DISQUISITIONES
MATHEMATICAE
HUNGARICAE

1

Császár Ákos

BEVEZETÉS AZ ÁLTALÁNOS TOPOLÓGIÁBA

1828

Akadémiai Kiadó, Budapest

CSÁSZÁR ÁKOS

BEVEZETÉS AZ ÁLTALÁNOS TOPOLÓGIÁBA

A könyv célja, hogy az olvasót viszonylag kevés előismeret feltételezése mellett (csupán az elsőéves egyetemi előadások szokásos anyagára támaszkodva) elvezesse az általános topológia alapfogalmain túlmenően e témakörnek viszonylag új eredményeihez is. A tárgyalásmód jellegzetessége, hogy kezdettől fogva tekintetbe veszi a topologikus tér fogalma mellett a szomszédsági tér és az uniform tér fogalmát is, és kiaknázza azokat a lehetőségeket, amelyeket az említett térfogalmak felhasználása a topologikus terek elméletének áttekinthetőbbé tételében nyújt. A feldolgozott anyag köréről tájékoztat a fejezetcímek felsorolása: Bevezetés, Topologikus terek, Szomszédsági és uniform terek, Teljesen reguláris terek, Teljes és kompakt terek, Térbővítések, Szorzat- és kvóciens-terek, Parakompakt terek, Baire-féle terek, Összefüggő terek, Topologikus csoportok. A bevezetett fogalmakat a könyv bőséges példaanyaggal világítja meg minden oldalról, a felhasznált halmazelméleti és algebrai segédeszközöket részletesen ismerteti, és számos kidolgozatlan vagy csak vázlatosan kidolgozott feladattal ad alkalmat az olvasónak a megismert fogalmak és módszerek begyakorlására. A tárgyalásmód bemutatja a bevezetett fogalmaknak a matematika más fejezeteiben játszott szerepét, valamint az ismertetett eredmények ilyen alkalmazásait.

1828

AKADÉMIAI KIADÓ
BUDAPEST

ISBN 963 05 0107 4

BEVEZETÉS AZ ÁLTALÁNOS TOPOLÓGIÁBA

DISQUISITIONES MATHEMATICAE HUNGARICAE

SZERKESZTI

A MAGYAR TUDOMÁNYOS AKADÉMIA
MATEMATIKAI BIZOTTSÁGA

1828

AKADÉMIAI KIADÓ · BUDAPEST 1974

BEVEZETÉS AZ ÁLTALÁNOS TOPOLÓGIÁBA

CSÁSZÁR ÁKOS

A MAGYAR TUDOMÁNYOS AKADÉMIA LEVELEZŐ TAGJA
EGYETEMI TANÁR

MÁSODIK KIADÁS

1828

AKADÉMIAI KIADÓ · BUDAPEST 1974

ISBN 963 05 0107 4

Printed in Hungary

ELŐSZÓ

Nem múlik el év anélkül, hogy az általános topológia irodalma százakra menő számú új tudományos eredményt tartalmazó dolgozaton kívül néhány új könyvvel, vagy régebbi könyvek újabb kiadásaival ne gyarapodnék. Ezeknek egy része e tudományág egy-egy szűkebb területét tárgyalja, és bizonyos topológiai előismereteket igényel, nagyobb részük azonban a tárgykört alapfogalmaitól kezdve veszi sorra, és innen kiindulva kívánja az olvasót az idevágó legfontosabb fogalmakkal és eredményekkel megismertetni.

Az általános topológiával foglalkozó tankönyvek és monográfiák ilyen bőséges áradata közepette minden új könyv szerzője fel kell, hogy tegye magának azt a kérdést, tud-e valami olyat nyújtani, ami könyvének kiadását kellően indokolja. Ha könyvét ráadásul nem a világnyelvek valamelyikén kívánja megjelentetni, külön mérlegelnie kell, hogy nyelvi korlátok miatt eleve körülhatárolt olvasótábora nem fog-e témaválasztásának alkalmatlan volta következtében túlságosan szűkkörűre csökkenni.

Először a másodiknak említett kérdésről szólva, úgy gondolom, abból kell kiindulni, hogy az általános topológiába bevezető könyvek szaporasága nem véletlen, hanem annak a következménye, hogy a modern matematika jellegzetességeinek egyike éppen a topológiai módszereknek, a topológiai gondolkodásmódnak mind szélesebb elterjedése, behatolása a matematika különféle irányú fejezeteibe, mindenekelőtt az analízisbe és a geometriába. Ebből ered, hogy a matematika korszerű egyetemi oktatása nem nélkülözheti a topológiával — s mindenekelőtt a minden további topológiai tanulmány alapjait képező általános topológiával — való megismerkedést, úgyhogy az ilyen könyvek iránti érdeklődés szükségszerűen növekvőben van. Ezek a világszerte jelentkező tendenciák nálunk is érvényesülnek, s így aligha tévedek, ha úgy vélem, hogy indokolt egy olyan könyvnek magyar nyelvű kiadása, amely az általános topológiával megismerkedni kívánó matematikus igényeit van hivatva kielégíteni.

Az imént utaltam arra, hogy a matematika számos ágának korszerű szintű tanulmányozása és művelése a topológiai módszereknek viszonylag széles ismeretét kívánja meg. Ez a körülmény kívánatossá teszi, hogy az általános topológia iránt akár önmagának, akár sokoldalú alkalmazásainak kedvéért érdeklődők a vele való megismerkedést már egyetemi tanulmányaiknak aránylag korai fázisában megkezdhessék. A kérdést tisztán logikai szempontból tekintve akár annak sem volna akadálya, hogy az általános topológia bemutatását minden matematikai előismeretet mellőző formában, a szükséges halmazelméleti apparátus kifejtése után az alapvető definíciók és axiómák kimondásával kezdjük, s az általános topológiába bevezetést nyújtani kívánó művek jelentékeny része csakugyan ezt is teszi; úgy gondolom azonban, hogy ez az eljárás visszaélés az axiomatikus módszer lehetőségeivel, amely legfeljebb formális megértéshez vezethet, a megismert fogalmak jelentőségének tényleges belátásához azonban nem. Aligha kétséges ugyanis, hogy a modern matematikában oly széleskörűen elterjedt absztrakt elméleteknek — s ezek közé tartozik az általános topológia is — létjogosultsága abban van, hogy általános fogalomalkotásaik nagyszámú fontos speciális esetet rejtenek magukban, általános kijelentéseik konkrét példákra alkalmazva számos fontos következményt vonnak maguk után, és szilárd meggyőződésem, hogy az ilyen elméleteknek csak olyan bemutatása jár haszonnal, amely a definíciókhoz vezető absztrakciós folyamat kellő előkészítésén, a bennük rejlő speciális esetek kifejtésén, a tételekből fakadó alkalmazások kihámozásán nem siklik át. Ahhoz azonban, hogy az általános topológia fogalmaihoz konkrét ismeretekből kiindulva természetes úton eljuthassunk, a definíciókat nem-semmitmondó példákkal illusztrálhassuk, bizonyos előismeretekre van szükség az analízis köréből; mennél bővebbek ezek az előismeretek, annál gazdagabb illusztrációs anyag kínálkozik az általános topológia kifejtése közben, de annál későbbi időre is tolódik a topológiával való megismerkedés lehetőségének időpontja.

Úgy gondolom, a helyes középúton járok, ha a következőkben az olvasótól annyi előismeretet kívánok meg az analízis területéről, amennyit az elsőéves egyetemi előadásokon általában megszereznek. Ahelyett tehát, hogy a „semmi előismeret, csak absztrakt gondolkodásra való készség" tetszetős, de hamis jelszavát vallanám, tudatosan építek a fogalmak kialakításakor az analízisből vett ismeretekre az említett mértékben. Nem tételezem fel viszont sem az analízisből, sem az algebrából, sem a halmazelméletből azokat az ismereteket, amelyek az első évet elvégzett egyetemi hallgatótól nem várhatók el, hanem ezek közül a szükségeseket a tárgyalás során a megfelelő helyen bemutatom.

A feltételezett előismeretek körének az előzőkben jelzett körülhatárolása azzal jár, hogy a tárgyalás során nem építek — a véges, a megszámlálható és a nem-megszámlálható halmazok megkülönböztetésétől eltekintve — a halmaz számosságának fogalmára, sem pedig a végtelen kardinális számok és rendszámok elméletére. A Kuratowski—Zorn-féle lemmának és a jólrendezési tételnek (bizonyításuk nélkül való) közlése mégis lehetőséget nyújt az általános topológia minden lényeges fogalmának és eredményének bemutatására, leszámítva természetesen a számosságra alapozott fogalmakat (pl. a topologikus tér súlyát) és egy-két bonyolultabb ellenpéldát. A hozzáértő olvasó megítélésére bízom, hogy a mélyebben fekvő halmazelméleti módszereknek ez a kerülése lényegesen megcsonkította-e a tárgyalható anyagot.

A könyv bevezető jellegének megfelelően az egyes szakaszok végén álló Gyakorlatok célja az, hogy az olvasónak alkamat adjanak az olvasottak megértésének ellenőrzésére, a definíciók tartalmának és a tételek alkalmazási lehetőségeinek lehetőleg sokoldalú megvilágítása révén. Nem ringatom magamat abban az illúzióban (miként számos hasonló könyv szerzője teszi), hogy az olvasó az általános topológia minden további eredményét most már önállóan képes lesz felfedezni; ennek megfelelően minden olyan feladatot, amely nem egészen egyszerű, kisebb egységekre tagolok, és sok esetben szögletes zárójelek között a megoldáshoz vezető lényeges gondolatokat is megadom.

Ugyancsak a kezdő matematikus igényeinek kielégítését igyekszem szolgálni az egyes bizonyítások gondolatmenetének világos tagolásával. Bonyolultabb gondolatmenetek vázlatát a $\Rightarrow$ és $\Leftrightarrow$ jelek felhasználásával adom meg; az utóbbit szavakban a szokásos „akkor és csak akkor" fordulat helyett a gördülékenyebb „pontosan akkor" szavakkal fejezem ki. A bizonyítás végét a ▮ jel mutatja; ha ez közvetlenül a tétel szövege után áll, az azt jelenti, hogy az állítás az előző definíciók, ill. állítások alapján közvetlenül világos.

Ismét csak a témakörrel először ismerkedő olvasóra gondolva mellőztem az irodalmi utalásokat; ezzel szemben azoknak részére, akiknek érdeklődését sikerült felkeltenem, bőséges (ha nem is teljes) jegyzéket közlök az általános topológiával foglalkozó tankönyvekről és monográfiákról. Ebbe — a csekély számú magyar nyelvű könyv mellett — csak a világnyelvek valamelyikén megjelent műveket vettem fel, a több kiadásban megjelentek újabb kiadásait csak akkor, ha az eredetitől eltérő nyelvűek, vagy ha lényegesen átdolgozottak. A könyvben tárgyalt anyagon túlmenő ismeretek szerzésére a jegyzékben levő munkák tág lehetőséget nyújtanak; egy részükben cikkekre is utaló bőséges irodalomjegyzék található.

Az előzőkben ismételten hangsúlyoztam a könyv bevezető jellegét. Ezzel látszólagos ellentmondásban szeretném viszont azt is aláhúzni, hogy — ha nem is minden fejezetben egyenlő mértékben — igyekeztem az olvasót az általános topológia mai arculatával megismertetni és viszonylag friss témakörökbe is kellő betekintést nyújtani. Különösen törekedtem arra, hogy a topológiák mellett egyéb struktúratípusok is kellő súllyal szerepeljenek, s az általános topológia különféle kérdéseivel kapcsolatos alkalmazási lehetőségeik megfelelően kidomborodjanak.

Végezetül kedves kötelességemnek teszek eleget, amikor őszinte köszönetet mondok a Magyar Tudományos Akadémia Matematikai Kutatóintézete topológiai szemináriumán részt vevő kedves kollégáimnak, akik könyvem megírásában sok ötlettel segítettek; közülük különösen Bognár Mátyás, Gerlits János és Juhász István segítségéért vagyok hálás. Ugyanígy köszönettel tartozom Bognár Mátyásnak és Gacsályi Sándornak a kézirat lektorálása során tett számos értékes megjegyzésükért, amelyekkel jelentékenyen segítettek a szöveg végső kicsiszolásában.

Budapest, 1969. március

A szerző

TARTALOM

I. BEVEZETÉS

1.1. HALMAZOK

1.1.a. Tartalmazás. A mindennapi életben és a matematikában egyaránt gyakran lépnek fel olyan fogalmak, amelyek bizonyos dolgok „összességét" fejezik ki, ezek a dolgok „hozzátartoznak" a kérdéses összességhez, más dolgok viszont nem tartoznak hozzá. Így például egy iskolai osztály az osztálynévsorban felsorolt tanulók összessége, ezek a tanulók az osztályhoz tartoznak, más dolgok (egyéb személyek, állatok, tárgyak, síkidomok stb.) nem tartoznak az osztályhoz. Az S sík p pontja körül $r = 2$ sugárral rajzolt körvonalhoz hozzátartoznak az S síkban fekvő pontok közül azok, amelyeknek p-től való távolsága 2-vel egyenlő, más dolgok (az S sík többi pontjai, nem az S síkban fekvő pontok, tanulók, űrrakéták stb.) nem tartoznak a körvonalhoz. A $(0,1)$ intervallumhoz hozzátartoznak azok a valós számok, amelyek 0-nál nagyobbak, de 1-nél kisebbek, más dolgok (további valós számok, könyvek, növények stb.) nem tartoznak hozzá.

Halmazon az előbbiekben vázolt jellegű fogalmat értünk, vagyis olyat, amelynek egyértelmű megadásához minden dologról el kell tudnunk dönteni, hozzátartozik-e vagy sem; azokat, amelyek hozzátartoznak, a halmaz **elemei**nek mondjuk. Eszerint például a $(0,1)$ intervallum elemei azok a valós számok, amelyek 0-nál nagyobbak, 1-nél kisebbek.

Azt, hogy x eleme az A halmaznak, így jelöljük: $x \in A$, azt pedig, hogy x nem eleme A-nak, így: $x \notin A$. Eszerint az A és B halmaz akkor egyenlő, jelben $A = B$, ha $x \in A$ esetén $x \in B$, és $x \in B$ esetén $x \in A$. Például $\frac{1}{3} \in (0,1)$, de $-2 \notin (0,1)$. Azt, hogy az A és B halmaz nem egyenlő, az $A \neq B$ szimbólum jelöli.

Előfordulhat az is, hogy egy halmaznak egyáltalában nincs eleme; egyetlen ilyen halmaz van, neve **üres halmaz**, jele $\emptyset$. Eszerint bármely x-re $x \notin \emptyset$.

Azt a halmazt, amelynek eleme a, b, c, d, más eleme pedig nincs, így jelöljük: $\{a, b, c, d\}$. Hasonló jelölést alkalmazunk akkor is, ha a halmaz elemeit nem tudjuk ugyan felsorolni, de a jelölés eléggé egyértelműen utal rájuk; például a páros természetes számok halmazát a $\{2, 4, 6, 8, \ldots\}$ szimbólummal jelölhetjük.

Ha $P(x)$ olyan állítás, amely x megválasztásától függően lehet igaz vagy hamis, akkor $\{x\colon P(x)\}$ jelöli azoknak az x-eknek a halmazát, amelyekre $P(x)$ igaz. Például $\{x\colon 0 < x < 1\}$ a $(0,1)$ intervallumot, s ha $\rho(p, x)$-szel jelöljük az S sík p és x pontja közötti távolságot, $\{x\colon x \in S,\ \rho(p, x) = 2\}$ az S síkban p körül 2 sugárral rajzolt körvonalat jelöli. Ezt a jelölést sokszor rövidített formában alkalmazzuk; például $\{y\colon y = x^2 + 1,\ 0 \leqq x \leqq 1\}$ helyett azt írjuk, hogy $\{x^2 + 1 : 0 \leqq x \leqq 1\}$, $\{x\colon x = x_i,\ i = 1, 2, \ldots, 10\}$ helyett azt, hogy $\{x_i\colon i = 1, 2, \ldots, 10\}$.

A stílus élénkítése céljából a „halmaz" szó helyett sokszor más szinonim kifejezést használunk (összesség, rendszer, osztály, család stb.).

1.1.b. Részhalmazok. Az A halmazt a B halmaz **részének** vagy **részhalmazának** mondjuk, ha A minden eleme egyúttal B-nek is eleme; jelben $A \subset B$ vagy $B \supset A$. Eszerint az üres halmaz minden halmaznak része. Bármely halmaz része önmagának; a tőle különböző részhalmazokat **valódi részhalmaz**oknak mondjuk. Például a 4-gyel osztható természetes számok halmaza része a páros természetes számok halmazának, a $(0,1)$ intervallum része a $[0,2]$ intervallumnak.

(1.1.1) *Tetszőleges A, B, C halmazra*

(a) *$A \subset B$, $B \subset C$ esetén $A \subset C$;*

(b) *$A \subset B$ és $B \subset A$ pontosan akkor áll, ha $A = B$.* ▮

1.1.c. Műveletek. Az A és B halmaz **egyesítésén** azt a halmazt értjük, amelynek x pontosan akkor eleme, ha $x \in A$ vagy $x \in B$ (ideértve azt is, amikor x A-nak is, B-nek is eleme); jele $A \cup B$. Például $(0, 3) \cup (2, 4) = (0, 4)$.

Általánosabban, ha egy I indexhalmaz minden i eleméhez hozzá van rendelve egy A_i halmaz, akkor az A_i halmazok egyesítésén értjük, és az

$$\bigcup \{A_i\colon i \in I\} \text{ vagy } \bigcup_{i \in I} A_i$$

szimbólummal jelöljük, azt a halmazt, amelynek x pontosan akkor eleme, ha van olyan $i \in I$, amelyre $x \in A_i$.

Abban az esetben, amikor I az m-től n-ig terjedő egész számok halmaza, az $\bigcup_{i=m}^{n} A_i$ vagy (ha nem okoz félreértést) $\bigcup_{m}^{n} A_i$, ha I az m-nél nem kisebb egész számok halmaza, az $\bigcup_{i=m}^{\infty} A_i$ vagy $\bigcup_{m}^{\infty} A_i$ jelölést használjuk.

Az A és B halmaz **metszete** az a halmaz, amelynek x pontosan akkor eleme, ha egyidejűleg $x \in A$ és $x \in B$; jele $A \cap B$. Például $(0, 3) \cap (2, 4) = (2, 3)$.

Általánosabban,

$$\bigcap \{A_i\colon i \in I\} \text{ vagy } \bigcap_{i \in I} A_i$$

jelöli azoknak az x-eknek halmazát, amelyekre minden $i \in I$ esetén $x \in A_i$. Speciális indexhalmazok esetében itt is alkalmazzuk a $\bigcap_{m}^{n} A_i$ vagy $\bigcap_{m}^{\infty} A_i$ jelölést.

Ha $A \cap B = \emptyset$, az A és B halmazt **diszjunkt**nak mondjuk. Általánosabban azt mondjuk, hogy az $\{A_i\colon i \in I\}$ halmazrendszer diszjunkt, ha $i \neq j$ esetén $A_i \cap A_j = \emptyset$.

Érvényes a következő asszociatív törvény:

(1.1.2) *Ha $I = \bigcup_{j \in J} I_j$, $B_j = \bigcup_{i \in I_j} A_i$, akkor $\bigcup_{i \in I} A_i = \bigcup_{j \in J} B_j$.* ▮

(1.1.3) *Ha $I = \bigcup_{j \in J} I_j$, $C_j = \bigcap_{i \in I_j} A_i$, akkor $\bigcap_{i \in I} A_i = \bigcap_{j \in J} C_j$.* ▮

Érvényes továbbá a disztributív törvény:

(1.1.4) $(\bigcup_{i \in I} A_i) \cap (\bigcup_{j \in J} B_j) = \bigcup \{A_i \cap B_j\colon i \in I, j \in J\}$. ▮

Az A és B halmaz **különbségén** értjük, és $(A - B)$-vel jelöljük, azt a halmazt, amelynek x pontosan akkor eleme, ha $x \in A$, de $x \notin B$. Például $(0, 3) - (2, 4) = (0, 2]$. Érvényesek a következő de Morgan-féle azonosságok:

(1.1.5) (a) $A - \bigcup_{i \in I} B_i = \bigcap_{i \in I} (A - B_i)$;

(b) $A - \bigcap_{i \in I} B_i = \bigcup_{i \in I} (A - B_i)$. ∎

Itt is érvényes továbbá a disztributív törvény:

(1.1.6) $(A - B) \cap C = (A \cap C) - (B \cap C)$. ∎

Ha $B \subset A$, akkor $(A - B)$-t a B halmaz A-ra vonatkozó **komplementum**ának vagy **komplementer halmaz**ának mondjuk.

1.1.d. Ekvivalencia-relációk. Tegyük fel, hogy egy A halmaz diszjunkt részhalmazok egyesítéseként van előállítva:

$$A = \bigcup_{i \in I} A_i, \; i \neq j \text{ esetén } A_i \cap A_j = \emptyset,$$

és $x, y \in A$ esetén jelentse $x \sim y$ azt, hogy van olyan $i \in I$ index, amelyre $x \in A_i$, $y \in A_i$. Ekkor a $\sim$ szimbólum ekvivalencia-relációt jelöl az A halmazon, ugyanis rögtön látható, hogy a $\sim$ reláció **reflexív** (azaz $x = y$ esetén $x \sim y$), **szimmetrikus** (azaz $x \sim y$ esetén $y \sim x$) és **tranzitív** (azaz $x \sim y$, $y \sim z$ esetén $x \sim z$).

Általában **ekvivalencia-reláció**ról beszélünk az A halmazon, ha A elemei között olyan $\sim$ reláció van megadva, amely a fenti értelemben reflexív, szimmetrikus és tranzitív. Például, ha A a sík összes háromszögeinek halmazát jelöli, és $x \sim y$ azt jelenti, hogy az x háromszög hasonló az y háromszöghöz, ekvivalencia-relációt kapunk.

Az előbbi kapcsolat az A halmaz diszjunkt részhalmazokra való felbontásai és az A-n értelmezett ekvivalencia-relációk között mármost megfordítható:

(1.1.7) *Legyen $\sim$ ekvivalencia-reláció az A halmazon. Jelölje $x \in A$ esetén $A(x)$ azoknak az $y \in A$ elemeknek a halmazát, amelyekre $x \sim y$; $A(x)$-et az x-hez tartozó* **ekvivalencia-osztály***nak nevezzük. A különböző ekvivalencia-osztályok A-nak diszjunkt részhalmazokra való felbontását szolgáltatják.*

Bizonyítás. A reflexivitás miatt $x \in A(x)$, úgyhogy az ekvivalencia-osztályok egyesítése A. Két különböző ekvivalencia-osztály diszjunkt is, mert $z \in A(x) \cap A(y)$ esetén $x \sim z$ és $y \sim z$, tehát $z \sim y$, és így $x \sim z$ és $z \sim y$ következtében $x \sim y$. Mármost $u \in A(x)$ esetén $x \sim u$, s ebből és $y \sim x$-ből $y \sim u$, azaz $u \in A(y)$. Így $A(x) \subset A(y)$, s hasonlóan $A(y) \subset A(x)$, úgyhogy $A(x) = A(y)$. ∎

1.1.e. Valós számhalmazok. Összefoglaljuk a valós számok ismert és a későbbiekben felhasználásra kerülő tulajdonságait, az ezekkel kapcsolatos fogalmakat és jelöléseket (egyeseket példáinkban már eddig is szerepeltettünk).

Az összes **valós szám**ok halmazát $\mathbf{R}$-rel fogjuk jelölni. Ezek között értelmezve van az **összeadás** művelete, amely az $x \in \mathbf{R}$ és $y \in \mathbf{R}$ számhoz az $x + y$ összeget rendeli, és eleget tesz a kommutatív és asszociatív törvénynek:

$$x + y = y + x, \; (x + y) + z = x + (y + z).$$

Van **R**-ben egy elem, jele 0, amelyre $x \in \mathbf{R}$ esetén

$$x + 0 = x,$$

és minden $x \in \mathbf{R}$-hez tartozik egy $y \in \mathbf{R}$, amelyre

$$x + y = 0;$$

ilyenkor jelben $y = -x$. Az $x + (-y)$ összeget röviden $(x - y)$-nal jelöljük.

R-ben értelmezve van a **szorzás** művelete is, amely $x \in \mathbf{R}$-hez és $y \in \mathbf{R}$-hez az xy szorzatot rendeli. Ez is kommutatív és asszociatív:

$$xy = yx, \quad (xy)z = x(yz),$$

továbbá disztributív:

$$x(y + z) = xy + xz.$$

Van **R**-nek egy 0-tól különböző eleme, jele 1, amelyre $x \in \mathbf{R}$ esetén

$$x \cdot 1 = x,$$

és minden $x \in \mathbf{R}$-hez, ha $x \neq 0$, tartozik olyan $y \in \mathbf{R}$, hogy

$$xy = 1;$$

ilyenkor jelben $y = \dfrac{1}{x}$. Az $x\dfrac{1}{y}$ szorzatot röviden $\dfrac{x}{y}$-nal jelöljük $(y \neq 0)$.

Az 1-ből ismételt összeadással keletkező

$$1 + 1 = 2, \; 2 + 1 = 3, \; 3 + 1 = 4, \dots$$

számok a **természetes számok**, ezeknek halmazát **N**-nel fogjuk jelölni. A természetes számok, a 0, és a $-n$ alakú számok ($n \in \mathbf{N}$) alkotják együttvéve az **egész számok** halmazát. Az $\dfrac{n}{m}$ alakban írható számok (n és m egész, $m \neq 0$) a **racionális számok**, ezeknek halmaza **Q**. Az $\mathbf{R} - \mathbf{Q}$ halmaz elemei az **irracionális számok**.

Az **R** halmaz **rendezett halmaz.** Ezen azt értjük, hogy értelmezve van **R** elemei között egy $<$ jellel jelölt reláció úgy, hogy

(1.1.8) (a) $x, y \in \mathbf{R}$ esetén $x < y$, $x = y$, $y < x$ közül pontosan egy áll fenn;

(b) $x < y$, $y < z$ esetén $x < z$.

Az $x > y$ szimbólum ugyanazt jelenti, mint $y < x$; $x \leqq y$ vagy $y \geqq x$ azt jelenti, hogy vagy $x = y$, vagy $x < y$.

Az $x \in \mathbf{R}$ számot **pozitív**nak mondjuk, ha $x > 0$, és **negatív**nak, ha $x < 0$.

A valós számok rendezése kapcsolatban áll az összeadás és a szorzás műveletével, amennyiben két pozitív szám összege pozitív, két pozitív szám vagy két negatív szám szorzata pozitív, egy pozitív és egy negatív szám szorzata negatív.

Ha $a, b \in \mathbf{R}$, $a < b$, akkor az

$$\begin{aligned}(a, b) &= \{x\colon a < x < b\},\\ [a, b] &= \{x\colon a \leqq x \leqq b\},\\ [a, b) &= \{x\colon a \leqq x < b\},\\ (a, b] &= \{x\colon a < x \leqq b\}\end{aligned}$$

halmazt rendre a és b végpontú **nyílt, zárt, balról félig zárt, jobbról félig zárt intervallum**nak nevezzük. Alkalmazzuk az előbbi szimbólumokat még $a = b$ esetén is; ekkor $[a, a] = \{a\}$, a többi három intervallum üres.

Használjuk még $a \in \mathbf{R}$ esetén az

$$\begin{aligned}(a, +\infty) &= \{x\colon x > a\},\\ [a, +\infty) &= \{x\colon x \geqq a\},\\ (-\infty, a) &= \{x\colon x < a\},\\ (-\infty, a] &= \{x\colon x \leqq a\},\\ (-\infty, +\infty) &= \mathbf{R}\end{aligned}$$

jelöléseket is. Ezeket a számhalmazokat **végtelen intervallum**oknak mondjuk.

A $[0,1]$ intervallumot **I**-vel fogjuk jelölni.

A $\emptyset \neq A \subset \mathbf{R}$ halmaz **felső korlátján** olyan $k \in \mathbf{R}$ számot értünk, amelyre $x \in A$ esetén $x \leqq k$, A **alsó korlát**ja pedig az olyan $k \in \mathbf{R}$ szám, amelyre $x \in A$ esetén $x \geqq k$. Az A halmaz **felülről**, ill. **alulról korlátos,** ha van felső, ill. alsó korlátja, és **korlátos,** ha felülről is, alulról is korlátos.

Az **R** halmaznak fontos tulajdonsága, hogy bármely felülről korlátos $A \neq \emptyset$ részhalmazának felső korlátjai között van legkisebb; ezt A **felső határá**nak nevezzük és $\sup A$-val jelöljük. Hasonlóan, egy alulról korlátos $A \neq \emptyset$ halmaz alsó korlátjai között van legnagyobb; ez A **alsó határa**, jele $\inf A$. Olyankor, amikor A elemei között van legnagyobb (legkisebb), $\sup A$ ($\inf A$) éppen ezzel egyenlő; ami nem magától értetődő, az az, hogy $\sup A$ ($\inf A$) akkor is létezik, ha A-nak nincsen legnagyobb (legkisebb) eleme. Az, hogy **R**-nek ez a tulajdonsága nem következik **R** többi felsorolt tulajdonságából, abból látszik, hogy a **Q** halmazra az utóbbiak maradéktalanul teljesülnek, viszont **Q** valamely felülről korlátos részhalmazának **Q**-beli felső korlátjai között nincs mindig legkisebb.

A valós számok felsorolt tulajdonságaiból levezethetők az egyenlőségekkel és egyenlőtlenségekkel való számolás szokásos és ismert szabályai; ezt nem részletezzük. Alkalmazásképpen bemutatjuk néhány gyakran felhasznált állítás bizonyítását.

(1.1.9) *Az* **N** *halmaz nem korlátos felülről.*

Bizonyítás. Ha $h = \sup \mathbf{N}$ volna, akkor $h - 1$ már nem volna **N**-nek felső korlátja, s így volna olyan $n \in \mathbf{N}$, hogy $h - 1 < n$. Ekkor $h < n + 1 \in \mathbf{N}$, ellentétben h értelmezésével. ∎

(1.1.10) $\inf\left\{\dfrac{1}{n} : n \in \mathbf{N}\right\} = 0.$

Bizonyítás. Az $A = \left\{\frac{1}{n} : n \in \mathbf{N}\right\}$ halmaznak 0 mindenesetre alsó korlátja. Ha még $h > 0$ is alsó korlátja volna A-nak, akkor $n \in \mathbf{N}$ esetén $\frac{1}{n} \geqq h$, azaz $n \leqq \frac{1}{h}$ volna, (1.1.9)-cel ellentétben. ▮

(1.1.11) *$a, b \in \mathbf{R}$, $a < b$ esetén van olyan $q \in \mathbf{Q}$, hogy $a < q < b$.*

Bizonyítás. (1.1.9) szerint van olyan $m, n \in \mathbf{N} \subset \mathbf{Q}$, hogy $n > b$, $m > -a$, úgyhogy $-m < a$, $-m \in \mathbf{Q}$. Tegyük fel, hogy (a, b)-ben nincs $\mathbf{Q}$-nak eleme, és legyen

$$c = \sup\{x\colon x \in \mathbf{Q},\ x \leqq a\}, \quad d = \inf\{x\colon x \in \mathbf{Q},\ x \geqq b\}.$$

Az előbbiek szerint itt nem-üres, felülről, ill. alulról korlátos halmazokról van szó, úgyhogy c és d létezik, nyilván $c \leqq a < b \leqq d$, és a (c, d) intervallumban sincs $\mathbf{Q}$-nak eleme. Minthogy $d - c > 0$, van olyan $p \in \mathbf{Q}$, hogy

$$c - (d - c) < p \leqq a,$$

s akkor $p \leqq c$ is áll, úgyhogy

$$2c - d < p \leqq c.$$

Van olyan $q \in \mathbf{Q}$ is, hogy

$$b \leqq q < d + (d - c),$$

s akkor $d \leqq q$ is teljesül, úgyhogy

$$d \leqq q < 2d - c.$$

Ekkor azonban $\frac{p+q}{2} \in \mathbf{Q}$, és $\quad \frac{(2c-d)+d}{2} = c < \frac{p+q}{2} < d = \frac{(2d-c)+c}{2}$.

Ez ellentmondás. ▮

Az $x \in \mathbf{R}$ szám **abszolút értékén** értjük, és az $|x|$ szimbólummal jelöljük, az x és $-x$ számok közül a nagyobbat. Ha $x_1, \ldots, x_n \in \mathbf{R}$, akkor az x_i számok közül a legnagyobbat, ill. a legkisebbet

$$\max(x_1, \ldots, x_n), \text{ ill. } \min(x_1, \ldots, x_n)$$

jelöli. Eszerint $|x| = \max(x, -x)$.

1.1.f. Számsorozatok. Számsorozatról beszélünk, ha minden n természetes számhoz valamilyen utasítással hozzárendelünk egy a_n valós számot. Az így keletkező számsorozatot röviden (a_n)-nel jelöljük; az a_n számok a sorozat **tag**jai.

Az (a_n) számsorozat **határértéke** vagy **limesze** az $a \in \mathbf{R}$ szám, ha minden $\varepsilon > 0$ számhoz található olyan $n_0 \in \mathbf{N}$ index, hogy $n \geqq n_0$ esetén $|a_n - a| < \varepsilon$. Ilyenkor a $\lim a_n = a$ vagy $a_n \to a$ jelölést használjuk, és azt is mondjuk, hogy az (a_n) sorozat a-hoz **tart** vagy **konvergál.** Az (a_n) sorozatot **konvergens**nek mondjuk, ha van $a \in \mathbf{R}$ határértéke.

Ismeretesek a számsorozatok határértékének következő alapvető tulajdonságai:

(1.1.12) *Ha* $a_n \to a$, $b_n \to b$, *akkor*

(a) $a_n + b_n \to a + b$;

(b) $a_n b_n \to ab$;

(c) *ha még* $b_n \neq 0$ *minden n-re, továbbá* $b \neq 0$, *akkor* $\dfrac{a_n}{b_n} \to \dfrac{a}{b}$;

(d) *ha még* $a_n \leqq b_n$ *minden n-re, akkor* $a \leqq b$. ▌

Ha (k_n) olyan sorozat, amelynek tagjai természetes számok, mégpedig $n < m$ esetén $k_n < k_m$, (a_n) pedig tetszőleges számsorozat, akkor (a_{k_n}) is számsorozat. Az így keletkező számsorozatot az (a_n) számsorozat **részsorozat**ának mondjuk. Ezzel kapcsolatosan a következő tételekre emlékeztetünk:

(1.1.13) *Ha* $a_n \to a$, *és* (a_{k_n}) *az* (a_n) *sorozatnak részsorozata, akkor* $a_{k_n} \to a$. ▌

(1.1.14) **Bolzano–Weierstrass-féle tétel.** *Minden korlátos számsorozatnak van konvergens részsorozata.* ▌

Az utóbbihoz megjegyezzük, hogy az (a_n) **számsorozat**ot akkor mondjuk **korlátos**nak, ha a tagjaiból alkotott $\{a_n\colon n \in \mathbf{N}\}$ számhalmaz korlátos.

Ismeretes továbbá a következő

(1.1.15) **Cauchy-féle konvergencia-kritérium.** *Az* (a_n) *számsorozat pontosan akkor konvergens, ha minden* $\varepsilon > 0$*-hoz található olyan* $n_0 \in \mathbf{N}$, *hogy* $n, m \geqq n_0$ *esetén* $|a_n - a_m| < \varepsilon$.

1.1.g. Megszámlálható halmazok. A számsorozat fogalmának általánosításaképpen, ha A tetszőleges nem-üres halmaz, **A-beli sorozat**on olyan hozzárendelést értünk, amely minden $n \in \mathbf{N}$ számhoz hozzárendel egy $a_n \in A$ elemet. Az (a_n) jelölést, a sorozat tagja elnevezést és a részsorozat fogalmát erre az esetre is szóról szóra átvihetjük.

Legyen $m \in \mathbf{N}$ esetén

$$N_m = \{n\colon n \in \mathbf{N},\ n \leqq m\}.$$

A-beli **m-tagú sorozat**on értjük az olyan hozzárendelést, amely az $n \in N_m$ számokhoz rendel $a_n \in A$ elemeket; az ilyennek jele $(a_1, \dots, a_m)$. Az A-beli összes m-tagú ($m \in \mathbf{N}$ tetszőleges) sorozatok közös neve A-beli **véges sorozat.**

Az A halmazt **véges**nek mondjuk, ha $A = \emptyset$, vagy pedig megadható olyan véges sorozat, amelynek tagjai éppen A-nak elemei, azaz amelyre (ha a sorozat m-tagú)

$$A = \{a_n\colon n \in N_m\}.$$

A nem-véges halmazokat **végtelen**nek mondjuk. A **megszámlálható,** ha $A = \emptyset$, vagy pedig megadható olyan sorozat, amelyre

$$A = \{a_n\colon n \in \mathbf{N}\}.$$

(1.1.16) *Minden véges halmaz megszámlálható.*

Bizonyítás. Ha $A = \{a_n\colon n \in N_m\}$, legyen $b_n = a_n$, ha $n \leqq m$, és $b_n = a_1$, ha $n > m$. Ekkor $A = \{b_n\colon n \in \mathbf{N}\}$. ▌

A megszámlálható, de nem véges halmazokat **megszámlálhatóan végtelen** halmazoknak mondjuk. Ilyenre példa maga N:

(1.1.17) *Az* N *halmaz megszámlálhatóan végtelen.*

Bizonyítás. N megszámlálható, mert $a_n = n$ választással $\mathrm{N} = \{a_n: n \in \mathrm{N}\}$. Ha $\mathrm{N} = \{b_n: n \in N_m\}$ volna valamilyen $m \in \mathrm{N}$ mellett, akkor legyen $c_1 = b_1$, c_2 a c_1 és b_2 számok közül a nagyobbik, c_3 a c_2 és b_3 számok közül a nagyobbik, és így tovább. Világos, hogy $n \in N_m$ esetén $b_n \leqq c_m$, úgyhogy $c_m + 1 \in \mathrm{N}$ nem fordul elő a $(b_1, \dots, b_m)$ sorozat tagjai között. ∎

(1.1.18) *Véges halmaznak minden részhalmaza is véges.*

Bizonyítás. Ha $A = \{a_n: n \in N_m\}$, $B \subset A$, és $B \neq \emptyset$, akkor legyen $n_0 \in N_m$ olyan, hogy $a_{n_0} \in B$, és értelmezzük b_n-t így:

$$b_n = \begin{cases} a_n, & \text{ha } a_n \in B, \\ a_{n_0}, & \text{ha } a_n \notin B. \end{cases}$$

Ekkor $B = \{b_n: n \in N_m\}$. ∎

Ugyanígy igazolható:

(1.1.19) *Megszámlálható halmaznak minden részhalmaza is megszámlálható.* ∎

(1.1.20) *Ha A_n véges halmaz minden $n \in N_m$-re, akkor $\bigcup_1^m A_n$ is véges.*

Bizonyítás. Feltehető, hogy $A_n \neq \emptyset$ minden $n \in N_m$-re, mert ha legalább egy $A_{n_0} \neq \emptyset$, akkor ezt tehetjük az üres A_n-ek helyébe, amivel $\bigcup_1^m A_n$ nem változik, ha pedig minden $A_n = \emptyset$, akkor az állítás triviális.

Legyen $A_n = \{a_{ni}: i \in N_{p_n}\}$, $q = \sum_{n=1}^{m} p_n$. Ha a $b_1, \dots, b_{p_1}$ elemek sorban az $a_{11}, \dots, a_{1p_1}$ elemekkel, azután $b_{p_1+1}, \dots, b_{p_1+p_2}$ rendre az $a_{21}, \dots, a_{2p_2}$ elemekkel, és így tovább, végül a $b_{p_1+\dots+p_{m-1}+1}, \dots, b_{p_1+p_2+\dots+p_{m-1}+p_m}$ elemek az $a_{m1}, \dots, a_{mp_m}$ elemekkel azonosak, akkor nyilván

$$\bigcup_1^m A_n = \{b_k: k \in N_q\}. \blacksquare$$

Ugyanígy igazolható:

(1.1.21) *Ha A_n véges halmaz minden $n \in \mathrm{N}$-re, akkor $\bigcup_1^\infty A_n$ megszámlálható.* ∎

(1.1.22) *Ha A_n megszámlálható minden $n \in \mathrm{N}$-re, akkor $\bigcup_1^\infty A_n$ is megszámlálható.*

Bizonyítás. Ismét feltehető, hogy $A_n \neq \emptyset$ minden $n \in \mathrm{N}$-re.

Legyen $A_n = \{a_{ni}: i \in \mathrm{N}\}$, továbbá

$$B_p = \{a_{ni}: n \in \mathrm{N},\ i \in \mathrm{N},\ n + i = p\ (p = 2, 3, \dots)\}.$$

Ekkor B_p nyilván véges, ugyanis a $b_k = a_{k,p-k}$ jelöléssel

$$B_p = \{b_k: k \in N_{p-1}\},$$

és

$$\bigcup_1^\infty A_n = \bigcup_2^\infty B_p$$

adja az állítást. ∎

Ebből következik:

(1.1.23) *Ha $m \in \mathbf{N}$, és A_n megszámlálható minden $n \in N_m$-re, akkor $\bigcup_1^m A_n$ is megszámlálható.*

Bizonyítás. Legyen $n \in \mathbf{N}$, $n \geqq m+1$ esetén $A_n = A_1$; ekkor

$$\bigcup_1^m A_n = \bigcup_1^\infty A_n. \ \blacksquare$$

(1.1.24) *A $\mathbf{Q}$ halmaz megszámlálható.*

Bizonyítás. $\mathbf{Q} = \bigcup_1^\infty Q_n$, ahol

$$Q_n = \left\{\frac{m}{n}:\ m \in \mathbf{N}\right\} \cup \{0\} \cup \left\{-\frac{m}{n}:\ m \in \mathbf{N}\right\}.$$

(1.1.23) szerint Q_n és (1.1.22) értelmében $\mathbf{Q}$ is megszámlálható. ∎

(1.1.25) *Ha $A \neq \emptyset$ megszámlálható halmaz, akkor az A-beli véges sorozatok halmaza megszámlálható.*

Bizonyítás. Legyen S_m ($m \in \mathbf{N}$) az A-beli m-tagú sorozatok halmaza, továbbá $A = \{a_n: n \in \mathbf{N}\}$.

Ha b_n jelöli azt az egytagú sorozatot, amelynek egyetlen tagja a_n, akkor $S_1 = \{b_n: n \in \mathbf{N}\}$, úgyhogy S_1 megszámlálható. Minthogy egy $(m+1)$-tagú sorozat úgy áll elő, hogy egy m-tagú sorozathoz $(m+1)$-edik tagként A valamely elemét hozzáfűzzük, s így S_m mindegyik eleméből S_{m+1}-nek megszámlálható részhalmaza áll elő, abból, hogy S_m megszámlálható, (1.1.22) alapján következik, hogy S_{m+1} is megszámlálható. Végül ismét (1.1.22) miatt $\bigcup_1^\infty S_m$ is megszámlálható. ∎

Nem-megszámlálható halmazra fontos példa a következő:

(1.1.26) *Ha $a, b \in \mathbf{R}$, $a < b$, akkor az (a, b) intervallum nem-megszámlálható.*

Bizonyítás. Jegyezzük meg először is, hogy ha $c < d$, $x \in \mathbf{R}$ pedig tetszőleges, akkor van olyan $[c', d'] \subset (c, d)$ intervallum, hogy $c' < d'$, $x \notin [c', d']$. Valóban, $x \notin (c, d)$ esetén $c' = \frac{2c+d}{3}$, $d' = \frac{c+2d}{3}$, $x \in (c, d)$ esetén $c' = \frac{2x+d}{3}$, $d' = \frac{x+2d}{3}$ megfelel.

Tegyük most fel, hogy $(a, b) = \{x_n: n \in \mathbf{N}\}$. Legyen $[a_1, b_1] \subset (a, b)$ úgy megválasztva, hogy $a_1 < b_1$, és $x_1 \notin [a_1, b_1]$, azután $[a_2, b_2] \subset (a_1, b_1)$ úgy, hogy $a_2 < b_2$, $x_2 \notin [a_2, b_2]$, és így tovább. Nyilván $a < a_1 < a_2 < \dots$, $b > b_1 > b_2 > \dots$, és minden n-re $a_n < b_n$. Ha most

$$x = \sup\{a_n: n \in \mathbf{N}\},$$

akkor $a_n \leqq x$ minden n-re, s minthogy minden n-re és m-re $a_n < b_m$ is áll, $x \leqq b_m$ minden m-re, azaz $x \in [a_n, b_n]$ $(n \in \mathbf{N})$. Ennélfogva $x \in (a, b)$, és $x \neq x_n$ $(n \in \mathbf{N})$. Ez ellentmondás. ▮

1.1.h. Jólrendezés. Legyen A rendezett halmaz a $<$ rendezési relációval. Ezen azt kell érteni, hogy a $<$ reláció ($\mathbf{R}$ helyett A-val) eleget tesz az (1.1.8) (a) és (b) kikötéseknek. A-t **jólrendezett**nek mondjuk, ha minden $B \subset A$ nem-üres részhalmazának van legkisebb eleme (azaz olyan $b \in B$ elem, hogy $x \in B$ esetén $b \leqq x$). Ilyen például az $\mathbf{N}$ halmaz az $\mathbf{R}$-en értelmezett $<$ rendezéssel, hiszen ha $\emptyset \neq B \subset \mathbf{N}$, mondjuk $a \in B$, akkor az $N_a \cap B$ halmaz véges, így nyilván van legkisebb eleme, s ez egyben B-nek is legkisebb eleme.

Szükségünk lesz a következő, súlyos tételre, amelyet bizonyítás nélkül közlünk:

(1.1.27) **Zermelo tétele.** *Minden halmazon értelmezhető olyan rendezési reláció, amely a halmazt jólrendezetté teszi.* ▮

1.1.i. Kuratowski–Zorn-féle lemma. Egy másik fontos halmazelméleti segédtétel megfogalmazásához vezessük be a következő elnevezéseket: legyen $\mathfrak{A}$ egy halmazrendszer, és tegyük fel, hogy ha $\mathfrak{B} \subset \mathfrak{A}$ a tartalmazásra nézve rendezett (vagyis ha $B_1, B_2 \in \mathfrak{B}$ esetén a $B_1 \subset B_2$ és $B_1 \supset B_2$ relációk egyike teljesül), akkor a $\mathfrak{B}$-beli halmazok egyesítése is $\mathfrak{A}$-hoz tartozik. Az ilyen tulajdonságú $\mathfrak{A}$ halmazrendszert **induktív**nak mondjuk. Az $\mathfrak{A}$ halmazrendszer $A \in \mathfrak{A}$ halmazát továbbá $\mathfrak{A}$-ban **maximális**nak mondjuk, ha $A' \in \mathfrak{A}$, $A' \supset A$ esetén $A' = A$.

Érvényes mármost a nevezetes

(1.1.28) **Kuratowski–Zorn-féle lemma.** *Ha $\mathfrak{A}$ induktív halmazrendszer, és $A_0 \in \mathfrak{A}$, akkor létezik olyan $\mathfrak{A}$-ban maximális $A \in \mathfrak{A}$ halmaz, amelyre $A_0 \subset A$.* ▮

(1.1.27) és (1.1.28) bizonyítása (az utóbbié valamivel élesebb alakban) megtalálható például a következő helyen: RÉDEI LÁSZLÓ: Algebra, I. kötet (Budapest, 1954), 16., ill. 13. tétel.

1.1.j. Gyakorlatok. 1. Igazoljuk, hogy (1.1.4) mintájára

$$\left(\bigcap_{i\in I} A_i\right) \cup \left(\bigcap_{j\in J} B_j\right) = \bigcap \{A_i \cup B_j:\ i \in I,\ j \in J\}.$$

2. Mutassuk meg, hogy $A \subset B$ esetén

$$A - C = A \cap (B - C).$$

3. Bizonyítandó, hogy

$$\bigcup_{i\in I} A_i - \bigcup_{i\in I} B_i \subset \bigcup_{i\in I} (A_i - B_i).$$

4. Legyen $\preccurlyeq$ reflexív és tranzitív reláció egy A halmaz elemei között (azaz $x, y, z \in A$ mellett $x \preccurlyeq x$, és $x \preccurlyeq y$, $y \preccurlyeq z$ esetén $x \preccurlyeq z$), és álljon $x \sim y$ pontosan akkor, ha $x \preccurlyeq y$ és $y \preccurlyeq x$. Mutassuk meg, hogy $\sim$ ekvivalencia-reláció.

5. Legyen $\emptyset \neq A_i \subset \mathbf{R}$ $(i \in I)$, $A = \bigcup_{i\in I} A_i$ felülről korlátos. Mutassuk meg, hogy

$$\sup A_i = \sup \{\sup A_i:\ i \in I\}.$$

6. Legyen $\emptyset \neq A \subset \mathbf{R}$ korlátos, $c \in \mathbf{R}$, $B = \{c + a: a \in A\}$. Igazoljuk, hogy

$$\sup B = c + \sup A, \ \inf B = c + \inf A.$$

7. Legyen $\emptyset \neq A \subset \mathbf{R}$ korlátos, $c \in \mathbf{R}$, $B = \{ca: \ a \in A\}$. Bizonyítandó

$$\sup B = c \sup A, \ \inf B = c \inf A \ (c \geqq 0),$$
$$\sup B = c \inf A, \ \inf B = c \sup A \ (c \leqq 0).$$

8. Mutassuk meg, hogy $\mathbf{R}$-en a racionális végpontú intervallumok halmaza megszámlálható.

9. Az $x \in \mathbf{R}$ számot algebrai számnak mondjuk, ha van olyan $n \in \mathbf{N}$ és olyan $a_0, \dots, a_n$ egész szám, hogy

$$(*) \qquad a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n = 0 \qquad (a_n \neq 0).$$

Bizonyítandó, hogy az összes valós algebrai számok halmaza megszámlálható. [Adott n és $a_0, \dots, a_n$ esetén (*)-nak legfeljebb n különböző x tehet eleget.]

10. Igazoljuk, hogy egy megszámlálható halmaz véges részhalmazainak a rendszere megszámlálható.

11. Igazoljuk, hogy ha $a, b \in \mathbf{R}$, $a < b$, akkor az (a, b)-be eső irracionális számok halmaza nem-megszámlálható.

12. Mutassuk meg, hogy az olyan (a_n) számsorozatok, amelyekre $a_n = 0$ vagy $a_n = 1$ $(n \in \mathbf{N})$, nem-megszámlálható halmazt alkotnak.

[$0 \leqq x \leqq 1$ esetén van a kérdéses sorozatok között olyan, hogy $x = \sum_1^\infty 2^{-n}a_n$.]

13. Legyen $\mathfrak{P}$ az A halmaz összes részhalmazainak rendszere. Bizonyítandó, hogy

(a) Ha A véges, akkor $\mathfrak{P}$ is véges;

(b) Ha $A = \mathbf{N}$, akkor $\mathfrak{P}$ nem-megszámlálható.

[$P \subset \mathbf{N}$ esetén legyen $a_n = 1$ vagy 0 aszerint, hogy $n \in P$ vagy $n \notin P$.]

14. Legyen A az (x, y) párok halmaza, ahol $x, y \in \mathbf{R}$, és állapodjunk meg abban, hogy $(x_1, y_1) \in A$, $(x_2, y_2) \in A$ esetén $(x_1, y_1) < (x_2, y_2)$, ha vagy $x_1 < x_2$, vagy $x_1 = x_2$ és $y_1 < y_2$. Mutassuk meg, hogy így A rendezett halmazzá válik.

15. Legyen $A \subset \mathbf{R}$ az $\mathbf{R}$-beli $<$ relációval ellátva, és állapítsuk meg A alábbi választásai mellett, hogy A jólrendezett-e:

(a) $A = \mathbf{Q}$;

(b) $A = \mathbf{I}$;

(c) A az egész számok halmaza;

(d) $A = \mathbf{N} \cup \left\{-\frac{1}{n} : n \in \mathbf{N}\right\}$;

(e) $A = \left\{m - \frac{1}{n+1} : m, n \in \mathbf{N}\right\}$.

16. Legyen $\mathfrak{A}$ tetszőleges, $\mathfrak{B} \subset \mathfrak{A}$ diszjunkt halmazrendszer. Mutassuk meg, hogy van olyan diszjunkt $\mathfrak{M}$ rendszer, amelyre $\mathfrak{B} \subset \mathfrak{M} \subset \mathfrak{A}$, és ha $\mathfrak{M} \subset \mathfrak{C} \subset \mathfrak{A}$, $\mathfrak{C}$ diszjunkt, akkor $\mathfrak{C} = \mathfrak{M}$.

17. Mutassuk meg, hogy van olyan $H \subset \mathbf{R}$ halmaz, hogy minden $x \in \mathbf{R}$ pontosan egyféleképpen állítható elő $x = \sum_1^n q_i h_i$ alakban, ahol $n \in \mathbf{N}$, $q_i \in \mathbf{Q}$, $h_i \in H$ $(i = 1, \ldots, n)$; az előállítás egyértelműsége úgy értendő, hogy ha

$$\sum_1^n q_i h_i = \sum_1^{n'} q_j' h_j'$$

$(q_i, q_j' \in \mathbf{Q}, q_i \neq 0 \neq q_j', h_i, h_j' \in H, i_1 \neq i_2$ esetén $h_{i_1} \neq h_{i_2}, j_1 \neq j_2$ esetén $h_{j_1}' \neq h_{j_2}')$, akkor $n = n'$, a h_i-k a sorrendtől eltekintve megegyeznek a h_j'-kkel, és $h_i = h_j'$ esetén $q_i = q_j'$.

[Tekintsük $\mathbf{R}$-nek olyan F részhalmazait, hogy $n \in \mathbf{N}$, $f_1, \ldots, f_n \in F$, $f_{i_1} \neq f_{i_2}$ $(i_1 \neq i_2)$, $q_i \in \mathbf{Q}$, $\sum_1^n q_i f_i = 0$ esetén $q_1 = \ldots = q_n = 0$, és legyen H ezek között maximális.]

18. Készítsünk olyan nem-megszámlálható, jólrendezett W halmazt, hogy $x \in W$ esetén a $W(x) = \{y : y < x\}$ halmaz mindig megszámlálható legyen.

[Egy nem-megszámlálható jólrendezett halmazban válasszuk ki a legkisebb elemet, amelynél nem-megszámlálhatóan sok kisebb elem van.]

1.2. EUKLIDESZI TEREK

1.2.a. Távolság. Ismeretes, hogy egy derékszögű koordináta-rendszer bevezetésével a sík pontjai kölcsönösen egyértelműen jellemezhetők valós számokból álló (x_1, x_2) számpárokkal, a tér pontjai pedig (x_1, x_2, x_3) számhármasokkal. Ekkor az (x_1, x_2) és (y_1, y_2) síkbeli pontok távolságát a

$$\sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2},$$

az (x_1, x_2, x_3) és (y_1, y_2, y_3) térbeli pontok távolságát pedig a

$$\sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 + (x_3 - y_3)^2}$$

kifejezés adja meg.

Jól ismert az is, hogy egyes célokra, például többváltozós függvények független változóinak szemléltetése céljából, hasznos a valós számokból alkotott m-tagú $(x_1, \ldots, x_m)$ sorozatokat is egy „tér" pontjainak tekinteni és két ilyen sorozat „távolságát" az előbbiek analógiájára a

$$\sqrt{(x_1 - y_1)^2 + \ldots + (x_m - y_m)^2}$$

képlettel értelmezni.

Állapodjunk meg ezért abban, hogy m-**dimenziós euklideszi tér**en értjük és $\mathbf{R}^m$-mel jelöljük a valós számokból alkotott m-tagú $(x_1, \ldots, x_m)$ sorozatok halmazát. Két ilyen sorozatot csak akkor tekintünk egyenlőnek, ha tagjaik sorrendben is megegyeznek, vagyis $(x_1, \ldots, x_m) = (y_1, \ldots, y_m)$ pontosan akkor áll, ha

$x_i = y_i$ $(i = 1, \ldots, m)$. Magukat az m-tagú sorozatokat, azaz $\mathbf{R}^m$ elemeit, az m-dimenziós euklideszi tér **pont**jainak nevezzük, az $x_1, \ldots, x_m$ számokat pedig az $x = (x_1, \ldots, x_m)$ pont **koordinátái**nak. Az $x = (x_1, \ldots, x_m)$ és $y = (y_1, \ldots, y_m)$ pont **távolsága** definíció szerint

$$\rho(x, y) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + \ldots + (x_m - y_m)^2}. \tag{1.2.1}$$

Megállapodásaink értelmében a sík a kétdimenziós $\mathbf{R}^2$ térrel, a közönséges tér a háromdimenziós $\mathbf{R}^3$ térrel azonosítható. Definícióink még az $m = 1$ esetben is értelmesek, s ha az egytagú (x) sorozatot az x valós számmal azonosítjuk, az egydimenziós $\mathbf{R}^1$ tér a valós számok $\mathbf{R}$ halmazával, vagyis a számegyenessel azonosítható; ez összhangban van azzal is, hogy az $m = 1$ esetben

$$\rho(x, y) = \sqrt{(x-y)^2} = |x - y|$$

megadja a számegyenes x és y abszcisszájú pontjai közötti távolságot.

Elnevezéseink jogosultságát alátámasztja az a tény, hogy az (1.2.1)-gyel értelmezett távolság több olyan lényeges tulajdonsággal is rendelkezik, amelyek a sík, ill. a tér pontjai közötti távolság fontos tulajdonságait általánosítják. Ezt fejezi ki a következő tétel:

(1.2.2) *Tetszőleges $x, y, z \in \mathbf{R}^m$ pontokra*

(a) $0 \leqq \rho(x, y) < +\infty$, $\rho(x, x) = 0$;

(b) $\rho(x, y) = \rho(y, x)$;

(c) $\rho(x, z) \leqq \rho(x, y) + \rho(y, z)$;

(d) $\rho(x, y) = 0$ *esetén* $x = y$.

Bizonyítás. (a), (b) és (d) (1.2.1)-ből azonnal kiolvasható. (c) igazolására legyen

$$x = (x_1, \ldots, x_m),\ y = (y_1, \ldots, y_m),\ z = (z_1, \ldots, z_m).$$

A bizonyítandó

$$\sqrt{\sum_1^m (x_i - z_i)^2} \leqq \sqrt{\sum_1^m (x_i - y_i)^2} + \sqrt{\sum_1^m (y_i - z_i)^2}$$

egyenlőtlenség az

$$a_i = x_i - y_i,\ b_i = y_i - z_i$$

jelölések bevezetésével

$$\sqrt{\sum_1^m (a_i + b_i)^2} \leqq \sqrt{\sum_1^m a_i^2} + \sqrt{\sum_1^m b_i^2}$$

alakban írható, s ehelyett nyilván elég igazolni a négyzetre emeléssel adódó

$$\sum_1^m (a_i + b_i)^2 = \sum_1^m a_i^2 + 2\sum_1^m a_i b_i + \sum_1^m b_i^2 \leqq$$

$$\leqq \sum_1^m a_i^2 + 2\sqrt{\sum_1^m a_i^2}\sqrt{\sum_1^m b_i^2} + \sum_1^m b_i^2$$

egyenlőtlenséget. Az utóbbi a

(1.2.3) $$\sum_1^m a_i b_i \leqq \sqrt{\sum_1^m a_i^2}\sqrt{\sum_1^m b_i^2}$$

ún. **Cauchy-féle egyenlőtlenség**gel egyenértékű.

(1.2.3) belátása végett tekintsük a

$$P(u) = \sum_1^m (a_i u + b_i)^2 = u^2 \sum_1^m a_i^2 + 2u \sum_1^m a_i b_i + \sum_1^m b_i^2 \geqq 0$$

másodfokú polinomot. Ennek diszkriminánsa $P(u) \geqq 0$ miatt nem lehet pozitív, úgyhogy

$$4\left(\sum_1^m a_i b_i\right)^2 - 4\left(\sum_1^m a_i^2\right)\left(\sum_1^m b_i^2\right) \leqq 0.$$

Ebből (1.2.3) rögtön adódik. ▌

A (c) egyenlőtlenség abban az esetben, amikor $m = 2$ vagy 3 és x, y, z egy háromszög csúcsai, a háromszög oldalai közötti nevezetes egyenlőtlenségbe megy át; ennek alapján **háromszög-egyenlőtlenség**nek nevezik.

