots$$

bestimmen, welche *überall* gegen $F(s)$ strebt und so beschaffen ist, daß alle $|f_n(s)|$ für jedes n unterhalb einer auch von s unabhängigen Schranke bleiben. Dann ist auch für jedes s

$$\lim_{n=\infty} f_n(u(s, t_0)) = F(u(s, t_0))$$

und wegen der Beschränktheit der Folge $f_n(u(s, t))$

$$\int_0^1 F(u(s, t_0))\, ds = \lim_{n=\infty} \int_0^1 f_n(u(s, t_0))\, ds = \lim_{n=\infty} \int_0^1 f_n(s)\, ds = \int_0^1 F(s)\, ds,$$

da für Polynome $f_n(s)$ die Behauptung (22) bereits als richtig erkannt ist.

5. Aus dem soeben gewonnenen Resultat gelangen wir zu dem Multiplikationstheorem der Gruppencharaktere wie folgt: Es sei $\chi_A(s)$ irgendeine dieser Funktionen; wir betrachten eine Folge von Polynomen $f_n(s)$ $(n = 1, 2, 3, \ldots)$, die im Mittel gegen $\chi_A(s)$ strebt, d. h. es sei

$$\lim_{n=\infty} \int_0^1 |\chi_A(s) - f_n(s)|^2\, ds = 0; \tag{23}$$

es gilt wegen (22) auch die Limesgleichung

$$\lim_{n=\infty} \int_0^1 |\chi_A(u(s, t_0)) - f_n(u(s, t_0))|^2\, ds = 0. \tag{23'}$$

Ferner folgt aus (21) für alle Gruppenelemente P

$$\int_0^1 f_n(u(s,t_0))\,\overline{\chi}_P(s)\,ds = \chi_P(t_0)\int_0^1 f_n(s)\,\overline{\chi}_P(s)\,ds;$$

der Grenzübergang $n=\infty$ liefert, mit Rücksicht auf (23) und (23′) (da $|\overline{\chi}_P(s)|$ beschränkt ist)

$$\int_0^1 \chi_A(u(s,t_0))\,\overline{\chi}_P(s)\,ds = \chi_P(t_0)\int_0^1 \chi_A(s)\,\overline{\chi}_P(s)\,ds = \begin{cases} 0, & \text{für } P \neq A, \\ \chi_A(t_0) & \text{für } P = A, \end{cases}$$

d. h. die Entwicklungskoeffizienten der Funktion $\chi_A(u(s,t_0))$ stimmen mit den entsprechenden Entwicklungskoeffizienten der Funktion $\chi_A(t_0)\,\chi_A(s)$ überein. Es gilt daher fast überall

$$\chi_A(u(s,t_0)) = \chi_A(s)\,\chi_A(t_0), \tag{24}$$

und zwar gilt diese Beziehung für jedes Gruppenelement A und für jede Stelle t_0.

6. Zu analogen Ergebnissen führt die Funktion

$$v(s,t) \sim \sum_{(A)} u_A\,\overline{\chi}_A(t)\,\chi_A(s),$$

wobei die u_A dieselben Größen wie oben sind. Die Identität

$$u_A\,\overline{\chi}_A(t)\,\chi_A(s) + u_{A^{-1}}\,\overline{\chi}_{A^{-1}}(t)\,\chi_{A^{-1}}(s) = u_A\,\overline{\chi}_A(t)\,\chi_A(s) + \overline{u}_A\,\chi_A(t)\,\overline{\chi}_A(s)$$

gewährleistet die Realität dieser quadratisch integrierbaren Funktion; die Formel

$$\int_0^1 v(s,t)^n\,\overline{\chi}_A(s)\,ds = \overline{\chi}_A(t)\int_0^1 s^n\,\overline{\chi}_A(s)\,ds \qquad (n=1,2,3,\ldots)$$

beweist man in derselben Weise wie die obige Formel (21), durch Induktion mit Hilfe der in 2. gemachten Bemerkung. Daraus folgt wiederum — wörtlich wie oben —, daß bei festem t diejenige Punktmenge, in der $0 \leqq \alpha \leqq v(s,t) \leqq \beta \leqq 1$ ist, das Maß $\beta - \alpha$ besitzt. Die Wiederholung der soeben angestellten Betrachtungen, indem man $u(s,t)$ durch $v(s,t)$ ersetzt, liefert das Resultat, daß für jedes Gruppenelement A und bei gegebenem t für fast alle Werte von s die Beziehung

$$\chi_A(v(s,t)) = \overline{\chi}_A(t)\,\chi_A(s) \tag{24′}$$

gilt.

Die Relationen (24) und (24′) enthalten das Multiplikationstheorem der Gruppencharaktere. Man kann aus ihnen verschiedene Eigenschaften der Funktionen $u(s,t)$ und $v(s,t)$ ablesen; z. B. daß diese Funktionen bei festem t inverse Funktionen sind. Es genügt ferner $u(s,t)$ der Funktionalgleichung

$$u(u(s_1,s_2),s_3) = u(s_1,u(s_2,s_3))$$

(die natürlich nur fast überall gilt) und die die Aussage enthält, daß die zu den verschiedenen Werten von t gehörenden Abbildungen

$$s' = u(s, t)$$

die Gruppeneigenschaft besitzen, usw.

7. Jede der beiden reellen Funktionen $u(s, t)$ und $v(s, t)$ bestimmt die zugrunde gelegte kommutative Gruppe vollständig. Die Gruppencharaktere $\mathsf{X}_A(s)$ erfüllen ja, wie man aus der Definition von $v(s, t)$ unmittelbar erkennt, die Beziehungen

$$u_A \mathsf{X}_A(s) = \int_0^1 v(s, t)\, \mathsf{X}_A(t)\, dt,$$

d. h. die *Funktionen* $\mathsf{X}_A(s)$ *sind die Eigenfunktionen des reellen* (*unsymmetrischen*) *Kernes* $v(s, t)$. Durch die $\mathsf{X}_A(s)$ ist aber die Gruppe bereits festgelegt.

Wir wollen noch die Eigenfunktionen des symmetrischen Kernes $u(s, t)$ aufstellen, um damit zu einem mit der vorgelegten Gruppe zusammenhängenden *reellen* Orthogonalsystem zu gelangen. Es ist dies die naheliegende Verallgemeinerung davon, wie man bei der zyklischen Gruppe aus den Gruppencharakteren, d. h. aus den Exponentialfunktionen $e^{2i\pi ns}$ zu den trigonometrischen Funktionen des Fourierschen Orthogonalsystems gelangt.

Ist $A \neq E$, so bestimmen wir die beiden reellen Funktionen $\varphi'_A(s)$ und $\varphi''_A(s)$ aus der Gleichung

$$\varphi'_A(s) + i\varphi''_A(s) = \sqrt{2}\sqrt{\frac{u_A}{|u_A|}}\,\mathsf{X}_A(s) \tag{25}$$

oder, was damit gleichbedeutend ist, aus

$$\varphi'_A(s) - i\varphi''_A(s) = \sqrt{2}\sqrt{\frac{u_{A^{-1}}}{|u_A|}}\,\mathsf{X}_{A^{-1}}(s);$$

für $A = E$ setzen wir $\varphi_E(s) = 1$. Es gilt dann für alle $A \neq E$

$$\varphi'_{A^{-1}}(s) = \varphi'_A(s), \qquad \varphi''_{A^{-1}}(s) = -\varphi''_A(s),$$

ferner (indem man die Gleichungen (25) und (25′) multipliziert)

$$\varphi'_A(s)^2 + \varphi''_A(s)^2 = 2.$$

Man verifiziert durch eine einfache Rechnung die Identität:

$$u_A \mathsf{X}_A(s)\, \mathsf{X}_A(t) + \bar{u}_A \bar{\mathsf{X}}_A(s)\, \bar{\mathsf{X}}_A(t) = |u_A| \{\varphi'_A(s)\varphi'_A(t) - \varphi''_A(s)\varphi''_A(t)\}, \tag{26}$$

ferner die Integralbeziehungen:

$$\int_0^1 \varphi'_A(s)^2\, ds = 1, \qquad \int_0^1 \varphi''_A(s)^2\, ds = 1, \qquad \int_0^1 \varphi'_A(s)\varphi''_A(s)\, ds = 0$$

und endlich, daß, falls B von A und A^{-1} verschieden ist,

$$\int_0^1 \varphi'_A(s)\,\varphi'_B(s)\,ds = \int_0^1 \varphi''_A(s)\,\varphi''_B(s)\,ds = 0$$

ist. Diese Relationen enthalten die Aussage, daß die unendlich vielen Funktionen

$$\varphi_E = 1, \quad \varphi'_A(s), \quad \varphi''_A(s), \tag{27}$$

wobei für A aus jedem Paar von inversen Gruppenelementen nur das eine Element zu nehmen ist, ein reelles Orthogonalsystem im Intervall $0 \leqq s \leqq 1$ bilden. Die Relation (26) liefert aber in Verbindung mit der in **3.** gegebenen Definition von $u(s,t)$

$$u(s,t) = \frac{1}{2} + \sum_{(A)}{}' |u_A| \{\varphi'_A(s)\,\varphi'_A(t) - \varphi''_A(s)\,\varphi''_A(t)\} \quad (A \neq E),$$

wobei der Strich neben dem Summenzeichen zur Andeutung dessen dient, daß analogerweise in der Summe von den zu inversen Gruppenelementen gehörenden Gliedern die eine wegzulassen ist.

Diese Gleichung zeigt eben, daß *die Funktionen* $\varphi'_A(s)$, $\varphi''_A(s)$ *die Eigenfunktionen des reellen symmetrischen Kernes* $u(s,t)$ *sind* (die zugehörigen Eigenwerte sind $|u_A|$ bzw. $-|u_A|$); folglich sind diese Funktionen und damit auch die aus (25) berechenbaren Funktionen $\chi_A(s)$, sowie die Gruppe selbst durch $u(s,t)$ allein bereits festgelegt.

Durch den soeben dargelegten Zusammenhang der Gruppencharaktere mit den Eigenfunktionen von $u(s,t)$ ist auch der Weg zum Studium der Entwicklungen willkürlicher Funktionen nach den Gruppencharakteren angebahnt.

Das in der vorliegenden Arbeit behandelte Problem steht in engem Zusammenhang mit denjenigen Fragen, die ich in meiner in der Einleitung angeführten Arbeit beantwortet habe. Dort handelte es sich darum, die (notwendigen und hinreichenden) Bedingungen anzugeben, die die sogenannte Multiplikationstabelle eines vollständigen reellen Orthogonalsystems $\varphi_1(s), \varphi_2(s), \ldots, \varphi_n(s), \ldots$ erfüllt, wobei die Multiplikationstabelle als die aus den Größen

$$c_{pqr} = \int_0^1 \varphi_p(s)\,\varphi_q(s)\,\varphi_r(s)\,ds \qquad (p,q,r = 1,2,3,\ldots)$$

gebildete unendliche kubische Matrix definiert ist. In der vorliegenden Arbeit handelt es sich um unitär-orthogonale Funktionensysteme $\psi_1(s), \psi_2(s), \ldots, \psi_n(s), \ldots$, die also den Bedingungen

$$\int_0^1 \psi_p(s)\,\overline{\psi}_q(s)\,ds = \delta_{pq}$$

unterworfen sind, wobei $\overline{\psi}_q$ die zu ψ_q konjugiert komplexe Funktion bedeutet. Es liegt an der Hand, in diesem Falle die Multiplikationstabelle vermöge der Größen

$$c_{pqr} = \int_0^1 \psi_p(s)\, \psi_q(s)\, \overline{\psi}_r(s)\, ds$$

zu definieren. (In dem hier behandelten Falle sind die Funktionen des vorgelegten unitär-orthogonalen Systems den Gruppenelementen zugeordnet und die Multiplikationstabelle wird aus den in 1., § 1 angegebenen Größen $c_{Q,R}^{(P)} = \delta_{PQR}$ gebildet.) Es liegt nun nahe, die allgemeine Frage zu stellen, wie die komplexen Größen c_{pqr} beschaffen sein müssen, damit ein unitär-orthogonales Funktionensystem existiere, dessen Multiplikationstabelle durch diese Größen c_{pqr} gebildet wird. Dieses Problem gestattet eine ähnliche Behandlung wie das entsprechende für reelle Orthogonalsysteme, wobei aber an Stelle der unendlichen symmetrischen Matrizen die Theorie der sog. unendlichen Normalmatrizen heranzuziehen ist.

(Eingegangen am 26. Mai 1930.)

ÜBER DIE MULTIPLIKATIONSTABELLE DER UNITÄR-ORTHOGONALEN FUNKTIONENSYSTEME

Von ALFRED HAAR (Szeged).

Einleitung.

Ist $\varphi_1(s)$, $\varphi_2(s)$,...., $\varphi_n(s)$,.... ein in einer Punktmenge $\mathfrak{M}$ definiertes *reelles* orthogonales Funktionensystem, so bilden die unendlichvielen reellen Größen

$$c_{pqr}=\int_{\mathfrak{M}}\varphi_p(s)\varphi_q(s)\varphi_r(s)ds, \qquad (p, q, r=1, 2, 3,....)$$

vermöge deren man die Produkte $\varphi_p(s)\varphi_q(s)$ durch die Funktionen des vorgelegten Systems ausdrücken kann, *die Multiplikationstabelle* dieses Orthogonalsystems. Analogien zu der Theorie der hyperkomplexen Zahlensysteme (von unendlichvielen Einheiten) führen auf den Gedanken, die Eigenschaften solcher Größen c_{pqr} zu untersuchen, in denen sich die wesentlichen Eigenschaften des zugehörigen Orthogonalsystems widerspiegeln müssen. Ich habe aus diesem Grunde die notwendigen und hinreichenden Bedingungen aufgestellt, die die Multiplikationstabellen aller beschränkten Orthogonalsysteme charakterisieren (1). Im selben Gedankenkreis habe ich im Falle einer aus abzählbar unendlichvielen Elementen bestehenden kommutativen Gruppe A, B, C,.... die Existenz einer zu der Gruppe isomorphen Funktionensystems $\chi_A(s)$, $\chi_B(s)$, $\chi_C(s)$,.... bewiesen (2), das also den Gleichungen $\chi_A(s)\chi_B(s)=\chi_{AB}(s)$ genügt. Dieses im Intervall $0\leqq s\leqq 1$ definierte Funktionensystem — ein Analogon der Gruppencharaktere von endlichen Abelschen Gruppen — ist kein Orthogonalsystem; seine Funktionen sind aber so beschaffen, daß das Integral (3)

$$\int_0^1\chi_A(s)\overline{\chi}_B(s)ds$$

---

(1) *Über die Multiplikationstabelle der orthogonalen Funktionensysteme*, Math. Zeitschrift, Bd. 31 (1930), S. 769-798.

(2) *Über unendliche kommutative Gruppen*, Math. Zeitschrift, Bd. 33 (1931), S. 129-159.

(3) Die zu einer beliebigen komplexen Größe x konjugiert komplexe Zahl wird stets mit $\overline{x}$ bezeichnet.

gleich 0 oder 1 ist, je nachdem A und B verschieden oder gleich sind; d. h. die $\chi_A(s)$ bilden ein unitär-orthogonales Funktionensystem. Man bezeichnet bekanntlich ein in der Punktmenge $\mathfrak{M}$ definiertes (komplexwertiges) Funktionensystem $\varphi_1(s)$, $\varphi_2(s)$,...., $\varphi_n(s)$,.... als ein *unitär-orthogonales Funktionensystem*, falls die Integralrelationen

$$\int_{\mathfrak{M}} \varphi_p(s)\overline{\varphi}_q(s)ds = \delta_{pq} = \begin{cases} 0, & \text{für } p \lesseqgtr q, \\ 1, & \text{für } p = q \end{cases}$$

erfüllt sind.

Es liegt nun der Gedanke nahe, die *Multiplikationstabellen der unitär-orthogonalen Funktionensysteme zu untersuchen.* Die Fouriersche Entwicklung der Produkte $\varphi_p(s)\varphi_q(s)$

$$\varphi_p(s)\varphi_q(s) \sim \sum_{r=1}^{\infty} c_{pqr}\varphi_r(s)$$

führt zu den Entwicklungskoeffizienten

$$c_{pqr} = \int_{\mathfrak{M}} \varphi_p(s)\varphi_q(s)\overline{\varphi}_r(s)ds \qquad (p, q, r = 1, 2, 3,....)$$

deren Gesamtheit als *Multiplikationstabelle des unitär-orthogonalen Systems* $\varphi_n(s)$ bezeichnet wird. Um die Existenz der auftretenden Integrale zu sichern, werden wir annehmen, daß der absolute Betrag jeder einzelnen Funktion des betrachteten Systems beschränkt bleibt. Das System $\varphi_n(s)$ ist bekanntlich *abgeschlossen*, wenn man jede in $\mathfrak{M}$ definierte Funktion, deren absoluter Betrag quadratisch integrierbar ist, durch lineare Aggregate der $\varphi_n(s)$ (mit konstanten Koeffizienten) im Mittel beliebig genau approximieren kann. Etwas weniger fordert die Eigenschaft, daß das System « *in sich* » *abgeschlossen* ist (4); hierzu ist nur erforderlich, daß die Produkte

$$\varphi_p(s)\varphi_q(s), \qquad \varphi_p(s)\overline{\varphi}_q(s), \qquad \overline{\varphi}_p(s)\overline{\varphi}_q(s)$$

sowie 1 durch Aggregate der genannten Art im Mittel beliebig genau approximierbar sind.

Auf Grund der sog. Vollständigkeitsrelation, die ja nur eine Umformung des Begriffs der Abgeschlossenheit ist, gelangt man unschwer zu *drei notwendigen Bedingungen* (§ 1, S. 6), die die Multiplikationstabelle jedes beschränkten abgeschlossenen oder in sich abgeschlossenen unitär-orthogonalen Funktionensystems erfüllt. Im § 2. wird gezeigt, daß diese Bedingungen auch *hinreichend* sind, indem zu irgendwelchem, die fraglichen drei Bedingungen I, II, III erfüllenden Größensystem c_{pqr} ein beschränktes unitär-orthogonales Funktionensystem konstruiert wird, dessen Multiplikationstabelle aus den vorgelegten Größen c_{pqr} besteht; dieses Funktionensystem ist außerdem *in sich abgeschlossen.* Wir stellen endlich

(4) Vgl. den analogen Begriff bei den reellen Orthogonalsystemen, a. a. O. (1), S. 774.

im § 3. *eine* IV^{te} *Bedingung* auf, die zusammen mit den vorangehenden drei Bedingungen I, II, III die notwendigen und hinreichenden Bedingungen für die Multiplikationstabelle eines *abgeschlossenen* beschränkten unitär-orthogonalen Funktionensystems angibt.

§ 1.

Notwendige Bedingungen für die Multiplikationstabelle eines unitär-orthogonalen Funktionensystems.

1. - Es sei $\varphi_1(s)$, $\varphi_2(s)$,...., $\varphi_n(s)$,.... ein in der Punktmenge $\mathfrak{M}$ definiertes unitär-orthogonales Funktionensystem:

$$\int_{\mathfrak{M}} \varphi_p(s)\overline{\varphi}_q(s)ds = \delta_{pq}; \qquad (p, q = 1, 2, 3,....)$$

wir nehmen an, daß der absolute Betrag jeder Funktion dieses Systems beschränkt ist, d. h. $|\varphi_p(s)| \leqq M_p$ (wobei M_p für alle p nicht beschränkt zu sein braucht). Ein solches System bezeichnen wir als ein *beschränktes unitär-orthogonales Funktionensystem*. Man bezeichnet bekanntlich dieses Funktionensystem als *vollständig oder abgeschlossen*, wenn man jede quadratisch integrierbare Funktion $f(s)$ (definiert in derselben Menge $\mathfrak{M}$) « im Mittel » durch lineare Aggregate der $\varphi_n(s)$ beliebig genau approximieren kann, d. h. wenn man zu jeder positiven Größe ε endlich viele Konstanten a_1, a_2,...., a_n derart finden kann, daß

$$\int_{\mathfrak{M}} |f(s) - a_1\varphi_1(s) - a_2\varphi_2(s) - .... - a_n\varphi_n(s)|^2 ds < \varepsilon$$

ist. Die notwendige und hinreichende Bedingung der Vollständigkeit ist bekanntlich das Bestehen der folgenden sog. *Vollständigkeitsrelation*:

$$(1) \qquad \int_{\mathfrak{M}} |f(s)|^2 ds = \sum_{k=1}^{\infty} \left| \int_{\mathfrak{M}} f(s)\overline{\varphi}_k(s)ds \right|^2$$

für alle quadratisch integrierbare Funktion $f(s)$. Gilt diese Relation für die beiden Funktionen $f_1(s)$ und $f_2(s)$, so gilt sie auch für $x_1f_1(s) + x_2f_2(s)$, woraus man unmittelbar die Richtigkeit der Beziehung

$$(2) \qquad \int_{\mathfrak{M}} f_1(s)\bar{f}_2(s)ds = \sum_{k=1}^{\infty} \int_{\mathfrak{M}} f_1(s)\overline{\varphi}_k(s)ds \int_{\mathfrak{M}} \bar{f}_2(s)\varphi_k(s)ds$$

erkennt.

Wir werden im folgenden diese Relationen (1) und (2) ausschließlich nur für die Funktionen

$$(3) \qquad f(s) = \varphi_\alpha(s)\varphi_\beta(s), \quad \varphi_\alpha(s)\overline{\varphi}_\beta(s), \quad \overline{\varphi}_\alpha(s)\overline{\varphi}_\beta(s) \quad \text{und} \quad f(s) = 1$$
$$(\alpha, \beta = 1, 2, 3,....)$$

anwenden und setzen daher die Abgeschlossenheit des vorgelegten Systems nicht voraus und nehmen nur an, daß dieses System so beschaffen sind, daß man die Funktionen (3) durch lineare Aggregate der $\varphi_n(s)$ im Mittel beliebig genau approximieren kann. Ein *solches unitär-orthogonales Funktionensystem soll als in sich abgeschlossen bezeichnet werden.*

2. - Die *Multiplikationstabelle* des vorgelegten unitär-orthogonalen Systems wird durch die Fourierschen Entwicklungskoeffizienten der Produkte $\varphi_p(s)\varphi_q(s)$ d. h. durch die Größen

$$c_{pqr}=\int_{\mathfrak{M}}\varphi_p(s)\varphi_q(s)\overline{\varphi}_r(s)ds \qquad (p, q, r=1, 2, 3,....)$$

gebildet (5); wir beginnen mit der Aufzählung der charakteristischen Eigenschaften dieser unendlichen kubischen Matrix.

Zu diesem Ende betrachten wir die unendlichvielen Bilinearformen (von unendlichvielen Veränderlichen $x_1, x_2,....; y_1, y_2,....$)

$$C_p(x, y)=\sum_{\alpha,\beta=1}^{\infty}c_{p\alpha\beta}x_\alpha y_\beta=\int_{\mathfrak{M}}\varphi_p(s)\left\{\sum_{\alpha,\beta=1}^{\infty}x_\alpha y_\beta\varphi_\alpha(s)\overline{\varphi}_\beta(s)\right\}ds,$$

bzw. die zugehörigen Matrizen

$$C_p=(c_{p\alpha\beta}), \qquad (p=1, 2, 3,....)$$

ferner diejenigen Matrizen, die man aus diesen durch Transposition (Vertauschung der Zeilen und Kolonnen) und Ersetzen jedes Elementes durch die konjugiert komplexe Größe erhält:

$$\overline{C}_p'=(\overline{c}_{p\beta\alpha}), \qquad (p=1, 2, 3,....)$$

bzw. die zugehörigen Bilinearformen

$$\overline{C}_p'(x, y)=\sum_{\alpha,\beta=1}^{\infty}\overline{c}_{p\beta\alpha}x_\alpha y_\beta=\int_{\mathfrak{M}}\overline{\varphi}_p(s)\left\{\sum_{\alpha,\beta=1}^{\infty}x_\alpha y_\beta\varphi_\alpha(s)\overline{\varphi}_\beta(s)\right\}ds.$$

Man erkennt vorab unmittelbar, daß diese Bilinearformen bzw. Matrizen *beschränkt* sind, da die n^{ten} Abschnitte, d. h. die endlichen Bilinearformen

$$\int_{\mathfrak{M}}\varphi_p(s)\left\{\sum_{\alpha,\beta=1}^{n}x_\alpha y_\beta\varphi_\alpha(s)\overline{\varphi}_\beta(s)\right\}ds \quad \text{und} \quad \int_{\mathfrak{M}}\overline{\varphi}_p(s)\left\{\sum_{\alpha,\beta=1}^{n}x_\alpha y_\beta\varphi_\alpha(s)\overline{\varphi}_\beta(s)\right\}ds.$$

dem Betrage nach kleiner als

$$M_p\int_{\mathfrak{M}}\left|\sum_{\alpha=1}^{n}x_\alpha\varphi_\alpha(s)\right|\left|\sum_{\beta=1}^{n}y_\beta\overline{\varphi}_\beta(s)\right|ds\leqq M_p\left\{\sum_{\alpha=1}^{n}|x_\alpha|^2\sum_{\beta=1}^{n}|y_\beta|^2\right\}^{\frac{1}{2}}$$

(5) Die Existenz der bei der Definition von c_{pqr} auftretenden Integrale wird durch die vorausgesetzte Beschränktheit der $\varphi_p(s)$ gewährleistet.

bleiben. Es ergibt sich ferner die *Vertauschbarkeit der Matrizen* C_1, $\overline{C}_1'$, C_2, $\overline{C}_2'$,..., C_p, $\overline{C}_p'$,.... durch Anwendung der Vollständigkeitsrelationen (2) für die Funktionen (3) in folgender Weise: man findet für das β^{te} Element der α^{ten} Zeile in den Matrizen C_pC_q bzw. $C_p\overline{C}_q'$, $\overline{C}_q'C_p$, $\overline{C}_p'\overline{C}_q'$ die Ausdrücke

$$\sum_{k=1}^{\infty} c_{p\alpha k}c_{qk\beta}=\sum_{k=1}^{\infty}\int_{\mathfrak{M}}\varphi_p(s)\varphi_\alpha(s)\overline{\varphi}_k(s)ds\int_{\mathfrak{M}}\varphi_q(s)\varphi_k(s)\overline{\varphi}_\beta(s)ds=$$

$$=\int_{\mathfrak{M}}\varphi_p(s)\varphi_q(s)\varphi_\alpha(s)\overline{\varphi}_\beta(s)ds,$$

bzw.

$$\sum_{k=1}^{\infty} c_{p\alpha k}\bar{c}_{q\beta k}=\int_{\mathfrak{M}}\varphi_p(s)\overline{\varphi}_q(s)\varphi_\alpha(s)\overline{\varphi}_\beta(s)ds,$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \bar{c}_{qk\alpha}c_{pk\beta}=\int_{\mathfrak{M}}\varphi_p(s)\overline{\varphi}_q(s)\varphi_\alpha(s)\overline{\varphi}_\beta(s)ds,$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \bar{c}_{pk\alpha}\bar{c}_{q\beta k}=\int_{\mathfrak{M}}\overline{\varphi}_p(s)\overline{\varphi}_q(s)\varphi_\alpha(s)\overline{\varphi}_\beta(s)ds.$$

Diese Formeln zeigen die Vertauschbarkeit der obigen Matrizen; insbesondere ergibt sich daraus, daß C_p eine *Normalmatrix* ist, da sie mit $\overline{C}_p'$ vertauschbar ist. Man beachte, daß man bei den Umformungen in den zuletzt aufgeschriebenen Beziehungen die Relationen (2) nur für die Produkte $\varphi_\alpha(s)\varphi_\beta(s)$, $\overline{\varphi}_\alpha(s)\varphi_\beta(s)$, $\overline{\varphi}_\alpha(s)\overline{\varphi}_\beta(s)$ verwendet hat.

Eine weitere notwendige Eigenschaft der Multiplikationstabelle erhält man durch Anwendung der Vollständigkeitsrelationen auf die Funktion $f(s)=1$. Es seien nämlich e_k die Fourier-Koeffizienten dieser Funktion:

$$e_k=\int_{\mathfrak{M}}\overline{\varphi}_k(s)ds; \qquad (k=1, 2, 3,....)$$

man findet unmittelbar

$$\sum_{k=1}^{\infty} e_kc_{k\alpha\beta}=\sum_{k=1}^{\infty}\int_{\mathfrak{M}}\overline{\varphi}_k(s)\int_{\mathfrak{M}}\varphi_k(s)\varphi_\alpha(s)\overline{\varphi}_\beta(s)ds=\int_{\mathfrak{M}}\varphi_\alpha(s)\overline{\varphi}_\beta(s)ds=\delta_{\alpha\beta},$$

d. h. es gilt — falls man, wie üblich, die Einheitsmatrix $(\delta_{\alpha\beta})$ mit E bezeichnet — die Matrixrelation

$$\sum_{k=1}^{\infty} e_kC_k=E,$$

wobei

$$\sum_{k=1}^{\infty}|e_k|^2$$

endlich ist.

Wir können diese Tatsachen wie folgt zusammenfassen: ***Die Multiplikationstabelle***

$$c_{pqr}=\int_{\mathfrak{M}} \varphi_p(s)\varphi_q(s)\overline{\varphi}_r(s)ds \qquad (p, q, r=1, 2, 3,....)$$

eines beschränkten und in sich abgeschlossenen (also umsomehr eines abgeschlossenen) unitär-orthogonalen Funktionensystems erfüllt die folgenden drei Bedingungen:

I. *es ist* $c_{pqr}=c_{qpr}$;

II. *die unendlichvielen Bilinearformen*

$$C_p(x, y)=\sum_{\alpha, \beta=1}^{\infty} c_{p\alpha\beta}x_\alpha y_\beta, \qquad \overline{C}_p'(x, y)=\sum_{\alpha, \beta=1}^{\infty} \overline{c}_{p\beta\alpha}x_\alpha y_\beta \qquad (p=1, 2, 3,....)$$

sind beschränkt und vertauschbar;

III. *es existiert ein Wertsystem* $e_1, e_2,....$, *für das* $\sum_{k=1}^{\infty}|e_k|^2$ *konvergent ist, mit dessen Hülfe man die Einheitsmatrix* E *in der Form*

$$E=e_1C_1+e_2C_2+e_3C_3+....$$

darstellen kann.

3. - Man kann die Bedingung III durch die folgende allgemeinere ersetzen:

III'. *jede beschränkte Matrix* $A=(a_{\alpha\beta})$, *die mit allen Matrizen* $C_1, C_2, C_3,....$ *der Multiplikationstabelle vertauschbar ist, ist in der Form*

$$A=\sum_{k=1}^{\infty} x_kC_k$$

darstellbar, wobei die Quadratsumme $\sum_{k=1}^{\infty}|x_k|^2$ *konvergent ist.*

In der Tat, es liefert die Vertauschbarkeit von A mit C_α die Gleichungen

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_{pk}c_{ak\beta}=\sum_{k=1}^{\infty} c_{apk}a_{k\beta}; \qquad (\alpha, \beta, p=1, 2, 3,....) \tag{4}$$

ferner ist die Bilinearform, deren Matrix das Produkt $A\overline{A}'$ ist,

$$\sum_{p, q, l=1}^{\infty} a_{pl}\overline{a}_{ql}x_py_q$$

ebenfalls beschränkt. Setzt man daher

$$x_k=\sum_{p=1}^{\infty} a_{pk}e_p \qquad (k=1, 2, 3,....)$$

so findet man, daß die Quadratsumme

$$\sum_{k=1}^{\infty}|x_k|^2=\sum_{p, q, k=1}^{\infty} a_{pk}\overline{a}_{qk}e_p\overline{e}_q$$

der Wert der obigen Bilinearform für $x_p = e_p$, $y_p = \bar{e}_p$ ist, also jedenfalls konvergent ist. Andererseits ist — mit Rücksicht auf I, III und (4) —

$$\sum_{k=1}^{\infty} x_k c_{k\alpha\beta} = \sum_{p,k=1}^{\infty} e_p a_{pk} c_{k\alpha\beta} = \sum_{p,k=1}^{\infty} e_p c_{\alpha pk} a_{k\beta} = \sum_{k=1}^{\infty} \delta_{\alpha k} a_{k\beta} = a_{\alpha\beta}$$

d. h. es ist (6)

$$A = \sum_{k=1}^{\infty} x_k C_k .$$

4. - Der soeben bewiesene Satz gestattet die folgende interessante Anwendung; wir beschränken uns dabei auf abgeschlossene (natürlich beschränkte) Systeme $\varphi_n(s)$. Ist nämlich $f(s)$ ***eine beliebige beschränkte Funktion, so kann man ihr die unendliche Matrix***

$$M_f = \left(\int_{\mathfrak{M}} f(s) \varphi_\alpha(s) \overline{\varphi}_\beta(s) ds \right)$$

bzw. die Bilinearform

$$M_f(x, y) = \int_{\mathfrak{M}} f(s) \sum_{\alpha,\beta=1}^{\infty} x_\alpha y_\beta \varphi_\alpha(s) \overline{\varphi}_\beta(s) ds$$

zuordnen. Auf diese Verallgemeinerung der bekannten Toeplitzschen Laurentformen hat bereits O. Toeplitz selbst hingewiesen (7). M_f ist offenbar beschränkt und mit allen C_1, C_2,.... vertauschbar; es ist ja — in dieser Schreibweise —

$$C_p = M_{\varphi_p}, \qquad \overline{C}_p' = M_{\overline{\varphi}_p} \qquad (p = 1, 2, 3, \ldots)$$

und man erkennt unmittelbar auf Grund der (jetzt für alle beschränkte $f_1(s)$, $f_2(s)$ gültige) Relationen (2), daß

$$M_{f_1} M_{f_2} = M_{f_1 f_2}$$

ist. Mit Hülfe des Satzes III′ können wir nun zeigen, daß umgekehrt zu jeder mit allen C_p vertauschbaren beschränkten Matrix $A = (a_{\alpha\beta})$ eine im wesentlichen beschränkte Funktion (8) $f(s)$ gehört, so daß $A = M_f$ wird. Da nämlich

$$A = \sum_{k=1}^{\infty} x_k C_k \quad \text{ist und} \quad \sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^2$$

---

(6) Daß auch umgekehrt aus III′ die ursprüngliche Bedingung III folgt, ist trivial, da E mit jeder Matrix vertauschbar ist.

(7) Vgl. auch A. WINTNER: *Spektraltheorie der unendlichen Matrizen*, Leipzig (1929), S. 184.

(8) D. h. eine Funktion, deren Wertevorrat mit Ausnahme einer Nullmenge dem absoluten Betrage nach unterhalb einer endlichen Grenze bleibt.

konvergent ist, so folgt aus dem Riesz-Fischerschen Satze die Existenz einer Funktion $f(s)$, für die

$$\int_{\mathfrak{M}} |f(s)|^2 ds$$

existiert, so daß

$$x_k = \int_{\mathfrak{M}} f(s)\overline{\varphi}_k(s)ds \qquad (k=1, 2, 3,....)$$

ist. Da ferner

$$a_{\alpha\beta} = \sum_{k=1}^{\infty} x_k c_{k\alpha\beta} = \sum_{k=1}^{\infty} \int_{\mathfrak{M}} f(s)\overline{\varphi}_k(s)ds \int_{\mathfrak{M}} \varphi_k(s)\varphi_\alpha(s)\overline{\varphi}_\beta(s)ds = \int_{\mathfrak{M}} f(s)\varphi_\alpha(s)\overline{\varphi}_\beta(s)ds$$

ist, so ist jedenfalls $A = M_f$. Die Beschränktheit dieser Funktion $f(s) = f_1(s) + if_2(s)$ erkennt man wie folgt: Aus der Beschränkteheit der Matrix

$$A = \left(\int_{\mathfrak{M}} (f_1(s) + if_2(s))\varphi_\alpha(s)\overline{\varphi}_\beta(s)ds \right)$$

folgt die Beschränktheit ihrer « Hermiteschen Komponenten »:

$$\frac{1}{2}(A + \overline{A}') = \left(\int_{\mathfrak{M}} f_1(s)\varphi_\alpha(s)\overline{\varphi}_\beta(s)ds \right)$$

und

$$\frac{1}{2i}(A - \overline{A}') = \left(\int_{\mathfrak{M}} f_2(s)\varphi_\alpha(s)\overline{\varphi}_\beta(s)ds \right).$$

Es sei N der absolut genommen größte Wert, den die zugehörigen Hermiteschen Formen bei der Nebenbedingung

$$\sum_{k=1}^{\infty} |\xi_k|^2 = 1$$

annehmen. Wäre die reelle Funktion $f_1(s)$ (oder $f_2(s)$) an einer Punktmenge m vom positiven Maße μ etwa größer als N $(N>0)$, so sei $m(s)$ diejenige Funktion, die $= \frac{1}{\sqrt{\mu}}$ oder $=0$ ist, je nachdem s innerhalb oder außerhalb der Punktmenge m liegt; ich setze

$$\xi_\alpha = \int_{\mathfrak{M}} m(s)\overline{\varphi}_\alpha(s)ds,$$

also

$$\sum_{\alpha=1}^{\infty} |\xi_\alpha|^2 = \int_{\mathfrak{M}} (m(s))^2 ds = 1.$$

Die Hermitesche Form, deren Matrix $\frac{1}{2}(A + \overline{A}')$ ist, würde für dieses Wertsystem $\xi_1, \xi_2, \xi_3,....$ den Wert

$$\int_{\mathfrak{M}} f_1(s) \sum_{\alpha,\beta=1}^{\infty} \xi_\alpha \overline{\xi}_\beta \varphi_\alpha(s)\overline{\varphi}_\beta(s)ds = \int_{\mathfrak{M}} f_1(s)(m(s))^2 ds = \frac{1}{\mu}\int_m f_1(s)ds > N$$

annehmen (9), im Widerspruch zu der Voraussetzung.

Unser Resultat ist ein Analogon des Riesz-Fischerschen Satzes; es liefert *eine Charakterisierung derjenigen Größen, die sich aus einer beschränkten Funktion $f(s)$ vermöge der Formel*

$$\int_{\mathfrak{M}} f(s)\varphi_\alpha(s)\overline{\varphi}_\beta(s)$$

ergeben:

Ist $\varphi_1(s)$, $\varphi_2(s)$,.... ein (in $\mathfrak{M}$) beschränktes unitär-orthogonales Funktionensystem und $A=(a_{\alpha\beta})$ eine beliebige beschränkte Matrix, welche mit allen Matrizen C_1, C_2,.... der Multiplikationstabelle vertauschbar ist, so existiert eine im wesentlichen beschränkte Funktion $f(s)$, so daß

$$a_{\alpha\beta}=\int_{\mathfrak{M}} f(s)\varphi_\alpha(s)\overline{\varphi}_\beta(s)ds \qquad (\alpha,\beta=1,2,3,....)$$

ist und umgekehrt.

5. - Wir werden im folgenden noch von einer geringen Verallgemeinerung dieser Begriffe Gebrauch machen. Es sei $\sigma(s)$ eine im Intervall $a\leqq s\leqq b$ definierte reelle nicht abnehmende Funktion, $\varphi_1(s)$, $\varphi_2(s)$,...., $\varphi_n(s)$,.... aber ein System von Funktionen (definiert im selben Intervall), für das

$$\int_a^b \varphi_\alpha(s)\overline{\varphi}_\beta(s)d\sigma(s)=\delta_{\alpha\beta} \qquad (\alpha,\beta=1,2,3,....)$$

ist; man bezeichnet *diese Funktionen als ein im bezug auf $\sigma(s)$ unitär-orthogonales Funktionensystem.* Es werden im folgenden nur solche Systeme dieser Art auftreten, bei denen alle Funktionen $\varphi_n(s)$ beschränkt und stetig sind. Das System wird als *abgeschlossen* bezeichnet, wenn für jedes Paar von stetigen Funktionen $f_1(s)$, $f_2(s)$ die Beziehung

$$(3') \qquad \int_a^b f_1(s)f_2(s)d\sigma(s)=\sum_{k=1}^{\infty}\int_a^b f_1(s)\overline{\varphi}_k(s)d\sigma(s)\int_a^b f_2(s)\varphi_k(s)d\sigma(s)$$

statthat. (Den Begriff der Abgeschlossenheit « in sich » werden wir in diesem Falle nicht benötigen).

Als *Multiplikationstabelle* definieren wir in diesem Falle naturgemäß die unendliche kubische Matrix, gebildet aus den Größen

$$c_{\alpha\beta\gamma}=\int_a^b \varphi_\alpha(s)\varphi_\beta(s)\overline{\varphi}_\gamma(s)d\sigma(s) \qquad (\alpha,\beta,\gamma=1,2,3,....)$$

---

(9) Aus der Beschränktheit dieser Bilinearform folgt nämlich in bekannter Weise ihre « zeilenweise Konvergenz », vgl. E. HELLINGER und O. TOEPLITZ: *Theorie der Unendlichen Matrizen*, Math. Annalen, Bd. 69 (1910), insbesondere S. 297-299.

und man erkennt ohne Mühe, daß die Bedingungen I, II, III des Satzes auf S. 6 auch für diesen Fall notwendige Bedingungen für die Multiplikationstabelle liefern.

Wir kommen nun zur Umkehrung des erwähnten Satzes.

§ 2.

Beweis, daß die notwendigen Bedingungen I, II, III auch hinreichend sind.

1. - Es seien

$$c_{\alpha\beta\gamma} \qquad (\alpha, \beta, \gamma = 1, 2, 3, \ldots)$$

beliebige komplexe Größen, welche die Bedingungen I, II, III unseres Satzes S. 6 erfüllen; wir werden zunächst nur von der Bedingung II Gebrauch machen, demzufolge die unendlichen Bilinearformen

$$C_p(x, y) = \sum_{\alpha, \beta=1}^{\infty} c_{p\alpha\beta} x_\alpha y_\beta, \qquad \overline{C}_p'(x, y) = \sum_{\alpha, \beta=1}^{\infty} \overline{c}_{p\beta\alpha} x_\alpha y_\beta \qquad (p = 1, 2, 3, \ldots)$$

beschränkt und vertauschbar sind. Diese Formen sind im allgemeinen keine Hermitesche Formen; man gelangt aber in wohlbekannter Weise zu Hermiteschen Formen, indem man die Matrizen

$$C_p^{(1)} = \frac{1}{2}(C_p + \overline{C}_p') \quad \text{bzw.} \quad C_p^{(2)} = \frac{1}{2i}(C_p - \overline{C}_p') \tag{5}$$

bildet. Aus der für C_p und $\overline{C}_p'$ gemachten Voraussetzungen folgt unmittelbar die Beschränktheit und Vertauschbarkeit der unendlichvielen Hermiteschen Matrizen (5) bzw. der zugehörigen Hermiteschen Formen.

Für eine abzählbare Menge von beschränkten Hermiteschen Matrizen $A_p = (a_{\alpha\beta}^{(p)})$, bzw. für die zugehörigen Formen

$$A_p(x, y) = \sum_{\alpha, \beta=1}^{\infty} a_{\alpha\beta}^{(p)} x_\alpha y_\beta \qquad (p = 1, 2, 3, \ldots)$$

gilt aber der folgende Satz, den ich in Anlehneng an gewisse Untersuchungen von Herrn J. v. NEUMANN bewiesen habe ([10]):

Es gibt zu den $A_p(x, y)$ eine Schar von Hermiteschen Einzelformen bzw. Einzelmatrizen

$$\sigma(\lambda;\, x, y) = \sum_{\alpha, \beta=1}^{\infty} \sigma_{\alpha\beta}(\lambda) x_\alpha y_\beta, \qquad 0 \leqq \lambda \leqq 1$$

bzw.

$$(\sigma_{\alpha\beta}(\lambda)) \qquad (\overline{\sigma}_{\alpha\beta}(\lambda) = \sigma_{\beta\alpha}(\lambda))$$

([10]) a. a. O. ([1]), § 2, S. 781-791.

mit den folgenden Eigenschaften:

α) **es gelten für alle** $0 \leqq \lambda_1 \leqq \lambda_2 \leqq 1$ **die Matrizengleichungen**

$$(\sigma_{\alpha\beta}(\lambda_1))(\sigma_{\alpha\beta}(\lambda_2)) = (\sigma_{\alpha\beta}(\lambda_2))(\sigma_{\alpha\beta}(\lambda_1)) = (\sigma_{\alpha\beta}(\lambda_1)); \tag{6}$$

β) **ist** $x_1, x_2, x_3, \ldots$ **ein beliebiges Wertsystem, für das die unendliche Summe** $\sum |x_k|^2$ **konvergent ist, so ist die (wegen** $\bar{\sigma}_{\alpha\beta}(\lambda) = \sigma_{\beta\alpha}(\lambda)$ **jedenfalls reelle) Funktion von** λ

$$\sigma(\lambda; x, \bar{x}) = \sum_{\alpha,\beta=1}^{\infty} \sigma_{\alpha\beta}(\lambda) x_\alpha \bar{x}_\beta$$

eine nicht abnehmende, an jeder inneren Stelle des Intervalls $0 \leqq \lambda \leqq 1$ **von links stetige Funktion von** λ**, welche außerdem den Gleichungen** $\sigma(0; x, \bar{x}) = 0$, $\sigma(1; x, \bar{x}) = \sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^2$ **genügt. Es gibt ferner ein System von reellen, im Intervall** $0 \leqq \lambda \leqq 1$ **definierten stetigen Funktionen** $f_1(\lambda)$, $f_2(\lambda)$, $f_3(\lambda), \ldots$, **so daß mit Hülfe der** *Spektralform* $\sigma(\lambda; x, y)$ **und dieser Funktionen die vorgelegten vertauschbaren Hermiteschen Formen durch die Stieltjesschen Integrale**

$$A_p(x, y) = \int_0^1 f_p(\lambda) d\sigma(\lambda; x, y) \qquad (p = 1, 2, 3, \ldots)$$

simultan dargestellt werden. Aus den Beziehungen (6) folgt (in wohlbekannter Weise) die für alle stetigen Funktionen $u(\lambda)$ **und** $v(\lambda)$ **geltende** *Hilbertsche Vollständigkeitsrelation*

$$\int_0^1 u(\lambda) v(\lambda) d\sigma_{\alpha\beta}(\lambda) = \sum_{k=1}^{\infty} \int_0^1 u(\lambda) d\sigma_{\alpha k}(\lambda) \int_0^1 v(\lambda) d\sigma_{k\beta}(\lambda). \tag{7}$$

Wenden wir diesen Satz auf die Matrizen (5) an, so gelangen wir — indem wir die zugehörigen Funktionen mit $\omega_p^{(1)}(\lambda)$ bzw. $\omega_p^{(2)}(\lambda)$ bezeichnen — für die Matrizen $C_p^{(1)}$ bzw. $C_p^{(2)}$ zu den Darstellungen

$$C_p^{(1)} = \left(\int_0^1 \omega_p^{(1)}(\lambda) d\sigma_{\alpha\beta}(\lambda) \right), \qquad C_p^{(2)} = \left(\int_0^1 \omega_p^{(2)}(\lambda) d\sigma_{\alpha\beta}(\lambda) \right),$$

woraus man, wenn man zur Abkürzung

$$\omega_p^{(1)}(\lambda) + i\omega_p^{(2)}(\lambda) = \omega_p(\lambda) \qquad (p = 1, 2, 3, \ldots)$$

einführt, durch Addition bzw. Subtraktion die Darstellungen

$$C_p(x, y) = \int_0^1 \omega_p(\lambda) d\sigma(\lambda; x, y), \qquad \overline{C}_p'(x, y) = \int_0^1 \overline{\omega}_p(\lambda) d\sigma(\lambda; x, y) \tag{7'}$$

gewinnt. Die Anwendung der Hilbertschen Vollständigkeitsrelation (7) liefert (für $u=\omega_p(\lambda)$, $v=\overline{\omega}_q(\lambda)$) für die Matrix $C_p\overline{C}_q'$ die Darstellung

$$C_p\overline{C}_q'=\Big(\int_0^1 \omega_p(\lambda)\overline{\omega}_q(\lambda)d\sigma_{\alpha\beta}(\lambda)\Big) \tag{8}$$

und man gelangt durch nochmalige Anwendung dieser Relation zu der Formel:

$$C_pC_q\overline{C}_r'=\Big(\int_0^1 \omega_p(\lambda)\omega_q(\lambda)\overline{\omega}_r(\lambda)d\sigma_{\alpha\beta}(\lambda)\Big). \tag{9}$$

2. - Um die Eigenschaften der stetigen Funktionen $\omega_p(\lambda)$ zu studieren, ziehen wir die Bedingungen I und III des Satzes auf S. 6 heran:

I. $$c_{pqr}=c_{qpr},$$

III. $$\sum_{k=1}^{\infty} e_k c_{k\alpha\beta}=\delta_{\alpha\beta}.$$

Wir betrachten die Bilinearformen, deren Matrizen die obigen $C_p\overline{C}_q'$ bzw. $C_pC_q\overline{C}_r'$ sind:

$$C_p\overline{C}_q'(x,y)=\sum_{k,\alpha,\beta=1}^{\infty} c_{p\alpha k}\bar{c}_{q\beta k}x_\alpha y_\beta,$$

$$C_pC_q\overline{C}_r'(x,y)=\sum_{k,l,\alpha,\beta=1}^{\infty} c_{p\alpha k}c_{qkl}\bar{c}_{r\beta l}x_\alpha y_\beta$$

und setzen darin $x_\alpha=e_\alpha$, $y_\alpha=\bar{e}_\alpha$. Es ergibt sich auf diese Weise — mit Rücksicht auf I und III —

$$C_p\overline{C}_q'(e,\bar{e})=\sum_{k=1}^{\infty}\Big(\sum_{\alpha=1}^{\infty} c_{p\alpha k}e_\alpha\Big)\Big(\sum_{\beta=1}^{\infty}\bar{c}_{q\beta k}\bar{e}_\beta\Big)=\delta_{pq}, \tag{10}$$

$$C_pC_q\overline{C}_r'(e,\bar{e})=\sum_{k,l=1}^{\infty}\Big(\sum_{\alpha=1}^{\infty} c_{p\alpha k}e_\alpha\Big)\Big(\sum_{\beta=1}^{\infty}\bar{c}_{r\beta l}\bar{e}_\beta\Big)c_{qkl}=c_{pqr}. \tag{11}$$

Wir führen noch zur Abkürzung

$$\tilde{\sigma}(\lambda)=\sum_{\alpha,\beta=1}^{\infty}\sigma_{\alpha\beta}(\lambda)e_\alpha\bar{e}_\beta$$

ein, wo also (wegen β)) $\tilde{\sigma}(\lambda)$ eine reelle nichtabnehmende, von links stetige Funktion bedeutet; der Vergleich der Formel (8) und (10) bzw. (9) und (11) liefert unmittelbar

$$\int_0^1 \omega_p(\lambda)\overline{\omega}_q(\lambda)d\tilde{\sigma}(\lambda)=\delta_{pq},$$

$$\int_0^1 \omega_p(\lambda)\omega_q(\lambda)\overline{\omega}_r(\lambda)d\tilde{\sigma}(\lambda)=c_{pqr}, \qquad (p,q,r=1,2,3,\ldots.)$$

Diese Formel zeigen, daß *die im Intervall* $0 \leqq \lambda \leqq 1$ *definierten stetigen Funktionen* $\omega_p(\lambda)$ *ein im bezug auf die reelle nichtabnehmende Funktion* $\tilde{\sigma}(\lambda)$ *unitär-orthogonales Funktionensystem bilden, dessen Multiplikationstabelle aus den vorgelegten Größen* c_{pqr} *besteht.*

Die *Vollständigkeit* dieses Funktionensystems zeigen wir, wie folgt: Es sei $u(\lambda)$ und $v(\lambda)$ ein Paar von stetigen Funktionen im Intervall $0 \leqq \lambda \leqq 1$; wir betrachten die beiden Matrizen

$$U=(u_{pq})=\Big(\int_0^1 u(\lambda)\,d\sigma_{pq}(\lambda)\Big), \qquad V=(v_{pq})=\Big(\int_0^1 v(\lambda)\,d\sigma_{pq}(\lambda)\Big)$$

und die Matrizenprodukte

$$UV=\Big(\int_0^1 u(\lambda)v(\lambda)\,d\sigma_{pq}(\lambda)\Big),$$

$$U\bar{C}_k'=\Big(\int_0^1 u(\lambda)\bar{\omega}_k(\lambda)\,d\sigma_{pq}(\lambda)\Big),$$

$$C_kV=\Big(\int_0^1 v(\lambda)\omega_k(\lambda)\,d\sigma_{pq}(\lambda)\Big);$$

die zugehörigen Bilinearformen bezeichnen wir bzw. mit

$$U(x,y), \qquad V(x,y), \qquad UV(x,y), \qquad U\bar{C}_k'(x,y), \qquad C_kV(x,y).$$

In dieser Schreibweise ist

$$UV(e,\bar{e})=\int_0^1 u(\lambda)v(\lambda)\,d\tilde{\sigma}(\lambda),$$

$$U\bar{C}_k'(e,\bar{e})=\int_0^1 u(\lambda)\bar{\omega}_k(\lambda)\,d\tilde{\sigma}(\lambda),$$

$$C_kV(e,\bar{e})=\int_0^1 v(\lambda)\omega_k(\lambda)\,d\tilde{\sigma}(\lambda),$$

so daß die zu beweisende Vollständigkeitsrelation (3′) in die Gleichung

$$UV(e,\bar{e})=\sum_{k=1}^{\infty} U\bar{C}_k'(e,\bar{e})\,C_kV(e,\bar{e}) \tag{12}$$

übergeht. Nun ist aber — mit Rücksicht auf I und III —

$$U\bar{C}_k'(e,\bar{e})=\sum_{\alpha,p,q=1}^{\infty} u_{p\alpha}\bar{c}_{kq\alpha}e_p\bar{e}_q=\sum_{p=1}^{\infty} u_{pk}e_p,$$

$$C_kV(e,\bar{e})=\sum_{\alpha,p,q=1}^{\infty} c_{kp\alpha}v_{\alpha q}e_p\bar{e}_q=\sum_{q=1}^{\infty} v_{kq}\bar{e}_q$$

und

$$UV(e,\bar{e})=\sum_{k,p,q=1}^{\infty}u_{pk}v_{kq}e_p\bar{e}_q=\sum_{k=1}^{\infty}\left(\sum_{p=1}^{\infty}u_{pk}e_p\right)\left(\sum_{q=1}^{\infty}v_{kq}\bar{e}_q\right);$$

der Vergleich der letzten drei Gleichungen liefert die Relation (12) und damit die Vollständigkeitsrelation (3′).

Erfüllen daher die Größen c_{pqr} die Bedingungen I, II, III (S. 6), *so existiert ein im Intervall $0\leqq\lambda\leqq 1$ definiertes, im bezug auf eine reelle nichtabnehmende Funktion $\tilde{\sigma}(\lambda)$ unitär-orthogonales und abgeschlossenes System von stetigen Funktionen $\omega_n(s)$, dessen Multiplikationstabelle aus den vorgelegten Größen c_{pqr} besteht.*

3. - Der Übergang zu gewöhnlichen Integralen geschieht — in gleicher Weise, wie in meiner angeführten Arbeit ([11]) — auf Grund einer Bemerkung von Herrn LEBESGUE über die Zurückführung von Stieltjesschen Integralen auf Lebesguesche. Es handelt sich im vorliegenden Falle um Integrale

$$\int_0^1 f(\lambda)d\tilde{\sigma}(\lambda),$$

mit stetigen $f(\lambda)$ und nichtabnehmendem, reellen $\tilde{\sigma}(\lambda)$. Man ordne der stetigen Funktion $f(\lambda)$ eine Funktion $F(s)$, die im Intervall

$$a=\tilde{\sigma}(0)\leqq s\leqq\tilde{\sigma}(1)=b$$

definiert ist ([12]), wie folgt zu: Ist s_0 ein solcher Wert, der an einer einzigen Stelle λ_0 von $\tilde{\sigma}(\lambda)$ angenommen wird ($\tilde{\sigma}(\lambda_0)=s_0$), so setze man

$$F(s_0)=f(\lambda_0);$$

nimmt $\tilde{\sigma}(\lambda)$ den Wert s_1 an mehreren Stellen an, also an jeder (inneren) Stelle eines Intervalls, so bezeichne man etwa den Mittelpunkt dieses Intervalls mit λ_1 und setze

$$F(s_1)=f(\lambda_1);$$

ist endlich s_2 ein solcher Wert im obigen Intervall, den $\tilde{\sigma}(\lambda)$ nicht abnimmt, so gibt es jedenfalls eine Stelle λ_2 derart, daß

$$\tilde{\sigma}(\lambda_2-0)\leqq s_2\leqq\tilde{\sigma}(\lambda_2+0)$$

ausfalle, wobei — wie üblich — $\tilde{\sigma}(\lambda_2+0)$ bzw. $\tilde{\sigma}(\lambda_2-0)$ den rechtsseitigen bzw. linksseitigen Grenzwert der nichtabnehmenden Funktion $\tilde{\sigma}(\lambda)$ an der Stelle λ_2 bezeichnet; in diesem Falle setze man

$$F(s_2)=f(\lambda_2).$$

([11]) a. a. O. ([1]), S. 795.

([12]) Wegen $\sigma(0;x,\bar{x})=0$ ist übrigens $a=0$.

Für die so definierte Funktion $F(s)$ gilt offenbar

$$\int_a^b F(s)ds=\int_0^1 f(\lambda)d\tilde{\sigma}(\lambda), \tag{13}$$

wobei das linksstehende Integral ein gewöhnliches Integral im Riemannschen Sinne ist, wie man sich durch den Vergleich der endlichen Summen, deren Grenzwert die beiden Integrale sind, leicht überzeugt. Die Funktion $F(s)$ kann offenbar nur an einer solchen Stelle $s_1=\tilde{\sigma}(\lambda_1)$ unstetig werden, welche einer Stelle λ_1 entspricht, die Mittelpunkt eines Intervalls ist, im dem $\tilde{\sigma}(\lambda)$ konstant ist. Ist ferner λ_2 eine Sprungsstelle von $\tilde{\sigma}(\lambda)$, so ist im Intervall $\tilde{\sigma}(\lambda_2-0)\leqq s\leqq\tilde{\sigma}(\lambda_2+0)$ jede dieser Funktionen $F(s)$ konstant. Man erkennt auch, daß diese Zuordnung der Funktionen $F(s)$ zu allen stetigen $f(\lambda)$ distributiv ist, daß $\bar{f}(\lambda)$ die Funktion $\bar{F}(s)$ zugeordnet ist und endlich, daß dem Produkt $f_1(\lambda)f_2(\lambda)$ das Produkt $F_1(s)F_2(s)$ der zu $f_1(\lambda)$ und $f_2(\lambda)$ zugeordneten Funktionen $F_1(s)$ bzw. $F_2(s)$ entspricht.

