Math. O.
1560.

574068 Mathem. O. 1560. Zöld 1/2

ANALIZIS

ÉS

ANALITIKUS GEOMETRIA

A M. KIR. VALLÁS- ÉS KÖZOKTATÁSÜGYI MINISZTERIUM MEGBIZÁSÁBÓL

ÍRTA

KÜRSCHÁK JÓZSEF
MŰEGYETEMI TANÁR

ELSŐ KÖTET

MÁSODIK KIADÁS

MTA KIK 0 00006 93228 2

BUDAPEST, 1923
SZERZŐ KIADÁSA

BIZOMÁNYBAN:
LAMPEL R. (WODIANER F. ÉS FIAI) R. T.
KÖNYVKIADÓVÁLLALATÁNÁL

107466

MAGY. AKADÉMIA
KÖNYVTÁRA



FRANKLIN-TÁRSULAT NYOMDÁJA.



MAGY. TUD. AKADÉMIA
KÖNYVTÁRA

ELŐSZÓ.

Ezt a könyvet elsősorban hallgatóimnak szántam. A gyengékre és a kiválókra egyaránt gondoltam. A gyakorlatilag fontos szabályokat számos teljesen kidolgozott, egyszerű példából a gyengék is megérthetik. A nehezebb fejezetek elméleti fejtegetéseiből a legtöbb olvasó megelégedhetik a végeredményekkel. De mulasztásnak tartanám, ha önállóbban gondolkozó tanítványaimnak nem nyujtanék az előadásaimon túlmenő betekintést a tudomány alapjaiba.

Könyvemmel hasznos szolgálatot vélek teljesíteni azoknak is, akik már jóval főiskolai tanulmányaik előtt érdeklődnek a felsőbb mathematika iránt. Valóban a betűszámtan elemein és a planimetrián kívül alig tételezek föl előismereteket. Mégis a korán tudni vágyó fiatalság könnyebben fogja a mathematika olvasását megszokni, ha könyvem tanulmányozása előtt valamely rövid vezérfonalból* szerez magának némi képet a felsőbb mathematika feladatairól.

Az analizis és a geometria alapjai szorosan egymásba kapcsolódnak. Az analizis elvont tényeinek megérzékítésére léptennyomon a geometriai ábrázolást használjuk. Viszont az analitikus geometriában nemcsak az egyszerűbb számtani műveletek, hanem a differenciálszámítás alapfogalmai is nélkülözhetetlenek. Azért az első részben a két tudomány alapjait együtt tárgyalom. Ez az *alapvetés* aránylag messze megy, hogy magában is befejezett egészet nyujtson.

A második rész az analitikus geometria azon fejezeteit tárgyalja, melyekben csak elsőfokú egyenletek és egyenletrendszerek szerepelnek. Ebben a részben csak az alapvetés első öt fejezetére hivatkozom.

A tervezett második kötet majd a kúpszeletekkel és másodrendű felületekkel, továbbá az egyváltozós függvények differenciálásával és integrálásával, valamint ezek alkalmazásával foglalkozik.

Az egész könyvben legnehezebbek: a limesz és az irracionális szám fogalmával foglalkozó második fejezet, e fogalmak első alkalmazásait tartalmazó harmadik fejezet, továbbá a negyedik

* Pl.: Mikola-Rátz, A függvények és az infinitezimális számítás elemei. II. kiadás, Budapest, 1914.

fejezetnek a hosszmérésre és a területmérésre vonatkozó apróbban szedett (és az első olvasásnál teljesen kihagyható) részei. E fejezetek első tanulásánál az olvasó megelégedhetik felületesebb általános benyomásokkal. Aki azonban alapos tudásra törekszik, annak utóbb ezekbe a fejtegetésekbe is komolyan el kell mélyednie. Mikor a hetedik fejezet végére ért, akkor már annyiszor találkozott a határértékekre vonatkozó alapvető tételek alkalmazásával, hogy megértő érdeklődéssel fordíthatja figyelmét azokra a nehézségekre, melyek a limesz fogalmának megalkotásánál, továbbá evvel kapcsolatban az irracionális számoknak és a mérésnek elméletében felmerülnek. Sőt bizonyos gyönyörüséget lelhet abban, hogy az emberi elme minden nehézség ellenére a mathematika megalapozásánál a fogalmaknak egy ellenmondástól ment, minden részében harmonikus rendszerét tudta megalkotni.

Végül még hálával emlékezem meg Bartus Adolf úrról, ki a rajzok elkészítésével, továbbá Kőnig Dénes és Rados Ignác urakról, kik a korrekturák átvizsgálásával és az ehhez fűződő értékes észrevételeikkel támogattak a kiadás munkájában.

Budapest, 1919 október 4-én.

Az első kiadásnak itt újra lenyomtatott előszava csak egy kis toldásra szorul, hogy a második kiadás előszaváúl is szolgálhasson. E kötet új kiadása két lappal kisebb terjedelmű, mint az első volt, mert nehány cikkelyt rövidítettem. Egyébiránt jelentéktelen stiláris javításokra szorítkoztam. A cikkelyek számozása változatlan.

Budapest, 1923 május 11-én.

Kürschák József.

MAGY. TUD. AKADÉMIA
KÖNYVTÁRA

AZ ELSŐ KÖTET TARTALMA.

ELSŐ RÉSZ.

Alapvetés.

ELSŐ FEJEZET.

A determinánsok és a lineáris egyenletrendszerek.

Lap

I. Előkészítő tárgyalások.

1. §. A racionális számok ... 3
2—5. §. Két ismeretlen meghatározása két elsőfokú egyenletből ... 5

II. Permutációk.

6—10. §. A permutációk száma. Páros és páratlan permutációk ... 9

III. A determinánsok.

11—17. §. A determináns értelmezése és legegyszerűbb tulajdonságai ... 11
18—24. §. Aldeterminánsok ... 17
25—26. §. A determinánsok szorzástétele ... 25
27. §. Lagrange képlete ... 27

IV. Lineáris egyenletrendszerek.

28. §. A rendes eset ... 28
29—31. §. A kivételes esetek ... 31
32—35. §. Homogén lineáris egyenletrendszerek ... 35

V. Alkalmazások.

36. §. Wheatstone hídja ... 39
37—39. §. Egész kifejezések. Rezultánsok ... 41

MÁSODIK FEJEZET.

Határérték. Irracionális számok.

I. Határátmenetek a racionális számok tartományában.

40—42. §. A racionális számok összehasonlítása nagyságra nézve ... 46
43—44. §. Az abszolut érték ... 47
45—49. §. Elemi sorozatok ... 48
50—51. §. A határérték fogalma ... 52
52—54. §. Végtelen sorok. A végtelen geometriai haladvány ... 54
55—65. §. Szabályos számsorozatok ... 56
66—69. §. Általános tételek a határértékekről ... 64
70—71. §. Szabályos számsorozatok, melyeknek nincs racionális határértékük ... 67
72—74. §. Új számok szükséges a hosszmérésnél ... 69

Lap

II. Az irracionális számok és a végtelen mint határértékek.

75—76. §. Áttérés a valós számok összességére ... 72
77—78. §. Pozitiv és negativ számok. Abszolut érték ... 73
79—81. §. A valós számok végtelen tizedestört alakja ... 74
82—86. §. Az alapműveletek valós számokkal ... 77
87—90. §. A valós számok összehasonlítása nagyságra nézve ... 80
91. §. Valós tagú számsorozatok ... 82
92—94. §. A végtelen mint határérték ... 83
95—98. §. A végtelennel való számolás ... 84
99. §. Meghatározott előjelű végtelen ... 87
100—103. §. Számtartomány felső és alsó határa ... 88

HARMADIK FEJEZET.

A gyökvonás. A hatványozás általánosítása és a logarithmus.

I. A gyökvonás.

104—106 §. Az $x^n=A$ egyenlet megoldása a valós számok tartományában 91

II. A hatványozás általánosítása és a logarithmus.

107. §. Számtani és geometriai közép ... 94
108—110. §. Az $\left(1+\frac{x}{n}\right)^n$ határértékéről ... 95
111—114. §. Az e szám és valós kitevőjű hatványai ... 99
115—116. §. A természetes logarithmus ... 102
117. §. A log 2 mint határérték ... 103
118—122. §. Pozitiv alap valós kitevőjű hatványa. Tetszőleges pozitiv alapú logarithmus ... 105
123—124. §. Tetszőleges alap negativ egész kitevős hatványa ... 107

NEGYEDIK FEJEZET.

Mérések.

I. Hosszmérés. Sokszögek területe.

125—136. §. Egyenesdarabok hosszúsága ... 109
137—138. §. Pozitiv és negativ egyenesdarabok. A valós számoknak az egyenesen való ábrázolása ... 115
139—145. §. Sokszögek területe ... 116

II. Körmérés. Szögmérés.

146—149. §. Kör kerülete ... 122
150—151. §. Körívek mérése ... 126
152—153. §. Kör és körszektor területe ... 128
154—158. §. Szögek mérése ... 130

ÖTÖDIK FEJEZET.

Az analitikus geometria alapfogalmai.

I. A sík pontjainak koordinatákkal való jellemzése.

159. §. Parallelkoordinaták ... 134
160. §. Polárkoordinaták ... 135
161—162. §. Egyenesdarab felezése. Két pont távolsága ... 136
163. §. Az egységkör egyenlete ... 137

Lap

II. A trigonometriai függvények. A vektor fogalma.

164—166. §. A trigonometriai függvények értelmezése ... 138
167—169. §. A trigonometriai függvények legegyszerűbb tulajdonságai ... 139
170—175. §. Vetítés. Összeg és különbség trigonometriai függvényei ... 141
176—177. §. Fontos argumentumok trigonometriai függvényei ... 145
178—179. §. A vektorok ... 147
180. §. Snellius vagy Pothenot feladata ... 151

III. A koordináták transzformációja.

181. §. A derékszögű és a polárkoordináták kapcsolata ... 157
182—184. §. A parallelkoordináták transzformációja ... 157
185. §. Két pontnak ferdeszögű koordinatákban kifejezett távolsága 160
186—187. §. A háromszög területe ... 161

IV. Az egyenes egyenlete.

188. §. A kezdőponton keresztül húzott egyenes egyenlete ... 163
189—191. §. Az egyenes általános egyenlete ... 164
192. §. Adott ponton keresztül adott irányban húzott egyenes ... 166
193—194. §. Két pont által meghatározott egyenes ... 167
195. §. Az egyenesnek polárkoordinatákban kifejezett egyenlete ... 169

HATODIK FEJEZET.

A függvénytan alapfogalmai.

I. A függvény fogalma.

196. §. Állandó és változó mennyiségek ... 171
197—198. §. Számköz. Környezet ... 171
199—201. §. Független változó és függvény ... 172
202—203. §. Egy változó racionális függvényei ... 174
204. §. Több változó racionális egész függvényei ... 175
205. §. Implicite adott függvények ... 175
206—208. §. Függvénytáblák és skálák ... 176
209. §. A függvények grafikus ábrázolása ... 178
210—211. §. Hatvány és gyök ábrázolása. Inverz függvény ... 179

II. Függvény határértéke. Folytonosság.

212—213. §. Függvény határértéke ... 181
214—217. §. Fontos határértékek ... 183
218—221. §. A végtelen helyre vonatkozó határértékek ... 185
222. §. Meghatározott előjelű végtelenre vonatkozó határértékek ... 188
223. §. Egyoldali határértékek ... 189
224—227. §. Folytonos függvények ... 191
228. §. Számközön folytonos függvény ... 194
229—230. §. A vonaldarab fogalma ... 194

III. Érintő. Differencálhányados.

231. §. Az érintő meghatározása ... 196
232—234. §. A differenciálhányados ... 198
235—238. §. A racionális egész függvények differenciálása ... 199
239. §. Néhány irracionális függvény differenciálása ... 201

HETEDIK FEJEZET.

Speciális függvények és görbék.

I. A parabola és a másodfokú egész függvény.

240—241. §. A parabola tengelyponti egyenlete ... 204
242—243. §. A másodfokú egész függvény geometriai ábrázolása ... 205
244. §. A parabola érintője ... 207

Lap
245—246. §. Áttérés ferdeszögű koordinatákra ... 208
247—248. §. A parabola átmérői ... 209
249—251. §. A parabola meghatározása ... 210
252—253. §. A parabola-szegmentum területe. Simpson szabálya ... 213

II. A kör.

254—255. §. A kör egyenlete ... 216
256. §. Három pont által meghatározott kör ... 219
257. §. A körnek polárkoordinatákban kifejezett egyenlete ... 220

III. Az ellipszis és a hiperbola.

258—261. §. Az ellipszisnek és a hiperbolának a főtengelyekre vonatkozó egyenlete ... 220
262. §. Az ellipszis alakja ... 223
263—264. §. A hiperbola alakja ... 225
265. §. Egy geometriai hely ... 226
266. §. Fokális egyenletek ... 227
267. §. A hiperbolának az aszimptotákra vonatkoztatott egyenlete ... 228
268. §. A lineáris törtfüggvény ábrázolása ... 229
269—270. §. Polárkoordinatákban kifejezett fokális egyenletek ... 230

IV. A kitevős függvény és a logarithmus.

271. §. A kitevős függvény ábrázolása ... 232
272. §. A logarithmus ábrázolása ... 232

V. A trigonometriai függvények és megfordításaik.

273—275. §. A trigonometriai függvények ábrázolása ... 233
276—279. §. A ciklometrikus függvények ... 235

NYOLCADIK FEJEZET.

A komplex számok.

I. Az alapműveletek és a négyzetgyökvonás a komplex számok tartományában.

280—281. §. A komplex szám mint valós számokból alkotott számpár ... 240
282—283. §. Komplex számok összeadása és kivonása ... 241
284—286. §. Komplex számok szorzása és osztása ... 243
287—288. §. A képzetes egység. Konjugált komplex számok ... 245
289—290. §. A komplex számok trigonometriai alakja. Moivre képlete ... 246
291. §. A négyzetgyökvonás ... 247

II. A másodfokú egyenlet és a gyökvonás általános elmélete.

292—294. §. Az algebrai egyenlet gyökeinek és a többtagú elsőfokú tényezőinek kapcsolata. Többszörös gyökök ... 248
296—298. §. A másodfokú egyenlet ... 251
299—300. §. A Laplace-féle egyenlet ... 252
301—304. §. A gyökvonás ... 253

III. Az általános n-edfokú egyenlet.

305. §. Valós együtthatójú páratlan fokú egyenletek ... 256
306—308. §. Egy speciális rezultáns ... 257
309. §. Az algebra alaptételének bebizonyítása ... 259
310—311. §. Az algebra alaptételének folyományai ... 260

IV. Komplex számsorozatok határértékei.

312—315. §. Komplex számsorozatok ... 261

V. Egy geometriai alkalmazás.

316. §. Két egyenesdarab párhuzamosságának és merőlegességének feltételei ... 264
317. §. Két geometriai tétel ... 264

KILENCEDIK FEJEZET.

Végtelen sorok.

Lap
318—322. §. Az összetartás fogalma ... 266
323—324. §. Föltételes és föltétlen összetartás ... 270
325—329. §. Pozitiv tagú sorok ... 273

MÁSODIK RÉSZ.

Az egyenes vonal síkbeli, a sík és egyenes vonal térbeli analitikus geometriája.

TIZEDIK FEJEZET.

Az egyenes vonal a síkban.

I. Az egyenes egyenlete és parameteres egyenletrendszere.

330—332. §. A vonalak osztályozása ... 281
333—335. §. Az egyenes Hesse-féle normálegyenlete ... 283
336—345. §. Az egyenesre vonatkozó feladatok ... 285
346—350. §. Centrális projekció. A projektiv térszemlélet ... 293
351—354. §. Homogén koordináták ... 296
355. §. Pontsor és sugársor fogalma. A sugársor egyenlete ... 300
356—358. §. Egy pontban találkozó egyenesek ... 303
359—362. §. Az egyenesnek parameteres egyenletrendszerrel való jellemzése 307
363—364. §. Perspektív háromszögek ... 311

II. Kettős viszony. Projektiv pontsorok és sugársorok.

365—369. §. A kettős viszony ... 315
370—371. §. A kettős viszony változása az elemek permutálásánál ... 318
372—377. §. Harmonikus csoportok ... 320
378—382. §. Projektiv vonatkozás ... 325
383—384. §. Megfelelő elemek szerkesztése ... 328
385—386. §. Hasonló pontsorok. Egybevágó sugársorok ... 330

TIZENEGYEDIK FEJEZET.

A sík és az egyenes a térben.

387—389. §. Térbeli parallelkoordináták ... 332
390—391. §. Egyenesre vagy síkra való derékszögű vetítés ... 334
392. §. Vektor hosszúsága és iránya ... 336
393—395. §. A gömb egyenlete. Az egyenes iránycosinusainak összefüggése 338
396—399. §. Két egyenes hajlásszöge ... 341
400. §. Két sík hajlásszöge ... 343
401—402. §. A háromszög területe ... 345
403—404. §. A tetraéder köbtartalma ... 346
405—407. §. A parallelkoordináták transzformációja ... 347
408—409. §. Algebrai és transzcendens felületek ... 351
410—413. §. Hengerfelületek. Kúpfelületek ... 352
414—417. §. A sík egyenlete ... 355
418—422. §. Az egyenes analitikus jellemzése ... 357
423—430. §. A síkra és az egyenesre vonatkozó feladatok ... 361
431—432. §. Homogén koordináták ... 369
433. §. A síksor egyenlete ... 370
434. §. Egy pontban találkozó négy sík ... 371

Görög betűk.

Alfa	Α	α	iota	Ι	ι	ró	Ρ	ρ
béta	Β	β	kappa	Κ	κ	szigma	Σ	σ ς
gamma	Γ	γ	lambda	Λ	λ	tau	Τ	τ
delta	Δ	δ	mű	Μ	μ	üpszilon	Υ	υ
epszilon	Ε	ε	nű	Ν	ν	fi	Φ	φ
dzéta	Ζ	ζ	xi	Ξ	ξ	chi	Χ	χ
éta	Η	η	omikron	Ο	ο	pszi	Ψ	ψ
théta	Θ	ϑ	pi	Π	π	ómega	Ω	ω

ELSŐ RÉSZ

ALAPVETÉS

ELSŐ FEJEZET.

A DETERMINÁNSOK ÉS A LINEÁRIS EGYENLET-RENDSZEREK.

I. Előkészítő tárgyalások.

A racionális számok.

1. §. A legegyszerűbb mathematikai vizsgálatoknál megelégedhetünk a *racionális számok* ismeretével. Ezek:

1. az *egész* számok:

$$\ldots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots$$

2. a *racionális törtek,* vagyis az egész számokból alkotott oly hányadosok, melyekben a számláló (vagy osztandó) a nevezőnek (vagy osztónak) nem többese (és a nevező nem zérus); pl.

$$\frac{2}{3}, \quad -\frac{5}{4} = \frac{-5}{4} \quad \text{stb.}$$

A racionális számok összességét a *racionális számok tartományának* nevezzük. Ugyanis több szám összességét általában *számtartománynak* mondjuk. Pl. ha valamely számításban csak az

$$1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9$$

számok szerepelnek, akkor azt mondjuk, hogy számításunk az egyjegyű természetes számok *tartományára* szorítkozik.

A racionális számok tartományában a négy alapműveletre, t. i. az *összeadásra* és a *kivonásra,* meg a *szorzásra* és az *osztásra* nézve a következő alaptények érvényesek:

1. *Az összeadás és a szorzás mindig elvégezhető, egyértelmű műveletek.* Vagyis, ha a és b a tartomány két különböző vagy egyenlő számát jelenti, akkor ezeknek mindig egy és csak egy $a+b$ összegük, továbbá egy és csak egy ab szorzatuk van.

2. *Az összeadásra nézve a kommutativ és az asszociativ törvény érvényes.* Vagyis

$$a+b=b+a, \quad a+(b+c)=(a+b)+c.$$

3. *A szorzásra nézve a kommutativ és az asszociativ törvény érvényes.* Vagyis

$$ab=ba, \quad a(bc)=(ab)c.$$

4. *Az összeadásra és a szorzásra nézve a disztributiv törvény érvényes.* Vagyis

$$a(b+c)=ab+ac.$$

5. *A zérust bármely*

$$a$$

számhoz hozzáadva vagy vele szorozva:

$$a+0=a, \quad 0.a=0.$$

6. *Az egyest bármely*

$$a$$

számmal szorozva:

$$1.a=a.$$

7. *Az*

$$1, \quad 1+1=2, \quad 2+1=3, \ldots$$

számok között, melyeket természetes számoknak mondunk, nincsenek egymással egyenlők.

8. *Az összeadás megfordítása, melyet kivonásnak nevezünk, mindig elvégezhető, egyértelmű művelet.* Vagyis az

$$a+x=b$$

egyenletnek mindig egy és csak egy x gyöke van. E gyököt a $b-a$ *különbségnek* nevezzük.

9. *A szorzás megfordítása, melyet osztásnak nevezünk, általában elvégezhető, egyértelmű művelet; csupán a zérussal, mint osztóval, való osztás lehetetlen.* Vagyis az

$$ax=b$$

egyenletnek, ha benne a a zérustól különböző, mindig egy és csak egy x gyöke van. E gyököt a $\frac{b}{a}$ *hányadosnak* nevezzük.*

Minden más számolási szabály, mely a négy alapműveletre nézve ismeretes, ezen alaptényekből könnyen levezethető.

A jelen fejezetben csak racionális számokat használunk.

A könyv későbbi fejezeteiben majd új számok bevezetése után bővebb számtartományokra térünk át: a *valós*, utóbb pedig a *komplex* számok tartományára. Hogy a jelen fejezetben mondandókat ne kelljen majd újból ismételnünk, már ezen a helyen kijelentjük, hogy tárgyalásaink rendre akkor is igazak maradnak, ha a bennök szereplő számokon nem éppen racionális számokat, hanem bármily valós vagy komplex számokat értünk. Ugyanis meggondo-

* Ha $a=0$ és b a zérustól különböző, akkor egyáltalában nincs oly x szám, mely a-val szorozva b-t adja. Ha pedig $a=b=0$, akkor minden x szám ilyen. Vagyis az

$$ax=b$$

követelés az első esetben egyáltalában nem elégíthető ki, a második esetben pedig *azonosság*, melyet x minden értéke kielégít.

lásaink tisztán a négy alapműveletre vonatkozó ismeretes számítási szabályokon alapulnak, ezek pedig a valós, sőt a komplex számok tartományában is érvényesek.

Két ismeretlen meghatározása két elsőfokú egyenletből.

2. §. Az osztásnak, vagyis az

$$ax=b$$

egyenlet megoldásának általánosítása a következő feladatra vezet:

Meghatározandók mindazok az x, y számpárok, melyek a következő két elsőfokú (vagy lineáris) *egyenletet egyidejüleg kielégítik:*

$$\begin{aligned} a_{11}x+a_{12}y&=b_1, \\ a_{21}x+a_{22}y&=b_2, \end{aligned} \qquad 1)$$

hol a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22}, b_1 és b_2 adott (vagy legalább adottnak tekintett) számok. Az x, ill. y együtthatóját mindenütt a-val jelöltük, de a különböző együtthatókat *indexekkel* különböztettük meg egymástól. Pl. a_{12} indexei 1 és 2; az első index arra figyelmeztet, hogy a szóban forgó együttható a hányadik egyenletben fordul elő, a második index azt mutatja, hogy a hányadik ismeretlen együtthatójáról van szó. Hasonlóképp a jobb oldalon szereplő b-ket indexük segítségével különböztetjük meg egymástól.

Az x, y számokat, melyeknek értéke meghatározandó, *ismeretleneknek* mondjuk. Minden oly számpárt, mely x és y helyébe téve kielégíti az adott egyenleteket, *gyökrendszernek* nevezzük. Valamennyi gyökrendszer meghatározását az adott egyenletrendszer *megoldásának* vagy *megfejtésének* mondjuk.

Az adott egyenletekből könnyen alkothatunk újakat, melyek az adottaknak *következményei*, vagyis olyanok, hogy az adott egyenletrendszer minden gyökrendszere ezeket is kielégíti. Bennünket e következmények közül különösen az oly egyenletek érdekelnek, melyekben a két ismeretlen közül az egyik *nem fordul elő.*

Pl. szorozzuk meg az első egyenlet mindkét oldalát a_{22}-vel, a másodiknak mindkét oldalát $-a_{12}$-vel, végre adjuk össze a megmegfelelő oldalakat. Ily módon arra jutunk, hogy

$$Ax=B_1,$$

hol

$$\begin{aligned} A &= a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}, \\ B_1 &= b_1\ a_{22}-a_{12}b_2. \end{aligned}$$

Ha 1) alatt az első egyenlet mindkét oldalát $-a_{21}$-gyel, a másodiknak mindkét oldalát a_{11}-gyel szorozzuk és megint összeadunk, akkor az

$$Ay=B_2$$

egyenletet nyerjük, hol A az előbbi jelentésű és

$$B_2=a_{11}b_2-b_1a_{21}.$$

Az A kifejezést az

$$a_{11} \quad a_{12}$$

$$a_{21} \quad a_{22}$$

számokból alkotott *másodfokú determinánsnak* nevezzük és következőképpen jelöljük:

$$A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}.$$

A B_1 az A-ból úgy keletkezik, hogy a_{11} és a_{21} helyébe b_1-et és b_2-t helyettesítjük; a B_2 pedig A-ból úgy keletkezik, hogy a_{12} és a_{22} helyébe b_1-et és b_2-t helyettesítjük. Képletben:

$$B_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}, \quad B_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}.$$

Ha az eredeti egyenletekből levezetett

$$Ax = B_1, \quad Ay = B_2$$

egyenletekben A a zérustól különböző, akkor innen világos, hogy az egyenletrendszert csak a következő számpár elégítheti ki:

$$x = \frac{B_1}{A}, \quad y = \frac{B_2}{A}.$$

Egyszersmind könnyen meggyőződhetünk, hogy e számpár valóban megfelel az 1) alatti egyenleteknek. Pl. az első egyenlet bal oldalába való helyettesítésnél

$$a_{11}x + a_{12}y = \frac{a_{11}B_1 + a_{12}B_2}{A}.$$

Itt

$$a_{11}B_1 + a_{12}B_2 = a_{11}(b_1 a_{22} - a_{12}b_2) + a_{12}(a_{11}b_2 - b_1 a_{21}) = b_1(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})$$

azaz

$$a_{11}B_1 + a_{12}B_2 = b_1 A. \qquad 2)$$

Ha még A-val osztunk, akkor valóban

$$a_{11}\frac{B_1}{A} + a_{12}\frac{B_2}{A} = b_1. \qquad 3)$$

Szóval: Ha A nem zérus, akkor *egy és csak egy* gyökrendszer van, még pedig

$$x = \frac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}, \qquad y = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}.$$

Ezt az esetet a *rendesnek* nevezzük. Minden más esetet *kivételesnek* mondunk.

A kivételes esetekben is igaz, hogy az egyenletrendszer bármely gyökrendszerére nézve

$$Ax=B_1, \quad Ay=B_2$$

továbbá a 2) alatti azonosság is helyes marad. De mindazok a következtetések, melyeket innen az A-val való osztással vontunk, érvénytelenek.

3. §. Ha $A=0$, de B_1 és B_2 közül legalább az egyik nem zérus, akkor az

$$Ax=B_1, \quad Ay=B_2$$

egyenletek bal oldala x és y minden értékénél 0, ellenben legalább az egyik egyenletnek jobb oldalán a zérustól különböző szám áll. Tehát egyáltalában nincs oly értékpár, mely gyökrendszert alkot. Azért ebben az esetben az egyenletrendszert *ellenmondónak* nevezzük.

A még hátralevő $A=B_1=B_2=0$ esetben feltehetjük, hogy az a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22} együtthatók közül legalább egy a zérustól különböző, mert ha $a_{11}=a_{12}=a_{21}=a_{22}=0$, akkor az egyenletrendszer az ismeretleneket egyáltalában nem is tartalmazza és ennélfogva teljesen érdektelen. Továbbá az egyenletek sorrendjét és az ismeretlenek jelölését úgy választhatjuk, hogy az első egyenlet első együtthatója a zérustól különbözők közé tartozzék. Ekkor az

$$A = a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}=0,$$

$$B_2=a_{11}b_2 -a_{21}b_1 =0$$

feltevésekből az következik, hogy

$$a_{22}=\frac{a_{21}}{a_{11}}a_{12}, \quad b_2=\frac{a_{21}}{a_{11}}b_1.$$

Ha rövidség kedvéért az $\frac{a_{21}}{a_{11}}$ számot λ-val jelöljük, akkor innen

$$a_{22}=\lambda a_{12}, \quad b_2=\lambda b_1,$$

továbbá a λ értelmezésénél fogva

$$a_{21}=\lambda a_{11}.$$

Eszerint esetünkben az adott egyenletrendszer második egyenlete így is írható:

$$\lambda(a_{11}x+a_{12}y)=\lambda b_1.$$

Tehát minden olyan értékpár, mely kielégíti az adott egyenletek közül az elsőt, egyszersmind eleget tesz a másodiknak is. Más szóval, ekkor a második egyenlet az elsőnek *következménye*.

Ebben az esetben az egyenletrendszert *határozatlannak* mondjuk, mert az egyik ismeretlennek, y-nak, értékét tetszés szerint választva, hozzá mindig található oly megfelelő x érték, hogy x és y e két összetartozó értéke *gyökrendszert* alkot.

Megjegyezzük még, hogy az előbbi §-ban levezetett

$$a_{11}B_1+a_{12}B_2=b_1A$$

képletből akkor, midőn $A=B_2=0$ és a_{11} nem zérus, nyilván $B_1=0$. Tehát ha $A=0$, de a_{11} nem zérus, akkor annak eldöntésére, hogy melyik kivételes esettel van dolgunk, elegendő a B_2 kiszámítása. Ha B_2 nem zérus, akkor az ellenmondás esetével van dolgunk. Ha pedig $B_2=0$, akkor további számítás nélkül tudjuk, hogy B_1 is zérus, vagyis az egyenletrendszer határozatlan.

4. §. Példák. 1. A

$$4x+5y=3,$$
$$2x+3y=1$$

egyenletrendszerben

$$A=\begin{vmatrix}4 & 5\\ 2 & 3\end{vmatrix}=4.3-5.2=2,$$

tehát a rendes esettel van dolgunk. Továbbá

$$B_1=\begin{vmatrix}3 & 5\\ 1 & 3\end{vmatrix}=4, \qquad B_2=\begin{vmatrix}4 & 3\\ 2 & 1\end{vmatrix}=-2,$$

ennélfogva

$$x=\frac{4}{2}=2, \qquad y=\frac{-2}{2}=-1.$$

2. *Legyen megoldandó:*

$$6x+15y=3,$$
$$4x+10y=m,$$

hol m adott számot jelent.

Itt

$$A=0, \quad B_1=30-15m, \quad B_2=6m-12.$$

Tehát kivételes esettel van dolgunk. Ha $m\gtrless 2$, akkor az egyenletrendszer ellenmondó; ha $m=2$, akkor a második egyenlet az elsőnek következménye. Az utóbbi esetben y felvehet minden értéket és x megfelelő értékét az első egyenletből folyó

$$x=-\frac{5}{2}y+\frac{1}{2}$$

képlet adja meg.

5. §. Fontos feladat lesz a tapasztaltakat majd n ismeretlent tartalmazó n elsőfokú egyenlet esetére általánosítanunk. Hogy ezt megtehessük, előbb részletesen kell foglalkoznunk azokkal a kifejezésekkel, melyek hasonló módon alakulnak n^2 számból, mint a másodfokú determinánsok $2.2=4$ számból. E kifejezések vizsgálatánál viszont a *permutációkra* vonatkozó főbb tételek oly alapvető fontosságúak, hogy nélkülök a szóban forgó kifejezéseknek, az úgynevezett *n-edfokú determinánsoknak*, még értelmezésébe sem bocsátkozhatunk.

E fejezet menetét tehát következőleg kell berendeznünk. Mindenekelőtt a permutációk főbb tulajdonságaival foglalkozunk. Azután áttérünk a determinánsok értelmezésére és vizsgálatára. Csak ezután tárgyalhatjuk a több ismeretlent tartalmazó lineáris egyenletrendszereket.

II. Permutációk.

A permutációk száma. Páros és páratlan permutációk.

6. §. Adott n tárgynak minden lehetséges sorrendjét egy-egy *permutációnak* mondjuk, magukat a tárgyakat *elemeknek* nevezzük. Az adott elemeket a közönséges egész számokkal szoktuk jelölni. Az egyes permutációkat azzal jellemezzük, hogy az elemeket jelölő számokat a megfelelő sorrendben felírjuk. Minél nagyobb számmal jelöltünk meg valamely elemet, annál *magasabbnak* mondjuk.

Az n elemből alkotott permutációk számát, P_n-et, a következő meggondolásokkal határozhatjuk meg. Adott n elem permutációit n osztályba sorozhatjuk aszerint, hogy melyik elem van az első helyen. Minden osztályban annyi permutáció van, ahány sorrendben helyezhető el az első hely betöltése után megmaradt $n-1$ elem. Más szóval az n osztály mindegyikében P_{n-1} permutáció van és az n osztályban együtt $P_n = nP_{n-1}$ permutáció. Ha még tekintetbe vesszük, hogy

$$P_2 = 2 = 1.2,$$

akkor innen

$$P_3 = 3P_2 = 1.2.3,$$

$$P_4 = 4P_3 = 1.2.3.4,$$

. . . . . .

Általában P_n egyenlő az első n természetes szám szorzatával. E szorzatot n *faktoriálisának* nevezzük és így jelöljük: $n!$

Egy magában álló elemet egyáltalában esak egyféleképpen helyezhetünk el; sorrend változtatásáról ebben az esetben nem lehet szó. E tényt úgy szokás kifejezni, hogy

$$P_1 = 1! = 1.$$

A következőkben feltesszük, hogy $n \geqq 2$. Ekkor a permutációk száma páros.

7. §. Ha valamely permutációban két elem közül az alacsonyabb később következik, mint a magasabb, akkor e két elem *inverziót* alkot. Pl. az 52413 permutációban a következő inverziók vannak:

52, 54, 51, 53, 21, 41, 43.

Ha valamely permutációban két szomszédos elemet felcserélünk, a többi elemet ellenben változatlanul hagyjuk, akkor az inverziók száma éppen eggyel változik meg.

Ugyanis minden elempárban az az elem marad elől, amely eredetileg elől volt, kivévén azt az egyetlen elempárt, melyet éppen a két felcserélt elem alkot.

8. §. Ha valamely permutációban az inverziók száma páros, akkor magát a permutációt is *párosnak* vagy *páros jellegűnek* mondjuk. Ellenkező esetben a permutációt *páratlannak* vagy *páratlan jellegűnek* mondjuk.

Az n elemből ($n \geqq 2$) alkotható permutációknak éppen a fele páros és a fele páratlan.

Ugyanis az n elemből alkotható permutációkat úgy oszthatjuk párokba, hogy az egy párba osztott permutációk egymástól csak az utolsó két elem sorrendjében különböznek. Minden egyes párban az egyik permutáció páros, a másik páratlan. Tehát valóban ugyanannyi páros permutáció van, mint páratlan.

9. §. *Bármely permutációról ugyanazoknak az elemeknek bármely más permutációjára véges számú lépésben úgy térhetünk át, hogy mindegyik lépésnél pusztán két elemet cserélünk fel.*

Pl.

52413

a következő módon vihető át a

41352

permutációba. Mindenek előtt a 4-et a kívánt helyre hozzuk úgy, hogy felcseréljük az 5-tel. Leszen

42513.

Azután az 1-et hozzuk a kívánt második helyre úgy, hogy felcseréljük az ott álló 2-vel. Leszen

41523.

Az eljárást folytatva, rendre a

41325, 41352

permutációkat nyerjük. Közülök az utolsó csakugyan a kívánt permutáció. Hasonló módon járhatunk el bármely más esetben is.

10. §. *Két elem felcserélését mindig véges számú oly lépéssel érhetjük el, melyek mindegyike két szomszédos elem felcserélésében áll.*

Legyen pl. a

235 . . . 6894

permutációban **3** és **9** felcserélendő. A köztük álló 5 . . . 68 elemek száma legyen k. Akkor $k+1$ lépésben a 9-et mindig egy hellyel előbbre hozzuk. Leszen

235 . . . 6984
235 . . . 9684

. . . . . .

2395 . . . 684
2935 . . . 684.

Azután k lépésben a **3**-at mindig egy hellyel hátrább toljuk. Leszen

2953 . . . 684

. . . . . .

295 . . . 3684
295 . . . 6384
295 . . . 6834.

Valamennyi $2k+1$ lépés végeredménye valóban pusztán **9** és **3** felcserélése.

Hasonló módon járhatunk el bármely más esetben. Mindenkor $2k+1$ lépéssel érhetünk célt. Minthogy a lépések száma páratlan és minden egyes lépésnél a permutáció jellege ellenkezőre változik, azért a kezdeti és a végső permutáció ellenkező jellegű. Tehát:

Ha két permutáció egymástól csak abban különbözik, hogy bennük két elem fel van cserélve, akkor e két permutáció ellenkező jellegű.

Ezt eddig csak abban az esetben tudtuk, midőn a felcserélt elemek szomszédosak.

Az előbbi és a jelen §-ban mondottakból egyszersmind világos az is, hogy:

Bármely permutációról ugyanazoknak az elemeknek bármely más permutációjára véges számú lépésben úgy térhetünk át, hogy mindegyik lépésnél pusztán két szomszédos elemet cserélünk fel.

III. A determinánsok.

A determináns értelmezése és legegyszerűbb tulajdonságai.

11. §. Az n-edfokú determináns n^2 számból alakul. Ezeket n (vízszintes) *sorban* és n (függőleges) *oszlopban* négyzetalakban elrendezve adjuk meg és *a determináns elemeinek* nevezzük. A belőlük alkotott determinánst úgy jelöljük, hogy a négyzetalakban elrendezett elemeket két függőleges egyenes közé foglaljuk. Tehát *azt az n-edfokú determinánst, melyben az i-dik sor j-dik eleme* a_{ij}, *így jelöljük:*

$$\begin{vmatrix} a_{11} \dots a_{1j} \dots a_{1n} \\ \dots\dots\dots\dots \\ a_{i1} \dots a_{ij} \dots a_{in} \\ \dots\dots\dots\dots \\ a_{n1} \dots a_{nj} \dots a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Jelentésére nézve e determináns mindazoknak az

$$\varepsilon a_{1p} a_{2q} \dots a_{n-1,u} a_{nv}$$

alakú szorzatoknak összege, melyekben

$$p, q, \dots, u, v$$

az első n pozitiv egész szám valamely permutációja, ε pedig a pozitiv vagy a negativ egység aszerint, hogy e permutáció páros vagy páratlan.

Minden ilyen szorzat a determinánsnak egy-egy *tagja*. Az

$$a_{11} a_{22} \dots a_{n-1,n-1} a_{nn}$$

szorzat a *főtag* (a hozzájáruló ε szorzó $+1$). A főtagban szerepelő elemek alkotják a determináns *födiagonálisát*.

E definíció szerint

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11} a_{22} - a_{12} a_{21};$$

ezt már eddig is másodfokú determinánsnak neveztük. Továbbá

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$
$$= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32}$$
$$- a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31}.$$

A másodfokú determinánsnak 2, a harmadfokúnak 6, az n-edfokúnak $n!$ tagja van.

12. §. Az imént használt jelölést megtartva, az n-edfokú determináns tagjait következőleg is állíthatjuk elő: Válasszunk ki az n^2 elemből minden lehető módon n olyant, melyek mindannyian más-más sorból és egyszersmind más-más oszlopból valók, azután alkossuk a kiválasztott

$$a_{fp}, a_{gq}, \ldots, a_{ku}, a_{lv}$$

elemekből az

$$\varepsilon a_{fp} a_{gq} \ldots a_{ku} a_{lv}$$

szorzatot, hol ε a $(+1)$-et vagy a (-1)-et jelenti aszerint, hogy az első indexből alkotott

$$f, g, \ldots k, l$$

permutáció és a második indexekből alkotott

$$p, q, \ldots, u, v$$

permutáció egyenlő vagy ellenkező jellegüek.

Ha a kiválasztott elemeket mindig úgy rendezzük, hogy

$$f, g, \ldots, k, l$$

éppen az

$$1, 2, \ldots, n-1, n$$

permutáció (az ú. n. *természetes sorrend*), akkor a tagok képzésének ez a módja teljesen megegyezik avval, melyet a determináns előbbi értelmezése megszab.

Ha a tényezők sorrendjét tetszésünk szerint választjuk, akkor is világos, hogy a nyert tagok a determináns előbbi értélmezése alapján képezett tagoktól legfeljebb előjelben különböznek. Ellenben még be kell bizonyítanunk, hogy a tagok előjelére adott általános szabály független a tényezők sorrendjétől, azaz mindig ugyanarra az eredményre vezet, mint midőn a tényezők első indexei a természetes sorrendben következnek.

Minthogy a tényezők sorrendjének bármely megváltoztatása véges számú oly lépésben végezhető, melyek mindegyike pusztán *két szomszédos* tényező felcseréléséből áll, azért elég a következő tételt bebizonyítanunk:

Midőn az

$$a_{fp} a_{gq} a_{hr} \ldots a_{ku} a_{lv}$$

szorzatban két szomszédos tényezőt felcserélünk, akkor az első és a második indexek az új sorrendben is két egyenlő jellegü permutációt alkotnak, ha eredetileg ilyeneket alkottak, ellenben az új sorrendben is két ellenkező jellegü permutációt alkotnak, ha eredetileg ilyeneket alkottak.

Ha pl. az a_{gg} és az a_{hr} tényezőket felcseréljük, akkor az első indexekből alkotott

$$f, g, h, \ldots k, l,$$

permutációban csak az a változás történik, hogy g és h helyet cserélnek. Hasonlóképpen a második indexekből alkotott

$$p, q, r, \ldots u, v,$$

permutációban q és r helyet cserélnek. Tehát mind a két permutáció jellege megváltozik. Vagyis: ha a két permutáció páros volt, akkor mind a kettő páratlanná válik; ha mind a kettő páratlan volt, akkor mind a kettő párossá válik; de mindkét esetben a két permutáció egymással egyenlő jellegű marad. Ha ellenben a két permutáció különböző jellegű volt, akkor a párosból páratlan válik, a páratlanból ellenben páros; de a két permutáció egymással ellenkező jellegű marad.

Ha a determináns minden egyes tagjában az elemeket úgy írjuk, hogy az oszlopok rendszámait jelentő második indexek a természetes sorrendben következzenek, akkor a determináns értelmezését még a következő módon is fogalmazhatjuk:

Az

$$\begin{vmatrix} a_{11} \ldots a_{1j} \ldots a_{1n} \\ \ldots\ldots\ldots \\ a_{i1} \ldots a_{ij} \ldots a_{in} \\ \ldots\ldots\ldots \\ a_{n1} \ldots a_{nj} \ldots a_{nn} \end{vmatrix}$$

determináns mindazoknak az

$$\varepsilon a_{f1} a_{g2} \ldots a_{kn-1} a_{ln}$$

alakú szorzatoknak összege, melyekben

$$f, g, \ldots, k, l$$

az első n pozitiv egész szám valamely permutációja, ε pedig a pozitiv vagy a negativ egységet jelenti aszerint, hogy e permutáció páros vagy páratlan.

13. §. *Ha valamely determináns sorai rendre megegyeznek egy másiknak oszlopaival, akkor a két determináns egymással egyenlő.*

Ha pl. az

$$A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, \quad B = \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{vmatrix}$$

determinánsokban

$$\begin{array}{lll} b_{11}=a_{11} & b_{12}=a_{21} & b_{13}=a_{31} \\ b_{21}=a_{12} & b_{22}=a_{22} & b_{23}=a_{32} \\ b_{31}=a_{13} & b_{32}=a_{23} & b_{33}=a_{33}, \end{array} \qquad 1)$$

akkor $A=B$. Valóban a determinánsok eredeti értelmezése szerint:

$$A = a_{11} a_{22} a_{33} + a_{12} a_{23} a_{31} + a_{13} a_{21} a_{32}$$

$$- a_{11} a_{23} a_{32} - a_{12} a_{21} a_{33} - a_{13} a_{22} a_{31}.$$

Az értelmezésnek a 12. § végén adott új fogalmazása szerint pedig:

$$B=b_{11}b_{22}b_{33}+b_{21}b_{32}b_{13}+b_{31}b_{12}b_{23}$$
$$-b_{11}b_{32}b_{23}-b_{21}b_{12}b_{33}-b_{31}b_{22}b_{13}.$$

De e két kifejezés az a-k és b-k közötti 1) alatti egyenletek értelmében tagról-tagra azonos egymással.

Ha két sort (vagy két oszlopot) felcserélünk, akkor a determinánsnak csak előjele változik meg.

E tétel bebizonyításánál két *sor* felcserélésére szorítkozhatunk. Ugyanis a determinánsnak két oly értelmezését ismerjük, melyek csak abban különböznek egymástól, hogy a sorokat jellemző első indexek és az oszlopokat jellemző második indexek szerepe fel van cserélve. Ennélfogva a determinánsok általános elméletében minden tétel helyes marad, ha benne *sor* helyett *oszlopot* és *oszlop* helyett *sort* mondunk, mert az eredeti tétel bebizonyításából megkapjuk az új tételét is, ha benne a kétféle index szerepét felcseréljük.

Ezt tudván, lássuk pl. azt a változást, mely

$$A=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

értékén *a második és harmadik sor* felcserélésénél beáll.

Írjuk ki A-t oly módon, hogy minden egyes tagban a második indexek a természetes sorrendben következzenek egymásra. Az írást kezdjük azokkal a tagokkal, melyekben az első indexek *páros* permutációk. Azután minden ily tag alá írjuk azt a negativ előjelű tagot, melyet belőle úgy nyerünk, hogy az első indexek sorában a 2-est és a 3-ast felcseréljük. Leszen

$$A=a_{11}a_{22}a_{33}+a_{21}a_{32}a_{13}+\cdots$$
$$-a_{11}a_{32}a_{23}-a_{31}a_{22}a_{13}-\cdots$$

Ha A-ról a második és harmadik sor felcserélésével áttérünk az

$$A'=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{vmatrix}$$

determinánsra, akkor az új determináns értékét úgy kapjuk, hogy A képletében az

$$a_{11} \quad a_{12} \quad a_{13}$$

elemeket változatlanul hagyjuk, az

$$a_{21} \quad a_{22} \quad a_{23}$$

helyébe az

$$a_{31} \quad a_{32} \quad a_{33}$$

elemeket írjuk és fordítva. De akkor A minden pozitiv előjelű tagja az alatta álló negativ előjelű tagba megy át és A minden negativ előjelű tagja a fölötte álló pozitiv tagba. Vagyis valóban

$$A'=-A.$$

E tétel egyik következménye:

Ha valamely determinánsban két sor (vagy két oszlop) egymással megegyezik, akkor e determináns értéke zérus.

Valóban, ha pl.

$$A = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 2 & 3 & 5 \\ 4 & 6 & 9 \end{vmatrix},$$

akkor az első két sor felcserélése oly A' determinánsra vezet, hogy $A' = -A$. De e felcserélés nyilván egyáltalában nem okoz változást; vagyis $A' = A$. Tehát $A = -A$ és innen $A = 0$.

14. §. *Ha valamely sor (vagy oszlop) minden eleme zérus, akkor a determináns értéke is zérus.*

Ugyanis az ily determináns minden tagjának egyik tényezője 0.

Bármely determináns egy P számmal úgy szorozható, hogy valamelyik sor (vagy oszlop) elemeit szorozzuk P-vel.

Pl.

$$A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \qquad 1)$$

P-vel való szorzata így írható:

$$PA = \begin{vmatrix} Pa_{11} & Pa_{12} & Pa_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}. \qquad 2)$$

Ugyanis A az

$$\varepsilon a_{1p} a_{2q} a_{3r}$$

alakú tagok összege, hol p, q, r az 1, 2, 3 valamely permutációja, ε pedig $+1$ vagy -1, aszerint, hogy ez a permutáció páros vagy páratlan. Ezt az összeget úgy szorozhatjuk P-vel, hogy minden egyes tagjában az a_{1p} tényezőt szorozzuk meg P-vel. Ily módon a szorzás eredményeül az

$$\varepsilon (Pa_{1p}) a_{2q} a_{3r}$$

alakú tagok összegét nyerjük. De ez éppen a 2) alatti képlet jobboldalának kifejtett alakja.

15. §. *Ha valamely A determinánsban egy sor (vagy oszlop) elemei kéttagú összegek, akkor A mint két oly determináns összege állítható elő, melyek közül az egyikben ama kéttagúak helyett csak első tagjuk áll, míg a másodikban ama kéttagúak helyett csak második tagjuk áll.*

Pl.

$$A = \begin{vmatrix} a'_{11}+a''_{11} & a'_{12}+a''_{12} & a'_{13}+a''_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

egyenlő az

$$\begin{vmatrix} a'_{11} & a'_{12} & a'_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a''_{11} & a''_{12} & a''_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \qquad 1)$$

összeggel.

Valóban az A determináns az

$$\varepsilon(a'_{1p}+a''_{1p})\,a_{2q}\,a_{3r}$$

alakú tagok összege, hol p, q, r az 1, 2, 3 valamely permutációja, ε pedig $(+1)$-et jelenti, ha e permutáció páros, és (-1)-et, ha e permutáció páratlan. Ámde

$$\varepsilon(a'_{1p}+a''_{1p})\,a_{2q}\,a_{3r}=\varepsilon a'_{1p}\,a_{2q}\,a_{3r}+\varepsilon a''_{1p}\,a_{2q}\,a_{3r}.$$

Tehát az 1) alatti determináns egyenlő az

$$\varepsilon a'_{1p}\,a_{2q}\,a_{3r} \qquad 2)$$

alakú tagoknak és az

$$\varepsilon a''_{1p}\,a_{2q}\,a_{3r} \qquad 3)$$

alakú tagoknak összegével. A 2) alakú tagoknak összege az 1) alatti első determinánst adja, a 3) alakú tagoknak összege pedig az 1) alatti második determinánst.

Hasonló tétel érvényes oly determinánsokra is, melyeknek egyik sorában (oszlopában) k-tagú összegek állanak.

16. §. Ha valamely A determináns i-dik sorában minden elemhez hozzáadjuk egy másik sor (mondjuk a h-dik sor) megfelelő elemének egy bizonyos λ számmal való szorzatát, akkor röviden azt mondjuk, hogy az *i-dik sorhoz* hozzáadjuk a h-dik *sornak* λ-val való szorzatát. *E művelet a determináns értékén nem változtat.*

(Ugyanez a tétel áll az oszlopokról is.)

Ha pl.

$$A=\begin{vmatrix}4 & 5\\ 7 & 8\end{vmatrix}$$

első sorához hozzáadjuk a másodiknak λ-val való szorzatát, akkor a következő determinánst nyerjük:

$$B=\begin{vmatrix}4+7\lambda & 5+8\lambda\\ 7 & 8\end{vmatrix}.$$

Valóban az előbbi két §-ban bebizonyított tételek értelmében:

$$B=\begin{vmatrix}4 & 5\\ 7 & 8\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}7\lambda & 8\lambda\\ 7 & 8\end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix}4 & 5\\ 7 & 8\end{vmatrix}+\lambda\begin{vmatrix}7 & 8\\ 7 & 8\end{vmatrix}.$$

Itt λ oly determinánssal van szorozva, mely 0 értékű, mert két sora egyenlő. Tehát valóban $B=A$.

Az A determináns értéke természetesen akkor sem változik, ha egyik sorából egy másiknak λ-val való szorzatát *kivonjuk*, mert e kivonás mint a $(-\lambda)$-val való szorzatnak hozzáadása fogható fel.

17. §. Az imént fejtegetett tétel segítségével *bármely determináns úgy alakítható át, hogy egyik sorának (vagy egyik oszlopának) minden eleme, legfeljebb egynek kivételével zérussá válik.*

Legyen pl.

$$A = \begin{vmatrix} 14 & -34 & 24 & 0 \\ 31 & 4 & 15 & 9 \\ 2 & 6 & 5 & 3 \\ 5 & 8 & 9 & 7 \end{vmatrix}.$$

Hogy az *első sorban* az első elem kivételével csupa zérus álljon, azt pl. a következő módon érhetjük el. A II. oszlophoz hozzáadjuk az I. oszlopot $\frac{34}{14}$ számmal szorozva és a III. oszlopból kivonjuk az I.-t a $\frac{24}{14}$ számmal szorozva. Ezen átalakítás után az első sor elemei:

$$14 \quad 0 \quad 0 \quad 0.$$

Az átalakításnak eme látszólag legegyszerűbb berendezése azonban esetünkben célszerűtlen, mert az új determináns elemei részben törtek, míg az eredeti determináns elemei egész számok voltak. Azért az átalakítást inkább több lépésben végezzük, melyeknél nem törekszünk mindjárt arra, hogy a szóban forgó sorban zérusokat kapjunk, hanem megelégszünk avval, hogy az elemek *abszolut értékét* kisebbítjük. (Pozitiv szám abszolut értékén magát ezt a számot értjük, negativ szám abszolut értékén az előjel megváltoztatásával keletkező pozitiv számot. A zérus abszolut értéke zérus.)

Az első lépésnél 14-et megtartva, a -34 és 24 helyett kisebb abszolut értékű elemeket iparkodunk kapni. Evégből a II. oszlophoz hozzáadjuk az I.-nek 2-szeresét, a III. oszlopból pedig kivonjuk az I.-t változatlanul. Az átalakítás után a determináns első sora

$$14 \quad -6 \quad 10 \quad 0.$$

A következő lépésnél az első sorban a második elem kivételével minden elem abszolut értékét kisebbé tesszük a 6-nál. Evégből az új determinánsban az I. és a III. oszlophoz hozzáadjuk a II.-nak 2-szeresét. Leszen az első sorban:

$$2 \quad -6 \quad -2 \quad 0.$$

Végre itt a II. oszlophoz hozzáadjuk az I.-nek 3-szorosát, a III. oszlophoz pedig az I. oszlopot. Az új első sor:

$$2 \quad 0 \quad 0 \quad 0,$$

hol már csak az első elem különbözik a 0-tól.

Aldeterminánsok.

18. §. Valasszunk ki az n-edfokú determinánsból tetszésünk szerint m sort. Ezeket tetszés szerinti rendben írjuk egymás alá, de úgy, hogy az egyes sorokban az elemek sorrendje ne változzék. Az így elhelyezett mn elemből válasszunk ki m oszlopot és helyezzük ezeket tetszés szerinti rendben egymás mellé, az egyes oszlopokban megtartván az elemek sorrendjét. Az ekként keletkezett, már csak m^2 elemből álló determinánsokat az eredeti determináns m-edfokú aldeterminánsainak mondjuk.

Legyen pl. az adott determináns

$$A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}.$$

Válasszuk ki a 2-dik és a 3-dik sort:

$$\begin{matrix} a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34}. \end{matrix}$$

Innen válasszuk ki a 4-dik és a 3-dik oszlopot. A kiválasztott elemekből alkotott

$$\begin{vmatrix} a_{24} & a_{23} \\ a_{34} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{24}a_{33} - a_{23}a_{34}$$

determináns az A-nak egyik *másodfokú* aldeterminánsa.

Valamely n-edfokú A determinánsnak $(n-1)$-edfokú aldeterminánsait úgy kapjuk, hogy A-ból kitörlünk egy sort és egy oszlopot és az így megmaradt $(n-1)$-edfokú determinánsban esetleg még a soroknak vagy az oszlopoknak, vagy mindkettőnek sorrendjét is megváltoztatjuk.

Ha az A-ból az i-dik sor és a j-dik oszlop kitörlésével nyert $(n-1)$-edfokú determinánst még megszorozzuk (-1)-nek $i+j$ kitevőjű hatványával, akkor e szorzatot az a_{ij} *elemhez tartozó* $(n-1$-edfokú) *aldeterminánsnak* nevezzük. Az aldeterminány elnevezés itt jogosult, mert a $(-1)^{i+j}$-vel való szorzás legfeljebb az előjel megváltoztatását jelenti, ez pedig elérhető két sor vagy két oszlop felcserélésével.

Pl. az

$$A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

determinánsban az a_{21} elemhez tartozó aldeterminány

$$A_{21} = (-1)^3 \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix},$$

ami így is írható:

$$A_{21} = \begin{vmatrix} a_{32} & a_{33} \\ a_{12} & a_{13} \end{vmatrix}.$$

19. §. *Az n-edfokú A determináns részletes alakjában az a_{ij} elemet tartalmazó tagok összege*

$$a_{ij}A_{ij},$$

hol A_{ij} az a_{ij} elemhez tartozó $(n-1)$-edfokú aldeterminánst jelenti.

E tételt az

$$A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}$$

negyedfokú determináns esetében fogjuk bebizonyítani, de oly meggondolásokkal, melyek minden más esetben is célra vezetnek.

Az a_{ij}-nek válasszuk először az utolsó sor utolsó elemét, a_{44}-et. Az a_{44} elemet tartalmazó tagok nem egyebek, mint az

$$\varepsilon a_{1p} a_{2q} a_{3r} a_{44}$$

alakú szorzatok, hol

$$p, q, r$$

az 1, 2, 3 valamely permutációja, ε pedig a pozitiv vagy negativ egység aszerint, hogy

$$p, q, r, 4$$

az 1, 2, 3, 4 valamely páros vagy páratlan permutációja. Itt 4 egyetlen elemmel sem alkot inverziót. Tehát ε a pozitiv vagy a negativ egységet jelenti aszerint, hogy

$$p, q, r$$

az 1, 2, 3 páros vagy páratlan permutációja. Ha még a_{44}-et kiemeljük akkor a vizsgált tagok összege

$$a_{44} \Sigma \varepsilon a_{1p} a_{2q} a_{3r},$$

hol Σ az összegezés (szummáció) jele és

$$\Sigma \varepsilon a_{1p} a_{2q} a_{3r}$$

azoknak az

$$\varepsilon a_{1p} a_{2q} a_{3r}$$

alakú szorzatoknak összege, melyekben p, q, r az 1, 2, 3 valamely permutációja és ε a pozitiv vagy a negativ egység aszerint, hogy e permutáció páros vagy páratlan. Vagyis

$$\Sigma \varepsilon a_{1p} a_{2q} a_{3r}$$

éppen az a_{44} elemnek megfelelő

$$A_{44} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

aldeterminánsa.

Hasonló módon bármely n-edfokú determinánsban az utolsó sor utolsó elemét tartalmazó tagok összegét úgy kapjuk, hogy ezt az elemet megszorozzuk az adott determináns azon aldeterminánsával, melyet belőle az utolsó sor és utolsó oszlop törlésével nyerünk.

Ezt tudván, lássuk most már az adott negyedfokú determinánsban pl. az a_{12} elemet tartalmazó tagok összegét. Hogy meghatározásánál az imént mondottakat felhasználhassuk, a determinánst úgy fogjuk átalakítani, hogy a_{12} az utolsó sor utolsó helyére kerüljön. Evégett az a_{12} elemet tartalmazó sort annyiszor cseréljük fel mindenkor a közvetlenül alatta levővel, míg végre legalul kerül. Az ehhez szükséges 4—1 felcserélés mindegyikénél a determináns előjele megváltozik. Tehát

$$(-1)^{4-1} A = \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \end{vmatrix}.$$

Azután az a_{12} elemet tartalmazó oszlopot annyiszor cseréljük fel mindenkor a közvetlenül reá következővel, míg végre leghátra kerül. Ehhez 4—2 felcserélés kell. Tehát

$$(-1)^{4-1}(-1)^{4-2}A = \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} & a_{24} & a_{22} \\ a_{31} & a_{33} & a_{34} & a_{32} \\ a_{41} & a_{43} & a_{44} & a_{42} \\ a_{11} & a_{13} & a_{14} & a_{12} \end{vmatrix}.$$

Ha még mind a két oldalon (—1)-nek (1+2)-dik hatványával szorzunk, a bal oldalon A áll. Tehát lesz:

$$A = (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} & a_{24} & a_{22} \\ a_{31} & a_{33} & a_{34} & a_{32} \\ a_{41} & a_{43} & a_{44} & a_{42} \\ a_{11} & a_{13} & a_{14} & a_{12} \end{vmatrix}.$$

A jobb oldalon álló

$$\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} & a_{24} & a_{22} \\ a_{31} & a_{33} & a_{34} & a_{32} \\ a_{41} & a_{43} & a_{44} & a_{42} \\ a_{11} & a_{13} & a_{14} & a_{12} \end{vmatrix}$$

determinánsban már tudjuk a leghátul álló a_{12} elemet tartalmazó tagok összegét meghatározni. Ez

$$a_{12} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}.$$

Tehát A-ban az a_{12}-t tartalmazó tagok összege

$$a_{12} A_{12},$$

hol

$$A_{12} = (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}$$

az a harmadfokú determináns, melyet A-ból úgy nyerünk, hogy a_{12} sorát és oszlopát kitöröljük és az így nyert determinánst (—1)-nek (1+2)-dik hatványával megszorozzuk.

Hasonló módon bármely más esetben az a_{ij} elemet tartalmazó tagok összege

$$a_{ij} A_{ij}.$$

20. §. A következő tétel arra képesít, hogy az n-edfokú determinánst alacsonyabb fokúak segítségével fejezhessük ki:

Ha az n-edfokú A determináns valamely sorának vagy oszlopának minden elemét megszorozzuk a hozzátartozó (n—1)-edfokú aldeterminánssal, akkor e szorzatok összege egyenlő A-al.

Az adott determinánsnak ezt az előállítását *ama sor* vagy *oszlop szerint való* kifejtésnek nevezzük.

Ha pl. $n=4$, akkor az

$$A=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}$$

determinánsnak a *második sor* szerint való kifejtése:

$$A=a_{21}A_{21}+a_{22}A_{22}+a_{23}A_{23}+a_{24}A_{24}, \qquad 1)$$

hol A_{2j} az a_{2j} elemhez tartozó aldeterminánst jelenti.

Az 1) alatti képlet bebizonyításánál A tagjait négy osztályba sorozzuk aszerint, hogy a 2-dik sornak melyik elemét tartalmazzák. Az egyes osztályokban a tagok összege

$$a_{21}A_{21},\ a_{22}A_{22},\ a_{23}A_{23},\ a_{24}A_{24}.$$

Tehát valamennyi tag összege

$$A=a_{21}A_{21}+a_{22}A_{22}+a_{23}A_{23}+a_{24}A_{24}.$$

A most bebizonyított tétel szerint pl.

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 1 & 10 & 8 \\ 2 & 3 & 1 \end{vmatrix}$$

$$=2\begin{vmatrix} 10 & 8 \\ 3 & 1 \end{vmatrix}-3\begin{vmatrix} 1 & 8 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}+5\begin{vmatrix} 1 & 10 \\ 2 & 3 \end{vmatrix}$$

$$=2(10-24)-3(1-16)+5(3-20)=-68.$$

A kifejtés itt az *első sor* szerint történt.

21. §. *Ha valamely determinánsnak egyik sorában (vagy oszlopában) egy elem kivételével valamennyi elem zérus, akkor a determináns egyenlő ezen elemnek és a hozzátartozó aldeterminánsnak szorzatával.*

Pl., ha az

$$A=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ 0 & 0 & a_{33} \end{vmatrix}$$

determinánst az utolsó sor szerint kifejtjük, akkor azt kapjuk, hogy

$$A=0\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix}-0\begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} \end{vmatrix}+a_{33}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix},$$

azaz valóban

$$A=a_{33}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}.$$

Ha még tekintetbe vesszük, hogy minden determinánsban egyszerű átalakítással bármelyik sor (vagy oszlop) minden elemét leg-

feljebb egynek kivételével 0-sá tehetjük, akkor az n-edfokú determináns kiszámítását egy alacsonyabb fokú determináns kiszámítására vezethetjük vissza. Ezt az eljárást addig folytathatjuk, míg végre másodfokú determinánsra jutunk.

Legyen pl. kiszámítandó

$$A = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 & 6 \\ 3 & 2 & 6 & 4 \\ 4 & 6 & 2 & 3 \\ 6 & 4 & 3 & 2 \end{vmatrix}.$$

Ha a II. oszlopból kivonjuk az I.-t, a III. oszlopból az I.-nek kétszeresét, és a IV. oszlopból az I.-nek háromszorosát, akkor:

$$A = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & -1 & 0 & -5 \\ 4 & 2 & -6 & -9 \\ 6 & -2 & -9 & -16 \end{vmatrix}.$$

Most már az I. oszlopból kivonva a II.-nak 2-szeresét:

$$A = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 5 & -1 & 0 & -5 \\ 0 & 2 & -6 & -9 \\ 10 & -2 & -9 & -16 \end{vmatrix}.$$

Az első sor elemei szerint kifejtve:

$$A = -\begin{vmatrix} 5 & 0 & -5 \\ 0 & -6 & -9 \\ 10 & -9 & -16 \end{vmatrix}.$$

Itt az utolsó oszlophoz adjuk az I.-t. Leszen:

$$A = -\begin{vmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & -6 & -9 \\ 10 & -9 & -6 \end{vmatrix}$$

$$= -5\begin{vmatrix} -6 & -9 \\ -9 & -6 \end{vmatrix} = -5(36-81)$$

$$= 5 \cdot 45 = 225.$$

22. §. További példaképpen számítsuk ki a következő determinánst:

$$V = \begin{vmatrix} 1 & a & a^2 & a^3 \\ 1 & b & b^2 & b^3 \\ 1 & c & c^2 & c^3 \\ 1 & d & d^2 & d^3 \end{vmatrix}.$$

Vonjuk ki a IV. oszlopból a megelőzőnek a-szorosát, azután a III. oszlopból az őt megelőzőnek a-szorosát, végre a II. oszlopból az I.-nek a-szorosát. Leszen:

$$V = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & b-a & b(b-a) & b^2(b-a) \\ 1 & c-a & c(c-a) & c^2(c-a) \\ 1 & d-a & d(d-a) & d^2(d-a) \end{vmatrix},$$

tehát

$$V=\begin{vmatrix} b-a & b(b-a) & b^2(b-a) \\ c-a & c(c-a) & c^2(c-a) \\ d-a & d(d-a) & d^2(d-a) \end{vmatrix}.$$

Itt az első sorból kiemelhetjük a $(b-a)$ tényezőt, a másodikból a $(c-a)$ tényezőt, az utolsóból a $(d-a)$ tényezőt. Ekkor:

$$V=(b-a)(c-a)(d-a)\begin{vmatrix} 1 & b & b^2 \\ 1 & c & c^2 \\ 1 & d & d^2 \end{vmatrix}.$$

Itt az utolsó tényező teljesen olyan szerkezetű harmadfokú determináns, amilyen negyedfokú maga a V volt. Ha rajta ismételjük az előbbi számítást, akkor:

$$\begin{vmatrix} 1 & b & b^2 \\ 1 & c & c^2 \\ 1 & d & d^2 \end{vmatrix}=(c-b)(d-b)\begin{vmatrix} 1 & c \\ 1 & d \end{vmatrix}=(c-b)(d-b)(d-c).$$

Tehát

$$V=(b-a)(c-a)(d-a)(c-b)(d-b)(d-c).$$

A vizsgált determináns speciális esete az úgynevezett Vandermonde-féle determinánsnak, melynek általános alakja

$$V_n=\begin{vmatrix} 1 & a_1 & a_1^2 \dots a_1^{n-1} \\ 1 & a_2 & a_2^2 \dots a_2^{n-1} \\ \dots & \dots & \dots \\ 1 & a_n & a_n^2 \dots a_n^{n-1} \end{vmatrix}.$$

E determináns n bármely értékénél úgy számítható ki, ahogyan V-t kiszámítottuk. A számítást elvégezve:

$$V_n=(a_2-a_1)(a_3-a_1)\dots(a_{n-1}-a_1)(a_n-a_1)(a_3-a_2)\dots(a_{n-1}-a_2)(a_n-a_2)\dots\dots\dots\dots(a_{n-1}-a_{n-2})(a_n-a_{n-2})(a_n-a_{n-1}).$$

Szóval V_n az a_j-a_i alakú különbségek szorzata, hol i és j az $1, 2, \dots, n-1, n$ egész számok közül való és $j>i$.

Ha összefoglaljuk azokat a tényezőket, melyekben i ugyanaz, akkor az

$$(a_{i+1}-a_i)(a_{i+2}-a_i)\dots(a_n-a_i)$$

szorzatot nyerjük. Azért a V_n-t így is írhatjuk:

$$V_n=\prod_{i=1}^{n-1}(a_{i+1}-a_i)(a_{i+2}-a_i)\dots(a_n-a_i).$$

Itt a $\prod_{i=1}^{n-1}$ jel azt jelenti, hogy a mögötte álló kifejezésben i he-

lyébe 1-től $(n-1)$-ig minden egész szám teendő és az így nyert eredmények egymással *szorzandók*.

A Vandermonde-féle determinás értéke akkor és csak akkor zérus, ha legalább két a egymással egyenlő.

23. §. *Ha a födiagonális egyik oldalán csupa zérus áll, akkor a determináns értéke egyenlő a födiagonális elemeinek szorzatával.*

Pl.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ 0 & a_{22} & a_{23} \\ 0 & 0 & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ 0 & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11} a_{22} a_{33}.$$

24. §. *Ha egy $(h+k)$-adfokú determinánsban az első h oszlopnak utolsó k eleme rendre zérus, akkor a determináns mint egy h-adfokú és egy k-adfokú determináns szorzata írható.*

Képletben:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \dots a_{1h} & a_{1,h+1} & a_{1,h+2} \dots a_{1,h+k} \\ a_{21} & a_{22} \dots a_{2h} & a_{2,h+1} & a_{2,h+2} \dots a_{2,h+k} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{h1} & a_{h2} \dots a_{hh} & a_{h,h+1} & a_{h,h+2} \dots a_{h,h+k} \\ 0 & 0 \quad 0 & b_{11} & b_{12} \quad b_{1k} \\ 0 & 0 \quad 0 & b_{21} & b_{22} \quad b_{2k} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 \quad 0 & b_{k1} & b_{k2} \quad b_{kk} \end{vmatrix}$$

egyenlő

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \dots a_{1h} \\ a_{21} & a_{22} \dots a_{2h} \\ \dots & \dots \\ a_{h1} & a_{h2} \dots a_{hh} \end{vmatrix} \text{ és } \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} \dots b_{1k} \\ b_{21} & b_{22} \dots b_{2k} \\ \dots & \dots \\ b_{k1} & b_{k2} \dots b_{kk} \end{vmatrix}$$

szorzatával.

Ez pl. $h=2$, $k=3$ esetében a következő módon látható be. Fejtsük ki az adott

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25} \\ 0 & 0 & b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ 0 & 0 & b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ 0 & 0 & b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{vmatrix}$$

determinánst. Ha a zérussal egyenlő tagokat ki sem írjuk, akkor minden tag — előjelét nem véve számba — két oly a-nak és három oly b-nek szorzata, melyek különböző sorokból és különböző oszlopokból valók.

Foglaljuk össze azokat a tagokat, melyek ugyanazokat a b-ket tartalmazzák, pl. b_{13}, b_{21} és b_{32}-t. Összegük nyilván nem egyéb, mint amibe D átmegy, ha benne a többi b helyébe zérusokat írunk, vagyis:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & b_{13} \\ 0 & 0 & b_{21} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & b_{32} & 0 \end{vmatrix},$$

Ez még így is írható:

$$-b_{32}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{15} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{25} \\ 0 & 0 & 0 & b_{13} \\ 0 & 0 & b_{21} & 0 \end{vmatrix} = b_{21}b_{32}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{15} \\ a_{21} & a_{22} & a_{25} \\ 0 & 0 & b_{13} \end{vmatrix} =$$

$$= b_{13}b_{21}b_{32}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}.$$

Hasonlóképpen hármely más (különböző sorokból és különböző oszlopokból vett) három b esetében az őket tartalmazó tagok összege legfeljebb előjelben különbözik a kiválasztott b-knek és az

$$A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$$

determinánsnak szorzatától.

Tehát D valamennyi tagját összeadva:

$$D = A\varphi,$$

hol φ értéke pusztán a b-ktől függ, vagyis az a-k értékétől független.

Hogy a φ-t meghatározhassuk, helyettesítsük a_{11} és a_{22} helyébe 1-et, a többi a helyébe pedig 0-t. E helyettesítés után D nyilván egyenlő a

$$B = \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{vmatrix}$$

determinánssal, továbbá $A=1$, úgy hogy a $D=A\varphi$ egyenlet átmegy a következőbe:

$$B = \varphi.$$

Minthogy φ értéke az a-któl független, azért φ minden más esetben is egyenlő B-vel. Ennélfogva valóban

$$D = AB.$$

Hasonló módon bizonyítható be a szóbanforgó tétel bármely más h és k-ra nézve.

A determinánsok szorzástétele.

25. §. Ha

$$A = \begin{vmatrix} a_{11} \dots a_{1n} \\ \dots\dots \\ a_{n1} \dots a_{nn} \end{vmatrix}, \quad B = \begin{vmatrix} b_{11} \dots b_{1n} \\ \dots\dots \\ b_{n1} \dots b_{nn} \end{vmatrix},$$

akkor a

$$c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \dots + a_{in}b_{nj}$$

kifejezésről azt mondjuk, hogy az A determináns i-dik sorának és a B determináns j-dik oszlopának *komponálásából* keletkezett.

A c_{ij}-kből alkotott C determinánsról pedig azt mondjuk, hogy A sorainak és B oszlopainak komponálásából keletkezett.

Ez a C determináns egyenlő A és B szorzatával.

Pl. $n=3$ esetében C a következőt jelenti:

$$\begin{vmatrix} a_{11}b_{11}+a_{12}b_{21}+a_{13}b_{31} & a_{11}b_{12}+a_{12}b_{22}+a_{13}b_{32} & a_{11}b_{13}+a_{12}b_{23}+a_{13}b_{33} \\ a_{21}b_{11}+a_{22}b_{21}+a_{23}b_{31} & a_{21}b_{12}+a_{22}b_{22}+a_{23}b_{32} & a_{21}b_{13}+a_{22}b_{23}+a_{23}b_{33} \\ a_{31}b_{11}+a_{32}b_{21}+a_{33}b_{31} & a_{31}b_{12}+a_{32}b_{22}+a_{33}b_{32} & a_{31}b_{13}+a_{32}b_{23}+a_{33}b_{33} \end{vmatrix}$$

Annak bebizonyításánál, hogy e determináns valóban

$$A=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \quad \text{és} \quad B=\begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{vmatrix}$$

szorzata, vegyük tekintetbe, hogy C első oszlopának elemei háromtagú összegek, tehát C mint három harmadfokú determináns összege állítható elő. E harmadfokú determinánsokban a második és a harmadik oszlop tagjai megint háromtagú összegek, úgy hogy még további felbontások is lehetségesek. Ennélfogva végre C-t mint $3^3=27$

$$\begin{vmatrix} a_{1p}b_{p1} & a_{1q}b_{q2} & a_{1r}b_{r3} \\ a_{2p}b_{p1} & a_{2q}b_{q2} & a_{2r}b_{r3} \\ a_{3p}b_{p1} & a_{3q}b_{q2} & a_{3r}b_{r3} \end{vmatrix} \qquad 1)$$

alakú determináns összegét írhatjuk, hol a p, q és r betűk mindegyike az 1, 2, 3 számok valamelyikét jelenti.

Az 1) alatti determináns értéke

$$b_{p1}b_{q2}b_{r3}\begin{vmatrix} a_{1p} & a_{1q} & a_{1r} \\ a_{2p} & a_{2q} & a_{2r} \\ a_{3p} & a_{3q} & a_{3r} \end{vmatrix}. \qquad 2)$$

Ha a p, q, r számok között van két egyenlő, akkor a 2) alatti kifejezés értéke zérus; ha pedig p, q, r mindannyian különbözők, vagyis ha e három betű 1, 2, 3 valamely permutációját jelenti, akkor a 2) alatti kifejezés értéke legfeljebb előjelben különbözik a következő szorzattól:

$$b_{p1}b_{q2}b_{r3}A.$$

Valamennyi 2) alakú kifejezést összeadván, nyilván

$$C=A\varphi,$$

hol φ értéke tisztán a b-ktől függ, vagyis független az a-k értékétől.

Hogy a φ-t meghatározzuk, helyettesítsük a_{11}, a_{22}, a_{33} helyébe 1-et, a többi a helyébe pedig a zérust. Ekkor C átmegy B-be, A pedig 1-be. Ebben az esetben tehát a $C=A\varphi$ egyenlet értelmében

$$B=\varphi.$$

A φ értéke az a-któl független lévén, minden más esetben is egyenlő B-vel. Tehát valóban:

$$C=AB.$$

Hasonló módon bizonyitható be a szóban forgó *szorzástétel* tetszőleges n-edfokú determinánsok esetében is.

Vegyük még tekintetbe, hogy a determináns értéke nem változik, ha oszlopait átrendezzük sorokká és sorait oszlopokká. Akkor a szorzástétel négy módot nyujt A és B szorzatának meghatározására; ezek:

1. A sorait komponáljuk B oszlopaival.
2. A oszlopait komponáljuk B soraival.
3. A sorait komponáljuk B soraival.
4. A oszlopait komponáljuk B oszlopaival.

Hogy mit kell komponáláson érteni, az az első esetben meg volt magyarázva és minden másra könnyen átvihető.

26. §. Ha két különböző fokú determináns szorzandó egymással, akkor a kisebb fokú könnyen átalakitható a másikkal egyenlő fokúvá. Pl.:

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 7 & 6 & 2 \\ 9 & 8 & 5 & -1 \\ 4 & 6 & 8 & -7 \end{vmatrix} \quad \text{és} \quad \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$$

szorzásánál a második tényező így irható:

$$\begin{vmatrix} a & b & 0 & 0 \\ c & d & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}.$$

Ha az első tényező sorait a másodiknak soraival komponáljuk, akkor a keresett szorzat:

$$\begin{vmatrix} 2a+3b & 2c+3d & 4 & 5 \\ 3a+7b & 3c+7d & 6 & 2 \\ 9a+8b & 9c+8d & 5 & -1 \\ 4a+6b & 4c+6d & 8 & -7 \end{vmatrix}.$$

Lagrange képlete.

27. §. Ha az

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}$$

determinánst úgy szorozzuk meg önmagával, hogy sorait soraival komponáljuk, akkor az

$$\begin{vmatrix} a_1^2+a_2^2 & a_1b_1+a_2b_2 \\ a_1b_1+a_2b_2 & b_1^2+b_2^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}^2$$

képletet nyerjük. Ez a következő módon általánosítható:

Az

$$\begin{vmatrix} a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2 & a_1b_1+a_2b_2+\cdots+a_nb_n \\ a_1b_1+a_2b_2+\cdots+a_nb_n & a_2^2+b_2^2+\cdots+a_n^2 \end{vmatrix} \quad 1)$$

determináns egyenlő mindazoknak az

$$\begin{vmatrix} a_r & a_s \\ b_r & b_s \end{vmatrix} \quad 2)$$

alakú determinánsoknak négyzeteiből alkotott összeggel, melyekben r, s az

$$1, 2, \ldots, n$$

számoknak valamely másodfokú kombinációja.

Pl. $n=3$ esetében

$$\begin{vmatrix} a_1^2+a_2^2+a_3^2 & a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3 \\ a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3 & b_1^2+b_2^2+b_3^2 \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} a_3 & a_1 \\ b_3 & b_1 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}^2.$$

A kimondott tétel $n=3$ esetére Lagrangetól származik és bármely n esetében a következő módon bizonyítható be:

Az 1) alatti determináns

$$(a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2)\,(b_1^2+b_2^2+\cdots+b_n^2) \quad 3)$$

és

$$(a_1b_1+a_2b_2+\cdots+a_nb_n)^2 \quad 4)$$

különbsége.

A 3) alatti szorzat részletes alakja kétféle tagokból áll, t. i. oly $a_r^2b_r^2$ alakúakból, melyekben a és b indexe ugyanaz, továbbá páronként összefoglalható $a_r^2b_s^2$, $a_s^2b_r^2$ alakúakból, melyekben a és b különböző indexű.

A 4) alatti négyzet részletes alakja szintén kétféle alakú tagokból áll, még pedig

$$a_r^2b_r^2 \quad \text{és} \quad 2a_rb_ra_sb_s$$

alakúakból.

Ha a 3) részletes alakjából kivonjuk a 4) részletes alakját, akkor az $a_r^2b_r^2$ alakú tagok kiesnek. A többiek

$$a_r^2b_s^2+a_s^2b_r^2-2a_rb_ra_sb_s = \begin{vmatrix} a_r & a_s \\ b_r & b_s \end{vmatrix}^2$$

alakú csoportokba vonhatók össze.

IV. Lineáris egyenletrendszerek.

A rendes eset.

28. §. Az n egyenletből alkotott és n ismeretlent tartalmazó lineáris egyenletrendszer általános alakja:

$$a_{11}x_1+\cdots+a_{1j}x_j+\cdots+a_{1n}x_n=b_1$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$a_{i1}x_1+\cdots+a_{ij}x_j+\cdots+a_{in}x_n=b_i$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$a_{n1}x_1+\cdots+a_{nj}x_j+\cdots+a_{nn}x_n=b_n.$$

Ezt az egyenletrendszert röviden így is írjuk:*

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j=b_i$$
$$(i=1, 2, \ldots, n).$$

Itt az a-k és b-k adott (vagy adottnak tekintett) számok és az x-ek az ismeretlenek. Az x-ek együtthatóiból alkotott

$$A=\begin{vmatrix} a_{11}\ldots a_{1n} \\ \cdots\cdots \\ a_{n1}\ldots a_{nn} \end{vmatrix}$$

determinánst az *egyenletrendszer determinánsának* nevezzük. A-nak az a_{ij} elemhez tartozó aldeterminánsát A_{ij}-vel jelöljük.

Az egyenletrendszer megoldásánál, úgy mint $n=2$ esetében tettük, most is megkülönböztetjük a *rendes* esetet, melyben A nem 0 és a *kivételes* eseteket, melyekben $A=0$.

Szorítkozzunk először a rendes esetre és legyen egyszerűség kedvéért $n=3$. Az

$$Ax_1=\begin{vmatrix} a_{11}x_1 & a_{12} & a_{13} \\ a_{21}x_1 & a_{22} & a_{23} \\ a_{31}x_1 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

determinánsban az első oszlophoz hozzáadva a másodikat x_2-vel szorozva és a harmadikat x_3-mal szorozva:

$$Ax_1=\begin{vmatrix} a_{11}x_1+a_{12}x_2+a_{13}x_3 & a_{12} & a_{13} \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+a_{23}x_3 & a_{22} & a_{23} \\ a_{31}x_1+a_{32}x_2+a_{33}x_3 & a_{23} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

Ha x_1, x_2, x_3 kielégíti az adott egyenletrendszert, akkor az első oszlop elemei helyébe rendre a b-k írhatók.

Tehát

$$Ax_1=B_1 \quad \text{és} \quad x_1=\frac{B_1}{A},$$

hol

$$B_1=\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

Hasonló meggondolásokat végezve a többi ismeretlenre nézve is, a következő eredményre jutunk: Ha a vizsgált egyenletrendszernek egyáltalában van gyökrendszere, akkor ez csak

$$x_1=\frac{B_1}{A}, \quad x_2=\frac{B_2}{A}, \quad x_3=\frac{B_3}{A}$$

* A $\sum_{j=1}^{n}$ jel azt jelenti, hogy az utána következő kifejezésben j helyébe rendre $1, 2, \ldots, n$ teendő és az így nyert tagok összeadandók.

lehet, hol B_j akként keletkezik A-ból, hogy j-dik oszlopa helyébe a b-ket írjuk.

Hogy az imént levezetett képletek szerint számított x_1, x_2, x_3 valóban gyökrendszer-e vagy sem, az még eldöntendő. Be fogjuk bizonyítani, hogy valóban az.

Évégből vegyük tekintetbe, hogy az $i = 1, 2, 3$ számok bármelyikére nézve:

$$\begin{vmatrix} b_i & a_{i1} & a_{i2} & a_{i3} \\ b_1 & a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = 0,$$

mert a bal oldalon álló determinánsban két megegyező sor van. Az első sor szerint kifejtve:

$$b_i A - a_{i1} B_1 - a_{i2} B_2 - a_{i3} B_3 = 0,$$

innen pedig

$$a_{i1} B_1 + a_{i2} B_2 + a_{i3} B_3 = b_i A,$$

azaz valóban

$$a_{i1} \frac{B_1}{A} + a_{i2} \frac{B_2}{A} + a_{i3} \frac{B_3}{A} = b_i.$$

A mondottak tetszőleges n esetében ismételhetők és a következő tételre vezetnek:

Az oly

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i \qquad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

egyenletrendszernek, melynek A determinánsa a zérustól különböző, egy és csak egy gyökrendszere van, még pedig a következő:

$$x_1 = \frac{B_1}{A}, \ldots, \quad x_j = \frac{B_j}{A}, \ldots, \quad x_n = \frac{B_n}{A},$$

Itt B_j úgy keletkezik A-ból, hogy a j-dik oszlop helyébe a b-ket írjuk.

Pl.

$$\begin{aligned} x + y + z &= 6, \\ x + 2y + 4z &= 17, \\ x - 2y + 4z &= 9 \end{aligned}$$

egyetlen gyökrendszerében

$$z = \frac{B_3}{A},$$

hol

$$A = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & -2 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & -3 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ -3 & 3 \end{vmatrix} = 12$$

és

$$B_3 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 6 \\ 1 & 2 & 17 \\ 1 & -2 & 9 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 6 \\ 0 & 1 & 11 \\ 0 & -3 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 11 \\ -3 & 3 \end{vmatrix} = 36,$$

tehát

$$z = \frac{36}{12} = 3.$$

A kivételes esetek.

29. §. A *kivételes* esetek között, melyekben az

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i \qquad (i=1, 2, \ldots, n)$$

egyenletrendszer A determinánsa zérus, azok a legegyszerűbbek, melyekben A-nak $(n-1)$-edfokú aldeterminánsai közül legalább az egyik nem zérus. Ilyen esetben természetesen a jelölést mindig úgy választhatjuk, hogy A_{nn} a zérustól különböző aldeterminánsok közé tartozzék.

Legyen tehát (az $n=3$ esetet tartva szem előtt) az

$$a_{i1} x_1 + a_{i2} x_2 + a_{i3} x_3 = b_i \qquad (i=1, 2, 3)$$

egyenletrendszerre nézve

$$A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = 0,$$

ellenben

$$A_{33} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$$

a zérustól különböző.

Az adott egyenletrendszer megoldását két lépésben végezzük el. Az egyik lépés az első két egyenletből alkotott

$$\begin{aligned} a_{11} x_1 + a_{12} x_2 + a_{13} x_3 &= b_1, \\ a_{21} x_1 + a_{22} x_2 + a_{23} x_3 &= b_2 \end{aligned} \qquad \alpha)$$

egyenletrendszer gyökrendszereinek meghatározásában áll. A második lépésben e gyökrendszerek közül kiválasztjuk azokat, melyek a még hátralevő

$$a_{31} x_1 + a_{32} x_2 + a_{33} x_3 = b_3 \qquad \beta)$$

egyenletet is kielégítik.

Az α) egyenletrendszert így is írhatjuk:

$$\begin{aligned} a_{11} x_1 + a_{12} x_2 &= b_1 - a_{13} x_3, \\ a_{21} x_1 + a_{22} x_2 &= b_2 - a_{23} x_3. \end{aligned}$$

Ezen egyenletrendszer megoldásánál x_3 tetszés szerinti értéket vehet fel. Az x_3 bármely értékéhez egy és csak egy oly megfelelő x_1, x_2 értékpár található, hogy x_1, x_2, x_3 kielégítse a két adott egyenletet. Ha ugyanis e két egyenletben csak x_1-et és x_2-t tekintjük ismeretleneknek, akkor az együtthatóikból alkotott

$$A_{33} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$$

determináns feltevésünk szerint a zérustól különböző. Az α) egyenletrendszernek eszerint végtelen sok x_1, x_2, x_3 gyökrendszere van.

Áttérve a második lépésre, a β) egyenletet így is írhatjuk:

$$a_{31}x_1+a_{32}x_2+a_{33}x_3-b_3=0.$$

Ezen egyenlet bal oldalának A_{33}-mal való szorzata így is írható:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{31}x_1+a_{32}x_2+a_{33}x_3-b_3 \end{vmatrix},$$

és ha az x-ek kielégítik az α) alatti egyenletrendszert, akkor még így is

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{11}x_1+a_{12}x_2+a_{13}x_3-b_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{21}x_1+a_{22}x_2+a_{23}x_3-b_2 \\ a_{31} & a_{32} & a_{31}x_1+a_{32}x_2+a_{33}x_3-b_3 \end{vmatrix}.$$

Az utolsó oszlopból kivonva az elsőnek x_1-gyel és a másodiknak x_2-vel való szorzatát, e determináns a következőbe megy át:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13}x_3-b_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23}x_3-b_2 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33}x_3-b_3 \end{vmatrix},$$

vagyis ebbe:

$$Ax_3-B_3,$$

hol B_3 az A-ból úgy keletkezik, hogy a harmadik oszlop helyébe a b-ket írjuk.

Ha még tekintetbe vesszük, hogy föltevésünk szerint $A=0$, akkor arra jutunk, hogy az α) egyenletrendszer minden gyökrendszerére nézve

$$A_{33}(a_{31}x_1+a_{32}x_2+a_{33}x_3-b_3) = -B_3.$$

Ha $B_3=0$, akkor innen

$$a_{31}x_1+a_{32}x_2+a_{33}x_3-b_3=0,$$

azaz α) minden gyökrendszere kielégíti az eredetileg adott egyenletrendszer utolsó egyenletét is.

Ha ellenben B_3 nem 0, akkor

$$a_{31}x_1+a_{32}x_2+a_{33}x_3-b_3$$

az α) bármely gyökrendszerére nézve a zérustól különböző. Tehát ekkor α) egyetlen egy gyökrendszere sem elégíti ki a β) egyenletet, vagyis az adott egyenletrendszernek egyetlen egy gyökrendszere sincs.

Az első esetben az adott egyenletrendszer utolsó egyenlete az első kettőnek *következménye*. A második esetben az adott egyenletrendszert *ellenmondónak* nevezzük.

A mondottakat tetszőleges n-re ismételve, a következő eredményre jutnánk:

Ha a

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i \qquad (i=1, 2, \ldots, n)$$

egyenletrendszerre nézve $A=0$, *de* A_{nn} *nem zérus, akkor az egyenletrendszer viselkedése attól a* B_n *determinánstól függ, melyet* A*-ból úgy nyerünk, hogy utolsó oszlopa helyébe a* b*-ket írjuk.*

Ha $B_n=0$, *akkor az utolsó egyenlet a többinek következménye. Az egyenletrendszernek ekkor végtelen sok gyökrendszere van, melyeket úgy nyerünk, hogy* x_n*-et határozatlanul hagyjuk és az első* $n-1$ *egyenletet*

$$x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}$$

szerint megoldjuk. Az egyenletrendszert ebben az esetben határozatlannak mondjuk.

Ha B_n *nem zérus, akkor az egyenletrendszer ellenmondó, azaz egyáltalában nincs gyökrendszere.*

30. §. Ha valamely

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i \qquad (i=1, 2, \ldots, n)$$

egyenletrendszerre nézve $A=0$, akkor meglehet, hogy A minden $(n-1)$-edfokú aldeterminánsa is zérus. Sőt az $(n-2)$-fokú aldeterminánsok is zérusok lehetnek stb. Előbb-utóbb azonban minden-esetre oly h egész számra jutunk, hogy A-nak minden $(h+1)$-edfokú aldeterminánsa zérus, de már a h-adfokú aldeterminánsai közül legalább egy a zérustól különböző. (Abban a legkedvezőtlenebb esetben, midőn $h=1$, a h-adfokú aldeterminánsokon A-nak *elemei* értendők.)

Ha a

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i \qquad (i=1, 2, \ldots, n)$$

egyenletrendszer A *determinánsának*

$$H = \begin{vmatrix} a_{11} \ldots a_{1h} \\ \ldots\ldots \\ a_{h1} \ldots a_{hh} \end{vmatrix}$$

h*-adfokú aldeterminánsa a zérustól különböző, ellenben* A*-nak minden* $(h+1)$*edfokú aldeterminánsa* 0, *akkor két eset lehetséges.*

Az egyik eshetőség, hogy az egyenletrendszer határozatlan, vagyis hogy végtelen sok gyökrendszere van, melyeket úgy nyerünk, hogy

$$x_{h+1}, x_{h+2}, \ldots, x_n$$

értékét tetszőlegesnek hagyjuk és az első h *egyenletet az*

$$x_1, x_2, \ldots, x_h$$

ismeretlenekre nézve megoldjuk.

A másik eshetőség, hogy az egyenletrendszer ellenmondó

Midőn $n=3$ és $h=2$, állításunk helyességét részletesen bebizonyítottuk. Meggondolásaink lényeges módosítás nélkül minden más n-re és h-ra ismételhetők és egyszersmind megadják annak feltételeit, hogy az egyenletrendszer ne legyen ellenmondó. Ezek a feltételek azonban általában meglehetősen bonyodalmasak. Azért felsorolásukba nem bocsátkozunk.

31. §. Példák. 1. Legyen megoldandó az

$$\begin{aligned} y-z&=a,\\ -x\quad +z&=b,\\ x-y\quad &=c \end{aligned}$$

egyenletrendszer, hol a, b és c adott számokat jelentenek.

Esetünkben

$$A=\begin{vmatrix} 0 & 1 & -1\\ -1 & 0 & 1\\ 1 & -1 & 0 \end{vmatrix}=0,$$

ellenben

$$A_{33}=\begin{vmatrix} 0 & 1\\ -1 & 0 \end{vmatrix}=1$$

a zérustól különböző.

B_3-nak értéke:

$$B_3=\begin{vmatrix} 0 & 1 & a\\ -1 & 0 & b\\ 1 & -1 & c \end{vmatrix}=a+b+c.$$

Az egyenletrendszernek akkor és csak akkor van gyökrendszere, ha

$$a+b+c=0.$$

Ha e feltétel ki van elégítve, akkor az utolsó egyenlet az első kettőnek következménye. Az első két egyenletből:

$$x=z-b,\quad y=z+a,$$

hol z tetszőleges értékeket vehet fel.

2. Legyen megoldandó:

$$\begin{aligned} x+\ y+\ u+\ v&=a,\\ x+2y+\ u+2v&=b,\\ 2x+3y+2u+3v&=c,\\ 3x+5y+3u+5v&=d, \end{aligned}$$

hol a, b, c, d adott számok.

Itt

$$A=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1\\ 1 & 2 & 1 & 2\\ 2 & 3 & 2 & 3\\ 3 & 5 & 3 & 5 \end{vmatrix}=0.$$

Továbbá A bármely harmadfokú aldeterminánsában két egyenlő oszlop van, tehát ezek az aldeterminánsok is zérusok.

A másodfokú aldeterminánsok közül

$$H = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 1.$$

Az egyenletrendszer megoldását tehát két lépésben végezzük. Először megoldjuk az első két egyenletet x és y szerint. Leszen:

$$x = 2a - b - u,$$
$$y = b - a - v,$$

hol u és v tetszőleges értékeket vehetnek fel.

Az x és y-ra nyert kifejezéseket a harmadik és negyedik egyenlet bal oldalába helyettesítve:

$$2x + 3y + 2u + 3v = 2(2a-b-u) + 3(b-a-v) + 2u + 3v = a + b,$$
$$3x + 5y + 3u + 5v = 3(2a-b-u) + 5(b-a-v) + 3u + 5v = a + 2b.$$

Tehát, ha

$$c = a + b \quad \text{és} \quad d = a + 2b,$$

akkor az első két egyenletből nyert minden gyökrendszer kielégíti a többi két egyenletet is. Ha pedig e feltételek nincsenek kielégítve, akkor az adott egyenletrendszer ellenmondó.

Homogén lineáris egyenletrendszerek.

32. §. Valamely lineáris egyenletrendszert *homogén*nek mondunk, ha benne az ismeretlenektől ment tagok zérusok. Tehát az n egyenletből alkotott és n ismeretlent tartalmazó *homogén lineáris* egyenletrendszer általános alakja

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = 0 \qquad 1)$$
$$(i = 1, 2, \ldots, n).$$

A lineáris egyenletrendszerekről mondottakat erre az esetre alkalmazva, mindenekelőtt világos, hogy a zérustól különböző A determináns esetében a homogén lineáris egyenletrendszernek egy és csak egy gyökrendszere van. Ezt tudva, magának az egyetlen gyökrendszernek felírásánál nem kell többé az általános eredményekre hivatkoznunk, hanem közvetlenül felírhatjuk, hogy

$$x_1 = 0, \; x_2 = 0, \ldots, \; x_n = 0.$$

Ha $A = 0$, akkor az általános elméletben két eset volt lehetséges, t. i. vagy végtelen sok gyökrendszer volt, vagy pedig egy sem. Az utóbbi eset homogén lineáris egyenletrendszernél lehetetlen, mert az

$$x_1 = 0, \; x_2 = 0, \ldots, \; x_n = 0$$

számok mindig gyökrendszert adnak.

A mondottakat így foglalhatjuk össze:

Ha az 1) *alatti homogén lineáris egyenletrendszerre nézve az*

A determináns a zérustól különböző, akkor nincs más gyökrendszer, mint a magától értetődő

$$x_1 = 0,\ x_2 = 0, \ldots,\ x_n = 0.$$

Ha ellenben $A = 0$, *akkor mindig vannak még más megoldások is.*

33. §. Különösen fontos az az eset, midőn $A = 0$, de A_{nn} nem zérus.

Minthogy homogén lineáris egyenletrendszer esetében a B_n-nel jelölt determináns mindig zérus, az általános elméletből világos, hogy esetünkben az utolsó egyenlet a többinek következménye és mint ilyen elhagyható.

Csak még az van hátra, hogy a törlés után megmaradt $n-1$ egyenletből álló

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = 0 \qquad \alpha)$$
$$(i=1, 2, \ldots, n-1)$$

rendszer gyökrendszereit áttekinthető alakban állítsuk elő.

Legyenek az A determináns utolsó sorához tartozó aldeterminánsok

$$A_{n1},\ A_{n2}, \ldots,\ A_{nn};$$

továbbá jelentsen μ valamely szabadon választott számot. Könnyen belátható, hogy

$$x_1 = A_{n1}\mu,\ x_2 = A_{n2}\mu, \ldots,\ x_n = A_{nn}\mu \qquad 1)$$

a μ minden választásánál kielégítik az α) egyenletrendszert. Ugyanis ezeket α) alatt behelyettesítve:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = (a_{i1} A_{n1} + \cdots + a_{in} A_{nn})\,\mu.$$

Ez pedig csakugyan zérus, mert μ együtthatója úgy keletkezik az A determinánsból, hogy utolsó sorát elhagyjuk és helyébe még egyszer leírjuk az i-dik sort.

Ha pl. $\mu = 1$, akkor

$$x_1 = A_{n1},\ x_2 = A_{n2},\ x_n = A_{nn} \qquad 2)$$

Hozzátehetjük, hogy az 1) alatti képletekből a μ alkalmas választásával megkaphatunk minden gyökrendszert.

Ez mindenekelőtt világos arra a gyökrendszerre nézve, melyben x_n értéke zérus. Ugyanis α)-ban x_n helyébe zérust téve, egy $(n-1)$ ismeretlent tartalmazó, $(n-1)$ egyenletből álló egyenletrendszert nyerünk. Benne az ismeretlenek együtthatóiból alkotott determináns A_{nn}. Minthogy ez nem zérus, az $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}$ ismeretleneknek kell zérusoknak lenniök. Vagyis α) egyetlen oly gyökrendszere, melyben $x_n = 0$, a következő:

$$x_1 = 0,\ x_2 = 0, \ldots,\ x_n = 0.$$

Ez az 1) alatti képletekből úgy adódik ki, hogy μ helyébe zérust teszünk.

Legyen most már

$$x_1, x_2, \ldots, x_n$$

oly gyökrendszer, melyben x_n a zérustól különböző (képletben: $x_n \neq 0$). Akkor az α) alatti egyenletrendszer így is írható:

$$a_{i1}\frac{x_1}{x_n} + a_{i2}\frac{x_2}{x_n} + \cdots + a_{in-1}\frac{x_{n-1}}{x_n} = -a_{in} \qquad \beta)$$
$$(i=1, 2, \ldots, n-1).$$

Ha itt az

$$\frac{x_1}{x_n}, \frac{x_2}{x_n}, \ldots, \frac{x_{n-1}}{x_n}$$

hányadosokat tekintjük ismeretleneknek, akkor egyenletrendszerünkben az ismeretlenek száma megegyezik az egyenletek számával. Továbbá az ismeretlenek együtthatóiból alkotott A_{nn} determináns a zérustól különböző. Ennélfogva e hányadosok számára egy és csak egy értékrendszert nyerünk. Tehát az α) egyenletrendszernek minden olyan megoldására nézve, melyben $x_n \neq 0$, e hányadosok értéke ugyanaz, mint a 2) alatti megoldásra nézve. Vagyis

$$\frac{x_1}{x_n} = \frac{A_{n1}}{A_{nn}}, \ldots, \frac{x_{n-1}}{x_n} = \frac{A_{nn-1}}{A_{nn}}.$$

Innen

$$x_j = A_{nj}\frac{x_n}{A_{nn}};$$

még pedig ez nemcsak $j = 1, \ldots, n-1$ esetében igaz, hanem nyilván $j = n$ esetében is. Ha még rövidség kedvéért az $\frac{x_n}{A_{nn}}$ hányadost μ-vel jelöljük, akkor valóban 1) alakú képleteket nyerünk.

34. §. Két értékrendszerről, $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$-ről és $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n$-ről, melyek egyike sem áll csupa zérusból, azt mondjuk, hogy *viszonyuk* ugyanaz, ha található oly (a zérustól különböző) μ szám, mellyel az egyik rendszer számait megszorozva rendre a másik rendszer számait nyerjük. *Proporcióban* ezt így fejezzük ki:

$$\alpha_1 : \alpha_2 : \ldots : \alpha_n = \beta_1 : \beta_2 : \ldots : \beta_n.$$

E beszédmódot használva, az imént nyert eredményt így is fogalmazhatjuk:

Ha a

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j = 0$$
$$(i=1, 2, \ldots, n)$$

homogén lineáris egyenletrendszer determinánsa $A = 0$, *de* A_{nn} *nem zérus, akkor az egyenletrendszernek a magától értetődő, (csupa zérusból álló) gyökrendszeren kívül végtelen sok más gyökrendszere is van. Ezeket a következő proporció adja meg:*

$$x_1 : x_2 : \ldots : x_n = A_{n1} : A_{n2} : \ldots : A_{nn}.$$

35. §. Példák. 1. Az

$$\begin{aligned} x + y + z &= 0, \\ x + 2y + 4z &= 0, \\ x + 3y + 9z &= 0 \end{aligned}$$

egyenletrendszer determinánsa

$$A = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 9 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 8 \end{vmatrix} = 8 - 6 = 2.$$

Tehát az egyetlen gyökrendszer

$$x = y = z = 0.$$

2. Az

$$\begin{aligned} x + y + z &= 0, \\ x + 2y + 3z &= 0, \\ x + 3y + 5z &= 0 \end{aligned}$$

egyenletrendszer determinánsa

$$A = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 4 \end{vmatrix} = 4 - 4 = 0,$$

és

$$A_{33} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 2 - 1 = 1.$$

Az egyenletrendszer utolsó egyenlete a másik kettőnek következménye. Az első két egyenletből:

$$x : y : z = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} : - \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix},$$

azaz

$$x : y : z = 1 : -2 : 1.$$

3. *Legyen megoldandó:*

$$\begin{aligned} 5x + 6y + z &= 0, \\ x + 4y - 2z &= 0. \end{aligned}$$

Ezt az egyenletrendszert úgy gondolhatjuk keletkezettnek, hogy még egy harmadik egyenletet is tartalmazott, mely azonban e kettőnek következménye volt. Ámde akkor az előbbi példa mintájára már tudjuk megoldani.

Az ismeretlenek viszonya:

$$x : y : z = \begin{vmatrix} 6 & 1 \\ 4 & -2 \end{vmatrix} : - \begin{vmatrix} 5 & 1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} 5 & 6 \\ 1 & 4 \end{vmatrix}.$$

Ugyanez így is írható:

$$x : y : z = \begin{vmatrix} 6 & 1 \\ 4 & -2 \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} 1 & 5 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} 5 & 6 \\ 1 & 4 \end{vmatrix}.$$

Itt az első determináns y és z együtthatóiból van alkotva, a többi két determinánst pedig úgy nyerjük belőle, hogy

$$x, \quad y, \quad z$$

együtthatóit két ízben ciklikusan felcseréljük, azaz minden ismeretlen együtthatói helyébe a reá következőnek, az utolsó helyett pedig az elsőnek együtthatóit írjuk.

A számítást befejezve:

$$x : y : z = -16 : 11 : 14.$$

4. *Legyen megoldandó:*

$$4x + 7y + 5 = 0,$$
$$2x + 3y - 4 = 0.$$

Ez nem is homogén egyenletrendszer. De ha így írjuk:

$$4x + 7y + 5 \cdot 1 = 0,$$
$$2x + 3y - 4 \cdot 1 = 0,$$

akkor oly homogén egyenletrendszernek tekinthető, melyben a harmadik «ismeretlen» 1. Tehát

$$x : y : 1 = \begin{vmatrix} 7 & 5 \\ 3 & -4 \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} 5 & 4 \\ -4 & 2 \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} 4 & 7 \\ 2 & 3 \end{vmatrix}$$
$$= -43 : 26 : -2.$$

Innen

$$x = \frac{-43}{-2} = 21{\cdot}5, \qquad y = \frac{26}{-2} = -13.$$

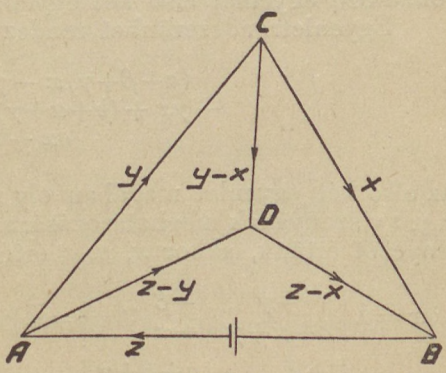
V. Alkalmazások.

Wheatstone hídja.

36. §. A lineáris egyenletrendszerek fontos gyakorlati alkalmazásra találnak, midőn valamely vezető hálózatban meghatározandó az elektromos áram eloszlása. A számítás a KIRCHHOFF-*féle törvények* segítségével történik. Ezek:

I. *Minden pontban a benne összefutó áramok intenzitásának algebrai összege zérus.*

II. *Minden zárt vezetőkörben az egyes részek ellenállásából és a rajtuk átmenő áram intenzitásából alkotott szorzatok algebrai összege egyenlő ama körben működő elektromindító erővel.*



1. ábra.

Alkalmazzuk e szabályokat az 1. ábrában látható WHEATSTONE-*hídra,* melynek *BA* részébe egy *E* elektromindító erővel biró elektromos forrás van bekapcsolva. A

$$BC,\ CA,\ AB,$$
$$AD,\ BD,\ CD$$

részek adott ellenállása legyen rendre

$$a,\ b,\ c,$$
$$\alpha,\ \beta,\ \gamma.$$

Itt c az AB drótnak és a bekapcsolt forrásnak együttes ellenállása.

A *hat* intenzitás meghatározásánál *másodfokú* determinánsok használatára szorítkozhatunk, ha a lineáris egyenletrendszerekre vonatkozó általános tételek betűszerinti alkalmazása helyett inkább a feladatban rejlő egyszerűsítések kihasználására törekszünk.

A meghatározandó intenzitásokat számítsuk a nyilakkal kijelölt irányokban pozitivoknak. A CB, AC, BA darabokban az intenzitások legyenek

$$x,\ y,\ z.$$

Az I. Kirchhoff-féle törvényt az A, B, C pontokra alkalmazva azt találjuk, hogy az AD, DB, CD részekben az áram intenzitása:

$$z-y,\ z-x,\ y-x.$$

E törvénynek a D pontra való alkalmazása nem ad új adatot az ismeretlenek meghatározására, hanem csak a

$$(z-y)-(z-x)+(y-x)=0$$

azonosságra vezet.

A II. törvényt a CBD, CDA és CBA zárt körökre alkalmazva:

$$\begin{aligned} ax-\beta(z-x)-\gamma(y-x)&=0,\\ \gamma(y-x)-\alpha(z-y)+by&=0,\\ ax+cz+by&=E. \end{aligned}$$

A II. törvény a többi zárt körre nézve már csak oly egyenleteket ad, melyek az eddigieknek következményei. Pl. az $ACBD$ zárt körre vonatkozó egyenlet első két egyenletünkből összeadással nyerhető.

Egyenletrendszerünket rendezve:

$$\begin{aligned} (a+\beta+\gamma)x-\gamma y-\beta z&=0,\\ -\gamma x+(b+\alpha+\gamma)y-\alpha z&=0,\\ ax+by+cz&=E. \end{aligned} \qquad 1)$$

Az első két egyenlet magában oly homogén egyenletrendszer, mely x, y, z viszonyának meghatározására alkalmas. Ha λ-n egy arányossági tényezőt értünk, akkor x, y, z értékei így fejezhetők ki:

$$x=\lambda\begin{vmatrix} -\gamma & -\beta \\ b+\alpha+\gamma & -\alpha \end{vmatrix}=\lambda[\gamma(\alpha+\beta)+\beta(\alpha+b)],$$

$$y=\lambda\begin{vmatrix} -\beta & a+\beta+\gamma \\ -\alpha & -\gamma \end{vmatrix}=\lambda[\gamma(\alpha+\beta)+\alpha(a+\beta)],$$

$$z=\lambda\begin{vmatrix} a+\beta+\gamma & -\gamma \\ -\gamma & b+\alpha+\gamma \end{vmatrix}=\lambda[\gamma(a+b+\alpha+\beta)+(\alpha+b)(a+\beta)].$$

Ezeket az 1) alatti utolsó egyenletbe behelyettesítve a λ számára a $\Delta\lambda = E$ egyenletet kapjuk, hol

$$\begin{aligned}\Delta &= a[\gamma(\alpha+\beta)+\beta(\alpha+b)]\\ &\quad + b[\gamma(\alpha+\beta)+\alpha(a+\beta)]\\ &\quad + c[\gamma(a+b+\alpha+\beta)+(\alpha+b)(a+\beta)]\\ &= (a+b+c)(\beta\gamma+\alpha\gamma+\alpha\beta)+bc(\beta+\gamma)+ac(\alpha+\gamma)+ab(\alpha+\beta)+abc.\end{aligned}$$

Tehát $\lambda = \frac{E}{\Delta}$ és a keresett intenzitások:

$$x = [\gamma(\alpha+\beta)+\beta(\alpha+b)]\frac{E}{\Delta},$$

$$y = [\gamma(\alpha+\beta)+\alpha(a+\beta)]\frac{E}{\Delta},$$

$$z = [\gamma(a+b+\alpha+\beta)+(\alpha+b)(a+\beta)]\frac{E}{\Delta},$$

$$z-y = [\gamma(a+b)+b(a+\beta)]\frac{E}{\Delta},$$

$$z-x = [\gamma(a+b)+a(\alpha+b)]\frac{E}{\Delta},$$

$$y-x = (a\alpha-b\beta)\frac{E}{\Delta}.$$

Ha azt akarjuk, hogy CD-ben ne legyen áram, akkor az ellenállások úgy választandók, hogy $a\alpha - b\beta$ *eltünjék* (azaz *zérus* legyen). Ennek feltétele:

$$a:b = \beta:\alpha.$$

Egész kifejezések. Rezultánsok.

37. §. Hogy a determinánsok és lineáris egyenletrendszerek tisztán elméleti alkalmazását is lássuk, még az *egész kifejezésekre* vonatkozólag akarunk nehány tételt bebizonyítani.

Egész kifejezésen ily alakú többtagút értünk:

$$f(x) = c_0 + c_1x + c_2x^2 + \cdots + c_nx^n,$$

hol a c-k adott számértékek, x ellenben határozatlan. Az egyes tagokat aszerint, hogy x-nek milyen hatványát tartalmazzák, rendre 0, első, másod, stb. *fokúnak* mondjuk. Ha x^n az x legmagasabb hatványa, mely $f(x)$-ben *valóban* (azaz zérustól különböző együtthatóval) előfordul, akkor $f(x)$-et *n-edfokúnak* vagy nyomatékosabban *pontosan n-edfokúnak* mondjuk. Pl. $1+2x+3x^2$ másodfokú. Az $f(x)$ *legfeljebb n-edfokú,* ha benne x-nek magasabb, mint n-edik hatványa nem fordul elő.

Az x fogyó hatványai szerint rendezve az

$$f(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_{n-1}x + a_n$$

jelölést is használjuk.

Egyöntetűség kedvéért 0 fokú egész kifejezésről is beszélünk, így nevezve minden x-től ment c_0 számértéket.

Ha $f(x)$-ben x helyébe valamely α számot helyettesítünk, a nyert értéket $f(\alpha)$-val jelöljük. Az α-hoz tartozó $f(\alpha)$ érték természetesen *függ* α választásától. Azért az egész kifejezéseket *egész függvényeknek* vagy pontosabban *racionális egész függvényeknek* is nevezzük. A két beszédmód között némi különbséget teszünk. *Egész kifejezést* többnyire akkor mondunk, ha a kifejezésnek főleg az alakja érdekel. *Egész függvényről* akkor beszélünk, ha inkább arra nézünk, hogy különböző α, β,... számértékeket behelyettesítve, milyen $f(\alpha) = A$, $f(\beta) = B$,... értékeket nyerünk.

A determinánsok elméletének segítségével könnyen belátható a következő tétel:

Olyan legfeljebb n-edfokú egész kifejezés, mely mint függvény felfogva $n+1$ adott, egymástól különböző $\alpha_0, \alpha_1, \ldots \alpha_n$ szám behelyettesítésével $n+1$ adott

$$u_0, u_1, \ldots, u_n$$

értéket vesz fel, mindig egy és csak egy van.

Ha pl.

$$f(x) = c_0 + c_1 x + c_2 x^2$$

együtthatóit úgy akarjuk meghatározni, hogy

$$f(2) = 1, \quad f(3) = 7, \quad f(5) = 9$$

legyen, akkor a c-k kiszámítására a

$$\begin{aligned} c_0 + 2c_1 + 4c_2 &= 1, \\ c_0 + 3c_1 + 9c_2 &= 7, \\ c_0 + 5c_1 + 25c_2 &= 9 \end{aligned}$$

lineáris egyenletrendszer szolgál. Ennek determinánsa egy zérustól különböző VANDERMONDE-féle determináns; tehát a c-k számára egy és csak egy értékrendszert kapunk.

A mondottakból világos, hogy ha két egész kifejezés — mondjuk $f(x)$ és $g(x)$ — olyan, hogy α minden értékénél $f(\alpha) = g(\alpha)$, akkor $f(x)$ és $g(x)$ alakra nézve is *azonosak*, vagyis az egyikben a $c_0, c_1, \ldots$ együtthatók rendre ugyanazok, mint a másikban.

38. §. A betűszámtanból ismeretes, hogy két egész kifejezés összege, különbsége és szorzata megint egész kifejezés alakjában fejezhető ki. Egy m-ed és egy n-ed fokú egész kifejezés szorzata $(m+n)$-edfokú kifejezés alakjában állítható elő.

Ha az

$$f(x) = a_0 x^m + a_1 x^{m-1} + \cdots + a_m, \quad \varphi(x) = \alpha_0 x^\mu + \alpha_1 x^{\mu-1} + \cdots + \alpha_\mu$$

egész kifejezésekhez található oly $(m-\mu)$-edfokú $f_1(x)$ egész kifejezés, hogy

$$f(x) = f_1(x)\varphi(x)$$

akkor azt mondjuk, hogy $f(x)$ *osztható* $\varphi(x)$-szel, hogy $\varphi(x)$ $f(x)$-*nek osztója*, vagy hogy $f(x)$ *a* $\varphi(x)$-*nek többese*.

A pontosan m-edfokú

$$f(x) = a_0 x^m + a_1 x^{m-1} + \cdots + a_m$$

és a pontosan n-edfokú

$$g(x) = b_0 x^n + b_1 x^{n-1} + \cdots + b_n$$

egész kifejezéseknek akkor és csak akkor van az x-et tartalmazó közös osztójuk, ha rezultánsuk zérus.

A két egész kifejezés *rezultánsán* azt az $(m+n)$-edfokú R determinánst értjük, melynek első n sora:

$$\begin{array}{cccccccc} a_0 & a_1 & a_2 & \ldots & a_m & 0 & 0 & \ldots 0 \\ 0 & a_0 & a_1 & \ldots & a_{m-1} & a_m & 0 & \ldots 0 \\ 0 & 0 & a_0 & \ldots & a_{m-2} & a_{m-1} & a_m & \ldots 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & a_0 & a_1 & a_2 & \ldots a_m \end{array}$$

utolsó m sora pedig:

$$\begin{array}{cccccccc} b_0 & b_1 & b_2 & \ldots & b_n & 0 & 0 & \ldots 0 \\ 0 & b_0 & b_1 & \ldots & b_{n-1} & b_n & 0 & \ldots 0 \\ 0 & 0 & b_0 & \ldots & b_{n-2} & b_{n-1} & b_n & \ldots 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & b_0 & b_1 & b_2 & \ldots b_n \end{array}$$

Pl. $m = 3$, $n = 2$ esetében.

$$R = \begin{vmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & a_3 & 0 \\ 0 & a_0 & a_1 & a_2 & a_3 \\ b_0 & b_1 & b_2 & 0 & 0 \\ 0 & b_0 & b_1 & b_2 & 0 \\ 0 & 0 & b_0 & b_1 & b_2 \end{vmatrix}.$$

A kimondott tétel még akkor is igaz, ha $f(x)$ és $g(x)$ közül az egyik nem éri el az m ill. n fokszámot, vagyis ha a_0 és b_0 közül valamelyik zérus.

Annak bebizonyításánál, hogy x-et tartalmazó közös osztó csak az $R = 0$ feltétel mellett lehetséges, tartsuk szem előtt az $m = 3$, $n = 2$ esetet. Ha ebben az esetben $f(x)$-nek és $g(x)$-nek van egy első- vagy másodfokú közös osztója, $\varphi(x)$, akkor

$$f(x) = f_1(x)\varphi(x), \quad g(x) = g_1(x)\varphi(x),$$

hol $f_1(x)$ legfeljebb másodfokú és $g_1(x)$ legfeljebb elsőfokú, de egyiknek sem minden együtthatója zérus. Innen

$$g_1(x)f(x) - f_1(x)g(x) = 0.$$

Ha $g_1(x)$ és $-f_1(x)$ együtthatóit α-kkal és β-kkal jelöljük, akkor ez az egyenlet részletesebben így írható:

$$(\alpha_0 x+\alpha_1)(a_0 x^3+a_1 x^2+a_2 x+a_3)+(\beta_0 x^2+\beta_1 x+\beta_2)(b_0 x^2+b_1 x+b_2)=0.$$

E képletnek azonosságnak kell lennie. Vagyis, ha a bal oldalt kifejtjük és x hatványai szerint rendezzük, minden együtthatónak

külön zérusnak kell lennie. Ez az α-kra és β-kra a következő homogén lineáris egyenletrendszert adja:

$$\begin{aligned}
a_0\alpha_0 \qquad\qquad &+ b_0\beta_0 \qquad\qquad\qquad &= 0,\\
a_1\alpha_0 + a_0\alpha_1 &+ b_1\beta_0 + b_0\beta_1 \qquad &= 0,\\
a_2\alpha_0 + a_1\alpha_1 &+ b_2\beta_0 + b_1\beta_1 + b_0\beta_2 &= 0,\\
a_3\alpha_0 + a_2\alpha_1 \qquad &+ b_2\beta_1 + b_1\beta_2 &= 0,\\
a_3\alpha_1 \qquad\qquad &\qquad\qquad b_2\beta_2 &= 0.
\end{aligned}$$

Itt az α-k és β-k nem lehetnek mindannyian zérusok, tehát az α-k és β-k együtthatóiból alkotott determinánsnak kell zérusnak lennie. E determináns csak annyiban különbözik R-től, hogy R első, második stb. sorának elemei benne az első, második stb. oszlopot alkotják. Eszerint a vizsgált esetben valóban $R = 0$.

39. §. Fordítva: $R = 0$ esetében $f(x)$-nek és $g(x)$-nek mindig van egy x-et valóban tartalmazó közös osztója. Ennek bebizonyításánál a jelölést mindig úgy választhatjuk, hogy $m \geqq n$. Tehát csak azokat az eseteket kell vizsgálnunk, mikor m és n értékei:

$$(1, 1), (2, 1), (2, 2), (3, 1), (3, 2), (3, 3), \ldots$$

Az $m = 1$, $n = 1$ esetben állításunk helyessége könnyen belátható. Ugyanis feltevésünk szerint az m és n számok közül legalább az egyiknek a pontos fokszámot kell jelentenie. Tehát a_0 és b_0 közül legalább az egyik nem zérus. A jelölést úgy választhatjuk, hogy a_0 ne legyen zérus, vagyis

$$f(x) = a_0x + a_1, \quad g(x) = b_0x + b_1$$

közül az első pontosan elsőfokú. Ha most

$$R = \begin{vmatrix} a_0 & a_1 \\ b_0 & b_1 \end{vmatrix} = 0,$$

akkor az $a_0b_1 - b_0a_1 = 0$ egyenletből $b_1 = \frac{b_0}{a_0}\, a_1$. Ennélfogva $g(x)$ úgy állítható elő $f(x)$-ből, hogy megszorozzuk a $\frac{b_0}{a_0}$ számmal. Ekkor tehát valóban van közös osztó, t. i. maga $f(x)$.

A tétel a legegyszerűbb esetben igaz lévén, most már a teljes indukciót alkalmazhatjuk. Vagyis csak azt kell kimutatnunk, hogy ha a tétel egy bizonyos esetig mindig igaz, akkor a legközelebbi esetben is igaz marad. Legyen ez a legközelebbi eset pl. $m = 3$, $n = 2$, vagyis legyen

$$f(x) = a_0x^3 + a_1x^2 + a_2x + a_3, \quad g(x) = b_0x^2 + b_1x + b_2.$$

Különösen egyszerűek a viszonyok, ha a_0 vagy b_0 zérus. Ha pl. $a_0 = 0$, akkor b_0 nem lehet zérus, mert kikötöttük, hogy m és n közül legalább az egyik pontos fokszámot jelentsen. R (az előjeltől eltekintve) b_0 és $\overline{R}$ szorzata, hol

$$\overline{R} = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & 0 \\ 0 & a_1 & a_2 & a_3 \\ b_0 & b_1 & b_2 & 0 \\ 0 & b_0 & b_1 & b_2 \end{vmatrix}.$$

Ha $R = 0$, akkor nyilván $\bar{R}$-nak is zérusnak kell lennie. Ez a $\bar{R}$ az $f(x) = a_1x^2 + a_2x + a_3$ kifejezésnek — ezt mint *legfeljebb másodfokú* kifejezést fogva fel — és a $g(x)$-nek rezultánsa. Tehát (minthogy a tételt $m = 2$, $n = 2$ esetben igaznak tekintjük) az $\bar{R} = 0$ esetben $f(x)$-nek és $g(x)$-nek valóban van egy x-et tartalmazó közös osztója.

Ha a_0 és b_0 egyike sem zérus, akkor képezzük az

$$F(x) = f(x) - \lambda x g(x) = (a_0 - \lambda b_0)x^3 + (a_1 - \lambda b_1)x^2 + (a_2 - \lambda b_2)x + a_3$$

kifejezést, hol $\lambda = \frac{a_0}{b_0}$, úgy hogy $F(x)$-ben az x^3 együtthatója zérus. Ha R-ben az első sorból kivonjuk a harmadiknak, a második sorból pedig a negyediknek λ-szorosát, akkor

$$R = \begin{vmatrix} a_0 - \lambda b_0 & a_1 - \lambda b_1 & a_2 - \lambda b_2 & a_3 & 0 \\ 0 & a_0 - \lambda b_0 & a_1 - \lambda b_1 & a_2 - \lambda b_2 & a_3 \\ b_0 & b_1 & b_2 & 0 & 0 \\ 0 & b_0 & b_1 & b_2 & 0 \\ 0 & 0 & b_0 & b_1 & b_2 \end{vmatrix}.$$

Vagyis R egyenlő $F(x)$ és $g(x)$ rezultánsával. Tehát ha $R = 0$, akkor (minthogy $F(x)$-ben az x^3 együtthatója zérus) az imént mondottakból már tudjuk, hogy $F(x)$-nek és $g(x)$-nek van egy x-et tartalmazó $\varphi(x)$ közös osztója. Ezzel a $\varphi(x)$-szel nyilván $f(x) = F(x) + \lambda x g(x)$ is osztható. Vagyis $f(x)$-nek és $g(x)$-nek ebben az esetben is van x-et tartalmazó közös osztója.

MÁSODIK FEJEZET.

HATÁRÉRTÉK. IRRACIONÁLIS SZÁMOK.

I. Határátmenetek a racionális számok tartományában.

A racionális számok összehasonlítása nagyságra nézve.

40. §. A mathematika legfontosabb alapjainak egyike a *határérték* fogalma. Akár a gyakorlati alkalmazásokat, akár az elméleti vizsgálatokat tekintjük, vele lépten-nyomon találkozunk. A gyakorlatban minden közelítő számításnak alapgondolata, hogy a mennyiségek valódi értékeit határértékeknek tekintjük, melyek helyett a tényleges számításnál megelégszünk hol durvább, hol pontosabb megközelítésükkel. A számtanban valamely végtelen sor összeadása lényegében annak a határértéknek meghatározása, melyhez elegendő számú tag összeadása által tetszőlegesen közel juthatunk. A geometriában egy görbe valamely pontjában vont érintő irányának, egy görbe által határolt területnek meghatározása egy-egy határérték kiszámítását kívánja.

A jelen fejezetben a határérték fogalmának, meg a vele kapcsolatos fogalmaknak értelmezésével és a reájuk vonatkozó főbb tételekkel foglalkozunk.

Tárgyalásunk egyik lényeges része lesz a racionális számok mellett új számoknak, az ú. n. *irracionális* számoknak bevezetése. Mint a számtan első elemeiben az osztás az *egész* számok mellett a *törteknek* bevezetésére indít, úgy a határértékek elmélete is a számfogalom további általánosítására vezet. Az új számokkal azonban csak e fejezet II. szakaszában foglalkozunk. Egyelőre pusztán a racionális számokat tekintjük ismereteseknek és számon mindenütt racionális számot értünk.

A jelen fejezet I. szakaszában foglaltakról később látni fogjuk, hogy többnyire akkor is változatlanul igazak maradnak, ha irracionális számokat is megengedünk. Éppen ezért a *racionális* jelzőt csak kivételesen irjuk ki, t. i. ott, ahol állításunk csakis racionális számokra helyes.

Minthogy azonban most még csak a racionális számokat tekintjük ismereteseknek, egyelőre számon mást mint racionális számot nem érthetünk.

A határértékek vizsgálatában jelentékeny szerepet játszanak azok a tételek, melyek részint maguknak a számoknak, részint abszolut értékeiknek összehasonlítására vonatkoznak. Azért mindenekelőtt ezekkel a tételekkel foglalkozunk.