Figyeljük meg, hogy a következő definíciók valamennyien az (1.2.1) távolság fogalmán alapulnak, és hogy a rájuk épülő tételek jelentékeny részében a távolságnak csupán az (1.2.2)-ben felsorolt tulajdonságai vannak felhasználva, sőt legtöbbjükben még (1.2.2) (d)-re sincsen szükség. Az utóbbiakat egy csillaggal, azokat pedig, amelyekben az (1.2.2)-beli tulajdonságokon kívül másra nem támaszkodunk, de (1.2.2) (d)-re igen, két csillaggal jelöljük meg.

1.2.b. Pontsorozat konvergenciája. Az (a_n) valós számsorozatról akkor mondtuk, hogy az a véges határértékhez tart, ha minden $\varepsilon > 0$-hoz van olyan n_0 index hogy $n \geqq n_0$ esetén $|a_n - a| < \varepsilon$. Ezt szemléletesebben úgy is kifejezhetjük, hogy az $|x - a| < \varepsilon$ egyenlőtlenségnek eleget tevő x-ek halmazát, vagyis az $(a - \varepsilon, a + \varepsilon)$ intervallumot, az a pont ε sugarú környezetének nevezve a számegyenesen, azt kívánjuk, hogy az a pont minden környezete tartalmazza alkalmas küszöbindextől kezdve a sorozat összes tagjait.

Tekintsük ennek megfelelően $\mathbf{R}^m$-ben adott $a \in \mathbf{R}^m$ ponthoz a tőle $\varepsilon > 0$-nál kisebb távolságra levő $x \in \mathbf{R}^m$ pontok

$$S(a, \varepsilon) = \{x\colon \rho(x, a) < \varepsilon\}$$

halmazát. Az $m = 2$ esetben ez az a középpontú, ε sugarú körlemezzel (a határoló körvonal nélkül), az $m = 3$ esetben az a középpontú, ε sugarú gömbbel (a határoló gömbfelület nélkül) azonos. Ennek alapján állapodjunk meg abban, hogy az $S(a, \varepsilon) \subset \mathbf{R}^m$ halmazt **a középpontú, ε sugarú gömb**nek, vagy másképp az $a \in \mathbf{R}^m$ pont **ε sugarú (gömbi) környezeté**nek mondjuk.

Ezek után kézenfekvő az $\mathbf{R}^m$ tér pontjaiból álló (x_n) pontsorozat konvergenciájának következő értelmezése: azt mondjuk, hogy az (x_n) **pontsorozat** az y **limeszpont**hoz **tart** (vagy **konvergál**), ha y minden $S(y, \varepsilon)$ környezetéhez megadható olyan n_0 index, hogy $n \geqq n_0$ esetén $x_n \in S(y, \varepsilon)$. Ez tehát más szavakkal azt jelenti, hogy minden $\varepsilon > 0$-hoz van olyan n_0, hogy $n \geqq n_0$ esetén $\rho(x_n, y) < \varepsilon$; ez viszont a számsorozat határértékének fogalmára támaszkodva röviden azt jelenti, hogy

$$\rho(x_n, y) \to 0.$$

Azt, hogy az $\mathbf{R}^m$-beli (x_n) pontsorozat az $y \in \mathbf{R}^m$ limeszponthoz tart, az

$$x_n \to y \text{ vagy } \lim x_n = y$$

szimbólummal fejezzük ki.

Abból, hogy a pontsorozat limeszének előbbi értelmezése a számsorozat határértékére vezethető vissza, hiszen a $(\rho(x_n, y))$ számsorozat 0-hoz tartását kívánja, a számsorozatok alapvető tulajdonságai alapján könnyen következik, hogy érvényesek a következő tételek:

(1.2.4)* *Az $x, x, x, \ldots$ pontsorozat x-hez tart.* ∎

(1.2.5)* *Ha $x_n \to y$, akkor (x_n) minden részsorozata is y-hoz tart.* ∎

(1.2.6)* *Ha $x_n \to z$ és $y_n \to z$, akkor az $x_1, y_1, x_2, y_2, \ldots, x_n, y_n, \ldots$ sorozat is z-hez tart.* ∎

(1.2.7)* *Véges számú tag beiktatása vagy módosítása a konvergenciát nem befolyásolja.* ∎

(1.2.8)** *Egy pontsorozatnak legfeljebb egy limeszpontja lehet.*

Bizonyítás. Ha $x_n \to y$ és $x_n \to z$, akkor a háromszög-egyenlőtlenség miatt

$$0 \leqq \rho(y, z) \leqq \rho(y, x_n) + \rho(x_n, z) = \rho(x_n, y) + \rho(x_n, z) \to 0,$$

felhasználva még (1.2.2) (a)-t és (b)-t is. Így $\rho(y, z) = 0$, és (1.2.2) (d) folytán $y = z$. ∎

A következő tétel azt mondja ki, hogy a pontsorozat limeszpontjának meghatározása „koordinátánkénti határátmenettel" végezhető:

(1.2.9) *$x_n \to y \in \mathbf{R}^m$ pontosan akkor áll, ha az $x_n = (x_{n1}, \ldots, x_{nm})$, $y = (y_1, \ldots, y_m)$ jelöléssel*

$$\lim_{n \to \infty} x_{ni} = y_i \qquad (i = 1, \ldots, m).$$

Bizonyítás. (1.2.1)-ből könnyen kiolvasható, hogy $a = (a_1, \ldots, a_m)$, $b = (b_1, \ldots, b_m)$ esetén

$$|a_j - b_j| \leqq \rho(a, b) \leqq \sum_1^m |a_i - b_i| \qquad (j = 1, \ldots, m), \tag{1.2.10}$$

hiszen

$$(a_j - b_j)^2 \leqq \sum_1^m (a_i - b_i)^2 \leqq \sum_1^m (a_i - b_i)^2 + 2 \sum_{i<j} |a_i - b_i|\,|a_j - b_j|.$$

Eszerint

$$0 \leqq |x_{nj} - y_j| \leqq \rho(x_n, y) \leqq \sum_{j=1}^m |x_{ni} - y_i| \qquad (j = 1, \ldots, m),$$

amiből az állítás már látható. ∎

A számsorozatok esetében használt elnevezést átvéve az $\mathbf{R}^m$-beli (x_n) pontsorozatot **konvergens**nek mondjuk, ha van limeszpontja. A számsorozatokra vonatkozó Cauchy-féle feltételhez egészen hasonló feltétel adható itt is a konvergenciára. Ennek rövid megfogalmazása érdekében nevezzük az $\mathbf{R}^m$-beli (x_n) pontsorozatot **Cauchy-sorozat**nak, ha bármely $\varepsilon > 0$ számhoz található olyan n_0 index, hogy $n, m \geqq n_0$ esetén $\rho(x_n, x_m) < \varepsilon$.

(1.2.11)* *Ha az* (x_n) *sorozat konvergens, akkor Cauchy-sorozat.*

Bizonyítás. Ha $x_n \to y$, akkor $\varepsilon > 0$-hoz van olyan n_0, hogy $n \geqq n_0$ esetén $\rho(x_n, y) < \frac{\varepsilon}{2}$. Ekkor $n, m \geqq n_0$ esetén a háromszög-egyenlőtlenség folytán, (1.2.2) (b)-t is figyelembe véve,

$$\rho(x_n, x_m) \leqq \rho(x_n, y) + \rho(y, x_m) = \rho(x_n, y) + \rho(x_m, y) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon. \blacksquare$$

(1.2.12) *Ha* (x_n) $\mathbf{R}^m$*-beli Cauchy-sorozat, akkor konvergens.*

Bizonyítás. Adott $\varepsilon > 0$-hoz legyen n_0 olyan index, hogy $n, m \geqq n_0$ esetén $\rho(x_n, x_m) < \varepsilon$. Ekkor az

$$x_n = (x_{n1}, \ldots, x_{nm})$$

jelöléssel (1.2.10) alapján

$$|x_{ni} - x_{mi}| \leqq \rho(x_n, x_m) < \varepsilon \ (n, m \geqq n_0,\ i = 1, \ldots, m).$$

Ez mutatja, hogy az (x_{ni}) $(i = 1, \ldots, m)$ koordinátasorozatok mindegyike eleget tesz a Cauchy-féle feltételnek, és így (1.1.15) folytán tart egy-egy y_i határértékhez:

$$\lim_{n\to\infty} x_{ni} = y_i \qquad (i = 1, \ldots, m).$$

Ebből (1.2.9) szerint az $y = (y_1, \ldots, y_m) \in \mathbf{R}^m$ pontra $x_n \to y$ következik. $\blacksquare$

Avégből, hogy a Bolzano—Weierstrass-féle kiválasztási tételt számsorozatokról pontsorozatokra vihessük át, mindenekelőtt a korlátos pontsorozat, s általánosabban a korlátos ponthalmaz fogalmát kell definiálnunk.

A $\emptyset \neq A \subset \mathbf{R}^m$ halmazt **korlátos**nak mondjuk, ha a

$$\{\rho(x, y) \colon x, y \in A\}$$

számhalmaz korlátos; ez esetben az utóbbi számhalmaz felső határát A **átmérő**jének nevezzük, és $\delta(A)$-val jelöljük:

$$\delta(A) = \sup \{\rho(x, y) \colon x, y \in A\}. \tag{1.2.13}$$

Külön megállapodunk abban, hogy az üres halmazt is korlátosnak tekintjük, és átmérőjét 0-nak vesszük:

$$\delta(\emptyset) = 0.$$

Rögtön látható, hogy a definíció az $m = 1$ esetben a szokásos értelemben korlátos számhalmazokat szolgáltatja, $\delta(A)$ pedig a kör vagy a gömb esetében az átmérő elemi geometriai jelentésével összhangban van.

A definícióból rögtön következik:

(1.2.14)* *Korlátos halmaz részhalmaza is korlátos, és* $A \subset B$ *esetén* $\delta(A) \leqq \delta(B)$. ∎

(1.2.15)* *Véges számú korlátos halmaz egyesítése is korlátos, és* $a \in A$, $b \in B$ *esetén*

$$\delta(A \cup B) \leqq \delta(A) + \delta(B) + \rho(a, b).$$

Bizonyítás. $x \in A$, $y \in B$ esetén a háromszög-egyenlőtlenség kétszeri alkalmazásával

$$\rho(x, y) \leqq \rho(x, a) + \rho(a, b) + \rho(b, y) \leqq \delta(A) + \rho(a, b) + \delta(B).$$ ∎

(1.2.16) $\emptyset \neq A \subset \mathbf{R}^m$ *pontosan akkor korlátos, ha pontjainak összes koordinátái korlátos számhalmazt alkotnak.*

Bizonyítás. Ha $a \in A$ rögzített, $x \in A$ tetszőleges, $a = (a_1, \ldots, a_m)$, $x = (x_1, \ldots, x_m)$, akkor (1.2.10) szerint

$$|x_i - a_i| \leqq \rho(x, a) \quad (i = 1, \ldots, m),$$

s így korlátos A esetén minden $x \in A$-ra és minden i-re $\rho(x, a) \leqq \delta(A)$ miatt

$$\min(a_1, \ldots, a_m) - \delta(A) \leqq x_i \leqq \max(a_1, \ldots, a_m) + \delta(A).$$

Ha viszont minden i-re és $x = (x_1, \ldots, x_m) \in A$-ra

$$c \leqq x_i \leqq d,$$

akkor $x, y \in A$ esetén (1.2.10) értelmében

$$\rho(x, y) \leqq m(d - c), \quad \delta(A) \leqq m(d - c).$$ ∎

Nevezzük mármost az $\mathbf{R}^m$-beli (x_n) **pontsorozat**ot **korlátos**nak, ha a tagjaiból alkotott

$$\{x_n : n \in \mathbf{N}\}$$

ponthalmaz korlátos. Ekkor érvényes a következő:

(1.2.17) **Bolzano–Weierstrass-féle tétel.** *Minden korlátos* $\mathbf{R}^m$*-beli* (x_n) *pontsorozatból kiválasztható konvergens részsorozat.*

Bizonyítás. (1.2.16) szerint az

$$x_n = (x_{n1}, \ldots, x_{nm})$$

pontok összes koordinátái korlátos számhalmazt alkotnak. Így a számsorozatokra vonatkozó Bolzano—Weierstrass-féle tétel szerint az első koordináták

$$x_{11}, x_{21}, x_{31}, \ldots$$

sorozatának van konvergens részsorozata, azaz van a természetes számoknak olyan szigorúan növekvő (n_k^1) $(k \in \mathbf{N})$ sorozata, hogy alkalmas $y_1 \in \mathbf{R}$-re

$$\lim_{k \to \infty} x_{n_k^1, 1} = y_1.$$

Ezután az ugyancsak korlátos $(x_{n_k^1,2})$ koordinátasorozatból választhatunk ki konvergens részsorozatot, vagyis megadhatjuk (n_k^1)-nek olyan (n_k^2) részsorozatát, hogy

$$\lim_{k\to\infty} x_{n_k^2,2} = y_2$$

legyen. Általában, ha az (n_k^i) $(k \in \mathbf{N})$ indexsorozat már ki van választva, legyen ennek (n_k^{i+1}) $(k \in \mathbf{N})$ olyan részsorozata, hogy

$$\lim_{k\to\infty} x_{n_k^{i+1},i+1} = y_{i+1}$$

teljesüljön. Végül az (n_k^m) $(k \in \mathbf{N})$ sorozat az (n_k) $(k \in \mathbf{N})$ sorozatok $(i = 1, \ldots, m)$ mindegyikének részsorozata lesz, úgyhogy

$$\lim_{k\to\infty} x_{n_k^m,i} = y_i \qquad (i = 1, \ldots, m).$$

Ez (1.2.9) szerint azt jelenti, hogy

$$\lim_{k\to\infty} x_{n_k^m} = y = (y_1, \ldots, y_m) \in \mathbf{R}^m. \blacksquare$$

1.2.c. Nyílt és zárt halmazok. A pontsorozat konvergenciájának értelmezésében felhasznált gömbi környezetek arra is módot adnak, hogy segítségükkel egy $x \in \mathbf{R}^m$ pontnak egy $A \subset \mathbf{R}$ ponthalmazhoz viszonyított helyzetét jellemezzük.

Azt mondjuk, hogy x **belső pontja** az A halmaznak, ha van x-nek olyan $S(x, \varepsilon)$ környezete, amely A-nak része: $S(x, \varepsilon) \subset A$. Azt mondjuk, hogy x **külső pontja** A-nak, ha van x-nek olyan $S(x, \varepsilon)$ környezete, amely A-t nem metszi: $S(x, \varepsilon) \cap A = \emptyset$. Végül x **határpontja** A-nak, ha x minden $S(x, \varepsilon)$ környezete metszi A-t, de egyik sem része A-nak:

$$S(x, \varepsilon) \cap A \neq \emptyset \neq S(x, \varepsilon) - A.$$

A definícióból rögtön kiolvasható:

(1.2.18)* *Bármely $A \subset \mathbf{R}^m$ halmazra és bármely $x \in \mathbf{R}^m$ pontra az alábbi lehetőségek közül pontosan egy teljesül:*

(a) *x belső pontja A-nak;*

(b) *x külső pontja A-nak;*

(c) *x határpontja A-nak.* $\blacksquare$

(1.2.19)* *Legyen $A \subset \mathbf{R}^m$, és $B = \mathbf{R}^m - A$ az A halmaz komplementuma. Ekkor*

(a) *A külső pontjai azonosak B belső pontjaival;*

(b) *A határpontjai azonosak B határpontjaival.* $\blacksquare$

Abból, hogy $x \in S(x, \varepsilon)$, következik:

(1.2.20)* *A belső pontjai A-hoz tartoznak, A külső pontjai viszont nem tartoznak A-hoz.* $\blacksquare$

A határpontokat illetően ilyen általános kijelentés nem fogalmazható meg. Világos például, hogy a számegyenesen a [0,1) (balról félig zárt) intervallum belső pontjai a $(0,1)$ nyílt intervallum pontjaival, külső pontjai pedig a $(-\infty, 0) \cup \cup (1, +\infty)$ halmaz pontjaival azonosak. Két határpontja, 0 és 1 közül az első hozzátartozik, a második viszont nem.

Különös figyelmet érdemelnek azok a halmazok, amelyek e tekintetben a két szélsőséges lehetőség egyikét valósítják meg. Így **nyíltnak** mondjuk az olyan halmazt $\mathbf{R}^m$-ben, amely egyetlen határpontját sem tartalmazza, **zártnak** az olyant, amely minden határpontját tartalmazza.

Elnevezéseink összhangban vannak a számegyenes nyílt és zárt intervallumainak szokásos elnevezésével, amennyiben $a, b \in \mathbf{R}$, $a < b$ esetén (a, b) nyílt, $[a, b]$ zárt ponthalmaza $\mathbf{R}$-nek. Valóban, nevezzük általánosabban $\mathbf{R}^m$-ben $(a_1, \ldots, a_m; b_1, \ldots, b_m)$ **nyílt téglának**, ill. $[a_1, \ldots, a_m; b_1, \ldots, b_m]$ **zárt téglának** adott $a_i, b_i \in \mathbf{R}$, $a_i < b_i$ $(i = 1, \ldots, m)$ mellett azon $x = (x_1, \ldots, x_m) \in \mathbf{R}^m$ pontok halmazát, amelyekre

$$a_i < x_i < b_i, \text{ ill. } a_i \leqq x_i \leqq b_i \quad (i = 1, \ldots, m).$$

A „tégla" elnevezés az $m = 3$ eset alapján kézenfekvő.

Ekkor érvényes:

(1.2.21) $\mathbf{R}^m$*-ben a nyílt téglák nyílt, a zárt téglák zárt ponthalmazok.*

Bizonyítás. Ha $a_i < x_i < b_i$ minden i-re és $\varepsilon > 0$ az $x_i - a_i$ és $b_i - x_i$ számok $(i = 1, \ldots, m)$ mindegyikénél kisebb, akkor az $x = (x_1, \ldots, x_m)$ pontra

$$S(x, \varepsilon) \subset (a_1, \ldots, a_m; b_1, \ldots, b_m),$$

hiszen $y = (y_1, \ldots, y_m) \in S(x, \varepsilon)$ esetén (1.2.10) folytán $a_i < y_i < b_i$ minden i-re. Eszerint $(a_1, \ldots, a_m; b_1, \ldots, b_m)$ minden pontja belső pont, határpontjai közül egyet sem tartalmaz.

Másrészt, ha $x \notin [a_1, \ldots, a_m; b_1, \ldots, b_m]$, akkor legalább egy j-re $x_j < a_j$ vagy $x_j > b_j$. Ha $\varepsilon > 0$ kisebb $(a_j - x_j)$-nél, ill. $(x_j - b_j)$-nél, akkor bármely $y \in S(x, \varepsilon)$ pontra (1.2.10) alapján $y_j < a_j$, ill. $y_j < b_j$ is áll, s így

$$S(x, \varepsilon) \cap [a_1, \ldots, a_m; b_1, \ldots, b_m] = \emptyset,$$

és x $[a_1, \ldots, a_m; b_1, \ldots, b_m]$-nek külső pontja. A zárt tégla ezért minden határpontját tartalmazza. ∎

További példákat szolgáltat a következő tétel:

(1.2.22)* *Tetszőleges* $a \in \mathbf{R}^m$ *és* $\varepsilon > 0$ *esetén az* $S(a, \varepsilon)$ *gömb nyílt, az*

$$\bar{S}(a, \varepsilon) = \{x: \rho(x, a) \leqq \varepsilon\}$$

halmaz viszont zárt ponthalmaz $\mathbf{R}^m$*-ben.*

Bizonyítás. Ha $x \in S(a, \varepsilon)$, azaz $\rho(x, a) < \varepsilon$, legyen $\delta = \varepsilon - \rho(x, a)$. A háromszög-egyenlőtlenség alapján $y \in S(x, \delta)$ esetén

$$\rho(a, y) \leqq \rho(a, x) + \rho(x, y) < \rho(a, x) + \delta = \varepsilon,$$

úgyhogy $S(x, \delta) \subset S(a, \varepsilon)$, és x belső pontja $S(a, \varepsilon)$-nak, az utóbbi halmaz egyetlen határpontját sem tartalmazza.

Viszont $x \notin \bar{S}(a, \varepsilon)$ esetén $\rho(x, a) > \varepsilon$, s a $\delta = \rho(x, a) - \varepsilon$ jelöléssel

$$S(x, \delta) \cap \bar{S}(a, \varepsilon) = \emptyset,$$

hiszen ha $y \in S(x, \delta) \cap \bar{S}(a, \varepsilon)$ volna, akkor

$$\rho(x, a) \leqq \rho(x, y) + \rho(y, a) < \delta + \varepsilon = \rho(x, a)$$

adódnék, ami lehetetlen. Így minden $x \notin \bar{S}(a, \varepsilon)$ pont külső pontja $\bar{S}(a, \varepsilon)$-nak, e halmaz minden határpontját tartalmazza. ▌

A mondottak alapján, az $m = 3$ esetre gondolva, szokás az $\bar{S}(a, \varepsilon)$ halmazt *a* középpontú, ε sugarú **zárt gömbnek** nevezni.

Minthogy (1.2.20) szerint egy A halmaz pontjai vagy belső vagy határpontok, a nyílt halmazok a következőképp jellemezhetők:

(1.2.23)* *Az A halmaz pontosan akkor nyílt, ha minden $x \in A$ pont belső pontja A-nak.* ▌

A zárt halmazok újabb jellemzése érdekében vezessük be a következő elnevezést: az $x \in \mathbf{R}^m$ pontot az $A \subset \mathbf{R}^m$ halmaz **érintkezési pontjának** mondjuk, ha x minden $S(x, \varepsilon)$ környezete metszi A-t. Ebből rögtön látható, hogy

(1.2.24)* *x pontosan akkor érintkezési pontja A-nak, ha vagy belső vagy határpontja.* ▌

Minthogy pedig a belső pontok biztosan A-hoz tartoznak, kimondhatjuk:

(1.2.25)* *Az A halmaz pontosan akkor zárt, ha minden érintkezési pontját tartalmazza.* ▌

A zárt halmazok újabb jellemzése történhetik a pontsorozatok konvergenciájára támaszkodva is:

(1.2.26)* *Az A halmaz pontosan akkor zárt, ha minden A-beli konvergens (x_n) pontsorozatra $x_n \to y$ esetén y is A-hoz tartozik.*

Bizonyítás. Ha A zárt, $x_n \in A$ $(n \in \mathbf{N})$, és $x_n \to y$, akkor $y \in A$, hiszen $z \notin A$ esetén z csak külső pontja lehet A-nak, s így van A-t nem metsző $S(z, \varepsilon)$ környezete, amely tehát nem tartalmazhatja az (x_n) sorozat egyetlen tagját sem.

Másrészt, ha y határpontja A-nak, akkor $S\left(y, \dfrac{1}{n}\right)$ metszi A-t, így található egy $x_n \in A \cap S\left(y, \dfrac{1}{n}\right)$ pont. Ezek nyilván y-hoz tartó A-beli (x_n) sorozatot alkotnak, ha tehát A tartalmazza az ilyen sorozatok limeszpontjait, akkor minden határpontját is, és zárt. ▌

Igen hasznosak azok a tételek, amelyek azt mutatják, hogy nyílt, ill. zárt halmazokból bizonyos műveletekkel újra nyílt, ill. zárt halmaz keletkezik. Jegyezzük meg mindenekelőtt:

(1.2.27)* *Nyílt halmaz komplementuma zárt, zárt halmazé nyílt.*

Bizonyítás. Ha $B = \mathbf{R}^m - A$, akkor (1.2.19) értelmében A és B határpontjai ugyanazok a pontok. Ha A nyílt, a határpontok mind B-hez tartoznak, és B zárt. Ha A zárt, akkor e pontok mind A-hoz tartoznak, s egy sem tartozik B-hez, úgyhogy B nyílt. ▌

(1.2.28)* *Nyílt halmazok egyesítése nyílt, zárt halmazok metszete zárt.*

Bizonyítás. Ha az A_i halmazok mindegyike nyílt (i tetszőleges I indexhalmazt fut be), és

$$A = \bigcup_{i \in I} A_i,$$

legyen $x \in A$ tetszőleges. Valamelyik $i_0 \in I$ indexre $x \in A_{i_0}$, és A_{i_0} nyíltsága miatt van oly $S(x, \varepsilon)$ gömb, hogy $S(x, \varepsilon) \subset A_{i_0} \subset A$. Így A minden pontja belső pontja A-nak, és A nyílt.

Tegyük most fel, hogy az A_i ($i \in I$) halmazok mind zártak. Minthogy

$$\mathbf{R}^m - \bigcap_{i \in I} A_i = \bigcup_{i \in I} (\mathbf{R}^m - A_i),$$

és (1.2.27) szerint az $\mathbf{R}^m - A_i$ halmazok nyíltak, azért a már igazolt állítás alapján $\mathbf{R}^m - \bigcap_{i \in I} A_i$ nyílt, és maga $\bigcap_{i \in I} A_i$ zárt. ▌

(1.2.29)* *Véges számú nyílt halmaz metszete nyílt, véges számú zárt halmaz egyesítése zárt.*

Bizonyítás. (1.2.27)-re hivatkozva ismét elég a nyílt halmazokra vonatkozó állítást igazolnunk.

Legyen tehát A_i ($i = 1, \dots, n$) nyílt,

$$A = \bigcap_1^n A_i,$$

és $x \in A$. Ekkor minden i-re van olyan $S(x, \varepsilon_i)$ környezet, hogy $S(x, \varepsilon_i) \subset A_i$, s így olyan $S(x, \varepsilon)$ is, hogy

$$S(x, \varepsilon) \subset \bigcap_1^n S(x, \varepsilon_i) \subset A$$

(elég $\varepsilon > 0$-t az ε_i számok mindegyikénél kisebbnek választani). Így A minden pontja belső pontja A-nak. ▌

(1.2.28)-ból és (1.2.27)-ből könnyen nyerhető, de persze a definíciókból közvetlenül is azonnal kiolvasható:

(1.2.30)* *Az üres halmaz és maga* $\mathbf{R}^m$ *nyílt halmaz is, zárt halmaz is.* ▌

1.2.d. Sűrű halmazok. A számegyenesen a racionális számok halmazának (1.1.11)-ből ismert tulajdonsága, hogy minden nem-üres nyílt intervallum tartalmaz racionális számot; ez másképpen úgy is megfogalmazható, hogy minden $x \in \mathbf{R}$ pont minden $S(x, \varepsilon)$ környezete tartalmaz racionális abszcisszájú pontot. Ezt a körülményt úgy szokás röviden kimondani, hogy a racionális számok halmaza „sűrű" (vagy „mindenütt sűrű") a számegyenesen.

Ennek mintájára az $A \subset \mathbf{R}^m$ halmazról azt mondjuk, hogy **sűrű** (vagy **mindenütt sűrű**), ha minden $x \in \mathbf{R}^m$ pont minden $S(x, \varepsilon)$ környezete metszi A-t. Akárcsak az egyenesen, $\mathbf{R}^m$-ben is van megszámlálható sűrű halmaz:

(1.2.31) *A csupa racionális koordinátájú pontok halmaza megszámlálható és sűrű* $\mathbf{R}^m$*-ben.*

Bizonyítás. Minthogy a racionális számok megszámlálható halmazából alkotott m-tagú sorozatok halmaza megszámlálható ((1.1.24) és (1.1.25)), azért a kérdéses A halmaz valóban megszámlálható. Legyen $x \in \mathbf{R}^m$ és $\varepsilon > 0$ tetszőleges, $x = (x_1, \ldots, x_m)$. A racionális számok idézett tulajdonsága miatt van minden i-re olyan racionális y_i, hogy $|y_i - x_i| < \frac{\varepsilon}{m}$. Ekkor az $y = (y_1, \ldots, y_m) \in A$ pontra (1.2.10) miatt $\rho(x, y) < \varepsilon$, $y \in S(x, \varepsilon)$. ∎

Rövidesen felhasználjuk majd a következő segédtételt:

(1.2.32)* *Ha $A \subset \mathbf{R}^m$ sűrű halmaz, akkor az A-hoz tartozó középpontú, racionális sugarú gömbök $\mathfrak{B}$ rendszere olyan tulajdonságú, hogy minden nyílt $\emptyset \neq G \subset \mathbf{R}^m$ halmaz előállítható bizonyos $\mathfrak{B}$-beli halmazok egyesítéseként. Ha az A halmaz megszámlálható, akkor $\mathfrak{B}$ is ilyen.*

Bizonyítás. A második állítás rögtön adódik abból, hogy a racionális számok halmaza megszámlálható, s hogy rögzített racionális $\varepsilon > 0$ mellett az A-beli középpontú, ε sugarú gömbök halmaza megszámlálható.

Legyen most $A \subset \mathbf{R}^m$ sűrű, $\emptyset \neq G \subset \mathbf{R}^m$ nyílt, és $x \in G$. Alkalmas $\varepsilon > 0$-ra $S(x, \varepsilon) \subset G$, és a feltevés szerint van olyan $a \in A$, hogy $a \in S\left(x, \frac{\varepsilon}{2}\right)$. Legyen δ olyan racionális szám, hogy

$$\rho(x, a) < \delta < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Ekkor $x \in S(a, \delta) \in \mathfrak{B}$, és a háromszög-egyenlőtlenség miatt nyilván $S(a, \delta) \subset S(x, \varepsilon) \subset G$. Világos, hogy a G valamennyi pontjához így elkészített $\mathfrak{B}$-beli halmazok egyesítése G. ∎

1.2.e. Cantor, Lindelöf és Borel tétele. A számegyenes egyik alapvető tulajdonságát fejezi ki az ún. Cantor-féle alaptulajdonság, amely szerint zárt intervallumok csökkenő sorozatának metszete nem üres. Ennek általánosítása a következő:

(1.2.33) **Cantor-féle metszet-tétel.** *Legyen*

$$K_1 \supset K_2 \supset K_3 \supset \ldots$$

korlátos, zárt, nem-üres halmazok csökkenő sorozata $\mathbf{R}^m$-ben. Ekkor $\bigcap_1^\infty K_n \neq \emptyset$.

Bizonyítás. Legyen $x_n \in K_n$ tetszőleges. A K_1-beli (x_n) sorozatból a Bolzano—Weierstrass-féle tétel értelmében kiválasztható egy konvergens (x_{n_i}) részsorozat, mondjuk $\lim_{i\to\infty} x_{n_i} = x$. Mihelyt $n_i > n$, az x_{n_i} pont K_{n_i}-hez, s ezért K_n-hez tartozik; így (1.2.26) folytán $x \in K_n$ minden n-re, azaz $x \in \bigcap_1^\infty K_n$. ∎

A következő tételekben fontos szerepet játszik a befedés fogalma. Ezen a következőt kell érteni. Nevezzük az A halmaz **befedésének** az olyan $\mathfrak{C}$ halmazrendszert, amelyre

$$A \subset \bigcup \{C\colon\ C \in \mathfrak{C}\};$$

eszerint azt kívánjuk, hogy A minden eleme hozzátartozzék legalább egy $\mathfrak{C}$-beli halmazhoz, A minden elemét **befedje** legalább egy $C \in \mathfrak{C}$ halmaz. A $\mathfrak{C}$ befedést **végesnek**, ill. **megszámlálhatónak** mondjuk, ha véges számú, ill. megszámlálható sok halmazból áll. Az $A \subset \mathbf{R}^m$ halmaz $\mathfrak{C}$ befedését **nyíltnak**, ill. **zártnak** mondjuk, ha a $C \in \mathfrak{C}$ halmazok mind nyílt, ill. zárt részhalmazai $\mathbf{R}^m$-nek.

(1.2.34) **Lindelöf tétele.** *Bármely $A \subset \mathbf{R}^m$ halmaz bármely nyílt $\mathfrak{C}$ befedéséből kiválasztható A-nak megszámlálható befedése.*

Bizonyítás. (1.2.31) és (1.2.32) következtében megadható $\mathbf{R}^m$-ben gömböknek olyan megszámlálható $\mathfrak{B}$ rendszere, hogy minden nyílt halmaz $\mathfrak{B}$-beli halmazok egyesítése legyen. Bármely $x \in A$ ponthoz található egy $C \in \mathfrak{C}$ halmaz, melyre $x \in C$, és ezt a nyílt $\mathfrak{C}$ halmazt $\mathfrak{B}$-beli halmazok egyesítéseként felírva, egyik $B \in \mathfrak{B}$ tag tartalmazza x-et, azaz $x \in B \subset C$. Végezzük ezt el A minden x pontjára; a közben fellépő $B \in \mathfrak{B}$ halmazok $\mathfrak{B}$ megszámlálhatósága miatt egy (B_i) $(i \in \mathbf{N})$ sorozatba rendezhetők, és mindegyik B_i-hez van olyan $C_i \in \mathfrak{C}$, hogy $B_i \subset C_i$. Eszerint minden $x \in A$ eleme egy B_i-nek s ezzel együtt egy C_i-nek is: a $\{C_i\colon i \in \mathbf{N}\}$ rendszer A-nak $\mathfrak{C}$-ből kiválasztott megszámlálható befedése. ▌

(1.2.35) **Borel-féle befedési tétel.** *Bármely $K \subset \mathbf{R}^m$ korlátos, zárt halmaz bármely nyílt $\mathfrak{C}$ befedéséből kiválasztható K-nak véges befedése.*

Bizonyítás. (1.2.34) szerint $\mathfrak{C}$-ből kiválasztható K-nak megszámlálható $\{C_i\colon i \in \mathbf{N}\}$ befedése. Azt állítjuk, hogy elég nagy n-re már $\{C_i\colon i = 1, \dots, n\}$ is befedése K-nak.

Ellenkező esetben legyen

$$K_n = K - \bigcup_{i=1}^{n} C_i \neq \emptyset.$$

(1.2.28) szerint $\bigcup_{i=1}^{n} C_i$ nyílt, (1.2.27) alapján $\mathbf{R}^m - \bigcup_{i=1}^{n} C_i$ zárt, és így ismét (1.2.28) folytán

$$K_n = K \cap (\mathbf{R}^m - \bigcup_{i=1}^{n} C_i)$$

zárt. Világos, hogy

$$K \supset K_1 \supset K_2 \supset \dots,$$

így a K_n halmazok K-val együtt (1.2.14) miatt korlátosak is. Ennélfogva (1.2.33) értelmében

$$\bigcap_{1}^{\infty} K_n = K \cap \bigcap_{n=1}^{\infty} (\mathbf{R}^m - \bigcup_{i=1}^{n} C_i) =$$

$$= K \cap (\mathbf{R}^m - \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcup_{i=1}^{n} C_i) =$$

$$= K \cap (\mathbf{R}^m - \bigcup_{1}^{\infty} C_i) = K - \bigcup_{1}^{\infty} C_i \neq \emptyset,$$

ellentétben azzal, hogy $\{C_i\colon i \in \mathbf{N}\}$ befedése K-nak. ▌

1.2.f. Gyakorlatok. 1. Legyen $x = (x_1, \ldots, x_m)$, $y = (y_1, \ldots, y_m)$, $x' = (x_1', \ldots, x_m')$, $y' = (y_1', \ldots, y_m')$, $x, y, x', y' \in \mathbf{R}^m$, és

$$x_i' = \sum_{j=1}^{m} a_{ij} x_j, \qquad y_i' = \sum_{j=1}^{m} a_{ij} y_j \qquad (i = 1, \ldots, m),$$

ahol

$$\sum_{i=1}^{m} a_{ip} a_{iq} = \delta_{pq} \qquad (p, q = 1, \ldots, m),$$

és $\delta_{pq} = 0$, ha $p \neq q$, $\delta_{pq} = 1$, ha $p = q$. Bizonyítandó, hogy ekkor $\rho(x, y) = \rho(x', y')$.

2. Igazoljuk, hogy $x, y, z \in \mathbf{R}^m$ esetén

$$|\rho(x, y) - \rho(y, z)| \leqq \rho(x, z).$$

3. Mutassuk meg, hogy $T = (a_1, \ldots, a_m; b_1, \ldots, b_m)$ esetén

$$\delta(T) = \sqrt{\sum_{1}^{m} (a_i - b_i)^2}\,.$$

4. Határozzuk meg az $A \subset \mathbf{R}^m$ halmaz **belső**, külső, határ-, érintkezési pontjait, ha

(a) $A = S(a, \varepsilon)$, $a \in \mathbf{R}^m$, $\varepsilon > 0$;
(b) $A = \bar{S}(a, \varepsilon)$, $a \in \mathbf{R}^m$, $\varepsilon > 0$;
(c) $A = (a_1, \ldots, a_m; b_1, \ldots, b_m)$, $a_i < b_i$;
(d) $A = [a_1, \ldots, a_m; b_1, \ldots, b_m]$, $a_i < b_i$;
(e) $A = \{(x_1, \ldots, x_m) : x_i \in \mathbf{N}\ (i = 1, \ldots, m)\}$;
(f) $A = \{(x_1, \ldots, x_m) : x_i \in \mathbf{Q}\ (i = 1, \ldots, m)\}$.

5. Mutassuk meg, hogy $x \in \mathbf{R}^m$ pontosan akkor érintkezési pontja az $A \subset \mathbf{R}^m$ halmaznak, ha van olyan A-beli (x_n) sorozat, melyre $x_n \to x$.

6. Igazoljuk, hogy ha $A \subset \mathbf{R}^m$ nyílt (zárt), $B \subset \mathbf{R}^m$ pedig zárt (nyílt), akkor $A - B$ is nyílt (zárt).

7. Adjunk példát $\mathbf{R}$-ben olyan A_n $(n \in \mathbf{N})$ nyílt (zárt) halmazokra, hogy $\bigcap_{1}^{\infty} A_n$ nem nyílt ($\bigcup_{1}^{\infty} A_n$ nem zárt).

8. Mutassuk meg, hogy ha az $A_i \subset \mathbf{R}$ halmazok mindegyike sűrű $\mathbf{R}$-ben $(i = 1, \ldots, m)$, akkor az

$$A = \{(x_1, \ldots, x_m) : x_i \in A_i\ (i = 1, \ldots, m)\}$$

halmaz sűrű $\mathbf{R}^m$-ben.

9. Igazoljuk, hogy ha $\mathfrak{S}$ $\mathbf{R}^m$-beli nyílt halmazokból álló diszjunkt halmazrendszer, akkor $\mathfrak{S}$ megszámlálható.

10. Az $\mathbf{R}^m$-en értelmezett f valós függvény (szigorú) maximumhelyének mondjuk az $a \in \mathbf{R}^m$ pontot, ha van olyan $\varepsilon > 0$, hogy $x \in S(a, \varepsilon)$, $x \neq a$ esetén $f(x) \leqq f(a)$

($f(x) < f(a)$). Mutassuk meg, hogy ha A az f függvény maximumhelyeinek, B pedig szigorú maximumhelyeinek halmaza, akkor B, valamint az

$$\{f(x)\colon x \in A\}$$

halmaz megszámlálható.

[Legyen A_n és B_n ama pontok halmaza, melyekre a maximumhely (szigorú maximumhely) definíciójában $\varepsilon = \frac{1}{n}$ megfelel, és vegyük észre, hogy $x, y \in B_n$, $x \neq y$ esetén, valamint $x, y \in A_n$, $f(x) \neq f(y)$ esetén $S\left(x, \frac{1}{2n}\right) \cap S\left(y, \frac{1}{2n}\right) = 0$.]

11. Legyen f olyan $\mathbf{R}$-en értelmezett valós függvény, hogy minden $a \in \mathbf{R}$-hez van olyan $\varepsilon > 0$, amelyre $a - \varepsilon < x < a$ esetén $f(x) \leqq f(a)$, $a < x < a + \varepsilon$ esetén $f(x) \geqq f(a)$. Bizonyítandó, hogy f monoton növekvő.

[Ellenkező esetben készíthető volna olyan

$$[a_1, b_1] \supset [a_2, b_2] \supset [a_3, b_3] \supset \dots$$

intervallumsorozat, hogy $b_n - a_n \to 0$, és $f(a_n) > f(b_n)$.]

1.3. METRIKUS TEREK

1.3.a. Távolság. Számsorozatok és $\mathbf{R}^m$-beli pontsorozatok konvergenciája mellett fontos szerepet játszik az analízisben függvénysorozatok konvergenciája is. Ennek többféle típusa is ismeretes; például egy $H \neq \emptyset$ halmazon értelmezett f_n valós függvények sorozatáról azt mondjuk, hogy H-n **egyenletesen tart** az f **limeszfüggvényhez**, ha minden $\varepsilon > 0$-hoz van olyan n_0 index, hogy $n \geqq n_0$ esetén $|f_n(t) - f(t)| < \varepsilon$ minden $t \in H$ helyen. Ez a konvergenciafajta sok fontos vizsgálatban jut szerephez.

Másfajta konvergenciákat is értelmezhetünk például a számegyenes valamely $[a, b]$ intervallumán folytonos valós függvények körében. Azt mondjuk, hogy az ilyen függvényeknek egy (f_n) sorozata az első, ill. második hatványon **átlagosan konvergál** az ugyancsak folytonos f limeszfüggvényhez, ha

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b |f_n(t) - f(t)|\, dt = 0,$$

ill.

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b |f_n(t) - f(t)|^2\, dt = 0.$$

Az első hatványon átlagos konvergencia fogalmával kapcsolatban kézenfekvően felmerülő gondolat, hogy az $[a, b]$ intervallumban folytonos valós függvények E halmazához tartozó f és g függvény közötti „távolságot" a

$$\rho(f, g) = \int_a^b |f(t) - g(t)|\, dt \tag{1.3.1}$$

képlettel definiáljuk. Ekkor ugyanis az (f_n) sorozatnak az f limeszfüggvényhez a mondott értelemben való tartása a $\rho(f_n, f) \to 0$ feltétel teljesülését kívánja, akárcsak az $\mathbf{R}^m$-beli (x_n) pontsorozat x limeszponthoz való tartása a $\rho(x_n, x) \to 0$ feltételét, természetesen az $\mathbf{R}^m$-ben értelmezett (1.2.1) távolsággal. Az, hogy az (1.3.1) kifejezést f és g távolságának nevezzük, alátámasztható azzal a könnyen belátható ténnyel, hogy erre is teljesülnek az (1.2.2) (a)–(d) tulajdonságok; (c) az

$$(1.3.2) \qquad |f(t) - h(t)| \leqq |f(t) - g(t)| + |g(t) - h(t)| \quad (a \leqq t \leqq b)$$

egyenlőtlenségből adódik, (d) pedig abból, hogy egy nem-negatív, folytonos függvény integrálja csak akkor lehet 0, ha a függvény maga is azonosan 0.

Ehhez hasonló meggondolás alkalmazható az egyenletes konvergencia esetében is, legalábbis akkor, ha a H alaphalmazon korlátos függvények körében maradunk. Jelöljük most e függvények halmazát E-vel, s legyen $f, g \in E$ esetén

$$(1.3.3) \qquad \rho(f, g) = \sup \{ |f(t) - g(t)| : t \in H \}.$$

Azonnal látható, hogy egy E-beli (f_n) sorozat pontosan akkor tart egyenletesen az $f \in E$ limeszfüggvényhez, ha $\rho(f_n, f) \to 0$, és könnyű meggyőződni arról is, hogy az (1.2.2) (a)–(d) tulajdonságok most is érvényesek; (c) fennállása ismét (1.3.2)-ből adódik, hiszen $t \in H$ esetén ennek értelmében

$$|f(t) - h(t)| \leqq \rho(f, g) + \rho(g, h),$$

s így

$$\rho(f, h) \leqq \rho(f, g) + \rho(g, h).$$

A második hatványon átlagos konvergencia vizsgálatára kézenfekvő volna ismét az $[a, b]$-ben folytonos függvények halmazát E-vel jelölni és $f, g \in E$ esetére f és g távolságán az

$$\int_a^b |f(t) - g(t)|^2 \, dt$$

értéket érteni. Ekkor azonban az (1.2.2) (c) tulajdonság általában nem volna érvényes. Ha viszont a

$$(1.3.4) \qquad \rho(fg) = \left(\int_a^b |f(t) - g(t)|^2 \, dt \right)^{1/2}$$

definíciót fogadjuk el, akkor változatlanul elmondható, hogy a most vizsgált konvergencia feltétele a $\rho(f_n, f) \to 0$ reláció, nyilván érvényes (1.2.2) (a), (b) és (d), s ezen felül (c) is. Ezt éppen úgy lehet belátni, mint az $\mathbf{R}^m$-ben értelmezett távolság esetében: az $f - g = p$, $g - h = q$ jelöléssel $f - h = p + q$ miatt az igazolandó egyenlőtlenség

$$\left(\int_a^b (p(t) + q(t))^2 \, dt \right)^{1/2} \leqq \left(\int_a^b p(t)^2 \, dt \right)^{1/2} + \left(\int_a^b q(t)^2 \, dt \right)^{1/2},$$

azaz

$$\int_a^b p(t)^2\,dt + 2\int_a^b p(t)\,q(t)\,dt + \int_a^b q(t)^2\,dt \leqq$$

$$\leqq \int_a^b p(t)^2\,dt + 2\,\Big(\int_a^b p(t)^2\,dt\Big)^{1/2}\Big(\int_a^b q(t)^2\,dt\Big)^{1/2} + \int_a^b q(t)^2\,dt$$

alakban írható, s ezzel az

$$\int_a^b p(t)\,q(t)\,dt \leqq \Big(\int_a^b p(t)^2\,dt\Big)^{1/2}\Big(\int_a^b q(t)^2\,dt\Big)^{1/2} \tag{1.3.5}$$

Schwartz-féle egyenlőtlenségre vezethető vissza. Ennek igazolására a

$$P(u) = \int_a^b (up(t)+q(t))^2\,dt = u^2\int_a^b p(t)^2\,dt + 2u\int_a^b p(t)\,q(t)\,dt + \int_a^b q(t)^2\,dt \geqq 0$$

másodfokú polinom diszkriminánsát felírva s figyelembe véve, hogy ez nem lehet pozitív, (1.3.5) adódik.

A bemutatott példákból látható, hogy sok esetben nemcsak $\mathbf{R}^m$ pontjai, hanem másféle halmazok (példáinkban bizonyos függvényhalmazok) elemei között is lehet és hasznos az (1.2.2) (a)—(d) tulajdonságokkal rendelkező „távolságot" értelmezni. Ezzel a kérdéses halmaz mintegy geometriai szerkezetet nyer, s így a következő definícióhoz juthatunk.

Ha egy $E \neq \emptyset$ halmaz bármely két $x, y \in E$ elemére értelmezve van egy $\rho(x, y)$ valós szám az alábbi tulajdonságokkal:

(D_1) $0 \leqq \rho(x,y) < +\infty$, $\rho(x,x) = 0$ $(x, y \in E)$;
(D_2) $\rho(x,y) = \rho(y,x)$ $(x, y \in E)$;
(D_3) $\rho(x,z) \leqq \rho(x,y) + \rho(y,z)$ $(x, y, z \in E)$;
(D_4) $\rho(x,y) = 0$ esetén $x = y$,

akkor E-t **metrikus tér**nek, elemeit **pont**oknak, $\rho(x,y)$-t az x és y pont közötti **távolság**nak mondjuk.

Eszerint metrikus tér az $\mathbf{R}^m$ euklideszi tér (bármely m-re) az (1.2.1) távolsággal, a H halmazon értelmezett korlátos valós függvények halmaza az (1.3.3) távolsággal, az $[a, b]$-ben folytonos valós függvények halmaza az (1.3.1) vagy (1.3.4) távolsággal. Az utóbbi két példa mutatja, hogy ugyanazon a halmazon többféle távolság is értelmezhető, s a metrikus tér csak akkor van megadva, ha a távolság értelmezését is pontosan leírjuk; ennek megfelelően a metrikus tér előbbi definícióját is pontosabban kellene voltaképpen megfogalmazni, és metrikus térnek az E halmazból és a rajta értelmezett ρ távolságból álló $[E, \rho]$ párt nevezni. Minthogy azonban az összefüggésekből rendszerint kiderül, milyen távolsággal ruházzuk fel az E halmazt, nem vezet félreértésre az sem, ha magát E-t nevezzük metrikus térnek.

Az $\mathbf{R}^m$ halmazon értelmezett (1.2.1) távolságot a következőkben ρ_m-mel fogjuk jelölni.

További példaként legyen $E \neq \emptyset$ tetszőleges halmaz és $x, y \in E$ esetén

$$\rho(x, y) = \begin{cases} 0, & \text{ha } x = y, \\ 1, & \text{ha } x \neq y. \end{cases}$$

Könnyen látható, hogy így metrikus térhez jutunk; az ilyen teret **diszkrét metrikus térnek** fogjuk nevezni.

Számtalan további metrikus térhez juthatunk a következő meggondolás alapján. Legyen $[E, \rho]$ metrikus tér, $\emptyset \neq E_0 \subset E$, és $x, y \in E_0$ esetén

$$\rho_0(x, y) = \rho(x, y).$$

Ekkor az E_0 elemeire értelmezett ρ_0 ismét eleget tesz a $(D_1)-(D_4)$ kikötéseknek, úgyhogy $[E_0, \rho_0]$ ismét metrikus tér. Az így nyert teret az $[E, \rho]$ tér **alterének** mondjuk, és a

(1.3.6) $$\rho_0 = \rho \mid E_0$$

jelölést alkalmazzuk.

Ha például E a $H = [a, b] \subset \mathbf{R}$ intervallumban korlátos függvények halmaza, ρ az (1.3.3) alatti távolság, E_0 pedig a H-n folytonos függvények halmazát jelöli, akkor $[E_0, \rho|E_0]$ újabb metrikus tér [s ez további példa az E_0 halmazon értelmezett távolságra a korábbi (1.3.1) és (1.3.4) mellett]. Ugyanígy bármely $\emptyset \neq E \subset \mathbf{R}^m$ halmaz metrikus térnek tekinthető a $\rho_m \mid E$ távolsággal.

1.3.b. Konvergencia. Nyílt és zárt halmazok. Az **1.2.a.** pont végén hangsúlyoztuk, hogy az utána következő definíciók és tételek többsége csakis az (1.2.1) távolság (1.2.2) (a)—(d) tulajdonságait használja fel. Ebből nyilvánvalóan következik, hogy ezek a definíciók kimondhatók és ezek a tételek érvényesek akkor is, ha $\mathbf{R}^m$ pontjai és részhalmazai helyett tetszőleges metrikus tér pontjaira és részhalmazaira alkalmazzuk őket.

Így például a **pontsorozat konvergenciájá**nak **1.2.b.** alatti, az $S(a, \varepsilon)$ **gömbökre** támaszkodó értelmezése bármely metrikus tér pontjaiból álló sorozat esetére alkalmazható, és az $x_n \to y$ reláció ebben az esetben is egyenértékű a $\rho(x_n, y) \to 0$ relációval. Éppen így vezetnek az **1.3.a.**-beli példákban bizonyos függvényhalmazokon bevezetett távolságfogalmak az egyenletes és az átlagos konvergencia fogalmához.

Hasonlóan átvihető bármely metrikus térre a **Cauchy-sorozat**, a **korlátos halmaz**, az **átmérő**, a **korlátos sorozat**, a **belső**, **külső** és **határpont**, a **nyílt** és **zárt halmaz**, a **zárt gömb**, az **érintkezési pont**, a **sűrű** halmaz, a **(véges, megszámlálható, nyílt, zárt) befedés** fogalma, és érvényesek az ezekkel kapcsolatos, az **1.2.** szakaszban egy vagy két csillaggal megjelölt tételek (bennük $\mathbf{R}^m$ helyébe mindig tetszőleges metrikus teret téve).

Hangsúlyoztuk azt is, hogy az említett tételek jelentős részében (az egy csillaggal megjelöltekben) az (1.2.2) (d) tulajdonságot nem használtuk fel; ezeknek metrikus terekre való átvitelében eszerint (D_4) feltételezésére nincsen szükség. A továbbiak során is egy csillaggal jelöljük meg azokat az állításokat, amelyekben nem támaszkodunk (D_4)-re.

Ezzel szemben a csillaggal meg nem jelölt tételekben a távolságnak nemcsak az (1.2.2)-beli tulajdonságaira, hanem közvetlenül az (1.2.1) definícióra támaszkodtunk. Ezek egy részét (azokat, amelyekben hivatkozás történik az $\mathbf{R}^m$-beli pontok koordinátáira) meg sem lehet fogalmazni tetszőleges metrikus tér esetén, más részük megfogalmazható ugyan, de várhatóan nem lesz bármely metrikus térben érvényes. Természetesen különösen értékesek azok a metrikus terek, amelyekben az ilyen tételek egyike-másika mégis csak érvényes, hiszen ezek bizonyos szempontból közel állnak az euklideszi terekhez. Ezek a meggondolások vezetnek a következő definíciókban.

1.3.c. Teljes metrikus terek. (1.2.11) szerint bármely metrikus térben bármely konvergens sorozat Cauchy-sorozat. Ennek (1.2.12) megfordítása nem minden metrikus térben érvényes. Ha pl. E a számegyenes racionális pontjainak halmazát jelenti a $\rho_1|E$ távolsággal (tehát E-t $\mathbf{R}$ alterének tekintve), és (x_n) egy racionális számokból álló, de irracionális határértékhez tartó számsorozat, akkor (x_n) Cauchy-sorozat ugyan, de E-ben nem konvergens. Általánosabban, ha egy E metrikus térben egy (x_n) sorozat egy x limeszponthoz tart, és a sorozat egyik tagja sem egyenlő x-szel, akkor E-nek bármely (x_n) tagjait tartalmazó, de x-et nem tartalmazó E_0 alterében az (x_n) sorozat Cauchy-sorozat, de nem konvergens (ugyanis E_0-hoz tartozó ponthoz (1.2.8) miatt nem tarthat).

Ezzel szemben, ha E a $H \neq \emptyset$ halmazon korlátos függvények tere az (1.3.3) távolsággal, és benne (f_n) Cauchy-sorozat, akkor bármely rögzített $t \in H$-ra az $(f_n(t))$ számsorozat is eleget tesz a Cauchy-féle feltételnek, hiszen $\varepsilon > 0$-hoz van oly n_0, hogy $n, m \geqq n_0$ esetén $\rho(f_n, f_m) < \varepsilon$, és ekkor ugyanezen n, m indexekre $|f_n(t) - f_m(t)| < \varepsilon$ is áll. Így az $(f_n(t))$ sorozat véges (t-től általában függő) határértékhez tart; jelöljük ezt $f(t)$-vel. Az előbbiek szerint $\varepsilon > 0$-hoz van olyan n_0, hogy $n, m \geqq n_0$ esetén minden $t \in H$-ra

$$|f_n(t) - f_m(t)| < \varepsilon,$$

és ebből $n \to \infty$ mellett

$$|f(t) - f_m(t)| \leqq \varepsilon \qquad (m \geqq n_0).$$

Ez egyrészt azt mutatja, hogy f is korlátos függvény, azaz $f \in E$, másrészt hogy $m \geqq n_0$ esetén $\rho(f, f_m) \leqq \varepsilon$, azaz hogy $\rho(f_m, f) \to 0$, ha $m \to \infty$. Ebben a térben tehát a Cauchy-sorozatok mind konvergensek.

Állapodjunk meg abban, hogy az E metrikus teret **teljes**nek mondjuk, ha benne a Cauchy-sorozatok mind konvergensek.

Ennek alapján kimondható:

(1.3.7) *Az* $[\mathbf{R}^m, \rho_m]$ *metrikus tér teljes.* ▮

(1.3.8) *Ha E a $H \neq \emptyset$ halmazon értelmezett korlátos valós függvények halmaza, és ρ az* (1.3.3) *távolság, akkor $[E, \rho]$ teljes metrikus tér.* ▮

A „teljes" elnevezést alátámasztják a nem-teljes terekre mutatott előbbi példák, amelyekben egy térből „kihagytuk" egyes sorozatok limeszpontjait, és így mintegy „hiányos" terekhez jutottunk. Későbbi eredmények az elnevezést még mélyebben meg fogják világítani.

(1.3.9)* *Teljes metrikus tér minden zárt altere is teljes.*

Bizonyítás. Ha $\emptyset \neq E_0 \subset E$ zárt és (x_n) Cauchy-sorozat E_0-ban, akkor E-beli sorozatnak tekintve is Cauchy-sorozat, és így tart egy E-beli x ponthoz. (1.2.26) folytán $x \in E_0$, vagyis a sorozat már E_0-ban is konvergens. ∎

Ha pl. $\emptyset \neq H \subset \mathbf{R}^m$, és E a H halmazon korlátos függvények halmaza az (1.3.3) távolsággal, E_0 pedig az összes H-n korlátos, folytonos függvények halmaza, akkor E_0 E-nek (1.2.26) folytán zárt altere, hiszen folytonos függvények egyenletesen konvergens sorozatának limeszfüggvénye tudvalevően folytonos. Így az E_0 tér is teljes.

Megfordítva:

(1.3.10) *Ha E_0 az E metrikus tér altere, és teljes, akkor zárt is E-ben.*

Bizonyítás. (1.2.26) miatt elég megmutatni, hogy ha $x_n \in E_0$ $(n \in \mathbf{N})$, és $x_n \to y \in E$, akkor $y \in E_0$. Azonban az E-ben konvergens (x_n) sorozat Cauchy-sorozat, így E_0 teljessége miatt tart egy $z \in E_0$ ponthoz. (1.2.8) folytán $y = z$, azaz $y \in E_0$. ∎

1.3.d. Szeparábilis metrikus terek. Az $\mathbf{R}^m$ térnek fontos tulajdonsága, hogy van benne megszámlálható sűrű halmaz [(1.2.31) értelmében]. Ez nincs minden metrikus térben így. Így például egy diszkrét metrikus térben egyetlen valódi részhalmaz sem lehet sűrű, így, ha az alaphalmaz nem-megszámlálható, nem lehet megszámlálható sűrű részhalmaza sem a térnek. Kevésbé triviális példaként legyen E az $[a, b] \subset \mathbf{R}$ intervallumon korlátos függvények halmaza az (1.3.3) távolsággal. Minden $x \in [a, b]$ helyhez tekintsük azt a g_x függvényt, amely az x helyen 1-gyel, másutt 0-val egyenlő. Világos, hogy $x \neq y$ esetén $\rho(g_x, g_y) = 1$. Ha most $\{f_n : n \in \mathbf{N}\} \subset E$ megszámlálható sűrű halmaz volna E-ben, akkor minden $x \in [a,b]$-hez volna olyan n_x index, hogy $\rho(g_x, f_{n_x}) < \frac{1}{2}$, és $x \neq y$ esetén $n_x \neq n_y$, hiszen $n_x = n_y$ esetén

$$\rho(g_x, g_y) \leqq \rho(g_x, f_{n_x}) + \rho(f_{n_x}, g_y) < 1$$

következnék. Ennek alapján az $[a, b]$ intervallum összes számait a hozzájuk tartozó n_x-eknek megfelelően egy sorozatba lehetne rendezni, ami (1.1.26) és (1.1.19) szerint lehetetlen.

Tekintsük viszont az előbbi E térnek azt az E_0 alterét, amelyet az $[a, b]$-ben folytonos függvények alkotnak. Ebben már van megszámlálható sűrű halmaz. Ilyen A halmazt kapunk, ha tekintjük az összes olyan függvényeket, amelyek úgy keletkeznek, hogy $[a, b]$-t n egyenlő részre osztjuk $(n = 1, 2, \ldots)$, az osztópontokban és a végpontokban felveszünk egy-egy racionális függvényértéket, és a részintervallumok mindegyikén lineárisnak definiáljuk a függvényt. Valóban, világos, hogy adott n mellett megszámlálható sok ilyen függvény van [a racionális számok halmazából megszámlálható sok $(n + 1)$-tagú sorozat alkotható], így A megszámlálható. Ha most $f \in E_0$ és $\varepsilon > 0$ tetszőleges, f egyenletes folytonosságára hivatkozva legyen n olyan nagy, hogy $[a, b]$-nek $\frac{b-a}{n}$ hosszúságú részintervallumain f ingadozása $\frac{\varepsilon}{5}$-nél kisebb legyen, és a $t_i = a + i\frac{b-a}{n}$ $(i = 0, 1, \ldots, n)$

jelöléssel legyen y_i az

$$|y_i - f(t_i)| < \frac{\varepsilon}{5}$$

egyenlőtlenségnek eleget tevő racionális szám, majd $g \in A$ a t_i helyen az y_i értéket felvevő szakaszonként lineáris függvény. Mármost $t \in [a, b]$ esetén valamely i-re $t_{i-1} \leqq t \leqq t_i$, és így

$$|f(t) - g(t)| \leqq |f(t) - f(t_i)| + |f(t_i) - g(t_i)| + |g(t_i) - g(t)|;$$

itt

$$|g(t_i) - g(t)| \leqq |g(t_i) - g(t_{i-1})| \leqq |g(t_i) - f(t_i)| + |f(t_i) - f(t_{i-1})| +$$

$$+ |f(t_{i-1}) - g(t_{i-1})| < \frac{\varepsilon}{5} + \frac{\varepsilon}{5} + \frac{\varepsilon}{5},$$

s minthogy $|f(t) - f(t_i)| < \frac{\varepsilon}{5}$ is áll, végül is

$$|f(t) - g(t)| < \varepsilon \qquad (t \in [a, b]),$$

és $\rho(f, g) < \varepsilon$.