Bezeichnen wir daher die zu unseren $\omega_n(s)$ vermöge der obigen Konstruktion zugeordneten Funktion mit $\Omega_n(s)$, so gelten — mit Rücksicht auf (13) — die Beziehungen

$$\int_a^b \Omega_p(s)\Omega_q(s)ds=\delta_{pq}, \qquad \int_a^b \Omega_p(s)\Omega_q(s)\bar{\Omega}_r(s)ds=c_{pqr}.$$

Die für die $\omega_p(s)$ geltenden Vollständigkeitsrelationen

$$\int_0^1 u(\lambda)v(\lambda)d\tilde{\sigma}(\lambda)=\sum_{k=1}^{\infty}\int_0^1 u(\lambda)\bar{\omega}_k(\lambda)d\tilde{\sigma}(\lambda)\int_0^1 v(\lambda)\omega_k(\lambda)d\tilde{\sigma}(\lambda)$$

gehen in die Gleichungen

$$\int_a^b U(s)V(s)ds=\sum_{k=1}^{\infty}\int_a^b U(s)\bar{\Omega}_k(s)ds\int_a^b V(s)\Omega_k(s)ds \tag{14}$$

über, wobei $U(s)$ und $V(s)$ die zu den willkürlichen stetigen Funktionen $u(\lambda)$ und $v(\lambda)$ zugeordneten Funktionen bedeuten. Setzt man insbesondere $u,\ v=\omega_p\omega_q$ bzw. $\omega_p\bar{\omega}_q$, $\bar{\omega}_p\bar{\omega}_q$, 1, so drücken die Gleichungen (14) — mit Rücksicht darauf, daß der Funktion $f(\lambda)=1$ offenbar $F(s)=1$ entspricht — die Tatsache aus, daß *das im Intervall $a\leqq s\leqq b$ definierte unitär-orthogonale beschränkte Funktionensystem $\Omega_n(s)$ in sich abgeschlossen ist und die kubische Matrix c_{pqr} als Multiplikationstabelle besitzt.*

Damit dieses Funktionensystem $\Omega_n(s)$ im gewöhnlichen Sinne abgeschlossen sei, ist das Bestehen der Relation (14) für alle stetigen Funktionen $U(s)$, $V(s)$ erforderlich. Dies trifft jedenfalls zu, falls die Funktion $\tilde{\sigma}(\lambda)$ überall stetig ist, da man ja in diesem Falle zu jeder stetigen Funktion $F(s)$ $(a\leqq s\leqq b)$ eine ebenfalls stetige Funktion $f(\lambda)$ $(0\leqq\lambda\leqq 1)$ derart angeben kann, daß die zu $f(\lambda)$

vermöge der obigen Vorschrift zugeordnete Funktion mit $F(s)$ übereinstimmt.. Umgekehrt, *wenn* $\tilde{\sigma}(\lambda)$ *eine Unstetigkeitsstelle* λ_2 *besitzt*, so kann das soeben konstruierte Funktionensystem $\Omega_n(s)$ *nicht abgeschlossen sein*, da — wie oben bemerkt — jedes $\Omega_p(s)$ im Teilintervall $\tilde{\sigma}(\lambda_2-0)\leqq s\leqq\tilde{\sigma}(\lambda_2+0)$ konstant ist.

§ 3.

Kriterien für ein abgeschlossenes unitär-orthogonales Funktionensystem.

1. - Wir wollen noch die *notwendigen und hinreichenden Bedingung für die Multiplikationstabelle eines abgeschlossenen, beschränkten unitär-orthogonalen Funktionensystems ableiten.*

Wir knüpfen zu diesem Ende an das zuletzt gewonnene Ergebnis an, demzufolge das im vorangehenden Paragraphen gewonnene System $\Omega_n(s)$ jedenfalls abgeschlossen ist, falls die Funktion $\tilde{\sigma}(\lambda)$ überall stetig ist. Ist dies nicht der Fall, so muß mindestens eine der Funktionen $\sigma_{pq}(\lambda)$ — etwa $\sigma_{ij}(\lambda)$ — an einer Stelle λ_0 einen endlichen Sprung $\sigma_{ij}(\lambda_0+0)-\sigma_{ij}(\lambda_0-0)\neq 0$ erleiden. Man zeigt dann in derselben Weise, wie in der Hilbertschen Theorie der quadratischen Formen, daß in diesem Falle für jedes $p=1, 2,....$ das homogene unendliche Gleichungssystem

$$\sum_{\beta=1}^{\infty} c_{p\alpha\beta}x_\beta=\omega_p(\lambda_0)x_\alpha \qquad (\alpha=1, 2, 3,....) \tag{15}$$

eine nicht identisch verschwindende Lösung besitzt, für die $\sum_{k=1}^{\infty}|x_k|^2$ konvergent ist. In der Tat, setzt man bei $h>0$

$$x_\alpha(h)=\sigma_{\alpha j}(\lambda_0+h)-\sigma_{\alpha j}(\lambda_0-h)=\int_{\lambda_0-h}^{\lambda_0+h} d\sigma_{\alpha j}(\lambda), \qquad (\alpha=1, 2, 3,....)$$

so ergibt sich mit Hülfe der Hilbertschen Vollständigkeitsrelation (7), einerseits

$$\sum_{\alpha=1}^{\infty}|x_\alpha(h)|^2=\sum_{\alpha=1}^{\infty}\int_{\lambda_0-h}^{\lambda_0+h} d\sigma_{\alpha j}(\lambda)\int_{\lambda_0-h}^{\lambda_0+h} d\sigma_{j\alpha}(\lambda)=\int_{\lambda_0-h}^{\lambda_0+h} d\sigma_{jj}(\lambda)\leqq 1, \tag{16}$$

andererseits aber, mit Rücksicht auf (7'), das Gleichungssystem

$$\sum_{\beta=1}^{\infty} c_{p\alpha\beta}x_\beta(h)=\sum_{\beta=1}^{\infty}\int_0^1 \omega_p(\lambda)d\sigma_{\alpha\beta}(\lambda)\int_{\lambda_0-h}^{\lambda_0+h} d\sigma_{\beta j}(\lambda)=\int_{\lambda_0-h}^{\lambda_0+h}\omega_p(\lambda)d\sigma_{\alpha j}(\lambda). \tag{17}$$

Der Grenzübergang $h=0$ führt die linken Seiten dieser Gleichungen — wenn man zur Abkürzung

$$x_\alpha(0)=x_\alpha=\sigma_{\alpha j}(\lambda_0+0)-\sigma_{\alpha j}(\lambda_0-0) \qquad (x_i\neq 0) \tag{18}$$

setzt — in

$$\sum_{\beta=1}^{\infty} c_{p\alpha\beta} x_\beta$$

über (mit Rücksicht auf (18) und auf die Konvergenz von $\sum_{\beta=1}^{\infty} |c_{p\alpha\beta}|^2$, die eine Folge der Beschränktheit der Matrix C_p ist). Da ferner $\omega_p(\lambda)$ eine stetige Funktion von λ war, so ist der Grenzwert der rechten Seite in (17) gleich

$$\omega_p(\lambda_0)[\sigma_{\alpha j}(\lambda_0+0)-\sigma_{\alpha j}(\lambda_0-0)]=\omega_p(\lambda_0)x_\alpha$$

d. h. die Größen (18) bilden ein nichttriviales Lösungssystem der homogenen Gleichungen (15). Man kann dies auch so formulieren, daß unter den gemachten Voraussetzungen

$$\omega_p(\lambda_0)=\mu_p$$

ein Eigenwert der beschränkten Matrix C_p ist (d. h. dem Punktspektrum angehört) und die obigen Größen x_α eine Lösung des zugehörigen homogenen Gleichungssystems bilden. Ist daher das im vorigen Paragraphen zu der kubischen Matrix c_{pqr} konstruierte unitär-orthogonale Funktionensystem $\Omega_n(s)$ *nicht abgeschlossen, so besitzt jede der Matrizen* $C_p=(c_{p\alpha\beta})$ *einen Eigenwert* μ_p *und die entsprechenden homogenen Gleichungssysteme besitzen für alle* p *eine gemeinsame (nichttriviale) Lösung:*

(19) $$\sum_{\beta=1}^{\infty} c_{p\alpha\beta} x_\beta=\mu_p x_\alpha \qquad (p,\ \alpha=1,2,3,\ldots).$$

2. - Wir beweisen noch die *Umkehrung* dieser Tatsache. Sind die Größen c_{pqr} so beschaffen, daß das Gleichungssystem (19) eine nichttriviale Lösung besitzt, für die $\sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^2$ konvergiert, so kann es in keinem Intervall $a\leqq s\leqq b$ ein beschränktes und abgeschlossenes unitär-orthogonales Funktionensystem $F_1(s)$, $F_2(s)$,.... geben, für das

$$\int_a^b F_p(s)F_q(s)\overline{F}_r(s)ds=c_{pqr}$$

ist.

Denn es sei $\Psi(s)$ diejenige Funktion, für die

$$\int_a^b \Psi(s)\overline{F}_p(s)ds=\bar{x}_p \qquad (p=1,2,3,\ldots.)$$

ist; $\Psi(s)$ ist eine Funktion, deren absolute Betrag quadratisch integrierbar und $\neq 0$ ist, und es ist

$$x_p=\int^b \overline{\Psi}(s)F_p(s)ds.$$

Das Gleichungssystem (19) erhält die Form:

$$\sum_{\beta=1}^{\infty} \int_a^b F_p(s) F_\alpha(s) \overline{F}_\beta(s) ds \int_a^b \overline{\Psi}(s) F_\beta(s)\, ds = \mu_p \int_a^b \overline{\Psi}(s) F_\alpha(s) ds;$$

würden die $F_n(s)$ ein abgeschlossenes System bilden, so wäre die linke Seite dieser Gleichung

$$= \int_a^b \overline{\Psi}(s) F_p(s) F_\alpha(s) ds,$$

d. h. es wäre

$$\int_a^b \overline{\Psi}(s)[F_p(s) - \mu_p] F_\alpha(s) ds = 0 \qquad (p, \alpha = 1, 2, 3, \ldots).$$

Diese Gleichungen zeigen, daß alle Fourier-Koeffizienten der Funktion

$$\Psi(s)[\overline{F}_p(s) - \overline{\mu}_p]$$

verschwinden; da ferner wegen der angenommenen Beschränktheit des Systems $F_n(s)$ das Quadrat von

$$|\Psi(s)[\overline{F}_p(s) - \overline{\mu}_p]|$$

integrierbar ist, so folgt, daß mit Ausnahme einer Nullmenge

$$\Psi(s)[\overline{F}_p(s) - \overline{\mu}_p] = 0 \qquad (p = 1, 2, 3, \ldots) \tag{20}$$

sein muß. Dies liefert aber sofort einen Widerspruch mit der Abgeschlossenheit des Systems $F_n(s)$; denn man kann mit Leichtigkeit eine beschränkte, *nirgends verschwindende* Funktion $u(s)$ derart bestimmen ([13]), daß

$$\int_a^b \Psi(s) u(s) ds = 0$$

ist. Aus (20) folgt dann unmittelbar

$$\int_a^b u(s)\, \Psi(s) \overline{F}_p(s) ds = \overline{\mu}_p \int_a^b u(s)\, \Psi(s) ds = 0; \qquad (p = 1, 2, 3, \ldots)$$

([13]) Man wähle etwa eine Stelle α zwischen a und b, für die

$$\int_a^\alpha \Psi(s) ds = A \neq 0$$

ist; man setze $u(s) = 1$ für $\alpha < s \leqq b$ und berechne für $a \leqq s \leqq \alpha$ den Wert von $u(s)$ aus

$$Au(s) + \int_a^b \Psi(s) ds = 0.$$

Diese streckenweis konstante Funktion $u(s)$ ist von der erforderten Art.

also wäre fast überall

$$u(s)\Psi(s)=0, \quad \text{d. h.} \quad \Psi(s)=0$$

im Widerspruch zu

$$\int_a^b |\Psi(s)|^2 ds = \sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^2 > 0.$$

Wir sind daher zu dem folgenden Satz gelangt:

Die kubische Matrix c_{pqr} ist dann und nur dann die Multiplikationstabelle eines abgeschlossenen, beschränkten unitär-orthogonalen Funktionensystems, wenn außer den Bedingungen I, II, III des Satzes S. 6 *noch die folgende Bedingung IV erfüllt ist:*

IV. *die homogenen Gleichungen*

$$\sum_{\beta=1}^{\infty} c_{p\alpha\beta} x_\beta = \mu_p x_\alpha \qquad (p, \alpha = 1, 2, 3, \ldots.)$$

haben kein gemeinsames (nichttriviales) Lösungssystem, für das $\sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^2$ *konvergiert,* d. h. *es besitzen die Matrizen C_p keine Eigenwerte μ_p von der Beschaffenheit, daß die zugehörigen homogenen Gleichungssysteme eine gemeinsame Lösung haben.*

3. - Daß diese Bedingung IV von I, II, III unabhängig ist, d. h. daß *es Multiplikationstabellen gibt, zu denen in sich abgeschlossene aber keine abgeschlossene Funktionensystems gehören,* zeigt das folgende Beispiel:

Es sei $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \ldots.$ eine solche Zahlenfolge, für die

$$l = \sum_{k=1}^{\infty} \left| \frac{1}{\lambda_k} \right|^2$$

konvergent ist: man setze $c_{ppp}=\lambda_p$ und $c_{pqr}=0$ falls nicht alle drei Indizes p, q, r gleich sind. Die Bedingungen I, II, III sind offenbar erfüllt; C_p ist ja eine Diagonalmatrix, deren p^{tes} Diagonalelement $=\lambda_p$, alle übrigen Elemente $=0$ sind, und es ist

$$E = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_k} C_k.$$

Die Bedingung IV ist aber nicht erfüllt, da die Gleichungen (19) z. B. durch

$$x_1 = 1, \quad x_2 = x_3 = \ldots. = 0$$
$$\mu_1 = \lambda_1, \quad \mu_2 = \mu_3 = \ldots. = 0$$

befriedrigt werden.

Ein in sich abgeschlossenes Orthogonalsystem, das zu dieser Multiplikationstabelle gehört, ist übrigens leicht anzugeben. Man trage vom Nullpunkte ausgehend

hintereinander die Intervalle von der Länge $\left|\frac{1}{\lambda_1}\right|^2=l_1$, $\left|\frac{1}{\lambda_2}\right|^2=l_2$, $\left|\frac{1}{\lambda_3}\right|^2=l_3$,.... auf, und definiere in dem Gesamtintervall von der Länge $l_1+l_2+l_3+\ldots=l$ ein Orthogonalsystem vermöge der folgenden Vorschrift: es sei $\varphi_p(s)=\lambda_p$, falls s im p^{ten} der obigen Teilintervalle (deren Länge l_p beträgt) liegt, für alle anderen s sei $\varphi_p(s)=0$. Dann ist offenbar

$$\int_0^l \varphi_p(s)\bar{\varphi}_q(s)ds=\delta_{pq},$$

und

$$\varphi_p(s)\varphi_q(s)=\begin{cases}\lambda_p\varphi_p(s) & \text{für } p=q,\\ 0 & \text{für } p\lesseqgtr q;\end{cases}$$

daher ist $c_{ppp}=\lambda_p$ und $c_{pqr}=0$, falls die Indizes p, q, r nicht gleich sind.

A CSOPORTKARAKTERISZTIKÁK ELMÉLETÉRŐL.

Bevezetés.

Dolgozatom célja a FROBENIUS-féle csoportkarakterisztikák elméletének egyszerű és elemi megalapozása. A csoportkarakterisztikák elmélete tudvalevőleg szoros összefüggésben áll a lineáris transzformációcsoportok elméletével, melyet RADOS GUSZTÁV egy szép dolgozatában[1] fontos eredményekkel gazdagított az adjungált helyettesítési csoportok tulajdonságainak feltárásával.

Röviddel FROBENIUS — elég bonyolult — megalapozása után[2] felmerült a kívánság az elmélet egyszerűsítésére. Első helyen BURNSIDE[3] vizsgálatairól kell megemlékeznem, akinek nagy érdeme, hogy az ú. n. irreducibilis csoportelőállítások egy általa felfedezett fontos tételének felhasználásával lényeges egyszerűsítéseket ért el. Utána SCHURNAK[4] sikerült — ugyancsak az említett BURNSIDE-féle tétel alkalmazásával — a karakterisztikák elméletét igen egyszerű és áttekinthető alakra hoznia.

Ezek a megalapozások azonban olyanok, hogy a véges csoportok irreducibilis előállításából indulnak ki, egy olyan elméletből, amely az absztrakt csoportelméletnek — véleményem szerint — inkább alkalmazása, mint segédeszköze. Különösen

---

[1] Az adjungált bilineár alakok elméletéhez, *Mathematikai és Természettudományi Értesitő*, **XIX**, (1896), 165. l.

[2] *Sitzungsberichte der preussischen Akademie*, **1896**, 985. és 1343. l.; **1897**, 994. l.; **1899**, 482. l.

[3] *Acta Mathematica*, **28**, 369. l. és *Proc. London Math. Soc.*, Ser. 2 **1**, 117. l.

[4] *Sitzungsberichte der preussischen Akademie*, **1905**, 406. l.

szembeötlő ez a körülmény, ha a FROBENIUS-féle elméletet a megszámlálható sok elemből álló végtelen csoportokra akarjuk kiterjeszteni. Egy előző dolgozatom[5] — amelyben az ilyen végtelen kommutatív csoportokra viszem át a karakterisztikák elméletét — szinte előkészíti a talajt az itt jelzett vizsgálatokra, melyeknek célja tehát a *csoportkarakterisztikák elméletét az irreducibilis előállítások felhasználása nélkül* kifejteni, mert ez a fogalom végtelen csoportok esetére nem vihető át.

Az itt közölt megalapozás teljesen elemi jellegű. Hogy megmutassam, hogy még a csoportelméletből is milyen kevés tényt kell felhasználnom, az 1. §.-ban összeállítom mindazt (rövid bizonyítással együtt), amire szükségem van. A 2. §-ban kifejtem a csoportkarakterisztikák elméletét; a mátrixkalkulust mindenütt felhasználom, de ennek az elméletnek is csak a legegyszerűbb, közismert tényeit.[6] Fontos szerepe van annak a tételnek, hogy felcserélhető HERMITE-féle mátrixok szimultán a diagonálisalakra transzformálhatók. A mátrixelmélet ma már nemcsak a mathematikának, hanem a fizikának is elengedhetetlen segédeszközévé vált; az a körülmény, hogy a csoportkarakterisztikák fogalma is fontos szerephez jutott az újabb quantumelméleti vizsgálatokban, talán nem teszi feleslegessé az itt nyujtandó új megalapozást, amely véleményem szerint talán még egyszerűbb is, mint a SCHUR-féle.

---

[5] *Mathematische Zeitschrift*, **33**, 129. l.

[6] A mátrixelméletben szereplő fogalmakra a következő jelöléseket fogom használni. Egy M mátrixban a sorok és oszlopok szerepét felcserélve, az így nyert mátrixot M *transzponáltjának* mondom, jele M'; az M *inverz* mátrixának (ha létezik) jele M^{-1}. Egy mátrix minden elemét a konjugált komplex számmal helyettesítve M *konjugált* mátrixa ered; jele $\overline{M}$. Egy valós elemű mátrix *szimmetrikus*, ha $M=M'$; egy komplex elemű mátrix HERMITE-féle, ha $M=\overline{M}'$. Az M mátrix diagonáliselemeinek összege az M *nyoma*; jele $Ny\,(M)$. Az M mátrix *diagonálismátrix*, ha minden eleme, mely nem a diagonálisában áll, egyenlő nullával. Egy valós, vagy komplex elemű mátrix *orthogonális*, ha $\overline{M}'=M^{-1}$, (a német irodalomban komplex elemű mátrix esetében gyakran az «unitär-orthogonal» kifejezés használatos). Az M és N mátrixok aequivalensek, ha $M=P^{-1}NP$, ahol P egy tetszőleges mátrixot jelöl.

A jelen vizsgálatok folytatásaként egy későbbi közleményben tárgyalni fogom a csoportkarakterisztikák elméletének összefüggését az irreducibilis előállításokkal. Bár ezek a vizsgálatok nem tartoznak szorosan a csoportkarakterisztikák elméletéhez, mégis, tekintettel arra a tagadhatatlan tényre, hogy az irreducibilis előállítások elmélete a legfontosabb alkalmazása a csoportkarakterisztikáknak, szükségesnek tartom rámutatni arra, hogy az általam követett eljárás a csoportelőállítások elméletét is egyszerűen kiadja. Vizsgálataim tehát éppen fordított sorrendben haladnak, mint az említett BURNSIDE- és SCHUR-féle megalapozások; míg náluk az irreducibilis előállítások szolgálnak kiindulási pontul, nálam ez csak mintegy függeléke az elméletnek.

1. §. Csoportelméleti előkészítés.

1. Vizsgálataimban a véges csoportok elméletének csak néhány igen egyszerű, jól ismert tényét kell felhasználnom; talán megengedhető, ha — teljesség kedvéért — ezeket a jelen §-ban kifejtem.

Az adott n-edrendű csoport elemeit nagy betűkkel jelölöm; E az egységelem. Két elem, A és B, konjugált ha létezik olyan X elem, hogy

$$A = X^{-1}BX.$$

Közvetlenül látható, hogy 1° az így definiált konjugáltság szimmetrikus és tranzitív fogalom, 2° A és B konjugáltságából következik, hogy A^{-1} és B^{-1} is konjugált elemek, 3° E csak önmagával konjugált. Ezek a megjegyzések elvezetnek a csoportnak *osztályokra* való bontására, a következő definició értelmében: egymással konjugált elemek összeségét osztálynak mondjuk; valamely osztály *osztályszámán* az illető osztályba tartozó elemek számát értjük. (Az osztályszámok összege $=n$.) Az egységelem önmaga nyilván (v. ö. 3°) osztályt alkot; ez az *egységosztály*. Valamely osztályba tartozó elemek inverz elemei

ismét (v. ö. 2°) osztályt alkotnak; ez az eredeti osztály *inverz osztálya.*

Az *osztálykompozíció* fogalmára a következő megfontolások vezetnek. Legyen $\mathfrak{A}$ és $\mathfrak{B}$ két osztály; az elsőt a csoport A_1, $A_2, \ldots, A_\alpha$ elemei, a másodikat a csoport $B_1, B_2, \ldots, B_\beta$ elemei alkotják. A

$$B_q A_1 B_q^{-1},\ B_q A_2 B_q^{-1}, \ldots,\ B_q A_\alpha B_q^{-1}$$

elemek sorrendtől eltekintve megegyeznek az

$$A_1,\ A_2, \ldots,\ A_\alpha$$

elemekkel, ennélfogva a következő két sorban álló elemek

$$B_q A_1,\ B_q A_2, \ldots,\ B_q A_\alpha,$$
$$A_1 B_q,\ A_2 B_q, \ldots,\ A_\alpha B_q$$

is csak sorrendben térnek el egymástól. Ebből következik, hogy ha felirjuk az $A_p B_q$ elemek összeségét ($p=1, 2, \ldots, \alpha$, $q=1, 2, \ldots, \beta$), — ahol minden így keletkezett elemet annyiszor írunk fel, ahányféleképpen ebben az alakban előállítható — és hasonlóképpen a $B_q A_p$ elemek összeségét, a két összeség megegyezik. Az így nyert $\alpha\beta$ számú (nem okvetlenül különböző) elem összeségét $\mathfrak{AB}$-val vagy $\mathfrak{BA}$-val jelöljük s a két *osztály szorzatának* mondjuk. Az osztályok szorzása kommutatív és asszociatív operáció. $\mathfrak{AB}$ általában nem osztály; ellenben könnyen átlátható, hogy ha valamely C elem k-szor fordul elő ebben az összeségben, akkor minden C-vel konjugált elem ugyancsak k-szor fordul elő $\mathfrak{AB}$-ben. Legyen u. i. $C = A_p B_q$, ha a (p, q) számpár a különböző (p_1, q_1), $(p_2, q_2), \ldots, (p_k, q_k)$ számpárok egyikével egyenlő; akkor az

$$X^{-1} C X = (X^{-1} A_p X)\ (X^{-1} B_q X)$$

reláció mutatja, hogy a C-vel konjugált $X^{-1}CX$ elem legalább annyiszor állítható elő az $A_p B_q$ alakban, mint C, amiből — a konjugáltság szimmetriatulajdonsága miatt — állításunk következik.

Vezessük be a következő jelöléseket: legyenek $\mathfrak{C}_1, \mathfrak{C}_2, \ldots, \mathfrak{C}_h$

az adott n-edrendű csoport különböző osztályai, $\mathfrak{C}_1$ az egységosztály s a megfelelő osztályszámok $n_1=1$, $n_2,\ldots,$ n_h; a $\mathfrak{C}_\alpha$ és $\mathfrak{C}_\beta$ osztályok kompozíciójából keletkezett $\mathfrak{C}_\alpha\mathfrak{C}_\beta=\mathfrak{C}_\beta\mathfrak{C}_\alpha$ összeségben a $\mathfrak{C}_\gamma$ osztály minden eleme $c_{\alpha\beta\gamma}$-szor szerepel, ahol tehát $c_{\alpha\beta\gamma}$ egy pozitív egész szám, vagy nulla. Ekkor a

$$\mathfrak{C}_\alpha\mathfrak{C}_\beta=\mathfrak{C}_\beta\mathfrak{C}_\alpha=\sum_{(\alpha,\,\beta=1,\,2,\ldots,\,h)} c_{\alpha\beta1}\mathfrak{C}_1+c_{\alpha\beta2}\mathfrak{C}_2+\cdots+c_{\alpha\beta h}\mathfrak{C}_h \qquad (1)$$

szimbolikus relációnak az a jelentése, hogy ha a $\mathfrak{C}_\gamma$ osztály elemeit $c_{\alpha\beta\gamma}$-szor írom fel ($\gamma=1,\,2,\ldots,\,h$), megkapom a $\mathfrak{C}_\alpha$ és $\mathfrak{C}_\beta$ osztályok szorzásából keletkezett összeséget.[7]

Szükségünk lesz még a következőkben $c_{\alpha\beta1}$ értékére. A konjugáltság 2° tulajdonsága miatt inverz osztályok osztályszáma megegyezik; ha tehát $\mathfrak{C}_\alpha$ és $\mathfrak{C}_\beta$ inverz osztályok, akkor szorzásuk nyilván annyiszor eredményezi az egységelemet (azaz az egységosztályt, $\mathfrak{C}_1$-et), amekkora az osztályszámuk; tehát ebben az esetben $c_{\alpha\beta1}=n_\alpha=n_\beta$; ha pedig $\mathfrak{C}_\alpha$ és $\mathfrak{C}_\beta$ nem inverz osztályok, akkor a $\mathfrak{C}_\alpha\mathfrak{C}_\beta$ összeség nem tartalmazhatja E-t, tehát $c_{\alpha\beta1}=0$.

2. A csoportok mátrixokkal való ú. n. *reguláris előállítása* kapcsolatos azzal a jól ismert ténnyel, hogy minden véges csoport izomorf a permutációk ama csoportjával, amelyet az

$$\begin{pmatrix} A, & B, & C, & \ldots \\ AX, & BX, & CX, & \ldots \end{pmatrix}$$

permutációk alkotnak, ha X az adott csoport valamennyi elemén végighalad. Ha minden egyes csoportelemhez egy határozatlant rendelünk (A-hoz x_A-t stb.), akkor a fenti permutációcsoport a lineáris transzformációk következő csoportjába megy át:

$$x_A(=)x_{AX},\ x_B(=)x_{BX},\ x_C(=)x_{CX},\ldots \quad (X=\text{bármely csoportelem}).$$

---

[7] Az (1) reláció két oldalán felírt összeségekben az elemek számának megolvasása az

$$n_\alpha n_\beta=\sum_{\gamma=1}^{h} c_{\alpha\beta\gamma}i_\gamma$$

egyenleteket szolgáltatja.

Ezen (nyilván orthogonális) transzformációk mátrixai — melyek természetesen szintén izomorfak az adott csoporttal — szolgáltatják a kérdéses reguláris előállítást. Jelöljük az X elemhez tartozó így nyert mátrixot (a fenti lineáris transzformáció mátrixát) (X)-szel. (E) az n-edrendű egységmátrix; ha $X \neq E$, akkor (X) minden diagonáliseleme $= 0$ (mert ellenkező esetben volna olyan P elem, hogy $P=PX$). Csoportunk inverz elemeihez inverz mátrixok tartoznak: $(X^{-1}) = (X)^{-1}$; s mivel az (X) mátrix valós és orthogonális, azért inverze ugyanaz, mint transzponáltja, tehát $(X^{-1}) = X'$, ha — mint szokásos — a transzpozíciót vesszővel jelezzük.

Ha a $\mathfrak{C}_\alpha$ osztály az $A_1, A_2, \ldots, A_{n_\alpha}$ elemekből áll, akkor rendeljük hozzá a

$$(\mathfrak{C}_\alpha) = (A_1) + (A_2) + \cdots + (A_{n_\alpha}) \quad (\alpha = 1, 2, \ldots, h)$$

mátrixot; az egységosztályhoz az egységmátrix tartozik, minden más esetben ismét olyan valós mátrixhoz jutunk, melynek diagonálisában csupa 0 áll. A $\mathfrak{C}_\alpha$ inverz osztályához az

$$(A_1^{-1}) + (A_2^{-1}) + \cdots + (A_{n_\alpha}^{-1}) = (A_1)' + (A_2)' + \cdots + (A_{n_\alpha})' = (\mathfrak{C}_\alpha)'$$

mátrix tartozik, azaz inverz osztályokhoz tartozó mátrixok egymás transzponáltjai.

Végül az (1) alatti szimbolikus relációk nyilván átmennek a

$$(\mathfrak{C}_\alpha)(\mathfrak{C}_\beta) = (\mathfrak{C}_\beta)(\mathfrak{C}_\alpha) = \sum_{\gamma=1}^{h} c_{\alpha\beta\gamma}(\mathfrak{C}_\gamma) \quad (\alpha, \beta = 1, 2, \ldots, h) \quad (1')$$

mátrixegyenletekbe, amelyek egyrészt azt mutatják, hogy

$$(\mathfrak{C}_1) = (E), (\mathfrak{C}_2), \ldots, (\mathfrak{C}_h)$$

felcserélhető (kommutatív) mátrixok, másrészt — az inverz osztályok mátrixaira tett megjegyzés folytán — hogy e valós mátrixok mindegyike a *transzponáltjával is felcserélhető*. (Az utóbbi tulajdonsággal bíró mátrixokat újabban normális mátrixoknak nevezik.)

2. §. A csoportkarakterisztikák fogalma és a közöttük fennálló fundamentális összefüggések.

3. A véges csoportok reguláris mátrixelőállítása könnyűszerrel elvezet a FROBENIUS-féle csoportkarakterisztikákhoz és legfontosabb tulajdonságaikhoz. Láttuk u. i., hogy az egyes osztályokhoz rendelt $(\mathfrak{C}_p)$ mátrixok $(p=1, 2, \ldots, h)$, vagy az ezektől csak a sorrendben különböző $(\mathfrak{C}_p)'$ mátrixok $(p=1, 2, \ldots, h)$ felcserélhetők. Ennélfogva felcserélhetők a $(\mathfrak{C}_p)+(\mathfrak{C}_p)'$ és $i(\mathfrak{C}_p)-i(\mathfrak{C}_p)'$ mátrixok is; a $(\mathfrak{C}_p)+(\mathfrak{C}_p)'$ mátrixok mindegyike valós szimmetrikus mátrix, az $i(\mathfrak{C}_p)-i(\mathfrak{C}_p)'$ mátrixok mindegyike pedig HERMITE-féle mátrix. Az ilyen felcserélhető mátrixok, ill. a hozzájuk tartozó bilinéáris formák, alapvető tulajdonsága, hogy található a határozatlanoknak egy oly — általában nem valós — orthogonális transzformációja, mely szimultán valamennyi formát az ú. n. diagonális alakba viszi át, azaz olyan alakba, amelyben csak a tiszta tagok szerepelnek. A mátrixok nyelvén ez azt jelenti, hogy létezik egy olyan (U) orthogonális mátrix — melyre nézve tehát $(U)^{-1}=(\bar{U})'$ — amely azzal a tulajdonsággal bír, hogy az

$(U)^{-1}\left((\mathfrak{C}_p)+(\mathfrak{C}_p)'\right)(U)$ és $i(U)^{-1}\left((\mathfrak{C}_p)-(\mathfrak{C}_p)'\right)(U)$ $(p=1, 2, \ldots, h)$ mátrixok mindegyike diagonálismátrix. Ennélfogva az $(U)^{-1}(\mathfrak{C}_p)(U)$ mátrixok is diagonálismátrixok; legyen

$$(U)^{-1}(\mathfrak{C}_p)(U)=(\Delta_p)=\begin{pmatrix} r_p^{(1)} & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & r_p^{(2)} & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & r_p^{(n)} \end{pmatrix} \quad (p=1, 2, \ldots, h)$$

Az (1′) alatti egyenlet, ill. az azzal aequivalens

$$\left((U)^{-1}(\mathfrak{C}_\alpha)(U)\right)\left((U)^{-1}(\mathfrak{C}_\beta)(U)\right)=\sum_{\gamma=1}^{h} c_{\alpha\beta\gamma}(U)^{-1}(\mathfrak{C}_\gamma)(U)$$

összefüggés, átmegy a fenti diagonálismátrixok között fennálló

$$(\Delta_\alpha)(\Delta_\beta)=\sum_{\gamma=1}^{h} c_{\alpha\beta\gamma}(\Delta_\gamma)$$

egyenletbe; ha ezt a mátrixegyenletet az elemekre átírjuk, nyerjük a következő (FROBENIUS-féle) egyenletrendszert:

$$r_\alpha^{(k)} r_\beta^{(k)} = \sum_{\gamma=1}^{h} c_{\alpha\beta\gamma} r_\gamma^{(k)} \qquad (I)$$
$$(k=1, 2, \ldots, n;\ \alpha, \beta=1, 2, \ldots, h).$$

Ezek a formulák (minden k-nál) azt mutatják, hogy *lehet az adott csoport minden egyes osztályához* $\mathfrak{C}_\alpha$*-hoz, olyan* $r_\alpha^{(k)}$ *számot rendelni, hogy az így nyert* $r_1^{(k)}, r_2^{(k)}, \ldots, r_h^{(k)}$ *számrendszer «kövesse» az osztálykompozíció* (1) *alatti szabályát.*[8] Minthogy $(\mathfrak{C}_1) = (E)$, azért $(\Delta_1) = (E)$, tehát

$$r_1^{(1)} = r_1^{(2)} = \cdots = r_1^{(n)} = 1.$$

4. Mielőtt az (I) egyenletrendszerből további következtetéseket vonnánk le, mutassuk ki, hogy a fenti mellérendelés (minden k-ra) *inverz osztályokhoz konjugált komplex számokat rendel*, azaz ha $(\mathfrak{C}_\alpha)$ és $(\mathfrak{C}_\beta)$ inverz osztályok, akkor[9] $\overline{r_\alpha^{(k)}} = r_\beta^{(k)}$, vagyis $(\overline{\Delta_\alpha}) = (\Delta_\beta)$. U. i. a $(\Delta_\alpha) = (U)^{-1}(\mathfrak{C}_\alpha)(U) = (\overline{U})'(\mathfrak{C}_\alpha)(U)$ egyenletből nyomban következik, hogy $(\overline{\Delta_\alpha})' = (\overline{U})'(\overline{\mathfrak{C}_\alpha})'(U)$, s minthogy $(\mathfrak{C}_\alpha)$ valós, azért $(\overline{\mathfrak{C}_\alpha})' = (\mathfrak{C}_\alpha)' = (\mathfrak{C}_\beta)$; ennélfogva (tekintetbe véve, hogy (Δ_α) diagonálismátrix lévén, $(\Delta_\alpha)' = (\Delta_\alpha)$), tényleg

$$(\overline{\Delta_\alpha}) = (U)^{-1}(\mathfrak{C}_\beta)(U) = (\Delta_\beta).$$

5. Térjünk vissza az (I) alatti egyenletekhez. Összegezés útján nyerjük belőlük a

$$\sum_{k=1}^{n} r_\alpha^{(k)} r_\beta^{(k)} = \sum_{\gamma=1}^{h} c_{\alpha\beta\gamma} \sum_{k=1}^{n} r_\gamma^{(k)} \qquad (\alpha, \beta=1, 2, \ldots, h)$$

összefüggéseket; az ezekben fellépő

$$\sum_{k=1}^{n} r_\gamma^{(k)} \qquad (\gamma=1, 2, \ldots, h)$$

összegek könnyen kiszámíthatók. U. i. ez az összeg nem egyéb, mint a (Δ_γ) mátrix nyoma. A nyom tudvalevőleg — a mátrix-

[8] A [7] alatti jegyzet mutatja, hogy az $n_1, n_2, \ldots, n_h$ osztályszámok kielégítik az (I) egyenletrendszert; ez a «triviális» megoldás tehát a (3) ill. (3′) alatti értékrendszerek egyike.

[9] Valamely a komplex szám konjugáltját $\bar{a}$-sal jelöljük.

hoz tartozó szekuláris egyenlet gyökeinek összege — orthogonális invariáns, azért ez az összeg egyenlő a $(\mathfrak{C}_\gamma)$ mátrix nyomával, azaz diagonáliselemeinek összegével. Ha $\mathfrak{C}_\gamma$ nem az egységosztály, akkor — mint láttuk — $(\mathfrak{C}_\gamma)$ minden diagonáliseleme, tehát a fenti összeg is, nulla; az egységosztály esetén pedig — minthogy $r_1^{(k)} = 1$ — a kérdéses összeg $= n$. Ennélfogva

$$\sum_{k=1}^{n} r_\alpha^{(k)} r_\beta^{(k)} = c_{\alpha\beta 1}\, n,$$

s mivel (v. ö. **1.**) $c_{\alpha\beta 1} = n_\alpha = n_\beta$, ha $\mathfrak{C}_\alpha$ és $\mathfrak{C}_\beta$ inverz osztályok, máskor pedig $c_{\alpha\beta 1} = 0$, azért

$$\sum_{k=1}^{n} r_\alpha^{(k)} r_\beta^{(k)} = \begin{cases} n n_\alpha, & \text{ha } \mathfrak{C}_\alpha \text{ és } \mathfrak{C}_\beta \text{ inverz osztályok,} \\ 0, & \text{ha } \mathfrak{C}_\alpha \text{ és } \mathfrak{C}_\beta \text{ nem inverz osztályok.} \end{cases}$$

Ezek az egyenletek, ha tekintetbe vesszük az inverz osztályokhoz rendelt számokról tett megjegyzést (v. ö. **4.**), a következőképen is írhatók:

$$\sum_{k=1}^{k} r_\alpha^{(k)} \overline{r_\beta^{(k)}} = \begin{cases} n n_\alpha, & \text{ha } \alpha = \beta, \\ 0, & \text{ha } \alpha \neq \beta. \end{cases} \tag{2}$$

6. A (Δ_p) diagonálismátrixokból merített n értékrendszer:

$$(r_1^{(k)},\ r_2^{(k)}, \ldots,\ r_h^{(k)}) \qquad (k = 1, 2, \ldots, n) \tag{3}$$

azonban nem mind különböző. (A k_1-edik és k_2-edik értékrendszert természetesen akkor mondjuk megegyezőnek, ha

$$r_1^{(k_1)} = r_1^{(k_2)},\ r_2^{(k_1)} = r_2^{(k_2)}, \ldots,\ r_h^{(k_1)} = r_h^{(k_2)}).$$

A csoportkarakterisztikák elméletében döntő jelentősége van annak a tételnek, hogy *a fenti értékrendszerek között pontosan h számú különböző értékrendszer foglal helyet.* Ezt az állítást *két lépésben* bizonyítjuk be; kimutatjuk először, hogy a kérdéses különböző értékrendszerek száma nem lehet nagyobb h-nál s azután, hogy nem lehet kisebb h-nál.

Az első állítás így mutatható ki: Ha az egymástól különböző értékrendszerek száma h', akkor találhatunk olyan u_1, $u_2, \ldots, u_h$ számokat, hogy az

$$r_1^{(k)} u_1 + r_2^{(k)} u_2 + \cdots + r_n^{(k)} u_h = r^{(k)} \qquad (k = 1, 2, \ldots, n)$$

kifejezések h' különböző értéket szolgáltassanak. Az (I) egyenletrendszerből nyomban következik, hogy

$$r_\alpha^{(k)} \sum_{\beta=1}^{h} u_\beta r_\beta^{(k)} = \sum_{\beta,\gamma=1}^{h} c_{\alpha\beta\gamma} u_\beta r_\gamma^{(k)},$$

azaz — ha rövidség kedvéért a

$$\sum_{\beta=1}^{h} c_{\alpha\beta\gamma} u_\beta = d_{\alpha\gamma} \qquad (\alpha, \gamma = 1, 2, \ldots, h)$$

jelölést vezetjük be — hogy

$$r^{(k)} r_\alpha^{(k)} = \sum_{\gamma=1}^{h} d_{\alpha\gamma} r_\gamma^{(k)} \qquad (\alpha = 1, 2, \ldots, h).$$

Fix k-nál ezt a rendszert az $r_1^{(k)} = 1$, $r_2^{(k)}, \ldots, r_h^{(k)}$ mennyiségek számára homogén lineáris egyenletrendszernek tekintve, nyomban adódik, hogy $r^{(k)}$ kielégíti a következő h-adfokú egyenletet:

$$\begin{vmatrix} d_{11} - r^{(k)} & d_{12} & \ldots & d_{1h} \\ d_{21} & d_{22} - r^{(k)} & \ldots & d_{2h} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots & & & \\ d_{h1} & d_{h2} & \ldots & d_{hh} - r^{(k)} \end{vmatrix} = 0.$$

Minthogy a $d_{\alpha\gamma}$ mennyiségek minden k-ra nézve ugyanazok, következik, hogy h-nál több különböző értéke $r^{(k)}$-nak nem lehet, azaz hogy $h' \leqq h$.

7. Hogy a $h' \geqq h$ állítást bebizonyíthassuk, bevezetjük a következő jelöléseket: A (3) alatti értékrendszerek közül a h' számú különbözőt jelöljük

$$\varrho_1^{(k)}, \varrho_2^{(k)}, \ldots, \varrho_h^{(k)}\text{-val} \qquad (k = 1, 2, \ldots, h') \qquad (3')$$

és tegyük fel, hogy ez az értékrendszer a (3) alatti értékrendszerek sorában f_k-szor lép fel; f_k tehát pozitív egész szám és $f_1 + f_2 + \cdots + f_{h'} = n$. A (2) alatti egyenletek akkor a következő alakban írhatók:

$$\sum_{k=1}^{h'} f_k \varrho_\alpha^{(k)} \overline{\varrho_\beta^{(k)}} = \begin{cases} n n_\alpha, & \text{ha} \quad \alpha = \beta, \\ 0, & \text{ha} \quad \alpha \neq \beta, \end{cases}$$

vagy, ha a szokásos

$$\delta_{\alpha\beta} = \begin{cases} 1, & \text{ha} \quad \alpha = \beta \\ 0, & \text{ha} \quad \alpha \neq \beta \end{cases}$$

jelölést használjuk,

$$\sum_{k=1}^{h'} \sqrt{\frac{f_k}{nn_\alpha}}\, \varrho_\alpha^{(k)} \sqrt{\frac{f_k}{nn_\beta}}\, \overline{\varrho_\beta^{(k)}} = \delta_{\alpha\beta}. \qquad (4)$$

$(\alpha, \beta = 1, 2, \ldots, h).$

Ezek az egyenletek úgy is interpretálhatók, hogy a következő h' sorból és h oszlopból álló mátrix:

$$(M) = \begin{pmatrix} \sqrt{\frac{f_1}{nn_1}}\varrho_1^{(1)} & \sqrt{\frac{f_1}{nn_2}}\varrho_2^{(1)} & \cdots & \sqrt{\frac{f_1}{nn_h}}\varrho_h^{(1)} \\ \sqrt{\frac{f_2}{nn_1}}\varrho_1^{(2)} & \sqrt{\frac{f_2}{nn_2}}\varrho_2^{(2)} & \cdots & \sqrt{\frac{f_2}{nn_h}}\varrho_h^{(2)} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \sqrt{\frac{f_{h'}}{nn_1}}\varrho_1^{(h')} & \sqrt{\frac{f_{h'}}{nn_2}}\varrho_2^{(h')} & \cdots & \sqrt{\frac{f_{h'}}{nn_h}}\varrho_h^{(h')} \end{pmatrix}$$

«oszloponkint» orthogonális. Ebből nyomban következik, hogy az egyes oszlopokban álló (h' számú komponenssel bíró) értékrendszerek lineárisan függetlenek egymástól. U. i. ha fennállnának közöttük a

$$\sum_{\alpha=1}^{h} \sqrt{\frac{f_k}{nn_\alpha}}\, \varrho_\alpha^{(k)} x_\alpha = 0 \qquad (k = 1, 2, \ldots, h')$$

összefüggések, akkor ezeket az egyenleteket a $\sqrt{\frac{f_k}{nn_\beta}}\,\overline{\varrho_\beta^{(k)}}$ mennyiségekkel komponálva nyernők, hogy $x_\beta = 0$. Minthogy pedig a h' számú komponenssel bíró értékrendszerek tartományában h'-nél több lineárisan független nem lehet, ezért szükségképpen $h \leqq h'$, s ezt az előző pontban nyert eredménnyel egybevetve kapjuk, hogy tényleg $h' = h$.

8. A fenti (M) mátrix ennélfogva *quadratikus orthogonális mátrix*, s az «oszloponkinti» orthogonalitást kifejező (4) alatti egyenlőségeken kívül fennállanak a «soronkinti» orthogonalitás relációi is, azaz

$$\sum_{k=1}^{n} \sqrt{\frac{f_a}{nn_k}}\, \varrho_k^{(a)} \sqrt{\frac{f_b}{nn_k}}\, \overline{\varrho_k^{(b)}} = \delta_{ab} \qquad (5)$$

$(a, b = 1, 2, \ldots, h).$

Ezekből a megfontolásokból az is következik, hogy a FROBENIUS-*féle* (I) *egyenleteknek h számú különböző megoldásrendszere van* s ezek nem egyebek, mint a (3′) alatti *h* számú rendszer.

Eddig elért eredményeink — jelesen az (*M*) mátrix orthogonális volta — máris tartalmazzák a FROBENIUS-féle csoportkarakterisztikák elméletének alaptételeit. Az átmenetet a következő megállapítás szolgáltatja:

Minden egyes csoportkarakterisztika (összesen *h* számú csoportkarakterisztikát fogunk definiálni) az adott csoport minden eleméhez egy számot rendel, azaz — amint mondani szokás — *a csoportkarakterisztika az illető csoporton definiált függvény.* Ezek a mellérendelések mind olyanok, hogy konjugált elemekhez ugyanaz a szám tartozik, azaz tulajdonképpen minden osztályhoz van egy szám rendelve (azaz a csoportkarakterisztika osztályfüggvény). A *h* számú csoportkarakterisztika jelölésére a $\chi^{(1)}, \chi^{(2)}, \ldots, \chi^{(h)}$ jeleket használjuk; a mondottak értelmében, ha a $\mathfrak{C}_p$ osztályt a csoport $A_1, A_2, \ldots, A_{n_p}$ elemei alkotják akkor

$$\chi^{(k)}(A_1) = \chi^{(k)}(A_2) = \cdots = \chi^{(k)}(A_{n_p}) \quad (k=1, 2, \ldots, h)$$

s ezt a közös értéket $\chi^{(k)}(\mathfrak{C}_p)$-vel is jelöljük. Ezek előrebocsátásával a k-adik csoportkarakterisztikát a következőképpen értelmezzük: legyen

$$\chi^{(k)}(\mathfrak{C}_p) = \frac{\sqrt{f_k}}{n_p}\, \varrho_p^{(k)} \quad (k=1, 2, \ldots, h;\ p=1, 2, \ldots, h). \tag{6}$$

(Hogy mi késztette FROBENIUST arra, hogy a karakterisztikákat e formula szerint definiálja és ne tegye egyszerűen egyenlővé a $\varrho_p^{(k)}$ számokkal, annak oka a lineáris transzformációk elméletében rejlik, melyre a következő közleményben térünk ki.)

9. A fenti definició felhasználásával az (*M*) quadratikus mátrix k-adik sora a következő alakot ölti:

$$\left(\sqrt{\frac{n_1}{n}}\chi^{(k)}(\mathfrak{C}_1),\quad \sqrt{\frac{n_2}{n}}\chi^{(k)}(\mathfrak{C}_2), \ldots,\quad \sqrt{\frac{n_h}{n}}\chi^{(k)}(\mathfrak{C}_h)\right)$$

s e mátrix orthogonalitását kifejező (4) és (5) relációk a következő összefüggéseket szolgáltatják:

$$\frac{\sqrt{n_\alpha n_\beta}}{n} \sum_{k=1}^{h} \chi^{(k)}(\mathfrak{C}_\alpha)\,\overline{\chi^{(k)}(\mathfrak{C}_\beta)} = \delta_{\alpha\beta} \tag{4'}$$

$$\frac{1}{n} \sum_{k=1}^{h} n_k \chi^{(a)}(\mathfrak{C}_k)\,\overline{\chi^{(b)}(\mathfrak{C}_k)} = \delta_{ab} \tag{5'}$$

Az (5') egyenletek a következő alakba is írhatók:

$$\frac{1}{n} \sum_{(A)} \chi^{(a)}(A)\,\overline{\chi^{(b)}(A)} = \delta_{ab},$$

ahol $\sum_{(A)}$ azt jelöli, hogy az összegezést a csoport összes elemeire kell kiterjeszteni.

Végül az (I) alatti egyenletrendszer tekintetbevételével nyerjük az

$$\frac{n_\alpha n_\beta}{\sqrt{f_k}}\,\chi^{(k)}(\mathfrak{C}_\alpha)\,\chi^{(k)}(\mathfrak{C}_\beta) = \sum_{\gamma=1}^{h} c_{\alpha\beta\gamma}\, n_\gamma \chi^{(k)}(\mathfrak{C}_\gamma) \tag{I'}$$

egyenleteket.

Megjegyezhetjük (v. ö. 4.) még a

$$\chi^{(k)}(A^{-1}) = \overline{\chi^{(k)}(A)}$$

összefüggést, továbbá, hogy a (I') egyenletrendszernek — a koefficiensek valós volta miatt — a $\overline{\chi^{(k)}(\mathfrak{C}_p)}$ számok is megoldásai. Ennélfogva

$$\overline{\chi^{(k)}(\mathfrak{C}_1)},\ \overline{\chi^{(k)}(\mathfrak{C}_2)},\ \ldots,\ \overline{\chi^{(k)}(\mathfrak{C}_h)} \quad (k=1, 2, \ldots h)$$

is a h csoportkarakterisztika egyike; ezt a karakterisztikát a $\chi^{(k)}$ inverz, vagy konjugált karakterisztikájának mondják.

A (4') és (5') alatti összefüggések a csoportkarakterisztikák fundamentális tulajdonságai; ezek a relációk azok, amelyek bizonyos végtelen csoportokra is átvihetők.[10] Frobenius még

[10] T. i. (mint egy később megjelenendő dolgozatomban be fogom bizonyítani) az olyan végtelen csoportokra, amelyeknél minden osztály véges számú elemből áll.

kimutatta, hogy a $\sqrt{f_k}$ számok egész számok. Nem akarom e helyen ezt a tételt bizonyítani, mert későbbi közleményem eredményeiből ez önként következik. Fontosnak tartom azt a tényt, hogy a csoportkarakterisztikák alapvető tulajdonságai az irreducibilis lineáris transzformációk elmélete nélkül, teljesen elemi úton indokolhatók.

Haar Alfréd.

ZUR THEORIE DER GRUPPENCHARAKTERE.

Die Arbeit enthält eine elementare Begründung der FROBENIUS'schen Gruppencharaktere. Als Ausgangspunkt dient die bekannte reguläre Darstellung einer endlichen Gruppe; die einfachsten Sätze über die Klassen von konjugierten Elementen einer Gruppe liefern alsdann die Tatsache, dass die Summe derjenigen Matrizen, welche bei der regulären Darstellung der Elementen einer Klasse zugeordnet sind (sog. Klassenmatrizen) untereinander vertauschbare Normalmatrizen sind. Die simultane Transformation dieser Matrizen auf die Diagonalform liefert dann unmittelbar die Gruppencharaktere und man erhält ohne Mühe die Hauptergebnisse der FROBENIUS'shen Theorie über Anzahl, Orthogonalität und Vollständigkeit der verschiedenen Charaktere.

Alfred Haar.

A CSOPORTKARAKTERISZTIKÁK ELMÉLETÉRŐL.*

(Második közlemény.)

Az első közleményben (Matematikai és Fizikai Lapok **38.** k., 132. l.) egy olyan eljárást közöltem, mely egyszerűen és minden lényeges számítás nélkül elvezet a csoportkarakterisztikák fogalmára és alapvető tulajdonságaira. Ebben a dolgozatomban meg akarom mutatni, hogy az első közleményben követett eljárás miként vezet el a véges csoportok előállításainak elméletére, amely a csoportkarakterisztikák legfontosabb alkalmazása.

A bebizonyítandó tételek túlnyomó részben magától Frobeniustól erednek (l. az első közlemény [2] sz. jegyzetét); néhány segédtétel csak Burnside és Schur idevágó vizsgálataiban lép fel. Nem tartottam itt sem szükségesnek, hogy minden tételnél külön megadjam az irodalmi adatokat.

A véges csoportok előállításáról.

1. Ha az adott n-edrendű csoport minden egyes

$$A, B, C, \ldots$$

eleméhez egy-egy (ν-edrendű) mátrix van rendelve és ezeknek összessége

$$(T_A), (T_B), (T_C), \ldots \tag{7}$$

azzal a tulajdonsággal bír, hogy

$$(T_{XY}) = (T_X)\,(T_Y) \qquad (X, Y = A, B, C, \ldots),$$

---

* Elhúnyt kiváló tudósunk egyik utolsó munkája. *(Szerk.)*

akkor ezekről a mátrixokról — illetőleg a megfelelő lineáris transzformációkról — azt mondjuk, hogy csoportunk egy ν-edrendű T *előállítását* szolgáltatják. Csak olyan előállításokkal fogunk foglalkozni, amelyeknél a fenti mátrixok determinánsa nem tűnik el. Ekkor nyilván $(T_E) = (E)$ és $(T_{A^{-1}}) = (T_A)^{-1}$. A reguláris előállítás, amelyre felépítettük a csoportkarakterisztikák fogalmát, $(T_A) = (A)$, példa erre az általános fogalomra; egy másik (triviális) példát nyerünk, ha valamennyi (T_A), (T_B), (T_C),... mátrixot a ν-edrendű egységmátrixszal identifikáljuk. Ha (P) egy olyan ν-edrendű mátrix, melynek van inverze, akkor a

$$(P)^{-1}\ (T_X)\ (P) \qquad (X=A, B, C,\ldots)$$

mátrixok is csoportunknak egy előállítását szolgáltatják, melyről azt mondjuk, hogy a (7) alatti előállítással *aequivalens*. Az aequivalencia reflexiv, szimmetrikus és tranzitiv fogalom.

Mint a reguláris előállítás esetében, úgy most is rendelhetünk a csoport osztályaihoz egy-egy mátrixot. Ha ugyanis a $\mathfrak{C}_p$ osztályt az $A_1, A_2, \ldots, A_{n_p}$ elemek alkotják, akkor ehhez az osztályhoz rendeljük a

$$(T_{\mathfrak{C}_p}) = (T_{A_1}) + (T_{A_2}) + \cdots + (T_{A_{n_p}})$$

mátrixot. Az osztályok kompozícióját kifejező (1) egyenlet ekkor nyomban átmegy a következő mátrixegyenletbe:

$$(T_{\mathfrak{C}_\alpha})\ (T_{\mathfrak{C}_\beta}) = (T_{\mathfrak{C}_\beta})\ (T_{\mathfrak{C}_\alpha}) = \sum_{\gamma=1}^{h} c_{\alpha\beta\gamma}\,(T_{\mathfrak{C}_\gamma}). \qquad (1'')$$

Könnyen átlátható, hogy a $(T_{\mathfrak{C}_p})$ mátrix $(p = 1, 2, \ldots, h)$ felcserélhető a (T_A), (T_B), (T_C),... mátrixok mindegyikével. U. i. a $(T_{\mathfrak{C}_p})\ (T_A) = (T_A)\ (T_{\mathfrak{C}_p})$ reláció közvetlen folyománya annak a ténynek (v. ö. első közlemény, 1. §), hogy az $A_1A, A_2A, \ldots, A_{n_p}A$ elemek összessége ugyanaz, mint az $AA_1\ AA_2, \ldots, AA_{n_p}$ elemek összessége.

Be kell még vezetnünk a reducibilis, illetőleg irreducibilis előállítás fogalmát. A következő szólásmódot célszerű bevezetni erre a célra. Valamely ν-edrendű (P) mátrixhoz tartozó transzformáció a ν-dimenziós tér $x_1, x_2, \ldots, x_\nu$ koordinátájú $\mathfrak{x}$ pontját vigye át

az $x'_1, x'_2, \ldots, x'_\nu$ koordinátájú $\mathfrak{x}'$ pontba; ezt $(P)\,\mathfrak{x} = \mathfrak{x}'$-vel fogjuk jelölni. Ha továbbá $\mathfrak{x}', \mathfrak{x}'', \ldots, \mathfrak{x}^{(k)}$ a kérdéses tér k tetszőleges pontja, akkor (könnyen megérthető jelölésben) a $c'\mathfrak{x}' + c''\mathfrak{x}'' + \cdots + c^{(k)}\mathfrak{x}^{(k)}$ pontok összességét — ahol $c', c'', \ldots, c^{(k)}$ tetszőleges állandókat jelölnek — ezen tér egy lineáris részének mondjuk; ha $k<\nu$, akkor valódi részről van szó. Ezek előrebocsátásával a (7) alatti T előállítást *reducibilisnek* mondjuk (s az ellenkező esetben *irreducibilisnek*), ha van a ν-dimenziós térnek egy olyan *valódi* lineáris része, melynek pontjait a fenti (T_A), (T_B), $(T_C), \ldots$ transzformációk mindegyike ugyanezen térrész pontjaiba viszi át (tehát a térrészt önmagában transzformálják). Más szóval, a reducibilitás feltétele olyan $k<\nu$ számú $\mathfrak{x}', \mathfrak{x}'', \ldots, \mathfrak{x}^{(k)}$ értékrendszer létezése, hogy a (7) alatti matrixok mindegyikére fennálljanak a

$$(T)\,\mathfrak{x}^{(p)} = c'_T\mathfrak{x}' + c''_T\mathfrak{x}'' + \cdots + c^{(k)}_T\mathfrak{x}^{(k)} \qquad \begin{matrix}(p=1, 2, \ldots, k)\\ (T=T_A, T_B, T_C, \ldots)\end{matrix}$$

alakú összefüggések. Definíciónkból rögtön következik, hogy egy reducibilis előállítással aequivalens előállítás szintén reducibilis.

2. Az irreducibilis előállítások és a csoportkarakterisztikák, illetőleg a FROBENIUS-féle egyenletrendszer közti összefüggésre rávezet a következő tétel, mely egész speciális esete egy BURNSIDEtől eredő theorémának. *Ha a (P) mátrix felcserélhető a T irreducibis előállítás valamennyi matrixával, akkor $(P)=\varrho\,(E)$, ahol ϱ egy számot és (E) a ν-edrendű egységmátrixot jelöli.*

A tétel bebizonyítása igen egyszerű. ϱ-t úgy választjuk meg, hogy $(P)-\varrho\,(E)$ determinánsa eltűnjék. Ha ez a különbség nem volna identikusan zérus, akkor a

$$\big((P) - \varrho\,(E)\big)\,\mathfrak{x} = 0 \tag{8}$$

homogén egyenletrendszernek összes megoldásai $k<\nu$ számú $\mathfrak{x}', \mathfrak{x}'', \ldots, \mathfrak{x}^{(k)}$ lineárisan independens megoldásból volnának felépíthetők, azaz $c'\mathfrak{x}'+c''\mathfrak{x}''+\cdots+c^{(k)}\mathfrak{x}^{(k)}$ volna (8) általános megoldása. Ha már most $(T)\,(P) = (P)\,(T)$ $(T = T_A, T_B, T_C, \ldots)$, akkor teljesülnének a

$$\big((P) - \varrho(E)\big)(T)\,\mathfrak{x}^{(p)} = (T)\big((P) - \varrho(E)\big)\,\mathfrak{x}^{(p)} = 0 \quad (p=1, 2, \ldots, k)$$

egyenletek, azaz a $(T)\,\mathfrak{x}^{(p)}$ számok is kielégítenék az (8) alatti egyenleteket. Ennek folytán

$$(T)\,\mathfrak{x}^{(p)} = c'\mathfrak{x}' + c''\mathfrak{x}'' + \cdots + c^{(k)}\mathfrak{x}^{(k)}$$

volna, ellentétben a T előállítás irreducibilis voltával; tehát tényleg $(P) - \varrho(E) = 0$.

