Österreichische
Nationalbibliothek

digitalisiert mit Google

Tentamen juventutem studiosam in elementa matheseos purae ... introducendi cum appendice triplici (etc.). 2.

Jos. et Sim. Kali

Maros Vasarhelyini 1833

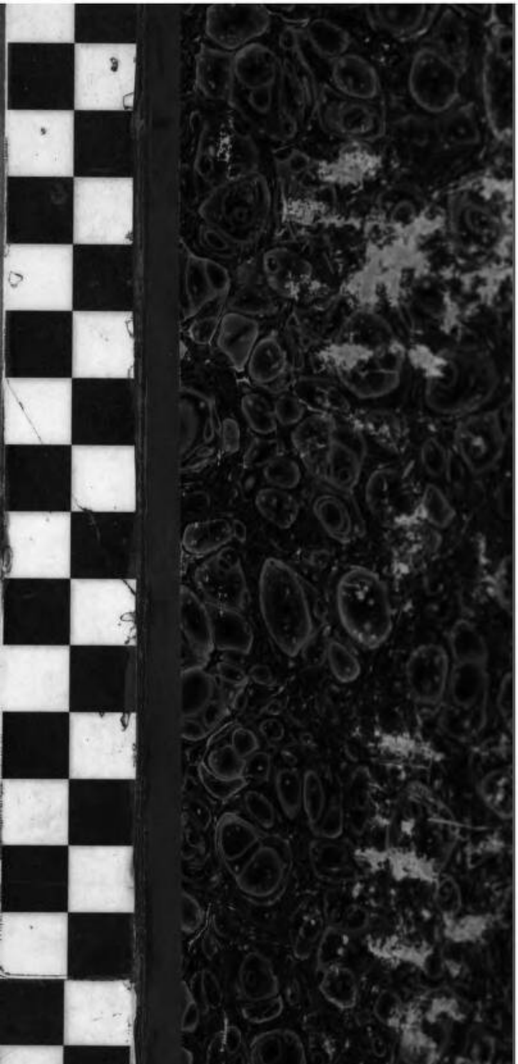
Signatur: *70.K.55.(Vol.2)
Barcode: +Z184520309
Zitierlink: http://data.onb.ac.at/ABO/%2BZ184520309
Umfang: Bild 1 - 462

Nutzungsbedingungen

Bitte beachten Sie folgende Nutzungsbedingungen: Die Dateien werden Ihnen nur für persönliche, nichtkommerzielle Zwecke zur Verfügung gestellt. Nehmen Sie keine automatisierten Abfragen vor. Nennen Sie die Österreichische Nationalbibliothek in Provenienzangaben. Bei der Weiterverwendung sind Sie selbst für die Einhaltung von Rechten Dritter, z.B. Urheberrechten, verantwortlich.

Hinweis: Das Dokument enthält hinterlegte Textdaten, die eine Suche in der Datei ermöglichen. Diese Textdaten wurden mit einem automatisierten OCR-Verfahren ermittelt und weisen Fehler auf.


BOJAI
TENTAMEN
IN
MATHESI
2.



*70. K. 55.

MENTEM ALIT ET EXCOLIT

K.K. HOFBIBLIOTHEK
ÖSTERR. NATIONALBIBLIOTHEK

*70. K. 55

899

TENTAMEN

JUVENTUTEM STUDIOSAM

IN ELEMENTA MATHESEOS PURAE, ELEMENTARIS AC SUBLIMIORIS, METHODO INTUITIVA, EVIDENTIAQUE HUIC PROPRIA, INTRODUCENDI.

CUM APPENDICE TRIPLICI.

Auctore Professore Matheseos et Physices Chemiaeque Publ. Ordinario.

Tomus Secundus.

Maros Vásárhelyini. 1833.
Typis Collegii Reformatorum per JOSEPHUM, et SIMEONEM KALI de felső Vist.

Imprimatur.

M. Vásárhelyini Die

12 Octobris 1829.

Paulus Horváth m. p.

Abbas, Parochus et Censor Librorum.

KAISERLICHE KÖNIGLICHE
WIEN
HOFBIBLIOTHEK

LECTORI SALUTEM!

Quum tam prior tomus, quum hic, vita variis distracta, sine otio, et inter difficultates impressionis insuperabiles (quapropter nec antea rem aggredi animus fuit) editus, erroribus scateat: neque opus, spe quoque exstincta, vel expensas unquam refusum iri, ut par erat, extendi potuerit: defectus saltem (in quantum fieri potuit) suppleturus; non solum errata tomi primi, quos postea animadverti, sed et conceptus quosdam in tomo primo traditos, pro Tyronibus meis dilucidandos, et eosdem quidem sed simplicius praecisiusque exprimendos esse docendo expertus, id ad finem tomi hujus adjeci. Quo praeter alia quaedam, et proportionis potentiaeque generalior conceptus, atque imaginaria etiamsi in exponentem ascendant, pertinent.

Quum autem meris imaginibus nonnisi proprio nutu sensum dare tentaverim: verebar, ne derisui forem; donec *summi Viri Göttingae* (mea laude longe majoris) *primae lineae imaginariorum* (in *Gött. Gel. Anz.*), simul cum querela de eorum pertractatione, jam olim edita, mihi innotuissent. Magno hoc mihi solatio fuit: et nonnisi eousque, donec theoria illa prodierit, meam (quae jam qualem concipere poteram impressa erat) pro discipulis meis dilucidare debui: si vero illa prodierit; persvasus eam operibus ceteris, quae solidum penetransque (et fere infallibile) ingenium, sigillo veri simplici distingvunt, parem fore; contentus ero idem saltem cum tanto genio voluisse.

Denique etiamsi opus hoc utcunque imperfectum fuerit: fore tales Lectores Benevolos spero, qui ut Magnus *Leibnitzius*, se in quovis libro aliquid reperire confessus est, nec in hoc omne rejicient: et quum hoc solum, nec alibi quidquam arrogaverim, neque pollicitus magna sim: benignam errorum emendationem veniamque exoro; eo magis, quod fera mortale cor fata fregerint.

Verum quis adeo demens sit, ut ante extremum halitum, beatum se dicere ausit? Omnis fortuna humana, ut bulla inanis, dum variis spei iridibus ridet, in luridam guttam collabitur. Serius ocius quisque in sua cruce exspirat: quae tamen arbor vitae fit; dum immeritorum vulnerum rubore ad noctis terrestris oras, aurora brevibus lacrymis aeterno soli renidentibus oritur.

EXPLICATIO SIGNORUM,

in tomo 2do occurrentium, (ne arborem in tomo primo saepius evolvere oporteat).

Literae latinae, graecaeque, (nisi expresse aliud monitum fuerit) semper lineas, angulos, aut certas figuras, vel areas soliditatesve denotant; et nisi aliud quid sensum restringens antepositum fuerit, post se invicem positae, factum ex iis tanquam factoribus significant. Ex gr. abc tantum significat ac $a.b.c$, id est factum e factoribus a, b, c; sed $\triangle abc$ denotat triangulum cujus latera a, b, c sunt, ita figura $abcd$--- figuram cujus latera a, b, c, d--- sunt; imo si triangulum in dato quopiam schemate fuerit, cujus a, b, latera sunt, denotatur etiam per $\triangle ab$, pariter si altitudo ejus a, basis b, sive a et b anguli ejus fuerint. Ita angulus quem lineae a, b faciunt, per $\wedge ab$ denotatur.

Literae germanicae autem denotant puncta, et $\mathfrak{ab}$ lineam ab $\mathfrak{a}$ ad $\mathfrak{b}$, atque $\wedge \mathfrak{abc}$ angulum quem linea $\mathfrak{ab}$ cum $\mathfrak{bc}$ facit.

$A \perp B$ denotat, quod A ad B *perpendicularis* sit.

$A \parallel B$ significat, quod A *parallela* ad B sit.

R (nisi aliud monitum fuerit): *angulum rectum* denotat.

$x \frown a$ significat, quod x *ad limitem* a *tendat* (Tom. I. p. 29).

$\widetilde{\mathfrak{ab}}$ significat rectam in qua puncta $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}$ sunt, *utrinque infinitam*, (nempe complexum omnium punctorum, quae cum $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}$ in eadem recta sunt); unde quid $\widetilde{P}$ (pro P planum denotante) significet, patet.

$\tilde{ab}$ denotat rectam ex a incipiendo infinitam in illa plaga in qua b est, $\tilde{ab}$ autem denotat ex b incipiendo per a ∞tam.

$\triangle$la, $\wedge$li, ∥la, ∥logrammum, ∥lepipedum, ⊥ris &c tantum est, ac *triangula, anguli, parallela, parallelogrammum, parallelepipedum, perpendicularis* &c.

Aequalitatis quidem variae distingvuntur species (Tom. I. p. 20. 107. &c): at quum e contextu ubique pateat, num de forma vel areis aut longitudine &c sermo sit; ne signa multiplicentur, more consveto denotantur in hoc tomo; quamvis et in geometrice aequalibus (Tom I. p. 454) discernantur non solum ea, quae congruere nequeunt, uti cochlea ad dextram laevamque, sed etiam quae reipsa congruunt; nempe literae quae typum imprimit, facies, a literae impressae facie differt &c; et tanto magis aliae aequalitatis species distingvendae sunt.

$+$ denotat *positivum*, $-$ vero *negativum*, et $-a$ *oppositum* ejus quod per a designatur.

Sit autem pro insvetis designationibus venia; praesertim quod (propter commoda plura) (f)x pro $f(x)$ scribatur: quum procul ab eo, ut a rebus novis jus nova proferendi nomina, possem praetendere; omnibus his per longa tempora eum in finem usus, ut Tyrones conceptus fundamentaque distinctius faciliusque perciperent; nonnisi diuturna consvetudine experientiaque, in eorundem gratiam eadem retinere ausus sim.

Certe ut signa aequalia semper aequalia significent, atque puncta interpunctioni relinquantur; etiam $\alpha : \beta$ aliter ex gr. per $\alpha \cdot \beta$, $\alpha : \beta$ quoque aliter ex gr. per $\alpha \diagdown \beta$ (imo plura juxta Tom I. p. 181) denotare maluissem.

INDEX RERUM IN TOMO II. CONTENTARUM.

dividitur, simul cum recta ipsa. Constructio *rectanguli, rhomboidis, rhombi, quadrati*, (quo etiam Tab. 2 Fig. 54 pertinet). Angulus hinc in semicirculo est rectus (p. 20).

Si duo paria fuerint ‖la; praeter *trapezium* oritur similitudo △lorum; *similitudinis* △lorum *conditiones*, et cetera similitudinem eorum concernentia (p. 21 usque ad 26). Ex gr. quomodo milliare pollici exprimi queat.

Proportionalis media (p. 27); et conversim rectam quæ hypotenusam ita dividit, ad hanc ⊥rem esse patet. *Theorema Pythagoricum* (ibidem). E lateribus dignoscere angulum, num obtusus vel acutus aut rectus sit; et *conversa Pythagorici*. Multiplicatio lineae per lineam, et divisio (p. 28 et 50 - -). Similia plurium laterum (p. 29 - -).

Rectae cum circulo, *sectio* minima punctum, maxima 2' punctorum est. *Cordae arcusque meditullia, et centrum sunt in* ⊥ri *e centro ad cordam*. Hinc *arcus cujusvis*, uti circuli per data 3 puncta non in recta sita, *centrum* reperitur. Corda intra circulum cadit. *Recta ad radium* ⊥ris est *tangens*, et *tangens est ad radium* ⊥ris, nec ulla recta inter tangentem et arcum datur. (p. 31. 33). *Recta circulum in 3 punctis secare nequit*. Quomodo tangens ex p ducatur e Fig 42 * patet (per p. 20).

Plures rectae secantes circulum: prius duæ. *Anguli tangentis cum corda quantitas* (p 33). *Angulus ad peripheriam*; angulus in semicirculo; ubi ex eadem Fig. 45, conversa patet, nempe ∧lus interior est > exterior < R, itaque *si rectus fuerit, in semicirculo est*. Cordae ‖lae absecant arcus aequales. Cordae ex eodem peripheriae puncto, a diametro porro decrescunt, et arcui majori major corda, majorique cordae major arcus respondet.

Duarum rectarum se invicem intra periph. secantium, *facta segmentorum* sunt aequalia; *quantitas anguli.* Plures rectae ex eodem puncto intra periph. (p. 34, 35) ab imo crescunt a diametro, usque ad eandem.

Duarum rectarum e puncto extra peripheriam, anguli quantitas. Plures e puncto extra periph. a diametro decrescunt, partes exteriores crescunt, usque ad tangentem (p. 35, ubi pro II inservit Fig. 50).

Hinc si anguli unius crura cruribus alterius æqnalia fuerint: lateri subtendenti majori opponitur angulus major; patet vertice in centrum posito, et uno latere unius cum latere alterius coincidente.

Rectilineorum inscriptio circulo et *circumscriptio.* (p. 36, 37). *Polygonum reg.* e circulo, et conversim *apices polygoni reg. in peripheriam cadunt.* Latus hexagoni. *Angulus polygoni*, et productis lateribus summa omnium externorum (p. 38).

Duo circuli se invicem in 3 punctis non secant; possunt tangere se invicem, extus, intus; et *centra cum tactus puncto in recta sunt* (p. 39).

Formae per sectiones trium (tum plurium) *circulorum* △la *ex arcubus*, *ejus species*, *angulorum quantitas*; *aequalitas triangulorum* ejusmodi (p. 40 usque ad 46, et 65, 66, ubi quoad p. 43 vide *Errata*).

Sectiones sine angulo: lineae sine angulo *e rectis et arcubus* circularibus, aut solum ex arcubus. *Figurae* e rectis et arcubus, aut tantum ex arcubus: *tres ejusmodi lineae talem haud praebent*; *ex una recta et 2 arcubus*, ita e *tribus arcubus*, nec non *e 2 rectis et 1 arcu fieri potest cum uno angulo*; at 4 *arcus*, *ita 2* *rectae et 2 arcus figuram sine angulo praebent. E 3 rectis et 1 arcu talis non datur* (p. 46 usque 49).

DE AREIS. *Quo sensu aequatur rectangulum facto laterum?* (p. 50). *Parallelogramma aeque alta et basium aequalium sunt aequ. term. aequalia.* De △lis idem (p. 53). Hinc ∥logrammum = facto e basi in altitudinem, et △ est hujus dimidium. *Altitudo △li e lateribus.* (p. 54). *Trapezii, quadrilateri cujusvis, figurae rectilineae, area. Circuli area* (p. 56 usque 59) *Annulus* (p. 60).

Transmutatio figurarum quoad areas, et *reductio ad rectam* (Tom. I. p. 22). *Complementa* ∥logrammorum *quae ad diagonalem sunt, aequ. term.* ≐lia *sunt. Quadratum hypot. exstruitur e quadratis cathetorum.* Quotvis quadrata in unum commutantur. *Area data in figuram certae speciei transmutatur.* (p,60 usque 63).

Comparatio similium quoad areas. Areae △lorum, *sunt uti facta laterum angulum aequalem intercipientium. Areae* △lorum *similium sunt uti quadrata linearum homologarum.* Idem de quibusvis figuris. Hinc *hypotenusae superscripta figura = summae similium cathetis superscriptarum.* Lunula Hypocratis. (p.63. usque 65).

Additio, subtractio, divisio figurarum (sub certa conditione). Exgr. ut divisio e certo puncto fiat, aut recta partem ratione data exhibens certae parallela sit (p. 67, 68).

Summa circulorum △lo *aequilatero impositorum et summae limes.* Idem de quadrilatero rectangulo. (p. 69 usque 62).

Quorundam constructio geom. (quorum antea nonnisi possibilitas innotuit). *Rectam ex-*

trema et media ratione secare: hinc *decagonum. Peripheriae divisio* (p. 73).

Trigonometria plana (p. 74, ubi linea 7. a calce *laterum* pro *angulorum* legatur). *Functiones trigonometricae. Cosinus* ex *sinu* (et conversim). *Pro quadrante* ✠vo q, $\pm 4mq \pm \alpha$ et $\pm\alpha$ sinu cosinuque eodem gaudent; et α et $-\alpha$ cosinum eundem habent, sed sinus oppositi sunt. Si γ complementum ipsius α sit, tum $\sin\gamma = \cos\alpha$; si vero $\alpha+\beta=2q$, tum α et β sinu eodem gaudent, sed $\cos\alpha = -\cos\beta$ (p. 75 usque 77).

Functionum trigonometricarum mutationes, crescente arcu a o (p. 77 usque 79). E signo functionis trig. conclusio ad arcum. *Exhibitio tangentis secantisque geometrica*, (quoad sinum, cosinum, et sin vers. e definitione patet (Tom. I. p. 456).

Si radius mutetur ex 1 *in* r, functiones trig. per r multiplicantur. (p.80)

Sin $(\alpha\pm\beta)$ (quantumvis fuerit sive α sive β, et sive ✠ sive ⊢), et cos $(\alpha\pm\beta)$; quomodo per sinus et cosinus arcuum α et β exprimitur (p. 81 usque 85).

Expressio sinus arcus $\frac{c}{2}$ *per sinum arcus* c, et $\cos\frac{c}{2}$ per $\cos c$. *Sinus et cosinus arcus multipli* (p. 85).

Dependentia laterum angulorumque △li *rectilinei mutua* (p. 86). *E* 2 *lateribus et* ∧lo *intercepto reliqui* anguli, (unde totum △ innotescit per praec.), imo immediate latus 3tium. *E tribus lateribus anguli* (p. 87, 88). △li *rectanguli resolutio specialior* : e 2 lateribus 3tium; e cathetis et angulo alterutri opposito, quaecunque bina dentur, tertium innotescit; demum e hypotenusa, catheto et angulo huic opposito; quaecunque bina dentur, tertium reperitur (p. 88).

Expressionum pro radio 1 *reductio ad radium r* (p. 89) usque 92).

Formularum quarundam transmutatio, applicationi logarithmicae magis idonea. (p. 92, 93).

E latere cum angulis adjacentibus area. E 2 lateribus et angulo intercepto area. Data summa 2 laterum cum basi altitudineque, anguli reperiuntur (p. 93, 94.).

E numero laterum polygoni et radio latus, aut e quibusvis binis tertium (p. 95).

Quomodo sinus computati sint. (p. 95, 96).

MOTUS COMPOSITUS. *Linearum ordines*, 1,2 --, *aequationes* earum (p. 97 --); *aequatio lineae* 2di *ordinis*; *tres ejus species*, *formaeque ex aequatione* (p. 101 usque 105). Ibidem *valores imaginarii* considerantur.

Axis major in ellipsi et hyperbola (rectius *primarius*). *Directrix*. *Alia definitio linearum harum* (quas p. 222 conicas esse patet) (p. 105 -- 107). *Axis minor* rectius 2dus dicitur.

Sectiones coni insignes in coelis et terra partes agunt. (p. 107 usque 110). Lampas, fornax.

Comparatio sectionum conicarum inter se (p. 110 usque 115). Asymptotus hyperbolæ (ibidem).

Mutatio initii *abscissarum*, *ellipseos* hyperbolaeque *in centrum* (p. 115).

Distantia focalis in sectionibus conicis (p. 115 usque 119).

Radii vectores in iis (p. 119 usque 122).

Ex his *constructio* punctorum *geometrica* (p. 122 usque 126); *constructiones mechanicae* (p. 126 usque 128).

Tangens, per quodvis sectionis conicae punctum; item e quovis puncto extus cadente (praeter centrum hyperbolae); atque hinc *subtangens*, *normalis*, *subnormalis*. (p. 128 usque 134, ubi pro p. 131 vide *Errata*).

Diametri sectionum conicarum. Centrum lineae, *diameter* (sensu stricto). *Axis*' *parabolae est quaevis recta axi parallela, atque quaevis recta per centrum ellipseos et hyperbolae* (praeter asymptotos) *diameter est*; nec ulla alia diameter, nec pro iisdem cordis ‖lis alia est (p. 134 usque 152).

Num linea quaedam centro gaudeat? (p. 152--) Linea 2di ordinis sectio conica est. (p. 154--, 222--) Ad verticem, ni punctum sit, per $y^2 = cx^2$ datur.

Constructio certarum aequationum per linearum intersectionem (p. 157 usque 160).

Lineae quarum non omnia, sed inter quævis duo, quotvis geometrice construi possunt. (p. 161 usque 163).

De lineis cujusvis ordinis scitu magis necessaria. Numerus terminorum aequationum earum. Mutato abscissarum initio, mutata abscissarum linea, mutatoque angulo coordinatarum, transformatio aequationis. *Ordo lineae idem manet.* Linea $n$ti ordinis a recta in non pluribus quam n punctis secari potest. Linea $n$ti ordinis per $[(n+1)(n+2):2]-1$ puncta determinatur. Linea ordinis m, lineam ordinis n, in non pluribus quam $n.m$ punctis secare potest (p. 163 usque 169).

REDITUS E PLANO *in* SPATIUM.

Sectio *rectae cum plano*, *plani cum plano*; *transitus* tam rectae quam plani *in alteram plagam*. *Plana parallela.* Recta ad 2 rectas plani ⊥ris, ad hoc ⊥ris est; daturque ⊥ris (eaque unica) ad planum e quovis puncto ejus, imo e quovis puncto extra planum. Recta ad planorum $\parallel$elorum P et Q aliquod $\perp$ris, est ad alterum quoque $\perp$ris; et quaevis duae tales rectae inter P et Q sunt aequales et parallelae; atque hinc quaevis duae rectae eidem tertiae $\parallel$lae sunt inter se $\parallel$lae. (p. 170, 171).

Angulus duorum planorum. Datur e quovis puncto plani P planum $\perp$re ad P.

Quodvis planum Q, in quod $\perp$ris ad planum P cadit, est $\perp$re ad P; et si sectio planorum P et Q sit ab, $\perp$ris ad P e quovis puncto rectæ ab in Q cadit; item quaevis $\perp$ris ad ab in Q cadens, est $\perp$ris ad P.

Si plana Q et q ad P $\perp$ria secent se invicem; sectio planorum Q et q erit recta ad P $\perp$ris.

Anguli verticales planorum quoque aequales sunt (p. 172). *Angulus solidus*: numerus laterum minimus est 3; et summa quorumvis binorum est $>$ tertio, (quod etiam ad $\triangle$li sphaerici latera applicatur). Determinatur per tria latera, et hinc pariter $\triangle$ sphaericum. (p. 172 usque 175).

Planum R *plana* $\parallel$la P, Q *secans, angulos alternos et externum interno oppositum aequales*; atque summam duorum internorum 2 rectis aequalem facit.

Sectiones planorum R, S (se mutuo secantium), cum planis $\parallel$lis P, Q factae; non solum sibi invicem $\parallel$lae sunt, sed etiam angulos aequales faciunt. (p. 175)

Cum planis $\parallel$lis P,Q, non solum tertium secans, sed *et recta cum alterutro ipsorum* P,Q *aliquid commune habens, in neutrum incidens, angulos alternos aequales*, pariterque externum interno opposito aequalem, et summam duorum internorum 2 rectis aequalem facit.

Anguli quos rectae parallelae cum plano P faciunt, sunt aequales; et rectae e punctis sectionum, ad puncta plani P illa, in quae Lres e rectis dictis ‖lis ad P demissae cadunt; sunt parallelae.

Si in plano Q sit $\mathfrak{AB} \parallel \mathfrak{A'B'}$, et $\mathfrak{AC} \parallel \mathfrak{A'C'}$, atque supra Q sint talia puncta $\mathfrak{a}$ et $\mathfrak{a}'$, ut $\mathfrak{Aa}$ cum $\mathfrak{AB}$, ita $\mathfrak{A'a'}$ cum $\mathfrak{A'B'}$ faciant augulum r, et $\mathfrak{Aa}$ cum $\mathfrak{AC}$ ita $\mathfrak{A'a'}$ cum $\mathfrak{A'C'}$ faciant angulum q; erit $\mathfrak{Aa} \parallel \mathfrak{A'a'}$.

Si plana ‖la P et Q per rectas ‖las $\mathfrak{pq}$, $\mathfrak{p'q'}$ secentur, et $\mathfrak{p}$, $\mathfrak{p}'$ in P, atque $\mathfrak{q}$, $\mathfrak{q}'$ in Q fuerint: erit $\mathfrak{pq} = \mathfrak{p'q'}$.

Si plana ‖la P,Q per planum R secentur, et sectio planorum P,R sit $\mathfrak{pi}$, planorum Q, R sit $\mathfrak{qr}$: quodcunque planum p ponatur per $\mathfrak{p}$ ad Q parallele: sectio planorum p, R eadem cum $\mathfrak{pi}$ erit. (p. 176 usque 179).

Constructio prismatis rectilinei. Prismatis conceptus genelarior. Rectilinei latera ‖logramma totidem, quot latera baseos; fiuntque duæ bases aequales et parallelae.

Prisma per quodvis planum basi ‖lum in duo prismata basium aequalium dividitur.

Puncta basium sibi invicem *respondentia*; si b portio baseos fuerit, complexus rectarum ex omnibus ipsius b punctis ad iis e básí altera respondentia, prisma, et pars prioris est. Et prismata figuris F et f absolute aequalibus et directe parallelis (Tom. I. pag. 462.) juxta rectam eandem $\mathfrak{Aa}$ exstructa congruere possunt.

At dantur prismata, quorum retia absolute aequalia sunt, ipsa tamen congruere nequeunt, nisi alterutrius rete invertatur; generatur vero et inverso reti corpus =le (p. 179 usque 184).

Hinc prisma baseos △laris *aequatur* ‖lepipedo; *et ita solum dispescitur etiam* ‖lepipedum *obliquum in duo prismata* △laria *aequalia.* (p. 186).

Parallelepipeda super basi eadem, inter plana ‖la eadem sunt *aequ. term.* aequalia. (p. 186 - - -).

Hinc qualevis ‖lepipedum in rectum transmutatur; et soliditas est facto e basi in altitudinem aequalis. (p. 189 - - -).

Prismatis soliditas (p. 191).

Pyramidis conceptus. Si △laris per planum basi ‖lum secetur, sectio erit △ simile basi. (p. 192).

Pyramidis rectilineae soliditas. At *pyramidem* △larem *aequalitate term. ad prisma reduci, posse vel* non posse, adhucdum haud liquet. (p. 192 usque 195).

Superficies pyramidis. Rete pyramidis △laris: data Lris ex apice, quantitate situque, atque basi, quaeruntur latera; aut datis basi 𝔄𝔅ℭ et latere lineari 𝔄𝔭 (pro apice 𝔭), cum angulo solido ad 𝔄, altitudo et latera quaeruntur.

Superficies prismatis: quaestiones prioribus analogae. (p. 197 - - -).

Motus figurarum circa axem.

Cylinder rectus: hujus *soliditas*, *superficies*, (rete).

Conus rectus: *soliditas*, *superficies*, *rete.* E dato angulo ad apicem, arcum sectoris (perimetrum baseos praebentis), et ex hoc illum reperire (p. 198 usque 203). Retia cylindri et coni obliqui (p. 203 usque 206).

Corporum similium soliditates uti cubi linearum homologarum (p. 206 - - -).

Revolutio semicirculi circa diametrum: *sphaerae soliditas*, *superficies*. (p. 207 usque 211).

Si pa, pb *quadrantes fuerint, anguli* apb *quantitas arcus* ab *est. Et si* q *tam ab* a *quam* a b *quadrante distet*; p *polus circuli max. per* ab *ducti est.*

E quovis puncto superficiei sphaerae datur ad quemvis circulum max. Lris. (p. 233, usque 234).

Triangula varia in sphaera, et strictius △ sphaer. Summae laterum hujus △li limites sunt *o* et 4R, summae angulorum limites autem sunt 2R et 6R.

Tres circuli maximi dividunt sphaeram in 8 △la (p. 234 usque 239).

Corpora regularia: apices corporis regularis in superficiem sphaerae cadunt. Angulus *u*, laterum planorum corporis regularis reperitur; atque ex hoc et latere lineari, radius sphærae circumscriptae. Soliditas corporum regularium (p. 239 usque 245).

Corpora regularia sensu latiore, ordinis 1mi 2di &c: nempe divisio superficiei sphaerae (adeoque spatii e centro) in partes absolute aequales, aut tantum aequales, aut in partes numero *n* et partes numero *m* aequales &c. (p. 245 usque 248).

Trigonometrica sphaerica.

Triangulum sphaericum determinantia; et formulae primariae e dependentia laterum et angulorum iis oppositorum mutua promanantes: e quibus etiam ceteri quaesitorum casus sequuntur.

Dependentia dicta (tanquam *fundamentum*). (p. 248 usque 250).

Trianguli rectanguli resolutio ad casus speciales (p. 251 usque 254).

Cujusvis △li resolutio e duobus lateribus cum ∧lo intercepto. E tribus lateribus anguli. e tribus angulis latera. (p. 254 usque 256).

Sol verus, sol *fictus* sive medius: imaginum eorundem ad aequatorem reductarum congruentia; *tempus solare verum*, *medium*, *sidereum*. (p. 281).

Applicatio dictorum ad horologia specialia: *meridionale*, (et pro casu si declinet); *horizontale declinans*; imo *reclinans* utrumque. (p. 282 et 283).

Horizontalis (usui maxime idonei) constructio vulgaris intuitiva. (p. 284).

Aequinoctiale, horizontale, *universalia*. *Lunare*. (p. 285). Annuli portatiles (p. 286.). Methodus practica. (p. 287).

CHRONOLOGIA.

Alveus rotundus fluentis temporis: punctum in eo fixum (ex gr. dum Niceae 1ma Januarii anno C. 325 incipit). *Locus absolutus*, *relativus* in circulo dicto; nempe (p. 288) $nP+s$ et s differunt, quamvis simul terminentur.

Anni, menses, septimanae; hujus dierum nomina, ethnica, christiana.

Festa fixa, *mobilia* a *Paschate* dependent. Literae dierum anni, litera dominicalis anni.

Regula principalis subdivisionis temporis in vita civili.

Fundamentum supputationis Paschatis (p. 288 usque 291).

Annus Romulaeus, *Numaeus*, *Julianus*, *Gregorianus*. (p. 292 et 293).

Aequatio Solis dicta; *formula* ejus, qua *stylus vetus ad novum reducitur*. (p. 294).

Literam diei *m*tae mensis cujusvis (et quis septimanae dies anno certo fuerit), reperire.

Litera dominicalis anno communi una, bissextili duabus recedit. *Lit. Dom. Juliana* mutata per *Gregorium* est.

Cyclus solis Julianus est 28 annorum, *Gre-*

Numerus $m$borum *sine permutatione*, sed *admissa variatione lege certa per exponentes variationis* (ita dictos). (p. 327).

Quot factores factum per factores primos expressum habet.? (p. 328).

Constructio combinationum. (p. 329.)

Combinationes ex n rebus, *admissa variatione sine permutatione*: item pro $n=2$ quod (p. 98) citatur; (p. 330 usque 334). *Seriei arithmeticae ordinis* $m$ti, (seriei 1, 2, 3 - - - superstructae) *terminus* $n$tus. (p. 334 usque 336).

APPLICATIONES quaedam logarithmorum.

Problemata vulgaria. (p. 336 usque 338).

Logarithmo in tabula haud exstanti numerus, numeroque logarithmus conveniens, quomodo et *quo fundamento reperitur*? (p. 339 usque 341).

Log. quoad basim 10 nonnisi numeri 1 cum certo cifrarum numero, commensurabilis est.

OPERATIONES *decadicae*: quatuor species, in genere (p. 343).

Additio in specie (p. 244 usque 346. *Subtractio* (ita etiam ut semper minor nota e majore dematur) (p. 347 usque 349).

Multiplicatio (alia methodo quoque) (p. 349 et 350). *Divisio* (p.350). *Compendium, si divisor cifris terminetur* (p.351); *si numerus minor tam dividendum quam divisorem metiatur*; notae quibus dignosci queat, num 2,3,5,9, 11 numerum aliquem metiatur (p.351 et 352).

Approximatio quoti, per notas decimales, et reductio fractionis communis ad decimalem (p. 352).

Proba novenariorum in singulis; (p.352). *Operationes dyadicae.* (p.353).

Extractio radicis m gradus; et *approximatio per notas decimales* (p.353 - - - -).

ELEMENTA GEOMETRIAE.

Capitum aliarumve subdivisionum, imagines e numeris sive e literis modo sequente compositæ,(quibus et plantæ aliaque exprimi possent),*vicem subire queunt*: (ex gr.) ·*dgb* vel ·472 denotet 2dam in prima subdivisione illius,quae 7ma est in prima subdivisione 4tae in omnium prima subdivisione; nempe plura in eodem subdivisionis gradu per 1mam, 2dam &c distingvi possunt; et numerus 1mus ad laevam denotat numerum subdivisionis, quota sit in gradu 1mo, et quivis numerus *n* (si >9 fuerit, parenthesi clausus) denotet *n*tam in gradu 1mo, subdivisionis numeri ad laevam praecedentis. Possunt quidem ejusmodi subdivisiones vocabulis exprimi; (e; gr.) usque ad 6tum subdivisionis gradum, *liber*, *pars*, *caput*, *sectio*, *articulus*, *paragraphus* inservire possunt; possuntque ubique plura concernentia, numeris romanis, arabicisque, aliisve signis adjungi. Atque si necessaria adhuc defuerint, ubi imago quaepiam numerica (superius dicta) advenit; liceat simulac requisita cursus advexerit, filum titulo *supplementi numeri* dicti, interrumpere, postmodum continuandum.

Imaginibus ejusmodi numericis sequentibus exprimentur *Geometriae subdivisiones*.

·1. *E primario* SPATII *intuitu*, superficies, linea, punctum, forma, sphaera, tres primitivi motus simplices: recta, planum, circulus; aliique ex his oriundi conceptus, veritatesque primariae fundamentales: (in tomo Imo a pag. 442 --- contenta). Sphaerae limes certo sensu planum est.

·2. DESCENSUS IN PLANUM; *planimetria.*

·21. *Numero rectarum, duarumque* primitivarum motus *operationum finito*: (constructio geometrica sensu stricto).

·211. Formae, per sectionem aliquam aut nullam, resultatorum constructionis dictae magis obviorum, oriundae.

·2111. *Non considerata area.*

·21111. *Sectio nulla formarum* dictarum

·211111. Duarum rectarum; ·211112 plurium; ·211113 rectae et circuli, ·211114 duorum circulorum.

·21112. *Sectio aliqua* formarum dictarum.

·211121. *Sectio cum angulo.*

·2111211. *Nonnisi rectarum* aut e rectis compositorum.

·21112111. *Duarum rectarum*: (angulus rectus, obtusus, acutus).

·21112112. *Trium rectarum*: quarum aut

·211121121. Nonnisi unum par est, se mutuo (continuatione sufficiente) non secantium, aut

·211121122. Nullum tale par est: unde *trianguli* rectilinei species variae.

·2111211221. Triangulorum rectilineorum *aequalitatis conditiones*, ac certae proprietates primariae.

·2111211222. Laterum angulorumque oppositorum dependentia mutua: (unde in supplemento numeri hujus, e datis triangulum rectilineum determinantibus, sive angulum quemvis, sive latus quodvis ignotum ope calculi reperire docet *Trigonometria plana*).

21112113. *Quatuor rectarum*: quarum aut

211121131. Nullum par est, se invicem (continuatione sufficiente) non secantium; aut

211121132. Datur par se mutuo non secantium; atque tum aut

2111211321. Alterum par quoque tale est, (adeoque quum sectio detur, hoc par ab altero pari secatur, oriturque *paralellogrammum*); aut

2111211322. Nonnisi unum par tale est; adeoque hoc ab altero pari secatur, (fundamentum similitudinis triangulorum, ejusque conditiones), et multiplicatio divisioque ac radicis extractio.

21112114. *Plurium rectarum* numero quovis; unde

211121141. Linea simplex e rectis composita; quae parit

2111211411. Cum linea alia per duarum rectarum parallelismum composita, *parallelismum generalem*.

2111211412. Figuras rectilineas.

211121142. Rectae ex eodem puncto ad apices angulorum omnes lineae rectilineae: unde

2111211421. Figurae rectilineae subdivisio in triangula.

2111211422. Cujusvis rectae, ex eodem puncto communi dimidium, vel duas tertias &c accipiendo, oritur *similitudinis conceptus generalis*.

2111212. Rectae cum circulis.

21112121. Rectae cum circulo sectio *minima* punctum est, *maxima* e duobus punctis constat.

·21112122. Plures rectae circulum secantes.

·211121221. Se invicem quoque secantes.

·2111212211. In eodem puucto; ·21112122111 in peripheria, ·21112122112 intra peripheriam, ·21112122113 extra eam.

·2111212212. Rectae se mutuo non in eodem puncto secantes, sed lineam simplicem redeuntem formantes.

·21112122121. Si quaevis earum (uti est ab initio ad finem usque) corda sit: subdivisiones juxta numerum earum sunt; horumque subdivisiones novae sunt, prouti rectae aequales aut inaequales fuerint.

·21112122122. Si quaevis rectarum tangens sit: subdivisiones sunt eaedem, quae numeri praec.

·211121222. Rectae circulum secantes, nec productae secantes se invicem.

·2111213. Circuli se invicem secantes: minima sectio unum punctum est, maxima e 2 punctis constat.

·211122. *Sectio sine angulo*: cujus subdivisiones sunt lineae e rectis et arcubus, aut nonnisi ex arcubus, vel ex arcubus et rectis compositae.

·2112. *Areae* figurarum generatarum: quae subdividuntur in rectilineas, circulum, figuras ex arcubus, aut ex arcubus et rectis compositas.

·212. Formae, quarum in prima subdivisione nonnisi possibilitas innotescere (saltem in quaestionem venire) potuit, num geometrice construi possint, quaeritur.

·22. *Rectae operationesve* duae primitivae priores *innumerae*; (*motus compositus dupplex*, applicata Arithmetica).

·221. Ea, quorum non omnia sed quodvis punctum construi geometrice (sensu stricto) potest.

·222. Ea quorum nec quodvis punctum geometrice construi potest.

·3. REDITUS E PLANO IN ABYSSUM SPATII.

·31. *Numero* rectarum, operationumque trium primitivarum *finito* (constructio geometrica sensu lato): nimirum duabus accedit 3tia, nempe *motus circa axem.*

·311. Motus circa axem linearum planorumque, absque figurarum respectu.

·3111. *Linearum motus circa axem*, figuras haud efficientium.

·31111. Rectilineorum figuras haud constituentium motus circa axem.

·311111. *Unus motus circa axem.*

·3111111. Complexus duarum rectarum se mutuo in plano P secantium motus circa unam earundem: parit si angulus rectus fuerit, *planum*, secus autem *conos verticales.*

·3111112. E punctis b, c --- rectae A in plano P sint $\perp$res B, C ---, moveaturque schema circa A; viae rectarum B, C --- erunt *plana parallela.*

·311112. *Plures motus circa axem*: sint in plano P ad rectas A, B se mutuo in p secantes, rectae α, β, ex p $\perp$res; vertaturque α circa A, et β circa B; via prioris secare viam posterioris debet, atque ibidem est $\perp$ris ad P.

·3112. *Motus planorum circa axem.*

·31121. *Motus unus*: planum circa rectam quamvis in eo sitam motum, producit angulum duorum planorum.

·31122. *Plures motus plani circa axem.*

·311221 Cujusvis motus axi punctum idem p commune: nempe intelligantur omnia in eadem spatii e plano P plaga (ex gr superiore), sitque motus plani cujusvis angulus $<2R$ (denotante R rectum); moveaturque sub hac conditione planum P circa rectam $p\alpha$ in eo sitam; atque e quovis loco (unde libuerit), moveatur item circa aliquam rectam ipsiusdem per p euntem, continuando donec libuerit; orietur *angulus solidus rectitineus*. Poterit ea quoque determinatio accedere, ut P semper versus faciem illam moveatur, quae inferior erat.

·311222. Plures motus circa axem, absque puncto axium communi;

·3112221. Nonnisi planorum.

·31122211. Moto planorum (in ·3111112) parallelorum P, Q, uno circa quamvis rectam in eo sitam, donec ad alterum perveniat: novo hoc plani loco, R dicto, *anguli* ab R cum P et Q facti *alterni* comparantur.

·31122212. Moto R circa rectam quamvis α per P et Q euntem; novo plani loco, S dicto, quaeruntur sectiones cum P et Q formae ex R et S constantis.

·31122213. Moto S quoque circa quamvis retam β per P et Q euntem: novo plani loco, T dicto, quaeruntur sectiones cum P et Q formae ex R, S, T compositae; tam pro casu si $\alpha \parallel \beta$, quam si non.

·3112222. Planorum cum rectis.

·31122221. Rectae quae e quovis plani P puncto est ad quodvis punctum plani Q ad P paralleli, anguli alterni &c quos cum P et Q facit comparantur.

·31122222. Si in plano P fuerit figura rectilinea $\mathfrak{ABC}$---, et quodvis punctum $\mathfrak{a}$ fuerit supra planum (omnibus supra planum acceptis); vertatur P circa $\mathfrak{AB}$ donec recta $\mathfrak{Aa}$ incidat, fiatque $\mathfrak{Bb} \parallel$ et $= \mathfrak{Aa}$, et tum vertatur planum item prius P circa $\mathfrak{BC}$ donec recta $\mathfrak{Bb}$ incidat, fiatque $\mathfrak{Cc} \parallel$ et $= \mathfrak{Bb}$: atque hoc continuetur usque ad ultimum latus; ac demum moveatur, planum $\mathfrak{abAB}$ circa $\mathfrak{ab}$, donec $\mathfrak{c}$ incidat: nascetur *parallelepipedum*, si $\mathfrak{ABCD}$ parallelogrammum fuerit, in genere vero *prisma rectilineum*.

·31122223. Si (in praec.) e cujusvis anguli vertice ad quodvis punctum $\mathfrak{a}$ ibidem dictum recta cogitetur; vertaturque planum P circa latus quodvis, donec $\mathfrak{a}$ incidat: nascitur *pyramis rectilinea*.

·312. *Motus figurarum circa axem.*

·31121. Quadrilateri rectanguli revolutio circa latus, parit *cylindrum rectangularem*.

·3122. Trianguli rectanguli revolutio circa cathetum, parit *conum rectangularem*.

·3123. Revolutio semicirculi circa diametrum parit *sphaeram*.

·3124 Sectionum coni cum plano statim sequentium revolutiones pariunt *paraboloidem*, *ellipsoidem* et *hyperboloidem*.

·313. Motus plani circa axem, punctum aliquod formae cujuspiam earum quae prodierunt, complectentem.

·3121. Si coni verticales fuerint oriuntur *sectiones conicae*.

·3132. Forma secta, etiam Cylinder, aut

·3133. Pyramis, vel

·3134. Prisma esse potest.

·31135. Si forma haec *sphaera* fuerit, et

·31351. Plana per centrum eant; oritur in superficie sphaerae *triangulum sphaericum*; quae e datis sufficientibus computare docet *Trigonometrica sphaerica.*

·31352. Si planum quodvis tangat sphaeram, aut aliter secet, atque plana omnia simul efficiant superficiem simplicem portionem spatii claudentem: inter haec oriuntur etiam corpora aut *perfecte* aut *certo respectu regularia.*

·32. Formae quae rectarum operationumque primitivarum numero certo generari nequeunt: exgr. si figurae quae ita generari nequit, omnibus punctis rectae ad idem punctum, vel ad eandem rectam parallelae, cogitentur; et tanto magis si sectio formae cujuspiam cum complexu rectarum dictarum quaeratur (quod etiam *Perspectivae* problema est, si figurae vicem qualisvis forma subeat). Verbo omnes formae, quae motu e tribus aut pluribus composito (sive modo in arbore exposito per tres rectas ⌊res, sive motu in quavis forma certa lege facto) generantur, una cum omnibus iis, quae e compositione horum oriuntur, huc pertinent.

PRIORIBUS IN CONSPECTU GEOMETRIAE GENERALI (TOM, I. P. 442) TRACTATIS, INITIUM FIT A NUMERO.

·211111. *Sectio nulla est duarum rectarum*, si recta ab uno puncto unius ad aliquod punctum alterius ducta, summa internorum (in plaga eadem) sit duobus rectis aequalis. *Sectio nulla rectae et circuli* est, si ⊥ris e centro ad rectam radio sit major. *Sectio nulla duorum circulorum* est, si recta a centro ad centrum summa radiorum major sit. Sed de his heic ordinis gratia allatis, sub 21112121 et in *suppl.* post ·2111211222 dicetur; atque nunc sequitur.

·2111211. Si duae rectae punctum commune habeant, formam angularem oriri e *Consp. Geom. generali* facile patet: dictum etiam ibidem est, angulum esse quantitatem respectivam quoad arcum a circuli e puncto sectionis radio certo r (eodem pro omnibus) descripti, inter crura comprehensum; scil. si peripheria tota sit p, anguli quantitas dicitur $\frac{a}{p}$, ut nempe angulus rectus, ut quantitas, sit $=\frac{1}{4}$.

Patet vero pro duabus formis angularibus, quae congruere queunt, arcum etiam congruentem describi, adeoque quotum eundem prodire. Ita conversim si arcus $ab=pq$ (Fig 1) centro radioque eodem, formae angulares acb, pcq congruent. Nempe si forma pcq superimponatur ipsi acb, ita ut c in se maneat, et p in a cadat, atque arcus in eandem plagam cadant: arcus pq (ob generationes aequales) simul cum arcu ab incipit continuaturque, nec prius aut serius desinere potest, quia tum pars = toti esset, quum circujus linea simplex sit. Consequ. c in c, p in a et q in b cadentibus, et rectae ac, bc, cum pc, cq congruunt. Patet etiam pariter q in a poni potuisse, quum circuli generatio, ad laevam dextramque prorsus aequalis sit.

Est etiam manifesto (Fig. 2) omnium angulorum u, v, z, p, q quotvis fuerint, summa $=1$, nempe arcuum omnium summa est peripheria, quae per se divisa quotum 1 dat. Ita quotvis u, v, z fuerint supra rectam ab, summa est $\frac{1}{2}$; pariter infra ab si e meditulliis dimidiarum peripheriarum supra et infra ab, ad c rectae ducantur, angulorum tam superius quam inferius aequalis summa prodibit; adeoque et 4 rectorum summa est $=1$, et duorum rectorum summa $= \frac{1}{2}$. Consequ. summa prior etiam 4 rectis, et posterior 2 rectis aequalis dici potest.

Hinc anguli verticales sunt aequales; nempe (Fig. 3) $u=v$ et $z=p$; nam $u+p=2R=v+p$, et hinc $u=v$; ita $z+v=v+p$. Nempe (Fig. 4) etiam recta $\widetilde{bc}$ per rectam ab in alteram plagam transit: nam in $\widetilde{ab}$ nullum aliud punctum praeter c habet; itaque nisi transiret, in eandem plagam e qua venit, redire deberet; tum vero esset tam $k+u+v$ quam $u=\frac{1}{2}$, adeoque pars peripheriae dimidiae esset ipsi peripheriae dimidiae aequalis.

•21112121. *De tribus rectis, quarum nonnisi unum par est, se mutuo (continuatione sufficiente) non secantium.*

§. 1. Si $\wedge$ externus $u=$ interno opposito v, sive alterni u, v fuerint aequales, sive $v+z$

$=2R$, (quorum quodvis mánifesto ponit reliqua duo): tum rectae $\widetilde{\mathfrak{ab}}$ et $\widetilde{\mathfrak{AB}}$ se invicem non secant (Fig. 5)

Si enim $\widetilde{\mathfrak{DB}}$ et $\widetilde{\mathfrak{db}}$ secarent se mutuo; idem et in plaga altera fieret; nam formae $\mathfrak{dbDB}$ et $\mathfrak{DAda}$ congruunt, recta $\mathfrak{dD}$ ita posita, ut $\mathfrak{d}$ formae prioris in $\mathfrak{D}$ posterioris, et $\mathfrak{D}$ prioris in $\mathfrak{d}$ posterioris cadat, atque vertatur forma prior, donec in plagam plani laevam cadat; namque tum $\widetilde{\mathfrak{db}}$ propter alternos z aequales in $\widetilde{\mathfrak{DA}}$, et $\widetilde{\mathfrak{DB}}$ in $\widetilde{\mathfrak{da}}$ cadet. Tunc vero punctum ipsis $\widetilde{\mathfrak{DB}}$ et $\widetilde{\mathfrak{db}}$ commune, erit etiam ipsis $\widetilde{\mathfrak{da}}$ et $\widetilde{\mathfrak{DA}}$ commune. Conseq. $\widetilde{\mathfrak{ab}}$ et $\widetilde{\mathfrak{AB}}$ duo puncta haberent communia.

Hinc si $\wedge\,\mathfrak{adD}=\mathfrak{bDd}$ construatur (p.12.§.2); $\mathfrak{ad}$ ipsi $\mathfrak{AB}$ per $\mathfrak{d}$ fiet *parallela.*

§. 2. (Fig. 6). Etsi externus minor nempe $u=u'$ fiat: $\widetilde{\mathfrak{de}}$ ipsam $\widetilde{\mathfrak{AB}}$ secare nequit. Nam per $\widetilde{\mathfrak{ab}}$ prius transire deberet alicubi praeter $\mathfrak{d}$, atque item 2 puncta haberent $\widetilde{\mathfrak{ab}}$ et $\widetilde{\mathfrak{de}}$ communia.

§. 3. Hinc si duae rectae $\widetilde{\mathfrak{db}}$ et $\widetilde{\mathfrak{DB}}$ secent se mutuo; oportet externum majorem interno opposito v esse; nam si externus aequalis aut minor esset, nulla sectio daretur (per § 1 et 2). Pariter patet (F.7) externi u verticalem eadem ratione esse altero p duorum internorum oppositorum majorem; nempe si aequales essent, tum $\widetilde{\mathfrak{Ed}}$ et $\widetilde{\mathfrak{AB}}$ non secarent se invicem &c.

Itaque $\triangle$li *latere quovis producto, externus quovis internorum appositorum est major.*

§. 4. Unde etiam summa quorumvis 2 angulorum $\triangle$li est $<$2R. Nam (Fig 7) $u+z=$2R: sed $v<u$, consequ. $v+z<$2R. Conversa hujus, nempe quod rectae se invicem secent, si summa duorum internorum 2 rectis minor fuerit, *Ax* XI *Euclidis* est; de quo jam in tomo primo actum est, atque in sequentibus ubique supponetur.

§. 5. *Hinc* ⊥ris *acuto angulo objecta cadit*; secus enim $\triangle$ fieret, cujus unus angulus rectus, et alter obtusus esset. Atque hinc etiam patet, ex eodem puncto duas ⊥res ad rectam eandem non dari; nam $\triangle$ fieret, cum angulis rectis duobus.

·211121122.

Si *trium rectarum nullum par sit se mutuo* (continuatione sufficiente) *non secantium*; oritur *triangulum*, quod si angulo recto gaudeat, *rectangulum*, si obtuso *obtusangulum*, secus *acutangulum* audit; et quodvis horum, si duobus lateribus aequalibus gaudeat, *aequicrurum*, atque $\triangle$ cujus omnia latera aequalia sunt, *aequilaterum* audit. Trianguli rectilinei latera angulum rectum intercipientia *catheti*, latus angulo recto oppositum vero *hypothenusa* dicuntur. Quomodo geometrice construi queant, mox dicetur.

·2111211221.

§. 1. *Aequalitatem duorum* $\triangle$lorum, (et quidem ita ut lateribus aequalibus anguli aequales, et angulis aequalibus latera aequalia respondeant), generaliter *ponit* quodvis sequentium: 1mo 2 *latera cum angulo intercepto*, 2do. *unum latus et 2 anguli*, *si unus adjacens adjacenti*, *et alter aut adjacens adjacenti*, *aut non adjacens non adjacenti* $=$ sit, 3tio *tria latera tribus aequalia*.

Casus 1. (Fig. 8) Si $\mathfrak{AC}=\mathfrak{ac}$, atque $\mathfrak{AB}=\mathfrak{ab}$ et simul $\wedge\, \mathfrak{CAB}=\mathfrak{cab}$; superimponatur $\triangle\, \mathfrak{cab}$ ipsi $\mathfrak{CAB}$, ita ut $\mathfrak{a}$ in $\mathfrak{A}$, et $\mathfrak{b}$ in $\mathfrak{B}$ cadat, et vertatur in eandem plagam: $\mathfrak{ac}$ nec supra nec infra $\mathfrak{AC}$ cadet, quia anguli ad $\mathfrak{a}$ et $\mathfrak{A}$ sunt aequales; cadetque etiam $\mathfrak{c}$ in $\mathfrak{C}$ propter $\mathfrak{AC}=\mathfrak{ac}$. Consequ. etiam recta $\mathfrak{bc}$ congruet cum $\mathfrak{BC}$, quum 2 extrema congruant.

Cas. 2. (Fig. 9) Si $\mathfrak{AB}=\mathfrak{ab}$, atque anguli ad $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}$ angulis ad $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}$ aequales sint: superimponatur $\triangle\, \mathfrak{abc}$ ipsi $\mathfrak{ABC}$, ita ut $\mathfrak{a}$ in $\mathfrak{A}$ et $\mathfrak{b}$ in $\mathfrak{B}$ cadat, vertaturque in eandem plagam; cadet $\widetilde{\mathfrak{ab}}$ in $\widetilde{\mathfrak{AB}}$ et $\widetilde{\mathfrak{bc}}$ in $\widetilde{\mathfrak{BC}}$ (propter angulos dictos aequales). Consequ. $\mathfrak{c}$ extra $\mathfrak{C}$ cadere nequit, secus enim duae rectae 2 puncta haberent communia.

Ita (F.10) si $\mathfrak{AB}=\mathfrak{ab}$, atque $\wedge\, u$ ad $\mathfrak{a}=\wedge$ ad $\mathfrak{A}$, et $\wedge\, \mathfrak{acb}=\wedge\, \mathfrak{ACB}$; superimposito $\triangle\, \mathfrak{abc}$ ipsi $\mathfrak{ABC}$, ita ut $\mathfrak{a}$ in $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{b}$ in $\mathfrak{B}$, et $\widetilde{\mathfrak{ac}}$ in $\widetilde{\mathfrak{AC}}$ cadat; $\mathfrak{c}$ nonnisi in $\mathfrak{C}$ cadere potest; nam $r>z>t$ (p.11)

Cas. 3. (Fig. 11). Si $\mathfrak{ab}=\mathfrak{AB}$, $\mathfrak{ac}=\mathfrak{AC}$, $\mathfrak{bc}=\mathfrak{BC}$; superimponatur $\triangle\, \mathfrak{abc}$ ipsi $\mathfrak{ABC}$, ita ut $\mathfrak{a}$ in $\mathfrak{A}$, et $\mathfrak{b}$ in $\mathfrak{B}$ cadat, vertaturque in eandem plagam; et describantur centro $\mathfrak{a}$ radio $\mathfrak{ac}$ et centro $\mathfrak{b}$ radio $\mathfrak{bc}$ circuli: nisi $\mathfrak{c}$ in $\mathfrak{C}$ cadat, aderunt circulorum dictorum in plaga superiori duo puncta communia; itaque manifesto iisdem peripheriis et inferius duo puncta communia, parient sectionem peripheriarum duarum ad minimum 4 punctorum; quod fieri nequit, quum maximam earum sectionem nonnisi 2 punctorum esse juxta ordinem in 21112121 demonstretur, quod hic quoque statim perlegere licet.

§. 2. Hinc si (Fig. 1) e $\mathfrak{q}$ radio $\mathfrak{ba}$ secetur arcus $\mathfrak{qp}$ in $\mathfrak{p}$; fiet *angulo* $\mathfrak{qcp}$ *angulus* $\mathfrak{abc}$ *aequalis*

§. 3. Triangula dicta, nempe *aequicrurum* *aequilaterum*, *rectangulum*, *obtusangulum*, *acutangulum construi geometrice* possunt; nempe.

1. Si (Fig. 12) centro a, et radio r dimidium rectae ab excedente, ac centro b item radio r fiant circuli: hi secabunt se alicubi; nam sit ac=cb, et r=af=be=be′; erit e punctum peripheriae centri b, et f punctum periph. centri a; atque e punctum internum peripheriae centri a, quia ae<af; dum igitur centro b radio be scribitur circulus, punctum e ut in e′ venire queat, e circulo priori egredi debet, nam e′ extra illum cadit, quia ae′>r. Transitus iste autem in recta ab fieri nequit, quia partes ex a et b nonnisi in c aequales radii esse possunt. Si igitur d sit sectionis punctum, patet ad=db=r esse. Ita si r = ab accipiatur, latera omnia manifesto aequalia sunt. Et si r>ab accipiatur quoque, manifesto sectio fit, et △ *aequicrurum* in omni casu.

2. Rectangulum △ construi posse patet, si ∟ris construatur. Hoc vero fit, sive e puncto c quopiam rectae *erigendo*, sive e puncto d extra eam *demittendo*, *perpendicularem*.

Prius fit (Fig 13), si centro c radio quovis sit circulus, et ca=cb; atque radiis eidem r aequalibus, (ut antea) centris a, b fiat circulorum sectio, in d: erit enim △ adc = bdc, quia ac=bc, dc=dc et ad=db=r; consequ. ∧ acd=bcd

Alterum vero fit (Fig 14), si ex d puncto supra 𝔄𝔅 fiat recta ad quodvis punctum p infra 𝔄𝔅 situm, fiatque circulus centro d radio dp; manifesto transibit p per rectam $\widetilde{𝔄𝔅}$ tam ad laevam quam ad dextram eundo usque in p′ pro dp=dp′. Fiat hoc in a et b; fiatque centris a et b radio eodem r (ut antea) intersectio sive in c sive in f: recta per d et intersectionem erit $\perp$ ad $\mathfrak{AB}$. Nam $\mathfrak{ae}=\mathfrak{be}$, $\mathfrak{bd}=\mathfrak{ad}$, $\mathfrak{ed}=$ sibi; itaque $\triangle\ \mathfrak{ade}=\mathfrak{bde}$, et quidem ita, ut $\mathfrak{d}$ in se et $\mathfrak{e}$ in se manentibus, $\triangle\ \mathfrak{ade}$ verti possit, usquequo $\mathfrak{a}$ in $\mathfrak{b}$ cadat; tum vero et quodvis aliud punctum rectae $\widetilde{\mathfrak{de}}$ adeoque et $\mathfrak{q}$ loco suo priori manet; consequ. $\mathfrak{d}$ in $\mathfrak{d}$, $\mathfrak{q}$ in $\mathfrak{q}$, et $\mathfrak{a}$ in $\mathfrak{b}$ cadentibus, anguli ad $\mathfrak{q}$ manifesto aequales sunt. Pariter sunt $\triangle$la $\mathfrak{adf}$ et $\mathfrak{bdf}$ aequalia, et manentibus $\mathfrak{d}$ et $\mathfrak{f}$, (adeoque et $\mathfrak{q}$), superimponendo, $\mathfrak{d}$ in $\mathfrak{d}$, $\mathfrak{q}$ in $\mathfrak{q}$, et $\mathfrak{a}$ in $\mathfrak{b}$ cadere potest. Rectam $\widetilde{\mathfrak{de}}$ per $\mathfrak{ab}$ transire inde patet; quod recta *e figurae cujusvis puncto interno utrinque egredi, duoque ad minimum puncta communia cum figura habere debeat.* Etenim si centro $\mathfrak{f}$, radio quarumvis rectarum, quae a $\mathfrak{f}$ ad punctum aliquod figurae est, excedente circulus fiat; recta ex $\mathfrak{f}$ dicta in aliquam diametrorum cadet, quae utrinque e circulo exit; adeoque radius e puncto figurae interno $\mathfrak{f}$ ad punctum extra figuram situm transit alicubi: pariter radius alter diametri ejusdem; in eodem figurae puncto vero radius uterque transire nequit, quia tum recta rediret. Itaque et recta e puncto interno $\triangle$li $\mathfrak{abd}$ transit in 2 punctis; sed unum $\mathfrak{d}$ est, alterum vero nec in $\mathfrak{da}$ nec in $\mathfrak{db}$ esse potest, quia tum duae rectae 2 puncta haberent communia.

Patet etiam per $\mathfrak{df}$ *angulum* $\mathfrak{adb}$, uti per $\mathfrak{ef}$ *rectam* $\mathfrak{ab}$ *bisecari.*

3. E quovis puncto $\mathfrak{f}$ (Fig. 15) sit recta $\mathfrak{fd}$; $\triangle\ \mathfrak{fad}$ obtusangulum est; nam $z>R$ (p. 11).

Acutangulum autem praebet etiam aequilaterum, quum statim probetur etiam angulos esse aequales, adeoque quemvis recto minorem. Sed inferius etiam nota rectarum e quibus $\triangle$ construi potest, relata, mox etiam nota e quibus dignosci queat, num $\triangle$, rec angulum, obtusangulum vel acutangulum sit, exponetur.

§. 3. Trianguli aequicruri et rectanguli primariae quaedam proprietates referendae veniunt.

1. ***Trianguli aequicruri anguli ad basim sunt aequales, et si anguli ad basim fuerint aequales, crura sunt aequalia, ac recta e vertice ad meditullium baseos ad hanc $\perp$ris est.***

Prius patet (Fig 16); nam si ac=bc, congruet $\triangle$ bca $\triangle$lo acb ad laevam, propter ac=bc, cb=ca, atque 3tium latus 3tio aequale (p. 13). Conseq. c in c, b in a, a in b cadente, u' congruet cum u.

Alterum quoque patet; (Fig. 17) $\triangle$lo bda ipsi acb ita superimposito, ut b in a et a in b cadat; cadet enim propter interceptnm aequalem (*p.*13) d in c, adeoque db in ca. Sed eodem modo potest $\triangle$ adb ipsi acb superponi, ita ut a in a et b in b cadat; atque tum erit ad=ac. Conseq. ac=bd=ad.

Tertium quoque (ex Fig 18) patet; nam si ad=db, ac=bc, et dc= sibi; est $\triangle$ adc=bdc.

2. ***In $\triangle$lo rectangulo, hypothenusa ac est major catheto; imo et hypothenusa quaevis ulterior est major*** (Fig. 19).

Est enimvero c extra circulum centro a radio ab scriptum, ita d extra circulum centro a radio ac factum cadit. Nam si c non extus caderet, esset aut in peripheria puncti b, aut intra eam; prius fieri nequit, nam tum pro bc'=bc, et c' in peripheriam eandem caderet, in qua adhuc 2 puncta nempe b, c sunt (contra p.13); sed neque intra peripheriam cadere c potest, nam tum (p.15) e circulo in 2 saltem locis egrederetur, adeoque recta $\widetilde{bc}$ praeter b adhuc haberet punctum commune, atque punctum rectae $\widetilde{bc}$ ad eandem distantiam ad laevam, pariter in peripheria radii ab esset, et recta circulum item in pluribus quam 2 punctis secaret.

Pariter patet b extra circulum centro a radio ac factum cadere: quum secus rectae $\widetilde{bc}$ praeter punctum c, adhuc aliquod punctum rectae $\widetilde{cb}$ supra ac, et ad laevam tertium ad distantiam a b eandem, commune cum peripheria puncti c esset.

Hinc item Δlorum *rectangulorum aequalitas per catheti hypothenusaeque aequalitatem* ponitur. Si enim cathetus ipsi ab et hypothenusa ipsi ac aequales fuerint; superimponendo patet ex a hypothenusam in c cadere; omnes aliae enim majores minoresve sunt.

§. 4. Hinc *summa laterum* $\triangle$li *quorumvis duorum a et b est major tertio.* Nam aut anguli ad latus tertium ambo acuti erunt, aut alteruter rectus vel obtusus est. Si ambo acuti fuerint (Fig. 20), Lris d ad latus 3tium e vertice opposito, inter a et b cadit; atque tum $a > c$ et $b > c'$ (per praec); itaque $a+b > c+c'$.

Si vero (Fig 21) $a' \mathrm{L}\, c$; tum b solum quoque est $> c+c'$, tanto fortius $a'+b > c+c'$

Item pro z obtuso, u acutus est, cui Lris e vertice objecta cadit; adeoque b solum etiam $>$ latere 3tio c' est, quia $b > c+c'$; et tanto fortius est $a+b > c'$.

Unde manifesto $\triangle$, *nonnisi e talibus rectis construi potest*; quarum binarum quarumvis summa, tertia recta major est: atque ex omnibus talibus a, b, c construi potest, si ex una extremitate ipsius a radio b, et ex altera extremitate radio c circuli fiant; fiet enim (juxta p.15) intersectio, e qua ad extrema ipsius a ductis rectis, Δ petitum factum erit.

Sed patet etiam (Fig.22) e puncto $\triangle$li interno rectis ad extrema baseos B ductis, *laterum extimorum summam esse summa internorum minorem.* Nam $a+d > b+c$, et $c+e > f$: adeoque $a+d+c+e > b+c+f$; unde $a+d+e > b+f$. At $U > u$, $V > v$; adeoque $U+V > u+v$.

§.5. Si hic in tomo primo (p.496) dictum legatur; erit in posterum semper summa omnium angulorum trianguli cujusvis duobus rectis aequalis; atque producto latere quovis, angulus externus summae internorum oppositorum aequalis.

·2111211222.

Laterum angulorumque oppositorum dependentia mutua primario illa se offert; quod lateri majori angulus major, et angulo majori latus majus opponatur. Duorum laterum alterutrum aut recto vel obtuso opponitur, aut non. Quoad casum 1mum, si (Fig.23) latera sint hypothenusa a et cathetus c; est $a > c$, estque angulus ipsi a oppositus rectus R, adeoque major quovis alio. Si obtusus sit, uti z; est quovis reliquorum major, atque etiam $b > a'$, et $b > c+c'$ (adeoque $b > c'$). Quoad casum 2dum autem demittatur e sectione duorum illorum laterum $\perp$ris p ad 3tium; cadet haec utrique acuto u et v objecta; sit $b > a$, cadet pro recta ad dextram ipsi c ad laevam aequali, b ulterius ad dextram; nam $a' = a$, et hypothenusarum ad dextram nonnisi ultra a' cadens ea major est. Itaque fit $u > v$ (nempe externus $>$ interno), sed huic $'u =$ alter ad laevam; adeoque uti $b > a$, est etiam $u > v$.

Conversa quoque patet: nam qualiavis fuerint u et v, si $u > v$, necessario et $b > a$; quia secus esset aut $b = a$ aut $a > b$, atque in casu priore esset $u = v$, in posteriore $v > u$.

Quaestio hinc suboritur, num duplo lateri duplus angulus objiciatur &c: facile patet dependentiam non talem quidem esse; sed ultro subvenit quaerere, qualiter tamen angulus latusque oppositum a se mutuo dependeant: atque ista disquisitio originem *Trigonometriae* planae dedit.

Supplementum numeri 21111.

Recta cum circulo nil commune habet, si $\perp$ris e centro ad eam radio major sit: nam quaevis alia recta ad dictam e centro ducta est hypothenusa catheto major (p. 16).

Nec circulus cum circulo quidquam commune habet, si centrorum $\mathfrak{C}$, $\mathfrak{c}$ distantia summam radiorum excedat: nam si punctum $\mathfrak{p}$ commune esset, hoc aut in recta $\mathfrak{C}\mathfrak{c}$, aut extra eam esset; prius fieri nequit, nam $\mathfrak{C}\mathfrak{c} >$ se ipso esset; nec posterius fieri potest, quia in $\triangle\,\mathfrak{C}\mathfrak{p}\mathfrak{c}$ $\mathfrak{C}\mathfrak{p}+\mathfrak{c}\mathfrak{p} > \mathfrak{C}\mathfrak{c}$ (contra hyp). Atque post hoc numero

21112113.

Sequuntur 4 *rectae*: quarum si nullum par sit parallelum, quadrilaterum *trapezoides* dictum oritur.

Si 2 paria $\parallel$la fuerint, quum sectio supposita sit; aliqua recta α paris unius secabit aliquam β paris alterius; atque tum parallela ad α quoque secabit tam ipsam β, quam eam quæ $\parallel\beta$ est; secus enim facile patet, rectam utrinqua ∞ tam, duarum rectarum se mutuo secantium utrique parallelam esse, atque tum summam internorum in parallelismo dari minorem duobus rectis. Oritur autem hoc pacto *paralellogrammum*, cujus species referuntur (in Tomo I p. 9).

§. 1. *Quodvis parallelogrammum per diagonalem in duo* $\triangle$la *aequalia disvescitur*: nam

(Fig. 24) diagonalis latus commune est, et propter alternos v, v et u, u aequales, anguli adjacentes in uno $\triangle$lo, adjacentibus in altero aequales sunt.

§. 2. Utcunque fuerint ductae ae, bd, (Fig 25), si céntro c radio ca absecentur ca, cd, ce, cb aequalia: abed *est rectangulum.* Nam quodvis par $\triangle$lorum verticalium est aequale, per angulum inter latera aequalia interceptum verticalem; hinc ad $\parallel$ be, ab $\parallel$ de; nam alterni sunt aequales; itaque $4u+4v=4R$, quia quadrilateri omnium $\wedge$lorum summa, est summa $\wedge$lorum omnium, in quae dispescitur, $=8R$. Itaque $u+v=R$, et omnes $\wedge$li a, b, e d sunt aequales. Si $\wedge$ acd $=R$ tum $v+u=R$, $v=\frac{1}{2}R=u$, hinc ad$=$ab, nam $\triangle$ bad aequicrurum fit; est igitur abed *quadratum.*

Patet autem, punctum a ubivis in dimidia peripheria radii ac fuerit, ductis rectis prioribus ace, ad &c, esse $u+v$ ad a item rectum; adeoque *angulus in semicirculo* (ut dici solet), nempe cujus vertex in peripheria est, et crura per extremitates diametri eunt, *rectus est.*

Si vero acd rectus fuerit, atque cd$=$cb, et ca quoque $=$ ce, sed ac non $=$ cd; tum oritur *rhombus*; si acd non sit rectus, tnm sub conditione dicta fiet *rhomboides.*

§. 3. Si ab $\parallel$ et $=$cd, etiam (Fig. 24) ac $\parallel$ et $=$bd. Nam $\triangle$ abc$=$ $\triangle$ dcb, per 2 latera cum $\wedge$lo intercepto aequalia; itaque et alterni v et v sunt aequales, et ac $\parallel$ et$=$bd.

§. 4. *Intersectio* c *duarum diagonalium,* (Fig. 26) *quamvis rectam, per* c *ductam bisecat.* Nam $\triangle$ fcd$=$gcb; nam $\wedge$li ad d et b sunt alterni, ita ad f et g; cd vero $=$cb, quia $\triangle$ dce$=$bca. Est etiam manifesto afgb$=$dfge.

2111211322. ***Si unum par parallelum per alterum non parallelum secetur*; praeter *trapezium* fiunt sequentia.**

§. 1. Sit (Fig. 27) par ‖lum c et C, par non ‖lum A et B; posteriores se invicem secabunt, et formabuntur 2 △la abc et ABC sibi invicem aequiangula: nam angulus unus communis est, et ∧ac externus interno ∧AC opponitur, ita ∧bc ipsi ∧BC. Sit (pro n, m integris), $a = nu$ et $A = mu + \omega$ (pro $\omega = o$ vel $< u$), atque fiat a vertice incipiendo usque ad finem $m$ti u, ab extremitate cujusvis u, una parallela ad B, et altera ad C. Facile patet ad a numero n, ad A numero m oriri hoc pacto △la, quae inter se aequalia sunt: nam unum latus u est in quovis, atque anguli adjacentes sunt aequales, nempe in quovis △lo unus est internus externo oppositus, et alter externus interno oppositus. Patet quoque, quod si △li ad verticem latus ad dextram sit v, et basis sit v', esse $a = nu$ $b = nv$, $c = nv'$, et $A = mu$ (pro $\omega = o$), atque $B = mv$, $C = mv'$, (per parallelogrammorum ibidem exortorum latera opposita aequalia).

Quum vero $\omega < \frac{a}{n}$, $\lambda < \frac{b}{n}$ ac $v' = \frac{c}{n}$;

crescenteque n in ∞, manifesto $\omega \frown o$, $v \frown o$, $v' \frown o$; sed etiam $k \frown o$, quia e fine ipsius k ducta ad A parallela, patet v' secari, adeoque $k < v'$. Consequ. typum proportionis applicari patet; esseque $A : a = B : b = C : c$.

§. 2. Hinc *si in* 2 △lis 2 ∧li *sint* 2 ∧lis aequales; latera prouti =libus ∧lis opponuntur, *sunt proportionalia.* Id est *per aequalitatem* △lorum *ponitur laterum proportio*, uti conversim *per laterum proportionem ponitur aequiangulitas* △lorum. Sed ponitur praeterea generaliter in

$\triangle$lis laterum proportio, simul cum angulorum illis oppositorum aequalitate (quod per *similitudinem* exprimi solet), *per duo latera* in iis *duobus proportionalia, cum angulo intercepto aequali*; et pariter si latera unius sint a, b, c, et alterius A, B, C, ac singula utrinque in ∞ producta concipiantur; atque sive $a \parallel A$, $b \parallel B$, $c \parallel C$, sive a ad A, b ad B, c ad C $\perp$ria sint; erunt $\wedge ab = \wedge AB$, $\wedge ac = \wedge AC$, et $\wedge bc = \wedge BC$; adeoque $\triangle$la *similia*. *Quinque igitur hae conditiones similitudinis triangulorum*, nempe quarum quaevis sufficit, exponendae veniunt.

I. Nam quoad 1mum, sit (Fig. 28) $\wedge AB = \wedge ab$, $\wedge AC = \wedge ac$; tum etiam tertius = 3tio. Sit $a < A$; (nam si $a = A$, patet, secus autem alterutrum est $<$ altero). Ponatur a super A, et $\wedge ab$ super $\wedge AB$, sit y in fine ipsius a, $\parallel$ ad C; orietur $\triangle ayx = \triangle abc$; nam $\wedge$lus ad finem ipsius a erit externus interno $\wedge AC$ oppositus, qui est $= \wedge ac$ (*per hyp*); adeoque latus a cum 2 adjacentibus angulis in utroque $\triangle$lo sunt æqualia.

Itaque cum $\triangle$li ayx latera sint proportionalia lateribus majoris $\triangle$li; sunt etiam $\triangle$li abc latera iisdem proportionalia.

II. *Altera similitudinis* $\triangle$lorum *conditio generalis, nempe conversa prioris* est; si $A : a = B : b = C : c$. Fiet enim, $\parallel$la ad C ex fine ipsius a ducta, $A : a = B : x = C : y$; adeoque $x = \frac{aB}{A}$ uti b; et $y = \frac{aC}{A}$ uti c; itaque $x = b$, et $y = c$, atque $\triangle axy = \triangle abc$; est ergo et hoc uti illud eidem $\triangle$ ABC aequiangulum.

III. *Tertia conditio similitudinis genera-*

lis est; si $A : a = B : b$ (Fig. 28) ac $\wedge AB = \wedge ab$. Ponatur nempe $\triangle abc$ ita super ABC, ut a in A et $\wedge ab$ super $\wedge AB$ cadat, sitque $y \parallel C$; erit $A : a = B : x$. Consequ. et hic (ut in praec.) erit $x = b$; adeoque $\triangle axy = \triangle abc$; et hoc quoque aequiangulum ipsi $\triangle ABC$, uti $\triangle axy$ est.

Hinc autem *modus* oritur $\frac{n}{m}$tum *rectae cujusvis* C *geometrice exhibendi*, adeoque C per $\frac{n}{m}$ *geometrice multiplicandi*, aut per $\frac{m}{n}$ *dividendi*. Sit ex. gr. (Fig. 27*) $n = 2$, $m = 5$; ponatur ad initium ipsius C ad quemlibet angulum recta indefinita; item ab initio ipsius C, ponantur in rectam dictam rectae u qualesvis aequales se invicem excipientes numero m, atque inde ubi desinunt, ponantur retrorsum numero n; erit parallela ad C e fine $n$tae partis usque ad rectam, e fine $m$tae partis (antrorsum), per extremitatem alteram ipsius C ductam, recta quaesita. Exgr. Si $A = mu$, et $a = nu$, erit et $C = mv$, et $c = nv$, adeoque c recta quaesita est. Patet autem $\parallel$lam pro $n > m$ infra C cadere, et pro $n = 1$, esse $c = \frac{C}{m}$.

IV. *Quarta conditio generalis, similitudinis* $\triangle$lorum; sit (Fig. 30) $\mathfrak{Cc}$ ipsi C parallela; erunt anguli (partim ob verticalitatem partim ob. $\parallel$lismum) illi qui adscripti sunt; et erit in illo puncto sectionis rectarum commune germen quasi omnium $\triangle$lorum, quorum latus unum ipsi A, alterum ipsi B, 3tium ipsi C, $\parallel$ est. Nam $\mathfrak{Cc}$ motu paralello in quamvis rectam ipsi C $\parallel$lam pervenire potest; adeoque in c quoque, $\mathfrak{Bb}$ in quamvis ipsi B $\parallel$lam, adeoque in b quoque, $\mathfrak{Aa}$ in quamvis ipsi A $\parallel$lam, adeoque in a quoque. Si duae rectae sint duabus ‖lae, illarum $\wedge$lus est $=\wedge$lo harum (Tom I. p. 497); itaque $\wedge ab=\wedge AB$, $\wedge ac=\wedge AC$, et $\wedge bc=\wedge BC$.

Sed A cum B facit $\wedge z$ et alterum deinceps $u+v$, A cum c facit u, et alterum $v+z$, B cum C facit v et alterum $z+u$. Dicatur Z deinceps ipsius z, et V deinceps ipsius v, ac U deinceps ipsius u; certum est in $\triangle$lo abc esse $\wedge ab$ aut $=z$ aut $=Z$, ita $\wedge ac$ esse aut u aut U, et $\wedge bc$ esse aut v aut V; itaque sunt 6 literae, tres minusculae tres majusculae nominis ejusdem

z, $Z=u+v$
v, $V=z+u$
u, $U=z+v$.

In $\triangle$lo duo deinceps esse nequeunt, adeoque litera parva, et magna simul non accipiuntur: erunt itaque combinationes sequentes, z, v, u; Z, V, U; z, v, U; z, u, V; v, u, Z; Z, V, u; Z, U, v; V, U, z; quarum praeter primam et illas in quibus una tantum major litera est, quaevis summam angulorum trium dat 2 rectis majorem; nam in $\triangle$ ABC est $u+v+z=2R$, et substituto valore cujusvis literae majoris ex gr. $Z+V+u=u+v+z+u+u$, patet, excedi $u+v+z$, adeoque 2 rectos; sed si una tantum major litera sit, ex gr. $Z+u+v=u+v+u+v=2u+2v$, hoc potest esse $=2R$, si $u+v=R=z$, adeoque z et Z duo deinceps aequales.

Itaque in $\triangle$lo abc, $\wedge ab$ nonnisi $=z$, $\wedge ac$ nonnisi $=u$, et $\wedge bc$ nonnisi v esse potest.

V. Quinta conditio similitudinis $\triangle$lorum sequitur. (Fig. 31). Sit $\mathfrak{ab}=a$, $\mathfrak{bc}=b$; $\mathfrak{ca}=c$.

Quum in $\triangle$lo dentur duo acuti, sit u ad $\mathfrak{b}$ acutus; fiatque e lateris $\mathfrak{cb}$ puncto $\mathfrak{f}$ interno $\perp$ris $\mathfrak{fh}$ ad $\mathfrak{ab}$, fiatque e puncto hujus interno $\mathfrak{A}$, $\perp$ris $\mathfrak{Al}$ ad $\mathfrak{ac}$, et $\mathfrak{Ar}\perp\mathfrak{cb}$; atque productis $\mathfrak{Ar}$, $\mathfrak{Al}$, $\mathfrak{cb}$, $\mathfrak{fh}$, moveatur $\perp$ris $\mathfrak{Ar}$ super $\widetilde{\mathfrak{bc}}$. In $\triangle$lo $\mathfrak{fhb}$ est $\wedge q<R$, eandemque suo verticali q,

adeoque (propter summam internorum $\angle 2R$) fit $\triangle$ $\mathfrak{e}\mathfrak{B}\mathfrak{k}$, in quo est $u'+q=R$, at in $\triangle$ $\mathfrak{k}\mathfrak{h}\mathfrak{b}$ quoque est $q+u=R$; itaque $u'=u$.

Est porro $v'+x=2R$, sed in quadrilatero $\mathfrak{l}\mathfrak{a}\mathfrak{h}\mathfrak{A}$ est $v+x=2R$; adeoque $v'+x=v+x$, et hinc $v'=v$. Est igitur $v'+u' \angle 2R$, quia $v+u \angle 2R$ est. Consequ. fit $\triangle\, \mathfrak{A}\mathfrak{B}\mathfrak{C}$, et in hoc tertius angulus $z'=$ tertio nempe z in $\triangle\, \mathfrak{abc}$.

Consideratis autem $\triangle$li $\mathfrak{A}\mathfrak{B}\mathfrak{C}$ et $\mathfrak{abc}$ lateribus angulisque dictis, patet cuivis angulo unius exgr. a lateribus A, B facto esse illum alterius $\triangle$li aequalem, qui a talibus lateribus a, b efficitur, ut $a \perp$ A, et $b \perp$ B sit, pro $\mathfrak{A}\mathfrak{B}=$A, $\mathfrak{B}\mathfrak{C}=$B.

Applicetur jam praecedens; est (Fig. 32) $\mathfrak{A}\mathfrak{r} \parallel \mathfrak{B}\mathfrak{C}$, (quia e fig. praec. sunt $\mathfrak{A}\mathfrak{r}$ et $\mathfrak{C}\mathfrak{e}$ ad idem $\mathfrak{be}$ $\perp$res); unde per angulos alternos verticalesque patet germen $\triangle$li cujusvis $a'\,b'\,c'$ cujus latus $a' \parallel$ A, $b' \parallel$ B, $c' \parallel$ C, esse ad $\mathfrak{A}$ (ut antea); adeoque omnia ibi dicta locum habere, quum quodvis A quod $\perp$ ($a=\mathfrak{ab}$) est, $\parallel$ ad $\mathfrak{A}\mathfrak{B}$ sit, et quodvis B quod $\perp$ ad $b=\mathfrak{bc}$ est, $\parallel$ ad $\mathfrak{A}\mathfrak{a}$ sit, ac quodvis C quod $\perp$ ad $c=\mathfrak{ca}$ est, $\parallel$ ad $\mathfrak{C}\mathfrak{A}$ sit.

§. 3. Ex $A:a=B:b$ autem (in I) sequitur etiam $a:A-a=b:B-b$; nempe segmenta crurum per rectam basi parallelam facta in proportione esse.

Conversa quoque hujus valet: nempe si segmenta sint in proportione; recta secans parallela fit. Nam (Fig 29) si $a':a=b':b$, nec tamen $c \parallel C$; fiat parallela alia k supra vel infra c, et sit pro k ex gr. segmentum x; erit $a':a =b'+\omega:x$, et hinc $x=\frac{a}{a'}(b'+\omega)$; sed ex $a':a= b':b$ est $b=\frac{a}{a'}.b'$; unde $x > b$ (nempe pars

$>$ toto). Pariter patet, si parallela infra c cadat. Estque manifesto (Fig. 33) ubivis accipiantur f, i, quum $\alpha:\alpha=\beta:\beta$ sit, cm recta per c ad ab *parallela*.

§. 4. Fig. 29. Si $A:a=C:c$, et una extremitas rectae c ad C parallelae sit in A ad extremitatem ipsius a; altera in B erit. Nam parallela c producta secat rectam B; fiat $c\pm\omega$ ex c; erit $A:a=C:c+\omega$, atque hinc $c+\omega=\frac{aC}{A}$; sed

etiam $c=\frac{aC}{A}$ (per $A:a=C:c$ suppositum). Est

ergo $c\pm\omega=c$, adeoque $\omega=o$.

§. 5. Si $A:a=B:b$; est etiam $A:B=a:b$; adeoque si $A=nu$ atque $B=mu$, pro n, m integris); est etiam $a=nv$ et $b=mv$. Hinc si A contineat n milliaria, atque B contineat m milliaria: et a continet n milliaria minuta, atque b continet m milliaria minuta, si nempe pars $n$ta ipsius A dicatur *milliare minutum*.

Atque etiam si in △lis ABC, abc, $A=n$ milliaribus, $B=m$ milliaribus, et $C=\mu$ milliaribus, atque $a=n$ pollicibus, $b=m$ pollicibus, $c=\mu$ pollicibus: patet esse $A:B=a:b$, et $A:C=a:c$; adeoque $A:a=B:b$, et $A:a=C:c$; consequ. tria latera tribus esse proportionalia; atque △la ABC, abc esse similia.

Imo etiam si in △lis ABC, abc, fuerit $A:a=u:v$, (seu brevius unum latus uni proportionale, nempe uti u ad v), et angulus ipsi B oppositus = angulo ipsi b opposito, atque angulus ipsi C oppositus = angulo ipsi c opposito: tum etiam $B:b=u:v$, et $C:c=u:v$. Nam tum est $A:a=B:b=C:c$, adeoque quia $A:a=u:v$ est etiam $B:b=u:v=C:c$.

§. 6. Si (Fig. 34) e vertice △li rectanguli demittatur ad hypothenusam $\perp$ris; orientur duo $\triangle$la α, β, toti $\triangle$lo, adeoque sibi invicem similia; atque hinc $\perp$ris dicta est *proportionalis media inter segmenta hypothenusae*, atque *cathetus quivis est proportionalis media inter hypothenusam et segmentum adjacens.*

Namque in toto $\triangle$lo et in $\triangle\alpha$ est u angulus communis, et $R = v' + u'$, itaque 3tius=3tio nempe $v' = v$; pariter in β et toto $\triangle$lo, est v communis, atque $R = v' + u'$, adeoque et $u' = u$. In $\triangle$is α, β, et toto, ergo sunt in quovis, anguli R, u, v; adeoque in quibusvis binis $\triangle$lis, latera sunt prouti angulis aequalibus opponuntur, proportionalia.

Nempe adsumantur prius anguli v, u in α, item v, u in β, tum v, R in α, et v, R in toto: fiet e priori $i : y = y : l$, atque e posteriore fit $i : K = K : h$; unde $y^2 = il$, et $K^2 = ih$; consequ. $y = \sqrt{il}$, et $K = \sqrt{ih}$.

Si igitur ex gr. i unitas rectarum ponatur, et jungatur l in directum; atque e meditullio ipsius $i+l$ radio $\frac{i+l}{2}$ semicirculus fiat, et e puncto rectarum i et l communi erigatur $\perp$ris usque ad peripheriam: erit ductis inde ad diametri extremitates rectis, angulus in semicirculo rectus (p.20), atque $\perp$ris erecta, radix quadrata ex l. Pariter patet, et si non $i = 1$, sed radix e facto ex i et l extrahenda fuerit, eam $= y$ esse. Idem etiam per cathetum fieri posse patet.

Unde etiam quum $K^2 = hi$, et $k^2 = hl = h(h-i) = h^2 - hi$; fit addendo, $K^2 + k^2 = h^2$; atque hinc $k^2 = h^2 - K^2$, et $k = \sqrt{(h^2 - K^2)}$; adeoque *quaecunque bina e cathetis hypothenusaque data fuerint*, 3tium *innotescit*. De 2dis potentiis adhuc tantum sermo est, de areis quadratorum inferius dicetur.

Si vero (Fig. 35) u *obtusus* fuerit; demissa ⌊ri d, erit $h^2=d^2+(K+x)^2=d^2+K^2+2Kx+x^2$; sed $k^2=d^2+x^2$; adeoque $h^2=k^2+K^2+2Kx$.

Atque si *u acutus* fuerit: tum aut et v acutus erit, aut v rectus vel obtusus erit; si v acutus sit (Fig. 36); tum ⌊ris y intus cadet, fietque $y^2=k^2-x^2$, item $y^2=h^2-(K-x)^2$, atque hinc $k^2=h^2-K^2+2Kx$, adeoque $h^2=k^2+K^2-2Kx$. Si vero v obtusus esset: tum (per praec) esset (Fig. 37) $k^2=h^2+K^2+2Kz$, adeoque $h^2=k^2-K^2-2Kz$. Pro v recto fit $z=o$.

E quo manifestum est: Imo quod si $h^2=k^2+K^2$, *angulum ipsi h oppositum, nec obtusum nec acutum, sed rectum esse*. 2do e lateribus dignosci, num △ rectangulum, acutangulum vel obtusangulum fuerit, et cuivis lateri qualis angulus opponatur. 3tio. (Fig. 36) Ex $k^2=h^2-K^2+2Kx$, prodit $x=\frac{k^2+K^2-h^2}{2K}$, ubi k et K intercipiunt ∧lum u, h vero ei opponitur, atque recta ab extremitate ipsius x ad apicem est ⌊ris ad K.

§. 7. Sed etiam si A=1 fuerit, (Fig. 38) ejusque extremitas cum extremitate factoris dati B (in alterum crus positi) recta jungatur; atque huic rectae, per finem factoris alterius quoque dati a, in crus ubi A est, ab apice positi, parallela fiat: erit *b factum e factoribus* B et a; quia A : a=B : b, seu A : B=a : b.

Si vero facto dato x, et alterutro factore B, hujus socius quaeratur; unitatis A et factoris dati B extremitatibus recta junctis, ab extremitate ipsius b, (ex apice ad crus in quo B est translati), huic rectae parallela fiat; erit recta in crure in quo A est, ab apice usque ad parallelam, factor socius, nempe *quotus a* ex b diviso per B.

Patet autem tam[in multiplicatione quam divisione $\triangle$lum rectarum A, B arbitarium esse.

Idem pluribus quoque modis fieri posse e dictis liquet.

·21112114. *Plures rectae numero quovis.*

De *parallelismo generali* praeter (in Tom. I. p. 462) dicta, plura referre, uti et subdivisioni figurae rectilineae in $\triangle$la, immorari brevitas necessaria vetat: quamvis non solum partem plani a figura quavis rectilinea, sed etiam a duabus figuris rectilineis (exgr. a duobus polygonis) clausam, in $\triangle$la dispesci posse demonstrari debeat, possitque.

·211121 1422.

Si quaevis figura rectilinea $\mathfrak{ABC}$--- (Fig 39) fuerit, in $\triangle$la subdivisa; atque e puncto $\mathfrak{f}$ extra eam sito, (quamvis proprie ubivis in spatio accipi queat), ad omnes angulorum apices rectae cogitentur; et quavis harum per quantitatem eandem α multiplicata, factum in eadem recta e puncto $\mathfrak{f}$ incipiendo accipiatur; nempe $\alpha . \mathfrak{fa} = \mathfrak{fa}$ in $\mathfrak{f}\tilde{\mathfrak{a}}$, $\alpha . \mathfrak{fB} = \mathfrak{fb}$ in $\mathfrak{f}\tilde{\mathfrak{B}}$ &c; atque fiant rectae $\mathfrak{ab}, \mathfrak{bc}$--; imo si a litera magna ad aliam fuerit recta in $\mathfrak{ABC}$---, fiat et inter literas minores nominis ejusdem: erit $\mathfrak{abc}$--- *figura* ipsi $\mathfrak{ABC}$-- *similis per definitionem* (Tom.I.p.451) uti singula $\triangle$la sibi invicem respondentia; et simul latera duarum figurarum, uti se invicem excipiunt, in eadem proportione, angulique laterum corrrespondentium aequales erunt; imo quaevis puncta $\mathfrak{P}, \mathfrak{Q}$ fuerint, recta $\mathfrak{pq} = \alpha . \mathfrak{PQ}$ erit.

Et *conversim* figura quaevis $\mathfrak{abc}$--, cujus latera uti se invicem excipiunt proportionalia lateribus ipsius $\mathfrak{ABC}$--- angulique aequales eo ordine sunt; hoc pacto generari potest; imo si $\mathfrak{ab} = \alpha . \mathfrak{AB}$, *quaevis figura*, cujus latera modo dicto proportionalia, angulique aequales sunt; *dictae* $\mathfrak{abc}$ *congruit.*

Nam I. Etsi ad omnia puncta figurae *juxta definitionem*, rectae concipiantur; idem prodibit: quodvis punctum $\mathfrak{P}$ enim concipiatur ex: gr. in recta $\mathfrak{AB}$, punctum illi homologum $\mathfrak{p}$ prodibit in recta $\mathfrak{ab}$; est enim tum $\alpha.\mathfrak{kA}=\mathfrak{ka}$, $\alpha.\mathfrak{kB}=\mathfrak{kb}$; $\alpha.\mathfrak{kP}=\mathfrak{kp}$; itaque $\mathfrak{kA}:\mathfrak{ka}=1:\alpha=\mathfrak{kB}:\mathfrak{kb}=\mathfrak{kP}:\mathfrak{kp}$; sunt igitur crura $\mathfrak{ka}$, $\mathfrak{kb}$, $\mathfrak{kp}$, ipsi $\mathfrak{kA}$, $\mathfrak{kB}$, $\mathfrak{kP}$ proportionalia cum angulis interceptis communibus; est ergo et $\mathfrak{ab}$ ipsi $\mathfrak{AB}$; ita $\mathfrak{ap}$ ipsi $\mathfrak{AP}$ proportionale; adeoque $\mathfrak{ab} \parallel \mathfrak{AB}$ et $\mathfrak{ap} \parallel \mathfrak{AP}$; per $\mathfrak{a}$ autem ipsi $\mathfrak{AB}$ unica parallela datur; itaque $\mathfrak{p}$ punctum rectae $\mathfrak{ab}$ est.

II. Quodvis latus $\mathfrak{AE}$ ipsi $\mathfrak{ae}$ homologum in eadem proportione est uti $\mathfrak{AB}$ ad $\mathfrak{ab}$: nam $\mathfrak{kE}:\mathfrak{ke}=1:\alpha=\mathfrak{kA}:\mathfrak{ka}$; est vero angulus inter crura $\mathfrak{kA}$, $\mathfrak{kE}$ cruribus $\mathfrak{ka}$, $\mathfrak{ke}$ proportionalia, communis; quapropter et $\mathfrak{AE}$ ipsi $\mathfrak{ae}$ proportionale est.

Sed anguli etiam homologi aequales sunt; nempe ex gr. quivis $\wedge$li $\mathfrak{AED}$, et $\mathfrak{aed}$ considerentur; concipiantur $\triangle$la $\mathfrak{ADE}$ et $\mathfrak{ade}$; est $\mathfrak{AD}:\mathfrak{ad}=\mathfrak{AE}:\mathfrak{ae}=\mathfrak{DE}:\mathfrak{de}$; itaque et anguli respondentes aequales (p.22), adeoque $\wedge\ \mathfrak{AED}=\mathfrak{aed}$, atque si angulus convexus sit, et convexus convexo aequalis est. Pariter de $\wedge$lis $\mathfrak{ABC}$ et $\mathfrak{abc}$ patet.

III. Sint etiam quibusvis punctis $\mathfrak{P}$ et $\mathfrak{Q}$ homologa $\mathfrak{p}$ et $\mathfrak{q}$; erit recta $\mathfrak{PQ}$ ipsi $\mathfrak{pq}$ homologa, eique proportionalis: nam $\mathfrak{kP}:\mathfrak{kp}=\mathfrak{kQ}:\mathfrak{kq}=\mathfrak{AB}:\mathfrak{ab}$, atque quodvis punctum rectae $\mathfrak{PQ}$ fuerit, illi homologum (ut antea) in $\mathfrak{pq}$ cadit.

IV. Quaevis figura rectilinea $\mathfrak{abc}$ — — — fuerit talis, ut latera uti se invicem excipiunt, proportionalia, angulique aequales sint: illa mo–

do dicto generari potest. Sit enim $ab = \alpha . \mathfrak{A}\mathfrak{B}$ &c; talem prodire patet. Et quaevis alia $a'b'c'$ - - - fuerit, cujus latera ad latera literis majoribus denotata, sint uti α ad 1, angulique inter crura proportionalia aequales; figurae dictae congruere potest: nam posito $a'b'$ in ab, ita ut a' in a, et b' in b cadat, vertendo in eandem plagam, propter angulos ad a' et a, ac b' et b aequales, et latera aequalia &c - - - manifesto congruent.

Patet vero superius α etiam $\vdash$ ve accipi posse, ut omnia facta ultra f in altera plaga accipiantur.

Schol. Notandum autem est, hic jam ut theorema demonstrari posse, elegantem *Wolfii* observationem, quam pro definitione rectæ haberi voluit; quod nempe omnium formarum sola recta utrinque finita sit, cui quaevis pars continua similis sit: sed huic quoque brevitas necessaria supersedere jubet.

2111212.

Rectae cum circulo minima sectio punctum est, maxima e 2 punctis constat.

§. 1. F.40 Sit ab recta inter 2 puncta peripheriae, et m sit medium arcus ab, ac c sit centrum; superponatur forma ex arcu am et rectis ac, cm composita, ipsi mcb; patet rectae mc quodvis punctum in suo loco manere, et dictas formas congruere, adeoque oa super ob cadente, angulos ad o esse aequales, adeoque rectos.

Hinc $\llcorner$ *e medio cordae per centrum transit, atque medium arcus, medium cordae et centrum sunt in recta eadem ad cordam e centro* Lri.

§. 2. F.41. Modus hinc se offert, datis quibusvis 3 punctis a, b, d non in recta sitis, centrum c reperire, e quo radio ca scripti circuli peripheria per a, b, d eat. Nempe si ab, bd modo (p.15) bisecentur, ⊥ris e meditullio f rectae ab, ⊥rem e meditullio i rectae bd secabit: nam recta fi cum quavis ⊥rium dictarum efficiet ∠lum $<$ R, adeoque summa internorum est $<$ 2R. Sit c sectio ⊥rium; erit △afc = bfc, adeoque ac = bc, ita △bic = dic, adeoque bc = dc; consequ. ac = bc = cd.

Unde etiam pari modo arcus cujusvis, quum in eo 3 puncta quaevis accipere liceat, neque in recta sint, centrum reperire licet. Nempe

§. 3. *Recta circulum in 3 punctis secare nequit.* Nam tum duae cordae essent ejusdem rectae partes, et centrum circuli esset in ⊥ri ex utriusque medio erecta; adeoque duae ⊥res de eadem recta secarent se.

§. 4. F.40. Patet etiam cordam totam praeter extrema intra circulum cadere. Nam pars arcus nequit intra cadere pars extra; quia tum haberet recta $\widetilde{ab}$ cum circulo adhuc punctum commune, ubi ex a motum in peripheria punctum, ex una plaga in alteram transiret eundo usque ad b; neque in eandem plagam cadere queunt duo arcus; nam tum esset cf = ca (contra p.16).

§. 5. Fig. 42. Sectio minima rectae cum circulo est punctum. Nam si bf faciat cum radio bc rectum, b erit punctum contactus rectae et circuli centro c scripti, nec ullum aliud punctum recta bf quamvis ∞ta, in eodem circulo habet. Nam si haberet ad dextram, item ad laevam esset; itaque 2 punctis fieret sectio major. Vocatur bf tangens.

Est vero etiam conversim tangens ad radium ⊥ris: nam nisi id sit, sit bd alia tangens, haec faciet ab aliqua parte ∠lum acutum cum radio; ⊥ris co ex c ad bd acuto angulo objecta cadit, adeoque hypothenusa bc semper decrescit usque ad o; itaque quaevis recta inter b et o ad c ducta est radio minor; adeoque bo intra peripheriam cadit, et quum continuata egrediatur, tangens non est.

Quamvis autem e quovis puncto arcus bd possit ad tangentem bf demitti ⊥ris, nulla tamen recta ex b inter arcum bd, et tangantem bf duci potest. Nam quaevis recta bd ducatur inter bc et bf, ∧ rectus illico decrescet, et demonstratione praec. applicata, patet punctum ex b in recta illa viam intra peripheriam incipere, ut per arcum objectum transeat.

·21112122. *Plures rectae circulum secantes*; ·211121221. *Se invicem quoque secantes*; ·21112211. *In eodem puncto*; ·2111212211 *In peripheria.*

I. Considerentur prius *duae tantum*. Si prius *alterutra* duarum *tangens* circuli sit: est *anguli v* quem tangens cum corda facit, quantitas. dimidio arcus a corda subtensi aequalis.

Nam (Fig. 43) si corda per centrum transit, tum v est rectus, et arcus tunc subtensi dimidium est quadrans. Alioquin autem fiat per centrum corda ∥la; ⊥ris e medio cordae datae, per centrum transit; eritque $u+v$ ad centrum $=$R; sed alterni u et u sunt aequales, atque $u+v$ angulus tangentis cum radio est $=$R; itaque ∧lus v ad centrum $=v$ illi quem tangens cum corda facit; prioris v quantitas $=$ dimidio arcus subtensi; adeoque etiam posterioris v quantitas eadem est.

Idem patet de ∧lo deinceps $u+$R; nempe $v+u+$R est totius circuli dimidium; itaque subtracto v, et dimidio arcus a corda subtensi, manebit $u+R=$ arcus a corda ab altera parte subtensi dimidio.

§. 2. Hinc si *duae cordae a, b* se invicem in peripheriae puncto f secent (Fig 44); orietur *u angulus ad peripheriam.* Fiat tangens ad punctum f. Est $u+v+z=$ totius peripheriae dimidio, $v+z=$ dimidiae summae arcuum subtensorum; manet itaque pro *u dimidium arcus illius cui insistit.*

Et hinc patet, Fig 45) (uti p. 20) $\wedge$lum v, *in semicirculo esse rectum*; et quadrilateri abcd circulo inscripti angulos oppositos simul 2 rectos efficere; nempe $p+q$, ita $v+x=$ dimidio peripheriae totius.

Sunt etiam arcus α, β per cordas parallelas absecti aequales, propter alternos u et u (simul angulos ad peripheriam) aequales. Ita si tangens cordae parallela fuerit, sunt alterni z et z aequales; quorum unius quantitas γ est, alter autem (p.33) $=\delta$ est.

II. Si plures rectae secuerint se invicem in eodem peripheriae puncto (Fig. 46): est $r+r > b+b'$; id est diameter est cordarum maxima. Porro $a+b' > (r=a+a')$, atque hinc $b' > a'$; sed $a'+b > c$; itaque $b'+b > c$. *Decrescente igitur arcu infra semicirculum, corda quoque decrescit, ac majori arcui corda major, majorique cordae arcus major respondet.*

·2111212211 2. *De sectione intra peripheriam (in eodem puncto).*

I. *Prius duarum rectarum* (Fig. 47).

1. Quantitas anguli $u=\frac{1}{2}(\alpha+\beta)$. Nam ducta parallela, fit $u'=u$; est vero $u'=\frac{1}{2}(\alpha'+\beta)$, atque $\alpha=\alpha'$. Conseque $u=\frac{1}{2}(\alpha+\beta)$.

2. Triangula ibidem verticalia sunt similia; quia anguli ad peripheriam iisdem arcubus insistunt. Hinc $a:b=b':a'$, atque $aa'=bb'$; nempe *facta segmentorum sunt aequalia.*

II. *Si duabus rectis plures secuerint se invicem intra peripheriam* (Fig. 48); sitque sectio extra centrum c: rectarum inde usque ad peripheriam *minima* p, *maxima* $s+r$ est; atque rectae dictae a p crescunt semper porro usque ad $s+r$. Nam $s+a>(k+k'=s+p)$; hinc $a>p$. Porro $b+k'>a$; sed $b'+k>(r=k+k')$; hinc $b'>k'$; itaque in $b+k'>a$ substituendo b' ipsi k', fiet $b+b'>a$. Item $s+r>b+b'$.

21112122113. *De sectione extra peripheriam.*

I. *Duarum rectarum* (Fig. 49.)

1. Est parallela ducta, externus, $u'=u$ interno opposito; adeoque etiam anguli quantitas eadem est, nempe $\frac{\beta-\alpha'}{2}$; sed $\alpha=\alpha'$ (p.34); itaque $u=\frac{\beta-\alpha}{2}$.

2. $A:B=b:a$. Nam $x+y=2R$, sed $y+v$ quoque $=2R$, nam sunt duo anguli ad peripheriam, ambo toti insistentes circulo; adeoque $x=v$; u vero est communis duobus $\triangle$lis; itaque proportione instituta, patet esse etiam $Aa=Bb$

II. Si duabus plures secuerint se invicem: ag minima, af maxima est; illa crescit usque ad tangentem ab, haec decrescit eousque.

Nam $ac+ce$ (seu af) est $>ae$; $cf+fe>(ce=cf+fd)$, hinc $fe>fd$; sed $df+fa>da$, itaque $fe+fa>da$. Idem pro tangente, si f' pro f et b pro d ponatur, applicari patet.

Demum $ah+hc<ai+ic$ (p.18), sed $ic=hc$; itaque $ah<ai$. Ita $ag+gc<ah+hc$, adeoque $ag<ah$.

In ·2111212212 usque ad ·211121222, (numerum posteriorem, ipsum jam pag 34 relatum excludendo) figurae rectilineae continentur, quarum aut apices omnes in peripheria sunt, aut latera omnia eam tangunt. In casu priore *rectilineum* circulo *inscriptum*, *circulus* autem *rectilineo circumscriptus*; in posteriore autem *circulus rectilineo inscriptus*, et *rectilineum circulo circumscriptum*, dicuntur.

De quovis rectilineo P itaque 4 quaestiones oriuntur: 1mo circa P circulum scribere, 2do circulo ipsi P aequiangulum inscribere. 3tio ipsi P circulum inscribere. 4to circulo ipsi P aequiangulum circumscribere.

§. 1. Sit prius exemplo $\triangle$lum. Circa $\triangle$ quodvis scribi circulus (pag. 31) potest; atque si radii per apices producantur, quivis circulus centri ejusdem in 3 punctis secabitur, quae si rectis jungantur, orietur $\triangle$, priori æquiangulum; sunt enim latera lateribus $\parallel$la, quia crura e centro sunt ut radius ad radium.

Si $\triangle$li abc (Fig. 51) anguli u, v bifariam divisi sint; patet summam internorum $u'+'v$ sectionem parere, e qua ad latera missae $\perp$res sunt aequales. Formantur enim $\triangle$la $\alpha \cong \alpha'$, $\beta \cong \beta'$ per latus unum commune, et angulos u' et R in α et α', ac v' et R in β et β'. Si circulus centro $\mathfrak{p}$ radio $\mathfrak{pq}$ fiat; erit quodvis latus tangens; atque $\triangle$lo *dato circulus inscriptus*.

Si vero $\perp$res producantur; per puncta peripheriae cujusvis, cujus centrum $\mathfrak{p}$ est, in quibus $\perp$res priores eam secant, tangentes ductae efformabunt $\triangle$ $\mathfrak{ABC}$ ipsi abc aequiangulum (pag 23); atque hoc pacto *dato circulo* $\triangle$lum dato $\triangle$lo *aequiangulum circumscriptum erit*.

§. 2. Si arcus α sit $= \frac{p}{n}$ (denotante p peripheriam, n integrum); atque ducatur corda cujusvis arcus α, uti se invicem in p excipiunt: oritur *polygonum regulare* n laterum; erunt nempe latera cordae arcuum aequalium, et anguli quoque aequales, utpote quivis est angulus ad peripheriam arcui $p-2\alpha$ insistens.

Sunt etiam manifesto aequalia quaevis $\triangle$la, per radios ad cujusvis lateris extrema ductos generata, (per tria latera tribus aequalia); suntque $\triangle$la ejusmodi tot, quot latera, et quum duo latera sint in quovis aequalia, quodvis aequicrurum est, et angulus quilibet ad basim est dimidio anguli polyponi aequalis.