Az elmondottak alapján állapodjunk meg abban, hogy az E metrikus teret **szeparábilis**nak mondjuk, ha van benne megszámlálható sűrű halmaz. Eszerint az előbbi példa E tere nem szeparábilis, de az E_0 altér szeparábilis.

A szeparábilis metrikus tereknek egy nevezetes tulajdonsága olvasható ki (1.2.32)-ből. Sőt ennél több is mondható:

(1.3.11)* *Az E metrikus tér pontosan akkor szeparábilis, ha megadható benne nyílt halmazoknak olyan megszámlálható $\mathfrak{B}$ rendszere, hogy bármely $\emptyset \neq G \subset E$ nyílt halmaz előállítható bizonyos $\mathfrak{B}$-beli halmazok egyesítéseként.*

Bizonyítás. (1.2.32)-ből látszik, hogy szeparábilis térben van ilyen $\mathfrak{B}$ rendszer (még gömbökből is készíthető ilyen). Ha viszont $\mathfrak{B} = \{B_n: n \in \mathbf{N}\}$ egy ilyen rendszer, és $x_n \in B_n$ tetszőlegesen kiválasztott pont, akkor az $A = \{x_n: n \in \mathbf{N}\}$ megszámlálható halmaz sűrű E-ben. Valóban, $x \in E$ és $\varepsilon > 0$ esetén $S(x, \varepsilon)$ bizonyos $\mathfrak{B}$-beli halmazok egyesítése, így van olyan n index, hogy $x \in B_n \subset S(x, \varepsilon)$; ekkor $x_n \in A \cap S(x, \varepsilon)$. ∎

Vegyük észre, hogy az (1.2.34) tétel bizonyítása $\mathbf{R}^m$-nek éppen azon a tulajdonságán alapult, hogy van benne az előbbi tulajdonságú $\mathfrak{B}$ rendszer. Így Lindelöf tétele minden szeparábilis metrikus térre átvihető.

1.3.e. Halmazok távolsága. Az elemi geometriában egy pont és egy egyenes, ill. egy pont és egy sík távolságán az adott pont és az egyenes, ill. a sík hozzá legközelebbi pontja közötti távolságot értik, két kitérő egyenes távolságán pedig az egy-egy pontjuk közötti távolságok minimumát.

Ennek mintájára állapodjunk meg abban, hogy egy $[E, \rho]$ metrikus tér x **pontja és $A \neq \emptyset$ részhalmaza közötti távolság**on a

(1.3.12) $$\rho(x, A) = \inf\{\rho(x, y): y \in A\}$$

értéket, az $A \neq \emptyset$ és $B \neq \emptyset$ részhalmazok közötti távolságon pedig a

(1.3.13) $$\rho(A, B) = \inf\{\rho(x, y):\ x \in A,\ y \in A\}$$

értéket értjük. Az első definíció a második speciális esetének tekinthető, hiszen nyilván

$$\rho(x, A) = \rho(\{x\}, A).$$

Megjegyezzük, hogy a „távolság" elnevezés némileg félrevezető, ugyanis szó sincsen arról, hogy az E tér összes nem-üres részhalmazai az (1.3.13) „távolsággal" metrikus teret alkotnának [(D_1) és (D_2) ugyan teljesül, (D_3) és (D_4) azonban nem]. Például $\rho(A, B) = 0$, valahányszor $A \cap B \neq \emptyset$, sőt esetleg még $A \cap B = \emptyset$ esetén is [legyen a számegyenesen $A = (0, 1)$, $B = (1, 2)$].

A definíciókból rögtön kiolvashatók az alábbi állítások:

(1.3.14)* *Bármely $x, y \in E$ és $\emptyset \neq A \subset E$ esetén*

(a) $0 \leqq \rho(x, A) < +\infty$;

(b) $A \subset B \subset E$ *esetén* $\rho(x, B) \leqq \rho(x, A)$;

(c) $\rho(x, A) = 0$ *pontosan akkor, ha* x *érintkezési pontja* A*-nak;*

(d) $\rho(x, A) \leqq \rho(x, y) + \rho(y, A)$.

Bizonyítás. Csak (d) nem evidens, és abból következik, hogy $z \in A$ esetén

$$\rho(x, z) \leqq \rho(x, y) + \rho(y, z),$$

azaz

$$\rho(y, z) \geqq \rho(x, z) - \rho(x, y) \geqq \rho(x, A) - \rho(x, y).$$

Ez minden $z \in A$-ra áll, úgyhogy

$$\rho(y, A) \geqq \rho(x, A) - \rho(x, y). \blacksquare$$

(1.3.15)* *Bármely $A, B, C \subset E$, $A, B, C \neq \emptyset$ esetén*

(a) $0 \leqq \rho(A, B) < +\infty$;

(b) $\rho(A, B) = \rho(B, A)$;

(c) $A \subset A' \subset E$, $B \subset B' \subset E$ *esetén* $\rho(A', B') \leqq \rho(A, B)$;

(d) $\rho(A \cup B, C) = \min(\rho(A, C), \rho(B, C))$;

(e) $\rho(A, B) = \inf\{\rho(x, B):\ x \in A\}$.

Bizonyítás. (a), (b), (c) evidens, (e) a

$$\{\rho(x, y):\ x \in A,\ y \in B\} = \bigcup_{x \in A} \{\rho(x, y):\ y \in B\}$$

azonosságból következik, (d) pedig (e)-ből és a

$$\{\rho(x, C):\ x \in A \cup B\} = \{\rho(x, C):\ x \in A\} \cup \{\rho(x, C):\ x \in B\}$$

azonosságból. $\blacksquare$

Értelmezhetünk azonban — némi megszorításokkal — halmazok között olyan „távolságot" is, amely a metrikus tér definíciójában szereplő „igazi" távolság tulajdonságaira sokkal jobban emlékeztet. Evégből az A és B halmazt akkor fogjuk egymáshoz „közelinek" tekinteni, ha A minden pontja B-hez és B minden pontja A-hoz „közel" van. Más szóval tekintsük a

(1.3.16) $d(A, B) = \max(\sup\{\rho(x, B)\colon x \in A\}, \sup\{\rho(y, A)\colon y \in B\})$

értéket egy metrikus tér nem-üres és korlátos A, B részhalmazaira; a korlátosságra azért van szükség, hogy a szereplő felső határok végesek legyenek, és ezt a korlátosság biztosítja is, hiszen (1.3.14) (d) szerint egy $a \in A$ pontot rögzítve bármely $x \in A$-ra

$$\rho(x, B) \leqq \rho(x, a) + \rho(a, B) \leqq \delta(A) + \rho(a, B),$$

s ugyanígy egy $b \in B$ ponttal minden $y \in B$-re

$$\rho(y, A) \leqq \delta(B) + \rho(b, A).$$

$d(A, B)$-t A és B **Hausdorff-féle távolságának** nevezzük.

$d(A, B)$ „távolság" elnevezése sokkal jogosultabb mint $\rho(A, B)$-é. Valóban:

(1.3.17)* *Ha A, B, C az E metrikus tér korlátos nem üres halmaza, akkor*

(a) $0 \leqq d(A, B) < +\infty$, $d(A, A) = 0$;

(b) $d(A, B) = d(B, A)$;

(c) $d(A, C) \leqq d(A, B) + d(B, C)$;

(d) $d(A, B) = 0$ *pontosan akkor, ha A minden pontja B-nek és B minden pontja A-nak érintkezési pontja.*

Bizonyítás. (b) evidens, (a) első részét pedig az előbb láttuk be. (d) következik (1.3.14) (c)-ből, s ennek (a) második része speciális esete. Végül (c) belátására legyen $x \in A$ tetszőleges. Ekkor (1.3.14) (d) szerint bármely $y \in B$-re

$$\rho(x, C) \leqq \rho(x, y) + \rho(y, C) \leqq \rho(x, y) + d(B, C),$$

$$\rho(x, C) - d(B, C) \leqq \rho(x, y),$$

úgyhogy

$$\rho(x, C) - d(B, C) \leqq \rho(x, B) \leqq d(A, B),$$

s végül

$$\rho(x, C) \leqq d(A, B) + d(B, C).$$

Ugyanígy tetszőleges $z \in C$ esetén

$$\rho(z, A) \leqq d(A, B) + d(B, C). \blacksquare$$

Minthogy (1.3.17) (d) értelmében zárt A és B esetén $d(A, B) = 0$ maga után vonja, hogy $A = B$, ezért kimondható:

(1.3.18)* *Egy metrikus tér nem-üres, korlátos, zárt halmazai a $d(A, B)$ Hausdorff-féle távolsággal metrikus teret alkotnak.* ∎

1.3.f. Eltérés. Láttuk, hogy a Hausdorff-féle „távolság" tetszőleges (nem feltétlenül zárt) korlátos, nem-üres halmazokra alkalmazva eleget tesz ugyan a metrikus tér definíciójában szereplő távolságfogalom (D_1), (D_2), (D_3) feltételeinek, (D_4)-nek azonban általában nem [pl. a számegyenesen $A = (0, 1)$, $B = [0, 1]$ választással $d(A, B) = 0$]. Állapodjunk meg abban, hogy **eltérésnek** nevezzük a $\rho(x, y)$ függvényt, ha valamely E halmaz elempárjaihoz a (D_1), (D_2), (D_3) kikötéseknek eleget tevő módon rendel valós számokat.

Eszerint a metrikus tér korlátos, nem-üres halmazain értelmezett $d(A, B)$ Hausdorff-féle „távolság" helyesebben nem távolság, hanem eltérés. További példákat adnak az eltérés fogalmára az (1.3.1) és (1.3.4) képletek, ha azokat nemcsak $[a, b]$-ben folytonos függvényekre alkalmazzuk, hanem például E-vel az összes $[a, b]$-ben Riemann szerint integrálható függvények halmazát jelöljük; ekkor ugyanis (D_1), (D_2) és (D_3) változatlanul érvényben marad, azonban

$$\int_a^b |f(t) - g(t)|\, dt = 0$$

ill.

$$\int_a^b |f(t) - g(t)|^2\, dt = 0$$

lehet akkor is, ha $f \neq g$ (pl. ha f és g csak véges számú helyen különbözik egymástól).

Az eltérés és a távolság fogalma között az alábbi tétel létesít kapcsolatot:

(1.3.19) *Legyen ρ eltérés az E halmazon. Ekkor az*

$$x \sim y \Leftrightarrow \rho(x, y) = 0$$

reláció ekvivalencia-reláció E-n. Legyen E^* az ekvivalencia-osztályok halmaza, és $x^*, y^* \in E^*$ esetén

$$\rho^*(x^*, y^*) = \rho(x, y) \qquad (x \in x^*, y \in y^*) \tag{1.3.20}$$

tetszőlegesen választott $x \in x^*$ és $y \in y^*$ elemekkel. Ez a ρ^* távolság E^*-on.

Bizonyítás. A $\sim$ reláció (D_1) miatt reflexív, (D_2) miatt szimmetrikus, és (D_3) miatt tranzitív: $\rho(x, y) = \rho(y, z) = 0$ esetén

$$0 \leqq \rho(x, z) \leqq \rho(x, y) + \rho(y, z) = 0.$$

Ha $x_1, x_2 \in x^* \in E^*$, $y_1, y_2 \in y^* \in E^*$, akkor (D_2) és (D_3) folytán

$$\rho(x_2, y_2) \leqq \rho(x_2, x_1) + \rho(x_1, y_1) + \rho(y_1, y_2) = 0 + \rho(x_1, y_1) + 0,$$

$$\rho(x_1, y_1) \leqq \rho(x_1, x_2) + \rho(x_2, y_2) + \rho(y_2, y_1) = 0 + \rho(x_2, y_2) + 0,$$

azaz $\rho(x_1, y_1) = \rho(x_2, y_2)$, és (1.3.20) értéke nem függ $x \in x^*$ és $y \in y^*$ választásától. Az így definiált ρ^*-ra nyilván áll (D_1)–(D_4). ∎

(1.3.19) szerint pl. metrikus tér keletkezik, ha az $[a, b]$-ben Riemann-integrálható függvények E halmazában az

$$f \sim g \Leftrightarrow \int_a^b |f(t) - g(t)|\, dt = 0$$

előírással ekvivalencia-relációt definiálunk, és az f^*, g^* ekvivalencia-osztályok távolságát a

$$\rho^*(f^*, g^*) = \int_a^b |f(t) - g(t)|\, dt \qquad (f \in f^*, g \in g^*)$$

képlettel értelmezzük. Kevésbé pontos, de elterjedt szóhasználattal maguk az E-beli függvények alkotnak metrikus teret, ha „az ekvivalens függvényeket egymással azonosnak tekintjük".

1.3.g. Félmetrikus terek. Az a körülmény, hogy a metrikus terekben megfogalmazott definíciók és a rájuk kimondott állítások java része (az egy csillaggal megjelöltek) csupán a távolság $(D_1)-(D_3)$ tulajdonságaira támaszkodik, más szóval azt jelenti, hogy ezek a definíciók kimondhatók, s az említett állítások érvényesek maradnak, akkor is, ha egy $E \neq \emptyset$ halmazon távolság helyett eltérés van megadva. Állapodjunk meg abban, hogy az $E \neq \emptyset$ halmazból és a rajta értelmezett ρ eltérésből álló $[E, \rho]$ párt **félmetrikus tér**nek (másként **pszeudometrikus tér**nek) mondjuk; ha a ρ eltérés választása az összefüggésekből nyilvánvaló, magát az E halmazt is nevezhetjük félmetrikus térnek.

Eszerint félmetrikus teret alkotnak az $[a, b] \subset \mathbf{R}$ intervallumon Riemann-integrálható függvények az (1.3.1) vagy (1.3.4) eltéréssel, vagy egy metrikus tér korlátos, nem-üres részhalmazai a $d(A, B)$ Hausdorff-féle „távolsággal" (amely valójában eltérés), sőt, mivel (1.3.17)-ben a ρ távolság (D_4) tulajdonságát nem használtuk fel, bármely félmetrikus tér korlátos, nem-üres halmazairól is ugyanez mondható.

(1.3.19) arra nyújt lehetőséget, hogy bármely $[E, \rho]$ félmetrikus térből kiindulva, ekvivalencia-osztályokra áttérve, metrikus térhez jussunk.

1.3.h. Gyakorlatok. 1. Az **I**-n folytonos valós függvények E halmazán értelmezzük a

$$\rho(f, g) = \int_0^1 |f(t) - g(t)|^2\, dt$$

kifejezést. Mutassuk meg, hogy erre nem teljesül (D_3).

[Legyen $t \in \mathbf{I}$ esetén $f(t) = 0$, $g(t) = t$, $h(t) = 1$.]

2. Legyen E a korlátos számsorozatok halmaza, $a = (a_n)$, $b = (b_n)$, $a, b \in E$ esetén

$$\rho(a, b) = \sup \{ |a_n - b_n| : n \in \mathbf{N} \}.$$

Mutassuk meg, hogy ρ távolság.

3. Ugyanez a feladat, ha E az olyan (a_n) számsorozatokból áll, amelyekre a $\sum_1^\infty a_n$ sor abszolút konvergens, és $a = (a_n)$, $b = (b_n)$, $a, b \in E$ esetén

$$\rho(a, b) = \sum_1^\infty |a_n - b_n|.$$

4. Az $\mathbf{R}^2$ halmaz x, y elemeire tekintsük az $x = (x_1, x_2)$, $y = (y_1, y_2)$ jelöléssel a

$$\rho'(x, y) = \max(|x_1 - y_1|, |x_2 - y_2|),$$

$$\rho''(x, y) = |x_1 - y_1| + |x_2 - y_2|$$

kifejezéseket.

(a) Mutassuk meg, hogy ρ' és ρ'' távolság;

(b) Mi lesz $S(x, \varepsilon)$ a ρ', ill. ρ'' távolság alapulvételével?

5. Mutassuk meg, hogy ha egy $[E, \rho]$ félmetrikus térben $x_n \to x$, $y_n \to y$, akkor $\rho(x_n, y_n) \to \rho(x, y)$.

6. Igazoljuk, hogy egy $[E, \rho]$ félmetrikus térben $a \in E$, $\varepsilon > 0$ esetén az $F = \{x: \rho(a, x) = \varepsilon\}$ halmaz zárt.

7. Legyen az $[E, \rho]$ teljes félmetrikus térben $A_n \neq \emptyset$ zárt. $A_1 \supset A_2 \supset A_3 \supset \dots$, és $\delta(A_n) \to 0$. Mutassuk meg, hogy $\bigcap\limits_1^\infty A_n \neq \emptyset$.

8. Mutassuk meg, hogy a 2. alatti metrikus tér teljes.

9. Mutassuk meg, hogy ugyanez a tér nem szeparábilis.

[Tekintsük a csak 0 és 1 tagú sorozatok halmazát.]

10. Mutassuk meg, hogy a 3. alatti metrikus tér szeparábilis.

[Tekintsük az olyan (a_n) sorozatokat, amelyekben $a_n \in \mathbf{Q}$, és valamely $m \in \mathbf{N}$ számra $n > m$ esetén $a_n = 0$.]

11. Egy $[E, \rho]$ metrikus térben az A halmazt $\varepsilon > 0$ mellett ε-ritkának mondjuk, ha $x, y \in A$, $x \neq y$ esetén $\rho(x, y) \geqq \varepsilon$. Mutassuk meg, hogy

(a) Ha valamely $\varepsilon > 0$ mellett van nem-megszámlálható ε-ritka halmaz, akkor a tér nem szeparábilis;

(b) Ha minden $\varepsilon > 0$-ra minden ε-ritka halmaz megszámlálható, akkor a tér szeparábilis.

[(1.1.28) felhasználásával $\varepsilon = \dfrac{1}{n}$, $n \in \mathbf{N}$ esetén készítendő maximális ε-ritka halmaz.]

12. Mutassuk meg, hogy az (1.3.13) kifejezés az $[\mathbf{R}, \rho_1]$ térben nem tesz eleget (D_3)-nak.

[Legyen $A = (0, 1)$, $B = (1, 2)$, $C = (2, 3)$.]

13. Legyen $A, B \subset \mathbf{R}^m$ zárt, A korlátos. Mutassuk meg, hogy van olyan $a \in A$, $b \in B$, hogy $\rho_m(A, B) = \rho_m(a, b)$.

[Olyan $a_n \in A$, $b_n \in B$ pontokat választva, hogy $\rho_m(a_n, b_n) \to \rho_m(A, B)$, tekintsük (a_n)-nek konvergens részsorozatát.]

14. Keressünk $\mathbf{R}$-ben példát arra, hogy a 13. alatti állítás nem marad helyes, ha elhagyjuk A korlátosságának feltételét.

$$\left[A = \mathbf{N},\ B = \left\{n + \frac{1}{n+1}:\ n \in \mathbf{N}\right\}.\right]$$

15. Legyen $[E, \rho]$ félmetrikus tér. Igazoljuk, hogy $x_n \to x$, $x_n \to y$ esetén $\rho(x, y) = 0$.

16. Legyen E az $[a, b] \subset \mathbf{R}$ intervallumon Riemann-integrálható függvények halmaza, ρ az (1.3.1) eltérés, $E_0 \subset E$ álljon az $[a, b]$-ben folytonos függvényekből. Mutassuk meg, hogy

(a) E_0 sűrű E-ben;

(b) E szeparábilis;

(c) $a < c < b$ esetén f-fel jelölve azt az E-beli függvényt, amelyre $a \leqq t \leqq c$ mellett $f(t) = 0$, $c < t \leqq b$ mellett $f(t) = 1$, minden $g \in E_0$-ra $\rho(f, g) > 0$;

(d) E_0 nem teljes.

[Ha $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$, f ingadozása $[x_{i-1}, x_i]$-ben ω_i, és g az a szakaszonként lineáris függvény, amelyre $g(x_i) = f(x_i)$ $(i = 0, \ldots, n)$, akkor $\rho(f, g) \leqq 2 \sum_1^n \omega_i(x_i - x_{i-1})$.]

II. TOPOLOGIKUS TEREK

2.1. A TOPOLOGIKUS TÉR FOGALMA

2.1.a. Konvergencia. Már az analízis elemeiben fellépnek olyan konvergenciafogalmak, amelyeknek értelmezése nem egy távolság- vagy eltérésfogalom bevezetésével történik, esetleg így nem is történhetik. E konvergenciafajták bevezetésére a metrikus térben (ill. euklideszi térben) definiált konvergenciának az az értelmezése szolgálhat mintául, amelyben a távolság segítségével előbb a pontok gömbi környezeteit vezetjük be, s aztán azt kívánjuk, hogy a limeszpont minden ilyen környezete tartalmazza a sorozat elég nagy indexű tagjait.

Ha például a számsorozatok végtelen határértékét is értelmezni akarjuk, akkor E-vel jelöljük az **R** számegyenes pontjaiból, továbbá a $+\infty$ és $-\infty$ szimbólumokból álló halmazt, és, **R** pontjainak környezeteit a szokásos módon értelmezve, megállapodunk abban, hogy $+\infty$ környezetein az $(a, +\infty]$ alakú, $-\infty$ környezetein a $[-\infty, a)$ alakú „végtelen intervallumokat" értjük; itt $(a, +\infty]$ elemei az a-nál nagyobb valós számok és $+\infty$, $[-\infty, a)$ elemei pedig az a-nál kisebb valós számok és $-\infty$. Az (x_n) számsorozatról aztán azt mondjuk, hogy $+\infty$-hez tart, ha $+\infty$ minden $(a, +\infty]$ környezetéhez található olyan n_0 index, hogy $n \geqq n_0$ esetén $x_n \in (a, +\infty]$. Hasonlóan írható le az is, hogy $x_n \to -\infty$, a $[-\infty, a)$ környezetek segítségével.

Az egyváltozós függvények egyoldali folytonosságával kapcsolatban szerepel az, hogy egy (x_n) valós számsorozat „jobbról tart", ill. „balról tart" egy x határértékhez. Ennek értelmezésére nevezzük x „jobb oldali környezeteinek" az $[x, x+\varepsilon)$ alakú, „bal oldali környezeteinek" az $(x-\varepsilon, x]$ alakú halmazokat ($\varepsilon > 0$), s azt mondjuk, hogy (x_n) jobbról (balról) tart x-hez, ha x minden jobb oldali (bal oldali) V környezetéhez található olyan n_0, hogy $n \geqq n_0$ esetén $x_n \in V$.

A függvénysorozatok különféle konvergenciatípusai között legtermészetesebb a **pontonkénti konvergencia;** a $H \neq \emptyset$ halmazon értelmezett f_n függvények sorozatáról azt mondjuk, hogy pontonként tart az f limeszfüggvényhez, ha minden $t \in H$ helyen az $f_n(t)$ helyettesítési értékekből álló számsorozat az $f(t)$ helyettesítési értékhez tart. Ez is leírható az előbbihez hasonló módon, ha az f függvény „környezetein" a

$$V_{t,\varepsilon} = \{g\colon |g(t) - f(t)| < \varepsilon\} \qquad (t \in H,\ \varepsilon > 0),$$

alakú függvényhalmazokat értjük, ahol t H-nak tetszőleges helye, ε tetszőleges pozitív szám. Az, hogy $f_n \to f$ pontonként, valóban annyit jelent, hogy f-nek minden $V_{t,\varepsilon}$ környezetéhez található olyan n_0, hogy $n \geqq n_0$ esetén $f_n \in V_{t,\varepsilon}$.

Ezekből a példákból kiindulva kézenfekvően kínálkozik a konvergencia következő általános definíciója: egy E halmaz minden x eleméhez kijelöljük E bizonyos részhalmazait, amelyeket x „környezeteinek" nevezünk, és azt mondjuk, hogy egy E elemeiből álló (x_n) sorozat „x-hez tart", ha x minden V környezetéhez megadható olyan n_0 index, hogy $n \geqq n_0$ esetén $x_n \in V$. A kérdés csak az, hogy milyen kikötéseket célszerű tenni a környezetként kijelölt halmazokra vonatkozóan annak érdekében, hogy eddigi példáinkat felölelő és eléggé jól használható általános konvergenciafogalomhoz jussunk.

E vonatkozásban jegyezzük meg először is, hogy meglehetősen természetes követelmény az (1.2.4) tétel teljesülése, vagyis az, hogy az $x, x, x, \ldots$ sorozat x-hez tartson. Ezt nyilván az biztosítja, hogy x minden környezete tartalmazza magát x-et; ez eddigi összes példáinkban így van, és a továbbiakban is mindig meg fogjuk kívánni.

Másrészt meg kell gondolnunk, hogy az x pont „környezeteit" többféleképpen is ki lehet jelölni úgy, hogy a különféle környezetfogalmaknak ugyanaz a konvergenciafogalom feleljen meg. Így először is világos, hogy ha a $\mathfrak{V}_1$ és $\mathfrak{V}_2$ halmazrendszer olyan kapcsolatban van egymással, hogy minden $V_1 \in \mathfrak{V}_1$ halmaz tartalmaz egy $V_1 \supset V_2 \in \mathfrak{V}_2$ részhalmazt, és minden $\mathfrak{V}_2$-beli halmaz is tartalmaz egy $\mathfrak{V}_1$-beli részhalmazt, akkor ugyanazok a sorozatok fognak x-hez tartani akkor is, ha x környezeteinek a $\mathfrak{V}_1$-beli halmazokat tekintjük, s akkor is, ha környezeteknek a $\mathfrak{V}_2$-beli halmazokat tekintjük. Például a számegyenesen a konvergencia szokásos fogalmához jutunk, ha x környezeteinek a szokásos $(x-\varepsilon, x+\varepsilon)$ $(\varepsilon > 0)$ halmazok helyett az alábbi halmazrendszerek bármelyikének halmazait tekintjük:

(a) az $[x-\varepsilon, x+\varepsilon]$ halmazok $(\varepsilon > 0)$;

(b) az $(x-\varepsilon, x+\varepsilon)$ halmazok $(\varepsilon > 0$ racionális$)$;

(c) az $\left(x-\frac{1}{n}, x+\frac{1}{n}\right)$ halmazok $(n \in \mathbf{N})$;

(d) az x-et tartalmazó összes nyílt intervallumok;

(e) az x-et tartalmazó racionális végpontú nyílt intervallumok;

és e felsorolás könnyen folytatható volna.

Hasonlóan, egy $[E, \rho]$ (fél)metrikus térben a konvergencia szokásos fogalmához jutunk, ha x környezeteinek az $S(x, \varepsilon)$ gömbök helyett $(\varepsilon > 0)$ az alábbiak valamelyikét tekintjük:

(f) az $\bar{S}(x, \varepsilon)$ zárt gömböket $(\varepsilon > 0)$;

(g) az $S(x, \varepsilon)$ gömböket $(\varepsilon > 0$ racionális$)$;

(h) az $S\left(x, \frac{1}{n}\right)$ gömböket $(n \in \mathbf{N})$;

(i) az x-et tartalmazó összes gömböket;

(j) az x-et tartalmazó racionális sugarú gömböket; stb.

Az $\mathbf{R}^m$ térben az előbbiekhez fűzhető még pl.

(k) az $(x-\varepsilon_1, \ldots, x-\varepsilon_m;\ x+\varepsilon_1, \ldots, x+\varepsilon_m)$ nyílt téglák $(\varepsilon_i > 0$, $i = 1, \ldots, m)$;

(l) az $[x-\varepsilon, \ldots, x-\varepsilon;\ x+\varepsilon, \ldots, x+\varepsilon]$ zárt téglák $(\varepsilon > 0)$;

(m) az összes x-et tartalmazó nyílt téglák.

Vegyük azután észre, hogy ha x környezeteinek egy $\mathfrak{B}$ halmazrendszer halmazait tekintve értelmeztük az x-hez tartó sorozatokat, s aztán x környezetei közé soroljuk még a $V_1 \cap V_2$ alakú halmazokat is, ahol $V_1, V_2 \in \mathfrak{B}$, akkor továbbra is ugyanazok a sorozatok fognak x-hez tartani. Valóban, ha $n \geqq n_1$ esetén $x_n \in V_1$, és $n \geqq n_2$ esetén $x_n \in V_2$, akkor $n_0 = \max(n_1, n_2)$ választással $n \geqq n_0$ esetén $x_n \in V_1 \cap V_2$. Hasonlóan nem befolyásolja az x-hez tartó sorozatokat az sem, ha x környezetei közé iktatjuk a véges számú $\mathfrak{B}$-beli halmaz metszeteként előállítható halmazokat.

Eszerint az x pont kétféle környezetrendszere, $\mathfrak{B}_1$ és $\mathfrak{B}_2$, ugyanahhoz a konvergenciafogalomhoz vezet, ha minden $\mathfrak{B}_1$-beli halmaznak van $\mathfrak{B}_2$-beli s minden $\mathfrak{B}_2$-belinek $\mathfrak{B}_1$-beli részhalmaza, és akkor is, ha $\mathfrak{B}_2$ a $\mathfrak{B}_1$-beli halmazok véges metszeteiből áll. A konvergenciafogalom szempontjából tehát nincs értelme különbséget tenni az olyan környezet-kijelölések között, amelyek ilyen jellegű kapcsolatban állnak egymással. A végleges definíciók kialakítása előtt ezért érdemes halmazrendszerek közötti ilyen kapcsolatokat alaposabban tanulmányozni és célszerű elnevezéseket bevezetni. Ez a következő pont célja.

2.1.b. Centrált rendszerek, rácsok, szűrők. A következőkben **halmazrendszere**n mindig nem-üres halmazrendszert értünk. Gyakran lesz szó olyan halmazrendszerről, amelynek minden eleme egy adott E halmaznak részhalmaza; ilyenkor E-**beli halmazrendszer**ről fogunk beszélni.

Legyen $\mathfrak{A}$ és $\mathfrak{B}$ két halmazrendszer. Azt mondjuk, hogy $\mathfrak{A}$ **durvább** $\mathfrak{B}$-nél, vagy $\mathfrak{B}$ **finomabb** $\mathfrak{A}$-nál, jelben $\mathfrak{A} < \mathfrak{B}$ vagy $\mathfrak{B} > \mathfrak{A}$, ha minden $A \in \mathfrak{A}$ halmaznak van egy $B \in \mathfrak{B}$, $B \subset A$ részhalmaza. Rögtön adódik a definícióból:

(2.1.1) (a) $\mathfrak{A} \subset \mathfrak{B}$ *esetén* $\mathfrak{A} < \mathfrak{B}$;

(b) $\mathfrak{A} < \mathfrak{B}$, $\mathfrak{B} < \mathfrak{C}$ *esetén* $\mathfrak{A} < \mathfrak{C}$. ∎

Ha $\mathfrak{A} < \mathfrak{B}$ és $\mathfrak{B} < \mathfrak{A}$ egyidejűleg fennáll, az $\mathfrak{A}$ és $\mathfrak{B}$ halmazrendszert egymással **ekvivalens**nek mondjuk, jelben $\mathfrak{A} \sim \mathfrak{B}$. (2.1.1)-ből azonnal látszik, hogy ez csakugyan ekvivalencia-reláció.

Ilyenformán adott E halmazt rögzítve, az E-beli halmazrendszerek az előbbi ekvivalencia-relációnak megfelelő ekvivalencia-osztályokba sorolhatók. Minden ilyen ekvivalencia-osztályban van egy kitüntetett halmazrendszer. Ennek belátására nevezzünk egy E-beli $\mathfrak{A}$ halmazrendszert E-ben **felszálló**nak, ha $A \in \mathfrak{A}$, $A \subset B \subset E$ esetén $B \in \mathfrak{A}$. Rögtön világos:

(2.1.2) *Ha $\mathfrak{A}$ és $\mathfrak{B}$ E-beli halmazrendszer, és $\mathfrak{B}$ felszálló E-ben, akkor $\mathfrak{A} < \mathfrak{B}$ esetén $\mathfrak{A} \subset \mathfrak{B}$.* ∎

(2.1.3) *Ha $\mathfrak{A}$ és $\mathfrak{B}$ E-ben felszálló halmazrendszer, és $\mathfrak{A} \sim \mathfrak{B}$, akkor $\mathfrak{A} = \mathfrak{B}$.* ∎

(2.1.1)-et figyelembe véve mondható tehát, hogy az E-ben felszálló halmazrendszerek körében a $<$ reláció a $\subset$ relációval, az $\sim$ reláció az $=$ relációval esik egybe, és így E-beli halmazrendszerek minden ekvivalencia-osztálya legfeljebb egy E-ben felszálló halmazrendszert tartalmaz. Másrészt viszont:

(2.1.4) *Legyen $\mathfrak{A}$ tetszőleges E-beli halmazrendszer. Ekkor E összes olyan részhalmazai, amelyeknek van $\mathfrak{A}$-hoz tartozó részhalmazuk, $\mathfrak{A}$-val ekvivalens, E-ben felszálló halmazrendszert alkotnak; ezt nevezzük az $\mathfrak{A}$ által generált E-ben felszálló halmazrendszernek.* ∎

Így az E-beli halmazrendszerek minden ekvivalencia-osztálya pontosan egy E-ben felszálló halmazrendszert tartalmaz; két E-beli halmazrendszer pontosan akkor ekvivalens, ha ugyanazt az E-ben felszálló halmazrendszert generálják.

Az E-ben felszálló halmazrendszerek közül különösen fontos szerepet játszanak azok, amelyekből a rendszerbeli halmazok véges metszeteinek képzése nem vezet ki. Erre vonatkozik a következő definíció: **E-beli szűrőnek** mondjuk az E-ben felszálló $\mathfrak{z}$ halmazrendszert, ha csupa nem-üres halmazból áll, s ha két $\mathfrak{z}$-beli halmaznak a metszete is $\mathfrak{z}$-hez tartozik. Néha a szűrő előbbi definíciójából elhagyják azt a kikötést, hogy nem-üres halmazokból álljon, azaz E-beli szűrőnek tekintik azt az egyetlen E-ben felszálló halmazrendszert, amely $\emptyset$-t tartalmazza, s így egyszerűen E összes részhalmazaiból áll; ilyenkor a többi E-beli szűrőt **valódi szűrőnek** mondják. Mi csak a valódi szűrőket fogjuk szűrőnek tekinteni. Ilyenre példa, ha $\emptyset \neq A \subset E$, az összes $A \subset S \subset E$ tulajdonságú S halmazok rendszere; ezt az A-hoz tartozó E-beli **főszűrőnek** nevezzük, és $\dot{A}$-tal jelöljük. Speciálisan egyelemű $A = \{x\}$ halmaz esetén x-hez tartozó **alapszűrőről** beszélünk, és az $\dot{x}$ jelölést használjuk.

Érthetően fontos szerepet fognak játszani az olyan E-beli halmazrendszerek, amelyek ekvivalensek egy E-beli szűrővel; ilyenek az E-beli rácsok. Általában **rácsnak** mondjuk az olyan $\mathfrak{r}$ halmazrendszert, amely nem-üres halmazokból áll, és bármely két $\mathfrak{r}$-beli halmaz metszetének van $\mathfrak{r}$-beli részhalmaza. Nyilván minden szűrő egyúttal rács is; további egyszerű példa az egyetlen nem-üres A halmazból álló egyelemű $\{A\}$ halmazrendszer, valamint az előbbi pontban a számegyenesen definiált (a)—(e) rendszerek, a metrikus térben definiált (f)—(j) rendszerek és az $\mathbf{R}^m$-ben értelmezett (k)—(m) rendszerek bármelyike.

(2.1.5) *Egy ráccsal ekvivalens bármely halmazrendszer maga is rács.*

Bizonyítás. Legyen $\mathfrak{r}$ rács, $\mathfrak{A} \sim \mathfrak{r}$. $A \in \mathfrak{A}$ esetén $A \supset R \in \mathfrak{r}$ alkalmas R-re, így $R \neq \emptyset$ miatt $A \neq \emptyset$. $A_1, A_2 \in \mathfrak{A}$ esetén van oly $R_1, R_2 \in \mathfrak{r}$, hogy $A_1 \supset R_1$, $A_2 \supset R_2$, majd oly $R_3 \in \mathfrak{r}$, hogy $R_1 \cap R_2 \supset R_3$, végül oly $A_3 \in \mathfrak{A}$, hogy $R_3 \supset A_3$. Így $A_1 \cap A_2 \supset A_3$. ∎

Eszerint egy E-beli szűrővel ekvivalens halmazrendszer csak rács lehet. Megfordítva:

(2.1.6) *Ha $\mathfrak{r}$ E-beli rács, akkor az $\mathfrak{r}$ által generált E-ben felszálló $\mathfrak{z}$ halmazrendszer E-beli szűrő. Ezt az $\mathfrak{r}$* **által generált E-beli szűrő***nek nevezzük, s viszont $\mathfrak{r}$-et a $\mathfrak{z}$* **szűrő bázis***ának.*

Bizonyítás. $S \in \mathfrak{z}$ esetén van olyan $R \in \mathfrak{r}$, hogy $S \supset R$, így $R \neq \emptyset$ miatt $S \neq \emptyset$. Másrészt $S_1, S_2 \in \mathfrak{z}$ esetén legyen $R_1, R_2 \in \mathfrak{r}$ olyan, hogy $S_1 \supset R_1$, $S_2 \supset R_2$, és $R_3 \in \mathfrak{r}$ olyan, hogy $R_1 \cap R_2 \supset R_3$. Ekkor $S_1 \cap S_2 \supset R_3$, és $S_1 \cap S_2 \in \mathfrak{z}$. ∎

Például az egyelemű $\{A\}$ rács, ahol $\emptyset \neq A \subset E$, E-beli szűrőként az $\dot{A}$ főszűrőt generálja, az egyetlen $\{x\}$ halmazból, ahol $x \in E$, álló $\{\{x\}\}$ rács pedig az $\dot{x}$ alapszűrőt.

Az előbbi tételre való tekintettel szokták a rács elnevezés helyett a „szűrőbázis" szót is használni. Mi azonban csak adott szűrő bázisáról fogunk beszélni, eszerint egy E-beli $\mathfrak{z}$ szűrő bázisa az olyan E-beli $\mathfrak{r}$ rács, amely E-ben felszálló rendszerként $\mathfrak{z}$-et generálja, azaz amely $\mathfrak{z}$-tel ekvivalens. (2.1.2)-re és (2.1.5)-re tekintettel kimondható:

(2.1.7) *Egy* $\mathfrak{r}$ *halmazrendszer pontosan akkor bázisa az E-beli* $\mathfrak{z}$ *szűrőnek, ha* $\mathfrak{r} \subset \mathfrak{z}$, *és minden* $S \in \mathfrak{z}$ *halmaznak van* $R \in \mathfrak{r}$ *részhalmaza.* ▌

Figyelmet érdemelnek még azok a halmazrendszerek is, amelyek egy szűrőnél durvábbak; ilyenek a centrált rendszerek. Nevezzük a $\mathfrak{c}$ halmazrendszert **centrált rendszer**nek, ha véges számú $\mathfrak{c}$-beli halmaz metszete sohasem üres. Világos, hogy minden rács, speciálisan minden szűrő centrált rendszer.

(2.1.8) *Egy centrált rendszernél durvább halmazrendszer is centrált.*

Bizonyítás. Legyen $\mathfrak{c}$ centrált rendszer és $\mathfrak{A} < \mathfrak{c}$. Ekkor $A_i \in \mathfrak{A}$ $(i = 1, \dots, n)$ esetén vannak oly $C_i \in \mathfrak{c}$ halmazok $(i = 1, \dots, n)$, hogy $A_i \supset C_i$; $\bigcap_1^n C_i \neq \emptyset$ folytán $\bigcap_1^n A_i \neq \emptyset$. ▌

Eszerint egy E-beli rácsnál durvább halmazrendszer szükségképpen centrált. Megfordítva:

(2.1.9) *Legyen* $\mathfrak{c}$ *E-beli centrált rendszer. Ekkor a véges számú* $\mathfrak{c}$*-beli halmaz metszeteként nyerhető halmazok egy E-beli* $\mathfrak{r}$ *rácsot alkotnak. Az* $\mathfrak{r}$ *által generált E-beli* $\mathfrak{z}$ *szűrő finomabb* $\mathfrak{c}$*-nél, és egyúttal a legdurvább (azaz legszűkebb) E-beli szűrő, amely* $\mathfrak{c}$*-nél finomabb.* $\mathfrak{z}$*-et a* $\mathfrak{c}$ **által generált** *E*-**beli szűrő***nek,* $\mathfrak{c}$*-t a* $\mathfrak{z}$ **szűrő szubbázisá***nak mondjuk.*

Bizonyítás. $\mathfrak{c}$ centráltsága miatt az $\mathfrak{r}$-hez tartozó halmazok nem üresek, és két $\mathfrak{r}$-beli halmaz metszete maga is $\mathfrak{r}$-hez tartozik. Így $\mathfrak{r}$ rács. Nyilván $\mathfrak{c} \subset \mathfrak{r}$, s így $\mathfrak{c} < \mathfrak{r} < \mathfrak{z}$. Ha egy E-beli $\mathfrak{z}'$ szűrőre $\mathfrak{c} < \mathfrak{z}'$, akkor (2.1.2) folytán $\mathfrak{c} \subset \mathfrak{z}'$, ezért $\mathfrak{r} \subset \mathfrak{z}'$, $\mathfrak{r} < \mathfrak{z}'$, és $\mathfrak{z} < \mathfrak{r} < \mathfrak{z}'$, amiből ismét (2.1.2) alapján $\mathfrak{z} \subset \mathfrak{z}'$ is következik. ▌

Eszerint egy E-beli $\mathfrak{z}$ szűrő szubbázisa $\mathfrak{z}$-nek olyan $\mathfrak{c}$ részrendszere, hogy bármely $S \in \mathfrak{z}$ halmazhoz található véges számú $C_i \in \mathfrak{c}$ $(i = 1, \dots, n)$ halmaz, melyekre $\bigcap_1^n C_i \subset S$. Világos, hogy egy E-beli $\mathfrak{r}$ rács centrált rendszerként ugyanazt az E-beli szűrőt generálja, mint rácsként, hiszen a rácsként generált $\mathfrak{z}$ szűrőre $\mathfrak{r} \sim \mathfrak{z}$, s így minden $\mathfrak{r}$-nél finomabb $\mathfrak{z}'$ szűrőre $\mathfrak{z} < \mathfrak{r} < \mathfrak{z}'$.

Legyen $\mathfrak{A}$ és $\mathfrak{B}$ két halmazrendszer, és definiáljunk segítségükkel két további halmazrendszert a következő módon:

(2.1.10) $\mathfrak{A} (\cap) \mathfrak{B} = \{A \cap B \colon A \in \mathfrak{A},\ B \in \mathfrak{B}\}$,

(2.1.11) $\mathfrak{A} (\cup) \mathfrak{B} = \{A \cup B \colon A \in \mathfrak{A},\ B \in \mathfrak{B}\}$.

Rögtön adódik a definícióból:

(2.1.12) $\mathfrak{A} (\cap) \mathfrak{B} = \mathfrak{B} (\cap) \mathfrak{A}$, $\mathfrak{A} (\cup) \mathfrak{B} = \mathfrak{B} (\cup) \mathfrak{A}$. ▌

(2.1.13) $\mathfrak{A} (\cap) (\mathfrak{B} (\cap) \mathfrak{C}) = (\mathfrak{A} (\cap) \mathfrak{B}) (\cap) \mathfrak{C}$. ▌

(2.1.14) $\mathfrak{A} (\cup) (\mathfrak{B} (\cup) \mathfrak{C}) = (\mathfrak{A} (\cup) \mathfrak{B}) (\cup) \mathfrak{C}$. ▌

(2.1.15) $\mathfrak{A}_1 \subset \mathfrak{A}_2$, $\mathfrak{B}_1 \subset \mathfrak{B}_2$ *esetén*

$\mathfrak{A}_1 (\cap) \mathfrak{B}_1 \subset \mathfrak{A}_2 (\cap) \mathfrak{B}_2$, $\mathfrak{A}_1 (\cup) \mathfrak{B}_1 \subset \mathfrak{A}_2 (\cup) \mathfrak{B}_2$. ▌

(2.1.16) $\mathfrak{A}_1 < \mathfrak{A}_2$, $\mathfrak{B}_1 < \mathfrak{B}_2$ *esetén*

$\mathfrak{A}_1 (\cap) \mathfrak{B}_1 < \mathfrak{A}_2 (\cap) \mathfrak{B}_2$, $\mathfrak{A}_1 (\cup) \mathfrak{B}_1 < \mathfrak{A}_2 (\cup) \mathfrak{B}_2$. ▌

(2.1.17) $\mathfrak{A}_1 \sim \mathfrak{A}_2$, $\mathfrak{B}_1 \sim \mathfrak{B}_2$ *esetén*

$\mathfrak{A}_1 (\cap) \mathfrak{B}_1 \sim \mathfrak{A}_2 (\cap) \mathfrak{B}_2$, $\mathfrak{A}_1 (\cup) \mathfrak{B}_1 \sim \mathfrak{A}_2 (\cup) \mathfrak{B}_2$. ▌

(2.1.18) $\mathfrak{A}(\cup)\mathfrak{B} < \mathfrak{A} < \mathfrak{A}(\cap)\mathfrak{B}$; $\mathfrak{A}(\cup)\mathfrak{B} < \mathfrak{B} < \mathfrak{A}(\cap)\mathfrak{B}$. ∎

(2.1.19) *Az $\mathfrak{r}$ halmazrendszer pontosan akkor rács, ha $\emptyset \notin \mathfrak{r}$ és $\mathfrak{r}(\cap)\mathfrak{r} < \mathfrak{r}$.* ∎

(2.1.20) *Ha $\mathfrak{A}$ felszálló E-ben, $\mathfrak{B}$ felszálló F-ben, akkor $\mathfrak{A}(\cap)\mathfrak{B}$ felszálló $(E \cap F)$-ben, $\mathfrak{A}(\cup)\mathfrak{B}$ felszálló $(E \cup F)$-ben.*

Bizonyítás. Legyen $A \in \mathfrak{A}$, $B \in \mathfrak{B}$. Ha

$$A \cap B \subset C \subset E \cap F,$$

akkor

$$A \subset A \cup C \subset E,\ B \subset B \cup C \subset F$$

miatt

$$A \cup C \in \mathfrak{A},\ B \cup C \in \mathfrak{B},$$

és

$$(A \cup C) \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C) \cup (C \cap B) \cup C = C \in \mathfrak{A}(\cap)\mathfrak{B}.$$

Ha viszont

$$A \cup B \subset D \subset E \cup F,$$

akkor

$$A \subset D \cap E \subset E,\ B \subset D \cap F \subset F$$

folytán

$$D \cap E \in \mathfrak{A},\ D \cap F \in \mathfrak{B},$$

és

$$(D \cap E) \cup (D \cap F) = D \cap (E \cup F) = D \in \mathfrak{A}(\cup)\mathfrak{B}. \blacksquare$$

(2.1.21) *Ha $\mathfrak{a}$ és $\mathfrak{b}$ rács, és $\emptyset \notin \mathfrak{a}(\cap)\mathfrak{b}$, akkor $\mathfrak{a}(\cap)\mathfrak{b}$ a legdurvább rácsok egyike, amely $\mathfrak{a}$-nál is, $\mathfrak{b}$-nél is finomabb.*

Bizonyítás. Feltevésünk szerint, (2.1.19) figyelembevételével,

$$(\mathfrak{a}(\cap)\mathfrak{b})(\cap)(\mathfrak{a}(\cap)\mathfrak{b}) = (\mathfrak{a}(\cap)\mathfrak{a})(\cap)(\mathfrak{b}(\cap)\mathfrak{b}) < \mathfrak{a}(\cap)\mathfrak{b},$$

és $\mathfrak{a}(\cap)\mathfrak{b}$ rács, mégpedig (2.1.18) szerint $\mathfrak{a}$-nál is, $\mathfrak{b}$-nél is finomabb. Másrészt ha $\mathfrak{r}$ rács, és $\mathfrak{r} > \mathfrak{a}$, $\mathfrak{r} > \mathfrak{b}$, akkor $\mathfrak{r} > \mathfrak{r}(\cap)\mathfrak{r} > \mathfrak{a}(\cap)\mathfrak{b}$. ∎

(2.1.22) *$\mathfrak{A}(\cup)\mathfrak{B}$ az egyik legfinomabb halmazrendszer, amely $\mathfrak{A}$-nál is, $\mathfrak{B}$-nél is durvább.*

Bizonyítás. Tudjuk (2.1.18)-ból, hogy $\mathfrak{A}(\cup)\mathfrak{B}$ durvább $\mathfrak{A}$-nál is, $\mathfrak{B}$-nél is. Ha $\mathfrak{C}$ is ilyen halmazrendszer, akkor $C \in \mathfrak{C}$-hez van oly $A \in \mathfrak{A}$, $B \in \mathfrak{B}$, hogy $A \subset C$, $B \subset C$, s akkor $A \cup B \in \mathfrak{A}(\cup)\mathfrak{B}$, $A \cup B \subset C$. Így $\mathfrak{A}(\cup)\mathfrak{B} > \mathfrak{C}$. ∎

(2.1.23) *Ha $\mathfrak{a}$ és $\mathfrak{b}$ rács, akkor $\mathfrak{a}(\cup)\mathfrak{b}$ is rács.*

Bizonyítás. Világos, hogy $\mathfrak{a}(\cup)\mathfrak{b}$ nem-üres halmazokból áll. $A_1, A_2 \in \mathfrak{a}$, $B_1, B_2 \in \mathfrak{b}$ esetén van olyan $A_3 \in \mathfrak{a}$, $B_3 \in \mathfrak{b}$, hogy $A_3 \subset A_1 \cap A_2$, $B_3 \subset B_1 \cap B_2$. Ekkor

$$A_3 \cup B_3 \subset (A_1 \cup B_1) \cap (A_2 \cup B_2). \blacksquare$$

Említsük meg (2.1.20)—(2.1.23) alábbi következményeit:

(2.1.24) *Ha $\mathfrak{a}$ és $\mathfrak{b}$ szűrő E-ben, akkor $\mathfrak{a}(\cup)\mathfrak{b}$ is szűrő, a $\emptyset \notin \mathfrak{a}(\cap)\mathfrak{b}$ feltétel teljesülése esetén pedig $\mathfrak{a}(\cap)\mathfrak{b}$ is az, mégpedig $\mathfrak{a}(\cup)\mathfrak{b}$ a legfinomabb E-beli szűrő, amely $\mathfrak{a}$-nál is, $\mathfrak{b}$-nél is durvább, $\mathfrak{a}(\cap)\mathfrak{b}$ pedig a legdurvább E-beli szűrő, amely $\mathfrak{a}$-nál is, $\mathfrak{b}$-nél is finomabb.* ∎

(2.1.25) *Ha* $\mathfrak{z}$ *szűrő E-ben,* $A \subset E$, *és* $\emptyset \notin \mathfrak{z}(\cap)\{A\}$, *akkor* $\mathfrak{z}(\cap)\{A\}$ *szűrő A-ban.* ∎

Vegyük észre, hogy egy halmazrendszer centrált vagy rács volta a rendszernek „belső", „abszolút" tulajdonsága, viszont felszálló rendszer vagy szűrő mindig csak egy adott E halmazra nézve lehet a rendszer. Az előzőkben tetszőleges halmazrendszereket gót nagybetűkkel jelöltünk, centrált rendszereket (speciálisan rácsokat vagy szűrőket) pedig gót kisbetűkkel. Ezt ezután is így fogjuk tenni.

2.1.c. Környezetstruktúrák. Térjünk most vissza a **2.1.a.** alatt vizsgált általános konvergenciafogalomhoz. Ehhez úgy jutottunk, hogy egy E halmaz minden x eleméhez kijelöltük E x-et tartalmazó részhalmazainak valamely rendszerét; ez a rendszer természetesen centrált. Láttuk, hogy az x kijelölt „környezeteinek" véges metszeteiből álló rendszer is, továbbá az utóbbival ekvivalens bármely más rendszer is, (2.1.9) értelmében tehát az eredetileg megadott környezetek centrált rendszere által generált szűrő is ugyanahhoz a konvergenciafogalomhoz vezet. Nem jelenti tehát az általánosság megszorítását, ha eleve kikötjük, hogy E minden x eleméhez egy x-et tartalmazó halmazokból álló E-beli szűrőt jelöljünk ki; ez a megállapodás azért előnyös, mert szűrőből a véges metszetek képzésének művelete már nem vezet ki, s egymással ekvivalens szűrők egyszerűen egybeesnek.

Így a következő definíciót fogadjuk el: ha E tetszőleges nem-üres halmaz, nevezzük E-**beli** $\mathfrak{V}$ **környezetstruktúrá**nak az olyan előírást, amely minden $x \in E$ elemhez hozzárendel egy x-et tartalmazó halmazokból álló $\mathfrak{v}(x)$ E-beli szűrőt. Az E halmazból és a $\mathfrak{V}$ környezetstruktúrából álló $[E, \mathfrak{V}]$ párt **környezettér**nek, E elemeit **pont**oknak, az $x \in E$ ponthoz tartozó $\mathfrak{v}(x)$ szűrőt x **környezetszűrőj**ének, a $\mathfrak{v}(x)$-beli halmazokat x **környezet**einek mondjuk.

Vegyük észre, hogy a $\mathfrak{V}$ környezetstruktúra az E halmazt egyértelműen meghatározza, hiszen bármely $\mathfrak{v}(x)$ környezetszűrőben E a legbővebb halmaz. Így az $[E, \mathfrak{V}]$ környezettér már $\mathfrak{V}$ megadása esetén is meg van határozva; E-t a $\mathfrak{V}$ környezetstruktúra **hordozójá**nak mondjuk.

A $\mathfrak{v}(x)$ környezetszűrő valamely bázisát, ill. szubbázisát az x pont **környezetbázisá**nak, ill. **környezetszubbázisá**nak nevezzük. Eszerint x környezetbázisa minden olyan x környezeteiből álló rendszer, hogy x minden környezete tartalmaz egy e rendszerhez tartozó részhalmazt, x környezetszubbázisa pedig minden olyan x környezeteiből álló rendszer, hogy x minden környezete tartalmazza véges számú alkalmas e rendszerbeli halmaz metszetét.

Egy környezetstruktúra megadása történhetik a környezetszűrők megadása helyett környezetbázisok vagy környezetszubbázisok megadásával is. Valóban, ha E minden x eleméhez előírunk egy x-et tartalmazó halmazokból álló E-beli $\mathfrak{b}(x)$ rácsot, és $\mathfrak{v}(x)$ jelenti a $\mathfrak{b}(x)$ által generált E-beli szűrőt, nyilván környezetstruktúrát kapunk E-n, s erre nézve $\mathfrak{b}(x)$ x-nek környezetbázisa lesz. Hasonlóan, ha $\mathfrak{c}(x)$ egy x-et tartalmazó részhalmazokból álló E-beli (nyilván centrált) halmazrendszer, akkor a $\mathfrak{c}(x)$ által generált $\mathfrak{v}(x)$ E-beli szűrőt x-hez rendelve környezetstruktúra keletkezik, s erre nézve $\mathfrak{c}(x)$ x-nek környezetszubbázisa. A leggyakrabban e két mód egyikén történik a környezetstruktúra megadása.

Például egy E metrikus térben az x pont körüli $S(x, \varepsilon)$ ($\varepsilon > 0$) gömbök rácsot alkotnak; az ezáltal generált E-beli $\mathfrak{v}(x)$ szűrőt x környezetszűrőjének tekintve környezetstruktúrát kapunk E-n; ezt nevezzük a **metrikus tér környezetstruktúrájának**. Erre nézve x környezetei azok a halmazok, amelyek tartalmazzák x-nek egy gömbi környezetét, vagyis amelyeknek x belső pontja. Ugyanehhez a környezetstruktúrához jutunk, ha az $S(x, \varepsilon)$ gömbök rácsa helyett bármely vele ekvivalens rácsból indulunk ki, példáaul a **2.1.a** pontban (f)—(j) alatt felsoroltak valamelyikéből, vagy $\mathbf{R}^m$ esetén a (k)—(m) alatti, $\mathbf{R}$ esetén az (a)—(e) alatti rácsok egyikéből. Ugyanígy a **2.1.a**-ban a végtelenhez való konvergencia, ill. az egyoldali konvergencia tárgyalására az $E = \mathbf{R} \cup \{+\infty\} \cup \{-\infty\}$ halmazon, ill. az $\mathbf{R}$ halmazon x-hez kijelölt „környezetrendszerek" valójában környezetbázisok, amelyek egy-egy környezetstruktúrát értelmeznek.

A $H \neq \emptyset$ halmazon értelmezett függvények E halmazában a pontonkénti konvergencia származtatására bevezetett $V_{t,\varepsilon}$ „környezetek" viszont nem alkotnak rácsot ($t_1 \neq t_2$ esetén $V_{t_1,\varepsilon_1} \cap V_{t_2,\varepsilon_2}$ nem tartalmaz $V_{t,\varepsilon}$ alakú halmazt), így ezt csak környezetszubbázisnak tekinthetjük, amely azonban ismét meghatároz egy környezetstruktúrát E-n.

2.1.d. Konvergencia, nyílt és zárt halmazok környezettérben. Könnyen meggyőződhetünk most már arról, hogy a környezettér előbb definiált fogalma csakugyan módot nyújt a pontsorozat konvergenciájának értelmezésére. Ha (x_n) az $[E, \mathfrak{V}]$ környezettérben fekvő tetszőleges sorozat [amin persze azt értjük, hogy $x_n \in E$ $(n \in \mathrm{N})$], akkor azt mondjuk, hogy (x_n) **tart** (vagy **konvergál**) az $x \in E$ **limeszpont**hoz, jelben $x_n \to x$ vagy $\lim x_n = x$, ha x minden $V \in \mathfrak{v}(x)$ környezetéhez van olyan n_0 index, hogy $n \geqq n_0$ esetén $x_n \in V$.

Vegyük észre, hogy ez a definíció még a következő módon is megfogalmazható. Legyen

$$R_k = \{x_n \colon n \geqq k\} \qquad (n \in \mathrm{N}), \tag{2.1.26}$$

és

$$\mathfrak{r} = \{R_k \colon k \in \mathrm{N}\}. \tag{2.1.27}$$

Ekkor $\mathfrak{r}$ rács, és $x_n \to x$ pontosan akkor áll, ha ez az $\mathfrak{r}$ rács finomabb a $\mathfrak{v}(x)$ környezetszűrőrél: $\mathfrak{r} > \mathfrak{v}(x)$. Ebből látszik, hogy a konvergencia definíciójában $\mathfrak{v}(x)$ helyett bármely vele ekvivalens halmazrendszer, vagyis x bármely $\mathfrak{b}(x)$ környezetbázisa is tehető, hiszen $\mathfrak{b}(x) \sim \mathfrak{v}(x)$ miatt $\mathfrak{r} > \mathfrak{v}(x)$ és $\mathfrak{r} > \mathfrak{b}(x)$ egyszerre áll fenn.

A metrikus térben értelmezett konvergenciafogalom eszerint speciális esete a környezettérben értelmezettnek.

Az (x_n) sorozathoz a (2.1.26) és (2.1.27) képletekkel hozzárendelt rácsot az (x_n)-hez tartozó **sorozatrács**nak nevezzük.

Könnyen következik az előbbi definícióból, hogy a konvergencia (1.2.4)—(1.2.7) alaptulajdonságai most is érvényesek.