Ennek a tételnek fontos következménye, hogy *irreducibilis előállítás esetén a csoport osztályaihoz rendelt mátrixok a ν-edfokú egységmátrixnak egy-egy számmal való szorzásából adódnak;* legyen

$$(T_{\mathfrak{C}_p}) = \varrho_p(E). \tag{9}$$

Az (1″) alatti relációból nyomban következik, hogy ezek a ϱ_p számok kielégítik a FROBENIUS-féle (I) egyenletrendszert.

A ϱ_p számok a (7) alatti mátrixok nyomaiból könnyűszerrel kifejezhetők; ha a $(\mathfrak{C}_p)$ osztályt az $A_1, A_2, \ldots, A_{n_p}$ elemek alkotják, akkor könnyen átlátható, hogy

$$\mathrm{Ny}\,(T_{A_1}) = \mathrm{Ny}\,(T_{A_2}) = \cdots = \mathrm{Ny}\,(T_{A_{n_p}}) = \frac{\nu\varrho_p}{n_p}. \tag{10}$$

U. i. a nyomok egyenlősége az $A_1, A_2, \ldots, A_{n_p}$ elemek konjugáltságának következménye; a

$$(T_{A_1}) + (T_{A_2}) + \cdots + (T_{A_{n_p}}) = \varrho_p(E)$$

mátrix nyoma $\nu\varrho_p$. Ha tehát T egy ν-edrendű irreducibilis előállítása csoportunknak és A a $\mathfrak{C}_p$ osztály egy eleme, akkor $\mathrm{Ny}\,(T_A) = \frac{\nu\varrho_p}{n_p}$, ahol $\varrho_1, \varrho_2, \ldots, \varrho_h$ az (I) egyenletek valamely megoldási rendszere. Ezt a körülményt úgy fejezzük ki, hogy *minden irreducibilis előállítás a* FROBENIUS*-féle egyenletrendszer valamely megoldásához «tartozik».*

3. Aequivalens előállítások — nyilván — az (I) egyenletrendszer ugyanazon megoldásához tartoznak. A következők számára döntő jelentőségű e tétel megfordítása:

Két irreducibilis előállítás, T és T', melyek — a fenti ér-

telemben — a FROBENIUS*-féle egyenletrendszer ugyanazon megoldásához tartoznak, aequivalensek.*

Bizonyítás. Legyen $\varrho_1, \varrho_2, \ldots, \varrho_h$ a kérdéses megoldása (I)-nek, melyhez a ν-edrendű

$$T : (T_A),\ (T_B),\ (T_C), \ldots$$

és a ν'-edrendű

$$T' : (T'_A),\ (T'_B),\ (T'_C), \ldots$$

irreducibilis előállítás tartozik. Tegyük fel, hogy $\nu \geqq \nu'$. A T' előállításban szereplő ν'-edrendű mátrixokat egészítsük ki ν-edrendű mátrixokká olymódon, hogy mindegyikükhöz csatolunk még $\nu - \nu'$ számú sort és oszlopot, úgy, hogy az új elemek közül a diagonálisban állók 1-gyel, a többiek pedig 0-sal legyenek egyenlők. Az így nyert ν-edrendű

$$T'' : (T''_A),\ (T''_B),\ (T''_C), \ldots$$

mátrixok szintén csoportunk egy előállítását szolgáltatják, mely a $\nu > \nu'$ esetben nyilván reducibilis és minden elemre vonatkozólag fennáll a $\mathrm{Ny}\,(T''_A) = \mathrm{Ny}\,(T'_A) + (\nu - \nu')$ reláció. Mindegyik itt szereplő előállítás bármelyik mátrixának n-edik hatványa (E); hiszen n-edrendű csoportunk minden eleme teljesíti az $A^n = E$ relációt. Ennélfogva minden fellépő mátrix nyoma n-edik egységgyökök összege, mert egy mátrix nyoma nem egyéb, mint a mátrixhoz tartozó szekuláris egyenlet gyökeinek összege. Minthogy végül a (T_A) és a $(T_{A^{-1}}) = (T_A)^{-1}$ mátrixokhoz tartozó karakterisztikus értékek egymás reciprokai, azért egyszersmind — egységgyökök lévén — egymás konjugált komplex értékei is. Ennélfogva $\mathrm{Ny}\,(T_A)$ és $\mathrm{Ny}\,(T_{A^{-1}})$ konjugált számok. Ezek után könnyen átlátható, hogy a következő összeg:

$$S = \sum_{(A)} \mathrm{Ny}\,(T_A)\ \ \mathrm{Ny}\,(T'_{A^{-1}}) = \sum_{(A)} \mathrm{Ny}\,(T_A)\,\big(\mathrm{Ny}\big(T'_{A^{-1}}\big) + (\nu - \nu')\big),$$

ahol az összegezés valamennyi A csoportelemre van kiterjesztve, szükségképpen pozitív (>0). Ugyanis a (T'_A) és $(T_{A^{-1}})$ nyomaira tett megjegyzésből következik, hogy

$$S = \sum_{(A)} \mathrm{Ny}\,(T_A)\,\overline{\mathrm{Ny}\,(T'_A)} + (\nu - \nu') \sum_{(A)} \mathrm{Ny}\,(T_A) =$$

$$= \nu\nu' \sum_{k=1}^{h} \frac{\varrho_k \bar{\varrho}_k}{n_k} + (\nu - \nu')\,\nu \sum_{k=1}^{h} \varrho_k ;$$

az itt fellépő első összeg nagyobb, mint zérus; a második összeg értéke pedig a $\varrho_1 = n_1$, $\varrho_2 = n_2, \ldots, \varrho_h = n_h$ esetben n, minden más esetben pedig 0.[1] Ennélfogva tényleg $S > 0$. Ha a fenti (T_A), illetőleg (T''_A) mátrixokban a p-edik sor q-adik elemét $m_{pq}^{(A)}$-val, illetőleg $m''^{(A)}_{pq}$-val jelöljük, akkor ezek szerint

$$\sum_{(A)} \sum_{p,q=1}^{\nu} m_{pp}^{(A^{-1})}\, m''^{(A)}_{qq} > 0 ;$$

tehát mindenesetre van — legalább egy — olyan α, β értékpár, hogy

$$\sum_{(A)} m''^{(A)}_{\alpha\alpha}\, m_{\beta\beta}^{(A^{-1})} \neq 0.$$

Jelöljük (P)-vel azt a ν-edrendű mátrixot, melyben az α-adik sor β-adik eleme $= 1$, a többi helyen álló elemek pedig 0-sal egyenlők. Ekkor a

$$(Q) = \sum_{(A)} (T'_A)\,(P)\,(T_A)^{-1}$$

mátrix semmiesetre sem identikusan 0, mert α-adik sorának β-adik eleme $= \sum_{(A)} m''^{(A)}_{\alpha\alpha}\, m_{\beta\beta}^{(A^{-1})} \neq 0$. Másrészt, ha X csoportunk tetszőleges eleme,

$$(T''_X)\,(Q) = \sum_{(A)} (T''_X)\,(T''_A)\,(P)\,(T_A)^{-1} = \left\{ \sum_{(A)} (T''_{XA})\,(P)\,(T_{XA})^{-1} \right\} (T_X),$$

s minthogy, ha (A) végighalad a csoport valamennyi elemén, XA is rendre átmegy a csoport minden elemébe, azért

$$(T''_X)\,(Q) = (Q)\,(T_X) \qquad (X = A, B, C \ldots).$$

---

[1] Ez következménye az első közleményben szereplő (5) alatti összefüggésnek, ha abban a $\varrho_k^{(a)}$ értékrendszert az itt szereplő ϱ_k-kal, az ettől különböző $\varrho_k^{(b)}$ megoldásrendszert pedig a triviális n_k megoldásrendszerrel ejtjük össze. (V. ö. az első közlemény [8] lábjegyzetét.)

Az itt fellépő (Q) mátrix determinánsa $\neq 0$; ugyanis ellenkező esetben legyenek a $(Q)\mathfrak{x} = 0$ homogén egyenletrendszer lineárisan independens megoldásai $\mathfrak{x}', \mathfrak{x}'', \ldots, \mathfrak{x}^{(k)}$ $(k<\nu)$; az utolsó relációból nyomban következnék, hogy

$$(Q)\,(T_X)\,\mathfrak{x}^{(p)} = 0 \qquad (p=1, 2, \ldots, k)$$

és így fennállnának a

$$(T_X)\,\mathfrak{x}^{(p)} = c'_X\mathfrak{x}' + c''_X\mathfrak{x}'' + \cdots + c^{(k)}_X\mathfrak{x}^{(k)}$$

relációk, ellentétben az T előállítás irreducibilitásával. Ennélfogva

$$(T''_X) = (Q)\,(T_X)\,(Q)^{-1} \qquad (X=A, B, C, \ldots),$$

amiből egyrészt következik, hogy a T'' előállítás is irreducibilis, tehát szükségképpen $\nu'=\nu$, azaz T'' ugyanaz, mint T' és hogy ez az előállítás a T előállítással aequivalens.

Az eddigiekből már levonható az az eredmény, hogy *az inaequivalens előállítások száma nem nagyobb, mint h (a csoportban foglalt osztályok száma) és hogy két irreducibilis előállítás akkor és csak akkor aequivalens, ha a megfelelő mátrixoknak* (azaz a két előállításban minden egyes csoportelemhez tartozó két mátrixnak) *nyomai megegyeznek.*

4. A Frobenius-féle egyenletek valamely $\varrho_1, \varrho_2, \ldots, \varrho_h$ megoldásához tartozó T irreducibilis előállítás rendjét az előzőek alapján könnyen kiszámíthatjuk; az e végből alkalmazandó következő eljárás lényegében azonos Schur idézett dolgozatában szereplő megfontolásokkal. Ugyanis, ha ismét (P) jelenti az előző pontban definiált mátrixot, akkor a $(Q) = \sum_{(A)} (T_A)\,(P)\,(T_{A^{-1}})$ mátrix a $(T_A), (T_B), (T_C), \ldots$ mátrixok mindegyikével felcserélhető; ennélfogva $(Q) = \lambda\,(E)$. Minthogy továbbá ebben az összegben fellépő mindegyik mátrix nyoma $\delta_{\alpha\beta}$, (Q)-é pedig $= \nu\lambda$ (ν a T előállítás rendje), azért $n\delta_{\alpha\beta} = \nu\lambda$. Ennélfogva a p-edik sor q-adik elemének kiszámítása a fenti mátrixreláció mindkét oldalán a

$$\sum_{(A)} m^{(A)}_{p\alpha}\, m^{(A^{-1})}_{\beta q} = \frac{n}{\nu}\,\delta_{\alpha\beta}\delta_{pq}$$

egyenletre vezet, melyből adódik (ha $p = \alpha$, $q = \beta$), hogy

$$\sum_{(A)} m_{\alpha\alpha}^{(A)} m_{\beta\beta}^{(A^{-1})} = \frac{n}{\nu} \delta_{\alpha\beta}.$$

Ebből az egyenletből nyomban következik, hogy

$$\sum_{(A)} \sum_{\alpha,\beta=1}^{\nu} m_{\alpha\alpha}^{(A)} m_{\beta\beta}^{(A^{-1})} = \sum_{(A)} \mathrm{Ny}\,(T_A)\,\mathrm{Ny}\,(T_{A^{-1}}) =$$

$$= \sum_{(A)} \mathrm{Ny}\,(T_A)\,\overline{\mathrm{Ny}\,(T_A)} = n,$$

amiből végre — (10) tekintetbevételével — nyerjük a

$$\nu^2 \sum_{p=1}^{h} n_p \frac{\varrho_p}{n_p} \frac{\bar{\varrho}_p}{n_p} = n$$

összefüggést. Az első közleményben bebizonyított (5) egyenletet ezzel egybevetve arra az eredményre jutunk, hogy $\nu^2 = f$, ahol f jelentette azt a számot, mely megmondja, hogy a $\varrho_1, \varrho_2, \ldots, \varrho_h$ értékrendszer hányszor lépett fel a reguláris előállítás osztálymatrixainak a diagonális alakra való transzformációjánál. Végül a (10) alatti relációnak a csoportkarakterisztikák (6) definíciójával való összehasonlításából az a tétel adódik, hogy adott *csoportunk valamely irreducibilis előállításában az egyes elemekhez tartozó mátrixok nyomai a csoportkarakterisztikák egyikét szolgáltatják.*[1]

5. Hátra van még annak megállapítása, hogy csoportunk inaequivalens irreducibilis előállításainak száma (melyről már láttuk, hogy h-nál nagyobb nem lehet) h-val egyenlő. E végből felhasználom MASCHKENak a reducibilis előállításokra vonatkozó alapvető fontosságú tételét, amelyet a legegyszerűbben a következő fogalom bevezetésével lehet kimondani. Ha T' és T'' csoportunknak ν'-ed, illetőleg ν''-edrendű előállításai, melyek nem szükségképpen különbözők, akkor a $\nu' + \nu''$-edrendű

[1] SCHUR idézett dolgozatában ezt a körülményt használja fel a csoportkarakterisztikák definíciójára.

$$(T_X) = \begin{pmatrix} & & 0\ldots0 \\ & (T'_X) & \ldots\ldots \\ & & 0\ldots0 \\ 0\ldots0 & & \\ \ldots\ldots & (T''_X) & \\ 0\ldots0 & & \end{pmatrix} \qquad (X=A, B, C, \ldots)$$

mátrixok nyilván szintén csoportunk egy előállítását szolgáltatják;[1] ilyenkor azt mondjuk, hogy ez az előállítás és minden vele aequivalens előállítás a T' és T'' előállításokból «épül fel» s ezt a körülményt a $T=T'+T''$ szimbolikus egyenlettel jelöljük. Közvetlenül látnivaló, miként általánosul ez a fogalom, ha kettőnél több előállításból építünk fel újakat. MASCHKE tétele azt mondja ki, hogy *minden reducibilis előállítás ebben az értelemben az irreducibilis előállításokból felépíthető.*[2]

MASCHKE tételének ma már annyi egészen egyszerű bebizonyítása létezik, hogy azt hiszem, megelégedhetem a tétel kimondásával. Alkalmazzuk MASCHKE tételét az első közlemény 2. §-ában tárgyalt reguláris előállításra, R-re. Legyenek az összes irreducibilis előállítások T', T'',..., $T^{(k)}$ $(k \leqq h)$, és legyen a reguláris előállítás felépítése jellemezve a következő relációval:

$$R = g'T' + g''T'' + \cdots + g^{(k)}T^{(k)},$$

ahol g', g'',..., $g^{(k)}$ természetes számok és azt jelentik, hogy a megfelelő irreducibilis előállítás hányszor használtatott fel az R felépítésénél. Jelöljük a $T^{(p)}$ irreducibilis előállítás rendjét $\nu^{(p)}$-vel $(p=1, 2,\ldots, k)$ és tegyük fel, hogy az a FROBENIUS-féle egyenletrendszer $\varrho_1^{(p)}, \varrho_2^{(p)},\ldots, \varrho_h^{(p)}$ megoldásához tartozik. Ekkor nyilván

$$n = g'\nu' + g''\nu'' + \cdots + g^{(k)}\nu^{(k)};$$

ha továbbá megalkotjuk a $(\mathfrak{C}_\alpha)$ osztályhoz tartozó mátrixot, akkor a felépítési szabály értelmében olyan diagonálismátrixhoz jutunk, melyben a diagonálisban álló elemek közül

---

[1] A (T_α) mátrixban tehát az első ν' számú sor utolsó ν'' számú helyén és az utolsó ν'' számú sor első ν' számú helyén 0 áll.

[2] *Math. Annalen*, **52**, 363. l. SCHUR bizonyítását l. az első közlemény [4] lábjegyzetében idézett cikk 414. oldalán.

$g'\nu'$ számú egyenlő $\varrho_\alpha^{(1)}$-val,
$g''\nu''$ számú egyenlő $\varrho_\alpha^{(2)}$-val,
. . . . . .
$g^{(k)}\nu^{(k)}$ számú egyenlő $\varrho_\alpha^{(k)}$-val.

Minthogy pedig — mint az első közlemény 2. §-ában láttuk — a reguláris előállításnál a $(\mathfrak{C}_\alpha)$ osztálymátrix aequivalens azzal a diagonálismátrixszal, melyben mindegyik $\varrho_\alpha^{(1)}$, $\varrho_\alpha^{(2)}$,..., $\varrho_\alpha^{(k)}$ szerepel, mégpedig rendre f_1-, f_2-, ..., f_h-szor, azért látnivaló, hogy egyrészt $k=h$ és másrészt $g'\nu'=f_1$, $g''\nu''=f_2$,..., $g^{(k)}\nu^{(k)}=f_k$, azaz — az előző pontban levezetett $f_p \leqq \nu^{(p)2}$ relációk tekintetbevételével — $g'=\nu'$, $g''=\nu''$,..., $g^{(h)}=\nu^{(h)}$. Más szóval, *az inaequivalens irreducibilis előállítások száma* tényleg h, *és mindegyikük a reguláris előállítás felépítésénél annyiszor szerepel, amekkora a rendje;* a $g\nu$ szorzatok összegére megállapított fenti összefüggés pedig az $n=\nu'^2+\nu''^2+\cdots+\nu^{(h)2}$ egyenletbe megy át.

Látnivaló továbbá, — ugyancsak Maschke tételének felhasználásával — hogy ha T egy tetszőleges előállítása csoportunknak s — a fenti értelemben —

$$T=\gamma'T'+\gamma''T''+\cdots+\gamma^{(h)}T^{(h)},$$

ahol γ', γ'',..., $\gamma^{(h)}$ természetes számok, akkor ezen előállításban az A csoportelemhez tartozó mátrix nyoma

$$\gamma'\chi'(A)+\gamma''\chi''(A)+\cdots+\gamma^{(h)}\chi^{(h)}(A),$$

ahol a jelölés úgy van választva, hogy a $T^{(p)}$ irreducibilis előállításban a mátrixok nyoma a $\chi^{(p)}(A)$ csoportkarakterisztika. Ebből következik az is, hogy *két előállítás akkor és csak akkor aequivalens, ha a megfelelő mátrixok nyomai megegyeznek stb.*

Ezzel kimerítettük a csoportkarakterisztikák lényeges tulajdonságait; nem térhetek ki azokra, melyek ezekből — többékevésbbé egyszerű — számításokkal adódnak.

Haar Alfréd.

ZUR THEORIE DER GRUPPENCHARAKTERE.

(Zweite Mitteilung.)

Infolge Ablebens unseres ausgezeichneten Gelehrten ALFRED HAAR blieb die Aufgabe einen kurzen deutschen Auszug der vorliegenden Arbeit — einer der letzten Arbeiten des Verstorbenen — abzufassen, der Redaktion zurück. Die Arbeit bildet eine Fortsetzung einer gleichbetitelten Abhandlung (Mat. Fiz. Lapok, Bd. 38 (1931), S. 132—145), die eine neue, elementare, vom Begriff der irreduziblen Darstellungen der Gruppen unabhängige Begründung der Theorie der Gruppencharaktere enthielt. In der vorliegenden zweiten Mitteilung wird gezeigt, wie sich die Darstellungstheorie endlicher Gruppen als eine Anwendung der Gruppencharaktere in diese Begründung einreihen läßt. Mit Hilfe eines bekannten BURNSIDEschen Satzes wird der Zusammenhang der irreduziblen Darstellungen der Gruppe mit den Lösungen des FROBENIUSschen Gleichungssystems aufgedeckt; dabei wird auch der Satz gewonnen, daß die Spuren der Matrizen einer irreduziblen Darstellung gleich der Werte eines Gruppencharakters an den entsprechenden Gruppenelementen sind (diese Tatsache dient bei SCHUR zur Definition der Charaktere). Die Anzahl der nichtäquivalenten irreduziblen Darstellungen wird mit Hilfe eines MASCHKEschen Satzes gewonnen.

(Die Redaktion.)

Über die Gruppencharaktere gewisser unendlichen Gruppen.

Von Alfred Haar in Szeged.

Einleitung.

In einer Arbeit, die vor kurzem in der *Mathematischen Zeitschrift* erschienen ist,[1]) habe ich die Theorie der Gruppencharaktere im Falle einer aus abzählbar vielen Elementen bestehenden kommutativen unendlichen Gruppe entwickelt. Es gelang in diesem Falle den Elementen der unendlichen Gruppe Funktionen zuzuordnen, deren Gesamtheit alle wesentlichen Eigenschaften der Gruppencharaktere von endlichen Abelschen Gruppen besitzt und daher als sinngemäße Übertragung dieser Begriffsbildung anzusehen ist. Diese Untersuchung legt den Gedanken nahe, für *nichtkommutative, aus abzählbar unendlich vielen Elementen bestehende Gruppen das Analogon der* Frobeniusschen *Gruppencharaktere aufzustellen.* Dies gelingt in der Tat *für solche unendliche Gruppen, welche so beschaffen sind, daß jede Klasse von konjugierten Elementen nur aus endlich vielen Elementen besteht,* d. h., daß zu jedem Gruppenelement nur endlich viele konjugierte Elemente existieren. Es ist das Ziel der vorliegenden Note, im Falle solcher unendlichen Gruppen (die ja den kommutativen am nächsten verwandt sind) jedem Gruppenelement bzw. jeder Klasse eine Funktion so zuzuordnen, daß die Gesamtheit dieser Funktionen in ähnlicher Weise mit der Gruppe zusammenhängt, wie es in der Frobeniusschen Theorie der Gruppencharaktere von endlichen Gruppen der Fall ist.

[1]) Über unendliche kommutative Gruppen, *Mathematische Zeitschrift*, **33** (1931), S. 129—159.

Um dies darzulegen, habe ich mir erlaubt, im § 1. dieser Arbeit eine — wie mir scheint neue — durchaus elementare Begründung der Gruppencharaktere von endlichen Gruppen vorauszuschicken, indem ich die FROBENIUSsche Theorie in solcher Weise begründe, die eine Übertragung auf unendliche Gruppen der genannten Art gestattet. Die schöne und äußerst elegante Begründung von I. SCHUR,[2]) die an Einfachkeit nichts zu wünschen übrig läßt, benutzt als Ausgangspunkt den Begriff der irreduziblen Darstellungen der Gruppe, einen Begriff, der auf den vorliegenden Fall kaum übertragbar ist, und es ist vielleicht die Loslösung der Gruppencharaktere von den Darstellungen (wie es ja bei FROBENIUS selbst der Fall ist) nicht ohne Interesse. Ich entwickle mit der erwähnten elementaren Beweisanordnung im § 1. die FROBENIUSsche Theorie der Gruppencharaktere nur soweit, daß die volle Analogie der im § 2. angegebenen Gruppencharaktere von unendlichen Gruppen klar hervortritt, obwohl es unschwer wäre, mit Hilfe des MASCHKEschen Satzes auf Grund der bewiesenen Sätze auch den Zusammenhang mit der Darstellungstheorie zu entwickeln. § 2. enthält die Untersuchungen über die angegebenen unendlichen Gruppen; die sinngemäße Übertragung des im vorangehenden §-en eingeschlagenen Weges führt zu einem Funktionensystem, das als Übertragung der Gruppencharaktere für solche Gruppen anzusehen ist (vgl. den Satz am Ende dieser Arbeit).

§ 1. Über Gruppencharaktere von endlichen Gruppen.

1. Die Elemente der vorgelegten Gruppe n-ter Ordnung bezeichnen wir mit $A, B, C, \ldots$; E sei das Einheitselement. Wir bezeichnen ferner mit $\mathfrak{C}_1, \mathfrak{C}_2, \ldots, \mathfrak{C}_h$ die einzelnen Klassen konjugierter Elemente. $\mathfrak{C}_p$ enthalte n_p Elemente der Gruppe $(n_1 + n_2 + \ldots + n_h = n)$, und es sei stets $\mathfrak{C}_1$ diejenige Klasse (Einheitsklasse), die aus dem einzigen Element E besteht $(n_1 = 1)$. Die zu $\mathfrak{C}_p$ inverse Klasse (d. h. die Klasse, welche aus den Inversen der zu $\mathfrak{C}_p$ gehörenden Elemente besteht) bezeichnen wir gelegentlich auch mit $\mathfrak{C}_{p'}$; es ist $n_p = n_{p'}$.

Das *Gesetz der Klassenkomposition* ist bekanntlich eine Folge der einfachen Tatsache, daß die beiden Komplexe $X\mathfrak{C}_p$ und $\mathfrak{C}_p X$

[2]) Neue Begründung der Theorie der Gruppencharaktere, *Sitzungsberichte der preußischen Akademie*, 1905, S. 406—432.

übereinstimmen, wobei X ein beliebiges Gruppenelement bezeichnet ($p = 1, 2, \ldots, n$). Daraus folgt unmittelbar, daß der Komplex $\mathfrak{C}_\alpha \mathfrak{C}_\beta$, gebildet aus den Produkten von allen Elementen von $\mathfrak{C}_\alpha$ in alle Elemente von $\mathfrak{C}_\beta$, mit dem Komplex $\mathfrak{C}_\beta \mathfrak{C}_\alpha$ übereinstimmt. Man denkt sich dabei jedes Element von $\mathfrak{C}_\alpha \mathfrak{C}_\beta = \mathfrak{C}_\beta \mathfrak{C}_\alpha$ so oft angeschrieben, wie oft es bei der angedeuteten Komposition auftritt, und zeigt, daß falls ein Gruppenelement A k-mal in $\mathfrak{C}_\alpha \mathfrak{C}_\beta$ vorkommt, jedes zu A konjugierte Element ebenfalls k-mal in diesem Komplex auftreten muß. Man drückt diese Tatsache durch die folgende symbolische Gleichung (der Klassenkomposition) aus:

$$(1) \qquad \mathfrak{C}_\alpha \mathfrak{C}_\beta = \mathfrak{C}_\beta \mathfrak{C}_\alpha = \sum_{\gamma=1}^{h} c_{\alpha\beta\gamma} \mathfrak{C}_\gamma, \qquad (\alpha, \beta = 1, 2, \ldots, h)$$

wobei die natürlichen Zahlen $c_{\alpha\beta\gamma}$ angeben, wie oft ein Element von $\mathfrak{C}_\gamma$ im Komplex $\mathfrak{C}_\alpha \mathfrak{C}_\beta$ auftritt. Sind $\mathfrak{C}_\alpha$ und $\mathfrak{C}_\beta$ inverse Klassen ($\beta = \alpha'$), so ist offenbar $c_{\alpha\beta 1} = n_\alpha = n_\beta$, im entgegengesetzten Falle ist $c_{\alpha\beta 1} = 0$.

Man erhält die sogenannte *reguläre Darstellung* der vorgelegten Gruppe, wenn man diese in wohlbekannter Weise durch die Permutationsgruppe

$$\begin{pmatrix} A, & B, & C, \ldots \\ AX, & BX, & CX, \ldots \end{pmatrix} \qquad (X \text{ beliebiges Gruppenelement})$$

darstellt und sodann zu den entsprechenden linearen Transformationen bzw. Matrizen übergeht. Auf diese Weise wird dem Gruppenelement X eine Matrix n-ter Ordnung $(X) = (a_{P,Q}^{(X)})$ zugeordnet, wo die Indizes P und Q alle Elemente der Gruppe durchlaufen. Man findet ohne Mühe

$$a_{P,Q}^{(X)} = \delta_{PX,Q},$$

wobei in üblicher Weise $\delta_{P,Q}$ Null oder Eins bedeutet, je nachdem $P \neq Q$ oder $P = Q$ ist. Die Formel $(XY) = (X)(Y)$ kann man übrigens leicht durch Rechnung verifizieren, und man erkennt auch unmittelbar, daß dem Einheitselement E die Einheitsmatrix (E), inversen Elementen natürlich inverse Matrizen entsprechen. Da aber alle hier auftretenden Matrizen (X) reell und orthogonal sind, so ruft Transposition $((X)')$ und Inversion $((X)^{-1})$ dieselbe Matrix hervor, d. h. es ist

$$(X^{-1}) = (X)^{-1} = (X)'.$$

Man erkennt auch — dieser Umstand spielt im folgenden eine wichtige Rolle — daß für $X \neq E$ alle Diagonalelemente der entsprechenden Matrix (X) gleich Null sind, da stets $PX \neq P$ ist.

Man ordnet endlich jeder Klasse $\mathfrak{C}_p$ eine Matrix vermöge der folgenden Vorschrift zu: Besteht $\mathfrak{C}_p$ aus den Elementen $A_1, A_2, \ldots, A_{n_p}$, so sei die zu $\mathfrak{C}_p$ gehörende Matrix

$$(\mathfrak{C}_p) = (c_{P,Q}^{(p)}) = (A_1) + (A_2) + \ldots + (A_{n_p}), \qquad (p = 1, 2, \ldots, h)$$

d. h. es sei

$$c_{P,Q}^{(p)} = \delta_{PA_1,\,Q} + \delta_{PA_2,\,Q} + \ldots + \delta_{PA_{n_p},\,Q}.$$

Alsdann gelten offenbar die folgenden Tatsachen:

1^0 der Klasse $\mathfrak{C}_1$ ist die Einheitsmatrix zugeordnet: $(\mathfrak{C}_1) = (E)$;

2^0 jeder anderen Klasse $(\mathfrak{C}_2, \mathfrak{C}_3, \ldots, \mathfrak{C}_h)$ ist eine solche Matrix zugeordnet, deren Diagonalelemente $= 0$ sind;

3^0 sind $\mathfrak{C}_p$ und $\mathfrak{C}_{p'}$ inverse Klassen, so ist

$$(\mathfrak{C}_{p'}) = (A_1^{-1}) + (A_2^{-1}) + \ldots + (A_{n_p}^{-1}) = (A_1)' + (A_2)' + \ldots + (A_{n_p})' = (\mathfrak{C}_p)',$$

d. h. *es entsprechen inversen Klassen transponierte Matrizen;*

4^0 *es gelten die Matrizengleichungen*

$$(1') \quad (\mathfrak{C}_\alpha)(\mathfrak{C}_\beta) = (\mathfrak{C}_\beta)(\mathfrak{C}_\alpha) = \sum_{\gamma=1}^{h} c_{\alpha\beta\gamma}(\mathfrak{C}_\gamma) \quad (\alpha, \beta = 1, 2, \ldots, h).$$

2. Die letzten Beziehungen zeigen, daß die Matrizen $(\mathfrak{C}_1)$, $(\mathfrak{C}_2), \ldots, (\mathfrak{C}_h)$ vertauschbar sind, ferner — mit Rücksicht auf 3^0 — daß jede dieser Matrizen mit ihrer Transponierten vertauschbar ist, d. h. daß *diese Matrizen vertauschbare reelle Normalmatrizen sind.* Der Satz über die simultane Hauptachsentransformation vertauschbarer HERMITEschen Formen lehrt[3]) die Existenz einer solchen unitär-orthogonalen Matrix (U), daß alle Matrizen $(U)^{-1}(\mathfrak{C}_p)(U) = (\Delta_p)$ Diagonalmatrizen, d. h. Matrizen von der Form

$$(\Delta_p) = \begin{pmatrix} r_p^{(1)} & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & r_p^{(2)} & \ldots & 0 \\ \ldots & & & \\ 0 & 0 & \ldots & r_p^{(n)} \end{pmatrix} \qquad p = 1, 2, \ldots, h$$

werden. Die aus (1) entstehenden Matrixrelationen

$$(\Delta_\alpha)(\Delta_\beta) = \sum_{\gamma=1}^{h} c_{\alpha\beta\gamma}(\Delta_\gamma)$$

[3]) durch Anwendung dieses Satzes auf die „HERMITEschen Komponenten" $(\mathfrak{C}_p) + (\mathfrak{C}_p)'$ und $i(\mathfrak{C}_p) - i(\mathfrak{C}_p)'$ der Matrizen $(\mathfrak{C}_p)$.

liefern unmittelbar (für $k = 1, 2, \ldots, n$) die folgenden Gleichungen (*Gleichungssystem von* FROBENIUS)

$$\text{(I)} \qquad r_\alpha^{(k)} r_\beta^{(k)} = \sum_{\gamma=1}^{h} c_{\alpha\beta\gamma} r_\gamma^{(k)} \qquad (\alpha, \beta = 1, 2, \ldots, h),$$

d. h. jedes der n Größensysteme

$$\text{(R)} \qquad r_1^{(k)}, r_2^{(k)}, \ldots, r_h^{(k)} \qquad (k = 1, 2, \ldots, n)$$

genügt bei Multiplikation zweier Größen einem Gleichungssystem, das von derselben Bauart ist, wie die Gleichungen (I) der Klassenkomposition.

Sind $\mathfrak{C}_p$ und $\mathfrak{C}_{p'}$ inverse Klassen, so folgt aus der Realität der entsprechenden Matrizen, und aus $(\mathfrak{C}_{p'}) = (\mathfrak{C}_p)'$, daß[4])

$$(\overline{\Delta}_p) = (\overline{\Delta}_p)' = (U)^{-1} (\mathfrak{C}_p)' (U) = (\Delta_{p'}),$$

d. h. es ist bei jedem $k = 1, 2, \ldots, n$

$$\text{(2)} \qquad \overline{r}_p^{(k)} = r_{p'}^{(k)}.$$

Die Spuren der Matrizen (Δ_p), d. h. die Summen

$$r_p^{(1)} + r_p^{(2)} + \ldots + r_p^{(n)} \qquad (p = 1, 2, \ldots, h)$$

stimmen mit den Spuren der äquivalenten Matrizen $(\mathfrak{C}_p)$ überein. Ist daher $p = 1$ (d. h. $(\mathfrak{C}_p) = (E)$), so ist jene Summe $= n$, in allen anderen Fällen ist sie aber gleich Null, da — wie bemerkt — alle Diagonalelemente dieser $(\mathfrak{C}_p)$ verschwinden. Summiert man daher die Gleichungen (I) über k, so erhält man

$$\sum_{k=1}^{n} r_\alpha^{(k)} r_\beta^{(k)} = c_{\alpha\beta 1}\, n,$$

d. h. die links stehende Summe ist, *falls* $\mathfrak{C}_\alpha$ *und* $\mathfrak{C}_\beta$ *inverse Klassen sind, gleich* $n_\alpha n = n_\beta n$, *im entgegengesetzten Falle aber gleich Null.* Man kann diese Tatsache, mit Rücksicht auf (2), folgendermaßen schreiben:

$$\text{(3)} \qquad \sum_{k=1}^{n} r_\alpha \overline{r}_\beta^{(k)} = \begin{cases} n n_\alpha & \text{für } \alpha = \beta, \\ 0 & \text{für } \alpha \neq \beta. \end{cases}$$

3. Es ist für das Folgende von entscheidender Bedeutung, daß unter den *Wertsystemen* (R) *genau h verschiedene Wertsysteme*

[4]) Die zu einer Grösse x konjugiert komplexe Zahl bezeichnen wir stets mit x; in gleicher Weise bedeutet $(\overline{M})$ diejenige Matrix, die man erhält, wenn man in der Matrix (M) alle Elemente durch die konjugiert komplexen Größen ersetzt. Für eine unitär-orthogonale Matrix (U) ist daher $(U)^{-1} = (\overline{U})'$.

vorkommen. Wir wollen *erstens* zeigen, daß die Anzahl h' *der verschiedenen Wertsysteme* (R) nicht größer als die Anzahl h der Klassen in der vorgelegten Gruppe sein kann.[5]) In der Tat, man kann in mannigfacher Weise solche Größen $u_1, u_2, \ldots, u_h$ finden, daß die n Ausdrücke

$$r_1^{(k)} u_1 + r_2^{(k)} u_2 + \ldots + r_h^{(k)} u_h = r^{(k)} \qquad (k = 1, 2, \ldots, n)$$

h' verschiedene Werte liefern. Aus den Gleichungen (I) folgt nun unmittelbar

$$r_\alpha^{(k)} \sum_{\beta=1}^{h} u_\beta r_\beta^{(k)} = \sum_{\beta,\gamma=1}^{h} c_{\alpha\beta\gamma} u_\beta r_\gamma^{(k)} \qquad (\alpha = 1, 2, \ldots, h),$$

oder — wenn man zur Abkürzung

$$d_{\alpha\gamma} = \sum_{\beta=1}^{h} c_{\alpha\beta\gamma} u_\beta \qquad (\alpha, \gamma = 1, 2, \ldots, h)$$

einführt —

$$r^{(k)} r_\alpha^{(k)} = \sum_{\gamma=1}^{h} d_{\alpha\gamma} r_\gamma^{(k)} \qquad (\alpha = 1, 2, \ldots, h).$$

Für jedes k fasse man diese Gleichungen als lineares homogenes Gleichungssystem in den Unbekannten[6]) $r_1^{(k)} = 1, r_2^{(k)}, \ldots, r_h^{(k)}$ auf; man erhält auf diese Weise für $r^{(k)}$ die Gleichung h-ten Grades

$$\begin{vmatrix} d_{11} - r^{(k)} & d_{12} & \ldots & d_{1h} \\ d_{21} & d_{22} - r^{(k)} & \ldots & d_{2h} \\ \ldots & & & \\ d_{h1} & d_{h2} & \ldots & d_{hh} - r^{(k)} \end{vmatrix} = 0.$$

Da die $d_{\alpha\gamma}$ — d. h. die Koeffizienten dieser Gleichung — für jedes k dieselben sind, so folgt, daß $r^{(k)}$ nicht mehr als h verschiedene Werte annehmen kann, d. h. es ist $h' \leqq h$.

Um *zweitens* $h' \geqq h$ zu beweisen, ist es zweckmäßig die folgenden Bezeichnungen einzuführen. Wir bezeichnen die h' *verschiedene* Wertsysteme in (R) mit

$$\text{(P)} \qquad \varrho_1^{(\varkappa)}, \varrho_2^{(\varkappa)}, \ldots, \varrho_h^{(\varkappa)}, \qquad (\varkappa = 1, 2, \ldots, h')$$

und es möge das $\varkappa$-te dieser Wertsysteme genau $f_\varkappa$-mal auftreten,

---

[5]) Vgl. den analogen Beweis bei HILBERT, Zur Theorie der aus n Haupteinheiten gebildeten complexen Größen, *Göttinger Nachrichten*, 1896, S. 179—183.

[6]) Da nämlich $(\mathfrak{C}_1) = (E)$ ist, so ist auch $(\Delta_1) = E$; also $r_1^{(k)} = 1$.

wenn man alle Wertsysteme (R) aufschreibt. Die Beziehungen (3) gehen dann in die Gleichungen

$$(3') \qquad \sum_{\varkappa=1}^{h'} f_\varkappa \varrho_\alpha^{(\varkappa)} \bar{\varrho}_\beta^{(\varkappa)} = \begin{cases} n n_\alpha, & \text{für } \alpha = \beta, \\ 0, & \text{für } \alpha \neq \beta \end{cases}$$

über, die man auch in der Form

$$(4) \qquad \sum_{\varkappa=1}^{h'} \sqrt{\frac{f_\varkappa}{n n_\alpha}}\, \varrho_\alpha^{(\varkappa)} \sqrt{\frac{f_\varkappa}{n n_\beta}}\, \bar{\varrho}_\beta^{(\varkappa)} = \delta_{\alpha\beta}$$

schreiben kann. Diese Beziehungen sagen aus, daß die folgende aus h' Zeilen und h Kolonnen bestehende Matrix

$$(M) = \begin{pmatrix} \sqrt{\frac{f_1}{n n_1}}\, \varrho_1^{(1)} & \sqrt{\frac{f_1}{n n_2}}\, \varrho_2^{(1)} & \dots & \sqrt{\frac{f_1}{n n_h}}\, \varrho_h^{(1)} \\ \sqrt{\frac{f_2}{n n_1}}\, \varrho_1^{(2)} & \sqrt{\frac{f_2}{n n_2}}\, \varrho_2^{(2)} & \dots & \sqrt{\frac{f_2}{n n_h}}\, \varrho_h^{(2)} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \sqrt{\frac{f_{h'}}{n n_1}}\, \varrho_1^{(h')} & \sqrt{\frac{f_{h'}}{n n_2}}\, \varrho_2^{(h')} & \dots & \sqrt{\frac{f_{h'}}{n n_h}}\, \varrho_h^{(h')} \end{pmatrix}$$

„kolonnenweise" die Orthogonalitätsrelation erfüllt. Daraus folgt aber unmittelbar, daß die h Wertsysteme (mit h' Komponenten), die in den einzelnen Kolonnen stehen, linear unabhängig sind, da ja auf einander senkrecht stehende Vektoren stets linear unabhängig sind. Da es ferner bei Wertsystemen mit h' Komponenten nicht mehr als h' linear unabhängige geben kann, so folgt in der Tat $h \leqq h'$, womit unsere Behauptung $h = h'$ bewiesen ist.

Insbesondere ist daher die obige Matrix (M) eine *quadratische* Matrix, welche kolonnenweise die Orthogonalitätseigenschaft erfüllt. Sie ist daher eine *unitär-orthogonale Matrix* und es gilt die entsprechende Eigenschaft der Zeilen, d. h. es ist

$$(4') \qquad \sum_{k=1}^{h} \sqrt{\frac{f_a}{n n_k}}\, \varrho_k^{(a)} \sqrt{\frac{f_b}{n n_k}}\, \bar{\varrho}_k^{(b)} = \delta_{ab}.$$

4. Man gelangt zu den FROBENIUSschen Gruppencharakteren durch den Ansatz

$$\chi^{(k)}(\mathfrak{E}_p) = \chi_p^{(k)} = \frac{\sqrt{f_k}}{n_p}\, \varrho_p^{(k)}, \qquad (k, p = 1, 2, \dots, h),$$

wodurch für jedes k eine Klassenfunktion in der Gruppe definiert ist. Führt man diese Größen in die Gleichungen (I), (2), (4) und (4') ein, so erhält man die fundamentalen Eigenschaften der Grup-

pencharaktere. Insbesondere liefert die Orthogonalität der auf diese Weise aus (M) entstehenden quadratischen Matrix (deren k-te Zeile also

$$\left(\sqrt{\frac{n_1}{n}}\,\chi_1^{(k)}\ \sqrt{\frac{n_2}{n}}\,\chi_2^{(k)}\ \ldots\ \sqrt{\frac{n_h}{n}}\,\chi_h^{(k)}\right)$$

ist) die bekannten Orthogonalitäts- und Vollständigkeitseigenschaften der Gruppencharaktere.

§. 2. Über Gruppencharaktere von gewissen unendlichen Gruppen.

5. Wir betrachten jetzt eine Gruppe $\mathfrak{G}$, die aus abzählbar unendlich vielen Elementen $(A, B, \ldots, P, Q, \ldots)$ besteht; E sei stets das Einheitselement. Wir nehmen ferner an, daß *jede Klasse* (d. h. jede Gesamtheit von konjugierten Elementen) *nur aus endlich vielen Elementen besteht;* es seien $\mathfrak{C}_1, \mathfrak{C}_2, \ldots, \mathfrak{C}_p, \ldots$ die unendlich vielen Klassen, $\mathfrak{C}_p$ enthalte n_p Gruppenelemente und es sei $\mathfrak{C}_1$ die Klasse, die aus dem Einheitselement allein besteht $(n_1 = 1)$.

Das Gesetz der *Klassenkomposition* ergibt sich genau in derselben Weise, wie bei endlichen Gruppen. Da nämlich die beiden Komplexe $X\mathfrak{C}_p$ und $\mathfrak{C}_p X$ (wo X ein beliebiges Gruppenelement bezeichnet) übereinstimmen, so folgt, daß der Komplex $\mathfrak{C}_\alpha\mathfrak{C}_\beta$, gebildet aus den Produkten der Elemente von $\mathfrak{C}_\alpha$ in Elemente von $\mathfrak{C}_\beta$, mit dem Komplex $\mathfrak{C}_\beta\mathfrak{C}_\alpha$ übereinstimmt, wobei man, (wie bei endlichen Gruppen) ein Element dieses Komplexes, das bei der angedeuteten Komposition k-mal auftritt, k-fach rechnet. Ist etwa

$$C = A_1B_1 = A_2B_2 = \ldots = A_kB_k,$$

wobei $A_1, A_2, \ldots, A_k$ der Klasse $\mathfrak{C}_\alpha$—, $B_1, B_2, \ldots, B_k$ der Klasse $\mathfrak{C}_\beta$ angehören, so folgt aus

$$X^{-1}CX = (X^{-1}A_pX)\,(X^{-1}B_pX) \qquad (p = 1, 2, \ldots, k),$$

daß $X^{-1}CX$ mindestens so oft bei jener Klassenmultiplikation auftritt, wie C. Daraus folgt aber unmittelbar (indem man die Rolle der beiden konjugierten Elemente C und $X^{-1}CX$ vertauscht), daß alle Elemente irgendeiner Klasse $\mathfrak{C}_\gamma$ bei der Klassenkomposition $\mathfrak{C}_\alpha\mathfrak{C}_\beta$ gleich oft auftreten. Wir bezeichnen diese Anzahl mit $c_{\alpha\beta\gamma}$; da ferner — zufolge unserer Annahme — $\mathfrak{C}_\alpha\mathfrak{C}_\beta$ nur aus endlichvielen Elementen besteht, so ist $c_{\alpha\beta\gamma}$ bei gegebenen α und β nur für endlich viele γ von Null verschieden. Wir erhalten auf diese

Weise wiederum die symbolischen Gleichungen der Klassenkomposition

$$\mathfrak{C}_\alpha \mathfrak{C}_\beta = \mathfrak{C}_\beta \mathfrak{C}_\alpha = \sum_{\gamma=1}^{\infty} c_{\alpha\beta\gamma}\, \mathfrak{C}_\gamma, \qquad (\alpha, \beta = 1, 2, 3 \ldots),$$

wo natürlich $c_{\alpha\beta\gamma} = 0$ gesetzt ist, falls die Elemente der Klasse $\mathfrak{C}_\gamma$ im Komplex $\mathfrak{C}_\alpha \mathfrak{C}_\beta$ nicht vorkommen. Der Begriff der inversen Klassen ist derselbe, wie bei endlichen Gruppen und es gilt (wörtlich wie dort)

$$c_{\alpha\beta 1} = \begin{cases} n_\alpha = n_\beta, \text{ oder} \\ 0 \end{cases}$$

je nachdem $\mathfrak{C}_\alpha$ und $\mathfrak{C}_\beta$ inverse Klassen sind oder nicht.

6. Wir ordnen — in analoger Weise, wie dies im vorangehenden §-en für endliche Gruppen geschah — jedem Gruppenelement X eine unendliche (reelle) orthogonale Matrix (X) vermöge der folgenden Vorschrift zu: wir setzen

$$a^{(X)}_{P,Q} = \delta_{PX,Q}$$

und definieren

$$(X) = (a^{(X)}_{P,Q}) = \begin{pmatrix} a^{(X)}_{A,A} & a^{(X)}_{A,B}, & a^{(X)}_{A,C}, \ldots \\ a^{(X)}_{B,A} & a^{(X)}_{B,B}, & a^{(X)}_{B,C}, \ldots \\ a^{(X)}_{C,A} & a^{(X)}_{C,B}, & a^{(X)}_{C,C}, \ldots \\ \ldots & \ldots & \end{pmatrix};$$

dabei sind die Elemente der vorgelegten Gruppe zur Numerierung der Zeilen und Kolonnen benutzt. Wenn man in entsprechender Weise Unbestimmte $x_A, x_B, x_C, \ldots$ bzw. $y_A, y_B, y_C, \ldots$ einführt, so lautet die zu (X) gehörende Bilinearform von unendlich vielen Veränderlichen

$$X(x, y) = \sum_{(P,Q)} a^{(X)}_{P,Q} x_P y_Q.$$

(X) ist offenbar eine orthogonale (also beschränkte) Matrix, da ja

$$\sum_{(K)} a^{(X)}_{P,K} a^{(X)}_{Q,K} = \sum_{(K)} a^{(X)}_{K,P} a^{(X)}_{K,Q} = \delta_{P,Q}$$

ist.

Dem Einheitselement E entspricht natürlich die Einheitsmatrix $(E) = (\delta_{P,Q})$, und es lehrt die Beziehung

$$(X)(Y) = \Big(\sum_{(K)} a^{(X)}_{P,K} a^{(Y)}_{K,Q}\Big) = \Big(\sum_{(K)} \delta_{PX,K} \delta_{KY,Q}\Big) =$$

$$= (\delta_{PXY,Q}) = (a^{(XY)}_{P,Q}) = (XY),$$

daß die Matrizen

$$(A), (B), (C), \ldots$$

eine isomorphe Darstellung der Gruppe $\mathfrak{G}$ liefern. Aus der Orthogonalität dieser Matrizen folgt, daß zu inversen Gruppenelementen inverse, d. h. transponierte Matrizen gehören:

$$(6) \qquad (X^{-1}) = (X)^{-1} = (X)';$$

ferner sind für jedes $X \neq E$ alle Diagonalelemente der entsprechenden Matrix (X) gleich Null.

Sind $A_1, A_2, \ldots, A_{n_p}$ die Elemente der Klasse $\mathfrak{C}_p$, so ordnen wir dieser Klasse die Matrix

$$(7) \qquad (\mathfrak{C}_p) = (A_1) + (A_2) + \ldots + (A_{n_p}) \qquad (p = 1, 2, 3, \ldots)$$

zu, die also aus den Elementen

$$c^{(p)}_{P,Q} = \delta_{PA_1, Q} + \delta_{PA_2, Q} + \ldots + \delta_{PA_{n_p}, Q}$$

gebildet ist. Die Gleichungen (5) der Klassenkomposition gehen alsdann in die folgenden Matrizengleichungen über:

$$(5') \qquad (\mathfrak{C}_\alpha)(\mathfrak{C}_\beta) = (\mathfrak{C}_\beta)(\mathfrak{C}_\alpha) = \sum_{\gamma=1}^{\infty} c_{\alpha\beta\gamma}(\mathfrak{C}_\gamma) \quad (\alpha, \beta = 1, 2, 3, \ldots),$$

woraus die Vertauschbarkeit dieser Matrizen gefolgert werden kann. Da ferner wegen (6) der inversen Klasse $\mathfrak{C}_{p'}$ von $\mathfrak{C}_p$ die Matrix

$$(\mathfrak{C}_{p'}) = (A_1^{-1}) + (A_2^{-1}) + \ldots + (A_{n_p}^{-1}) = (A_1)' + (A_2)' + \ldots + (A_{n_p})' = (\mathfrak{C}_p)'$$

zugeordnet ist, so ergibt sich insbesondere, daß *jede der reellen Matrizen* (7) *mit ihrer Transponierten vertauschbar ist,* d. h. *die Gesamtheit der den Klassen zugeordneten Matrizen ist eine abzählbare Menge von untereinander vertauschbaren (reellen) Normalmatrizen.* Daher sind die sogenannten HERMITEschen Komponenten der Matrizen (7), d. h. die Matrizen

$$(\mathfrak{C}_p) + (\mathfrak{C}_p)' \text{ und } i((\mathfrak{C}_p)' - (\mathfrak{C}_p)) \qquad (p = 1, 2, 3, \ldots)$$

ebenfalls vertauschbar, und man erkennt unmittelbar, daß $(\mathfrak{C}_p) + (\mathfrak{C}_p)'$ eine reell-symmetrische, $i((\mathfrak{C}_p)' - (\mathfrak{C}_p))$ aber eine HERMITEsche Matrix ist.

7. Für eine abzählbare Menge von vertauschbaren HERMITEschen Matrizen

$$(M_p) = (m^{(p)}_{P,Q}) \qquad (p = 1, 2, 3, \ldots)$$

bzw. für die zugehörigen HERMITEschen Formen

$$M_p(x, y) = \sum_{(P,Q)} m^{(p)}_{P,Q} x_P y_Q$$

gilt aber der folgende Satz, den ich in Anlehnung an gewisse Untersuchungen von Herrn J. v. NEUMANN in meiner Abhandlung „Über die Multiplikationstabelle der orthogonalen Funktionensysteme“ [7]) bewiesen habe.

Es gibt zu den vorgelegten vertauschbaren HERMITEschen Formen eine Schar von HERMITEschen Einzelformen

$$(8) \qquad \sigma(\mu; x, y) = \sum_{(P,Q)} \sigma_{P,Q}(\mu)\, x_P y_Q \qquad (0 \leqq \mu \leqq 1)$$

mit den folgenden Eigenschaften

α) es gelten für alle $0 \leqq \mu_1 \leqq \mu_2 \leqq 1$ die Matrizengleichungen

$$(\sigma_{P,Q}(\mu_1))\,(\sigma_{P,Q}(\mu_2)) = (\sigma_{P,Q}(\mu_2))\,(\mu_{P,Q}(\mu_1)) = (\sigma_{P,Q}(\mu_1));$$

β) ist x_P ein beliebiges Wertsystem der Unbestimmten, für das die unendliche Summe $\sum_{(P)} |x_P|^2$ konvergent ist, so ist die (wegen $\sigma_{P,Q}(\mu) = \bar{\sigma}_{Q,P}(\mu)$ jedenfalls reelle) Funktion von μ

$$\sigma(\mu; x, \bar{x}) = \sum_{(P,Q)} \sigma_{P,Q}(\mu)\, x_P \bar{x}_Q$$

eine nicht abnehmende, an jeder inneren Stelle des Intervalls $0 \leqq \mu \leqq 1$ von links stetige Funktion von μ, welche außerdem den Gleichungen $\sigma(0; x, \bar{x}) = 0$, $\sigma(1; x, \bar{x}) = \sum_{(P)} |x_P|^2$ genügt. Ein offenes Intervall, in dem alle $\sigma_{P,Q}(\mu)$ konstant sind, wird als Konstanzintervall der obigen Spektralform (8) bezeichnet. Es gibt ferner ein System von reellen, im Intervall $0 \leqq \mu \leqq 1$ definierten Funktionen $f_1(\mu), f_2(\mu), \ldots$ von der Beschaffenheit, daß jede dieser Funktionen im betrachteten Intervall überall stetig ist mit etwaiger Ausnahme der obigen Konstanzintervalle, wo sie einen endlichen Sprung erleiden kann; man kann ferner diese Funktionen derart normieren, daß, falls (α, β) ein solches Konstanzintervall bedeutet,

$$\text{für} \quad \alpha \leqq \mu \leqq \frac{\alpha+\beta}{2} \qquad f_p(\mu) = f_p(\alpha) -,$$

$$\text{für} \quad \frac{\alpha+\beta}{2} < \mu \leqq \beta \qquad f_p(\mu) = f_p(\beta) \qquad (p = 1, 2, 3, \ldots)$$

sei.

Mit Hilfe der Spektralform (8) und dieser Funktionen $f_p(\mu)$ gilt für die vorgelegten HERMITEschen Formen die folgende *simultane Darstellung:*

---

[7]) *Mathematische Zeitschrift*, **31** (1930), S. 769—798; siehe insbesondere S. 781—792.

$$M_p(x, y) = \int_0^1 f_p(\mu)\, d\sigma(\mu; x, y) \qquad (p = 1, 2, 3, \ldots).$$

Wendet man diesen Satz auf die vertauschbaren HERMITEschen Formen $(\mathfrak{C}_p) + (\mathfrak{C}_p)'$ und $i((\mathfrak{C}_p)' - (\mathfrak{C}_p))$ an, so gelangt man (durch Addition) zur simultanen Darstellung der Matrizen $(\mathfrak{C}_p)$ bzw. der zugehörigen Bilinearformen von unendlich vielen Veränderlichen

$$\mathfrak{C}_p(x, y) = \sum_{(P, Q)} c_{P, Q}^{(p)} x_P y_Q = \int_0^1 \chi_p(\mu)\, d\sigma(\mu; x, y) \quad (p = 1, 2, 3, \ldots);$$

die hier auftretenden Funktionen $\chi_p(\mu)$ besitzen dieselben Eigenschaften, wie die $f_p(\mu)$.

8. Die (komplexwertigen) Funktionen $\chi_p(\mu)$, die bzw. den Klassen $\mathfrak{C}_p$ auf diese Weise zugeordnet erscheinen, spielen bei unendlichen Gruppen von der hier behandelten Art eine ähnliche Rolle, wie die Gruppencharaktere im Falle einer endlichen Gruppe. Wir sind ja zu diesen in analoger Weise gelangt, wie im vorigen §-en zu den Gruppencharakteren; wir wollen noch die Haupteigenschaften dieser $\chi_p(\mu)$ darlegen, in denen wir eine sinngemäße Übertragung der für die Charaktere einer endlichen Gruppe geltenden Beziehungen erkennen werden.

Man folgert diese Beziehungen aus der folgenden Bemerkung:[8]) ist $u(\mu)$ eine beliebige Funktion, welche mit etwaiger Ausnahme der Mittelpunkte der Konstanzintervalle von $\sigma(\mu; x, y)$ überall stetig ist und welche bei jedem Wertsystem der Unbestimmten x_P, y_Q die Beziehung

$$\int_0^1 u(\mu)\, d\sigma(\mu; x, y) = 0$$

erfüllt, so ist an jeder Stelle außerhalb der Konstanzintervalle $u(\mu) = 0$.

Aus dieser Bemerkung kann *erstens* gefolgert werden, daß *wenn* $\mathfrak{C}_p$ *und* $\mathfrak{C}_{p'}$ *inverse Klassen sind, für jedes* μ *im Intervall* (0, 1)

$$\overline{\chi_p(\mu)} = \chi_{p'}(\mu) \tag{9}$$

sein muß. In der Tat, da $(\mathfrak{C}_p)$ und $(\mathfrak{C}_{p'})$ transponierte Matrizen sind, so ist $c_{P, Q}^{(p)} = c_{Q, P}^{(p')}$; man erhält daher, wenn man die Realität

[8]) vgl. a. a. O. [1]), S. 145.

der Matrizen $(\mathfrak{C}_p)$ und den HERMITEschen Charakter von $\sigma(\mu; x, y)$ beachtet,

$$c_{P,Q}^{(p')} = c_{Q,P}^{(\mu)} = \int_0^1 \overline{\chi}_\mu(\mu)\, d\overline{\sigma}_{Q,P}(\mu) = \int_0^1 \overline{\chi}_\mu(\mu)\, d\sigma_{P,Q}(\mu),$$

folglich

$$\mathfrak{C}_{p'}(x, y) = \int_0^1 \overline{\chi}_p(\mu)\, d\sigma(\mu; x, y) = \int_0^1 \chi_{p'}(\mu)\, d\sigma(\mu; x, y).$$

Daraus folgt aber — nach der vorangehenden Bemerkung — die Richtigkeit der Gleichung (9) für jede Stelle μ, die nicht innerhalb eines Konstanzintervalls liegt. Man erkennt ferner, daß diese Beziehung auch dann richtig bleibt, wenn μ innerhalb eines Konstanzintervalls liegt, da an jeder inneren Stelle eines Konstanzintervalls der Wert aller auftretenden Funktion $\chi_p(\mu)$ gleich dem Werte dieser Funktion an dem einen Endpunkt des Intervalls ist, für den die Beziehung bereits bewiesen ist.