§. 3. Conversim quoque si figurae rectilineae abcde latera aequalia, angulique aequales fuerint: apices omnes in eadem peripheria sunt. Nam (Fig. 52) $\perp$res e meditulliis f, g laterum ab et bc secant se invicem, quia ad rectam fg summa internorum est $<2R$; fiat in p. Erunt $\triangle$la afp et bfp aequalia, (propter 2 latera cum recto intercepto aequalia); adeoque in $\triangle$ apb anguli u ad basim sunt aequales. Est quoque $\triangle$pfb$=$pgb, (propter pb commune et angulos adjacentes aequales); adeoque et $\wedge$ pbg$=u=$ dimidio anguli polygoni; $\triangle$ pbg vero $=$ pcg, ita uti $\triangle$ afp$=$bfp erat. Erit igitur $\wedge$ pcd$=u$; demissaque $\perp$ri ph, est $\triangle$ pgc$=$pch, (per pc commune et angulos aequales); atque hinc ch$=$cg $=$hd; est igitur $\triangle$ pch$=$pdh (per ph commune, ch$=$hd, et rectum interceptum). Quod continuando patet esse ap$=$bp$=$ep$=$dp &c.

§. 4. Sunt etiam (e praec.) $\perp$res pf, pg - - - - aequales; adeoque centro p radio pf circulus polygono inscriptus erit, uti prior circumscriptus.

Si vero ut supra de $\triangle$lo dictum est, tam $\perp$res quam radii ad apices producantur: quivis circulus centri p fuerit, ubi a $\perp$ribus secabitur peripheria, tangentibus ductis, polygonum regulare totidem laterum circumscriptum erit; et si radiorum sectiones jungantur, circulo inscriptum erit; nempe quaevis duae rectae duabus parallelae angulos aequales facient, omniaque circumcirca aequaliter generantur.

§. 4. Si arcus lateris 6ta pars peripheriae sit, corda erit = radio, nam tum angulus ad centrum est $\frac{360^0}{6}=60^0$, adeoque duo anguli ad basim $\triangle$li aequicruri sunt $180-60=120^0$, adeoque unus $=60$, et $\triangle$ aequilaterum est.

§. 5. Angulus polygoni n laterum $=\frac{(2n-4)R}{n}$. Nam e centro ductis ad apices $\wedge$lorum rectis $\triangle$la numero n prodibunt; quorum omnium $\wedge$lorum summa $=2nR$; unde subtracta summa $\wedge$lorum ad centrum, residuum est $(2n-4)R$, quod cum n $\wedge$li sint, dividi per n debet.

Patet etiam quemvis externum, latere in eandem plagam respectu antecedentis producto, esse eidem q aequalem. Itaque quum hoc pacto q numero n prodeat, et quodvis q sit $=2R$ $-$ $\wedge$lo polygoni $=2R-\frac{(2n-4)R}{n}$, erit $nq=$ $2nR-\frac{n(2n-4)R}{n}=2nR-2nR+4R=4R.$

·211121222. *De rectis circulum secantibus parallelis dictum* (p.34) *est.*

·2111213.

De circulis se invicem secantibus.

I. *Prius de sectione duorum circulorum:* sectio minima est punctum, maxima 2 punctorum est. Duos circulos in 3 punctis secare se invicem non posse vel inde patet; quod tum duae cordae essent utrique circulo communes, e quarum mediis erectae Lres centrum utriusque idem determinarent; adeoque aut toti coinciderent, aut nullum punctum haberent peripheriae utrique commune.

2. Si circuli unum tantum punctum habeant commune, dicuntur *tangere* se invicem, et quidem is *intus tangere*, qui praeter punctum tactus totus intra alterum est, et circulus alterum tangens, qui non intra hunc cadit, *extus tangere* dicitur; adeoque duo circuli possunt se invicem *extus* aut *intus tangere*: nempe

Centris ℭ, c, c′ in Lri ad ab (Fig. 53) acceptis, radiorum extremitate altera a scriptos circulos se ita tangere patet: quia si praeter punctum a adhuc haberent commune, ex gr. ad laevam respectu ℭc, id etiam ad dextram fieret; adeoque 2 circuli duobus punctis plura haberent communia.

3. Sunt vero centra circulorum se contingentium et punctum tactus in recta eadem.

Nam si circulus ab altero intus tangatur: eadem in puncto a utriusque tangens erit. Nam sit ab tangens interioris; nisi eadem esset etiam exterioris: sit ap, haec secabit interiorem adeoque tum etiam exteriorem: itaque tangens hujus esse nequit. Si vero ab tangens communis est; tum Lris ex a per c et c′ transiens unica est.

Si 2 circuli se invicem extus tangant (Fig 53): tum nisi a, ℭ, c in recta sint: sit cdℭ recta: erit ℭa+ca > cdℭ; nempe summa duorum radiorum addita aliqua recta, esset summa duorum radiorum minor. Unde patet, a duobus ad 3, inde ad 4 &c progrediendo, omnium quotquot fuerint, se invicem in eodem puncto (sive extus sive intus) contingentes: centra cum puncto tactus in recta eadem esse.

4. Forma per sectionem minimam generata est duplex, prouti intus aut extus se tangunt: sed (Fig. 54) forma per maximam sectionem generata constat e duabus lunulis, et intermedia fenestra, ad quarum communem chordam e meditullio hujus erecta perpendicularis per centra amborum circulorum transit.

Aequalitatem per unum angulum in qualibet duorum circulorum sectione determinatam esse patet. Nam tunc ex utroque congruit portio, et tria puncta determinant circulum.

II. Si circulus A duos circulos B et C secet: aut tanget utrumque, aut unum B solum tanget, aut neutrum.

In casu 1mo (Fig. 55, 56, 57---) aut intus aut extus cadet uterque ab A tactus; aut unus extus alter intus. In quolibet horum casuum, aut habebunt hi duo aliquid commune, aut non; si ita, id aut punctum erit, aut duo; si punctum solum fuerit, hoc aut in A cadet, (quo pacto sectio, omnibus commune punctum erit), aut non in A cadet. Si B extus, C intus cadat, tum casus unus tantum est, ut C et B aliquid commune habeant, nempe sectio unius puncti. In casu 2do ubi A nonnisi ipsum B tangit, habet tamen cum C aliquid commune, secabit ipsum C in 2 punctis; tum vero B et C aut habebunt aliquid commune, aut non; si ita, erit id aut punctum, aut duo.

In casu 3tio A neutrum ipsorum B, C tangens, habere cum quovis ipsorum B et C communia duo puncta debet; et B et C aut habebunt aliquid commune, aut non; si ita, id erit, aut 1 aut 2 puncta; et haec aut ambo e-sunt eadem cum iis quae A cum B et C habet communia, aut unum tantum, aut neutrum.

Facile patet omnes hos casus (quorum aliquot coincidunt) pervestigando, sectionem esse minimam 1 puncti, 6 punctorum maximam, et dari sectiones 1, 2, 3, 4, 5, 6 punctorum, atque formas varias, et angulos infra in 2 species distingvendos generari.

Ob facilitatem immorari cum necesse non sit, exempli caussa casum unum casus primi attulisse sufficiat; nempe casum sectionis 3 punctorum, in quo quilibet bini ipsorum A, B, C tangent se invicem, at non in eodem puncto.

Fieri hoc nonnisi B et C utroque extus aut utroque intus A cadente patet.

§. 1. Si C et B extus cadant, (Fig 56) sit a radius ipsius A, et in continuatione ejus accipiatur punctum illud, ubi (quantavis fuerint b, c), rectae $a+b$, et $b+c$, circa extrema rectae $a+c$ motae occurrunt; quod fieri patet, cum quorumvis duorum laterum summa excedat tertium.

Tum si e tribus verticibus $\triangle$li tanquam centris, circuli fiant radiis a, b, c (nempe radiis circulorum A, B, C): patet e quantislibet a, b, c $\triangle$ tale generari, quale oritur in schemate e tribus arcubus, cujus vertices sunt puncta tactus externi.

2. Si B et C intus cadant; (Fig. 57) sit $\mathfrak{a}$ centrum ipsius A, et $\mathfrak{b}$ centrum ipsius B, et $\mathfrak{c}$ centrum ipsius C. Sit r radius ipsius C, ac radius ipsius A sit $r+u$; et radius ipsius B sit β; pro quovis β, dummodo $< u$ sit, reperietur $\mathfrak{b}$ ibi, ubi $r+\beta$ circa $\mathfrak{c}$, et $u+r-\beta$ circa $\mathfrak{a}$ mota occurrent.

Si occurrant, res patet. Nam tum $\mathfrak{b}\mathfrak{i}=\beta$; quia $\mathfrak{a}\mathfrak{i}=r+u$, et $\mathfrak{b}\mathfrak{a}=u+r-\beta$; itaque $\mathfrak{i}$ est punctum tactus ipsorum B et A, quia *i* in recta per amborum centra est, ita recta $\beta+r$ ex b ad c, transit per c, et tactum ipsorum B et C.

Datur vero b pro quolibet β quod $< u$.

Nam tum latera $\beta+r$ et u, ac $u+r-\beta$ talia sunt, ut quorumlibet binorum summa tertio major sit; de reliquis patet pro quovis β; at postremorum summa, priore tunc tantum est major, si $\beta < u$ sit. Nam summa haec est $2u+r-\beta$, quod debet esse $>\beta+r$; subtracto utrinque r, manet $2u-\beta>\beta$; adeoque pro $\beta=u\pm\omega$, est $2u-(u\pm\omega)=2u-\beta=u\mp\omega$; et manifesto $u-\omega$ est $<u+\omega$, et $u+\omega>u-\omega$.

§. 3. F.58. Sit quantusvis angulus bac, et ba = ac; et sit chordae bc meditullium d, fiantque centro b radio bd = bg, centro c radio cd, et centro a radio ag = ah circuli; fiet triangulum ghd; ubi arcus gd, utvis mutetur $\wedge$a, manet = dh; nimirum in $\triangle$lo aequicruro abc sunt ad basim.

Porro arcus gd ⌒ R, si $\wedge$a ⌒ o; et gd ⌒ o, si $\wedge$a ⌒ 2R; arcus Gd vero ⌒ R in casu primo, et in altero ⌒ 2R. Radius ga autem in casu primo ⌒ ba (b ipsi c quam propissime eunte); in altero vero ga ⌒ o, (b ipsi a, et d ipsi a quam propissime euntibus).

§. 4. Plurium circulorum sectionibus prætermissis unum tantum attigisse sufficiat.(F.59).

Si bc sit latus figurae regularis, cujus vertices sunt in peripheria radii ab: patet per dicta generari e verticibus tanquam centris, dimidio latere pro radio accepto, circulos aequales coronam claudentes, quorum quivis quemlibet inter quos est tangit, (uti in schemate).

De formis etiam in casibus dictis notasse sufficiat.

1mo. Figuras ibidem oriri, quae 2 lateribus concavis, aut 2 lateribus convexis spatium claudunt.

2do. Oriri △la *circularia*; de quibus statim dicetur.

3tio. *Angulum* sub quo occurrere arcus arcui potest, in duas species distingvi posse; nempe in *convexum* scil. cujus crura possunt circa verticem in talem situm moveri, ut recta quaedam per verticem ducta sit chorda utriusque, arcubus in diversas plagas cadentibus; alioquin angulus *concavus* vocetur. Ex gr. (Fig 58) dgh, et (Fig 60) gah convexi sunt, gaf concavus est.

4. Triangulum ejusmodi combinari posse e tribus convexis angulis, e 2 concavis et 1 convexo; at non posse e 3 concavis, aut ex 1 concavo, et 2 convexis patet.

§. 5. Quantitas anguli quam esse eadem potest, anguli quem tangentes crurum ad verticem faciunt; at illa tangentis dimidietas intelligatur, cum qua arcus non formam fluentem facit (Tom. I. p. 458). Hoc pacto $u = o = v$,(Fig. 55), et (Fig.58) △li gdh angulorum summa $= o$; at (F.61) △li adbfcea summa angulorum $= 12R$; major summa 3 angulorum esse nequit.

Nempe (Fig.62) sit abc △ aequilaterum, et q, r, f meditullia laterum, angulique u aequales, atque e punctis a, b, c erectis ad crura ipsorum u ⊥ribus, intersectiones p, w, i fiant centra radiis pa, ib, wc aequalibus: patet angulum bat convexum accipi, et dabili quovis minus sumi posse.

Datur △, cujus angulorum summa dabili quovis minor esse potest.

F.60. Sint nempe duo arcus afb; et ahb ad angulos convexos a et b se invicem secantes, (et angulus concavus dato quovis minor fieri potest);

et sint tangentes in a, rectae ab et af; moveatur arcus afd circa a per arcum ahd, tangentem suam ab secum ferens; poterit ab ire quam propissime ipsi af; itaque angulus ad a fiet omni dabili minor; sed 'is solus erit summa trium angulorum △li, qui e meditullio o chordae a€ radio og ad chordam perpendiculari scripto semicirculo ghm clauditur.

Interim haud sufficit quantitas duorum angulorum dicta ad angulorum aequalitatem geometricam: necesse est et anguli species easdem, radiosque unius radiis alterius aequales esse; poterit autem inferius (ubi de areis tractabitur), angulus quivis ejusmodi etiam per areas certo modo determinatas, exprimi.

§. 6. Aequalitas △lorum circularium determinatur modo sequenti:

1mo. Duo latera cum angulo intercepto non sufficiunt; nam latus 3tium esse potest radiorum variorum.

2do. At 3 latera sufficiunt, nisi sit aliquod convexum, et illi respondens concavum.

3tio. Ita 2 anguli et unum latus adjacens.

4to. Imo tres anguli quoque ponunt △lorum horum aequalitatem, sed duo non.

Cum casus reliqui sint faciliores, ultimum tantum referre libet.

At sequens prius demonstrandum est. (F.63) Peripheria centri a radii pa dicatur *a*, peripheria centri h radii ha vero A, peripheria radii hp autem dicatur H.

Utcunque secet *a* ipsum H ad angulum *z*, omne punctum peripheriae A tale est, ut circulus ex eo, tanquam centro scriptus cum radio ap, plane ad angulum *z* secet ipsum H; nullum vero extra peripheriam A tale punctum q datur, ut arcus radii aq peripheriam H ad angulum z secet.

Prius (Tom. I. p. 7. V.) patet; sed nec ullum tale punctum q est.

Nam sive intra A sive extra sit, recta $\widetilde{qh}$ transit per A, fiat in c, et sit q extra A; radius pro centro utroque c et q sit = ap, terminabitur uterque in hq in 2 diversis punctis m et r.

Fiant centro c radio cm et centro q radio qr circuli; neuter horum potest tangere ipsum A, quia si unus tanget (extus aut intus), ex gr. extus, et alter extus tangeret, si ex q et c descripti circuli, circulum H ad angulum ipsi z aequalem secarent; tum vero quia tactus punctum in hq esse debet, radii inaequales fierent aequales.

Itaque secaret ipsum H uterque in 2 punctis, unus in fl, alter in di; et quidem ita ut si f ultra d cadat, et l plane ita ultra i cadere, et si f in d cadit, l in i cadere debeat.

Neutrum vero fieri potest. Nam quum hoc pacto esset angulus mfd = rdo, et per angulum unum ponatur aequalitas figurae e 2 arcubus compositae (p. 40); esset fmodf = drod; adeoque f et l non possunt non in d et i cadere; at neque in d et i possunt, quia tum m cum r coincideret, quia per angulum f=d non posset m e peripheria dri egredi.

Si q intus A cadat demonstratio eadem est. Itaque assertum patet.

Liquet hinc quamvis $\triangle$lorum circularium speciem per tres angulos determinari, ponique aequalitatem per tres angulos aequales (Fig 64)

Nam sit unus arcus $\triangle$li circularis e peripheria H cujus centrum h, alter e peripheria I cujus centrum i, tertius ex K, cujus centrum q est; adeoque sit $\triangle$abc.

Tum manente angulo c, omne centrum, e quo angulus $=a$ cum H produci potest, est in peripheria A, et omne centrum, e quo cum *I* angulus $=b$ produci potest, est in periphrria B (per praec.); describitur vero arcus ab latus angulo c oppositum, ex uno centro; adeoque centrum hoc adsumi debet ubi A et B se invicem secant; adeoque ad summum 2 puncta esse possunt uti p et q, nimirum; plura puncta A et B communia habere nequeunt, unde angulus $=a$ cum H, et angulus $=b$ cum *I* produci possit; scilicet $z=a$, et $v=b$.

At z patet (cadentibus p et q in diversas plagas) vertere convexam partem ipsi c, si a concavam ostendit, ita ut z semper aliter sit versus c versus quam *a*.

Itaque unicum adhuc triangulum construi potest, ut $c=k$ sit, $b=v$, et $z=a$; haec vero sunt aequalia. Ita $\triangle acn = zkm$; sed z est concavus, et illius deinceps positus est convexus, ita in altero $\triangle$lo. Nempe $\triangle$lo zvk considerato, si $z=a$ angulus concavus sit, angulus deinceps positus dicti $\triangle$li convexus est.

·211122.

De *sectione sine angulo*; quae itaque formam fluentem parit.

I. *Recta cum recta;* si circa punctum sectionis moveantur, donec fiat angulus $=2R$, id est nullus angulus sit; forma fluens evadet.

Recta cum circulo.

1. Cum *uno*; tangens dimidia cum dimidia altera peripheria forma fluens est. Ex gr. bak (Fig.65).

Cum 2 circulis dupliciter fieri potest; scilicet tangente recta on 2 circulos in duobus sui extremis, aut in eadem plaga aut in diversa; uti est ponr et ponm.

3. *Cum tribus circulis* fieri nequit, quia si ad finem rectae ponatur tertius; is cum priore circulo faciet angulum, si ita ponatur, ut cum recta non faciat; in puncto intermedio quovis vero angulum fieri clarum est.

II. *Circulus cum circulo* : 1mo *cum uno*; nempe 2 arcus qualiumvis radiorum eadem tangente gaudentes, in plagas respectu rectae centrorum diversas, (et aut in eandem respectu tangentis plagam aut diversas) cadentes, sine angulo secant se invicem : talis forma fluens est lfs. (Fig. 66).

2do. *Circulus cum 2 circulis*: si arcus cujuspiam ambo extrema modo plane dicto cum aliquo arcu jungantur, uti abcd aut fmnd, aut lmud. (Fig. 67).

§. 1. Formae fluentes sunt quasi rivi, quibus naturae viventis vena fluit, rarius iter frangens, ut in dulciorem cursum refluat, demum in mortis regni angulatis terminis haerens.

Lineamenta quaevis describi quam proxime possent, ad cujusvis arcus finem, certi radii arcu certae quantitatis, in eandem aut alteram respectu tangentis plagam posito.

§. 2. Figuram 2 arcus non ejusdem circuli, sine 2 angulis claudere nequeunt. Tres arcus requirunt ad minimum 1 angulum; quatuor possunt sine angulo figuram claudere.

Prius manifestum est. Alterum quoque (pro Fig. 68) patet. Nam sint tres illi arcus A, B, C, centra a, b, c; punctum tactus ipsorum A et B sit 𝔄, punctum tactus ipsorum B et C sit d, et punctum tactus ipsorum A et C sit p: patet p, a, c in recta, atque etiam d, b, c in recta esse debere; itaque c eo cadere oportere, ubi rectae pa et db se intersecant: nam p et d in arcu ex uno centro c scripto esse oportet; ibi vero oreretur $\triangle$ abc, essetque radius $cp=cd$; porro quia $bd=ab+$ $(a\mathfrak{A}=ap)$; atque $ac+ap=cd=cb+bd$; esset $ac+$ $ap=cb+ap+ab$; atque hinc esset $ac=cb+ab$; quamvis duo $\triangle$li latera nequeant $=$ esse tertio.

Idem facile patet; pro casu si trium arcuum aliquis contrarie flexus sit.

§. 3. At nec e tribus lineis quarum quaelibet, recta aut circulus est, figura sine angulo claudi potest. Nam si quaevis sit recta, aut duae rectae, et unus arcus, patet.

Si vero una sit recta, et aliae duae arcus sint, patet modo sequenti. (Fig. 69).

Sit vw tangens arcus mq; tum ut tertia linea figuram claudens arcus sit, necesse est dari tale p, ut pv ad vm $\perp$ris sit $=pq$, rectae per arcus mq centrum c ductae, quia tunc tantum, petitum praestari per arcum aq usque ad v centro p radio pv scriptum posset.

At $vp<pq$; nam $mc=vo=cq$; porro $po<pc$, ergo $vo+po<pc+cq$.

§. 3. Fieri posse cum uno angulo figuram e tribus arcubus patet: si (Fig. 70) centrum f arcus aeb, in recta per ejus extremum a, et centrum c ipsius afd, ducta accipiatur; et centro i radio $di=bi$ semicirculus describatur: generabitur hoc pacto figura $afdgbea$, nonnisi ad b angulo gaudens.

Ita ex una recta et 2 arcubus datur figura cum uno angulo. (Fig. 71).

Nam arcus mo, cujus tangens est mn centrum in c habet; itaque facile patet in oc producta, posse centrum f arcus on accipi, et ad n angulum generari.

E 2 rectis, et uno arcu quoque datur figura cum uno angulo. Nempe si $abcd$ quadratum sit (Fig. 71), et centro a radio ab fiat arcus bec.

§. 4. Figuram 4 arcus possunt sine ullo angulo claudere; et 4 est minimus numerus, (cum e paucioribus fieri non posse dictum sit).

Nimirum ab extremitatibus a et b arcus afb (Fig. 72) ducantur rectae per ejus centrum C; et acceptis ca ex a et bf ex b aequalibus, scribantur radiis ca, et fb, centris c et f arcus aequales be et af; ducanturque rectae fe, cf; et fiat ex intersectione f′ radio f′e arcus ef. Figuram fbefa quaesitam esse, e praemissis facile patet. Talem etiam esse AbdeBfghA patet (Fig. 73 et 74), centris in apicibus quadrilateri aequilateri ifcf′ acceptis, radiisque ih=ib=ce=cf e centris i, c, et radiis f′h=f′f=fb=fe e centris f′, f. Facile ex inspectione patet id quoque, quod si $u \frown R$, limes ipsius hAb et ebf semicirculus, et limes ipsius bde ita ipsius hgf, rectae sint, quamvis ipsa (Fig. 75) nunquam attingatur. Si vero $u \frown o$, tum bAh $\frown o$ (in Fig. 73), in Fig. 74 autem bAh peripheriae toti quam propissima venit, et hf′ semper minus distantia puncti f′ ab ie esse debet, ih vero $\frown \frac{1}{2}$ ie.

Potest e 2 rectis et 2 arcubus quoque figura sine angulo fieri; talem esse patet defgab (Fig. 75); ita ex una recta et 3 arcubus, qualis est (Fig. 76) demba: ubi arcuum ad, em centra i, c sunt, et arcus abm centrum f est, ac remoto f in Lri $\widetilde{bf}$ dato quovis ulterius, limes (Fig. 75) erit.

E tribus rectis et uno arcu figura fieri nequit.

Quum omnia haec, aliaque hujus generis,

e praemissis facile perspiciantur; brevitatique consulendum sit: pauca haec, quo ordo ipse induxit, attulisse, nec plura adferre concessum sit. Aliquid tamen adhuc addetur inferius.

*2112. *De areis*, (nempe figurarum planarum, rectilinearum, circulariumque).

I. *De facto e rectis*: hinc *area rectanguli*, area *parallelogrammi* cujusvis, area △li, area *quadrilateri* cujus dantur 2 latera parallela, area *quadrilateri cujusvis*, area *cujusvis rectilinei*, per summationem △lorum, aut trapeziorum e quibus constat; ita area *polygoni regularis*; hinc *area circuli*.

II. *Transmutatio arearum*, *et reductio ad formam rectae*(Tom.I.p.22.)nempe ad rectangulum datae altitudinis; et mutatio plurium quadratorum in unum.

III. *Comparatio arearum* figurarum similium, aliarumque. Inde lunula Hypocratis, et id genus alia.

IV. *Additio subtractio*, *divisio* figurarum sub certis conditionibus.

V. Si alicui figurae, aliae sub certa conditione imponantur; impositarum summa, limesque hujus quaeritur.

I. §. 1. *Factum* e quotvis *rectis*, recta est (p. 28); at si rectarum unitas sit α; et pro planorum unitate accipiatur tale □ cujus latus α est, ita pro unitate omnium spatii portionum sit cubus, cujus latus α; tum si l, l', l'' rectae sint; 1mo. recta l, l' mensurata per unitatem α plane eos numeros dat, quos area rectanguli ex l et l' compositi mensurata per arearum unitatem, nempe $\square\,\alpha$; ita ut si ex gr. recta $l.l'$, nempe factum lineare, sit $\frac{n}{m}$tum ipsius α; et area rectanguli dicti sit $\frac{n}{m}$ ta □ti α.

Ita 2do. factum $l.l'.l''$ si $\frac{n'}{m'}$ tum ipsius α sit, etiam parallelepipedum (de quo infra) ex l, l' et l'' est $\frac{n'}{m'}$ tum unitatis solidorum, nempe cubi cujus latus α est.

Nam heic tantum de areis loquendo, (Fig 77) sit l unitatis $\frac{p}{q}$ ta, l' vero $\frac{r}{s}$ ta; est $l.l' = \frac{pr}{qs} = \frac{ps}{qs} \cdot \frac{qr}{qs} = \frac{psqr}{qsqs}$. Dividatur $\alpha = 1$ in qs partes aequales, continebit l partes eiusmodi numero ps, l' vero numero rq, (patet $\frac{p}{q}$ et $\frac{r}{s}$ ad eandem denominationem reductis). Ductis vero ||lelis e fine cujusvis $\frac{\alpha}{qs}$, orientur in strato inferiore quadrata, quorum cujusvis latus est $\frac{\alpha}{qs}$, numero rq; et quum l, strata ejusmodi numero ps producat, erunt ejusmodi omnia □ta numero $psrq$; itaque totum rectangulum ex l et l', erit $\frac{psrq}{qsqs}$ tum □ti α; namque stratum inferius continet eiusmodi □ta numero qs, et cum strata quoque numero qs dentur, constat □α ex ejusmodi □tis numero $qsqs$.

Patet itaque, uti factum lineare superius $\frac{psqr}{qsqs}$ tum unitatis linearis est, ita rectangulum ex ejusmodi factoribus compositum, esse $\frac{psqr}{qsqs}$ tum unitatis arearum.]

Si vero L et l sint incommensurabiles, tum id ex l quod $< \frac{\alpha}{qs}$ est, et remanet, sit λ, et id ex L quod $< \frac{\alpha}{qs}$ remanet, sit ω; utrumque $\frown o$, quia qs omni dabili majus accipere licet.

Sit rectangulum ex L et l, $=$ P, atque rectangulum ex L′ et l', $=$ P′; erit P—P′ $=$ rectangulo ex L et λ, et rectangulo ex l' et ω; λ et ω aut sunt aequalia, aut alterutrum est majus altero, sit $\lambda > \omega$; erit P—P′ $<$ rectangulo ex $(L+l)$ et λ; sed hoc quoque $\frown o$; quia basis $L+l$ manet, et λ omni dabili minus fieri potest; adeoque non datur tam parva assignabilis recta k, ut quadrato ejus non fiat rectangulum dictum minus; nam dividatur $L+l$ in tot partes n, ut una u sit $< k$, deinde fiat λ tam parvum, ut sit $< \frac{k}{n}$, et si superstruantur rectangula p sibi invicem, $n\lambda$ non adaequet altitudinem k; patet oriri rectangulum cujus tam basis, quam altitudo est $< k$; adeoque P—P′ esse dato quadrato ipsius k minus; potest vero cuivis assignabili figurae circulus, et huic quadratum includi; itaque P′ quod $= L'.l'$ (id est $L'.l'$to $\square$ti unitatis), nulla assignabili quantitate differt a P, et tendit ad limitem P; sed $L' \frown L$ et $l' \frown l$, adeoque (Tom. I. p. 73) $L'.l' \frown L.l$, et cum $L'l' =$ P′; P ab $L.l$ nulla assignabili quantitate differt.

Hinc rectanguli cujus basis L altitudo l, area $= L.l$

I. §. 3. *Parallelogramma (et triangula) basibus aequalibus et altitudinibus aequalibus gaudentia, sunt aequalitate (quoad portiones) terminata, aequalia*; (per altitudinem intelligendo, in parallelogrammo distantiam baseos a latere opposito parallelo, in △lo autem ⊥rem e vertice ad basim).

Vide Tom. I. pag. XXXVII. Fig. 17. III. Ubi △li A latus laevum ad latera parallelogrammi a'e'𝔅𝔈 (nempe 𝔈e', 𝔅a'), et latus dextrum ad parallelogrammi 𝔈𝔅ea latera 𝔈e, 𝔅a translata sunt, donec aut nihil, aut aliquid supersit: atque rectas, in quovis parallelogrammorum dictorum, fines quotarumvis partium connectentes, basi parallelas esse, imo in utroque rectas tales, uti parallelas per g et h, in eadem recta esse patet; nempe ad quotaevis partis finem subsistere libeat, exgr. ad g et h; △d𝔈f desinens ad partium primarum fines, erit △lo gh𝔈 simile, ob angulum interceptum communem, et latera intercipientia proportionalia; adeoque latus 3tium 3tio parallelum est. Et manifesto si supra g residuum manet, idem supra h fieri debet; secus enim parallelá ea infra e'a' caderet, si adhuc una pars daretur supra h, et supra e'a' caderet, si in h adeoque in e' ultima pars terminaretur.

Est demum hinc △ F$=f'+f$, per unum latus tanquam distantiam parallelarum eandem, et angulos externos internos oppositos; atque etiam trapezia E'+E, et $e+e'$ aequalia esse patet.

In casu (Fig *) autem est manifesto A $=$ C, et B$=$B.

§. 3. Quum igitur parallelogrammum quodvis, rectangulo baseos aequalis et altitudinis aequalis, sit aequale: erit parallelogrammum quodvis $=$ facto ex altitudine in basim; triangulum autem utpote dimidium parallelogrammi, baseos aequalis et altitudinis aequalis, est manifesto = basi per altitudinem dimidiam multiplicatae.

§. 4. Quaevis autem figurae F et f fuerint inter duas parallelas p et q; si pro quacunque recta utrinque ∞ta inter p et q ipsis parallela, eo quod haec cum F commune habet C dicto, et eo quod eadem cum f commune habet c dicto, pro quibuslibet C, c simultaneis sit $C=\alpha c$; (e Tom I. p. 185 --) liquet esse $F=\alpha f$ (areas intelligendo, etsi aequalitas interminata esset).

§. 5. Hinc si unius ∥grammi basis b, altitudo a sit, alterius basis B altitudo A sit; erit area prioris $=ab$, et area posterioris $=AB$; itaque si $ab=AB$, est $a:A=B:b$, nempe altitudines parallelogrammorum areae aequalis sunt in ratione inversa basium. Quum vero △la sint dimidia parallelogrammorum altitudinis baseosque aequalis; idem de △lis areae aequalis valet. Si vero $a=A$, areae sunt uti bases.

§. 6. F. 36* *Altitudo* y trianguli *solis lateribus datis innotescit*: nempe $y=\sqrt{(a^2-x^2)}$; sed x erat (p. 28) $=\frac{a^2+b^2-c^2}{2b}$; atque hinc a^2-x^2

$$=\frac{2a^2c^2+2b^2c^2+2a^2b^2-a^4-b^4-c^4}{4b^2}$$; et hoc (ex Tom. I. p. 127)$=\frac{(a+b+c)(a+b-c)(c+a-b)(c-a+b)}{4b^2}$;

e quo radix quadrata per $\frac{1}{2}b$ multiplicata, fit

$$\frac{1}{4}\sqrt{(a+b+c)(a+b-c)(c+a-b)(c-a+b)}=$$

areae △li *e solis lateribus* computatae.

§. 7. Trapezium (Fip. 78) constat e ∥grammo ex b et a, et △lis $b'a$, $B'a$; estque $= ba + \frac{b'a + B'a}{2} = \frac{2ba + b'a + B'a}{2} = a.\frac{b + b + b' + B'}{2}$ $= a.(\frac{b+B}{2})$. Notandum b esse $< B$. Hinc si e medio ipsius l sit $\beta \parallel B$, patet b'' esse $= \frac{1}{2} b'$, et $B'' = \frac{1}{2} B'$ adeoque $b + \frac{b'+B'}{2} = \beta$ esse per a multiplicandum. Et idem generaliter de quadrilatero patet, si 2 lateribus parallelis gaudeat.

§. 8. Quadrilateri cujusvis $\mathfrak{abcd}$ area est = dimidio parallelogrammi $\mathfrak{a'b'c'd'}$ quod oritur (F. 79), latus quodvis bisecando. Nam $\mathfrak{aa'} = \frac{1}{2}\mathfrak{ab}$, $\mathfrak{ad'} = \frac{1}{2}\mathfrak{ad}$, atque in △lis $\mathfrak{aa'd'}$ et $\mathfrak{abd}$, $\wedge\mathfrak{a}$ communis est, hinc $\mathfrak{a'd'} \parallel \mathfrak{bd}$; ita $\mathfrak{b'c'} \parallel \mathfrak{bd}$, adeoque $\mathfrak{a'd'} \parallel \mathfrak{b'c'}$, atque ita $\mathfrak{a'b'} \parallel \mathfrak{d'c'}$. Sunt vero △la similia, uti 2dae potentiae laterum homologorum (vide p. 63.); itaque △ $\mathfrak{aa'd'} = \frac{1}{4}\mathfrak{abd}$, et △ $\mathfrak{b'cc'} = \frac{1}{4}\mathfrak{cbd}$; adeoque △lorum $\mathfrak{aa'd'}$ et $\mathfrak{b'cc'}$ summa $= \frac{1}{4}\mathfrak{abcd}$. Sed eodem modo est △lorum $\mathfrak{a'bb'}$ et $\mathfrak{d'dc'}$ summa $= \frac{1}{4}\mathfrak{abcd}$. Consequ. △lorum $\mathfrak{aa'd'}$, $\mathfrak{a'bb'}$, $\mathfrak{b'cc'}$, $\mathfrak{c'dd'}$ summa $= \frac{1}{2}\mathfrak{abcd}$, et $\mathfrak{a'b'c'd'} = \frac{1}{2}\mathfrak{abcd}$; atque $\mathfrak{abcd}$ parallelogrammum est.

§. 9. Si vero quadrilaterum (Fig. 80) in 2 △la dispescatur, et basis communis sit B, altitudoque unius sit A, alterius a; erit area $= \frac{BA}{2} + \frac{Ba}{2} = B.\frac{A+a}{2}$.

§. 10. Porro area cujusvis figurae rectilineae reperitur per summam arearum omnium △lorum e quibus illa constat; et polygonum regulare n laterum e totidem △lis aequalibus constat, quorum quodvis = lateri multiplicato per dimidium ⊥ris e centro ad illud demissae; patetque factum hoc pro tota polygoni area $n$ies sumendum esse. Adeoque si summa laterum p, et altitudo r' fuerit, erit area $= \frac{pr'}{2}$.

§. 11. Sit p summa laterum polygoni interni, areaque ejus sit a, area circuli sit C, et summa rectangulorum circumcirca (Fig. 81) sit $\lambda = zp$; est $a + \lambda = \frac{rp}{2} + zp$; eritque $a + \lambda > C > a$.

Duplicato semper n numero laterum polygoni, $\lambda \frown o$, nempe $z = r - r' \frown o$, atque p limite gaudet: prius inde patet, quod e radio potest quam proxime ad punctum contactus eundo ⊥ris usque ad arcum erigi, quo arcu datur minor talis, qui in peripheria, $n . 2^m$ies contineatur; sed etiam p habet limitem; semper enim crescit, sed r' quoque crescit, atque etsi r' non cresceret, si p in quantumvis magnum excrescere posset, a supra C cresceret. Sit limes P ipsius p; tum $\frac{pr'}{2} \frown \frac{Pr}{2}$, quia $p \frown P$, et $r' \frown r$ (Tom. I. p. 73).

At vero tum etiam $C = \frac{Pr}{2}$. Nam $a + \lambda$ erat $> C > a$, et $(a+\lambda)-a \frown o$: itaque $C-a \frown o$, idest $C-\frac{pr'}{2} \frown o$. Consequ. $\frac{pr'}{2} \frown C$, et $\frac{pr'}{2} \frown \frac{Pr}{2}$, adeoque $C=\frac{Pr}{2}$; estque *area circuli areae* $\triangle$li *cujus basis* P *et radius r est, aequalis.*

Sit $a=\frac{xr}{2}$, quod $=\frac{pr'}{2}$ erat; nempe si latus l polygoni prioris n laterum datum sit, (ex gr. latus hexagoni aequatur radio); r' prodibit $=\sqrt{(r^2-\frac{1}{4}l^2)}$, quo subtracto ex r, manebit z, cathetus $\triangle$li rectanguli, cujus alter cathetus $=\frac{1}{2}l$, est; e quibus prodit hypothenusa, nempe latus polygoni $2n$ laterum; quod continuari posse donec libuerit, manifestum est; uti et x crescere crescente a, quum r constans maneat.

Sitque $a+\lambda=\frac{p'r}{2}$; et hoc est $>(C=\frac{Pr}{2}) > \frac{xr}{2}$; adeoque $p'>P>x$; si igitur computando (pro $\omega<1$ et $k<1$, atque integris μ,ν) prodierit $p'=\frac{\nu+\omega}{\mu}.r$, et $x=\frac{\nu+k}{\mu}.r$; constabit P certo continere ν ejusmodi partes, quales radius r numero μ continet, sed numero $\nu+1$ non continere. Ex gr. pro diametro 1, fit $3,15>p'>3,14$, pariter $3,15>x>3,14$; adeoque P constat pro diametro 1, usque ad 2dam notam 10malem inclusive rite prodiisse. Valor verus ipsius P pro diametro 1 dicitur π.

Computatum est π in prope 300 notis decimalibus, ita ut ubique abrumpatur, π parte ad laevam major est, sed minor fit, si nota ultima ad dextram uno augeatur.

Si quis igitur talem ipsius π valorem se reperisse jactaverit, qui in fractionem decimalem conversus in aliqua a dictis nota aberrat, oleum operamque perdidit. Si aream proposuerit, ea per $\frac{1}{4}$ nempe dimidium radium divisa dabit factorem alterum cum fractione dicta decimali conferendum.

Ope fractionum continuarum fractionibus approximantibus valor ipsius π alternatim major minorque terminis minimis exprimitur: talis expressio est $\frac{22}{7}$, quam Archimedes reperit a hexagono incipiendo, duplicandoque laterum numerum usque 96; estque $\frac{22}{7} > \pi$ quidem, sed ad vulgarem praxim sufficit.

$\frac{3}{1}$ $\frac{22}{7}$ $\frac{333}{106}$ $\frac{355}{113}$ ... sunt hae appoximantes, quarum prima $< \pi$, 2da $> \pi$, 3tia $< \pi$, 4ta $> \pi$ &c, ultima tamen tam exacta est, ut in aequatoris peripheria quoque parum aberret.

§. 12. Paucis exceptis, qui desperatam hanc caussam aggredi ausi sunt, nec id quod quaererent, satis intellexerunt; multique similes his, mirantur mathematicos rem tam absurdam desiderare, nempe circulum quadratum; aut per polygona circulum consequi velle, cum nulla pars peripheriae sit recta. Natura curvae plane in eo consistit, ut nulla pars ejus recta sit, plura spatia curvilinea tamen exacte quadrata sunt; nec quidquam aliud in problema-te quadrationis circuli quaeritur, nisi constructione geometrica sensu stricto (saltem sensu lato) exhibendum punctum illud, in quo P(p.56) terminari(Tom.I.p.15)tanquam limes ipsius p debet; atque punctum istud, uti inde et circulo cuivis quadratum aequalitate saltem interminata aequale, (pag. 57 et 61) certo datur: nemo vero adhucdum demonstravit hujus impossibilitatem possibilitatemve; uti diametrum cum peripheria esse commensurabilem incommensurabilemve, aut circulum ulli quadrato esse aequalitate terminata aequalem. Quaevis interim expressio terminorum numero finito, quo simplicior, eo magis laudanda erit. Series aliaeque expressiones infinitae dato quovis propius euntes permultae sunt; (uti Tom. I. p. 407).

§.13 Si unius circuli sit diameter $=1$ alteriusque diameter $=2r$, atque construatur ex gr. hexagonum in utroque, semperque simul duplicentur laterum numeri in utroque: erunt manifesto semper $\triangle$la per rectas e centris ad laterum extremitates ductas generata, in utroque similia, atque polygonum circulo diametri 1 inscriptum, erit ad polygonum circulo diametri $2r$ inscriptum, uti radius ad radium. Hinc etiam limes polygoni prioris ad limitem posterioris ita erit, uti $\frac{1}{2}:r$ seu $1:2r$. Quum igitur pro diametro 1 sit peripheria π, erit pro diametro $2r$ peripheria $2r\pi$. Eritque area $=$ $2r\pi\cdot\frac{r}{2}=r^2\pi$; unde iterum ex area α reperitur radius; nempe si $\alpha=r^2\pi$, est $r=\sqrt{\frac{\alpha}{\pi}}$. Si vero peripheria P data sit; reperietur ex $P=2r\pi$ radius $r=\frac{P}{2\pi}$.

§. 11. Annulus A quoque (Fig. 82) hinc facile prodit, e majoris circuli radio R, et minoris radio r; nempe $A = R^2\pi - r^2\pi = (R^2 - r^2)\pi$.

Ita sector prodit pro arcu β (in circulo radii r); nempe sectoris area erit ad totius circuli aream, uti arcus ad peripheriam, seu β ad $2r\pi$. Data corda radioque etiam segmentum innotescit, si sectoris area nota fuerit; subtracto $\triangle$lo a corda et 2 radiis facto, e sectore; nimirum area $\triangle$li e 3 lateribus prodit (p. 54).

II. *Transmutatio figurarum quoad areas*; et hinc *reductio earum ad formam rectae* (Tom. I. p. 22).

§. 1. (Fig. 83). Si $a.A = b.B$, et $\wedge aA = \wedge bB$: tum parallelogrammum ex a et A parallelogrammo ex b et B aequalitate terminata $\stackrel{\sim}{=}$ est.

Nam si e fine $\mathfrak{M}$ ipsius B, (quod in parallelogrammi $\mathfrak{G}\mathfrak{C}\mathfrak{E}\mathfrak{F}$ lateris $\mathfrak{E}\mathfrak{C}$ prolongationem ponatur), $\mathfrak{M}\mathfrak{J} \parallel$ et $= \mathfrak{G}\mathfrak{C}$ fiat; $\mathfrak{J}\mathfrak{C}$ secabit ipsam $\mathfrak{F}\mathfrak{E}$, quia $\mathfrak{M}\mathfrak{J} \parallel \mathfrak{F}\mathfrak{E}$; pariter ducta per $\mathfrak{D}$ parallela ad $\mathfrak{E}\mathfrak{M}$ secat ipsam $\mathfrak{J}\mathfrak{M}$. Oriuntur autem hoc pacto $\triangle$la $\mathfrak{C}\mathfrak{H}\mathfrak{D}$ et $\mathfrak{C}\mathfrak{M}\mathfrak{J}$ similia (propter $\mathfrak{H}\mathfrak{D} \parallel B$, $\mathfrak{M}\mathfrak{J} \parallel \mathfrak{H}\mathfrak{C}$; itaque prodit tale x, ut sit $a : x = B : A$, adeoque $aA = xB$; atque hinc manifesto $x = b$, quum (per hyp) sit $aA = bB$.

Est etiam $\mathfrak{G}\mathfrak{J}$ in recta eadem cum $\mathfrak{G}\mathfrak{F}$, atque ipsi $\mathfrak{M}\mathfrak{E}$ parallela est; nam $\mathfrak{G}\mathfrak{F} \parallel \mathfrak{M}\mathfrak{E}$, atque $\mathfrak{M}\mathfrak{J} \parallel$ et $= \mathfrak{G}\mathfrak{C}$.

Estque $\mathfrak{M}\mathfrak{C}\mathfrak{H}\mathfrak{K}$ parallelogrammum ex a et B cum $\wedge bB = z$, uti $\mathfrak{G}\mathfrak{C}\mathfrak{E}\mathfrak{F}$ ex a, A, cum $\wedge aA = z$. Haec duo parallelogramma autem aequalitate terminata esse $\stackrel{\sim}{=}$lia patet: si ad latera posterioris ipsi A aequalia, transferatur b donec fieri potest, et ad latera prioris ipsi B aequalia, transferatur a, donec fieri potest: nam parallelogramma orta sunt aequalia, uti $1 = 1$, ita si plura quotquot essent; porro $\triangle k = \triangle k$; si a in B exacte certo numero adesset, patet tum β non remanere, neque α adesse, et A etiam certo numero continere a, quia $a:\mathrm{B} = b:\mathrm{A}$, atque tum pro k quoque ∥grammum reliquis aequale adesset. At si adsint α et β, tunc si in latere ipsi B opposito inferiore, ex ultimo a dematur β, et sit ab extremitate ejus parallela ad A; erit haec $= \alpha$, et 3tium latus $= \gamma$; ita si ex ultimo b in 𝔈𝔉 dematur α, et fiat ab extremitate ejus parallela ad B; erit haec $= \beta$, et $\triangle$la $\alpha\beta\gamma$ omnia erunt aequalia, per unum latus in quibusvis duobus aequale, et $\wedge$los per latera ∥la aequales.

Hinc etiam quinquelaterum $\beta f \alpha a b$ = alteri $\beta f \alpha a b$; nam latera et $\wedge$li ordine quo semet excipiunt sunt aequalia; nam f remanet utrinque e diagonalibus aequalibus subtracto γ; patet etiam ex $a + \beta$ demto β remanere a, uti ex $b + \alpha$, demto α, remanere b. Itaque ∥grammum Aa ⌶ ∥grammo Bb (aequalitate terminata) est.

§. 2. Hinc patet quod cum cuique ∥grammo detur aliud aequale, angulo z gaudens, (nempe inter ∥las easdem, rectis ad angulum z ductis ab extremitatibus baseos parallelis); dari hoc modo cuivis ∥grammo aliud ad datum latus et angulum aequale: ita cuivis $\triangle$lo; quia hoc ∥grammo altitudinis aequalis baseos dimidiae ⌶ est.

Ita etiam plura quotvis ∥gramma summari possunt, omnia ad $\wedge z$ et latus datum reducendo; adeo ut, quum z etiam rectus esse possit, quaevis area, quae ad summam $\triangle$lorum reduci potest, in rectangulum ejusdem altitudinis summari, adeoque ad formam rectae reduci queat. (Tom. I. p. 22.)

§. 2. Si (in praec.) $a\mathrm{A} = \mathrm{B}^2$, (uti p. 27) prodit $b \doteq B$; atque quadratum ipsi b superstructum rectangulo ex a et A aequalitate terminata $\doteq$ erit.

Hinc si (Fig. 84) α, β catheti fuerint, et demissa e vertice △li recti ad hypothenusam γ perpendiculari, quadratum hypothenusae in rectangula p et q dividatur: erit (p. 27) $\alpha^2 \doteq a\gamma$, et $\beta^2 \doteq b\gamma$. Consequ. e quadrato ipsius α exstrui (modo in §. 1 relato) poterit rectangulum p, uti rectangulum q e quadrato ipsius β; adeoque *quadratum hypothenusae exstruetur e quadratis cathetorum.*

§. 3. Unde *duo quadrata in unum commutari possunt*; si priorum latera ad △lum rectum jungantur, et ducatur hypothenusa: hujus quadratum enim summa priorum erit. Pari modo tertium quadratum, et tum 4tum et ita porro in unum mutantur.

§. 4. Si vero figurae cujusdam area a in figuram certae speciei per x determinatam mutanda sit, sitque haec $\doteq (f)x$; tum x ex $a \doteq (f)x$ eruitur. Ex gr. si $(f)x$ circulum cujus radius x est denotet: erit $(f)x = x^2\pi = a$, et hinc $x = \sqrt{\frac{a}{\pi}}$.

Ita si $(f)x$ hexagonum circulo radii x inscriptum denotet: erit area ejus perimetro per ⊥ris y e centro ad latus missae dimidium multiplicatae aequalis, adeoque $6x \cdot \frac{y}{2} = 6x \cdot \frac{x}{4}\sqrt{3}$ $= \frac{3}{2}x^2\sqrt{3}$; nam latus hexagoni aequatur radio, et $y = \sqrt{(x^2 - \frac{1}{4}x^2)} = \sqrt{\frac{3}{4}x^2} = \frac{x}{2}\sqrt{3}$.

Unde aream dictam hexagoni (pro radio x ipsi a aequalem ponendo, prodit x.

Ita si $(f)x$ annulum circa circulum radii r per circulum radii x factum denotet; erit $(f)x = (x^2 - r^2)\pi = a$; unde $x = \sqrt{\left(\frac{a}{\pi} + r^2\right)}$. E quibus ad alia applicatio patet.

III. *Comparatio figurarum similium quoad areas.*

§. 1. Si in 2 $\triangle$lis latera a, b, et latera A, B angulos aequales intercipiant, uti (Fig, 85) $\wedge ab = \wedge AB = v$; area $\triangle$li abc est ad aream $\triangle$li ABC uti ab ad AB.

Nam sint pro basibus b et B altitudines p et P; erunt $\triangle$la apq et APQ similia, itaque pro $a = np$, erit $A = nP$. Est autem $\triangle abc = \frac{pb}{2}$, et $\triangle ABC = \frac{PB}{2}$; atque $\frac{pb}{2} : \frac{PB}{2} = npb : nPB = ab : AB$.

Idem de parallelogrammis patet; quum quaevis parallelogramma uno angulo aequali gaudentia, ejusmodi $\triangle$lorum dupla sint.

§. 2. Sunt porro *areae* $\triangle$lorum *similium* cbh et CBH (Fig. 86), *uti quadrata linearum homologarum.* Sint enim latera quaevis homologa b et B pro basibus accepta, sintque altitudines a et A: erunt (propter angulos v et R) $\triangle$la cqa et CQA similia; itaque si (per hyp) sit $B : b = C : c$, et $B = nb$, adeoque $C = nc$; erit etiam $A = na$, propter $C : c = A : a$. Est vero area $\triangle$li $cbh = \frac{ab}{2}$ et area $\triangle$li CBH $= \frac{AB}{2} = \frac{nanb}{2}$. Consequ. $\triangle cbh : \triangle CBH =$

$\frac{ab}{2} : \frac{AB}{2} = ab : AB = ab : nanb = 1 : n^2 = b^2 : n^2b^2$
$= b^2 : B^2$.

§. 3. Hinc etiam *quarumvis figurarum rectilinearum areae sunt in ratione duplicata linearum homologarum.* Nam sit unius figuræ latus quodvis ad latus illi ex altera figura homologum, uti 1 ad n; erit area △li cujusvis, ad homologum, uti 1 ad n^2, adeoque et summa △lorum figurae prioris ad summam △lorum figurae alterius, ita erit uti 1 ad n^2, areaque ad aream uti a^2 ad A^2, si a latus prioris, et latus posterioris ipsi a homologum $A = na$ sit.

§. 4. Unde etiam patet *areas circulorum esse uti quadrata diametrorum*: nam si diameter unius sit d, alterius D; inscriptis polygonis utrique totidem laterum; erit area polygoni prioris ad aream posterioris, (quum manifesto sint polygona per △la e centro propter angulos aequales similia), uti radiorum quadrata, nempe uti $\frac{d^2}{4}$ ad $\frac{D^2}{4}$, seu uti d^2 ad D^2. Erit vero ratio eadem semper, etsi numerus laterum simul duplicetur in ∞, quo pacto id quod in uno alterove supererit, $\frown o$. Dicatur areá polygoni prioris p, et posterioris P, area circuli prioris autem sit c, posterioris sit C, sitque $c = p + \omega$ et $C = P + \lambda$; erit $p : P = d^2 : D^2$, adeoque et $\frac{p+\omega}{P+\lambda} = \frac{d^2}{D^2}$, quia $\omega \frown o$, et $\lambda \frown o$ (Tom. I. p. 77).

Idem ad alias figuras quoque extendi potest.

§. 5. Hinc si (Fig. 87) lateribus a, b, c △li rectanguli figurae similes A, B, C superstruantur: erit C, *hypothenusae c supestructa*, *summae cathetis superstructarum aequalis*; nempe $C=A+B$; posito a, b, c latera figurarum A, B, C homologa esse.

Namque tum $A:B=a^2:b^2$, atque hinc $A:a^2=B:b^2$; itaque si $A=na^2$, erit $B=nb^2$. Porro $A:C=a^2:c^2$, et hinc $A:a^2=C:c^2$, adeoque $C=nc^2$. Sed $c^2=a^2+b^2$. Consequ. $nc^2=na^2+nb^2$, seu $C=A+B$.

§. 6. Hinc (Fig. 88) lunula Hypocratis aequatur $\triangle$lo rectilineo; nempe $\alpha'=t$, si $a=b$; atque $\alpha'+\beta'=t+t'$. Nam $\alpha+t+t'+\beta=\alpha+\alpha'+\beta+\beta'$, nempe summa dimidiorum circulorum super cathetis a, b tanquam diametris constructorum, est semicirculo diametri c aequalis. Subducto igitur utrinque $\alpha+\beta$, manet $\alpha'+\beta'=t+t'$; si vero $a=b$, est $\alpha'=\beta'$, et $t=t'$.

Quomodo Hypocrates ope suae lunulae quadraturam circuli tentaverit, referre haud operae pretium est.

§.5. (F.89) Superius (p.44) mentio facta erat quantitatis anguli arcuum circularium per areas exprimendae: si circuli A et B se invicem extus aut intus contingant, et $B<A$, saltem non $>A$ fuerit, atque B cum tangente angulum u, A vero angulum v faciat; quantitas anguli circuli A cum B, exprimi per $U+V$ potest, si U aream denotet, quae est inter dimidiam peripheriam ipsius B et quadrantem peripheriae centro c diametro ipsius B tanquam radio descriptae; atque ita V aream inter dimidiam peripheriam ipsius A et quadrantem peripheriae centro c diametro ipsius A tanquam radio descriptae denotet; atque si U et V in diversas respectu tangentis plagas cadant, U +ve, si vero in eandem plagam cadant, −ve addatur +vo V. Quoad congruentiam tamen geometricam, et seorsim angulorum aequalitas requiritur: idem etiam (si operae pretium esset) ad angulos (p. 44) circulares alios quoque applicari posset, qui ex angulo tangentium, et angulis arcuum cum suis tangentibus componuntur.

Pauca adhuc notasse sufficiat.

1. Si (Fig. 89) circuli A diameter $=1$ sit; erit area ejus $\frac{\pi}{4}$ (p. 59), area circuli vero, cujus radius est diametro ipsius A aequalis, est $=\pi$; area igitur quadrantis circuli posterioris, est $=\frac{\pi}{4}$, et area dimidii A est $=\frac{\pi}{8}$, quod si ex $\frac{\pi}{4}$ subtrahatur, manet V $=\frac{2\pi}{8}-\frac{\pi}{8}=\frac{\pi}{8}$. Est itaque V $=$ dimidio A, atque quadrantem cpqh dimidia peripheria cih ut diagonalis bifariam dividit.

2, Si vero diameter ipsius B sit d; erit $B=\frac{d^2}{4}\pi$, adeoque $\frac{1}{2}B=\frac{d^2\pi}{8}$, et quadrantis radio hoc descripti area $=\frac{d^2\pi}{4}$, adeoque $U=\frac{d^2\pi}{8}$. Unde $U+V=\frac{\pi}{8}(d^2+1)$, atque si $A=B$, area $\triangle$li $\omega=\frac{\pi}{4}=A$.

Plura hujus generis, Tyrones ipsi reperire possunt.

V. *Additio, subtractio, divisioque figurarum sub certis conditionibus.*

§. 1. Si (Fig. 90) fiat (p.23) $\alpha:\beta=$

$n:m$, atque e vertice $\triangle$li AB ducatur recta ad finem ipsius α; $\triangle$lum *in ratione eadem divisum* erit; nam altitudo utriusque est eadem, adeoque areae sunt uti bases. (p. 54)

§. 2. Quodvis punctum p in A sit; area $\triangle$li ax est ad aream $\triangle$li AB, uti $a.x$ ad A.B (p.63); itaque area prior erit ad posteriorem, uti n ad m, si fuerit $a.x:\mathrm{A.B}=n:m$, adeoque $x=\frac{n.\mathrm{A.B}}{ma}$; et tum $\triangle$ AB per punctum datum p in dicta ratione divisum erit.

§. 3. Areae figurarum similium sunt uti quadrata linearum homologarum. Hinc (Fig.91) si $b \parallel \mathrm{B}$; est $\mathrm{A}^2:x^2=\triangle\mathrm{AB}:\triangle xb$, adeoque si $\mathrm{A}^2:x^2=n:m$; erit $\triangle\mathrm{AB}:\triangle xb=n:m$, et per $\parallel$lam hoc pacto $\triangle$lum in dicta ratione dividetur.

§. 4. Si vero (Fig. eadem) fuerit trapezium Bb; e quo data area ipsi t aequalis sit subtrahenda, per $z \parallel \mathrm{B}$ (inferius aut superius) absecta; concipiatur lateribus trapezii non $\parallel$lis productis expleri $\triangle$lum; erit $a+x:x=\mathrm{B}:b$; adeoque $x=\frac{ab}{\mathrm{B}-b}$, et $\mathrm{A}=a+x=\frac{a\mathrm{B}}{\mathrm{B}-b}$, atque α nempe area $\triangle$li quod supra b est, erit $\frac{pb^2}{2(\mathrm{B}-b)}$; nam $a:p=x:q$, et hinc $q=\frac{px}{a}=\frac{pb}{(\mathrm{B}-b)}$, adeoque $\alpha=\frac{1}{2}b.\frac{pb}{\mathrm{B}-b}$. Si jam t sit subtrahendum, et sit $\alpha+t:\alpha+t+t'=m:n$; erit $\mathrm{A}^2:(x+y)^2=n:m$; adeoque $m\mathrm{A}^2=nx^2+ny^2+2nxy$; et $y^2+2xy+x^2-\frac{m\mathrm{A}^2}{n}=o$; unde cum x jam cognitum sit, prodit y. Patet quoque si inferius sit t' subtrahendum, etiam tum datum esse t, et tantum y esse reperiendum.

Si trapezium t' trapezio t addi debeat; reperto x datum erit $x+y$, fietque $(x+y)^2$: $A^2=a+t:a+t+t'$; unde etiam A reperietur.

§. 5. Hinc quaevis figura rectilinea per lineas $\parallel$las in data ratione dividi poterit. Nam si $\triangle$lum aut trapezium nimis magnum fuerit; potest ex eo trapezium subtrahi; si nimis parvum, e sequente trapezio subtrahi debet, addique parti priori, quod ita ad finem usque continuare licet.

§. 6. Possunt etiam areae per $\triangle$la addita, et ita posita, ut etsi lineae dividentes $\parallel$lae non sint, nec tamen ab una parte nimis lata, ab altera nimis angusta portio sit, (quod tamen magis praxim spectat) in ratione data dividi: nempe portio exhibenda in 2 partes α et α' (Fig.92) dividi potest; eritque $\alpha'=x\frac{b}{2}$, et $x=\frac{2\alpha'}{b}$; itaque e fine $\perp$ris x ducta ad b $\parallel$la, $\triangle$lum α' efficiet cum α formam quaesitam; quod item continuare licet, ut prodeat portio altera $\beta+\beta'$ &c.

Schol: Omnia haec vero etiam geometrice perfici possunt, cum nonnisi additionem linearum, subtractionem, multiplicationem, divisionemve earundem; ad summum extractionem radicis quadratae requirant. In praxi tamen, ne error multiplicibus constructionibus multiplicetur, satius est calculo repertas lineas ope scalae accipere: quamvis omnia geometrice possint in rectangulum summari, et hoc in data ratione dividi; atque portioni cuivis e figura data aequalis exhiberi. Ex gr. sit rectanguli illius altitudo a, potest α in rectangulum altitudinis a transmutari, et si e portione exhibenda remaneat rectangulum α', hoc potest in $\triangle$ baseos b transmutari &c; quibus amplius inhaerere supervacuum est.

V. Exempla quaedam ad *certarum figurarum*, *cuipiam figurae sub certa conditione impositarum*, *summam*, *hujusque limitem*.

§. 1. Sit $\triangle$ aequilaterum (Fig. 93) circulo (radii r) inscriptum, sitque e lateris ab meditullium; est tum ab $(=ac=r)$ latus hexagoni; et ce est $\llcorner$ris ad ab, ac $\triangle$la ace et aeb sunt aequalia, quia $ac=ab$, et $ae=$ sibi; hinc $ce=\frac{1}{2}r$, estque radius circuli inscripti; nam si h sit alterius lateris meditullium, $\triangle$la cah et cae sunt aequalia, quia $ah=ae$, et $ca=$ sibi, $\wedge$ ad h meditullium cordae vero est rectus. Hinc cf etiam $=\frac{1}{2}r=fg$, et $ge=\frac{3r}{2}$; ae vero $=\sqrt{(r^2-\frac{r^2}{4})}=\frac{1}{2}r\sqrt{3}$; et $ab=r\sqrt{3}$.

Area A, $\triangle$li agb est latus $\triangle$li multiplicatum per dimidiam altitudinem; itaque est $=\frac{3r}{4}\cdot r\sqrt{3}$; area A' circuli inscripti autem est $(\frac{1}{2}r)^2\pi=\frac{r^2\pi}{4}$; et si $\triangle$li aequilateri latus sit $n$ies minus, est area α circuli huic $\triangle$lo inscripti $\frac{r^2\pi}{4n^2}$; quia radius quoque (per similitudinem) est $n$ies minor, nempe $\frac{r}{2n}$.

§. 2. Si vero (Fig. 94) △li aequilateri, latera omnia per n dividantur, et agantur e quovis divisionis puncto, lateris cujusvis ad duo reliqua latera parallelae, atque inscribatur cuivis minorum △lorum aequilaterorum hoc pacto ortorum circulus, imo etiam ponatur ejusmodi circulus quocunque, ubi is in △lo aequilatero (juxta Fig. eandem) locum habere potest; dicatur summa arearum omnium horum circulorum A″.

Patet heic △la aequilatera oriri in strato inferiore numero, $n+n-1=2n-1$, qui est numerus $n$tus impar; ita in strato sequente est △lorum numerus, $(n-1)$tus impar, et ita porro; ut summa omnium sit n^2. Itaque etiam numerus circulorum inscriptorum est n^2. Sed si per vertices horum △lorum ducantur rectae, nempe quorum bases aut coincidunt, aut sunt ∥lae; erunt hae ad bases, ⊥res, et centrum circuli inscripti est in intersectione talium ⊥rium; remanet vero ultra peripheriam circuli inscripti, usque ad verticem recta aequalis radio inscripti; itaque eodem radio potest circulus centro in vertice sex △lorum communi sumto, describi, sex circulos △lis inscriptos tangens: inscriptus circulus vero ad summum a tribus inscriptis, sed potest ab uno quoque, aut duobus tangi: tangere se hos circulos patet, quum centra cum puncto communi in rectam cadant.

Hinc novorum circulorum centris stellulatis gaudentium a sex circulis tactorum numerus inter duo strata inferiora est $n-2$; tum $n-3$, dein $n-4$ - - - usque ad 1.

Itaque ut A″ prodeat; circulis prioribus, qui numero n^2 erant, additis novis, fiet $A''=\frac{r^2\pi}{4n^2}(n^2+n-2+n-3 \cdots 1)=\frac{r^2\pi}{4n^2}(n^2+$

$\frac{(n-1)(n-2)}{2}) = \frac{r^2\pi}{4} + \frac{r^2\pi}{2.4} + \frac{r^2\pi}{4n^2} - \frac{3r^2\pi}{2.4n} =$

$\frac{3r^2\pi}{2.4} + \frac{r^2\pi}{4n^2} - \frac{3r^2\pi}{2.4n}$. Quaeratur valor summae duorum posteriorum (cum terminus primus sit pro quovis n idem), num crescat crescente n, aut decrescat. Est $\frac{r^2\pi}{4n^2} - \frac{3r^2\pi}{2.4n} = \frac{2r^2\pi - 3r^2\pi n}{2.4n^2}$ $= \frac{r^2\pi}{2.4} \cdot \frac{(2-3n)}{n^2}$, e quo, si $n+1$ substituatur ipsi n, fiet $\frac{r^2\pi}{2.4} \cdot \frac{[2-3(n+1)]}{(n+1)^2}$; et tantum $\frac{2-3n}{n^2}$ et $\frac{2-3(n+1)}{(n+1)^2}$ consideranda veniunt; reducta ad denominationem eandem, erunt $\frac{2+n-4n^2-3n^3}{n^2(n+1)^2}$ et $\frac{-n^2-3n^3}{n^2(n+1)^2}$; ubi in priori plus negativi est; nam $2+n-3n^2$ nonnisi pro $n=1$ est $=o$, pro majori n verò fit negativum; $-n^2-3n^3$ autem quod manet, est idem $-$vum quam $-n^2-3n^3$. Crescente igitur n in ∞. decrescit quidem A—A″, nempe summa vacuitatum a circulis in $\triangle$lo relictarum: at datur limes ad quem tendit ista differentia, ita ut aliquanta pars $\triangle$li hoc modo expleri haud unquam queat.

Est nempe $A - A'' = \frac{3r^2}{4} \cdot \sqrt{3} - (\frac{3r^2\pi}{2.4} + \frac{r^2\pi}{4n^2} - \frac{3r^2\pi}{2.4n})$, quod $\backsim \frac{3r^2}{2.4} \cdot (2\sqrt{3} - \pi)$; quia summa posteriorum fit crescente n in ∞ omni dabili minor; adeoque si summa vacuitatum dicatur v', et limes hujus sit v; decrescet v' infra $\frac{A}{10}$, sed non decrescet usque $\frac{A}{11}$; nam

$\frac{A}{v}$ est $= \frac{2.3r^2\sqrt{3}}{2.4} : \frac{3r^2(2\sqrt{3}-\pi)}{2.4} = \frac{2\sqrt{3}}{2\sqrt{3}-\pi}$; est autem $\sqrt{3} = 1{,}732\cdots$); adeoque $2\sqrt{3} = 3{,}46\cdots$: π vero pro diametro 1 est $=3{,}141\cdots$; itaque $2\sqrt{3}-\pi$ est $0{,}32\cdots$ quod per 11 multiplicatum est 3.52, adeoque excedit 3,46, sed decies acceptum infra hoc manet.

§. 3. Si (pro n, m integris) rectanguli basis sit $= mu$, altitudo $= nu$; atque ducantur e fine cujusvis u in basi ad altitudinem, in altitudine ad basim parallelae: oriuntur quadrata lateris u numero nm, et totidem circuli radii $\frac{u}{2}$, si cuivis quadrato circuli inscribantur; eritque cujusvis circuli area $= \frac{u^2\pi}{4}$, adeoque summa erit omnium $= nm\frac{u^2\pi}{4}$. Dividatur quodvis u in partes numero μ; ductis ut prius parallelis, oriuntur quadrata lateris $\frac{u}{\mu}$ numero $nm\mu^2$, et totidem circuli his inscripti, quorum cujusvis radius $= \frac{u}{2\mu}$, adeoque area $= \frac{u^2\pi}{4\mu^2}$; eritque summa omnium $=$

$$nm\mu^2 . \frac{u^2\pi}{4\mu^2} = \frac{nmu^2\pi}{4},$$ ut prius. Manet igitur summa vacuitatum semper eadem, nempe $nmu^2 - \frac{nmu^2\pi}{4} = \frac{nmu^2(4-\pi)}{4}$.

Quaestionibus tamen hujus generis pluribus vacare non licet.

212. *De quorundam, quorum e prioribus possibilitas innotuit, constructione geometrica.*

§. 1. *Recta a extrema et media ratione secatur*, (ut olim dicebatur); si construatur △ rectangulum, cujus alter cathetus est $\frac{1}{2}$ a: erit (Fig. 95) x id quod quaeritur; nempe $a : x = x : a-x$.

Nam $(\frac{1}{2}a+x)^2 = \frac{1}{4}a^2 + ax + x^2 = \frac{1}{4}a^2 + a^2$ (p.27).

Hinc $a^2 - ax = x^2 = a(a-x)$; unde $a : x = x : a-x$.

§. 2. Hinc construitur decagonum in circulo radii r: nempe si r modo praec. secetur, erit x latus decagoni. (Fig. 96).

Nam $r : x = x : r-x$; itaque △la acb et abd sunt similia: quia ∧ u est communis, et latera intercipientia r et x, atque x et $r-x$ sunt proportionalia; itaque ∧li lateribus proportionalibus oppositi sunt aequales.

Nempe lateribus ---	$r=bc$,	$x=ab$,	$x=ab$,	$r-x=bd$
opponuntur ---	$y+v$,	z	p	v

adeoque $y+v=p$, et $z=v$; sed $y+v=u$, quia $r=ac$, adeoque $p=u$, hinc $k=x$, et inde $z=y=v$; adeoque $y+v=2z$, et $z+y+v+u=5z=2R$, et $z = \frac{2R}{5} = \frac{4R}{10}$.

Patet e decagono pentagonum quoque datum esse.

Peripheriae divisio per constructionum geometricam (sensu stricto), in $2, 3, 5, 3.5$, atque 2^μ, 3.2^μ, et $3.5.2^\mu$ (pro μ integro) jam Euclidis temporibus nota fuit; omnesque Geometrae tanquam certum pronunciaverant, per nullum alium integrum id fieri posse: quid summus recentioris aevi Geometra hac in re quoque praestiterit, vide Tom. I. p.351 ; de quo tamen amplius dicere locus heic non est; et pluribus aliis quoque brevitas necessaria supersedere jubet.

SUPLEMENTUM *numeri* ·2111211222 ; in quo *origo ideaque Trigonometriae* exponitur: in triangulo angulorum laterumque illis oppositorum mutuam a se invicem dependentiam, atque hujus ope modum e datis ignota computandi quaerere, ea quoque necessitas impulit; quod pro magnis distantiis quaesita, constructio exhibere nequeat.

§. 1. Hic prius omnino de $\triangle$lis rectilineis in plano agetur; de sphaericis suo loco dicetur: nempe *sphaera*, ejusque (crescente radio in ∞) limes geometricus, (qui sub conditione Tom.I.p.501 exposita *planum* est), certo sensu ∞te differentia, alio conveniunt, et in utroque e quovis puncto quaquaversum omnia aequaliter determinantur: atque in utroque lineae figuraeque considerandae sunt, imo veritates unius plures certa mutatione, et alteri conveniunt. Ex gr. *fundamentale utriusque Trigonometriae tam planae quam sphaericae est, dependentia angulorum laterumque oppositorum mutua: in plana, sunt sinus angulorum, uti latera opposita, in sphaerica uti sinus angulorum oppositorum*, (nempe ibi et latera trianguli sunt arcus sinu gaudentes). Quid *sinus*, *cosinusque*, et aliae lineae auxiliares, nempe *sinus versus*, *tangens*, *secans*, *cosinus versus*, *cotangens*, *cosecans*, significent, dictum (in Tom.I.p.456) est; quorum tamen proprie omnia reliqua e sinu promanare, e loco citato liquet, quum *cosinus e sinu prodeat* per theor. Pythagoricum (Fig.97) e △lo rectangulo, cujus hypothenusa radius et unus cathetus sinus △li u, alter vero cosinus est; nempe $\cos u^2 = r^2 - \sin u^2$, (per $\cos u^2$, 2dam potentiam non arcus u, sed ipsius $\cos u$, ita per $\sin u^2$, 2dam potentiam sinus u intelligendo); unde $\cos u = \sqrt{(r^2 - \sin u^2)}$; quod pro radio 1 fit $= \sqrt{(1 - \sin u^2)}$. Atque hinc omnes reliquas functiones trigonometricas loco citato nominatas, per sinum solum exprimi pro radio 1 posse manifestum est; at saepius expressio brevior, clariorque et concinnior per nomina functionum trigonometricarum reliqua fit.

§. 2. Sed priusquam dependentiae angulorum et laterum mutua demonstraretur, (quod nempe sinus sint uti latera opposita), atque inde omnes △li rectilinei resolutiones deducerentur: dependentia sinus ipsius cosinusque et reliquarum functionum trigonometricarum ab *angulo seu arcu anguli quantitatem* exprimentis consideratur, (sinus nempe uti reliquae functiones trigonometricae tam angulo quam arcui illius quantitatem exprimenti aeque tribuuntur).

I. Pro integro m +vo, et q quadrantem +vum denotante, quantusvis sit arcus α, sive + sive −; $\mp$ vel $\pm 4mq \pm \alpha$ et $\pm \alpha$ sinu eodem gaudent; id est si arcus $\pm\alpha$ ita mutetur, ut ei addatur sive $4mq$ sive $-4mq$, nec sinus nec cosinus mutatur: nempe quotiescunque decurratur peripheria (sive +ve sive −ve) arcus $\pm\alpha$ ibi terminatur, ubi $\pm$ vel $\mp 4m \pm \alpha$. Ita si $\alpha + \gamma = \pm 4mq$ fuerit, α et $-\gamma$ sinu cosinuque iisdem gaudent: nam $-\gamma = \mp 4mq + \alpha$.

II. Si α mutetur in $-\alpha$, $\sin\alpha$ et $\sin(-\alpha)$ sunt oppositi, alioquin aequales; $\cos\alpha$ et $\cos(-\alpha)$

autem est idem. Nam aliquod ipsorum α et $-\alpha$ terminabitur supra diametrum primariam, (nisi plane in ipsa terminetur), et tum alterum infra terminabitur; atque tum manifesto extremitates arcuum α et $-\alpha$ a principio $*$, aequalibus arcubus distabunt, cordaque extremitates has connectens per diametrum primariam perpendiculariter bisecabitur: unde reliqua patent; quum distantia extremitatis unius sit ✠va, altera $-$va, alioquin aequales; distantia centri vero sit eadem. Si vero in diametro terminetur; fiet id aut in principio aut in fine: si prius, tum sinus est $o=\pm o$, cosinus vero $=1$, pro radio 1; si posterius, sinus item $=o=\pm o$; cosinus autem $=-1$, nempe distantia centri est -1 (Tom. I. p.455).

III. Si α mutetur in tale γ, ut sit $\alpha+\gamma=q$; adeoque γ complementum ad q ipsius α sit, tum $\sin\gamma=\cos\alpha$, et $\sin\alpha=\cos\gamma$. Si vero $\alpha+\beta$, $=2q$; tunc $\sin\alpha=\sin\beta$, et $\cos\alpha=-\cos\beta$. Nempe si tabula sequens, valores ipsius α. complementaque ipsius ad q, tum complementa ipsius α ad $2q$, et demum complementorum istorum ad $2q$ complementa ad q exhibens, percurratur; facile patet: sit k arcus ✠vus $<q$, aut sit o.

Valores ipsius α	Compl. ad q	Compl. ad $2q$	Compl. complementorum ad $2q$
k	$q-k$	$2q-k$	$-q+k$
$q+k$	$-k$	$q-k$	$+k$
$2q+k$	$-q-k$	$-k$	$q+k$
$3q+k$	$-2q-k$	$-q-k$	$2q+k$
$-k$	$q+k$	$2q+k$	$-q-k$
$-q-k$	$2q+k$	$3q+k$	$-2q-k$
$-2q-k$	$3q+k$	$4q+k$	$-3q-k$
$-3q-k$	$4q+k$	$5q+k$	$-4q-k$
o	q	$2q$	$-q$

E quo casibus singulis percursis patet: quum in columna prima quotiesvis $4q$ addi valoribus ✠vis, et quotiesvis $-4q$ addi valoribus $-$vis possit, atque eatenus reliquae columnae mutari salva re (per I) possint.

IV. Si α a o crescat $+$ve usque ad q; sinus a o crescet usque ad radium r, qui *sinus totus* vel *maximus* audit, quum nullus eo major sit; crescente arcu porro ultra q vero decrescit, usque o pro arcu $= 2q$; crescenteque porro arcu ultra $2q$, crescit sinus $-$ve a o infra diametrum, donec pro arcu $3q$ fiat $-r$; et ultra $3q$ crescentis arcus sinus decrescit $-$ve usquequo $= o$ fiat pro arcu $= 4q$.

Cosinus autem arcus o (aut $\pm 4mq$) est $= r$, nempe $\cos o = \sin q$; quia $q + o = q$, et $\sin q$ pro radio r est r; et postea decrescit usquequo $\cos q = o$ fiat, (decrescente nempe crescentis arcus complemento); at ultra q crescentis arcus cosinus, eousque ab r ad o decrescens abinde $-$ve crescit, donec pro arcu $2q$ fiat $= -r$; atque dein porro crescente arcu $2q$, item $-$ve decrescit cosinus usquequo pro $3q$ fiat $= o$, et abinde denuo crescit $+$ve usquequo pro $4q$ fiat $= r$.

Sinus versus ipsius α vero (omnia hic pro radio r intelligendo) exprimi per $r - \cos\alpha$ potest: nam si sinus inter principium $*$ arcus atque centrum c cadat, tum $\cos\alpha$ est $+$, et manifesto sin vers. α est $= r - \cos\alpha$; atque si sinus ultra centrum cadat, tum ut distantia principii $*$ a sinu prodeat, radio recta illa quae ultra centrum usque ad sinum est, $+$ve addenda est; quod per $r - \cos\alpha$ exprimitur, quia plane rectæ illius addendae oppositum est $= \cos\alpha$. Patet vero sinum versum crescere a o usquequo pro arcu $2q$ fiat $=$ diametro, et dein decrescere donec pro $4q$ fiat item $= o$.

Tangens ipsius α autem dicitur $\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$ pro radio 1, aut pro radio r generaliter $\frac{r \sin \alpha}{\cos \alpha}$; crescitque a o $+$ve, usquequo pro q fiat ∞; deinde decrescit $-$ve usque ad o pro arcu $= 2q$; et tum item $+$ve crescit, donec pro $3q$ fiat ∞, atque demum $-$ve decrescit, donec pro $4q$ fiat $= o$. Nempe pro arcu crescente a o usque q, tam sinus quam cosinus $+$ est, crescitque sinus a o usque ad radium, cosinus autem a radio decrescit usque o; abinde usque ad $2q$ sinus manet $+$vus, sed divisor $-$ est, adeoque quotus fit $-$vus, atque dividendus a radio usque ad zerum decrescit, divisor autem a o crescit $-$ve usque ad radium; postea vero usque ad $3q$ tam sinus quam cosinus $-$ est, adeoque quotus fit $+$vus; crescit vero sinus a o usque ad radium $+$ve, cosinus autem item $+$ve decrescit usque ad o; et tum sinus decrescit usque ad zerum $+$ve, cosinus autem crescit $-$ve, usque ad radium; postea vero sinus crescit $-$ve, et cosinus decrescit $-$ve; atque demum usque ad $4q$ sinus decrescit $-$ve usque ad zerum, cosinus autem $+$ve crescit a o usque ad radium.

Secans ipsius α dicitur $\frac{1}{\cos \alpha}$ *pro radio* 1, generaliter pro radio r (et cosinu α pro radio 1 accepto) autem $\frac{r}{\cos \alpha}$ *secans ipsius* α *pro radio* r dicitur; crescitque crescente arcu a o usque ad q, $+$ve a radio in ∞, et inde usque ad $2q$ decrescit ex ∞ to $-$ve, donec pro $2q$ fiat $=$ radio; et tum item crescit $-$ve, donec pro $3q$ item fiat $= \infty$, atque abinde decrescit $+$ve, donec pro $4q$ item fiat $=$ radio. Nempe (ut statim patebit) pro radio r cosinus ipsius α fiet $r \cos \alpha$, (sin α, cos α &c *semper, nisi aliud mo-*

tum fuerit, pro radio 1 *intelligendo*): adeoque secans pro radio r fiet $\frac{r^2}{r\cos\alpha}=\frac{r}{\cos\alpha}$; fietque hoc pacto secans in primo et ultimo quadrante, + propter cosinum +vum, et − in 2do et 3tio, propter cosinum −vum; quamvis tangens per singulos quadrantes signum mutet, atque eadem linea secans geometrice statim exhibenda, fiat pro quadrante ultimo +va, et −va pro 2do.

Cosinus versus, *cotangens*, *cosecans* quomodo crescente arcu a o usque ad $4q$ mutentur, quum pari modo facile pateat, praeterire licet. Sufficiat heic prius commemorare, quomodo e signo functionis trigonometricae ad arcum ejus concludatur, tum tangentem, secantemque geometrice exhibere.

Quod prius attinet: manifesto sinu +vo (et non zero) nonnisi arcus $4mq+p$, aut $-4mq-2q-p$ respondere (pro p +vo et $<2q$) potest; ita sinus +vus radio minor respondet tam angulo acuto, quam obtuso eum ad duos rectos complenti; atqne ex aliis datis eruendum est, utrinam appertineat. Cosinus −vus et non $=o$ angulo obtuso respondet, +vus acuto; cosinus $=o$, uti sinus = radio, angulum rectum indicat: arcus autem cosinui −vo et non o, respondet quivis sub formulam $4mq+q+p$, aut $-4mq-q-p$ (pro p +vo et $<2q$). Reliquis quum pari modo e dictis facile pateant, immorari supervacuum est.

Quoad alterum, videatur (Fig. 97): sinus arcus ad est di, et tangens est ae, secans ec, sinus versus ai, arcus ag item arcus adfbg tangens est ah, secans ch; atque per similitudinem triangulorum dci et eac atque gic et hac, proportiones sequentes valent, si α dicatur arcus ad et r radius ac; nempe ic : id = ac : ae, id est (heic cosinu et sinu pro radio praesenti r acceptis); est $\cos\alpha : \sin\alpha = r : \frac{r \sin\alpha}{\cos\alpha} = \tan\!g\,\alpha$ (pro radio r); ita ic : bc = ac : ec, seu $\cos\alpha : r = r : \sin\alpha = \frac{r^2}{\cos\alpha}$ (si $\cos\alpha$ pro radio r accipiatur). Pariter infra diametrum, et de reliquis, uti de functionibus trigonometricis complementorum omnia facile patent.

V. Si vero radius mutetur, ex gr. ex 1 in r, functiones trigonometricae omnes quae pro radio 1 cuipiam arcui competunt, per r multiplicari debent, ut eidem arcui pro radio 1 valeant; uti illae quae pro radio r valent, per r dividendae sunt ut pro radio 1 valeant. Nam sinus arcuum totidem graduum, atque pariter etiam cosinus ita sunt, uti radii, unde reliqua ultro sequuntur: nempe (Fig. 98) ei : bd = ec : bc, quia ei et bd sunt ad ac ⊥res; ita ic : bc = ec : be; nempe sinus ad sinum, et cosinus ad cosinum, uti radius ad radium.

Atque hinc, si ponatur ec = 1; et bc = r; sinus pro radio 1 per r multiplicari debet, ut sinus pro radio r prodeat, et pariter cosinus pro radio 1 per r multiplicatus dabit cosinum pro radio r. Sinus versus autem erat differentia cosinus a radio, adeoque pro radio r est $r - r\cos\alpha$, pro radio 1 vero est $1 - \cos\alpha$, adeoque posterior per r multiplicari debet ut prior prodeat. *Tangens* pro radio r est $\frac{r \sin\alpha}{\cos\alpha}$, pro radio 1 vero est $\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$, adeoque posterior per r multiplicatus producit priorem. *Secans* pariter pro radio r est $\frac{r}{\cos\alpha}$, pro radio 1 autem est $\frac{1}{\cos\alpha}$, et pariter posterius per r multiplicandum est, ut prius prodeat. Unde etiam ad functiones complementorum reliquas conclusio ultro patet.

Notandum autem est, e similitudine Δlorum dictorum, $\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$, etsi $\sin\alpha$, $\cos\alpha$ non pro radio 1 (ut dictum est), sed pro radio quovis r intelligantur, semper tangentem pro radio 1 esse.

VI. Si vero α in $\alpha\pm\beta$, adeoque $\sin\alpha$ in $\sin(\alpha\pm\beta)$, et $\cos\alpha$ in $\cos(\alpha\pm\beta)$ mutetur; fiet $\sin(\alpha\pm\beta)=\sin\alpha\ \cos\beta\pm\cos\alpha\ \sin\beta$, et $\cos(\alpha\pm\beta)=\cos\alpha\ \cos\beta\mp\sin\alpha\ \sin\beta$; quantumcunque arcum, et sive $+$vum sive $-$vum denotent, sive α sive β. Ad hoc perspiciendum, denotent a et b arcus quadrante q minores $+$vos; manifesto α (pro n, m integris $+$vis) poterit per $mq+a$ aut $-mq-a$, ita β per $nq+b$, aut $-nq-b$ exprimi; atque hinc orientur 4 combinationes pro $\alpha+\beta$, et totidem pro $\alpha-\beta$, nempe quodvis posteriorum duorum, cuivis duorum priorum addi, aut ex eo subtrahi potest.

Dicatur A terminus in α, qui certo quadrantum numero additur, et dicatur B terminus in β, qui quadrantum numero additur; atque omittatur tam ex α quam ex β, et tam ex $\alpha+\beta$ quam ex $\alpha-\beta$, quotiesvis adfuerit $\pm 4q$, (cum quoad sinum cosinumve nil mutet); manifesto $\alpha+\beta$ sub formam $\pm\mu q+(A+B)$, et $\alpha-\beta$ sub formam $\pm\mu q+(A-B)$ veniet, ubi μ nonnisi o aut 1 vel 2 aut 3 erit. Ex gr. sit $\alpha=-7q-a=-7q+A$, (nempe tum est $A=-a$), sitque $\beta = -10q - b = -10q + \text{B}$; pro α poni potest $-3q + \text{A}$, et $-2q + \text{B}$ pro β, atque $-1q + (\text{A}+\text{B})$ pro $\alpha + \beta = -17q - a - b$; et $3q + (\text{A}-\text{B})$, sive $-1q + (\text{A}-\text{B})$ pro $\alpha - \beta$; nempe sive ex $-7q$ subtrahatur $-10q$, sive e $-3q$ subtrahatur $-2q$, sinu cosinuque, $-q$ et $3q$ eodem gaudent, quum (propter $q + 3q = 4q$) extremitas arcuum eadem sit. Sit nimirum in α quadrantum numerus $4p + p'$, et in β sit $4k + k'$, (sive $+$vum sive $-$vum denotet sive p sive k, at p', k' ipso 4 minora sint); dabit $4p + p' + 4k + k'$ sinum cosinumque eundem, quem $p' + k'$, ita sinum cosinumque eundem dabit $4p + p' - (4k + k') = 4p - 4k + p' - k'$, quam $p' - k'$ (per p. 75).

Patet porro $\text{A}+\text{B}$ et $\text{A}-\text{B}$ semper ipso $2q$ minora esse; nempe etsi A et B aut A et $-\text{B}$ simul $+$va aut simul $-$va sint, nonnisi $a + b$ vel $-a - b$ (pro $a < q$ et $b < q$) prodire potest, in alio casu semper $< q$ prodit.

Sit ipsorum A, B, $(\text{A}+\text{B})$, $(\text{A}-\text{B})$, nomen generale C, ita ut quodvis dictorum, ipsi C in quavis linea horizontali tabellae sequentis, ubique simul substituere liceat: fiet

Arcuum	*sinus*	*cosinus*
$\pm 1q + \text{C}$	$\pm \cos \text{C}$	$\mp \sin \text{C}$
$\pm 2q + \text{C}$	$- \sin \text{C}$	$- \cos \text{C}$
$\pm 3q + \text{C}$	$\mp \cos \text{C}$	$\pm \sin \text{C}$
$oq + \text{C}$	$\sin \text{C}$	$\cos \text{C}$

Percurrendo casus singulos, circulumque considerando, veritas tabellae patebit: quae pro quavis combinationum superius dictarum, sinum cosinumque tam ipsius α, per sinum cosinumve ipsius A, quam sinum cosinumve ipsius β exhibebit per sinum cosinumve ipsius B; et pariter ipsorum $\alpha + \beta$ et $\alpha - \beta$ sinum cosinumve exhibebit, prioris per sinum cosinumve ipsius $A+B$, posterioris per sinum cosinumve ipsius $A-B$.

Quum vero statim demonstretur esse $\sin(A \pm B) = \sin A \cos B \pm \cos A \sin B$, et $\cos(A \pm B) = \cos A \cos B \mp \sin A \sin B$; et si omnes combinationes superius dictae (inductione completa) percenseantur; atque sinu cosinuque ipsorum α, β, $(\alpha+\beta)$, $(\alpha-\beta)$ e tabella dicta acceptis, reperiatur semper $\sin(\alpha \pm \beta) = \sin\alpha \cos\beta \pm \cos\alpha \sin\beta$, et $\cos(\alpha \pm \beta) = \cos\alpha \cos\beta \mp \sin\alpha \sin\beta$: patebit omnino formulae veritas generaliter. Possent quidem casus plures etiam colligi, ne singuli plane percensendi sint; sed prolixioris operae pretium non esset.

Exemplo illustrare dicta necesse est. Sit $\alpha = -3q - a = -3q + A$, $\beta = -2q - b = -2q + B$; $\sin(\alpha+\beta) = \sin(-1q - a - b) = \sin[(-1q + (A+B)]$, quod e tabella est $= -\cos(A+B) = -\cos A \cos B + \sin A \sin B$ (per formulam de $A+B$ statim demostrandam); sed hoc est $= \sin\alpha \cos\beta + \cos\alpha \sin\beta$; nam e tabella est $\sin\alpha = \sin(-3q + A) = \cos A$, $\cos\beta = \cos(-2q + B) = -\cos B$, $\cos\alpha = -\sin A$, $\sin\beta = -\sin B$; substituendo fit $\sin\alpha \cos\beta + \cos\alpha \sin\beta = -\cos A \cos B + \sin A \sin B$.

Quum omnia reliqua eodem modo prodeant; nonnisi *de* A *et* B *demonstranda formula est*; quod fit modo sequente. Valores ipsius A sunt $+a$ vel $-a$, ita valores ipsius B sunt $+b$ vel $-b$; adeoque quemlibet valorum ipsius A cum quovis valorum ipsius B combinando, fient casus sequentes; $a+b$, $a-b$, $-a+b$, $-a-b$; $a+(-b)$, $-a+(-b)$; (ubi ut supra) tam a quam b ✠vum et $< q$ est). Consideretur prius $\sin(a+b)$, et $\sin(a-b)$, atque $\cos(a+b)$ et $\cos(a-b)$. In (Fig 99) $a+b$ sive $< q$ sive $= q$, sive $> q$ fuerit, semper infra $2q$ manet; at vero erit a aut $= b$, aut $< b$, aut $> b$. Sit prius a non $< b$, adeoque $a = b$ vel $a > b$. Transferatur b ex fine ipsius a retrorsum, atque ducta corda a fine novi b ad finem prioris, ducatur radius e centro c ad finem ipsius a; bisecabit hic manifesto cordam dictam $\perp$riter. Demittantur e finibus arcuum a, $a+b$, (et $a-b$, nisi $a-b=o$ fuerit), $\perp$res ad diametrum, ut prodeant $\sin a$, $\sin(a+b)$, $\sin(a-b)$; fiantque e cordae meditullio $\perp$res I et h. Facile patet, $\triangle$la dimidiis cordae insistentia aequalia, et $p=h$, ac $k=i$ esse; atque hinc esse $\sin(a \pm b) = I \pm i$, et $\cos(a \pm b) = (H \mp h)$. Valores ipsorum I, i, H, h vero reperiuntur e proportionibus sequ. (pro radio 1)

$$1 : \sin a = \cos b : I$$
$$1 : \cos a = \sin b : i$$
$$1 : \cos a = \cos b : H$$
$$1 : \sin a = \sin b : h$$

Nam patet Triangulum cujus latus unum est radius $=1$, alterum $= \sin a$, tertium $= \cos a$, esse simile $\triangle$lo, cujus latera sunt $\cos b$, I et H; ita Triangulum prius esse simile $\triangle$lo, cujus latera i, h et $\sin b$ (per p.23 et 24)

Hinc valoribus ipsorum I, i, H, h substitutis; est $\sin(a \pm b) = \sin a \cos b \pm \cos a \sin b$, et $\cos(a \pm b) = \cos a \cos b \mp \sin a \sin b$.

Coroll. 1 Atque hinc etiamsi $a < b$ sit, valet formula. Nam si tum scribatur $b \pm a$, formula valet (per praec.): sed $\sin(b+a) = \sin(a+b)$, et reipsa, et juxta formulam; pariter $\cos(b+a) = \cos(a+b)$ et reipsa et juxta formulam; $\sin(b-a)$ autem est $= \sin -(a-b) = -\sin(a-b)$; sed $\sin(b-a) = \sin b \cos a - \cos b \sin a$, cujus oppositum est $\sin a \cos b - \cos a \sin b$, quod igitur est $= \sin(a-b)$ pro casu etiam si $a < b$ fuerit, et quidem formulae convenienter.

Pariter $\cos(a-b) = \cos-(b-a) = \cos(b-a)$ $= \cos b \cos a + \sin b \sin a$, plane ita ut dum $a > b$ erat.

Ita $\sin(-a+b) = \sin-(a-b) = -\sin(a-b)$ $= -(\sin a \cos b - \cos a \sin b) = \sin(-a)\cos b$ $+ \cos(-a) \sin b$.

Pariter $\sin(-a-b) = \sin-(a+b) =$ $-\sin(a+b) = -(\sin a \cos b + \cos a \sin b) =$ $\sin(-a)\cos b - \cos a \sin b = \sin(-a)\cos(-b) +$ $\cos(-a)\sin(-b)$.

2. Hinc si $b = a$ ponatur; $\sin 2a = 2(\sin a \cos a)$, qui erit sinus arcus dupli.

Porro $\cos 2a = \cos a^2 - \sin a^2$, et substituendo ipsi $\sin a^2$ valorem $1 - \cos a^2$, fit $\cos 2a = 2 \cos a^2$ -1; seu si $2a$ vocetur c, est $\cos c = 2(\cos\frac{c}{2})^2$ -1, et substit. ipsi $\cos^2$ valorem $1 - \sin^2$, est $1 - 2(\sin\frac{c}{2})^2 = \cos c$; hinc $\sin\frac{1}{2}c =$

$$\sqrt{\left(\frac{1-\cos c}{2}\right)}, \text{ et } \cos\frac{1}{2}c = \sqrt{\left(\frac{\cos c + 1}{2}\right)}.$$

5. Sit hinc porro $\sin a = p$, et $\cos a = k$, eleveturque per theor. binom. $(k+p)$ ad n; uti prodeunt termini, summa terminorum, quorum numerus loci par est, exprimit $\sin na$; terminorum imparium vero summa est $\cos na$; si in utraque expressione signum termini primi ponatur $+$, et sequentis $-$, semperque mutetur alternando. Nam si verum est de n, verum de $n+1$ quoque est. Atqui e formulis facile prodit, verum de $n = 2, 3, 4$ --- esse --; itaque verum de quovis numero erit. Major probatur sic. (Tom. I. p. 136).

Sit $\sin na = \mathrm{I}k^{n-1}p - \mathrm{III}k^{n-3}p^3 \ldots \mathrm{V}k^{n-5}p^5$
$\cos na = k^n - \mathrm{II}k^{n-2}p^2 \ldots + \mathrm{IV}k^{n-4}p^4 \ldots$
$\sin(na + a) = \sin na . \cos a + \cos na \sin a =$

$k(\mathrm{I}k^{n-1}p - \mathrm{III}k^{n-3}p^3 + \ldots) + p(k^n - \mathrm{II}k^{n-2}p^2 \ldots) =$ $\mathrm{I}k^n p - \mathrm{III}k^{n-2}p^3 \ldots + k^n p - \mathrm{II}k^{n-2}p^3 \ldots =$ $(\mathrm{I}+1)k^n p - (\mathrm{II}+\mathrm{III})k^{n-2}p^3 \ldots$; quod praeter signa in $(k+p)^{n+1}$ aequale est summae terminorum, numero locorum pari gaudentium.

Pariter de $\cos(na+a)$ liquet.

VII Sequitur jam laterum angulorumque illis oppositorum in △lo rectilineo mutua dependentia; quod nempe *latera sint uti sinus angulorum illis oppositorum*; e quo resolutiones △li omnes ultro sequuntur: hoc autem facile patet; si circa △ABC (Fig. 100) circulus scribatur (per p. 31); erunt nempe A, B, C cordae, et a, b, c anguli ad peripheriam, quorum quantitates exprimentur per arcus a', b', c', nempe dimidia arcuum quibus insistunt, per radios e centro per meditullia cordarum ductos divisorum; adeoque $\frac{1}{2}$A est $\sin a' = \sin a$, et $\frac{1}{2}$B $= \sin b' = \sin b$, ac $\frac{1}{2}$ C $= \sin c' = \sin c$. Unde quia $\frac{1}{2}\mathrm{A} : \frac{1}{2}\mathrm{B} = \mathrm{A} : \mathrm{B}$, est

$\mathrm{A} : \mathrm{B} = \sin a : \sin b$; ita
$\mathrm{A} : \mathrm{C} = \sin a : \sin c$, atque
$\mathrm{B} : \mathrm{C} = \sin b : \sin c$.

Ex hac proportione fundamentali autem reperiuntur; e duobus lateribus et angulo alicui eorum opposito latus 3tium, et anguli reliqui; ita e duobus angulis et latere uni eorum opposito latera reliqua; necnon e duobus lateribus et angulo intercepto latus tertium et anguli reliqui, et pariter e tribus lateribus angulus cuivis eorum oppositus.

1. E fundamentali propositione, nempe $\mathrm{A} : \mathrm{B} = \sin a : \sin b$, sequitur $\mathrm{A} \sin b = \mathrm{B} \sin a$;

unde ex aequatione inter quatuor has quantitates, quaecunque tres earum datae fuerint; prodit quarta; nempe $A = \frac{B \sin a}{\sin b}$, $\sin a = \frac{A \sin b}{B}$.

2. Ex A, B et c, (Fig. 101) reperitur a modo sequente: sit $\frac{a+b}{2} = s$; $\frac{a-b}{2} = d$; hinc (per Tom, I. p 381) $a = s + d$, $b = s - d$: atque tantum d reperiatur, nempe *semidifferentia*, a illico datur, nam *semisumma*, per subtractionem ipsius c ex 180^0 prodit.

Est vero $A : B = \sin a : \sin b = \sin(s+d) : \sin(s-d) = \sin s \cos d + \cos s \sin d : \sin s \cos d - \cos s \sin d$; et dividendo terminum proportionis 3tium et 4tum per $\cos s . \cos d$, atque substituendo valori $\frac{\sin}{\cos}$ tangentem, erit $A : B = \tang s + \tang d : \tang s - \tang d$; hinc $A . \tang s - A \tang d = B \tang s + B \tang d$, adeoque $\tang s (A-B) = \tang d (A+B)$; unde tangens semidifferentiae, adeoque e tabulis ipsa semidifferentia, nempe arcus tangenti semidifferentiae respondens prodit.

Schol. Sed tang a etiam immediate reperitur: nempe $b = 180^0 - (a+c)$, adeoque $\sin b = \sin(c+a)$; atque hinc $B : A = \sin(c+a) : \sin a = \frac{\sin c . \cos a}{\cos a} + \frac{\cos c \sin a}{\cos a} : \frac{\sin a}{\cos a} = \sin c + \cos c \tang a : \tang a$; hinc $B \tang a = A \cos c . \tang a + A \sin c$; unde $\tang a = \frac{A \sin c}{B - A \cos c}$. Unde per fundamentale etiam latus tertium innotescit.

3. (Fig. 102) E tribus lateribus prodeunt

anguli: (p. 28) dictum est $x =$ esse $\frac{a^2+b^2-c^2}{2b}$;
porro $x : a = \cos c' : (1 = \sin.\,\text{tot})$; hinc $x = a \cos c'$
$= \frac{a^2+b^2-c^2}{2b}$; unde $\cos c' = \frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}$; adeoque angulus c' ex lateribus reperitur.

Schol. Hinc etiam e 2 lateribus et angulo intercepto, prodit latus tertium $c = \sqrt{(a^2+b^2 - 2ab \cdot \cos c')}$. Imo quia $c : a = \sin c' : \sin a'$, est etiam $\sin a' = \frac{a \sin c'}{\sqrt{(a^2+b^2-2ab \cos c')}}$.

4. Quamvis omnia dicta de omnibus, adeoque et de rectangulis $\triangle$lis valeant; quaedam tamen de his specialiter notanda sunt; quum si quaevis duo praeter angulum rectum data fuerint, reliqua innotescant.

1 *. Si aut duo catheti, aut unus cathetus et hypothenusa data fuerint: e duobus cathetis hypothenusa, atque e hypothenusa et uno catheto, alter prodit, per Theorema Pythagoricum (p. 27).

2 *: (Fig. 103) $B : A = \sin b : \sin a$; et quia b complementum ipsius a est, fit $\sin b = \cos a$; itaque $B : A = \cos a : \sin a$, atque hinc $B : A = \frac{\cos a}{\cos a} : \frac{\sin a}{\cos a}$; seu $B : A = 1 : \tang a$ (nempe quoad radium 1). Consequ. $B \tang a = A$; unde quaecunque duo data fuerint e cathetis et angulo alicui eorum opposito, tertium innotescit.

3 *. $H : A = 1 : \sin a$, (omnino pro radio 1 intelligendo); unde $H \sin a = A = H \cos b$, (quia $\sin a = \cos b$); atque et hic tria sunt, hypothenusa, cathetus et angulus ei oppositus; e quorum quibusvis duobus prodit 3tium.

Schol. 1. Omnia haec autem ope logarithmorum (per Tom. I. p. 95) facilius absolvi possunt. Ex gr. (ex 2 $_*$) est tang $a = \frac{A}{B}$, adeoque log tang a = log A — log B. At notandum est hoc pro radio 1 esse, et pro radio r esse tang $a = \frac{rA}{B}$, adeoque log tang a = log r + log A — log B, = 10 + log A — log B, si pro r radius tabularis (nempe 1 cum 10 cifris) accipiatur.

Schol. 2. Quaevis expressio E fuerit, in qua functiones trigonometricae pro radio 1 (non pro radio tabulari r) acceptae sunt, atque sit E=Q, (denotante Q sive functionem aliquam trigonometricam item pro radio 1, sive latus, aut quidvis aliud); omnia modo sequente ita mutari poterunt, ut quaevis functio trigonometrica pro radio tabulari r accipi tractarique possit. Sit prius casus simplicior, dum in nullo ipsius E termino dividendus aut divisor quantitas complexa est, nec functio trig. signo radicali subest. *Distingvatur quaevis functio trig. pro radio* 1, *ab eadem per r multiplicata per id*, quod prior, litera minuscula, posterior majori incipiat, ita ut cos α sit *pro radio* 1, Cos α vero sit $= r \cos\alpha$, adeoque *cosinus tabularis* ipsius α.

In quovis termino ipsius E, quaelibet functio trig. multiplicetur per illam potentiam ipsius r, ad quam ipsa ibidem elevata est; (ex. gr. e $\cos\alpha^2$ fiat $r^2 \cos\alpha^2 = \mathrm{Cos}\,\alpha^2$); et quicunque terminus hoc pacto per r^{-m} esset multiplicatus (pro m +vo et non o), is per r^m multiplicetur; atque si tum in nullo ipsius E termino, r^n ut factor accesserit (pro n + et non o), tota expressio multiplicetur per r, ut fiat ejus valor $= r$Q. Si vero in termino ipsius E aliquo, r^{μ} prodierit (pro μ ✠vq et non o), nec in ullo termino fuerit exponens ipsius r major; quilibet terminus, in quo r^{ν} est (pro ν sive o, sive ✠ et non o) multiplicetur per $r^{\mu-\nu}$; ut fiat expressio $= r^{\mu}$ Q.

Atque tum exprimantur functiones trig. ubique quoad r; exgr. ubi $r^3 \cos \alpha^3$ est, scribatur $\mathrm{Cos}\,\alpha^3$ &c ...

Si igitur Q functionem trig. pro radio 1 denotet; erit in casu priore rQ functio ejusdem nominis pro radio r; in posteriore autem r^{μ}Q per $r^{\mu-1}$ divisum dabit functionem pro radio r. Si vero tantum ipsum Q quaeratur, in casu primo rQ per r, in posteriore r^{μ}Q per r^{μ} dividendum erit.

Nempe si e termino quopiam $\frac{\gamma}{\delta}$, per operationem primam fiat $\frac{r^k \gamma}{r^p \delta} = r^{k-p} \cdot \frac{\gamma}{\delta}$; erit $k-p$ aut $= o$, aut ✠ aut $-$; si $k-p = o$, tum $r^{k-p} \cdot \frac{\gamma}{\delta} = \frac{\gamma}{\delta}$; si ✠ fuerit $k-p$, erit haec aut summa potentia ipsius r exponentis μ; in terminis omnibus ita tractatis, aut si $k-p$ dicatur ν, termino per $r^{\mu-\nu}$ multiplicato, prior per r^{μ} multiplicabitur. Unde reliqua facile patent.

Exempla. Sit $a + \frac{b \sin \alpha^2}{c \cos \beta^2} = \mathrm{Q}$; fiet *post operationem primam* $a + \frac{b r^2 \sin \alpha^2}{c r^2 \cos \beta^2}$, atque hinc $ra + \frac{rb\,\mathrm{Sin}\,\alpha^2}{c\,\mathrm{Cos}\,\beta^2} = r\mathrm{Q}$.

Sit porro $a+\frac{b\sin\alpha^2}{c\cos\beta^3}-g\tan u=Q$; fiet post oper. 1mam $a+\frac{br^2\sin\alpha^2}{cr^3\cos\beta^3}-gr\tan u$, dein per oper. 2dam fiet $a+r^{2-3}.r^{3-2}.\frac{b\sin\alpha^2}{c\cos\beta^3}-gr\tan u=a+\frac{b\sin\alpha^2}{c\cos\beta^3}-gr\tan u$, quod simul est $=a+\frac{rb\operatorname{Sin}\alpha^2}{c\operatorname{Cos}\beta^3}-g\operatorname{Tang}u$. Atque hinc per operationem 3tiam quum in $gr\tan u$ sit $\mu=1$, et ν ubique sit o, ubique r^ν per $r^{\mu-\nu}$ multiplicando, ex $ar^0+\frac{r^0b\sin\alpha^2}{c\cos\beta^3}-gr^1\tan u$ fiet $ar+\frac{rb\sin\alpha^2}{c\cos\beta^3}-gr\tan u=ar+\frac{r^2b\operatorname{Sin}\alpha^2}{c\operatorname{Cos}\beta^3}-g\operatorname{Tang}u=rQ$.

Idem ad eum casum etiam facile applicatur, ubi sive numerator N sive denomipator D, sive uterque quantitas complexa fuerit: nempe tam cum numeratore quam denominatore peractis seorsim prius quae dicta sunt, si ex N fiat r^kN; et $r^p.D$ ex D; eodem modo erit $\frac{N}{D}.r^{k-p}$ per r^{p-k} multiplicandum ut supra, et singulis terminis ita tractatis, reliqua ita ut antea peraguntur.

Ex gr. Sit $\frac{a+b\sin\alpha^2}{d+c\cos\beta}+\tan\gamma=Q$; ex $a+b\sin\alpha^2$ fiet $ar^2+br^2\sin\alpha^2$, $d+c\cos\beta$ autem fiet $dr+cr\cos\beta$, adeoque ex $\frac{a+b\sin\alpha^2}{d+c\cos\beta}$ fiet

$\frac{r^3(a+b\sin\alpha^2)}{r(d+c\cos\beta)}$; et $r \cdot \frac{a+b\sin\alpha^2}{d+c\cos\beta} + r\tan\gamma = rQ$;

atque idem simul $= \frac{ar^2+b\sin\alpha^2}{dr+c\cos\beta} + \operatorname{Tang}\gamma = rQ$.