41. §. Ha az $a-b$ különbség pozitiv szám, akkor azt mondjuk, hogy a nagyobb mint b, vagy más szóval, b kisebb mint a. Képletben: $a>b$, $b<a$. Ha pedig $a-b$ negativ szám, akkor b a nagyobbik és a a kisebbik.

E megállapodás értelmében bármely pozitiv szám >0 és bármely negativ szám <0.

Ha $a<b$ és $b\leqq c$, vagy ha $a\leqq b$ és $b<c$, akkor $a<c$.

Ugyanis

$$c-a=(b-a)+(c-b),$$

tehát esetünkben $c-a$ két pozitiv számnak, vagy egy pozitiv számnak és a zérusnak összege, ennélfogva maga is pozitiv szám.

Könnyen láthatók be a következő tételek is:

Ha valamely összeg egyik tagját nagyobbítjuk, akkor maga az összeg is nagyobbodik.

Ha az $a-b$ különbségben az a számot nagyobbítjuk, akkor a különbség is nagyobbodik. Ellenben a b számot nagyobbítva, a különbség kisebbedik.

Ha az ab szorzatban az egyik tényező pozitiv szám, akkor a másik tényező növesztése a szorzatot is növeszti.

Ha az $\frac{a}{b}$ hányadosban a és b pozitiv számok, akkor a számláló növesztése a hányadost is növeszti. Ellenben a nevező növesztése a hányadost kisebbíti.

42. §. Ha az a számot megszorozzuk (-1)-gyel vagy, ami ugyanaz, a-t kivonjuk 0-ból, akkor az így keletkezett

$$(-1)a=0-a$$

számot így jelöljük: $-a$. Ha a pozitiv szám, akkor $-a$ negativ szám. Ha maga a negativ szám, akkor $-a$ pozitiv számot jelent. Pl. ha $a=-7$, akkor

$$-a=(-1)(-7)=7.$$

A $-a$ számról azt mondjuk, hogy a-tól *csak előjelben* különbözik, vagy hogy a-ból *az előjel megváltozásával* keletkezett.

Két számnak, a-nak és b-nek, előjelét ellenkezőre változtatva, a köztük fennálló egyenlőtlenség is megváltozik.

Ugyanis

$$(-a)-(-b)=-(a-b)=b-a.$$

Ha $a>b$, akkor innen $b-a$ negativ szám; tehát $-a<-b$. Ha ellenben $a<b$, akkor $b-a$ pozitiv szám; tehát $-a>-b$.

Az abszolut érték.

43. §. Ha az érdekel, hogy két szám közül melyik esik közelebb a zérushoz, akkor ennek megítélésére abszolut értéküket használjuk.

Valamely pozitiv a szám abszolut értékén magát a-t értjük. Ha a negativ szám, akkor abszolut értékén $-a$ értendő, vagyis az a pozitiv szám, mely a-tól csak előjelben különbözik. Ha $a=0$,

akkor abszolut értékén is a zérust értjük. Az a szám abszolut értékének jele: $|a|$. Pl. $|5| = 5$, $|-7| = -(-7) = 7$.

Ha $|a| = |b|$, akkor a-ról és b-ről azt mondjuk, hogy egyenlő távol vannak a zérustól. Két különböző abszolut értékű szám közül azt mondjuk a zérushoz *közelebb* esőnek, melynek abszolut értéke kisebb.

Szorzat abszolut értéke egyenlő a tényezők abszolut értékeiből alkotott szorzattal.

Hányados abszolut értéke egyenlő a szám áló és a nevező abszolut értékeiből alkotott hányadossal.

Más szóval: *Az abszolut érték képezése a szorzással vagy osztással sorrendre nézve felcserélhető.* Képletben:

$$|ab| = |a||b|, \quad \left|\frac{a}{b}\right| = \frac{|a|}{|b|}.$$

Innen egyszersmind világos, hogy

$$|a^n| = |a|^n,$$

akárhogyan választjuk is az n pozitiv egész számot.

44. §. *Összeg abszolut értéke sohasem nagyobb a tagok abszolut értékeiből alkotott összegnél.* Képletben:

$$|a+b| \leqq |a| + |b|.$$

Ez közvetlenül világos, ha valamelyik tag zérus. Valóban, ha pl. $b=0$, akkor $|a+0|$ és $|a|+|0|$ közös értéke $|a|$.

Ha a és b egyike sem zérus, akkor legyen $|a| = p$, $|b| = q$. Továbbá legyen $p \geqq q$. Egyenlő előjelű a és b esetében $a+b = \pm(p+q)$ aszerint, hogy a és b mindkettő pozitiv vagy pedig mindkettő negativ. Ekkor tehát $|a+b| = p+q$, $|a|+|b| = p+q$ és

$$|a+b| = |a| + |b|.$$

Ha ellenben a és b ellenkező jelűek, akkor $a+b = \pm(p-q)$, tehát $|a+b| = p-q$, $|a|+|b| = p+q$ és

$$|a+b| < |a| + |b|.$$

Éppen így látható be a következő tétel helyessége is:

Két szám különbségének abszolut értéke sohasem kisebb az abszolut értékeikből alkotott különbségnek abszolut értékénél. Képletben:

$$|a-b| \geqq \big||a| - |b|\big|.$$

Elemi sorozatok.

45. §. Legyen adva valamely törvény, mely szerint minden n pozitiv egész számhoz meghatározható egy neki megfelelő a_n szám. Az

$$a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$$

számokról azt mondjuk, hogy *végtelen számsorozatot* (vagy rövidebben *végtelen sorozatot*) alkotnak. Az adott törvény szerint képezett szá-

mokat rendre a sorozat első, második, stb. tagjának mondjuk. (Néha a sorozatnak még egy a_1-et megelőző *zérusodik* tagot, a_0-t, is tulajdonítunk.)

Pl. az

$$1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots$$

sorozatra nézve a szóban forgó törvényt az

$$a_n = \frac{1}{n}$$

képlet adja meg.

De megtörténhetik, hogy a törvény nem fejezhető ki képlet alakjában. Ilyen pl. a következő törvény:

Jelentse a_n a legnagyobb n jegyű véges tizedestörtet, melynek négyzete kisebb mint 2.

E törvény szerint képezett sorozat:

$$a_1 = 1{\cdot}4,\ a_2 = 1{\cdot}41,\ a_3 = 1{\cdot}414,\ a_4 = 1{\cdot}4142, \dots$$

46. §. Megtörténhetik, hogy valamely sorozatban bármely δ pozitiv számhoz találunk véges számú olyan tagot, melyeknek elhagyása után a megmaradtak oly közel esnek a zérushoz, hogy mindegyiknek abszolut értéke kisebb mint δ. Ekkor a sorozatot *elemi* sorozatnak nevezzük és tagjairól azt mondjuk, hogy (*n* növekedtével) a *zérushoz* mint *határértékhez* (vagy *limeszhez*) *közelednek*.

Ilyen sorozat pl.

$$1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots$$

Példánkban minden tag után olyan következik, mely a zérushoz közelebb esik. Ennek azonban korántsem kell minden elemi sorozatban így lenni, hanem a zérushoz való közeledést hellyel-közzel távozások is megszakíthatják. Ugyanis az adott értelmezés szerint annak eldöntésénél, hogy egy adott sorozat *elemi* sorozat-e vagy sem, a tagok sorrendje nem jő tekintetbe. Tehát pl. az imént felírt sorozat *elemi* sorozat marad még akkor is, ha tagjait következőleg rendezzük:

$$1, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}, \frac{1}{5}, \frac{1}{7}, \frac{1}{4}, \frac{1}{9}, \frac{1}{11}, \frac{1}{6}, \dots ,$$

hol most már $\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{6}, \dots$ nagyobb a közvetlenül megelőző tagnál.

A legegyszerűbb elemi sorozat:

$$0, 0, \dots, 0, \dots$$

Betű szerint véve ennek a tagjai egyáltalában nem *közelednek* a zérushoz, hanem *egyenlők* vele.

Az elemi sorozatok értelmezése következőleg is fogalmazható: *Az*

$$a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$$

sorozatot elemi sorozatnak mondjuk, ha bármely δ pozitiv számhoz található oly a_n tag, melyen túl bármely a_n abszolut értéke kisebb mint δ.

47. §. Az elemi sorozat fogalmából a következő tételek helyessége közvetlenül világos:

Legyen adva egy elemi sorozat és alkossunk egy új végtelen sorozatot úgy, hogy az adott sorozatból bizonyos tagokat kihagyunk, vagy úgy, hogy az eredeti sorozat tagjait másképp rendezzük, vagy végre úgy, hogy az eredeti sorozatból bizonyos tagokat kihagyva a megmaradtakat másképp rendezzük. Mindezekben az esetekben az új sorozat megint elemi sorozat.

Ha két elemi sorozat tagjait bármily rendben egy sorozatban egyesítjük, megint elemi sorozatot kapunk. Pl. az

$$1, \frac{1}{3}, \frac{1}{5}, \frac{1}{7}, \ldots$$

$$\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{6}, \frac{1}{8}, \ldots$$

elemi sorozatok tagjainak összefoglalásával keletkezett

$$1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \frac{1}{6}, \ldots$$

sorozat megint elemi sorozat.

Ha valamely elemi sorozatról oly módon térünk át más számsorozatra, hogy az egyes tagok abszolut értékét változatlanul hagyjuk vagy kisebbítjük, akkor az új sorozat megint elemi sorozat.

Ha elemi sorozatban véges számú tagot tetszőleges más számokkal pótolunk, megint elemi sorozatot kapunk.

48. §. Ugyancsak könnyen belátható a következő tételek helyessége is:

Ha

$$\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n, \ldots$$

és

$$\varepsilon'_1, \varepsilon'_2, \ldots, \varepsilon'_n, \ldots$$

két elemi sorozat, akkor az

$$\varepsilon_1 + \varepsilon'_1, \varepsilon_2 + \varepsilon'_2, \ldots, \varepsilon_n + \varepsilon'_n, \ldots$$

összegek, valamint az

$$\varepsilon_1 - \varepsilon'_1, \varepsilon_2 - \varepsilon'_2, \ldots, \varepsilon_n - \varepsilon'_n, \ldots$$

különbségek szintén elemi sorozatot alkotnak.

Ha az

$$\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n, \ldots$$

elemi sorozat tagjait megszorozzuk valamely c számmal, akkor

$$c\varepsilon_1, c\varepsilon_2, \ldots c\varepsilon_n, \ldots,$$

megint elemi sorozat.

A bebizonyításnál jelentsen δ egy tetszőlegesen választott

pozitiv számot. Az $\varepsilon_n+\varepsilon'_n$ és $\varepsilon_n-\varepsilon'_n$ vizsgálatánál válasszuk N-et oly nagynak, hogy n-nek a N-nél nagyobb értékeire nézve

$$|\varepsilon_n|<\frac{\delta}{2},\quad |\varepsilon'_n|<\frac{\delta}{2}.$$

Akkor n ezen értékeire nézve

$$|\varepsilon_n \pm \varepsilon'_n| \leqq |\varepsilon_n| + |\varepsilon'_n| < \delta,$$

tehát az $\varepsilon_n + \varepsilon'_n$ alakú összegek, valamint az $\varepsilon_n - \varepsilon'_n$ alakú különbségek valóban elemi sorozatot alkotnak.

A $c\varepsilon_n$ sorozat vizsgálatánál válasszuk N-et úgy, hogy n-nek a N-nél nagyobb értékeire nézve $|\varepsilon_n|<\frac{\delta}{|c|}$. Akkor n ezen értékeire nézve $|c\varepsilon_n|<\delta$, vagyis a $c\varepsilon_n$ alakú szorzatok valóban elemi sorozatot alkotnak.

49. §. Példák. 1. *Ha a q állandó alapnak abszolut értéke <1, akkor a*

$$q, q^2, q^3, \ldots, q^n, \ldots$$

hatványok elemi sorozatot alkotnak.

Valóban, ha az

$$a^n - b^n = (a-b)(a^{n-1}+a^{n-2}b+a^{n-3}b^2+\cdots+ab^{n-2}+b^{n-1})$$

azonosságban $a=1$ és $b=|q|$, akkor

$$1-|q|^n=(1-|q|)(1+|q|+|q|^2+\cdots+|q|^{n-1}).$$

A bal oldalt növesztjük, ha második tagját elhagyjuk. A jobb oldalt ellenben kisebbítjük, ha a második tényező minden tagja helyébe az $|q^n|=|q|^n$ számot írjuk. Ennélfogva

$$1>n(1-|q|)|q^n| \text{ azaz } |q^n|<\frac{1}{n(1-|q|)}.$$

Ha a δ pozitiv számot tetszőlegesen adjuk meg, és N oly nagy, hogy $N(1-|q|)$ nagyobb mint δ reciprok értéke, akkor n-nek a N-nél nagyobb értékeinél

$$|q^n|<\delta.$$

Pl. ha $q=\frac{1}{10}$, akkor a mondottak szerint

$$0{\cdot}1,\ 0{\cdot}01,\ 0{\cdot}001,\ldots$$

elemi sorozat.

2. *Ha $|q|<1$, akkor nq^{n-1} az n növekedtével a zérushoz mint határértékhez közeledik.*

Ugyanis válasszuk az u pozitiv számot úgy, hogy $|q|+u<1$. Akkor

$$|q|+u,\ (|q|+u)^2,\ldots,\ (|q|+u)^n,\ldots$$

elemi sorozat. Itt

$$(|q|+u)^n \geqq (|q|+u)^n - |q|^n =$$
$$= u[(|q|+u)^{n-1} + (|q|+u)^{n-2}|q| + \cdots + |q|^{n-1})] > nu|q|^{n-1}.$$

Tehát a tagok abszolut értékét kisebbítjük, ha áttérünk a következő sorozatra:

$$u,\ 2uq, \ldots,\ nuq^{n-1}, \ldots$$

Végre minden tagot megszorozva $\frac{1}{u}$-val:

$$1,\ 2q, \ldots,\ nq^{n-1}, \ldots$$

valóban szintén elemi sorozat.

3. *A q bármely értékénél $\frac{q^n}{n!}$ az n növekedtével a zérushoz mint határértékhez közeledik.*

Ez közvetlenül világos, ha $q=0$; minden más esetben pedig következőleg bizonyítható be. Legyen m a legkisebb egész szám, mely nagyobb mint $|q|$. Továbbá legyen rövidség kedvéért:

$$\left|\frac{q^m}{m!}\right| = M, \quad \left|\frac{q}{m}\right| = \vartheta.$$

Akkor, ha $n > m$,

$$\frac{q^n}{n!} = \frac{q^m}{m!}\,\frac{q}{m+1}\,\frac{q}{m+2}\cdots\frac{q}{n}$$

és

$$\left|\frac{q^n}{n!}\right| < M\vartheta^{n-m} = \frac{M}{\vartheta^m}\,\vartheta^n.$$

Ezt tudva, vegyük tekintetbe, hogy a

$$\vartheta,\ \vartheta^2, \ldots,\ \vartheta^n, \ldots$$

hatványok elemi sorozatot alkotnak. Itt minden tagot megszorozva ugyanavval az $\frac{M}{\vartheta^m}$ számmal, megint elemi sorozatot kapunk. Ha erről áttérünk a

$$q,\ \frac{q^2}{2!},\ \frac{q^3}{3!}, \ldots$$

sorozatra, akkor — legalább az m-dik tagon túl — a tagok abszolut értékét kisebbítjük, ennélfogva az új sorozat is elemi sorozat.

A határérték fogalma.

50. §. Eddig csak oly esetekben beszéltünk határértékről, midőn ez *zérus* volt. A határérték fogalmát most már következőleg általánosítjuk:

Ha valamely

$$a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$$

végtelen sorozathoz található oly A szám, hogy az

$$a_1 - A, a_2 - A, \ldots, a_n - A \ldots$$

különbségek sorozatának határértéke zérus, vagyis ha e különbségek elemi sorozatot alkotnak: akkor azt mondjuk, hogy az adott sorozat tagjai n növekedtével minden határon túl A-hoz mint határértékhez közelednek, vagy hogy A az adott sorozatnak határértéke (limesze).

Hogy A «az $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ sorozatnak» limesze, azt röviden úgy is szoktuk kifejezni, hogy A az «a_n-nek» limesze. Képletben

$$A = \lim a_n.$$

Bármely sorozatnak legfeljebb egy limesze van.

Ha ugyanis két különböző limesze volna, A és A', akkor

$$a_1 - A, a_2 - A, \ldots, a_n - A, \ldots,$$

$$a_1 - A', a_2 - A', \ldots, a_n - A', \ldots,$$

elemi sorozatok volnának és velük együtt a megfelelő tagok kivonása által nyert

$$A - A', A - A', \ldots, A - A', \ldots,$$

sorozat is. De ez lehetetlen, mert ha δ-nak a $|A - A'|$ pozitiv számot választjuk, az utóbbi sorozatban minden tag abszolut értéke egyenlő δ-val; egyiké sem kisebb mint δ.

Az egyenlő tagú

$$A, A, A, \ldots, A, \ldots$$

sorozatnak mindig van határértéke és ez maga A.

Ha valamely

$$a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$$

sorozatnak van limesze, akkor ez egyszersmind limesze minden oly végtelen sorozatnak is, mely az eredeti sorozatból tagoknak kihagyásával, az adott tagoknak más rendezésével vagy tagoknak kihagyásával és a megmaradt tagoknak más rendezésével keletkezett.

Ha valamely végtelen számsorozatnak van limesze, akkor ez egyszersmind limesze minden oly sorozatnak is, melyet úgy kapunk, hogy az eredeti sorozatban véges számú tag helyébe más számokat írunk.

51. §. Példák. 1. Legyen

$$a_1 = 0{\cdot}3, a_2 = 0{\cdot}33, a_n = 0{\cdot}333, \ldots$$

Itt a_n azt a véges tizedestörtet jelenti, melyben a tizedespont előtti egész szám 0, a tizedespont után pedig n számú 3 áll. *Az adott sorozatnak limesze* $\frac{1}{3}$.

Állításunk más szóval azt jelenti, hogy a következő különbségek elemi sorozatot alkotnak:

$$0{\cdot}3 - \frac{1}{3} = \frac{3}{10} - \frac{1}{3} = -\frac{1}{30},$$

$$0{\cdot}33 - \frac{1}{3} = \frac{33}{100} - \frac{1}{3} = -\frac{1}{300},$$

$$0{\cdot}333 - \frac{1}{3} = \frac{333}{1000} - \frac{1}{3} = -\frac{1}{3000}.$$

....

Ez pedig nyilvánvaló. Ugyanis $\frac{1}{10}$ hatványai

$$\frac{1}{10}, \frac{1}{100}, \frac{1}{1000}, \ldots$$

elemi sorozatot alkotnak; a

$$-\frac{1}{30}, -\frac{1}{300}, -\frac{1}{3000}, \ldots$$

sorozat tagjai pedig innen úgy keletkeznek, hogy a tagok abszolut értékét kisebbítjük.

2. *Az*

$$a_0 = 1,\ a_1 = -1,\ a_2 = 1,\ a_3 = -1, \ldots,\ a_n = (-1)^n, \ldots$$

sorozatnak nincs limesze.

Ha ugyanis volna limesze, akkor ez az

$$1,\ 1,\ 1, \ldots$$

valamint a

$$-1,\ -1,\ -1, \ldots$$

sorozatnak is limesze volna. Ámde ez lehetetlen, mert e két sorozat közül az egyiknek limesze 1, a másiké -1.

Végtelen sorok. A végtelen geometriai haladvány.

52. §. Ha valamely

$$u_1,\ u_2, \ldots,\ u_n, \ldots$$

végtelen számsorozat tagjait az összeadás jelével összekötjük az

$$u_1 + u_2 + u_3 + \cdots + u_n + \cdots$$

végtelen sor keletkezik. Belőle rendre több és több tagot összeadva, az

$$s_1 = u_1,\ s_2 = u_1 + u_2,\ s_3 = u_1 + u_2 + u_3, \ldots$$

részletösszegeket nyerjük. Ha e részletösszegek egy S számhoz mint határértékhez közelednek, akkor az

$$u_1 + u_2 + u_3 + \cdots + u_n + \cdots$$

végtelen sort *összetartónak* vagy *konvergensnek* mondjuk és S-et a sor *összegének* vagy *értékének* nevezzük.

Mint rögtön látni fogjuk, nem minden végtelen sor összetartó, vagyis nem minden végtelen sornak felel meg egy S szám mint a sor összege.

53. §. Különösen egyszerű végtelen sorok a *végtelen geometriai haladványok*, vagyis az ily alakú sorok:

$$1 + q + q^2 + \cdots + q^{n-1} + \cdots \quad ,$$

hol q-t a haladvány *hányadosának* nevezzük.

A végtelen geometriai haladvány akkor és csak akkor összetartó, ha $|q| < 1$. *Ha e feltétel ki van elégítve, akkor a végtelen geometriai haladvány összege*

$$\frac{1}{1-q}.$$

Midőn $|q| \geq 1$, akkor összetartás nem következhetik be. Ha ugyanis föltesszük, hogy a haladvány összetartó és összegét S-sel jelöljük, akkor föltevésünk értelmében az

$$1 - S,\ (1+q) - S,\ (1+q+q^2) - S, \ldots \qquad A)$$

különbségek sorozata elemi sorozat. Első tagját elhagyva, a megmaradt

$$(1+q) - S,\ (1+q+q^2) - S,\ (1+q+q^2+q^3) - S, \ldots \qquad B$$

sorozat is elemi sorozat. Végre elemi sorozatot nyerünk akkor is, ha B) minden tagjából kivonjuk A) megfelelő tagját. Az így keletkezett

$$q,\ q^2,\ q^3, \ldots \qquad C)$$

sorozat azonban esetünkben nem lehet elemi sorozat, mert minden tagja abszolut értékére nézve ≥ 1.

Ha $|q| < 1$, akkor a szóban forgó tétel azt mondja, hogy az

$$s_n = 1 + q + q^2 + \cdots + q^{n-1}$$

részletösszegnek és $\frac{1}{1-q}$-nak különbsége n növekedtével a zérushoz mint határértékhez közeledik. Hogy ez valóban így van, az következőleg látható be.

Az

$$(1-q)(1+q+q^2+\cdots+q^{n-1}) = 1 - q^n$$

azonosságból

$$s_n = 1 + q + q^2 + \cdots + q^{n-1} = \frac{1-q^n}{1-q} = \frac{1}{1-q} - \frac{q^n}{1-q}$$

és

$$s_n - \frac{1}{1-q} = \frac{-q^n}{1-q}.$$

A szóban forgó esetben q hatványai elemi sorozatot alkotnak és ha mindegyiket megszorozzuk a $\frac{-1}{1-q}$ számmal, a származó

$$\frac{-q}{1-q}, \quad \frac{-q^2}{1-q}, \quad \frac{-q^3}{1-q}, \ldots$$

sorozat megint elemi sorozat. Ekkor tehát

$$\lim\left(s_n - \frac{1}{1-q}\right) = \lim \frac{-q^n}{1-q} = 0,$$

ennélfogva a vizsgált esetben a geometriai haladvány valóban összetartó és összege

$$S = \frac{1}{1-q}.$$

54. §. A számsorozatok elmélete és a végtelen soroké egymással szoros kapcsolatban van.

Mint mondottuk az

$$u_1 + u_2 + \cdots + u_n + \cdots$$

sor összeadása a részletösszegekből alkotott sorozat limeszének meghatározását kívánja.

Fordítva bármely

$$a_1, \ a_2, \ldots, \ a_n, \ldots$$

sorozat limeszének meghatározása úgy fogható fel, mint egy végtelen sornak, még pedig az

$$a_1 + (a_2 - a_1) + (a_3 - a_2) + (a_4 - a_3) + \cdots$$

sornak összeadása. Valóban e sor részletösszegei

$$s_1 = a_1, \ s_2 = a_1 + (a_2 - a_1) = a_2, \ s_3 = s_2 + (a_3 - a_2) = a_3, \ldots$$

és e sor összeadása azonos feladat $s_n = a_n$ limeszének meghatározásával.

Szabályos számsorozatok.

55. §. Azok a racionális számokból alkotott számsorozatok, melyeknek van racionális limeszük, csak speciális alosztályát alkotják egy tágabb osztálynak: *a szabályos számsorozatok* osztályának.

Valamely

$$a_1, \ a_2, \ldots, \ a_n, \ldots$$

végtelen számsorozatot szabályosnak akkor mondunk, ha bármely δ pozitiv számhoz találhatunk véges számú oly tagot, melyeknek kihagyása után a megmaradt tagok egymástól oly keveset különböznek, hogy bármelyik kettőnek különbsége abszolut értékére nézve kisebb mint δ.

Más szóval: *Valamely számsorozatot szabályosnak akkor mondunk, ha bármely δ pozitiv számhoz található oly N egész szám, hogy $|a_n - a_{n+k}| < \delta$, valahányszor $n > N$ (és $n+k > n$).*

Az értelmezés első fogalmazásából közvetlenül világos a következő tétel helyessége:

Legyen adva egy szabályos számsorozat:

$$a_1, a_2, \ldots a_n, \ldots,$$

és alkossunk egy új végtelen sorozatot vagy úgy, hogy az eredeti sorozatból bizonyos tagokat kihagyunk, vagy úgy, hogy az eredeti sorozat tagjait másképpen rendezzük, vagy végre úgy, hogy az eredeti sorozatból bizonyos tagokat kihagyunk és a megmaradtakat másképen rendezzük. Mindezekben az esetekben az új sorozat megint szabályos.

Ha szabályos számsorozatban véges számú tagot tetszés szerint más számokkal pótolunk, megint szabályos számsorozatot kapunk.

56. §. *Minden végtelen számsorozat, melynek van limesze, egyszersmind szabályos számsorozat.*

Ugyanis legyen $\lim a_n = A$, vagyis legyen

$$a_1 - A, \; a_2 - A, \ldots, \; a_n - A, \ldots$$

elemi sorozat. Ekkor bármely δ pozitiv számhoz találhatunk oly tagot, hogy bármely két későbbi tagra nézve

$$|a_n - A| < \frac{\delta}{2}, \quad |a_{n+k} - A| < \frac{\delta}{2}.$$

Tehát

$$|a_n - a_{n+k}| = |(a_n - A) + (A - a_{n+k})| \leqq |a_n - A| + |A - a_{n+k}| < \delta.$$

Vagyis az $a_1, a_2, \ldots$ sorozat valóban szabályos számsorozat.

Arra, hogy valamely végtelen számsorozatnak lehessen limesze, a mondottak szerint a sorozat szabályos volta szükséges. Ez a *szükséges* feltétel azonban magában nem elegendő (racionális) limesz létezésére. Ugyanis később majd oly szabályos számsorozatokkal is fogunk megismerkedni, melyeknek a racionális számok tartományában *nincsen* limeszük.

A racionális határértékkel biró sorozatokra vonatkozó tételek jelentékeny része bármily szabályos számsorozatra érvényes. A végtelen sorozatokra vonatkozó tételek közül ezeket fogjuk előrebocsátani. Csak azután térünk át oly vizsgálatokra, melyekben a limesz létezése is szerepet játszik.

57. §. *Az*

$$a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots \qquad 1)$$

szabályos számsorozat tagjait valamely

$$b_1, b_2, \ldots, b_n, \ldots \qquad 2)$$

sorozat tagjaival egy

$$a_1, b_1, a_2, b_2, \ldots, a_n, b_n, \ldots \qquad 3)$$

sorozatba foglalva össze, az új sorozat akkor és csak akkor szabályos, ha

$$a_1 - b_1, \; a_2 - b_2, \ldots, \; a_n - b_n, \ldots \qquad 4)$$

elemi sorozat.

Valóban, ha a 3) alatti sorozat szabályos, akkor benne bár-

mely δ pozitiv számhoz található olyan tag, melyen túl bármely két tag különbségének abszolut értéke kisebb mint δ. Tehát n eléggé nagy értékeinél $|a_n - b_n| < \delta$, vagyis ekkor a 4) alatti sorozat valóban elemi sorozat.

Fordítva, ha az 1) alatti sorozat szabályos és a 4) alatti különbségek elemi sorozatot alkotnak, akkor m és n eléggé nagy értékeinél

$$|a_n - a_m| < \frac{\delta}{3} \quad \text{és} \quad |a_m - b_m| \leqq \frac{\delta}{3}.$$

Tehát 3) alatt elég késői tagokra szorítkozva, két a különbségének abszolut értéke kisebb mint $\frac{\delta}{3}$, egy a és egy b különbségére nézve

$$|a_n - b_m| = |(a_n - a_m) + (a_m - b_m)| \leqq |a_n - a_m| + |a_m - b_m| < \frac{2}{3}\delta,$$

végre két b különbségére nézve

$$|b_n - b_m| = |(b_n - a_n) + (a_n - b_m)| \leqq |b_n - a_n| + |a_n - b_m| < \delta.$$

Vagyis a 3) alatti sorozatban bizonyos tagon túl bármely két tag különbségének abszolut értéke kisebb mint δ. Szóval ekkor a 3) alatti sorozat valóban szabályos.

58. §. *Ha az*

$$a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$$

sorozat szabályos számsorozat, akkor a tagok abszolut értékeiből alkotott

$$|a_1|, |a_2|, \ldots, |a_n|, \ldots$$

sorozat szintén szabályos számsorozat.

Ugyanis

$$\big||a_n| - |a_{n+k}|\big| \leqq |a_n - a_{n+k}|.$$

Ha tehát az eredeti sorozatban bizonyos a_n tagon túl bármely két tagra nézve

$$|a_n - a_{n+k}| < \delta,$$

akkor egyszersmind

$$\big||a_n| - |a_{n+k}|\big| < \delta.$$

59. §. *Szabályos számsorozathoz mindig található oly H pozitiv szám, hogy a sorozat egyetlen tagjának sincs H-nál nagyobb abszolut értéke.*

Valóban, ha az

$$a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$$

sorozat és vele együtt az

$$|a_1|, |a_2|, \ldots, |a_n|, \ldots$$

sorozat szabályos, δ pedig egy adott pozitiv szám, akkor minden esetre találhatunk oly $|a_n|$-et, hogy k bármely pozitiv értékénél

$$\big|\,|a_{n+k}| - |a_n|\,\big| < \delta,$$

azaz

$$-\delta < |a_{n+k}| - |a_n| < \delta.$$

Innen

$$|a_{n+k}| < |a_n| + \delta.$$

Ha most az

$$|a_1|,\ |a_2|, \ldots,\ |a_{n-1}|,\ |a_n| + \delta$$

számok közt a legnagyobbat H-val jelöljük, akkor az adott sorozat egyetlen egy tagjának sincs H-nál nagyobb abszolut értéke.

Továbbá: *Szabályos számsorozathoz mindig található oly G szám, hogy a sorozat egyetlen tagja sem kisebb mint G, és oly H szám, hogy a sorozat egyetlen tagja sem nagyobb mint H.*

Minden ily G számot a számsorozatra nézve *alsó korlátnak*, minden ily H-t pedig *felső korlátnak* mondunk. A korlátok létezése az előzőkből világos. Ha ugyanis H-t úgy választhatjuk, hogy minden tag abszolut értéke $\leqq H$, akkor n minden értékénél $|a_n| \leqq H$, vagyis

$$-H \leqq a_n \leqq H.$$

Tehát $-H$ alsó korlát és H felső korlát.

60. §. Az imént talált eredmény nem fordítható meg, vagyis alsó és felső korlát létezéséből még nem következik a sorozat szabályos volta. Pl. az

$$1,\ -1,\ 1,\ -1, \ldots$$

sorozatra nézve a 2 felső korlát és a -2 alsó korlát, de a sorozat még sem szabályos számsorozat. Van azonban a számsorozatoknak egy nagy osztálya, melyre nézve az imént talált eredmény megfordítható. Ezt az osztályt a *monoton* sorozatok alkotják.

Az

$$a_1,\ a_2, \ldots,\ a_n, \ldots$$

számsorozatot *monoton növekedőnek* mondjuk, ha

$$a_1 \leqq a_2 \leqq \ldots \leqq a_n \leqq a_{n+1} \leqq \ldots$$

Monoton fogyó számsorozat esetében

$$a_1 \geqq a_2 \geqq \ldots \geqq a_n \geqq a_{n+1} \geqq \ldots$$

Pl.

$$0{\cdot}3,\ 0{\cdot}33,\ 0{\cdot}333, \ldots$$

monoton növekedő sorozat. Ellenben

$$1,\ -1,\ 1,\ -1, \ldots$$

egyáltalában nem monoton sorozat, mert benne növekedések és fogyások keverve fordulnak elő.

Az előbbi § végén talált tétel monoton sorozatokra nézve következőleg fordítható meg:

Ha valamely sorozat monoton növekedő és van felső korlátja, vagy monoton fogyó és van alsó korlátja, akkor szabályos számsorozat.

Legyen valóban

$$a_1 \leqq a_2 \leqq \ldots \leqq a_n \leqq \ldots .$$

Ha e sorozat minden tagja kisebb egy H felső korlátnál, továbbá δ egy tetszés szerint választott pozitiv szám, végre m oly természetes szám, hogy $H - m\delta$ kisebb, mint a_1: akkor a

$$H,\ H-\delta,\ H-2\delta, \ldots H-m\delta$$

számok között az első, t. i. H, a sorozat egyetlen egy a_n tagjánál sem kisebb, viszont az utolsó, t. i. $H-m\delta$, minden a_n-nél kisebb.

Jelentse most már U a felsorolt számok közül az utolsó olyant, mely a sorozat egyetlen egy tagjánál sem kisebb. Akkor minden esetre van oly a_N, hogy

$$U - \delta < a_N \leqq U.$$

Továbbá minden későbbi a_n és a_{n+k} olyan, hogy

$$U - \delta < a_N \leqq a_n \leqq a_{n+k} < U.$$

Innen

$$|a_{n+k} - a_n| < U - (U-\delta) = \delta.$$

Tehát az adott sorozat valóban szabályos számsorozat.

Teljesen hasonló módon okoskodhatunk az oly monoton fogyó sorozatok esetében, melyeknek alsó korlátjuk van.

61. §. Az imént mondottak egyszerű alkalmazást találnak a *végtelen tizedes törtek* elméletében.

Pl. a 37·8502... végtelen tizedestört rövidített írásmód a

$$37 + \frac{8}{10} + \frac{5}{10^2} + \frac{0}{10^3} + \frac{2}{10^4} + \cdots$$

végtelen sor helyett. E sor részletösszegei:

$$s_0 = 37,\ s_1 = 37{\cdot}8,\ s_2 = 37{\cdot}85, \ldots$$

a végtelen tizedestört zérusodik, első, második, stb. *közelítő törtjének* neveztetnek.

E közelítő törtek monoton növekedő sorozatot alkotnak, továbbá nyilván mindegyik kisebb mint az s_0+1 egész szám.

Ennélfogva *valamely végtelen tizedes tört közelítő törtjei mindig szabályos számsorozatot alkotnak.*

Minthogy még csak a racionális számokat ismerjük, a végtelen tizedes tört most még csak akkor jelent számot, ha közelítő törtjeinek *racionális* határértéke van. Ez akkor és csak akkor történik, ha (akár tiszta, akár vegyes) *szakaszos* tizedestörttel van dolgunk. Minthogy e tételre nem lesz szükségünk, bebizonyításával nem foglalkozunk. Tetszőleges végtelen tizedes tört majd csak később, az irracionális számok bevezetése után fog számot jelenteni.

62. §. *Bármely végtelen számsorozatból kiválaszthatunk egy monoton sorozatot.*

Ha az adott

$$a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$$

sorozatban bármely taghoz található egy nála nagyobb, akkor válasszunk ki tetszésünk szerint egy tagot. Jelöljük ezt b_1-gyel. Azután válasszunk ki a b_1-nél nagyobb tagok közül egy b_2-t; a b_2-nél nagyobb tagok közül egy b_3-at, stb. A kiválasztott tagok sorozata monoton növekedő.

Megtörténhetik azonban, hogy az adott sorozatban van egy legnagyobb tag abban az értelemben, hogy esetleg még több vele egyenlő tag is előfordulhat, de nála nagyobb tag nincsen. Ha ebben az esetben sikerül véges számú tagot úgy kijelölünk, hogy ezek elhagyása után a megmaradt tagok között nincsen legnagyobb: akkor megint az előbbi meggondolást alkalmazhatjuk.

Meggondolásaink csak akkor pótolandók lényegesen másokkal, ha bárhogyan hagyva ki az adott sorozatból véges számú tagot, a megmaradtak között mindig található egy legnagyobb. Ekkor válasszuk ki az eredeti sorozatból a legnagyobb tagot. Jelöljük ezt b_1-gyel. Azután a b_1 törlése után megmaradt tagok közül válasszuk ki a legnagyobbat, b_2-t, stb. A kiválasztott $b_1, b_2, \ldots$ sorozat monoton fogyó.

63. §. *Ha*

$$a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$$

szabályos, de nem elemi sorozat, akkor mindig található oly ϱ pozitiv szám, hogy legfeljebb véges számú kivétellel minden a_n tag abszolut értéke $\geqq \varrho$.

Valóban, tegyük fel, hogy a sorozat szabályos számsorozat és még sincs ily ϱ pozitiv szám, hanem *bármely* pozitiv számhoz végtelen sok nála kisebb abszolut értékű tag található. Akkor a δ pozitiv számot tetszésünk szerint választva, a sorozat szabályos volta miatt találhatunk oly N-et, hogy $|a_n - a_m| < \frac{\delta}{2}$, ha m és n nagyobb mint N. Továbbá föltevésünk szerint a sorozatban végtelen sok tagnak abszolut értéke kisebb mint $\frac{\delta}{2}$; azért az a_N mögött találhatunk oly a_m-et, hogy $|a_m| < \frac{\delta}{2}$. Ha a_m-et így választjuk, akkor a_N-en túl bármely a_n-re nézve:

$$|a_n| = |(a_n - a_m) + a_m| \leqq |a_n - a_m| + |a_m| < \delta.$$

Vagyis ekkor az adott sorozat elemi sorozat.

A bebizonyított tétel még következőleg egészíthető ki: *Ha*

$$a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$$

szabályos számsorozat, de nem elemi sorozat, akkor mindig található oly ϱ pozitiv szám, hogy legfeljebb véges számú tag kivételével vagy minden tag pozitiv és $\geqq \varrho$, vagy minden tag negativ és $\leqq -\varrho$.

Ugyanis alkossanak az a_m-ek szabályos, de nem elemi sorozatot. Akkor, mint éppen láttuk, mindig találhatunk oly pozitiv ϱ

számot, hogy véges számú tag kivételével minden tag abszolut értéke $\geqq \varrho$. Tehát N-et alkalmasan választva, a N-dik tagon túl bármely két a_m és a_n tagra nézve

$$|a_m| \geqq \varrho, \quad |a_n| \geqq \varrho. \tag{1}$$

Továbbá a sorozat szabályos volta miatt N-et úgy választhatjuk, hogy a N-dik tagon túl egyszersmind

$$|a_m - a_n| < 2\varrho. \tag{2}$$

De ez csak úgy lehetséges, ha a_m és a_n egyenlő előjelűek.

Ha ugyanis ellenkező előjelűek volnának, akkor az 1) alatti egyenlőtlenségekből

$$|a_m - a_n| = |a_m| + |a_n| \geqq 2\varrho.$$

Eszerint a_N-en túl a tagok vagy mindannyian pozitivok, vagy mindannyian negativok. Minthogy azonfelül e tagok abszolut értéke $\geqq \varrho$, azért az első N tag kivételével az első esetben minden tag $\geqq \varrho$, a második esetben ellenben $\leqq -\varrho$.

64. §. *Ha*

$$a_1, \ a_2, \ldots, \ a_n, \ldots$$

és

$$b_1, \ b_2, \ldots, \ b_n, \ldots$$

szabályos számsorozatok, akkor

$$a_1 + b_1, \ a_2 + b_2, \ldots, \ a_n + b_n, \ldots, \tag{1}$$

$$a_1 - b_1, \ a_2 - b_2, \ldots, \ a_n - b_n, \ldots \tag{2}$$

és

$$a_1 b_1, \ a_2 b_2, \ldots, \ a_n b_n, \ldots \tag{3}$$

szintén szabályos számsorozatok.

Az 1) és 2) sorozat szabályos volta különösen egyszerűen bizonyítható be. Ugyanis bárhogyan választjuk a δ pozitiv számot, n és $n+k$ eléggé nagy értékeinél

$$|a_n - a_{n+k}| < \frac{\delta}{2}, \quad |b_n - b_{n+k}| < \frac{\delta}{2}$$

és innen csakugyan

$$|a_n \pm b_n - (a_{n+k} \pm b_{n+k})| =$$
$$= |a_n - a_{n+k} \pm (b_n - b_{n+k})| \leqq |a_n - a_{n+k}| + |b_n - b_{n+k}| < \delta.$$

A 3) alatti sorozat vizsgálatánál vegyük tekintetbe, hogy az a számok, valamint a b számok sorozata szabályos számsorozat lévén, a tagok abszolut értékének van egy H felső korlátja. (A H-t mindig úgy választjuk, hogy mind a két adott sorozatra nézve ugyanaz legyen.)

Most már ε bármely választása mellett az n eléggé nagy értékeinél

$$|a_n - a_{n+k}| < \varepsilon, \quad |b_n - b_{n+k}| < \varepsilon;$$

továbbá n és $n+k$ minden értékénél

$$|a_n| \leqq H, \quad |b_{n+k}| \leqq H.$$

Tehát n eléggé nagy értékeinél

$$|a_n b_n - a_{n+k} b_{n+k}| = |a_n(b_n - b_{n+k}) + b_{n+k}(a_n - a_{n+k})|$$

$$\leqq |a_n||b_n - b_{n+k}| + |b_{n+k}||a_n - a_{n+k}| \leqq 2H\varepsilon.$$

Ha ε-t úgy választjuk, hogy $2H\varepsilon < \delta$, akkor az előbbiek szerint n eléggé nagy értékeinél

$$|a_n b_n - a_{n+k} b_{n+k}| < \delta,$$

vagyis a 3) alatti sorozat valóban szabályos.

Ha a b számok mindegyike -1, akkor innen azt kapjuk, hogy *szabályos számsorozatban a tagok előjelét ellenkezőre változtatva, mindig megint szabályos számsorozatot nyerünk.*

65. §. Megtörténhetik, hogy annak az adott törvénynek, mely szerint valamely számsorozat a_n tagja képezendő, n némely értékeire nincsen értelme. Azt az esetet, hogy ez végtelen sok tagra nézve következik be, egyszersmindenkorra kizárjuk vizsgálatainkból. Ellenben megengedjük, hogy véges számú tagra nézve a törvény, szó szerint véve, értelmetlen legyen. Ilyenkor csak azokat a tagokat képezzük, melyekre nézve a törvénynek van értelme. Minden állításunk, mely a sorozat szabályos voltára vagy határértékére vonatkozik, pusztán ezeknek a valóban képezhető tagoknak a sorozatára értendő. E megállapodás egészen természetes, ha tekintetbe vesszük, hogy a sorozat szabályos volta és határértéke csak attól függ, hogy milyenek a sorozatnak elég késői tagjai.

E megállapodás után most már könnyen bebizonyítható a következő tétel:

Ha

$$a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$$

szabályos számsorozat, de nem elemi sorozat: akkor

$$\frac{1}{a_1}, \frac{1}{a_2}, \ldots, \frac{1}{a_n}, \ldots$$

szintén szabályos számsorozat.

Esetünkben okvetlenül található oly ϱ pozitiv szám, hogy legfeljebb véges számú kivétellel minden $|a_n| > \varrho$. Tehát legfeljebb véges számú kivétellel $\frac{1}{a_n}$ mindig képezhető.

Továbbá n elég nagy értékeinél

$$|a_n - a_{n+k}| < \varepsilon,$$

hol ε tetszés szerint választott pozitiv szám. Tehát

$$\left|\frac{1}{a_n} - \frac{1}{a_{n+k}}\right| = \left|\frac{a_{n+k} - a_n}{a_n a_{n+k}}\right| = \frac{|a_n - a_{n+k}|}{|a_n||a_{n+k}|} < \frac{\varepsilon}{|a_n||a_{n+k}|}.$$

Ámde $|a_n|$ és $|a_{n+k}|$ mindegyike $>\varrho$; ennélfogva

$$\left|\frac{1}{a_n}-\frac{1}{a_{n+k}}\right|<\frac{\varepsilon}{\varrho^2}.$$

Ha ε-t úgy választjuk, hogy $<\varrho^2\delta$, akkor végre

$$\left|\frac{1}{a_n}-\frac{1}{a_{n+k}}\right|<\delta.$$

Azaz az a számok reciprok értékei valóban szabályos számsorozatot alkotnak.

Általában: *Ha az*

$$a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots,$$

$$b_1, b_2, \ldots, b_n, \ldots$$

sorozatok szabályos számsorozatok és az utóbbi nem elemi sorozat, akkor

$$\frac{a_1}{b_1}, \frac{a_2}{b_2}, \ldots, \frac{a_n}{b_n}, \ldots$$

szabályos számsorozat.

Úgyanis ebben az esetben a b számok reciprok értékei szabályos sorozatot alkotnak. De akkor az $\frac{a_n}{b_n}=a_n\frac{1}{b_n}$ alakú szorzatok sorozata is szabályos számsorozat.

Általános tételek a határértékekről.

66 §. Az 50. §-ben a határérték fogalmát így értelmeztük: *Ha az*

$$a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$$

végtelen sorozathoz található oly A szám, hogy az

$$a_1-A, a_2-A, \ldots, a_n-A, \ldots$$

különbségek elemi sorozatot alkotnak, akkor azt mondjuk, hogy

$$\lim a_n = A.$$

Ugyanezt így is fejezhetjük ki: *Ez a képlet:*

$$\lim a_n = A,$$

azt jelenti, hogy bármely δ pozitiv számhoz találhatunk oly N egész számot, hogy

$$|a_n-A|<\delta,$$

ha $n>N$.

Akár az egyik, akár a másik fogalmazást tartjuk szem előtt, közvetlenül világos a következő tétel helyessége:

Ha az

$$a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$$

és az

$$a'_1, a'_2, \ldots, a'_n, \ldots$$

sorozatoknak közös A limeszük van, akkor az A szám az egyesített

$$a_1, a'_1, a_2, a'_2, \ldots, a_n, a'_n, \ldots$$

sorozatnak is limesze.

67. §. *Ha az*

$$a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$$

sorozatnak A a határértéke, a

$$b_1, b_2, \ldots, b_n, \ldots$$

sorozatnak pedig B a határértéke, akkor

$$\lim (a_n + b_n) = A + B,$$

$$\lim (a_n - b_n) = A - B,$$

$$\lim a_n b_n = AB,$$

$$\lim |a_n| = |A|.$$

Továbbá, ha B a zérustól különböző értékű, akkor egyszersmind

$$\lim \frac{a_n}{b_n} = \frac{A}{B}.$$

E különböző képletek bebizonyítása egészen egyforma; elegendő tehát, ha itt csak a szorzásra vonatkozónak bebizonyításával foglalkozunk.

Az a számoknak A limesze nyilván az

$$a_1, A, a_2, A, \ldots, a_n, A, \ldots$$

sorozatnak is limesze, tehát ez a sorozat szabályos számsorozat. Hasonlóképpen

$$b_1, B, b_2, B, \ldots, b_n, B, \ldots$$

szintén szabályos számsorozat. A megfelelő tagokat összszorozva:

$$a_1 b_1, AB, a_2 b_2, AB, \ldots, a_n b_n, AB, \ldots$$

megint szabályos számsorozat. Ennélfogva egy bizonyos tagon túl bármely két tag különbségének abszolut értéke kisebb mint δ. Ezt az észrevételt szomszédos tagokra alkalmazva, n eléggé nagy értékeinél

$$|a_n b_n - AB| < \delta.$$

Azaz valóban

$$\lim a_n b_n = AB.$$

68. §. Az előbbi §-ban foglalt tételek közül különösen figyelemre méltó következtetéseket vonhatunk a

$$\lim (a_n - b_n) = A - B \qquad 1)$$

képletből. Nevezetesen:

Valamely

$$a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$$

sorozatnak A limesze akkor és csak akkor limesze a

$$b_1, b_2, \ldots, b_n, \ldots$$

sorozatnak is, ha

$$\lim (a_n - b_n) = 0,$$

vagyis (57. §.), *ha*

$$a_1, b_1, a_2, b_2, \ldots, a_n, b_n, \ldots$$

szabályos sorozat.

Valóban, ha

$$\lim a_n = \lim b_n = A,$$

akkor az 1) képlet szerint

$$\lim (a_n - b_n) = 0.$$

Fordítva, ha

$$\lim a_n = A \quad \text{és} \quad \lim (a_n - b_n) = 0,$$

akkor

$$\lim b_n = \lim [a_n - (a_n - b_n)] = A - 0 = A$$

Továbbá:

Ha az

$$a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$$

$$b_1, b_2, \ldots, b_n, \ldots$$

sorozatoknak közös A limeszük van és a

$$c_1, c_2, \ldots, c_n, \ldots$$

sorozat minden c_n tagja nagyságra

$$a_n \text{ és } b_n,$$

közé esik, akkor egyszersmind

$$\lim c_n = A.$$

Ekkor ugyanis

$$|c_n - a_n| \leqq |b_n - a_n|.$$

De

$$\lim |b_n - a_n| = 0.$$

Ennélfogva egyszersmind $c_n - a_n$ limesze is zérus. Vagyis az imént mondottak szerint

$$\lim c_n = \lim a_n = A.$$

69. §. *Ha az*

$$a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$$

sorozatnak A a limesze, a

$$b_1, b_2, \ldots, b_n, \ldots$$

sorozatnak pedig B a limesze, továbbá n-nek végtelen sok értékére nézve $a_n \leqq b_n$: akkor egyszersmind $A \leqq B$.

Hogy ezt belássuk, tegyük fel, hogy $A > B$, és mutassuk ki, hogy e föltevés ellenmondásra vezet.

Valóban, ekkor legfeljebb véges számú kivétellel a_n mindig oly közel esik A-hoz, hogy közelebb van hozzá, mint a A-nál kisebb $\frac{A+B}{2}$. Vagyis legfeljebb véges számú kivétellel

$$\frac{A+B}{2} < a_n.$$

Hasonlóképpen legfeljebb véges számú kivétellel

$$b_n < \frac{A+B}{2}.$$

Tehát legfeljebb véges számú kivétellel

$$b_n < \frac{A+B}{2} < a_n.$$

Ennélfogva nem lehet végtelen sok n-re nézve $a_n \leqq b_n$*.

Ha a bebizonyított tételben vagy az a vagy a b számok mind egyenlők egy adott G számmal és a másik sorozat tagjait u-kkal jelöljük, akkor a tétel a következőkbe megy át:

Ha $U = \lim u_n$ *és végtelen sok* n*-re nézve* $u_n \geqq G$, *akkor egyszersmind* $U \geqq G$.

Ha $U = \lim u_n$ *és végtelen sok* n*-re nézve* $u_n \leqq G$, *akkor egyszersmind* $U \leqq G$.

Szabályos számsorozatok, melyeknek nincs racionális határértékük.

70. §. *Racionális számokból alkotott szabályos számsorozatnak a racionális számok tartományában nincsen mindig határértéke.*

Erről igen egyszerű példán győződhetünk meg. Képezzünk egy végtelen tizedes törtet úgy, hogy minden közelítő törtjének négyzete < 2, de bármely közelítő törtjének utolsó jegyét 1-gyel nagyobbítva,** a nyert szám négyzete már ne legyen < 2. E végtelen tizedestört: 1·4142135... Közelítő törtjei az

$$a_0 = 1,\ a_1 = 1{\cdot}4,\ a_2 = 1{\cdot}41,\ a_3 = 1{\cdot}414, \ldots$$

szabályos számsorozatot alkotják. Ha minden közelítő tört utolsó jegyét 1-gyel nagyobbítjuk:

$$a'_0 = 2,\ a'_1 = 1{\cdot}5,\ a'_2 = 1{\cdot}42,\ a'_3 = 1{\cdot}415, \ldots$$

* Tévedés volna azt hinni, hogy ha n minden értékénél $a_n < b_n$, akkor egyszersmind $A < B$.

Ha pl. $a_n = 1 - \frac{1}{n}$, $b_n = 1 + \frac{1}{n}$, akkor $a_n < b_n$ és mégis $A = B = 1$.

** Ha egy véges tizedes tört 9-cel végződik, akkor az utolsó jegy nagyítása úgy értendő, hogy az utolsó 9-től különböző jegyet nagyobbítjuk 1-gyel és az utána levő 9-eseket 0-okkal pótoljuk. Pl. 3·78399-ből 3·78400 lesz.

Ez monoton fogyó sorozat és minden tagja >0, tehát ez is szabályos számsorozat.

E két szabályos számsorozatnak a racionális számok tartományában nincs limesze.

Ezt indirekt úton fogjuk bebizonyítani. Föltesszük, hogy legalább az egyik sorozatnak van racionális A limesze, és kimutatjuk, hogy e föltevés ellenmondásra vezet.

A föltett esetben A a két adott számsorozat közül a másiknak is limesze, mert

$$\lim (a'_n - a_n) = \lim \frac{1}{10^n} = 0.$$

Továbbá (67. §.)

$$\lim a_n^2 = \lim a_n'^2 = A^2.$$

Ámde $a_n^2 < 2$ és $a_n'^2 \geqq 2$. Tehát (69. §.)

$$\lim a_n^2 = A^2 \leqq 2, \quad \lim a_n'^2 = A^2 \geqq 2.$$

Innen $A^2 = 2$. De ez lehetetlen, mert (mint rögtön látni fogjuk) olyan racionális szám nincsen, melynek négyzete 2.

71. §. *Az $x^2 = 2$ egyenletnek racionális szám nem tehet eleget.*

Ugyanis tegyük fel, hogy egyenletünknek van racionális gyöke. Ez mindenesetre a $\frac{p}{q}$ alakban írható, hol p és q két oly egész szám, melyeknek nincsen közös osztójuk. A $\frac{p}{q}$ értéket behelyettesítve és q négyzetével szorozva:

$$p^2 = 2q^2.$$

Innen p^2 páros szám, tehát p is az. Vagyis $p = 2u$, hol u megint egész szám.

A $p^2 = 2q^2$ egyenlet most már így is írható:

$$4u^2 = 2q^2,$$

vagy egyszerűbben:

$$2u^2 = q^2.$$

Innen q is páros szám.

Ily módon arra jutottunk, hogy p és q mindkettő páros szám. De ez ellenkezik avval, hogy nincs közös osztójuk.

A következő II. szakaszban azt fogjuk látni, hogy a 40—69. §-okban mondottak változatlanul érvényesek akkor is, ha számon nem pusztán racionális számot értünk, hanem irracionális számokat is megengedünk. A 70. és a 71. §-ban mondottakban ellenben lényeges, hogy ott pusztán a racionális számok tartományára szorítkozunk. Ha ugyanis a racionális számok tartományát kibővítjük az irracionális számokkal és a bővített tartományt a *valós számok* tartományának nevezzük: ebben, mint látni fogjuk, minden valós számokból alkotott szabályos számsorozatnak *van* határértéke. A valós számok tartományában pl. 1·4142 . . . közelítőtörtjeinek is van limeszük, csakhogy ez *irracionális* szám.

Új számok szüksége a hosszmérésnél

72. §. Az imént oly szabályos számsorozatokra akadtunk, melyeknek a racionális számok tartományában nincsen határértékük. Ez arra fog bennünket indítani, hogy e fejezet II. szakaszában új számoknak bevezetésével oly számtartományt állítsunk elő, melyben kivétel nélkül minden *szabályos számsorozatnak* van határértéke. Előbb azonban még a következő fontos jelenségről akarunk megemlékezni, mert szintén arra figyelmeztet, hogy a racionális számokon kívül még másokra is van szükségünk:

A racionális számok nem elegendők arra, hogy segítségükkel bármely két egyenesdarab viszonyát jellemezzük.

Pl. a négyzet diagonálisának és oldalának viszonya nem jellemezhető racionális számmal.

Ennek belátására a következő §-okban foglalt meggondolások alkalmasak.

73. §. Ha az A és B pontok által határolt AB egyenesdarab valamely GH-ból úgy állítható elő, hogy p számú a GH-val egyenlő egyenesdarabot egymás mellé rakunk, akkor azt mondjuk, hogy GH az AB-ben *éppen p-szer foglaltatik*. AB-t a GH *többszörösének*, még pedig p-szeresének, viszont GH-t az AB *aliquot részének*, még pedig *p-ed részének* nevezzük. Képletben:

$$AB = pGH.$$

Ha $AB = pGH$, akkor nyilván

$$nAB = (np)\,GH.$$

Fordítva, az utóbbi képlet csak akkor helyes, ha AB a GH-nak p-szerese.

Ha két AB és CD egyenesdarabhoz található oly GH, hogy

$$AB = pGH, \quad CD = qGH,$$

akkor azt mondjuk, hogy AB és CD *viszonya* egyenlő a p és q egész számok viszonyával. A két viszony egyenlőségét az

$$AB : CD = p : q \qquad 1)$$

proporcióval fejezzük ki.

Ennek a proporciónak tartalma a

$$qAB = pCD \qquad 2)$$

egyenlettel is kifejezhető. Ha ugyanis

$$AB = pGH \quad \text{és} \quad CD = qGH,$$

akkor

$$qAB = (pq)\,GH \quad \text{és} \quad pCD = (pq)\,GH.$$

Fordítva, ha a 2) alatti képlet helyes és CD-nek q-ad részét GH-val jelöljük, akkor

$$CD = qGH, \quad qAB = (pq)\,GH, \quad AB = pGH,$$

azaz $CD : AB$ valóban egyenlő p és q viszonyával.

Ha

$$AB : CD = p : q, \tag{3}$$

akkor az

$$AB : CD = p' : q' \tag{4}$$

helyességének feltételét a

$$\frac{p}{q} = \frac{p'}{q'} \tag{5}$$

egyenlet fejezi ki.

Valóban, ha a 3) és 4) alatti proporciók helyesek, akkor

$$qAB = pCD, \quad q'AB = p'CD.$$

Tehát

$$(pq')\,AB = (pp')\,CD = (p'q)\,AB.$$

Innen

$$pq' = p'q$$

és

$$\frac{p}{q} = \frac{p'}{q'}.$$

Fordítva, ha a 3) és 5) alatti képletek helyesek, akkor

$$qAB = pCD, \quad pq' = qp'$$

és ennélfogva

$$(pq')\,AB = (qp')\,AB = (pp')\,CD,$$

innen pedig

$$q'AB = p'CD,$$

azaz

$$AB : CD = p' : q'.$$

Az éppen bebizonyított tétel értelmében az

$$AB : CD = p : q$$

helyessége csak a $\frac{p}{q}$ szám *értékétől* függ, azaz független attól, hogy ezt a számot milyen *alakban* írjuk. Azért a szóban forgó proporció tartalmát a következőképpen is szokás kifejezni: *AB és CD viszonyát a* $\frac{p}{q}$ *szám jellemzi,* vagy még így is: *AB hosszúságát* (vagy *hosszát*) *CD-vel mint hosszegységgel* mérve, *AB hosszúságának* (vagy röviden mondva *AB*-nek) *mérőszáma* $\frac{p}{q}$.

74. §. *Ha az ABC háromszög szögei rendre egyenlők A'B'C' szögeivel, továbbá*

$$AB : A'B' = p : q,$$

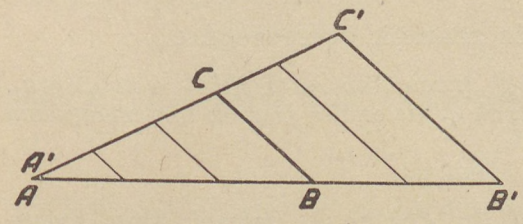
akkor egyszersmind

$$AC : A'C' = p : q, \quad BC : B'C' = p : q.$$

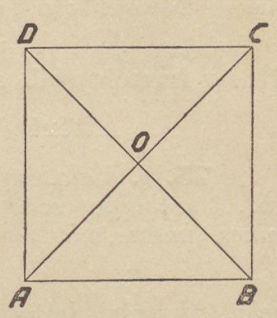
Ha pl. az

$$AC : A'C' = p : q$$

proporciót akarjuk bebizonyítani, akkor helyezzük el a két háromszöget a 2. ábrában látható módon. Föltevésünk szerint AB-nek p-ed része egyenlő $A'B'$-nek q-ad részével. (Ábránkban $p=3$, $q=5$.) A felosztást elvégezve és az osztópontokon keresztül párhuzamosa-



2. ábra.



3. ábra.

kat vonva, ezek AC-t és $A'C'$-t úgy osztják fel, hogy a bebizonyítandó proporció helyessége nyilvánvaló.

Ezt tudva, most már a négyzetre vonatkozó állításunk a következő módon látható be. Tegyük föl, hogy a 3. ábrában

$$AC : AB = p : q.$$

Itt AC az ABC háromszögnek és AB az AOB-nek átfogója. E két háromszögben a szögek rendre megegyeznek, tehát az első háromszög AB befogójának és utóbbi háromszög AO befogójának viszonyát is $\frac{p}{q}$ jellemzi. Képletben:

$$AB : AO = p : q.$$

A szóban forgó proporciók így is irhatók:

$$AC : AB = p^2 : pq, \quad AB : AO = pq : q^2.$$

Vagyis AB-nek pq-ad része az AC-ben p^2-szer, az AO-ban q^2-szer foglaltatik. De akkor az $AC : AO$ viszonyt a $\frac{p^2}{q^2}$ hányados, vagyis $\frac{p}{q}$ négyzete jellemzi.

Másrészt nyilván AC az AO-nak kétszerese.

Tehát

$$\left(\frac{p}{q}\right)^2 = 2.$$

De ez lehetetlen, mert racionális szám négyzete nem lehet egyenlő 2-vel.

Eredményünket úgy fejezhetjük ki, hogy abban a négyzetben, melynek oldala egyenlő a hosszmérésre elfogadott hosszegységgel, a diagonálisnak hosszúsága nem jellemezhető racionális mérőszámmal.

Ez az eredmény is bővebb számtartománynak, még pedig olyannak előállítására késztet, melynek számai már elegendők arra,

hogy bizonyos hosszegység megállapítása után bármely egyenesdarabnak hosszúságát számmal jellemezhessük.

Az új, ú. n. irracionális számoknak bevezetése többféle módon lehetséges. Mi CANTOR GYÖRGY elméletét követjük, mert legjobban illeszkedik a limeszekre vonatkozó tárgyalásainkhoz.

II. Az irracionális számok és a végtelen mint határértékek.

Áttérés a valós számok összességére.

75. §. *Valahányszor egy (racionális számokból alkotott)* $a_1, a_2, \ldots$ *szabályos számsorozatnak a racionális számok tartományában nincs limesze, mindannyiszor a*

$$\lim a_n$$

jelet új szám jelének tekintjük. Ezt az új számot ***ama számsorozathoz rendelt limesznek*** *vagy e* ***sorozattal értelmezett számnak*** *nevezzük.*

Két racionális tagú szabályos számsorozatnak ugyanazt a limeszt tulajdonítjuk, ha a megfelelő tagok különbségének limesze zérus, másszóval, ha a két adott

$$a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots,$$
$$a'_1, a'_2, \ldots, a'_n \ldots$$

sorozat tagjainak egyesítéséből keletkezett

$$a_1, a'_1, a_2, a'_2, \ldots, a_n, a'_n, \ldots$$

sorozat megint szabályos. Minden más esetben két különböző szabályos számsorozatnak két különböző határértéket tulajdonítunk.

Ha az imént megállapított értelemben

$$\lim a_n = \lim b_n \quad \text{és} \quad \lim a_n = \lim c_n,$$

azaz, ha

$$\lim (a_n - b_n) = 0 \quad \text{és} \quad \lim (a_n - c_n) = 0,$$

akkor egyszersmind

$$\lim (b_n - c_n) = \lim \big(b_n - a_n - (a_n - c_n)\big) = 0,$$

azaz

$$\lim b_n = \lim c_n.$$

A racionális számokat és az új számokat közös néven *valós* vagy *reális* számoknak nevezzük. Közülök az újakat *irracionális* valós számoknak mondjuk. Ezek a mondottak értelmében nem egyebek, mint az oly racionális tagú *szabályos* számsorozatokhoz rendelt limeszek, melyeknek a racionális számok tartományában nincs limeszük.

Az új számok bevezetése után valamely racionális tagú végtelen számsorozatnak *akkor és csak akkor* van limesze, ha szabályos számsorozat.

A limesz szónak az új számok bevezetése után *két* különböző értelme van. Ha *racionális A* számról mondjuk, hogy az

$$a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$$

racionális tagú sorozatnak limesze, akkor ez azt jelenti, hogy az

$$a_1 - A,\ a_2 - A, \ldots,\ a_n - A, \ldots$$

különbségek elemi sorozatot alkotnak. Ellenben *irracionális A* számról ugyanazt mondva, ez csak azt jelenti, hogy *A* az illető sorozattal értelmezett új szám. Az utóbbi esetben annak a kérdésnek, hogy miként viselkednek az $a_n - A$ különbségek, (legalább egyelőre) értelme sincs, mert még csak racionális számokat tudunk egymásból kivonni.

Racionális és irracionális limeszre egyaránt igaz, hogy *az*

$$a_1,\ a_2, \ldots,\ a_n, \ldots$$

racionális tagú sorozat limesze akkor és csak akkor egyszersmind a

$$b_1,\ b_2, \ldots,\ b_n, \ldots$$

racionális tagú sorozatnak is limesze, ha

$$\lim (a_n - b_n) = 0.$$

Mégis bizonyos különbség van a két eset között. *Racionális* limesz esetében ugyanis ez bebizonyított *tétel*, *irracionális* limesz esetében ellenben *megállapodás*.

Míg a jelen fejezet I. szakaszában a «racionális» jelzőt többnyire elhagytuk, mert más mint racionális számokat nem is ismertünk, addig a jelen II. szakaszban mindenkor határozottan ki kell jelentenünk, vajjon állításunk csak racionális számokra, vagy pedig tetszőleges valós számokra értendő-e.

76. §. *Ha az*

$$a_1,\ a_2, \ldots,\ a_n, \ldots$$

racionális tagú számsorozatból kiválasztunk egy

$$a'_1,\ a'_2, \ldots.\ a'_n, \ldots$$

részletsorozatot, akkor ennek limesze ugyanaz, mint az eredeti sorozaté.

Ugyanis a'_n is az eredeti sorozatból vett szám lévén, $a_n - a'_n$ tulajdonképpen az eredeti sorozat bizonyos két tagjának különbsége. Ennélfogva a δ pozitiv szám bármely választásánál, eléggé késői tagokra nézve a sorozat szabályos volta miatt $|a_n - a'_n| < \delta$. Vagyis

$$\lim (a_n - a'_n) = 0.$$

De éppen ez a föltétele annak, hogy a két számsorozat limesze ugyanaz legyen.

Pozitiv és negativ számok. Abszolut érték.

77. §. Bármely racionális tagú szabályos számsorozathoz, melynek limesze nem *zérus*, található oly ϱ pozitiv szám, hogy bizonyos tagtól kezdve a sorozatnak vagy minden tagja nagyobb mint ϱ, vagy minden tagja kisebb mint $-\varrho$ (63. §.). Ha a sorozat limesze racionális, akkor az első esetben ez a limesz $\geqq \varrho$, tehát pozitiv

szám, a második esetben $\leqq -\varrho$, tehát negativ szám. Ezért egyöntetűség kedvéért irracionális limesz esetében is következőleg állapodunk meg:

Valamely racionális tagú szabályos számsorozat A limeszét pozitivnak mondjuk, ha véges számú kivétellel a sorozat minden tagja nagyobb bizonyos pozitiv racionális ϱ számnál. Ellenben A-t negativnak mondjuk, ha véges számú kivétellel minden tag kisebb bizonyos negativ racionális $-\varrho$ számnál.

Az A pozitiv vagy negativ voltának e megállapításánál nem játszik szerepet az, hogy nála az A-t értelmező végtelen sok számsorozat közül melyiket használtuk fel. Vagyis, ha az eredeti $a_1, a_2, \ldots$ sorozatot más $b_1, b_2, \ldots$ sorozattal pótoljuk, mely azonban ugyanazt az A számot értelmezi: akkor A előjelére nézve mindkét esetben ugyanazt az eredményt kapjuk.

Csakugyan, ha a két esetben két ellenkező eredményt kapnánk, akkor az egyik sorozatban — mondjuk az elsőben — véges számú kivétellel minden tag nagyobb volna bizonyos pozitiv racionális ϱ számnál, a másikban pedig véges számú kivétellel minden tag kisebb volna bizonyos negativ racionális $-\varrho'$ számnál. Tehát az $a_1 - b_1, a_2 - b_2, \ldots$ különbségek véges számú kivétellel mind nagyobbak volnának mint $\varrho + \varrho'$. Ámde ez ellenkezik avval a föltevéssel, hogy a két sorozat ugyanazt a számot értelmezi, vagyis, hogy $\lim (a_n - b_n) = 0$.

78. §. Ha valamely

$$a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$$

racionális tagú sorozat szabályos számsorozat, akkor

$$-a_1, -a_2, \ldots -a_n, \ldots$$

szintén ilyen; tehát mind a két sorozatnak van limesze. A két limesz csak akkor egyenlő egymással, ha közös értékük 0. Minden más esetben az egyik pozitiv, a másik negativ szám. Ha az egyik racionális szám, akkor a másik is ilyen és tőle csak előjelben különbözik. Egyöntetűség kedvéért *akkor is, midőn e két limesz irracionális szám, egymástól csak előjelben különbözőknek mondjuk őket. Ha az egyik A, akkor a másikat így írjuk: —A. A kettő közül azt, mely pozitiv szám, A (és egyszersmind —A) abszolut értékének mondjuk és így jelöljük:* $|A|$.

A valós számok végtelen tizedestört alakja.

79. §. A valós számok bevezetése után *minden* végtelen tizedestört számot ábrázol. Ugyanis, mint tudjuk, minden végtelen tizedestörtnek közelítőtörtjei szabályos számsorozatot alkotnak. Ennek (racionális vagy irracionális) limeszét nevezzük a végtelen tizedestört által ábrázolt számnak.

A $0{\cdot}000000\ldots$ végtelen tizedestört a 0-t ábrázolja. Minden más tizedestört pozitiv számot ábrázol, mert közelítőtörtjei pozitivok és monoton növekedő sorozatot alkotnak.

A tizedestörtek jelentősége azon alapul, hogy *bármely pozitiv valós szám végtelen tizedestörttel ábrázolható.*

Valóban, legyen A egy adott pozitiv szám. Ezt úgy gondoljuk meghatározva, hogy ismerünk olyan racionális tagú

$$a_0, a_1, \ldots, a_n, \ldots \qquad 1)$$

számsorozatot, melynek limesze A. A pozitiv lévén, e sorozat tagjai egy bizonyostól kezdve mindannyian pozitivok. Továbbá a sorozat szabályos volta miatt tagjai kisebbek bizonyos H felső korlátnál. H-ról föltehetjük, hogy egész szám, mert ellenkező esetben valamely nagyobb egész számmal pótolhatjuk.

A

$$0, 1, 2, \ldots, H-1, H$$

egész számok közül kiválasztható egy és csak egy t_0 úgy, hogy az adott 1) alatti sorozatban végtelen sok a_n nagyobb, mint t_0 vagy vele egyenlő, de a $t_0'=t_0+1$ egész számhoz legfeljebb véges számú nagyobb vagy vele egyenlő a_n található. Legyen pl. $t_0=3$, $t_0'=4$.

Azután írjuk fel az egy tizedesjegyű véges tizedestörteket t_0-tól t_0'-ig. Esetünkben ezek

$$3{\cdot}0,\ 3{\cdot}1,\ 3{\cdot}2, \ldots,\ 3{\cdot}8,\ 3{\cdot}9,\ 4{\cdot}0.$$

Közülök válasszuk ki az utolsót, melyhez még végtelen sok nagyobb vagy vele egyenlő a_n található. Legyen ez $t_1=3{\cdot}1$, míg a $t_1'=3{\cdot}2$ számhoz már legfeljebb véges számú nagyobb vagy vele egyenlő a_n található.

A két tizedesjegyű véges tizedestörtek t_1-től t_1'-ig:

$$3{\cdot}10,\ 3{\cdot}11,\ 3{\cdot}12, \ldots,\ 3{\cdot}19,\ 3{\cdot}20.$$

Legyen közülök $t_2=3{\cdot}14$ az utolsó, melyhez még végtelen sok nagyobb vagy vele egyenlő a_n található.

Az eljárást folytatva, határozzuk meg m-nek minden pozitiv egész értékére nézve a legnagyobb m-jegyű véges tizedestörtet, t_m-et, melyhez még végtelen sok nagyobb vagy vele egyenlő a_n található.

Nyilván

$$t_0, t_1, t_2, \ldots, t_m, \ldots \qquad 2)$$

minden tagja a megelőzőből egy új tizedesjegy hozzácsatolásával keletkezik. Másszóval a 2) alatti számok bizonyos T végtelen tizedestörtnek közelítő törtjei.

Az 1) alatti sorozatban végtelen sok tag van, mely t_m és $t_m' = t_m + \frac{1}{10^m}$ közé esik vagy esetleg t_m'-mel egyenlő. Ugyanis az 1) alatti sorozatban végtelen sok tag $\geqq t_m$, de legfeljebb véges számú $\geqq t_m'$.

Válasszunk ki m minden értékénél egy olyan a_n-et, hogy

$$t_m \leqq a_n < t_m'.$$

Még pedig válasszunk ki m minden értékénél más a_n-et és jelöljük a_m'-mel. Akkor

$$a'_0,\ a'_1,\ \ldots,\ a'_m,\ \ldots \qquad 3)$$

az 1) alatti sorozatnak oly részletsorozata, hogy m minden értékénél

$$|a'_m - t_m| = a'_m - t_m \leqq \frac{1}{10^m}.$$

Tehát

$$\lim (a'_m - t_m) = 0.$$

Vagyis a 2) és 3) alatti sorozatnak közös limesze van.

A 3) alatti sorozat 1)-ből bizonyos tagok kiválogatása által keletkezett. Ennélfogva 1) és 3) limesze is ugyanaz.

A mondottak szerint az 1), 2) és 3) sorozatok közös limeszűek. Tehát a T végtelen tizedestört, melynek a 2) alatti számok a közelítő törtjei, valóban az adott $A = \lim a_n$ számot ábrázolja.

80. §. Az

$$1{\cdot}0000\ldots$$
$$0{\cdot}9999\ldots$$

végtelen tizedestörtek mindketten az 1 számot ábrázolják, mert az

$$a_1 - b_1 = 1{\cdot}0 - 0{\cdot}9 = 0{\cdot}1, \quad a_2 - b_2 = 1{\cdot}00 - 0{\cdot}99 = 0{\cdot}01\ldots$$

különbségek limesze zérus. Tehát ugyanannak a számnak esetleg több végtelen tizedestört alakja is lehet.

Jelentsék most már

$$a_0,\ a_1.\ a_2,\ldots \text{ és } b_0,\ b_1,\ b_2,\ldots$$

két különböző alakú, de ugynazt a számot ábrázoló végtelen tizedestört közelítő törtjeit. A két sorozat egy ideig megegyezhetik. Pl. legyen $a_0 = b_0$, $a_1 = b_1$, $a_2 = b_2$; de már a_3 különbözzék b_3-tól. A jelölést úgy választhatjuk, hogy $a_3 > b_3$. Ha most pl. $a_3 = 8{\cdot}962$, akkor okvetlenül $b_3 = 8{\cdot}961$. Mert ha b_3 utolsó jegye < 1, akkor b_3-tól kezdve $b_n < 8{\cdot}961$ és

$$a_n - b_n > 8{\cdot}962 - 8{\cdot}961 = \frac{1}{10^3}.$$

Ámde akkor nem lehetne $\lim (a_n - b_n) = 0$

A legközelebbi közelítő törtek

$$a_4 = 8{\cdot}9620, \quad b_4 = 8{\cdot}9619.$$

Ha ugyanis a_4 utolsó jegyét a 0-nál nagyobbnak vagy b_4 utolsó jegyét a 9-nél kisebbnek választanók, akkor $a_4 - b_4$-től kezdve

$$a_n - b_n > 8{\cdot}9620 - 8{\cdot}9619 = \frac{1}{10^4}.$$

Tehát nem lehetne $\lim (a_n - b_n) = 0$.

Hasonló meggondolások azt mutatják, hogy az a-k minden további jegye 0 és a b-k minden további jegye 9. A két végtelen tizedestört tehát:

$$8{\cdot}962000\ldots \text{ ill. } 8{\cdot}961999\ldots$$

Mindketten a 8·962 véges tizedestörtet ábrázolják.

Meggondolásaink bármely más esetben ismételhetők. Tehát két különböző alakú végtelen tizedestört csak abban az esetben ábrázolhatja ugyanazt a számot, ha az egyikben bizonyos jegytől kezdve csupa 0 áll, a másik pedig belőle úgy nyerhető, hogy az utolsó 0-tól különböző jegyet 1-gyel kisebbítjük és utána 9-eket írunk. E szükséges feltétel nyilván elegendő is.

A mondottakból egyszersmind világos, hogy valamely pozitiv valós A szám akkor és csak akkor ábrázolható két különböző alakú végtelen tizedestörttel, ha A valamely *véges* tizedestörttel egyenlő. Minden más esetben A egy és csak egy végtelen tizedestörttel ábrázolható.

81. §. Minthogy minden végtelen tizedestört vagy valamely pozitiv valós számot vagy a zérust ábrázolja, továbbá fordítva minden pozitiv valós szám és a zérus egy, esetleg két végtelen tizedestörttel ábrázolható: azért a pozitiv valós számok és a zérus lényegükben azonosak a végtelen tizedestörtekkel.

Ha negativ számról van szó, akkor abszolut értékét adjuk meg végtelen tizedestört alakban és ez elé a — előjelet tesszük.

Tehát azt is mondhatjuk, hogy *a valós számok nem egyebek, mint a + ill. — előjellel ellátott végtelen tizedestörtek.*

Elméletileg A adva van, ha utasításunk van oly szabályos számsorozat előállítására, melynek A a limesze. Gyakorlatilag arra törekszünk, hogy A végtelen tizedestört alakjának, vagyis az ebben szerepelő jegyeknek meghatározására legyen eljárásunk. A tizedestört alak tényleges kiszámításánál és felírásánál természetesen előbb vagy utóbb valamelyik jegynél megállunk.

Az alapműveletek valós számokkal.

82. §. Hogy mit értsünk az $A+B$ összegen, ill. az AB szorzaton, ha A és B közül legalább az egyik irracionális, azt még meg kell állapítanunk. Megállapodásunknál vegyük tekintetbe, hogy midőn $\lim a_n = A$ és $\lim b_n = B$ *racionális* számok, akkor (67. §.)

$$A + B = \lim (a_n + b_n), \quad AB = \lim a_n b_n.$$

Ezt tudván, természetesnek fogjuk találni a következő általános megállapodást:

Legyen A és B két tetszés szerint adott valós szám. Az első legyen az

$$a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$$

racionális tagú sorozat limesze, a második a

$$b_1, b_2, \ldots, b_n, \ldots$$

racionális tagú sorozaté. Az $A+B$ összegen

$$a_1 + b_1, a_2 + b_2, \ldots, a_n + b_n, \ldots \qquad 1)$$

limeszét, az AB szorzaton pedig

$$a_1 b_1,\ a_2 b_2, \ldots,\ a_n b_n, \ldots \qquad 2)$$

limeszét értjük.

Igy bármely két valós számot összeadhatunk, illetőleg szorozhatunk. Ugyanis bármely valós A és bármely valós B úgy fogható fel, mint egy-egy racionális számokból alkotott számsorozat limesze. Ha ezekből előállítjuk az 1) és a 2) alatti számsorozatot, akkor (64. §.) szabályos számsorozatokat nyerünk. Tehát mindegyiknek van limesze; e limeszt nevezzük A és B összegének illetőleg szorzatának.

A és B-hez végtelen sok számsorozatot találhatunk, melyeknek ezek a limeszeik. Innen a következő kérdés merül fel: Ha az adott sorozatokat más

$$a'_1,\ a'_2, \ldots$$
$$b'_1,\ b'_2, \ldots$$

sorozatokkal pótoljuk, melyeknek azonban megint A, illetőleg B a limeszük és az $A+B$ összegen meg az AB szorzaton most már

$$a'_1 + b'_1,\ a'_2 + b'_2, \ldots \qquad 1')$$

illetőleg

$$a'_1 b'_1,\ a'_2 b'_2, \ldots \qquad 2')$$

limeszét értjük, nem nyerünk-e akkor $A+B$ és AB számára az előbbiektől eltérő értékeket?

Ez nem következik be. Ugyanis, ha

$$\lim a'_n = \lim a_n, \quad \lim b'_n = \lim b_n,$$

akkor

$$a_1,\ a'_1,\ a_2,\ a'_2, \ldots,\ a_n,\ a'_n, \ldots$$

és

$$b_1,\ b'_1,\ b_2,\ b'_2, \ldots,\ b_n,\ b'_n, \ldots$$

szabályos számsorozatok. A megfelelő tagokat összeadva

$$a_1 + b_1,\ a'_1 + b'_1,\ a_2 + b_2,\ a'_2 + b'_2, \ldots$$

megint szabályos számsorozat. De ez (75. §.) annak a jele, hogy a benne egyesített 1) és 1') sorozatoknak *ugyanaz* a limeszük.

Hasonló meggondolások végezhetők a szorzatra nézve is.

A mondottak értelmében az összeg és a szorzat értéke független az összeadandók illetőleg a tényezők értelmezésére használt számsorozatoktól, és csak attól függ, hogy melyik két szám összege vagy szorzata állítandó elő.

Ha $B=0$, vagyis ha B a

$$0,\ 0,\ 0, \ldots$$

sorozatnak limesze, akkor $A+0$ és $A.0$ az

$$a_1 + 0 = a_1,\ a_2 + 0 = a_2, \ldots$$

illetőleg

$$a_1 . 0 = 0,\ a_2 . 0 = 0, \ldots$$

sorozatnak limesze. *Tehát bármely A valós számra nézve:*

$$A + 0 = A, \quad A . 0 = 0.$$

Hasonló meggondolások alapján:

$$A \cdot 1 = A,\ A(-1) = -A,\ A + (-A) = 0.$$

83. §. *Pozitiv számok összege és szorzata maga is pozitiv szám.* Ez racionális pozitiv számokra nézve ismeretes, tetszésszerinti pozitiv számokra nézve pedig következőleg látható be.

Ha $A = \lim a_n$ és $B = \lim b_n$ pozitiv számok, akkor található két oly pozitiv szám, ϱ és ϱ', hogy véges számú kivétellel $a_n > \varrho$, $b_n > \varrho'$, tehát $a_n + b_n > \varrho + \varrho'$, $a_n b_n > \varrho\varrho'$. De akkor

$$A + B = \lim (a_n + b_n) \quad \text{és} \quad AB = \lim a_n b_n$$

pozitiv számok.

84. §. *Az*

$$A(B+C) = AB + AC$$

disztributiv törvény (1. §.) *tetszőleges valós számokra érvényes.*

Ugyanis a

$$A = \lim a_n,\ B = \lim b_n,\ C = \lim c_n$$

képletekből egyrészt

$$B + C = \lim (b_n + c_n),\ A(B+C) = \lim a_n (b_n + c_n),$$

másrészt

$$AB = \lim a_n b_n,\ AC = \lim a_n c_n,\ AB + AC = \lim (a_n b_n + a_n c_n)$$

következik. Ámde racionális számokra nézve már tudjuk, hogy

$$a_n (b_n + c_n) = a_n b_n + a_n c_n.$$

Tehát a két oldal limesze is egyenlő, azaz valóban

$$A(B+C) = AB + AC.$$

Hasonló meggondolásokkal bizonyítható be, hogy *a valós számok összeadása és szorzása kommutativ és asszociativ.*

A szorzás asszociativ voltát kifejező

$$A(BC) = (AB)C$$

képlet a $C = -1$ esetben ebbe megy át:

$$A(-B) = -(AB).$$

Vagyis: *Egyik tényező előjelét ellenkezőre változtatva, a szorzatnak csak előjele változik meg.*

Ha még tekintetbe vesszük, hogy pozitiv számok szorzata mindig pozitiv szám, akkor egyszersmind világos, hogy valós számok szorzata csak úgy lehet 0, ha valamelyik tényezője 0.

85. §. *A kivonás* (vagyis az összeadásnak megfordítása) *a valós számok tartományában mindig elvégezhető egyértelmű művelet.*

Ugyanis az

$$x + B = A \qquad 1)$$

egyenletet az $A + (-B)$ szám mindig kielégíti, mert

$$(A + (-B)) + B = A + ((-B) + B) = A + 0 = A.$$

Továbbá ez az 1) egyenletnek egyetlen gyöke, mert ha x az adott egyenletnek egy tetszőleges gyöke, akkor

$$x = x + (B+(-B)) = (x+B) + (-B) = A + (-B).$$

Az $x + B = A$ egyenlet egyetlen gyökét $A-B$-vel jelöljük.
A mondottak értelmében $A - B = A + (-B)$.

86. §. *A valós számok tartományában az osztás mindig elvégezhető egyértelmű művelet, ha a zérussal, mint osztóval való osztást kizárjuk.*

A zérustól különböző B esetében a

$$Bx = A \qquad 1)$$

egyenletnek mindig van gyöke. Ha ugyanis

$$A = \lim a_n, \quad B = \lim b_n,$$

akkor a zérustól különböző B esetében

$$x = \lim \frac{a_n}{b_n}$$

mindig kielégíti az 1) alatti egyenletet, mert

$$Bx = \lim b_n \lim \frac{a_n}{b_n} = \lim \left(b_n \frac{a_n}{b_n} \right) = \lim a_n = A.$$

Több gyöke az egyenletnek nincsen. Mert ha x és y kielégíti az egyenletet, akkor $Bx = By$. Innen $B(x-y) = 0$. De ez a 0-tól különböző B esetében csak úgy lehetséges, hogy $x - y = 0$, azaz $x = y$.

A $Bx = A$ egyenlet egyetlen gyökét $\frac{A}{B}$-vel jelöljük.

Eszerint azok az alaptények, melyeket az 1. §-ban a racionális számokra nézve összeállítottunk, a valós számokra is érvényesek. A négy alapműveletre vonatkozó minden műveleti szabály e nehány ténynek következménye. Ennélfogva a racionális számok tartományában megszokott műveleti szabályok rendre a valós számok tartományában is megtartják érvényességüket.

A valós számok összehasonlítása nagyságra nézve.

87. §. Két valós szám különbsége akkor és csak akkor 0, ha egymással egyenlők. Két különböző szám $A-B$ különbsége mindig vagy pozitiv, vagy negativ szám. Az első esetben azt mondjuk, hogy $A>B$, a második esetben pedig, hogy $A<B$.

A 40—44. §-ban a racionális számok összehasonlítására és abszolut értékére vonatkozólag tárgyalt összes tételek szószerint ismételhetők tetszőleges valós számokra nézve.

88. §. *Ha A és B két különböző valós szám, akkor mindig található egy* (sőt számtalan) *oly racionális szám, mely a kettő közé esik.*

M. T. AKADÉMIA KÖNYVTÁRA

Legyen A az $a_1, a_2, \ldots$ racionális tagú sorozatnak, B pedig a $b_1, b_2, \ldots$ racionális tagú sorozatnak limesze, és legyen $A > B$. Ekkor $A - B = \lim (a_n - b_n) > 0$, tehát található egy oly pozitiv racionális ϱ szám, hogy végesszámú kivétellel $a_n - b_n > \varrho$.

A ϱ számhoz az adott sorozatok szabályos volta miatt okvetlenül találhatunk oly N-et, hogy valahányszor $n > N$ és $k > 0$, mindig

$$|a_{n+k} - a_n| < \frac{\varrho}{3}, \quad |b_{n+k} - b_n| < \frac{\varrho}{3},$$

azaz

$$-\frac{\varrho}{3} < a_{n+k} - a_n < \frac{\varrho}{3}, \quad -\frac{\varrho}{3} < b_{n+k} - b_n < \frac{\varrho}{3}.$$

Tehát n-et eléggé nagynak választva és értékét állandóan megőrizve, a k minden pozitiv egész számú értékénél

$$a_{n+k} - \frac{a_n + b_n}{2} = a_{n+k} - a_n + \frac{a_n - b_n}{2} > -\frac{\varrho}{3} + \frac{\varrho}{2} = \frac{\varrho}{6},$$

$$b_{n+k} - \frac{a_n + b_n}{2} = b_{n+k} - b_n - \frac{a_n - b_n}{2} < \frac{\varrho}{3} - \frac{\varrho}{2} = -\frac{\varrho}{6}.$$

Ha még rövidség kedvéért $u = \frac{a_n + b_n}{2}$, akkor ezen egyenlőtlenségeknél fogva az

$$a_1 - u, \ldots, a_n - u, a_{n+1} - u, \ldots$$

sorozatban az n-dik tagon túl minden tag $> \frac{\varrho}{6}$ és a

$$b_1 - u, \ldots, b_n - u, b_{n+1} - u, \ldots$$

sorozatban az n-dik tagon túl minden tag $< -\frac{\varrho}{6}$. Ennélfogva

$$A - u > 0, \quad B - u < 0,$$

azaz u valóban oly racionális szám, hogy $A > u > B$.

89. §. Az imént mondottak értelmében bármely A valós számhoz és bármely δ pozitiv számhoz található oly racionális u szám, hogy $A - \delta < u < A + \delta$, azaz hogy $|A - u| < \delta$. Ezt röviden így fejezzük ki:

Bármely valós szám tetszőleges pontossággal racionális számokkal közelíthető meg.

90. §. *Ha a A valós szám a racionális tagú*

$$a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$$

számsorozatnak limesze, akkor az

$$a_1 - A, a_2 - A, \ldots, a_n - A, \ldots$$

sorozat elemi sorozat, azaz bármely δ pozitiv számhoz található oly N, hogy

$$|a_n - A| < \delta,$$

valahányszor $n > N$.

Ha A és δ racionális számok, akkor ez volt a limesz fogalmának értelmezése. Tetszőleges valós A és tetszőleges pozitiv δ esetében állításunk helyessége a következő módon látható be.

Válasszuk az u, v racionális számokat úgy, hogy

$$A - \delta < u < A < v < A + \delta.$$

Ekkor $A - u$ és $v - A$ pozitiv számok lévén, található oly racionális ϱ szám, hogy végesszámú n kivételével

$$a_n - u > \varrho, \quad v - a_n > \varrho.$$

Tehát végesszámú kivétellel minden a_n kielégíti az $u < a_n < v$ egyenlőtlenséget és evvel együtt az $A - \delta < a_n < A + \delta$ vagy

$$|a_n - A| < \delta$$

egyenlőtlenséget is.

A bebizonyított tétel alapvető fontosságú, mert racionális tagú sorozat limeszéről szólva, ezentúl nem kell arra figyelnünk, hogy a limesz szó a 75. §. megállapított kétféle értelme közül az első vagy a második értelemben van használva, hanem mindenütt az első jelentésre gondolhatunk. Ez eddig nem volt lehetséges.

Valós tagú számsorozatok.

91. §. Most már áttérhetünk oly számsorozatokra, melyekben a tagok egy része vagy valamennyi tag irracionális szám.

Közvetlenül világos, hogy e fejezet I. szakaszának a számsorozatokra és a határértékekre vonatkozó minden értelmezése és tétele szóról-szóra ismételhető avval a módosítással, hogy *számon* mindenütt racionális szám helyett *valós számot* értünk. Pusztán egy különbség mutatkozik:

A racionális számokból alkotott szabályos számsorozatnak a racionális számok tartományában nincsen mindig limesze. Ellenben valós számokból alkotott szabályos számsorozatnak a valós számok tartományában mindig van limesze.

A tétel első részét a 70. §-ban bizonyítottuk be. Az akkori eredmény indított éppen arra, hogy az irracionális számokat bevezessük. A tétel második része következőleg látható be.

Ha a valós tagú

$$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n, \ldots \qquad 1)$$

sorozat szabályos, akkor bármely α_n tagjához találhatunk oly racionális a_n számot, hogy

$$|\alpha_n - a_n| < \frac{1}{n}.$$

Az

$$\varepsilon_1 = \alpha_1 - a_1, \ \varepsilon_2 = \alpha_2 - a_2, \ldots, \ \varepsilon_n = \alpha_n - a_n, \ldots \qquad 2)$$

sorozat szabályos számsorozat, sőt elemi sorozat is. Ennélfogva az 1) és 2) sorozatok megfelelő tagjainak különbségeiből alkotott

$$a_1 = \alpha_1 - \varepsilon_1, \ a_2 = \alpha_2 - \varepsilon_2, \ldots, \ a_n = \alpha_n - \varepsilon_n, \ldots \qquad 3)$$

sorozat szintén szabályos számsorozat. Minthogy tagjai racionális számok, ennek a sorozatnak a valós számok tartományában okvetlenül van limesze.

Az 1) és 3) sorozat megfelelő tagjainak különbségeiből alkotott 2) sorozatnak határértéke 0. Azért a 3) sorozatnak limesze egyszersmind *az* 1) *sorozatnak is limesze.*

A végtelen mint határérték.

92. §. Azon számsorozatok közül, melyek nem szabályosak, legfontosabbak az (abszolut értékre nézve) *minden határon túl növekedő* sorozatok. *Valamely*

$$\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n, \ldots \qquad 1)$$

sorozat tagjait (abszolut értékre nézve) minden határon túl növekedőknek mondjuk, ha bármilyen (nagy) *pozitiv H számhoz található oly ω_n tag, melyen túl minden tag abszolut értéke* $> H$.

E sorozat tagjainak abszolut értékei számára nem találhatunk felső korlátot, azért ez sohasem szabályos számsorozat. Mégis neki is tulajdonítunk határértéket. Ezt a *végtelennek* nevezzük és így jelöljük: ∞. A ∞-t nem tekintjük számnak.

A mostani esetet attól, midőn szabályos számsorozattal van dolgunk, a következő kifejezésmóddal különböztetjük meg. Ha valamely számsorozat tagjai valamely A számhoz mint határértékhez közelednek, akkor a sorozatnak *véges* limesze van. Ez akkor és csak akkor áll be, ha a sorozat szabályos. Ellenben minden határon túl növekedő számok sorozatának limesze *végtelen.*

Ha valamely adott számsorozat abszolut értékére nézve minden határon túl növekedő, akkor ilyen lesz minden oly végtelen számsorozat is, melyet az adottból tagok elhagyásával, a tagok más rendezésével, vagy pedig úgy nyerünk, hogy a tagok egy részét elhagyjuk és a megmaradtakat másképpen rendezzük.

Ha valamely abszolut értékre nézve minden határon túl növekedő sorozatban a tagokat ugyanolyan vagy nagyobb abszolut értékü számmal pótoljuk, akkor az új sorozat is ∞ *limeszü.*

93. §. *Valamely számsorozatnak a* ∞ *akkor és csak akkor limesze, ha a reciprok értékek sorozatának limesze* 0.

Valóban, ha az ω_n-ek sorozatában bármely pozitiv H-hoz találhatunk oly tagot, hogy azon túl $|\omega_n| > H$, akkor ez bekövetkezik a $H = \frac{1}{\delta}$ választásnál is. Vagyis akkor n elegendő nagy értékeinél

$$|\omega_n| > \frac{1}{\delta}, \quad \left|\frac{1}{\omega_n}\right| < \delta;$$

ennélfogva: $\lim \frac{1}{\omega_n} = 0$.

Fordítva, ha $\lim \frac{1}{\omega_n} = 0$, akkor bármely δ pozitiv számhoz találhatunk oly $\frac{1}{\omega_n}$-et, melyen túl $\left|\frac{1}{\omega_n}\right| < \delta$. Ha itt $\delta = \frac{1}{H}$, akkor n-nek bizonyos értékétől kezdve

$$\left|\frac{1}{\omega_n}\right| < \frac{1}{H}, \quad |\omega_n| > H;$$

ennélfogva ekkor $\lim \omega_n = \infty$.

94. §. Az elemi sorozatokkal foglalkozva bebizonyítottuk, hogy a $|q| < 1$ esetében

$$\lim q^n = 0 \quad \text{és} \quad \lim nq^{n-1} = 0.$$

Most már könnyű lesz ezeket az eredményeket következőleg kiegészíteni:

Ha $|q| < 1$, *akkor*, $\lim nq^{n-1} = 0$. *Minden más esetben*

$$\lim nq^{n-1} = \infty.$$

A $|q| < 1$ esetére nézve állításunk helyességét már tudjuk. Ha most már $|q| \geqq 1$, akkor $|nq^{n-1}| > n$. Ha N-et úgy választjuk, hogy $N > H$, akkor n-nek a N-nél nagyobb értékeire nézve

$$|nq^{n-1}| > N > H.$$

Ezzel állításunk második része is be van bizonyítva.

A q^n *limeszére nézve a következő eseteket kell megkülönböztetnünk:*

1) *Ha* $|q| < 1$, *akkor* $\lim q^n = 0$.
2) *Ha* $|q| > 1$, *akkor* $\lim q^n = \infty$.
3) *Ha* $|q| = 1$ *és* $q = 1$, *akkor* $\lim q^n = 1$.
4) *Ha* $|q| = 1$ *és* $q = -1$, *akkor* q^n*-nek nincsen limesze.*

Az 1) alatti állítás helyességét már tudjuk. A 2) esetben $\frac{1}{q}$ abszolut értéke kisebb mint 1. Tehát ekkor $\lim \frac{1}{q^n} = 0$ és innen valóban $\lim q^n = \infty$. A 3) és 4) esetre vonatkozó állításunk helyessége közvetlenül világos.

A végtelennel való számolás.

95. §. A végtelent nem tekintjük *számnak;* főleg azért nem, mert az összeg és a szorzat fogalmának általánosítása azokra az esetekre, midőn az összeadandók, ill. a tényezők között a végtelen is szerepel, csak részben sikerül. Némely esetre az általánosítást elvégezhetjük, másokra nem.

Az általánosításnál a következő ismeretes tény irányadó: Ha az a_n és b_n számoknak véges A ill. B limeszük van, akkor — mint tudjuk —

$$A + B = \lim (a_n + b_n) \quad \text{és} \quad AB = \lim a_n b_n.$$

Az általánosításnál arra fogunk törekedni, hogy e képletek lehetőleg akkor is igazak maradjanak, ha A és B közül az egyik vagy mindkettő ∞.

Ha $\lim a_n$ *valamely* A *szám és* $\lim \omega_n = \infty$, *akkor*

$$\lim (a_n + \omega_n) = \infty.$$

Azért abban állapodunk meg, hogy $A + \infty$ *a* ∞*-t jelentse.*

Ha $\lim \omega_n = \infty$ *és* $\lim \omega'_n = \infty$, *akkor* $\omega_n + \omega'_n$ *limeszére nézve különböző eshetőségek következhetnek be. Azért a* $\infty + \infty$ *jelnek nem adunk jelentést, hanem* ***határozatlan alaknak*** *mondjuk.*

Valóban $a_n + \omega_n$ vizsgálatánál

$$\lim \frac{1}{\omega_n} = 0, \quad \lim a_n \frac{1}{\omega_n} = 0, \quad \lim \left(a_n \frac{1}{\omega_n} + 1 \right) = 1,$$

$$\lim \frac{1}{a_n + \omega_n} = \lim \frac{\frac{1}{\omega_n}}{a_n \frac{1}{\omega_n} + 1} = 0.$$

Tehát csakugyan $\lim (a_n + \omega_n) = \infty$.

Hogy $\omega_n + \omega'_n$ limeszére nézve a legkülönbözőbb eshetőségek következhetnek be, azt a következő példák mutatják.

1. Ha $\omega_n = n$ és $\omega'_n = -n$, akkor $\omega_n + \omega'_n = 0$ és $\lim (\omega_n + \omega'_n) = 0$.
2. Ha $\omega_n = n+1$ és $\omega'_n = -n$, akkor $\omega_n + \omega'_n = 1$ és $\lim (\omega_n + \omega'_n) = 1$. Ekkor tehát szintén van meghatározott véges limesz, de ez nem 0.
3. Ha $\omega_n = n$ és $\omega'_n = n$, akkor $\omega_n + \omega'_n = 2n$ és $\lim (\omega_n + \omega'_n) = \infty$.
4. Ha $\omega_n = n + (-1)^n$ és $\omega'_n = -n$, akkor $\omega_n + \omega'_n = (-1)^n$. Ekkor tehát az $\omega_n + \omega'_n$ összegnek nincs se véges, se végtelen limesze.

96. §. *Ha* $\lim a_n$ *a zérustól különböző* A *szám és* $\lim \omega_n = \infty$, *akkor* $\lim a_n \omega_n = \infty$. *Ha pedig* $\lim \omega_n$ *és* $\lim \omega'_n$ *mindkettő* ∞, *akkor egyszersmind* $\lim \omega_n \omega'_n$ *is végtelen. Azért abban állapodunk meg, hogy* $A\infty$ *és* $\infty \infty$ *a* ∞*-t jelentse.*

Ha $\lim \varepsilon_n = 0$ *és* $\lim \omega_n = \infty$, *akkor* $\varepsilon_n \omega_n$*-re nézve különböző eshetőségek következhetnek be. Azért a* $0 . \infty$ *jelnek nem adunk jelentést, hanem határozatlan alaknak mondjuk.*

Valóban az $a_n \omega_n$ esetben

$$\lim \frac{1}{\omega_n} = 0, \quad \lim \frac{1}{a_n} = \frac{1}{A}, \quad \lim \frac{1}{a_n \omega_n} = 0.$$

Tehát csakugyan $\lim a_n \omega_n = \infty$.

Ha ω_n és ω'_n limesze ∞, akkor

$$\lim \frac{1}{\omega_n} = 0, \quad \lim \frac{1}{\omega'_n} = 0, \quad \lim \frac{1}{\omega_n \omega'_n} = 0,$$

tehát $\lim \omega_n \omega'_n = \infty$.

Hogy $\varepsilon_n \omega_n$ limeszére nézve a legkülönbözőbb eshetőségek következhetnek be, azt a következő példák mutatják.

1. Ha $\varepsilon_n = \frac{1}{n^2}$ és $\omega_n = n$, akkor $\varepsilon_n \omega_n = \frac{1}{n}$ és $\lim \varepsilon_n \omega_n = 0$.
2. Ha $\varepsilon_n = \frac{1}{n}$ és $\omega_n = n$, akkor $\varepsilon_n \omega_n = 1$ és $\lim \varepsilon_n \omega_n = 1$.
3. Ha $\varepsilon_n = \frac{1}{n}$ és $\omega_n = n^2$, akkor $\varepsilon_n \omega_n = n$ és $\lim . \varepsilon_n \omega_n = \infty$.

4. Ha $\varepsilon_n = \frac{1}{n}$ és $\omega_n = (-1)^n n$, akkor $\varepsilon_n \omega_n = (-1)^n$. Ekkor tehát az $\varepsilon_n \omega_n$ sorozatnak nincs limesze.

97. §. Az a törekvésünk, hogy az

$$A - B = \lim (a_n - b_n), \qquad \frac{A}{B} = \lim \frac{a_n}{b_n}$$

képletek is lehetőleg általános érvényűek legyenek, még a következő megállapodásokra vezet:

Ha A véges értéket, azaz számot jelent, akkor

$$A - \infty = \infty, \quad \infty - A = \infty, \quad \frac{A}{\infty} = 0, \quad \frac{\infty}{A} = \infty.$$

Ellenben $\infty - \infty$ *és* $\frac{\infty}{\infty}$ *határozatlan alakok.*

A ∞-nek bevezetése végre arra képesít, hogy az $\frac{A}{0}$ jelnek is adjunk jelentést, ha A a *zérustól* különböző szám. Ugyanis, ha $\lim a_n = A$ és $\lim \varepsilon_n = 0$, akkor

$$\lim \frac{a_n}{\varepsilon_n} = \infty.$$

Természetes tehát megállapodnunk, hogy az $\frac{A}{0}$ hányadoson, mely számot nem jelenthet, a ∞-t értsük.

Ellenben a $\frac{0}{0}$ alaknak nem adhatunk jelentést, mert a zérushoz közeledő számokból alkotott $\frac{\varepsilon_n}{\varepsilon'_n}$ hányados limeszére nézve a legkülönbözőbb eshetőségek lehetségesek. Ez közvetlenül világos, ha tekintetbe vesszük, hogy ε'_n az $\frac{1}{\omega'_n}$ alakban is írható és hogy $\varepsilon_n \omega'_n$ limeszére nincs általános szabályunk. Éppen ezért $\frac{0}{0}$ a ∞ bevezetése után is *határozatlan alak.*

98. §. Megállapodásaink után a

$$\lim (a_n + b_n) = \lim a_n + \lim b_n, \qquad \lim a_n b_n = \lim a_n \lim b_n,$$
$$\lim (a_n - b_n) = \lim a_n - \lim b_n, \qquad \lim \frac{a_n}{b_n} = \frac{\lim a_n}{\lim b_n} \qquad 1)$$

képletek mindig igazak, valahányszor a jobboldalon álló kifejezés meghatározott jelentésű.

Ezt így is fejezhetjük ki:

A határátmenet általában a négy alapművelet mindegyikével sorrendre nézve felcserélhető oly módon, hogy a határátmenetet az illető alapművelettel összekötött számokon végezzük és csak azután hajtjuk végre az alapműveletet. Ez csak akkor nem lehetséges, ha vagy az alapművelettel összekötött számok valamelyikének nincs limesze, vagy ha ily módon határozatlan alakra jutunk.

Pl. a $\lim(a_n+b_n) = \lim a_n + \lim b_n$ képlet igaz, ha $\lim a_n$ meg $\lim b_n$ léteznek és $\lim a_n + \lim b_n$ nem határozatlan alak.

Ha 1) alatt a jobb oldalon határozatlan alak áll, akkor esetleg a baloldalnak még mindig lehet meghatározott limesze, de ez a limesz csak ama példára vonatkozó speciális meggondolásokkal állapítható meg.

A ∞-nel való számolásra vonatkozó minden megállapodásunknak egyetlen célja, hogy az említett felcserélést lehetővé tegyük. Helytelen volna tovább menve pl. az

$$A+\infty=\infty,\quad A-\infty=\infty,\quad \frac{A}{\infty}=0,\quad \frac{A}{0}=\infty,\quad \infty.\infty=\infty$$

képletekből azt következtetnünk, hogy

$$\infty-\infty,\quad \infty+\infty,\quad 0.\infty$$

A-val, $\frac{\infty}{\infty}$ pedig ∞-nel egyenlő.

Meghatározott előjelű végtelen.

99. §. *Ha valamely*

$$\omega_1,\ \omega_2,\ldots,\ \omega_n,\ldots$$

sorozatban bármilyen nagy H pozitiv számhoz található oly ω_n tag, melyen túl minden ω_n nagyobb mint H, akkor azt mondjuk, hogy a sorozat a pozitiv számokon át a ∞-hez közeledik, vagy hogy limesze $+\infty$.

Képletben: $\lim.\omega_n = +\infty$.

Ha

$$\omega'_1,\ \omega'_2,\ldots,\ \omega'_n,\ldots$$

olyan, hogy $\omega_n = -\omega'_n$ limesze $+\infty$, akkor azt mondjuk, hogy $\lim \omega'_n = -\infty$.

Pl. Az

$$1,\ 2,\ldots,\ n,\ldots$$

sorozat limesze $+\infty$. A

$$-1,\ -2,\ldots,\ -n,\ldots$$

sorozat limesze $-\infty$. Az

$$1,\ -2,\ 3,\ -4,\ 5,\ -6,\ldots$$

limesze ∞, de nem *meghatározott előjelű.*

A meghatározott előjelű végtelennel való számolásnál:

$$(+\infty)+(+\infty)=+\infty,$$

ellenben $0.(+\infty)$ és $0.(-\infty)$ *határozatlan alakok.* Az utóbbi körülménynél fogva nemcsak ∞, hanem $+\infty$ és $-\infty$ sem tekinthető *számnak.*

A $+\infty$-t nagyobbnak mondjuk minden valós számnál, a $-\infty$-t kisebbnek minden valós számnál. A meghatározott előjel nélkül való ∞-t csak abszolut értékre nézve hasonlítjuk össze a valós számokkal.

A ∞ abszolut értékének a $+\infty$-t tekintjük és a ∞-ről azt mondjuk, hogy abszolut értékre nézve nagyobb bármely valós számnál.

Számtartomány felső és alsó határa.

100. §. Valamely *számtartomány* (vagyis több szám összessége) állhat végesszámú számból, de tartalmazhat végtelen sok számot is. Az utóbbi esetben a tartomány számai esetleg egy végtelen számsorozatba helyezhetők el, de ez nem mindig lehetséges.

Ha a számtartomány végtelen sok (valós) számból áll, akkor (mint a $+\infty$ limeszű számsorozatok példája mutatja) nem mindig található oly H szám, melynél nagyobb szám a számtartományban nincsen. Valahányszor található ily H, ezt (úgy mint a számsorozatok esetében már eddig is tettük) a számtartományra nézve *felső korlátnak* mondjuk. A talált H általában nem tartozik a tartomány számai közé, hanem esetleg e tartomány minden számánál nagyobb. Ha H felső korlát, akkor természetesen bármely a H-nál nagyobb szám szintén felső korlát.

Ha az adott számtartománynak van felső korlátja, akkor mindig található egy (és csak egy) oly A szám, hogy a tartományban A-nál nagyobb szám nincsen, de minden nála kisebb A' számhoz található a tartományban legalább egy a A'-nál nagyobb szám.

Ezt a legkisebb felső korlátot, A-t, a *tartomány felső határának* nevezzük.

A felső határ létezésének bebizonyításánál tartsuk először szem előtt azt az esetet, midőn a számtartományban legalább egy szám $\geqq 0$. Azonkívül természetesen föltesszük, hogy a vizsgált tartománynak van felső korlátja, H. Ezt mindig pozitiv egész számnak választhatjuk.

Föltevéseink értelmében a

$$0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ H$$

egész számok közül az elsőhöz, a zérushoz, a számtartományban találunk legalább egy oly számot, mely nála nagyobb vagy vele egyenlő; ellenben H-hoz már nem találhatunk ilyent. Legyen pl. $t_0 = 8$ az utolsó egész szám, melyhez a számtartományban még található nála nagyobb vagy vele egyenlő szám, míg $t_0 + 1 = 9$ már a tartomány minden számánál nagyobb.

Most már a

$$8{\cdot}0,\ 8{\cdot}1,\ 8{\cdot}2,\ \ldots,\ 8{\cdot}9,\ 9{\cdot}0$$

egyjegyű tizedestörtek közül válasszuk ki az utolsót, melyhez a számtartományban található legalább egy nála nagyobb vagy vele egyenlő szám. Legyen ez pl. $t_1 = 8{\cdot}2$; úgy hogy $t_1' = 8{\cdot}3$ már a számtartomány minden számánál nagyobb.

Egy további lépésben válasszuk ki a

$$8{\cdot}20,\ 8{\cdot}21,\ 8{\cdot}22,\ \ldots,\ 8{\cdot}29,\ 8{\cdot}30$$

tizedestörtek közül az utolsót, melyhez a számtartományban található nála nagyobb vagy vele egyenlő szám.

Az eljárást folytatva a véges tizedestörteknek oly

$$t_0, t_1, \ldots, t_n, \ldots$$

végtelen sorozatát kapjuk, hogy az n jegyű t_n-hez még található nála nagyobb vagy vele egyenlő szám a tartományban, de az utolsó jegyet eggyel nagyobbítva, a $t'_n = t_n + \frac{1}{10^n}$ szám már a tartomány minden számánál nagyobb.

A $t_0, t_1, \ldots$ számok egy A végtelen tizedestört közelítő törtjei. Ez az A szám az adott tartományra nézve felső korlát. Mert ha az adott tartomány bármely u számát a

$$t'_0, t'_1, t'_2, \ldots$$

sorozat bármely t'_n tagjával összehasonlítjuk, mindig $u < t'_n$. Ennélfogva egyszersmind

$$u \leqq \lim t'_n = A.$$

Ha ellenben $A' < A$, akkor A' nem lehet felső korlát. Ekkor ugyanis van legalább egy oly t_n, melyre nézve $A' < t_n \leqq A$. Továbbá t_n úgy van meghatározva, hogy létezik legalább egy u, mely $\geqq t_n$. Ez az u egyszersmind nagyobb mint A', ami nem következhetnék be, ha A' felső korlát volna.

A mondottak szerint A felső korlát, de nála kisebb felső korlát nincsen; vagyis A valóban a tartománynak felső határa.

Eddig föltettük, hogy a számtartománynak legalább egy száma $\geqq 0$. Ha a tartomány minden száma negativ, akkor válasszunk ki közülök egyet, pl. $-u$-t és határozzuk meg a g pozitiv egész számot úgy, hogy $g > u$. A tartomány minden számát g-vel növesztve, új számtartományt nyerünk. Ebben már vannak pozitiv számok; erről tehát tudjuk, hogy van egy A felső határa. De akkor $A - g$ az eredeti tartománynak felső határa.

101. §. Végtelen sok számot tartalmazó tartományhoz nem mindig található oly G szám, hogy a tartományban nincsen G-nél kisebb szám. Ha van ily G, akkor ezt a tartományra nézve *alsó korlátnak* mondjuk. Ebben az esetben mindig létezik *legnagyobb* alsó korlát. Ezt *alsó határnak* nevezzük.

Az alsó határ létezését úgy bizonyíthatjuk be, hogy a tartomány összes számait ellenkező előjellel látjuk el. Az így kapott számok felső határa ellenkező előjellel véve az eredeti tartományra nézve alsó határt ad.

A felső és az alsó határra nézve még meg kell jegyeznünk, hogy korlátok hiányában is beszélünk felső és alsó határról. Felül korlátlan tartománynak felső határa a $+\infty$. Alul korlátlan tartomány alsó határa a $-\infty$.

102. §. Legyen adva két számtartomány, U és V; az egyiknek, felső határa legyen A, a másiké B. *Azok az* $\alpha + \beta$ *összegek, melyeket úgy nyerünk, hogy az* U *tartomány tetszőleges* α *számát és a* V *tartomány tetszőleges* β *számát összeadjuk, oly számtartományt alkotnak, melynek felső határa* $A + B$.

Mindenekelőtt világos, hogy $C = A + B$ a szóban forgó összegekre nézve felső korlát; mert ha $\alpha \leqq A$ és $\beta \leqq B$, akkor $\alpha + \beta \leqq A + B$.

Továbbá $A+B$ a legkisebb felső korlát. Ugyanis A-hoz és B-hez mindenesetre találhatunk két oly számsorozatot, hogy

$$a_1 < a_2 < a_3 < \ldots ; \quad b_1 < b_2 < b_3 < \ldots$$

és

$$\lim a_n = A, \quad \lim b_n = B.$$

De akkor $a_n + b_n < A + B$ és $\lim (a_n + b_n) = A + B$.

Ha most $C' < A + B$, akkor n-et úgy választhatjuk, hogy

$$C' < a_n + b_n < A + B.$$

Továbbá U-ban találunk oly α-t, hogy $a_n < \alpha$, V-ben pedig oly β-t, hogy $b_n < \beta$. Ennélfogva van legalább egy oly $\alpha + \beta$, mely nagyobb mint C'.

Meggondolásaink még akkor is alkalmazhatók, ha A vagy B, vagy mindkettő $+\infty$.

Ha az U és V, számtartományok *pozitiv* számokból állanak, akkor *azok az $\alpha\beta$ szorzatok, melyeket úgy nyerünk, hogy U tetszőleges α számát megszorozzuk a V tartomány tetszőleges β számával, oly számtartományt alkotnak, melynek felső határa AB.*

Ezt a tételt teljesen az előbbinek mintájára bizonyíthatjuk be, csakhogy összeadás helyett mindenütt szorzást végzünk.

103. §. Bármely (valós) számsorozatnak, mint minden (valós) számtartománynak, van felső és alsó határa.

Monoton növekedő számsorozat esetében a *felső határ* azonos a számsorozat limeszével.

Ez közvetlenül világos, ha a monoton számsorozat tagjai minden határon tul növekednek; mert ekkor a felső határ és a limesz értéke egyaránt $+\infty$. Ha pedig a monoton növekedő $a_1, a_2, \ldots$ számsorozatnak *véges* A limesze van, akkor a δ pozitiv szám bármely választásánál található a számsorozatban olyan a_N, melyre nézve az $a_N > A - \delta$ egyenlőtlenség érvényes. Minden későbbi a_n-re nézve

$$A - \delta < a_N \leqq a_n \leqq A$$

és innen $|a_n - A| < \delta$. Tehát valóban a A felső határ a számsorozatra nézve egyszersmind limesz is.

Monoton fogyó számsorozatnak *alsó határa* azonos a számsorozat limeszével.

Ezek szerint monoton növekedő számsorozatban egy tag sem nagyobb a számsorozat limeszénél, monoton fogyó számsorozatban pedig egy tag sem kisebb a számsorozat limeszénél. Ezt a tényt így szoktuk kifejezni: Monoton növekedő számsorozatban a tagok alulról közelítik meg a limeszt; monoton fogyó számsorozatban a tagok felülről közelítik meg a limeszt.

Ha az $a_0, a_1, a_2, \ldots$ monoton növekedő számsorozatnak és a $b_0, b_1, b_2, \ldots$ monoton fogyó számsorozatnak közös A limesze van, akkor A az egyetlen szám, mely az első sorozat egyetlen számánál sem kisebb és a második sorozat egyetlen számánál sem nagyobb.

Ez közvetlenül világos, ha tekintetbe vesszük, hogy A az első számsorozatnak felső határa, a másodiknak pedig alsó határa.

Ilyen sorozatokkal van pl. akkor dolgunk, ha $a_0, a_1, a_2, \ldots$ egy A végtelen tizedestört közelítő törtjei, a b-k pedig ezekből úgy keletkeznek, hogy minden közelítőtört utolsó jegyét 1-gyel nagyobbítjuk.

HARMADIK FEJEZET.

A GYÖKVONÁS. A HATVÁNYOZÁS ÁLTALÁNOSÍTÁSA ÉS A LOGARITHMUS.

I. A gyökvonás.

Az $x^n = A$ egyenlet megoldása a valós számok tartományában.

104. §. Az oly x számot, mely az m-edik hatványra emelve A-t adja, az A szám m-edik *gyökének* mondjuk és így jelöljük: $\sqrt[m]{A}$. Az $m=1$ eset érdektelen. Ha az m *gyökkitevő* értéke 2 vagy 3, akkor az m-dik gyököt *négyzetgyöknek* ill. *köbgyöknek* mondjuk. A négyzetgyököt a gyökkitevőnek elhagyásával így írjuk: $\sqrt{A}$.

Tudjuk, hogy az $A=2$ számból a racionális számok tartományában nem vonható négyzetgyök. Sőt a gyökvonás a valós számok tartományában sem mindig elvégezhető művelet. De ha *pozitiv* számból kell m-edik gyököt vonnunk, akkor — mint majd kiderül — a valós számok tartományában a gyökvonás mindig sikerül.

A-nak esetleg több m-edik gyöke is van. Pl. 9-nek négyzetgyökei: 3 és -3. Az $\sqrt[m]{A}$ jel A-nak m-edik gyökei közül bármelyiket jelentheti.

Gyakorlatilag legfontosabb az az eset, melyben pozitiv számból kell gyököt vonnunk és megkívánjuk, hogy a keresett gyök is pozitiv szám legyen. A 106. §-ban majd kimutatjuk, hogy bármely *pozitiv A számhoz* egy és csak egy oly x pozitiv számot találhatunk, melyre nézve $x^m = A$. Ha A-nak ezt a *pozitiv* m-dik gyökét az A számnak többi m-dik gyökétől nyomatékosan akarjuk megkülönböztetni, akkor így jelöljük: $(\sqrt[m]{A})$. Rendesen azonban a zárjel alkalmazása helyett csak szóval jelentjük ki, ha $\sqrt[m]{A}$ ebben a szűkebb értelemben veendő.

105. §. Mielőtt kimutatjuk, hogy pozitiv számból mindig vonhatunk m-dik gyököt, a következő általánosabb tétel bebizonyítását bocsátjuk előre:

Ha két egymástól különböző a és b valós számra nézve valamely

$$f(x) = c_0 + c_1 x + \cdots + c_m x^m$$

egész függvénynek értékei

$$f(a) = G, \quad f(b) = H,$$

akkor a G és H közé eső bármely A számhoz találhatunk legalább egy α-t úgy, hogy α az a és b közé esik és $f(\alpha)$ éppen A-val egyenlő.

A bebizonyításnál lényeges az a körülmény, hogy ha

$$\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_n, \ldots$$

valamely szabályos számsorozatot jelent és ennek limesze α, akkor

$$\lim c_0 = c_0, \quad \lim c_1\alpha_n = c_1\alpha, \quad \lim c_2\alpha_n^2 = c_2\alpha^2, \ldots$$

és

$$\lim (c_0 + c_1\alpha_n + \cdots + c_m\alpha_n^m) = c_0 + c_1\alpha + \cdots + c_m\alpha^m,$$

vagyis

$$\lim f(\alpha_n) = f(\alpha).$$

A bebizonyítás $f(x)$-nek pusztán ezen a tulajdonságán alapul.

Hogy a tétel helyességét kimutassuk, két oly

$$a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$$
$$b_1, b_2, \ldots, b_n, \ldots$$

számsorozatot határozunk meg, melyeknek ugyanaz a limeszük és a melyek úgy vannak választva, hogy

$$f(a_n) < A \quad \text{és} \quad f(b_n) \geqq A.$$

Ha sikerül két ilyen sorozatot meghatároznunk és közös limeszüket α-val jelöljük, akkor

$$f(\alpha) = \lim f(a_n) \leqq A \quad \text{és} \quad f(\alpha) = \lim f(b_n) \geqq A,$$

azaz $f(\alpha)$ éppen A-val egyenlő.

A jelölést úgy választhatjuk, hogy $a<b$. Továbbá föltehetjük, hogy $G<H$; ellenkező esetben a bebizonyítás csak annyiban módosul, hogy némely egyenlőtlenségben az egyenlőtlenség jele megváltozik.

Az a_1 és b_1 meghatározásánál $f(x)$-ben x helyébe az $\frac{a+b}{2}$ számot helyettesítjük. Ha

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right) < A,$$

akkor legyen

$$a_1 = \frac{a+b}{2}, \quad b_1 = b.$$

Ha ellenben

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right) \geqq A,$$

akkor legyen

$$a_1 = a, \quad b_1 = \frac{a+b}{2}.$$

Mindkét esetben

$$a \leqq a_1, \quad b \geqq b_1, \quad b_1 - a_1 = \frac{b-a}{2},$$

továbbá

$$f(a_1) < A, \quad f(b_1) \geqq A.$$

Az a_2 és b_2 meghatározásánál legyen

$$a_2 = \frac{a_1+b_1}{2}, \quad b_2 = b_1$$

vagy pedig

$$a_2 = a_1, \quad b_2 = \frac{a_1+b_1}{2}$$

aszerint, hogy $f\left(\frac{a_1+b_1}{2}\right)$ kisebb mint A vagy sem. Mindkét esetben

$$a_1 \leqq a_2, \quad b_1 \geqq b_2, \quad b_2 - a_2 = \frac{b_1-a_1}{2} = \frac{b-a}{4},$$

$$f(a_2) < A, \quad f(b_2) \geqq A.$$

Éppen így határozzuk meg n minden értékénél az a_n és b_n számokat a megelőző a_{n-1}, b_{n-1} számokból. Mindenkor

$$a_{n-1} \leqq a_n, \quad b_{n-1} \geqq b_n, \quad b_n - a_n = \frac{b-a}{2^n}.$$

A meghatározott

$$a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$$
$$b_1, b_2, \ldots, b_n, \ldots$$

számsorozatok közül az első monoton növekedő, a második monoton fogyó. Tehát mindkettő szabályos számsorozat. Minthogy

$$\lim (b_n - a_n) = \lim \frac{b-a}{2^n} = 0,$$

azért a két számsorozatnak ugyanaz az α limesze van. Minthogy továbbá a_n és b_n mindig a és b közé esik, azért egyszersmind α is eme két szám közé esik. Továbbá

$$f(a_n) < A, \quad f(b_n) \geqq A,$$

ennélfogva valóban

$$f(\alpha) = \lim f(a_n) = \lim f(b_n) = A.$$

106. §. *Bárhogyan választjuk a pozitiv A számot és a pozitiv egész m számot, hozzájuk mindig egy és csak egy oly pozitiv számot találhatunk, melynek m-dik hatványa egyenlő A-val.*

Több mint egy ily pozitiv szám nincsen. Mert ha $\alpha^m = A$, akkor az α-nál kisebb pozitiv számok m-dik hatványa kisebb, mint A, az α-nál nagyobb pozitiv számoké pedig nagyobb mint A.

Hogy legalább egy oly szám mindig található, mely követelésünknek megfelel, azt az előbbi §-ban bebizonyított tétel segítségével a következő módon láthatjuk be. Legyen

$$f(x) = x^m, \quad a = 0, \quad b = 1 + A.$$

Akkor

$$G = f(\alpha) = 0 \quad \text{és} \quad H = f(b) = (1+A)^m > 1 + A > A;$$

tehát A a G és H számok közé esik. Ennélfogva $a=0$ és $b=1+A$ között okvetlenül van oly α szám, mely az x^m egész függvénybe helyettesítve éppen A-t adja.

Az előbbi §-ban mondottak egyszersmind módszert is adnak α meghatározására.

Miután tudjuk, hogy *pozitiv* számnak egy és csak egy pozitiv m-dik gyöke van, egyszersmind könnyen szerezhetünk magunknak képet bármely A *valós* szám *valamennyi* m-dik gyökéről, vagyis valamennyi oly x számról, melyre nézve $x^m=A$.

Ha $A=0$, akkor $x=0$ az egyetlen szám, melynek m-dik hatványa zérus.

Ha $A>0$ és m páratlan szám, akkor A pozitiv m-dik gyökén kívül más x valós szám nem felel meg az $x^m=A$ követelésnek.

Ha $A>0$ és m páros szám, akkor az A-nak pozitiv m-dik gyökén, α-n, kívül nyilván $x=-\alpha$ is megfelel az $x^m=A$ követelésnek. Az α és $-\alpha$ számokon kívül más valós szám nem elégíti ki követelésünket.

Ha $A<0$ és m páratlan szám, akkor pozitiv szám nem felelhet meg követelésünknek. A $-\alpha$ negativ szám pedig csak akkor felel meg, ha $\alpha^m=|A|$. Ekkor tehát A-nak egy és csak egy valós gyöke van, ez negativ szám és csak előjelben különbözik $|A|$-nak m-dik gyökétől.

Ha $A<0$ és m páros szám, akkor A-nak a valós számok tartományában egyáltalában nincsen m-dik gyöke.

Az a körülmény, hogy a *valós számok* tartományában a gyökvonást nem mindig végezhetjük el, később majd *képzetes számok* bevezetésére indít bennünket.

II. A hatványozás általánosítása és a logarithmus.

Számtani és geometriai közép.

107. §. Az

$$\frac{u_1+u_2+\cdots+u_n}{n}$$

hányadost az $u_1, u_2, \ldots, u_n$ számok *számtani* vagy *arithmetikai közepének* mondjuk. Ha az adott számok pozitivok, akkor a szorzatukból vont pozitiv n-dik gyököt a *geometriai közepüknek* nevezzük.