Wir zeigen *zweitens,* daß *die Funktionen* $\chi_p(\mu)$ (für jedes μ) *den unendlich vielen Gleichungen*

$$(10) \qquad \chi_\alpha(\mu)\, \chi_\beta(\mu) = \sum_{\gamma=1}^{\infty} c_{\alpha\beta\gamma}\, \chi_\gamma(\mu) \qquad (\alpha, \beta = 1, 2, 3, \ldots)$$

genügen. Denn es folgt aus der Eigenschaft α) der Spektralform (die mit der sogenannten HILBERTschen Vollständigkeitsrelation äquivalent ist) in wohlbekannter Weise[9]) für die Produktmatrix $(\mathfrak{C}_\alpha)(\mathfrak{C}_\beta)$ die Darstellung

$$(\mathfrak{C}_\alpha)(\mathfrak{C}_\beta) = \Big(\int_0^1 \chi_\alpha(\mu)\, \chi_\beta(\mu)\, d\sigma_{P,Q}(\mu)\Big);$$

es liefern daher die Matrixgleichungen (5′) die Beziehungen

$$\int_0^1 \chi_\alpha(\mu)\, \chi_\beta(\mu)\, d\sigma(\mu; x, y) = \int_0^1 \sum_{\gamma=1}^{\infty} c_{\alpha\beta\gamma} \chi_\gamma(\mu)\, d\sigma(\mu; x, y),$$

woraus die obigen Gleichungen (10) auf Grund der oben gemachten Bemerkung unmittelbar folgen.

Wir erhalten *drittens* die für die $\chi_p(\mu)$ gültigen *Orthogonalitätsrelationen* in der folgenden Weise. Wie oben bemerkt, verschwinden für $p = 2, 3, \ldots$ alle Diagonalelemente der Matrix $(\mathfrak{C}_p)$ ($(\mathfrak{C}_1)$ ist die Einheitsmatrix). Daher ist jedenfalls

[9]) vgl. a. a. O. [7]), S. 793.

$$\int_0^1 \chi_p(\mu)\, d\sigma_{A,A}(\mu) = 0 \qquad (p = 2, 3, \ldots),$$

während natürlich

$$\int_0^1 \chi_1(\mu)\, d\sigma_{A,A}(\mu) = 1$$

ist ($\chi_1(\mu) = 1$). Man erhält daher aus den Gleichungen (10) durch Integration

$$\int_0^1 \chi_\alpha(\mu)\, \chi_\beta(\mu)\, d\sigma_{A,A}(\mu) = c_{\alpha\beta 1} = \begin{cases} n_\alpha = n_\beta, & \text{oder} \\ 0, & \end{cases}$$

je nachdem $\mathfrak{C}_\alpha$ und $\mathfrak{C}_\beta$ inverse Klassen sind oder nicht. Man kann diese Relationen mit Rücksicht auf die Beziehung (9) in die folgende Form schreiben:

$$\int_0^1 \frac{\chi_\alpha(\mu)}{\sqrt{n_\alpha}} \frac{\overline{\chi_\beta(\mu)}}{\sqrt{n_\beta}}\, d\sigma_{A,A}(\mu) = \delta_{\alpha\beta},$$

d. h. *die Funktionen*

$$\frac{\chi_p(\mu)}{\sqrt{n_p}} \qquad (p = 1, 2, 3, \ldots)$$

bilden im Bezug auf $\sigma_{A,A}(\mu)$ ein unitär-orthogonales Funktionensystem.

Diese Orthogonalitätseigenschaften gelten im Bezug auf alle $\sigma_{A,A}$, $\sigma_{B,B}$, $\sigma_{C,C}$, ...; im Falle der kommutativen Gruppen bewies ich, daß diese Funktionen übereinstimmen, was im vorliegenden allgemeinen Falle nicht zu erwarten ist.

Das Ergebnis dieses §-en können wir folgendermassen zusammenfassen:

Es sei $\mathfrak{G}$ eine aus abzählbar unendlich vielen Elementen bestehende Gruppe von der Beschaffenheit, daß jede Klasse ($\mathfrak{C}_1$, $\mathfrak{C}_2$, $\mathfrak{C}_3$, ...) von konjugierten Gruppenelementen aus endlich vielen Elementen besteht, und es seien

$$\mathfrak{C}_\alpha \mathfrak{C}_\beta = \mathfrak{C}_\beta \mathfrak{C}_\alpha = \sum_{\gamma=1}^{\infty} c_{\alpha\beta\gamma} \mathfrak{C}_\gamma \qquad (\alpha, \beta = 1, 2, 3, \ldots)$$

die Gleichungen der Klassenkomposition; unter diesen Voraussetzungen kann man den obigen Klassen ein System von (im Intervall $0 \leqq \mu \leqq 1$ definierten) Funktionen

$$\chi_1(\mu),\ \chi_2(\mu),\ \chi_3(\mu), \ldots$$

zuordnen, das die folgenden Eigenschaften besitzt:

1. *diese Funktionen sind überall stetig mit etwaiger Ausnahme von gewissen Stellen, wo sie einen endlichen Sprung erleiden;*

2. *sind* $\mathfrak{C}_\nu$ *und* $\mathfrak{C}_{\nu'}$ *inverse Klassen, so gilt für alle* μ

$$\overline{\chi_\nu}(\mu) = \chi_{\nu'}(\mu);$$

3. *es gelten die unendlich vielen Gleichungen:*

$$\chi_\alpha(\mu)\,\chi_\beta(\mu) = \sum_{\gamma=1}^{\infty} c_{\alpha\beta\gamma}\,\chi_\gamma(\mu) \qquad (\alpha, \beta = 1, 2, 3, \ldots);$$

4. *es gelten im Bezug auf geeignet gewählte Funktionen* $\sigma_{A,A}(\mu)$ *die Orthogonalitätsrelationen:*

$$\int_0^1 \frac{\chi_\alpha(\mu)}{\sqrt{n_\alpha}}\,\frac{\overline{\chi_\beta}(\mu)}{\sqrt{n_\beta}}\,d\sigma_{A,A}(\mu) = \delta_{\alpha\beta}, \qquad (\alpha, \beta = 1, 2, 3, \ldots)$$

wobei n_ν *die Anzahl der in* $\mathfrak{C}_\nu$ *enthaltenen Elementen bedeutet.*

(*Eingegangen am 11. November 1931.*)

H

Folytonos csoportok — Kontinuierliche Gruppen

H1. A folytonos csoportok elméletéről, *Mat. Term. Ért.*, **49** (1932), 287—307. *[579—599]*

H2. Der Maßbegriff in der Theorie der kontinuierlichen Gruppen, *Annals of Mathematics*, (2) **34** (1933), 147—169. *[600—622]*

*

H1 Haar székfoglaló értekezése a Magyar Tudományos Akadémián (1932. április 18), H2 ennek németnyelvű változata.

Haar e dolgozataiban közli azt a mélyreható felfedezését, hogy igen általános feltételek mellett minden folytonos csoportban bevezethető olyan mérték- és integrálfogalom, amely az egyik oldali, pl. a baloldali csoporttranszlációkkal szemben invariáns. Haar a tekintetbe vett csoportokról lényegében csak azt tételezi fel, hogy lokálisan kompaktok és a »második megszámlálhatósági axiómának« eleget tesznek (szeparabilitás). Az utóbbi feltételre Haarnak azért van szüksége, hogy konstrukciójában a diagonális eljárást használhassa ; mint azonban később erre A. Weil rámutatott, a Zermelo-féle kiválasztási axióma felhasználása esetén ez a feltétel elejthető.

Lie-csoportok esetében az invariáns integrál létezése ismeretes volt (A. Hurwitz, 1897), mint a Lie-csoportok jólismert szerkezeti tulajdonságainak egyszerű következménye. A kompakt Lie-csoportokra vonatkozó több nevezetes eredmény (különösen a Peter—Weyl-féle elmélet, 1927) éppen ennek az invariáns integrálnak a létezésén alapszik.

Haar felfedezése alapján ezeknek az eredményeknek az érvényessége egyszeriben kiterjedt általános kompakt folytonos csoportokra. De ezen túlmenően, lehetővé vált az általános, lokálisan kompakt, folytonos csoportok szerkezetének a vizsgálata is és döntő jelentőségű lépés történt a Hilbert-féle híres 5. probléma (1900) megoldása felé. Magának e problémának a megoldása [kompakt csoportokra Neumann János (1933) és L. Pontrjagin (1934) által, lokálisan kompakt kommutatív csoportokra L. Pontrjagin (1934) és E. R. van Kampen (1935) által, általános lokálisan kompakt csoportokra A. M. Gleason, D. Montgomery és L. Zippin által (1952)] végül is valóban a »Haar-féle invariáns mérték« felhasználásával sikerült.

A »Haar-mérték« alapján a folytonos csoportok elmélete és az ezekkel kapcsolatos elméletek (előállításelmélet, absztrakt harmonikus analízis, topológia) olyan hatalmas fejlődést mutattak az azóta lefolyt 25 év alatt, aminek áttekintésére itt nincs lehetőség.

Néhány, közvetlenül a Haar-féle mértékre vonatkozó dolgozat és könyv :

S. Banach, Sur la mesure de Haar (S. Saks, *Théorie de l'intégrale* (Warszawa, 1933), Note I).

J. von Neumann, Zum Haarschen Maß in topologischen Gruppen, *Compositio Mathematica*, **1** (1934), 106—114.

A. Weil, Sur les groupes topologiques et les groupes mesurés, *Comptes Rendus Acad. Sci. Paris*, **202** (1936), 1147—1149.

Béla Sz.-Nagy, Sur la mesure invariante dans des groupes topologiques, *Comptes Rendus Acad. Sci. Paris*, **202** (1936), 1248—1250.

J. von Neumann, The uniqueness of Haar's measure, *Mat. Sbornik*, **1 (43)** (1936), 721—734.

S. Kakutani, On the uniqueness of Haar's measure, *Proceedings Imperial Academy Tokyo*, **14** (1938), 27—31.

A Weil, *L'intégration dans les groupes topologiques et ses applications* (Paris, 1940).

H. Cartan, Sur la mesure de Haar, *Comptes Rendus Acad. Sci. Paris*, **211** (1940), 759—762.

S. Kakutani—K. Kodaira, Über das Haarsche Maß in der lokal bikompakten Gruppe, *Proceedings Imperial Academy Tokyo*, **20** (1944), 444—450.

L. H. Loomis, Abstract congruence and the uniqueness of Haar measure, *Annals of Math.*, **46** (1945), 348—355; Haar measure in uniform structures, *Duke Math. Journal*, **16** (1949), 193—208.

*

H1 ist die Antrittsarbeit von Haar als korr. Mitglied der Ungarischen Akademie der Wissenschaften (18. April 1932), H2 ist deren deutschsprachige Variante.

In diesen Arbeiten teilt Haar seine grundlegende Entdeckung mit, daß in jeder kontinuierlichen Gruppe unter sehr allgemeinen Bedingungen ein solcher Maß- und Integralbegriff eingeführt werden kann, welcher gegenüber einseitigen, z. B. linksseitigen Gruppentranslationen invariant ist. Von den in Betracht gezogenen Gruppen setzt Haar im wesentlichen nur voraus, daß sie lokalkompakt sind und dem »II. Abzählbarkeitsaxiom« genügen (Separabilität). Er benötigt die zweite Voraussetzung, damit er in seiner Konstruktion das Diagonalverfahren anwenden kann; A. Weyl hat später darauf hingewiesen, daß wenn man die Anwendung des Zermeloschen Auswahlaxioms zuläßt, diese zweite Voraussetzung unnötig ist.

Im Falle der Lieschen Gruppen war die Existenz eines invarianten Integrals als eine einfa he Folgerung von bekannten strukturellen Eigenschaften dieser Gruppen bekannt (A. Hurwitz, 1897). Mehrere wichtige Ergebnisse über kompakte Liesche Gruppen (insbesondere die Theorie von Peter und Weyl, 1927) wurden gerade auf Grund der Existenz dieses invarianten Integrals erzielt.

Mit der Haarschen Entdeckung wurde die Gültigkeit dieser Ergebnisse mit einem Schlag auf allen kompakten kontinuierlichen Gruppen erweitert. Darüber hinaus wurde damit ein mächtiges neues Hilfsmittel zur Untersuchung der Struktur allgemeiner, lokalkompakter kontinuierlicher Gruppen geschaffen und wurde ein Schritt von entscheidender Wichtigkeit zur Lösung des berühmten fünften Pariser Problems von Hilbert (1900) gemacht. In der Tat wurde später die Lösung dieses Problems auf Grund des »Haarschen invarianten Maßes« gefunden [für kompakte Gruppen durch J. von Neumann (1923) und L. Pontrjagin (1934), für lokalkompakte Abelsche Gruppen durch L. Pontrjagin (1934) und E. R. van Kampen (1935), endlich für allgemeine lokalkompakte Gruppen durch A. M. Gleason, D. Montgomery und L. Zippin (1952)].

Auf Grund des »Haarschen Maßes« hat sich während der verflossenen 25 Jahre eine so mächtige Entwicklung in der Theorie der kontinuierlichen Gruppen und in verwandten Theorien (Darstellungstheorie, abstrakte harmonische Analyse, Topologie) vollzogen, daß es unmöglich ist, hier darüber eine Übersicht zu geben.

Einige, unmittelbar das Haarsche Maß betreffende Aufsätze und Monographien sind am Ende des ungarischen Textes erwähnt.

A FOLYTONOS CSOPORTOK ELMÉLETÉRŐL.

HAAR ALFRÉD lev. tagtól.

Bevezetés.

1. A folytonos csoportoknak úgynevezett LIE-féle elmélete tudvalevőleg abból a feltevésből indul ki, illetőleg csak olyan csoportokra vonatkozik, amelyek *kétszer* differenciálható függvények segélyével állíthatók elő; ezért ezeket a csoportokat LIE-féle csoportoknak is nevezik. HILBERT vetette fel híres párizsi előadásában azt a kérdést, hogy vajjon nem lehet-e a folytonos csoportok elméletét ezen igen lényeges megszorítás nélkül is felépíteni, ami különösen az elmélet geometriai alkalmazásai szempontjából fontos. Ez a HILBERT-féle probléma azóta a tudományos kutatások egész seregét indította meg, s a jelen dolgozat is ezzel a gondolatkörrel foglalkozik.

A kérdés, amely ezen a helyen elintézést nyer, a következő: miként lehet minden absztrakte definiált n-tagú folytonos csoportot (a definíciókat l. 1., 2. alatt) előállítani? Dolgozatunk végén ilyen előállításokat nyerünk orthogonális mátrixok segélyével. Dolgozatunk főcélja azonban az ezen tétel bizonyításánál felhasznált segédeszköz feltárása, t. i. *a folytonos csoportokban a mértékfogalom bevezetése, illetőleg e fogalom létezésének bebizonyítása.* LIE-féle csoportoknál HURWITZ egy egyszerű megjegyzéséből[1] következik az analog állítás. Általános folytonos csoportok esetében azonban ez a kérdés olyan nehézségekbe

[1] Göttinger Nachrichten, 1897, 71—90. l.

ütközik, mint a közönséges euklidikus térben a CANTOR-JORDAN, illetőleg a LEBESGUE-féle mértékek bevezetése, amelyek természetesen az itt tárgyalt fogalom speciális esetei. A mértékfogalomtól természetesen meg kell követelni, hogy — a szokásos tulajdonságokon kívül — invariáns legyen a csoport transzformációival szemben. A CANTOR-JORDAN-féle mérték analogonjának konstrukciója (1. §) s tulajdonságainak kimutatása (2. §) után a LEBESGUE-féle mérték analogonját (3. §) definiáljuk, s ezáltal a csoportban magában egy invarians integrálás lehetőségét mutatjuk ki.

1. §. A mérték definiciója.

2. Hogy vizsgálataink a legáltalánosabb n-tagú folytonos csoportokra érvényesek legyenek, csoportunk elemeit (transzformációit) valamely tetszőleges n-dimenziós sokaság pontjaiként kell tekintenünk. Az ilyen sokaság minden pontjának van egy környezete, mely homöomorph az n-dimenziós gömbbel (azaz annak topologiai képe) és az egész sokaság beborítható véges számú, vagy megszámlálhatóan végtelen sok ilyen környezettel. Vizsgálataink azonban még általánosabb folytonos csoportokra is érvényesek;[2] elegendő lesz feltételeznünk, hogy a csoport elemei olyan $\mathfrak{G}$ teret alkotnak, amely *önmagában sűrű, metrikus,* ezenfelül *szeparábilis* és *minden pontjának van legalább egy* (s ennélfogva végtelen sok) $\mathfrak{G}$*-ben kompakt környezete.*[3]

A megadott $\mathfrak{G}$ csoport *csoporttulajdonságai* az ismert posztulátumok: 1°. egy asszociatív kompozíciós szabály létezése, mely két elemből, A-ból és B-ből, egy harmadikat, $C=AB$-t származtat, 2°. az identikus elem (E) létezése, melyre $AE=EA=A$

[2] A folytonos csoport általános fogalmára vonatkozólag v. ö. SCHREIER, Abhandlungen aus dem math. Seminar der Hamburgischen Universität, 4. kötet, 15—32. l. és 5. kötet, 233—244. l.

[3] Ez az utóbbi tulajdonság megegyezik azzal, amit egyes szerzők «im Kleinen kompakt»-nak neveznek. Minthogy a jelen dolgozatban a kompaktság fogalma mindig $\mathfrak{G}$-ben, azaz a csoportsokaságban való kompaktságot jelent, félreértést nem okozhat, ha rövidség kedvéért «$\mathfrak{G}$-ben kompakt» helyett egyszerűen «kompakt»-ot írunk. Minden n-dimenziós sokaság nyilván bír a fenti három tulajdonsággal.

minden A-nál és végül 3°. az inverz elem létezése, mely teljesíti az $A^{-1}A=AA^{-1}=E$ relációt. Ezekből a tulajdonságokból nyomban következik, hogy ha A a csoportnak egy fix eleme, X pedig tetszőleges eleme, akkor az $X\rightarrow XA$ megfeleltetés[4] egy-egyértelmű leképezése a csoportnak önmagára. Ilyen módon a csoport elemei kétféleképpen foghatók fel: egyrészt a csoporthoz tartozó fenti sokaság — amelyet egyszerűség kedvéért ugyancsak $\mathfrak{G}$-vel jelölünk — pontjaiként, másrészt $\mathfrak{G}$-nek fentemlített önmagára való egy-egyértelmű leképezéseiként.

A csoport *folytonossága* a következő tulajdonság teljesülését jelenti: Ha a csoport $A_1, A_2, \ldots, A_n, \ldots$ elemei az A elemhez konvergálnak, azaz, ha a fenti metrikus térben az A_n és A pontok távolságai a zérushoz tartanak, s hasonlóan a $B_1, B_2, \ldots, B_n, \ldots$ elemek a B-hez tartanak, akkor az A_nB_n elemek AB felé, az A_n^{-1} elemek pedig A^{-1} felé tartanak.[5] A csoport folytonosságából következik, hogy a fenti $\mathfrak{G}$ sokaságnak az A elemhez tartozó $X\rightarrow XA$ leképezése topológiai leképezés, úgy, hogy ha csoportunkat mint ezen leképezések összességét fogjuk fel, akkor folytonos csoportunknak topológiai transzformációkkal való «előállítása» adódik.[6]

Bevezetjük még a *kongruencia* fogalmát. $\mathfrak{M}$ legyen $\mathfrak{G}$-nek egy tetszőleges részhalmaza és A valamely csoportelem. Az $\mathfrak{M}A$ halmazt, melynek pontjai az $\mathfrak{M}$ halmaz pontjaiból úgy keletkeznek, hogy rájuk az A transzformációt alkalmazzuk, az $\mathfrak{M}$-mel kongruensnek mondjuk; ha tehát X az általános eleme $\mathfrak{M}$-nek, akkor XA az általános eleme $\mathfrak{M}A$-nak. A kongruenciát a $\cong$ jellel jelöljük. A csoporttulajdonságokból nyomban következik, hogy a kongruencia *reflexív, szimmetrikus és tranzitív* fogalom; a csoport folytonossága következtében pedig egy *zárt*

---

[4] Vagyis az a mellérendelés, mely a tetszőleges X-elemhez az XA elemet rendeli.

[5] L. Schreiernek [2] alatt idézett dolgozatait.

[6] Ez az előállítás természetesen egyszerűen transitiv a Lie-féle értelemben, mert a csoporttulajdonságok következtében egy és csak egy A elem létezik, mely X-et Y-ba viszi át ($y=XA$); ezt a jól ismert tényt a Lie-féle elméletben úgy szokás kimondani, hogy a paramétercsoport egyszerűen tranzitív.

(illetőleg *nyilt* vagy *kompakt*) halmazzal *kongruens* halmazok szintén *zártak* (illetőleg *nyiltak* vagy *kompaktok*).[7]

3. Mielőtt a mérték definíciójához hozzáfognánk, néhány egyszerű megjegyzést bocsátunk előre, amelyek a következőkben hasznos szolgálatot fognak tenni. Legyen $\mathfrak{A}$ és $\mathfrak{B}$ két *nyilt* és *kompakt* részhalmaza $\mathfrak{G}$-nek; $\overline{\mathfrak{A}}$, illetőleg $\overline{\mathfrak{B}}$ jelölje azokat a zárt halmazokat, melyek $\mathfrak{A}$-ból, illetőleg $\mathfrak{B}$-ből azáltal keletkeznek, hogy sűrűsödési pontjaikat hozzájuk csatoljuk.[8] Ha $\overline{B}$ egy tetszőleges pontja $\overline{\mathfrak{B}}$-nak, akkor könnyen megadható olyan $\mathfrak{A}$-val kongruens halmaz, melyek $\overline{B}$-t tartalmazza; ilyen például (ha A egy tetszőleges pontja $\mathfrak{A}$-nak) az $\mathfrak{A}\,(A^{-1}\overline{B})$ halmaz. Ennélfogva a zárt és kompakt $\overline{\mathfrak{B}}$ halmaz beborítható olyan nyilt halmazokkal, amelyek $\mathfrak{A}$-val kongruensek; a jól ismert Borel-Heine-féle tételnek szeparábilis terekre való általánosítása[9] azt a tényt szolgáltatja, hogy ekkor található véges sok olyan $\mathfrak{A}$-val kongruens halmaz, — tehát a fortiori véges sok $\overline{\mathfrak{A}}$-sal kongruens halmaz is — melyek azzal a tulajdonsággal bírnak, hogy $\overline{\mathfrak{B}}$ minden pontja ezek egyikének belső pontja. *Jelölje* $\mathfrak{h}(\overline{\mathfrak{B}};\ \overline{\mathfrak{A}})$ *azt a pozitív egész számot, amely megadja, hogy legalább hány* $\overline{\mathfrak{A}}$*-sal kongruens halmazra van szükség* $\overline{\mathfrak{B}}$ *ilyetén módon való beborítására*; $\overline{\mathfrak{B}}$ tehát beborítható $\mathfrak{h}(\overline{\mathfrak{B}};\ \overline{\mathfrak{A}})$ számú $\overline{\mathfrak{A}}$-sal kongruens halmazzal, de kevesebbel nem.

Az így definiált $\mathfrak{h}(\overline{\mathfrak{B}};\ \overline{\mathfrak{A}})$ egész számok nyilván bírnak a következő tulajdonságokkal:[10]

1°. $\mathfrak{h}(\overline{\mathfrak{B}};\ \overline{\mathfrak{B}}) = 1$;

2°. ha $\overline{\mathfrak{B}}'$ része $\overline{\mathfrak{B}}$-nak ($\overline{\mathfrak{B}}' < \overline{\mathfrak{B}}$), akkor

$$\mathfrak{h}(\overline{\mathfrak{B}}';\ \overline{\mathfrak{A}}) \leqq \mathfrak{h}(\overline{\mathfrak{B}};\ \overline{\mathfrak{A}});$$

---

[7] Ha az $\mathfrak{M}$ és $A\mathfrak{M}$ halmazokat neveznők kongruensnek, egy másik analóg fogalomhoz jutnánk, amelyre alábbi meggondolásaink szintén érvényesek és — természetesen — egy másik mértékfogalomra vezetnének.

[8] $\overline{\mathfrak{A}}$ tehát a legkisebb zárt halmaz, mely $\mathfrak{A}$-t tartalmazza (Hülle). A következőkben, valahányszor $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$, $\mathfrak{A}'$, $\mathfrak{A}_1, \ldots$ nyilt és $\mathfrak{G}$-ben kompakt halmazokat jelölnek, mindig $\overline{\mathfrak{A}}$, $\overline{\mathfrak{B}}$, $\overline{\mathfrak{C}}$, $\overline{\mathfrak{A}}'$, $\overline{\mathfrak{A}}_1, \ldots$-sal jelöljük azt a legkisebb zárt halmazt, mely $\mathfrak{A}$-t, illetőleg $\mathfrak{B}$-t, $\mathfrak{C}$-t, $\mathfrak{A}'$-t, $\mathfrak{A}_1$-t, ... tartalmazza.

[9] V. ö. Hausdorff, Mengenlehre (2. kiadás), 130. l.

[10] Az ezen tulajdonságok felsorolásában szereplő $\mathfrak{A}_1$, $\mathfrak{A}_2$, $\mathfrak{A}_3, \ldots$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$ stb. halmazok természetesen nyilt és kompakt részei $\mathfrak{G}$-nek.

3°. ha $\overline{\mathfrak{B}_1+\mathfrak{B}_2}$ jelöli a $\overline{\mathfrak{B}_1}$ és $\overline{\mathfrak{B}_2}$ zárt és kompakt halmazok egyesítési halmazát, akkor

$$\mathfrak{h}(\overline{\mathfrak{B}_1+\mathfrak{B}_2};\ \overline{\mathfrak{A}}) \leqq \mathfrak{h}(\overline{\mathfrak{B}_1};\ \overline{\mathfrak{A}}) + \mathfrak{h}(\overline{\mathfrak{B}_2};\ \overline{\mathfrak{A}});$$

4°. ha $\mathfrak{B}_1 \cong \mathfrak{B}_2$, akkor

$$\mathfrak{h}(\overline{\mathfrak{B}_1};\ \overline{\mathfrak{A}}) = \mathfrak{h}(\overline{\mathfrak{B}_2};\ \overline{\mathfrak{A}});$$

5°. ha $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$ három nyilt és kompakt halmaz, akkor

$$\mathfrak{h}(\overline{\mathfrak{B}};\ \overline{\mathfrak{A}}) \leqq \mathfrak{h}(\overline{\mathfrak{B}};\ \overline{\mathfrak{C}})\,\mathfrak{h}(\overline{\mathfrak{C}};\ \overline{\mathfrak{A}});$$

6°. ha az $\mathfrak{A}_1, \mathfrak{A}_2, \ldots, \mathfrak{A}_n, \ldots$ halmazok olyanok, hogy (minden n-re) $\mathfrak{A}_{n+1}$ részhalmaza $\mathfrak{A}_n$-nek, s ezen halmazok összességének csak egy közös pontja (A) van, ha továbbá $\overline{\mathfrak{B}'}$ és $\overline{\mathfrak{B}''}$ két olyan zárt halmaz, amelyeknek közös pontjuk nincs, akkor *elegendő nagy n-ekre*

$$\mathfrak{h}(\overline{\mathfrak{B}'+\mathfrak{B}''};\ \overline{\mathfrak{A}_n}) = \mathfrak{h}(\overline{\mathfrak{B}'};\ \overline{\mathfrak{A}_n}) + \mathfrak{h}(\overline{\mathfrak{B}''};\ \overline{\mathfrak{A}_n}).$$

Ez az utóbbi tulajdonság így bizonyítható be: ha állításunk nem volna igaz, akkor minden n-nél létezne egy az $\overline{\mathfrak{A}_n}$-sal kongruens $\overline{\mathfrak{A}_n C_n}$ halmaz, mely mind a $\overline{\mathfrak{B}'}$-nak, mind a $\overline{\mathfrak{B}''}$-nak egy-egy pontját tartalmazná. Legyenek a $\overline{\mathfrak{B}'}$, illetőleg $\overline{\mathfrak{B}''}$ kérdéses pontjai B'_n, illetőleg B''_n és A'_n, illetőleg A''_n az $\mathfrak{A}_n$ azon pontjai, melyek az $X \to XC_n$ transzformációnál a B'_n-be, illetőleg B''_n-be mennek át:

$$A'_n C_n = B'_n,\quad A''_n C_n = B''_n.$$

Az $\mathfrak{A}_n$-ről tett kikötések értelmében az A'_n és A''_n pontsorozatok ($n=1, 2, 3, \ldots$) növekvő n-nel az $\mathfrak{A}_n$ halmazok egyetlen közös pontja felé, az A felé tartanak; másrészt — $\overline{\mathfrak{B}'}$ és $\overline{\mathfrak{B}''}$ halmazok kompaktak és zártak lévén — található az $1, 2, 3, \ldots$ sorozatnak egy olyan $n_1 < n_2 < \cdots < n_k < \cdots$ részsorozata, hogy a megfelelő B'_{n_k}, illetőleg B''_{n_k} pontok a $\overline{\mathfrak{B}'}$, illetőleg $\overline{\mathfrak{B}''}$ egy-egy pontjához, B'-höz, illetőleg B''-höz tartsanak. Csoportunk folytonossága folytán ekkor egyszersmind létezik a C_{n_k} elemek limesze is, s egyrészt $A^{-1}B'$-vel, másrészt $A^{-1}B''$-vel esnék össze; ez azonban lehetetlen, mert $\overline{\mathfrak{B}'}$-nek és $\overline{\mathfrak{B}''}$-nek nem lévén közös pontja, B' és B'' — s ennélfogva $A^{-1}B'$ és $A^{-1}B''$ is — szükségképpen különbözők.

4. Ezek előrebocsátása után válasszunk tetszőlegesen egy nyilt, kompakt halmazt, $\mathfrak{E}$-t, amely a következő megfontolások kiindulási pontjául szolgál; $\mathfrak{E}$-t az *egységhalmaznak* fogjuk nevezni. Ugyancsak tetszőlegesen választhatnók az $\mathfrak{A}_1, \mathfrak{A}_2, \ldots, \mathfrak{A}_n, \ldots$ nyilt és kompakt halmazokat, amelyek — mint az előző pontban — csak annak a megszorításnak vannak alávetve, hogy $\mathfrak{A}_{n+1}$ részhalmaza $\mathfrak{A}_n$-nek s csak egy olyan A pont létezik, mely valamennyi $\mathfrak{A}_n$-nek eleme. Egyszerűség kedvéért legyenek ezek a halmazok az A pont körüli *racionális sugarú nyilt gömbök*,[11] s jelöljük ezeket $\mathfrak{K}_1, \mathfrak{K}_2, \ldots, \mathfrak{K}_n, \ldots$-nel. Legyen $\mathfrak{B}$ egy nyilt, kompakt halmaz, s tekintsük az

$$l_n(\overline{\mathfrak{B}}) = \frac{\mathfrak{h}(\overline{\mathfrak{B}}; \overline{\mathfrak{K}_n})}{\mathfrak{h}(\overline{\mathfrak{E}}; \overline{\mathfrak{K}_n})} \qquad (n=1, 2, 3, \ldots) \qquad (1)$$

(pozitív racionális számokból álló) számsorozatot; könnyen átlátható, hogy ez a *sorozat korlátos és alsó határa nem zérus.* Ugyanis a $\mathfrak{h}$ függvény 5°. tulajdonsága folytán egyrészt ($\mathfrak{A}=\mathfrak{K}_n$, $\mathfrak{C}=\mathfrak{E}$)

$$l_n(\overline{\mathfrak{B}}) \leqq \mathfrak{h}(\overline{\mathfrak{B}}; \overline{\mathfrak{E}})$$

és másrészt — ha a kérdéses egyenlőtlenségben $\mathfrak{A}$-t, $\mathfrak{B}$-t, $\mathfrak{C}$-t rendre $\mathfrak{K}_n$-nel, $\mathfrak{E}$-vel, $\mathfrak{B}$-vel helyettesítjük —

$$l_n(\overline{\mathfrak{B}}) \geqq \frac{1}{\mathfrak{h}(\overline{\mathfrak{E}}; \overline{\mathfrak{B}})}. \qquad (n=1, 2, 3, \ldots)$$

Ennélfogva mindenesetre kiragadható egy olyan részsorozat,

$$l_{n_1}(\overline{\mathfrak{B}}), l_{n_2}(\overline{\mathfrak{B}}), \ldots, l_{n_k}(\overline{\mathfrak{B}}), \ldots,$$

mely egy pozitív határértékhez tart; ha továbbá $\overline{\mathfrak{B}'}$ kongruens $\overline{\mathfrak{B}}$-sal, akkor — a $\mathfrak{h}$ függvény 4°. tulajdonsága következtében — az

$$l_{n_1}(\overline{\mathfrak{B}'}), l_{n_2}(\overline{\mathfrak{B}'}), \ldots, l_{n_k}(\overline{\mathfrak{B}'}), \ldots$$

sorozat is ugyanazon határérték felé konvergál.

---

[11] Természetesen csak olyan gömbökre szorítkozunk, amelyek A egy kompakt környezetének részei.

A sokat alkalmazott ú. n. *diagonális eljárás* segítségével a következő is elérhető: legyenek

$$\mathfrak{B}_1, \mathfrak{B}_2, \ldots, \mathfrak{B}_m, \ldots$$

megadott kompakt, nyilt halmazok; kiválasztható a természetes számoknak egy olyan $n_1 < n_2 < \cdots < n_k < \cdots$ részsorozata, hogy minden $m = 1, 2, 3, \ldots$-ra a

$$\lim_{k=\infty} l_{n_k}(\overline{\mathfrak{B}_m}) = \lim_{k=\infty} \frac{\mathfrak{h}(\overline{\mathfrak{B}_m}; \overline{\mathfrak{K}_{n_k}})}{\mathfrak{h}(\overline{\mathfrak{E}}; \overline{\mathfrak{K}_{n_k}})} \tag{2}$$

határérték létezzék. A megszámlálhatóan végtelen sok $\mathfrak{B}_m$ halmazt a következőképpen választjuk: A $\mathfrak{G}$ sokaság szeparábilis lévén, található benne egy megszámlálható, mindenütt sűrű ponthalmaz; legyen ilyen az $A_1, A_2, \ldots, A_\nu, \ldots$ halmaz. Tekintsük mindazokat a *nyilt gömböket, melyeknek középpontja ezen A_ν-k valamelyike és sugara racionális szám* (természetesen ezen gömbök közül ismét csak azokat, amelyek $\mathfrak{G}$ egy kompakt környezetében feküsznek). Ezen gömbök összessége megszámlálható; *megszámlálható sok halmazt kapunk akkor is, ha ezen gömbök közül minden lehető módon véges soknak egyesítési halmazát alkotjuk meg.* Az így nyert halmazok mindegyike (véges sok nyilt és kompakt halmaz összege lévén) ismét nyilt és kompakt. Ezt a megszámlálhatóan sok halmazt választva $\mathfrak{B}_m$ gyanánt ($m = 1, 2, 3, \ldots$), kiválasztható az $n_1, n_2, \ldots, n_k, \ldots$ részsorozat úgy, hogy a (2) határérték létezzék.

Egyszerűség kedvéért az eddigi jelölések némi megváltoztatásával ezentúl a

$$\mathfrak{K}_{n_1}, \mathfrak{K}_{n_2}, \ldots, \mathfrak{K}_{n_k}, \ldots$$

gömböket fogjuk

$$\mathfrak{K}_1, \mathfrak{K}_2, \ldots, \mathfrak{K}_k, \ldots$$

jelölni, úgy, hogy ha $\mathfrak{B}_m$ *az imént leírt nyilt, kompakt halmazok bármelyikét jelöli (vagy egy azzal kongruens halmazt), akkor létezik a* $\lim_{k=\infty} l_k(\overline{\mathfrak{B}_m})$ *határérték.*

5. Az

$$l_k(\overline{\mathfrak{C}}) = \frac{\mathfrak{h}(\overline{\mathfrak{C}}; \overline{\mathfrak{K}_k})}{\mathfrak{h}(\overline{\mathfrak{E}}; \overline{\mathfrak{K}_k})} \qquad (k = 1, 2, 3, \ldots)$$

sorozat határértékét *bizonyos* nyilt $\mathfrak{C}$ halmazok esetén a $\mathfrak{C}$ halmaz mértékének fogjuk mondani. Hogy a kérdéses halmazokat körülírhassuk, vezessük be elébb a nullahalmaz fogalmát. Egy $\mathfrak{N}$ halmazt *nullahalmaznak* nevezünk, ha bármely pozitív ε-hoz található olyan, $\mathfrak{N}$-et tartalmazó nyilt és kompakt halmaz, $\mathfrak{H}_\varepsilon$, úgy, hogy

$$\limsup_{k=\infty} \frac{\mathfrak{h}(\overline{\mathfrak{H}_\varepsilon};\ \overline{\mathfrak{K}_k})}{\mathfrak{h}(\overline{\mathfrak{E}};\ \overline{\mathfrak{K}_k})} \leqq \varepsilon \tag{3}$$

legyen. Ebből a definícióból nyomban következik, hogy *nullahalmaz minden része, véges sok nullahalmaz összege és egy nullahalmazzal kongruens halmaz szintén nullahalmaz.* Látni fogjuk, hogy ha $\mathfrak{C}$ olyan nyilt és kompakt halmaz, melynek határa (azaz $\overline{\mathfrak{C}}-\mathfrak{C}$) nullahalmaz, akkor az $l_k(\mathfrak{C})$ sorozat mindig konvergens; határértékét a $\mathfrak{C}$ halmaz mértékének fogjuk nevezni.

Ki kell elébb mutatnunk, hogy ilyen tulajdonságú $\mathfrak{C}$ halmazok tényleg léteznek. Legyen e végből A a 4.-ben szereplő ($\mathfrak{G}$-ben) mindenütt sűrű $A_1, A_2, \ldots, A_\nu, \ldots$ ponthalmaz valamely pontja és $\mathfrak{K}(r)$ az az r sugarú nyilt gömb, melynek $\mathfrak{A}$ a középpontja (természetesen ismét azzal a megszorítással, hogy $\mathfrak{K}(r)$ kompakt legyen). Ha r racionális szám, akkor $\mathfrak{K}(r)$ a fenti $\mathfrak{B}_m$ halmazok egyike s ennélfogva racionális r-ekre mindenesetre konvergens a

$$l_n(\overline{\mathfrak{K}}(r)) = \frac{\mathfrak{h}(\overline{\mathfrak{K}}(r);\ \overline{\mathfrak{K}_n})}{\mathfrak{h}(\overline{\mathfrak{E}};\ \overline{\mathfrak{K}_n})} \qquad (n=1, 2, 3\ldots)$$

sorozat. Másrészt minden n-nél a $\mathfrak{h}$ függvény 2°. tulajdonsága folytán

$$\lambda_n(r) = l_n(\overline{\mathfrak{K}}(r))$$

nem fogyó függvénye r-nek. Minthogy ezen monoton $\lambda_n(r)$ függvények sorozata az argumentum minden racionális értékénél konvergens, azért — egy jól ismert tétel szerint — megszámlálhatóan végtelen sok r érték kivételével a $\lambda_n(r)$ sorozat mindenütt konvergál egy $\lambda(r)$ függvény felé. Ez a $\lambda(r)$ függvény maga is monoton (nem fogyó) lévén, ismét megszámlálhatóan végtelen sok r érték kivételével mindenütt folytonos. Zárjuk ki

ezt a két megszámlálható halmazát az r változónak; r *minden egyéb értékénél* tehát $\lambda_n(r)$ konvergens, azaz létezik a

$$\lim_{n=\infty} l_n(r) = \lambda(r)$$

határérték, s állitjuk, hogy az ilyen sugárral bíró $\mathfrak{K}(r)$ gömbök határa nullahalmaz. Ugyanis, $\lambda(r)$ folytonos lévén a kérdéses r helyen, bármely pozitív ε-hoz találhatók olyan r', r'', r''' számok, melyek ugyancsak folytonossági helyei $\lambda(r)$-nek, eleget tesznek az $r'<r''<r<r'''$ egyenlőtlenségeknek és olyanok, hogy

$$0 \leqq \lambda(r''') - \lambda(r') \leqq \varepsilon.$$

Ámde egyrészt a zárt $\overline{\mathfrak{K}}(r''') - \mathfrak{K}(r'')$ és $\overline{\mathfrak{K}}(r')$ halmazoknak nincs közös pontjuk, tehát a $\mathfrak{h}$ függvény 6°. tulajdonsága értelmében elég nagy n-re

$$\mathfrak{h}\left(\left(\overline{\mathfrak{K}}(r''') - \mathfrak{K}(r'')\right) + \overline{\mathfrak{K}}(r');\ \overline{\mathfrak{K}_n}\right) =$$
$$= \mathfrak{h}\left(\overline{\mathfrak{K}}(r''') - \mathfrak{K}(r'');\ \overline{\mathfrak{K}_n}\right) + \mathfrak{h}\left(\overline{\mathfrak{K}}(r');\ \overline{\mathfrak{K}_n}\right);$$

másrészt pedig $\overline{\mathfrak{K}}(r''') - \mathfrak{K}(r'') + \overline{\mathfrak{K}}(r')$ része lévén $\overline{\mathfrak{K}}(r''')$-nek, a 2°. tulajdonság szerint

$$\mathfrak{h}\left(\overline{\mathfrak{K}}(r''') - \mathfrak{K}(r'') + \overline{\mathfrak{K}}(r');\ \overline{\mathfrak{K}_n}\right) \leqq \mathfrak{h}\left(\overline{\mathfrak{K}}(r''');\ \overline{\mathfrak{K}_n}\right);$$

ennélfogva elég nagy n-ekre

$$\mathfrak{h}\left(\overline{\mathfrak{K}}(r''') - \mathfrak{K}(r'');\ \overline{\mathfrak{K}_n}\right) \leqq \mathfrak{h}\left(\overline{\mathfrak{K}}(r''');\ \overline{\mathfrak{K}_n}\right) - \mathfrak{h}\left(\overline{\mathfrak{K}}(r');\ \overline{\mathfrak{K}_n}\right),$$

és így

$$\limsup_{n=\infty} \frac{\mathfrak{h}\left(\overline{\mathfrak{K}}(r''') - \mathfrak{K}(r'');\ \overline{\mathfrak{K}_n}\right)}{\mathfrak{h}\left(\overline{\mathfrak{E}};\ \overline{\mathfrak{K}_n}\right)} \leqq \lambda(r''') - \lambda(r') \leqq \varepsilon.$$

Minthogy pedig a $\mathfrak{K}(r''') - \overline{\mathfrak{K}}(r'')$ nyilt (és természetesen kompakt) halmaz tartalmazza a $\mathfrak{K}(r)$ gömb határát, azért utolsó relációnk éppen azt igazolja, hogy ezen gömb határa nullahalmaz.

Ezzel bebizonyítottuk nemcsak azt, hogy *vannak olyan nyilt halmazok, melyeknek határa nullahalmaz, hanem azt is, hogy az* $A_1, A_2, \ldots, A_\nu, \ldots$ *pontok körül írt gömbök közül majdnem mindegyik ilyen, s továbbá, hogy az ilyen gömbök mindegyikére létezik a* (2) *alatti határérték.*

6. További ilyen halmazokhoz a következőképpen jutunk: Legyen $\mathfrak{A}$ egy tetszőleges nyilt és kompakt halmaz, $\overline{\mathfrak{A}'}$ pedig az $\mathfrak{A}$-nak valamely zárt része; az $\overline{\mathfrak{A}'}$-nak és az $\mathfrak{A}$ határának tehát nincs közös pontja; jelöljük η-val az $\mathfrak{A}'$ halmaz és az $\overline{\mathfrak{A}}$ határát alkotó halmaz távolságát.[12] Tekintsük a fenti $A_1, A_2, \ldots, A_\nu, \ldots$ ponthalmaznak (mely $\mathfrak{G}$-ben mindenütt sűrű) minden oly pontját, mely $\overline{\mathfrak{A}'}$-ban fekszik; az előzőek értelmében ezen pontok mindegyike körül megadható egy olyan nyilt gömb, melynek sugara (például) $\frac{\eta}{2}$ és $\frac{3\eta}{4}$ között fekszik és határa nullahalmaz. Ezek a gömbök beborítják az egész zárt és kompakt $\overline{\mathfrak{A}'}$ halmazt;[13] kiragadható közülük tehát véges sok úgy, hogy összegük (egyesítési halmazuk) tartalmazza $\overline{\mathfrak{A}'}$-t. Ez a $\mathfrak{C}$ egyesítési halmaz ismét nyilt, határa pedig nyilván nullahalmaz, mert része annak a nullahalmaznak, mely a $\mathfrak{C}$ konstrukciójánál felhasznált gömbök határainak összege; végül, minthogy azok a *zárt* gömbök, melyekből $\mathfrak{C}$ felépül, szintén részhalmazai a nyilt $\mathfrak{A}$ halmaznak, azért nemcsak $\mathfrak{C}$, hanem $\overline{\mathfrak{C}}$ is része $\mathfrak{A}$-nak.

Ha ugyanezt az eljárást alkalmazzuk az $\mathfrak{A}$ és $\overline{\mathfrak{A}'}$ halmazokra azzal a változtatással, hogy az $A_1, A_2, \ldots, A_\nu, \ldots$ pontok mindegyike körül nem egy nullahalmaz határral bíró gömböt adunk meg, hanem egy racionális sugarút, akkor konstrukciónk nyilván a 4.-ben tárgyalt $\mathfrak{B}_m$ halmazok egyikére vezet, melyre tehát létezik a

$$\lim_{n=\infty} l_n(\overline{\mathfrak{B}_m})$$

határérték.

Eredményeinket a következőképpen foglalhatjuk össze:

I. *Ha $\mathfrak{A}$ egy tetszőleges nyilt és kompakt halmaza $\mathfrak{G}$-nek, $\overline{\mathfrak{A}'}$ pedig az $\mathfrak{A}$-nak egy zárt része, akkor létezik egyrészt egy olyan nyilt $\mathfrak{C}$ halmaz, mely határával együtt $\mathfrak{A}$-nak része, $\overline{\mathfrak{A}'}$-t pedig tartalmazza, s amelynek határa nullahalmaz, más-*

---

[12] $\mathfrak{A}$ határa zárt halmaz lévén, létezik olyan pozitív η szám, hogy $\overline{\mathfrak{A}'}$ bármely pontjának távolsága $\mathfrak{A}$ határának bármely pontjától $\geqq \eta$, s ezen halmazoknak vannak olyan pontjaik, melyeknél a kérdéses távolság $= \eta$.

[13] mert a szeparabilitás következményeként az $\overline{\mathfrak{A}'}$ minden pontjához található olyan A_ν, melynek távolsága a kérdéses ponttól $< \frac{\eta}{4}$.

részt pedig egy olyan nyilt $\mathfrak{B}$ *halmaz, mely ugyancsak tartalmazza* $\overline{\mathfrak{A}'}$*-t, határával együtt része* $\mathfrak{A}$*-nak, s amelyre létezik a* $\lim_{n=\infty} l_n(\overline{\mathfrak{B}})$ *határérték.*

Tételünk lényeges tartalma az, hogy a nullahalmaz határral bíró nyilt halmazok bizonyos értelemben mindenütt sűrűen találhatók, azaz, hogy minden nyilt (és kompakt) halmaz ilyenekkel tetszőlegesen megközelíthető (minden pont bármely környezetében van ilyen halmaz).

Ki fogjuk mutatni, hogy ha $\mathfrak{C}$ egy olyan nyilt és $\mathfrak{G}$-ben kompakt halmaz, amelynek határa nullahalmaz, akkor létezik a

$$\lim_{n=\infty} l_n(\overline{\mathfrak{C}}) = \lim_{n=\infty} \frac{\mathfrak{h}(\overline{\mathfrak{C}};\ \overline{\mathfrak{K}_n})}{\mathfrak{h}(\overline{\mathfrak{E}};\ \overline{\mathfrak{K}_n})} = J(\mathfrak{C})$$

határérték és ezt a pozitív számot (v. ö. 4.) a $\mathfrak{C}$ halmaz *mértékének* fogjuk nevezni.

2. §. A mérték tulajdonságai.

7. Legyen $\mathfrak{C}$ *egy nyilt, kompakt halmaz, melynek határa nullahalmaz;* a nullahalmazok definíciója értelmében minden pozitív ε-hoz létezik olyan $\mathfrak{H}_\varepsilon$ nyilt, kompakt halmaz, mely $\mathfrak{C}$ határát tartalmazza, s amelyre

$$\limsup_{n=\infty} \frac{\mathfrak{h}(\overline{\mathfrak{H}_\varepsilon};\ \overline{\mathfrak{K}_n})}{\mathfrak{h}(\overline{\mathfrak{E}};\ \overline{\mathfrak{K}_n})} \leqq \varepsilon.$$

Jelöljük $\mathfrak{C}''$-vel a $\mathfrak{C}$ és $\mathfrak{H}_\varepsilon$ halmazok közös részét: $\mathfrak{C}'' = \mathfrak{C}\mathfrak{H}_\varepsilon$; és legyen $\overline{\mathfrak{C}'} = \mathfrak{C} - \mathfrak{C}''$; $\mathfrak{C}''$ nyilt, $\overline{\mathfrak{C}'}$ zárt halmaz; $\mathfrak{C}''$ része lévén $\mathfrak{H}_\varepsilon$-nak, a $\mathfrak{h}$ függvény 2°. tulajdonságából nyomban következik, hogy

$$\limsup_{n=\infty} \frac{\mathfrak{h}(\overline{\mathfrak{C}''};\ \overline{\mathfrak{K}_n})}{\mathfrak{h}(\overline{\mathfrak{E}};\ \overline{\mathfrak{K}_n})} \leqq \varepsilon. \tag{4}$$

Az I. tétel értelmében van olyan $\mathfrak{B}$ nyilt halmaz, melyre létezik a $\lim_{n=\infty} l_n(\overline{\mathfrak{B}})$ határérték, s amely határával együtt $\mathfrak{C}$-nek része és $\overline{\mathfrak{C}'}$-t tartalmazza. Ennélfogva, egyrészt (minden n-re)

$$\mathfrak{h}(\overline{\mathfrak{C}};\ \overline{\mathfrak{K}_n}) \geqq \mathfrak{h}(\overline{\mathfrak{B}};\ \overline{\mathfrak{K}_n}),$$

másrészt pedig, minthogy a $\mathfrak{B}$ és $\mathfrak{C}''$ halmazok egyesítési halmaza $\mathfrak{C}$ (3° szerint)

$$\mathfrak{h}(\overline{\mathfrak{C}};\ \overline{\mathfrak{K}_n}) \leqq \mathfrak{h}(\overline{\mathfrak{B}};\ \overline{\mathfrak{K}_n}) + \mathfrak{h}(\overline{\mathfrak{C}''};\ \mathfrak{K}_n).$$

Ezen egyenlőtlenségek közül az első a

$$\liminf_{n=\infty} \frac{\mathfrak{h}(\overline{\mathfrak{C}};\ \overline{\mathfrak{K}_n})}{\mathfrak{h}(\overline{\mathfrak{E}};\ \overline{\mathfrak{K}_n})} \geqq \lim_{n=\infty} l_n(\overline{\mathfrak{B}})$$

relációt, a második pedig — (4) tekintetbevételével — a

$$\limsup_{n=\infty} \frac{\mathfrak{h}(\overline{\mathfrak{C}};\ \overline{\mathfrak{K}_n})}{\mathfrak{h}(\overline{\mathfrak{E}};\ \overline{\mathfrak{K}_n})} \leqq \lim_{n=\infty} l_n(\overline{\mathfrak{B}}) + \varepsilon \tag{5}$$

relációt szolgáltatja; ezeknek egybevetéséből

$$\limsup_{n=\infty} \frac{\mathfrak{h}(\overline{\mathfrak{C}};\ \overline{\mathfrak{K}_n})}{\mathfrak{h}(\overline{\mathfrak{E}};\ \overline{\mathfrak{K}_n})} - \liminf_{n=\infty} \frac{\mathfrak{h}(\overline{\mathfrak{C}};\ \overline{\mathfrak{K}_n})}{\mathfrak{h}(\overline{\mathfrak{E}};\ \overline{\mathfrak{K}_n})} \leqq \varepsilon$$

következik. Minthogy ε tetszőleges kis pozitív számot jelölhet, egyenlőtlenségünk a

$$\lim_{n=\infty} \frac{\mathfrak{h}(\overline{\mathfrak{C}};\ \overline{\mathfrak{K}_n})}{\mathfrak{h}(\overline{\mathfrak{E}};\ \overline{\mathfrak{K}_n})} = \lim_{n=\infty} l_n(\overline{\mathfrak{C}}) = J(\mathfrak{C})$$

határérték létezését mutatja, s ezzel az 1. §. végén kimondott állításunkat beigazoltuk.

Az $J(\mathfrak{C})$ *számot ezen* $\mathfrak{C}$ *halmaz mértékének* mondjuk; ugyanezt az $J(\mathfrak{C})$ számot tulajdoníthatjuk mértékéül $\overline{\mathfrak{C}}$-nak és mindazon halmazoknak, amelyek $\overline{\mathfrak{C}}$-nak részei és $\mathfrak{C}$-t tartalmazzák. Bizonyításunk azt is mutatja, hogy $J(\mathfrak{C})$ felső határa azoknak a pozitív számoknak, amelyeket a $\lim_{n=\infty} l_n(\overline{\mathfrak{B}})$ határérték szolgáltat, ha $\mathfrak{B}$ jelöli azoknak a nyilt halmazoknak bármelyikét, melyek $\mathfrak{C}$-nek részei, és amelyekre ez a limesz létezik.

Fontos az a körülmény, hogy a mérték fogalmát *nem terjesztjük ki minden esetre, amikor a kérdéses határérték létezik, hanem csak arra, amikor* $\mathfrak{C}$ *határa nullahalmaz.*[14] Erre

[14] A 4.-ben bevezetett $\mathfrak{B}_m$ halmazoknak, amelyek bár mértékelméletünk kiindulási pontjai és olyanok, hogy biztosan léteznek a $\lim_{n=\infty} l_n(\overline{\mathfrak{B}_m})$ határértékek, nincs szükségképpen mértékük; ugyanez áll az $\overline{\mathfrak{E}}$ egységhalmazra.

azért van szükség, mert ellenkező esetben nem teljesülnének a mértékre vonatkozó alapvető tulajdonságok.

8. Az imént megállapított mértékfogalom alapvető tulajdonságai a következők:

1°. *A mérték mindig zérusnál nagyobb*; ez közvetlen folyománya a 4. elején bebizonyított tételnek, hogy bármely nyilt, kompakt $\mathfrak{C}$ halmaz esetében az $l_n(\overline{\mathfrak{C}})$ számok alsó határa zérustól különböző.

2°. Ha $\mathfrak{C}_1$ és $\mathfrak{C}_2$ *kongruens halmazok* ($\mathfrak{C}_1 \cong \mathfrak{C}_2$) és $\mathfrak{C}_1$*-nek van mértéke* (tehát $\mathfrak{C}_1$ nyilt, kompakt és határa nullahalmaz), *akkor* $\mathfrak{C}_2$*-nek is van mértéke és a két mérték megegyezik egymással:* $I(\mathfrak{C}_1) = I(\mathfrak{C}_2)$. Ugyanis már fentebb láttuk (v. ö. 2. és 5.), hogy $\mathfrak{C}_2$ is nyilt, kompakt és határa nullahalmaz, tehát van mértéke; a két mérték megegyezése a $\mathfrak{h}$ függvény 4°. tulajdonságából következik.

3°. Ha a $\mathfrak{C}_1, \mathfrak{C}_2, \ldots, \mathfrak{C}_n$ (véges sok) nyilt halmaz mindegyikének van mértéke, akkor *közös részüknek és összegüknek is van mértéke,* mert ez utóbbi halmazok határának minden pontja a $\mathfrak{C}_1, \mathfrak{C}_2, \ldots, \mathfrak{C}_n$ halmazok valamelyikének is határpontja, s ennélfogva (v. ö. 5.) ezek a határok is nullahalmazok. A $\mathfrak{h}$ függvény 3°. tulajdonsága szerint $I(\mathfrak{C}_1 + \mathfrak{C}_2) \leqq I(\mathfrak{C}_1) + I(\mathfrak{C}_2)$.

4°. Ha $\mathfrak{C}_1$ és $\mathfrak{C}_2$ nyilt halmazoknak *van mértékük és nincs közös pontjuk,* akkor

$$I(\mathfrak{C}_1 + \mathfrak{C}_2) = I(\mathfrak{C}_1) + I(\mathfrak{C}_2).$$

Bizonyítás. A $\mathfrak{C}_1$ határa nullahalmaz lévén, minden pozitív ε-hoz található — mint az előző pontban (v. ö. az (5) egyenlőtlenséget, — egy $\mathfrak{B}$ nyilt halmaz, amely azzal a tulajdonsággal bír, hogy $\overline{\mathfrak{B}}$ része $\mathfrak{C}_1$-nek, a $\lim_{n=\infty} l_n(\overline{\mathfrak{B}})$ határérték létezik és olyan, hogy

$$I(\mathfrak{C}_1) \leqq \lim_{n=\infty} l_n(\overline{\mathfrak{B}}) + \varepsilon. \tag{5'}$$

Minthogy a $\overline{\mathfrak{B}}$ és $\overline{\mathfrak{C}_2}$ zárt halmazoknak nincs közös pontjuk, azért a $\mathfrak{h}$ függvény 6°. tulajdonsága alapján, ha n elég nagy,

$$\mathfrak{h}(\overline{\mathfrak{B}} + \overline{\mathfrak{C}_2};\ \overline{\mathfrak{K}_n}) = \mathfrak{h}(\overline{\mathfrak{B}};\ \overline{\mathfrak{K}_n}) + \mathfrak{h}(\overline{\mathfrak{C}_2} + \overline{\mathfrak{K}_n});$$

másrészt azonban, $\mathfrak{B}+\mathfrak{C}_2$ része lévén $\mathfrak{C}_1+\mathfrak{C}_2$-nek, $(\overline{\mathfrak{B}}<\mathfrak{C}_1)$,

$$\mathfrak{h}(\overline{\mathfrak{B}}+\overline{\mathfrak{C}_2};\ \overline{\mathfrak{K}_n}) \leqq \mathfrak{h}(\overline{\mathfrak{C}_1}+\overline{\mathfrak{C}_2};\ \overline{\mathfrak{K}_n}),$$

tehát, ha n elég nagy,

$$\mathfrak{h}(\overline{\mathfrak{C}_1};\ \overline{\mathfrak{K}_n}) + \mathfrak{h}(\overline{\mathfrak{C}_2};\ \overline{\mathfrak{K}_n}) \geqq \mathfrak{h}(\overline{\mathfrak{C}_1}+\overline{\mathfrak{C}_2};\ \overline{\mathfrak{K}_n}) \geqq \mathfrak{h}(\overline{\mathfrak{B}};\ \overline{\mathfrak{K}_n}) + \mathfrak{h}(\overline{\mathfrak{C}_2};\ \overline{\mathfrak{K}_n}).$$

Ebből nyomban következik — ha tekintetbe vesszük az (5′) egyenlőtlenséget — hogy

$$I(\mathfrak{C}_1) + I(\mathfrak{C}_2) \geqq I(\mathfrak{C}_1+\mathfrak{C}_2) \geqq I(\mathfrak{C}_1) + I(\mathfrak{C}_2) - \varepsilon,$$

ami (mivel ε tetszőleges kicsi lehet) állításunkat igazolja.