Quid faciendum sit, si quid in expressione signo radicali subfuerit; exemplum sequens ostendere potest. Sit $a+b\sqrt[3]{(c-\cos\alpha^2)}=Q$; si modo dicto tractetur id quod signo radicali subest, fiet $r^2c-r^2\cos\alpha^2$, quod sit $=A$; erit

$\sqrt[3]{rA} = \sqrt[3]{(r^3c-r^3\cos\alpha^2)} = r\sqrt[3]{(c-\cos\alpha^2)}$

atque $ra+rb\sqrt[3]{(c-\cos\alpha^2)} = rQ$, et idem $=$

$ra+b\sqrt[3]{(r^3c-r\operatorname{Cos}\alpha^2)}=rQ$.

Schol. 3. Pro 3 lateribus anguli prodeunt adhuc alia formula, calculo logarithmico aptiore.

Erat (p. 85) $\cos c' = 1-2(\sin\frac{c'}{2})^2$ item

$\cos c' = 2(\cos\frac{c'}{2})^2-1$.

Eratque (p. 88) $\cos c' = \frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}$ atque

hinc $\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab} = 1-2(\sin\frac{c'}{2})^2$, et $(\sin\frac{c'}{2})^2 =$

$\frac{c^2-a^2+2ab-b^2}{4ab} = \frac{c^2-(a-b)^2}{4ab} = \frac{1}{ab}\frac{(c+a-b)}{2}$

$\frac{(c-a+b)}{2} = \frac{1}{ab}\left[\frac{(c+a+b)}{2}-b\right]\left[\frac{(c+a+b)}{2}-a\right]$;

et si ponatur $P = \frac{a+b+c}{2}$, est $(\sin\frac{c'}{2})^2 =$

$\frac{1}{ab}(P-a).(P-b)$.

Hinc $\log \sin \frac{1}{2} c' =$

$$\frac{\log(P-a)+\log(P-b)-\log a-\log b}{2}.$$

Item $\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab} = 2(\cos\frac{c'}{2})^2-1$; ergo

$\frac{a^2+b^2-c^2+2ab}{4ab} = (\cos\frac{c'}{2})^2$; et $\frac{(a+b)^2-c^2}{2.2ab} =$

$(\cos\frac{c'}{2})^2 = \frac{a+b+c}{2} \cdot \frac{a+b-c}{2} \cdot \frac{1}{ab} = \frac{1}{ab}P.(P-c)$

Schol. 4. E latere b cum angulis adjacentibus a', c' (Fig. 104) reperitur area sic: est $x:y=1:\cot c'$; hinc $y=x\cot c'$; $b-y=x\cot a'$; adeoque $b=x\cot c'+x\cot a'$; atque $x=$ $\frac{b}{\cot c'+\cot a'}$; et area $=\frac{b^2}{2(\cot a'+\cot c')}$.

Schol. 5. (Fig. 104) E duobus lateribus a, b et intercepto c' reperitur area sic: $a:x=1:\sin c'$; hinc $x=a\sin c'$; et area $=\frac{1}{2}ab\sin c'$

Schol. 5. (Fig. 105) Data summa a duorum laterum x et y, atque altitudine b, et basi c, reperitur angulus A sic; $x:b=1:\sin A$; hinc $x=\frac{b}{\sin A}$, et $y=a-x=a-\frac{b}{\sin A}$.

Porro $z:b=1:\tang A$; hinc $z=b\cot A$ seu $\frac{b}{\tang A}$; atque $b^2=y^2-(c-z)^2$; et substitutione facta, est $b^2=a^2-\frac{2ab}{\sin A}+\frac{b^2}{\sin A^2}-c^2+$ $2cb\cot A-b^2\cot A^2$; atque substituendo valorem cotangentis, et terminis omnibus membri dextri ad denominatorem $\sin A^2$ reductis, fiet

$$\frac{a^2 \sin A^2 + b^2 - 2ab \sin A - c^2 \sin A^2 - b^2 \cos A^2 + 2cb \sin A \cos A}{\sin A^2}$$

$= b^2$; et multiplicando utrinque per $\sin A^2$, erit membro dextro subtracto, $o = a^2 \sin A^2 - 2ab \sin A - c^2 \sin A^2 + 2cb \sin A \cos A$; nam $b^2 - (b^2 . \cos A^2 + b^2 \sin A^2) = o$, quia $\sin^2 + \cos^2 = 1$; hinc utrinque per $\sin A$ dividendo, est $a^2 \sin A - 2ab - c^2 \sin A + 2cb \sin A . \cos A = o$; et hinc $2ab$ addendo, ac per $2cb$ utrinque dividendo, erit $\frac{(a^2 - c^2)}{2cb} . \sin A + \cos A = \frac{a}{c}$; e quo quum $\cos A$ per $\sin A$ exprimi queat, A reperitur.

Schol. 7. Occasio tamen per hoc se offert, artem sequentem in casibus similibus expedientem ostendendi. Ponatur $\frac{a^2 - c^2}{2cb} = \text{tang}\, q$; scilicet quaeratur in rubrica tangentium quantitas $\frac{a^2 - c^2}{2cb}$, cui respondens arcus sit q; erit

$$\frac{a}{c} = \frac{\sin q . \sin A}{\cos q} + \cos A = \frac{\sin q . \sin A + \cos q . \cos A}{\cos q}$$

$= \frac{\cos (A - q)}{\cos q}$; hinc $\frac{a}{c} . \cos q = \cos (A - q)$, et A est arcus ipsi $(\frac{a}{c} . \cos q)$ tanquam cosinui respondens, addito arcu q; nempe arcus q quaeratur cosinus, et multiplicetur per $\frac{a}{c}$, ac quaeratur in rubrica cosinuum arcus huic tanquam cosinui respondens, arcus is erit $= A - q$; itaque, ut A prodeat, ei addatur q.

Schol. 6. (Fig. 105) Sit Polygoni laterum numerus n, basis b, radius a, altitudo c; est $a : \frac{1}{2} b =$

$1 : \sin \frac{1}{2} v$; hinc $\frac{1}{2} b = a \sin \frac{1}{2} v$, et perimeter $= 2na \sin \frac{1}{2} v$; porro $c : \frac{1}{2} b = 1 : \tang \frac{1}{2} v$, hinc $c = \frac{b}{2 \tang \frac{1}{2} v}$; adeoque area $A = \frac{nb \cdot c}{2} = \frac{nb \cdot b}{4 \tang \frac{1}{2} v} = \frac{nb^2}{4 \tang \frac{1}{2} v}$

et simul $= \frac{bna \sin \frac{1}{2} v}{2 \tang \frac{1}{2} v}$; hinc ex A et n etiam (quia tum datur v) reperitur b.

Est c etiam $= a \cos \frac{1}{2} v$, et $\frac{1}{2} bc = \frac{1}{2} b . a \cos \frac{1}{2} v$ adeoque $= a \sin \frac{1}{2} v . a \cos \frac{1}{2} v = a^2 \sin \frac{1}{2} v \cos \frac{1}{2} v$.

VIII. Sinus autem computati sunt, dum methodus facilior adhuc ignota esset, modo sequente:

1mo. Aliquot sinus noti erant, nempe sinus 30^0, sinus 18^0, sin 45^0: quum latus hexagoni sit = radio, adeoque $\frac{1}{2} r = \sin 30^0$, ita latus decagoni, et quadrati circulo inscripti data fuerunt.

2do. E sinibus duorum arcuum a et b, $\sin (a \pm b)$, et hinc arcus dimidii, duplique sinus reperiebatur (p.84 --).

3tio. Hinc etiam ad sinum arcus non quidem unius minuti sed eo minoris deventum est; in arcubus exiguis vero minutum haud excedentibus, animadvertebant (quod demonstrari potest debetque), sinus esse uti arcus; scilicet pro denominatore qui sumitur $=1$ cum 10 cifris, error una ejusmodi parte minor est. Imo etiamsi (Fig. 107) arcus α incrementum unius minuti dicatur α' et item ejusdem α incrementum $a<\alpha'$ sit; incrementa sinuum nempe i' et i. sunt ut incrementa arcuum, quasi esset in triangulis similibus, $i:i'=a:a'$, arcubus tam exiguis a cordis eorundem pro tanto denominatore sensu dicto haud differentibus.

4to. Tum reperto sin 1′ per formulam sinus $(a+b)$ poterat sinus cujusvis arcus $(A\dagger 1')$ reperiri, si sin A datus erat; ita per formulas $\sin(a+b)$ et $\sin(a-b)$ omnimode applicatas computati sunt omnes; et una via reperti inserviebant certitudini calculi comprobandae, si valoribus alia via prodeuntibus aequales repeririebantur.

5to. De his tamen, uti et de applicatione calculi per logarithmos alleviati (Tom. I p. 95), necnon de constructione tabularum logarithmicarum, tabularumque trigonometricarum speciali, addetur adhuc aliquid inferius. Atque nunc sequitur

---

22. MOTUS GEOMETRICUS COMPOSITUS: nempe duae priores operationes primitivae (uti Tom. I. p. 465 atque in *Arbore* dictum est) conjunguntur. Tractatur autem prius casus simplicior; nempe punctum e rectae A certo puncto determinato $*$, moveatur in A semper porro versus dextram, et alterum ex eodem puncto $*$ ad laevam in ∞ tum, dicaturque *abscissa* (literarum po-

tremarum aliqua ex gr. x designata generaliter), via quaevis puncti (sive ad dextram sive ad laevam), eo cum discrimine, ut viae (ex. gr. ad dextram) +vae accipiantur, et —vae ad lævam; atque simul punctum motum, rectam B, quocunque angulo secuerit haec rectam A in $*$, secum ferat, ita ut pars ima ejus sit punctum motum, et ipsa ad dextram angulum semper priori aequalem faciat: (ac si $\wedge$BA moveretur in plano, ita ut A semper in $\tilde{A}$ moveatur porro); et simul punctum p moveatur in B e certo loco certa lege generali, per quam puncti p in B moti locus ad finem cujusvis x determinetur; atque dicatur pro quovis x, recta quae a fine ipsius x, in B usque ad locum dictum puncti p est, *ordinata ipsius* x; denotenturque *ordinatae* generaliter item per literarum postremarum aliquam, ex gr. y; abscissa autem quaevis ejusque ordinata, *coordinatae* nominentur, et quidem *rectangulares*, si $\wedge$AB rectus sit. Praetereaque si lex dicta sit $(f)x = y$, valores ipsius $(f)x$ omnes, si qui +vi fuerint, in plaga superiore, et —vi (si fuerint) in inferiore accipiantur; valor o autem ipsius $(f)x$, si esset pro certo valore o aut alio ipsius x, omnino in fine illius x accipiatur, quum ibidem $y = o$ sit. Dicitur punctum $*$ *principium abscissarum*, et $\tilde{A}$ *linea abscissarum* vel *axis*.

221. De iis, quorum quodvis punctum geometrice (sensu stricto) construi potest.

Schol. Si $(\alpha)x = (\beta)y$, adeoque $(\alpha)x - (\beta)y = o$ fuerit; atque $(\alpha)x - (\beta)y$ nullo termino gaudeat, qui non sub formam ax^py^q cadat, (a quantitatem constantem sive o sive aliam, ipsorum p, q autem quovis sive o sive alium exponentem integrum +vum denotantibus): dicitur complexus omnium extremitatum ipsorum y per aequationem dictam determinatarum *linea ordinis mti*, si $p+q$ in aliquo termino, in quo factor constans haud $=o$ est, sit $=m$, neque in ullo sit major. Interim etiamsi p, q incommensurabilia fuerint, complexus dictus considerari potest.

Si omnes termini adfuerint, qui salvo ordinis numero m, adesse possunt: *aequatio plena ordinis m* audit. Ex gr. pro literis alphabeti prioribus, constantes, inter quas etiam o esse potest, denotantibus

Aequatio ordinis 1 est $a+bx+cy=o$

Ord. 2. est $a+bx+cy+dx^2+ey^2+fxy=o$

Ord. 3. est $a+bx+cy+dx^2+ey^2+fxy+gx^3+hx^2y+ixy^2+ky^3=o$

— — — — — — — —

In genere autem aequationem *plenam* ordinis *nti* e terminis numero $\frac{(n+1)(n+2)}{2}$ constare inferius e theoria combinationum facile patebit.

.2211. Sed hic prius nonnisi de *lineis* ordinis 2di agetur, quae omnes (Tom. I. p. 101) pro coordinatis rectangulis sub formam $y^2=x-\frac{x^2}{\pm a}$ $=o$, id est $y=\sqrt{(x-\frac{x^2}{\pm a})}$ venire possunt; omnesque (ut infra patebit) sunt plani cum cono factae sectiones; uti conversim omnes plani sectiones cum cono, sub formam dictam cadunt; atque etiam manifestum est, $y=\sqrt{(x-\frac{x^2}{\pm a})}$ pro quovis dato x geometrice (sensu stricto) construi posse; quum data vel posita unitate prodeat x^2, pariter $\frac{x^2}{\pm a}$ (p. 28), et subtracto hoc ex x, radix quadrata e residuo (p. 27) extrahi pro unitate priori queat.

Primariis autem, quae sectiones conicas, sive lineas 2di ordinis, concernunt, traditis; quaedam magis necessaria e theoria linearum cujusvis ordinis generali referentur.

Schol. 1. NEWTON lineas 2di ordinis, adeoque sectiones conicas lineas ordinis 1mi dixit; rectam quae ordinis 1mi est, quasi ordinis oti, et lineas sequentis ordinis, curvas 1mi ordinis considerando: at prouti libuerit, ita accipi posse manifestum est. Quod vero recta quaevis pro data abscissarum linea, principioque abscissarum posito, sub formam $a+bx+cy=o$ veniat; hinc patet.

Erit recta exprimenda 𝔆𝔇 (Fig 108), respectu lineae abscissarum 𝔄𝔅 et principio * abscissarum, aut $\parallel$ 𝔄𝔅; aut secabit hanc alicubi ex. gr. in c. Ex aequatione primi ordinis $a+bx+cy=o$, sequitur $y=-\frac{a}{c}-\frac{b}{c}x$; quod venit (pro p, q constantibus) sub formam $y=p+qx$. Si 𝔆𝔇 $\parallel$ 𝔄𝔅; tum ponatur $b=o$ in $a+bx+cy=o$, et fiet $-\frac{bx}{c}=o$, in $\frac{-a}{c}\frac{-bx}{c}=y$; adeoque $\frac{-a}{c}=y$, ubi $\frac{-a}{c}=p$ poni potest.

Si vero 𝔆𝔇 secet lineam abscissarum in c; demissis $\perp$ ibus β, y, y'; per $\triangle$ lorum similitudinem erit $\alpha+\gamma:\beta=\gamma+x:y$, adeoque $y=\frac{(\gamma+x)\beta}{\alpha+\gamma}=\frac{\gamma\beta}{\alpha+\gamma}+\frac{x\beta}{\alpha+\gamma}$; quod sub formam

$y=p+qx$ venit, si $\frac{\gamma\beta}{\alpha+\gamma}$ quantitas omnino constans p dicatur, ita $\frac{\beta}{\alpha+\gamma}$ per q denotetur. Pariter pro x' (nempe $-$vo x) est $\alpha+\gamma:\beta=$ $x'+\gamma:y'$; atque hinc $y'=\beta.\frac{(x'+\gamma)}{\alpha+\gamma}=\frac{\beta\gamma}{\alpha+\gamma}+\frac{\beta x'}{\alpha+\gamma}$; nempe si x' ad laevam $-$ve accipiatur, erit k $-$vum, et $=-\ x'+\gamma$, atque ita prodibit $-y=$ $\frac{\beta\gamma}{\alpha+\gamma}-\frac{\beta x'}{\alpha+\gamma}$; et hic quoque $\frac{\beta\gamma}{\alpha+\gamma}=p$, et $-\frac{\beta}{\alpha+\gamma}=q$ est, ut prius erat.

Pariter (Fig.109); ubi $\alpha-\gamma:\beta=x-\gamma:y$, ita si plane in $*$ fiet sectio, patet.

Schol. 2. Lineae 2di ordinis autem tractabuntur ordine sequente; tres sunt, nempe *parabola*, *ellipsis* et *hyperbola* (Tom. I, p.101), ubi et primaria eas concernentia definita sunt.

I. Prius formae ipsae, quatenus e lege fluunt; atque *axes* in singulis; et simul *aliquid* de *insignibus*, quas *sectiones conicae* in coelis et terris *partes* agunt.

II. Linearum harum, tam speciei ejusdem quoad parametros diversas, quam diversae speciei, comparatio.

III. Mutatio initii abscissarum pro ellipsi et hyperbola in centrum.

IV. *Focus* (nempe distantia ejus a vertice, ita *eccentricitas* (*id est distantia foci a centro*), in singulis.

V. *Radii vectoris* quantitas pro singulis tribus.

VI. Atque hinc *modus* singulas *construendi*: prius quodvis punctum (*quamvis omne* *nunquam*) geometrice (sensu stricto); tum *mechanice motu continuo.*

VII. *Tangens*, *subtangensque*, *normalis subnormalisque* in singulis, (nempe *pro data quavis abscissa*).

VIII. Hinc *applicationum quarundam explicatio.*

IX. *Diametri* omnes (nempe lineae quæ omnes chordas certae eidem rectae parallelas bisecat) in singulis: ubi notandum, proprie sic dicta diametro nonnisi lineam 2di ordinis gaudere.

X. *Intersectiones linearum* 2di *ordinis*, atque inde resolutio certarum aequationum.

XI. Areae per lineas istas, et coordinatas clausae, et longitudo arcuum.

Incipiendo igitur ab

I. *Determinantur* modo sequ. *formae linearum*, quarum pro coordinatis rectangulis (abscissa x et ordinata y), aequatio est $y = \sqrt{(x - \frac{x^2}{\pm a})}$, ubi (juxta Tom. I. p. 101) unitas ad extractionem radicis requisita *parameter* dicitur; nempe $x^2 : a$ manet idem: pro quoto enim hic linea accipitur, et sive ex gr. pro $x = 2:3$ fit $x^2 : a = 2x : 3$; sive si $x^2 = \alpha$ pro $u = 1$, fiet $x^2 = n\alpha$, pro $(u : n) = 1$; adeoque si ex gr. $\alpha : a = 2$, erit $n\alpha : a = 2n$, et prius quoad $u = 1$, posterius quoad $(u : n) = 1$ accipienda.

Sit $x = ka$ (pro a constante $+$vo, k vero aut $= o$, aut $+$vo aut $-$vo, atque aut < 1 aut $= 1$ aut > 1).

1. Pro $a = \infty$, fiet $x - \frac{x^2}{\pm a} = x$ (pro quovis finito x); nam $\frac{x^2}{\pm a} \frown o$ pro quovis fini-

to x, si $a \frown \infty$; itaque (Tom. I. p, 38), $\frac{x^2}{\pm a}$ pro quovis finito x, si $a=\infty$, fit $=o$. Tum vero $y=\sqrt{x}$ dat *parabolam* (ob rationem paulo inferius tradendam, ita dictam); cujus formae ductus ex aequatione ipsa modo sequ. intelligitur. Sit k +vum aut −vum, ab ipso o incipiendo crescens in ∞, et sit $x=ka$, atque sit prius x +vum, adeoque + x; erit pro $k=o$, etiam $x=ka=o$, adeoque et $y=\sqrt{x}=o$. Si k +ve crescat inde a o in ∞; $y=\sqrt{(x=ka)}$ crescet inde a o in ∞, semperque duos valores habebit, oppositos alioquin aequales. Si k −ve crescat inde a o in ∞; ordinatae omnes imaginariae erunt, quia tum $x=ka$, −vum, adeoque $y=\sqrt{x}$, radix quadrata e negativo erit.

2. Pro a finito et +vo, $y=\sqrt{(x-\frac{x^2}{a})}$ dat *ellipsim*; et quidem ordinatam o, pro $k=o$ adeoque $ka-\frac{k^2a^2}{a}=o$, pariter $y=o$ pro $k=1$, (adeoque $x=a$) quia tum $ka-\frac{k^2a^2}{a}=ka-k^2a$ fit $=a-a$. Si vero k +ve crescat inde a o usque ad 1; erit $k<1$, adeoque $k>k^2$, consequ. $ka-k^2a$ semper + erit, crescetque $y=\sqrt{(k-k^2)a}$ inde a o, donec $k-k^2$ maximum fiat, (quod fit pro $k=\frac{1}{2}$, adeoque $x=\frac{1}{2}a$), et abinde decrescet usque ad o; prodibuntque semper duae ordinatae oppositae, alioquin aequales. Si vero k + et >1 fuerit, fiet semper $k^2>k$, adeoque $(k-k^2)a$ erit −, atque ordinata (nempe radix e −vo) ima-

ginaria fiet. Pariter pro k —vo; nam k^2 semper + est, adeoque $(k-k^2)a$ —vum erit.

Sunt etiam a meditullio ipsius a, adeoque centro, ad eandem distantiam u, ad dextram laevamque, ordinatae aequales: nam pro $x=\frac{1}{2}a-u$, fit $x-\frac{x^2}{a}=\frac{1}{2}a-u-$

$$\frac{(\frac{1}{4}a^2-au+u^2)}{a}=\frac{a}{4}-\frac{u^2}{a},$$ et idem

prodit pro $x=\frac{1}{2}a+u$.

Quod autem $y=$ quantovis parvo ω prodire queat, sic patet: ex $\omega=\surd(ka-k^2a)$ fit quadrando, aequatio quadratica $k^2-k+\frac{\omega^2}{a}=o$, et $k=\frac{1}{2}\pm\surd(\frac{1}{4}-\frac{\omega^2}{a})$; ubi quia tum k + et <1 esse debet, oportet $\frac{1}{4}>\frac{\omega^2}{a}$ esse, ut radix realis addatur ipsi $\frac{1}{2}$, aut ex $\frac{1}{2}$ subtrahatur; fiet autem hoc pro ω utvis parvo, et quantovis, dummodo $\frac{\omega^2}{a}<\frac{1}{4}$ sit; patetque pro eodem ω duos ipsius k valores prodire, prouti radix +va vel —va accipitur; et quidem $k \backsim o$, vel 1, dum $\frac{\omega^2}{a}\backsim o$, atque $\surd(\frac{1}{4}-\frac{\omega^2}{a})\backsim\surd\frac{1}{4}=\pm\frac{1}{2}$, adeoque

$\frac{1}{2} - \sqrt{(\frac{1}{4} - \frac{\omega^2}{a})} = k \frown o$; ità $\frac{1}{2}$

$\maltese \sqrt{(\frac{1}{4} - \frac{\omega^2}{a})} = k \frown 1$.

Patet etiam ordinatas a centro ad dextram laevamque decrescere usque ad o: erat enim pro distantia u a centro, $y = \sqrt{(\frac{a}{4} - u^2)}$; quod si u crescat (adeoque distantia a *vertice*, nempe ubi $x = o$, decrescat), manifesto decrescit.

3. Pro $-a$ (item finito), dat $y =$ $\sqrt{(x - \frac{x^2}{-a})} = \sqrt{(x \dagger \frac{x^2}{a})}$ *hyperbolam*; fitque $y = o$ pro $x = o$; at pro x $\maltese$ve crescente in ∞, gaudet y semper 2 valoribus oppositis (alioquin aequalibus), crescentibus in ∞. Si vero x $\dashv$ sit $= ka$ (pro a $\maltese$vo et k $\dashv$vo); fiet y imaginarium, donec $k = -1$ evadat; nam tum $x + \frac{x^2}{a} = ka + \frac{k^2a^2}{a} = a(k + k^2)$, atque k $\dashv$vum et < 1, adeoque $k > k^2$ est, itaque $k + k^2$ $\dashv$vum, adeoque radix e $\dashv$vo imaginaria est. Pro $k = -1$ autem, fit $\dashv$vum $x = -a$, atque $y =$ $\sqrt{(a - a)} = o$; at pro k $\dashv$vo et > 1 fiet $k^2 > k$, itaque $k + k^2$ erit $\maltese$, adeoque valores ipsius y erunt item bini oppositi quidem, sed alioquin aequales; crescente x cum k in ∞, crescentes in ∞. Itaque exorietur linea 4 brachiorum e duobus verticibus, recta a (quae respectu verticis primarii, $\dashv$ est) distantibus, in ∞ extensorum.

Suntque duae partes hyperbolae, interruptae quidem, aequales; quia ordinatas ab utroque vertice dicto aequidistantes aequales esse patet; si e meditullio rectae $x = -a$, (nempe *centro axeos hyperbolae*, omnino -vi), consideretur quantitas ordinatarum ad distantiam u tam ad dextram quam ad laevam: est nempe ad dextram $x = u - \frac{a}{2}$; itaque $x + \frac{x^2}{a}$

$$= u - \frac{a}{2} + \frac{u^2 - au + \frac{a^2}{4}}{a} = \frac{u^2}{a} - \frac{a}{4};$$ atque

idem ad laevam prodit ad distantiam u; nempe ibi x -vum inde a *vertice primario* est $=$

$$-\frac{1}{2}a - u,\text{ itaque } x + \frac{x^2}{a} = -\frac{a}{2} - u + \frac{\frac{a^2}{4} + au + u^2}{a} = \frac{u^2}{a} - \frac{a}{4}.$$

4. Si vero (juxta Tom. I. p. 105) valores imaginarii accipiantur (quum hi aequo realitatis jure quoad -1 gaudeant, uti aliae quoad $+1$): aequatio parabolae plane talem parabolam, aequatio ellipseos, ellipsin quoad $+1$ quidem exhibebit, et simul hyperbolam quoad -1 realem; et aequatio hyperbolae simul ellipsim; aequatio hyperbolae aequilaterae autem (ubi nempe $a=1$), *valoribus* ordinatae *imaginariis* exhibebit *circulum*, uti *circuli aequatio hyperbolam aequilateram*; attamen quoad $+1$, -1 realia, diversis coloribus aut alio quopiam modo distingvere necesse est, (ut Tom. I. p. 177 dictum est).

6. *Axis major* est $x = \pm a$; in parabola est ∞, in ellipsi autem est $x = + a$; in hyperbola vero $x = -a$; *centro* igitur *parabola nullo gaudet*, nempe rectae a vertice in ∞ abeuntis non datur punctum, eam in duas partes aequales dividens; in ellipsi et hyperbola vero datur meditullium,

si et $a = 1 =$ parametro: ellipsis fit circulus, diametri 1, et *hyperbola* dicitur *aequilatera*. Parabola autem dici potest, tam *ellipsis* quam *hyperbola*, axi majori ∞ to; nempe si $a \sim \infty$, expressio $\sim \sqrt{x}$.

Axis minor est duplum ordinatae, quae est e meditullio axeos majoris: in *parabola igitur nullus axis minor est. In ellipsi* vero est $2\sqrt{(x - \frac{x^2}{a})}$ pro $x = \frac{a}{2}$; adeoque est $= 2\sqrt{(\frac{a}{2} - \frac{a^2}{4a})} = 2\sqrt{(\frac{2a^2 - a^2}{4a})} =$

$2\sqrt{\frac{a^2}{4}} = \sqrt{a}$. *In hyperbola* autem est

$2\sqrt{(x + \frac{x^2}{a})}$ pro $x = -\frac{a}{2}$, nempe

$2\sqrt{(-\frac{a}{2} + \frac{a^2}{4a})} = \sqrt{-a}$; itaque *axis minor hyperbolae est imaginarius*. In circulo axis minor = axi majori $= 1$, nempe $\sqrt{1} = 1$, in hyperbola aequilat. est axis minor $\sqrt{-1}$.

6. Nomina, *parabola*, *ellipsis*, et *hyperbola* autem inde exorta sunt: quod, si pro parametro singulis eadem, vertex communis, lineaque abscissarum eadem fuerit, et ad dextram sit focus f parabolae, atque distantia ipsius f a vertice, ad laevam transferatur in linea abscissarum, et e fine hujus erigatur $\perp$ris D (a veteribus *directrix* dicta): cujusvis puncti b parabolae distantia ab f et D *aequalis* erit, cujusvis puncti ellipseos autem distantia ab f minor est quam a D, et cujusvis puncti hyperbolae distantia ab f *major* quam a D est. Nempe (Fig. 110) sit b'b ordinata parabolae: erit pro eodem x et parametro eadem, ordinata

ellipseos minor $=\sqrt{\left(x-\frac{x^2}{a}\right)}=\mathfrak{bd}$, et ordinata hyperbolae fiet major $=\sqrt{\left(x+\frac{x^2}{a}\right)}=\mathfrak{b''d}$: estque $\mathfrak{dD}=\mathfrak{bc}=\mathfrak{b'c'}=\mathfrak{b''c''}$; sed $\mathfrak{fb}<\mathfrak{fb'}<\mathfrak{fb''}$.

7. Potuissent quidem lineae dictae etiam sic definiri: si a et b, aut puncta denotent (sive diversa sive in unum coincidentia), aut si non utrumque, punctum denotet, duntaxat a sit punctum, et b rectam denotet; fueritque in plano talis linea L, cujus si puncti cujuslibet $\mathfrak{p}$, distantia ab a dicatur a', et distantia a b dicatur b'; aut quodvis $a'+b'$, aut quodvis $a'-b'$, eidem constanti c (quae etiam $=o$ esse potest) aequalis sit: erit L *parabola*, *recta*, *ellipsis* aut *circulus*, vel *hyperbola*; uti inferius patebit; quo pacto et parabola, recta, circulos, hyperbolaque eodem pertinent; nempe in singulis est $a'-b'=c$, in circulo et ellipsi autem est $a'+b'=c$. Recta excludi, aut cujusvis certa revolutione circa axem generata includi possunt; et distinctio specialior facilis est.

Schol. Sectiones conicae insignes in coelis et terra partes agunt: corpora coelestia cursum earum sequuntur; nempe (Fig. 111) quum attractio universalis sit in ratione composita, ex inversa duplicata distantiarum, et directa massarum trahentium: si in $\mathfrak{c}$ ponatur vis attractiva, et concipiatur corpus ex $\mathfrak{a}$ vi illa attractiva ipsius $\mathfrak{c}$, quae ad $\mathfrak{a}$ est, constanter eadem manente, motu uniformiter accelerato usque ad $\mathfrak{c}$ decidere, fiatque ad $\mathfrak{c}$ velocitas finalis v; atque jam relicta vi centripeta uti est, si corpus in $\mathfrak{a}$ vi momentanea velocitatis $\mathfrak{ab}$ projiciatur; describetur, si $\mathfrak{ab}=v$, *parabola*, si $\mathfrak{ab}<v$, tum *ellipsis*, et *hyperbola*, si $\mathfrak{ab}>v$. Est autem $\mathfrak{c}$ focus sectionis conicae, quem corpus projectum ad idemque punctum retractum, prius crescente celeritate petit, postea segnior semper fit usque quo revertitur, in parabola hyperbolaque nunquam reversum, in aliorum solium abyssum mergitur. Similem cursum plurimae summam illusionem producentes vires attractivae terrestres tenent.

Projectorum ad terram via ad sensum parabola est, si directio projectionis verticalis non sit.

Focus quoque locus insignis est; nam præter jam dicta, in parabola radii omnes lucis, caloris, soni, e foco ad parabolam vel paraboloidem (de qua statim) cadentes, axi paralleli, et hi in focum reflectuntur; nam $\wedge$lus quem radius vector cum tangente facit, est = ibidem illi, cujus verticalis est is, quem recta axi ∥la item cum tangente eadem, ad idem punctum facit. Hinc si *fornix domus parabolois* esset, lampas in *foco* ardens, (cujus fumus *ope canaliculi superius facti in caminum eveheretur*); lumine dejecto domum totam illuminaret, quamvis decrescente versus marginem lucis gradu: quod tamen in domo quavis etiam ope coni truncati aliquatenus obtineri potest; ut et aeris rivus facile regatur, et vaporibus noxiis evectis, lumen almum clarius tranquillumque pluribus studentibus inserviat; notandum autem est: 1mo lychnii oleique quantitatem qualitatemque debitam requiri. 2do Conum ex alba subtili papyro *velin* dicta conficiendum esse; ne nimis opaca umbram projiciat: duo enim quoad lucem vitanda sunt oculorum aciem servaturo; *gradus nimius* lucis (sive in excessu sive in defectu), et *gradus nimis differentes* (sive simul, sive subito post se invicem).

3tio. In aliquo canaliculi loco, diametrum ejus, vicissitudinibus tempestatis attemperare, et facile et necesse est; rivus aeris enim adeo varius est, ut *fornacibus pro hyeme exstructis, infirmiores vere autumnoque* (calorem quidem leniorem extrinsecus deposcentes), *aut algere cogantur, aut oculis pulmonibusque laborent.* Sit igitur (etsi non hujus loci sit) *fornacem* (qua utor) *trium mutationum* svadere; qua ad nutum quasi, fumus diversas, longiores breviores ve vias capit, quarum omnino posteriores veri autumnoque conveniunt.

4to. Potest etiam cono truncato minori tubus item papyraceus agglutinari, et simul cum candelabro portatile fieri; idemque et ad unam candelam sebaceam applicari; dummodo candelabrum quam minimum umbrae projiciat, lumenque eandem retineat altitudinem; quod facile obtinetur, quum hoc ipsum in tali scribatur lumine. Tubus lampadum *Argando* debetur.

Redeundo ad paraboloidem: lucerna noctū in focum ejus posita, riteque obversa index horaque remota cerni possunt.

Vicissim radii e sole axi parallelli venientes urunt in foco: sed quo remotior focus, eo major locus ustionis erit, et eo latiorem paraboloidem esse oportet.

Ita remotum susurrum auris in foco majoris paraboloidis percipiet; et vox e foco pronunciata remotius exaudietur; ita si 2 paraboloides sint e regione ad axem eundem positae; ex unius foco missa vox lenis, nullibi in medio, sed in foco alterius quamvis remoto auditur: quod etiam loquentibus, qui prinsquam ad focum per secula remotum perventum fuerit, a nemine intelliguntur, evenit.

Fornaces quoque exstrui possunt; ut ignis in foco paraboloidis ardeat; eritque in foco alterius paraboloidis e regione positae insignis sine igne calor; latiusque in hypocausto diffundetur.

Ita radii omnes e foco uno ellipseos in alterum reflectuntur; radii illi vero, qui quacunque causa ita venientes, ut (Fig. 112) in dimidiae hyperbolae foco $\mathfrak{F}$ conveniant, a hyperboloidis H facie interiore excepti, in hujus foco f convenient; et vicissim si hinc nempe ex f procedant, ita reflectuntur, ut retrorsum continuati in $\mathfrak{F}$ secarent se invicem, adeoque dispergentur &c.

II. Comparatio sectionum conicarum; prius speciei ejusdem quoad parametros diversas; tum earum inter se pro parametro eadem.

1. Sit $y=\sqrt{(x\pm\frac{x^2}{a})}=r$ pro $u=1$, atque pro $U=1=ku$ (denotante k quantitatem abstractam invariabilem Tom. I. p. 97) sit $=R$; erit (Tom. I. p. 99) $R=r.k^{\frac{1}{2}}$, et $r=Rk^{\frac{-1}{2}}$. Itaque $R:r=\sqrt{k}:1$, id est ordinatae pro abscissa quavis eadem erunt uti radices quadratae parametrorum (quoad unitatem eandem acceptae).

2. Si duae abscissae X et x, atque ordinatae earum Y et y considerentur, erit $Y^2=X$ in parabola, et $y^2=x$; itaque y est *proportionalis media inter* 1 (nempe *parametrum*) *et abscissam*; atque $Y^2:y^2=X:x$, (nempe *quadrata ordinatarum sunt uti abscissae*.

Ita pro *ellipsi* et *hyperbola* $Y^2=X\mp\frac{X^2}{a}$

$$= \frac{aX\mp X^2}{a} = \frac{X(a\mp X)}{a}$$; et pariter $y^2 = \frac{x(a\mp x)}{a}$

itaque $Y^2 : y^2 = X(a\mp X) : x(a\mp x)$.

3. Si e puncto quopiam eodem $\mathfrak{p}$ per omnia puncta sive parabolae sive ellipseos sive hyperbolae, rectis conceptis, generetur (juxta Tom. I. p. 451) simile; pro quavis recta quae a $\mathfrak{p}$ ad punctum lineae quodpiam $\mathfrak{f}$ est, accipiendo $k.\mathfrak{pf}$ (denotante k quantitatem ut in 1); recta inter quaevis duo puncta lineae novae $k$ies tanta erit, quam recta inter puncta lineae prioris illis homologa (p. 30); adeoque si abscissa quaevis prioris, x dicatur, et ordinata y, axis major $\pm a$, parameter u, et X, Y, $\pm$ A, U, abscissam, ordinatam, axem majorem, et parametrum, prioribus homologa denotent: erit $X = kx.Y = ky$, et $U = ku$: atque hinc e parabola, in qua $y^2 = x$ erat, prodit nova, in qua $Y^2 = kX$; et $Y = \sqrt{X}$ (quoad $U = ku = 1$ extracta radice): nam $\sqrt{X}$ quoad $u = 1$ est $\sqrt{kx} = y\sqrt{k}$, et hoc per $\sqrt{k}$ multiplicatum ut radix quoad $U = 1$ prodeat, fit $yk = Y$.

Et hinc non solum linea nova, parabola est, sed quum ipsum k, adeoque parametrum U utvis accipere liceat; sunt *omnes parabolae inter se similes. Non idem de ellipsi hyperbolaque valet*: nempe harum aequationes et altera constans a ingreditur: estque pro his, si similes fuerint; *parameter lineae* generatae ad parametrum primitivae, uti axis major generatae ad axem majorem primitivae, id est $u : (ku = U) = a : (ka = A)$.

In *ellipsi* pro quovis Y, est $Y^2 = X - \frac{X^2}{A}$, et $Y = \sqrt{(X - \frac{X^2}{A})}$ (radice quoad parametrum $U = ku = 1$ accepta): nam $Y = ky$, et $y^2 = x - \frac{x^2}{a}$, adeoque quoad $u=1$ est $Y^2=k^2x-\frac{k^2x^2}{a}=$

$kX-\frac{X^2}{a}=kX-\frac{kX^2}{ka}=k(X-\frac{X^2}{A})$, et Y^2

quoad $ku=1$ est $X-\frac{X^2}{A}$. Ita si radix ex $X-\frac{X^2}{A}$ quoad $u=1$ dicatur r, et R dicatur radix quoad $ku=1$ accepta; erit (ut ibidem) $R=r.\sqrt{k}$: et quum radix ex $x-\frac{x^2}{a}$ quoad $u=1$ accepta y sit; est $r=y.\sqrt{k}$; nam $X-\frac{X^2}{A}=kx-\frac{k^2x^2}{ka}=$

$k(x-\frac{x^2}{a})$. Est igitur $R=y\sqrt{k}.\sqrt{k}=ky=Y$.

Pariter de hyperbola patet.

4. Si inter se comparentur, praesertim *parabola cum hyperbola*; *verba* KEPLERI intelliguntur: *parabola non ut hyperbola extendit brachia, sed quasi contrahit a complexu* ∞ti, *semper plus quidem complectens, sed eo minus appetens; cum hyperbola quo plus actu inter brachia complectitur, hoc plus etiam appetat.*

Considerentur prius incrementa ordinatarum pro incrementis abscissarum aequalibus: *in parabola* sunt incrementa ipsius y^2 aequalia, non ita in *ellipsi et hyperbola*; nempe sit abscissae incrementum i, et ω incrementum ordinatae, erit $(y+\omega)^2-y^2=x+i-x=i$ pro quavis abscissa x. In hyperbola autem est

$$(y+\omega)^2=x+i+\frac{(x+i)^2}{a}=\frac{ax+ai+x^2+2xi+i^2}{a},$$

e quo subtracto $y^2=\frac{ax+x^2}{a}$, manet $\frac{ai+2xi+i^2}{a}$, quod dum $x \frown \infty$, manifesto $\frown \infty$.

Fiat jam (F.113) e vertice a hyperbolae (qui sit simul parabolae vertex) $\perp$ris ipsi $\frac{\sqrt{a}}{2}$ aequalis, atque ducatur per extremitatem hujus e centro c hyperbolae recta: in hyperbola $z-y \frown o$, in parabola vero $\frown \infty$; nempe si distantia verticis a centro +ve accipiatur, (quamvis axis major $=a$, et axis minor hyperbolae $\sqrt{-a}$ sit), erit $\frac{a}{2} : \frac{\sqrt{a}}{2} = \frac{a}{2}+x : z$, unde duos priores terminos per $\frac{\sqrt{a}}{2}$ dividendo, est

$\sqrt{a} : 1 = \frac{a}{2}+x : z$, atque $z=\frac{\frac{a}{2}+x}{\sqrt{a}}$; est vero $y^2=x+\frac{x^2}{a}$; itaque z^2-y^2 seu $(z+y)(z-y)$

$$=\frac{\frac{a^2}{4}+ax+x^2-ax-x^2}{a}=\frac{a}{4}$$; consequ. $z-y=\frac{a}{4(z+y)}$; quod manifesto nunquam fit o, sed $\frown o$; adeoque A *asymptota* est (Tom.I.p.283) In parabola vero $z-y'$, (si y' ordinatam parabolae denotet) majus quovis β, quod $>$ $\frac{\sqrt{a}}{4}$ est, fieri potest: nempe $z-y'$ idest $\frac{\frac{a}{2}+x}{\sqrt{a}}$ $-\sqrt{x}$, quod pro constantibus γ,δ, poni $=\gamma+\delta x-\sqrt{x}=\gamma+\delta\omega^2-\omega$ potest; quod $\frown\infty$, si $\omega\frown\infty$; nempe $\delta\omega^2-\omega=\omega(\delta\omega-1)$, et $\frac{\delta\omega-1}{\delta\omega}\frown 1$,

nam $\frac{\delta\omega-1}{\delta\omega}-1 \frown o$, nempe $\frac{\delta\omega-1-\delta\omega}{\delta\omega} = \frac{-1}{\delta\omega} \frown o$.

At praeterea etiam posito $z-y'$ id est $\frac{\frac{a}{2}+x}{\sqrt{a}}-\sqrt{x}=\beta$, est $\frac{a}{2}+x-\sqrt{ax}=\beta\sqrt{a}$; atque hinc $-\sqrt{ax}=\beta\sqrt{a}-\frac{a}{2}-x$; et quadrando fit $ax=\beta^2a+\frac{a^2}{4}+x^2-\beta a\sqrt{a}-2\beta x\sqrt{a}+ax$, et hinc $o=x^2-2x\beta\sqrt{a}+\frac{a^2}{4}+\beta^2 a-\beta a\sqrt{a}$: atque hinc (per Tom. I. p. 346) $x= \beta\sqrt{a}\pm\sqrt{(\beta^2a-\beta^2a+\beta a\sqrt{a}-\frac{a^2}{4})} = \beta\sqrt{a} \pm \sqrt{(\beta a\sqrt{a}-\frac{a^2}{4})}$, ubi pro $\beta a\sqrt{a} > \frac{a^2}{4}$, id est pro $\beta > \frac{\sqrt{a}}{4}$ radix realis, et si $\beta > \sqrt{a}$, pro parabola positivi duo valores ipsius x dantur. Ex gr. Sit $a=1$, et sit etiam $\beta=1$; erit $x=1\pm\sqrt{(1-\frac{1}{4})}=1\pm\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{2\pm\sqrt{3}}{2}$, et $z=\frac{1}{2}+x=\frac{3\pm\sqrt{3}}{2}$, $y'=\sqrt{x}=\sqrt{\frac{2\pm\sqrt{3}}{2}}$; atque $z-y'=\frac{3\pm\sqrt{3}}{2}-\sqrt{\frac{2\pm\sqrt{3}}{2}}=1$ erit, si $\frac{1\pm\sqrt{3}}{2}=\sqrt{\frac{2\pm\sqrt{3}}{2}}$ seu

$(\frac{1\pm\sqrt{3}}{2})^2=\frac{2\pm\sqrt{3}}{2}$; est autem $(\frac{1\pm\sqrt{3}}{2})^2$ $=\frac{1+3\pm2\sqrt{3}}{4}=\frac{2\pm\sqrt{3}}{2}$.

III. *Mutatio initii abscissarum in centrum* ellipseos hyperbolaeque (ut quaedam expeditius tradantur.

Aequatio facile prodibit, substituendo ipsi x summam dimidii axis majoris, et rectae quae a centro usque ad finem ipsius x est; axis est $+a$ in ellipsi, $-a$ in hyperbola, posterius autem dicatur u. Singulis casibus percursis (Fig. 114) patet esse $x=u+\frac{a}{2}$ in ellipsi, et $x=u-\frac{a}{2}$ in hyperbola; dummodo prouti x accipitur +ve vel −ve, ita et u accipiatur; ex gr. si x ad dextram +ve, et −ve ad laevam accipiatur, et u e centro ad dextram +ve, et −ve ad laevam accipiatur.

Eritque hoc pacto *pro ellipsi* $y^2=x-\frac{x^2}{a}$ $=u+\frac{a}{2}-\frac{(u+\frac{a}{2})^2}{a}=u+\frac{a}{2}-\frac{u^2}{a}$ $-\frac{au}{a}-\frac{a^2}{4a}=\frac{a}{4}-\frac{u^2}{a}$. *Pro hyperbola* vero est $y^2=x+\frac{x^2}{a}=u-\frac{a}{2}+\frac{(u-\frac{a}{2})^2}{a}=$ $u-\frac{a}{2}+\frac{u^2}{a}-\frac{au}{a}+\frac{a^2}{4a}=\frac{u^2}{a}-\frac{a}{4}$.

IV. *Distantia focalis* (id est dist. foci a vertice, nempe extremitatis illius abscissae, cujus ordinatae duplum $=1$) prodit, si pro y ponatur $\frac{1}{2}$, adeoque $\frac{1}{4}$ pro y^2. Itaque *in parabola* ex $\frac{1}{4}=x$, patet distantiam focalem esse quartam partem parametri, et *unitatem* pro $y=\sqrt{x}$ esse *quadruplam distantiae focalis*: positis itaque vertice $\mathfrak{a}$, et foco $\mathfrak{f}$, quocunque libuerit, $y=\sqrt{x}$ (radice quoad $4\mathfrak{af}=1$ accepta) determinabit parabolam, cujus parameter $=4\mathfrak{af}$; et vicissim pro data parametro $4\mathfrak{af}=1$ dabit $y=\sqrt{x}$ parabolam, cujus dist. focalis $\mathfrak{af}$ erit.

In ellipsi si in $\frac{1}{4}=\frac{a}{4}-\frac{u^2}{a}$, pro u ponatur distantia foci a centro, *eccentricitas* dicta, per E denotata: fiet $\frac{1}{4}+\frac{E^2}{a}=\frac{a}{4}$, et $\frac{E^2}{a}=\frac{a-1}{4}$, et hinc $E^2=\frac{a^2-a}{4}$, atque $E=\frac{\sqrt{(a^2-a)}}{2}$.

In hyperbola distantia foci a centro pariter *eccentricitas* dicta, designetur item per E; erit $\frac{1}{4}=\frac{E^2}{a}-\frac{a}{4}$, et hinc $\frac{E^2}{a}=\frac{1+a}{4}$, adeoque $E^2=\frac{a^2+a}{4}$, et $E=\frac{\sqrt{(a^2+a)}}{2}$.

Unde etiam tam in ellipsi quam in hyperbola *duos focos* a centro aequidistantes esse patet, nempe pro $\pm u=\pm E$ fit $y^2=\frac{1}{4}$.

Ex E et a, distantia foci a vertice quoque prodit, $\frac{a}{2}$ —E in ellipsi, et E $-\frac{a}{2}$ in hyperbola.

Sed parameter etiam (nempe unitas ad extractionem radicis requisita, ut $y=\sqrt{(x-\frac{x^2}{\mp a})}$ prodeat, innotescit: nam *pro ellipsi* erat $\frac{1}{4}=\frac{a}{4}-\frac{E^2}{a}$, adeoque $1=a-\frac{4E^2}{a}=\frac{a^2-4E^2}{a}$; in *hyperbola* vero erat $\frac{1}{4}=\frac{E^2}{a}-\frac{a}{4}$ adeoque $1=\frac{4E^2}{a}-a=\frac{4E^2-a^2}{a}$.

Atque manifesto a et E, aut a et unitatem, sive E et unitatem, utcunque ponere licet; dummodo pro ellipsi $\frac{a}{2}>E$, et pro hyperbola $E>\frac{a}{2}$ sit; secus enim pro ellipsi $\frac{a^2-4E^2}{a}$, et pro hyperbola $\frac{4E^2-a^2}{a}$, (nempe unitas) $+$va non erit: ex gr. si pro ellipsi poneretur $E>\frac{a}{2}$, erit $4E^2>4(\frac{a}{2})^2$, adeoque $>a^2$.

Si a et unitas ponatur: prodit in ellipsi $E=\frac{\sqrt{(a^2-a)}}{2}$ (radice quoad unitatem positam accepta). Ita si E et unitas posita fuerint, prodit a; nam $4E^2=a^2-a$, et ex aequatione quadratica $a^2-a-4E^2=o$, fit $a=\frac{1}{2}$ $\pm\sqrt{(\frac{1}{4}+4E^2)}$, ubi signum superius accipi debet, nam $\sqrt{(\frac{1}{4}+4E^2)} > \frac{1}{2}$ est, nec aliud asseritur, nisi quod expressionis valor aliquis $= a$ sit (Tom. I. p.107).

In parabola, si (Fig. 115) f in peripheria centri 𝔓 radii 𝔓f, ipsi f omni dabili propius veniat, unitas (p. 116) $\frown o$; adeoque $y = \sqrt{x} \frown o$ pro quovis dato x, et limes geometricus parabolae recta f𝔓 est, donec libuerit per 𝔓 continuata.

In ellipsi; si E $\frown o$, tum $1 = \frac{a^2-4E^2}{a} \frown a$, et ex $y = \sqrt{(x-\frac{x^2}{a})}$, pro $E = o$ fit $y = \sqrt{(x-x^2)}$, aequatio circuli (pro diametro 1). Ita si ponatur $\frac{a^2-4E^2}{a} = a$, fiet $a^2 - 4E^2 = a^2$, et hinc $4E^2 = o$, adeoque $E = o$. Est porro in ellipsi $E < \frac{a}{2}$, at si $\frac{a}{2} - E = \omega \frown o$, tum $1 = \frac{a^2-4E^2}{a} \frown o$; nam $E = \frac{a}{2} - \omega$, et $4E^2 = 4(\frac{a^2}{4} - a\omega + \omega^2) = a^2 - 4a\omega + 4\omega^2$, quod $\frown a^2$. Si igitur aut manente E decrescat a, aut manente a crescat E, dummodo $\omega \frown o$; fiet y tanquam radix quoad unitatem omni dabili minorem, pro quovis x (nempe quovis puncto ipsius a), dabili quovis minor, adeoque limes geometricus erit recta ipsa a; nempe tum $\sqrt{(x-\frac{x^2}{a})} \frown o$, et limes o est pro quovis y.

In hyperbola est $E > \frac{a}{2}$, et si $E - \frac{a}{2} \frown o$, sit $E = \frac{a}{2} + \omega$; erit $4E^2 = a^2 + 4a\omega + 4\omega^2$, quod $\frown a^2$, adeoque $1 = \frac{4E^2 - a^2}{a} \frown (\frac{o}{a} = o)$. Si igitur manente E crescat *a* vel manente *a* decrescat E, dummodo $\omega \frown o$; fiet y tanquam radix quoad $1 \frown o$, omni dabili minor, nempe $\sqrt{(x + \frac{x^2}{a})} \frown o$; et limes geometricus recta erit in linea abscissarum ab 𝔉 ad laevam et ab f ad dextram. (Fig.114)

Si vero ponatur $1 = \frac{4E^2 - a^2}{a} = a$, erit $4E^2 - a^2 = a^2$, atque hinc $4E^2 = 2a^2$, et pro posito a, erit $E^2 = \frac{a^2}{2} = \frac{1}{2}$, et $E = \frac{1}{\sqrt{2}}$; pro E posito autem erit $a^2 = 2E^2 = 1$. Patet etiam $(E^2 = \frac{a^2}{2}) = \frac{1}{2}$ (pro $a=1$) dare $E > (\frac{a}{2} = \frac{1}{2})$.

Notandum autem est: quod tam in ellipsi summa radiorum vectorum e duobus focis ad idem punctum ductorum, quam in *hyperbola* differentia minoris a majore sit $=a$; etiam dum limes geometricus recta est, inter 𝔉 et f in ellipsi, et in hyperbola recta ∞ta per 𝔉, f, excepta parte 𝔉f. De quo statim

V. *Radii vectores.*

In parabola (Fig. 116) e △lo rectangulo, cujus catheti sunt y, et $\frac{1}{4} - x$ (vel $x - \frac{1}{4}$), est radius vector r hypotenusa $=\sqrt{[y^2 + (\pm\frac{1}{4}\mp x)^2]}=\sqrt{(x+\frac{1}{16}-\frac{x}{2}+x^2)} = \sqrt{(x^2+\frac{x}{2}+\frac{1}{16})} = x+\frac{1}{4}$; nempe si *quarta pars parametri addatur abscissae, prodit radius vector in parabola.*

In *ellipsi* et *hyperbola* (Fig. 114) radii vectores R, r, ad idem punctum 𝔭 e duobus focis 𝔉, 𝔣, sunt hypotenusae $\triangle$lorum rectangulorum, quorum y ordinata puncti 𝔭, cathetus communis, et alterutrius cathetus alter E—u, vel u—E alterius u+E est; patet hoc casibus percursis, ordinata ipsius 𝔭 sive intra focos, sive in aliquem, sive ad latus alterutrum ceciderit, dummodo E hic semper +ve intelligatur, imo u quoque etsi —ve situm fuerit, +ve accipiatur; quod fieri potest, quum u praeterea heic nonnisi in y^2, et quidem in potentia 2da, adeoque +ve occurrat.

Itaque alteruter ipsorum R et r (tam in ellipsi quam in hyperbola), est $\sqrt{(y^2+(u-E)^2)}$, nam $(u-E)^2=(E-u)^2$; alter autem est $\sqrt{(y^2+(u+E)^2)}$. Unde substituendo in ellipsi $\frac{a}{4}-\frac{u^2}{a}$ ipsi y^2, et $\frac{a^2-a}{4}$ ipsi E^2, atque in hyperbola $\frac{u^2}{a}-\frac{a}{4}$ ipsi y^2, et $\frac{a^2+a}{4}$ ipsi E^2, prodit uterque radius vector in utraque.

Nempe *in ellipsi* $r=\sqrt{(\frac{a}{4}-\frac{u^2}{a}+u^2-2uE+E^2)}=\sqrt{(\frac{a}{4}-\frac{u^2}{a}+u^2-2uE+\frac{a^2-a}{4})} = \sqrt{(\frac{a^2}{4}-\frac{u^2}{a}+u^2-2uE)}$, quod est $=\pm$

$\frac{a}{2} \mp \frac{2uE}{a}$; nam hoc per se multiplicatum fit $\frac{a^2}{4}+\frac{4u^2E^2}{a^2}-2uE=\frac{a^2}{4}+\frac{4u^2a^2}{4a^2}-\frac{4u^2a}{4a^2}-2uE$ $=\frac{a^2}{4}+u^2-\frac{u^2}{a}-2uE$. Ita $R=\sqrt{}(\frac{a}{4}-\frac{u^2}{a}$ $+u^2+2uE+E^2)$, quod eodem modo prodit $=\pm\frac{a}{2} \pm \frac{2uE}{a}$; ubi in utroque casu signum superius accipi debet: nam si inferius signum accipiatur pro ipso r, $-\frac{a}{2}+\frac{2uE'}{a}$ $-$ esset, quia $2E < a$, adeoque $\frac{2Eu}{a} < u$, u vero non $> \frac{a}{2}$ est. Pro R item signa superiora accipi debent, nempe $R=\frac{a}{2}+\frac{2uE}{a}$; quia $-\frac{a}{2}-\frac{2uE}{a}$ pariter $-$vum est, radii vectores autem $+$ve accipiuntur.

Est igitur $R+r=\frac{a}{2}+\frac{2uE}{a}+\frac{a}{2}-\frac{2uE}{a}$ $=a$.

Pro hyperbola pariter $R=\frac{a}{2}+\frac{2uE}{a}$, et $r=\frac{2uE}{a}-\frac{a}{2}$, atque $R-r=a$; nam ibi pro r signum inferius accipiendum est, nempe e duabus radicibus quum una certo valeat, rejecta quae non valet, altera retinenda; nimirum $\frac{a}{2}-\frac{2uE}{a}$ esse nequit; quia tum in Δlo, cujus basis 2E est, et reliqua latera R et r sunt, esset $R+r=a$, et summa duorum laterum esset tertio 2E minor, nam 2E in hyperbola est $>a$.

Coroll. Hinc etiam in ellipsi radius vector ad extremitatem axeos minoris, est $=\frac{a}{2}$: efficit enim cum altero radio vectore dimidium axis majoris, suntque hi radii vectores aequales, propter duo $\triangle$la rectangula, quorum axis minor cathetus communis, et alter cathetus E (ad dextram laevamque) est.

Hinc ab extremitate axeos minoris, tanquam centro, radio ipsi $\frac{a}{2}$ aequali, foci in axe majori determinantur.

VI. Ex his sequitur *constructio sectionum conicarum*: prius *constructio geometrica* (sensu stricto) *puncti cujusvis (omnium nunquam)*; tum constructio mechanica motu continuo.

Nempe 1mo praeterquam quod quodvis punctum lineae per $y=\surd x$ determinatae, a directrice et foco aequaliter distet; ac quodvis punctum p lineae per $y=\surd(x-\frac{x^2}{a})$ determinatae tale sit, ut $\mathfrak{F}$p+$\mathfrak{f}$p$=a$ sit; necnon quodvis punctum p lineae per $y=\surd(x+\frac{x^2}{a})$ determinatae tale sit, ut $\mathfrak{F}$p—$\mathfrak{f}$p$=a$ sit, ($\mathfrak{F}$ et $\mathfrak{f}$ focos denotantibus, et foco qui in eandem respectu $\perp$ris e centro c ad axem positae plagam cum p cadit, in hyperbola, $\mathfrak{f}$ dicto): nec ullum aliud punctum tale est; nempe quodvis punctum q extra parabolam, directrici propius quam foco est, et quodvis intra parabolam a directrice remotius quam a foco est; et quodvis punctum $\mathfrak{q}$ extra ellipsim tale est, ut $\mathfrak{F}\mathfrak{q}+\mathfrak{f}\mathfrak{q}>a$ sit, ac quodvis $\mathfrak{q}'$ intra ellipsin tale est, ut $\mathfrak{F}\mathfrak{q}'+\mathfrak{f}\mathfrak{q}'<a$ sit; atque quodvis punctum $\mathfrak{q}$ extra hyperbolam tale est, ut $\mathfrak{F}\mathfrak{q}-\mathfrak{f}\mathfrak{q}<a$ sit, et quodvis $\mathfrak{q}'$ intra hyperbolam tale est, ut $\mathfrak{F}\mathfrak{q}'-\mathfrak{f}\mathfrak{q}'>a$ sit, si $\mathfrak{q}$, $\mathfrak{q}'$ cum $\mathfrak{f}$ (ut supra de $\mathfrak{p}$ dictum est) in eandem plagam cadant. si vero $\mathfrak{q}$ in $\perp$rem e centro cadat, tum $\mathfrak{F}\mathfrak{q}-\mathfrak{f}\mathfrak{q}=o$.

1. Nam *quoad parabolam* (Fig 117) sit $\mathfrak{q}\mathfrak{b}$ $\perp$ris ad axem; cadet $\mathfrak{b}$ aut ab $\mathfrak{a}$ ad dextram aut ad laevam; si prius, tum in $\perp$ri illa aliquod punctum $\mathfrak{k}$ parabolae erit; atque manifesto distantia ipsius $\mathfrak{q}$ a directrice est $\mathfrak{b}\mathfrak{d}=\mathfrak{k}\mathfrak{f}<\mathfrak{q}\mathfrak{f}$. Si vero $\mathfrak{q}$ in $\mathfrak{q}''$ vel $\mathfrak{q}'''$ fuerit; distantia ipsius $\mathfrak{q}''$ a directrice est $\mathfrak{b}''\mathfrak{d}<\mathfrak{a}\mathfrak{f}<\mathfrak{b}''\mathfrak{f}<\mathfrak{q}''\mathfrak{f}$; ita si $\mathfrak{q}$ in $\mathfrak{q}'''$ cadat, distantia ipsius $\mathfrak{q}'''$ a directrice est $\mathfrak{b}'''\mathfrak{d}<\mathfrak{b}'''\mathfrak{f}<\mathfrak{q}'''\mathfrak{f}$. Si vero $\mathfrak{q}'$ intra parabolam fuerit, in $\perp$ri $\widetilde{\mathfrak{b}'\mathfrak{q}'}$ gaudet parabola puncto $\mathfrak{k}'$, et distantia ipsius $\mathfrak{q}'$ a directrice est $\mathfrak{b}'\mathfrak{d}=\mathfrak{k}'\mathfrak{f}>\mathfrak{q}'\mathfrak{f}$.

2. *Quoad ellipsin* (Fig 118): si $\mathfrak{q}$ extus cadat; est $R'+r'>(R+r=a)$. Si vero $\mathfrak{q}'$ intus cadat; tum $R+r>R'+r'$, adeoque $a>R'+r'$.

3. *Quoad hyperbolam* (Fig 119): Si $\mathfrak{q}$ extus sit; recta ex $\mathfrak{q}$ ad $\mathfrak{f}$ secat hyperbolam in $\mathfrak{p}$; adeoque $\mathfrak{F}\mathfrak{p}-\mathfrak{f}\mathfrak{p}=a$. Fiant centris $\mathfrak{q}$, $\mathfrak{p}$, radiis $\mathfrak{q}\mathfrak{f}$, $\mathfrak{p}\mathfrak{f}$ circuli; cadet peripheria radii $\mathfrak{q}\mathfrak{f}$ extra alteram; adeoque $\mathfrak{F}\mathfrak{k}<\mathfrak{F}\mathfrak{m}<(\mathfrak{F}\mathfrak{n}=a)$; est vero $\mathfrak{F}\mathfrak{k}=\mathfrak{F}\mathfrak{q}-\mathfrak{f}\mathfrak{q}$, quod igitur $<a$ est. Si vero $\mathfrak{q}'$ intus cadat, demittatur ex $\mathfrak{q}'$ $\perp$ris ad axem; gaudebit hyperbola in hac puncto $\mathfrak{p}$; describantur centris $\mathfrak{p}$, $\mathfrak{q}'$, radiis $\mathfrak{p}\mathfrak{f}$, $\mathfrak{q}'\mathfrak{f}$ circuli; cadet manifesto peripheria centri $\mathfrak{p}$ infra alteram; eritque $\mathfrak{F}\mathfrak{p}-\mathfrak{f}\mathfrak{p}=\mathfrak{F}\mathfrak{m}=a<\mathfrak{F}\mathfrak{g}<\mathfrak{F}\mathfrak{i}$; est vero $\mathfrak{F}\mathfrak{i}=\mathfrak{F}\mathfrak{q}'-\mathfrak{f}\mathfrak{q}'$, quod ergo $>a$ est.

2do. Sed etiam quodvis punctum $\mathfrak{p}$ a certa recta D et certo puncto $\mathfrak{f}$ aequaliter distans, punctum parabolae est, per directricem D et focum f determinatae; et quodvis tale punctum pro punctis 𝔉, f, ut sit 𝔭𝔉+𝔭f$=a$, (nisi 𝔭, 𝔉, f in recta sint) punctum ellipseos est per focos 𝔉, f et axem majorem a determinatae; atque quodvis tale punctum 𝔭 pro punctis 𝔉, f, ut sit 𝔉𝔭 —f𝔭$=a$, punctum hyperbolae est, per focos 𝔉,f et axem majorem a determinatae.

Nam *quoad parabolam*: sint (Fig 120) 𝔭'𝔭, f𝔡, ⊥res ad D, et 𝔭𝔭'=𝔭f; fiat fa=a𝔡, atque parabola per aequationem $y=\sqrt{x}$ (radice quoad 4fa=1=2f𝔡 accepta).

Quoad ellipsim hyperbolamque autem, datis punctis 𝔉, f, ut focis consideratis, ex a et $\frac{\mathfrak{F}\mathrm{f}}{2}=\mathrm{E}$ (per p.119) reperitur unitas, quoad quam pro abscissis u e meditullio ipsius 𝔉f acceptis, $y=\sqrt{\left(\frac{a}{4}-\frac{u^2}{a}\right)}$ dabit *ellipsin*, et $y=\sqrt{\left(\frac{u^2}{a}-\frac{a}{4}\right)}$ *hyperbolam*.

3tio. Ex his praeter jam dicta, constructiones sequentes intelliguntur. Si (Fig. 120) ad axem parabolae sit ad distantiam $\frac{1}{4}$ ad laevam a vertice a ⊥ris, (*directrix* dicta); et erigatur e fine cujusvis x, ad axem ⊥ris P: si ista ⊥ris centro in foco f (ad distantiam $\frac{1}{4}$ e vertice ad dextram accepto), radio $x+\frac{1}{4}$ (utpote distantia ⊥ris P a directrice) secetur; erit 𝔭 punctum sectionis punctum parabolae; et omnia puncta ita generata ejusdem parabolae erunt (per 1mum). Patet (F.115) centro 𝔓 radio

$\mathfrak{P}\mathfrak{f}$ scripto circulo, tangentem in quovis puncto $\mathfrak{f}$ talem directricem praebere, a qua $\mathfrak{P}$ tantum quam ab $\mathfrak{f}$ distet; sed si $\mathfrak{f}$ ipsi $\mathfrak{f}$ dabili quovis propius venit, ⊥ris ex $\mathfrak{f}$ ad tangentem per $\mathfrak{f}$ ductam, adeoque et unitas (nempe duplum ⊥ris dictae) $\frown$ o; atque in tali parabola $y\ \sqrt{}\ x$ (radice quoad dictam unitatem accepta) fiet pro quovis certo x, dato quovis minor.

Ita *pro ellipsi*, (Fig121) sit $\mathfrak{a}\mathfrak{F}=\mathfrak{f}\mathfrak{b}$. et moveatur punctum $\mathfrak{p}$ ex $\mathfrak{F}$ usque in $\mathfrak{f}$, dicaturque R recta ab $\mathfrak{a}$ usque in $\mathfrak{p}$, et r dicatur recta a $\mathfrak{p}$ usque in $\mathfrak{b}$; erit $\mathfrak{a}\mathfrak{p}+\mathfrak{p}\mathfrak{b}=a$; atque arcus centro $\mathfrak{F}$ radio R scriptus secabit arcum centro $\mathfrak{f}$ radio r scriptum; ac punctum sectionis, punctum ellipseos erit, et omnia ita generata ejusdem ellipseos erunt (p. 123---).

Pro *hyperbola* autem (Fig 122) si $\mathfrak{F}\mathfrak{a}=\mathfrak{f}\mathfrak{b}$ fuerit, et moveatur punctum $\mathfrak{P}$ ex $\mathfrak{F}$ ad laevam, et $\mathfrak{p}$ ad dextram ex $\mathfrak{f}$, utrumque in axe, temporibus aequalibus vias aequales describendo: dicaturque R recta $\mathfrak{a}\mathfrak{P}$, et r recta $\mathfrak{a}\mathfrak{p}$, (puncta $\mathfrak{P}, \mathfrak{p}$ simultanea intelligendo); erit $\mathfrak{a}\mathfrak{p}-\mathfrak{a}\mathfrak{P}=\mathfrak{a}\mathfrak{f}-\mathfrak{a}\mathfrak{F}=a$; itaque arcus e centro $\mathfrak{F}$ radio $\mathfrak{a}\mathfrak{P}$ scriptus secabitur per arcum centro $\mathfrak{f}$ radio $\mathfrak{a}\mathfrak{p}$ factum; eritque punctum sectionis, ubi $r-R=a$, punctum hyperbolae, et omnia ita generata ejusdem hyperbolae erunt (p. 123---).

4to. Ex (113) adhuc alia constructio geometrica quotvis punctorum hyperbolae (Fig. 123) ex uno sequitur.

Nempe inter asymptotas, per punctum hyperbolae utcunque ducatur recta; erit $\alpha=\alpha''$; et quodvis punctum novum item novum praebet. Ratio est sequ. $\alpha : \beta=\alpha+\alpha' : \gamma'$ (p.21--)

$$\alpha'+\alpha'' : \beta'= \alpha'' : \gamma$$

Hinc $\alpha(\alpha'+\alpha'') : \alpha\alpha''+\alpha'\alpha''=\beta\beta' : \gamma\gamma'$; sed $\beta\beta$

$=\gamma\gamma' = \frac{a}{4}$ (p.113);ubi γ ipsius $z-y$ et γ' ipsius $z+y$ vicem subit; itaque $\alpha\alpha'+\alpha\alpha''=\alpha\alpha''+\alpha'\alpha''$; adeoque $\alpha\alpha'=\alpha'\alpha''$: et hinc $\alpha=\alpha''$.

Imo (Fig.124) alia hinc constructio punctorum quorumvis hyperbolae sequitur, abscissis in asymptota e centro sumtis, et ordinatis asymptotae alteri parallelis, cui etiam q ex vertice ‖ est, (quod potentia hyperbolae vocari solet).

Per $\triangle$la aequicrura et paralleias, est $\mathfrak{B}\mathfrak{D}$ $=\mathfrak{D}\mathfrak{C}$; et $q=\frac{1}{2}$ $\mathfrak{C}\mathfrak{E}=\frac{1}{2}$ $\mathfrak{C}\mathfrak{B}$.

Sit porro e vertice ipsius y ‖ la $\mathfrak{ab}$ ad x; erit $\beta : y = \frac{\sqrt{a}}{2} : q$, et $\beta' : x' = \mathfrak{A}\mathfrak{B} : \mathfrak{A}\mathfrak{D}$, id est $\beta' : x' = \frac{\sqrt{a}}{2} : q$; hinc $\beta\beta' : (x'y = xy$, quia propter Λlos p aequales $x = \mathfrak{ab} = x') = \frac{a}{4} : q^2$; et quia $\beta\beta' = \frac{a}{4}$ (p.113), est $xy = q^2$, atque $y = \frac{q^2}{x}$; adeoque si alia abscissa fuerit X ejusque ordinata sit Y, est $y : Y = X : x$, idest ordinatae sunt inverse uti abscissae.

5to. *Ex his ingeniosae sectionum conicarum constructiones mechanicae.*

Parabola dimidia describetur: si (Fig.125) norma $\mathfrak{A}\mathfrak{B}\mathfrak{C}$ feratur juxta directricem, atque plumbago intra filum $\mathfrak{f}+\mathfrak{a}\mathfrak{A}$ utramque partem ad extremitates $\mathfrak{f}$ et $\mathfrak{A}$ fixam tendens, normae durante motu sempor appressa sit. Erit $\mathfrak{a}$ vertex parabolae; nam ab $\mathfrak{f}$ et a directrice aequaliter distat; atque et postea tantum accedet distantiae priori plumbaginis a directrice, quantum e latere normae denudabitur, et tantum etiam ipsi $\mathfrak{af}$ accedet.

Quodcunque fili punctum $\mathfrak{p}$ fuerit ultra $\mathfrak{a}$; sit $\mathfrak{pa}=\lambda$, erit filum ex $\mathfrak{p}$ usque $\mathfrak{f}$ tensum $=\frac{1}{4}+\lambda$; eritque haec eadem pars lateris normae nuda; et quum radius vector ab $\mathfrak{f}$ ad extremitatem ordinatae cuivis x respondentis sit $\frac{1}{4}+x$; manifesto $x=\lambda$ inde a zero crescente, norma juxta directricem promovetur. Pariter et alterum parabolae dimidium describitur.

Ellipsis describitur (Fig126) sit filum recta $\mathfrak{Ff}$ longius, extremitatibus in $\mathfrak{F}$, $\mathfrak{f}$ fixum, et summae rectarum $\mathfrak{aF}$ et $\mathfrak{af}$ aequale, dicaturque summa ista a; describetur *ellipsis* plumbagine prius in $\mathfrak{a}$ posita, si dein ad omnia fili puncta $\mathfrak{p}$ sequentia feratur, filumque e quovis loco ad puncta fixa $\mathfrak{F}$, $\mathfrak{f}$ tendatur, uti $\mathfrak{pF}+\mathfrak{pf}=a$ est. Quaevis recta enim quae non $<\mathfrak{aF}$, nec $>\mathfrak{af}$, omnino in filo accipi, atque filum ex illo puncto $\mathfrak{p}$ ad puncta fixa $\mathfrak{F}$ et $\mathfrak{f}$ tensum, praebet $\mathfrak{pF}+\mathfrak{pf}=a$; itaque punctum ellipseos est, et quodvis ellipseos punctum (per dicta) tale $\mathfrak{p}$ est, nec ullum aliud datur.

Quoad *hyperbolam* sit filum (Fig 127) $\mathfrak{Fa}+\mathfrak{ba}=k+\gamma$, extremitate una in $\mathfrak{F}$ fixum, et altera in puncto $\mathfrak{b}$ regulae $\mathfrak{bf}$ in $\mathfrak{f}$ fixae, et ponatur plumbago ad punctum $\mathfrak{a}$ fili ex $\mathfrak{a}$ ad puncta $\mathfrak{F}$ et $\mathfrak{b}$ ita tensi, ut partes $\mathfrak{ba}$, $\mathfrak{Fa}$ regulae adjaceant; atque tum moveatur regula circa $\mathfrak{f}$, et interea plumbago regulae appressa filum e quovis ejusdem puncto ad puncta $\mathfrak{b}$ et $\mathfrak{F}$ tendat: describet plumbago quadrantem hyperbolae, in quantum regula omni dabili longior concipi potest; atque eadem constructione et quadrans inferior, et regula in $\mathfrak{F}$ fixa, filique extremitate in f fixa, altera hyperbolae pars quoque prodit. Est nempe distantiae puncti a ab $\mathfrak{F}$ differentia a distantia puncti f ab eodem a, $= a\mathfrak{f} - a\mathfrak{F} = \beta - \gamma$, quod sit α; postea vero mota regula circa f, si plumbago sit in p, atque $\mathfrak{b}'\mathfrak{p}$ sit $= k - \omega$, erit $\mathfrak{F}\mathfrak{p} = \gamma + \omega$, et $\mathfrak{p}\mathfrak{f} = \beta + \omega$; consequ. $\mathfrak{f}\mathfrak{p} - \mathfrak{p}\mathfrak{F} = \beta + \omega - \gamma - \omega = \beta - \gamma = \alpha$. Itaque p punctum hyperbolae erit. Datur autem pro quovis ω talis angulus regulae circa f motae, ut p prodeat: nam $\gamma + \omega$ datur, regulam filumque enim utvis magna accipere licet, adeoque e filo ipsi γ adhuc ω addi potest; tum vero regulae pars k longitudine eadem (nempe ω) denudabitur, adeoque fiet $\mathfrak{F}\mathfrak{p} = \gamma + \omega$, fp vero $= \beta + \omega$; atque basis constans $\beta + \gamma$, et nova duo latera $\gamma + \omega$ et $\beta + \omega$ talia sunt, ut $\triangle$lum constituant, quum summa binorum quorumvis tertio major sit. Facile etiam patet, crescente ω crescere angulum regulae ad f.

VII. *Tangens, subtangens, normalisque et subnormalis in singulis.*

Ad quodvis punctum p sectionis conicae cujusvis, (quam ad quodvis ejus punctum curvam esse demonstrari potest; qualis est parabola, ellipsis, hyperbola et circulus, non autem sectionis plani per apicem euntis), tangens datur (Tom. I. p. 258); eaque est recta bisecans angulum radiorum vectorum: notando, quod in parabola alter radius vector, quasi e foco in axe in ∞ tum abeunte ad p ductus, adeoque axi parallelus concipiatur, in ellipsi autem alteruter radiorum vectorum continuetur extra ellipsin, ultra punctum ejus ad quod e focis uterque ducitur, atque angulus quem continuatio ista cum altero radio vectore (non continuato) facit, bisectus tangentem in eo puncto praebeat.

Si vero tangens ad sectionem conicam ex aliquo puncto $\mathfrak{P}$ mittenda sit: tum circulus centro $\mathfrak{P}$ radio usque ad focum proximum extenso, secetur ex altero foco, radio a in ellipsi et hyperbola, in parabola vero directrix, tanquam arcus radii vectoris ∞ti, secetur per arcum priorem, atque tum e foco ipso ducta ad punctum sectionis recta bisecetur: erit $\perp$ris e puncto bisectionis erecta, *tangens quaesita*.

§. 1. *Quoad parabolam:* (Fig. 128) sit tangens ad punctum $\mathfrak{p}$ ducenda: radius vector pro foco $\mathfrak{f}$ est $\mathfrak{fp}$, et alter axi parallelus est $\widetilde{\mathfrak{pp}'}$, ac $\mathfrak{fp}=\mathfrak{pp}'$. Si jam $\wedge\,\mathfrak{fpp}'$ bisecetur, fiatque $\mathfrak{p}'\mathfrak{pk}=\mathfrak{fpk}=v$; erit $\mathfrak{pk}\perp\mathfrak{fp}'$, et $\mathfrak{fk}=\mathfrak{kp}'$, ac quodvis punctum rectae $\widetilde{\mathfrak{pk}}$ (ex gr. $\mathfrak{q}$) a punctis $\mathfrak{p}'$ et $\mathfrak{f}$ aequidistat. Itaque $\mathfrak{qq}'$ $\perp$ris ad directricem, est $<(\mathfrak{qp}'=\mathfrak{qf})$; (quocunque cadat $\mathfrak{q}$: unde quodvis tale punctum $\mathfrak{q}$ extra parabolam cadit; nam si in lineam ipsam caderet, tum $\mathfrak{qq}'=\mathfrak{qf}$ esset: si vero intus caderet, tum $\mathfrak{qf}<\mathfrak{qq}'$ esset (p.123).

Si vero (Fig. 129) ex $\mathfrak{P}$ puncto extra parabolam sit tangens ad eam mittenda: $\mathfrak{PP}'$ $\perp$ris ad directricem est $<\mathfrak{Pf}$, (p.123); itaque e centro $\mathfrak{P}$ radio $\mathfrak{Pf}$ directrix certo secabitur in duobus punctis $\mathfrak{a}$ et $\mathfrak{a}'$, a $\perp$ri $\mathfrak{PP}'$ utrinque aequaliter distantibus; fiat recta $\mathfrak{fa}$ (vel $\mathfrak{fa}'$); recta per meditullium $\mathfrak{k}$ hujus et punctum datum $\mathfrak{P}$ ducta tangens erit. Nam $\mathfrak{Pa}=\mathfrak{Pf}$, itaque $\mathfrak{kP}$ est $\perp$ris ad $\mathfrak{fa}$; consequenter quodvis punctum ipsius $\widetilde{\mathfrak{kP}}$ a punctis $\mathfrak{a}$ et $\mathfrak{f}$ aequaliter distat; et si $\perp$ris ex $\mathfrak{a}$ ad directricem erecta secuerit alicubi in $\mathfrak{p}$ rectam $\widetilde{\mathfrak{kP}}$, $\mathfrak{p}$ punctum parabolae erit, quia a directrice et foco aequaliter distabit. Secari autem rectam $\widetilde{\mathfrak{kP}}$ per $\perp$rem ad directricem ex $\mathfrak{a}$ erectam necesse est: nam $\mathfrak{a}$

Lris e puncto f rectae af erecta (∞ ta), quamvis rectam per punctum a rectae af ductam (∞ tam), praeter eam, quae ad af $\llcorner$ris est, secat, itaque et eam, quae ex a ad a𝔓′ Lris est, quia eadem ad af Lris non est.
Fiet igitur sectio, et punctum illud parabolae erit; reliqua vero extra parabolam cadent.

Si 𝔓 plane in f cadat; tum ex f ad af Lris erigitur; quod etiam de ellipsi et hyperbola notandum est: uti id, quod inter tangentem et lineam tactam nulla recta e puncto tactus duci queat (per Tom. I. p. 319 -{-), itaque ad nullum punctum angulo gaudeat (Tom. I. p. 457 -{-), adeoque curva sit.

Subtangens s est $=$fg$-$fm (Fig. 128) : sed fg$=$pp′, quia $\triangle$ fgf$=\triangle$ fp′p; nam ff$=$fp′ et propter pp′ ∥ fd anguli alterni ad p′ et f et ad p et g sunt aequales. Consequ. fg $=$ radio vectori $= x + \frac{1}{4}$ (p.119). Est autem fm$=\frac{1}{4} - x$;

itaque $s = x + \frac{1}{4} - (\frac{1}{4} - x) = 2x$. Si ordinata pm ultra focum caderet; tum fm$= x - \frac{1}{4}$;

et $s=$fg$+$fm$= x + \frac{1}{4} + x - \frac{1}{4} = 2x$.

Unde in parabola ad p tangens pg ducetur; si ad axem demittatur $\llcorner$ris pm, et ag$=$am$=x$ fiat.

Normalis N, id est pn nempe $\llcorner$ris ex p ad tangentem, si secuerit axem in n; dicitur mn seu v *subnormalis*, pg autem pro tangentis quantitate accipitur: quod etiam cum quantitate tangentis arcus circularis trigonometrica convenire facile patet, si secans cd pro linea abscissarum e centro c accipiatur, (Fig. 130); et quidem quasi prius in f fuisset abscissarum origo, et inde ad centrum translata fuisset: erit extremitati arcus fa respondens ordinata y=ab, et subtangens puncto a respondens erit bd, atque tangens ad eadem, quae sensu trigonometrico arcui af=fa respondet: et facile patet, quod si f′ pro f ponatur, y' fiat ab′, et subtangens bd′, atque tangens ad′ = va, ut in trigonometria.

Est vero (Fig. 128) △ pgn ad p rectangulum, atque pm=y est ⊥ris ad gn; unde mn : y $= y : s$, adeoque $v = \frac{y^2}{s} = \frac{x}{2x} = \frac{1}{2}$; consequ. *subnormalis in parabola est dimidiae parametro aequalis*.

Ex iisdem △lis rectangulis prodit tangens, normalisque: ex gr. *tangens* (ad punctum p et axem $\widetilde{\text{af}}$) nempe recta pg=$\sqrt{(y^2+s^2)}$ = $\sqrt{(x+4x^2)} = \sqrt{4x(\frac{1}{4}+x)}$, id est *tangens in parabola* est radix quadrata e quadrupla abscissa per radium vectorem multiplicata.

In ellipsi (Fig. 131) erit fq ad punctum p *tangens*, si alteruter radiorum vectorum ex:-r. fp continuetur, atque fq angulum ap𝔉 bisecitt sit enim pa=p𝔉, adeoque af=a=p𝔉+pf; seg que f meditullium rectae a𝔉; erit recta pf angulum ap𝔉 bisecans, ⊥ris ad $\widetilde{\text{a𝔉}}$; adeoque quodvis punctum q ipsius pf a punctis a et 𝔉 aequaliter distat. Hinc autem propter aq=q𝔉, et aq+qf>(af=a), est 𝔉q+qf>a; itaque quodvis q extra ellipsin est (p.123).

Si (Fig. 132) e puncto q sit tangens mittenda: sit arcus centro q radio q𝔉 (pro q𝔉 non>fq), et hic secetur in $\mathfrak{d}$ per arcum centro $\mathfrak{f}$ radio a, fiatque in $\mathfrak{k}$ meditullium rectae $\mathfrak{dF}$: erit $\widetilde{\mathfrak{qk}}$ tangens, et punctum tactus erit, ubi $\mathfrak{df}$ secat ipsam $\mathfrak{qk}$; nam $\mathfrak{pd}=\mathfrak{pF}$, et $\mathfrak{pd}+\mathfrak{pf}=a=\mathfrak{pF}+\mathfrak{pf}$; est igitur $\mathfrak{p}$ punctum ellipseos (p.123); quodvis aliud punctum autem rectae $\widetilde{\mathfrak{qk}}$ extra ellipsin cadit (ut antea). Sectionem fieri autem statim, ubi ad hyperbolam tangens mittetur, demonstrabitur.

Subnormalis (Fig. 131) $\mathfrak{Pn}$ reperitur ita: rectae $\mathfrak{Fk}$ et normalis $\mathfrak{pn}$ sunt ad tangentem $\mathfrak{kq}$ $\perp$res; itaque $\triangle$li $\mathfrak{faF}$ crura $\mathfrak{fa}$, $\mathfrak{fF}$ secantur per $\mathfrak{pn}$ parallelam ad $\triangle$li basim $\mathfrak{aF}$; atque hinc $\mathfrak{fF}:\mathfrak{fa}=\mathfrak{fn}:\mathfrak{fp}$, id est $2E:a=\mathfrak{fn}:R$ (denotante E eccentricitatem, et R radium vectorem ex $\mathfrak{f}$).

Erat (p.121) $R=\frac{a}{2}+\frac{2uE}{a}$, atque $E^2=\frac{a^2-a'}{4}$,

atque hinc $\mathfrak{fn}=\frac{2ER}{a}=E+\frac{4E^2u}{a^2}=E+u-\frac{u}{a}$.

Est porro subnormalis $\mathfrak{Pn}=\mathfrak{Pf}-\mathfrak{fn}=E+u-\mathfrak{fn}=E+u-(E+u-\frac{u}{a})=\frac{u}{a}$. Si ab altera parte sit ordinata $\mathfrak{pP}$ ultra centrum in plaga $+$va, tum pro $\mathfrak{f}$ ubique alter focus accipiatur.

Subtangens $\mathfrak{iP}$ autem hinc e $\triangle$lo $\mathfrak{ipn}$ ad $\mathfrak{p}$ rectangulo et ordinata $\mathfrak{pP}$ $\perp$ in, facile reperitur; quum si subnormalis ν et subtangens s dicatur, sit $s:y=y:\nu$, adeoque $s=\frac{y^2}{\nu}=$

$$\left(\frac{a}{4}-\frac{u^2}{a}\right):\frac{u}{a}=\frac{a^2-4u^2}{4a}:\frac{u}{a}=\frac{a^2-4u^2}{4u}$$

$=\frac{a^2}{4u}-u$. Unde etiam tangens normalisque facile prodeunt.

In hyperbola (F. 133) recta $\widetilde{\mathfrak{pk}}$ angulum $\mathfrak{fpF}$ bisecans, tangens ad $\mathfrak{p}$ erit. Nam $\mathfrak{Fp}-(\mathfrak{fp}=\mathfrak{pd})=a$, et pro $\wedge\,\mathfrak{dpk}=\mathfrak{fpk}$ est $\mathfrak{pk}\perp\mathfrak{df}$, ac quodvis punctum $\mathfrak{q}$ rectae $\widetilde{\mathfrak{kp}}$ a punctis $\mathfrak{d}$ et $\mathfrak{f}$ aequaliter distat, atque manifesto $\mathfrak{Fq}-\mathfrak{fq}<a$ est: nam centro $\mathfrak{q}$ radio $\mathfrak{qf}=\mathfrak{qd}$ scripto arcu $\mathfrak{fde}$, erit $\mathfrak{Fe}=\mathfrak{Fq}-\mathfrak{fq}<a$; quia si $\mathfrak{Fe}=$ vel $>a$ esset, tum in $\triangle\,\mathfrak{Fdq}$ esset $a+\mathfrak{dq}=$ vel $<$ latere 3tio $\mathfrak{Fq}$. Consequ. quodvis $\mathfrak{q}$ extus cadit (p. 123): nec ullum $\mathfrak{q}$ ex gr. $\mathfrak{q}'$ in curvam venit, nam in $\triangle\,\mathfrak{Fq'd}$ foret $\mathfrak{Fq'}-\mathfrak{q'd}$ vel $\mathfrak{q'd}-\mathfrak{Fq'}=a$, adeoque $a+\mathfrak{q'd}=\mathfrak{Fq'}$ vel $a+\mathfrak{Fq'}=\mathfrak{q'd}$, nempe $\mathfrak{Fd}=a$.

Porro et hic crura $\triangle$li $\mathfrak{Fpn}$ secantur per basi $\mathfrak{pn}$ parallelam $\mathfrak{df}$, (quia $\mathfrak{pn}$, $\mathfrak{ft}$ sunt $\perp$res ad $\mathfrak{kq}$): unde (ut antea) prodit $s=(4u^2-a^2):4u$.

Si vero e puncto $\mathfrak{q}$ extra hyperbolam (et centrum) cadente tangens mittenda sit: fiat (F. 134) centro $\mathfrak{q}$ radio $\mathfrak{qF}$ circulus (pro distantia ipsius $\mathfrak{q}$ a foco $\mathfrak{F}$ haud majore quam ab altero $\mathfrak{f}$); seceturque is in $\mathfrak{d}$ per alterum centro $\mathfrak{f}$ radio a factum; et sit $\mathfrak{k}$ meditullium rectae $\mathfrak{dF}$, secetque $\widetilde{\mathfrak{fd}}$ ipsam $\widetilde{\mathfrak{qk}}$ in $\mathfrak{p}$; erit $\mathfrak{p}$ punctum hyperbolae, et $\widetilde{\mathfrak{qk}}$ tangens ad $\mathfrak{p}$ erit.

Enimvero sectiones dictae tam pro ellipsi (p. 132), quam pro hyperbola evenient: nempe circuli dicti secabunt se invicem in 2 punctis, atque $\widetilde{\mathfrak{fd}}$ et $\widetilde{\mathfrak{qk}}$ secabunt se in ellipsi inter $\mathfrak{d}$ et $\mathfrak{f}$, (F. 136), in hyperbola aut in plaga eadem in qua $\mathfrak{d}$ est, ultra $\mathfrak{d}$ fiet sectio $\mathfrak{p}$ (F. 137), aut in altera plaga (Fig. 137$_*$)

Quoad primum; Si (F. 135) circulus centro $\mathfrak{q}$ radio $\mathfrak{qF}$ dicatur C, et centro $\mathfrak{f}$ radio a scriptus *c* dicatur, ac recta $\mathfrak{fq}$ continuetur, sintque $\mathfrak{g}$, $\mathfrak{i}$ extremitates diametri circuli C: tum si $\mathfrak{fi}<a$ et $a<\mathfrak{fg}$; extremitas radii a e centro f in rectam ig intra C cadet, adeoque c ex C in 2 punctis egredietur.

In ellipsi vero est fq—𝔉q=if<a; nam if <𝔉f (p. 35), et 𝔉f<a; imo si 𝔉 in 𝔥 caderet quoque, est if<𝔥f. Est porro gf>a, nam gf= q𝔉+qf, quod in ellipsi pro q extus cadente est >a (p 123). *In hyperbola* pro q extus cadente, est fq—𝔉q<a (p. 123), nempe if<a, atque in △ 𝔉qf(est 𝔉q+qf>𝔉f>a, adeoque gf>a. Si vero q ab 𝔉 et f aequaliter distet, sectionem unam superius, alteram inferius fieri patet.

Quoad alterum: in ellipsi (Fig. 136) in △f𝔡𝔉 est a>f𝔉, adeoque u<v; si igitur f𝔉 circa 𝔉 moveatur donec in 𝔭𝔉 veniens angulum cum 𝔉𝔡 ipsi u aequalem faciat; 𝔭𝔣 ⊥ 𝔉𝔡 erit. In hyperbola (Fig. 137) a<f𝔉, adeoque u>v; est autem u aut obtusus aut acutus, quia rectus esse nequit; esset enim ∧ f𝔡𝔉 in semicirculo, adeoque q in centro esset, et q𝔣 ∥ f𝔡 esset, nec ullum 𝔭 nec tangens e centro datur. Si vero u obtusus est, tum z acutus est, adeoque 𝔭 supra 𝔡𝔣 cadet. Si u acutus fuerit (F. 137$_*$), moveatur 𝔉f circa 𝔉 deorsum, donec 𝔭𝔉 cum 𝔉𝔡 angulum =u faciat, (nempe v<u): eritque 𝔉𝔭=𝔡𝔭, et 𝔣𝔭 ⊥ 𝔡𝔉.

Est autem (F. 136) 𝔭𝔡=𝔭𝔉, et 𝔭f+𝔭𝔉=a=𝔡𝔣. In (F. 137) est f𝔭—𝔭𝔡=a=f𝔭—𝔭𝔉; quia 𝔭𝔡=𝔭𝔉. In (F. 137$_*$) 𝔭𝔡—𝔭f=a=𝔭𝔉—𝔭f.

VIII. *Quoad explicationem* (p. 109) dictorum, patet angulos v ad tangentem, verticalesque aequales esse. Plura referre instituti ratio vetat.

IX. *Diametri sectionum conicarum.*

Centrum lineae L in plano dicitur 𝔠, si quodcunque punctum 𝔭 ipsius L fuerit, recta $\widetilde{\mathfrak{pc}}$ lineam L adhuc in uno tali puncto q secet: ut 𝔭𝔠=q𝔠 sit.

Quaecunque recta autem bisecans omnes

ipsius L cordas rectae cuipiam *r* parallelas tales, ut nulla pars continua ipsius L sit, in qua cordarum dictarum aliqua haud terminetur; *diameter lineae* L dicitur *sensu latiore*; semperque nisi aliud monitum fuerit, talis diameter intelligatur, (diameter quippe etiam alio sensu venit).

At *sensu stricto*, *diametro gaudere* dicitur L; si ut pro circulo (et ellipsi), recta R circa centrum ubivis in eodem plano mota donec redeat, semper pro dicta *r* accipi queat, saltem nonnisi certus sit rectarum numerus, in quas R tales pervenit, quas pro *r* sumere non liceat; ex gr. pro parabola nonnisi una recta (nempe axi parallela) excluditur, pro hyperbola asymptotis parallelae, itaque duae excluduntur, (nempe tam in parabola quam hyperbola limites tangentium ad puncta dabili quovis remotiora).

Centro gaudere linea potest absque eo ut diametro sensu stricto gaudeat; (uti Fig 73), et conversim parabola diametro sensu stricto pollens centro caret. Lineae plures ordinis binario altioris quoque certo diametri numero gaudent, imo plures centrum habent.

In ellipsi et hyperbola, si recta e puncto quovis $\mathfrak{p}$ lineae per $\mathfrak{c}$, meditullium axeos majoris, producatur usque in $\mathfrak{d}$, ut $\mathfrak{c}\mathfrak{d} = \mathfrak{c}\mathfrak{p}$ fiat; per aequationem e centro patet, $\mathfrak{d}$ quoque punctum lineae esse.

In parabola autem e quovis certo puncto $\mathfrak{p}$ parabolae, ad punctum in axe dabili quovis remotius, ducta recta eo tendit, ut axi parallela fiat: si igitur hoc sensu accipiatur parabolae centrum in axe omni dabili remotius, et pro recta per centrum ejus ducta quaevis axi parallela intelligatur: generaliter dici poterit, in quavis sectione conica L, quamvis rectam per centrum ductam (praeter asymptotos) diametrum esse; et pro quavis diametro δ, cordas per eam bisectas, si δ ipsam L secet esse tangenti ad illud punctum, in quo δ ipsam L secat ductae parallelas: aut δ tangenti alicui parallelam esse, cordasque rectae e centro per punctum tactus ductae esse parallelas.

Est autem pro abscissis x in diametro, aequatio ellipseos e centro $y^2 = \frac{d^2}{4} - \frac{d^2 x^2}{D^2}$; æquatio hyperbolae vero si linea abscissarum secet hyperbolam, est $y^2 = \frac{d^2 x^2}{D^2} - \frac{d^2}{4}$, aut pro abscissa y item e centro et ordinata x, est $x^2 = \frac{D^2}{4} + \frac{D^2 y^2}{d^2}$, quod e priori sequitur: diciturque in 2 casibus prioribus D *diameter primaria* (respectu alterius, et d ejus *conjugata*, in postremo autem d dicitur *primaria*, et D *conjugata*.

Ex gr. abscissae nunc x dictae eaedem sunt, quae superius per u denotabuntur; atque ibi pro abscissis u e centro in a acceptis, erat in ellipsi $y^2 = \frac{a}{4} - \frac{u^2}{a}$; hoc autem est $= \frac{b^2 a^2}{4} - \frac{b^2 u^2}{a^2}$, quia $b = \sqrt{a}$.

Est autem in ellipsi D = lineae abscissarum utrinque in ellipsi terminatae, et d = rectae per centrum ad tangentem in puncto ubi D ellipsin secat, parallelae et utrinque in ellipsi terminatae. Quoad hyperbolam quoque diametri utriusque meditullio in centrum posito, primaria in lineam abscissarum continuetur, et conjugata ordinatis parallela sit; interim ipsorum D, d, illud (ex gr. D) quod per centrum eundo secat hyperbolam (ex gr. in $\mathfrak{a}$), secabit eam in alio puncto $\mathfrak{b}$ quoque, atque tum pro D in calculo recta $\mathfrak{ab}$ intelligatur, pro d autem tangens hyperbolae ad punctum $\mathfrak{a}$ (vel $\mathfrak{b}$) ab una asymptoto usque ad aliam; et eandem quantitatem retineat d in calculo, etsi ipsa fiat linea abscissarum, et D sit ejus *conjugata.*

Notandum etiam est; quod proportionalis 3tia ad diametrum et ejus conjugatam, parameter diametri prioris dici soleat. Nempe parameter ipsius a seu parameter principalis p prodit ex $a:b=b:\frac{b^2}{a}$, seu quia $b=\sqrt{a}$ erat, est

$a:\sqrt{a}=\sqrt{a}:(\frac{a}{a}=1)$.

Ita parameter P ipsius b (cujus conjugata a est), prodit ex $b:a=a:(\frac{a^2}{b}=\mathrm{P})$. Atque eodem modo exprimitur per parametrum et diametrum, ordinatae quadratum abscissis e vertice acceptis. Ex gr. $y^2=px-\frac{px^2}{a}$, et $\mathrm{Y}^2=u^2=\mathrm{PX}-\frac{\mathrm{PX}^2}{b}$, si X abscissam in b e vertice denotet: nempe pro abscissis x in a e vertice acceptis erat (Fig.137) $y^2=x-\frac{x^2}{a}=\frac{b^2x}{a}-\frac{b^2x^2}{a^2}$, quia $b=\sqrt{a}$, et $b^2=a$, adeoque $\frac{b^2}{a}=1=$ parametro principali. Sed $x=\frac{a}{2}+u$; itaque $y^2=\frac{b^2}{a}(\frac{a}{2}+u)-\frac{b^2}{a^2}(\frac{a}{2}+u)^2=$

$\frac{b^2}{4} - \frac{b^2}{a^2}u^2$; et hoc (propter $y = \frac{b}{2} - X$), est $= \frac{b^2}{4} - bX + X^2$; atque hinc u^2 seu $Y^2 = \frac{a^2X}{b} - \frac{a^2X^2}{b^2} = PX - \frac{PX^2}{b}$. Quod et ad reliquas diametros applicari patet.

§. 1. In *parabola quamvis rectam* L *axi parallelam diametrum* esse, si ordinatae tangenti ad illud punctum ubi L parabolam secat, accipiantur, neque aliam dari, nec hanc pro aliis ordinatis diametrum esse patet sic (F. 138).

Sit abscissa t axi parallela, et tangens sit T, ac subtangens $s = 2\alpha$, ordinata superior u, inferior u'; (nempe et inferius secari parabolam statim patebit).

Per latera △li 𝔅𝔄ℭ parallela lateribus reliquorum (in Fig. 138--) △lorum, ponatur in omnibus casibus, prius tangens ad subtangentem, (nempe T ad 2α), tum tangens ad ordinatam, (nempe T ad $\sqrt{\alpha}$).

Terminatur u aut infra axem, aut in axe, aut supra axem; et quidem in casu prostremo aut a ⌊ri ex ℭ ad t erecta ad dextram, aut ad laevam. Est (Fig. 138) $T : 2\alpha = u : k$, et $T : \sqrt{\alpha} = u : y + \sqrt{\alpha}$; itaque $k = \frac{2\alpha u}{T}$, et $y = \frac{u\sqrt{\alpha} - T\sqrt{\alpha}}{T} = \frac{(u - T)\sqrt{\alpha}}{T}$: Est autem $x = t - k + \alpha$, et $y^2 = x$: itaque substituendo valores, ipsius k in x, et ipsius y in y^2, erit $y^2 = \frac{u^2\alpha - 2uT\alpha + T^2\alpha}{T^2}$ et $x = t - \frac{2\alpha u}{T} + \alpha = \frac{tT^2 - 2\alpha uT + T^2\alpha}{T^2}$; consequ. $u^2\alpha - 2uT\alpha + T^2\alpha =$

$tT^2-2\alpha uT+T^2\alpha$, id est $u^2\alpha=tT^2$, adeoque $u^2=\frac{tT^2}{\alpha}$.

Ita si u' sit continuatio ipsius u usque ad parabolam; est $l=Y-\sqrt{\alpha}$, et $Y^2=X=t+k'+\alpha$; atque $T:2\alpha=u':k'$, et $T:\sqrt{\alpha}=u':Y-\sqrt{\alpha}$; et hinc $k'=\frac{2\alpha u'}{T}$, et $Y=\frac{(u'+T)}{T}\sqrt{\alpha}$; consequ. $Y^2=\frac{u'^2\alpha+2u'T\alpha+\alpha T^2}{T^2}=X=t+\frac{2\alpha u'}{T}+\alpha=\frac{tT^2+2\alpha u'T+\alpha T^2}{T^2}$; adeoque $u'^2=\frac{tT^2}{\alpha}$, uti u erat, et si duorum valorum ipsius $u=\sqrt{\frac{tT^2}{\alpha}}$ alter —ve accipiatur, u' quoque exhibebitur.

Ita (Fig. 139) est $T:2\alpha=q:k$, et $T:\sqrt{\alpha}=q:y$; et hinc $k=\frac{2\alpha q}{T}=\frac{2\alpha(u-T)}{T}$, (quia $q=u-T$), et $y=\frac{q\sqrt{\alpha}}{T}=\frac{(u-T)\sqrt{\alpha}}{T}$. Est porro $x=t-\alpha-k$, et $y^2=x=\frac{u^2\alpha-2uT\alpha+T^2\alpha}{T^2}=t-\alpha-\frac{2\alpha(u-T)}{T}=\frac{tT^2-\alpha T^2-2\alpha uT+2\alpha T^2}{T^2}=\frac{tT^2-2\alpha uT+\alpha T^2}{T^2}$; atque hinc pariter $u^2=\frac{tT^2}{\alpha}$

Ita $u'^2=\frac{tT^2}{\alpha}$, Nam $T:2\alpha=u':i$, et $T:\sqrt{\alpha}=u':(l=Y-\sqrt{\alpha})$; est vero $X=t+i+\alpha$; atque $Y^2=X$; et valoribus ipsorum i et Y (ut antea), substitutis, prodit.

In (Fig. 140) est $T:2\alpha=q:h$, et $T:\sqrt{\alpha}$

$=q:y$, et hinc $h=\frac{2\alpha q}{T}=\frac{2\alpha(T-u)}{T}$, (quia $q=T-u$); estque $y=\frac{q\sqrt{\alpha}}{T}=\frac{(T-u)\sqrt{\alpha}}{T}$. Est vero $x=t+h-\alpha$; et $y^2=x$: itaque (substituendo) est $t+\frac{2\alpha q}{T}-\alpha=t+\frac{2\alpha(T-u)}{T}-\alpha=$
$\frac{tT^2+2\alpha T^2-2\alpha uT-\alpha T^2}{T^2}=\frac{tT^2+\alpha T^2-2\alpha uT}{T^2}=y^2$
$=\frac{T^2\alpha-2Tu\alpha+u^2\alpha}{T^2}$; unde $u^2\alpha=tT^2$, et $u^2=\frac{tT^2}{\alpha}$.

Ita $u'^2=\frac{tT^2}{\alpha}$. Nam $X=t+i+\alpha$, et ex $T:2\alpha=u':i$, et $T:\sqrt{\alpha}=u':(l=Y-\sqrt{\alpha})$, atque $Y^2=X$, prodit (ut supra) $\frac{u'^2\alpha+T^2\alpha+2u'\alpha T}{T^2}=\frac{tT^2+2\alpha u'T+\alpha T^2}{T^2}$. Unde $u'^2=\frac{tT^2}{\alpha}$. Erat vero $T^2=4xr$ (per r radium vectorem intelligendo); si igitur pro x ponatur α, erit $\frac{T^2}{\alpha}=4r$, atque $u'^2=u^2=4rt$; ubi $4r$ parameter hujus diametri dici solet.

Quod autem nulla alia diameter sit, nec haec sit pro aliis ordinatis, patet sic.

Quaevis recta praeter axem et ei parallelam, secat praeter axem, etiam parabolam in duobus punctis: nam (Fig. 141) quaeratur valor talis ipsius x, ut y sit ordinata communis rectae axem secantis et simul parabolae; erit

$b:k = x:y$, adeoque $y = \frac{x \cdot k}{b} = x\beta$ (si $\frac{k}{b}$ dicatur β); ordinata parabolae autem est $\surd(\alpha + x)$; eruntque aequales, si $\alpha + x = \beta^2 x^2$, adeoque $x = \frac{1}{2\beta^2} \pm \surd(\frac{1}{4\beta^4} + \frac{\alpha}{\beta^2})$

Quaecunque igitur alia diameter esset, illa per fh repraesentari potest, atque ordinatae quoque aut axi parallelae essent, aut secarent axem. Si parallelae axi essent, superiores finitae, inferiores infinitae essent. Si vero axem secent; consideretur (Fig. 142) ordinata e puncto c; erit haec aut $\perp$ris ad Ai (axem primarium), aut supra vel infra $\perp$rem cadet. Si prius, ordinatae sequentes (eidem abscissae appertinentes) inaequales erunt. Si ordinata ec fuerit, erit ec > cb, quia $\triangle$ ecg et $\triangle$ bmc similia sunt et eg > bm. Pariter si ordinata pc fuerit, erit pc < cq; quia per $\triangle$la similia pcn, qci, atque pn < qi; est pc < qc.

Pro eadem diametro pariter, ordinatas in quavis coni sectione ab ordinatis prioribus diversas inaequales esse inferius facile patebit.

§. 2. Quoad ellipsin: (Fig 143) sit pq = y, et pf = λ; Ac est $= \frac{D}{2}$. Erat (p.132) $s = \frac{a2-4u^2}{4u}$, et $k^2 = \frac{a}{4} - \frac{u^2}{a}$, atque e $\triangle$iorum AGC, dgc similitudine est $t:s = \frac{d}{2}:U$, et $s:k = U:K$; atque singulos terminos quadrando, fit $t^2 = \frac{s^2 d^2}{4U^2}$, et $U^2 = \frac{K^2 s^2}{\frac{1}{2} k^2}$; unde prius U^2 reperitur, et tum t^2.