Átvihető környezetterekre a ponthalmaz belső, külső, határ-, érintkezési pontjának értelmezése is: az $x \in E$ pontot az $A \subset E$ halmaz **belső pont**jának mondjuk, ha van x-nek olyan $V \in \mathfrak{v}(x)$ környezete, hogy $V \subset A$. x-et A **külső pont**jának mondjuk, ha van olyan $V \in \mathfrak{v}(x)$, hogy $V \cap A = \emptyset$. x-et A **határpontjának** mondjuk, ha x minden $V \in \mathfrak{v}(x)$ környezetére $V \cap A \neq \emptyset \neq V - A$. Végül x **érintkezési pontja** A-nak, ha minden $V \in \mathfrak{v}(x)$ halmazra $V \cap A \neq \emptyset$.

Vegyük észre, hogy x pontosan akkor belső pontja A-nak, ha $\mathfrak{v}(x) > \{A\}$, pontosan akkor külső pontja, ha $\mathfrak{v}(x) > \{E - A\}$, pontosan akkor érintkezési pontja, ha $\emptyset \notin \mathfrak{v}(x) (\cap) \{A\}$, pontosan akkor határpontja, ha $\emptyset \notin \mathfrak{v}(x) (\cap) \{A\}$ és $\emptyset \notin \mathfrak{v}(x) (\cap) \{E - A\}$. Mindebből látszik, hogy a definíciókban $\mathfrak{v}(x)$ helyett x bármely $\mathfrak{b}(x)$ környezetbázisa is szerepeltethető, és így a metrikus terekből ismert hasonló elnevezésű fogalmak a most definiáltaknak speciális esetei.

Azonnal következnek a definíciókból az (1.2.18)–(1.2.20) és (1.2.24) tételek megfelelői:

(2.1.28) *Legyen $[E, \mathfrak{V}]$ környezettér, $A \subset E$, $B = E - A$, $x \in E$. A következő állítások közül pontosan egy teljesül:*

(a) *x belső pontja A-nak;*

(b) *x külső pontja A-nak;*

(c) *x határpontja A-nak.*

x pontosan akkor külső pontja A-nak, ha belső pontja B-nek, és pontosan akkor határpontja A-nak, ha határpontja B-nek. Ha x belső pontja A-nak, akkor $x \in A$. x pontosan akkor érintkezési pontja A-nak, ha belső vagy határpontja. ∎

Nyilván átvihető a nyílt és a zárt halmaz értelmezése is: az $[E, \mathfrak{V}]$ környezettérben **nyílt**nak mondjuk az $A \subset E$ halmazt, ha egyetlen határpontját sem tartalmazza, és **zárt**nak, ha minden határpontját tartalmazza. (2.1.28)-ból aztán adódnak az (1.2.23)-nak és (1.2.25)-nek megfelelő állítások:

(2.1.29) *Egy környezettérben az A halmaz pontosan akkor nyílt, ha minden pontja belső pont, és pontosan akkor zárt, ha minden érintkezési pontját tartalmazza.* ∎

Az $S(x, \varepsilon)$ gömbök szerepét a $V \in \mathfrak{v}(x)$ környezeteknek adva, lemásolható az (1.2.27)–(1.2.30) tételek bizonyítása is:

(2.1.30) *Bármely $[E, \mathfrak{V}]$ környezettérben*

(a) *nyílt halmaz komplementuma zárt, zárt halmaz komplementuma nyílt;*

(b) *$\emptyset$ és E nyílt is, zárt is;*

(c) *nyílt halmazok egyesítése nyílt, zárt halmazok metszete zárt;*

(d) *véges számú nyílt halmaz metszete nyílt, véges számú zárt halmaz egyesítése zárt.*

Bizonyítás. (a) rögtön adódik (2.1.28)-ból, (b) pedig a definíciókból. (a) miatt (c)-nek és (d)-nek elég a nyílt halmazokra vonatkozó részét igazolni.

Ha most A_i $(i \in I)$ nyílt és $x \in A = \bigcup_{i \in I} A_i$, akkor egy $i_0 \in I$ indexre $x \in A_{i_0}$, így van olyan $V \in \mathfrak{v}(x)$, hogy $V \subset A_{i_0} \subset A$, úgyhogy A-nak minden pontja belső pont.

Ha A_i nyílt $(i = 1, \dots, n)$ és $x \in B = \bigcap_1^n A_i$, akkor van olyan $V_i \in \mathfrak{v}(x)$, hogy $V_i \subset A_i$, s így kihasználva, hogy $\mathfrak{v}(x)$ szűrő,

$$\bigcap_1^n V_i \in \mathfrak{v}(x), \qquad \bigcap_1^n V_i \subset B. \blacksquare$$

2.1.e. Topologikus terek. Nem volna nehéz folytatni a metrikus terek körében megismert fogalmaknak és tételeknek tetszőleges környezetterekre való átvitelét. Még sem tesszük ezt, mert a környezettér fogalma további vizsgálataink céljára túlságosan általános, definíciójában túlságosan keveset követeltünk meg az egyes pontokhoz kijelölt környezetszűrőktől, és így egyes fontos, metrikus terekben érvényes állítások tetszőleges környezetterekben általában nem igazak.

Legyen például $E = \mathbf{R}$, és $\mathcal{V}$ az a környezetstruktúra E-n, amelyben az x pont környezetbázisa az egyetlen $V_x = (x - 1, x + 1)$ intervallumból álló $\{V_x\}$ halmazrendszer. Az $[E, \mathcal{V}]$ környezettérben nem érvényes az (1.2.8) tétel megfelelője, amennyiben egy (x_n) sorozat több limeszponthoz is tarthat; pl. a $0, 0, 0, \ldots$ sorozat a 0-n kívül még minden $-1 < x < 1$ tulajdonságú x ponthoz is konvergál. Nem érvényes itt az a — metrikus terekben (1.2.22) miatt fenálló — tény sem, hogy minden pontnak van csupa nyílt halmazból álló környezetbázisa. Csakugyan, ebben a térben a $\emptyset$ és E halmazon kívül más nyílt halmaz nincs is: ha A nyílt, és $x \in A$, akkor $(x - 1, x + 1) \subset A$, így pl. $x + \frac{1}{2} \in A$, ezért $\left(x - \frac{1}{2}, x + \frac{3}{2}\right) \subset A$, tehát $x + 1 \in A$, és az okoskodást tovább folytatva kitűnik, hogy $(x, +\infty) \subset A$, s hasonlóan $(-\infty, x) \subset A$.

Ilyenformán, ha a metrikus terekben érvényes viszonyokhoz közelebb akarunk kerülni, további megszorításokat kell tennünk a környezettér egyes pontjainak környezetszűrőire. Az első ilyen megszorítás éppen a legutóbb vizsgált körülménnyel, a nyílt halmazokból álló környezetbázisok létezésével kapcsolatos, és a következő alapvető definícióhoz vezet:

Az E halmazon adott $\mathcal{T}$ környezetstruktúrát **topológiá**nak nevezzük, ha minden $x \in E$ pontnak van csupa nyílt halmazból álló környezetbázisa. Ha $\mathcal{T}$ topológia, az $[E, \mathcal{T}]$ környezettér neve **topologikus tér.** Ha az összefüggésekből világos, hogy az E halmazt milyen $\mathcal{T}$ topológiával ruházzuk fel, $[E, \mathcal{T}]$ helyett magát az E halmazt is szokás topologikus térnek mondani. Ha viszont ugyanazon a halmazon többféle topológiát is vizsgálunk egyidejűleg, ügyelni kell arra, hogy a topologikus terekben bevezetett különféle fogalmakat melyik topológiára vonatkoztatjuk. Ennek megfelelően ilyenkor pl. „$\mathcal{T}$-re nézve nyílt" vagy röviden „$\mathcal{T}$-nyílt" halmazokról, stb. fogunk beszélni.

(1.2.22)-ből látszik, hogy a metrikus térben korábban definiált környezetstruktúra e megszorításnak eleget tesz, s így valójában topológia; ezért ezentúl a **metrikus tér topológiájá**ról fogunk majd beszélni. A ρ távolságból származó topológiát $\mathcal{T}_\rho$-val jelöljük. Speciálisan a számegyenesen a $\rho_1(x, y) = | x - y |$ távolsághoz tartozó topológiát $\mathcal{E}$-vel, az $\mathbf{R}^m$ térben az (1.2.1) távolsághoz tartozót $\mathcal{E}^m$-mel jelöljük, és (egydimenziós, ill. m-dimenziós) **euklideszi topológiá**nak nevezzük.

Vegyük észre, hogy ha ρ nem távolság, csupán eltérés az E halmazon, akkor is igaz, hogy az

$$S(x, \varepsilon) = \{y \in E\colon\ \rho(x, y) < \varepsilon\} \qquad (x \in E,\ \varepsilon > 0)$$

gömbök x-et tartalmazó halmazokból álló rácsot alkotnak, s így e gömbök összessége adott $x \in E$ és $\varepsilon > 0$ mellett környezetbázisnak tekinthető egy $\mathfrak{T}_\rho$ környezetstruktúra számára; erre nézve $S(x, \varepsilon)$ nyílt lesz, hiszen (1.2.22) bizonyítása most is érvényes. Ennek megfelelően, ha $[E, \rho]$ félmetrikus tér, a $\mathfrak{T}_\rho$ topológiát a **félmetrikus tér topológiájának** nevezzük.

Könnyű meggyőződni arról is, hogy az $\mathbf{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$ halmazon a végtelen határérték értelmezése céljából korábban bevezetett környezetstruktúra is topológia. Ugyancsak topológia a jobb oldali határérték tárgyalására szolgáló $\mathbf{R}$-en értelmezett környezetstruktúra, hiszen az x pont környezetbázisát alkotó $[x, x+\varepsilon)$ $(\varepsilon > 0)$ halmazok erre nézve nyíltak ($x \leqq y < x+\varepsilon$ esetén $[y, x+\varepsilon) \subset [x, x+\varepsilon)$); e topológiát $\mathfrak{E}^+$-szal, a bal oldali határérték tárgyalására analóg módon bevezetett topológiát pedig $\mathfrak{E}^-$-szal fogjuk jelölni.

Topológia a H-n értelmezett valós függvények E halmazán a pontonkénti konvergencia tárgyalása céljából az $f \in E$ esetére

$$V_{t,\varepsilon}(f) = \{g\colon |g(t) - f(t)| < \varepsilon\} \qquad (t \in H,\ \varepsilon > 0)$$

halmazokból álló környezetszubbázissal definiált környezetstruktúra is, ugyanis $g \in V_{t,\varepsilon}(f)$ esetén az $\eta = \varepsilon - |g(t) - f(t)| > 0$ jelöléssel nyilván

$$V_{t,\eta}(g) \subset V_{t,\varepsilon}(f),$$

és így a $V_{t,\varepsilon}(f)$ halmazok nyíltak, véges metszeteik tehát f-nek nyílt halmazokból álló környezetbázisát alkotják. Ezt a **pontonkénti konvergencia topológiájának** fogjuk nevezni.

A továbbiakban célunk a topologikus terek és topológiák közelebbi tanulmányozása lesz.

2.1.f. Gyakorlatok. 1. Legyen (x_n) és (y_n) két sorozat, $\mathfrak{a}$ és $\mathfrak{b}$ a megfelelő sorozatrácsok. Igazoljuk, hogy

(a) ha (x_n) és (y_n) ugyanazokból a tagokból áll, de különböző sorrendben, akkor $\mathfrak{a} \sim \mathfrak{b}$;

(b) ha (y_n) részsorozata (x_n)-nek, akkor $\mathfrak{a} < \mathfrak{b}$;

(c) az előbbi állítás nem fordítható meg.

2. Igazoljuk, hogy ha $\mathfrak{A}_i$ $(i \in I)$ E-ben felszálló rendszer, akkor $\bigcup_{i \in I} \mathfrak{A}_i$ és $\bigcap_{i \in I} \mathfrak{A}_i$ is ilyen.

3. Legyen $\mathfrak{A}$ és $\mathfrak{B}$ E-ben felszálló rendszer. Mutassuk meg, hogy $\mathfrak{A} \cap \mathfrak{B} = \mathfrak{A} (\cup) \mathfrak{B}$, $\mathfrak{A} \cup \mathfrak{B} \subset \mathfrak{A} (\cap) \mathfrak{B}$, és az utóbbi képletben általában nem áll egyenlőség.

4. Legyen $\mathfrak{z}_i$ $(i \in I)$ E-beli szűrő. Igazoljuk, hogy ekkor $\bigcap_{i \in I} \mathfrak{z}_i$ is ilyen.

5. Legyen $\mathfrak{a}$ és $\mathfrak{b}$ E-beli szűrő. Mutassuk meg, hogy $\mathfrak{a} \cup \mathfrak{b}$ általában nem centrált rendszer, s lehet, hogy $\mathfrak{a} \cup \mathfrak{b}$ centrált, de nem rács.

6. Legyen $A_i \subset E$ $(i \in I)$, $A = \bigcup_{i \in I} A_i$. Igazoljuk, hogy $\dot{A} = \bigcap_{i \in I} \dot{A}_i$.

7. Legyen $A, B \subset E$, $C = A \cup B$, $D = A \cap B$. Igazoljuk, hogy $\dot{C} = \dot{A} (\cup) \dot{B}$, $\dot{D} = \dot{A} (\cap) \dot{B}$.

8. Mutassunk példát arra, hogy ha $\mathfrak{z}$ E-beli szűrő, $S_n \in \mathfrak{z}$ ($n \in \mathbf{N}$), akkor lehet $\bigcap_{1}^{\infty} S_n = \emptyset$.

9. Legyen $x = (x_1, x_2) \in \mathbf{R}^2$, $\varepsilon > 0$ esetén

$$V_{x,\varepsilon} = \{(y_1, x_2): |y_1 - x_1| < \varepsilon\} \cup \{(x_1, y_2): |y_2 - x_2| < \varepsilon\}.$$

Mutassuk meg, hogy $\mathfrak{b}(x) = \{V_{x,\varepsilon}: \varepsilon > 0\}$ környezetbázis egy $\mathbf{R}^2$ feletti környezetstruktúra számára, amely azonban nem topológia.

10. Legyen $x, y \in E \neq \emptyset$ esetén $\rho(x, y)$ úgy értelmezve, hogy (D_1)-nek eleget tegyen, és $S(x, \varepsilon) = \{y: \rho(x, y) < \varepsilon\}$. Igazoljuk, hogy $\mathfrak{b}(x) = \{S(x, \varepsilon): \varepsilon > 0\}$ környezetbázis egy E feletti környezetstruktúra számára, s hogy ez topológia, ha ρ még (D_3)-nak is eleget tesz.

11. Mutassuk meg, hogy az **1.3.** alatti 4. gyakorlatban értelmezett ρ' és ρ'' távolságra

$$\mathfrak{T}_{\rho'} = \mathfrak{T}_{\rho''} = \mathfrak{T}_{\rho_1}.$$

12. Legyen f $[0, +\infty)$-en értelmezett monoton növekvő, folytonos, konkáv függvény [azaz $0 < t < 1$ esetén legyen $f(tu + (1 - t)v) \geqq tf(u) + (1 - t)f(v)$], amelyre $f(0) = 0$, és $u > 0$ esetén $f(u) > 0$. Mutassuk meg, hogy ha ρ eltérés E-n és $x, y \in E$ esetén $\rho'(x, y) = f(\rho(x, y))$, akkor ρ' is eltérés, és $\mathfrak{T}_{\rho'} = \mathfrak{T}_{\rho}$.

[f konkáv voltából következik, hogy $0 \leqq u < v < w$ esetén

$$\frac{f(v) - f(u)}{v - u} \geqq \frac{f(w) - f(u)}{w - u} \geqq \frac{f(w) - f(v)}{w - v},$$

azaz $f(u + v) \leqq f(u) + f(v)$.]

13. Az $\mathbf{I}$-n értelmezett f_n valós függvények sorozatáról azt mondjuk, hogy „szinte mindenütt tart" az $\mathbf{I}$-n értelmezett f függvényhez, ha van olyan megszámlálható $M \subset \mathbf{I}$ halmaz, hogy $t \in \mathbf{I} - M$ esetén $f_n(t) \to f(t)$. Legyen I_{mi} ($m \in \mathbf{N}$, $i = 1, \ldots, m$) az $\left[\frac{i-1}{m}, \frac{i}{m}\right]$ intervallum, $g_{mi}(t) = 1$, ha $t \in I_{mi}$, $g_{mi}(t) = 0$, ha $t \in \mathbf{I} - I_{mi}$, és álljon az (f_n) sorozat a g_{mi} függvényekből valamilyen sorrendben. Mutassuk meg, hogy

(a) (f_n) nem tart szinte mindenütt semmilyen függvényhez;

(b) (f_n) minden részsorozatából kiválasztható olyan részsorozat, amely szinte mindenütt tart az $f(t) = 0$ ($t \in \mathbf{I}$) képlettel értelmezett f-hez;

(c) az $\mathbf{I}$-n értelmezett valós függvények E halmazán nincsen olyan $\mathfrak{V}$ környezetstruktúra, amelyre nézve való konvergencia éppen a szinte mindenütt való konvergenciának felelne meg.

[Ha (h_n) részsorozata (f_n)-nek, és $h_n(t_n) = 1$, legyen (t_{n_k}) a (t_n) sorozat konvergens részsorozata.]

14. Legyen E n elemű véges halmaz. Mutassuk meg, hogy

(a) minden E-beli szűrő főszűrő;

(b) E-n 2^{n^2-n} különböző környezetstruktúra adható meg;

(c) $n = 2$ esetén minden E fölötti környezetstruktúra topológia;

(d) $n = 3$ esetén van olyan E fölötti környezetstruktúra, amely nem topológia.

2.2. TOPOLÓGIÁK MEGADÁSI MÓDJAI

2.2.a. Környezetbázisok. A topológia definíciója szerint olyan környezetstruktúra, amelyben minden pontnak van csupa nyílt halmazból álló, röviden **nyílt környezetbázisa**. Felmerül az a kérdés, hogy ha egy E halmaz minden x eleméhez egy $\mathfrak{v}(x)$ szűrőt mint környezetszűrőt, vagy egy $\mathfrak{b}(x)$ rácsot mint környezetbázist előírunk, hogyan lehet megállapítani, vajon a keletkező környezetstruktúra topológia lesz-e. Erre válaszol a következő tétel:

(2.2.1) *Legyen az E halmaz minden x eleméhez egy $\mathfrak{b}(x)$ rács hozzárendelve E-nek x-et tartalmazó részhalmazaiból, s legyen $\mathcal{V}$ az a környezetstruktúra E-n, amely a $\mathfrak{b}(x)$ rácsokból mint környezetbázisokból származik. $\mathcal{V}$ pontosan akkor topológia, ha*

(V) *minden $V \in \mathfrak{b}(x)$ halmazhoz található olyan $V_1 \in \mathfrak{b}(x)$, hogy minden $y \in V_1$ pontnak legyen $V_2 \subset V$ tulajdonságú $V_2 \in \mathfrak{b}(y)$ környezete.*

Bizonyítás. Ha $\mathcal{V}$ topológia és $V \in \mathfrak{b}(x)$, akkor van olyan nyílt $G \in \mathfrak{v}(x)$ halmaz, hogy $G \subset V$ [itt persze $\mathfrak{v}(x)$ jelöli x környezetszűrőjét]. Legyen $V_1 \in \mathfrak{b}(x)$ olyan, hogy $V_1 \subset G$. Ha most $y \in V_1$, akkor y belső pontja G-nek, tehát alkalmas $V_2 \in \mathfrak{b}(y)$-ra $V_2 \subset G \subset V$.

Megfordítva, ha (V) teljesül, és $V' \in \mathfrak{v}(x)$, legyen V'' a V' halmaz belső pontjainak halmaza. $y \in V''$ esetén alkalmas $V \in \mathfrak{b}(y)$ halmazra $V \subset V'$, s akkor (V)-t x helyett y-ra alkalmazva van olyan $V_1 \in \mathfrak{b}(y)$, hogy $z \in V_1$ esetén alkalmas $V_2 \in \mathfrak{b}(z)$-re $V_2 \subset V \subset V'$. Ez mutatja, hogy V_1 minden pontja belső pontja V'-nek, azaz $V_1 \subset V''$, és így y belső pontja V''-nek. Minthogy ez minden $y \in V''$ pontra áll, V'' nyílt, és $V'' \subset V'$. Azonban $V' \in \mathfrak{v}(x)$ miatt x is belső pontja V'-nek, azaz $x \in V''$, és V'' nyíltsága miatt x belső pontja is V''-nek, azaz $V'' \in \mathfrak{v}(x)$. Így x nyílt környezetei x-nek környezetbázisát alkotják. ∎

Abban az esetben, amikor az egyes pontok környezetszűrői vannak megadva, a (V) feltétel egy egyszerűbbel helyettesíthető:

(2.2.2) *Legyen E minden x pontjához egy $\mathfrak{v}(x)$ E-beli szűrő hozzárendelve x-et tartalmazó halmazokból, s legyen $\mathcal{V}$ az a környezetstruktúra, amelyben x környezetszűrője $\mathfrak{v}(x)$. $\mathcal{V}$ pontosan akkor topológia, ha*

(V′) *minden $V \in \mathfrak{v}(x)$-hez van olyan $V_1 \in \mathfrak{v}(x)$, hogy $y \in V_1$ esetén $V \in \mathfrak{v}(y)$.*

Bizonyítás. (V)-ből és abból, hogy $\mathfrak{v}(y)$ felszálló rendszer E-ben, adódik (V′), s viszont (V′) nyilván maga után vonja (V)-t a $\mathfrak{b}(x) = \mathfrak{v}(x)$ választás esetén. ∎

Egy topológia megadására különösen előnyös, ha az egyes pontoknak közvetlenül egy-egy nyílt környezetbázisát írjuk elő. Erre vonatkozik a következő tétel:

(2.2.3) *Legyen E minden x pontjához egy x-et tartalmazó halmazokból álló $\mathfrak{b}(x)$ rács előírva. Ezek a $\mathfrak{b}(x)$ rácsok pontosan akkor szolgáltatják a megfelelő pont nyílt környezetbázisát egy $\mathcal{T}$ topológia számára, ha*

(V″) *minden $V \in \mathfrak{b}(x)$-hez és $y \in V$-hez van oly $V_1 \in \mathfrak{b}(y)$, hogy $V_1 \subset V$.*

Bizonyítás. Ha V nyílt, akkor $y \in V$ belső pontja V-nek, és (V″) szükségképpen teljesül. Megfordítva, a $\mathfrak{b}(x)$ rácsok által meghatározott $\mathcal{T}$ környezetstruktúrában V csupa belső pontból áll (V″) következtében, így $\mathfrak{b}(x)$ nyílt környezetbázisa x-nek (s akkor $\mathcal{T}$ persze topológia). ∎

Figyeljük meg a (V″) feltétel teljesülését az $[E, \rho]$ félmetrikus tér $\mathcal{T}_\rho$ topológiájának

$$\{S(x, \varepsilon):\ \varepsilon > 0\}$$

környezetbázisa, vagy az $\mathcal{E}^+$ topológia

$$\{[x, x + \varepsilon):\ \varepsilon > 0\}$$

környezetbázisa esetén.

2.2.b. Bázisok. Egy E halmazban az $x \in E$ pontok környezetbázisainak kijelölésére különösen kényelmes módszer a következő: megadunk egy E részhalmazaiból álló $\mathfrak{B}$ halmazrendszert, és előírjuk, hogy x környezetbázisa $\mathfrak{B}$-nek x-et tartalmazó halmazaiból álljon:

$$\mathfrak{b}(x) = \{B:\ x \in B \in \mathfrak{B}\}. \tag{2.2.4}$$

Ezzel kapcsolatos a következő tétel:

(2.2.5) *Legyen $\mathfrak{B}$ egy E részhalmazaiból álló halmazrendszer. A* (2.2.4) *által értelmezett $\mathfrak{b}(x)$ halmazrendszer pontosan akkor szolgáltatja x környezetbázisát egy $\mathcal{V}$ környezetstruktúra számára, ha $\mathfrak{b}(x)$ minden $x \in E$-re rács. Ekkor $\mathcal{V}$ topológia.*

Bizonyítás. A környezetbázis definíciója szerint $\mathfrak{b}(x)$-nek minden x-re rácsnak kell lennie. Ha viszont ez a feltétel teljesül, akkor (V″) is fennáll (a $V_1 = V$ választással), úgyhogy $\mathcal{V}$ (2.2.3) szerint topológia. ▌

A következő tétel arra a kérdésre ad választ, hogy mikor vezet az előbbi módszer egy előre megadott $\mathcal{T}$ topológiához:

(2.2.6) *Legyen $\mathcal{T}$ topológia E-n, $\mathfrak{B}$ pedig E részhalmazaiból álló halmazrendszer. A* (2.2.4)*-gyel definiált $\mathfrak{b}(x)$ pontosan akkor lesz minden $x \in E$-re x-nek környezetbázisa a $\mathcal{T}$ topológia számára, ha*

(a) *minden $B \in \mathfrak{B}$ halmaz $\mathcal{T}$-nyílt;*

(b) *minden nem-üres $\mathcal{T}$-nyílt halmaz $\mathfrak{B}$-beli halmazok egyesítéseként állítható elő.*

Bizonyítás. Ha a (2.2.4) alatti $\mathfrak{b}(x)$ minden x-re x-nek $\mathcal{T}$-környezetbázisa, akkor minden $B \in \mathfrak{B}$ halmaz minden pontjának környezete, tehát csupa belső pontból áll, s így nyílt, továbbá egy $\mathcal{T}$-nyílt $G \neq \emptyset$ halmaz minden $x \in G$ pontjához tartozik egy $B_x \in \mathfrak{B}$ úgy, hogy $x \in B_x \subset G$ legyen, és nyilván

$$G = \bigcup_{x \in G} B_x.$$

Ha viszont teljesül (a) és (b), akkor minden (2.2.4)-beli $B \in \mathfrak{b}(x)$ halmaz $\mathcal{T}$-környezete x-nek, hiszen x-et tartalmazza és $\mathcal{T}$-nyílt, s viszont x-nek minden V környezete tartalmazza x-nek egy nyílt G környezetét, és G-t $\mathfrak{B}$-beli halmazok egyesítéseként írva, egyik tag tartalmazza x-et:

$$x \in B \subset G \subset V,\ B \in \mathfrak{B}.$$

Ez mutatja, hogy $\mathfrak{b}(x)$ $\mathcal{T}$-környezetbázisa x-nek. ▌

A (2.2.6) alatti (a) és (b) tulajdonságokkal rendelkező $\mathfrak{B}$ halmazrendszert a $\mathfrak{T}$ topológia (vagy az $[E, \mathfrak{T}]$ topologikus tér) **bázisának** nevezik. Ezt az elnevezést használva (2.2.6) és (2.2.5) így fogalmazható meg:

(2.2.7) *Legyen $\mathfrak{T}$ topológia E-n. Egy E részhalmazaiból álló $\mathfrak{B}$ halmazrendszer pontosan akkor bázisa $\mathfrak{T}$-nek, ha minden $x \in E$ pontra az x-et tartalmazó $\mathfrak{B}$-beli halmazok x-nek $\mathfrak{T}$-környezetbázisát alkotják.* ∎

(2.2.8) *Egy E részhalmazaiból álló $\mathfrak{B}$ halmazrendszer pontosan akkor bázis egy E-n értelmezett alkalmas topológia számára, ha minden $x \in E$ pontra az x-et tartalmazó $\mathfrak{B}$-beli halmazok rácsot alkotnak.* ∎

Például a **2.1.a.** (d) és (e) alatt mondottakból látszik, hogy az $\mathfrak{E}$ topológia számára bázist alkotnak a számegyenes összes nyílt intervallumai, vagy összes racionális végpontú nyílt intervallumai. Az ugyanott (i) és (j) alatt mondottakból viszont az következik, hogy bármely metrikus (és ugyanúgy bármely félmetrikus) tér topológiája számára bázist alkotnak az összes gömbök, vagy az összes racionális sugarú gömbök. **2.1.a.** (m) mutatja, hogy $\mathfrak{E}^m$ számára bázist alkotnak az összes nyílt téglák, (1.2.32) pedig úgy fogalmazható, hogy $\mathfrak{E}^m$ számára bázist alkotnak az A-hoz tartozó középpontú, racionális sugarú gömbök, hacsak $A \subset \mathbf{R}^m$ sűrű halmaz. Végül (1.3.11) így fogalmazható meg, mindjárt félmetrikus terekre:

(2.2.9) *Egy félmetrikus tér pontosan akkor szeparábilis, ha van benne megszámlálható bázis.* ∎

Természetesen egy $\mathfrak{T}$ topológia összes nyílt halmazainak rendszere kielégíti a (2.2.6) (a) és (b) feltételeket. Eszerint:

(2.2.10) *Bármely $[E, \mathfrak{T}]$ topologikus térben bázist alkotnak az összes nyílt halmazok, és az $x \in E$ pontnak környezetbázisát alkotják az x-et tartalmazó összes nyílt halmazok.* ∎

Egy $\mathfrak{T}$ topológia **szubbázisának** mondjuk az $\mathfrak{S}$ halmazrendszert, ha az $\mathfrak{S}$-beli halmazok véges metszetei $\mathfrak{T}$-nek bázisát alkotják; ez más szóval azt jelenti, hogy $\mathfrak{S}$ a $\mathfrak{T}$-nyílt halmazoknak olyan rendszere, hogy bármely nem-üres $\mathfrak{T}$-nyílt halmaz előállítható $\mathfrak{S}$-beli halmazok véges metszeteinek egyesítéseként. Ebből látszik, hogy a topológia megadható egy szubbázisának segítségével is. Erre vonatkozik a következő tétel:

(2.2.11) *Ha $\mathfrak{S}$ az E halmaz befedése, akkor $\mathfrak{S}$ tekinthető egy E fölötti topológia szubbázisának.*

Bizonyítás. $\mathfrak{B}$-vel jelölve az $\mathfrak{S}$-beli halmazok véges metszeteiből álló halmazrendszert, az adott $x \in E$-t tartalmazó $\mathfrak{B}$-beli halmazok nyilván rácsot alkotnak, úgyhogy (2.2.8) szerint $\mathfrak{B}$ bázis egy E fölötti $\mathfrak{T}$ topológia számára. $\mathfrak{S}$ e $\mathfrak{T}$ topológiának szubbázisa. ∎

2.2.c. Nyílt vagy zárt halmazok kijelölése. (2.2.10) mutatja, hogy egy topológia meg van határozva, ha ismeretesek a reá nézve nyílt halmazok, vagy pedig a rá nézve zárt halmazok (hiszen a nyílt halmazok ezeknek komplementumai). Felvetődik az a kérdés, milyen feltételeket kell egy $\mathfrak{G}$, ill. $\mathfrak{F}$ halmazrendszernek kielégítenie ahhoz, hogy egy topológiára nézve nyílt, ill. zárt halmazok összessége lehessen. Erre a következő két tétel ad választ:

(2.2.12) *Egy E részhalmazaiból álló $\mathfrak{G}$ halmazrendszer pontosan akkor azonos egy E fölötti alkalmas topológia összes nyílt halmazainak rendszerével, ha*
(G_1) $\emptyset \in \mathfrak{G}$, $E \in \mathfrak{G}$;
(G_2) $G_i \in \mathfrak{G}$ *($i \in I$, I tetszőleges) esetén* $\bigcup_{i\in I} G_i \in \mathfrak{G}$;
(G_3) $G_i \in \mathfrak{G}$ *($i = 1, \ldots, n$) esetén* $\bigcap_1^n G_i \in \mathfrak{G}$.

Bizonyítás. (2.1.30)-ból tudjuk, hogy bármely topológia (sőt bármely környezetstruktúra) nyílt halmazainak összessége eleget tesz a (G_1)–(G_3) feltételeknek. Másrészt, ha ezek egy $\mathfrak{G}$ halmazrendszerre teljesülnek, akkor bármely $x \in E$ esetén az x-et tartalmazó $\mathfrak{G}$-beli halmazok rácsot alkotnak, hiszen $x \in E \in \mathfrak{G}$, és két x-et tartalmazó $\mathfrak{G}$-beli halmaz metszete is $\mathfrak{G}$-hez tartozik. Így (2.2.8) szerint $\mathfrak{G}$ bázis egy $\mathfrak{T}$ topológia számára. (2.2.6) (a) és (b) értelmében a $\mathfrak{G}$-beli halmazok $\mathfrak{T}$-nyíltak, s viszont minden $\mathfrak{T}$-nyílt halmaz üres vagy $\mathfrak{G}$-beli halmazok egyesítése, azaz (G_2) miatt maga is $\mathfrak{G}$-hez tartozik. ∎

(2.2.13) *Egy E részhalmazaiból álló $\mathfrak{F}$ halmazrendszer pontosan akkor azonos egy E fölötti alkalmas topológia összes zárt halmazainak rendszerével, ha*
(F_1) $\emptyset \in \mathfrak{F}$, $E \in \mathfrak{F}$;
(F_2) $F_i \in \mathfrak{F}$ *($i \in I$, I tetszőleges) esetén* $\bigcap_{i\in I} F_i \in \mathfrak{F}$;
(F_3) $F_i \in \mathfrak{F}$ *($i = 1, \ldots, n$) esetén* $\bigcup_1^n F_i \in \mathfrak{F}$.

Bizonyítás. Az $\mathfrak{F}$ rendszerre (F_1)–(F_3) pontosan akkor teljesül, ha az $\mathfrak{F}$-beli halmazok komplementumaiból álló $\mathfrak{G}$ rendszerre (G_1)–(G_3) érvényes. Ebből az állítás (2.1.30) (a) alapján adódik. ∎

Legyen pl. $E = \mathbf{R}$, és $-\infty \leqq x \leqq +\infty$ esetén

$$G_x = (-\infty, x)$$

(speciálisan $x = -\infty$ esetén $G_{-\infty} = \emptyset$, $x = +\infty$ esetén $G_{+\infty} = E$). A

(2.2.14) $$\mathfrak{G} = \{G_x\colon -\infty \leqq x \leqq +\infty\}$$

halmazrendszer eleget tesz (G_1)–(G_3)-nak, hiszen

$$\bigcup_{i\in I} G_{x_i} = G_x,$$

ahol

$$x = \sup\{x_i\colon i \in I\},$$

és

$$\bigcap_1^n G_{x_i} = G_y,$$

ahol

$$y = \min(x_1, \ldots, x_n).$$

Így a (2.2.14) rendszer egy $\overline{\mathfrak{E}}$ topológia nyílt halmazainak rendszere. Hasonlóan az

$$\{(x, +\infty)\colon -\infty \leqq x \leqq +\infty\}$$

rendszer egy $\underline{\mathfrak{E}}$ topológia nyílt halmazainak a rendszere $\mathbf{R}$-en.

Másik példaként legyen $E \neq \emptyset$ tetszőleges halmaz, és álljon $\mathfrak{F}$ az E halmazból és E véges részhalmazaiból. Világos, hogy (F_1)–(F_3) teljesül, úgyhogy $\mathfrak{F}$ egy topológia zárt halmazainak rendszere. Jelöljük $\mathcal{F}_E$-vel ezt a topológiát.

2.2.d. Halmaz belseje és lezárása. Legyen $[E, \mathcal{T}]$ topologikus tér, $A \subset E$. Az A halmaz **belsején** értjük és int A-val jelöljük A belső pontjainak halmazát, A **lezárásán** (vagy **zárt burkán**) értjük és $\bar{A}$-sal jelöljük A érintkezési pontjainak halmazát.

(2.2.15) *Legyen* $[E, \mathcal{T}]$ *topologikus tér,* $A, B \subset E$. *Ekkor*

(a) int A *a legnagyobb* A *által tartalmazott nyílt halmaz;*

(b) A *pontosan akkor nyílt, ha* $A = \operatorname{int} A$;

(c) $A \subset B$ *esetén* $\operatorname{int} A \subset \operatorname{int} B$;

(d) $\operatorname{int}(A \cap B) = \operatorname{int} A \cap \operatorname{int} B$.

Bizonyítás. $x \in \operatorname{int} A$ esetén van x-nek olyan nyílt V környezete, hogy $V \subset A$, és $y \in V$ esetén V y-nak környezete lévén, $y \in \operatorname{int} A$; eszerint $V \subset \operatorname{int} A$, úgyhogy int A-nak minden x pontja belső pontja (int A)-nak (nemcsak A-nak). Ez mutatja, hogy int A nyílt, s persze (2.1.28) szerint $\operatorname{int} A \subset A$. Másrészt, ha $G \subset A$ nyílt halmaz, akkor G minden $x \in G$ pontnak környezete, így $G \subset \operatorname{int} A$.

A most igazolt (a)-ból azonnal adódik (b) és (c). Az utóbbiból

$$\operatorname{int}(A \cap B) \subset \operatorname{int} A \cap \operatorname{int} B,$$

s viszont $x \in \operatorname{int} A \cap \operatorname{int} B$ esetén A is, B is környezete x-nek, tehát $A \cap B$ is, úgyhogy $x \in \operatorname{int}(A \cap B)$. ∎

(2.2.16) *Legyen* $[E, \mathcal{T}]$ *topologikus tér,* $A, B \subset E$. *Ekkor*

(a) $\bar{A} = E - \operatorname{int}(E - A)$;

(b) $\bar{A}$ *a legkisebb* A*-t tartalmazó zárt halmaz;*

(c) A *pontosan akkor zárt, ha* $A = \bar{A}$;

(d) $A \subset B$ *esetén* $\bar{A} \subset \bar{B}$;

(e) $\overline{A \cup B} = \bar{A} \cup \bar{B}$.

Bizonyítás. $E - \bar{A}$ pontosan A külső pontjaiból, azaz (2.1.28) szerint $E - A$ belső pontjaiból áll. Ez igazolja (a)-t. Innen (b) adódik (2.2.15) (a) alapján, hiszen a legkisebb A-t tartalmazó zárt halmaz éppen a legnagyobb $(E - A)$-ban foglalt nyílt halmaz komplementuma. (b)-ből (c) és (d) rögtön következik. Végül (e) ismét (a)-ból nyerhető:

$$\overline{A \cup B} = E - \operatorname{int}(E - (A \cup B)) = E - \operatorname{int}((E - A) \cap (E - B)) = E -$$
$$- (\operatorname{int}(E - A) \cap \operatorname{int}(E - B)) = (E - \operatorname{int}(E - A)) \cup (E - \operatorname{int}(E - B)) = \bar{A} \cup \bar{B}.$$ ∎

(2.2.15) (b) és (2.2.16) (c) mutatja, hogy a topológia akkor is meg van határozva, ha minden $A \subset E$ halmazra ismeretes int A vagy pedig $\bar{A}$, hiszen az $A = \operatorname{int} A$ egyenlőség kijelöli a nyílt halmazokat, az $A = \bar{A}$ egyenlőség pedig a zárt halmazokat. Ismét felvethető az a kérdés, hogyan kell értelmezni az E halmaz részhalmazait E részhalmazaiba átvivő $A \to \operatorname{int} A$, ill. $A \to \bar{A}$ műveletet, hogy ez éppen egy topológia belsőképzés-művelete, ill. lezárás-művelete legyen. Erre az utóbbi művelet esetében az alábbi tétel ad választ; az int A-val kapcsolatos analóg tétel is könnyen megfogalmazható volna.

(2.2.17) *Legyen az E halmaz minden $A \subset E$ részhalmazához E-nek egy $\bar{A} \subset E$ részhalmaza hozzárendelve. Pontosan akkor létezik E-n olyan topológia, amelyre nézve A lezárása éppen $\bar{A}$, ha*

(K_1) $\bar{\emptyset} = \emptyset$;

(K_2) $A \subset E$ *esetén* $A \subset \bar{A}$;

(K_3) $A, B \subset E$ *esetén* $\overline{A \cup B} = \bar{A} \cup \bar{B}$;

(K_4) $A \subset E$ *esetén* $\bar{\bar{A}} = \bar{A}$.

Bizonyítás. Ha $\bar{A}$ éppen A-nak egy topológiára vonatkozó lezárását jelöli, akkor $\emptyset$ zártsága és (2.2.16) (c) miatt fennáll (K_1), (2.2.16) (b) miatt (K_2), (2.2.16) (e) miatt (K_3), végül (2.2.16) (b) és (c) miatt (K_4).

Tegyük fel megfordítva, hogy teljesül (K_1)–(K_4), és legyen $\mathfrak{F}$ azoknak az $F \subset E$ halmazoknak a rendszere, amelyekre $F = \bar{F}$. Ekkor teljesül (F_1)–(F_3). Valóban, (K_1) szerint $\emptyset \in \mathfrak{F}$, ($K_2$) szerint $E \in \mathfrak{F}$. Ha $F_i = \bar{F}_i$ $(i \in I)$, és $F = \bigcap_{i \in I} F_i$, akkor ($K_3$) és ($K_2$) szerint

$$\bar{F} \subset \bigcap_{i \in I} \bar{F}_i = \bigcap_{i \in I} F_i = F \subset \bar{F},$$

azaz $F \in \mathfrak{F}$, hiszen (K_3) folytán $A \subset B$ esetén $\bar{B} = \overline{A \cup B} = \bar{A} \cup \bar{B} \supset \bar{A}$. Ha $F_i = \bar{F}_i$ $(i = 1, \dots, n)$ és $D = \bigcup_1^n F_i$, akkor (K_3) szerint

$$\bar{D} = \bigcup_1^n \bar{F}_i = \bigcup_1^n F_i = D$$

(2.2.13) értelmében tehát $\mathfrak{F}$ egy $\mathfrak{T}$ topológiára nézve zárt halmazok rendszere. Tetszőleges $A \subset E$ esetén $\bar{A}$ (K_2) és (K_4) miatt A-t tartalmazó zárt halmaz, mégpedig a legkisebb, hiszen $A \subset F = \bar{F}$ esetén (K_3) előbb igazolt folyománya alapján $\bar{A} \subset \bar{F} = F$. (2.2.16) (b) szerint $\bar{A}$ éppen A-nak $\mathfrak{T}$-lezárása. ∎

Jegyezzük meg még int A és $\bar{A}$ következő nevezetes tulajdonságát, amely (2.2.15) (a)-nak és (2.2.16) (b)-nek következménye:

(2.2.18) *Bármely topologikus térben* int A *az A által tartalmazott nyílt halmazok egyesítése, $\bar{A}$ az A-t tartalmazó zárt halmazok metszete.* ∎

Végül félmetrikus terekre vonatkozik a következő állítás:

(2.2.19) *Ha $A \neq \emptyset$ korlátos az $[E, \rho]$ félmetrikus térben, akkor $\bar{A}$ is korlátos, és $\delta(\bar{A}) = \delta(A)$.*

Bizonyítás. $x, y \in \bar{A}$ esetén adott $\varepsilon > 0$ mellett legyen $x_1 \in A \cap S(x, \varepsilon)$, $y_1 \in A \cap S(y, \varepsilon)$. Ekkor

$$\rho(x, y) \leqq \rho(x, x_1) + \rho(x_1, y_1) + \rho(y_1, y) < \varepsilon + \delta(A) + \varepsilon = \delta(A) + 2\varepsilon.$$

Ebből látszik, hogy $\bar{A}$ korlátos, és $\delta(\bar{A}) \leqq \delta(A) + 2\varepsilon$. Innen $\varepsilon \to 0$ mellett $\delta(\bar{A}) \leqq \delta(A)$, (1.2.14)-ből pedig $\delta(A) \leqq \delta(\bar{A})$ adódik. ∎

2.2.e. Halmaz határa. Az $[E, \mathfrak{T}]$ topologikus térben fekvő A halmaz **határán** értjük és (a latin „margo" szó rövidítéseként) mar A-val jelöljük A határpontjainak halmazát. (2.1.28) szerint:

(2.2.20) *Bármely A halmazra az $[E, \mathfrak{T}]$ topologikus térben*

$$\operatorname{mar} A = \operatorname{mar}(E - A) = \bar{A} \cap \overline{E - A} = \bar{A} - \operatorname{int} A;$$

ezért mar *A mindig zárt.* ∎

(2.2.21) *Tetszőleges A és B halmazra*

(a) $\operatorname{mar}(A \cup B) \subset \operatorname{mar} A \cup \operatorname{mar} B$;

(b) $\operatorname{mar}(A \cap B) \subset \operatorname{mar} A \cup \operatorname{mar} B$;

(c) $\operatorname{mar}(A - B) \subset \operatorname{mar} A \cup \operatorname{mar} B$.

Bizonyítás. (a): (2.2.20) alapján a (2.2.15) (c)-ből adódó $\operatorname{int}(A \cup B) \supset \operatorname{int} A \cup \operatorname{int} B$, továbbá (2.2.16) (e) figyelembevételével

$$\operatorname{mar}(A \cup B) = \overline{A \cup B} - \operatorname{int}(A \cup B) \subset (\bar{A} \cup \bar{B}) - (\operatorname{int} A \cup \operatorname{int} B) \subset$$
$$\subset (\bar{A} - \operatorname{int} A) \cup (\bar{B} - \operatorname{int} B) = \operatorname{mar} A \cup \operatorname{mar} B.$$

(b): Innen

$$\operatorname{mar}(A \cap B) = \operatorname{mar}\big(E - (A \cap B)\big) = \operatorname{mar}\big((E - A) \cup (E - B)\big) \subset$$
$$\subset \operatorname{mar}(E - A) \cup \operatorname{mar}(E - B) = \operatorname{mar} A \cup \operatorname{mar} B.$$

(c): Most (b) felhasználásával

$$\operatorname{mar}(A - B) = \operatorname{mar}\big(A \cap (E - B)\big) \subset \operatorname{mar} A \cup \operatorname{mar}(E - B) =$$
$$= \operatorname{mar} A \cup \operatorname{mar} B. \blacksquare$$

(2.2.20)-ból (2.2.15) (b), (2.2.16) (c) és $\operatorname{int} A \subset A \subset \bar{A}$ alapján rögtön kiolvasható:

(2.2.22) mar $A = \emptyset$ *pontosan akkor áll, ha A egyszerre nyílt és zárt halmaz.* ∎

Az ilyen halmazt röviden **nyílt-zárt**nak mondjuk.

2.2.f. Axiomatikus megjegyzések. Az előbbi eredmények módot nyújtanak a topologikus tér fogalmának másféle, a miénkkel ekvivalens definícióira és az elmélet másféle felépítéseire.

Megtehetjük például, hogy topologikus térnek nevezzük definícióképpen az olyan E halmazt, amelyben ki van jelölve a nyíltnak nevezett halmazoknak egy $\mathfrak{G}$ rendszere, amelyre (G_1)–(G_3) teljesül, vagy az olyan E halmazt, amelyben ki van jelölve a zártnak mondott részhalmazoknak olyan $\mathfrak{F}$ rendszere, amelyre (F_1)–(F_3) teljesül, vagy végül az olyan E halmazt, amelynek részhalmazain értelmezve van egy $A \to \bar{A}$ művelet, amelyre (K_1)–(K_4) teljesül. (2.2.12), (2.2.13), ill. (2.2.17) mutatja, hogy bármelyik definíció ekvivalens a miénkkel. E felfogásoknak megfelelően a (G_1)–(G_3), ill. (F_1)–(F_3), ill. (K_1)–(K_4) kikötések a topologikus terek elméletében axiómaként kezelhetők (az utóbbiakat **Kuratowski-féle lezárás-axiómá**knak szokás nevezni).

A topologikus tér fogalmának általunk követett bevezetése az előbbiekkel szemben azzal az előnnyel járt, hogy a környezet, ill. a környezetbázis fogalmából indult ki, annak megfelelően, hogy a topológiák megadása leggyakrabban (például a metrikus terek esetében) ezen a módon vagy esetleg egy (szub)bázis megadásával történik, s viszonylag ritkán fordul elő, hogy közvetlenül a nyílt vagy a zárt halmazokat, s még ritkábban, hogy a halmazok lezárását adjuk meg elsődlegesen. Másrészt kétségtelen, hogy a topologikus tér definíciójának most említett variánsai egyszerűbben hangzanak, s így gyorsabb felépítést tesznek lehetővé.

Ha például a topologikus teret a Kuratowski-féle axiómákkal értelmezzük, akkor először a zárt halmazokat definiáljuk az $A = \bar{A}$ egyenlőséggel, aztán a nyílt halmazokat mint a zárt halmazok komplementumait, végül az x pont környezeteit mint az olyan halmazokat, amelyek tartalmaznak egy x-et tartalmazó nyílt részhalmazt.

Érdemes még megfogalmazni a topologikus térnek azt a definícióját, amely a nyílt környezetbázisok kijelölésén alapul:

(2.2.23) *Topologikus tér az olyan E halmaz, amelyben minden $x \in E$-hez meg van adva E részhalmazainak egy $\mathfrak{b}(x)$ rendszere a következő tulajdonságokkal:*

(H_1) $\mathfrak{b}(x) \neq \emptyset$;

(H_2) $V \in \mathfrak{b}(x)$ *esetén* $x \in V$;

(H_3) $V_1, V_2 \in \mathfrak{b}(x)$ *esetén van olyan* $V_3 \in \mathfrak{b}(x)$, *hogy* $V_3 \subset V_1 \cap V_2$;

(H_4) $V \in \mathfrak{b}(x)$ *és* $y \in V$ *esetén van olyan* $V_1 \in \mathfrak{b}(y)$, *hogy* $V_1 \subset V$.

Valóban, (H_1)–(H_3) éppen azt részletezi, hogy $\mathfrak{b}(x)$ rács, amely x-et tartalmazó halmazokból áll, (H_4) pedig a (2.2.3) alatti (V″) kikötéssel azonos. ∎

A (H_1)—(H_4) feltételeket **Hausdorff-féle környezet-axiómák**nak szokás nevezni.

2.2.g. Gyakorlatok. 1. Legyen E az egész számok halmaza, $x \in E$ esetén jelölje M_x x többszöröseinek halmazát, és legyen $\mathfrak{v}(x) = \dot{M}_x$. Igazoljuk, hogy a keletkező környezetstruktúra topológia.

2. Legyen $E = \mathbf{R}$, és álljon $\mathfrak{H}$ az összes $(-\infty, x)$ és $(-\infty, x]$ alakú intervallumokból ($x \in \mathbf{R}$), továbbá $\emptyset$-ból és $\mathbf{R}$-ből. Mutassuk meg, hogy $\mathfrak{H}$ tekinthető egy topológia összes nyílt halmazaiból álló, s egyúttal egy másik topológia összes zárt halmazaiból álló rendszernek is.

3. Legyen $\mathfrak{B}$ olyan E-beli halmazrendszer, hogy $B_1, B_2 \in \mathfrak{B}$ esetén $B_1 \cap B_2 \in \mathfrak{B}$ és $E = \bigcup \{B\colon B \in \mathfrak{B}\}$. Igazoljuk, hogy $\mathfrak{B}$ tekinthető egy E fölötti topológia bázisának.

4. Álljon $\mathfrak{B}$ az $\mathbf{R}^2$ síkban a $(0,0) = a$ ponton áthaladó egyenesekből, továbbá az $\{a\}$ halmazból. Mutassuk meg, hogy $\mathfrak{B}$ egy topológia bázisa $\mathbf{R}^2$-en.

5. Legyen $[E, \mathfrak{T}]$ topologikus tér, és jelölje $A \subset E$ esetén $\mathfrak{P}(A)$ az A halmaz nem-üres részhalmazainak rendszerét. Mutassuk meg, hogy a $\mathfrak{P}(G)$ halmazok, ahol G a $\mathfrak{T}$-nyílt halmazokat futja át, bázist alkotnak egy $\mathfrak{P}(E)$ feletti topológia számára.

6. Mutassuk meg, hogy $\mathfrak{E}^+$ számára bázist alkotnak az $[a, b)$ $(a < b)$ alakú, $\mathfrak{E}^-$ számára pedig az $(a, b]$ alakú intervallumok.

7. Mutassuk meg, hogy bármely E halmazon topológiát kapunk, ha zártnak tekintjük E-n kívül E megszámlálható részhalmazait.

8. Legyen E többelemű rendezett halmaz a $<$ rendezési relációval, és $x \in E$ esetén

(a) $(\leftarrow, x) = \{y\colon y < x\}$;

(b) $(\leftarrow, x] = \{y\colon y \leqq x\}$;

(c) $(x, \rightarrow) = \{y\colon x < y\}$;

(d) $[x, \rightarrow) = \{y\colon x \leqq y\}$.

Mutassuk meg, hogy az (a) és (c) alakú halmazok, az (a) és (d) alakú halmazok, ill. a (b) és (c) alakú halmazok egy-egy topológia szubbázisát alkotják E-n. Ezek közül az elsőt E rendezéstopológiájának nevezzük. Mibe mennek át ezek a topológiák, ha $E = \mathbf{R}$ a szokásos $<$ relációval? Igazoljuk, hogy a felsorolt topológiák számára bázist alkotnak a szubbázisban szereplő halmazok mellett az

$$(a, b) = \{x: a < x < b\},$$

ill. az

$$[a, b) = \{x: a \leqq x < b\},$$

ill. az

$$(a, b] = \{x: a < x \leqq b\}$$

alakú halmazok.

9. Legyen $\mathfrak{T}$ az E rendezett halmaz rendezéstopológiája. Az $A \subset E$ halmazzal kapcsolatban az alsó, felső korlát, alulról, felülről korlátos kifejezéseket éppen úgy értelmezve, mint az $E = \mathbf{R}$ esetben, igazoljuk, hogy $A \neq \emptyset$ legkisebb felső korlátja, ill. legnagyobb alsó korlátja hozzátartozik A-nak $\mathfrak{T}$-lezárásához.

10. Mutassuk meg, hogy az $[\mathbf{R}^m, \mathfrak{E}^m]$ térben

(a) $\operatorname{int} \bar{S}(a, \varepsilon) = S(a, \varepsilon)$;

(b) $\overline{S(a, \varepsilon)} = \bar{S}(a, \varepsilon)$;

(c) $\operatorname{int} [a_1, \dots, a_m; b_1, \dots, b_m] = (a_1, \dots, a_m; b_1, \dots, b_m)$;

(d) $\overline{(a_1, \dots, a_m; b_1, \dots, b_m)} = [a_1, \dots, a_m; b_1, \dots, b_m]$,

ha $a \in \mathbf{R}^m$, $\varepsilon > 0$, $a_i < b_i$ $(i = 1, \dots, m)$.

11. Keressünk példát olyan $[E, \rho]$ metrikus térre, amelyben a 10. alatti (a) és (b) egyenlőség nem mindig érvényes.

12. Legyen $[E, \rho]$ félmetrikus tér, $A, B \subset E$, $A \neq \emptyset \neq B$. Mutassuk meg, hogy $\rho(A, B) = \rho(\bar{A}, \bar{B})$.

13. Legyen $[E, \mathfrak{T}]$ topologikus tér, és tekintsük a következő állításokat $A, B \subset E$ esetén:

(a) A egy zárt halmaz belseje;

(b) $A = \operatorname{int} \bar{A}$;

(c) B egy nyílt halmaz lezárása;

(d) $B = \overline{\operatorname{int} B}$.

Mutassuk meg, hogy (a) és (b), valamint (c) és (d) egymással egyenértékű, és hogy A-ra pontosan akkor teljesül (a), ha $E - A = B$-re fennáll (c). Adjunk az $[\mathbf{R}, \mathfrak{E}]$ térben példát olyan nyílt, ill. zárt halmazra, amelyre (a), ill. (c) teljesül, és olyanra is, amelyre ezek nem teljesülnek.

14. Legyen egy $[E, \mathfrak{T}]$ topologikus térben $\mathfrak{A}$ az olyan halmazok rendszere, amelyeknek határa véges (megszámlálható). Igazoljuk, hogy $A, B \in \mathfrak{A}$ esetén $A \cup B \in \mathfrak{A}$, $A \cap B \in \mathfrak{A}$, $A - B \in \mathfrak{A}$.

2.3. TOPOLÓGIÁK ÖSSZEHASONLÍTÁSA ÉS MEGSZORÍTÁSA

2.3.a. Topológiák összehasonlítása. Legyen $\mathcal{V}_1$ és $\mathcal{V}_2$ környezetstruktúra az E halmazon, és tegyük fel, hogy bármely $x \in E$ pont $\mathcal{V}_1$-beli $\mathfrak{v}_1(x)$ környezetszűrője durvább, mint ugyanezen pont $\mathcal{V}_2$-beli $\mathfrak{v}_2(x)$ környezetszűrője: $\mathfrak{v}_1(x) < \mathfrak{v}_2(x)$. Ekkor azt mondjuk, hogy a $\mathcal{V}_1$ környezetstruktúra **durvább** $\mathcal{V}_2$-nél, vagy hogy $\mathcal{V}_2$ **finomabb** $\mathcal{V}_1$-nél; jelben

$$\mathcal{V}_1 < \mathcal{V}_2 \text{ vagy } \mathcal{V}_2 > \mathcal{V}_1.$$

Világos, hogy itt $\mathfrak{v}_1(x)$ és $\mathfrak{v}_2(x)$ helyébe tehető egy-egy velük ekvivalens rács, azaz x-nek egy $\mathcal{V}_1$-re, ill. $\mathcal{V}_2$-re vonatkozó $\mathfrak{b}_1(x)$, ill. $\mathfrak{b}_2(x)$ környezetbázisa. Eszerint $\mathcal{V}_1 < \mathcal{V}_2$ pontosan akkor áll, ha bármely $x \in E$ pont $\mathfrak{b}_1(x)$ környezetbázisából vett bármely $V_1 \in \mathfrak{b}_1(x)$ környezetnek van egy $V_2 \in \mathfrak{b}_2(x)$ részhalmaza.

Például a számegyenesen $\mathcal{E} < \mathcal{E}^+$, és $\mathcal{E} < \mathcal{E}^-$, mert $[x, x+\varepsilon) \subset (x-\varepsilon, x+\varepsilon)$, és $(x-\varepsilon, x] \subset (x-\varepsilon, x+\varepsilon)$. Ezzel szemben $\mathcal{E}^+$ és $\mathcal{E}^-$ közül egyik sem finomabb a másiknál, ezek nem összehasonlíthatók.

A definícióból (2.1.1) és (2.1.3) alapján rögtön következik:

(2.3.1) *Legyen $\mathcal{V}_1, \mathcal{V}_2, \mathcal{V}_3$ környezetstruktúra E-n. Ekkor*

(a) $\mathcal{V}_1 < \mathcal{V}_1$;

(b) $\mathcal{V}_1 < \mathcal{V}_2$ *és* $\mathcal{V}_2 < \mathcal{V}_1$ *esetén* $\mathcal{V}_1 = \mathcal{V}_2$;

(c) $\mathcal{V}_1 < \mathcal{V}_2$, $\mathcal{V}_2 < \mathcal{V}_3$ *esetén* $\mathcal{V}_1 < \mathcal{V}_3$. ∎

(2.3.2) *Legyen $\mathcal{T}_1$ és $\mathcal{T}_2$ topológia E-n. A következő állítások egymással egyenértékűek:*

(a) $\mathcal{T}_1 < \mathcal{T}_2$;

(b) *minden $\mathcal{T}_1$-nyílt halmaz $\mathcal{T}_2$-nyílt is;*

(c) *minden $\mathcal{T}_1$-zárt halmaz $\mathcal{T}_2$-zárt is;*

(d) *bármely halmaz $\mathcal{T}_2$-lezárása része a halmaz $\mathcal{T}_1$-lezárásának.*

Bizonyítás. (a) ⇒ (b): Ha G $\mathcal{T}_1$-nyílt, akkor minden $x \in G$ pontnak $\mathcal{T}_1$-környezete, s $\mathcal{T}_1 < \mathcal{T}_2$ folytán annál inkább $\mathcal{T}_2$-környezete, tehát $\mathcal{T}_2$-nyílt.

(b) ⇒ (c): (2.1.30) (a) következménye.

(c) ⇒ (d): $A \subset E$ esetén A-nak B $\mathcal{T}_1$-lezárása $\mathcal{T}_1$-zárt s így $\mathcal{T}_2$-zárt is. Ekkor azonban B (2.2.16) (b) miatt tartalmazza A-nak $\mathcal{T}_2$-lezárását.

(d) ⇒ (a): Legyen $x \in E$, és $V \in \mathfrak{v}_1(x)$. Ekkor van olyan $\mathcal{T}_1$-nyílt G, hogy $x \in G \subset V$, és $(E-G)$-nek $\mathcal{T}_1$-lezárása saját maga, $\mathcal{T}_2$-lezárása pedig ennek része, de persze (2.2.16) folytán valódi része nem lehet. Eszerint $E - G$ $\mathcal{T}_2$-zárt is, azaz G $\mathcal{T}_2$-nyílt, és V $\mathcal{T}_2$-környezete x-nek. ∎

Például a számegyenesen $\overline{\mathcal{E}} < \mathcal{E}$, és $\underline{\mathcal{E}} < \mathcal{E}$, mert $(-\infty, x)$ és $(x, +\infty)$ $\mathcal{E}$-nyílt $(-\infty \leqq x \leqq +\infty)$.