Ezen tulajdonság alapján könnyen igazolható a következő általánosabb tétel:

4°. *Ha a* $\mathfrak{C}_1$ *és* $\mathfrak{C}_2$ *nyilt halmazoknak van mértékük,* akkor mértékeik, továbbá egyesítési halmazuknak $(\mathfrak{C}_1+\mathfrak{C}_2)$ és közös részüknek $(\mathfrak{C}_1\mathfrak{C}_2)$ mértéke között *fennáll a következő összefüggés:*

$$I(\mathfrak{C}_1) + I(\mathfrak{C}_2) = I(\mathfrak{C}_1+\mathfrak{C}_2) + I(\mathfrak{C}_1\mathfrak{C}_2).$$

Bizonyítás: Jelöljük $\mathfrak{C}'$-vel azt a *nyilt* halmazt, amelyet $\mathfrak{C}_1-\mathfrak{C}_1\mathfrak{C}_2$ *belső* pontjai alkotnak; $\mathfrak{C}'$ határa nullahalmaz, mert csak olyan pontokból áll, melyek vagy a $\mathfrak{C}_1$, vagy a $\mathfrak{C}_2$ halmaznak határpontjai. $\mathfrak{C}'$-nek és $\mathfrak{C}_2$-nek nem lévén közös pontja, előző eredményünk szerint

$$I(\mathfrak{C}'+\mathfrak{C}_2) = I(\mathfrak{C}') + I(\mathfrak{C}_2), \tag{6}$$

s ugyanígy látható, hogy

$$I(\mathfrak{C}'+\mathfrak{C}_1\mathfrak{C}_2) = I(\mathfrak{C}') + I(\mathfrak{C}_1\mathfrak{C}_2). \tag{7}$$

A nyilt $\mathfrak{C}'+\mathfrak{C}_2$ halmaz nem identikus a $\mathfrak{C}_1+\mathfrak{C}_2$ egyesítési halmazzal, mert $\mathfrak{C}'$ csak a $\mathfrak{C}_1-\mathfrak{C}_1\mathfrak{C}_2$ belső pontjaiból áll, és így $\mathfrak{C}'+\mathfrak{C}_2$ nem tartalmazza $\mathfrak{C}_1$ azon pontjait, melyek $\mathfrak{C}_2$ határán fekszenek. Minden ilyen pont sűrűsödési pontja lévén $\mathfrak{C}_2$-nek, látnivaló, hogy ha a $\mathfrak{C}_1+\mathfrak{C}_2$, illetőleg $\mathfrak{C}'+\mathfrak{C}_2$ halmazokhoz sűrűsödési pontjaikat hozzácsatoljuk, az így nyert zárt $\overline{\mathfrak{C}_1+\mathfrak{C}_2}$, illetőleg $\overline{\mathfrak{C}'+\mathfrak{C}_2}$ halmazok megegyeznek. Ennélfogva

$$\mathfrak{h}(\overline{\mathfrak{C}_1+\mathfrak{C}_2};\ \overline{\mathfrak{K}_n}) = \mathfrak{h}(\overline{\mathfrak{C}'+\mathfrak{C}_2};\ \overline{\mathfrak{K}_n}),$$

és így

$$I(\mathfrak{C}_1+\mathfrak{C}_2) = I(\mathfrak{C}'+\mathfrak{C}_2).$$

Ha ebben a megfontolásban $\mathfrak{C}_2$-t $\mathfrak{C}_1\mathfrak{C}_2$-vel helyettesítjük, azt nyerjük, hogy

$$I(\mathfrak{C}'+\mathfrak{C}_1\mathfrak{C}_2) = I(\mathfrak{C}_1+\mathfrak{C}_1\mathfrak{C}_2) = I(\mathfrak{C}_1).$$

A (6) és (7) alatti relációk tehát az

$$I(\mathfrak{C}_1+\mathfrak{C}_2) = I(\mathfrak{C}') + I(\mathfrak{C}_2),\quad I(\mathfrak{C}_1) = I(\mathfrak{C}') + I(\mathfrak{C}_1\mathfrak{C}_2)$$

egyenletekbe mennek át, amelyeket egymásból kivonva adódik állításunk.

5°. Ha a $\mathfrak{C}_1, \mathfrak{C}_2, \ldots, \mathfrak{C}_n, \ldots$ nyilt halmazok mindegyikének van mértéke és (minden n-nél) $\mathfrak{C}_{n+1}$ *része* $\mathfrak{C}_n$*-nek s ezen halmazok összességének csak egyetlen közös pontja* (C) *van, akkor*

$$\lim_{n=\infty} I(\mathfrak{C}_n) = 0.$$

Bizonyítás: Válasszunk egy tetszőleges $\mathfrak{H}$ nyilt halmazt, melynek van mértéke s benne k számú *különböző* pontot, $H_1, H_2, \ldots, H_k$-t. Az

$$X \to X(C^{-1}H_p) \qquad (p=1, 2, \ldots, k) \qquad (8)$$

transzformáció a $\mathfrak{C}_n$ halmazt egy vele kongruens halmazba, $\mathfrak{C}_n^{(p)}$-be, viszi át, amely a H_p pontot tartalmazza. Könnyen látható, hogyha n elég nagy, ezen $\mathfrak{C}_n^{(1)}, \mathfrak{C}_n^{(2)}, \ldots, \mathfrak{C}_n^{(k)}$ halmazok közül kettő-kettőnek nincs közös pontja; ellenkező esetben ugyanis minden n-nél volna $\mathfrak{C}_n$-ben két olyan pont, C_n' és C_n'', amelyeket a (8) alatti transzformációk közül kettő ugyanabba a pontba visz át:

$$C_n'C^{-1}H_p = C_n''C^{-1}H_q, \qquad (p \neq q)$$

s ez, mivel C_n' és C_n'' a C felé tartanak (ha $n \to \infty$), ellentmondásban állna a csoport folytonosságával. Ennélfogva — elég nagy n-re — a $\mathfrak{C}_n^{(p)}$ halmazoknak ($p=1, 2, \ldots k$) tényleg nincs közös pontjuk és mindegyik, tehát összegük is, része $\mathfrak{H}$-nak; minthogy továbbá ezen halmazok mindegyikének ugyanaz a mértéke, mint $\mathfrak{C}_n$-nek, azért látnivaló, hogy

$$kI(\mathfrak{C}_n) = \sum_{p=1}^{k} I(\mathfrak{C}_n^{(p)}) = I(\mathfrak{C}_n^{(1)}+\mathfrak{C}_n^{(2)}+\cdots+\mathfrak{C}_n^{(k)}) \leqq I(\mathfrak{H}),$$

azaz, ha n elég nagy,

$$I(\mathfrak{C}_n) \leqq \frac{1}{k} I(\mathfrak{H}).$$

k-t tetszőleges nagynak választva egyenlőtlenségünk állításunkat igazolja.

Nem okozna nehézséget a mértéknek imént levezetett 1°.—5°. tulajdonságait kimutatni arra az esetre, amikor a fellépő halmazok nem nyiltak.

Eredményeinket a következő tétel foglalja össze:

II. *Minden n-tagú folytonos csoportban* $(\mathfrak{G})$ *definiálható egy mértékfogalom, mely a csoport bizonyos nyilt és kompakt halmazaihoz* $(\mathfrak{E})$ *rendel pozitív számokat* $(I(\mathfrak{E}))$*; ez a mértékfogalom hasonló természetű, mint a* CANTOR-JORDAN*-féle mérték a közönséges geometriában, azaz*

kongruens halmazok mértéke megegyezik;

mérhető halmaz mértéke nagyobb, mint bármely (mérhető) valódi részének mértéke;

mérhető halmazok $(\mathfrak{E}_1, \mathfrak{E}_2)$ *közös része* $(\mathfrak{E}_1\mathfrak{E}_2)$ *és egyesítési halmaza* $(\mathfrak{E}_1+\mathfrak{E}_2)$ *mérhető;*

$$I(\mathfrak{E}_1) + I(\mathfrak{E}_2) = I(\mathfrak{E}_1+\mathfrak{E}_2) + I(\mathfrak{E}_1\mathfrak{E}_2);$$

egymásba iktatott $(\mathfrak{E}_n > \mathfrak{E}_{n+1})$ *s csak egy közös ponttal bíró végtelen sok* $(n=1, 2, 3, \ldots)$ *mérhető halmaz mértéke (midőn* $n \to \infty$*) zérushoz tart; s végül*

ha adva van egy tetszőleges nyilt és kompakt halmaz és annak valamely zárt része, akkor van olyan mérhető halmaz, mely az adott nyilt halmaz része, s a zárt halmazt tartalmazza.

Tételünk érvényes marad, ha a $\mathfrak{G}$ *folytonos csoportról csak azt tételezzük fel, hogy elemei felfoghatók egy önmagában sűrű metrikus és szeparábilis tér pontjaiként, mely ezenfelül még azzal a tulajdonsággal bír, hogy minden pontjának van legalább egy* $\mathfrak{G}$*-ben kompakt környezete.*

3. §. A Lebesgue-féle mérték analogonja. Alkalmazások.

9. Az imént bebizonyított tétel alapján — amely a csoportsokaságon a CANTOR-JORDAN-féle mérték analogonjának létezését biztosítja — nem okoz nehézséget olyan mérték bevezetése sem, amelynek azok a tulajdonságai, mint a közönséges LEBESGUE-

féle mértéknek és ezenfelül a csoport transzformációival szemben invariáns. Ennek megalapozása akár a LEBESGUE-féle eredeti eljárással történhetik (egy halmaz beborítása megszámlálhatóan sok, az előző értelemben mérhető halmazzal), akár azon az úton, amelyet DE LA VALLÉE POUSSIN követ[15] a LEBESGUE-féle mérték bevezetésére. Röviden vázolni kívánjuk még ezt az utóbbi módot.

Egy *tetszőleges nyilt és kompakt* $\mathfrak{A}$ *halmaz mértékén*, $m(\mathfrak{A})$-n, értjük a felső határát mindazoknak, az előző értelemben mérhető nyilt halmazok ($\mathfrak{C}$-nek) mértékének, amelyek $\mathfrak{A}$ részei:

$$m(\mathfrak{A}) = \lim \sup I(\mathfrak{C}), \quad \mathfrak{C} < \mathfrak{A};$$

$m(\mathfrak{A})$ véges volta a $\mathfrak{h}$ függvény 2.° alatti tulajdonságának és a 4. elején tett megjegyzésnek következménye; ha $\mathfrak{A}$ határa nullahalmaz, akkor nyilván $m(\mathfrak{A}) = I(\mathfrak{A})$.

Egy *tetszőleges zárt és kompakt halmaz* $\overline{\mathfrak{A}}$ mértékét, $m(\overline{\mathfrak{A}})$-t, a következőképpen értelmezzük: Ha $\mathfrak{C}$ egy $\overline{\mathfrak{A}}$-t tartalmazó nyilt és kompakt halmaz, melynek határa nullahalmaz, akkor $\mathfrak{C} - \overline{\mathfrak{A}}$ nyilt; legyen

$$m(\overline{\mathfrak{A}}) = m(\mathfrak{C}) - m(\mathfrak{C} - \overline{\mathfrak{A}}).$$

Könnyen átlátható az I mérték 4.° tulajdonsága tekintetbevételével, hogy $m(\overline{\mathfrak{A}})$ független a $\mathfrak{C}$ választásától, továbbá, hogyha a nyilt és kompakt $\mathfrak{A}$ halmaz határa nullahalmaz, akkor $m(\mathfrak{A}) = m(\overline{\mathfrak{A}}) = I(\mathfrak{A})$. Ugyanis ekkor a nyilt $\mathfrak{C} - \overline{\mathfrak{A}}$ halmaz határa szintén nullahalmaz, s mivel $\mathfrak{A}$-nak és $\mathfrak{C} - \overline{\mathfrak{A}}$-nak nincs közös pontja, azért[16]

$$I(\mathfrak{A}) + I(\mathfrak{C} - \overline{\mathfrak{A}}) = I(\mathfrak{C}),$$

azaz

$$m(\mathfrak{A}) = m(\overline{\mathfrak{A}}).$$

Ezen definíciók alapján minden nehézség nélkül levezethetők a nyilt és zárt halmazok mértékeire azok a tények, amelyek DE LA VALLÉE POUSSIN idézett munkájának 20. és 21. oldalán találhatók.

Egy *tetszőleges kompakt halmaz külső mértéke* ezek után

[15] Intégrales de Lebesgue, Fonctions d'ensembles, Classes de Baire, II. fejezet.

[16] mert az $\mathfrak{A} + (\mathfrak{C} - \overline{\mathfrak{A}})$ halmaz zárt burka (Hülle) $\overline{\mathfrak{C}}$.

definiálható, mint a halmazt tartalmazó nyilt és kompakt halmazok mértékeinek alsó határa, *belső mértéke* pedig, mint az adott halmaz zárt részei mértékének felső határa; egy *halmaz mérhető, ha külső és belső mértékei megegyeznek.*

De la Vallée Poussin bizonyításának szinte szószerinti alkalmazása rávezet arra, hogy az így definiált mértékfogalom ugyanolyan tulajdonságú, mint a Lebesgue-féle mérték, jelesen «teljesen» additív, azaz megszámlálhatóan végtelen sok különálló mérhető halmaz összegének mértéke a komponensek mértékének összegével egyenlő stb.

10. Neumann Jánosnak és Riesz Frigyesnek, akiknek ezen dolgozat egy előzetes kéziratát megmutattam, köszönhetem azt az érdekes megjegyzést, hogy a Lebesgue-féle mérték ezen analogonjának értelmezése kizárólag az 1. §. eredményeinek felhasználásával, tehát a Cantor-Jordan-féle mérték bevezetése nélkül is, a Carathéodory-féle «Massfunktion»-ok elmélete alapján történhet. Ez az eljárás (Neumann levélbeli közlése nyomán) a következő:

Jelöljük ismét $\mathfrak{B}$-vel a 4.-ban bevezetett zárt halmazokat, amelyek véges sok gömb egyesítéséből származnak (vagy egy ilyennel kongruens halmazt), amelyekre tehát létezik a

$$\lim_{n=\infty} l_n(\overline{\mathfrak{B}}) = l(\overline{\mathfrak{B}})$$

határérték. Legyen $\mathfrak{A}$ egy tetszőleges nyilt és kompakt halmaz és $\mu(\mathfrak{A})$ a felső határa mindazon $l(\overline{\mathfrak{B}})$ számoknak, amelyek olyan $\mathfrak{B}$-kből keletkeznek, melyek $\mathfrak{A}$ részei. Könnyen kimutatható, hogy, ha $\mathfrak{A}_1$ és $\mathfrak{A}_2$ két nyilt halmaz, akkor

$$\mu(\mathfrak{A}_1+\mathfrak{A}_2) \leqq \mu(\mathfrak{A}_1) + \mu(\mathfrak{A}_2). \tag{9}$$

Ugyanis, ha $\overline{\mathfrak{B}}$ zárt és $\overline{\mathfrak{B}} < \mathfrak{A}_1+\mathfrak{A}_2$, akkor megadhatók olyan zárt $\overline{\mathfrak{A}'_1}$ és $\overline{\mathfrak{A}'_2}$ halmazok, hogy $\overline{\mathfrak{A}'_1} < \mathfrak{A}_1$, $\overline{\mathfrak{A}'_2} < \mathfrak{A}_2$ és $\overline{\mathfrak{B}} < \overline{\mathfrak{A}'_1}+\overline{\mathfrak{A}'_2}$. Az I. tétel értelmében pedig vannak olyan zárt $\overline{\mathfrak{B}_1}$ és $\overline{\mathfrak{B}_2}$ halmazok, melyekre létezik $l(\overline{\mathfrak{B}_1})$ és $l(\overline{\mathfrak{B}_2})$, úgyhogy $\overline{\mathfrak{A}'_1} < \overline{\mathfrak{B}_1} < \mathfrak{A}_1$, $\overline{\mathfrak{A}'_2} < \overline{\mathfrak{B}_2} < \mathfrak{A}_2$; ennélfogva $\overline{\mathfrak{B}} < \overline{\mathfrak{B}_1}+\overline{\mathfrak{B}_2}$, és így a l függvény tulajdonságai értelmében

$$l(\overline{\mathfrak{B}}) \leqq l(\overline{\mathfrak{B}_1}+\overline{\mathfrak{B}_2}) \leqq l(\overline{\mathfrak{B}_1}) + l(\overline{\mathfrak{B}_2}) \leqq \mu(\mathfrak{A}_1) + \mu(\mathfrak{A}_2),$$

s ez az egyenlőtlenség állításunkat igazolja. Ebből nyomban következik, hogy, ha $\mathfrak{A}_1$-nek és $\mathfrak{A}_2$-nek nincs közös pontja, akkor

$$\mu(\mathfrak{A}_1+\mathfrak{A}_2) = \mu(\mathfrak{A}_1) + \mu(\mathfrak{A}_2). \tag{10}$$

Ugyanis, ha $\overline{\mathfrak{B}_1}<\mathfrak{A}_1$ és $\overline{\mathfrak{B}_2}<\mathfrak{A}_2$, akkor $\overline{\mathfrak{B}_1}$-nek és $\overline{\mathfrak{B}_2}$-nek sem lehet közös pontja, tehát (v. ö. a $\mathfrak{h}$ függvény 6°. tulajdonságát)

$$l(\overline{\mathfrak{B}_1}) + l(\overline{\mathfrak{B}_2}) = l(\overline{\mathfrak{B}_1}+\overline{\mathfrak{B}_2}) \leqq \mu(\mathfrak{A}_1+\mathfrak{A}_2).$$

és így

$$\mu(\mathfrak{A}_1) + \mu(\mathfrak{A}_2) \leqq \mu(\mathfrak{A}_1 + \mathfrak{A}_2);$$

ebből (9) tekintetbevételével (10) következik. Ha továbbá az egymásba iktatott $\mathfrak{A}_1<\mathfrak{A}_2\ldots<\mathfrak{A}_n\ldots$ nyilt és kompakt halmazok egyesítési halmaza $\mathfrak{A}$, akkor

$$\lim_{n=\infty} \mu(\mathfrak{A}_n) = \mu(\mathfrak{A}). \tag{11}$$

Ugyanis definíciónkból önként folyik, hogy

$$\text{ha} \quad \mathfrak{A}'<\mathfrak{A}'', \quad \text{akkor} \quad \mu(\mathfrak{A}') \leqq \mu(\mathfrak{A}'');$$

ennélfogva (11)-ben a baloldalon álló határérték létezik, s csak azt kell igazolnunk, hogy nem lehet kisebb, mint $\mu(\mathfrak{A})$. Ez esetben ugyanis léteznék olyan $\mathfrak{B}$, mely része $\mathfrak{A}$-nak, s amely teljesítené az $l(\overline{\mathfrak{B}}) > \mu(\mathfrak{A}_n)$ egyenlőtlenséget végtelen sok n-re. Ez a $\mathfrak{B}$ tehát nem lehet része a megfelelő $\mathfrak{A}_n$-neknek; ez azonban ellentmondásra vezet, mert ebből az következnék, hogy a zárt és nem üres $\overline{\mathfrak{B}}-\mathfrak{A}_n\overline{\mathfrak{B}}$ halmazok $(\overline{\mathfrak{B}}-\mathfrak{A}_n\overline{\mathfrak{B}}>\overline{\mathfrak{B}}-\mathfrak{A}_{n+1}\overline{\mathfrak{B}})$ összességének volna közös pontja, ami pedig lehetetlen, mert a $\overline{\mathfrak{B}}-\mathfrak{A}\overline{\mathfrak{B}}$ halmaz $(\overline{\mathfrak{B}}<\mathfrak{A})$ nem tartalmaz pontot.

(9) és (10) egybevetése, ha $\mathfrak{A}_n$-et $\mathfrak{A}_1+\mathfrak{A}_2+\cdots+\mathfrak{A}_n$-nel helyettesítjük, a

$$\mu(\mathfrak{A}_1+\mathfrak{A}_2+\mathfrak{A}_3+\cdots) \leqq \mu(\mathfrak{A}_1) + \mu(\mathfrak{A}_2) + \mu(\mathfrak{A}_3) + \cdots \tag{12}$$

egyenlőtlenségre vezet; továbbá nyilvánvaló, hogy

$$\text{ha} \quad \mathfrak{A}_1 \cong \mathfrak{A}_2, \quad \text{akkor} \quad \mu(\mathfrak{A}_1) = \mu(\mathfrak{A}_2).$$

Ha végül egy tetszőleges kompakt $\mathfrak{M}$ halmaz esetében $\mu(\mathfrak{M})$-et úgy értelmezzük, mint az $\mathfrak{M}$-et tartalmazó nyilt (és kompakt) $\mathfrak{A}$ halmazokhoz tartozó $\mu(\mathfrak{A})$-k alsó határát, akkor a

fenti (9)—(12) relációk alapján tüstént következik, hogy $\mu(\mathfrak{M})$ teljesíti azt az öt feltételt, amely CARATHÉODORYnak a LEBESGUE-féle mértékre vonatkozó vizsgálataiban fellép.[17] Ennélfogva ezen $\mu(\mathfrak{M})$-ből mint külső mértékből származtatott mérték olyan tulajdonságú, mint a LEBESGUE-féle mérték s ezenfelül invariáns a megadott csoport transzformációival szemben.

11. Befejezésül eredményeinknek egy alkalmazására akarok rámutatni, mely az n-tagú folytonos csoportok előállítására vonatkozik. A mértékfogalom bevezetésével a csoportsokaságon ugyanis egyszersmind az integráció is megalapozást nyer, mégpedig a RIEMANN-féle vagy a LEBESGUE-féle integrál analógonját nyerjük a szerint, hogy melyik mértékfogalmat vesszük alapul. Ez a megjegyzés rávezet arra a tételre, hogy minden folytonos n-tagú csoport megvalósítható uniter-orthogonális végtelen mátrixok segélyével, azaz, hogy minden ilyen csoport egy-egyértelműen izomorf a jelzett mátrixok egy csoportjával. Ez a tétel analogonja, illetőleg általánosítása a véges csoportok elméletéből jól ismert azon ténynek, hogy minden véges csoport egy permutációcsoporttal (azaz véges orthogonális mátrixok csoportjával) izomorf. *Kompakt* csoportok esetére pedig a jól ismert WEYL-féle elmélet vihető át mértékfogalmunk segélyével s az ilyen n-tagú csoportoknak *véges* mátrixokkal való előállítására vezet.

[17] L. CARATHÉODORY, Vorlesungen über reelle Funktionen, 238. és 258. oldal.

(A M Tud. Akadémia III. osztályának 1932. április 18.-án tartott üléséből.)

ZUR THEORIE DER KONTINUIERLICHEN GRUPPEN.

Von ALFRED HAAR, korresp. Mitglied der Akademie.

Es ist das Hauptziel der Arbeit, im Falle irgendeiner n-gliedrigen kontinuierlichen Gruppe in der Gruppenmannigfaltigkeit selbst einen Inhalts- bzw. Massbegriff einzuführen, der die klassischen Eigenschaften dieser Begriffe besitzt und ausserdem *invariant gegenüber den Transformationen der Gruppe ist.* Es wird gezeigt, dass dies stets möglich ist, und zwar nicht nur bei n-gliedrigen Gruppen, sondern schon unter der geringeren Annahme, dass die Gruppenmannigfaltigkeit ein metrischer, separabler und im kleinen kompakter Raum ist. Als Anwendung wird auf eine Integrationstheorie in der Gruppenmannigfaltigkeit und auf eine Darstellungstheorie solcher Gruppen (durch endliche bzw. unendliche Matrizen) hingewiesen.

Die deutsche Übersetzung dieser Arbeit erscheint demnächst in den *Annals of Mathematics* (Januar 1933).

(Aus der Sitzung der III. Klasse der Ungarischen Akademie der Wissenschaften vom 18. April 1932.)

DER MASSBEGRIFF IN DER THEORIE DER KONTINUIERLICHEN GRUPPEN.*

VON ALFRED HAAR.

1. Der Ausgangspunkt der Lieschen Theorie der kontinuierlichen Gruppen, die sog. Infinitesimaltransformation, wird bekanntlich mittels eines Differentiationsprozesses gewonnen; deshalb ist die Liesche Theorie in ihrer ursprünglichen Form nur auf solche Gruppen anwendbar, welche durch solche Gleichungen dargestellt sind, die die fraglichen Differentiationsbedingungen erfüllen. Dieser Theorie steht eine andere gegenüber, die von Hurwitz in einer berühmten Arbeit[1] angebahnt wurde, welche man treffend als eine Integrationstheorie der kontinuierlichen Gruppen bezeichnet hat; diese Theorie wurde insbesondere im letzten Jahrzehnt durch eine Reihe von wichtigen Arbeiten gefördert, von denen wir hier nur die schönen Arbeiten von Schur und Weyl erwähnen.

Es liegt daher der Gedanke nahe, die Frage zu untersuchen, ob man *in jeder N-gliedrigen kontinuierlichen Gruppe einen invarianten Integrationsprozeß einführen kann* (für Liesche Gruppen folgt dies unmittelbar aus einer Bemerkung von Hurwitz in der angeführten Arbeit). Diese Frage ist offenbar damit gleichwertig, ob man *in der Gruppenmannigfaltigkeit einen Inhalts- bzw. Maßbegriff einführen kann, der invariant gegenüber den Transformationen der Gruppe ist,* d. h. der zu solchen Punktmengen der Gruppenmannigfaltigkeit, die durch irgendwelche Transformationen der Gruppe ineinander übergehen, denselben Inhalt bzw. Maß zuordnet.

In der vorliegenden Arbeit soll gezeigt werden, daß bei jeder N-gliedrigen kontinuierlichen Gruppe ein solcher Inhalts- bzw. Maßbegriff tatsächlich vorhanden ist. Unsere Untersuchungen gelten sogar für noch allgemeinere kontinuierliche Gruppen; wir werden im wesentlichen nur annehmen, daß die *Gruppenmannigfaltigkeit metrisch, separabel und im Kleinen kompakt ist.* § 1 enthält die Konstruktion des Inhaltsbegriffes; im § 2 wird gezeigt, daß dieser Begriff alle wesentlichen Eigenschaften des klassischen Inhaltsbegriffes der Euklidischen Ebene besitzt (und außerdem natürlich invariant gegenüber der Gruppe ist); auf diese Resultate gestützt, wird im § 3 das Analogon des Lebesgueschen Maßbegriffes begründet. § 4 enthält einige Anwendungen, insbesondere den invarianten Integrationsprozeß und die

* Received, July 26, 1932.

[1] Göttinger Nachrichten, 1897, S. 71—90.

Übertragung derjenigen schönen Sätze, die Peter und Weyl über die Darstellungen der geschlossenen (kompakten) Gruppen bewiesen haben[2].

§ 1. Der Inhalt.

2. Die Elemente einer vorgelegten N-gliedrigen Gruppe $\mathfrak{G}$ deuten wir als Punkte einer N-dimensionalen Mannigfaltigkeit, die ebenfalls mit $\mathfrak{G}$ bezeichnet werden soll. Zwei Eigenschaften dieser Mannigfaltigkeiten werden im folgenden insbesondere herangezogen: 1° *es besitzt jeder Punkt eine Umgebung, die eineindeutig, stetig abbildbar ist auf die offene Kugel des N-dimensionalen Euklidischen Raumes;* und 2° *die Mannigfaltigkeit selbst ist durch eine höchstens abzählbare Menge solcher Umgebungen überdeckbar.* In den folgenden Untersuchungen wird (mit Rücksicht auf spätere Anwendungen) eine etwas allgemeinere Klasse von kontinuierlichen Gruppen behandelt[3]; wir werden nämlich nur voraussetzen, daß die Elemente der Gruppe $\mathfrak{G}$ Punkte eines *metrischen, separablen Raumes* sind, der außerdem *im Kleinen kompakt* ist; die letzte Eigenschaft bedeutet bekanntlich, daß jeder Punkt eine in $\mathfrak{G}$ kompakte Umgebung (d. h. eine Umgebung, deren abgeschlossene Hülle in $\mathfrak{G}$ kompakt ist) besitzt. Man beachte, daß über den Zusammenhang von $\mathfrak{G}$ keine Annahmen gemacht werden (so daß gewisse sog. gemischt-kontinuierliche Gruppen nicht ausgeschlossen werden), statt dessen soll nur angenommen werden, daß die Gruppenmannigfaltigkeit *in sich dicht* ist[4].

Die drei *Gruppenpostulate* sollen in der üblichen Form zugrunde gelegt werden:

1° eine *assoziative Verknüpfung*, vermöge deren zu zwei beliebigen Gruppenelementen A und B ihr Produkt $C = AB$ definiert ist;

2° die Existenz des *Identitätselementes* E $(AE = EA = A)$;

3° die Existenz der *Inversen* $(A^{-1}A = AA^{-1} = E)$.

Daraus folgt bereits, daß (falls A ein bestimmtes Gruppenelement ist) die Transformation $X \to XA$, die irgendeinem Element X das Element XA

[2] Die vorliegende Arbeit ist (bis auf unwesentliche Abänderungen) die Übersetzung einer der Ungarischen Akademie der Wissenschaften in ihrer Sitzung am 18. April 1932 vorgelegten, in ungarischer Sprache verfaßten Abhandlung.

[3] Über den allgemeinen Begriff der kontinuierlichen Gruppe vgl. O. Schreier, Abhandlungen aus dem Math. Seminar der Hamburg. Univ., Bd. 4 und Bd. 5; ferner E. Cartan, Mémorial des Sciences Mathématiques, Fasc. 42. Paris 1930.

[4] Diese letzte Bedingung gewährleistet erst die Kontinuität der Gruppe; sie ist für das Folgende zwar nicht unerläßlich, wir wollen sie aber annehmen, um triviale Fälle auszuschließen. Die N-gliedrige kontinuierliche Gruppe erfüllt offenbar die obigen Bedingungen. — Da in der vorliegenden Arbeit die Begriffe: kompakt, offen, abgeschlossen, stets relativ zu der Gruppenmannigfaltigkeit $\mathfrak{G}$ zu verstehen sind, so wollen wir der Kürze halber diese Bezeichnungen statt kompakt, offen, abgeschlossen *in* $\mathfrak{G}$ benutzen.

zuordnet, eine eineindeutige Abbildung der Gruppenmannigfaltigkeit auf sich ist; diese Abbildungen bilden offenbar eine zu $\mathfrak{G}$ isomorphe Gruppe.

Die *Stetigkeit* der Gruppe formuliert man, wie folgt: Wenn die Gruppenelemente $A_1, A_2, \cdots, A_n, \cdots$ gegen das Element A konvergieren, d. h. wenn die Entfernungen $A\,A_n$ des metrischen Raumes $\mathfrak{G}$ gegen Null streben, und in gleicher Weise die Elemente $B_1, B_2, \cdots, B_n, \cdots$ gegen B konvergieren, so sollen 1° $A_1^{-1}, A_2^{-1}, \cdots, A_n^{-1}, \cdots$ gegen A^{-1}—, und 2° $A_1B_1, A_2B_2, \cdots, A_nB_n, \cdots$ gegen AB konvergieren[5]. Daraus folgt, daß die obigen Abbildungen $X \to XA$ topologische Abbildungen der Gruppenmannigfaltigkeit auf sich sind[6].

Die *Kongruenz* wird folgendermaßen festgelegt: Ist $\mathfrak{M}$ eine Punktmenge (in $\mathfrak{G}$) und A ein beliebiges Gruppenelement, so bezeichnen wir mit $\mathfrak{M}A$ diejenige Punktmenge, die aus $\mathfrak{M}$ vermöge der Abbildung $X \to XA$ entsteht; d. h. ist X das allgemeine Element von $\mathfrak{M}$, so ist XA das allgemeine Element von $\mathfrak{M}A$. Die beiden Punktmengen $\mathfrak{M}$ und $\mathfrak{M}A$ sollen kongruent heißen: $\mathfrak{M} \cong \mathfrak{M}A$. Zufolge der Gruppeneigenschaften *ist die Kongruenz ein reflexiver, symmetrischer, transitiver Begriff;* wegen der Stetigkeit der Gruppe folgt, daß, *wenn* $\mathfrak{M}_1 \cong \mathfrak{M}_2$ *und* $\mathfrak{M}_1$ *offen (bzw. abgeschlossen oder kompakt) ist,* $\mathfrak{M}_2$ *ebenfalls offen (bzw. abgeschlossen oder kompakt) sein muß*[7].

3. Es sollen vorab einige einfache Tatsachen festgestellt werden, die bei der Definition des Inhaltes Verwendung finden. Es seien $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ offene und kompakte Teilmengen von $\mathfrak{G}$, $\overline{\mathfrak{A}}$ bzw. $\overline{\mathfrak{B}}$ ihre abgeschlossene Hüllen[8]. Ist $\overline{B}$ ein beliebiger Punkt von $\overline{\mathfrak{B}}$, so kann man in mannigfacher Weise eine der Menge $\mathfrak{A}$ kongruente Menge angeben, die $\overline{B}$ enthält (z. B. $\mathfrak{A}\,A^{-1}\,\overline{B}$, wo A irgendein Element von $\mathfrak{A}$ ist). Die abgeschlossene, kompakte Menge $\overline{\mathfrak{B}}$ ist daher in der Summe eines Systems solcher Mengen enthalten, die der offenen Menge $\mathfrak{A}$ kongruent, also ebenfalls offen sind. Die Übertragung des bekannten Borel-Heineschen Satzes auf metrische, separable Räume[9] liefert die Tatsache, daß $\overline{\mathfrak{B}}$ bereits in einer *Summe von endlich vielen dieser offenen Mengen enthalten ist;* man kann daher umsomehr $\overline{\mathfrak{B}}$ vermöge endlich vielen, der *abgeschlossenen* Menge $\overline{\mathfrak{A}}$ kongruenten Mengen überdecken. *Wir bezeichnen mit* $h(\overline{\mathfrak{B}}; \overline{\mathfrak{A}})$ *die kleinste*

[5] Vgl. Schreier a. a. O.[3] und Cartan a. a. O.[3], S. 6.

[6] Die durch die Transformationen $X \to XA$ der Gruppenmannigfaltigkeit gelieferte Darstellung der Gruppe ist bekanntlich einfach transitiv im Lieschen Sinne.

[7] Würde man die Mengen $\mathfrak{M}$ und $A\,\mathfrak{M}$ als kongruent bezeichnen, so erhielte man einen von dem im folgenden dargelegten verschiedenen Maßbegriff; auf den Zusammenhang dieser beiden Maßbegriffe komme ich in einer späteren Arbeit zurück.

[8] Wir bezeichnen im folgenden stets die abgeschlossene Hülle einer in $\mathfrak{G}$ offenen, kompakten Menge $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \mathfrak{C}, \cdots, \mathfrak{M}$ mit $\overline{\mathfrak{A}}, \overline{\mathfrak{B}}, \overline{\mathfrak{C}}, \cdots, \overline{\mathfrak{M}}$.

[9] Vgl. F. Hausdorff, Mengenlehre, 2. Aufl., S. 130.

Anzahl der bei einer solchen Überdeckung von $\overline{\mathfrak{B}}$ *nötigen,* $\overline{\mathfrak{A}}$ *kongruenten Mengen;* d. h. $\overline{\mathfrak{B}}$ ist enthalten in der Vereinigungsmenge von $h(\overline{\mathfrak{B}}; \overline{\mathfrak{A}})$ Mengen, welche $\overline{\mathfrak{A}}$ kongruent sind, es kann aber durch eine geringere Anzahl solcher Mengen nicht überdeckt werden.

Die so definierten positiven ganzen Zahlen $h(\overline{\mathfrak{B}}; \overline{\mathfrak{A}})$ besitzen die folgenden Eigenschaften[10]:

1° $h(\overline{\mathfrak{B}}; \overline{\mathfrak{B}}) = 1$;

2° *ist* $\mathfrak{B}'$ *eine abgeschlossene Teilmenge von* $\overline{\mathfrak{B}}$ $(\overline{\mathfrak{B}}' < \overline{\mathfrak{B}})$, *so ist* $h(\overline{\mathfrak{B}}'; \overline{\mathfrak{A}}) \leqq h(\overline{\mathfrak{B}}; \overline{\mathfrak{A}})$;

3° *ist* $\overline{\mathfrak{B}}_1 + \overline{\mathfrak{B}}_2$ *die Vereinigungsmenge der beiden abgeschlossenen kompakten Mengen* $\overline{\mathfrak{B}}_1$ *und* $\overline{\mathfrak{B}}_2$, *so ist*

$$h(\overline{\mathfrak{B}}_1 + \overline{\mathfrak{B}}_2; \overline{\mathfrak{A}}) \leqq h(\overline{\mathfrak{B}}_1; \overline{\mathfrak{A}}) + h(\overline{\mathfrak{B}}_2; \overline{\mathfrak{A}});$$

4° *ist* $\mathfrak{B}_1 \cong \mathfrak{B}_2$, *so ist*

$$h(\overline{\mathfrak{B}}_1; \overline{\mathfrak{A}}) = h(\overline{\mathfrak{B}}_2; \overline{\mathfrak{A}});$$

5° *sind* $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \mathfrak{C}$ *offene, kompakte Mengen, so ist offenbar*

$$h(\overline{\mathfrak{B}}; \overline{\mathfrak{A}}) \leqq h(\overline{\mathfrak{B}}; \overline{\mathfrak{C}})\, h(\overline{\mathfrak{C}}; \overline{\mathfrak{A}});$$

6° *wenn die offenen, kompakten Mengen* $\mathfrak{A}_1, \mathfrak{A}_2, \cdots, \mathfrak{A}_n, \cdots$ *nur einen einzigen gemeinsamen Punkt* (A) *besitzen und (für jedes* n*)* $\mathfrak{A}_{n+1}$ *Teilmenge von* $\mathfrak{A}_n$ *ist, wenn ferner die abgeschlossenen Hüllen* $\overline{\mathfrak{B}}'$ *und* $\overline{\mathfrak{B}}''$ *der beiden offenen, kompakten Mengen* $\mathfrak{B}'$ *und* $\mathfrak{B}''$ *keinen gemeinsamen Punkt besitzen, so ist für hinreichend große* n

$$h(\overline{\mathfrak{B}}' + \overline{\mathfrak{B}}''; \overline{\mathfrak{A}}_n) = h(\overline{\mathfrak{B}}'; \overline{\mathfrak{A}}_n) + h(\overline{\mathfrak{B}}''; \overline{\mathfrak{A}}_n).$$

Man zeigt diese letzte Eigenschaft, wie folgt: Wäre die Behauptung nicht richtig, so würde es, bei jedem n, eine der Menge $\overline{\mathfrak{A}}_n$ kongruente Menge — etwa $\overline{\mathfrak{A}}_n C_n$ — geben, welche sowohl Punkte von $\overline{\mathfrak{B}}'$, wie auch Punkte von $\overline{\mathfrak{B}}''$ enthielte. Es seien B_n' bzw. B_n'' solche Punkte von $\overline{\mathfrak{B}}'$ bzw. $\overline{\mathfrak{B}}''$ und A_n' bzw. A_n'' diejenigen Punkte von $\overline{\mathfrak{A}}_n$, die bei der Transformation $X \to X C_n$ in B_n' bzw. B_n'' übergehen: $A_n' C_n = B_n'$, $A_n'' C_n = B_n''$. Es konvergieren nun einerseits die Punktfolgen A_n' und A_n'' mit wachsendem n gegen A; andererseits kann man aber — zufolge der angenommenen Kompaktheit und Abgeschlossenheit von $\overline{\mathfrak{B}}'$ und $\overline{\mathfrak{B}}''$ — eine Teilfolge $n_1 < n_2 < \cdots < n_k < \cdots$ der natürlichen Zahlen derart herauswählen, daß jede der Punktfolgen B_{n_k}' bzw. B_{n_k}'' gegen einen Punkt B' bzw. B'' von $\overline{\mathfrak{B}}'$ bzw. $\overline{\mathfrak{B}}''$ konvergieren. Auf Grund der Stetigkeitseigenschaften der vorgelegten Gruppe würde daraus die Konvergenz der Elementenfolge $C_{n_k} = A_{n_k}'^{-1} B_{n_k}'$

[10] Die hier auftretenden Mengen $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \mathfrak{C}, \mathfrak{B}', \mathfrak{B}_1, \mathfrak{B}_2, \cdots$ sind natürlich offene, kompakte Teilmengen von $\mathfrak{G}$.

$= A_{n_k}''^{-1} B_{n_k}''$ folgen, und es würde sich als Häufungspunkt $A^{-1}B' = A^{-1}B''$ ergeben; dies ist aber unmöglich, da die beiden Mengen $\overline{\mathfrak{B}}'$ und $\overline{\mathfrak{B}}''$ keinen gemeinsamen Punkt besitzen, also B' von B'' verschieden sein muß.

4. Nach diesen Vorbereitungen wählen wir eine beliebige offene, kompakte Menge $\mathfrak{E}$ zum Ausgangspunkt der weiteren Untersuchungen, die wir als *Einheitsmenge* bezeichnen; um den Inhaltsbegriff einzuführen, könnte man außerdem noch eine willkürliche Folge von ineinander geschachtelten offenen, kompakten Mengen $\mathfrak{A}_1, \mathfrak{A}_2, \cdots, \mathfrak{A}_n, \cdots$ $(\mathfrak{A}_{n+1} < \mathfrak{A}_n)$ heranziehen, die nur einen einzigen gemeinsamen Punkt haben. Der Einfachheit halber betrachten wir die *abzählbar vielen offenen Kugeln um einen festen Punkt A*, deren Durchmesser gleich $\frac{1}{n}$ ist[11], und bezeichnen diese offenen, kompakten Mengen mit $\mathfrak{K}_n$ $(n = 1, 2, 3, \cdots)$; $\overline{\mathfrak{K}}_n$ sei — wie stets — die abgeschlossene Hülle von $\mathfrak{K}_n$.

Es sei nun $\mathfrak{B}$ irgendeine offene, kompakte Menge; wir betrachten die Zahlenfolge:

$$(1) \qquad l_n(\overline{\mathfrak{B}}) = \frac{h(\overline{\mathfrak{B}}; \overline{\mathfrak{K}}_n)}{h(\overline{\mathfrak{E}}; \overline{\mathfrak{K}}_n)} \qquad (n = 1, 2, 3, \cdots);$$

man erkennt unschwer, daß *diese* (von positiven rationalen Zahlen gebildete) *Folge beschränkt und ihre untere Grenze von Null verschieden ist.* In der Tat folgt aus der Eigenschaft 5° der Funktion $h(\overline{\mathfrak{B}}; \overline{\mathfrak{A}})$ einerseits (für $\mathfrak{A} = \mathfrak{K}_n$, $\mathfrak{C} = \mathfrak{E}$)

$$l_n(\overline{\mathfrak{B}}) \leqq h(\overline{\mathfrak{B}}; \overline{\mathfrak{E}}) \qquad (n = 1, 2, 3, \cdots),$$

und andererseits, wenn man in der fraglichen Ungleichung $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$ bzw. durch $\mathfrak{K}_n$, $\mathfrak{E}$, $\mathfrak{B}$ ersetzt,

$$l_n(\overline{\mathfrak{B}}) \geqq \frac{1}{h(\overline{\mathfrak{E}}; \overline{\mathfrak{B}})} \qquad (n = 1, 2, 3, \cdots).$$

Man kann daher aus der Folge (1) eine gegen einen positiven Grenzwert konvergierende Teilfolge

$$l_{n_1}(\overline{\mathfrak{B}}), \; l_{n_2}(\overline{\mathfrak{B}}), \; \cdots, \; l_{n_k}(\overline{\mathfrak{B}}), \; \cdots$$

herausgreifen; ist $\overline{\mathfrak{B}}' \cong \overline{\mathfrak{B}}$, so strebt (wegen der Eigenschaft 4°) $l_{n_k}(\overline{\mathfrak{B}}')$ natürlich gegen denselben Grenzwert. Mittels des wohlbekannten Diagonalverfahrens kann man ferner zu irgendwelchen vorgelegten, abzählbar unendlich vielen, offenen, kompakten Mengen

$$\mathfrak{B}_1, \; \mathfrak{B}_2, \; \cdots, \; \mathfrak{B}_m, \; \cdots$$

eine Teilfolge $n_1 < n_2 < \cdots < n_k < \cdots$ der natürlichen Zahlen derart bestimmen, daß für alle $m = 1, 2, 3, \cdots$ die Grenzwerte

[11] Wir beschränken uns natürlich auf solche Kugeln um A, die in einer kompakten Umgebung dieses Punktes liegen.

$$\lim_{k=\infty} l_{n_k}(\overline{\mathfrak{B}}_m) = \lim_{k=\infty} \frac{h(\overline{\mathfrak{B}}_m; \overline{\mathfrak{K}}_{n_k})}{h(\overline{\mathfrak{E}}; \overline{\mathfrak{K}}_{n_k})} \tag{2}$$

existieren. Die Mengen $\mathfrak{B}_m$ wählen wir nun folgendermaßen: Wir wählen zuerst (was wegen der angenommenen Separabilität von $\mathfrak{G}$ möglich ist) eine abzählbare, in $\mathfrak{G}$ überall dichte Punktmenge $A_1, A_2, \cdots, A_\nu, \cdots$ und betrachten jede *in $\mathfrak{G}$ kompakte Kugel mit rationalem Durchmesser, deren Mittelpunkt einer dieser Punkte A_ν ist.* Die Gesamtheit dieser Kugeln ist offenbar abzählbar. *Bildet man in jeder möglichen Weise die Vereinigungsmenge von endlich vielen Kugeln dieser Art, so erhält man ebenfalls abzählbar viele Punktmengen;* jede dieser Punktmengen ist offenbar kompakt und offen. Wir bezeichnen im folgenden die auf diese Weise gebildeten Mengen in irgendeiner Reihenfolge mit $\mathfrak{B}_1, \mathfrak{B}_2, \cdots, \mathfrak{B}_m, \cdots$ und denken uns die Teilfolge $n_1 < n_2 < \cdots < n_k < \cdots$ derart bestimmt, daß für diese Mengen die Grenzwerte (2) existieren.

Der Einfachheit halber modifizieren wir in geringem Maße die bisherigen Bezeichnungen, indem wir die Kugeln

$$\mathfrak{K}_{n_1}, \mathfrak{K}_{n_2}, \cdots, \mathfrak{K}_{n_k}, \cdots$$

(um A) von nun an mit

$$\mathfrak{K}_1, \mathfrak{K}_2, \cdots, \mathfrak{K}_k, \cdots$$

bezeichnen; die übrigen Kugeln um A lassen wir fortan außer acht. In dieser Schreibweise *existiert der Grenzwert*

$$\lim_{k=\infty} l_k(\overline{\mathfrak{B}}_m) = \lim_{k=\infty} \frac{h(\overline{\mathfrak{B}}_m; \overline{\mathfrak{K}}_k)}{h(\overline{\mathfrak{E}}; \overline{\mathfrak{K}}_k)},$$

falls $\mathfrak{B}_m$ eine der soeben festgelegten offenen, kompakten Mengen oder eine Menge, die einer solchen kongruent ist, bedeutet.

5. Den Grenzwert der Folge

$$l_k(\overline{\mathfrak{C}}) = \frac{h(\overline{\mathfrak{C}}; \overline{\mathfrak{K}}_k)}{h(\overline{\mathfrak{E}}; \overline{\mathfrak{K}}_k)} \qquad (k = 1, 2, 3, \cdots) \tag{2'}$$

werden wir (falls er existiert) als *Inhalt* der offenen, kompakten Menge $\mathfrak{C}$ bezeichnen, wenn noch außerdem die Menge $\mathfrak{C}$ eine gewisse weitere Eigenschaft besitzt, die wir vorab angeben wollen. Wir führen zu diesem Ende den Begriff der *Nullmenge* ein. Eine Teilmenge $\mathfrak{N}$ von $\mathfrak{G}$ soll *Nullmenge heißen, wenn es zu jeder beliebig kleinen positiven Größe ε eine $\mathfrak{N}$ enthaltende offene, kompakte Menge $\mathfrak{H}_\varepsilon$ gibt, für die*

$$\limsup_{k=\infty} \frac{h(\overline{\mathfrak{H}}_\varepsilon; \overline{\mathfrak{K}}_k)}{h(\overline{\mathfrak{E}}; \overline{\mathfrak{K}}_k)} \leqq \varepsilon \tag{3}$$

ausfällt. Aus dieser Definition folgt unmittelbar, daß *die Teilmengen einer Nullmenge, die Vereinigungsmenge endlich vieler Nullmengen und die einer*

Nullmenge kongruenten Mengen wiederum Nullmengen sind. Wir werden sehen, daß der Grenzwert der Folge (2′) stets vorhanden ist, falls der *Rand* der offenen, kompakten Menge $\mathfrak{C}$ (d.h. die Menge $\overline{\mathfrak{C}} - \mathfrak{C}$) eine Nullmenge ist.

Wir müssen zuerst zeigen, daß es solche Mengen $\mathfrak{C}$ überhaupt gibt. Zu diesem Ende betrachten wir irgendeinen Punkt A_ν der in 4. benutzten, überall dichten Menge $A_1, A_2, \cdots, A_\nu, \cdots$, und es sei $\mathfrak{K}(r)$ die Kugel um A_ν mit dem Radius r. (Wir beschränken uns natürlich wiederum auf solche Werte von r, für die $\mathfrak{K}(r)$ noch kompakt in $\mathfrak{G}$ ist.) Ist r eine rationale Zahl, so ist $\mathfrak{K}(r)$ eine derjenigen Mengen, die wir oben mit $\mathfrak{B}_m$ bezeichnet haben; daher konvergiert für solche r die Folge

$$(2'') \qquad l_n(\overline{\mathfrak{K}}(r)) = \frac{h(\overline{\mathfrak{K}}(r); \overline{\mathfrak{K}}_n)}{h(\overline{\mathfrak{E}}; \overline{\mathfrak{K}}_n)} \qquad (n = 1, 2, 3, \cdots)$$

gegen einen Grenzwert. Andererseits ist für alle n (vgl. die Eigenschaft 2° von h) die Funktion

$$\lambda_n(r) = l_n(\overline{\mathfrak{K}}(r))$$

eine nicht abnehmende Funktion von r. Da die Folge dieser monotonen Funktionen $\lambda_n(r)$ bei jedem rationalen r konvergiert, so strebt diese Funktionenfolge — nach einem wohlbekannten Satze — mit etwaiger Ausnahme von abzählbar vielen Argumentenwerten, für jedes r gegen eine Funktion $\lambda(r)$. Da die durch diesen Grenzübergang gewonnene Funktion $\lambda(r)$ ebenfalls nicht abnehmend ist, so ist sie, wiederum mit etwaiger Ausnahme von abzählbar vielen Stellen, stetig. Indem wir diese beiden abzählbaren Mengen der Veränderlichen r ausschließen, erreichen wir, daß *für jeden anderen Wert von r einerseits der Limes*

$$\lim_{n=\infty} \lambda_n(r) = \lambda(r)$$

existiert und behaupten andererseits, daß *der Rand jeder Kugel* $\mathfrak{K}(r)$ (um A), *deren Radius r nicht ausgeschlossen wurde, eine Nullmenge ist.* In der Tat kann man, wegen der angenommenen Stetigkeit von $\lambda(r)$, an einer solchen Stelle r zu jeder positiven Zahl ε solche Werte r', r'', r''' von r finden, welche ebenfalls nicht ausgeschlossen wurden, der Ungleichung $r' < r'' < r < r'''$ genügen und so beschaffen sind, daß

$$0 \leqq \lambda(r''') - \lambda(r') < \varepsilon$$

wird. Nun haben einerseits die abgeschlossenen Mengen $\overline{\mathfrak{K}}(r''') - \mathfrak{K}(r'')$ und $\overline{\mathfrak{K}}(r')$ keinen gemeinsamen Punkt; daher ist (zufolge der Eigenschaft 6° von h) für hinreichend große Werte von n

$$h((\overline{\mathfrak{K}}(r''') - \mathfrak{K}(r'')) + \overline{\mathfrak{K}}(r'); \overline{\mathfrak{K}}_n) = h(\overline{\mathfrak{K}}(r''') - \mathfrak{K}(r''); \overline{\mathfrak{K}}_n) + h(\overline{\mathfrak{K}}(r'); \overline{\mathfrak{K}}_n);$$

andererseits ist aber, da $\overline{\mathfrak{K}}(r''') - \mathfrak{K}(r'') + \overline{\mathfrak{K}}(r')$ Teilmenge von $\overline{\mathfrak{K}}(r''')$ ist (vgl. die Eigenschaft 2° von h), für jedes n

$$h(\overline{\mathfrak{K}}(r''') - \mathfrak{K}(r'') + \overline{\mathfrak{K}}(r'); \overline{\mathfrak{K}}_n) \leqq h(\overline{\mathfrak{K}}(r'''); \overline{\mathfrak{K}}_n).$$

Daher gilt für hinreichend große Werte von n die Ungleichung

$$h(\overline{\mathfrak{K}}(r''') - \mathfrak{K}(r''); \overline{\mathfrak{K}}_n) \leqq h(\overline{\mathfrak{K}}(r'''); \overline{\mathfrak{K}}_n) - h(\overline{\mathfrak{K}}(r'); \overline{\mathfrak{K}}_n),$$

d. h. es ist

$$\limsup_{n=\infty} \frac{h(\overline{\mathfrak{K}}(r''') - \mathfrak{K}(r''); \overline{\mathfrak{K}}_n)}{h(\overline{\mathfrak{E}}; \overline{\mathfrak{K}}_n)} \leqq \lambda(r''') - \lambda(r') < \varepsilon.$$

Da die offene, kompakte Menge $\overline{\mathfrak{K}}(r''') - \mathfrak{K}(r'')$ den Rand von $\mathfrak{K}(r)$ enthält, so zeigt diese Ungleichung, daß der Rand der Kugel $\mathfrak{K}(r)$ in der Tat eine Nullmenge ist.

Damit ist nicht nur gezeigt, daß *es offene, kompakte Mengen gibt, deren Rand eine Nullmenge ist,* sondern auch, daß *jede Kugel, deren Mittelpunkt in der betrachteten überall dichten Menge* $A_1, A_2, \cdots, A_\nu, \cdots$ *liegt — mit Ausnahme von höchstens abzählbar unendlich vielen — diese Eigenschaft besitzt,* ferner, daß *für jede solche Kugel der Grenzwert der Folge* (2'') *existiert.*

6. Zu weiteren Mengen dieser Art gelangen wir folgendermaßen: Es sei $\mathfrak{A}$ eine beliebige offene, kompakte Menge und $\overline{\mathfrak{A}}'$ irgendeine abgeschlossene Teilmenge von $\mathfrak{A}$. Der Rand von $\mathfrak{A}$ und $\overline{\mathfrak{A}}'$ haben keinen gemeinsamen Punkt; es sei η die Entfernung der Menge $\overline{\mathfrak{A}}'$ vom *Rande* von $\mathfrak{A}$ (die ebenfalls abgeschlossen ist). Wir betrachten diejenigen Punkte der (in $\mathfrak{G}$) überall dichten Menge $A_1, A_2, \cdots, A_\nu, \cdots$, die der Menge $\overline{\mathfrak{A}}'$ angehören; unser soeben erhaltenes Resultat lehrt, daß man um jeden dieser Punkte eine Kugel angeben kann, deren Radius (etwa) zwischen $\frac{\eta}{2}$ und $\frac{3\eta}{4}$ liegt, d deren Rand eine Nullmenge ist. Die Gesamtheit dieser Kugeln überdeckt natürlich die abgeschlossene Menge $\overline{\mathfrak{A}}'$[12]; man kann daher endlich viele dieser Kugeln derart herausgreifen, daß $\overline{\mathfrak{A}}'$ bereits in ihrer Vereinigungsmenge enthalten ist. Diese Vereinigungsmenge $\mathfrak{C}$ ist eine offene, kompakte Menge, deren Rand wiederum eine Nullmenge ist, da der Rand von $\mathfrak{C}$ nur aus solchen Punkten besteht, die dem Rande einer der endlich vielen Kugeln angehört, aus welchen $\mathfrak{C}$ aufgebaut ist. Da ferner diese Kugeln sowie ihre Ränder Teilmengen der offenen Menge $\mathfrak{A}$ sind, so folgt, daß nicht nur $\mathfrak{C}$, sondern auch die abgeschlossene Hülle $\overline{\mathfrak{C}}$ Teilmenge von $\mathfrak{A}$ ist.

[12] da in beliebiger Nähe jedes Punktes von $\overline{\mathfrak{A}}'$ ein Punkt der Punktmenge $A_1, A_2, \cdots, A_\nu, \cdots$ liegt.

Wiederholt man diese Schlußweise mit der Modifikation, daß man um jeden innerhalb $\overline{\mathfrak{A}}'$ liegenden Punkt der überall dichten Menge $A_1, A_2, \cdots, A_\nu, \cdots$ nicht eine Kugel, deren Rand eine Nullmenge ist, sondern eine Kugel mit rationalem Radius $\left(\text{zwischen } \frac{\eta}{2} \text{ und } \frac{3\eta}{4}\right)$ konstruiert, so führt dieses Verfahren offenbar zu einer solchen offenen Menge, die wir in 4. mit $\mathfrak{B}_m$ bezeichnet haben, für die also

$$\lim_{n=\infty} l_n(\overline{\mathfrak{B}}_m)$$

existiert; und es ist außerdem — wie oben — $\overline{\mathfrak{A}}' < \mathfrak{B}_m$, $\overline{\mathfrak{B}}_m < \mathfrak{A}$.

Wir haben somit das folgende Resultat gewonnen:

I. *Es sei $\mathfrak{A}$ eine offene, kompakte Menge und $\overline{\mathfrak{A}}'$ eine abgeschlossene Teilmenge von $\mathfrak{A}$; dann existiert*

einerseits eine $\overline{\mathfrak{A}}'$ enthaltende offene Menge $\mathfrak{C}$, die samt ihrem Rande Teilmenge von $\mathfrak{A}$ ist ($\overline{\mathfrak{A}}' < \mathfrak{C}$, $\overline{\mathfrak{C}} < \mathfrak{A}$) und deren Rand eine Nullmenge ist; und

andererseits eine $\overline{\mathfrak{A}}'$ enthaltende offene Menge $\mathfrak{B}$, die samt ihrem Rande Teilmenge von $\mathfrak{A}$ ist ($\overline{\mathfrak{A}}' < \mathfrak{B}$, $\overline{\mathfrak{B}} < \mathfrak{A}$) und für die der Grenzwert $\lim_{n=\infty} l_n(\mathfrak{B})$ vorhanden ist.

Der wesentliche Inhalt des ersten Teiles dieses Satzes ist die Tatsache, daß die durch Nullmengen berandeten offenen Mengen in gewissem Sinne *überall dicht* liegen, indem jede offene Menge durch solche Mengen beliebig genau angenähert werden kann.

Wir werden zeigen, daß, wenn *der Rand einer offenen, kompakten Menge $\mathfrak{C}$ eine Nullmenge ist, so existiert der Grenzwert*

$$\lim_{n=\infty} l_n(\overline{\mathfrak{C}}) = \lim_{n=\infty} \frac{h(\overline{\mathfrak{C}}; \overline{\mathfrak{K}}_n)}{h(\overline{\mathfrak{E}}; \overline{\mathfrak{K}}_n)} = I(\mathfrak{C}),$$

und dies wird die Definition des *Inhaltes solcher Mengen* sein.

§ 2. Eigenschaften des Inhaltes.