Ha az u pozitiv számok nem mindannyian egyenlők egymással, akkor (mint majd kiderül)

$$\frac{u_1+u_2+\cdots+u_n}{n} > \sqrt[n]{u_1u_2\ldots u_n}, \qquad 1)$$

vagy, ami ugyanaz,

$$u_1u_2\ldots u_n < \left(\frac{u_1+u_2+\cdots+u_n}{n}\right)^n. \qquad 2)$$

Az 1) alatti képlet azt mondja: *Ha n pozitiv szám nem mindannyi egyenlő egymással, akkor számtani közepük nagyobb, mint geometriai közepük.*

A 2) alatti képlet szerint ugyanaz a tény így is fogalmazható: *Ha n oly pozitiv szám szorzatában, melyek nem mindannyian egyenlők, a tényezőket számtani közepükkel pótoljuk: akkor a szorzatot növesztjük.*

A bebizonyításnál, melynél az utóbbi fogalmazást tartjuk szem előtt, a következő azonosságból indulunk ki:

$$ab = \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 - \left(\frac{a-b}{2}\right)^2.$$

A szorzatnak ezen kifejezéséből közvetlenül világos a következő észrevétel helyessége. *Ha két valós szám szorzatában a tényezőket másokkal pótoljuk, melyeknek összege ugyanaz, de különbsége kisebb abszolut értékű mint az eredeti tényezőké: akkor ezzel a változtatással a szorzatot növesztjük.*

Most már legyen pl. az

$$5 . 7 . 24 . 44$$

szorzat összehasonlítandó a tényezők számtani közepének, vagyis az

$$\frac{5+7+24+44}{4} = \frac{80}{4} = 20$$

számnak negyedik hatványával. Ha a legkisebb tényező helyébe ezt a számtani közepet tesszük, vagyis 5-öt 15-tel növesztjük, továbbá a legnagyobb tényezőt, 44-et, 15-tel kisebbítjük, akkor a tényezők számtani közepe nem változik. Továbbá előbbi észrevételünk szerint

$$5 . 44 < 20 . 29,$$

tehát

$$5 . 7 . 24 . 44 < 7 . 20 . 24 . 29.$$

Hasonló módon most már $7 . 20 . 24 . 29$ legkisebb tényezője helyébe írunk 20-at és a legnagyobb tényezőt úgy kisebbítjük, hogy a tényezők számtani közepe ne változzék. Ekkor

$$7 . 29 < 20 . 16,$$

tehát

$$7 . 20 . 24 . 29 < 16 . 20^2 . 24.$$

Végre hasonló módon a

$$16 . 24 < 20^2$$

egyenlőtlenségből

$$16 . 20^2 . 24 < 20^4.$$

Mindent összefoglalva

$$5 . 7 . 24 . 44 < 7 . 20 . 24 . 29 < 16 . 20^2 . 24 < 20^4.$$

Ugyanezen a módon látható be a szóban forgó egyenlőtlenség bármely más esetben is.

Az $\left(1+\frac{x}{n}\right)^n$ határértékéről.

108. §. Az éppen mondottak alkalmazást találnak egy nevezetes számsorozat vizsgálatánál, mely a kamatos-kamatszámításnál lép fel és különösen azért fontos, mert vizsgálata természetes módon elvezet a hatvány fogalmának általánosítására és a logarithmusra.

Egyszerű kamatozásra elhelyezett 1 korona tőkének p százalékos évi kamatja $x = \frac{p}{100}$. Tehát a korona felszaporodott értéke egy

év mulva $1+x$. Ha nem elégszünk meg az egyszerű kamattal, hanem a kamatot az első félév végén tőkésítjük, akkor a felszaporodott tőke az első félév végén

$$1+\frac{x}{2}=1+\frac{1}{2}\,\frac{p}{100};$$

ennek kamatja a második félévben

$$\left(1+\frac{x}{2}\right)\frac{x}{2}.$$

Tehát most a felszaporodott tőke az év végén

$$\left(1+\frac{x}{2}\right)+\left(1+\frac{x}{2}\right)\frac{x}{2}=\left(1+\frac{x}{2}\right)^2.$$

Ha a kamatot az év minden n-edrészének végén tőkésítjük, akkor a felszaporodott tőke az év végén $\left(1+\frac{x}{n}\right)^n$.

Ha n helyébe rendre az 1, 2, ... pozitiv egész számokat helyettesítjük, a következőkben vizsgálandó

$$1+x,\ \left(1+\frac{x}{2}\right)^2,\ \left(1+\frac{x}{3}\right)^3,\ \ldots,\ \left(1+\frac{x}{n}\right)^n,\ \ldots$$

számsorozatot kapjuk.

Erről a sorozatról bebizonyítjuk, hogy szabályos számsorozat. Limeszéről azt mondjuk, hogy 1 korona befektetett tőkének felszaporodott értéke az év végén *folytonos* tőkésítés mellett.

109. §. A kamatszámításnál x pozitiv szám. De ezt a megszorítást elejtjük és tetszőleges valós x esetében vizsgáljuk meg az

$$1+x,\ \left(1+\frac{x}{2}\right),\ \ldots,\ \left(1+\frac{x}{n}\right)^n,\ \ldots$$

számsorozatot.

Ha $x=0$, akkor a vizsgált számsorozatban minden tag egyenlő 1-gyel; ekkor tehát a számsorozat szabályos volta közvetlenül világos. Egyszersmind nyilvánvaló, hogy ebben az esetben a számsorozat limesze 1.

Pozitiv x esetében a számsorozat *monoton* növekedő. Ugyanis

$$\left(1+\frac{x}{n}\right)^n$$

mint a következő $n+1$ pozitiv szám szorzata fogható fel:

$$1,\ 1+\frac{x}{n},\ 1+\frac{x}{n},\ \ldots,\ 1+\frac{x}{n}.$$

Ezeknek számtani közepe $1+\frac{x}{n+1}$. Tehát (107. §.)

$$\left(1+\frac{x}{n}\right)^n<\left(1+\frac{x}{n+1}\right)^{n+1}.$$

Negativ x esetében ezek a meggondolások nem érvényesek n-nek *minden* értékénél. De ha azokra a tagokra szorítkozunk, melyekben $n>|x|$, akkor

$$1+\frac{x}{n}$$

pozitiv szám és ennélfogva meggondolásaink változatlanul érvényesek. Vagyis ezek a tagok negativ x esetében is *monoton* növekedő sorozatot alkotnak.

Továbbá sorozatunk tagjai mindig bizonyos korláton alul maradnak. Ennek bebizonyításánál jelentsen m olyan tetszés szerint választott, de *változatlan* pozitiv egész számot, mely nagyobb mint $|x|$. Ekkor n-nek bármely az m-nél nagyobb egész számú értékénél

$$\left(1+\frac{x}{n}\right)^n\left(1-\frac{x}{m}\right)^m$$

oly $n+m$ pozitiv szám szorzata, melyeknek számtani közepe 1. Tehát

$$\left(1+\frac{x}{n}\right)^n\left(1-\frac{x}{m}\right)^m<1.$$

Ennélfogva

$$\left(1+\frac{x}{n}\right)^n<\frac{1}{\left(1-\frac{x}{m}\right)^m},$$

vagyis $\left(1-\frac{x}{m}\right)^m$ reciprok értéke a szóban forgó számsorozat tagjaira nézve (legfeljebb véges számú tagot kivéve) felső korlát.

A mondottak szerint a vizsgált számsorozat pozitiv x esetében kezdettől fogva, negativ x esetében legalább bizonyos tagtól fogva monoton növekedő. Továbbá a tagoknak felső korlátjuk van. Ennélfogva a sorozat valóban szabályos számsorozat.

Ennek a szabályos számsorozatnak az x választásától függő limeszét átmenetileg így jelöljük: $E(x)$. Ha $x=0$, akkor $E(0)=1$. Az $x=1$ esetben előálló

$$1+1,\ \left(1+\frac{1}{2}\right)^2,\ \ldots,\ \left(1+\frac{1}{n}\right)^n,\ \ldots$$

sorozat limeszét e-vel jelöljük és a *természetes logarithmusok alapszámának* nevezzük.

110. §. Ha az

$$1+x,\ \left(1+\frac{x}{2}\right)^2,\ \ldots,\ \left(1+\frac{x}{n}\right)^n,\ \ldots$$

számsorozat helyett az általánosabb

$$1+x+\delta_1,\ 1+\frac{x+\delta_2}{2},\ \ldots,\ \left(1+\frac{x+\delta_n}{n}\right)^n,\ \ldots$$

számsorozatot vizsgáljuk, melyben $\lim \delta_n=0$, akkor

$$\lim\left(1+\frac{x+\delta_n}{n}\right)^n = \lim\left(1+\frac{x}{n}\right)^n = E(x).$$

Ugyanis az

$$a = 1+\frac{x+\delta_n}{n}, \quad b = 1+\frac{x}{n}$$

számok n-dik hatványainak különbsége egyenlő

$$a-b = \frac{\delta_n}{n}$$

és

$$a^{n-1}+a^{n-2}b+\cdots+b^{n-1}$$

szorzatával. A második tényezőben minden tag abszolut értéke kisebb, mint

$$\left(1+\frac{H}{n}\right)^{n-1},$$

hol H az

$$|x|, \ |x+\delta_1|, \ldots, \ |x+\delta_n|, \ldots$$

szabályos számsorozatnak valamely felső korlátja. Tehát

$$|a^{n-1}+\cdots+b^{n-1}| < n\left(1+\frac{H}{n}\right)^{n-1} < n\left(1+\frac{H}{n}\right)^n < nE(H).$$

Ennélfogva

$$\left|\left(1+\frac{x+\delta_n}{n}\right)^n - \left(1+\frac{x}{n}\right)^n\right| < |\delta_n| E(H).$$

Minthogy

$$\lim |\delta_n| E(H) = 0,$$

azért egyszersmind

$$\left(1+\frac{x+\delta_n}{n}\right)^n - \left(1+\frac{x}{n}\right)^n$$

limesze is zérus. De

$$\lim\left(1+\frac{x}{n}\right)^n = E(x),$$

tehát n növekedtével

$$\left(1+\frac{x+\delta_n}{n}\right)^n$$

is az $E(x)$ határértékhez közeledik.

A most bebizonyított képletből könnyen belátható, hogy x és y minden valós értékénél

$$E(x)\,E(y) = E(x+y). \qquad 2)$$

Ugyanis

$$\left(1+\frac{x}{n}\right)^n\left(1+\frac{y}{n}\right)^n = \left(1+\frac{x+y+\delta_n}{n}\right)^n, \qquad 3)$$

hol $\delta_n = \frac{xy}{n}$. Ha n-et minden határon túl növesztjük, akkor

$$\lim\left(1+\frac{x}{n}\right)^n = E(x), \quad \lim\left(1+\frac{y}{n}\right)^n = E(y),$$

$$\lim\left(1+\frac{x+y+\delta_n}{n}\right)^n = E(x+y),$$

vagyis ekkor a 3) alatti képletből határátmenet útján a 2) alattit kapjuk. Ha pl. $y=-x$, akkor

$$E(x)E(-x) = E(0) = 1.$$

Az e szám és valós kitevős hatványai.

111. §. Mint már mondottuk, az

$$1+1=2,\ \left(1+\frac{1}{2}\right)^2=\left(\frac{3}{2}\right)^2,\ \left(1+\frac{1}{3}\right)^3=\left(\frac{4}{3}\right)^3,\ \ldots,\ \left(1+\frac{1}{n}\right)^n,\ \ldots \quad 1)$$

sorozat $E(1)$ limeszét e-vel jelöljük. Az

$$1-1=0,\ \left(1-\frac{1}{2}\right)^2=\left(\frac{1}{2}\right)^2,\ \left(1-\frac{1}{3}\right)^3=\left(\frac{2}{3}\right)^3,\ \ldots \quad 2)$$

sorozat limesze $E(-1)$, azaz $\frac{1}{e}$. Ha az utóbbi sorozatban az első tagot elhagyjuk és a többi tagnak reciprok értékét állítjuk elő, akkor az így nyert

$$2^2,\ \left(\frac{3}{2}\right)^3,\ \left(\frac{4}{3}\right)^4,\ \ldots,\ \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1},\ \ldots \quad 3)$$

számsorozatnak limesze egyenlő e-vel.

Az 1) alatti számsorozat monoton növekedő sorozat, tehát *alulról* közelíti meg e-t. A 2) alatti sorozat monoton növekedő lévén, a reciprok értékekből alkotott 3) alatti számsorozat monoton fogyó; tehát tagjai *felülről* közelítik meg e-t. Vagyis n minden pozitiv egész számú értékénél

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n < e < \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}. \quad 4)$$

Ha pl. $n=10$, akkor innen

$$1\cdot1^{10} < e < 1\cdot1^{11}.$$

A hatványozásnál azt találjuk, hogy

$$1\cdot1^3 = 1\cdot331, \qquad 1\cdot1^5 = 1\cdot61051,$$
$$1\cdot1^4 = 1\cdot4641, \qquad 1\cdot1^6 = 1\cdot771561.$$

Tehát

$$1\cdot1^{10} = 1\cdot1^5 \times 1\cdot1^5 > \frac{1\cdot6\times1\cdot6}{2\cdot56}, \qquad 1\cdot1^{11} = 1\cdot1^5\times1\cdot1^6 < \frac{1\cdot62\times1\cdot8}{2\cdot916}.$$

Ennélfogva

$$2\cdot56 < 1\cdot1^{10} < e < 1\cdot1^{11} < 2\cdot916.$$

Kikerekítve

$$2\cdot5 < e < 3.$$

Pontosabb számítások azt mutatják, hogy

$$e = 2{\cdot}7182818\ldots$$

112. §. Az

$$E(x+y) = E(x)E(y)$$

képlet értelmében

$$E(2) = E(1)E(1) = e^2,$$
$$E(3) = E(2)E(1) = e^2 e = e^3,$$
$$E(4) = E(3)E(1) = e^3 e = e^4, \text{ stb.}$$

Tehát x-nek pozitiv egész számú értékeinél $E(x)$ egyenlő az

$$e = \lim \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

képlet által értelmezett e számnak x kitevőjű hatványával. Továbbá az $E(x)=e^x$ képlet akkor is igaz, ha $x=0$. Ugyanis bármely szám 0 kitevőjű hatványán 1-et értünk és $E(x) = \lim \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n$ az $x=0$ esetben valóban 1-gyel egyenlő.

Midőn a kitevő negativ egész szám, tört vagy irracionális szam, akkor még egyáltalában nem értelmeztük a hatvány fogalmát. Ekkor tehát az e^x jelnek eddig egyáltalában nincs jelentése. Ennélfogva szabad *megállapodnunk*, hogy e^x ezekben az esetekben is a

$$\lim \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n$$

határértéket jelentse. E megállapodás után az eddigi $E(x)$ jel fölösleges és helyébe e^x lép. A 110. §-ban bebizonyított $E(x+y)=E(x)E(y)$ képlet ezzel az új jelöléssel most már így írható:

$$e^{x+y} = e^x e^y.$$

113. §. *Az x minden valós értékénél*

$$e^x > 0.$$

Valóban, az e^x-et értelmező

$$1 + x, \left(1 + \frac{x}{2}\right)^2, \ldots, \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n, \ldots$$

sorozatban azok a tagok, melyekre nézve $n>|x|$, pozitivok és monoton növekedők, tehát a sorozat limesze okvetlenül *pozitiv* szám.

Az x minden valós értékénél

$$e^x \geqq 1 + x.$$

Ha $x \geqq 0$, vagy ha x negativ szám, de abszolut értéke kisebb mint 1, akkor az e^x-et értelmező sorozat tagjai kezdettől fogva pozitivok és monoton növekedők. Ekkor tehát e^x valóban nem lehet kisebb, mint a sorozat kezdőtagja, vagyis mint $1+x$. Ha pedig x negativ szám és $|x| \geqq 1$, azaz $x \leqq -1$, akkor $e^x > 0 \geqq 1 + x$.

MAGYAR
TUDOMÁNYOS
AKADÉMIA
KÖNYVTÁRA

Az éppen bebizonyított egyszerű, de fontos egyenlőtlenség segítségével könnyen belátható a következő tétel helyessége:

Ha $\alpha<\beta$, *akkor* $e^{\alpha}<e^{\beta}$.

Ekkor ugyanis $\beta-\alpha>0$ és $e^{\beta-\alpha}>1+(\beta-\alpha)>1$. Tehát

$$e^{\beta}=e^{\alpha}e^{\beta-\alpha}>e^{\alpha}.$$

Ha még tekintetbe vesszük, hogy $e^{0}=1$, akkor a mondottakból világos, hogy pozitiv kitevő esetében $e^{x}>1$, negativ kitevő esetében ellenben $e^{x}<1$.

114. §. *Ha a*

$$\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_n, \ldots$$

számsorozat elemi sorozat, akkor $\lim e^{\delta_n}=1$.

Valóban az

$$e^{x}\geqq 1+x$$

egyenlőtlenség értelmében

$$e^{\delta_n}\geqq 1+\delta_n \quad \text{és} \quad e^{-\delta_n}\geqq 1-\delta_n.$$

Továbbá n eléggé nagy értékeinél $|\delta_n|<1$, azaz $1-\delta_n$ pozitiv szám. Ha ezt a körülményt tekintetbe vesszük, akkor szabad az

$$e^{-\delta_n}\geqq 1-\delta_n$$

egyenlőtlenség két oldalának reciprok értékeire nézve az

$$e^{\delta_n}\leqq \frac{1}{1-\delta_n}$$

egyenlőtlenséget felírnunk. Tehát n eléggé nagy értékeinél

$$1+\delta_n\leqq e^{\delta_n}\leqq \frac{1}{1-\delta_n}.$$

Itt

$$\lim(1+\delta_n)=\lim\frac{1}{1-\delta_n}=1,$$

tehát egyszersmind

$$\lim e^{\delta_n}=1.$$

Ez a képlet a következő módon általánosítható:

Ha $x_1, x_2, \ldots$ *limesze* x, *akkor*

$$\lim e^{x_n}=e^{x}.$$

Valóban ebben az esetben

$$x_1=x+\delta_1,\ x_2=x+\delta_2,\ \ldots,\ x_n=x+\delta_n,\ \ldots,$$

hol $\lim\delta_n=0$. Továbbá

$$e^{x_n}=e^{x+\delta_n}=e^{x}e^{\delta_n}.$$

Tehát

$$\lim e^{x_n}=e^{x}\lim e^{\delta_n}=e^{x}.$$

Innen a 105. §-ban a racionális egész függvényekről mondottak mintájára egyszersmind könnyen belátható a következő tétel helyessége:

Ha

$$e^a < A < e^b,$$

akkor mindig van olyan α *szám, melyre nézve* $a<\alpha<b$ *és*

$$e^\alpha = A.$$

Ugyanis az idézett helyen mondottak az ott vizsgált $f(x)$-nek csak azon a tulajdonságán alapultak, hogy ha $\lim \alpha_n = \alpha$, akkor $\lim f(\alpha_n) = f(\alpha)$. Ha most $f(x)$ helyébe e^x-et teszünk, akkor ez ugyan nem racionális egész függvény, de most is $\lim e^{\alpha_n} = e^\alpha$. Tehát a 105. § meggondolásai lépésről-lépésre az e^x-re is alkalmazhatók és az éppen kimondott tételre vezetnek.

A természetes logarithmus.

115. §. *Bármely pozitiv* A *számhoz egy és csak egy oly valós* x *szám található, melyre nézve* $e^x = A$. Ezt az x-et az A szám *természetes* (Napier-féle) logarithmusának nevezzük és így jelöljük: $\log A$.

Hogy több ily x szám nincsen, az közvetlenül világos, mert x növekedtével e^x is növekszik.

Hogy pozitiv A esetében az $e^x = A$ egyenletnek mindig van megoldása, az az előbbi § végén kimondott tételből folyik. Valóban, ha $A>1$ és

$$a = 0, \quad b = A,$$

akkor

$$e^a = e^0 = 1 < A, \quad e^b = e^A > 1 + A > A.$$

Tehát $a=0$ és $b=A$ között van oly α, melyre nézve e^α értéke éppen A.

Ha $A<1$, vagyis ha $\frac{1}{A} > 1$, akkor az éppen mondottak szerint van oly α, melyre nézve

$$e^\alpha = \frac{1}{A}.$$

De akkor $e^{-\alpha}$ egyenlő A-val.

Ha végre $A=1$, akkor $e^0=1$.

Negativ A számhoz nem található oly valós x, melyre nézve $e^x = A$.

116. §. Nyilván

$$\log 1 = 0, \quad \log e = 1, \quad \log \frac{1}{e} = -1.$$

Az 1-nél nagyobb számok logarithmusa pozitiv szám, a 0 és 1 közé eső negativ szám.

Két különböző pozitiv szám közül a nagyobbiknak van nagyobb természetes logarithmusa.

Az ab *szorzatra nézve*

$$\log(ab) = \log a + \log b. \qquad 1)$$

Ugyanis

$$e^{\log a + \log b} = e^{\log a} e^{\log b} = ab.$$

Azaz $\log a + \log b$ valóban az a kitevő, melyre e-t fölemelve ab-t kapjuk.

A $\log 2$ mint határérték.

117. §. *Legyen*

$$u_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \frac{1}{n+3} + \cdots + \frac{1}{2n}$$

és

$$u'_n = \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{2n-1}.$$

Akkor

$$u_1, u_2, \ldots, u_n, \ldots$$

monoton növekedő,

$$u'_1, u'_2, \ldots, u'_n, \ldots$$

pedig monoton fogyó sorozat és a kettőnek közös limesze a 2-nek természetes logarithmusa.

Valóban

$$u_{n+1} - u_n = \frac{1}{2n+1} + \frac{1}{2n+2} - \frac{1}{n+1} = \frac{1}{2n+1} - \frac{1}{2n+2} > 0,$$

$$u'_{n+1} - u'_n = \frac{1}{2n} + \frac{1}{2n+1} - \frac{1}{n} = \frac{1}{2n+1} - \frac{1}{2n} < 0,$$

$$u'_n - u_n = \frac{1}{n} - \frac{1}{2n} = \frac{1}{2n} > 0.$$

Tehát a vizsgált számsorozatok monotonok. Továbbá bármely u_m-et bármely u'_n-nel összehasonlítva, azt találjuk, hogy

$$u_m < u_{m+n} < u'_{m+n} < u'_n.$$

Eszerint az első számsorozat bármely tagja a második számsorozatra nézve alsó korlát, a második számsorozatnak bármely tagja az első számsorozatra nézve felső korlát. Tehát a szóban forgó két monoton sorozat mindegyike szabályos számsorozat.

Továbbá $u'_n - u_n = \frac{1}{2n}$ limesze zérus, tehát

$$\lim u_n = \lim u'_n.$$

A két limesz közös értékének meghatározásánál vegyük tekintetbe, hogy x-nek minden a zérustól különböző értékénél

$$e^x > 1 + x.$$

Tehát

$$e^{\frac{1}{k}} > 1 + \frac{1}{k} = \frac{k+1}{k}.$$

Továbbá

$$e^{-\frac{1}{k+1}} > 1 - \frac{1}{k+1} = \frac{k}{k+1},$$

azaz

$$e^{\frac{1}{k+1}} < \frac{k+1}{k}.$$

A mondottak értelmében

$$e^{\frac{1}{n+1}} < \frac{n+1}{n} < e^{\frac{1}{n}},$$

$$e^{\frac{1}{n+2}} < \frac{n+2}{n+1} < e^{\frac{1}{n+1}},$$

. . . . . .

$$e^{\frac{1}{2n}} < \frac{2n}{2n-1} < e^{\frac{1}{2n-1}}.$$

Ha itt a megfelelő részeket egymással megszorozzuk, azt találjuk, hogy

$$e^{u_n} < 2 < e^{u'_n}.$$

Innen

$$e^{\lim u_n} \leqq 2 \leqq e^{\lim u'_n}.$$

Mivel u_n határértéke egyenlő u'_n határértékével, azért ez az egyenlőtlenség csak úgy lehetséges, hogy

$$e^{\lim u_n} = e^{\lim u'_n} = 2,$$

azaz

$$\lim u_n = \lim u'_n = \log 2.$$

A mondottaknál fogva

$$\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{2n} < \log 2 < \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \cdots + \frac{1}{2n-1}.$$

Ha pl. $n=3$, akkor

$$\begin{array}{l} \frac{1}{3} < 0{\cdot}34, \\ 0{\cdot}25 = \frac{1}{4} = 0{\cdot}25 \\ 0{\cdot}20 = \frac{1}{5} = 0{\cdot}20 \\ 0{\cdot}16 < \frac{1}{6} \\ \hline 0{\cdot}61 < \log 2 < 0{\cdot}79 \end{array}$$

vagy kereken

$$0{\cdot}6 < \log 2 < 0{\cdot}8.$$

Pontosabban

$$\log 2 = 0{\cdot}69315 \ldots$$

A vizsgált

$$u_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{2n}, \quad u'_n = \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \cdots + \frac{1}{2n-1}$$

összegekben az n növekedtével a tagok száma a végtelenhez közeledik, maguk a tagok pedig a zérushoz közelednek. Ilyen természetű összegek határértékei nagy szerepet játszanak. Pl. ha görbe vonal valamely ívének hosszát, vagy görbe vonal által határolt területet kell kiszámítanunk, a számítás mindig ilyen természetű limeszek meghatározását kívánja.

Pozitiv alap valós kitevőjű hatványa. Tetszőleges pozitiv alapú logarithmus.

118. §. Tudjuk, hogy

$$\log a^2 = \log a + \log a = 2 \log a, \quad \log a^3 = \log a^2 + \log a = 3 \log a, \ldots .$$

Vagyis x bármely pozitiv egész számú értékénél

$$\log a^x = x \log a$$

és innen

$$a^x = e^{x \log a}. \qquad 1)$$

Ez a képlet az $x=0$ esetben nyilván szintén igaz.

Ha x sem nem pozitiv egész szám, sem nem zérus, akkor a^x-nek eddig csak az $a=e$ esetben van értelme. Az 1) képlet nyilván ebben az esetben *bármely valós* x-re nézve igaz.

Természetes abban megállapodnunk, hogy *a-nak bármely pozitiv és x-nek bármely valós értékénél* a^x*-en*

$$e^{x \log a}$$

értendő.

Ha $a \leqq 0$, akkor a^x nem értelmezhető ezen a módon, mert ekkor $\log a$-nak nincs értelme.

Az $a^x = e^{x \log a}$ értéke mindig pozitiv.

Ha $a>1$, akkor $\log a$ pozitiv szám. Ekkor tehát x növekedtével $x \log a$ és $a^x = e^{x \log a}$ szintén növekszik. Ha ellenben $a<1$, akkor x növekedtével az a^x fogy. Az $a=1$ eset érdektelen, mert ekkor x minden valós értékénél

$$1^x = e^{x \log 1} = e^0 = 1.$$

119. §. Minthogy

$$e^{x \log a} e^{y \log a} = e^{(x+y) \log a},$$

azért

$$a^x a^y = a^{x+y}. \qquad 1)$$

Innen

$$a^x a^{-x} = a^0 = 1,$$

azaz

$$a^{-x} = \frac{1}{a^x}.$$

Ezt tekintetbe véve, nyilván

$$\frac{a^x}{a^y} = a^x a^{-y} = a^{x-y}. \qquad 2)$$

Egy másik fontos képletet a következő módon kapunk. Az $a^x = e^{x \log a}$ képletből $\log a^x = x \log a$. Tehát

$$e^{y \log a^x} = e^{y (x \log a)} = e^{xy \log a},$$

azaz

$$(a^x)^y = a^{xy}. \qquad 3)$$

Továbbá

$$e^{x \log (ab)} = e^{x (\log a + \log b)} = e^{x \log a} e^{x \log b},$$

azaz

$$(ab)^x = a^x b^x. \qquad 4)$$

Végre tudjuk, hogy $\lim x_n = x$ esetében

$$\lim e^{x_n \log a} = e^{x \log a},$$

vagyis

$$\lim a^{x_n} = a^x.$$

Ezt még így is írhatjuk:

$$\lim a^{x_n} = a^{\lim x_n}. \qquad 5)$$

120. §. Az előzőkből világos a következő észrevételek helyessége. Az

$$a^{-x} = \frac{1}{a^x}$$

képlet értelmében a^{-x} az a^x-nek reciprok értéke.

Az n bármely pozitiv egész számú értékénél az

$$(a^x)^y = a^{xy}$$

képlet értelmében

$$\left(a^{\frac{m}{n}}\right)^n = a^m.$$

Vagyis $a^{\frac{m}{n}}$ az a^m-nek pozitiv n-dik gyöke.

Az a^x mindig mint *racionális* kitevőjű hatványok limesze fogható fel. Ha ugyanis

$$x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$$

oly racionális számok, melyeknek limesze x, akkor a^x a racionális kitevőjű

$$a^{x_1}, a^{x_2}, \ldots, a^{x_n}, \ldots$$

hatványok limesze.

121. §. Ha A negativ szám, akkor nincsen oly valós x kitevő melyre nézve $a^x = A$.

Ha ellenben A pozitiv szám és a az 1-től különböző pozitiv szám, akkor mindig van egy és csak egy oly x, melyre nézve

$$a^x = A.$$

Valóban ez az egyenlet így is írható:

$$e^{x \log a} = A,$$

vagy még így is

$$x \log a = \log A.$$

Innen

$$x = \frac{\log A}{\log a}.$$

Azt az x kitevőt, melyre nézve $a^x = A$, az A szám a *alapú logarithmusának* mondjuk és így jelöljük: ${}^a\log A$. Az éppen mondottak értelmében

$${}^a\log A = M \log A, \quad \text{hol} \quad M = \frac{1}{\log a}. \qquad 1)$$

Pl.

$${}^a\log 1 = 0, \quad {}^a\log a = 1, \quad {}^a\log \frac{1}{a} = -1.$$

Ha $a=e$, akkor visszajutunk a természetes logarithmusokra.

A gyakorlati számításoknál használt Briggs-féle logarithmusok alapszáma 10. Ezeknél az alapot nem írjuk ki és nagy kezdőbetűt használunk, úgy hogy gyakorlati számításoknál Log A rövidítés ${}^{10}\log A$ helyett.

Némely író a természetes logarithmust (logarithmus naturalist) ln A-val vagy röviden l. A-val jelöli, a 10 alaput pedig log A-val. Gondosabb olvas ás után minden esetben felismerhető, hogy a jelölés hogyan értendő.

Az 1) alatti képlet értelmében az a alapú logarithmusok a természetesekből az

$$M=\frac{1}{\log a}$$

tényezővel való szorzással keletkeznek. M-et az a alapú logarithmusok *modulusának* nevezzük.

Ha 1) alatt $A=e$, akkor

$$^{a}\log e=\frac{1}{\log a}. \qquad 2)$$

A Briggs-féle logarithmusok modulusa

$$M=\frac{1}{\log 10}=\operatorname{Log} e=\frac{1}{2{\cdot}30\underline{26}}=0{\cdot}434\underline{3}.$$

122. §. Tudjuk, hogy

$$\log(uv)=\log u+\log v.$$

Ha az $M=\frac{1}{\log a}$ modulussal szorzunk, akkor innen

$$^{a}\log(uv)=\,^{a}\log u+\,^{a}\log v.$$

Továbbá az

$$u^{x}=e^{x\log u}$$

képletből a természetes logarithmus értelmezése szerint

$$\log u^{x}=x\log u.$$

Ha mindkét oldalon M-mel szorzunk, akkor hasonló képletet nyerünk tetszőleges alapú logarithmusokra nézve.

Tetszőleges alap negativ egész kitevős hatványa.

123. §. Legyen a bármilyen szám, kivévén a zérust. Az n bármely pozitiv egész értékénél $a^{n-1}a=a^{n}$, vagyis

$$a^{n-1}=\frac{a^{n}}{a}.$$

Természetes tehát a negativ egész kitevőjű hatványait úgy értelmezni, hogy ez a képlet n *minden egész* értékénél érvényes maradjon. Ez akkor és csak akkor következik be, ha

$$a^{-1}=\frac{a^{0}}{a}=\frac{1}{a},\quad a^{-2}=\frac{a^{-1}}{a}=\frac{1}{a^{2}},\quad a^{-3}=\frac{a^{-2}}{a}=\frac{1}{a^{3}},\ldots$$

és általában $a^{-m}=\frac{1}{a^{m}}$ (mint pozitiv a esetében már eddig is volt).

Ha a és b bármilyen a zérustól különböző számok, x és y pedig egész számok, akkor

$$a^x a^y = a^{x+y}, \quad (a^x)^y = a^{xy}, \quad (ab)^y = a^y b^y.$$

Ha y zérust vagy 1-et jelent, akkor ennek a három képletnek helyessége közvetlenül világos. Bármilyen egész y-ra pedig a bebizonyítás a következő módon végezhető.

Az első képlet pozitiv egész y-ra nézve m-ről $(m+1)$-re való következtetéssel igazolható. Ha ugyanis a képlet az $y=m$ egész számra nézve igaz, akkor egyszersmind

$$a^x a^{m+1} = a^x a^m a = a^{x+m} a = a^{x+m+1}.$$

Ha pedig y valamely $-m$ negativ egész számmal egyenlő, akkor a már bebizonyított

$$a^{x-m} a^m = a^x$$

képletből

$$a^x a^{-m} = \frac{a^x}{a^m} = a^{x-m}.$$

Hasonlóképpen a második és a harmadik képletet is pozitiv egész y-ra nézve m-ről $(m+1)$-re való következtetéssel igazolhatjuk. A számolás így alakul:

$$(a^x)^{m+1} = (a^x)^m a^x = a^{xm} a^x = a^{x(m+1)}$$

és

$$(ab)^{m+1} = (ab)^m (ab) = a^m b^m ab = (a^m a)(b^m b) = a^{m+1} b^{m+1}.$$

Ha pedig y valamely $-m$ negativ egész számmal egyenlő, akkor

$$(a^x)^{-m} = \frac{1}{(a^x)^m} = \frac{1}{a^{xm}} = a^{-mx}$$

és

$$(ab)^{-m} = \frac{1}{(ab)^m} = \frac{1}{a^m b^m} = a^{-m} b^{-m}.$$

124. §. Legyen a $\delta_1, \delta_2, \ldots$ sorozat limesze *zérus*, de a sorozat tagjai legyenek a zérustól különbözők. Ha a sorozat tagjait valamely $-m$ negativ kitevőre fölemeljük, akkor

$$\lim \delta_n^{-m} = \lim \frac{1}{\delta_n^m} = \infty.$$

Természetes tehát abban megállapodnunk, hogy a *zérus* alap negativ egész kitevőjű hatványain a ∞-t értjük.

Ezzel és a hatványozásra vonatkozó egyéb megállapodásainkkal a hatvány fogalmát annyira általánosítottuk, hogy a következő két esetben mindig van értelme:

1. ha az alap *pozitiv* szám és a kitevő bármilyen *valós* szám,
2. ha a kitevő *egész szám*.

NEGYEDIK FEJEZET.

MÉRÉSEK.

I. Hosszmérés. Sokszögek területe.

Egyenesdarabok hosszúsága.

125. §. Tárgyalásainkban arra törekszünk, hogy a mathematika különböző részei megalapozásuknál egymást kölcsönösen támogassák. Azért az előbbi fejezeteknek a valós számokra és a velük való számolásra vonatkozó fejtegetéseiről most geometriai kérdésekre térünk át. Legközelebbi célunk, hogy a valós számokat felhasználjuk egyenesdarabok és más mennyiségek *mérésére*, azaz számokkal való jellemzésére.

Az irracionális számok bevezetésére vezető okok egyike az volt, hogy a racionális számokkal nem tudtunk minden hosszúságot jellemezni. Az *irracionális számok* bevezetése után a jellemzés már *mindig* lehetséges.

Mindaddig, míg bennünket az egyenesdarabnak csak a puszta *hosszúsága* érdekel, a mérőszámot *pozitivnak* választjuk. Negativ számok az egyenesdarabok mérésénél majd csak akkor lépnek föl, midőn a hosszúságon kívül az *értelemre* is nézünk. Akkor majd az egyenesen kétféle haladást különböztetünk meg; az egyiket pozitiv, a másikat negativ értelműnek mondjuk és a mérendő darabnak pozitiv vagy negativ mérőszámot tulajdonítunk aszerint, hogy minő értelmű mozgással gondoljuk leírva. Egyelőre azonban az értelemre nem tekintünk.

A mérésnél minden egyenesdarabhoz úgy rendelünk egy (pozitiv) mérőszámot, hogy ez a rendelkezés (kiterjesztve minden egyenesdarabra) kielégítse a következő két követelést:

1. *Egyenlő egyenesdaraboknak ugyanaz a mérőszámuk legyen.*
2. *Két vagy több részből összetett egyenesdarab mérőszáma egyenlő legyen a részek mérőszámaiból alkotott összeggel.*

A mérésnél *egy* egyenesdarab mérőszáma fölött szabadon rendelkezünk. Ez a rendelkezés többnyire úgy történik, hogy *egy* megszabott egyenesdarabnak az 1 mérőszámot tulajdonítjuk. Ezt az egyenesdarabot *hosszegységnek* nevezzük.

Az egyenesdarabok hosszúságának számokkal való jellemzésére nézve a következő két tétel érvényes.

I. *A hosszegység megszabása után bármely egyenesdarabhoz*

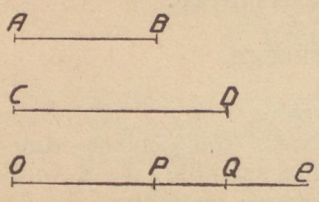
egy és csak egy α mérőszámot határozhatunk meg úgy, hogy a mérésre vonatkozó két követelés mindig ki legyen elégítve.

II. *Bármely α positiv számhoz bármely félegyenesen egy és csak egy oly P pont található, hogy a félegyenesnek O kiinduló-pontja és a P pont által határolt OP darab mérőszáma egyenlő α-val.*

126. §. A kimondott két tétel helyességének belátására a mérésnek itt következő részletes leírása és elemzése vezet.

Bármely egyenest bármely rajta levő O pont az O-ból kiinduló két félegyenesre bont. Bármely AB egyenesdarabhoz az O-ból kiinduló bármely e félegyenesen egy és csak egy P pontot találhatunk úgy, hogy az OP darab egyenlő AB-vel. P meghatározását az AB vagy (helyesebben) a vele egyenlő OP *felrakásának* nevezzük.

Ha valamely O-ból kiinduló félegyenesen felrakunk valamely adott AB-vel egyenlő OP darabot és valamely adott CD-vel egyenlő OQ darabot, akkor esetleg P összeesik Q-val. Ez akkor és csak akkor következik be, ha AB és CD egyenlők egymással. Minden más esetben OP és OQ közül valamelyik a másiknak része. Ha pl. P az O és Q közé esik (4. ábra), vagyis OP az OQ-nak része, akkor azt mondjuk, hogy $OP<OQ$ és $AB<CD$.



4. ábra.

Minthogy a hosszúságokat pozitiv számokkal jellemezzük és két vagy több részből összetett darabnak mérőszámától azt követeljük, hogy egyenlő legyen a részek mérőszámainak összegével: azért egy egyenesdarabnak mindig nagyobb mérőszámot kell tulajdonítanunk, mint bármely nála kisebb darabnak.

127. §. A mérésnél lényeges szerepet játszik a következő két *axioma*:

A) *Két AB és OP egyenesdarabhoz mindig található egy olyan n egész szám, hogy AB-nek n-szerese nagyobb mint OP.* (Archimedes axiomája.)

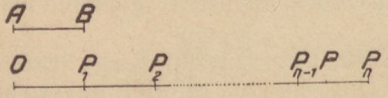
Vagyis (5. ábra) AB-nek O-ból P-felé való ismételt felrakásánál a $P_1, P_2, \ldots$ osztópontok között előbb vagy utóbb oly P_n-re jutunk, mely P-n túl van.

B) *Ha* (6. ábra) *a*

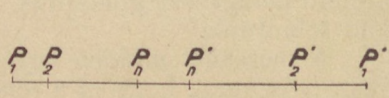
$$P_1P_1', P_2P_2', \ldots, P_nP_n', \ldots$$

darabok mindegyike az utána felsoroltakat magában foglalja, akkor az egyenesen mindig található legalább egy oly Q pont, mely az adott darabok mindegyikén rajta van. (Az egyenes *folytonosságának* axiomája.)

A P_nP_n' úgy foglalhatja magában a $P_{n+1}P_{n+1}'$ darabot, hogy P_{n+1} és P_{n+1}' a P_nP_n' belsejébe esnek; de meglehet az is, hogy P_{n+1} és P_{n+1}' vala-



5. ábra.



6. ábra.

melyike éppen P_n-be ill. P_n'-be esik. Q sincs okvetlenül P_nP_n' belsejében, hanem esetleg összeesik P_n-nel vagy P_n'-nel.

128. §. Archimedes axiomájánál fogva okvetlenül előállítható az egyenes daraboknak oly

$$G_1H_1, G_2H_2, \ldots, G_nH_n, \ldots$$

sorozata, melyben a tér bármely AB egyenesdarabjához található nála *kisebb* G_nH_n.

Ennek a sorozatnak előállításánál G_1H_1-et szabadon választjuk. A G_2H_2-t úgy állítjuk elő, hogy G_1H_1-et tetszésünk szerint két (nem egyenlő) részre

osztjuk és a két rész közül kiválasztjuk a kisebbiket. A G_3H_3-t úgy állítjuk elő, hogy G_2H_2-t tetszésünk szerint két részre osztjuk és a két rész közül kiválasztjuk a kisebbiket. Ezt az eljárást határtalanul folytatva, az így előállított sorozat a kivánt tulajdonságú.

Ugyanis a tér bármely AB vonaldarabjához találhatunk oly n számot, hogy AB-nek n-szerese *nagyobb* mint G_1H_1, az n-nek megfelelő G_nH_n vonaldarabot pedig úgy állítottuk elő, hogy n-szerese *kisebb* mint G_1H_1. Ez csak úgy lehetséges, hogy valóban $G_nH_n<AB$.

129. §. Archimedes axiomáját és az egyenes folytonosságát célszerű már oly feladatok tárgyalásánál is felhasználni, melyek ezek nélkül is könnyen elintézhetők. Ilyen feladat valamely adott egyenesdarabnak m *egyenlő* részre való felosztása. Ezt a feladatot ismeretes módon igen egyszerű szerkesztéssel oldhatjuk meg. A szerkesztés a következő tételen alapszik:

Ha két egyenest (7. ábra) *párhuzamos egyenesekkel metszünk, és az átmetszett egyenesek egyikén $AB=CD$, akkor a másikon a megfelelő $A'B'$ és $C'D'$ darabok is egymással egyenlők.*

Bármilyen egyszerű ez a tétel, mégis a rajta alapuló szerkesztést a mérésre vonatkozó fejtegetésekben nem akarjuk felhasználni, mert meggondolásainkban a párhuzamosság fogalmát mint idegenszerű elemet kerüljük. Természetesen ily módon az m egyenlő részre való feloszthatóság bebizonyítása jóval bonyodalmasabbá válik.

A feladat megoldásánál mindenekelőtt előállítjuk az előbbi §-ban említett

$$G_1H_1,\ G_2H_2,\ \ldots \qquad 1)$$

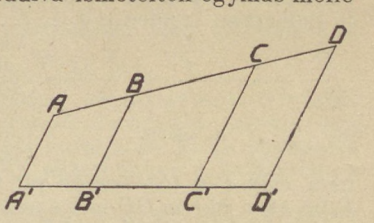
végtelen sorozatot. Ebben okvetlenül találhatunk oly egyenesdarabot, melynek m-szerese kisebb mint az m egyenlő részre osztandó AB. Legyen pl. G_3H_3 ilyen darab. Ha most G_3H_3-at AB-n A-ból kiindulva ismételten egymás mellé rakjuk, akkor mindenesetre található oly k pozitiv egész szám, hogy

$$AP_1 = kG_3H_3$$

m-szerese kisebb ugyan mint AB vagy esetleg egyenlő vele, de

$$AP_1' = (k+1)\,G_3H_3$$

m-szerese már nagyobb mint AB. Ha véletlenül mAP_1 éppen egyenlő AB-vel, akkor a feladat meg van oldva. Ellenkező esetben a következő módon kell AB-nek m-ed részét jobban megközelítenünk.



7. ábra.

Az AP_1'-et megnövesztjük oly módon, hogy még hozzácsatolunk egy (többé nem G_3H_3-mal, hanem) G_4H_4-gyel egyenlő darabot, azután egy újabb ugyancsak G_4H_4-gyel egyenlő darabot, s í. t. Így előbb vagy utóbb oly darabot kapunk, melynek m-szerese nagyobb mint AB. Legyen az AP_1 fokozatos növesztésével nyert darabok közül AP_2 az utolsó, melynek m-szerese még nem nagyobb mint AB, továbbá AP_2' az első, melynek m-szerese már AB-nél nagyobb.

Az AP_2-ről azután G_5H_5 ismételt hozzáadásával hasonló módon áttérünk AP_3-ra s í. t.

Ha ez az eljárás valahol megszakad, mert az mAP_n éppen egyenlő AB-vel, akkor a feladat meg van oldva. Tehát csak avval az esettel kell foglalkoznunk, melyben az

$$AP_1,\ AP_2,\ \ldots \qquad 2)$$

$$AP_1',\ AP_2',\ \ldots \qquad 3)$$

sorozatok határtalanul folytathatók.

Minthogy a

$$P_1P_1',\ P_2P_2' \ldots \qquad 4)$$

darabok mindegyike magában foglalja a reá következőt, azért a folytonossági axioma értelmében AB-n okvetlenül van oly Q pont, mely a 4) alatti darabok mindegyikén rajta van.

AQ-nak m-szerese egyenlő AB-vel.

Ugyanis mAQ is, meg AB is nagyságra nézve az mAP_n és mAP'_n közé esik. Tehát, ha mAQ és AB egymástól valamely Δ darabbal különböznek, akkor $\Delta < mP_nP'_n < mG_nH_n$. Ha most már Δ-t bárhogyan m részre szeljük, a legkisebb szelet *kisebb* mint G_nH_n. Még pedig ennek igaznak kell lennie n minden választásánál. De ez ellentmond annak, hogy a

$$G_1H_1,\ G_2H_2,\ \ldots,\ G_nH_n,\ \ldots$$

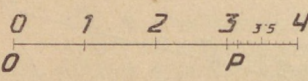
sorozatban bármely egyenesdarabhoz találunk nála kisebbet.

Tehát AQ valóban AB-nek éppen m-ed része. Továbbá más, nála nagyobb vagy kisebb egyenesdarabnak nincs meg ez a tulajdonsága.

130. §. Ha a hosszegységet q egyenlő részre osztjuk, akkor az így nyert hosszúságot (vagyis a hosszegység q-ad részét) az $\frac{1}{q}$ mérőszámmal kell jellemeznünk, mert csak ez felel meg annak a követelésnek, hogy ha q-szor vesszük összeadandónak, összegül éppen 1-et adja. A hosszegység q-ad részét p-szer egymás mellé rakva, az így nyert darabot a $\frac{p}{q}$ számmal kell jellemeznünk.

131. §. Most már áttérhetünk *bármilyen* OP egyenes vonaldarab mérőszámának meghatározására.

Az O-ból P-n keresztül huzott félegyenesen (8. ábra) O-ból kiindulva ismételten felrakjuk a hosszegységet. Az osztópontokat, az O kiindulópontot is beleértve, rendre a 0, 1, 2,... számokkal jelöljük. A mérésre vonatkozó követeléseink értelmében az $O1$, $O2$... darabokban az 1, 2,... mérőszámokat kell tulajdonítanunk.



8. ábra.

Az 1, 2... osztópontok sorozatában elég messze menve, előbb vagy utóbb a P ponton túl jutunk. Az utolsó osztópont, mely még nem esik P-n túl, legyen pl. az $a_0=3$ egész számmal jelölt. Ha ez magába P-be esik, akkor OP-nek az $a_0=3$ mérőszám tulajdonítandó. Ha ellenben a P pont 3 és 4 közé esik, akkor a mérésre vonatkozó követeléseink értelmében OP mérőszámát $a_0=3$ és $a'_0=4$ között kell választanunk.

Az utóbbi esetben a 3 és 4 pontok közötti távolságot 10 egyenlő részre osztjuk. Minden ily résznek az $\frac{1}{10}$ mérőszám tulajdonítandó. Tehát az osztópontoknak, magát 3-at és 4-et is beleértve, O-tól való távolságát rendre a

$$3{\cdot}0,\ 3{\cdot}1,\ 3{\cdot}2,\ \ldots\ 3{\cdot}9,\ 4{\cdot}0$$

számokkal kell jellemeznünk. Rövidség kedveért magukat az osztópontokat is ezekkel a számokkal jelöljük. Meglehet, hogy valamelyik osztópont, pl. $a_1=3{\cdot}1$ éppen összeesik P-vel. Ekkor OP-nek ez az a_1 mérőszám tulajdonítandó. Ha ellenben a P pont pl. $a_1=3{\cdot}1$ és $a'_1=3{\cdot}2$ közé esik, akkor OP mérőszámát a_1 és a'_1 között kell választanunk.

Az utóbbi esetben az $a_1=3{\cdot}1$ és $a'_1=3{\cdot}2$ közé eső darabot megint 10 egyenlő részre osztjuk, úgy hogy minden egyes rész a hosszegységnek századrésze. Az osztópontokat a

$$3{\cdot}10,\ 3{\cdot}11,\ \ldots,\ 3{\cdot}19,\ 3{\cdot}20$$

számokkal jelöljük. Ha a P pont pl. összeesik a $3{\cdot}17$ ponttal, akkor OP-nek az $a_2=3{\cdot}17$ mérőszám tulajdonítandó. Ha ellenben P egyik osztóponttal sem esik össze, hanem pl. az $a_2=3{\cdot}17$ és $a'_2=3{\cdot}18$ osztópontok köze esik, akkor az általuk határolt darabot megint 10 egyenlő részre osztjuk. S í. t.

Az eljárás folytatásánál két eset lehetséges. Az általános esetben P sohasem esik össze valamely talált osztóponttal. Ekkor az eljárást határ-

talanul folytathatjuk. Azoknak az osztópontoknak megfelelőleg, melyek közé P esik, a véges tizedestörteknek két végtelen sorozatát nyerjük. Példánkban ezek:

$$a_0 = 3, \quad a_1 = 3{\cdot}1, \quad a_2 = 3{\cdot}17, \ldots \qquad 1)$$

$$a'_0 = 4, \quad a'_1 = 3{\cdot}2, \quad a'_2 = 3{\cdot}18, \ldots \qquad 2)$$

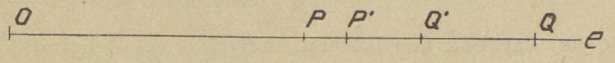
Az 1) sorozat tagjai valamely α végtelen tizedestörtnek (esetünkben a

$$3{\cdot}17\ldots$$

tizedestörtnek) közelítő törtjei. Az OP-nek oly mérőszám tulajdonítandó, mely egy a_n-nél sem kisebb és egy a'_n-nél sem nagyobb. Ennek a követelésnek az α végtelen tizedestört és csak ez felel meg. (103. §.) OP-nek tehát ezt a tizedestörtet kell mérőszámul tulajdonítanunk.

Abban a kivételes esetben, midőn valamelyik lépésnél P összeesik az a_n osztóponttal, OP-nek mérőszáma az a_n véges tizedestört. Ebben az esetben $\alpha = a_n$ mérőszámot szintén végtelen tizedestört alakjában írhatjuk, még pedig (80. §.) kétféle módon. Egyszerűség kedvéért azt a módot választjuk, melynél a véges tizedestörthöz végtelenül sok zérust csatolunk. Ekkor az $a_{n+1}, a_{n+2}, \ldots$ közelítő törtek egyenlők a_n-nel, csakhogy még bizonyos számú zérus van odacsatolva.

132. §. A leírt módon minden egyenesdarabhoz egy és csak egy α mérőszámot kapunk. Két egymással egyenlő darab mérése lépésről-lépésre megegyezik. Tehát *egyenlő darabok mérésénél ugyanazt a mérőszámot kapjuk,* úgy mint ezt a mérésre vonatkozó első követelésünk megkívánja.



9. ábra.

Nagyobb egyenesdarabnak nagyobb mérőszám felel meg.

Annak bebizonyításánál, hogy a leírt módon meghatározott mérőszámokra nézve ez valóban így van, a megmérendő darabokat mindig úgy helyezhetjük el, hogy ugyanabból az O pontból induljanak ki és ugyanarra az e félegyenesre essenek. Ha (9. ábra) $OP < OQ$, akkor ebben a helyzetben a P pont O és Q közé esik.

Ha a ν egész szám eléggé nagy és rövidség kedvéért $N = 10^\nu$, akkor PQ-nak N-szerese nagyobb a hosszegység kétszeresénél, vagyis a hosszegység N-ed része kisebb PQ felénél. Az egység N-ed részének O-ból kiinduló ismételt felrakásánál legalább egy ily rész — $P'Q'$ — teljesen PQ belsejébe esik. E rész P' és Q' végpontjainak O-tól való távolságait két

$$\frac{k}{10^\nu}, \quad \frac{k+1}{10^\nu}$$

alakú szám jellemzi, hol k pozitiv egész számot jelent.

Ha most már OP-nek és OQ-nak α, β mérőszámait az előbbi §-ban leírt módon végtelen tizedestörtek alakjában meghatározzuk, akkor az $a_1, a_2, \ldots$ és $b_1, b_2, \ldots$ közelítőtörtekről nyilvánvaló, hogy

$$a'_\nu = a_\nu + \frac{1}{10^\nu} \leqq \frac{k}{10^\nu} < \frac{k+1}{10^\nu} \leqq b_\nu.$$

Mivel továbbá

$$a \leqq a'_\nu, \quad b_\nu \leqq \beta,$$

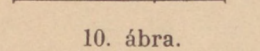
azért egyszersmind

$$\alpha \leqq \frac{k}{10^\nu} < \frac{k+1}{10^\nu} \leqq \beta,$$

vagyis valóban α kisebb mint β.

133. §. Az előbbi §-ból tudjuk, hogy a leírt módon meghatározott mérőszámok valóban kielégítik a mérésre vonatkozólag a 125. §. kimondott 1. követelést. Hogy a 2. követelésnek is megfelelnek, azt még ki kell mutatnunk; vagyis be kell bizonyítanunk, hogy az AB és BC részekből álló

AC egyenesdarabnak (10. ábra) mérőszáma egyenlő a részek mérőszámaiból alkotott összeggel.



10. ábra.

Ha AB és BC mérőszámai *véges* tizedestörtek, akkor ez közvetlenül világos. Ha pl. a mérőszámok 2·5 és 4·23, akkor a hosszegység századrésze az AB-ben 250-szer a BC-ben 423-szor foglaltatik, az egész AC-ben pedig (250+423)-szor. Vagyis AC mérőszáma

$$\gamma=\frac{250+423}{100}=2\cdot5+4\cdot23.$$

Ha AB és BC mérőszámai tetszőleges tizedestörtek, akkor legyenek közelítőtörtjeik

$$a_0, a_1, a_2, \ldots \text{ és } b_0, b_1, b_2, \ldots .$$

Minden közelítőtörtben az utolsó jegyet 1-gyel nagyobbítva, az így nyert tizedestörtek legyenek

$$a'_0, a'_1, a'_2, \ldots \text{ és } b'_0, b'_1, b'_2, \ldots .$$

Most már

$$a_0+b_0,\ a_1+b_1,\ a_2+b_2, \ldots$$

olyan egyenesdarabok mérőszámai, melyek kisebbek mint AC, vagy legfeljebb vele egyenlők. Továbbá

$$a'_0+b'_0,\ a'_1+b'_1,\ a'_2+b'_2, \ldots$$

olyan darabok mérőszámai, melyek nem lehetnek kisebbek AC-nél. Tehát

$$a_n+b_n \leqq \gamma \leqq a'_n+b'_n.$$

Ha áttérünk a határértékekre, akkor azt találjuk, hogy

$$\alpha+\beta \leqq \gamma \leqq \alpha+\beta,$$

azaz

$$\gamma=\alpha+\beta.$$

134. §. Eddig a 125. §-nak I. tételére szorítkoztunk. Most már áttérhetünk a II. tételnek, vagyis a következő állításnak bebizonyítására:

Ha adva van a hosszegység, továbbá az O pont és egy ebből kiinduló félegyenes, végre valamely α pozitiv szám: akkor az adott félegyenesen mindig egy és csak egy oly P pont található, melyre nézve OP mérőszáma egyenlő α-val.

Az adott félegyenesen legfeljebb egy ily P pont lehet, mert különböző OP vonaldaraboknak különböző α felel meg. Hogy egy ily P csakugyan van, az abban az esetben, midőn α véges tizedestört, szintén világos. Ha pl. $\alpha=2\cdot5$, akkor OP-t úgy kapjuk meg, hogy a hosszegység 10-ed részét 25-ször felrakjuk. Midőn α végtelen tizedestört, akkor közelítőtörtjei legyenek:

$$a_0, a_1, a_2, \ldots . \qquad 1)$$

Ha mindegyiknek utolsó jegyét 1-gyel nagyobbítjuk, az így nyert tizedestörtek legyenek:

$$a'_0, a'_1, a'_2, \ldots . \qquad 2)$$

Az 1) és 2) alatti véges tizedestörteknek megfelelő

$$OP_0, OP_1, OP_2, \ldots \qquad 1^*)$$

$$OP'_0, OP'_1, OP'_2, \ldots \qquad 2^*)$$

darabokat már tudjuk meghatározni. Minthogy a P_0 és P'_0, P_1 és P'_1, s. í. t. pontok által határolt

$$P_0P'_0,\ P_1P'_1,\ P_2P'_2, \ldots$$

darabok mindegyike a következőt magában foglalja, azért ezeknek a daraboknak van legalább egy közös P pontjuk. Ennek a P pontnak O-tól

való OP távolsága nagyobb az 1*) alatti darabok bármelyikénél, ellenben a 2*) alattiaknál kisebb. Tehát OP mérőszáma a_n és a'_n közé esik. Ez csak úgy következhetik be n minden értékénél, ha OP mérőszáma éppen α.

135. §. A hosszegység megváltoztatása az egyenesdarabok mérőszámait is megváltoztatja.

Ha (11. ábra) *OP-nek az AB hosszegységre vonatkozó mérőszáma*

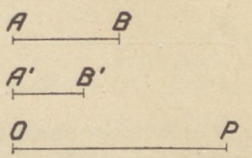
α,

és AB-nek a A'B' hosszegységre vonatkozó mérőszáma

ε,

akkor OP-nek a A'B' hosszegységre vonatkozó mérőszáma

$\alpha\varepsilon$.



11. ábra.

Ha α valamely p egész számmal egyenlő, vagy valamely q egész számnak reciprok értéke, vagy általában valamely $\frac{p}{q}$ racionális szám, akkor az állítás helyessége a mérésre vonatkozó 2. követelésből közvetlenül világos.

Tetszőleges α esetében ezt a számot végtelen tizedestört alakjában írhatjuk. Az n-dik közelítő törtje legyen a_n. Azoknak a daraboknak, melyeknek AB-re vonatkozó mérőszámaik a_n és $a'_n = a_n + \frac{1}{10^n}$, az új $A'B'$ egységre vonatkozó mérőszámaik

$$a_n\varepsilon \quad \text{és} \quad a'_n\varepsilon.$$

Az OP-nek az $A'B'$-re vonatkozó $\bar{\alpha}$ mérőszáma e kettő közé esik. Ha n-et minden határon túl növesztjük, akkor azt találjuk, hogy

$$\alpha\varepsilon \leqq \bar{\alpha} \leqq \alpha\varepsilon,$$

vagyis $\bar{\alpha} = \alpha\varepsilon$.

A bebizonyított tétel tartalmát így is fejezhetjük ki:

Két vagy több egyenesdarabnak bizonyos hosszegységre vonatkozó mérőszámai arányosak ugyanezen daraboknak bármely más hosszegységre vonatkozó mérőszámaival.

136. §. A mérésről mondottak arra az *eszményképre* vonatkoznak, mely minden mérésnél tudatosan vagy öntudatlanul szemünk előtt lebeg.

A *gyakorlati kivitel,* akár adott egyenesdarab mérőszámának meghatározását kívánjuk, akár fordítva adott mérőszámból kiindulva valamely megfelelő hosszúságú darabnak meghatározását, két akadályba ütközik. Az egyik akadály, hogy leírt eljárásaink végtelen sok lépést kívánnak és a rendelkezésünkre álló véges időben közülök csak véges számút végezhetünk el. Már csak ezért is a mérőszám meghatározásánál meg kell állapodnunk valamelyik tizedes jegynél, melyen túl a meghatározást nem folytatjuk. Fordítva, ha adott mérőszámból a megfelelő hosszúságot szerkesztjük meg, akkor mindig meg kell elégednünk két oly darab kijelölésével, melyek közül az egyik kisebb, a másik nagyobb a keresettnél, és a kettő közötti különbség kisebb bizonyos megszabott korlátnál.

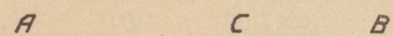
Egy másik akadály műszereink és érzékszerveink tökéletlensége. Ezért már a mérőszámnak meghatározásánál, vagy adott mérőszám esetében a megfelelő egyenesdarabnak meghatározásánál végzendő egyes lépések sem sikerülnek teljes szabatossággal.

Pozitiv és negativ egyenesdarabok. A valós számoknak az egyenesen való ábrázolása.

137. §. Bármely egyenesen két ellenkező *értelmű* haladást különböztetünk meg. Ha két karunkat az egyenesen kifeszítve gondoljuk, az egyik értelemben való haladást balról jobbra menőnek, a másikat jobbról balra menőnek mondhatjuk. A mathematikában a

kétféle haladás közül az egyiket *pozitivnak* (vagy *pozitiv értelműnek*), a másikat *negativnak* mondjuk.

Ha valamely *e* egyenesen levő egyenesdarabokat nem csak hosszúságukra nézve, hanem *értelemre nézve is* számokkal akarjuk jellemezni, akkor ez a következő módon történhetik. Mindenekelőtt megállapítjuk a használandó hosszegységet és azt, hogy az *e*-n lehetséges kétféle haladás közül melyiket mondjuk *pozitiv* értelműnek. Azután *AB* mérőszámának azt a valós számot választjuk, melynek abszolut értéke megadja a vonaldarab puszta hosszát, előjele pedig pozitiv vagy negativ aszerint, hogy *A*-ból pozitiv vagy pedig negativ értelmű mozgás vezet *B*-be. Ha *AB*-t nem csak az *A* és *B* által határolt egyenesdarabnak, hanem egyszersmind *e* darab mérőszámának a jelölésére is használjuk, akkor a mérőszám szóban forgó meghatározásánál



12. ábra.

$$BA = -AB.$$

Egyöntetűség kedvéért két összeeső pontról is azt mondjuk, hogy egyenesdarabot határoznak meg és ennek a darabnak a 0 mérőszámot tulajdonítjuk.

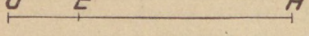
Az egyenes bármely három *A*, *B*, *C* pontjára nézve az egyenesdarabok mérőszámainak mostani meghatározásánál

$$AB + BC = AC.$$

Pl. (12. ábra) ha $AB=5$, $BC=-2$, akkor

$$AC = 5 + (-2) = 3.$$

138. §. A mondottak alapján a valós számokat valamely egyenes pontjaival úgy ábrázolhatjuk, hogy minden valós számnak egy és csak egy pont, viszont az egyenes minden pontjának egy és csak egy valós szám felel meg.



13. ábra.

Az ábrázolásnál a 0-nak megfelelő *O kezdőpontot* és az 1-nek megfelelő *E egységpontot* szabadon választhatjuk (13. ábra). Hosszegységnek *OE*-t választjuk; *e*-n a haladás pozitiv értelmét úgy állapítottuk meg, hogy *O*-ból *E*-be pozitiv mozgás vezessen. Ezek után a megállapodások után az *a* valós szám képének az egyenesen azt az *A* pontot választjuk, melynek *O*-tól való *OA* távolságának mérőszáma abszolut értékére és előjelére nézve egyenlő *a*-val.

Sokszögek területe.

139. §. A területmérésnél bizonyos területegység fölvétele után a sík minden sokszögéhez úgy rendelünk egy pozitiv mérőszámot, hogy a következő két követelés ki legyen elégítve:

1. *Egybevágó sokszögeknek ugyanaz a mérőszámuk legyen.*
2. *Több sokszög összeillesztéséből keletkezett sokszög területének mérőszáma mindig egyenlő legyen az egymáshoz illesztett részek mérőszámainak összegével.*

Területegységül (melynek az 1 mérőszámot tulajdonítjuk) azt a négyzetet választjuk, melynek oldala egyenlő a hosszegységgel.

Ha a hosszegység és vele együtt az említett módon a területegység is meg van adva, akkor a sík minden sokszögéhez egy és csak egy mérőszámot rendelhetünk úgy, hogy a területmérésre vonatkozó két követelés ki legyen elégítve.

Ennek az állításnak bebizonyítása két részből áll. Először csak azt bizonyítjuk be, hogy ha a területmérésre vonatkozó követeléseink egyáltalában kielégíthetők, akkor ez csak egy módon lehetséges. A bebizonyítás második részében kimutatjuk, hogy ha a sokszögek mérőszámait a bebizonyítás első részében kifejtett módon határozzuk meg, akkor az így megállapított mérőszámok valóban megfelelnek a területmérésre vonatkozó két követelésnek.

140. §. *A derékszögű négyszög területének mérőszámát úgy kell megállapítanunk, hogy egyenlő legyen az alap és a magasság mérőszámainak szorzatával.*

Ez közvetlenül világos, ha az alapnak a mérőszáma és a magasságnak m mérőszáma racionális számok. Ha ugyanis pl. (14. ábra)

$$a = \frac{7}{5}, \quad m = \frac{3}{2},$$

akkor a területegységet úgy oszthatjuk $5 \times 2 = 10$ egybevágó részre, hogy azokból $7 \times 3 = 21$ alkalmas módon egymás mellé rakva éppen kitöltse a megmérendő négyszöget. Minden egyes résznek az $\frac{1}{10}$ mérőszámot, a 21 ily részből összeállított négyszögnek pedig a

$$\frac{21}{10} = \frac{7}{5} \times \frac{3}{2}$$

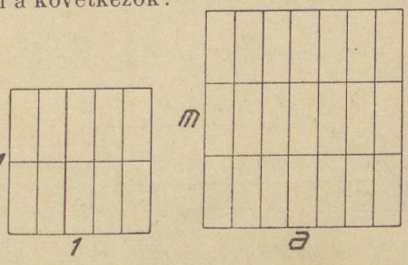
mérőszámot kell tulajdonítanunk.

Ezt tudván, most már *tetszőleges* a és m esetében legyenek a és m végtelen tizedestört alakjainak közelítőtörtjei a következők:

$$a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$$
$$m_1, m_2, \ldots, m_n, \ldots .$$

Mindegyik közelítőtörtben az utolsó jegyet 1-gyel növesztve, az így nyert véges tizedestörtek legyenek:

$$a'_1, a'_2, \ldots, a'_n, \ldots$$
$$m'_1, m'_2, \ldots, m'_n, \ldots .$$



14. ábra.

Az a_n alapú és m_n magasságú négyszög teljesen elfér a megmérendő négyszögben, ez viszont teljesen elfér az a'_n alapú és m'_n magasságú négyszögben. Tehát a megmérendő négyszög t mérőszámát úgy kell választanunk, hogy

$$a_n m_n \leqq t \leqq a'_n m'_n$$

legyen. Ha n-et minden határon túl növesztjük, akkor innen

$$am \leqq t \leqq am$$

következik. Ez pedig csak úgy lehetséges, hogy

$$t = am.$$

141. §. *Két egyenlő alapú és egyenlő magasságú háromszögnek területét ugyanavval a mérőszámmal kell jellemeznünk.*

A 15. ábrában

$$BC = B'C', \quad AD = A'D'.$$

Az AB-t és AC-t n egyenlő részre osztjuk. Ha a megfelelő osztópontokat összekötjük, az ABC háromszög $n-1$ trapézre és egy háromszögre esik szét. Az utóbbi oly trapéznek tekinthető, melynek egyik oldala ponttá zsugorodott. Hasonló módon bontjuk fel az $A'B'C'$ háromszöget.

Az ABC háromszögben az i-dik trapéz területe nagyobb mint annak a derékszögű négyszögnek területe, melynek alapja és magassága

$$M_iQ_i = P_iQ_i - P_iM_i, \quad M_iP_{i-1} = \frac{1}{n}AD;$$

tehát ez a trapéz még inkább nagyobb mint az a derékszögű négyszög, melynek alapja és magassága

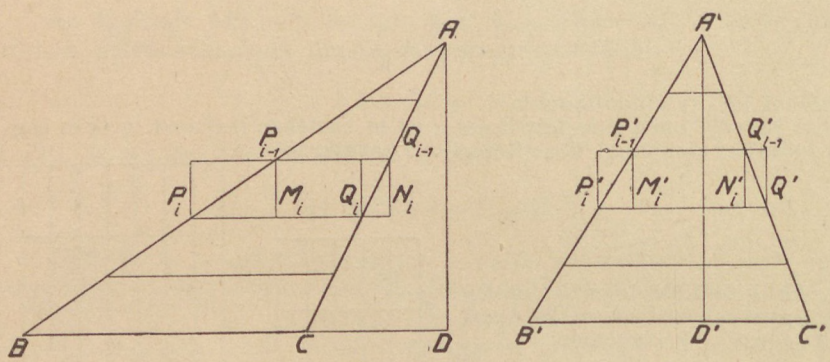
$$P_iQ_i - P_iM_i - Q_iN_i, \quad M_iP_{i-1} = \frac{1}{n}AD.$$

Továbbá a szóbanforgó trapéz területe kisebb mint azon derékszögű négyszögé, melynek alapja és magassága

$$P_iQ_i + P_iM_i + Q_iN_i, \quad M_iP_{i-1} = \frac{1}{n}AD.$$

Tehát a szóban forgó trapéz területének mérőszáma

$$\frac{1}{n}AD\,(P_iQ_i - P_iM_i - Q_iN_i) \quad \text{és} \quad \frac{1}{n}AD\,(P_iQ_i + P_iM_i + Q_iN_i)$$



15. ábra.

közé esik. Ennélfogva az

$$\frac{1}{n}AD \,.\, P_iQ_i$$

szorzattól való különbsége abszolut értékére nézve kisebb mint

$$\frac{1}{n}AD\,(P_iM_i + Q_iN_i).$$

Hasonlóképpen az $A'B'C'$ háromszög megfelelő trapézének mérőszáma és az

$$\frac{1}{n}A'D' \,.\, P_i'Q_i'$$

szorzat közötti különbség abszolut értékére nézve kisebb mint

$$\frac{1}{n}A'D'\,(P_i'M_i' + Q_i'N_i').$$

Ha még tekintetbe vesszük, hogy

$$AD = A'D', \quad P_iQ_i = P_i'Q_i',$$

akkor azt találjuk, hogy

$$\frac{1}{n} AD \,.\, P_iQ_i = \frac{1}{n} A'D' \,.\, P_i'Q_i'.$$

Ennélfogva a két megfelelő trapéz területeinek különbsége abszolut értékére nézve kisebb mint

$$\frac{1}{n} AD\,(P_iM_i + Q_iN_i + P_i'M_i' + Q_i'N_i').$$

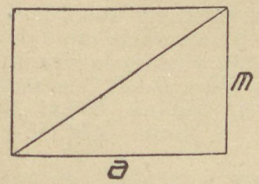
Ha a trapézeket összeadjuk, azt találjuk, hogy ABC és $A'B'C'$ területeinek különbsége abszolut értékére nézve kisebb mint

$$\frac{1}{n} AD\,(BD + CD + B'D' + C'D').$$

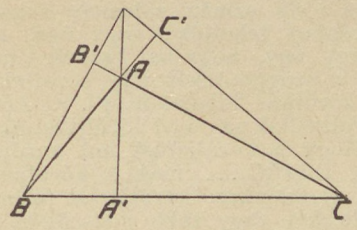
Ennek igaznak kell lennie, bárhogyan választjuk n-et. De a két háromszög területének különbségére talált korlát, ha n-et eléggé nagynak választjuk, kisebbé tehető bármely ε pozitiv számnál. Ez csak úgy lehetséges, hogy a két háromszög egyenlő területű.

142. §. *Az a alapú és m magasságú háromszög területe az* $\frac{am}{2}$ *mérőszámmal jellemzendő.*

Ha a háromszög *derékszögű* (16. ábra), akkor az a és m oldalú derékszögű négyszögből úgy kapható meg, hogy ezt valamelyik diagonálissal két



16. ábra.



17. ábra.

egybevágó részre osztjuk. A négyszög területe az am mérőszámmal, a háromszögé tehát am felével jellemzendő.

Ferdeszögű háromszöget ugyanolyan alapú és magasságu derékszögű háromszöggel pótolva, tételünk minden esetben helyesnek bizonyul.

Az ABC háromszögben a három oldal közül bármelyiket választva ki mint alapot, az alapnak a reá merőleges magassággal való szorzata mindig ugyanaz.

Ugyanis (17. ábra) a $BB'C$ és $AA'C$ háromszögek hasonlósága miatt

$$BB' : BC = AA' : AC$$

és innen

$$BC \,.\, AA' = AC \,.\, BB'.$$

143. §. Az eddigiekből világos, hogy ha a területmérésre vonatkozó követelések egyáltalában kielégíthetők, akkor a területmérésnek a következő két szabály szerint kell történnie:

1. *Háromszög területét úgy határozzuk meg, hogy az alapot megszorozzuk a magasság felével.*

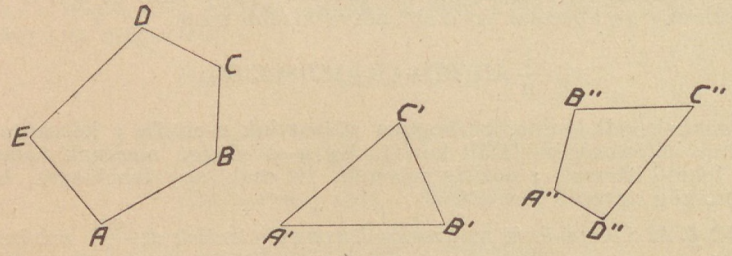
2. *Sokszög területét úgy határozzuk meg, hogy a sokszöget tetszésünk szerint háromszögekre bontjuk és ezek területeinek mérőszámait összeadjuk.*

Ezzel az eredménnyel a területmérésre vonatkozó vizsgálat első része be van fejezve. A második részben ki kell mutatnunk, hogy ha a területek mérőszámait az éppen kimondott két szabály szerint számítjuk ki, akkor bármely háromszög ill. bármely sokszög számára a *számításnak berendezésétől független* mérőszámot kapunk. Ha sikerül ezt kimutatnunk, akkor közvetlenül világos, hogy a meghatározott mérőszámok a 139. §-ban kimondott két követelést kielégítik.

Hogy az 1. szabály a háromszög területére nézve mindig ugyanazt az eredményt adja, bármelyik oldalt választjuk alapnak, azt az előbbi §-ban láttuk. Tehát csak a 2. szabállyal kell foglalkoznunk. Erre a szabályra vonatkozó vizsgálatoknál a háromszög területét mindig az 1. szabály szerint gondoljuk meghatározva.

144. §. Mielőtt annak bebizonyításába bocsátkozhatunk, hogy az előbbi §-nak 2. szabálya a sokszög bármely beosztásánál ugyanarra az eredményre vezet, még néhány egyszerű észrevételt kell előre bocsátanunk.

A síkon két oldalt különböztetünk meg; az egyik a síknak *színe*, a másik a *háta* vagy *visszája*. Hogy melyik legyen a sík színe, azt önkényesen



18. ábra.

állapíthatjuk meg. A rajzlap vagy a tábla *színén* mindig azt az oldalt értjük, amelyen rajzolunk.

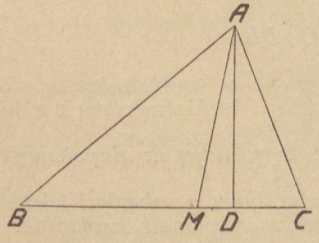
Ha a sík színén valamely sokszög kerületén körüljárunk, akkor ezt kétféleképpen tehetjük: vagy úgy, hogy jobb kezünk van a sokszögtől kifelé, vagy úgy, hogy bal kezünk van kifelé. Ha valamely sokszöget megadunk, a szögpontokat úgy soroljuk fel, hogy a felsorolás mindjárt megadja a körülírás módját is. Pl. az *ABCDE* ötszögön a szögpontoknak ennél a felsorolásánál úgy kell körüljárnunk, hogy *A*-ból *B*-be, *B*-ből *C*-be megyünk, s í. t. Hogy a körüljárást hol kezdjük, arra nem nézünk. Tehát *BCDEA*, *CDEAB*, *DEABC*, ... még a körüljárásra nézve is azonos *ABCDE*-vel. De *EDCBA* az ellenkező körüljárást jelenti.

Ha két vagy több sokszögön a szögpontok sorrendje úgy van megállapítva, hogy bármelyik sokszögön körüljárva ugyanaz a kezünk esik kifelé: akkor a sokszögeket *egyenlő körüljárásúaknak* mondjuk. Pl. (18. ábra) *ABCDE* és *A'B'C'* egyenlő körüljárásúak, ellenben *A''B''C''D''* velük ellenkező körüljárású.

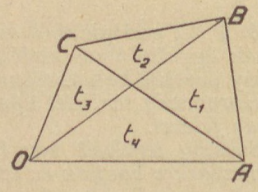
Ha az ABC háromszög síkjában tetszésünk szerint fölveszünk valamely O pontot, azután a

BCO, CAO, ABO

háromszögek közül az ABC-vel egyenlő körüljárásúak területeit összeadjuk és a vele ellenkező körüljárásúak területeit kivonjuk: akkor eredményül mindig ABC területét kapjuk.



19. ábra.



20. ábra.

Ennek a tételnek bebizonyítása legkönnyebb abban az esetben, midőn *O* a háromszög kerületének valamely *M* pontjába esik. Ha (19. ábra) *M* a *BC* oldalon van, akkor

ABC, BCM, CAM, ABM

területeinek mérőszámai rendre

$$\tfrac{1}{2}BC.AD,\quad 0,\quad \tfrac{1}{2}MC.AD,\quad \tfrac{1}{2}BM.AD.$$

A szóban forgó tétel tehát azt mondja, hogy

$$\tfrac{1}{2}BC.AD = \tfrac{1}{2}(BM+MC)\,AD.$$

Ez pedig valóban igaz.

A 20. ábra esetében az éppen mondottak értelmében

$$ABC = t_1 + t_2,\quad ABO = t_1 + t_4,\quad BCO = t_2 + t_3,\quad CAO = t_3 + t_4.$$

Tehát

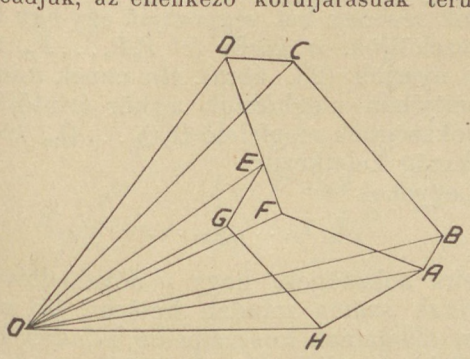
$$ABO + BCO - CAO = (t_1+t_4) + (t_2+t_3) - (t_3+t_4) = t_1 + t_2 = ABC.$$

Hasonló meggondolásokkal bizonyítható be a tétel O-nak bármely más választásánál is.

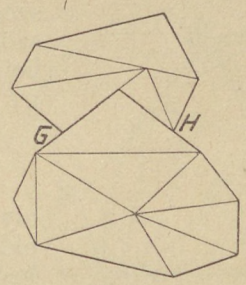
145. §. Az éppen bebizonyított tétel általánosítható. Az általánosításnál jelentsen P valamely adott poligont (sokszöget). A P által bezárt síkrészt tetszésünk szerint háromszögekre bontjuk; ezek területeinek mérőszámait összeadjuk és összegüket Σ-val jelöljük. Másrészt fölveszünk a síkban egy O pontot és ezt összekötjük a P-nek szögpontjaival. Az így nyert

$$ABO,\ BCO,\ldots$$

háromszögek közül a P-vel egyenlő körülírásúak területeinek mérőszámait összeadjuk, az ellenkező körüljárásúak területeinek mérőszámait pedig ki-



21. ábra.



22. ábra.

vonjuk. A keletkezett algebrai összeget S-sel jelöljük. *Az előbbi §-ban bebizonyított tétel általánosítását a következő képlet fejezi ki:* $\Sigma = S$.

Mindenekelőtt világos, hogy ha ez a tétel két egymáshoz illesztett P' és P'' sokszögre nézve külön-külön igaz, akkor érvényes az összeillesztés által nyert P-re is (ha Σ-t a létesített beosztáshoz határozzuk meg). Ugyanis a 21. ábrát tartva szem előtt, a $P' = ABCDEF$ és $P'' = AFEGH$ sokszögekre nézve:

$$S' = ABO + BCO + CDO - (DEO+EFO) - FAO,$$
$$S'' = AFO + FEO - EGO - GHO + HAO.$$

S' és S'' összeadásánál éppen a P-nek megfelelő S-et kapjuk, mert a P' és P'' kerületeinek közös részeihez tartozó EFO és FAO háromszögek kiesnek. Másrészt nyilván $\Sigma'+\Sigma''=\Sigma$. Tehát ha $\Sigma'=S'$ és $\Sigma''=S''$, akkor egyszersmind $\Sigma=S$.

Továbbá vegyük tekintetbe, hogy a szóbanforgó tétel bebizonyításánál szabad a teljes indukciót alkalmaznunk, azaz valamely n háromszögre bontott P vizsgálatánál a tételt kevesebb háromszögből álló sokszögekre nézve ismeretesnek tekinthetjük. Ugyanis $n=1$ esetében a tételt már az előbbi §-ban bebizonyítottuk.

Ha P-t n háromszögre osztottuk, induljunk ki P kerületének valamely oly G pontjából (22. ábra), melyben legalább két háromszög találkozik. A két háromszög valamelyikének kerületén menjünk G-től kiindulva a P belsejében

addig a H pontig, melyben megint elérjük P kerületét. A befutott vonal P-t két oly sokszögre bontja, melyek mindegyike n-nél kevesebb háromszögből áll. Ezekre a részekre nézve a tételt igaznak tekintjük. De akkor a tétel magára P-re is igaz.

Állandó O mellett S (az értelmezése szerint) tisztán P választásától függ, vagyis független attól, hogy P belsejét hogyan osztottuk fel háromszögekre. Ennélfogva Σ sem függ a P felosztásától. Vagyis: *ha sokszög területét a* 143. *§-ban kimondott második szabály szerint számítjuk ki, a talált mérőszám a használt felosztástól független.**

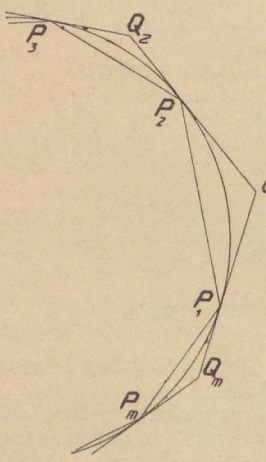
Ezzel megmutattuk, hogy a sokszögek területének mérésére vonatkozó követeléseinek kielégíthetők, még pedig úgy és csak úgy, hogy a területek mérőszámait a 143. §-ban kimondott két szabály szerint határozzuk meg.

(Hasonló vizsgálatokra adna alkalmat a poliéderek, azaz szögletes testek, térfogatának mérése is.)

II. Körmérés. Szögmérés.

Kör kerülete.

146. §. Osszuk a körvonalat a $P_1, P_2, \ldots, P_m$ osztópontokkal m részre; a részek lehetnek egymással egyenlők, de nem kell ilyeneknek lenniök. Ha mindegyik résznek két végpontját egy-egy húrral összekötjük, *a körbe írt* $P_1P_2 \ldots P_m$ sokszöget nyerjük (23. ábra). Ha ennek minden szögpontjában meghúzzuk a kör érintőjét, a beírt sokszögnek megfelelő $Q_1Q_2 \ldots Q_m$ *körülírt* sokszög keletkezik.



23. ábra.

Legyenek**

$$I_1, I_2, \ldots, I_n, \ldots$$

oly beírt sokszögek, hogy n növekedtével I_n oldalainak száma minden határon túl növekedjék, oldalainak hossza pedig minden határon túl kisebbedjék. Vagyis találhassunk bármely N pozitiv egész számhoz és bármely ε pozitiv számhoz az I-k között olyant, melyen túl bármely későbbi I_n oldalainak száma nagyobb mint N és minden egyes oldalának mérőszáma kisebb mint ε. A megfelelő körülírt sokszögek legyenek

$$C_1, C_2, \ldots, C_n, \ldots .$$

A szóban forgó beírt sokszögek kerületeinek mérőszámai alkossák a

$$k_1, k_2, \ldots, k_n, \ldots \qquad 1)$$

számsorozatot, a nekik megfelelő körülírt sokszögekéi pedig a

$$K_1, K_2, \ldots, K_n, \ldots \qquad 2)$$

* S és Σ értéke az O választásától is független. Ez Σ-ra nézve az értelmezéséből világos, S-re nézve pedig a bebizonyított $S=\Sigma$ egyenlőségből következik.

** I az *in*, C a *circum* kezdőbetűje.

számsorozatot. *A kör kerületének* (peripheriájának) mérőszámán ennek a két számsorozatnak közös limeszét értjük.

Hogy ez az értelmezés jogosult legyen, az 1) és 2) alatti számsorozatokról a következőket kell bebizonyítanunk:

α) A két számsorozatnak közös p limesze van.

β) Ez a p szám csak annak a körnek sugarától függ, melynek kerülete meghatározandó, ellenben független attól, hogy miként választottuk a beírt $I_1, I_2, \ldots$ sokszögeket.

A bebizonyításnál a következő észrevételből indulunk ki:

Bármely beírt sokszög kerülete kisebb mint a megfelelő körülírt sokszögé.

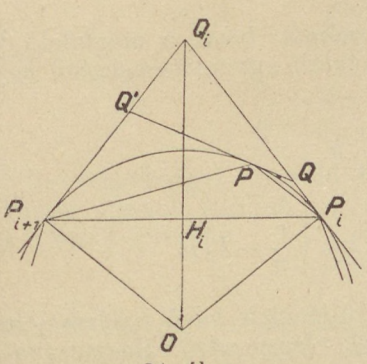
Valóban a 23. ábrában

$$P_1P_2 < P_1Q_1 + Q_1P_2, \quad P_2P_3 < P_2Q_2 + Q_2P_3, \ldots$$

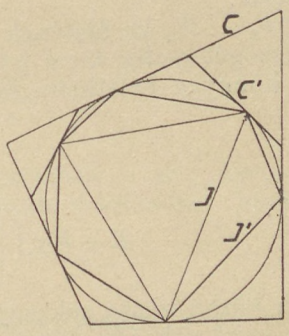
tehát egyszersmind

$$P_1P_2 + P_2P_3 + \cdots < P_1Q_1 + Q_1P_2 + P_2Q_2 + Q_2P_3 + \cdots$$

Ha a beírt sokszögnek szögpontjai közé újat iktatunk, akkor



24. ábra.



25. ábra.

a kerülete nagyobbodik, a megfelelő körülírt sokszög kerülete pedig kisebbedik.

Valóban, ha a 24. ábrában P_i és P_{i+1} közé a P szögpontot iktatjuk, akkor a

$$P_iP_{i+1} < P_iP + PP_{i+1} \quad \text{és} \quad QQ_i + Q_iQ' > QQ'$$

egyenlőtlenségből állításunk helyessége közvetlenül világos.

A kör köré írt bármely C sokszögnek kerülete nagyobb, mint ugyanabba a körbe írt bármely I sokszögé.

Valóban jelentse (a 25. ábrában) I' azt a beírt sokszöget, melynek előállításánál az I szögpontjain kívül a C oldalainak érintési pontjait is felhasználjuk szögpontoknak. A C sokszög nagyobb kerületű, mint az I' beírt sokszögnek megfelelő C' körülírt sokszög; ez nagyobb kerületű mint I'; ez pedig nagyobb kerületű mint I.

Az eddig mondottakból világos, hogy valamely meghatározott körbe írható sokszögek kerületeinek mérőszámai olyan számtartományt alkotnak, melynek csupán a körtől függő véges p felső határa van. A következő §-ban kimutatjuk, hogy

$$\lim k_n = \lim K_n = p.$$

Itt p független attól, hogy az $I_1, I_2, \ldots$ sokszögeket hogyan választottuk, tehát ez a képlet teljesen magában foglalja $\alpha)$ és $\beta)$ alatti két állításunkat.

147. §. *Ha a körön a $P_1, P_2, \ldots, P_m$ pontokat eléggé sűrűn választjuk, akkor a $P_1P_2 \ldots P_m$ beírt sokszögnek kerülete tetszőlegesen keveset különbözik a megfelelő körülírt sokszögnek kerületétől.*

Valóban (24. ábrában)

$$P_iQ_i : H_iP_i = OP_i : OH_i.$$

Ha a kör sugarának mérőszámát r-rel jelöljük és az $OH_1, OH_2, \ldots$ egyenesdarabok mérőszámai közül egyik sem kisebb u-nál, akkor az előbbi proporcióból

$$P_iQ_i : H_iP_i \leqq r : u,$$

azaz

$$P_iQ_i \leqq \frac{r}{u} H_iP_i$$

következik.

$P_1P_2 \ldots P_m$ kerületének mérőszámát k-val, a megfelelő körülírt sokszögét pedig K-val jelölve, a talált egyenlőtlenségből egyszersmind könnyen belátható, hogy

$$K \leqq \frac{r}{u} k.$$

Tehát

$$K - k \leqq \left(\frac{r}{u} - 1\right) k < \left(\frac{r}{u} - 1\right) p,$$

hol p a körbe írható sokszögek kerületeinek felső határát jelenti.

A beírt sokszög szögpontjainak eléggé sűrű választásával mindig elérhetjük, hogy $\frac{r}{u}$ tetszőlegesen keveset különbözzék 1-től és ennélfogva $K-k$ tetszőlegesen kicsiny legyen.

A mondottak értelmében az előbbi §

$$k_1, k_2, \ldots, k_n, \ldots \qquad 1)$$

$$K_1, K_2, \ldots, K_n, \ldots \qquad 2)$$

sorozataiban

$$\lim (K_n - k_n) = 0. \qquad 3)$$

Továbbá nyilván

$$k_n \leqq p \leqq K_n,$$

tehát

$$0 \leqq p - k_n \leqq K_n - k_n \quad \text{és} \quad 0 \leqq K_n - p \leqq K_n - k_n.$$

Ennélfogva a 3) alatti képlet értelmében

$$\lim (p - k_n) = \lim (K_n - p) = 0,$$

azaz valóban

$$\lim k_n = \lim K_n = p.$$

148. §. A körbe írt sokszög kerülete sohasem nagyobb, mint a kör kerületének p mérőszáma, mert p a beírt sokszögek kerületeinek felső határa. Minthogy továbbá bármely beírt sokszögről új szögpont közbeiktatásával nála nagyobb kerületű sokszöget nyerhetünk, a sokszög kerülete a p felső határt sohasem érheti el, hanem mindig *kisebb* mint p.

Ugyanígy könnyen belátható, hogy a körülírt sokszög kerülete mindig *nagyobb* mint p.

149. §. *Két kör kerületei úgy aránylanak egymáshoz, mint a megfelelő sugarak.*

Valóban, ha a sugarakat r-rel és r'-rel, a kerületeket p-vel és p'-vel jelöljük, akkor p'-t oly beírt sokszögekkel közelíthetjük meg, melyek a p megközelítésére használtakhoz *hasonlók*. Ha p és p' megközelítésére használt sokszögeknek kerületei

$$k_1, k_2, \ldots, k_n, \ldots,$$

$$k'_1, k'_2, \ldots, k'_n, \ldots,$$

akkor

$$\frac{k'_n}{k_n} = \frac{r'}{r}$$

és innen

$$\frac{p'}{p} = \lim \frac{k'_n}{k_n} = \frac{r'}{r}.$$

A hosszegységgel egyenlő sugár esetében a kör kerületének mérőszámát 2π-vel jelöljük. A mondottak értelmében bármily r sugarú körnek kerülete

$$p = 2\pi r.$$

Archimedes azt találta, hogy a hosszegységgel mint sugárral leírt kör esetében a körülírt szabályos 96-szög kerületének mérőszáma kisebb mint $3\frac{1}{7}$ kétszerese, a beírt szabályos 96-szögé pedig nagyobb mint $3\frac{10}{71}$ kétszerese. Tehát

$$3\tfrac{10}{71} < \pi < 3\tfrac{1}{7}.$$

Ha még tekintetbe vesszük, hogy

$$3\tfrac{10}{71} = 3{\cdot}140\ldots, \quad 3\tfrac{1}{7} = 3{\cdot}142\ldots$$

akkor azt találjuk, hogy $\pi = 3{\cdot}14\ldots$

Ludolph van Ceulen a 16. század végén azt találta,* hogy

$$\pi = 3{\cdot}14159\ 26535\ 89793\ 23876\ldots$$

A π számot róla a *ludolfi számnak* nevezzük.

* A π egész számú részét és első tizenkét tizedes jegyét a következő szók betűinek számai adják meg:

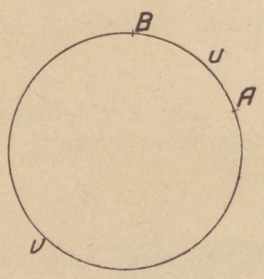
Bir-e, érez-e ember nyugalmat, ha lelkét nehéz, bús emlék zaklatja szüntelen?
3 1 4 1 5 9 2 6 5 3 5 8 9

Körívek mérése.

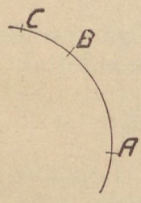
150. §. A körvonalat két pontja, A és B, két részre osztja (a 26. ábrában), u-ra és v-re. Mindegyik részt egy-egy A és B által határolt *körívnek* mondjuk. Ezen a két szorosabb értelemben vett íven kívül ugyanazon a körön még végtelen sok más, ugyancsak A és B által meghatározott ív van. Ugyanis a körön végtelen sok módon juthatunk egyik vagy másik állandó értelemben mozogva A-ból a B pontba. A két legegyszerűbb mód u-nak vagy v-nek befutása. De azt is megtehetjük, hogy u vagy v leírása után a mozgást folytatjuk és még n-szer körüljárunk a körön. Minden ily mozgásnál a befutott utat (a többszörösen befutott részeket többszörösen véve) egy-egy A és B által meghatározott körívnek mondjuk.

A körívek mérésénél kétféle álláspontra helyezkedhetünk. Az elemibb álláspontón ugyanazon a körön vagy legalább egyenlő sugarú körökön levő ívek összehasonlítására szorítkozunk; magasabb álláspontón tetszőleges köríveket hasonlítunk össze *egymással és egyenesdarabokkal.*

Az első esetben a mérés éppen úgy történik, mint az egyenesdarabok hosszának meghatározása. Mindenek előtt megállapítunk bizonyos *egységet.* A gyakorlati méréseknél ez rendesen a *fok* (°), vagyis az egész kör 360-ad része.* Az egység megállapítása után minden szóban forgó körívhez úgy állapítunk meg megfelelő mérőszámot, hogy a következő két követelés ki legyen elégítve:



26. ábra.



27. ábra.

1. *Egybevágó köríveknek ugyanaz a mérőszám feleljen meg.*

2. *Ha az AC körív* (27. ábra) *az AB és BC körívekből van összetéve, AC mérőszáma egyenlő legyen AB és BC mérőszámainak összegével.*

A hosszmérésről mondottakhoz teljesen hasonló meggondolásokkal belátható, hogy az *egység* megállapítása után ez a két követelés mindig egy és csak egy módon elégíthető ki.

Mint az egyenesdarabok mérésénél a darabok felrakása, úgy a köríveknek ennél az elemi mérésénél a köríveknek egymásra rakása lényeges szerepet játszik. Mivel valamely körívhez mindig csak a vele egyenlő sugarú körökön lehet vele *egybevágó* körívet találni, azért ez a módszer tökéletesen mással cserélendő fel, mihelyt valamely körívet az övétől különböző sugarú körívekkel vagy egyenesdarabokkal akarunk összehasonlítani.

Ennél a második, bonyodalmasabb eljárásnál a körívek mérésére egységül ugyanazt az egyenesdarabot használjuk, mint az egyenesdarabok mérésénél és a köríveknek erre az egységre vonat-

* A fok 60-ad részét *percnek* (′), ennek 60-ad részét *másodpercnek* (″) mondjuk.

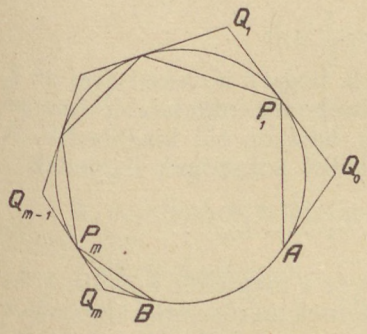
kozó mérőszámát hasonló módon határozzuk meg, mint a hogyan a kör kerületének meghatározása történt.

A megmérendő AB körívet részekre osztjuk. Az egyes részek lehetnek egymással egyenlők, de nem kell egyenlőknek lenniök; csak azt kötjük ki, hogy mindegyik kisebb legyen egy félkörnél, (azaz ne foglaltassék benne egy félkör). Ha (28. ábra) az osztópontokat (AB végpontjait is beleértve) egymással összekötjük, a keletkezett $AP_1P_2 \ldots P_mB$ törött vonalat az AB *körívbe írt* sokszögnek nevezzük. Az osztópontokban vont érintők által alkotott $AQ_0Q_1 \ldots Q_mB$ törött vonalat pedig a megfelelő *körülírt* sokszögnek (vagy poligonnak) mondjuk.*

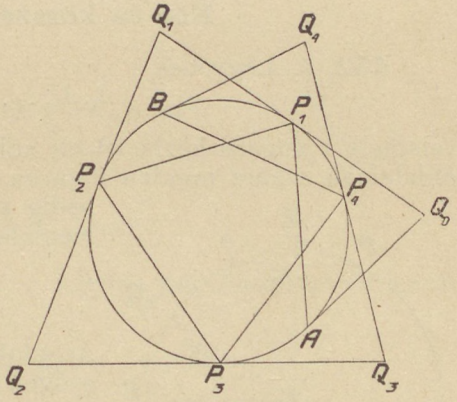
Legyenek

$$I_1, I_2, \ldots, I_n, \ldots$$

az AB körívbe írt oly sokszögek, hogy n növekedtével az I_n oldalainak száma minden határon túl növekedjék, oldalainak hossza pedig



28*a*. ábra.



28*b*. ábra.

minden határon túl kisebbedjék. A megfelelő körülírt sokszögek legyenek

$$C_1, C_2, \ldots, C_n, \ldots .$$

A szóban forgó beírt sokszögek kerületeinek mérőszámai alkossák a

$$k_1, k_2, \ldots, k_n, \ldots \qquad 1)$$

számsorozatot, a nekik megfelelő körülírt sokszögekéi pedig a

$$K_1, K_2, \ldots, K_n, \ldots \qquad 2)$$

számsorozatot. A két számsorozatnak közös s limesze van és ez csak a megmérendő AB körív választásától függ. Az AB körív *ívhosszának* mérőszámán ezt az s limeszt értjük.

Az AB körív ívhosszának s mérőszáma az AB-be írható sok-

* A 28*a*. ábrában AB nem tartalmaz többszörösen befutott részeket. A 28*b*. ábrában AB úgy keletkezik, hogy A-ból az óramutató mozgásával ellenkezőleg elmegyünk B-be, azután a kört ugyanabban az értelemben még egyszer teljesen befutjuk.

szögek mérőszámainál nagyobb, az AB körül írható sokszögek mérőszámainál pedig kisebb.

Mindez ugyanazon a módon látható be, mint a kör kerületének meghatározásánál.

151. §. A körívek mérésének második módja is megfelel a mérés ama két követelésének, melyek a felrakással való mérésnél irányadók voltak. Ez az első követelésről közvetlenül világos és a második követelésről is könnyen belátható, ha az AB és BC körívekből összetett AC körívnek mérésénél a beírt sokszöget úgy választjuk, hogy B mindig a szögpontok között szerepeljen.

Ebből világos, hogy ha *egyenlő sugarú* körökre szorítkozunk és egyszer a körívek nagyságát fokokban adjuk meg, azután pedig bizonyos hosszegység fölvétele után a körívek *ívhosszát* ebben a hosszegységben fejezzük ki: akkor az egyik módon nyert mérőszámok arányosak a másik módon nyert mérőszámokkal.

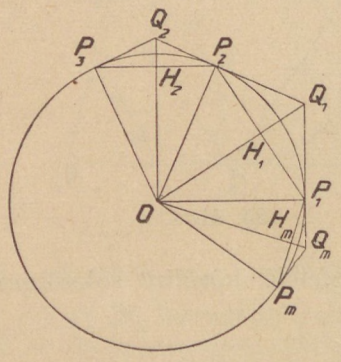
Kör és körszektor területe.

152. §. Legyenek

$$I_1, I_2, \ldots, I_n \ldots$$

valamely r sugarú körbe írt oly sokszögek, hogy n növekedtével az I_n oldalainak száma minden határon túl növekedik, oldalainak hossza pedig minden határon túl kisebbedik. A megfelelő körülírt sokszögek legyenek

$$C_1, C_2, \ldots, C_n, \ldots .$$



29. ábra.

Az adott beírt és a megfelelő körülírt sokszögek területeinek mérőszámai alkossák a

$$t_1, t_2, \ldots, t_n, \ldots \qquad 1)$$

$$T_1, T_2, \ldots, T_n, \ldots \qquad 2)$$

számsorozatokat. *A kör területének* mérőszámán ennek a két számsorozatnak közös limeszét értjük.

Hogy az 1) és 2) alatti sorozatoknak közös limesze van és hogy ez a közös limesz csak a körnek sugarától függ, az a következő módon látható be.

Legyen I_n a 29. ábrában látható $P_1P_2 \ldots P_m$ sokszög, C_n pedig $Q_1Q_2 \ldots Q_m$. Akkor

$$t_n = \frac{1}{2}(P_1P_2 \cdot OH_1 + P_2P_3 \cdot OH_2 + \cdots).$$

Ha minden I_n-hez meghatározunk egy neki megfelelő u számot úgy, hogy $OH_1, OH_2, \ldots$ mérőszámai közül egyik sem kisebb u-nál, akkor innen

$$\frac{u}{2}(P_1P_2 + P_2P_3 + \cdots) \leqq t_n,$$

vagyis

$$\frac{1}{2} uk_n \leqq t_n,$$

hol k_n az I_n kerülete. Továbbá nyilván

$$T_n = \frac{1}{2} r K_n,$$

hol K_n a C_n kerülete. Egyszersmind világos, hogy $t_n < T_n$. Mindezt összefoglalva, a következő egyenlőtlenségeket kapjuk:

$$\frac{1}{2} uk_n \leqq t_n < T_n = \frac{1}{2} r K_n.$$

Ha n minden határon túl növekedik, akkor

$$\lim k_n = \lim K_n = 2\pi r.$$

Az u határértéke pedig r. Tehát

$$\lim \frac{1}{2} uk_n = \lim \frac{1}{2} r K_n = \pi r^2$$

és ennélfogva egyszersmind

$$\lim t_n = \lim T_n = \pi r^2.$$

A mondottak értelmében *az r sugarú kör kerületének mérőszáma* πr^2.

153. §. Legyenek

$$I_1, I_2, \ldots, I_n, \ldots$$

az AB körívbe beírt oly sokszögek, hogy n növekedtével I_n oldalainak száma minden határon túl növekedik, oldalainak hossza ellenben minden határon túl kisebbedik. A megfelelő körülírt sokszögek legyenek

$$C_1, C_2, \ldots, C_n, \ldots .$$

Az I_n vagy C_n által és a végpontjainak sugarai által határolt síkrészt a megfelelő *poligonális szektornak* nevezzük. A beírt és a körülírt sokszögekhez tartozó poligonális szektorok területei legyenek

$$t_1, t_2, \ldots, t_n, \ldots$$

és

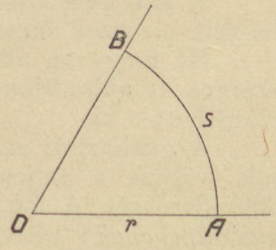
$$T_1, T_2, \ldots, T_n, \ldots .$$

Az AOB körszektor területén (30. ábra)

$$\lim t_n \quad \text{és} \quad \lim T_n$$

közös értékét értjük. Ez a közös érték

$$\frac{1}{2} rs,$$



30. ábra.

hol r a sugárnak, s pedig az AB ív ívhosszának mérőszáma. Ez

ugyanazokkal a meggondolásokkal látható be, melyeket a kör területének meghatározásánál használtunk.

Szögek mérése.

154. §. A síkot valamely *O* pontjából kiinduló két *OA* és *OB* félegyenes két részre osztja (30. ábra). Mindegyik részt *szögnek* mondjuk, még pedig az *OA* és *OB* szárak által határolt *AOB* szögnek. Ezen a két (szorosabb értelemben vett) szögön kívül ugyanaz a két szár még végtelen sok más szöget határoz meg. Ugyanis egy *O*-ból kiinduló félegyenest végtelen sokféleképpen forgathatunk *O* körül állandó értelemben úgy, hogy az *OA* kezdeti helyzetből az *OB* végső helyzetbe jusson. Mindegyik forgásnál a forgatott félegyenes által surolt síkrészt (a többszörösen befutott részeket többszörösen véve) *szögnek* nevezzük, *OA*-t és *OB*-t a szög *szárainak*, *O*-t pedig a szög *csúcsának* vagy *szögpontjának* mondjuk.

A szög mérésénél vagy csak a szög puszta nagyságára nézünk, vagy pedig arra is, hogy a szög milyen értelmű forgással keletkezett. Az első esetben a szögnek pozitiv mérőszámot tulajdonítunk. A második esetben a síkban megkülönböztetünk pozitiv és negativ forgást. Ha a síknak azt az oldalát, melyet a sík *színének* nevezünk, óralapnak tekintjük: akkor a síkban lehetséges kétféle forgás közül az egyik megegyezik az óramutató mozgásával, a másik az óramutatónak mozgásával ellenkező. Hogy melyik forgást választjuk pozitivnak, azt tetszésünk szerint állapíthatjuk meg. (A geometriában az óramutató mozgásával ellenkező mozgást szoktuk pozitivnak tekinteni; a gyakorlati alkalmazásoknál ellenben rendesen az óramutató mozgásával megegyező mozgást tekintik a pozitivnak.) Pozitiv forgással keletkezett szögnek pozitiv mérőszámot, negativ forgással keletkezett szögnek negativ mérőszámot tulajdonítunk.

Egyöntetűség kedvéért *zérus* szögről is beszélünk. Ezt úgy kapjuk, hogy az *OA* első szárt eredeti helyzetében, minden forgatás nélkül választjuk egyszersmind második szárnak is.

Ha a szögeknek csak puszta nagyságára nézünk, akkor minden (a zérustól különböző) szögnek pozitiv mérőszámot tulajdonítunk és ezt úgy állapítjuk meg, hogy

1. egyenlő szögeknek ugyanaz legyen a mérőszámuk,
2. két szög összetételéből keletkezett szög mérőszáma egyenlő legyen a részek mérőszámainak összegével.

Ha meg van állapítva az az egységszög, melynek az 1 mérőszámot tulajdonítjuk, akkor követeléseink egy és csak egy módon elégíthetők ki.

A gyakorlati szögmérésnél egységszögül a *fokot* (°) választjuk, vagyis a teljes körülforgás által keletkezett teljes szögnek 360-ad részét. A fok 60-ad részét *percnek* (′), ennek 60-ad részét *másodpercnek* (″) nevezzük. A mérés valóságos elvégzésénél a szöget rendesen valamely körívhez tartozó középponti szögnek tekintjük. A *szögmérőn* leolvassuk ennek a körívnek fokokban kifejezett mérőszámát. Ez a szám egyszersmind a szögnek is fokokban kifejezett mérőszáma.

Elméleti vizsgálatoknál (különösen az analizisben) a szög nagyságát *analitikus mérőszámával* szokás jellemezni. Ezt a következő módon határozzuk meg. Könnyen belátható, hogy ugyanahhoz a középponti szöghöz tartozó különböző sugarú körívek ívhosszai úgy viszonylanak egymáshoz, mint sugaraik. Tehát, ha a megmérendő szöget mint bizonyos r sugarú körívhez tartozó középponti szöget fogjuk fel, és az ívnek ívhosszát s-sel jelöljük, akkor az $\frac{s}{r}$ hányados értéke tisztán a megmérendő szög nagyságától függ. Ezt a hányadost nevezzük a szög *analitikus mérőszámának*, (más néven *abszolut mérőszámának* vagy *ívmértékének*). Közvetlenül világos, hogy ha a szöget analitikus mérőszámával jellemezzük, akkor a mérésre vonatkozó két követelésünk szintén ki van elégítve. Az analitikus szögegység az a ϱ szög, az u. n. *radiáns*, amelyhez mint középponti szöghöz tartozó bármely körív éppen egyenlő a maga sugarával.

A szögmérésnél használt kör sugarát úgy választhatjuk, hogy egyenlő legyen a hosszegységgel. Azért ezt is mondhatjuk: *A szög analitikus mérőszáma egyenlő annak a körívnek mérőszámával, melynek sugara egyenlő a hosszegységgel és amelyhez tartozó középponti szög éppen a megmérendő szög.*

Az α fokú szögnek analitikus mérőszámát vagy ívmértékét így jelöljük:

$$\operatorname{arc} \alpha^\circ,$$

(olv. *arcus* α°).

155. §. A szögeknek két különböző módon kifejezett mérőszámaik arányosak egymással. Az átszámítás a következő módon történhetik.

A 180°-ú szög analitikus mérőszáma egyenlő az $r=1$ sugarú kör fél kerületének mérőszámával. Képletben:

$$\operatorname{arc} 180^\circ = \pi = 3{\cdot}1416,$$

hol az utolsó jegy aláhúzása arra figyelmeztet, hogy ezt a jegyet fölfelé kikerekítettük. Innen (közelítőleg):

$$\operatorname{arc} 90^\circ = \frac{\pi}{2} = 1{\cdot}5708$$

$$\operatorname{arc}\ 1^\circ = \frac{\pi}{180} = 0{\cdot}0175$$

$$\operatorname{arc}\ 1' = \frac{\pi}{60 \,.\, 180} = 0{\cdot}0003$$

$$\operatorname{arc}\ 1'' = \frac{\pi}{60^2 \,.\, 180} = 0{\cdot}000005.$$

Innen

$$\operatorname{arc} \alpha^\circ = \alpha \operatorname{arc}\ 1^\circ = \frac{\alpha\pi}{180}.$$

Például

$$\text{arc } 30° = \frac{\pi}{6}, \quad \text{arc } 45° = \frac{\pi}{4}, \quad \text{arc } 60° = \frac{\pi}{3},$$

$$\text{arc } 90° = \frac{\pi}{2}, \quad \text{arc } 180° = \pi, \quad \text{arc } 360° = 2\pi.$$

Ha viszont az analitikus mérőszámról a gyakorlati mérőszámra térünk át, akkor az analitikus mérőszámot megszorozzuk a ϱ radiánsnak gyakorlati egységekben kifejezett értékével. Közelítőleg:

$$\varrho = \left(\frac{180}{\pi}\right)° = 57{\cdot}29578°$$
$$= 3437{\cdot}7468'$$
$$= 206264{\cdot}8''.$$

Hogy a szög nagyságát a gyakorlati mérésnél és az elméleti vizsgálatoknál különböző módon fejezzük ki, annak oka a következő.

Elméleti vizsgálatoknál az analitikus mérőszám használata a körívek kiszámítására a rendkívül egyszerű $s=r\varphi$ képletre vezet, hol s a körív hossza, r a sugár, φ a középponti szög abszolut mérőszáma. Ha a szöget fokokban adjuk meg, az s körív kiszámítása kevésbbé egyszerű.

A gyakorlati mérésre használt műszereken ellenben igen kívánatos oly beosztást alkalmazni, melynél a derékszögnek és több más gyakrabban előforduló szögnek *egész* szám fel meg.

156. §. Ennek a könyvnek tárgyalásaiban a szögeket rendesen ívmértékben fejezzük ki. A szögnek puszta nagyságán kívül majd rendesen az értelmére is nézünk, azért a szögeket pozitiv vagy negativ számokkal jellemezzük aszerint, hogy milyen értelmű forgással gondoljuk őket előállítva.

157. §. Ugyanazok a szárak végtelen sok szöget határoznak meg, mert (31. ábra) az AOB szögnek OA szárát végtelen sokféleképpen forgathatjuk állandó értelemben az OB véghelyzetbe. Ha OA-t pozitiv értelemben addig forgatjuk, míg először jut OB-be, akkor az így keletkezett szög analitikus mérőszáma legyen φ. Ha OA-t úgy forgatjuk OB-be, hogy az előbbi forgáson kívül még egy vagy több pozitiv teljes körülforgást végeztetünk vele, akkor az így keletkezett szögek mérőszámai:

$$\varphi + 2\pi, \quad \varphi + 4\pi, \quad \varphi + 6\pi, \ldots$$

Ha OA-t negativ értelemben addig forgatjuk, míg először jut OB-be, akkor az így keletkezett szögnek analitikus mérőszáma (előjelre is nézve):

$$-(2\pi - \varphi) = \varphi - 2\pi.$$

Ha OA-t úgy forgatjuk OB-be, hogy az előbbi forgáson kívül még egy vagy több negativ teljes körülforgást végeztetünk vele, akkor az így keletkezett szögek mérőszámai

$$(\varphi - 2\pi) - 2\pi = \varphi - 4\pi, \quad (\varphi - 2\pi) - 4\pi = \varphi - 6\pi, \ldots$$

Tehát ugyanazon OA és OB szárak által meghatározott, de különböző forgásokkal keletkezett szögek mérőszámai:

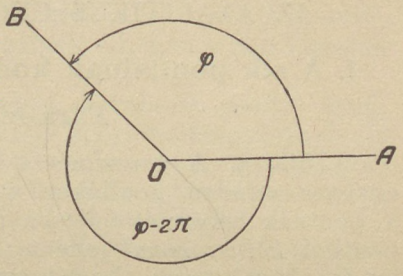
$$\ldots,\ \varphi - 4\pi,\ \varphi - 2\pi,\ \varphi,\ \varphi + 2\pi,\ \varphi + 4\pi, \ldots\ .$$

Ha ezek közül a számok közül tetszésünk szerint kiragadunk egyet és ezt φ_0-sal jelöljük, akkor mindezeket a számokat

$$\varphi_0 + 2n\pi$$

adja meg, ha n helyébe rendre *valamennyi* egész számot helyettesítjük (tehát a pozitiv egész számokon kívül a negativokat és a zérust is).

Az ugyanazon szárak által meghatározott szögeket egymástól csak lényegtelenül különbözőknek tekintjük.



31. ábra.

158. §. *Fél egyenesek* helyett sokszor röviden *egyenesek* által meghatározott szögekről beszélünk. Ha valamely O ponton keresztül húzott e és e' egyenesek hajlásszögéről szólunk, akkor a két egyenes mindegyikén bizonyos módon megállapítjuk a haladás *pozitiv* értelmét és a szóban forgó szög szárain e-nek és e'-nek O-tól pozitiv értelemben eső feleit értjük.

ÖTÖDIK FEJEZET.

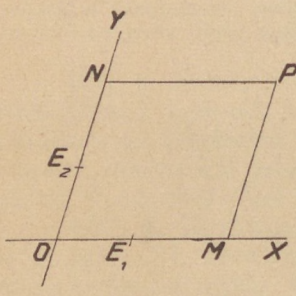
AZ ANALITIKUS GEOMETRIA ALAPFOGALMAI.

I. A sík pontjainak koordinatákkal való jellemzése.

Parallelkoordináták.

159. §. A hosszmérés arra képesített bennünket, hogy az egyenes minden pontjához egy-egy számot rendelhettünk és vele a pontnak helyzetét teljesen jellemezhettük. Hasonló módon a sík pontjait *két számmal* jellemezhetjük. Még pedig ez igen változatos módon történhetik. Legegyszerűbb a következő eljárás (32. ábra):

A síknak valamely szabadon választott, állandó O pontján keresztül két szintén szabadon választott, állandó egyenest húzunk, OX-et és OY-t. Mindegyiken megszabjuk a pozitiv és negativ értelmű haladást. A pozitiv értelmű haladást úgy tüntetjük ki, hogy *pozitiv* értelemben felrakjuk az OE_1, ill. a vele egyenlő OE_2 hosszegységet. O-t a *kezdőpontnak*, OX-et és OY-t *koordinata-tengelyeknek* mondjuk, E_1-et és E_2-t pedig a tengelyek *egységpontjainak*.



32. ábra.

Hogy a sík bármely P pontjának fekvését az OX és OY tengelyekhez képest jellemezhessük, P-n keresztül az OY tengellyel párhuzamos MP és az OX tengellyel párhuzamos NP egyenest húzzuk. Az $OMPN$ parallelogrammában legyen OM és a vele egyenlő NP mérőszáma x, továbbá ON és a vele egyenlő MP mérőszáma y. Itt x-en és y-on nem a puszta hosszúságok pozitiv mérőszámait értjük, hanem ezeket előjelekkel látjuk el. OM-nek és NP-nek pozitiv x mérőszámot tulajdonítunk, ha P az OY-nak ugyanazon az oldalán van mint E_1, ellenben negativot, ha P és E_1 az OY-nak két különböző oldalán van. Hasonlóképpen ON-nek és MP-nek pozitiv vagy negativ y mérőszámot tulajdonítunk aszerint, hogy P és E_2 az OX-nek ugyanazon oldalán van vagy pedig két különböző oldalán. Más szóval x és y előjele pozitiv vagy negativ, aszerint, hogy a tengelyeken milyen értelmű mozgás vezet O-ból M-be, ill. N-be.

A P pontnak megfelelő x és y számokat a P pont koordinatáinak, még pedig *parallelkoordinatáinak* vagy DESCARTES-féle koordinatáinak mondjuk; x az *abszcissza*, y az *ordinata*.*

A leírt módon a sík minden pontjának megfelel két parallel-

* A mathematikában valamely mennyiséget és annak mérőszámát rendesen ugyanavval a szóval jelöljük meg. Azért a P pont abszcisszáján és ordinatáján néha magát OM-et meg MP-t is értjük, nemcsak a mérőszámaikat.

koordinata. Fordítva bármely két x, y valós számhoz egy és csak egy oly P pont található, melynek x az abszcisszája és y az ordinatája. Ugyanis x nagyságra és értelemre nézve meghatározza OM-et, y pedig MP-t. Ha OX-re, melyet az *abszcisszák* tengelyének nevezünk, felrakjuk OM-et, azután M-en keresztül az *ordináták* tengelyével (OY-nal) párhuzamost húzunk és erre felrakjuk MP-t, akkor megkapjuk az illető koordinatáknak megfelelő P pontot. Azt a pontot, melynek koordinatái pl. 5 és 7, így jelöljük: (5, 7) Csak kivételesen használjuk a hosszadalmasabb ($x=5$, $y=7$) jelölést.

Megkülönböztetünk *derékszögű* és *ferdeszögű* parallelkoordinatákat aszerint, hogy a koordinatatengelyek egymásra merőlegesek vagy sem.

Mindkét esetben mindegyik tengelyen a haladás pozitiv értelmét tetszés szerint választhatjuk. Valamely koordinatatengelynek azt a felét, mely a kezdőponttól pozitiv értelemben van, ama tengely pozitiv felének mondjuk. Az OX vagy OY *pozitiv felét* sokszor röviden a *pozitiv* OX, vagy *pozitiv* OY *tengelynek* mondjuk.

A tengelyek pozitiv értelmének meghatározásával szorosan összefügg az, hogy a síkban milyen forgást tekintünk pozitiv értelműnek. A forgás pozitiv értelmét ugyanis mindig úgy állapítjuk meg, hogy azt a forgást, mely az OX tengely pozitiv felét e tengely negativ felének surolása nélkül átviszi OY pozitiv felébe, *pozitiv értelműnek* mondjuk.

Elméleti vizsgálatoknál rendesen olyan koordinatákat használunk, hogy a forgás pozitiv értelme az óramutató mozgásával ellenkező. Az OX tengelyt többnyire vízszintesnek, rajta a haladás pozitiv értelmét balról jobbra menőnek választjuk.

A gyakorlati alkalmazásoknál más megállapodások szokásosak. Ott többnyire az óramutató forgását tekintjük pozitiv értelműnek Az *elemi geodeziában* (vagyis az oly földmérésnél, mely a Föld felületének vizsgált részét síknak tekinti) az OX tengelyt rendesen délről északnak vagy északról délre menőnek választjuk.

Ha a koordinatatengelyeket, mint rendesen szokásos, egymásra merőlegesen választjuk, akkor a sík négy quadransra (síknegyedre) oszlik. Számozásukat a tengelyek pozitiv felei által határolt negyeden kezdjük és a pozitiv forgás értelmében folytatjuk. Az egyes síknegyedekben a pont koordinatái a következő előjelűek:

Síknegyed	I.	II.	III.	IV.
x	+	−	−	+
y	+	+	−	−

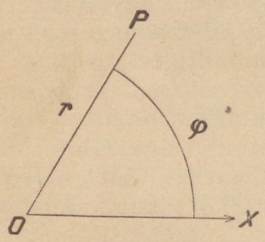
Az OX tengelyen levő pontokra nézve $y=0$. Az OY tengelyen levő pontokra nézve $x=0$. A kezdőpontnak mindkét koordinatája zérus.

Polárkoordináták.

160. §. A parallelkoordinatákon kívül még számos más berendezésünk is van arra, hogy a sík pontjainak helyzetét számokkal

jellemezhessük. Bármely ilyen berendezést egy-egy *koordinatarendszernek* mondunk. A pont helyzetét jellemző számokat mindenkor a pont *koordinatáinak* nevezzük.

A parallelkoordinaták mellett a legismeretesebb koordinaták a *polárkoordináták* (33. ábra). Ezek megállapításánál a sík pontjait csak *egy* OX tengelyre és a benne felvett O kezdőpontra vonatkoztatjuk. Hogy a sík tetszőleges P pontjának fekvését jellemezhessük, O-t összekötjük P-vel, azután lemérjük az OP távolságot és azt a φ szöget, melyet OP az OX tengelynek O-tól pozitiv értelemben eső részével bezár. Az OP távolságnak csak a puszta hosszára nézünk, ennek tehát mindig pozitiv értéket tulajdonítunk. A φ szöget ívmértékben kifejezett mérőszámával jellemezzük. Ennek a számnak meghatározásánál tekintetbe vesszük azt is, hogy milyen értelmű forgásnak felel meg. Aszerint, hogy OP-t az OX-ből pozitiv vagy negativ forgással gondoljuk előállítva, φ-nek mérőszáma pozitiv vagy negativ szám.



33. ábra.

Az OP-nek r mérőszámát a P pont *rádiusz vektorának* mondjuk. Az XOP szöget, melynek φ a mérőszáma, *polárszögnek* vagy *amplitudonak* nevezzük. Az r és φ számok együtt a P polárkoordinatái.

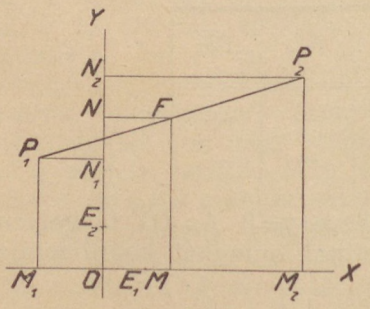
Ez a két szám nyilván teljesen jellemzi P fekvését, azaz belőlük P egyértelműen meghatározható.

Fordítva azonban a P pont csak r-et határozza meg egyértelműen. Ellenben ugyanahhoz a P-hez végtelen sok φ tartozik, mert OX-et végtelen sok módon forgathatjuk OP-be. Ha ezeknek a különböző forgásoknak megfelelő φ értékek közül egyet ismerünk, a többit belőle 2π egész számú többeseinek hozzáadásával kapjuk meg. Gyakorlati számításoknál a φ-t mindig úgy választjuk, hogy $0 \leqq \varphi < 2\pi$. (Ha P éppen O-ba esik, akkor φ teljesen határozatlan.)

Egyenesdarab felezése. Két pont távolsága.

161. §. A koordináták használata arra képesít, hogy geometriai feladatokat számítással oldhatunk meg.

Pl. (34. ábra) a



34. ábra.

$$P_1 = (x_1, y_1), \quad P_2 = (x_2, y_2)$$

pontok parallelkoordinatáiból az általuk határolt egyenesdarab F *felezőpontjának* helyzetét jellemző x, y koordinatákat a következő módon határozzuk meg.

Ábránkban

$$M_1M = MM_2, \quad N_1N = NN_2. \qquad 1)$$

Ha a vonaldaraboknak nemcsak puszta hosszúságára, hanem értelmére is nézünk, akkor

$$M_1M = M_1O + OM = OM - OM_1 = x - x_1$$

$$MM_2 = MO + OM_2 = OM_2 - OM = x_2 - x.$$

Az 1) alatti első egyenlet részletes alakja tehát

$$x - x_1 = x_2 - x.$$

Innen F abszcisszája:

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2}.$$

Hasonlóképpen az 1) alatti második egyenletből:

$$y = \frac{y_1 + y_2}{2}.$$

Vagyis F koordinatái P_1 és P_2 megfelelő koordinatáinak számtani közepei.

Ezek a meggondolások és eredmények akkor is érvényesek, ha ferdeszögű koordinatarendszert használunk.

162. §. A

$$P_0 = (x_0, y_0), \quad P = (x, y)$$

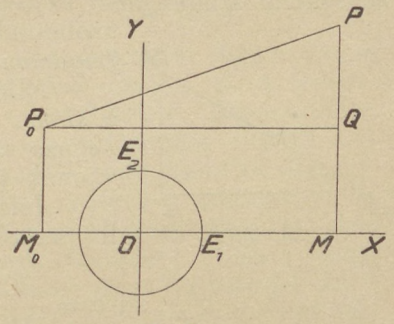
pontok *derékszögű* koordinatáiból az $r = P_0P$ távolságot a következő módon határozzuk meg.

A 35. ábrában a P_0PQ háromszög oldalainak puszta hosszúságai:

$$|P_0P| = r,$$

$$|P_0Q| = |M_0M| = |M_0O + OM| = |OM - OM_0| = |x - x_0|,$$

$$|QP| = |QM + MP| = |MP - MQ| = |y - y_0|.$$



35. ábra.

Tehát Pythagoras tétele szerint:

$$r^2 = (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2.$$

Az r-et innen négyzetgyökvonással kaphatjuk meg.

Az egységkör egyenlete.

163. §. A geometriai feladatoknak számolással való megoldásánál a pontoknak koordinatákkal való jellemzése mellett a legfontosabb segédeszközök egyike a *vonalaknak egyenletekkel való jellemzése*.

Legyen pl. a szóban forgó vonal az *egységkör*, vagyis a kezdőpont körül a hosszegységgel, mint sugárral leírt kör (35. ábra).