Est nempe $U^2 = \frac{s^2K^2}{k^2} =$

$$\left(\frac{a^2-4u^2}{4u}\right)^2 . \left(\frac{a}{4} - \frac{U^2}{a}\right) : \left(\frac{a}{4} - \frac{u^2}{a}\right) =$$

$$\frac{(a^2-4u^2)^2}{4.4u^2} . \left(\frac{a^2-4U^2}{4a}\right) . \frac{4a}{a^2-4u^2} =$$

$\frac{(a^2-4u^2)(a^2-4U^2)}{4.4u^2}$; et hinc

$a^4 - 4a^2U^2 - 4a^2u^2 + 4.4u^2U^2 = 4.4u^2U^2$, seu

$a^4 - 4a^2u^2 = 4a^2U^2$; et hinc $U^2 = \frac{a^4-4a^2u^2}{4a^2} =$

$\frac{a^2}{4} - u^2$. Atque hinc t^2 (quod erat $= \frac{s^2d^2}{4U^2}$)

est $= \frac{(a^2-4u^2)^2}{4.4u^2} . \frac{d^2}{4} : \frac{a^2-4u^2}{4} = \frac{a^2-4u^2}{4.4u^2} . d^2$

Assumantur porro duo paria $\triangle$lorum similium, nempe tsk, pfq et xhi, ! 𝔄cb, atque valores v, λ, i, h quaerantur. Erit

$t : k = y : v$; $t : s = y : \lambda$; $\frac{D}{2} : x = k : i$; $\frac{D}{2} : x = u : h$

atque hinc $v = \frac{ky}{t}$, $\lambda = \frac{ys}{t}$, $i = \frac{2kx}{D}$, $h = \frac{2ux}{D}$.

Est autem $V = i - v$, et simul $V^2 = \frac{a}{4} =$

$\frac{(u+z)^2}{a} = \frac{a}{4} - \frac{(h+\lambda)^2}{a}$, quia $u + z = h +$ pf.

Substitutis in $(V = i - v)^2 =$

$\frac{a^2}{4} - \frac{(h+\lambda)^2}{a}$, seu $a(i-v)^2 = \frac{a^2}{4} - (h+\lambda)^2$, valoribus

$i, v, h, \lambda, k, t, s$; fiet $a\left(\frac{2kx}{D} - \frac{ky}{t}\right)^2 = \frac{a^2}{4} - \left(\frac{2ux}{D} + \frac{ys}{t}\right)^2$; et hinc

$\frac{4ak^2x^2}{D^2} + \frac{ak^2y^2}{t^2} - \frac{4ak^2xy}{Dt} + \frac{4u^2x^2}{D^2} + \frac{y^2s^2}{t^2} +$
$\frac{4uxys}{Dt} = \frac{a^2}{4}$; seu

$\frac{y^2}{t^2}(ak^2+s^2) + \frac{4xy}{Dt}(us-ak^2)+\frac{4x^2}{D^2}(ak^2+u^2) = \frac{a^2}{4};$

ubi terminus primus $= \frac{y^2a^2}{d^2}$, 2dus $= o$, 3tius $=$
$\frac{x^2a^2}{D^2}$, adeoque $\frac{y^2a^2}{d^2} + \frac{x^2a^2}{D^2} = \frac{a^2}{4}$, seu $\frac{y^2}{d^2}$
$+ \frac{x^2}{D^2} = \frac{1}{4}$, adeoque $\frac{y^2}{d^2} = \frac{1}{4} - \frac{x^2}{D^2}$,
consequ. $y^2 = \frac{d^2}{4} - \frac{xd^2}{D^2}$. Quod autem
termini primi, 2di et 3tii valores dicti sint",
patet sic: in termino primo est
$\frac{y^2}{t^2} = y^2 : \frac{(a^2-4u^2)d^2}{4 \cdot 4u^2} = \frac{4 \cdot 4u^2y^2}{(a^2-4u^2)d^2}$;
atque $ak^2+s^2 = \frac{a^2-4u^2}{4} + \frac{(a^2-4u^2)^2}{4 \cdot 4u^2} =$
$\frac{4u^2(a^2-4u^2)+(a^2-4u^2)^2}{4 \cdot 4u^2} = \frac{(a^2-4u^2)(4u^2+a^2-4u^2)}{4 \cdot 4u^2}$
$= \frac{a^2(a^2-4u^2)}{4 \cdot 4u^2}$. Consequ. $\frac{y^2}{t^2}(ak^2+s^2) = y^2 \cdot \frac{a^2}{d^2}$.

In termino 2do nempe $\frac{4xy}{Dt}(us-ak^2)$ est
$us-ak^2 = \frac{u(a^2-4u^2)}{4u} - \frac{a^2-4u^2}{4} = o.$

Tertius terminus est $\frac{4x^2}{D^2}(ak^2+u^2)$; est autem $ak^2+u^2=\frac{a^2-4u^2}{4}+u^2=\frac{a^2}{4}$; adeoque

terminus 3tius $=\frac{4x^2}{D^2}\cdot\frac{a^2}{4}=\frac{x^2a^2}{D^2}$

Consequ. summa omnium terminorum est $\frac{y^2a^2}{d^2}+\frac{x^2a^2}{D^2}=\frac{a^2}{4}$ atque hinc $\frac{y^2}{d^2}+\frac{x^2}{D^2}=\frac{1}{4}$; et hinc $\frac{y^2}{d^2}=\frac{1}{4}-\frac{x^2}{D^2}$, atque $y^2=\frac{d^2}{4}-\frac{d^2x^2}{D^2}$.

Prodibit autem pariter et $y'=\mathfrak{pr}=y$; si pro y, λ, v, et ordinata $V=i-v$, et abscissa $\lambda+h$, ponatur y', λ' v', ordinata $V'=i+v'$, et abscissa $\lambda'-h$; quod uti si y in fine axis vel infra eum terminetur, exercitio Tyronum relinquitur.

§. 3. Sit D recta per centrum c hyperbolae (Fig 144) ducta, utrinque in ea terminata; sitque tangens $t+t'$ ad punctum $\mathfrak{p}$ in quo hyperbolam secat D; tum si ordinata, e fine q ipsius x, abscissae e centro in recta D continuata acceptae, ad tangentem parallela y dicatur, erit $y^2=\frac{d^2x^2}{D^2}-\frac{d^2}{4}$.

Nam $t'=t$; quia hyperbola inter asymptotos e recta utrinque aequales partes resecat (p.125); et si recta tangenti parallele moveatur usquequo in punctum tactus veniat, partium resectarum eousque semper aequalium, limites quoque nempe t et t' aequales erunt.

Hinc si $y \parallel t$, et a, γ ad axem primarium Lria sint: erit

$\frac{D}{2}:t=\mathfrak{c}\mathfrak{q}:y'+\beta'=x:y'+\beta'$, nam $\mathfrak{c}\mathfrak{q}=x$; est vero hinc $y'+\beta'=t'x : \frac{D}{2}=\frac{dx}{2} : \frac{D}{2}=\frac{dx}{D}$; nam $t=t'$, et $t+t'$ tanquam conjugata ipsius D dicitur d.

Est porro (per parallelas) $\beta':\gamma'=t:\alpha=\frac{d}{2}:\alpha$

atque $\beta+2y:\gamma=t':\alpha'=\frac{d}{2}:\alpha'$

nempe $y=y'$, nam in $\triangle$lo cujus vertex c est, $(y+y')$ est $\parallel$ $(t+t')$, atque $t=t'$, adeoque $y'+\beta'=y+\beta$, sed $\beta=\beta'$ (p.125), itaque $y=y'$.

E proximis duabus proportionibus autem fit $\beta'(\beta+2y):\gamma.\gamma'=\frac{d^2}{4}:\alpha\alpha'$; sed $\gamma.\gamma'=\frac{a}{4}$ (p. 113)$=\alpha\alpha'$;itaque $\beta'(\beta+2y)=\frac{d^2}{4}=(\beta+y-y)(\beta+y+y)$.

Erat autem superius $\beta+y=\frac{dx}{D}$. Consequ. $\frac{d^2}{4}=(\frac{dx}{D}-y)(\frac{dx}{D}+y)$; atque hinc $\frac{d^2}{4}=\frac{d^2x^2}{D^2}+\frac{ydx}{D}-\frac{ydx}{D}-y^2=\frac{d^2x^2}{D^2}-y^2$; et hinc $y^2=\frac{d^2x^2}{D^2}-\frac{d^2}{4}$.

At vero et quaevis alia recta $\mathfrak{AR}$ per centrum ducta (praeter asymptotum) diameter est.

Accipiantur nempe pro abscissis X ordinatae Y $\parallel$lae ad rectam e centro per tactum tangentis ipsi $\mathfrak{AR}$ parallelae; erit abscissa y, et x ordinata, atque $x^2=\frac{D^2y^2}{d^2}+\frac{D^2}{4}$.

Scholion 1. Quaevis recta per centrum sectionis conicae (praeter asymptotum) diameter est; nec ulla alia est, nec eadem pro cordis rectae alii parallelis diameter est; et cuivis rectae praeter asymptotos (et axi parallelam in parabola) dantur cordae parallelae diametro unica gaudentes. Dicatur v angulus quem tangens cum subtangente s facit; in $\triangle$lo rectangulo, cujus catheti s et y sunt, est $\frac{y}{s} =$ tang v (p. 88); est etiam tang $v = dy$ (Tom. I. p. 273).

In parabola est $y = \sqrt{x}$, et $s = 2x$ (p. 130), adeoque tang $v = \frac{y}{s} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$, et pro quovis v datur x, nempe $2\sqrt{x} = \frac{1}{\text{tang } v}$, et $x = \frac{1}{4 \text{ tang } v^2}$; pro $v =$ recto, fit tangens ∞ ta, et $x = o$; pro $x \frown \infty$, fit tang $v \frown o$. Patet etiam pro quovis ulterius ad dextram terminato x, subtangentem quoque crescere ad laevam, angulum v autem decrescere, quum crescente x, quotus $\frac{1}{2\sqrt{x}} =$ tang v decrescat.

In ellipsi est $\frac{y}{s} = \sqrt{(\frac{a^2-4u^2}{4a})} : \frac{a^2-4u^2}{4u.}$ $= \frac{2u}{\sqrt{a.\sqrt{(a^2-4u^2)}}} =$ tang v; et hinc $4u^2 = a(a^2-4u^2)$ tang v^2, atque hine $u^2 (4 + 4a \text{ tang } v^2) = a^3 \text{tang } v^2$, et $u =$ $\sqrt{\frac{a^3 \text{ tang } v^2}{4+4a \text{ tang } v^2}}$; itaque quum tam numerator quam denominator, adeoque, et quotus $\maltese$ sit, pro quovis v datur u; fit autem pro $u=o$ angulus $v=o$, et pro $u=\frac{a}{2}$ fit u rectus, nempe valor tang v pro $u=o$ fit $\frac{o}{a}$, pro $u=\frac{a}{2}$ autem fit $\infty=\frac{2u}{o}$ (Tom. I. p. 38). Decrescit vero subtangens ex ∞ to usque ad o, crescente u usque ad $\frac{a}{2}$, crescitque v a o usque ad rectum, ita ut pro quovis majore u subtangens intra priorem terminetur, et v major fiat; nempe $\frac{a^2}{4u}-u=s$ fit crescente u minus; fiat enim $u+\omega$ ex u, erit subtangens $s'=\frac{a^2}{4(u+\omega)}-(u+\omega)<\frac{a^2}{4u}-u$: quia $4(u+\omega)>4u$, adeoque e quoto (propter divisorem majorem) minori, majus subtrahitur, pro subtangente abscissae majori respondente. Ita tang v fit major; nempe

$$\frac{2(u+\omega)}{\sqrt{a}.\sqrt{(a^2-4(u+\omega)^2)}}>\frac{2u}{\sqrt{a}.\sqrt{(a^2-4u^2)}},$$

quia numerator prior est major, denominator autem minor est, nam ex a^2 majus subtrahitur.

In hyperbola, tangens anguli α, quem asymptotus cum axe facit, est $=\frac{1}{\sqrt{a}}$; nam (p. 113) $\frac{a}{2}:\frac{\sqrt{a}}{2}=1:$ tang α. Crescente u, prima ordinata est o pro $u=\frac{a}{2}$, et tum tang v est ∞ ta, adeoque v est rectus, et subtangens o; postmodum crescente u in ∞, crescit subtangens usque ad limitem $= \frac{a}{2} + x$, semper ulterius versus centrum terminata, et decrescit v usque ad α, ita ut centrum per subtangentem, et α per decrescentem v haud attingatur; estque pro quovis majore u (ultra verticem) subtangens propior centro, et v minor.

Nam 1mo subtangens $\frac{4u^2 - a^2}{4u}$, pro $u = \frac{a}{2}$ fit $= o$, et tang $v = \frac{2u}{\sqrt{a} . \sqrt{(4u^2 - a^2)}}$ fit $\frac{2u}{o} = \infty$ (Tom.I.p.38).

2do. Si ex u fiat $u + \omega$ (pro ω +vo); subtangens s pro u est $u - \frac{a^2}{4u}$, et s' pro $u + \omega$ est $u + \omega - \frac{a^2}{4(u+\omega)}$; et subtrahendo priorem e posteriore, manet $\frac{a^2}{4u} + \omega - \frac{a^2}{4(u+\omega)} = \omega + \frac{a^2(u+\omega) - a^2 u}{4u(u+\omega)}$; atque ut extremitas subtangentis s' versus centrum prodeat, adhuc ω subtracto quoque +vum manebit, nempe $\frac{a^2\omega}{4u(u+\omega)}$.

3tio. Est autem v pro $u + \omega$ minus quam pro u; nam tang v pro $u + \omega$ est $\frac{2(u+\omega)}{\sqrt{a} . \sqrt{(4(u+\omega)^2 - a^2)}}$, pro u est $\frac{2u}{\sqrt{a} . \sqrt{(4u^2 - a^2)}}$; quorum utrumnam sit majus, nonnisi $\frac{u+\omega}{\sqrt{4(u+\omega)^2 - a^2)}}$ et $\frac{u}{\sqrt{(4u^2 - a^2)}}$ adeoque $\frac{(u+\omega)^2}{4(u+\omega)^2 - a^2}$, et $\frac{u^2}{4u^2 - a^2}$ comparanda veniunt. Reducendo ad denominationem eandem, erunt numeratores $4u^2(u+\omega)^2-a^2(u+\omega)^4$ et $4u^2(u+\omega)^2-a^2u^4$; quorum priorem subtrahendo e posteriori, manet $a^2(u+\omega)^4-a^2u^4 = a^2[(u+\omega)^4-u^4]$, quod manifesto ✠ est.

4to. Nunquam vero $v=a$ fieri potest, sed $v \frown a$. Nam (pro $v=a$) fieret tang $v=\frac{1}{\sqrt{a}}=$

$\frac{2u}{\sqrt{a}.\sqrt{(4u^2-a^2)}}$, adeoque $4u^2=4u^2-a^2$, et $0=-a^2$. Pro quovis ✠vo ω autem, datur tale u, ut tang v sit $=\frac{1}{\sqrt{a}}+\omega$, at pro nullo ✠vo ω datur tale u, ut tang $v=\frac{1}{\sqrt{a}}-\omega$ sit.

In casu primo enim esset tang $v=\frac{1+\omega\sqrt{a}}{\sqrt{a}}$ $=\frac{2u}{\sqrt{a}.\sqrt{(4u^2-a^2)}}$, et hinc $(1+\omega\sqrt{a})^2=$ $\frac{4u^2}{4u^2-a^2}=1+2\omega\sqrt{a}+\omega^2a$, (quod dicatur k).

Erit $4u^2=4u^2k-a^2k$, et hinc $u=\frac{a}{2}.\sqrt{\frac{k}{k-1}}$, quod (quia pro ω ✠vo fit $k>1$) reale est.

Pro $-\omega$ vero erit $k=1-2\omega\sqrt{a}+\omega^2a$; sed ut tang $v=\frac{1}{\sqrt{a}}-\omega$ sit; manifesto hic $\omega<\frac{1}{\sqrt{a}}$ esse debet, ut tangens ✠va sit; si igitur $\omega=\frac{1}{\beta\sqrt{a}}$ ponatur (pro β ✠vo et >1), erit si nunc $1-2\omega\sqrt{a}+\omega^2a$ dicatur k, radix ex $\frac{k}{k-1}$ imaginaria; quia tum k ✠ et <1 erit; nam

$-2\omega\sqrt{a}+\omega^2 a=\frac{a}{\beta^2 a}-\frac{2\sqrt{a}}{\beta\sqrt{a}}=\frac{1}{\beta^2}-\frac{2}{\beta}=\frac{\beta-2\beta^2}{\beta^2}$, quod (pro β $+$vo et >1) $-$vum est.

5to. *In hyperbola asymptoto nulla corda parallela est.* Sit enim (Fig. 145) prius parallela ad distantiam ω a centro, tum sit ad distantiam $\frac{a}{2}+b$.

Erit $\frac{a}{2}:\frac{\sqrt{a}}{2}=\frac{a}{2}+x-\omega:(Y=\frac{\frac{a}{2}+x-\omega}{\sqrt{a}})$; est vero $y=\sqrt{(x+\frac{x^2}{a})}$; adeoque si $Y=y$ esse possit, erit $(\frac{a}{2}+x-\omega)^2=ax+x^2$, et hinc $o=\frac{a^2}{4}+\omega^2-\omega a-2\omega x$, atque hinc $x=\frac{a^2}{2.4\omega}+\frac{\omega}{2}-\frac{a}{2}$, quod si $\omega=\frac{a}{n}$ ponatur (pro $n>2$) valorem $+$vum ipsius x sed unicum dat.

Ita pro casu altero est (F.146)
$\sqrt{a}:1=x-b:(Y=\frac{x-b}{\sqrt{a}})$, quod si $=y$ esse queat, erit $(x-b)^2=ax+x^2$, et hinc $ax+2bx=b^2$, et $x=\frac{b^2}{a+2b}$; valor ipsius x pariter unicus, pro quo hyperbola infra axem secatur. Nam $(x-b)^2=(b-x)^2$; atque si $\frac{b^2}{a+2b}=b+\omega$ ponatur, erit $\omega=\frac{b^2-ab-2b^2}{a+2b}=-(\frac{ab+b^2}{a+2b})$, quod $-$vum est. Asymptoto eadem inferius con-

tinuata, idem pro parte hyperbolae ad laevam patet.

6to. *Cuivis alii rectae autem per centrum ductae* (in eodem plano) *respondent cordae parallelae, et his diameter per centrum transiens.*

Fiat enim e c centro hyperbolae semicirculus supra axem, et sit cf ⊥ris ad axem; concipiaturque cuivis tangentium (ad hyperbolam supra axem ad dextram a cf) parallela per c, dicaturque *l* haec parallela, et recta e c per punctum tactus dicatur L, atque *l* et L sibi respondere dicantur. Quicunque angulus fuerit ab α (angulo asymptoti cum axe) incipiendo, usque ad rectum ipsum et *o*, (solum α excludendo); manifestum e dictis est, quemvis radium in quadrante dicto (praeter asymptotum) esse ipsarum L et *l* aliquam, et cuivis hyperbolae puncto aliam *l*, et cuivis *l* aliam L respondere, et quamvis ipsarum L et *l* ab asymptoto diversam esse. Idem nempe ad laevam patet.

Erat autem quaevis L diameter pro cordis ipsi *l* parallelis, et quaevis *l* diameter pro cordis ipsi L parallelis. Quaevis recta igitur (praeter asymptotos) per centrum hyperbolae ducta diameter est. *Asymptotus autem diameter non* est; quia recta per c illa, ad quam parallelae cordae per asymptotum bisecarentur, aut asymptotus altera, aut aliqua ipsarum L et *l* esset; asymptoto nulla corda parallela est, et cuivis ipsarum L et *l* fuerint cordae parallelae, illi ipsarum altera respondet tanquam diameter, et quaevis L aut *l* diversa ab asymptoto est, nec meditullia cordarum earundem in rectis diversis jacere queunt.

In ellipsi pariter tangenti cuivis parallela per centrum ducta *l*, et recta e centro per punctum tactus ducta L, atque l et L sibi invicem respondere dici possunt: angulus v autem heic a o usque ad rectum, a centro ad dextram laevamque eundo, quantusvis esse potest, et cuivis puncto dimidiae ellipseos supra axem alia l, et cuivis alii l alia L respondet: unde reliqua fluunt.

Consequ. quaevis recta per centrum sectionis conicae (praeter asymptotos) diameter est; et asymptotis atque axe parabolae exceptis, cordarum ad quamvis rectam parallelarum meditullia in recta per centrum eunte jacent.

Quod vero nulla alia diameter sit, nec ulla pro aliis cordis sit, patet sic: pro parabola demonstratum (p.141) est; in ellipsi et hyperbola autem quaecunque alia diameter esset, cordae per eam bisectae alicui ipsarum L et l parallelae essent; his autem certa diameter, nec alia recta ab hac diversa per meditullia cordarum earundem duci potest. Si vero eadem diameter et cordas alii ipsarum L et l parallelas bisecaret; et his cordis respondet certa diameter, et quidem alia a priori diversa; nempe cuivis L alia l respondet (p.151).

Scholion. 2. centro et plures lineae ordinis altioris gaudent; et num linea quaedam centro gaudeat, modo sequ. inquiritur. (F.147)

Sit linea abscissarum $\mathfrak{AB}$, et origo in $\mathfrak{A}$, sitque $(F)x=y$; feratur linea abscissarum in rectam priori per c parallelam, et ponatur origo abscissarum in c. Dicantur abscissae novae t, et ordinatae u; facile patet, dari tales constantes α, β, ut sit $x=t+\alpha$, et $y=u+\beta$, adeoque $(F)(t+\alpha)=\beta+u$ (pro angulo coordinatarum eodem, qui prius erat, abscissis t et ordinatis u). Si igitur c centrum fuerit, et accipiantur abscissae e centro ad dextram laevamque aequales, erit ordinata $\mp va - vae$ aequalis; adeoque t et u sive simul $\mp va$ sive simul $-va$ ponantur, aequatio $(F)(t+\alpha)-(u+\beta)=o$ pro quovis t manet.

Hinc autem sequitur, quod si aequatio ista ordinis n fuerit, nec ordine inferiori exprimi queat (de quo inferius): termini cujusvis, in quo variabilium t, u numerus sub formam $n-2m+1$ venit (pro m integro et non o), coefficiens o esse debet, siquidem linea centro gaudeat: atque si dentur talia α, β, ut quivis dictorum coefficientium $=o$ sit, linea centro gaudebit, secus autem illo carebit.

Nam n aut par aut impar erit. Si n par fuerit: quilibet terminorum dictorum numerum variabilium imparem habebit. Si itaque summa terminorum: in quibus numerus variabilium par est, S dicatur, et summa terminorum in quibus variabilium numerus impar est, s dicatur; atque $S+s=o$ sit; S non mutabitur etsi pro $\mp t$ et $\mp u$ simul ponatur $-t$ et $-u$, at s in $-s$ mutabitur; itaque nisi $s=o$ sit, $S+s$ et $S-s$ utrumque $=o$ esse nequit. Si vero $s=o$ sit, linea centro gaudet; adeoque si singulis coefficientibus dictis $=o$ positis, valores ipsorum α, β reperiantur, petito satisfiet. At si s non fuerit $=o$, centrum deerit. Nempe

Tam $S=o$, quam $s=o$ esse debet: hoc autem fieri nequit, nisi singuli coefficientes dicti in s fuerint $=o$. Nam radices numero n, aequationis $S=o$ manifesto a t dependent, exprimantur per $(f)t$; substituto quovis $(f)t$ ipsi u in s, oportet $s=o$ fieri; alioquin $S+s=o$ non esset. Sed hoc pacto $s=o$ omnes valores ipsius u exhiberet, quos $S-s=o$ praebet, neque $s=o$ plures radices habere potest, quum ad summum aequatio ordinis $(n-1)$ti sit; itaque aequatio dicta gradu minori exprimeretur (contra hypothesin).

Si n impar sit: quilibet terminorum dictorum numero variabilium pari gaudet; atque S nec pro hoc casu mutatur, etsi pro t, u +vis —va accipiántur; et s pariter $=o$ esse oportet; nam $s+S=o=-s+S$ esse aliter nequit, nisi tam S quam $s=o$ sit; si enim tantum $S=o$ esset, $s=-s$ esse nequit, nisi $s=o$ sit; si vero tantum $s=o$ esset, $S+s$ non esset $=o$, nisi et $S=o$ sit Reliqua modo antea dicto patent.

Ex gr. Sit $y^2-px=o$ (aequatio parabolae pro parametro p); ponatur $t+\alpha$ pro x, et $u+\beta$ pro y; fiet $(u+\beta)^2-p(t+\alpha)=o=u^2+2\beta u+\beta^2-pt-p\alpha$; et si ponantur coefficientes superius dicti singuli $=o$, fiet $2\beta=o$, $p=o$, $\beta^2+p\alpha=o$, adeoque $\beta=o$, $p=o$, $\alpha=o$; et parabola centro caret; quia pro $p=o$ esset quodvis $y=o$.

At parabolam ordinis $(2n+1)$ti cujus aequatio est $y^{2n+1}=px$, (nempe $y^{\mu}=px$ parabola ordinis μti dicitur), centro gaudere, vel inde patet: quod et abscissis manentibus, ac pro $\alpha=\beta=o$, mutatis tam x quam y e +vis in —va, aequatio manet. At parabola ordinis $2n$ti, nempe cujus aequatio est $y^{2n}-px=o$ centro carere modo antea dicto patet, ponendo $(u+\beta)^{2n}-p(t+\alpha)=o$, et singulos coefficientes dictos $=o$ ponendo: nimirum non solum $\beta=o$ prodibit, sed etiam p (nempe coefficiens ipsius t) $=o$ erit, adeoque manebit $u^{2n}=o$, id est $u=o$.

Scholion. 3. *Linea* 2di *ordinis est aut parabola aut ellipsis* (quo etiam circulus pro eccentricitate $=o$ pertinet) *aut hyperbola.*

Nam lineam 2di ordinis prius diametro gaudere demonstratur; et tum pro abscissis in diametro acceptis, res patebit. (F.148).

Est aequatio generalis lineae 2di ordinis $ay^2+(bx+c)y+(dx^2+ex+f)y^0=o$; ubi a non est $=o$, quia y habet duos valores pro abscissa per punctum internum cordae ducta.

Dividatur aequatio per α; et pro $x = \mathfrak{AP}$ dicatur coefficiens posterior β, et prior α; erit $y^2 + \alpha y + \beta = o$; adeoque $\mathfrak{PN}$ fit $=$
$-\frac{\alpha}{2} + \sqrt{(\frac{\alpha^2}{4} - \beta)}$, atque $\mathfrak{PM} = -\frac{\alpha}{2} -$
$\sqrt{(\frac{\alpha^2}{4} - \beta)}$. Itaque $\mathfrak{PN} - \mathfrak{PM} = \mathfrak{MN} =$
$+ 2\sqrt{(\frac{\alpha^2}{4} - \beta)}$: et si $\mathfrak{L}$ hujus meditullium sit, erit $\mathfrak{ML} = + \sqrt{(\frac{\alpha^2}{4} - \beta)}$, et $\mathfrak{LP} = \mathfrak{PM} + \mathfrak{ML}$
$= -\frac{\alpha}{2} = \frac{bx+c}{2a} = \frac{c}{2a} + \frac{b \cdot x}{2a}$; atque pro quovis x, et cordae priori parallelae medio, illi x respondente idem prodit; nempe ordinata e fine ipsius x usque ad cordae meditullium est $=$
$\frac{c}{2a} + \frac{bx}{2a}$; quae manifesto aequatio rectae est.

Itaque quum quarumvis trium cordarum parallelarum respectu, ita duci possit abscissarum linea, ut cordae illae totae in eandem plagam cadant: patet quarumvis trium cordarum $\parallel$larum, meditullia et consequ. omnia meditullia in eadem recta esse.

Si jam abscissae in recta hac accipiantur; quaevis aequatio lineae 2di ordinis ad formam $y^2 = a + bx + cx^2$ reducetur. Nam in expressione priore coefficiens primus ipsius y evanescit; quia summa radicum binarum aequalium sed sibi invicem oppositarum est $= o$ (Tom. I. p. 365).

Tum vero aut $c = o$ est, aut non: in casu primo fit $y^2 = a + bx$, aequatio parabolae pro parametro b; mutetur nempe abscissarum ι initium, ut sit $x=t-\frac{a}{b}$, fiet $y^2=a+b(t-\frac{a}{b})$ $=a+bt-a=bt$.

Si c non $=o$, mutetur abscissarum t initium, ut sit $t=x+\frac{b}{2c}$, adeoque $x=t-\frac{b}{2c}$; fiet $y^2=a+bx+cx^2=a+b(t-\frac{b}{2c})+c(t-\frac{b}{2c})^2$ $=a+bt-\frac{b^2}{2c}+ct^2-tb+\frac{b^2}{4c}$, quod (pro A, B constantibus) sub formam $y^2=A+Bt^2$ venit; ubi tam A quam B simul ⊣va esse nequeunt, quia tum valores ipsius y omnes imaginarii essent. Casus itaque sequentes sunt; ✠ A et ⊣ B, ⊣ A et ✠ B, ✠ A ✠ B.

Pro casu primo, dum $y^2=$ ✠ A ⊣ Bt^2, ponatur $A=\frac{d^2}{4}$, et ⊣ $B=-\frac{d^2}{D^2}$; adeoque $d=2\sqrt{A}$, et $D=2\sqrt{(A:-B)}=2\sqrt{-(A:B)}$, ubi propter A ✠vum et B ⊣vum, $-(A:B)$ et $-B$ ✠va sunt, eritque $A+Bt^2$ id est ✠A ⊣ $Bt^2=\frac{d^2}{4}-\frac{d^2t^2}{D^2}$, aequatio ellipseos e centro pro diametro D et ejus conjugata d. Ponatur ex gr. ipsorum D et d majus pro axe majore, et alterum pro minore; si $D=d$, circulus est.

Casus 2dus, dum $y^2=$ ⊣ A ✠ Bt^2; ponatur ⊣ $A=-\frac{d^2}{4}$, et ✠ $B=\frac{d^2}{D^2}$; et erit $A+Bt^2$, id est ⊣ A ✠ $Bt^2=\frac{d^2t^2}{D^2}-\frac{d^2}{4}$, aequatio hyperbolae e centro pro diametro $D=2\sqrt{(-A:B)}$, et conjugata ejus $d=2\sqrt{-A}$, ubi $-A$ pro A ⊣vo, ✠vum est.

Casus 3tius Si tam A quam B ✠vum sit, sitque $y^2 = A + Bt^2$. In hyperbola pro abscissis x e centro in diametro D per punctum tactus eunte conjugataque d et ordinata y erat (p. 145)

$y^2 = \frac{d^2 x^2}{D^2} - \frac{d^2}{4}$; atque hinc si abscissae item e

centro in $\tilde{d}$ quae antea conjugata erat, accipiantur, et D fiat conjugata ipsius d, atque ordinatae prioribus abscissis parallelae aequalesque sint, adeoque x ordinatae, y abscissae vicem subeant; erat $x^2 = \frac{D^2 y^2}{d^2} + \frac{D^2}{4}$. Si igitur

$\frac{D^2}{4} = A$ adeoque $D = 2\sqrt{A}$ ponatur, et $\frac{D^2}{d^2}$

$= B$, itaque $d = 2\sqrt{\frac{A}{B}}$, et in $y^2 = A + Bt^2$

ordinata y dicatur x, atque abscissa t dicatur y, aequatio proxima hyperbolae e centro pro abscissis in diametro d tangenti parallela, et conjugata ejus per punctum tactus eunte prodibit.

X. *Intersectiones linearum* 2di *ordinis, atque inde certarum aequationum resolutio.*

Si duarum linearum L et l ordinatae fuerint $Y = (F)x$ et $y = (f)x$, pro iisdem abscissis x (in eadem abscissarum linea ex eodem puncto incipientibus), et eodem ordinatarum angulo; atque pro quapiam abscissa x' fiant ordinatae Y' ipsius L, et y' ipsius l aequales; erit $Y' - y' = o$ seu $(F)x' - (f)x' = o$, et lineae L et l in extremitate communi ordinatarum Y' et y' se invicem secabunt; atque ubi se invicem secabunt L et l, pro abscissa puncto illi respondente erit $Y - y$ seu $(F)x - (f)x = o$.

Si igitur $(F)x - (f)x$ ad formam $x^\mu + ax^{\mu-1}$

$+\beta x^{\mu-2} \cdots + kx^{\circ} = o$, reduci queat; sitque aequatio resolvenda $x^{\mu} + Ax^{\mu-1} + Bx^{\mu-2} \cdots + K = o$, (denotantibus A, $B \cdots$ constantes cognitas, μ numerum integrum, α, $\beta \cdots$ vero constantes indeterminatas); atque in duabus his aequationibus coefficientes ejusdem potentiae aequentur: orientur aequationes $\alpha = A$; $\beta = B \cdots$; $k = K$; e quibus si constantes a, b, $c \cdots$ ad linearum L et l constructionem (pro eadem abscissarum linea, eodemque initio, et eodem coordinatarum angulo) requisitae reperiantur, atque L et l construantur; ubicunque secuerint hae se invicem, abscissa respondens radix aequationis erit.

Vocatur autem modus iste radices aequationis reperiendi, *constructio aequationum*.

Notandum tamen est: ex eo quod pro certo valore ipsius x aequatio $Y - y = o$ fiat, intersectionem haud sequi; potest enim tam Y quam y imaginarium esse, sectio autem reales ordinatas requirit; fierique potest, ut aequatio nulla radice reali gaudeat.

Exempla. Pro aequatione gradus 3tii: Sit parabolae B (Fig 149) ordinata u pro abscissa t, et $u^2 = bt$, adeoque $t = \frac{u^2}{b}$; et ordinata pro quovis puncto $\mathfrak{p}$ ipsius B ad abscissam x ex eodem abscissarum initio $\mathfrak{A}$ reducta dicatur Y; erit $x = u$, et $Y = t$, adeoque $Y = \frac{x^2}{b}$. Sitque parabolae A pro abscissa x et initio eodem $\mathfrak{A}$; ordinata y, et $y^2 = ax$; ponaturque $Y - y = o$; id est $\frac{x^2}{b} - \sqrt{ax} = o$; erit $\frac{x^4}{b^2} = ax$; atque hinc $x^3 - ab^2 = o$, et $x = \sqrt[3]{ab^2}$. Et hoc pacto radix cubica exhiberi poterit, sed minime constructione geometrica sensu stricto, quum parabolae quodvis punctum, sed non omnia puncta ita construi queant. Potest $b^2=1$ poni, et quaevis quantitas Q pro a accipi, ut sit $x=\sqrt[3]{Q}$; ex gr. si $Q=2$ sit, erit $x=\sqrt[3]{2}$, adeoque $x^3=2$, et $1:x=x:x^2=x^2:(x^3=2)$; nempe erunt duae proportionales mediae x et x^2 inter 1 et 2; eritque (per inferiora) simul x latus dupli cubi illius, cujus latus 1 est; quod pro Apollinis ara geometrice construendum frustra postulaverat. Oraculum peste *Athenis* furente interrogatum: nempe ex $Y-y=o$, sive duae rectae, sive recta et circulus, sive duo circuli fuerint generalitate summa expressae, aequatio formae $x^3-Q=o$ haud prodibit; uti calculo inito patet.

Pro aequatione $x^3+Ax^2+Bx+C=o$ construenda autem: mutetur (Fig. 150) caput abscissarum in p, et abscissae accipiantur in recta in qua x est: erit $y=y'-a=\frac{(b+x)^2}{p}-a$ si $(b+x)^2=py'$; hinc vero est $y=\frac{b^2+2bx+x^2-ap}{p}$ $=\frac{2bx+x^2}{p}$, quia $b^2=ap$. Si vero $p=1$ ponatur, et $y=\frac{2bx}{p}+\frac{x^2}{p}$; fiet aequatio parabolae ad formam $Y=\alpha x+x^2$ reducta; nempe dicatur ordinata ejus Y, et ordinata circuli radio r et centro c (Fig. 151) scripti, pro eodem x et eodem abscissarum principio p dicatur y; erit circuli ordinata $y=c+\sqrt{(r^2-(x-e)^2}$; atque si ponatur $Y-y=o=\alpha x+x^2-c-\sqrt{(r^2-(x-e)^2)}$: erit $r^2-x^2+2ex-e^2-\alpha^2x^2-x^4-c^2-2\alpha x^3+2cx^2$ +

$2\alpha ex = o$ et hinc $x^4 + 2\alpha x^3 + x^2(\alpha^2+1-2c) - x(2e + 2\alpha c) + e^2 - r^2 + c^2 = o$; et si $r^2 - e^2 + c^2 = o$ sit, reducetur aequatio ad formam $x^4 + \beta x^3 + \gamma x^2 + \delta x = o$; e quo per x dividendo fit $x^3 + \beta x^2 + \gamma x + \delta = o$; hinc si aequatio cubica construenda fuerit $x^3 + Ax^2 + Bx + C = o$, eruantur constantes requisitae ex aequationibus $A = \beta$, $B = \gamma$, $C = \delta$, (substituendo literis graecis valores superiores).

Pariter *aeqaatio biquadratica* $x^4 + Ax^3 + Bx^2 + Cx + k$ construetur, (positis supra dictis), ex aequatione priori $x^4 + \beta x^3 + \gamma x^2 + \delta x + k = o$, (si $e^2 - r^2 + e^2$) breviter k dicatur.

Schol. Altioris gradus aequatio $Y - y = o$ pro duabus sectionibus conicis, haud prodit: at lineae cujusvis cujus ordinata $y = \alpha + \beta x + \gamma x^2 \ldots + x^n$, (literis graecis constantes denotantibus); aequatio ordinis $n$ti est, atque quodvis punctum ejus construi geometrice (sensu stricto) potest, quum nonnisi multiplicationis additionisque certus numerus requiratur.

Si autem linea ejusmodi constructa sit; ubicunque fuerit $y = o$, abscissa x radix aequationis $x^n + kx^{n-1} \ldots + \beta x + \alpha$ erit, secabiturque linea abscissarum in tot punctis, quot radices reales aequatio habet, quarum numerus integrum n superare nequit (Tom. I. p. 363); fieri autem potest, ut omnes imaginariae sint, nec ullibi secetur linea abscissarum a linea dicta. Itaque pro resolvenda quavis aequatione nonnisi construenda linea ejusmodi esset; quod tamen innumerabiles operationes propter puncta innumerabilia requirit.

IX. Quoad areas ceteraque numerum hunc concernentia, instituti ratio ad ea quae (Tom. I. p. XXI ...) dicta sunt, relegare jubet.

222. *Linearum, quarum non omnia qui-*

dem, sed aut quodvis, aut inter quaevis duo, quotvis intermedia geometrice (sensu stricto) construere licet. Exemplo sint sequentia:

1mo. Lineae cujusvis cujus aequatio est $(y \text{ vel } y^2) = \frac{ax^0 + bx' + cx^2 \text{ - - - } gx^n}{Ax^0 + Bx' + Cx^2 \text{ - - - } + Hx^m}$ quodvis punctum constriui geometrice potest; certies requirens multiplicationem, additionem divisionem, et radicem quadr. Potest autem constantium a, b - - A, B - - - quaevis *o* esse, dummodo aliquis coefficiens potentiae alicujus non o ipsius x, haud o sit. Si y^2 sit, tum y erit radix e membro ad dextram, et cordae per lineam abscissarum bisecantur. Talis est etiam *Cyssois Dioclis*, linea ordinis 3tii, cujus aequatio est $Ay^2 - xy^2 - x^3 = o$, seu $y^2 = \frac{x^3}{A - x}$, pro quo est $n = 3$; $m = 1$, et quilibet coefficientium est *o*, praeter $A = A$ et $g = 1$, atque $H = -1$.

2do. Si quivis circulus fuerit, (Fig. 152) et quaevis puncta 𝔄, 𝔅 fuerint, dicaturque quodvis peripheriae punctum generaliter 𝔭, atque ducatur ex 𝔄 ad quodvis 𝔭 recta, et accipiatur in quavis recta $\widetilde{𝔄𝔭}$ ex 𝔭 utrinque, recta = rectae 𝔭𝔅; dicaturque cujusvis rectae ex 𝔭 acceptae extremitas a 𝔭 diversa 𝔮; complexus omnium 𝔮 lineas variae formae producet; qualem (Fig. 153) pro 𝔅 in peripheria, 𝔄 extra peripheriam, et 𝔄𝔅 per 𝔠 centrum circuli eunte, acceptis exhibet.

3tio. Si (Fig. 154) peripheria A volvatur extus per peripheriam B, ita ut arcus 𝔟𝔡 ipsius A sit = arcui 𝔞𝔟 ipsius B; aut intus volvatur circulus C, ut arcus 𝔟𝔡' sit = arcui 𝔞𝔟;

via puncti $\mathfrak{a}$ ipsius A *epicyclois*, in casu primo in postremo *hypocyclois* dicta, (si motus continuetur donec libuerit), talis erit, ut punctum quodvis ejus construi geometrice possit, si radius circuli A vel C sit r, et radius R circuli B sit nr pro n integro. Nam si radiis R et r describantur circuli concentrici (Fig. 155); pro quovis arcu $\mathfrak{ab}$ reperitur $\mathfrak{bd}$ et $\mathfrak{bd}'$, si e puncto $\mathfrak{a}'$ arcus $\mathfrak{a}'\mathfrak{b}'$ $n$ies accipiatur.

Si motus extus fiat, et $n=1$ sit, tum linea redibit in $\mathfrak{a}$; et pro $n=$ alii numero ex gr. 5, totidem arcus describentur aequales in peripheria B terminati.

Si motus intus fiat, et $r=\frac{R}{2}$; erit via diameter deorsum pro prima circumvolutione, tum eadem sursum erit, et idem semper repetetur. Nam (Fig. 154) sit $\mathfrak{bd}'=\mathfrak{ba}$, erit $\mathfrak{d}'$ in diametro $\mathfrak{af}$; nam $\wedge$li $\mathfrak{bcd}'$ (tanquam anguli ad peripheriam in circulo minori) quantitas est dimidium arcus $\mathfrak{bd}'$, et simul (ut anguli ad centrum in B) est arcus $\mathfrak{ba}$, qui item est $=\mathfrak{bd}'$ arcui duplo quoad gradus, quum radius bis minor sit.

4to. Si via puncti $\mathfrak{p}$ in peripheria centri $\mathfrak{c}$ ex $\mathfrak{a}$ incipiendo semper porro moti, u dicatur sitque certa recta α, ac cujusvis u fine $\mathfrak{q}$ dicto; in quavis recta ipsi α per $\mathfrak{q}$ parallela, accipiatur y ex $\mathfrak{q}$ incipiendo, ita ut quaevis duo y in plaga eadem ex gr. superius terminentur; aut in quavis recta e centro $\mathfrak{c}$ per $\mathfrak{q}$ ducta accipiatur y' vel y'' ex $\mathfrak{c}$ incipiendo: atque sit $y=(\mathrm{f})u$, et $y'=(\mathrm{F})u$; ex gr. sit $y=au$, et $y'=a:u$ vel au; aut $y''=a^u$ &c. -- (a rectam denotante); extremitatum omnium y (uti extremitatum omnium y', sive omnium y'') complexus linea certa erit.

Pro singulis, si unitas arcu peripheriae dictae exhibeatur (ponaturve), extremitas cujusvis ordinatae (y vel y' aut y'') geometrice exhiberi pro quovis $u = \frac{m}{2^n}$ poterit, si m, n integros denotent; nempe $\frac{m}{2^n} = \frac{m.1}{2^n}$, et arcus $=1$ per 2^n dividi geometrice, atque partes ejusmodi numero m accipi possunt, et pro y et y', rectae a potest $\frac{m}{2^n}$tum accipi, ita pro y'' quoque potest a ad m elevari, et inde radix 2^nti gradus geometrice exhiberi. Sed si u nequeat per fractionem numeratoris integri, nec per denominatorem arcus geometrice dividi queat, (si ex gr. $u = \frac{1}{7}$), nullum ipsorum y, y', y'' exhiberi geometrice poterit; nempe pro y et y' nullo modo constabit, quodnam u sit $= \frac{1}{7}$ pro y'' autem radix 7 gradus ex a geometrice extrahenda esset. Si vero recta ponatur pro unitate, y'' nonnisi pro $u = o$, et $a^o = 1$ geometrice exhibebitur, nullum aliud u enim per rectam, tanto minus fractione formae dictae exprimi poterit.

Plura quoque hujus generis Tyrones ipsi cogitare possunt.

223.

De lineis ordinis cujusvis in genere, quaedam scitu magis necessaria (p. 98)

1mo. Si abscissarum initium in eadem abscissarum linea mutetur ex $\mathfrak{A}$ in a, vel in a' (Fig 156) et abscissae dicantur x pro $\mathfrak{A}$, et t pro a, atque t' pro a'; sitque $y = (f)x$; erit $x =$

$t+\alpha=t'-\alpha$; consequ. $y=(f)(t+\alpha)=(f)(t'-\alpha)$ erit aequatio lineae pro abscissis novis, nempe prior pro t, posterior pro t'.

2do. (F.157) Si linea abscissarum mutetur in $\mathfrak{A}'\mathfrak{B}'$ priori $\mathfrak{AB}$ parallelam, et $\mathfrak{A}'$ fiat novarum abscissarum origo, nempe ubi nova abscissarum linea per rectam ex $\mathfrak{A}$ priori abscissarum origine ductam ad ordinatas priores parallelam secatur: erit (manente angulo coordinatarum) ordinata nova $Y=y+\beta$; itaque $Y=(f)x+\beta$; si $\mathfrak{A}'\mathfrak{B}'$ supra $\mathfrak{AB}$ ducatur, β —vum erit; aut si +ve sumatur, subtrahendum ex $(f)x$ erit; itaque in casu isto erit $y=Y-\beta$, in altero autem $y=Y+\beta$.

3tio. Si vero manente angulo coordinatarum, tam origo abscissarum mutetur in $\mathfrak{AB}$, quam linea abscissarum mutetur in $\mathfrak{A}'\mathfrak{B}'$, ut fiat ex gr. $t+\alpha$ ex x, $Y+\beta$ ex y; fiet pro novis abscissis t in $\mathfrak{A}'\mathfrak{B}'$ e novo abscissarum initio, et novis ordinatis Y, aequatio $Y+\beta=(f)(t+\alpha)$, substituendo nempe $Y+\beta$ ipsi y, et $t+\alpha$ ipsi x. Si $Y-\beta$ ex y, aut $t'-\alpha$ ex x factum fuerit, id substituendum esse patet. Neque vero hac mutatione aequationis ordo mutatur, quum cuivis x, etsi pluries ut factor occurrat, t plane toties substituatur; idemque de y patet. In genere si aequatio lineae sit $(F)(x, y)=o$ pro coordinatis x, y; erit lineae ejusdem pro eodem coordinatarum angulo sed abscissis t et ordinatis u, aequatio $(F)[(a)t, (b)u]$, si $x=(a)t$, et $y=(b)u$.

4to. Si angulus coordinatarum mutetur, sive obliquus q in rectum, sive rectus in obliquum q; prodibit aequatio lineae modo sequenti.

Sit prius q in rectum mutandus: fiat (Fig. 158) ex $\mathfrak{A}$ origine abscissarum ad ordinatas $\perp$ris, sitque abscissa nova z, et ordinata ejus sit u, nempe ordinata y abscissae prioris x usquequo novam abscissarum lineam secat. Erit $x:z=1:\sin q$, et $k:z=1:\operatorname{tang} q$; atque hinc $x=\frac{z}{\sin q}$, et $k=\frac{z}{\operatorname{tang} q}$; ac $y=u-k=u-\frac{z}{\operatorname{tang} q}=u-z\cot q$; quibus valoribus in aequatione lineae ipsis x et y substitutis, prodibit aequatio lineae ejusdem quaesita; nec ordo lineae ob rationem antea dictam mutabitur.

Rectangularium coordinatarum x, y angulus rectus in obliquum q pariter mutabitur modo sequ: sit (Fig 159) abscissa t priori parallela et ordinata u; erit $y+b:u=\sin q:1$; et $u:k=1:\cos q$; hinc $y=u\sin q-b$, et $k=u\cos q$, estque $t=x-a+k$, adeoque $x=t+a-k$; quibus valoribus substitutis in aequatione lineae pro coordinatis x, y prodibit aequatio quaesita pariter ordinis ejusdem.

5to. Si abscissis x (Fig. 160) in $\mathfrak{A}\mathfrak{B}$ ex $\mathfrak{A}$ acceptis respondeant ordinatae $\perp$res y; atque origo abscissarum in $\mathfrak{A}'$ ponatur, et abscissae t in $\mathfrak{A}'\mathfrak{K}$ accipiantur; (rectam $\mathfrak{A}'\mathfrak{B}'$ lineae abscissarum priori parallelam ad angulum q secante): aequatio lineae pro abscissis t et ordinatis u reperitur modo sequente. Sit ex $\mathfrak{A}'$ ad lineam abscissarum priorem $\perp$ris b, atque ex $\mathfrak{B}'$ fiant $\perp$res $\mathfrak{B}'\mathfrak{N}$ et $\mathfrak{B}'\mathfrak{K}$ ad u et $\mathfrak{A}'\mathfrak{K}$.

Erit propter $\triangle$la rectangula verticalia, angulus ad $\mathfrak{M}$ angulo q ad $\mathfrak{A}'$ aequalis; et $\mathfrak{A}'\mathfrak{B}'=x+a$, $k=\mathfrak{N}\mathfrak{B}'$.

Estque $\mathfrak{A}'\mathfrak{B}'$ (seu $x+a$) : $\mathfrak{A}'\mathfrak{K}$ (seu $t+k$) =

$1 : \cos q$; et hinc $\mathfrak{A}'\mathfrak{K} = (x+a)\cos q$, et $x+a = \frac{t+k}{\cos q}$; est porro $x+a : \mathfrak{B}'\mathfrak{K}$ (seu l) $= 1 : \sin q$, unde $l = (x+a)\sin q$; est etiam $y+b : (\mathfrak{N}\mathfrak{B}' = k) = 1 : \sin q$, et hinc $k = (y+b)\sin q$; porro $y+b : \mathfrak{M}\mathfrak{N} = 1 : \cos q$, unde $\mathfrak{M}\mathfrak{N} = (y+b)\cos q$; atque hinc $t = \mathfrak{A}'\mathfrak{K} - k = (x+a)\cos q - (y+b)\sin q$; et $u = \mathfrak{M}\mathfrak{N} + l = (y+b)\cos q + (x+a)\sin q$, et hinc $x+a = \frac{u-(y+b)\cos q}{\sin q} = \frac{t+(y+b)\sin q}{\cos q}$.

Unde valores in aequatione ipsis x et y substituendi sic reperiuntur: Si brevitatis caussa $\sin q$ dicatur q', et q'' dicatur $\cos q$, erit $x+a = \frac{t+(y+b)q'}{q''} = \frac{u-(y+b)q''}{q'}$; et hinc $tq' + (y+b)q'^2 = uq'' - (y+b)q''^2$; atque hinc $(y+b)(q'^2 + q''^2) = q''u - tq'$; et (quia omnia pro radio 1 computata sunt, adeoque $q'^2 + q''^2 = 1$), erit $y+b = q''u - tq'$; consequ. $y = q''u - tq' - b$. Eodem modo prodit $x = q'u + q''t - a$; quibus valoribus in aequatione lineae, ipsis x et y substitutis, prodit aequatio lineae quaesita.

Quod vero omnibus his substitutionibus ordo lineae maneat, sic patet: si pro coordinatis x et y, linea $n$ti ordinis fuerit; numerus variabilium x, y tanquam factorum in aliquo termino plane n est, et in nullo ipsum n superat. Consideretur terminus quivis, in quo x ut factor $m$ies, y vero $(n-m)$ies occurrit; substituantur valores novi ipsis x et y; neglectis factotibus constantibus, quae ad lineae ordinem nihil conferunt; mutabitur terminus in $[(u+t)-a]^m[(u-t)-b]^{n-m}$, ubi item quoad ordinem lineae nonnisi variabiles respiciendo, $[(u+t)^m + (u+t)^{m-1} \cdots]$ per $[(u-t)^{n-m} +$

$(u-t)^{n-m-1}\ldots]$ multiplicatum considerandum venit.

In binomio ad μ elevato, summa exponentium in quovis termino idem μ est: si igitur terminus quicunque ipsius $(u+t)^m$ per terminum quemcunque ipsius $(u-t)^{n-m}$ multiplicetur, summa literarum variabilium (ut factorum) in facto erit $m+n-m=n$; in facto autem e quolibet termino item ipsius $(u+t)^m$ per quemlibet terminum ipsius $(u-t)^{n-m-1}$, numerus variabilium erit $m+n-m-1=n-1$; et patet in nullo facto, nisi quod ex $(u+t)^m.(u-t)^{n-m}$ oritur, numerum variabilium ad n exsurgere: quodvis enim ex $(u+t)^{m-m'}$ per $(u-t)^{n-m-n'}$ multiplicato oritur, (denotantibus m', n' integros $+$vos, et $m'<m$, $n'<n-m$); fiet igitur summa literarum variabilium $m-m'+n-m-n'=n-m'-n'=n-(m'+n')$ quod $<n$ est; est nempe $m'+n'<n$, quia $n=n-m+m$, et $n'<n-m$, atque $m'<m$.

Consequenter *utcunque mutetur abscissarum linea, et origo abscissarum, angulusque ordinatarum, ordo lineae manet.*

Notandum autem, per multiplicationem terminorum dictorum omnium, prodire omnes terminos, tam qui nonnisi aliquam variabilium t et u continent, quam qui quocunque numero ν ipsum n haud superante continet quamvis aliquam ipsarum t et u, et alteram ν'ies continet (pro $\nu+\nu'$ haud $>n$); nempe ut infra dicetur, omnes *uniones*, *biniones* &c--- prodire ex t et u, usque ad $n$iones (inclusive) *admissa repetitione literae ejusdem, haud numerata diversa earundem literarum permutatione.* Facile hoc patet, quum ex $(t+u)^\nu$ prodeat omnis possibilis νio, uti ex $(t-u)^{\nu'}$ omnis possibilis

νio, atque ex $(t+u)^{\nu}.(t-u)^{\nu'}$ omnis possibilis $(\nu+\nu')$io.

6to. *Linea ordinis* nti *a nulla recta in pluribus quam n punctis secari potest.*

Nam etsi recta quaevis pro linea abscissarum accipiatur, gradus aequationis haud augetur. Erit autem ubicunque secuerit linea rectam abscissarum t, ordinata $u=o$; adeoque pro $u=o$ omnes termini aequationis ipsam u ut factorem continentes disparent, et pars reliqua aequationis, quae nonnisi variabilem t nec eam ad ipso n altiorem gradum elevatam continet, erit $=o$, pro $u=o$; quamobrem plures quam numero n valores illi ipsius t, pro quibus $u=o$, dari nequeunt.

7mo. *Linea* nti *ordinis per* $[(n+1)(n+2):2]$ -1 *puncta determinatur*; et quidem ita ut quanquam non ad quamvis tot puncta requirantur, per tot puncta nulla linea ordinis nti alia duci possit; et per quaevis data $\frac{(n+1)(n+2)}{2}-1$ puncta, linea aliqua ordinis nti duci posit; dummodo eorum plura quam n puncta in recta haud sint, quia linea ordinis nti in pluribus quam n punctis rectam non secat.

In aequatione generali lineae ordinis nti sunt (p. 98) termini numero $\frac{(n+1)(n+2)}{2}$, quorum primus constans sine ulla variabili est.

Sint (Fig. 161) puncta data $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \mathfrak{C}$ ---; ducatur linea abscissarum quaecunque $\mathfrak{K}\mathfrak{H}$, et sit * origo abscissarum, demittantur ex $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \mathfrak{C}$ -- ⊥res A, B, C --- tanquam ordinatae respondentes abscissis a, b, c ---; substituatur prius in aequatione generali ubicunque a abscissae t, et A ordinatae u; dein in eadem priori aequatione generali substituatur ubique b abscissae t, et B ordinatae u, tum substituatur item in aequatione generali, c abscissae t, et C ordinatae u, et ita porro; donec tot aequationes gradus primi prodeant, quot puncta data et quot constantes quaerendae sunt; itaque constantes ex iis determinantur; et linea pro constantibus repertis in aequationem positis, erit gradus $n$ti per data puncta transiens.

Potest etiam constans variabili destituta $=1$ poni, et reliquae constantes quoad eam exprimi.

Neque autem ulla alia linea $n$ti ordinis per eadem puncta transit: nam si alia linea L esset per eadem puncta transiens: reducta ad lineam abscissarum priorem, et idem abscissarum initium, quod prius erat; modo dicto aequatio generalis easdem aequationes pro constantibus reperiendis, easdemque constantes, adeoque eandem lineae L aequationem praebebit.

8vo. Si lineae $n$ti ordinis aequatio sit $(F)(x,y)=o$ pro abscissa x et ordinata y, atque pro iisdem abscissis et ordinata u sit lineae $m$ti ordinis aequatio $(f)(x,u)=o$; pro omni casu ubi lineae hae se invicem secant, $u=y$ esse oportet; adeoque pro illo x debet $(F)(x.y)=o=(f)(x,u)$ esse.

Probari autem potest, eliminato y, aequationem $(F)(x,y)=(f)(x,y)$ nonnisi ad gradum mn assurgere; adeoque haud dari posse plures ejusmodi valores ipsius x, pro quibus $u=y$ fiat, adeoque lineae dictae se invicem secent; quanquam non dicatur in tot punctis secare posse. Sed instituti ratio transire ad numerum 5 jubet.

·3. REDITUS E PLANO IN ABYSSUM SPATII.

Ambitus constructionis geometricae (sensu lato); numero rectarum, operationumque trium primitivarum finito, nempe praeter duas, quae in constructione geometrica (sensu stricto) adhibebantur, etiam tertia admittitur, exclusa tamen hic quoque operationum conjunctione (Tom. I. XXX).

Ordo (pag. 3---) praescriptus plura satis declarat, et primaria quoque (Tom. I. p.482--) dicta repetere supervacuum est: ex gr. quod *recta cum plano*, aut punctum, aut totam se, aut nihil *commune* habeat: *planum cum plano* aut rectam aut nihil commune habeat; porro quod recta per planum, pariter planum per planum in alteram plagam transeat; &c. Nempe

·3111112. *Plana parallela* describuntur (Tom. I. p. 486).

·311112. *Recta e puncto extra planum* P *ad duas rectas in* P *sitas* ⊥ris, *est ad planum* P ⊥ris (Tom. I. p. 483); patetque planum per α descriptum (in ·3111112) et planum per β descriptum, punctum p commune habere, et se invicem in recta secare; *darique* igitur e *quovis plani* P *puncto* p ⊥rem *ad* P; esseque unicam ex p ad P (Tom. I. p.483).

Patet etiam *quamvis rectam, quae ad planorum parallelorum* P *et* Q (in ·3111112) *aliquod* ⊥ris *est, esse ad alterum eorundem quoque* ⊥rem; atque *quasvis duas ejusmodi rectas esse aequales et parallelas*; et hinc etiam *quasvis duas rectas eidem tertiae parallelas, inter se quoque parallelas esse.*

Nempe quoad 1mum (Fig. 162) si bb′=cc′; erit bcc′b′ rectangulum, atque in motu circa bc describent b' et c' circulos radiis aequalibus bb' et cc' (in planis P et Q): atque tangentes circulorum horum in plana P et Q cadent, et recta $b'c'$ ad tangentem in b' circuli radio bb' in P scripti, et pariter ad tangentem in c' radio cc' in Q scripti $\perp$ris est: nam $bcc'b'$ sive antrorsum sive retrorsum moveatur circa bc, generationes aequales sunt (Tom. I. p. 7.); est igitur bc' tam in P quam in Q ad duas rectas $\perp$ris, consequ. tam ad P quam ad Q $\perp$ris (p.170).

Potest vero quaevis recta ad planum P vel Q $\perp$ris per bc aut $b'c'$ repraesentari: nam quodvis punctum alterutrius (ex gr. plani P) aliquod punctum rectae $\widetilde{bb'}$ est, itaque per b' repraesentari potest; ex b' autem ad P nonnisi unica $\perp$ris ad P datur; eratque haec $b'c'$, atque eadem ad planum Q $\perp$ris est.

Quoad 2dum. Si duae ejusmodi rectae $b'c'$ et $b''c''$ in planis parallelis P et Q terminatae ad utrumque $\perp$res fuerint: erit (pro b' et b'' in P, et c' et c'' in Q sitis) tam recta $b'c'$ quam $b''c''$ $\perp$ris tam ad rectam $b'b''$ quam ad rectam $c'c''$: consequenter quadrilaterum rectilineum $b'b''c''c'$ erit rectangulum, adeoque $b'c' \parallel$ et $= b''c''$.

3tio. Unde etiam sequitur; quod si (Fig. 163) rectae E, F eidem rectae A parallelae fuerint: inter se quoque parallelae erunt. Nam sint e punctis b, c ipsius A, ad rectas E, F, $\perp$res bb', cc', et bb'', cc''; erit $b'c' = bc = b''c''$; moveatur circa A schema ut prius: manifesto erunt rectae $b'c'$, $b''c''$ ad plana parallela per rectas bb', cc' descripta $\perp$res; adeoque (der praec). erunt E et F parallelae.

Atque hinc etiam patet, *e quovis puncto p extra planum P sito, dari rectam ad P* $\perp$*rem*

Nam sit (Fig. 164) e quovis puncto a plani P recta a ad P Lris . sitque pf ad a e puncto f ipsius a Lris ; atque in plano afp, quod propter punctum a commune, secat planum P in recta ab, accipiatur in hac sectione utriusque plani, recta ab=fp ; et concipiatur moveri pfab circa af: fient duo plana parallela, et recta pb Lris ad P.

·31121. De angulo duorum planorum quoque dictum (Tom. I. p. 484) est: unde etiam ibidem patet dari e quavis recta imo quovis puncto plani P planum Lre ad P.

Sed demonstrantur ibidem sequentia: *Quodvis planum* Q, *in quod recta* Lris *ad planum* P *cadit*, *est* Lre *ad* P ; *et si sectio planorum* P *et* Q *sit* $\widetilde{ab}$, Lris *ad* P *e quolibet puncto rectae* ab *in* Q *cadit*; *item quaevis* Lris *ad* $\widetilde{ab}$ in Q *cadens est* Lris *ad planum* P(Tom.I.p.484--).

Si vero *praeter planum* Q *etiam planum q sit* Lre *ad* P, *atque* Q *et q secent se invicem; sectio planorum* Q *et q erit recta ad planum* P Lris (Tom. I. p. 486).

Quod *anguli planorum se invicem secantium verticales aequales sint*, &c vide (Tom. I. p. 484--).

·311221. Sit (Fig. 165) c punctum commune, concipiaturque facies plani abcde superior alba, inferior nigra ; moveaturque prius planum bcde circa bc, ita ut facies alba ipsius cbde faciei albae ipsius acb obvertatur, et tum moveatur planum cde circa cd, ita ut si prius alba facies albae obvertebatur, et nunc alba ipsius cde facies albae ipsius cdb faciei obvertatur: si per planum altera vice motum secetur abc (cadente ex gr. ce in ca); orietur *angulus solidus rectilineus* per tria latera nempe sectores $\mathfrak{acb}$, $\mathfrak{cbd}$, $\mathfrak{cde}$ ad apicem communem clausus, quorum summa manifesto est <4 rectis.

Patet etiam $\mathfrak{cfe}$ circa $\mathfrak{cf}$ moveri, motumque quoties libuerit continuari posse; ut angulus solidus numero laterum quolibet claudatur. Poterit conditio esse, ut facies nigra nigrae obviam semper eat, aut haec conditio tolli.

Notandum autem est 1mo. *Numerum laterum* $\wedge$li *solidi rectilinei ad apicem communem clausi minimum esse* 3, et latera talia esse, ut *summa quorumvis binorum* (ut in $\triangle$lo) *major tertio sit.* Nam si (Fig. 166) arcus $\mathfrak{ba}=\mathfrak{ba}'$, et $\mathfrak{da}'=\mathfrak{de}$; moveatur $\mathfrak{abc}$ circa $\mathfrak{bc}$, donec $\mathfrak{ca}$ in $\mathfrak{ca}'$ cadat, et moveatur $\mathfrak{dce}$ circa $\mathfrak{cd}$, donec $\mathfrak{cd}$ in $\mathfrak{ca}'$ cadat; atque tum moveatur retrorsum $\mathfrak{abc}$ circa $\mathfrak{cb}$, et $\mathfrak{dce}$ circa $\mathfrak{cd}$; describent puncta $\mathfrak{a}$ et $\mathfrak{e}$ circulos in superficie sphaerae; sit enim $\mathfrak{a}\mathfrak{A}$ $\perp \mathfrak{cb}$, et manifesto describet in motu dicto $\mathfrak{Aa}$ planum, et $\mathfrak{a}$ circulum, qui omnino in superficie sphaerae erit, manente nempe centro $\mathfrak{c}$ et radio $\mathfrak{ca}$. Duo hi circuli autem si praeter punctum $\mathfrak{a}$ adhuc aliquid commune haberent, supra planum $\mathfrak{cbd}$, fieret id etiam inferius; adeoque duo circuli se invicem in pluribus quam 2 punctis secarent. Hoc autem fieri nequit, etsi circuli non in idem planum cadant: sint enim puncta $\mathfrak{p}$, $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{q}$ circulo utrique C et *c* communia; ea non in recta sunt, adeoque planum idem circuli utriusque determinant; ibi vero duo circuli 3 puncta communia habere nequeunt.

Atque manifesto si summa arcuum $\mathfrak{ab}$ et $\mathfrak{de}$ sit arcu $\mathfrak{bd}$ minor exgr. sit arcus $\mathfrak{ab}=\mathfrak{ba}'$, et arcus $\mathfrak{de}=\mathfrak{de}'$; et sint ex $\mathfrak{e}$ ad $\mathfrak{cd}$, et ex $\mathfrak{a}$ ad $\mathfrak{cb}$ $\perp$res $\mathfrak{e}\mathfrak{E}$ et $\mathfrak{a}\mathfrak{A}$; circuli centrorum $\mathfrak{A}$ et $\mathfrak{E}$ radiis $\mathfrak{Aa}$ et $\mathfrak{Ee}$ secare se invicem prorsus nequeunt. Nam si circuli priores se invicem nonnisi in $\mathfrak{a}'$

secabant, circulus centri 𝔈 radii e𝔈 nihil cum circulo centri 𝔄 radii 𝔄a′ commune habebit; namque circulus in superficie sphaerae circa centrum 𝔟 per punctum e scriptus, totus intra circulum centri ejusdem per punctum a′ scriptum manet.

Quod nempe via talis in superficie sphaerae circulus sit, patet e prius dictis, ubi a𝔄 ⊥ris ad c𝔟 mota planum, et a circulum plano sphaeraeque communem generat.

Sunt igitur in angulo rectilineo trilatero quaevis bina latera simul sumta 3tio majora. Atque hinc patet etiam, *quodvis △ sphaericum*. (nempe figuram in superficie sphaerae e tribus arcubus circuli maximi compositam) *talem esse, ut summa quorumvis binorum laterum tertio major sit*: secus enim anguli solidi dicti bina quaedam latera tertio majora non essent.

Est quoque angulus solidus rectilineus dictus *per tria latera*, *forma* absolute *determinata*, uti △ rectilineum per tria latera; et *idem de △lo sphaerico* patet. Nam si (F. 167) c in centrum sphaerae ponatur, et c in c manente, e in a cadat, △li apex 𝔟, cadet aut supra aut infra planum ac𝔟, neque vero ullum aliud tale punctum 𝔟′ in eadem plaga (ex gr. supra planum) datur; quia tum duo circuli extremitate 𝔟 ⊥rium ex 𝔟 ad $\widetilde{ac}$ et $\widetilde{bc}$ missarum, circa has motarum descripti, se invicem supra planum in duobus, adeoque et infra illud in duobus secarent.

Manifesto quoque forma determinata generatur; etiamsi novus angulus solidus rectilineus trium laterum, ad eundem apicem priori ita jungatur, ut nonnisi unum latus (nempe unus sector) utrique commune sit; idemque compositione plurium ejusmodi angulorum continuari posse patet, eodemque ordine juxta se invicem positis ejusmodi angulis, formam determinatam, eidem semper aequalem, generari.

·31122211. *Planum* R *plana parallela* P, Q *secans, alternos angulos, et externum interno oppositum aequales, atque summam duorum internorum duobus rectis aequalem facit* (Fig. 168).

Fiat enim e puncto quopiam p plani P Lris pp′ ad planum R, Lris pq ad planum Q; atque ponatur per pqp′ planum A; erit A tam ad P quam ad Q imo et ad R Lre; nam pq est tam ad P quam ad Q Lris, adeoque planum per pq positum est L ad P et Q (p.172), ita planum per pp′ positum est L ad R.

Sint porro sectiones plani A cum planis P,Q,R rectae pi′, qr′, ip′r; erunt anguli i′pq et r′qp recti, atque pi′, qr′ (in quibus secat planum A plana parallela P, Q) parallelae, cum recta per p′ planis A et R communi, in eodem plano A sunt. Est autem summa internorum, quos rectae p′i et pi′ ad pp′ faciunt, ita summa internorum, quos rectae p′r et qr′ ad rectam p′q faciunt, duobus rectis minor. Consequ. pi′ et qr′ per ir secantur; fiat hoc in i″ et r″. Unde assertum patet, quum angulorum, qui planorum parallelorum P et Q per tertium facta sectione generantur, quantitates eaedem sint, quae rectarum pi′ qr′ parallelarum per tertiam sectarum. Idem vero eodem modo patet, si p′ supra vel infra plana P et Q cadat.

·31122212. *Sectiones planorum* R *et* S *cum planis parallelis* P *et* Q, *non solum sibi invicem parallelae sunt, sed etiam angulos aequales faciunt.* (F.169) Sint enim planorum R et S cum

P sectiones ab, ac, adeoque sit $\triangle$ bac, et cum plano Q sectiones $\mathfrak{AB}$, $\mathfrak{AC}$, adeoque sit $\triangle$ $\mathfrak{BAC}$; fiantque ab, ac, $\mathfrak{AB}$. $\mathfrak{AC}$ aequales; erunt $ab \parallel \mathfrak{AB}$, $ac \parallel \mathfrak{AC}$, atque $\mathfrak{A}ab\mathfrak{B}$ et $\mathfrak{A}ac\mathfrak{C}$ parallelogramma (p 20); itaque $c\mathfrak{C}$ et $b\mathfrak{B}$ eidem $a\mathfrak{A}$ parallelae et aequales, erunt inter se quoque parallelae et aequales. Consequ. $cb\mathfrak{BC}$ erit parallelogrammum (p 20); adeoque $cb = \mathfrak{CB}$; et per consequens $\triangle cab = \triangle \mathfrak{CAB}$ (per 3 latera); itaque et $\wedge cab = \wedge \mathfrak{CAB}$, et anguli ad basim cb angulis ad basim $\mathfrak{CB}$ aequales sunt.

Atque hoc continuari posse patet, si ut in numero ·31122213 etiam planum T, imo plura quotvis accedant. Si vero ibidem $\alpha \parallel \beta$ fuerint, sectio in P sectioni in Q aequalis erit; nempe non solum anguli sibi invicem respondentes aequales, (quod etiamsi α non $\parallel \beta$, semper est), sed et latera sibi invicem respondentia aequalia erunt: considerentur enimvero duae ejusmodi parallelae uti α et β sunt; sit a extremitas in P cadens ipsius α, et extremitas in Q sit a', extremitas in P ipsius β sit b, et b' in Q; erit recta ab in plano P rectae $a'b'$ in Q parallela; quia in planum parallelarum α et β cadunt, et sectiones per hoc factae planorum parallelorum P et Q sunt; itaque latera sibi invicem respondentia quoque nempe latera opposita parallelogrammi sunt aequalia.

·31122221. *Cum planis parallelis* P, Q, *non solum planum tertium secans, sed et recta cum alterutro ipsorum* P, Q *aliquid commune habens, in neutrum incidens, angulos alternos aequales, pariterque externum interno opposito aequalem, et summam duorum internorum duobus rectis aequalem facit.*

Si enim (Fig. 170) ex puncto p ipsius P ad quodvis punctum q vel q' recta concipiatur; fi-aut e punctis $\mathfrak{p}$, $\mathfrak{q}$ (vel $\mathfrak{q}'$) ⊥res $\mathfrak{p}\mathfrak{P}$, $\mathfrak{q}\mathfrak{Q}$ (vel $\mathfrak{q}'\mathfrak{Q}$) ad Q; erunt hae etiam ad P ⊥res, atque $\mathfrak{p}\mathfrak{P}\mathfrak{Q}\mathfrak{q}$ rectangulum erit; unde propter summam duorum internorum, (quos ad $\mathfrak{p}\mathfrak{P}$ faciunt $\mathfrak{P}\mathfrak{Q}$ et $\mathfrak{p}\mathfrak{q}$, vel $\mathfrak{P}\mathfrak{Q}$ et $\mathfrak{q}'\mathfrak{p}$ producta), duobus rectis minorem, secabitur recta $\widetilde{\mathfrak{P}\mathfrak{Q}}$, adeoque planum Q; transibitque recta $\mathfrak{p}\mathfrak{q}$ (vel $\mathfrak{p}\mathfrak{q}'$) per utraque plana parallela P et Q.

Fiant hi transitus in $\mathfrak{p}$ et $\mathfrak{f}$ (Fig. 171), fiatque e puncto $\mathfrak{d}$ rectae $\widetilde{\mathfrak{f}\mathfrak{p}}$ ⊥ris $\mathfrak{d}\mathfrak{e}$ ad Q; erit haec ⊥ris ad planum P quoque, necnon ad sectiones $\mathfrak{i}\mathfrak{p}$, $\mathfrak{e}\mathfrak{f}$ planorum parallelorum P, Q per planum $\mathfrak{d}\mathfrak{e}\mathfrak{f}$ factas; suntque $\mathfrak{i}\mathfrak{p}$, $\mathfrak{e}\mathfrak{f}$ parallelae per $\mathfrak{d}\mathfrak{f}$ sectae, atque anguli $\mathfrak{i}\mathfrak{p}\mathfrak{d}$, $\mathfrak{e}\mathfrak{f}\mathfrak{d}$ plane anguli rectae $\mathfrak{d}\mathfrak{f}$, quos cum planis P et Q efficit.

Schol. 1. Sunt autem etiam *anguli quos rectae parallelae* $\mathfrak{a}\mathfrak{c}$, $\mathfrak{b}\mathfrak{f}$ *per planum* P *sectae* (*in* $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$) *cum plano eodem faciunt, aequales*. Sint enim (Fig. 172) rectae parallelae $\mathfrak{a}\mathfrak{c}$, et $\mathfrak{b}\mathfrak{f}$ in plano tabulae, quod dicatur Q; erit recta $\mathfrak{a}\mathfrak{b}$ planis P et Q communis, utcunque vertatur P circa $\mathfrak{a}\mathfrak{b}$. Erigantur ex $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$ ⊥res $\mathfrak{a}\mathfrak{c}'$, $\mathfrak{b}\mathfrak{f}'$ ad $\mathfrak{a}\mathfrak{b}$ in Q, et ex iisdem punctis $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$ ad eandem rectam $\mathfrak{a}\mathfrak{b}$, ⊥res $\mathfrak{a}\mathfrak{a}'$, $\mathfrak{b}\mathfrak{b}'$ in P, et ⊥res $\mathfrak{a}\mathfrak{a}''$, $\mathfrak{b}\mathfrak{b}''$ ad P. Angulus rectae $\mathfrak{a}\mathfrak{c}$ cum plano P, est is quem $\mathfrak{a}\mathfrak{c}$ cum sectione plani illius p facit, in quod $\mathfrak{a}\mathfrak{c}$ et ⊥ris ex $\mathfrak{c}$ ad planum P cadunt; atque hoc planum idem cum eo est, in quod $\mathfrak{a}\mathfrak{c}$ cum ⊥ri ex $\mathfrak{a}$ ad planum P erecta cadit; nam duae hae ⊥res ad idem planum P, sunt parallelae, in quarum alteram cadit $\mathfrak{a}$ et $\mathfrak{c}$ in alteram.

Si Q circa $\mathfrak{a}\mathfrak{b}$ moveatur, donec ∧ $\mathfrak{c}'\mathfrak{a}\mathfrak{a}'$ (consequ. etiam $\mathfrak{f}'\mathfrak{b}\mathfrak{b}'$) rectus sit, $\mathfrak{a}\mathfrak{c}'$ cum $\mathfrak{a}\mathfrak{a}''$, et $\mathfrak{b}\mathfrak{f}'$ cum $\mathfrak{b}\mathfrak{b}''$ coincidet; secat autem planum per $\mathfrak{a}\mathfrak{a}''$ et $\mathfrak{a}\mathfrak{c}$, cum plano P punctum $\mathfrak{a}$ commune habens, ipsum P in recta quapiam $\mathfrak{a}\mathfrak{a}'''$ per $\mathfrak{a}$ eunte; atque angulus quem recta ista ad verticem $\mathfrak{a}$ cum recta $\mathfrak{ac}$ facit, est quantitas anguli rectae $\mathfrak{ac}$ cum plano P.

Evidens autem est, totum schema in se moveri posse, recta $\widetilde{\mathfrak{ab}}$ in se, P in se, Q in se manentibus, donec $\mathfrak{a}$ in $\mathfrak{b}$ veniat; atque tum $\mathfrak{ac}'$ in $\mathfrak{bf}'$, $\mathfrak{ac}$ in $\mathfrak{bf}$ venire; et propter generationes aequales, angulum rectae $\mathfrak{bf}$ cum plano P aequalem priori produci.

Schol. 2. Manifesto quoque $\mathfrak{aa}'''$ cum $\mathfrak{ab}$ in plano P, angulum α illi aequalem facit, quem $\mathfrak{bb}'''$ cum recta $\mathfrak{ab}$ ultra $\mathfrak{b}$ continuata facit: consequenter $\mathfrak{aa}''' \parallel \mathfrak{bb}'''$; nempe rectae ex $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}$ (in quibus parallelae $\mathfrak{ac}$, $\mathfrak{bf}$ planum P secant), ad puncta in quae $\perp$res ad P ex $\mathfrak{c}$ et $\mathfrak{f}$ cadunt ductae, sunt parallelae.

Schol. 3. Si (Fig. 173) in plano Q sit $\mathfrak{AB} \parallel \mathfrak{A}'\mathfrak{B}'$ et $\mathfrak{AC} \parallel \mathfrak{A}'\mathfrak{C}'$, atque supra Q sint talia puncta $\mathfrak{a}$ et $\mathfrak{a}'$, ut $\mathfrak{Aa}$ cum $\mathfrak{AB}$, ita $\mathfrak{A}'\mathfrak{a}'$ cum $\mathfrak{A}'\mathfrak{B}'$ faciant angulum v, et $\mathfrak{Aa}$ cum $\mathfrak{AC}$ ita $\mathfrak{A}'\mathfrak{a}'$ cum $\mathfrak{A}'\mathfrak{C}'$ faciant angulum q (quovis seorsim intellecto): erit tum $\mathfrak{Aa}$ ipsi $\mathfrak{A}'\mathfrak{a}'$ parallela.

Nam orientur hoc pacto anguli solidi ad apices $\mathfrak{A}$ et $\mathfrak{A}'$ triangulares, qui $\mathfrak{A}'$ in $\mathfrak{A}$, et $\mathfrak{A}'\mathfrak{C}'$ in $\mathfrak{AC}$ atque $\mathfrak{A}'\mathfrak{B}'$ in $\mathfrak{AB}$ cadentibus super Q congruunt, angulo $\mathfrak{C}'\mathfrak{A}'\mathfrak{a}'$ in $\mathfrak{CAa}$, et angulo $\mathfrak{B}'\mathfrak{A}'\mathfrak{a}'$ in $\mathfrak{BAa}$ cadentibus. Demissis igitur ex $\mathfrak{a}$ et $\mathfrak{a}'$ ad planum Q in quod bases $\mathfrak{ABC}$, $\mathfrak{A}'\mathfrak{B}'\mathfrak{C}'$ angulorum cadunt, $\perp$ribus $\mathfrak{aK}$, $\mathfrak{a}'\mathfrak{K}'$: manifesto erunt anguli $\mathfrak{CAK}$ et $\mathfrak{C}'\mathfrak{A}'\mathfrak{K}'$, atque $\mathfrak{aAK}$ et $\mathfrak{a}'\mathfrak{A}'\mathfrak{K}'$ aequales; adeoque propter $\mathfrak{AC} \parallel \mathfrak{A}'\mathfrak{C}'$ erit quoque $\mathfrak{AK} \parallel \mathfrak{A}'\mathfrak{K}'$.

Plana $\mathfrak{AaK}$ et $\mathfrak{A}'\mathfrak{a}'\mathfrak{K}'$ ($\perp$res ad planum Q complectentia) autem sunt ad Q $\perp$ria, et praeterea de parallelis $\mathfrak{AK}$, $\mathfrak{A}'\mathfrak{K}'$ erecta; adeoque parallela sunt, secanturque per plana Q (nempe $\mathfrak{K}\mathfrak{A}\mathfrak{A}'\mathfrak{K}'$) et $a\mathfrak{A}\mathfrak{A}'$ se invicem in $\mathfrak{A}\mathfrak{A}'$ secantia; et erunt sectiones angulares aequales, nempe sectio per planum $a\mathfrak{A}\mathfrak{A}'$ in plano $a'\mathfrak{A}'\mathfrak{K}'$ facta cum $\mathfrak{A}'\mathfrak{K}'$ angulum ipsi $a\mathfrak{A}\mathfrak{K}$ aequalem efficit, sectio autem alia praeter $\mathfrak{A}'a'$ esse nequit. Consequenter $\mathfrak{A}a$ et $\mathfrak{A}'a'$ in idem planum cadunt, suntque sectiones ejusdem cum duobus planis parallelis; adeoque parallelae.

Schol. 4. (Fig. 174) Si plana parallela P et Q per rectas parallelas $\mathfrak{pq}$, $\mathfrak{p}'\mathfrak{q}'$ secentur, et $\mathfrak{p}$, $\mathfrak{p}'$ in P atque $\mathfrak{q}$, $\mathfrak{q}'$ in Q fuerint: erit $\mathfrak{pq} = \mathfrak{p}'\mathfrak{q}'$. Nam ex $\mathfrak{p}$, $\mathfrak{p}'$ fiant $\mathfrak{pb}$, $\mathfrak{p}'\mathfrak{b}'$ $\perp$res ad Q, orientur (nisi $\mathfrak{pq}$ adeoque $\mathfrak{p}'\mathfrak{q}'$ $\perp$res sint), $\triangle$la $\mathfrak{pqb}$ et $\mathfrak{p}'\mathfrak{q}'\mathfrak{b}'$ aequalia; quia $\mathfrak{pb} = \mathfrak{p}'\mathfrak{b}'$, anguli $\mathfrak{pqb}$, $\mathfrak{p}'\mathfrak{q}'\mathfrak{b}'$ sunt rectarum $\mathfrak{pq}$, $\mathfrak{p}'\mathfrak{q}'$ anguli cum plano Q, adeoque aequales, atque et rectus = recto. Manifesto etiam fit $\mathfrak{pqq}'\mathfrak{p}'$ parallelogrammum, quum $\mathfrak{pq} \parallel$ et $= \mathfrak{p}'\mathfrak{q}'$.

Schol. 5. Si plana parallela P et Q per planum R secentur, et sectio planorum P et R sit recta $\mathfrak{pi}$, planorum Q et R autem sectio sit $\mathfrak{qr}$; quodcunque planum *p* ponatur per $\mathfrak{p}$ ad Q parallele; sectio planorum *p* et R eadem cum $\mathfrak{pi}$ erit: nam per $\mathfrak{p}$ nonnisi unum planum ad Q parallelum datur; sed inde quoque patet quod si sectio $\mathfrak{pf}$ planorum *p* et R diversa a $\mathfrak{pi}$ esset, in plano R per punctum $\mathfrak{p}$ ad rectam $\mathfrak{qr}$ duae diversae parallelae darentur.

·31122222. Hoc numero (p. 7) expositae constructionis resultatum, ibidem *prisma rectilineum* dicitur; quod si pro $\mathfrak{ABC}$..- nonnisi $\mathfrak{ABC}$ fuerit, *triangulare*, si $\mathfrak{ABCD}$ parallelogrammum sit, *parallelepipedum* &c audit. Dicitur vero *prisma rectum*, si $\mathfrak{A}a$ ad basim $\mathfrak{ABC}$--- perpendicularis sit, secus *obliquum* audit.

Schol. Datur autem (Tom I. p.459--) conceptus prismatis generalior: et si ex omnibus punctis cujusvis continuae portionis plani rectae concipiantur (in eadem plaga), eidem cuipiam rectae, parallelae et aequales; complexus omnium illarum rectarum *prisma* est. Interim hic de prismate tali, quod geometrice (sensu lato) construi potest, et sub numerum .31122222 cadit prius sermo est, inferius sub numero .31121 cylinder pariter (sensu lato) geometrice constructum prisma erit.

§. 1. In constructione prismatis rectilinei, cujus portio plani a figura rectilinea ABC--- clausa, *basis* dicitur, oriuntur praeter ABC--- et abc--- tot latera, quot latera ipsius ABC-- sunt: nempe ex gr. ipsius ABCDA latera AB, BC, CD, DA producent parallelogramma ABba, BCcb, CDdc, DAad. Praeterea vero abc-- erit in plano per a ad planum in quo ABC-- est, parallelo, eritque ipsi ABC--- congruenter aequalis.

2do. Si planum q ex Q ipsi Q parallele moveatur in illa plaga, in qua prisma est, ubicunque sectio ejus cum prismate, ipsi ABC--- congruenter aequalis erit, et prisma prius, in duo prismata dividit.

3tio. Si punctum quodvis P ipsius ABC-- (sive in perimetrum sive intus cadat), et punctum p in quo planum abc--- per parallelam ex P ad Aa erectam secatur, *sibi invicem respondentia* dicantur: erunt haec plane ea, quae A in a, B in b, C in c &c cadentibus congruent, et quaecunque portio continua b plani perimetro ABC--- clausi fuerit, complexus rectarum ex omnibus portionis illius punctis usque ad puncta illis respondentia, *prisma* ba-ti b insistens erit, atque in prius cadet: et quæcunque figurae planae $\mathfrak{ABC}$--- et $\mathfrak{A'B'C'}$.--. fuerint in plano tales, ut recta $\mathfrak{AB}$ sit $\parallel \mathfrak{A'B'}$, et puncto $\mathfrak{A}'$ in recta $\mathfrak{AA'}$ usque in $\mathfrak{A}$ moto, rectam $\mathfrak{A'B'}$ ad $\mathfrak{AB}$ $\parallel$le ferendo (simul cum figura $\mathfrak{A'B'C'}$--), $\mathfrak{A}'$ in $\mathfrak{A}$ veniente congruant; prismata per complexum rectarum ex omnibus figurae $\mathfrak{ABC}$--, item ex omnibus figurae $\mathfrak{A'B'C'}$---, punctis, eidem rectae $\mathfrak{A}\mathfrak{a}$ parallelarum et aequalium, generata congruibilia sunt. Generale hoc tamen, hic ad figuras rectilineas restringitur.

I. Quod primum attinet: ponatur per $\mathfrak{a}$ planum p, ad planum Q in quo $\mathfrak{ABC}$-- est, parallelum, seceturque hoc per planum $\mathfrak{abBA}$ in recta $\mathfrak{ab}'$; erit $\mathfrak{b}'$ et $\mathfrak{b}$ idem. Nam $\mathfrak{ab} \parallel$ et $= \mathfrak{AB}$ quia $\mathfrak{Aa} \parallel$ et $= \mathfrak{Bb}$; itaque $\widetilde{\mathfrak{ab}'}$ et $\widetilde{\mathfrak{ab}}$ coincidunt, quia per $\mathfrak{a}$ ipsi $\mathfrak{AB}$ nonnisi una parallela datur. Est vero $\mathfrak{abBA}$ parallelogrammum; quod pariter de $\mathfrak{bcCB}$, et porro de omnibus patet; sed quum de $\mathfrak{b}$ idem quod de $\mathfrak{a}$ dictum est valeat, cadet etiam $\mathfrak{bc}$ in planum p; atque eadem ad $\mathfrak{c}, \mathfrak{d}$.. applicando, $\mathfrak{abc}$... in planum p per punctum $\mathfrak{a}$ ad planum Q parallelum cadet.

II. Quod alterum attinet; sit plani q cum plano $\mathfrak{ABba}$ sectio $\mathfrak{a'b'}$, ita $\mathfrak{b'c'}$ sectio item plani q cum $\mathfrak{BCcb}$, et ita porro; dari has sectiones patet, si q per rectam $\mathfrak{Aa}$ feratur; secabit enim quamvis ipsi $\mathfrak{Aa}$ parallelam; eritque $\mathfrak{a'b'} \parallel$ et $= \mathfrak{AB}$, $\mathfrak{b'c'} \parallel$ et $= \mathfrak{BC}$ &c, item $\wedge \mathfrak{a'b'c'} = \wedge \mathfrak{ABC}$, $\wedge \mathfrak{b'c'd'} = \mathfrak{BCD}$ &c (p.175). Itaque figura $\mathfrak{a'b'c'}$-- congruere ipsi $\mathfrak{ABC}$--- poterit.

III. Tertium sic patet: (F. 175) quodcunque punctum $\mathfrak{H}'$ fuerit, sive in perimetro ipsius $\mathfrak{ABC}$-.-- sive intus; illi responpens $\mathfrak{h}'$ plane illud erit, in quod caderet congruentibus $\mathfrak{ABC}$--

et $\mathfrak{abc}$---, cadentibus $\mathfrak{A}$ in $\mathfrak{a}$, et $\mathfrak{B}$ in $\mathfrak{b}$ atque $\mathfrak{C}$ in $\mathfrak{c}$ &c. Na*m* etsi non in perimetrum adeoque intus caderet $\mathfrak{H}'$, poterit recta $\mathfrak{A}\mathfrak{H}'$ duci et continuari, donec perimeter in $\mathfrak{H}''$ secetur; sit $\mathfrak{H}''$ in perimetri latere $\mathfrak{H}\mathfrak{I}$, accipiatur in perimetri $\mathfrak{abc}$--- latere $\mathfrak{hi}$, recta $\mathfrak{h}\mathfrak{h}''=\mathfrak{H}\mathfrak{H}''$. Erit $\mathfrak{H}\mathfrak{I}\mathfrak{i}\mathfrak{h}$ parallelogrammum, adeoque et $\mathfrak{H}\mathfrak{H}''\mathfrak{h}''\mathfrak{h}$; quia tum $\mathfrak{H}\mathfrak{H}'' \parallel$ et $=\mathfrak{h}\mathfrak{h}''$. Eritque $\mathfrak{H}''\mathfrak{h}''$ et $\mathfrak{A}\mathfrak{a}$ eidem $\mathfrak{H}\mathfrak{h} =$ et $\parallel$; itaque $\mathfrak{H}''\mathfrak{h}'' =$ et $\parallel \mathfrak{A}\mathfrak{a}$; atque hinc $\mathfrak{A}\mathfrak{a}\mathfrak{h}''\mathfrak{H}''$ parallelogrammum est, atque $\mathfrak{a}\mathfrak{h}'' \parallel$ et $=\mathfrak{A}\mathfrak{H}''$. Consequenter si in $\mathfrak{a}\mathfrak{h}''$ accipiatur $\mathfrak{h}''\mathfrak{h}'=\mathfrak{H}''\mathfrak{H}'$; erit $\mathfrak{H}''\mathfrak{H}'\mathfrak{h}''\mathfrak{h}'$ parallelogrammum, atque et $\mathfrak{H}'\mathfrak{h}'$ ipsi $\mathfrak{A}\mathfrak{a}$ parallela; quae sola ex $\mathfrak{h}'$ ad $\mathfrak{A}\mathfrak{a}$ est, nempe e puncto illo ipsius $\mathfrak{abc}$---, quod in $\mathfrak{H}'$ cadit, congruentibus $\mathfrak{ABC}$-- et $\mathfrak{abc}$--, cadentibusque $\mathfrak{A}$ in $\mathfrak{a}$, et $\mathfrak{B}$ in $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{C}$ in $\mathfrak{c}$ &c.

Si igitur sive toto $\mathfrak{ABC}$.-- sive e quavis figura (nunc rectilinea) $\mathfrak{KLM}$--- in $\mathfrak{ABC}$--- existente, concipiantur rectae e quovis puncto ad punctum ei respondens; complexus earum erit prisma *inter eadem plana parallela*, *basi* $\mathfrak{KLM}$--- *juxta rectam* $\mathfrak{A}\mathfrak{a}$ *superstructum*; et quidem si $\mathfrak{KLM}$--- idem cum $\mathfrak{ABC}$--- fuerit, fiet idem cum prismate priore, secus vero pars hujus erit. Nam si puncta ipsis $\mathfrak{K}$,$\mathfrak{L}$,$\mathfrak{M}$--- respondentia $\mathfrak{k}$,$\mathfrak{l}$,$\mathfrak{m}$--- dicantur; erit $\mathfrak{K}\mathfrak{k} \parallel$ et $=\mathfrak{A}\mathfrak{a}$, et $\mathfrak{L}\mathfrak{l} \parallel$ et $=\mathfrak{A}\mathfrak{a}$ &c atque $\mathfrak{K}\mathfrak{k}\mathfrak{l}\mathfrak{L}$, $\mathfrak{L}\mathfrak{l}\mathfrak{m}\mathfrak{M}$ &c parallelogramma erunt, et antea dicta applicari poterunt.

Evidens etiam est, prisma basi $\mathfrak{ABC}$--- juxta rectam $\mathfrak{A}\mathfrak{a}$ superstructum, rectarum e quovis puncto ipsius $\mathfrak{ABC}$--- ad $\mathfrak{A}\mathfrak{a}$ parallelarum et aequalium complexum esse: nam recta e quovis puncto ipsius $\mathfrak{ABC}$--- ad $\mathfrak{A}\mathfrak{a}$ parallela et eidem aequalis, in dictum prisma cadit, nec ullum in dicto prismate punctum $\mathfrak{f}'$ est, quod non in parallelam ad $\mathfrak{A}\mathfrak{a}$ ex aliquo ipsius $\mathfrak{ABC}$

puncto in eadem cum reliquis plaga cadat; quia si planum per f′ ipsi 𝔄𝔅ℭ parallelum ponatur, sectio plani positi cum prismate erit congruenter aequalis ipsi 𝔄𝔅ℭ---, et f′ in hac sectione erit, quia in prisma cadit; atque paulo antea dictis applicatis, patet rectam per f′ ad 𝔄𝔞 parallelam, tam per 𝔄𝔅ℭ.-- quam per abc-- ire.

Quod autem congruentiam prismatum super basibus 𝔄𝔅ℭ--- et 𝔄′𝔅′ℭ′--- congruenter aequalibus (in eodem plano sitis), juxta eandem rectam 𝔄𝔞 in eadem plaga exstructis attinet: sint ambo prismata in plaga superiori; et facies ipsius 𝔄𝔅ℭ--- (ac pariter facies ipsius 𝔄′𝔅′ℭ′---) superior dicatur *alba*, inferior *nigra*; facies nigra ipsius 𝔄′𝔅′ℭ′--- faciei albae in omni casu superimponi poterit, et tum 𝔄′𝔞′ cum 𝔄𝔞, 𝔅′𝔟′ cum 𝔅𝔟, &c coincident, (extremitates parallelarum ex 𝔄′, 𝔟′-- ad 𝔄𝔞 ductarum literis accento inignitis denotando); nam 𝔄′𝔞′, facie nigra ipsius 𝔄′𝔅′ℭ′ faciei albae ipsius 𝔄𝔅ℭ--- superimposita, in plagam eandem cum 𝔄𝔞 cadit, neque aliorsum cadere potest: quia 𝔄𝔞 || 𝔄′𝔞′, adeoque cum plano eodem angulos aequales faciunt; atque idem de 𝔅′𝔟′ et reliquis patet. Et facile perspici potest, et inferius prisma super eadem basi juxta eandem rectam 𝔄𝔞 generatum priori congruere, si basis inferior sursum moveatur sibi parallele; donec ipsi 𝔄𝔅ℭ--- congruat.

§. 2. At vero superficies prismatis basi 𝔄𝔅ℭ--- superstructi, rete e parallelogrammis supra dictis, (quorum unum latus in omnibus aequale est, alterum vero in primo est 𝔄𝔅, in 2do vero 𝔅ℭ &c, atque anguli pro dato angulo rectae 𝔄𝔞 cum plano 𝔄𝔅ℭ computari possunt), adjectis duabus basibus, composirumgultro praebet: e quo si facies superior alba sit in plaga superiore, nonnisi una eadem forma compingi potest; atque idem rete, prouti facies alba aut nigra extrorsum vertetur, formas dare potest, quae congruere nequeunt alioquin aequales.

Nimirum si latera anguli solidi sint A,B.., ordine eorum eodem, forma unico modo determinatur, atque idem e fine lateris cujusvis ulterius progrediendo patet: nec majus vel minus prodire potest, si rete invertatur, ut facies nigra claudatur, et alba extrorsum versa sit; quum nullum aliud duarum generationum per se resultato unico gaudentium, discrimen sit, nisi quod altera in altera plaga faciem baseos nigram respiciente suscepta sit.

Possunt tamen hoc pacto formae tales prodire, quae congruere nequeunt. Ex gr. sit (F. 176) prismatis basis ABC, in plano Q, et sit e D meditullio rectae AB ad AC parallela DD', atque CD' sit ‖ AB, concipiaturque prisma (juxta rectam Aa ut (in praec) plano tabulae superius insistens; nec sit Aa, adeoque Bb ⊥ris ad ABC, sed sit ex gr. Bb ad laevam versus BD inclinata: evidens post dicta est, quod si prisma rectum esset, atque △DCB cum prismate super eo exstructo superponeretur △lo D'CC, (C in se, D in D' et B in C, cadentibus); oreretur parallelepipedum rectum super basi ACD'D exstructum; at si Bb inclinet (ex gr. ad laevam ut dictum est), et superimponatur △DBC △lo D'CC (nempe si superior facies alba dicatur, inferior nigra), facies △li DCB nigra faciei albae △li D'CC superponetur; et recta Bb in prismate basi CCD' superposito, ad dextram versus CD' inclinata erit; concipiatur nimirum DB sursum sibi parallele moveri (△lum 𝔇𝔈𝔟 ante se ferendo) donec 𝔇 in ℭ, et 𝔅 in 𝔇′ veniat; cadet recta 𝔇𝔅 in ℭ𝔇′, sed 𝔇 in ℭ, et 𝔅 in 𝔇′, atque 𝔈 supra ℭ𝔇′ erit; at si vertatur 𝔇𝔅 e hoc loco circa meditullium, donec extremitas dimidium circulum describat: cadet 𝔅 in ℭ, 𝔇 in 𝔇′, 𝔈 in 𝔈, sed 𝔅𝔟 ad dextram, nempe ad ℭ𝔇′ inclinabitur; adeoque si △la dicta nonnisi ista superimpositione congruere queant, prismata super iis tanquam basibus juxta eandem rectam 𝔄𝔞 exstructa congruere non poterunt. At vero si rete invertatur, adeoque generetur prisma super basi ℭ𝔇′𝔈 in plaga inferiori, ut facies alba baseos ℭ𝔈𝔇′ extus maneat superius; sitque recta ℭ𝔠′ sectio parallelogrammorum rectis ℭ𝔇′, ℭ𝔈 in plaga inferiori insistentium; erit prisma dictum in plaga inferiori, ad basim ℭ𝔈𝔇′ juxta rectam ℭ𝔠′ exstructum, atque ℭ𝔠′ cum ℭ𝔇′ angulum aequalem illi faciet, quem 𝔅𝔟 cum 𝔅𝔇 faciebat, et angulus ipsius ℭ𝔠′ cum ℭ𝔈 etiam fit = angulo quam 𝔅𝔟 cum 𝔅𝔈 faciebat; atque si continuatio rectae ℭ𝔠′ in plaga superiori ℭ𝔠″ sit, faciet ℭ𝔠″ cum ℭ𝔎 angulum aequalem illi quem 𝔅𝔟 cum 𝔅𝔇 faciebat, et eadem recta ℭ𝔠″ faciet cum ℭℌ angulum aequalem ei, quam 𝔅𝔟 cum 𝔅𝔈 faciebat; atque hinc (per p.178) fiet $\widetilde{ℭ𝔠''}$ ∥ 𝔅𝔟 et per consequ. $\widetilde{ℭ𝔠''}$ parallela 𝔄𝔞 est.

Poterit igitur prismatis inferioris basis inferior juxta rectam 𝔠′ℭ sursum sibi parallele moveri, usquequo in basim superiorem perveniat: atque tum manifesto prisma totum super plano Q erit; △lo ℭ𝔈𝔇′ juxta rectam 𝔄𝔞 superstructum; atque hoc, simul cum prismate basi trapezio 𝔄𝔇𝔈ℭ superstructo, efficiet parallelepipedum basi 𝔄𝔇𝔇′ℭ juxta rectam 𝔄𝔞 superstructum.

Unde quum rete etiamsi invertatur, corpora aequalia (etsi non semper congruentia) producantur: quodvis prisma triangulare erit parallelepipepo tali aequale, cujus *altitudo* (nempe ⊥ris *e basi superiore ad planum baseos inferioris* superiori parallelum) est eadem, basis vero est parallelogrammum, in quod basis triangularis modo dicto mutata est; inferius patebit, idem valere, etsi triangulum in aliud parallelogrammum mutetur.

Schol. Eodem tantum modo, per retis inversionem fiunt et duo illa prismata triangularia aequalia, in quae parallelepipedum obliquum dispescitur, si basi per diagonalem in duas partes aequales divisa, in altera basi diagonalis respondens accipiatur. Erunt nempe duae diagonales in plano: et plane (in F. 176) tale parallelogrammum 𝔈𝔉ℭ𝔇′ cum diagonali 𝔈ℭ exhibetur, si △𝔇𝔈𝔅 ad ductum rectae 𝔅ℭ feratur, donec 𝔈 in ℭ, et 𝔅 in 𝔈, atque 𝔅𝔇 in 𝔈𝔉 veniat; quo pacto si fiat super basi 𝔈𝔉ℭ𝔇′ prisma juxta rectam prius dictam 𝔄𝔞; e dictis patet prisma ipsius 𝔈𝔉ℭ prismati ipsius 𝔈𝔇ℭ nonnisi per retis inversionem congruere posse.

§. 3. *Parallelepipeda* super basi eadem 𝔈𝔅ℭ𝔇 (in plano Q sita) in plaga eadem exstructa basibus superioribus in plano *q* ad Q parallelo terminata: si parallelogramma 𝔈𝔅𝔞𝔢 et 𝔈𝔅𝔞′𝔢′ tanquam latera prismatum ipsi 𝔈𝔅 insistentium in eodem plano fuerint: *aequalitate terminata aequalia* erunt.

Si enim (in Tom. I. Fig. 17 III) prius concipiatur schema circa 𝔈𝔅 elevatum plano tabulae insistens, item in tabulae plano concipiatur ℭ𝔇 ‖ et = 𝔈𝔅, ut fiat pro basi parallelogrammum 𝔈𝔅𝔇ℭ; atque claudantur prismata; erunt manifesto et parallelogramma ipsi $\mathfrak{CD}$ insistentia in eodem plano, atque alterum alteri congruenter aequale respondebit. Evidens etiam est, etiam parallelogramma $\mathfrak{EB}ae$ et $\mathfrak{EB}a'e'$ pro basibus prismatum eorundem juxta rectam $\mathfrak{EC}$ exstructorum accipi posse; concipiantur idcirco novae hae eorundem prismatum bases $\mathfrak{EB}ae$, $\mathfrak{EB}a'e'$, ita uti in tabula sunt; cadent prismata et basis prior $\mathfrak{ECDB}$ in plagam inferiorem; atque si lineis quae (p 181) partes parallelogrammorum aequalitate terminata aequales distingvunt, in basibus novis inferioribus respondentes accipiantur; orientur totidem prismata sibi invicem respondentia aequalia; nempe ut prismatum horum partialium bases congruant, quaevis solo motu rectarum (tanquam laterum) sine versione pervenire potest.

Schol. Atque hinc etiam sequitur: 1mo quodvis ∥lepipedum obliquum etiam, si latere(nempe ∥logrammo) ad basim ∟ri gandeat, recto = esse (terminata aequalitate), adeoque etiam tali, cujus basis rectangulum est; nam prisma rectum ad quamvis basim, priori basi aequalitate terminata aequalem reduci posse patet. 2do. Atque etiam (Fig. 83) applicari posse in aperto est; nempe si ∥lepipedum quodpiam ad rectum reductum sit, adeoque angulus z rectus sit; reperietur ∥logrammum aequalitate terminata aequale inter eadem plana parallela; nempe reperitur x pro datis A, a, B.

§. 4. Parallelepipeda P et p, super basi $\mathfrak{ABCD}$ in plano Q sita, superioribus basibus in plano q ad Q parallelo terminata; etsi nulli parallelogrammi $\mathfrak{ABCD}$ lateri insistentia ipsorum P et p latera (nempe parallelogramma) in eodem plano fuerint: sunt aequalitate terminata aequalia.

Dicantur enimvero (Fig. 177) A et A′ plana laterum ipsius P parallelorum, lateribus baseos parallelis 𝔄𝔅, ℭ𝔇 insistentium, et dicantur *a* et *a′* plana laterum ipsius *p* parallelorum ipsis 𝔄𝔇, 𝔅ℭ insistentium; sitque in A latus ipsius P, parallelogrammum 𝔄𝔅𝔟𝔞, in A′ vero sit ℭ𝔇𝔡𝔠, latus ipsius *p* autem sit 𝔄𝔇𝔡′𝔞′ in *a*, et in *a′* sit 𝔅ℭ𝔠′𝔟′.

Plana parallela A et A′ manifesto secantur per plana *a* et *a′*, nam *a* cum A punctum 𝔄 et cum A′ punctum 𝔇 commune habet, ita *a′* cum A punctum 𝔅, et cum A′ punctum ℭ commune habet. Sint hae sectiones (a plano Q usque ad planum *q*), 𝔄𝔞″, 𝔅𝔟″, ℭ𝔠″, 𝔇𝔡″; orietur hoc pacto super eadem basi tertium parallelepipedum quod dicatur *k*; nempe 𝔄𝔞″ est ∥ et = 𝔇𝔡″, quia sectiones planorum ∥lelorum A, A′ per planum *a* factae inter plana ∥la sunt (p. 175 et 179), ita 𝔅𝔟″ ∥ et = ℭ𝔠″; atque etiam 𝔄𝔞″ ∥ et = 𝔅𝔟″, quia planorum ∥lelorum sectiones per A inter plana ∥la Q et *q* sunt.

Evidens quoque est ∥lepipeda *p*, *k* inter plana ∥la *a* et *a′*, atque P et *k* inter plana ∥la A et A′ contineri. Consequ. tam P quam *p* eidem *k* (per praec.), atque adeo (Tom. I. p. 56) et P ipsi *p* aequalitate terminata aequalia sunt.

Schol. (F. 178) Itaque qualevis ∥lepipedum, in *rectum* aequalitate terminata exstrui potest, et basis in rectangulum, atque hoc in quadratum mutari, imo et quotvis et qualiavis ∥lepipeda ad bases quadratas reduci, et haec in unum quadratum summari (p. 61 et 62), atque (p. 60) dicta applicari possunt. Sint nimirum ∥lepipedi jam ad rectum reducti dimensiones A, B, C, nempe pro basi rectangula laterum A et B, sit altitudo C; mutetur basis haec in rectangulum, cujus latus α sit, prodeat latus alterum β, et fiat e prismate priori novum, huic rectangulo altitudine C insistens; erit idem $\parallel$lepipedum rectum etiam pro basi rectangula laterum C et β, et altitudine α; mutata jam ista basi in rectangulum, cujus latus α sit, prodeat alterum $=\gamma$, reducaturque $\parallel$lepipedum ad hanc basim; manebit omnino altitudo α, et baseos latus unum erit pariter α; consequ. latus unum $\parallel$lepipedi quadratum lateris α, altitudo vero γ erit.