7. Den soeben ausgesprochenen Satz beweisen wir, wie folgt:

Es sei $\mathfrak{C}$ eine offene, kompakte Menge, deren Rand eine Nullmenge ist. Nach der Definition der Nullmengen kann man zu jeder noch so kleinen positiven Größe ε eine den Rand von $\mathfrak{C}$ enthaltende offene, kompakte Menge $\mathfrak{H}_\varepsilon$ finden, für die

$$\limsup_{n=\infty} \frac{h(\overline{\mathfrak{H}}_\varepsilon; \overline{\mathfrak{K}}_n)}{h(\overline{\mathfrak{E}}; \overline{\mathfrak{K}}_n)} \leqq \varepsilon$$

ausfällt. Den Durchschnitt von $\mathfrak{C}$ und $\mathfrak{H}_\varepsilon$ bezeichnen wir mit $\mathfrak{C}''$ ($\mathfrak{C}'' = \mathfrak{C}\mathfrak{H}_\varepsilon$), und es sei $\overline{\mathfrak{C}}' = \mathfrak{C} - \mathfrak{C}''$; $\mathfrak{C}''$ ist eine offene, $\overline{\mathfrak{C}}'$ eine ab-

geschlossene Menge. Da $\mathfrak{C}''$ Teilmenge von $\mathfrak{H}_\varepsilon$ ist, so folgt (vgl. Eigenschaft 2° von h)

$$\limsup_{n=\infty} \frac{h(\bar{\mathfrak{C}}''; \bar{\mathfrak{K}}_n)}{h(\bar{\mathfrak{E}}; \bar{\mathfrak{K}}_n)} \leqq \varepsilon. \tag{4}$$

Nach dem zweiten Teile unseres Satzes I kann man eine offene, $\bar{\mathfrak{C}}'$ enthaltende Menge $\mathfrak{B}$ angeben, deren abgeschlossene Hülle Teilmenge von $\mathfrak{C}$ ist, und für die der Grenzwert $\lim_{n=\infty} l_n(\bar{\mathfrak{B}})$ existiert. Daher ist für jedes n

$$h(\bar{\mathfrak{C}}; \bar{\mathfrak{K}}_n) \geqq h(\bar{\mathfrak{B}}; \bar{\mathfrak{K}}_n);$$

da ferner die Vereinigungsmenge von $\mathfrak{B}$ ($>\bar{\mathfrak{C}}'$) und $\mathfrak{C}''$ die ursprüngliche offene Menge $\mathfrak{C}$ ist, so ist (vgl. Eigenschaft 3° von h)

$$h(\bar{\mathfrak{C}}; \bar{\mathfrak{K}}_n) \leqq h(\bar{\mathfrak{B}}; \bar{\mathfrak{K}}_n) + h(\bar{\mathfrak{C}}''; \bar{\mathfrak{K}}_n).$$

Die erste dieser Ungleichungen liefert die Beziehung

$$\liminf_{n=\infty} \frac{h(\bar{\mathfrak{C}}; \bar{\mathfrak{K}}_n)}{h(\bar{\mathfrak{E}}; \bar{\mathfrak{K}}_n)} \geqq \lim_{n=\infty} l_n(\bar{\mathfrak{B}});$$

die zweite aber — mit Rücksicht auf (4) — die Beziehung

$$\limsup_{n=\infty} \frac{h(\bar{\mathfrak{C}}; \bar{\mathfrak{K}}_n)}{h(\bar{\mathfrak{E}}; \bar{\mathfrak{K}}_n)} \leqq \lim_{n=\infty} l_n(\bar{\mathfrak{B}}) + \varepsilon. \tag{5}$$

Aus der durch Subtraktion gewonnenen Ungleichung

$$\limsup_{n=\infty} \frac{h(\bar{\mathfrak{C}}; \bar{\mathfrak{K}}_n)}{h(\bar{\mathfrak{E}}; \bar{\mathfrak{K}}_n)} - \liminf_{n=\infty} \frac{h(\bar{\mathfrak{C}}; \bar{\mathfrak{K}}_n)}{h(\bar{\mathfrak{E}}; \bar{\mathfrak{K}}_n)} < \varepsilon$$

schließt man unmittelbar (da ε beliebig klein sein kann) auf die Existenz des Grenzwertes

$$\lim_{n=\infty} \frac{h(\bar{\mathfrak{C}}; \bar{\mathfrak{K}}_n)}{h(\bar{\mathfrak{E}}; \bar{\mathfrak{K}}_n)} = \lim_{n=\infty} l_n(\bar{\mathfrak{C}}) = I(\mathfrak{C}),$$

womit die Behauptung bewiesen ist.

Diese positive Größe $I(\mathfrak{C})$ soll als Inhalt der offenen, kompakten Menge $\mathfrak{C}$ (deren Rand eine Nullmenge ist) bezeichnet werden. Dieselbe Zahl könnte man auch als Inhalt von $\bar{\mathfrak{C}}$ und jeder Teilmenge von $\bar{\mathfrak{C}}$, die $\mathfrak{C}$ enthält, definieren. Unser Beweis zeigt, daß $I(\mathfrak{C})$ die obere Grenze der durch die Formel $\lim_{n=\infty} l_n(\bar{\mathfrak{B}})$ gelieferten Größen ist, falls $\mathfrak{B}$ eine beliebige solche Teilmenge von $\mathfrak{C}$ ist, für die dieser Grenzwert existiert.

Es soll noch hervorgehoben werden, daß *der Inhaltsbegriff nicht für alle offenen Mengen eingeführt ist, für die der fragliche Grenzwert existiert,*

sondern nur für diejenigen, deren Rand eine Nullmenge ist[13]; man wird notgedrungen zu dieser Einschränkung geführt, da widrigenfalls für den Inhalt die klassischen Eigenschaften dieser Begriffsbildung nicht gültig wären.

8. Wir wollen zeigen, daß der soeben eingeführte Inhaltsbegriff in der Gruppenmannigfaltigkeit von derselben Art ist, wie der Jordan-Cantorsche Inhalt in der Ebene. Die fundamentalen Eigenschaften von $J(\mathfrak{C})$ sind die folgenden:

1° *Der Inhalt ist stets größer als Null;* dies ist eine unmittelbare Folge der in 4. bewiesenen Tatsache, daß im Falle irgendeiner offenen, kompakten Menge die untere Grenze der Folge $l_n(\overline{\mathfrak{C}})$ von Null verschieden ist.

2° *Sind* $\mathfrak{C}_1$ *und* $\mathfrak{C}_2$ *kongruente Mengen* ($\mathfrak{C}_1 \cong \mathfrak{C}_2$) *und besitzt* $\mathfrak{C}_1$ *einen Inhalt* (d. h. ist der Rand der offenen, kompakten Menge $\mathfrak{C}_1$ eine Nullmenge), *so besitzt auch* $\mathfrak{C}_2$ *einen Inhalt, und es ist* $J(\mathfrak{C}_1) = J(\mathfrak{C}_2)$. Denn aus der für $\mathfrak{C}_1$ gemachten Annahme folgt (vgl. 2. und 5.), daß auch $\mathfrak{C}_2$ offen, kompakt und der Rand von $\mathfrak{C}_2$ eine Nullmenge ist; daher existiert $J(\mathfrak{C}_2)$. Die Eigenschaft 4° von h liefert unmittelbar $J(\mathfrak{C}_1) = J(\mathfrak{C}_2)$.

3° *Besitzt jede der offenen, kompakten Mengen* $\mathfrak{C}_1, \mathfrak{C}_2, \cdots, \mathfrak{C}_n$ *einen Inhalt, so besitzt der Durchschnitt* $(\mathfrak{C}_1\,\mathfrak{C}_2 \cdots \mathfrak{C}_n)$ *und die Vereinigungsmenge* $(\mathfrak{C}_1 + \mathfrak{C}_2 + \cdots + \mathfrak{C}_n)$ *ebenfalls einen Inhalt;* da nämlich jeder Randpunkt dieser Mengen dem Rande einer der Mengen $\mathfrak{C}_1, \mathfrak{C}_2, \cdots, \mathfrak{C}_n$ angehört, so sind die Ränder von $\mathfrak{C}_1\,\mathfrak{C}_2 \cdots \mathfrak{C}_n$ und $\mathfrak{C}_1 + \mathfrak{C}_2 + \cdots + \mathfrak{C}_n$ (vgl. 5.) sicherlich Nullmengen. Die Eigenschaft 3° von h lehrt übrigens, daß $J(\mathfrak{C}_1 + \mathfrak{C}_2) \leqq J(\mathfrak{C}_1) + J(\mathfrak{C}_2)$ ist.

4° *Besitzt jede der elementenfremden (offenen, kompakten) Mengen* $\mathfrak{C}_1, \mathfrak{C}_2$ *einen Inhalt, so ist*

$$J(\mathfrak{C}_1 + \mathfrak{C}_2) = J(\mathfrak{C}_1) + J(\mathfrak{C}_2).$$

Beweis. Da der Rand von $\mathfrak{C}_1$ eine Nullmenge ist, so kann man — wie oben — zu jedem positiven ε eine offene Menge $\mathfrak{B}$ finden, deren abgeschlossene Hülle $\overline{\mathfrak{B}}$ Teilmenge von $\mathfrak{C}_1$ ist und so beschaffen ist, daß einerseits der Grenzwert $\lim_{n=\infty} l_n(\overline{\mathfrak{B}})$ existiert, und andererseits (vgl. die Ungleichung (5))

$$(5') \qquad J(\mathfrak{C}_1) \leqq \lim_{n=\infty} l_n(\overline{\mathfrak{B}}) + \varepsilon$$

ist. Da die abgeschlossenen Mengen $\overline{\mathfrak{B}}$ und $\overline{\mathfrak{C}}_2$ keinen gemeinsamen Punkt besitzen, so ist (vgl. Eigenschaft 6° von h) für hinreichend große n

$$h(\overline{\mathfrak{B}} + \overline{\mathfrak{C}}_2; \overline{\mathfrak{K}}_n) = h(\overline{\mathfrak{B}}; \overline{\mathfrak{K}}_n) + h(\overline{\mathfrak{C}}_2; \overline{\mathfrak{K}}_n).$$

[13] Es ist daher wohl möglich, daß die in 4. eingeführten Mengen $\mathfrak{B}_m$ (oder die Einheitsmenge $\mathfrak{E}$), die uns zum Ausgangspunkt unserer Inhaltsdefinition dienten, keinen Inhalt besitzen, obwohl der Grenzwert $\lim_{n=\infty} l_n(\overline{\mathfrak{B}}_m)$ sicherlich vorhanden ist.

Da aber $\mathfrak{B}+\mathfrak{C}_2$ Teilmenge von $\mathfrak{C}_1+\mathfrak{C}_2$ ist, so gilt (für alle n)

$$h(\overline{\mathfrak{B}}+\overline{\mathfrak{C}}_2;\ \overline{\mathfrak{K}}_n) \leqq h(\overline{\mathfrak{C}}_1+\overline{\mathfrak{C}}_2;\ \overline{\mathfrak{K}}_n);$$

daher ist für hinreichend große n

$$h(\overline{\mathfrak{C}}_1;\ \overline{\mathfrak{K}}_n)+h(\overline{\mathfrak{C}}_2;\ \overline{\mathfrak{K}}_n) \geqq h(\overline{\mathfrak{C}}_1+\overline{\mathfrak{C}}_2;\ \overline{\mathfrak{K}}_n) \geqq h(\overline{\mathfrak{B}};\ \overline{\mathfrak{K}}_n)+h(\overline{\mathfrak{C}}_2;\ \overline{\mathfrak{K}}_n).$$

Daraus folgt aber unmittelbar — mit Rücksicht auf (5′) —

$$I(\mathfrak{C}_1)+I(\mathfrak{C}_2) \geqq I(\mathfrak{C}_1+\mathfrak{C}_2) \geqq I(\mathfrak{C}_1)+I(\mathfrak{C}_2)-\varepsilon;$$

d. h. unsere obige Behauptung.

Auf Grund dieser Eigenschaft ergibt sich unschwer der folgende allgemeinere Satz:

4° *Besitzt jede der offenen Mengen $\mathfrak{C}_1$ und $\mathfrak{C}_2$ einen Inhalt, so gilt die Beziehung*

$$I(\mathfrak{C}_1)+I(\mathfrak{C}_2) = I(\mathfrak{C}_1+\mathfrak{C}_2)+I(\mathfrak{C}_1\,\mathfrak{C}_2);$$

dabei bezeichnet (wie oben) $\mathfrak{C}_1+\mathfrak{C}_2$ bzw. $\mathfrak{C}_1\,\mathfrak{C}_2$ die Summe bzw. den Durchschnitt der beiden Mengen $\mathfrak{C}_1$ und $\mathfrak{C}_2$.

Beweis. Es sei $\mathfrak{C}'$ die *offene* Menge, gebildet von den *inneren* Punkten von $\mathfrak{C}_1-\mathfrak{C}_1\,\mathfrak{C}_2$ (offener Kern); der Rand von $\mathfrak{C}'$ ist eine Nullmenge, da er aus Randpunkten von $\mathfrak{C}_1$ und $\mathfrak{C}_2$ besteht. $\mathfrak{C}'$ und $\mathfrak{C}_2$ besitzen keinen gemeinsamen Punkt; daher ist

$$I(\mathfrak{C}'+\mathfrak{C}_2) = I(\mathfrak{C}')+I(\mathfrak{C}_2); \tag{6}$$

in derselben Weise erkennt man die Richtigkeit der Beziehung

$$I(\mathfrak{C}'+\mathfrak{C}_1\,\mathfrak{C}_2) = I(\mathfrak{C}')+I(\mathfrak{C}_1\,\mathfrak{C}_2). \tag{7}$$

Nun ist die offene Menge $\mathfrak{C}'+\mathfrak{C}_2$ zwar nicht identisch mit $\mathfrak{C}_1+\mathfrak{C}_2$, da $\mathfrak{C}'+\mathfrak{C}_2$ diejenigen Punkte von $\mathfrak{C}_1$, die dem Rande von $\mathfrak{C}_2$ angehören, nicht enthält; da aber jeder solche Punkt Häufungspunkt von $\mathfrak{C}_2$ ist, so folgt, daß die abgeschlossenen Hüllen von $\mathfrak{C}_1+\mathfrak{C}_2$ und $\mathfrak{C}'+\mathfrak{C}_2$ übereinstimmen. Daher ist

$$h(\overline{\mathfrak{C}_1+\mathfrak{C}_2};\ \overline{\mathfrak{K}}_n) = h(\overline{\mathfrak{C}'+\mathfrak{C}_2};\ \overline{\mathfrak{K}}_n)$$

und folglich auch

$$I(\mathfrak{C}_1+\mathfrak{C}_2) = I(\mathfrak{C}'+\mathfrak{C}_2).$$

Ersetzt man in dieser Überlegung $\mathfrak{C}_2$ durch $\mathfrak{C}_1\,\mathfrak{C}_2$, so erhält man in gleicher Weise

$$I(\mathfrak{C}'+\mathfrak{C}_1\,\mathfrak{C}_2) = I(\mathfrak{C}_1+\mathfrak{C}_1\,\mathfrak{C}_2) = I(\mathfrak{C}_1).$$

Man erhält daher aus den Beziehungen (6) und (7) die Gleichungen

$$I(\mathfrak{C}_1+\mathfrak{C}_2) = I(\mathfrak{C}')+I(\mathfrak{C}_2), \qquad I(\mathfrak{C}_1) = I(\mathfrak{C}')+I(\mathfrak{C}_1\,\mathfrak{C}_2),$$

woraus durch Subtraktion unsere Behauptung folgt.

5° *Besitzt jede der unendlich vielen offenen Mengen* $\mathfrak{C}_1, \mathfrak{C}_2, \cdots, \mathfrak{C}_n, \cdots$ *einen Inhalt, und ist* (für jedes n) $\mathfrak{C}_{n+1}$ *Teilmenge von* $\mathfrak{C}_n$, *so ist, falls der Durchschnitt dieser Mengen* $\mathfrak{C}_n$ *aus einem einzigen Punkt* C *besteht,*

$$\lim_{n=\infty} I(\mathfrak{C}_n) = 0.$$

Beweis. Wir wählen innerhalb einer beliebigen offenen Menge $\mathfrak{H}$, die einen Inhalt besitzt, k *verschiedene* Punkte $H^{(1)}, H^{(2)}, \cdots, H^{(k)}$. Vermöge der Abbildungen

$$X \to X(C^{-1} H^{(p)}) \qquad (p = 1, 2, \cdots, k) \tag{8}$$

entstehen aus der Menge $\mathfrak{C}_n$ die ihr kongruenten Mengen $\mathfrak{C}_n^{(1)}, \mathfrak{C}_n^{(2)}, \cdots, \mathfrak{C}_n^{(k)}$, die bzw. die Punkte $H^{(1)}, H^{(2)}, \cdots, H^{(k)}$ enthalten. Man erkennt unschwer, daß die so erhaltenen Mengen $\mathfrak{C}_n^{(p)}$ $(p = 1, 2, \cdots, k)$ für hinreichend große n elementenfremd sind. In der Tat, es würden im entgegengesetzten Falle für beliebig große n solche Punkte C_n' und C_n'' von $\mathfrak{C}_n$ geben, die durch zwei verschiedene Abbildungen (8) in denselben Punkt überführt werden:

$$C_n' C^{-1} H^{(p)} = C_n'' C^{-1} H^{(q)} \qquad (p \leqq q);$$

da C_n' und C_n'' mit wachsendem n gegen C streben, so würde dies der Verschiedenheit der $H^{(1)}, H^{(2)}, \cdots, H^{(k)}$ widersprechen. Folglich sind für hinreichend große n alle $\mathfrak{C}_n^{(p)}$ elementenfremd und in $\mathfrak{H}$ enthalten; daher ist

$$k I(\mathfrak{C}_n) = \sum_{p=1}^{k} I(\mathfrak{C}_n^{(p)}) = I(\mathfrak{C}_n^{(1)} + \mathfrak{C}_n^{(2)} + \cdots + \mathfrak{C}_n^{(k)}) \leqq I(\mathfrak{H});$$

d. h. es ist für hinreichend große n

$$I(\mathfrak{C}_n) \leqq \frac{1}{k} I(\mathfrak{H}),$$

woraus die Behauptung unmittelbar folgt.

Man könnte diese Eigenschaften des Inhaltes auch für nicht offene Mengen beweisen; wir unterlassen dies in Hinsicht darauf, daß diese Tatsachen in den allgemeinen Eigenschaften des Maßbegriffes (den wir im nächsten Paragraphen begründen) enthalten sind.

Zusammenfassend sind wir zu dem folgenden Satze gelangt:

II. *In jeder N-gliedrigen kontinuierlichen Gruppe* $\mathfrak{G}$ *kann man einen Inhaltsbegriff definieren, vermöge dessen zu gewissen offenen, kompakten Mengen* $\mathfrak{C}$ *eine positive Größe* $I(\mathfrak{C})$ *zugeordnet ist; dieser Begriff besitzt dieselben Eigenschaften, wie der Jordan-Cantorsche Inhalt der gewöhnlichen Geometrie, d. h. es gelten, falls jede der Mengen* $\mathfrak{C}_1, \mathfrak{C}_2, \cdots, \mathfrak{C}_n, \cdots$ *einen Inhalt besitzt, die folgenden Tatsachen:*

ist $\mathfrak{C}_1$ *kongruent* $\mathfrak{C}_2$, *so ist* $I(\mathfrak{C}_1) = I(\mathfrak{C}_2)$;
ist $\mathfrak{C}_1$ *Teilmenge von* $\mathfrak{C}_2$, *so ist* $I(\mathfrak{C}_1) \leqq I(\mathfrak{C}_2)$;
es gilt das Gesetz der Additivität:

$$I(\mathfrak{C}_1) + I(\mathfrak{C}_2) = I(\mathfrak{C}_1 + \mathfrak{C}_2) + I(\mathfrak{C}_1 \mathfrak{C}_2);$$

ist (für jedes n) $\mathfrak{C}_{n+1}$ *in* $\mathfrak{C}_n$ *enthalten, so ist* $\lim_{n=\infty} I(\mathfrak{C}_n) = 0$, *falls die Mengen* $\mathfrak{C}_1, \mathfrak{C}_2, \cdots, \mathfrak{C}_n, \cdots$ *nur einen einzigen gemeinsamen Punkt haben;*

ist $\mathfrak{A}$ *eine beliebige offene, kompakte Menge und* $\overline{\mathfrak{A}}'$ *eine beliebige abgeschlossene Teilmenge von* $\mathfrak{A}$, *so existiert eine* $\overline{\mathfrak{A}}'$ *enthaltende Menge* $\mathfrak{C}$, *deren abgeschlossene Hülle Teilmenge von* $\mathfrak{A}$ *ist und die einen Inhalt besitzt*[14];

besitzt die offene, kompakte Menge $\mathfrak{C}$ *einen Inhalt, so existiert zu jeder positiven Größe* ε *eine offene Menge* $\mathfrak{C}'$, *deren abgeschlossene Hülle in* $\mathfrak{C}$ *enthalten ist* $(\overline{\mathfrak{C}}' < \mathfrak{C})$ *von der Beschaffenheit, daß* $I(\mathfrak{C}') > I(\mathfrak{C}) - \varepsilon$, *sowie eine die abgeschlossene Hülle von* $\mathfrak{C}$ *enthaltende offene, kompakte Menge* $\mathfrak{C}''$ $(\mathfrak{C}'' > \overline{\mathfrak{C}})$ *von der Beschaffenheit, daß* $I(\mathfrak{C}'') < I(\mathfrak{C}) + \varepsilon$ *ist*[15].

Unser Satz bleibt richtig, wenn die zugrunde gelegte kontinuierliche Gruppe $\mathfrak{G}$ *nicht N-gliedrig, jedoch so beschaffen ist, daß ihre Elemente einen metrischen, in sich dichten, separablen und im Kleinen kompakten Raum bilden.*

§ 3. Das Analogon des Lebesgueschen Maßes.

9. Auf Grund des Vorangehenden kann man ohne Schwierigkeiten in der Gruppenmannigfaltigkeit einen Maßbegriff einführen, der alle wesentlichen Eigenschaften des Lebesgueschen Maßes besitzt und außerdem invariant gegenüber Kongruenz ist[16]. In voller Analogie zu dem klassischen Verfahren Lebesgues definieren wir zu diesem Ende zuerst das *äußere Maß* einer in $\mathfrak{G}$ kompakten Punktmenge $\mathfrak{M}$; um die fragliche Analogie klar hervortreten zu lassen, wollen wir im folgenden eine *offene, kompakte Menge* $\mathfrak{C}$, *die einen Inhalt im obigen Sinne besitzt, als Intervall bezeichnen.*

[14] Vgl. Satz I, S. 155.

[15] Die Richtigkeit dieser letzten Eigenschaft erkennt man leicht folgendermaßen: Ist $\mathfrak{H}$ eine den Rand von $\mathfrak{C}$ enthaltende offene Menge, für die die Ungleichung (3) statthat, so sei *erstens* $\mathfrak{A} = \mathfrak{C}$, $\overline{\mathfrak{A}}' = \mathfrak{C} - \mathfrak{C}\mathfrak{H}$; ist $\mathfrak{C}'$ eine offene, kompakte Menge, die einen Inhalt besitzt von der Beschaffenheit, daß $\overline{\mathfrak{A}}' < \mathfrak{C}'$ und $\overline{\mathfrak{C}}' < \mathfrak{A} = \mathfrak{C}$ ist (vgl. Satz I), so ist offenbar

$$I(\mathfrak{C}') > I(\mathfrak{C}) - \varepsilon.$$

Setzt man *zweitens* $\mathfrak{A} = \mathfrak{C} + \mathfrak{C}\mathfrak{H}$, $\overline{\mathfrak{A}}' = \overline{\mathfrak{C}}$, so gelangt man in derselben Weise zu einer Menge $\mathfrak{C}''$ $(> \overline{\mathfrak{C}})$, für die

$$I(\mathfrak{C}'') < I(\mathfrak{C}) + \varepsilon$$

ist.

[16] In meiner in [2] erwähnten ungarischen Arbeit habe ich, um den Maßbegriff einzuführen, das bekannte de la Vallée-Poussinsche Verfahren eingeschlagen.

Da die abgeschlossene Hülle $\overline{\mathfrak{M}}$ ebenfalls kompakt ist, so kann man (auf Grund des Borel-Heineschen Satzes) $\mathfrak{M}$ jedenfalls in ein System von endlich vielen Intervallen einschließen. Wir betrachten irgendein abzählbares System von Intervallen $\mathfrak{C}_1, \mathfrak{C}_2, \cdots, \mathfrak{C}_n, \cdots$ von der Beschaffenheit, daß jedes Element von $\mathfrak{M}$ in der Vereinigungsmenge dieser Intervalle enthalten ist, und definieren das äußere Maß $m_a(\mathfrak{M})$ als untere Grenze der so erhaltenen Summen $I(\mathfrak{C}_1)+I(\mathfrak{C}_2)+I(\mathfrak{C}_3)+\cdots$; $m_a(\mathfrak{M})$ ist stets endlich und $\geqq 0$; ist $\mathfrak{M}'$ in der kompakten Menge $\mathfrak{M}$ enthalten, so ist $m_a(\mathfrak{M}') \leqq m_a(\mathfrak{M})$; für zwei beliebige kompakte Mengen $\mathfrak{M}_1$ und $\mathfrak{M}_2$ gilt

$$m_a(\mathfrak{M}_1+\mathfrak{M}_2) \leqq m_a(\mathfrak{M}_1)+m_a(\mathfrak{M}_2);$$

sind die abgeschlossenen Hüllen $\overline{\mathfrak{M}}_1$ und $\overline{\mathfrak{M}}_2$ elementenfremd, so ist offenbar

$$m_a(\mathfrak{M}_1+\mathfrak{M}_2) = m_a(\mathfrak{M}_1)+m_a(\mathfrak{M}_2).$$

Man erkennt ferner unschwer, daß das *äußere Maß eines Intervalls* $\mathfrak{C}$ *mit dessen Inhalt übereinstimmt.* In der Tat folgt die Ungleichung $m_a(\mathfrak{C}) \leqq I(\mathfrak{C})$ unmittelbar aus der Definition von m_a; andererseits kann man aber zu jedem positiven ε ein Intervall $\mathfrak{C}'$, dessen Hülle $\overline{\mathfrak{C}}'$ in $\mathfrak{C}$ enthalten ist, derart angeben, daß $I(\mathfrak{C}')>I(\mathfrak{C})-\varepsilon$ wird. Ist nun $\mathfrak{C}$ (und damit auch $\overline{\mathfrak{C}}'$) in der Vereinigungsmenge der Intervalle $\mathfrak{C}_1, \mathfrak{C}_2, \cdots, \mathfrak{C}_n, \cdots$ enthalten, so kann man die abgeschlossene Menge $\overline{\mathfrak{C}}'$ bereits durch endlich viele dieser Intervalle überdecken; daher ist jedenfalls $I(\mathfrak{C}')$ nicht größer als die Summe der Inhalte dieser endlich vielen Intervallen und also um so mehr

$$I(\mathfrak{C})-\varepsilon<I(\mathfrak{C}') \leqq I(\mathfrak{C}_1)+I(\mathfrak{C}_2)+\cdots+I(\mathfrak{C}_n)+\cdots,$$

woraus unmittelbar

$$m_a(\mathfrak{C}) \geqq I(\mathfrak{C})-\varepsilon,$$

also die Behauptung folgt. In gleicher Weise erkennt man, daß auch *für die abgeschlossene Hülle* $\overline{\mathfrak{C}}$ *eines Intervalls die Beziehung* $m_a(\overline{\mathfrak{C}}) = I(\mathfrak{C})$ gilt. Ist nämlich (für ein beliebig kleines positives ε) $\mathfrak{C}''$ ein $\overline{\mathfrak{C}}$ enthaltendes Intervall von der Beschaffenheit, daß $I(\mathfrak{C}'')<I(\mathfrak{C})+\varepsilon$ ist, so ist

$$m_a(\overline{\mathfrak{C}}) \leqq m_a(\mathfrak{C}'') = I(\mathfrak{C}'') \leqq I(\mathfrak{C})+\varepsilon,$$

woraus mit Rücksicht auf

$$m_a(\overline{\mathfrak{C}}) \geqq m_a(\mathfrak{C}) = I(\mathfrak{C})$$

die Beziehung $m_a(\overline{\mathfrak{C}}) = I(\mathfrak{C})$ folgt[17].

[17] Daraus folgt auch, daß, falls $\mathfrak{A}$ eine das Intervall $\mathfrak{C}$ enthaltende Punktmenge bedeutet, die andererseits in der abgeschlossenen Hülle $\overline{\mathfrak{C}}$ dieses Intervalls enthalten ist, die Beziehung $m_a(\mathfrak{A}) = m_a(\mathfrak{C}) = m_a(\overline{\mathfrak{C}})$ gilt.

Ist endlich das Intervallsystem

$$\mathfrak{C}_1, \mathfrak{C}_2, \cdots, \mathfrak{C}_n, \cdots,$$

in dessen Vereinigungsmenge $\mathfrak{M}$ enthalten ist, so beschaffen, daß

$$m_a(\mathfrak{M}) \geqq I(\mathfrak{C}_1)+I(\mathfrak{C}_2)+\cdots+I(\mathfrak{C}_n)+\cdots+\varepsilon$$

ausfällt, so gelangt man, indem man von jedem $\mathfrak{C}_n$ diejenigen Punkte wegläßt, welche in einem der vorangehenden Intervalle $\mathfrak{C}_1, \mathfrak{C}_2, \cdots, \mathfrak{C}_{n-1}$ enthalten sind und sodann die offenen Kerne der so erhaltenen Mengen bildet, zu *elementenfremden* Intervallen

$$\mathfrak{C}_1 = \mathfrak{C}_1', \ \mathfrak{C}_2', \ \mathfrak{C}_3', \cdots, \mathfrak{C}_n', \cdots$$

von der Beschaffenheit, daß jeder Punkt von $\mathfrak{M}$ innerhalb oder auf dem Rande eines dieser Intervalle liegt ($\mathfrak{M} < \overline{\mathfrak{C}}_1' + \overline{\mathfrak{C}}_2' + \cdots + \overline{\mathfrak{C}}_n' + \cdots$) und es ist offenbar

$$m_a(\mathfrak{M}) \geqq I(\mathfrak{C}_1')+I(\mathfrak{C}_2')+\cdots+I(\mathfrak{C}_n')+\cdots+\varepsilon.$$

Andererseits ist aber

$$m_a(\mathfrak{M}) \leqq I(\mathfrak{C}_1')+I(\mathfrak{C}_2')+\cdots+I(\mathfrak{C}_n')+\cdots,$$

da man zu jeder der abgeschlossenen Hüllen $\overline{\mathfrak{C}}_n'$ ein sie enthaltendes Intervall $\mathfrak{C}_n'' > \overline{\mathfrak{C}}_n'$ angeben kann, dessen Inhalt beliebig wenig von dem Inhalt von $\mathfrak{C}_n'$ abweicht, und da diese Intervalle $\mathfrak{C}_n''$ eine Überdeckung von $\mathfrak{M}$ bewirken. *Das äußere Maß* $m_a(\mathfrak{M})$ *ist daher auch als die untere Grenze der Summen* $I(\mathfrak{C}_1')+I(\mathfrak{C}_2')+\cdots+I(\mathfrak{C}_n')+\cdots$ *definierbar, wobei die Intervalle* $\mathfrak{C}_n'$ *paarweise elementenfremd und so beschaffen sind, daß* $\mathfrak{M}$ *in der Vereinigung ihrer abgeschlossenen Hüllen enthalten ist.*

10. Der Begriff der *Meßbarkeit* wird genau wie in der Lebesgueschen Theorie definiert. Ist $\mathfrak{C}$ ein $\mathfrak{M}$ enthaltendes Intervall, so wird $I(\mathfrak{C}) - m_a(\mathfrak{C} - \mathfrak{M})$ als *inneres Maß* $m_i(\mathfrak{M})$ von $\mathfrak{M}$ (in bezug auf $\mathfrak{C}$) bezeichnet. $\mathfrak{M}$ ist *meßbar,* wenn $m_a(\mathfrak{M}) = m_i(\mathfrak{M})$ ist. *Die Meßbarkeit von* $\mathfrak{M}$ *ist von der Wahl des* $\mathfrak{M}$ *umfassenden Intervalls* $\mathfrak{C}$ *unabhängig.* Man erkennt dies, indem man zeigt, daß, falls $\mathfrak{C}'$ ein $\overline{\mathfrak{C}}$ enthaltendes Intervall ist ($\mathfrak{C}' > \overline{\mathfrak{C}} > \mathfrak{M}$), jede der Gleichungen

$$\begin{aligned} m_a(\mathfrak{C}-\mathfrak{M})+m_a(\mathfrak{M}) &= I(\mathfrak{C}), \\ m_a(\mathfrak{C}'-\mathfrak{M})+m_a(\mathfrak{M}) &= I(\mathfrak{C}') \end{aligned}$$

eine Konsequenz der anderen ist[18]. In der Tat, ist $\mathfrak{C}''$ ein Intervall, dessen abgeschlossene Hülle $\overline{\mathfrak{C}}''$ in $\mathfrak{C}' - \overline{\mathfrak{C}}$ enthalten ist und dessen Inhalt

$$I(\mathfrak{C}'') \geqq I(\mathfrak{C}') - I(\mathfrak{C}) - \varepsilon$$

[18] da der allgemeine Fall leicht auf diesen zurückführbar ist.

ist, wo ε eine beliebig kleine positive Größe bedeutet, so findet man unmittelbar

$$m_a(\mathfrak{C}' - \mathfrak{M}) \geqq m_a(\overline{\mathfrak{C}}'' + (\mathfrak{C} - \mathfrak{M})) = m_a(\overline{\mathfrak{C}}'') + m_a(\mathfrak{C} - \mathfrak{M}),$$

da $\overline{\mathfrak{C}}''$ und die abgeschlossene Hülle von $\mathfrak{C} - \mathfrak{M}$ elementenfremd sind, und folglich

$$(9) \qquad m_a(\mathfrak{C}' - \mathfrak{M}) - m_a(\mathfrak{C} - \mathfrak{M}) \geqq I(\mathfrak{C}'') \geqq I(\mathfrak{C}') - I(\mathfrak{C}) - \varepsilon.$$

Andererseits ist aber

$$m_a(\mathfrak{C}' - \mathfrak{M}) \leqq m_a(\mathfrak{C}' - \mathfrak{C}) + m_a(\mathfrak{C} - \mathfrak{M}),$$

und da die Menge $\mathfrak{C}' - \mathfrak{C}$ das Intervall $\mathfrak{C}' - \overline{\mathfrak{C}}$ enthält, in der abgeschlossenen Hülle dieses Intervalls aber enthalten ist, so ist

$$m_a(\mathfrak{C}' - \mathfrak{C}) = I(\mathfrak{C}' - \overline{\mathfrak{C}}) = I(\mathfrak{C}') - I(\mathfrak{C}),$$

und folglich

$$(9') \qquad m_a(\mathfrak{C}' - \mathfrak{M}) - m_a(\mathfrak{C} - \mathfrak{M}) \leqq I(\mathfrak{C}') - I(\mathfrak{C}).$$

Der Vergleich der Ungleichungen (9) und (9') liefert die Behauptung[19].

11. Es soll noch gezeigt werden, daß dieser Maßbegriff dieselben Eigenschaften besitzt, wie das Lebesguesche Maß; zu diesem Ende leiten wir für die Meßbarkeit einer Menge $\mathfrak{M}$ (von $\mathfrak{G}$) eine notwendige und hinreichende Bedingung ab, die wörtlich mit dem in der Lebesgueschen Theorie auftretenden entsprechenden Kriterium übereinstimmt.

Wir sagen, daß ein System von Intervallen die Menge $\mathfrak{M}$ überdeckt, falls jeder Punkt von $\mathfrak{M}$ innerhalb oder auf dem Rande eines dieser Intervalle liegt. Das fragliche Kriterium lautet dann, wie folgt:

Damit die in dem Intervall $\mathfrak{C}$ enthaltende Menge $\mathfrak{M}$ *meßbar sei, ist notwendig und hinreichend,* daß zu jeder noch so kleinen positiven Größe ε ein abzählbares System von paarweise elementenfremden Intervallen $\mathfrak{C}_1, \mathfrak{C}_2, \cdots, \mathfrak{C}_n, \cdots$ existiert, deren Gesamtheit $\mathfrak{M}$ überdeckt, sowie ein ebenfalls abzählbares System von elementenfremden Intervallen $\mathfrak{C}_1', \mathfrak{C}_2', \cdots, \mathfrak{C}_n', \cdots$, das $\mathfrak{C} - \mathfrak{M}$ überdeckt, von der folgenden Beschaffenheit: In jedem der Intervalle

$$(10) \qquad \mathfrak{C}_1, \mathfrak{C}_1', \mathfrak{C}_2, \mathfrak{C}_2', \cdots, \mathfrak{C}_n, \mathfrak{C}_n', \cdots$$

bilden diejenigen Punkte, die bereits in einem vorangehenden Intervall enthalten sind, wiederum ein Intervall; für das so erhaltene Intervallsystem

$$\mathfrak{C}_1'', \mathfrak{C}_2'', \cdots, \mathfrak{C}_p'', \cdots$$

sei die Summe $\sum_{p=1}^{\infty} m(\mathfrak{C}_p'') = \sum_{p=1}^{\infty} I(\mathfrak{C}_p'')$ kleiner als ε.

[19] Ist $\mathfrak{C}'$ ein das Intervall $\mathfrak{C}$ enthaltendes Intervall $(\mathfrak{C}' > \mathfrak{C})$, so zeigt die Beziehung

$$I(\mathfrak{C}) + I(\mathfrak{C}' - \overline{\mathfrak{C}}) = m_a(\mathfrak{C}) + m_a(\mathfrak{C}' - \mathfrak{C}) = I(\mathfrak{C}'),$$

daß jedes Intervall meßbar ist.

Man erkennt leicht, daß diese Bedingung hinreichend ist; denn wenn man von jedem der Intervalle (10) die fraglichen Punkte fortläßt, so gelangt man zu einer Überdeckung von $\mathfrak{C}$ durch elementenfremde Intervalle; daher ist

$$(11) \qquad \sum_{n=1}^{\infty}(m(\mathfrak{C}_n)+m(\mathfrak{C}'_n)) = m(\mathfrak{C})+\sum_{p=1}^{\infty} m(\mathfrak{C}''_p) < m(\mathfrak{C})+\varepsilon.$$

Da ferner

$$m_a(\mathfrak{M}) \leqq \sum_{n=1}^{\infty} m(\mathfrak{C}_n), \qquad m_a(\mathfrak{C}-\mathfrak{M}) \leqq \sum_{n=1}^{\infty} m(\mathfrak{C}'_n)$$

ist, so ergibt sich

$$m_a(\mathfrak{M})+m_a(\mathfrak{C}-\mathfrak{M}) \leqq m(\mathfrak{C})+\varepsilon,$$

woraus die Meßbarkeit von $\mathfrak{M}$ unmittelbar folgt. Umgekehrt, ist $\mathfrak{M}$ meßbar, so kann man $\mathfrak{M}$ und $\mathfrak{C}-\mathfrak{M}$ durch ein System $\mathfrak{C}_n$ bzw. $\mathfrak{C}'_n$ von elementenfremden Intervallen derart überdecken, daß (für beliebig kleines ε)

$$\sum_{n=1}^{\infty} m(\mathfrak{C}_n) \leqq m_a(\mathfrak{M})+\frac{\varepsilon}{2}, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} m(\mathfrak{C}'_n) \leqq m_a(\mathfrak{C}-\mathfrak{M})+\frac{\varepsilon}{2},$$

also

$$\sum_{n=1}^{\infty} m(\mathfrak{C}_n)+\sum_{n=1}^{\infty} m(\mathfrak{C}'_n) \leqq m_a(\mathfrak{M})+m_a(\mathfrak{C}-\mathfrak{M})+\varepsilon = m(\mathfrak{C})+\varepsilon$$

wird. Wenn man aus diesen Intervallen $\mathfrak{C}_1, \mathfrak{C}'_1, \mathfrak{C}_2, \mathfrak{C}'_2, \cdots, \mathfrak{C}_n, \mathfrak{C}'_n, \cdots$ in der obigen Weise die Intervalle $\mathfrak{C}''_p$ bildet, so liefert (11) unmittelbar $\sum_{p=1}^{\infty} m(\mathfrak{C}''_p) \leqq \varepsilon$.

Im Besitze dieses Kriteriums kann man die Beweise über die Grundeigenschaften des Lebesgueschen Maßes, wie man diese etwa in dem bekannten Werke von de la Vallée-Poussin findet[20], wörtlich auf unseren Fall übertragen; es ergeben sich insbesondere die bekannten Tatsachen über die Additivität des Maßbegriffes.

12. J. v. Neumann und F. Rieß (denen ich ein vorläufiges Manuskript der vorangehenden Untersuchungen übergeben habe) verdanke ich die interessante Bemerkung, daß man den Maßbegriff mit Hilfe der Carathéodoryschen Theorie der Maßfunktionen direkt aus den Ergebnissen des § 1 herleiten kann, ohne den Inhaltsbegriff zu entwickeln. Man kann dabei — nach einer brieflichen Mitteilung von Herrn J. v. Neumann — wie folgt verfahren:

Es sei wiederum $\overline{\mathfrak{B}}$ irgendeine der in 4. eingeführten abgeschlossenen Mengen, für die also der Grenzwert

$$\lim_{n=\infty} l_n(\overline{\mathfrak{B}}) = l(\overline{\mathfrak{B}})$$

[20] Cours d'Analyse, 2. Aufl., Bd. I, S. 244—249.

existiert. Für eine beliebige offene kompakte Menge $\mathfrak{A}$ bezeichnen wir mit $\mu(\mathfrak{A})$ die *obere Grenze* aller Größen $l(\overline{\mathfrak{B}})$, welche solchen Mengen $\overline{\mathfrak{B}}$ entsprechen, die in $\mathfrak{A}$ enthalten sind. Man zeigt unschwer, daß für zwei offene Mengen $\mathfrak{A}_1$, $\mathfrak{A}_2$ die Beziehung

$$\mu(\mathfrak{A}_1+\mathfrak{A}_2) \leqq \mu(\mathfrak{A}_1)+\mu(\mathfrak{A}_2) \tag{12}$$

statthat. Denn ist $\overline{\mathfrak{B}} < \mathfrak{A}_1+\mathfrak{A}_2$, so gibt es solche abgeschlossene Mengen $\overline{\mathfrak{A}}_1'$ und $\overline{\mathfrak{A}}_2'$, daß $\overline{\mathfrak{A}}_1' < \mathfrak{A}_1$, $\overline{\mathfrak{A}}_2' < \mathfrak{A}_2$ und $\overline{\mathfrak{B}} < \overline{\mathfrak{A}}_1'+\overline{\mathfrak{A}}_2'$ ist. Auf Grund des Satzes I kann man andererseits zwei abgeschlossene Mengen $\overline{\mathfrak{B}}_1$, $\overline{\mathfrak{B}}_2$ (für die $l(\overline{\mathfrak{B}}_1)$ und $l(\overline{\mathfrak{B}}_2)$ existiert) derart angeben, daß $\overline{\mathfrak{A}}_1' < \overline{\mathfrak{B}}_1 < \mathfrak{A}_1$, $\overline{\mathfrak{A}}_2' < \overline{\mathfrak{B}}_2 < \mathfrak{A}_2$ ist; daher ist in der Tat

$$l(\overline{\mathfrak{B}}) \leqq l(\overline{\mathfrak{B}}_1+\overline{\mathfrak{B}}_2) \leqq l(\overline{\mathfrak{B}}_1)+l(\overline{\mathfrak{B}}_2) \leqq \mu(\mathfrak{A}_1)+\mu(\mathfrak{A}_2),$$

woraus (12) unmittelbar folgt. Man erkennt auch — auf Grund der Eigenschaft 6° von $\mathfrak{H}$ — daß, falls $\mathfrak{A}_1$ und $\mathfrak{A}_2$ elementenfremd sind,

$$\mu(\mathfrak{A}_1+\mathfrak{A}_2) = \mu(\mathfrak{A}_1)+\mu(\mathfrak{A}_2) \tag{12'}$$

ist. Wenn ferner die offene kompakte Menge $\mathfrak{A}$ die Vereinigungsmenge der Mengen $\mathfrak{A}_1, \mathfrak{A}_2, \cdots, \mathfrak{A}_n, \cdots$ ist, wobei (für alle n) $\mathfrak{A}_n$ in $\mathfrak{A}_{n+1}$ enthalten ist, so ist

$$\lim_{n=\infty} \mu(\mathfrak{A}_n) = \mu(\mathfrak{A}). \tag{12''}$$

In der Tat, da aus $\mathfrak{A}' < \mathfrak{A}''$ die Ungleichung $\mu(\mathfrak{A}') \leqq \mu(\mathfrak{A}'')$ folgt, so existiert der in (12″) linksstehende Grenzwert, und man hat nur zu zeigen, daß er nicht kleiner als $\mu(\mathfrak{A})$ sein kann. Wäre dies nämlich der Fall, so könnte man eine solche Teilmenge $\overline{\mathfrak{B}}$ von $\mathfrak{A}$ angeben, daß die Ungleichung $l(\overline{\mathfrak{B}}) > \mu(\mathfrak{A}_n)$ für alle n richtig wäre. Daraus folgt, daß diese Menge $\mathfrak{B}$ nicht in $\mathfrak{A}_n$ enthalten, also $\overline{\mathfrak{B}} - \mathfrak{A}_n\overline{\mathfrak{B}}$ nicht leer ist. Da andererseits $\overline{\mathfrak{B}} - \mathfrak{A}_{n+1}\overline{\mathfrak{B}}$ offenbar Teilmenge von $\overline{\mathfrak{B}} - \mathfrak{A}_n\overline{\mathfrak{B}}$ ist, so würde daraus folgen, daß die unendlichvielen abgeschlossenen Mengen $\overline{\mathfrak{B}} - \mathfrak{A}_n\overline{\mathfrak{B}}$ $(n = 1, 2, 3, \cdots)$ einen nicht leeren Durchschnitt besitzen, im Widerspruch mit der Tatsache, daß $\overline{\mathfrak{B}} - \mathfrak{A}\overline{\mathfrak{B}}$ (wegen $\overline{\mathfrak{B}} < \mathfrak{A}$) leer ist.

Der Vergleich von (12) und (12″) (wenn man noch $\mathfrak{A}_n$ durch $\mathfrak{A}_1+\mathfrak{A}_2+\cdots+\mathfrak{A}_n$ ersetzt) führt zu der Ungleichung

$$\mu(\mathfrak{A}_1+\mathfrak{A}_2+\cdots) \leqq \mu(\mathfrak{A}_1)+\mu(\mathfrak{A}_2)+\cdots; \tag{12'''}$$

und man erkennt unmittelbar, daß, falls $\mathfrak{A}_1 \cong \mathfrak{A}_2$ ist, $\mu(\mathfrak{A}_1) = \mu(\mathfrak{A}_2)$ gilt.

Ist endlich $\mathfrak{M}$ eine beliebige kompakte Menge, so setze man $\mu(\mathfrak{M})$ gleich der unteren Grenze aller Größen $\mu(\mathfrak{A})$, wobei $\mathfrak{A}$ irgendeine offene, kompakte Menge bedeutet, welche $\mathfrak{M}$ enthält. Die Beziehungen (12)—(12‴)

zeigen, daß die so definierte Maßfunktion μ alle Bedingungen erfüllt, welche in der Carathéodoryschen Theorie der Maßfunktionen auftreten[21]. Daher führt dieses μ zu einem Maßbegriff, dem alle Eigenschaften des klassischen Lebesgueschen Maßes zukommen und außerdem gegenüber Kongruenz invariant ist.

§ 4. Anwendungen.

13. Als erste Anwendung weisen wir auf die Tatsache hin, daß bei Gruppen von der behandelten Art zwei meßbare Mengen $\mathfrak{M}$ und $\mathfrak{M}'$ (beispielsweise zwei offene, kompakte Mengen) nur dann *„zerlegungsgleich"* sein können, falls sie dasselbe Maß besitzen; $\mathfrak{M}$ und $\mathfrak{M}'$ werden bekanntlich als zerlegungsgleich bezeichnet, wenn man jede dieser Mengen in elementenfremde Teilmengen

$$\mathfrak{M} = \mathfrak{M}_1 + \mathfrak{M}_2 + \cdots, \qquad \mathfrak{M}' = \mathfrak{M}_1' + \mathfrak{M}_2' + \cdots$$

derart zerlegen kann, daß (für jedes n) $\mathfrak{M}_n \cong \mathfrak{M}_n'$ ist. Dies ist eine unmittelbare Folge der Invarianz des Maßbegriffes gegenüber Kongruenz, d. h. gegenüber den Transformationen $X \to XA$ der Gruppenmannigfaltigkeit.

14. Auf Grund des Inhalts- bzw. Maßbegriffes kann man in wohlbekannter Weise einen *invarianten Integrationsprozeß* auf der Gruppenmannigfaltigkeit einführen; man gelangt zu dem Analogon des Riemannschen bzw. des Lebesgueschen Integrals, je nachdem man den Inhalt oder das Maß zugrunde legt. In der letzteren Auffassung heiße eine in unserer Gruppenmannigfaltigkeit $\mathfrak{G}$ definierte *reelle Funktion* $f(X)$ *meßbar*, wenn die Punktmenge $\mathfrak{M}_{ab}$, in der $a \leqq f(X) \leqq b$ ausfällt, für alle reellen Größenpaare a, b meßbar ist. Man kann dann analog wie in der Lebesgueschen Theorie zu jeder in einer meßbaren Punktmenge $\mathfrak{M}$ definierten meßbaren Funktion $f(X)$ die wohlbekannten Summen einführen und das Integral

$$\int_{\mathfrak{M}} f(X)\, dX$$

als Grenzwert dieser Summen definieren; ist $f(X)$ meßbar und beschränkt, so folgt die Existenz des fraglichen Grenzwertes wörtlich, wie in den klassischen Fällen. Aus der Invarianz des Maßbegriffes gegenüber Kongruenz schließt man unmittelbar, daß für jedes Gruppenelement A die Beziehung

$$\int_{\mathfrak{M}A} f(XA)\, dX = \int_{\mathfrak{M}} f(X)\, dX$$

gilt, die die *Invarianz dieses Integrationsprozesses* ausdrückt[22].

[21] C. Carathéodory, Vorlesungen über reelle Funktionen, S. 238 und S. 258.

[22] $\mathfrak{M}A$ bedeutet dabei — wie stets — die Punktmenge, die durch die Transformation $X \to XA$ aus $\mathfrak{M}$ entsteht.

Ist $f(X)$ eine beliebige, in der Gruppenmannigfaltigkeit $\mathfrak{G}$ definierte reelle oder komplexwertige Funktion von der Beschaffenheit, daß die Integrale

$$\int_{\mathfrak{G}} f(X)\,dX \quad \text{und} \quad \int_{\mathfrak{G}} |f(X)|^2\,dX$$

existieren, so gilt daher (für jedes Gruppenelement A) die Beziehung

$$(13)\quad \int_{\mathfrak{G}} f(XA)\,dX = \int_{\mathfrak{G}} f(X)\,dX, \qquad \int_{\mathfrak{G}} |f(XA)|^2\,dX = \int_{\mathfrak{G}} |f(X)|^2\,dX;$$

daher ist die Funktionaloperation O_A, die der Funktion $f(X)$ die Funktion $f(XA)$ zuordnet,

$$O_A(f(X)) = f(XA)$$

eine *orthogonale lineare Transformation.* Führt man in wohlbekannter Weise auf $\mathfrak{G}$ ein (vollständiges) orthogonales Funktionensystem ein, so gelangt man, indem man die Beziehungen zwischen den Fourierschen Koeffizienten der Funktionen $f(X)$ und $f(XA)$ aufstellt, zu *einem System von unendlichen orthogonalen Matrizen, das eine treu isomorphe Darstellung der vorgelegten Gruppe $\mathfrak{G}$ liefert.*

15. Ist die Gruppenmannigfaltigkeit $\mathfrak{G}$ kompakt, so kann man ohne Schwierigkeiten die schöne Theorie von F. Peter und H. Weyl[23] über die Darstellung der geschlossenen Lieschen Gruppen auf den vorliegenden Fall übertragen, da in diesen Untersuchungen lediglich nur der invariante Integrationsprozeß benutzt wird. Um dies kurz anzudeuten, nehmen wir an, daß die Gruppenmannigfaltigkeit $\mathfrak{G}$ (die natürlich metrisch und separabel vorausgesetzt wird) nicht nur im Kleinen kompakt, sondern kompakt ist, und bezeichnen mit $f(X)$ irgendeine in $\mathfrak{G}$ definierte stetige (reelle) Funktion[24] (Gruppenzahl). Wir führen — wie in der angeführten Arbeit — die durch das Integral

$$F(XY^{-1}) = \int_{\mathfrak{G}} f(XT^{-1})\,f(YT^{-1})\,dT$$

dargestellte stetige Funktion ein, die offenbar nur von der Verbindung XY^{-1} der Veränderlichen abhängt, da — mit Rücksicht auf (13) — die Beziehung

$$\int_{\mathfrak{G}} f(XT^{-1})\,f(YT^{-1})\,dT = \int_{\mathfrak{G}} f(X(TY)^{-1})\,f(Y(TY)^{-1})\,dT$$
$$= \int_{\mathfrak{G}} f(XY^{-1}T^{-1})\,f(T^{-1})\,dT$$

[23] Mathematische Annalen, Bd. 97, S. 737–755.

[24] Wir beschränken uns der Einfachheit halber auf reelle Funktionen, da es uns nur darauf ankommt, zu zeigen, daß die Peter-Weylsche Theorie auf den vorliegenden Fall übertragbar ist.

gilt. Um die Eigenwerte und die Eigenfunktionen des offenbar symmetrischen Kernes $F(XY^{-1})$ zu konstruieren, kann man etwa — wie in der Arbeit von Peter und Weyl — die Iterierten

$$F_1 = F, \quad F_{\nu+1}(XY^{-1}) = \int_{\mathfrak{G}} F_\nu(XT^{-1})\, F(TY^{-1})\, dT \qquad (\nu = 1, 2, 3, \cdots)$$

und deren Spuren σ_ν bilden; die Quotienten $\sigma_\nu : \sigma_{\nu-1}$ streben gegen den größten Eigenwert λ, wie in E. Schmidts berühmter Dissertation gelehrt wird. Die Anwendung der bekannten Sätze über symmetrische beschränkte Funktionaloperationen auf diejenige Operation, die einer beliebigen (quadratisch integrierbaren) Funktion $\varphi(X)$ die Funktion $\int_{\mathfrak{G}} F(XY^{-1})\, \varphi(Y)\, dY$ zuordnet, ergibt ebenfalls die Existenz der Eigenwerte des betrachteten Kerns.

Es sei λ ein ν-facher Eigenwert von $F(XY^{-1})$; die zugehörigen Eigenfunktionen, d. h. die sämtlichen Lösungen der Integralgleichung

$$\varphi(X) = \lambda \int_{\mathfrak{G}} F(XY^{-1})\, \varphi(Y)\, dY$$

können bekanntlich in der Form

$$\varphi(X) = c_1 \varphi_1(X) + c_2 \varphi_2(X) + \cdots + c_\nu \varphi_\nu(X)$$

dargestellt werden, wobei die c beliebige Konstanten sind, $\varphi_1(X)$, $\varphi_2(X)$, $\cdots$, $\varphi_\nu(X)$ aber ein (in $\mathfrak{G}$) normiertes Orthogonalsystem bildet:

$$\int_{\mathfrak{G}} \varphi_p(X)\, \varphi_q(X)\, dX = \delta_{pq} = \begin{matrix} 1 \text{ für } p = q \\ 0 \text{ für } p \gtrless q \end{matrix} \qquad (p, q = 1, 2, \cdots, \nu).$$

Man erkennt unmittelbar, daß (für alle p und für jedes Gruppenelement A) auch $\varphi_p(XA^{-1})$ eine zu λ gehörende Eigenfunktion ist, da (mit Rücksicht auf (13))

$$\varphi_p(XA^{-1}) = \lambda \int_{\mathfrak{G}} F(XA^{-1}Y^{-1})\varphi_p(Y)dY = \lambda \int_{\mathfrak{G}} F(XA^{-1}(YA^{-1})^{-1})\varphi_p(YA^{-1})dY$$
$$= \lambda \int_{\mathfrak{G}} F(XY^{-1})\, \varphi(YA^{-1})\, dY$$

ist. Daher ist

$$\varphi_p(XA^{-1}) = c_{p1}(A)\, \varphi_1(X) + c_{p2}(A)\, \varphi_2(X) + \cdots + c_{p\nu}(A)\, \varphi_\nu(X),$$

wobei die

$$c_{pq}(A) = \int_{\mathfrak{G}} \varphi_p(XA^{-1})\, \varphi_q(X)\, dX \qquad (p, q = 1, 2, \cdots, \nu)$$

in $\mathfrak{G}$ definierte stetige Funktionen sind. Aus der Orthogonalität der $\varphi_p(X)$ ergibt sich unmittelbar

$$\int_{\mathfrak{G}} \varphi_p(XA^{-1})\, \varphi_q(XA^{-1})\, dX = \delta_{pq};$$

daher ist die Matrix ν-ter Ordnung

$$C(A) = (c_{pq}(A)) \qquad (p, q = 1, 2, \cdots, \nu)$$

eine orthogonale Matrix; da ferner

$$\varphi_p(X(AB)^{-1}) = \varphi_p(XB^{-1}A^{-1}) = \sum_{r=1}^{\nu} c_{pr}(A)\, \varphi_r(XB^{-1})$$
$$= \sum_{r,q=1}^{\nu} c_{pr}(A)\, c_{rq}(B)\, \varphi_q(X) = \sum_{q=1}^{\nu} c_{pq}(AB)\, \varphi_q(X)$$

ist, so folgt die Matrizenrelation

$$C(A)\, C(B) = C(AB),$$

d. h., *es liefern die (endlichen) orthogonalen Matrizen $C(A)$ eine Darstellung der vorgelegten kompakten Gruppe.*

Die so erhaltenen Darstellungen sind im allgemeinen keine treu isomorphe Darstellungen der Gruppe. Man könnte aber unschwer zeigen, daß, falls die stetige Funktion $f(X)$ so beschaffen ist, daß für jedes vom Einheitselement E verschiedene Gruppenelement X der Funktionswert $f(X) \neq f(E)$ ausfällt, die *Gesamtheit* der zu allen Eigenwerten von $F(XY^{-1})$ gehörenden Darstellungen eine treu isomorphe Darstellung der vorgelegten Gruppe liefert.

Es sei noch darauf hingewiesen, daß auch die wichtigen Sätze über die irreduziblen Gruppendarstellungen, die Peter und Weyl in der erwähnten Arbeit entwickeln, auf den vorliegenden Fall übertragbar sind.

SZEGED, UNGARN.