Világos, hogy bármely E halmazon van egy legdurvább és egy legfinomabb topológia; az előbbire nézve egyedül $\emptyset$ és E nyílt halmaz, ezt az E halmaz **indiszkrét topológiá**jának nevezik, az utóbbira nézve E minden részhalmaza nyílt, ennek neve **diszkrét topológia.** Az utóbbi elnevezés összhangban van azzal, hogy diszkrét metrikus tér topológiája nyilván a diszkrét topológia. Az indiszkrét topológiára nézve $x \in E$ környezetszűrője egyedül E-ből áll, a diszkrét topológiára nézve pedig az $\dot{x}$ alapszűrővel azonos. Minthogy $\{E\}$ a legdurvább E-beli szűrő, $\dot{x}$ pedig a legfinomabb x-et tartalmazó halmazokból álló E-beli szűrő, azért az indiszkrét, ill. diszkrét topológia egyúttal a legdurvább, ill. a legfinomabb környezetstruktúra is E-n.

Az E fölötti diszkrét topológiát $\mathfrak{D}_E$-vel, vagy ha ez nem okozhat félreértést, röviden $\mathfrak{D}$-vel fogjuk jelölni.

(2.3.3) *Legyen $\mathfrak{T}_i$ ($i \in I \neq \emptyset$) topológia E-n. Az összes $\mathfrak{T}_i$-knél durvább topológiák között van egy legfinomabb, $\mathfrak{T}^*$, és az összes $\mathfrak{T}_i$-knél finomabb topológiák között van egy legdurvább, $\mathfrak{T}^{**}$. $\mathfrak{T}^*$-nyíltak azok a halmazok, amelyek minden $i \in I$ mellett $\mathfrak{T}_i$-nyíltak. $\mathfrak{T}^{**}$ számára szubbázist alkotnak azok a halmazok, amelyek legalább egy $i \in I$ mellett $\mathfrak{T}_i$-nyíltak.*

Bizonyítás. $\mathfrak{G}$-vel jelölve a minden $i \in I$-re $\mathfrak{T}_i$-nyílt halmazok rendszerét, nyilván teljesül (G_1)–(G_3), így $\mathfrak{G}$ egy $\mathfrak{T}^*$ topológia nyílt halmazainak rendszere. (2.3.2) szerint $\mathfrak{T}^*$ a legfinomabb olyan topológia, amely minden $\mathfrak{T}_i$-nél durvább.

$\mathfrak{S}$-szel jelölve azoknak a halmazoknak a rendszerét, amelyek legalább egy $i \in I$-re $\mathfrak{T}_i$-nyíltak, $\mathfrak{S}$ nyilván szubbázis egy $\mathfrak{T}^{**}$ topológia számára. Minthogy az $\mathfrak{S}$-beli halmazok $\mathfrak{T}^{**}$-nyíltak, $\mathfrak{T}_i < \mathfrak{T}^{**}$ minden i-re; viszont ha $\mathfrak{T}$ olyan topológia, hogy $\mathfrak{T}_i < \mathfrak{T}$ minden i-re, akkor $\mathfrak{S}$ halmazai $\mathfrak{T}$-nyíltak, tehát $\mathfrak{T}$-nyíltak ezeknek véges metszetei s az ilyen halmazok egyesítései is, vagyis az összes $\mathfrak{T}^{**}$-nyílt halmazok. Eszerint ekkor $\mathfrak{T}^{**} < \mathfrak{T}$. ∎

Az előbbi $\mathfrak{T}^*$ és $\mathfrak{T}^{**}$ topológiára a következő jelölést szokás használni:

$$\mathfrak{T}^* = \inf\{\mathfrak{T}_i\colon i \in I\},$$

$$\mathfrak{T}^{**} = \sup\{\mathfrak{T}_i\colon i \in I\}.$$

Például

$$\sup\{\overline{\mathfrak{E}}, \underline{\mathfrak{E}}\} = \mathfrak{E} = \inf\{\mathfrak{E}^+, \mathfrak{E}^-\},$$

hiszen $a < b$ esetén $(a, b) = (-\infty, b) \cap (a, +\infty)$, s egy G halmaz pontosan akkor $\mathfrak{E}$-nyílt, ha $\mathfrak{E}^+$-nyílt és $\mathfrak{E}^-$-nyílt egyidejűleg.

(2.3.4) *Legyen $\mathfrak{T}_1$ és $\mathfrak{T}_2$ topológia E-n és $\mathfrak{T} = \sup\{\mathfrak{T}_1, \mathfrak{T}_2\}$. Ekkor $x \in E$ $\mathfrak{T}_1$-, $\mathfrak{T}_2$-, $\mathfrak{T}$-környezetszűrője között érvényes*

(2.3.5) $$\mathfrak{v}(x) = \mathfrak{v}_1(x)\ (\cap)\ \mathfrak{v}_2(x).$$

Bizonyítás. (2.1.24) folytán a (2.3.5)-tel definiált $\mathfrak{v}(x)$ szűrő E-ben. (2.1.17)-re tekintettel elég megmutatni, hogy ha $\mathfrak{b}_1(x)$, ill. $\mathfrak{b}_2(x)$ jelöli az x-et tartalmazó $\mathfrak{T}_1$-nyílt, ill. $\mathfrak{T}_2$-nyílt halmazok rendszerét, amikor is tehát $\mathfrak{b}_1(x) \sim \mathfrak{v}_1(x)$, $\mathfrak{b}_2(x) \sim \mathfrak{v}_2(x)$, akkor

$$\mathfrak{b}(x) = \mathfrak{b}_1(x)\ (\cap)\ \mathfrak{b}_2(x)$$

x-nek $\mathfrak{T}$-környezetbázisa, ami (2.3.3)-ból látható. ∎

(2.3.6) *Legyen* (2.3.3) *jelöléseivel $\mathfrak{S}_i$ szubbázis $\mathfrak{T}_i$ számára. Ekkor $\bigcup_{i \in I} \mathfrak{S}_i$ szubbázis $\mathfrak{T}^{**} = \sup\{\mathfrak{T}_i\colon i \in I\}$ számára.*

Bizonyítás. Világos, hogy $\mathfrak{S}' = \bigcup_{i \in I} \mathfrak{S}_i$ minden halmaza $\mathfrak{T}^{**}$-nyílt. Másrészt, ha G $\mathfrak{T}^{**}$-nyílt, és $x \in G$, akkor vannak olyan $i_1, \ldots, i_n \in I$ indexek és olyan G_k

$\mathfrak{T}_{i_k}$-nyílt halmazok, hogy $x \in \bigcap_{k=1}^{n} G_k \subset G$, s ezekhez találhatók olyan $S_{kj} \in \mathfrak{S}_{i_k}$ halmazok, hogy $x \in \bigcap_{j=1}^{m_k} S_{kj} \subset G_k$. Így végül $x \in \bigcap_{k=1}^{n} \bigcap_{j=1}^{m_k} S_{kj} \subset G$. ∎

(2.3.7) *Legyen* (2.3.3) *jelöléseivel* $x \in E$, *és* $\mathfrak{b}_i(x)$ $\mathfrak{T}_i$-*környezetbázisa* x-*nek* ($i \in I$). *Ekkor* x-*nek* $\mathfrak{T}^{**}$-*környezetbázisát alkotják a* $\bigcap_{1}^{n} B_{i_j}$ *alakú halmazok, ahol* $i_j \in I$, *és* $B_{i_j} \in \mathfrak{b}_{i_j}(x)$.

Bizonyítás. $x \in G_{i_j} \subset B_{i_j}$, ahol G_{i_j} $\mathfrak{T}_{i_j}$-nyílt, így $x \in \bigcap_{1}^{n} G_{i_j} \subset \bigcap_{1}^{n} B_{i_j}$, és $\bigcap_{1}^{n} G_{i_j}$ $\mathfrak{T}^{**}$-nyílt. Ezért a $\bigcap_{1}^{n} B_{i_j}$ alakú halmazok $\mathfrak{T}^{**}$-környezetei x-nek. Másrészt ha V $\mathfrak{T}^{**}$-környezete x-nek, akkor $x \in \bigcap_{1}^{n} H_{i_j} \subset V$, ahol $i_j \in I$, és H_{i_j} $\mathfrak{T}_{i_j}$-nyílt, s akkor $x \in \bigcap_{1}^{n} B_{i_j} \subset \bigcap_{1}^{n} H_{i_j} \subset V$. ∎

2.3.b. Topológiák megszorítása. Alterek. Tudjuk, hogy ha ρ távolság E-n, és $\emptyset \neq E_0 \subset E$, akkor ρ-t csupán E_0-hoz tartozó pontokra tekintve távolságot kapunk E_0-on; az e távolsággal felruházott E_0-t neveztük az E metrikus tér alterének. Világos, hogy ugyanez távolság helyett eltérésről, metrikus tér helyett félmetrikus térről is elmondható.

Nyilvánvaló, hogy egy $x \in E_0$ középpontú, $\varepsilon > 0$ sugarú E_0-beli gömb

$$\{y\colon\ y \in E_0,\ \rho(x, y) < \varepsilon\} = S(x, \varepsilon) \cap E_0$$

alakban irható, ahol $S(x, \varepsilon)$ az x középpontú, ε sugarú E-beli gömböt jelöli. Az E_0 altér topológiájára nézve eszerint $x \in E_0$ környezetbázisát alkotják az $S(x, \varepsilon) \cap E_0$ alakú halmazok. Minthogy $\{S(x, \varepsilon)\colon\ \varepsilon > 0\}$ ekvivalens x-nek $\mathfrak{T}_\rho$-ra vonatkozó $\mathfrak{v}(x)$ környezetszűrőjével, $\{S(x, \varepsilon) \cap E_0\colon\ \varepsilon > 0\}$ pedig x-nek E_0 altérbeli $\mathfrak{v}_0(x)$ környezetszűrőjével, érvényes

$$\mathfrak{v}_0(x) = \mathfrak{v}(x)\ (\cap)\ \{E_0\}, \tag{2.3.8}$$

hiszen (2.1.17) folytán $\mathfrak{v}(x)\ (\cap)\ \{E_0\}$ a $\mathfrak{v}_0(x)$ szűrővel ekvivalens, mégpedig (2.1.25) szerint E_0-ban szűrő, tehát (2.1.3) értelmében $\mathfrak{v}_0(x)$-szel egyenlő.

A (2.3.8) összefüggést könnyen kiterjeszthetjük tetszőleges környezetstruktúrára:

(2.3.9) *Legyen* $[E, \mathscr{V}]$ *környezettér,* $x \in E$ *környezetszűrője* $\mathfrak{v}(x)$, $\emptyset \neq E_0 \subset E$. *Ha* $x \in E_0$ *esetén* $\mathfrak{v}_0(x)$-*et* (2.3.8) *értelmezi, akkor* $\mathfrak{v}_0(x)$ *az* x *pont környezetszűrője egy* E_0 *fölötti* $\mathscr{V}_0$ *környezetstruktúra számára.* $\mathscr{V}_0$-*t a* $\mathscr{V}$ *környezetstruktúra* E_0-*ra való* **megszorításá***nak nevezzük és* $(\mathscr{V}|E_0)$-*lal jelöljük, az* $[E_0, \mathscr{V}|E_0]$ *környezetteret pedig az* $[E, \mathscr{V}]$ **környezettér alteré***nek mondjuk.*

Bizonyítás. $x \in E_0$ esetén $\mathfrak{v}(x)\ (\cap)\ \{E_0\}$ minden halmaza tartalmazza x-et, s ez a halmazrendszer (2.1.25) szerint E_0-beli szűrő. ∎

(2.3.10) *Ha* $[E, \mathscr{V}]$ *környezettér,* $x \in E_0 \subset E$, *és* $\mathfrak{b}(x)$ *az* x *pontnak* $\mathscr{V}$-*környezetbázisa, akkor* $\mathfrak{b}(x)\ (\cap)\ \{E_0\}$ x-*nek* $(\mathscr{V}|E_0)$-*környezetbázisa.*

Bizonyítás. (2.1.17) értelmében

$$\mathfrak{b}(x)\ (\cap)\ \{E_0\} \sim \mathfrak{v}(x)\ (\cap)\ \{E_0\}. \ ∎$$

(2.3.11) *Ha $\mathfrak{T}$ topológia E-n, és $\emptyset \neq E_0 \subset E$, akkor $\mathfrak{T}|E_0$ is topológia E_0-on. Topologikus tér altere is topologikus tér.*

Bizonyítás. Legyen $\mathfrak{b}(x)$ az $x \in E_0$ pontot tartalmazó $\mathfrak{T}$-nyílt halmazok rendszere. (2.3.10) szerint $\mathfrak{b}_0(x) = \mathfrak{b}(x)\ (\cap)\ \{E_0\}$ x-nek $(\mathfrak{T}|E_0)$-környezetbázisa. Ha $V_0 \in \mathfrak{b}_0(x)$, azaz $V_0 = V \cap E_0$, ahol V x-et tartalmazó $\mathfrak{T}$-nyílt halmaz, és $y \in V_0$, akkor $V \in \mathfrak{b}(y)$ folytán $V_0 \in \mathfrak{b}_0(y)$. Eszerint a $\mathfrak{b}_0(x)$ rácsok rendszere eleget tesz a (2.2.3) alatti (V″) feltételnek, s így $\mathfrak{T}|E_0$ topológia. ▌

A jelen pont elején elvégzett meggondolás eredménye eszerint így foglalható össze:

(2.3.12) *Ha ρ eltérés az E halmazon, és $\emptyset \neq E_0 \subset E$, akkor az $[E_0, \rho|E_0]$ félmetrikus tér topológiája $(\mathfrak{T}_\rho|E_0)$-lal azonos.* ▌

(2.3.13) *Legyen $[E, \mathfrak{T}]$ topologikus tér, $\emptyset \neq E_0 \subset E$, $\mathfrak{T}_0 = \mathfrak{T}\,|\,E_0$. Ekkor*

(a) *egy $x \in E_0$ pont pontosan akkor $\mathfrak{T}_0$-érintkezési pontja egy $A \subset E_0$ halmaznak, ha x $\mathfrak{T}$-érintkezési pontja A-nak;*

(b) *egy $A \subset E_0$ halmaz $\mathfrak{T}_0$-lezárása azonos $(\bar{A} \cap E_0)$-lal, ahol $\bar{A}$ jelöli A-nak $\mathfrak{T}$-lezárását;*

(c) *a $\mathfrak{T}_0$-zárt halmazok azonosak az $F \cap E_0$ alakú halmazokkal, ahol F $\mathfrak{T}$-zárt;*

(d) *a $\mathfrak{T}_0$-nyílt halmazok azonosak a $G \cap E_0$ alakú halmazokkal, ahol G $\mathfrak{T}$-nyílt;*

(e) *ha $\mathfrak{B}$ bázis $\mathfrak{T}$ számára, akkor $\mathfrak{B}\ (\cap)\ \{E_0\}$ bázis $\mathfrak{T}_0$ számára;*

(f) *ha $\mathfrak{S}$ szubbázis $\mathfrak{T}$ számára, akkor $\mathfrak{S}\ (\cap)\ \{E_0\}$ szubbázis $\mathfrak{T}_0$ számára.*

Bizonyítás. Legyen $\mathfrak{v}(x)$ x-nek $\mathfrak{T}$-környezetszűrője.

(a): $x \in E_0$, $A \subset E_0$ esetén (2.1.13) szerint

$$\big(\mathfrak{v}(x)\ (\cap)\ \{E_0\}\big)\ (\cap)\ \{A\} = \mathfrak{v}(x)\ (\cap)\ \{A\},$$

és x $\mathfrak{T}_0$-érintkezési pontja, ill. $\mathfrak{T}$-érintkezési pontja A-nak, ha a bal oldali, ill. jobb oldali halmazrendszer halmazai nem üresek.

(b): Azonnal adódik (a)-ból.

(c): Ha F $\mathfrak{T}$-zárt, akkor $F \cap E_0$ $\mathfrak{T}_0$-lezárása (b) szerint $\overline{F \cap E_0} \cap E_0$ (ahol $\bar{A}$ mindig a $\mathfrak{T}$-lezárást jelöli), márpedig (2.2.16) szerint

$$\overline{F \cap E_0} \cap E_0 \subset \bar{F} \cap E_0 = F \cap E_0 \subset \overline{F \cap E_0} \cap E_0,$$

azaz $F \cap E_0$ $\mathfrak{T}_0$-zárt. Megfordítva, ha F_0 $\mathfrak{T}_0$-zárt, akkor ismét (b) és (2.2.16) értelmében $F_0 = \bar{F}_0 \cap E_0$, s itt $\bar{F}_0$ $\mathfrak{T}$-zárt.

(d): Következménye (c)-nek, tekintettel (2.1.30) (a)-ra és a tetszőleges $A \subset E$ esetén érvényes

$$E_0 - (A \cap E_0) = (E - A) \cap E_0$$

azonosságra.

(e): Következik (d)-ből, hiszen $G = \bigcup_{i \in I} B_i$ esetén

$$G \cap E_0 = \bigcup_{i \in I} (B_i \cap E_0).$$

(f) viszont (e)-ből adódik, mert

$$\Big(\bigcap_1^n S_i\Big) \cap E_0 = \bigcap_1^n (S_i \cap E_0).\ ▌$$

(2.3.13) (d)-ből következik például, hogy E indiszkrét topológiájának E_0-ra való megszorítása E_0 indiszkrét topológiájával azonos, továbbá hogy

(2.3.14) $$\mathfrak{D}_E \mid E_0 = \mathfrak{D}_{E_0}.$$

Általánosabban:

(2.3.15) *Ha* $\mathcal{V}_1$ *és* $\mathcal{V}_2$ *környezetstruktúra E-n, és* $\mathcal{V}_1 < \mathcal{V}_2$, *továbbá* $\emptyset \neq E_0 \subset E$, *akkor*

$$\mathcal{V}_1 \mid E_0 < \mathcal{V}_2 \mid E_0.$$

Bizonyítás. (2.1.16) folytán bármely $x \in E_0$ pontra

$$\mathfrak{v}_1(x) (\cap) \{E_0\} < \mathfrak{v}_2(x) (\cap) \{E_0\}. \blacksquare$$

(2.3.3)-ból és (2.3.13) (d)-ből és (f)-ből azonnal kiolvasható:

(2.3.16) *Ha* $\mathfrak{T}_i$ *topológia E-n* $(i \in I)$, $\mathfrak{T} = \sup \{\mathfrak{T}_i : i \in I\}$, $\emptyset \neq E_0 \subset E$, *akkor*

$$\sup \{\mathfrak{T}_i \mid E_0 : i \in I\} = \mathfrak{T} \mid E_0. \blacksquare$$

Jegyezzük meg továbbá:

(2.3.17) *Ha* $\mathcal{V}$ *környezetstruktúra E-n,* $\emptyset \neq E_0 \subset E_1 \subset E$, *akkor*

$$(\mathcal{V} \mid E_1) \mid E_0 = \mathcal{V} \mid E_0.$$

Bizonyítás. Bármely $x \in E_0$-ra (2.1.13) szerint

$$\big(\mathfrak{v}(x) (\cap) \{E_1\}\big) (\cap) \{E_0\} = \mathfrak{v}(x) (\cap) \{E_0\}. \blacksquare$$

(2.3.13)-ból könnyen kiolvasható még:

(2.3.18) *Ha* $\emptyset \neq E_0 \subset E$ $\mathfrak{T}$-*nyílt* ($\mathfrak{T}$-*zárt*), *és* $A \subset E_0$ $(\mathfrak{T} \mid E_0)$-*nyílt* $\big((\mathfrak{T} \mid E_0)$-*zárt*$\big)$, *akkor A* $\mathfrak{T}$-*nyílt* ($\mathfrak{T}$-*zárt*) *is.* $\blacksquare$

2.3.c. Gyakorlatok. 1. Legyen ρ_1 és ρ_2 két eltérés az E halmazon, s tegyük fel, hogy alkalmas $0 < c \in \mathbf{R}$ mellett $x, y \in E$ esetén

$$\rho_1(x, y) \leqq c\, \rho_2(x, y).$$

Mutassuk meg, hogy $\mathfrak{T}_{\rho_1} < \mathfrak{T}_{\rho_2}$.

2. Legyen az $[a, b] \subset \mathbf{R}$ intervallumban folytonos valós függvények E halmazán ρ_1, ρ_2, ρ_3 a

$$\rho_1(f, g) = \int_a^b |f(t) - g(t)|\, dt,$$

$$\rho_2(f, g) = \Big(\int_a^b |f(t) - g(t)|^2\, dt\Big)^{1/2},$$

$$\rho_3(f, g) = \sup \{\, |f(t) - g(t)|\, ,\ a \leqq t \leqq b\}$$

képlettel értelmezett távolság. Igazoljuk, hogy $\mathfrak{T}_{\rho_1} < \mathfrak{T}_{\rho_2} < \mathfrak{T}_{\rho_3}$.

3. Legyen $\mathcal{V}_1$ és $\mathcal{V}_2$ két környezetstruktúra az E halmazon. Igazoljuk, hogy ha $\mathcal{V}_1 < \mathcal{V}_2$, és $x_n \to x$ $\mathcal{V}_2$-re nézve, akkor $x_n \to x$ $\mathcal{V}_1$-re nézve is.

4. Mutassuk meg, hogy a 2. alatti ρ_1, ρ_2, ρ_3 távolságra $\mathfrak{T}_{\rho_1} \neq \mathfrak{T}_{\rho_2} \neq \mathfrak{T}_{\rho_3}$.

[Vizsgáljuk az (f_n) és (g_n) sorozatokat, ahol $a \leqq t \leqq a + \frac{1}{n}$ esetén $f_n(t) = n^{3/2}\left(a + \frac{1}{n} - t\right)$, $g_n(t) = n\left(a + \frac{1}{n} - t\right)$, $a + \frac{1}{n} \leqq t \leqq b$ esetén $f_n(t) = g_n(t) = 1$.]

5. Legyen $[E, \rho]$ az **1.3.** alatti 3. feladatban szereplő metrikus tér, továbbá $a, b \in E$ esetén

$$\rho'(a, b) = \sup \{|a_n - b_n|: n \in \mathbf{N}\}.$$

Mutassuk meg, hogy $\mathfrak{T}_{\rho'} < \mathfrak{T}_\rho$, de a két topológia különböző.

6. Legyen $\mathfrak{T}_1$ és $\mathfrak{T}_2$ a **2.2.** alatti 2. feladatban említett két topológia. Igazoljuk, hogy $\overline{\mathfrak{E}} < \mathfrak{T}_1$, $\underline{\mathfrak{E}} < \mathfrak{T}_2$, s hogy e négy topológia között más $<$ reláció nem áll fenn.

7. Legyen $\mathfrak{T}$ a **2.2.** alatti 4. feladatban értelmezett topológia. Igazoljuk, hogy sem $\mathfrak{T} < \mathfrak{E}^2$, sem $\mathfrak{E}^2 < \mathfrak{T}$ nem érvényes.

8. Legyen $\mathfrak{T}$ a **2.2.** alatti 7. feladat topológiája. Mutassuk meg, hogy $\mathfrak{F}_E < \mathfrak{T}$, és itt nem áll egyenlőség, ha E végtelen halmaz.

9. Legyen $\mathfrak{T}_i$ $(i \in I)$ topológia E-n, $I = \bigcup_{j \in J} I_j$, $\mathfrak{T}'_j = \sup \{\mathfrak{T}_i: i \in I_j\}$, $\mathfrak{T}''_j = \inf \{\mathfrak{T}_i: i \in I_j\}$. Mutassuk meg, hogy

$$\sup \{\mathfrak{T}_i : i \in I\} = \sup \{\mathfrak{T}'_j : j \in J\},$$
$$\inf \{\mathfrak{T}_i : i \in I\} = \inf \{\mathfrak{T}''_j : j \in J\}.$$

10. Legyen $\mathfrak{T}_i$ és $\mathfrak{T}'_i$ topológia E-n $(i \in I)$, és minden i-re $\mathfrak{T}_i < \mathfrak{T}'_i$. Igazoljuk, hogy

$$\sup \{\mathfrak{T}_i : i \in I\} < \sup \{\mathfrak{T}'_i : i \in I\},$$
$$\inf \{\mathfrak{T}_i : i \in I\} < \inf \{\mathfrak{T}'_i : i \in I\}.$$

11. Legyen $\mathfrak{T}_1$ és $\mathfrak{T}_2$ a 6. alatti két topológia. Igazoljuk, hogy

$$\sup \{\mathfrak{T}_1, \mathfrak{T}_2\} = \mathfrak{D}_{\mathbf{R}},$$

$\inf \{\mathfrak{T}_1, \mathfrak{T}_2\}$ pedig $\mathbf{R}$ indiszkrét topológiája.

12. Legyen $E = \mathbf{R}$, $E_0 = E - \mathbf{Q}$, A az egész számok halmaza, $B = \mathbf{Q} - A$, $\mathfrak{G}$ az $\mathfrak{E}$-nyílt halmazok rendszere. Mutassuk meg, hogy

(a) $\mathfrak{B}_1 = \mathfrak{G} \cup \{A\}$ és $\mathfrak{B}_2 = \mathfrak{G} \cup \{B\}$ szubbázis egy $\mathbf{R}$ fölötti $\mathfrak{T}_1$, ill. $\mathfrak{T}_2$ topológia számára;

(b) $\mathfrak{E} < \mathfrak{T}_1$, $\mathfrak{E} < \mathfrak{T}_2$, de további $<$ reláció e három topológia között nem áll fenn;

(c) $\mathfrak{T}_1 | E_0 = \mathfrak{T}_2 | E_0 = \mathfrak{E} | E_0$.

13. Legyen E rendezett halmaz, rendezéstopológiája $\mathfrak{T}$, $E_0 \subset E$ többelemű részhalmaz, ellátva az E-beli rendezési relációval, $\mathfrak{T}_0$ pedig E_0 rendezéstopológiája. Bizonyítandó, hogy

(a) $\mathfrak{T}_0 < \mathfrak{T} | E_0$;

(b) itt általában nem áll egyenlőség.

$[E = \mathbf{R}, E_0 = (-\infty, 0] \cup (1, +\infty).]$

14. Ha E rendezett halmaz, mutassuk meg, hogy a következő két állítás egyenértékű:

(a) Minden felülről korlátos $\emptyset \neq A \subset E$ halmaz felső korlátjai között van legkisebb;

(b) Minden alulról korlátos $\emptyset \neq A \subset E$ halmaz alsó korlátjai között van legnagyobb.

Az (a) és (b) tulajdonságú halmaz rendezését teljesnek mondjuk. Bizonyítandó, hogy ha a 13. alatti jelölésekkel E rendezése teljes, és E_0 $\mathfrak{T}$-zárt, akkor $\mathfrak{T}_0 = \mathfrak{T} \mid E_0$. [$x \in E$ esetén $(\leftarrow, x) \cap E_0$ vagy E_0-lal, vagy $((\leftarrow, y) \cap E_0)$-lal egyenlő, ahol y az $[x, \rightarrow) \cap E_0$ halmaz legnagyobb alsó korlátja.]

15. Legyen E az $[\mathbf{R}^m, \mathfrak{E}^m]$ tér összes nem-üres részhalmazainak rendszere, E_0 ezek közül a korlátosaké, E_1 pedig a korlátos, zárt halmazoké. Jelölje $\mathfrak{T}$ a **2.2.** alatti 5. feladatban az $E = \mathfrak{P}(\mathbf{R}^m)$ halmazon értelmezett topológiát, d pedig az E_0-on értelmezett Hausdorff-távolságot. Mutassuk meg, hogy

(a) $\mathfrak{T} \mid E_1 < \mathfrak{T}_d \mid E_1$;

(b) itt nem áll egyenlőség;

(c) $\mathfrak{T} \mid E_0$ és $\mathfrak{T}_d$ nem hasonlítható össze.

[Ha $K \subset \mathbf{R}^m$ korlátos és $\mathfrak{E}^m$-zárt, $G \supset K$ $\mathfrak{E}^m$-nyílt, akkor az **1.3.** alatti 13. feladat eredményét felhasználva látható, hogy alkalmas $\varepsilon > 0$ mellett $K_1 \in E_1$, $d(K_0, K_1) < \varepsilon$ esetén $K_1 \subset G$. Ha $a \in \mathbf{R}^m$, $K = \bar{S}(a, 1)$, $K_1 = \{a\}$, akkor minden $G \supset K$ $\mathfrak{E}^m$-nyílt halmazra $K_1 \subset G$, viszont $d(K, K_1) = 1$. $G = S(a, 1)$ esetén $d(K, G) = 0$, viszont K nem része a G-t tartalmazó $\mathfrak{E}^m$-nyílt G-nek.]

2.4. RÁCSOK KONVERGENCIÁJA

2.4.a. A sorozatkonvergencia elégtelensége. Az előzőkben értelmeztük tetszőleges topologikus térben (sőt tetszőleges környezettérben) a pontsorozatok konvergenciáját: $x_n \rightarrow x$, ha x minden környezete tartalmazza alkalmas küszöbindextől kezdve a sorozat tagjait. (1.2.26)-ból tudjuk, hogy metrikus terekben a zárt halmazok jellemezhetők a sorozatok konvergenciája segítségével, amennyiben egy A halmaz pontosan akkor zárt, ha $x_n \in A$ $(n \in \mathbf{N})$, $x_n \rightarrow x$ esetén $x \in A$. Ennek az állításnak egy része minden környezettérben igaz: ha $x_n \in A$, és $x_n \rightarrow x$, akkor x minden környezete tartalmazza a sorozat elég nagy indexű tagjait, s így metszi A-t, azaz x érintkezési pontja A-nak; ha A zárt is, akkor tehát $x \in A$.

Megfordítva azonban abból, hogy minden $x_n \in A$, $x_n \rightarrow x$ tulajdonságú sorozatra $x \in A$, általában nem következik, hogy A zárt. Ezt egy sok szempontból tanulságos példával világítjuk meg, a felhasznált konstrukciót mindjárt kicsit általánosabban megfogalmazva.

Nevezzünk egy nem-üres $\mathfrak{J}$ halmazrendszert **ideál**nak, ha $A \in \mathfrak{J}$, $B \in \mathfrak{J}$ esetén $A \cup B \in \mathfrak{J}$, és $A \subset B \in \mathfrak{J}$ esetén $A \in \mathfrak{J}$.

(2.4.1) *Legyen $\mathfrak{T}$ topológia E-n, $\mathfrak{J}$ pedig E részhalmazaiból álló ideál. A*

$$\mathfrak{B} = \{G - I\colon\ G\ \mathfrak{T}\text{-nyílt},\ I \in \mathfrak{J}\}$$

halmazrendszer bázis egy E fölötti $\mathfrak{T}_{\mathfrak{J}}$ topológia számára.

Bizonyítás. G_1, G_2 $\mathfrak{T}$-nyílt halmazokat és $I_1, I_2 \in \mathfrak{J}$ halmazokat véve

$$(G_1 - I_1) \cap (G_2 - I_2) = (G_1 \cap G_2) - (I_1 \cup I_2) \in \mathfrak{B},$$

úgyhogy (2.2.8) alkalmazható, hiszen $x \in E$ esetén $x \in E - \emptyset \in \mathfrak{B}$. ∎

Álljon most $\mathfrak{J}$ az $\mathbf{R}$ számegyenes megszámlálható részhalmazaiból, s legyen $\mathfrak{T} = \mathfrak{E}$. Ekkor a (2.4.1) alapján készített $\mathfrak{T}_{\mathfrak{J}}$ topológiára nézve az $x_n \to x$ reláció pontosan akkor áll, ha véges számú n index kivételével $x_n = x$. Valóban, ha végtelen sok n-re lesz $x_n \neq x$, akkor ezeknek az x_n-eknek (megszámlálható) halmazát I-vel jelölve, $\mathbf{R} - I$ $\mathfrak{T}_{\mathfrak{J}}$-környezete x-nek, amely egyetlen küszöbindextől kezdve sem tartalmazza a sorozat tagjait. Ezért minden $A \subset \mathbf{R}$ halmazra áll, hogy $x_n \in A$, $x_n \to x$ esetén $x \in A$. Ennek ellenére nem minden $A \subset \mathbf{R}$ halmaz $\mathfrak{T}_{\mathfrak{J}}$-zárt, más szóval $\mathfrak{T}_{\mathfrak{J}}$ nem azonos a $\mathfrak{D}_{\mathbf{R}}$ diszkrét topológiával, hiszen például egy egyetlen pontból álló $\{x\}$ halmaz nem lehet $\mathfrak{T}_{\mathfrak{J}}$-nyílt, minthogy bármely x-et tartalmazó $G - I$ alakú halmaz (ahol G $\mathfrak{E}$-nyílt, I megszámlálható) tartalmaz egy $V - I$ alakú halmazt, ahol V nyílt intervallum, s így $G - I$ biztosan végtelen (sőt nem-megszámlálható), nem állhat egyedül x-ből.

2.4.b. Rácsok konvergenciája. Ha tehát a zárt halmazokat tetszőleges topologikus térben (1.2.26) mintájára a konvergencia fogalmával jellemezni akarjuk, a sorozatok konvergenciájával nem boldogulunk. E fogalom alkalmas általánosítása érdekében gondoljuk meg, hogy az (x_n) sorozat pontosan akkor tart x-hez, ha a (2.1.26) és (2.1.27) révén definiált hozzá tartozó sorozatrács finomabb az x pont környezetrácsánál. Ezek után kézenfekvő megállapodni abban, hogy ha $[E, \mathfrak{V}]$ környezettér, $\mathfrak{r}$ pedig E-beli rács, az $\mathfrak{r}$ **rács**ról azt mondjuk, hogy az x **limeszpont**hoz **tart** (vagy **konvergál**), jelben $\mathfrak{r} \to x$ vagy $x = \lim \mathfrak{r}$, ha

$$\mathfrak{r} > \mathfrak{v}(x),$$

vagyis ha x minden környezete tartalmaz egy $\mathfrak{r}$-beli részhalmazt. Természetesen itt is szerepeltethetjük $\mathfrak{v}(x)$ helyett a vele ekvivalens rácsok bármelyikét, azaz x tetszőleges környezetbázisát. A rácsok így definiált konvergenciája eszerint általánosítása a pontsorozatok konvergenciájának.

Most már kimondhatjuk (1.2.26) következő megfelelőjét:

(2.4.2) *Legyen $[E, \mathfrak{V}]$ környezettér, $A \subset E$, $x \in E$. Az A halmaznak x pontosan akkor érintkezési pontja, ha van x-hez tartó A-beli rács. A pontosan akkor zárt, ha abból, hogy $\mathfrak{r}$ A-beli rács, és $\mathfrak{r} \to x$, következik, hogy $x \in A$.*

Bizonyítás. Ha $\mathfrak{r}$ A-beli rács, és $\mathfrak{r} \to x$, akkor x minden környezete tartalmaz egy $\mathfrak{r}$-beli halmazt, tehát egy A-beli nem-üres részhalmazt, s így metszi A-t. Másrészt ha x érintkezési pontja A-nak, akkor $\emptyset \notin \mathfrak{v}(x)\ (\cap)\ \{A\}$ folytán $\mathfrak{r} = \mathfrak{v}(x)\ (\cap) \{A\}$ A-beli rács, és $\mathfrak{r} \to x$, hiszen (2.1.21) szerint $\mathfrak{v}(x) < \mathfrak{r}$.

Az állítás második része (2.1.29) alapján azonnal következik az elsőből. ∎

A definícióból azonnal adódik:

(2.4.3) *Ha egy $[E, \mathfrak{V}]$ környezettérben $\mathfrak{r} \to x$, és $\mathfrak{r}_1$ valamely $\mathfrak{r}$-nél finomabb E-beli rács, akkor $\mathfrak{r}_1 \to x$. Ekvivalens rácsok a konvergencia szempontjából egyenértékűek.* ∎

Ez (1.2.5) általánosítása, hiszen világos, hogy az (x_n) sorozat valamely részsorozatához tartozó sorozatrács finomabb, mint az (x_n)-hez tartozó sorozatrács.

Hasonlóan (1.2.4) általánosítása:

(2.4.4) *Az* $[E, \mathcal{V}]$ *környezettér bármely* $x \in E$ *pontjához tartozó* $\dot{x}$ *alapszűrő x-hez konvergál.* ∎

(1.2.6)-nak viszont ez felel meg:

(2.4.5) *Ha az* $[E, \mathcal{V}]$ *környezettérben* $\mathfrak{r}_1 \to x$, $\mathfrak{r}_2 \to x$, *akkor* $\mathfrak{r}_1 (\cup) \mathfrak{r}_2 \to x$.

Bizonyítás. (2.1.23)-ból tudjuk, hogy $\mathfrak{r}_1$-gyel és $\mathfrak{r}_2$-vel együtt $\mathfrak{r}_1 (\cup) \mathfrak{r}_2$ is E-beli rács. x minden környezete tartalmaz egy $R_1 \in \mathfrak{r}_1$ és egy $R_2 \in \mathfrak{r}_2$ részhalmazt, s akkor az $R_1 \cup R_2 \in \mathfrak{r}_1 (\cup) \mathfrak{r}_2$ halmazt is. ∎

(2.4.6) *Legyen* $\mathcal{V}_1$ *és* $\mathcal{V}_2$ *környezetstruktúra E-n,* $\mathcal{V}_1 < \mathcal{V}_2$. *Ha* $\mathfrak{r} \to x$ $\mathcal{V}_2$*-re nézve, akkor* $\mathfrak{r} \to x$ $\mathcal{V}_1$*-re nézve is.*

Bizonyítás. A környezetszűrők szokásos jelölésével a feltevés szerint $\mathfrak{r} > \mathfrak{v}_2(x) > \mathfrak{v}_1(x)$. ∎

Ha szükség van annak feltüntetésére, hogy a $\mathfrak{r}$ rács mely $\mathcal{V}$ környezetstruktúrára nézve tart x-hez, a

$$\mathfrak{r} \to x(\mathcal{V}) \text{ vagy } x = \lim\nolimits_{\mathcal{V}} \mathfrak{r}$$

jelölést alkalmazhatjuk.

(2.4.7) *Ha* $\mathcal{T}_i$ $(i \in I)$ *topológia E-n és* $\mathfrak{r} \to x(\mathcal{T}_i)$ *minden* $i \in I$*-re, akkor a*

$$\mathcal{T} = \sup \{\mathcal{T}_i \colon i \in I\}$$

jelöléssel $\mathfrak{r} \to x(\mathcal{T})$.

Bizonyítás. (2.3.7) szerint x-nek $\mathcal{T}$-környezetbázisát alkotják a

$$V = \bigcap_{k=1}^{n} G_{i_k}$$

alakú halmazok, ahol $x \in G_{i_k}$, és G_{i_k} $\mathcal{T}_{i_k}$-nyílt, $i_k \in I$ $(k = 1, \ldots, n)$. A feltevés szerint minden k-ra van olyan $R_k \in \mathfrak{r}$ halmaz, hogy $R_k \subset G_{i_k}$ $(k = 1, \ldots, n)$, majd olyan $R \in \mathfrak{r}$, hogy $R \subset \bigcap_{1}^{n} R_k$. Ekkor $R \subset V$. ∎

(2.4.8) *Legyen* $[E, \mathcal{V}]$ *környezettér,* $\emptyset \neq E_0 \subset E$, $\mathfrak{r}$ E_0*-beli rács,* $x \in E_0$. *Ekkor*

$$\mathfrak{r} \to x(\mathcal{V}) \textit{ és } \mathfrak{r} \to x(\mathcal{V} \mid E_0)$$

egyszerre áll fenn.

Bizonyítás. Minthogy $\mathfrak{r}$ E_0-beli rács, fennáll $\mathfrak{r} < \{E_0\}$. Így $\mathfrak{r} > \mathfrak{v}(x)$ esetén

$$\mathfrak{r} (\cap) \mathfrak{r} > \mathfrak{v}(x) (\cap) \{E_0\},$$

s minthogy $\mathfrak{r}$ rács, érvényes (2.1.19) szerint $\mathfrak{r} > \mathfrak{r} (\cap) \mathfrak{r}$ is. Másrészt természetesen $\mathfrak{r} > \mathfrak{v}(x) (\cap) \{E_0\}$ esetén $\mathfrak{r} > \mathfrak{v}(x)$ is, hiszen $\mathfrak{v}(x) (\cap) \{E_0\} > \mathfrak{v}(x)$. ∎

2.4.c. Megszámlálhatósági axiómák. Felmerül az a kérdés, min múlik, hogy egy metrikus tér zárt halmazai jellemezhetők pontsorozatok konvergenciája segítségével, viszont ez akármilyen topologikus térben nem lehetséges. A kérdés magva a következő egyszerű megjegyzés:

(2.4.9) *Ha egy* $[E, \mathcal{V}]$ *környezettérben az* $x \in E$ *pontnak van megszámlálható* $\mathfrak{b}(x)$ *környezetbázisa, és* x *érintkezési pontja az* $A \subset E$ *halmaznak, akkor van olyan* A*-beli* (x_n) *sorozat, amely* x*-hez tart.*

Bizonyítás. Legyen $\{V_n: n = 1, 2, \ldots\} = \mathfrak{b}(x)$. $V_n' = \bigcap_1^n V_i$ is környezete x-nek, így $V_n' \cap A \neq \emptyset$; legyen $x_n \in V_n' \cap A$. Ekkor az (x_n) sorozat a keresett. Valóban, ha V x-nek tetszőleges környezete, akkor valamely n_0-ra $V_{n_0} \subset V$, s persze $n \geq n_0$ esetén $x_n \in V_n' \subset V_{n_0} \subset V$. ∎

Nevezzük **első megszámlálhatósági axiómá**nak a következő kikötést:

(M_1) *Az* $[E, \mathcal{T}]$ *topologikus térben minden pontnak van megszámlálható környezetbázisa.*

Az (M_1)-nek eleget tevő $\mathcal{T}$ topológiát, ill. $[E, \mathcal{T}]$ topologikus teret **M_1-topológiá**nak, ill. **M_1-tér**nek fogjuk nevezni.

M_1-térben most már kimondható (2.4.2)-nek következő élesítése:

(2.4.10) *Legyen* $[E, \mathcal{T}]$ M_1*-tér,* $A \subset E$, $x \in E$. *Az* A *halmaznak* x *pontosan akkor érintkezési pontja, ha van* x*-hez tartó* A*-beli pontsorozat. A pontosan akkor zárt, ha abból, hogy* $x_n \in A$, *és* $x_n \to x$, *következik, hogy* $x \in A$.

Bizonyítás. Ha x érintkezési pontja A-nak, akkor (2.4.9) szerint van x-hez tartó A-beli pontsorozat; ha viszont van ilyen pontsorozat, akkor a hozzátartozó sorozatrácsra (2.4.2)-t alkalmazva x érintkezési pontja A-nak. A második rész ebből (2.1.29) alapján nyerhető. ∎

Metrikus, és általánosabban félmetrikus terekben a (2.4.10) tétel alkalmazható, hiszen ilyen térben x környezetbázisát alkotják az $S\left(x, \frac{1}{n}\right)$ $(n \in \mathrm{N})$ gömbök:

(2.4.11) *Minden félmetrikus tér* M_1*-tér.* ∎

Gyakran hasznos tudni, hogy egy pont megszámlálható környezetbázisa további megszorításoknak is alávethető. Erről szól a következő két tétel:

(2.4.12) M_1*-térben bármely pont bármely környezetbázisából kiválasztható megszámlálható környezetbázis.*

Bizonyítás. Legyen $\{V_n: n \in \mathrm{N}\}$ x-nek megszámlálható környezetbázisa, $\mathfrak{b}(x)$ pedig tetszőleges környezetbázis. Legyen $V_n' \in \mathfrak{b}(x)$ olyan, hogy $V_n' \subset V_n$. Világos, hogy $\{V_n': n \in \mathrm{N}\}$ is környezetbázisa x-nek. ∎

Eszerint pl. M_1-térben bármely pontnak van megszámlálható nyílt környezetbázisa. Sőt:

(2.4.13) M_1*-térben bármely pontnak van olyan nyílt* $\{V_n: n \in \mathrm{N}\}$ *környezetbázisa, melyben* $V_1 \supset V_2 \supset V_3 \supset \ldots$.

Bizonyítás. (2.4.12) szerint van x-nek nyílt és megszámlálható $\{V_n': n \in \mathrm{N}\}$ környezetbázisa. Legyen $V_n = \bigcap_1^n V_i'$. A $\{V_n: n \in \mathrm{N}\}$ rendszer megfelel. ∎

Az (M_1) axiómánál erősebb megszorítást tartalmaz a következő **második megszámlálhatósági axióma:**

(M_2) *Az* $[E, \mathcal{T}]$ *topologikus térben van megszámlálható bázis.*

Az (M_2)-nek eleget tevő $\mathfrak{T}$ topológiát, ill. $[E, \mathfrak{T}]$ topologikus teret **M_2-topológiának**, ill. **M_2-térnek** nevezzük.

(2.2.6)-ból azonnal következik:

(2.4.14) *Minden M_2-tér egyúttal M_1-tér is.* ▮

A (2.2.9) tétel nyilván így is megfogalmazható: egy félmetrikus tér pontosan akkor szeparábilis, ha M_2-tér. Ezt kissé általánosabban is kimondhatjuk. Nevezzük a metrikus terek mintájára egy $[E, \mathfrak{T}]$ topologikus tér $A \subset E$ részhalmazát **sűrűnek** (vagy **mindenütt sűrűnek**), ha $\bar{A} = E$, azaz ha E bármely pontjának bármely környezete metszi A-t. Az $[E, \mathfrak{T}]$ teret **szeparábilisnak** mondjuk, ha van benne megszámlálható sűrű halmaz. Ezek a definíciók természetesen a metrikus terekre megfogalmazott korábbi definíciók általánosításai. Mármost (2.2.9) egyik része általában is igaz:

(2.4.15) *Minden M_2-tér szeparábilis.*

Bizonyítás. Legyen $\{B_n: n \in \mathrm{N}\}$ egy bázis, és $x_n \in B_n$ (feltehető, hogy a B_n halmazok nem üresek). Ekkor $A = \{x_n: n \in \mathrm{N}\}$ sűrű, mert bármely x pont bármely V környezete (2.2.6) szerint tartalmaz egy B_n halmazt s vele egy $x_n \in A$ pontot. ▮

Másrészt (2.2.9) értelmében:

(2.4.16) *Szeparábilis félmetrikus tér egyúttal M_2-tér is.* ▮

Érvényes a (2.4.12) tétel következő megfelelője:

(2.4.17) *M_2-térben bármely $\mathfrak{B}$ bázisból kiválasztható megszámlálható bázis.*

Bizonyítás. Legyen $\{B_n: n \in \mathrm{N}\}$ megszámlálható bázis, és tekintsük azokat az (i, j) indexpárokat, amelyekre alkalmas $B \in \mathfrak{B}$ halmazzal érvényes $B_i \subset B \subset B_j$. Ilyen (i, j) pár megszámlálható sok van. Minden ilyen párra válasszunk ki egy $B_{ij} \in \mathfrak{B}$ halmazt, amely eleget tesz a $B_i \subset B_{ij} \subset B_j$ feltételnek.

Az így kiválasztott B_{ij} halmazok alkotják a keresett — nyilván megszámlálható — bázist. Csakugyan, ha G nyílt, és $x \in G$, akkor van olyan B_j, hogy $x \in B_j \subset$ $\subset G$, majd olyan $B \in \mathfrak{B}$, hogy $x \in B \subset B_j$, végül olyan B_i, hogy $x \in B_i \subset B$. Az így előálló (i, j) pár a kiválasztottak között van, így $x \in B_i \subset B_{ij} \subset B_j \subset G$. ▮

M_2-terekre kiterjeszthető az (1.2.34) Lindelöf-féle tétel. Evégből a **(nyílt, zárt, véges, megszámlálható) befedés** definícióját tetszőleges topologikus térre szóról szóra elismételve csak azt kell észrevennünk, hogy (1.2.34) bizonyításában pontosan azt használtuk csak ki, hogy $(\mathbf{R}^m, \mathfrak{G}^m)$ M_2-tér. Ha még megállapodunk abban, hogy egy $[E, \mathfrak{T}]$ topologikus teret **Lindelöf-féle tér**nek nevezünk (ill. a $\mathfrak{T}$ topológiát **Lindelöf-féle topológiá**nak), ha E minden nyílt befedéséből kiválasztható megszámlálható befedés, kimondhatjuk:

(2.4.18) *Minden M_2-tér egyúttal Lindelöf-tér is.* ▮

Jegyezzük meg végül (2.3.10) és (2.3.13) (e) nyilvánvaló következményeként:

(2.4.19) *M_1-tér altere is M_1-tér; M_2-tér altere is M_2-tér.* ▮

Hasonlóan adódik (2.3.6)-ból és (2.3.7)-ből:

(2.4.20) *Ha I megszámlálható, és $i \in I$ esetén $\mathfrak{T}_i$ M_1- (M_2-) topológia, akkor* $\sup \{\mathfrak{T}_i: i \in I\}$ *is ilyen.* ▮

2.4.d. Példák. Metrizálható terek. A **2.4.a.** pontban láttunk példát olyan topologikus térre, amelyben a (2.4.10) tétel állítása nem teljesül. Így ez a tér nem M_1-tér.

Arra, hogy az (M_2) axióma valóban erősebb, mint az (M_1) axióma, példa minden nem-szeparábilis metrikus tér (lásd (2.4.11) és (2.4.15)). További nevezetes példa a következő:

(2.4.21) *Az* $[\mathbf{R}, \mathscr{E}^+]$ *tér*

(a) *M_1-tér;*

(b) *nem M_2-tér;*

(c) *minden altere szeparábilis;*

(d) *minden altere Lindelöf-tér.*

Bizonyítás. (a): Az $\left[x, x+\frac{1}{n}\right)$ $(n \in \mathbf{N})$ intervallumok x-nek nyilván $\mathscr{E}^+$-környezetbázisát alkotják.

(b): Minthogy pl. $[x, x+1)$ $\mathscr{E}^+$-környezete x-nek, világos, hogy a tér minden bázisában kell lennie olyan halmaznak, amelynek éppen x a legkisebb eleme. Az $\mathbf{R}$ halmaz nem-megszámlálható volta miatt ez megszámlálható bázisra nem teljesülhet.

(c) és (d) igazolása céljából bocsássuk előre a következő állítást:

(*) *Bármely $A \subset \mathbf{R}$ halmaznak legfeljebb megszámlálható sok olyan $x \in A$ pontja van, amelyhez található egy $n \in \mathbf{N}$ úgy, hogy $\left(x, x+\frac{1}{n}\right) \cap A = \emptyset$.*

Valóban, ha B_n jelöli azoknak az $x \in A$ pontoknak a halmazát, amelyekre $\left(x, x+\frac{1}{n}\right) \cap A = \emptyset$, akkor bármely $\left[\frac{k}{n}, \frac{k+1}{n}\right)$ (k egész) intervallum B_n-nek legfeljebb egy pontját tartalmazhatja. Így B_n legfeljebb megszámlálható.

(c): Legyen $\emptyset \neq A \subset E$. (2.4.19) szerint $\mathscr{E} \mid A$ M_2-topológia, így (2.4.15) értelmében van egy megszámlálható $(\mathscr{E} \mid A)$-sűrű $M \subset A$ halmaz. Ha $x \in A$ nem tartozik a (*) alatti megszámlálható kivételes halmazhoz, akkor x-nek bármely V $\mathscr{E}^+$-környezetéhez van olyan $n \in \mathbf{N}$, hogy $\left[x, x+\frac{1}{n}\right) \subset V$, ehhez egy $y \in A \cap \left(x, x+\frac{1}{n}\right)$ pont, majd ehhez egy $z \in M \cap \left(x, x+\frac{1}{n}\right) \subset M \cap V$. Ha tehát M-hez hozzávesszük az említett megszámlálható sok kivételes pontot, a keletkező $M' \subset A$ halmaz $(\mathscr{E}^+ \mid A)$-sűrű lesz.

(d): Legyen $\emptyset \neq E_0 \subset E$, $\{G_i \cap E_0 : i \in I\}$ E_0-nak egy befedése, G_i $\mathscr{E}^+$-nyílt minden i-re. Ekkor minden $x \in E_0$-hoz van egy $i \in I$, melyre $x \in G_i$, s ehhez egy $\varepsilon_x > 0$, melyre $[x, x+\varepsilon_x) = \subset G_i$. Legyen $A \supset E_0$ az így keletkező $[x, x+\varepsilon_x)$ intervallumok egyesítése, és

$$B = A - \bigcup_{x \in E_0} (x, x+\varepsilon_x)$$

Minden $y \in B$ pont benne van egy $[x, x+\varepsilon_x)$ intervallumban (mégpedig ennek szükségképpen bal oldali végpontjával esik egybe), s akkor olyan $n \in \mathbf{N}$ számot választva, hogy $y+\frac{1}{n} < x+\varepsilon_x$ legyen, nyilván $\left(y, y+\frac{1}{n}\right) \cap B = \emptyset$. Így B legfeljebb megszámlálható. Viszont az $\bigcup_{x\in E_0}(x, x+\varepsilon_x)$ halmazt az (1.2.34) Lindelöf-féle tétel szerint már megszámlálható sok $(x_k, x_k+\varepsilon_{x_k})$ $(k\in \mathbf{N})$ intervallum is befedi; minden $[x_k, x_k+\varepsilon_{x_k})$ intervallumhoz egy őt tartalmazó G_{i_k} $(i_k\in I)$ halmazt keresve, továbbá $B\cap E_0$ minden pontjához is kiválasztva egy-egy őt tartalmazó G_i $(i\in I)$ halmazt, végül is a G_{i_k} halmazok és a most kiválasztott megszámlálható sok G_i halmaz együtt befedi A-t, tehát E_0-lal alkotott metszeteik befedik $A\supset E_0$ miatt E_0-t. ▌

Az előbbi példában nem volt felesleges hangsúlyozni, hogy a tér minden altere szeparábilis, ugyanis egy szeparábilis tér alterei nem feltétlenül szeparábilisak. Ezt mutatja a következő példa:

(2.4.22) *Legyen $E=\mathbf{R}^2$, és $\mathfrak{T}$ az a topológia, amelynek számára $x=(x_1, x_2)\in E$ környezetbázisát alkotják a*

$$Q(x,\varepsilon)=\{(y_1, y_2)\colon x_1\leqq y_1<x_1+\varepsilon,\ x_2\leqq y_2<x_2+\varepsilon\}\qquad(\varepsilon>0)$$

halmazok. Ekkor

(a) *$[E,\mathfrak{T}]$ szeparábilis;*

(b) *az $E_0=\{(x_1,x_2)\colon x_1+x_2=0\}$ jelöléssel $[E_0, \mathfrak{T}\mid E_0]$ nem szeparábilis;*

(c) *$[E,\mathfrak{T}]$ nem Lindelöf-tér.*

Bizonyítás. (2.2.3)-ból látszik, hogy $\mathfrak{T}$ csakugyan topológia, és a $Q(x,\varepsilon)$ halmazok $\mathfrak{T}$-nyíltak.

(a): A racionális koordinátájú pontok halmaza $\mathfrak{T}$-sűrű.

(b): $\mathfrak{T}\mid E_0=\mathfrak{D}_{E_0}$, mert $x\in E_0$ esetén $Q(x,\varepsilon)\cap E_0=\{x\}$ minden $\varepsilon>0$-ra.

(c): Minden $x\notin E_0$ ponthoz válasszunk olyan $\varepsilon_x>0$ számot, hogy $Q(x,\varepsilon_x)\cap E_0=\emptyset$ legyen, továbbá az $x\in E_0$ pontokhoz tetszőleges $\varepsilon_x>0$-t. Az így kapott $Q(x,\varepsilon_x)$ halmazok E-nek olyan nyílt befedését alkotják, amelynek egyetlen megszámlálható részrendszere sem fedi be E_0-t. ▌

Említsük még meg a következőt:

(2.4.23) *Legyen $H\neq\emptyset$ tetszőleges halmaz, E a H-n értelmezett valós függvények halmaza, $\mathfrak{T}$ a pontonkénti konvergencia topológiája. Ha H nem megszámlálható, akkor $[E,\mathfrak{T}]$ nem M_1-tér.*

Bizonyítás. (2.4.12) miatt elég megmutatni, hogy a szokott

$$V_{t,\varepsilon}=[g\colon |g(t)-f(t)|<\varepsilon\}\qquad(t\in H,\ \varepsilon>0)$$

jelöléssel $f\in E$-nek

$$\bigcap_{1}^{n} V_{t_i,\varepsilon_i}\tag{2.4.24}$$

alakú halmazokból álló környezetbázisából nem lehet megszámlálható környezetbázist kiválasztani. Azonban a (2.4.24) halmazok mindegyikében véges számú $t_i\in H$ lép fel, ilyenek megszámlálható rendszeréhez tehát biztosan található olyan $t\in H$, amely egyikben sem szerepel. Ekkor valamely $\varepsilon>0$ mellett $V_{t,\varepsilon}$ biztosan nem tartalmazza az említett részrendszer egyik halmazát sem. ▌

A most bemutatott példák ismételten mutatják, hogy egyes topologikus terekben előfordulhatnak olyan jelenségek, amelyek metrikus vagy félmetrikus terekben nem léphetnek fel: a (2.4.23) alatti tér nem M_1-tér, holott (2.4.11) szerint minden félmetrikus tér ilyen. Az $\mathcal{E}^+$ topológia szeparábilis, de nem M_2-topológia, ellentétben (2.4.16)-tal. A (2.4.22) alatti tér szeparábilis, de nem Lindelöf-tér, ellentétben (2.4.16)-tal és (2.4.18)-cal. Ha tehát megállapodunk abban, hogy egy $\mathcal{T}$ topológiát, ill. egy $[E, \mathcal{T}]$ topologikus teret **metrizálható**nak (**félmetrizálható**nak) mondunk, ha E-n bevezethető olyan ρ távolság (eltérés), hogy $\mathcal{T}$ éppen $\mathcal{T}_\rho$-val legyen azonos, elmondhatjuk, hogy a most említett terek egyike sem (fél)metrizálható.

Látnivaló, hogy nem-metrizálható topológiák az analízis viszonylag elemi kérdéseivel (számsorozat egyoldali konvergenciája, függvénysorozat pontonkénti konvergenciája) kapcsolatban is fellépnek.

2.4.e. Gyakorlatok. 1. Igazoljuk, hogy az E halmazban az $\mathfrak{J}$ halmazrendszer ideál:

(a) E tetszőleges, $\mathfrak{J}$ a véges részhalmazok rendszere;

(b) E metrikus tér, $\mathfrak{J}$ a korlátos halmazok rendszere;

(c) E topologikus tér, $\mathfrak{J}$ azokból a halmazokból áll, amelyek egy nyílt halmaz határával befedhetők;

(d) E topologikus tér, $\mathfrak{J}$ azokból a halmazokból áll, amelyek megszámlálható sok nyílt halmaz határával befedhetők.

2. Mutassuk meg, hogy ha $\mathfrak{J}_1$ és $\mathfrak{J}_2$ az $[E, \mathcal{T}]$ topologikus tér részhalmazaiból álló ideál, és $\mathfrak{J}_1 \subset \mathfrak{J}_2$, akkor a (2.4.1) alatti jelöléssel $\mathcal{T}_{\mathfrak{J}_1} < \mathcal{T}_{\mathfrak{J}_2}$, de az utóbbi relációból általában nem következik, hogy $\mathfrak{J}_1 \subset \mathfrak{J}_2$.

[$E = \mathbf{R}$, $\mathcal{T} = \mathcal{E}$, $\mathfrak{J}_1$ a véges halmazokból, $\mathfrak{J}_2$ egyedül az üres halmazból áll.]

3. Legyen $[E, \mathcal{V}]$ környezettér, $\mathfrak{r}$ E-beli rács, $x \in E$, és tegyük fel, hogy $\mathfrak{r}$ nem tart x-hez. Mutassuk meg, hogy ekkor van olyan $\mathfrak{r}$-nél finomabb $\mathfrak{r}_1$ rács, hogy egyetlen $\mathfrak{r}_1$-nél finomabb rács sem tart x-hez.