§. 5. *Parallelepipedi* P *soliditas, est (sensu statim dicendo) basi per altitudinem multiplicatae aequalis*; per altitudinem in omnibus prismatibus (etsi non rectilinea fuerint) distantiam duarum basium, nempe $\perp$rem e qualibet ad alteram, intelligendo.

Sint enim baseos rectangulae latera A et B, atque altitudo sit C (Fig. 179); sintque prius A, B, C commensurabilia; ac pro unitate determinata, et m, a, b, c numeros integros denotantibus), sit $A=\frac{a}{m}$, $B=\frac{b}{m}$, $C=\frac{c}{m}$, et $u=\frac{1}{m}$. Fiant ab extremitatibus ipsorum u in A parallelae ad B, et ab extremitatibus ipsorum u in B, parallelae ad A; eriganturque ex omnibus his rectis rectangula altitudinis C ad basim $\perp$ria, atque ab extremitatibus ipsorum u in C fiant plana ad basim parallela: fient manifesto in strato inferiori tot cubi, quot quadrata in basi generata sunt, nempe numero ab tales cubi quorum latus lineare $(u=\frac{1}{m})$ est; itaque in toto $\parallel$lepipedo erunt abc tales cubi. Est vero rectarum A, B, C *factum*, nempe $ABC = \frac{a}{m} \cdot \frac{b}{m} \cdot \frac{c}{m} = abc \cdot \frac{1}{m^3}$, atque cubus, quadrato cujus latus $=1$ est insistens, qui pro unitate solidorum ponitur, continet numero m^3 cubum quadrato cujus latus $u = \frac{1}{m}$ est, insistentem; itaque factum lineare ABC est unitatis linearis abc/m^3tum, uti parallelepipedum unitatis solidorum. Itaque *hoc sensu* exprimet *basis* nempe AB (p. 50) *multiplicata per altitudinem* C, *soliditatem parallelepipedi.*

Si vero aliquod ipsorum A, B, C, aut certa duo, vel singula cum unitate incommensurabilia fuerint: sit $A = a \cdot \frac{1}{m} + (\omega < \frac{1}{m})$, id est A contineat $a$ies ipsum u, et supersit $\omega < u$, sitque $B = \frac{b}{m} + (k < \frac{1}{m})$, $C = \frac{c}{m} + (\lambda < \frac{1}{m})$, (si quod ipsorum ω, k, λ non $< u$ sed $=o$ esset, ibi $=o$ pro $< \frac{1}{m}$ scribi debet).

Erit $\frac{(a+1)(b+1)(c+1)}{m^3} > P > \frac{abc}{m^3}$; dicatur trium harum quantitatum prior P′, et posterior p; fiet $P' - p \frown o$, si $m \frown \infty$, adeoque $P - \frac{abc}{m^3} \frown o$, (quum $P - p < P' - p$ sit); consequ. $\frac{abc}{m^3} \frown P$, nempe limes ipsius $\frac{abc}{m^3}$ est ipsi P aequalis; limes iste autem ABC erit (Tom. I. p. 74); nam $\frac{a}{m} \frown A$, $\frac{b}{m} \frown B$, et

$\frac{c}{m} \frown C$. Id igitur tantum demonstrandum venit, quod $P' - p \frown o$; quod facile sic patet.

Est $P' - p = \frac{bc + ac + c + ab + b + a + 1}{m^3} =$

$[\frac{b}{m} \cdot \frac{c}{m} + \frac{a}{m} \cdot \frac{c}{m} + \frac{a}{m} \cdot \frac{b}{m} + \frac{a + b + c + 1}{m^2}] : m$,

et hoc est $< \frac{BC}{m} + \frac{AC}{m} + \frac{AB}{m} + \frac{A + B + C + 1}{m^2}$,

atque hoc quoque $\frown o$ (Tom I. p. 69).

§. 6. Est autem qualevis parallelepipedum $\alpha =$ tali parallelepipedo recto β, cujus altitudo altitudini prioris, et basis rectangula basi prioris (qualevis parallelogrammum fuerit) $=$ est; nempe quaevis parallelepipeda α et γ quorum altitudines aequales sunt, si bases congruenter aequales sint, ita poni possunt, ut basibus congruentibus, bases oppositae in eodem plano ad basim priorem parallelo sint; atque tum (p 186) dicta valent, etsi γ prisma rectum fuerit; tum vero basi ipsius γ in rectangulum mutata, γ in β mutari poterit.

Atque hinc manifesto soliditas non solum parallelepipedi cujusvis, sed et prismatis cujusvis, adhucdum saltem rectilinei, basi per altitudinem multiplicata prodit. Quodvis prisma triangulare enim aequatur (p. 186) parallelepipedo, cujus altitudo altitudini illius, et basis basi illius (nempe parallelogrammum triangulo) aequales sunt: atque quodvis prisma rectilineum, basi rectilinea in triangula divisa, in totidem prismata triangularia dispescitur, adeoque totum aequatur summae triangulorum, in quae basis divisa est, per altitudinem eandem multiplicata.

·31122223. Forma sub hoc numero (p. 7) generata, cum complexu rectarum ex omnibus figurae planae rectilineae punctis ad idem punctum $\mathfrak{a}$ ductarum, manifesto coincidit: *forma pyramidalis* (sensu generaliori exponitur Tom. I. p.451), quo etiam conus (de quo plura inferius), aliaque pertinent.

§. 1. (Fig.180) Si *pyramis triangularis*, nempe △lo $\mathfrak{ABC}$ superstructa, plano ad basim $\mathfrak{ABC}$ per $\mathfrak{a}$ parallelo secta fuerit; latus $\mathfrak{fAC}$ secabitur in $\mathfrak{ac} \parallel \mathfrak{AC}$, latus $\mathfrak{AfB}$ secabitur in $\mathfrak{ab} \parallel \mathfrak{AB}$, atque latus tertium, nempe $\mathfrak{CfB}$ secabitur in $\mathfrak{cb} \parallel \mathfrak{CB}$; fientque ∧li ad apices △lorum $\mathfrak{abc}$, $\mathfrak{ABC}$ litera nominis ejusdem designatos aequales; conseq. △la dicta erunt similia; quod et inde patet, quod propter $\mathfrak{ac} \parallel \mathfrak{AC}$ et $\mathfrak{ab} \parallel \mathfrak{AB}$, atque $\mathfrak{bc} \parallel \mathfrak{BC}$, △la $\mathfrak{afc}$ et $\mathfrak{AfC}$, $\mathfrak{afb}$ et $\mathfrak{AfB}$, $\mathfrak{bfc}$ et $\mathfrak{BfC}$ similia sint, adeoque $\mathfrak{ac} : \mathfrak{AC} = \mathfrak{fa} : \mathfrak{fA} = \mathfrak{ab} : \mathfrak{AB} = \mathfrak{fb} : \mathfrak{fB} = \mathfrak{bc} : \mathfrak{BC}$; unde △la per latera proportionalia similia sunt.

§. 2. ***Pyramidis rectilineae soliditas est = basi multiplicatae per tertiam partem altitudinis*** (id est rectae ex apice $\mathfrak{a}$ ad planum baseos demissae).

Nam si pyramidis triangularis (nempe cujus basis triangulum est) soliditas, basi per altitudinem multiplicatae aequalis sit, quaevis pyramis rectilinea, si basis in triangula dispescatur, erit summae horum triangulorum (nempe basi totius pyramidis), per altitudinis totius (nempe ⊥ris ex eodem apice $\mathfrak{a}$ ad idem planum demissae) tertiam partem multiplicatae aequalis.

Quamobrem id tantum demonstrandum est,

quod pyramidis triangularis soliditas sit tertia pars facti e basi in altitudinem, adeoque parallelepipedi, cujus basis basi pyramidis, altitudo altitudini aequalis est: quod fit modo sequente. (Fig 181).

Basis 𝔄𝔅ℭ dicatur B', altitudo A', sintque latera linearia ad verticem, A, B, C, sintque $\frac{A}{3}=a$, $\frac{B}{3}=b$, $\frac{C}{3}=c$: atque fiant per puncta divisionis rectarum A, B, C plana: erunt hae (per praec.) ad basim B' parallela; fientque tria strata, quorum infimum cum medio triangulum abc, uti medium cum supremo △ a'b'c' commune habebit. Ducantur ex apicibus a, b; △li abc (quod strato infimo medioque commune est), parallelae ab'', ac'', ex a ad B et C, et ex b ad A et C parallelae ba'', bc'''; orientur in strato infimo 4 corpora, nempe prisma super basi c''c'''ℭ juxta rectam ℭc=c exstructum, pyramis e basi 𝔄b''c'' ad apicem a, et pyramis e basi 𝔅a''c''' ad apicem b, et corpus 5 laterum, quorum retia (Fig. 181 *; 1, 2, 3, 4) exhibent: nimirum basis 𝔄𝔅ℭ dispescitur in △la 𝔄b''c'', 𝔅a''c''', trapezium b''a''c'''c'', et △ c''c''' ℭ basim prismatis.

Pyramides dictae sunt singulae pyramidi quae stratum supremum constituit, aequales, uti rete (Fig. 181 *5) demonstrat, nempe in △ 𝔄ℭ𝔣 est 𝔄c'': 𝔄ℭ = 𝔄a: 𝔄𝔣: itaque si 𝔄ℭ=3α, erit 𝔄c'' =α; ita 𝔄b''=γ=𝔅a'', et si 𝔅ℭ=3β, est 𝔅c''' =β: adeoque dum c'' baseos cum c'' lateris 𝔄𝔣ℭ coincidit, c''b'' fit =β, etiam b'' in se manente &c. Prismatis dicti autem soliditas est = $\frac{4A'B'}{27}$; nam basis est △ c''ℭc''' = abc = $(\frac{2}{3})^2$B', quia areae similium sunt, uti quadrata laterum homologorum, ab vero ²/₃tum ipsius 𝔄𝔅 est; altitudo autem prismatis dicti est $=\frac{A'}{3}$, quia si ⊥ris demittatur ex f ad 𝔄𝔅ℭ, erit haec et ad abc ⊥ris, sit hoc in punctis 𝔓 et p; erunt △la f𝔓𝔄 et fpa similia, adeoque fp:f𝔓=fa:f𝔄.

Stratum medium vero erit pyramis truncata; cujus si uti tota pyramis compacta est, in planis laterum aa'cc', et bb'cc', ad rectam cc', ex a et b rectae parallelae aequalesque ducantur; orietur manifesto prisma, completa pyramide truncata dicta, per corpus 5 laterum, cujus rete est plane illud, quod (Fig.181 * 4) in strato inferiore exponitur; quamvis inverti debeat, ut complementum dictum prodeat; erit nempe superius, trapezium cujus latus unum a'b'$=\gamma$, et ei parallelum 2γ est, latus ex a' est $=\alpha$, et latus ex b' est $=\beta$ (per parallelogrammorum latera opposita); 2dum latus corporis hujus, pyramidem dictam truncatam ad prisma complentis, est ∥logrammum ex ab$=2\gamma$ et c, 3tium est trapezium a'b'ab, 4tum et 5tum sunt ad A et B, triangula laterum a, c, α, et laterum b, c, β.

Tota pyramis igitur est $=\frac{8A'B'}{27}+3p$ (si pyramis stratum superius constituens p dicatur), nempe duo strata inferiora simul, duo prismata aequalia et duo p efficiunt. Est autem ipsius p basis $=\frac{B'}{9}$ (p. 63), altitudo $\frac{A'}{3}$; et si cum p eadem operatio suscipiatur, dicaturque p' pyramis stratum superius constituens; erit $p=\frac{8A'B'}{27^2}+3p'$, quum pro A' nunc $\frac{A'}{3}$, et $\frac{B'}{9}$ pro B' sit: adeoque $3p$ erit $=\frac{3.8A'B'}{27^2}+3^2p'$; atque si eodem modo tractetur quodvis p', et quaevis pyramis stratum superius efficiens uno accento plures nanciscatur: manifesto prisma totum erit

$$=8A'B'\left(\frac{1}{27}+\frac{3}{27^2}+\frac{3^2}{27^3}+\frac{3^3}{27^4}\cdots+\frac{3^{n-1}}{27^n}\right)$$

$+(3^n$ ejusmodi pyramidibus, quarum basis $=\frac{B'}{9^n}$, altitudo $\frac{A'}{3^n}$ est. Est autem summa s harum pyramidum minor, quam si pro eadem basi et altitudine in prismata mutarentur; esset vero prismatum horum summa $3^n\cdot\frac{B'}{9^n}\cdot\frac{A'}{3^n}$, adeoque $s<\frac{A'B'}{9^n}$, consequ. $s \frown o$ si $n \frown \infty$.

Summa S progressionis geometricae intra parenthesim (quum exponens $\frac{3}{27}<1$ sit) autem $\frown \frac{1}{27}:\left(1-\frac{3}{27}\right)=\frac{1}{24}$; quod per $8A'B'$ multiplicatum $\frown \frac{A'B'}{3}$. Consequ. $S \frown \frac{A'B'}{3}$, et si tota pyramis P dicatur, S semper $<P$ manet, sed $P-S=s \frown o$; itaque $S \frown P$; et per consequ. $P=\frac{A'B'}{3}$.

Schol. 1. *Pyramidem triangularem, quamvis in genere, aequalitate terminata ad prisma reduci, posse vel non posse, (adhucdum) haud liquet.*

Schol. 2. Potest etiam quodvis corpus planis rectilineis clausum, in pyramides rectilineas (uti figura rectilinea in triangula) dispesci; et *summa pyramidum erit solilitas totius.*

Schol. 3. *Superficies pyramidis* rectilineæ manifesto est summa triangulorum latera pyramidis constituentium, basi addita. Sed quæstiones oriuntur; 1mo quomodo ⊥ris ex apice demissae, quantitate locoque, atque basi $\mathfrak{ABC}$ pyramidis triangularis, cujus apex $\mathfrak{p}$ est, datis; latera innotescant, ut etiam rete construi queat

2do. Si nonnisi basis $\mathfrak{ABC}$, recta $\mathfrak{Ap}$, et angulus solidus ad $\mathfrak{A}$ detur; inde altitudinem et latera reperire.

I. *Quoad primum*: sit (Fig. 182) $\mathfrak{p}$ apex pyramidis, cujus basis $\mathfrak{ABC}$ est, et ⊥ris ex $\mathfrak{p}$ ad planum baseos sit $\mathfrak{pP}$; erit $\mathfrak{pP}$ ⊥ris ad $\mathfrak{PA}$, $\mathfrak{PB}$, $\mathfrak{PC}$; atque in △lis rectangulis $\mathfrak{APp}$, $\mathfrak{CPp}$. $\mathfrak{BPp}$ e cathetis hypotenusae innotescunt, nempe ex $\mathfrak{Ap}$, $\mathfrak{Pp}$ prodit hypotenusa $\mathfrak{Ap}$, ex $\mathfrak{BP}$ et $\mathfrak{Pp}$ prodit $\mathfrak{Bp}$, et ex $\mathfrak{CP}$ et $\mathfrak{Pp}$ prodit $\mathfrak{Cp}$. E △li $\mathfrak{ApC}$ lateribus autem innotescit γ, atque e △lo $\mathfrak{APq}$ ad $\mathfrak{q}$ rectangulo prodit $\mathfrak{Pq}$, et in △lo $\mathfrak{pPq}$ ad $\mathfrak{P}$ rectangulo prodit etiam angulus quem $\mathfrak{pq}$ cum $\mathfrak{qP}$ (id est planum $\mathfrak{pAC}$ cum plano $\mathfrak{ABC}$ facit.

II. Quoad 2dum (Fig. 182) si praeter basim $\mathfrak{ABC}$ nonnisi $\mathfrak{Ap}$ et angulus solidus ad $\mathfrak{A}$ detur, nempe ∧ $\mathfrak{pAC}=v$, et ∧ $\mathfrak{CAB}$ sit β, atque ∧ $\mathfrak{BAp}$ sit α: dicatur u angulus, quem planum $\mathfrak{ApC}$ cum basi facit. Concipiatur angulus solidus ad $\mathfrak{A}$, in centrum sphaerae poni; per angulos v, β, α, ad verticem $\mathfrak{A}$ datos, latera trianguli sphaerici omnia data erunt; unde prodit u (per inferius dicenda).

Demissa tum ex $\mathfrak{p}$ in plano $\mathfrak{ACp}$ ⊥ri $\mathfrak{pq}$ ad $\mathfrak{AC}$; in △lo $\mathfrak{Apq}$ ad $\mathfrak{q}$ rectangulo ex $\mathfrak{Ap}$ et v prodit $\mathfrak{pq}$ (imo etiam $\mathfrak{Aq}$): atque hinc in △lo ad $\mathfrak{P}$ rectangulo $\mathfrak{pqP}$, ex $\mathfrak{pq}$ et angulo u planorum $\mathfrak{ApC}$ et $\mathfrak{ABC}$, prodit cathetus nempe $\perp$ris quaesita $\mathfrak{pP}$, et prodit etiam $\mathfrak{Pq}$.

Latus $\mathfrak{pB}$ trianguli $\mathfrak{ApB}$ autem prodit ita: ex $\mathfrak{Aq}$ et $\mathfrak{Pq}$, quae antea prodierant, in $\triangle$lo rectangulo $\mathfrak{AqP}$ prodit γ, et $\mathfrak{AP}$; atque in $\triangle$lo $\mathfrak{PAB}$ ex $\wedge(\gamma+\beta)$ et lateribus $\mathfrak{AP}$ et $\mathfrak{AB}$ prodit $\mathfrak{PB}$; atque hinc in $\triangle$lo ad $\mathfrak{P}$ rectangulo $\mathfrak{PpB}$, e cathetis $\mathfrak{Pp}$, $\mathfrak{PB}$ prodit $\mathfrak{pB}$.

Schol. 4. Superficies prismatis rectilinei est summa parallelogrammorum lateribus baseos insistentium, additis duabus basibus aequalibus. Hic quoque prisma triangulare considerare sufficit. *Latera linearia* hic omnia sunt aequalia; nempe si (pag. 179 --) basis sit $\mathfrak{ABC}$, et latera prismatis sint parallelogramma $\mathfrak{ABba}$, $\mathfrak{ACca}$, $\mathfrak{BCcb}$: erit prisma juxta rectam $\mathfrak{Aa}$ constructum, et $\mathfrak{Aa} = \mathfrak{Bb} = \mathfrak{Cc}$, atque $\mathfrak{Aa}$, $\mathfrak{Bb}$, $\mathfrak{Cc}$ *latera linearia* dici possunt.

Quaestiones heic prioribus analogae exoriuntur.

1mo. Data basi $\mathfrak{ABC}$, (Fig 183) et puncto a', quo $\perp$ris ex a ad planum baseos demissa cadit, si latus lineare $\mathfrak{Aa}$ detur; e $\triangle$lo rectangulo $aa'\mathfrak{A}$ innotescit cathetus aa', ex hypotenusa $\mathfrak{Aa}$ et catheto $a'\mathfrak{A}$. Si vero praeter punctum a' et prismatis altitudo aa' data fuerit, innotescit latus lineare $\mathfrak{Aa}$, ex eodem $\triangle$lo ad a' rectangulo, e catheto aa' et hypotenusa $\mathfrak{Aa}$.

Ex $\mathfrak{Aa'}$, $\mathfrak{AC}$, $a'\mathfrak{C}$ vero innotescit $\wedge\gamma$; atque ex $\mathfrak{Aa'}$ et γ prodit $a'\mathfrak{q}$ $\perp$ris ad $\mathfrak{AC}$, et prodit $\mathfrak{Aq}$ et $a'\mathfrak{q}$; atque e $\triangle$lo rectangulo $aa'\mathfrak{q}$, ex aa' et $a'\mathfrak{q}$ prodit angulus plani $\mathfrak{AaC}$ cum plano baseos.

2do. Si vero praeter basim $\mathfrak{ABC}$ et latus lineare $\mathfrak{Aa}$, nonnisi angulus solidus ad $\mathfrak{A}$, ex v

$=a\mathfrak{AC}$, $\beta=\mathfrak{CAB}$, et $\alpha=a\mathfrak{AB}$, detur: tum (ut antea in pyramide, e $\triangle$lo sphaerico) prodibunt anguli u, u' quos prismatis latera $\mathfrak{A}ac\mathfrak{C}$, $\mathfrak{A}ab\mathfrak{B}$ cum basi faciunt. E $\triangle$lo ad q rectangulo $aq\mathfrak{A}$ vero ex $\mathfrak{A}a$ et v prodibunt aq et $\mathfrak{A}q$; atque hinc e $\triangle$lo ad a' rectangulo $aa'q$, ex aq et angulo lateris $a\mathfrak{AC}$ cum basi prodit altitudo aa'.

Atque etiam lateris ipsi $\mathfrak{BC}$ insistentis angulus $b\mathfrak{BC}$ parallelogrammi $\mathfrak{BC}cb$ innotescit modo sequ.: $b\mathfrak{B}$ est $=a\mathfrak{A}$, et si ex $\mathfrak{B}$ parallela $\mathfrak{B}b'$ ducatur ipsi $\mathfrak{A}a'$, eidem aequalis; erit bb' ⊥ris ex b ad basim; et ex b' ⊥ri $b'q'$ ad $\mathfrak{BC}$ missa, exhibebitur $\mathfrak{B}q'$, eritque bq' ⊥ris ad $\mathfrak{B}q'$; adeoque in $\triangle$lo ad q' rectangulo $\mathfrak{B}q'b$, innotescit angulus ad $\mathfrak{B}$, parallelogrammi ipsi $\mathfrak{BC}$ insistentis. Aut ponatur anguli solidi ad $\mathfrak{B}$ apex in centrum sphaerae; erit in $\triangle$lo sphaerico latus unum, per parallelogrammi $\mathfrak{A}ab\mathfrak{B}$ angulum $\mathfrak{AB}b=2R-\alpha$, datum, (nempe summa duorum internorum $=2R$.), alterum quoque datur, quum sit $=\wedge\,\mathfrak{ABC}$, et angulus u' antea innotuerat. Unde latus tertium prodit, parallelogrammi lateris $\mathfrak{BC}$ insistentis angulum ad $\mathfrak{B}$ exprimens; adeoque latera prismatis singula innotescunt. Si parallelepipedum sit; tum parallelogrammis quae ipsis $\mathfrak{AC}$ et $\mathfrak{AB}$ insistunt, opposita aequalia sunt.

·312. *Motus figurarum circa axem.*

·3121. *Quadrilaterum rectangulum* circa latus aliquod revolutum, parit *Cylindrum rectum*, circulo tanquam basi insistentem, e cujus centro erecta ad basim ⊥ris, *axis cylindri* audit. Estque manifesto cylinder prisma rectum, quum recta axi parallela donec redeat, ubique eadem, et tam ad tangentem circuli, quam ad radium ⊥ris, adeoque ad planum ipsum ⊥ris sit.

Est vero sive circulus, sive quaevis figura in plano, (sive curva, sive e curva et recta utcunque mixta), pro basi accipiatur; juxta quamvis rectam plano (sive Lriter sive oblique insistentem), constructum fuerit prisma: *soliditas ejus, basi per altitudinem multiplicatae aequalis.*

Nam consideretur prius cylinder (sive rectus sive obliquus) circulo insistens: erat (ex p. 56) polygoni inscripti area C, atque $a+\lambda > C > a$. Si igitur cylindri altitudo A sit, et concipiantur ad eandem altitudinem A, prismata rectilinea basibus $a+\lambda$ et a insistentia, dicaturque prius Q, posterius q, atque cylinder dicatur C'; erit manifesto $Q > C' > q$ (nempe $(a+\lambda).A > C' > aA$); atque $Q-q \frown o$. Consequ. $C'-q \frown o$, adeoque $q \frown C'$. Sed

$q \frown \frac{PrA}{2}$, (si radius r sit, et $p \frown P$); itaque $C' =$ areae circuli per altitudinem multiplicatae.

Potest autem quaevis basis, (sive una linea curva claudatur, sive perimetri tantum pars una vel plures curvae sint), ita dividi, ut summa prismatum his baseos partibus insistentium prismati toti aequalis sit; possuntque pro quavis α harum baseos partium, cujusẞ perimeter parte curva gaudet, talia rectilinea L, l generari, ut $L > \alpha > l$, atque $L-l \frown o$, adeoque $\alpha - l \frown o$, et consequ. $\alpha A - Al \frown o$, atque $Al \frown \alpha A$, id est αA sit ipsius Al limes, aequalis prismati basi α altitudine A insistenti.

3122. Trianguli rectanguli revolutio circa cathetum parit *conum rectum*, et cathetus dictus *axis*, *hypotenusa vero coni latus* audit. Patet autem (juxta Tom I. p. 451) pyramidem sensu latiore esse, non hunc conum solum, sed et obliquum; nempe complexum omnium rectarum, quae e circulo ad idem aliquod tale punctum p sunt; etsi recta ex p ad centrum circuli non sit Lris ad planum circuli: imo et complexum rectarum e cujusvis figurae planae punctis omnibus ad idem punctum p extra planum situm; atque etiam iis, quae (in praec.) de Cylindro dicta sunt, applicatis, cujusvis coni soliditatem esse basi per tertiam partem altitudinis multiplicatae aequalem.

§. I. Superficies cylindri recti (praeter bases) est $A\pi D$, si A altitudinem Cylindri, D diametrum baseos circularis, et π quantitatem peripheriae pro diametro 1 denotet. Si nimirum basi inferiori inscribatur polygonum, et in basi superiori puncta inferioribus respondentia accipiantur, atque parallelogramma, per latera parallela polygonorum in basibus parallelis sibi invicem respondentia, efformata concipiantur; limes summae horum parallelogrammorum est summae laterum polygoni limes per constantem A multiplicatus; atque per superficiem cylindri, dum cum plano comparatur, hoc intelligitur; fit nempe tum quantitas respectiva; quamvis et per se etiam quantitas sit, et quaevis ejus portiones quidem inter se (quoad majoritatem minoritatemve) comparari queant; interim et duae superficies cylindricae, si circulis radiorum inaequalium insistant, respectu dicto nonnisi ut quantitates respectivae comparantur.

Idem ad conum, aliasque quasvis superficies curvas applicatur: demonstrari nempe potest triangulis se invicem excipientibus inscriptis, ut nempe apices omnes eorum in superficiem curvam cadant; summam eorum ad limitem certum tendere, si cujusvis eorum singuli tres apices sibi invicem dato quovis propius veniant; limitemque eum, utcunque inscribantur $\triangle$la, eundem esse.

In cono recto circulo insistente patet, $\triangle$lorum ex apice ad latera polygoni basi inscripti generatorum summam, ad $\pi D . a$ tendere, si D diametrum baseos, et a dimidium lateris coni denotet.

Schol. Atque hinc *rete cylindri recti* erit (præter bases) rectangulum altitudinis ejusdem, quae cylindri est, rectae perimetrum baseos cylindri exaequanti superstructum; basis autem si circulus fuerit, sive recta dicta; computatur e diametro, sive si e recta data quaeratur diameter, facile construitur. Si vero alia linea sit perimeter baseos, ejus longitudo computanda est, ut rectanguli basis prodeat.

Rete coni recti autem sector est, cujus centrum apicem, latus radium, et arcus perimetrum baseos circularis praebet. Sunt enim, si basis circulus, et recta e centro ad apicem ducta ad basim Iris fuerit, latera coni omnia aequalia, quum sint hypotenusae $\triangle$lorum rectangulorum aequalium: quod exgr. si pro circulo ellipsis esset, centro eodem gaudens, minime locum haberet. Basis circularis, ex arcus longitudine, quae e ratione arcus ad peripheriam atque radio innotescit, prodit; longitudo arcus enim per π divisa diametrum baseos praebet. Est vero angulus ad apicem eo acutior, quo minor angulus sectoris ad centrum est, et eo magis obtusus, quo propius ad 4 rectos angulus dictus accedit.

Potest quoque e dato angulo ad apicem, arcus sectoris, uti ex arcu sectoris angulus ad apicem reperiri. Sit nempe (Fig. 184) latus coni l, axis a, et radius baseos sit r: dato angulo u, et axe a, reperitur tam l quam r; eritque perimeter baseos $2r\pi$ arcui sectoris radio l scripti aequalis; tota peripheria esset $2l\pi$; sit x quantitas quaesita talis, ut $2l\pi x = 2r\pi$ sit; erit $lx = r$, et $x = \frac{r}{l}$. Si vero l et x data fuerint, erit $r = lx$, atque ex l et r prodit u.

Potest etiam rete pro cylindro basi qualivis datae ad quemvis angulum insistente, saltem per puncta utvis propinqua construi; et idem de cono valet: neque proprie sensu geometrico praecisum sensum, sive recta in curvam, sive planum in superficiem curvam flexa habent; nisi id per motum circa puncta illius, vel rectas hujus ad intervalla fiat, atque resultatorum limites geometrici accipiantur.

Ex gr. Sit basi circulari superstruendus cylinder aut conus talis; ut cum basi inferiore, in cylindro recta basium centra jungens, et in cono recta e centro baseos ad apicem, faciant certum angulum datum; aut in utroque sit basis ellipsis, cujus centrum c sit, atque angulus, quem in cylindro recta per centra baseos, in cono recta ex apice ad centrum, cum basi facit, dato angulo aequalis sit.

Potest cuivis curvae (qualiscunque fuerit), linea polygonalis inscribi, atque sive prisma sive pyramis fuerit; potest in triangularia dividi, quorum bases latera lineae polygonalis dictae sint; atque applicatis iis, quae (p. 196) dicta sunt, rete quantolibet exactius construi; imo etiam limes geometricus baseos in plano quaeri, tam in prismate, si parallelogramma laterum basi insistentium aequalium uti se invicem excipiunt, jungantur, quam in pyramide $\triangle$la uti se invicem apice communi excipiunt jungantur. Parallelepipedi recti rete (exclusis basibus) constabit e 4 rectangulis eidem rectae insistentibus; quia latera ∥logrammorum coincidentia cum basibus angulos rectos adeoque tales angulos deinceps positos efficiunt, qui simul duos rectos exaequant. Ubi vero hoc neque per limitem locum habet; parallelogramma in prismate, triangula in pyramide ita poni debent, uti se invicem excipiendo, prodeunt; et ubi locum habet, limes geometricus quærendus est.

Est quoque ut inferius patebit, cylinder obliquus circulo insistens, nonnisi cylinder rectus ellipsi insistens, ad certum angulum oblique sectus; et pariter conus circulo oblique insistens nonnisi conus rectus ellipsi insistens, oblique sectus est: unde retia tam cylindri quam coni obliqui, sive circulo sive ellipsi ad datum angulum insistentium reperiuntur.

Nempe cylindri recti circulo, imo et ellipsi insistentis rete construitur (p. 200). Coni recti ellipsi insistentis quoque rete construi potest. Nam (Fig. 185) sit ellipseos centrum c, sitque $c\mathfrak{d}$ dimidium axis minoris, et $\mathfrak{A}c$ dimidium axis majoris; sitque $cc' \perp \mathfrak{A}c$, et c' apex coni; moveatur $\widetilde{c\mathfrak{d}}$ usque in $\mathfrak{A}c$, fiet ubique $\triangle$lum ad c rectangulum, cujus cathetus e c usque ad ellipsin, crescet usque ad $\mathfrak{A}c$, et ubique determinari poterit, alter cathetus vero cc' erit; unde hypotenusa, nempe latus coni in illo loco, reperitur; adeoque etiam $\triangle$la se invicem excipientia, quorum bases cordae, et latera hypotenusae dictae sunt, (adeoque rete cum errore quantovis minore) construi poterit.

Si vero conus (vel cylinder) rectus constructus fuerit; sit (Fig. 186) basis $\mathfrak{ABCDE}$ in plano tabulae, atque $\mathfrak{AP}$! sit tangens ad punctum $\mathfrak{A}$, circa quam planum e basi elevetur ad certum angulum u, atque planum baseos sit P, et planum elevatum dicatur p.

Quamvis res summa generalitate exponi posset, simpliciora proferre sufficiat.

Sit prius cylinder vel conus rectus ellipsi insistens, cujus axis minor $\mathfrak{AD} = b$, et axis major $\mathfrak{CC}$, centrum $\mathfrak{f}$, et $\llcorner$ris ad basim ex $\mathfrak{f}$ usque ad basim cylindri superiorem (aut apicem coni) sit $\mathfrak{pf}$; secetque planum p $\llcorner$rem dictam $\mathfrak{fp}$ in $\mathfrak{f}'$. Innotescet $\mathfrak{ff}'$ in $\triangle$lo ad $\mathfrak{f}$ rectangulo $\mathfrak{Aff}'$ ex angulo u et catheto $\mathfrak{Af}$.

Sit jam e fine $\mathfrak{B}$ arcus $\mathfrak{AB}$ ad P erecta $\llcorner$ris usque ad p; cadet haec manifesto in superficiem cylindri; sit $\mathfrak{b}'$ punctum ejus cum p commune.

Patet quod si cylindri rete rectangulare sit (Fig. 187), cujus basis $\mathfrak{A}'\mathfrak{Q} \doteq$ perimetro baseos, atque pro arcu $\mathfrak{AB} \doteq$ rectae $\mathfrak{A}'\mathfrak{B}'$, construatur ad $\mathfrak{A}'\mathfrak{B}'$ $\llcorner$ris $\mathfrak{B}'\mathfrak{b}'' = \mathfrak{Bb}'$; et quum hoc cum punctis perimetri baseos quam proximis suscipi queat: rete cum errore quantovis minore construi possit, si ex $\mathfrak{A}'$ incipiendo usque ad $\mathfrak{Q}$ rectae ducantur ab $\mathfrak{A}'$ ad $\mathfrak{b}''$ et a $\mathfrak{b}''$ ad $\mathfrak{c}''$ &c atque pars infra hanc lineam cadens resecetur.

Itaque quaestio eo redit, ut (in præc) $\mathfrak{Bb}'$ determinetur: quod modo sequ. fieri potest: $\llcorner$ris ex $\mathfrak{B}$ ad $\mathfrak{A}\mathfrak{Y}$ demissa cadat in $\mathfrak{B}''$, erit $\wedge\, \mathfrak{b}'\mathfrak{B}''\mathfrak{B} = \wedge\, \mathfrak{f}'\mathfrak{Af} = u$; itaque $\triangle$la rectangula $\mathfrak{b}'\mathfrak{B}''\mathfrak{B}$ et $\mathfrak{f}'\mathfrak{Af}$ erunt similia; adeoque erit $\mathfrak{Af} : \mathfrak{ff}' =$

$\mathfrak{B}''\mathfrak{B} : (\mathfrak{Bb}' = \alpha \,.\, \mathfrak{BB}''$, si $\frac{\mathfrak{ff}'}{\mathfrak{Af}}$ dicatur α). Est autem

$\mathfrak{B}''\mathfrak{B} = \frac{b}{2} + y$, si y infra $\mathfrak{CC}$ $-$ve et superius $+$ve accipiatur.

Si vero cylinder circulo insistat, adeoque

b diameter sit: manifesto 𝔅″𝔅 sinus versus arcus 𝔄𝔅 erit; adeoque si polygonum regulare inscribatur, et 𝔄𝔅 sit arcus cordae primae ex 𝔄 incipientis, dicaturque β; erunt in rete transferendae ⊥res sequentes: α. sin vers β, αsin vers 2β, αsinvers3β &c, nempe ad distantias $\beta, 2\beta, 3\beta$ &c... ex 𝔄′ acceptas.

Sit jam conus rectus basi eidem superimpositus; in reti coni, punctum plano p superficiei conicae commune, reperto 𝔅𝔟′ facile innotescit: (Fig.188) 𝔭𝔣 et 𝔟′𝔅 ad planum P ⊥res in plano sunt, at in hoc idem cadit coni latus 𝔭𝔅, et in idem cadit recta 𝔣′𝔟′, (quia puncta 𝔭, 𝔣′, 𝔟′, 𝔅 in idem cadunt, adeoque et recta inter quaevis bina eorum); manifesto autem secatur 𝔭𝔅 per 𝔣′𝔟′, et sectio ista in p est, quia puncta 𝔣′, 𝔟′ in p sunt, adeoque quodvis punctum rectae 𝔣′𝔟′ in p est. Sit sectio ista 𝔮; recta 𝔅𝔮 in rete ad latus 𝔭𝔅′ ex 𝔅′ transferenda facile prodit, (sive per constructionem, sive calculum) quum △𝔣𝔭𝔅 ad 𝔣 rectangulum, simul cum 𝔣𝔣′ et 𝔅𝔟′ data sint.

Si vero (Fig. 189) planum P circa 𝔄′ℌ″ ipsi 𝔄′ℌ′ parallelam elevetur, et planum elevatum in loco novo dicatur p; tum nonnisi β subtrahendum ex 𝔅𝔅″ erit, ut remaneat 𝔅𝔅‴, et si ⊥ris ex 𝔇 usque ad planum p erecta k dicatur; haec ex γ et angulo u ipsis p cum P innotescit, et si ⊥ris ex 𝔅 ad P sit 𝔅𝔟‴, erit $\gamma : k$ = 𝔅𝔅‴ : 𝔅𝔟‴; et huic 𝔅𝔟‴ aequalis erit pro hoc casu in reti ⊥ris ad basim ad distantiam ab 𝔄′ ipsi 𝔄𝔅 aequalem pro puncto 𝔅 construenda.

In cono recto autem (Fig. 189) si 𝔣𝔭 per p non secetur adeoque planum secans p ad P planum baseos ⊥re sit; erit u=R, nempe angulus planorum p et P se invicem (Fig. 190) in 𝔓𝔔 secantium, rectus erit; prodibitque pro puncto $\mathfrak{M}$ recta $\mathfrak{M}\mathfrak{m}'$ e latere $\mathfrak{p}\mathfrak{M}$ ex $\mathfrak{M}$ incipiendo in reti resecanda, modo sequenti: fiat e centro $\mathfrak{f}$ recta ad $\mathfrak{M}$, secetque haec rectam $\mathfrak{P}\mathfrak{Q}$ in $\mathfrak{c}'$; secabunt se invicem plana $\mathfrak{f}\mathfrak{M}\mathfrak{p}$ et p ad P $\perp$ria, et punctum $\mathfrak{c}'$ commune habentia, in recta aliqua per $\mathfrak{c}'$ eunte; erit igitur haec $\perp$ris ad P adeoque ad $\mathfrak{f}\mathfrak{M}$, secabitque hæc rectam $\mathfrak{p}\mathfrak{M}$, fiat id in $\mathfrak{m}'$; erunt $\triangle$la rectangula $\mathfrak{p}\mathfrak{f}\mathfrak{M}$ et $\mathfrak{m}'\mathfrak{c}'\mathfrak{M}$, similia; consequ. $\mathfrak{f}\mathfrak{M}:\mathfrak{p}\mathfrak{M}=\mathfrak{c}'\mathfrak{M}:\mathfrak{M}\mathfrak{m}'$.

§. 2. *Corporum similium soliditates sunt ut cubi linearum homologarum, superficies autem sunt, ut quadrata linearum homologarum.*

Etenim quodvis corpus C, cujus superficies sit S, in pyramides triangulares (saltem e puncto interno uno aut pluribus) dispesci potest: et aut summa basium superficies corporis erit; aut apicibus basium triangularium dato quovis propius acceptis, summa pyramidum $\frown$ C, summa basium vero $\frown$ S.

Sint corpora similia A et B; applicatis iis quae (p. 29, 63 et p. 192), dicta sunt, quaevis linea in A erit eidem homologae in B, per constantem α (eandem pro omnibus) multiplicatae aequalis: et si bases triangulares in utroque semper simultaneo homologae accipiantur; erit in A quodvis $\triangle$lum t ei in B homologo t' per α^2 multiplicato aequale; pyramidis p autem basi t insistentis altitudo erit altitudini pyramidis p' basi t' insistentis homologa, adeoque si altitudo ipsius p sit $a=\alpha a'$; erit $p=\frac{ta}{3}=$

$\frac{\alpha^2 t'\alpha a'}{3}$, et $p'=\frac{t'a'}{3}$, consequ. $p:p'=$

$\frac{\alpha^3 t'a'}{3}:\frac{t'a'}{3}=\alpha^3:1$, sive uti 3tiae potentiae linearum homologarum.

Hinc etiam si summa omnium pyramidum $p \frown P$, et summa omnium pyramidum, $p' \frown P'$; erit $P : P' = \alpha^3 : 1$.

Ita si summa omnium $\triangle$lorum $t \frown s$; et summa omnium $\triangle$lorum $t' \frown s'$; erit $s : s' = t : t' = \alpha^3 : 1$.

Schol. In pyramidibus similibus, quae rectilineis insistunt, divisio in pyramides triangulares ex apice, in utraque fieri potest. In sphaera fit e centro, via limitis.: atque hinc (quum sphaerae similes sint), soliditates sunt uti 3tiae, superficies autem uti 2dae potentiae, radiorum. Si sphaerae cujus radius 1 est, superficies β, soliditas γ dicatur; erit sphaerae cujus radius n est, superficies $n^2\beta$, soliditas $n^3\gamma$.

Prismata vero quaevis, etsi modo dicto per divisionem e puncto interno in pyramides $\triangle$lares tractari queant: quum tamen factis ex altitudine in basim aequalia sint: si similia fuerint, sufficit bases altitudinesque quoad soliditatem considerare; nempe si alterutrius altitudo a sit, et basis b, alterius autem altitudo sit na; erit hujus basis $n^2 b$, et soliditas $n^2bna = n^3ab$, prioris autem est ab.

*3123. *Revolutio semicirculi circa diametrum parit sphaeram*: cujus soliditas et superficies quaerendae veniunt. (Fig. 191)

Sit quadratum $\mathfrak{ABCD}$, et diagonalis $\mathfrak{DB}$, ac quadrans $\mathfrak{AC}$ centro $\mathfrak{B}$ radio $\mathfrak{BA}$, atque parallela quaevis $\mathfrak{bc}$ ad $\mathfrak{AB}$: erit manifesto v (ubicunque scriptum est) $= \frac{1}{2}R$, adeoque $\triangle$li $\mathfrak{fcB}$ crura $\mathfrak{fc}$ et $\mathfrak{cB}$ aequalia erunt. Dividatur porro $\mathfrak{BC}$ per n, et sit ex $\mathfrak{B}$ incipiendo versus $\mathfrak{C}$ recta $\mathfrak{fc}$ pars ejusmodi; fiatque per $\mathfrak{f}$ parallela $\mathfrak{ef}$ ad $\mathfrak{AB}$, atque erigatur ex $\mathfrak{f}$ Lris $\mathfrak{ft}$ ad $\mathfrak{bc}$, et demittatur e puncto r in quo ef quadrantem secat, Lris rg ad ef, atque fiant Lres hi et fl. Revolvatur schema totum circa 𝔅ℭ; describet quadrans 𝔄ℭ hemisphaerium, quadratum 𝔄𝔅ℭ𝔇 cylindrum; et △𝔇𝔅ℭ ad ℭ rectangulum describet conum, eritque tam coni quam cylindri basis circulus, cujus radius aequalis radio r hemisphaerii est, altitudo vero radius; per rectangula edef, tsef, rgef et hief, lkef autem describentur cylindri, quorum altitudo $ef = \frac{r}{n}$, bases vero sunt circuli radiorum r, fe, ge, ie, ke. *Archimedes* movendo planum e circulo per 𝔄𝔅 descripto, huic parallele, donec in 𝔇ℭ perveniat, sectiones simultaneas in cylindro, hemisphaerio, conoque comparat, et reperiendo, quod (quasvis sectiones simultaneas intelligendo), sectio C in cylindro facta, sit aequalis summae, sectionis c in cono factae, et sectionis s in hemisphaerio factae; concludit (omnes sectiones simultaneas accipiendo), cylindrum esse summae coni et hemisphaerii aequalem. Et hoc rite intelligendo, ut (Tom. I. p. 184 ---) dictum est, germen calculi sublimioris continet.

Explicatio sequens est.

Soliditas cylindri dicatur A, soliditas sphaerae sit B, et soliditas coni sit K; dicaturque cylinder qui per edef describitur a, per tsef descriptus sit s', per rgef scriptus sit s'', et per hief scriptus sit c'', ac per lkef scriptus dicatur c', atque per rsef scriptum (per rf arcum intelligendo) sit b, et per hkef scriptum sit k.

In △lo rectangulo f e 𝔅 est $f𝔅^2 = fe^2 + e𝔅^2 = fe^2 + ef^2$, quia fe=e𝔅. Atque hinc circulus radio 𝔅f scriptus, est summae circulorum radiis fe. fe scriptorum aequalis, id est (quia f𝔅=ed) erit $C = s + c$; et hinc $a = s' + c'$.

Dicatur B' summa omnium s', et summa omnium s'' sit B''; atque summa omnium c' sit K', et summa omnium c'' sit K''; summa pro quovis n, omnium a est A, omnium b est B, omnium k est K; atque quum tam cylindri a, quam cylindri s' et c' numero eodem prodeant, et pro quibusvis simultaneis sit $a=s'+c'$, manifesto erit $A=B'+K'$.

Sed $B'+K''>B+K>B''+K'$; quia $s'>b>s''$, et $c''>k>c'$, adeoque quum hoc de omnibus simultaneis valeat, est $B'>B>B''$, et $K''>K>K'$.

Atque si $n \frown \infty$, fit $B'+K''-(B''+K') \frown o$, quia $\frac{s'}{s''} \frown 1$, et $\frac{c'}{c''} \frown 1$; adeoque et $B+K-(B''+K') \frown o$, id est $B''+K' \frown B+K$. Sed et $B' \frown B$, et $K' \frown K$; nam ex $\frac{s'}{s''}$ et $\frac{c'}{c''} \frown 1$, et $s'>b>s''$, atque $c''>k>c'$, fit etiam $\frac{s'}{b} \frown 1$, et $\frac{c'}{k} \frown 1$. (Tom. I. p. 80 -- et 184 ---). Conseq. $B'+K' \frown B+K=A$.

Est autem $K=\frac{A}{3}$; nempe conus et cylinder eidem circulo maximo insistunt, et altitudo utriusque radius est: consequ. $B=A-K=\frac{2}{3}A$; atque tota sphaera diametri d, fit $=\frac{d^3\pi}{6}$; nempe area circuli maximi est $\frac{d^2\pi}{4}$, et hemisphaerium est $\frac{2}{3} \cdot \frac{d^2\pi}{4} \cdot \frac{d}{2} = \frac{d^3\pi}{3.4}$, et hujus duplum est $\frac{d^3\pi}{6} = \frac{4r^3\pi}{3}$.

Hinc item Archimedes reperit *superficiem S sphaerae, quadruplo areae circuli maximi aequalem.*

Accipiantur nempe tria puncta in S, et jungantur rectis, ut fiat triangulum, et quodvis latus fiat △li novi basis cum apice novo in S, atque hoc semper porro continuetur, ita ut per △la omnia demum superficies simplex e planis composita apicibus angulorum solidorum in S cadentibus exsurgat. Dicatur summa horum △lorum S'; fiantque hae pyramidum apice communi in centro gaudentium bases, sitque pyramidum istarum summa p. Si cujusvis harum pyramidum latera triangularia producantur, poterunt haec per planum priori basi parallelum et ipsum S tangens tale secari, ut pyramis baseos novae priori major sit, et si pro quavis priorum pyramidum ejusmodi pyramis fiat, dicatur omnium novarum pyramidum summa P. Facile patet, quod $P-p \frown o$, si cujusvis △li apices dato quovis propius, accipiantur; est vero (sphaera B dicta) $P > B > p$, adeoque $B-p \frown o$: consequ. $p \frown B$. Sed radio r dicto, poni potest $p = S'.(\frac{r-\omega}{3})$, nam quamvis S' summa diversorum △lorum esse possit, altitudo semper est radio minor; atque ex gr. $\alpha(r-\lambda)+\beta(r-k) = (\alpha+\beta)(r-\omega)$ poni potest, quia inde valor ipsius ω prodit.

Patet autem, quod $\omega \frown o$, adeoque si tum $S' \sim S''$, ipsum $p \sim S''.\frac{r}{3}$; atque hinc quum soliditas sphaerae antea fuerit $= \frac{(2r)^3\pi}{6}$, erit $\frac{4r^3\pi}{3} = S''.\frac{r}{3}$; et hinc $S'' = 4r^2\pi$; id est (per superficiem sphaerae limitem laterum planorum corporis inscripti intelligendo) erit superficies sphaerae quadruplo areae circuli maximi aequalis. Aliquid tamen hanc eandem materiam concernens paulo inferius addetur.

Schol. 1. ***Rete sphaerae*** quidem e planis neutiquam construi potest, ut statim patebit; sed exhiberi quam proxime potest: nempe concipiatur (Fig 192) quadrans arq in partes numero *m* dividi; sit centrum c, et revolvatur arq circa qc; describet a circulum maximum, basim coni recti apicem in polo q habente; r vero describet circulum priori parallelum, basim coni recti apicem in eodem q habente; atque via cordae ar conus truncatus erit. Si jam tam hujus coni truncati rete, quam uti se invicem cordae *m*tarum partium quadrantis usque ad polum excipiunt, retia conorum truncatorum per vias cordarum dictarum descriptorum, construantur, atque ita uti seinvicem excipiunt compingantur, manifesto quo majus *m* accipitur, eo minori errore sphaera exhibebitur.

Coni truncati per cordam ar descripti rete prodit modo sequente: secet continuatio rectae ar continuationem rectae cq in p; fiatque centro p radio pa arcus $ab = 2r\pi$, et eodem centro p radio pr fiat arcus $rd = 2r'\pi$; erit rabd rete coni truncati: nempe notandum est, quod basis coni cujus apex q et latus qa erat, et basis coni cujus apex p et latus pa est, congruant, quum utrumque circulus sit, peripheria longitudinis ejusdem gaudens.

Innotescit autem tam $\mathfrak{ap}$ quam $\mathfrak{rr}'$, sive per constructionem, sive per calculum, quum $\mathfrak{rr}' = \sin \mathfrak{qr} = \cos \mathfrak{ar}$ sit, et anguli quos latera polygoni ex $\mathfrak{a}$ incipientis cum $\perp$ ribus ad $\mathfrak{qc}$ missis faciunt, facile computentur. Idem vero de quovis latere ad seqnens continuari posse patet: ex gr. conus truncatus lateris $\mathfrak{rt}$ generatur, per arcum $= 2\pi . \mathfrak{tt}'$, centro $\mathfrak{p}'$ radio $\mathfrak{p}'\mathfrak{t}$ scriptum, et arcum $= 2\pi . \mathfrak{rr}'$ centro $\mathfrak{p}'$ radio $\mathfrak{p}'\mathfrak{r}$ scriptum. Constructi autem hi coni truncati, uti se invicem excipiunt, conglutinari, et omnia intra bases quadamtenus expleri quoad praxim possunt.

Aut circulus maximus dividitur in quo plures partes aequales, et segmenta a quavis parte ad polos exstruuntur aequalia: si plana per axem et puncta divisionis ponantur; manifesto conorum truncatorum bases omnes in totidem partes divisae, segmenta appropiquantia praebebunt. Plures hujus modos ad praxim magis pertinentes vulgaresque, referre non hujus loci est.

Quod reipsa autem e plano segmentum tale construi nequeat, sic patet: sit recta $\mathfrak{a}'\mathfrak{q}'$ in quadrantem $\mathfrak{aq}$ flexa, ita ut $\mathfrak{q}'$ in polum $\mathfrak{q}$ et $\mathfrak{a}'$ in $\mathfrak{a}$ cadat: planum $\mathfrak{q}'\mathfrak{de}$ quoque simul incurvabitur; atque etiam $\mathfrak{de}$ per se circa coni latus $\mathfrak{qa}$ incurvari posset, ut in circulum maximum C cujus polus $\mathfrak{q}$ est, cadat; pariter seorsim quivis arcus $\mathfrak{fg}$ posset in arcum circuli paralleli per ei respondens $\mathfrak{r}$ euntis incurvari; at si hoc simul fieri debeat, in motu flexus, $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{r}$, $\mathfrak{q}$ simul quiescere deberent, quamvis non in recta sint.

Pariter patet si prius $\mathfrak{de}$ incurvetur, ut in C cadat; fiet enim tum figura plana $\mathfrak{q}'\mathfrak{de}$ pars superficiei cylindricae aut conicae: atque tum novam incurvationem, ut $a'q'$ in aq cadat, fieri non posse pariter patet; quia primus motus circa bc fiet, et nulla portio plani ex bc incipientis manente arcu bc moveri poterit, quum bc non sit recta, adeoque axis motus esse nequeat.

Generaliter nulla flexio superficiei esse potest, nisi rectae se invicem continuo excipiant, atque motus circa illas fiat uti se invicem continuo excipiunt.

Schol. 2. Solet in praxi, hexapeda in 6 pedes, pes in 12 pollices, pollex in 12 lineas primas, linea μta in 12 lineas $\mu+1$tas dividi; ita ut $25^0\,5'\,7''$ denotet 25 hexapedas 5 pedes 7 pollices; at eandem subdivisionem tam in areis quam in soliditatibus retinere (ob numeros minores) visum est: nempe ubi de areis sermo est, *pes quadratus* significat 6tam partem quadrati, cujus latus hexapeda est, et hujus pars 12ma dicitur *pollex quadratus* &c, ita ut pes quadratus sit rectangulum cujus altitudo unus pes est, pollex rectangulum altitudinis unius pollicis &c sit, semper hexapedam pro basi accipiendo; ita cubi cujus latus hexapeda est, sexta pars *pes cubicus*, et hujus 12ma pars *pollex cubicus* &c audit; adeoque pes cubicus est ‖lepipedum, cujus altitudo pes, et pollex cubicus ‖lepipedum, cujus altitudo pollex &c est, pro basi semper quadratum, cujus latus hexapeda est intelligendo.

Variae hinc tam areas quam soliditates computandi methodi sunt, quibus computata, sensu dicto exhibeantur. Simplicissima videtur sequens.

Sit unitas 2 hexapedis aequalis, *pertica* dicta; erunt in pertica pedes 12, in pede pollices 12 et ita porro; atque quum computatio areae per factum e 2 factoribus, soliditas vero e tribus prodeat, res ad multiplicationem redit; quae si pro 10 et 11 signa darentur, *numeratione duodecadica* facile peragi, et factum ad lingvam communem dictam transferri posset, modo sequ. Scribantur factores ita, ut numerus hexapedarum numero perticarum exprimatur; ex gr. pro 101° 5ˡ 10″ scribatur 50, 11ˡ 10″; nempe absque eo, ut pro 10 et 11 signa pecularia ponerentur, possunt pedes, pollices &c imo et perticae, intervallis distincta, decadice designari, ut in exemplo allato 50 unitates, 11 duodecimae, et unius duodecimae decem duodecimae denotentur; imo factum quodvis partiale e termino in terminum decadice quaeri scribique potest.

Ita scriptis binis areae factoribus, multiplicatio in numeratione duodecadica peragenda est, ita ut in decadica, dummodo heic 12 ipsius 10 vicem subeat; notando, quod in productorum partialium postea addendorum, linea suprema, prius tot loca notarum duodecimalium signanda sint, quot notae duodecimales in factore utroque simul sunt, atque bis anteponendum comma sit, ante quod ad laevam numerus unitatum sequitur; atque numeri duodecadum additio ad laevam, nonnisi usque ad locum commate insignitum fiat, continueturve. Demum vero factum post comma per 2, ante comma autem per 4 multiplicetur, ea cum restrictione, ut a dextra incipiendo usque ad terminum qui post comma est, translatio duodecadum fiat, in termino post comma ad dextram autem numerus senariorum addatur termino, qui e multiplicatione per 4 termini ante comma prodit. Si vero soliditas quaeratur; factum quod e duobus factoribus prodit, ante multiplicationem per 4 ante comma et post comma per 2, per tertium factorem eodem modo ut dictum est, (juxta systema duodecadicum) multiplicetur; et factum plane ut antea tractetur, eo tantum discrimine, quod termini post comma per 4, et terminus ante comma per 8 multiplicentur.

Nempe una pertica quadrata continet 4 hexapedas quadratas, et una pertica cubica 8 hexapedas cubicas continet: atque hinc pars duodecima perticae quadratae est = 3tiae parti hexapedae quadratae, adeoque 2 pedibus sensu dicto; ita duodecimae duodecima 2 pollices facit, quod porro continuari patet; quivis igitur terminus facti e duobus factoribus prodeuntis, post comma per 2 ante comma per 4 multiplicandus est; at quum 6 pedes sensu dicto hexapedam quadratam faciant, numerus senariorum termino ante comma per 4 multiplicato additur. Duodecima scilicet perticae quadratae $=\frac{4^o}{12}=\frac{1^o}{3}=\frac{6'}{3}=2'$, et hujus duodecima $=\frac{2'}{12}=\frac{2.12''}{12}=2''$ &c Et perticae cubicae duodecima $=\frac{8^o}{12}=\frac{4^o}{6}=4\cdot\frac{1^o}{6}$.

Exemplis tamen sequentibus etiam illustrare haud supervacuum erit: notando, quod non solum ut dictum est, termini singuli etsi novenarium excedant, decadice scribantur, et termini quivis decadice multiplicentur, sed etiam divisio per 12 decadice peragatur; quod omnino facile fit, quum duplum, triplum ---- usque ad nontuplum ipsius 12 memoria facile retineatur.

Sint areae alicujus dimensiones per se invicem multiplicandae, $6^{o}\,2'\,7''$ et $8^{o}\,1'\,8''$, et sint soliditatis dimensiones $6^{o}\,2'$, $8^{o}\,5'$ et $4^{o}\,4'$; fiet

	3,	2	7		
	4,	1	8		
o,	2	1	8	8	
o,	3	2	7		
12,	10	4			
13,	3	8	3	8	
4				2	
53^{o}	$1'$	$4''$	$7'''$	$4''''$	

	3,	2	
	4,	5	
1,	3	10	
12,	8		
13,	11	10	
2,	2		
2,	3	11	8
27,	11	8	
30,	3	7	8
8			4
242^{o}	$2'$	$6''$	$8'''$

Sit etiam exemplum pro divisione per 12 nonnisi usque ad locum commatis extendenda. Sit una dimensio $303^{o}\,5'$, altera $3^{o}\,4'$

151,	11	
1,	10	
126,	7	2
151,	11	
278,	6	2
4		2
1114^{o}	o'	$4''$

Schol. 3. Si duo prismata P et p fuerint, et prioris altitudo A basis B, posterioris altitudo a basis b fuerit: erit $P=AB$, et $p=ab$; adeoque $P:p=AB:ab$, atque si $P=p$, erit $A:a=b:B$, et si $A=a$, erit $P:p=B:b$, et si $B=b$, erit $P:p=A:a$. Eritque si $A=a$, et bases similes, atque L et l lineae homologae sint, $P:p=L^2:l^2$. Idem ad pyramidem applicari evidens est.

Schol. 4. Transmutari quoque corpus quodpiam in aliud potest; si ex gr. sphaera diametri d in pyramidem altitudinis a baseos x mutanda sit: erit $\frac{d^3\pi}{6}=\frac{xa}{3}$; atque hinc $x=\frac{d^3\pi}{2}$. Atque basis x computata, item sive in circulum, sive in aliam figuram converti potest. Nec his amplius immorari necesse est; quum perspectis iis quae dicta sunt, Tyrones ipsi omissa reperire queant.

·3124. De hoc in Tomo primo dicta sufficiant.

·313. Si planum cum superficierum relatarum aliqua punctum commune habeat: oriuntur *sectiones coni*, *cylindri*, *sphaerae* &c.

§. 1. Si planum quamvis ∞ tum, apicem solum cum superficie coni commune habeat, sectio punctum est; si adhuc unum commune habeat, sectionem aut duae rectae se invicem in apice coni secantes efficient; aut sectio latus coni erit. Si planum secans basi parallelum fuerit, erit sectio figura basi similis; orieturque *conus truncatus*, *rectus circularis*, si conus rectus et basis circulus fuerit: quae omnia facile patent.

Si (Fig 193) cylinder rectus basi B parallele secetur; sectio $b=B$ erit: atque si per planum ad angulum u secetur, erit $F=G$ (tam quoad superficiem quam quoad soliditatem; adeoque etiam $E+F$ innotescit, quum F sit $=\frac{F+G}{2}$, adeoque $E+F=B\alpha+B.\frac{\beta}{2}=\frac{2B\alpha+B\beta}{2}$ $=B\frac{(A+\alpha)}{2}$; ubi si de soliditate sermo fuerit area ipsius B, si superficies quaeratur, peripheria accipienda est.

§. 2. *Coni truncati*, nempe partis coni recti inter basim et planum basi parallelum, *superficies* exclusis basibus est *lateri per peripheriam illam multiplicatae* aequalis, *quae cum* ⌊ri *e medio lateris ad axem missa tanquam radio describitur*. Sit nempe (Fig. 194) rete coni truncati abed, et coni totius sit pde, atque latus coni truncati sit ad, et ejus medium c; erit radiis r et r' descriptis circulis, area annuli $=(r^2-r'^2)\pi$ (p. 60) $=(r+r')(r-r')\pi$ $=(r-r')(\frac{r+r'}{2})2\pi=(r-r').(r'+\frac{r-r'}{2})2\pi$. Est vero $r-r'$ latus coni truncati, $r'+\frac{r-r'}{2}$ vero est pc, quod per 2π multiplicatum dat peripheriam radii pc.

Hinc idem de sectore patet; si nempe is $n$ta pars totius fuerit, erit et pars annuli in sectore pars $n$ta annuli totius. Unde res in aperto est.

§. 3. *Soliditas coni* per planum basi parallelum truncati e basibus et altitudine prodit sic. Sit (Fig. 195) data *basis inferior* B, *superior* b; atque *a altitudo coni truncati*. Sit coni superius absecti altitudo x. Erit $B:b=(a+x)^2:x^2$. Hinc autem est $Bx^2=b(a+x)^2$, et hinc $x^2-\frac{2abx}{B-b}-\frac{a^2b}{B-b}=o$, adeoque $x=$

$$\frac{ab}{B-B}+\sqrt{(\frac{a^2b^2}{(B-b)^2}+\frac{a^2b}{B-b})}=$$
$$\frac{ab+a\sqrt{(b^2+b(B-b)}}{B-b}=\frac{a(b+\sqrt{Bb})}{B-b}$$

Itaque $a+x=\frac{Ba-ba+ab+a\sqrt{Bb}}{B-b}=$
$\frac{a(B+\sqrt{Bb})}{B-b}$. Est vero conus truncatus aequalis residuo coni totius, subtracto superiore, adeoque fit $=\frac{B(a+x)}{3}-\frac{bx}{3}=$
$\frac{a(B+\sqrt{Bb})B-a(b+\sqrt{Bb})b}{3(B-b)}=$
$\frac{a(B^2-b^2+\sqrt{Bb}(B-b)}{3(B-b)}=\frac{a(B+b+\sqrt{Bb})}{3}$. Et posterius ad conum obliquum etiam, imo et pyramidem quamvis etiam obliquam, dummodo sectio per planum basi parallelum fiat, applicari, atque de quavis pyramide valere evidens est.

Schol. 1. Si vero l latus lineare pyramidis modo dicto truncatae (Fig. 196), atque β et β' sectiones basium cum plano per apicem factae, data fuerint: reperietur L latus pyramidis completae, ex $\beta:\beta'=l+x:x$; est enim $\beta x=\beta' l+\beta' x$, et hinc $x=\frac{\beta' l}{\beta-\beta'}$, adeoque $L=l+x=\frac{\beta l}{\beta-\beta'}$, quod et de cono valet.

Schol. 2 Notandum etiam est; Imo quod pyramidis truncatae, si basis figura regularis, et recta per centra basium ad eas Lris fuerit, superficies (praeter bases) sit summa trapeziorum aequalium; adeoque unus factor altitudo trapezii, alter autem sit perimeter sectionis plani ad basim per lateris linearis meditullium paralleli.

2do. In prismate vero qualecunque fuerit, perimeter sectionis plani ad latus lineare ⌊ris, multiplicatur per latus lineare, ut superficies (praeter bases) prodeat: nam si prisma juxta rectam 𝔄a exstructum sit; in quovis parallelogrammo latus lineare = 𝔄a pro basi accipi potest, et altitudo erit sectio parallelogrammi cum plano ad 𝔄a ⌊ri. Idem de cylindro obliquo etiam valere patet.

Schol. 3. Si omnia dolia similia conficerentur: tum nonnisi certa dimensio dolii certae quantitatis nota esse deberet, ut cujusvis alius dolii dimensione homologa cum priori comparata, vasis posterioris quantitas innotescat: si ex gr. prioris dolii quantitas q, dimensio certa d; et posterioris quantitas Q, dimensio D esset; fieret $d^3 : D^3 = q : Q$. Manifesto autem et alia dimensio tentanda est, ut eo certius fiat idem pluribus modis comprobatum.

Quum vero hoc non sit: potest dolium ordinatis e linea per supremum ejus punctum horizontali demissis in conos truncatos quantumvis proxime dividi; et sive constructione sive calculo, tam plenum quam usque ad planum certum horizontale repletum computari; ratione etiam crassitudinis ligni habita, quae si non eadem ubique sit, errorem aliquem inducit. (F. 197)

Coni truncati, cujus bases segmenta sunt in casu si dolia plena non fuerint, soliditates (per p. 218) innotescunt; nempe bases per plana verticalia liquidum secantia efformantur; et fiunt pyramides truncatae, e basibus earumque distantia eodem modo computandae.

Schol. 4. Sit (Fig. 198) sit ab latus polygoni regularis n laterum ex q incipientis, radius r quadrantis qac, et $\mathfrak{d}\mathfrak{D}$ sit $\perp$ris e cordæ $\mathfrak{ab}$ meditullio ad radium $q\mathfrak{C}$, et $a\mathfrak{A}$, $\mathfrak{b}\mathfrak{B}$ pariter sint ad radium $q\mathfrak{C}$ $\perp$res, et $\mathfrak{ap}$ $\perp$ris ad $\mathfrak{bB}$. Fient $\triangle$la $\mathfrak{C}\mathfrak{D}\mathfrak{d}$ et $\mathfrak{abp}$ (p. 22) similia, (propter latera rectproce $\perp$ria) adeoque $u' = u$; itaque $\mathfrak{Cd}:\mathfrak{dD} = \mathfrak{ab}:\mathfrak{ap}$, et hinc $\mathfrak{Cd}.\mathfrak{ap} = \mathfrak{dD}.\mathfrak{ab}$, et $2\pi\mathfrak{Cd}.\mathfrak{AB} = 2\pi\mathfrak{dD}.\mathfrak{ab}$. Sed revoluto schemate circa $\mathfrak{AC}$, posterius est superficies coni truncati, (exclusis basibus), cujus latus $\mathfrak{ab}$, et altitudo $\mathfrak{ap} = \mathfrak{AB}$ est; prius autem nempe $2\pi\mathfrak{Cd}.\mathfrak{AB}$ est superficies cylindri, (exclusis basibus) cujus altitudo $\mathfrak{AB}$, radius peripheriae baseos autem $\mathfrak{Cd}$ est. Atque pro quovis alio polygoni latere, pariter superficies coni truncati per cordam descripti, erit superficiei cylindri ejus aequalis, cujus altitudo est pars radii $q\mathfrak{C}$ inter $\perp$res ad eum ab extremitatibus lateris missas, basis vero est $=$ circulo, cujus radius $=$ $\perp$ri e centró ad cordam missa. nempe $\mathfrak{Cd} \perp \mathfrak{ab}$, quia $\mathfrak{d}$ meditullium cordae est. Dicatur haec nomine generali r'; est nempe $\perp$ris e centro ad quodvis latus polygoni regularis ejusdem æqualis.

Summa superficierum conorum truncatorum dicatur s'. Si n semper duplicetur, atque uti cordae se invicem a $\mathfrak{b}$ usque ad a excipiunt, coni truncati per revolutionem schematis generati accipiantur: erit $s' = 2\pi r'.\mathfrak{AB}$, quod manifesto $\frown$ $2\pi r.\mathfrak{AB}$, quia $r' \frown r$. Consequenter *superficies zonae aequatur peripheriae circuli maximi per altitudinem zonae multiplicatae.*

Et si hoc ad totum quadrantem extendatur; fiet superficies hemisphaerii, peripheriae circuli maximi per radium multiplicatae aequalis; scilicet erit $= 2\pi r.r$, et totius sphaerae superficies $= 4r^2\pi$ (ut antea).

Schol. 5. **Per latus ultimum ad q quidem non conus truncatus, sed conus apice ad q gaudens describitur: at coni recti quoque superficies (exclusa basi) aequatur lateri per peripheriam illam multiplicato; quae per Lrem e meditullio lateris ad axem missam describitur: sit enim latus coni adeoque radius sectoris recte superficiei praebentis *r*, et arcus ad imum radii sit *a*; erit e medio ipsius *r* arcus $= \frac{a}{2}$, et area sectoris $= \frac{r}{2} . a = \frac{a}{2} . r$. Unde patet et segmentum sphaerae e q incipiendo esse peripheriae circuli maximi per altitudinem multiplicatae aequale.**

Schol. 6. Et superficies coni truncati limes trapeziorum est, quae a certo latere coni incipiendo, basibus inscribendo polygona regularia to idem laterum, oriuntur, et quodvis trapeziorum horum in duo $\triangle$la apices in superficie habentia dispesci potest; atque limitem summae $\triangle$lorum per superficiem curvam intelligi dictum est, sicubi cum plano ut *quantitas respectiva* comparatur (Tom. I p. 267).

Schol. 7. *Appendicis in tomo primo Auctor (Geometra acutissimus)* ibidem in opusculo singulari attentione digno (nec ratione voluminis aestimando), non solum independentem ab axiomate XI Euclideo, Geometriam sagacitate summa docuit primus, sed ab eodem independenter, Trigonometriam sphaericam stabilivit, imo etiam superficies sphaericas esse ut 2dae diametrorum potentiae; atque superficiei sphaerae quantitatem deduxit.

§. 4. *Sectiones coni* autem (ut p. 100 dictum est) *lineas* 2di *ordinis esse*, et quidem si planum secans P lateri coni parallelum fuerit. *parabolam*, si p e situ parallelo versus latus dictum moveatur, *ellipsim*, si retrorsum moveatur, *hyperbolam in cono verticali utroque*, et quidem e duabus curvis aequalibus (in duobus conis verticalibus) constantem, esse sic patet. Sit (Fig. 199) planum tabulae, planum per axem conorum verticalium, quorum anguli verticales n sint; sitque planum P prius parallelum coni lateri $\mathfrak{fB}$, et ⊥re ad planum tabulae, sitque $\mathfrak{AP}$ cum hoc sectio ipsius P; fiatque planum p ⊥re ad axem per $\mathfrak{P}$, sitque sectio $\mathfrak{BC}$ ipsius p cum plano tabulae; erit sectio ipsius p cum superficie coni supra planum tabulae semicirculus, in quo ⊥ris ex $\mathfrak{P}$ ad $\mathfrak{BC}$ dicatur y, cui correspondens $\mathfrak{AP}$ dicatur x; nempe in recta $\mathfrak{AP}$ poterit $\mathfrak{P}$ ubivis sumi, et dicenda ubique valebunt: erit manifesto y ⊥ris ad planum tabulae adeoque ad x. Sit circuli radius r; $\triangle\,\mathfrak{fBC}$ aequicrurum est, adeoque anguli v ad basim sunt aequales, et $v = \frac{2R-n}{2}$ $= R - \frac{1}{2}n$, et hinc $\sin v = \cos\frac{1}{2}n$. Porro in $\triangle$lo $\mathfrak{APC}$ est $x : 2r - z = \sin v : \sin n =$ $\cos\frac{1}{2}n : \sin n$. Et hinc $2r - z = \frac{x \sin n}{\cos\frac{1}{2}n}$. Et si ex $\mathfrak{A}$ ipsi $\mathfrak{BC}$ parallela $\mathfrak{Ab}'$ fiat; erit $c : z =$ $\sin v : \sin n = \cos\frac{1}{2}n : \sin n$; adeoque

$$z = \frac{c \sin n}{\cos\frac{1}{2}n}.$$

Est autem in semicirculo $y^2 = (2r - z)z$: consequ. substitutis valoribus ipsorum $2r - z$

et z; erit $y^2 = \frac{x \sin n}{\cos \frac{1}{2} n} \cdot \frac{c \sin n}{\cos \frac{1}{2} n} = \frac{cx \sin n^2}{(\cos \frac{1}{2} n)^2}$.

Et haec aequatio parabolae pro parametro $\frac{c \sin n^2}{(\cos \frac{1}{2} n)^2}$ est; atque parabola cujusvis parametri q prodit, si $c = \frac{q (\cos \frac{1}{2} n)^2}{\sin n^2}$ accipiatur; nempe is valor ipsius c accipi potest, proditque ex $q = \frac{c \sin n^2}{(\cos \frac{1}{2} n)^2}$ posito.

Sit $\wedge m > n$, et sit $\mathfrak{A}'\mathfrak{p}$ nunc abscissa x ex $\mathfrak{A}'$ incipiens (ut prius ex $\mathfrak{A}$ erat). Erit tum $z = z + k - k$; est vero $z + k = \frac{c \sin n}{\cos \frac{1}{2} n}$, et

$k = \frac{x . \sin (m-n)}{\cos \frac{1}{2} n}$; nam in Δlo $\mathfrak{A}\mathfrak{P}\mathfrak{A}'$ externus $m = n + m - n$, et in Δlo $\mathfrak{A}'\mathfrak{a}\mathfrak{P}$ est $x : k = \sin u : \sin (m-n) = \sin v : \sin (m-n)$, (quia angulus deinceps ipsius u est $= v$). Unde $k = \frac{x . \sin (m-n)}{\sin v} = \frac{x \sin (m-n)}{\cos \frac{1}{2} n}$.

Atque hinc substitutis valoribus ipsorum $z + k$ et k, erit $z = z + k - k = \frac{c \sin n - x \sin (m-n)}{\cos \frac{1}{2} n}$.

Porro in Δlo $\mathfrak{A}\mathfrak{P}\mathfrak{C}$ est $2r - z : x =$

$\sin m : (\sin v \cos = \frac{1}{2} n)$; adeoque $2r - z =$

$\frac{x \sin m}{\cos \frac{1}{2} n}$.

Atque hinc $y^2 = z(2r - z) =$
$\frac{c \sin n - x \sin(m-n)}{\cos \frac{1}{2} n} \cdot \frac{x \sin m}{(\cos \frac{1}{2} n} = \frac{x.c \sin n . \sin m}{\cos \frac{1}{2} n)^2}$

$- \frac{x^2 . \sin(m-n) . \sin m}{\cos \frac{1}{2} n)^2}$; quae pro axe majore

$a = \frac{c \sin n}{\sin(m-n)}$ et parametro $\beta = \frac{c . \sin n . \sin m}{(\cos \frac{1}{2} n)^2}$

aequatio ellipseos est.

Nempe ex $\frac{\beta}{a} = \frac{c \sin n . \sin m}{a . (\cos \frac{1}{2} n)^2} =$

$\frac{\sin(m-n) . \sin m}{\cos \frac{1}{2} n)^2}$, sequitur $a = \frac{c \sin n}{\sin(m-n)}$ atque $c = \frac{a . \sin(m-n)}{\sin n}$.

Si $\mathfrak{a}'\mathfrak{q} \parallel \mathfrak{fb}$, et $\mathfrak{a}'\mathfrak{b}' \parallel \mathfrak{bc}$, atque $\mathfrak{a}'\mathfrak{p}$ sit x, et $m < n$ sit (F. 199 - - supra f); et planum p antea ad P in $\mathfrak{BC}$ Lriter insistens, nunc ipsi P in $\mathfrak{bc}$ insistat Lriter: erit tum $z = h + k$; atque $c : h = \sin v : \sin n$, adeoque $h = \frac{c . \sin n}{\sin v} = \frac{c . \sin n}{\cos \frac{1}{2} n}$;

porro in $\triangle$lo $\mathfrak{a}'\mathfrak{pq}$ est $\wedge \mathfrak{pa}'\mathfrak{q} = n - m$, quia $\wedge \mathfrak{ca}'\mathfrak{q} = n$ (propter $\mathfrak{aq} \parallel \mathfrak{fb}$); atque est $(x = \mathfrak{a}'\mathfrak{p}) : k =$

$\sin v : \sin(n-m)$; adeoque $k = \frac{x \cdot \sin(n-m)}{\sin v}$

$= \frac{x \cdot \sin(n-m)}{\cos\frac{1}{2}n}$.

Porro in $\triangle$lo $a'pe$ est $2r-z : x = \sin m : \sin v$, atque hinc $2r-z = \frac{x \cdot \sin m}{\sin v} = \frac{x \cdot \sin m}{\cos\frac{1}{2}n}$.

Consequenter (ut antea) $y^2 = z(2r-z) = (h+k)(2r-z) = \left[\frac{c \cdot \sin n}{\cos\frac{1}{2}n} + \frac{x \cdot \sin(n-m)}{\cos\frac{1}{2}n}\right] \cdot \frac{x \cdot \sin m}{\cos\frac{1}{2}n} = \frac{c \cdot \sin n \cdot \sin m \cdot x}{(\cos\frac{1}{2}n)^2}$

$+ \frac{\sin(n-m) \cdot \sin m \cdot x^2}{(\cos\frac{1}{2}n)^2}$: quae *aequatio hyperbolae* est, (pro parametro $\gamma = \frac{c \cdot \sin n \cdot \sin m}{(\cos\frac{1}{2}n)^2}$,

et axe primo $a = \frac{c \cdot \sin n}{\sin(n-m)}$. Nempe ex $\gamma = \frac{c \cdot \sin n \cdot \sin m}{(\cos\frac{1}{2}n)^2}$, simul coefficientem ipsius x^2

ipsi $\frac{\gamma}{a}$ ponendo aequalem; erit

$\frac{\sin(n-m) \cdot \sin m}{(\cos\frac{1}{2}n)^2} = \frac{c \cdot \sin n \cdot \sin m}{a \cdot (\cos\frac{1}{2}n)^2}$; atque hinc $\sin(n-m) = \frac{c \cdot \sin n}{a}$, et $c = \frac{a \cdot \sin(n-m)}{\sin n}$

et $a = \frac{c \cdot \sin n}{\sin(n-m)}$;

§. 5. Estque sectio in cono verticali facta priori aequalis.

Denotentur enim (abhinc usque ad p. 231) sinus angulorum per nomina angulorum accento insignita; ex gr. $\sin n$ denotetur per n', et $(n-m)'$ denotet sinum anguli $(n-m)$, ita v' erit $= \sin v = \cos \frac{1}{2} n$.

Si jam (Fig. 200) in cono superiori sectio per $\mathfrak{dp}$, in inferiori autem continuatio ejus per $\mathfrak{DP}$ fuerit, dicanturque M anguli verticales ad $\mathfrak{D}$; erit $c : C = M' : m' = (n-m)' : m'$, (nempe $M = n-m$); itaque $C = \frac{cm'}{(n-m)'}$. Est vero (ut in praec.) $y^2 = \frac{Cn'M'x + (n-M)'M'x^2}{v'^2}$, quia $n > M$, (nempe externus interno opposito major). Substituendo autem valores ipsorum C et M, fit $y^2 = \frac{cm'.n'.(n-m)'x}{(n-m)'v'^2} + \frac{m'(n-m)'x^2}{v'^2} = \frac{cm'n'x}{v'^2} + \frac{m'(n-m)'x^2}{v'^2}$, uti in §. 4.

Schol. 1. Sit (Fig. 201. I) cujusvis rectae datae $\mathfrak{DB}$ meditullium $\mathfrak{C}$, sitque ad angulum quemvis u recto minorem recta $\mathfrak{Cf}$; ducanturque e quovis rectae $\widetilde{\mathfrak{Cf}}$ puncto $\mathfrak{f}$, rectae $\mathfrak{fD}, \mathfrak{fB}$; in triangulis $\mathfrak{DCf}$ et $\mathfrak{BCf}$, est latus $\mathfrak{fC}$ = sibi, latus $\mathfrak{CD} = \mathfrak{CB}$, angulus interceptus u autem est altero intercepto deinceps posito minor, quia u (per hyp) acutus est; itaque $\mathfrak{fB} < \mathfrak{fD}$

est. Fiat 𝔣𝔈 = 𝔣𝔇, et 𝔇𝔈 dicatur A; atque translato schemate (in Fig. 201. II), et tabulae plano C dicto; erigatur ex A planum B ad C ⊥re, fiatque in B ad axem A pro parametro $Q = \frac{Av'^2}{m'\omega'}$ ellipsis; erit recta e meditullio ipsius A ad 𝔣 ducta, ⊥ris ad B, et simul axis coni recti per complexum rectarum ex omnibus ellipseos punctis ad apicem 𝔣 ductis efformati; eritque sectio hujus coni, per planum P (ex D = 𝔇𝔅) ad C ⊥re facta, circulus diametri D; atque coni ex apice 𝔣 huic circulo insistentis, axis (nempe recta ex apice 𝔣 ad ℭ centrum circuli) efficiet cum plano circuli (tanquam basi) angulum u; est enim basis haec in plano P, et C planum tabulae, in quod axis dictus cadit, ad P ⊥riter positum est, quia P ad C (per hyp.) ⊥re est.

Nam moveatur planum ex B sursum ipsi A parallele: quocunque venerit, ex gr. in planum b ad C ex 𝔟𝔢 ⊥re, sectio ejus cum cono erit ellipsis inferiori similis. Ellipseos hujus axis (per 𝔟𝔢 repraesentatus) dicatur generaliter a, et parameter ejus dicatur q, sitque 𝔅𝔭 abscissa x; et quaeratur y nempe sectio plani P cum ellipsi, in qua planum b conum secat; est y tam ad D quam ad a nempe ad 𝔟𝔢 ⊥ris, quia sectio duorum planorum P et b ad tertium C ⊥rium est.

Eritque $A : a = Q : q$ (p. 111), adeoque $q = \frac{aQ}{A}$. Estque $a = z + a - z = \frac{cn' - x\omega' + xm'}{v'}$; quia et hic (ut p. 225) $z = \frac{cn' - x\omega'}{v'}$, et $a - z = \frac{xm'}{v'}$, nimirum $v' = \cos\frac{1}{2}n$, et $\omega = (m - n)$. Est igitur $q = \frac{cn' - x\omega' + xm'}{v'} \cdot \frac{Q}{A}$, et $y^2 = qz - \frac{qz^2}{a}$; et hoc (substituendo valores ipsorum z et q) fiet $= \frac{cn' - x\omega'}{v'} \cdot \frac{cn' - x\omega + xm'}{v'} \cdot \frac{Q}{A} - (\frac{cn' - x\omega'}{v'})^2 \cdot \frac{Q}{A}$ $= \frac{Qcm'n'x}{Av'^2} - \frac{Q\omega'm'x^2}{Av'^2}$, (nempe $\frac{Q}{A} = \frac{q}{a}$). Substituendo autem valorem supra dictum ipsius Q, fit $y^2 = \frac{Av'^2cm'n'x}{m'\omega'Av'^2} - \frac{Av'^2\omega'm'x^2}{m'\omega'Av'^2} =$ $\frac{cn'}{\omega}x - x^2 = Dx - x^2 = x(D-x)$; nam $D = \frac{cn'}{\omega'}$, quia in $\triangle$lo 𝔉𝔇𝔅 est $D : c = n' : \omega'$.

Schol. 2. Sit pariter (F. 201. III) in plano C rectangulum 𝔄𝔈𝔇𝔈, et ducatur recta 𝔇𝔅 ad quemvis angulum acutum u; fiantque (ut antea) planum B ex 𝔇𝔈, et planum b ex 𝔡𝔢, et planum P ex 𝔇𝔅, ad C Lria; fiatque in B ad axem a pro parametro $q = \frac{D}{u'}$ ellipsis, et fiat ad hanc ellipsim tanquam basim cylinder rectus; erit sectio per planum b facta ellipsis basi aequalis, manentque q et a eadem. Eritque $z : x = u' : 1$, adeoque $z = xu'$, et $D : a = 1 : u'$, adeoque $a = Du'$; atque (per y sectionem planorum P et b in cylindri superficie terminatam intelligendo) fit $y^2 = qz - \frac{qz^2}{a}$ $= \frac{Dxu'}{u'} - (\frac{D}{u'} : Du')x^2u'^2 = Dx - \frac{Dx^2u'^2}{u'Du'}$ $= Dx - x^2 = x(D-x)$; itaque cylinder superior circulo diametri D ad datum angulum u insistet.

Schol. 3. Sit (Fig. 201. IV) 𝔇𝔈 diameter baseos circularis coni obliqui, sitque 𝔉𝔈 latus breest. Fiat $\mathfrak{f}\mathfrak{E} = \mathfrak{f}\mathfrak{D}$, et $\mathfrak{D}\mathfrak{E}$ dicatur A; atque translato schemate (in Fig. 201. II), et tabulae plano C dicto; erigatur ex A planum B ad C ⊥re, fiatque in B ad axem A pro parametro $Q = \frac{Av'^2}{m'\omega'}$ ellipsis; erit recta e meditullio ipsius A ad $\mathfrak{f}$ ducta, ⊥ris ad B, et simul axis coni recti per complexum rectarum ex omnibus ellipseos punctis ad apicem $\mathfrak{f}$ ductis efformati; eritque sectio hujus coni, per planum P (ex $D = \mathfrak{D}\mathfrak{B}$) ad C ⊥re facta, circulus diametri D; atque coni ex apice $\mathfrak{f}$ huic circulo insistentis, axis (nempe recta ex apice $\mathfrak{f}$ ad $\mathfrak{E}$ centrum circuli) efficiet cum plano circuli (tanquam basi) angulum u; est enim basis haec in plano P, et C plannm tabulae, in quod axis dictus cadit, ad P ⊥riter positum est, quia P ad C (per hyp.) ⊥re est.

Nam moveatur planum ex B sursum ipsi A parallele: quocunque venerit, ex gr. in planum b ad C ex $\mathfrak{d}\mathfrak{e}$ ⊥re, sectto ejus cum cono erit ellipsis inferiori similis. Ellipseos hujus axis (per $\mathfrak{d}\mathfrak{e}$ repraesentatus) dicatur generaliter a, et parameter ejus dicatur q, sitque $\mathfrak{B}\mathfrak{p}$ abscissa x; et quaeratur y nempe sectio plani P cum ellipsi, in qua planum b conum secat; est y tam ad D quam ad a nempe ad $\mathfrak{d}\mathfrak{e}$ ⊥ris, quia sectio duorum planorum P et b ad tertium C ⊥rium est.

Eritque $A : a = Q : q$ (p. 111), adeoque $q = \frac{aQ}{A}$. Estque $a = z + a - z = \frac{cn' - x\omega' + xm'}{v'}$; quia et hic (ut p. 225) $z = \frac{cn' - x\omega'}{v'}$, et $a - z = \frac{xm'}{v'}$, nimirum $v' = \cos\frac{1}{2}n$, et $\omega = (m - n)$. Est igitur $q = \frac{cn' - x\omega' + xm'}{v'} . \frac{Q}{A}$, et $y^2 = qz - \frac{qz^2}{a}$; et hoc (substituendo valores ipsorum z et q) fiet $= \frac{cn' - x\omega'}{v'} . \frac{cn' - x\omega + xm'}{v'} . \frac{Q}{A} - (\frac{cn' - x\omega'}{v'})^2 . \frac{Q}{A}$ $= \frac{Qcm'n'x}{Av'^2} - \frac{Q\omega'm'x^2}{Av'^2}$, (nempe $\frac{Q}{A} = \frac{q}{a}$). Substituendo autem valorem supra dictum ipsius Q, fit $y^2 = \frac{Av'^2 cm'n'x}{m'\omega' Av'^2} - \frac{Av'^2 \omega' m' x^2}{m'\omega' Av'^2} =$ $\frac{cn'}{\omega} x - x^2 = Dx - x^2 = x(D - x)$; nam $D = \frac{cn'}{\omega'}$, quia in $\triangle$lo 𝔣𝔇𝔅 est $D : c = n' : \omega'$.

Schol. 2. Sit pariter (F. 201. III) in plano C rectangulum 𝔄𝔈𝔇𝔈, et ducatur recta 𝔇𝔅 ad quemvis angulum acutum u; fiantque (ut antea) planum B ex 𝔇𝔈, et planum b ex 𝔡𝔢, et planum P ex 𝔇𝔅, ad C Lria; fiatque in B ad axem a pro parametro $q = \frac{D}{u'}$ ellipsis, et fiat ad hanc ellipsim tanquam basim cylinder rectus; erit sectio per planum b facta ellipsis basi aequalis, manentque q et a eadem. Eritque $z : x = u' : 1$, adeoque $z = xu'$, et $D : a = 1 : u'$, adeoque $a = Du'$; atque (per y sectionem planorum P et b in cylindri superficie terminatam intelligendo) fit $y^2 = qz - \frac{qz^2}{a}$ $= \frac{Dxu'}{u'} - (\frac{D}{u'} : Du')x^2 u'^2 = Dx - \frac{Dx^2 u'^2}{u'Du'}$ $= Dx - x^2 = x(D - x)$; itaque cylinder superior circulo diametri D ad datum angulum u insistet.

Schol. 3. Sit (Fig. 201. IV) 𝔇𝔈 diameter baseos circularis coni obliqui, sitque 𝔣𝔈 latus brevissimum, adeoque $u < r$. Ponantur (ut antea) ad C $\perp$riter planum P ex $\mathfrak{BD}$, et planum b per $\mathfrak{de}$ ad basim parallelum; erit sectio coni per b circulus diametri $\mathfrak{de} = \delta$; et $z + k : c = n' : u'$, atque $k : x = (m - n)' : u' = \lambda' : u'$; adeoque $z + k - k$ $= \frac{cn' - x\lambda'}{u'} = z$, et $\delta - z = \frac{xm'}{v'}$, quia

$\mathfrak{pe} : \mathfrak{pB} = m' : v'$. Atque hinc $y^2 = z(\delta - z) =$ $\frac{cn' - x\lambda'}{u'} \cdot \frac{xm'}{v'} = \frac{cn'm'x}{u'v'} - \frac{\lambda' m' x^2}{u'v'}$. Pro circulo,

$\frac{cn'm'}{u'v'} = D = \frac{cn'}{\lambda'}$, et $\frac{m'\lambda'}{u'v'} = 1$, (nempe $c : D =$ $\lambda' : n'$), adeoque $m'\lambda' = u'v'$ esset. Sed hoc fieri nequit: quia tum esset $m' : v' = u' : \lambda'$, atque quum in $\triangle$lo $\mathfrak{pBe}$ sit $m' : v' = \mathfrak{pe} : \mathfrak{pB}$, et in $\triangle$lo $\mathfrak{Dpd}$, $u' : \lambda' = \mathfrak{Dp} : \mathfrak{dp}$ (quia $u' = \omega'$), esset $\mathfrak{pe} : \mathfrak{pB} =$ $\mathfrak{Dp} : \mathfrak{dp}$, et $\triangle$la $\mathfrak{Bpe}$ et $\mathfrak{Dpd}$ (per duo latera cum angulo intercepto aequali proportionalia) similia fierent, et $\lambda = v$, ac $\omega = m$. Sed u (externus) $> \lambda$; conseq. $u > v$ esset, quamvis $u < v$ sit.

At (F. 201. V) pro $\wedge \mathfrak{tRS} = v$, circulus fit; nam $y^2 = \frac{cm'n'x}{u'v'} - \frac{\lambda' m' x^2}{u'v'}$, et $D = \frac{cn'}{\lambda'}$, sed $m' = v'$,

$u = 2R - v - n = \lambda$, et $\frac{cn'm'}{u'v'} = \frac{cn'}{\lambda'} = D$, et $\frac{\lambda' m'}{u'v'} = 1$.

Schol. 4. Pariter prodit cylindri circulo oblique insistentis sectio (Fig 201. VI): nempe fit $y^2 = \frac{a\omega' x}{v'} - \frac{\omega'^2 x^2}{v'^2}$; ubi ut $\frac{a\omega'}{v'} = $ (D quod $=$ $\frac{av'}{\omega'}$), et $\frac{\omega'^2}{v'^2} = 1$ fiat, $v' = \omega'$ esse deberet; sed $u + v = 2R$, hinc $v + \omega < 2R$, et v, ω non gaudent sinu eodem.

In omnibus his autem pro K et k $\dagger$vis fiet $y^2 = kx - Kx^2$, quae aequatio ellipseos erit; nempe ex $K = \frac{k}{a}$ erit $a = \frac{k}{K}$, atque $y^2 = kx - \frac{k}{a}x^2$, ubi k parameter, et $\frac{k}{K}$ axis major est. Unde reliqui casus etiam (tam pro $m = n$, quam pro $m < n$) sectionis coni (et pariter cylindri) obliqui patent: omissisque aliis hujus generis, sequitur in numero

·31155. §. 1. *Sphaerae cum plano sectio*: aut *punctum*, aut *circulus* est, qui si per centrum transierit, *maximus* audit, quum omnes alii minores sint; pars sphaerae per planum abse-cta *segmentum*, et par sphaerae inter duo plana parallela *zona* dicitur.

Nempe quodcunque planum secuerit sphaeram, ⊥ris e centro ad illud missa aut in superficiem sphaerae cadet, aut intra eam; extus enim cadere nequit, quia quaevis alia recta e centro ad planum idem, dicta ⊥ri adeoque et radio major est; itaque nullum plani punctum cum sphaera commune esset. Si vero extremitas ⊥ris dictae in superficiem cadat; nullum aliud punctum erit plano sphaeraeque commune, quia quaevis alia recta e centro ad planum excedit radium. Atque si ⊥ris intra sphaeram terminetur; erit haec ad omnes rectas ex eo puncto in plano secante ⊥ris, quae singulae exibunt per sphaeram, efformabuntque omnia △la rectangula aequalia; quia cathetus e centro omnibus communis, et hypotenusa radius est; atque manifesto sectio erit via catheti alterius, moto △lo rectangulo circa cathetum priorem. Neque praeter circulum hunc, planum cum sphaera quidquam commune habet: superficies sphaerae enim via semicirculi circa diametrum est, et si in motu $\triangle$li rectanguli plane dicto semicirculus moveatur, $\llcorner$ris e quovis semicirculi puncto ad axem motus aliud planum describet, eruntque quaevis plana parallela, adeoque nihil commune habentia.

§. 2. Est quoque manifesto centrum sphaerae in $\llcorner$ri e centro circuli in superficie sphaerae siti, ad planum hujus erecta: atque *duarum talium* $\llcorner$rium *sectio centrum est.*

§. 3. Et facile de sphaeris quoque patet (uti de circulis in eodem plano, si sectionis shaerarum circularis, sectio duorum punctorum in circulis, vicem subeat): quod si sphaerarum S et s centra sint $\mathfrak{C}$ et $\mathfrak{c}$, radii R et r, atque distantia centrorum d sit; pro casu si $\mathfrak{c}$ extra S cadat, sphaerae nil commune habeant, si $d > R+r$; si vero $d = R+r$, punctum solum commune utrique sit; et si $d < R+r$ fuerit, sectio circulus sit; pro $\mathfrak{c}$ in superficiem sphaerae S, aut intus cadente autem sectio nulla sit, si $r > R+d$, sectio punctum sit, si $r = R \pm d$, et sectio circulus sit, si $r < R+d$, et r non $=$ nec $<$ R$-d$ fuerit. Percurrendo singulos casus Tyrones ipsi e sola (Fig. 202) inspectione rem in plano quoad circulos facile perspicere possunt.

Et tum quoad sphaeras S et s quoque concludi potest; plano per centra $\mathfrak{C}$ et $\mathfrak{c}$ adeoque rectam $\widetilde{\mathfrak{C}\mathfrak{c}}$, in quam diameter utriusque cadit, posito, atque in hoc tam centro $\mathfrak{C}$ radio R quam centro $\mathfrak{c}$ radio r circulis descriptis. Sint nimirum circuli hi C et c; atque revolvatur schema e circulis C et c compositum circa $\mathfrak{C}\mathfrak{c}$; generabuntur manifesto sphaerae S et s; quae si C et c nihil commune habuerint, pariter nihil commune habebunt, si autem C et c tetigerint se invicem, et sphaerae tangent se invicem, tangenturque a plano per viam rectae ad diametrum e puncto tactus ⊥ris, descriptum; si vero C et c in 2 punctis $\mathfrak{P}$ et $\mathfrak{p}$ secuerint se invicem; orientur duo △la aequicrura $\mathfrak{C}\mathfrak{P}\mathfrak{p}$, et $\mathfrak{c}\mathfrak{P}\mathfrak{p}$, adeoque si meditullium rectae $\mathfrak{P}\mathfrak{p}$ sit m, erit tam $\mathfrak{C}$m quam $\mathfrak{c}$m ⊥ris ad $\mathfrak{P}\mathfrak{p}$, itaque m in $\mathfrak{C}\mathfrak{c}$ erit, et in motu dicto per rectam $\mathfrak{P}$m ad $\mathfrak{C}\mathfrak{c}$ ⊥rem, describetur planum, et per punctum circulus in plano eodem, sphaerae utrique communis.

·31351. §. 1. Si planum P per centrum eat, fit *circulus*, quem *maximum* esse, inde patet: quod si e centro hujus circuli C dicti, ad planum P ⊥ris L erigatur, et planum tale ponatur, in quod ⊥ris dicta incidit; secet hoc sphaeram in circulo C′; hujus revolutio circa L eandem sphaeram parit; patetque, quod si radius circuli C′ sit r', circuli per quodvis aliud periphaeriae C′ punctum descripti, radius versus polum propiorem semper descrescat; nempe circuli cujusvis in hoc motu descripti radius est sinus arcus a polo usque ad punctum peripheriam describens. Quicunque autem circulus c in superficie sphaerae sit, alicui per puncta ipsius C′ descriptorum aequalis est: nam c in plano est, et si e centro sphaerae ⊥ris ad planum hoc demittatur, haec in centrum circuli c cadet; unde antea dictis applicatis patet.

§. 2. Quilibet duo circuli maximi secant se invicem in duobus punctis, et quidem bisecant (T.I.p.485); atque duo illa sectionis puncta, cum centro in eadem recta sunt.

§. 3. Quomodo autem fiat angulus duorum circulorum maximorum quantitas respectiva, quae in comparatione arithmetica semper intelligi debet, dictum (T. I. p.485) est: nempe angulus planorum in quae circuli illi cadunt intelligitur, atque hujus quantitas est arcus circuli maximi inter extremitates quadrantum, e sectione circulorum illorum, de quorum angulo sermo est, acceptorum.

§. 4. Demonstratum etiam est:

1mo. Circuli maximi a et b ad tertium c $\perp$res, in fine quadrantum communi secant se invicem, fine hoc *polo* ipsius c dicto. Unde extremitas quadrantis ad c $\perp$ris, polus ipsius c est.

2do. Si $\mathfrak{pa}$, $\mathfrak{pb}$ quadrantes fuerint; anguli arcuum $\mathfrak{pa}$ et $\mathfrak{pb}$ quantitas arcus $\mathfrak{ab}$ est.

§. 5. Patet etiam: 1mo e quovis superficiei sphaerae puncto $\mathfrak{p}$, ad quemvis circulum maximum C dari circulum maximum $\perp$rem. Nam tum $\mathfrak{p}$ in hemisphaerio est, cujus aequator C est, et polus $\mathfrak{q}$ sit; adeoque circulus maximus per $\mathfrak{q}$ et $\mathfrak{p}$ secat circulum maximum C, et arcus ex $\mathfrak{q}$ usque ad C quadrans ad C $\perp$ris est.

2do. Si $\mathfrak{p}$, $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$ talia superficiei sphaerae puncta fuerint, ut $\mathfrak{p}$ tam ab $\mathfrak{a}$ quam a $\mathfrak{b}$ quadrante distet; $\mathfrak{p}$ polus arcus $\mathfrak{ab}$ erit. Sit enim $\mathfrak{c}$ centrum, erunt rectae $\mathfrak{ca}$, $\mathfrak{cb}$ $\perp$res ad $\mathfrak{cp}$; adeoque $\mathfrak{cp}$ $\perp$ ad planum $\mathfrak{acb}$, et plana $\mathfrak{pca}$, $\mathfrak{pcb}$ $\perp$ria ad planum $\mathfrak{acb}$ sunt.

§. 6. Oriuntur quidem et in sphaera ut in plano triangula plurium generum: sed inprimis triangula sphaerica tractare necesse est: figura quaevis in superficie sphaerae tribus ejusmodi arcubus circulorum maximorum clausa, ut quivis bini arcus se invicem nonnisi in puncto secent, et diversorum circulorum maximorum arcus sint: sensu lato *triangulum sphaericum* est: et manifesto ab extremitatibus cordarum radiis ductis, pyramis triangularis orietur, cujus basis triangulum e cordis componitur, et lateris cujusvis angulus rectilineus ad apicem est duobus rectis minor; at si latera plana hujus pyramidis (inter crura angulorum rectilineorum dictorum) producantur, sectio illa, quae cum superficie sphaerae fiet, dicitur strictius *triangulum sphaericum*; nempe etsi pro arcu aliquo trium illorum, in quibus pyramis, sphaerae superficiem secat, arcus alter ejusdem circuli maximi earundem extremitatum accipiatur, pariter $\triangle$ sphaericum manebit sensu lato, sed corda eadem erit, eademque pyramis generabitur.

§. 7. Summae angulorum latera pyramidis $\triangle$laris constituentium, idest laterum $\triangle$li sphaerici, limites sunt *o* et et 4R; ita summae angulorum quos latera pyramidis dictae faciunt, (adeoque angulorum $\triangle$li sphaerici), limites sunt 2R nempe summa est $>2R$ et $<6R$.

Nam *quoad latera*: sint A, B, C latera pyramidis $\triangle$laris; est omnino quodvis $<2R$; cadant A et B supra planum C, et apex pyramidis in centrum sphaerae, seceturque sphaera per C in arcu $\mathfrak{ba}$. hemisphaerium supra C autem secetur per B, A, in $\mathfrak{bc}$, $\mathfrak{ca}$; poterit $\mathfrak{bc}=2R-\omega$ et $\mathfrak{ca}=2R-\lambda$, et $\mathfrak{ba}=2R-k$ poni (Fig. 203). Continuetur arcus $\mathfrak{cb}$ ultra $\mathfrak{b}$, donec ex $\mathfrak{c}$ incipiendo semicirculus fiat, patet ipsi $\mathfrak{cb}$ additum ω infra planum C cadere; pariter si arcui $\mathfrak{ca}$ addatur λ, semicirculus fiet, cum priori simul incipiens supra planum C, et simul desinens infra C; nam duo circuli maximi se in 2 punctis bisecant, eruntque semicirculorum dictorum initium et finis extremitates diametri; atque et infra C efformabitur nova pyramis, et novum △ sphaericum, cujus laterum ω et λ summa est 3tio major; adeóque $\omega+\lambda-h=C$; poni potest, eritque $A+B+C=2R-\omega+2R-\lambda+\omega+\lambda-h=4R-h$.

Quoad angulos laterum pyramidis △laris quoque, evidens est, quemvis trium angulorum 2 rectis minorem, adeoque et summam 6 rectis minorem esse.

Sed summam hanc 2 rectis majorem, et 6 rectis ita minorem esse, ut dato quovis minus ab utroque limite differre queat; sic patet: construatur △ modo sequente, (In Fig. 204) descriptis in superficie sphaerae, ex apicibus △li sphaerici abc, (in quo pyramis △laris eam secat), tanquam centris, quadrantis intervallo circulis maximis; erunt centra dicta poli circulorum descriptorum, et horum quilibet bini secabunt se invicem in 2 punctis et orietur trilaterum $a'b'c'$, sectione illa a' accepta pro A (ex extremitatibus b,c ejus facta) quae respectu plani ipsius A in eandem plagam cum a cadit, ita sectione illa b' accepta pro B, quae respectu plani ipsius B in eandem plagam cum b cadit, atque sectione illa c' ipsius C accepta, quae respectu plani ipsius C in eandem plagam cum c cadit; fieri nimirum posse hoc patet, quum △li abc latus quodvis $<2R$ sit, adeoque quadrantes circa extremitates motae se invicem in hemisphaerio illo quoque secant ubi apex oppositus △li est.

Erit vero △ abc et $a'b'c'$ ejusmodi, ut cujusvis eorum anguli cujusvis, latus alterius ei oppositum, complementum ad 2R sit.

Nempe a,b,c poli arcuum A',C',C', et a',b',c' poli arcuum A, B, C sunt: in quovis enim duo puncta ab eodem puncto quadrante distant (p. 234). Itaque exgr. $b=u$, et $z+u=R=u+v$, adeoque $z=v$; et $z+u+v+u=2R=B'+u=B'+b$. Quod pariter de reliquis patet; idemque applicare ad casus, si quod ipsorum A,B,C, aut duo eorundem, sive singula quadrantem excedant, Tyronibus relinquitur.

Atque hinc $A+B+C+a'+b'+c'=6R=A'+B'+C'+a+b+c$; itaque tam $a'+b'+c'$ quam $a+b+c<6R$, et quodvis ipsorum a',b',c', a,b,c, et A',B',C' est $<2R$, nam exgr. $A'+a$ est $=2R$.

Efficiunt autem etiam A',B',C' pyramidem triangularem. Nam $\mathfrak{a}',\mathfrak{b}',\mathfrak{c}'$ non in eodem circulo maximo sunt, quia per $\mathfrak{b}',\mathfrak{c}'$ unicus maximus circulus datur, cujus polus $\mathfrak{a}$ est, ita per $\mathfrak{c}',\mathfrak{a}'$ et $\mathfrak{b}',\mathfrak{a}'$; adeoque trium ejusdem circuli maximi arcuum tres diversi poli nempe $\mathfrak{a},\mathfrak{b},\mathfrak{c}$ essent. Cadit igitur $\mathfrak{c}'$ (adeoque $\mathfrak{c}'\mathfrak{b}'$ et $\mathfrak{c}'\mathfrak{a}'$ etiam) extra planum C', adeoque in hemisphaerium supra vel infra illud cadere debet, suntque A',B',C' et a',b',c' singula duobus rectis minora.

Erit itaque et $A'+B'+C'<4R$; atque hinc et $a+b+c>2R$; nam $a+b+c+A'+B'+C'=6R$, et si ex utroque ipso 4R minus subtrahatur, utrinque $>2R$ manebit.

Potest autem $\triangle\,\mathfrak{abc}$ tale construi, ut $A+B+C$ quantovis α minus a o aut a 4R differat. Sit enim $\alpha=2\omega$, et fiant e puncto superficiei sphaericae duo arcus circuli maximi ipsi $\frac{\omega}{2}$ aequales, atque ducatur arcus circuli maximi per extrema eorum; erit summa priorum $=\omega$ tertio latere major, adeoque summa trium $<2\omega$.

Ita $\triangle$ aequilaterum in sphaera describi potest, pro basi $<\frac{4R}{3}$; nempe si basis $=\frac{4R}{3}$, arcus in eodem baseos circulo conveniunt; si vero quantovis minor accipiatur basis; in hemisphaerio pariter intersectio fiet ut in plano.

Atque hinc $A+B+C$ potest ad limitem o tendere, adeoque $a'+b'+c' \frown 6R$; ita dum $A+B+C \frown 4R$ manens tamen $< 4R$, manifesto $a'+b'+c' \frown 2R$, manens tamen $> 2R$.