Valamely $P = (x, y)$ pont akkor és csak akkor van ezen a körön, ha koordinatáira nézve

$$x^2 + y^2 = 1$$

vagyis

$$x^2 + y^2 - 1 = 0. \qquad 2)$$

Ugyanis ez az egyenlet azt fejezi ki, hogy a $P = (x, y)$ pontnak távolsága a kezdőponttól egyenlő a hosszegységgel. Ezt az egyenletet éppen ezért az *egységkör egyenletének* nevezzük.

Hasonló módon más vonalakat is oly egyenlettel jellemezünk, melyet a vonal bármely pontjának két koordinatája kielégít, nem a vonalon levő pontnak két koordinatája ellenben nem elégít ki. Ezt az egyenletet ama vonal *egyenletének* nevezzük.

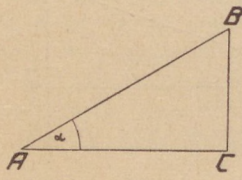
A geometriának azt a részét, mely az idomokat koordinaták és egyenletek segítségével vizsgálja, *analitikus geometriának* nevezzük.

Megalapítójának Descartesot tekintjük; *Géometrie* című műve 1637-ben jelent meg. Descartestól függetlenül kortársa, Fermat szintén kifejtette a geometriai vizsgálatnak ezt a módszerét, melynek első csiráival egyébiránt már az ókorban is találkozunk.

II. A trigonometriai függvények. A vektor fogalma.

A trigonometriai függvények értelmezése.

164. §. Az előző §-okban megoldott analitikus geometriai feladatokban szögek nem szerepeltek. Mielőtt szögekkel is számolunk, szólanunk kell az erre a célra nélkülözhetetlen *trigonometriai függvényekről.*



36. ábra.

A legfontosabb trigonometriai függvények a *sinus*, *cosinus*, *tangens* és *cotangens*. *Pozitiv hegyes* szögre nézve ezek a következő módon vannak értelmezve.

Jelentse (36. ábra) α az ABC derékszögű háromszögben az A-nál levő hegyes szöget. Akkor

$$\sin\alpha = \frac{BC}{AB}, \qquad \cos\alpha = \frac{AC}{AB},$$

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{BC}{AC}, \qquad \operatorname{cotg}\alpha = \frac{AC}{BC},$$

hol a szóbanforgó hányadosok tisztán az α nagyságától függenek.

Ritkábban használt trigonometriai függvények a *secans* és a *cosecans*. Ezeket a

$$\sec\alpha = \frac{1}{\cos\alpha}, \qquad \operatorname{cosec}\alpha = \frac{1}{\sin\alpha}$$

képletek értelmezik.

165. §. *Bármely pozitiv vagy negativ* α szög trigonometriai függvényeit az analitikus geometria alapfogalmainak felhasználásával a következő módon értelmezzük.

Felveszünk valamely *OXY derékszögű koordinatarendszert* (37. ábra). Az O-t egyszersmind oly *polár-koordinatarendszer* kezdőpontjának is tekintjük, melynek tengelye összeesik OX-szel. A kezdő-

pont körül a hosszegységgel, mint sugárral leírt körön meghatározzuk azt a P pontot, melynek polárszöge egyenlő α-val. *Ennek a P pontnak abszcisszáját nevezzük α cosinusának, ordinatáját pedig α sinusának.* A tangenst és cotangenst a

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}, \qquad \operatorname{cotg}\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} = \frac{1}{\operatorname{tg}\alpha}$$

képletekkel értelmezzük.

A tangenst úgy is megkaphatjuk, hogy meghatározzuk az egységkör E_1 pontjában húzott érintőnek és az OP egyenesnek Q metszéspontját. Az α tangense egyenlő Q-nak *ordinatájával*, mert (37. ábra)

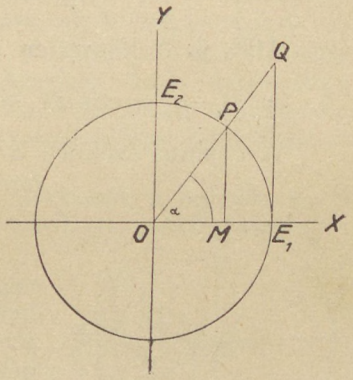
$$E_1Q : OE_1 = MP : OM,$$

azaz

$$E_1Q : 1 = \sin\alpha : \cos\alpha.$$

Innen valóban

$$E_1Q = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \operatorname{tg}\alpha.$$



37. ábra.

Ha α pozitiv hegyes szög, akkor a mostani megállapodás α trigonometriai függvényei számára ugyanazokat az értékeket adja, mint az előbbi § képletei.

166. §. A megelőző két §-ban a trigonometriai függvényeket mint valamely *szögtől* függő mennyiségeket fogtuk fel. A mathematika felsőbb részeiben azonban a trigonometriai függvényeket inkább mint valamely *számtól* függő mennyiségeket szokás felfogni. Ezen az álláspontón valamely α *szám* trigonometriai függvényeinek azokat az értékeket tulajdonítjuk, melyek a trigonometriában az α által, mint *analitikus mérőszám* által meghatározott *szög* trigonometria függvényeinek neveztetnek. Minthogy minden valós szám mint valamely szögnek analitikus mérőszáma fogható fel, azért *minden* valós számhoz tartozik egy-egy megfelelő sinus, cosinus stb.

A mondottakból nyilvánvaló, hogy

$$\begin{aligned} \sin 0 &= 0, & \cos 0 &= 1, \\ \sin\frac{\pi}{2} &= 1, & \cos\frac{\pi}{2} &= 0, \\ \sin\pi &= 0, & \cos\pi &= -1, \\ \sin\frac{3\pi}{2} &= -1, & \cos\frac{3\pi}{2} &= 0. \end{aligned}$$

A trigonometriai függvények legegyszerűbb tulajdonságai.

167. §. Bár a trigonometriai függvényeket az éppen mondottak értelmében, mint valamely *számtól* függő mennyiségeket fogjuk fel, mégis tulajdonságaik felismerésére a geometriai szemlélethez fordulunk. Hogy ezt megtehessük, azokat a számokat,

melyeknek trigonometriai függvényeiről szólunk, a most végzendő meggondolásoknál mindig mint *szögek* analitikus mérőszámait fogjuk fel.

Minthogy $\cos\alpha$ és $\sin\alpha$ az egységkör valamely P pontjának koordinatái, azért α bármely értékénél

$$\cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 1.$$

Ennélfogva

$$|\cos\alpha| \leqq 1, \quad |\sin\alpha| \leqq 1,$$

vagyis

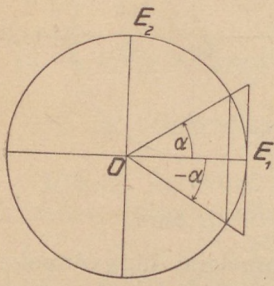
$$-1 \leqq \cos\alpha \leqq 1, \quad -1 \leqq \sin\alpha \leqq 1.$$

168. §. A közvetlen szemléletből világos (38. ábra), hogy

$$\cos(-\alpha) = \cos\alpha, \quad \sin(-\alpha) = -\sin\alpha, \quad \operatorname{tg}(-\alpha) = -\operatorname{tg}\alpha.$$

A cosinus ezeknek a képleteknek értelmében emlékeztet α-nak *páros* hatványaira, mert ezekre nézve is

$$(-\alpha)^{2n} = \alpha^{2n},$$



38. ábra.

vagyis α előjele az eredményre nem gyakorol befolyást. A sinus és a tangens ellenben a *páratlan* hatványokra emlékeztet, mert ezekre nézve

$$(-\alpha)^{2n+1} = -\alpha^{2n+1},$$

vagyis α előjelének megváltoztatása az eredményben is csak az előjelet változtatja meg. Ezért a cosinust *páros*, a sinust és tangenst *páratlan* függvénynek mondjuk.

169. §. Ha a 39. ábrában az egységkör P, Q, Q' pontjainak polárszögei $\frac{\pi}{4}$, $\frac{\pi}{4} + u$, $\frac{\pi}{4} - u$, akkor Q abszcisszája nyilván egyenlő Q' ordinatájával. Tehát

$$\cos\left(\frac{\pi}{4} + u\right) = \sin\left(\frac{\pi}{4} - u\right). \qquad 1)$$

Ez igaz u minden értékénél. Ha u helyébe az $\alpha - \frac{\pi}{4}$ vagy pedig a $\frac{\pi}{4} - \alpha$ különbséget helyettesítjük, akkor azt találjuk, hogy

$$\cos\alpha = \sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right), \quad \cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \sin\alpha. \qquad 2)$$

Innen továbbá

$$\operatorname{cotg}\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} = \frac{\sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)},$$

vagyis

$$\operatorname{cotg}\alpha = \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) \qquad 3)$$

és hasonlóképpen

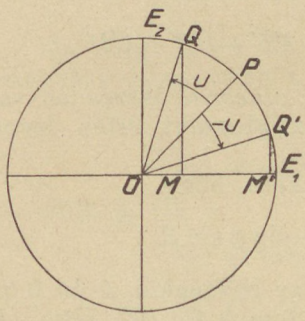
$$\operatorname{cotg}\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \operatorname{tg}\alpha. \qquad 4)$$

Vetítés. Összeg és különbség trigonometriai függvényei.

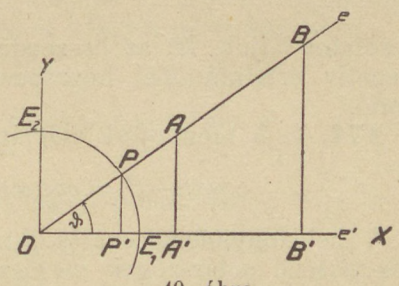
170. §. A trigonometriai függvények további vizsgálatát két olyan észrevételre alapítjuk, melyek egyenesdarabok *vetületeire* (projekcióira) vonatkoznak.

Legyen adva (40. ábra) két egyenes, e és e'. Az e tetszőleges A pontjából a e'-re bocsátott AA' merőlegesnek A' talppontjáról azt mondjuk, hogy ez a e' egyenesen A-nak *derékszögű vetülete* vagy *orthogonális projekciója*. (Minthogy többnyire csak derékszögű vetületekről beszélünk, a «derékszögű» jelzőt rendesen elhagyjuk.) Az AB egyenesdarab vetületén a végpontok vetületei által határolt $A'B'$ egyenesdarabot értjük.

Az e-n és e'-n tetszésünk szerint megállapítjuk a haladás pozitiv értelmét. A pozitiv értelmű egyenesdaraboknak pozitiv, a negativ



39. ábra.



40. ábra.

értelmű egyenesdaraboknak negativ mérőszámot tulajdonítunk. A két egyenesnek az O metszésponttól pozitiv értelemben eső részei által bezárt szöget ϑ-val jelöljük.

Az egyenesdarabok vetületeire vonatkozó első észrevételünk a következő: *A vetület mérőszáma egyenlő a vetített egyenesdarab mérőszámának és a ϑ szög cosinusának szorzatával.*

Hogy ezt belássuk, O-t kezdőpontnak, e'-t pedig derékszögű koordináták OX tengelyének választjuk. Az e egyenes O-tól pozitiv értelemben eső részének az egységkörrel való metszéspontját P-vel jelöljük. A cosinus értelmezése szerint OP' mérőszáma éppen $\cos\vartheta$. Az OP mérőszáma 1.

AB, OP és vetületeik között a következő proporció áll fenn:

$$AB : OP = A'B' : OP'. \qquad 1)$$

Ez még az előjelekre nézve is igaz. Valóban, ha AB és OP (mint az ábrában) egyenlő értelműek, akkor vetületeik is ilyenek. Ha ellenben AB és OP ellenkező értelműek, akkor vetületeik értelme is ellenkező.

Az 1) alatti proporció értelmében

$$AB : A'B' = OP : OP',$$

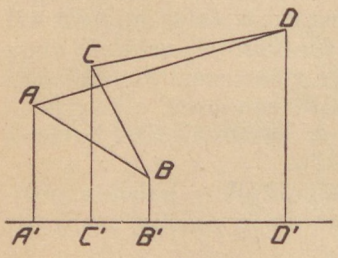
azaz

$$AB : A'B' = 1 : \cos\vartheta.$$

Tehát $A'B'$ valóban a következő képlet szerint számítható ki:

$$A'B' = AB\cos\vartheta.$$

Itt ϑ-nak csak a cosinusa szerepel; a képlet alkalmazásánál tehát ϑ előjelére nem kell figyelnünk.



41. ábra.

Második észrevételünk a következő: *Ha valamely egyenesdarab kiindulópontját és végpontját egyszersmind egy törött vonallal is összekötjük, akkor az egyenesdarab vetületének mérőszáma egyenlő a törött vonal részeinek vetületeiből alkotott algebrai összeggel.*

Valóban a 41. ábrában AD vetülete $ABCD$ részeinek vetületei között az

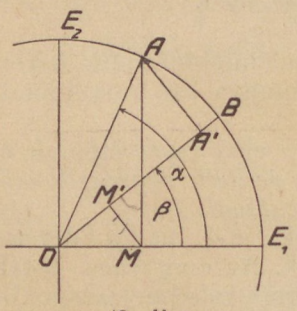
$$A'D' = A'B' + B'C' + C'D'$$

kapcsolatot látjuk. Itt az összeadás ú. n. *algebrai* összeadás, vagyis a negativ értelmű $B'C'$ hozzáadásán az abszolut érték levonása értendő.

171. §. A mondottak alapján belátható, hogy

$$\cos(\alpha-\beta) = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta. \qquad 1)$$

A bebizonyításnál α-t és β-t mint az egységkör A és B pontjaihoz tartozó polárszögek mérőszámait fogjuk föl (42. ábra). Az A pontot és A abszcisszájának M végpontját OB-re vetítjük. A vetítésre vonatkozó első észrevétel értelmében OA, OM és MA vetületeinek mérőszámai



42. ábra.

$$OA' = OA\cos(\alpha-\beta), \quad OM' = OM\cos\beta$$

és

$$M'A' = MA\cos\left(\frac{\pi}{2}-\beta\right) = MA\sin\beta.$$

Második észrevételünk értelmében OA-nak OA' vetülete egyenlő az OMA törött vonal részeinek OM' és $M'A'$ vetületeiből alkotott algebrai összeggel. Képletben kifejezve:

$$OA\cos(\alpha-\beta) = OM\cos\beta + MA\sin\beta.$$

Ha még tekintetbe vesszük, hogy

$$OA = 1, \quad OM = \cos\alpha, \quad MA = \sin\alpha,$$

akkor valóban az 1) alatti képletre jutunk.

172. §. A talált

$$\cos(\alpha-\beta) = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta \qquad 1)$$

képletből hasonlót kapunk $\sin(\alpha-\beta)$ számára, ha α helyébe a $\frac{\pi}{2}-\alpha$ különbséget, β helyébe pedig a $-\beta$ értéket helyettesítjük. Valóban a helyettesítésnél

$$\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha+\beta\right) = \cos\left[\frac{\pi}{2}-(\alpha-\beta)\right] = \sin(\alpha-\beta),$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right) = \sin\alpha, \quad \cos(-\beta) = \cos\beta,$$

$$\sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right) = \cos\alpha, \quad \sin(-\beta) = -\sin\beta.$$

Ha ezt tekintetbe vesszük, akkor a helyettesítés a következő képletre vezet:

$$\sin(\alpha-\beta) = \sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta. \qquad 2)$$

Ha még 1) és 2) alatt β helyébe $(-\beta)$-t írunk, akkor $\alpha+\beta$ cosinusára és sinusára a következő kifejezéseket kapjuk:

$$\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta, \qquad 3)$$

$$\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta. \qquad 4)$$

173. §. Ha a

$$\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta,$$

$$\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta$$

képletekben β helyébe a $\frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3\pi}{2}$ értékeket helyettesítjük és tekintetbe vesszük, hogy

$$\cos\frac{\pi}{2} = 0, \quad \cos\pi = -1, \quad \cos\frac{3\pi}{2} = 0,$$

$$\sin\frac{\pi}{2} = 1, \quad \sin\pi = 0, \quad \sin\frac{3\pi}{2} = -1,$$

továbbá osztással a tangenseket és cotangenseket is kiszámítjuk: akkor a kapott képleteket a következő táblázatban foglalhatjuk össze:

Argumentum	sinus	cosinus	tangens	cotangens
α	$+\sin\alpha$	$+\cos\alpha$	$+\operatorname{tg}\alpha$	$+\operatorname{cotg}\alpha$
$\frac{\pi}{2}+\alpha$	$+\cos\alpha$	$-\sin\alpha$	$-\operatorname{cotg}\alpha$	$-\operatorname{tg}\alpha$
$\pi+\alpha$	$-\sin\alpha$	$-\cos\alpha$	$+\operatorname{tg}\alpha$	$+\operatorname{cotg}\alpha$
$\frac{3\pi}{2}+\alpha$	$-\cos\alpha$	$+\sin\alpha$	$-\operatorname{cotg}\alpha$	$-\operatorname{tg}\alpha$

Itt pl. az utolsó sor azt jelenti, hogy

$$\sin\left(\frac{3\pi}{2}+\alpha\right)=-\cos\alpha,\quad \cos\left(\frac{3\pi}{2}+\alpha\right)=\sin\alpha,$$

továbbá

$$\operatorname{tg}\left(\frac{3\pi}{2}+\alpha\right)=-\operatorname{cotg}\alpha,\quad \operatorname{cotg}\left(\frac{3\pi}{2}+\alpha\right)=-\operatorname{tg}\alpha.$$

Az összeállított táblázat segítségével a 0 és $\frac{\pi}{2}$ közé eső számok trigonometriai függvényeiből meghatározhatjuk bármely 0 és 2π közé eső szám trigonometriai függvényeit. (Más szóval a 0 és 90° közé eső szögek trigonometriai függvényeiből meghatározhatjuk bármely 0 és 360° közé eső szögnek trigonometriai függvényeit.)

174. §. Az előbbi §-ból tudjuk, hogy

$$\cos(\alpha+\pi)=-\cos\alpha,\quad \sin(\alpha+\pi)=-\sin\alpha \qquad 1)$$

és innen

$$\operatorname{tg}(\alpha+\pi)=\operatorname{tg}\alpha. \qquad 2)$$

Ha α-nak π-vel való növesztését többször ismételjük, akkor azt találjuk, hogy

$$\cos(\alpha+n\pi)=(-1)^n\cos\alpha,\quad \sin(\alpha+n\pi)=(-1)^n\sin\alpha \qquad 3)$$

és

$$\operatorname{tg}(\alpha+n\pi)=\operatorname{tg}\alpha. \qquad 4)$$

Ha α helyébe az $\alpha-n\pi$ különbséget helyettesítjük, akkor az éppen talált képletek a következőkbe mennek át

$$\cos\alpha=(-1)^n\cos(\alpha-n\pi),\quad \sin\alpha=(-1)^n\sin(\alpha-n\pi)$$

$$\operatorname{tg}\alpha=\operatorname{tg}(\alpha-n\pi).$$

Ez azt jelenti, hogy a 3) és 4) alatti képletek nemcsak akkor igazak, ha n pozitiv egész szám, hanem akkor is, ha negativ egész szám. (Ha $n=0$, a képletek helyessége magától értetődik.)

A 4) alatti képlet tartalmát úgy szokás kifejezni, hogy *a tangesre nézve a π szám és minden többese «periodus»*.

Ha 3) alatt n helyébe $2n$-et helyettesítünk, akkor azt találjuk, hogy a *cosinusra és sinusra nézve 2π és minden többese periodus*. Vagyis

$$\cos(\alpha+2n\pi)=\cos\alpha,\quad \sin(\alpha+2n\pi)=\sin\alpha.$$

A periodicitás alapján minden szám trigonometriai függvényeinek kiszámítását visszavezethetjük a 0 és 2π közé eső számok trigonometriai függvényeinek meghatározására. Ezt a feladatot pedig már az előbbi §-ban visszavezettük a 0 és $\frac{\pi}{2}$ közé eső számok trigonometriai függvényeinek kiszámítására.

175. §. A

$$\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta$$

$$\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta$$

képletekből

$$\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)=2\cos\alpha\cos\beta,$$

$$\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta)=2\sin\alpha\sin\beta.$$

Hasonlóképpen az $(\alpha+\beta)$ és $(\alpha-\beta)$ sinusára nézve ismeretes képletekből

$$\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)=2\sin\alpha\cos\beta,$$

$$\sin(\alpha+\beta)-\sin(\alpha-\beta)=2\cos\alpha\sin\beta.$$

Ha

$$\alpha=\frac{x+y}{2},\quad \beta=\frac{x-y}{2},$$

akkor

$$\alpha+\beta=x,\quad \alpha-\beta=y;$$

tehát a talált képletek ennél a helyettesítésnél a következőkbe mennek át:

$$\cos x+\cos y=2\cos\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2}, \qquad 1)$$

$$\cos y-\cos x=2\sin\frac{x+y}{2}\sin\frac{x-y}{2}, \qquad 2)$$

$$\sin x+\sin y=2\sin\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2}, \qquad 3)$$

$$\sin x-\sin y=2\cos\frac{x+y}{2}\sin\frac{x-y}{2}. \qquad 4)$$

Az $x=0$, $y=2u$ esetben

$$1+\cos 2u=2\cos^2 u,\quad 1-\cos u=2\sin^2 u.$$

Fontos argumentumok trigonometriai függvényei.

176. §. A zérus trigonometriai függvényeirről tudjuk, hogy

$$\cos 0=1,\quad \sin 0=0,\quad \operatorname{tg} 0=0.$$

A cotangensre nézve az értelmezés azt adja, hogy

$$\operatorname{cotg} 0=\frac{\cos 0}{\sin 0}=\frac{1}{0}.$$

Mivel a zérus reciprok értékének, ha ilyenről egyáltalában beszélünk, a végtelent tekintjük, azért a zérus cotangensének a ∞ értéket tulajdonítjuk. Képletben $\operatorname{cotg} 0=\infty$.

A $\frac{\pi}{2}$ trigonometria függvényeinek értékei:

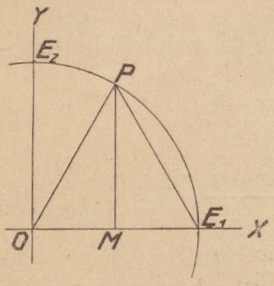
$$\cos\frac{\pi}{2}=0,\quad \sin\frac{\pi}{2}=1,\quad \operatorname{tg}\frac{\pi}{2}=\infty,\quad \operatorname{cotg}\frac{\pi}{2}=0.$$

Ha $\alpha=\frac{\pi}{4}$, akkor $\alpha=\frac{\pi}{2}-\alpha$. Ekkor tehát $\cos\alpha=\sin\alpha$. Mivel

négyzeteik összege 1, azért $\cos^2\frac{\pi}{4}$, meg $\sin^2\frac{\pi}{4}$ is $\frac{1}{2}$-lel egyenlő. Maga $\cos\frac{\pi}{4}$ és $\sin\frac{\pi}{4}$ egyenlő $\frac{1}{2}$ négyzetgyökével, még pedig a pozitiv négyzetgyökkel, mert a 0 és $\frac{\pi}{2}$ közé eső számoknak (más szóval a pozitiv hegyesszögek mérőszámainak) trigonometriai függvényei pozitiv számok. A mondottak értelmében:

$$\cos\frac{\pi}{4} = \sin\frac{\pi}{4} = \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad \operatorname{tg}\frac{\pi}{4} = \operatorname{cotg}\frac{\pi}{4} = 1.$$

Ha $\alpha = \frac{\pi}{3}$, akkor α trigonometriai függvényeit a következő módon kapjuk meg. A 43. ábrában az egységkör P pontjának polárszöge $\frac{\pi}{3}$. Közvetlenül világos, hogy az OPE_1 háromszög egyenlő oldalú; még pedig minden oldala egyenlő a hosszegységgel. A P pontnak OX-en előállított M vetülete OE_1-et felezi; tehát



43. ábra.

$$\cos\frac{\pi}{3} = OM = \frac{1}{2}.$$

A $\sin\frac{\pi}{3}$ értékét a

$$\sin^2\frac{\pi}{3} = 1 - \cos^2\frac{\pi}{3} = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$$

képlet adja meg. Belőle

$$\sin\frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2},$$

hol $\sqrt{3}$ a pozitiv négyzetgyököt jelenti. A mondottakból $\operatorname{tg}\frac{\pi}{3}$ számára a $\sqrt{3}$ értéket találjuk.

A $\frac{\pi}{3}$ trigonometriai függvényeiből közvetlenül megkaphatjuk $\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{3}$, azaz $\frac{\pi}{6}$ trigonometriai függvényeit is.

A

$$\sin 0 = \cos\frac{\pi}{2} = 0,$$

$$\sin\frac{\pi}{6} = \cos\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2},$$

$$\sin\frac{\pi}{4} = \cos\frac{\pi}{4} = \frac{1}{\sqrt{2}},$$

$$\sin\frac{\pi}{3} = \cos\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2},$$

$$\sin\frac{\pi}{2} = \cos 0 = 1$$

számok éppen

$$\sqrt{0},\ \sqrt{1},\ \sqrt{2},\ \sqrt{3},\ \sqrt{4}$$

felei.

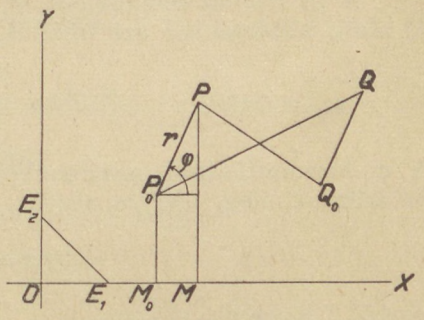
177. §. Gyakorlati számításoknál (akár a trigonometriai függvényekkel, akár ezek logarithmusaival számolunk) a *logarithmuskönyvekben* foglalt *táblákat* használjuk. Ezekben a trigonometriai függvények (vagy logarithmusaik) többnyire mint *szögektől* függő mennyiségek szerepelnek. Ha *számok* trigonometriai függvényeit keressük, akkor ilyenkor előbb a nekik (mint analitikus mérőszámoknak) megfelelő szögek fokokban kifejezett értékeit kell meghatároznunk, csak azután kereshetjük meg a táblából a trigonometriai függvények értékeit vagy logarithmusait.

A trigonometriai függvények legelemibb alkalmazásukat a háromszögekre vonatkozó trigonometriai feladatok megoldásánál találják. Ebben a könyvben a *trigonometriával* nem foglalkozunk, hanem fontosabb tételeit ismerteknek tekintjük. A trigonometriai függvényekkel csak azért foglalkoztunk, hogy tulajdonságaikat abban az alakban állítsuk össze, melyben a későbbiekben felhasználjuk.

A vektorok.

178. §. A trigonometriai függvények segítségével most már megoldhatunk oly analitikus geometriai feladatokat is, melyekben irányok és szögek fordulnak elő.

Ha valamely egyenesdarabnak hosszúságán kívül egyszersmind irányára és értelmére is nézünk, akkor többnyire *vektornak* nevezzük. Két vektort, P_0P-t és Q_0Q-t (44. ábra) egyenlőnek akkor mondunk, ha irányra, értelemre és hosszúságra nézve megegyeznek. Ez akkor és csak akkor következik be, ha P_0Q felezőpontja azonos Q_0P felezőpontjával. Egyenlő vektorok egymásba puszta eltolással vihetők át. Annak az eltolásnak irányát, értelmét és nagyságát, mely P_0P-t a vele egyenlő Q_0Q vektorba viszi át, a P_0Q_0 vektor határozza meg.



44. ábra.

Az analitikus geometriában a P_0P vektor irányát avval a φ *irányszöggel* jellemezzük, melyet P_0P az OX tengellyel bezár. Mint tudjuk, (158. §.) két egyenes hajlásszögéről szólva mindig meg kell állapodnunk arra nézve, hogy mindegyik egyenesen melyik legyen a haladás pozitiv értelme. A szög szárain az adott egyeneseknek ama feleit értjük, melyek a két egyenes metszéspontjától pozitiv értelemben esnek. A φ meghatározásánál OX-en a haladás pozitiv értelmét természetesen úgy választjuk, hogy az O-ból az E_1 egységpontba pozitiv értelmű haladás vezessen. Ami a P_0P egyenest illeti, ezen a vektorokkal való számításoknál a P_0-ból P-be vezető haladást tekintjük pozitivnak. A P_0P vektor φ-t nem határozza meg egyértelműen, hanem ugyanahhoz a vektorhoz végtelen sok φ tartozik; ezek 2π többeseivel különböznek egymástól. Közülök rendesen azt választjuk, melyre nézve $0 \leqq \varphi < 2\pi$.

Ha P_0 és P derékszögű koordinatái

$$x_0 = OM_0, \quad y_0 = M_0P_0 \quad \text{és} \quad x = OM, \quad y = MP,$$

akkor a P_0P vektornak a koordinatatengelyeken előállított vetületei

$$x - x_0 = r\cos\varphi, \quad y - y_0 = r\sin\varphi, \tag{1}$$

hol r a vektor hossza és φ a vektornak irányszöge.

Az oly különös esetben, melyben P_0 az O-ba esik:

$$x = r\cos\varphi, \quad y = r\sin\varphi. \tag{2}$$

179. §. Az előbbi §-ban talált képletek segítségével mindig megoldhatjuk a következő két feladatot:

α) A P_0P vektor P_0 pontjának koordinatáiból, továbbá a vektor hosszából és irányából meghatározandók a P végpont derékszögű koordinatái.

β) Fordítva P_0 és P derékszögű koordinatáiból meghatározandó a P_0P vektor hossza és irányszöge.

Az *α)* feladat megoldásánál az

$$x - x_0 = r\cos\varphi, \quad y - y_0 = r\sin\varphi \tag{1}$$

képletekből

$$x = x_0 + r\cos\varphi, \quad y = y_0 + r\sin\varphi. \tag{2}$$

A *β)* feladat megoldását φ meghatározásával kezdjük meg. Az 1) alatti képletekből azt találjuk, hogy

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{y-y_0}{x-x_0}. \tag{3}$$

A φ kiszámításánál mindenekelőtt azt a pozitiv α hegyesszöget határozzuk meg, melyre nézve

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{|y-y_0|}{|x-x_0|}$$

Ilyen α mindig egy és csak egy van.

Az α-ból magát φ-t a következő módon kapjuk meg. Minthogy r pozitiv, azért $\cos\varphi$ és $\sin\varphi$ előjele az 1) alatti képletek értelmében megegyezik $x-x_0$ és $y-y_0$ előjelével. Az előjel meghatározásánál a következő eshetőségek lehetségesek

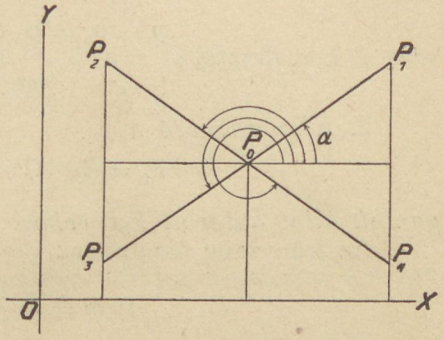
$\cos\varphi$	$\sin\varphi$
+	+
−	+
−	−
+	−

(A 45. ábrában P megfelelő helyzetei rendre: P_1, P_2, P_3, P_4.)

Az első esetben φ a 0 és $\frac{\pi}{2}$ közé esik; ekkor $\varphi=\alpha$. A má-

sodik esetben φ a $\frac{\pi}{2}$ és π közé esik; ekkor $\varphi=\pi-\alpha$. A harmadik esetben φ a π és $\frac{3\pi}{2}$ közé esik; ekkor $\varphi=\pi+\alpha$. A negyedik esetben végre φ a $\frac{3\pi}{2}$ és 2π közé esik és $\varphi=2\pi-\alpha$. Aszerint, hogy melyik esettel van dolgunk, φ-t az első, második, harmadik vagy negyedik quadránsba esőnek mondjuk.

Az oly esetben, melyben $x-x_0$ vagy $y-y_0$ valamelyike zérus, a viszonyok oly egyszerűek, hogy ezekről az esetekről nem szükséges külön szólanunk.



45. ábra.

A vektor hosszát az

$$r=\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}$$

képlet adja meg. Gyakorlati számításoknál azonban inkább az

$$r=\frac{x-x_0}{\cos\varphi},\qquad r=\frac{y-y_0}{\sin\varphi}$$

képletek valamelyikét használjuk.

Példák. 1. *P_0 koordinatái*

$$x_0=3,\quad y_0=7;$$

a P_0P vektorra nézve

$$r=5,\quad \varphi=2{\cdot}586.$$

Meghatározandók P koordinatái.

A 155. §-ból tudjuk, hogy az 1 analitikus mérőszámnak megfelelő szög

$$\varrho=57{\cdot}29\underline{6}^\circ.$$

Tehát a φ abszolut mérőszámnak megfelelő szög:

$$\varphi\varrho=2{\cdot}586\times 57{\cdot}29\underline{6}^\circ.$$

A szorzást rövidítve (és a szokásos javításokkal) végezzük. Ekkor

	$57{\cdot}296^\circ$
(2·586 jegyei fordított rendben)	68 52
	114 59
	28 65
	4 58
	34
	$148{\cdot}16^\circ$

Ha még tekintetbe vesszük, hogy

$$0{\cdot}16^\circ=0{\cdot}16\times 60'=9{\cdot}60',$$

akkor φ-nek gyakorlati egységekben kifejezett értéke percekre terjedő pontossággal:

$$148^\circ\,10'=90^\circ+58^\circ\,10'.$$

Most már

$$x - x_0 = r\cos\varphi = -5\sin 58^\circ\ 10'$$
$$y - y_0 = r\sin\varphi = \ \ 5\cos 58^\circ\ 10'.$$

A trigonometriai táblából:

$$\sin 58^\circ\ 10' = 0{\cdot}8496$$
$$\cos 58^\circ\ 10' = 0{\cdot}5274.$$

Ennélfogva

$$x - x_0 = x - 3 = -4{\cdot}248,$$
$$y - y_0 = y - 7 = \ \ 2{\cdot}637;$$

azaz P koordinatái:

$$x = -1{\cdot}248, \quad y = 9{\cdot}637.$$

2. *Kiszámítandó a*

$$P_0 = (5,\ 37), \quad P = (9,\ 27)$$

pontok által határolt P_0P vektor hossza és iránya.

Az irányszög tangense:

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{-10}{4} = -2{\cdot}5.$$

A

$$\operatorname{tg}\alpha = 2{\cdot}5$$

képlet által meghatározott pozitiv hegyes szögnek gyakorlati egységekben kifejezett értéke:

$$68^\circ 12'.$$

Minthogy

$$x - x_0 = 4 \quad \text{és} \quad y - y_0 = -10$$

előjelei

$$+ \qquad -,$$

azért φ a negyedik quadransban van. Tehát φ-nek gyakorlati egységekben kifejezett értéke:

$$360^\circ - 68^\circ\ 12' = 291^\circ\ 48'.$$

Ha φ-nek analitikus mérőszámát keressük, akkor tekintetbe veendő, hogy

$$\text{arc}\ 1^\circ = 0{\cdot}0175 \quad \text{arc}\ 1' = 0{\cdot}0003.$$

Tehát

$$\begin{aligned} \text{arc}\ 291^\circ &= 291 \times 0{\cdot}0175 \\ &\quad\ 1\,575 \\ &\quad\ 3\,50 \\ &\quad\ 5{\cdot}0925 \\ \text{arc}\ 48' &= 48 \times 0{\cdot}0003 \\ &\quad\ 0{\cdot}0144, \end{aligned}$$

vagyis* (közelítőleg):

* Ha nem szorítkozunk φ-nek 0 és 2π közé eső értékére, akkor φ számára végtelen sok értéket kapunk. Ezek a most meghatározott értékből úgy keletkeznek, hogy még $2n\pi$-t hozzáadjuk, hol n helyébe minden egész szám teendő.

$$\varphi = \text{arc}\, 291^\circ\, 48' = 5{\cdot}11.$$

A vektor hosszát a következő képletek adják meg:

$$r = \frac{x - x_0}{\cos\varphi} = \frac{4}{\cos 291^\circ 48'} = \frac{4}{\cos(270^\circ + 21^\circ 48')} = \frac{4}{\sin 21^\circ 48'},$$

$$r = \frac{y - y_0}{\sin\varphi} = \frac{-10}{\sin 291^\circ 48'} = \frac{-10}{\sin(270^\circ + 21^\circ 48')} = \frac{10}{\cos 21^\circ 48'}.$$

Most már (rövidített osztással):

$$4 : \sin 21^\circ 48' = 4 : 0{\cdot}3714 = 10{\cdot}77,$$
$$0286$$
$$26$$

$$10 : \cos 21^\circ 48' = 10 : 0{\cdot}9284 = 10{\cdot}77.$$
$$0716$$
$$66$$

Tehát $r = 10{\cdot}77$ (abban a hosszegységben kifejezve, mellyel a derékszögű koordinatákat mérjük).

Snellius vagy Pothenot feladata.

180. §. A vektorok hosszúságára, irányára és vetületeire vonatkozó képleteket az analitikus geometria praktikus alkalmazásainál gyakran használjuk, még pedig többnyire arra, hogy 1) a feladat megoldásának leglényegesebb részét előkészítsük és 2) a megoldás leglényegesebb részének elintézése után ennek eredményeit céljainkra felhasználjuk. Hogy ez miként történik, arra például szolgálhat a következő feladat megoldása:

Valamely P pontra nézve ismeretesek azok a látószögek, melyek alatt egy adott ABC háromszög oldalait P-ből látjuk. Meghatározandó P helyzete a síkban.

Ezt a feladatot első megoldóiról Snellius vagy Pothenot feladatának nevezzük. A geodéziában *P*-nek ily módon való meghatározását (az ismeretes *A*, *B*, *C* pontokra visszairányuló) *hátrametszésnek* mondják.

Az analitikus geometriában és a geodéziában is az *A*, *B*, *C* pontok

$$(x_A, y_A), \quad (x_B, y_B), \quad (x_C, y_C)$$

koordinatáik által vannak megadva. *P* meghatározása pedig x_P és y_P kiszámításában áll.

A jelölést úgy választhatjuk, hogy azok az α, β látószögek (46. ábra), melyek alatt *AC* és *BC* látszanak, pozitivok és 180°-nál kisebbek legyenek.*

A feladatot három részben oldjuk meg. A feladat szempontjá-

* Gyakorlati feladatról lévén szó, a szögeket fokokban fejezzük ki és pozitiv forgásnak az óramutatóéval megegyezőt választjuk.

ból a középső rész a legfontosabb. A vektorokra vonatkozó képletek az előkészítő és a befejező részben találnak alkalmazást.

I. Mindenek előtt a CA és CB vektorok hosszúságát és irányát határozzuk meg. A hosszúságokat $\overline{CA}$-val és $\overline{CB}$-vel, az irányszögeket a

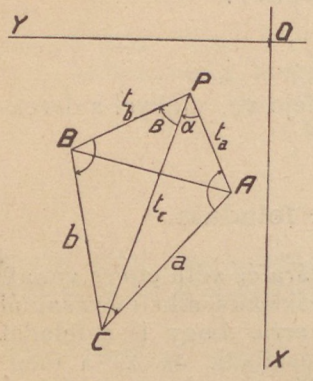
$$(CA),\quad (CB)$$

szimbolumokkal jelöljük. A $PACB$ négyszögnek a C szögpontnál levő szögét, melyet rövidség kedvéért szintén C-vel jelölünk, a CA és CB vektorok irányszögeiből a

$$C = (CA) - (CB)$$

képlet adja meg.

II. A feladat megoldásának legfontosabb részében a $PACB$ négyszögnek (az A és B szögpontoknál levő) A és B szögeit és



46. ábra.

$$t_a = \overline{AP},\quad t_b = \overline{BP}$$

oldalait határozzuk meg.

Hogy A-t és B-t megkapjuk, előbb ennek a két szögnek fél összegét és fél különbségét számítjuk ki. Magukat az A és B szögeket azután az

$$A = \frac{A+B}{2} + \frac{A-B}{2},$$

$$B = \frac{A+B}{2} - \frac{A-B}{2}$$

képletek adják meg.

A és B fél összegére nézve az

$$A + B + C + \alpha + \beta = 360°$$

képletből azt kapjuk, hogy*

$$\frac{A+B}{2} = \frac{360° - (C+\alpha+\beta)}{2}.$$

$A-B$ felének kiszámításánál vegyük tekintetbe, hogy a trigonometriából ismeretes *sinus-tétel* értelmében a PAC és PCB háromszögekben

$$\frac{t_c}{\sin A} = \frac{a}{\sin\alpha},\quad \frac{t_c}{\sin B} = \frac{b}{\sin\beta}.$$

Tehát

$$\sin A = t_c : \frac{a}{\sin\alpha},\quad \sin B = t_c : \frac{b}{\sin\beta}$$

* Ha ez a képlet negativ C-t adna, akkor még 360°-ot hozzáadunk. Így mindig elérhetjük, hogy $0 < C < 360°$.

és

$$\frac{\sin A}{\sin B} = \frac{b}{\sin \beta} : \frac{a}{\sin \alpha}. \qquad 1)$$

Hogy innen a számítás kényelmes berendezésére alkalmas képletet kaphassunk, egy μ segédszöget vezetünk be. Ezt úgy választjuk, hogy

$$\operatorname{tg} \mu = \frac{a}{\sin \alpha} : \frac{b}{\sin \beta} \qquad 2)$$

legyen. Ekkor az 1) alatti képlet így írható:

$$\frac{\sin A}{\sin B} = \operatorname{cotg} \mu,$$

vagyis

$$\frac{\sin A}{\sin B} = \frac{\cos \mu}{\sin \mu}.$$

Tehát

$$\frac{\sin A \pm \sin B}{\sin B} = \frac{\cos \mu \pm \sin \mu}{\sin \mu}$$

és innen

$$\frac{\sin A - \sin B}{\sin A + \sin B} = \frac{\cos \mu - \sin \mu}{\cos \mu + \sin \mu}. \qquad 3)$$

Itt a számlálókat és nevezőket még az ismeretes

$$\sin x + \sin y = 2 \sin \frac{x+y}{2} \cos \frac{x-y}{2}$$

képlet segítségével mint trigonometriai függvények szorzatait írhatjuk. Ha ugyanis x és y helyébe az

$$A, B; \quad A, -B; \quad \mu+R, \mu; \quad \mu+R, -\mu$$

számpárokat írjuk, hol R derékszöget jelent, akkor

$$\sin A + \sin B = 2 \sin \frac{A+B}{2} \cos \frac{A-B}{2},$$

$$\sin A - \sin B = 2 \sin \frac{A-B}{2} \cos \frac{A+B}{2}$$

és

$$\cos \mu + \sin \mu = 2 \sin \left(\mu + \frac{R}{2}\right) \cos \frac{R}{2},$$

$$\cos \mu - \sin \mu = 2 \cos \left(\mu + \frac{R}{2}\right) \sin \frac{R}{2}.$$

Ezeket az egyenleteket 3) alatt tekintetbe véve, azt kapjuk, hogy

$$\operatorname{cotg} \frac{A+B}{2} \operatorname{tg} \frac{A-B}{2} = \operatorname{cotg} \left(\mu + \frac{R}{2}\right).$$

Tehát

$$\operatorname{tg}\frac{A-B}{2} = \operatorname{tg}\frac{A+B}{2}\operatorname{cotg}\left(\mu + \frac{R}{2}\right). \qquad 4)$$

Mindezeket összefoglalva, A és B meghatározása a következő képletek segítségével történik:

$$\frac{A+B}{2} = \frac{360^\circ - (C+\alpha+\beta)}{2},$$

$$\operatorname{tg}\mu = \frac{a}{\sin\alpha} : \frac{b}{\sin\beta},$$

$$\operatorname{tg}\frac{A-B}{2} = \operatorname{tg}\frac{A+B}{2}\operatorname{cotg}\left(\mu + \frac{R}{2}\right),$$

$$A = \frac{A+B}{2} + \frac{A-B}{2}, \quad B = \frac{A+B}{2} - \frac{A-B}{2}.$$

A $t_a = \overline{AP}$, $t_b = \overline{BP}$ hosszúságokat a sinus-tétel adja meg:

$$t_a = a\frac{\sin(A+\alpha)}{\sin\alpha} \qquad t_b = b\frac{\sin(B+\beta)}{\sin\beta}. \qquad 5)$$

A feladat határozatlan, ha a

$$\operatorname{tg}\frac{A-B}{2} = \operatorname{tg}\frac{A+B}{2}\operatorname{cotg}\left(\mu + \frac{R}{2}\right)$$

képlet jobboldalán az egyik tényező ∞, a másik 0. Minthogy $0 < \frac{A+B}{2} < 180^\circ$, azért ez csak

$$\frac{A+B}{2} = R,$$

vagyis $A + B = 180^\circ$ esetében következik be. Ekkor P az A, B, C pontok által meghatározott körön van és helyzete ezen a körön határozatlan.

III. Végre P koordinatáit a következő módon határozzuk meg. Az AP és BP vektorok hosszát és irányszögét a

$$\overline{AP} = t_a, \quad \overline{BP} = t_b,$$

$$(AP) = (AC) + A, \quad (BP) = (BC) - B.$$

képletek adják meg. Ezekből pedig P koordinatáit a következő képletek segítségével számítjuk ki:

$$\begin{aligned} x_P &= x_A + \overline{AP}\cos(AP) = x_B + \overline{BP}\cos(BP), \\ y_P &= y_A + \overline{AP}\sin(AP) = y_B + \overline{BP}\sin(BP). \end{aligned} \qquad 6)$$

Példa. *Legyenek A, B, C koordinatái méterekben mérve:*

$$x_A = 5046, \quad y_A = 4578$$
$$x_B = 5663, \quad y_B = 2462$$
$$x_C = 5370, \quad y_C = 3012.$$

A P-ből nézve AC és CB az

$$\alpha = 108^\circ\,19', \quad \beta = 38^\circ\,52'$$

szögek alatt lássék. Meghatározandók P koordinatái.

I. A (CA) és (CB) szögek kiszámítása a következő módon történik:

$$\operatorname{tg}(CA) = \frac{+1566}{-324}, \qquad \operatorname{tg}(CB) = \frac{-550}{+293},$$

$$\begin{array}{ll} \text{Log } 1566 = 3{\cdot}1948 & \text{Log } 550 = 2{\cdot}7404 \\ \text{Log } 324 = 2{\cdot}5105 & \text{Log } 293 = 2{\cdot}4669 \\ \overline{0{\cdot}6843} = \text{Log tg } 78^\circ\,18{\cdot}7', & \overline{0{\cdot}2735} = \text{Log tg } 61^\circ\,57{\cdot}3'. \end{array}$$

(CA) a második, (CB) a negyedik quadránsban van. Tehát

$$(CA) = 180^\circ - 78^\circ\,18{\cdot}7 = \mathbf{101^\circ\,41{\cdot}3'},$$
$$(CB) = 360^\circ - 61^\circ\,57{\cdot}3' = \mathbf{298^\circ\ 2{\cdot}7'}.$$

Ha (CA)-ból kivonjuk (CB)-t, negatív szöget kapunk. Hogy ezt elkerüljük, a különbséghez 360°-ot hozzáadunk. Ekkor

$$C = 360^\circ + (CA) - (CB) = \mathbf{163^\circ\,38{\cdot}6'}.$$

A $\overline{CA}$ és $\overline{CB}$ távolságokat a következő módon számítjuk ki. Tudjuk, hogy pl.

$$y_A - y_C = \overline{CA} \sin (CA).$$

Tehát

$$a = \overline{CA} = \frac{y_A - y_C}{\sin (CA)} \quad \text{és} \quad b = \overline{CB} = \frac{y_B - y_C}{\sin (CB)}.$$

Példánkban:

$$a = \frac{1566}{\cos 11^\circ 41{\cdot}3'} \qquad b = \frac{550}{\cos 28^\circ\,2{\cdot}7'}$$

$$\begin{array}{ll} \text{Log } 1566 = 3{\cdot}1948 & \text{Log } 550 = 2{\cdot}7404 \\ \text{Log cos } 11^\circ\,41{\cdot}3' = 9{\cdot}9909 - 10 & \text{Log cos } 28^\circ\,2{\cdot}7' = 9{\cdot}9457 - 10 \\ \text{Log } a = 3{\cdot}2039 & \text{Log } b = 2{\cdot}7947. \end{array}$$

A következőkben nem magára a-ra illetve b-re, hanem az

$$\frac{a}{\sin \alpha} \quad \text{és} \quad \frac{b}{\sin \beta}$$

hányadosokra van szükségünk. Ezeknek logarithmusait így kapjuk meg:

$$\begin{array}{ll} \text{Log } a = 3{\cdot}2039 & \text{Log } b = 2{\cdot}7947 \\ \text{Log sin } \alpha = 9{\cdot}9774 - 10 & \text{Log sin } \beta = 9{\cdot}7976 - 10 \\ \text{Log } \dfrac{a}{\sin \alpha} = \mathbf{3{\cdot}2265} & \text{Log } \dfrac{b}{\sin \beta} = \mathbf{2{\cdot}9971}. \end{array}$$

II. $A+B$ felét a következő módon kapjuk meg:

$$\begin{array}{r} C = 163^\circ\,38{\cdot}6' \\ \alpha = 108^\circ\,19' \\ \beta = 38^\circ\,52' \\ \hline 310^\circ\,49{\cdot}6' \\ A+B = 49^\circ\,10{\cdot}4' \\ \dfrac{A+B}{2} = \mathbf{24^\circ\,35{\cdot}2'}. \end{array}$$

$A-B$ felének kiszámítása előtt μ-t kell meghatároznunk. Az

$$\frac{a}{\sin\alpha} \text{ és } \frac{b}{\sin\alpha}$$

logarithmusait egymásból kivonván, azt találjuk, hogy

$$\operatorname{Log}\operatorname{tg}\mu = 0{\cdot}2294.$$

Innen

$$\mu = 59^\circ\,28{\cdot}5' \quad \text{és} \quad \mu + \frac{R}{2} = 104^\circ\,28{\cdot}5'.$$

Most már

$$\operatorname{tg}\frac{A-B}{2} = \operatorname{tg}\frac{A+B}{2}\operatorname{cotg}\left(\mu+\frac{R}{2}\right) = -\operatorname{tg}24^\circ\,35{\cdot}2'\operatorname{tg}14^\circ\,28{\cdot}5'$$

$$\begin{array}{l}\operatorname{Log}\operatorname{tg}24^\circ\,35{\cdot}2' = 9{\cdot}6604-10\\ \operatorname{Log}\operatorname{tg}14^\circ\,28{\cdot}7' = 9{\cdot}4119\\ \hline \operatorname{Log}\operatorname{tg}\dfrac{B-A}{2} = 9{\cdot}0723-10, \quad \dfrac{B-A}{2} = 6^\circ\,44{\cdot}2'.\end{array}$$

Tehát

$$A = \frac{A+B}{2} - \frac{B-A}{2} = 24^\circ\,35{\cdot}2' - 6^\circ\,44{\cdot}2' = \mathbf{17^\circ\,51'},$$

$$B = \frac{A+B}{2} + \frac{B-A}{2} = 24^\circ\,35{\cdot}2' + 6^\circ\,44{\cdot}2' = \mathbf{31^\circ\,19{\cdot}4'}.$$

Ha a számítás helyes, akkor

$$\sin A\,\frac{a}{\sin\alpha} = \sin B\,\frac{b}{\sin\beta}.$$

Esetünkben valóban:

$$\operatorname{Log}\frac{a}{\sin\alpha} = 3{\cdot}2265 \qquad \operatorname{Log}\frac{b}{\sin\beta} = 2{\cdot}9971$$

$$\begin{array}{ll}\operatorname{Log}\sin A = 9{\cdot}4865-10 & \operatorname{Log}\sin B = 9{\cdot}7159-10\\ \underline{2{\cdot}7130} & \underline{2{\cdot}7130}\end{array}$$

A t_a, t_b hosszúságokat a

$$t_a = \frac{a}{\sin\alpha}\sin(A+\alpha), \quad t_b = \frac{b}{\sin\beta}\sin(B+\beta)$$

képletek adják meg, hol

$$A+\alpha = 126^\circ\,10', \quad B+\beta = 70^\circ\,11{\cdot}4'.$$

Leszen:

$$\operatorname{Log}\frac{a}{\sin\alpha} = 3{\cdot}2265 \qquad \operatorname{Log}\frac{b}{\sin\beta} = 2{\cdot}9971$$

$$\begin{array}{ll}\operatorname{Log}\sin(A+\alpha) = 9{\cdot}9070-10 & \operatorname{Log}\sin(B+\beta) = 9{\cdot}9735-10\\ \underline{\operatorname{Log}t_a = \mathbf{3{\cdot}1335}} & \underline{\operatorname{Log}t_b = \mathbf{2{\cdot}9706}.}\end{array}$$

III. Tudjuk, hogy

$$\begin{array}{ll}(CA) = 101^\circ\,41{\cdot}3' & (CB) = 298^\circ\;2{\cdot}7'\\ A = \;17^\circ\,51' & B = \;31^\circ\,19{\cdot}4'\end{array}$$

Tehát

$$(AC) = 281^\circ\,41{\cdot}3' \quad (BC) = 118^\circ\;2{\cdot}7'$$

és

$$(AP) = (AC)+A = 299^\circ\,32{\cdot}3' = \mathbf{270+29^\circ\,32{\cdot}3'}.$$
$$(BP) = (BC)-B = \mathbf{86^\circ\,43{\cdot}3'}.$$

Az AP és BP vonaldaraboknak a koordinata tengelyeken való vetületei:

$$x_P - x_A = t_a\cos(AP), \qquad x_P - x_B = t_b\cos(BP),$$
$$y_P - y_A = t_a\sin(AP), \qquad y_P - y_B = t_b\sin(BP).$$

Példánkban:

$$\begin{array}{ll} \log t_a = 3{\cdot}1335 & \log t_b = 2{\cdot}9706 \\ \log\cos(AP) = 9{\cdot}6929 - 10 & \log\cos(BP) = 8{\cdot}7572 - 10 \\ \hline \log(x_P - x_A) = 2{\cdot}8264 & \log(x_P - x_A) = 1{\cdot}7278. \end{array}$$

és innen (kereken):

$$x_P - x_A = \mathbf{670}, \qquad x_P - x_B = \mathbf{53}.$$

Másrészt*

$$\begin{array}{ll} \log t_a = 3{\cdot}1335 & \log t_b = 2{\cdot}9706 \\ \log\sin(AP) = 9{\cdot}9395 - 10\,(n) & \log\sin(BP) = 9{\cdot}9993 - 10 \\ \hline \log(y_P - y_A) = 3{\cdot}0730 \quad (n) & \log(y_P - y_B) = 2{\cdot}9699 \end{array}$$

és innen

$$y_P - y_A = -\mathbf{1183}, \qquad y_P - y_B = \mathbf{933}.$$

Végre a keresett P pont koordinatái (meterekben kifejezve)

$$x_P = x_A + (x_P - x_A) = 5046 + 670 = x_B + (x_P - x_B) = 5663 + 53 = \mathbf{5716}$$

és

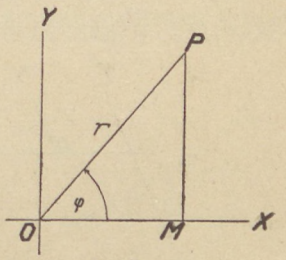
$$y_P = y_A + (y_P - y_A) = 4578 - 1183 = y_B + (y_B - y_B) = 2462 + 933 = \mathbf{3395}.$$

A decimeterekben a két számítás már eltéréseket mutatna. Ez az eltérés onnan ered, hogy csak közelítő számítást végeztünk. Ha nagyobb pontosság szükséges, akkor a négyjegyű logarithmusok helyett többjegyűekkel kell számolnunk.

III. A koordináták transzformációja.

A derékszögű és a polárkoordináták kapcsolata.

181. §. Geometriai kérdések analitikus tárgyalásánál sokszor kívánatos az eredeti koordinatarendszerről más, új koordinatarendszerre áttérni. Ezt az áttérést a koordináták *transzformációjának* nevezzük. Az eredeti és az új koordináták közötti kapcsolatot kifejező képleteket *transzformáció-képleteknek* mondjuk.



47. ábra.

Ha pl. (47. ábra) az OXY derékszögű rendszerről oly polárkoordinatákra térünk át, melyeknek kezdőpontja szintén O-ba esik és melyeknél a polárszöget OX-től számítjuk, akkor a P pont $x = OM$, $y = MP$ derékszögű és r, φ polárkoordinatái között a következő kapcsolat van:

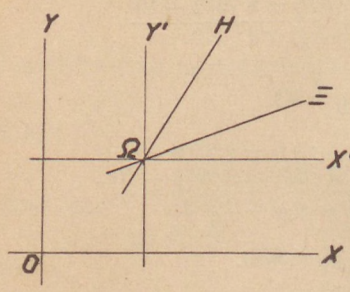
$$x = r\cos\varphi, \qquad y = r\sin\varphi.$$

A parallelkoordináták transzformációja.

182. §. A legfontosabb transzformációknál az eredeti és az új koordináták egyaránt *parallelkoordináták*. Különösen két eset érdemel figyelmet. Az első esetben az új rendszerben a tengelyek iránya ugyanaz,

* A következőkben valamely logarithmus mellé írt (n) azt jelenti, hogy a logarithmus jele alatt álló szám negativ és a logarithmus az abszolut értéknek logarithmusa.

mint az eredetiben, csak a kezdőpont más. Ezt az esetet a koordinatarendszer *eltolásának* mondjuk. A másik esetben a két koordinatarendszernek közös kezdőpontja van, de a két rendszerben a tengelyek különböző irányúak.



48. ábra.

Ha valamely OXY parallelkoordinatarendszerről bármilyen más $\Omega\Xi H$ parallelkoordinatarendszerre térünk át (48. ábra), akkor az átmenet két olyan lépésre bontható, melyek az említett speciális természetűek. Ugyanis OXY-ről először áttérhetünk oly $\Omega X'Y'$ rendszerre, melynek kezdőpontja már az új Ω kezdőpont, de melyben a tengelyek iránya még megegyezik az OX, OY eredeti tengelyek irányával. Azután pedig az $\Omega X'Y'$ rendszerről a tengelyek irányának megváltoztatásával áttérhetünk $\Omega\Xi H$-ra.

183. §. A koordinatarendszer eltolásánál (49. ábra) az eredeti

$$x = OM, \quad y = MP$$

és az új

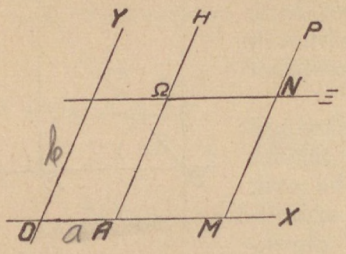
$$\xi = \Omega N, \quad \eta = NP,$$

koordinaták között az

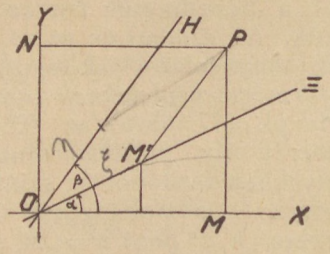
$$x = \xi + a, \quad y = \eta + b \qquad \text{I)}$$

kapcsolat van, hol $a = OA$ és $b = A\Omega$ az új kezdőpontnak az eredeti tengelyekre vonatkoztatott koordinatái.

A koordinatatengelyek irányának megváltoztatásánál arra az esetre szorítkozhatunk, melyben az eredeti és az új koordinatarend-



49. ábra.



50. ábra.

szer közül legalább az egyik derékszögű. Ha ugyanis valamely A ferdeszögű rendszerről valamely B ferdeszögű rendszerre kell áttérnünk, akkor ezt az áttérést két lépésben végezhetjük oly módon, hogy A-ról áttérünk valamely A' derékszögű rendszerre és azután erről B-re.

Legyen most már (50. ábra) OXY és $O\Xi H$ két oly koordinatarendszer, melyeknek közös kezdőpontjuk van. OXY legyen derékszögű koordinatarendszer, $O\Xi H$ lehet szintén derékszögű, de lehet ferdeszögű is.

A P pont x, y derékszögű koordinatái OP-nek az OX és OY tengelyen való derékszögű vetületei. OP-t a vetítésnél az $OM' = \xi$

és $M'P=\eta$ darabokból álló törött vonallal pótolhatjuk. Ha az új $O\Xi$ és OH tengelyek a régi OX tengellyel α ill. β szöget zárnak be, akkor az említett két vonaldarabnak OX-re vetett projekciói:

$$\xi\cos\alpha, \quad \eta\cos\beta,$$

az OY--ra vetett projekciói pedig

$$\xi\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right), \quad \eta\cos\left(\frac{\pi}{2}-\beta\right)$$

vagyis

$$\xi\sin\alpha, \quad \eta\sin\beta.$$

Tehát

$$\begin{aligned} x &= \xi\cos\alpha + \eta\cos\beta, \\ y &= \xi\sin\alpha + \eta\sin\beta. \end{aligned} \qquad \text{II)}$$

Ezek a képletek

$$\begin{aligned} x &= a_{11}\xi + a_{12}\eta, \\ y &= a_{21}\xi + a_{22}\eta \end{aligned}$$

alakúak, hol az a-k állandók. Itt a ξ és η együtthatóiból alkotott determináns értéke

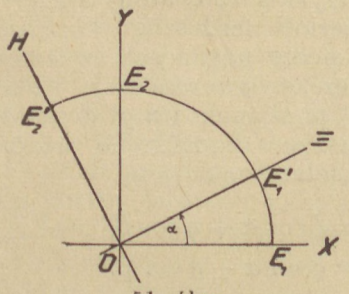
$$\cos\alpha\sin\beta - \sin\alpha\cos\beta = \sin(\beta-\alpha),$$

tehát a zérustól különböző. Ennélfogva a transzformáció-képleteket ξ és η szerint megoldhatjuk. Ily módon az eredetiekhez hasonló alakú

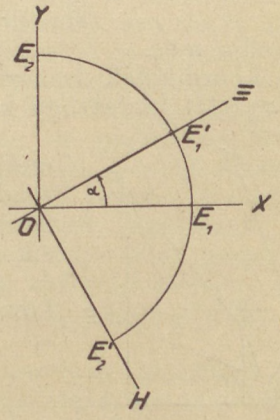
$$\begin{aligned} \xi &= a'_{11}x + a'_{12}y \\ \eta &= a'_{21}x + a'_{22}y \end{aligned}$$

képleteket kapunk. Szóval x, y és ξ, η *kölcsönösen egymásnak homogén lineáris függvényei.*

184. §. A tengelyek irányának megváltoztatásánál különösen fontos az az eset, melyben az eredeti és az új rendszer egyaránt derékszögű. Ekkor a transzformációt *orthogonálisnak* mondjuk.



51. ábra.



52. ábra.

Itt két lehetőséget kell megkülönböztetnünk. Meglehet (51. ábra), hogy az a negyed-körülforgás, mely OX pozitiv felét OY pozitiv felébe viszi át, egyenlő értelmű avval, mely $O\Xi$ pozitiv felét OH pozitiv felébe viszi át. De ez a két negyed-körülforgás lehet egymással ellenkező értelmű is (52. ábra). Az első esetben azt mond-

juk, hogy a két koordinatarendszer egyenlő értelmű és a transzformációt a koordinatarendszer *elforgatásának* nevezzük. Az utóbbi esetben a két koordinatarendszert ellenkező értelműnek mondjuk.

Egyenlő értelmű koordinatarendszerek esetében az előbbi § II) képleteiben $\beta = \alpha + \frac{\pi}{2}$. Tehát ekkor:

$$x = \xi \cos\alpha - \eta \sin\alpha,$$
$$y = \xi \sin\alpha + \eta \cos\alpha.$$

A *transzformáció determinánsa*, vagyis a ξ és η együtthatóiból alkotott determináns:

$$\begin{vmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{vmatrix} = \cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 1.$$

Ha a két koordinatarendszer ellenkező értelmű, akkor $\beta = \alpha - \frac{\pi}{2}$. Ebben az esetben

$$x = \xi \cos\alpha + \eta \sin\alpha,$$
$$y = \xi \sin\alpha - \eta \cos\alpha.$$

A transzformáció determinánsa itt -1.

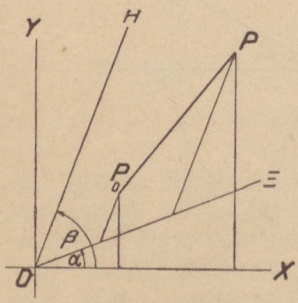
Két pontnak ferdeszögű koordinatákban kifejezett távolsága.

185. §. Az (x_0, y_0), (x_1, y_1) derékszögű koordináták által meghatározott P_0, P pontokra nézve $r = P_0P$ négyzetét az

$$r^2 = (x_1 - x_0)^2 + (y_1 - y_0)^2 \qquad 1)$$

képlet adja meg.

A koordináták transzformációja arra képesít bennünket, hogy P_0P négyzetét ferdeszögű koordináták esetében is felírhassuk.



53. ábra.

Legyen ugyanis (53. ábra) $O\Xi H$ valamely tetszésszerinti ferdeszögű koordinatarendszer, OXY pedig ugyancsak az O kezdőponttal bíró derékszögű rendszer. Akkor a sík bármely P pontjának (x, y) derékszögű és (ξ, η) ferdeszögű koordinatái között a következő kapcsolat van:

$$x = \xi \cos\alpha + \eta \cos\beta,$$
$$y = \xi \sin\alpha + y \sin\beta.$$

Ez a kapcsolat érvényes a P_0-nak (x_0, y_0) derékszögű és (ξ_0, η_0) ferdeszögű koordinatái között, valamint P_1-nek kétféle koordinatái között is. Tehát

$$x_1 - x_0 = (\xi_1 - \xi_0)\cos\alpha + (\eta_1 - \eta_0)\cos\beta,$$
$$y_1 - y_0 = (\xi_1 - \xi_0)\sin\alpha + (\eta_1 - \eta_0)\sin\beta.$$

Ha ezt tekintetbe vesszük, az 1) alatti képlet a következőbe megy át:

$$r^2 = (\xi_1 - \xi_0)^2 (\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha) + (\eta_1 - \eta_0)^2 (\cos^2 \beta + \sin^2 \beta) + \\ + 2 (\xi_1 - \xi_0)(\eta_1 - \eta_0)(\cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta).$$

Ha az $O\Xi H$ rendszer tengelyei által bezárt szöget ω-val jelöljük, akkor

$$\cos \omega = \cos (\beta - \alpha) = \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta.$$

Tehát az r négyzetére talált képlet végleges alakjában így írható:

$$r^2 = (\xi_1 - \xi_0)^2 + (\eta_1 - \eta_0)^2 + 2 (\xi_1 - \xi_0)(\eta_1 - \eta_0) \cos \omega. \qquad 2)$$

A háromszög területe.

186. §. A koordinaták transzformációjának alkalmazására további példát szolgáltat a három szögpontja által meghatározott háromszög területének kiszámítása. A terület képlete (mint majd látjuk) közvetlenül felírható, ha oly polárkoordinatákat használunk, melyeknek kezdőpontja a háromszögnek valamelyik szögpontjába esik. A feladatot derékszögű koordináták esetében azután a koordináták transzformációja segítségével oldjuk meg.

A területnek nem pusztán abszolut értékét határozzuk meg, hanem a területnek előjelet is tulajdonítunk. Ennek megállapításánál a háromszögnek szögpontjaira nézve bizonyos sorrendet állapítunk meg és a háromszögnek pozitiv vagy negativ területet tulajdonítunk aszerint, hogy (a sík színén mozogva) a háromszög kerületének a szögpontok sorrendje által megszabott körüljárásánál melyik kezünk van kifelé. Elméleti vizsgálatoknál rendesen oly koordinatarendszert használunk (54. ábra), hogy a kezdőpont és a koordinatatengelyek egységpontjai által meghatározott OE_1E_2 háromszögnek a szögpontok itt adott sorrendje által megszabott körüljárásánál *jobb* kezünk van kifelé. Ilyen koordinatarendszer esetében minden oly háromszöget, melynek megszabott körüljárásánál jobb kezünk van kifelé, pozitiv körüljárásúnak és pozitiv területűnek mondunk, az oly háromszöget pedig, melynek körüljárásánál bal kezünk van kifelé, negativ körüljárásúnak és negativ területűnek mondjuk. Ha ellenben oly koordinatarendszert használunk, hogy az OE_1E_2 háromszögnek a szögpontok sorrendje által megszabott körüljárásnál bal kezünk van kifelé, akkor a terület előjelére nézve is a fordított megállapodást tesszük. Az OE_1E_2 háromszögnek tehát mindig pozitiv területet tulajdonítunk.

A terület *előjelének* megállapítása szorosan összefügg avval, hogy a síkban milyen forgást tekintünk pozitivnak. Ha az óramutató mozgásával ellenkező forgás a pozitiv, akkor a háromszögnek oly körüljárását tekintjük *pozitivnak*, melynél jobb kezünk van kifelé. A forgás pozitiv értelmének ellenkező megállapítása a háromszög körüljárásának előjelére nézve is az ellenkező megállapítást vonja maga után.

187. §. Az 54. és 55. ábrában P és Q polárkoordinatái (r_1, φ_1), (r_2, φ_2). A polárszögek értékeit mindig úgy választhatjuk, hogy

különbségük abszolut értéke kisebb mint π. Ekkor az OPQ háromszög a szögpontok e felsorolásánál pozitiv vagy negativ körüljárású aszerint, hogy $\varphi_2 - \varphi_1$ pozitiv (54. ábra) vagy negativ (55. ábra). Az első esetben egyszersmind $\sin(\varphi_2 - \varphi_1)$ is pozitiv, az utóbbi esetben pedig negativ.

Most már a geometriából ismeretes, hogy OPQ területének abszolut értéke

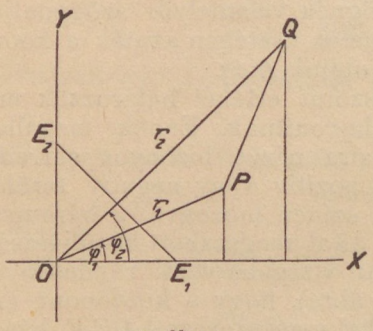
$$\frac{1}{2} r_1 r_2 \sin |\varphi_2 - \varphi_1|.$$

Ha még a terület előjelét is tekintetbe vesszük, akkor azt találjuk, hogy a háromszög kétszeres területe

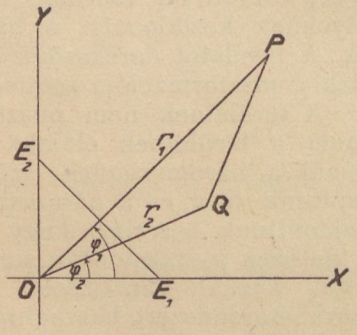
$$2t = r_1 r_2 \sin(\varphi_2 - \varphi_1). \qquad 1)$$

Ez a képlet így is írható:

$$2t = r_1 r_2 (\sin\varphi_2 \cos\varphi_1 - \cos\varphi_2 \sin\varphi_1) =$$
$$= (r_1 \cos\varphi_1)(r_2 \sin\varphi_2) - (r_1 \sin\varphi_1)(r_2 \cos\varphi_2).$$



54. ábra.



55. ábra.

Ha tekintetbe vesszük a derékszögű és polárkoordináták kapcsolatát, akkor OPQ-nak kétszeres területét a P és Q pontok (x_1, y_1), (x_2, y_2) derékszögű koordinatáiban így fejezhetjük ki:

$$2t = x_1 y_2 - y_1 x_2 = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix}. \qquad 2)$$

A sík bármely három

$$A = (x_1, y_1), \quad B = (x_2, y_2), \quad C = (x_3, y_3)$$

pontja által meghatározott ABC háromszög kétszeres területe

$$2t = \begin{vmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 \end{vmatrix}. \qquad 3)$$

Ha ugyanis (az 56. ábrában) a kezdőpontot eltoljuk A-ba, akkor A, B, C derékszögű koordinatái rendre

$$(0, 0), \quad (x_2 - x_1, y_2 - y_1), \quad (x_3 - x_1, y_3 - y_1).$$

Tehát a 2) képlet értelmében

$$2t = \begin{vmatrix} x_2-x_1 & y_2-y_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 \end{vmatrix}.$$

A jobboldalon álló másodfokú determináns egyenlő a következő harmadfokúval:

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & x_2-x_1 & y_2-y_1 \\ 1 & x_3-x_1 & y_3-y_1 \end{vmatrix}.$$

Ha itt az első oszlopot x_1-gyel szorozva hozzáadjuk a másodikhoz és y_1-gyel szorozva a harmadikhoz, akkor valóban a 3) alatti determinánst kapjuk.

IV. Az egyenes egyenlete.

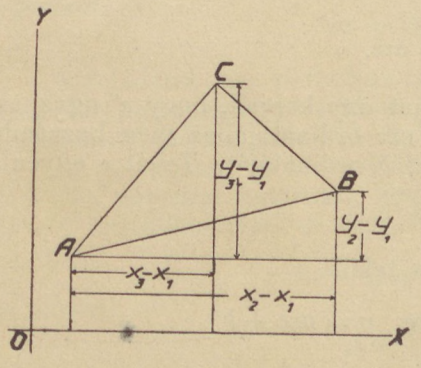
A kezdőponton keresztül húzott egyenes egyenlete.

188. §. Az OY egyenes egyenlete

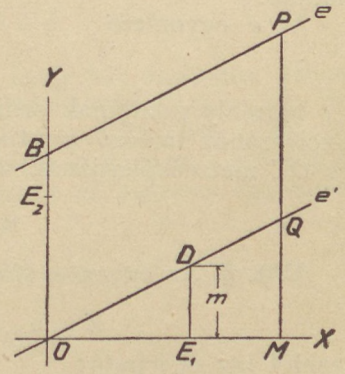
$$x = 0. \qquad 1)$$

Minden más esetben az O-n keresztül húzott e' egyenes egyenletét (akár derékszögű, akár ferdeszögű parallelkoordináták esetében) a következő módon kapjuk meg.

Minthogy e' iránya OY irányától különböző, azért az OX tengely E_1 egységpontján keresztül az OY-nal párhuzamosan húzott egyenes



56. ábra.



57. ábra.

e'-t valamely D pontban metszi (57. ábra). A D pontnak m ordinatája az e' irányát teljesen megszabja és azért az e' egyenes *irányhatározójának* neveztetik. Derékszögű koordináták esetében m annak a szögnek tangense, melyet OX pozitiv értelme és e' pozitiv értelme egymással bezárnak és azért ebben az esetben az irányhatározót *iránytangensnek* is nevezzük. (Az iránytangens nyilván független attól, hogy e'-n a haladás pozitiv értelmét hogyan választjuk.)

Az OD egyenesnek bármely $Q = (x, y)$ pontjára nézve

$$MQ : E_1D = OM : OE_1,$$

azaz

$$y : x = m : 1 \qquad 2)$$

és innen

$$y = mx. \qquad 3)$$

(A 2) alatti proporció és a 3) alatti egyenlet az *előjelekre nézve* is helyes, mert P koordinatái egyenlő vagy ellenkező jelűek aszerint, hogy m pozitiv vagy negativ.)

Az OD fölött vagy alatt levő pontok koordinatái a 3) alatti egyenletet nem elégítik ki. Ha ugyanis (x, y) az OD fölött levő P pontnak koordinatái, akkor OD-nek az x abszcisszához tartozó Q pontjának ordinatája mx; tehát P ordinatája nagyobb, mint mx. Ha ellenben P az OD alatt van, akkor ordinatája kisebb, mint mx.

Az egyenes általános egyenlete.

189. §. Most már elejtjük azt a megszorítást, hogy az egyenes az O-n keresztül megy.

Ha az egyenes az OY tengellyel párhuzamos, akkor egyenlete

$$x = a, \qquad 1)$$

hol a az OX tengellyel való A metszéspont abszcisszája.

Minden más e egyenes irányát a vele párhuzamosan O-n keresztül húzott e' egyenes m irányhatározójával jellemezhetjük (57. ábra). Az m-et ezért egyszersmind az e irányhatározójának is mondjuk.

Az e' egyenlete

$$y = mx.$$

Az e bármely pontjának ordinatáját úgy kapjuk, hogy e' ugyanazon abszcisszához tartozó pontjának mx ordinatájához még hozzáadjuk e és OY metszéspontjának, B-nek, b ordinatáját. Tehát e egyenlete

$$y = mx + b. \qquad 2)$$

190. §. Az egyenes számára talált

$$x = a \quad \text{illetve} \quad y = mx + b$$

egyenlet így is írható:

$$x - a = 0 \quad \text{illetve} \quad mx - y + b = 0.$$

Vagyis *bármely egyenes valamely*

$$Ax + By + C = 0 \qquad 1)$$

elsőfokú egyenlettel jellemezhető.

Itt A, B, C állandó, azaz x-től és y-tól független együtthatók.

Fordítva *bármely* 1) *alakú egyenlet, ha A és B nem egyidejüleg zérus, valamely egyenesnek egyenlete.*

Valóban, ha B a zérustól különböző, akkor az 1) alatti egyenletnek y szerint megoldott alakja

$$y = mx + b,$$

hol

$$m = -\frac{A}{B}, \quad b = -\frac{C}{B}.$$

Ekkor tehát az 1) alatti egyenlet annak az egyenesnek egyenlete, mely az OY tengely $\left(0, -\frac{C}{B}\right)$ pontján keresztül az $m = -\frac{A}{B}$ irányhatározó által meghatározott irányban van húzva.

Eltünő B esetében az

$$Ax + C = 0$$

egyenletet azok és csak azok a pontok elégítik ki, melyeknek abszcisszája $-\frac{C}{A}$. Ezeknek a pontoknak geometriai helye szintén egyenes vonal. A kimondott tétel tehát mindenkor helyes.

Ha az egyenes egyenletében $A=0$, akkor az m irányhatározó zérus, vagyis az egyenes párhuzamos az OX tengellyel. Ha $B=0$, akkor az egyenes párhuzamos az OY tengellyel. C-nek (az ú. n. *abszolut tagnak)* eltünése azt jelenti, hogy az egyenes keresztül megy a kezdőponton.

Különösen egyszerű elsőfokú egyenletek

$$y = 0, \quad \text{illetve} \quad x = 0;$$

az előbbi az OX tengelynek, az utóbbi az OY tengelynek egyenlete.

191. §. Feladatok. 1. *Megrajzolandó az az egyenes, melynek egyenlete:*

$$5x + 2y - 3 = 0.$$

A feladatot úgy oldhatjuk meg, hogy két szabadon választott abszcisszához meghatározzuk az egyenes megfelelő pontjait. Ha pl. a választott abszcisszák -4 és 6, akkor a számítás a következő.

Az egyenesen az $x=-4$ abszcisszához tartozó pont ordinatáját az az egyenlet határozza meg, melybe az egyenes egyenlete az $x=-4$ helyettesítésnél átmegy. Tehát

$$5(-4) + 2y - 3 = 0$$

és innen

$$y = \frac{23}{2} = 11{\cdot}5.$$

Az egyenesnek az $x=6$ abszcisszához tartozó pontjára nézve

$$5 \cdot 6 + 2y - 3 = 0.$$

és innen

$$y = \frac{-27}{2} = -13{\cdot}5.$$

Az egyenes tehát a

$$(-4, 11{\cdot}5), \quad (6, -13{\cdot}5)$$

pontokon átmegy. Ennek a két pontnak összekötése adja meg a keresett egyenest.

Ugyanezt a feladatot úgy is oldhatjuk meg, hogy meghatározzuk az egyenesnek a két koordinatatengellyel való metszéspontjait.

Az egyenesnek az OX tengelyen levő pontjára nézve

$$y = 0 \text{ és } 5x - 3 = 0.$$

Az utóbbi egyenletből

$$x = \frac{3}{5} = 0{\cdot}6.$$

Az egyenesnek az OY tengelyen levő pontjára nézve

$$x = 0 \text{ és } 2y - 3 = 0.$$

Az utóbbi egyenletből

$$y = \frac{3}{2} = 1{\cdot}5.$$

Tehát az egyenes a koordinatatengelyeket a

$$(0{\cdot}6,\ 0) \quad (0,\ 1{\cdot}5)$$

pontokban metszi.

2. *Megrajzolandó az az egyenes, melynek egyenlete:*

$$3x - 4y + 1 = 0.$$

Közvetlenül világos, hogy (1, 1) az egyenesnek egyik pontja. Egy második pont helyett az egyenes irányát határozhatjuk meg. Ezt az $m = -\frac{A}{B} = \frac{3}{4}$ irányhatározó szabja meg. Az egyenest úgy rajzolhatjuk meg, hogy az E_1-en keresztül OY-nal párhuzamosan húzott egyenesen meghatározzuk azt D pontot, melynek koordinatái:

$$(1,\ m) = \left(1,\ \frac{3}{4}\right).$$

Az OD egyenes iránya megadja a keresett egyenesnek irányát. Ha az ismeretes (1, 1) ponton keresztül OD-vel párhuzamost húzunk, akkor megkapjuk a keresett egyenest.

Adott ponton keresztül adott irányban húzott egyenes.

192. §. A $P_1 = (x_1, y_1)$ ponton keresztül az OY tengellyel párhuzamosan húzott egyenes egyenlete

$$x = x_1.$$

A $P_1 = (x_1, y_1)$ ponton keresztül az m irányhatározó által meghatározott irányban vont egyenes egyenletét a következő módon állítjuk elő.

Az adott irányban húzott bármely egyenes egyenlete így írható:

$$y = mx + b.$$

Hogy az egyenes keresztül menjen az adott $P_1 = (x_1, y_1)$ ponton, b úgy választandó, hogy P_1 koordinatái kielégítsék az egyenletet, vagyis hogy

$$y_1 = mx_1 + b$$

legyen. Innen b számára az $y_1 - mx_1$ értéket kapjuk. A keresett egyenlet tehát ez:

$$y = mx + y_1 - mx_1,$$

vagy szokottabb alakban

$$y - y_1 = m(x - x_1).$$

Példa. A (3, 4) ponton át húzott, az OX tengellyel $\frac{\pi}{4}$ szöget bezáró egyenesre nézve (derékszögű koordináták esetében) $m=1$. Ennek az egyenesnek egyenlete tehát

$$y - 4 = x - 3,$$

azaz

$$y = x + 1.$$

Két pont által meghatározott egyenes.

193. §. Legyen adva két pont (58. ábra)

$$P_1 = (x_1, y_1), \quad P_2(x_2, y_2).$$

Meghatározandó a két pontot összekötő P_1P_2 egyenes egyenlete.

Ha x_1 és x_2 egymással egyenlő, akkor az összekötő egyenes párhuzamos az OY tengellyel és egyenlete nyilván

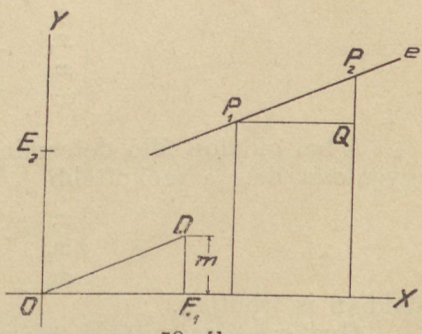
$$x - x_1 = 0.$$

Ha x_1 és x_2 egymástól különböző, akkor az egyenes nem lehet párhuzamos OY-nal és egyenlete a következő módon határozható meg.

Minthogy a keresett egyenes keresztül megy P_1-en és OY-nal nem párhuzamos, azért egyenlete minden esetre ily alakban írható

$$y - y_1 = m(x - x_1). \qquad 1)$$

Csak még m-et kell úgy meghatároznunk, hogy éppen P_1P_2 irányhatározója legyen. A P_1QP_2 és OE_1D háromszögek hasonlósága miatt



58. ábra.

$$QP_2 : P_1Q = E_1D : OE_1$$

vagyis

$$(y_2 - y_1) : (x_2 - x_1) = m : 1.$$

Tehát *a két pont által meghatározott egyenes irányhatározója egyenlő a két pont ordinatáinak különbségéből és az abszcisszáik különbségéből alkotott*

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

hányadossal.

Ha ezt az értéket m helyébe 1) alatt behelyettesítjük, megkapjuk a P_1P_2 egyenes egyenletét.

194. §. Abból is indulhatunk ki, hogy bármely egyenes egyenlete az

$$Ax + By + C = 0 \qquad 1)$$

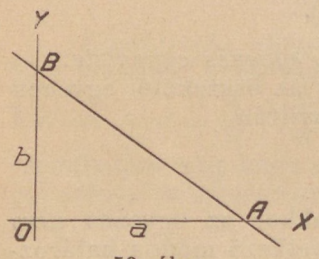
alakban írható és hogy ez az egyenlet akkor és csak akkor ábrázolja a P_1P_2 egyenest, ha

$$\begin{aligned} Ax_1 + By_1 + C &= 0 \\ Ax_2 + By_2 + C &= 0. \end{aligned} \qquad 2)$$

A 2) alatti képletek az A, B és C viszonyának meghatározására alkalmas homogen lineáris egyenletrendszert alkotnak. Ennek értelmében A, B, C úgy viszonylanak egymáshoz, mint az

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ \cdot & \cdot & \cdot \end{vmatrix}$$

determináns utolsó, itt ki nem írt, sorának elemeihez tartozó aldeterminánsok. Ha még tekintetbe vesszük, hogy az 1) alatti egyenlet jelentése nem változik, ha az A, B, C együtthatókat valamely (a zérustól különböző) λ számmal megszorozzuk, akkor A, B és C értékeit az előbb említett aldeterminánsokkal éppen *egyenlőknek* választhatjuk. Ha 1) alatt A, B és C helyébe ezeket az aldeterminánsokat helyettesítjük, a keresett egyenletet a következő alakban kapjuk meg:



59. ábra.

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x & y & 1 \end{vmatrix} = 0$$

A bal oldalon álló determináns sorainak felcserélése után P_1P_2 egyenletét még a szokottabb

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \end{vmatrix} = 0 \qquad 2)$$

alakban is írhatjuk.

Gyakorlati számításoknál inkább az előbbi §-ban leírt eljárást, elméleti vizsgálatokban inkább a most levezetett 2) alatti egyenletet alkalmazzuk.

Példák. 1. *Határoztassék meg a*

$$P_1 = (5, 6), \quad P_2 = (9, 7)$$

pontokat összekötő egyenes egyenlete.

A P_1 ponton keresztül menő tetszőleges (de OY-nal nem párhuzamos) egyenes egyenlete:

$$y - 6 = m(x-5).$$

Esetünkben

$$m = \frac{y_2-y_1}{x_2-x_1} = \frac{1}{4} = 0{\cdot}25.$$

Tehát a keresett egyenlet:

$$y - 6 = 0{\cdot}25(x-5).$$

2. *A koordinátatengelyeket az*

$$A = (a, 0), \quad B = (0, b)$$

pontokban metsző egyenesnek (59. ábra) *egyenlete:*

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ a & 0 & 1 \\ 0 & b & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Ha még kifejtünk és ab-vel osztunk, akkor végre az

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} - 1 = 0$$

egyenletet kapjuk.

A mondottak alapján pl. a

$$3x + 4y - 5 = 0$$

egyenlet által ábrázolt egyenest a következő módon is meghatározhatjuk. Az egyenlet baloldalát elosztjuk 5-tel és az így nyert

$$\frac{3x}{5} + \frac{4y}{5} - 1 = 0$$

egyenletet összehasonlítjuk evvel:

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} - 1 = 0.$$

Ekkor azt találjuk, hogy az egyenes a koordinátatengelyeket az

$$A = \left(\frac{5}{3}, 0\right), \quad B = \left(0, \frac{5}{4}\right)$$

pontokban metszi.

Az egyenes egyenletére vonatkozólag végzett tárgyalásaink nemcsak derékszögű koordináták esetében igazak, hanem ferdeszögűek esetében is.

Az egyenesnek polárkoordinátákban kifejezett egyenlete.

195. §. Az egyenesnek derékszögű parallelkoordinátákban kifejezett egyenlete ilyen alakú:

$$Ax + By + C = 0.$$

Ha O-t egyszersmind a polárkoordináták kezdőpontjának, OX-et pedig a polárkoordinatarendszer tengelyének választjuk, akkor

$$x = r\cos\varphi, \quad y = r\sin\varphi.$$

Tehát az egyenesnek polárkoordinatákban kifejezett egyenlete ilyen:

$$r(A\cos\varphi + B\sin\varphi) + C = 0.$$

HATODIK FEJEZET.

A FÜGGVÉNYTAN ALAPFOGALMAI.

I. A függvény fogalma.

Állandó és változó mennyiségek.

196. §. Az egyenes

$$y = mx + b$$

egyenletében az m, b és az x, y betüknek lényegesen különböző szerepe van.

Az m és b együtthatók ugyanannak az egyenesnek vizsgálata közben *állandók*. Az x és y koordináták ellenben az egyenesre vonatkozó vizsgálat folyamán végtelen sok értéket vehetnek fel, az egyenes minden pontjára nézve másokat.

Ha valamely mennyiség, úgy mint itt x és y, a kutatás folyamán különböző értékeket vehet fel, akkor azt a mennyiséget *változónak* nevezzük.

Az egyenes pontjaira nézve x és y értékei közül mindig az egyik megszabja a másikat. Összefüggésüket az egyenes egyenlete fejezi ki.

A geometriában, a természettudományokban és a mathematika egyéb alkalmazásaiban lépten-nyomon arról van szó, hogy bizonyos változó mennyiségek milyen értékeket vehetnek fel, továbbá hogy két vagy több változónak összetartozó értékei között milyen összefüggés van.

A mathematikának azt a részét, mely a változók között fennálló kapcsolatok vizsgálatánál felmerülő fogalmakkal foglalkozik, *analizisnek* vagy (a legtágabb értelemben vett) *függvénytannak* nevezzük.

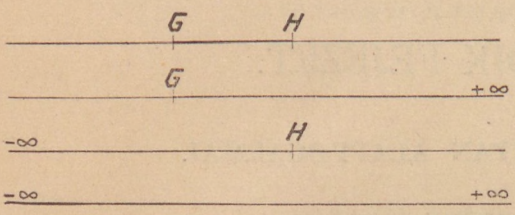
Az analizis elvont vizsgálatainál a «*változók*» tárgyi jelentése (út, idő, stb.) nem jön tekintetbe, hanem csak az, hogy minő értékeket vehetnek fel és hogy összetartozó értékeik hogyan függenek egymástól.

Számköz. Környezet.

197. §. Azoknak az értékeknek összességét, melyeket valamely változó felvehet, a *változó tartományának* mondjuk. Ezt az elnevezést használjuk azoknak a *pontoknak* összességére is, melyek a szá-

mok geometriai ábrázolásánál a változó értékeinek megfelnek, sőt ez az elnevezésnek eredeti jelentése. A változó minden egyes értékét, valamint az ábrázolására szolgáló pontot is, a tartomány egy-egy *helyének* mondjuk.

Bennünket leginkább oly változók érdekelnek, melyeknek tartománya (60. ábra) véges vagy végtelen számköz (intervallum).



60. ábra.

A $(G \ldots H)$ *véges számközön* a G és H számok közé eső számok összességét értjük, esetleg a G és H *határhelyeket* is beleértve. A G és H közé eső helyeket (G és H kizárásával) a számköz *belső helyeinek* mondjuk. Ha a két határhelyet is a számközhöz számítjuk, akkor a számköz *zárt*. Ellenkező esetben a számköz egyik vagy mindkét végén *nyílt*. A geometriai ábrázolásnál (60. ábra) véges számköznek egyenesdarab felel meg.

A számköz egyik vagy mindkét határa határozott előjelű végtelen is lehet. Így a következő *végtelen számközök* keletkeznek:

1. $(G \ldots +\infty)$, vagyis a G-nél nagyobb számok tartománya, esetleg G-t is beleértve,

2. $(-\infty \cdots H)$, vagyis a H-nál kisebb számok tartománya, esetleg H-t is odaértve.

3. $(-\infty \cdots +\infty)$, a valós számok összessége.

198. §. A véges $(G \ldots H)$ számközt úgy is meghatározhatjuk, hogy megadjuk az

$$a = \frac{G+H}{2}, \quad \delta = \frac{|H-G|}{2}$$

számokat, vagyis a számköznek *közepét* és *fél hosszát*. Ebben a fölfogásban az $(a-\delta, \ldots, a+\delta)$ számközt az a hely δ sugarú *környezetének* mondjuk.

Független változó és függvény.

199. §. Tartozzék valamely x változónak minden értékéhez, akárhogyan választjuk azt bizonyos T számtartományban, egy másik változónak, y-nak, egy vagy több megfelelő értéke. Ekkor azt mondjuk, hogy y az x-nek a T tartományban értelmezett *függvénye*; x-et *független*, y-t *függő változónak* nevezzük. Ha x minden értékéhez y-nak csak egy-egy értéke tartozik, akkor y-t *egyértékű* függvénynek mondjuk, ellenkező esetben *többértékűnek*.

A T tartományt, vagyis az x értékeinek összességét, a függvény *értelmezési tartományának* nevezzük. A megfelelő y értékek összességét a függvény *értékkészletének* mondjuk.

Például vehessen fel x minden valós értéket; y jelentse x-nek sinusát. Ekkor y az x-nek egyértékű függvénye. Az értelmezési tartomány a valós számok összességéből áll. A függvény értékkészletét a $(-1 \ldots 1)$ számköz alkotja.

Két változó törvényszerű kapcsolatának vizsgálatánál csak föl-

fogás dolga, hogy melyiket tekintjük a független változónak és melyiket a függő változónak.

Például egy függőlegesen felhajított súlyos test mozgását vizsgálva, az elhajítás pillanatától számított minden t időnek megfelel egy bizonyos s elért magasság. Ebben a felfogásban s a t-nek függvénye, még pedig egyértékű függvénye. De az a felfogás is jogosult, hogy t-t tekintjük az s függvényének. Ily módon *kétértékű* függvényt kapunk, mert a megfigyelt pont minden helyzetet kétszer ér el, először emelkedése, másodszor leesése közben.

Ha egyszer csak az emelkedésre, másszor csak a leszállásra fordítjuk figyelmünket, akkor két egyértékű függvényt kapunk. Valahányszor hasonló módon valamely többértékű függvényről több egyértékűre térünk át, azt mondjuk, hogy a függvényt egyértékű ágakra bontjuk.

200. §. Ha a felhajítás c kezdeti sebességgel történik, g a nehézségi gyorsulást jelenti és s-t mint t függvényét fogjuk fel, akkor t bármely értékéhez s megfelelő értékét a

$$ct - g\frac{t^2}{2}$$

kifejezésből úgy kaphatjuk meg, hogy t értékét ebbe a kifejezésbe behelyettesítjük.

Valahányszor a függvény értékeit valamely kifejezésből így behelyettesítéssel kaphatjuk meg, azt mondjuk, hogy az a kifejezés a függvényt *explicite* adja meg (jellemzi, ábrázolja).

Ha x valamely függvényét lehetőleg egyszerűen vagy általánosságban akarjuk megjelölni, akkor számára az $f(x)$, $\varphi(x)$, sít. jelet használjuk. Az $f(x)$ függvénynek valamely meghatározott $x=a$ *helyen való értékét* (vagy *értékeit*) azaz $f(x)$-nek azt az (egy vagy több) értékét, mely a független változó valamely a értékének megfelel, $f(a)$-val jelöljük. Ha pl.

$$f(x) = \frac{x+3}{x+5},$$

vagyis ha $f(x)$ az $\frac{x+3}{x+5}$ kifejezés által ábrázolt függvényt jelenti, akkor $f(4) = \frac{7}{9}$.

Az $f(x)$ jel nélkül ezt a képletet így írhatjuk:

$$\left(\frac{x+3}{x+5}\right)_{x=4} = \frac{7}{9}.$$

201. §. Megtörténhetik, hogy x-nek valamely egyértékű $f(x)$ függvénye vagy mindenütt, vagy legalább az értelmezési tartomány valamely részében úgy viselkedik, hogy valahányszor $a<b$, mindannyiszor $f(a) \leqq f(b)$. Ekkor azt mondjuk, hogy $f(x)$ az egész értelmezési tartományban, illetve annak szóban forgó részében *monoton növekedő*. Ha ellenben $f(x)$ valamely tartományban úgy viselkedik, hogy valahányszor $a<b$, mindannyiszor $f(a) \geqq f(b)$, akkor azt mondjuk, hogy $f(x)$ abban a tartományban monoton *fogyó*. Pl.

$$f(x) = x^2$$

a $(-\infty \cdots 0)$ számközben x-nek monoton fogyó, a $(0 \cdots +\infty)$ számközben pedig monoton növekedő függvénye.

A monoton növekedő és a monoton fogyó függvényeket közös néven *monoton* függvényeknek nevezzük.

Egy változó racionális függvényei.

202. §. Ha valamely függvényt oly

$$c_0 + c_1x + c_2x^2 + \cdots + c_mx^m \qquad 1)$$

alakú kifejezéssel adhatunk meg, melyben a c-k állandók, akkor ezt a függvényt és (rövidség kedvéért) az őt ábrázoló 1) alatti kifejezést is *racionális egész függvénynek* mondjuk. Ezt az elnevezést már a 37. §-ban használtuk.

Két racionális egész függvény összege, különbsége és szorzata szintén racionális egész függvény. Általában bármely kifejezés, mely x-ből és állandó számokból *az első három alapművelet* véges számú alkalmazásával van előállítva, a műveletek elvégzése után az 1) alatti alakra hozható, tehát x-nek valamely racionális egész függvényét ábrázolja. Ilyen kifejezések például a következők:

$$(x+1)(x+3) + (2+x)(2-x), \quad \frac{x(1-x)}{5}, \quad (2+x)^3.$$

Itt nemcsak az első kifejezés van az első három alapművelet véges számú alkalmazásával előállítva, hanem a többi kettő is. A második példában ugyanis az 5-tel való osztás nyilván az $\frac{1}{5}$ állandó számmal való szorzásban áll. A harmadik példában a köbre emelés csak három egyenlő tényező szorzását jelenti. A kijelölt műveletek elvégzése rendre a következő eredményekre vezet:

$$7 + 4x, \quad \frac{1}{5}x - \frac{1}{5}x^2, \quad 8 + 12x + 6x^2 + x^3.$$

Tehát a három kifejezés rendre elsőfokú (lineáris), másodfokú (quadratikus), illetve harmadfokú (kubikus) egész függvényt ábrázol.

Különösen egyszerűek az olyan lineáris függvények, melyekben az abszolut tag zérus. Ha

$$y = mx,$$

hol m a zérustól különböző állandó, akkor azt mondjuk, hogy y az x-szel *arányos*.

Ha valamely legfeljebb m-ed fokú egész függvény értékét $m+1$ helyen ismerjük, akkor a függvényt ábrázoló

$$c_0 + c_1x + c_2x^2 + \cdots + c_mx^m$$

kifejezésben a c_0, c_1, ..., c_m együtthatókat egyértelműen meg tudjuk határozni (37. §). Tehát bármely racionális egész függvény csak egy módon fejezhető ki x növekedő hatványai szerint kifejtett alakban.

203. §. Ha valamely függvény oly kifejezéssel ábrázolható, mely x-ből és adott számokból pusztán *a négy alapművelet* véges számú alkalmazásával van összeállítva, akkor ezt a függvényt (és az ábrázolására szolgáló kifejezést is) *racionális* függvénynek mondjuk. Az ily függvény vagy racionális *egész* függvény, vagy maga ugyan nem racionális egész függvény, de mint két ilyennek hányadosa írható. Az utóbbi esetben a függvényt *racionális tört függvénynek* mondjuk. Ilyen pl.

$$\frac{x+1}{1+\dfrac{1}{x-1}} = \frac{(x-1)(x+1)}{(x-1)+1} = \frac{x^2-1}{x}.$$

Több változó racionális egész függvényei.

204. §. Valamely y változó értéke *több* $x_1, x_2, \ldots, x_m$ változótól is függhet.

A legegyszerűbb többváltozós függvények az oly kifejezések, melyek $x_1, x_2, \ldots, x_m$-ből és állandókból pusztán az első három alapművelet véges számú alkalmazásával vannak előállítva. Ezeket az x-ek racionális egész függvényeinek mondjuk. Ilyen függvény pl.

$$(x_1+2x_2)^3 - (x_1+1)(x_2+3) + 2x_1x_2,$$

vagy kifejtve (és a hasonló tagokat összevonva):

$$x_1^3 + 6x_1^2x_2 + 12x_1x_2^2 + 8x_2^3 + x_1x_2 - 3x_1 - x_2 - 3.$$

A kifejtett alak valamely tagjában a kitevők összegét a tag *fokának* mondjuk. (A vizsgált tagban hiányzó változók a zérus kitevővel képzelendők; tehát a változóktól ment, ú. n. *abszolut* tagnak foka 0.) Példánkban:

$$x_1^3, \quad 6x_1^2x_2, \quad 12x_1x_2^2, \quad 8x_2^3$$

harmadfokú tagok,

$$x_1x_2$$

másodfokú, sít. A legmagasabbfokú tagoknak fokszáma a racionális egész függvény fokának neveztetik. Példánkban a felírt függvény harmadfokú (kubikus).

Ha valamennyi tag egyenlőfokú, akkor a racionális egész függvényt *homogénnek* mondjuk. Pl.

$$x_1^2 + 4x_1x_2 + 8x_2^2$$

homogén másodfokú (quadratikus) egész függvény.

Mi több változós függvényekkel majd csak elvétve foglalkozunk.

Implicite adott függvények.

205. §. Sokszor y nincs explicite mint x függvénye megadva, hanem a két változó között fennálló kapcsolatot oly

$$F(x, y) = 0$$

egyenlet határozza meg, melyet x és y összetartozó értékeinek ki kell elégíteniök. Itt $F(x, y)$ valamely adott két változós függvényt jelent. Az $F(x, y) = 0$ egyenlet segítségével értelmezett y függvényről azt mondjuk, hogy *ki nem fejtett alakban* vagy *implicite* van megadva.

Néha az implicite megadott függvényt könnyen explicite is meghatározhatjuk. Pl. ha az x és y közötti kapcsolatot az

$$x^2 + y^2 - 1 = 0$$

egyenlet fejezi ki, akkor innen

$$y = \sqrt{1-x^2}.$$

Célszerűtlen volna, ha az implicite adott függvényt mindig kifejtett alakban akarnók előállítani. A kifejtett alak, ha ugyan előállítása egyáltalában sikerül, gyakran oly bonyodalmas, hogy y tulajdonságait inkább az adott $F(x, y) = 0$ egyenletből olvassuk ki.

Függvénytáblák és skálák.

206. §. A gyakorlati szempontból fontosabb függvényekre nézve táblázatban állítják össze a független változónak különböző értékeihez tartozó függvényértékeket. A legismeretesebb ily táblázat a *logarithmus-tábla*, mely a számok 10 alapú logarithmusait foglalja magában. A függvénytáblában természetesen csak a független változó bizonyos véges számú értékére nézve állíthatjuk össze a függvény megfelelő értékeit. Sőt a táblázat ezeket sem adhatja meg teljes pontossággal, hanem csak bizonyos számú tizedesre.

Ha valamely $x=\alpha$ értékhez tartozó $f(\alpha)$ nincsen meg a táblázatban, akkor $f(\alpha)$-t még közelítőleg is csak oly esetekben határozhatjuk meg, midőn a táblázatban foglalt adatokon kívül $f(x)$-nek még egyéb tulajdonságaira is hivatkozhatunk.

A gyakorlatban előforduló függvényeknél rendesen (de nem mindig) a független változó kicsiny változásainál a függvény és a független változó egymásnak megfelelő változásai *közelítőleg arányosak*. Ebben az esetben $f(\alpha)$ kiszámítását a következő minta szerint végezhetjük.

Legyen x adott értéke

0·357.

A táblázatnak e hely környezetére vonatkozó része legyen:

x	$f(x)$	
0·30	2·746	25
0·32	2·721	24
0·34	2·697	23
0·36	2·674	24
0·38	2·650	23
0·40	2·627	

A kisebb szedésű számok az ú. n. *táblabeli differenciák* vagyis két-két függvényérték különbségei (a tizedes pont elhagyásával). Ezek a differenciák egymástól csak kevéssé különböznek, azért bizonyos joggal feltehetjük, hogy a

$$(0{\cdot}30 \ldots 0{\cdot}32),\ (0{\cdot}32 \ldots 0{\cdot}34),\ \ldots$$

számközökben a független változónak és a függvénynek összetartozó változásai közelítőleg egymással arányosak.

Most már a függvénytáblában kikeressük az adott $x=0{\cdot}357$ számhoz legközelebb fekvő, de nála *kisebb* x-et és a megfelelő $f(x)$-et. Ily módon azt találjuk, hogy

$$f(0{\cdot}34) = 2{\cdot}697.$$

Még csak azt a *javítást* kell kiszámítanunk, mely ezen az értéken végzendő, hogy a bennünket érdeklő értéket kapjuk.

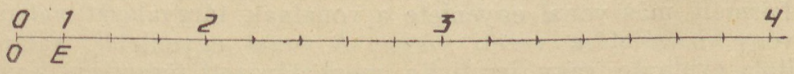
Mint a táblabeli differenciából látjuk, a 0·34-ről a 0·36-ra való áttérésnek, vagyis a független változónak 2 századdal való változásának, a függvény 23 ezreddel való fogyása felel meg. Ha 0·34-ről az adott 0·357-re térünk át, a független változó növekménye 0·017, vagyis 1·7 század. Hogy a független változónak ehhez a növekményéhez az $f(x)$-nek hány ezreddel való megváltozása (Δ) tartozik; azt — *arányos változást* tételezvén fel — a következő proporció adja meg:

$$\Delta : 23 = 1{\cdot}7 : 2$$

A Δ javítást növekedő függvény esetében a táblázatból vett $f(0{\cdot}34)$ értékhez hozzá kellene adni. Esetünkben fogyó függvénnyel van dolgunk, tehát a javítás kivonandó. Vagyis a számítás így alakul:

$$\begin{array}{rl} f(0{\cdot}34) & = 2{\cdot}697 \\ & \quad -20 \\ \hline f(0{\cdot}357) & = 2{\cdot}677 \end{array} \qquad \begin{array}{l} \Delta = \frac{1{\cdot}7}{2} \times 23 \\ \quad = 0{\cdot}85 \times 23 \\ \hline \quad 255 \\ \quad 170 \\ \hline \quad 19{\cdot}55 \end{array}$$

207. §. Valamely függvényre készült táblázat a következő módon *skálával* is pótolható. Az e egyenesen tetszésünk szerint fölvesszük az OE hosszegységet. Azután az egyenesre O-ból fel-



61. ábra.

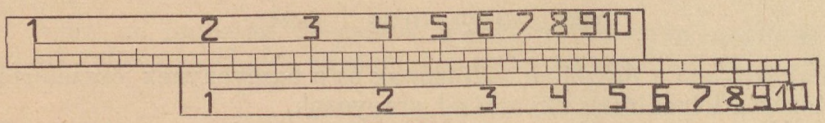
rakjuk az egyes $f(x)$ függvényértékeknek megfelelő távolságokat, végpontjaikhoz azonban nem a függvény értékét írjuk, hanem az x független változó értékét. A skála használatánál tehát úgy kapjuk meg x valamely értékéhez $f(x)$ megfelelő értékét, hogy lemérjük az x-szel jelölt pontnak O-tól való távolságát.

A 61. ábra az

$$y = x^2$$

függvénynek skálája. Az 1, 2, 3 számokkal jelölt pontoknak O-tól való távolsága 1, 4, 9 hosszegység.

208. §. A $\log x$ függvényt ábrázoló skála, az ú. n. *logarithmikus skála* alkalmazást talál a *logarithmikus számolólécnél*. Ez lényegében (62. ábra) két egymáshoz képest eltolható logarithmikus skálából áll. Ha az alsó skálának az a és b számokkal jelölt pontjai a felsőnek c és d pontjain állanak, akkor



62. ábra.

$$\log b - \log a = \log d - \log c$$

vagyis

$$ad = bc.$$

Álljon pl. az alsó skálának $a=1$ pontja a felsőnek $c=2$ pontján és legyen $b=3{\cdot}5$. Akkor evvel szemben a felső skálán leolvashatjuk a $2\times 3{\cdot}5=7$ szorzatot. Ily módon a logarithmikus számolóléc kényelmesen használható a szorzásra (és ennek alapján az osztásra és más műveletekre is).

A függvények grafikus ábrázolása.

209. §. A skála helyett a függvényről jóval tökéletesebb geometriai képet is kaphatunk. Az ábrázolásnak ez a tökéletesebb módja lényegében nem egyéb, mint a vonalaknak egyenletekkel való jellemzésének megfordítása.

Az egyenes vonalnak

$$y = mx + b$$

alakú egyenlete az egyenes pontjaira nézve az ordinatát, mint az abszcissza függvényét fejezi ki. Az egységkörnek

$$x^2 + y^2 - 1 = 0$$

egyenlete az egységkör pontjaira nézve ugyanezt teszi meg, csakhogy *implicite* határozza meg y-t, mint x függvényét. Hasonlóképpen bármely más vonal egyenlete a vonalnak tárgyalását valamely függvény vizsgálatára vezeti vissza. A vonal egyenletét, valamint az általa explicite vagy implicite meghatározott függvényt a vonal *analitikus előállításának* vagy *jellemzésének* mondjuk.

A függvények geometriai ábrázolásánál nem vonalból indulunk ki, nem ennek vizsgálatát vezetjük vissza függvény vizsgálatára, hanem fordítva a független változónak és a függvénynek bármely két összetartozó értékét mint valamely pont koordinatáit fogjuk fel. Az így kapott pontok összességét a függvényt *(geometriailag* vagy *grafikusan)* ábrázoló *diagrammának* vagy *grafikonnak* mondjuk. A legegyszerűbb és legfontosabb esetekben a grafikon olyan idom, amilyent a mindennapi életben vonalnak nevezünk.

Bonyodalmasabb esetben olyan grafikont is kaphatunk, melyet a mindennapi életben már nem mondanánk vonalnak. Egyöntetűség kedvéért azonban a grafikont ilyenkor is a függvényt ábrázoló *vonalnak* mondjuk.

A természettudományokban és az életben két mennyiség összefüggésének tanulmányozását sokszor éppen avval kezdjük meg, hogy valamely *regisztráló* készülékkel megrajzoltatjuk az összefüggést ábrázoló grafikont. Ilyen eszköz pl. a *barográf*, mely a légnyomásnak az időtől való függését regisztrálja.

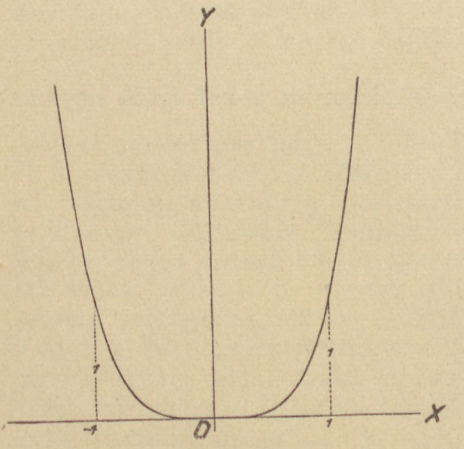
A vonalak analitikus jellemzéséről és a függvények geometriai ábrázolásáról mondottakból világos, hogy az analitikus geometria és az analizis két egymással szorosan összefüggő ága a mathematikának. Ebben a könyvben hol a geometriának, hol az analizisnek szempontjai lépnek előtérbe; de a két tudományág éles elválasztására nem törekszünk.

Hatvány és gyök ábrázolása. Inverz függvény.

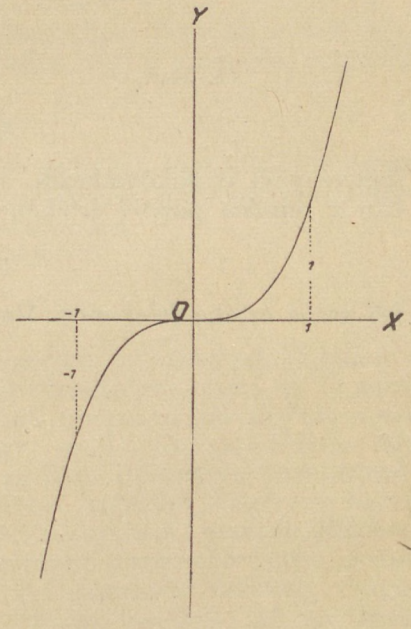
210. §. Az $y=mx+b$ lineáris függvényt egyenes vonal ábrázolja. Az $x^2+y^2-1=0$ egyenlet által implicite meghatározott függvényt az egységkör ábrázolja. Ezeken kívül most még csak a hatvány és a gyök ábrázolásával foglalkozunk.

Az

$$y = x^n$$



63. ábra.



64. ábra.

(pozitiv egész kitevős) hatvány ábrázolásánál két esetet különböztetünk meg aszerint, hogy a kitevő páros vagy páratlan szám.

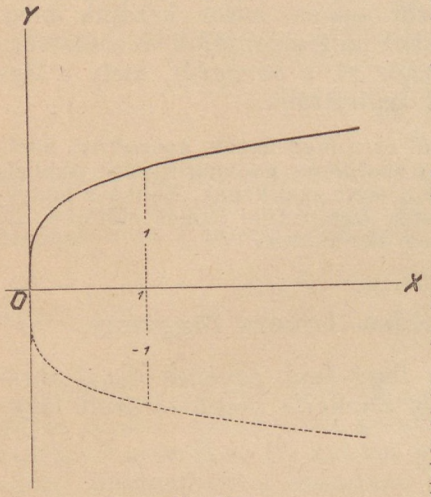
Ha n valamely $2m$ páros számmal egyenlő, akkor $(-x)^{2m}$ és x^{2m} egymással egyenlő, tehát a kezdőpont a rajzolandó görbét két oly részre osztja, melyek OY-ra nézve egymásnak tükörképei. Mindkét rész az OX fölött van.

Ha n valamely $2m+1$ páratlan számmal egyenlő, akkor

$$(-x)^{2m+1} = -x^{2m+1}.$$

A kezdőpont a megfelelő görbét két oly részre osztja, melyek közül az egyik egészen OX fölött, a másik egészen OX alatt van.

Az $y=x^4$ görbe a 63. ábrában, az $y=x^3$ görbe a 64. ábrában látható.



65. ábra.

211. §. Ha y-t mint x függvényét tekintve

$$y = f(x)$$

és viszont x-et, mint y függvényét tekintve

$$x = \varphi(y),$$

akkor az f és φ függvényeket *inverz* függvényeknek vagy egymás *megfordításainak* nevezzük.

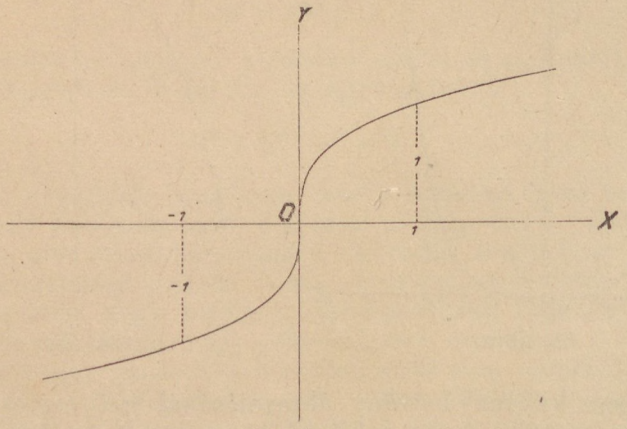
Már igen egyszerű függvények inverz függvényeinek vizsgálatát is megnehezíti az a körülmény, hogy az utóbbiak rendszerint több értékűek. Ez az eset pl. már az $x=y^n$ hatvány megfordításánál, vagyis az

$$y = \sqrt[n]{x}$$

függvénynél is bekövetkezik, ha n valamely $2m$ páros szám. Valóban x minden pozitiv értékének

$$y = \sqrt[2m]{x}$$

két valós értéke felel meg. Ha $x=0$, akkor ez a két érték egymás-



66. ábra.

sal egyenlő. Ha pedig $x<0$, akkor x-ből a valós számok tartományában egyáltalában nem vonhatunk páros gyököt. A szóban forgó

$$y = \sqrt[2m]{x}$$

függvény két egyértékű ágra esik szét, ha y-nak vagy pusztán a pozitiv értékeire vagy pusztán a negativ értékeire szorítkozunk.

Ha n valamely $2m+1$ páratlan számmal egyenlő, akkor az x minden valós értékének az

$$y = \sqrt[2m+1]{x}$$

függvénynek egy és csak egy valós értéke felel meg.

Az

$$y = \sqrt[n]{x}$$

függvényt ábrázoló görbe egyenlete az $x=y^m$ alakban is írható. Azért pl. az $y = \sqrt[4]{x}$ illetve $y = \sqrt[3]{x}$ függvényeket ábrázoló 65. és 66. ábrák az $y=x^4$ és $y=x^3$ függvénynek ábrázolásaiból úgy kaphatók, hogy ezeknek az $y=x$ egyenletű egyenesre vonatkozó tükörképeit állítjuk elő.

II. Függvény határértéke. Folytonosság.

Függvény határértéke.

212. §. Legyen valamely tartományban $f(x)$ az x-nek egyértékű függvénye. Továbbá legyen adva egy a szám és valamely olyan

$$a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots \qquad 1)$$

számsorozat, melynek a a limesze, de melynek tagjai között a nem fordul elő. Az $x=a$ hely $f(x)$-nek értelmezési tartományához tartozhatik, de nem kell okvetlenül odatartoznia.

Az 1) alatti számsorozatnak megfelelő

$$f(a_1), f(a_2), \ldots, f(a_n), \ldots \qquad 2)$$

értékek sorozatára nézve különböző esetek lehetségesek. Esetleg a 2) sorozatnak már az előállítása sem lehetséges, mert az 1) sorozat végtelen sok olyan a_n-et tartalmaz, melyekre nézve $f(x)$ nincs értelmezve. Meglehet továbbá, hogy az 1) sorozat helyei, legfeljebb véges számú helyet kivéve, az $f(x)$ értelmezési tartományából valók, tehát a 2) sorozat előállítása, legalább bizonyos tagtól kezdve lehetséges, de az előállított sorozatnak nincsen limesze. Végre bekövetkezhetik, hogy a 2) sorozat (legfeljebb véges számú tagot kivéve) előállítható és ennek a sorozatnak valamely (véges vagy végtelen) A limesze van. A harmadik esetben azt mondjuk, hogy az a helynek *az*

$$a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$$

sorozattal való megközelítésénél az $f(x)$ függvény A-hoz mint határértékhez közeledik.

Rövidebb kifejezésmód nem lehetséges, mert ki kell emelnünk, hogy A értelmezésében az $f(x)$ függvényen és a helyen kívül az a körülmény is szerepel, hogy az a helyet hogyan közelítjük meg.

Példák. 1. *Legyen*

$$f(x) = \sin \frac{1}{x}.$$

A határátmenet vonatkozzék az $x=0$ helyre. Ennek megközelítése történjék az

$$a_1 = \frac{1}{\alpha+2\pi}, \quad a_2 = \frac{1}{\alpha+4\pi}, \quad \ldots, \quad a_n = \frac{1}{\alpha+2n\pi}, \ldots$$

sorozattal, hol α szabadon választott állandó szám.

Ekkor

$$f(a_n) = \sin \alpha,$$

ennélfogva egyszersmind

$$\lim f(a_n) = \sin \alpha.$$

Tehát az α bármely választásánál kapunk ugyan határértéket, de ez más és más aszerint, hogy α-t hogyan választjuk.

2. *Legyen mégint*

$$f(x) = \sin \frac{1}{x}.$$

A határátmenet vonatkozzék most is az $x=0$ helyre. A hely megközelítése történjék az

$$a_1 = \frac{1}{\alpha+\pi}, \quad a_2 = \frac{1}{\alpha+2\pi}, \quad \ldots, \quad a_n = \frac{1}{\alpha+n\pi}, \ldots$$

sorozattal.

Most

$$f(a_n) = (-1)^n \sin \alpha.$$

Ha α-t úgy választjuk, hogy $\sin \alpha \neq 0$, akkor ennek az

$$f(a_1), \ f(a_2), \ \ldots, \ f(a_n), \ldots$$

sorozatnak nincsen limesze.

213. §. A tárgyalt példákban ugyanannak a helynek különböző megközelítései különböző eredményre vezettek.

Megtörténhetik azonban, hogy az a határértékhez közeledő, de a-t nem tartalmazó

$$a_1, \ a_2, \ \ldots, \ a_n, \ldots \qquad 1)$$

sorozat bármely választásánál az

$$f(a_1), \ f(a_2), \ldots \ f(a_n), \ldots$$

sorozat tagjai mindig ugyanahhoz a A-hoz közelednek. Ebben az esetben A-ról röviden (megszorítás nélkül) azt mondjuk, hogy $f(x)$ *függvénynek* az a helyhez tartozó *határértéke.* Képletben

$$\lim_{x=a} f(x) = A.$$

Itt A a ∞ is lehet.

Ha

$$\lim_{x=a} f(x) = A \quad \text{és} \quad \lim_{x=a} g(x) = B,$$

akkor

$$\lim_{x=a} \big(f(x) + g(x)\big) = A + B.$$

Valóban, bárhogyan választjuk az a-t megközelítő, de a-t nem tartalmazó

$$a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$$

sorozatot, az

$$f(a_1), f(a_2), \ldots,$$
$$g(a_1), g(a_2), \ldots$$

sorozatok limeszei A és B. Tehát

$$f(a_1) + g(a_1), \quad f(a_2) + g(a_2), \ldots$$

limesze az a hely bármely megközelítésénél $A + B$. De éppen ezt fejezi ki a

$$\lim_{x=a} (f(x) + g(x)) = A + B$$

képlet.

Hasonlóképpen

$$\lim_{x=a} (f(x) - g(x)) = A - B,$$
$$\lim_{x=a} f(x)\, g(x) = AB,$$
$$\lim_{x=a} |f(x)| = |A|$$

és — ha az $\frac{A}{B}$ *hányadosnak van értelme — akkor*

$$\lim_{x=a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{A}{B}.$$

Végre (a 68. § végén mondottakból) könnyen belátható a következő, gyakran alkalmazandó tétel: *Ha az a-hoz eléggé közel eső x-ekre nézve $f(x)$ értéke mindig $\varphi(x)$ és $\psi(x)$ közé esik és*

$$\lim_{x=a} \varphi(x) = \lim_{x=a} \psi(x) = A,$$

akkor egyszersmind

$$\lim_{x=a} f(x) = A.$$

Fontos határértékek.

214. §. *Legyen meghatározandó*

$$f(x) = \frac{e^x - 1}{x}$$

limesze az $x=0$ helyen.

Az x minden valós értékénél (113. §.)

$$e^x \geqq 1 + x$$

azaz

$$e^x - 1 \geqq x. \qquad 1)$$

Ha x előjelét ellenkezőre változtatjuk, akkor innen

$$e^{-x} - 1 \geqq -x$$

vagyis

$$1 - e^{-x} \leqq x$$

és e^x-szel való szorzás után

$$e^x - 1 \leqq xe^x. \qquad 2)$$

Az 1) és 2) alatti képletekből

$$x \leqq e^x - 1 \leqq e^x x.$$

Tehát akár pozitiv, akár negativ az x, az

$$\frac{e^x - 1}{x}$$

1 és e^x közé esik. Ha x a zérushoz közeledik, az 1 és e^x közös limesze 1 (l. 114. §.). Tehát (az előbbi § utolsó tétele szerint) egyszersmind

$$\lim_{x=0} \frac{e^x - 1}{x} = 1. \qquad 3)$$

215. §. Ha az

$$x \leqq e^x - 1 \leqq e^x x$$

egyenlőtlenségben x helyébe $(1+x)$-nek természetes logarithmusát helyettesítjük, a következő egyenlőtlenséget kapjuk:

$$\log(1+x) \leqq x \leqq (1+x)\log(1+x). \qquad 1)$$

Tehát, ha $x > -1$ és a zérustól különböző értékű, akkor

$$\frac{x}{\log(1+x)}$$

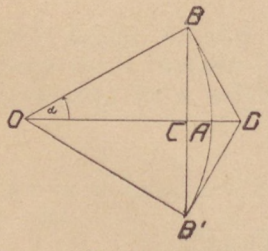
1 és $1+x$ közé esik. Ha x a zérushoz közeledik, 1 és $1+x$ közös limesze 1. Tehát egyszersmind

$$\lim_{x=0} \frac{x}{\log(1+x)} = 1,$$

innen pedig

$$\lim_{x=0} \frac{\log(1+x)}{x} = 1. \qquad 2)$$

216. §. A *trigonometriai függvényekre* vonatkozó limeszek tárgyalását arra alapítjuk, hogy α-nak a 0 és $\frac{\pi}{2}$ közé eső értékeinél



67. ábra.

$$\sin\alpha < \alpha < \operatorname{tg}\alpha. \qquad 1)$$

Ennek az egyenlőtlenségnek bebizonyításánál α mint valamely AOB pozitiv hegyesszög mérőszámát fogható fel (67. ábra). E szög OA-ra vonatkozó tükörképe legyen AOB'. Az O körül a hosszegységgel, mint sugárral leírt $B'B$ körív helyett rövidebb vonalat kapunk, ha a körívet valamely beírt sokszöggel pótoljuk. A lehető legrövidebb beírt sokszögnek maga a $B'B$ húr tekintendő. Ha még tekintetbe vesszük, hogy a $B'B$ körív hossza 2α, a $B'B$ húré pedig

$$2BC = 2 \sin \alpha,$$

akkor azt találjuk, hogy $2 \sin \alpha < 2\alpha$, azaz $\sin \alpha < \alpha$.

Viszont a $B'B$ körív rövidebb mint bármely körülírt sokszögnek kerülete. Ha a $B'DB$ törött vonalat úgy fogjuk fel, mint a legegyszerűbb körülírt sokszöget, továbbá tekintetbe vesszük, hogy ennek hossza

$$2BD = 2 \operatorname{tg} \alpha,$$

akkor azt találjuk, hogy $2\alpha < 2 \operatorname{tg} \alpha$, vagyis $\alpha < \operatorname{tg} \alpha$.

217. §. A $\sin \alpha < \alpha$ egyenlőtlenséget α helyett ennek felére alkalmazva:

$$1 - \cos \alpha = 2 \sin^2 \frac{\alpha}{2} < \frac{\alpha^2}{2}. \qquad 1)$$

Ha még $0 < \alpha < 1$, akkor innen $1 - \cos \alpha$ kisebb, mint $\frac{1}{2}$, tehát $\cos \alpha > \frac{1}{2}$ és $\operatorname{tg} \alpha < 2 \sin \alpha$. Ekkor tehát

$$\operatorname{tg} \alpha - \sin \alpha = \operatorname{tg} \alpha (1 - \cos \alpha) < 2 \sin \alpha (1 - \cos \alpha) < \alpha^3$$

és még inkább

$$\alpha - \sin \alpha < \alpha^3 \quad \text{és} \quad \operatorname{tg} \alpha - \alpha < \alpha^3. \qquad 2)$$

Jelentsen most már x olyan pozitiv vagy negativ számot, hogy $\alpha = |x| < 1$. Akkor az előbbi egyenlőtlenségeknél fogva

$$\frac{1 - \cos \alpha}{\alpha}, \quad 1 - \frac{\sin \alpha}{\alpha}, \quad \frac{\operatorname{tg} \alpha}{\alpha} - 1$$

rendre kisebbek lévén, mint α, nyilván

$$\frac{1 - \cos x}{x}, \quad 1 - \frac{\sin x}{x}, \quad \frac{\operatorname{tg} x}{x} - 1$$

abszolut értékre kisebb, mint $|x|$. Tehát

$$\lim_{x=0} \frac{1 - \cos x}{x} = 0, \quad \lim_{x=0} \frac{\sin x}{x} = 1, \quad \lim_{x=0} \frac{\operatorname{tg} x}{x} = 1. \qquad 3)$$

A végtelen helyre vonatkozó határértékek.