4. Adjunk példát olyan E halmazra és E fölötti $\mathcal{T}_1$ és $\mathcal{T}_2$ topológiára, ahol $\mathcal{T}_1$ M_1-topológia, $\mathcal{T}_2$ pedig nem ilyen, hogy $\mathcal{T}_1 < \mathcal{T}_2$, és olyanra is, hogy $\mathcal{T}_2 < \mathcal{T}_1$.

[Minden indiszkrét és minden diszkrét tér M_1-tér.]

5. Mutassuk meg, hogy az $[E, \mathcal{F}_E]$ tér

(a) M_2-tér, ha E megszámlálható;

(b) nem M_1-tér, de szeparábilis, ha E nem-megszámlálható.

6. Mutassuk meg, hogy a **2.2** alatti 2. feladatban értelmezett két topológia szeparábilis M_1-topológia, de nem M_2-topológia.

7. Adjunk példát olyan M_1-térre, amely nem szeparábilis.

8. Igazoljuk, hogy ha $\mathcal{T}_1$ és $\mathcal{T}_2$ topológia E-n, $\mathcal{T}_2$ szeparábilis, $\mathcal{T}_1 < \mathcal{T}_2$, akkor $\mathcal{T}_1$ is szeparábilis.

9. Álljon $\mathfrak{J}$ $\mathbf{R}$-en azokból a halmazokból, amelyek egy $\mathcal{E}$-nyílt halmaz határával befedhetők, és legyen a (2.4.1) alatti jelöléssel $\mathcal{T} = \mathcal{E}_{\mathfrak{J}}$. Mutassuk meg, hogy

(a) $x \in \mathbf{Q}$ esetén x-nek egyetlen $\mathcal{T} \mid \mathbf{Q}$-környezete sem áll egyedül x-ből;

(b) ha V_n $(n \in \mathbf{N})$ az $x \in \mathbf{Q}$ pont $\mathcal{T} \mid \mathbf{Q}$-környezete, $x_n \in V_n$ pedig olyan, hogy $0 < |x_n - x| < \frac{1}{n}$, akkor $\mathbf{R} - \{x_n : n \in \mathbf{N}\}$ $\mathcal{T}$-nyílt;

(c) $\mathcal{T}|\mathbf{Q}$ nem M_1-topológia.

10. Adjunk példát egy E halmazon olyan $\mathcal{T}_1$ és $\mathcal{T}_2$ topológiára, hogy $\mathcal{T}_1 < \mathcal{T}_2$, $\mathcal{T}_2$ M_2-topológia, de $\mathcal{T}_1$ nem M_1-topológia.

11. Adjunk példát egy E halmazon olyan szeparábilis $\mathcal{T}_1$ és $\mathcal{T}_2$ topológiára, hogy $\sup\{\mathcal{T}_1, \mathcal{T}_2\}$ nem szeparábilis.
[$\mathcal{E}^+$ és $\mathcal{E}^-$.]

12. Bizonyítandó, hogy ha a $\mathcal{T}_1 < \mathcal{T}_2 < \mathcal{T}_3 < \ldots$ topológiák mindegyike szeparábilis, akkor $\mathcal{T} = \sup\{T_i : i \in \mathbf{N}\}$ is szeparábilis.

13. Legyen $\mathfrak{Z}$ $\mathbf{R}$ megszámlálható részhalmazainak a rendszere, és a (2.4.1) alatti jelöléssel $\mathcal{T} = \mathcal{E}_{\mathfrak{Z}}$. Mutassuk meg, hogy $\mathcal{T}$ (nem M_1- és) nem-szeparábilis topológia, de Lindelöf-féle.
[Ha $x \in \mathbf{R}$ esetén $x \in G_x - M_x$, ahol G_x $\mathcal{E}$-nyílt, $M_x \in \mathfrak{Z}$, akkor $\mathbf{R} = \bigcup_1^\infty G_{x_i}$, és $\bigcup_1^\infty M_{x_i}$ megszámlálható.]

14. Igazoljuk, hogy ha $\mathcal{T}_1 < \mathcal{T}_2$ két topológia, és $\mathcal{T}_2$ Lindelöf-féle, akkor $\mathcal{T}_1$ is Lindelöf-féle.

15. Legyen $E = \mathbf{R}$, $\mathfrak{B}$ álljon az $E - \{1, 2, \ldots, n\}$ alakú halmazokból, továbbá az $\{x\}$ halmazokból, ahol $x \neq 0$. Mutassuk meg, hogy
(a) $\mathfrak{B}$ bázis egy $\mathcal{T}$ topológia számára;
(b) $\mathcal{T}$ Lindelöf-féle;
(c) $\mathcal{T}$ M_1-topológia;
(d) $\mathcal{T}$ nem szeparábilis;
(e) $\mathcal{T} \mid E - \{0\}$ nem Lindelöf-féle.

16. Adjunk példát egy E halmazon olyan $\mathcal{T}_1$ és $\mathcal{T}_2$ Lindelöf-féle topológiára, hogy $\sup\{\mathcal{T}_1, \mathcal{T}_2]$ nem Lindelöf-féle.

17. Legyen $E = \mathbf{R}$, B_n ($n \in \mathbf{N}$) álljon a véges komplementumú részhalmazokból, továbbá az $\{x\}$ halmazokból, ahol $x \neq n, n+1, n+2, \ldots$. Mutassuk meg, hogy
(a) $\mathfrak{B}_n$ bázis egy $\mathcal{T}_n$ topológia számára;
(b) $\mathcal{T}_1 < \mathcal{T}_2 < \ldots$;
(c) $\mathcal{T}_n$ Lindelöf-féle;
(d) $\mathcal{T} = \sup\{\mathcal{T}_n : n \in \mathbf{N}\}$ nem Lindelöf-féle.

18. Bizonyítandó, hogy ha egy félmetrikus tér Lindelöf-féle, akkor M_2-tér.
[Az $\left\{S\left(x, \frac{1}{n}\right) : x \in E\right\}$ befedésből válasszunk ki megszámlálható $\left\{S\left(x_{ni}, \frac{1}{n}\right) : i \in \mathbf{N}\right\}$ befedést, és tekintsük az $[x_{ni} : n \in \mathbf{N},\ i \in \mathbf{N}\}$ halmazt.]

2.5. SZÉTVÁLASZTÁSI AXIÓMÁK

2.5.a. Alapfogalmak. Már **2.1.e.**-ben utaltunk arra, hogy egy környezettérben valamely sorozat esetleg több limeszponthoz is tarthat, szemben a metrikus terekkel, ahol ez (1.2.8) értelmében lehetetlen. Ugyanez a megjegyzés természetesen rácsokra is vonatkozik. Ezzel kapcsolatban könnyen igazolható a következő észrevétel:

(2.5.1) *Legyen* $[E, \mathcal{V}]$ *környezettér*, $x, y \in E$. *Pontosan akkor található olyan* E*-beli* $\mathfrak{r}$ *rács, amely egyidejűleg* x*-hez is*, y*-hoz is tart, ha* x *minden környezete metszi* y *minden környezetét.*

Bizonyítás. Ha $\mathfrak{r} \to x$ és $\mathfrak{r} \to y$, akkor $\mathfrak{r} > \mathfrak{v}(x)$, $\mathfrak{r} > \mathfrak{v}(y)$, tehát $\mathfrak{r} > \mathfrak{r} (\cap) \mathfrak{r} > \mathfrak{v}(x) (\cap) \mathfrak{v}(y)$ (2.1.19) és (2.1.16) szerint. Így ekkor $\mathfrak{v}(x) (\cap) \mathfrak{v}(y)$ minden halmaza tartalmaz $\mathfrak{r}$-beli, s ezért nem-üres részhalmazt. Másrészt ha $\emptyset \notin \mathfrak{v}(x) (\cap) \mathfrak{v}(y)$, akkor (2.1.21) szerint magára az $\mathfrak{r} = \mathfrak{v}(x) (\cap) \mathfrak{v}(y)$ rácsra teljesül $\mathfrak{r} \to x$ és $\mathfrak{r} \to y$. ∎

Eszerint a több limeszponthoz is tartó rácsok fellépését annak megkövetelésével lehet kizárni, hogy két különböző pontnak mindig legyenek egymást nem metsző környezeteik. Ehhez hasonló természetű kikötések sokféle változatban szerepelnek; közös néven **szétválasztási axiómák**nak nevezik őket.

Ilyen kikötések könnyebb megfogalmazása végett — most már topologikus terekre szorítkozva — célszerű a következő elnevezéseket bevezetni.

Az $[E, \mathfrak{T}]$ topologikus térben az $A \subset E$ halmaz **környezetén** olyan V halmazt értünk, amelyre $A \subset \operatorname{int} V$. Világos, hogy egy egyelemű $\{x\}$ halmaz környezetei azonosak az x pont környezeteivel.

(2.5.2) *Az* $[E, \mathfrak{T}]$ *topologikus térben bármely* $\emptyset \neq A \subset E$ *halmaz környezetei* E*-beli szűrőt alkotnak; ezt* A ***környezetszűrő****jének nevezzük és* $\mathfrak{v}(A)$*-val jelöljük.* A $\mathfrak{v}(A)$ *szűrő bázisait* A ***környezetbázis****ainak nevezzük. Minden* $\emptyset \neq A \subset E$ *halmaznak van csupa nyílt halmazból álló, azaz* ***nyílt környezetbázis****a.*

Bizonyítás. (2.2.15)-ből következik, hogy $\mathfrak{v}(A)$ szűrő E-ben, s hogy az $\{\operatorname{int} V\colon V \in \mathfrak{v}(A)\}$ halmazrendszer $\mathfrak{v}(A)$-nak nyílt halmazokból álló bázisa. ∎

Az $A = \{x\}$ esetben a (nyílt) környezetbázis fogalma is nyilván átmegy az x pont (nyílt) környezetbázisának fogalmába.

Mármost egy topologikus térben a nem-üres A és B halmazt **szétválasztható**nak mondjuk, ha vannak diszjunkt környezeteik, azaz ha $\emptyset \in \mathfrak{v}(A) (\cap) \mathfrak{v}(B)$; ilyenkor (2.5.2) szerint van A-nak és B-nek diszjunkt nyílt környezete is. Azt mondjuk, hogy A és B **széteső**, ha A-nak van B-t nem metsző, B-nek van A-t nem metsző környezete, s hogy A és B **gyengén széteső**, ha közülük legalább az egyiknek van a másikat nem metsző környezete. Világos, hogy az itt szereplő környezetek mindig választhatók A, ill. B tetszőleges környezetbázisából, például mindig választhatók nyíltnak is. Ebből adódik a következő megjegyzés:

(2.5.3) *Az* $[E, \mathfrak{T}]$ *topologikus térben* A*-nak pontosan akkor van* B*-t nem metsző környezete, ha* $A \cap \bar{B} = \emptyset$. *Így* A *és* B *pontosan akkor széteső, ha* $A \cap \bar{B} = \bar{A} \cap B = \emptyset$ $(A, B \neq \emptyset)$.

Bizonyítás. Ha $A \subset \operatorname{int} V$, és $V \cap B = \emptyset$, akkor $B \subset E - \operatorname{int} V$, az $\operatorname{int} V$ halmaz nyíltsága miatt $E - \operatorname{int} V$ zárt, így $\bar{B} \subset E - \operatorname{int} V$, és $A \cap \bar{B} = \emptyset$. Ha viszont $A \cap \bar{B} = \emptyset$, akkor a nyílt $E - \bar{B}$ halmaz A-nak B-t nem metsző környezete. ∎

(2.5.3)-ra tekintettel az $A \neq \emptyset$, $B \neq \emptyset$ halmazokat **erősen széteső**nek mondjuk, ha $\bar{A} \cap \bar{B} = \emptyset$. Világos, hogy ha A és B akár szétválasztható, akár erősen széteső, akkor széteső is, s ha széteső, akkor gyengén széteső is.

Az előbbi fogalmaknak egyelemű $\{x\}$ halmazokra való alkalmazásakor $\{x\}$ helyett az x pontról beszélünk; például az x pontot és az $A \neq \emptyset$ halmazt szétválaszthatónak mondjuk, ha $\emptyset \in \mathfrak{v}(x) (\cap) \mathfrak{v}(A)$.

Kiterjeszthetjük végül az előbbi definíciókat arra az esetre, mikor az A és B halmaz egyike (vagy mind a kettő) üres; tekintetbe véve, hogy $\emptyset$-nak maga $\emptyset$ is környezete, így $\emptyset$ és bármely $A \subset E$ halmaz szétválasztható és erősen széteső lesz.

2.5.b. ***T_0*-terek.** Elsőnek a következő szétválasztási axiómát tekintsük:

(T_0) *Az $[E, \mathfrak{T}]$ topologikus térben bármely két $x \neq y$ pont gyengén széteső.*

Az ennek eleget tevő topologikus teret ill. topológiát **T_0-térnek**, ill. **T_0-topológiának** fogjuk mondani, és hasonló terminológiát használunk majd a további szétválasztási axiómákkal kapcsolatban is.

A (T_0) axiómának más megfogalmazását teszi lehetővé a következő észrevétel:

(2.5.4) *Egy topologikus térben két x és y pont pontosan akkor gyengén széteső, ha környezetszűrőikre $\mathfrak{v}(x) \neq \mathfrak{v}(y)$.*

Bizonyítás. Ha pl. $V \in \mathfrak{v}(x)$, és $y \notin V$, akkor nyilván $V \notin \mathfrak{v}(y)$. Másrészt ha $\mathfrak{v}(x) \neq \mathfrak{v}(y)$, például $V \in \mathfrak{v}(x)$, $V \notin \mathfrak{v}(y)$, akkor $\operatorname{int} V \in \mathfrak{v}(x)$, és $y \notin \operatorname{int} V$, hiszen a nyílt $\operatorname{int} V$ halmaz bármely pontjának környezete. ▮

Olyan topologikus térre, amely nem T_0-tér, példa bármely félmetrikus tér, amely nem metrikus tér. Valóban:

(2.5.5) *Egy E halmazon adott ρ eltérés pontosan akkor távolság E-n, ha a T_ρ topológia T_0-topológia.*

Bizonyítás. $\rho(x, y) = 0$ pontosan akkor áll, ha $y \in S(x, \varepsilon)$ és $x \in S(y, \varepsilon)$ minden $\varepsilon > 0$-ra. ▮

(2.5.6) *T_0-tér bármely altere is T_0-tér.*

Bizonyítás. Ha $\emptyset \neq E_0 \subset E$, $x, y \in E_0$, $x \neq y$, akkor van pl. olyan $V \in \mathfrak{v}(x)$, hogy $y \notin V$. Ekkor $V_0 = V \cap E_0 \in \mathfrak{v}(x)\,(\cap)\,\{E_0\}$, és $y \notin V_0$. ▮

(2.5.7) *Ha $\mathfrak{T}$ T_0-topológia E-n, és $\mathfrak{T} < \mathfrak{T}'$ egy másik topológia, akkor $\mathfrak{T}'$ is T_0-topológia.*

Bizonyítás. $x, y \in E$, $x \neq y$ esetén pl. x-nek van y-t nem tartalmazó $\mathfrak{T}$-nyílt környezete. Ez egyúttal $\mathfrak{T}'$-nyílt is. ▮

2.5.c. ***T_1*-terek.** Tekintsük most a következő axiómát:

(S_1) *Az $[E, \mathfrak{T}]$ topologikus térben bármely két gyengén széteső pont széteső.*

Ennek átfogalmazását teszi lehetővé a következő megjegyzés:

(2.5.8) *Egy $[E, \mathfrak{T}]$ topologikus térre egyenértékűek a következő állítások:*

(a) *$[E, \mathfrak{T}]$ S_1-tér;*

(b) *bármely x pont bármely környezete tartalmazza x-nek $\bar{x}$ lezárását* (vagyis az $\{x\}$ halmaz $\overline{\{x\}}$ lezárását);

(c) *Bármely x pont és bármely x-et nem tartalmazó zárt F halmaz széteső.*

Bizonyítás. (a) $\Rightarrow$ (b): Ha $V \in \mathfrak{v}(x)$, és $y \in E - V$, akkor x és y gyengén széteső, tehát széteső is, és (2.5.3) szerint $y \notin \bar{x}$. Így $\bar{x} \subset V$.

(b) $\Rightarrow$ (c): Ha $x \notin F = \bar{F}$, akkor $E - F \in \mathfrak{v}(x)$ folytán $\bar{x} \subset E - F$, úgyhogy $\bar{x} \cap F = \bar{x} \cap \bar{F} = \emptyset$. Így x és F (erősen) széteső.

(c) $\Rightarrow$ (a): Ha x és y gyengén széteső, akkor van például x-nek y-t nem tartalmazó nyílt G környezete. Ekkor x és $E - G$ széteső, tehát $\bar{x} \cap (E - G) = \emptyset$, és $y \in E - G$ miatt $\bar{x} \cap \{y\} = \emptyset$, továbbá $\bar{y} \subset E - G$ folytán $\{x\} \cap \bar{y} = \emptyset$. ▮

(2.5.9) *S_1-tér bármely altere is S_1-tér.*

Bizonyítás. Legyen $[E, \mathfrak{T}]$ S_1-tér, $\emptyset = E_0 \subset E$, $x,y \in E_0$, s tegyük fel, hogy x és y $(\mathfrak{T} \mid E_0)$-ra nézve gyengén széteső. Ekkor (2.5.3) szerint pl. $(\bar{x} \cap E_0) \cap \{y\} = \emptyset$, azaz $\bar{x} \cap \{y\} = \emptyset$, és így egyúttal $\{x\} \cap \bar{y} = \emptyset$, s annál inkább $\{x\} \cap (\bar{y} \cap E_0) = \emptyset$. ∎

A (T_0) és (S_1) axióma egyesítéséből adódik a következő axióma:

(T_1) *Az $[E, \mathfrak{T}]$ topologikus térben bármely két $x \neq y$ pont széteső.*

Eszerint:

(2.5.10) *Egy topologikus tér pontosan akkor T_1-tér, ha T_0-tér és S_1-tér.* ∎

Egy másik jellemző tulajdonság a következő:

(2.5.11) *Egy topologikus tér pontosan akkor T_1-tér, ha benne minden egyelemű halmaz zárt.*

Bizonyítás. T_1-térben $x \neq y$ esetén (2.5.3) szerint $y \notin \bar{x}$, azaz $\bar{x} = \{x\}$. Másrészt, ha minden egyelemű halmaz zárt, akkor bármely $x \neq y$ pontra $\bar{x} \cap \bar{y} = \emptyset$, és a két pont (erősen) széteső. ∎

(2.5.6), (2.5.9) és (2.5.10) következménye:

(2.5.12) *T_1-tér bármely altere is T_1-tér.* ∎

(2.5.7) megfelelője is érvényes:

(2.5.13) *Ha $\mathfrak{T}$ T_1-topológia E-n, és $\mathfrak{T} < \mathfrak{T}'$ egy másik topológia, akkor $\mathfrak{T}'$ is T_1-topológia.*

Bizonyítás. Ha minden egyelemű halmaz $\mathfrak{T}$-zárt, akkor $\mathfrak{T}'$-zárt is, és (2.5.11) alkalmazható. ∎

(2.5.14) *Ha $\mathfrak{T}_i$ S_1-topológia E-n, és $\mathfrak{T} = \sup \{\mathfrak{T}_i : i \in I\}$, akkor $\mathfrak{T}$ is S_1-topológia.*

Bizonyítás. Legyen G x-et tartalmazó, y-t nem tartalmazó $\mathfrak{T}$-nyílt halmaz. Ekkor $x \in \bigcap\limits_1^n G_{i_j} \subset G$, ahol G_{i_j} $\mathfrak{T}_{i_j}$-nyílt, és $i_j \in I$. Legalább egy j-re $y \notin G_{i_j}$, s akkor van olyan $\mathfrak{T}_{i_j}$-nyílt, s még inkább $\mathfrak{T}$-nyílt H_{i_j}, hogy $x \notin H_{i_j}$, $y \in H_{i_j}$. ∎

Könnyen látható, hogy az $\overline{\mathfrak{S}}$ topológia eleget tesz (T_0)-nak, de (T_1)-nek már nem. Így ez nem is S_1-topológia. Viszont olyan S_1-térre, amely nem T_0-tér, példát ad a következő tétel:

(2.5.15) *Minden félmetrikus tér S_1-tér.*

Bizonyítás. Ha x és y gyengén széteső, akkor valamely $\varepsilon > 0$-ra például $y \notin S(x, \varepsilon)$, de akkor egyúttal $x \notin S(y, \varepsilon)$. ∎

2.5.d. T_2-terek. Minthogy két szétválasztható halmaz széteső is, (S_1)-nél erősebb a következő kikötés:

(S_2) *Az $[E, \mathfrak{T}]$ topologikus térben bármely két gyengén széteső pont szétválasztható.*

Az előbbiek értelmében:

(2.5.16) *Bármely S_2-tér egyúttal S_1-tér is.* ∎

(S_2) és (T_0) egyesítéséből adódik a következő axióma:

(T_2) *Az $[E, \mathfrak{T}]$ topologikus térben bármely két $x \neq y$ pont szétválasztható.*

A T_2-tereket még **Hausdorff-terek**nek (vagy **szeparált terek**nek) is nevezik.

Az előbbiek szerint:

(2.5.17) *Egy topologikus tér pontosan akkor T_2-tér, ha T_0-tér és S_2-tér.* ∎

(2.5.10), (2.5.17) és (2.5.16) alapján:

(2.5.18) *Minden T_2-tér egyúttal T_1-tér is.* ▮

(2.5.1)-ből kiolvasható a T_2-tereknek következő nevezetes jellemzése:

(2.5.19) *Egy topologikus tér pontosan akkor T_2-tér, ha benne bármely rácsnak legfeljebb egy limeszpontja lehet.* ▮

(2.5.9)-hez hasonlóan érvényes:

(2.5.20) *S_2-tér bármely altere is S_2-tér.*

Bizonyítás. Legyen $[E, \mathcal{T}]$ S_2-tér, $\emptyset \neq E_0 \subset E$, x és y $(\mathcal{T} | E_0)$-ra nézve gyengén széteső. Ekkor például $(\bar{x} \cap E_0) \cap \{y\} = \emptyset$, tehát $\bar{x} \cap \{y\} = \emptyset$, és létezik olyan $V_1 \in \mathfrak{v}(x)$, $V_2 \in \mathfrak{v}(y)$, hogy $V_1 \cap V_2 = \emptyset$. Ekkor $V_1 \cap E_0$ és $V_2 \cap E_0$ x-nek, ill. y-nak diszjunkt $(\mathcal{T} | E_0)$-környezete. ▮

(2.5.17), (2.5.20) és (2.5.6) alapján adódik:

(2.5.21) *T_2-tér bármely altere is T_2-tér.* ▮

(2.5.13)-hoz hasonlóan érvényes:

(2.5.22) *Ha $\mathcal{T}$ T_2-topológia E-n, és $\mathcal{T} < \mathcal{T}'$ egy másik topológia, akkor $\mathcal{T}'$ is T_2-topológia.*

Bizonyítás. Ha $x \neq y$, akkor van x-nek és y-nak diszjunkt $\mathcal{T}$-nyílt környezete. Ugyanezek $\mathcal{T}'$-nyíltak is. ▮

(2.5.14)-hez hasonlóan igazolható:

(2.5.23) *Ha $\mathcal{T}_i$ S_2-topológia E-n $(i \in I)$, és $\mathcal{T} = \sup \{\mathcal{T}_i : i \in I\}$, akkor $\mathcal{T}$ is S_2-topológia.* ▮

Olyan T_1-topológiára, amely nem T_2-topológia, példa az $\mathcal{F}_E$ topológia végtelen E alaphalmaz esetén. Valóban (2.5.11)-ből látszik, hogy erre (T_1) teljesül, viszont (T_2) nem, mert x és y bármely környezetének komplementuma véges, és két ilyen halmaz nem lehet diszjunkt.

2.5.e. Reguláris terek. A következő axiómákban egy pont és egy zárt halmaz szétválasztásáról lesz szó.

(S_3) *Az $[E, \mathcal{T}]$ topologikus térben bármely $x \in E$ pont és bármely x-et nem tartalmazó zárt $x \notin F = \bar{F}$ halmaz szétválasztható.*

Az S_3-tereket másképpen **reguláris tereknek** nevezik.

Az (S_3) axióma erősebb (S_2)-nél:

(2.5.24) *Minden reguláris tér S_2-tér.*

Bizonyítás. Ha x és y gyengén széteső, például (2.5.3)-nak megfelelően $x \notin \bar{y}$, akkor x és $\bar{y}$, és még inkább x és y szétválasztható. ▮

A reguláris tereknek másik fontos jellemzése a következő:

(2.5.25) *Egy topologikus tér pontosan akkor reguláris, ha benne minden pontnak van zárt* (azaz csupa zárt halmazból álló) *környezetbázisa.*

Bizonyítás. Ha a tér reguláris, és V x-nek környezete, akkor x és $E - \operatorname{int} V$ szétválasztható, mondjuk alkalmas nyílt V_1 és V_2 halmazra

$$x \in V_1, \; E - \operatorname{int} V \subset V_2, \; V_1 \cap V_2 = \emptyset.$$

Ekkor

$$V_1 \subset E - V_2 = \overline{E - V_2} \subset \operatorname{int} V \subset V$$

folytán $\bar{V}_1 \subset \overline{E - V_2} \subset V$ x-nek zárt környezete.

Megfordítva, ha $x \notin F = \bar{F}$, legyen V' x-nek $E - F$ által tartalmazott zárt környezete. Ekkor $E - V'$ F-nek V'-t nem metsző környezete. ∎

(2.5.20) mintájára érvényes:

(2.5.26) *Reguláris tér bármely altere is reguláris.*

Bizonyítás. (2.5.25)-re támaszkodva azt kell észrevenni, hogy ha $\mathfrak{b}(x)$ x-nek zárt halmazokból álló környezetbázisa az $[E, \mathcal{T}]$ térben, és $x \in E_0 \subset E$, akkor (2.3.10) és (2.3.13) szerint $\mathfrak{b}(x)\,(\cap)\,\{E_0\}$ x-nek $(\mathcal{T} \mid E_0)$-zárt $(\mathcal{T} \mid E_0)$-környezetbázisa. ∎

(2.5.27) *Ha $\mathcal{T}_i$ reguláris topológia E-n, és $\mathcal{T} = \sup\{\mathcal{T}_i : i \in I\}$, akkor $\mathcal{T}$ is reguláris.*

Bizonyítás. Legyen $x \in G$, G $\mathcal{T}$-nyílt. Ekkor $x \in \bigcap_1^n G_{i_j} \subset G$, ahol G_{i_j} $\mathcal{T}_{i_j}$-nyílt, $i_j \in I$. Ha $x \in H_{i_j} \subset F_{i_j} \subset G_{i_j}$, ahol H_{i_j} $\mathcal{T}_{i_j}$-nyílt, F_{i_j} $\mathcal{T}_{i_j}$-zárt, akkor $x \in \bigcap_1^n H_{i_j} \subset \subset \bigcap_1^n F_{i_j} \subset \bigcap_1^n G_{i_j} \subset G$, és itt $\bigcap_1^n H_{i_j}$ $\mathcal{T}$-nyílt, $\bigcap_1^n F_{i_j}$ $\mathcal{T}$-zárt. Így (2.5.25) alkalmazható. ∎

(T_0) és (S_3) egyesítéséből adódik:

(T_3) *Az $[E, \mathcal{T}]$ tér reguláris T_0-tér.*

(2.5.24) és (2.5.17) alapján fennáll:

(2.5.28) *Minden T_3-tér egyúttal T_2-tér is.* ∎

(2.5.26) és (2.5.6) következménye:

(2.5.29) *T_3-tér bármely altere is T_3-tér.* ∎

Olyan T_2-térre, amely nem reguláris, példa a következő. Legyen $E = \mathbf{R}$, és a $\mathcal{T}$ topológia számára az $x \neq 0$ pontok környezetszűrője legyen ugyanaz, mint $\mathcal{E}$-re nézve, az $x = 0$ pont környezetbázisát pedig alkossák a $(-\varepsilon, \varepsilon) - A$ halmazok, ahol $\varepsilon > 0$, és

$$A = \left\{\frac{1}{n} : n \in \mathrm{N}\right\}.$$

(2.2.3)-ből látható, hogy $\mathcal{T}$ tényleg topológia, mégpedig nyilván $\mathcal{E}$-nél finomabb, s ezért (2.5.22)-re tekintettel nyilván T_2-topológia. Könnyen látható az is, hogy az A halmaz $\mathcal{T}$-zárt. Világos azonban, hogy 0 és A nem szétválasztható, hiszen ha $V_1 \in \mathfrak{v}(0)$, $V_2 \in \mathfrak{v}(A)$, akkor alkalmas $\varepsilon > 0$ mellett

$$(-\varepsilon, \varepsilon) - A \subset V_1,$$

alkalmas $n \in \mathbf{N}$-re $\dfrac{1}{n} < \varepsilon$, és valamely $\delta > 0$ mellett $\left(\dfrac{1}{n} - \delta, \dfrac{1}{n} + \delta\right) \subset V_2$. Így szükségképpen $V_1 \cap V_2 \neq \emptyset$.

2.5.f. Normális terek. Egy topologikus teret **normális**nak mondunk, ha benne két erősen széteső halmaz mindig szétválasztható; ez másképp nyilván úgy is megfogalmazható, hogy két diszjunkt zárt halmaznak mindig vannak diszjunkt környezeteik.

Egy normális tér még akkor sem feltétlenül reguláris, ha T_0-tér. Például az $[\mathbf{R}, \bar{\mathcal{E}}]$ tér, tudjuk, T_0-tér, s nyilván normális, hiszen benne két zárt halmaz csak akkor lehet diszjunkt, ha az egyik üres. Viszont tudjuk, hogy $\bar{\mathfrak{S}}$ nem S_1-topológia, s így nem lehet S_3-topológia sem.

Ez a megjegyzés indokolja a következő axióma megfogalmazását:

(S_4) *Az* $[E, \mathfrak{T}]$ *topologikus tér normális* S_1*-tér.*

(2.5.30). *Minden* S_4*-tér egyúttal* S_3*-tér is.*

Bizonyítás. Ha $x \notin F = \bar{F}$, akkor (2.5.8) szerint $\bar{x} \cap F = \emptyset$, így $\bar{x}$ és F szétválasztható, x és F pedig még inkább. ∎

A normális terek is jellemezhetők (2.5.25) mintájára:

(2.5.31) *Egy topologikus tér pontosan akkor normális, ha benne minden* $F \neq \emptyset$ *zárt halmaznak van zárt környezetbázisa.*

Bizonyítás. Ha az $[E, \mathfrak{T}]$ tér normális, és $F = \bar{F} \neq \emptyset$, $V \in \mathfrak{v}(F)$, akkor $F \subset \operatorname{int} V$ folytán F és $E - \operatorname{int} V$ diszjunkt, zárt halmazok. Legyen V_1 F-nek, V_2 pedig $(E - \operatorname{int} V)$-nek olyan nyílt környezete, hogy $V_1 \cap V_2 = \emptyset$. Ekkor

$$F \subset V_1 \subset \bar{V}_1 \subset E - V_2 \subset \operatorname{int} V \subset V$$

folytán $\bar{V}_1$ F-nek zárt környezete, és része V-nek.

Másrészt, ha $F_1 \cap F_2 = \emptyset$, $F_1 = \bar{F}_1$, $F_2 = \bar{F}_2$, és $F_1 \neq \emptyset$, akkor $E - F_2$ F_1-nek környezete. Ha ez tartalmazza F_1-nek egy zárt V környezetét, akkor $E - V \supset F_2$ nyílt környezete F_2-nek, és $V \cap (E - V) = \emptyset$. Ha $F_1 = \emptyset$, akkor $\emptyset$ és E a keresett két diszjunkt környezet. ∎

(2.5.26) analógiájára most csak ennyit mondhatunk:

(2.5.32) *Normális tér zárt altere is normális.*

Bizonyítás. Legyen $[E, \mathfrak{T}]$ normális tér, $\emptyset \neq E_0 = \bar{E}_0 \subset E$. Ha F_1 és F_2 $(\mathfrak{T} \mid E_0)$-zárt, diszjunkt halmaz, akkor (2.3.18) szerint mindkettő $\mathfrak{T}$-zárt. Legyen G_1 és G_2 $\mathfrak{T}$-nyílt, $G_1 \cap G_2 = \emptyset$, $F_1 \subset G_1$, $F_2 \subset G_2$. Világos, hogy $G_1 \cap E_0$ és $G_2 \cap E_0$ az adott két halmaznak diszjunkt $(\mathfrak{T} \mid E_0)$-nyílt környezete. ∎

Vezessük még be a következő axiómát:

(T_4) *Az* $[E, \mathfrak{T}]$ *topologikus tér* S_4*-tér és* T_0*-tér.*

Ekkor (2.5.30)-ból adódik:

(2.5.33) *Minden* T_4*-tér egyúttal* T_3*-tér is.* ∎

(2.5.32)-ből pedig kiolvasható:

(2.5.34) S_4*-tér zárt altere* S_4*-tér;* T_4*-tér zárt altere* T_4*-tér.* ∎

2.5.g. Teljesen normális terek. Egy topologikus teret **teljesen normális**nak mondunk, ha benne bármely két széteső halmaz szétválasztható. A definícióból rögtön adódik, minthogy két erősen széteső halmaz széteső is:

(2.5.35) *Minden teljesen normális tér egyúttal normális is.* ∎

Ezzel szemben egy teljesen normális T_0-térnek nem kell regulárisnak lennie, amit az $[\mathbf{R}, \bar{\mathfrak{S}}]$ tér példája mutat. Könnyű ugyanis meggondolni, hogy ebben két halmaz csak akkor lehet széteső, ha az egyik üres: ha $a \in A$, $b \in B$, és például $a < b$, akkor $b \in [a, +\infty) \subset \bar{A}$, $\bar{A} \cap B \neq \emptyset$.

Ez indokolja a következő axióma felállítását:

(S_5) *Az* $[E, \mathfrak{T}]$ *topologikus tér teljesen normális* S_1*-tér.*

(2.5.35)-ből rögtön adódik:

(2.5.36) *Minden* S_5*-tér egyúttal* S_4*-tér is.* ∎

(2.5.35)-öt élesíti és (2.5.32)-vel állítható párhuzamba a teljesen normális terek következő jellemzése:

(2.5.37) *Egy* $[E, \mathfrak{T}]$ *topologikus térre a következő állítások egyenértékűek:*

(a) $[E, \mathfrak{T}]$ *teljesen normális;*

(b) $[E, \mathfrak{T}]$ *minden altere normális;*

(c) $[E, \mathfrak{T}]$ *minden nyílt altere normális.*

Bizonyítás. (a) $\Rightarrow$ (b): Legyen $\emptyset \neq E_0 \subset E$, $F_1 \cap F_2 = \emptyset$, F_1 és F_2 $(\mathfrak{T} \mid E_0)$-zárt. Ekkor (vonással szokás szerint a $\mathfrak{T}$-lezárást jelölve)

$$\bar{F}_1 \cap E_0 = F_1, \; \bar{F}_2 \cap E_0 = F_2,$$

úgyhogy $\bar{F}_1 \cap F_2 = F_1 \cap \bar{F}_2 = \emptyset$, azaz F_1 és F_2 széteső $\mathfrak{T}$-re nézve. Így van oly $\mathfrak{T}$-nyílt G_1 és G_2, hogy

$$F_1 \subset G_1, \; F_2 \subset G_2, \; G_1 \cap G_2 = \emptyset,$$

s akkor $G_1 \cap E_0$ és $G_2 \cap E_0$ F_1-nek, ill. F_2-nek diszjunkt $(\mathfrak{T} \mid E_0)$-környezetei.

(b) $\Rightarrow$ (c): Triviális.

(c) $\Rightarrow$ (a): Legyen A és B $\mathfrak{T}$-széteső. Ekkor

$$A \subset \bar{A} - \bar{B} = F_1, \; B \subset \bar{B} - \bar{A} = F_2,$$

F_1 és F_2 nyilván diszjunkt, továbbá mindkettő zárt az $[E_0, \mathfrak{T} \mid E_0]$ altérben, ahol

$$E_0 = E - (\bar{A} \cap \bar{B}) = (E - \bar{A}) \cup (E - \bar{B}).$$

Valóban,

$$F_1 = \bar{A} \cap E_0, \; F_2 = \bar{B} \cap E_0.$$

E_0 nyilván $\mathfrak{T}$-nyílt, úgyhogy F_1 és F_2 belefoglalható diszjunkt $(\mathfrak{T} \mid E_0)$-nyílt halmazokba. Ezek $G_1 \cap E_0$ és $G_2 \cap E_0$ alakúak, ahol G_1 és G_2 $\mathfrak{T}$-nyílt, s így maguk is $\mathfrak{T}$-nyíltak. Végül is $A \subset G_1 \cap E_0$, $B \subset G_2 \cap E_0$ a keresett két diszjunkt, $\mathfrak{T}$-nyílt környezet. ∎

(2.5.37)-ből (2.3.17) alapján rögtön következik:

(2.5.38) *Teljesen normális tér minden altere teljesen normális.* S_5*-tér minden altere* S_5*-tér.* ∎

Ha még bevezetjük a következő axiómát:

(T_5) *Az* $[E, \mathfrak{T}]$ *topologikus tér* S_5*-tér és* T_0*-tér,*

akkor hozzátehetjük:

(2.5.39) *Minden* T_5*-tér egyúttal* T_4*-tér is.* T_5*-tér minden altere is* T_5*-tér.* ∎

A T_5-, ill. S_5-terek fontos példái a metrikus ill. a félmetrikus terek:

(2.5.40). *Minden metrikus tér* T_5*-tér, minden félmetrikus tér* S_5*-tér.*

Bizonyítás. Elég megmutatni, hogy minden félmetrikus tér normális. (2.3.12) szerint ugyanis félmetrikus tér altere is félmetrikus, így ebből (2.5.37) alapján már következik, hogy minden félmetrikus tér teljesen normális, tehát (2.5.15)-re tekintettel S_5-tér. Ebből és (2.5.5)-ből következik, hogy minden metrikus tér T_5-tér.

Mármost ha F_1 és F_2 diszjunkt és zárt az $[E, \rho]$ félmetrikus térben, legyen

$$G_1 = \{x \in E\colon\ \rho(x, F_1) < \rho(x, F_2)\},$$

$$G_2 = \{x \in E\colon\ \rho(x, F_2) < \rho(x, F_1)\}.$$

Itt $\rho(x, A)$ az (1.3.12) révén értelmezett kifejezést jelenti; a definícióban és a belőle adódó (1.3.14) tételben nem játszik szerepet, hogy ρ most nem távolság, csak eltérés.

Világos, hogy $G_1 \cap G_2 = \emptyset$. (1.3.14) (c) szerint $x \in F_1$ esetén $\rho(x, F_1) = 0$, $\rho(x, F_2) > 0$, így $F_1 \subset G_1$, és ugyanígy $F_2 \subset G_2$. Továbbá G_1 nyílt, mert ha $x \in G_1$, és $\varepsilon > 0$ úgy van megválasztva, hogy

$$\rho(x, F_1) + \varepsilon < \rho(x, F_2),$$

akkor $S\left(x, \frac{\varepsilon}{2}\right) \subset G_1$, hiszen $y \in S\left(x, \frac{\varepsilon}{2}\right)$ esetén $\rho(x, y) < \frac{\varepsilon}{2}$, tehát (1.3.14) (d) alapján

$$\rho(y, F_1) \leqq \rho(y, x) + \rho(x, F_1) < \frac{\varepsilon}{2} + \rho(x, F_1),$$

s ha az állítással ellentétben $\rho(y, F_2) \leqq \rho(y, F_1)$ volna, akkor ismét (1.3.14) (d) szerint

$$\rho(x, F_2) \leqq \rho(x, y) + \rho(y, F_2) < \frac{\varepsilon}{2} + \rho(y, F_1) < \varepsilon + \rho(x, F_1)$$

következnék, ami ellentmondás. Hasonlóan adódik, hogy G_2 nyílt. ∎

Nem-metrizálható T_5-térre példa a következő:

(2.5.41) *Az* $[\mathbf{R}, \mathfrak{G}^+]$ *tér* T_5-*tér.*

Bizonyítás. Világos, hogy ez a tér T_1-tér, azaz S_1-tér és T_0-tér. Mutassuk meg, hogy teljesen normális.

Legyen A és B széteső. $A \cap \bar{B} = \emptyset$ miatt minden $x \in A$ ponthoz található olyan $\varepsilon_x > 0$, hogy $V_x = [x, x + \varepsilon_x)$ nem metszi B-t. Ugyanígy minden $x \in B$-hez található olyan $\varepsilon_x > 0$, hogy az előbbi mintára értelmezett V_x nem metszi A-t. Az

$$E_0 = \bigcup_{x \in A} V_x \cup \bigcup_{x \in B} V_x \supset A \cup B$$

halmazra $\mathfrak{G}^+|E_0$ (2.4.21) szerint Lindelöf-topológia, így a V_x-ek közül megszámlálható sok is befedi:

$$E_0 = \bigcup_{i=1}^{\infty} V_{x_i} \qquad (x_i \in A \cup B,\quad i \in \mathbf{N}).$$

Azt kell most észrevennünk, hogy a V_x-ek $\mathfrak{G}^+$-ra nézve nyíltak is, zártak is. Ennélfogva a

$$G_n = V_{x_n} - \bigcup_{i=1}^{n-1} V_{x_i}, \qquad G_1 = V_{x_1}$$

halmazok nyilván $\mathfrak{E}^+$-nyíltak, diszjunktak, és egyik sem metszi A-t is, B-t is, továbbá

$$\bigcup_1^\infty G_n = E_0 \supset A \cup B.$$

Így az A-t metsző, ill. B-t metsző G_n-ek egyesítése szolgáltatja A-nak, ill. B-nek $\mathfrak{E}^+$-nyílt, diszjunkt környezetét. ∎

2.5.h. Gyakorlatok. 1. Legyen $F \neq \emptyset$ zárt halmaz az $[\mathbf{R}, \mathfrak{E}]$ térben. Mutassuk meg, hogy

(a) ha F korlátos, akkor van megszámlálható környezetbázisa;

(b) ha $F = \mathbf{N}$, akkor nincs megszámlálható környezetbázisa.

[Az (a) esetben legyen $V_n = \left\{x : \rho_1(x, F) < \frac{1}{n}\right\}$. A (b) esetben bárhogyan megadva a nyílt $G_n \supset \mathbf{N}$ $(n \in \mathbf{N})$ halmazokat, legyen $x_n \in G_n$ olyan, hogy $0 < |x_n - n| < \frac{1}{2}$, majd $\varepsilon_n > 0$ olyan, hogy $\varepsilon_n < |x_n - n|$, és $G = \bigcup_{n \in \mathbf{N}} (n - \varepsilon_n, n + \varepsilon_n)$.]

2. Adjunk példát az $[\mathbf{R}, \mathfrak{E}]$ térben két halmazra, amely

(a) gyengén széteső, de nem széteső;

(b) szétválasztható, de nem erősen széteső.

3. Adjunk példát végtelen E halmaz mellett az $[E, \mathcal{F}_E]$ térben két halmazra, amely erősen széteső, de nem szétválasztható.

4. Mutassuk meg, hogy a **2.2** alatti 4. feladatban értelmezett topologikus tér nem T_0-tér és nem S_1-tér.

5. Legyen a **2.2** alatti 5. feladatban $[E, \mathfrak{T}]$ több pontból álló T_1-tér. Mutassuk meg, hogy az ott definiált $\mathfrak{P}(E)$ fölötti tér T_0-tér, de nem T_1-tér.

6. Adjunk példát két olyan $\mathfrak{T}_1$ és $\mathfrak{T}_2$ topológiára, hogy $\mathfrak{T}_1 < \mathfrak{T}_2$, $\mathfrak{T}_1$ S_5-topológia, de $\mathfrak{T}_2$ nem S_1-topológia.

[$\mathfrak{T}_1$ legyen $\mathbf{R}$ indiszkrét topológiája, $\mathfrak{T}_2 = \bar{\mathfrak{E}}$.]

7. Adjunk példát két olyan $\mathfrak{T}_1$ és $\mathfrak{T}_2$ topológiára, hogy $\mathfrak{T}_1 < \mathfrak{T}_2$, $\mathfrak{T}_1$ T_5-topológia, de $\mathfrak{T}_2$ nem reguláris.

[A **2.5.e** alatti példában értelmezett nem-reguláris topológia legyen $\mathfrak{T}_2$, és $\mathfrak{T}_1 = \mathfrak{E}$.]

8. Legyen E végtelen halmaz, $a \in E$, $\mathfrak{F}$ álljon $\emptyset$-ból, E-ből, továbbá E-nek a-t tartalmazó véges részhalmazaiból. Igazoljuk, hogy

(a) $\mathfrak{F}$ egy E fölötti $\mathfrak{T}$ topológia zárt halmazainak rendszere;

(b) $\mathfrak{T}$ normális;

(c) $\mathfrak{T} \mid E - \{a\}$ nem normális.

9. Legyen $\mathfrak{T}$ az előző feladatban értelmezett topológia, $\mathfrak{T}'$ pedig hasonlóan definiálva, de a szerepét egy $b \neq a$ pontnak adva. Mutassuk meg, hogy $\mathfrak{T}$ és $\mathfrak{T}'$ normális, de sup $\{\mathfrak{T}, \mathfrak{T}'\}$ nem normális.

10. Legyen E rendezett halmaz, $\mathfrak{T}$ E-nek rendezéstopológiája. A $K \subset E$ halmazt konvexnek mondjuk, ha $a, b \in K$, $a < x < b$ esetében $x \in K$. Igazoljuk, hogy

(a) ha K_i $(i \in I)$ konvex, és $\bigcap_{i \in I} K_i \neq \emptyset$, akkor $\bigcup_{i \in I} K_i$ is konvex;

(b) ha $a \in A \subset E$, akkor létezik egy legbővebb a-t tartalmazó, A-ban foglalt konvex halmaz;

(c) $\mathcal{T}$-nek van konvex halmazokból álló bázisa;

(d) ha A nyílt, akkor a (b) alatti konvex halmaz is nyílt.

Legyen most M és N $\mathcal{T}$-széteső, $x \in M$ esetén K_x a legbővebb x-et tartalmazó, $(E - \bar{N})$-ban foglalt konvex halmaz. Mutassuk meg, hogy

(e) $x_1, x_2 \in M$, $K_{x_1} \cap K_{x_2} \neq \emptyset$ esetén $K_{x_1} = K_{x_2}$;

(f) ha $y \in N$, és V y-nak M-et nem metsző konvex környezete, továbbá $x_1 < x_2 < y$, $x_1, x_2 \in M$, $K_{x_1} \cap V \neq \emptyset$, akkor $K_{x_1} = K_{x_2}$;

(g) ha $y \in N$, és V y-nak M-et nem metsző konvex környezete, akkor V a K_x $(x \in M)$ halmazok közül legfeljebb kettőt metsz;

(h) $x \in M$, $y_1 \in N$, $x < y_1 < y_2$ esetén $y_2 \notin \bar{K}_x$;

(i) $x \in M$, $y \in N$, $x < y \in \bar{K}_x$ esetén van olyan $z < y$, hogy $M \cap [z, y] = \emptyset$;

(j) $x \in M$ esetén $\bar{K}_x \cap N$ legfeljebb két pontból áll;

(k) $x \in M$ esetén van olyan nyílt G_x, hogy $M \cap K_x \subset G_x \subset K_x$, $\bar{G}_x \cap N = \emptyset$;

(l) ha az $x_i \in M$ $(i \in I)$ pontokat úgy választjuk ki, hogy $x_i \neq x_j$ esetén $K_{x_i} \neq K_{x_j}$ legyen, és a K_{x_i} halmazok között minden K_x $(x \in M)$ szerepeljen, akkor a

$$G = \bigcup_{i \in I} G_{x_i}, \qquad H = E - \bar{G}$$

nyílt halmazokra $M \subset G$, $N \subset H$, $G \cap H = \emptyset$;

(m) a $\mathcal{T}$ rendezéstopológia T_5-topológia.

2.6. FOLYTONOS LEKÉPEZÉSEK

2.6.a. Leképezések. Az egyváltozós valós függvény olyan utasítás, amely bizonyos valós számoknak — a függvény értelmezési tartománya elemeinek — mindegyikéhez egy-egy valós számot rendel függvényérték gyanánt. Ha az m-változós függvény független változóiból álló m-tagú sorozatokat az $\mathbf{R}^m$ tér pontjaival azonosítjuk, azt mondhatjuk, hogy az m-változós függvény értelmezési tartománya $\mathbf{R}^m$-nek egy részhalmaza, és a függvény e halmaz elemeihez rendel függvényértékként egy-egy valós számot.

Egy síkbeli görbének

$$x = f(t), \; y = g(t)$$

alakú, ill. egy térbeli görbének

$$x = f(t), \; y = g(t), \; z = h(t)$$

alakú paraméteres előállításakor a t változó tekintetbe jövő értékeihez — tehát az $\mathbf{R}$ halmaz egy részhalmazának elemeihez — a sík $(x, y) = (f(t), g(t))$, ill. a tér $(x, y, z) = (f(t), g(t), h(t))$ pontját rendeljük hozzá. Hasonlóan, valamely felület

$$x = f(u, v), \; y = g(u, v), \; z = h(u, v)$$

alakú paraméteres előállításakor a paraméterekből alkotott (u, v) párokhoz, vagyis $\mathbf{R}^2$ bizonyos elemeihez, egy-egy $(x, y, z) \in \mathbf{R}^3$ pontot rendelünk hozzá.

Mindezekben a példákban olyan utasításokról volt szó, amelyek egy halmaz — $\mathbf{R}^p$ valamely részhalmaza — minden eleméhez egy másik halmaz — $\mathbf{R}^q$ valamely részhalmaza — egy-egy elemét rendelik; az egyes példáknak megfelelően p és q más-más értékű. Mindezek tehát a következő általános fogalom speciális esetei:

Legyen X és Y két tetszőleges halmaz. Az X halmaz Y-ba való f **leképezés**ének nevezzük az olyan utasítást, amely X minden egyes eleméhez hozzárendeli Y-nak egy-egy meghatározott elemét. Azt, hogy f X-nek Y-ba való leképezése, az

$$f : X \to Y$$

szimbólummal fejezzük ki. X a leképezés **értelmezési tartomány**a, Y pedig **képtartomány**a. Y-nak azt az elemét, amelyet az f leképezés az $x \in X$ elemhez rendel, $f(x)$-szel jelöljük és az x **tárgypont kép**ének vagy **képpont**jának nevezzük.

Egy függvény különböző helyeken is felveheti ugyanazt az értéket, s ennek megfelelően egy leképezés is rendelheti az értelmezési tartomány különböző elemeihez ugyanazt a képpontot. Ha ez nem fordul elő, azaz ha $x_1, x_2 \in X$, $x_1 \neq x_2$ esetén $f(x_1) \neq f(x_2)$, akkor az f leképezést **kölcsönösen egyértelmű, egy-egyértelmű** vagy **injektív** leképezésnek, röviden **injekció**nak mondjuk. Ilyen például minden szigorúan monoton egyváltozós függvény mint az $X \subset \mathbf{R}$ értelmezési tartománynak $Y = \mathbf{R}$-be való leképezése.

Az egyváltozós valós f függvényt $f : X \to \mathbf{R}$ $(X \subset \mathbf{R})$ leképezésnek tekintve előfordulhat, hogy a függvény nem vesz fel ténylegesen minden valós értéket; pl. az $f(x) = x^2$ képlettel adott függvény nem vesz fel negatív értéket. Általában az $f : X \to Y$ leképezésnél fellépő $f(x)$ képpontok halmaza Y-nak valódi részhalmaza lehet. Ellenkező esetben, tehát amikor minden $y \in Y$ képe legalább egy $x \in X$-nek, az $f : X \to Y$ leképezést **szuperjektív** leképezésnek, röviden **szuperjekció**nak mondjuk. Például az $f(x) = \sin x$ képlettel adott $f : \mathbf{R} \to [-1, 1]$ leképezés szuperjekció. Szuperjektív $f : X \to Y$ leképezés esetében azt is szokás mondani, hogy f X-nek Y**-ra** való leképezése.

Ha az $f : X \to Y$ leképezés egyszerre injektív és szuperjektív, akkor **bijektív** leképezésnek, röviden **bijekció**nak nevezzük. Például az $f(x) = x^3$ képlettel megadott $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ leképezés bijekció.

Ha $f : X \to Y$ bijektív leképezés, akkor minden $y \in Y$ elemhez pontosan egy olyan $x \in X$ található, amelyre $f(x) = y$. Azt a $g : Y \to X$ leképezést, amely y-hoz ezt az x-et rendeli, az f bijekció **inverz leképezés**ének nevezik és f^{-1}-gyel jelölik. Például az $f(x) = e^x$ képlettel megadott $f : \mathbf{R} \to (0, +\infty)$ bijekció inverze a $g(y) = \ln y$ képlettel megadott $g : (0, +\infty) \to \mathbf{R}$ leképezés. Természetesen egy bijekció inverze is bijekció.

Ha $f : X \to Y$, és $A \subset X$, akkor az

$$\{f(x) : x \in A\} \subset Y$$

halmazt az A **halmaz kép**ének mondjuk és $f(A)$-val jelöljük. Például az $f(x) = x^2$ képlettel adott $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ leképezésnél $A = (-1, 1)$ esetén $f(A) = [0, 1)$.

A definícióból azonnal kiolvasható:

(2.6.1) *Bármely* $f : X \to Y$ *leképezésre*

(a) $x \in X$ *esetén* $f(\{x\}) = \{f(x)\}$;

(b) $A \subset B \subset X$ *esetén* $f(A) \subset f(B)$;

(c) $A = \bigcup_{i \in I} A_i \subset X$ *esetén* $f(A) = \bigcup_{i \in I} f(A_i)$. ∎

Legyen ismét $f : X \to Y$ tetszőleges leképezés, és ezúttal $A \subset Y$. Az

$$\{x : f(x) \in A\} \subset X$$

halmazt az A halmaz **inverz képének** mondjuk és $f^{-1}(A)$-val jelöljük. Ennek a jelölésnek tehát van értelme akkor is, ha f nem bijekció, és így f^{-1} inverz leképezésről nem lehet beszélni; ha azonban f bijekció, akkor a jelölés nem okoz zavart, mert $f^{-1}(A)$ azonos A-nak az f^{-1} inverz leképezésnél származó képével. Például az $f(x) = x^2$ képlettel adott $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ leképezésre $A = (-1, 4)$ esetén $f^{-1}(A) = (-2, 2)$. Speciálisan $y \in Y$ esetén az $f^{-1}(\{y\})$ jelölés helyett $f^{-1}(y)$-t szokás írni; ez tehát X-nek nem egy elemét, hanem egy (esetleg üres vagy több elemből álló) részhalmazát jelöli. Ha f bijekció, ez a jelölés már okozhat félreértést, mert nyilván

$$f^{-1}(\{y\}) = \{f^{-1}(y)\}.$$

Könnyen igazolhatók a következő állítások:

(2.6.2) *Bármely* $f : X \to Y$ *leképezésre*

(a) $A \subset B \subset Y$ *esetén* $f^{-1}(A) \subset f^{-1}(B)$;

(b) $A = \bigcup_{i \in I} A_i \subset Y$ *esetén* $f^{-1}(A) = \bigcup_{i \in I} f^{-1}(A_i)$;

(c) $A = \bigcap_{i \in I} A_i$, $A_i \subset Y$ *esetén* $f^{-1}(A) = \bigcap_{i \in I} f^{-1}(A_i)$;

(d) $A = B - C$, $B, C \subset Y$ *esetén* $f^{-1}(A) = f^{-1}(B) - f^{-1}(C)$;

(e) $A \subset X$ *esetén* $f^{-1}(f(A)) \supset A$;

(f) $A \subset Y$ *esetén* $f(f^{-1}(A)) \subset A$. ∎

(2.6.3) *Ha* $f : X \to Y$ *injektív leképezés, akkor bármely* $A \subset X$ *halmazra*

$$f^{-1}(f(A)) = A. \blacksquare$$

(2.6.4) *Ha* $A \subset f(X)$, *speciálisan ha* $f : X \to Y$ *szuperjektív leképezés, és* $A \subset Y$, *akkor*

$$f(f^{-1}(A)) = A. \blacksquare$$

Legyen $f : X \to Y$, $X_0 \subset X$, $f(X_0) \subset Y_0 \subset Y$. Az f leképezés X_0**-ra és** Y_0**-ra való megszorításának** nevezzük és $f|_{X_0}^{Y_0}$-lal jelöljük azt a $g : X_0 \to Y_0$ leképezést, amelyre $x \in X_0$ esetén $g(x) = f(x)$. Az $Y_0 = Y$ esetben egyszerűen f-nek X_0**-ra való megszorításáról** beszélünk, és az $f | X_0$ jelölést alkalmazzuk.

Hasonló jelölés szerepelt már a metrikus (vagy félmetrikus) terek altereivel kapcsolatban, azonban nem egészen következetes formában, mert a ρ távolság (eltérés) nem az alapul szolgáló E halmazon, hanem az E elemeiből alkotott párok halmazán értelmezett leképezésnek tekinthető.

Legyen $f : X \to Y$ és $g : Y \to Z$. Az f és g leképezések **összetétel**ének nevezzük azt a $h : X \to Z$ leképezést, amelyre $x \in X$ esetén $h(x) = g(f(x))$. Ezt a $h = g \circ f$ szimbólummal jelöljük. Azonnal belátható:

(2.6.5) *Legyen* $f : X \to Y$, $g : Y \to Z$, $h = g \circ f$.

(a) $A \subset X$ *esetén* $h(A) = g(f(A))$;

(b) $A \subset Z$ *esetén* $h^{-1}(A) = f^{-1}(g^{-1}(A))$;

(c) *Ha f és g injekció, h is az;*

(d) *Ha f és g szuperjekció, h is az;*

(e) *Ha f és g bijekció, h is az, és* $h^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$. ∎

(2.6.6) *Ha* $f : X \to Y$, $g : Y \to Z$, $h : Z \to U$, *akkor*

$$h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f;$$

így a zárójelek elhagyásával egyszerűen $h \circ g \circ f$ *írható.* ∎

Azt az $f : X \to X$ bijekciót, amelyre bármely $x \in X$ esetén $f(x) = x$, az X halmazhoz tartozó **identikus leképezés**nek vagy **identitás**nak nevezzük. Ha $X \subset Y$, és $f : X \to Y$ az a leképezés, amelyre $x \in X$ esetén $f(x) = x$, akkor f nyilván injekció, neve X-nek Y-ba való **kanonikus injekció**ja.

2.6.b. Halmazrendszer képe és inverz képe. Legyen $f : X \to Y$, és jelöljük $\mathfrak{P}(X)$-szel, ill. $\mathfrak{P}(Y)$-nal az X halmaz, ill. az Y halmaz összes részhalmazaiból álló halmazrendszert. Ha az $A \subset X$ halmazhoz hozzárendeljük az $f(A)$ képhalmazt, ezzel egy

$$f^* : \mathfrak{P}(X) \to \mathfrak{P}(Y)$$

leképezést értelmeztünk; minthogy bármely $A \subset X$ halmazra ilyenformán $f^*(A) = f(A)$, nem okoz az sem félreértést, ha a csillag elhagyásával f^* helyett is egyszerűen f-et írunk. Hasonlóan, ha a $B \subset Y$ halmazhoz az $f^{-1}(B)$ halmazt rendeljük hozzá, egy

$$g : \mathfrak{P}(Y) \to \mathfrak{P}(X)$$

leképezést értelmezünk, amelyre tetszőleges $B \subset Y$ esetén $g(B) = f^{-1}(B)$; nem okoz félreértést, ha g helyett f^{-1}-et írunk, még akkor sem, ha f bijekció, mert ekkor $B \subset Y$ esetén

$$(f^{-1})^*(B) = f^{-1}(B).$$

Ha $\mathfrak{A}$ egy X-beli halmazrendszer, akkor megállapodásaink logikus folytatásaként $f(\mathfrak{A})$-val jelöljük az

$$\{f(A) : A \in \mathfrak{A}\}$$

halmazrendszert, ha pedig $\mathfrak{B}$ egy Y-beli halmazrendszer, akkor $f^{-1}(\mathfrak{B})$ az

$$\{f^{-1}(B) : B \in \mathfrak{B}\}$$

halmazrendszert jelöli.