Notandum vero est, dari $\triangle$ sphaericum *sensu lato*, cujus laterum summa $> 4R$. Ex gr. accipiatur in circulo maximo arcus $=3R$, et ducantur ex ejus polo quadrantes ad extremitates ejusdem arcus, erit summa laterum $=5R$.

§. 8. Posset quidem trigonometria sphaerica e pyramidis triangularis analysi quoque deduci: at quum sphaera planum praecedat, certo tamen respectu eadem qualitate gaudens; et praeterea quoque trigonometria sphaerica; ut (pag. 222) dictum est, ab Axiomate XI Euclideo independenter vera sit; tam ob dignitatem sphaerae aeque tribuendam, quam ob rationem posterius dictam; pyramidum theoriam, e trigonometria sphaerica, in quantum a trigonometria dependet, deducere libet.

Manifesto autem in superficie sphaerae quoque, plures operationibus in plano analogae suscipi possunt: ex gr $\triangle$ aequicrurum, aequilaterum &c construi, $\perp$ris erigi, demitti &c possunt.

§. 6. Circuli maximi A,B,C dividunt (Fig. 205) sphaeram in 8 $\triangle$la, nempe t, a, b, c, a', b', c'; et $\mathfrak{abc}$ sphaeram inferius claudens, ipsi t aequale; estque $a=a'$, $b=b'$, $c=c'$: nimirum bisecent se invicem plana circulorum A et C, A et B; B et C in diametris $\mathfrak{Aa}, \mathfrak{Bb}, \mathfrak{Cc}$; centrum f his commune est, et anguli verticales 𝔄f𝔅 et afb, 𝔄f𝔈 et afc, 𝔅f𝔈 et bfc aequales sunt; et pariter in ceteris ita est; unde (per p. 174) patet. Praeterea et pro latere △li ex gr. 𝔄𝔅𝔈, potest pro latere quovis ex gr. 𝔄p𝔅 accipi 𝔄i𝔅, ut sensu latiore aliud △ prodeat; quamvis (ut dictum est) pyramidem per cordas eandem praebeat.

At priusquam in supplemento numerum hunc respiciente Trigonometria sphaerica tractaretur; dicendum aliquid est de numero

·31352. *Corpora regularia* numerus hic respicit. Dicuntur autem haec *sensu stricto* ea, quae figuris planis regularibus ita clauduntur, ut nullus angulus convexus sit, (sive omnes anguli aequales sint); possentque etiam e superficie sphaerae deduci; nempe operationibus analogis ut in plano, figurae regulares, arcus circulorum maximorum pro lateribus accipiendo, construi tales possunt, ut se invicem excipientes eam exhauriant.

§. 1. Sed satis omnium constat, quomodo e retibus 5 corpora regularia componantur: nempe e △lo aequilatero tria prodeunt, e quadrato unum, et unum e pentagono. Nec plura prodire posse sic patet. E tribus △lis ad apicem anguli solidi, fit *tetraedron*, e 4 fit *octaedron*, et *icosaedron* ex 5; at si sex △la aequilatera componantur, fiet summa angulorum ad apicem $= 360^\circ = 6 . 60^\circ$; adeoque in planum cadent. Tres anguli recti efficiunt *cubum*, 4 autem item in planum deciderent, quum $4 . 90^\circ = 360^\circ$. Pentagoni angulus est $= 108^\circ$, quorum tres pariunt *dodecaedrum*; sed $4 . 108^\circ$ transit in plagam alteram.

Si vero polygoni regularis laterum nume-

rus n sit > 5; erit angulus polygoni $=$
$\frac{2nR-4R}{n}=\frac{(n-2).2R}{n}$ (p. 38), adeoque quum ad angulum solidum ad minimum tres anguli requirantur, esset summa eorum

$6R\frac{(n-2)}{n}$, quod pro $n > 5$ excedit 4 rectos;

nam sit $n=5+m$ (pro m integro $+$vo); erit $\frac{6R(n-2)}{n}=\frac{6R(m+3)}{5+m}$, quod si $m=1$ fuerit; $=4R$ erit, si vero m crescat, erit $\frac{6(m+1)+18}{5+m+1} > \frac{6m+18}{5+m}$, ad eundem denominatorem reducendo patet.

§. 2. Quod apices corporis regularis omnes in superficiem sphaerae cadant; sic patet. Demittantur (Fig. 206) e duarum figurarum regularium latere lineari ab communi gaudentium centris f et f′ $\perp$res fq et f′q; cadent illae manifesto in punctum idem q; erigantur ex f et f′ $\perp$res fr et f′r′ ad plana figurarum regularium dictarum, ducaturque recta ff′, erit summa angulorum quos $\perp$res fr, f′r′ cum ff′ faciunt, duobus rectis minor, adeoque concurrent, fiat hoc in p; nempe e meditullio q lateris communis duarum figurarum regularium aequalium, (tanquam cordae duorum circulorum communi) erectae $\perp$res in planis earundem figurarum, per centra earum ducuntur; et $\wedge$lus $\perp$rium harum, $\wedge$lus planorum est, atque planum in quod hae $\perp$res cadunt, est ad utrumque $\perp$re; $\perp$res fr, et f′r′ autem ex iis centris ad plana figurarum centris appertinentium erectae, in planum dictum ad utrumque $\perp$re cadunt.

Continuentur dicta a quavis figura regulari ad sequentem: manifesto concursus omnium in $\mathfrak{p}$ erit; si enim anguli rectilinei quotvis aequales ad angulum solidum convexum compingantur, anguli laterum planorum omnes æquales, et omnia circumcirca aequaliter determinata erunt.

Erit igitur recta quae a centro figurae cujusvis regularis usque ad idem $\mathfrak{p}$ est, ad planum figurae $\llcorner$ris, et pro quavis figura eidem rectae aequalis; adeoque erit radius sphaerae illius, quae figuras omnes tangit.

Si vero in quavis figurarum, e centro $\mathfrak{f}$ ad apicem recta ducatur, ex gr. ex $\mathfrak{f}$ ad apicem $\mathfrak{a}$; erit $\triangle\,\mathfrak{fpa}$ ad $\mathfrak{f}$ rectangulum, in quo hypotenusa pro quavis figurarum aequalis, radius sphaerae circumscriptae erit.

§. 3. Si reperiatur u angulus duorum laterum planorum corporis regularis; dabitur

$\wedge\,\mathfrak{pqf} = \frac{1}{2}\,u$, ($\mathfrak{p}, \mathfrak{q}, \mathfrak{f}$ juxta praec. intellectis);

$\mathfrak{fq}$ e figura data notum est, adeoque e $\triangle$lo $\mathfrak{pqf}$ ad $\mathfrak{f}$ rectangulo innotescit $\mathfrak{pf}$; et hinc in $\triangle$lo $\mathfrak{afp}$ ad $\mathfrak{f}$ rectangulo, ex $\mathfrak{af}$ et $\mathfrak{pf}$ innotescit radius sphaerae circumscriptae.

§. 4. Angulus u autem, e data figura regulari, et numero angulorum angulum solidum ad apicem constituentium, prodit sic. In *tetraedro* tres anguli sunt ad apicem, in *cubo* et *dodecaedro* pariter; in *octaedro* quatuor $\triangle$lorum ad apicem concurrentium bases efficiunt quadratum, cujus latus $l=$ lateri $\triangle$lorum; unde diagonalis d quadrati dicti innotescit, et efformabitur angulus solidus ad apicem priorem, e tribus angulis compositus, quorum duo sunt anguli $\triangle$lorum aequilaterorum, tertius est ipsi d oppositus in $\triangle$lo cujus duo latera $=l$ sunt, et 3tium latus d est. Itaque angulus u per trigonometriam sphaericam in pyramide $\triangle$lari e lateribus datis prodit.

In *icosaedro* angulus ad apicem pariter ad pyramidem $\triangle$larem reduci potest modo sequ: quinque $\triangle$lorum ad apicem positorum bases pentagonum efficiunt, cujus latus $l=$ lateri $\triangle$lorum est; adeoque (Fig. 208) k e latere utroque $=l$, et angulo intercepto $108°$ innotescit. Itaque et hic angulus solidus fiet, cujus duo latera anguli $\triangle$li aequilateri erunt, et 3tium erit angulus ipsi k oppositus in $\triangle$lo cujus duo latera ipsi l aequalia et 3tium latus k est.

Prodeunte hinc u, e $\triangle$lo fpq ad f rectangulo prodit etiam altitudo fp, per cujus 3tiam partem multiplicanda superficies corporis est, ut soliditas prodeat.

§. 4. Quaevis pyramis, cujus basis figura regularis n laterum est, si quaevis latera pyramidis linearia eidem b aequalia fuerint, soliditas facile computatur. Nam ex gr. (Fig. 209) ex figura ipsa prodit z distantia centri baseos ab apice ejusdem quovis; atque in $\triangle$lo ad centrum rectangulo, e hypotenusa b et catheto z, prodit pyramidis altitudo $y=$ catheto alteri.

Ita *in tetraedro*, ubi basis $\triangle$ aequilaterum est, cujus area $=\frac{1}{4}b^2\sqrt{3}$ (p. 69, ubi radius est $=z=\frac{b}{\sqrt{3}}$), erit $y^2=b^2-\frac{b^2}{3}=\frac{2b^2}{3}$, itaque $y=b\sqrt{\frac{2}{3}}$; adeoque soliditas $=\frac{1}{4}b^2\sqrt{3}.\frac{b}{3}.\sqrt{\frac{2}{3}}=\frac{b^3\sqrt{2}}{12}$.

Octaedrum e duabus ejusmodi pyramidibus constat, quarum bases sunt quadrata lateris b, quod etiam latus $\triangle$lorum lateralium est. Est autem hic z, quadrati diagonalis dimidium $= \sqrt{\frac{b^2}{2}}$ $= \frac{b}{\sqrt{2}}$; adeoque $y = \sqrt{(b^2 - z^2)} = \sqrt{(b^2 - \frac{b^2}{2})}$ $= \frac{b}{\sqrt{2}}$; adeoque soliditas octaedri $=$

$$2.\ b^2 . \frac{b}{3\sqrt{2}} = \frac{2b^3}{3\sqrt{2}} = \frac{b^3\sqrt{2}}{3}.$$

Si vero radius r sphaerae quaeratur, cui corpus regulare inscripsum est: sit x Lris e centro ad latus quodvis corporis demissa; erit haec recta e centro sphaerae ad centrum lateris: adeoque si n fuerit laterum numerus, e β sit area lateris; erit soliditas corporis $=$ $\frac{n\beta x}{3}$; atque ex x et z prodit hypotenusa r. Imo et anguli ad centrum in $\triangle$lis aequicruris, quae latera pyramidum constituunt, innotescunt; quum duo latera ipsi r sint aequalia, 3tium vero b sit.

Potestque etiam arcus u circuli maximi, cujus corda b est, reperiri: nempe $b =$ $2 \sin \frac{1}{2} u$, adeoque $\sin \frac{1}{2} u = \frac{b}{2}$, et arcus ipsi $\frac{b}{2}$ tanquam sinui respondentis duplum erit arcus circuli maximi, quo tanquam latere in superficie sphaerae, figurae regulares (concernentes) eam claudentes describi possunt. Potest autem b per r exprimi; adeoque etiam situs pro dato radio r quaeri.

Quod si ad *tetraedrum* applicetur: fiet soliditas $\frac{x}{3}4.\frac{b^2}{4}\sqrt{3} = \frac{x}{\sqrt{3}}b^2 = \frac{b^3\sqrt{2}}{12}$, atque hinc $x = \frac{b\sqrt{6}}{12}$. Est autem $r^2 = x^2 + z^2$, et $z = \frac{b}{\sqrt{3}}$, adeoque $r = \sqrt{(\frac{6b^2}{144} + \frac{b^2}{3})} =$ $b\sqrt{\frac{3}{8}}$; atque etiam b ex r dato prodit, nempe $b = r : \sqrt{\frac{3}{8}} = r\sqrt{\frac{8}{3}}$. Atque si quaeratur u arcus cordae b; erit sin $\frac{1}{2}u = \frac{1}{2}r\sqrt{\frac{8}{3}}$.

Idem ad reliqua applicatur. *Dodecaedri* et *icosaedri* soliditates subsidio trigonometriae prodeunt: nempe pro latere lineari b, est *dodecaedri soliditas* $= \frac{b^3}{4}(15+7\sqrt{5})$, et *icosaedrum* $= \frac{5b^3}{12}(3+\sqrt{5})$.

Unde x et r &c modo dicto reperiuntur, exgr. *pro icosaedro* erat $z = \frac{b}{\sqrt{3}}$, et basis cujusvis pyramidum, quae heic ad centrum numero 20 fient, est $\frac{b^2\sqrt{3}}{4}$; itaque ex $\frac{5b^3}{12}(3+\sqrt{5})$ $= 20.\frac{x}{3}.\frac{b^2\sqrt{3}}{4} = \frac{5b^2x}{\sqrt{3}}$ prodit x, et tum r.

Quod cubum attinet, pro latere lineari b ejus, erit area lateris plani b^2, et soliditas b^3, x vero erit $\frac{b}{\sqrt{2}}$ (Fig. 209); atque hinc $b^3 =$

$\frac{x . 6 b^2}{3}$; unde $x = \frac{b}{2}$. Itaque quum sit $r^2 = x^2 + x^2$, erit $r^2 = \frac{b^2}{4} + \frac{b^2}{2} = \frac{3b^2}{4}$, adeoque $r = \frac{b\sqrt{3}}{2}$, et $b = \frac{2r}{\sqrt{3}}$. Hinc si arcus u cordae b quaeratur, erit $\sin \frac{1}{2} u = \frac{1}{2} b = \frac{r}{\sqrt{3}}$; itaque arcus ipsi $\frac{r}{\sqrt{3}}$ tanquam sinui respondentis duplum, erit arcus quaesitus u.

Quod ad reliqua etiam applicari evidens est.

Schol. Notandum autem est; quod si circulus maximus C per n dividatur, atque e divisionis punctis ad utrumque polum quadrantes ducantur, et e quovis divisionis puncto in quadrantibus inde ductis ubique aequales arcus v absecentur; atque in quovis hemisphaerio arcuum absectorum proximorum fines, item eorundem fines in quovis semicirculo rectis jungantur: oriantur corpora certa e duabus figuris regularibus n laterum, et n rectangulis, quae quadrata esse possunt; et si ab extremitatibus arcuum ad divisionis ipsius C puncta rectae ducantur, trapezia numero $2n$ aequalia, et duo polygona n laterum aequalia erunt sphaerae inscripta.

§. 5. Erant autem (§. 2) dicta corpora regularia sensu stricto: at dantur etiam alia, quae figuris regularibus quidem, sed diversae speciei clauduntur; et dantur praeterea talia quae per figuras rectilineas non regulares, sed omnes inter se aequales clauduntur; imo et hoc per figuras diversae speciei quoque fieri potest, quarum quaevis ejusdem speciei inter se aequales sunt, atque certo ordine continuo se invicem excipiunt; imo possunt etiam figurae nonnisi quoad aream aequales esse; possuntque haec *corpora regularia ordinis primi*, 2di, &c dici.

Recensere autem haec, computareque, et retia exhibere, quamvis disquisionem haud inelegantem praebeat, longius esset, quam heic locum habere queat. Aliquid tamen annotare liceat.

Quaeri potest: superficies sphaerae in quot qualesve figuras, aequales, quarum latera arcus circulorum maximorum sint, dividi queat? et quarum sint laterum cordae in plano, quarum non? atque in casu priori quales figuras planas praebeant?

Ex gr. Dividitur superficies sphaerae in n triangula pro quovis numero pari n, si circulus maximus per $\frac{n}{2}$ dividatur, atque ad puncta divisionis a polis quadrantes ducantur; imo quivis numerus n etiamsi impar fuerit, circulo maximo per n diviso, semicirculis a polo ad polum der divisionis puncta ductis, partes aequales numero n prodibunt: at aliter superficies sphaerae (adeoque spatium per formas pyramidales, apice communi in centro gaudentes) nonnisi per nnmerum parem dividi potest. Dividitur autem superficies sphaerae, ope 5 corporum regularium, (juxta Fig. 210) modis sequ: 1mo e cujusvis lateris plani centro ducantur rectae ad apices figurae; 2do e quovis apice per centrum usque ad perimetrum figurae; 3tio in quovis $\triangle$lo aequicruro (in 1mo) generato, ducatur e centro L.ris ad basim; 4to e cujusvis figurae centro mittatur L.ris ad quodvis figurae latus; 5to in cubo praeterea etiam ducatur ad duo tantum latera quadrati parallela: atque producantur usque ad superficiem sphaerae, rectae omnes e centro sphaerae per extrema rectilineorum hoc pacto generatorum; et ponantur per puncta sectionis arcus circulorum maximorum, lateribus figurarum rectilinearum respondentes. Manifesto dividetur in quovis casuum dictorum superficies sphaerae in figuras aequales.

Sed et (paucis exceptis) cordae laterum cujusvis figurae sphaericae, novum corpus regulare sensu latiore praebent. Ex gr. (Fig 211) dat trapezium, et hoc pacto 12 trapeziis aequalibus clausum corpus e cubo prodit. Sed (Fig. 212) nullum dat, quia cordae non sunt in plano. Sit enim (Fig. 211) quadratum $\mathfrak{ABCD}$ latus cubi, cujus centrum $\mathfrak{f}$ sit, sintque $\mathfrak{E}, \mathfrak{F}, \mathfrak{G}, \mathfrak{K}$ meditullia rectarum $\mathfrak{AD}$, $\mathfrak{BC}$, $\mathfrak{AB}$, $\mathfrak{EF}$, et sit $\mathfrak{f}''$ centrum illius lateris cubi, quod cum $\mathfrak{ABCD}$ rectam $\mathfrak{AB}$ communem habet: erunt $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \mathfrak{C}, \mathfrak{D}$ in superficie sphaerae cujus centrum $\mathfrak{f}$, et radius $\mathfrak{fA}$ est; atque planum $\mathfrak{fEF}$ secabit sphaeram in circulo maximo C, ad quem recta $\mathfrak{ff}''$ $\perp$ris erit: et polus $\mathfrak{p}$ ipsius C in hanc cadet; eruntque $\mathfrak{A}$. $\mathfrak{E}$, $\mathfrak{f}$, $\mathfrak{p}$ in plano, uti $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{F}$, $\mathfrak{f}$, $\mathfrak{p}$; nam $\mathfrak{AE} \parallel \mathfrak{GK} \parallel \mathfrak{ff}''$. Secent $\mathfrak{fE}$, $\mathfrak{fF}$, $\mathfrak{fK}$, $\mathfrak{fG}$ productae, superficiem sphaerae in e, f, $\mathfrak{f}'$, g; efficient $e\mathfrak{Efp}$ et $f\mathfrak{Ffp}$ cum arcubus claudentibus $e\mathfrak{Ap}$ et $f\mathfrak{Bp}$, quadrantes ad C $\perp$res, quorum partes $e\mathfrak{A}$ et $f\mathfrak{B}$ aequales sunt. Estque recta ef in plano $\mathfrak{EfF}$, et parallela ad $\mathfrak{EF}$, atque hac major, sed $\mathfrak{EF} \doteq$ et $\parallel \mathfrak{AB}$; itaque et $ef \parallel \mathfrak{AB}$, adeoque $ef\mathfrak{AB}$ in plano est, et quum $ef > (\mathfrak{EF} = \mathfrak{AB})$ sit, trapezium est.

Sed (F. 212) si planum c per $\mathfrak{AB}$ ad $\mathfrak{ff}''$ $\perp$re concipiatur, nempe cubi latus illud, cujus centrum $\mathfrak{f}''$ erat; erit hoc parallelum ipsi C, et sectio ejus cum sphaera circulus parallelus; sit hujus sectio g cum quadrante pf′; erit arcus qf′=e𝔄, et e,𝔄,q,f′ in plano erunt; sed recta f𝔖 transit per planum c, adeoque g ultra q cadit, et arcus gf′>e𝔄 est. Erant autem 𝔄,q, e, f′ in plano, itaque 𝔄, g, e, f′ non sunt in plano; quia si essent, etiam g in eodem plano illo esset, quod per 𝔄, e, f′ determinatur; adeoque et 𝔄, e caderent in planum per circuli 3 puncta g, q, f′ determinatum; quod fieri nequit, quia arcus 𝔄e, et gf′ partes quadrantum diversorum ad C ⌊rium sunt, quorum plana nonnisi rectam per polos communem habent; neque 𝔄, neque e autem in rectam $\widetilde{ff''}$ per polos eundem cadit. Itaque casus posterior sphaeram quidem (spatiumque) dividit, sed corpus regulare novum haud praebet.

Sed his amplius vacare instituti ratio prohibens, transire jubet ad SUPPLEMENTUM numeri ·31351.

Ut in Trigonometria plana, et hic mutuam laterum ab angulis oppositis dependentiam quærere, (praeter plura jam dicta, et veritatis ipsius desiderium), plurimae mensurationes in coelis terraque necessariae, induxerunt; quum inde △lum sphaericum quoque, e tribus datis illud determinantibus, computare liceat. *Determinatur △ sphaericum* in eadem sphaera: 1mo *per duo latera et angulum interceptum*; 2do *per duos angulos et latus interceptum*, 3tio *per tria latera*, 4to *per tres angulos.*

Pagina sequens formulas primarias exhibet, e quibus reliqua fluunt: ex gr. ex IV, dato latere B cum angulis adjacentibus *a*, *c* reperitur ∧ *b*; nempe cos *b*=cos B . sin *a* . sin *c*—cos *a*.cos *c*; atque tum ex B, *b*, *a* latus A ipsi *a* oppositum quoque prodit per I.

§. 1. *Dependentia laterum ab angulis oppositis mutua* vero, a dependentia in △lo rectilineo in eo differt: quod *ibi latera, hic vero sinus laterum sint ut sinus angulorum oppositorum.* Sit nempe △ sphaericum (Fig. 213) abc, et ab = A, bc = B, ca = C, et anguli oppositi sint *a, b, c*; est.

I. $\sin A : \sin B = \sin a : \sin b$; unde e datis ipsorum A, B, *a*, *b* tribus, prodit 4tum: et ex hoc promanant formulae pro Trig. sphaer. primariae sequ.

II. $\cot a = \dfrac{\sin C \cot A - \cos b \cos C}{\sin b}$ (e datis A, C et intercepto ∧lo *b*, ∧lus *a*)

III. $\cos b = \dfrac{\cos B - \cos C \cdot \cos A}{\sin C \cdot \sin A}$ (e datis 3 lateribus ∧ *b*)

IV. $\cos B = \dfrac{\cos b + \cos a \cdot \cos c}{\sin a \cdot \sin c}$ (e datis 3 angulis, latus B).

Demonstrantur autem haec in sequentibus; relatis etiam formulis △la rectangula specialiter concernentibus.

§. 2. Sinus laterum quorumvis, esse ut sinus angulorum illis oppositorum, prius pro △lo rectangulo demonstratur; unde generaliter liquet.

Sit (Fig. 214) 𝔈 centrum sphaerae, et A, B sint catheti, atque H hypotenusa: erit ∧lus plani A cum plano B rectus, sit *a* angulus plani H cum plano B, et *b* angulus plani H cum plano A; hypotenusae H rectus, et ipsis A, B opponentur *a, b*, compactoque △lo, c et c′ coincident. Demittatur ex c ad 𝔈𝔄 ⊥ris cb; erit haec ⊥ris ad planum B, quia planum A $\perp$ B, et $\mathfrak{CA}$ eorum sectio est (p. 172), neque alia ex $\mathfrak{c}$ omnino cum $\mathfrak{c}'$ (in $\triangle$lo sphaerico compacto) coincidente datur. Sit $\mathfrak{c}'\mathfrak{f} \perp \mathfrak{CB}$, et in B sit $\mathfrak{fi}$ $\perp$ris ex $\mathfrak{f}$ ad $\mathfrak{CB}$ erecta; erit $\wedge\,\mathfrak{c}'\mathfrak{fi}$ angulus ipsorum H et B; eritque $\mathfrak{Cf}$ $\perp$ris ad planum $\mathfrak{c}'\mathfrak{fi}$, quod dicatur Q; quia $\mathfrak{Cf}$ $\perp$ris ad $\mathfrak{fc}'$ et $\mathfrak{fi}$ est; et hinc etiam $\mathfrak{Cf}$ planis H et B communis, utrumque ad Q $\perp$re reddit, atque sectio planorum B et Q est recta $\mathfrak{fi}$. Hinc autem ex $\mathfrak{c}'$ (quod cum $\mathfrak{c}$ coincidens in plano Q ad B $\perp$ri est) demissa ad B $\perp$ris, necessario in $\widetilde{\mathfrak{fi}}$ cadit: quamobrem quum $\perp$rem hanc in $\mathfrak{d}$ cadere dictum sit; $\mathfrak{d}$ in $\mathfrak{fi}$ et simul in $\mathfrak{CA}$ cadit. Efformatur itaque $\triangle$lum $\mathfrak{cfd}$, in quo $\wedge\,\mathfrak{fdc}$ rectus, adeoque $= \wedge$ AB (id est $\wedge$lo ipsorum A et B) $\wedge\,\mathfrak{dfc}$ vero $= \wedge\,\mathrm{HB} = a$, atque latus $\mathfrak{c}'\mathfrak{f} = \sin \mathrm{H}$, et latus $\mathfrak{cd} = \sin \mathrm{A}$.

In $\triangle$lo rectilineo $\mathfrak{cfd}$ vero est $\mathfrak{cf} : \mathfrak{cd} = \sin \mathrm{tot} : \sin a$, id est $\sin \mathrm{H} : \sin \mathrm{A} = 1 : \sin a$ (*pro radio 1 computando omnia*), atque hinc

$$\sin \mathrm{H} = \frac{\sin \mathrm{A}}{\sin a}.$$

Pariter (e Fig. 214 *) patet, esse

$\sin \mathrm{H} : \sin \mathrm{B} = 1 : \sin b$, atque hinc $\sin \mathrm{H} = \dfrac{\sin \mathrm{B}}{\sin b}$.

Consequenter $\dfrac{\sin \mathrm{A}}{\sin a} = \dfrac{\sin \mathrm{B}}{\sin b}$, seu $\sin \mathrm{A} : \sin \mathrm{B} = \sin a : \sin b$.

Hinc in *quovis* $\triangle$*lo sphaerico, quaecunque duo latera* A, B *accipiantur, erunt sinus laterum uti sinus angulorum oppositorum.*

Nam e vertice $\triangle$li lateri C opposito, arcus circuli maximi $\perp$ris D ad C demitti potest (p. 234); cadetque haec aut intra fines ipsius C, aut extra C, aut ad finem. In casu primo (Fig 215) est $\sin A : \sin D = 1 : \sin b$, et $\sin B : \sin D = 1 : \sin a$; nempe A,B hypotenusae sunt, et D cathetus; et hinc $\sin D = \sin A . \sin b = \sin B . \sin a$; atque hinc $\sin A : \sin B = \sin a : \sin b$. In casu 2do (Fig.215$_*$) autem est $\sin A : \sin D = 1 : \sin b$, et $\sin B : \sin D = 1 : \sin a'$; sed $a + a' = 2R$, itaque $\sin a' = \sin a$; adeoque idem quod prius erat, pariter sequitur.

In casu 3tio erit $\triangle$lum rectangulum, de quo (in praec) demonstratum est.

§. 3. In $\triangle$lo rectangulo, praeter angulum rectum, duo sunt; aut *duo latera*, aut *duo anguli*, aut *unum latus et unus angulus*: duo latera sunt aut *catheti*, aut *hypotenusa et catetus*; *duo anguli* sunt nonnisi illi, qui *hypotenusae adjacent*: *unum latus et unus angulus* autem sunt, angulus *hypotenusae adjacens*, et *cathetus*, aut *adjacens angulo*, *aut ei oppositus*. Omnium horum autem resolutio sequitur (e praec) modo sequente. (F.216)

Trianguli rectanguli 𝔄𝔅ℭ hypotenusa H et catheti A, B (si necesse fuerit) continuentur, donec per circulum maximum ex 𝔄 quadrantis intervallo in superficie sphaerae descriptum, secentur in 𝔟, 𝔠, 𝔣. Casus plures dantur: nempe A est aut $>$ aut $<$ aut $= R$; atque in quolibet casuum priorum, sectio circuli ex 𝔄 (tanquam polo) quadrantis intervallo descripti, cum B continuato, aut cadet in H, aut inter H et A, aut ultra H.

Consideretur prius, casus ubi tam A,B quam $H < R$ (Fig.216$_*$): manifesto ad 𝔟 angulus rectus est, adeoque 𝔅𝔣, 𝔟𝔣 quadrantes (p.234), atque 𝔄, 𝔣 poli arcuum 𝔟𝔠, 𝔅𝔟 sunt, adeoque $\mathfrak{cb} = \wedge b$, $\mathfrak{Bb} =$ angulo ad polum 𝔣; praeterea patet, A′, B′, b′, H′ complementa ipsorum A, B, b, H esse. In $\triangle\,\mathfrak{fc}\mathfrak{C}$ (ubi verticales a sunt aequales), est

I. $1 : \sin a = \sin B' : \sin b' = \cos B : \cos b$; et in $\triangle\,\mathfrak{ABC}$ *sinus totus ad sinum anguli, uti cosinus catheti adjacentis ad cosinum anguli oppositi*; atque hinc $\sin a = \frac{\cos b}{\cos B}$, quo valore substituto in proportione quae in $\triangle\,\mathfrak{ABC}$ est, nempe in $\sin a : \sin b = \sin A : \sin B$, fit $\frac{\cos b}{\cos B} : \sin b = \sin A : \sin B$, et hinc $\frac{\cos b \,.\, \sin B}{\cos B}$ $= \sin b \sin A = \cos b \operatorname{tang} B$; et $\operatorname{tang} B =$ $\frac{\sin b \,.\, \sin A}{\cos b} = \sin A \,.\, \operatorname{tang} b$, seu

II. $1 : \sin A = \operatorname{tang} b : \operatorname{tang} B$, id est: *sinus totus ad sinum catheti*; uti *tangens anguli adjacentis ad tangentem lateris oppositi*; et hinc $\sin A = \frac{\operatorname{tang} B}{\operatorname{tang} b} = \cot b \,.\, \operatorname{tang} B$, et $\operatorname{tang} B =$ $\sin A \,.\, \operatorname{tang} b$

III. In eodem $\triangle$lo $\mathfrak{fc}\mathfrak{C}$, est $\sin B' ; \sin H' =$ $1 : \sin A'$, seu $\cos B : \cos H = 1 : \cos A$; unde *e quibusvis 2 lateribus tertium prodit*, et $\cos H =$ $\cos A \,.\, \cos B$.

IV. In eodem $\triangle$lo (per II) est

$1 : \sin b' = \operatorname{tang} A' : \operatorname{tang} H'$, seu

$1 : \cos b = \cot A : \cot H = \operatorname{tang} H : \operatorname{tang} A$;

quia $\frac{\cos A}{\sin A} : \frac{\cos H}{\sin H} = \frac{\sin H}{\cos H} : \frac{\sin A}{\cos A}$ (per factum extremorum mediorumque $=1$).

Id est *sinus totus ad cosinum anguli, uti tangens hypotenusae ad tangentem catheti angulo adjacentis.*

V. Item (per II) in eodem $\triangle$lo est
$1 : \sin H' = \tan a : \tan b'$, seu
$1 : \cos H = \tan a : \cot b$, id est *sinus totus ad cosinum hypotenusae, uti tangens anguli adjacentis ad cotangentem alterius.*

E quibus resolutiones quaesitae patent. Sequitur etiam (ex II) ubi $\tan B = \sin A . \tan b$ erat; quod si cathetus $>$ vel $=$ aut $<$R; et angulus ei oppositus $> =$ aut $<$ R sit: nam sin A ✠ est, itaque tang B et tang b, (nisi B $=$ R $= b$), simul ✠ aut simul — esse debent, ut æqualitas locum habeat; tangens enim anguli obtusi — est, et recti ∞ ta est, sin A vero finitum est.

Ex III autem ubi $\cos H = \cos A . \cos B$ sequitur; quod si H$>$R, alteruter cathetorum tantum $>$R; et si H$<$R, tum uterque $>$vel $<$R est; si vero H $=$ R, tum alterutrum saltem cathetorum item rectum esse oportet. Nam cosinus anguli obtusi — est, et $\cos R = o$; itaque si H $=$ R, fiet $o = \cos A . \cos B$; adeoque sive cos A sive cos B vel utrumque o est, quod nisi A vel B $=$ R sit, fieri nequit. Ita si cos H — fuerit, sive cos A sive cos B — erit; at si cos H ✠ fuerit, tam cos A quam cos B simul ✠ vel simul — esse debet.

Ut tamen dicta generaliter valeant, casus omnes supra dicti percensendi sunt, quos (Fig. 216) exhibet: demonstratio autem eadem in quovis casu erit; dummodo complementum arcus rite sumatur, (nempe complementum 100 graduum —10° est), et angulorum se invicem ad 2R complentium sinus idem accipiatur, atque complementa literis iisdem accento insigniantur; reflectaturque polum esse in sectione duarum ⊏rium, et anguli ad polum quantitatem esse arcum circuli maximi ad quadrantis distantiam interceptum. Si $A = R$; tum etiam (p. 253) $a = R = A$, adeoque $B = b$; atque $1 : \sin a = \cos B : \cos b$ (ex I) fit $1 : 1 = 1 : 1$. Casus reliquos singulos percensere Tyronum exercitio relinquitur.

§. 4. Si e vertice quovis $\triangle$li sphaerici ad latus oppositum C Lris D demittatur (p. 234): tres casus sunt; cadet nempe D aut intra fines ipsius C, aut ad finem, aut extra fines. Eritque (Fig. 215)

$$\begin{array}{lrl} 1\text{mo (e praec. II)} & 1 : \sin M = \operatorname{tang} b : \operatorname{tang} D \\ \text{et} & 1 : \sin N = \operatorname{tang} a : \operatorname{tang} D \\ \text{atque hinc} & \sin M : \sin N = \operatorname{tang} a ; \operatorname{tang} b \end{array}$$

$$\begin{array}{lrl} 2\text{do (e praec. III)} & 1 : \cos M = \cos D : \cos A \\ \text{et} & 1 : \cos N = \cos D : \cos B \\ \text{atque hinc} & \cos M : \cos N = \cos A : \cos B \end{array}$$

Notandum autem: quod si D extus cadat; a obtusus sit, adeoque angulus deinceps positus a' acutus erit; adeoque in linea secunda $\operatorname{tang} a$ — sit $= - \operatorname{tang} a'$; itaque N in hoc casu —ve accipiendum est, ut proportio valeat (Tom. I. p. 34); valebit enim hoc pacto; nam tum $\sin N$ erit —, et $\operatorname{tang} a$ quoque —, atque D erit $< R$, quum angulus oppositus $a' < R$ sit, adeoque $\operatorname{tang} D$ + erit; itaque ordo signorum erit + — — +.

§. 5. Atque hinc (ex §. 3. IV) est $1 : \cos b = \operatorname{tang} A : \operatorname{tang} M$, adeoque $\operatorname{tang} M = \cos b \cdot \operatorname{tang} A$.

Estque (e §. 4. 1mo) $\sin M : \sin N = \operatorname{tang} a : \operatorname{tang} b$, et hinc (quia $N = C - M$), fit $\sin M : \sin C \cdot \cos M - \cos C \cdot \sin M = \operatorname{tang} a : \operatorname{tang} b$; et dividendo per $\cos M$, fit
$\operatorname{tang} M : \sin C - \cos C \cdot \operatorname{tang} M = \operatorname{tang} a : \operatorname{tang} b$; at-

que hinc $\frac{\sin C \tan a}{\tan b + \cos C . \tan a} = \tan M$, quod $= \cos b . \tan A$ erat. Atque hinc
$\sin C . \tan a = \cos b . \tan A . \tan b +$
$\cos C . \tan a . \cos b . \tan A$; et per $\tan a . \tan A$ dividendo, et ipsi $\tan b$ substituendo $\frac{\sin b}{\cos b}$.
fit $\sin C . \cot A = \sin b . \cot a + \cos b \cos C$; e quo si *latera* A et C *cum angulo intercepto b* data fuerint, *reperitur angulus a.*

§. 6. Erat porro (§. 4. 2do)
$\cos M : \cos N = \cos A : \cos B$, et (quia $N = C - M$), fit $\cos M : \cos C \cos M + \sin C . \sin M = \cos A : \cos B$; hinc
$\frac{\cos M}{\cos M} : \frac{\cos C . \cos M}{\cos M} + \frac{\sin C . \sin M}{\cos M} = \cos A : \cos B$,
seu $1 : \cos C + \sin C . \tan M = \cos A : \cos B$; et
$\frac{\cos B - \cos C . \cos A}{\sin C . \cos A} = \tan M = \cos b . \tan A$ (§. 5). Atque hinc, $\cos b = \frac{\cos B - \cos C . \cos A}{\sin C \cos A . \tan A}$
quod item $= \frac{\cos B - \cos C . \cos A}{\sin C . \sin A}$, quia $\tan A = \frac{\sin A}{\cos A}$.

Datis igitur tribus lateribus, reperitur angulus lateri cuivis B *oppositus.*

§. 7. Ex hoc etiam sequitur modus, e datis tribus angulis latus cuivis oppositum reperiendi.

Sit enim (Fig. 217) $\triangle abc$, et verticibus pro polis acceptis, descriptisque quadrantis intervallo arcubus, orietur $\triangle$ novum $\alpha\beta\gamma$, cujus angulus quivis latus prioris $\triangle$li illi angulo oppositum ad 2R complet. (p.236)

Erit (per praec.) $\cos\omega = \frac{\cos\beta - \cos\alpha . \cos\gamma}{\sin\alpha . \sin\gamma}$.

Sed arcus se invicem ad 2R complentes sinu eodem gaudent, imo et cosinus nonnisi in eo differunt, quod arcus quadrante minoris $+$ sit, et eum ad 2R complentis $-$ sit: itaque $\cos\omega = -\cos B$, $\cos\beta = -\cos b$, $\cos\alpha = -\cos a$, et $\cos\gamma = -\cos c$; $\sin\alpha = \sin a$, $\sin\gamma = \sin c$. Consequ. $-\cos B = \frac{-\cos b - (-\cos a) . (-\cos c)}{\sin a . \sin c}$;

adeoque $\cos B = \frac{\cos b + \cos a . \cos c}{\sin a . \sin c}$.

Unde etiam, quum per angulos a, b, c singula latera, nempe A, B, C determinentur, atque per trium laterum aequalitatem in duobus $\triangle$lis, in eadem sphaera ponatur aequalitas triangulorum (p. 174); manifesto in eadem sphaera per solam angulorum aequalitatem in duobus $\triangle$lis ponitur $\triangle$lorum aequalitas.

§. 8. Trianguli sphaerici $\mathfrak{ABC}$ (Fig. 205) autem area t, e radio r et angulis α, β, γ prodit modo sequ. Erat (p. 238) S superficies sphaerae $= 2t + 2a + 2b + 2c$; sed $t + a = \frac{r^2\pi}{R}$, nam segmentum hoc a polo $\mathfrak{A}$ ad polum alterum a, toties minor ipso S est, quoties minor $\wedge\alpha$ ipso 4R est; adeoque fit $4R : \alpha = 4r^2\pi : (t + a = \frac{r^2\pi\alpha}{R})$.

Pariter est $t + b = \frac{r^2\pi\beta}{R}$, et $t + c = \frac{r^2\pi\gamma}{R}$; adeoque $t + a + t + b + t + c = \frac{r^2\pi}{R}(\alpha + \beta + \gamma)$; et $\frac{2r^2\pi}{R}(\alpha + \beta + \gamma) =$

$2(t+a+t+b+t+c)=2t+2a+2b+2c+4t=S+4t$; et hinc $t=\frac{2r^2\pi}{4R}(\alpha+\beta+\gamma)-\frac{S}{4}=$

$\frac{r^2\pi}{2R}(\alpha+\beta+\gamma)-r^2\pi=\frac{r^2\pi(\alpha+\beta+\gamma-2R)}{2R}$.

Schol. 1. Formulae ad casus quosvis calculo logarithmico adaptatae, reperiuntur in tabellis, tabulis trigonometricis plerumque adnexis.

Ex gr. In §.6. (p. 255) erat $\cos b=\frac{\cos B-\cos C.\cos A}{\sin C.\sin A}$. Sed erat (p. 85) $\cos b=$ $1-2(\sin\frac{1}{2}b)^2$; et hinc $1-2(\sin\frac{1}{2}b)^2=$

$\frac{\cos B-\cos C.\cos A}{\sin C.\sin A}$; atque hinc

$\cos B-\cos C.\cos A=$

$\sin C.\sin A-2(\sin\frac{1}{2}b)^2.\sin C.\sin A$; et

$\frac{\cos B-\cos C.\cos A-\sin C.\sin A}{-2\sin C.\sin A}=(\sin\frac{1}{2}b)^2$

$=\frac{\cos(C-A)-\cos B}{2\sin C.\sin A}$.

Ponatur $C-A=x-y=d$, et $B=x+y=s$; erit $x=\frac{B+C-A}{2}$, et $y=\frac{B-C+A}{2}$; nempe $\frac{s+d}{2}$

$=x$, et $\frac{s-d}{2}=y$; eritque

$\cos s=\cos(x+y)=$

$\cos(\frac{s+d}{2}).\cos(\frac{s-d}{2})-\sin(\frac{s+d}{2}).\sin(\frac{s-d}{2})$; et

$\cos d=\cos(x-y)=$

$\cos\left(\frac{s+d}{2}\right).\cos\left(\frac{s-d}{2}\right)+\sin\left(\frac{s+d}{2}\right).\sin\left(\frac{s-d}{2}\right)$; adeoque $\cos d-\cos s=$

$$2\sin\left(\frac{s+d}{2}\right).\sin\left(\frac{s-d}{2}\right)=\cos(C-A)-\cos B=$$

$\frac{2\sin(B+C-A)}{2}.\sin\frac{(B-C+A)}{2}$; quod item si $\frac{A+B+C}{2}$ dicatur S, erit $=2\sin(S-A).\sin(S-C)$.

Consequ. $(\sin\frac{1}{2}b)^2=\frac{\sin(S-A).\sin(S-C)}{\sin A.\sin C}$, et

$$\log\sin\frac{1}{2}b=$$

$$\frac{\log\sin(S-A)+\log\sin(S-C)-\log\sin A-\log\sin C}{2}$$

Quae formula ab ea, quae (p. 92) in trigonometria plana, pro angulo e tribus lateribus, relata est, nonnisi in eo differt, quod in membro aequationis ad dextram sinus deleatur.

Pariter $\cos\frac{1}{2}b$ reperitur; nempe sinus saepe ambiguum esse potest, quum acuto obtusoque eum ad 2R complenti sinus idem respondeat; cosinus autem negative prodiens, angulum recto majorem indicet, uti tangens et cotangens. Est (p.85) $2(\cos\frac{1}{2}b)^2-1=\cos b$; atque hinc $\frac{\cos B-\cos(C+A)}{2\sin C.\sin A}=(\cos\frac{1}{2}b)^2$; atque si B ponatur d, et C+A ponatur s, fiet

$$\cos B-\cos(C+A)=2\sin\frac{(A+B+C)}{2}\sin\frac{(C+A-B)}{2}$$

$$\text{et }(\cos\frac{1}{2}b)^2=\frac{\sin S.\sin(S-B)}{\sin A.\sin C}.$$

Schol. 2. Applicationes etiam quasdam trigonometriae sphaericae adferre in Tyronum gratiam supervacuum haud erit.

1mo. Satis omnium constat, dum sol in aequatore est, ubivis terrarum aequinoctium esse, exceptis polis ipsis: nam aequator et horizon duo circuli maximi bisecant se ubique, nisi coincidant, quod nonnisi pro polis fit; itaque ubivis praeter polos, semicirculus est supra et infra horizontem; pro polis autem tunc totus circulus per 24 horas in horizonte percurritur; refractio (per se quoque variabilis) nunc haud consideratur.

Dicitur (Fig. 218) sectio f aequatoris cum horizonte, a meridiano versus orientem *cardo orientis*; et si sol supra vel infra aequatorem sit, describatque apparenter circulum C (aequatori parallelum; arcus horizontis a cardine orientis usque ad sectionem p circuli C cum horizonte (a meridiano versus orientem) dicitur *amplitudo ortiva*; quae post aequinoctium vernale in hemisphaerium boreale, post aequinoctium autumnale autem in australe cadit. Itaque arcus fp cadit aestate supra aequatorem, hyeme infra.

Si a polo nostro 𝔓 ad alterum ducatur per p (amplitudinis ortivae a cardine orientis incipiendo, finem) semicirculus; hic aequatorem secabit, fiat hoc in d; secet C meridianum supra horizontem in h, et aequator secet meridianum in a; erit ph arcus solis ab ortu ad meridiem usque decurrendus, atque aequatoris arcus da totidem graduum erit. Est vero motus terrae circa axem uniformis, et circuli paralleli cum aequatore revolutionem tempore 24 horarum simul absolvunt, et fa quadrans a f usque in meridianum 6 horas habet. Si igitur d ultra f sit, arcus fd in tempus converti, et hoc tempus addi 6 horis debet, (uti aestate fit); si vero d inter meridianum et f fuerit (ut hyeme), tum fd in tempus conversum e 6 horis subtrahendum est, ut tempus ab ortu ad meridiem prodeat; cujus duplum, diem totum supra horizontem, et differentia hujus a 24 horis noctem exhibet.

In $\triangle$lo sphaerico fpd ad d rectangulo, dato angulo *b* ad f, qui (nempe angulus plani aequatoris cum horizonte) *altitudo aequatoris* audit, datoque arcu dp (latere B ipsi *b* opposito), qui est *declinationi* solis aequalis; reperitur arcus fd (id est A), (per p. 252); est nempe

$$\sin A = \frac{\tan B}{\tan b}, \text{ et } \log\sin A = \log\tan B - \log\tan b,$$ pro radio 1, (p. 89).

Dicitur nempe *declinatio* stellae cujusvis, arcus circuli maximi a stella ad aequatorem Lris; adeoque dum sol in p oritur, ejus declinatio pd est. Dicitur etiam fd *differentia ascensionalis* solis: nempe *recta ascensio stellae* est, arcus aequatoris ad orientem e puncto aequinoctii vernalis, usque ad arcum declinationis; et *obliqua ascensio* stellae dicitur, arcus aequatoris ab eodem puncto vernali usque ad f cardinem orientis, tanquam punctum aequatoris illud, quod cum stella simul in horizonte est, adeoque simul oritur; uti hic punctum f aequatoris et sol in p existens simul oriuntur. Patet itaque fd differentiam ascensionalem esse, eamque dum sol in aequatore est, $= o$ fieri; nam tum p et f coincidunt.

Si vero quaeratur: pro declinatione B solis, quantanam altitudo *b* aequatoris esse debeat, ut dies ex gr. 22 horarum fiat? Dimidium hujus erit 11, unde subtracto 6 residuum 5 in gradus conversum erit $= A$; atque in $\triangle$lo sphaerico ad $\mathfrak{b}$ rectangulo, ex B et A reperietur b (per p. 252), ubi tang B $=$ sin A . tang b

Si quaestio eadem pro 24 horis fuerit: tum e dimidio ipsius 24 subtracto 6, manet 6; et hoc in arcum conversum $=$ quadranti erit; itaque $\mathfrak{f}$ polus ipsius B erit; adeoque $B = b$; nempe declinatio solis $=$ altitudini aequatoris.

2do. *Gnomonica* etiam certo sensu ad *unicum problema reductum*, ope trigonometriæ sphaericae facile resolvitur.

Concipiatur nempe terra quasi globus transparens vacuus superficie vitrea, solo axe opaco: et concipiatur sol sive in aequatore, sive ei parallele circulum describere, radio ad axem terrae $\perp$ri, (haud considerato eo motu solis annuo, quo apparenti diurno contrarie movetur quotidie.

Concipiatur porro planum quodvis P per centrum $\mathfrak{f}$ sphaerae (Fig. 219) eam in circulo maximo C secans (sed extra polum, de quo inferius dicetur); et $\perp$ris ad P e centro $\mathfrak{f}$ erecta secet superficiem in m, sintque poli $\mathfrak{P}$ et $\mathfrak{p}$; erit P loci m *planum horizontale*, et recta m$\mathfrak{f}$ linea verticalis, atque planum $\mathfrak{P}$m$\mathfrak{f}$ *planum meridiani* illius loci est; ac si demittatur ex $\mathfrak{P}$ (polo supra horizontem) $\perp$ris $\mathfrak{P}\mathfrak{P}'$ ad P, $\wedge\, \mathfrak{P}\mathfrak{f}\mathfrak{P}'$ *altitudo poli* loci m dicitur. Secet recta $\mathfrak{f}\mathfrak{P}'$ superficiem sphaerae in $\mathfrak{P}''$, erit arcus $\mathfrak{P}\mathfrak{P}'' =$ altitudini poli; et secet meridianus aequatorem in m'.

Dividatur aequator in partes aequales 24 (aut 2.24, 4.24 &c), ab m' incipiendo, fiantque per divisionis puncta circuli maximi ad polum: manifesto centrum et uterque polus, adeoque axis omnibus communis erit; dicuntur autem omnes hi *circuli horarii*, et anguli quos cum quadrante 𝔓mm′ faciunt ad 𝔓, *anguli horarii* dicuntur.

Si jam sol in aequatore aut circulo ei parallelo, e meridiano 𝔓mm′ uniformiter motus, describat arcum quempiam α, erit α quoad gradus quantitas anguli quem planum meridiani cum plano p per axem et solem posito facit; eruntque anguli verticales planorum horum aequales. Manifesto autem umbra axeos in planum p, et ad planum P infra axem cadit, (si non in hemisphaerio boreali, fiet in australi); atque nonnisi punctum illud q quaeritur, in quo peripheria C per planum p secatur; tum enim recta fq e centro f ad q, linea horaria in plano P erit; id est si ex gr. $\alpha = \frac{n \cdot 360°}{24}$ sit versus occidentem, dum umbra axeos tanquam styli in fq cadet; erit tempus ante meridiem, ab ea n horis distans.

Innotescit autem fq (Fig.219*) per angulum, quo a f𝔓″ (nempe recta in qua planum meridianum secat planum P) distat, e $\triangle$lo sphaerico 𝔓𝔓″q ad 𝔓″ rectangulo; si enim detur A altitudo poli = arcui 𝔓𝔓″, et angulus horarius $b = \wedge$ q𝔓𝔓″; prodit arcus q𝔓″, nempe in $\triangle$lo sphaerico ad 𝔓″ rectangulo, latus B $\wedge$lo b oppositum; scilicet (p. 252) tang B = sin A . tang b.

Atque ita lineae pro quavis hora in P determinari poterunt; et quum sensu physico idem sit, sive per centrum sit P, sive P′ ei parallelum per m ad superficiem terrae positum fuerit, si et stylus umbram projiciens axi terrae parallele ponatur; id est error sensibus perceptibilis inde, nec propter *refractionem* radiorum, nec *parallaxim* (id est $\wedge$lum quem rectae e centro et superficie terrae ad solem faciunt) exsurgat: monstrabuntur per umbram styli horae, si in P' e centro m ducatur meridiana, id est sectio plani meridiani cum P', et eo scribatur XII; atque ad angulos repertos ductis lineis horariis, adscribantur numeri horarum, recedendo a XII per numeros XI, X --- dum sol versus orientem est, et progrediendo per I, II --- sole ad occasum vergente. Et hoc praebet loco m *horologium horizontale*.

Sed eidem plano P parallelum quocunque ad superficiem terrae latum, simul cum omnibus lineis in eo designatis et axe, ita ut omnes lineae locis prioribus parallelae maneant, ubique idem monstrabunt, nempe horas pro loco m. Consequ. si meridiani loci hujus 𝔐 differentia a meridiano loci m in arcu aequatoris data fuerit; hac in tempus conversa, nonnisi horarum numeros aliter scribere necesse erit; nempe si m ab 𝔐 distet $\frac{360^\circ}{24}$ versus orientem; ibi XII una hora citius eveniet, ita reliqua; adeoque XII pro I et XI pro XII &c scribere oportet.

Quodvis planum P' autem in loco 𝔐 fuerit, illud pro aliquo loco m horizontale erit; adeoque nonnisi illius loci *altitudo poli*, et *distantia meridianorum* locorum m et 𝔐 quaerenda est: quod (quum res tota praxim respiciat) facile fit, erigendo e puncto p plani P' ⊥rem L, quae punctum *zenith* loci m respicit; ponendoque per idem punctum p planum meridiani loci 𝔐, et ex eodem puncto ponendo rectam β axi terrae parallelam; angulus enim hujus rectae cum plano est = alt. poli in m, et angulus, quem planum per β ad P' ⊥riter positum, cum plano meridiani loci M (in quo β adest) facit, differentia meridianorum locorum m et 𝔐 est; nimirum si β tanquam axis terrae spectetur, omnibus meridianis communis erit.

Mensuratis itaque his duobus angulis, numeris per dicta mutatis, horologium pro $\mathfrak{M}$ inserviet.

Schol. 3. Quum sphaera (ut dictum est) sola cum plano id commune habeat, ut circa quodvis sui punctum in se moveri queat: in hac arcus circuli maximi rectae vicem subire, imo alii circuli quoque describi, et motus componi possunt. Ita si *per arcum*, arcus circuli maximi, per *distantiam puncti* $\mathfrak{p}$ a *puncto* $\mathfrak{b}$ autem arcus $\mathfrak{pb}$, per *dist. puncti* $\mathfrak{p}$ *ab arcu* C arcus $\mathfrak{pp}'$ ad C Lris intelligatur, et $\mathfrak{p}'$ *locus* puncti $\mathfrak{p}$ ad C *reductus* dicatur; definitiones dictæ fient breviores: nempe stellae distantia ab æquatore, est *declinatio*, ab ecliptica *latitudo*, a horizonte *altitudo* (uti *poli altitudo*); distantia a puncto vernali (orientem versus) stellae ad aequatorem reductae *recta ascensio*, illius aequatoris puncti, quod sub cardine orientis stella oriente est, *obliqua ascensio*, ad eclipticam reductae *longitudo*, et dist. a *cardine australi* stellae ad horizontem reductae *azimuth*, dicuntur. Dividit nempe *meridianus* cum *meridionali* item verticali, (sive cum aequatore, quum utrumque ad meridianum Lre sit) horizontem in 4 quadrantes, fiuntque 4 *cardines*, quorum duo, meridiani et duo, meridionalis *poli* fiunt, uti *zenith* in medio meridiani *polus* horizontis est.

·32. Campum ampliorem peragrare, hujus opusculi (si Deus valetudini, (*et alioquin*) benignius faverit) supplemento reservaturus: in *Appendice* ea pars Matheseos applicatae sequitur, quae e Matheseos anno, ad cursus physici annum relinqui haud potest: nempe *primae lineae Perspectivae*, *Gnomonicae*, et *Chronologiae*.

APPENDIX.

DE PERSPECTIVA, GNOMONICA, ET CHRONOLOGIA.

Si quid A, punctum vel linea aut aliud quidpiam e spatio fuerit, atque superficies certa T positione detur; sitque punctum $\mathfrak{D}$ item positione datum tale, ut recta quaevis ex *A* usque ad $\mathfrak{D}$ ducta cum T aliquid commune habeat: quaeri potest 1mo complexus omnis ejus, quod recta quaepiam ex $\mathfrak{D}$ ad aliquod punctum ipsius A ducta cum T commune habet; diciturque complexus iste, *imago* objecti A in *tabula* T *pro oculo* $\mathfrak{D}$, et data singulorum positione erga seinvicem.

2do. Potestque etiam supponi, ut punctum $\mathfrak{D}$ in recta certa $\mathfrak{D}t$ a T dabili quovis ulterius recedat; atque limes geometricus imaginis ipsius A in tabula T quaeri: et si exgr. T planum sit, potest recta dicta Lris ad tabulam, item tabula *horizontalis*, aut *verticalis* esse; aut potest recta dicta cum tabula dimidium rectum facere, aut alium quemvis.

3tio. Quum tria sint, nempe *oculus*, *objectum*, et *imago*; e quibusvis duobus tertium quaeri potest: adeoque e dato objecto ejusque imagine etiam locus oculi quaeri potest; imo etiam e data imagine in tabula, et loco oculi, quaeri objectum A potest. Quo etiam *Gnomonica* pertinet; ubi nempe sol, puncti $\mathfrak{D}$ vicem subit, stylus ut imago in tabula T spectari potest, quae si ex umbra illius in datam superficiem projecta, rectae ad $\mathfrak{D}$ ducerentur, in T describeretur; atque hic umbra haec tanquam objectum e stylo tanquam imagine, pro dato loco puncti $\mathfrak{D}$ quaeritur.

§. 1. Problemata haec resolvere objectum *Perspectivae* est. Casus simplicissimus est, si *tabula* T *planum* sit, et quidem aut *horizontale aut verticale.*

Si tabula T horizonti parallela sit, et $\mathfrak{D}\mathfrak{t} \perp T$ atque $\mathfrak{D}$ dato quovis ulterius recedat (seu ut dici solet, oculus in zenith in ∞ to sit): limes imaginis geometricus, talis est, ut *quaevis recta* $\mathfrak{A}\mathfrak{B}$ *horizonti parallela*, *imagini suae* $\mathfrak{a}\mathfrak{b}$ *aequalis sit.* Nam tum $\mathfrak{A}\mathfrak{a}$ et $\mathfrak{B}\mathfrak{b}$ ad T $\perp$res sunt; adeoque parallelae per duo plana parallela sectae, efficiunt parallelogrammum $\mathfrak{A}\mathfrak{B}\mathfrak{b}\mathfrak{a}$. Hunc in finem delineantur sectiones per planum ad superficiem terrae horizontale aedificiorum exstruendorum, Grundriß dictae. Manifesto etiam quaevis linea in plano horizonti parallelo, cujusvis formae fuerit, imaginem sibi aequalem, in tabula supra eam sita horizonti parallela, describit sub conditione situs oculi dicta.

Rectae cujusvis $\mathfrak{P}\mathfrak{Q}$ autem, non in plano horizonti parallelo nec in eodem verticali sitae, imago minor fit. Si enim $\mathfrak{P}$ superius situm fuerit, quam $\mathfrak{Q}$; sit ad tabulam $\perp$ris $\mathfrak{P}\mathfrak{p}$ ex $\mathfrak{P}$, et $\perp$ris $\mathfrak{Q}\mathfrak{q}$ ex $\mathfrak{Q}$; erit $\mathfrak{p}\mathfrak{q}$ imago rectae $\mathfrak{P}\mathfrak{Q}$; atque ex $\mathfrak{P}$ parallela $\mathfrak{P}\mathfrak{P}'$ ad $\mathfrak{p}\mathfrak{q}$ (usqueequo rectam $\widetilde{\mathfrak{Q}\mathfrak{q}}$ secat) erit $=\mathfrak{p}\mathfrak{q}$, et in $\triangle$lo $\mathfrak{P}\mathfrak{P}'Q$ erit hypotenusa $\mathfrak{P}\mathfrak{Q} >$ catheto $\mathfrak{P}\mathfrak{P}'$. (F.220)

Ita si ad polum concipiatur planum T tangens: erit hoc ibidem horizontale, aequatori parallelum; et si ab aequatore incipiendo, ex omnibus hemisphaerii punctis demittantur ad T $\perp$res; prodibit superficiei hemisphaerii terrae talis imago. Et manifesto pro quovis circulo aequatori parallelo, cujus radius est *co-*

sinus latitudinis, (id est arcus quo ab aequatore in quadrante usque ad polum ducto distat), seu sinus distantiae a polo; prodibit in imagine quoque circulus aequalis: sed pro distantia duorum circulorum parallelorum, nempe arcu illo α (quadrantis ab aequatore usque ad polum ducti) qui ab uno circulo usque ad alterum est, erit imago sin v. γ — sin v. $(\gamma-\alpha)$ (F. 221)

Si tabula T verticalis, et recta $\mathfrak{D}t$ L T, atque $\mathfrak{D}$ in $\widetilde{\mathfrak{D}t}$ removeatur in ∞; adinstar orientis solis: pariter patet quasvis lineas in plano verticali sitas imaginibus suis aequales esse: atque rectae $\mathfrak{PQ}$, non in eodem plano verticali nec in eodem horizontali sitae, imaginem pq minorem esse; nempe et hic $\mathfrak{P}$p hypotenusae, et pq catheto aequales erunt. Aedificiorum facies ita delineatur.

Si tabula T item verticalis, at $\mathfrak{D}t$ cum T et simul cum horizonte efficiat 45°, atque sensu dicto removeatur oculus in ∞; vocatur ejusmodi *perspectiva* Vogelperspektiw; quum aves in altum saepe ad talem angulum sublatae, hoc visu gaudeant. Multa hoc modo videri possunt, quae in prioribus celantur. Suntque heic tam *horizontalium linearum quam verticalium imagines aequales*. Sit enim (Fig. 222) $\mathfrak{PQ}$ horizontalis, $\mathfrak{PS}$ verticalis; erunt $\triangle$la $\mathfrak{P}$fp et $\mathfrak{Q}$fq aequicrura propter angulum 45 graduum; itaque $\mathfrak{Q}$f=qf, et $\mathfrak{P}$f=pf; consequ. $\mathfrak{PQ}$ = pq. Est etiam $\mathfrak{PS}$ps parallelogrammum, adeoque $\mathfrak{PS}$ = ps.

Schol. 1. Possunt autem omnes istae imagines dictae majores minoresve similes construi, quasi majorum minorumve similium imagines essent.

Schol. 2. Si cujusvis puncti imago eo colore lucisque gradu in tabula posita fuerit, ut inde radii ita in oculum veniant, quasi ex objecto venirent; retina ab imagine ita afficietur ut ab objecto: at hinc sequitur oculum hunc in finem eo locandum esse, unde objecti imaper tabulam excepta fuit. Et sequitur etiam tales imagines construi posse, ut radii ita veniant quasi ex gr. in Londini plateam sub stellifero coelo inspiceretur; quod tamen fit imaginibus exactis, debite illuminatis intra focum lentium convexarum ita sitis, ut ad debitam distantiam removeantur imagines magnitudine naturali, unde radii ita veniant, quasi ab objectis ipsis venirent.

§. 3. (Fig. 223) *Distantia puncti a plano* dicitur omnino Lris e puncto ad planum. Sit D distantia oculi 𝔇 a tabula T, et *d* distantia a T puncti 𝔓 (tanquam objecti ultra tabulam siti); quodvis *planum* P horizontale pro lubito acceptum *fundamentale* dicitur, et sectio hujus cum tabula *linea fundamentalis* vocatur: Lris 𝔓𝔓′ ex 𝔓 ad P vero *altitudo* objecti 𝔓 dicitur, et si Lris ex 𝔓′ ad tabulam, adeoque lineam fundamentalem in 𝔓″ cadat, dicitur 𝔓″ *punctum objecti* 𝔓, uti 𝔇′ si Lris ex oculo ad tabulam in 𝔇′ cadat, *punctum oculi* vocatur. Patet 𝔓′𝔓″ esse distantiae objecti 𝔓 aequalem. *Linea* horizontalis per punctum oculi in tabula, (vocatur *linea oculi.* Recta 𝔇′𝔓″ (nempe punctum oculi cum puncto objecti connectens) dicitur *linea punctorum*; et si in lineam oculi ex 𝔇′ puncto oculi translata distantia D oculi, in 𝔇 terminetur, et in lineam fundamentalem translata ex 𝔓″ puncto objecti in alteram respectu 𝔇′𝔓″ (lineae punctorum) plagam distantia *d* objecti 𝔓 in 𝔡 terminetur; recta 𝔇𝔡 *linea distantiarum* dicitur; atque si recta ex

$\mathfrak{P}''$ ad lineam fundamentalem in tabula $\perp$riter altitudini objecti aequalis erecta, in $\mathfrak{A}$ terminetur; recta $\mathfrak{O}'\mathfrak{A}$ *linea altitudinis* audit.

His denominationibus positis; *imago objecti* $\mathfrak{P}$ *in tabula* T *erit*, *ubi verticalis ex intersectione lineae punctorum et lineae distantiarum erecta, lineam altitudinis secat*: si nempe sectio rectarum $\mathfrak{O}'\mathfrak{P}''$ et $\mathfrak{D}\mathfrak{d}$ sit $\mathfrak{q}$, et verticalis ex $\mathfrak{q}$ secet rectam $\mathfrak{O}'\mathfrak{A}$ in $\mathfrak{p}$; erit $\mathfrak{p}$ imago puncti $\mathfrak{P}$.

Etenim I. (Fig. 224) quodcunque punctum $\mathfrak{f}$ tabulae fuerit; puncti $\mathfrak{P}$, si recta ex oculo $\mathfrak{O}$ ad rectam $\mathfrak{f}\mathfrak{P}$ parallela, tabulam in $\mathfrak{K}$ secet: imago $\mathfrak{p}$ puncti $\mathfrak{P}$ in recta $\mathfrak{K}\mathfrak{f}$ inter $\mathfrak{K}$ et $\mathfrak{f}$ erit. Nam tum rectae $\mathfrak{O}\mathfrak{K}$ et $\mathfrak{f}\mathfrak{P}$ parallelae in plano sunt, et rectae $\mathfrak{f}\mathfrak{K}$ et $\mathfrak{O}\mathfrak{P}$ se invicem secando in idem planum cadunt.

Hinc autem (Fig. 223) quum punctum $\mathfrak{P}'$ in planum fundamentale cadat; imago ejus in $\mathfrak{O}'\mathfrak{P}''$ cadit: quia $\mathfrak{O}\mathfrak{O}'$ et $\mathfrak{P}'\mathfrak{P}''$ sunt parallelae, nempe ad tabulam $\perp$res sunt.

II. Si igitur imago ipsius $\mathfrak{P}'$ dicatur i, id est recta $\mathfrak{O}\mathfrak{P}'$ tabulam in i secuerit; i in $\mathfrak{O}\mathfrak{P}'$ inter $\mathfrak{O}'$ et $\mathfrak{P}'$ cadet; eruntque $\triangle$la $\mathfrak{O}\mathfrak{O}'$i et $\mathfrak{P}'\mathfrak{P}''$i similia, quia $\mathfrak{O}\mathfrak{O}' \parallel \mathfrak{P}''\mathfrak{P}'$, et anguli ad i verticales sunt. Itaque $\mathfrak{O}\mathfrak{O}' : \mathfrak{P}''\mathfrak{P}' = \mathfrak{O}'i : i\mathfrak{P}''$; seu (si $\mathfrak{O}'$i dicatur x, et $\mathfrak{O}'\mathfrak{P}''$ dicatur a) est $D:d = x:a-x$; atque hinc $Da - Dx = dx$, adeoque $x = \frac{Da}{D+d}$. Sed in $\triangle$lis $\mathfrak{O}'\mathfrak{D}\mathfrak{q}$ et $\mathfrak{P}''\mathfrak{d}\mathfrak{q}$, est $D:d = \mathfrak{O}'\mathfrak{q} : \mathfrak{q}\mathfrak{P}''$ seu (si $\mathfrak{O}'\mathfrak{q}$ dicatur y) est $D:d = y:a-y$, adeoque $y = \frac{Da}{D+d} = x$.

III. Imago ipsius $\mathfrak{P}$ omnino in rectam ex $\mathfrak{q}$ verticalem cadit, fiat id in $\mathfrak{p}'$; erunt $\triangle$la $\mathfrak{O}\mathfrak{q}\mathfrak{p}'$ et $\mathfrak{O}\mathfrak{P}'\mathfrak{P}$ similia; quum plani verticalis $\mathfrak{O}\mathfrak{P}\mathfrak{P}'$

sectio cum tabula, verticalis $\parallel \mathfrak{P}\mathfrak{P}'$ sit; suntque et $\triangle$la $\mathfrak{O}\mathfrak{O}'\mathfrak{q}$, $\mathfrak{P}'\mathfrak{P}''\mathfrak{q}$, necnon $\triangle$la $\mathfrak{O}'\mathfrak{q}\mathfrak{p}$, $\mathfrak{O}'\mathfrak{P}''\mathfrak{A}$ similia. Hinc

$\mathfrak{O}\mathfrak{P}' : \mathfrak{O}\mathfrak{q} = \mathfrak{P}\mathfrak{P}' : \mathfrak{q}\mathfrak{p}'$. et. $\mathfrak{O}\mathfrak{q} : \mathfrak{q}\mathfrak{P}' = \mathfrak{O}'\mathfrak{q} : \mathfrak{q}\mathfrak{P}''$, adeoque $\mathfrak{O}\mathfrak{P}' : \mathfrak{O}\mathfrak{q} = \mathfrak{O}'\mathfrak{P}'' : \mathfrak{O}'\mathfrak{q}$, et hinc $\mathfrak{O}'\mathfrak{P}'' : \mathfrak{O}'\mathfrak{q} = \mathfrak{P}\mathfrak{P}' : \mathfrak{q}\mathfrak{p}'$

Estque e similitudine postrema $\mathfrak{O}'\mathfrak{P}'' : \mathfrak{O}'\mathfrak{q} = \mathfrak{A}\mathfrak{P}'' : \mathfrak{q}\mathfrak{p}$

Consequenter $\mathfrak{P}\mathfrak{P}' : \mathfrak{q}\mathfrak{p}' = \mathfrak{A}\mathfrak{P}'' : \mathfrak{q}\mathfrak{p}$

Itaque quum $\mathfrak{P}\mathfrak{P}' = \mathfrak{A}\mathfrak{P}''$ sit, est etiam $\mathfrak{q}\mathfrak{p}' = \mathfrak{q}\mathfrak{p}$:

§. 2. Si vero $\mathfrak{P}$ infra planum fundamentale fuerit: erit altitudo (quasi $-$va) in $\perp$rem ex $\mathfrak{P}''$ infra lineam fundamentalem transferenda. Et quotvis punctorum objecti numerabilium imagines reperiri poterunt: at si $\triangle$li $\mathfrak{abc}$ imago quaeratur, nonnisi punctorum $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c}$ imagines quaerere necesse erit; si enim punctorum $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}$ imagines $\mathfrak{a}', \mathfrak{b}'$ fuerint, rectae $\mathfrak{ab}$ imago recta $\mathfrak{a}'\mathfrak{b}'$ erit; nam in plano $\mathfrak{O}\mathfrak{ab}$ rectae $\mathfrak{O}\mathfrak{a}$ circa $\mathfrak{O}$ usque in $\mathfrak{O}\mathfrak{b}$ mota, simul per $\mathfrak{a}'\mathfrak{b}'$ ab $\mathfrak{a}'$ usque in $\mathfrak{b}'$ movebitur, et cuivis puncto cujusvis rectarum $\mathfrak{ab}$ et $\mathfrak{a}'\mathfrak{b}'$, punctum alterius respondebit.

§. 3. Si vero data recta $\mathfrak{P}'\mathfrak{P}$, tanquam objecto, et data imagine $\mathfrak{p}\mathfrak{q}$ ejus, *quaeratur situs oculi* $\mathfrak{O}$; ubi $\widetilde{\mathfrak{A}\mathfrak{p}}$ et $\widetilde{\mathfrak{P}''\mathfrak{q}}$ se invicem secabunt, ibi erit $\mathfrak{O}''$; et $\mathfrak{D}$ erit, ubi $\widetilde{\mathfrak{d}\mathfrak{q}}$ lineam per $\mathfrak{O}'$ horizontalem secabit: et $\perp$ris ad tabulam ex $\mathfrak{O}'$ erectae ipsi $\mathfrak{O}'\mathfrak{D}$ aequalis, extremitas erit situs oculi $\mathfrak{O}$: nam pro dato hoc oculi et objecti situ, imago (per praec) $\mathfrak{p}\mathfrak{q}$ erit.

Si vero (Fig. 225) recta $\mathfrak{P}\mathfrak{Q}$, ejusque imago $\mathfrak{p}\mathfrak{q}$ data fuerint: situs oculi innotescit modo sequente. Fiant ex $\mathfrak{P}$ et $\mathfrak{Q}$ ad planum fundamentale $\perp$res $\mathfrak{P}\mathfrak{P}'$ et $\mathfrak{Q}\mathfrak{Q}'$, atque ex $\mathfrak{P}'$ et $\mathfrak{Q}'$ fiant ad lineam fundamentalem $\perp$res $\mathfrak{P}'\mathfrak{P}''$ et $\mathfrak{Q}'\mathfrak{Q}''$; ducanturque rectae $\mathfrak{P}''\mathfrak{p}$ et $\mathfrak{Q}''\mathfrak{q}$; ubi hae se invicem secabunt, ibi erit $\mathfrak{O}'$; et in tabula per hoc punetum $\mathfrak{D}'$ linea horizontali ducta, et translata ex $\mathfrak{P}''$ distantia $d = \mathfrak{P}''\mathfrak{P}'$, secet $\widetilde{\mathfrak{d}\mathfrak{p}}$ lineam horizontalem per $\mathfrak{D}'$ ductam in $\mathfrak{D}$; erit Lris ad tabulam ex $\mathfrak{D}'$ erectae ipsi $\mathfrak{D}'\mathfrak{D}$ aequalis, extremitas locus $\mathfrak{D}$ oculi. Nempe posito hoc, ipsius $\mathfrak{P}\mathfrak{Q}$ imago $\mathfrak{p}\mathfrak{q}$ erit; imago vero unica est.

§. 3. Pro oculo $\mathfrak{D}$, et imagine $\mathfrak{p}$ autem locus puncti $\mathfrak{P}$ ubique esse in recta $\widetilde{\mathfrak{D}\mathfrak{p}}$ potest; uti oculus $\mathfrak{D}$, pro puncto $\mathfrak{P}$ et imagine $\mathfrak{p}$ ubique in recta $\widetilde{\mathfrak{p}\mathfrak{D}}$ esse potest. At etiam qualevis objectum A fuerit ultra tabulam, ductis ad omnia ejus puncta rectis, et omnes rectas per tale α multiplicando, ut quaevis rectarum per α multiplicata ultra tabulam terminetur (juxta T. I. p.451); omnium hoc pacto generatorum similium imago eadem erit.

Potest imagini certae objectum in certa superficie pro dato oculi situ quaeri: et hoc respectu potest *Gnomonica* considerari; si ut dictum (p. 265) est, sol oculi, axis terrae imaginis, et umbra in superficie data objecti quaesiti vices subeant. Et brevitati consulendo, ceteris praetermissis, transitus fit ad Gnomonicam.

DE GNOMONICA.

Fundamento inservit id, quod (p. 261) dictum est: et sensu ibidem exposito, sphaera pellucida axe adiaphano axi terrae parallelo, ubique horologii vicem subire potest; atque (per ibidem dicta) in plano etiam quovis, quod axi terrae parallelum non est, ad superficiem terrae quoque ubivis horologium construi potest.

Non aliud igitur quoad horologia in plano exstruenda restat: nisi referre; hic quomodo in planis axi terrae parallelis, horologia construi queant; 2do quomodo horologium idem diversis locis inservire queat. 3tio quomodo horologium, etiam locum solis in ecliptica, tempusque ortus et occasus ejus (quovis die sive certis dierum intervallis) indicare queat.

Planum verticale ubivis, ad planum meridiani Lre dicitur *meridionale* loci illius; et quum per lineam verticalem innumera plana verticalia dentur, dicitur planum *verticale primarium*. Planum aequatori parallelum ubivis ad terram dicitur *aequinoctiale*. Planum per axem terræ et cardines orientis occidentisque dicitur *polare*; planum verticale per polum autem dicitur *planum meridiani*, et hujus sectio cum horizonte vocatur *meridiana horizontalis*, atque sectio ejus cum quavis superficie, *meridiana superficiei illius* dicitur. Horologia in iis describenda, (*primaria* dicta), nomina a planis iis sortiuntur; et (praeter horizontalia) dicuntur *aequinoctialia*, *polaria*, *meridionalia meridiana*: sed postremum duplex est, prouti superficies orientem, vel occidentem respicit; atque eatenus dicitur horologium *orientale* vel *occidentale*; ita meridionale duplex est, nempe *septentrionale* et *australe*, prouti superficies septemtrioni vel austro obversa est; et *aequinoctiale* duplex est, *superius* versus boream, et *inferius* versus austrum; ita *polare* quoque, *superius* et *inferius* est. Et praeterea si planum horizontale circa meridianam, aut meridionale circa verticalem vertatur, vocatur horologium *declinans*, si aequinoctiale aut meridionale circa cardines orientis occidentisque vertatur, vocatur *inclinans*. Si vero declinans ex gr. meridionale circa sectionem ejus cum horizonte factam vertatur, *deinclinans* dicitur propter duplicem inclinationem &c...

Patet autem planum polare ad aequatorem horizontale esse, nec non planum meridiani ad distantiam 90 graduum in aequatore, esse horizontale; et aequinoctiale, ad polum horizontale esse; axemque esse in hoc ad planum horologii ⊥rem; uti in horologiis, tam in plano polari, quam in meridiano, axem (seu stylum umbram monstrantem) plano horologii parallelum esse.

§. 1. Superius (p. 262) fuit $\tang B = \sin A . \tang b$, ubi A altitudinem poli, b angulum horarium ad polum (a plano meridiani incipiendo), et B latus angulo b in △lo sphaerico rectangulo oppositum denotat; atque A altitudo poli, et B angulus a meridiana incipiendo in plano dato, ad centrum terrae horarius, *catheti* sunt.

Si $A=90^d$ fuerit, uti in plano aequinoctiali, fiet $\tang B=\sin A . \tang b=1 . \tang b$; atque $B=b$; fietque nB ex B, dum nb fit ex b. Itaque in plano aequinoctiali circulus a meridiano incipiendo, per 24 aequaliter dividitur.

Pro $A=o$ autem, uti ad aequatorem, pro plano horizonti aequatoris parallelo est, fit $\tang B=o$, nam $\sin A=o$; nec juxta ibidem dicta, pro hoc casu, nempe dum axis terrae in planum cadit, △lum sphaericum dictum datur.

At quodcunque planum Q fuerit, in quod axis terrae incidit: bisecabit hoc aequatorem ex gr. in 𝔇 et 𝔈, et planum superficiem terrae, in illo aequatoris puncto 𝔎 tangens, quod a 𝔇 et 𝔈 quadrante distat, ipsi Q parallelum erit; dicatur planum illud q.

Sit recta 𝔄𝔅 (Fig. 226) aequatorem in puncto 𝔎 tangens: et dividatur aequator ex 𝔎 incipiendo in 24 partes aequales; atque ducantur ad tangentem dictam e 𝔠 centro aequatoris, per puncta divisionis, rectae 𝔨a, 𝔨b, 𝔨c ‧‧‧ 𝔨a′, 𝔨b′, 𝔨c′‧‧ Erunt 𝔎a, 𝔎b, 𝔎c ‧‧‧ uti 𝔎a′, 𝔎b′, 𝔎c′ ‧‧‧ tangentes angulorum 15°, 30°, 45° ‧‧‧ pro radio 𝔨𝔎; nempe anguli ex 𝔨𝔎 incipiendo, 15 gradibus crescunt, quia $\frac{360}{24} = 15$.

Sit 𝔓𝔭 axis terrae, cujus meditullium 𝔨 centrum terrae est, et planum aequatoris dicatur a, planum vero per axem 𝔓𝔨𝔭, et 𝔎 punctum aequatoris, determinatum, dicatur p; axis ad aequatorem ⊥ris est, adeoque et $p \perp a$: item 𝔨𝔎 ad q (nempe planum in 𝔎 tangens) ⊥ris est; adeoque quum 𝔨𝔎 in a sit, est $a \perp q$; itaque duo plana p et q fiunt ad tertium a ⊥ria, punctoque 𝔎 communi gaudent. Consequ. sectio eorum 𝔎𝔎′ est ad a ⊥ris, adeoque cum ⊥ri ad 𝔄𝔅 ex 𝔎 in q erecta coincidet.

Cadetque umbra axeos, sole in plano p supra planum q existente, in planum q projecta, in rectam 𝔎𝔎′. Si vero inde porro in aequatore exgr. arcum 15° describat ad laevam; erit umbra centri manifesto in a′, et in b′ si sol 2.15° descripserit &c. At umbra axeos in q, erit semper ⊥ris in q, e puncto rectae 𝔄𝔅 illo erecta, in quod umbra centri cadit. Nam exgr. dum umbra centri in a′ est; axis et a′ determinant planum, in quod umbra axeos cadit; est nempe haec sectio plani hujus cum q (propter punctum a′ utrique commune) facta. Est autem recta a′a″ in qua sectio ista fit, axi parallela; quia in eodem plano est, nec tamen secat axem, quia q parallelum axi, cum hoc nil commune habet. Sed axis, rectae 𝔎𝔎′ parallelus est; itaque quum eidem rectae, tam 𝔎𝔎′ quam a′a″ parallela sint, est quoque a′a″ ∥ 𝔎𝔎′; consequ. et a′a″ ad 𝔄𝔅 ex a′ ⊥ris est.

Manifesto autem, etsi sol non in aequatore, sed in circulo ei parallelo versetur; in cujusvis circuli horarii plano, nempe in quocunque planorum horariorum fuerit; umbra axeos in sectionem plani hujus cum plano q factam cadet. Consequ. umbra in easdem ⊥res ad $\mathfrak{AB}$ ex $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c} \ldots \mathfrak{a}', \mathfrak{b}', \mathfrak{c}' \ldots$ (utrinque continuatas) cadet.

Et (per superius dicta) si sphaera ejusmodi pellucida s (parva respectu terrae) ad superficiem terrae ponatur, axe opaco axi terræ parallelo, simul cum plano q' ad q parallelo, sphaeram s tangente in ſ puncto aequatoris ipsius s; et diviso hoc aequatore in 24 partes aequales, ducantur ex $\mathfrak{f}'$ centro ipsius s, ad rectam quae aequatorem in ſ tangit, per divisionis puncta rectae, atque e sectionibus tangentis erigantur ad tangentem ⊥res; erunt hae lineae horariae cursum solis ad horae intervalla monstrantes.

Patetque stylum esse plano q' (nempe plano hujus horologii) parallelum per centrum $\mathfrak{f}'$ sphaerae s ductum, et simul ⊥ri ex ſ ad tangentem aequatoris sphaerae s, in plano q' erectae parallele positum esse. Unde intelligitur, quomodo in horologio in plano q' constructo, *styli situs* reperiatur; nempe ex ſ erecta ad planum q' ⊥ri recta ſ$\mathfrak{f}'$, ponatur per $\mathfrak{f}'$ recta axi terrae parallela $\mathfrak{f}'\mathfrak{f}''$: quomodo hoc practice fieri possit, inferius patebit.

Posito autem $\mathfrak{f}'\mathfrak{f}''$ stylo axi terrae parallelo: (Fig. 227) demittantur ex $\mathfrak{f}'$ et $\mathfrak{f}''$ ad planum q' ⊥res $\mathfrak{f}'\mathfrak{H}$, $\mathfrak{f}''\mathfrak{H}'$, et fiat in q' (plano horologii) ⊥ris $\mathfrak{J}\mathfrak{H}$ ad $\mathfrak{H}\mathfrak{H}'$, et ex $\mathfrak{J}\mathfrak{H}$ planum K ⊥re ad q'; atque fiat in plano K, centro $\mathfrak{f}'$ radio $\mathfrak{f}'\mathfrak{H}$ circulus, et hic dividatur ex $\mathfrak{H}$ incipiendo per 24, ducanturque per puncta divisionis rectae, et ex illis punctis, ubi hae rectam $\widetilde{\mathfrak{J}\mathfrak{H}}$ (quae tangens circuli ad $\mathfrak{H}$ est) secabunt, ducantur ad $\mathfrak{J}\mathfrak{H}$ in plano q' Lres.

Erunt hae manifesto lineae umbrarum horariarum in plano q', per stylum $\mathfrak{f}'\mathfrak{f}''$ projectarum; et quidem dum umbra in $\mathfrak{H}\mathfrak{H}'$ cadet, erit in loco, cujus planum horizontale ipsi q' parallelum est, hora XII. Unde per differentiam meridianorum loci illius et loci in quo q' est, innotescet, qualisnam numerus ad $\mathfrak{H}$ et quales ad sectiones tangentis ceteras scribendi sint.

Si vero differentia meridianorum non numerum horarum integrum efficiat; sed exgr. locus is ubi q' planum horizonti parallelum est, a meridiano loci $\mathfrak{H}$ distet orientem versus $\frac{n}{m} \cdot \frac{360}{24}$ gradibus (pro n,m integris), et superficies horologii quoque orientem respiciat; accipiatur ad dextram huic e regione stantis, in circulo, ex $\mathfrak{H}$ incipiendo pars $\left(\frac{360^\circ}{24} : m\right)$ numero n, et inde accipiatur semper $\frac{360^\circ}{24}$ e quovis divisionis puncto in eodem circulo porro eundo; adscribaturque ad dextram eo ubi pars prius accepta terminatur, XII; ad finem sequentis ad dextram autem I, et tum II, et ita porro, ad laevam autem ad finem partis ante XII terminatae scribatur XI, ante hoc X &c. Ducanturque ex $\mathfrak{f}'$ (centro circuli) per extremitates partium dictarum rectae; atque eo ubi hae tangentem $\widetilde{\mathfrak{J}\mathfrak{H}}$ secabunt, numeri iidem adscribantur: et manifesto rectae e sectionibus his ad $\widetilde{\mathfrak{J}\mathfrak{H}}$ Lres erunt lineae horariae in plano q'. Nempe dum sol umbram in $\mathfrak{H}\mathfrak{H}'$ projicit, postea ad laevam moveri per $\frac{n}{m}$ horas debet, ut meridies in loco $\mathfrak{H}$ sit; adeoque umbra detrorsum ibit; antea vero per ascendentem solem umbra versus $\mathfrak{H}\mathfrak{H}'$ pariter dextrorsum ibit.

In superficie altera occidentem respiciente pariter lineae horariae eaedem manebunt, et ibi quoque umbra (styli $\mathfrak{f}'\mathfrak{f}''$ circa $\mathfrak{H}\mathfrak{H}'$ ad duorum rectorum intervallum moti) ad dextram e regione stantis ibit sole descendente: adeoque a linea horaria cui in priori superficie XII adscripta est, ad dextram I, II--- adscribi debent.

Si differentia meridianorum 6 horas efficiat; *horologium meridianum* erit: et in superficie orientali quadrans $\mathfrak{H}q$ qui ad dextram est, infrorsum erit; per cujus finem e centro $\mathfrak{f}'$ recta ducta omnino tangenti parallela erit; atque tempore meridiei in loco $\mathfrak{H}$ umbra styli haud projicietur in planum horologii, sed XI, X--- sursum determinabuntur, uti in superficie occidentali ipsi XI respondebit I, et II ipsi X et ita porro.

In *polari*, tempore meridiei umbra manifesto in $\mathfrak{H}\mathfrak{H}'$ erit, quum $\mathfrak{H}\mathfrak{H}'$ sectio plani polaris cum meridiano sit; et reliqua patent.

Schol. 1. (F.228) Tyronibus primo obtutu videretur, horologium pro quovis indice (etiam axi terrae non parallelo) construi posse; si umbræ ejus juxta diei alicujus horas notentur: at sit stylus is recta $\mathfrak{f}\mathfrak{Q}$, et $\mathfrak{f}$ centrum terrae, atque axis sit $\mathfrak{f}\mathfrak{P}$; manifesto $\mathfrak{f}\mathfrak{Q}$ nonnisi in unum planum horarium cadet; nam si in duo cadet, in sectione eorum erit, adeoque cum axe coincidet. Si $\mathfrak{f}\mathfrak{Q}$ in aliquod planum horarium cadat;

sole in illo versante horam rite monstrabit; in alio autem sit pro sole in puncto ſ plani horarii existente umbra puncti Ω designata q: crescente vel decrescente solis declinatione, ascendet vel descendet sol in eodem circulo horario C: veniat in ſ'; umbra puncti Ω non erit q, nam recta qΩ peripheriam C in ſ secabit; sit umbra p'. Manifesto tam q quam q' adeoque et recta qq' in planum ipsius C cadunt; adeoque quum styli prior umbra fuerit fq, posterior fq', essent (si umbra designata et nunc valeret) fq et fq' in recta eadem, et quidem illa, in qua planum horologii per planum horarium C secatur; nam f, q, et Ω in planum fqſ, et f, q', et Ω in planum fſ'q' cadunt; per f, q et Ω vero planum determinatur, et quidem illud quod per f, q' et Ω determinatur; itaque ſ, et ſ' quoque in illud cadit simul cum centro f; est vero hoc planum horarium; adeoque fΩ in hoc quoque planum horarium caderet (contra hyp).

Schol. 2. Axis autem non ipse solum, sed et punctum quodvis ejus, index esse potest; si nempe stylus cujusvis formae (sive centro fixus, sive fulcris insistens, sive Lris) in eo terminetur; atque nonnisi extremitas umbrae ad lineam horariam appellens spectetur. Ex gr. si axis centro f fixus sit fℑ, et ex ℑ demittatur ad planum horologii Lris ℑi; dum umbra ipsius fℑ lineam horariam teget, manifesto etsi nonnisi punctum opacum ℑ relinquatur, umbra hujus quoque in eadem linea erit.

Atque hinc si nonnisi hoc punctum opacum ℑ cogitetur, disparente terra opaca: quemvis circulum parallelum C descripserit sol tempore 24 horarum; orientur coni ad apicem ℑ verticales, quorum superior circulo C insistet, latera radiis solis praebentibus, inferior autem fit per radiorum ad 𝔍 lucentium, continuationem umbrosam. Si vero sol infra aequatorem in circulo ad eandam declinationem versetur: fiet conus superior umbrosus, et inferior luminosus. Itaque si per planum P horologii per centrum 𝔣 positum secetur conus umbrosus dictus: sectio conica erit; atque umbrae extremitas in sectione lineae horariae cum sectione conica dicta erit, pro hora lineae horariae respondente; nam umbra puncti in superficie coni est, adeoque quum pro illa hora, etiam in linea horaria sit; erit ibi ubi linea horaria conum secat; nempe quum linea in plano conum secante sit, erit in puncto sectionis coni cum linea horaria communi. Itaque quum pro quavis alia declinatione solis, alius conus generetur; si saltem pro quavis declinatione solis, dum in signum aliquod eclipticae ingreditur, sectio coni dicta construatur, cuivis sectionum conicarum istarum adscribi signum illud poterit; indicabitque extremitas umbrae ad quampiam earum appellens, solem in signo adscripto versari.

Erit vero sectio ista parabola vel ellipsis, aut hyperbola, prouti n angulus coni aequalis, minor vel majór ipso m fuerit (p. 223 . . .).

Sit exgr. (Fig 229) 𝔣𝔔 pars axeos, 𝔣 centrum terrae, et 𝔣q meridiana in horologio horizontali, adeoque a altitudo poli, 𝔓 polus mundi, sitque 𝔓𝔄𝔟 meridianus, atque sol in 𝔄; erit 𝔄𝔠 declinatio; quae dicatur d; eritque angulus coni nempe $n = 2(R-d)$; nempe quoad immanem solis distantiam, apex coni sive in 𝔔 sive in 𝔣 accipiatur, nullum quoad sensus discrimen est; in $\triangle$lo 𝔣𝔔q autem ex a altitudine poli, et angulo $\frac{1}{2}n$ atque latere fΩ, innotescit Ωq, quod (p.223--) c dicebatur; et pariter m innotescit, quum externus summae internorum a et $\frac{1}{2}n$ aequalis sit; itaque sectio conica pro illa solis declinatione construi poterit; et pariter pro quavis declinatione alia. Patet vero angulum coni minimum pro maxima declinatione esse, atque redeunte sole ad aequatorem, duobus rectis quam propissime ire, et conum ad aequatorem in planum hujus mutari: atque numeris in calculum inductis facile patet, apud nos pro horologio horizontali, pro quavis declinatione solis (excepto dum ad aequatorem o fit) angulum $m<n$ esse, adeoque hyperbolam describi; itaque sole oriente ad dextram, et occidente ad sinistram, umbram quoad sensus ad asymptotos appellere, et tempus ortus occasusque tempore solis in illo signo versantis indicare.

Schol. 3. Si tamen nonnisi signa in quibus sol versatur, ex umbra puncti Ω tempore meridiei cognoscere lubeat, (quod *Analemma signiferum* dicitur): sit horologium horizontale, fΩ sit stylus, et fm sit meridiana (Fig 230); sitque sole (dum in certo signo est) in meridianum appellente umbra puncti Ω in ſ, atque declinatio solis sit tum d; in △lo fΩſ, latus fΩ datum est, ∧ſfΩ est altitudo poli, et alter angulus adjacens nempe fΩſ est $=\text{R}-d$; namque angulus hic (ut in praec) insensibiliter differt ab eo, qui ad centrum f est; hujus autem quantitas est distantia solis a polo. Itaque fſ innotescit, sive per constructionem, sive per calculum. Ita pro quibusvis declinationibus solis, ejusmodi puncta determinari, atque signa in quibus sol tunc versatur, adscribi possunt. Et idem ad alias lineas horarias quoque applicari potest.

Schol. 4. Quum sol in ecliptica in ellipsi moveri videatur, at praeterea jam acceleretur jam retardetur; adeoque recta ascensio ejus (via ad aequatorem reducta) inaequabiliter crescat, decrescatque; et tempus ab una meridie ad proximam, jam major jam minor sit; et nonnisi tempus ab una culminatione stellae fixae ad proximam sit, propter uniformem terrae motum circa axem, semper idem; sol vero ab ea fixa cum qua simul in meridiano erat, contra motum diurnum orientem versus recedens, adhuc tempore indigeat, donec in meridianum appellat, adeoque dies solaris sidereo longior sit, sed nec dies solares veri inter se aequales sint: solem aliquem medium fingere visum est, qui recta ascensione aequabiliter crescente; tempore cujusvis anni, uti verus sol ad aequatorem reductus, totum circulum percurrat. Vocatur *tempus* sole hoc fictitio duce determinatum, *medium*, quod ad *tempus solare verum*, imo et ad *tempus sidereum*, sive quodvis horum ad aliud, reduci potest. Horologia vero solem medium sequuntur; itaque si quis suum, ex gr. tempore meridiei, horologio solari convenienter dirigere voluerit, nosse debet, quaenam sit pro illa die differentia inter meridiem solis medii et veri, quae saepe etiam ad quadrantem exsurgit. Computata haec pro annis quibusvis in Ephemeridibus exstant; quamvis adhucdum periodus nota haud sit, a cujus fine idem ordo incipiat; nec duae imagines dictae (nempe sol fictus et verus ad aequatorem reductus) quater per annum congruentes, semper plane tempore meridiei loci certi sibi invicem occurrant.

§. 2. Pro horologio meridionali construendo fit (Fig. 231) $\triangle$ sphaericum $\mathfrak{P}\mathfrak{Z}\mathfrak{q}$ ad zenith $\mathfrak{Z}$ rectangulum, ($\mathfrak{P}$ polum, $\mathfrak{f}$ centrum sphærae, adeoque $\mathfrak{f}\mathfrak{Z}$ verticalem, in qua planum meridianum $\mathfrak{P}\mathfrak{Z}$, et planum meridionale se mutuo secant, $\mathfrak{P}\mathfrak{q}$ vero circulum horarium denotante). Eritque A complementum altitudinis poli, adeoque altitudini aequatoris aequale: itaque ex angulo horario b et catheto A reperitur cathetus B angulo b oppositus, nempe angulus horarius in plano meridionali circulo horario $\mathfrak{P}\mathfrak{q}$ respondens; eritque (p. 252) $\tan B = \sin A . \tan b$; id est tangens arcus quaesiti erit, sinus altitudinis aequatoris (seu cosinus altitudinis poli) per tangentem anguli horarii multiplicatus.

Si vero planum meridionale declinet, ex gr. vertatur pars occidentalis versus austrum ad angulum d; fiet $\triangle$ sphaericum pariter $\mathfrak{P}\mathfrak{Z}\mathfrak{q}$, manente angulo horario b, et latere A, sed angulus $\mathfrak{P}\mathfrak{Z}\mathfrak{q}$ erit $=R+d$; unde e duobus angulis et latere quibus adjacent datis, prodit B. Ad orientem quoque idem est, nam $\sin(R+d) = \sin(R-d)$; quia $R+d+R-d=2R$.

Linea meridiana in plano meridionali autem est verticalis $\widetilde{\mathfrak{Z}\mathfrak{f}}$, et stylus ultra $\mathfrak{f}$ continuatus fit index superficiei australis; ubi lineae horariae pariter prodeunt, suntque manifesto continuationes priorum. Patet autem, apud nos in hujus horologii facie boreali nonnisi horas matutinas vespertinasque, atque in australi facie reliquas circa meridiem ostendi; neque in facie boreali meridiem monstrari, nisi distantia puncti zenith loci, ab aequatore minor sit maxima solis declinatione, idque non nisi eousque donec declinatio distantiae dictae aequalis fiat.

§. 3. Si horizontale declinet (Fig. 232), exgr. pars occidentalis vertatur circa meridianam ad angulum *d*, fiet △ sphaericum 𝔓𝔓″q′, in quo 𝔓𝔓″ altitudo poli, ∧ 𝔓″𝔓q′=*b*, angulus horarius in sphaera, et 𝔓″q′ est arcus quantitatem anguli horarii in plano horologii exprimentis; itaque quum angulus R+*d* sit, quem 𝔓𝔓″ cum 𝔓″q′ facit; e duobus angulis *b* et R+*d* cum latere adjacente datis, prodit 𝔓″q′.

Manet vero et hic linea meridiana immota.

Si declinans etiam inclinet; nempe vertatur circa ⊥rem ad meridianam, versus austrum, quo in casu *reclinans* dicitur: sit angulus reclinationis *d*; moveatur prius planum horologii horizontale circa ⊥rem ad meridianam, movebitur linea meridiana in plano meridiani; veniat 𝔓″ in 𝔓‴; et postea horologium hoc quasi horizontale pro altitudine poli 𝔓𝔓‴ constructum declinet, (nempe circa sectionem plani meridiani cum plano horologii hujus motum); prodibit (ut antea) angulus in plano horologii declinantis horarius quilibet posito *b* respondens.

Et pariter prodeunt lineae horariae in plano meridionali deinclinante; uti et in polari declinante aut deinclinante. In omnibus his autem, meridiana horologii est sectio plani horologii per planum illud facta, in quod ⊥res e duobus punctis styli ad planum horologii demissae cadunt.

§. 4. Methodus non solum generalis pro quovis plano exposita est (p. 261), sed pro horizontali quoque (utpote quod per totam diem collustratum usui maxime idoneum est) formula simplex data est ibidem: attamen pro iis qui taedium calculi fugiunt, et methodus constructionis exponenda est.

Fiat (Fig. 233) $\triangle\, \mathfrak{ABC}$ ad $\mathfrak{C}$ rectangulum, angulo *b* ad $\mathfrak{B}$ altitudini poli aequali; erit angulus *a* ad $\mathfrak{A}$ altitudo aequatoris. Fiatque (Fig. 234) centro $\mathfrak{C}$ radio $\mathfrak{CA}$ circulus, et hujus tangens ad $\mathfrak{A}$; atque dividatur quadrans $\mathfrak{A}\mathfrak{q}$ in 6 partes aequales, et ductis e centro $\mathfrak{C}$ per puncta divisionis rectis, quinque puncta $\mathfrak{b},\mathfrak{c},\mathfrak{d},\mathfrak{e},\mathfrak{f}$, in quibus tangens per rectas dictas secatur, notentur, atque ad, distantiis punctorum $\mathfrak{b},\mathfrak{c}$ - - - ab $\mathfrak{A}$, distantias aequales, ab $\mathfrak{A}$ ad dextram laevamque in $\mathfrak{DE}$ ad $\mathfrak{AB}$ $\perp$rem transferantur. (Fig. 233), atque ducantur ex $\mathfrak{B}$ rectae $\mathfrak{Ba},\mathfrak{Bb}$, - - $\mathfrak{Ba}',\mathfrak{Bb}'$ - -; erunt hae lineae horariae, si $\mathfrak{BA}$ in meridiana fuerit, et $\triangle\, \mathfrak{ABC}$ elevetur ad planum horologii horizontale $\perp$riter. Erit nempe $\mathfrak{BC}$ axi terrae parallela, et reliqua praeterquam quod (ex p. 262) pateant, inde etiam perspiciuntur; quod si planum per $\mathfrak{CA}$ ponatur $\perp$'riter ad planum $\mathfrak{ABC}$ (quod ad planum horologii $\perp$riter erigatur), erit illud plano aequatoris parallelum; itaque producto axe $\mathfrak{BC}$ (ad planum hoc $\perp$ri), erunt puncta $\mathfrak{A},\mathfrak{a},\mathfrak{b},\mathfrak{c}$ - - $\mathfrak{a}',\mathfrak{b}',\mathfrak{c}'$ - - umbrae horariae puncti $\mathfrak{C}$, adeoque rectae e centro ad puncta haec ductae, lineae horariae erunt.

Patet vero axem $\mathfrak{BC}$ ita ponendum esse, ut $\mathfrak{C}$ septemtrionem respiciat; atque ad $\mathfrak{A}$ numerum XII, XI ad $\mathfrak{a}$, X ad $\mathfrak{b}$ - - - I ad $\mathfrak{a}'$, II ad $\mathfrak{b}'$ - - - scribendum esse.

Schol. 1. Est autem hic *a* altitudo aequatoris; et producto axe $\mathfrak{BC}$ $\perp$ri, ad planum dictum ipsi $\mathfrak{AC}$, ad $\mathfrak{ACB}$ $\perp$riter impositum, fit in hoc plano horologium aequinoctiale, in quo anguli horarii omnes aequales sunt.

Atque si planum hoc circa 𝔅 pro quovis loco ad angulum *a* altitudini aequatoris aequalem elevetur; stylus ex ℭ ad planum hoc (tanquam planum aequatori parallelum) Lris, erit axi terrae parallelus, et horas pro iisdem lineis horariis rite monstrabit. Si igitur plurium locorum altitudines aequatoris annotatae fuerint, et ope arcus cujuspiam elevatio ista plani horologii perfici, atque 𝔅𝔄 ope acus magneticae adnexae (data declinatione ejus), in meridianum locari queat; erit horologium quoad loca annotata *aequinoctiale universale*.

Et pariter quoad loca quotvis, horologium horizontale universale construi potest. Nempe ut dictum (p. 278) est, si e puncto quovis axeos ex gr. ex 𝔭 demittatur Lris 𝔭𝔭′ ad meridianam; stylus 𝔭𝔭′ index esse poterit; si nonnisi extremitas umbrae ejus ad lineam horariam appellens spectetur. Si igitur pro variis altitudinibus poli, puncta horaria umbræ puncti 𝔭 construantur, et puncta quaevis eidem horae numero respondentia lineis connectantur, adscriptis ad extremitates lineae numeris horariis, atque etiam quaevis puncta omnium diei horarum eidem altitudini poli respondentium lineis combinentur, adscripta altitudine poli iis respondente; et simul index ita adaptatus fuerit, ut ad quamvis illarum poli alitudinum, pro quibus puncta dicta constructa sunt, elevari possit; e dictis patet, horas rite monstrari.

Imo horologium solare etiam splendente luna inservire potest, si aetas lunae nota fuerit: nempe dum luna in conjunctione est. si pro sole exstincto luna splendere posset, index horas sine errore sensibili monstraret; quum vero luna quovis die orientem versus progrediens circiter tribus horae quadrantibus tardius in meridianum appellat, patet aetatem lunae per hoc multiplicari debere; et tempus istud numero horae per indicem splendente luna monstratae addendum esse. Possunt hinc etiam lunaria horologia construi, quae sine isto calculo horam ostendant; sed aetatem lunae, semper notam esse oportet.

Solent etiam annuli portatiles varii construi, in quibus non umbra puncti, sed lux per foraminulum inmissa monstrat horam: unum tantum commemorasse sufficiat, quum e dictis varia excogitare facile sit.

Sit 𝔓𝔭 axis (Fig. 235), et annulus 𝔓𝔞𝔭 sit in meridiano, et 𝔄𝔞𝔭=90° (gradibus annotatis), atque annulus 𝔞𝔮𝔢 ita sit comparatus, ut dum hora quaeritur, Lris ad priorem fieri possit: si totum ex 𝔄 suspendatur, (quod ope cursoris rite instituti, ad quotumvis gradum ab 𝔞 fieri potest): erit 𝔄𝔣 in verticali, atque arcus 𝔞𝔄 distantia puncti zenith ab aequatore 𝔞𝔮𝔢, altitudini poli aequalis. Si jam sol in aequatore versetur, et ex gr. in 𝔞 sit, foramen per centrum 𝔣 (in axe 𝔓𝔭 circa extremitates 𝔓 et 𝔭 vertibilis) radium solis ad 𝔢 transmittet; et annulo aequatorem repraesentante, in 24 partes aequales (a puncto meridiei incipiendo) diviso, horae rite monstrabuntur; si vero sol ex gr. in 𝔖 veniat, adeoque declinatio ejus borealis fiat 𝔞𝔰; quaerendum est illud axeos punctum 𝔦, ubi per foramen transmissus solis radius, in eodem circulo horario versantis, eodem ut prius, ex gr. in 𝔢 cadat. Hoc autem facile fit, nam propter solis distantiam, rectae 𝔣𝔖 et 𝔢𝔖 ad sensum parallelae sunt, adeoque $\wedge$ 𝔣𝔢𝔰 aequalis angulo declinationis solis est: atque hinc 𝔣𝔦 est tangens anguli declinationis solis pro radio *fe*, quia $\wedge efi = R$ est.

Ita puncta pro declinatione solis, cuivis signo in quo versatur, respondente tale punctum reperiri, atque cuivis signa respondentia adscribi possunt; imo ope cursoris, in quo foramen est, in crena laminae circa 𝔓𝔭 ad solem vertibilis, potest foramen ad puncta prius dicta duci, ut tempore solis in respondente signo existentis, radius per foramen transmissus in punctum aequatoris *e* cadat; patetque pro sole in eodem circulo parallelo versante, adeoque declinatione plane eadem, aequatore in 24 partes aequales diviso, idem de reliquis horis valere; nempe *e* meridiem monstraret, si tam 𝔓𝔄𝔭 meridianum, quam *aqe* aequatorem repræsentans pellucidi essent.

Schol. Quamvis ad qualevis planum, sive parallelum axi fuerit, sive non, dictum sit, quomodo horologium construi queat: attamen haud supervacuum est, modum referre, quo ad qualemvis superficiem practice horologium construi queat. Axem ante omnia necesse est, in aliquo horologio ex gr. horizontali, figere, atque horologio isto (debito situ) admoto, per prolongationem axeos, situm styli in horologio construendo procurare. Atque tum sufficit quocunque die, juxta aliquod horologium solare rite factum, umbras quavis hora notare: nempe hic stylus axis terrae est (non ut p. 277), atque lineae horariae, sectiones plani per axem eundem et solem determinati, cum superficie horologii sunt.

Et pariter patet; quod si horologium rite paratum horologio construendo admoveatur, et axeos continuatio secet ex gr. in *q* planum horologii construendi, atque per lineas horarias prioris, secetur hoc in a, b ---; fiant horologii exstruendi lineae horariae, qa, qb ---.

DE CHRONOLOGIA.

Tractat haec *de modo subdivisionis temporis in vita civili.* Inserviunt autem praecipue duo luminaria: nempe *sol*, quo tanquam indice monstrat manus aeterni in circulo coelestis horologii, 12 mensium signa adscripta; et *luna* noctu hujus vices gerens.