218. §. Az a hely, melyen a függvény határértékét vizsgáljuk, a végtelen is lehet. *Az $f(x)$ függvényről akkor mondjuk, hogy*

$$\lim_{x=\infty} f(x) = A,$$

ha, bárhogyan választjuk is a ∞ limeszű

$$\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n, \ldots$$

sorozatot, az

$$f(\omega_1), f(\omega_2), \ldots, f(\omega_n), \ldots$$

sorozatnak van limesze és ez egyenlő A-val.

Például

$$\lim_{x=\infty} x \log \left(1 + \frac{1}{x}\right) = 1. \qquad 1)$$

Tudjuk ugyanis, hogy

$$\lim_{z=0} \frac{\log(1+z)}{z} = 1. \qquad 2)$$

Ha itt $z = \frac{1}{x}$, akkor

$$\frac{\log(1+z)}{z} = x \log\left(1+\frac{1}{x}\right).$$

Az a követelés, hogy z határértéke zérus legyen, azonos avval, hogy x határértéke ∞ legyen. Tehát a $z = \frac{1}{x}$ helyettesítés után a 2) alatti képlet valóban az 1) alattira vezet.

219. §. Az éppen bebizonyított képletből fontos általánosítása nyerhető az e számot értelmező

$$\lim\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e \qquad 1)$$

képletnek. Ugyanis tudjuk, hogy bármely $x_1, x_2, \ldots$ szabályos számsorozatra nézve

$$\lim e^{x_n} = e^{\lim x_n}.$$

Tehát $e^{x \log\left(1+\frac{1}{x}\right)}$ limeszét a ∞ helyen úgy számíthatjuk ki, hogy e-t fölemeljük a kitevő limeszére. A kitevő limesze 1. Azért

$$\lim_{x=\infty} e^{x \log\left(1+\frac{1}{x}\right)} = e$$

vagyis

$$\lim_{x=\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e. \qquad 2)$$

Ha x úgy közeledik a ∞-hez, hogy rendre az

$$1, 2, 3, \ldots, n, \ldots$$

értékeket veszi fel, akkor ez a képlet átmegy az 1) alattiba.

220. §. Legyen

$$A_r x^r + A_{r-1} x^{r-1} + \cdots + A_0$$

az x-nek *pontosan* r-ed fokú egész függvénye és határozzuk meg ebből a függvényből és a legmagasabb fokú tagjából alkotott

$$\frac{A_r x^r + A_{r-1} x^{r-1} + \cdots + A_0}{A_r x^r}$$

hányadosnak limeszét az $x=\infty$ helyen.

A hányados így is írható

$$1 + \frac{A_{r-1}}{A_r}\,\frac{1}{x} + \cdots + \frac{A_0}{A_r}\,\frac{1}{x^r}.$$

Itt az első tagot kivéve minden tagnak limesze zérus. *Tehát*

$$\lim_{x=\infty} \frac{A_r x^r + A_{r-1} x^{r-1} + \cdots + A_0}{A_r x^r} = 1.$$

Ennek a képletnek segítségével most már bebizonyítható a következő tétel helyessége:

Ha a

$$g(x) = A_r x^r + A_{r-1}x^{r-1} + \cdots + A_0,$$
$$h(x) = B_s x^s + B_{s-1}x^{s-1} + \cdots + B_0$$

egész függvényekből alkotott hányadosnak limeszét az $x=\infty$ helyen keressük, akkor a számlálóból és a nevezőből csak a legmagasabb fokú tagok jönnek tekintetbe. Képletben:

$$\lim_{x=\infty} \frac{g(x)}{h(x)} = \lim_{x=\infty} \frac{A_r x^r}{B_s x^s}.$$

Valóban:

$$\frac{g(x)}{h(x)} = \frac{A_r x^r}{B_s x^s} \cdot \frac{\frac{g(x)}{A_r x^r}}{\frac{h(x)}{B_s x^s}}.$$

Itt

$$\lim_{x=\infty} \frac{g(x)}{A_r x^r} = \lim_{x=\infty} \frac{h(x)}{B_s x^s} = 1.$$

Tehát $\frac{g(x)}{h(x)}$ limesze valóban egyenlő $\frac{A_r x^r}{B_s x^s}$ limeszével.

Ha itt $r=s$, akkor

$$\frac{A_r x^r}{B_s x^s} = \frac{A_r}{B_s},$$

tehát

$$\lim_{x=\infty} \frac{g(x)}{h(x)} = \lim_{x=\infty} \frac{A_r x^r}{B_s x^s} = \frac{A_r}{B_s}.$$

Ha $r>s$, akkor

$$\lim_{x=\infty} \frac{g(x)}{h(x)} = \lim_{x=\infty} \frac{A_r}{B_s} x^{r-s} = \infty.$$

Ha $r<s$, akkor

$$\lim_{x=\infty} \frac{g(x)}{h(x)} = \lim_{x=\infty} \frac{A_r}{B_s} \frac{1}{x^{s-r}} = 0.$$

Szóval: *Ha két racionális egész függvény hányadosában a számláló és a nevező egyenlő fokú, akkor a hányados limesze az $x=\infty$ helyen egyenlő a legmagasabb fokú tagok együtthatóinak hányadosával.*

Ha a számláló és a nevező különböző fokúak, akkor a hányados határértéke az $x=\infty$ helyen zérus vagy végtelen aszerint, hogy a számláló vagy pedig a nevező az alacsonyabb fokú.

Ezekben a szabályokban *fokszámon* mindig a *pontos* fokszám értendő. Ezek szerint pl.

$$\lim_{x=\infty} \frac{x^2-2x+1}{3x^2-4} = \frac{1}{3}, \quad \lim_{x=\infty} \frac{1}{x^2+x} = 0, \quad \lim_{x=\infty} \frac{x^2+1}{x-1} = \infty.$$

Minden racionális *egész* függvény mint két oly racionális egész függvénynek hányadosa fogható fel, melyek közül a nevező egyenlő

1-gyel, tehát *zérus* fokú. Ennélfogva bármely első vagy magasabb fokú racionális egész függvénynek limesze az $x=\infty$ helyen maga is végtelen.

221. §. Az éppen bebizonyított tételekben x akárhogyan közeledhetik a végtelenhez. Az alkalmazásoknál sokszor csak avval a különös esettel van dolgunk, hogy x a *természetes számokon* át növekedik a végtelenbe, vagyis hogy az

$$f(1),\ f(2),\ \ldots,\ f(n),\ \ldots$$

sorozat limeszéről van szó.

Például a számsorozatok elméletében

$$\lim \frac{3n^2-1}{4n^2+1}$$

azt a határértéket jelenti, melyhez

$$\frac{3x^2-1}{4x^2+1}$$

akkor közeledik, mikor x a pozitiv egész számokon át közeledik a végtelenhez. Minthogy

$$\lim_{x=\infty} \frac{3x^2-1}{4x^2+1} = \frac{3}{4},$$

azért a ∞ helynek az

$$1,\ 2,\ 3,\ \ldots,\ n,\ \ldots$$

sorozattal való megközelítésénél is

$$\lim \frac{3n^2-1}{4n^2+1} = \frac{3}{4}.$$

Meghatározott előjelű végtelenre vonatkozó határértékek.

222. §. Megtörténhetik, hogy valamely függvényre nézve nem az érdekel, hogy miként viselkedik, ha x akármilyen módon közeledik a végtelenhez, hanem pusztán az oly határátmeneteket vizsgáljuk, melyeknél x vagy csak pozitiv, vagy csak negativ számokon át közeledik a végtelenhez.

Ha bárhogyan választva a $+\infty$ limeszü

$$\omega_1,\ \omega_2,\ \ldots,\ \omega_n,\ \ldots$$

számsorozatot, az

$$f(\omega_1),\ f(\omega_2),\ \ldots,\ f(\omega_n),\ \ldots$$

számsorozat limesze A, akkor azt mondjuk, hogy

$$\lim_{x=+\infty} f(x) = A$$

Hasonló módon értelmezzük a

$$\lim_{x=-\infty} f(x) = A$$

jelentését.

Példa. *Bárhogyan választjuk a λ állandó kitevőt, mindig*

$$\lim_{x=+\infty} \frac{e^x}{x^\lambda} = +\infty.$$

Ugyanis e^x az

$$1+x,\ \left(1+\frac{x}{2}\right)^2, \ldots, \left(1+\frac{x}{n}\right)^n, \ldots$$

sorozatnak limesze. Ez a sorozat pozitiv x esetében már első tagjától kezdve monoton növekedő. Tehát n bármely pozitiv egész számú értékénél

$$e^x > \left(1+\frac{x}{n+1}\right)^{n+1} > \frac{x^n}{(n+1)^n}\left(1+\frac{x}{n+1}\right).$$

Innen

$$\frac{e^x}{x^\lambda} > \frac{x^{n-\lambda}}{(n+1)^n}\left(1+\frac{x}{n+1}\right).$$

Ha $n>\lambda$, továbbá (a mi nem lényeges) x-nek az 1-nél nagyobb értékeire szorítkozunk, akkor $x^{n-\lambda}>1$. Tehát

$$\frac{e^x}{x^\lambda} > \frac{1}{(n+1)^n}\left(1+\frac{x}{n+1}\right).$$

Ha itt n állandó, az x pedig a pozitiv számokon át a végtelenhez közeledik, akkor a jobboldal limesze $+\infty$. Tehát nyilván egyszersmind

$$\lim_{x=+\infty,} \frac{e^x}{x^\lambda} = +\infty.$$

Ha $\lambda=0$, akkor innen

$$\lim_{x=+\infty} e^x = +\infty.$$

Megjegyezhetjük még, hogy

$$\lim_{x=-\infty} e^x = 0.$$

Ha ugyanis x abszolut értékét z-vel jelöljük, akkor

$$\lim_{x=-\infty} e^x = \lim_{z=+\infty} e^{-z} = \lim_{z=+\infty} \frac{1}{e^z} = 0.$$

Egyoldali határértékek.

223. §. Megtörténhetik, hogy pusztán oly határátmenetek érdekelnek bennünket, melyeknél az $x=a$ véges helyet csak az a-nál *nagyobb* vagy csak az a-nál *kisebb* számokkal közelítjük meg.

Ha minden oly

$$a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$$

számsorozatra nézve, melynek a a limesze és melyben a tagok a-nál nagyobbak, az

$$f(a_1), f(a_2), \ldots, f(a_n), \ldots$$

sorozat limesze A, akkor azt mondjuk, hogy A *az* $x=a$ *helyen*

$f(x)$-*nek jobboldali határértéke.* Képletben

$$\lim_{x=a+0} f(x) = A.$$

Hasonló módon értelmezhetjük a

$$\lim_{x=a-0} f(x)$$

baloldali határértéket.

Ha a függvénynek az $x=a$ helyen van jobboldali és baloldali határértéke, továbbá

$$\lim_{x=a+0} f(x) = \lim_{x=a-0} f(x),$$

akkor nyilván

$$\lim_{x=a} f(x)$$

is létezik és

$$\lim_{x=a} f(x) = \lim_{x=a+0} f(x) = \lim_{x=a-0} f(x).$$

Ha ellenben

$$\lim_{x=a+0} f(x) \quad \text{és} \quad \lim_{x=a-0} f(x)$$

közül legalább az egyik nem létezik, vagy mindkettő létezik ugyan, de egymástól különbözik, akkor $f(x)$-nek az a helyen nincs limesze.

Példa. *Az*

$$f(x) = \frac{1}{e^{\frac{1}{x-1}} + 1}$$

függvénynek az $x=1$ *helyen van-e határértéke?*

Ezt a kérdést a következő módon oldhatjuk meg. Ha x az 1-nél nagyobb számokon keresztül közeledik 1-hez, akkor

$$\frac{1}{x-1}$$

pozitiv számokon keresztül közeledik a végtelenhez, tehát

$$\lim_{x=1+0} e^{\frac{1}{x-1}} = +\infty$$

és

$$\lim_{x=1+0} \frac{1}{e^{\frac{1}{x-1}} + 1} = 0.$$

Ha pedig x a baloldalról közeledik 1-hez, akkor $\frac{1}{x-1}$ negativ számokon keresztül közeledik a végtelenhez. Ennélfogva

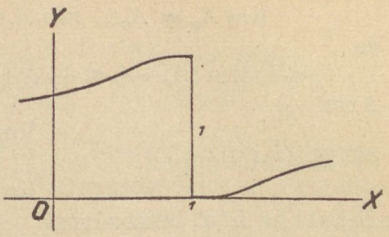
$$\lim_{x=1-0} e^{\frac{1}{x-1}} = 0,$$

és

$$\lim_{x=1-0} \frac{1}{e^{\frac{1}{x-1}}+1} = 1.$$

Tehát jobboldali és baloldali határérték is van, de a kettő egymással nem egyenlő.

A szóban forgó függvény menetét a 68. ábra tünteti fel.



68. ábra.

Folytonos függvények.

224. §. A $\lim_{x=a} f(x)$ *határértéktől* megkülönböztetendő $f(a)$, vagyis $f(x)$-nek az az értéke, mely az $x=a$ helyhez tartozik. Hogy a kettőt nyomatékosan megkülönböztessük, $f(a)$-t a függvény *helyettesítési* értékének nevezzük. Az elnevezés onnan ered, hogy valahányszor $f(x)$ számára ismeretes műveleti jelekkel alkotott kifejezésünk van, $f(a)$-t valóban úgy kapjuk, hogy x helyébe a-t helyettesítjük.

Ha $f(x)$-nek az $x=a$ helyen véges határértéke van és ez a határérték egyszersmind $f(x)$-nek $f(a)$ helyettesítési értéke: akkor a függvényt ezen a helyen ***folytonosnak*** *mondjuk.*

Legyen pl. $f(x)=e^x$. Ezt a függvényt (a szoros értelemben vett) *kitevős* vagy *exponenciális* függvénynek nevezzük. Tudjuk, hogy ha

$$a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$$

limesze a, akkor

$$e^{a_1}, e^{a_2}, \ldots, e^{a_n}, \ldots$$

limesze e^a. Vagyis

$$\lim_{x=a} e^x = e^a.$$

Ezt az ismeretes tényt most már így fejezhetjük ki: *Az e^x kitevős függvény bármely véges $x=a$ helyen folytonos.*

Továbbá ismeretes, hogy a négy alapművelet bármelyike a limeszalkotással sorrendre nézve fölcserélhető. Ebből közvetlenül világos a következő tétel helyessége: *Ha*

$$f(x) = \frac{g(x)}{h(x)}$$

az x-nek racionális függvénye, akkor minden oly véges helyen, hol $h(x)$ a zérustól különböző, $f(x)$ az x-nek folytonos függvénye.

Valóban, ha a

$$g(x) = A_0 + A_1x + \cdots + A_rx^r,$$
$$h(x) = B_0 + B_1x + \cdots + B_sx^s$$

racionális egész függvényekben x helyébe oly

$$a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$$

értékeket helyettesítünk, hogy $\lim a_n = a$, akkor

$$\lim A_0 = A_0, \quad \lim A_1 a_n = A_1 a, \quad \ldots, \quad \lim A_r a_n^r = A_r a^r$$

és

$$\lim (A_0 + A_1 a_n + \cdots + A_r a_n^r) = A_0 + A_1 a + \cdots + A_r a^r.$$

Azaz

$$\lim g(a_n) = g(a)$$

és hasonlóképpen

$$\lim h(a_n) = h(a).$$

Tehát (ha $h(a)$ nem zérus)

$$\lim \frac{g(a_n)}{h(a_n)} = \frac{g(a)}{h(a)}.$$

Ez igaz, akárhogyan választjuk az a limeszű $a_1, a_2, \ldots$ sorozatot. Ennélfogva valóban

$$\lim_{x=a} \frac{g(x)}{h(x)} = \frac{g(a)}{h(a)}.$$

225. §. Ha

$$\lim_{x=a} f(x) = f(a) \quad \text{és} \quad \lim_{x=a} g(x) = g(a),$$

akkor egyszersmind a következő képletek is érvényesek:

$$\lim_{x=a} \big(f(x) + g(x)\big) = f(a) + g(a),$$

$$\lim_{x=a} \big(f(x) - g(x)\big) = f(a) - g(a),$$

$$\lim_{x=a} f(x)\, g(x) = f(a)\, g(a),$$

$$\lim_{x=a} |f(x)| = |f(a)|$$

és ha $g(a)$ a zérustól különböző, akkor egyszersmind

$$\lim_{x=a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(a)}{g(a)}.$$

Szóval, *ha az $f(x)$ és $g(x)$ függvények az $x=a$ helyen folytonosak, akkor ezen a helyen $f(x)$ és $g(x)$ összege, különbsége és szorzata, valamint a két függvény abszolut értékei szintén folytonos függvények.* Ha továbbá $g(a)$ a zérustól különböző értékű, akkor *az $x=a$ helyen az*

$$\frac{f(x)}{g(x)}$$

hányados is folytonos.

226. §. *Jelentsen $f(x)$ az $x=a$ helyen folytonos függvényt és legyen $f(a)>0$. Akkor $f(x)$ pozitiv négyzetgyöke az $x=a$ helyen szintén folytonos.*

Valóban, legyen

$$a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$$

limesze a. Akkor $\lim f(a_n) = f(a)$. Ha most már a G pozitiv számot úgy választjuk, hogy $G < f(a)$, akkor n eléggé nagy értékeinél $f(a_n)$ oly keveset különbözik $f(a)$-tól, hogy egyszersmind

$$f(a_n) > G > 0.$$

Az n-nek ily értékeire nézve

$$|\sqrt{f(a_n)} - \sqrt{f(a)}| = \frac{|f(a_n) - f(a)|}{\sqrt{f(a_n)} + \sqrt{f(a)}} < \frac{|f(a_n) - f(a)|}{2\sqrt{G}}.$$

Itt $f(x)$ folytonossága miatt $|f(a_n) - f(a)|$ limesze zérus. Az egyenlőtlenség értelmében tehát $\sqrt{f(a_n)} - \sqrt{f(a)}$ limeszének is zérusnak kell lennie. Vagyis $\lim \sqrt{f(a_n)} = \sqrt{f(a)}$, más szóval $\sqrt{f(x)}$ az $x=a$ helyen valóban folytonos.

Az $f(a) = 0$ esetre a következő analog tétel érvényes:

Legyen $f(x)$ az $x = a$ helyen folytonos és legyen $f(a) = 0$. Ha továbbá az

$$a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$$

sorozat limesze egyenlő a-val és a megfelelő

$$f(a_1), f(a_2), \ldots, f(a_n), \ldots$$

értékek mindegyike pozitiv szám vagy zérus, akkor

$$\lim \sqrt{f(a_n)} = 0.$$

Itt a négyzetgyökvonásnál nem kell a pozitiv négyzetgyökre szorítkoznunk, hanem a négyzetgyökön ennek két értéke közül bármelyik érthető.

Ha a kimondott tétel nem volna helyes, akkor legalább egy oly δ pozitiv számnak kellene lennie, hogy végtelen sok n-re nézve

$$|\sqrt{f(a_n)}| > \delta.$$

De akkor n-nek ezekre az értékeire nézve

$$f(a_n) > \delta^2$$

volna. Innen továbbá

$$f(a) = \lim f(a_n) \geqq \delta^2$$

következnék. Vagyis $f(a)$ nem lehetne zérus.

Az $f(a_n) \geqq 0$ megszorítás azért szükséges, mert negativ számból (a valós számok tartományában) egyáltalában nem tudunk négyzetgyököt vonni.

A bebizonyított tételek értelmében *a pozitiv négyzetgyök meghatározása és a limeszalkotás sorrendre nézve egymással fölcserélhető műveletek.*

227. §. A folytonosság értelmezése szerint $f(x)$ az a helyen akkor és csak akkor folytonos, ha a következő két tulajdonsága van: 1. Az a helyen $f(x)$-nek véges $f(a)$ helyettesítési értéke van. 2. Valahányszor az

$$x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$$

sorozat limesze a, mindannyiszor az

$$f(x_1), f(x_2), \ldots, f(x_n), \ldots$$

sorozat limesze $f(a)$; vagyis, ha

$$x_1 - a,\ x_2 - a,\ \ldots,\ x_n - a,\ \ldots$$

elemi sorozat, akkor

$$f(x_1) - f(a),\ f(x_2) - f(a),\ \ldots,\ f(x_n) - f(a),\ \ldots$$

szintén elemi sorozat.

Az $x - a$ és $f(x) - f(a)$ alakú különbségeket *növekményeknek* nevezzük; $x - a$ a független változó növekménye, $f(x) - f(a)$ a függvény megfelelő növekménye. Ezt a kifejezésmódot még akkor is használjuk, ha a szóban forgó különbség negativ, vagyis ha növesztés helyett fogyasztásról van szó. Ha valamely mennyiségnek (úgy mint esetünkben a szóban forgó növekményeknek) egymás után oly értékeket adunk, melyek elemi sorozatot alkotnak, akkor azt mondjuk, hogy az illető mennyiség *végtelen kicsinnyé lesz.*

A folytonosság értelmezését tehát így is fogalmazhatjuk:

Az $f(x)$ függvény az $x=a$ helyen akkor és csak akkor folytonos, ha a következő két tulajdonsága van: 1. *A függvénynek az $x=a$ helyen véges $f(a)$ helyettesítési értéke van.* 2. *Ha a független változó $x-a$ növekménye végtelen kicsinnyé lesz, akkor egyszersmind a függvény megfelelő növekménye is végtelen kicsinnyé lesz.*

Számközön folytonos függvény.

228. §. Jelentsen $(a \ldots b)$ valamely véges számközt. Az $f(x)$ egyértékű függvényt *ezen a számközön folytonosnak* mondjuk, ha $f(x)$ a számköz minden belső és határhelyén véges értékű, továbbá úgy viselkedik, hogy a számköz belső és határhelyeiből bárhogyan választva ki egy

$$\alpha_1,\ \alpha_2,\ \ldots,\ \alpha_n,\ \ldots$$

szabályos számsorozatot, mindenkor

$$\lim f(\alpha_n) = f(\lim \alpha_n).$$

A *számközön* való folytonosság más szóval azt jelenti, hogy 1) a számköz minden belső helyén a függvény folytonos és 2) a függvénynek az a és b határhelyeken való viselkedése legalább annyiban emlékeztet a folytonosságra, hogy a szóban forgó helynek *a számköz belsejéből való megközelítésénél* a függvény határértéke megegyezik a helyettesítési értékkel.

Ha $f(x)$ az $(a \ldots b)$ számközön folytonos és

$$f(a) = G,\quad f(b) = H,$$

akkor bármely G és H közé eső A számhoz található a számközben legalább egy oly α hely, melyen $f(\alpha) = A$.

Ha $f(x)$ racionális egész függvény, akkor ezt a 105. §-ból tudjuk. Minden más esetben a tétel éppen úgy bizonyítható be.

A vonaldarab fogalma.

229. §. Mozogjon valamely pont a t_0-tól a t_1-ig terjedő időközben (t_0-t és t_1-et is beleértve) úgy, hogy x, y koordinatái a t idő-

nek folytonos függvényei és a pont valamely egyszer elfoglalt helyzetbe többé nem tér vissza. Ekkor a pont által befutott helyzetek összességét *vonaldarabnak* mondjuk. Ez a fogalom az *egyenesdarab* fogalmának természetes általánosítása.

Hogy t itt *időt* jelent, az mellékes. Lényeges csak az, hogy a t változó milyen értékeket vehet fel és a pont koordinatái hogyan függenek t-től. Azért a t számára a *parameter* elnevezést használjuk és a *vonaldarab* értelmezését így fogalmazzuk:

Valamely síkidom vonaldarabot alkot, ha bármely pontjának koordinatáit valamely

$$x = \varphi(t), \quad x = \psi(t)$$

ú. n. ***parameteres egyenletrendszerből*** *oly módon kaphatjuk meg, hogy a t parameter helyébe a* $(t_0 \ldots t_1)$ *számközön vett értéket helyettesítünk és fordítva e számközön vett bármely t értéknek behelyettesítése az alakzat valamely pontjának koordinatáit adja. Itt* φ *és* ψ *a* $(t_0 \ldots t_1)$ *számközön t-nek oly egyértékű folytonos függvényei, hogy t két különböző értékének mindig két különböző pont felel meg.*

Ha valamely $y = f(x)$ függvény ábrázolásánál x-nek bizonyos $(a \ldots b)$ véges számközön levő értékeire szorítkozunk és $f(x)$ ezen a számközön x-nek egyértékű, folytonos függvénye, akkor az ábrázolás *vonaldarabra* vezet. Ha ugyanis x-et parameternek választjuk, akkor az $y = f(x)$ egyenletet az

$$x = t, \quad y = f(t)$$

parameteres egyenletrendszerrel pótolhatjuk.

230. §. *Ha valamely*

$$Q_1, Q_2, \ldots, Q_n, \ldots$$

végtelen pontsorozathoz található oly P pont, hogy a

$$PQ_1, PQ_2, \ldots, PQ_n, \ldots$$

távolságok mérőszámainak limesze zérus, akkor a P pontról azt mondjuk, hogy a Q pontoknak limesze (vagy határhelyzete).

Végtelen pontsorozatnak legfeljebb egy limesze lehet. A pontsorozat limesze egyszersmind limesze minden oly végtelen pontsorozatnak is, mely az eredeti pontsorozatból bizonyos pontok kihagyásával keletkezik.

Egy vonaldarabnak a parameter valamely t értékéhez tartozó $P(x, y)$ *pontja akkor és csak akkor limesze a*

$$\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_n, \ldots$$

parameterértékekhez tartozó

$$Q_1 = (x_1, y_1), \; Q_2 = (x_2, y_2), \; \ldots, \; Q_n = (x_n, y_n), \ldots$$

pontsorozatnak, ha

$$t = \lim \tau_n. \qquad 1)$$

Ez a feltétel elégséges. Mert ha $t = \lim \tau_n$, akkor

$$\lim x_n = x, \quad \lim y_n = y$$

és

$$\lim PQ_n = \lim \sqrt{(x_n - x)^2 + (y_n - y)^2} = 0.$$

De a mondott feltétel egyszersmind szükséges is. Ha ugyanis t nem limesze a

$$\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_n, \ldots \qquad 2)$$

sorozatnak, akkor van legalább egy oly δ pozitiv szám, hogy végtelen sok τ_n-re nézve

$$|\tau_n - t| > \delta.$$

Az ilyen τ_n-ek közül kiválaszthatunk egy

$$\tau_i, \tau_j, \ldots \qquad 3)$$

monoton számsorozatot. Minthogy ennek tagjai véges t_0, t_1 korlátok közé esnek, azért ez egyszersmind szabályos számsorozat is. Limesze nyilván a $(t_0 \ldots t_1)$ számköznek valamely t-től különböző t' száma. A t' parameterértéknek megfelelő pontot P'-vel jelöljük.

A 3) alatti parameterértékeknek megfelelő

$$Q_i, Q_j, \ldots$$

pontsorozatnak van limesze és ez éppen P'. Tehát a

$$Q_1, Q_2, \ldots, Q_n, \ldots$$

sorozatnak limesze, ha ilyen egyáltalában van, szintén P'-be és nem P-be esik.

Míg a «vonal» szó különböző értelemben használt, homályos értelmű elnevezés, addig az itt értelmezett «vonaldarab» szabatos mathematikai fogalom.

III. Érintő. Differenciálhányados.

Az érintő meghatározása.

231. §. Ha (69. ábra) P és Q valamely vonaldarabnak két pontja, akkor a P-n és Q-n keresztül húzott egyenest *metszőnek* vagy *szelőnek* mondjuk.

Megtörténhetik, hogy — ha Q a szóban forgó vonaldarabon bárhogyan közeledik a helyzetek valamely végtelen sorozatán keresztül P-hez, mint határhelyzethez, — a PQ metsző irányhatározójának a határátmenet módjától független m (véges vagy végtelen) határértéke van. A P-n keresztül az m irányhatározónak megfelelő irányban húzott egyenest a P pontban a szóban forgó vonaldarabhoz húzott érintőnek nevezzük. *Az érintő* — röviden mondva — *a metszők határfekvése.*

Most csak olyan egyszerű vonaldarab érintőjével foglalkozunk, mely valamely $(a \ldots b)$ számközön folytonos

$$y = f(x)$$

függvényt ábrázol. A P pont abszcisszáját x-szel, a Q pontét $x+h$-val (69. ábra) jelöljük. A megfelelő ordináták

$$y = f(x) \quad \text{és} \quad y + k = f(x+h).$$

A

$$h = (x+h) - x, \quad k = f(x+h) - f(x)$$

különbségek az x és $f(x)$ *növekményei* P-től Q-ig. A PQ metsző irányhatározója

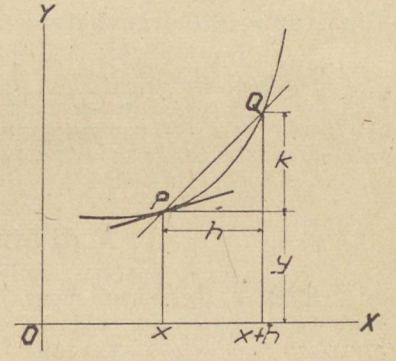
$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h}.$$

A függvény növekményéből és a független változó növekményéből alkotott hányadost *differencia-hányadosnak* mondjuk.

Ha Q a P-hez közeledik, akkor x állandó, csak h változik. A szóban forgó határátmenetnél tehát a differencia-hányadost mint h függvényét kell felfognunk.

Az a követelés, hogy Q a P-hez, mint határhelyzethez közeledjék, azonos avval, hogy h határértéke zérus legyen. Tehát a szóban forgó egyszerű vonaldarabnak P-ben akkor és csak akkor van érintője, ha az

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$



69. ábra.

hányadosnak mint h függvényének a $h=0$ helyen van határértéke. Ha ez a feltétel teljesül, akkor

$$\lim_{h=0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

me az érintő irányhatározóját.

Idák. 1. *Meghatározandó az*

$$y = x^4$$

függvényt ábrázoló görbének érintője az $x=1$ *abszcisszának megfelelő* P *pontban.*

A feladat úgy értendő, hogy a szóban forgó görbén megszabunk egy P-t tartalmazó (egyébiránt tetszés szerint kicsinynek választható) vonaldarabot és ennek meghatározzuk P-ben az érintőjét.

A P pont koordinatái (1, 1). A Q pont koordinatái

$$1 + h \quad \text{és} \quad (1+h)^4.$$

A PQ irányhatározóját az

$$\frac{(1+h)^4 - 1}{h} = (1+h)^3 + (1+h)^2 + (1+h) + 1.$$

differencia-hányados adja meg. Ha h a zérushoz közeledik, akkor a differencia-hányados határértéke 4. Tehát az érintő irányhatározója 4.

2. *Meghatározandó az*

$$y = \frac{1}{x}$$

függvényt ábrázoló görbének érintője az $x=2$ *abszcisszának megfelelő pontban.*

A differencia-hányados

$$\frac{\frac{1}{2+h} - \frac{1}{2}}{h} = \frac{1}{h(2+h)} - \frac{1}{2h} = \frac{2-(2+h)}{2h(2+h)} = \frac{-1}{2(2+h)}.$$

Tehát az érintő irányhatározója

$$\lim_{h=0} \frac{\frac{1}{2+h} - \frac{1}{2}}{h} = \lim_{h=0} \frac{-1}{2(2+h)} = -\frac{1}{4}.$$

A differenciálhányados.

232. §. Jelentse x az $y = f(x)$ egyértékű függvény értelmezési tartományának valamely oly helyét, melyen a függvény véges értékű. Továbbá tartozzék x hely bizonyos környezete szintén az értelmezési tartományhoz. Ha x-nek szóban forgó értékénél a

$$\lim_{h=0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \qquad 1)$$

határérték létezik és véges, akkor $f(x)$-et az x helyen *differenciálhatónak* mondjuk és az 1) alatti határértéket $f(x)$-nek az x-helyhez tartozó *differenciálhányadosának* nevezzük. A differenciálhányados fogalmát a XVII. század második felében Leibniz és Newton állították föl.

A h és $f(x+h) - f(x)$ növekményeket így is jelöljük:

$$\Delta x \quad \text{és} \quad \Delta y = \Delta f(x).$$

Δ itt mint a növekmény előállításának műveleti jele szerepel. Segítségével a differenciálhányados így is írható:

$$\lim_{\Delta x=0} \frac{\Delta y}{\Delta x} \quad \text{vagy} \quad \lim_{\Delta x=0} \frac{\Delta f(x)}{\Delta x}.$$

Ha még a $\lim_{\Delta x=0}$ kiírása helyett a határátmenetet azzal jelezzük, hogy a Δ betűt d-vel helyettesítjük, akkor a differenciálhányados számára a Leibniztől eredő

$$\frac{dy}{dx} \quad \text{vagy} \quad \frac{df(x)}{dx}$$

jelölést kapjuk.

Itt dx és dy nem tekinthetők a Δx és Δy növekmények limeszeinek, mert Δx-nek és (folytonos függvény esetében) Δy-nak is limesze zérus. Tehát ezekből a limeszekből alkotott hányadosnak semmi értelme sincs.

Ellenben célszerű a $\frac{dy}{dx}$ jelben a $\frac{d}{dx}$-et a *differenciálás* műveleti jelének tekinteni. Ebben a fölfogásban a differenciálhányadost így is írjuk:

$$\frac{d}{dx}y, \quad \frac{d}{dx}f(x).$$

A differenciálhányados egy másik használatos jelölése a következő: y' vagy $f'(x)$. Segítségével $f(x)$-nek pl. az $x=1$ helyhez tartozó differenciálhányadosát így írhatjuk: $f'(1)$.

Az érintő meghatározásánál azt láttuk, hogy az érintő irányhatározóját y-nak, mint x függvényének differenciálhányadosa adja meg. Már ez a körülmény egymagában is mutatja a differenciálhányados fogalmának fontosságát. De az érintő meghatározása csak egy ama számos feladat közül, melyek a mathematika alkalmazásánál differenciálást kívánnak.

233. §. Az $x=0$ helyen

$$e^x, \quad \log(x+1), \quad \sin x, \quad \cos x$$

differenciálhányadosai:

$$\lim_{h=0} \frac{e^h-1}{h} = 1, \quad \lim_{h=0} \frac{\log(1+h)}{h} = 1,$$

$$\lim_{h=0} \frac{\sin h}{h} = 1, \quad \lim_{h=} \frac{\cos h-1}{h} = 0.$$

234. §. Ha $y = f(x)$ valamely x helyen differenciálható, akkor azon a helyen

$$\lim_{\Delta x=0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

véges és ennélfogva

$$\Delta y = \frac{\Delta y}{\Delta x} \Delta x$$

határértéke zérus. Ekkor tehát a független változó növekményének a zérushoz való közeledése egyszersmind a függvény növekményének a zérushoz való közeledését vonja maga után. Vagyis, *ha $y = f(x)$ valamely x helyen differenciálható, akkor ott okvetlenül folytonos.*

A racionális egész függvények differenciálása.

235. §. Az $f(x) = mx + b$ lineáris függvényre nézve

$$f(x+h) = m(x+h) + b,$$
$$f(x+h) - f(x) = mh,$$

és

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=m.$$

Tehát egyszersmind

$$\frac{df(x)}{dx}=\lim_{h=0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=m.$$

Ez az eredmény geometriailag is világos. A függvényt ebben az esetben egyenes vonal ábrázolja. Érintőnek bármely pontban maga az egyenes tekintendő. A differenciálhányados bármely pontban egyenlő az egyenes irányhatározójával.

Abban a különös esetben, midőn $f(x)=x$, azt kapjuk, hogy

$$\frac{dx}{dx}=1.$$

A puszta állandó úgy fogható fel, mint a lineáris függvénynek oly speciális esete, melyben $m=0$. Tehát *állandónak* differenciálhányadosa *zérus*.

236. §. Az x bármely pozitiv egész kitevőjű hatványának differenciálása a következő módon történik. Az

$$(x+h)^n-x^n=h\left[(x+h)^{n-1}+(x+h)^{n-2}x+\cdots+x^{n-1}\right]$$

képletből

$$\frac{(x+h)^n-x^n}{h}=(x+h)^{n-1}+(x+h)^{n-2}x+\cdots+x^{n-1}.$$

A jobboldalon álló n tag mindegyikének limesze x^{n-1}. Tehát

$$\frac{dx^n}{dx}=\lim_{h=0}\frac{(x+h)^n-x^n}{h}=nx^{n-1}.$$

Az $n=2$ esetben

$$\frac{dx^2}{dx}=2x.$$

237. §. Ha $f(x)$ és $g(x)$ valamely vizsgált helyen differenciálható függvények, a és b pedig állandók, akkor

$$y=af(x)+bg(x)$$

növesztett értéke az $x+h$ helyen

$$af(x+h)+bg(x+h).$$

Tehát y növekménye

$$a[f(x+h)-f(x)]+b[g(x+h)-g(x)].$$

A differencia-hányados:

$$a\frac{f(x+h)-f(x)}{h}+b\frac{g(x+h)-g(x)}{h}.$$

Végre a differenciálhányados:

MAGYAR TUDOMÁNYOS AKADÉMIA KÖNYVTÁRA

$$\frac{dy}{dx} = a \lim_{h=0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} + b \lim_{h=0} \frac{g(x+h) - g(x)}{h}$$

azaz

$$\frac{d}{dx}[af(x) + bg(x)] = af'(x) + bg'(x). \quad 1)$$

Az $a=b=1$ esetben ez az eredmény így fejezhető ki:

Differenciálható függvények összege is differenciálható. Az összeg differenciálhányadosa egyenlő az összeadandók differenciálhányadosainak összegével. Ez több mint két összeadandó esetében is igaz.

Ha 1) alatt b helyébe zérust teszünk, a következő tételt kapjuk:

Ha $f(x)$ differenciálható függvény, akkor $f(x)$-nek egy állandóval való szorzata is differenciálható. A differenciálás a

$$\frac{d}{dx}[af(x)] = a\frac{d}{dx}f(x)$$

képlet szerint végezhető.

238. §. *Az*

$$y = c_0 + c_1x + c_2x^2 + c_3x^3 + \cdots + c_nx^n$$

racionális egész függvény bármely véges x helyen differenciálható. A differenciálás tagonkint történhetik. Az egyes tagok differenciálásánál

$$\frac{d}{dx} c_kx^k = c_k \frac{d}{dx} x^k = kc_kx^{k-1}.$$

Például

$$\frac{d}{dx}(3+7x+5x^2) = 7 + 10x.$$

Néhány irracionális függvény differenciálása.

239. §. A 233. §. képletei könnyen általánosíthatók az $x = 0$ helyről más x helyekre.

Az $y=e^x$ növekménye x-től az $x+h$ helyig

$$e^{x+h} - e^x = e^x(e^h - 1).$$

A differencia-hányados

$$e^x \frac{e^h - 1}{h}.$$

Tehát

$$\frac{de^x}{dx} = e^x \lim_{h=0} \frac{e^h - 1}{h} = e^x.$$

Az $y = \log x$ függvény csak x pozitiv értékeire nézve van értelmezve. Az x és $x+h$ pozitiv értékeinél

$$\log(x+h) - \log x = \log\left(1 + \frac{h}{x}\right).$$

Innen

$$\frac{\log(x+h)-\log x}{h}=\frac{\log\left(1+\frac{h}{x}\right)}{h}=\frac{1}{x}\,\frac{\log\left(1+\frac{h}{x}\right)}{\frac{h}{x}}$$

és

$$\frac{d\log x}{dx}=\frac{1}{x}\lim_{h=0}\frac{\log\left(1+\frac{h}{x}\right)}{\frac{h}{x}}.$$

Ha itt a $\frac{h}{x}$ hányadost z-vel jelöljük, akkor h-val együtt z is a zérushoz közeledik. Ennélfogva

$$\lim_{h=0}\frac{\log\left(1+\frac{h}{x}\right)}{\frac{h}{x}}=\lim_{z=0}\frac{\log(1+z)}{z}=1$$

és

$$\frac{d\log x}{dx}=\frac{1}{x}.$$

Az $y=\sin x$ függvény növekménye x-től az $x+h$ helyig

$$\sin(x+h)-\sin x=\sin x\cos h+\cos x\sin h-\sin x=$$
$$=\sin x(\cos h-1)+\cos x\sin h.$$

A differencia-hányados

$$\sin x\,\frac{\cos h-1}{h}+\cos x\,\frac{\sin h}{h}.$$

Tudjuk, hogy

$$\lim_{h=0}\frac{\cos h-1}{h}=0\quad\text{és}\quad\lim_{h=0}\frac{\sin h}{h}=1;$$

tehát

$$\frac{d\sin x}{dx}=\cos x.$$

Hasonló módon $y=\cos x$ differenciálása a

$$\frac{d\cos x}{dx}=-\sin x$$

képletre vezet.

Az $y=\operatorname{tg}x$ differenciálásánál azokra a helyekre kell szorítkoznunk, melyeken $\cos x$ a zérustól különböző értékű. Ahol $\cos x$ értéke zérus, ott $\operatorname{tg}x$ nem folytonos, tehát nem is differenciálható.

A $\operatorname{tg}x$ növekménye

$$\operatorname{tg}(x+h)-\operatorname{tg}x=\frac{\sin(x+h)}{\cos(x+h)}-\frac{\sin x}{\cos x}=$$
$$=\frac{\sin(x+h)\cos x-\cos(x+h)\sin x}{\cos(x+h)\cos x},$$

azaz

$$\operatorname{tg}(x+h) - \operatorname{tg} x = \frac{\sin h}{\cos(x+h)\cos x}.$$

A differencia-hányados

$$\frac{\operatorname{tg}(x+h) - \operatorname{tg} x}{h} = \frac{1}{\cos(x+h)\cos x}\,\frac{\sin h}{h}.$$

Minthogy

$$\lim_{h=0} \frac{\sin h}{h} = 1,$$

azért a keresett differenciálhányados

$$\frac{d \operatorname{tg} x}{dx} = \frac{1}{\cos^2 x}.$$

Hasonlóképpen

$$\frac{d \operatorname{cotg} x}{dx} = -\frac{1}{\sin^2 x}.$$

HETEDIK FEJEZET.

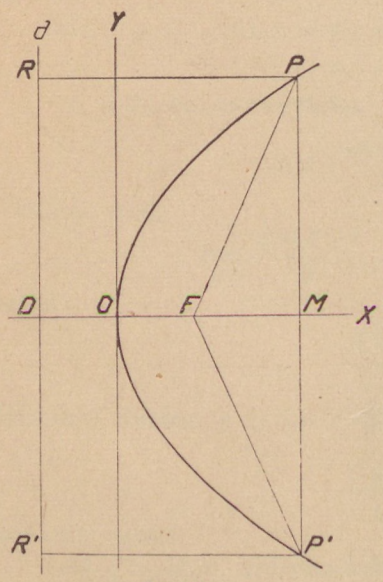
SPECIÁLIS FÜGGVÉNYEK ÉS GÖRBÉK.

I. A parabola és a másodfokú egész függvény.

A parabola tengelyponti egyenlete.

240. §. A megelőző két fejezetben tárgyalt általános alapfogalmak elegendők arra, hogy most már nehány fontos vonallal és függvénnyel részletesen foglalkozhassunk.

Legyen adva (70. ábra) egy d egyenes és kívüle egy F pont. *Azoknak a P pontoknak geometriai helyét, melyekre nézve az FP távolság egyenlő a d-től való RP távolsággal, az F* ***gyujtópont*** *(vagy* ***fokusz****) és a d* ***direktrix*** *által meghatározott* ***parabolának*** *mondjuk.*



70. ábra.

A gyujtópontból a direktrixre bocsátott DF merőleges a parabolát úgy osztja két részre, hogy az egyik rész a másiknak DF-re nézve a tükörképe. P-nek a DF-re vonatkozó P' tükörképét ugyanis úgy kapjuk meg, hogy P-ből a DF-re merőlegest bocsátunk és ezen a P'-t úgy határozzuk meg, hogy FD a PP' vonaldarabot felezze. Ha P a parabolán van, vagyis $FP=RP$, akkor FP' egyenlő $R'P'$-vel, azaz P' is a parabolán van. A DF egyenest az éppen bebizonyított tulajdonsága miatt a parabola *szimmetria-tengelyének* vagy röviden tengelyének mondjuk.

A tengely D és F közé eső darabjának O felezőpontja a parabolán van; a tengelynek többi pontja közül egy sem lehet a parabolán. A tengelynek és parabolának O metszéspontját a parabola *tengelypontjának* nevezzük. (Többnyire csúcspontnak mondják; de a parabola ott nem csúcsos.) A $p=DF$ távolságot a *fél parameternek* nevezzük.

A parabola egyenlete különösen egyszerű, ha a parabolát oly OXY derékszögű koordinata-rendszerre vonatkoztatjuk, melynek OX tengelye a parabolának szimmetria-tengelye, kezdőpontja pedig a tengelypont. Ha OX pozitiv értelmét O-tól F felé menőnek választ-

juk, akkor az F fokusz koordinatái $\left(\frac{p}{2}, 0\right)$. A sík bármely $P=(x, y)$ pontjára nézve

$$FP^2 = \left(x - \frac{p}{2}\right)^2 + y^2, \quad RP^2 = \left(x + \frac{p}{2}\right)^2; \qquad 1)$$

tehát P akkor és csak akkor van a parabolán, ha koordinatái kielégítik az

$$\left(x - \frac{p}{2}\right)^2 + y^2 = \left(x + \frac{p}{2}\right)^2$$

egyenletet. Ezt még így is írhatjuk:

$$y^2 = 2px \qquad 2)$$

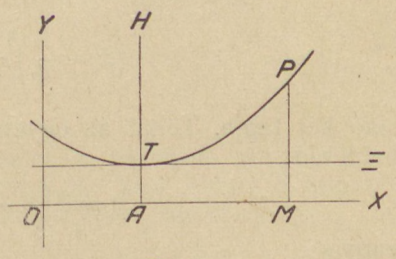
és ebben az alakban a parabola *tengelyponti egyenletének* nevezzük.

A 2) alatti egyenlet x-ben elsőfokú. Tehát bármely y ordinatához egy és csak egy oly megfelelő x abszcisszát találhatunk, hogy (x, y) a parabolának pontja. Vagyis a *parabola tengelyével párhuzamos* egyenesek a parabolát egy-egy pontban metszik. A metszéspont akkor és csak akkor esik a $\left(\frac{p}{2}, 0\right)$ gyujtóponton keresztül a parabola tengelyére merőlegesen húzott egyenesre, ha $y^2=p^2$. Innen $y=\pm p$. Tehát a gyujtóponton keresztül a tengelyre merőlegesen húzott egyenest a parabola oly két pontban metszi, melyeknek egymástól való távolsága $2p$.

241. §. Ha az előbbi koordinatarendszeren csak annyit változtatunk, hogy OX pozitiv értelmét fordítva állapítjuk meg, akkor a parabola egyenlete megint $y^2 = 2px$ alakú, de itt p nem a fokusz és a direktrix egymástól való távolságának abszolut értékét jelenti, hanem negativ előjellel vett mérőszámát.

A másodfokú egész függvény geometriai ábrázolása.

242. §. A parabola egyenlete csak kevéssel válik bonyodalmasabbá, ha a koordináták kezdőpontját szabadon választjuk, de OX és OY közül az egyiket megint a szimmetria-tengellyel párhuzamosan, a másikat reá merőlegesen szabjuk meg. Ha pl. OY párhuzamos a szimmetria-tengellyel, akkor a parabola egyenletét a következő módon állíthatjuk elő.



71. ábra.

Ha a parabolát átmenetileg (71. ábra) a T tengelyponton keresztül húzott $T\Xi$, TH tengelyekre vonatkoztatjuk, akkor egyenlete csak annyiban különbözik az $y^2=2px$ tengelyponti egyenlettől, hogy x és y helyett η és ξ irandó. Vagyis a parabola pontjaira nézve

$$\xi^2 = 2p\eta.$$

Ha $OA=a$, $AT=b$, akkor P-nek az OXY rendszerre vonatkozó x, y és a $T\Xi H$-ra vonatkozó ξ, η koordinatái között a

$$\xi = x - a, \quad \eta = y - b$$

kapcsolat van. Tehát a P pont akkor és csak akkor van a parabolán, ha

$$(x-a)^2 = 2p(y-b),$$

vagyis

$$y = \frac{1}{2p}(x-a)^2 + b.$$

Ez a parabolának az OXY-ra vonatkozó egyenlete. Ennek értelmében y az x-nek *másodfokú egész függvénye*.

Legegyszerűbb az egyenlet, ha a tengelypont O-ba esik. Ekkor a parabola egyenlete

$$y = Ax^2$$

alakú, hol A a $2p$-nek reciprok értéke.

243. §. A talált eredmény megfordítható. Vagyis *az*

$$y = Ax^2 + Bx + C \qquad 1)$$

másodfokú egész függvényt mindig oly parabola ábrázolja, melynek tengelye párhuzamos OY-nal.

Hogy ezt belássuk, csak az 1) alatti egyenletet az

$$y = \frac{(x-a)^2}{2p} + b \qquad 2)$$

alakra kell hoznunk. Ez pedig a következő példa mintájára mindig elvégezhető. Legyen

$$y = 3x^2 - 5x + 7.$$

Ha ezt az egyenletet így írjuk:

$$y = 3\left(x^2 - \frac{5}{3}x\right) + 7,$$

akkor a zárjelbe foglalt kifejezés éppen

$$\left(x - \frac{5}{6}\right)^2 = x^2 - \frac{5}{3}x + \frac{25}{36}$$

első két tagja. Tehát az egyenlet még a következő alakban is állítható elő:

$$y = 3\left(x - \frac{5}{6}\right)^2 - \frac{25}{12} + 7,$$

vagyis

$$y = 3\left(x - \frac{5}{6}\right)^2 + \frac{59}{12}.$$

Itt a jobboldalnak már a 2) alatti alakja van. Példánkban a, b és p értékei:

$$a = \frac{5}{6}, \quad b = \frac{59}{12}, \quad p = \frac{1}{6}.$$

A parabola érintője.

244. §. Az

$$y = Ax^2 + Bx + C$$

függvény bármely x helyen differenciálható, tehát a parabolának bármely pontjában van érintője. Az érintő irányhatározóját

$$y' = 2Ax + B$$

adja meg.

Ha a kezdőpont a tengelypontban van, akkor a parabolának egyenlete

$$y = Ax^2 \qquad 1)$$

és innen

$$y' = 2Ax. \qquad 2)$$

Ha itt $x=0$, akkor egyszersmind $y'=0$; vagyis *a tengelypontban vont érintő merőleges a parabola tengelyére.*

Mivel y' a parabola bármely pontjában véges, az érintő sohasem párhuzamos OY-nal, vagyis a parabola tengelyével.

Az x alkalmas választásánál y' bármely véges értéket felvehet, még pedig mindegyiket csak egy-egy x-re nézve. Azaz bármely e egyeneshez (ha csak nem párhuzamos a parabola tengelyével) a parabolán egy és csak egy oly pontot találunk, melyben az érintő e-vel párhuzamos.

Feladatok. 1. *Az*

$$y = 2x^2 + 4x$$

parabolán meghatározandó az a pont, melyben az érintő irányhatározója 8.

Az x-et úgy kell választanunk, hogy

$$\frac{dy}{dx} = 4(x+1) = 8$$

legyen; tehát $x=1$. A parabola egyenletéből az ordinata számára az $y = 6$ értéket kapjuk.

2. *Meghatározandó az*

$$y = 6x^2 + 18x + 1$$

egyenletű parabolának tengelypontja.

A tengelypontban az érintő merőleges a parabola tengelyére, tehát egyszersmind az ordinaták tengelyére is. Azaz ebben a pontban $y'=12x+18$ eltünik. Ennélfogva a tengelypont abszcisszája

$$x = -\frac{18}{12} = -1{\cdot}5.$$

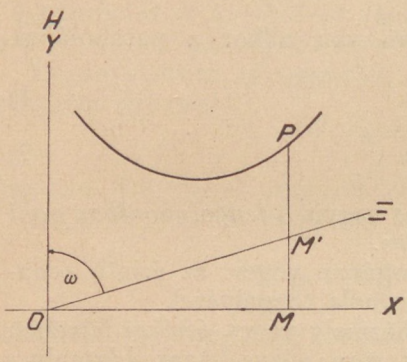
Az ordinata számára a parabola egyenlete a következő értéket adja:

$$y = 6 \cdot \frac{9}{4} - 18 \cdot \frac{3}{2} + 1 = -12{\cdot}5.$$

Áttérés ferdeszögű koordinatákra.

245. §. *Ha a parabolát oly parallel koordinata-rendszerre vonatkoztatjuk, melyben az ordinaták tengelye párhuzamos a parabola tengelyével, akkor az ordinata az abszcisszák másodfokú egész függvénye.*

Ez a derékszögű koordinaták esetében talált tétel ferdeszögű koordinaták esetében is igaz. Bebizonyításánál a ferdeszögű koordinatákra vonatkozó egyenletet úgy vezethetjük le, hogy a parabolát előbb oly derékszögű rendszerre vonatkoztatjuk, melyben a kezdőpont és az ordinaták tengelye ugyanaz, mint a ferdeszögű rendszerben.



72. ábra.

Az OXY derékszögű rendszerre nézve (72. ábra) a parabola egyenlete

$$y = Ax^2 + Bx + C \qquad 1)$$

alakú, hol A a zérustól különböző. Az OXY derékszögű rendszerre és az $O\Xi H$ ferdeszögű rendszerre vonatkozó koordináták kapcsolatát az

$$OM = OM' \sin\omega, \quad MP = OM' \cos\omega + M'P$$

vagyis

$$x = \xi \sin\omega, \quad y = \xi \cos\omega + \eta \qquad 2)$$

képletek fejezik ki. A parabolának a ferdeszögű rendszerre vonatkozó egyenletét úgy kapjuk meg, hogy 1) alatt x és y helyébe a 2) alatti kifejezéseket helyettesítjük. A transzformált egyenlet:

$$\xi \cos\omega + \eta = (A \sin^2\omega)\xi^2 + (B \sin\omega)\xi + C.$$

Ha η szerint megoldunk, azt találjuk, hogy

$$\eta = a\xi^2 + b\xi + c, \qquad 3)$$

hol a, b és c állandók.

Fordítva bármely 3) alakú egyenlet parabolát jelent, mert mindig található hozzá oly 1) alakú egyenlet, melyből a leírt módon előállítható.

246. §. Ha (73. ábra) a kezdőpont a parabolán van, továbbá az abszcisszák tengelye éppen a kezdőpontban vont érintő, az ordináták tengelye pedig (úgy mint eddig) párhuzamos a parabola tengelyével, akkor a parabola egyenlete ilyen alakú:

$$y = Ax^2.$$

Minthogy ugyanis az ordináták tengelye párhuzamos a parabola tengelyével, azért y az x-nek másodfokú egész függvénye. Ebben az x-től ment tag zérus, mert különben a kezdőpont nem lehetne a parabolán.

Hogy még az elsőfokú tag is hiányzik, az a következő módon látható be. Az érintő irányát ferdeszögű koordináták esetében úgy

határozzuk meg, mint derékszögűek esetében: a metsző irányhatározója most is egyenlő az ordinata növekményéből és az abszcissza növekményéből alkotott hányadossal; az érintő irányhatározóját most is a differenciálhányados adja meg. Tehát az

$$y = Ax^2 + Bx$$

parabolához a kezdőpontban húzott érintőnek irányhatározója B-vel egyenlő. Ez az érintő tehát csak akkor esik össze az OX koordinata-tengellyel, ha $B=0$. Fordítva bármely

$$y = Ax^2$$

alakú egyenlet akár derékszögű, akár ferdeszögű koordináták esetében oly parabolát jelent, mely keresztül megy a kezdőponton és a koordinata-tengelyekhez képest úgy van elhelyezve, hogy OX az O-ban vont érintő és OY a parabola tengelyével párhuzamos.

A parabola átmérői.

247. §. Ha (73. ábra) OX a parabola szabadon választott O pontjában vont érintő, OY pedig az O-n keresztül a parabola tengelyével párhuzamosan húzott egyenes, akkor az OXY rendszerre nézve, mint éppen láttuk, a parabola egyenlete

$$y = Ax^2 \qquad 1)$$

alakú. Az OX érintővel *párhuzamosan* húzott bármely e egyenes egyenlete:

$$y = b \qquad 2)$$

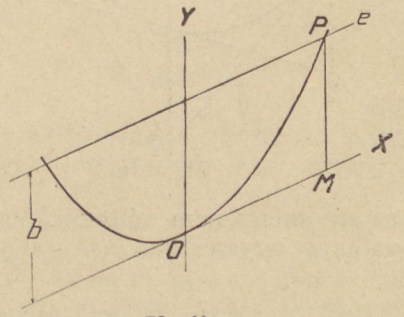
alakú. Az e-nek (x, b) pontja akkor és csak akkor van a parabolán, ha

$$b = Ax^2. \qquad 3)$$

Ha az e egyenes éppen az OX érintő, akkor $b=0$ és a 3) alatti egyenletből

$$x = 0.$$

Az érintőnek tehát az érintkezési ponton kívül más pontja nincs a parabolán.



73. ábra.

Más e egyenesre nézve b előjele attól függ, hogy e az OX melyik oldalán van. Ha b előjele megegyezik A előjelével, akkor a 3) alatti egyenletből x számára két értéket kapunk, tehát e a parabolát két pontban metszi. A két metszéspont x koordinatái egymástól csak előjelben különböznek és ennélfogva a két metszéspont által határolt húrnak felezőpontja OY-on van.

Ha b és A különböző előjelűek, akkor a 3) alatti egyenletet valós x nem elégítheti ki és az egyenes nem metszi a parabolát.

Tehát a parabola bármely t érintője a síkot úgy osztja két

részre, hogy t egyik oldalán a parabolának nincs pontja. A t másik oldalán vele párhuzamosan húzott egyenesek bármelyike a parabolát két pontban metszi. Az általuk határolt húrt a t érintkezési pontján keresztül a parabola tengelyével párhuzamosan húzott egyenes felezi. Ezt az egyenest a felezett *húrhoz* vagy ennek *irányához* konjugált *átmérőnek* nevezzük.

A mondottak értelmében a parabolának minden átmérője párhuzamos a parabola tengelyével. Fordítva a parabola tengelyével párhuzamosan húzott bármely egyenes a parabolának egyik átmérője. Az általa felezett húrok párhuzamosak az átmérőnek és a parabolának metszéspontjában vont érintővel.

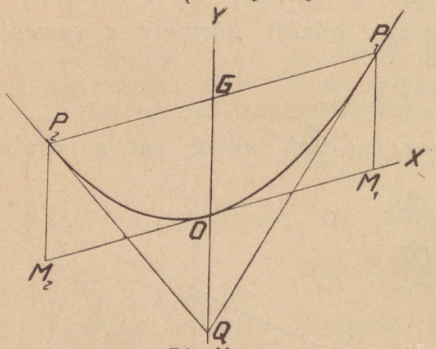
Bármely irányhoz, ha csak nem esik össze a parabola tengelyének irányával, egy-egy konjugált átmérő tartozik. Ez keresztül megy a parabolához az illető irányban húzott érintőnek érintkezési pontján.

248. §. *A parabola P_1 és P_2 pontjaiban vont érintők és a P_1P_2 húr G felező pontján keresztül húzott átmérő közös Q pontban találkoznak. Ennek az átmérőnek a parabolával való metszéspontja GQ-t felezi.*

A bebizonyításnál a koordinata-rendszert úgy választjuk (74. ábra), hogy OX a P_1P_2 húrral párhuzamos érintő, OY a P_1P_2-t felező átmérő legyen. Ekkor a parabola egyenlete

$$y^2 = Ax^2.$$

Ha a parabola $P_1 = (x, y)$ pontjában vont érintő pontjainak koordinatáit ξ-vel és η-val jelöljük, akkor az érintő egyenlete



74. ábra.

$$\eta - y = y'(\xi - x).$$

Az érintőnek az OY-n levő pontjára nézve $\xi = 0$, tehát

$$\eta = y - xy'.$$

Itt

$$y' = 2Ax \text{ és } xy' = 2Ax^2 = 2y.$$

Tehát

$$\eta = -y.$$

Ha P_1-ről áttérünk P_2-re, akkor csak x helyett $-x$ irandó. Tehát az eredmény nem változik. Vagyis OY és a szóban forgó két érintő valóban ugyanabban a

$$Q = (0, -y)$$

pontban találkozik. Továbbá az $O = (0, 0)$ pont a $G = (0, y)$ és $Q = (0, -y)$ által határolt GQ vonaldarabot valóban felezi.

A parabola meghatározása.

249. §. *A parabolát két pontja, az egyikben vont érintő és az átmérők iránya egyértelműen meghatározzák.*

A bebizonyításnál a koordinatarendszert úgy választjuk, hogy O összeessék avval az adott ponttal, melyben az érintő is meg van

adva. OX-nek ezt az érintőt, OY-nak pedig az O-n keresztül vont átmérőt választjuk.

A parabola egyenlete ekkor

$$y = Ax^2$$

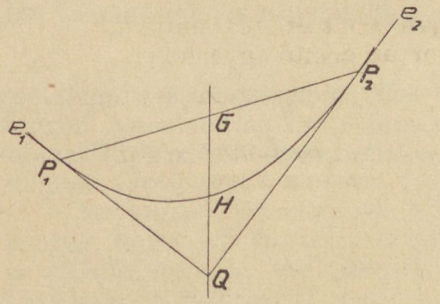
alakú. Itt még A úgy választandó, hogy a második adott pont koordinatái is kielégítsék az egyenletet. Ez csak egyféleképpen történhetik; tehát az adatok valóban csak egy parabolára vezetnek.

Az adatoknak természetesen olyanoknak kell lenniök, hogy a két adott pontot összekötő egyenes, az adott érintő és az átmérő különböző irányúak legyenek.

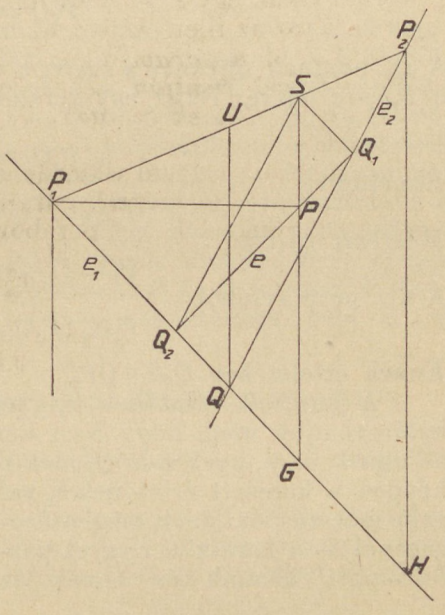
Ha ez a feltétel ki van elégítve, akkor a leírt számítás mindig elvégezhető és olyan parabola egyenletére vezet, mely a feladat adatainak megfelel.

A parabolát két pontja és a hozzájuk tartozó két érintő szintén egyértelműen meghatározza.

Az adott P_1, P_2 pontok-



75. ábra.



76. ábra.

hoz tartozó e_1, e_2 érintők nyilván úgy választandók, hogy ne legyenek egymással párhuzamosak és hogy egyik sem essék össze a P_1P_2 egyenessel (75. ábra).

Ha a P_1P_2 húr G felezőpontját összekötjük e_1 és e_2 egyenesek Q metszéspontjával, akkor a GQ egyenes okvetlenül a parabola átmérője. A parabolát tehát úgy kell P_1-en és P_2-ön keresztül rajzolnunk, hogy a P_1-ben e_1-et érintse és átmérőinek iránya megegyezzék GQ irányával. Az előbbi § értelmében egy és csak egy ilyen parabola van. Ennek az egyetlen parabolának P_1-ben vont érintője keresztül megy Q-n. Vagyis ez a parabola csakugyan eleget tesz annak a követelésnek is, hogy P_2-ben e_2-t érintse.

250. §. Legyen adva (76. ábra) a parabola két pontja, P_1 és P_2, továbbá a hozzájuk tartozó e_1 és e_2 érintő. *Megszerkesztendő az a P pont, melyben a P_1P_2 húr valamely meghatározott S pontján keresztül menő átmérő a parabolát metszi, továbbá a P-hez tartozó érintő.*

Mindenekelőtt meghatározzuk az átmérők irányát. Ha a P_1P_2 húr U felezőpontját összekötjük az e_1 és e_2 érintők Q metszőpontjával, akkor az UQ egyenes (mint a 248. §-ból tudjuk) éppen az U-n keresztül húzható átmérő. Minden más átmérő vele párhuzamos.

Hogy P-nek és érintőjének meghatározására is módot találjunk, a feladatot megoldottnak tekintjük és az ábrát elemezzük. A P-hez tartozó e érintőnek az e_1-gyel való metszéspontját Q_2-vel, az e_2-vel való metszéspontját Q_1-gyel jelöljük. A P-n és P_2-n keresztül húzott átmérőknek az e_1 érintővel való metszéspontjait G-vel és H-val jelöljük.

A P_1P_2 húrt felező UQ átmérő a P_1-en és P_2-n keresztül húzott átmérők által bezárt sávot felezi. Tehát

$$P_1Q = \tfrac{1}{2}P_1H.$$

A Q_2 pontnak ugyanaz a szerepe van a P_1P húrra nézve mint Q-nak a P_1P_2-re nézve. Tehát egyszersmind

$$P_1Q_2 = \tfrac{1}{2}P_1G.$$

Ennélfogva

$$P_1Q_2 : P_1Q = P_1G : P_1H.$$

Másrészt nyilván

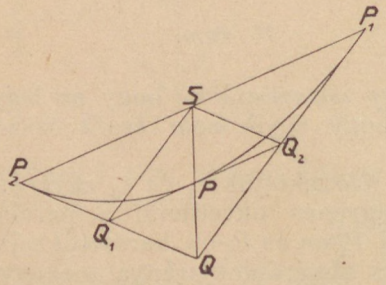
$$P_1S : P_1P_2 = P_1G : P_1H.$$

A két proporcióból

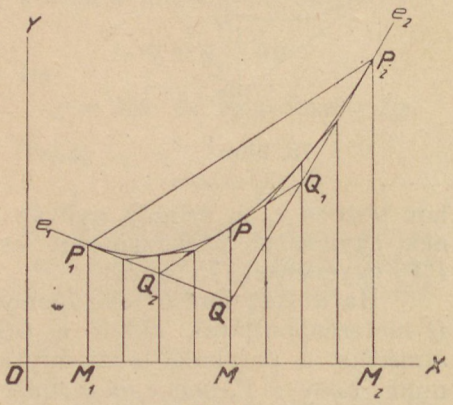
$$P_1Q_2 : P_1Q = P_1S : P_1P_2.$$

Ennek értelmében $Q_2S \parallel QP_2$.

A keresett érintőnek e_1-gyel való metszéspontját tehát úgy határozhatjuk meg, hogy S-en keresztül e_2-vel párhuzamost húzunk és ennek az e_1-gyel való Q_2 metszéspontját meghatározzuk. Hasonlóképpen a keresett érintőnek e_2-vel való metszéspontjának meghatározásánál S-en keresztül e_1-gyel párhuzamost húzunk és ennek az



77. ábra.



78. ábra.

e_2-vel való Q_1 metszéspontját meghatározzuk. *A Q_1, Q_2 pontokat összekötő egyenes adja meg a keresett érintőt.* Ha még S-en keresztül UQ-val párhuzamost húzunk, ez lesz az S-en keresztülmenő átmérő és ennek Q_1Q_2-vel való metszéspontja a keresett P pont.

Ha S éppen P_1P_2-nek felezőpontja (77. ábra), akkor Q_2 a P_1Q-nak és Q_1 a P_2Q-nak felezőpontja, továbbá Q_1Q_2 párhuzamos P_1P_2-vel.

251. §. Az előbbi §-ban mondottak kényelmes eljárást nyujtanak az

$$y = Ax^2 + Bx + C$$

másodfokú egész függvényt ábrázoló parabola megrajzolására.

Két szabadon választott abszcisszához kiszámítjuk y és y' megfelelő értékeit. Ekkor megrajzolhatjuk a parabola két pontját, P_1-et és P_2-t, valamint a hozzájuk tartozó érintőket is. Azután P_1P_2-n az S-nek különböző helyzeteket tulajdonítunk; mindegyikhez meghatározzuk az S-n keresztül menő átmérőnek a parabolával való metszéspontját és a hozzá tartozó érintőt.

Ugyancsak az előbbi §-ban mondottakon alapszik a következő általánosan elterjedt szerkesztés (78. ábra) is.

A P_1, P_2 pontoknak és a hozzájuk tartozó e_1, e_2 érintőknek meghatározása után az OX tengelyen az egymással egyenlő M_1M és MM_2 vonaldarabokat felezzük, a felezőpontokon keresztül függőlegeseket húzunk. Ezek a függőlegesek P_1Q-t és QP_2-t felezik. A Q_1, Q_2 felezőpontokat összekötő egyenesnek a Q-n keresztül menő átmérővel való P metszéspontja rajta van a parabolán és Q_1Q_2 a P-hez tartozó érintő. A P és Q_1Q_2 meghatározása után két újabb pontot és a hozzájuk tartozó érintőket határozzuk meg. Ezeknek a pontoknak és érintőknek meghatározásánál P_1 és P-nek, illetőleg P és P_2-nek jut az a szerep, melyet P meghatározásánál P_1 és P_2 játszottak. Azután hasonló módon négy újabb pontot és érintőt iktatunk közbe. S. í. t.

A parabola-szegmentum területe. SIMPSON szabálya.

252. §. Görbe vonalak által határolt területeket mint szögletes idomok területeinek limeszét fogjuk föl.

Az $y=Ax^2$ parabolának (79. ábra) az $O=(0, 0)$ és $Q=(a, b)$ pontok közé eső darabja, továbbá az $OM=a$ abszcissza és végül az $MQ=b$ ordinata által bezárt OMQ terület mérőszámát a következő módon határozzuk meg.

Az OQ parabola-darabon fölveszünk bizonyos számú

$$P_0, P_1, P_2, \ldots, P_{n-1}, P_n$$

osztópontot; közülök P_0 összeesik O-val, P_n pedig Q-val. A P_0P_1, $P_1P_2, \ldots, P_{n-1}P_n$ húrok, az OM abszcissza és az MQ ordinata által bezárt területet a $P_0P_1P_2 \ldots P_n$ *beírt poligonhoz* tartozó területnek nevezzük és mint OMQ egyik megközelítését fogjuk föl.

A beírt poligont másodikkal, harmadikkal s. í. t. pótoljuk, még pedig úgy, hogy az oldalak száma minden határon túl növekedjék, az oldalak hosszúsága pedig minden határon túl a zérushoz közeledjék. A poligonokhoz tartozó területek mérőszámainak *limeszét* nevezzük az OMQ terület mérőszámának.

Az $OP_1P_2 \ldots P_{n-1}Q$ poligonhoz tartozó területet a $P_1, P_2, \ldots, P_{n-1}$ pontok ordinatái n trapézre osztják. Ha P_k koordinatái (x_k, y_k), akkor a k-dik trapéz területének mérőszáma

$$y_{k-1}(x_k - x_{k-1}) \quad \text{és} \quad y_k(x_k - x_{k-1})$$

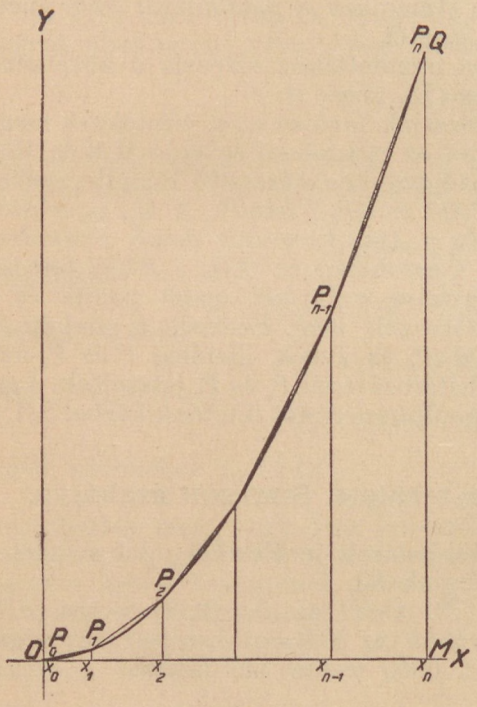
közé esik. Itt (nagyobb indexhez nagyobb x tartozván),

$$y_{k-1} = Ax_{k-1}^2 < A\frac{x_{k-1}^2 + x_{k-1}x_k + x_k^2}{3} < Ax_k^2 = y_k$$

es

$$y_{k-1}(x_k - x_{k-1}) < \tfrac{1}{3}A(x_k^3 - x_{k-1}^3) < y_k(x_k - x_{k-1}).$$

A vizsgált trapéz területének mérőszáma tehát oly keveset tér el



79. ábra.

$$\tfrac{1}{3}A(x_k^3 - x_{k-1}^3)$$

értékétől, hogy az eltérés kisebb mint

$$y_k(x_k - x_{k-1}) - y_{k-1}(x_k - x_{k-1}).$$

Ha még az $y_1 - y_0$, $y_2 - y_1$, . . ., $y_n - y_{n-1}$ különbségek közül a legnagyobbat δ-val jelöljük, akkor a mondottak értelmében a k-dik trapéz területe az

$$\tfrac{1}{3}A(x_k^3 - x_{k-1}^3) - \delta(x_k - x_{k-1}),$$
$$\tfrac{1}{3}A(x_k^3 - x_{k-1}^3) + \delta(x_k - x_{k-1})$$

korlátok közé esik.

Itt k helyébe az 1, 2, . . ., n számokat tesszük. Az így nyert kifejezések összeadása az $OP_1P_2 \ldots P_{n-1}Q$ poligonhoz tartozó terület mérőszámára nézve az

$$^1A(x_n^3 - x_0^3) - \delta(x_n - x_0),$$
$$\tfrac{1}{3}A(x_n^3 - x_0^3) + \delta(x_n - x_0)$$

korlátokat adja. A sokszög oldalainak szaporításánál és kisebbítésénél a talált két korlát közös limesze

$$\tfrac{1}{3}A(x_n^3 - x_0^3) = \tfrac{1}{3}Aa^3.$$

Tehát magának a poligonhoz tartozó területnek mérőszáma is ehhez a határértékhez közeledik. Azaz OMQ területének mérőszáma

$$T = \tfrac{1}{3}Aa^3 = \tfrac{1}{3}ab.$$

Ferdeszögű koordinaták esetében (80. ábra) P_{k-1} és P_k ordinatái közé foglalt sáv szélessége $x_k - x_{k-1}$ helyett $(x_k - x_{k-1})\sin\omega$, hol ω a koordinatatengelyek által bezárt szög. Azért ekkor OMQ területe

$$\tfrac{1}{3}ab\sin\omega.$$

ONQ területe $\frac{2}{3}ab\sin\omega$. A QQ' húr és a QOQ' parabola-darab közé eső szegmentum területe kétszer akkora, azaz

$$\tfrac{4}{3}ab\sin\omega.$$

A szóbanforgó szegmentumhoz a következő módon szerkeszthetünk vele egyenlő területű háromszöget. A QQ' húrt felező átmérőn felrakjuk az

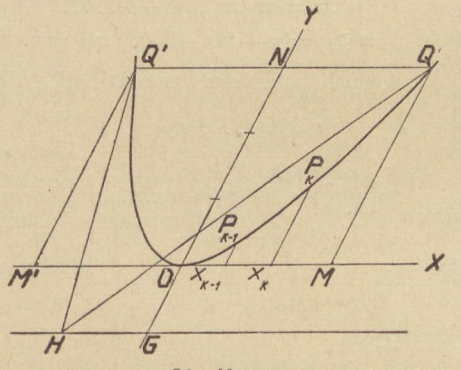
$$\overline{OG} = -\tfrac{1}{3}\overline{ON}$$

hosszúságot, G-n keresztül QQ'-val párhuzamost húzunk és ezen tetszésünk szerint fölveszünk egy H pontot. A $QQ'H$ háromszög egyenlő területű a szóbanforgó szegmentummal.

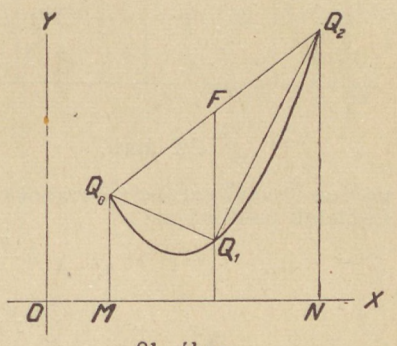
253. §. Az

$$y = Ax^2 + Bx + C$$

parabolának (81. ábra) $Q_0=(x_0, y_0)$, $Q_2=(x_2, y_2)$ pontjai által határolt darabjához tartozó $MNQ_2Q_1Q_0$ terület mérőszámát a következő módon határozzuk meg.



80. ábra.



81. ábra.

A Q_0Q_2 húr F felezőpontján át húzott átmérő a parabolát a $Q_1=(x_1, y_1)$ pontban metszi. Q_1F hossza:

$$\frac{y_0+y_2}{2} - y_1 = \frac{y_0-2y_1+y_2}{2},$$

A $Q_0Q_1Q_2$ háromszög területe:

$$\frac{y_0-2y_1+y_2}{4}(x_2-x_0).$$

A Q_0Q_2 húr és $Q_0Q_1Q_2$ parabola-darab által határolt szegmentum területe ennek $\frac{4}{3}$-szorosa, azaz:

$$\frac{y_0-2y_1+y_2}{3}(x_2-x_0).$$

Az MNQ_2Q_0 trapéz területe:

$$\frac{y_0+y_2}{2}(x_2-x_0).$$

Ha a trapéz területéből kivonjuk a parabola-szegmentum területét, akkor az $MNQ_2Q_1Q_0$ terület számára az

$$\frac{y_0+4y_1+y_2}{6}(x_2-x_0)=(y_0+4y_1+y_2)\frac{h}{3}$$

mérőszámot kapjuk, hol $h=\frac{x_2-x_0}{2}$

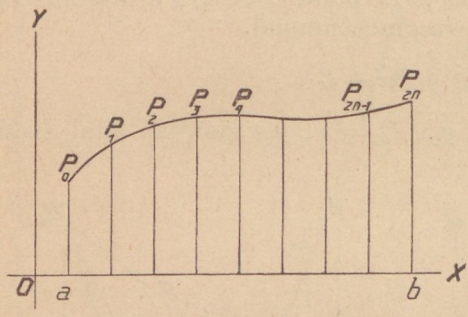
A mondottak alkalmazást találnak a terület következő gyakorlati (közelítő) kiszámításánál.

Az $(a\ldots b)$ számközön folytonos függvényt ábrázoló görbe vonaldarabhoz tartozó terület meghatározásánál (82. ábra) az $(a\ldots b)$ közt $2n$ egyenlő részre osztjuk. Egy rész hosszúsága $h=\frac{b-a}{2n}$. Az osztópontok abszcisszái:

$$x_0=a,\quad x_1=a+h,\ldots,$$
$$x_{2n-1}=a+(2n-1)h,\quad x_{2n}=b.$$

A görbe megfelelő pontjainak ordinátái:

$$y_0,\ y_1,\ldots,\ y_{2n-1},\ y_{2n}.$$



82. ábra.

A görbének $P_0P_1P_2$, $P_2P_3P_4$, ... darabjait a közelítő számításnál három ponton át vont parabola-darabokkal pótoljuk. A parabola-darabokhoz tartozó területek mérőszámai:

$$h\frac{y_0+4y_1+y_2}{3},$$

$$h\frac{y_2+4y_3+y_4}{3},$$

. . . . . .

$$h\frac{y_{2n-2}+4y_{2n-1}+y_{2n}}{3}.$$

Összegük a meghatározandó terület számára a következő közelítő képletet adja:

hol
$$T=\frac{h}{3}(A+4B+2C),$$

$A=y_0+y_{2n}$, $B=y_1+y_3+\cdots+y_{2n-1}$, $C=y_2+y_4+\cdots+y_{2n-2}$.

A terület közelítő meghatározásának ezt a módját Simpson *szabályának* nevezik.

II. A kör.

A kör egyenlete.

254. §. *A $C=(x_0, y_0)$ pont körül R sugárral leírt kör azoknak a pontoknak geometriai helye, melyeknek C-től való távolsága egyenlő R-rel.* (83. ábra.)

Ennek a vonalnak egyenlete derékszögű koordináták esetében

$$(x-x_0)^2+(y-y_0)^2-R^2=0. \qquad 1)$$

Ha C a kezdőpontba esik és $R=1$, akkor az egységkörnek

$$x^2 + y^2 - 1 = 0$$

egyenletét kapjuk.

Az 1) alatti egyenlet kifejtett alakja:

$$x^2 + y^2 - 2x_0x - 2y_0y + x_0^2 + y_0^2 - R^2 = 0. \qquad 2)$$

Ennek az egyenletnek baloldala x-nek és y-nak *másodfokú egész függvénye*, vagyis az egyenlet ilyen alakú:

$$a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33} = 0, \qquad 3)$$

hol az a-k állandó együtthatók és x^2, xy, y^2 együtthatói nem mindannyian zérusok. Minden ilyen egyenlet x-ben és y-ban *másodfokú* egyenletnek neveztetik.

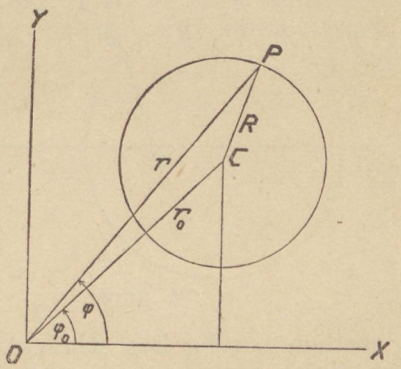
Nem minden másodfokú egyenlet ábrázol kört. A 2) alatti egyenletben ugyanis xy együtthatója zérus, x^2 és y^2 együtthatója pedig 1. Az utóbbi tulajdonság megszünik, ha az egyenletet valamely 1-től különböző λ számmal megszorozzuk. De még akkor is x^2 együtthatója egyenlő marad y^2 együtthatójával. Minthogy továbbá λ-t, ha csak nem akarunk a kör egyenlete helyett azonosságot kapni, a zérustól különbözőnek kell választanunk, azért a szorzás után is x^2 meg y^2 közös együtthatója a zérustól különböző. Fordítva minden oly x és y-ban másodfokú egyenlet, melyben

$$a_{11} = a_{22} \gtrless 0 \quad \text{és} \quad a_{12} = 0,$$

az a_{11}-gyel való osztással és rendezéssel az

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + C = 0 \qquad 4)$$

alakra hozható, melyben C puszta állandó. Ha itt C *negatív* szám, akkor a $-r^2$ alakban állítható elő; vagyis ebben az esetben a 4) alatti egyenlet kört ábrázol. Ha azonban C a zérussal egyenlő vagy pozitiv szám, akkor (mint alább kifejtjük) a 4) alatti egyenlet csak a szó átvitt értelmében nevezhető kör egyenletének.



83. ábra.

Legyen pl. az adott egyenlet

$$2(x^2+y^2) + 6x - 10y + 9 = 0.$$

Ha x^2 és y^2 közös együtthatójával osztunk, az egyenletet így írhatjuk:

$$x^2 + y^2 + 3x - 5y + 4{\cdot}5 = 0.$$

Itt

$$x^2 + 3x = (x+1{\cdot}5)^2 - 1{\cdot}5^2 = (x+1{\cdot}5)^2 - 2{\cdot}25$$

$$y^2 - 5y = (y-2{\cdot}5)^2 - 2{\cdot}5^2 = (y-2{\cdot}5)^2 - 6{\cdot}25.$$

Ezt tekintetbe véve, a vizsgált egyenletet így is írhatjuk:

$$(x+1{\cdot}5)^2 + (y-2{\cdot}5)^2 - 4 = 0.$$

Ez az egyenlet valóban

$$(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+C=0$$

alakú; benne

$$x_0=-1{\cdot}5,\quad y=2{\cdot}5,\quad C=-4=-2^2.$$

Hasonló módon térhetünk át a 4) alatti alakra bármely más esetben is.

A tárgyalt példában $C=-4$ negativ szám, tehát az egyenlet valóban körnek egyenlete. A kör középpontja $(-1{\cdot}5,\ 2{\cdot}5)$, sugara 2.

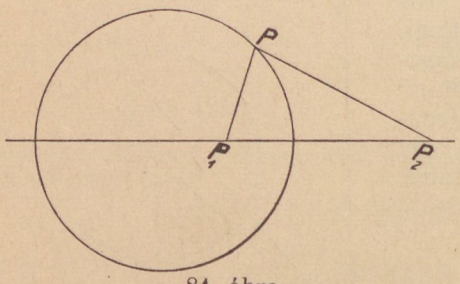
Ha 4) alatt C értéke zérus, akkor az

$$(x-x_0)^2+(y-y_0)^2=0$$

egyenletet csak a síknak $(x_0,\ y_0)$ pontja elégíti ki. Az egyenlet által ábrázolt *zérus sugarú kört* már csak átvitt értelemben mondhatjuk vonalnak. Továbbá az oly

$$(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+C=0$$

egyenletet, melyben $C>0$, egyetlen pont sem elégíti ki. Egyöntetűség kedveért mégis ebben az esetben is az egyenlet által ábrázolt vonalról beszélünk és az egyenletet *képzetes* (imaginarius) *kör* egyenletének mondjuk. Így jelezzük, hogy az egyenlet a körnek egyenletére *emlékeztet*, de azt *valóban* egyetlen pont sem elégíti ki.



84. ábra.

Ha a «kör» szónak átvitt értelmű használatát is megengedjük, akkor a másodfokú egyenlet az

$$a_{11}=a_{22}\gtrless 0,\quad a_{12}=0$$

esetben mindig kört ábrázol, csakhogy esetleg *zérus sugarú* vagy *képzetes* kört.

255. §. *Azoknak a $P=(x,\ y)$ pontoknak geometriai helye* (84. ábra), *melyekre nézve két állandó $P_1=(x_1,\ y_1)$, $P_2=(x_2,\ y_2)$ ponttól való távolságaik viszonya állandó λ értékű, általában kör, a $\lambda=1$ esetben egyenes.*

Mivel a P_1P és P_2P távolságoknak csak puszta hossza jön tekintetbe, azért a követelésünket kifejező

$$\frac{P_1P}{P_2P}=\lambda$$

egyenlet a következővel is pótolható:

$$\frac{P_1P^2}{P_2P^2}=\lambda^2$$

Ezt így is írhatjuk:

$$P_1P^2-\lambda^2P_2P^2=0,$$

és ha a P_1P és P_2P távolságokat a koordináták segítségével kifejezzük, akkor még így is:

$$[(x-x_1)^2+(y-y_1)^2]-\lambda^2[(x-x_2)^2+(y-y_2)^2]=0.$$

A kifejtés és a rendezés

$$a(x^2+y^2)+2a_{13}x+2a_{23}y+a_{33}=0$$

alakú egyenletre vezet. Itt $a=1-\lambda^2$, tehát az egyenlet általában kört határoz meg. Csak a $\lambda^2=1$ esetben tünik el a; ekkor az egyenlet elsőfokú, tehát egyenest határoz meg.

Három pont által meghatározott kör.

256. §. *Három pont,*

$$P_1=(x_1, y_1),\quad P_2=(x_2, y_2),\quad P_3=(x_3, y_3),$$

általában egy és csak egy rajta keresztülmenő kört határoz meg. Csak *egy egyenesben* levő három pont nem határoz meg kört.

Valóban, bármely kör egyenlete (derékszögű koordinatákban)

$$a(x^2+y^2)+2a_{13}x+2a_{23}y+a_{33}=0 \qquad 1)$$

alakú és fordítva minden ilyen alakú egyenlet, ha csak $a\gtrless 0$, kört ábrázol. A szóban forgó esetben az együtthatók úgy választandók, hogy

$$a(x_i^2+y_i^2)+2a_{13}x_i+2a_{23}y_i+a_{33}=0 \qquad (i=1, 2, 3)$$

legyen. Tehát

$$a,\quad 2a_{13},\quad 2a_{23},\quad a_{33}$$

viszonyának meg kell egyeznie az

$$\begin{vmatrix} x_1^2+y_1^2 & x_1 & y_1 & 1 \\ x_2^2+y_2^2 & x_2 & y_2 & 1 \\ x_3^2+y_3^2 & x_3 & y_3 & 1 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{vmatrix}$$

determináns utolsó sorának elemeihez tartozó aldeterminánsok viszonyával, vagy — ami egyre megy — az

$$\begin{vmatrix} \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ x_1^2+y_1^2 & x_1 & y_1 & 1 \\ x_2^2+y_2^2 & x_2 & y_2 & 1 \\ x_3^2+y_3^2 & x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}$$

determináns első sorának elemeihez tartozó aldeterminánsok viszonyával. Az a, $2a_{13}$, $2a_{23}$, a_{33} értékének mindig magukat az említett aldeterminánsokat szabad választanunk. Ha ezeket az értékeket 1) alatt behelyettesítjük, a három pont által meghatározott kör egyenletét az

$$\begin{vmatrix} x^2+y^2 & x & y & 1 \\ x_1^2+y_1^2 & x_1 & y_1 & 1 \\ x_2^2+y_2^2 & x_2 & y_2 & 1 \\ x_3^2+y_3^2 & x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}=0 \qquad 2)$$

alakban kapjuk meg.

Meggondolásaink csak akkor nem alkalmazhatók, ha az ily módon nyert 2) alatti egyenlet nem ábrázol kört, mert benne $x^2 + y^2$ együtthatója zérus. Ez akkor és csak akkor következik be, ha

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} = 0,$$

vagyis ha a három pont egy egyenesen van.

A körnek polárkoordinatákban kifejezett egyenlete.

257. §. Az r, φ polárkoordinatáknak megfelelő P pont (83. ábra) akkor és csak akkor van a $C=(r_0, \varphi_0)$ körül R sugárral leírt körön, ha

$$r^2 + r_0^2 - 2r_0 r \cos(\varphi - \varphi_0) - R^2 = 0. \qquad 1)$$

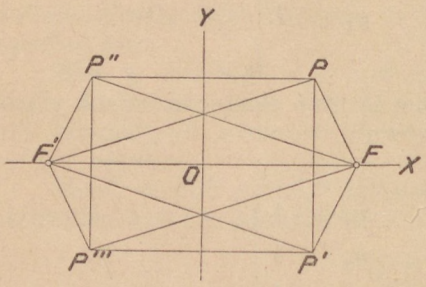
Ez a trigonometria cosinus-tételéből (vagy CARNOT-tételből) világos.

Az 1) alatti egyenlet a körnek polárkoordinatákban kifejezett egyenlete.

III. Az ellipszis és a hiperbola.

Az ellipszisnek és a hiperbolának a főtengelyekre vonatkozó egyenlete.

258. §. Jelentsék r és r' a P pontnak (85. ábra) két meghatározott F és F' ponttól való távolságát. Azoknak a P pontoknak geometriai helyét, melyekre nézve az $r+r'$ összeg állandó értékű, *ellipszisnek* nevezzük. F és F' az ellipszis *gyujtópontjai* vagy *fokuszai*. Az $r=FP$ és $r'=F'P$ távolságokat a gyujtópontokra vonatkozó *rádiusz vektoroknak* vagy *gyujtósugaraknak* mondjuk. Állandó összegüket $2a$-val jelöljük. Ha $F'F=2c$, akkor $2c<2a$, azaz $c<a$, mert az $FF'P$ háromszögben két oldal összege mindig nagyobb, mint a harmadik oldal.



85. ábra.

Ha P az ellipszisnek pontja, akkor P-nek az $F'F$ egyenesre vonatkozó P' tükörképe is az ellipszisen van. Ha továbbá az $F'F$ vonaldarab O felező pontján keresztül $F'F$-re merőlegest húzunk, P-nek erre vonatkozó P'' tükörképe szintén az ellipszisen van. Ezért az $F'F$ egyenest és az O-n keresztül reá merőlegesen húzott egyenest az ellipszis *tengelyeinek*, *szimmetriatengelyeinek* vagy *főtengelyeinek* nevezzük.

Ha P az ellipszisen van és az OP távolságot O-ból az ellenkező értelemben is felrakjuk, akkor az így meghatározott P''' pont szintén az ellipszisen van. Ezért $F'F$-nek O felező pontját az ellipszis *középpontjának* vagy *centrumának* nevezzük.

A fokuszoknak a középponttól való c távolságát *lineáris excentricitásnak* nevezzük. A $\frac{c}{a}$ hányadost *numerikus excentricitásnak* mondjuk. Ez mindig kisebb mint 1, mert $c<a$.

259. §. Ha az ellipszist a főtengelyeire, mint koordinata-tengelyekre vonatkoztatjuk (85. ábra) és OX-nek a fokuszokat tartalmazó főtengelyt választjuk, akkor a fokuszok koordinatái $(c, 0)$ ill. $(-c, 0)$. A gyujtósugarak hosszát

$$(x-c)^2+y^2 \quad \text{és} \quad (x+c)^2+y^2$$

pozitiv négyzetgyökei adják meg. Tehát az ellipszis pontjait jellemző

$$r+r'=2a \quad \text{vagy} \quad r'=2a-r$$

egyenlet részletes alakja

$$\sqrt{(x+c)^2+y^2}=2a-\sqrt{(x-c)^2+y^2}. \qquad 1)$$

Itt és a következőkben a négyzetgyök mindig pozitiv.

Az 1) alatti egyenletnek oly alakot is adhatunk, melyben többé nincsen négyzetgyök. Az átalakítást azzal kezdjük meg, hogy mind a két oldalon négyzetre emelünk.

Az így nyert

$$(x+c)^2+y^2=4a^2-4a\sqrt{(x-c)^2+y^2}+(x-c)^2+y^2 \qquad 2)$$

egyenlet az ellipszis minden pontjára nézve érvényes. Ellenben kétséges, hogy nem elégítik-e ki oly más pontok is, melyekre nézve az 1) alatti egyenlet két oldala *csak abszolut értékre* nézve egyenlő. Az ilyen kétségeket majd utólag oszlatjuk el.

A 2) alatti egyenletnek a benne szereplő négyzetgyök szerint megoldott alakja:

$$\sqrt{(x-c)^2+y^2}=a-\frac{c}{a}x. \qquad 3)$$

Újabb négyzetre való emelés erre az egyenletre vezet:

$$(x-c)^2+y^2=\left(a-\frac{c}{a}x\right)^2, \qquad 4)$$

melynek a következő alakokat is adhatjuk:

$$x^2+c^2+y^2=a^2+\frac{c^2x^2}{a^2},$$

$$\frac{a^2-c^2}{a^2}x^2+y^2-(a^2-c^2)=0,$$

vagy végre:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{a^2-c^2}-1=0. \qquad 5)$$

Ez a négyzetgyököktől ment egyenlet az ellipszis minden pontjára érvényes. Ellenben (mint már mondottuk) meggondolá-

sainkból nem tűnik ki, hogy ezt az egyenletet csak az ellipszis pontjai elégítik ki.

Ennek bebizonyításánál lényeges, hogy $a>c>0$. Ezen egyenlőtlenség miatt

$$\frac{y^2}{a^2-c^2} \geqq 0.$$

Tehát az 5) egyenletet kielégítő pontokra nézve $\frac{x^2}{a^2} \leqq 1$, azaz $|x| \leqq a$.

Ezt tudva, most már további meggondolásaink a következők:

Az 5) alatti egyenlet tökéletesen ugyanazt fejezi ki, mint a 4) alatti. Továbbá, mivel 5) alatt c-nek csak a négyzete fordul elő, azért az 5) alatti egyenlet egyszersmind ugyanazt fejezi ki mint az

$$(x+c)^2 + y^2 = \left(a + \frac{c}{a}x\right)^2 \qquad 4^*)$$

egyenlet, melyet a 4) alattiból c előjelének megváltoztatásával kapunk. A 4) és 4*) alatti egyenletekből világos, hogy az 5) alatti egyenletet kielégítő bármely P pontra nézve

$$\begin{aligned} FP &= \sqrt{(x-c)^2 + y^2} = \left|a - \frac{c}{a}x\right|, \\ F'P &= \sqrt{(x+c)^2 + y^2} = \left|a + \frac{c}{a}x\right|. \end{aligned} \qquad 6)$$

Itt az $|x| \leqq a$ és $0<c<a$ egyenlőtlenségek értelmében $a - \frac{c}{a}x$ és $a + \frac{c}{a}x$ a szóban forgó pontokra nézve mindig pozitivok. Ezekre a pontokra nézve tehát a 6) alatti képletek így is írhatók:

$$\sqrt{(x-c)^2 + y^2} = a - \frac{c}{a}x, \qquad \sqrt{(x+c)^2 + y^2} = a + \frac{c}{a}x.$$

Ennek a két értéknek az összege $2a$, vagyis a szóban forgó pontok mindannyian valóban az ellipszisen vannak.

Evvel teljesen be van bizonyítva, hogy az 5) alatti egyenlet a vizsgált ellipszist ábrázolja, vagyis ennek pontjaira és csak ezekre nézve érvényes.

260. §. Az előbbi fejtegetésekben $a>c>0$ volt. Ha oly

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2-c^2} - 1 = 0 \qquad 1)$$

alakú egyenlet vizsgálatára térünk át, melyben $c>a>0$, akkor az előbbi megfontolások csak odáig ismételhetők, hogy 1) ugyanazt fejezi ki, mint a

$$\sqrt{(x-c)^2 + y^2} = \left|a - \frac{c}{a}x\right|, \quad \sqrt{(x+c)^2 + y^2} = \left|a + \frac{c}{a}x\right| \qquad 2)$$

egyenletek. Most ugyanis $a^2-c^2<0$; ennélfogva az 1) alatti egyenletből $\frac{x^2}{a^2} \geqq 1$, azaz $|x| \geqq a$. Tehát az $a - \frac{c}{a}x$, $a + \frac{c}{a}x$ kéttagúak

előjelét a második tag előjele adja meg. Ha ezt tekintetbe vesszük, akkor a 2) alatti egyenletekből

$$\sqrt{(x-c)^2+y^2}=\pm\left(\frac{c}{a}x-a\right),\quad \sqrt{(x+c)^2+y^2}=\pm\left(a+\frac{c}{a}x\right),\qquad 3)$$

hol $\pm$ helyébe x előjele teendő. A talált értékek összege nem egyenlő $2a$-val, hanem ahelyett most a következő egyenlet érvényes:

$$\sqrt{(x-c)^2+y^2}-\sqrt{(x+c)^2+y^2}=\pm 2a. \qquad 4)$$

A $c>a>0$ esetben tehát az 1) alatti egyenletet csak oly pontok elégítik ki, melyekre nézve $FP-F'P$ abszolut értéke $2a$. Az előbbi § elejéhez hasonló módon egyszersmind könnyen belátható, hogy viszont minden ily pont kielégíti az 1) alatti egyenletet. Szóval az 1) alatti egyenlet most azoknak a pontoknak geometriai helyét ábrázolja, melyekre nézve

$$|FP-F'P|=2a.$$

Ezt a geometriai helyet *hiperbolának* nevezzük. Az F és F' pontokat a hiperbola *gyujtópontjainak* mondjuk. Az FF' egyenest és az O-ban reá emelt merőlegest a *főtengelyeknek*, O-t pedig a *középpontnak* nevezzük, még pedig ugyanazon okoknál fogva, mint az ellipszisnél. A c *lineáris excentricitás* most nagyobb mint a, tehát a $\frac{c}{a}$ *numerikus excentricitás* nagyobb mint 1.

261. §. A mondottak értelmében mind az ellipszisnek, mind a hiperbolának a főtengelyekre vonatkoztatott egyenlete ily alakú

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{a^2-c^2}-1=0.$$

Az ellipszis esetében, mint tudjuk, a^2-c^2 pozitiv szám és természetesen kisebb mint a^2. A hiperbola esetében a^2-c^2 negativ szám. Az első esetben ezt a különbséget b^2-tal, a második esetben $-b^2$-tal jelölhetjük, hol b pozitiv szám. Az ellipszis egyenletét tehát így írhatjuk:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-1=0 \qquad 1)$$

a hiperboláét pedig a következő alakban:

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}-1=0. \qquad 2)$$

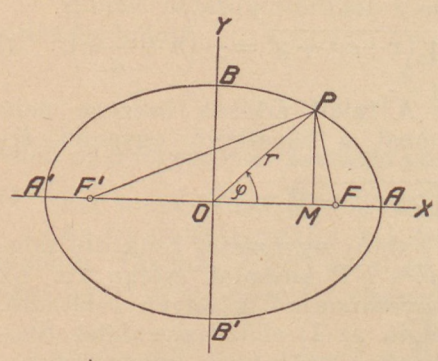
Fordítva minden 1) alakú egyenlet, melyben $b<a$, oly ellipszist, minden 2) alakú egyenlet pedig oly hiperbolát ábrázol, melynek főtengelyei összeesnek a koordinatatengelyekkel és fokuszai az OX tengelyen vannak.

Az ellipszis alakja.

262. §. Hogy

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-1=0 \qquad 1)$$

egyenlet által ábrázolt ellipszis alakjáról felvilágosítást kapjunk, az ellipszist a kezdőpontból húzott félegyenesekkel metsszük (86. ábra). Egyszerűség kedvéért az ellipszisnek az első síknegyedben levő részére szorítkozunk, mert ebből a többi síknegyedbe eső részeket tükrözéssel könnyen előállítjuk.



86. ábra.

A számításnál derékszögű koordináták mellett polárkoordinátákat is használunk. A kétféle koordináták kapcsolatát az

$$x = r\cos\varphi, \quad y = r\sin\varphi \qquad 2)$$

egyenletek fejezik ki.

Hogy az O-ból φ irányban húzott egyenes (r, φ) pontja az ellipszisen legyen, az r-et úgy kell meghatároznunk, hogy a 2) alatti koordináták kielégítsék az ellipszis egyenletét. Vagyis r-et a következő egyenlet adja meg:

$$r^2\left(\frac{\cos^2\varphi}{a^2} + \frac{\sin^2\varphi}{b^2}\right) = 1.$$

Innen

$$r = \frac{1}{\sqrt{\frac{\cos^2\varphi}{a^2} + \frac{\sin^2\varphi}{b^2}}}. \qquad 3)$$

Ha még tekintetbe vesszük, hogy

$$\cos^2\varphi = \frac{1+\cos 2\varphi}{2}, \qquad \sin^2\varphi = \frac{1-\cos 2\varphi}{2},$$

akkor továbbá

$$r = \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{a^2}-\frac{1}{b^2}\right)\cos 2\varphi}}. \qquad 4)$$

A 2) és 3) alatti képletek értelmében x és y értékei:

$$x = \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}\operatorname{tg}^2\varphi}}, \qquad y = \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{b^2} + \frac{1}{a^2}\operatorname{cotg}^2\varphi}}. \qquad 5)$$

Ha $\varphi=0$, akkor $r=a$, $x=a$, $y=0$. Tehát OX pozitiv felének az ellipszissel való metszéspontja: $A = (a, 0)$.

Ha $\varphi = \frac{\pi}{2}$, akkor $r=b$, $x=0$, $y=b$. Tehát OY pozitiv felének az ellipszissel való metszéspontja: $B = (0, b)$.

Míg φ a 0-tól $\frac{\pi}{2}$-ig növekedik, azalatt a 4) és 5) alatti képletek értelmében x és r egyre fogynak, y ellenben egyre növekedik.

Az éppen meghatározott $A = (a, 0)$, $B = (0, b)$ pontok és koordinatatengelyek negativ felein levő $A' = (-a, 0)$, $B' = (0, -b)$ pontok

által határolt $A'A$, $B'B$ vonaldarabokat a *nagy* ill. *kis tengelynek* nevezzük. Hosszúságuk a mondottak értelmében $2a$ és $2b$.

Minthogy az ellipszis bármely pontjára nézve $a \geqq OP \geqq b$, azért az ellipszis teljesen az O körül $a = OA$ és $b = OB$ sugárral leírt körök közé esik.

A hiperbola alakja.

263. §. Az

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0 \qquad 1)$$

hiperbola vizsgálatánál figyelmünket a

$$-\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0$$

hiperbolára is kiterjesztjük. Ezt az eredetihez *konjugált hiperbolának* nevezzük.

Az eredeti hiperbola pontjaira nézve

$$\frac{x^2}{a^2} > \frac{y^2}{b^2}$$

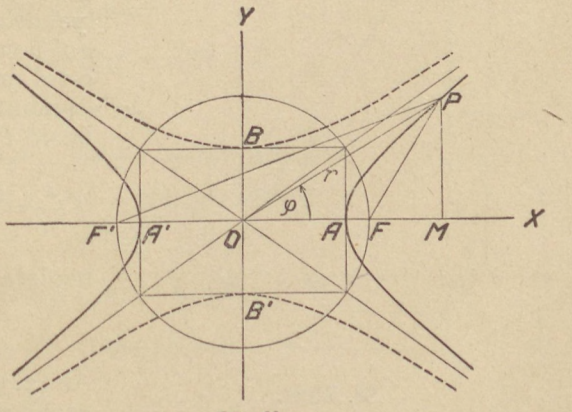
és innen

$$\left|\frac{y}{x}\right| < \frac{b}{a}.$$

A konjugált hiperbola pontjaira nézve ellenben

$$\left|\frac{y}{x}\right| > \frac{b}{a}.$$

Tehát az O középponton keresztül a $\frac{b}{a}$ ill. $-\frac{b}{a}$ irányhatározóknak megfelelően húzott egyenesek a síkot úgy osztják négy részre, hogy két részben csak az eredeti hiperbolának, a másik két részben csak a konjugált hiperbolának vannak pontjai (87. ábra). A mondott két egyenest mindkét hiperbola *aszimptotáinak* nevezzük.



87. ábra.

Az OX tengely a hiperbolát az $A = (a, 0)$ és $A' = (-a, 0)$ pontokban metszi. Ezt a tengelyt a hiperbola valós tengelyének nevezzük. A valós tengely hosszúságán az $A'A$ egyenesdarab $2a$ hosszúságát értjük.

Az OY tengely az eredeti hiperbolát nem metszi. Ezt a tengelyt a hiperbola *képzetes tengelyének* nevezzük. OY-nak a konjugált hiperbolával való metszéspontjai $B = (0, b)$ és $B' = (0, -b)$. A $B'B$ egyenesdarabnak $2b$ hosszú-

ságát (az eredeti hiperbolára nézve) a képzetes tengely hosszúságának mondjuk.

Ha az A, A', B, B' pontokban a tengelyekre merőlegeseket emelünk, akkor az aszimptoták e négy egyenes által alkotott négyszögnek diagonálisai. A négyszög szögpontjainak a kezdőponttól való távolsága $\sqrt{a^2+b^2}=c$. Vagyis ezek a pontok az O körül $c=OF$ sugárral leírt körön vannak.

264. §. Az O-ból φ irányszög alatt húzott félegyenesnek az eredeti hiperbolával való metszéspontját az

$$x=\frac{1}{\sqrt{\frac{1}{a^2}-\frac{1}{b^2}\operatorname{tg}^2\varphi}},\qquad y=\frac{1}{\sqrt{\frac{1}{a^2}\operatorname{cotg}^2\varphi-\frac{1}{b^2}}}$$

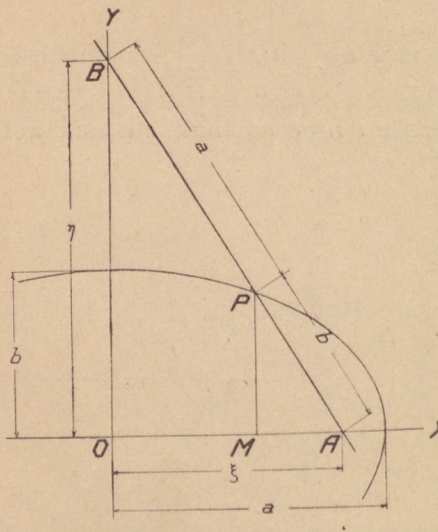
képletek adják meg. Az első síknegyedben a pozitiv négyzetgyökök veendők.

Ha $\varphi=0$, akkor $x=a$, $y=0$. A φ növekedtével x és y növekedik. Az aszimptotához való közeledésnél a metszéspont koordinatái minden határon túl növekednek és velük együtt az O-tól való távolság is.

Amint a félegyenes az aszimptota másik oldalára kerül, többé nem az eredeti hiperbolát metszi, hanem a hozzá konjugáltat.

Egy geometriai hely.

265. §. Legyen adva két egymásra merőleges egyenes, OX és OY (88. ábra). *AB merev egyenes mozogjon úgy, hogy A mindig az OX-en, B az OY-on maradjon. Ekkor az AB egyenesnek bármely A-tól és B-től különböző P pontja ellipszist ír le.* Ha a mozgó pont éppen AB felezőpontja, az ellipszis *körbe* megy át.



88. ábra.

A bebizonyításnál OX-et és OY-t választjuk koordinatatengelyeknek. Az AP állandó távolságot b-vel, a PB állandó távolságot a-vel jelöljük. Az OA, OB vonaldarabok ξ, η mérőszámaiból a megfelelő P pont x, y koordinatáit az

$$\frac{x}{a}=\frac{\xi}{a+b},\qquad \frac{y}{b}=\frac{\eta}{a+b} \qquad 1)$$

képletek adják meg, melyekben

$$\xi^2+\eta^2=(a+b)^2. \qquad 2)$$

Az (x, y) számpár tehát akkor és csak akkor jelentheti a P valamely helyzetének koordinatáit, ha található két oly ξ, η szám, melyek x-szel és y-nal az 1) alatti kapcsolatban vannak és a 2) alatti követelést is kielégítik.

Az első követelésnek minden x és y megfelel, még pedig úgy,

hogy

$$\xi = \frac{x}{a}(a+b), \quad \eta = \frac{y}{b}(a+b).$$

A második követelés csak akkor teljesül, ha

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0. \qquad 2)$$

Ez az egyenlet valóban oly ellipszist ábrázol, melynek tengelyei OX és OY.

Fokális egyenletek.

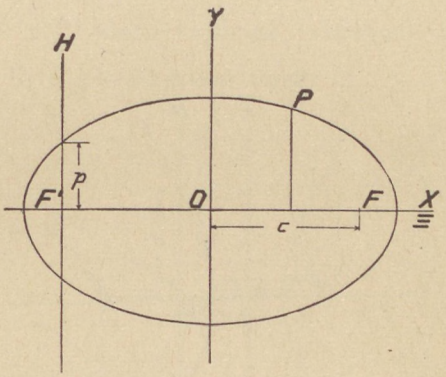
266. §. Ha (89. ábra) az ellipszis vizsgálatánál a kezdőpontot F'-be toljuk el, akkor a főtengelyekre vonatkoztatott (x, y) koordinátáknak és az új (ξ, η) koordinátáknak kapcsolatát az

$$x = \xi - c, \quad y = \eta \qquad 1)$$

egyenletek fejezik ki. A főtengelyekre vonatkoztatott

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0 \qquad 2)$$

egyenletből az új koordinatákban kifejezett egyenletet úgy kapjuk meg, hogy x és y helyébe behelyettesítjük az 1) alatti kifejezéseket.



89. ábra.

Az így nyert

$$\left(\frac{\xi - c}{a}\right)^2 + \left(\frac{\eta}{b}\right)^2 - 1 = 0 \qquad 3)$$

egyenletnek még más alakot is adhatunk. A nevezők eltávolítása után ugyanis az egyenlet így írható:

$$b^2(\xi - c)^2 + a^2\eta^2 - a^2b^2 = 0,$$

vagy még a következő alakokban is:

$$b^2\xi^2 + a^2\eta^2 - 2b^2c\xi - b^2(a^2 - c^2) = 0,$$
$$(a^2 - c^2)\xi^2 + a^2\eta^2 - 2b^2c\xi - b^4 = 0,$$
$$a^2(\xi^2 + \eta^2) - (c\xi + b^2)^2 = 0.$$

Ha még a négyzetével osztunk, akkor végre:

$$\xi^2 + \eta^2 - (\varepsilon\xi + p)^2 = 0 \qquad \alpha)$$

hol

$$p = \frac{b^2}{a} \quad \text{és} \quad \varepsilon = \frac{c}{a}.$$

Itt ε a numerikus excentricitás. A p-t az ellipszis *parameterének* nevezzük. Ha $\xi = 0$, akkor $\eta = \pm p$, vagyis p a fokuszon keresztül a

nagy tengelyre merőlegesen húzott húr fele (hasonlóképpen, mint a parabola *parametere*).

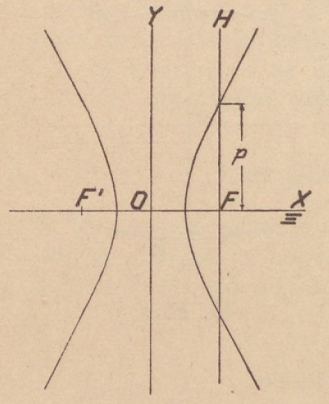
Az α) alatti egyenlet levezetésénél az abszcisszák tengelyén a haladás pozitiv értelmét úgy állapítottuk meg, hogy a középpont az OX tengely pozitiv felére esett. Ha a kezdőpontot a másik fokuszba toljuk el, azaz, ha a középpont az OX negativ felére esik, akkor α) helyett a

$$\xi^2+\eta^2-(\varepsilon\xi-p)^2=0 \qquad \beta)$$

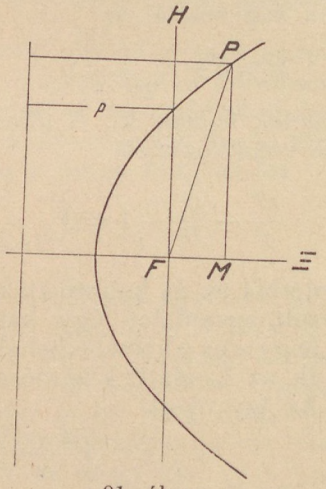
egyenletet kapjuk.

Az α) és β) alatti egyenleteket az ellipszis *fokális* egyenleteinek nevezzük. Bennük $\varepsilon<1$.

Hasonló módon kapjuk a hiperbolának is a fokális egyenleteit. Ezek az ellipszis fokális egyenleteitől csak annyiban különböznek, hogy bennük $\varepsilon>1$. Még pedig a hiperbola esetében az α)



90. ábra.



91. ábra.

alakú egyenlet felel meg annak az esetnek, melyben a középpont az abszcisszák tengelyének negativ részére esik (90. ábra).

Ha α) és β) alatt ε helyébe 1-et teszünk, akkor a

$$\xi^2+\eta^2-(\xi+p)^2=0 \quad \xi^2+\eta^2-(\xi-p)^2=0$$

egyenleteket kapjuk. Ezek nyilván parabolákat ábrázolnak. A parabola fokusza mindkét esetben a kezdőpontban van. A direktrix az első esetben (91. ábra) az $F\Xi$ tengelyre a $(\xi=-p,\ \eta=0)$ pontban emelt merőleges, a második esetben a direktrix a $(\xi=p,\ \eta=0)$ pontban ugyancsak $F\Xi$-re merőlegesen emelt egyenes.

A mondottak szerint a parabola mint az ellipszisnek és a hiperbolának az a határesete fogható fel, melyben $\varepsilon=1$. (A határátmenetnél a középpont és az egyik fokusz minden határon túl távozik).

A hiperbolának az aszimptotákra vonatkoztatott egyenlete.

267. §. A hiperbolának a főtengelyekre vonatkoztatott egyenlete:

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}-1=0. \qquad 1)$$

Ha oly $O\Xi H$ koordinatarendszerre térünk át (92. ábra), melynek tengelyei az aszimptoták, akkor a kétféle koordináták kapcsolatát kifejező

$$x = \xi \cos\alpha + \eta \cos\beta, \quad y = \xi \sin\alpha + \eta \sin\beta$$

képletekben

$$\cos\alpha = \frac{a}{c}, \quad \cos\beta = \frac{a}{c}, \quad \sin\alpha = -\frac{b}{c}, \quad \sin\beta = \frac{b}{c}.$$

Tehá

$$x = \frac{a}{c}(\xi+\eta), \quad y = -\frac{b}{c}(\xi-\eta).$$

Innen

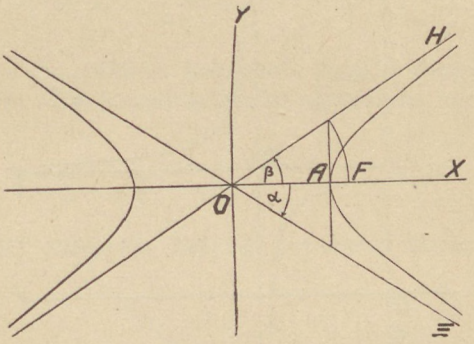
$$\frac{x}{a} = \frac{\xi+\eta}{c}, \quad \frac{y}{b} = -\frac{\xi-\eta}{c}. \qquad 2)$$

Ha 1) alatt $\frac{x}{a}$ és $\frac{y}{b}$ helyébe a 2) alatti képletek jobboldalait helyettesítjük, a hiperbola egyenlete a következőbe megy át:

$$\frac{4\xi\eta}{c^2} - 1 = 0$$

vagyis

$$\xi\eta = \frac{c^2}{4}. \qquad 3)$$



92. ábra.

Ha valamelyik aszimptotán a haladás pozitiv értelmét fordítva állapítottuk volna meg, a

$$\xi\eta = -\frac{c^2}{4}$$

egyenletre jutottunk volna.

Tehát *a hiperbolának az aszimptotákra vonatkoztatott egyenlete mindig*

$$\xi\eta = A$$

alakú, hol A a zérustól különböző állandót jelent. Fordítva minden ilyen alakú egyenlet valamely hiperbolának az aszimptotákra vonatkoztatott egyenlete.

A lineáris törtfüggvény ábrázolása.

268. §. Az

$$y = \frac{\alpha x+\beta}{\gamma x+\delta} \qquad 1)$$

egyenlet jobboldalát *lineáris törtfüggvénynek* nevezzük. Itt $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ állandó együtthatók. A nevezőben γ a zérustól különböző; ellenkező esetben lineáris *egész* függvénnyel volna dolgunk. Továbbá az

$$\begin{vmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{vmatrix}$$

determináns a zérustól különböző; ellenkező esetben $\alpha x+\beta$ csak egy állandó tényezőben különböznék a $\gamma x+\delta$ nevezőtől, tehát lineáris törtfüggvény helyett állandóval volna dolgunk.

Az 1) alatti egyenlet így is írható

$$\gamma xy - \alpha x + \delta y - \beta = 0.$$

A kezdőpont eltolása után (93. ábra) ez az egyenlet hasonló alakú egyenletbe megy át.

Valóban a transzformációképletek

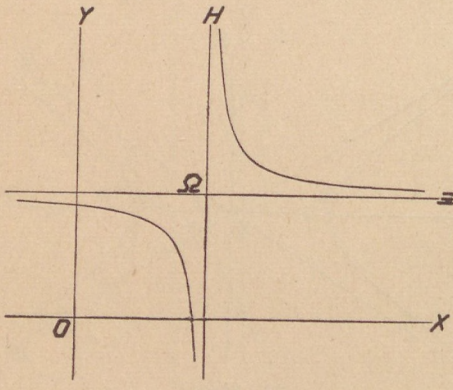
$$x = \xi + a, \quad y = \eta + b$$

alakúak. A transzformált egyenlet tehát a következő:

$$\gamma(\xi+a)(\eta+b) - \alpha(\xi+a) + \delta(\eta+b) - \beta = 0,$$

vagyis

$$\gamma\xi\eta - (\alpha - b\gamma)\xi + (\delta + a\gamma)\eta + \gamma ab - a\alpha + b\delta - \beta = 0.$$



93. ábra.

Ha az új kezdőpontot úgy választjuk, hogy

$$\alpha - b\gamma = 0, \quad \delta + a\gamma = 0$$

és γ-val osztunk, akkor a transzformált egyenlet

$$\xi\eta = A$$

alakú, tehát oly hiperbolát jellemez, melynek az új Ω kezdőpont a középpontja és az új koordinatatengelyek az aszimptotái. Mivel OX és OY párhuzamosak az $\Omega\Xi$ és ΩH koordinatatengelyekkel, azért az eredményt így is fejezhetjük ki:

Az

$$y = \frac{\alpha x+\beta}{\gamma x+\delta}$$

lineáris törtfüggvényt (akár derékszögű, akár ferdeszögű koordinatákat használunk) *oly hiperbola ábrázolja, melynek aszimptotái párhuzamosak a koordinatatengelyekkel.* A középpont (a, b) koordinatáit a

$$\gamma a + \delta = 0, \quad \alpha - b\gamma = 0$$

egyenletekből határozhatjuk meg.

Polárkoordinatákban kifejezett fokális egyenletek.

269. §. Az ellipszisnek polárkoordinatákban kifejezett egyenlete legegyszerűbb, ha kezdőpontnak valamelyik fokuszt, a polárkoordináták tengelyének pedig az ellipszis nagy tengelyét választ-

juk. A haladás pozitiv értelmét rajta úgy állapítjuk meg, hogy a középpont az O kezdőponttól pozitiv értelemben essék (94. ábra).

A cosinus-tétel szerint

$$FP^2 = OP^2 + OF^2 - 2OF \cdot OP \cos\varphi. \qquad 1)$$

Itt F a másik fokusz, $OP = r$, $OF = 2c$ és az ellipszisen levő P esetében $PF = 2a - r$. Mindezt 1) alatt tekintetbe vévén, az ellipszis számára a következő egyenletet kapjuk:

$$(2a - r)^2 = r^2 + 4c^2 - 4cr\cos\varphi.$$

Ez r szerint megoldott alakban így is írható:

$$r = \frac{a^2 - c^2}{a - c\cos\varphi}.$$

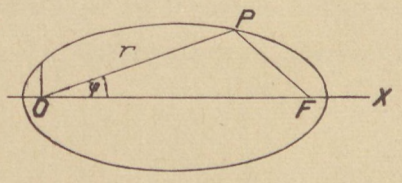
Végre tekintetbe vehetjük, hogy

$$\frac{a^2 - c^2}{a} = \frac{b^2}{a} = p, \qquad \frac{c}{a} = \varepsilon.$$

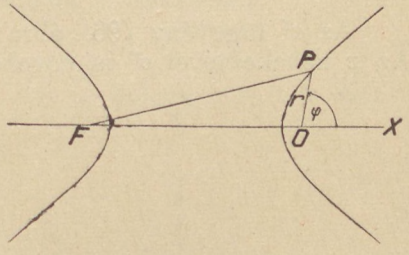
Ekkor az ellipszisnek *polárkoordinatákban* kifejezett *fokális* (vagyis az egyik fokuszra mint kezdőpontra vonatkoztatott) egyenlete végre így írható:

$$r = \frac{p}{1 - \varepsilon\cos\varphi}. \qquad 2)$$

Az $\varepsilon = 1$ esetben ez az egyenlet ellipszis helyett parabolát ábrázol.



94. ábra.



95. ábra.

270. §. Némileg más eredményre jutunk a hiperbola esetében. A 95. ábrában a cosinus-tétel szerint

$$FP^2 = OP^2 + OF^2 - 2OF \cdot OP\cos(\pi - \varphi),$$

vagyis

$$FP^2 = OP^2 + OF^2 + 2OF \cdot OP\cos\varphi. \qquad 1)$$

Itt $OP = r$, $OF = 2c$ és a hiperbola pontjaira nézve $FP = r \pm 2a$. Ezt 1) alatt tekintetbe vévén, a hiperbola számára a következő egyenletet kapjuk:

$$(r \pm 2a)^2 = r^2 + 4c^2 + 4cr\cos\varphi,$$

mely r szerint megoldott alakban így is írható:

Itt

$$r = \frac{c^2 - a^2}{\pm a - c\cos\varphi}.$$

$$\frac{c^2 - a^2}{a} = \frac{b^2}{a} = p, \qquad \frac{c}{a} = \varepsilon.$$

Tehát a hiperbola két része közül az egyiknek pontjaira nézve (úgy mint az ellipszisnél)

$$r = \frac{p}{1 - \varepsilon\cos\varphi}, \tag{2}$$

a másiknak pontjaira nézve

$$-r = \frac{p}{1 + \varepsilon\cos\varphi}. \tag{2*}$$

Itt $\varepsilon > 1$.

IV. A kitevős függvény és a logarithmus.

A kitevős függvény ábrázolása.

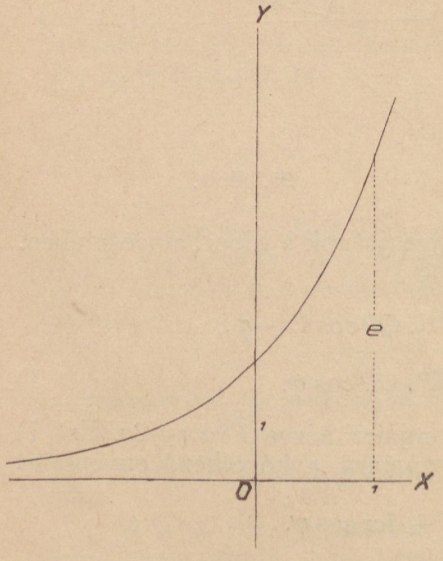
271. §. Ha az a állandó alapot az x változó kitevőre emeljük, az

$$y = a^x$$

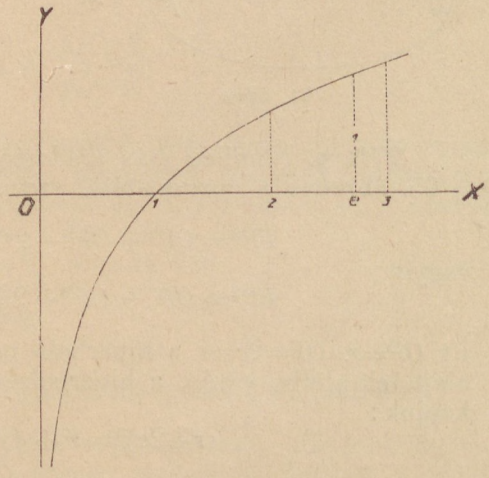
függvényt az a alapú *kitevős* vagy *exponenciális függvénynek* nevezzük. Ha az alap megnevezése nélkül röviden kitevős függvényről beszélünk, akkor az alap

$$e = \lim\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n.$$

Az e^x függvény (96. ábra) x minden valós értékénél *pozitiv*. Az x növekedtével e^x is növekedik. Az $x=0$ helyen $e^x=1$, az $x=1$



96. ábra.



97. ábra.

helyen $e^x = e$. Ha x a pozitiv számokon át a végtelenhez közeledik, akkor e^x minden határon túl növekedik. Ha x a negativ számokon át a végtelenhez közeledik, akkor e^x limesze zérus.

Az $y' = e^x$ differenciálhányados x növekedtével maga is növekedik, tehát a függvényt ábrázoló görbe érintője egyre meredekebb. Az $x = 0$ helyén $y' = 1$, tehát ott az érintő az OX tengellyel 45°-os szöget zár be.

A logarithmus ábrázolása.

272. §. Az x természetes logarithmusa, $y = \log x$, az

$$= e$$

függvény inverz függvénye. A megfelelő görbe (97. ábra) a 96. ábrától csak annyiban különbözik, hogy a koordinatatengelyek fel vannak cserélve.