(2.6.1)-ből azonnal kiolvasható:

(2.6.7) *Legyen* $f: X \to Y$, $\mathfrak{A}$ *és* $\mathfrak{B}$ *X-beli halmazrendszer. Ekkor:*

(a) $\mathfrak{A} < \mathfrak{B}$ *esetén* $f(\mathfrak{A}) < f(\mathfrak{B})$;

(b) $\mathfrak{A} \sim \mathfrak{B}$ *esetén* $f(\mathfrak{A}) \sim f(\mathfrak{B})$;

(c) $f(\mathfrak{A} (\cap) \mathfrak{B}) > f(\mathfrak{A}) (\cap) f(\mathfrak{B})$;

(d) *Ha* $\mathfrak{r}$ *X-beli rács, akkor* $f(\mathfrak{r})$ *Y-beli rács;*

(e) *Ha* $\mathfrak{c}$ *X-beli centrált rendszer, akkor* $f(\mathfrak{c})$ *Y-beli centrált rendszer;*

(f) $f(\mathfrak{A} (\cup) \mathfrak{B}) = f(\mathfrak{A}) (\cup) f(\mathfrak{B})$. ▮

(2.6.8) *Legyen* $f: X \to Y$ *szuperjekció. Ekkor*

(a) *Ha* $\mathfrak{A}$ *X-ben felszálló rendszer, akkor* $f(\mathfrak{A})$ *Y-ban felszálló rendszer;*

(b) *Ha* $\mathfrak{B}$ *az* $\mathfrak{A}$ *X-beli halmazrendszer által generált X-ben felszálló rendszer, akkor* $f(\mathfrak{B})$ *az* $f(\mathfrak{A})$ *által generált Y-ben felszálló rendszer;*

(c) *Ha* $\mathfrak{z}$ *X-beli szűrő, akkor* $f(\mathfrak{z})$ *Y-beli szűrő;*

(d) *Ha* $\mathfrak{r}$ *X-beli rács, és* $\mathfrak{z}$ *az általa generált X-beli szűrő, akkor* $f(\mathfrak{z})$ *az* $f(\mathfrak{r})$ *által generált Y-beli szűrő.*

Bizonyítás. (a): Ha $A \in \mathfrak{A}$, és $f(A) \subset B \subset Y$, akkor (2.6.4) szerint $B = f(f^{-1}(B))$, és (2.6.2) szerint

$$A \subset f^{-1}(f(A)) \subset f^{-1}(B) \subset X,$$

úgyhogy $f^{-1}(B) \in \mathfrak{A}$, *és* $B \in f(\mathfrak{A})$.

(b): Ebből és (2.6.7)-ből következik, hogy ha $\mathfrak{B}$ $\mathfrak{A}$-val ekvivalens X-ben felszálló rendszer, akkor $f(\mathfrak{B})$ $f(\mathfrak{A})$-val ekvivalens Y-ban felszálló rendszer.

(c) következménye (a)-nak és (2.6.7) (d)-nek, (d) pedig (c)-nek és (b)-nek. ▮

(2.6.2)-ből, (2.6.3)-ból és (2.6.4)-ből könnyen adódik:

(2.6.9) *Legyen* $f: X \to Y$, $\mathfrak{A}$ *és* $\mathfrak{B}$ *Y-beli halmazrendszer. Ekkor:*

(a) $\mathfrak{A} < \mathfrak{B}$ *esetén* $f^{-1}(\mathfrak{A}) < f^{-1}(\mathfrak{B})$;

(b) $\mathfrak{A} \sim \mathfrak{B}$ *esetén* $f^{-1}(\mathfrak{A}) \sim f^{-1}(\mathfrak{B})$;

(c) $f^{-1}(\mathfrak{A} (\cup) \mathfrak{B}) = f^{-1}(\mathfrak{A}) (\cup) f^{-1}(\mathfrak{B})$;

(d) $f^{-1}(\mathfrak{A} (\cap) \mathfrak{B}) = f^{-1}(\mathfrak{A}) (\cap) f^{-1}(\mathfrak{B})$;

(e) *Ha* $\mathfrak{r}$ *Y-beli rács, és* $\emptyset \notin \mathfrak{r} (\cap) \{f(X)\}$, *speciálisan ha f szuperjekció, akkor* $f^{-1}(\mathfrak{r})$ *X-beli rács;*

(f) *Ha* $\mathfrak{c}$ *Y-beli centrált rendszer, és f szuperjekció, akkor* $f^{-1}(\mathfrak{c})$ *X-beli centrált rendszer;*

(g) $f(f^{-1}(\mathfrak{A})) > \mathfrak{A}$, *s itt = áll, ha f szuperjekció;*

(h) *Bármely X-beli* $\mathfrak{C}$ *halmazrendszerre*

$$f^{-1}(f(\mathfrak{C})) < \mathfrak{C},$$

s itt = áll, ha f injekció. ▮

2.6.c. Folytonos leképezések. Az egyváltozós $f: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ valós függvényt az $x_0 \in \mathbf{R}$ helyen folytonosnak mondjuk, ha minden $\varepsilon > 0$-hoz van olyan $\delta > 0$, hogy $|x - x_0| < \delta$ esetén $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$. Az itt szereplő feltételt úgy is meg lehet fogalmazni, hogy az $f(x_0) \in \mathbf{R}$ pont minden $S(f(x_0), \varepsilon)$ gömbi környezetéhez legyen az $x_0 \in \mathbf{R}$ pontnak olyan $S(x_0, \delta)$ gömbi környezete, hogy $x \in S(x_0, \delta)$ esetén $f(x) \in S(f(x_0), \varepsilon)$.

Hasonlóan, az m-változós $f: \mathbf{R}^m \to \mathbf{R}$ valós függvény akkor folytonos az $x_0 \in \mathbf{R}^m$ helyen, ha minden $\varepsilon > 0$-hoz van olyan $\delta > 0$, hogy $\rho(x, x_0) < \delta$ esetén $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$, vagyis ha $f(x_0) \in \mathbf{R}$ minden $S(f(x_0), \varepsilon)$ gömbi környezetéhez van $x_0 \in \mathbf{R}^m$-nek olyan $S(x_0, \delta)$ gömbi környezete, hogy $x \in S(x_0, \delta)$ esetén $f(x) \in S(f(x_0), \varepsilon)$.

Ezek után kézenfekvő a következő definíció. Legyen $[X, \mathcal{V}]$ és $[Y, \mathcal{W}]$ két környezettér, $f: X \to Y$. Az f leképezést az $x_0 \in X$ **pontban folytonos**nak mondjuk, ha — az $x \in X$ pont $\mathcal{V}$-környezetszűrőjét $\mathfrak{v}(x)$-szel, $y \in Y$ $\mathcal{W}$-környezetszűrőjét $\mathfrak{w}(y)$-nal jelölve — minden $W \in \mathfrak{w}(f(x_0))$ környezethez található olyan $V \in \mathfrak{v}(x_0)$ környezet, hogy $x \in V$ esetén $f(x) \in W$, vagy rövidebben, hogy $f(V) \subset W$.

(2.6.10) *Legyen* $[X, \mathcal{V}]$ *és* $[Y, \mathcal{W}]$ *két környezettér a* $\mathfrak{v}(x)$, *ill.* $\mathfrak{w}(y)$ *környezetszűrőkkel* ($x \in X$, $y \in Y$), *továbbá* $f: X \to Y$. *Az* f *leképezés pontosan akkor folytonos az* $x_0 \in X$ *pontban, ha*

(2.6.11) $$f(\mathfrak{v}(x_0)) > \mathfrak{w}(f(x_0)),$$

illetőleg ha

(2.6.12) $$\mathfrak{v}(x_0) > f^{-1}(\mathfrak{w}(f(x_0))).$$

A (2.6.11) *és* (2.6.12) *kikötésekben* $\mathfrak{v}(x_0)$ *és* $\mathfrak{w}(f(x_0))$ *helyébe* x_0*-nak, ill.* $f(x_0)$*-nak tetszőleges* $\mathfrak{b}(x_0)$ $\mathcal{V}$*-környezetbázisa, ill.* $\mathfrak{b}'(f(x_0))$ $\mathcal{W}$*-környezetbázisa tehető.*

Bizonyítás. Akár (2.6.11), akár (2.6.12) pontosan a folytonosság definíciójául szolgáló feltételt fejezi ki. (2.6.7) (b), ill. (2.6.9) (b) mutatja, hogy itt $\mathfrak{v}(x_0)$, ill. $\mathfrak{w}(f(x_0))$ bármely ekvivalens ráccsal helyettesíthető. ∎

Megjegyzendő, hogy $\emptyset \notin \mathfrak{w}(f(x_0))$ (∩) $\{f(X)\}$ folytán a (2.6.12)-ben szereplő $f^{-1}(\mathfrak{w}(f(x_0)))$ halmazrendszer (2.6.9) (e) alapján rács.

Tételünk mutatja, hogy pl. egy félmetrikus térnek egy félmetrikus térbe való leképezését vizsgálva a folytonosság definíciójában lehet gömbi környezeteket szerepeltetni; speciálisan az $[X, \mathcal{V}] = [\mathbf{R}^m, \mathcal{S}^m]$, $[Y, \mathcal{W}] = [\mathbf{R}, \mathcal{S}]$ esetben az analízis elemeiből ismert folytonosság-fogalomhoz jutunk. Egy topologikus térnek egy másik topologikus térbe való leképezését tekintve viszont lehet pl. nyílt környezetekről szólni a folytonosságot definiáló feltételben.

Ha szükség van a folytonosság értelmezésében szereplő $\mathcal{V}$ és $\mathcal{W}$ környezetstruktúra kidomborítására, akkor az f leképezést ($\mathcal{V}$, $\mathcal{W}$)**-folytonos**nak mondjuk az x_0 pontban.

Könnyű meggyőződni arról például, hogy egy $f: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ leképezés pontosan akkor $(\mathcal{S}^+, \mathcal{S})$-folytonos $((\mathcal{S}^-, \mathcal{S})$-folytonos$)$ az $x_0 \in \mathbf{R}$ pontban, ha ezen a helyen az f egyváltozós valós függvény jobbról (balról) folytonos.

Az $f: \mathbf{R}^m \to \mathbf{R}$ m-változós függvényt az $x_0 \in \mathbf{R}^m$ pontban felülről félig folytonosnak mondják, ha minden $\varepsilon > 0$-hoz van olyan $\delta > 0$, hogy $x \in S(x_0, \delta)$ esetén $f(x) < f(x_0) + \varepsilon$. Rögtön látható, hogy ez a kikötés éppen f-nek $(\mathcal{S}^m, \bar{\mathcal{S}})$-folytonosságát jelenti az x_0 pontban. Hasonlóan, az $(\mathcal{S}^m, \underline{\mathcal{S}})$-folytonos függvényeket alulról félig folytonosnak mondják.

Ismeretes, hogy az egyváltozós f valós függvény pontosan akkor folytonos az x_0 helyen, ha $x_n \to x_0$ esetén mindig $f(x_n) \to f(x_0)$. Ennek megfelelően érvényes:

(2.6.13) *Legyen $[X, \mathcal{V}]$ és $[Y, \mathcal{W}]$ két környezettér, $f : X \to Y$, $x_0 \in X$. f pontosan akkor folytonos az x_0 pontban, ha bármely x_0-hoz tartó X-beli $\mathfrak{r}$ rácsra $f(\mathfrak{r}) \to f(x_0)$.*

Bizonyítás. Ha f folytonos az x_0 pontban, és $\mathfrak{r} \to x_0$, akkor $\mathfrak{r} > \mathfrak{v}(x_0)$, így (2.6.7) folytán $f(\mathfrak{r}) > f(\mathfrak{v}(x_0))$, és (2.6.11) szerint $f(\mathfrak{v}(x_0)) > \mathfrak{w}(f(x_0))$, úgyhogy $f(\mathfrak{r}) \to$ $\to f(x_0)$. Megfordítva, $\mathfrak{v}(x_0) \to x_0$ következtében $f(\mathfrak{v}(x_0)) \to f(x_0)$, azaz

$$f(\mathfrak{v}(x_0)) > \mathfrak{w}(f(x_0))$$

éppen (2.6.11)-et, vagyis f folytonosságát biztosítja. ∎

Az idézett tétel pontosabb általánosításaként:

(2.6.14) *Legyen $[X, \mathcal{T}]$ M_1-tér, $[Y, \mathcal{W}]$ tetszőleges környezettér, $f : X \to Y$, $x_0 \in X$. f pontosan akkor folytonos az x_0 pontban, ha bármely x_0-hoz tartó X-beli (x_n) pontsorozatra $f(x_n) \to f(x_0)$.*

Bizonyítás. A feltétel szükségessége — még akkor is, ha tetszőleges $[X, \mathcal{V}]$ környezettérről van szó — adódik (2.6.13)-ból, mert ha $\mathfrak{r}$ jelöli az (x_n) sorozathoz tartozó sorozatrácsot, akkor $f(\mathfrak{r})$ nyilván az $(f(x_n))$ sorozathoz tartozó sorozatrács.

Tegyük most fel, hogy f nem folytonos az x_0 pontban. Ekkor van $f(x_0)$-nak olyan W környezete, hogy x_0-nak egyetlen V környezetére sem lesz $f(V) \subset W$. Tekintsük (2.4.13)-ra tekintettel x_0-nak olyan $\{V_n : n \in \mathbf{N}\}$ környezetbázisát, hogy $V_1 \supset V_2 \supset$ $\supset V_3 \supset \ldots$, és legyen $x_n \in V_n$ olyan, hogy $f(x_n) \notin W$. Világos, hogy $x_n \to x_0$, de $f(x_n)$ nem tart $f(x_0)$-hoz. ∎

Az összetett függvény folytonosságának ismert tétele így általánosítható:

(2.6.15) *Legyen $[X, \mathcal{V}_1]$, $[Y, \mathcal{V}_2]$, $[Z, \mathcal{V}_3]$ három környezettér, $f : X \to Y$, $g : Y \to Z$, $h = g \circ f$, $x_0 \in X$, $y_0 = f(x_0)$. Ha f az x_0 pontban és g az y_0 pontban folytonos, akkor h is folytonos az x_0 pontban.*

Bizonyítás. (2.6.5) (a) és (2.6.7) (a) szerint $h(\mathfrak{v}_1(x_0)) = g(f(\mathfrak{v}_1(x_0))) > g(\mathfrak{v}_2(y_0)) >$ $> \mathfrak{v}_3(g(y_0)) = \mathfrak{v}_3(h(x_0))$. ∎

Az $f : X \to Y$ leképezést, ahol $[X, \mathcal{V}]$ és $[Y, \mathcal{W}]$ ismét két környezettér, **folytonos**nak (vagy $(\mathcal{V}, \mathcal{W})$-**folytonos**nak) mondjuk, ha minden $x_0 \in X$ pontban folytonos.

Például ha minden $x \in X$-re $f(x) = y_0 \in Y$, akkor f mindenesetre $(\mathcal{V}, \mathcal{W})$-folytonos, hiszen $f(\mathfrak{v}(x_0)) = \{\{y_0\}\} > \mathfrak{w}(y_0)$. Röviden: minden állandó leképezés folytonos. Hasonlóan:

(2.6.16) *Ha $[X, \mathcal{V}]$ és $[Y, \mathcal{T}]$ két környezettér, $\mathcal{T}$ az indiszkrét topológia Y-on, és $f : X \to Y$ tetszőleges, akkor f* $(\mathcal{V}, \mathcal{T})$-folytonos. ∎

(2.6.17) *Legyen $\mathcal{V}$ és $\mathcal{W}$ két környezetstruktúra X-en. Az X halmaz f identikus leképezése pontosan akkor $(\mathcal{V}, \mathcal{W})$-folytonos, ha $\mathcal{V} > \mathcal{W}$.*

Bizonyítás. $x_0 \in X$ esetén $f(\mathfrak{v}(x_0)) = \mathfrak{v}(x_0)$. ∎

(2.6.18) *Legyen $f : X \to Y$ $(\mathcal{V}, \mathcal{W})$-folytonos az x_0 pontban, $\mathcal{V}_1$ $\mathcal{V}$-nél finomabb környezetstruktúra X-en, $\mathcal{W}_1$ $\mathcal{W}$-nél durvább környezetstruktúra Y-on. Ekkor f $(\mathcal{V}_1, \mathcal{W}_1)$-folytonos az x_0 pontban.*

Bizonyítás. Az állítás (2.6.15)-ből és (2.6.17)-ből adódik, mert ha X, ill. Y identitását g, ill. h jelöli, nyilván $f = h \circ f \circ g$. ∎

Például egy folytonos egyváltozós függvény jobbról is, balról is folytonos, mert $\mathscr{E} < \mathscr{E}^+$, $\mathscr{E} < \mathscr{E}^-$.

(2.6.19) *Legyen $f : X \to Y$, $\mathscr{V}$ környezetstruktúra X-en, $\mathscr{T}_i$ $(i \in I)$ topológia Y-on, $\mathscr{T} = \sup \{\mathscr{T}_i : i \in I\}$, $x_0 \in X$. f pontosan akkor $(\mathscr{V}, \mathscr{T})$-folytonos az x_0 pontban, ha minden $i \in I$-re $(\mathscr{V}, \mathscr{T}_i)$-folytonos ugyanitt.*

Bizonyítás. A $(\mathscr{V}, \mathscr{T})$-folytonosságból (2.6.18) alapján következik a $(\mathscr{V}, \mathscr{T}_i)$-folytonosság minden i-re. Másrészt $f(x_0)$-nak $\mathscr{T}$-környezetbázisát alkotják (2.3.3) szerint a $\bigcap_{k=1}^{n} W_{i_k}$ alakú halmazok, ahol W_{i_k} $f(x_0)$-t tartalmazó $\mathscr{T}_{i_k}$-nyílt halmaz, és $i_k \in I$ $(k = 1, \dots, n)$. Ha f minden i-re $(\mathscr{V}, \mathscr{T}_i)$-folytonos az x_0 pontban, akkor találhatók $V_{i_k} \in \mathfrak{v}(x_0)$ halmazok, melyekre $f(V_{i_k}) \subset W_{i_k}$ $(k = 1, \dots, n)$. A $V = \bigcap_{k=1}^{n} V_{i_k} \in \mathfrak{v}(x_0)$ halmazra $f(V) \subset \bigcap_{k=1}^{n} W_{i_k}$. ∎

Például a $\sup \{\overline{\mathscr{E}}, \underline{\mathscr{E}}\} = \mathscr{E}$ egyenlőségből látszik, hogy egy $f : \mathbf{R}^m \to \mathbf{R}$ függvény pontosan akkor folytonos, ha felülről is, alulról is félig folytonos.

(2.6.20) *Legyen $[X, \mathscr{V}]$ környezettér, $\emptyset \neq X_0 \subset X$. X_0-nak X-be való f kanonikus injekciója $(\mathscr{V} \mid X_0, \mathscr{V})$-folytonos.*

Bizonyítás. $x_0 \in X_0$ esetén $f(\mathfrak{v}(x_0) (\cap) X_0) = \mathfrak{v}(x_0) (\cap) X_0 > \mathfrak{v}(x_0)$. ∎

(2.6.21) *Legyen $f : X \to Y$, $[X, \mathscr{V}]$ és $[Y, \mathscr{W}]$ környezettér, $f(X) \subset Y_0 \subset Y$, $x_0 \in X$, $g = f|_X^{Y_0}$. Az f leképezés pontosan akkor $(\mathscr{V}, \mathscr{W})$-folytonos az x_0 pontban, ha g $(\mathscr{V}, \mathscr{W} \mid Y_0)$-folytonos ugyanitt.*

Bizonyítás. $f(\mathfrak{v}(x_0)) = g(\mathfrak{v}(x_0))$ Y_0-beli rács, így $\mathfrak{w}(f(x_0))$-nál és $\mathfrak{w}(g(x_0)) (\cap) \{Y_0\}$-nál egyszerre lesz finomabb. ∎

(2.6.22) *Legyen $f : X \to Y$, $x_0 \in X_0 \subset X$. Ha f $(\mathscr{V}, \mathscr{W})$-folytonos az x_0 pontban, akkor $f \mid X_0 = g$ $(\mathscr{V} \mid X_0, \mathscr{W})$-folytonos ugyanitt.*

Bizonyítás. $g(\mathfrak{v}(x_0) (\cap) \{X_0\}) = f(\mathfrak{v}(x_0) (\cap) \{X_0\}) > f(\mathfrak{v}(x_0)) > \mathfrak{w}(f(x_0)) = \mathfrak{w}(g(x_0))$. ∎

(2.6.23) *Legyen $[X, \mathscr{T}_1]$ és $[Y, \mathscr{T}_2]$ két topologikus tér, $f : X \to Y$, $\mathfrak{S}_2$ egy $\mathscr{T}_2$-szubbázis. A következő állítások ekvivalensek:*

(a) *f $(\mathscr{T}_1, \mathscr{T}_2)$-folytonos;*

(b) *Minden $\mathscr{T}_2$-nyílt halmaz inverz képe $\mathscr{T}_1$-nyílt;*

(c) *Minden $S \in \mathfrak{S}_2$ halmaz inverz képe $\mathscr{T}_1$-nyílt;*

(d) *Minden $\mathscr{T}_2$-zárt halmaz inverz képe $\mathscr{T}_1$-zárt;*

(e) *Minden $A \subset X$ halmazra $f(\bar{A}) \subset \overline{f(A)}$.*

Bizonyítás. (a) $\Rightarrow$ (b): Ha G $\mathscr{T}_2$-nyílt, és $x \in f^{-1}(G)$, akkor G $\mathscr{T}_2$-környezete $f(x)$-nek, így van x-nek olyan V $\mathscr{T}_1$-környezete, hogy $V \subset f^{-1}(G)$. Így $f^{-1}(G)$-nek minden pontja belső pont.

(b) $\Rightarrow$ (a): $x \in X$ esetén $f(x)$-nek bármely nyílt $\mathfrak{b}(f(x))$ környezetbázisára $f^{-1}(\mathfrak{b}(f(x)))$ x-et tartalmazó nyílt halmazokból áll, s így durvább x környezetszűrőjénél, úgyhogy (2.6.12) teljesül.

(b) $\Rightarrow$ (c): Triviális.

(c) $\Rightarrow$ (b): (2.6.2) (b) és (c) folytán $G = \bigcup_{i\in I} B_i, B_i = \bigcap_{j=1}^{n_i} S_{ij}$, $S_{ij} \in \mathfrak{S}_2$ esetén

$$f^{-1}(G) = \bigcup_{i\in I} f^{-1}(B),$$

$$f^{-1}(B_i) = \bigcap_{j=1}^{n_i} f^{-1}(S_{ij}),$$

s így $f^{-1}(B_i)$ és $f^{-1}(G)$ is $\mathfrak{T}_1$-nyílt.

(b) $\Leftrightarrow$ (d): (2.6.2) (d) következménye.

(d) $\Rightarrow$ (e): $f^{-1}(\overline{f(A)})$ A-t tartalmazó zárt halmaz, így $\bar{A} \subset f^{-1}(\overline{f(A)})$ (természetesen $\overline{f(A)}$ a $\mathfrak{T}_2$-lezárást, $\bar{A}$ a $\mathfrak{T}_1$-lezárást jelöli), és $f(\bar{A}) \subset \overline{f(A)}$.

(e) $\Rightarrow$ (d): Ha $F \subset Y$, és $\bar{F} = F$, akkor $A = f^{-1}(F)$ jelöléssel $f(\bar{A}) \subset \overline{f(A)} \subset \bar{F} = F$, azaz $\bar{A} \subset f^{-1}(F) = A$, és A zárt. ∎

Például az $f : \mathbf{R}^m \to \mathbf{R}$ függvény pontosan akkor felülről (alulról) félig folytonos, ha minden $c \in \mathbf{R}$-re akár $f^{-1}((-\infty, c))$ nyílt, akár $f^{-1}([c, +\infty))$ zárt (akár $f^{-1}((c, +\infty))$ nyílt, akár $f^{-1}((-\infty, c])$ zárt). f pontosan akkor folytonos, ha minden $c \in \mathbf{R}$-re $f^{-1}((-\infty, c))$ és $f^{-1}((c, +\infty))$ nyílt, mert a $(-\infty, c)$ és $(c, +\infty)$ halmazok $\mathfrak{E}$ számára szubbázist alkotnak.

(2.6.24) *Legyen $\mathfrak{T}_i$ ($i \in I$) topológia X-en, $\mathfrak{T} = \inf\{\mathfrak{T}_i : i \in I\}$, $\mathfrak{T}'$ topológia Y-on, $f : X \to Y$. f pontosan akkor $(\mathfrak{T}, \mathfrak{T}')$-folytonos, ha minden i-re $(\mathfrak{T}_i, \mathfrak{T}')$-folytonos.*

Bizonyítás. Egy $\mathfrak{T}'$-nyílt G halmazra $f^{-1}(G)$ pontosan akkor $\mathfrak{T}$-nyílt, ha minden i-re $\mathfrak{T}_i$-nyílt. ∎

Például $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ pontosan akkor folytonos, ha jobbról is, balról is folytonos, mert $\mathfrak{E} = \inf\{\mathfrak{E}^+, \mathfrak{E}^-\}$.

2.6.d. Homeomorfia. Legyen $[X, \mathfrak{T}_1]$ és $[Y, \mathfrak{T}_2]$ két topologikus tér. Az $f : X \to Y$ leképezést **homeomorfizmus**nak (pontosabban $(\mathfrak{T}_1, \mathfrak{T}_2)$-homeomorfizmusnak) nevezzük, ha bijektív, $(\mathfrak{T}_1, \mathfrak{T}_2)$-folytonos, és f^{-1} $(\mathfrak{T}_2, \mathfrak{T}_1)$-folytonos.

(2.6.25) *Ha f $(\mathfrak{T}_1, \mathfrak{T}_2)$-homeomorfizmus, akkor f^{-1} $(\mathfrak{T}_2, \mathfrak{T}_1)$-homeomorfizmus. Ha f $(\mathfrak{T}_1, \mathfrak{T}_2)$-homeomorfizmus, g $(\mathfrak{T}_2, \mathfrak{T}_3)$-homeomorfizmus, akkor $g \circ f$ $(\mathfrak{T}_1, \mathfrak{T}_3)$-homeomorfizmus.*

Bizonyítás. (2.6.5) és (2.6.15). ∎

Ha létezik olyan homeomorfizmus, amely az $[X, \mathfrak{T}_1]$ topologikus teret az $[Y, \mathfrak{T}_2]$ topologikus térre képezi le, a két teret egymással **homeomorf**nak mondjuk. A homeomorfia nyilván reflexív (az identitás homeomorfizmus), továbbá (2.6.25) szerint szimmetrikus és tranzitív reláció.

(2.6.23) szerint f pontosan akkor $(\mathfrak{T}_1, \mathfrak{T}_2)$-homeomorfizmus, ha a $\mathfrak{T}_1$-nyílt halmazok összességét a $\mathfrak{T}_2$-nyílt halmazok összességébe, ill. a $\mathfrak{T}_1$-zárt halmazok összességét a $\mathfrak{T}_2$-zárt halmazok összességébe viszi át. Minthogy a topologikus terekben értelmezett minden fogalom (környezet, belső pont, konvergencia, stb.) visszavezethető a nyílt halmazok megadására, azért minden olyan topológiai kijelentés, amely egy topologikus térről kimondható (pl. hogy a tér M_1-tér, M_2-tér, eleget tesz valamely szétválasztási axiómának, Lindelöf-tér, szeparábilis, stb.), elmondható minden vele homeomorf térről is. Ezért az egymással homeomorf tereket topológiai szempontból egyenértékűnek lehet tekinteni. Emiatt szokták a homeomorfizmus kifejezés helyett a **topologikus leképezés** szót is használni, s a topologikus terek olyan tulajdonságait, amelyek ilyen leképezés alkalmával változatlanok maradnak, **topologikus invariáns**oknak mondják. A mondottak szerint ilyenek mindazok a tulajdonságok, amelyeknek fennállása a nyílt halmazok ismeretében ellenőrizhető.

Azt mondjuk, hogy egy $[X, \mathcal{T}_1]$ topologikus tér **topologikusan beágyazható** az $[Y, \mathcal{T}_2]$ topologikus térbe, ha $[X, \mathcal{T}_1]$ homeomorf $[Y, \mathcal{T}_2]$-nek egy alterével. Az olyan $f: X \to Y_0 \subset Y$ bijekciót, amely $(\mathcal{T}_1, \mathcal{T}_2 \mid Y_0)$-folytonos, inverze pedig $(\mathcal{T}_2 \mid Y_0, \mathcal{T}_1)$-folytonos, az $[X, \mathcal{T}_1]$ tér $[Y, \mathcal{T}_2]$-be való **topologikus beágyazás**ának mondjuk.

Azt mondjuk, hogy az $[Y, \mathcal{T}_2]$ topologikus tér **folytonos kép**e az $[X, \mathcal{T}_1]$ topologikus térnek, ha létezik $(\mathcal{T}_1, \mathcal{T}_2)$-folytonos szuperjektív $f: X \to Y$ leképezés. A topologikus terek tulajdonságainak egy része már a tér folytonos képeire is átmegy. Például:

(2.6.26) *Szeparábilis tér folytonos képe is szeparábilis.*

Bizonyítás. Legyen S sűrű, megszámlálható halmaz az $[X, \mathcal{T}_1]$ topologikus térben, $f: X \to Y$ szuperjekció, $\mathcal{T}_2$ topológia Y-on, és f $(\mathcal{T}_1, \mathcal{T}_2)$-folytonos. (2.6.23) (e) szerint $Y = f(X) = f(\bar{S}) \subset \overline{f(S)}$, tehát $f(S)$ $\mathcal{T}_2$-sűrű és nyilván megszámlálható. ∎

2.6.e. Folytonos függvények. A továbbiakban **függvény**en mindig valós függvényt, vagyis $f: X \to \mathbf{R}$ leképezést értünk, ahol X tetszőleges halmaz. Ha $[X, \mathcal{V}]$ környezettér, az X-en értelmezett f **függvény**t az $x_0 \in X$ **pontban folytonos**nak mondjuk, ha itt $(\mathcal{V}, \mathcal{E})$-folytonos, és **folytonos**nak, ha ez minden $x_0 \in X$ pontra áll.

Az analízis elemeiből jól ismert tételek általánosításaként:

(2.6.27) *Legyen $[X, \mathcal{V}]$ környezettér, f és g X-en értelmezett függvény, $x_0 \in X$, s tegyük fel, hogy f és g az x_0 pontban folytonos. Ekkor a következő függvények is folytonosak ugyanitt:*

(a) $f + g$;

(b) fg;

(c) $\max(f, g)$;

(d) $\min(f, g)$;

(e) $\dfrac{f}{g}$, *ha $x \in X$ esetén $g(x) \neq 0$.*

Bizonyítás. Legyen $\varepsilon > 0$ adott, $\eta > 0$ egyelőre tetszőleges, V_1 és V_2 x_0-nak olyan környezete, hogy $x \in V_1$ esetén $|f(x) - f(x_0)| < \eta$, $x \in V_2$ esetén $|g(x) - g(x_0)| < \eta$, $V = V_1 \cap V_2$, s alkalmazzuk az

$$u = f(x),\ u_0 = f(x_0),\ v = g(x),\ v_0 = g(x_0)$$

jelöléseket.

(a): $\eta = \dfrac{\varepsilon}{2}$ választással $x \in V$ esetén

$$|(u + v) - (u_0 + v_0)| \leqq |u - u_0| + |v - v_0| < \eta + \eta = \varepsilon.$$

(b): Válasszuk $u_0 \neq 0$, $v_0 \neq 0$ esetén η-t kisebbnek, mint $\dfrac{\varepsilon}{3\,|u_0|}$, $\dfrac{\varepsilon}{3\,|v_0|}$, $\dfrac{\varepsilon}{3}$

és 1. Ha $u_0 = 0$ vagy $v_0 = 0$, akkor az értelmetlenné váló törtet hagyjuk figyelmen kívül. $x \in V$ esetén

$$|uv - u_0v_0| \leqq |u_0| \cdot |v - v_0| + |v_0| \cdot |u - u_0| + |u - u_0| \cdot |v - v_0| <$$

$$< |u_0|\eta + |v_0|\eta + \eta^2 < \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon.$$

(c) és (d): Tekintettel (a)-ra és (b)-re elég megmutatni, hogy f-fel együtt $|f|$ is folytonos az x_0 pontban, hiszen

$$\max(f, g) = \frac{f+g}{2} + \left|\frac{f-g}{2}\right|,$$

$$\min(f, g) = \frac{f+g}{2} + \left|\frac{f-g}{2}\right|.$$

Ez (2.6.15) szerint abból következik, hogy a $h(u) = |u|$ képlettel értelmezett $h : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ leképezés folytonos, ugyanis

$$h^{-1}((-\infty, c)) = \begin{cases} (-c, c), & \text{ha } c > 0, \\ \emptyset, & \text{ha } c \leqq 0, \end{cases}$$

$$h^{-1}((c, +\infty)) = \begin{cases} (-\infty, -c) \cup (c, +\infty), & \text{ha } c \geqq 0, \\ \mathbf{R}, & \text{ha } c < 0, \end{cases}$$

úgyhogy (2.6.23) (c) alkalmazható.

(e): Tekintettel (b)-re elég belátni, hogy $\frac{1}{g}$ folytonos az x_0 helyen, azaz (2.6.15) és (2.6.21) értelmében azt, hogy a $k(u) = \frac{1}{u}$ képlettel értelmezett $k : (\mathbf{R} - \{0\}) \to \mathbf{R}$ leképezés $(\mathfrak{G} \mid \mathbf{R} - \{0\}, \mathfrak{G})$-folytonos, hiszen $\frac{1}{g} = k \circ g|_X^{\mathbf{R}-\{0\}}$. Csakhogy

$$k^{-1}((-\infty, c)) = \begin{cases} (-\infty, 0) \cup \left(\frac{1}{c}, +\infty\right), & \text{ha } c > 0, \\ (-\infty, 0), & \text{ha } c = 0, \\ \left(\frac{1}{c}, 0\right), & \text{ha } c < 0, \end{cases}$$

$$k^{-1}((c, +\infty)) = \begin{cases} \left(0, \frac{1}{c}\right), & \text{ha } c > 0, \\ (0, +\infty), & \text{ha } c = 0, \\ \left(-\infty, \frac{1}{c}\right) \cup (0, +\infty), & \text{ha } c < 0, \end{cases}$$

és ismét (2.6.23)-ra hivatkozhatunk. ∎

Az analízis egy további nevezetes tételének általánosítása céljából emlékeztetünk arra, hogy az X-en értelmezett (f_n) függvénysorozat egyenletesen tart (vagy konvergál) az f limeszfüggvényhez, ha minden $\varepsilon > 0$-hoz van olyan $n_0 \in \mathbf{N}$, hogy $n \geqq n_0$ esetén $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$ minden $x \in X$-re.

(2.6.28) *Ha az $[X, \mathcal{V}]$ környezettérben az (f_n) függvénysorozat egyenletesen tart f-hez, és egy $x_0 \in X$ pontban minden f_n függvény folytonos, akkor itt f is folytonos.*

Bizonyítás. $\varepsilon > 0$-hoz válasszunk olyan $n_0 \in \mathbf{N}$ indexet, hogy $n \geqq n_0$ esetén $|f_n(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{3}$ álljon minden $x \in X$-re. Legyen V x_0-nak olyan környezete, hogy $x \in V$ esetén $|f_{n_0}(x) - f_{n_0}(x_0)| < \frac{\varepsilon}{3}$. Ekkor $x \in V$ esetén

$$|f(x) - f(x_0)| \leqq |f(x) - f_{n_0}(x)| + |f_{n_0}(x) - f_{n_0}(x_0)| +$$

$$+ |f_{n_0}(x_0) - f(x_0)| < \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon. \blacksquare$$

Az X halmazon értelmezett f_n $(n \in \mathbf{N})$ függvényekből alkotott $\sum_1^\infty f_n$ **függvénysor**-ról azt mondjuk, hogy **egyenletesen tart** az f **összegfüggvény**hez, ha a $\sum_1^k f_n = S_k$ **részletösszeg**ek sorozata egyenletesen tart az f limeszfüggvényhez. (2.6.27)-ből és (2.6.28)-ból rögtön adódik:

(2.6.29) *Ha az $[X, \mathcal{V}]$ környezettérben a $\sum_1^\infty f_n$ függvénysor egyenletesen tart az f összegfüggvényhez, és az f_n függvények egy $x_0 \in X$ pontban folytonosak, akkor itt f is folytonos.* $\blacksquare$

Most is érvényes a következő ismert kritérium:

(2.6.30) *Ha f_n X-en értelmezett függvény, minden $x \in X$ helyen $|f_n(x)| \leqq \varepsilon_n$, és a $\sum_1^\infty \varepsilon_n$ sor korvergens, akkor $\sum_1^\infty f_n$ egyenletesen korvergens.*

Bizonyítás. Minden $x \in X$ helyen

$$\left|\sum_{k+1}^{m} f_n(x)\right| \leqq \sum_{k+1}^{m} \varepsilon_n < \varepsilon, \tag{2.6.31}$$

ha adott $\varepsilon > 0$ mellett k elég nagy, és $m > k$. Ezért adott $x \in X$ mellett az $(S_n(x))$ sorozat Cauchy-sorozat, és tart egy $f(x)$ határértékhez. Ha k olyan, hogy (2.6.31) teljesül, akkor minden $x \in X$-re

$$\left|f(x) - \sum_1^k f_n(x)\right| = \lim_{m\to\infty} \left|\sum_{k+1}^{m} f_n(x)\right| \leqq \varepsilon. \blacksquare$$

Nevezetes példa folytonos függvényre a következő:

(2.6.32) *Legyen $[E, \rho]$ félmetrikus tér, $\emptyset \neq A \subset E$, és $x \in E$ esetén $f(x) = \rho(x, A)$. Ekkor f folytonos függvény.*

Bizonyítás. (1.3.14) (d) szerint $x, y \in E$ esetén

$$\rho(x, A) - \rho(y, A) \leqq \rho(x, y),$$

s itt x és y szerepét felcserélve

$$\rho(y, A) - \rho(x, A) \leqq \rho(y, x) = \rho(x, y),$$

azaz

$$|f(y) - f(x)| \leqq \rho(x, y).$$

Eszerint $y \in S(x, \varepsilon)$ esetén $|f(y) - f(x)| < \varepsilon$. ∎

2.6.f. Topológiák inverz képe. Legyen $f : X \to Y$, és $\mathfrak{T}$ topológia Y-on. Ha $\mathfrak{T}_1$ olyan topológia X-en, hogy f $(\mathfrak{T}_1, \mathfrak{T})$-folytonos, akkor $\mathfrak{T}_1$ helyébe bármely finomabb $\mathfrak{T}_2$ topológiát téve, (2.6.18) szerint f még inkább $(\mathfrak{T}_2, \mathfrak{T})$-folytonos lesz. Olyan $\mathfrak{T}_1$ topológia, amelyre f $(\mathfrak{T}_1, \mathfrak{T})$-folytonos, biztosan van, ti. X diszkrét topológiája (2.6.23) értelmében nyilván ilyen. Felvethető tehát az a kérdés, van-e X-en egy legdurvább $\mathfrak{T}_0$ topológia, amelyre f még $(\mathfrak{T}_0, \mathfrak{T})$-folytonos. Erre ad választ a következő tétel:

(2.6.33) *Legyen $f : X \to Y$, $\mathfrak{T}$ topológia Y-on. Ha X-ben nyíltnak nevezzük a $\mathfrak{T}$-nyílt G halmazok $f^{-1}(G)$ inverz képeit, topológiát kapunk X-en, amelyet a $\mathfrak{T}$* **topológia inverz képé***nek nevezünk és $f^{-1}(\mathfrak{T})$-vel jelölünk; $\mathfrak{T}_0 = f^{-1}(\mathfrak{T})$ a legdurvább topológia X-en, amelyre f $(\mathfrak{T}_0, \mathfrak{T})$-folytonos.*

Bizonyítás. Az, hogy $f^{-1}(\mathfrak{T})$ tényleg topológia, (2.2.12) alapján az $f^{-1}(\emptyset) = \emptyset$, $f^{-1}(Y) = X$ egyenlőségekből és (2.6.2) (b), (c)-ből következik. (2.6.23) (b)-ből látszik, hogy $f\big(f^{-1}(\mathfrak{T}), \mathfrak{T}\big)$-folytonos, és az is, hogy ha $\mathfrak{T}_1$ olyan topológia X-en, amelyre $f(\mathfrak{T}_1, \mathfrak{T})$-folytonos, akkor minden $f^{-1}(\mathfrak{T})$-nyílt halmaz egyúttal $\mathfrak{T}_1$-nyílt is, tehát (2.3.2) szerint $f^{-1}(\mathfrak{T}) < \mathfrak{T}_1$. ∎

A most értelmezett fogalomnak speciális esete a topológiák megszorítása. Valóban, (2.3.13) (d)-ből azonnal látható:

(2.6.34) *Legyen $[E, \mathfrak{T}]$ topologikus tér, $\emptyset \neq E_0 \subset E$, $f : E_0 \to E$ a kanonikus injekció. Ekkor*

$$f^{-1}(\mathfrak{T}) = \mathfrak{T} \mid E_0. \blacksquare$$

A topológiák megszorítására vonatkozó számos tétel kiterjeszthető topológiák inverz képére. Így (2.3.10) mintájára érvényes:

(2.6.35) *Ha $f : X \to Y$, $\mathfrak{T}$ topológia Y-on, $x \in X$, $y = f(x)$, és $\mathfrak{b}(y)$ y-nak $\mathfrak{T}$-környezetbázisa, akkor $f^{-1}\big(\mathfrak{b}(y)\big)$ x-nek $f^{-1}(\mathfrak{T})$-környezetbázisa.*

Bizonyítás. $\mathfrak{b}(y)$ ekvivalens az y-t tartalmazó $\mathfrak{T}$-nyílt halmazokból álló ráccsal, s az utóbbinak inverz képe éppen az x-et tartalmazó $f^{-1}(\mathfrak{T})$-nyílt halmazokból áll, úgyhogy (2.6.9) (b) alkalmazható. ∎

(2.3.13) általánosítása:

(2.6.36) *Legyen $f : X \to Y$, $\mathfrak{T}$ topológia Y-on. Ekkor:*

(a) *Egy $x \in X$ pont pontosan akkor $f^{-1}(\mathfrak{T})$-érintkezési pontja $A \subset X$-nek, ha $f(x)$ $\mathfrak{T}$-érintkezési pontja $f(A)$-nak;*

(b) *$A \subset X$ $f^{-1}(\mathfrak{T})$-lezárása éppen $f^{-1}\big(\overline{f(A)}\big)$, ahol $\overline{f(A)}$ $f(A)$-nak $\mathfrak{T}$-lezárása;*

(c) *Az $f^{-1}(\mathfrak{T})$-zárt halmazok azonosak a $\mathfrak{T}$-zárt halmazok inverz képeivel;*

(d) *Ha $\mathfrak{B}$ bázis $\mathfrak{T}$ számára, akkor $f^{-1}(\mathfrak{B})$ bázis $f^{-1}(\mathfrak{T})$ számára;*

(e) *Ha $\mathfrak{S}$ szubbázis $\mathfrak{T}$ számára, akkor $f^{-1}(\mathfrak{S})$ szubbázis $f^{-1}(\mathfrak{T})$ számára.*

Bizonyítás. (a): (2.6.35)-ből adódik, mert $A \cap f^{-1}(G) \neq \emptyset$ pontosan akkor áll minden $f(x)$-et tartalmazó $\mathfrak{T}$-nyílt G-re, ha ugyanezen G-kre $f(A) \cap G \neq \emptyset$.

(b) Rögtön folyik (a)-ból.

(c) (2.6.33)-ból (2.6.2) (d) alapján nyerhető, (d) és (e) pedig (2.6.2) (b) és (c) alapján. ▮

(2.6.37) *Ha $f : X \to Y$, $\mathfrak{T}_1$ és $\mathfrak{T}_2$ topológia Y-on, $\mathfrak{T}_1 < \mathfrak{T}_2$, akkor $f^{-1}(\mathfrak{T}_1) < f^{-1}(\mathfrak{T}_2)$.* ▮

(2.6.38) *Ha $f : X \to Y$, $\mathfrak{T}_i$ $(i \in I \neq \emptyset)$ topológia Y-on és $\mathfrak{T} = \sup\{\mathfrak{T}_i : i \in I\}$, akkor*

$$\sup\{f^{-1}(\mathfrak{T}_i) : i \in I\} = f^{-1}(\mathfrak{T}).$$

Bizonyítás. (2.6.36) (e)-ből és (2.3.3)-ból adódik az állítás. ▮

(2.6.39) *Legyen $f : X \to Y$, $g : Y \to Z$, $\mathfrak{T}$ topológia Z-n, $h = g \circ f$. Ekkor*

$$h^{-1}(\mathfrak{T}) = f^{-1}(g^{-1}(\mathfrak{T})).$$

Bizonyítás. (2.6.5) (b) következménye. ▮

(2.6.40). *Legyen $f : X \to Y$, $\mathfrak{T}$ topológia Y-on, $x \in X$. Egy X-beli $\mathfrak{r}$ rács pontosan akkor tart x-hez $f^{-1}(\mathfrak{T})$-re nézve, ha $f(\mathfrak{r}) \to f(x)$ $\mathfrak{T}$-re nézve.*

Bizonyítás. (2.6.35) értelmében $\mathfrak{r} \to x$ $f^{-1}(\mathfrak{T})$-re nézve pontosan akkor áll, ha $\mathfrak{r} > f^{-1}(\mathfrak{v}(f(x)))$, ahol $\mathfrak{v}(f(x))$ jelöli $f(x)$ $\mathfrak{T}$-környezetszűrőjét. Minthogy $R \subset f^{-1}(V)$ egyenértékű $f(R) \subset V$-vel, ez pontosan akkor teljesül, ha $f(\mathfrak{r}) > \mathfrak{v}(f(x))$, azaz ha $f(\mathfrak{r}) \to f(x)$ $\mathfrak{T}$-re nézve. ▮

(2.6.35)-ből és (2.6.36) (d)-ből rögtön látható:

(2.6.41) *M_1-topológia inverz képe is M_1-topológia; M_2-topológia inverz képe is M_2-topológia.* ▮

(2.6.42) *Legyen $f : X \to Y$, $\mathfrak{T}$ topológia Y-on. Ha $\mathfrak{T}$ S_i-topológia $(i = 1, 2, 3.5)$, vagy teljesen normális, akkor $f^{-1}(\mathfrak{T})$ is ilyen.*

Bizonyítás. $A, B \subset X$, $G \subset Y$ esetén

$$A \subset f^{-1}(G),\ B \cap f^{-1}(G) \neq \emptyset$$

pontosan akkor áll, ha

$$f(A) \subset G,\ f(B) \cap G = \emptyset.$$

Ebből látszik, hogy A és B pontosan akkor gyengén széteső vagy széteső $f^{-1}(\mathfrak{T})$-re nézve, ha $f(A)$ és $f(B)$ ugyanilyen $\mathfrak{T}$-re nézve.

Hasonlóan, $A, B \subset X$, $G_1, G_2 \subset Y$ esetén

$$A \subset f^{-1}(G_1),\ B \subset f^{-1}(G_2),\ f^{-1}(G_1) \cap f^{-1}(G_2) = \emptyset$$

fennáll, mihelyt

$$f(A) \subset G_1,\ f(B) \subset G_2,\ G_1 \cap G_2 = \emptyset.$$

Ezért A és B $f^{-1}(\mathfrak{T})$-szétválasztható, ha $f(A)$ és $f(B)$ $\mathfrak{T}$-szétválasztható.

Végül ha $x \notin f^{-1}(F)$, akkor $f(x) \notin F$.

Mindebből a definíciók alapján az állítások adódnak. ∎

(2.6.43) *Legyen* $f: X \to Y$ *szuperjekció,* $\mathcal{T}$ *topológia Y-on. Ha* $\mathcal{T}$ *normális, akkor* $f^{-1}(\mathcal{T})$ *is normális. Ha* $f^{-1}(\mathcal{T})$ S_i*-topológia* ($i = 1, \dots, 5$), *normális vagy teljesen normális, akkor* $\mathcal{T}$ *is ilyen.*

Bizonyítás. Mint előbb láttuk, $A, B \subset X$ pontosan akkor (gyengén) széteső, ha $f(A)$ és $f(B)$ (gyengén) széteső. Továbbá most nemcsak $f(A)$ és $f(B)$ $\mathcal{T}$-szétválaszthatóságából következik A és B $f^{-1}(\mathcal{T})$-szétválaszthatósága, hanem fordítva is, hiszen

$$A \subset f^{-1}(G_1),\ B \subset f^{-1}(G_2),\ f^{-1}(G_1) \cap f^{-1}(G_2) = \emptyset$$

esetén

$$f(A) \subset G_1,\ f(B) \subset G_2,\ f^{-1}(G_1 \cap G_2) = \emptyset$$

miatt $G_1 \cap G_2 = \emptyset$.

Így ha $x', y' \in Y$, és $x' = f(x)$, $y' = f(y)$, továbbá x' és y' gyengén széteső, akkor x és y is gyengén széteső, és x és y széteső, ill. szétválasztható voltából x' és y' hasonló tulajdonsága következik. Ez adja az S_1-re és S_2-re vonatkozó állítást.

Ha $x' \notin F$, és $x' = f(x)$, akkor $x \notin f^{-1}(F)$, s ha x és $f^{-1}(F)$ szétválasztható, akkor $f(x) = x'$ és $f(f^{-1}(F)) = F$ is, tekintettel (2.6.4)-re. Így nyerjük az S_3-ra vonatkozó állítást.

Ha $A', B' \subset Y$ széteső, akkor $A' = f(f^{-1}(A))$, $B' = f(f^{-1}(B))$ miatt $f^{-1}(A)$ és $f^{-1}(B)$ is széteső, s ha ezek szétválaszthatók, akkor A' és B' is, mutatva a teljes normalitással kapcsolatos állítást.

Ha végül $f^{-1}(F_1) \cap f^{-1}(F_2) = \emptyset$, akkor $f^{-1}(F_1 \cap F_2) = \emptyset$ folytán $F_1 \cap F_2 = \emptyset$, s ha F_1 és F_2 szétválasztható, akkor $f^{-1}(F_1)$ és $f^{-1}(F_2)$ is ilyen. Megfordítva, ha $F_1 \cap F_2 = \emptyset$, akkor $f^{-1}(F_1) \cap f^{-1}(F_2) = \emptyset$, s ha ezek szétválaszthatók, akkor $f(f^{-1}(F_1)) = F_1$ és $f(f^{-1}(F_2)) = F_2$ is szétválasztható. Ez adja a normalitásra vonatkozó két állítást. ∎

(2.6.44) *Legyen* $[X, \mathcal{T}_1]$ *és* $[Y, \mathcal{T}_2]$ *két topologikus tér,* $f: X \to Y$. *Ekkor:*

(a) f *pontosan akkor* $(\mathcal{T}_1, \mathcal{T}_2)$*-folytonos, ha* $\mathcal{T}_1 > f^{-1}(\mathcal{T}_2)$;

(b) *Ha* f *injektív, akkor* $\mathcal{T}_1 = f^{-1}(\mathcal{T}_2)$ *pontosan akkor áll, ha* $h = f|_X^{f(X)}$ $(\mathcal{T}_1, \mathcal{T}_2|f(X))$*-homeomorfizmus;*

(c) *Ha* f *bijektív, akkor* $\mathcal{T}_1 = f^{-1}(\mathcal{T}_2)$ *pontosan akkor áll, ha* f $(\mathcal{T}_1, \mathcal{T}_2)$*-homeomorfizmus.*

Bizonyítás. (a): Ha f $(\mathcal{T}_1, \mathcal{T}_2)$-folytonos, akkor (2.6.33) szerint $f^{-1}(\mathcal{T}_2) < \mathcal{T}_1$; viszont f $(f^{-1}(\mathcal{T}_2), \mathcal{T}_2)$-folytonos, és ha $\mathcal{T}_1 > f^{-1}(\mathcal{T}_2)$, akkor (2.6.18) szerint $(\mathcal{T}_1, \mathcal{T}_2)$-folytonos is.

(b): f $(f^{-1}(\mathcal{T}_2), \mathcal{T}_2)$-folytonossága miatt h (2.6.21) értelmében $(f^{-1}(\mathcal{T}_2), \mathcal{T}_2|f(X))$-folytonos. Legyen $g = h^{-1}$. Világos, hogy $f \circ g : f(X) \to Y$ éppen a kanonikus injekció, tehát (2.6.34) és (2.6.39) szerint $\mathcal{T}_2|f(X) = (f \circ g)^{-1}(\mathcal{T}_2) = g^{-1}(f^{-1}(\mathcal{T}_2))$, úgyhogy g $(\mathcal{T}_2|f(X), f^{-1}(\mathcal{T}_2))$-folytonos, és így h $(f^{-1}(\mathcal{T}_2), \mathcal{T}_2|f(X))$-homeomorfizmus. Ha viszont h $(\mathcal{T}_1, \mathcal{T}_2|f(X))$-homeomorfizmus, akkor $g \circ h$, azaz X identitása, (2.6.15) szerint $(\mathcal{T}_1, f^{-1}(\mathcal{T}_2))$-homeomorfizmus, úgyhogy (2.6.17) értelmében $\mathcal{T}_1 = f^{-1}(\mathcal{T}_2)$.

(c): (b)-nek speciális esete. ∎

2.6.g. Gyakorlatok. 1. Legyen $f: X \to Y$, $A \subset X$, $B \subset Y$. Mutassuk meg, hogy $A \cap f^{-1}(B) = \emptyset$ pontosan akkor áll, ha $f(A) \cap B = \emptyset$, ugyanis

$$f(A \cap f^{-1}(B)) = f(A) \cap B.$$

2. Adjunk példát olyan $f: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ leképezésre és A, B halmazra, hogy
(a) $f^{-1}(f(A)) \neq A$;
(b) $f(f^{-1}(A)) \neq A$;
(c) $f(A \cap B) \neq f(A) \cap f(B)$;
(d) $f(A - B) \neq f(A) - f(B)$;
(e) $f^{-1}(f(A) \cap B) \neq A \cap f^{-1}(B)$.

3. Legyen $f: X \to Y$. Igazoljuk, hogy
(a) ha f injektív, akkor $f|_X^{f(X)}$ bijektív;
(b) ha f szuperjektív, akkor van olyan $X_0 \subset X$, hogy $f | X_0$ bijektív.

4. Adjunk példát olyan $f: X \to Y$ leképezésre és Y-beli $\mathfrak{c}$ centrált rendszerre, hogy $\emptyset \notin \mathfrak{c}\,(\cap)\,\{f(X)\}$, de $f^{-1}(\mathfrak{c})$ nem centrált.

5. Legyen E az $\mathbf{I}$-ben folytonos függvények halmaza, $f, g \in E$ esetén

$$\rho(f, g) = \int_0^1 | f(t) - g(t) | \, dt,$$

$$\rho'(f, g) = \sup \{ | f(t) - g(t) | : t \in \mathbf{I} \},$$

továbbá egy rögzített $h \in E$ függvényre $f \in E$ esetén

$$\varphi(f) = \int_0^1 f(t) \, h(t) \, dt;$$

végül egy rögzített $t_0 \in \mathbf{I}$ pontra

$$\psi(f) = f(t_0).$$

Mutassuk meg, hogy $\varphi: E \to \mathbf{R}$ $(\mathcal{T}_\rho, \mathcal{E})$- és $(\mathcal{T}_{\rho'}, \mathcal{E})$-folytonos, $\psi: E \to \mathbf{R}$ pedig $(\mathcal{T}_{\rho'}, \mathcal{E})$-folytonos, de nem $(\mathcal{T}_\rho, \mathcal{E})$-folytonos.

6. Legyen $\mathcal{V}$ a **2.1.** alatti 9. feladatban értemezett környezetstruktúra, $f: \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$. Mutassuk meg, hogy f pontosan akkor $(\mathcal{V}, \mathcal{E})$-folytonos, ha rögzített $a \in \mathbf{R}$ mellett a

$$g_a(x) = f(x, a)$$

és

$$h_a(y) = f(a, y)$$

képlettel értelmezett $g_a: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ és $h_a: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ leképezések $(\mathcal{E}, \mathcal{E})$-folytonosak.

7. Legyen $\mathcal{T}_1$ és $\mathcal{T}_2$ a **2.2.** alatti 2. feladatban értelmezett két topológia, $f: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$. Mutassuk meg, hogy
(a) f pontosan akkor $(\mathcal{T}_1, \mathcal{T}_1)$-folytonos $\big((\mathcal{T}_2, \mathcal{T}_2)$-folytonos$\big)$, ha monoton növekvő;

(b) f pontosan akkor $(\mathcal{T}_1, \mathcal{T}_2)$-folytonos $((\mathcal{T}_2, \mathcal{T}_1)$-folytonos$)$, ha monoton fogyó;

(c) f pontosan akkor $(\mathcal{E}, \mathcal{T}_1)$-folytonos $((\mathcal{E}, \mathcal{T}_2)$-folytonos$)$ az $x_0 \in \mathbf{R}$ helyen, ha itt lokális maximuma (minimuma) van;

(d) f pontosan akkor $(\mathcal{E}^-, \mathcal{T}_1)$- és $(\mathcal{E}^+, \mathcal{T}_2)$-folytonos $((\mathcal{E}^+, \mathcal{T}_1)$- és $(\mathcal{E}^-, \mathcal{T}_2)$-folytonos$)$ az x_0 helyen, ha itt (a tágabb értelemben) lokálisan növekvő (fogyó).

8. Legyen $X = (-1, 0) \cup (0, 1] \subset \mathbf{R}$, $Y = (-1, 1) \subset \mathbf{R}$, $f: X \to Y$ a következő:

$$f(x) = \begin{cases} x, & \text{ha } -1 < x < 0, \\ 1 - x, & \text{ha } 0 < x \leqq 1. \end{cases}$$

Mutassuk meg, hogy a $\mathcal{T}_1 = \mathcal{E} \mid X$, $\mathcal{T}_2 = \mathcal{E} \mid Y$ jelölésekkel f $(\mathcal{T}_1, \mathcal{T}_2)$-folytonos bijekció, de nem homeomorfizmus.

9. Adjunk példát olyan $[X, \mathcal{T}_1]$, $[Y, \mathcal{T}_2]$, $[Z, \mathcal{T}_3]$ topologikus térre és $f: X \to Y$, $g: Y \to Z$ leképezésre, hogy $g \circ f$ $(\mathcal{T}_1, \mathcal{T}_3)$-folytonos, de

(a) f nem $(\mathcal{T}_1, \mathcal{T}_2)$-, g nem $(\mathcal{T}_2, \mathcal{T}_3)$-folytonos;

(b) f $(\mathcal{T}_1, \mathcal{T}_2)$-folytonos, g nem $(\mathcal{T}_2, \mathcal{T}_3)$-folytonos;

(c) f nem $(\mathcal{T}_1, \mathcal{T}_2)$-folytonos, g $(\mathcal{T}_2, \mathcal{T}_3)$-folytonos.

10. Adjunk példát olyan $[X, \mathcal{T}_1]$ és $[Y, \mathcal{T}_2]$ topologikus térre és $f: X \to Y$ $(\mathcal{T}_1, \mathcal{T}_2)$-folytonos bijekcióra, hogy nem minden $\mathcal{T}_1$-nyílt ($\mathcal{T}_1$-zárt) halmaz képe $\mathcal{T}_2$-nyílt ($\mathcal{T}_2$-zárt).

11. Legyen $\mathcal{V}_1$ és $\mathcal{V}_2$ környezetstruktúra E-n. Bizonyítandó, hogy

(a) pontosan egy olyan $\mathcal{V}$ környezetstruktúra létezik E-n, amelyre tetszőleges $[X, \mathcal{W}]$ környezettér és $f: E \to X$ leképezés esetén f akkor és csak akkor $(\mathcal{V}, \mathcal{W})$-folytonos, ha egyidejűleg $(\mathcal{V}_1, \mathcal{W})$- és $(\mathcal{V}_2, \mathcal{W})$-folytonos;

(b) ha $\mathcal{V}_1$ és $\mathcal{V}_2$ topológia, $\mathcal{V}$ nem feltétlenül topológia.