Accipitur vero tempus obsolutum in anni circulo (quasi aeternitatis annulo) post revolutiones quotvis semper versus futurum progrediens. *Locus relativus* temporis sub quo aliquid evenit autem, in isto fluentis temporis alveo, est distantia temporis a *certo puncto fixo* (Fig. 236) stellula insignito, sub quo phaenomenon aliquod in coelis aut terris contigit, a quo, quasi principio (ob certas rationes) fluxum temporis considerare libet. Et si nonnisi locus relativus in alveo dicto consideretur, atque tota peripheria P dicatur, et lineae versus futurum +ve, retrorsum autem —ve accipiantur; (pro n integro) prodit idem, sive $nP+s$ sive $s-nP$, et sive $-s-nP$ sive $-s+nP$ fuerit.

Subdividitur autem *tempus in vita* civili, in *annos solares*, quorum centum efficiunt *seculum*; annusque dividitur in *menses*, et *hepdomadas*: hepdomadae in dies naturales, qui nomina ab astrologia (Gentilium) sortiuntur, quae Astronomiam tanquam soror adulterina haud pridem deseruit; dicunturque lingva ecclesiastica, *dies dominica*, *feria prima*, *feria secunda* &c. Cuivis horae nempe, planetarum systematis Ptolemaici, uti se invicem in eo excipiunt, aliquam praesidere crediderunt; qui quum numero septem sint, per 24 horas ter decurrendo, horam diei sequentis primam 4tus incipiebat; et totum diem ab hoc denominaverunt. *Ordo Ptolemaicus* vero hoc versu retinetur; *Post SIM SVM sequitur, pallida Luna subest;* nempe SIM denotat *Saturnum, Jovem* et *Martem*, SVM vero *solem*, *Venerem* et *Mercurium*. Idem ordo regit vulgi creduli annos. Notandum autem *feriam* I magis *Diem Dom.* et *feriam* VII diem *Sabbati* dici.

Dies dividuntur in horas: quae vario modo a variis gentibus numerantur; imo et apud nos aliter in vita civili, et aliter ab Astronomis numerantur: nempe hi a meridie incipiendo 24 horas numerant usque ad meridiem proximam; et quidem ita ut prima 12ma 1mae Januarii in vita civili, sit Astronomis 24ta 31mae Decembris.

Dividuntur porro dies, in *festos* et communes: festa item dividuntur in *fixa* seu *immobilia*, quae semper in dies eorundem mensium eosdem (quoad numerum diei in mense) cadunt; uti ex gr. *Festum nat. Christi* 25tae Xbris, *Epiphania* 6tae Januarii &c affixa manent. *Festa mobilia* autem omnia a *Paschate* dependent: *Pentecoste* a Paschatis prima die, (inclusive) 50ma die incipit, adeoque quia (ut dicetur) Pascha semper die solis incipit, et primus dies Pentecostes in diem solis cadit; post septimanam Pentecostes sequentem *Dominicae Trinitatis* numerantur, usque ad 4 Dominicas *Adventus* Festum nat. Christi praecedentes. Pascha autem praeceditur 6 Septimanis Jejuniorum, et antea dies Mercurii proximus *Dies Cinerum* est; atque inde usque ad *Epiphaniam* (nempe 6tam Januarii) *Bachanalia* durant.

Distingvuntur praeterea dies anni per literas; nempe cujusvis mensis dies $n$tus (pro quovis n) litera certa semper eadem insignitur; (Fig. 237) cujusvis anni dies prima, adeoque 1ma Januarii litera *a* gaudet, secundae litera *b* datur, et septem literae *a*, *b*, *c*, *d*, *e*, *f*, *g*, in circulum positae, uti se invicem in gyrum porro eundo excipiunt, diebus se invicem excipientibus tribuuntur; ea cum restrictione, quod in anno bissextili (de quo paulo inferius), 23tia et 24ta Februarii litera eadem gaudeant, quasi unus dies esset; ut *litera mensis cujusvis, diei quotaevis maneat.* Litera vero quae in anno quopiam diei *Dominicae* respondet, *litera Dominicalis* audit. Atque hinc methodus prodibit, cujusvis anni mensis cujusvis quotamvis diem, qualisnam septimanae dies fuerit; atque literam dominicalem anni cujusvis, tam Julianam quam Gregorianam, cyclosque earum reperiendi.

Quum vero in vita civili, nec anni principium, nec alii termini juxta calculum astronomicum, per minuta secunda applicari possit; *regula* est : ut *fractiones ubique neglectae, dum integrum effecerint, tunc addantur*; atque hoc modo, aliisque artificiis adhibitis, *omnia ita conpensentur, ut in alveo fluentis temporis* (p. 288) *dicto, tam punctum fixum* *, *quam alia necessaria in perpetuum maneant, ita ut quam minimum oscillando omnia locum tueantur.*

Determinatum vero pro puncto hoc fixo tempus illud est, quo *Concilium primum* statim dicendum celebratum est.

Itaque 1mo de anni quantitate, atque modo, quo *principium anni in puncto* * *fixum maneat.*

2do. De characteribus dierum chronologicis; quomodo nempe septimanae dies, literas mutent, et quibus cyclis idem redeat.

3tio. Quum omnia *Festa mobilia* a *Paschate* dependeant; modus quo *Pascha* tam *Julianum* quam *Gregorianum* supputari in secula possit, imo etiam *cyclus Paschatum* exponetur.

Fundamentum supputationis Paschatis est *Decretum Concilii primi Niceae* anno Christi 325 celebrati; cujus (etsi non verbis iisdem) sensus sequens est: *Paschatis dies prima, celebretur die Dominica prima, post plenilunium aut in diem aequinoctii aut post eum proxime cadens.* At aequinoctium vernale tunc 21ma Martii fuit, et huic affixum putabatur. Res itaque eo redit, ut *Pascha celebretur dominica prima, post plenilunium post* 20mam *Martii primum.*

De modo plenilunia computandi etiam statutum est: de quo inferius.

Ratio antem hujus Decreti est duplex: 1ma ut a Christianis tardius celebretur Pascha, quam a Judaeis in ipso plenilunio vernali celebrantibus. 2do quod tamen et Christianis plenilunio paschali, quod et lugubri *magnaque die* simul cum Paschate Judæorum imminebat, proxima die dominica, celebrare Pascha conveniat. Praetereaque dum hominum summus amator, ab iis cruci affixus, inter cruentorum vulnerum dolores, *Patrem* suum rogando, ut irridentibus ob inscitiam eorum ignosceret, in extremas umbras mergebatur; conticentibus angelorum choris, in aeternitatis quasi interruptae silentio, nonnisi inferni undarum murmur erat: et quum *Sanctissimus* in cruce expalluit, moesta coeli oculum caligo obduxit, lacryma paterna quasi delapsa. Neque eclipsis haec solis astronomica fuit, quum luna prope ad oppositionem cum sole erat: et hujus quoque memoriam conservare libuit.

§. 1. Annus Romuleus erat 10 mensium solarium, a *Martio* incipiens, tot diebus post Decembrem additis (teste *Macrobio*) donec coelum terraque ad statum priorem redierit. Numa 12 mensibus lunaribus (de quibus inferius) dies intercalandos Sacerdotibus commisit; qui partim propter solutiones certis terminis præstandas a foeneratoribus corrupti, partim ex ignorantia, 67 dies neglexerant; quos *Julius Caesar* (a quo *Calendarium Julianum* nomen gerit) svadente *Sosigene* Astronomo, anno suae reformationis addidit, nempe 45to ante Christum; qui e 445 diebus compositus *magnus annus confusionis* dictus est. Statuitque praeterea Caesar svasu *Sosigenis*, annum solarem 365 dierum et 6 horarum aestimantis; ut hae sex horae quovis quadriennio unum diem efficientes, (in tribus annis neglectae), adderentur post 23tiam Februarii. Clarum est, quod posita illa anni solaris magnitudine, effluxo primo anno, sequentis 1ma Januarii 6 horis citius dicatur, adeoque effluxis 4 annis, 5ti initium 24 horis maturius diceretur, nisi dies adhuc expectaretur. Potuisset quidem tum December 32 dies habere; sed ob sacra certa peragenda libuit diem hanc post 23tiam Febr. ponere; unde etiam *dies* haec (e *Calend. Rom.*) *bissextilis*, atque inde et *annus bissextilis* vocatur.

At quum *Sosigenes* annum 11 minutis (omissis secundis) justo majorem acceperit: quibusvis 4 annis, Juliani 4.11 minutis justo serius incipiunt annum; quod effuxis 131 annis circiter diem efficit; adeoque 131 anni toties decurrere possunt, ut Juliani 1mam Januarii media aestate dicant, et demum 1ma Januarii Juliana quoque ad punctum fixum * redeat.

Error iste ab anno 325 usque ad annum 1600 computatus a *Gregorio Pontifice* (svasu Astronomi *Aloysii Lilii*), ad decem dies (aliquot tantum horarum errore). exsurrexerat; adeoque tum 1ma Januarii, et etiam 4ta 8bris (*dies reformationis Calendarii*) 10 diebus justo serius dicebatur; quapropter Gregorius 4tam 8bris 14 esse jussit; nempe ab anno 325 recte numerando, 14ta fuisset; at jam aequinoctium vernale, quod anno 325, 21ma Martii erat, anno 1582 in 11mam cecidit.

Porro ne error iste rediret; cavit statuendo: ut post annum 1600, quibusvis 4 seculis, anni priora tria secula terminantes, qui alioquin bissextiles essent, communes maneant; et nonnisi annus 4tum seculum terminans bissextilis maneat, quosvis ceteros 4tos annos bissextiles retinendo. Nimirum $400 . 11 = 3^d\ 1^h\ 20'$; et ex hoc 3 dies, quibus posita anni Juliani falsa quantitate nimis multum expectaretur, ad incipiendum seculum 5tum, omittuntur reformatione Gregoriana; 1 hora et 20 minuta vero, dum in diem excrescent, a posteris addetur.

Sunt autem hoc pacto 1700, 1800, 1900 communes, 2000 bissextilis: atque quivis annus Christi $n$tus Julianus bissextilis est, si $\frac{n}{4}$ quotum integrum sine residuo det; nempe et a reformatione Juliana usque ad Christum (excluso reformationis anno) $44 = 4 . 11$ defluxerunt, adeoque et is, ad cujus finem Christus natus est, bissextilis fuit; juxta reformationem Gregorianam quoque pariter annus n dictus, bissextilis sub eadem conditione est, si non sit seculum tale *m*tum terminans, ut *m* per 4 exacte dividi queat, uti *n*.

Numerus dierum, quo Juliani serius incipiunt annum, vocatur *aequatio solis*, quae dicatur *s*; estque (pro N denotante numerum seculorum ab Anno nativitatis Christi effluxorum, omisso quod supra integrum seclorum numerum est), $s = \frac{1+3(N-3)}{4}$ sine residuo.

Nam decem dies, quibus annus 1600 nimis sero dictus fuisset, ita impertiri inter priora secula possunt, ut seculo 3 attribuatur 1mus, et quorumvis sequentium 4 seculorum tribus posterioribus tres dies dentur, nempe cuivis trium unus; ut respondeant

seculis	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16,
dies falsi	1	0	1	1	1	0	1	1	1	0	1	1	1	0

uti postea seculis	17	18	19	20	21	22	23	24---
dies falso additi	1	1	1	0	1	1	1	0---

Si igitur numerus seculi sit N, erit summa dierum a Julianis additorum, 1 (seculo 3 competens), addito eo quod seculis N—3 appertinet. Si N—3 per 4 exacte dividi queat, prodibit pro N—3 seculis $\frac{3.(N-3)}{4}$; at si 1 maneat, prodit $\frac{3}{4}$ praeter integrum, quod omittendum erit, quia tum seculum unum supra multiplum 4 seculorum dictorum est, et huic inferius *o* adscriptum est, adeoque in hoc seculo *s* non augetur. Si 2 maneat, tum $\frac{3(N-3)}{4}$ dabit $\frac{6}{4} = 1 + \frac{1}{2}$, atque seculo postremo unus dies conveniet, fractione omissa. Si 3 manserit ex $\frac{N-3}{4}$; tum $\frac{3(N-3)}{4}$ (supra quotum integrum ex $\frac{N-3}{4}$) dabit $\frac{9}{4}$, atque usque ad seculum tertium post seculorum quaternarium praecedentem, duo dies accedent; quod per $\frac{9}{4}$ (omisso $\frac{1}{4}$) exhibetur.

§. 2. *Quaelibet dies mensis cujusvis quovis anno, tam in Calendario Juliano quam Gregoriano, litera eadem perpetua gaudet*; nec anno bissextili hoc mutatur, quia tum 23tiae et 24tae Februarii (nempe diei additæ) litera eadem relicta est. Atque hinc, quum (p. 290) 1ma Januarii literam *a* habeat, atque 7 literae *a*, *b*, *c*, *d*, *e*, *f*, *g* in gyrum eundo usque ad finem anni cujusvis semet excipiant: cujusvis mensis quotaevis diei litera reperitur. Ex gr. si quaeratur 3tiae Martii litera: addantur Januarii dies 31, Februarii dies 28 (ob rationem plane dictam non 29 etsi annus bissextilis fuerit), demum Martii dies 3; atque dividatur summa per 7, et si residuum *m* sit, erit ab a antrorsum numerando *m*ta litera quaesita; nempe $31+28+3=62$, et $\frac{62}{7}$ dat residuum 6, atque litera ab *a* antrorsum in circulo est *f* litera 3tiae Martii. Nempe quoties in numero dierum a 1ma Jan. (inclusive) continetur 7, toties decurrunt literae ab *a* usque ad *g* (inclusive), et residui dies item ab *a* incipiendo literas nanciscuntur.

Si vero quaeratur anno Christi *n*to certa dies ex gr. 3tiae Martii, qualisnam dies septimanae fuerit: facile respondetur, si litera diei dominicalis illius anni nota sit; nempe si ex gr. haec *g* fuerit, *f* dies *Sabbati* erit.

At quaeritur *regula literam dominicalem* anni cujusvis uti *reperiendi*.

§. 3. Annus communis constat e 365 diebus, adeoque 52 septimanis et una die. Hinc quocunque diei nomine incipiat annus communis, eodem desinet; nempe 7 nomina 52ies decurrent. atque item primum nomen redibit, die annum terminante; ex gr. si 1ma Januarii dies *Jovis* sit, annus idem si communis sit, die *Jovis* terminabitur; at si bissextilis fuerit, dies ultimus *Veneris* erit; nam tum annus ex 7.52+2 diebus constat, atque die addito nonnisi literam praecedentis 23tiae Febr. retinente nomina dierum septimanae, nullo discrimine fluunt.

Hinc autem sequitur; *literam dominicalem post quemvis annum communem una litera recedere, post bissextilem autem duabus.* Nempe si *lit. Dom.* in anno communi fuerit *g*, sit ex gr. 1ma Januarii dies *Lunae*; haec litera *a* gaudet, sequentis anni 1ma dies pariter *a*, sed dies *Martis* erit.

Si igitur duo circuli congruentes C et C′ fuerint (Fig. 238), et inferiori C adscribantur nomina dierum septimanae, superiori C′ vero literae illis certo anno appertinentes; atque concipiatur inferior C moveri retrorsum sub superiore C′; die *Lunae* uno regrediente, dies *Martis* quae sub *b* erat. veniet sub *a*; atque simul dies *Dom.* quoque in circulo sub literam retrorsum sequentem veniet.

Si vero annus bissextilis sit; terminabitur annus, si ex gr. die *Lunae* inceperit, die *Martis*, et sequens die *Mercurii* incipiet: itaque circulo C retrorsum sub C′ moto, dies *Mercu-*

rii qui sub *c* erat, veniet sub *a*; adeoque dies *Dom.* sub 3tiam literam retrorsum movebitur, nempe duabus recedet.

Sed anno bissextili et post 23tiam Febr. litera retrorsum sequens fiet *dominicalis*: nam 23tia (et 24ta quoque in anno bissextili) litera *e* gaudet; at si ex gr. anno bissextili 23tia Febr. fuerit dies *Veneris*, 24ta pariter *e*, dies *Sabbati* erit; itaque pariter concipi circulus C retrorsum moveri potest, ut *Sabbatum* sub *e* veniat; adeoque *dies dominica*, quae ante 23tiam Febr. *g* erat, post 23tiam *f* fiet; competentque anno illi duae dominicales *f*, *g*, quarum prior post 23tiam accipienda est.

§. 4. *Dies reformationis Gregorianae* est anni 1582 4ta 8bris, quae semper litera *d* gaudet; fuitque tum *litera Dom. g*; adeoque dies *Jovis* erat: at vero (ut dictum est) diem eandem 14tam 8bris esse jussit, atque ut quotavis mensis, cujuscunque literam retineat, progrediendo a 4ta ex *d* usque ad 14tam, quasi dies illi reipsa praeteriissent, dies eadem literam *g* nacta est; uti hoc schema ostendit.

4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14
d e f g a b c d e f g; adeoque *litera Dom.* in *c* mutata est; nempe dies Jovis literam *g* acquisivit; sed praeterea et annis secularibus Gregorio non bissextilibus quoque mutationem induci dicetur.

§. 5. *Cyclus Solis Julianus* dicitur numerus annorum, quibus effluxis, literae diei solis eodem plane ordine sequuntur. Quid *cyclus solis Gregorianus* sit, pariter patet.

Cyclus solis Julianus est 28 annorum; atque primus cyclus, 9 annis ante Christum incipere ponitur, adeoque anno bissextili; attribuuntur vero huic literae dominicales *f,g*. Unde e dictis liquet, quovis quadriennio 5 literas decurrere retrorsum in circulo, nempe anno illo fuit *fg*, postea *e*, tum *d*, dein *c*, et 5to ante Christum item bissextili fuit *ab* &c. Hinc autem 7 quadriennis 7.5 literae decurrent retrorsum; quod tantum est, ac si 7 literae 5ies decurrerent, sequetur itaque retrorsum plane ea quae prius erat, nempe *g* cui *f* addi debet, quia annus 29nus pariter bissextilis est, quum annus inter 28 primus bissextilis fuerit et 7 quadrienniis defluxis, cum anno 29no quadriennium novum incipiat.

Cyclus solis Gregorianus autem est 8 seculorum: namque anno reformationis 1582, facta est *c* lit. dominicalis; unde pro anno bissextili 1600 fit lit. Dom. *ba*; atque hinc quovis quadriennio ab anno 1600 (inclusive) usque ad annum 2400 (exclusive) id est 2399 (inclusive), defluunt retrorsum eundo 5 literae, exceptis quadrieniis ultimis seculorum 17, 18, 19, 21, 22, 23, ubi propter annum juxta Gregorium haud bissextilem, annus seculi ultimus nonnisi una litera *Dom.* gaudet; nempe per seculum 17 intelligendo tempus effluxum ab initio anni 1700 usque ad finem anni 1799 (inclusive); ita cetera intelligantur. Decurrent igitur ab anno 1600 (inclusive), usque ad annum 2399 (inclusive), 8.25 quadriennia, adeoque defluunt 5 literae a *b* inclusive incipiendo; et semper retrorsum in circulo eundo, 8.25 vicibus, nonnisi sex literis propter 6 secula dicta subtrahendis. Est vero 8.25.5—6=994=142.7; itaque septem literae 142ies decurrent a *b* (inclusive) incipiendo, et retrorsum eundo in circulo: adeoque annus 2399 litera *c* gaudebit, et quidem sola, quum bissextilis non sit; i-itaque anni 2400 dies dominica ante 23tiam Febr. *b* erit, postea vero quum hic annus bissextilis sit, lit. Dom. *a* erit, itaque plane uti anno 1600. Et patet casum eundem redire, a 2400 (inclusive) usque ad 3200 (exclusive) et ita porro.

§. 6. ***Lit. Dom. Juliana*** pro anno Christi *n*to est 10— res $\dfrac{\left(n+\frac{n}{4}\text{ sine res.}\right.}{7}$ in circulo ab *a* antrorsum numerando: id est *n* per 4 diviso, tantum pars quoti integra accipitur, at post divisionem per 7 nonnisi residuum accipiendum est.

Nam cyclus solis incipit 9 ante Christum natum annis, ita ut ab initio usque ad nativitatem Christi 9 anni effluxerint; fuitque annus is in cyclo primus, bissextilis, literis *Dom. f, g* gaudens, adeoque et annus ultimus Veteris Testamenti bissextilis erat; et quadriennium novum cum nativitate Christi incepit; fuitque (Fig 239) anno Novi Testamenti primo, *lit. Dom. b*. Consideretur anno bissextili semper *litera Dom.* parti anni posteriori respondens (*quoad et quoad formulam* tenendum est). Numeretur prius a *b* incipiendo (inclusive) in circulo retrorsum eundo (Fig 240) usque ad *literam Dom.* quaesitam (item inclusive, et si duae fuerint in anno, posteriorem intelligendo. Erit anno postremo quadriennii 1mi a nativit. Christi incipiendo litera quaesita *e*; itaque $(1.4+1)$ta a *b* retrorsum: atque si anno *m*ti quadriennii postremo sit lit. Dom. $(m.4+m)$ta, erit quadriennii $(m+1)$ti anno postremo *lit. Dom.* item a *b* incipiendo retrorsum $(4m+m+4+1)$ta; id est $((m+1)4+m+1)$ta. Si igitur annus Christi $n=\mu.4+\nu$ (pro μ, ν integris, et $\nu < 4$), erit *lit. Dom.* anno n respondens $(4\mu + \nu + \mu)$ta. Est autem $4\mu + \nu + \mu = n + \frac{n}{4}$ sine residuo, nam $n = 4\mu + \nu$, et $\mu = \frac{n - \nu}{4}$.

Est vero quaevis litera $q$ta (Fig.241) a b retrorsum, $(10 - q)$ta ab a antrorsum; nam sit $q = q' . 7 + q''$; per quodvis multiplum ipsius 7 reditur ad literam c ante b, unde item a b incipiendo numeratis q'' literis, remanent adhuc $7 - q''$ literae usque ad b (exclusive); itaque si ab a incipiendo antrorsum numeretur, erit litera quae a b incipiendo retrorsum q''ta erat, nunc ab a incipiendo antrorsum $(7 - q'' + 3)$ta, id est $(10 - q'')$ta; quia illis q'' literis quae remanserant, nunc addi b et *litera Dom.* atque a debet. Sit exgr. *lit. Dom. f*, erit haec a b retrorsum 4ta, manebunt literae $7 - 4 = 3$, et eadem ab a antrorsum $(10 - 4)$ta erit.

Quod vero divisione per 7 facta, nonnisi residuum accipi debeat, inde patet, quod ab a incipiendo, quotiescunque defluant 7 literæ, semper in g terminetur, atque item ex a porro antrorsum numeretur. Patet etiam hinc, formulam per

$$\mathrm{Res}\,\frac{\left(10 - \mathrm{res}\,\dfrac{n + \frac{n}{4}\text{ sine res}}{7}\right)}{7}$$

exprimi posse, et si hoc residuum o sit, literam *Dom.* g esse. *Litera Dom. Gregoriana* autem prodit ex Juliana; est nempe

$$\mathrm{Res}\,\frac{\left(4 + \frac{3(N-3)}{4}\text{ sine res} - \mathrm{res}\,\dfrac{n + \frac{n}{4}\text{ sine res}}{7}\right)}{7}$$

(denotante N seculi numerum, omisso excessu qui supra multiplum centenarii est). Namque anno 1582 lit. *Dom.* ex *g* ad 4tam nempe literam *c* (adeoque tribus) prosiliit; itaque nisi alia mutatio adveniret, a litera *Dom*, Juliana, semper tantum tres adhuc antrorsum numerari deberent. At vero quovis tali anno seculari, qui e bissextili communis fit, *litera Dom.* non duabus literis sed una tantum recedit; ex gr. si *b c* esset, tantum *c* manebit, adeoque dum hoc primo evenit anno 1700, lit. *Dom. Greg.* praeterquam quod tribus literis prosilierat, adhuc una prosiliet, nempe *litera Dom.* partis anni posterioris non recedet in *b*, sed in *c* (adeoque una litera porro) manebit. Fietque hoc pro quovis tali anno; itaque ipsi

$$10 - \text{res}\ \underbrace{\left(n + \frac{n}{4}\text{ sine res}\right.}_{7}$$ addi debet 3, et praeterea incrementum (p. 294) ipsius s post annum 1600, nempe $1 + \frac{3(N-3)}{4}$ sin res -10 addendum erit. Est autem

$$10 - \text{res}\ \underbrace{\left(n + \frac{n}{4}\text{ sine res}\right)}_{7} +$$

$$\left[1 + \frac{3(N-3)}{4}\text{ sine res } -10\right] + 3$$

$$= 4 + \frac{3(N-3)}{4}\text{ sine res} - \text{res}\ \underbrace{\left(n + \frac{n}{4}\text{ sine res}\right)}_{7}$$

§. 7. Superius (p. 291) dictum est, etiam regulam, qua *plenilunium*, quod in Decreto *Concilii Nicaeni Pascha* determinat, adeoque *Paschale* dicitur, computandum sit, determinatam esse. Nimirum nec aequinoctium vernale, nec plenilunium quod in hoc, aut postea proxime cadit, astronomice computatur: sed singulari sagacitate est certus *computus ecclesiasticus* stabilitus; quo juxta regulam superiorem (p. 290) fractionibus quae in usu civili incommodae essent, neglectis (donec in integrum excrescant), variis compensationibus, certisque oscillationibus, (quae aliquando etiam duos dies efficere possunt), ad ingentem tamen annorum seriem, tam novilunia quam plenilunia *Pasch.* exhibeantur.

Fundamento quidem et in Calendario Gregoriano, computus Julianus inservit: attamen erroribus hujus, certo modo dicendo correctis. Computatoqne novilunio tam in Calendario Juliano, quam in Gregoriano; in illo prodeunt *novilunia Juliana*, in hoc *Gregoriana* per totum annum; atque in utroque accipitur plenilunium 14ta die a novilunio (id est dum aetas lunae 14 dierum est); in illo *plenilunium Julianum*, in hoc *Gregorianum*.

Intelligitur autem per *novilunium* tempus conjunctionis lunae cum sole; et tempus ab una conjunctione ad proximam vocatur *mensis Synodicus*; estque hoc numero medio 29 dierum 12 hor. 44 min. *Mensis illuminationis* autem est ab apparitione novilunii ad proximam. Plures Gentes nocturnam istam lampadem sequendo, annos numerabant Excessus 12 mensium solarium, id est anni solaris, super 12 menses synodicos lunares (numero medio) est 10 dieram 21 hor. 11 min. Si igitur in initio 1mae Januarii novilunium fuerit; erit ad finem anni, lunae aetas 10 dierum 21 hor. 11 min. Dicitur aetas lunae in anni cujusdam initio *epacta anni* illius. Estque *epacta* 1mo *astronomica*, eaque *vera* aut *media*; 2do *Juliana*, et *Gregoriana*; de quibus jam dicendum venit.

Si cursus Lunae numerum medium dictum sequeretur perpetuo; tum ex unico dato facile computarentur anni cujusvis novilunia: at nullum corpus coeleste, quamvis vicinum exiguumque sit, Astronomos magis vexat: ratio hujus est perturbatio virium attractivarum solis, planetarumque (majorum exgr. Jovis) propius venientium, adeo ut nullus adhucdum cyclus Lunae absolutus notus sit, nempe tempus quo defluxo, novilunia, plenilunia, eclipsesque, plane ita se invicem excipiant.

Cyclus 19 *annorum* quidem jam pridem adhibitus est: nam si exgr. 1ma Januarii novilunium fuerit; post 19 annos 1ma Januarii item novilunium erit; sed circiter $\frac{3}{2}$ horis maturius, si nimirum anni Juliani accipiantur. Namque tempore 19 annorum eveniunt 235 lunationes; et si tempus dictum medium astsonomicum mensis synodici per 235 multiplicetur, prodit 19 annis Julianis minus.

Sunt tamen plures cycli majores computati, quo majores, eo exactiores.

Epacta Juliana anni β est aetas lunae in initio anni β. *Epacta Gregoriana* est aetas lunae in principio anni Gregoriani.

Dicatur illa e (in sequentibus), haec autem E.

Dantur praeterea etiam *epactae menstruae*: nempe numerus dierum epactae anni addendus, ut aetas lunae in initio mensis M prodeat; dicitur *epacta mensis* M.

Si vero *epacta annua* (sive Juliana sive Gregoriana) nomine generali $\mathfrak{E}$ dicatur; regula noviluni determinandi sequens posita est: ut si $\mathfrak{E}+m=30$ sit, novilunium primum in anno sit $(m+1)$ta Januarii, et quidem Julianum vel Gregorianum prouti $\mathfrak{E}$ est; abinde vero pro $e<28$, ita pro $E<25$, accipiantur 29 dies usque ad novilunium proximum, et postea quoque a novilunio ad novilunium usque ad finem anni semper hi numeri nempe 30 et 29 alternent; nempe errore circiter dimidii diei, dum pro una lunatione 30 dies accipiuntur, recompensato per id, quod proxima lunatio uno minor accipiatur; pro aliis casibus autem (nempe dum $e=28$, aut $e=o$ adeoque non <28; aut E non <25; adeoque ipsorum $o, 29, 28, 27, 26, 25$ alicui aequalis est; a primo anni novilunio, in utroque Calendario, numeri 30 et 29 alternent, sed a 30 non a 29 incipiendo. Accipitur autem in hoc computo dierum Februarii numerus 28, anno bissextili quoque.

At vero hoc pacto epactae Gregorianae 25 et 24, novilunium in aliquot mensibus ad eandem diem indicant; ex gr. Si $E=25$ sit, cadet novilunium primum in $(30-25+1)$tam Januarii, atque pro lunatione sequente 30 diebus acceptis, a 6ta Januarii inclusive, sequens dies novilunii, 5ta Febr. est; si vero $E=24$, cadet novilunium primum in $(30-24+1)$tam id est 7mam Januarii, et inde inclusive jam 29 dies pro lunatione accipiendo, dies sequens novilunii pariter 5ta Febr. erit. Patebit autem inferius *epactarum Gregorianarum cyclum* 19nalem numeris aureis respondentium, juxta secula certa lege variari: atque evenire, ut in *cyclo seculari*, (nempe cyclus per totum seculum manet), tam epacta Greg. 24, quam 25 adsit: tum vero ne illa inconvenientia fiat, ut novilunium ante finem cycli 19aalis in eandem mensis diem (imo pluribus vicibus) cadat; statutum est, ut in hoc casu pro $E=25$, accipiatur 26, adeoque novilunium una die maturius ponatur, quasi epacta 26 esset; neque enim fieri potest, ut tum etiam 26 in cyclo eodem adsit; nam quovis seculo, pro quovis numero aureo prodit E, addendo ipsi *e* quantitatem constantem *α* eandem per totum seculum (inferius determinandam); itaque ut 24, 25, 26 prodeant, tres epactas Julianas dari oporteret, quarum quaevis a sequente, unitate differat; non dari autem tales, percursis epactis Julianis statim exponendis patet.

§. 8. ***Epactae Julianae*** in cyclo 19nali, modo sequ. computatae sunt: epactae cujusvis anni additur 11; et si summa <30 fuerit, ipsa accipitur pro epacta anni sequentis; si summa dicta sit >30, tum id quo 30 exceditur, si vero summa $=30$, tum *o* accipitur; subtrahitur autem e summa dicta numerum 30 excedente 30, adeoque tempore lunationis majus, ideo; ut compensetur error propter 11 dies epactam mediam astronomicam superantes (p. 302).

Numerus (propter insignem ejus in determinatione ***Paschatis*** usum) ***aureus*** anni dictus est, qui indicat quotusnam cycli 19nalis sit annus is. Incipere ponitur cyclus 19nalis 1 anno ante Christum natum; nempe regrediendo ab aliquo dato, eo deventum est; idem ***de cyclo solis*** anno ante Christum 9no incipiente notandum est (p. 299).

Respondent autem juxta regulam dictam

Numeris aureis	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
Epactae Julianae	8	19	*o*	11	22	3	14	25	6	17	28
Numeris aureis	12	13	14	15	16	17	18	19			
Epactae Julianae	9	20	1	12	23	4	15	26			

Atque etiamsi epacta media astronomica, nempe 10 dies 21 horae 11 minuta, per singulos annos hujus cycli 19nalis ab epacta 1mi incipiendo,

20

semper porro addatur, et dum summa exaeqnat vel excedit tempus mensis synodici medium (nempe 29 dies 12 horas 44 minuta - -), residuum pro epacta accipiatur, quum interea una lunatio (calculo medio) defluat; atque hoc porro usque ad finem anni 19 continuetur; ut in circulo progrediendo ad novum cyclum, epacta 1mi anni in cyclo sequente prodeat: fere idem prodibit, si ut in praxi in casibus analogis fieri solet, dum horarum numerus dimidium diem superat (saltem exaequat) pro integro accipiatur, et si dimidio die minor sit, eo anno negligatur, interea vero semper cuivis summae in quam epacta media astronomica excrevit, 10 dies 21 horae 11 minuta addantur. Attamen quum cyclus hic 19nalis jam ad finem $312 + \frac{1}{2}$ annorum die aberret, epactæ per Gregorium modo mox dicendo correctae sunt.

Patet autem ex antea dictis, pro quovis numero aureo A post 3tium, esse epactam Julianam $e = \frac{\text{Res}\,(A-3)11}{30}$; nam anno 3 est epacta o, et postea quovis anno additur 11, et dum multiplum ipsins 11 numerum 30 superat, residuum accipitur; itaque si post 3 sit $m$tus annus, et $m.11$ sit $= \mu.30 + \nu$; atque $m$tus annus post 3 sit Mtus in cyclo; erit anni $m$ti post 3, id est (M—3)ti in cyclo epacta ν; namque sive simul eximatur multiplum ipsius 30 e multiplo ipsius 11, sive singillatim, residuum idem manet.

Pro numero aureo 3 quoque valet formula: nam tum $\frac{\text{Res}\,(A-3)11}{30} = o$, nam $\frac{o}{30}$ dat quotum o, et residuum o. Pro numero aureo 1 autem fit $\text{Res}\frac{(A-3)11}{30} = \text{Res}\frac{-22}{30} =$ -22; nam -22 per 30 divisum dat *o* pro quoto integro, et residuum -22; quod si ita intelligatur, ut novilunium 22 diebus intra anni initium cadat, hoc sensu epacta erit; atque ex eadem computari epacta sensu ✠vo quoque potest; si novilunium antium proxime praecedens, a priori 30 diebus distare ponatur, adeoque epacta ✠va fiat $30-22=8$, uti in cyclo numero aureo 1 respondet epacta 8.

Idem de numero aureo 2 patet; nempe $\text{Res}\frac{(2-3).11}{30}$ fit -11, adeoque novilunium primum intra anni initium 11 diebus distat; atque epacta ✠ve accepta est $30-11=19$

Est igitur epactas —vas quoque admittendo, $e = \text{Res}\frac{(A-3).11}{30}$, atque hoc pro anno Christi *n*to est $= \text{Res}\frac{11(\text{res}\frac{n+1}{19}-3)}{30}$; nam $A = \text{Res}\frac{n+1}{19}$; quia cyclus incipit anno 1 ante Christum; itaque, si $n+1$ multiplum ipsius 19 sit, annus Christi *n*tus erit 19nus in cyclo; si residuum ex gr. *m* det, post certum cyclorum numerum agetur annus novi cycli *m*tus.

§. 9. ***Epacta Gregoriana*** E autem ex Juliana *e* prodit; nempe (litera *s* ***aequationem solis*** (p. 294), et litera *l* ***aequationem lunae*** statim dicendam denotante), est $E = e + \text{Res}\frac{l-s}{30}$

$= \frac{\text{Res}\,(e+l-s)}{30}$, si in expressione priore, valor ✠vus ipsius e, in expressione posteriore vero, sive ✠vus sive —vus accipiatur; at si valor ipsius E —ve prodeat, addatur 30, et ✠va fit; per Res. autem intelligatur id quod manet supra quotum integrum. Formula ipsius s supra tradita est, l autem si N sensu (p. 294) sumatur, (pro $N < 18$) est $\frac{8(N-6)}{25}$ sine residuo, ea cum restrictione, ut si residuum >17 fuerit, quoto integro addatur 1; si vero $N > 18$, tum $l = 4 + \frac{8(N-18)}{25}$ sine residuo, addito 1 hic quoque si residuum >17. Ratio hujus est sequens.

I. Quum quovis cyclo 19 annorum elapso, novilunium tanto maturius eveniat, ut elapsis $312 + \frac{1}{2}$ annis (numero medio) novilunium una die maturius fiat, quam methodo Juliana indicatur: error iste juxta Gregorium ita corrigitur, ut tempus illud l quo novilunium ante initium anni Juliani per epactam datum, reipsa maturius evenit, epactae illius anni Juliani addatur, ut epacta Juliana correcta prodeat, fiatque $e+l$ ex e. Hinc vero epacta Gregoriana E prodit sic: sit (Fig 242) 𝔊 initium anni Greg, et 𝔍 initium Juliani; si novilunium in 𝔑 fuerit; erit manifesto novilunium in 𝔑 ante 𝔊, et si 𝔑𝔊 una lunatione fuerit minus, erit 𝔑𝔊 epacta Greg. $= e+l-s$; si vero 𝔑𝔊 una lunatione majus fuerit, dividitur 𝔑𝔊 per 30, et residuum accipitur pro epacta; nempe in hoc computo etsi plures lunationes fierent interea, omnes 30 dierum accipiuntur, quamvis post immania tempora hoc quoque errorem inducat.

Si vero novilunium in 𝔑′ cadat; tum 𝔑′𝔍 erit $e \dagger l$, et 𝔑′𝔍—s — est, atque epacta Greg. —ve, prodit =—𝔖𝔑′, quod si <30 diebus fuerit, (quod heic pro tempore unius lunationis sumitur); subtracto 𝔖𝔑′ ex 30 diebus, manebit tempus, quo novilunium ante initium anni Greg. proximum evenit; sit exgr. 𝔖𝔑′+𝔖𝔨=30 diebus, erit 𝔖𝔨 epacta Greg. Si vero sub 𝔖𝔑′plures lunationes evenerint, pariter dividendo per 30 dies, residuum accipietur; eritque hoc aut o, aut —vum; in casu primo novilunium in 𝔖 cadet, eritque $E=o$, in postremo pariter novilunium ipsi 𝔖 proximum inter initia anni Greg. et Jul. cadens indicabitur, et pariter ut prius, huic epactae Greg. negativae adduntur 30 dies, ut epacta +va prodeat.

II. Formula superior ipsius l autem prodit sic. Anno 550 fuit $l=o$; si jam pro quibusvis $312+\frac{1}{2}$ annis, l incrementum unius diei capiat, increscet l ad 4 dies, elapsis $4.(312+\frac{1}{2})$ annis; quod efficit 1250 annos quibus si addatur 550, prodit 1800; itaque usque ad annum Christi 1800 fiet $l=4$. Hoc autem ita distributum est; ut initio seculi 8vi ponatur $l=1$, initio 11mi vero 2, et initio 14ti 3, atque initio 18vi 4; adeoque prius quibusvis 3 seculis, tribuatur 1 dies, uti ultimo 4 postremorum. Postea autem ab anno 1800 exclusive, quibusvis 25 seculis fit ipsius l incrementum $=8$ diebus; nempe $(312+\frac{1}{2})8=2500$, Sunt autem 8 hi dies ita distributi, ut quibusvis tribus seculis a 18vo (exclusive) numerando dies unus tribuatur, usquequo 4 postrema 25 seclorum veniant, et 8vus dies seculo postremo atribuatur. Idemque continuatur.

Hinc autem si $N-18=\mu.25+(r<25)$, et μ integer sit, atque $r=m.3+(2 \text{ vel } 1 \text{ aut } o)$; $\mu.25$ seculis conveniunt 8μ dies; $8.(m.3+1 \text{ vel } 2)$ vero est $=24m+(8 \text{ vel } 16)=25m-m+(8 \text{ vel } 16)$; et hoc per 25 divisum dat quotum integrum m cum residuo $(8 \text{ vel } 16)-m$; atque si ipsi m substituantur valores a o usque ad 8 inclusive, (nempe $m>8$ esse nequit, quia $m.3>25$ fieret, et si $m=8$, tum praeter 8.3 neque 1 esse potest, nam tum $8.3+1=25$ esset); patebit regulam in quovis casu valere; ex gr. pro 16, et $m=7$, erit quoti pars concernens $7+\frac{16-7}{25}=7+\frac{9}{25}$; adeoque quum residuum 9 non sit >17, per regulam ipsi 7 nihil additur. Ita pro ceteris valoribus ipsius m formulam regulae convenire, et pariter de formula $\frac{8(N-6)}{25}$ sine res. patet.

III. Quod autem (pro e sive ✠vo sive ⊣vo), sive $e+\text{Res}\,\frac{l-s}{30}$, sive $\text{Res}\,\frac{e+l-s}{30}$ accipiatur, idem sit; patet sic: e praemissis apparet, s celerius crescere quam l; quia s quibusvis 4 seculis tres dies crescit, adeoque 24 seculis in 8 dies excrescit, l autem 25 seculis crescit totidem (nempe 8) dies; et s jam seculo 7 fuit $=4$, l vero (p. 294 et 309) nondum fuit 1; itaque si tam s quam l ad directionem sagittae (uti omnia hic accipienda sunt) intelligantur, semper porro (ad instar T. I p. 455), etsi circulus quotiesvis decurratur; erit $l-s$ semper −vum. Sit $\text{Res}\,\frac{l-s}{30}=-r$, nempe $l-s=-m.30-r$ (pro r, m +vis); erit (pro e sive +vo sive −vo), $e+\text{Res}\,\frac{l-s}{30}=e-r$; atque $\text{Res}\,\frac{e+l-s}{30}=$ $\text{Res}\,\frac{e-m.30-r}{30}=e-r$; proditque in casu +vi e et $>r$, epacta Greg. $e-r$ +va, in casu −vi e autem erit $e-r$ (propter $e<30$) aut $=-30$, aut erit $=-30-r'$ (pro r' +vo); si prius, tum utraque expressio epactam o dabit; si posterius, tum erit *epacta Greg.* −va $-r'$, adeoque $30-r'$ erit epacta +va, in casu utroque.

§. 10 *Paschatis Juliani pro anno Christi nto formula* est sequens: si a 1ma Martii (*stylo veteri* dicto) in anno Juliano numeretur, ita ut per $(31+m)$tam Martii intelligatur $m$ta Aprilis; cadet Paschatis Juliani dies 1ma (si e +ve expressum sit) in $44-e+$

$$\text{Res}\,\frac{\frac{\text{Res}(10-\text{res}\,n+\frac{n}{4}\text{sine res})}{7}}{7}-\text{Res}\,\frac{\frac{[\text{res}\,\frac{44-e}{7}+3]\text{tam}}{7}}{7}$$

Martii (stylo veteri); tenendo: 1mo quod si $e>23$ fuerit, $44+30=74$ pro 44 accipi debeat; 2do quod si parentheseos posterioris residuum sit aut = residuo parentheseos prioris, aut eo major; valori totius formulae addi debeat 7. 3tio quod si alterutrius parenthesium dictarum, aut utriusque seorsim residuum o sit, pro o semper 7 accipiatur.

Pro $e>23$ nimirum $74-e$, pro e non >23 autem $44-e$, exprimit *plenilunii Paschalis Juliani diem.* Namque Ecclesia cavendo, ne Pascha, cum illud in ipso plenilunio vernali celebrantibus (p. 291) coincidat; ita computum instituere conabatur, ut hoc serius prodeat: quapropter statutum est: 1mo ut plenilunium accipiatur die 14ta a die novilunii inclusive; sed 2do ut dum $e>23$, adeoque novilunium Martii primum in $(30-e+1)$tam, plenilunium autem in $(30-e+14)$tam Martii cadens, non sit paschale, nam semper ante 21mam Martii cadat, cui affixum aequinoctium positum erat; etsi sequens lunatio 29 requireret, pro ea 30 accipiantur; manifesto enim in hoc casu ad novilunium sequens progrediendum est: atque hinc fit, quod pro $30+14$ accipiantur $30+14+30=74$. Pro $e=23$ fit $44-e=21$, quod plenilunium Paschale est (p. 291), at si $e>23$ fuerit, $44-e$ fit <21. Ut vero primum Martii novilunium prodeat, epacta annua ex 30 subtrahenest; nam patet facile ex (p.304), *epactam menstruam* Martii esse *o*, adeoque aetatem lunae in initio Martii eandem esse, quae incipiente anno fuit.

Parentheseos prioris residuum, nempe

$$\text{Res}\,\frac{\left(10-\text{res}\left(n+\frac{n}{4}\text{ sine resid.}\right):7\right.}{7}$$

indicat, quota sit litera *Dom.* ab *a* antrorsum in anno *n* (p. 299); parenthesis posterior autem indicat, quota sit litera diei plenilunii Paschalis item ab *a* antrorsum numerando; unde etiam patet dum residuum post divisionem per 7 fit *o*, literam 7mam *g* denotari, et 7 pro *o* accipiendum esse. Nam 1ma Martii litera *d* gaudet (p. 295), adeoque litera plenilunii Paschalis prodibit, si ab *a* inclusive numeretur ultra literam diei plenilunii, tribus antrorsum, nam *d* post *a* tribus literis porro est; itaque ut prodeat litera plenilunii Paschalis, tribus literis ultra numerum diei, in quem cadit, est numerandum ab *a* incipiendo, et ad literarum ordinem in circulo progrediendo. Atque hinc patet, qnod si a 1ma Martii usque ad diem plenilunii *Pasc.* (inclusive), 7 dies semel aut pluribus vicibus defluxerint, residuum ex $44-e$ per 7 diviso indicet literae plenilunii numerum a *d* incipiendo; atque si 3 addatur, numerus literae ejusdem ab *a* incipiendo prodeat.

Si jam numerus n' *literae dom.* major fuerit numero m' *literae Plenil.* sitque excessus m; erit tum $m<7$, quia n' non >7; eritque $(44-e+m)$ta Martii *dies dom.* prima post plenilunium Pasch. Si vero $n'=m'$; tum plenilunium in *diem Dom.* cadit, adeoque 7 dies addi debent, uti si $m'>n'$ fuerit; nam tum plenilunium ultra diem *Dom.* cadit $m'-n'$ diebus; atque ad sequentem literam *Dom.* plenilunio proximam usque, in circulo erunt $7-(m'-n')=7+n'-m'$ literae. Hoc item eodem redit, etsi toti valori addatur 7.

§. 11. *Paschatis Gregoriani pro epacta* E ✠va, *formula* est sequens: cadet Paschatis Greg. dies prima anno Christi n, in

$$44-E+\mathrm{Res}\,\frac{\left(4+\frac{3(N-3)}{4}\text{ sine res.}-\mathrm{Res}\,\frac{\left(n+\frac{n}{4}\text{ sine res}\right)}{7}\right)}{7}-\mathrm{Res}\,\frac{\left(\text{res}\,\frac{44-E+3}{7}\right)}{7}$$

tam Martii *stylo novo;*

ea cum restrictione, quod 1mo si $E>23$, pro 44 accipi hic quoque $30+44=74$ debet; quia ut (in praec.) jam $44-23=21$ plenilunium paschale (juxta dicta) 1mae Martii proximum dat; 2do quod (per ea quae p. 304 dicta sunt) pro $E=24$ semper 25 accipiatur, et dum in eodem cyclo seculari 24 et 25 adsunt, pro 25 accipiatur 26; 3tio quod et hic si terminus tertius secundo aequalis aut eo major fuerit, toti valori addendum 7 sit; atque dum valor residui parentheseos sive prioris sive posterioris, valor *o* est, et hic, ut ibi 7 accipiatur pro *o*.

Ratio (e praec.) intelligitur: quia et hic terminus primus indicat, in quotam Martii *plenilunium Greg.* cadat in anno *n* (p. 312); 2dus terminus autem indicat, quotanam sit *lit. Dom. Greg.* (p. 301) ab *a* incipiendo; 3tius autem indicat, quotanam litera ab *a* incipiendo sit litera plenilunii, (semper antrorsum numerando). Unde (ut in praec.) reliqua intelliguntur.

Formulae sunt pro utroque Paschate necessariae; $e = \frac{\text{Res } 11 \left(\text{res } \frac{n+1}{19} - 3\right)}{30}$, $E = e + \text{res } \frac{l-s}{30}$,

atque $l = \frac{8(N-6)}{25}$ sine resid, et $4 + \frac{8(N-18)}{25}$ sine residuo; observando in casu utroque, quod si residuum > 17, tum quoto integro 1 addatur (p. 310). Est quoque $s = 1 + \frac{3(N-3)}{4}$ (p. 294), quod si addatur tempori Juliano, *stylus vetus ad novum reducetur*. Quum vero ipsa *e* numero 19 sint, maneantque eadem, in quovis seculo, addendo $l-s$ computari cyclus Greg. secularis potest.

Pro seculo praesenti autem, in quo $l = 4$ et $s = 12$, adeoque $l - s = -8$, *dies prima Paschatis Greg.* fit $52 - e +$

$$\frac{\text{Res}\left(\frac{15 - \text{res}\left(n + \frac{n}{4}\text{ sine res.}\right)}{7}\right)}{7} - \frac{\text{Res}\left(\text{res } \frac{52-e}{7} + 3\right)}{7}.$$

ta Martii (*stylo novo*); nempe formula superior, pro quovis seculo (computatis l et s) ad simpliciorem reduci potest. Notandum autem quoad formulam hanc seculi praesentis: quod si e sive o sive 1 sit, in formula pro 52 poni 22 debeat; ad valores infra 9 ipsius e, (p.313) applicando, uti pro $e>8$ adeoque $E<23$, manere secus 52 patet. In cyclo praesentis seculi, 24 non adest; adeoque hoc respectu attentione non indiget. Pro quovis seculo autem cyclus 19nalis Greg. ex l et s facile computatur (p. 307), ut videatur, num 24 imo simul etiam 25 adsit (p. 314).

Exemplo etiam illustrare haud supervacuum est. Sit pro anno 1810 Pascha Julianum computandum. *Litera Dom. I.* prodit per formulam sic: addatur ipsius 1810 pars 4ta sine residuo;

$$\begin{array}{r} 1810 \\ 452 \\ \hline 2262 \end{array}$$

quod divisum per 7 residuum 1 dat, et $10-1=9$, atque $\text{Res}\ \frac{9}{7}=2$, adeoque lit. J. est b, et *lit. Greg.* est g.

Epacta Juliana e prodit per formulam (p. 307) sic; $1810+1$ per 19 divisum dat residuum, 6, e quo subtracto 3, manet 3, et hoc per 11 multiplicatnm et tum per 30 divisum dat residuum $3=e$; et $44-e=41$, residuum parentheseos primae in formula J. erat 2, residuum parentheseos 2dae etiam est 2, quia $\text{Res}\ \frac{41}{7}=6$, et $6+3=9$. Sed dictum est, si residuum posterius majus priore (aut ei aequale sit), addendum 7 esse: fiet igitur *Pascha J*, $(41+2-2+7)=48$ta Martii adeoque 17ma Aprilis (*stylo veteri* seu $(17+12)=29$na Aprilis (*stylo novo*).

Pascha Greg. autem prodit

$$(52-3+\text{Res}\frac{(15-1)}{7}-\text{Res}\frac{(\text{res}\frac{52-3}{7}+3)}{7}=49+o-3;$$

et pro o ponendo 7 (per regulam), fit 49+7—3; adeoque Pascha Gregorianum stylo novo erit 53tia Martii, id est 22da Aprilis.

Potest formula superior ad quemvis cujusvis seculi annum modo eodem applicari.

§. 13. Quamquam *aequinoctium* dictum haud astronomicum sit, et hoc quoque per intercalationem dictam aliquando a 21ma Martii usque ad 19 et 23 removeatur; imo et dum *Plenil. astrom.* evenit, alicubi diei *Sabbati* hora ultima, et alibi dies *Dom.* esse, adeoque Paschata octiduo differre possent: posita tamen lege, *in rebus sacris* determinata, de *Cyclo Paschatum* dicere fas est.

Erat (p. 309) anno 1800 aequatio lunae nempe $l=4$; quae abinde quibusvis 25 seculis crescit, ut fiat 4+8 anno 4300. Quibusvis 100 seculis aequatio solis nempe s crescit 3.25 dies, quia 4 in 100 continetur 25ies, et quibusvis 4 seculis se invicem excipientibus a qualivis incipiendo, tres dies accedunt ipsi s. Item quum ab anno 1800 (exclusive) quibusvis 25.100 annis, incrementum ipsius l sit 8 dierum; erit incrementum ipsius $l-s$ quibusvis 100 seculis elapsis $32-75=-43$. Itaque ut Res $\frac{l-s}{30}$, (quod quovis seculo epactis Julianis addi, ut Julianae prodeant dictum p. 307est) fiat $=o$; ad minimum tot secula effluere necesse est; ut $l-s=-30.43$ fiat; itaque 30.100 id est 3000 secula requiruntur; atque tum erit

Res $\frac{l-s}{30}$ plane idem quod prius erat, quum incrementum ejus o sit.

Incipiet igitur cyclus ab anno 1800 (ipso anno 1800 excluso) dum $l=4$ factum est, et quidem ita, ut 1mum seculum abinde in anno 1900, 2dum in 2000 &c -- atque 3000tum in anno 301800 (nempe 1800+300 000) terminetur; eritque novorum 3000 seclorum primum seculum in anno 301 900 adeoque pariter in anno seculari ante bissextili terminatum, ut prius; quod qualivis multiplo ipsius 300 000 addito ipsi 1800, redire patet.

Sed ut cyclus epactarum Gregorianarum prodeat; non sufficit Res $\frac{l-s}{30}$ eodem ordine defluere; namque $E=e+$ Res $\frac{l-s}{30}$. Itaque necesse est, ut etiam epactae Julianae simul incipiendo eodem ordine fluant: at vero hoc quibusvis 19 annis eodem redeundo fluit in perpetuum. Si igitur cyclus prior per 19 multiplicetur, idem e redibit, eodemque ordine epactae Julianae se invicem excipient. Erit igitur cyclus epactarum Gregorianarum 19.3000 seclorum; quibus effluxis eodem ordine sequentur. Atque e dictis (p. 314) patet etiam plenilunia paschalia (Gregoriana) eodem ordine semet excipere: neque autem cyclus minor datur; quia 3000 seculorum numerus erat, nec 19 inter factores ipsius 3000 adest.

Interim hic tantum pleniluniorum (non Paschatum Greg.) cyclus est: ut hoc fiat, oportet cyclum illum determinare. quo 1ma Januarii *Greg.* in seculo, eadem septimanae die incipiat, seu quum 1ma Januarii semper a sit, *literae Dominicalis Greg.* cyclus quaeritur. Est vero (p. 298) hic 8 seculorum: quem igitur certies defluere oportet; nempe cyclum dictum 19.3000 seculorum per 8 multiplicare necesse esset; at quum 8 metiatur numerum 3000; manebit pro *cyclo Paschatum Greg.* (19.3000 =57 000) *secl.*]

Cyclus Paschatum Julianorum autem non quoad locum absolutum respectu puncti fixi in alveo fluentis temporis rotundo (p. 288); sed tantum nominali valore, nonnisi ad initium anni Juliani referendo: est 28.19 = 532 annorum. Nam epactarum cyclus est 19, et cyclus solis 28 annorum est.

Si vero cyclus ab anno 1800 quaeratur, quo ambo Paschata simul quoad *punctum* (p.288) *pro certo loco fixum*, semper eodem ordine sequantur: necesse est etiam *s* idem redire. Est vero anno 1800 (usque ad finem 1899) *s*=12, crescitque usque ad 1900 (inclusive) uno die, et quibusvis 4 seculis se invicem excipientibus crescit tres dies: distantiaque *ab*𝔄 (Fig. 243) ab initio anni Juliani decurrenda in circulo, (qui nunc sit aequalis quantitati 365 dierum anni communis), donec *s* iterum idem sit; tot secula requirit, ut 365—12 = 353 dies efficiat *s*. Requiruntur autem eo ad minimum 471 secula; nam 353=3.117+2; ad 3.117 vero requiruntur (4.117=468) secula, quod cum 18 efficit 486 secula; et quum 488 bissextile sit, ad 2 dies adhuc tria secula requiruntur post 486; quia quaternarius seclorum cum 19 incipit.

Nempe seculum bissextile potest B dici; praecedens vero A, illud autem P quod post bissextile est, et illud M (quasi medium) quod inter ante et post bissextile est; atque si quaternarius seclorum in A incipiat, in M terminatur, si in

B incipiat, in A terminatur; et si in P incipiat, in B terminatur; si in M incipiat, in P terminatur; cujus ratio habenda est: in casu allato post 1800 terminantur 468 secula (adeoque 48 600) in M; atque ut adhuc 2 dies accedant, A, B, P requiruntur, nam in B nihil accedit. Nempe series seculorum sequens est: MABPMABPMABPM --- Eritque annus quaesitus 48 900.

Itaque dum in certo puncto p (Fig. 244) Gregorianis ultima *Dec.* 48 900 erit, Julianis 1ma Januarii anni 48 900 iis bissextilis erit; atque post unum diem incipiet Gregorianis 48 901 (Gregorianis neuter bissextilis); itaque a p incipiendo post 366 dies terminabitur Gregorianus 48901, Julianis vero annus 48 900.

Patet hinc cyclum desideratum prodire; si cyclus prior, (nempe 5700 seclorum) per 471 multiplicetur; quum 471 non sit factor ipsius 5700.

§. 14 Pascha Julianum cum Gregoriano coincidere post tale seculum neutiquam potest, (donec periodi statim referendae adveniant); in quo *s* aequatio solis tanta est, ut et 21ma Martii Juliani, si ad stylum novum reducatur, additis 7 ad summum ut proxima *Dom.* prodeat, ultra *Benedictum* (nempe 25tam Aprilis Gregoriani) cadat. Nimirum *Plenilunium Pasch J.* initio anni Greg. proximum in 21 Martii stylo veteri cadit, Pascha G. vero (juxta regulam, quod *non praecedat Marcum*, (in 21 Martii cadentem) *nec postcedat Benedictum*, nempe 25 April.) tunc distat ab anni initio maxime, dum $E=24$, adeoque *plenil.* P. $=74-25$ (p. 313), $=49$, cui maximum est 7, quod additur. Quum igitur $s=34$ fiet, nunquam amplius Paschata coincidere poterunt, usquequo periodi sequentes adveniant. Seculo praesente patet (per p. 314) pro $e > 23$ coincidere non posse; quum formulae Julianae addi $s = 12$ debeat, ut valor uterque aequalis sit, et pro $e > 23$ in formula J. ex 44 fiat 74.

§. 15 Si $\text{Res}\,\frac{l-s}{30} = o$ fiat, et annus J. cum G. simul incipiant; in illo seculo per formulas patet Paschata omnia coincidere; nam tum $E = e$; et 1ma Martii eadem utrique est. Quaestio exoritur, quandonam hoc fiat?

Fiet (in §. praec.) $s = o$, in quantum anni G. et J. simul incipient, uti si abinde s crescat $q.365$ dies; atque pro $s = o$, etiam $\text{Res}\,\frac{l}{30} = o$, ut $\text{Res}\,\frac{l-s}{30} = o$ esse queat. Itaque quum anno 1800 sit $l - s = -8$; erit (ipsius l incremento l' dicto) $\text{Res}\,\frac{l'-8-353-q.365}{30} = o$; atque hinc $\text{Res}\,\frac{l'-1-q.5}{30} = o$. Si prius $q = o$ accipiatur; erit (e praec.) pro $= 471$ seculis) diebus 353 respondentibus, $l' = 151$ diebus; quia $471 = 18.25 + 21$, atque $8.18 = 144$, cui si addantur 8 dies, seculis 21 competentes, prodit 151. Fit igitur pro hoc casu formula $= \text{Res}\,\frac{151-1}{30} = o$; atque tum coincident prima vice Paschata per totum seculum. Si vero post tempus istud, dictis 353 diebus respondens, accedat tempus $q.365$ diebus respondens; et respondens incrementum aequationis lunae l'' dicatur; expressio prior fiet $\text{Res}\,\frac{l''-q.5}{30}$; et quaeritur, quandonam hoc $= o$ fiat.

Incipiet post primum $s=o$, tempus **T** ad incrementum 365 dierum ipsius s requisitum in M, desinet in A; abinde 2dum incipiet in B, et desinet in M, et abinde incipiens in A in P desinet, atque item in M incipiens in A desinet; idemque ordo porro erit: nempe incipient in MBA MBA, desinent in AMP AMP; requiretque primum, 486, 2dum et 3tium 487, et item 486, 487, 487 sequuntur semper porro. Eritque quum quodvis T in seculo A vel M aut P, adeoque Gregorianis communi Julianis bissextili desinat, $s=o$. Itaque id tantum quaeritur, quandonam $\frac{\text{Res}(l''-q.5)}{30}=o$ fiat; tunc enim Paschata per totum seculum coincident.

Ad finem 1mi T, 486 dat $l''=155$ (excedentibus 2 seculis), itaque $\frac{\text{Res}(l''-1.5}{30}=$ $\text{Res}\,\frac{150}{30}=o$; at pro 2T, 486+487 dabit $l''=311$ (excedentibus 2 seculis); itaque $\text{Res}\,\frac{l''-2.5}{30}$ $=\text{Res}\,\frac{301}{30}=1$; nec petito satisfiet.

Interim etsi nec aequatio lunae, nec solis $=o$; sed illa —29, haec —1, aut illa —1 haec +1 sit: coincident Paschata per totum seculum, (excepto uno casu in quovis cyclo 19nali). Nempe dum $e=23$, in casu priore fit $E=23-29=-6$, adeoque E +ve accepta erit $30-6=24$. Erit igitur (p. 313) plenil. *Pasch. Greg.* $74-25=49$, plenil. Jul. autem $44-23=21$, quod ad stylum novum reducetur addito $s=-1$, fietque $=20$. In altero casu autem pro $e=25$, fiet plenil. *Jul.* $74-25=49$, et E erit $=25-1=24$, adeoque plenil. Greg. erit pariter $74-25=49$; sed priori addi $s=1$ debet, ut ad stylum novum reducatur; itaque fieri potest, ut Paschata haud coincidant. In omnibus aliis casibus autem coincident. Cogitetur enim pro casu priori addi 30 ipsi $e-29$, ut prodeat E ✠ve; erit $e-29+30=E=e+1$; quo pacto cuivis e infra 23 addita unitate, in neutra plenil. Pasch. expressione mutabitur 44 in 74; itaque fiet plenil. *Jul.* ad stylum novum reductum $44-e-1$, plenil. Greg. autem $44-(e+1)$. Pariter si e supra 23 fuerit; in utroque erit 74 pro 44.

In altero casu autem, si e infra 25 fuerit: per subtractionem unitatis, in utroque manebit 44: nempe e infra 25 sequens est 23. Idem de minoribus epactis Julianis valet: et pariter si $e>25$ fuerit, $74-e+1$ erit plenil. *Jul.* ad stylum novum reductum, et $74-(e-1)$ erit plenil. *Greg.* quia E erit $=e-1$, et tum $e-1>23$.

Potest autem facile computari, quantumnam fieri q oporteat, ut $\text{Res}\,\frac{l-s}{30}=o$ sit. Seclorum nempe numeri 486, 487, 487 se invicem perpetuo excipiunt (positis iis, quae dicta sunt); et numeri quibus multiplum ipsius 25 excedunt, sunt numeri 11, 12, 12 perpetuo; et nonnisi valores ipsius q tales quaerendi sunt, ut incrementum ipsius l ex his excessibus exsurgens multiplum ipsius 30 sit, adeoque $l-s$ per 30 divisum residuum o det.

Seculo praes. *Paschata* pro *num. aur.* 3, 8, 11, 14, 19 non coincidunt; nec quod pro 13 anno 1817 coinciderint, ad 1836 concluditur. *Marci* dies (p. 319) includi videtur; sed *tabulis* excluditur; facile vero regula adaptaretur. Quaeri conversim pro dictis et annus potest.

ADDITAMENTA QUAEDAM TOMUM I. CONCERNENTIA.

I. *Primae lineae Theoriae combinationum.*

De combinationum ex n rebus juxta certum numerum m, adeoque amborum, ternorum &c, nec non numero permutationum, dictum (Tom. I. p 140) est.

§. 1. Numerus *omnium combinationum* ex n rebus, id est summa *unorum*, *amborum*, *ternorum* &c. -- usque ad $n$tum inclusive, est 2^n-1.

Nam summa ista est

$$n+\frac{n.(n-1)}{2} - - - - + \frac{n.(n-1)--2.1}{1.2--(n-1).n}=2^n-1;$$

quia $(1+1)^n=1+n+\frac{n(n-1)}{2}---+\frac{n.(n-1)----2.1}{1.2----(n-1).n}$

§. 2. *Variatio* vocatur, si una litera pluries occurrat, *permutatio* vero, si res eaedem alio ordine se excipiant.

Variationis leges variae dari possunt. Ex gr. ut inter m literas, e certis n literis acceptas, plane certa poni possit certo numero, determinatum quendam haud superante, et alia alio --- Ita lex esse potest, ut quaevis poni possit etiam $m$ies; ita lex esse potest, ut inter m literas semper occurrat aliqua $n$ies, aliqua $q$ies, aliqua $r$ies, et ita porro. Vocatur imago m, 1, 2 -- literarum $m$io, *Unio*, *Binio*, *Trinio* &c; quaeri semper potest pro lege data quaenam $m$iones dentur; et in summa quotnam Uniones, Biniones, Triniones &c --- sint. Praeterea postulatur etiam, ut tam combinationes sine variatione et permutatione construantur claro ordine, quam permutationes; nec non combinationes, admissa et variatione juxta certam legem, tam exclusa permutatione, quam admissa hac quoque.

§. 3. Permutationes construi possunt: prius rem 1mam *a* ponendo, dein rem novam *b*, prius loco primo, dein secundo; atque idem cum re nova *c*, et tum cum *d*, et quavis nova re suscipiendo; ut ponatur haec prius loco primo, dein 2do, et ita porro usque ad finem, in quavis permutatione, quae antea prodiit. Ita in *primo ordine*, qui e 2 rerum permutationibus constat, si accipiatur ex gr. 2da; et in 2do *ordine* in quo jam tres sunt, quæ e dicta 2da fiunt, accipiatur earum 1ma; et in 3tio *ordine* ubi jam 4 sunt, 4ta accipiatur istarum, quae e proxime dicta 1ma fiunt, et ita porro: habetur per numeros 2, 1, 4 permutatio determinata ex gr. *cbad* esset talis pro literis *a*,*b*,*c*,*d*.

Possent etiam permutationes ita construi: ut res numeris denotentur, ex gr. 1, 2, 3, 4; et iidem numeri decadice ita scribantur, ut nullus valor emaneat, qui iisdem numeris exprimi potest, totidem nimirum locis, atque nullo numero bis occurrente; praeterea autem valores semper crescant, ut nullus jam descriptus sit ullo sequentium major.

Ex gr.	1 2 3 4	Patet prodire omnes qui-
	1 2 4 3	bus 1 praest; ita prodi-
	1 3 2 4	re quibus 2 praest, et
	1 3 4 2	ita porro; omnes enim
	1 4 2 3	valores quibus 1 præest
	1 4 3 2	cum iisdem numeris, at
	- - - -	alio ordine, sunt diversi,

et quorumvis eorum datur minimus.

§. 7. Si quaeratur quænam *m*iones ex *n* accipi possint, admissis permutationibus, et variationibus, ita ut eadem litera, numero quovis, certum *m* haud superante occurrere queat:

responsio facillima est: numerus *m*ionum est 1 cum *m* cifris, valore quem hoc in *n*dica numerandi ratione habet. Sit ex gr. $n=10$, et sit $m=3$, erit 1000 (valore decadico) numerus *m*ionum quaesitus. Descriptis nempe supra lineam horizontalem superiorem (in schemate sequ.), numeris 0 1 2 --- 9; praeponatur quaevis, nempe quodvis ipsorum 0, 1 -- 9 a *o* incipiendo inclusive, cuivis unioni a *o* incipiendo; donec prodeant sequentes lineae horizontales usque ad lineam * inclusive; dein iterum quaevis unio a *o* incipiendo item inclusive, praeponatur cuivis binioni, eo ordine uti prodierunt; et ita porro, semper iis quæ postremo prodierunt, præpositis omnibus unionibus; iterum ordine præponantur omnes uniones a *o* (inclusive) incipiendo, donec omnes *m*iones prodierint.

Ex gr.

	0	1	2	-----	9
	00	01	02	----	09
	10	11	12	-----	19
	20	21	22	-----	29
	-	-	-	- - - -	-
*	90	91	92	-----	99
	000	001	002	-----	009
	010	011	012	-----	019
	-	-	-	- - - - - -	-

Patet quamvis *m*ionem talem, quae non cum cifra incipit prodire. Sit enim quaevis ejusmodi *m*io, illa numerum aliquem denotabit; demonstratum vero est, in numeratione, modo relato numerum quemvis denotari posse; itaque nisi adesset inter illas *m*iones quae prodierunt, esse deberet aut supra aut infra; neutrum fieri potest: nam 1 quoque cum $m-1$ locis, plus denotat numero pauciorum locorum, etsi ubique 9 sit; ita 1 quoque etiam cum *m* cifris plus denotabit data *mione*, etsi in hac ubique 9 sit. Sunt praeterea quaevis *miones* non cum cifra incipientes, inaequales. Itaque de iis tantum *mionibus* quaeritur adhuc, quae cum cifra incipiunt: si una tantum cifra sit in initio, haec alicui $(m-1)$ioni praeposita est per legem dictam: si duae, tum eadem lege anteposita erit cifra alicui $(m-2)$ioni, et nunc huic $(m-1)$ioni item alia praeponitur; patetque si plures fuerint. Itaque cum idem quod de m verum est, valeat de $m-1$, $m-2$---, prodibunt omnes uniones, biniones-- *miones*. Sunt vero uniones numero n, Biniones sunt $n.n$, quia singula n signa præponuntur singulis omnibus n signis; triniones sunt n^3, quia singulis Binionibus præponuntur singula n signa. Itaque prodeunt *miones* numero n^m, nempe plane numero illo, qui per 1 cum m cifris in *ndica* numerandi ratione denotatur. Prodeunt autem omnes simul uniones Biniones, Triniones -- et *miones* inclusive, in summa $n^m + n^{m-1} --- + n^1$ $= \frac{n^{m+1} - n}{n-1}$ (Tom. I. p. 131).

Exemplo sint *voces*, et *syllogismi* modi (quoad propositiones).

Hoc pacto 24 literis voces 8 literarum prodeunt 24^8; 3 literarum 24^3, omnia vero summando a 8 usque ad 1, prodit $24^8 + 24^7 + --- + 24^1$ $= (24^9 - 24) : 23$.

Ita *syllogismi* (quoad *prop.*) *modi* sunt 1000, *valore* quem in quaternaria numeratione habet: quia terniones accipiuntur ex 4 rebus.

Si et in propositionibus termini permutentur; permutatione in propositione majori facta manentibus ceteris, per 2 multiplicatur numerus, minor etiam multiplicat per 2, conclusio quoque. Itaque prodit $4^3.2\,2\,2.$ quia quaevis permutatio terminorum majoris per 2 permutationes minoris duas gignit, et quaevis harum item duas, permutatione terminorum conclusionis. Plurimae tamen e rationibus logicis rejiciuntur. Vide Tom. I p.13.

Describuntur vero 4^5 modi ordine facillime: si *propositio universaliter affirmans* dicatur *o*, *universaliter negans* dicatur 1, *particulariter affirmans* dicatur 2, et *particulariter negans* dicatur 3; atque lege 4ternariae numerationis describantur omnes numeri, donec omnes termini ordine prodeant juxta(p.325).

§. 5. Si quaeratur *numerus* mborum *sine permutatione*, *sed admissa variatione* ita; ut in quovis mbo aliqua litera occurrat ex gr 3ies (sed quaevis), alia ex gr. 2ies &c, aliae semel; possunt quilibet sumi pro numeris istis, qui *exponentes variationis* dicuntur. Ex gr. forma *aaabbcd*, erit sensu hoc eadem cum $c^3a^1d^2b^1$; patetque heic quaeri: 1mo numerum combinationum, literarum (quae *elementa* dicuntur); 2do in quavis combinatione, exponentes quoties migrare, seu permutari queant: atque numerum combinationum elementorum, per numerum permutationum exponentium multiplicari. Si ex gr. 7 res sint: erunt pro imagine dicta, combinationes numero $\frac{7.6.5.4}{1.2.3.4}$, et hoc multiplicari per

$\frac{1.2.3.4.}{1.2}$ debet; quia exponentes variationis numero 4 sunt, adeoque numerus permutationum eorum esset 1.2.3.4, si diversi essent; sed quum duo sint aeqnales, imaginum pars dimidia alteri aequalis erit; quapropter per 2 dividendum est.

§. 6. Si quaeratur ex |*aaaa bbb cc def* *quot diversae imagines accipi queant, ita ut nulla litera pluries occurrat, quam in proposita*; possit vero una quoque litera sola esse; ex gr. *a* non pluries quam ter, sed etiam semel occurrere queat. Id est quot factores diversos habet factum e literis factores primos denotantibus?

Prima litera dat 4 nempe *aaaa aaa aa a*
2da dat 3 nempe *bbb bb b*
3tia dat 2 nempe *cc c*

litera quaevis enim tot imagines dat, quoties in primitiva adest; eritque imaginum e literis pluries occurrentibus hoc modo factarum omnium summa $=4+3+2$. Si porro combinetur quaevis imago lineae cujusvis, cum quavis imagine cujusvis lineae inferioris; orientur imagines novae numero $4.3+4.2+3.2$; porro si combinentur singulae imagines lineae cujusvis ita cum singulis linearum inferiorum, ut in quavis nova, cujus pars e linearum aliqua est, imago aliqua linearum inferiorum *plurium* adsit: fient novae imagines pro hoc casu numero 4.3.2. Itaque prodierunt hucusque imagines numero

$$\left.\begin{array}{l} 4+3+2 \\ +4.3+4.2+3.2 \\ +4.3.2 \end{array}\right\} = \begin{array}{l} 4(1+2+3+2.3) \\ +3(1+2) \\ +2.1 \end{array}$$

$=59$ pro hoc casu.

Praeterea literarum, quae nonnisi semel occurrunt in imagine primitiva, computetur numerus combinationum omnium ab uno incipiendo; et hic multiplicetur per summam omnium imaginum quae prodierunt; quia quaevis combinationum dictarum, cum quavis imaginum dictarum combinari potest; atque demum numero huic addatur numerus combinationum dictarum, necnon summa omnium imaginum superius creatarum. Itaque quum (p.323) numerus combinationum omnium sit 2^3-1; est totalis summa $=(2^3-1).59+59+2^3-1$; et tot sunt factores diversi, inter quos adest et ipsum factum, sed unitas non annumerata est, exprimiturque idem etiam per $(2^3-1)(59+1)+59$.

§. 7. *Combinationes construuntur* ex elementis *a*, *b*, *c*, *d*, *e* sic.

Nunquam itur retro, sed semper antrorsum proceditur; e quavis linea horizontali ad inferius sequentem, in linea ipsa autem semper ad dextram itur: cuivis imagini autem illa litera postponitur, quae imaginis postremam in linea suprema excipit.

Prius construuntur *ambo*; cuivis *elemento* id est literae in linea suprema, postponendo quamvis eo ordine, quo sequuntur; donec ad ultimam deveniatur, quae nullam post se habet, et jam combinata cum omnibus anterioribus est.

Dein construuntur *terno*; cuivis *ambo* postponendo singulas supremae lineae literas, quæ postremam imaginis excipiunt, donec ad tate *ambo* deventum fuerit, cujus literam postremam nulla excipit.

Tum *quaterno* construitur, &c. - uti schema ostendit.

	a	*b*	*c*	*d*	*e*
ambo	*ab*	*ac*	*ad*	*ae*	
		bc	*bd*	*be*	
			cd	*ce*	
				de	
terno		*abc*	*abd*	*abe*	
			acd	*ace*	
				ade	
			bcd	*bce*	
				bde	
				cde	
			abcd	*abce*	

In genere si omnia $(m-1)$bo prodierint, haec combinantur omnia cum literis sequentibus, nempe litera semper illa postposita, quae post postremam sequitur. Patet operatione semper antrorsum procedente, cum quavis litera quae nondum adest, fieri combinationem, nec eam cum tali litera fieri quæ jam adest.

§. 8. *Combinationes admissa variatione sine permutatione*, fieri possunt ex *n* rebus in summa, connumeratis *Unionibus*, *Binionibus* &c usque ad *m*iones inclusive, numero

$$\frac{n+1 \,.\, n+2 - - - - - (n+m)}{1 \,.\, 2 - - - - - m} - 1.$$

Fiat enim schema sequens

Uniones sive elementa	*a*	*b*	*c*	*d*	*e*	Numerus imaginum
	aa	*ab*	*ac*	*ad*	*ae*	5 præest *a*
Biniones		*bb*	*bc*	*bd*	*be*	4 præest *b*
			cc	*cd*	*ce*	3 præest *c*
				dd	*de*	2 præest *d*
					ee	1 præest *e*
	aaa	*aab*	*aac*	*aad*	*aae*	
		abb	*abc*	*abd*	*abe*	præest *a*
			acc	*acd*	*ace*	V=1+2+3+4
				add	*ade*	+5
Trinione					*aee*	
		bbb	*bbc*	*bbd*	*bbe*	
			bcc	*bcd*	*bce*	præest *b*
				bdd	*bde*	IV=1+2+3+3
					bee	
			ccc	*ccd*	*cce*	præest *c*
				cdd	*cde*	III = 1+2+3
					cee	
				ddd	*dde*	præest *d*
					dee	II=1+2
					eee	I=1præest *e*

\- - - - - - - -

Praeponitur prius a cuivis ipsorum a, b, c, d, e, et hoc dat lineam 1mam cui praeest a; tum praeponitur b cuivis ipsorum b, c, d, e, et prodit linea sequens, cui praeest b; et tum praeponitur c cuivis ipsorum c, d, e, proditque linea sequens, cui praeest c; et ita porro usquequo prodeat ee ultima litera ultimae præposita.

Tum a,b,c,d,e literae seriei supremae a prima incipiendo inclusive, anteponuntur ordine singulis binionibus, quae prodierunt; a prima binione incipiendo, usque ad ultimam ee inclusive; nempe generaliter quodvis elementum a primo incipiendo inclusive anteponitur singulis omnibus $(m-1)$ionibus, quae prodeunt; eodem ordine quo prodierunt, sed ab illa $(m-1)$ione incipiendo, quae cum litera praeponendae aequali incipit, usque ad ultimam $(m-1)$ionem inclusive, et hoc pacto prodibunt $m$iones.

In *Binionibus* patet, quamvis literam cum quavis combinari, praeterea quamvis etiam cum se ipsa; in *Ternionibus* autem quamvis literam poni ter, sed una tantum vice, et quamvis bis positam cum quavis combinari, et adesse praeterea omnes combinationes.

Atque in genere de $(m-1)$ione facile patet ad $m$ionem: nam in prima linea ubi elementum, exgr. a prius anteponitur; est $a^{m-1}, a^{m-2}b, a^{m-2}c$ --- postea sequitur a^{m-3}, a^{m-4} .. exponente usque ad o decrescente, nempe in eorum quibus a praeest, lineis sequentibus praepositum est a^{m-3} omnibus binionibus, quas literae post a sequentes habent; deinde sequitur a^{m-4} cum omnibus ternionibus literarum post a sequentium, et ita porro; nempe ut post $a^{m-\mu}$ cum omnibus $(\mu-1)$ionibus, sequatur $a^{m-\mu-1}$ cum omnibus $(\mu-2)$ionibus (literarum post a sequentium), usquequo exponens ipsius a fiat $=1$; tum vero sequuntur omnes $(m-1)$iones, prius illæ quibus b praeest, tum illae quibus c praeest ----

Idem de litera b pro iis quibus b praeest, et idem de iis quibus c praeest &c, valere inductio docet: hinc autem ut ex $(m-1)$ionibus prodeant $m$iones, modo dicto anteponitur a a prima incipiendo inclusive omnibus, et quaevis sequens litera a primo eorum quibus illa præest, anteponitur tam ipsi primo, quam omnibus $(m-1)$ionibus illum excipientibus; fietque in linea prima a^m, $a^{m-1}b$, $a^{m-1}c$ ----; id est primo imago illa, in qua a occurrit $m$ies tum illae in quibus $(m-1)$ies occurrit a cum quavis literarum sequentium, adeoque cum omnibus earum; dein a^{m-3} cum omnibus binionibus sequentium, demum a^1 cum omnibus $(m-1)$ionibus ceterarum. Itaque quaevis $m$io in qua adest a prodibit. Idem de quavis alia litera valet: ex gr. si idem cum litera b suscipiatur, prodit quaevis $m$io in qua a non adest; quae antea jam prodierant quoque omnes, itaque haud amplius regrediendum sed antrorsum eundum est.

Numerus autem imaginum prodit ita. Uniones sunt, quot elementa; biniones sunt $1+2+3+4+5$ --- triniones sunt: $(I=1)+(II=1+2)+(III=1+2+3)+(IV=1+2+3+4)+V=1+2+3+4+5)$; 4iones $I+(I+II)+(I+II+III)+(I+II+III+IV)+(I+II+III+IV+V)$ et ita porro: nam a porro praepositum omnibus, gignit imagines numero $I+II+III+IV+V$, b vero $IV+III+II+I$; c autem $III+II+I$; d tantum $II+I$, ultima e autem unicam dat; patetque esse series arithmeticas a serie 1, 2, 3, 4, 5 semper ad uno altiorem ordinem progredientes;

nempe numerus binionum quibus a praeest est 5, quibus b praest 4, quibus c, 3 &c; numerus trinionum quibus a praeest est V, quibus b est IV, et ita porro; ita numerus 4ionum quibus a praeest, est I+II+III+IV+V; quibus b est I+II+III+IV et ita porro. Itaque si in $(m-1)$ione dicatur numerus eorum quibus a praeest, A, quibus b praeest B, et ita porro: patet in $m$ione esse numerum quibus a praeest, A+B+C---+1, numerum quibus b praeest, esse B+C---+1 et ita porro; adeoque numerum $m$ionum ex 5 elementis esse terminum quintum seriei arithmeticae $m$ti ordinis: ita demum patet, cum ipsi 5 quivis numerus n substitui possit, numerum quaesitum esse $n$tum terminum seriei arithmeticae ordinis $m$ti, id est $\frac{n.(n+1)(n+2)--(n+m-1)}{1.2.3-----m}$ (ut statim patebit).

Summa vero omnium simul, unionum binionum---- usque ad $m$iones inclusive, prodit ita.

Unionum numerus est n, binionum $\frac{n.(n+1)}{1.2}$

adeoque unionum et binionum summa

$$=n+1-1+\frac{n.(n+1)}{2}=\frac{2(n+1)}{2}-1+\frac{n.(n+1)}{2}=$$
$$\frac{(n+1).(n+2)}{2}-1.$$

Et si vera sit expressio $\frac{(n+1).(n+2)--(n+m-1)}{1.2----m-1}-1$ ab unionibus usque ad $(m-1)$iones inclusive omnes complectens; addaturque numerus $m$ionum nempe $\frac{n.(n+1).(n+2)--(n+m-1)}{1.2.3---m}$ priori: patet prioris tam numeratorem quam denominatorem per m multiplicari debere, ut addi queant; et tum denominator communis erit $1.2 \cdots m$, in numeratoris 2 terminis vero erit factor communis $(n+1).(n+2) \cdots (n+m-1)$, et summa factorum sociorum erit $n+m$; unde patet summam quaesitam esse $\frac{(n+1).(n+2) \cdots (n+m-1).(n+m)}{1 \,.\, 2 \cdots (m-1).m} - 1$;

Si (p.98) $n=2$; tum $\frac{(n+1).(n+2) \cdots (n+m)}{1 \,.\, 2 \cdots m} - 1$

fit $= \frac{(m+1)(m+2)}{1 \,.\, 2} - 1$; nam $\frac{(2+1)(2+2) \cdots (2+m)}{1 \,.\, 2 \cdots m}$

$= \frac{(m+2)(m+1).m \cdots (2+2)(2+1)}{1 \,.\, 2 \,.\, (2+1)(2+2) \cdots m} = \frac{(m+2)(m+1)}{1 \,.\, 2}$

Quod vero terminus $n$tus seriei arithmeticae (seriei 1, 2, 3 ··· superstructae) ordinis $m$ti sit $\frac{n(n+1)(n+2) \cdots (n+m-1)}{1 \,.\, 2 \,.\, 3 \cdots m}$; patet sic.

	1	2	3	4	5	6	7
1	1	1					
2	1	2	1				
3	1	3	3	1			
4	1	4	6	4	1		
5	1	5	10	10	5	1	
6	1	6	15	20	15	6	1
7	1	7	21	35	35	21	7	1

Scribantur 1, 2, 3 ··· ab 1 incipiendo verticaliter deorsum, et post quemvis n scribantur in lineam horizontalem coefficientes binomii ad n elevati, a primo nempe 1 incipiendo: erit (Tom. I. p.135) quivis, summa numeri in eadem columna verticali proxime superioris, et hunc horizontaliter proxime praecedentis. Atque si 2dae columnae verticalis superscribatur 1, et cuivis columnae verticali sequenti superscribatur uno major in linea horizontali suprema: fiet quaevis columna verticalis, cui numerus m superscriptus erit, seriei arithm. ord. $m$ti, in linea horizontali post m, cum 1 incipiens. Nam in columna, cui 2 superscribitur, est $1=o+1$, nempe supra 1 stat o, et antea 1 est, porro $3=1+2$, nempe supra 1 stat 1, et praecedens est 2; sed idem 3 est = seriei verticalis praecedentis terminis 1, 2; porro 6= illi 3 quod supra 6 est (quod summae terminor 1, 2 columnae praec. erat), addito praecedente 3; itaque terminus 3tius columnae 2, nempe 6= terminis 1, 2, 3 columnæ praecedentis tribus prioribus. Si verò hoc usque ad μtum terminum deorsum eundo valeat, valebit de $(\mu+1)$to quoque: nam $(\mu+1)$tus erit $\mu$to cum praecedente aequalis; sed μtus $=1+2+3 \cdots +\mu$, praecedens autem est $\mu+1$.

Et pariter e quavis columna verticali νta formatur sequens: nam quaevis cum 1 incipit, nempe quaevis linea horizontalis semper uno termino ulterius terminatur in ultimo coefficiente binomiali (nempe 1); atque sub 1 columnae dictae ν, cadit coefficiens penultimus binomii ad $\nu+1$ elevati, adeoque numerus $\nu+1$, quia is 2do coefficienti aequalis est (T.I.p. 137); ita sub 1 columnae sequentis cui $\nu+1$ suprascribitur, cadit $\nu+2$; est igitur 2dus terminus hujus columnae = suprastanti cum praecedente $\nu+1$, atque simul aequalis summae duorum terminorum columnae praecedentis ν est. Unde item si usque ad μtum columnae $\nu+1$ terminum, quivis summa terminorum numero μ columnae praecedentis fuerit, idem de $\mu+1)$to quoque valere (ut prius) patet.

Est vero cujusvis columnae, cui m superscribitur, terminus $n$tus, in linea horizontali post numerum $(n+m-1)$ terminus a primo 1 inclusive $(m+1)$tus: est igitur binomii ad $n+m-1$ elevati coefficiens $m$tus, si primus 1 haud numeretur. Eritque =

$$\frac{(n+m-1)}{1}\cdot\frac{(n+m-2)}{2}\cdots\frac{(n+m-m)}{m}=\frac{n(n+1)\cdots(n+m-1)}{1\cdot 2\cdots m}$$

II. APPLICATIONES (Tom. I. p. 95) QUAEDAM.

§. 1. *Problemata vulgaria.*

Quaeritur, pecunia a interusurio c pro cent. elocata, si interusurium ad finem cujusvis anni, summae capitali pariter elocandae accedat: in quantum s excrescat ad finem anni $n$ti? Fiet ex 100 ad finem anni 1mi $100+c$; itaque ex a fiet $\frac{a.(100+c)}{100}=a+\frac{ac}{100}$, (nam $100:a=100+c:\frac{a(100+c)}{100}$; et hoc ad finem 2di anni fiet $a\left(\frac{100+c}{100}\right)^2$; ita ut si $\frac{100+c}{100}$ dicatur p, fiet capitalis ad $n$ti anni finem $=ap^n=s$.

Hinc $\log s=\log a+\log(p^n)=\log a+n\log p$; et patet e quibusvis tribus harum 4 quantitatum reperiri 4tam. Ex gr. quaeri potest ad quot annorum finem fieret 1000 ex 1 sub dicta conditione elocato; respondetur $n=\frac{\log s-\log a}{\log p}$.

Quod si vero et Perceptori rem tractanti solvendum sit quotannis c' pro cent: patet tum ex 100 ad finem anni fieri $100+c-c'$; et fieri $p=\frac{100+c-c'}{100}$. Si interusurii interusurium solvatur, tum fiet $p=\frac{100+c-c^2}{100}$, quia $\frac{c^2}{100}$ est interusurii interusurium, quia $100:c=c:\frac{c^2}{100}$.

II. Hoc modo inpopulationis incrementum computatur, quantitate c pro cent. et numero viventium praesenti datis. Si ex gr. c (nempe incrementum cujusvis 100 ad cujusvis anni finem) esset 2; quaeritur quot fient ex millione usque ad seculi finem.

III. Hinc quaevis quantitas pecuniae ad certum tempus reduci potest: id est s ad finem $n$ti anni, tanti valoris est (certo sensu), quanti a est in praesenti.

Itaque valores, plurium quantitatum pecuniae, diversis temporibus percipiendarum, ad idem tempus (ex gr. ad praesens) reducti, comparari possunt.

Si capitali a quotannis non solum interusuria addantur; sed praeterea cum fine anni cujusvis accedat capitalis b sub eadem conditione elocata: quaeritur ad finem $n$ti anni quanta fiet tota summa capitalis.

Ex a fiet ap^n, ex b quod cum initio anni secundi accedit, fiet bp^{n-1}, e sequente bp^{n-2}, et ita porro: atque hinc orietur progressio geometrica, cujus accipi pro termino Imo potest id quod ex b cum initio anni $n$ti usque ad ejusdem finem fiet, nempe bp (si non accedat adhuc b cum fine anni $n$ti quoque, tunc enim b esset primum); exponens seriei est p; itaque ipsi ap^n addi debet summa seriei hujus, et prodibit $s=ap^n+\frac{bp(p^{n-1}-1)}{p-1}$, cujus termini ubi n in exponente est, ope logarithmorum seorsim computantur.

Si vero etiam b sit $= a$, tum fiet
$s = \frac{ap(p^n - 1)}{p-1}$; Hinc
$\log s = \log a + \log p + \log(p^n - 1) - \log(p-1)$; et $\log a = \log s - \log p - \log(p^n - 1) + \log(p-1)$. Valor ipsius n autem prodit ita:

$s(p-1) = ap(p^n - 1)$; hinc $\frac{s(p-1)}{ap} + 1 = p^n = \frac{s(p-1)+ap}{ap}$; atque hinc $\log p^n$, seu

$n \log p = \log[ap + s(p-1)] - \log ap$, et $n = \frac{\log[ap+s(p-1)] - \log a - \log p}{\log p}$, ubi pro $\frac{-\log p}{\log p}$ potest -1 post quotum adnecti, ut fiat $\frac{\log[ap+s(p-1)] - \log a}{\log p} - 1$.

Heic patet valones ipsorum a quotannis percipiendorum ad finem anni $n$ti esse $= s$. Si itaque quaeratur, quantumnam aliquis in praesenti solvat, ut quotannis usque ad annum $n$tum percipiat a: nonnisi valor ipsius s ad tempus praesens reducendus erit; nimirum per p^n dividi valor ipsius s debet. Aut vero quodvis a ad valorem praesentem reductus in summam colligi debet: eritque (pro n ad finem anni dato)

$$\frac{a}{p} + \frac{a}{p^2} + \frac{a}{p^3} \cdots \frac{a}{p^n} = \frac{a - \frac{a}{p^n}}{p-1} = \frac{ap^n - a}{p^n(p-1)} = \frac{a}{p-1} - \left(\frac{a}{p-1} : p^n\right).$$

§. 2. Quum nec logarithmi omnium numerorum, nec logarithmis omnibus respondentes numeri, in tabulis adsint: artificiis defectus sublevatur; quorum fundamentum sequens est.

Erat (Tom. I. p. 162) $\frac{1+u}{1-u}=\frac{p+q}{p}$, si $u=\frac{q}{2p+q}$; estque $\log\left(\frac{p+q}{p}\right)=\log(p+q)-\log p$. Hinc

$\log(p+q)=\log p+\log\left(\frac{p+q}{p}\right)=\log p +$

$2\left(\frac{q}{2p+q}+\frac{q^3}{3(2p+q)^3}+\frac{q^5}{5(2p+q)^5}\cdots\right)$ (Tom. I. p. 162, log. nat. intelligendo)

$=\log p+\frac{q}{p+\frac{1}{2}q}+\frac{2q^3}{3(2p+q)^3}\cdots$; ubi jam postremus terminus si p non sit <1000, habet in denominatore ad minimum 10 loca, in quovis sequente autem ultra billionesies fit denominator major; numerator vero, si non sit >1, aut manet aut decrescit; quivis terminus autem est major summa omnium sequentium (Tom. I. ibidem).

Hinc si p non <1000, et q non >1, incrementa ipsius p numerica, 1 et f fractio vera), sunt in proportione cum incrementis logarithmicis respondentibus (cum errore exiguo); nam substituendo ipsi q prius 1, tum f, erit $\log(p+1)=\log p+\frac{1}{p+\frac{1}{2}}$ (praeter errorem dictum), et incrementum $=\frac{1}{p+\frac{1}{2}}$; $\log(p+f)=\log p+\frac{f}{p+\frac{1}{2}f}$, (item praeter errorem di-

Si vero etiam b sit $= a$, tum fiet

$s = \frac{ap(p^n-1)}{p-1}$; Hinc

$\log s = \log a + \log p + \log(p^n-1) - \log(p-1)$; et $\log a = \log s - \log p - \log(p^n-1) + \log(p-1)$. Valor ipsius n autem prodit ita:

$s(p-1) = ap(p^n-1)$; hinc $\frac{s(p-1)}{ap} + 1 = p^n =$

$\frac{s(p-1)+ap}{ap}$; atque hinc $\log p^n$, seu

$n \log p = \log[ap + s(p-1)] - \log ap$, et $n =$

$\frac{\log[ap+s(p-1)] - \log a - \log p}{\log p}$, ubi pro

$\frac{-\log p}{\log p}$ potest -1 post quotum adnecti, ut fiat $\frac{\log[ap+s(p-1)] - \log a}{\log p} - 1$.

Heic patet valores ipsorum a quotannis percipiendorum ad finem anni $n$ti esse $= s$. Si itaque quaeratur, quantumnam aliquis in praesenti solvat, ut quotannis usque ad annum $n$tum percipiat a: nonnisi valor ipsius s ad tempus praesens reducendus erit; nimirum per p^n dividi valor ipsius s debet. Aut vero quodvis a ad valorem praesentem reductus in summam colligi debet: eritque (pro n ad finem anni dato)

$$\frac{a}{p} + \frac{a}{p^2} + \frac{a}{p^3} \cdots \frac{a}{p^n} = \frac{a - \frac{a}{p^n}}{p-1} = \frac{ap^n - a}{p^n(p-1)} =$$

$$\frac{a}{p-1} - \left(\frac{a}{p-1} : p^n\right).$$

§. 2. Quum nec logarithmi omnium numerorum, nec logarithmis omnibus respondentes numeri, in tabulis adsint: artificiis defectus sublevatur; quorum fundamentum sequens est.

Erat (Tom. I. p. 162) $\frac{1+u}{1-u}=\frac{p+q}{p}$, si $u=\frac{q}{2p+q}$; estque $\log\left(\frac{p+q}{p}\right)=\log(p+q)-\log p$. Hinc $\log(p+q)=\log p+\log\left(\frac{p+q}{p}\right)=\log p+$

$2\left(\frac{q}{2p+q}+\frac{q^3}{3(2p+q)^3}+\frac{q^5}{5(2p+q)^5}\cdots\right)$ (Tom. I. p. 162, log. nat. intelligendo)

$=\log p+\frac{q}{p+\frac{1}{2}q}+\frac{2q^3}{3(2p+q)^3}\cdots$; ubi jam postremus terminus si p non sit <1000, habet in denominatore ad minimum 10 loca, in quovis sequente autem ultra billionesies fit denominator major; numerator vero, si non sit >1, aut manet aut decrescit; quivis terminus autem est major summa omnium sequentium (Tom. I. ibidem).

Hinc si p non <1000, et q non >1, incrementa ipsius p numerica, 1 et f fractio vera), sunt in proportione cum incrementis logarithmicis respondentibus (cum errore exiguo); nam substituendo ipsi q prius 1, tum f, erit

$\log(p+1)=\log p+\frac{1}{p+\frac{1}{2}}$ (praeter errorem dictum), et incrementum $=\frac{1}{p+\frac{1}{2}}$; $\log(p+f)=$

$\log p+\frac{f}{p+\frac{1}{2}f}$, (item praeter errorem dictum), et incrementum $=\dfrac{f}{p+\frac{1}{2}f}$.

Atque hinc proportio fit inter incrementa numeri numerum 1000 superantis, et incrementa logarithmi respondentis; nempe non est quidem $1:f=\dfrac{1}{p+\frac{1}{2}}:\dfrac{f}{p+\frac{1}{2}f}$, sed

$$1:f=\frac{1}{p+\frac{1}{2}}:\frac{f}{p+\frac{1}{2}}$$; at vero

$$\frac{f}{p+\frac{1}{2}}-\frac{f}{p+\frac{1}{2}f}=$$

$$\frac{pf+\frac{1}{2}f^2-pf-\frac{1}{2}f}{p^2+\frac{1}{2}fp+\frac{1}{2}p+\frac{1}{4}f}=\frac{\frac{1}{2}f^2-\frac{1}{2}}{p^2+\frac{1}{2}f\ldots}$$

Ubi patet numeratorem esse <1, et denominatorem $>1\,000\,000$ si vero per *modulum* multiplicentur logarithmi naturales, ut vulgares prodeant, (Tom. I. p. 162); tum et ista differentia adhuc ultra bis minor fiet.

Si vero p non $<10\,000$, patet denominatorem esse majorem 10 millionibus.

Atque hinc reperitur ope tabularum logarithmus etiam numeri ibidem haud exstantis; ita logarithmo, qui in tabulis non adest respondens numerus reperitur.

Nam numeri supra 10 000, incrementa 1 et f, sunt (sensu dicto) uti logarithmica incrementa I et i competentia.

Hinc si quaeratur logarithmus 7 689 457, atque adsit in tabulis 76 894, et sequens uno major: est 7 689 457 $=$ (76 894, 57).100, et log 7 689 457 = log (76 894,57) + 2 (Tom. I. p. 95). Itaque adhuc tantum incrementum i logarithmo ipsius 76 894 addendum quaeritur: quod prodit instituta proportione $100:57 = I:i$, ubi i in centesimis prodit; nempe $i = \frac{57I}{100}$; I vero est log 76 895 — log 76 894. Demum 2 quoque addi characteristicae debet.

Ita si logarithmus L non exstat: subtrahitur immediate minor l ex immediate majore L', inter quos cadit L, et subtrahitur etiam l ex L; differentia prior est I, posterior i; est vero $I:i = 1:f$ (sensu dicto); ubi si loco 1 ponatur 100 prodit f in centesimis; quia tunc $1 = 100$ centesimis accipitur, adeoque quartus per 100 dividitur. Nempe $\log N = l$

$$\log(N+f) = L = l+i$$
$$\log(N+1) = L' = l+I$$

Sunt tabulae in quibus I, i et f computatae, absque calculi molestia reperiuntur.

Schol. 1 Logarithmus nonnisi ipsius 1 cum certis quotvis cifris exactus est; nempe ipsius 1 est o, ipsius 10 est 1, ipsius 100 est 2 &c; cujusvis numeri alius vero log. incommensurabilis est cum unitate. Sit enim integer $N = 10^{\frac{n}{m}}$ erit $N^m = (2.5)^n$; sit N imagine primorum expressum; in hac adesse oportet tam 2 quam 5, nec ullus alius primus adesse potest, et 2 toties (ex gr. $k$ies) adest quam 5, ut $m$ies positum sit $(N = 2^k . 5^k)^m = N^m = 2^{km} . 5^{km} = 2^n . 5^n$; unde sequitur $km = n$, et $\frac{m}{n}$ = integro k.

Itaque nonnisi potentia integra ipsius 10 idest 1 cum certo cifrarum numero habet log. integrum.

Schol. 2. Logarithmi exprimuntur fractione 10mali, in tabulis vulgaribus pro denominatore 10 000 000; possunt vero quantolibet minori errore computari (Tom. I. p. 162). Integer ante comma vocatur *characteristica*, notae 10males post comma vocantur *mantissa*. Illa et negativa esse potest; uti $\log \frac{2}{100} = \log 2 - 2$

Schol. 3. Quum logarithmus eo segnius crescat, quo major est numerus, (ex gr. ab 1000 usque ad 10000 tantum unitate crescit); si in calculo prodierit l logarithmus characteristica k et mantissa m gaudens: quaeratur mantissa m post characteristicas maximas, quae in tabula adsunt; et si reperiatur ibidem numerus N respondens logarithmo cujus characteristica K et mantissa m est; respondebit ipsi l tanquam logarithmo, $\frac{N}{10^{K-k}}$; nam $N = 10^{K+m}$, et $\frac{10^{K+m}}{10^{K-k}} = 10^{k+m}$ (per m hic valorem, characteristicae additum intelligendo). Si vero mantissa m exacte haud reperiatur, proxime minor accipi debet et si opus fuerit (p. 341); quaesitum accuratius determinatur. Si proxime minor accipiatur, quaesito minus prodibit.

III. DE OPERATIONIBUS *vulgaribus decadicis*

De numeratione et fractione decimali generaliter dictum (Tom. I. p. LII) est: dicatur quaevis lege numerationis decadicae facta expressio, *imago decadica*; sive ad finem sit comma, sive antea, sive nullibi, at in casu postremo semper ad finem cogitetur, (adinstar + in initio) omissum.

§. 1. Est quaevis imago decadica fractio; (Tom. I. p. LII); et imagines decadicae D et d, si notae decimales in D numero D' in d numero d' sint, et $D' > d'$ fuerit; (per Tom I. ibidem) ad denominationem eandem reducuntur; adjectis ipsi d ad dextram (manente commate) numero $D' - d'$ cifris; ita ad 3tiam et de quavis ad sequentem progredi licet. Tumque patet in *additione* nonnisi numeratores ut integros addendos esse, uti *in subtractione* numeratorem subtrahendi ex altero subtrahi debere, in resultato totidem notis decimalibus factis, quot in una imaginum sunt. *Divisio* autem (quum denominatores aequales facti sint) peragitur numeratore dividendi per numeratorem divisoris diviso. Potest autem divisio et absque reductione ad *denom. eundem* perfici: nempe sint imaginum D, d numeratores N, n; erit $D = \frac{N}{10^{D'}}$, et $d = \frac{n}{10^{d'}}$; atque $\frac{D}{d} = \frac{N.10^{d'}}{n.10^{D'}} = \frac{N}{n}.10^{d'-D'}$.

Multiplicatio autem fit sic: $D.d = \frac{N.n}{10^{D'+d'}}$; itaque tot notae decimales fiunt in facto numeratorum (ita consideratorum, quasi comma ad finem esset) decadice expresso, quot notæ dec. in utroque factore simul sunt. In *quoto* $\frac{N}{n}$ vero, si $d' = D'$, quotus $\frac{N}{n}$ est; nam tum $10^{d'-D'} = 10^0 = 1$; at si $d' = D' + m$ (pro m integro), $\frac{N}{n}$ per 10^m multiplicari debet; si vero $D' = d' + m$, tum $10^{d'-D'} = 10^{-m} = \frac{1}{10^m}$; adeoque

$\frac{N}{n}$ per 10^m dividere oportet; et si $\frac{N}{n}$ imagine decadica expressum fuerit, quomodo multiplicatio, aut divisio mutato commate peragatur; (Tom. I. p. LII.) dictum est.

§. 2. Summa hinc imaginum decadicarum decadice expressa reperitur modo sequente: scribantur horizontaliter imagines decadicae addendae ita, ut commata omnium in eandem lineam verticalem; atque pariter in omnibus imaginibus quaevis $m$tae notae a commate ad laevam in eandem lineam verticalem cadant; et pariter ad dextram, si fuerint; atque tum linea ducta, quae addenda superius relicta, a summa quaesita distingvat, incipiendo ab ultima columna a dextra ad laevam fiat operatio sequens. Consideretur in hac operatione in quavis columna numerus quivis, quasi tot unitates denotaret, quot per se denotat; atque incipiendo ab hujus columnae ultimae termino aliquo extremo, quaeratur numeri hujus et sequentis summa decadice expressa; et quæratur summa cujusvis summae repertae, cum numero in eadem columna proxime sequente, donec nullus supersit; et e quacunque columna prodierit summa $= \nu$ decadibus cum n unitatibus (pro n non >9), in columnam eandem infra lineam scribatur n; et ν (tanquam unitatum numerus) addatur numero extremo columnae ad laevam sequentis, et in eadem columna, quaevis summa addatur numero sequenti, donec nullus in eadem columna supersit; atque si prodeat columnae ultimae summa $= \nu'$ decadibus cum n' unitatibus (pro n' non >9) in eadem columna infra lineam scribatur n'; et ν' decadice expressum scribatur ad laevam ante n', si nulla amplius ad laevam columna supersit. Demum vero summa infra lineam prodeunte, ponatur comma in lineam commatis addendorum.

Quod summa hoc modo rite prodeat, sic patet: quum hoc pacto omnia addenda ad eundem denominatorem, qui etiam in summa per comma modo dicto positum fit, reducta fuerint, quaestio eo redit; num summa numeratorum, id est si comma in omnibus addendis et summa quoque, ad finem posita esset, rite prodierit. Hoc autem inde patet, quod a columna ultima A ad dextram, progrediendo ad sequentem B, inde ad C, et ita porro usque ad extremam, nihil sub ullam scribatur, quod in columnis eousque additis non adest; demum vero omne quod ex addendis superest, summæ adjiciatur, praetereaque nihil.

Nimirum sit columna $A = \mu.10 + m$, erit (β dicendo id quod 1 in B significat) $B + \mu.10 = B + \mu.\beta$, sitque hoc $= \mu'.10.\beta + m'.\beta$; adeoque $A + B = B + \mu.10 + m = \mu'.10.\beta + m'.\beta + m = \mu'.10.\beta + m'.10 + m$; in summam scriptum autem, nempe $m'm$ (decadice intelligendo) denotat $m'.10 + m$; itaque nonnisi $\mu'.10\beta$ desunt. Si vero usque ad certam columnam G (exclusive) in qua 1 denotet g, omnia columnarum usque ad illam F (inclusive) quae ipsam G praecedit, summa rite inscripta fuerit, nonnisi numero ν decadum illius f quod 1 in columna F denotat, supermanente; tum si $G + \nu.10.f = \nu'.10.g + n.g$ (pro n non > 9), et summae in columnam G inscribatur n; e summa columnarum A, B --- F, G nonnisi $\nu'.10.g$ supererit. Hoc pactoque usque ad columnam extremam pervenitur; et si ex gr. ista G esset, atque ipsi $n --- m'm$ (decadice intelligendo) anteponatur ν' decadice expressum,

$v'n - - m'm$ denotabit $v'.10g+n.g - - \dagger m'.10\dagger m$, adeoque summam totalem; nempe $v'n$ (decadice intellectum) denotat $v'.10.g+n.g$, (denotante 1 unum g in loco n).