A $\log x$ függvényt csak x pozitiv értékeire nézve értelmeztük. Az $x = 1$ helyen $\log x = 0$, az $x = e$ helyen $\log x = 1$. Ha x a pozitiv számokon a végtelenhez közeledik, $\log x$ limesze $+\infty$. Ha x a pozitiv számokon át a zérushoz közeledik, $\log x$ limesze $-\infty$.

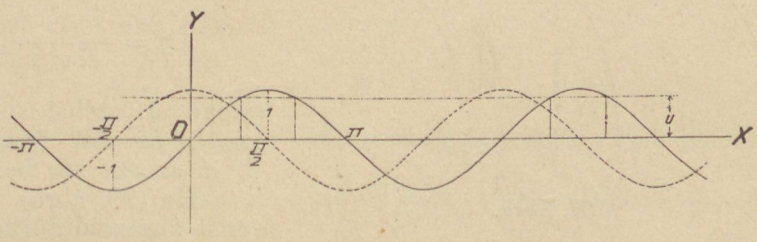
Az $y' = \frac{1}{x}$ differenciálhányados x növekedtével fogy. Az $x = 1$ helyen $y' = 1$, tehát ott az érintő az OX tengellyel 45°-os szöget zár be.

V. A trigonometriai függvények és megfordításaik.

A trigonometriai függvények ábrázolása.

273. §. Az $y = \sin x$

értéke az $x = 0$ helyen maga is 0, az $x = \frac{\pi}{2}$ helyen pedig 1. Közben a sinus monoton növekedik.



98. ábra.

Ha a megfelelő görbének (a 98. ábra folytonosan húzott vonalának) e részét megrajzoltuk, akkor a

$$\sin(-x) = -\sin x$$

egyenlet alapján könnyen megkapjuk a 0 és $-\frac{\pi}{2}$ közé eső részt is. Ha pedig megvan a $-\frac{\pi}{2}$ és $\frac{\pi}{2}$ közé eső rész, akkor a

$$\sin(x+k\pi) = (-1)^k \sin x$$

képlet értelmében a görbe csupa olyan darabból rakódik össze, melyeket a már meglevőből vagy az OX tengelyre vonatkozó tükörképéből π-nek valamely többszörösével való eltolásával állíthatunk elő.

Az $y' = \cos x$ differenciálhányados értéke az $x = 0$ helyen egyenlő 1-gyel, tehát ott az érintő az OX tengellyel 45°-os szöget zár be. A $\pm \frac{\pi}{2}$ helyeken $y' = 0$.

274. §. Az

$$y = \cos x$$

függvény így is írható

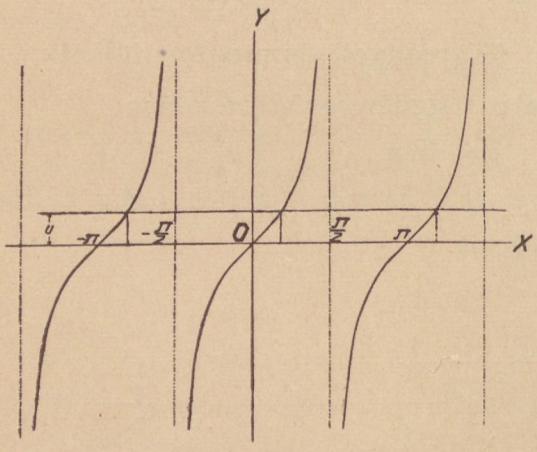
$$y = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right).$$

Vagyis a cosinus minden értéket $\frac{\pi}{2}$-lel előbb ér el, mint a sinus. A $\cos x$ függvényt ábrázoló görbét (a 98. ábra szaggatott vonalát) a $\sin x$ képéből úgy kapjuk, hogy $\frac{\pi}{2}$-lel balra toljuk.

275. §. Az

$$y = \operatorname{tg} x$$

függvény értéke az $x=0$ helyen maga is 0. A $\left(0 \ldots \frac{\pi}{2}\right)$ számközben $\operatorname{tg} x$ monoton növekedik.



99. ábra.

A $\frac{\pi}{2}$ helyen a baloldali határérték

$$\lim_{x=\frac{\pi}{2}-0} \operatorname{tg} x = +\infty.$$

Az $x=0$ helyen

$$y' = \frac{1}{\cos^2 x}$$

értéke 1, tehát ott az érintő az OX tengellyel 45°-ú szöget zár be.

Ha (99. ábra) a tangenst ábrázoló görbének a $\left(0 \ldots \frac{\pi}{2}\right)$ számközhöz tartozó részét megrajzoltuk, akkor a

$$\operatorname{tg}(-x) = -\operatorname{tg} x, \quad \operatorname{tg}(x+n\pi) = \operatorname{tg} x$$

képletek felhasználásával könnyen előállíthatjuk az egész görbét.

A tangenst ábrázoló görbéből a

$$\operatorname{cotg} x = \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = -\operatorname{tg}\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$$

függvény képe könnyen előállítható.

A ciklometrikus függvények.

276. §. Azoknak az x számoknak, melyeknek sinusa egyenlő u-val, közös jele: $\arc\sin u$ (olv. arcus sinus u). Az elnevezésnél a

$$\sin x = u$$

egyenlet minden gyökét mint az egységsugarú kör azon ívének mérőszámát fogták föl, melyre nézve a középponti szögnek sinusa egyenlő u-val.

Ha $|u| > 1$, akkor a

$$\sin x = u$$

egyenletet valós szám nem elégíti ki. Ha ellenben $|u| \leqq 1$, akkor az egyenletnek van megoldása. Tudjuk ugyanis, hogy $\sin x$ a $\left(-\frac{\pi}{2} \cdots \frac{\pi}{2}\right)$ számközön folytonos és monoton növekedő, továbbá

$$\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right) = -1, \quad \sin\frac{\pi}{2} = 1.$$

Tehát bármely oly u számhoz, melyre nézve $-1 \leqq u \leqq 1$, a $\left(-\frac{\pi}{2} \cdots \frac{\pi}{2}\right)$ számközön egy és csak egy oly hely található, melyen a sinus egyenlő u-val. A $\sin x = u$ egyenletnek a $\left(-\frac{\pi}{2} \cdots \frac{\pi}{2}\right)$ számközön levő gyökét az $\arc\sin u$ *főértékének* nevezzük. Ha ezt az $\arc\sin u$ egyéb értékeitől nyomatékosan akarjuk megkülönböztetni, akkor így írjuk:

$$(\arc\sin u).$$

Hasonlóképpen a k bármely egész számú értékénél a $k\pi - \frac{\pi}{2}$ és $k\pi + \frac{\pi}{2}$ által határolt közön a

$$\sin x = u$$

egyenletnek (ha $|u| \leqq 1$) egy és csak egy gyöke van. Ezt a főértékből az

$$\arc\sin u = (-1)^k(\arc\sin u) + k\pi$$

képlet adja meg.

277. §. A

$$\cos x = u$$

egyenlet gyökeit így jelöljük: $\arc\cos u$. Ha $|u| > 1$, akkor az egyenletnek nincs valós gyöke. Ha $|u| \leqq 1$, akkor az egyletnek végtelen sok gyöke van.

A megoldandó egyenletet így is írhatjuk:

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = u.$$

Innen

$$\frac{\pi}{2} - x = \arcsin u$$

és

$$x = \frac{\pi}{2} - \arcsin u.$$

Vagyis $\arccos u$ értékeit $\arcsin u$ értékeiből az

$$\arccos u = \frac{\pi}{2} - \arcsin u$$

képlet adja meg. Az $\arcsin u$ főértékének megfelelő értéket az $\arccos u$ főértékének nevezzük és így jelöljük: $(\arccos u)$. Minthogy

$$-\frac{\pi}{2} \leqq (\arcsin u) \leqq \frac{\pi}{2},$$

azért

$$0 \leqq (\arccos u) \leqq \pi.$$

278. §. A

$$\operatorname{tg} x = u$$

egyenlet gyökeit így jelöljük: $\operatorname{arc\,tg} u$. Bármely u valós számhoz a $\left(-\frac{\pi}{2} \cdots \frac{\pi}{2}\right)$ számközön az adott egyenletnek egy és csak egy gyöke található. Ezt az $\operatorname{arc\,tg} u$ főértékének nevezzük és így jelöljük: $(\operatorname{arc\,tg} u)$. Hasonlóképpen a k bármely egész számú értékénél a $k\pi - \frac{\pi}{2}$ és $k\pi + \frac{\pi}{2}$ által határolt számközön az adott egyenletnek egy és csak egy gyöke van. Ezt $\operatorname{arc\,tg} u$ főértékéből az

$$\operatorname{arc\,tg} u = (\operatorname{arc\,tg} u) + k\pi$$

képlet adja meg.

A

$$\operatorname{cotg} x = u$$

egyenlet gyökeit az

$$x = \operatorname{arc\,cotg} u = \frac{\pi}{2} - \operatorname{arc\,tg} u$$

képlet adja meg, ha $\operatorname{arc\,tg} u$ helyébe minden értékét behelyettesítjük.

Feladatok. 1. *Meghatározandó* $\arccos \frac{1}{2}$ *valamennyi értéke.*

A feladat a

$$\cos x = \frac{1}{2}$$

egyenlet megoldását kívánja. A 0 és π közé eső megoldást a 60°-os szög analitikus mérőszáma adja meg. Vagyis

$$\left(\arccos \frac{1}{2}\right) = \frac{\pi}{3}.$$

A 0 és $-\pi$ közé eső megoldás $-\frac{\pi}{3}$. Ebből a két megoldásból valamennyi megoldást a π páros többeseinek hozzáadása adja meg. Tehát

$$\arccos\frac{1}{2}=\pm\frac{\pi}{3}+2n\pi,$$

hol n helyébe minden egész szám teendő.

2. *Meghatározandó* $\arcsin\left(-\frac{1}{2}\right)$ *valamennyi értéke.*

A feladat a

$$\sin x=-\frac{1}{2}$$

egyenlet megoldását követeli. A

$$\sin z=\frac{1}{2}$$

egyenletnek 0 és $\frac{\pi}{2}$ közé eső megoldását a 30°-ú szög analitikus mérőszáma adja meg, azaz $\frac{\pi}{6}$. A $\sin x=-\frac{1}{2}$ egyenletnek $-\frac{\pi}{2}$ és $\frac{\pi}{2}$ közé eső gyökét az előjel megváltoztatásával kapjuk. Tehát

$$\left(\arcsin\left(-\frac{1}{2}\right)\right)=-\frac{\pi}{6}.$$

Az $\arcsin\left(-\frac{1}{2}\right)$ összes értékeit az

$$\arcsin\left(-\frac{1}{2}\right)=(-1)^{k+1}\frac{\pi}{6}+k\pi$$

képlet adja meg, ha k helyébe minden egész számot helyettesítünk.

3. *Meghatározandók a*

$$\sin x=0,\quad \cos x=0,\quad \operatorname{tg} x=0,$$
$$\sin x=1,\quad \cos x=1,\quad \operatorname{tg} x=1$$

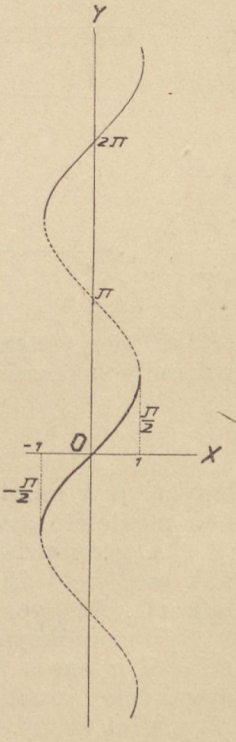
egyenletek összes megoldásai.

A $\sin x=0$ és $\operatorname{tg} x=0$ egyenletek valamennyi megoldását az

$$x=n\pi$$

egyenlet adja meg, ha benne n helyébe minden egész számot helyettesítünk. Szóval ezeknek az egyenleteknek megoldásai π többesei.

A $\cos x=0$ egyenlet megoldásait $\frac{\pi}{2}$ páratlan többesei adják meg, vagyis a $(2n+1)\frac{\pi}{2}$ alakú számok.



100. ábra.

A $\sin x=1$ egyenlet megoldásai a $\frac{\pi}{2}+2n\pi$ alakú számok.

A $\cos x = 1$ egyenlet megoldásai π páros többesei. A $\operatorname{tg} x = 1$ egyenlet megoldásai a $\frac{\pi}{4} + n\pi$ alakú számok.

279. §. Az

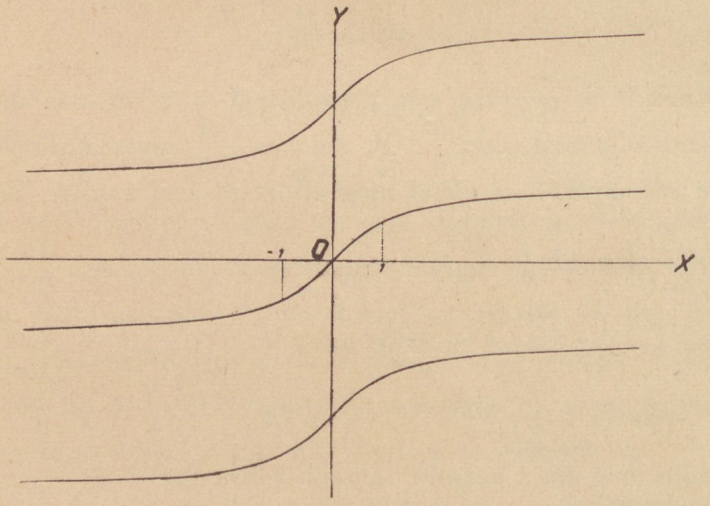
$$\arcsin x, \quad \arccos x, \quad \operatorname{arc\,tg} x, \quad \operatorname{arc\,cotg} x$$

függvényeket *ciklometrikus függvényeknek* nevezzük. Ezek a trigonometriai függvények inverz függvényei. Viselkedésük az előbbi §-ok értelmében a következő.

Közülök

$$y = \arcsin x$$

az $x = \sin y$ függvénynek inverz függvénye. Értelmezési tartománya a $(-1 \ldots 1)$ számköz. Ezen a számközön y az x-nek végtelenül sok



101. ábra.

értékű függvénye. Egyértékű ágat kaphatunk, ha megállapítunk valamely k pozitiv egész számot és azt követeljük, hogy

$$k\pi - \frac{\pi}{2} \leqq y \leqq k\pi + \frac{\pi}{2}$$

legyen. A k minden értékének megfelel egy-egy ág. A $k=0$ értéknek megfelelő ágat a *főágnak* mondjuk.

A geometriai ábrázolásnál (100. ábra) valamely $k=2n$ számnak megfelelő ág a főágból $2n\pi$-vel való függőleges eltolással keletkezik. Az ilyen ágakat a főággal *kongruenseknek* mondjuk.

Hasonlóképpen a k páratlan értékeinek megfelelő ágak egymásból π páros többeseivel való eltolással keletkeznek. Ezek a főággal inkongruens ágak.

Mint arcus sinus a sinusnak úgy

$$y = \operatorname{arc\,tg} x$$

az $x = \operatorname{tg} y$ függvénynek inverz függvénye. Értelmezési tartománya kiterjed a valós számok összességére. Ez a függvény is végtelen

sok értékű. Egyértékű ágat kaphatunk, ha megállapítunk valamely k pozitiv egész számot és azt követeljük, hogy

$$k\pi - \frac{\pi}{2} < y < k\pi + \frac{\pi}{2}$$

legyen. A k minden értékének megfelel egy-egy ág. A $k=0$ értéknek megfelelő ág a főág. A geometriai ábrázolásnál (101. ábra) minden ág a főágból π valamely többesével való eltolással keletkezik, tehát a főággal kongruens.

Az

$$\operatorname{arc\,cos}\ x = \frac{\pi}{2} - \operatorname{arc\,sin} x$$

$$\operatorname{arc\,cotg} x = \frac{\pi}{2} - \operatorname{arc\,tg}\ x$$

függvények viselkedésére az $\operatorname{arc\,sin} x$ és $\operatorname{arc\,tg} x$ viselkedéséből könnyű következtetni.

NYOLCADIK FEJEZET.

A KOMPLEX SZÁMOK.

I. Az alapműveletek és a négyzetgyökvonás a komplex számok tartományában.

A komplex szám mint valós számokból alkotott számpár.

280. §. A valós számok tartományában *a négyzetgyökvonás* csak akkor végezhető el, ha *pozitiv számból vagy zérusból* vonunk négyzetgyököt. Szándékunk új számok bevezetésével olyan számtartományra áttérni, melyben a gyökvonás mindig elvégezhető.

Az új számok előállításánál a két valós számból alkotott (a, b) számpárt szintén *számnak* tekintjük és ama két valós szám által meghatározott *komplex* számnak mondjuk. Az (a, b)-t és (a', b')-t akkor és csak akkor tekintjük egymással egyenlőnek, ha $a=a'$, $b=b'$. Az a és b valós számokat az (a, b) komplex szám koordinatáinak mondjuk.

Ha a második koordinata zérus, akkor $(a, 0)$-t csak az a valós szám bonyodalmasabb jelölésének tekintjük; képletben: $(a, 0) = a$. Az oly (a, b) komplex számot, melyben b a zérustól különböző, *képzetes* számnak mondjuk. Ha valamely képzetes szám első koordinatája zérus, akkor azt a számot *tiszta* képzetes számnak nevezzük. Tehát $(5, 0) = 5$ valós szám, $(1, 7)$, $(0, 3)$ képzetes számok; közülök $(0, 3)$ tiszta képzetes szám.

281. §. A komplex számok ábrázolására vagy a sík *pontjait* vagy a síkban levő *vektorokat* használjuk. Az első esetben az (a, b) komplex számot avval az A *ponttal* ábrázoljuk, melynek derékszögű koordinatái a és b. A második esetben az (a, b) számot oly vektorral ábrázoljuk, melynek a koordinata tengelyeken való vetületeinek mérőszámai a és b. A kétféle ábrázolás egymással szorosan összefügg. Ha ugyanis (a, b)-t az A ponttal ábrázoljuk (102. ábra) és azután O-t összekötjük A-val, akkor OA az (a, b) komplex számot ábrázoló vektor. OA természetesen bármely más *vele egyenlő* vektorral is pótolható (pl. $A'S$-sel).

A komplex számoknak a sík pontjaival való ábrázolását Gauss-féle ábrázolásnak nevezzük (bár Gauss előtt is már többen használták). A síkot, melyben a számokat ábrázoljuk, Gauss-*féle számsíknak* mondjuk. A valós számok képei az abszcisszák tengelyén vannak, a tiszta képzetes számokéi pedig az ordináták tengelyén. Azért az első tengelyt *a valós számok tengelyének*, a másodikat *a tiszta képzetes számok* tengelyének mondjuk.

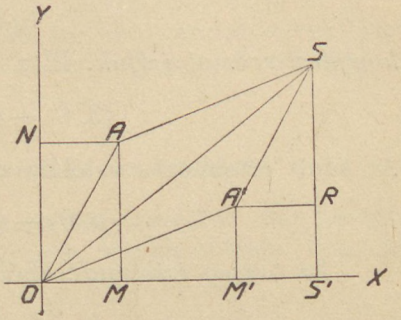
Ha az (a, b) komplex számot ábrázoló pont *polárkoordinátái* r és φ, akkor

$$(a, b) = (r \cos \varphi, r \sin \varphi).$$

Az r-et az $\alpha = (a, b)$ komplex szám *abszolut értékének* nevezzük és így jelöljük: $|\alpha|$, φ-t a komplex szám *argumentumának* mondjuk. Az abszolut érték a komplex számot ábrázoló A pontnak a kezdőponttól való távolsága. Ha α valós szám, akkor az abszolut érték mostani értelmezése azonos a régivel.

Az r, φ számok az (a, b) komplex számot teljesen meghatározzák. De ha fordítva a-ból és b-ből r-et és φ-t keressük, akkor csak r van egyértelműen meghatározva, még pedig

$$r = (a^2+b^2)^{\frac{1}{2}}.$$



102. ábra.

A φ-re végtelen sok értéket kapunk; közülök bármelyikből a többit π *páros* többeseinek hozzáadásával állíthatjuk elő. A $(0, 0)$ számra nézve $r=0$, a φ pedig egészen tetszőleges.

A φ meghatározásánál az

$$a = r \cos \varphi, \quad b = r \sin \varphi$$

képletekből $\operatorname{tg} \varphi = \frac{b}{a}$, tehát φ az $\operatorname{arc\,tg} \frac{b}{a}$ valamelyik értéke. De $\operatorname{arc\,tg} \frac{b}{a}$ nem minden értéke választható φ-nak. Ha $a > 0$, akkor φ az $\operatorname{arc\,tg} \frac{b}{a}$ főértéke, vagy ettől π valamely páros többesével különbözik. Ha $a<0$, akkor φ az $\operatorname{arc\,tg} \frac{b}{a}$ főértékétől π-vel, vagy π valamely páratlan többesével különbözik.

A vektorokkal való ábrázolásnál az abszolut érték a komplex számot ábrázoló vektornak hossza, φ pedig annak a szögnek analitikus mérőszáma, melyet a vektor a valós számok tengelyének pozitiv értelmével bezár.

Komplex számok összeadása és kivonása.

282. §. Hogy mit értsünk két komplex szám összegén és szorzatán, azt tetszésünk szerint állapíthatjuk meg. De *kívánatos* úgy megállapodnunk, hogy a valós számokra nézve megszokott törvények lehetőleg komplex számokra nézve is érvényesek maradjanak. Továbbá nemcsak kívánatos, hanem elengedhetetlenül szükséges, hogy komplex számok összegének, illetve szorzatának új, általános értelmezése két *valós* számra alkalmazva ugyanarra a számra vezessen, melyet már eddig is a két valós szám összegének, illetve szorzatának mondottunk. Más szóval kell, hogy

$$(a, 0) + (b, 0) = (a+b, 0), \quad (a, 0)(b, 0) = (ab, 0) \qquad 1)$$

legyen, hol $a+b$ és ab az a és b számoknak az eddigi értelemben vett összegét, illetőleg szorzatát jelenti.

A mondottakat szem előtt tartva, az összeget a következő módon értelmezzük: *Az*

$$\alpha = (a, b), \quad \alpha' = (a', b')$$

komplex számok összegén az

$$(a+a', b+b') \qquad 2)$$

komplex számot értjük. Pl.:

$$(3, 6) + (8, 17) = (11, 23).$$

Az adott értelmezés valóban olyan, hogy

$$(a, 0) + (b, 0) = (a+b, 0).$$

Az *összeg* értelmezéséből világos, hogy az

$$\alpha = (a, b), \quad \alpha' = (a', b')$$

komplex számok *különbsége*, vagyis az

$$\alpha' + \xi = \alpha$$

egyenletnek egyetlen gyöke:

$$\xi = (a-a', b-b').$$

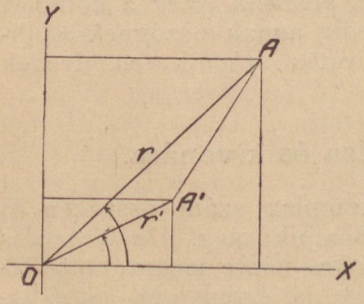
283. §. Ha az

$$\alpha = (a, b), \quad \alpha' = (a', b')$$

komplex számokat a kezdőpontból kiinduló OA és OA' vektorokkal ábrázoljuk (102. ábra), akkor az

$$(a+a', b+b')$$

összeget ábrázoló vektort általában úgy állíthatjuk elő, hogy OA-t és OA'-t egy parallelogramma két szomszédos oldalának tekintjük és megrajzoljuk az O-ból kiinduló OS diagonálist. Vagyis a vektorokat a mechanikából ismeretes módon *a parallelogramma tétele* szerint adjuk össze.



103. ábra.

Az összeget ábrázoló OS vektort a parallelogramma teljes kirajzolása nélkül úgy is megkapjuk, hogy pl. OA-nak végpontjából az OA'-val egyenlő AS vektort húzzuk és O-t ennek S végpontjával összekötjük. Ez az eljárás még akkor is célra vezet, ha O, A és A' egy egyenesben vannak.

Minthogy $|\alpha+\alpha'|$ az O-ból S-be vezető egyenes út hosszúsága, $|\alpha| + |\alpha'|$ pedig az OAS törött vonalé, azért bármilyen két komplex számra nézve

$$|\alpha+\alpha'| \leqq |\alpha| + |\alpha'|.$$

Ha a kivonásnál az

$$\alpha = (a, b), \quad \alpha' = (a', b')$$

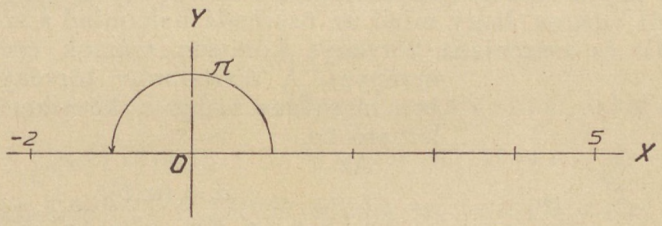
számokat az A és A' pontokkal (103. ábra), különbségüket ellenben vektorral ábrázoljuk, akkor erre éppen $A'A$-t használhatjuk. Ennek a koordinatatengelyeken való vetületei valóban

$$a-a', \quad b-b'.$$

Az $\alpha-\alpha'$ különbség abszolut értéke egyenlő ennek a vektornak hosszával, vagyis az α és α' számokat ábrázoló pontoknak egymástól való távolságával.

Komplex számok szorzása és osztása.

284. §. Hogy természetes útmutatást nyerjünk két komplex szám szorzatának célszerű értelmezésére, lássuk először, hogy két



104. ábra.

valós szám szorzásánál hogyan kapjuk a szorzat abszolut értékét és argumentumát.

Ha pl. $\alpha=-2$, $\alpha'=5$, akkor ezek abszolut értékei

$$r = 2, \quad r' = 5,$$

argumentumaik (mint a 104. ábrából könnyen leolvasható):

$$\varphi = \pi, \quad \varphi' = 0.$$

A szorzat -10. Ennek abszolut értéke $rr'=10$, argumentuma

$$\pi = \varphi + \varphi'.$$

Két pozitiv szám szorzásánál a tényezők argumentumai $\varphi=0$, $\varphi'=0$; a szorzaté $0=\varphi+\varphi'$. Két negativ szám szorzásánál a tényezők argumentumai $\varphi=\varphi'=\pi$. A szorzat argumentumának $2\pi=\varphi+\varphi'$ tekinthető.

Most már bármely két komplex számra nézve a következő megállapodás kínálkozik:

Ha α és α' abszolut értékei r és r', argumentumaik φ és φ', akkor az $\alpha\alpha'$ szorzaton azt a komplex számot értjük, melynek abszolut értéke rr', argumentuma $\varphi+\varphi'$.

Vagyis az

$$\alpha = (a, b) = (r\cos\varphi, \ r\sin\varphi), \quad \alpha' = (a', b') = (r'\cos\varphi', \ r'\sin\varphi')$$

komplex számok szorzata

$$\alpha\alpha' = (rr'\cos(\varphi+\varphi'),\quad rr'\sin(\varphi+\varphi')).$$

Itt

$$rr'\cos(\varphi+\varphi') = (r\cos\varphi)(r'\cos\varphi') - (r\sin\varphi)(r'\sin\varphi') = \\ = aa' - bb',$$

$$rr'\sin(\varphi+\varphi') = (r\cos\varphi)(r'\sin\varphi') + (r\sin\varphi)(r'\cos\varphi') = \\ = ab' + ba'.$$

Tehát

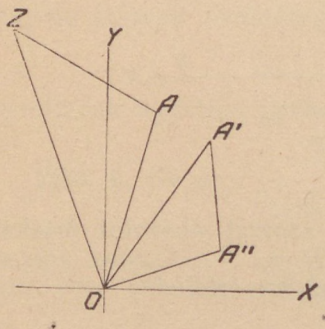
$$(a, b)(a', b') = (aa'-bb',\ ab'+ba'). \qquad 1)$$

Ha $(a', b') = (c, 0) = c$, akkor innen

$$(a, b)c = (ac, bc).$$

Vagyis *komplex számot a c valós számmal úgy szorzunk, hogy a komplex szám koordinatáit megszorozzuk c-vel.*

285. §. Az összegre és szorzatra nézve adott értelmezésekből közvetlenül világos, hogy mind az összeadásnak, mind a szorzásnak kommutativ és asszociativ törvénye komplex számok esetében is érvényes. A disztributiv törvény érvényben maradása pedig a következő módon látható be.



105. ábra.

Az

$$\alpha = (a, b),$$
$$\alpha' = (a', b'),\quad \alpha'' = (a'', b'')$$

számok közül az első kettőnek összege

$$\alpha + \alpha' = (a+a',\ b+b').$$

Tehát az előbbi § 1) képlete értelmében $(\alpha+\alpha')\alpha''$ koordinatái

$$(a+a')a'' - (b+b')b'',\quad (a+a')b'' + (b+b')a''. \qquad 1)$$

Továbbá

$$\alpha\alpha'' = (aa''-bb'',\ ab''+ba''),$$
$$\alpha'\alpha'' = (a'a''-b'b'',\ a'b''+b'a'').$$

Innen $\alpha\alpha''+\alpha'\alpha''$ kordinatái:

$$(aa''-bb'') + (a'a''-b'b''),\quad (ab''+ba'') + (a'b''+b'a''). \qquad 2)$$

Minthogy valós számokra nézve a disztributiv törvény ismeretes, azért az 1) alatti kifejezések könnyen átalakíthatók a 2) alattiakká. Azaz valóban

$$(\alpha+\alpha')\alpha'' = \alpha\alpha'' + \alpha'\alpha''.$$

286. §. A szorzás megfordításánál, az *osztásnál*, kizárandó a zérussal való osztás. Minden más esetben az osztás valóban elvégezhető, egyértelmű művelet.

Az $\frac{\alpha}{\alpha'}$ *hányados abszolut értéke egyenlő* $|\alpha|$ *és* $|\alpha'|$ *hányadosával, argumentuma egyenlő* α *és* α' *argumentumainak különbségével.*

Ha (103. ábra) α-t és α'-t az A és A' pontokkal ábrázoljuk akkor $\frac{\alpha}{\alpha'}$ abszolut értéke egyenlő az $A'OA$ háromszög OA és OA' oldalainak viszonyával, argumentuma pedig megadja e két oldal által bezárt szögnek mérőszámát (pozitiv vagy negativ előjellel aszerint, hogy milyen értelmű forgás vezeti át OA'-t az OA-ba).

Valamely

$$\zeta : \alpha = \alpha' : \alpha''$$

proporció akkor és csak akkor helyes, ha a benne szereplő számoknak a Z,A,A',A'' pontokkal való ábrázolásánál (105. ábra) ZOA és $A'OA''$ egyenlő körüljárású, hasonló háromszögek.

A képzetes egység. Konjugált komplex számok.

287. §. A (0, 1) számot i-vel jelöljük és a *képzetes* (imaginarius) egységnek nevezzük. Ennek négyzete:

$$i^2 = (0, 1)(0, 1) = (-1, 0) = -1.$$

Ha most már (a, b) bármilyen komplex szám, akkor

$$(a, b) = (a, 0) + (0, b) = a + (0, 1)b = a + ib.$$

A következőkben (a, b) helyett mindig ezt az $a+ib$ alakot írjuk; a a *valós rész*, ib a *képzetes rész*.

Minthogy azok az alapvető számtani törvények (1. §), melyeken a betűszámtanban a kifejezések átalakítása alapszik, a komplex számokra is érvényesek (285. §), azért a komplex számokkal az alapműveleteket a következő módon végezhetjük: A számokat az $a+ib$ alakban írjuk, azután velük úgy számolunk, mintha i változót jelentene, végre az így nyert kifejezéseket azzal egyszerűsítjük, hogy bennök i^2 helyébe (-1)-et helyettesítünk. Ily módon

$$(a+ib) + (a'+ib') = (a+a') + i(b+b'), \qquad 1)$$

$$(a+ib) - (a'+ib') = (a-a') + i(b-b'), \qquad 2)$$

továbbá

$$(a+ib)(a'+ib') = aa' + i(ab'+ba') + i^2bb',$$

és i^2 helyébe a -1 számot téve:

$$(a+ib)(a'+ib') = aa' - bb' + i(ab'+ba'). \qquad 3)$$

Ezek a képletek azonosak a régebbi

$$(a, b) + (a', b') = (a+a', b+b')$$
$$(a, b) - (a', b') = (a-a', b-b')$$
$$(a, b)(a', b') = (aa'-bb', ab'+ba')$$

képletekkel.

A 3) alatti képlet értelmében

$$i(-i) = 1.$$

Vagyis i és $-i$ egymásnak reciprok értéke.

288. §. Ha a és b valós számok, akkor az

$$a + ib, \quad a - ib$$

számokat *konjugált* komplex számoknak mondjuk. Ha $b=0$, vagyis ha $a+ib$ valós szám, akkor $a+ib$ önmagának konjugáltja. Képzetes számnak konjugáltja ellenben mindig más, mint maga az adott szám. Konjugált számok összege és szorzata mindig *valós* szám. Ugyanis

$$(a+ib) + (a-ib) = 2a, \quad (a+ib)(a-ib) = a^2 + b^2.$$

Konjugált komplex számokat ábrázoló pontok egymásnak tükörképei a valós számok tengelyére (OX-re) nézve.

A konjugált komplex számok alkalmazást találnak az osztásnál. Az

$$\frac{a+ib}{c+id}$$

hányados ugyanis nem változik meg, ha a számlálót és a nevezőt megszorozzuk a nevező konjugáltjával. Képletben:

$$\frac{a+ib}{c+id} = \frac{(a+ib)(c-id)}{(c+id)(c-id)} = \frac{ac+bd+i(bc-ad)}{c^2+d^2}.$$

Ezen a módon komplex számok osztását mindig visszavezethetjük valós nevezővel való osztásra. A valós nevezővel azután a számlálót tagonkint osztjuk. Pl.

$$\frac{11-2i}{3+4i} = \frac{(11-2i)(3-4i)}{3^2+4^2} = \frac{25-50i}{25} = 1-2i.$$

A komplex számok trigonometriai alakja. Moivre képlete.

289. §. Ha $a+ib$ abszolut értéke r és argumentuma φ, akkor

$$a = r\cos\varphi, \quad b = r\sin\varphi$$

és

$$a + ib = r(\cos\varphi + i\sin\varphi).$$

A jobboldalon álló kifejezést az $a+ib$ komplex szám *trigonometriai* alakjának mondjuk. A

$$\cos\varphi + i\sin\varphi$$

tényezőt *iránytényezőnek* nevezzük.

Két

$$r(\cos\varphi + i\sin\varphi), \quad \varrho(\cos\psi + i\sin\psi)$$

alakú kifejezés akkor és csak akkor jelenti ugyanazt a komplex számot, ha $\varrho=r$ és $\psi-\varphi$ a π-nek valamely páros többese. Csak az $r=0$ esetben jelenti $r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ a φ *minden értékénél* ugyanazt a számot, t. i. a zérust.

Ha két komplex szám az

$$\alpha = r(\cos\varphi + i\sin\varphi), \quad \alpha' = r'(\cos\varphi' + i\sin\varphi')$$

trigonometriai alakban van adva, akkor (mint *a szorzat értelmezéséből* tudjuk):

$$\alpha\alpha' = rr' [\cos(\varphi+\varphi') + i \sin(\varphi+\varphi')]$$

$$\frac{\alpha}{\alpha'} = \frac{r}{r'} [\cos(\varphi-\varphi') + i \sin(\varphi-\varphi')].$$

290. §. Az

$$u = r(\cos\varphi + i \sin\varphi)$$

hatványozásánál

$$u^2 = uu = r^2(\cos 2\varphi + i \sin 2\varphi)$$

$$u^3 = uu^2 = r^2(\cos 3\varphi + i \sin 3\varphi)$$

...

általában n bármely pozitiv egész számú értékénél

$$u^n = r^n(\cos n\varphi + i \sin n\varphi). \qquad 1)$$

Moivrenak ez a képlete akkor is igaz marad, ha n zérust vagy negativ egész számot jelent.

Valóban, ha $n=0$ akkor az 1) alatti képlet mindkét oldala egyenlő 1-gyel. Ha pedig $n=-m$ negativ egész szám, akkor

$$[r(\cos\varphi + i \sin\varphi)]^{-m} = \frac{1}{[r(\cos\varphi + i \sin\varphi)]^m} =$$

$$= \frac{1(\cos 0 + i \sin 0)}{r^m(\cos m\varphi + i \sin m\varphi)} =$$

$$= r^{-m}[\cos(-m\varphi) + i \sin(-m\varphi)].$$

Példa. Az i számra nézve a szemléletből (106. ábra) közvetlenül világos, hogy

$$r = 1, \quad \varphi = \frac{\pi}{2}.$$

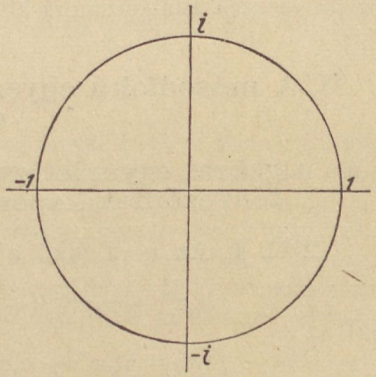
Tehát i^n abszolut értéke 1, argumentuma $\frac{n\pi}{2}$. Az

$$i^n = \cos\frac{n\pi}{2} + i \sin\frac{n\pi}{2}$$

képletből

$$i^0 = 1, \quad i^1 = i, \quad i^2 = -1, \quad i^3 = -i$$

és k bármely egész számú értékénél



106. ábra.

$$i^{4k} = 1, \quad i^{4k+1} = i, \quad i^{4k+2} = -1, \quad i^{4k+3} = -i.$$

Ez természetesen Moivre képlete nélkül is könnyen belátható.

A négyzetgyökvonás.

291. §. *Bármely komplex számnak két négyzetgyöke van; ezek egymástól csak előjelben különböznek. A zérusnak két négyzetgyöke egymással egyenlő; közös értékük zérus.*

Valóban bármely

$$A = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$$

számnak van négyzetgyöke, mert

$$\alpha = r^{\frac{1}{2}}\left(\cos\frac{\varphi}{2} + i\sin\frac{\varphi}{2}\right)$$

négyzete A. Egy négyzetgyökből az A valamennyi négyzetgyöke, vagyis az

$$x^2 - A = 0 \qquad 1)$$

egyenlet valamennyi megoldása a következő módon kapható.

Ha α az A-nak egyik négyzetgyöke, akkor a megoldandó egyenlet a következő alakokban is írható:

$$x^2 - \alpha^2 = 0,$$
$$(x-\alpha)(x+\alpha) = 0.$$

Innen x számára két értéket kapunk; az egyik α, a másik $-\alpha$. Az $A=0$ esetben $\alpha=-\alpha=0$. Hogy mégis két megoldásról beszélhessünk, azt mondjuk, hogy ekkor *két egyenlő* négyzetgyök van.

Pozitiv számnak mindkét négyzetgyöke valós. A -1 négyzetgyökei i és $-i$. Bármely $-P$ negativ számnak négyzetgyökei *tiszta képzetes* számok: $iP^{\frac{1}{2}}$ és $-iP^{\frac{1}{2}}$.

A komplex számok tartományában nemcsak a négyzetgyökvonás, vagyis nemcsak az $x^2-A=0$ egyenlet megoldása végezhető el mindig, hanem ebben a tartományban minden algebrai egyenlet megoldható. Ezt a következőkben először csak a legegyszerűbb természetű egyenletekre bizonyítjuk be, de azután egészen általánosan is kimutatjuk.

II. A másodfokú egyenlet és a gyökvonás általános elmélete.

Az algebrai egyenlet gyökeinek és a többtagú elsőfokú tényezőinek kapcsolata. Többszörös gyökök.

292. §. Az n-ed fokú algebrai egyenlet általános alakja

$$a_0x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_kx^{n-k} + \cdots + a_n = 0,$$

hol az

$$f(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_kx^{n-k} + \cdots + a_n$$

többtagúban az $a_0, a_1, \ldots, a_n$ együtthatók állandó számértékek és a_0 nem zérus. Az egyenlet megoldása azoknak a számoknak meghatározásában áll, melyeket a többtagúban x helyébe téve, helyettesítési értékül zérust kapunk. Minden ilyen számot az egyenlet *gyökének* mondunk.

Az α szám akkor és csak akkor gyöke az egyenletnek, ha ennek többtagúja osztható (38. §.) *az $x-\alpha$ elsőfokú egész függvénnyel.*

Ha ugyanis $f(\alpha) = 0$, akkor

$$f(x) = f(x) - f(\alpha) = a_0(x^n-\alpha^n) + a_1(x^{n-1}-\alpha^{n-1}) + \cdots + a_{n-1}(x-\alpha).$$

Itt $x^n-\alpha^n$, $x^{n-1}-\alpha^{n-1}$, ... mindegyike $(x-\alpha)$-nak és egy legfeljebb $(n-1)$-edfokú függvénynek szorzata. Az $(x-\alpha)$-t kiemelve

$$f(x) = (x-\alpha) f_1(x),$$

hol $f_1(x)$ már csak $(n-1)$-edfokú egész függvény, még pedig

$$\begin{aligned} f_1(x) = a_0(x^{n-1}+\alpha x^{n-2}+\cdots+\alpha^{n-1}) + \\ + a_1(x^{n-2}+\alpha x^{n-3}+\cdots+\alpha^{n-2}) + \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ + a_{n-1}. \end{aligned}$$

Fordítva, ha

$$f(x) = (x-\alpha) f_1(x),$$

hol $f_1(x)$ valamely $(n-1)$-edfokú egész függvényt jelent: akkor közvetlenül világos, hogy $f(\alpha) = 0$.

Az $f(x)$ minden $x-\alpha$ alakú osztóját $f(x)$ *gyöktényezőjének* nevezzük. A mondottak szerint α akkor és csak akkor gyöke az $f(x) = 0$ algebrai egyenletnek, ha $x-\alpha$ gyöktényezője az $f(x)$ többtagúnak.

293. §. Legyen α az $f(x) = 0$ n-edfokú egyenletnek egyik gyöke, vagyis legyen $f(x)$ osztható $(x-\alpha)$-val. Ha $f(x)$-et az

$$f(x) = (x-\alpha) f_1(x)$$

alakban írjuk, akkor esetleg $f_1(x)$ megint osztható $(x-\alpha)$-val. Ekkor

$$f(x) = (x-\alpha)^2 f_2(x),$$

hol $f_2(x)$ már csak $(n-2)$-odfokú egész függvény. Az eljárás folytatása előbb vagy utóbb oly

$$f(x) = (x-\alpha)^k f_k(x)$$

képletre vezet, melyben $f_k(x)$ többé nem osztható $(x-\alpha)$-val. Ebben az esetben $(x-\alpha)$-t k-szoros gyöktényezőnek, α-t pedig k-szoros gyöknek mondjuk és k-t a gyök *többszörösségének* vagy *multiplicitásának* nevezzük. A $k=1$ esetben a gyököt *egyszerűnek* mondjuk.

Ha $F(x)$ két egész függvénynek, $f(x)$-nek és $g(x)$-nek szorzata, továbbá $x-\alpha$ az $f(x)$-nek pontosan μ-szeres és a $g(x)$-nek pontosan ν-szeres gyöktényezője: akkor $x-\alpha$ az $F(x)$-nek pontosan $(\mu+\nu)$-szeres gyöktényezője.

Föltevésünk szerint ugyanis

$$f(x) = (x-\alpha)^\mu f_\mu(x), \quad g(x) = (x-\alpha)^\nu g_\nu(x),$$

hol $f_\mu(\alpha)$ és $g_\nu(\alpha)$ a zérustól különbözők. De akkor

$$F(x) = f(x) g(x) = (x-\alpha)^{\mu+\nu} (f_\mu(x) g_\nu(x)),$$

hol $f_\mu(\alpha) g_\nu(\alpha)$ a zérustól különböző.

Az $(x-\alpha)^n$ egész függvénynek bármely osztója (egy állandó tényezőtől eltekintve) *szintén $x-\alpha$ valamely hatványa.*

Legyen ugyanis

$$(x-\alpha)^n = f(x)\,g(x),$$

hol $f(x)$-nek foka μ és $g(x)$-nek foka $\nu=n-\mu$. Ha α az $f(x)$-nek μ_1-szeres, $g(x)$-nek ν_1-szeres gyöke, akkor $0\leqq\mu_1\leqq\mu$, $0\leqq\nu_1\leqq\nu$ és $\mu_1+\nu_1=n$. Ez csak úgy lehetséges, hogy $\mu_1=\mu$ és $\nu_1=\nu$. Tehát $f(x)$ az $(x-\alpha)^\mu$ hatványnak és egy zérusfokú függvénynek, vagyis egy puszta állandónak szorzata.

294. §. Ha

$$f(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_n$$

és

$$\bar{f}(x) = \bar{a}_0x^n + \bar{a}_1x^{n-1} + \cdots + \bar{a}_n$$

megfelelő együtthatói konjugált komplex számok, akkor e két egész függvényt egymáshoz konjugáltnak mondjuk.

Ha α az $f(x)=0$ egyenletnek k-szoros gyöke, akkor az α-hoz konjugált $\bar{\alpha}$ szám a $\bar{f}(x)=0$ egyenletnek is éppen k-szoros gyöke.

Ugyanis annak megítélése, hogy $\bar{\alpha}$ az $\bar{f}(x)=0$ egyenletnek hányszoros gyöke, éppen úgy történik, mint annak eldöntése, hogy α az $f(x)=0$ egyenletnek hányszoros gyöke. A két számítás csak annyiban különbözik egymástól, hogy az egyiknél szereplő számok a másiknál rendre a konjugáltjaikkal pótolandók.

Midőn $f(x)$ együtthatói valós számok, akkor $f(x)$ azonos $\bar{f}(x)$-szel. Tehát, *ha $\alpha=u+iv$ valamely valós együtthatójú $f(x)=0$ egyenletnek gyöke, akkor $\bar{\alpha}=u-iv$ szintén kielégíti az $f(x)=0$ egyenletet és ennek ugyanannyiszoros gyöke mint α.*

295. §. *Az n-edfokú egyenletnek, még ha a többszörös gyököket multiplicitásuknak megfelelően többszörösen számítjuk is, nem lehet több mint n gyöke.*

Ez az elsőfokú egyenletről közvetlenül világos, mert az elsőfokú egyenletnek mindig egy és csak egy gyöke van. Tetszőleges algebrai egyenletre a tételt $(n-1)$-ről n-re való következtetéssel bizonyítjuk be.

Legyen tehát $f(x)=0$ valamely n-edfokú egyenlet. A bebizonyításnál legalább egy gyök létezését föltehetjük. Mert ha az egyenletnek egyáltalában nincs gyöke, akkor állításunk helyessége a szóban forgó egyenletre közvetlenül világos.

Jelentse α az $f(x)=0$ egyenletnek egyik gyökét. Még pedig legyen ez k-szoros gyök, hol k lehet 1, de lehet 1-nél nagyobb is. Ekkor

$$f(x) = (x-\alpha)^k f_k(x),$$

hol f_k már csak $(n-k)$-adfokú és α az $f_k(x)=0$ egyenletnek nem gyöke. Mivel a szóban forgó tételt az n-nél alacsonyabb fokú egyenletekre igaznak tekintjük, azért az $f_k(x)$ egyenletnek legfeljebb $n-k$ gyöke van. Az $f(x)=0$ egyenlet gyökei nyilván nem egyebek, mint $f_k(x)=0$ gyökei, ezekhez még k-szorosan hozzászámítva α-t. De akkor $f(x)$ gyökeinek száma valóban nem lehet nagyobb mint $(n-k)+k$, azaz mint n.

A mondottakból egyszersmind világos, hogy ha valamely n-edfokú egyenletre nézve sikerült n egymástól különböző gyököt találnunk, akkor ezek csak *egyszerű* gyökök lehetnek és ezeken kívül az egyenletnek más gyöke nincsen.

A másodfokú egyenlet.

296. §. Az

$$ax^2 + bx + c = 0$$

egyenletet *tiszta* vagy *vegyes* másodfokú egyenletnek nevezzük, aszerint hogy b a zérussal egyenlő vagy sem Ha a tiszta másodfokú egyenlet bal oldalát a-val elosztjuk és $\frac{c}{a}$-t röviden $(-A)$-val jelöljük, akkor az

$$x^2 - A = 0$$

egyenletet kapjuk. Ennek megoldása azonos feladat A négyzetgyökeinek meghatározásával.

297. §. Bármely

$$ax^2 + bx + c = 0$$

másodfokú egyenlet baloldalát a következő módon bonthatjuk gyöktényezőkre.

Nyilván

$$4a(ax^2+bx+c) = (2ax+b)^2 - (b^2-4ac) =$$
$$= (2ax+b)^2 - (\sqrt{b^2-4ac})^2 =$$
$$= (2ax + b - \sqrt{b^2-4ac})(2ax + b + \sqrt{b^2-4ac}) =$$
$$= 4a^2\left(x - \frac{-b + \sqrt{b^2-4ac}}{2a}\right)\left(x - \frac{-b - \sqrt{b^2-4ac}}{2a}\right).$$

Tehát

$$ax^2 + bx + c = a(x-\alpha)(x-\beta),$$

hol

$$\alpha = \frac{-b + \sqrt{b^2-4ac}}{2a}, \quad \beta = \frac{-b - \sqrt{b^2-4ac}}{2a}.$$

Itt a négyzetgyök b^2-4ac bármelyik négyzetgyökét jelentheti, de mindenütt ugyanazt.

Ha az egyenletet most már az

$$a(x-\alpha)(x-\beta) = 0$$

alakban írjuk, akkor közvetlenül világos, hogy az egyenlet gyökei α és β. Ha ez a két szám egymástól különböző, akkor mindegyik az egyenletnek egy-egy egyszerű gyöke.

Az $\alpha=\beta$ esetben a többtagúnak két gyöktényezője egymással egyenlő. Ebben az esetben csak egy olyan szám van, mely az egyenletet kielégíti, de ez *kétszeres* gyök. Ez az eset akkor és csak akkor következik be, ha a

$$D = 4ac - b^2$$

kifejezés (az ú. n. *diszkrimináns*) eltűnik.

Akár különbözők a gyökök, akár nem, mindenkor

$$\alpha + \beta = -\frac{b}{a}.$$

Továbbá az

$$a(x-\alpha)(x-\beta) = ax^2 + bx + c$$

képletből, ha x helyébe zérust helyettesítünk:

$$\alpha\beta = \frac{c}{a}.$$

298. §. A másodfokú egyenletről eddig mondottakban a, b, c tetszőleges komplex számok lehetnek. Gyakorlatilag az az eset a legfontosabb, melyben az együtthatók *valósak*. Ekkor a gyökök

valósak és különbözők, ha $D = 4ac - b^2 < 0$,
valósak és egyenlők, ha $D = 4ac - b^2 = 0$,
konjugált képzetes értékek, ha $D = 4ac - b^2 > 0$.

Ez közvetlenül világos, ha tekintetbe vesszük, hogy a gyökökre talált képletekben a négyzetgyök jele alatt $-D$ áll.

A Laplace-féle egyenlet.

299. §. Legyen adva a következő másodfokú egyenlet:

$$\begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda \end{vmatrix} = 0,$$

hol λ az ismeretlen, a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22} adott valós számok és $a_{12}=a_{21}$. *Ennek az ú. n.* Laplace-*féle egyenletnek gyökei mindig valósak.*

Valóban, az egyenlet részletes alakja

$$\lambda^2 - (a_{11}+a_{22})\lambda + (a_{11}a_{22}-a_{12}^2) = 0.$$

Az egyenlet diszkriminánsa:

$$D = 4(a_{11}a_{22}-a_{12}^2) - (a_{11}+a_{22})^2 = -4a_{12}^2 - (a_{11}-a_{22})^2.$$

Ha itt $a_{12}=0$ és $a_{11}=a_{22}$, akkor $D=0$, tehát ekkor az egyenlet gyökei valósak és egyenlők. Az a_{11}, a_{12}, a_{22} bármely más valós értékeinél D negativ, tehát az egyenlet gyökei valósak és különbözők.

300. §. Hogy a Laplace-féle egyenletnek nem lehet képzetes gyöke, az a következő módon is belátható.

Ha λ a Laplace-féle egyenletnek gyöke, akkor mindenesetre található két oly x, y szám, hogy

$$(a_{11}-\lambda)x + a_{12}y = 0$$
$$a_{21}x + (a_{22}-\lambda)y = 0$$

és x, y közül legalább az egyik nem zérus. Szorozzuk meg az első egyenlet bal oldalát az x-hez konjugált $\bar{x}$ számmal, a második egyenlet bal oldalát az y-hoz konjugált $\bar{y}$ számmal és adjunk össze. Az ily módon kapott

$$a_{11}x\bar{x} + a_{12}(x\bar{y}+\bar{x}y) + a_{22}y\bar{y} - \lambda(x\bar{x}+y\bar{y}) = 0$$

egyenletből:

$$\lambda = \frac{a_{11}x\bar{x} + a_{12}(x\bar{y}+\bar{x}y) + a_{22}y\bar{y}}{x\bar{x} + y\bar{y}}.$$

Itt $x\bar{x}$ és $y\bar{y}$ mindketten valós számok; közülök egyik sem negativ és legalább az egyik a zérustól különböző. Tehát $x\bar{x}+y\bar{y}$ pozitiv szám. A számlálóban $x\bar{y}$ és $\bar{x}y$ konjugált számok, tehát összegük valós szám. Továbbá (mint már mondottuk) $x\bar{x}$ és $y\bar{y}$ szintén valósak. Szóval a számláló valós és a nevező a zérustól különböző valós szám. Ennélfogva a λ hányados szintén valós szám.

Ez a második bebizonyítás szóról-szóra ismételhető a következő általánosabb tétel esetében:

Az

$$\begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33}-\lambda & \dots & a_{3n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn}-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

n-edfokú Laplace-*féle egyenletnek nincsen képzetes gyöke.*

Itt λ az ismeretlen, az a_{ik}-k oly adott valós számok, hogy i és k bármely értékénél

$$a_{ik} = a_{ki}.$$

A gyökvonás.

301. §. Az $x^n - A = 0$ *tiszta* n-edfokú vagy *binom* egyenletet kielégítő számokat az A n-edik gyökeinek mondjuk és így jelöljük: $\sqrt[n]{A}$.

A zérusnak nincs más n-dik gyöke, mint maga a zérus.

Bármely más A szám n-edik gyökeit a következő módon határozhatjuk meg. Legyen A trigonometriai alakja

$$A = r(\cos\varphi + i\sin\varphi).$$

Az ismeretlent az

$$x = \varrho(\cos\psi + i\sin\psi)$$

trigonometriai alakban határozzuk meg. A megoldandó

$$x^n = A$$

egyenlet most már így is írható:

$$\varrho^n(\cos n\psi + i\sin n\psi) = r(\cos\varphi + i\sin\varphi).$$

Ez az egyenlet nyilván akkor és csak akkor lesz kielégítve, ha

$$\varrho^n = r, \quad n\psi = \varphi + 2k\pi,$$

hol k egész szám. Tehát

$$\varrho = r^{\frac{1}{n}}, \quad \psi = \frac{\varphi + 2k\pi}{n}$$

és

$$x = r^{\frac{1}{n}}\left(\cos\frac{\varphi+2k\pi}{n} + i\sin\frac{\varphi+2k\pi}{n}\right).$$

Két különböző k és k' egész számnak akkor és csak akkor felel meg ugyanaz az x, ha a

$$\frac{\varphi+2k\pi}{n} - \frac{\varphi+2k'\pi}{n} = \frac{2(k-k')\pi}{n}$$

különbség a π-nek valamely páros többese, más szóval, ha $k-k'$ osztható n-nel.

Ha k helyébe rendre a

$$0,\ 1,\ \ldots,\ n-1$$

számokat helyettesítjük, akkor $\sqrt[n]{A}$ számára rendre egymástól különböző értékeket kapunk. Ha ellenben k helyébe más értéket helyettesítünk, akkor a $0, 1, \ldots, n-1$ számok között mindig találhatunk oly k'-t, hogy $k-k'$ osztható n-nel. Tehát az ily k nem vezet új eredményre.

302. §. Ha A a zérustól különböző, akkor az $x^n - A = 0$ egyenlet minden gyöke egyszerű gyök. Erre az egyenletre nézve ugyanis n egymástól különböző gyököt találtunk. De ez (295. §) csak akkor lehetséges, ha ezek mind egyszerű gyökök.

Az $A=0$ esetben a tiszta n-edfokú egyenlet átmegy a következőbe:

$$x^n = 0.$$

Ennek $x=0$ nyilván n-szeres gyöke.

A mondottakat így szokás kifejezni: *A komplex számok tartományában bármely szám n-edik gyökeinek száma éppen n. A zérustól különböző számnak n-edik gyökei egymástól különbözők. A zérusnak n-edik gyökei egyenlők egymással és mindannyian zérusok.*

303. §. *Az egység n-edik gyökei* azok a számok, melyekre nézve

$$x^n = 1.$$

Mivel

$$1 = 1(\cos 0 + i\sin 0)$$

azért az egység n-edik gyökeit az

$$\alpha_k = \cos\frac{2k\pi}{n} + i\sin\frac{2k\pi}{n}$$

képlet adja meg, ha k helyébe a

$$0,\ 1,\ \ldots,\ n-1$$

egész számokat helyettesítjük.

Az egység harmadik gyökei, vagyis az

$$x^3 = 1$$

egyenlet megoldásai:

$$\alpha_0 = 1,$$

$$\alpha_1 = \cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3}$$

$$= \cos\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{6}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{6}\right)$$

$$= -\sin\frac{\pi}{6}+i\cos\frac{\pi}{6}=\frac{-1+i3^{\frac{1}{2}}}{2},$$

$$\alpha_2=\cos\frac{4\pi}{3}+i\sin\frac{4\pi}{3}$$

$$=\cos\left(\pi+\frac{\pi}{3}\right)+i\sin\left(\pi+\frac{\pi}{3}\right)=\frac{-1-i3^{\frac{1}{2}}}{2}.$$

Az egység negyedik gyökei, vagyis az

$$x^4=1$$

egyenlet megoldásai:

$$1,\ i,\ -1,\ -i.$$

304. §. Az

$$A=r(\cos\varphi+i\sin\varphi)$$

komplex számról mindig föltehetjük, hogy trigonometriai alakjában

$$-\pi<\varphi\leqq\pi.$$

Ha a φ-t így választjuk, akkor azt az n-dik gyököt, melyet az

$$r^{\frac{1}{n}}\left(\cos\frac{\varphi}{n}+i\sin\frac{\varphi}{n}\right)$$

kifejezés ad meg, az n-dik gyök főértékének mondjuk és így jelöljük: $(\sqrt[n]{A})$.

Az n-dik gyök valamennyi értékét (mint tudjuk) az

$$r^{\frac{1}{n}}\left(\cos\frac{\varphi+2k\pi}{n}+i\sin\frac{\varphi+2k\pi}{n}\right)$$

kifejezés adja meg, ha benne k helyébe a

$$0,\ 1,\ \ldots,\ n-1$$

egész számokat helyettesítjük. Ez a kifejezés így is írható

$$r^{\frac{1}{n}}\left(\cos\frac{\varphi}{n}+i\sin\frac{\varphi}{n}\right)\left(\cos\frac{2k\pi}{n}+i\sin\frac{2k\pi}{2}\right),$$

vagy még így is

$$(\sqrt[n]{A})\,\alpha_k.$$

Itt α_k az egységnek egyik n-dik gyöke.

Szóval: *Az A n-dik gyökének főértékéből úgy kapjuk az összes értékeket, hogy a főértéket az egység n-dik gyökeivel megszorozzuk.*

Legyen pl. megoldandó

$$x^3=-8.$$

A -8 trigonometriai alakja

$$-8 = 8(\cos\pi + i\sin\pi).$$

Innen

$$(\sqrt[3]{-8}) = 2\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right) = 2\frac{1+i3^{\frac{1}{2}}}{2} = 1 + i3^{\frac{1}{2}}.$$

A $\sqrt[3]{-8}$ valamennyi értéke:

$$1 + i3^{\frac{1}{2}},$$

$$(1 + i3^{\frac{1}{2}})\alpha_1 = \frac{(1+i3^{\frac{1}{2}})(-1+i3^{\frac{1}{2}})}{2} = \frac{-3-1}{2} = -2,$$

$$(1 + i3^{\frac{1}{2}})\alpha_2 = \frac{(1+i3^{\frac{1}{2}})(-1-i3^{\frac{1}{2}})}{2} = 1 - i3^{\frac{1}{2}}.$$

III. Az általános n-edfokú egyenlet.

Valós együtthatójú páratlan fokú egyenletek.

305. §. *Ha az*

$$f(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_n$$

függvénynek (pontos) fokszáma, n, páratlan és együtthatói valósak, akkor az $f(x) = 0$ egyenletnek legalább egy valós gyöke van.

A bebizonyításnál föltehető, hogy $a_0 = 1$, mert ellenkező esetben a_0-sal oszthatunk. Továbbá az $a_n \gtrless 0$ esetre szorítkozhatunk, mert ha $a_n = 0$, akkor az $x = 0$ gyök közvetlenül fölismerhető. A mondott föltételek mellett most már nemcsak a kimondott tételt bizonyíthatjuk be, hanem a következő tartalmasabb tételt is:

Ha az

$$f(x) = x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_n$$

függvénynek n fokszáma páratlan, együtthatói valósak és az a_n abszolut tag a zérustól különböző, akkor az $f(x) = 0$ egyenletnek van legalább egy oly valós gyöke, mely a_n-nel ellenkező előjelü.

Ugyanis

$$f(x) = x^n\left(1 + \frac{a_1}{x} + \frac{a_2}{x^2} + \cdots + \frac{a_n}{x^n}\right).$$

Ha x oly valós értékeire szorítkozunk, melyekre nézve

$$|x| > 1 + |a_1| + |a_2| + \cdots + |a_n|,$$

akkor

$$\left|\frac{a_1}{x} + \frac{a_2}{x^2} + \cdots + \frac{a_n}{x^n}\right| < \frac{|a_1| + |a_2| + \cdots + |a_n|}{|x|} < 1,$$

tehát

$$1 + \frac{a_1}{x} + \frac{a_2}{x^2} + \cdots + \frac{a_n}{x^n}$$

pozitiv és

$$\operatorname{sgn} f(x) = \operatorname{sgn} x^n = \operatorname{sgn} x.$$

Ha most már az ω pozitiv számot úgy választjuk, hogy

$\omega > 1 + |a_1| + |a_2| + \cdots + |a_n|$, akkor az $a_n < 0$ esetben

$$f(0) = a_n < 0, \quad f(\omega) > 0.$$

Ez a 105. §-ban bebizonyított tétel szerint csak úgy lehetséges, hogy 0 és ω között van legalább egy oly α szám, melyre nézve $f(\alpha) = 0$. Tehát ekkor az $f(x) = 0$ egyenletnek legalább egy pozitiv gyöke van.

Az $a_n > 0$ esetben

$$f(-\omega) < 0, \quad f(0) = a_n > 0.$$

Tehát $-\omega$ és 0 között van legalább egy oly α szám, melyre nézve $f(\alpha) = 0$. Azaz ekkor az egyenletnek legalább egy negativ gyöke van.

A valós együtthatójú, páratlan fokú egyenletekre nézve bebizonyított tétel csak speciális esete az *algebra alaptételének*, mely szerint minden *algebrai egyenletnek van gyöke*, mely azonban nem okvetlenül valós.

Egy speciális rezultáns.

306. §. Az algebra alaptételének első szigorú bebizonyításai Gausstól valók. A következőkben előadandó Clifford-féle bebizonyítás végső elemzésben Gauss második bebizonyításának jelentékenyen módosított alakja.

A bebizonyításnál alkalmazást találnak a 38. és 39. §-nak a rezultánsokra vonatkozó eredményei. Az idézett helyen a következő tételt bizonyítottuk be:

A pontosan m-edfokú $f(x)$ egész függvénynek a legfeljebb n-edfokú $g(x)$ egész függvénnyel akkor és csak akkor van x-et tartalmazó közös osztója, ha a két függvény rezultánsa eltünik.

Akkori tárgyalásainkban racionális együtthatókra szorítkoztunk. De meggondolásaink és a kimondott tétel nyilván akkor is igazak, ha bármily komplex együtthatókat engedünk meg.

Különösen figyelemre méltó eredményt kapunk, ha a 39. §-ban számon mindig *valós* számot értünk. Ekkor az ottani eredmény így fejezhető ki:

Ha a pontosan m-edfokú $f(x)$ és a legfeljebb n-edfokú $g(x)$ rezultánsa eltünik, továbbá $f(x)$ és $g(x)$ együtthatói valósak, akkor a két függvényhez mindig található az x-et tartalmazó oly közös osztó, melynek együtthatói valósak.

307. §. Az algebra alaptételének bebizonyításánál szereplő rezultánsra a következő módon jutunk.

Az $n = 2\nu$ (páros) fokú

$$f(x) = x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \cdots + a_n$$

egész függvényben x helyébe az $y+h$ összeget tesszük, hol y és h határozatlanok. A kapott kifejezést y hatványai szerint rendezzük, úgy hogy

$$f(y+h) = y^n + b_1 y^{n-1} + b_2 y^{n-2} + \cdots + b_n,$$

hol a b-k h-nak egész függvényei. Továbbá az y páros hatványait elválasztjuk a páratlanoktól. Ekkor

$$f(y+h) = \Phi(y^2) + y\,\Psi(y^2),$$

hol Φ és Ψ jelentését a következő képletek adják meg:

$$\Phi(z) = z^\nu + b_2 z^{\nu-1} + b_4 z^{\nu-2} + \cdots + b_{2\nu}$$

$$\Psi(z) = b_1 z^{\nu-1} + b_3 z^{\nu-2} + \cdots + b_{2\nu-1}.$$

Bennünket *a Φ és Ψ függvényeknek* rezultánsa érdekel. Különösen fontos meghatároznunk, hogy ez h-nak *hányadfokú* függvénye.

A b-k részletes alakja:

$$b_1 = \binom{n}{1} h + a_1$$

$$b_2 = \binom{n}{2} h^2 + \binom{n-1}{1} a_1 h + a_2$$

$$b_3 = \binom{n}{3} h^3 + \binom{n-1}{2} a_2 h^2 + \binom{n-2}{1} a_2 h + a_3$$

. . . . . .

$$b_n = h^n + a_1 h^{n-1} + a_2 h^{n-2} + \cdots + a_n.$$

A szóban forgó rezultánst a következő determináns adja meg:

$$R = \begin{vmatrix} 1 & b_2 & b_4 \ldots 0 \\ 0 & 1 & b_2 \ldots 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 \ldots b_{2\nu} \\ b_1 & b_3 & b_5 \ldots 0 \\ 0 & b_1 & b_3 \ldots 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 \ldots b_{2\nu-1} \end{vmatrix}.$$

Az R determináns kifejtésének minden tagjában a b-k indexeinek összege ugyanaz. Ha ugyanis R első, második, stb. sorából rendre az i_1-dik, i_2-dik, stb. elemet használjuk föl, akkor indexeik összege:

$$2i_1 - 2 + 2i_2 - 4 + \cdots + 2i_{\nu-1} - (2\nu-2) + \\ + 2i_\nu - 1 + 2i_{\nu+1} - 3 + \cdots + 2i_{2\nu-2} - (2\nu-3) + 2i_{2\nu-1} - (2\nu-1).$$

Itt az i-k csak sorrendben különböznek az $1, 2, \ldots, 2\nu-1$ számoktól; azért a szóban forgó összeg értéke mindig

$$2(i_1 + \cdots + i_{2\nu-1}) - (1 + 2 \cdots + 2\nu-1) = 1 + 2 + \cdots + (2\nu-1) = \nu(2\nu-1).$$

Ez a szám adja meg egyszersmind, hogy R a h-nak hányadfokú függvénye. Ugyanis b_i a h-nak i-edfokú függvénye. Több b szorzatának fokszámát a tényezők indexeinek összege adja meg. Tehát az R determináns minden tagjának fokszáma $\nu(2\nu-1)$. Csak még azt kell kimutatnunk, hogy a determináns tagjainak (mint h egész függvényeinek) összevonásánál h legmagasabb hatványa nem esik ki.

308. §. Az R determináns b_i elemében h^i együtthatóját úgy kapjuk, hogy b_i-ben az a-k helyébe zérusokat, a h helyébe pedig 1-et teszünk. Ez az

$$a_1 = a_2 = \cdots = a_n = 0, \quad h = 1$$

helyettesítés adja meg egyszersmind R-ből azt az együtthatót, mellyel R-ben a h-nak $\nu(2\nu-1)$-dik hatványa szorozva van. Vagyis ez az együttható R-nek az az értéke, R_0, mely az

$$f(x) = x^n, \quad h = 1$$

esetnek megfelel. Erről az értékről kell kimutatnunk, hogy a zérustól különböző.

Az említett speciális esetet vizsgálva

$$(y+1)^n = \Phi(y^2) + y\Psi(y^2).$$

Ha y előjelét ellenkezőre változtatjuk, akkor innen

$$(y-1)^n = \Phi(y^2) - y\Psi(y^2).$$

Ha most már R_0 eltünnék, akkor Φ-nek és Ψ-nek volna egy y-t tartalmazó közös osztója és ez egyszersmind az

$$(y+1)^n, \quad (y-1)^n$$

függvényeknek is közös osztója volna. Ámde $(y-1)^n$ minden osztója az $y-1$ valamely hatványa, tehát osztható $(y-1)$-gyel. Ellenben $(y+1)^n$-nak nem lehet $(y-1)$-gyel osztható osztója. Tehát R_0 nem lehet zérus.

Ezzel be van bizonyítva, hogy $\Phi(z)$ *és* $\Psi(z)$ *rezultánsa mindig* h*-nak pontosan* $\nu(2\nu-1)$*-ed fokú függvénye.*

Hogy ennek az eredménynek leglényegesebb részét nyomatékosabban emelhessük ki, célszerű a *párossági rend* vagy (röviden) *párosság* fogalmát bevezetnünk. Az n egész számról azt mondjuk, hogy párossága r, ha n a 2-nek r-edik hatványával osztható, de 2-nek $(r+1)$-dik hatványával nem osztható. Pl. $n=280=2^3 . 35$ párossága 3. A páratlan számokra $r=0$.

Ha az $n=2\nu$ *fokú*

$$f(x) = x^n + a_1 x^{n-1} + \cdots + a_n$$

egész függvény fokszámának párossága r*, akkor a megfelelő* Φ *és* Ψ *függvények rezultánsa a* h*-nak oly egész függvénye, melyre nézve a fokszám párossága már csak* $r-1$.

Valóban, ha n párossága r, akkor ν párossága csak $r-1$. A szóban forgó rezultánsnak mint h függvényének fokszámát kifejező

$$\nu(2\nu-1)$$

szorzatban az első tényező párossága $r-1$, a második tényező pedig egyáltalában nem osztható 2-vel. Tehát $\nu(2\nu-1)$ párossága csak $r-1$.

Az algebra alaptételének bebizonyítása.

309. §. *a)* Ha $f(x)=0$ fokszáma *páratlan,* továbbá az együtthatók *valósak,* akkor már tudjuk legalább egy *valós* gyök létezését.

A *másodfokú* egyenletről *bármily* komplex együtthatók esetében tudjuk, hogy legalább egy gyöke van; ez a gyök lehet valós vagy képzetes.

Az említett két legegyszerűbb esetből kiindulva, az algebra alaptételét fokozatosan egyre bonyodalmasabb egyenletekre bizonyítjuk be.

b) Legyen a megoldandó $f(x)=0$ vagy

$$x^n + a_1 x^{n-1} + \cdots + a_n = 0$$

egyenlet fokszáma *valamely* ν *páratlan számnak kétszerese.* Az együtthatók legyenek *valósak.*

Ha $\nu=1$, akkor már tudjuk, hogy az egyenletnek van gyöke. Tehát a bebizonyításnál a teljes indukciót alkalmazhatjuk. Vagyis a tételt igaznak ekinthetjük minden oly valós együtthatójú egyenletre nézve, melynek fokszáma valamely ν-nél kisebb páratlan szám kétszerese.

A bebizonyításnál jelentse $R(h)$ az előbbi §-ban vizsgált rezultánst. Az $R(h)=0$ egyenlet, ha benne h-t ismeretlennek tekintjük, $\nu(2\nu-1)$-edfokú. Ez a fokszám páratlan; azért az $R(h)=0$ egyenletnek legalább egy valós gyöke van. Ha az előbbi §-ban szereplő kifejezésekben h helyébe ezt a gyököt helyettesítjük, akkor a $\Phi(z)$, $\Psi(z)$ függvényeknek van a z-t tartalmazó közös osztójuk, sőt (306. §) még oly közös osztót is találhatunk, melynek együtthatói valósak. Legyen ez $\chi(z)$, úgy hogy

$$\Phi(z) = \varphi(z)\chi(z), \quad \Psi(z) = \psi(z)\chi(z)$$

és

$$F(y) = f(y+h) = [\varphi(y^2) + y\psi(y^2)]\chi(y^2). \qquad 1)$$

A $\chi(z)$ foka $\leqq \nu$. Ha $\chi(z)$ foka ν, akkor

$$F(y) = f(y+h) = \chi(y^2).$$

Minthogy ν páratlan szám, azért a $\chi(z)=0$ egyenletnek legalább egy z_0 valós gyöke van. Ha ebből négyzetgyököt vonunk, $y=\sqrt{z_0}$ kielégíti az $F(y)=\chi(y^2)=0$ egyenletet és $x=\sqrt{z_0}+h$ kielégíti a szóbanforgó $f(x)=0$ egyenletet.

Ha $\chi(z)$ foka $<\nu$, akkor az 1) alatti képlet értelmében $F(y)$ két alacsonyabb fokú tényező szorzata. Mindkét tényező fokszáma páros és a két

fokszám összege 2ν; tehát az egyik tényező fokszáma $2\nu_1$ alakú, hol ν páratlan szám és kisebb mint ν. Ha ezt a tényezőt $f_1(y)$-nal jelöljük, akkor az $f_1(y)=0$ egyenletre nézve az algebra alaptételét már igaznak tekintjük. Ennek tehát van legalább egy y_0 gyöke. De akkor y_0 kielégíti az $F(y)=0$ egyenletet, $x=y_0+h$ pedig az $f(x)=0$ egyenletet.

c) Most már áttérünk arra az esetre, melyben $f(x)=0$ együtthatói között *képzetesek* is vannak és a fokszám *páratlan*.

Ha részletesen kiírva

$$f(x)=x^n+(\alpha_1+i\beta_1)x^{n-1}+\cdots+(\alpha_n+i\beta_n),$$

akkor $f(x)$ az $U(x)+iV(x)$ alakban is írható, hol

$$U(x)=x^n+\alpha_1x^{n-1}+\cdots+\alpha_n,\quad V(x)=\beta_1x^{n-1}+\cdots+\beta_n.$$

Tehát $f(x)$ és $\overline{f}(x)=U(x)-iV(x)$ szorzata

$$U^2+V^2.$$

A mondottak értelmében $f(x)\overline{f}(x)=0$ oly *valós* együtthatójú egyenlet, melynek fokszáma az n páratlan számnak kétszerese. Erről az egyenletről már tudjuk, hogy legalább egy valós vagy képzetes gyöke van. Ez az $u+iv$ gyök vagy f-be vagy $\overline{f}$-be helyettesítve zérust ad. Az első esetben $u+iv$, a második esetben $u-iv$ az $f(x)=0$ egyenletnek gyöke.

d) Még csak az az eset van hátra, melyben $f(x)=0$ együtthatói bármilyen valós vagy képzetes számok és az n fokszám *páros*. A bebizonyításnál a tételt ismeretesnek tekintjük 1) minden oly egyenletre, melyre nézve *a fokszám párossága* kisebb mint n párossága, továbbá 2) minden oly egyenletre, melyre nézve a fokszám párossága *egyenlő* n párosságával, de *maga a fokszám* kisebb mint n.

A bebizonyítást megint az $R(h)=0$ segítségével végezzük, hol $R(h)$ az előbbi §-ban vizsgált rezultáns. Ha $n=2\nu$ párossága r, akkor az $R(h)=0$ egyenlet fokszámának párossága csak $r-1$. Ennek az egyenletnek tehát van gyöke. Ha h helyébe ezt a gyököt helyettesítjük, akkor a $\Phi(z)$, $\Psi(z)$ függvényeknek van a z-t tartalmazó $\chi(z)$ közös osztójuk és megint az 1) alatti képlet érvényes.

Ha $\chi(z)$ foka a lehető legnagyobb, vagyis egyenlő ν-vel, akkor

$$F(y)=f(y+h)=\chi(y^2).$$

Mivel ν párossaga csak $r-1$, azért a $\chi(z)=0$ egyenletnek legalább egy z_0 gyöke van és $x=h+\sqrt{z_0}$ kielégíti az $f(x)=0$ egyenletet.

Ha $\chi(z)$ foka $<\nu$, akkor az 1) alatti képlet értelmében $F(y)$ két alacsonyabb fokú tényező szorzata. Mindkét tényező fokszáma páros és a két fokszám összege $n=2\nu$. Tehát legalább az egyik tényező fokszáma $2\nu_1$ alakú, hol $2\nu_1$ párossága $\leq r$ és természetesen $2\nu_1<2\nu$. Ha ezt a tényezőt $f_1(y)$-nal jelöljük, akkor az $f_1(y)$ egyenletnek van legalább egy y_0 gyöke. Ez az y_0 egyszersmind az $F(y)=0$ egyenletnek is gyöke, tehát $x=y_0+h$ kielégíti az $f(x)=0$ egyenletet.

Az algebra alaptételének folyományai.

310. §. *Bármely n-edfokú algebrai egyenletnek pontosan n valós vagy képzetes gyöke van*, ha a többszörös gyököket többszörösségüknek megfelelően vesszük számba.

Valóban az $f(x)=0$ egyenletnek van legalább egy α_1 gyöke. De akkor (292. §)

$$f(x)=(x-\alpha_1)f_1(x),$$

hol $f_1(x)$ már csak $(n-1)$-edfokú. Hasonlóképpen

$$f_1(x)=(x-\alpha_2)f_2(x),$$

...

Ily módon végre elsőfokú $f_{n-1}(x)$-re jutunk. Ha még föltesszük, hogy $f(x)$ legmagasabb tagjának együtthatója 1, akkor ugyanez áll $f_{n-1}(x)$-ről is. Tehát $f_{n-1}(x)$ így írható:

$$f_{n-1}(x) = x - \alpha_n.$$

Ennélfogva

$$f(x) = (x-\alpha_1)(x-\alpha_2)\ldots(x-\alpha_n).$$

Az egyenlő tényezők összevonásával $f(x)$-et így is írhatjuk:

$$f(x) = (x-\alpha_1)^{r_1}(x-\alpha_2)^{r_2}\ldots(x-\alpha_\nu)^{r_\nu}, \qquad 1)$$

hol $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_\nu$ egymástól különbözők és $r_1 + r_2 + \cdots + r_\nu = n$.

Minthogy valamely szorzat csak úgy lehet egyenlő zérussal, ha valamelyik tényezője eltünik, azért $f(x)$-nek 1) alatti alakjából világos, hogy az $f(x)=0$ egyenletnek nincs más gyöke, mint $\alpha_1, \ldots, \alpha_\nu$. Ezeknek a gyököknek többszörössége éppen $r_1, \ldots, r_\nu$. Tehát az egyenlet gyökeinek száma, ha a többszörösséget is tekintetbe veszszük, pontosan

$$r_1 + r_2 + \cdots + r_\nu = n.$$

311. §. Két

$$f(x) = 0, \quad g(x) = 0$$

algebrai egyenletnek akkor és csak akkor van *közös gyöke*, ha az $f(x)$ és $g(x)$ egész függvényeknek *közös osztójuk* van, vagyis *ha* $f(x)$ *és* $g(x)$ *rezultánsa* eltünik.

Valóban, ha α a két egyenletnek közös gyöke, akkor $f(x)$ és $g(x)$ oszthatók $x-\alpha$-val. Viszont, ha $f(x)$-nek és $g(x)$-nek valamely $\chi(x)$ közös osztójuk van, akkor a $\chi(x) = 0$ egyenlet minden gyöke az $f(x) = 0$ és $g(x) = 0$ egyenletnek közös gyöke.

IV. Komplex számsorozatok határértékei.

Komplex számsorozatok.

312. §. *Az*

$$a_1 = u_1 + iv_1, \ \ldots, \ a_n = u_n + iv_n, \ldots$$

komplex számokról azt mondjuk, hogy határértéküknek

$$A = U + iV,$$

ha az

$$|a_1 - A|, \ \ldots, \ |a_n - A|, \ldots$$

abszolut értékek elemi számsorozatot alkotnak.

A második fejezetben a határátmenetekre vonatkozólag talált tételek legnagyobb része bármilyen komplex tagú számsorozatokra is érvényes és ugyanazon a módon bizonyítható be, mint ott. Nevezetesen:

Bármely végtelen számsorozatnak legfeljebb egy limesze van. (50. §).

Valamely számsorozatnak csak akkor lehet (véges) limesze, ha szabályos (56. §).

Ha $\lim a_n = A$ *és* $\lim b_n = B$, *akkor* (67. §)

$$\lim |a_n| = |A|, \quad \lim (a_n \pm b_n) = A \pm B, \quad \lim a_n b_n = AB$$

és a zérustól különböző B esetében egyszersmind

$$\lim \frac{a_n}{b_n} = \frac{A}{B}.$$

A szorzatra vonatkozó képlet értelmében állandó α tényező esetében

$$\lim \alpha a_n = \alpha A.$$

313. §. A limesz értelmezéséből közvetlenül világos, hogy ha az

$$a_1 = u_1 + iv_1, \ldots, \quad a_n = u_n + iv_n, \ldots$$

sorozatra nézve

$$\lim (u_n + iv_n) = U + iV,$$

akkor a konjugált értékekre nézve:

$$\lim (u_n - iv_n) = U - iV.$$

Innen összeadás, illetve kivonás útján

$$\lim 2u_n = \lim \{(u_n + iv_n) + (u_n - iv_n)\} = 2U,$$
$$\lim 2iv_n = \lim \{(u_n + iv_n) - (u_n - iv_n)\} = 2iV.$$

Tehát

$$\lim u_n = U, \qquad \lim v_n = V.$$

Fordítva, ha

$$\lim u_n = U \quad \text{és} \quad \lim v_n = V,$$

akkor

$$\lim iv_n = iV$$

és összeadás útján

$$\lim (u_n + iv_n) = U + iV.$$

Vagyis valamely komplex tagú sorozat határértéke akkor és csak akkor egyenlő az U+iV komplex számmal, ha a tagok valós részeinek határértéke egyenlő az U valós résszel és az i együtthatóinak határértéke V.

E tétel segítségével komplex tagok esetére is bebizonyítható, hogy *valamely számsorozatnak, akkor és csak akkor van véges*

$$A = U + iV$$

határértéke, ha szabályos számsorozat.

Az 55. §-ban adott definició szerint az

$$a_1 = u_1 + iv_1, \quad \ldots, \quad a_n = u_n + iv_n, \ldots$$

számok *szabályos sorozatot* akkor alkotnak, ha bármely δ pozitiv számhoz található oly a_N tag, melyen túl bármely két tagra nézve

$$|a_n - a_{n+k}| < \delta.$$

Hogy csak szabályos számsorozatnak lehet véges határértéke, az (mint már az előző §-ban mondottuk) komplex tagok esetében teljesen úgy bizonyítható be, mint racionális számokból alkotott számsorozat esetében. Hogy fordítva minden szabályos számsorozatnak van határértéke az a következő módon látható be.

Az

$$|a_n - a_{n+k}|^2 = (u_n - u_{n+k})^2 + (v_n - v_{n+k})^2$$

képlet értelmében

$$|u_n - u_{n+k}| \leqq |a_n - a_{n+k}| \quad \text{és} \quad |v_n - v_{n+k}| \leqq |a_n - a_{n+k}|.$$

Tehát ha az adott sorozat *szabályos* számsorozat, akkor az

$$u_1, u_2, \ldots, u_n, \ldots$$

$$v_1, v_2, \ldots, v_n, \ldots$$

valós számok szintén szabályos számsorozatokat alkotnak. Ennélfogva véges U és V határértékeik vannak. De akkor $\lim (u_n + iv_n)$ is létezik és értéke $U + iV$.

314. §. *Az*

$$a_1 = u_1 + iv_1, \ldots, a_n = u_n + iv_n, \ldots$$

sorozatról azt mondjuk, hogy határértéke végtelen, ha az abszolut értékekből alkotott

$$|a_1|, \ldots, |a_n|, \ldots$$

számsorozat határértéke végtelen.

Megtörténhetik, hogy

$$\lim |a_n| = \infty$$

és

$$u_1 + iv_1, \ldots, u_n + iv_n, \ldots$$

irányténeyezőinek van limesze. Ekkor azt mondjuk, hogy a számsorozatnak *meghatározott irányú és értelmü végtelen* a határértéke.

315. §. *A*

$$q, q^2, \ldots, q^n, \ldots$$

számsorozat határértéke

1. *zérus, ha* $|q| < 1$,
2. *végtelen, ha* $|q| > 1$,
3. *egyenlő 1-gyel, ha* $q = 1$,
4. *nem létezik, ha* $|q| = 1$, *de* q *nem egyenlő 1-gyel.*

A tétel első három része bármely komplex q esetében úgy bizonyítható be, mint valós q esetében.

Ha $|q| = 1$, de q értéke 1-től különböző, akkor a vizsgált számsorozatnak sem véges sem végtelen limesze nincsen. Ha ugyanis a számsorozatnak véges limesze volna, vagyis a q hatványai szabályos számsorozatot alkotnának, akkor

$$q^{n+1} - q^n$$

limeszének zérusnak kellene lennie, holott

$$\lim |q^{n+1} - q^n| = \lim |q^n(q-1)| = \lim |q-1| = |q-1| > 0.$$

Ha pedig a számsorozatnak végtelen limesze volna, akkor egyszersmind

$$\lim |q|^n = \infty$$

volna, holott

$$\lim |q|^n = 1.$$

V. Egy geometriai alkalmazás.

Két egyenes darab párhuzamosságának és merőlegességének feltételei.

316. §. Ha a K, L, M, N pontok (107. ábra) a k, l, m, n komplex számokat ábrázolják, akkor

$$l - k = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$$
$$n - m = \varrho(\cos\psi + i\sin\psi),$$

hol r, ϱ a KL és MN vektorok hosszúságai, φ és ψ pedig az irányszögeik. Ha a konjugált értékre való áttérést vízszintes vonással jelezzük, akkor

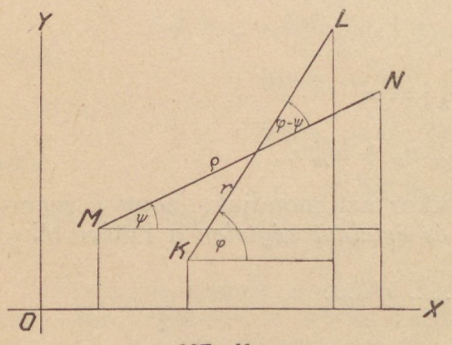
$$\overline{n} - \overline{m} = \varrho(\cos\psi - i\sin\psi) = \varrho\{\cos(-\psi) + i\sin(-\psi)\}.$$

Tehát

$$(l-k)(\overline{n}-\overline{m}) = r\varrho\{\cos(\varphi-\psi) + i\sin(\varphi-\psi)\}.$$

A két egyenes darab akkor párhuzamos egymással, ha $\varphi-\psi$ egyenlő π valamely többesével, vagyis

$$\sin(\varphi-\psi) = 0.$$



107. ábra.

A két egyenes darab akkor merőleges egymásra, ha

$$\cos(\varphi-\psi) = 0.$$

Más szóval ezt így is fejezhetjük ki: *A KL és MN vektorok akkor párhuzamosak, ha az*

$$(l-k)(\overline{n}-\overline{m})$$

szorzat valós szám, továbbá akkor merőlegesek egymásra, ha ez a szorzat tiszta képzetes szám.

Két geometriai tétel.

317. §. *α) Ha* (108. ábra) *az A, B, C, D és A', B', C', D' pontok a síkban úgy vannak elhelyezve, hogy*

$$BC \parallel A'D',\ CA \parallel B'D',\ AB \parallel C'D',\ AD \parallel B'C',\ BD \parallel C'A',$$

akkor egyszersmind

$$CD \parallel A'B'.$$

β) Ha az A, B, C, D és A', B', C', D' pontok a síkban úgy vannak elhelyezve, hogy

$$BC \perp A'D',\ CA \perp B'D',\ AB \perp C'D',\ AD \perp B'C',\ BD \perp C'A',$$

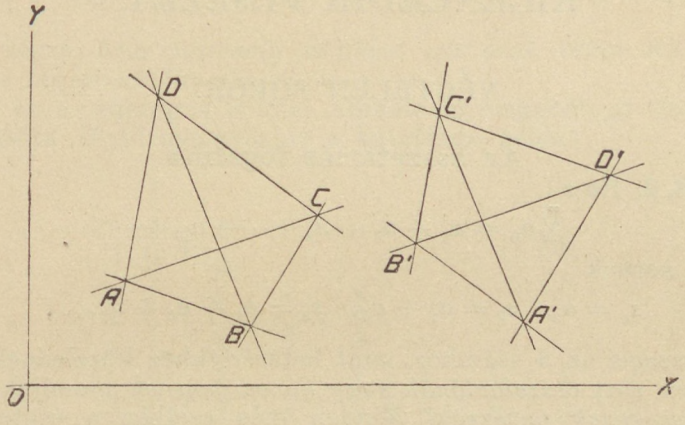
akkor egyszersmind

$$CD \perp A'B'.$$

Induljunk ki ugyanis a következő determinánsból

$$\begin{vmatrix} 1 & a-d & \bar{a}-\bar{d} \\ 1 & b-d & \bar{b}-\bar{d} \\ 1 & c-d & \bar{c}-\bar{d} \end{vmatrix},$$

hol a, b, c, d az A, B, C, D által ábrázolt komplex számokat jelentik, $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}, \bar{d}$ pedig az A', B', C', D' által ábrázolt számok konjugáltjait.



108. ábra.

Ha e determinánsnak az utolsó oszlop szerint kifejtett alakjából kivonjuk a középső oszlop szerint kifejtett alakot, a kivonás a következő azonosságra vezet:

$$(b-c)(\bar{a}-\bar{d}) + (c-a)(\bar{b}-\bar{d}) + (a-b)(\bar{c}-\bar{d}) + (a-d)(\bar{b}-\bar{c}) + (b-d)(\bar{c}-\bar{a}) + (c-d)(\bar{a}-\bar{b}) = 0.$$

Tehát, ha a

$$(b-c)(\bar{a}-\bar{d}),\quad (c-a)(\bar{b}-\bar{d}),\quad (a-b)(\bar{c}-\bar{d}),$$
$$(a-d)(\bar{b}-\bar{c}),\quad (b-d)(\bar{c}-\bar{a}),\quad (c-d)(\bar{a}-\bar{b}),$$

szorzatok közül öt valós szám, akkor a hatodik is ilyen. Ez az előbbi §-ban mondottak értelmében az α) tételt adja. Ha pedig a felsorolt szorzatok közül öt tiszta képzetes szám, akkor a hatodik is az. Ez az előbbi §-ban foglaltak értelmében a β) tételt adja.

KILENCEDIK FEJEZET.

VÉGTELEN SOROK.

Az összetartás fogalma.

318. §. Ha a

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n = u_1 + u_2 + u_3 + \cdots + u_n + \cdots$$

végtelen sornak

$$s_1 = u_1, \quad s_2 = u_1 + u_2, \quad s_3 = u_1 + u_2 + u_3, \ldots$$

részletösszegei az S számhoz, mint határértékhez közelednek, akkor a végtelen sort *összetartónak* vagy *konvergensnek* mondjuk és S-et a sor *összegének* nevezzük. Minden más esetben a végtelen sort *széttartónak* vagy *divergensnek* mondjuk.

Ha a részletösszegek limesze végtelen és az

$$\frac{s_1}{|s_1|}, \quad \frac{s_2}{|s_2|}, \ldots, \quad \frac{s_n}{|s_n|}, \ldots$$

hányadosok (vagyis a részletösszegek iránytényezői) szabályos számsorozatot alkotnak, akkor a sorról azt mondjuk, hogy *szorosabb értelemben széttartó*, vagy más szóval, hogy összege *meghatározott irányú* és *értelmű végtelen*. Minden más esetben a széttartó sort *ingadozónak* vagy *oszcillálónak* mondjuk.

Valós tagú soroknál szorosabban vett széttartás csak kétféleképpen lehetséges. Az egyik esetben a részletösszegek a pozitiv számokon át közelednek a végtelenhez; ekkor a sor összege $+\infty$. A másik esetben a részletösszegek a negativ számokon át közelednek a végtelenhez; ekkor a sor összege $-\infty$. Ha valamely valós tagú sor részletösszegeinek limesze végtelen, de a részletösszegek között végtelen sok pozitiv és végtelen sok negativ található, akkor az

$$\frac{s_1}{|s_1|}, \quad \frac{s_2}{|s_2|}, \ldots$$

alakú hányadosok nem alkotnak szabályos számsorozatot. Ekkor tehát a sor nem lehet szorosabb értelemben széttartó.

Néha a végtelen sort «zérusadik» taggal kezdjük, azaz így írjuk:

$$\sum_{n=0}^{\infty} u_n = u_0 + u_1 + u_2 + \cdots + u_n + \cdots.$$

319. §. Ha

$$u_1 + u_2 + u_3 + u_4 + \cdots$$

összetartó sor, akkor az

$$s_1,\ s_2,\ s_3,\ s_4, \ldots$$

sorozatnak és a

$$0,\ s_1,\ s_2,\ s_3, \ldots$$

sorozatnak ugyanaz a limesze van, tehát

$$s_1 - 0 = u_1,\quad s_2 - s_1 = u_2,\quad s_3 - s_2 = u_3,\quad s_4 - s_3 = u_4, \ldots$$

limesze zérus. Azaz *valamely végtelen sor csak akkor lehet összetartó, ha tagjainak limesze zérus.*

De ez a szükséges feltétel korántsem elegendő az összetartás biztosítására. Erről meggyőzhet a következő példa:

$$\begin{aligned} &1 \\ &+\frac{1}{2}+\frac{1}{2} \\ &+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+\frac{1}{4} \\ &+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8} \\ &+\cdots, \end{aligned}$$

hol minden tag 2 valamely hatványának reciprok értéke, de úgy, hogy $\frac{1}{2}$ kétszer, $\frac{1}{4}$ négyszer stb. fordul elő. Itt a tagok limesze zérus, a sor mégsem összetartó. Részletösszegei ugyanis ezek:

$$\begin{aligned} &1, \\ &1\tfrac{1}{2},\ 2, \\ &2\tfrac{1}{4},\ 2\tfrac{1}{2},\ 2\tfrac{3}{4},\ 3, \\ &3\tfrac{1}{8},\ 3\tfrac{1}{4},\ 3\tfrac{3}{8},\ 3\tfrac{1}{2},\ 3\tfrac{5}{8},\ 3\tfrac{3}{4},\ 3\tfrac{7}{8},\ 4, \\ &\cdots \end{aligned}$$

Ha eléggé sok tagot adunk össze, bármely n egész számnál nagyobb részletösszeget kapunk.

320. §. Az

$$u_1 + u_2 + \cdots + u_n + u_{n+1} + \cdots$$

sor első n tagja után következő k tagból alkotott

$$u_{n+1} + u_{n+2} + \cdots + u_{n+k}$$

összeget az $R_{n\,k}$ *maradékösszegnek* nevezzük. Ez nem egyéb mint az

$$s_n = u_1 + u_2 + \cdots + u_n,\quad s_{n+k} = u_1 + u_2 + \cdots + u_n + u_{n+1} + \cdots + u_{n+k}$$

részletösszegekből alkotott $s_{n+k} - s_n$ különbség.

A maradékösszeg fogalmának segítségével igen célszerű alak-

ban fejezhetjük ki az összetartás szükséges és elégséges föltételét. Az összetartás értelmezése szerint ugyanis a végtelen sor akkor és csak akkor összetartó, ha a részletösszegekből alkotott

$$s_1, s_2, \ldots, s_n, \ldots$$

sorozatnak véges limesze van. Ez pedig akkor és csak akkor következik be, ha a részletösszegek szabályos számsorozatot alkotnak, vagyis ha bármely δ pozitiv számhoz található oly N, hogy valahányszor $n>N$, mindannyiszor a k minden pozitiv egész számú értékeire nézve

$$|s_{n+k} - s_n| < \delta.$$

Ámde $s_{n+k}-s_n=R_{nk}$, tehát a mondottakat így fejezhetjük ki:

Az

$$u_1 + u_2 + \cdots + u_n + \cdots$$

sor akkor és csak akkor összetartó, ha bármely δ pozitiv számhoz található oly N, hogy n-nek a N-nél nagyobb értékeire és k-nak minden pozitiv egész értékére nézve

$$|R_{nk}| < \delta.$$

Mivel R_{nk} a sor első n tagját nem tartalmazza, azért véges számú tagnak megváltoztatása a sor összetartó vagy széttartó voltán nem változtat.

321. §. *Ha*

$$p_1, p_2, \ldots, p_n, \ldots$$

monoton fogyó pozitiv számok és $\lim p_n = 0$, *akkor a váltakozó előjelű tagokból alkotott*

$$p_1 - p_2 + p_3 - p_4 + \cdots$$

sor összetartó.

Ilyen sor pl. a következő:

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots + (-1)^{n-1}\frac{1}{n} + \cdots.$$

Ennek az úgynevezett *váltakozó előjelű harmonikus sornak* páros indexű részletösszegei:

$$s_2 = 1 - \frac{1}{2},$$

$$s_4 = \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) = 1 - \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) - \frac{1}{4},$$

$$s_6 = \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{6}\right) = 1 - \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) - \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{5}\right) - \frac{1}{6},$$

$$\ldots.$$

Ezek monoton növekednek és mindegyik kisebb mint $u_1 = 1$. A páratlan indexű részletösszegek:

$$s_1 = 1,$$

$$s_3 = 1 - \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) = \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \frac{1}{3},$$

$$s_5 = 1 - \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) - \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{5}\right) = \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + \frac{1}{5},$$

....

Ezek monoton fogynak és mindegyik nagyobb a zérusnál. Tehát

$$s_1, s_3, \ldots, s_{2n-1}, \ldots \qquad A)$$

$$s_2, s_4, \ldots, s_{2n}, \ldots \qquad B)$$

szabályos számsorozatok. Továbbá

$$s_1 - s_2 = 1, \quad s_3 - s_4 = \frac{1}{3}, \quad s_5 - s_6 = \frac{1}{5}, \ldots$$

elemi sorozat. Ennélfogva az *A)* és *B)* egyesítéséből keletkező

$$s_1, s_2, s_3, s_4, \ldots$$

sorozat is szabályos. Vagyis a vizsgált sor valóban összetartó.

A sor S összege az *A)* és *B)* *monoton* sorozatok közös limesze. Ennélfogva

$$s_{2n-1} > s_{2n+1} > S > s_{2n}.$$

Tehát $s_{2n+1} - S$ pozitiv, azaz olyan előjelű szám, mint

$$s_{2n+1} = 1 - \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{2n+1}$$

utolsó tagja és kisebb mint

$$s_{2n+1} - s_{2n} = \frac{1}{2n+1},$$

$s_{2n} - S$ pedig olyan előjelű, mint

$$s_{2n} = 1 - \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{2n+1} - \frac{1}{2n}$$

utolsó tagja és abszolut értékre nagyobb mint

$$s_{2n-1} - s_{2n} = \frac{1}{2n}.$$

Vagyis m-nek akár páratlan, akár páros értékeinél

$$s_m - S$$

előjele megegyezik s_m utolsó tagjának előjelével és abszolut értékére nézve kisebb, mint s_m utolsó tagja. Pl. az

$$s_3 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \frac{5}{6}$$

részletösszeg nagyobb mint S; az S-től való különbsége abszolut értékére nézve kisebb mint $\frac{1}{3}$.

A váltakozó előjelű harmonikus sorról mondottak lényeges változtatás nélkül átvihetők bármely oly

$$p_1 - p_2 + p_3 - p_4 + \cdots$$

váltakozó előjelű sorra, melyben a p-k monoton fogyó elemi sorozatot alkotnak.

322. §. Ha

$$u_1 + u_2 + \cdots + u_n + \cdots \qquad 1)$$

részletösszegei

$$s_1, s_2, \ldots, s_n, \ldots,$$

akkor

$$au_1 + au_2 + \cdots + au_n + \cdots \qquad 2)$$

részletösszegei

$$as_1, as_2, \ldots, as_n, \ldots.$$

Tehát, *ha az* 1) *alatti sor összetartó és összege* S, *akkor a* 2) *alatti sor szintén összetartó és összege* aS.

Hasonlóképpen:

Ha $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ *és* $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ *összetartó sorok és összegük* S, *illetve* S', *akkor*

$$\sum_{n=1}^{\infty}(u_n+v_n) \quad \text{és} \quad \sum_{n=1}^{\infty}(u_n-v_n) \qquad 3)$$

szintén összetartó sorok és összegük $S+S'$, *illetve* $S-S'$.

Továbbá:

Ha $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ *összetartó és összege* S, *akkor az első* m *tagnak elhagyása után megmaradó*

$$u_{m+1}+u_{m+2}+u_{m+3}+\cdots \qquad 4)$$

végtelen sor szintén összetartó és összege

$$S-(u_1+u_2+\cdots+u_m).$$

Ugyanis a 4) alatti sor részletösszegei:

$$\sigma_1 = u_{m+1} = s_{m+1} - s_m,$$
$$\sigma_2 = u_{m+1} + u_{m+2} = s_{m+2} - s_m,$$
$$\cdots$$
$$\sigma_n = u_{m+1} + u_{m+2} + \cdots + u_{m+n} = s_{m+n} - s_m$$
$$\cdots$$

Ha itt n minden határon túl növekedik, s_{m+n} limesze S. Ennélfogva

$$\lim \sigma_n = S - s_m.$$

Hasonlóképpen:

Ha $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ *összetartó és összege* S, *akkor a sor elé véges számú új tagot téve, a keletkező*

$$a_1+a_2+\cdots+a_m+u_1+u_2+\cdots \qquad 5)$$

sor szintén összetartó és összege

$$a_1+a_2+\cdots+a_m+S.$$

Föltételes és föltétlen összetartás.

323. §. Ha valamely összetartó végtelen sorban megváltoztatjuk a tagok sorrendjét, akkor az átrendezés esetleg széttartó vagy olyan összetartó sort adhat, melynek összege nem ugyanaz, mint az eredeti soré. Legyen pl. adva a következő sor:

$$\begin{aligned}&1-1\\&+\frac{1}{2}-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\\&+\frac{1}{4}-\frac{1}{4}+\frac{1}{4}-\frac{1}{4}+\frac{1}{4}-\frac{1}{4}+\frac{1}{4}-\frac{1}{4}\\&+\cdots,\end{aligned}$$

hol $\frac{1}{2^m}$ és $-\frac{1}{2^m}$ éppen 2^m-szer szerepel mint tag. A tagok adott sorrendjénél a részletösszegek ezek:

$$\begin{aligned}&1,\ 0,\\&\frac{1}{2},\ 0,\ \frac{1}{2},\ 0,\\&\frac{1}{4},\ 0,\ \frac{1}{4},\ 0,\ \frac{1}{4},\ 0,\ \frac{1}{4},\ 0,\\&\cdots.\end{aligned}$$

A talált részletösszegek limesze zérus. Tehát a sor összetartó és összege zérus.

Ha a tagokat így rendezzük:

$$\begin{aligned}&1\\&+\frac{1}{2}-1+\frac{1}{2}\\&+\frac{1}{4}-\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}-\frac{1}{2}+\frac{1}{4}\\&+\frac{1}{8}-\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}-\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}-\frac{1}{4}+\frac{1}{8}\\&+\cdots,\end{aligned}$$

akkor a részletösszegek ezek:

$$\begin{aligned}&1,\\&1+\frac{1}{2},\ 1-\frac{1}{2},\ 1,\\&1+\frac{1}{4},\ 1-\frac{1}{4},\ 1,\ 1+\frac{1}{4},\ 1-\frac{1}{4},\ 1,\\&1+\frac{1}{8},\ 1-\frac{1}{8},\ 1,\ 1+\frac{1}{8},\ 1-\frac{1}{8},\ 1,\ 1+\frac{1}{8},\ 1-\frac{1}{8},\ 1,\\&\cdots.\end{aligned}$$

E részletösszegek limesze 1. Tehát a sor az új elrendezésben összetartó, de összege többé nem 0, hanem 1.

A következő elrendezés széttartó sort ad:

$$
\begin{aligned}
&1\\
&+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-1\\
&+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}\\
&+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\\
&+\frac{1}{16}+\frac{1}{16}+\cdots+\frac{1}{16}\\
&+\frac{1}{32}+\frac{1}{32}+\cdots+\frac{1}{32}-\frac{1}{4}-\frac{1}{4}-\frac{1}{4}-\frac{1}{4}\\
&+\frac{1}{64}+\frac{1}{64}+\cdots+\frac{1}{64}\\
&+\cdots.
\end{aligned}
$$

Valóban az első részletösszegek:

$$
\begin{aligned}
&1,\\
&1\tfrac{1}{2},\ 2,\ 1,\\
&1\tfrac{1}{4},\ 1\tfrac{1}{2},\ 1\tfrac{3}{4},\ 2;
\end{aligned}
$$

ezek közül a legkisebb 1, a legnagyobb 2. A legközelebbi részletösszegek

$$
\begin{aligned}
&2\tfrac{1}{8},\ 2\tfrac{1}{4},\ 2\tfrac{3}{8},\ \ldots,\ 3,\ 2\tfrac{1}{2},\ 2,\\
&2\tfrac{1}{16},\ 2\tfrac{1}{8},\ 2\tfrac{3}{16},\ \ldots,\ 3;
\end{aligned}
$$

ezek közül a legkisebb 2, a legnagyobb 3. Azután 3 és 4 közé eső részletösszegeket kapunk. S. í. t.

324. §. Ha valamely összetartó végtelen sor a tagok minden elrendezésénél összetartó és összege független a tagok sorrendjétől, akkor *föltétlenül összetartónak*, bármely más esetben csak *föltételesen összetartónak* mondjuk.

Ha az

$$u_1+u_2+\cdots+u_n+\cdots \qquad A)$$

végtelen sor tagjainak abszolut értékeiből alkotott sor összetartó, akkor az eredeti sor föltétlenül összetartó.

Vagyis, ha

$$|u_1|+|u_2|+\cdots+|u_n|+\cdots \qquad B)$$

összetartó, akkor *A)* is összetartó, továbbá minden oly

$$v_1+v_2+v_3+\cdots+v_n+\cdots \qquad C)$$

sor, mely *A)*-tól csak a tagok sorrendjében különbözik, szintén összetartó és *A)*-val egyenlő összegű.

Az *A)* sor összetartása nyilvánvaló. Legyen ugyanis rövidség kedvéért

$$R_{n\,k} = u_{n+1} + u_{n+2} + \cdots + u_{n+k}$$
$$\bar{R}_{n\,k} = |u_{n+1}| + |u_{n+2}| + \cdots + |u_{n+k}|.$$

A *B)* sor összetartása miatt a δ pozitiv szám bármely választása mellett n eléggé nagy értékeire nézve $\bar{R}_{n\,k} < \delta$. De akkor n ugyanazon értékeire nézve még inkább $|R_{n\,k}| < \delta$. Vagyis az *A)* sor valóban összetartó.

A) és *C)* összehasonlításánál legyen

$$s_n = u_1 + u_2 + \cdots + u_n, \quad S_n = v_1 + v_2 + \cdots + v_n.$$

A *B)* sor összetartása miatt a δ pozitiv szám bármely választása mellett találhatunk oly M egész számot, hogy k minden pozitiv egész számú értékénél

$$\bar{R}_{Mk} = |u_{M+1}| + \cdots + |u_{M+k}|$$

kisebb mint δ. Mivel a v-k sora az u-kétól csak a tagok sorrendjében különbözik, azért S_n minden tagja valamely u-val egyenlő. Továbbá az

$$S_1, S_2, \ldots$$

sorozatban előbb vagy utóbb oly S_N-hez jutunk, mely s_M-nek *minden* tagját tartalmazza és ezeken kívül más u-kat is. Az n-nek a N-nél nagyobb értékeire nézve $s_n - S_n$ abszolut értékét a következő módon becsülhetjük meg.

Az s_n és S_n közös tagjai az $s_n - S_n$ különbségből kiesnek. Tehát csak M-nél nagyobb indexű u-k maradnak meg + vagy — jellel. Legyen az $(s_n - S_n)$-ben megmaradó

$$u_a, u_b, \ldots, u_h$$

tagok indexei közül a legnagyobb $M+k$. Akkor

$$|s_n - S_n| \leqq |u_a| + \cdots + |u_h| \leqq \bar{R}_{M,k} < \delta.$$

A mondottak értelmében az

$$s_1 - S_1, \; s_2 - S_2, \ldots$$

különbségek elemi sorozatot alkotnak. Tehát

$$\lim s_n = \lim S_n.$$

Azaz *A)* összege egyszersmind a *C)* sornak is összege.

Pozitiv tagú sorok.

325. §. Pozitiv tagú sorok részletösszegei monoton növekedők. Ha felső határuk véges, akkor szabályos számsorozatot alkotnak.

Ekkor tehát a sor összetartó. A sor összege független a tagok sorrendjétől, mert pozitiv tagú sornál a tagok abszolut értékeiből alkotott sor azonos az adott sorral és ennélfogva a szóban forgó esetben összetartó. De ha a tagok abszolut értékei összetartó sort alkotnak, akkor a vizsgált sor föltétlenül összetartó.

Ha a részletösszegek felső határa $+\infty$, vagyis a részletösszegek sorozata minden határon túl növekedik, akkor a sor összege $+\infty$; más szóval ebben az esetben a sor szorosabb értelemben széttartó.

Ez a két eset kimerít minden eshetőséget; tehát pozitiv tagoknál sem ingadozás, sem föltételes összetartás nem következhetik be.

Továbbá pozitiv tagú soroknál tagok *összevonásánál* sem a sornak összetartó vagy széttartó volta, sem a sornak összege nem változik meg.

Valóban, ha az

$$a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + \cdots$$

sorról pl. a következőre térünk át

$$(a_1+a_2) + (a_3+a_4+\cdots+a_7) + (a_8+\cdots+a_{19}) + \cdots,$$

akkor az eredeti sor részletösszegei:

$$s_1 = a_1, \quad s_2 = a_1 + a_2, \quad s_3 = a_1 + a_2 + a_3, \ldots,$$

az új soréi:

$$\sigma_1 = a_1 + a_2 = s_2$$
$$\sigma_2 = (a_1+a_2) + (a_3+a_4+\cdots+a_7) = s_7$$
$$\sigma_3 = (a_1+a_2) + (a_3+a_4+\cdots+a_7) + (a_8+\cdots+a_{19}) = s_{19}$$
$$\cdots.$$

Tehát a σ-k sorozata az s-ekéből bizonyos s-ek kihagyásával keletkezik.

Ha most már $\lim s_n$ valamely S számmal egyenlő, vagyis ha bármely δ pozitiv számhoz legfeljebb véges számú olyan s_n található, melyre nézve $|s_n - S|$ nem kisebb mint δ: akkor ez igaz a σ-kra nézve is. Ha pedig $\lim s_n = +\infty$, vagyis ha bármely ω pozitiv számhoz legfeljebb véges számú olyan s_n található, melyre nézve $s_n < \omega$: akkor ez igaz a σ-kra nézve is.

326. §. *Ha az*

$$a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n + \cdots$$

és

$$b_1 + b_2 + b_3 + \cdots + b_n + \cdots$$

pozitiv tagú sorokban legfeljebb véges számú kivétellel $a_n \leqq b_n$, *továbbá a b-kből alkotott sor összetartó: akkor az a-kból alkotott sor is összetartó.*

Ha n minden pozitiv egész számú értékénél $a_n \leqq b_n$, akkor

$$a_1 \leqq b_1, \quad a_1 + a_2 \leqq b_1 + b_2, \quad a_1 + a_2 + a_3 \leqq b_1 + b_2 + b_3, \ldots.$$

Itt a b-k sorának összetartása miatt a

$$b_1,\quad b_1+b_2,\quad b_1+b_2+b_3,\ldots$$

összegek kisebbek egy H felső korlátnál; tehát egyszersmind az

$$a_1,\quad a_1+a_2,\quad a_1+a_2+a_3,\ldots$$

összegek is kisebbek H-nál. Vagyis ekkor az a-k sora valóban összetartó.

Ha bizonyos véges számú n értékre nézve az $a_n \leqq b_n$ egyenlőtlenség nincs kielégítve, akkor ezeknek az n-eknek megfelelő a_n-eket a megfelelő b_n-ekkel pótoljuk. Az így nyert sor az éppen mondottak szerint összetartó. A bennünket tulajdonképpen érdeklő sor ettől csak véges számú tagban különbözik, tehát szintén összetartó.

A mondottakból közvetlenül világos a következő tétel helyessége is: *Ha az*

$$a_1+a_2+a_3+\cdots+a_n+\cdots$$

és

$$b_1+b_2+b_3+\cdots+b_n+\cdots$$

pozitiv tagú sorokban legfeljebb véges számú kivétellel $b_n \geqq a_n$, *továbbá az a-kból alkotott sor széttartó, akkor a b-kből alkotott sor is széttartó.*

327. §. *Ha az*

$$a_1+a_2+\cdots+a_n+\cdots \qquad 1)$$

és

$$b_1+b_2+\cdots+b_n+\cdots \qquad 2)$$

pozitiv tagú sorokban legfeljebb véges számú kivétellel

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \leqq \frac{b_{n+1}}{b_n},$$

továbbá a b-k sora összetartó, akkor az a-k sora is összetartó.

Ez legkönnyebben akkor látható be, ha az $\frac{a_{n+1}}{a_n} \leqq \frac{b_{n+1}}{b_n}$ egyenlőtlenség minden n pozitiv egész számra nézve igaz. Ha ugyanis rövidség kedveért $\lambda = \frac{a_n}{b_n}$, akkor a

$$\lambda a_1 \leqq b_1,\quad \frac{a_2}{a_1} \leqq \frac{b_2}{b_1},\quad \ldots,\quad \frac{a_n}{a_{n-1}} \leqq \frac{b_n}{b_{n-1}}$$

egyenlőtlenségekből az következik, hogy

$$\lambda a_n \leqq b_n.$$

Tehát az előbbi §-ban mondottak szerint a b-k sorának összetartása maga után vonja

$$\lambda a_1+\lambda a_2+\lambda a_3+\cdots \qquad 3)$$

összetartását is. Az 1) alatti sor a 3) alattiból úgy keletkezik, hogy ennek minden tagját megszorozzuk $\frac{1}{\lambda}$-val. Ez a szorzás az

összetartáson nem változtat (322. §.). Tehát az 1) alatti sor valóban összetartó.

Ha végre az $\frac{a_{n+1}}{a_n} \leqq \frac{b_{n+1}}{b_n}$ egyenlőtlenség bizonyos véges számú n értékre nézve nem érvényes, akkor mindenekelőtt meghatározzuk a legnagyobb ily kivételes n-et. Ha ez N, akkor az a-k sorából is, meg a b-k sorából az első N tagot elhagyjuk. Ez összetartási vizsgálatoknál meg van engedve, mert (322. §.) véges számú tag elhagyása a sor összetartásán vagy széttartásán nem változtat.

Az új sorok összehasonlításánál már nincs oly $\frac{a_{n+1}}{a_n}$, mely nagyobb a megfelelő $\frac{b_{n+1}}{b_n}$ hányadosánál. Tehát a b-k sorának összetartása valóban maga után vonja az a-k sorának összetartását.

328. §. (D'Alembert *kritériuma*). *Ha az*

$$a_1 + a_2 + \cdots + a_n + \cdots$$

pozitiv tagú sorban

$$\lim \frac{a_{n+1}}{a_n} < 1,$$

akkor a sor összetartó, ha ellenben

$$\lim \frac{a_{n+1}}{a_n} > 1,$$

akkor a sor széttartó, sőt

$$\lim a_n = +\infty.$$

A

$$\lim \frac{a_{n+1}}{a_n} < 1$$

esetben a sort olyan

$$1 + q + q^2 + \cdots + q^{n-1} + \cdots$$

geometriai haladvánnyal hasonlítjuk össze, melyben q úgy van választva, hogy

$$\lim \frac{a_{n+1}}{a_n} < q < 1.$$

Ez a geometriai haladvány összetartó, továbbá n-nek egy bizonyos értékétől kezdve $\frac{a_{n+1}}{a_n}$ kisebb mint q: tehát az előbbi § értelmében az a-k sora szintén összetartó.

Ha ellenben

$$\lim \frac{a_{n+1}}{a_n} > 1,$$

akkor a tételnek már bebizonyított részét arra az

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_n + \cdots$$

sorra alkalmazzuk, melyben

$$\alpha_1 = \frac{1}{a_1}, \quad \alpha_2 = \frac{1}{a_2}, \ \ldots, \ \alpha_n = \frac{1}{a_n}, \ \ldots.$$

Itt

$$\lim \frac{\alpha_{n+1}}{\alpha_n} = \lim \frac{a_n}{a_{n+1}} < 1,$$

tehát az α-k sora összetartó. De akkor α_n limesze zérus és $a_n = \frac{1}{\alpha_n}$ limesze végtelen. Az a-k pozitivok lévén, valóban

$$\lim a_n = +\infty.$$

Példák. 1. Ha ϑ a 0 és 1 közé eső számot jelent, akkor a

$$\frac{\vartheta}{1-\vartheta} + \frac{\vartheta^2}{1-\vartheta^2} + \cdots + \frac{\vartheta^n}{1-\vartheta^n} + \cdots$$

sor tagjai pozitivok. Két egymás után következő tagra nézve

$$\frac{\vartheta^{n+1}}{1-\vartheta^{n+1}} : \frac{\vartheta^n}{1-\vartheta^n} = \vartheta \frac{1-\vartheta^n}{1-\vartheta^{n+1}}.$$

Itt $\lim \vartheta^n = \lim \vartheta^{n+1} = 0$, tehát

$$\lim \vartheta \frac{1-\vartheta^n}{1-\vartheta^{n+1}} = \vartheta < 1.$$

Ennélfogva a vizsgált sor összetartó.

2. Ha az előbbi sorban áttérünk a tagok reciprok értékeire, akkor az új sorra nézve

$$\lim \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{1}{\vartheta} > 1.$$

Tehát ekkor

$$\lim a_n = +\infty$$

és az új sor ennélfogva széttartó.

329. §. Az

$$1 + \frac{1}{2^\mu} + \frac{1}{3^\mu} + \cdots + \frac{1}{n^\mu} + \cdots \qquad 1)$$

alakú sorokra, hol μ állandó valós kitevő, D'Alembert kriteriuma nem alkalmazható, mert

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{1}{(n+1)^\mu} : \frac{1}{n^\mu} = \frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^\mu}$$

limesze 1. E sorok közül legnevezetesebb a $\mu=1$ esetnek megfelelő *harmonikus sor*, azaz

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} + \cdots.$$

Az 1) alatti sort a következővel pótolhatjuk:

$$1+\left(\frac{1}{2^\mu}+\frac{1}{3^\mu}\right)+\left(\frac{1}{4^\mu}+\frac{1}{5^\mu}+\frac{1}{6^\mu}+\frac{1}{7^\mu}\right)+\left(\frac{1}{8^\mu}+\cdots+\frac{1}{15^\mu}\right)+\cdots, \quad 2)$$

mert a tagok összevonása pozitiv tagú sor összegén nem változtat.

A $\mu \leqq 1$ esetben a 2) alatti sor széttartó. A sor tagjai ugyanis nagyobbak mint a következő soréi:

$$\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}\right)+\left(\frac{1}{16}+\cdots+\frac{1}{16}\right)+\cdots$$

E kisebbített tagú sor minden tagja $\frac{1}{2}$. Tehát elegendő számú tag összeadása tetszés szerint nagy részletösszeget ad. Azaz a kisebbített tagú sor széttartó. De akkor a 2) alatti sor és vele együtt az 1) alatti sor is széttartó.

A $\mu > 1$ esetben a 2) alatti sor összetartó. A sor tagjai ugyanis kisebbek, mint a következő soréi:

$$1+\left(\frac{1}{2^\mu}+\frac{1}{2^\mu}\right)+\left(\frac{1}{4^\mu}+\frac{1}{4^\mu}+\frac{1}{4^\mu}+\frac{1}{4^\mu}\right)+\cdots,$$

vagyis mint

$$1+\frac{1}{2^{\mu-1}}+\frac{1}{4^{\mu-1}}+\cdots$$

tagjai. A nagyobbított tagú sor nem egyéb, mint a

$$q=\frac{1}{2^{\mu-1}}$$

hányadossal alkotott geometriai haladvány. Minthogy a vizsgált esetben $q<1$, azért ez a geometriai haladvány összetartó. De akkor a 2) alatti és vele együtt az 1) alatti sor is összetartó.

Szóval: *A* $\sum \frac{1}{n^\mu}$ *sor széttartó, ha* $\mu \leqq 1$, *összetartó, ha* $\mu > 1$.

MÁSODIK RÉSZ

AZ EGYENES VONAL SÍKBELI, A SÍK ÉS AZ EGYENES VONAL TÉRBELI

ANALITIKUS GEOMETRIÁJA

TIZEDIK FEJEZET.

AZ EGYENES VONAL A SÍKBAN.

I. Az egyenes egyenlete és parameteres egyenletrendszere.

A vonalak osztályozása.

330. §. Az oly $F(x, y) = 0$ egyenletet, melynek baloldala az x és y koordináták n-edfokú racionális egész függvénye, (x-et és y-t tartalmazó) n-edfokú *algebrai* egyenletnek nevezzük.

Az oly görbének, mely egyvalamely parallelkoordinatarendszerre nézve n-edfokú algebrai egyenlettel jellemezhető, ez a tulajdonsága bármely más parallelkoordinatarendszerre nézve is megvan. Más szóval, *n-edfokú algebrai egyenlet a parallelkoordináták transzformálásánál megint n-edfokú algebrai egyenletbe megy át.*

A bebizonyításnál arra a két esetre szorítkozhatunk, melyekben vagy pusztán a kezdőpont eltolásáról, vagy pusztán a tengelyek irányának megváltoztatásáról van szó. Minden más esetben a transzformáció két oly lépésre bontható, melyek közül az egyiknél a tengelyek iránya, a másiknál a kezdőpont változatlan. Ha mindkét lépés n-edfokú algebrai egyenletet megint n-edfokú algebrai egyenletbe visz át, akkor a belőlük összetett transzformációnak is megvan ez a tulajdonsága.

A kezdőpont eltolásánál a kétféle koordináták között

$$x = \xi + a, \quad y = \eta + b$$

alakú kapcsolat van. Ha az $F(x, y) = 0$ egyenlet baloldala n-edfokú racionális egész függvény, azaz ha $F(x, y)$ véges számú oly

$$Cx^{\lambda}y^{\mu}$$

alakú tagnak összege, melyekben C puszta állandót jelent, λ és μ pedig oly nem negativ egész kitevők, hogy a legmagasabb fokú tagokban $\lambda+\mu=n$: akkor a transzformált egyenlet véges számú

$$C(\xi+a)^{\lambda}(\eta+b)^{\mu}$$

alakú tagnak összege. A kijelölt műveletek elvégzésénél

$$C(\xi+a)^{\lambda}(\eta+b)^{\mu} = C(\xi^{\lambda}+\cdots)(\eta^{\mu}+\cdots) = C\xi^{\lambda}\eta^{\mu}+\cdots,$$

hol a jobboldal ξ-nek és η-nak oly egész függvénye, melyben a ki nem írt tagok alacsonyabb mint $(\lambda+\mu)$-edfokúak. A transzformált egyenlet

baloldala tehát ξ és η racionális egész függvénye; benne magasabb mint n-edfokú tagok nem lépnek föl és az n-edfokú tagok együtthatói ugyanazok, mint az eredeti egyenletben.

Példa. Az

$$x^2 + 2xy + 5y^2 + 6x - 4y + 1 = 0$$

másodfokú egyenlet a kezdőpont eltolásánál a következőbe megy át:

$$(\xi+a)^2 + 2(\xi+a)(\eta+b) + 5(\eta+b)^2 + 6(\xi+a) - 4(\eta+b) + 1 = 0.$$

Ennek rendezett alakja:

$$\xi^2 + 2\xi\eta + 5\eta^2 + \cdots = 0,$$

hol a ki nem írt tagok alacsonyabb mint másodfokúak.

331. §. Ha csak a tengelyek irányát változtatjuk meg, akkor a transzformáció képletei

$$x = a_{11}\xi + a_{12}\eta,$$
$$y = a_{21}\xi + a_{22}\eta$$

alakúak, holy az a-k állandók.

Ha $F(x, y) = 0$ baloldala az x és y koordináták n-edfokú egész függvénye, akkor a

$$Cx^\lambda y^\mu$$

tagot a transzformáció a következő kifejezésbe viszi át:

$$C(a_{11}\xi+a_{12}\eta)^\lambda (a_{21}\xi+a_{22}\eta)^\mu.$$

Ennek kifejtésénél és rendezésénél oly racionális egész függvényt kapunk, melyben minden tag pontosan $(\lambda+\mu)$-edfokú. Tehát a transzformált egyenlet megint algebrai egyenlet. Benne magasabb mint n-edfokú tagok nem lépnek föl; n-edfokú tagok ellenben vannak benne és ezek az eredeti egyenlet pontosan n-edfokú tagjainak transzformálásából keletkeznek.

Példa. Legyen az adott egyenlet

$$x^2 - y^2 + 6x - 4y + 5 = 0.$$

A transzformáció képletei legyenek

$$x = \frac{\xi+\eta}{\sqrt{2}}, \quad y = \frac{\xi-\eta}{\sqrt{2}}.$$

Az eredeti egyenlet pontosan másodfokú része a transzformálásnál a következőbe megy át

$$\frac{(\xi+\eta)^2}{2} - \frac{(\xi-\eta)^2}{2} = 2\xi\eta.$$

Ez szolgáltatja az új egyenlet pontosan másodfokú részét.

Az eredeti egyenlet pontosan elsőfokú részéből kapjuk az új egyenlet pontosan elsőfokú részét. Ez a következő:

$$6\frac{\xi+\eta}{\sqrt{2}} - 4\frac{\xi-\eta}{\sqrt{2}} = \frac{2\xi+10\eta}{\sqrt{2}}.$$

Ha még tekintetbe vesszük, hogy abszolut tag változatlan marad, akkor a transzformált egyenletet így írhatjuk:

$$2\xi\eta + \frac{2\xi + 10\eta}{\sqrt{2}} + 5 = 0.$$

332. §. Az oly görbét, mely valamely parallelkoordinatarendszerre nézve n-edfokú algebrai egyenlettel jellemezhető, *n-edrendű algebrai görbének* mondjuk. Ha valamely görbe nem jellemezhető algebrai egyenlettel, akkor *transzcendens görbének* mondjuk. Annak eldöntésénél, hogy valamely görbe algebrai-e vagy sem, vagy hogy valamely algebrai görbe hányadrendű, a mondottak értelmében a koordinatarendszer választása nem játszik szerepet.

A legegyszerűbb vonalak azok, melyek elsőfokú egyenletekkel jellemezhetők. Ezek az egyenes vonalak. Velük akarunk most részletesebben foglalkozni.