I. Függelék — Anhang I

A következő három dolgozat német fordítása (fordította: Szőkefalvi-Nagy Béla) — Deutsche Übersetzung der folgenden drei Arbeiten (übersetzt von Béla Szőkefalvi-Nagy):

B3. Egy ortogonális függvényrendszerről [= Über ein orthogonales Funktionensystem], *Mat. Term. Ért.*, **32** (1914), 60—68. *[625—633]*

G4. A csoportkarakterisztikák elméletéről [= Über die Theorie der Gruppencharaktere], *Mat. Fiz. Lapok*, **38** (1931), 132—145. *[634—647]*

G5. A csoportkarakterisztikák elméletéről (Második közlemény) [= Über die Theorie der Gruppencharaktere (Zweite Mitteilung)], *Mat. Fiz. Lapok*, **39** (1932), 6—16. *[648—658]*

Über ein orthogonales Funktionensystem

Im III. Kapitel meiner Inauguraldissertation[1] habe ich ein solches orthogonales Funktionensystem eingeführt, welches unter den orthogonalen Funktionensystemen eine exzeptionelle Rolle spielt. Dieses Funktionensystem ist das einzige unter den bisher bekannten, das die Eigenschaft besitzt, daß jede stetige Funktion nach diesen Funktionen auf die Fouriersche Weise in eine konvergente Reihe entwickelt werden kann; allgemeiner, ist die Fouriersche Reihe in bezug auf diese Funktionenfolge jeder im Sinne von Lebesgue integrierbaren Funktion mit Ausnahme einer Menge vom Maß Null konvergent. Die in meiner Dissertation veröffentlichten Sätze geben eine ausführliche Auskunft über die Konvergenz bzw. Divergenz der nach diesem orthogonalen Funktionensystem fortschreitenden Reihen, lassen aber das sogenannte *Eindeutigkeitsproblem* unentschieden, d. h. die Frage, ob eine nach diesen orthogonalen Funktionen fortschreitende Reihe für jeden Wert der unabhängigen Veränderlichen verschwinden kann, ohne daß alle Koeffizienten dieser Reihe gleich Null sind.

In der allgemeinen Theorie der orthogonalen Funktionensysteme gehören diese Eindeutigkeitsprobleme zu den schwierigsten Fragen. Für die trigonometrischen Reihen hat sich mit dieser Frage, nach den diesbezüglichen Untersuchungen von Riemann und Schwarz, bekanntlich zuerst Cantor beschäftigt, während für die Sturm—Liouvilleschen Reihen die entsprechenden Sätze in meiner Habilitationsschrift[2] enthalten sind.

In folgendem ist mein Ziel, das Eindeutigkeitstheorem für mein Orthogonalsystem zu beweisen; der anzugebende Beweis gibt eine ganz *neue Methode zur Betrachtung von Fragen dieser Art,* ich hoffe zu deren Anwendung auf andere orthogonale Funktionensysteme demnächst zurückkommen zu dürfen.

1. Die Definition dieses Funktionensystems ist die folgende:[3]

Es sei

$$\chi_0(x) = 1 \qquad \text{für} \quad 0 \leq x \leq 1;$$

und

$$\chi_1(x) = 1 \qquad \text{für} \quad 0 \leq x < \frac{1}{2},$$

$$= -1 \quad \text{für} \quad \frac{1}{2} < x \leq 1;$$

[1] Mathematische Annalen 1910.
[2] Mathematische Annalen 1911.
[3] Mit meinen orthogonalen Funktionen bzw. mit deren Anwendung auf andere Probleme haben sich Faber, Weyl, Plancherel usw. beschäftigt.

ferner sei

$$\chi_2^{(1)}(x) = \sqrt{2} \quad \text{und} \quad \chi_2^{(2)}(x) = 0 \quad \text{für } 0 \leqq x < \frac{1}{4},$$

$$= -\sqrt{2} \qquad = 0 \quad \text{für } \frac{1}{4} < x < \frac{1}{2},$$

$$= 0 \qquad = \sqrt{2} \quad \text{für } \frac{1}{2} < x < \frac{3}{4},$$

$$= 0 \qquad = -\sqrt{2} \text{ für } \frac{3}{4} < x \leqq 1.$$

Im allgemeinen definieren wir die einzelnen Funktionen unseres Funktionensystems wie folgt: wir zerlegen das Intervall $[0, 1]$ in 2^n gleiche Teile und bezeichnen die so erhaltenen Teilintervalle der Reihe nach mit $i_n^{(1)}, i_n^{(2)}, i_n^{(3)}, \ldots, i_n^{(n)}$. Es sei nun

$\chi_n^{(k)}(x) = 0$ im Inneren der Intervalle $i_n^{(1)}, i_n^{(2)}, \ldots, i_n^{(2k-2)}$,

$\chi_n^{(k)}(x) = \sqrt{2^{n-1}}$ im Inneren des Intervalls $i_n^{(2k-1)}$,

$\chi_n^{(k)}(x) = -\sqrt{2^{n-1}}$ im Inneren des Intervalls $i_n^{(2k)}$,

endlich

$\chi_n^{(k)}(x) = 0$ im Inneren der übrigen Intervalle;

k kann hierbei die Werte $1, 2, \ldots, 2^{n-1}$ annehmen.

An den Stellen 0 und 1 geben wir der Funktion $\chi_n^{(k)}(x)$ denselben Wert, den diese Funktion im Intervall $\left[0, \frac{1}{2^n}\right]$ bzw. $\left[1 - \frac{1}{2^n}, 1\right]$ annimmt. Die auf diese Weise definierte Funktion $\chi_n^{(k)}(x)$ hat an den Stellen $\frac{2k-2}{2^n}, \frac{2k-1}{2^n}, \frac{2k}{2^n}$ einen endlichen Sprung; an jeder anderen Stelle ist sie aber stetig. Schließlich sei der Wert von $\chi_n^{(k)}(x)$ an diesen Sprungstellen gleich dem arithmetischen Mittel der rechts- und linksseitigen Grenzwerte. Von den so definierten unendlich vielen Funktionen, die wir immer in der Reihenfolge

$$\chi_0(x);\ \chi_1(x);\ \chi_2^{(1)}(x), \chi_2^{(2)}(x);\ \ldots;\ \chi_n^{(1)}(x), \chi_n^{(2)}(x), \ldots, \chi_n^{(2^{n-1})}(x);\ \ldots$$

anordnen werden, läßt sich leicht beweisen, daß sie ein vollständiges orthogonales Funktionensystem bilden. Wenn wir die mit konstanten Koeffizienten gebildete unendliche Reihe

$$a_0 \chi_0(x) + a_1 \chi_1(x) + a_2^{(1)} \chi_2^{(1)}(x) + a_2^{(2)} \chi_2^{(2)}(x) + \ldots +$$

$$+ a_n^{(1)} \chi_n^{(1)}(x) + a_n^{(2)} \chi_n^{(2)}(x) + \ldots + a_n^{(2^{n-1})} \chi_n^{(2^{n-1})}(x) + \ldots =$$

$$= a_0 \chi_0(x) + \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{2^{n-1}} a_n^{(k)} \chi_n^{(k)}(x),$$

nach dem Glied $a_n^{(k)} \chi_n^{(k)}(x)$ abbrechen, so wird die derart erhaltene endliche Summe mit

$$S_n^{(k)}(x)$$

bezeichnet. Unsere Behauptung lautet dann folgendermaßen:

Wenn die unendliche Reihe

(I)
$$a_0 \chi_0(x) + \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{2^{n-1}} a_n^{(k)} \chi_n^{(k)}(x)$$

für jeden in Betracht gezogenen, d. h. die Ungleichungen $0 \leq x \leq 1$ *erfüllenden Wert der unabhängigen Veränderlichen, gegen Null strebt, dann verschwinden alle Koeffizienten dieser Reihe, d. h.*

$$a_0 = 0, \qquad a_n^{(k)} = 0 \ (k = 1, 2, \ldots, 2^{n-1}; \ n = 1, 2, \ldots).$$

2. Die *Beweisführung* kann folgendermaßen skizziert werden: *Wir nehmen an, daß nicht alle Koeffizienten der Reihe* (I) *gleich Null sind und zeigen, daß in diesem Falle eine solche Stelle* x_0 *existiert, an welcher diese Reihe entweder divergiert oder gegen einen von Null verschiedenen Wert konvergiert.*

Das Wesentliche des Beweises besteht in der *Konstruktion der kritischen Stelle* x_0.

Es sei

$$a_{n_1}^{(k_1)}$$

der *erste nichtverschwindende Koeffizient* der Reihe (I); m. a. W., wir nehmen an, daß

$$a_n^{(k)} = 0 \quad \text{für} \quad n < n_1$$

und

$$a_{n_1}^{(k)} = 0 \quad \text{für} \quad k < k_1,$$

aber

$$a_{n_1}^{(k_1)} \gtrless 0$$

ist.

Ohne Beschränkung der Allgemeinheit dürfen wir diesen Koeffizienten sogleich als positiv annehmen, denn im entgegengesetzten Falle könnten wir durch Multiplizieren durch -1 zu einer solchen Reihe kommen, die auch diese Bedingung erfüllt. Für die Teilsummen der Reihe (I) folgt aus dem Verschwinden der Koeffizienten, daß:

$$S_n^{(k)}(x) = 0 \qquad \text{für} \quad n < n_1$$

und

$$S_{n_1}^{(k)}(x) = 0 \qquad \text{für} \quad k < k_1,$$

aber

$$S_{n_1}^{(k_1)}(x) \equiv a_{n_1}^{(k_1)} \chi_{n_1}^{(k_1)}(x) \not\equiv 0$$

ist.

Da aber die Funktion $\chi_{n_1}^{(k_1)}(x)$ im Inneren des Intervalls $i_{n_1}^{(2k_1-1)}$ wesentlich positiv (> 0) ist, so besteht im Inneren dieses Intervalls zugleich

$$S_{n_1}^{(k_1)}(x) > 0.$$

An einem Endpunkt des Intervalls $i_{n_1}^{(2k_1-1)}$, nämlich an demjenigen, der zu 0 näher liegt, ist die Funktion $\chi_{n_1}^{(k_1)}(x)$ nach unserer Definition ebenfalls wesentlich positiv, während am anderen Endpunkt dieses Intervalls der Wert dieser Funktion gleich Null ist. Infolgedessen ist am ersten Endpunkt des betrachteten Intervalls

$$S_{n_1}^{(k_1)}(x) > 0,$$

am anderen aber

$$S_{n_1}^{(k_1)}(x) = 0.$$

Im weiteren bezeichnen wir *dieses Intervall* $i_{n_1}^{(2k_1-1)}$ *der Einfachheit halber mit* I_1.

3. In folgenden beachten wir nur solche Werte der unabhängigen Veränderlichen x, *die im Inneren oder an der Grenze dieses Intervalls* I_1 *liegen.* Wenn wir unsere unendliche Reihe nur an diesen Stellen betrachten, können wir von denjenigen Gliedern abstrahieren, die in diesem Intervall identisch verschwinden. Wenn die Koeffizienten aller gebliebenen Glieder — außer dem Glied $a_{n_1}^{(k_1)}\chi_{n_1}^{(k_1)}(x)$ — gleich Null sind, dann fällt der Wert unserer unendlichen Reihe in jedem inneren Punkt des Intervalls I_1 sofort positiv aus; wir nehmen also an, daß dies nicht zutrifft, und den ersten, nach $a_{n_1}^{(k_1)}$ folgenden, nichtverschwindenden Koeffizienten bezeichnen wir mit $a_{n_2}^{(k_2)}$. Die entsprechende Funktion $\chi_{n_2}^{(k_2)}(x)$ verschwindet überall außerhalb der Intervalle $i_{n_2}^{(2k_2-1)}$ und $i_{n_2}^{(2k_2)}$; im ersten nimmt sie positive, im zweiten aber negative Werte an. Diese Intervalle selbst sind aber Teilintervalle von I_1, so daß *die Funktion* $\chi_{n_2}^{(k_2)}(x)$ *und mit ihr die Funktion* $a_{n_2}^{(k_2)}\chi_{n_2}^{(k_2)}(x)$ *in einem Teilintervall des Intervalls* I_1 *überall positiv ist: wir bezeichnen dieses Teilintervall mit* I_2. Wenn wir also eine Stelle x in diesem Intervall I_2 betrachten, sind die ersten zwei, an dieser Stelle nichtverschwindenden Glieder der Reihe (I):

$$a_{n_1}^{(k_1)}\chi_{n_1}^{(k_1)}(x) \quad \text{und} \quad a_{n_2}^{(k_2)}\chi_{n_2}^{(k_2)}(x),$$

und beide sind nichtnegativ; dementsprechend ist

$$S_{n_1}^{(k_1)}(x) \geq 0, \qquad S_{n_2}^{(k_2)}(x) \geq 0$$

für jeden inneren Punkt oder Grenzpunkt x des Intervalls I_2.

Wir zeigen noch, daß in der letzten Ungleichung das Gleichheitszeichen weggelassen werden kann.

In der Tat: das Intervall I_2 liegt entweder ganz im Inneren des Intervalls I_1, oder sie haben einen gemeinsamen Endpunkt. Im ersten Falle ist in jedem inneren oder Endpunkt von I_2

$$a_{n_1}^{(k_1)}\chi_{n_1}^{(k_1)}(x) > 0$$

und infolgedessen auch

$$S_{n_2}^{(k_2)}(x) = a_{n_1}^{(k_1)}\chi_{n_1}^{(k_1)}(x) + a_{n_2}^{(k_2)}\chi_{n_2}^{(k_2)}(x) > 0.$$

Diese Schlußweise bleibt auch dann gültig, wenn I_2 denjenigen Endpunkt mit I_1 gemeinsam hat, in welchem $\chi_{n_1}^{(k_1)}(x) > 0$ ist. Wenn aber I_2 denjenigen Endpunkt mit I_1 gemeinsam hat, in welchem $\chi_{n_1}^{(k_1)}(x) = 0$ ist, dann ergibt sich die Ungleichung

$$a_{n_1}^{(k_1)}\chi_{n_1}^{(k_1)}(x) > 0$$

und daraus die Ungleichung

$$S_{n_2}^{(k_2)}(x) > 0$$

unmittelbar nur für das *Innere* von I_2. Nun ist aber am betreffenden Endpunkt

$$a_{n_2}^{(k_2)} \chi_{n_2}^{(k_2)}(x) > 0$$

und demnach besteht die Ungleichung

$$S_{n_2}^{(k_2)}(x) > 0$$

auch an diesem Endpunkt von I_2, diese haben wir also für das Innere sowie für die Endpunkte von I_2 bewiesen.

4. Wir beachten fortan nur die *Punkte des Intervalls* I_2; für diese Stellen sind nur diejenigen Glieder unserer unendlichen Reihe von Bedeutung, welche in diesem Intervall nicht identisch verschwinden. Zu diesen Gliedern gehören jedenfalls die betrachteten Glieder $a_{n_1}^{(k_1)} \chi_{n_1}^{(k_1)}(x)$ und $a_{n_2}^{(k_2)} \chi_{n_2}^{(k_2)}(x)$. Wären die Koeffizienten der übrigen in Frage kommenden Glieder alle gleich Null, so wäre der Wert unserer Reihe in jedem Punkte des Intervalls I_2 wesentlich positiv. Im entgegengesetzten Fall gibt es einen ersten nichtverschwindenden Koeffizienten, etwa

$$a_{n_3}^{(k_3)} \gtrless 0\,,$$

so daß die ersten drei, in I_2 nicht identisch verschwindenden Glieder unserer unendlichen Reihe folgende sind:

$$a_{n_1}^{(k_1)} \chi_{n_1}^{(k_1)}(x)\,, \qquad a_{n_2}^{(k_2)} \chi_{n_2}^{(k_2)}(x)\,, \qquad a_{n_3}^{(k_3)} \chi_{n_3}^{(k_3)}(x)\,.$$

Die Funktion $\chi_{n_3}^{(k_3)}(x)$ und mit ihr die Funktion $a_{n_3}^{(k_3)} \chi_{n_3}^{(k_3)}(x)$ ist in einem Teil von I_2 positiv, in einem Teil negativ und in einem Teil gleich Null. *Das Teilintervall von* I_2, *in dessen Innerem diese Funktion wesentlich positiv* (> 0) *ist, bezeichnen wir mit* I_3; an den Endpunkten von I_3 darf die Funktion gleich Null sein. Da also in I_3

$$S_{n_2}^{(k_2)}(x) > 0$$

und

$$a_{n_3}^{(k_3)} \chi_{n_3}^{(k_3)}(x) \geqq 0$$

ist, so besteht im Inneren und am jeden Endpunkt des Intervalls I_3 die Ungleichung

$$S_{n_3}^{(k_3)}(x) = S_{n_2}^{(k_2)}(x) + a_{n_3}^{(k_3)} \chi_{n_3}^{(k_3)}(x) > 0\,.$$

5. Wir setzen unser Verfahren fort: $a_{n_4}^{(k_4)} \chi_{n_4}^{(k_4)}(x)$ sei das vierte Glied unserer unendlichen Reihe (in der angegebenen Anordnung), welches in I_3 nicht identisch verschwindet. Bezeichnet I_4 das Teilintervall von I_3, in dessen Innerem das soeben definierte Glied wesentlich positiv ist, so gilt in jedem Punkt dieses Intervalls I_4

$$S_{n_4}^{(k_4)}(x) > 0\,.$$

Mit der Fortsetzung unseres Verfahrens bestimmen wir der Reihe nach die Indexpaare

$$n_5, k_5;\ n_6, k_6;\ \ldots;\ n_{p-1},\ k_{p-1};\ n_p, k_p;\ \ldots$$

und die entsprechenden Intervalle

$$I_5, I_6,\ \ldots,\ I_{p-1},\ I_p,\ \ldots$$

derart, daß — ganz allgemein — $a_{n_p}^{(k_p)} \chi_{n_p}^{(k_p)}(x)$ das p-te Glied in der unendlichen Reihe (I) ist, welche im Intervall I_{p-1} nicht identisch verschwindet, und I_p dasjenige Teilintervall von I_{p-1} bezeichnet, in dessen Innerem die Funktion $a_{n_p}^{(k_p)} \chi_{n_p}^{(k_p)}(x)$ wesentlich positiv ist.

Durch vollständige Induktion kann man leicht einsehen, daß

$$S_{n_p}^{(k_p)}(x) > 0$$

für jeden Punkt x des Intervalls I_p gilt. Nach der Wahl der Indexpaare n_p, k_p ist nämlich für jeden Punkt x des Intervalls I_p

$$S_{n_p}^{(k_p)}(x) = S_{n_{p-1}}^{(k_{p-1})}(x) + a_{n_p}^{(k_p)} \chi_{n_p}^{(k_p)}(x).$$

Wenn also im Intervall I_{p-1} und folglich auch in dessen Teilintervall I_p

$$S_{n_{p-1}}^{(k_{p-1})}(x) > 0$$

besteht, so gilt in jedem Punkt dieses Intervalls auch

$$S_{n_p}^{(k_p)}(x) > 0,$$

da ja im Inneren und an den Endpunkten von I_p

$$a_{n_p}^{(k_p)} \chi_{n_p}^{(k_p)}(x) \geqq 0$$

ist.

6. Wenn man auf diese Weise nur *endlich viele*, etwa p Indexpaare auswählen kann, so bedeutet das, daß im Intervall I_p nur diejenigen Glieder unserer unendlichen Reihe nicht identisch verschwinden, die die Indizes

$$n_1, k_1;\ \ n_2, k_2;\ \ \ldots;\ \ n_p, k_p$$

haben. *In diesem Falle ist die Summe unserer unendlichen Reihe im Intervall I_p gleich $S_{n_p}^{(k_p)}(x)$, d. h. gleich einer von Null verschiedenen positiven Zahl.*

Nun betrachten wir den Fall, daß die Anzahl der auf die obige Weise auswählbarer Glieder *unendlich* ist. Offenbar ist die Länge eines jeden der ausgewählten Intervalle

$$I_1,\ I_2,\ I_3, \ldots,\ I_{p-1},\ I_p, \ldots$$

höchstens gleich der Hälfte der Länge des vorangehenden Intervalls. Folglich haben diese Intervalle *einen einzigen gemeinsamen Punkt* x_0.

Untersuchen wir die Summe unserer unendlichen Reihe (I) an dieser Stelle x_0. Nur folgende Glieder kommen in Betracht:

$$a_{n_1}^{(k_1)} \chi_{n_1}^{(k_1)}(x_0),\ a_{n_2}^{(k_2)} \chi_{n_2}^{(k_2)}(x_0), \ldots,\ a_{n_p}^{(k_p)} \chi_{n_p}^{(k_p)}(x_0), \ldots,$$

da die übrigen Glieder an dieser Stelle verschwinden. Die aus diesen Gliedern gebildete unendliche Reihe

$$\text{(II)} \qquad \sum_{p=1}^{\infty} a_{n_p}^{(k_p)} \chi_{n_p}^{(k_p)}(x_0)$$

besteht aus *lauter nichtnegativen Gliedern*, folglich bilden ihre *Teilsummen eine nichtfallende Folge*. Da aber die zweite Teilsumme $S_{n_2}^{(k_2)}(x_0)$ wesentlich positiv ist (x_0 ist ja ein Punkt des Intervalls I_2), so kann die Summe der Reihe (II), falls diese konvergiert, nur einer *von Null verschiedenen Zahl* gleich sein.

Also ist die gegebene unendliche Reihe (I) an dieser Stelle x_0 entweder *divergent* oder hat dort eine *von Null verschiedene Summe*.

Damit wurde unsere Behauptung vollständig bewiesen.

(Aus der Sitzung der III. Klasse der Ungarischen Akademie der Wissenschaften am 19. Januar 1914.)

Über die Theorie der Gruppencharaktere

Einleitung

Das Ziel meiner Arbeit ist, die Theorie der Gruppencharaktere von Frobenius einfach und elementar zu begründen. Die Theorie der Gruppencharaktere steht bekanntlich in engem Zusammenhang mit der Theorie der linearen Transformationsgruppen, die Gustav Rados in einer schönen Arbeit[1] über die Eigenschaften der adjungierten Substitutionsgruppen mit wichtigen Resultaten bereichert hat.

Kurz nach der — ziemlich komplizierten — Begründug durch Frobenius[2] wurde der Wunsch geäußert, die Theorie zu vereinfachen. In erster Linie muß ich an die Untersuchungen von Burnside[3] erinnern, dessen großes Verdienst es ist, daß er durch die Anwendung eines von ihm entdeckten wichtigen Satzes über die sog. irreduziblen Gruppencharaktere wesentliche Vereinfachungen erzielte. Nach ihm gelang es Schur[4] — ebenfalls durch Anwendung des Burnsideschen Satzes — die Theorie der Charaktere auf sehr einfache und überssichtliche Form zu bringen.

Diese Begründungen gehen aber alle von den irreduziblen Darstellungen der endlichen Gruppen hinaus, also von einer Theorie, welche — meiner Meinung nach — eher eine Anwendung als ein Hilfsmittel der abstrakten Gruppentheorie sein sollte. Besonders auffallend wird dieser Umstand, wenn wir die Frobeniussche Theorie auf Gruppen mit abzählbar unendlich vielen Elementen ausdehnen wollen. Eine von meinen früheren Arbeiten[5], in welcher ich die Theorie der Charaktere auf unendliche kommutative Gruppen übertrage, bietet — sozusagen — eine Vorbereitung zu den hier angekündigten Untersuchungen, deren Ziel also darin besteht, die *Theorie der Gruppencharaktere ohne Heranziehung der irreduziblen Darstellungen* zu entwickeln, da dieser Begriff nicht auf unendliche Gruppen übertragen werden kann.

Der hier mitgeteilte Beweis ist völlig elementar. Damit ich zeige, wie wenige Tatsachen ich der Gruppentheorie selbst zu entnehmen habe, stelle ich in § 1 alles (mit kurzem Beweis) zusammen, was ich nur benötige. In § 2 entwickle ich die Theorie der Gruppencharaktere; den Matrixkalkül werde ich überall benützen, aber auch von dieser Theorie nur die einfachsten wohlbekannten Tatsachen.[6] Eine wichtige Rolle spielt der Satz, daß vertauschbare Her-

[1] Az adjungált bilineár alakok elméletéhez, *Mathematikai és Természettudományi Értesítő*, **19** (1896), S. 165.
[2] *Sitzungsberichte der preußischen Akademie*, **1896**, S. 985 und 1343; **1897**, S. 994; **1899**, S. 482.
[3] *Acta Mathematica*, **28**, S. 369, und *Proc. London Math. Soc.*, Ser. 2, **1**, S. 117.
[4] *Sitzungsberichte der preußischen Akademie*, **1905**, S. 406.
[5] *Mathematische Zeitschrift*, **33**, S. 129.
[6] Für die in der Matrixtheorie vorkommenden Begriffe werde ich folgende Bezeichnungen gebrauchen. Wenn die Zeilen und Spalten einer Matrix M miteinander vertauscht werden, so entsteht die *transponierte* Matrix M'; die inverse der Matrix M (fals sie existiert) wird mit M^{-1} bezeichnet. Wenn man jedes Element einer Matrix M durch sein komplex-konjugiertes ersetzt, ensteht die *konjugierte* Matrix $\overline{M}$. Eine Matrix mit reellen Elementen ist *symmetrisch*, wenn $M = M'$; eine Matrix mit komplexen Elementen ist Hermitesch, falls $M = \overline{M}'$. Die Summe der Diagonalelemente einer Matrix M ist die *Spur* von M, in Zeichen $\mathrm{Sp}(M)$. Die Matrix M ist *diagonal*, falls alle ihre außerhalb der Diagonale liegenden Elemente gleich 0 sind. Eine Matrix mit reellen oder komplexen Elementen heißt *orthogonal*, falls $\overline{M}' = M^{-1}$ (in der deutschsprachigen Literatur ist im Falle komplexer Elemente die Benennung »unitär—orthogonal« gebräuchlich. Die Matrizen M und N sind *äquivalent*, wenn $M = P^{-1}NP$ mit einer willkürlichen Matrix P gilt.

mitesche Matrizen simultan auf die Diagonalform transformierbar sind. Die Matrixtheorie ist heute zu einem unerläßlichen Hilfsmittel nicht nur der Mathematik, sondern auch der Physik geworden; der Umstand, daß auch der Begriff der Gruppencharaktere eine wichtige Bedeutung in den neueren quantentheoretischen Untersuchungen erlangt hat, macht die hier darzulegende neue Begründung — die meiner Meinung nach sogar einfacher als die Schursche ist — vielleicht nicht überflüssig.

Als Fortsetzung dieser Untersuchungen werde ich in einer späteren Veröffentlichung den Zusammenhang der Theorie der Gruppencharaktere mit den irreduziblen Darstellungen behandeln. Obwohl diese Untersuchungen nicht eng zur Theorie der Gruppencharaktere gehören, halte ich es für notwendig, darauf hinzuweisen, daß mein Verfahren auch die Theorie der Gruppendarstellungen einfach ergibt. Es ist ja eine unleugbare Tatsache, daß die Theorie der irreduziblen Darstellungen die wichtigste Anwendung der Gruppencharaktere ist. Meine Untersuchungen folgen also einem umgekehrten Weg als die Begründungen von Burnside und Schur; während bei ihnen die irreduziblen Darstellungen zum Ausgangspunkt dienen, sind diese bei mir bloß eine Anwendung der Theorie.

§ 1. Gruppentheoretische Vorbereitung

1. In meinen Untersuchungen benütze ich nur einige sehr einfache, wohlbekannte Tatsachen aus der Theorie der endlichen Gruppen; vielleicht ist es mir gestattet, diese der Vollständigkeit halber in diesem Paragraphen darzulegen.

Die Elemente der gegebenen Gruppe n-ter Ordnung bezeichne ich mit großen Buchstaben; E ist das Einheitselement. Zwei Elemente, A und B, sind *konjugiert*, falls es ein Element X mit

$$A = X^{-1} BX$$

gibt. Man kann unmittelbar einsehen, daß 1° die so definierte Beziehung symmetrisch und transitiv ist, 2° aus der Konjugiertheit von A und B auch die Konjugiertheit von A^{-1} und B^{-1} folgt, 3° E nur mit sich selbst konjugiert ist. Diese Bemerkungen führen uns zu einer Zerlegung der Gruppe in *Klassen* im Sinne der folgenden Definition: die Gesamtheit miteinander äquivalenter Elemente wird eine Klasse genannt; die Anzahl der in einer Klasse enthaltenen Elemente ist die *Klassenzahl* der betreffenden Klasse. (Die Summe der Klassenzahlen ist $=n$.) Das Einheitselement bildet offenbar in sich eine Klasse (vgl. 3°), die sog. *Einheitsklasse*. Die Inversen der zu einer Klasse gehörigen Elemente bilden ebenfalls eine Klasse (vgl. 2°); diese ist die *Inverse* der gegebenen *Klasse*.

Die folgenden Überlegungen führen zum Begriff der *Klassenkomposition*. $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ seien zwei Klassen; die erste möge aus den Gruppenelementen $A_1, A_2, \ldots, A_\alpha$, die zweite aus den Gruppenelementen $B_1, B_2, \ldots, B_\beta$ bestehen. Die Elemente

$$B_q A_1 B_q^{-1}, \quad B_q A_2 B_q^{-1}, \ldots, B_q A_\alpha B_q^{-1}$$

stimmen, abgesehen von ihrer Reihenfolge, mit den Elementen

$$A_1, \quad A_2, \ldots, A_\alpha$$

überein, folglich unterscheiden sich auch die in den zwei Zeilen stehenden Elemente

$$B_q A_1,\ B_q A_2, \ldots, B_q A_\alpha,$$

$$A_1 B_q,\ A_2 B_q, \ldots, A_\alpha B_q$$

nur in ihrer Reihenfolge. Daraus folgt, daß wenn man die Gesamtheit aller Produkte $A_p B_q$ $(p = 1, 2, \ldots, \alpha;\ q = 1, 2, \ldots, \beta)$ und ebenfalls die Gesamtheit aller Produkte $B_q A_p$ aufschreibt (wobei jedes Element so oft erscheint, wie oft es in dieser Produktform dargestellt werden kann), die beiden Gesamtheiten übereinstimmen. Die Gesamtheit der so erhaltenen $\alpha\beta$ (nicht notwendigerweise verschiedenen) Elemente wird mit $\mathfrak{AB}$ oder mit $\mathfrak{BA}$ bezeichnet und das *Produkt* der zwei *Klassen* genannt. Diese Produktbildung ist eine kommutative und assoziative Operation. $\mathfrak{AB}$ ist im allgemeinen keine Klasse; es ist aber leicht einzusehen, daß wenn ein Element C k-mal in dieser Gesamtheit vorkommt, jedes mit C konjugierte Element ebenfalls k-mal in $\mathfrak{AB}$ vorkommt. Es sei nämlich $C = A_p B_q$, wobei (p, q) die Zahlenpaare $(p_1, q_1), (p_2, q_2), \ldots, (p_k, q_k)$ durchläuft; dann folgt aus der Relation

$$X^{-1} C X = (X^{-1} A_p X)(X^{-1} B_q X),$$

daß das zu C konjugierte Element $X^{-1}CX$ auf mindestens soviele Weisen in der Form $A_p B_q$ darstellbar ist wie C, woraus wegen der Symmetrieeigenschaft der Konjugiertheit unsere Behauptung folgt.

Wir führen folgende Bezeichnungen ein: $\mathfrak{C}_1, \mathfrak{C}_2, \ldots, \mathfrak{C}_h$ seien die verschiedenen Klassen der gegebenen Gruppe n-ter Ordnung, $\mathfrak{C}_1$ die Einheitsklasse, und die entsprechenden Klassenzahlen seien $n_1 = 1, n_2, \ldots, n_h$; in der aus der Komposition der Klassen $\mathfrak{C}_\alpha$ und $\mathfrak{C}_\beta$ entstandenen Gesamtheit $\mathfrak{C}_\alpha \mathfrak{C}_\beta = \mathfrak{C}_\beta \mathfrak{C}_\alpha$ tritt jedes Element der Klasse $\mathfrak{C}_\gamma$ gleich oft, etwa $c_{\alpha\beta\gamma}$-mal auf, wobei also $c_{\alpha\beta\gamma}$ eine positive ganze Zahl oder Null ist. Die symbolische Relation

$$\mathfrak{C}_\alpha \mathfrak{C}_\beta = \mathfrak{C}_\beta \mathfrak{C}_\alpha = c_{\alpha\beta 1} \mathfrak{C}_1 + c_{\alpha\beta 2} \mathfrak{C}_2 + \ldots + c_{\alpha\beta h} \mathfrak{C}_h \tag{1}$$

$$(\alpha, \beta = 1, 2, \ldots, k)$$

bedeutet dann, daß wenn man die Elemente jeder Klasse $\mathfrak{C}_\gamma$ $c_{\alpha\beta\gamma}$-mal aufschreibt $(\gamma = 1, 2, \ldots, h)$, man die ganze Gesamtheit $\mathfrak{C}_\alpha \mathfrak{C}_\beta = \mathfrak{C}_\beta \mathfrak{C}_\alpha$ erhält.[7]

Wir werden noch den Wert von $c_{\alpha\beta 1}$ benötigen. Wegen der Eigenschaft 2° der Konjugiertheit haben zwei inverse Klassen dieselbe Klassenzahl; wenn also die Klassen $\mathfrak{C}_\alpha$ und $\mathfrak{C}_\beta$ invers sind, ergibt ihre Komposition das Einheitselement (d. h. die Einheitsklasse $\mathfrak{C}_1$) so oft, wie ihre Klassenzahl beträgt; also ist in diesem Falle $c_{\alpha\beta 1} = n_\alpha = n_\beta$; wenn aber $\mathfrak{C}_\alpha$ und $\mathfrak{C}_\beta$ nicht invers sind, dann kann E in $\mathfrak{C}_\alpha \mathfrak{C}_\beta$ nicht vorkommen, d. h. $c_{\alpha\beta 1} = 0$.

[7] Durch Abzählung der Elemente der auf den beiden Seiten von (1) stehenden Gesamtheiten erhält man die Gleichungen

$$n_\alpha n_\beta = \sum_{\gamma=1}^{h} c_{\alpha\beta\gamma} n_\gamma .$$

2. Die sog. *reguläre Darstellung* der Gruppen durch Matrizen steht mit der wohlbekannten Tatsache in Beziehung, daß jede endliche Gruppe isomorph der Gruppe der Permutationen

$$\begin{pmatrix} A, & B, & C, & \dots \\ AX, & BX, & CX, & \dots \end{pmatrix}$$

ist, wobei X alle Elemente der gegebenen Gruppe durchläuft. Wenn wir jedem Gruppenelement eine Unbestimmte zuordnen (x_A zu A usw.), dann geht die obige Permutationsgruppe in die Gruppe der folgenden linearen Transformationen über:

$$x_A\,(=)\,x_{AX},\quad x_B\,(=)\,x_{BX},\quad x_C\,(=)\,x_{CX},\quad \dots \qquad (X \text{ ist ein beliebiges Gruppenelement}).$$

Die Matrizen dieser (offenbar orthogonalen) Transformationen — die natürlich auch isomorph der gegebenen Gruppe sind — liefern die sog. reguläre Darstellung. Wir bezeichnen die auf diese Weise zu X gehörige Matrix mit (X). (E) ist die Einheitsmatrix von der Ordnung n; für $X \neq E$ sind alle Diagonalelemente von (X) gleich 0 (sonst gäbe es ja ein Element P mit $P = PX$). Zu inversen Gruppenelementen gehören inverse Matrizen: $(X^{-1}) = (X)^{-1}$; und da die Matrix (X) reell und orthogonal ist, so ist ihre Inverse gleich ihrer Transponierten, d. h. $(X^{-1}) = (X)'$, falls — wie üblich — die Transposition mit einem Strich bezeichnet wird.

Besteht die Klasse $\mathfrak{C}_\alpha$ aus den Elementen $A_1, A_2, \dots, A_{n_\alpha}$, so ordne man ihr die Matrix

$$(\mathfrak{C}_\alpha) = (A_1) + (A_2) + \dots + (A_{n_\alpha}) \qquad (\alpha = 1, 2, \dots, h)$$

zu; zur Einheitsklasse gehört die Einheitsmatrix, und in jedem anderen Fall gelangen wir wieder zu einer solchen reellen Matrix, in deren Diagonale lauter Nullen stehen. Der zu $\mathfrak{C}_\alpha$ inversen Klasse gehört die Matrix

$$(A_1^{-1}) + (A_2^{-1}) + \dots + (A_{n_\alpha}^{-1}) = (A_1)' + (A_2)' + \dots + (A_{n_\alpha})' = (\mathfrak{C}_\alpha)',$$

also sind die zu inversen Klassen gehörigen Matrizen die Transponierten voneinander.

Endlich gehen die symbolischen Relationen (1) offenbar in die Matrixgleichungen

$$(1') \qquad (\mathfrak{C}_\alpha)(\mathfrak{C}_\beta) = (\mathfrak{C}_\beta)(\mathfrak{C}_\alpha) = \sum_{\gamma=1}^{h} c_{\alpha\beta\gamma}\,(\mathfrak{C}_\gamma) \qquad (\alpha, \beta = 1, 2, \dots, h)$$

über. Diese zeigen einerseits, daß die Matrizen

$$(\mathfrak{C}_1) = (E),\ (\mathfrak{C}_2), \dots, (\mathfrak{C}_h)$$

vertauschbar (kommutativ) sind, andererseits, daß — infolge unserer Bemerkung über die Matrizen von inversen Klassen — jede dieser reellen Matrizen auch mit ihrer *Transponierten vertauschbar ist.* (Neuerdings nennt man Matrizen mit dieser Eigenschaft *normal.*)

§ 2. Der Begriff der Gruppencharaktere und die unter den Gruppencharakteren bestehenden fundamentalen Zusammenhänge

3. Die reguläre Matrixdarstellung endlicher Gruppen führt auf einfache Weise zu den Frobeniusschen Gruppencharakteren und zu ihren wichtigsten Eigenschaften. Wir haben nämlich gesehen, daß die den einzelnen Klassen zugeordneten Matrizen $(\mathfrak{C}_p)$ $(p = 1, 2, \ldots, h)$ oder die von diesen nur in der Reihenfolge unterschiedenen Matrizen $(\mathfrak{C}_p)'$ $(p = 1, 2, \ldots, h)$ vertauschbar sind. Demzufolge sind auch die Matrizen $(\mathfrak{C}_p) + (\mathfrak{C}_p)'$ und $i(\mathfrak{C}_p) - i(\mathfrak{C}_p)'$ alle vertauschbar; jede Matrix $(\mathfrak{C}_p) + (\mathfrak{C}_p)'$ ist reell und symmetrisch und jede Matrix $i(\mathfrak{C}_p) - i(\mathfrak{C}_p)'$ Hermitesch. Nun ist eine grundlegende Eigenschaft derartiger vertauschbarer Matrizen, bzw. der zu ihnen gehörigen Bilinearformen, daß es eine — im allgemeinen nicht reelle — orthogonale Transformation der Unbestimmten gibt, die sämtliche Formen simultan auf die sog. Diagonalform bringt, d. h. auf eine Form, in der nur die reinen Glieder auftreten. In der Sprache der Matrizen bedeutet das, daß es eine orthogonale Matrix (U) — für die also $(U)^{-1} = (\bar{U})'$ — mit der Eigenschaft gibt, daß die Matrizen

$$(U)^{-1}\left((\mathfrak{C}_p) + (\mathfrak{C}_p)'\right)(U) \quad \text{und} \quad i(U)^{-1}\left((\mathfrak{C}_p) - (\mathfrak{C}_p)'\right)(U) \qquad (p = 1, 2, \ldots, h)$$

alle Diagonalmatrizen sind. Folglich sind auch die Matrizen $(U)^{-1}(\mathfrak{C}_p)(U)$ Diagonalmatrizen; es sei

$$(U)^{-1}(\mathfrak{C}_p)(U) = (\Delta_p) = \begin{pmatrix} r_p^{(1)} & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & r_p^{(2)} & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & r_p^{(n)} \end{pmatrix} \qquad (p = 1, 2, \ldots, h).$$

Die Gleichung (1′), bzw. die äquivalente Relation

$$\left((U)^{-1}(\mathfrak{C}_\alpha)(U)\right)\left((U)^{-1}(\mathfrak{C}_\beta)(U)\right) = \sum_{\gamma=1}^{h} c_{\alpha\beta\gamma}(U)^{-1}(\mathfrak{C}_\gamma)(U)$$

gehen in die folgende Gleichung für die Diagonalmatrizen über:

$$(\Delta_\alpha)(\Delta_\beta) = \sum_{\gamma=1}^{h} c_{\alpha\beta\gamma}(\Delta_\gamma);$$

aus dieser Matrixgleichung gewinnen wir das folgende (Frobeniussche) Gleichungssystem:

$$\text{(I)} \qquad r_\alpha^{(k)} r_\beta^{(k)} = \sum_{\gamma=1}^{h} c_{\alpha\beta\gamma} r_\gamma^{(k)} \qquad (k = 1, 2, \ldots, n; \quad \alpha, \beta = 1, 2, \ldots, h).$$

Diese Formeln (für jedes k) zeigen, daß man *jeder Klasse $\mathfrak{C}_\alpha$ der gegebenen Gruppe je eine Zahl $r_\alpha^{(k)}$ zuordnen kann, derart, daß das so erhaltene Zahlensystem $r_1^{(k)}, r_2^{(k)}, \ldots, r_n^{(k)}$ der Regel* (1) *der Klassenkomposition folgt.*[8]

[8] Die Anmerkung [7] zeigt, daß die Klassenzahlen $n_1, n_2, \ldots, n_h$ dem Gleichungssystem (I) genügen; diese »triviale« Lösung ist also eine der Wertsysteme (3) bzw. (3′).

Da $(\mathfrak{C}_1) = (E)$, so ist $(\Delta_1) = (E)$, also $r_1^{(1)} = r_1^{(2)} = \ldots = r_1^{(n)} = 1$.

4. Bevor wir weitere Folgerungen aus dem Gleichungssystem (I) ziehen, wollen wir zeigen, daß in der obigen Zuordnung (für jedes k) *zu inversen Klassen konjugierte komplexe Zahlen gehören*, d. h. sind die Klassen $\mathfrak{C}_\alpha$ und $\mathfrak{C}_\beta$ invers, so gilt $\overline{r_\alpha^{(k)}} = r_\beta^{(k)}$[9] oder $(\overline{\Delta_\alpha}) = (\Delta_\beta)$. Aus der Gleichung $(\Delta_\alpha) = (U)^{-1}(\mathfrak{C}_\alpha)(U) = \overline{(U)'}\,(\mathfrak{C}_\alpha)(U)$ folgt nämlich sofort die Gleichung $(\overline{\Delta_\alpha})' = (\overline{U})'\,(\overline{\mathfrak{C}_\alpha})'\,(U)$, und da $(\mathfrak{C}_\alpha)$ reell ist, so hat man $(\overline{\mathfrak{C}_\alpha})' = (\mathfrak{C}_\alpha)' = (\mathfrak{C}_\beta)$; und da endlich für die Diagonalmatrix (Δ_α) offenbar $(\Delta_\alpha)' = (\Delta_\alpha)$ gilt, so folgt in der Tat:

$$(\overline{\Delta_\alpha}) = (U)^{-1}(\mathfrak{C}_\beta)(U) = (\Delta_\beta).$$

5. Wir kehren nun zu den Gleichungen (I) zurück. Durch Summieren erhält man hieraus die Beziehungen

$$\sum_{k=1}^{n} r_\alpha^{(k)} r_\beta^{(k)} = \sum_{\gamma=1}^{h} c_{\alpha\beta\gamma} \sum_{k=1}^{n} r_\gamma^{(k)} \qquad (\alpha, \beta = 1, 2, \ldots, h);$$

die hier auftretenden Summen

$$\sum_{k=1}^{n} r_\gamma^{(k)} \qquad (\gamma = 1, 2, \ldots, k)$$

können leicht berechnet werden. Diese Summe ist nämlich nichts anderes als die Spur der Matrix (Δ_γ). Bekanntlich ist die Spur einer Matrix — als Summe der Wurzeln der zugehörigen charakteristischen Gleichung — orthogonal-invariant, und daher ist diese Summe gleich der Spur der Matrix $(\mathfrak{C}_\gamma)$, d. h. der Summe ihrer Diagonalelemente. Ist $\mathfrak{C}_\gamma$ nicht die Einheitsklasse, so ist — wie gezeigt — jedes Diagonalelement von $(\mathfrak{C}_\gamma)$ und somit auch ihre Summe gleich 0; im Falle der Einheitsklasse ist aber wegen $r_1^{(k)} = 1$ die Summe gleich n. Folglich ist

$$\sum_{k=1}^{n} r_\alpha^{(k)} r_\beta^{(k)} = c_{\alpha\beta 1}\, n,$$

und da $c_{\alpha\beta 1} = n_\alpha = n_\beta$ für inverse Klassen $\mathfrak{C}_\alpha$, $\mathfrak{C}_\beta$ (vgl. 1) und $c_{\alpha\beta 1} = 0$ sonst, ergibt sich:

$$\sum_{k=1}^{n} r_\alpha^{(k)} r_\beta^{(k)} = \begin{cases} n\, n_\alpha & \text{für inverse Klassen } \mathfrak{C}_\alpha, \mathfrak{C}_\beta, \\ 0 & \text{für nicht inverse Klassen } \mathfrak{C}_\alpha, \mathfrak{C}_\beta. \end{cases}$$

Auf Grund unserer Bemerkung über die zu inversen Klassen gehörigen Zahlen (vgl. 4) können wir diese Gleichungen auch in der Form aufschreiben:

$$\sum_{k=1}^{n} r_\alpha^{(k)} r_\beta^{(k)} = \begin{cases} n\, n_\alpha & \text{für } \alpha = \beta, \\ 0 & \text{für } \alpha \neq \beta. \end{cases} \tag{2}$$

[9] Die Konjugierte der komplexen Zahl a wird mit $\bar{a}$ bezeichnet.

6. Die aus den Diagonalmatrizen (Δ_p) gewonnenen n Wertsysteme

$$(3) \qquad (r_1^{(k)}, r_2^{(k)}, \ldots, r_n^{(k)}) \qquad (k = 1, 2, \ldots, n)$$

sind nicht alle verschieden. (Das k_1-te und das k_2-te Wertsystem sind dann gleich, wenn

$$r_1^{(k_1)} = r_1^{(k_2)}, \quad r_2^{(k_1)} = r_2^{(k_2)}, \ldots, r_h^{(k_1)} = r_h^{(k_2)}.)$$

In der Theorie der Gruppencharaktere spielt der Satz eine entscheidende Rolle, daß *unter den obigen Wertsystemen genau h verschiedene vorkommen.* Diese Behauptung werden wir in *zwei Schritten* beweisen; zuerst zeigen wir, daß die Anzahl der verschiedenen Wertsysteme nicht größer als n, und danach, daß sie nicht kleiner als n sein kann.

Die erste Behauptung kann folgendermaßen bewiesen werden: Ist die Anzahl der verschiedenen Wertsysteme gleich h', so kann man solche Zahlen $u_1, u_2, \ldots, u_h$ finden, daß die Ausdrücke

$$r_1^{(k)} u_1 + r_2^{(k)} u_2 + \cdots + r_h^{(k)} u_h = r^{(k)} \qquad (k = 1, 2, \ldots, n)$$

h' verschiedene Werte liefern. Aus dem Gleichungssystem (I) folgt sofort

$$r_\alpha^{(k)} \sum_{\beta=1}^{h} u_\beta r_\beta^{(k)} = \sum_{\beta,\gamma=1}^{h} c_{\alpha\beta\gamma} u_\beta r_\gamma^{(k)},$$

also — wenn man der Kürze wegen die Bezeichnung

$$\sum_{\beta=1}^{h} c_{\alpha\beta\gamma} u_\beta = d_{\alpha\gamma} \qquad (\alpha, \gamma = 1, 2, \ldots, h)$$

einführt —

$$r^{(k)} r_\alpha^{(k)} = \sum_{\gamma=1}^{h} d_{\alpha\gamma} r_\gamma^{(k)} \qquad (\alpha = 1, 2, \ldots, h).$$

Bei festem k ist dieses Gleichungssystem homogen linear in bezug auf die Größen $r_1^{(k)} = 1$, $r_2^{(k)}, \ldots, r_h^{(k)}$, und so ergibt sich sofort, daß $r^{(k)}$ die folgende Gleichung h-ten Grades erfüllt:

$$\begin{vmatrix} d_{11} - r^{(k)} & d_{12} & \ldots & d_{1h} \\ d_{21} & d_{22} - r^{(k)} & \ldots & d_{2h} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ d_{h1} & d_{h2} & \ldots & d_{hh} - r^{(k)} \end{vmatrix} = 0.$$

Da die Größen $d_{\alpha\gamma}$ für alle k gleich sind, so folgt, daß $r^{(k)}$ höchstens h verschiedene Werte annehmen kann, d. h. $h' \leq h$.

7. Zum Beweis der Behauptung $h' \geq h$ führen wir folgende Bezeichnungen ein: Die h' verschiedenen unter den Wertsystemen (3) seien mit

$$(3') \qquad \varrho_1^{(k)}, \ \varrho_2^{(k)}, \ldots, \ \varrho_h^{(k)} \qquad (k = 1, 2, \ldots, h')$$

bezeichnet und wir nehmen an, daß das k-te Wertsystem (3′) unter den Wertsystemen (3) genau f_k-mal auftritt; f_k ist also eine positive ganze Zahl und $f_1 + f_2 + \cdots + f_{h'} = n$. Die Gleichungen (2) können dann in der Form

$$\sum_{k=1}^{h'} f_k \, \varrho_\alpha^{(k)} \overline{\varrho_\beta^{(k)}} = \begin{cases} n\, n_\alpha & (\text{für } \alpha = \beta) \\ 0 & (\text{für } \alpha \neq \beta), \end{cases}$$

oder wenn man die übliche Bezeichnung

$$\delta_{\alpha\beta} = \begin{cases} 1 & (\text{für } \alpha = \beta) \\ 0 & (\text{für } \alpha \neq \beta) \end{cases}$$

benützt, in der Form

$$\sum_{k=1}^{h'} \sqrt{\frac{f_k}{n n_\alpha}} \, \varrho_\alpha^{(k)} \sqrt{\frac{f_k}{n n_\beta}} \, \overline{\varrho_\beta^{(k)}} = \delta_{\alpha\beta} \tag{4}$$

geschrieben werden.

Diese Gleichungen können auch so interpretiert werden, daß die aus h' Zeilen und h Spalten bestehende Matrix

$$(M) = \begin{pmatrix} \sqrt{\frac{f_1}{n n_1}} \varrho_1^{(1)} & \sqrt{\frac{f_1}{n n_2}} \varrho_2^{(1)} & \cdots & \sqrt{\frac{f_1}{n n_h}} \varrho_h^{(1)} \\ \sqrt{\frac{f_2}{n n_1}} \varrho_1^{(2)} & \sqrt{\frac{f_2}{n n_2}} \varrho_2^{(2)} & \cdots & \sqrt{\frac{f_2}{n n_h}} \varrho_h^{(2)} \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots & \cdots\cdots \\ \sqrt{\frac{f_{h'}}{n n_1}} \varrho_1^{(h')} & \sqrt{\frac{f_{h'}}{n n_2}} \varrho_2^{(h')} & \cdots & \sqrt{\frac{f_{h'}}{n n_h}} \varrho_h^{(h')} \end{pmatrix}$$

»spaltenweise« orthogonal ist. Daraus folgt aber, daß die in den einzelnen Spalten stehenden Wertsysteme (mit h' Komponenten) linear unabhängig sind. Würden nämlich die Zusammenhänge

$$\sum_{\alpha=1}^{h} \sqrt{\frac{f_k}{n n_\alpha}} \, \varrho_\alpha^{(k)} x_\alpha = 0 \qquad (k = 1, 2, \ldots, h')$$

bestehen, so würde durch Komposition mit den Größen $\sqrt{\frac{f_k}{n n_\beta}} \, \overline{\varrho_\beta^{(k)}}$ folgen, daß $x_\beta = 0$. Da es aber im Bereiche der Wertsysteme mit h' Komponenten nicht mehr als h' linear unabhängige geben kann, so ist notwendigerweise $h \leq h'$; zusammen mit dem Ergebnis der vorigen Nummer ergibt das $h' = h$.

8. Die obige Matrix (M) ist also eine *quadratische orthogonale* Matrix, und demnach bestehen neben den Relationen (4) der »spaltenweise« Orthogonalität auch die Relationen

$$\sum_{k=1}^{h} \sqrt{\frac{f_a}{n n_k}} \, \varrho_k^{(a)} \sqrt{\frac{f_b}{n n_k}} \, \overline{\varrho_k^{(b)}} = \delta_{ab} \qquad (a, b = 1, 2, \ldots, h) \tag{5}$$

der »zeilenweise« Orthogonalität.

Aus diesen Überlegungen folgt auch, daß *die Frobeniusschen Gleichungen* (I) h verschiedene Lösungsysteme besitzen und diese eben durch die h Wertsysteme (3′) angegeben sind.

Unsere bisherigen Resultate — insbesondere die Orthogonalität der Matrix (M) — enthalten schon die Grundsätze der Frobeniusschen Theorie der Gruppencharaktere. Der Übergang geschieht auf Grund folgender Definition:

Jeder Gruppencharakter (wir werden insgesamt h Gruppencharaktere definieren) ordnet jedem Gruppenelement je eine Zahl zu, *ist also eine auf der Gruppe definierte Funktion.* Diese Zuordnungen sind derart, daß den konjugierten Elementen dieselbe Zahl entspricht (der Gruppencharakter ist also eine »Klassenfunktion«). Die h Gruppencharaktere werden wir mit $\chi^{(1)}, \chi^{(2)}, \ldots, \chi^{(h)}$ bezeichnen; wenn die Klasse $\mathfrak{C}_p$ aus den Elementen $A_1, A_2, \ldots, A_{n_p}$ besteht, dann ist

$$\chi^{(k)}(A_1) = \chi^{(k)}(A_2) = \cdots = \chi^{(k)}(A_{n_p}) \qquad (k = 1, 2, \ldots, h)$$

und dieser gemeinsame Wert wird mit $\chi^{(k)}(\mathfrak{C}_p)$ bezeichnet. All das vorausgeschickt, definieren wir den k-ten Gruppencharakter als

$$\chi^{(k)}(\mathfrak{C}_p) = \frac{\sqrt{f_k}}{n_p}\,\varrho_p^{(k)} \qquad (k = 1, 2, \ldots, h;\ p = 1, 2, \ldots, h). \tag{6}$$

(Daß Frobenius die Gruppencharaktere nach dieser Formel und nicht etwa einfach durch die Zahlen $\varrho_p^{(k)}$ definiert hat, hat seinen Grund in der Theorie der linearen Transformationen; hierauf werden wir in der folgenden Mitteilung eingehen.)

9. Auf Grund dieser Definition nimmt die k-te Zeile der quadratischen Matrix (M) folgende Form an:

$$\left(\sqrt{\frac{n_1}{n}}\,\chi^{(k)}(\mathfrak{C}_1),\ \sqrt{\frac{n_2}{n}}\,\chi^{(k)}(\mathfrak{C}_2),\ \ldots,\ \sqrt{\frac{n_k}{n}}\,\chi^{(k)}(\mathfrak{C}_h)\right),$$

und die Orthogonalitätsrelationen (4) und (5) liefern die Zusammenhänge

$$\frac{\sqrt{n_\alpha n_\beta}}{n}\sum_{k=1}^{h}\chi^{(k)}(\mathfrak{C}_\alpha)\,\overline{\chi^{(k)}(\mathfrak{C}_\beta)} = \delta_{\alpha\beta}\,, \tag{4′}$$

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{h} n_k\,\chi^{(a)}(\mathfrak{C}_k)\ \ \overline{\chi^{(b)}(\mathfrak{C}_k)} = \delta_{\alpha\beta}\,. \tag{5′}$$

Die Gleichungen (5′) lassen sich auch in der Form schreiben:

$$\frac{1}{n}\sum_{(A)}\chi^{(a)}(A)\,\overline{\chi^{(b)}(A)} = \delta_{ab}\,,$$

wo die Summation auf alle Elemente der Gruppe erstreckt werden soll.

Auf Grund des Gleichungssystems (I) erhalten wir endlich die Gleichungen

$$\frac{n_\alpha n_\beta}{\sqrt{f_k}}\,\chi^{(k)}(\mathfrak{C}_\alpha)\,\chi^{(k)}(\mathfrak{C}_\beta) = \sum_{\gamma=1}^{h} c_{\alpha\beta\gamma}\,n_\gamma\,\chi^{(k)}(\mathfrak{C}_\gamma)\,. \tag{I′}$$

Wir wollen noch bemerken, daß

$$\chi^{(k)}(A^{-1}) = \overline{\chi^{(k)}(A)}$$

(vgl. 4) und daß das Gleichungsystem (I'), dessen Koeffizienten ja reell sind, auch die Zahlen $\overline{\chi^{(k)}(\mathfrak{C})}$ als Lösungen besitzt. Folglich ist auch

$$\overline{\chi^{(k)}(\mathfrak{C}_1)},\ \overline{\chi^{(k)}(\mathfrak{C}_2)},\ \ldots,\ \overline{\chi^{(k)}(\mathfrak{C}_h)} \qquad (k = 1, 2, \ldots, h)$$

einer der h Gruppencharaktere; dieser Charakter heißt der inverse oder konjugierte des Charakters $\chi^{(k)}$.

Die Beziehungen (4') und (5') sind grundlegende Eigenschaften der Gruppencharaktere; es sind diese, die sich auch auf gewisse unendliche Gruppen übertragen lassen.[10] Frobenius hat außerdem gezeigt, daß die Zahlen $\sqrt{f_k}$ ganze Zahlen sind. Ich möchte diesen Satz hier nicht beweisen, da dieser sich aus den Ergebnissen meiner späteren Mitteilung ergibt. Ich halte die Tatsache für wichtig, daß sich die grundlegenden Eigenschaften der Gruppencharaktere auch ohne Heranziehung der Theorie der irreduziblen linearen Transformationen völlig elementar begründen lassen.

[10] Nämlich (wie ich in einer später erscheinenden Arbeit zeigen werde) auf solche unendliche Gruppen, in denen jede Klasse aus endlich vielen Elementen besteht.

Über die Theorie der Gruppencharaktere*

(Zweite Mitteilung)

In der ersten Mitteilung (Matematikai és Fizikai Lapok, Bd. **38**, S. 132) habe ich ein Verfahren mitgeteilt, das einfach und ohne irgendeine wesentliche Rechnung zum Begriff und zu den grundlegenden Eigenschaften der Gruppencharaktere führt. In dieser Arbeit möchte ich zeigen, wie dieses Verfahren zur wichtigsten Anwendung der Gruppencharaktere, nämlich zur Theorie der Darstellungen der endlichen Gruppen führt.

Die zu beweisenden Sätze stammen überwiegend von Frobenius selbst (siehe Anmerkung[2] der ersten Mitteilung); einige Hilfssätze treten erst in den diesbezüglichen Untersuchungen von Burnside und Schur auf. Ich halte es auch hier nicht notwendig, daß ich bei jedem einzelnen Satz die Literaturhinweise angebe.

Über die Darstellung endlicher Gruppen

Wenn jedem Element

$$A, B, C, \ldots$$

einer gegebenen Gruppe von der Ordnung n je eine Matrix (ν-ter Ordnung)

$$(T_A), (T_B), (T_C), \ldots \tag{7}$$

derart zugeordnet wird, daß die Beziehung

$$(T_{XY}) = (T_X)(T_Y) \qquad (X, Y = A, B, C, \ldots)$$

gilt, dann bilden diese Matrizen — bzw. die entsprechenden linearen Transformationen — eine *Darstellung* T unserer Gruppe von der Ordnung ν. Wir werden nur solche Darstellungen betrachten, bei denen die Determinanten der Matrizen nicht verschwinden. Dann ist offenbar $(T_E) = (E)$ und $(T_{A^{-1}}) = (T_A)^{-1}$. Die reguläre Darstellung $(T_A) = (A)$, auf die wir den Begriff der Gruppencharaktere begründet haben, ist ein Beispiel für diesen allgemeinen Begriff; ein anderes (triviales) Beispiel erhält man, wenn man alle Matrizen $(T_A), (T_B), (T_C), \ldots$ mit der Einheitsmatrix der Ordnung ν gleichsetzt. Ist (P) eine Matrix der Ordnung ν, die eine Inverse besitzt, so bilden auch die Matrizen

$$(P)^{-1}(T_X)(P) \qquad (X = A, B, C, \ldots)$$

* Eine der letzten Arbeiten unseres hingeschiedenen ausgezeichneten Gelehrten *(Die Redaktion)*.

eine Darstellung unserer Gruppe; wir nennen diese mit der Darstellung (7) *äquivalent.* Der Begriff der Äquivalenz ist reflexiv, symmetrisch und transitiv.