Schol. Summa quorumvis duorum numerorum ipso 10 *minorum*, (uti etiam *differentia cujusvis numeri n ipso* 10 *minoris a numero minori quam* $(10\dagger n)$ e tabula sequente constat: nec necesse est, inter axiomata referre exgr. quod $3+5=8$, et $8-5=3$; $8+7=15$, et $15-7=8$ &c.

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
8	9	10	11	12	13	14	15	16	17
9	10	11	12	13	14	15	16	17	18

Constructio tabulae ex inspectione patet; nempe in linea superiori sunt numeri a *o* usque ad 9, et in omnibus columnis verticalibus deorsum a quovis numero supremo sequuntur item numeri naturales; adeoque in quavis columna ex gr. ipsi 7 tot unitates adduntur usque ad lineam horizontalem (inclusive) post ex gr. 5 (in columna extrema ad laevam posita), quot unitates in 5 sunt; itaque ubi columna ipsius 7 cum horizontali ipsius 5 concurrit, numerus 12 summam ipsorum 7 et 5 de-radice exprimens reperitur; et differentiam ipsius 7 a 12 ostendit 5, uti 7 differentiam ipsius 5 a 12.

Hinc etiam casus sequentes patent: si ex gr. numero $\mu.10.\beta+8.\beta$ sit addendum $7.\beta$; fiet summa $=\mu.10.\beta+15.\beta=(\mu+1).10.\beta+5.\beta$; ita si ex hoc subtrahendum sit $7.\beta$, remanet $\mu.10.\beta+8.\beta$; adeoque in casu primo fit β numero $(\mu+1)5$, in posteriore autem $\mu 8$ (decadice utrumque intelligendo).

§. 2. *Subtractio* autem peragitur hoc modo: scribantur ita (ut in additione); ut comma sub comma, decas sub decadem --- decima sub decimam --- cadant; erunt pariter ad denom. eundem reducta, et quasi comma ad finem esset, tractanda; dummodo et in differentiam comma in lineam commatum verticalem ponatur. Sit (literis numeros infra 10 denotantibus, et imagines decadice intelligendo)

major	NM----- DCBA
minor sit	*nm*----- *dcba*
erit diff.	$(N-n)(M-m)--(D-d)(C-c)(B-b)(A-a)$

pro casu, si quaelibet litera superior majus inferiore denotet; namque (omnia decadice intelligendo) linea infima lineae mediae addita, lineam supremam praebet; in quavis columna enim ex gr. in 2da ad laevam est $b+(B-b)=B$. Itaque in hoc casu in quamvis columnam id scribi debet, quo superior inferiorem excedit.

Si vero in columna quapiam, superior inferiori aequalis (ex gr. $D=d$) sit, tum etiam $D-d=o$ in columna eadem rite scribetur in differentiam, sive o denotet D sive alium numerum, nam $(D-d)+d=D$.

At si quis superiorum minor inferiore sit, aut superior o et inferior non o sit: tum sit ex gr. $b=B+b'$; in hoc casu quoque minor e

majori demi poterit, si in eadem columna o scribatur, et infra o scribatur b', tanquam $-$vum pro differentia, quae prius modo dicto prodiit; nempe ubi numerus inferior excedit superiorem, ubique o ponendo, et excessum inferius scribendo, excessus inferiores subtrahantur. Prodibit enim differentia vera; namque $o-(b-B)=B-b$. Si $B=o$ sit, tum $b=b'$.

Subtractio haec posterior autem ita peragi potest; ut in columnam ipsius b infra b in differentiam scribatur $b''=10-b'$, ita tamen, ut ad laevam in differentia quae prius prodiit, usque ad numerum illum proximum eatur, qui non o est, atque hic unitate minuatur; quotcunque cifrae autem fuerint eousque, in 9 mutentur. Sit nempe plane $B=o$ aut $<b$, atque $B-b=-b'$, et $10-b'=b''$, adeoque $b''=10+B-b$; unde etiam idem est, pro $b>B$, sive B ex b subtractum, ex 10, sive b ex $B+10$, subtrahatur; dummodo in tali casu proxime ad laevam uno minus scribatur. Denotet nempe 1 unum β in columna ipsius B; erit $(C-c-1).10.\beta+(10+B-b).\beta=(C-c).10\beta-10.\beta+10.\beta+(B-b).\beta=(C-c).10.\beta+(B-b).\beta$.

Si vero $C=c$, adeoque $C-c=o$, aut etiam $D-d=o$, imo porro superior $=$ inferiori fuerit usque ad certum ex gr. E; erit E aut $>e$, au $E<e$; si $E>e$, tum $(E-e-1).10^3.\beta+(D-d+9).100.\beta+(C-c+9).10.\beta+(B-b+10).\beta=(E-e).10^3.\beta+(D-d).10^2.\beta+(C-c).10\beta+(B-b).\beta$; nam $990.\beta+10.\beta-1000.\beta=o$.

Si vero $E<e$, aut etiam sequentes numeri superiores minores inferioribus fuerint usque ad certum aliquem ex gr. $G>g$; in columnam ipsius E scribatur non $e''=10-(e-E)$ sed $e''-1=9-(e-E)=9+E-e$; in columnam ipsius F pariter non $f''=10-(f-F)$ sed $9-(f-F)=$

$9+F-f$, et in columnam ipsius G scribatur $G-g-1$; eritque $(G-g-1).10^5.\beta +$ $(F-f+9).10000.\beta+(E-e+9).1000.\beta+(D-d+9).100.\beta$ $+(C-c+9).10.\beta+(B-b+10).\beta = (G-g).10^5.\beta +$ $(F-f).10^4.\beta+(E-e).10^3.\beta+(D-d).10^2.\beta +$ $(C-c).10.\beta+ (B-b).\beta$; nam $99990.\beta+10\beta-10^5.\beta$ $=o$.

Eritque *differentia* $(G-g-1)(f''-1)(e''-1)99b''$ (decadice intelligendo). Patet etiam modo consveto in columnam ipsius B scribi $b''=10+B-b$; nempe si C non fuerit o, demitur 1 ex eo, quod $10.\beta$ facit, si vero $C=o$ imo etiam sequentes superius cifrae sint usque ad certum E, tum 1 ex E demtum erit $10^3.\beta = 99.10\beta+10.\beta$; itaque cifrae in columnis D et C in 9 mutantur, et ex B fiet $(10+B).\beta$.

§. 4. Quoad *multiplicationem integrorum*: sit imago decadica DCBA per imaginem decadicam cba multiplicanda; erit $DCBA=D000+$ $C00+B0+A$, et $cba=c00+b0+a$; atque $DCBA.cba=a(D000+C00+B0+A)+b0.(D000+C00+$ $B0+A)+c00.(D000+C00+B0+A)=c.D00000 +$ $(c.C+b.D)0000+(c.B+b.C+a.D)000(c.A +$ $b.B+a.C)00+(b.A + a.B)0+a.A$; quod ordine evidenti modo sequente dispositum additumque, factum praebet; patetque $a.A$ summam unitatum, columnam sequentem decades, et ita porro esse.

		$a.D$	$a.C$	$a.B$	$a.A$
	$b.D$	$b.C$	$b.B$	$b.A$	
$c.D$	$c.C$	$c.B$	$c.A$		

Est vero multiplicatio integri M per integrum m additio ipsi M ipsius M, $(m-1)$ies iterata; at peragitur modo sequente consveto brevius: accipitur prius $a$ies A, et si hoc <10 fuerit infra lineam sub a scribitur; si vero fuerit, $=\mu.10+a'$, eo nonnisi a' scribitur, et μ additur ipsi $a.B$: atque notae multiplicandi semper porro ad laevam singuli $a$ies accipiuntur, et si e quacunque nota per a multiplicata transierit ν (uti antea μ) et nota sequens per a multiplicata det $n.10+k$, scribitur in facti locum proximum ad laevam k, et $\nu+n$ additur facto e nota sequente in a; si vero nulla supersit, $\nu+n$ antepenitur facti parti quae eousque prodiit. Eademque operatio fit cum omnibus multiplicatoris notis, dummodo factum quodvis partiale sub nota multiplicatoris illa terminetur, per quam multiplicatio facta est. Denique facta partialia adduntur.

Patet M per $b.10$, et $c.100$ multiplicandum esse, atque idem prodire, si $b.M$ sub b, et $c.M$ sub c terminetur: in additione factorum partialium enim, tantum est, ac si post $b.M$ una cifra, et post $c.M$ duae essent.

Quod facta partialia rite prodeant; e conceptu iteratae additionis patet. Factum e quibusvis duobus novenario minoribus e *tabula Pyth.* patet, ubi quivis sibi iterato additum (p. 346) toties continet supremum, quot unitates habet numerus extremus lineae horizontalis.

§. 5. *Divisio* peragitur sic: sit dividendus D et divisor d, et $D=D'.10+C$ (denotante C notam infra 10) et sit q talis integer, ut $q.d$ non $>D'$, sed $(q+1).d>D'$ sit; atque integri r, et c tales sint, ut $r<d$, et $c.d+r=(D'-q.d)10+C$ sit: erit $D'.10+C=q.d.10+c.d+r=d.(q.10+c)+r$ $=D$. Consequ. $q.10+c$ cum residuo r est quotus ex D diviso per d. Hinc quaevis nota dividendo adjecta, novam notam quoto adjicit; et quaestio eo redit, quomodo a laeva incipiendo prima quoti nota prodeat, et quaenam quoti nota pro sequente dividendi nota sit.

Quaeritur prius a laeva incipiendo; num d in prima dividendi nota reperiatur, et si non; quaeratur porro usque ad notam illam primam talem, ut in numero quam imago decadica D′ a nota prima usque ad hanc inclusive denotat, non sit $<d$, et in quotum scribatur q (sensu antea dicto); atque tum quaeratur pro nota C dividendi post D′ sequente, nota c post q decadice sequens; et tum $D'.10+C$ pro priori D′ reputato, si adhuc nota B dividendi sit, quaeratur nota b quoti post qc sequens; atque hoc continuetur, donec nulla dividendi nota supersit, et notetur residuum ultimum r'; eritque quoti complementum $r:d$. Patet hinc e tot notis constare quotum, quot notae dividendi post primum D′ sunt, addito 1 primo D′ competente. Nimirum nec primum D′, nec ullum $D'-dq$ quotum >9 dare potest: nam et maximum $<d$, est $d-1$, atque et $(d-1).10+9=10.d-1$.

Si d sit $=d'.10^{\mu}$; resecentur ad finem dividendi D totidem notae, sitque pars resecta k ad dextram, et ad laevam sit D′ valore $D'.10^{\mu}$, sitque $D'=q.d'+(r<d')$; erit $D'.10^{\mu}=q.d'.10^{\mu}+r.10^{\mu}$; et $D=D'.10^{\mu}+k=q.d'.10^{\mu}+r.10^{\mu}+k$; itaque q erit quotus cum residuo $r.10^{\mu}+k$; quod $<(d=d'.10^{\mu})$ est, nam $r<d'$.

Si vero $D=\alpha.\delta$ et $d=\alpha.\delta'$, fiet $\delta:\delta'=D:d$; atque operatio abbreviatur. Unde quaestio fit; per quosnam numeros, numerus exacte dividi queat? Si ad finem numerus par sit, summa decadum et numeri paris, per 2 dividitur. Si postremae 2 notae (decadice) per 4 dividi queant, pars prior multiplum centenarii est, adeoque totum per 4 dividitur. Si 3 postremae per 8 dividantur, pars prior multiplum millenarii est per 8 divisibile. Si summa singularum notarum (sine valore decadico) per 9 dividatur, totam imaginem metitur 9; ita 3 metitur imaginem, si summam dictam metitur. Nam quaevis nota quotvis cifris postpositis, per 9 divisum, pro residuo se ipsam aut *o* dat; itaque nonnisi de summa residuorum quaeritur. Si vero tam 2 quam 3 metiatur numerum, etiam 2.3 metitur (Tom. I. p. 394) &c.

Etiam 11 metitur imaginem decadicam *dcba*, si differentiam summae notarum in locis paribus a summa notarum in locis imparibus, metiatur 11. Nam si post 1 numerus cifrarum par fuerit, per 11 divisum, residuum 1 dat; si vero post 1 numerus impar cifrarum fuerit, residuum 10 est; itaque pro $d.1000+b.10=N'$, et $c.100+a=N$, erit $N'+d+b=n'.11$, et $N-(c+a)=n.11$; adeoque si $d+b-(c+a)=\mu.11$; erit $N'+N=(n'+n-\mu)11$. Et conversim si $d+b-(c+a)$ non sit multiplum ipsius 11; tum 11 numerum non metitur: nam tum $N'=n'.11-(d+b)$, et $N=n.11+c+a$, adeoque $N'+N=(n'+n).11+c+a-(d+b)$, et si $c+a-(d+b)$ non sit multiplum ipsius 11, nec $N'+N$ erit.

§. 6. Si dividendo D, cifrae numero μ adjiciantur, et diviso hoc per d prodeat pars quoti integra q; atque fiant in q notae decimales numero μ: prodibit quotus cum errore $< 1:10^\mu$. Nam $D:d=D.10^\mu:d.10^\mu=(D.10^\mu:d):10^\mu$; atque $q.d<D.10^\mu<(q+1).d$; itaque $q.d:10^\mu<D<(q+1).d:10^\mu$.

Unde etiam modus patet, quo fractio quaevis in decimalem cum errore saltem quantumvis exiguo convertatur.

Quomodo quaevis fractio ad quemvis denominatorem reducatur, et denominator communis minimus, divisorque communis maximus reperiatur, dictum est (Tom. I. p.62 et 395-.)

Schol. 1. Proba novenariorum in singulis 4 speciebus valet, in tantum; quod si locum non habeat, operatio erronea sit; conversim autem patet resultati notis permutatis etiam, pro bam locum habere. *In subtractione*, e subtracto et differentia simul, et tum e minuendo ejiciendi novenarii sunt; *in multiplicatione* e facto, atque e factoribus: nempe si multiplicandus $=n.9+a$, et multiplicator $=m.9+b$, factum $=m.n.9.9+a.m.9+b.n.9+a.b$; itaque $a.b$ supra novenarii multiplum tantum residuum relinquere debet, quam factum ejectis novenariis.

Schol. 2. Operationes istae cum numeris dyadice expressis facillime peragerentur: si ubi plures imagines addendæ sunt, prius duae addantur, et cuivis summae quae prodiit, sequens addatur, donec summa omnium prodeat. In multiplicatione, nonnisi multiplicandus describitur ubique sub multiplicatoris nota $=1$ terminandus. In divisione semper patet, num o aut 1 in quotum veniat.

§. 7. ***Radix** m **gradus autem extrahitur sic.*** Si quivis integer fuerit imagine decadica I' expressus, et integer r sit talis, ut $r^m=$vel$<I'$, sed $(r+1)^m>I'$; atque ipsi I' adjiciantur notae numero m, quarum *imago dec.* dicatur i: erit imago tota $=I'.10^m+i$, (quae dicatur I): eritque r cum nota aliqua b decadice adjecta radici m gradus ex I aequalis, aut ea proxime minor. Nam etsi $i=o$ esset: $(r.10)^m=r^m.10^m$ esset $=$ aut $<I'.10^m$, sed $[(r+1).10]^m=(r+1)^m.10^m>I'.10^m+i$, etsi in quovis loco post I' novenarii essent: quia $(r+1)^m>I'$. Itaque nonnisi nota illa b quaeritur, quae post r sequitur: quod modo sequente fit. Si $r.10$ dicatur a; erit $a+b=\sqrt[m]{I}$, aut radice proxime minor; adeoque tale b (a o usque ad 9) quaeri debet, ut $I-a^m$, id est $(I'-r^m).10^m+i$ sit $=$ vel $> ma^{m-1}b+\frac{m(m-1)b^2}{1.2}\cdots+b^m$, (T.I. p.150), et si $b+1$ ponatur pro b, expressio haec $>$

$I-a^m$ sit. Patet in posteriori, si pro $a=r.10$ ubique r ponatur, terminos addendos (omissis cifris) semper uno loco porro ad dextram terminari; nempe $m.r^{m-1}b$ haberet $m-1$ cifras ad dextram, $\frac{m(m-1)r^{m-2}b^2}{1.2}$ haberet $m-2$ cifras propter 10^{m-2} &c. Ut veró b paucius tentando reperiatur; tentetur divisio ipsius ($I'-r^m$ adjecta prima nota decadice sequente) per mr^{m-1}; quia $mr^{m-1}b$ etiam $m-1$ loca post se habet. Si vero post I adhuc m notae fuerint; (ut p. 351) reputetur I tanquam I' antea, atque operatio eadem usque ad finem repetatur.

Patetque si nova m loca adjiciantur, idem redire; in quadrata radice autem terminos addendos esse $2ab+b^2$.

Si vero nm cifrae adjiciantur numero N; et in radice m gradus ex $N.10^{nm}$ fiant n notae decimales: prodibit radix vera aut proxime minor, e fractione cujus numerator est $N.10^{nm}$ et denominator 10^{nm}; adeoque ex N.

Ex gr. $\sqrt{2}=\sqrt{20000}:100$. Sit primum $I=200$; $I'=2$, $i=00$; erit $r=1$, adeoque $a=10$; $(I'-r^2).100+i=100$; quod si usque ad notam primam ipsius i (inclusive), nempe 10 ita dividatur per $2r=2$. ut ratio etiam termini b^2 habeatur; prodibit $b=4$; nam $2ab+b^2=20.4+4.4=24.4=96$, et pro $b=5$ prodiret $125>100$. Atque jam nova I,I',i,r,a accipi, et novum b quaeri potest; nempe pro $I=20000$, $I'=200$, $i=00$; $r=14$, $a=140$, pariter prodibit $b=1$; fietque $171<\sqrt{20000}<172$, atque $\sqrt{2}=1,17$ cum errore $<0,01$. Idem vero continuare pro novis I,I',i,r,a licet, donec libuerit.

Ita $\sqrt[3]{15}=\sqrt[3]{15000}:10=\sqrt[3]{15000000}:100$ &c. Sit primum $I=15000$, $I'=15$, $i=000$ Erit $r=2$, adeoque $a=20$, et $(I'-r^3).10^3+i=7000$;

atque si hoc a laeva usque ad notam primam ipsius i (inclusive) per $3r^2$, (nempe 70 per 12) ad terminos reliquos etiam respiciendo dividatur, prodibit $b=4$; nimirum $3a^2b=48.100$. $3ab^2=96.10$, et $b^3=64$; quorum summa non >7000, sed si $b=5$ acciperetur, >7000 prodiret. Pariter pro novis I, I', i, r, a, ut prius continuari donec libuerit, patet.

Schol. Solet e quantitate algebraica quoque radix extrahi: at nisi exacte, aut serie lege certa progrediente, complemento ad limitem o tendente prodeat, aut saltem erroris limites aestimentur, exemplum vanum tantum ejusmodi formularum est.

Ex gr. (Pag. 120). $\sqrt{\left(\frac{a^2}{4}-\frac{u^2}{a}+u^2-2u\mathrm{E}\right)}$ sit $=\alpha+\beta$; et $\alpha=\frac{a}{2}$; erit $\alpha^2=\frac{a^2}{4}$, et $(\alpha+\beta)^2-\alpha^2=2\alpha\beta+\beta^2=-2u\mathrm{E}-\frac{u^2}{a}+u^2$; cujus si terminus rite electus per $2\alpha=a$ dividatur, prodibit $\beta=-\frac{2u\mathrm{E}}{a}$; quia $2\alpha\beta+\beta^2$ erit $=-2u\mathrm{E}+\frac{4u^2\mathrm{E}^2}{a^2}=u^2-\frac{u^2}{a}-2u\mathrm{E}$; nam (pag. eadem) $\mathrm{E}^2=\frac{a^2-a}{4}$.

Eodem modo solet etiam radix (adinstar divisionis Tom. I. p. 120) extrahi. Ex gr. pro $\sqrt{(1-x)}$ sit terminus primus $1=a$, et sequens sit b; erit $(1-x)-1^2=-x=2ab+b^2$; et si per $2a=2$ dividatur $-x$, prodibit $b=-\frac{x}{2}$, ac subtracto $2ab+b^2$, residuum erit $-\frac{x^2}{4}$. Pro quovis novo a (id est summa terminorum radicis quae prodierunt) autem duo priores termini erunt $2-x$; atque si terminus aliquis residui fuerit $\frac{-x^m}{2^m}$, termino hoc per terminum primum ipsius $(2-x\cdot\cdot)$ diviso, prodibit terminus radicis sequens $\frac{-x^m}{2^{m+1}}$; et multiplicando per $(2-x\cdot\cdot)$ prodibit $\frac{-x^m}{2^{m+1}}+\frac{x^{m+1}}{2^{m+1}}\cdot\cdot\cdot$; quo subtracto ex $\frac{-x^m}{2^m}\cdot\cdot$, manet $-\frac{x^{m+1}}{2^{m+1}}\cdot\cdot\cdot\cdot$; et casu eodem redeunte, prodit series $1-\frac{x}{2}-\frac{x^2}{2^3}-\frac{x^3}{2^4}-\frac{x^4}{2^5}\cdot\cdot\cdot\cdot$; quae ubique referri solet; quamvis ex gr. pro $x=\frac{1}{2}$, fiat $1-\frac{x}{2}=\frac{3}{4}$, et a $-\frac{x^2}{8}$ incipiendo (inclusive) summa seriei geom. $\backsim -\frac{1}{24}$, adeoque series tota $\backsim \frac{17}{24}$, quod elevatum ad 2 est $=\frac{289}{576}>(1-x=\frac{1}{2})$. Generaliter pro $\frac{x}{2}<1$, series $1-\frac{x}{2}-\frac{x^2}{2^3}-\frac{x^3}{2^4}\cdot\cdot\cdot \backsim \frac{8-8x+x^2}{4(2-x)}$ (Tom. I. p. 132); cujus ad 2 elevati differentia ab $1-x$ fit $=\frac{x^4}{4.4(2-x)^2}$; adeoque error aliquatenus aestimari potest.

Si vero $x:2>1$, tum series $\backsim -\infty$. Ad $\sqrt{}(a\pm x)$ mutatis mutandis applicari potest.

DILUCIDATIO QUORUMDAM CONCEPTUUM IN TOMO *PRIMO* TRADITORUM.

§. 1. Tom. I. p. 33, ubi definitio multiplicationis prius oritur, pro § 20 et 21 debuisset § 19 et 21 citari; imo citata repetere clarius fuisset. Potuisset autem a definitionibus proportionis (Tom. I. p. 65) datis incipiendo, harum aequivalentia cum prius data demonstrari. Sed generalissima proportionis (si ita extendere libeat) definitio, quam et quantitates quaevis sub formam $A+B\sqrt{-1}$ cadentes ingredi queant, nonnisi *divisionis absolutae* conceptu stabilito dari potest.

§. 2. Quantitatum prius duae determinationes nempe + et — considerabantur; quibus postmodum item duae, nempe realitas quoad +1 et realitas quoad — 1 accesserunt (Tom. 1. p. 106)

Potest vero *idem realitatum conceptus aliter quoque exponi.* Multiplicatio, divisioque tam quoad +1 quam quoad —1 peragi potest, omniaque et operatione quoad —1 facta (mutatis mutandis) aeque prodeunt: exgr. si quaeratur spatium S tempore T celeritate C percursum; prodibit $S=C$ per T quoad +1 multiplicato (Tom I. p 40); idemque est $=C$ per $-T$ quoad —1 multiplicato, essetque, $S=-C.T$ (multiplicatione quoad —1 facta). Ne tamen semper commemorandum sit, quoad quodnam ipsorum +I et —1 fiat operatio, nec formulae nunc quoad +1 mox, quoad —1 tractatae implicentur; eadem unitas quoad signum etiam servatur pro omnibus, atque tacite quantitati cuilibet, +1 data est, nisi expresse monitum fuerit, cuipiam

—1 tribui. Nimirum quantitas quaevis concipiatur unitate certa gaudens, quæ illi quoad casum operationum multiplicationis divisionisque attribuatur. Manifesto prouti quantitati unitas ✠va vel ⟝va tribuitur, duae determinationes diversæ, resultataque diversa parientes oriuntur: adeoque possent ea quae antea realia quoad +1 dicta sunt, quantitates *unitate* ✠va, et realia quoad —1, *unitate* ⟝ va *praedita* vocari; at propter nomenclationem breviorem denotatio prior manere potest: aut prius, *reale*, posterius *pure imaginarium* dici (Tom I. p. 105.)

Hinc si tale x quaeratur, ut $x.x = -4$ vel $3x.x = -4$ sit; x impossibile esse nihil aliud significat, nisi inter quantitates unitate ✠ va praeditas tale x non dari, et nonnisi inter unitate ⟝ va praeditas esse. Ita si fiat $y = \sqrt{(x-a)}$ in Geometria; et quantitates unitatè ✠ va praeditae sint, adeoque operationes quoad +1 fiant: ordinata y (✠va vel ⟝ va) nonnisi tunc accipitur, dum expressio dicta valorem habebit. Poterunt autem (Tom I. p. 177) ordinatae aliæ quoque colore vel alio quopiam modo a prioribus distinctae intuitui exhiberi; si $\sqrt{(x-a)}$ pro quantitatibus unitate ⟝ va praeditis accipiatur.

§. 3. Atque jam multiplicatione et divisione, in *respectivam* quoad ± 1, et *absolutam* (absque mentione respectus quoad ± 1) distincta; prius respectiva, tum absoluta, et demum proportio stabilitur. Si definitiones (Tom. I. p. 65) traditae ad multiplicationem divisionemque restringantur, denotetque A terminus primus unitatem ✠vam vel ⟝vam; et quodvis sequentium 3 terminorum B,C,D purum reale sit (aut quoad +1 aut quoad —1), sintque A et B homogenea, aut alterutrum 0 sit, pariter C et D; atque (abstrahendo ab omni determinatione)

1mo *Pro quovis nomine numerico* n, pro quo est $A=nu$, et $C=nv$; sit (m nomen numer. denotante) $B=mu+(\alpha=0$ vel $<u)$, et $D=mv+(\lambda=0$ vel $<v)$; quod alteri definitioni ibidem datae aequivalet; nempe quod si pro quovis dicto n, nec u a B pluries, quam v a D, neque v a D pluries quam u a B contineatur.

2do.(T. I.p.106) Si tam respectu determinationum ✠ et —, quam respectu determinationum realitatis quoad $+1$ et -1; dum A et B ejusdem determinationis fuerint, et C ac D sint determinationis ejusdem; si vero A et B determinationis diversæ fuerint, et C ac D determinationis diversae sint: tum dicitur C per B *respective quoad* A *multiplicatum*, et D per B vel C *respective quoad* A *divisum* esse; atque D *factum quoad* A, *et in casu priori*, C *quotus quoad* A, *in posteriori vero* B *quotus quoad* A dicitur.

Pro casu incommensurabilitatis patet (juxta T. I. p. 29): quod si n semper porro uno crescat, cuivis n suum m respondeat; adeoque ipso n in serie numerorum naturalium crescente, certa m pro certis B et D iidem se invicem excipiant.

Schol. Pluries contineri autem dicitur exgr. v a D, quam u a B; si $B=$ vel $>mu$, sed $mu+u>B$, atque D (vel ejus portio) sit terminus seriei numerorum ipso mv ulterior, nec sit simul $D=mv$, uti si $v=0=D$.

§. 4. Determinationes ✠ et — dant 8 casus, et totidem darent determinationes realitatis, si et unitas pure imaginaria admitteretur: nempe si * reale, et . pure imaginarium denotet, fient schemata sequentia.

✠✠✠✠	✠✠——	✠—✠—	✠——✠
————	——✠✠	—✠—✠	—✠✠—
****	**..	*.*.	*..*
....	..**	.*.*	.**.

Sed si pure imaginariam unitatem admittere haud libeat, nonnisi tres superiores lineae manebunt. Patet vero ex ipsis schematibus (etsi admitteretur unitas pure imaginaria): 1mo terminos extremos in quovis casu esse determinationis ejusdem, si medii ejusdem fuerint; et extremos diversae esse, si medii diversae fuerint. Pariter si duo priores determinationis ejusdem fuerint, esse et duos posteriores ejusdem; si vero diversae fuerint priores, et posteriores diversae esse.

2do Terminum 3tium per 2dum in linea suprema quoad +1, in sequente quoad —1 multiplicari; unde etiam ex iisdem schematibus divisio quad +1 et —1 patet, si 4tus dividendus, et alteruter mediorum divisor fuerit.

Patetque in omni casu, in linea suprema in multiplicatione divisioneque determinationes easdem dare ✠, diversas dare ⊢⊣; in linea 2da autem determinationes easdem dare ⊢⊣, diversas dare ✠: atque hinc pronam ad signa +, — esse conclusionem, (Tom. 1. p. 105 et 35); facta quotosque quoad +1 gaudere signo + pro signis æqualibus, et signo — pro signis diversis; quoad —1 autem signa æqualia dare —, et signa diversa dare +.

3tio. Pariter vero quoad determinationes realitatis, e linea 3tia, in qua terminus primus reale quoad +1 est (sive +1 sive —1 fuerit), patet: quod si *factores quoad realitatem determinationis ejusdem fuerint, factum reale quoad* +1, *si diversæ determinationis fuerint, factum reale quoad* —1 *sit. Eadem* ex eadem linea, *regula divisionis* patet; nempe quod dividendo in locum 4tum posito, si dividendus et divisor determinationis quoad realitatem ejusdem fuerint, quotus realis quoad +1, si vero determinationis diversæ fuerint, quotus realis quoad -1 sit.

§. 5. Sed quum certis quantitatibus unitatem ✠vam, item certis quibuslibet negativam attribuere fas sit: quæstio exoritur; quomodo, et connexæ (adinstar determinationum ✠, ⊢), tractari possint? ut operationes quoque, absque eo ut respectivæ operationis quoad $+1$ vel -1 mentio fieri debeat, *absolute* peragerentur, lege tali stabilita, ut omnia rite conveniant. Quem in finem *ponitur lex sequens.* (Tom. I. p. 106)

1mo Quandocunque saltem alteruter duorum factorum unitate positiva gaudet, factor unitate positiva gaudens ponatur pro multiplicatore; et tunc (atque nonnisi tunc) sit multiplicator unitate negativa gaudens, dum duorum factorum uterque negativo 1 gaudet: nempe in lineæ 3tiæ nonnisi schemate 4to debet necessario -1 loco primo stare, quum neuter factorum ✠va unitate gaudeat; nec aliter -1 ex $\sqrt{-1}$ per $\sqrt{-1}$ multiplicato prodeat.

2do. Si A et a quantitates unitate positiva, et B ac b unitate ⊢va præditæ fuerint: dicitur $A+B$ per $a+b$ *absolute multiplicari* (absque mentione operationis respectivæ quoad $+1$ vel -1); si tam A quam B, tam per a quam per b mnltiplicetur (juxta legem dictam); atque si in omnibus his factis partialibus, quæ hoc pacto prodierunt, summa quantitatum unitate ✠va præditarum sit S, et summa unitate ⊢va præditarum sit s; dicitur $S \dagger s$ (idest S cum s connexum sed non commixtum) *factum* (*sensu absoluto*). Et si $x =$ vel $\frown x'$, et $y =$ vel $\frown y'$; et $xy =$ vel $\frown k$; dicitur etiam k *factum* ex x' et y'. (Tom. I. p. 38 et 79). Unde conceptus divisionis patet; nempe quilibet e duobus factoribus dicitur, quotus e facto per factorem alterum diviso

§. 6. Atque jam conceptu hoc ***divisionis absolutae*** stabilito; fas est, et proportionis conceptum eatenus extendere: nimirum α, β, γ, δ dicuntur *in proportione esse*, si quotus ex α per β diviso, sit quoto ex γ per δ diviso æqualis; (divisionem absolutam intelligendo), excepto casu, si α per β juxta regulam quoad ± 1, et γ per δ quoad ∓ 1 dividi deberet: quo in casu divisio expresse contra regulam quoad idem sive $+1$ sive -1 suscepta intelligatur.

Patet in lineæ 3tiæ (p. 359) schematibus tribus prioribus, multiplicationem divisionemque quoad $+1$ fieri (per legem 1), quum detur factor realis, et nonnisi in schemate 4to quoad -1 peragi; patetque determinationes realitatis æquales dare reale, et diversas dare pure imaginarium.

§. 7. Si vero quantitates sub formam $a+b\sqrt{-1}$ venientes pro casu dum nec a neque $b=0$ est, considerentur, et *quantitas* talis *mixta* dicatur: *mixtum, et reale purum* (sive quoad $+1$ sive quoad -1), *tam in multiplicatione quam in divisione dabit mixtum, mixtum per mixtum* autem dat mixtum in certis casibus, et reale purum quoad $+1$ vel quoad -1 dare potest. Uti e schematib. sequ. patet pro A, B, a, b realib. quoad $+1$
$(a+b\sqrt{-1}).A=aA+Ab\sqrt{-1}$; $(a+b\sqrt{-1}).B\sqrt{-1}=aB\sqrt{-1}-bB$; $(a+b\sqrt{-1}).(A+B\sqrt{-1})$
$=aA+aB\sqrt{-1}+Ab\sqrt{-1}-bB$

In casu postremo fiet factum $=C$ proquovis reali C, si accipiatur $A=\dfrac{aC}{a^2+b^2}$ et $B=\dfrac{-bC}{a^2+b^2}$;

ita factum $=C\sqrt{-1}$ erit, si accipiatur $A=\dfrac{bC}{a^2+b^2}$, et $B=\dfrac{aC}{a^2+b^2}$; nempe in casu priore debet esse $aB+bA=0$ et $aA-bB=C$, in posteriore vero $aA-bB=0$, et $aB+Ab=C$; atque valores dicti ipsorum A et B e duabus æquationibus in casu utroque reperiuntur. Et plane ita pro quibusvis realibus R et r reperiuntur talia A et B, ut factum dictum fiat $=R+r\sqrt{-1}$; nempe tum debet esse $aA-bB=R$, et $aB+Ab=r$; unde pariter prodeunt A et B. Prona hinc ad divisionem conclusio est. Nempe si reale (sive quoad $+1$ sive quoad -1) per mixtum, non mixtum daret, prodiret reale vel quoad $+1$ vel quoad -1; hoc vero per divisorem daret mixtum, adeoque dividendus haud prodiret. Pariter nisi mixtum per reale (quoad ± 1) divisum, mixtum daret, quotus per divisorem multiplicatus haud produceret dividendum mixtum. Et pariter de mixto per mixtum patet, pro quibusvis quoad $+1$ realibus C, R, r, posse A et B ita eligi, sive ut $\dfrac{R+r\sqrt{-1}}{A+B\sqrt{-1}}=a+b\sqrt{-1}$, sive ut $\dfrac{R+r\sqrt{-1}}{A+B\sqrt{-1}}=C$, sive ut sit $=C\sqrt{-1}$.

Exgr. pro $R+r\sqrt{-1}=AC+BC\sqrt{-1}$; fiet $R=AC$ et $r=BC$, eritque $A=\dfrac{R}{C}$ et $B=\dfrac{r}{C}$. Ut vero $C\sqrt{-1}$ prodeat, esse debet $R+r\sqrt{-1}=AC\sqrt{-1}-BC$, adeoque $R=-BC$, et $r=AC$ et hinc $A=\dfrac{r}{C}$ et $B=-\dfrac{R}{C}$

§. 8. E clausula definitionis multiplicationis absolutæ (p. 361); unde etiam conceptus *divisionis absolutae* deducitur ibidem, sequitur pro a et b neutro $=0$.

I. $\dfrac{1}{m}\cdot ma$ semper $=a$; et hinc si $m \frown \infty$

adeoque $ma \frown \infty$, et $\frac{1}{m} \frown 0$; fiet $0.\infty = a$, atque $\frac{a}{0} = \infty$, et $\frac{a}{\infty} = 0$.

II. $m.a$ semper $= ma$, sed si $m \frown \infty$, $ma \frown \infty$ (Tom. I. p. 29) adeoque $\infty.a = \infty$ et $\frac{\infty}{a} = \infty$, atque $\frac{\infty}{\infty} = a$, quantitati cuilibet, uti $\frac{0}{0}$.

III. Etsi a incommensurabile fuerit, exgr. $a = mu + (\omega < u)$; erit $mu.0$ semper $= 0$; adeoque, quum si $m \frown \infty$, $mu \frown a$, fiet $a.0 = 0$.

Hinc autem (per definitionem proportionis pagina eadem post clausulam dictam) oriuntur proportiones sequentes, paulo inferius applicandæ

$$1 : a = 0 : 0$$
$$a : \infty = b : \infty$$
$$\infty : a = \infty : b$$
$$\infty : \infty = 0 : 0$$

§. 9. Superius (p. 360) in proportione, ubi nonnisi quantitates pure reales quoad $+1$ (quas hic brevitatis causa *puras* nominare fas sit: patebat, quod si *termini extremi determinationis* ejusdem fuerint (sive quoad $+$ et $-$ sive quoad realitatem), et medii determinationis ejusdem sint; at si extremi diversæ determinationis fuerint, et medii diversæ sint. *Idemque valet de* 2 *prioribus*, *et* 2 *postremis*.

Et nunc adhibitis mixtis quoque lex analoga valet: nempe *si extremorum utrumque mixtum vel utrumque purum fuerit*, *erit et mediorum aut utrumque purum*, *aut utrumque mixtum*;

si vero extremorum alterutrum purum, alterum mixtum fuerit, et mediorum alterum mixtum alterum purum erit. Idemque valet de duobus prioribus et duobus posterioribus. Proportionis casus, quos mixtum ingreditur sequentes sunt, in quibus quoti æquales esse possunt, si *P* purum, *M* mixtum denotet; neque aliud heic in censum venit, adeoque per easdem literas haud intelligunter quantitates æquales.

PPMM ***PMPM*** ***PMMP***

MPMP ***MPPM*** ***MMPP*** ***MMMM***

Nempe ex §. 7. patet; nonnisi in quovis horum casuum quotos e 1mo per 2dum, atque e 3tio per 4tum æquales esse posse: exgr pura per puram divisa puram dat, atque et mixta per mixtam, dare puram priori æqualem potest; mixta per puram, pura per mixtam dat mixtam etc. Quoad casum *RIMM* (ubi *R* reale, *I* pure imaginarium denotat), sit exgr.

$1:\sqrt{-1}=a+b\sqrt{-1}:-b+a\sqrt{-1}$: nempe quotus uterque est $-\sqrt{-1}$; prior prodit divisione (per p. 361) quoad -1, et in posteriore divisor per $-\sqrt{-1}$ multiplicatus producit dividendum; estque etiam factum extremorum facto mediorum æquale, nempe $=-b+a\sqrt{-1}$,

Unum adhuc casum notare licet; nempe $R:I=I:R$, ubi *R* per *I* quoad -1, et *I* per *R* (juxta regulam) quoad $+1$ divideretur; egr. pro $-1:\sqrt{-1}=2\sqrt{-1}:-2$; quotus uterque (si divisio utraque quoad -1, aut utraque quoad $+1$ peragatur), idem erit; nempe $\frac{-1}{\sqrt{-1}}$ (quoad -1) $=\sqrt{-1}$, et $\frac{2\sqrt{-1}}{-2}$ (quoad -1) $=\sqrt{-1}$, quia -2 per $\sqrt{-1}$ (quoad -1 multiplicando) fit $2\sqrt{-1}$. Ita $\frac{-1}{\sqrt{-1}}$ (quoad $+1$

$= -\sqrt{-1}$, $= \frac{2\sqrt{-1}}{-2}$ (quoad $+1$).

Ita factum extremorum facto mediorum nonnisi ita erit æquale, si quoad idem $+1$ fiat multiplicatio; secus $-1.-2$ (quoad $+1) = +2$, et $\sqrt{-1}.2\sqrt{-1}$ (quoad $-1) = -2$; erit.

Nempe (si $\sqrt{-1}$ per $\pm r$ denotetur); schemata divisionum multiplicationumque dictarum erunt sequentia.

Pro $-1 : \pm r$, et $\pm 2r : -2$ (utroque quoad -1)
-1, $\pm r$, $\pm r$, -1, et -1, -2, $\pm r$, $\pm 2r$

Pro divisione eorundem quoad $+1$
$+1$, $\pm r$, $\mp r$, -1, et $+1$, -2, $\mp r$, $\pm 2r$

Pro multip. quoad -1 extremorum et mediorum
-1, -1, -2, -2, et -1, $\pm r$, $\pm 2r$, -2

Pro multiplicatione eorundem quoad $+1$
$+1$, -1, -2, $+2$, et $+1$, $\pm r$, $\pm 2r$, $+2$

§. 10. Pariter operationibus tam divisionis quam multiplic. quoad idem ± 1 peractis, e quibusvis reperitur 4tus *in concreto*, juxta regulam sequentem: si *quilibet duorum priorum socius alterius*, et pariter vocetur *quilibet postremorum*; atque *quilibet extremorum dicatur par alterius*, et pariter *quilibet mediorum*; prodibit terminus quæsitus x, *si socio carens multiplicetur per quotum, qui prodit, si terminus par socio carentis, per pari carentem dividatur.*

Quæsitum x aut 4tum aut 3tium aut 2dum aut 1mum locum tenet: estque $x = D = \frac{B}{A}.C =$ $\frac{D}{C}.C$; pro $x = C$ vero est $\left(\frac{A}{B} = \frac{C}{D}\right)$. D etc. Quum reliqua facile pateant; unum tantum casum (p. 365.) adferre sufficiat. Sit nempe

$\therefore 1 : \sqrt{-1} = \sqrt{-1} : -1$, et quæratur 4tus: erit $x = \frac{\sqrt{-1}}{-1} \cdot \sqrt{-1}$, tam divisione quam multiplicatione quoad idem ± 1 facta; juxta schemata sequ. $-1, -1, +\sqrt{-1}, +\sqrt{-1}$, ubi $+\sqrt{-1} = \frac{\sqrt{-1}}{-1}$ (quoad -1); et $-1, +\sqrt{-1}, +\sqrt{-1}, -1$; ubi per quotum priorem, $\sqrt{-1}$ multiplicatum quoad -1 dat factum -1. Idem quoad $+1$ prodit per $+1, -1, -\sqrt{-1}, \sqrt{-1}$, et $+1, -\sqrt{-1}, +\sqrt{-1}, -1$.

Omnia vero quoad determinationes (sive quoad $+$ et $-$, sive quoad realitatem) rite prodire e præmissis liquet.

§. 11. Notandum etiam 1mo *nomen quoti* non ut (Tom I. p. 37.) exponitur, sed inde venire, quod dum olim multiplicatio ex iterata additione, et divisio ex iterata subtractione deducebatur; quasi in quoto annotari concipiebatur, quoties iterari addenda oporteat, donec summa dividendo prima vice non sit minor, aut quoties subtractio fieri debeat, usquequo nihil, vel subtrahendo minus remaneat.

2do Operationum additionis, subtractionis, multiplicationis, divisionisque resultata unica esse, (præter $\frac{0}{0}$), demonstratum in tomo primo est: aliquod tamen, quoad *quotum e concreta per concretam homogeneam,* quem *utcunque mutata unitate eundem manere* dictum (Tom. I. p. 97.) est, lumen affundere libet. Sit linea b per lineam a dividenda, sitque $b = 2v$, $a = 3v$; dictum est, quod si divisor in locum 3tium ponatur, quotus sit quantitas quælibet, quæ quoad unitatem suam expressa $\frac{2}{3}$ est

(Tom. I. p. 37). Si vero divisor in locum 2dum ponatur, *quotus* loco 3tio prodibit, ac *nonnisi linea erit*; et prouti unitas linearum accipietur, dato quovis major minorve prodire poterit. Omnes tamen hi quoti innumerabiles cum prioribus innumerabilibus in eo convenient, quod et quotorum posteriorum quilibet quoad suam unitatem (quæcunque fuerit), $\frac{2}{3}$ erit, adeoque *aequalitate ista respectiva omnes aequales erunt*; atque quum in hoc casu nonnisi expressio quoad unitatem (ut quantitas abstracta) pro quoto accipiatur, (haud respiciendo ad speciem unitatis), *resultatum divisionis in hoc casu quoque unicum est.*

Nempe sit U linearum unitas, atque a et b quoad eam expressa reducantur ad denominatorem communem n; sitque $a = \frac{3U}{n}$, $b = \frac{2U}{n}$.

fiatque schemà utrumque (quoto x dicto); erit

$$U = n.\frac{U}{n},\ a = 3.\frac{U}{n};\quad x = n.\frac{2U}{3n},\quad b = 3.\frac{2U}{3n};$$

$$\text{et } 1 = 3.\frac{1}{3},\quad x = 2.\frac{1}{3};\ a = 3.\frac{U}{n},\ b = 2.\frac{U}{n}$$

Patetque in utroque esse $x = \frac{2}{3}$ quoad unitatem

§. 12. Conceptum *potentiae elementaris* ad exponentem imaginarium extendere frustra tentans, meris imaginibus objecto haud gaudentibus minime contentus; sensum ejusmodi expressionum nonnisi modo in (Tom. I. p. 168) exposito reperire potui; quod tamen multo brevius exprimi sic potest.

Functionis ipsius β sequentis, $1 + \frac{\beta}{1} + \frac{\beta\beta}{1.2}$

$+\frac{\beta\beta\beta}{1.2.3}$ . . . valor, nempe cui séries dicta æqualis est, aut ad quem tanquam limitem tendit, dicatur $(f)\beta$; ita ut $(f)k$ sit $=1+k+\frac{kk}{2}+\frac{kkk}{2.3}\cdots$ et $(f)kh=1+kh+\frac{kh.kh}{2}+\frac{kh.kh.kh}{2.\ 3}\cdots$

Quo pacto *definitio potentiae, radicis, logarithmique* (*sensu sublimiori*) breviter ita exprimi potest: Pro quovis tali c, ut $(f)\ c$ eidem C æquale sit; dicitur quodvis $(f)bc$ (et nonnisi id) *potentia exponentis* b ipsius C, per C^b denotata; et b dicitur cujusvis C^b *logarithmus* quoad C; quidvis formæ $A+B\sqrt{-1}$ sit sive c sive b, (A et B realia qnævis, inter quæ et 0 cadit, denotantibus). Dicitnr præterea C *radix exp.* b cujusvis C^b; imo et quodvis tale a, ut pro certo k sit $a^k=K$, dicitur *radix exp.* k ipsius K. Exgr. Sint X, Y, Z tres radices cubicæ ipsius 8; reperiuntur (per Tom I p. 173) talia x, y, z, ut sit $(f)x=X$, $(f)y=Y$, $(f)z=Z$. Eritque $(f)3x=X^3=8=(f)3y=(f)3z$. Sit c nomen generale ipsorum $3x, 3y, 3z$, sitque $b=\frac{1}{3}$. Pro quovis c erit $(f)c=8$, et $(f)\frac{c}{3}=(f)\ bc=8$ elevato ad $\frac{1}{3}$; nempe $(f)\ x$, $(f)y$, $(f)z$ erunt potentiæ exp. $\frac{1}{3}$ ipsius 8; eritque 8 radix exp. $\frac{1}{3}$ cujusvis earum, et $\frac{1}{3}$ logarithmus quoad 8 earundem cujusvis. Sit jam $c=x$; et $b=3$; erit $(f)bc=8=[(f)x]^3$; atque $(f)x$

$=\sqrt[3]{8}$; sed etiam $[(f)y]^3=8=[(f)z]^3$; adeoque $(f)x$, $(f)y$, $(f)z$ radices exp. 3 ipsius 8 dicuntur. Estque 3 logarithmus ipsius 8 quoad quodvis ipsorum $(f)x$, $(f)y$, $(f)z$.

Scholion. Potuissent quidem, jam in ortu conceptus multiplicationis, non solum imaginariorum, sed et potentiæ etc. conceptus (plane expositi) construi: nisi alienum simplicitati naturali esset, ad conceptus constructionem talia adhibere, quæ nonnisi ulterius patefiunt. Nempe nonnisi id quod per $(f)k$ antea intelligebatur, construi debet: nimirum ponatur prius 1, et cuilibet termino adiungatur unus factor k, atque termino cuivis detur pro denominatore factum e numeris naturalibus ab 1 incipiendo usque ad numerum summum ipsorum k in termino illo.

At prius, factum e factoribus æqualibus numero n, per factorem semel, et n ad dextram superius scriptum denotari cœpit; tum ad quotum e talibus factis eundo, ultro venit, si a ut factor superius numero n, inferius numero m erat; quum superius a deleatur per inferius, numerum superiorum a accipere $+$ve, inferiorum vero $-$ve, atque $\frac{a^n}{a^m}$ designare per a^{n-m}, et $\frac{A^N}{A^M}$ intelligere per A^{N-M}. Sit $n-m=\nu$, et $N-M=\mu$.

Passus ulterior erat, duos ejusmodi quotos nempe a^ν et A^μ æquales cogitare, et per $a^{\frac{\nu}{\mu}}$ designare tale A, ut sit $a^\nu=A^\mu$. Nec post (p. 364) dieta, $\mu=0$ excluditur: nam $a^1=A^0=1$, et $1^{1:0}=1$

Ita $a^0=A^0$, et $a^{\frac{0}{0}}$ gaudet valore $=A$.

Postea (Tom. I. p. 157 ....) innotuere

pro realibus quibusvis b et c sequentia: $(f)1 =$ reali $+e$; $(f)c = e$ elevato ad c; $(f)(b+c) = e^b \cdot e^c$; $(f)(c-b) = e^c : e^b$; $(f)bc = e^c$ elevato ad b;

et $(f)(c:b) = \sqrt[b]{e^c}$; darique tale x, ut $(f)x = b + c\sqrt{-1}$ sit, etsi $c = 0$ et b $\mapsto$ fuerit; (nempe si Tom I. p. 173, a tale sit, ut cos $a = -1$ et sin $a = 0$ sit). Atque tunc jam in mentem venire poterat, ipsis b,c, imaginaria quoque substituere.

Definitio hic data, eadem cum (Tom. I. p. 168) data est: nisi quod haec et simplicior sit, et ibidem dictum 1^r supervacuum reddat; monendumque fuisset, r^{+i} ad denominationem eandem reducta intelligenda esse: nempe si exgr. (pro integris n,m,v sit $A = \frac{n}{m}$, $B = \frac{v}{m}$, erit $A + B\sqrt{-1} = \frac{n + v\sqrt{-1}}{m}$; adeoque

$(f)\frac{(n+v\sqrt{-1}}{m} = \sqrt[m]{(f)(n+v\sqrt{-1})}$; cujus valores numero m sunt, quos valor quivis per valores ipsius $\sqrt[m]{1}$ multiplicatus omnes exhibet.

§. 13. Applicando (p. 364) dicta ad p. 253 F. 216, Tyronibus ibidem relicta facile liquent. Nempe dum $H = R$, et $A < R$; est f polus arcus A (propter R et R); itaque et $b = B = R$, et $a = A$; atque juxta (p. 252) in I. fit 1: sin $a = 0:0$

in II. fit 1:sin$A = \infty : \infty$, nempe tg b = tg $B = \infty$

in III. fit $0:0 = 1$:cos$A$; in quo casu ex H et B cathetus alter A haud innotescit

in IV. fit $1:0 = \infty$:tang A; et (in V) fit $1:0 = $ tg $a : 0$

Ita (p. 254. Fig. 215) si hypot. $A = R$ fuerit; in singulis 3 casibus $M = R$, (nisi $l = R$, adeoque $\triangle ABC$ rectang. sit), quia tum (p. 253) alterutrum $=R$ esse oportet; si vero D esset R; tum b quoque R esset. Erit igitur $\mathfrak{B}$ polus ipsius D, et $m=R$, atque $D=b$ in 2 casibus prioribus, iu 3tio vero $D=$ deinceps posito ipsius b. Unde formulæ applicatæ patent.

Ita (in §. 5) ex tang $M=\cos b.$ tang$A$, fiet $\infty=\cos b.\ \infty$.

Eritque in $\triangle$ l rectangulo, cujus catheti N et D, hyp. A est, in casu primo $N=C-M$, in 2do $-(C-M)$, in 3tio $C+M$; adeoque in primo est sin $N=-\cos C$ (p. 81.) in 2do et 3tio est cos C; atque $\wedge$ adjacens est a in primo et tertio, in 2do $2R-a$. Atque (p. 252. II.)

in 1mo est $1:\sin N=\text{tg}a;\ \text{tg}D$; seu $1:-\cos C=\text{tg}a;\text{tg}b$.
n 2do $1.\sin N=\text{tg}(2R-a):\text{tg}D$; seu $1:\cos C=-\text{tg}a:\text{tg}b$.
in 3o. $1:\sin N=\text{tg}a:\text{tg}D$; seu $1:\cos C=\text{tg}a:(\text{tg}D=-\text{tg}b)$

Itaque tang $a=-\dfrac{\text{tang}b}{\cos C}$; atque hinc et pro $A=R$ valet formula (p. 249 et 255.); nempe ibidem cot $a=\dfrac{\sin C.\cot A-\cos b.\cos C}{\sin b}$, quod pro $A=R$ fit $=-\dfrac{\cos b.\cos C}{\sin b}$; nempe $\dfrac{1}{\text{tg}.a}=$ cot.a, et $1:-\dfrac{\text{tg}.b}{\cos C}=-\dfrac{\cos C}{\text{tg}:b}$; atque hinc cot $a=-\dfrac{\cos C.\cos b}{\sin b}$ (seu$-\cot b.\cos C$),

Si et $D=R$; tunc etiam $B=R$; et $\triangle$ rectangulum est; atque tunc $a=R=b$, et cot $a=-\cot b\ \cos C=0$.

ERRORES TOMI PRIMI (praeter eos, qui in ejus indice, erratisque correcti sunt)

P. 36. linea 1. a calce, adde: *atvero etsi divisor* <1 *loco 3tio stet, quotus loco* 2do prodiens major dividendo erit, si nonnisi expressio quoad unitatem in censum veniat (Tom. II. p. 368).

P. 42. linea 4 a calce, *dummodo* $N=M$ *non sit*, juxta (Tom II. p. 370) deleri potest.

P. 56. XIX linea 4 pro $A=B$ lege $A=C$.

P. 91. 12mo linea penultima pro $\frac{b}{b}$ lege $\frac{b}{c}$

P. 127. 8vo in facto anteponendum est $a+$

P. 128. 9no in multiplicatore 2do pro a^2 lege a

P. 133. 17o. linea 2da adde *secus dicitur ordinis* 1

P. 168. linea 7, pro $+2, -1$, lege $+2, -2$. Idemque simplicius (omissis r, i et 1^r) necnon imaginaria et proportionis conceptum extensum, aliaque vide Tom. II. p. 357

P. 176. ad finem ante *conseq.* pro $e^{a\sqrt{-1}}$ lege $e^{2a\sqrt{-1}}$

P. 382. linea 3 a calce post *eadem*, adde: et signa $+$, $-$ eadem sint in numeratore quae in denominatore.

P. 399. linea 2 a calce pro $\frac{I}{I'}$ lege $\frac{L}{L'}$

P. 416. linea 7 a calce, dele (*pro casu, si c non* $=1$)

P. 446. linea 2 a calce, post *sectio*, adde: *singulis tribus communis.*

P. 454. 5to post *parallelogrammi*, adde: *nisi quadratum fuerit;* et ad finem adde: *notandum autem est, inter omnes superficies,* *solum planum esse, cujus quaelibet facies alteri obversa, hanc tegere queat; atque (in systemate Euclideo) planum solum cum sphaera in eo convenire, quod utrumque circa quodvis sui punctum in se moveri queat.* (Tom II. p. 238), *et solum discrimen esse, quod sphaerae quodvis punctum ab eodem certo aequidistet.*

P. 486. 12 linea 4 post et *rectis*, adde: *crescentibus*; et linea 13 lege ab > ab; et linea 3 a calce post *concipiantur*, adde: *descripta*.

ERRORES *in* TOMO SECUNDO *animadversi.*

P. 9. Quoad sectionem nullam, aut quamvis
P. duorum circulorum vide Tab. 9 F. 202.
P. 11: pro (p. 12. §. 2.): lege (p. 13. §. 2.), linea eadem, pro $\mathfrak{bDb}$ lege $\mathfrak{BDb}$, atque inferius pro *appositorum* lege *oppositorum*. Pro $u = u'$ lege $(v = u) > u'$, pro $\widetilde{\mathfrak{AB}}$ lege $\overset{\frown}{\mathfrak{AB}}$
P. 15. linea 15 pro *quarumvis* lege *quamvis*
P. 16. l. 6 a calce pro p. 13. lege *uti p.* 13. *vide p.* 32; atque linea 16 pro *interceptum aequalem*, lege *adjacentes aequales*. *Interim eaedem* △li *aequicruri proprietates, e statim postea ab hoc independenter demonstrato, quod angulo majori latus majus, et lateri majori angulus major opponatur, manifesto immediate sequuntur.*
P. 17. linea 4 a calee pro a lege *a*
P. 20. §. 2. l. 9 pro *in quae dispescitur*, $= 8R$, lege: △*lorum, in quae per diagonalem dispescitur, nempe* $= 2.2R$. Praeterea ante §. 3 adde: *Quadrati, rhombique alia constructio e Fig.* 54. *patet.*
P. 26. §. 5. linea 7, pro *A* lege *a*
P. 28. linea 8 a calce, pro *x* lege *b*
P. 42. l. 12. a calce pro *s* lege $\mathfrak{f}$
P. 43. §. 5. linea 1, deleatur *quam*, et linea sequ. legatur: *potest, quae anguli est.*
P. 45. lineis 2 et 3 a calce pro *i*, *h*, lege $\mathfrak{i}$, $\mathfrak{h}$
P. 46. l. 16 pro *a* lege $\mathfrak{a}$, et linea 18 pro *k* lege $\mathfrak{k}$
P. 47. II. 2do. linea 4, pro $\mathfrak{mub}$ lege $\mathfrak{mnl}$
P. 49. linea 3 a calce, pro *figura* lege *figura talis.*
P. 55. §. 7. *vide et inferius.*

P. 61. lineis 15, 16, 17 pro ſ lege *s*.
P. 74. linea 7 a calce pro *angulorum* lege *laterum*.
P. 94. linea 2 a calee pro *Fig* 105 lege ***Fig* 106**.
P. 151. linea 11 a calce, lege: *exgr.* et infra hanc lege: *bisecat* pro *bisecit*; atque infra hanc lege *sit* pro *seg.*
P. 154. Schot. 3. adde: *praeter* $y^2 = cx^2$, *quo sectio plani* cum cono per verticem exprimitur; si una recta fuerit sectio pro abcissis in hac sumtis, sit $c=0$; si vero duæ rectæ efficiant sectionem, tum abcissæ in recta angulos verticales bisecante e vertice accipiantur utrinque; et si sectio solum punctum ad verticem fuerit, c negativum accipi potest.
P. 173. ad finem lineæ 14, pro $\mathfrak{cb}$ lege $\mathfrak{ce}$.
P. 176. linea 14 pro *fuerint* lege *fuerit*.
P. 183. linea 11, adde: *sub conditione pag.* 181 *dicta*.
P. 185. linea 17 a calce, pro *quam* lege *quem*
P. 192. linea 12 a calce, pro *rectae*, lege: rectæ *perpend.*
P. 193. pro $\mathfrak{c}''\mathfrak{c}'''\mathfrak{I}$ lege $\mathfrak{c}''\mathfrak{c}'''\mathfrak{C}$
P. 232. §. 3. linea 12 post $r > R+d$, adde: *aut* $r < R-d$. Vide Tab. F. 202
P. 236. linea 2 a calce, pro $A', C'C'$ lege: A', B', C'
P. 270. linea 3 a calce, post $\mathfrak{Q}'\mathfrak{Q}''$ adde: et $\mathfrak{P}''\mathfrak{A}$, $\mathfrak{Q}''\mathfrak{A}'$, altitudines punctorum $\mathfrak{P}$, $\mathfrak{Q}$. Item linea 2da a calce, pro $\mathfrak{P}''\mathfrak{p}$ et $\mathfrak{Q}''q$ lege $\mathfrak{Ap}$ et $\mathfrak{Aq}$.
P. 271. linea 2 pro $\mathfrak{dp}$ lege $\mathfrak{dp}'$.
P. 278. l. 8. pro $\mathfrak{p}'$ lege $\mathfrak{q}'$
P. 286. l. 16. pro $\mathfrak{Aap}$ lege $\mathfrak{AaP}$
P. 324. l. 1 a calce, pro *certum* lege *ipsum*.
P. 337. l. 1 pro $-c^2$ lege $-c^2 : 100$. Exempla plura vide inferius.

P. 341. l. 3 a calce, pro $\frac{m}{n}$ lege $\frac{n}{m}$.

P. 350. l. 3 pro *det*, lege: *addito* ν *det*, et lineis 5 et 6 pro $\nu + n$ lege ν

P. 351. l. 11. pro $r : d$ lege $r' : d$. Post *totidem notae*, adde: *quot cifrae ad finem divisoris sunt;* atque linea 23 adde: *si ipsi D adjiciantur cifrae numero v, et facta per d divisione, in quoto* $\mu + v$ *notae decimale. fiant; erit error* $< 1 : 10^{\mu + v}$

P. 387. l. 17. post *pellucidi*. adde: *et f opacum*. Errores ortographici plures sunt, quam annotari queant; exgr. *ellipsis*, *hypotenusa* etc. sæpius eronee scripta sunt, uti etiam alicubi *obsolutum* pro *absolutum*, et *prolubito* pro *pro lubitu* scriptum est: quae tamen cum id genus alliis erroribus e contextu facile corriguntur.

Ex indice tomi 2-di quaedam ommissa sunt: uti *Problema Deliacum* (p. 159), reductio ad rectam superficierum (p. 61 et 189) et solidorum, atque ea quae ad finem tomi 2-di adnexa sunt.

Praeter haec addere (in gratiam Tyronum) *lubet sequentia.*

Ad p. 53. §. 7. Pro imperitis asserentibus, trapezii aream aequalem esse facto ex β et semisumma laterum non parallelorum (nempe l et lateris ei oppositi); imo quadrilateri cujusvis aream prodire, si semisumma laterum oppositorum per semisummam reliquorum multiplicetur: sit $l =$ lateri opposito, et construatur rectangulum pro basi β et altitudine l: atque ponderentur trapezium rectangulumque in bilance.

Ad p. 237. Exemplis addi possunt sequ.

1mo in III. si b non addatur, sed dematur quotannis; quaeri residuum r ad finem anni $n$ti potest: quo in casu erit $r = ap^n -$

$\frac{pb(p^{n-1}-1)}{p-1}$; atque pro $r=0$ et dato b quaeri a potest, ut quovis anno usque ad $n$tum (inclusive), ad finem cujusvis anni, b percipiatur. Idem alio modo resolvitur p. 338 ante §. 2.

2do. Si pro serie $1, x, x^2, x^3 \ldots (x^{12}=2)$, quaeratur x, adeoque ut dici solet, inter 1 et 2 quaerantur 11 proportionales mediae (*ut in musica pro temperamento aequali*): propter $x^{12}=2$ erit $12 \log x = \log 2$, adeoque $x = \frac{\log 2}{12}$

3tio. Satis omnium constat, inventorem ludi Schach grana tritici numero (1 id est 2^0) $+2^1+2^2 \ldots +2^{63}$ postulasse; cujus seriei summa $=(2^{64}-1):(2-1)=2^{64}-1$; adeoque e numero qui ipsi 64.log2 tanquam logarithmo respondet, 1 subtrahi debet.

4to. Si quid certa aliqua operatione $\frac{1}{n}$ tum sui amittat, et quodvis residuum post operationem $(m-1)$tam, pariter $\frac{1}{n}$ tum sui amittat: quaeri aut residuum post operationem $m$tam, aut numerus operationum pro dato residuo potest. Sit 1 ad initium operationis primae; erit ad hujus finem, $1-\frac{1}{n}=\left(\frac{n-1}{n}\right)^1$; et si ad finem operationis $(m-1)$tae fiat $\left(\frac{n-1}{n}\right)^{m-1}$, erit ad finem operationis $m$tae $\left(\frac{n-1}{n}\right)^m$. Nam

$$\left(\frac{n-1}{n}\right)^{m-1} - \left[\left(\frac{n-1}{n}\right)^{m-1} : n\right] = \frac{(n-1)^{m-1}}{n^{m-1}} -$$

$$\frac{(n-1)^{m-1}}{n^{m-1}.n}=\frac{(n-1)^{m-1}(n-1)}{n^m}=\left(\frac{n-1}{n}\right)^m,$$

Ita intensitas lucis radiorum parallelorum per strata aqualia euntium, intensitas caloris corporis refrigescentis ad finem $m$ti temporis; pretium vini, si quavis operatione $\frac{1}{n}$ tum eximatur atque vas aqua repleatur, computantur.

Denique *aliquid Auctori Appendicis in tomo priori, proprium, coronidis instar* addere fas sit: qui tamen ignoscat, si quid non acu ejus tetigerim.

Pro v positivo radicem positivam ipsius $-v^2$ per $+\!\!\!\!\checkmark v$ denotat, et negativam per $\checkmark v$; sed ob defectum signorum (quum vix haec duo quadamtenus prodierint), radix positiva ipsius -1 per $\sqrt{-1}$, et negativa per $-\sqrt{-1}$ denotabitur.

Res breviter in eo consistit: *formulae trigonometriae* sphaericæ (in Appendice dicta ab axiomate XI Eucl. independenter demonstratae) *cum formulis trigonometriae planae conveniunt, si* (modo statim dicendo) *latera* $\triangle$li *sphaerici realia, rectilinei vero imaginaria accipiantur*; adeo ut quoad formulas trigonometricas planum ut sphaera imaginaria considerari possit, si pro reali, illa accipiatur, in qua sin $R = 1$.

Nimirum de axiomate Euclideo dictum in tomo primo satis superque est: pro casu si verum non fuerit, demonstratur (Tom. I. App. p. 13), dari certum i, pro quo ibidem dictum I est $= e$ (basi logarithmorum naturalium), atque pro hoc casu formulae trigonometriae planae quoque demonstrantur (*ibidem* p. 14); et quidem ita, ut (juxta p. 19 ibidem) formulae et pro casu veritatis axiomatis dicti valeant; nempe si supponendo quod $i \frown \infty$, limites valorum accipiantur; nimirum systema Euclideum est quasi limes systematis antieuclidei (pro $i \frown \infty$.) Ponatur pro casu existentis i, unitas $= i$, atque conceptus *sinus coesinusque* extendantur et ad arcus imaginarios; ita ut arcum sive realem sive imaginarium denotet p, dicatur $\dfrac{e^{p\sqrt{-1}} + e^{-p\sqrt{-1}}}{2}$ *cosinus* ipsius p, et

$\frac{e^{p\sqrt{-1}} - e^{-p\sqrt{-1}}}{2\sqrt{-1}}$ dicatur sinus ipsius p (quasi Tom. I. p. 177).

Erit hinc pro q reali, $\frac{e^{q} - e^{-q}}{2\sqrt{-1}} = \frac{e^{-q\sqrt{-1}.\sqrt{-1}} - e^{q\sqrt{-1}.\sqrt{-1}}}{2\sqrt{-1}} = \sin(-q\sqrt{-1})$ $= -\sin(q\sqrt{-1})$. Ita $\frac{e^{q} + e^{-q}}{2} = \frac{e^{-q\sqrt{-1}.\sqrt{-1}} + e^{q\sqrt{-1}.\sqrt{-1}}}{2} = \cos(-q\sqrt{-1})$ $= \cos(q\sqrt{-1})$; si nempe et in circulo imaginario, sinus negativi arcus sinui arcus positivi alioquin priori aequalis sit, praeterquam quod negativus sit, atque cosinus arcus positivi et negativi (si alioquin aequales fuerint, sit idem.

In Appendice dicta §. 25 demonstratur absolute, idest ab axiomate dicto independenter; quod in quovis $\triangle$lo rectilineo, *sinus angulorum sint, uti peripheriae radiorum lateribus oppositis aequalium;* demonstraturque porro, pro casu existentis i, peripheriam radii y esse $= \pi i\,(e^{\frac{y}{i}} - e^{\frac{-y}{i}})$, quod pro $i=1$ fit $\pi\,(e^{y} - e^{-y})$.

Itaque (§. 31 ibidem) pro $\triangle$lo rectilineo rectangulo, cujus catheti sunt a et b, hypotenusa c, et anguli lateribus a, b, c oppositi sunt α, β, R; est (pro $i=1$)

in I. 1 : $\sin\alpha = \pi(e^{c} - e^{-c}) : \pi(e^{a} - e^{-a})$; adeoq.

$$1 : \sin\alpha = \frac{e^{c} - e^{-c}}{2\sqrt{-1}} : \frac{e^{a} - e^{-a}}{2\sqrt{-1}}$$

Unde $1 : \sin\alpha = - \mathrm{Sin}(c\sqrt{-1}) : - \sin(a\sqrt{-1})$
Et hinc $1 : \sin\alpha = \sin(c\sqrt{-1}) : \sin(a\sqrt{-1})$
In II fit $\cos\alpha : \sin\beta = \cos(a\sqrt{-1}) : 1$
In III. fit $\cos(c\sqrt{-1}) = \cos(a\sqrt{-1}). \cos(b\sqrt{-1})$.

Quae prouti omnes exinde promanantes formulae trigonometriae planae, cum formulis trigonometriae sphaericae prorsus conveniunt; nisi quod si exgr. Δli sphaerici rectanguli quoque catheti anguliqué iis oppositi, hypotenusaque nomina eadem fortiantur, latera Δli rectilinei per $\sqrt{-1}$ dividenda sint, ut formulae pro sphaericis prodeant

Nempe (plane uti Tom. II. p. 252)
Ex I. fiet $1 : \sin\alpha = \sin c : \sin a$
ex II. fiet $1 : \cos a = \sin\beta : \cos\alpha$
ex III fiet $\cos c = \cos a. \cos b$

Quum ceteris supersedere liceat; et lectorem, deductione (Tom I App. p. 19) omissa offendi impedirique expertus sim: haud abs re erit ostendere; quomodo exgr. ex $e^{\frac{c}{i}} + e^{\frac{-c}{i}} = \frac{(e^{\frac{a}{i}} + e^{\frac{-a}{i}})(e^{\frac{b}{i}} + e^{\frac{-b}{i}})}{2}$ sequatur $c^2 = a^2 + b^2$ (theorema *Pyth.* pro syst. Eucl.); verosimiliter Auctor quoque ita deduxit, et ceterae quoque eodem modo sequuntur.

Est nempe potentiis ipsius e (juxta Tom. I. p. 168) per series expressis

$$e^{\frac{k}{i}} = 1 + \frac{k}{i} + \frac{k^2}{2i^2} + \frac{k^3}{2.3i^3} + \frac{k^4}{2.3.4i^4} \dots$$

$$e^{-\frac{k}{i}} = 1 \frac{-k^1}{i} + \frac{k^2}{2i^2} \frac{-k^3}{2.3i^3} + \frac{k^4}{2.3.4i^4} \dots;$$ adeoq

$e^{\frac{k}{i}} + e^{\frac{-k}{i}} = 2 + \frac{k^2}{i^2} + \frac{k^4}{3.4i^4} + \frac{k^6}{3.4.5.6.i^6} \dots$

$= 2 + \frac{k^2+u}{i^2}$ (si omnium terminorum post $\frac{k^2}{i^2}$ summa $\frac{u}{i^2}$ dicatur); estque $u \frown 0$, dum $i \frown \infty$; nam dividantur omnes termini post $\frac{k^2}{i^2}$ per i^2; erit terminus primus $\frac{k^4}{3.4i^2}$, et quivis exponens $< \frac{k^2}{i^2}$; essetque etsi exponens ubique hic maneret, summa (Tom. I. p 131) $\frac{k^4}{3.4i^2} : \left(1 - \frac{k^2}{i^2}\right) = \frac{k^4}{3.4(i^2-k^2)}$, quod manifesto $\frown 0$, dum $i \frown \infty$.

Atque, ex $\frac{e^{\frac{a+b}{i}} + e^{\frac{-(a+b)}{i}} + e^{\frac{a-b}{i}} + e^{\frac{-(a-b)}{i}}}{2}$ sequitur (pro ω, v, λ adinstar u acceptis).

$$2 + \frac{c^2+\omega}{i^2} = 1 + \frac{(a+b)^2+v}{2i^2} + 1 + \frac{(a-b)^2+\lambda}{2i^2}$$

Atque hinc $c^2 = \frac{a^2+2ab+b^2+a^2-2ab+b^2+v+\lambda-\omega}{2}$

quod $\frown a^2+b^2$.

Schol. Sphaerae illius, in qua sinus totus est $1 = i$, radius est ordinata y lineae L formis ipsi $i = 1$ aequalis, ad axem per unam extremitatem ex altera $\perp$riter missa. Nempe *in superficie* (Tom. I. App. §. 21) *F dicta, tota Geometria Euclidea valet, lineis L vicem rectarum subeuntibus*: atque pro radio L formi $= 1$, qui sinus totus in F erit, pripheriae ejusdem radius in plano erit plane dictum y; quod ad sphaeram imaginariam, ad quam planum (in syst. anti eucl. revocatur) facile applicatur.

MEGIGÉRTT JELENTÉS.

Hálládatos köszönettel jegyzem ide azoknak neveiket, a' kik az első darabban feí irttakon kivűl előfizetvén, ezen munka kiadására segitségűl vóltanak, még pedig kéretlenűl.

G.	Bethlen Ádám - -	8 példányra
T.	Ertsei János, Sz. Udvarhelyi Professor	1.
T.	Intze Ferentz. Nevelő - - -	1.
B.	Kemény Diénes - - - -	4.
B.	Kemény Domokos - - - -	4.
B.	Kemény István - - - -	4.
B.	Kemény György - - - -	4.
	Krassai András R. Tab. Cancellista	1.
	Lokodi György Fiscalis Procurator	1.

Ezen kivűl Bolyai János P. I. Kapitány, részint az Első darab' Appendixének, mint tulajdon munkájának kinyomtattatására, részint példányokra, adott *száz négy* váltó rft. 's 54 xrt.

Az első darabban Birthler Friedrich helyet hibából G. Bethlen Friedrich iratott.

Az üresen maradott hely az igéreteké.

Errores (*in Tom. II*) *praeter supra annotatos: reliquos, quum nec valetudo nec negotia totum ad ungvem castigare permiserint; Lector benigne emendare rogatur.*

P 18. non error quidem proprie est, verum si in $\triangle$lo aequicruro angulorum ad basim et crurum aequalitatem se mutuo ponere, non juxta p. 16. 1, sed e laterum angulorumque mutua dependentia demonstrare libeat, ut p. 375 dictum est: tum conversa ad finem paginae 18 aliter demonstranda erit; nempe si $u > v$, erit u aut rectus vel obtusus, aut non; prius e parte priore patet; in casu posteriore autem erit u et v uterque acutus; nam si v rectus vel obtusus, et simul $u > v$ esset, summa 2$\wedge$orum $\triangle$li 2 rectos excederet.

Pro acutis u et v et $u > v$ autem demissa (uti Fig. 23) L*ri*, patet angulos u ad dextram laevamque aequales, et v ulterius ad dextram cadere; quia nec tegere angulum u, nec interius ad lævam cadere potest, nam in casu priore $u = v$ in posteriore $v > u$ esset. Tum vero $b > (a' = a)$ est.

Hinc si $u = v$, erit $a = b$, quia pro $a > b$, esset $v > u$, et pro $a < b$ esset $v < u$. Ita si $a = b$ est etiam $u = v$; quia pro $u > v$ esset $b > a$, et pro $u < v$ esset $b < a$.

Sed idem et alioquin ex ipsa Fig. 23. facile liquet; imo etiam alio modo patet: nempe *pro cruribus aequalibus* recta ex apice ad meditullium baseos ducta, fient $\triangle$la aequalia (per tria latera), *si anguli ad basim fuerint aequales*, Lris e meditullio baseos, formas utrinque aequales faciet, exibitque e $\triangle$lo, quod nisi per apicem fiat, fiet triangulum $=$ non triangulo.

P. 29. pro $\alpha.\mathfrak{k}\mathfrak{a} = \mathfrak{k}\mathfrak{a}$ *in* $\mathfrak{k}\widetilde{\mathfrak{A}}$, lege $\alpha.\mathfrak{k}\mathfrak{A} = \mathfrak{k}\mathfrak{a}$ in $\widetilde{\mathfrak{k}\mathfrak{A}}$

P. 36. Fig. 61 ponatur q ad finem radii illius ubi *R* est.

Notandum etiam centrum circuli inscripti cum centro circumscripti, in Fig. ob △ aequilaterum coincidere: secus ⊥res e 2 laterum [illegible] meditulliis, et rectae 2 angulos bisecantes diversas sectiones praebent.

P. 37. §. 3. pro *propter* pb *commune et angulos adjacentes aequales* lege propter hypotenusam cathetosque aequalia (p. 17.). Fig 52 etiam *u* nonnisi extremitatibus rectae ab adscribi debuisset, quum initium a ⊥ribus e laterum ab et bc meditulliis fiat. Potuissent quidem ad eundem finem duo anguli ad b, c bisecari, et e rectarum bisecantium sectione p rectae ad apices omnes duci: etenim totidem △la, quot latera polygoni, patet per 2 latera et angulum interceptum aequalia esse; nempe tum pb=pc, et △ pbc=pba, itaque angulus ad a pariter bisecatur, idemque porro continuatur; et manifesto ⊥res etiam ex p apice △lorum aequicrurorum aequalium communi aequales erunt, centrumque circuli circumscripti inscriptique in figura regulari idem erit.

P. 56. §. 11. linea 4 pro *rp* lege *r'p*

P. 60. In Fig. 83 angulus quem *B* et *b* intercipiunt. notetur per *z*, et l. 8 a calce, pro *a*, l. *b*.

P. 61. linea 4 pro *continere a* lege *continere b*

P. 64. §. 4. brevius sequitur ex p. 59 §. 13. Erit enim pro diametris *D* et *d*, area prioris $=D^2\pi:4$ posteriorisque erit $d^2\pi:4$.

P. 66. In Fig. 89 ad dextram, annotetur p. 66, et annotentur literae c, i, h, p, q.

P. 101. linea 8 a calce, pro $x=2:3$ lege $x:a=2:3$.

P. 106. l. 6 a calce, lege puncti b' parabolae istantiae ab f et D aequales erunt (p. 121, 122). In Fig. 110 autem directrici adscribantur ab imo incipiendo literae 𝔇, c, c' c'', debuissetque et distantia verticis a foco et directrice aeqnalis esse.

P. 104 linea 5 pro $-u^2$ lege $-u^2:a$

P. 111 circa medium, pro $kx.Y=$ lege $kx,Y=$

P. 113. linea 3 a calce, pro *quod pro* lege *pro*. In Fig. 113 autem annotentur x et A.

P. 125. In Fig 121 recta ab denotetur per a.

P. 128. ad finem adde: *atque et parabola ut ellipsis foci in axe in* ∞ *remoti consideretur.*

P. 129. linea 7 pro *e foco ipso* lege *e foco priore*

P. 158. Fig 149 vertex communis notetur litera 𝔄.

P. 160 l. 8 adde: et tum r ex $e^2-r^2+c^2=0$ prodit. Linea ima autem juxta p. 5 sub numerum 222 nonnisi ea venire debuissent, *quorum nec quodvis punctum construi geometrice sensu stricto potest.*

P. 165 Fig. 159 annotentur t et q

P. 223. l. suprema pro p lege P. Notandumque est, quod (F. 199) P circa 𝔄𝔓 motum quoque ∥ f𝔅 maneat, atque tum ordinata in semicirculo ad angulum obliquum reducenda sit (p. 165.)

P. 266 pro tabula horizontali et situ oculi in Zenith in $\infty$to, et p. 267 pro tabula verticali et oculo in horizonte in ∞ to; *expressionibus erroneis* substituatur: *quaevis linea in planum ad tabulam paralellum cadens, imagine sibi aeqnali gaudet, rectae ad tabulam* Lris *autem imago punctum est;* et quaevis recta ad tabulam nec parallela nec Lris, imagine sua major est.

P. 294. l. 2 pro *dividi queat uti n*, lege *divi-*

di nequeat: (id est, ut si n, seculum m tum terminet, m quoque uti n per 4 exacte dividi queat.

P. 300 l. 14 pro *illis q'' literis*, lege *illis* $7-q''$ *literis.*

P. 309. Post *si vero novilunium in* 𝔐′ *cadat* adde (Fig. 243); et pag. 318 deleatur, ab𝔄 (Fig 243).

Pag. 340 linea 8va ad finem, pro $-\frac{1}{2}$ lege $-\frac{f}{2}$

***Praeter haec** (Tom. II. p. 96.) **promissum** quadamtenus praestatur: ne Tyrones regularum in tabulis trigonometricis logarithmicisque datarum, rationem perspecturi, tempus viresque terant.*

I. Denotetur (ut p. 89) sinus arcus, non quoad longitudinem sed quoad gradus expressi, si radius 1 sit, per *sin*, si radius tabulalis $r=1$ cum 10 cifris sit, per *Sin*, pariterque *cos a*, Cos *a* distingvantur. Sitque a arcus sive 0 sive alius *vus quadrante minor; et s denotet 10″. Levi computo patet, pro $s=\frac{1}{k}$ et radio 1, esse $k>20\,000$.

II. Cujusvis arcus sinum cosinumque, adeoque quamvis functionem trig. pro radio 1, per series (Tom I. p. 172). terminis sufficientibus sufficienter evolutis, quantumvis exiguo errore computari posse patet; atque r. sin a=Sin a.

III. *Crescente a decrescit* $\sin(a+s)-\sin a$

Est enim (Tom. II. p. 83) $\sin(a+s) = \sin a.\cos s+\cos a.\sin s$; unde subtrahendo sin a, fit $\sin a(\cos s-1)+\cos a.\sin s$. Est autem $\cos s<1$, adeoque $\sin a(\cos s-1)$ negativum est, crescitque crescente a; nam sin a crescit, manente factore altero. Alter terminus nempe cos a. sin s + est, et decrescit crescente a: unde patet. Atque per r multiplicando idem pro radio tabulari liquet.

IV. *Incrementa ipsius Sin a* (quantumvis sit a), *incrementis ipsius a ipsum s haud excedentibus proportionalia sunt cum errore* < 13. Sit enim $n > 1$; erit (per praec.)

$\text{Sin}(a+s) - \text{Sin}\, a = \text{Sin}\, a(\cos s - 1) + \text{Cos}\, a. \sin s$; quod dicatur q

$$\text{Sin}\left(a + \frac{s}{n}\right) - \text{Sin}\, a = \text{Sin}\, a \left[\text{Cos}\, \frac{s}{n} - 1\right] + \text{Cos}\, a. \sin \frac{s}{n};$$ quod sit f.

Est autem $s : \frac{s}{n} = n : 1 = q : \frac{q}{n}$

Itaque nonnisi in $\frac{q}{n} - f = \frac{q - nf}{n}$ inquirendum est.

Est $q - nf = \text{Sin}\, a\left(\cos s - 1 - n \cos \frac{s}{n} + n\right)$

$+ \text{Cos}\, a\left(\sin s - n \sin \frac{s}{n}\right)$

Est (Tom I. p. 172)

$$\cos s - 1 = -\frac{s^2}{2} + \frac{s^4}{2.3.4} - \frac{s^6}{2.3..6} \cdots$$

$$n - n\cos\frac{s}{n} = \frac{s^2}{2n} - \frac{s^4}{2.3.4n^3} + \frac{s^6}{2.3..6n^5} \cdots$$

$$\text{quorum summa} = \frac{s^2(1-n)}{2n} + \frac{s^4(n^3-1)}{2.3\ldots4n^5} + \frac{s^6(1-n^5)}{2.3\ldots6n^5} \cdots$$

Pariter $\sin s - n\sin\frac{s}{n} = \frac{s^3(1-n^2)}{2.3n} + \frac{s^5(n^4-1)}{2.3\ldots5n^4} + \frac{s^7(1-n^6)}{2.3\ldots7n^6}\ldots$ Statim patebit, in utroque, terminum primum excedere summam totam; atque hinc etsi pro Sin$a$, Cos a radius r poneretur (quod nonnisi pro solo Cos a dum $a=0$, fieri potest), fieret series prior $<\frac{r}{2k^2}$, et posterior $<\frac{r}{6k^3}$. Uude calculo inito patet.

Nempe terminus quivis major sequente est. Nam quilibet duo proximi exprimuntur, per $\frac{s^t(n^{t-1}-1)}{2.3.t.n^{t-1}}$ et $\frac{s^{t+2}(n^{t+1}-1)}{2.3\ldots(t+2)n^{t+1}}$), si et $-$ vi $+$ ra accipiantur. Fietque utrinque multiplicando $(t+1)(t+2)k^2(n^{t+1}-n^2)$ et $(n^{t-1}-1)$. Designetur factor ipsius $n^{t+1}-n^2$ per α;

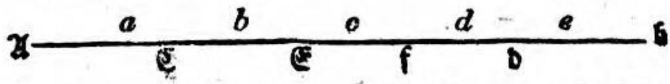
erit $\alpha(n^{t+1}-n^2) > n^{t+1}-1$. Est enim $\alpha > \frac{n^{t+1}-1}{n^{t+1}-n^2}$ (pro $t=3$). Nam sit $n^2=1+\omega$; erit $\frac{n^4-1}{n^4-n^2} = \frac{2+\omega}{1+\omega} < 2$, α vero >2. Pro $t=2$ autem erit $\alpha=3.4k^2$; et pro $n=1+\lambda$, nisi $\lambda < \frac{1}{\alpha-1}$ fuerit, erit $\alpha > \frac{n^3-1}{n^3-n^2} = (\frac{n}{n-1} - \frac{1}{n^3-n^2})$

Nam ut $\alpha = \frac{n}{n-1} = \frac{1+\lambda}{\lambda}$ sit, esse debet $\lambda = \frac{1}{\alpha-1}$. Sivero λ majus fiat, $\frac{1+\lambda}{\lambda}$ minus fiet;

nam si $d > c$, est (pro d, c, e + vis) $\frac{d+e}{c+e} < \frac{d}{c}$.

Si autem de quopiam t valet, valet et de sequente: nam si $\alpha\ (n^{t+1}-n^2)$ per $\beta = \frac{t+3}{t+1}$ multiplicetur, prodibit α pro t unitate aucto, eritque (per $\beta > 1$) etiam $\alpha\beta(n^{t+1}-n^2) > n^{t+1}-1$ (prius α intelligendo). Si jam n^{t+1} utrinque per n multiplicetur, fiet $\alpha\beta(n^{t+1}-n^2)+\alpha\beta n^{t+1}(n-1)$, et $n^{t+1}-1+n^{t+1}\cdot(n-1)$; patetque prius posteriore majus esse, quum ex hyp. sit $\alpha\beta(n^{t+1}-n^2) > n^{t+1}-1$, et $\alpha\beta > 1$.

Si vero signa terminorum alternent, et quilibet > sequente sit: terminus primus totam summam superat, quod per lineam intuitui exhiberi potest.



Sint termini tales, lineae 𝔄𝔟, 𝔟ℭ, ℭ𝔡, 𝔡𝔈, 𝔈𝔣... moveatur nempe punctum ex 𝔄 ad dextram usque 𝔟, et inde ad laevam usque in ℭ, inde ad dextram usque in 𝔡 etc.; nimirum litera magna a sequente minuscula excepta, denotet viam ad dextram, minuscula a magna excepta viam ad laevam. Erit summa 𝔄𝔟—𝔟ℭ+ℭ𝔡—𝔡𝔈+𝔈𝔣... $=(a+b+c+d+e)-(e+d+c+b)+(b+c+d)-(d+c)+b\ldots = a+b+c\ldots$; patetque quamvis ulteriorem magnam literam ulterius ad dextram, et quamvis ulteriorem parvam ulterius ad laevam, limitemque inter literarum magnarum ab 𝔄 ad dextram progredientium seriem, et seriem parvarum a 𝔟 ad laevam progredientium cadere. ⍊

Hinc et seriem utramque negativam esse, et $\frac{q}{n} - f$ pro valore dicto ipsius n minus negativum ipso -13 esse patet.

V. *Cur in tabulis pro arcubus majoribus incrementa logarithmorum sint, uti arcus incrementa (intra certos fines); patet sic:*

Incrementa logarithmi (Tom. II. p. 339) pro eodem incremento numerico q decrescunt crescente p. Nam incr. logarithmicum semper est $< \frac{4q}{2p+q}$; quia quilibet terminus ibidem est $>$ summa sequentium; nempe (Tom I. p. 162) post $\frac{u^\mu}{\mu}$ summa sequentium est $< \frac{u^{\mu+2}}{(\mu+2)(1-u^2)}$ et reductis ad denom. eundem, ac per u^μ divisis fit $(\mu+2)-(\mu+2)u^2 > \mu u^2$, si u^2 non $> \frac{1}{2}$; nam $u<1$, adeoque et membrum ad laevam $+$ est; additoque $+$vo aequali, et utrinque dividendo, fit $\frac{(\mu+1)+1}{2(\mu+1)}$ ad laevam, et u^2 ad dextram; atque manifesto pro u^2 non $> \frac{1}{2}$, membrum laevum majus dextro est.

Denotetur 100 000 per b, atque pro a non $< 1^\circ\ 9'$, Sin a dicatur pb; erit $pb > 200\,000\,000$; et incrementum ipsius Sin a pro incremento s ipsius a sit q; est hoc pro $a=0$ quoque < 5, postea decrescens crescente a (p. 388). Excedit $pb+f$ ipsum $pb+\frac{q}{n}$ quantitate < 13; si igitur $\log\left(pb+\frac{q}{n}\right)$ dicatur L; erit (Tom. II. p. 340)

$$\log. \left(pb + \frac{q}{n} + 13\right) = L + \frac{2.13}{2\left(pb + \frac{q}{n}\right) + 13} \cdots,$$

ubi differentiam perexiguam esse, levi computo liquet.

Itaque si pro $pb+f$ accipiatur $pb + \frac{q}{n}$, et incrementis logarithmicis ipsius pb illis, quae respondent incrementis numericis q et $\frac{q}{n}$, nonnisi termini primi considerentur (juxta Tom. II. p. 340); incr. logarithmicum ipsius pb pro incr. numerico q ipsius pb, erit $\frac{2q}{2pb+q}$, quod per n divisum $= \frac{2q}{n(2pb+q)}$; pro incr. numerico $\frac{q}{n}$ autem erit $\frac{2q}{n(2pb+q:n)}$; cujus differentia a $\frac{2q}{n(2pb+q)}$ est $< \frac{q^2(n-1)}{2n^2p^2b^2}$; quod per modulum syst. multiplicatum ultra his minor fiet, adeoque fiet $< \frac{q^2(n-1)}{4n^2p^2b^2}$.

Erat $n>1$; sit $n = \frac{M}{m}$ (pro integris M, m); facile patet $\frac{n-1}{n^2}$ esse $= \frac{Mm-m^2}{M^2}$, atque (Tom I. p. 316) maximum ejus valorem fieri pro $m = \frac{M}{2}$, nempe pro $n=2$ essse $\frac{1}{4}$. Est vero pro isto valore quoque differentia dicta $<$

$\frac{25}{8p^2b^2}$: quod ipsa p e tabulis eximendo computari potest. Jam pro $a=1^0\ 9'$ est $p>2000$, adeoque diff. <1 diviso per 1 cum 16 cifris; pro aliis valoribus ipsius n, quam valoribus ipsius a autem majoribus adhuc minor fit.

Eodem modo patet, etiamsi s unum minutum denotet, atque a excedat $6^0\ 19'$, errorem exiguum esse.

VI. *In pluribus tabulis usque* $1^0\ 19'$ *arcus per* $10''$ *crescunt, et in prima columna ad laevam arcus in secundis expressus est.*

Nam si N sit multiplum decadis secundorum, et v sit <10, (exgr. pro $N+v=206$, est $N=200$ et $v=6$); erit cum errore exiguo
$N : N+v = \operatorname{Sin} N'' : \operatorname{Sin}(N+v)''$; adeoque log $\operatorname{Sin}(N+v)''=\log \operatorname{Sin} N''+\log(N+v)-\log N$

Namque $\operatorname{Sin} N'' : \operatorname{Sin}(N+v)''=\sin N'' : \sin(N+v)''$; essetque $N : N+v = \sin N'' : \sin N''. \frac{N+v}{N}$. Itaque nonnisi in $\sin N''. \frac{N+v}{N} - \sin(N+v)''$ inquirendum est.

Erat $1''=\frac{1}{10k}$ (pro radio 1), adeoque

$N''=\frac{N}{10k}$; atque (ut supra) $\frac{(N+v)}{N}.\ \sin\frac{N}{10k}$

$$=\frac{N+v}{10k}-\frac{N^2(N+v)}{2.3(10k)^3}+\frac{N^4(N+v)}{2.\ 3\ldots\ 5(10k)^5}\ \ldots;$$

$$\text{Ita } \sin\frac{(N+v)}{10k}=\frac{N+v}{10k}-\frac{(N+v)^3}{2.3(10k)^3}+\frac{(N+v)^5}{2.3\ldots5(10k)^5}$$

$$\text{Et diff. est } \frac{(N+v)}{2.3}\frac{[(N+v)^2-N^2]}{(10k)^3}+\frac{(N+v)[N^4-(N+v)^4]}{2.3\ldots5(10k)^5}$$

Formetur hinc series nova: nimirum reddantur +vi etiam termini —vi; et tum pro termino 2do ponatur $\frac{(N+v)^3}{2.3.5(10k)^5}$; et ab hoc ipso incipiendo multiplicetur quivis per $\frac{(N+v)^2}{6.7(10k)^2}$; ut fiat series sequens

$$\frac{(N+v)^3-(N+v).N^2}{2.3(10k)^3}+\frac{(N+v)^5}{2.3..5(10k)^5}+\frac{(N+v)^7}{2.3...7(10k)^7}, \ldots$$

ubi terminus primus primo =, sed quilibet $t$tus major $t$to prioris est. Fietque summa hujus seriei (propter exponentem < 1), =

$$\frac{(N+v)^3-N^2(N+v)}{2.3.(10k)^3}+\frac{7(N+v)^5}{4.5(10k)^3(6.7(10k)^2-(N+v)^2)}$$

quod et pro maximo valore ipsius N calculo inito perexiguum esse patebit, etsi per r multiplicetur, ut differentia pro radio tabulari prodeat.

VII. Si arcus $\frown$ 0, tum, sinus quoque $\frown$ 0, et log sinus $\frown -\infty$ (Tom I. p. 163); sed tum alioquin etiam numeri sinus arcuum adeo exiguorum exprimentes minores sunt, adeoque logarithmi magis differunt, quam proportio supra dicta valeat.

VIII. Potest logarithmus cujusvis quantitatis inmediate per seriem (Tom I. p. 162) in quotvis notis decimalibus computari, sufficientibus terminis sufficienter evolutis. Si vero logarithmus unus reperiatur: per formulam (Tom II. p. 339) semper ulterius progredi licet; et si $p > 100000$, et log. p e tabulis datus sit; nonnisi 6 termini satis evolvendi erunt, ut log in notis 59 prodeat; nam $(2p)^{11}$ in denominatore ad minimum erit $2^{11}.10^{11.5}$, et 2^{11} constat ex 4 notis.

E logarithmo numerus pariter absque tabulis quoque per seriem (Tom I. p. 162) prodit. Si b ut lognat respondeat numero N; erit $N=e^b$ $=1+b+\frac{b^2}{2}$.. Si vero β sit log N' quoad basim 10; sitque $e^c=10$; erit $10^\beta=e^{c\beta}=N'$, et $N'=$ $1+c\beta+\frac{c^2\beta^2}{2}$ . . . , sive si modulus μ dicatur erit $\mu=\frac{1}{c}=\frac{1}{\text{lognat}10}$ (Tom I. p. 163), et $N'=1+\frac{\beta}{\mu}+\frac{\beta^2}{\mu^2}$ . . . Sed ope tabularum, in quibus logarithmi in pluribus notis computati exstant, praestatur idem facilius per differentias primas, 2dasque.

Sit series quaecunque $(U)_0$ $(U)_1$ $(U)_2$...
(*primitiva* dicta)

series Differ.	1marum	$(D)_0$ $(D)_1$ $(D)_2$..	
Diff.	2darum	$(D^2)_0$ $(D^2)_1$ $(D^2)_2$..	
Diff.	3tiarum	$(D^3)_0$ $(D^3)_1$ $(D^3)_2$..	
— — —		— — — —	

Nempe cujusvis lineae (excepta suprema) terminus quivis t denotet differentiam termini T in linea proxima superiore supra stantis, a termino T' ad dextram horizontaliter sequente; sit exgr. $(D^m)_\mu=(D^{m-1})(\mu+1)-(D^{m-1})\mu$.

Unde etiam $T'=T+t$; nempe quivis terminus est summa praecedentis et hunc verticaliter deorsum excipientis.

Erit terminus $n$tus seriei primitivae
$$(U)_0+n(D)_0+\frac{n(n-1)}{2}(D^2)_0+\frac{n(n-1)(n-2)}{2\,.\,3}$$
$(D^3)_0$ . . . ubi coefficientes binomiales esse patet Pro valoribus 2, 3 ipsius n enim ab inductione

patet; nam $(U)_2=(U)_1+(D)_1=(U)_0+(D)_0+(D)_0+(D^2)_0=(U)_0+2(D)_0+(D^2)_0$; ita $(U)_3=(U)_2+(D)_2=(U)_0+2(D)_0+(D^2)_0+(D)_0+(D^2)_0+(D^2)_0+(D^3)_0=(U)_0+3(D)_0+3(D^2)_0+(D^3)_0$.

Si vero de $n-1$ valet, valet de n quoque. Erit enim $(U)_n=(U)_{n-1}+(D)_{n-1}=U_0+(n-1)(D)_0+\frac{(n-1)(n-2)}{2}(D^2)_0 \ldots + \frac{(n-1)\ldots(n-m)(D^m)_0}{1.\,2.\ldots m}$.

$$+(D)_0+(n-1)(D^2)_0+\frac{(n-1)(n-2)}{2}(D^3)_0 \ldots +$$

$\frac{(n-1)(n-2)\ldots[n-(m-1)](D^m)_0}{1\,.\,2\,.\,.\,.\,(m-1)}\ldots$; quia si suprema deleta sequens pro primitiva reputetur, idem valebit.

Patet autem coefficientium ipsius $(D^m)_0$ summam esse $\frac{n(n-1)\ldots[n-(m-1)]}{1.\,2\ldots\ldots m}$, nempe idem quod formula pro $(U)_n$ dat. Fient autem termini omnes 0, ab $n+1$to incipiendo (primo haud annumerato); quia tum factor $n-n$ ubique manebit.

Sit jam series $(U)_0$, $(u)_1$, $(u)_2 \ldots$ cujus terminus $n$tus sit $U_0+\frac{n}{m}(D)_0+\frac{n(n-m)}{2}$ $(D^2)_0+\frac{n(n-m(n-2m)}{2\,.\,3}(D^3)_0\ldots$, ubi m integrum constantem, n autem numerum termini (primo haud annumerato) denotent. Erunt termini sequentes $(u)_1=(U)_0+\frac{1}{m}(D)_0$ +

$$\frac{1\,(1-m}{2m\;\;m}(D^2)_0+\frac{1}{2.3m}.\frac{(1-m)}{m}.\frac{(1-2m)}{m}(D)_0.$$

$$(u)_2 = (U)o + \frac{2}{m}(D)o + \frac{2}{2.m} \cdot \frac{(2-m)}{m}(D^2)o +$$

$$\frac{2}{2.3m} \cdot \frac{(2-m)}{m} \cdot \frac{(2-2m)}{m}(D^3)o \ldots$$

. . . .

$$(u)tm = (U)o + \frac{tm}{m}.(D)o + \frac{tm}{2m}.(\frac{tm-m}{m})(D^2)o$$

$$+ \frac{tm.(tm-m)(tm-2m)}{2.3m \quad m \qquad m}(D^3)o \ldots\ldots$$

$$= (U)o + t(D)o + \frac{t(t-1)}{2}(D^2)o + \frac{t(t-1)(t-2)}{2.3}(D^3)o$$

. . . . . $= (U)n$; nempe seriei $(U)o$, $(u)^1$, $(u)_2$ .. terminus *tm*tus, est seriei $(U)o$, $(U)_1$ $(U)_2$ . . terminus *t*tus; diciturque terminus v tus seriei prioris, posterioris $\frac{v}{m}$ tus; patetque v tum prioris prodire, si in termino generali posterioris pro n ponatur $\frac{v}{m}$; et quum a quovis termino posterioris usque ad sequentem numero $m-1$ novi termini sint, dicuntur hi *interpolati*, et terminus generalis dictus, est formula termini *n*ti interpolati; cujus frequens applicatio fit.

Facile autem ex hoc regularum, quae tam pro logarithmo in pluribus notis, aut conversim numero accuratius, quam functionum trigonometricarum logarithmis, aut conversim ipsis functionibus reperiundis, in tabulis majoribus, ubi omnia pluribus notis expressa exstant, datarum ratio intelligitur. Nempe ubi logarithmus nonnisi 7 notis decimalibus exprimitur, differentiæ 2dae simulac numerus (Tom. II. p. 240) N per comma resectus prope 10 000 est, fierent zeri.

Schol. 1 Si $(U)o + (U)1 \ldots + (U)(n-1)$ denotetur per $(S)n$; erit $(S)n = n(U)o + \frac{n(n-1)}{2}(D)o$.

$+\frac{n(n-1)(n-2)}{2.3}(D^2)o \ldots$ Est enim $(S)n =$ $(S)(n-1) + (U)(n-1)$; itaque si de $(S)(n-1)$ valeat, substituendo valorem ipsius $(U)(n-1)$ patet ut ante. Valet autem ab inductione pro valoribus 2, 3 ipsius n.

Si jam pro serie $(U)o\ (u)1\ (u)2 \ldots$ eaedem denotationes fiant, nonnisi d pro D et s pro S ponendo: manifesto erit $(u)n = (U)o + n(d)o +$ $\frac{n(n-1)}{2}(d^2)o \ldots = (U)o + \frac{n}{m}(D)o + \frac{n}{2m}$. $\frac{(n-m)}{m}(D^2)o \ldots$; unde $n(d)o = \frac{n}{m}(D)o$. $\frac{n(n-1)}{2}(d^2)o = \frac{n}{2m}\frac{(n-m)}{m}(D^2)o \ldots$; adeoque $(d)o = \frac{(D)o}{m}$, $(d^2)o = \frac{(n-m)}{(n-1)m^2}(D^2)o$, $(d^3)o$ $= \frac{(n-m)(n-2m)}{(n-1)(n-2)m^3}(D^3)o \ldots$

Atque hinc $(s)n = n(U)o + \frac{n(n-1)}{2}(d)o +$ $\frac{n(n-1)(n-2)}{2.3}(d^2)o \ldots$ erit $= n(U)o + \frac{n(n-1)}{2m}$ $(D)o + \frac{n(n-2)(n-m)}{2.3m^2}(D^2)o + \frac{n(n-3)(n-m)(n-2m)}{2.3.4.m^3}$ $(D^3)o \ldots$

Schol. 2. Est quoque series dicta quaevis *series arithm. ordinis* μti, si series diff. μta

Österreichische
Nationalbibliothek

digitalisiert mit Google

Hinweis: An dieser Stelle befindet sich im Dokument eine Ausklappseite. Diese wurde noch nicht digitalisiert.

prima sit, terminis aequalibus gaudens: ubi vero hoc cum errore exiguo fuerit, pro tali in tantum reputari poterit. Atque hinc

Schol. 3. *Exempla quaedam*: I. *Sit quaerendus exgr. log.* 143957432; et 143 957 (p. 341.) dicatur N, et 0,432 sit f, subeatque vicem ipsius $(n:m)$ pag. 397; sitque $(U)o=\log. 143\,957$, et $(U)1=\log. 143\,958$; atque adsint logarithmi ipsorum N, $N+1$, $(N+2)$, $(N+3)$ in pluribus notis decimalibus, et adsint $(D)o$, $(D^2)o$, $(D^3)o$. Prodibit, terminis inter $\log N$ et $\log (N+1)$ quasi numero $m-1=999$ interpolatis, $(U)o,432$ per formulam; nempe $n=432$, et $m=1000$ Siquidem libuerit, ad $(D)o$ vel $(D^2)o$ subsistere licebit, nisi major accuratio desideretur. Notandumque est, differentiam ubi negativa est, ita uti est, accipiendam esse. Si autem pro $N+f$ prodierit, facile (ut p. 341) pro numero dato, mutata characteristica liquet.

II. Converti etiam potest. *Sit Numerus* exgr. ipsi 1023578, omissa characteristica, soli mantissae *respondens quaerendus*. Sit $10235=10235v$ $=Qv$. Numeri ipsis Qv, $(Q+1)v$ $(Q+2)v$, $(Q+3)v$ sint N, N' N''; adsintque hi in pluribus notis, simul cum horum differentiis numericis $(D)o$, $(D^2)o$, $(D^3)o$. Erit mantissa data $=10235v+0,78v$. Itaque si ponatur $(U)o=N$, et $(U)1=N'$, terminis inter $(U)o$ et $(U)1$, quasi interpolatis, 78tus per formulam prodibit.

III. Sit p multiplum decadis secundorum, et v numerus secundorum ipso $10''$ minor; et $\log \sin p=(U)o$, $\log \sin(p+v=(U)1$. Interpolatis quasi 9 terminis, prodit $v$tus per formulam, si sdfuerint (in tabulis) $(D)o$, (D^2) . .

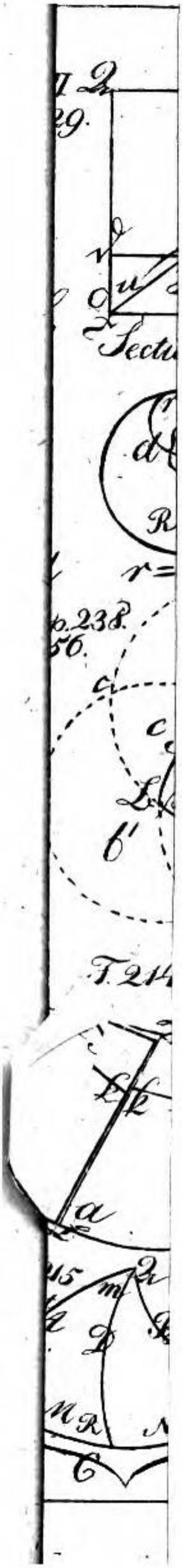
. . . .


T.4
Tan

p.52.
p60.
p.64.


F. 98
p. 80.
F. 108


8.p.165
F. 178.


29.
p.238.
56.
F.214

Österreichische
Nationalbibliothek

digitalisiert mit Google

Hinweis: An dieser Stelle befindet sich im Dokument eine Ausklappseite. Diese wurde noch nicht digitalisiert.

9
A
F. 223-
K
Q
c
d
aequ.
horiz.
a g f
a g
F. 241
p. 300.
c d

Österreichische Nationalbibliothek
+Z184520309