Az egyenes HESSE-féle normálegyenlete.

333. §. Az egyenes vonal részletesebb tárgyalását annak az ismeretes ténynek újból való bebizonyításával kezdjük, hogy *minden egyenesnek elsőfokú egyenlet felel meg és fordítva minden*

$$Ax + By + C = 0$$

elsőfokú egyenlet egyenest jellemez. A bebizonyításnál derékszögű koordinatákra szorítkozhatunk. Mert, ha az egyenest derékszögű koordinaták esetében elsőfokú egyenlet jellemzi, akkor ennek a vonalnak bármely ferdeszögű rendszerre nézve is elsőfokú egyenlete van. Fordítva, ha tudjuk, hogy derékszögű koordinaták esetében minden elsőfokú egyenlet egyenest jellemez, akkor ez ferdeszögű koordinaták esetében is könnyen belátható. A ferdeszögű rendszerről ugyanis áttérhetünk derékszögűre. Ennél a transzformálásnál az elsőfokú egyenlet megint elsőfokúba megy át, tehát olyanba, melyről már tudjuk, hogy egyenest ábrázol.

Hol az ellenkező nincs kimondva, tárgyalásaink mindenütt derékszögű koordinatákra vonatkoznak. Különösen áll ez minden oly tárgyalásról, melyben szögek szerepelnek.

Egynémely meggondolás és eredmény természetesen ferdeszögű koordinaták esetében is igaz. Valahányszor erre súlyt helyezünk, ezt a körülményt kiemeljük.

334. §. Az e egyenes egyenletének levezetésénél az OXY koordinatarendszeren kívül (109. ábra), melyre e-t vonatkoztatni akarjuk, átmenetileg oly $O\Xi H$ rendszert is használunk, melynek első tengelye merőleges e-re. Erre a rendszerre nézve e egyenlete

$$\xi - p = 0,$$

hol $p = OQ$ az e-nek O-tól való merőleges távolsága.

Az OXY-ra való áttérésnél

$$\begin{aligned} x &= \xi\cos\alpha - \eta\sin\alpha, \\ y &= \xi\sin\alpha + \eta\cos\alpha, \end{aligned} \qquad 1)$$

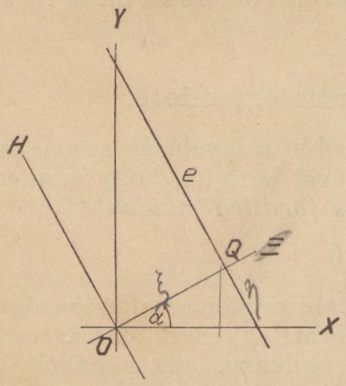
hol α azt a szöget jelenti, melyet $O\Xi$ az OX tengellyel bezár. Ha fordítva a ξ és η koordinatákat, mint x és y függvényeit fejezzük ki, akkor 1) alatt a kétféle koordináták szerepet cserélnek és α előjelét ellenkezőre kell változtatnunk. Ennélfogva

$$\xi = x \cos \alpha + y \sin \alpha. \qquad 2)$$

Tehát az egyenesnek $\xi - p = 0$ egyenlete az OXY rendszerre való áttérésnél a következőbe megy át:

$$x \cos \alpha + y \sin \alpha - p = 0.$$

Ezt a valóban elsőfokú egyenletet az egyenes Hesse-*féle normálegyenletének* nevezzük. Benne p az egyenes O-tól való távolságának puszta hosszúsága; tehát $p \geqq 0$. Továbbá α az a szög, melyet OQ az OX-szel bezár.



109. ábra.

Ha e nem megy keresztül O-n, akkor OQ-n a haladás pozitiv értelmét O-tól e-felé menőnek választjuk. Ekkor tehát α értéke ugyan végtelen sokféleképpen állapítható meg, de a különböző értékek egymástól csak 2π többeseiben különböznek, vagyis α trigonometriai függvényeit az egyenes egyértelműen meghatározza. Szóval ekkor az egyenesnek csak egy Hesse-féle normálegyenlete van.

Ha ellenben az O-n keresztül húzott e egyenessel van dolgunk, akkor ennek két Hesse-féle normálegyenlete van, mert az O-ból e-re emelt merőlegesen a haladás pozitiv értelmének megállapítása tetszésünkre van bízva. A két lehetséges megállapodásnak megfelelő Hesse-féle normálegyenletek baloldalai egymástól csak előjelben különböznek.

335. §. Fordítva: bármely

$$Ax + By + C = 0 \qquad 1)$$

elsőfokú egyenlet egyenest jellemez. (Itt A, B, C valós együtthatók, továbbá A és B közül legalább az egyik nem zérus.)

Ha

$$A^2 + B^2 = 1 \quad \text{és} \quad C \leqq 0, \qquad 2)$$

akkor mindig található oly α szög és oly p nem negativ szám, hogy

$$A = \cos \alpha, \quad B = \sin \alpha, \quad C = -p.$$

Vagyis ekkor az 1) alatti egyenlet valamely egyenesnek éppen Hesse-féle normálegyenlete.

Ha a 2) alatti feltételek nem teljesülnek, akkor az 1) alatti egyenlet nem lehet Hesse-féle normálegyenlet, de még akkor is egyenest jellemez. Az egyenlet által jellemzett vonal ugyanis nem változik meg, ha az egyenlet baloldalát valamely (a zérustól külön-

böző) λ számmal megszorozzuk. Tehát az egyenlet akkor is egyenest jellemez, ha nem HESSE-féle normálegyenlet, de alkalmas λ tényezővel való szorzással ilyenbe átvihető. Ez pedig mindig lehetséges, ha λ-t úgy választjuk, hogy

$$\lambda^2(A^2+B^2)=1 \quad \text{és} \quad \lambda C \leqq 0.$$

Az első feltételből

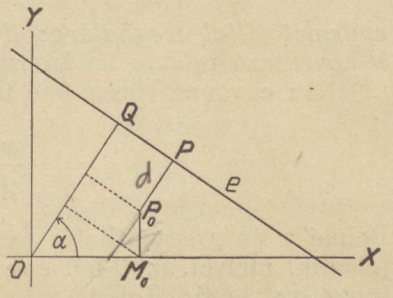
$$\lambda = \frac{1}{\sqrt{A^2+B^2}}.$$

Ha C a zérustól különböző értékű, akkor a második föltétel értelmében a λ képletében szereplő négyzetgyök C-vel ellenkező előjelűnek választandó. A $C=0$ esetben a négyzetgyök előjele szabadon választható. Ez onnan van, mert ekkor az O-n keresztül menő egyenessel van dolgunk, ennek pedig két HESSE-féle normálegyenlete van.

Az egyenesre vonatkozó feladatok.

336. §. *Az egyenesnek valamely $P_0=(x_0, y_0)$ ponttól való merőleges távolságát úgy kapjuk meg, hogy az egyenes* HESSE-*féle normálegyenletének baloldalába behelyettesítjük P_0 koordinátáit és az így nyert szám előjelét ellenkezőre változtatjuk.*

Jelöljük (110. ábra) e-nek a P_0 ponttól való P_0P távolságát d-vel és tulajdonítsunk ennek a távolságnak pozitiv vagy negativ előjelet aszerint, hogy P_0P értelme megegyezik az O-ból e-re emelt OQ merőleges pozitiv értelmével vagy sem.



110. ábra.

A HESSE-féle normálegyenletben szereplő $p=OQ$ nem egyéb, mint az OP vonaldarabnak az OQ egyenesen való vetülete; tehát p egyenlő az OM_0P_0P törött vonal

$$OM_0,\ M_0P_0,\ P_0P$$

részeinek vetületeiből alkotott összeggel. E vetületek mérőszámai

$$OM_0\cos\alpha = x_0\cos\alpha, \quad M_0P_0\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right) = y_0\sin\alpha, \quad d.$$

Ennélfogva

$$p = x_0\cos\alpha + y_0\sin\alpha + d,$$

azaz valóban

$$d = -(x_0\cos\alpha + y_0\sin\alpha - p).$$

Ha e nem megy keresztül a kezdőponton, akkor d pozitiv vagy negativ aszerint, hogy P_0 az e-nek ugyanazon oldalán van mint O, vagy pedig e másik oldalán.

Példa. *Meghatározandó a $P_0=(3, 4)$ pontnak és a*

$$12x + 5y - 7 = 0$$

egyenesnek egymástól való merőleges távolsága.

Az egyenes HESSE-féle normálegyenletét úgy kapjuk meg (335 §), hogy az egyenes adott egyenletét megszorozzuk a

$$\lambda = \frac{1}{\sqrt{A^2+B^2}} = \frac{1}{\sqrt{12^2+5^2}} = \frac{1}{13}$$

tényezővel. Itt λ pozitiv, mert $C=-7$ negativ szám. Az adott egyenes HESSE-féle normálegyenlete tehát

$$\frac{12x+5y-7}{13} = 0.$$

Innen

$$d = -\frac{12.3+5.4-7}{13} = -\frac{49}{13}.$$

A negativ előjel arra figyelmeztet, hogy P_0 és O az egyenesnek két különböző oldalán vannak.

337. §. *Az*

$$Ax + By + C = 0$$

egyenlet által meghatározott egyenes normálisának α irányszögét a következő módon határozzuk meg.

Az egyenes HESSE-féle normálegyenlete

$$\frac{Ax+By+C}{\sqrt{A^2+B^2}} = 0.$$

Benne x és y együtthatói annak az α szögnek cosinusát és sinusát jelentik, melyet az O-ból e-re bocsátott normális (merőleges) az OX tengellyel bezár. Tehát

$$\cos\alpha = \frac{A}{\sqrt{A^2+B^2}}, \quad \sin\alpha = \frac{B}{\sqrt{A^2+B^2}}.$$

338. §. *Az*

$$Ax + By + C = 0, \quad A'x + B'y + C' = 0$$

egyenesek által bezárt ϑ szög meghatározásánál (111. ábra) mindegyik egyenesen bizonyos módon megállapítjuk a haladás pozitiv értelmét. A szög szárai a két egyenesnek a metszésponttól pozitiv értelemben eső felei. Az egyeneseken a haladás pozitiv értelmét úgy állapíthatjuk meg, hogy

$$\vartheta = \alpha' - \alpha$$

legyen, hol α' és α a normálisok irányszögei. Ekkor

$$\cos\vartheta = \cos\alpha\cos\alpha' + \sin\alpha\sin\alpha',$$
$$\sin\vartheta = \cos\alpha\sin\alpha' - \sin\alpha\cos\alpha'.$$

Az előbbi §-ból tudjuk, hogy

$$\cos\alpha = \frac{A}{\sqrt{A^2+B^2}}, \quad \cos\alpha' = \frac{A'}{\sqrt{A'^2+B'^2}},$$

$$\sin\alpha = \frac{B}{\sqrt{A^2+B^2}}, \quad \sin\alpha' = \frac{B'}{\sqrt{A'^2+B'^2}}.$$

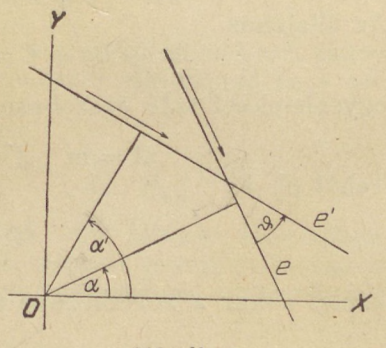
Ennélfogva

$$\cos\vartheta = \frac{AA'+BB'}{\sqrt{A^2+B^2}\sqrt{A'^2+B'^2}}, \quad \sin\vartheta = \frac{AB'-BA'}{\sqrt{A^2+B^2}\sqrt{A'^2+B'^2}} \qquad 1)$$

és innen

$$\operatorname{tg}\vartheta = \frac{AB'-BA'}{AA'+BB'}. \qquad 2)$$

A $\cos\vartheta$ és $\sin\vartheta$ képleteiben a négyzetgyökök előjelei ugyanazok, mint az egyenesek Hesse-féle normálegyenleteinek meghatározásánál. De ez csak addig van így, míg az egyeneseken a haladás pozitiv értelmét úgy állapítjuk meg, hogy $\vartheta = \alpha' - \alpha$. Ha valamelyik egyenesen a haladás pozitiv értelmét ellenkezőre változtatjuk, akkor ϑ értéke π-vel megváltozik és ennélfogva $\cos\vartheta$ és $\sin\vartheta$ előjele ellenkezővé válik. Ezt az előjelváltoztatást valamelyik négyzetgyök előjelének megváltoztatásával érhetjük el. A talált képletek tehát a négyzetgyökök előjelének bármely választásánál helyesek; a különböző előjelek a pozitiv értelmek különböző megállapításának felelnek meg. A $\cos\vartheta$ és a $\sin\vartheta$ képleteiben természetesen a négyzetgyökök egyenlően választandók, úgy hogy $\operatorname{tg}\vartheta$-ra a választás nem foly be.



111. ábra.

339. §. Az

$$Ax + By + C = 0, \quad A'x + B'y + C' = 0$$

egyenletek által jellemzett e és e' egyenesek ϑ hajlásszögére levezetett képletek tulajdonképpen az O-ból e-re és e'-re bocsátott *merőlegesek* hajlásszögére vonatkoztak. E szög az $e \parallel e'$ esetben 0 vagy π, vagy ezektől az értékektől csak 2π valamely többesében különbözik. Azért párhuzamosak hajlásszögén a π valamely páros vagy páratlan többesét értjük aszerint, hogy a két egyenesen a haladás pozitiv értelmét hogyan állapítjuk meg. A párhuzamosság tehát akkor következik be, ha

$$\sin\vartheta = \frac{AB'-BA'}{\sqrt{A^2+B^2}\sqrt{A'^2+B'^2}}$$

eltünik. Eszerint a párhuzamosság föltétele:

$$AB' - BA' = 0$$

vagy másképpen írva:

$$A : B = A' : B'.$$

Merőleges egyenesekre és csak ezekre nézve

$$\cos\vartheta = \frac{AA' + BB'}{\sqrt{A^2+B^2}\sqrt{A'^2+B'^2}}$$

eltűnik. A merőlegesség feltétele tehát

$$AA' + BB' = 0,$$

vagy másképpen írva:

$$A : B = B' : -A'.$$

340. §. Ha e és e' egyenletei

$$y = mx + b, \quad y = m'x + b',$$

akkor ezeket így is írhatjuk:

$$mx - y + b = 0, \quad m'x - y + b' = 0.$$

Az általános

$$Ax + By + C = 0, \quad A'x + B'y + C' = 0$$

egyenletekkel való összehasonlításnál azt találjuk, hogy

$$A = m, \quad A' = m', \quad B = B' = -1.$$

Tehát pl. a

$$\operatorname{tg}\vartheta = \frac{AB' - BA'}{AA' + BB'}$$

képlet ekkor a következőbe megy át:

$$\operatorname{tg}\vartheta = \frac{m' - m}{1 + mm'}.$$

A párhuzamosság akkor következik be, ha $\operatorname{tg}\vartheta$ eltűnik, azaz

$$m' = m.$$

Merőlegesség akkor következik be, ha

$$\operatorname{cotg}\vartheta = \frac{1 + mm'}{m - m'}$$

eltűnik, azaz

$$m' = -\frac{1}{m}.$$

341. §. Az

$$A_1x + B_1y + C_1 = 0$$
$$A_2x + B_2y + C_2 = 0$$

egyenletek által jellemzett e_1 és e_2 egyenesek *metszéspontjának koordinatáit* a következő módon határozzuk meg.

Az (x, y) pont akkor és csak akkor van az e_1 egyenesen és egyszersmind az e_2 egyenesen is, ha mindkét egyenesnek egyenletét kielégíti. A két egyenes metszéspontjának koordinatáit tehát úgy kapjuk meg, ha az e_1 és e_2 egyenleteiből alkotott egyenletrendszert x és y szerint megoldjuk.

Ha az A-kból és B-kből alkotott determináns nem zérus, akkor

$$x : y : 1 = \begin{vmatrix} B_1 & C_1 \\ B_2 & C_2 \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} C_1 & A_1 \\ C_2 & A_2 \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix},$$

azaz

$$x = \frac{\begin{vmatrix} B_1 & C_1 \\ B_2 & C_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix}}, \qquad y = \frac{\begin{vmatrix} C_1 & A_1 \\ C_2 & A_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix}}.$$

Ha

$$\begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix} = 0$$

és a

$$\begin{vmatrix} B_1 & C_1 \\ B_2 & C_2 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} C_1 & A_1 \\ C_2 & A_2 \end{vmatrix}$$

determinánsok közül legalább az egyik a zérustól különböző, akkor a két adott egyenletből álló egyenletrendszer *ellenmondó* és a két egyenes egymással párhuzamos. Végre a

$$\begin{vmatrix} B_1 & C_1 \\ B_2 & C_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} C_1 & A_1 \\ C_2 & A_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix} = 0$$

esetben a két egyenlet egymástól csak egy állandó tényezőben különbözik. Ekkor az egyik egyenesnek minden pontja rajta van a másikon is, vagyis a két adott egyenlet ugyanazt az egyenest jellemzi.

Az ebben és a következő két §-ban foglaltak ferdeszögű koordináták esetében is érvényesek.

342. §. A sík $P_1 = (x_1, y_1)$ pontján keresztül végtelen sok egyenes megy keresztül. A P_1-en keresztül menő, de egyébiránt határozatlan egyenes egyenletét a következő módon kapjuk meg.

A sík bármely e egyenesének egyenlete

$$Ax + By + C = 0 \qquad 1)$$

alakú. Hogy e keresztül menjen P_1-en, az A, B, C együtthatókat az

$$Ax_1 + By_1 + C = 0$$

feltételnek megfelelően kell választanunk. Vagyis A és B tetszőlegesek és

$$C = -(Ax_1 + By_1).$$

Ha C-nek ezt az értékét 1) alatt behelyettesítjük, azt találjuk, hogy a P_1-en átmenő tetszőleges egyenes egyenlete

$$A(x - x_1) + B(y - y_1) = 0. \qquad 2)$$

Itt A és B tetszőleges állandók. Ha ezeket minden lehető módon választjuk, akkor megkapjuk a P_1 ponton átmenő valamennyi egyenesnek egyenletét.

A 2) alatti egyenlet által jellemzett egyenes nem változik meg, ha A és B helyébe ezeknek valamely (a zérustól különböző) λ számmal való szorzatát tesszük. Vagyis az, hogy a 2) alatti egyenlet a

P_1-en keresztül menő egyenes közül melyiket jellemzi, pusztán A és B viszonyától függ.

343. §. Az előbbi feladat még a következő módon is megoldható. Az OY tengellyel párhuzamos egyenesek kizárása után a sík bármely egyenesének egyenlete így írható:

$$y = mx + b. \qquad 1)$$

Hogy az egyenes a P_1 pontot tartalmazza, m-et és b-t az

$$y_1 = mx_1 + b$$

feltételnek megfelelően kell választanunk. Tehát m tetszőleges és

$$b = y_1 - mx_1.$$

Ha b-nek ezt az értékét 1) alatt behelyettesítjük, akkor a P_1-en keresztül menő tetszőleges egyenes számára a következő egyenletet kapjuk:

$$y = mx + y_1 - mx_1,$$

mely még így is írható:

$$y - y_1 = m(x - x_1). \qquad 2)$$

Ha m helyébe minden valós számot behelyettesítünk, megkapjuk a P_1-en keresztül menő valamennyi egyenesnek egyenletét, kivévén a P_1-en keresztül OY-nal párhuzamosan húzott egyenesét. Ennek egyenlete nyilván

$$x - x_1 = 0. \qquad 3)$$

A 4) alatti egyenlet így is írható:

$$x - x_1 = \frac{1}{m}(y - y_1).$$

Ha m a ∞-hez közeledik, akkor ez az egyenlet az 3) alatti egyenletbe megy át. A 2) alatti egyenlet tehát megad *kivétel nélkül* valamennyi egyenest, mely a P_1-en keresztül vonható, ha m számára a ∞ értéket is megengedjük és az 3) alatti egyenletet úgy fogjuk fel, mint a 2) alattinak azt a határesetét, melyben $m=\infty$.

344. §. Ha a P_1 ponton keresztül menő egyenesek közül egy bizonyost akarunk meghatározni, akkor még egy adatra van szükségünk.

Példák. 1. *Határozzuk meg a* (13, 4) *ponton keresztül az*

$$y = 7x + 5$$

egyenlet által jellemzett egyenessel párhuzamos egyenes egyenletét.

Az adott ponton keresztül húzható tetszés szerinti egyenes egyenlete

$$y - 4 = m(x - 13).$$

Hogy a meghatározandó e egyenes párhuzamos legyen az adott e_1 egyenessel, a két egyenes irányhatározójának egyenlőnek kell lennie. Tehát $m=7$. Vagyis e keresett egyenlete

$$y - 4 = 7(x - 13).$$

2. *Meghatározandó a* (8, 9) *ponton keresztül az*

$$5x + 12y - 4 = 0$$

egyenlet által jellemzett egyenessel párhuzamos egyenes egyenlete.

Az adott ponton keresztül húzható tetszőleges egyenes egyenlete

$$A(x-8) + B(y-9) = 0.$$

Két

$$Ax + By + C = 0$$
$$A'x + B'y + C' = 0$$

egyenes párhuzamosságának föltétele

$$A : B = A' : B'.$$

Tehát esetünkben

$$A : B = 5 : 12.$$

Vagyis a keresett egyenes egyenlete

$$5(x-8) + 12(y-9) = 0.$$

Az **1.** példában az adott ponton átmenő egyenes egyenletét az

$$y - y_1 = m(x-x_1)$$

alakban írtuk, mert az

$$y = 7x + 5$$

adott egyenlet y szerint meg volt oldva. A **2.** példában az adott ponton keresztül húzható tetszőleges egyenes egyenletét az

$$A(x-x_1) + B(y-y_1) = 0$$

alakban írtuk, mert az

$$5x + 12y - 4 = 0$$

egyenlet nem volt y szerint megoldva.

3. *Határozzuk meg az* $(-1,5)$ *ponton keresztül az*

$$y = 2x - 4$$

egyenesre merőlegesen húzott egyenes egyenletét.

Az adott ponton keresztül húzható bármely egyenesnek egyenlete

$$y - 5 = m(x+1).$$

Az m és m' irányhatározók akkor felelnek meg egymásra merőleges egyeneseknek, ha

$$m = -\frac{1}{m'}.$$

Tehát esetünkben

$$m = -\frac{1}{2}.$$

Vagyis a keresett egyenlet

$$y - 5 = -\frac{1}{2}(x+1).$$

4. *Határozzuk meg a* $(-2, 7)$ *ponton keresztül a*

$$3x - 16y - 5 = 0$$

egyenesre merőlegesen húzott egyenes egyenletét.

Az adott ponton átmenő tetszőleges egyenes egyenlete

$$A(x+2) + B(y-7) = 0.$$

Az

$$Ax + By + C = 0, \quad A'x + B'y + C' = 0$$

egyenesek merőlegességének feltétele:

$$A : B = -B' : A'.$$

Esetünkben tehát

$$A : B = 16 : 3.$$

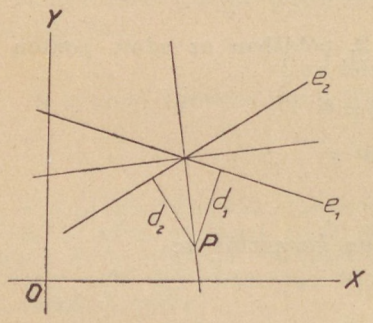
Végre a keresett egyenlet

$$16(x+2) + 3(y-7) = 0.$$

Két pont által meghatározott egyenes egyenletével már a 193. és 194. §-ban foglalkoztunk.

345. §. Bonyodalmasnak látszó és mégis könnyen megoldható feladat a következő:

Két (egymással nem párhuzamos) *egyenes egyenleteiből meghatározandók azoknak az egyeneseknek az egyenletei, melyek az adott egyenesek hajlásszögeit felezik* (112. ábra).



112. ábra.

Legyenek az egyenesek egyenletei Hesse-féle normálakban

$$H_1(x, y) = 0, \quad H_2(x, y) = 0,$$

úgy hogy H_1 és H_2 a következő kifejezéseket jelentik:

$$x \cos \alpha_1 + y \sin \alpha_1 - p_1,$$

$$x \cos \alpha_2 + y \sin \alpha_2 - p_2.$$

A használt koordinatarendszerről föltehetjük, hogy kezdőpontja az e_1 és e_2 egyenesek egyikén sincs rajta.

Az e_1 és e_2 egyenesekhez két szögfelező tartozik. Az egyik a kezdőpontot tartalmazó szöget és ennek csúcsszögét felezi; a másik szögfelező az előbbi szögek mellékszögeit felezi.

A sík valamely $P = (x, y)$ pontja akkor és csak akkor van az első szögfelezőn, ha e_1-től való d_1 távolsága puszta hosszúságára és egyszersmind előjelére nézve is megegyezik az e_2-től való d_2 távolsággal. Ennek a szögfelezőnek pontjaira nézve tehát

$$d_1 - d_2 = 0.$$

A második szögfelező pontjaira nézve d_1 és d_2 hosszúságra nézve egymással egyenlők, de előjeleik ellenkezők. Ennek a szögfelezőnek pontjaira nézve tehát

$$d_1 + d_2 = 0.$$

Tudjuk, hogy a sík bármely $P=(x, y)$ pontjának e_1-től és e_2-től távolságait

$$-H_1(x, y), \quad -H_2(x, y)$$

adják meg. Ezt tekintetbe vévén, a

$$d_1 - d_2 = 0, \quad d_1 + d_2 = 0$$

egyenletek a következőkbe mennek át:

$$-H_1(x, y) + H_2(x, y) = 0, \quad -H_1(x, y) - H_2(x, y) = 0.$$

Ha még az előjeleket ellenkezőkre változtatjuk, akkor ezeket az egyenleteket így is írhatjuk:

$$H_1(x, y) - H_2(x, y) = 0, \quad H_1(x, y) + H_2(x, y) = 0.$$

Szóval: *Az e_1 és e_2 egyenesek első szögfelezőjének egyenletében a baloldalt úgy kapjuk meg, hogy az adott egyenesek* Hesse-*féle normálegyenleteinek baloldalait egymásból kivonjuk. A második szögfelező meghatározásánál kivonás helyett összeadás végzendő.*

Példa. *Meghatározandók az*

$$5x + 12y - 26 = 0, \quad 3x + 4y - 60 = 0$$

egyenesek szögfelezőinek egyenletei.

Az adott egyenesek Hesse-féle normálegyenletei

$$\frac{5x+12y-26}{\sqrt{5^2+12^2}} = 0, \quad \frac{3x+4y-60}{\sqrt{3^2+4^2}} = 0,$$

vagyis

$$\frac{5x+12y-26}{13} = 0, \quad \frac{3x+4y-60}{5} = 0.$$

A szögfelezők egyenletei:

$$\frac{5x+12y-26}{13} - \frac{3x+4y-60}{5} = 0$$

és

$$\frac{5x+12y-26}{13} + \frac{3x+4y-60}{5} = 0.$$

Centrális projekció. A projektiv térszemlélet.

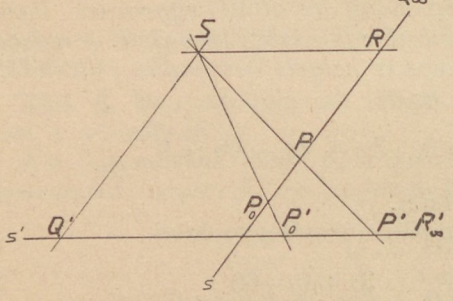
346. §. Legyen adva a síkban az S pont és az s' egyenes (113. ábra), még pedig úgy, hogy S ne essék s'-re. Ha a sík valamely P pontját összekötjük S-sel, akkor SP-nek és s'-nek P' metszéspontjáról azt mondjuk, hogy P-nek az S centrumból való (centrális) *vetülete* vagy *projekciója* a s' egyenesen.

Ha továbbá a síkban megadunk egy s egyenest, még pedig úgy, hogy nem megy S-en keresztül, akkor s bármely P pontjának s'-en egy és csak egy pont felel meg mint vetület; pusztán annak az R pontnak nincs vetülete, melynek S-sel való összekötése a s'-sel

párhuzamos egyenesre vezet. Továbbá s' bármely P' pontjához s-n egy és csak egy oly P pont található, hogy P' ennek S-ből való vetülete; pusztán ahhoz a Q'-hoz nem található ily Q pont, melynek S-sel való összekötése az s-sel párhuzamos SQ'-ra vezet.

Hogy *kivétel nélkül* az s minden pontjának legyen s'-en vetülete és fordítva s' minden pontját mint s valamely pontjának vetületét foghassuk fel, azért minden egyenesnek a szoros értelemben vett pontokon kívül még egy átvitt értelemben vett pontot tulajdonítunk. Ezt az egyenes *irányának* vagy *végtelen* pontjának nevezzük és úgy fogjuk fel, mint az egyenesnek a vele párhuzamos egyenesekkel való közös pontját. Más szóval *párhuzamos* egyeneseknek és csak ezeknek ugyanazt az irányt vagy végtelen pontot tulajdonítjuk.

A végtelen pontok bevezetése után R-nek is van s'-en vetülete; ez a vetület s'-nek végtelen pontjába esik. Továbbá Q' is mint vetület fogható fel, még pedig mint s végtelen pontjának vetülete.



113. ábra.

A «végtelen pont» elnevezésnek eredete a következő. Ha P az s egyenesen bizonyos P_0 kezdeti helyzetből a helyzeteknek valamely végtelen sorozatán át az R-hez, mint határhelyzethez közeledik, akkor a P' vetület a P_0' kezdeti helyzettől való távolsága minden határon túl növekedik. Az R vetületét úgy fogjuk fel, mint a P_0'-tól minden határon túl távozó P' határfekvését. Azért R vetületének, vagyis s' irányának, az s' bármely szoros értelemben vett pontjától *végtelen nagy* távolságot tulajdonítunk és ezt a vetületet s' *végtelenben fekvő*, vagy röviden *végtelen* pontjának mondjuk.

Az egyenesnek *csak egy* végtelen pontot tulajdonítunk. Tehát, ha s'-n valamely P_0'-tól kiindulva akár az egyik, akár a másik értelemben a végtelenbe távozunk, mindkét esetben ugyanahhoz a határhelyzethez érünk. Szóval az egyenest a végtelen pont bevezetése után a végtelenben összefüggő, *zárt* vonalnak tekintjük.

347. §. A végtelen pontok bevezetése még más végtelenben levő elemeket is maga után von. Minthogy a végtelenben levő pontoknak és egyéb végtelen elemeknek bevezetésére leginkább a projiciálással való foglalkozás indít, azért azt mondjuk, hogy a végtelen elemeknek bevezetése a *projektiv térszemléleten* alapszik.

Hogy a végtelen elemek bevezetését már evvel az alkalommal teljesen elvégezhessük, a sík helyett az egész teret kell szem előtt tartanunk.

Valamint a síkban, úgy a térben is, *párhuzamos* egyeneseknek és csak ezeknek ugyanazt az irányt vagy végtelen pontot tulajdonítjuk.

A végtelen pontok bevezetése után egy síkban fekvő két (egymástól különböző) egyenesnek mindig egy és csak egy közös

pontja van. Ez a közös pont általában a szó rendes értelmében vett (ú. n. *véges*) pont, párhuzamos egyenesek esetében pedig átvitt értelemben vett pont, azaz a két egyenesnek közös iránya vagy végtelen pontja.

Valamely α sík végtelen pontjain a benne húzható egyenesek végtelen pontjait értjük. Két síknak akkor és csak akkor ugyanazok a végtelen pontjai, ha a két sík egymással párhuzamos. Minden más esetben a két síknak csak egy közös végtelen pontja van, t. i. a metszésvonal iránya.

Valamely sík végtelen pontjainak összességét a sík *végtelen* (azaz *végtelenben fekvő*) *egyenesének*), vagy röviden a sík *állásának* mondjuk. Hogy α végtelen pontjainak összességét *egyenesnek* tekintjük, annak két oka van. Egyrészt tudjuk, hogy α valamely rendes értelemben vett (ú. n. *végesben fekvő*) s egyenesét α bármely más rendes értelemben vett s' egyenese egy és csak egy (véges vagy végtelen) pontban metszi. Az α sik végtelen pontjainak összessége ebben a tekintetben hasonló módon viselkedik, ugyanis neki is a sík bármely s' egyenesével egy és csak egy közös pontja van, t. i. s' iránya. Másrészt tudjuk, hogy két sík közös pontjainak összessége általában egyenes vonal. Természetes tehát, hogy két sík közös pontjainak összességét akkor is egyenesnek tekintjük, midőn a két sík egymással párhuzamos.

A mondottak szerint párhuzamos síkoknak és csak ezeknek van ugyanaz az állásuk.

348. §. A tér végtelenben fekvő pontjairól és egyeneseiről azt mondjuk, hogy egy síkban vannak, a tér *végtelen* síkjában.

Ha α rendes értelemben vett síkot jelent, akkor bármely kívüle fekvő egyenessel egy és csak egy közös pontja van, bármely tőle különböző síkkal pedig egy és csak egy közös egyenese. Ez az ismeretes tény még párhuzamosság esetében is igaz, csakhogy akkor a közös pont illetve közös egyenes a végtelenbe esik. A végtelen sík ebben a tekintetben teljesen hasonlít a rendes értelemben vett síkokhoz. Neki is bármely e egyenessel, mely nem esik teljesen beléje, egy és csak egy közös pontja van, t. i. e-nek *iránya*. Továbbá a végtelen síknak bármely más síkkal egy és csak egy közös egyenese van, t. i. ennek a másik síknak *állása*.

349. §. A végtelenben levő pontoknak, egyeneseknek és síknak bevezetése után a következő tételek kivétel nélkül mindig érvényesek:

Két pont egy és csak egy egyenest határoz meg.

Ha az egyik pont valamely P véges pont, a másik pedig valamely e egyenes iránya, akkor a két pont által meghatározott egyenes a P-n keresztül e-vel párhuzamosan húzott egyenes. Ha pedig két végtelenben levő pontot adunk meg, vagyis két e és e' egyenes irányait, akkor az általuk meghatározott egyenes azoknak a síkoknak közös állása, melyek e-vel és egyszersmind e'-vel is párhuzamosak.

Két különböző egyenes, melyeknek közös pontjuk van, egy és csak egy síkot határoz meg. Ha e a végesben fekszik, a másik egyenes pedig a végtelenben van, vagyis valamely (e-vel párhuzamos) α sík állása: akkor az általuk meghatározott sík az e-n keresztül α-val párhuzamosan fektetett sík. Ha mindkét egyenes a végtelenben van, akkor a végtelenben levő síkot határozzák meg.

Egy egyenes és valamely kivüle fekvő pont egy és csak egy síkot határoz meg. Ezt a síkot úgy állíthatjuk elő, hogy az adott egyenes valamely pontján és az adott ponton át egyenest húzunk, azután pedig az így nyert egyenesen és az adott egyenesen át síkot fektetünk.

Három nem egy egyenesben levő pont egy és csak egy síkot határoz meg.

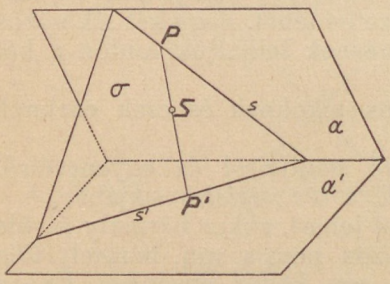
Egy síkban levő két egyenes egy és csak egy közös pontot határoz meg. Ez még a végtelen síkra is igaz. Ekkor két α és α' síknak állásairól van szó és az általuk meghatározott pont α és α' metszésvonalának iránya.

Két sík egy és csak egy közös egyenest határoz meg.

Egy sík és valamely kivüle fekvő egyenes egy és csak egy közös pontot határoznak meg.

Három nem egy egyenesben találkozó sík egy és csak egy közös pontot határoz meg.

350. §. Az egyenes pontjainak más egyenesre való vetítéséhez rokon művelet valamely α síknak (vagy pontosabban mondva a rajta levő idomoknak) egy más síkra való centrális vetítése.



114. ábra.

Az α síknak az S *centrumból* az α' *képsíkra* való vetítésénél (114. ábra) az α sík P pontjának *képe (centrális vetülete* vagy *projekciója)* az a P' pont, melyben az SP *vetítősugár* a képsíkot metszi. Ha a vetítősugár a képsíkkal párhuzamos, akkor P' a végtelenbe esik. Az α síkban felvett valamely idom vetületét úgy állítjuk elő, hogy az idom minden pontját vetítjük. Az α sík valamely s egyenesének vetítésénél valamennyi pont vetítősugarai ugyanabba a σ síkba esnek. Ennek a σ *vetítősíknak* a képsíkkal való metszésvonala adja meg s vetületét. Ha σ párhuzamos a képsíkkal, akkor s' a végtelenbe esik.

A mondottak értelmében a végtelen elemek bevezetése után α minden pontjához és minden egyeneséhez található egy megfelelő pont, illetve egyenes mint vetület. Fordítva α' minden pontja és minden egyenese úgy fogható fel, mint α valamely pontjának vagy egyenesének vetülete. A véges elemekre való szorítkozásnál ez nem következnek be kivétel nélkül.

Ha az α síkban felvett valamely idomnak az α' síkon előállított projekcióját S-ből visszavetítjük α-ra, mint képsíkra, akkor megint az eredeti idomra jutunk.

Homogén koordináták.

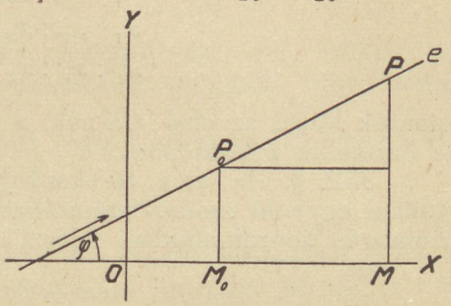
351. §. A síkban valamely végtelen pontot úgy jellemezhetünk, hogy megadjuk a rajta keresztül menő egyenesek m irányhatározóját. Ennek az eljárásnak egyetlen hiánya, hogy a véges pontokat és a végtelen pontokat különböző módon jellemezzük. Ezt elkerülhetjük, ha úgynevezett homogén koordinatákat használunk.

Ha a P véges pont közönséges koordinatái x, y, akkor P *homogén koordinatáin* három oly x_1, x_2, x_3 számot értünk, melyekre nézve

$$x_1 : x_2 : x_3 = x : y : 1.$$

Bármely végtelen pontot úgy foghatunk fel, mint egy e egyenesen a végtelenbe távozó pontnak határhelyzetét (115. ábra). Ha e-t a $P_0 = (x_0, y_0)$ ponton keresztül úgy húztuk, hogy pozitiv értelme OX-szel a φ szöget zárja be, akkor e bármely P pontjának közönséges koordinatái

$$x = x_0 + r\cos\varphi,$$
$$y = y_0 + r\sin\varphi.$$



115. ábra.

Itt $r = P_0P$ pozitivnak vagy negativnak veendő aszerint, hogy P_0-ból pozitiv vagy negativ értelmű haladás vezet P-be. A P homogén koordinatáira nézve

$$x_1 : x_2 : x_3 = (x_0 + r\cos\varphi) : (y_0 + r\sin\varphi) : 1 =$$
$$= \left(\cos\varphi + \frac{x_0}{r}\right) : \left(\sin\varphi + \frac{y_0}{r}\right) : \frac{1}{r}.$$

Ha P a végtelenbe távozik, akkor

$$\lim \frac{x_0}{r} = \lim \frac{y_0}{r} = \lim \frac{1}{r} = 0.$$

Azért az e egyenes végtelen pontjának homogén koordinatáin három oly számot értünk, melyekre nézve

$$x_1 : x_2 : x_3 = \cos\varphi : \sin\varphi : 0.$$

A sík bármely véges vagy végtelen pontjának homogén koordinatáit végtelen sokféleképpen választhatjuk, mert a pont csak a homogén koordinaták viszonyát határozza meg. A véges pontokra nézve a harmadik koordinata a zérustól különböző, a végtelen pontokra nézve zérus.

Példák. 1. Bármely három számhoz, melyek nem mindannyian zérusok, egy és csak egy oly pont található, melyeknek ezek a homogén koordinatái. Ha pl.

$$x_1 : x_2 : x_3 = 16 : 12 : 5,$$

akkor avval a véges ponttal van dolgunk, melynek közönséges koordinatái

$$\frac{16}{5}, \quad \frac{12}{5}.$$

Ha

$$x_1 : x_2 : x_3 = 7 : 4 : 0,$$

akkor azoknak az egyeneseknek végtelen pontjával van dolgunk, melyre nézve

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{x_2}{x_1} = \frac{4}{7}.$$

2. Az

$$x_1 : x_2 : x_3 = 1 : 0 : 0,$$
$$x_1 : x_2 : x_3 = 0 : 1 : 0,$$
$$x_1 : x_2 : x_3 = 0 : 0 : 1$$

pontok közül az első OX-nek, a második OY-nak végtelen pontja, a harmadik a kezdőpont.

352. §. Ha arra törekszünk, hogy a véges és végtelen pontokkal egyenlő módon számolhassunk, akkor a vonalak egyenleteit homogén koordinatákban fejezzük ki.

Az

$$Ax + By + C = 0 \qquad 1)$$

egyenlet által jellemzett e egyenesnek homogén koordinatákban kifejezett egyenlete

$$Ax_1 + Bx_2 + Cx_3 = 0. \qquad 2)$$

Valóban, ha x_1, x_2, x_3 valamely P véges pont homogén koordinatái, akkor a P pontnak közönséges koordinatái

$$x = \frac{x_1}{x_3}, \quad y = \frac{x_2}{x_3}.$$

P tehát akkor és csak akkor van az e egyenesen, ha

$$A\frac{x_1}{x_3} + B\frac{x_2}{x_3} + C = 0.$$

Itt x_3 a zérustól különböző értékű, tehát vele szorozhatunk. A szorzás az

$$Ax_1 + Bx_2 + Cx_3 = 0$$

egyenletre vezet.

De valamely végtelen pont is akkor és csak akkor van e-n, ha koordinatái kielégítik a 2) alatti egyenletet. Ugyanis végtelenben levő pontra nézve $x_3 = 0$. Az ilyen pont tehát akkor és csak akkor elégíti ki a 2) alatti egyenletet, ha

$$Ax_1 + Bx_2 = 0,$$

azaz

$$\frac{x_2}{x_1} = \frac{-A}{B} = \operatorname{tg}\varphi = \frac{\sin\varphi}{\cos\varphi},$$

hol φ az OX és e által bezárt szöget jelenti.

Innen

$$x_1 : x_2 = \cos\varphi : \sin\varphi,$$

vagyis a szóban forgó pont éppen e iránya.

A végtelenben levő egyenesnek homogén koordinatákban kifejezett egyenlete nyilván

$$x_3 = 0.$$

Véges egyenesnél a homogén koordinatákban kifejezett egyenletről mindig könnyen visszatérhetünk a nem homogén koordinatákban kifejezettre; csak x_1, x_2, x_3 helyébe x, y, 1 teendő. Ha ezt a helyettesítést a végtelenben levő egyenes egyenletére alkalmazzuk, az

$$1 = 0$$

ellenmondó egyenletet kapjuk. *Az analogia miatt* ezt a végtelenben levő egyenes közönséges koordinatákban kifejezett egyenletének mondjuk.

A végtelen egyenest az $x_3=0$ vagy $1=0$ egyenlet helyett a

$$Cx_3 = 0 \quad \text{illetve} \quad C = 0$$

egyenlettel is jellemezhetjük, hol C a zérustól különböző állandó, mert a baloldalnak C-vel való szorzása az egyenlet jelentésén nem változtat.

A mondottak után bármely

$$Ax_1 + Bx_2 + Cx_3 = 0$$

alakú egyenlet, melyben A, B és C nem mindannyian zérusok, valamely egyenesnek homogén koordinatákban kifejezett egyenlete. Hasonlóképpen

$$Ax + By + C = 0$$

mindig valamely egyenesnek közönséges koordinatákban kifejezett egyenlete. Ez mostani álláspontunkon akkor is igaz, ha A és B zérusok (és C nem zérus), csakhogy ekkor a végtelenben levő egyenessel van dolgunk.

353. §. Az egyenesről éppen mondottak könnyen általánosíthatók algebrai görbékre. Az n-edrendű algebrai görbét n-edfokú egyenlet jellemzi. A görbének homogén koordinatákban kifejezett egyenletét úgy állítjuk elő, hogy x és y helyébe az $\frac{x_1}{x_3}$, $\frac{x_2}{x_3}$ hányadosokat írjuk és x_3-nak n-edik hatványával szorzunk. Valamely véges pont akkor és csak akkor van a görbén, ha homogén koordinatái kielégítik az így nyert egyenletet. Végtelen pontokra nézve a nem-homogén egyenlet nem ad fölvilágosítást; éppen azért megállapodhatunk abban, hogy valamely végtelen pontot akkor és csak akkor számítunk a görbéhez, ha homogén koordinatái kielégítik a leírt módon előállított homogén egyenletet.

Például az

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0$$

hiperbola homogén koordinatákban kifejezett egyenlete

$$\frac{x_1^2}{a^2} - \frac{x_2^2}{b^2} - x_3^2 = 0.$$

A hiperbola végtelen pontjaira nézve

$$x_3 = 0, \quad \frac{x_1^2}{a^2} - \frac{x_2^2}{b^2} = 0.$$

Az utóbbi egyenlet így is írható:

$$b^2x_1^2 - a^2x_2^2 = 0.$$

Innen

$$b^2x_1^2 = a^2x_2^2,$$

azaz

$$bx_1 = \pm ax_2.$$

A hiperbolának tehát két végtelen pontot tulajdonítunk. Ezekre nézve:

$$x_1 : x_2 : x_3 = a : b : 0 \quad \text{illetve} \quad x_1 : x_2 : x_3 = a : -b : 0.$$

E pontok az aszimptoták irányai.

354. §. Sokszor valamely algebrai egyenletet, melynek foka tulajdonképpen kisebb mint n, oly n-edfokú egyenletnek tekintünk, melyben az n-edfokú tagok együtthatói zérusok. Ilyenkor a homogén egyenletre való áttérésnél x_3 annyiadik hatványával szorzunk, amilyen fokúnak az egyenletet tekintjük. Ha pl. az

$$x^2 - y^2 - 1 = 0$$

egyenletet másodfokúnak tekintjük, akkor a megfelelő homogén egyenlet

$$x_1^2 - x_2^2 - x_3^2 = 0.$$

Ha azonban az egyenletet harmadfokúnak tekintjük, akkor a homogén koordinatákban kifejezett egyenlet

$$x_3(x_1^2 - x_2^2 - x_3^2) = 0.$$

A két egyenlet a véges pontokra nézve ugyanazt mondja. Ellenben a végtelen pontokra nézve lényeges eltérés van. A talált harmadfokú egyenletet ugyanis a hiperbola pontjain kívül még a végtelenben levő egyenes minden pontja is kielégíti. Vagyis az, hogy az egyenlet fokszámát magasabbnak tekintjük, a végtelenben levő egyenesnek a vonalhoz való csatolását jelenti.

Homogén koordinatákat csak elvétve használunk. Jelentőségük abban van, hogy velük egy csapásra intézhetünk el olyan kérdéseket, melyeknél máskülönben több esetet kellene megkülönböztetnünk aszerint, hogy egyes pontok vagy egyenesek a végesben, vagy a végtelenben vannak.

A homogén koordinatákról mondottak és a következő három § általános fejtegetései ferdeszögű koordinaták esetében is igazak.

Pontsor és sugársor fogalma. A sugársor egyenlete.

355. §. Valamely s egyenes vonal pontjainak összességét más néven *pontsornak* szokták nevezni. Az s egyenest a pontsor sorozójának mondjuk. Az s sorozó lehet a végesben, de lehet a végtelenben is.

Az egyenes vonalat más néven *sugárnak* is nevezzük. A sík mindazon egyeneseinek összességét, melyek valamely S ponton

MAGYAR TUDOMÁNYOS AKADÉMIA KÖNYVTÁRA

keresztül mennek, *sugársornak* mondjuk. S-et a sugársor *sorozó pontjának* vagy röviden *sorozójának* nevezzük.

Ha S valamely e_0 egyenesnek végtelen pontja, akkor az S sorozójú sugársort az e_0-sal párhuzamos egyenesek alkotják, ide számítva e_0-t és a sík végtelen egyenesét is.

Valamely sugársor teljesen meg van határozva, ha ismerjük két sugarát, e_1-et és e_2-t (116. ábra). Legyenek ezeknek egyenletei

$$L_1 = 0, \quad L_2 = 0,$$

hol L_1 és L_2 közönséges koordináták esetében az

$$A_1x + B_1y + C_1, \quad A_2x + B_2y + C_2$$

lineáris kifejezéseket jelentik, homogén koordináták esetében pedig a megfelelő

$$A_1x_1 + B_1x_2 + C_1x_3, \quad A_2x_1 + B_2x_2 + C_2x_3$$

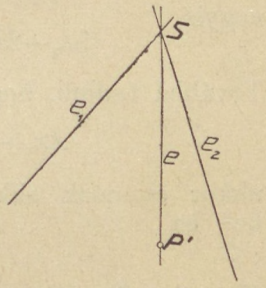
homogén lineáris kifejezéseket.

Az e_1 és e_2 által meghatározott sugársor tetszőleges egyenesének egyenlete

$$\lambda_1L_1 + \lambda_2L_2 = 0. \qquad 1)$$

Itt λ_1 és λ_2 tetszőleges állandók azzal az egyetlen kikötéssel, hogy legalább az egyiknek értéke a zérustól különböző legyen. Ez a megszorítás azért szükséges, mert a $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$ esetben egyenlet helyett azonosságot kapnánk.

A kimondott tétel két állítást tartalmaz. Egyrészt azt jelenti ki, hogy az 1) alatti egyenlet a λ_1 és λ_2 bármely választásánál a sugársor valamely egyenesét ábrázolja. Másrészt azt is mondja, hogy λ_1 és λ_2 alkalmas választásánál az 1) alatti egyenlet a sugársor bármelyik egyenesét ábrázolhatja.



116. ábra.

A tételt elegendő vagy csak közönséges, vagy csak homogén koordináták esetében bebizonyítanunk. A két eset ugyanis csak abban különbözik, hogy

$$x_1, \; x_2, \; x_3$$

helyett közönséges koordináták esetében

$$x, \; y, \; 1$$

áll. Ha a tétel az egyik esetben igaz, akkor a másikban sem lehet helytelen. Az alkalmazásoknál ugyan rendesen közönséges koordinatákkal számolunk; a bebizonyításnál azonban célszerűbb homogén koordinatákat használnunk.

A tételben foglalt első állítás helyessége nyilvánvaló. Ugyanis

$$\lambda_1L_1 + \lambda_2L_2$$

a koordináták lineáris függvénye, tehát az 1) alatti egyenlet egyenest ábrázol. Ha 1) alatt S koordinatáit helyettesítjük, L_1 és L_2

zérussal egyenlő, tehát $\lambda_1 L_1 + \lambda_2 L_2$ is eltünik. Vagyis az 1) alatti egyenlet mindig olyan egyenest ábrázol, mely S-et tartalmazza.

Közönséges koordinaták használatánál ez az okoskodás csak véges S esetében végezhető. Végtelenben levő S esetében vagy merőben új bebizonyítás kellene, vagy határátmenetekhez kellene fordulnunk. Homogén koordinatáknál mindez elmarad.

A tétel második részének helyessége is könnyen belátható. Jelentse ugyanis e a sugársor tetszés szerint választott sugarát és P' ennek valamely S-től különböző pontját. Ha a 2) alatti egyenletben a λ_1 és λ_2 együtthatókat úgy választjuk, hogy P' kielégíti az egyenletet, akkor oly egyenes egyenletét kapjuk, mely S-en meg P'-n is keresztül megy, vagyis éppen e egyenletét.

Példák. 1. *Határozzuk meg az*

$$5x + 7y - 3 = 0,$$
$$2x + 8y + 9 = 0$$

egyenletek által jellemzett e_1 *és* e_2 *egyenesek S metszéspontján keresztül vont azt az egyenest, mely merőleges a*

$$19x - 11y + 8 = 0$$

egyenlet által jellemzett e_3 *egyenesre.*

Az S-n keresztül vont bármely egyenes egyenlete

$$\lambda_1 (5x+7y-3) + \lambda_2 (2x+8y+9) = 0, \qquad 1)$$

vagyis

$$(5\lambda_1+2\lambda_2)\, x + (7\lambda_1+8\lambda_2)\, y - 3\lambda_1 + 9\lambda_2 = 0. \qquad 2)$$

Továbbá tudjuk, hogy

$$Ax + By + C = 0, \quad A'x + B'y + C' = 0$$

akkor és csak akkor jellemeznek egymásra merőleges egyeneseket, ha

$$AA' + BB' = 0.$$

Ha ezt a 2) alatti egyenletre és e_3 egyenletére alkalmazzuk, akkor a keresett egyenesre nézve

$$19\,(5\lambda_1+2\lambda_2) - 11\,(7\lambda_1+8\lambda_2) = 0,$$

vagyis

$$18\lambda_1 - 50\lambda_2 = 0.$$

Innen:

$$\lambda_1 : \lambda_2 = 50 : 18 = 25 : 9.$$

Ezt 1) alatt tekintetbe vévén, a keresett egyenes számára a következő egyenletet kapjuk:

$$25\,(5x+7y-3) + 9\,(2x+8y+9) = 0.$$

Ez még így is írható:

$$143x + 247y + 6 = 0.$$

2. *Határozzuk meg annak az egyenesnek egyenletét, mely a*

$$15x + 4y - 7 = 0,$$
$$x - 11y + 8 = 0$$

egyenletek által jellemzett e_1 és e_2 egyenesek S metszéspontját és az O kezdőpontot egymással összeköti.

Az S-en keresztül vont bármely egyenes egyenlete ily alakú:

$$\lambda_1(15x+4y-7) + \lambda_2(x-11y+8) = 0,$$

vagyis

$$(15\lambda_1+\lambda_2)x + (4\lambda_1-11\lambda_2)y - 7\lambda_1 + 8\lambda_2 = 0.$$

Az egyenes akkor és csak akkor megy a kezdőponton keresztül, ha

$$-7\lambda_1 + 8\lambda_2 = 0.$$

Innen

$$\lambda_1 : \lambda_2 = 8 : 7.$$

Tehát a keresett egyenlet:

$$8(15x+4y-7) + 7(x-11y+8) = 0.$$

Ez még így is írható:

$$127x - 45y = 0.$$

Egy pontban találkozó egyenesek.

356. §. *Az*

$$\begin{aligned} A_1x + B_1y + C_1 &= 0, \\ A_2x + B_2y + C_2 &= 0, \\ A_3x + B_3y + C_3 &= 0 \end{aligned} \qquad 1)$$

egyenletek, vagy a megfelelő

$$\begin{aligned} A_1x_1 + B_1x_2 + C_1x_3 &= 0, \\ A_2x_1 + B_2x_2 + C_2x_3 &= 0, \\ A_3x_1 + B_3x_2 + C_3x_3 &= 0 \end{aligned} \qquad 2)$$

homogén egyenletek akkor és csak akkor ábrázolnak három oly egyenest, melyek (vagy a végesben vagy a végtelenben) valamely közös pontban találkoznak, ha

$$\begin{vmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 \end{vmatrix} = 0.$$

A három egyenesnek ugyanis akkor és csak akkor van közös pontja, ha található olyan x_1, x_2, x_3 értékrendszer, mely nem áll csupa zérusból és kielégíti a 2) alatti egyenleteket. A homogén lineáris egyenletrendszerek elméletéből tudjuk, hogy erre az egyenletrendszer együtthatóiból alkotott determináns eltünése szükséges és elégséges.

357. §. Az éppen talált föltételt így is fejezhetjük ki:

Az

$$L_1 = 0, \quad L_2 = 0, \quad L_3 = 0$$

elsőfokú egyenletek által ábrázolt egyenesek akkor találkoznak ugyanabban a (véges vagy végtelen) pontban, ha találhatunk három olyan $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ *számot, melyek nem mindannyian zérusok és melyekkel az egyenletek bal oldalait megszorozván, a nyert szorzatoknak*

$$\lambda_1 L_1 + \lambda_2 L_2 + \lambda_3 L_3$$

összege azonosan eltünik.

Itt L_i az $A_i x + B_i y + C_i$ lineáris kifejezést jelenti ($i = 1, 2, 3$), vagy pedig a megfelelő homogén lineáris kifejezést. Ha közönséges koordinatákat használunk, akkor

$$\lambda_1 L_1 + \lambda_2 L_2 + \lambda_3 L_3$$

részletes alakja:

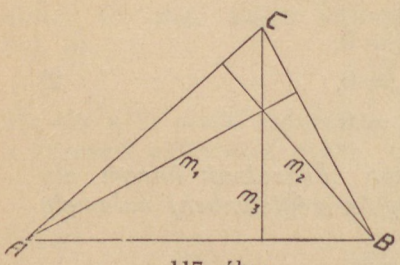
$$\begin{aligned}&(\lambda_1 A_1 + \lambda_2 A_2 + \lambda_3 A_3)\, x\\ &+(\lambda_1 B_1 + \lambda_2 B_2 + \lambda_3 B_3)\, y\\ &+ \lambda_1 C_1 + \lambda_2 C_2 + \lambda_3 C_3.\end{aligned}$$

Ezt a kifejezést *azonosan* eltünőnek akkor mondjuk, ha x és y együtthatói, valamint az abszolut tag külön-külön zérusok. E feltételnek megfelelő λ-kat (a $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$ kizárása után) akkor és csak akkor találhatunk, ha az

$$\begin{vmatrix} A_1 & A_2 & A_3 \\ B_1 & B_2 & B_3 \\ C_1 & C_2 & C_3 \end{vmatrix}$$

determináns zérus. Ámde az előbbi §-ból tudjuk, hogy ekkor és csak ekkor találkozik a három egyenes ugyanabban a pontban.

358. §. A következő tételek három véges A, B, C pont által meghatározott háromszögre vonatkoznak. A háromszög valamely oldalán általában két szögpont által meghatározott egyenes vonalat értünk *a maga teljességében*, tehát nem ennek az egyenesnek a két szögpont közé eső darabját. Csak ha oldal hosszúságáról, felező pontjáról s. í. t. beszélünk, kell ezeken a kifejezéseken két szögpontnak egymástól való távolságát, ennek felezőpontját, s. í. t. érteni.



117. ábra.

A háromszög magassági vonalai egy pontban találkoznak. Ezt a pontot a *magassági pontnak* nevezzük.

Ha (117. ábra) az A, B, C szögpontok koordinatái (x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3), akkor BC irányhatározója

$$\frac{y_3 - y_2}{x_3 - x_2}.$$

Az m_1 magassági vonal az A szögponton keresztül a BC oldalra merőlegesen húzott egyenes; irányhatározója tehát

$$-\frac{x_3-x_2}{y_3-y_2}.$$

Ennélfogva m_1 egyenlete

$$y-y_1=-\frac{x_3-x_2}{y_3-y_2}(x-x_1).$$

Ezt még így is írhatjuk:

$$(x_3-x_2)(x-x_1)+(y_3-y_2)(y-y_1)=0,$$

vagy kifejtett alakban:

$$(x_3-x_2)x+(y_3-y_2)y-x_1(x_3-x_2)-y_1(y_3-y_2)=0.$$

A másik két magassági vonal egyenletei:

$$(x_1-x_3)x+(y_1-y_3)y-x_2(x_1-x_3)-y_2(y_1-y_3)=0,$$
$$(x_2-x_1)x+(y_2-y_1)y-x_3(x_2-x_1)-y_3(y_2-y_1)=0.$$

E három egyenletben a baloldalak összege azonosan eltünik, tehát a három egyenes egy pontban találkozik. A három egyenes nem lehet párhuzamos, tehát közös pontjuk okvetlenül a *végesben* van.

A háromszög oldalainak felező pontjaiban az oldalakra emelt merőlegesek egy pontban találkoznak.

A sík valamely $P=(x, y)$ pontja akkor és csak akkor van a BC felező pontjában a BC-re emelt merőlegesen (118. ábra), ha a BP távolság négyzete egyenlő CP négyzetével, azaz

$$BP^2-CP^2=0.$$

A szögpontoknak és P-nek koordinatáiból pl. BP négyzetét a

$$Q_2=(x-x_2)^2+(y-y_2)^2$$

kifejezés adja meg. Ha ezt tekintetbe vesszük, akkor a $BP^2-CP^2=0$ egyenlet a következőbe megy át:

$$Q_2-Q_3=0.$$

Ez az egyenlet *elsőfokú*, mert x^2+y^2 a kivonás után kiesik.

A három merőleges egyenletei tehát:

$$Q_2-Q_3=0,\quad Q_3-Q_1=0,\quad Q_1-Q_2=0.$$

A baloldalon álló kifejezések összege azonosan zérus, azért a három merőleges csakugyan egy pontban találkozik *(a háromszög köré írt körnek középpontjában).*

A háromszög belső szögeit felező egyenesek egy pontban találkoznak.

A háromszög valamelyik szögpontjához tartozó belső szöget és a másik két szögponthoz tartozó külső szöget felező egyenesek egy pontban találkoznak.

Ennek bebizonyításánál (119. ábra) jelentsék

$$H_1 = 0, \quad H_2 = 0, \quad H_3 = 0$$

a háromszög BC, CA, AB oldalainak Hesse-féle normálegyenleteit. Tehát H_i részletes alakja

$$x \cos \alpha_i + y \sin \alpha_i - p_i.$$

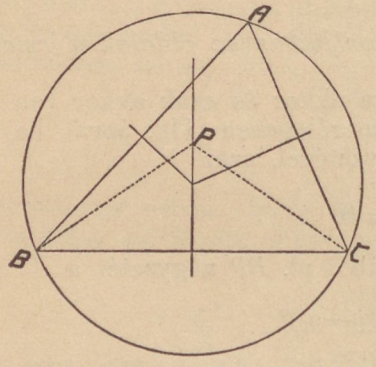
A koordinatarendszert úgy választhatjuk, hogy a kezdőpont a háromszög belsejében legyen. Ekkor az A szögponthoz tartozó belső szöget felező egyenes egyenlete

$$H_2 - H_3 = 0,$$

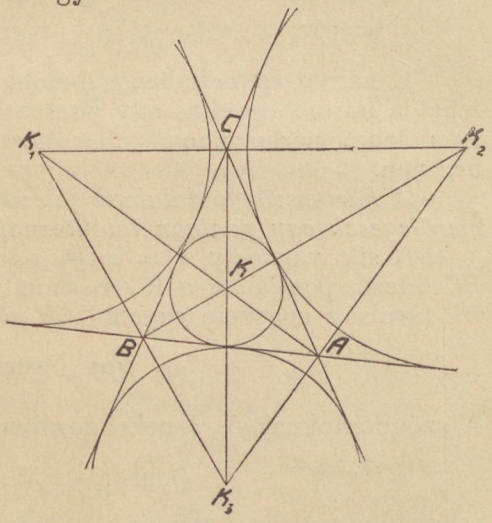
ugyanahhoz a ponthoz tartozó külső szöget felező egyenes egyenlete pedig

$$H_2 + H_3 = 0$$

Ha a belső szögeket felező egyenesek



118. ábra.



119. ábra.

$$H_2 - H_3 = 0, \quad H_3 - H_1 = 0, \quad H_1 - H_2 = 0$$

egyenleteinek baloldalait összeadjuk, azonosan zérust kapunk. Tehát a három egyenes egy K pontban találkozik.

Az A-nál levő belső szöget és a másik két szögponthoz tartozó külső szögeket felező egyenesek egyenletei:

$$H_2 - H_3 = 0, \quad H_1 + H_3 = 0, \quad H_2 + H_1 = 0.$$

Minthogy

$$(H_2 - H_3) + (H_1 + H_3) - (H_2 + H_1)$$

azonosan eltünik, azért a három szögfelező egy K_1 pontban találkozik.

A K, K_1 és az utóbbihoz analog módon előállítható K_2, K_3 pontok mindegyike olyan, hogy a háromszög három oldalától (az előjelet nem tekintve) egyenlő távolságra van. Evvel a távolsággal a

pont körül mint középpont körül leírt kör nyilván a háromszögnek mindegyik oldalát érinti. Az így előállított négy kört a háromszög *érintőköreinek* vagy *beírt köreinek* nevezzük. Közülök csak a K pontnak megfelelő esik a háromszög belsejébe.

Az egyenesnek parameteres egyenletrendszerrel való jellemzése.

359. §. Valamely vonal úgy is jellemezhető, hogy pontjainak x, y koordinatáit, mint valamely pontról-pontra változó t mennyiség függvényeit fejezzük ki. A t változót *parameternek*, az

$$x = f_1(t), \quad y = f_2(t)$$

egyenleteket a vonal *parameteres egyenletrendszerének* mondjuk. Valamely pont akkor és csak akkor van a szóbanforgó vonalon, ha található oly szám, melyet t helyébe téve, $f_1(t)$ és $f_2(t)$ annak a pontnak koordinatáiba mennek át. (229. §.)

A vonalnak egyetlen $y = f(x)$ egyenlettel való ábrázolása tulajdonképpen a parameteres ábrázolásnak az a speciális esete, melyben parameternek az x abszcisszát választjuk; a parameteres egyenletrendszer egyik egyenletének $x=x$ tekintendő, a másiknak $y = f(x)$.

Az egyenes legegyszerűbb parameteres egyenletrendszerét a már ismételten szerepelt

$$x = x_0 + r\cos\varphi, \quad y = y_0 + r\sin\varphi$$

egyenletek alkotják. Az r parameter az egyenest leíró pontnak az egyenes $P_0 = (x_0, y_0)$ pontjától való távolságát jelenti (pozitiv vagy negativ előjellel aszerint, hogy az egyenesen milyen értelmű mozgás vezet P_0-ból P-be.)

360. §. Az e egyenesen parameternek a következő viszony is választható:

$$t = \frac{AP}{AB}.$$

Itt A és B (120. ábra) az egyenesnek két állandó (x_1, y_1), (x_2, y_2) pontját jelenti. A t meghatározásánál az AP és AB távolságok előjele is tekintetbe veendő. A t értéke tehát pozitiv vagy negativ aszerint, hogy P az A-nak ugyanazon oldalán van mint B, vagy pedig ellenkező oldalán.

Az egyenes bármely P pontjának egy és csak egy t érték felel meg. Viszont a t minden értékének az egyenesen egy és csak egy P pont felel meg. A

$$t = 0, \quad 1, \quad \infty$$

értékeknek rendre A, B és az egyenesnek végtelen pontja felel meg.

A t parameter értékéből a következő megfontolással kapjuk meg a megfelelő P pont x és y koordinatáit. Ha két egyenest egymással párhuzamos egyenesekkel átmetszünk, akkor az átmetszett egyenesek megfelelő szeletei egymással arányosak. Tehát a 120.

ábrában

$$M_1M : M_1M_2 = AP : AB,$$

azaz

$$(x-x_1) : (x_2-x_1) = t.$$

Innen

$$x - x_1 = t(x_2-x_1)$$

és

$$x = x_1 + t(x_2-x_1).$$

Éppen úgy

$$y = y_1 + t(y_2-y_1).$$

A szóban forgó parameter használatánál tehát az egyenes parameteres egyenletrendszere:

$$\begin{aligned} x &= x_1 + t(x_2-x_1) \\ y &= y_1 + t(y_2-y_1). \end{aligned} \qquad 1)$$

Ez az egyenletrendszer

$$\begin{aligned} x &= a + ht \\ y &= b + kt \end{aligned} \qquad 2)$$

alakú, hol a, b, h és k állandók, továbbá h és k közül legalább az egyik a zérustól különböző.

Fordítva minden 2) alakú egyenletrendszer, mint valamely egyenes parameteres egyenletrendszere fogható fel.

Ugyanis akárhogyan választjuk 2) alatt az a, b, h, k állandókat, mindig találhatunk a síkban két oly $A=(x_1, y_1)$, $B=(x_2, y_2)$ pontot, hogy

$$a = x_1, \quad b = y_1, \quad h = x_2 - x_1, \quad k = y_2 - y_1.$$

De akkor a 2) alatti egyenletrendszer éppen az A és B pontok által meghatározott egyenesnek az a parameteres egyenletrendszere, melyben

$$t = \frac{AP}{AB}.$$

Példák. 1. Az

$$x = 3 + 5t, \quad y = 7 + 2t$$

egyenletrendszer így írható

$$x = 3 + (8-3)t, \quad y = 7 + (9-7)t;$$

tehát az

$$A = (3, 7), \quad B = (8, 9)$$

pontok által meghatározott egyenest ábrázolja.

2. Az

$$x = 2, \quad y = 1 + 4t$$

egyenletrendszer az OY tengellyel párhuzamosan húzott egyenest ábrázol. A 0 és 1 parameterértékeknek megfelelő pontok

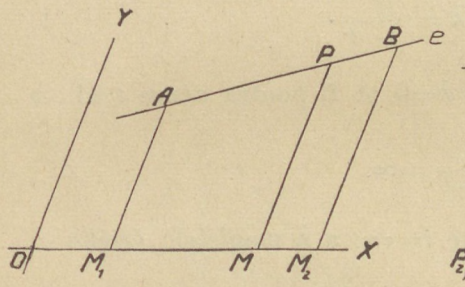
$$A = (2, 1), \quad B = (2, 5).$$

361. §. Az egyenesen a már említett parametereken kívül többször használatos a következő is:

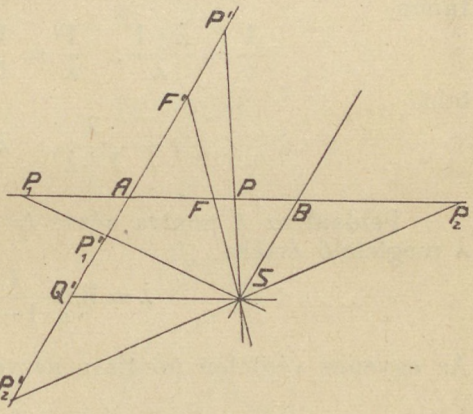
$$\lambda = \frac{AP}{PB}.$$

Ezt a P pontnak A-ra és B-re vonatkozó *távolsági viszonyának* nevezzük. Benne AP és PB nem a puszta hosszúságok mérőszámai, hanem pozitiv vagy negativ előjelűek aszerint, hogy a vonaldarabokon milyen értelmű mozgás vezet a kiindulópontból a végpontba.

Az egyenes bármely P pontjának egy meghatározott λ érték felel meg. Fordítva a λ minden értékének az egyenesen egy meghatározott P pont felel meg, melyet a következő módon kaphatunk meg (121. ábra). Az A és B pontokon keresztül két párhuzamos egyenest húzunk és mindegyiken megállapítjuk a haladás pozitiv értelmét, még pedig természetesen úgy, hogy e két egyenesnek pozitiv felei AB ugyanazon oldalán legyenek. A B-n keresztül húzott egyenesen S-et egyszersmindenkorra úgy állapítjuk meg, hogy $SB=1$ azaz $BS=-1$. Az A-n keresztül húzott egyenesre felrakjuk az $AP'=\lambda$ távolságot. A P-t úgy kell meghatároznunk, hogy



120. ábra.



121. ábra.

$$\frac{AP}{PB} = \lambda = \frac{AP'}{SB}$$

legyen. Ezt a követelést SP'-nek és AB-nek metszéspontja és csak ez elégíti ki. Vagyis P az AB-nek az a pontja, mely P'-nek az S centrumból való vetülete.

Ha λ pozitiv, akkor P' és S az AB-nek két különböző oldalán van, tehát P az A és B közé esik. Ha $\lambda=1$, akkor P éppen AB-nek F felezőpontjába esik. Ha $0<\lambda<1$, akkor P az A és F között van; ha $\lambda>1$, akkor P (úgy mint az ábrában) F és B közé esik.

Ha λ negativ, akkor P' és S az AB ugyanazon oldalán van; tehát P az egyenesnek vagy A-n, vagy B-n túl eső részére esik. Ha λ a 0 és -1 közé esik, akkor P' (az ábrában P_1') közelebb esik A-hoz, mint S a B-hez; ekkor tehát P az AB egyenesnek A-n túl eső részén van. Ha λ a -1 és $-\infty$ közé esik, akkor P (az ábrában P_2) az AB egyenesnek B-n túl eső részén van.

Ha $\lambda=\infty$, akkor P' a végtelenben és P a B-ben van. Ha $\lambda=-1$,

akkor $P'S$ (az ábrában $Q'S$) párhuzamos AB-vel; P-nek ekkor az AB végtelen pontja tekintendő.

362. §. A t és λ parameterek között egyszerű kapcsolat van. Az

$$AP + PB = AB$$

képletből ugyanis

$$1 + \frac{PB}{AP} = \frac{AB}{AP},$$

azaz

$$1 + \frac{1}{\lambda} = \frac{1}{t}.$$

Innen

$$\frac{1}{t} = \frac{\lambda+1}{\lambda}, \quad \frac{1}{\lambda} = \frac{1}{t} - 1 = \frac{1-t}{t};$$

tehát

$$t = \frac{\lambda}{1+\lambda}, \quad \lambda = \frac{t}{1-t}. \qquad 1)$$

Például az A pontra nézve $t=\lambda=0$. A B pontra nézve $t=1$; a λ megfelelő értéke

$$\lambda = \lim_{t=1} \frac{t}{1-t} = \infty.$$

Az egyenes végtelen pontjára nézve $t=\infty$; a λ megfelelő értéke

$$\lambda = \lim_{t=\infty} \frac{t}{1-t} = -1.$$

A t és λ közötti kapcsolat felhasználásával könnyen fejezhetjük ki az AB egyenes P pontjának koordinatáit mint λ függvényeit. Tudjuk ugyanis, hogy

$$x = x_1 + t(x_2 - x_1), \quad y = y_1 + t(y_2 - y_1),$$

hol (x_1, y_1) és (x_2, y_2) az A és B pontok koordinatái. Tehát a

$$t = \frac{\lambda}{1+\lambda}$$

kapcsolat felhasználásával

$$x = x_1 + \frac{\lambda}{1+\lambda}(x_2 - x_1) = \frac{(1+\lambda)x_1 + \lambda(x_2 - x_1)}{1+\lambda},$$

vagyis

$$x = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1+\lambda}, \quad y = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1+\lambda}. \qquad 2)$$

Ez az egyenesnek parameteres egyenletrendszere, ha parameternek λ-t választjuk.

Példák. 1. Az AB felezőpontjára nézve:

$$\lambda = 1, \quad x = \frac{x_1 + x_2}{2}, \quad y = \frac{y_1 + y_2}{2}.$$

2. *Az*

$$A = (x_1, y_1), \quad B = (x_2, y_2), \quad C = (x_3, y_3)$$

háromszögben (122. ábra) *a BC oldal F_1 felezőpontját A-val összekötő egyenesen meghatározandó az az S pont, melyre nézve*

$$\frac{AS}{SF_1} = 2.$$

Az F_1 koordinatái

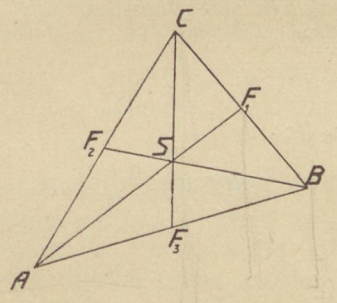
$$\xi_1 = \frac{x_2+x_3}{2}, \quad \eta_1 = \frac{y_2+y_3}{2}.$$

S koordinatái

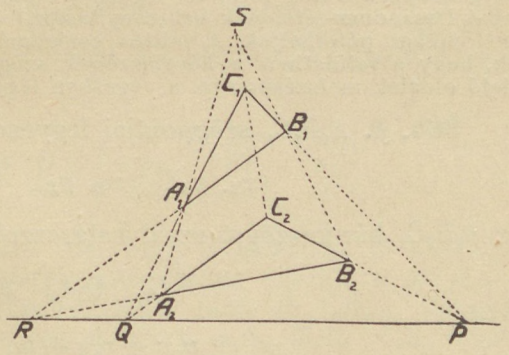
$$x = \frac{x_1+2\xi_1}{3}, \quad y = \frac{y_1+2\eta_1}{3},$$

vagyis

$$x = \frac{x_1+x_2+x_3}{3}, \quad y = \frac{y_1+y_2+y_3}{3}.$$



122. ábra.



123. ábra.

Ezek a kifejezések A, B és C koordinatáiban szimmetrikusak. Ennélfogva S a BF_2, CF_3 egyeneseken is rajta van és ezeken úgy van elhelyezve, hogy

$$\frac{BS}{SF_2} = 2, \quad \frac{CS}{SF_3} = 2.$$

Tehát *a háromszög szögpontjait a szemben levő oldalak felezőpontjaival összekötő egyenesek egy S pontban (a háromszög* ***súlypontjában****) találkoznak.*

Perspektiv háromszögek.

363. §. A következőkben két $A_1B_1C_1$ és $A_2B_2C_2$ háromszög alkatrészeit úgy gondoljuk egymásra vonatkoztatva, hogy az A_1, B_1, C_1 szögpontoknak rendre A_2, B_2, C_2 felelnek meg, a B_1C_1, C_1A_1, A_1B_1 oldalaknak pedig rendre B_2C_2, C_2A_2, A_2B_2. Ha az egymásnak megfelelő szögpontokat összekötő

$$A_1A_2, \quad B_1B_2, \quad C_1C_2$$

egyenesek egy S pontban találkoznak, akkor a két háromszögről azt mondjuk, hogy az S *perspektiv centrumra* nézve *perspektivek*. Ha az egymásnak megfelelő oldalak P, Q, R metszéspontjai egy s egyenesen vannak, akkor a két háromszögről azt mondjuk, hogy az s *perspektiv tengelyre* nézve perspektivek (123. ábra).

Ha két háromszögnek van perspektiv centruma, akkor perspektiv tengelyük is van; viszont perspektiv tengely létezése mindig maga után vonja perspektiv centrum létezését is (Desargues tétele).

E tétel értelmében nem kell a háromszögek perspektivitásának kétféle módját megkülönböztetnünk, hanem ha akár perspektiv centrumot, akár perspektiv tengelyt találunk, a két háromszöget röviden perspektivnek mondhatjuk.

A bebizonyításnál végzendő számításoknál föltehetjük, hogy a háromszögek szögpontjai és P, Q, R a végesben vannak. Az az eset, melyben vagy a szögpontok vagy a P, Q, R pontok közül egy vagy több a végtelenben van, mindig visszavezethető olyan esetre, melyben a szóbanforgó pontok végesek. Ha ugyanis két háromszögnek van egy S perspektiv centruma, akkor bármely α' képsíkon való vetületüknek szintén van perspektiv centruma; még pedig ez éppen S-nek vetülete. Ugyanez mondható a perspektiv tengelyről is. Tehát Desargues-tételének bebizonyításánál a két háromszöget bármely projekciójukkal pótolhatjuk. A vetítés centrumát és a képsíkot úgy választhatjuk, hogy a vetületben a háromszögek szögpontjai és az egymásnak megfelelő oldalak metszéspontjai a végesben legyenek.

364. §. $A_1B_1C_1$ szögpontjai legyenek:

$$(x_A, y_A), \quad (x_B, y_B), \quad (x_C, y_C).$$

Az $A_2B_2C_2$ háromszöget azzal határozzuk meg, hogy megadjuk a

oldalak
$$B_2C_2, \quad C_2A_2, \quad A_2B_2$$

$$u_1x + v_1y + w_1 = 0,$$
$$u_2x + v_2y + w_2 = 0,$$
$$u_3x + v_3y + w_3 = 0$$

egyenleteit. Ezeket röviden így is írjuk:

$$\alpha(x, y) = 0, \quad \beta(x, y) = 0, \quad \gamma(x, y) = 0.$$

Ha az

$$\alpha(x, y) = u_1x + v_1y + w_1$$

kifejezésben x és y helyébe pl. a B_1 pont koordinatáit helyettesítjük, a kapott számot α_B-vel jelöljük.

Annak feltételét, hogy a két háromszögnek legyen perspektiv centruma, a következő módon kapjuk meg. A

$$\beta(x, y) = 0, \quad \gamma(x, y) = 0$$

egyenesek A_2 metszéspontján keresztül menő bármely egyenes egyenlete

$$\mu\beta(x, y) + \nu\gamma(x, y) = 0$$

alakú, hol μ és ν állandók. Hogy az A_1A_2 egyenest kapjuk, a μ és ν együtthatókat a

$$\mu\beta_A + \nu\gamma_A = 0$$

egyenletnek megfelelően kell választanunk, mert ez fejezi ki azt, hogy A_1 a szóbanforgó egyenesen van. Innen

$$\mu : \nu = \gamma_A : -\beta_A.$$

A_1A_2 egyenlete tehát:

$$\gamma_A\beta(x, y) - \beta_A\gamma(x, y) = 0$$

vagy részletesen kiírva

$$(\gamma_A u_2 - \beta_A u_3)x + (\gamma_A v_2 - \beta_A v_3)y + \gamma_A w_2 - \beta_A w_3 = 0.$$

Hasonló alakúak B_1B_2 és C_1C_2 egyenletei. A három egyenes akkor találkozik egy S pontban, ha az egyenletek együtthatóiból alkotott determináns eltűnik. Ennek első oszlopa:

$$\gamma_A u_2 - \beta_A u_3,$$
$$\alpha_B u_3 - \gamma_B u_1,$$
$$\beta_C u_1 - \alpha_C u_2.$$

A másik két oszlopban az u-k helyébe v-k illetve w-k lépnek. A szóbanforgó determináns tehát a

$$\Delta = \begin{vmatrix} u_1 & v_1 & w_1 \\ u_2 & v_2 & w_2 \\ u_3 & v_3 & w_3 \end{vmatrix} \quad \text{és} \quad D = \begin{vmatrix} 0 & \gamma_A & -\beta_A \\ -\gamma_B & 0 & \alpha_B \\ \beta_C & -\alpha_C & 0 \end{vmatrix}$$

determinánsokból úgy állítható elő, hogy Δ oszlopait D soraival komponáljuk. Tehát a szóbanforgó determináns egyenlő a ΔD szorzattal. Itt Δ a zérustól különböző értékű, mert az $A_2B_2C_2$ háromszög oldalai nem találkoznak egy pontban. A_1A_2, B_1B_2, C_1C_2 tehát akkor és csak akkor találkoznak egy S pontban, ha

$$D = \gamma_A\alpha_B\beta_C - \beta_A\gamma_B\alpha_C$$

eltűnik.

Perspektiv *tengely* létezésének feltételét a következő módon kapjuk meg. A B_1C_1 egyenes tetszőleges pontjának koordinatái:

$$\frac{x_B + \lambda x_C}{1+\lambda}, \quad \frac{y_B + \lambda y_C}{1+\lambda}.$$

Ezen egyenes B_2C_2-vel való P metszéspontjának koordinatái kielégítik az $\alpha(x, y) = 0$ egyenletet. Ha a helyettesítést elvégezzük és $(1+\lambda)$-val szorzunk, a λ meghatározására a következő egyenletet kapjuk:

$$\alpha_B + \lambda\alpha_C = 0.$$

Innen

$$1 : \lambda = \alpha_C : -\alpha_B,$$

tehát P koordinatái

$$x_P = \frac{x_B\alpha_C - x_C\alpha_B}{\alpha_C - \alpha_B}, \quad y_P = \frac{y_B\alpha_C - y_C\alpha_B}{\alpha_C - \alpha_B}.$$

Hasonlóképpen fejezhetők ki Q és R koordinatái. A három pont akkor van egy egyenesen, ha

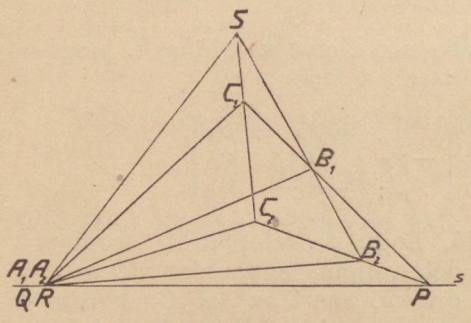
$$\begin{vmatrix} x_P & y_P & 1 \\ x_Q & y_Q & 1 \\ x_R & y_R & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Ha az első sort x_P és y_P közös nevezőjével, vagyis az $\alpha_C - \alpha_B$ különbséggel szorozzuk, a többi sorban pedig hasonló átalakítást végzünk, akkor ezt az egyenletet így is írhatjuk:

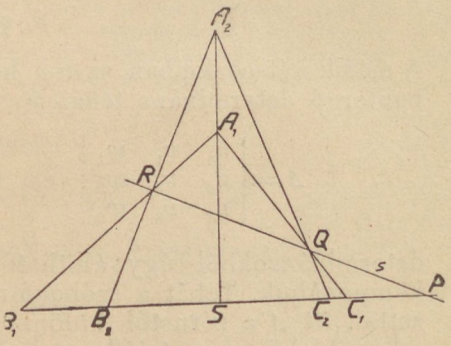
$$\begin{vmatrix} x_B\alpha_C - x_C\alpha_B & y_B\alpha_C - y_C\alpha_B & \alpha_C - \alpha_B \\ x_C\beta_A - x_A\beta_C & y_C\beta_A - y_A\beta_C & \beta_A - \beta_C \\ x_A\gamma_B - x_B\gamma_A & y_A\gamma_B - y_B\gamma_A & \gamma_B - \gamma_A \end{vmatrix} = 0.$$

A baloldalon álló determináns

$$\Delta' = \begin{vmatrix} x_A & y_A & 1 \\ x_B & y_B & 1 \\ x_C & y_C & 1 \end{vmatrix} \quad \text{és} \quad D' = \begin{vmatrix} 0 & \alpha_C & -\alpha_B \\ -\beta_C & 0 & \beta_A \\ \gamma_B & -\gamma_A & 0 \end{vmatrix}$$



124. ábra.



125. ábra.

szorzata, hol Δ' a zérustól különböző értékű. Tehát P, Q, R akkor és csak akkor van egy egyenesen, ha

$$D' = \alpha_C\beta_A\gamma_B - \alpha_B\beta_C\gamma_A$$

eltűnik. Minthogy D' a D-től csak előjelben különbözik, azért ezt a feltételt a $D=0$ alakban is kifejezhetjük.

Szóval akár perspektiv centrumnak, akár perspektiv tengelynek létezését a $D=0$ egyenlet fejezi ki. Tehát a kettő közül bármelyiknek létezése valóban a másikét is maga után vonja.

Hallgatagon föltettük, hogy $A_1B_1C_1$-nek egyetlen egy szögpontja vagy oldala sem esik össze a neki megfelelővel. Ha pl. A_1 összeesik A_2-vel, akkor A_1A_2 nem is jelent meghatározott egyenest. Azonban Desargues-tétele helyesen felfogva ekkor is megtartja érvényességét; még pedig ebben az esetben mindig van perspektiv tengely és mindig van oly pont, melyet perspektiv centrumnak tekinthetünk. Ekkor ugyanis (124. ábra) Q és R összeesik az $A_1=A_2$ ponttal. Tehát ennek a pontnak P-vel való összekötése perspektiv tengely. A B_1B_2 és C_1C_2 egyenesek S metszéspontja pedig úgy fogható fel, mint perspektiv centrum. Ez a felfogás lényegében annak felel meg, hogy A_1A_2-nek az egymással összeeső A_1 és A_2 pontoknak a mondott S-sel való összekötését tekintjük.

Éppen ilyen egyszerűen intézhető el az az eset, melyben B_1C_1 és B_2C_2 ugyanaz az egyenes (125. ábra).

II. Kettős viszony. Projektiv pontsorok és sugársorok.

A kettős viszony.

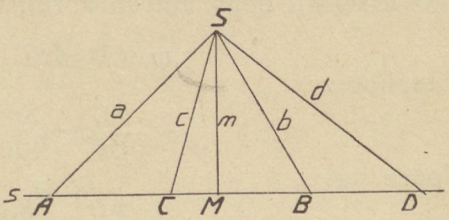
365. §. A $\lambda = \frac{AP}{PB}$ távolsági viszonyhoz rokon, de tőle mégis lényegesen különböző természetű a kettős viszony fogalma.

Egy egyenesen felvett *négyes pontcsoportnak*, vagyis az egyenes négy A, B, C, D pontjának *kettős viszonyán* az

$$\frac{AC}{CB} : \frac{AD}{DB}$$

hányadost értjük. Ezt így jelöljük: (A, B, C, D).

A távolsági viszony és a kettős viszony egymástól lényegesen különböző viselkedést mutat, ha az egyenes pontjait vetítjük. A $\lambda = \frac{AP}{PB}$ helyett általában más számot kapunk, ha a három pontot egy más egyenesen való centrális vetületével pótoljuk. Ellenben egy négyes pontcsoport kettős viszonya, mint majd kimutatjuk, a vetítésnél változatlan. Azaz a kettős viszony értéke nem változik meg, ha a négyes pontcsoportot egy másik egyenesen való vetületével pótoljuk. Ezt a tényt így szoktuk kimondani: A $\lambda = \frac{AP}{PB}$ értéke az A, B, P hármas pontcsoportnak egy *metrikus* tulajdonságát fejezi ki, az (A, B, C, D) kettős viszony értéke ellenben a négyes pontcsoportnak egy *projektiv* tulajdonságát.



126. ábra.

Ugyanis a projiciálásnál változatlanul maradó tulajdonságokat *projektiv* tulajdonságoknak, az idomok oly tulajdonságait ellenben, melyek a projiciálásnál megváltozhatnak, *metrikusoknak* mondjuk. Például két egyenes merőleges volta ezeknek egy metrikus tulajdonsága, mert merőlegesek vetítése általában nem vezet megint merőleges egyenesekre. Ellenben két háromszögnek perspektiv volta ezeknek egy projektiv tulajdonsága, mert két perspektiv háromszögnek bármely pontból bármely képsíkra való vetítése megint két perspektiv háromszöget ad.

366. §. Annak kimutatását, hogy a kettős viszony értéke a projiciálásnál nem változik meg, a következő tétel bebizonyításával kezdjük meg:

Ha valamely S ponton keresztül menő négy a, b, c, d egyenest átmetszünk egy s egyenessel (126. ábra), *akkor az A, B, C, D metszéspontok kettős viszonya egyenlő a következő hányadossal:*

$$\frac{\sin(ac)}{\sin(cb)} : \frac{\sin(ad)}{\sin(db)}. \qquad 1)$$

Itt pl. (ac) az a és c egyenesek által bezárt szöget jelenti. Hogy (ac) mérésénél az egyeneseken a pozitiv értelmet hogyan állapítjuk meg, az nem jön tekintetbe. Ha ugyanis pl. c értelmét ellenkezőre változtatjuk, akkor (ac) és (cb) mindegyike π-vel változik meg, vagyis mindkettőnek sinusa az előjelét változtatja. De két sinus előjelének megváltoztatásánál a szóban forgó kifejezés változatlan marad.

Továbbá az sem jő tekintetbe, hogy a síkban hogyan állapítjuk meg a forgás pozitiv értelmét. Ugyanis ennek megváltoztatásánál csak a négy sinus előjele változik meg. De evvel az 1) alatti kifejezés értékén nem történik változás.

A szóban forgó tétel bebizonyításánál tehát föltehetjük, hogy az a, b, c, d sugarakon pozitiv értelmű haladás vezet S-ből az A, B, C, D pontokba. Továbbá föltehetjük,hogy A-nak az s egyenesen való pozitiv értelmű haladásánál SA pozitiv értelemben forog S körül. Ekkor tehát

$$m \,.\, AC = SA \,.\, SC \sin (ac),$$

hol m az S pontnak s-től való SM távolságát jelenti, ezt pozitivnak véve. A képlet helyessége onnan világos, hogy mindkét oldalon az ACS háromszög kétszeres területe áll, ezt pozitivnak vagy negativnak véve aszerint, hogy milyen körüljárású a háromszög. Hasonlóképpen

$$m \,.\, CB = SC \,.\, SB \sin (cb).$$

Ennélfogva

$$\frac{AC}{CB} = \frac{SA}{SB} \frac{\sin (ac)}{\sin (cb)}.$$

Éppen úgy

$$\frac{AD}{DB} = \frac{SA}{SB} \frac{\sin (ad)}{\sin (db)}.$$

Tehát valóban

$$\frac{AC}{CB} : \frac{AD}{DB} = \frac{\sin (ac)}{\sin (cb)} : \frac{\sin (ad)}{\sin (db)}.$$

A jobboldalon álló kifejezést *az S-en keresztül menő a, b, c, d sugarak kettős viszonyának* mondjuk és így jelöljük: (a, b, c, d).

Az eredményt tehát így is fejezhetjük ki: *Ha valamely sugársort átmetszünk egy nem ebbe a sugársorba tartozó s egyenessel, akkor a sugársor bármely négy sugarának kettős viszonya egyenlő a megfelelő négy metszéspont kettős viszonyával.*

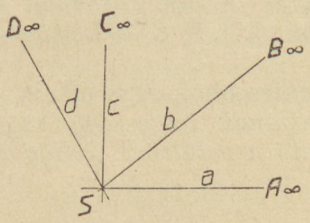
Más szóval: *Ha valamely pontsornak pontjait összekötjük egy nem ebbe a pontsorba tartozó S ponttal, akkor a pontsor bármely négy pontjának kettős viszonya egyenlő a megfelelő négy sugár kettős viszonyával.*

367. §. Eddig a négy pontot, melynek kettős viszonyát vizsgáltuk, véges egyenesen választottuk. Hasonlóképpen arról a sugársorról, melyben négy sugár kettős viszonyát meghatároztuk, föltételeztük, hogy sorozója a végesben van. De ezeket a megszorításokat elejthetjük, ha a kettős viszony fogalmát alkalmasan általánosítjuk.

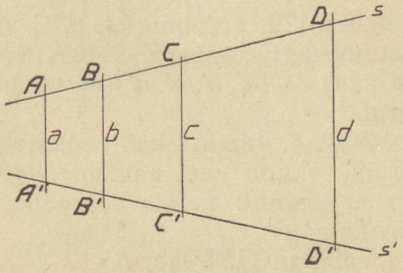
Ha a sík végtelenben levő egyenesének négy $A_\infty, B_\infty, C_\infty, D_\infty$ pontjáról van szó, akkor ezeket összekötjük a sík valamely véges

S pontjával (127. ábra). Az így nyert a, b, c, d sugarak kettős viszonyát nevezzük egyszersmind az adott pontok kettős viszonyának. Az S választásának e kettős viszony értékére nincs befolyása, mert (a, b, c, d) csak a négy sugár irányától függ.

Ha oly sugársor négy sugaráról van szó, melynek sorozója a végtelenben van, vagyis (128. ábra), ha a, b, c, d egymással párhuza-



127. ábra.



128. ábra.

mosak, akkor a négy egyenest átmetsszük egy s egyenessel. Az A, B, C, D metszéspontok kettős viszonyát nevezzük egyszersmind a, b, c, d kettős viszonyának is. Ha s-et egy más s' átmetszővel pótoljuk, akkor

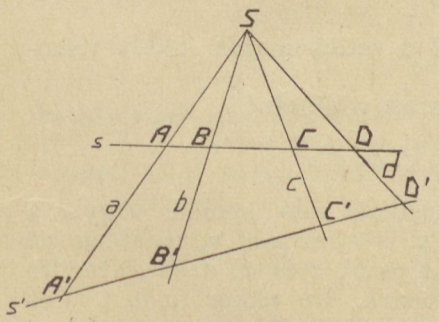
$$\frac{AC}{CB} = \frac{A'C'}{C'B'}, \quad \frac{AD}{DB} = \frac{A'D'}{D'B'},$$

tehát

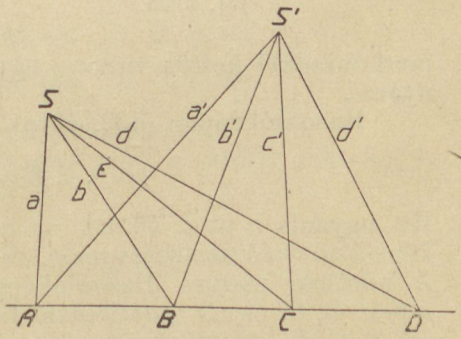
$$(A, B, C, D) = (A', B', C', D').$$

Vagyis az átmetsző választása a kettős viszonyra nem gyakorol befolyást.

A kettős viszony általánosítása úgy történt, hogy az előbbi § végén kimondott eredmény akkor is igaz marad, ha az ott emlí-



129. ábra.



130. ábra.

tett négyes pontcsoport a végtelenben levő egyenesen van, vagy az ott említett négy sugár a végtelenben találkozik.

368. §. Az előzmények után szinte magától értetődő a következő két tétel helyessége: *Ha egy sugársor négy sugarát a sík két különböző egyenesével átmetsszük, akkor a négy-négy metszéspont kettős viszonya egyenlő.* Vagyis (a 129. ábrában)

$$(A, B, C, D) = (A', B', C', D').$$

Ha egy pontsornak négy pontját a síknak vagy a térnek két különböző pontjával kötjük össze, akkor az így nyert négy-négy sugár kettős viszonya ugyanaz. Vagyis (a 130. ábrában)

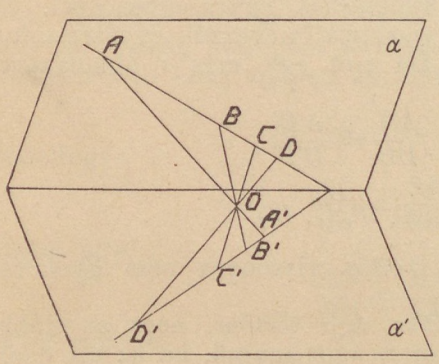
$$(a, b, c, d) = (a', b', c', d').$$

Valóban a 129. ábrában (A, B, C, D) és (A', B', C', D') egyaránt egyenlő az átmetszett sugarak kettős viszonyával. A 130. ábrában pedig (a, b, c, d) és (a', b', c', d') egyaránt egyenlő A, B, C, D kettős viszonyával.

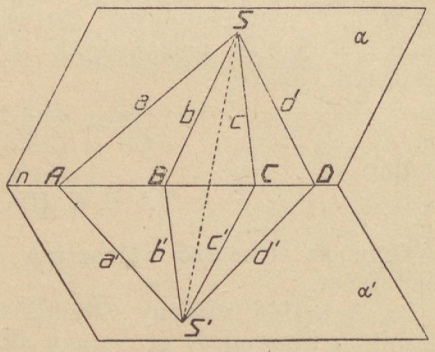
369. §. Ha a síkot valamely O centrumból egy másik síkra vetítjük, akkor *egy pontsor négy pontjának vagy egy sugársor négy sugarának kettős viszonya egyenlő a vetületek kettős viszonyával.*

Valóban (131. ábra)

$$(A, B, C, D) = (A', B', C', D'),$$



131. ábra.



132. ábra.

mert mindkét kettős viszony egyenlő a vetítősugarak kettős viszonyával.

Hasonlóképpen (132. ábra) sugarak vetítésénél

$$(a, b, c, d) = (a', b', c', d').$$

Ha ugyanis n az α síknak az α' képsíkon való nyoma, vagyis a képsíkkal való metszésvonala, akkor a és a' az n-et ugyanabban az A pontban metszi. Hasonlóképpen b és b', c és c', d és d' rendre n-nek B, C és D pontjaiban találkoznak. De akkor (a, b, c, d) és (a', b', c', d') egyaránt egyenlő az (A, B, C, D) kettős viszonnyal.

A kettős viszony változása az elemek permutálásánál.

370. §. Négy pont vagy négy sugár kettős viszonya attól függ, hogy az elemeket milyen sorrendben soroljuk fel. De a négy elem 24 sorrendjének nem felel meg csupa egymástól különböző kettős viszony.

Annak vizsgálatánál, hogy az elemek különböző sorrendjének megfelelő kettős viszonyok között milyen kapcsolat van, egy pontsor négy pontjának esetére szorítkozhatunk. Valóban, ha egy sugársorban pl. az (a, b, c, d) és (a, c, b, d) kettős viszonyok közötti kapcsolatról van szó, akkor a sugársort átmetsszük egy egyenessel. Ha ez a, b, c, d-t A, B, C, D-ben metszi, akkor

$$(a, b, c, d) = (A, B, C, D), \quad (a, c, b, d) = (A, C, B, D);$$

tehát (a, b, c, d) és (a, c, b, d) között ugyanaz a kapcsolat van, mint (A, B, C, D) és (A, C, B, D) közt.

I. *Egy egyenes négy pontjának kettős viszonya nem változik, ha két pontot egymással felcserélünk és a másik két pontot is egymással fölcseréljük.*

Vagyis:

$$(A, B, C, D) = (B, A, D, C) = (C, D, A, B) = (D, C, B, A).$$

Valóban

$$(A, B, C, D) = \frac{AC}{CB} : \frac{AD}{DB} = \frac{AC \,.\, DB}{CB \,.\, AD},$$

$$(B, A, D, C) = \frac{BD}{DA} : \frac{BC}{CA} = \frac{BD \,.\, CA}{DA \,.\, BC}.$$

Itt $AC \,.\, DB$ és $BD \,.\, CA$ a tényezők sorrendjén kívül csak annyiban különböznek egymástól, hogy mindkét tényező előjele ellenkezőre van változtatva. Ugyanez igaz a $CB \,.\, AD$ és $DA \,.\, BC$ szorzatokra nézve is. Tehát (A, B, C, D) és (B, A, D, C) valóban egymással egyenlők.

Ugyanígy bizonyítható be (A, B, C, D)-nek a másik két kettős viszonnyal való egyenlősége.

A bebizonyított tétel értelmében a négy pont bármely sorrendjéhez található egy A-val kezdődő oly sorrend, melyre nézve a kettős viszonynak értéke ugyanaz, mint az adott sorrendre nézve. Ennélfogva csak az

$$(A, B, C, D), \quad (A, C, D, B), \quad (A, D, B, C),$$

$$(A, B, D, C), \quad (A, C, B, D), \quad (A, D, C, B)$$

kettős viszonyok kapcsolatát kell megvizsgálnunk.

II. *A viszonyított pontok felcserélésénél a kettős viszony az eredeti érték reciprokjába megy át.*

Valóban

$$(A, B, C, D) = \frac{AC}{CB} : \frac{AD}{DB}, \quad (A, B, D, C) = \frac{AD}{DB} : \frac{AC}{CB}$$

egymásnak reciprok értékei.

III. *Ha két négyes csoport egymástól csak abban különbözik, hogy a második és harmadik elem fel van cserélve, akkor a megfelelő kettős viszonyok összege* 1.

Például (A, B, C, D) és (A, C, B, D) összege 1. Valóban, ha rövidség kedvéért

$$AB = b, \quad AC = c, \quad AD = d,$$

akkor

$$(A, B, C, D) = \frac{AC \,.\, DB}{CB \,.\, AD} = \frac{AC \,.\, (DA+AB)}{AD \,.\, (CA+AB)} = \frac{c(b-d)}{d(b-c)},$$

$$(A, C, B, D) = \frac{b(c-d)}{d(c-b)} = \frac{b(d-c)}{d(b-c)}.$$

Tehát

$$(A, B, C, D) + (A, C, B, D) = \frac{c(b-d) + b(d-c)}{d(b-c)} = 1.$$

Ha $(ABCD)$ értékét k-val jelöljük, akkor a mondottak szerint:

$$(A, B, C, D) = k, \qquad (A, B, D, C) = \frac{1}{k},$$

$$(A, C, B, D) = 1 - k, \qquad (A, C, D, B) = \frac{1}{1-k},$$

$$(A, D, C, B) = 1 - \frac{1}{1-k} = \frac{k}{k-1}, \qquad (A, D, B, C) = \frac{k-1}{k}.$$

A pontok permutálásánál a kettős viszony csak ezt a hat értéket veheti fel.

Ha két négyes csoportra nézve

$$(A, B, C, D) = (A', B', C', D'),$$

akkor egyszersmind

$$(A, C, B, D) = (A', C', B', D'), \quad (A, B, D, C) = (A', B', D', C), \text{ s. í. t.}$$

371. §. Azt láttuk, hogy

$$(A, B, C, D)(A, B, D, C) = 1. \qquad 1)$$

Ez a képlet a következő módon általánosítható:

$$(A, B, C, D)(A, B, D, E) = (A, B, C, E). \qquad 2)$$

Ez közvetlenül világos, ha tekintetbe vesszük a kettős viszony értelmezését. Ha $E=C$, akkor ez a képlet az 1) alattiba megy át.

Harmonikus csoportok.

372. §. Ha valamely pontsor A, B, C, D pontjaira nézve

$$(A, B, C, D) = -1,$$

akkor azt mondjuk, hogy ez a négy pont *harmonikus pontcsoportot* alkot. D-t az A, B, C pontokhoz tartozó *negyedik harmonikusnak* mondjuk.

Például valamely AB egyenes vonaldarab végpontjai, ennek F felezőpontja és az egyenes Q_∞ pontjára nézve az

$$\frac{AF}{FB} = 1, \quad \frac{AQ_\infty}{Q_\infty B} = -1$$

képletekből

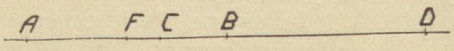
$$(A, B, F, Q_\infty) = -1.$$

Ez a négy pont tehát harmonikus csoportot alkot.

Ha A, B, C, D harmonikus csoportot alkot, akkor

$$\frac{AD}{DB} = -\frac{AC}{CB}.$$

Minthogy innen $\frac{AC}{CB}$ és $\frac{AD}{DB}$ ellenkező előjelűek, azért C és D közül (133. ábra) az egyik A és B között, a másik AB-n kívül van. A D pont A és B közül ahhoz van közelebb, melyhez C közelebb esik. Vagyis C és D az F-nek ugyanazon az oldalán van. Ha például C az A és B között van, akkor minél közelebb esik $\frac{AC}{CB}$ az 1-hez, annál közelebb van $\frac{AD}{DB}$ a negatív egységhez. Azaz minél közelebb van C az F-hez, annál közelebb van D a végtelenhez.



133. ábra.

Ha C összeesik A-val vagy B-vel, akkor a negyedik harmonikusnak szintén A, illetve B tekintendő.

Egy sugársor oly négy egyenesét, melyekre nézve

$$(a, b, c, d) = -1,$$

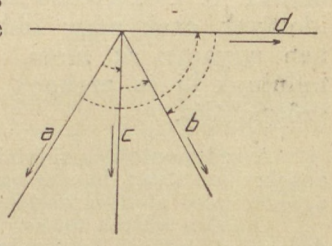
harmonikus sugárcsoportnak nevezzük.

Ha pl. (134. ábra) a c és d egyenesek a-nak és b-nek szögfelezői, akkor (ac) és (cb) egymással egyenlők, (db) pedig (ad)-ből úgy kapható, hogy ezt π-ből kivonjuk és az így nyert különbség előjelét ellenkezőre változtatjuk. Ennélfogva

$$\frac{\sin(ac)}{\sin(cb)} = 1, \quad \frac{\sin(ad)}{\sin(db)} = -1$$

és

$$(a, b, c, d) = -1.$$



134. ábra.

A kettős viszonyra nézve ismeretes általános tételekből világos a következő állítások helyessége:

Harmonikus sugárcsoportnak egy egyenessel való metszése harmonikus pontcsoportra, harmonikus pontcsoportnak egy ponttal való összekötése harmonikus sugárcsoportra vezet.

Ha a síkot más síkra vetítjük, harmonikus pontcsoportnak vagy sugárcsoportnak vetülete szintén harmonikus pontcsoport vagy sugárcsoport.

Azt, hogy A, B, C, D harmonikus pontcsoportot alkotnak, így is fejezzük ki: *A, B és C, D harmonikus pontpárok.* Hasonló kifejezésmódot használunk harmonikus sugárcsoportokra nézve is.

Annak megítélésénél, hogy A, B és C, D harmonikus pont-

párok-e vagy sem, nem jön tekintetbe, hogy a két pár közül melyiket tekintjük elsőnek, melyiket másodiknak. Valóban

$$(A, B, C, D) = (C, D, A, B);$$

ha az egyik kettős viszony értéke -1, a másiké is az.

Továbbá nem jön tekintetbe, hogy az A, B vagy C, D pontpárban melyiket tekintjük első pontnak, melyiket másodiknak. Valóban A és B felcserélésénél, vagy C és D felcserélésénél a négyes csoport kettős viszonya az eredeti értékének reciprokjába megy át. Amde -1 reciprok értéke is -1.

373. §. Szándékunk most már oly tételekkel foglalkozni, melyek a negyedik harmonikus szerkesztésére módot nyujtanak. Ezek a tételek a teljes négyszögre és a teljes négyoldalra vonatkoznak.

A *teljes négyszög* úgy keletkezik, hogy a síkban felveszünk négy oly pontot, melyek között nem található három egy egyenesben levő pont és ezt a négy pontot minden lehető módon párjával egyenesekkel összekötjük. A négy pontot a teljes négyszög *szögpontjainak*, az összekötésük által nyert hat egyenest a teljes négyszög *oldalainak* nevezzük.

A *teljes négyoldal* előállításánál a sík oly négy egyeneséből indulunk ki, melyek között nincsen három egy pontban találkozó. Ennek a négy egyenesnek meghatározzuk a hat metszéspontját. A négy egyenest *oldalaknak*, a hat metszéspontot *szögpontoknak* mondjuk.

A szóban forgó idomok nem tévesztendők össze az *egyszerű négyszöggel* illetve *az egyszerű négyoldallal*. *Egyszerű négyszög* úgy keletkezik, hogy négy pont között megállapítunk bizonyos sorrendet és a megállapított A, B, C, D sorrendben minden pontot összekötünk a *ciklikusan* reá következővel, vagyis az elsőt a másodikkal, s. í. t., végre az utolsót az elsővel. Az így keletkezett idomnak csak négy oldala van. Az *egyszerű négyoldal* lényegében ugyanez az idom, csakhogy előállításánál a négy oldalból indulunk ki és ezeknek határozzuk meg ciklikus rendben a négy szögpontját.

A szögpontok és oldalak választása nincs véges pontokra és véges egyenesekre szorítva; hanem egy vagy két szögpont, továbbá az utóbbi esetben az összekötő oldal a végtelenben is lehet.

Oldalon akár a teljes, akár az egyszerű idomoknál nem véges vonaldarabokat értünk, hanem két szögpontot összekötő egyenest a maga egész kiterjedésében.

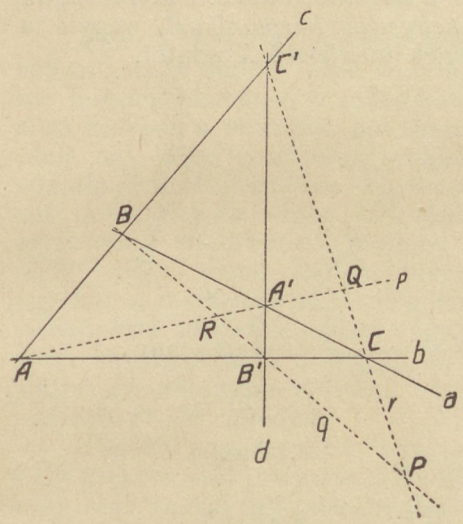
374. §. Legyenek (135. ábra) a, b, c, d valamely teljes négyoldal oldalai. Az a, b, c oldalak magukban véve háromszöget alkotnak. Ennek szögpontjait a szokott módon A, B, C-vel jelöljük. A teljes négyoldal többi három szögpontja d-nek az a, b, c oldalakkal való A', B', C' metszéspontjai. Az A és A', B és B', C és C' szögpontokat *egymással szemben levőknek* vagy *átelleneseknek* mondjuk. Az átellenes szögpontokat összekötő p, q, r egyeneseket a teljes négyoldal *diagonálisainak* nevezzük. Ezeknek P, Q, R metszéspontjait *diagonálispontoknak* mondjuk.

A teljes négyoldal bármely diagonálisán a rajta levő két szögpont és két diagonálispont harmonikus csoportot alkot.

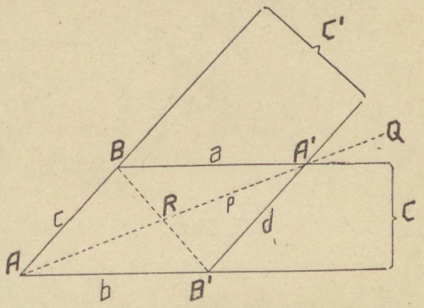
Például a p diagonálison A, A', Q és R harmonikus csoportot alkotnak.

Ez közvetlenül világos, ha a CC' diagonális a végtelenben van (136. ábra). Ekkor ugyanis C és C' a végtelenben levő pontok. Ennélfogva a C-ben találkozó a és b oldalak egymással párhuzamosak, meg a C'-ben találkozó c és d oldalak is egymással párhuzamosak. Vagyis a és b, meg c és d egy parallelogramma átellenes oldalai. AA' és BB' ennek a parallelogrammának (a szó elemi értelmében vett) diagonálisai. R az AA' vonaldarab közepe, Q az AA' egyenesnek végtelen pontja. De akkor A, A' és Q, R valóban harmonikus pontpárok.

Minden más eset tárgyalásánál a vizsgálandó teljes négyszög α síkját a tér valamely O pontjából más α' síkra vetítjük. A α' képsíkot mindig úgy választhatjuk, hogy a CC' diagonális vetülete α' végtelenben fekvő egyenese legyen. De akkor a teljes négyoldal vetületében a p diagonális vetületén levő két szögpont és két diagonális pont — az előbb mondottak értelmében — harmonikus csoportot alkot. Tehát az eredeti idomban is a p diagonálison levő két szögpont és két diagonálispont kettősviszonyának értéke -1.



135. ábra.



136. ábra.

375. §. Legyenek (137. ábra) A, B, C, D valamely teljes négyszög szögpontjai. A, B, C magukban véve háromszöget alkotnak. Ennek oldalait a szokott módon a, b, c-vel jelöljük. A teljes négyoldal többi oldalát D-nek az A, B, C szögpontokkal való összeköttetései alkotják. Ezeket a', b', c'-vel jelöljük. Az a és a', b és b', c és c' oldalakat *szemben levőknek* vagy átelleneseknek mondjuk.

Ha az átellenes oldalakat egymással metsszük, az így előállított P, Q, R pontokat a teljes négyszög *diagonálispontjainak* mondjuk. A diagonálispontokat összekötő p, q, r egyeneseket a *diagonálisoknak* nevezzük.

A teljes négyszögnek valamely diagonális pontjában találkozó két oldal és két diagonális harmonikus csoportot alkot.

Például a P-ben találkozó a, a', q és r egyenesek harmonikus csoportot alkotnak.

Ennek bebizonyításánál abból a teljes négyoldalból indulunk ki, melynek oldalai

$b, b', c, c'.$

Ennek a teljes négyoldalnak szögpontjai

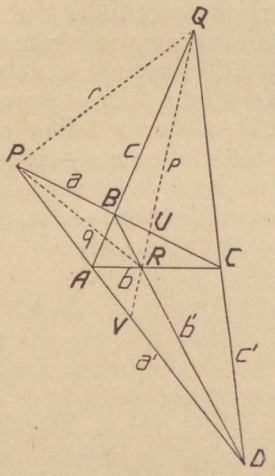
Q és R, A és D, C és B,

diagonálisai tehát

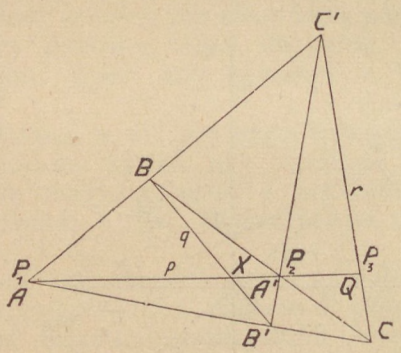
QR, AD, BC.

A QR diagonálison levő szögpontjai Q és R. Ezen a diagonálison levő diagonális pontok az ábrában U-val és V-vel vannak jelölve. A teljes négyoldalra vonatkozólag bebizonyított tétel értelmében U, V és Q, R harmonikus pontpárok. De ekkor ezeknek P-vel való a, a' és r, q összekötései harmonikus sugárpárok.

376. §. Az egyenes három P_1, P_2, P_3 pontjához a következő módon szerkesztjük meg *a negyedik harmonikust*, vagyis a követelésnek megfelelő X pontot.



137. ábra.



138. ábra.

$$(P_1, P_2, P_3, X) = -1$$

Tudjuk, hogy a teljes négyoldal bármely diagonálisán a rajta levő két szögpont és két diagonálispont harmonikus csoportot alkot. Azért az adott egyenest egy teljes négyoldal p diagonálisának tekintjük, P_1-et és P_2-t az A és A' szögpontoknak, P_3-at pedig a Q diagonális pontnak. A negyedik harmonikus szerkesztése akkor azonos feladat a p-re eső második diagonálispont meghatározásával.

A szerkesztés végrehajtásánál (138. ábra) az $A=P_1$ és $A'=P_2$ pontokon keresztül tetszés szerint húzunk egy-egy oldalt, a $Q=P_3$ ponton keresztül pedig egy r diagonálist. A húzott három egyenes metszésponjai megadják a teljes négyoldalnak B, C és C' szögpontjait. Az r-en kapott két szögpontnak A-val és A'-val való összekötése megadja a teljes négyoldalnak még hiányzó két oldalát. Ezek metszéspontja a teljes négyoldalnak még hiányzó B' hatodik szögpontja. A BB' diagonálisnak p-vel való metszéspontja megadja X-et.

377. §. Egy sugársor három s_1, s_2, s_3 sugarához a következő módon szerkesztjük meg az

$$(s_1, s_2, s_3, x) = -1$$

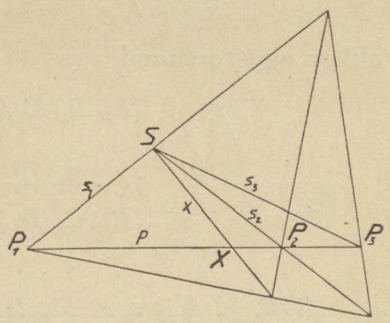
követelésnek megfelelő x negyedik harmonikust.

A sugársort átmetsszük egy p egyenessel (139. ábra). Az s_1, s_2, s_3 sugaraknak a p egyenessel való P_1, P_2, P_3 metszéspontjaihoz megszerkesztjük az X negyedik harmonikust. X-nek a sugársor S sorozójával való összekötése megadja s_1, s_2, s_3-hoz a keresett x negyedik harmonikust. A szerkesztés különösen egyszerűen alakul, ha az X meghatározásánál szerkesztendő négyoldalban s_1-et és s_2-t, mint oldalakat felhasználjuk.

Lényegében ugyanarra a szerkesztésre vezet annak a tételnek felhasználása, hogy teljes négyszög valamely diagonális pontjában találkozó két oldal és két diagonális harmonikus csoportot alkot.

Projektiv vonatkozás.

378. §. Ha két pontsor, két sugársor, vagy egy pontsor és egy sugársor között olyan vonatkozást állapítunk meg, hogy az első sor minden elemének a másodikban egy és csak egy elem felel meg, viszont a második sor minden elemének az elsőben egy és csak egy elem felel meg: akkor e vonatkozást *kölcsönösen egyértelmű-nek* mondjuk. Az olyan kölcsönösen egyértelmű vonatkozást, melynél bármely négy elem kettős viszonya egyenlő a megfelelő négy elem kettős viszonyával, *projektivitásnak* vagy *projektiv vonatkozásnak* nevezzük. A projektiv vonatkozású sorokat röviden *projektiveknek* mondjuk.



139. ábra.

Például egy sugársor és valamely s egyenessel való metszete (126. ábra), vagy más szóval egy pontsor és valamely S ponttal való összekötése egymással projektiv. Ennél a projektiv vonatkozásnál az egymásnak megfelelő elemek egymáshoz *illeszkednek*, azaz minden pont rajta van a neki megfelelő sugáron.

Egy sugársornak két s és s' egyenessel való metszése (129. ábra) két projektiv pontsorra vezet. Ezekben két egymásnak megfelelő pont a sugársor ugyanazon egyenesének s-sel illetve s'-sel való metszéspontja.

Egy pontsornak két S és S' ponttal való összekötése (130. ábra) két projektiv sugársorra vezet. Ezekben két egymásnak megfelelő sugár a pontsor ugyanazon pontjának S-sel, illetve S'-sel való összekötő egyenese.

Ezek a példák csak legegyszerűbb esetei a projektiv vonatkozásnak. A példaképpen említett esetekben a pontsort és a sugársort, a két pontsort, illetve a két sugársort nemcsak projektivnek, hanem egyszersmind *perspektiv helyzetűnek* is mondjuk. Szóval: egy pontsort és egy sugársort, melyek elemei között kölcsönösen egyértelmű vonatkozás van megállapítva, *projektivnek* és *perspektiv helyzetűnek* akkor mondunk, ha megfelelő elemeik egymáshoz illeszkednek; két kölcsönösen egyértelmű vonatkozásban levő pontsort projektivnek és perspektiv helyzetűnek akkor mondunk, ha mint egy sugársornak két egyenessel való metszései foghatók fel; két

kölcsönösen egyértelmű vonatkozásban levő sugársorra ezt a elnevezést akkor használjuk, ha mint egy pontsornak két ponttal való összekötései foghatók föl.

Ha két sor (akár két pontsor, akár két sugársor, akár egy pontsor és egy sugársor) *egyenkint egy harmadikkal projektiv, akkor egymással is projektiv.*

Valóban, ha pl. az

$$A_1, B_1, C_1, D_1, \ldots, X_1, \ldots$$
$$A_2, B_2, C_2, D_2, \ldots, X_2, \ldots$$
$$A, B, C, D, \ldots, X, \ldots$$

pontsorokban

$$(A_1, B_1, C_1, D_1) = (A, B, C, D) \quad \text{és} \quad (A_2, B_2, C_2, D_2) = (A, B, C, D),$$
$$\ldots \qquad\qquad \ldots$$
$$(A_1, B_1, C_1, X_1) = (A, B, C, X) \quad \text{és} \quad (A_2, B_2, C_2, X_2) = (A, B, C, X),$$
$$(B_1, C_1, D_1, X_1) = (B, C, D, X) \quad \text{és} \quad (B_2, C_2, D_2, X_2) = (B, C, D, X),$$
$$\ldots \qquad\qquad \ldots$$

akkor egyszersmind

$$(A_1, B_1, C_1, D_1) = (A_2, B_2, C_2, D_2),$$
$$\ldots$$
$$(A_1, B_1, C_1, X_1) = (A_2, B_2, C_2, X_2),$$
$$(B_1, C_1, D_1, X_1) = (B_2, C_2, D_2, X_2),$$
$$\ldots.$$

379. §. *Két sor között mindig egy és csak egy oly projektiv vonatkozás állapítható meg, melynél három meghatározott A, B, C elemnek három meghatározott A', B', C' elem felel meg.*

Tartsunk szem előtt pl. két pontsort. Ha megszabjuk, hogy A-nak A', B-nek B', C-nek C' feleljen meg, akkor bármely X-hez azt a X'-et kell megfelelőnek tekintenünk, melyre nézve

$$(A, B, C, X) = (A', B', C', X').$$

Tehát legfeljebb egy olyan projektivitás lehetséges, melynél A, B, C és A', B', C' egymásnak megfelelnek.

De még *egy* ily projektivitás létezése is csak akkor világos, ha az

$$(A, B, C, X) = (A', B', C', X'), \quad (A, B, C, Y) = (A', B', C', Y'), \ldots \quad 1)$$

egyenlőségekből egyszersmind

$$(X, Y, Z, U) = (X', Y', Z', U') \quad 2)$$

is következik.

A 2) alatti képlet levezetésénél vegyük tekintetbe, hogy 1) alatt bármely képletben a baloldalon álló négy elem tetszésünk szerint permutálható, ha csak a jobboldalon hasonló permutálást végzünk. Ha ezt tekintetbe vesszük, akkor egyszersmind a szorzásnál

$$(A, B, X, C)(A, B, C, Y) = (A', B', X', C')(A', B', C', Y'),$$

azaz (371. §)

$$(A, B, X, Y) = (A', B', X', Y').$$

Innen és a hasonló

$$(A, B, X, Z) = (A', B', X', Z')$$

képletből

$$(A, X, Y, B)(A, X, B, Z) = (A', X', Y', B')(A', X', B', Z'),$$

azaz

$$(A, X, Y, Z) = (A', X', Y', Z').$$

Végre ebből és a hasonló

$$(A, X, Y, U) = (A', X', Y', U')$$

képletből csakugyan

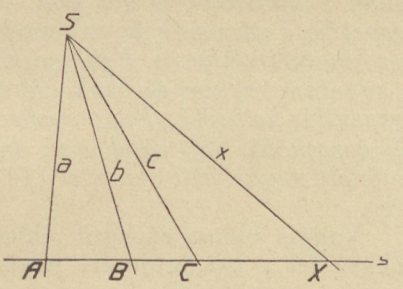
$$(X, Y, Z, A)(X, Y, A, U) = (X', Y', Z', A')(X', Y', A', U'),$$

azaz

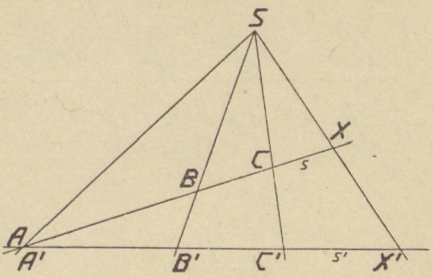
$$(X, Y, Z, U) = (X', Y', Z', U')$$

következik.

380. §. *Ha egy pontsor három pontja egy vele projektiv sugársor három megfelelő sugarán van, akkor a pontsor a sugársorral perspektiv helyzetű.*



140. ábra.



141. ábra.

Valóban (140. ábra), ha az A, B, C pontok rendre a megfelelő a, b, c sugarakon vannak és X-nek x felel meg, akkor

$$(A, B, C, X) = (a, b, c, x).$$

Ennek a követelésnek az SX egyenes és csak ez felel meg. Tehát valóban a pontsor minden pontjának a sugársornak rajta keresztül menő sugara felel meg.

381. §. *Két projektiv pontsor akkor és csak akkor perspektiv helyzetű, ha a sorozók metszéspontjában két egymásnak megfelelő pont fedi egymást.*

Közvetlenül világos, hogy perspektiv helyzetű, projektiv pontsorokban a két sorozó metszéspontjában valóban két egymásnak megfelelő pont fedi egymást. Csak az szorul bebizonyításra, hogy fordítva, valahányszor (141. ábra) az s és s' sorozók metszéspontjában két egymásnak megfelelő A és A' pont fedi egymást, mind annyiszor a két projektiv pontsor egymással perspektiv fekvésű. A bebizonyításnál jelentsenek B és B', valamint C és C' egymásnak megfelelő pontokat; a BB' és CC' egyenesek metszéspontját S-sel jelöljük. A két projektiv pontsor bármely két egymásnak meg-

felelő pontja úgy fogható fel, mint valamely az S-en keresztül húzott egyenesnek s-sel és s'-sel való metszete. Ha ugyanis az X-nek megfelelő X' pont nincs rajta SX-en, akkor ez az egyenes s'-et egy X'-től különböző $\bar{X}$ pontban metszi. Minthogy A, B, C, X és $A', B', C', \bar{X}$ egy sugársor ugyanazon négy sugarának s-sel és s'-sel való metszéspontjai, azért

$$(A, B, C, X) = (A', B', C', \bar{X}).$$

Másrészt X és X' csak úgy lehetnek egymásnak megfelelő pontok, ha

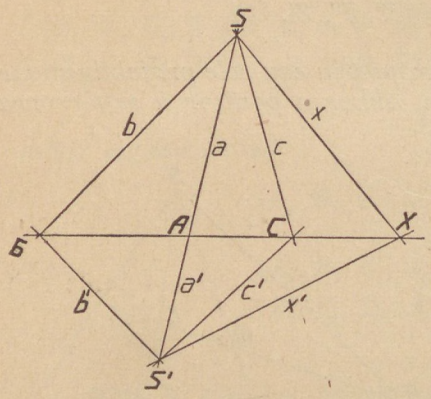
$$(A, B, C, X) = (A', B', C', X').$$

Innen

$$(A', B', C', \bar{X}) = (A', B', C', X').$$

De ez lehetetlen, ha $\bar{X}$ és X' az s' egyenesnek két különböző pontja.