Ebenso wie im Falle der regulären Darstellung können wir auch jetzt jeder Klasse der Gruppe je eine Matrix zuordnen. Besteht nämlich die Klasse $\mathfrak{C}_p$ aus den Elementen A_1, A_2, ..., A_{n_p}, so ordnen wir dieser Klasse die Matrix

$$(T_{\mathfrak{C}_p}) = (T_{A_1}) + (T_{A_2}) + \ldots + (T_{A_{n_p}})$$

zu. Die Gleichung (1) der Klassenkomposition geht dann unmittelbar in die folgende Matrixgleichung über:

$$(1'') \qquad (T_{\mathfrak{C}_\alpha})(T_{\mathfrak{C}_\beta}) = (T_{\mathfrak{C}_\beta})(T_{\mathfrak{C}_\alpha}) = \sum_{\gamma=1}^{h} c_{\alpha\beta\gamma}\,(T_{\mathfrak{C}_\gamma}).$$

Man kann leicht einsehen, daß jede Matrix $(T_{\mathfrak{C}_p})$ $(p = 1, 2, \ldots, h)$ mit den Matrizen (T_A), (T_B), (T_C), ... vertauschbar ist. Die Relation $(T_{\mathfrak{C}_p})(T_A) = (T_A)(T_{\mathfrak{C}_p})$ ist nämlich eine unmittelbare Folge der Tatsache, daß die Gesamtheit der Elemente A_1A, A_2A, ..., $A_{n_p}A$ mit der Gesamtheit der Elemente $AA_1, AA_2, \ldots, AA_{n_p}$ übereinstimmt.

Wir sollen noch den Begriff der reduziblen bzw. irreduziblen Darstellungen einführen. Zu diesem Zweck pflegt man die folgende Ausdrucksweise anzuwenden. Die zur Matrix (P) ν-ter Ordnung gehörige Transformation des ν-dimensionalen Raumes möge den Punkt $\mathfrak{x}$ mit den Koordinaten $x_1, x_2, \ldots, x_\nu$ in den Punkt mit den Koordinaten $x_1', x_2', \ldots, x_\nu'$ überführen; diesen werden wir mit $\mathfrak{x}' = (P)\,\mathfrak{x}$ bezeichnen. Sind $\mathfrak{x}'$, $\mathfrak{x}''$, ..., $\mathfrak{x}^{(k)}$ beliebige Punkte dieses Raumes, so bildet die Gesamtheit der Punkte $c'\,\mathfrak{x}' + c''\,\mathfrak{x}'' + \ldots + c^{(k)}\,\mathfrak{x}^{(k)}$, wobei $c', c'', \ldots, c^{(k)}$ beliebige Konstanten sind, einen linearen Teil dieses Raumes. Die unter (7) angegebene Darstellung T heißt nun *reduzibel* (und im entgegensetzten Falle *irreduzibel*), falls es einen *eigentlichen* linearen Teil des ν-dimensionalen Raumes gibt, der bei jeder Transformation $(T_A), (T_B), (T_C), \ldots$ in sich übergeht. Mit anderen Worten, die Bedingung der Reduzibilität ist, daß es Punkte $\mathfrak{x}', \mathfrak{x}'', \ldots, \mathfrak{x}^{(k)}$ in einer Anzahl $k < \nu$ gibt, so daß für jede der Matrizen (7) Beziehungen von der Gestalt

$$(T)\,\mathfrak{x}^{(p)} = c_T'\,\mathfrak{x}' + c_T''\,\mathfrak{y}'' + \ldots + c_T^{(k)}\,\mathfrak{x}^{(k)} \qquad \begin{matrix}(p = 1, 2, \ldots, k)\\ (T = T_A, T_B, T_C, \ldots)\end{matrix}$$

bestehen. Aus dieser Definition folgt unmittelbar, daß jede einer reduziblen Darstellung äquivalente Darstellung ebenfalls reduzibel ist.

2. Auf den Zusammenhang der irreduziblen Darstellungen mit den Gruppencharakteren bzw. mit dem Frobeniusschen Gleichungssystem wird man auf Grund des folgenden Satzes geführt, der ein spezieller Fall eines von Burnside stammenden Satzes ist. *Ist die Matrix* (P) *mit allen Matrizen der irreduziblen Darstellung* T *vertauschbar, so ist* $(P) = \varrho(E)$, *wobei* ϱ *eine Zahl und* (E) *die Einheitsmatrix* ν*-ter Ordnung bezeichnet.*

Der Beweis des Satzes ist sehr einfach. Man bestimme ϱ so, daß die Determinante von $(P) - \varrho(E)$ verschwindet. Wäre diese Differenz nicht identisch gleich 0 **, so würde sich die allgemeine Lösung des homogenen Gleichungssystems

** D. h. gleich der Nullmatrix *(Anm. des Herausgebers).*

(8) $$((P) - \varrho(E))\,\mathfrak{x} = 0$$

aus $k < \nu$ linear unabhängigen Lösungen $\mathfrak{x}', \mathfrak{x}'', \ldots, \mathfrak{x}^{(k)}$ in der Form $c'\mathfrak{x}' + c''\mathfrak{x}'' + \ldots + c^{(k)}\mathfrak{x}^{(k)}$ ergeben. Wegen $(T)(P) = (P)(T)$ $(T = T_A, T_B, T_C, \ldots)$ würden die Gleichungen

$$((P) - \varrho(E))(T)\,\mathfrak{x}^{(p)} = (T)\,((P) - \varrho(E))\;\mathfrak{x}^{(p)} = 0 \qquad (p = 1, 2, \ldots, k)$$

bestehen, d. h. $(T)\,\mathfrak{x}^{(p)}$ wäre auch eine Lösung der Gleichung (8). Folglich wäre

$$(T)\;\mathfrak{x}^{(p)} = c'\;\mathfrak{x}' + c''\;\mathfrak{x}'' + \ldots + c^{(k)}\;\mathfrak{x}^{(k)},$$

im Gegensatz zur Voraussetzung, daß die Darstellung T irreduzibel ist. Also ist tatsächlich

$$(P) - \varrho(E) = 0.$$

Eine wichtige Folge dieses Satzes ist, daß *im Falle einer irreduziblen Darstellung die den Klassen der Gruppe zugeordneten Matrizen alle skalare Vielfachen der Einheitsmatrix ν-ter Ordnung sind:*

$$(T_{\mathfrak{C}_p}) = \varrho_p(E).$$

Aus der Relation (1″) folgt unmittelbar, daß diese Zahlen ϱ_p das Frobeniussche Gleichungssystem (I) erfüllen.

Die Zahlen ϱ_p lassen sich durch die Spuren der Matrizen (7) leicht ausdrücken; besteht die Klasse $\mathfrak{C}_p$ aus den Elementen $A_1, A_2, \ldots, A_{n_p}$, so kann leicht bewiesen werden, daß

$$\mathrm{Sp}\,(T_{A_1}) = \mathrm{Sp}\,(T_{A_2}) = \cdots = \mathrm{Sp}\,(T_{A_{n_p}}) = \frac{\nu\varrho_p}{n_p}\,.$$

Die Gleichheit der Spuren ist nämlich eine Konsequenz der Konjugiertheit der Elemente A_1, $A_2, \ldots, A_{n_p}$; und die Spur der Matrix

$$(T_{A_1}) + (T_{A_2}) + \cdots + (T_{A_{n_p}}) = \varrho_p(E)$$

ist gleich $\nu\varrho_p$. Ist also T eine irreduzible Darstellung ν-ter Ordnung unserer Gruppe und A ein Element der Klasse $\mathfrak{C}_p$, so gilt $\mathrm{Sp}\,(T_A) = \frac{\nu\varrho_p}{n_p}$, wobei $\varrho_1, \varrho_2, \ldots, \varrho_p$ ein Lösungssystem der Gleichungen (I) ist. Wir drücken diesen Umstand so aus, daß *jede irreduzible Darstellung zu einer Lösung des Frobeniusschen Gleichungssystems »gehört«.*

3. Äquivalente Darstellungen gehören offenbar zu derselben Lösung des Gleichungssystems (I). Für die Folgenden ist die Umkehrung dieses Satzes von entscheidender Bedeutung:

Zwei irreduzible Darstellungen, T und T', die — im obigen Sinne — zu derselben Lösung des Frobeniusschen Gleichungssystems gehören, sind äquivalent.

Beweis. Die irreduziblen Darstellungen ν-ter bzw. ν'-ter Ordnung

$$T: \quad (T_A),\ (T_B),\ (T_C),\ \ldots$$

bzw.

$$T': \quad (T'_A),\ (T'_B),\ (T'_C),\ \ldots$$

mögen zu derselben Lösung $\varrho_1, \varrho_2, \ldots, \varrho_h$ von (I) gehören. Wir nehmen an, daß $\nu \geq \nu'$. Wir ergänzen die in der Darstellung T' vorkommenden Matrizen ν'-ter Ordnung mit $\nu - \nu'$ Zeilen und $\nu - \nu'$ Spalten derart, daß die in der Diagonale stehenden neuen Elemente gleich 1, die anderen aber gleich 0 sind. Die so erhaltenen Matrizen ν-ter Ordnung bilden ebenfalls eine Darstellung unserer Gruppe,

$$T'': \qquad (T''_A),\ (T''_B),\ (T''_C), \ldots ;$$

diese ist im Falle $\nu > \nu'$ offenbar reduzibel, und für jedes Element A gilt die Beziehung $\mathrm{Sp}(T''_A) = \mathrm{Sp}(T'_A) + (\nu - \nu')$. Die n-te Potenz jeder in diesen Darstellungen vorkommenden Matrix ist gleich (E), da ja die n-te Potenz jedes Elementes einer Gruppe n-ter Ordnung die Relation $A^n = E$ erfüllt. Folglich ist die Spur jeder hier auftretenden Matrix eine Summe von n-ten Einheitswurzeln, weil ja die Spur einer Matrix gleich der Summe der Wurzeln ihrer sekulären Gleichung ist. Da endlich die zu den Matrizen (T_A) und $(T_{A^{-1}}) = (T_A)^{-1}$ gehörigen charakteristischen Wurzeln reziprok sind, so sind sie — als Einheitswurzeln — komplex-konjugiert. Folglich sind $\mathrm{Sp}(T'_A)$ und $\mathrm{Sp}(T'_{A^{-1}})$ konjugierte Zahlen. Danach ist einfach einzusehen, daß die Summe

$$S = \sum_{(A)} \mathrm{Sp}(T_A)\,\mathrm{Sp}(T''_{A^{-1}}) = \sum_{(A)} \mathrm{Sp}(T_A)\,(\mathrm{Sp}(T'_{A^{-1}}) + \nu - \nu'),$$

wobei A alle Gruppenelemente durchläuft, notwendigerweise positiv (> 0) ist. Aus der Bemerkung über die Spuren von (T'_A) und $(T'_{A^{-1}})$ folgt nämlich

$$S = \sum_{(A)} \mathrm{Sp}(T_A)\,\overline{\mathrm{Sp}(T'_A)} + (\nu - \nu') \sum_{(A)} \mathrm{Sp}(T_A) = \nu\nu' \sum_{k=1}^{h} \frac{\varrho_k\,\overline{\varrho_k}}{n_k} + (\nu - \nu')\,\nu \sum_{k=1}^{h} \varrho_k ;$$

die erste Summe ist größer als 0; die zweite Summe ist aber im Falle $\varrho_1 = n_1$, $\varrho_2 = n_2$, $\ldots$, $\varrho_h = n_h$ gleich n und in allen anderen Fällen gleich 0.[1] Folglich ist wirklich $S > 0$. Bezeichnen wir das Element in der p-ten Zeile und q-ten Spalte der Matrix (T_A) bzw. (T''_A) mit $m_{pq}^{(A)}$ bzw. $m''^{(A)}_{pq}$, so wird

$$\sum_{(A)} \sum_{p,q=1}^{\nu} m_{pp}^{(A^{-1})}\, m''^{(A)}_{qq} > 0 ;$$

demnach gibt es mindestens ein Wertepaar α, β mit

$$\sum_{(A)} m''^{(A)}_{\alpha\alpha}\, m_{\beta\beta}^{(A^{-1})} \neq 0 .$$

Wir bezeichnen mit (P) diejenige Matrix ν-ter Ordnung, in welcher das Element in der α-ten Zeile und β-ten Spalte gleich 1, alle übrigen Elemente aber gleich 0 sind. Dann kann die Matrix

$$Q = \sum_{(A)} (T''_A)\,(P)\,(T_A)^{-1}$$

[1] Dies folgt aus der Beziehung (5) der ersten Mitteilung, wenn man darin das Wertsystem $\varrho_k^{(a)}$ mit den hier auftretenden ϱ_k, das von diesem verschiedenen Lösungssystem $\varrho_k^{(b)}$ aber mit dem trivialen Lösungssystem n_k zusammenfallen läßt. (Vgl. Anmerkung [8] der ersten Mitteilung.)

gewiß nicht identisch 0 sein, weil ihr Element in der α-ten Zeile und β-ten Spalte gleich $\sum_{(A)} m_{\alpha\alpha}^{(A)} m_{\beta\beta}^{(A^{-1})} \neq 0$ ist. Andererseits gilt für ein beliebiges Element X unserer Gruppe

$$(T''_X)(Q) = \sum_{(A)} (T''_X)(T''_A)(P)(T_A)^{-1} = \Big\{ \sum_{(A)} (T''_{XA})(P)\ (T_{XA})^{-1} \Big\} (T_X),$$

und da mit A auch XA alle Elemente der Gruppe durchläuft, so wird

$$(T''_X)(Q) = (Q)(T_X) \qquad (X = A, B, C, \ldots).$$

Wäre die Determinante der Matrix (Q) gleich 0, so würde es linear unabhängige Lösungen $\mathfrak{x}', \mathfrak{x}'', \ldots, \mathfrak{x}^{(k)}$ $(k < \nu)$ des homogenen Gleichungssystems $(Q)\mathfrak{x} = 0$ geben; aus der letzten Beziehung würde sofort folgen

$$(Q)(T_X)\ \mathfrak{x}^{(p)} = 0 \qquad (p = 1, 2, \ldots, k)$$

und so wäre

$$(T_X)\,\mathfrak{y}^{(p)} = c'_X\,\mathfrak{y}' + c''_X\,\mathfrak{y}'' + \ldots + c_X^{(k)}\,\mathfrak{y}^{(k)},$$

im Gegensatz zur Irreduzibilität der Darstellung.

Also existiert $(Q)^{-1}$ und man hat

$$(T''_X) = (Q)(T_X)(Q)^{-1} \qquad (X = A, B, C, \ldots),$$

woraus folgt, daß auch die Darstellung T'' irreduzibel und folglich notwendigerweise $\nu' = \nu$ ist, d. h. T'' ist identisch mit T', und T' ist äquivalent zu T.

Aus den Gesagten kann man darauf schließen, daß *die Anzahl der inäquivalenten irreduziblen Darstellungen nicht größer als h (die Anzahl der in der Gruppe enthaltenen Klassen) ist und daß zwei irreduzible Darstellungen dann und nur dann äquivalent sind, wenn die Spuren der entsprechenden* (d. h. dem gleichen Gruppenelement zugeordneten) *Matrizen übereinstimmen.*

4. Die Ordnung der zu einer Lösung $\varrho_1, \varrho_2, \ldots, \varrho_h$ der Frobeniusschen Gleichungen gehörigen irreduziblen Darstellung T können wir auf Grund der obigen leicht berechnen; zu diesem Zweck wird im wesentlichen dieselbe Methode angewendet wie in der zitierten Arbeit von Schur. Bedeutet nämlich (P) wieder die in der vorigen Nummer definierte Matrix, so ist die Matrix $(Q) = \sum_{(A)} (T_A)(P)(T_{A^{-1}})$ mit jeder der Matrizen $(T_A), (T_B), (T_C), \ldots$ vertauschbar und folglich $(Q) = \lambda(E)$. Da ferner jede Matrix in dieser Summe die Spur $\delta_{\alpha\beta}$, (Q) aber die Spur $\nu\lambda$ hat (ν ist die Ordnung der Darstellung T), so ist $n\delta_{\alpha\beta} = \nu\lambda$. Folglich ergibt die Berechnung der Elemente in der p-ten Zeile und q-ten Spalte in der obigen Matrixrelation die Gleichung

$$\sum_{(A)} m_{p\alpha}^{(A)} m_{\beta q}^{(A^{-1})} = \frac{n}{\nu}\,\delta_{\alpha\beta}\,\delta_{pq},$$

also insbesondere (für $p = \alpha$, $q = \beta$) die Gleichung

$$\sum_{(A)} m_{\alpha\alpha}^{(A)} m_{\beta\beta}^{(A^{-1})} = \frac{n}{\nu}\,\delta_{\alpha\beta}.$$

Aus dieser Gleichung folgt unmittelbar

$$\sum_{(A)} \sum_{\alpha,\beta=1}^{\nu} m_{\alpha\alpha}^{(A)} m_{\beta\beta}^{(A^{-1})} = \sum_{(A)} \mathrm{Sp}(T_A)\ \mathrm{Sp}(T_{A^{-1}}) = \sum_{(A)} \mathrm{Sp}(T_A)\ \overline{\mathrm{Sp}(T_A)} = n,$$

woraus wir endlich wegen (10) die Beziehung

$$\nu^2 \sum_{p=1}^{h} n_p \frac{\varrho_p}{n_p} \frac{\overline{\varrho_p}}{n_p} = n$$

erhalten. Wenn wir diese mit der Gleichung (5) in der ersten Mitteilung vergleichen, kommen wir zum Ergebnis $\nu^2 = f$, wobei f die Zahl ist, die angibt, wie oft das Wertsystem $\varrho_1, \varrho_2, \ldots, \varrho_h$ bei der Diagonalform der Klassenmatrizen der regulären Darstellung auftritt. Endlich ergibt sich durch Vergleich der Relation (10) mit der Definition (6) der Gruppencharaktere der Satz, daß *in jeder irreduziblen Darstellung der Gruppe die Spuren der zu den einzelnen Gruppenelementen gehörigen Matrizen einen Gruppencharakter liefern.*[1]

5. Es muß noch gezeigt werden, daß die Anzahl der inäquivalenten irreduziblen Darstellungen unserer Gruppe (von der wir schon festgestellt haben, daß sie nicht größer als h sein kann) gleich h ist. Zu diesem Zweck benutze ich den grundlegenden Satz von Maschke, für die reduziblen Darstellungen, der am einfachsten mit der Einführung des folgenden Begriffs ausgesprochen werden kann. Sind T' und T'' zwei (nicht notwendig verschiedene) Darstellungen unserer Gruppe von der Ordnung ν' bzw. ν'', so liefern die Matrizen $\nu' + \nu''$-ter Ordnung

$$(T_X) = \begin{pmatrix} & & 0 & \ldots & 0 \\ & (T'_X) & \vdots & & \vdots \\ & & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \ldots & 0 & & \\ \vdots & & \vdots & (T''_X) & \\ 0 & \ldots & 0 & & \end{pmatrix} \qquad (X = A, B, C, \ldots)$$

offenbar ebenfalls eine Darstellung unserer Gruppe[2]; wir sagen, diese Darstellung — und alle mit dieser äquivalenten — sei aus den Darstellungen T' und T'' »aufgebaut«, und wir drücken diesen Umstand durch die symbolische Gleichung $T = T' + T''$ aus. Dieser Begriff läßt sich auf den Fall von mehr als zwei Darstellungen verallgemeinern. Der Satz von Maschke besagt nun, daß *jede reduzible Darstellung aus irreduziblen Darstellungen auf diese Weise aufgebaut werden kann.*[3]

Für den Satz von Maschke gibt es heute so viele ganz einfache Beweise, daß ich mich wohl mit dem Aussprechen des Satzes begnügen darf. Nun wenden wir den Satz von Maschke auf die in § 1 der ersten Mitteilung angeführte reguläre Darstellung R. Es seien T', T'', ..., $T^{(k)}$ ($k \leq h$) die (inäquivalenten) irreduziblen Darstellungen der Gruppe, die reguläre Darstellung ist aus diesen aufgebaut:

$$R = g'T' + g''T'' + \cdots + g^{(k)}T^{(k)},$$

[1] In der zitierten Arbeit von Schur wird eben dieser Umstand zur Definition der Gruppencharaktere benützt.

[2] In der Matrix (T_X) stehen also an den letzten ν'' Plätzen der ersten ν' Zeilen, und an den ersten ν' Plätzen der letzten ν'' Zeilen lauter Nullen.

[3] *Math. Annalen*, **52**, 363. Den Beweis von Schur findet man in unserer ersten Mitteilung unter [1] zitierten Aufsatz.

wobei $g', g'', \ldots, g^{(k)}$ nichtnegative ganze Zahlen sind, die zeigen, wie oft die betreffende irreduzible Darstellung zum Aufbau von R verwendet wurde. Die irreduzible Darstellung $T^{(p)}$ sei von der Ordnung $\nu^{(p)}$ $(p = 1, 2, \ldots, k)$ und sie gehöre zur Lösung $\varrho_1^{(p)}, \varrho_2^{(p)}, \ldots, \varrho_h^{(p)}$ des Frobeniusschen Gleichungssystems. Dann ist

$$n = g' \nu' + g'' \nu'' + \cdots + g^{(k)} \nu^{(k)};$$

wenn wir nun die zur Klasse $\mathfrak{C}_a$ gehörige Matrix bilden, dann gelangen wir im Sinne der obigen Aufbauregel zu einer solchen Diagonalmatrix, in deren Diagonale

$$\begin{aligned} g' \nu' &\text{ Elemente gleich } \varrho_a^{(1)}, \\ g'' \nu'' &\text{ Elemente gleich } \varrho_a^{(2)}, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ g^{(k)} \nu^{(k)} &\text{ Elemente gleich } \varrho_a^{(k)} \end{aligned}$$

sind. Da aber — wie wir in § 1 der ersten Mitteilung gesehen haben — bei der regulären Darstellung die Klassenmatrix $(\mathfrak{C}_a)$ äquivalent mit einer Diagonalmatrix ist, in welcher alle $\varrho_a^{(1)}, \varrho_a^{(2)}, \ldots, \varrho_a^{(h)}$ vorkommen, und zwar der Reihe nach f_1-, f_2-, $\ldots, f_h$-mal, so sieht man erstens, daß $k = h$, und zweitens, daß $g' \nu' = f_1$, $g'' \nu'' = f_2, \ldots, g^{(k)} \nu^{(k)} = f_k$, d. h. — im Hinblick auf die in der vorigen Nummer abgeleiteten Relationen $f_p = \nu^{(p)2}$ — $g' = \nu'$, $g'' = \nu''$, $\ldots, g^{(h)} = \nu^{(h)}$. Mit anderen Worten: *die Anzahl der inäquivalenten irreduziblen Darstellungen ist gleich h, und jede tritt beim Aufbau der regulären Darstellung so oft auf, wieviel ihre Ordnung beträgt;* die für die Summe der Produkte gv geltende obige Beziehung geht damit in die Gleichung $n = \nu'^2 + \nu''^2 + \ldots + \nu^{(h)2}$ über.

Weiterhin ergibt sich, ebenfalls mit Hilfe des Satzes von Maschke, daß sich eine beliebige Darstellung T unserer Gruppe in der Form

$$T = \gamma' T' + \gamma'' T'' + \ldots + \gamma^{(h)} T^{(h)}$$

ausdrücken läßt, wobei $\gamma', \gamma'', \ldots, \gamma^{(h)}$ nichtnegative ganze Zahlen sind; die zum Gruppenelement A gehörige Matrix hat also die Spur

$$\gamma' \chi'(A) + \gamma'' \chi''(A) + \ldots + \gamma^{(h)} \chi^{(h)}(A),$$

wobei die Bezeichnung derart gewählt wurde, daß in der irreduziblen Darstellung $T^{(p)}$ die Spur der Matrizen gleich dem Gruppencharakter $\chi^{(p)}(A)$ ist. Hieraus folgt auch, daß *zwei Darstellungen dann und nur dann äquivalent sind, wenn die Spuren der entsprechenden Matrizen gleich sind usw.*

Damit haben wir die wesentlichsten Eigenschaften der Gruppencharaktere erschöpft; ich kann hier nicht auf die Eigenschaften eingehen, die aus diesen durch — mehr oder weniger einfache — Rechnungen folgen.

II. Függelék — Anhang II

Részletek Haar Alfrédnak mint a szegedi egyetem mennyiségtan-természettudományi Kara dékánjának az egyetem 1923. május 29-i évzáró-közgyűlésén tartott előadásából:

»Bolyai János geometriájának jelentősége az egyetemes tudományban.«

(A teljes szöveg megjelent a *Szegedi m. kir. Ferenc József-Tudományegyetem 1922/23—1926/27. évi Beszámolójában*, 65—77. o.)

*

Teile aus dem Vortrag von Alfred Haar, Dekan der Mathematisch-Naturwissenschaftlichen Fakultät der Universität Szeged, in der Schlußsitzung des Studienjahres, am 29. Mai 1923:

»Die Bedeutung der Geometrie von Johann Bolyai für die universelle Wissenschaft.«

(Der vollständige Text ist in den *Berichten der Universität Szeged über die Studienjahre 1922/23—1926/27* erschienen.)

Tekintetes Egyetemi Közgyűlés!

Az 1923-ik év a jubileumok esztendeje. Országos ünnepély keretében ültük meg Petőfi Sándornak, annak a költőnknek 100 éves születésnapját, akiben egy nagy kor nemzeti gondolatát csodáljuk, követendő példának állítva oda súlyos csapásoktól nyögő hazánknak. Megültük Madáchnak, a legnagyobb magyar filozófiai költő születésének centenariumát, akinek halhatatlan műve minden magyar műveltségének elengedhetetlen oszlopa.

De centenariumot hozott ez az esztendő a magyar tudományos életnek is. 100 esztendős évfordulóját ünnepeljük.....annak a levélnek, amit Bolyai János atyjának és mesterének, Bolyai Farkasnak küldött, írván: „a semmiből új, más világot teremtettem", 100 esztendős évfordulóját a Bolyai-féle abszolut geometria felfedezésének.

. . . . . .

Meg akarom kísérelni mai közgyűlésünkön képet adni az ő geometriájáról s arról, hogy milyen jelentősége lett gondolatainak nemcsak a mathematikában, hanem egyetemes természettudományi gondolkozásunkban.

A mathematika két főága: az analysis és a geometria — már történeti fejlődésükben, de lényegükből kifolyólag is — teljesen különböző módon épülnek fel. Az előzőnek — az analysisnek — egyedüli fundamentumai a közönséges egész számok; minden tétele, minden törvénye ennek a tudománynak áll és bukik az egész számoknak — az emberi elme ezen legprimitívebb produktumának — tanával. Úgy értendő ez az állítás, hogy ha valaki — legyen az földi lény vagy földöntúli — elfogadja az egész számokkal való azokat a műveleti szabályokat, melyekkel mi dolgozunk, s melyeknek helyességéhez soha kétely nem fért, az kényszerül elfogadni valamennyi igazságát az analysisnek. Találóan jellemezte ezt a körülményt néhány évtizeddel ezelőtt Kronecker, a nagy német mathematikus, mondván: »Die ganzen Zahlen schuf der liebe Gott, das Übrige ist Menschenswerk«. Tömör kifejezése ez annak a ténynek, hogy az egész analysis a közönséges egész számokból a tiszta logikával épül fel. Elvetni az analysis bármely tételét azt jelentené, hogy kétségbevonni az egész számokat vagy a logikát, mely két terület egyébként egymástól fogalmilag is alig választható el.

Nem így a geometria, amelynek fundamentumaira vonatkoznak a Bolyaiak — apa és fiú — vizsgálatai. A mathematika módszerének, a deductionak megfelelőleg más mód ennek megalapozásánál sem lehetséges, mint bizonyos tételekből kiindulni s ezekből a többit felépíteni. Ilyen kiindulási pontul — ezek játszák itt azt a szerepet, amit az egész-számok az analysisben — természetesen a lehető legegyszerűbb és legszemléletesebb állításokat kell majd választani. Mondom a legszemléletesebbeket s ezzel már utalok az analysis és geometria közti különbségre, ami abban leli magyarázatát, hogy a geometria terünk tulajdonságaival foglalkozva első felépítésében a térszemléletre kell, hogy hivatkozzék. A térszemléletből merítjük azokat a sarkalatos tételeket — axiomáknak mondjuk őket — melyekből kizárólag a tiszta logika segélyével a geometria többi tételeit levezetjük. De hogy a szemlélet nyújtotta és általa evidensként

felismert állítások közül, melyeket állítunk mint bizonyíthatatlant a geometria élére, az bizonyos fokig tetszésünkre, sőt ízlésünkre is van bízva. Ily módon különböző igazságokból kiindulva építhető fel ez az egész disciplina, s ez úgy értendő, hogy az egyik felépítési módban például tétel lesz egy olyan igazság, amelyet a másik felépítésénél kiinduláspontul vettünk és viszont. De minden ilyen felépítésnek bírnia kell az imént jellemzett közös sajátossággal: bizonyos axiomákból kiindulva egyedül a logika felhasználásával a többi igazságot deducálni. Egy ilyen axiomarendszer — a legfontosabb és a legmélyrehatóbb — Euklidesnek, a klasszikus kor egyik legnagyobb mathematikusának művében áll előttünk. Euklides műve, az „Elemek", paradigmájává vált a geometria imént vázolt felépítésének, annak a tudományos módszernek, amelyet utánozni a tudomány többi ágában — a more geometrico való következtetést — évszázadokon át igyekeztek a tudósok. A legmerevebb és legszigorúbb rendszer ez, a legmeggyőzőbb okoskodás, amelyre érthető módon vágytak a többi tudományágak képviselői. Annyira közkincsévé vált ez a mű az emberiségnek — az angol gimnáziumokban még ma is ezt a 2000 éves tankönyvet tanítják — annyire átment a köztudatba, hogy nélküle ma az egyetemes tudomány bajosan volna elképzelhető. A klasszikus kor racionalizmusának — de individualis és aristokratikus racionalizmusának — a görög művészet és Aristoteles philosophiája mellett legszebb gyümölcse ez az épület, melyről korántsem szabad azt hinni, hogy az Euklides kizárólagos műve. Homeros előtt is voltak poéták, Euklides előtt is geometerek ; nem mint a habokból felmerült Aphrodite, nem egy csapással létesült az emberi elme ezen grandiosus épülete ; Euklides művét ma mint összefoglalását, mint compendiumát tekintjük a korabeli geometriának.

Az Euklidesnél fellépő axiomák között van egy, amely korán magára vonta a mathematikusok figyelmét. Míg a többi olyan egyszerű állításokat tartalmaz, mint pl. két ponton át fektethető egyenes, három ponton át sík stb., hogy kritika tárgyává nem váltak, addig az utolsó axióma, ha nem is kételyt, de legalább azt a kívánságot szülte, hogy bebizonyítsák. Ez az utóbbi axioma azt mondja ki, hogy egy síkban egy adott egyeneshez egy kívüle fekvő ponton át egy és csakis egy párhuzamos vonható. Bebizonyítani ezt az állítást — ez volt évszázadokon át a geometerek álma — nem jelenthet mást, mint a többi axiomából deducálni. S a XVIII. és XIX. században számos ilyen bizonyítás készült, de mindegyikről csakhamar bebizonyosodott, hogy Euklidesnek megelőző axiomáin kívül, egyéb szemléleti tényeket is felhasználnak, tehát nem tesznek mást, mint pótolják a kérdéses axiomát egy másikkal. Évszázadok tudományos munkája után jutott ez a kérdés 100 esztendővel ezelőtt a mi Bolyai Jánosunk kezében abba a stádiumba, hogy választ kaphatunk erre a rejtélyre. Joggal választhatta Bolyai kutatásaiban kiindulási pontjául azt a felfogást, hogy ha ennek a párhuzamosokra vonatkozó axiomának visszavezetése a többire nem sikerült, ennek oka az lehet, hogy ez nem *sikerülhet ;* hogy ez az axioma a logika eszközeivel nem is vezethető le a többiből, s mikor ő ezt teljes szigorral kimutatta, példát adott a mathematika egész újszerű és mélyreható problémáinak, hogy esetleg egy feltett kérdésre nem az a válasz, hogy igaz vagy nem igaz, hanem, hogy eldönthetetlen. Egy új birodalma nyílt meg ezzel a mathematikának s a tudomány deductiokon felépülő világának, mely bőséges termést érlelt meg a legkülönbözőbb disciplinákban. Hogy csak egy példát említsek, a kör quadraturájáról akarok beszélni, erről a sokat vitatott kérdésről, mely 2000 évig foglalkoztatta a tudományt. A probléma a lehető legegyszerűbb : Körzővel és vonalzóval — de egész pontosan — megszerkeszteni egy akkora egyenes vonaldarabot, mely egyenlő egy adott kör kerületével. Hiszen az iskolákban tanított Ludolph-féle szám, akárhány tizedesig írom is fel, még mindig nem lesz tökéletesen pontos. A kör quadraturájának is hasonló a története, mint Euklides axiomájának. Sok sikertelen próbálgatás után végre

másfél emberöltővel ezelőtt Lindemann-nak sikerült kimutatnia, hogy ilyen szerkesztés kivihetetlen, hogy tehát minden tökéletes pontosságot igénylő eljárás szükségképen hamis. Ez az eredmény zárja le a quadratura problémáját ; ez is és sok hasonló mathematikai okoskodás a merész Bolyai János által elsőízben megnyitott csapáson indul el ; abba a birodalomba tartozik, hogy egyes kérdések olyanok, hogy »ignorabimus«-t követelnek válaszul. De az effajta ignorabimus csak újabb diadala a mathematikának, amely tehát ott, ahol nem lehet más választ adni, ezt a körülményt rigorosusan be tudja bizonyítani.

Néhány szót még Bolyai János módszeréről, mellyel erre a csodás eredményre eljutott. Bolyai első kutatásaiban úgy látszik elveti Euklides axiomáját a párhuzamosokról ; feltételezi, hogy egy adott egyeneshez egy megadott ponton át nem egy, hanem 2 párhuzamos vonható ; ekkor könnyen kimutatható, hogy ezen párhuzamos által határolt szögletben fekvő bármely egyenes sem metszi az eredetit. Később erre az utóbbi álláspontra helyezkedett ; van egy szög-let, — amelynek nagysága határozatlan marad — s amely azzal a tulajdonsággal bír, hogy a benne fekvő egyenesek nagysága az eredetit nem metszik ; ha ennek a szögnek nagysága zérussal egyenlő, az Euklides által felállított axiomával van dolgunk; ha nem zérus, egy ettől eltérő állítással. Bolyai már most az említett párhuzamossági axiomát ezzel az új állítással pótolja Euklides levezetéseiben. Ily módon a geometria új tételeit kapja, melyek eltérnek az euklidesi geometria tételeitől, helyesebben mondva csak abban a specialis esetben egyeznek velök, ha az említett szög zérussal egyenlő. Bolyainak minden tételében, minden formulájában szerepel tehát egy szám — mely az említett szög nagyságával függ össze, — úgy, hogy Bolyai nem is egy geometriát, hanem a geometriák egész láncolatát állítja fel ; mindegyiknek formája ugyanaz : logikai consequentiáit keresni az ő axiómáinak, melyek csak egy pontban térnek el Euklideséitől. Bárhogy van választva a kérdéses szög nagysága, mindig a tételeknek egy olyan rendszerére jutunk, melyek ép oly szépen férnek meg egymással, amelyek ép oly tökéletes rendszert alkotnak, mint Euklides tételei. Ebben a körülményben leli magyarázatát az a tény, hogy a párhuzamosság axiomáját nem lehet a többiből levezetni, hiszen egy tőle különböző ép oly jól megfér velök. Ez nagyjában Bolyai módszere, még csak azt jegyzem meg, hogy célszerűség okából nem magát az említett szöget vezeti be formuláiba, hanem egy ezzel egyszerűen összefüggő mennyiséget, amely azonban annál nagyobb mennél kisebb az említett szöglet, úgy hogy az Euklidesi geometria annak a határesetnek felel meg, amikor ez a Bolyai-féle szám végtelen nagy.

De már most joggal feltehető az a kérdés, hogy a mi terünkben melyik geometria érvényes : Euklidesé-e vagy azok egyike, amelyet Bolyai felállított? Ez a kérdés vezet át a filozofiára, hiszen világos, hogy meg sem fogalmazható problemánk anélkül, hogy a tér fogalma ne tisztáztassék. Nem áll ellentétben ez a probléma a geometriáról való felfogásunkkal, hiszen a geometria nem egyéb mint az axiomák logikai következményeinek tanulmányozása s így csak indirect az axiomákon át függ össze a térrel. Első pillanatban úgy látszik, hogy kérdésünkre a válasz igen egyszerű. Vegyünk pl. egy háromszöget s nézzük meg, vizsgáljuk meg tényleges mérés útján, hogy melyik tétel érvényes benne : Euklidesé-e vagy a megfelelő Bolyaié. Pl. mérjük meg szögeinek összegét, 180° lesz-e mint azt Euklides kívánja, vagy 180°-nál kevesebb, mint azt a Bolyai-féle geometria előírja. Világos, hogy lehetőleg nagy háromszögekkel kell majd dolgoznunk, hogy a mérés lehetőleg pontos lehessen. Gauss volt az első, aki ebből a szempontból 3 hegycsúcs alkotta háromszög szögeit kimérte, de nem talált eltérést Euklides állításától. Következik-e ebből a Bolyai-féle geometria csődje? Korántsem! mondottam u. i. hogy Bolyai formuláiban szerepel még egy numerikus állandó, s ha ez elég nagy, Bolyai tételei tetszőleges pontossággal símulnak Euklideséihez. A mérés sohasem tökéletesen pontos ; bizonyos hibák

— persze igen szűk hibakorlátok között — mindig lehetségesek, sőt valószínűek is. Gauss mérései csak ezt mutatják, hogy a Bolyai-féle szám mindenesetre igen nagy. Azóta ezeket a vizsgálatokat rendkívüli módon kiélezték. Az astronomia a nagy számok eldorádója. Akkora távolságokkal dolgozik, hogy egységül a fényévet használja, azt a távolságot, amelyet a fénysugár egy esztendő alatt befut. A fénysugár, ez a leggyorsabb futárja a természetnek, másodpercenként 300.000 km.-t fut be, s ebből képet alkothatunk arról a távolságról, amelynek befutására 1 év szükséges. Az astronomia már most olyan távolságokat mér, melyek sok 1000 fényévvel egyenlők; vizsgálat tárgyává tették, hogy ilyen óriási háromszögre, mely tételek érvényesek, Euklideséi vagy Bolyaiéi. Az eredmény az volt, hogy az euklidesi tételektől eltéréseket megállapítani nem sikerült, s hogy a Bolyai-féle konstansnak igen nagynak kell lennie. Sőt még nagyságát is megállapították: legalább 5 milliószor akkorának kell lennie mint a Földnek távolsága a Naptól; de ha ekkora, vagy ennél nagyobb, akkor Bolyai formulái ép oly jól egyeznek a tapasztalatokkal, mint Euklideséi. Milyen következtetés vonható le ebből a tér megismerésére vonatkozólag? Természetesen ez attól fog függni, hogy milyen filozofiai rendszert elfogadva milyen képzetet alkotunk magunknak a térről. Az empiristának, aki számára a tér az, amit megmér, azt az eredményt szolgáltatja, hogy sohasem fogja eldönteni tudni, hogy az általa kimért adatok között, s ezek alkotják az ő terét, ha tökéletes pontosságra törekszik, mely tételek érvényesek. Mert remélhető, sőt valószínű, hogy az astronomia az évszázadok folyamán még sokkal nagyobb távolságokig fog elhatolni, hogy mérési pontosságát még fokozni fogja, de ha ezek eltérést az Euklidesi geometriától nem fognak eredményezni, akkor a Bolyai-féle konstanst elég nagynak választva el fogjuk érni, hogy Bolyai tételei épp oly jól egyezzenek a tapasztalatokkal. Geometriai mérések csak úgy dönthetik meg Bolyai rendszerét, ha megdöntik Euklidesét.

A psychologistának és azoknál a filozófiai rendszereknél, amelyeknél a tér csak az emberi lélek egy funkciója, az emberi lélek egy tulajdonságát jelenti Bolyai felfedezése. Mert hiszen ezeknél a rendszereknél a geometria minden tétele a lélek tulajdonságává válik. A logistának, aki számára a tér a tapasztalat olyan praesuppositiója, amely nélkül megismerés nincs, a megismerésre vonatkozó állítást tartalmaz. Minden filozofiai rendszerbe egy újabb ignorabimus-t dob be Bolyai felfedezése; akármint interpretáljuk a teret, a mondott kereteken belül egy eldöntetlen kérdés marad. S ez a filozofiai ignorabimus különbözik attól a mathematikai ignorabimustól, amelyről előbb beszéltem, mert míg az utóbbi egy logikai lehetetlenséget nem csak kimond, hanem bizonyít, tehát voltaképen positiv állítást tartalmaz, az előző — a filozofiai — tényleges kételyt hagy hátra.

Újabb impulzust nyert ez az egész felfogás másfél évtizeddel ezelőtt, amikor Lorentz és Einstein kutatásai alapján Minkowski mathematikai formába öntötte azokat az eredményeket, amelyeket hosszas kísérletezés alapján a physikusok az elektromos, mágneses és ezzel együtt a fénytüneményeket leírására nyertek. Hogy ezeknek összefüggését a Bolyai-féle eszmekörrel vázolhassam, néhány szóval kell kitérnem a többdimensiós sokaságok elméletére, amelynek systematikus tárgyalása Riemanntól ered. A síkot 2 dimensiósnak mondjuk, mert benne minden pont helyzetét két számadattal jellemezni tudom. Ha megadom pl. hogy ezen az asztallapon egy pont hány cm.-nyire van az asztal két szélétől, a pont helyzetét megadtam. Hasonlóan a tér 3 dimensiós, mert 3 számadatra van szükség, hogy benne egy pont helyzetét meghatározhassuk. Tudnunk kell pl. ebben a teremben, avégből, hogy egy pont helyzete meg legyen határozva, hogy milyen mélyen fekszik a mennyezet alatt, és milyen távol két oldalfaltól. Ha már most a tér minden tulajdonságát, mely végelemzésben pontjainak tulajdonsága, átfogalmazzuk az analysis műnyelvére, azáltal, hogy minden pont helyett azt a 3 számadatot vezetjük be tételeinkbe, amely a pont helyzetét meghatározza, megkapjuk az analytikai geometriát, azt

az ágát a mathematikának, mely tartalma szerint geometria, alakja és írásmódja szerint analysis. Az analysisnek nincs olyan béklyója, mint a geometriának a szemléletben ; merész fogalmazással felállíthat olyan formularendszert, amelyek teljesen analogok a tér analytikus geometriájának formuláival, csakhogy bennök 4 vagy több számadat szerepel, ott ahol 3 szerepelt elébb. Ezeket a formulákat — amelyeknek tehát geometriai vagy szemléleti jelentőségük nincsen — nevezik az analógiára való tekintettel a több dimensiós tér geometriájának. Riemann hervadhatatlan érdeme, hogy ezen u. n. több dimensiós geometriákon belül megtette azt a lépést, amit Bolyai kezdeményezett a közönséges geometriában, de meg is toldotta ezt azzal, hogy Euklides-nek nemcsak a párhuzamosokra vonatkozó axiómáját, hanem még másokat, jelesen az u. n. congruentia axiomákat is másokkal helyettesíti.

Visszatérve már most az elébb említett physikai tüneményekre, azoknak leírásában a tér mellett az idő szerepel. Egy időpont meghatározása csak egy számadatot igényel, hiszen pontosan megadunk egy időpontot, ha megmondjuk, hogy időszámításunk kezdete óta, hány mp. telt addig el. A physikai tünemények leírása tehát 4 számadatot igényel, amelyek közül 3 a térre vonatkozó, 1 az időre vonatkozó adat ; a physikusok világa ily módon 4 dimensios sokaság. Mekkora volt a tudományos világ meglepetése, amikor Minkowski 15 évvel ezelőtt rámutatott arra, hogy azok a formulák, amelyekkel a physikusok az ő tüneményeiket leírják ebben a 4 dimensiós világban, nem egyebek, mint a 4 dimensiós térnek egy Bolyai—Riemann-féle értelemben vett geometriája, melyben a fénysebesség játssza azt a szerepet, amelyet Bolyai állandója az ő geometriájában visz. Közelfekvő volt az a gondolat, — igy interpretálják bizonyos physikai iskolák ezt az eredményt — hogy a physikai világ tulajdonképen 4 dimensiós s csak emberi gyarlóságunk okozza, hogy ezen dimensiók közül 1-et mint időt, 3-at mint teret interpretálunk ; de ha ezt a felfogást követjük, akkor jól megjegyzendő, hogy ebben a világban már nem az Euklidesi geometria érvényes, hanem a Bolyai—Riemann-féle.

Még tovább fejlesztették ezt a gondolatkört a legutolsó évtized kísérleti és elméleti kutatásai akörül az elmélet körül, amelyet általános relativitásnak neveznek, s amely ma is a legégetőbb és legvitatottabb kérdések egyike a természettudományokban, s amelyről — sajnos — napilapok hasábjain is nem egy cikk jelent meg, bár az ilyen elmélet, amíg a tudomány műhelyében nem forrik ki egy bizonyos fokig, véleményem szerint a nagy nyilvánosság elé nem tartozik. Hogy Einsteinnek erről az alkotásáról — hacsak röviden is — képet adhassak és feltárhassam, hogy milyen szerepe van benne a Bolyai-féle geometriának, néhány szóval jellemeznem kell ennek az elméletnek alapvetését. Einstein kiindulási pontja nem új ; abból indul ki, hogy a mozgás vagy nyugvás a térben csak úgy érthető, hogy valami helyét változtatja vagy megtartja valamihez képest. Hiába mondom én, hogy holnap ilyenkor ugyanitt leszek, ahol most : ezen csak azt értettem, hogy ebben a teremben ugyanezen a helyen fogok ülni. De közben földünk óriás sebességgel száguldott tova az űrben, s a földdel együtt minden ami rajta van, úgy hogy biztosan nem ugyanazon a helyén leszek a térnek, mint ma.

Régi megjegyzése ez a physikusoknak, amin sokáig úgy iparkodtak segíteni, hogy az u. n. állócsillagokra pl. a Napra vonatkoztatták a mozgást, mondván : hogy nyugszik egy pont, ha az állócsillagoktól vett távolsága nem változik. De ma tudjuk, hogy az u. n. állócsillagok egymáshoz képest változtatják a helyzetüket. Napunk pl. 30 km. sebességgel mp-ként száguld a Herkules csillagképe felé, úgy hogy megint elvesztettük azt a fix pontot, melyre előbb a mozgást vonatkoztattuk. Mi marad hátra, mint feladni az absolut mozgást s mozgáson csak a relatív helyváltozását érteni két testnek. De ha ezt tesszük — s itt válik világossá a kérdés — mi értelme van azt mondani, hogy Földünk forog a Nap körül és nem fordítva ; mi értelme van a Kopernikus-féle heliocentrikus világnézletet a természettudomány egyik legnagyobb

vivmányának tekinteni, szemben a régi geocentrikussal, mely a földet tette meg a világmindenség nyugvó központjának ; mi értelme volt ezt az oly mélyreható nézetváltozást elfogadni, mely csak századok hosszú harcai után lett közkincsévé az emberiségnek? Tényleg a relativitás szempontjából épp oly jogosult az egyik, mint a másik. Tudták ezt már régen s ha mégis azt vallottuk, hogy a Föld forog a Nap körül, annak oka az volt, hogy azáltal törvényeink sokkal egyszerűbbekké váltak, s igazak maradtak a világmindenségre azok a mechanikai törvények, amelyeket laboratoriumainkban műszereinkkel megállapítottunk, jelesen az u. n. tehetetlenségi törvény. De ha — s itt kezdődnek Einstein kutatásai — tényleg eldöntetlen, hogy a Föld forog a Nap körül, vagy a Nap a Föld körül, akkor biztosan revideálandók és megváltoztatandók azok a mechanikai törvények, amelyekről most beszéltem, s amelyek a geocentrikus esetet kizárják. Ily módon jutott el Einstein egy új mechanikára, amelynek természetesen a régi igen jó megközelítése úgy, hogy csak a legfinomabb mérések tudnak a két elmélet között eltéréseket constatálni. Úgy viszonylik a két elmélet egymáshoz, mint Bolyai geometriája Euklideséhez s hozzáfűzhetem, hogy a kísérletek — bár eddig Einstein elmélete mellett látszanak szólani — még korántsem tekinthetők annyira lezártaknak, hogy ezt a kérdést elintézettnek vehetjük. Mindenesetre Einstein elmélete is még tökéletesítésre fog szorulni, de a lépés, amit nagy merészen egy új felfogás felé tett, mindenesetre hatalmas lépés a tudományos megismerésben.

Miként függ össze ez a kérdés a mi Bolyai Jánosunk alkotásával? Egyszerűen úgy, hogy Einstein világában, ismét a physikusok 4 dimensiós világára gondolok, nem az euklidesi geometria uralkodik, hanem a Bolyai és Riemann által megállapított geometria, amelyben nemcsak a párhuzamosokra vonatkozó, hanem — amint említettem — az egybevágóságra vonatkozó axiomák is másokkal vannak pótolva. Ez éppen Einstein érdeme ; ő rájött arra, hogy a mozgások relativitása csak úgy vihető keresztül teljes consequentiával, ha egy ilyen Bolyai-féle geometriát építünk fel a physikusok világában s jelesen, hogy miként kell az egybevágóság axiomáit megváltoztatni, hogy ezzel megvilágosítást nyerjen az általános gravitatio, ez a legrejtélyesebb és egyszersmind legegyszerűbb, az egész természettudományt átfogó kérdése a physikának.

III. Függelék – Anhang III

Két megemlékezés Haar Alfrédról.

1. Riesz Frigyes búcsúszavai Haar Alfréd ravatalánál. A többi búcsúbeszéddel együtt megjelent a *Szegedi m. kir. Ferenc József-Tudományegyetem 1932/33. évi Beszámolójában*, 29—39. o. *[659]*

2. Az »Acta Scientiarum Mathematicarum« szerkesztőségének megemlékezése, *Acta Sci. Math.*, **6** (1932/34), 65—66. *[660]*

*

Zwei Nachrufe für Alfred Haar.

1. Abschiedsworte von Friedrich Riesz an der Bahre von Alfred Haar. Erschienen zusammen mit den übrigen Trauerreden in den *Berichten der Universität Szeged über das Studienjahr 1932/33. [659]*

2. Nachruf der Redaktion der »Acta Scientiarum Mathematicarum«, *Acta Sci. Math.*, **6** (1932/34), 65—66. *[660]*

Kedves Barátom,

huszonegy esztendőn át jóban és rosszban hűséges tanártársam, mélységes fájdalommal hozom utolsó földi utadra a Magyar Tudományos Akadémia és az Eötvös Loránt Mathematikai és Fizikai Társulat búcsúzó üzenetét. Akadémiánknak maradandó alkotást, gondolataid legjavát hagytad székfoglaló értekezésedben. A Mathematikai és Fizikai Társulat pedig büszke arra, hogy már harminc évvel ezelőtt, egyetemi tanulmányaid legelején, felismerte Benned a matematikára való tehetséget és tanulóversenyének jutalmával tüntetett ki. Talán éppen ez adta az impulzust arra, hogy a vegyészmérnökhallgatóból a matematikai tudományok művelője, nagyon gyorsan a magyar matematikának egyik oszlopa váljék, akinek egyéniségét és alkotásait nemcsak barát, nemcsak azok értékelik és becsülik, akikkel együtt tanult, együtt dolgozott, hanem becsülik és tisztelettel emlegetik a matematikusok százai, idegen országokban, idegen világrészekben is. Miért? Mert sohasem kerested az olcsó sikert, nem gyártottad a dolgozatokat és könyveket, amihez pedig univerzális tudásod és kitűnő emlékezőtehetséged onthatta volna az anyagot. A nehéz problémákat kerested, a nagy erőfeszítéseket, az átfogó meglátásokat. Első dolgozatodtól az utolsóig csupa maradandót, értékállót alkottál.

Tudományodat szeretettel és lelkesedéssel művelted. Halálos ágyadon, a súlyos szenvedések deliriumában is arra gondoltál, arról suttogtál, arra kértél, hogy ne hagyjuk abba munkádat, ne hagyjuk parlagon ideáidat. Bizonyára a székfoglaló értekezésedben megkezdett munkádra gondoltál, arra a hatalmas lépésre, amit az analízis, az algebra és a topológia egyik közös problémájának megoldása felé tettél, annak a problémának, amelyet tanítómestered és atyai barátod, Hilbert, 1900-ban, a párisi kongresszuson a matematika megoldásra váró problémáiról tartott klasszikus előadásában, a legnehezebbek közé sorolt. Munkád nem maradhat abba és nem is fog abbamaradni. Nem ígéret ez, hanem szükségszerűség. A gondolatok, amelyeket kifejtettél, a módszerek, amikkel a tudományt megajándékoztad, olyan vetés, amely csírájában hordja a bő aratást.

Kedves jó Barátunk, Haar Alfréd, Isten veled!

ALFRED HAAR †

Am 16. März 1933 erlitten die k. ung. Franz Joseph-Universität, unsere Acta und die mathematische Wissenschaft einen harten Schlag. Alfred Haar, seit 21 Jahren Professor der Mathematik an unserer Universität, wurde uns durch eine tückische Krankheit entrissen.

Alfred Haar war einer der einfrigsten Begründer der Acta und hat sich an der Schriftleitung der mathematischen Sektion mit voller Seele betätigt. Er hat einen großen Anteil daran, daß unsere Sektion zu den allgemein bekannten mathematischen Publikationen gehört; und zwar nicht nur dadurch, daß er durch seine wissenschaftliche Verbindungen wertvolle Arbeiten für uns erwarb, daß er durch sein Wirken als Lehrer und Forscher erfolgreiche Untersuchungen anregte, sondern in erster Linie durch seine eigenen Arbeiten. Seit Anfang an enthält jeder Band unserer Acta eine Arbeit aus seiner Feder, wichtige Untersuchungen aus dem Problemkreis, der ihn eben beschäftigte: Variationsrechnung, singuläre Integrale, lineare Ungleichungen, partielle Differentialgleichungen, Gruppentheorie. Aber auch seine anderwärts veröffentlichten Untersuchungen, aus diesen oder sonstigen Problemkreisen, waren eine fruchtbare Saat für die Acta: wir brachten schon manche Arbeiten und gewiß werden wir noch viele bringen, die sich an seine Ideen anschließen.

Inmitten einer produktiven Arbeitsperiode ist er dahingegangen. Er beabsichtigte vor kurzem, jene Methoden, die er in den letzten Jahren über Gruppencharaktere und zuletzt in den Berichten der Ungarischen Akademie der Wissenschaften und in den Annals of Mathematics über den Maßbegriff auf Gruppenmannigfaltigkeiten entwickelt hat, auf verschiedene Fragen der Algebra, Topologie, Analysis und Zahlentheorie anzuwenden. Der unerbittliche Tod hat diesen Plan vereitelt, zu großem Verlust unserer Wissenschaft. Somit bleibt das Einernten der Früchte seiner Ideen und Methoden eine ehrenvolle Aufgabe der Nachwelt und wir wollen hoffen, daß hierdurch ein würdiges Denkmal für Alfred Haar errichtet wird.

Die Redaktion

TARTALOM — INHALT

Bevezetés — Einleitung ..... *5—8*

Haar Alfréd rövid életrajza — Kurzer Lebenslauf von Alfred Haar ..... *9—12*

Haar Alfred dolgozatai megjelenésük sorrendjében — Die Arbeiten von Alfred Haar in der Reihenfolge ihrer Erscheinung ..... *13—14*

A. Halmazelmélet — Mengentheorie ..... *15—43*

B. Ortogonális függvénysorok és szinguláris integrálok — Orthogonale Funktionenreihen und singuläre Integrale ..... *45—162*

C. Analitikus függvények — Analytische Funktionen ..... *163—212*

D. Parciális differenciálegyenletek — Partielle Differentialgleichungen ..... *213—259*

E. Variációszámítás — Variationsrechnung ..... *261—400*

F. Függvényapproximációk és lineáris egyenlőtlenségek — Approximation von Funktionen und lineare Ungleichungen ..... *401—452*

G. Diszkrét csoportok és függvényalgebrák — Diskrete Gruppen und Funktionenalgebren ..... *453—576*

H. Folytonos csoportok — Kontinuierliche Gruppen ..... *577—622*

I. Függelék — Anhang I. ..... *623—648*

II. Függelék — Anhang II. ..... *649—656*

III. Függelék — Anhang III. ..... *657—660*

Műszaki felelős: Faragó Mihály

A kiadásért felel az Akadémiai Kiadó igazgatója

Akadémiai Nyomda, Budapest — Felelős vezető: Bernát György

ALFRED HAAR

GESAMMELTE ARBEITEN

Alfred Haar (1885 — 1933) gehörte zu den Mathematikern, deren Werk auf die neueste Entwicklung der Mathematik einen allgemein anerkannten Einfluß ausgeübt hat. Das gilt für seine Arbeiten über orthogonale Funktionenreihen und Variationstheorie und insbesondere für seine letzte Arbeit über kontinuierliche Gruppen, die übrigens seine Antrittsarbeit an der Ungarischen Akademie der Wissenschaften war.

Mit der Ausgabe seiner Gesammelten Arbeiten will die Ungarische Akademie der Wissenschaften das ganze Lebenswerk von Alfred Haar leicht zugänglich machen und gleichzeitig ihrem hervorragenden ehemaligen Mitglied ein würdiges Denkmal setzen.

Der Band, der unter der Redaktion von Professor Béla Sz.-Nagy herausgegeben wurde, beginnt mit einem kurzen Lebenslauf von Haar, dem seine Arbeiten in nachstehender Gruppierung nach Gegenständen folgen: Mengentheorie — Orthogonale Funktionenreihen und singuläre Integrale — Analytische Funktionen — Partielle Differenzialgleichungen — Variationsrechnung — Approximationen von Funktionen und lineare Ungleichungen — Diskrete Gruppen und Funktionenalgebren — Kontinuierliche Gruppen.

Den einzelnen Gruppen der Aufsätze wurden einige, diese Arbeiten selbst oder ihre unmittelbare Fortsetzung durch andere Verfasser betreffende Notizen vorangestellt.

Da Haar seine Arbeiten in ungarischer und deutscher Sprache publiziert hat, war es natürlich, auch für die Ausgabe seiner Gesammelten Werke diese beiden Sprachen zu wählen. Einige Arbeiten sind sowohl in ungarischer wie in deutscher Sprache erschienen, die in beiden Varianten aufgenommen wurden. Drei Arbeiten hat Haar nur in ungarischer Sprache veröffentlicht, eine deutsche Übersetzung von diesen Arbeiten findet man in Anhang I. Anhang II enthält einen Vortrag von Haar über die Bedeutung der absoluten Geometrie von J. Bolyai. Anhang III enthält zwei Nachrufe auf Alfred Haar: der eine von seinem Kollegen Prof. Friedrich Riesz, der andere von der Redaktion der durch Haar und Riesz gegründeten Zeitschrift *Acta Scientiarum Mathematicarum (Szeged)*.

Ára: 250,— Ft