Tehát, ha s és s' metszéspontjában két egymásnak megfelelő A és A' pont fedi egymást, akkor a két projektiv pontsor valóban mint ugyanannak a sugársornak két s és s' egyenessel való metszése fogható fel. Ennek a sugársornak S sorozóját a két pontsor *perspektiv centrumának* nevezzük.



142. ábra.

Hasonlóképpen: *Két projektiv sugársor akkor és csak akkor perspektiv helyzetü, ha a sorozókat összekötő SS' egyenesen két megfelelő sugár fedi egymást* (142. ábra).

Vagyis ekkor és csak ekkor fogható fel a két projektiv sugársor mint ugyanannak a pontsornak S-sel és S'-sel való összekötése. Ennek a pontsornak s sorozóját a két sugársor *perspektiv tengelyének* nevezzük.

382. §. Két

$$A, B, C, D, \ldots \quad \text{és} \quad A', B', C', D', \ldots$$

projektiv pontsornak vagy két

$$a, b, c, d, \ldots \quad \text{és} \quad a', b', c', d', \ldots$$

projektiv sugársornak ugyanaz a sorozója is lehet. Ekkor a két pontsort vagy sugársort *együttes fekvésünek* mondjuk.

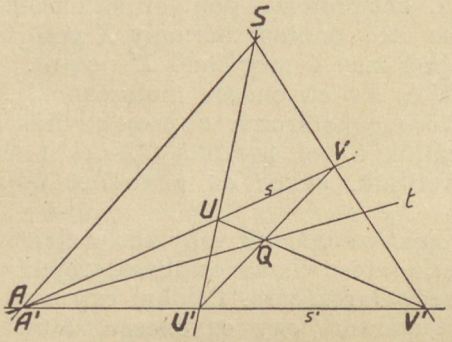
Két együttes fekvésű pontsor ugyanannak az egyenesnek pontjaiból áll, csakhogy ezeket két különböző módon fogjuk föl. Valahányszor az egyenes valamely pontjáról szólunk, mindig ki kell tüntetni, hogy mint az első, vagy mint a második pontsornak elemét fogjuk föl. Ugyanaz mondható két együttes fekvésű sugársorról is.

Megfelelő elemek szerkesztése.

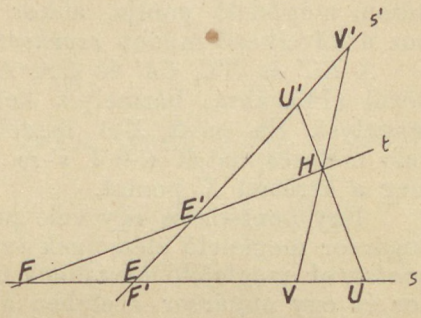
383. §. *Különböző sorozókon levő két projektiv pontsorhoz mindig található oly t egyenes, hogy valahányszor U és U', V és V'*

egymásnak megfelelő pontok, az UV' és VU' egyenesek metszéspontja α t egyenesen van. Ezt a *t* egyenest *projektiv tengelynek* mondjuk.

A projektiv tengely létezése közvetlenül világos, ha a két projektiv pontsor egyszersmind perspektiv helyzetű (143. ábra). Ha ugyanis az *s* és *s'* sorozók metszéspontját *A*-val (és egyszersmind *A'*-val) jelöljük, továbbá a perspektiv centrumot *S*-sel, végre *UV'* és *VU'* metszéspontját *Q*-val: akkor *A*, *Q* és *S* az *U*, *U'*, *V*, *V'* pon-



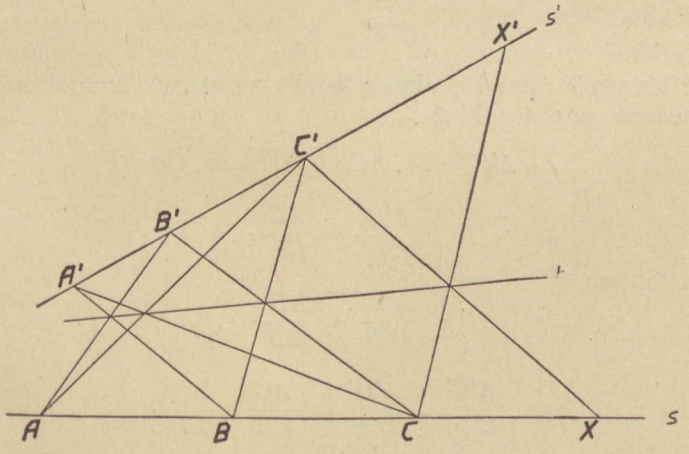
143. ábra.



144. ábra.

tok által meghatározott teljes négyszög diagonálispontja. Tehát *Q* rajta van az *s*, *s'* és *AS* egyenesekhez tartozó negyedik harmonikuson. Ez a keresett *t projektiv tengely*.

Ha a két pontsor nincsen perspektiv helyzetben (144. ábra), akkor az *s* és *s'* sorozók metszéspontját *E*-vel vagy *F'*-fel jelöljük



145. ábra.

aszerint, hogy *s* vagy *s'* pontjának tekintjük. Az *E*-nek *s'*-en *E'*, a *F'*-nek *s*-en *F* felel meg. Ha az egymással projektiv

$$E, F, U, V, \ldots \quad \text{és} \quad E', F', U', V', \ldots$$

pontsorok pontjait összekötjük *U'*-val, illetve *U*-val, akkor két projektiv sugársort kapunk. Ezek perspektiv fekvésűek, mert *UU'*-n két egymásnak megfelelő sugár fedi egymást. A két perspektiv fekvésű

sugársor perspektiv tengelyének magában kell foglalnia az egymásnak megfelelő $U'E$ és UE' egyenesek E' metszéspontját, továbbá az egymásnak megfelelő $U'F$ és UF' egyenesek F metszéspontját. Tehát ez a perspektiv tengely nem lehet más mint $E'F$. A két perspektiv sugársor egymásnak megfelelő $U'V$ és UV' sugarának ezen a perspektiv tengelyen kell egymást metszenie. Tehát $E'F$ a két adott projektiv pontsorra nézve valóban *projektiv tengely*.

384. §. Ha A, B, C és A', B', C' két projektiv pontsornak három-három megfelelő pontja, akkor az első pontsor bármely X pontjához a következő módon *szerkesztjük meg* a megfelelő X' pontot.

A BC' és $B'C$, CA' és $C'A$, AB' és $A'B$ egyenesek metszéspontjai közül (145. ábra) bármelyik kettő meghatározza a projektivitás t tengelyét. Ha most X-et összekötjük C'-vel, továbbá $C'X$-nek t-vel való metszéspontját C-ből s'-re vetítjük, akkor ez a vetület adja meg a keresett X' pontot.

Egy pontsor és egy vele projektiv sugársor, vagy két projektiv sugársor megfelelő elemeinek szerkesztése visszavezethető projektiv *pontsorok* megfelelő elemeinek meghatározására. Például egy pontsor és egy sugársor esetében a sugársort egy egyenessel átmetszük és így egy vele perspektiv fekvésű, projektiv pontsorral pótoljuk.

Hasonló pontsorok. Egybevágó sugársorok.

385. §. Ha két pontsor pontjai úgy vannak kölcsönösen egyértelműen egymásra vonatkoztatva, hogy bármely két U, V pontra és a megfelelő U', V' pontokra nézve

$$U'V' = k \,.\, UV,$$

hol a k tényező állandó, akkor a két pontsort hasonlónak mondjuk. Hasonló pontsorokban

$$A'C' = k \,.\, AC, \quad C'B' = k \,.\, CB;$$

tehát

$$\frac{A'C'}{C'B'} = \frac{AC}{CB}.$$

Hasonlóképpen

$$\frac{A'D'}{D'B'} = \frac{AD}{DB}.$$

Tehát

$$\frac{A'C'}{C'B'} : \frac{A'D'}{D'B'} = \frac{AC}{CB} : \frac{AD}{DB}.$$

Vagyis a hasonlóság a projektivitásnak egyik speciális esete.

Ha V a végtelenbe távozik, akkor az

$$U'V' = k \,.\, UV$$

képlet értelmében V' szintén a végtelenbe távozik. Tehát hasonló pontsorokban a végtelenben levő pontok egymásnak megfelelő pontok.

Fordítva, két olyan projektiv pontsor, melyekben a végtelen pontok egymásnak megfelelnek, mindig *hasonló*.

Valóban, ha Q_∞-nek Q'_∞ felel meg, akkor bármely három A, B, X pontra és a megfelelő pontokra nézve

$$\frac{X'A'}{A'B'} : \frac{X'Q'_\infty}{Q'_\infty B'} = \frac{XA}{AB} : \frac{XQ_\infty}{Q_\infty B},$$

azaz

$$\frac{X'A'}{A'B'} : -1 = \frac{XA}{AB} : -1.$$

Más szóval

$$\frac{X'A'}{A'B'} = \frac{XA}{AB}.$$

Ha rövidség kedvéért $\frac{A'B'}{AB} = k$, akkor innen $X'A' = k \,.\, XA$, vagy másképpen írva $A'X' = k \,.\, AX$.

Tehát (ha X és X' helyébe az U és U', illetve a V és V' pontokat tesszük)

$$U'A' = k \,.\, UA, \quad A'V' = k \,.\, AV;$$

ennélfogva

$$U'V' = U'A' + A'V' = k(UA + AV) = k \,.\, UV.$$

A $k = \pm 1$ esetben a hasonlóságot *egybevágóságnak* nevezzük, mert ekkor megfelelő pontok által határolt egyenesdarabok egyenlő hosszúak.

386. §. Ha két sugársor sugarai úgy vannak kölcsönösen egyértelműen egymásra vonatkoztatva, hogy bármely két-két megfelelő u, v és u', v' sugárra nézve az (u, v) szög vagy egyenlő (u', v')-vel, vagy pedig a két szög mindig csak előjelben különbözik, akkor a két sugársort *egybevágónak* vagy *kongruensnek* mondjuk. Az ily sugársorok nyilván mindig projektivek.

TIZENEGYEDIK FEJEZET.

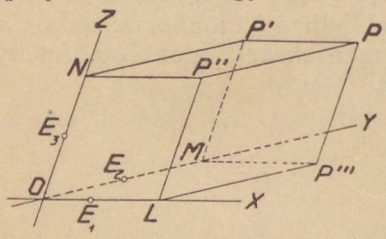
A SÍK ÉS AZ EGYENES A TÉRBEN.

Térbeli parallelkoordináták.

387. §. Az analitikus geometria módszerei a síkról átvihetők a térre.

Valamint a síkban, úgy a térben is bármely P pont helyzetét számokkal jellemezhetjük. A jellemzésnek legegyszerűbb módja a következő (146. ábra):

Valamely szabadon választott, de állandó O ponton keresztül három oly szintén állandó OX, OY, OZ egyenest húzunk, melyek párjával három egymástól különböző OYZ, OZX, OXY síkot határoznak meg. O-t *kezdőpontnak*, az OX, OY, OZ egyeneseket *koordinata-tengelyeknek*, az általuk meghatározott síkokat *koordinatasíkoknak* nevezzük. Mindegyik koordinatatengelyen pozitiv és negativ haladást különböztetünk meg. A pozitiv értelmű haladást, úgy mint a síkbeli geometriában, a tengelyek E_1, E_2, E_3 egységpontjaival tüntetjük fel.



146. ábra.

A tér P pontján keresztül a koordinatasíkokkal párhuzamos síkokat fektetünk. A koordinatasíkok és a P-n keresztül fektetett síkok által bezárt *parallelepipedon* élei közül az egymással párhuzamos

$$OL,\ MP''',\ NP'',\ P'P$$

élek közös mérőszámát x-szel,

$$OM,\ NP',\ LP''',\ P''P$$

közös mérőszámát y-nal, végre

$$ON,\ LP',\ MP',\ P'''P$$

közös mérőszámát z-vel jelöljük. Ezeket a számokat bizonyos előjelekkel látjuk el. Például x pozitiv, ha P és E_1 az OYZ síknak

ugyanazon az oldalán van, ellenben negativ, ha P és E_1 ennek a síknak két különböző oldalán van. Vagyis x pozitiv vagy negativ aszerint, hogy OX-en milyen értelmű haladás vezet O-ból L-be.

Ily módon a tér minden P pontjának három meghatározott szám felel meg. Ezeket a P pont *parallelkoordinatáinak* vagy DESCARTES-*féle koordinatáinak* mondjuk. Az x-et *abszcisszának*, az y-t *ordinatának*, a z-t *kótának* nevezzük.

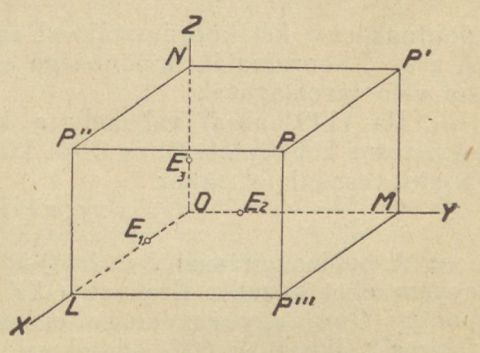
Bármely három x, y, z valós számhoz a térben egy és csak egy oly P pont tartozik, melynek ezek a számok a parallelkoordinatái. Azt a pontot, melynek parallelkoordinatái pl. 3, 8, 4, rendesen így jelöljük: (3, 8, 4). Csak kivételesen fordulunk a hosszadalmasabb ($x=3$, $y=8$, $z=4$) jelöléshez.

388. §. Ha OX, OY, OZ párosával merőlegesek egymásra, akkor az $OXYZ$ rendszert *derékszögűnek*, minden más esetben *ferdeszögűnek* mondjuk. Tárgyalásainkban ott, ahol az ellenkező nincs kimondva, *derékszögű* koordinatákra szorítkozunk. A koordinatatengelyek irányát és pozitiv értelmét rendesen a 147. ábrában látható módon választjuk, de bármily más választást is megengedünk.

Derékszögű koordinatarendszerben bármelyik koordinatatengely merőleges a másik kettőt tartalmazó koordinatasíkra.

Ez közvetlenül világos az egyenes és sík merőlegességének következő értelmezéséből:

Ha a tér valamely σ síkjának és e egyenesének metszéspontján keresztül a σ síkban húzható egyenesek közül legalább kettő merőleges e-re, akkor a többi is olyan. Ebben az esetben azt mondjuk, hogy *e és σ egymásra merőlegesek; e-t a σ normálisának*, σ-t pedig az *e normálsíkjának* nevezzük.



147. ábra.

Adott σ síkra a tér bármely pontjából egy és csak egy normálist bocsáthatunk. Ha σ egyik normálisát ismerjük, akkor az evvel párhuzamos egyenesek alkotják σ-nak többi normálisát.

Adott e egyenesre a tér bármely pontján keresztül egy és csak egy normális síkot bocsáthatunk. Ha e egyik normálsíkját ismerjük, az evvel párhuzamos síkok alkotják e-nek többi normálsíkját.

Ha a tér P pontjából valamely σ síkra bocsátott merőleges a σ-t P_0-ban metszi, P_0P-t a P és σ egymástól való *merőleges távolságának* mondjuk. Ha röviden pont és sík távolságáról beszélünk, mindig ez a *merőleges* távolság értendő.

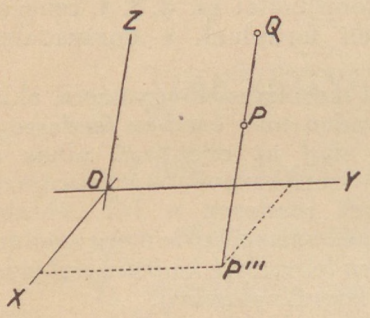
Derékszögű koordinaták esetében ama négy vonaldarab közül, melyeknek közös mérőszámát x-szel jelöltük, $P'P$ éppen a P pontnak az OYZ síktól való merőleges távolsága. Hasonló mondható a másik két koordinatáról is.

389. §. Akár derékszögű, akár ferdeszögű rendszerben a koordinatasíkok pontjaira nézve az egyik koordinata zérus. Például OYZ pontjaira nézve és csak ezekre nézve $x = 0$. A koordinatatengelyek

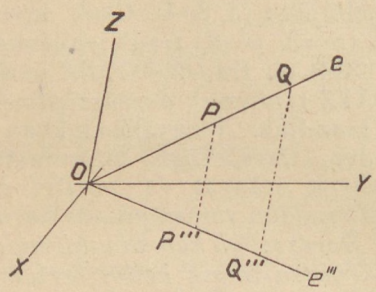
pontjaira nézve két koordinata zérus. Például OX pontjaira nézve $y=z=0$. A kezdőpontra nézve $x=y=z=0$.

Azokra a pontokra nézve, melyek egy az OYZ-vel párhuzamos síkon vannak, x-nek ugyanaz az értéke van. Például az OX tengelynek egységpontján keresztül OYZ-vel párhuzamosan fektetett sík pontjaira nézve és csak ezekre nézve $x=1$.

Ha (148. ábra) a $P=(x, y, z)$ és $Q=(\xi, \eta, \zeta)$ pontokat összekötő PQ egyenes párhuzamos OZ-vel, akkor x egyenlő ξ-vel, y pedig η-val. Mindkét pontnak első két koordinatája azonos annak a P'''



148. ábra.



149. ábra.

pontnak első két koordinatájával, melyben PQ az OXY síkot metszi. A z és ζ koordináták különbsége egyenlő P-nek és Q-nak egymástól való távolságával.

Ha (149. ábra) valamely a kezdőponton keresztül húzott e egyenesen két egymástól és O-tól különböző $P=(x, y, z)$, $Q=(\xi, \eta, \zeta)$ pontot veszünk fel, akkor

$$x : y : z = \xi : \eta : \zeta.$$

A bebizonyításnál P-n és Q-n keresztül az OZ-vel párhuzamos egyeneseket húzunk. Ezeknek OXY síkkal való P''' és Q''' metszéspontjai O-val egy egyenesbe esnek, t. i. az OZ-n és e-n keresztül fektetett síknak az OXY síkkal való e''' metszésvonalába.

Az OPP'' és OQQ''' háromszögek hasonlósága miatt

$$P'''P : Q'''Q = OP : OQ,$$

vagyis

$$z : \zeta = OP : OQ.$$

Ha még rövidség kedvéért $OP : OQ = t$, akkor innen

$$z = \zeta t.$$

Hasonlóképpen $x=\xi t$, $y=\eta t$; tehát valóban

$$x : y : z = \xi : \eta : \zeta.$$

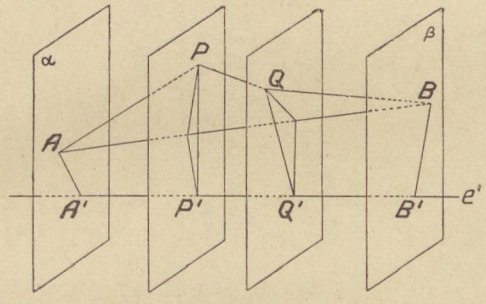
Egyenesre vagy síkra való derékszögű vetítés.

390. §. Ha a tér A pontján keresztül (150. ábra) valamely e' egyenesre merőleges síkot fektetünk, ennek az α *vetítő siknak* az

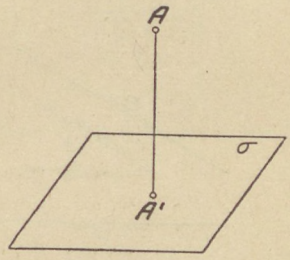
e' egyenessel való A' metszéspontjáról azt mondjuk, hogy A-nak az e' *egyenesen való derékszögű vetülete* vagy *orthogonális projekciója.* (Rövidség kedvéért a «derékszögű» jelzőt többnyire elhagyjuk.) Valamely AB egyenes vonaldarab vetületén az A és B vetületei által határolt $A'B'$ vonaldarabot értjük.

A vetítendő pontokon át fektetett α, β vetítő síkokat ama pontokból a e'-re merőlegesen bocsátott *vetítő sugarakkal* is pótolhatjuk. Ezeknek talppontjai ugyanazok az A', B' pontok, mint amelyekben α, β az e' egyenest metszi. Ennélfogva az e'-vel *egy síkban* levő AB-nek esetében $A'B'$ ugyanaz az egyenesdarab, melyet már a síkbeli geometriában az e' egyenesen való vetületnek neveztünk.

Az egyenesre való vetítéstől megkülönböztetendő valamely σ síkra való derékszögű vetítés (151. ábra). A-nak a σ *síkra vetített derékszögű vetületén* vagy *orthogonális projekcióján* az A-ból a σ síkra merőlegesen bocsátott AA' egyenesnek (normálisnak) A' talp-



150. ábra.



151. ábra.

pontját értjük. Ha valamely idom minden pontját σ-ra vetítjük, az egyes pontok vetületeinek összessége alkotja az idom vetületét.

A síkra való derékszögű vetítés a 346. §-ban említett *centrális* vetítésnek az a határesete, melynél a vetítés centruma a σ síkra merőleges egyeneseknek a végtelenben fekvő közös pontja.

A 147. ábrában ama négy vonaldarab közül, melyeknek közös mérőszámát x-szel jelöltük, PP a P-nek az OYZ síktól való merőleges távolsága; OL e távolságnak az OX tengelyre vetett derékszögű vetülete; MP''' és NP''' a $P'P$-nek az OX tengelyen keresztül menő OXY és OZX koordinatasíkokra eső derékszögű vetületei. OL más felfogásban egyszersmind a kezdőpont és a P által határolt OP egyenesdarabnak az OX tengelyen való vetülete.

391. §. Az egyenesre való vetítésre nézve a síkban a következő két tételt találtuk (170. §):

1. *Valamely e egyenesen levő AB egyenesdarabnak az e' egyenesre eső vetületének mérőszáma*

$$AB \cos \vartheta.$$

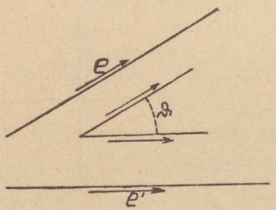
Itt ϑ az e és e' hajlásszögét jelenti.

2. *Ha két A és B pontot az AB egyenesdarabbal és még valamely törött vonallal is összekötünk, akkor AB vetületének mérőszámát úgy is meghatározhatjuk, hogy a törött vonal egyes részeit vetítjük és vetületeik mérőszámait összeadjuk.*

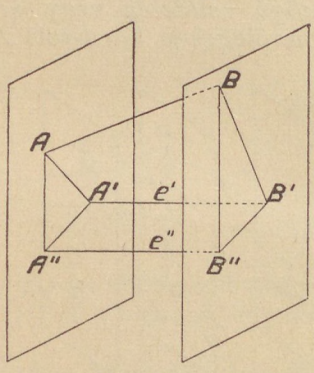
A második tételről közvetlenül világos, hogy a térben is igaz (150. ábra). Hogy az első tétel a térben szintén érvényes, azt a következő meggondolások mutatják.

A tér két e és e' egyenesének *hajlásszögét* úgy határozzuk meg, hogy mindegyiken megállapítjuk a haladás pozitiv értelmét, azután a tér valamely szabadon választott pontján keresztül a két egyenessel párhuzamos és velük egyenlő értelmű egyeneseket húzunk (152. ábra). Ezeknek a most már egy síkban fekvő egyeneseknek hajlásszögét nevezzük egyszersmind az eredeti egyenesek hajlásszögének is. Két egyenes hajlásszöge nem változik, ha őket a térnek bármely két más, velük párhuzamos és velük egyenlő értelmű egyenesével helyettesítjük.

Továbbá, ha AB-t két egymással párhuzamos és egyenlő értelmű



152. ábra.



153. ábra.

e' és e'' egyenesre vetítjük, akkor (153. ábra) az $A'B'$ és $A''B''$ vetületek egymással egyenlők. Mindkettő egyenlő az A és B pontokon keresztül e'-re, tehát egyszersmind e''-re, merőlegesen fektetett vetítő síkoknak egymástól való távolságával.

A mondottak értelmében a vetítésnél e'-t oly vele párhuzamos és egyenlő értelmű egyenessel pótolhatjuk, mely a vetítendő AB-vel egy síkban van. Evvel sem a ϑ szöget, sem a vetület mérőszámát nem változtatjuk meg. Az új egyenesre való vetítésnél már tudjuk, hogy a vetület mérőszáma csakugyan $AB \cos \vartheta$, tehát ez a szorzat adja meg az eredeti e' egyenesre eső projekció mérőszámát is.

Vektor hosszúsága és iránya.

392. §. A vetítésről mondottak alkalmazást találnak a vektorokra vonatkozó feladatok megoldásánál. *Vektoron*, mint tudjuk, oly egyenesdarabot értünk, melynek hosszúságán kívül iránya és értelme is érdekel.

A térben valamely egyenes irányát és értelmét az *irányszögekkel* jellemezhetjük, vagyis azokkal az α, β, γ szögekkel, melyeket az egyenes (helyesebben mondva, a kezdőponton keresztül vele egyenlő értelemben húzott párhuzamos) a koordinatatengelyekkel bezár. Az α, β, γ szögek helyett rendesen cosinusaikat adjuk meg; ezeket *iránycosinusoknak* nevezzük.

A P_0P vektor r hosszúságából és α, β, γ irányszögeiből, meg a

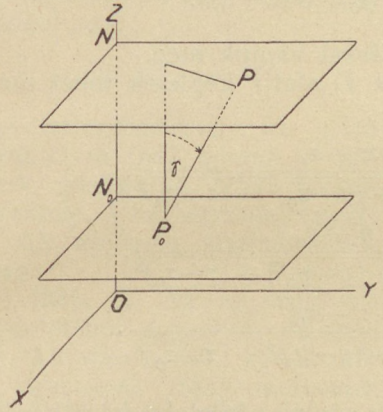
$$P_0 = (x_0, y_0, z_0)$$

pontnak koordinatáiból a P *végpont* x, y, z *koordinatáit* a következő módon kapjuk meg.

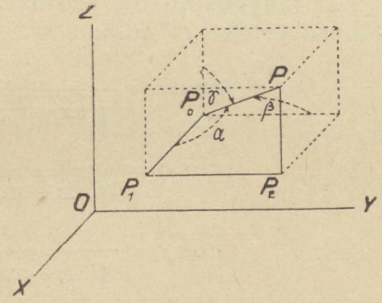
A 154. ábrában P_0P-nek az OZ tengelyen való vetülete

$$N_0N = ON - ON_0 = z - z_0.$$

A vetítésről szóló első tétel szerint e vetület mérőszáma egyenlő a vetített vonaldarab r mérőszámának és a γ irányszög cosinusá-



154. ábra.



155. ábra.

nak szorzatával. Hasonló meggondolások végezhetők a másik két tengelyre eső projekciókra nézve. Tehát:

$$x - x_0 = r\cos\alpha, \quad y - y_0 = r\cos\beta, \quad z - z_0 = r\cos\gamma. \qquad 1)$$

Innen P koordinatái:

$$x = x_0 + r\cos\alpha, \quad y = y_0 + r\cos\beta, \quad z = z_0 + r\cos\gamma. \qquad 2)$$

Ha fordítva P_0 és P koordinatáiból P_0P *hosszát és iránycosinusait* kell meghatároznunk, akkor az 1) alatti egyenleteken kívül még egy egyenletre van szükségünk. Erre az egyenletre a vetítésre vonatkozó második tétel vezet.

A 155. ábrában a $P_0P_1P_2P$ törött vonal szögpontjai:

$$P_0 = (x_0, y_0, z_0), \quad P_1 = (x, y_0, z_0), \quad P_2 = (x, y, z_0), \quad P = (x, y, z);$$

vagyis minden pont a megelőzőből csak egy koordinata megváltoztatásával van előállítva. A törött vonal P_0P_1, P_1P_2, P_2P részei rendre egy-egy koordinatatengellyel párhuzamosak, tehát P_0P-vel az α, β, γ szögeket zárják be. Az egyes részek mérőszámai:

$$x - x_0, \quad y - y_0, \quad z - z_0,$$

a P_0P egyenesen való vetületeik mérőszámai pedig:

$$(x - x_0)\cos\alpha, \quad (y - y_0)\cos\beta, \quad (z - z_0)\cos\gamma.$$

A vetítésre vonatkozó második tétel szerint e három vetület összege egyenlő a törött vonal végpontjai által határolt egyenes vonaldarab P_0P-n való vetületének mérőszámával. E vetület maga a P_0P egyenesdarab. A vetítésre vonatkozó második tétel ily módon az

$$r = (x-x_0)\cos\alpha + (y-y_0)\cos\beta + (z-z_0)\cos\gamma \qquad 3)$$

képletre vezet.

Ha itt mindkét oldalon r-rel szorzunk és még az 1) alatti képleteket is tekintetbe vesszük, akkor azt találjuk, hogy

$$r^2 = (x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + (z-z_0)^2. \qquad 4)$$

Az r értékét innen négyzetgyökvonással kapjuk meg.

Az iránycosinusok számára az 1) alatti képletek most már a következő értékeket adják:

$$\cos\alpha = \frac{x-x_0}{\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2}},$$

$$\cos\beta = \frac{y-y_0}{\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2}},$$

$$\cos\gamma = \frac{z-z_0}{\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2}}.$$

Ha P_0 a kezdőpontba esik, akkor a talált képletek a következőkbe mennek át:

$$x = r\cos\alpha, \quad y = r\cos\beta, \quad z = r\cos\gamma$$

és fordítva

$$r = \sqrt{x^2+y^2+z^2},$$

$$\cos\alpha = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}, \quad \cos\beta = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}, \quad \cos\gamma = \frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}.$$

A gömb egyenlete. Az egyenes iránycosinusainak összefüggése.

393. §. Ha a $P_0 = (x_0, y_0, z_0)$ pont körül r sugárral gömböt írunk le, akkor minden pontjának x, y, z koordinatái kielégítik az

$$(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + (z-z_0)^2 = r^2 \qquad 1)$$

egyenletet. Minden más pontra nézve ellenben a baloldalon álló kifejezés értéke nagyobb vagy kisebb, mint az adott r-nek négyzete.

Ha még zérusra redukálunk, az 1) alatti egyenletet így is írhatjuk:

$$(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + (z-z_0)^2 - r^2 = 0. \qquad 2)$$

Ezt az egyenletet a P_0 körül r sugárral leírt *gömb egyenletének* nevezzük.

A kezdőpont körül a hosszegységgel, mint sugárral leírt gömb-

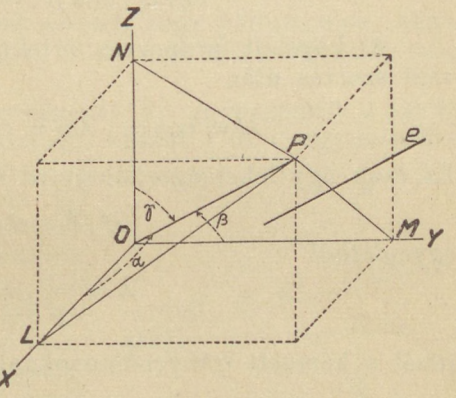
felületet az *egységgömbnek* nevezzük. Egyenlete:

$$x^2 + y^2 + z^2 - 1 = 0. \qquad 3)$$

Általában, ha valamely $F(x, y, z) = 0$ egyenlet és valamely felület között az a kapcsolat van, hogy a felületen levő pontoknak és csak ezeknek koordinatái elégítik ki az $F(x, y, z) = 0$ egyenletet, akkor ezt az egyenletet *ama felület egyenletének* mondjuk. Két felület egyenletei oly egyenletrendszert alkotnak, melyet a metszésvonal pontjainak és csak ezeknek koordinatái elégítenek ki. Azért ezt az egyenletrendszert *ama vonal egyenletrendszerének* mondjuk. Például az

$$y = 0, \quad z = 0$$

egyenletrendszerben az első egyenlet az *OZX* síknak, a második pedig az *OXY* síknak egyenlete. A két egyenlet együtt az *OX* egyenes egyenletrendszere.



156. ábra.

394. §. Az egységgömb egyenletéből egyszerű, de fontos következtetést vonhatunk az egyenesek iránycosinusaira nézve. Evégből (156. ábra) a kezdőponton keresztül az *e* egyenessel párhuzamos és vele egyenlő értelmű egyenest húzunk és ennek *O*-tól pozitiv értelemben eső elén meghatározzuk az egységgömbbel való *P* metszéspontját. *P koordinatái az e-nek irányCosinusai.* *P*-re nézve ugyanis $r = OP = 1$, tehát az

$$x = r\cos\alpha, \quad y = r\cos\beta, \quad z = r\cos\gamma$$

képletekből *P* koordinatái számára valóban α, β, γ cosinusai adódnak ki.

Mivel *P* az egységgömbön van, koordinatái kielégítik ennek egyenletét. Vagyis az irányCosinusokra nézve a következő tétel érvényes:

Bármely egyenes irányCosinusainak négyzetösszege egyenlő 1-*gyel.* Képletben:

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1.$$

Ez a tétel megfordítható, vagyis: *Ha három szám négyzetösszege egyenlő* 1-*gyel, akkor mindig található oly egyenes, melynek ezek a számok az irányCosinusai.*

A három számot ugyanis, mint az egységgömb valamely *P* pontjának koordinatáit foghatjuk fel. De akkor az *OP* egyenes irányCosinusai éppen ama számok.

Az egyenes irányCosinusai között talált összefüggés a térben azt a szerepet játssza, mint a síkban a $\cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 1$ képlet.

Ha az *e* egyenesen a haladás pozitiv értelmét ellenkezőre változtatjuk, akkor *P* az egységgömb *ellenlábas* pontjába megy át,

vagyis abba a pontba, melynek koordinatáit az eredeti P koordinatáiból úgy kapjuk meg, hogy előjeleiket ellenkezőre változtatjuk. Tehát egyenlő irányú, de ellenkező értelmű egyenesek irányacosinusai egymástól az előjelekben és csak ezekben különböznek.

395. §. Az irányacosinusok az egyenes irányát és értelmét megadják. Pusztán az irány jellemzésére már az irányacosinusok viszonya elegendő.

Három olyan l, m, n számhoz, melyek nem mindannyian zérusok, mindig egy és csak egy olyan irány található, melyre nézve

$$\cos\alpha : \cos\beta : \cos\gamma = l : m : n. \qquad 1)$$

A követelt proporció értelmében egy alkalmas λ tényezővel való szorzás után

$$\lambda l = \cos\alpha, \quad \lambda m = \cos\beta, \quad \lambda n = \cos\gamma.$$

Ez csak úgy lehetséges, hogy λl, λm és λn négyzetösszege 1. A

$$\lambda^2(l^2+m^2+n^2) = 1$$

egyenletből

$$\lambda = \frac{1}{\sqrt{l^2+m^2+n^2}};$$

tehát a keresett irányacosinusoknak a

$$\cos\alpha = \frac{l}{\sqrt{l^2+m^2+n^2}}, \quad \cos\beta = \frac{m}{\sqrt{l^2+m^2+n^2}}, \quad \cos\gamma = \frac{n}{\sqrt{l^2+m^2+n^2}}$$

alakban kell kifejezhetőknek lenniök.

Fordítva világos, hogy ezek a számok valóban egy egyenes irányacosinusai és hogy kielégítik az 1) alatti proporciót.

A talált képletek négyzetgyököt tartalmaznak; azért α, β, γ cosinusai számára két értékrendszert kapunk, de ezek csak előjelre nézve különböznek egymástól. Vagyis a két értékrendszer ugyanazt az irányt határozza meg, csak a haladás pozitiv értelmét állapítja meg különböző módon.

Ha pl. l, m, n értékei 3, 4, 12, akkor

$$\lambda = \frac{1}{\sqrt{3^2+4^2+12^2}} = \frac{1}{\sqrt{169}} = \pm\frac{1}{13}.$$

Tehát az irányacosinusok:

$$\frac{3}{13}, \quad \frac{4}{13}, \quad \frac{12}{13},$$

vagy

$$-\frac{3}{13}, \quad -\frac{4}{13}, \quad -\frac{12}{13}.$$

Minthogy l, m, n viszonya teljesen meghatározza az egyenes irányát, azért két l, m, n és l', m', n' értékrendszernek megfelelő egyenesek akkor és csak akkor párhuzamosak egymással, ha

$$l : m : n = l' : m' : n'.$$

Két egyenes hajlásszöge.

396. §. Az egyenes iránycosinusainak összefüggését kifejező

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1 \qquad 1)$$

képlet a következő módon általánosítható:

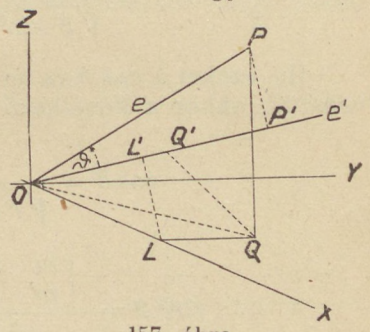
Ha két egyenes irányszögei α, β, γ *és* α', β', γ', *akkor a két egyenes* ϑ *hajlásszögére nézve:*

$$\cos\vartheta = \cos\alpha\cos\alpha' + \cos\beta\cos\beta' + \cos\gamma\cos\gamma'. \qquad 2)$$

Ha a két egyenes egymással azonos vagy párhuzamos, akkor $\cos\vartheta = \cos 0 = 1$. Ebben az esetben tehát a 2) alatti egyenlet valóban az 1) alattiba megy át.

A 2) alatti képlet bebizonyításánál az egyeneseket a kezdőponton keresztül velük párhuzamosan húzott e és e' egyenesekkel pótolhatjuk. Az e-re O-ból felrakjuk a hosszegységet (157. ábra). Az így kapott P pontnak az OXY síkra eső derékszögű vetületét Q-val jelöljük, P-nek és Q-nak az OX tengelyen való vetületét pedig L-lel. Az OL, LQ, QP vonaldarabok a P-nek derékszögű koordinatái; tehát (minthogy az egységgömbön levő pontról van szó) mérőszámaik éppen

$$\cos\alpha, \quad \cos\beta, \quad \cos\gamma.$$



157. ábra.

Ezek a vonaldarabok a e' egyenessel a α', β', γ' szögeket zárják be. Tehát a e'-n való vetületeik mérőszámai:

$$OL' = OL\cos\alpha' = \cos\alpha\cos\alpha',$$
$$L'Q' = LQ\cos\beta' = \cos\beta\cos\beta',$$
$$Q'P' = QP\cos\gamma' = \cos\gamma\cos\gamma'.$$

Összegük egyenlő OP-nek az e'-n való vetületével. Minthogy OP egyenlő a hosszegységgel, azért e'-n való vetülete $\cos\vartheta$. A mondottak értelmében $\cos\vartheta$ valóban egyenlő a 2) alatti képlet jobboldalával.

397. §. Két egyenes ϑ hajlásszögére nézve

$$\sin^2\vartheta = 1 - \cos^2\vartheta = \begin{vmatrix} 1 & \cos\vartheta \\ \cos\vartheta & 1 \end{vmatrix}.$$

Ennek a determinánsnak elemei így is írhatók:

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma, \quad \cos\alpha\cos\alpha' + \cos\beta\cos\beta' + \cos\gamma\cos\gamma',$$
$$\cos\alpha\cos\alpha' + \cos\beta\cos\beta' + \cos\gamma\cos\gamma', \quad \cos^2\alpha' + \cos^2\beta' + \cos^2\gamma'.$$

Innen Lagrange tétele szerint (27. §):

$$\sin^2\vartheta = \begin{vmatrix} \cos\beta & \cos\gamma \\ \cos\beta' & \cos\gamma' \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} \cos\gamma & \cos\alpha \\ \cos\gamma' & \cos\alpha' \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} \cos\alpha & \cos\beta \\ \cos\alpha' & \cos\beta' \end{vmatrix}^2,$$

vagy kifejtve

$$\sin^2\vartheta = (\cos\beta\cos\gamma' - \cos\gamma\cos\beta')^2 + \\ + (\cos\gamma\cos\alpha' - \cos\alpha\cos\gamma')^2 + \\ + (\cos\alpha\cos\beta' - \cos\beta\cos\alpha')^2.$$

398. §. Ha e és e' iránycosinusai helyett csak a velük arányos l, m, n és l', m', n' számok vannak megadva, akkor

$$\cos\alpha = \frac{l}{\sqrt{l^2+m^2+n^2}}, \quad \cos\alpha' = \frac{l'}{\sqrt{l'^2+m'^2+n'^2}},$$

$$\cos\beta = \frac{m}{\sqrt{l^2+m^2+n^2}}, \quad \cos\beta' = \frac{m'}{\sqrt{l'^2+m'^2+n'^2}},$$

$$\cos\gamma = \frac{n}{\sqrt{l^2+m^2+n^2}}, \quad \cos\gamma' = \frac{n'}{\sqrt{l'^2+m'^2+n'^2}}.$$

Ha ezeket a $\cos\vartheta$-ra és $\sin\vartheta$-ra talált kifejezésekben tekintetbe vesszük, akkor a következő képleteket kapjuk:

$$\cos\vartheta = \frac{ll' + mm' + nn'}{\sqrt{l^2+m^2+n^2}\sqrt{l'^2+m'^2+n'^2}},$$

$$\sin^2\vartheta = \frac{\begin{vmatrix} m & n \\ m' & n' \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} n & l \\ n' & l' \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} l & m \\ l' & m' \end{vmatrix}^2}{(l^2+m^2+n^2)\ (l'^2+m'^2+n'^2)} =$$

$$= \frac{(mn'-nm')^2 + (nl'-ln')^2 + (lm'-ml')^2}{(l^2+m^2+n^2)(l'^2+m'^2+n'^2)}.$$

Tudjuk, hogy két egyenes akkor és csak akkor *párhuzamos*, ha

$$l : m : n = l' : m' : n'.$$

Ez összhangban van avval, hogy ebben az esetben $\sin\vartheta$ eltűnik.

Két egyenes akkor és csak akkor *merőleges* egymásra, ha hajlásszögüknek cosinusa eltűnik. Tehát a merőlegesség feltételét így írhatjuk:

$$ll' + mm' + nn' = 0,$$

vagy magukkal az iránycosinusokkal kifejezve:

$$\cos\alpha\cos\alpha' + \cos\beta\cos\beta' + \cos\gamma\cos\gamma' = 0.$$

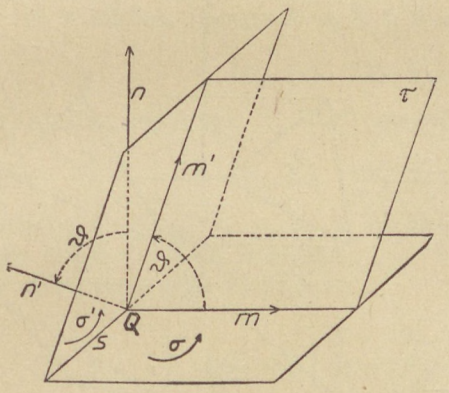
399. §. A ϑ cosinusára talált képletben a négyzetgyökök előjele attól függ, hogy a két egyenesen hogyan választjuk a haladás pozitiv értelmét.

A hajlásszög sinusa még egy további körülménytől függ. Ha ugyanis a tér két szabadon választott egyenesét két oly velük párhuzamos egyenessel pótoljuk, melyek egy síkban vannak, akkor

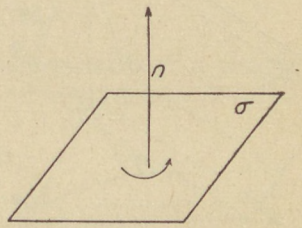
ezek pozitiv értelmének megállapítása után is még tetszésünk szerint dönthetjük el, hogy a két új egyenes síkjában melyik legyen a forgás pozitiv értelme. E megállapodástól függ $\sin\vartheta$-nak előjele. Ez az oka annak, hogy $\sin\vartheta$-nak *négyzetére* találtunk képletet, magát $\sin\vartheta$-t pedig csak oly négyzetgyökvonás adja meg, mely független a $\cos\vartheta$ képletében szerepelő gyökvonásoktól.

Két sík hajlásszöge.

400. §. Két síknak (σ-nak és σ'-nak) *hajlásszögét* a következő módon mérjük meg (158. ábra). A síkok s metszésvonalának valamely Q pontján keresztül az s-re merőleges τ síkot fektetjük. Ez σ-t és σ'-t két egyenesben, m-ben és m'-ben metszi. Az m és m' bezárta ϑ szöget nevezzük a két sík hajlásszögének. A ϑ szög nem függ attól, hogy Q-t hol választjuk s-en, de igenis attól, hogy m-en és m'-en hogyan választjuk a haladás pozitiv értelmét és hogy τ-ban



158. ábra.



159. ábra.

milyen forgásokat mondunk pozitiv értelműeknek. Az utóbbi csak ϑ-nak előjelére gyakorol befolyást, tehát a szög cosinusánál nem jön tekintetbe.

Az m és m' pozitiv értelmét attól tesszük függővé, hogy σ-ban és σ'-ban milyen forgásokat tekintünk pozitivoknak és milyen háromszögeket pozitiv körüljárásúaknak.

A forgás és a körüljárás pozitiv értelmének meghatározása lényegében ugyanaz a dolog. Ha ugyanis, a kör kerületén a pozitiv forgásnak megfelelő értelemben haladva jobb kezünk esik kifelé, akkor a háromszög pozitiv körüljárásán is azt értjük, melynél jobb kezünk esik kifelé.

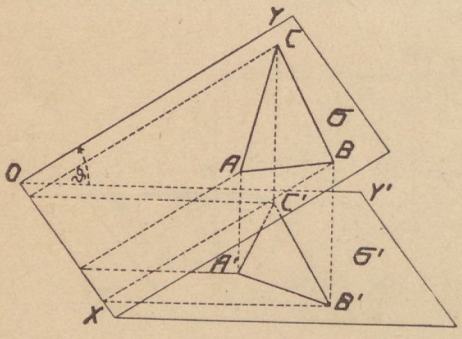
Ha két síkban (σ-ban és σ'-ban) a forgásnak vagy a körüljárásnak pozitiv értelmei meg vannak határozva, akkor a hajlásszög mérésénél az m és m' egyenesek közül csak az egyiknek pozitiv értelmét választjuk szabadon; a másikét úgy állapítjuk meg, hogy midőn m-et σ-ban és m'-et σ'-ban pozitiv derékszöggel elforgatjuk, akkor Q-tól pozitiv értelemben eső feleik a két sík s metszésvonalának két különböző felére kerüljenek.

Az m és m' egyenesek által bezárt szög helyett azt a szöget

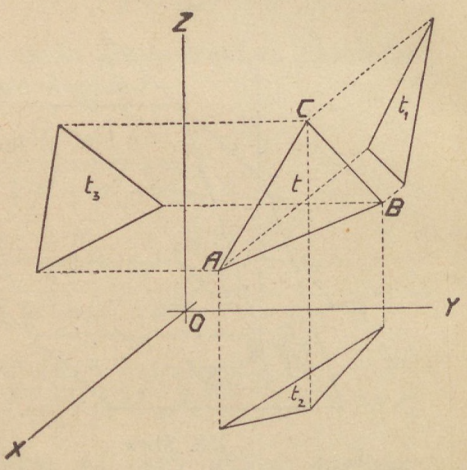
is mérhetjük meg, melyet a két sík normálisai zárnak be egymással. Ha a normálisok pozitiv értelmeit alkalmasan választjuk, akkor ugyanakkora szöget zárnak be, mint m és m' pozitiv értelmei.

Ha (159. ábra) valamely σ síkban a forgás pozitiv értelme és az n normálison a haladás pozitiv értelme úgy van megállapítva, hogy a normálisnak σ-tól pozitiv értelemben eső részéből a σ-ra tekintvén, ebben a pozitiv értelmű forgást az óramutatóéval ellenkezőnek látjuk: akkor azt mondjuk, hogy a σ-ban való pozitiv forgás és a pozitiv normális egymáshoz képest *jobb* értelemben vannak elhelyezve. Ellenkező esetben *bal* értelmű elhelyezésről beszélünk. A «jobb» és «bal» elnevezéseket azért használjuk, mert *tenyerünket* nézve, a hüvelykujjtól a kisujjhoz az óramutató mozgásával ellenkező vagy pedig vele egyenlő forgás vezet aszerint, hogy jobb vagy bal tenyerünket nézzük.

Az OXY koordinatasíkban a forgás pozitiv értelmét úgy választjuk, hogy OX pozitiv részét OY pozitiv részébe pozitiv derékszöggel



160. ábra.



161. ábra.

való forgás vigye át. Az OXY síknak OZ normálisán a haladás pozitiv értelmét O-tól az egységpont felé menőnek választjuk. Aszerint, hogy az OXY síkban való pozitiv forgás és az OZ tengely pozitiv része egymáshoz képest milyen értelemben vannak elhelyezve, magát a koordinatarendszert is *jobb* illetőleg *bal* értelműnek nevezzük.

Ha *jobb* értelmű koordinatarendszert használunk, akkor a σ sík pozitiv értelmének megállapítása után a normális pozitiv értelmét mindig úgy választjuk, hogy a σ-ban való pozitiv forgás és σ pozitiv normálisa egymáshoz képest *jobb* értelemben legyenek elhelyezve. Ha bal értelmű koordinatarendszert használunk, akkor a normális pozitiv értelmét fordítva határozzuk meg.

Ha ehhez a megállapodáshoz ragaszkodunk, akkor két sík hajlásszöge mindig egyenlő a normálisaik pozitiv értelmei által meghatározott szöggel.

A háromszög területe.

401. §. Ha valamely σ síkban felvett háromszöget derékszögű vetítéssel valamely σ' síkra vetítünk, akkor *az eredeti háromszög területe és a vetület területe között a*

$$A'B'C' = ABC \cos \vartheta$$

képlet áll fenn. Itt ABC az eredeti háromszög területét, $A'B'C'$ a vetület területét jelenti; ϑ a két sík hajlásszöge. A területek előjelének és ϑ-nak megállapításánál tekintetbe veendő, hogy a két síkban hogyan van megállapítva a forgás és körüljárás pozitiv értelme.

A képlet levezetésénél a két sík mindegyikében egy-egy derékszögű koordinatarendszert veszünk fel (160. ábra). Az abszcisszák tengelye legyen mindkét síkban σ-nak σ'-vel való OX metszésvonala. Az ordináták tengelyei legyenek OY és OY'.

A σ síkban legyenek A, B, C koordinatái

$$(x_1, y_1), \quad (x_2, y_2), \quad (x_3, y_3).$$

A σ' síkban legyenek A', B', C' koordinatái

$$(x_1, y_1'), \quad (x_2, y_2'), \quad (x_3, y_3').$$

Minthogy y_1', y_2', y_3' az y_1, y_2, y_3 vetületei, azért minden y' a megfelelő y-nak $\cos \vartheta$-val való szorzata.

ABC és $A'B'C'$ területei:

$$ABC = \tfrac{1}{2} \begin{vmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 \end{vmatrix},$$

$$A'B'C' = \tfrac{1}{2} \begin{vmatrix} 1 & x_1 & y_1' \\ 1 & x_2 & y_2' \\ 1 & x_3 & y_3' \end{vmatrix} = \tfrac{1}{2} \begin{vmatrix} 1 & x_1 & y_1 \cos \vartheta \\ 1 & x_2 & y_2 \cos \vartheta \\ 1 & x_3 & y_3 \cos \vartheta \end{vmatrix}.$$

Tehát csakugyan $A'B'C'$ egyenlő ABC és $\cos \vartheta$ szorzatával.

402. §. Az előbbiek segítségével a tér bármely három $A = (x_1, y_1, z_1)$, $B = (x_2, y_2, z_2)$, $C = (x_3, y_3, z_3)$ pontjának koordinatáiból a következő módon számíthatjuk ki az ABC háromszög területének t mérőszámát.

Ha a háromszög síkjára valamely n merőlegest emelünk, akkor ez ugyanakkora α, β, γ szögeket zár be a koordinatatengelyekkel, mint a háromszög síkja az OYZ, OZX, OXY koordinatasíkokkal. Tehát a háromszögnek a koordinatasíkokon való vetületeinek (161. ábra) mérőszámai

$$t_1 = t \cos \alpha, \quad t_2 = t \cos \beta, \quad t_3 = t \cos \gamma.$$

Innen

$$t^2 = t^2 (\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma) = t_1^2 + t_2^2 + t_3^2.$$

Ámde a t_1, t_2, t_3 területeket az ismeretes síkgeometriai képlettel már tudjuk kiszámítani. Például az OXY síkon való vetület szögpontjai-

nak az OXY koordinatarendszerre vonatkozó koordinatái

$$(x_1, y_1), \quad (x_2, y_2), \quad (x_3, y_3).$$

Tehát

$$2t_3 = \begin{vmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 \end{vmatrix}.$$

Hasonló módon fejezhetők ki a t_1 és t_2 az y, z illetve z, x koordinaták segítségével. Ha ezeket a kifejezéseket a

$$t^2 = t_1^2 + t_2^2 + t_3^2$$

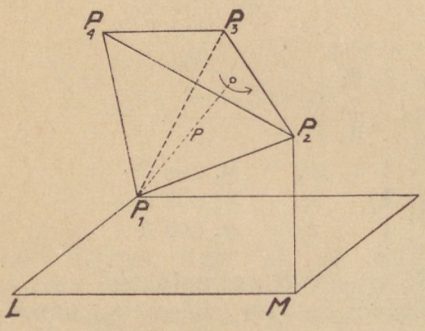
képletben tekintetbe vesszük, akkor végre:

$$4t^2 = \begin{vmatrix} 1 & y_1 & z_1 \\ 1 & y_2 & z_2 \\ 1 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} 1 & z_1 & x_1 \\ 1 & z_2 & x_2 \\ 1 & z_3 & x_3 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 \end{vmatrix}^2.$$

A tetraéder köbtartalma.

403. §. Mint a síkban a háromszög területének, úgy a térben *a tetraéder* (háromoldalú gúla) *köbtartalmának előjelet adunk*. Az előjel attól függ, hogy a tetraéder csúcsait milyen rendben soroljuk fel és hogy a használt koordinatarendszer milyen értelmű.

Adott koordinatarendszerben a tetraéder köbtartalmának (vagy röviden mondva a tetraédernek) előjelét a következő módon állapítjuk meg. A szóbanforgó $P_1P_2P_3P_4$ tetraédernek (162. ábra) P_1 csúcsából a $P_2P_3P_4$ lapra bocsátott merőlegesen a haladás pozitiv értelmét a P_1-től a lap felé menőnek választjuk. A $P_2P_3P_4$ síkban a forgás és körüljárás pozitiv értelmét úgy állapítjuk meg, hogy a $P_2P_3P_4$ síkban való pozitiv forgás és a pozitiv normális egymáshoz képest ugyanolyan értelemben legyen elhelyezve, amilyen értelmű a koordinatarendszer. A $P_1P_2P_3P_4$ tetraédernek olyan előjelet tulajdonítunk, amilyen előjelű a $P_2P_3P_4$ háromszög területe. Megállapodásunk értelmében a kezdőpont és a koordinatengelyek egységpontjai által meghatározott $OE_1E_2E_3$ tetraéder mindig pozitiv.



162. ábra.

404. §. A $P_1P_2P_3P_4$ tetraéder köbtartalmának (volumenjének) v mérőszámát a következő módon határozzuk meg. Ha a $P_2P_3P_4$ síknak P_1-től való távolságát p-vel, a $P_2P_3P_4$ háromszög területét t-vel jelöljük, akkor

$$v = \tfrac{1}{3}pt.$$

Itt p pozitiv szám, t és v ellenben negativok is lehetnek.

A P_1 és P_2 pontokat olyan három részből alkotott törött vonallal kötjük egymással össze, melynek P_1L, LM, MP_2 részei rendre egy-

egy koordinatatengellyel párhuzamosak. Ezeknek a részeknek mérőszámai

$$x_2 - x_1, \quad y_2 - y_1, \quad z_2 - z_1;$$

a p-vel bezárt hajlásszögeik éppen p-nek α, β, γ irányszögei. Tehát a három egyenesdarabnak p-n való vetületei:

$$(x_2-x_1)\cos\alpha, \quad (y_2-y_1)\cos\beta, \quad (z_2-z_1)\cos\gamma.$$

A három vetület összege maga p. Képletben:

$$p = (x_2-x_1)\cos\alpha + (y_2-y_1)\cos\beta + (z_2-z_1)\cos\gamma.$$

Ennéfogva:

$$3v = (x_2-x_1)\,t\cos\alpha + (y_2-y_1)\,t\cos\beta + (z_2-z_1)\,t\cos\gamma. \qquad 1)$$

Itt $t\cos\alpha$, $t\cos\beta$, $t\cos\gamma$ a $P_2P_3P_4$ háromszögnek a koordinatasíkokon való vetületeinek területei, tehát a következő harmadfokú determinánsok felei:

$$\begin{vmatrix} 1 & y_2 & z_2 \\ 1 & y_3 & z_3 \\ 1 & y_4 & z_4 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 1 & z_2 & x_2 \\ 1 & z_3 & x_3 \\ 1 & z_4 & x_4 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 \\ 1 & x_4 & y_4 \end{vmatrix}.$$

Ha ezeket az értékeket behelyettesítjük, az 1) alatti egyenlet jobboldalának kétszerese a következő negyedfokú determinánsnak az első sor elemei szerint kifejtett alakjába megy át:

$$\begin{vmatrix} 0 & -(x_2-x_1) & -(y_2-y_1) & -(z_2-z_1) \\ 1 & x_2 & y_2 & z_2 \\ 1 & x_3 & y_3 & z_3 \\ 1 & x_4 & y_4 & z_4 \end{vmatrix}.$$

Ha még az első sorhoz hozzáadjuk a másodikat, végre a következő képletet kapjuk:

$$6v = \begin{vmatrix} 1 & x_1 & y_1 & z_1 \\ 1 & x_2 & y_2 & z_2 \\ 1 & x_3 & y_3 & z_3 \\ 1 & x_4 & y_4 & z_4 \end{vmatrix}.$$

Ha P_1 a kezdőpontba esik, akkor a tetraéder hatszoros köbtartalmát az

$$\begin{vmatrix} x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \\ x_4 & y_4 & z_4 \end{vmatrix}$$

determináns adja meg.

A parallelkoordináták transzformációja.

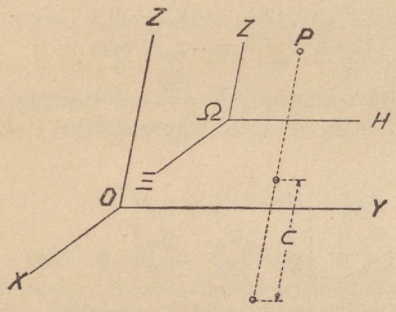
405. §. Akár derékszögű, akár ferdeszögű koordinatarendszer *eltolásánál* (163. ábra) a régi $OXYZ$ rendszerre vonatkozó x, y, z koordináták és az $\Omega\Xi HZ$ rendszerre vonatkozó ξ, η, ζ koordináták közt a következő kapcsolat van:

$$x = \xi + a, \quad y = \eta + b, \quad z = \zeta + c. \qquad I)$$

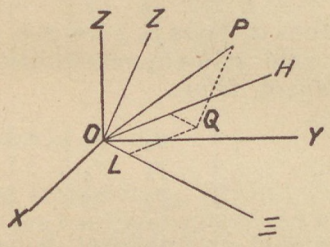
Itt a, b, c az Ω új kezdőpontnak a régi rendszerre vonatkozó koordinatái.

Valóban z és ζ a P ponton keresztül az OZ és ΩZ tengelyekkel párhuzamosan húzott egyenesen az OXY, illetőleg az $\Omega\Xi H$ síktól a P-ig terjedő darabok mérőszámai. Különbségük tehát ennek az egyenesnek az említett síkok közé eső részének mérőszáma; ez pedig egyenlő az új kezdőpont c koordinatájával. Vagyis z csakugyan ζ és c összege.

A parallelkoordinaták egyéb transzformációi közül azokra szorítkozhatunk, melyeknél a kezdőpont változatlan marad és csak a tengelyek iránya változik meg. Egyszerűség kedvéért föltesszük,



163. ábra.



164. ábra.

hogy az eredeti és az új koordinatarendszer közül legalább az egyik derékszögű. Legyen tehát (164. ábra) $OXYZ$ derékszögű koordinatarendszer, $O\Xi HZ$ lehet ferdeszögű is. A két rendszer tengelyei által bezárt szögeket tüntesse fel a következő összeállítás:

	$O\Xi$,	OH,	OZ
OX	α_1	α_2	α_3
OY	β_1	β_2	β_3
OZ	γ_1	γ_2	γ_3

Itt pl. α_2 az OX és OH által bezárt szöget jelenti.

Az $OLQP$ törött vonalban az OL, LQ, QP darabok irányai rendre azonosak az $O\Xi HZ$ rendszer egy-egy tengelyének irányával. E darabok mérőszámai a P-nek az új rendszerre vonatkozó koordinatái, az OX tengelyen való vetületeik mérőszámait tehát a vetületekre vonatkozó első tétel szerint a

$$\xi \cos \alpha_1, \quad \eta \cos \alpha_2, \quad \zeta \cos \alpha_3$$

szorzatok adják meg. OP-nek az OX tengelyen való derékszögű vetülete x. A vetítésre vonatkozó második tétel értelmében tehát x az 1) alatti szorzatok összege. Hasonló módon fejezhetjük ki y és z értékét is. Vagyis:

$$\begin{aligned} x &= \xi \cos \alpha_1 + \eta \cos \alpha_2 + \zeta \cos \alpha_3, \\ y &= \xi \cos \beta_1 + \eta \cos \beta_2 + \zeta \cos \beta_3, \\ z &= \xi \cos \gamma_1 + \eta \cos \gamma_2 + \zeta \cos \gamma_3. \end{aligned} \qquad \text{II)}$$

Ezek

$$x = a_{11}\xi + a_{12}\eta + a_{13}\zeta,$$
$$y = a_{21}\xi + a_{22}\eta + a_{23}\zeta,$$
$$z = a_{31}\xi + a_{32}\eta + a_{33}\zeta$$

alakú képletek, hol az a-k állandók. Az a együtthatókból alkotott determináns, melyet a *transzformáció determinánsának* nevezünk, sohasem zérus, hanem *pozitiv* szám, ha az eredeti és az új koordinatarendszer egyenlő értelmű, ellenben negativ szám, ha a két koordinatarendszer különböző értelmű. Ez a determináns ugyanis az O kezdőpont és az új koordinatatengelyek egységpontjai által meghatározott tetraédernek hatszoros köbtartalma, ha a köbtartalom meghatározásánál a tetraédert a régi koordinatarendszerre vonatkoztatjuk, tehát a köbtartalom előjelét a régi rendszer használatának megfelelő módon határozzuk meg.

Ha az x, y, z-re talált képleteket ξ, η, ζ szerint megoldjuk, hasonló alakú

$$\xi = a'_{11}x + a'_{12}y + a'_{13}z,$$
$$\eta = a'_{21}x + a'_{22}y + a'_{23}z,$$
$$\zeta = a'_{31}x + a'_{32}y + a'_{33}z$$

képleteket kapunk. Szóval x, y, z és ξ, η, ζ kölcsönösen egymásnak homogén lineáris függvényei. Megjegyzendő azonban, hogy a a' együtthatóknak nincsen olyan egyszerű értelmük mint az a-knak.

406. §. Ha a tengelyek irányának megváltoztatásánál az eredeti és az új koordinatarendszer egyaránt derékszögű, akkor a transzformációt *orthogonálisnak* mondjuk.

A két derékszögű rendszer lehet *egyenlő értelmü*, azaz mindkettő *jobb* rendszer vagy mindkettő *bal* rendszer. De lehet a két rendszer *ellenkező értelmü* is. Az első esetben az orthogonális transzformációt a koordinatarendszer *elforgatásának* nevezzük.

Hogy a két koordinatarendszer egyenlő vagy ellenkező értelmű-e, azt (mint az előbbi §-ból tudjuk) a transzformáció determinánsának *előjele* mutatja.

407. §. Ha

$$a_{11},\ a_{12},\ a_{13},$$
$$a_{21},\ a_{22},\ a_{23},$$
$$a_{31},\ a_{32},\ a_{33}$$

valamely orthogonális transzformációnál fellépő együtthatókat jelentenek, akkor

$$\left.\begin{aligned} a_{11}^2 + a_{12}^2 + a_{13}^2 &= 1,\\ a_{21}^2 + a_{22}^2 + a_{23}^2 &= 1,\\ a_{31}^2 + a_{32}^2 + a_{33}^2 &= 1 \end{aligned}\right\} \quad A)$$

és

$$\left.\begin{aligned} a_{11}a_{21} + a_{12}a_{22} + a_{13}a_{23} &= 0,\\ a_{11}a_{31} + a_{12}a_{32} + a_{13}a_{33} &= 0,\\ a_{21}a_{31} + a_{22}a_{32} + a_{23}a_{33} &= 0. \end{aligned}\right\} \quad B)$$

Az *A)* alatti képletek azt fejezik ki, hogy a transzformáció determinánsának ugyanazon sorában álló számok egy egyenesnek (egy régi koordinatatengelynek) bizonyos derékszögű koordinatarendszerre (az $O\Xi HZ$ rendszerre) vonatkozó irányicosinusai. Ha még tekintetbe vesszük, hogy OX, OY és OZ közül bármelyik kettő merőleges egymásra, akkor a *B)* alatti képleteket kapjuk. Egyszersmind világos, hogy bármely kilenc olyan számot, melyek az *A)* és *B)* alatti képleteket kielégítik, mint *orthogonális* transzformáció együtthatóit foghatjuk fel.

Az *A)* és *B)* alatti képletekből pusztán algebrai meggondolásokkal más fontos képleteket is kaphatunk az orthogonális transzformáció együtthatóira nézve. Mindenekelőtt

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \pm 1. \qquad C)$$

Ha ugyanis Δ sorait ugyancsak Δ soraival komponáljuk, akkor a determinánsok szorzástétele és az *A)* meg *B)* alatti képletek értelmében Δ négyzete

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1.$$

Tehát Δ valóban a pozitiv vagy a negativ egységgel egyenlő. (Hogy Δ mikor pozitiv és mikor negativ, azt már tudjuk.)

A *B)* alatti első két egyenlet oly homogén lineáris egyenletrendszernek tekinthető, melyben

$$a_{11},\quad a_{12},\quad a_{13}$$

az ismeretlenek. Ebből az egyenletrendszerből

$$\varrho a_{11} = a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32},\quad \varrho a_{12} = a_{23}a_{31} - a_{21}a_{33},\quad \varrho a_{13} = a_{21}a_{32} - a_{22}a_{31}.$$

Itt ϱ még ismeretlen arányossági tényező. Hogy ϱ értékét meghatározzuk, a talált képletek mindkét oldalát rendre az a_{11}, a_{12}, a_{13} számokkal megszorozzuk és azután a megfelelő oldalakat összeadjuk. Ily módon azt kapjuk, hogy

$$\varrho\,(a_{11}^2 + a_{12}^2 + a_{13}^2) = \Delta.$$

Az a négyzetösszeg, mellyel ϱ itt meg van szorozva, az *A)* alatti első képlet értelmében egyenlő 1-gyel; ennélfogva $\varrho = \Delta$. Ily módon a következő képletcsoport első sorára jutunk:

$$\begin{aligned} &\Delta a_{11} = a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32},\quad \Delta a_{12} = a_{23}a_{31} - a_{21}a_{33},\quad \Delta a_{13} = a_{21}a_{32} - a_{22}a_{31},\\ &\Delta a_{21} = a_{32}a_{13} - a_{33}a_{12},\quad \Delta a_{22} = a_{33}a_{11} - a_{31}a_{13},\quad \Delta a_{23} = a_{31}a_{12} - a_{32}a_{11}, \qquad D)\\ &\Delta a_{31} = a_{12}a_{23} - a_{13}a_{22},\quad \Delta a_{32} = a_{13}a_{21} - a_{11}a_{23},\quad \Delta a_{33} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}. \end{aligned}$$

A második és a harmadik sor képletei ugyanezen a módon vezethetők le.

Ha a *D)* alatt az első oszlopban levő képletek mindkét oldalát rendre megszorozzuk az a_{11}, a_{21}, a_{31} számokkal és azután össze-

adunk, a következő képletcsoport első képletét kapjuk:

$$\begin{aligned} a_{11}^2 + a_{21}^2 + a_{31}^1 &= 1, \\ a_{12}^2 + a_{22}^2 + a_{32}^2 &= 1, \\ a_{13}^2 + a_{23}^2 + a_{33}^2 &= 1. \end{aligned} \qquad E)$$

Ha pedig a *D)* alatt az első oszlopban levő képletek mindkét oldalát rendre az a_{12}, a_{22}, a_{32} számokkal szorozzuk meg és azután adunk össze, akkor a következő képletcsoport első képletére jutunk:

$$\begin{aligned} a_{11}a_{12} + a_{21}a_{22} + a_{31}a_{32} &= 0, \\ a_{11}a_{13} + a_{21}a_{23} + a_{31}a_{33} &= 0, \\ a_{12}a_{13} + a_{22}a_{23} + a_{32}a_{33} &= 0. \end{aligned} \qquad F)$$

Az *E)* és *F)* alatti képleteknek helyessége egyébiránt az α-k jelentéséből is világos. Ezek a képletek ugyanis azt fejezik ki, hogy a Δ egy-egy oszlopában levő számok egy-egy egyenes iránycosinusai és hogy ezek közül az egyenesek közül bármelyik kettő egymásra merőleges.

Algebrai és transzcendens felületek.

408. §. *Ha valamely felület egy parallel koordinatarendszerre nézve oly*

$$F(x, y, z) = 0$$

egyenlettel ábrázolható, melynek baloldala az x, y, z koordinatáknak n-edfokú egész függvénye, akkor a felületnek ez a tulajdonsága bármely más parallel koordinatarendszerre nézve is megvan. A bebizonyítás teljesen úgy végezhető, mint a síkban a görbékre nézve talált analog tételé. (330. és 331. §§).

Az oly

$$F(x, y, z) = 0$$

egyenletet, melynek baloldala az x, y, z koordinatáknak n-edfokú egész függvénye, n-edfokú algebrai egyenletnek, az általa ábrázolt felületet pedig *n-edrendű algebrai felületnek* mondjuk. Az oly felületet, mely nem jellemezhető algebrai egyenlettel, *transzcendens felületnek* mondjuk. Annak eldöntésénél, hogy valamely felület algebrai-e vagy sem, vagy hogy valamely algebrai felület hányadrendű, a mondottak értelmében a koordinatarendszer választása nem játszik szerepet.

A legegyszerűbb felületek azok, melyek elsőfokú egyenletekkel ábrázolhatók. Ezek, mint majd látjuk, a *síkok.*

409. §. *Az n-edrendű felületnek egy síkkal való metszete általában n-edrendű algebrai görbe.*

A bebizonyításnál a koordinatarendszert úgy választhatjuk, hogy a felületet metsző sík éppen OXY. Ennek minden pontjára nézve $z=0$. A síknak valamely pontja tehát akkor és csak akkor van a felületen, ha x és y koordinatái kielégítik azt az egyenletet, melybe a felületnek $F(x, y, z) = 0$ egyenlete a $z=0$ helyettesítésnél

átmegy. Ha $F(x, y, z) = 0$ n-edfokú algebrai egyenlet, akkor a helyettesítés után kapott

$$F(x, y, 0) = 0$$

egyenlet általában x-ben és y-ban n-edfokú egyenlet, tehát (a síkbeli geometria szempontjából) az OXY sík valamely n-edrendű algebrai görbéjét ábrázolja.

Kivételesen megtörténik, hogy a $z=0$ helyettesítés n-nél alacsonyabbfokú egyenletre vagy azonosságra vezet. Ha csak m-edfokú egyenletet kapunk, akkor ezt mint oly n-edfokú egyenletet fogjuk fel, melyben az m-nél magasabbfokú tagok véletlenül hiányoznak. Ennek megfelelően a síknak és a felületnek metszésvonalához $(n-m)$-szeresen hozzászámítjuk a síknak végtelen egyenesét. Ebben a felfogásban a metszésvonal megint n-edrendű algebrai görbe.

Lényegesen más eredményre jutunk, ha a $z=0$ helyettesítés azonosságra vezet. Ekkor OXY minden pontja egyszersmind a vizsgált felületen is rajta van, vagyis a felület a síkot teljesen magában foglalja.

Hengerfelületek. Kúpfelületek.

410. §. Vannak felületek, melyeknek minden pontján keresztül legalább egy egészen a felületen fekvő egyenes húzható. Az oly egyenest, melynek minden pontja a felületen van, *alkotónak* mondjuk. Az oly felületet, melynek minden pontján keresztül legalább egy alkotó húzható, *sugárfelületnek* nevezzük. A legegyszerűbb sugárfelületek a hengerek és kúpok.

Hengerfelületnek vagy röviden *hengernek* valamely felületet akkor mondunk, ha kijelölhetünk egy olyan irányt, hogy a felület bármely pontján keresztül abban az irányban húzott egyenes a felületnek alkotója. Ily felület pl. az *egyenes körhenger*, mely úgy keletkezik, hogy egy egyenest valamely vele párhuzamos tengely körül forgatunk.

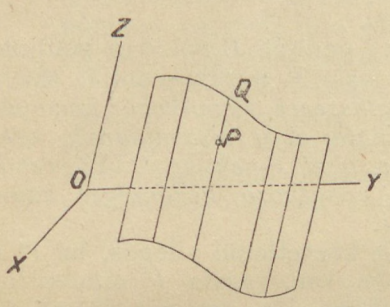
Kúpfelületnek vagy röviden *kúpnak* valamely felületet akkor mondunk, ha kijelölhetünk rajta egy oly S pontot, hogy a felület bármely pontját S-sel összekötő egyenes a felületnek alkotója. Ilyen pl. az *egyenes körkúp* vagy *forgási kúp*, melyet egy egyenesnek valamely őt metsző tengely körül való forgatása által kapunk.

411. §. Ha valamely felület egyenletében a z koordinata nem fordul elő, akkor oly *hengerrel* van dolgunk, melynek alkotói párhuzamosak az OZ tengellyel (165. ábra).

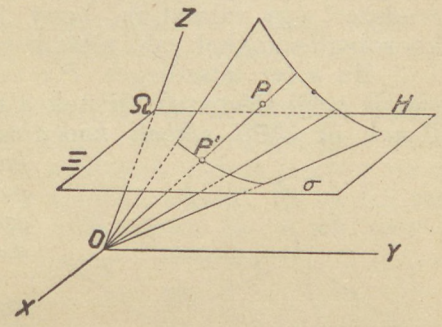
Valóban a $P = (x, y, z)$ ponton keresztül OZ-vel párhuzamosan húzott egyenes bármely Q pontjára nézve az első két koordinata megegyezik P első két koordinatájával. Tehát, ha P koordinatái kielégítik az $F(x, y) = 0$ egyenletet, akkor azt Q koordinatái is kielégítik.

A szóban forgó felület előállításánál az $F(x, y) = 0$ egyenletet egy pillanatig mint az OXY sík egyik vonalának egyenletét fogjuk fel. Ennek a vonalnak pontjain keresztül az OZ-vel párhuzamosan húzott egyenesek a szóban forgó felületnek alkotói.

A mondottakból világos, hogy ha valamely n-edrendű algebrai síkgörbének pontjain keresztül egymással párhuzamos, de nem a görbe síkjába eső egyeneseket húzunk: akkor az így nyert hengerfelület n-edrendű algebrai felület. A koordinatarendszert ugyanis mindig úgy vehetjük fel, hogy OXY síknak az adott görbe síkját, OZ irányának pedig a húzott alkotók irányát választjuk. Ekkor a vonalat az OXY síkban egy n-edfokú $F(x, y) = 0$ algebrai egyenlet-



165. ábra.



166. ábra.

tel jellemezhetjük és ez az n-edfokú egyenlet ábrázolja egyszersmind (ha felület egyenletének tekintjük) a szóban forgó hengerfelületet is.

412. §. Ha $F(x, y, z)$ a koordinatáknak n-edfokú *homogén* egész függvénye, akkor $F(x, y, z) = 0$ oly n-edrendű algebrai kúpfelületet ábrázol, melynek csúcsa a kezdőpontba esik.

Valóban $F(x, y, z)$ részletes alakja:

$$\Sigma c x^{\lambda} y^{\mu} z^{\nu}$$

hol minden tagban $\lambda+\mu+\nu=n$.

Ha a térnek tetszőleges $P = (x, y, z)$ pontját a kezdőponttal összekötjük, akkor az összekötő egyenes bármely $Q = (\xi, \eta, \zeta)$ pontjára nézve

$$\xi : \eta : \zeta = x : y : z,$$

vagyis mindig található oly t arányossági tényező, hogy

$$\xi = xt, \quad \eta = yt, \quad \zeta = zt.$$

A felületen választott P esetében $F(x, y, z)$ eltűnik; ennélfogva OP minden Q pontjára nézve

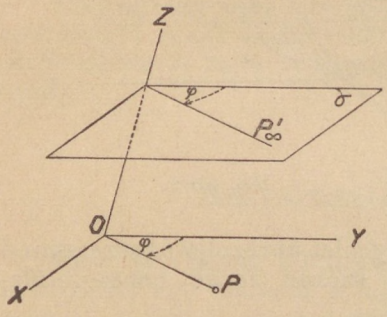
$$F(\xi, \eta, \zeta) = \Sigma c t^n x^{\lambda} y^{\mu} z^{\nu} = t^n F(x, y, z) = 0.$$

Vagyis a felület bármely P pontját O-val összekötve, az így nyert egyenesnek csakugyan minden pontja a felületen van.

413. §. *Ha egy n-edrendü algebrai síkgörbe pontjait összekötjük valamely a görbe síkján kivül felvett ponttal, akkor az összekötő egyenesek n-edrendü algebrai kúpfelületet alkotnak.*

Ennek bebizonyításánál oly $OXYZ$ derékszögű koordinatarendszert használunk (166. ábra), melyben O éppen a görbe pontjaival összekötött pont, OXY pedig a görbe σ síkjával párhuzamos. Az OZ pozitiv értelmét és a hosszegységét úgy választjuk, hogy OZ egységpontja éppen σ-nak az OZ-vel való Ω metszéspontja legyen. Az adott görbét úgy jellemezzük, hogy σ-ban felveszünk egy koordinatarendszert és erre nézve megadjuk a görbének *homogén* koordinatákban kifejezett egyenletét. A σ síkban fölvett $\Omega\Xi H$ koordinatarendszert úgy választjuk, hogy tengelyei σ-nak az OXZ és OYZ koordinatasíkokkal való metszésvonalai.

Ha a tér tetszőleges $P = (x, y, z)$ pontját O-ból σ-ra vetítjük, vagyis meghatározzuk OP-nek a σ-val való P' metszéspontját, akkor *P'-nek az $\Omega\Xi H$ síkbeli koordinatarendszerre vonatkozó homogén koordinatái úgy viszonylanak egymáshoz, mint P-nek az $OXYZ$ rendszerre vonatkozó közönséges koordinatái.*



167. ábra.

Ez közvetlenül világos, ha P' a végesben van, vagyis P nincsen az OXY síkban. Ha ugyanis P'-nek az $\Omega\Xi H$ rendszerre vonatkozó közönséges koordinatái ξ, η, akkor ennek a pontnak az $OXYZ$ térbeli rendszerre vonatkozó koordinatái ξ, η, 1. Minthogy O, P és P' egy egyenesen vannak, azért P'-nek ξ, η, 1 koordinatái arányosak P-nek x, y, z koordinatáival. Másrészt P'-nek az $\Omega\Xi H$ rendszerre vonatkozó koordinatái arányosak ξ, η, 1-gyel. Tehát P' homogén koordinatái valóban úgy viszonylanak egymáshoz, mint x, y, z.

Ha P' a végtelenbe esik, mert P az OXY síkban van, akkor (167. ábra) a P pontra nézve

$$x : y : z = \cos\varphi : \sin\varphi : 0,$$

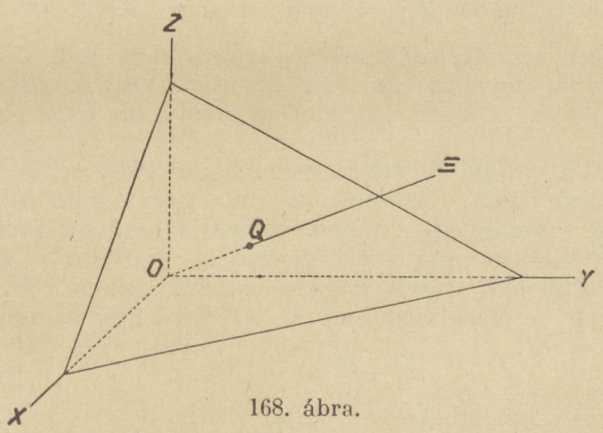
hol φ az OX és OP által bezárt szöget jelenti. P' az Ω-n keresztül OP-vel párhuzamosan húzott egyenesnek végtelen pontja. Ez az egyenes $\Omega\Xi$-vel szintén φ szöget zár be; tehát végtelenben levő pontjának homogén koordinatái úgy viszonylanak egymáshoz, mint $\cos\varphi$, $\sin\varphi$, 0. Szóval P' homogén koordinatái ebben az esetben is úgy viszonylanak egymáshoz, mint P közönséges koordinatái.

Most már P akkor és csak akkor van azon a felületen, melyet a σ-ban felvett n-edrendű algebrai görbe pontjait O-val összekötő egyenesek alkotnak, ha P' ezen a görbén van. Ez pedig, minthogy P'-nek az $\Omega\Xi H$-ra vonatkozó homogén koordinatáinak mindig éppen P-nek x, y, z koordinatáit választhatjuk, akkor és csak akkor következik be, ha x, y, z kielégítik a felvett görbének homogén koordinatákban kifejezett egyenletét. Vagyis a felületnek az x, y, z koordinatákban kifejezett egyenlete ugyanaz, mint a görbének homogén koordinatákban kifejezett egyenlete. Ez homogén n-edfokú egyenlet; tehát a szóban forgó felület valóban n-edrendű algebrai kúpfelület.

A sík egyenlete.

414. §. A síkra, mint legegyszerűbb felületre vonatkozó tárgyalásainkat annak bebizonyításával kezdjük meg, hogy *a sík bármely parallel koordinatarendszerre nézve elsőfokú egyenlettel jellemezhető és fordítva az x, y, z parallel koordinatákban elsőfokú egyenlet mindig síkot határoz meg.* A bebizonyításnál derékszögű koordinatákra szorítkozhatunk, mert ha a felületnek valamely parallel koordinatarendszerre nézve elsőfokú egyenlet felel meg, akkor ezt a felületet bármely más parallel koordinatarendszerre nézve szintén elsőfokú egyenlet jellemzi.

A sík egyenletének levezetésénél két derékszögű koordinatarendszert használunk: azt az *OXYZ* rendszert, amelyre vonatkozó egyenlet érdekel és olyan *OΞHZ* rendszert, melyre nézve a sík egyenletét közvetlenül felírhatjuk. Ez valóban sikerül, ha az *OΞ* tengelyt a síkra merőlegesen választjuk (168. ábra). Ha a sík nem megy



168. ábra.

keresztül a kezdőponton, akkor az *OΞ* tengelyen a haladás pozitiv értelmét *O*-tól a sík felé menőnek választjuk. A kezdőponton keresztül fektetett sík esetében *OΞ* pozitiv értelmét tetszésünk szerint választjuk.

Az *OΞHZ* rendszerre nézve a sík egyenlete

$$\xi - p = 0$$

hol $p = OQ$ a síknak *O*-tól való merőleges távolsága. Az *OXYZ* rendszerre való áttérésnél

$$\xi = x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma, \qquad 1)$$

hol α, β, γ azok a szögek, melyeket a síknak normálisa az *OX*, *OY*, *OZ* tengelyekkel bezár. Az 1) alatti képlet helyessége akár a koordinaták transzformálásáról, akár a vetítésről mondottak alapján könnyen belátható. Ha a ξ-re talált kifejezést a $\xi - p = 0$ egyenletbe behelyettesítjük, akkor a sík egyenlete a következő alakban adódik:

$$x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma - p = 0. \qquad 2)$$

Ezt az egyenletet a sík HESSE-*féle normálegyenletének* nevezzük. Benne p a síknak a kezdőponttól való merőleges távolsága és α, β, γ a kezdőpontból a síkra bocsátott normálisnak irányszögei.

A síknak általában *egy* HESSE-féle normálegyenlete van. Csak a kezdőponton keresztül fektetett síknak van két HESSE-féle normálegyenlete, mert a normálison a haladás pozitiv értelmét kétféle módon állapíthatjuk meg. A két megállapodásnak megfelelő HESSE-féle normálegyenletek baloldalai csak előjelben különböznek egymástól.

415. §. A sík számára elsőfokú egyenletet találtunk. Fordítva bármely

$$Ax + By + Cz + D = 0 \qquad 1)$$

elsőfokú egyenlet síkot jellemez. (A, B, C, D valós együtthatók; A, B, C közül legalább egy nem egyenlő a zérussal.)

Az állítás helyessége közvetlenül világos, ha

$$A^2 + B^2 + C^2 = 1 \quad \text{és} \quad D \leqq 0. \qquad 2)$$

Ekkor ugyanis mindig található oly irány, hogy A, B, C a megfelelő irányCosinusok, továbbá oly nem negativ p szám, hogy $D = -p$. Vagyis ekkor az 1) alatti egyenlet valamely sík HESSE-féle normálegyenlete.

Ha a 2) alatti feltételek nincsenek kielégítve, akkor az 1) alatti egyenlet ugyan nem HESSE-féle normálegyenlet, de ekkor is síkot határoz meg. Ugyanis egy λ tényezővel való szorzással mindig elérhetjük, hogy a szorzás után nyert egyenlet együtthatói kielégítsék a 2) alatti feltételeket, vagyis hogy a szorzás valamely síknak HESSE-féle normálegyenletére vezessen. A λ tényező úgy választandó, hogy

$$\lambda^2(A^2+B^2+C^2) = 1 \quad \text{és} \quad \lambda D < 0$$

legyen. Ez mindig lehetséges, még pedig úgy és csak úgy, hogy

$$\lambda = \frac{1}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}.$$

Ha D a zérustól különböző, akkor itt a négyzetgyök a D-vel ellenkező előjelűnek veendő. A $D = 0$ esetben a négyzetgyök előjelére nézve nem kapunk megszorítást. Ekkor tehát a HESSE-féle normálegyenletre való áttérés kétféle módon végezhető. Ez onnan van, mert ekkor a kezdőponton keresztül menő síkkal van dolgunk.

416. §. Akár derékszögű, akár ferdeszögű koordináták esetében valamely adott elsőfokú egyenlet által jellemzett síknak a koordinatatengelyekkel való metszéspontjait a következő módon határozzuk meg.

Például az OZ tengellyel való metszéspont koordinatái: $(0, 0, z)$, hol z úgy választandó, hogy a pont koordinatái kielégítsék az adott

$$Ax + By + Cz + D = 0 \qquad 1)$$

elsőfokú egyenletet, vagyis hogy

$$Cz + D = 0 \qquad 2)$$

legyen. Ha C a zérustól különböző, akkor innen

$$z = -\frac{D}{C}.$$

Ha C zérus, de D a zérustól különböző, akkor a 2) alatti egyenlet ellenmondó. Ekkor az OZ tengelynek és a síknak nincs (véges) közös pontja. Ha C és D mindkettő zérus akkor a 2) alatti egyenlet azonosság; ekkor tehát OZ minden pontja a síknak is pontja. A mondottak értelmében *C eltünése a szükséges és elegendő feltétel arra, hogy a sík OZ-vel párhuzamos legyen vagy esetleg ezt magában foglalja.* Hasonló jelentése van A vagy B eltünésének a többi koordinatatengelyre nézve.

Ha A, B, C közül kettő tünik el, akkor a sík valamelyik koordinatasíkkal párhuzamos vagy esetleg vele összeesik. Ez az előbbiekből világos és a következő módon is belátható.

Az 1) alatti egyenlet által meghatározott síknak és OXY-nak közös pontjaira nézve z értéke zérus, x és y pedig kielégitik azt az

$$Ax + By + D = 0 \qquad 3)$$

egyenletet, melybe a sík egyenlete a $z=0$ helyettesítés után átmegy. A 3) alatti egyenlet csak két koordinatát tartalmaz és a síkbeli geometria szempontjából felfogva az OXY sík egyik egyenesét ábrázolja. Ennek az egyenesnek pontjai alkotják OXY-nak és a szóbanforgó síknak közös pontjait. Más szóval a 3) alatti egyenlet OXY-ban annak az egyenesnek egyenlete, melyben OXY a szóbanforgó síkot metszi. Ha A és B zérusok, akkor a 3) alatti egyenlet ellenmondó egyenlet vagy azonosság; ekkor tehát a sík az OXY koordinatasíkot csakugyan nem metszi, hanem vagy vele párhuzamos, vagy vele összeesik.

417. §. A tér (x_0, y_0, z_0) pontját tartalmazó bármelyik sík egyenlete az

$$A(x-x_0) + B(y-y_0) + C(z-z_0) = 0$$

alakban irható. Viszont minden ilyen alakú egyenlet az (x_0, y_0, z_0) pontot tartalmazó síkot jellemez.

Az egyenes analitikus jellemzése.

418. §. A tér valamely e egyenesének analitikus jellemzése úgy történhetik, hogy megadjuk két az e-n keresztül fektetett síknak egyenleteit. Igy az egyenes számára (akár derékszögű, akár ferdeszögű koordinaták esetében)

$$\begin{aligned} Ax + By + Cz + D &= 0, \\ A'x + B'y + C'z + D' &= 0 \end{aligned} \qquad 1)$$

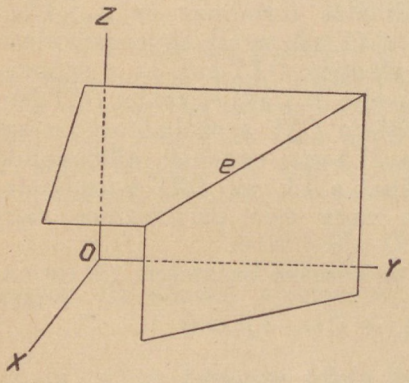
alakú egyenletrendszert kapunk. Az egyenes azoknak a pontoknak geometriai helye, melyeknek koordinatái a két egyenletet egyszerre kielégitik.

A két síkot úgy választhatjuk, hogy bármelyiknek egyenlete csak két koordinatát tartalmaz. Valóban a koordinatasíkok közül

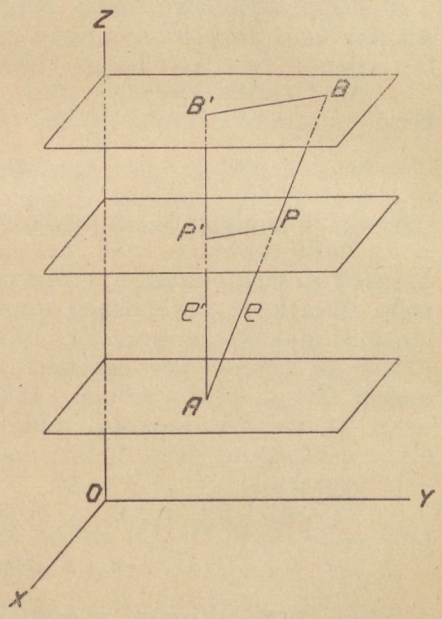
legalább egy — mondjuk OYZ, — az e egyenest nem tartalmazza és vele nem is párhuzamos. Ha most már (169. ábra) az egyenesen keresztül fektetett síkok egyikét az OZ tengellyel párhuzamosnak választjuk (esetleg az OZ-t tartalmazónak), a másikat az OY tengellyel párhuzamosnak (esetleg ezt tartalmazónak), akkor az egyenes egyenletrendszere ilyen alakú:

$$\begin{aligned} Ax + By + D &= 0, \\ A'x + C'z + D' &= 0. \end{aligned} \qquad 2)$$

Ezeknek az egyenleteknek, minthogy csak két-két koordinatát tartalmaznak, nemcsak a térbeli, hanem a síkbeli geometria szempontjából is van értelmük. Az első egyenlet, vagyis az e-n keresztül OZ-vel párhuzamosan fektetett síknak egyenlete, a síkbeli geometria szempontjából felfogva OXY egyik egyenesét ábrázolja, még pedig azt, melyben az előbbi sík OXY-t metszi. Ha OZ merőleges az OXY síkra, akkor ez az egyenes e-nek az OXY



169. ábra.



170. ábra.

síkon való derékszögű vetülete. Ha oly ferdeszögű koordinatarendszert használunk, melyben OZ nem merőleges OXY-re, akkor a szóbanforgó egyenes e-nek az a *ferdeszögű vetülete*, melyet az OZ-vel párhuzamos sugarakkal való vetítéssel kapunk.

A 2) alatti második egyenlet a síkbeli geometria szempontjából e-nek az OXZ síkra vetett projekciója.

A 2) alatti egyenletekben B és C' nem tűnhetnek el. Ha ugyanis pl. $B=0$ volna, akkor a 2) alatti első egyenlet vagy OYZ-t, vagy valamely vele párhuzamos síkot jelentene. De ez ki van zárva, mert e nincs az OYZ síkban és vele nem is párhuzamos.

A mondottak értelmében 2) alatt az első egyenlet y szerint, a második egyenlet pedig z szerint megoldható. A megoldás után az egyenes egyenletrendszere ilyen alakú:

$$y = b + mx, \quad z = c + nx, \qquad 3$$

hol a, b, m, n állandók. Ez az egyenletrendszer az egyenes pontjaira nézve y-t és z-t mint x elsőfokú egész függvényeit adja meg.

Ha az e egyenes az OYZ síkkal párhuzamos, akkor x szerepét más koordinatára kell áthárítanunk.

419. §. A tér e egyenesének analitikus jellemzése úgy is történhetik, hogy e tetszés szerinti P pontjának koordinatáit, mint valamely pontról-pontra változó t *parameter* függvényeit fejezzük ki. Az így előállított

$$x = f_1(t), \quad y = f_2(t), \quad z = f_3(t)$$

egyenletrendszert a térbeli egyenes *parameteres egyenletrendszerének* mondjuk.

Különösen egyszerű parameter a $t = \frac{AP}{AB}$. Itt A és B az egyenes két állandó pontja. Koordinatáik legyenek

$$(x_1, y_1, z_1), \quad (x_2, y_2, z_2).$$

A parameteres egyenletrendszer levezetésénél A-n keresztül (170. ábra) az OZ tengellyel párhuzamos AP' egyenest húzzuk, továbbá B-n és P-n keresztül az OXY síkkal párhuzamos síkokat fektetünk. Az AP' egyenesnek evvel a két síkkal való metszéspontjai legyenek B' és P'. Minthogy a BB' és PP' egyenesek egymással párhuzamosak, azért

$$AP' : AB' = AP : AB.$$

Itt

$$AP' = z - z_1, \quad AB' = z_2 - z_1, \quad AP : AB = t.$$

Tehát

$$(z - z_1) : (z_2 - z_1) = t, \qquad 1)$$

vagyis*

$$z = z_1 + (z_2 - z_1)\, t. \qquad 2)$$

Hasonló meggondolások végezhetők a többi koordinatákra nézve is. Ily módon az egyenes számára a következő parameteres egyenletrendszert kapjuk:

$$\begin{aligned} x &= x_1 + (x_2 - x_1)\, t, \\ y &= y_1 + (y_2 - y_1)\, t, \\ z &= z_1 + (z_2 - z_1)\, t. \end{aligned} \qquad 3)$$

Ez az egyenletrendszer

$$x = a + lt, \quad y = b + mt, \quad z = c + nt \qquad 4)$$

alakú, hol a, b, c és l, m, n puszta állandók.

Ha az egyenes az OYZ síkkal párhuzamos, akkor l a zérussal egyenlő. Ha az egyenes az OZ tengellyel párhuzamos, akkor l és m eltűnik. De l, m, n közül legalább egy mindig a zérustól különböző. Ha ugyanis

$$l = x_2 - x_1, \quad m = y_2 - y_1, \quad n = z_2 - z_1$$

* Ha $z_1 = z_2$, vagyis, ha az egyenes az OXY síkkal párhuzamos, akkor az 1) alatti proporciónak nincs értelme, de a 2) alatti egyenlet nyilván helyes marad.

rendre zérus volna, akkor A és B nem jelenthetnének két különböző pontot.

Egyszersmind világos, hogy minden 4) alakú egyenletrendszer valamely egyenes parameteres egyenletrendszerének tekinthető, akárhogyan választjuk a benne előforduló állandókat, ha csak l, m, n közül legalább az egyiknek a zérustól különböző értéke van.

420. §. Ha a $t = \frac{AP}{AB}$ hányados helyett a $\lambda = \frac{AP}{PB}$ távolsági viszonyt választjuk parameternek, akkor (362. §.)

$$t = \frac{\lambda}{1+\lambda}.$$

Ezt tekintetbe véve, az egyenes parameteres egyenletrendszere a következő alakot veszi fel:

$$x = \frac{x_1+\lambda x_2}{1+\lambda}, \quad y = \frac{y_1+\lambda y_2}{1+\lambda}, \quad z = \frac{z_1+\lambda z_2}{1+\lambda}.$$

421. §. Az e egyenesnek

$$x = a + lt, \quad y = b + mt, \quad z = c + nt \qquad 1)$$

parameteres egyenletrendszeréből a következő módon állíthatjuk elő az egyenes nem-parameteres egyenletrendszerének leghasználatosabb alakját.

Az 1) alatti egyenletrendszer azt mondja, hogy az egyenes pontjaira nézve

$$x-a, \quad y-b, \quad z-c$$

és

$$l, \quad m, \quad n$$

csak egy t arányossági tényezőben különböznek; tehát az egyenes pontjai a következő egyenletrendszerrel jellemezhetők:

$$\frac{x-a}{l} = \frac{y-b}{m} = \frac{z-c}{n}. \qquad 2)$$

Ezentúl az egyenes egyenletrendszerét többnyire ebben a szimmetrikus alakban írjuk, mely mint két elsőfokú egyenlet kényelmes összefoglalása fogható fel, pl. mint a következőké:

$$\frac{x-a}{l} = \frac{y-b}{m}, \quad \frac{x-a}{l} = \frac{z-c}{m}.$$

Meg kell még jegyeznünk, hogy ha l, m és n nem mindannyian a zérustól különbözők, akkor a 2) alatti egyenletrendszer a zérussal való osztást tartalmaz. Az egyenletrendszernek azonban ekkor is világos és helyes értelme van, ha mint az

$$(x-a):(y-b):(z-c) = l:m:n$$

proporció kényelmes kiírását fogjuk fel.

Példák. 1. A mondottak szerint

$$\frac{x-1}{4} = \frac{y-3}{5} = \frac{z}{0}$$

azt jelenti, hogy

$$y-3=\frac{5}{4}(x-1),\quad z=0.$$

2. Az

$$\frac{x-3}{0}=\frac{y-2}{0}=z$$

egyenletrendszerben z nevezőjének 1 tekintendő. Ennek az egyenletrendszernek jelentése:

$$x-3=0,\quad y-2=0.$$

422. §. Az egyenes analitikus jellemzéséről eddig mondottak nemcsak derékszögű koordinaták esetében igazak, hanem ferdeszögű koordinaták esetében is. Ha derékszögű koordinatákra szorítkozunk, akkor a mondottakat még a következő észrevétellel egészíthetjük ki:

Az egyenesnek

$$\frac{x-a}{l}=\frac{y-b}{m}=\frac{z-c}{n}$$

alakú egyenletrendszerében az l, m, n állandók úgy viszonylanak egymáshoz, mint az egyenes iránycosinusai.

Ugyanis az egyenesnek

$$A=(a, b, c),\quad B=(a+l,\ b+m,\ c+n)$$

pontjai által határolt AB egyenesdarab vetületei a koordinatatengelyeken:

$$(a+l)-a=l,\quad (b+m)-b=m,\quad (c+n)-c=n.$$

Másrészt ezek a vetületek az egyenes irányszögeiből és az AB-nek r mérőszámából így is fejezhetők ki:

$$r\cos\alpha,\quad r\cos\beta,\quad r\cos\gamma.$$

Tehát

$$l=r\cos\alpha,\quad m=r\cos\beta,\quad n=r\cos\gamma.$$

Ez igaz, akárhogyan választjuk az irányszögek megállapításánál az egyenes pozitiv értelmét; csakhogy az egyik esetben r pozitiv, a másik esetben negativ. Mindkét esetben valóban

$$l:m:n=\cos\alpha:\cos\beta:\cos\gamma.$$

A síkra és az egyenesre vonatkozó feladatok.

423. §. *Valamely síknak a $P_0=(x_0, y_0, z_0)$ ponttól való merőleges távolságát úgy határozzuk meg, hogy a sík* Hesse*-féle normálegyenletének baloldalába behelyettesítjük P_0 koordinatáit és az így nyert szám előjelét ellenkezőre változtatjuk.*

Jelöljük (171. ábra) a síknak a P_0-tól való P_0P távolságát d-vel. A síknak a kezdőponttól való p merőleges távolsága úgy fogható fel, mint a P_0 pont OL, LQ, QP_0 koordinatáiból és a P_0P-ből alkotott törött vonalnak a sík OP' normálisán való derékszögű vetülete. Az egyes darabok vetületei:

$$x_0\cos\alpha,\quad y_0\cos\beta,\quad z_0\cos\gamma,\quad d.$$

Tehát

$$p = x_0 \cos\alpha + y_0 \cos\beta + z_0 \cos\gamma + d.$$

Innen

$$d = -(x_0 \cos\alpha + y_0 \cos\beta + z_0 \cos\gamma - p).$$

A d pozitiv értékű, ha O és P_0 a sík ugyanazon oldalán vannak, ellenben negativ értékű, ha O és P_0 a sík két különböző oldalán van.

424. §. A síknak

$$Ax + By + Cz + D = 0$$

egyenletéből az

$$x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma - p = 0$$

normálegyenletet egy λ tényezővel való szorzás adja meg. Ennélfogva a sík normálisának iránycosinusai úgy viszonylanak egymáshoz, mint a sík egyenletének A, B, C együtthatói. Ez akkor is igaz, ha a normálison a haladás értelmét nem úgy állapítjuk meg, mint a HESSE-féle normálegyenlet levezetésénél. Az ellenkező megállapításnál ugyanis csak az iránycosinusok előjele változik meg; viszonyuk ugyanaz marad.

425. §. *Az*

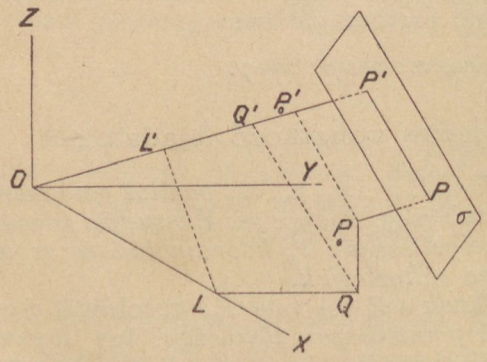
$$Ax + By + Cz + D = 0,$$
$$A'x + B'y + C'z + D' = 0$$

egyenletek által jellemzett síkok ϑ hajlásszögét a következő képletek segítségével határozzuk meg:

$$\cos\vartheta = \frac{AA' + BB' + CC'}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}\sqrt{A'^2+B'^2+C'^2}}, \qquad 1)$$

$$\sin^2\vartheta = \frac{(BC'-CB')^2 + (CA'-AC')^2 + (AB'-BA')^2}{(A^2+B^2+C^2)(A'^2+B'^2+C'^2)} \qquad 2)$$

Ugyanis a két sík által bezárt szög egyenlő a normálisaik által bezárt szöggel. A normálisok iránycosinusai úgy viszonylanak egymáshoz, mint A, B, C, illetőleg mint A', B', C'. A két sík hajlásszögének cosinusát és sinusát tehát úgy határozhatjuk meg, hogy a 398. §-ban két egyenes hajlásszögére talált képletekben l, m, n és l', m', n' helyébe az A, B, C és A', B', C' értékeket helyettesítjük. A helyettesítés az 1) és 2) alatti képletekre vezet.



171. ábra.

A két sík akkor és csak akkor párhuzamos egymással, ha normálisaik egyenlő irányúak. Ennek feltételét az

$$A : B : C :: A' : B' : C'$$

proporció fejezi ki.

A két sík akkor és csak akkor merőleges egymásra, ha normálisaik merőlegesek egymásra. Ennek feltételét az

$$AA' + BB' + CC' = 0$$

egyenlet fejezi ki.

426. §. *Az*

$$Ax + By + Cz + D = 0$$

egyenlet által jellemzett síknak és az

$$\frac{x-a}{l} = \frac{y-b}{m} = \frac{z-c}{n}$$

egyenletrendszer által jellemzett egyenesnek ϑ hajlásszögét a következő képletek segítségével határozzuk meg:

$$\sin\vartheta = \frac{Al+Bm+Cn}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}\,\sqrt{l^2+m^2+n^2}},$$

$$\cos^2\vartheta = \frac{(Bn-Cm)^2+(Cl-An)^2+(Am-Bl)^2}{(A^2+B^2+C^2)(l^2+m^2+n^2)}.$$

Ugyanis a meghatározandó ϑ szög derékszöggé pótolja ki azt a szöget, melyet az egyenes a síknak normálisával bezár. A meghatározandó szögre vonatkozó képleteket tehát úgy kapjuk meg a két egyenes hajlásszögére vonatkozókból, hogy a második egyenes iránycosinusaival arányos mennyiségek helyébe a sík normálisának iránycosinusával arányos A, B, C számokat helyettesítjük, a két egyenes hajlásszögének helyébe pedig a $\frac{\pi}{2} - \vartheta$ különbséget írjuk.

A sík és az egyenes merőlegességének feltétele:

$$l : m : n = A : B : C.$$

A sík és az egyenes akkor párhuzamosak egymással, ha a sík normálisa a szóbanforgó egyenesre merőleges. Ennek feltétele

$$Al + Bm + Cn = 0.$$

427. §. Azok a feltételi egyenletek, melyeket a 398. §-ban két egyenesnek, most pedig két síknak vagy egy egyenesnek és egy síknak párhuzamosságára vagy merőlegességére találtunk, a következő példáknál egyszerű alkalmazást találnak.

Példák. 1. *Meghatározandó annak az e' egyenesnek egyenletrendszere, mely párhuzamos az*

$$\frac{x-4}{7} = \frac{y-5}{6} = \frac{z-1}{23}$$

egyenletrendszer által ábrázolt e egyenessel és a $P = (2, 9, 3)$ ponton keresztülmegy.

Az adott ponton keresztül húzott bármely egyenes egyenletrendszere ebben az alakban írható:

$$\frac{x-2}{l} = \frac{y-9}{m} = \frac{z-3}{n}.$$

Hogy ez az egyenletrendszer az e-vel párhuzamos egyenest ábrázoljon, annak feltétele:

$$l : m : n = 7 : 6 : 23.$$

A e' egyenes egyenletrendszere tehát a következő alakban írható fel:

$$\frac{x-2}{7} = \frac{y-9}{6} = \frac{z-3}{23}.$$

2. *Meghatározandó annak a síknak egyenlete, mely az*

$$\frac{x}{5} = \frac{y}{-3} = \frac{z-1}{8}$$

egyenletrendszer által ábrázolt egyenesre merőleges és a $P = (7, 4, 11)$ *ponton keresztül megy.*

Az adott ponton keresztül fektetett bármely sík egyenlete

$$A(x-7) + B(y-4) + C(z-11) = 0$$

alakú. A merőlegesség feltétele:

$$A : B : C = 5 : -3 : 8.$$

Tehát a meghatározandó sík egyenlete:

$$5(x-7) - 3(y-4) + 8(z-11) = 0.$$

3. *Meghatározandó annak a* $P = (8, 4, 9)$ *ponton keresztül menő síknak egyenlete, mely a*

$$3x + 7y + z = 0$$

síkkal párhuzamos.

A sík egyenlete ily alakú:

$$A(x-8) + B(y-4) + C(z-9) = 0.$$

A párhuzamosság miatt

$$A : B : C = 3 : 7 : 1.$$

Tehát a keresett egyenlet:

$$3(x-8) + 7(y-4) + z - 9 = 0.$$

4. *Meghatározandó annak a* $P = (1, 12, 25)$ *ponton keresztül menő egyenesnek egyenletrendszere, mely az*

$$5x - 3y + 4z - 67 = 0$$

és

$$2x + 8y + 9z + 35 = 0$$

egyenletek által ábrázolt síkokkal párhuzamos.

Az egyenes egyenletrendszere ily alakú:

$$\frac{x-1}{l} = \frac{y-12}{m} = \frac{z-25}{n}.$$

Hogy az adott síkokkal párhuzamos egyenest kapjunk, az l, m, n állandók a következő feltételi egyenleteknek megfelelően választandók:

$$5l - 3m + 4n = 0,$$
$$2l + 8m + 9n = 0.$$

Innen

$$l : m : n = \begin{vmatrix} -3 & 4 \\ 8 & 9 \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} 4 & 5 \\ 9 & 2 \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} 5 & -3 \\ 2 & 8 \end{vmatrix}$$

$$= -59 : -37 : 46.$$

A keresett egyenes egyenletrendszere:

$$\frac{x-1}{-59} = \frac{y-12}{-37} = \frac{z-25}{46}.$$

428. §. *A térnek valamely (x, y, z) pontja akkor és csak akkor közös pontja az*

$$A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0,$$
$$A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0,$$
$$A_3x + B_3y + C_3z + D_3 = 0$$

egyenletek által jellemzett három síknak, ha e három egyenletet rendre kielégíti. Ez közvetlenül világos.

Ha az ismeretlenek együtthatóiból alkotott determinánsnak a zérustól különböző értéke van, akkor a három egyenletből alkotott egyenletrendszernek egy és csak egy megoldása van. Ekkor tehát a három síknak egy és csak egy közös pontja van. Minden más esetben a három egyenletből alkotott egyenletrendszer vagy ellenmondó, vagy pedig legalább egy egyenlete a többinek következménye. Ellenmondás esetében a három síknak nincs (véges) közös pontja. Ha valamelyik sík egyenlete a többinek következménye, akkor a három síknak végtelen sok közös pontja van. Ezek összessége vagy egyenes vonal, vagy sík. Az utóbbi eset (a sík esete) akkor és csak akkor következik be, ha az adott egyenletek egymástól csak állandó tényezőkben különböznek, vagyis ha nincs három különböző síkkal dolgunk, hanem a három egyenlet ugyanazt a síkot ábrázolja.

Megjegyezhetjük még, hogy az

$$\begin{vmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 \end{vmatrix} = 0$$

esetben a három síkhoz mindig található legalább egy oly irány, hogy abban az irányban húzott egyenesek mind a három síkkal párhuzamosak.

Valóban valamely egyenes akkor és csak akkor párhuzamos

mind a három sikkal, ha az iránycosinusaival arányos l, m, n számok kielégítik a következő egyenletrendszert:

$$A_1 l + B_1 m + C_1 n = 0,$$
$$A_2 l + B_2 m + C_2 n = 0,$$
$$A_3 l + B_3 m + C_3 n = 0.$$

Minthogy ennek a homogén lineáris egyenletrendszernek determinánsáról föltesszük, hogy zérussal egyenlő, azért okvetlenül van legalább egy oly megoldása, melyben nem minden ismeretlen egyenlő zérussal.

Példák. 1. *Meghatározandó a következő egyenletek által ábrázolt három síknak metszéspontja:*

$$\begin{aligned} 2x + 3y + z + 1 &= 0 \\ x - y + 2z + 7 &= 0 \\ 3x + 7y + 4z &= 0 \end{aligned}$$

A három egyenlet az

$$x,\ y,\ z,\ 1$$

mennyiségekben homogén lineáris egyenletrendszert alkot. Innen:

$$x : y : z : 1$$

$$= -\begin{vmatrix} 3 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 7 \\ 7 & 4 & 0 \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 7 \\ 3 & 4 & 0 \end{vmatrix} : -\begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & -1 & 7 \\ 3 & 7 & 0 \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \\ 3 & 7 & 4 \end{vmatrix}.$$

Az utolsó determináns értéke:

$$2\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 7 & 4 \end{vmatrix} + 3\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 7 \end{vmatrix}$$

$$= 2(-18) + 3 \cdot 2 + 10 = -20.$$

Ha a többi három determinánst is kiszámítjuk, akkor a következő proporciót kapjuk:

$$x : y : z : 1 = 53 : -37 : 25 : -20.$$

A három sík közös pontjára nézve tehát

$$x = -\frac{53}{20}, \quad y = \frac{37}{20}, \quad z = \frac{-25}{20}.$$

2. *Az*

$$\begin{aligned} x + y + z + 1 &= 0, \\ x - y + 3z + 4 &= 0, \\ 3x + y + 5z &= 0 \end{aligned}$$

egyenletek által jellemzett síkoknak nincs (véges) közös pontjuk.

Valóban az ismeretlenek együtthatóiból alkotott determináns

eltűnik. Ha pedig ebben a determinánsban az első oszlop helyébe az egyenletrendszernek az ismeretlenektől ment tagjait írjuk, akkor

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 4 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 5 \end{vmatrix} = -24.$$

Ha l, m, n úgy határozandó meg, hogy a megfelelő irány mind a három síkkal párhuzamos legyen, akkor az

$$\begin{aligned} l + m + n &= 0, \\ l - m + 3n &= 0, \\ 3l + m + 5n &= 0 \end{aligned}$$

egyenletrendszer első két egyenletéből

$$l : m : n = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}$$
$$= 4 : -2 : -2 = -2 : 1 : 1.$$

Ez az eredmény a harmadik egyenletnek is megfelel.

429. §. *Két különböző*

$$P_1 = (x_1, y_1, z_1), \quad P_2 = (x_2, y_2, z_2)$$

pont egy és csak egy egyenest határoz meg. Ennek egyenletrendszere:

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{z - z_1}{z_2 - z_1}.$$

Tudjuk ugyanis, hogy az egyenes parameteres egyenletrendszere így írható:

$$x = x_1 + (x_2 - x_1)\,t, \quad y = y_1 + (y_2 - y_1)\,t, \quad z = z_1 + (z_2 - z_1)\,t.$$

Ha itt valamennyi egyenletet t szerint megoldjuk és a t-re talált kifejezéseket összehasonlítjuk, akkor valóban az 1) alatti egyenletrendszerre jutunk.

Például a

$$P_1 = (1, 3, 4), \quad P_2 = (7, 11, 17)$$

pontokat összekötő egyenes egyenletrendszere:

$$\frac{x - 1}{6} = \frac{y - 3}{8} = \frac{z - 4}{13}.$$

Ha a

$$P_1 = (x_1, y_1, z_1), \quad P_2 = (x_2, y_2, z_2), \quad P_3 = (x_3, y_3, z_3)$$

pontok nincsenek egy egyenesen, akkor egy és csak egy síkot fektethetünk rajtuk keresztül. Ennek egyenlete:

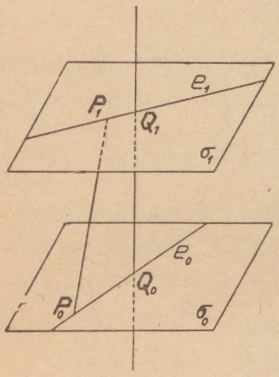
$$\begin{vmatrix} x & y & z & 1 \\ x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Valóban bármely sík egyenlete ilyen alakú:

$$Ax + By + Cz + D = 0. \qquad 2)$$

Az a követelés, hogy az adott pontok a síkon legyenek, az A, B, C, D meghatározására a következő három egyenletből álló homogén lineáris egyenletrendszert adja:

$$Ax_i + By_i + Cz_i + D_i = 0. \qquad 3)$$
$$(i = 1, 2, 3)$$



172. ábra.

Ha innen A, B, C, D viszonyát meghatározzuk és a talált értékeket 2) alatt behelyettesítjük, akkor az 1) alatti egyenletet kapjuk.

A koordinatatengelyek

$$(a, 0, 0), \quad (0, b, 0), \quad (0, 0, c)$$

pontjain keresztül fektetett sík egyenlete tehát:

$$\begin{vmatrix} x & y & z & 1 \\ a & 0 & 0 & 1 \\ 0 & b & 0 & 1 \\ 0 & 0 & c & 1 \end{vmatrix} = 0$$

Ha az első három oszlopban rendre a-val, b-vel, c-vel osztunk és azután kifejtünk, akkor ez az egyenlet így is írható:

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} - 1 = 0.$$

430. §. Két egyenest *kitérő egyenesnek* vagy *torzegyenesnek* mondunk, ha nincsen oly sík, mely mindkét egyenest magában foglalja. Ez akkor következik be, ha a két egyenesnek nincs (véges) közös pontja és nem is párhuzamosak egymással. Ha e_0 és e_1 kitérő egyenesek, akkor egy és csak egy oly egyenes van, mely mindegyiket derékszögben metszi. Ezt a következő módon határozzuk meg.

Az e_0 egyenesen keresztül az e_1-gyel párhuzamos síkot fektetünk, az e_1-n keresztül pedig az e_0-sal párhuzamos síkot. Ha e_0-on és e_1-en keresztül erre a két egymással párhuzamos σ_0 és σ_1 síkra merőleges síkokat fektetünk: ezek metszésvonala a keresett egyenes.

Ha Q_0, Q_1 ennek az egyenesnek az e_0 és e_1 egyenesekkel való metszéspontjai, akkor a Q_0Q_1 egyenesdarab hosszúságát az e_0 és e_1 egyenesek egymástól való *távolságának* mondjuk.

Ha az e_0 és e_1 egyeneseket az

$$\frac{x-a_0}{l_0} = \frac{y-b_0}{m_0} = \frac{z-c_0}{n_0}, \quad \frac{x-a_1}{l_1} = \frac{y-b_1}{m_1} = \frac{z-c_1}{n_1}$$

egyenletrendszerek jellemzik és Q_0Q_1 irányszögeit α, β, γ-val jelöljük, akkor

$$l_0 \cos\alpha + m_0 \cos\beta + n_0 \cos\gamma = 0$$
$$l_1 \cos\alpha + m_1 \cos\beta + n_1 \cos\gamma = 0.$$

Tehát $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ úgy viszonylanak egymáshoz, mint a következő másodfokú determinánsok:

$$\begin{vmatrix} m_0 & n_0 \\ m_1 & n_1 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} n_0 & l_0 \\ n_1 & l_1 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} l_0 & m_0 \\ l_1 & m_1 \end{vmatrix}.$$

Magukat $Q_0 Q_1$ irányocosinusait úgy kapjuk meg, hogy ezeket a determinánsokat rendre elosztjuk

$$\sqrt{\begin{vmatrix} m_0 & n_0 \\ m_1 & n_1 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} n_0 & l_0 \\ n_1 & l_1 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} l_0 & m_0 \\ l_1 & m_1 \end{vmatrix}^2}$$

négyzetgyökével.

A $Q_0 Q_1$ vonaldarab nem egyéb, mint a $P_0 = (a_0, b_0, c_0)$ és $P_1 = (a_1, b_1, c_1)$ pontok által határolt vonaldarabnak derékszögű vetülete a Q_0 és Q_1 által meghatározott egyenesen. Tehát

$$Q_0 Q_1 = (a_1 - a_0)\cos\alpha + (b_1 - b_0)\cos\beta + (c_1 - c_0)\cos\gamma$$

$$= \frac{\begin{vmatrix} a_1 - a_0 & b_1 - b_0 & c_1 - c_0 \\ l_0 & m_0 & n_0 \\ l_1 & m_1 & n_1 \end{vmatrix}}{\sqrt{(n_0 l_1 - l_0 n_1)^2 + (l_0 m_1 - m_0 l_1)^2 + (m_0 n_1 - n_0 m_1)^2}}.$$

Homogén koordináták.

431. §. Ha valamely vizsgálatban, melyben végtelen pontok is szerepelnek, a véges és végtelen pontokkal egyöntetűen akarunk számolni, akkor *homogén koordinatákat* használunk.

A $P = (x, y, z)$ véges pont homogén koordinatáin oly x_1, x_2, x_3, x_4 számokat értünk, melyekre nézve

$$x_1 : x_2 : x_3 : x_4 = x : y : z : 1. \qquad 1)$$

Az

$$\frac{x-a}{l} = \frac{y-b}{m} = \frac{z-c}{n}$$

egyenes végtelen pontjának koordinatáira a következő meggondolások vezetnek. Az egyenes egyenletrendszere parameteres alakban

$$x = a + lt, \quad y = b + mt, \quad z = c + nt.$$

Tehát az egyenes véges pontjaira nézve

$$x_1 : x_2 : x_3 : x_4 = (a+lt) : (b+mt) : (c+nt) : 1.$$

Ez a proporció így is írható:

$$x_1 : x_2 : x_3 : x_4 = \left(\frac{a}{t} + l\right) : \left(\frac{b}{t} + m\right) : \left(\frac{c}{t} + n\right) : \frac{1}{t}.$$

Ha a pont az egyenesen a végtelenbe távozik, akkor t a végtelenhez közeledik és az előbbi proporció a következőbe megy át:

$$x_1 : x_2 : x_3 ; x_4 = l : m : n : 0. \qquad 2)$$

Azért a szóbanforgó egyenes végtelen pontjának az l, m, n, 0 számokkal arányos homogén koordinatákat tulajdonítunk.

Mindez nemcsak derékszögű, hanem ferdeszögű koordinatarendszer esetében is igaz. Ha derékszögű rendszerre szorítkozunk, akkor a mondottak értelmében a végtelenben levő pontra nézve

$$x_1 : x_2 : x_3 : x_4 = \cos\alpha : \cos\beta : \cos\gamma : 0,$$

hol α, β, γ a szóban forgó végtelen ponton keresztül menő egyenesek irányszögei.

432. §. Az

$$Ax + By + Cz + D = 0$$

egyenlet által ábrázolt síknak homogén koordinatákban kifejezett egyenlete

$$Ax_1 + Bx_2 + Cx_3 + Dx_4 = 0.$$

A végtelenben levő síknak homogén koordinatákban kifejezett egyenlete

$$x_4 = 0.$$

Ha a végtelenben levő síkot nem homogén koordinaták esetében is egyenlettel akarjuk ábrázolni, akkor erre a célra az

$$1 = 0$$

ellenmondó egyenletet használjuk (mint a síkbeli vizsgálatoknál a végtelenben levő egyenes ábrázolására is ezt az egyenletet használtuk).

A síksor egyenlete.

433. §. A tér valamely egyenesén keresztül fektethető síkok összességét *síksornak* mondjuk.

Az

$$L_1 = 0, \quad L_2 = 0$$

elsőfokú egyenletek által jellemzett két sík metszésvonalán keresztül menő tetszőleges síknak egyenlete

$$\lambda_1 L_1 + \lambda_2 L_2 = 0. \qquad 1)$$

Itt λ_1 és λ_2 tetszőleges állandók azzal az egyetlen kikötéssel, hogy legalább az egyiknek értéke a zérustól különböző.

Valóban az 1) alatti egyenlet mindig síkot jellemez. Ez a sík a szóbanforgó egyenest mindig magában foglalja, mert ennek az egyenesnek minden pontjára nézve L_1 és L_2, tehát egyszersmind $\lambda_1 L_1 + \lambda_2 L_2$ is eltűnik.

Egyszersmind könnyen belátható, hogy λ_1 és λ_2 alkalmas választásával megkaphatjuk bármely oly síknak egyenletét, mely az adott egyenesen keresztül megy.

E tétel helyessége természetesen független attól, hogy homogén vagy közönséges koordinatákat használunk. A bebizonyításnál azonban homogén koordinatákat és egyenleteket kell szem előtt tartanunk, mert csak így válik a bebizonyítás alkalmazhatóvá akkor is, mikor az adott két sík metszésvonala a végtelenben van.

Egy pontban találkozó négy sík.

434. §. A 356. §-ban mondottak mintájára könnyen belátható a következő kriterium helyessége:

Az

$$A_i x + B_i y + C_i z + D_i = 0 \quad (i = 1, 2, 3, 4)$$

egyenletek, vagy a megfelelő

$$A_i x_1 + B_i x_2 + C_i x_3 + D_i x_4 = 0 \quad (i = 1, 2, 3, 4)$$

homogén egyenletek által jellemzett síkoknak akkor és csak akkor van legalább egy (véges vagy végtelen) közös pontjuk, ha

$$\begin{vmatrix} A_1 & B_1 & C_1 & D_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 & D_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 & D_3 \\ A_4 & B_4 & C_4 & D_4 \end{vmatrix}$$

eltűnik.

Ez a kriterium így is kifejezhető:

Az

$$L_1 = 0, \quad L_2 = 0, \quad L_3 = 0, \quad L_4 = 0$$

elsőfokú egyenletek által jellemzett síkoknak akkor és csak akkor van legalább egy (véges vagy végtelen) közös pontjuk, ha találhatunk négy olyan $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4$ számot, melyek nem mindannyian zérusok és melyekkel az egyenletek baloldalait megszorozván, a nyert szorzatoknak

$$\lambda_1 L_1 + \lambda_2 L_2 + \lambda_3 L_3 + \lambda_4 L_4$$

összege azonosan eltűnik.

Példa. *Meghatározandó annak a síknak az egyenlete, mely az*

$$\begin{aligned} y + z + a &= 0 \\ x + z + b &= 0 \\ x + y + c &= 0 \end{aligned}$$

síkok metszéspontját és az

$$\begin{aligned} x + y + z &= 0 \\ ux + vy + wz &= 0 \end{aligned}$$

síkok metszésvonalát összeköti.

Az utóbbi két sík metszésvonalán keresztül menő tetszőleges sík egyenlete

$$\lambda_1(x+y+z)+\lambda_2(ux+vy+wz)=0. \qquad \alpha)$$

Ez a sík akkor és csak akkor megy keresztül az első három sík metszéspontján, ha

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & a \\ 1 & 0 & 1 & b \\ 1 & 1 & 0 & c \\ \lambda_1+\lambda_2 u & \lambda_1+\lambda_2 v & \lambda_1+\lambda_2 w & 0 \end{vmatrix}=0,$$

vagyis

$$\lambda_1\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & a \\ 1 & 0 & 1 & b \\ 1 & 1 & 0 & c \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}+\lambda_2\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & a \\ 1 & 0 & 1 & b \\ 1 & 1 & 0 & c \\ u & v & w & 0 \end{vmatrix}=0.$$

Ha innen λ_1 és λ_2 viszonyát meghatározzuk és a talált viszonyt $\alpha)$ alatt tekintetbe vesszük, akkor a meghatározandó sík számára a következő egyenletet kapjuk:

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & a \\ 1 & 0 & 1 & b \\ 1 & 1 & 0 & c \\ u & v & w & 0 \end{vmatrix}(x+y+z)-\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & a \\ 1 & 0 & 1 & b \\ 1 & 1 & 0 & c \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}(ux+vy+wz)=0.$$

MAGYAR TUDOMÁNYOS AKADÉMIA KÖNYVTÁRA 1502/1951 N. SZ.

507