[Tekintsük $x \in E$ esetén a $\mathfrak{v}(x) = \mathfrak{v}_1(x)\ (\cup)\ \mathfrak{v}_2(x)$ szűrőt; speciálisan $E = \mathbf{R}^2$ esetén álljon $x = (x_1, x_2)$ mellett $\mathfrak{b}_1(x)$ és $\mathfrak{b}_2(x)$ a

$$B_1(x, \varepsilon) = \{(y_1, y_2): |y_1 - x_1| < \varepsilon, y_2 = x_2\},$$

$$B_2(x, \varepsilon) = \{(y_1, y_2): y_1 = x_1, |y_2 - x_2| < \varepsilon\}$$

halmazokból.]

12. Bizonyítandó, hogy bármely Lindelöf-tér folytonos képe is Lindelöf-tér.

13. Adjunk példát olyan $[X, \mathcal{T}_1]$ és $[Y, \mathcal{T}_2]$ topologikus térre és $f: X \to Y$ folytonos bijekcióra, hogy

(a) $\mathcal{T}_1$ M_1-topológia, de $\mathcal{T}_2$ nem ilyen;

(b) $\mathcal{T}_1$ M_2-topológia, de $\mathcal{T}_2$ nem ilyen;

(c) $\mathcal{T}_1$ metrizálható, és $\mathcal{T}_2$ S_i-topológia, amely nem S_{i+1}-topológia ($i=0, 1, 2, 4$);

(d) $\mathcal{T}_1$ metrizálható, és $\mathcal{T}_2$ T_i-topológia, amely nem T_{i+1}-topológia ($i=0, 1, 2$).

14. Legyen $[H, \mathcal{T}]$ topologikus tér, E a H-n korlátos függvények halmaza, A a $\mathcal{T}$-folytonos korlátos függvényeké, továbbá $f, g \in E$ esetén

$$\rho(f, g) = \sup\{|f(t) - g(t)|: t \in H\}.$$

Mutassuk meg, hogy A $\mathcal{T}_\rho$-zárt.

15. Mutassuk meg, hogy ha f $\mathscr{E}^+$-folytonos függvény, akkor legfeljebb megszámlálható sok hely kivételével $\mathscr{E}$-folytonos is.

[Legyen A_n ($n \in \mathbf{N}$) azon x helyek halmaza, amelyeknek minden $\mathscr{E}$-környezetében van olyan x', hogy $|f(x)-f(x')| \geqq \frac{1}{n}$; legyen továbbá $x \in \mathbf{R}$ mellett $\varepsilon_x > 0$ olyan, hogy $x \leqq t < x + \varepsilon_x$ esetén $|f(t) - f(x)| < \frac{1}{2n}$, és hivatkozzunk arra, hogy $\mathscr{E}^+$ Lindelöf-topológia.]

16. Legyen $[E, \rho]$ félmetrikus tér, $\emptyset \neq A \subset E$, $\varepsilon > 0$. Mutassuk meg, hogy $\{x : \rho(x, A) = \varepsilon\}$ zárt, $\{x : \rho(x, A) > \varepsilon\}$ és $\{x : \rho(x, A) < \varepsilon\}$ nyílt.

17. Adjunk példát olyan $f : X \to Y$ leképezésre és Y-on olyan normális $\mathscr{T}$ topológiára, hogy $f^{-1}(\mathscr{T})$ nem normális

[Legyen $X \subset Y$ és f a kanonikus injekció.]

18. Legyen $[X, \mathscr{T}_1]$ és $[Y, \mathscr{T}_2]$ topologikus tér, $f : X \to Y$. Mutassuk meg, hogy f $(\mathscr{T}_1, \mathscr{T}_2)$-folytonos, ha

(a) $X = \bigcup_{i \in I} G_i$, G_i $\mathscr{T}_1$-nyílt, és $f | G_i$ $(\mathscr{T}_1 | G_i, \mathscr{T}_2)$-folytonos minden i-re;

vagy ha

(b) $X = \bigcup_{1}^{n} F_i$, F_i $\mathscr{T}_1$-zárt, és $f | F_i$ $(\mathscr{T}_1 | F_i, \mathscr{T}_2)$-folytonos minden i-re.

III. SZOMSZÉDSÁGI ÉS UNIFORM TEREK

3.1. SZOMSZÉDSÁGI TEREK

3.1.a. Félmetrikus tér szomszédsági relációja. Láttuk, hogy a metrikus (és félmetrikus) terekben értelmezett fogalmak egy része átvihető tetszőleges topologikus (sőt tetszőleges környezet-) terekre, és a rájuk érvényes tételek is érvényesek részben minden topologikus térben, részben a topologikus terek egy-egy osztályában (pl. M_1-terekben vagy T_2-terekben).

A következőkben az lesz a célunk, hogy a tereknek olyan osztályait vizsgáljuk meg közelebbről, amelyekben bizonyos félmetrikus terekben definiált fogalmak még értelmezhetők, és ezáltal közelebb állnak a félmetrikus terekhez, mint a tetszőleges topologikus terek.

Így például (1.3.13)-ban értelmeztük egy metrikus tér két nem-üres A és B halmazának $\rho(A, B)$ távolságát; a definíció és a vele kapcsolatos (1.3.14) és (1.3.15) tételek félmetrikus terekre is átvihetők. Állapodjunk meg abban, hogy a félmetrikus tér A és B részhalmazait **szomszédos**nak mondjuk, ha $\rho(A, B) = 0$, és **távoli**nak az ellenkező esetben, vagyis, ha vagy $\rho(A, B) > 0$, vagy $\rho(A, B)$ értelmetlen, mert $A = \emptyset$ vagy $B = \emptyset$.

Vegyük észre, hogy a félmetrikus tér topológiáját meg tudjuk határozni, ha az egyes pontpárok eltérését nem ismerjük ugyan, de két $A, B \subset E$ halmazról mindig tudjuk, hogy szomszédosak-e vagy távoliak. Valóban, a V halmaz pontosan akkor környezete az x pontnak, ha az $\{x\}$ és $E - V$ halmazok távoliak, hiszen ez vagy azt jelenti, hogy $E - V = \emptyset$, vagy azt, hogy $\rho(x, E - V) > 0$, mondjuk $\rho(x, E - V) = \varepsilon > 0$, és így mindkét esetben $S(x, \varepsilon) \subset V$; megfordítva pedig $S(x, \varepsilon) \subset V$ esetén vagy $V = E$, vagy $\rho(x, E - V) \geqq \varepsilon > 0$.

Az imént értelmezett szomszédos, ill. távoli halmazpárokról könnyen igazolhatók az alábbi tulajdonságok:

(3.1.1) *Ha A és B szomszédos, akkor B és A is szomszédos.*

Bizonyítás. (1.3.15) (b) szerint $\rho(A, B) = 0$ és $\rho(B, A) = 0$ egyszerre áll fenn. ∎

(3.1.2) *Ha $A \cap B \neq \emptyset$, akkor A és B szomszédos.* ∎

(3.1.3) *Ha A és B szomszédos, $A \subset A'$, $B \subset B'$, akkor A' és B' is szomszédos.*

Bizonyítás. Ekkor (1.3.15) (c) szerint

$$0 \leqq \rho(A', B') \leqq \rho(A, B) = 0. \blacksquare$$

(3.1.4) *$\emptyset$ és E távoli.* ∎

(3.1.5) *Ha A és C is, B és C is távoli, akkor $A \cup B$ és C is távoli.*

Bizonyítás. Ez evidens, ha A, B és C valamelyike üres. Ellenkező esetben pedig (1.3.15) (d) szerint

$$\rho(A \cup B, C) = \min(\rho(A, C), \rho(B, C)) > 0. \blacksquare$$

(3.1.6) *Ha A és B távoli, akkor van olyan P és Q halmaz, hogy $P \cap Q = \emptyset$, A és $E - P$ távoli, B és $E - Q$ távoli.*

Bizonyítás. $A = \emptyset$ esetén $P = \emptyset$ és $Q = E$, $B = \emptyset$ esetén $P = E$ és $Q = \emptyset$ megfelel. Ellenkező esetben legyen $\rho(A, B) = \varepsilon > 0$, és

$$P = \left\{x : \rho(x, A) < \frac{\varepsilon}{2}\right\},$$

$$Q = \left\{x : \rho(x, B) < \frac{\varepsilon}{2}\right\}.$$

Ekkor (1.3.15) (e) szerint $\rho(A, E - P) \geqq \frac{\varepsilon}{2}$ és $\rho(B, E - Q) \geqq \frac{\varepsilon}{2}$, továbbá $P \cap Q = \emptyset$, mert $z \in P \cap Q$ esetén alkalmas $x \in A$ és $y \in B$ pontra $\rho(x, z) < \frac{\varepsilon}{2}$, $\rho(z, y) < \frac{\varepsilon}{2}$, és így $\rho(x, y) \leqq \rho(x, z) + \rho(z, y) < \varepsilon$ adódnék. $\blacksquare$

3.1.b. Szomszédsági tér. A félmetrikus terekben imént tapasztaltak mintájára állapodjunk meg abban, hogy egy $E \neq \emptyset$ halmazon értelmezett **szomszédsági reláción** olyan előírást értünk, amely bármely két $A, B \subset E$ halmazról megmondja, hogy a két halmaz **szomszédos**-e vagy sem; az utóbbi esetben a két halmazt **távoli**nak mondjuk, és azt, hogy A és B szomszédos, ill. távoli, az $A \mathscr{S} B$, ill. $A \overline{\mathscr{S}} B$ szimbólummal jelöljük. Emellett megkívánjuk, hogy a $\mathscr{S}$, ill. $\overline{\mathscr{S}}$ reláció eleget tegyen a (3.1.1) — (3.1.6) állításoknak megfelelő következő kikötéseknek:

(P_1) *$A \mathscr{S} B$ esetén $B \mathscr{S} A$;*

(P_2) *$A \cap B \neq \emptyset$ esetén $A \mathscr{S} B$;*

(P_3) *$A \mathscr{S} B$, $A \subset A'$, $B \subset B'$ esetén $A' \mathscr{S} B'$;*

(P_4) *$\emptyset \overline{\mathscr{S}} E$;*

(P_5) *$A \overline{\mathscr{S}} C$, $B \overline{\mathscr{S}} C$ esetén $A \cup B \overline{\mathscr{S}} C$;*

(P_6) *$A \overline{\mathscr{S}} B$ esetén van olyan P és Q, hogy $P \cap Q = \emptyset$, $A \overline{\mathscr{S}} E - P$, $B \overline{\mathscr{S}} E - Q$.*

A **3.1.a.** pont eredményeit eszerint így foglalhatjuk össze:

(3.1.7) *Legyen $[E, \rho]$ félmetrikus tér, és $A \mathscr{S} B$ pontosan akkor álljon, ha $\rho(A, B) = 0$. Ekkor $\mathscr{S}$ szomszédsági reláció E-n. Ezt az $[E, \rho]$* **félmetrikus tér szomszédsági relációjá***nak nevezzük és $\mathscr{S}_\rho$-val jelöljük.* $\blacksquare$

A $\mathscr{S}$ szomszédsági relációt **(fél)metrizálható**nak mondjuk, ha létezik E-n olyan ρ távolság (eltérés), amelyre $\mathscr{S} = \mathscr{S}_\rho$.

Másik nevezetes példa szomszédsági reláció értelmezésére a következő:

(3.1.8) *Legyen $[E, \mathscr{T}]$ normális topologikus tér, és $A \mathscr{S} B$ pontosan akkor álljon, ha $\bar{A} \cap \bar{B} \neq \emptyset$. Ekkor $\mathscr{S}$ szomszédsági reláció E-n.*

Bizonyítás. (P_1) evidensen érvényes. (P_2) (2.2.16) (b)-ből, (P_3) (2.2.16) (d)-ből, (P_4) a $\overline{\emptyset} = \emptyset$ egyenlőségből, (P_5) (2.2.16) (e)-ből adódik. Végül ha $\bar{A} \cap \bar{B} = \emptyset$, akkor a normalitás miatt van olyan nyílt P és Q, hogy $\bar{A} \subset P$, $\bar{B} \subset Q$, $P \cap Q = \emptyset$. Ekkor

$$\bar{A} \cap \overline{E - P} = \bar{A} \cap (E - P) = \emptyset,$$

$$\bar{B} \cap \overline{E - Q} = \bar{B} \cap (E - Q) = \emptyset,$$

úgyhogy (P_6) is fennáll. ∎

Ha $\mathscr{S}$ szomszédsági reláció az E halmazon, akkor az $[E, \mathscr{S}]$ párt **szomszédsági tér**nek nevezzük.

A (P_6) kikötés megfogalmazását egyszerűsíti a következő elnevezés: egy $[E, \mathscr{S}]$ szomszédsági térben az $A \subset E$ halmaz **szomszédságá**nak nevezzük az olyan $P \subset E$ halmazt, amelyre $A \overline{\mathscr{S}} E - P$. Eszerint ($P_6$) azt mondja ki, hogy távoli halmazoknak mindig vannak diszjunkt szomszédságaik.

Jelöljük $\mathfrak{p}(A)$-val az A halmaz szomszédságainak rendszerét. $A = \emptyset$ esetén $\mathfrak{p}(A)$ E összes részhalmazaiból áll (P_4) értelmében. Ezzel szemben:

(3.1.9) *Ha $[E, \mathscr{S}]$ szomszédsági tér, $\emptyset \neq A \subset E$, akkor $\mathfrak{p}(A)$ E-beli szűrő. Ezt A* **szomszédságszűrőjé***nek nevezzük.*

Bizonyítás. (P_1) és (P_4) szerint $E \in \mathfrak{p}(A)$. $V \in \mathfrak{p}(A)$ esetén (P_2) szerint $A \subset P$, így $P \neq \emptyset$. $P_1, P_2 \in \mathfrak{p}(A)$ esetén $A \overline{\mathscr{S}} E - P_1$, $A \overline{\mathscr{S}} E - P_2$, így ($P_1$) és ($P_5$) folytán $A \overline{\mathscr{S}} (E - P_1) \cup (E - P_2) = E - (P_1 \cap P_2)$, azaz $P_1 \cap P_2 \in \mathfrak{p}(A)$. Végül $P \in \mathfrak{p}(A)$, $P \subset P' \subset E$ esetén $P' \in \mathfrak{p}(A)$, azaz $A \overline{\mathscr{S}} E - P'$, hiszen különben ($P_3$) értelmében $E - P' \subset E - P$ folytán $A \mathscr{S} E - P$ volna. ∎

(3.1.10) *Legyen $[E, \mathscr{S}]$ szomszédsági tér. Ekkor*

(a) *$P \in \mathfrak{p}(A)$ esetén $A \subset P$;*

(b) *$B \in \mathfrak{p}(A)$ esetén $E - A \in \mathfrak{p}(E - B)$;*

(c) *$A \subset B$ esetén $\mathfrak{p}(B) \subset \mathfrak{p}(A)$;*

(d) *$\mathfrak{p}(A \cup B) = \mathfrak{p}(A) \cap \mathfrak{p}(B)$;*

(e) *$B \in \mathfrak{p}(A)$ esetén van olyan $C \in \mathfrak{p}(A)$, hogy $B \in \mathfrak{p}(C)$;*

(f) *$\mathfrak{p}(A \cap B) \supset \mathfrak{p}(A) (\cap) \mathfrak{p}(B)$.*

Bizonyítás. (a): Következménye (P_2)-nek.

(b): (P_1) szerint $B \in \mathfrak{p}(A)$ és $E - A \in \mathfrak{p}(E - B)$ egyaránt azt fejezi ki, hogy $A \overline{\mathscr{S}} E - B$.

(c): Ha $P \in \mathfrak{p}(B)$, azaz $B \overline{\mathscr{S}} E - P$, akkor ($P_3$) szerint $A \overline{\mathscr{S}} E - P$, s így $P \in \mathfrak{p}(A)$.

(d): $P \in \mathfrak{p}(A \cup B)$ esetén $A \cup B \overline{\mathscr{S}} E - P$, s így ($P_3$) szerint $A \overline{\mathscr{S}} E - P$, $B \overline{\mathscr{S}} E - P$, és $P \in \mathfrak{p}(A) \cap \mathfrak{p}(B)$. Megfordítva, ha $A \overline{\mathscr{S}} E - P$ és $B \overline{\mathscr{S}} E - P$, akkor ($P_5$) szerint $A \cup B \overline{\mathscr{S}} E - P$, azaz $P \in \mathfrak{p}(A \cup B)$.

(e): $B \in \mathfrak{p}(A)$ esetén $A \overline{\mathscr{S}} E - B$. ($P_6$) értelmében van olyan P és Q, hogy $A \overline{\mathscr{S}} E - P$, $E - B \overline{\mathscr{S}} E - Q$; $P \cap Q = \emptyset$. A $C = P$ választás megfelel, mert így egyrészt $C \in \mathfrak{p}(A)$, másrészt $C = P \subset E - Q \overline{\mathscr{S}} E - B$, úgyhogy ($P_3$)-ra tekintettel $C \overline{\mathscr{S}} E - B$ és $B \in \mathfrak{p}(C)$.

(f): $P \in \mathfrak{p}(A)$, $Q \in \mathfrak{p}(B)$ esetén (b) szerint $E - A \in \mathfrak{p}(E - P)$, $E - B \in \mathfrak{p}(E - Q)$, tehát tekintettel arra, hogy $\mathfrak{p}(X)$ felszálló rendszer (akár üres X, akár nem), valamint (d) felhasználásával

$$E - (A \cap B) = (E - A) \cup (E - B) \in \mathfrak{p}(E - P) \cap \mathfrak{p}(E - Q) =$$

$$= \mathfrak{p}((E - P) \cup (E - Q)) = \mathfrak{p}(E - (P \cap Q)).$$

és ismét (b) miatt $P \cap Q \in \mathfrak{p}(A \cap B)$. ▮

3.1.c. A szomszédsági tér topológiája. Láttuk, hogy a félmetrikus térben bevezetett szomszédsági reláció segítségével jellemezhetők az egyes pontok környezetei; az x pontnak pontosan akkor környezete a V halmaz, ha $\{x\}$ és $E - V$ távoli. Ez más szóval azt jelenti, hogy az x pont környezetszűrője azonos az $\{x\}$ halmaz szomszédságszűrőjével.

Ennek mintájára bármely szomszédsági térben bevezethetünk egy topológiát:

(3.1.11) *Legyen $[E, \mathscr{S}]$ szomszédsági tér, és nevezzük az $x \in E$ pont környezetszűrőjének az $\{x\}$ halmaz $\mathfrak{p}(\{x\})$ szomszédságszűrőjét. Ekkor E-n topológiát kapunk, amelyet az $[E, \mathscr{S}]$* **szomszédsági tér topológiájá***nak, vagy a $\mathscr{S}$* **szomszédsági reláció által indukált topológiá***nak nevezünk és $\mathscr{T}_\mathscr{S}$-vel jelölünk.*

Bizonyítás. (3.1.9) folytán $\mathfrak{p}(\{x\})$ olyan szűrő, amelynek minden halmaza (3.1.10) (a) szerint tartalmazza x-et. Így $\mathscr{T}_\mathscr{S}$ mindenesetre környezetstruktúra. Továbbá (3.1.10) (e) folytán $V \in \mathfrak{p}(\{x\})$ esetén van olyan $V_1 \in \mathfrak{p}(\{x\})$, hogy $V \in \mathfrak{p}(V_1)$. Ekkor $y \in V_1$ esetén (3.1.10) (c) értelmében $V \in \mathfrak{p}(\{y\})$, és így a $\mathfrak{v}(x) = \mathfrak{p}(\{x\})$ szűrők rendszerére teljesül a (2.2.2)-beli (V′) feltétel. ▮

Az előbb mondottak alapján:

(3.1.12) *Legyen $[E, \rho]$ félmetrikus tér, $\mathscr{S}_\rho$ a hozzátartozó szomszédsági reláció. Ekkor a $\mathscr{S}_\rho$ által indukált $\mathscr{T}_{\mathscr{S}_\rho}$ topológia azonos a ρ eltérés által indukált $\mathscr{T}_\rho$ topológiával.* ▮

(3.1.13) *Legyen $[E, \mathscr{T}]$ normális topologikus tér, $\mathscr{S}$ a (3.1.8)-ban értelmezett szomszédsági reláció. Ekkor a $\mathscr{S}$ által indukált $\mathscr{T}_\mathscr{S}$ topológia durvább $\mathscr{T}$-nél; a $\mathscr{T}_\mathscr{S} = \mathscr{T}$ egyenlőség pontosan akkor áll, ha az $[E, \mathscr{T}]$ tér S_4-tér.*

Bizonyítás. V pontosan akkor $\mathscr{T}_\mathscr{S}$-környezete x-nek, ha $\bar{x} \cap \overline{E - V} = \emptyset$. Ebből mindenesetre következik, hogy $x \in E - \overline{E - V} \subset V$, azaz hogy V $\mathscr{T}$-környezete x-nek. Ha $\mathscr{T}_\mathscr{S} = \mathscr{T}$, akkor tehát x-nek minden V $\mathscr{T}$-környezetére $\bar{x} \subset E - \overline{E - V} \subset V$, és így (2.5.8) szerint $[E, \mathscr{T}]$ S_1-tér, azaz S_4-tér. Megfordítva, ha $[E, \mathscr{T}]$ S_4-tér, és V $\mathscr{T}$-környezete x-nek, akkor van oly $\mathscr{T}$-nyílt V_1, hogy $x \in V_1 \subset V$, és (2.5.8) szerint $\bar{x} \subset V_1$, úgyhogy $\bar{x} \cap (E - V_1) = \bar{x} \cap \overline{E - V_1} = \emptyset$, s annál inkább $\bar{x} \cap \overline{E - V} = \emptyset$, azaz V $\mathscr{T}_\mathscr{S}$-környezete is x-nek. ▮

Amikor a következőkben topologikus terekben értelmezett fogalmakat szomszédsági terekre alkalmazunk, mindig a szomszédsági tér (3.1.11)-ben értelmezett topológiájára vonatkoztatjuk őket.

(3.1.14) *Ha az $[E, \mathscr{S}]$ szomszédsági térben $A \mathscr{S} B$ akkor $\bar{A} \mathscr{S} \bar{B}$.*

Bizonyítás. $E - B \in \mathfrak{p}(A)$ miatt (3.1.10) (c) alapján van olyan $C \in \mathfrak{p}(A)$, hogy $E - B \in \mathfrak{p}(C)$. $x \in C$ esetén (3.1.10) (c) értelmében $E - B \in \mathfrak{p}(\{x\})$, azaz $E - B$ környezete x-nek, és így (2.2.16) (a) folytán $C \subset \operatorname{int}(E - B) = E - \bar{B}$, tehát

$E - \bar{B} \in \mathfrak{p}(A)$, és $A \overline{\mathfrak{S}}\, \bar{B}$. ($P_1$) szerint $\bar{B}\, \overline{\mathfrak{S}}\, A$ is áll, és az iménti meggondolást A és B helyett $\bar{B}$-ra és A-ra alkalmazva $\bar{B}\, \overline{\mathfrak{S}}\, \bar{A}$, azaz $\bar{A}\, \overline{\mathfrak{S}}\, \bar{B}$. ▌

(3.1.15) *Bármely szomszédsági tér topológiája reguláris.*

Bizonyítás. Ha V környezete x-nek, azaz ha $V \in \mathfrak{p}(\{x\})$, akkor (3.1.10) (e) értelmében van olyan $V_1 \in \mathfrak{p}(\{x\})$, hogy $V \in \mathfrak{p}(V_1)$, azaz hogy $V_1\, \overline{\mathfrak{S}}\, E - V$. Ekkor V_1 s még inkább $\bar{V}_1$ környezete x-nek, s viszont (3.1.14) szerint $\bar{V}_1\, \overline{\mathfrak{S}}\, E - V$, úgyhogy ($P_2$) folytán $\bar{V}_1 \subset V$. (2.5.25) értelmében a $\mathfrak{T}_{\mathfrak{S}}$ topológia reguláris. ▌

Az $[E, \mathfrak{S}]$ szomszédsági teret, ill. a $\mathfrak{S}$ szomszédsági relációt **szeparált**nak mondjuk, ha $x, y \in E$, $x \neq y$ esetén $\{x\}\, \overline{\mathfrak{S}}\, \{y\}$.

(3.1.16) *Az $[E, \mathfrak{S}]$ szomszédsági tér pontosan akkor szeparált, ha topológiája T_0-topológia.*

Bizonyítás. Ha $\mathfrak{S}$ szeparált, és $x \neq y$, akkor $E - \{y\} \in \mathfrak{p}(\{x\})$ az x pontnak y-t nem tartalmazó környezete. Megfordítva, ha például V az x pontnak y-t nem tartalmazó környezete, akkor $V \in \mathfrak{p}(\{x\})$. $V \subset E - \{y\}$ folytán $E - \{y\} \in \mathfrak{p}(\{x\})$, és $\{x\}\, \overline{\mathfrak{S}}\, \{y\}$. ▌

(2.5.5) szerint tehát a ρ eltérés által meghatározott $\mathfrak{S}_\rho$ szomszédsági reláció pontosan akkor szeparált, ha ρ távolság.

3.1.d. Szomszédsági relációk összehasonlítása. Legyen $\mathfrak{S}_1$ és $\mathfrak{S}_2$ szomszédsági reláció az E halmazon. Azt mondjuk, hogy $\mathfrak{S}_1$ **durvább**, mint $\mathfrak{S}_2$, vagy hogy $\mathfrak{S}_2$ **finomabb**, mint $\mathfrak{S}_1$, jelben $\mathfrak{S}_1 < \mathfrak{S}_2$ vagy $\mathfrak{S}_2 > \mathfrak{S}_1$, ha $A\, \mathfrak{S}_2\, B$ esetén $A\, \mathfrak{S}_1\, B$. (2.3.1) mintájára evidensen érvényes:

(3.1.17) *Legyen $\mathfrak{S}_1$, $\mathfrak{S}_2$, $\mathfrak{S}_3$ szomszédsági reláció E-n. Ekkor*

(a) $\mathfrak{S}_1 < \mathfrak{S}_1$;

(b) $\mathfrak{S}_1 < \mathfrak{S}_2$ *és* $\mathfrak{S}_2 < \mathfrak{S}_1$ *esetén* $\mathfrak{S}_1 = \mathfrak{S}_2$;

(c) $\mathfrak{S}_1 < \mathfrak{S}_2$, $\mathfrak{S}_2 < \mathfrak{S}_3$ *esetén* $\mathfrak{S}_1 < \mathfrak{S}_3$. ▌

A szomszédsági relációk és a topológiák összehasonlítása között kapcsolatot létesít a következő tétel:

(3.1.18) *Ha $\mathfrak{S}_1$ és $\mathfrak{S}_2$ szomszédsági reláció E-n, és $\mathfrak{S}_1 < \mathfrak{S}_2$, akkor bármely $A \subset E$ halmazra $\mathfrak{p}_1(A) < \mathfrak{p}_2(A)$. Ennélfogva $\mathfrak{T}_{\mathfrak{S}_1} < \mathfrak{T}_{\mathfrak{S}_2}$.*

Bizonyítás. $P \in \mathfrak{p}_1(A)$ esetén $A\, \overline{\mathfrak{S}}_1\, E - P$, és így egyúttal $A\, \overline{\mathfrak{S}}_2\, E - P$, $P \in \mathfrak{p}_2(A)$. A második állítás ebből az $A = \{x\}$ választással adódik. ▌

Fontos megjegyezni, hogy viszont $\mathfrak{T}_{\mathfrak{S}_1} < \mathfrak{T}_{\mathfrak{S}_2}$ fennállásából általában nem következik $\mathfrak{S}_1 < \mathfrak{S}_2$. Elég e célból példát mutatnunk olyan $\mathfrak{S}_1 \neq \mathfrak{S}_2$ szomszédsági relációkra, hogy $\mathfrak{T}_{\mathfrak{S}_1} = \mathfrak{T}_{\mathfrak{S}_2}$. Mármost ha $E = \mathbf{R}$, $\rho(x, y) = |x - y|$ és $\mathfrak{S}_1 = \mathfrak{S}_\rho$, $\mathfrak{S}_2$ pedig a $\mathfrak{T}_\rho = \mathfrak{E}$ (2.5.40) szerint T_5- s annál inkább S_4-topológia által (3.1.8) alapján meghatározott szomszédsági reláció. Ekkor (3.1.12) és (3.1.13) értelmében $\mathfrak{T}_{\mathfrak{S}_1} = \mathfrak{T}_{\mathfrak{S}_2} = \mathfrak{E}$, azonban $\mathfrak{S}_1 \neq \mathfrak{S}_2$, mert például ha $A = \mathbf{N}$, $B = \left\{n + \frac{1}{2n} : n \in \mathbf{N}\right\}$, akkor $\rho(A, B) = 0$ miatt $A\, \mathfrak{S}_1\, B$, viszont $A = \bar{A}$, $B = \bar{B}$, $A \cap B = \emptyset$ miatt $A\, \overline{\mathfrak{S}}_2\, B$.

Megjegyezzük, hogy ebben a példában $\mathfrak{S}_1 < \mathfrak{S}_2$. Ez a következő tételből látható:

(3.1.19) *Legyen $[E, \mathfrak{T}]$ normális tér, $\mathfrak{S}$ a (3.1.8)-ban értelmezett szomszédsági reláció, $\mathfrak{S}'$ pedig tetszőleges szomszédsági reláció E-n, amelyre $\mathfrak{T}_{\mathfrak{S}'} < \mathfrak{T}$. Ekkor $\mathfrak{S}' < \mathfrak{S}$.*

Bizonyítás. Ha $A\,\mathscr{S}\,B$, azaz $\bar{A} \cap \bar{B} \neq \emptyset$, ahol vonással a $\mathscr{T}$-re vonatkozó lezárást jelöltük, akkor $A\,\mathscr{S}'\,B$, hiszen ellenkező esetben (3.1.14) szerint A és B $\mathscr{T}_{\mathscr{S}'}$-lezárása $\mathscr{S}'$-távoli volna, s így (P_2) szerint biztosan nem metszené egymást, és (2.3.2) (d) szerint még inkább állna $\bar{A} \cap \bar{B} = \emptyset$. ▌

(3.1.19)-ből (3.1.13) alapján adódik tehát:

(3.1.20) *Ha $[E, \mathscr{T}]$ S_4-tér, akkor a* (3.1.8) *alapján értelmezett $\mathscr{S}$ a legfinomabb szomszédsági reláció, amely $\mathscr{T}$-t indukálja.* ▌

Világos, hogy bármely E halmazon létezik egy legdurvább és egy legfinomabb szomszédsági reláció; az előbbire nézve bármely két nem-üres halmaz szomszédos, az utóbbira nézve pedig csak az egymást metsző halmazok szomszédosak. Az előbbi E indiszkrét topológiáját, az utóbbi E diszkrét topológiáját indukálja, s így az E halmaz **indiszkrét**, ill. **diszkrét szomszédsági relációjának** nevezhető.

(2.3.3) mintájára szomszédsági relációk szuprémumáról és infimumáról is beszélhetünk. Valóban:

(3.1.21) *Legyen $\mathscr{S}_i$ ($i \in I \neq \emptyset$) szomszédsági reláció E-n. Legyen $A, B \subset E$ esetén $A\,\mathscr{S}\,B$ pontosan akkor érvényes, ha bármely*

$$A = \bigcup_1^p A_j, \quad B = \bigcup_1^q B_k \tag{3.1.22}$$

véges felbontáshoz van olyan j és k, hogy minden $i \in I$ indexre $A_j\,\mathscr{S}_i\,B_k$. Ekkor $\mathscr{S}$ az összes $\mathscr{S}_i$-nél finomabb szomszédsági relációk közül a legdurvább; jele

$$\mathscr{S} = \sup\{\mathscr{S}_i : i \in I\}.$$

A megfelelő topológiákra érvényes

$$\mathscr{T}_{\mathscr{S}} = \sup\{\mathscr{T}_{\mathscr{S}_i} : i \in I\}.$$

Bizonyítás. Világos, hogy $\mathscr{S}$ eleget tesz (P_1)-nek és (P_4)-nek. $A \cap B \neq \emptyset$, mondjuk $x \in A \cap B$ esetén bármely (3.1.22) felbontásra $x \in A_j \cap B_k$ alkalmas j és k mellett, s akkor bármely $i \in I$-re $A_j\,\mathscr{S}_i\,B_k$; így $\mathscr{S}$-re teljesül (P_2). Ha $A\,\mathscr{S}\,B$, $A \subset A'$, $B \subset B'$, és

$$A' = \bigcup_1^p A'_j, \quad B' = \bigcup_1^q B'_k,$$

akkor

$$A = \bigcup_1^p (A'_j \cap A), \quad B = \bigcup_1^q (B'_k \cap B),$$

tehát alkalmas j, k mellett minden $i \in I$ indexre $A'_j \cap A\,\mathscr{S}_i\,B'_k \cap B$, s annál inkább $A'_j\,\mathscr{S}_i\,B'_k$; eszerint $\mathscr{S}$ kielégíti (P_3)-at. Ha $A\,\overline{\mathscr{S}}\,C$ és $B\,\overline{\mathscr{S}}\,C$, akkor létezik olyan

$$A = \bigcup_1^p A_j, \quad C = \bigcup_1^q C_k,$$

$$B = \bigcup_1^{p'} B_l, \quad C = \bigcup_1^{q'} C'_m$$

felbontás, hogy minden j-re, k-re, l-re, m-re alkalmas $i = i(j, k)$, ill. $i' = i'(l, m)$ mellett

$$A_j \overline{\mathscr{S}}_i C_k, \quad B_l \overline{\mathscr{S}}_{i'} C'_m.$$

Ekkor az

$$A \cup B = \bigcup_{j=1}^{p} A_j \cup \bigcup_{l=1}^{p'} B_l,$$

$$C = \bigcup_{k=1}^{q} \bigcup_{m=1}^{q'} (C_k \cap C'_m)$$

felbontásokból tetszőlegesen véve egy-egy tagot, alkalmas $i \in I$, ill. $i' \in I$ mellett

$$A_j \overline{\mathscr{S}}_i C_k \cap C'_m, \text{ ill. } B_l \overline{\mathscr{S}}_{i'} C_k \cap C'_m.$$

Így $\mathscr{S}$-re fennáll (P_5).

Végül ha $A \overline{\mathscr{S}} B$, akkor van egy (3.1.22) alakú felbontás, amelynek egy-egy A_j és B_k tagját véve megfelelő $i = i(j, k)$ index mellett $A_j \overline{\mathscr{S}}_i B_k$. Legyen P_{jk} és Q_{jk} két olyan halmaz, hogy $P_{jk} \cap Q_{jk} = \emptyset$, és

$$A_j \overline{\mathscr{S}}_{i(j,k)} E - P_{jk}, \quad B_k \overline{\mathscr{S}}_{i(j,k)} E - Q_{jk},$$

továbbá

$$P_j = \bigcap_{k=1}^{q} P_{jk}, \quad P = \bigcup_{j=1}^{p} P_j,$$

$$Q_j = \bigcup_{k=1}^{q} Q_{jk}, \quad Q = \bigcap_{j=1}^{p} Q_j.$$

Nyilván $P_j \cap Q_j = \emptyset$ minden j-re, úgyhogy $P \cap Q = \emptyset$. Továbbá világos, hogy ha $C \overline{\mathscr{S}}_i D$ legalább egy $i \in I$-re, akkor $C \overline{\mathscr{S}} D$, úgyhogy minden j-re és k-ra

$$A_j \overline{\mathscr{S}} E - P_{jk}, \quad B_k \overline{\mathscr{S}} E - Q_{jk},$$

és a már igazolt (P_1) — (P_5) felhasználásával

$$A_j \overline{\mathscr{S}} \bigcup_{k=1}^{q} (E - P_{jk}) = E - \bigcap_{k=1}^{q} P_{jk} = E - P_j,$$

s annál inkább

$$A_j \overline{\mathscr{S}} \bigcap_{j=1}^{p} (E - P_j) = E - \bigcup_{j=1}^{p} P_j = E - P,$$

és

$$A = \bigcup^{p} A_j \overline{\mathscr{S}} E - P.$$

Hasonlóan

$$E_k \bar{\mathscr{S}} \bigcap_{k=1}^{q} (E - Q_{jk}) = E - \bigcup_{k=1}^{q} Q_{jk} = E - Q_j,$$

így

$$B_k \bar{\mathscr{S}} \bigcup_{j=1}^{p} (E - Q_j) = E - \bigcap_{j=1} Q_j = E - Q,$$

s végül

$$B = \bigcup_{1}^{q} B_k \bar{\mathscr{S}} E - Q.$$

Eszerint $\mathscr{S}$-re teljesül (P_8) is.

Ilyenformán $\mathscr{S}$ szomszédsági reláció E-n. Már megjegyeztük, hogy ha $C \bar{\mathscr{S}}_i D$ valamely i-re, akkor $C \bar{\mathscr{S}} D$, azaz $\mathscr{S}_i < \mathscr{S}$. Másrészt, ha egy $\mathscr{S}'$ szomszédsági relációra $\mathscr{S}_i < \mathscr{S}'$ minden $i \in I$ mellett, és $A \bar{\mathscr{S}} B$, akkor létezik egy (3.1.22) alakú felbontás, melyre $A_j \bar{\mathscr{S}}_{i(j,k)} B_k$ minden j és k mellett. Ekkor $A_j \bar{\mathscr{S}}' B_k$ minden j-re és k-ra, s így

$$A = \bigcup_{1}^{p} A_j \bar{\mathscr{S}}' B_k,$$

$$A \bar{\mathscr{S}}' \bigcup_{1}^{q} B_k = B,$$

azaz $\mathscr{S} < \mathscr{S}'$.

(3.1.18) szerint $\mathscr{T}_{\mathscr{S}_i} < \mathscr{T}_{\mathscr{S}}$ minden i-re, így a

$$\mathscr{T} = \sup \{\mathscr{T}_{\mathscr{S}_i} : i \in I\}$$

jelöléssel $\mathscr{T} < \mathscr{T}_{\mathscr{S}}$. Másrészt, ha V $\mathscr{T}_{\mathscr{S}}$-környezete x-nek, azaz ha $\{x\} \bar{\mathscr{S}} E - V$, akkor

$$E - V = \bigcup_{1}^{q} B_k,$$

és $\{x\} \bar{\mathscr{S}}_{i(k)} B_k$ alkalmas $i(k) \in I$ indexre. Ezért $E - B_k$ $\mathscr{T}_{\mathscr{S}_{i(k)}}$-környezete s annál inkább $\mathscr{T}$-környezete x-nek, úgyhogy $V = \bigcap_{1}^{q} (E - B_k)$ is $\mathscr{T}$-környezete, azaz $\mathscr{T}_{\mathscr{S}} < \mathscr{T}$. ∎

(3.1.23) *Legyen $\mathscr{S}_i$ ($i \in I \neq \emptyset$) szomszédsági reláció E-n. Ekkor létezik olyan $\mathscr{S}$ szomszédsági reláció, amely az összes $\mathscr{S}_i$-knél durvább szomszédsági relációk között a legfinomabb; jele*

$$\mathscr{S} = \inf \{\mathscr{S}_i : i \in I\}.$$

Bizonyítás. Minthogy az E halmaz indiszkrét szomszédsági relációja minden $\mathscr{S}_i$-nél durvább, lehet beszélni az összes $\mathscr{S}_i$-knél durvább szomszédsági relációk szuprémumáról. Ezt jelölve $\mathscr{S}$-vel nyilván a kívánt tulajdonságú relációt kapunk. ∎

(3.1.24). *Ha egy $\mathcal{T}$ topológia indukálható legalább egy szomszédsági relációval, akkor a $\mathcal{T}$-t indukáló szomszédsági relációk között létezik legfinomabb. Ezt $\mathcal{T}$* **Čech–Stone-féle szomszédsági reláció***jának nevezzük.*

Bizonyítás. (3.1.21) értelmében a $\mathcal{T}$-t indukáló összes relációk szuprémuma is $\mathcal{T}$-t indukálja. ∎

3.1.e. Szomszédsági relációk megszorítása. Legyen ρ eltérés E-n, $\emptyset \neq E_0 \subset E$, és tekintsük a ρ eltérésből E-n, ill. E_0-on keletkező félmetrikus teret. Ha $A, B \subset E_0$, akkor $\rho(A, B) = 0$ fennállása nem mulik azon, hogy A-t és B-t E vagy E_0 részhalmazának tekintjük-e. Ennek alapján kézenfekvő a következő tétel s a benne foglalt definíció:

(3.1.25) *Legyen $\mathcal{S}$ szomszédsági reláció E-n, $\emptyset \neq E_0 \subset E$. Két $A, B \subset E_0$ részhalmazra álljon $A\, \mathcal{S}_0\, B$ pontosan akkor, ha $A\, \mathcal{S}\, B$. Ekkor $\mathcal{S}_0$ szomszédsági reláció E_0-on, amelyet a $\mathcal{S}$* **szomszédsági reláció E_0-ra való megszorításá***nak nevezünk; jele $\mathcal{S}_0 = \mathcal{S} \mid E_0$.*

Bizonyítás. $\mathcal{S}_0$-ra (P_1) — (P_5) evidensen teljesül. Ha $A\, \overline{\mathcal{S}_0}\, B$, azaz $A, B \subset E_0$ és $A\, \overline{\mathcal{S}}\, B$, akkor van olyan P és Q, hogy $P \cap Q = \emptyset$, $A\, \overline{\mathcal{S}}\, E - P$, $B\, \overline{\mathcal{S}}\, E - Q$. Legyen $P_0 = P \cap E_0$, $Q_0 = Q \cap E_0$. Nyilván $P_0 \cap Q_0 = \emptyset$, továbbá $E_0 - P_0 \subset E - P$, $E_0 - Q_0 \subset E - Q$ miatt $A\, \overline{\mathcal{S}}\, E_0 - P_0$. $B\, \overline{\mathcal{S}}\, E_0 - Q_0$, azaz $A\, \overline{\mathcal{S}_0}\, E_0 - P_0$, $B\, \overline{\mathcal{S}_0}\, E_0 - Q_0$. ∎

Az $[E, \mathcal{S}]$ **szomszédsági tér** $\emptyset \neq E_0 \subset E$ halmazhoz tartozó **alterén** az $[E_0, \mathcal{S} \mid E_0]$ szomszédsági teret értjük. Bevezető megjegyzésünket így fogalmazhatjuk meg:

(3.1.26) *Egy félmetrikus tér valamely alterének szomszédsági ralációja az egész tér szomszédsági relációjának megszorítása.* ∎

(3.1.27) *Ha $[E, \mathcal{S}]$ szomszédsági tér, $\emptyset \neq E_0 \subset E$, akkor bármely $\emptyset \neq A \subset E_0$ halmaz $\mathcal{S} \mid E_0$-szomszédságszűrője $\mathfrak{p}(A)\ (\cap)\ \{E_0\}$. Ennélfogva*

$$\mathcal{T}_{\mathcal{S} \mid E_0} = \mathcal{T}_{\mathcal{S}} \mid E_0.$$

Bizonyítás. Ha $P \in \mathfrak{p}(A)$, azaz $A\, \overline{\mathcal{S}}\, E - P$, akkor $E_0 - (P \cap E_0) \subset E - P$ folytán $A\, \overline{\mathcal{S}_0}\, E_0 - (P \cap E_0)$, és $P \cap E_0 \in \mathfrak{p}_0(A)$, ahol $\mathcal{S}_0 = \mathcal{S} \mid E_0$, és $\mathfrak{p}_0(A)$ jelöli A-nak $\mathcal{S}_0$-szomszédságszűrőjét. Megfordítva, ha $P_0 \in \mathfrak{p}_0(A)$, azaz $P_0 \subset E_0$, és $A\, \overline{\mathcal{S}_0}\, E_0 - P_0$, akkor a $P = P_0 \cup (E - E_0)$ jelöléssel $E - P = E_0 - P_0$ folytán $A\, \overline{\mathcal{S}}\, E - P$, $P \in \mathfrak{p}(A)$, és $P_0 = P \cap E_0$. A második állítás ebből az $A = \{x\}$ speciális esetre való alkalmazással adódik. ∎

(2.3.15) mintájára érvényes:

(3.1.28) *Ha $\mathcal{S}_1$ és $\mathcal{S}_2$ szomszédsági reláció E-n, $\emptyset \neq E_0 \subset E$, és $\mathcal{S}_1 < \mathcal{S}_2$, akkor*

$$\mathcal{S}_1 \mid E_0 < \mathcal{S}_2 \mid E_0. \ \blacksquare$$

(2.3.16)-nak megfelel és (3.1.21)-ből azonnal kiolvasható:

(3.1.29) *Ha $\mathcal{S}_i$ szomszédsági reláció E-n ($i \in I$), $\mathcal{S} = \sup\{\mathcal{S}_i : i \in I\}$, $\emptyset \neq E_0 \subset E$, akkor*

$$\sup\{\mathcal{S}_i \mid E_0 : i \in I\} = \mathcal{S} \mid E_0. \ \blacksquare$$

Végül (2.3.17) mintájára nyilván érvényes:

(3.1.30) *Ha $\mathscr{S}$ szomszédsági reláció E-n, $\emptyset \neq E_0 \subset E_1 \subset E$, akkor*

$$(\mathscr{S} \mid E_1) \mid E_0 = \mathscr{S} \mid E_0. \blacksquare$$

3.1.i. Szomszédsági relációk inverz képe. Hasonlóan a topológiákhoz, a szomszédsági relációk megszorítását is tekinthetjük egy általánosabb eljárás speciális esetének:

(3.1.31) *Legyen $f: X \to Y$, $\mathscr{S}$ szomszédsági reláció Y-on. Az $A, B \subset X$ halmazokra álljon $A\,\mathscr{S}_0\,B$ pontosan akkor, ha $f(A)\,\mathscr{S}\,f(B)$. Ekkor $\mathscr{S}_0$ szomszédsági reláció X-en, amelyet a $\mathscr{S}$* **szomszédsági reláció inverz képének** *nevezünk és $f^{-1}(\mathscr{S})$-vel jelölünk.*

Bizonyítás. $\mathscr{S}_0$-ra evidensen teljesül (P_1) – (P_5). Ha $A\,\overline{\mathscr{S}_0}\,B$, azaz $f(A)\,\overline{\mathscr{S}}\,f(B)$, akkor van olyan P és Q, hogy $P \cap Q = \emptyset$, $f(A)\,\overline{\mathscr{S}}\,Y-P$, $f(B)\,\overline{\mathscr{S}}\,Y-Q$. Ekkor $f^{-1}(P) \cap f^{-1}(Q) = \emptyset$, $A\,\overline{\mathscr{S}_0}\,X-f^{-1}(P) = f^{-1}(Y-P)$, és $B\,\overline{\mathscr{S}_0}\,X-f^{-1}(Q) = f^{-1}(Y-Q)$, hiszen $f(f^{-1}(Y-P)) \subset Y-P$, $f(f^{-1}(Y-Q)) \subset Y-Q$ folytán $f(A)\,\overline{\mathscr{S}}\,f(f^{-1}(Y-P))$, $f(B)\,\overline{\mathscr{S}}\,f(f^{-1}(Y-Q))$. Így áll (P_6) is. $\blacksquare$

(3.1.25)-ből és (3.1.31)-ből rögtön következik:

(3.1.32) *Ha $[E, \mathscr{S}]$ szomszédsági tér, $\emptyset \neq E_0 \subset E$, $f: E_0 \to E$ a kanonikus injekció, akkor $f^{-1}(\mathscr{S}) = \mathscr{S} \mid E_0$.* $\blacksquare$

(3.1.27) egy részének általánosításaként:

(3.1.33) *Ha $f: X \to Y$, és $\mathscr{S}$ szomszédsági reláció Y-on, akkor*

$$f^{-1}(\mathscr{T}_{\mathscr{S}}) = \mathscr{T}_{f^{-1}(\mathscr{S})}.$$

Bizonyítás. (2.6.35) szerint $x \in X$-nek $f^{-1}(\mathscr{T}_{\mathscr{S}})$-környezetbázisát alkotják az $f^{-1}(P)$ halmazok, ahol $P \in \mathfrak{p}(\{f(x)\})$, azaz $\{f(x)\}\,\overline{\mathscr{S}}\,Y-P$. Azonban ilyen P-re nyilván $\{x\}\,\overline{f^{-1}(\mathscr{S})}\,f^{-1}(Y-P)$, hiszen $f(f^{-1}(Y-P)) \subset Y-P$ miatt $\{f(x)\}\,\overline{\mathscr{S}}\,f(f^{-1}(Y-P))$, úgyhogy $X-f^{-1}(Y-P) = f^{-1}(P)$ $\mathscr{T}_{f^{-1}(\mathscr{S})}$-környezete x-nek. Másrészt ha V x-nek $\mathscr{T}_{f^{-1}(\mathscr{S})}$-környezete, akkor $\{f(x)\}\,\overline{\mathscr{S}}\,f(X-V)$ folytán $P = Y-f(X-V) \in \mathfrak{p}(\{f(x)\})$ és nyilván $f^{-1}(P) \subset V$. $\blacksquare$

(3.1.34) *Ha $f: X \to Y$, $\mathscr{S}_1$ és $\mathscr{S}_2$ szomszédsági reláció Y-on, és $\mathscr{S}_1 < \mathscr{S}_2$, akkor $f^{-1}(\mathscr{S}_1) < f^{-1}(\mathscr{S}_2)$.* $\blacksquare$

(3.1.35) *Ha $f: X \to Y$, $\mathscr{S}_i$ $(i \in I \neq \emptyset)$ szomszédsági reláció Y-on, és $\mathscr{S} = \sup\{\mathscr{S}_i : i \in I\}$, akkor*

$$\sup\{f^{-1}(\mathscr{S}_i) : i \in I\} = f^{-1}(\mathscr{S}).$$

Bizonyítás. A $\mathfrak{Q} = \sup\{f^{-1}(\mathscr{S}_i) : i \in I\}$ jelöléssel $A\,\mathfrak{Q}\,B$ pontosan akkor áll, ha minden (3.1.22) alakú felbontáshoz található olyan j és k, hogy minden $i \in I$-re $A_j\,f^{-1}(\mathscr{S}_i)\,B_k$, azaz $f(A_j)\,\mathscr{S}_i\,f(B_k)$. Ha ez áll, akkor $A\,f^{-1}(\mathscr{S})\,B$, azaz $f(A)\,\mathscr{S}\,f(B)$, mert minden

$$f(A) = \bigcup_1^p A'_i, \quad f(B) = \bigcup_1^q B'_k$$

felbontásnak megfelel két

$$A = \bigcup_1^p (A \cap f^{-1}(A'_j)), \qquad B = \bigcup_1^q (B \cap f^{-1}(B'_k))$$

felbontás, tehát alkalmas j-re, k-ra és minden i-re

$$f(A \cap f^{-1}(A'_j)) \mathscr{S}_i f(B \cap f^{-1}(B'_k)),$$

és (P_3) folytán annál inkább $A'_j \mathscr{S}_i B'_k$. Megfordítva, ha $f(A) \mathscr{S} f(B)$, akkor bármely két (3.1.22) felbontásra

$$f(A) = \bigcup_1^p f(A_j), \quad f(B) = \bigcup_1^q f(B_k),$$

tehát alkalmas j-re, k-ra és minden i-re $f(A_j) \mathscr{S}_i f(B_k)$. ∎

(3.1.36) *Ha* $f: X \to Y$, $g: Y \to Z$, $h = g \circ f$, *és* $\mathscr{S}$ *szomszédsági reláció* Z*-n, akkor*

$$h^{-1}(\mathscr{S}) = f^{-1}(g^{-1}(\mathscr{S})). \blacksquare$$

3.1.g. Szomszédságtartó leképezések. Legyen $[X, \mathscr{S}]$ és $[Y, \mathfrak{Q}]$ két szomszédsági tér, $f: X \to Y$. Az f leképzést **szomszédságtartó**nak (pontosabban $(\mathscr{S}, \mathfrak{Q})$-**szomszédságtartó**nak) mondjuk, ha $A, B \subset X$, $A \mathscr{S} B$ esetén $f(A) \mathfrak{Q} f(B)$.

Például evidens, hogy:

(3.1.37) *Ha* $[X, \mathscr{S}]$ *tetszőleges,* $[Y, \mathfrak{Q}]$ *indiszkrét szomszédsági tér (speciálisan, ha* Y *egyetlen pontból áll), és* $f: X \to Y$ *tetszőleges, akkor* f $(\mathscr{S}, \mathfrak{Q})$*-szomszédságtartó.* ∎

(3.1.38) $f: X \to Y$ *pontosan akkor* $(\mathscr{S}, \mathfrak{Q})$*-szomszédságtartó, ha* $A, B \subset Y$, $A \bar{\mathfrak{Q}} B$ *esetén* $f^{-1}(A) \bar{\mathscr{S}} f^{-1}(B)$.

Bizonyítás. Ha f szomszédságtartó, és $A \bar{\mathfrak{Q}} B$, akkor $f^{-1}(A) \mathscr{S} f^{-1}(B)$ lehetetlen, hiszen ebből

$$f(f^{-1}(A)) \mathscr{S} f(f^{-1}(B))$$

következnék, holott (2.6.2) (f) szerint

$$f(f^{-1}(A)) \subset A, f(f^{-1}(B)) \subset B.$$

Megfordítva, ha $A \mathscr{S} B$, akkor $f^{-1}(f(A)) \supset A$, $f^{-1}(f(B)) \supset B$ miatt

$$f^{-1}(f(A)) \mathscr{S} f^{-1}(f(B)),$$

úgyhogy ha f az állításban szereplő tulajdonságú, akkor $f(A) \bar{\mathfrak{Q}} f(B)$ lehetetlen, tehát f szomszédságtartó. ∎

(2.6.33)-hoz hasonlóan nyilván érvényes:

(3.1.39) *Legyen* $f: X \to Y$, *és* $\mathfrak{Q}$ *szomszédsági reláció* Y*-on.* $f^{-1}(\mathfrak{Q}) = \mathscr{S}$ *a legdurvább olyan szomszédsági reláció* X*-en, amelyre* f $(\mathscr{S}, \mathfrak{Q})$*-szomszédságtartó.* ∎

(3.1.40) *Ha* $f: X \to Y$ $(\mathscr{S}, \mathfrak{Q})$*-szomszédságtartó, akkor a megfelelő szomszédságszűrőket* $\mathfrak{p}(A)$*-val és* $\mathfrak{q}(B)$*-vel jelölve* $A \subset B$ *esetén*

$$f(\mathfrak{p}(A)) > \mathfrak{q}(f(A)),$$

$B \subset Y$ esetén

$$f^{-1}(\mathfrak{q}(B)) < \mathfrak{p}(f^{-1}(B)).$$

Ennélfogva f $(\mathcal{T}_{\mathcal{S}}, \mathcal{T}_{\mathcal{Q}})$-folytonos.

Bizonyítás. Ha $Q \in \mathfrak{q}(f(A))$, azaz $f(A)\,\bar{\mathcal{Q}}\,Y - Q$, akkor (3.1.38) szerint

$$A \subset f^{-1}(f(A))\,\bar{\mathcal{S}}\,f^{-1}(Y - Q),$$

azaz $P = X - f^{-1}(Y - Q) \in \mathfrak{p}(A)$, $f(P) \in f(\mathfrak{p}(A))$, és nyilván $f(P) \subset Q$.

Ha $P_1 \in f^{-1}(\mathfrak{q}(B))$, azaz $P_1 = f^{-1}(Q_1)$, $Q_1 \in \mathfrak{q}(B)$, akkor $B\,\bar{\mathcal{Q}}\,Y - Q_1$ folytán $f^{-1}(B)\,\bar{\mathcal{S}}\,f^{-1}(Y - Q_1)$, azaz $P_1 = X - f^{-1}(Y - Q_1) \in \mathfrak{p}(f^{-1}(B))$.

Speciálisan $A = \{x\}$ választással

$$f(\mathfrak{p}(\{x\})) > \mathfrak{q}(\{f(x)\}),$$

úgyhogy (2.6.10) értelmében f $(\mathcal{T}_{\mathcal{S}}, \mathcal{T}_{\mathcal{Q}})$-folytonos. ∎

(2.6.15) mintájára nyilván érvényes:

(3.1.41) *Ha $f : X \to Y$ $(\mathcal{S}_1, \mathcal{S}_2)$-szomszédságtartó, és $g : Y \to Z$ $(\mathcal{S}_2, \mathcal{S}_3)$-szomszédságtartó, akkor $h = g \circ f$ $(\mathcal{S}_1, \mathcal{S}_3)$-szomszédságtartó.* ∎

(2.6.17) megfelelője:

(3.1.42) *Legyen $\mathcal{S}$ és $\mathcal{Q}$ két szomszédsági reláció X-en. Az X halmaz f identitása pontosan akkor $(\mathcal{S}, \mathcal{Q})$-szomszédságtartó, ha $\mathcal{S} > \mathcal{Q}$.* ∎

(3.1.42)-ből és (3.1.41)-ből (2.6.18) mintájára adódik:

(3.1.43) *Legyen $f : X \to Y$ $(\mathcal{S}, \mathcal{Q})$-szomszédságtartó, $\mathcal{S}_1$ $\mathcal{S}$-nél finomabb szomszédsági reláció X-en, $\mathcal{Q}_1$ $\mathcal{Q}$-nál durvább szomszédsági reláció Y-on. Ekkor f $(\mathcal{S}_1, \mathcal{Q}_1)$-szomszédságtartó.* ∎

(2.6.19) megfelelője így szól:

(3.1.44) *Legyen $f : X \to Y$, $\mathcal{S}$ szomszédsági reláció X-en, $\mathcal{Q}_i$ $(i \in I)$ szomszédsági reláció Y-on, $\mathcal{Q} = \sup \{\mathcal{Q}_i : i \in I\}$. f pontosan akkor $(\mathcal{S}, \mathcal{Q})$-szomszédságtartó, ha minden i-re $(\mathcal{S}, \mathcal{Q}_i)$-szomszédságtartó.*

Bizonyítás. f pontosan akkor $(\mathcal{S}, \mathcal{Q})$-szomszédságtartó (3.1.39) szerint, ha $f^{-1}(\mathcal{Q}) < \mathcal{S}$, és pontosan akkor $(\mathcal{S}, \mathcal{Q}_i)$-szomszédságtartó, ha $f^{-1}(\mathcal{Q}_i) < \mathcal{S}$. Így az állítás (3.1.35)-ből következik. ∎

(2.6.24)-nek viszont ez felel meg:

(3.1.45) *Legyen $f : X \to Y$, $\mathcal{S}_i$ $(i \in I)$ szomszédsági reláció X-en, $\mathcal{S} = \inf \{\mathcal{S}_i : i \in I\}$, $\mathcal{Q}$ szomszédsági reláció Y-on. f pontosan akkor $(\mathcal{S}, \mathcal{Q})$-szomszédságtartó, ha minden i-re $(\mathcal{S}_i, \mathcal{Q})$-szomszédságtartó.*

Bizonyítás. Legyen $\mathcal{S}' = f^{-1}(\mathcal{Q})$. Ha f minden i-re $(\mathcal{S}_i, \mathcal{Q})$-szomszédságtartó, akkor (3.1.39) szerint $\mathcal{S}' < \mathcal{S}_i$ minden i-re, tehát $\mathcal{S}' < \mathcal{S}$, úgyhogy f $(\mathcal{S}, \mathcal{Q})$-szomszédságtartó. Megfordítva, ha f $(\mathcal{S}, \mathcal{Q})$-szomszédságtartó, akkor (3.1.43) folytán $(\mathcal{S}_i, \mathcal{Q})$-szomszédságtartó is minden i-re. ∎

(2.6.20)-nak megfelelően:

(3.1.46) *Legyen $[X, \mathcal{S}]$ szomszédsági tér, $\emptyset \neq X_0 \subset X$. X_0-nak X-be való f kanonikus injekciója $(\mathcal{S} \mid X_0, \mathcal{S})$-szomszédságtartó.* ∎

(2.6.21)-hez hasonlóan:

(3.1.47) *Legyen* $f : X \to Y$, $[X, \mathcal{S}]$ *és* $[Y, \mathfrak{Q}]$ *szomszédsági tér,* $f(X) \subset Y_0 \subset Y$, $g = f|_X^{Y_0}$. f *pontosan akkor* $(\mathcal{S}, \mathfrak{Q})$*-szomszédságtartó, ha* g $(\mathcal{S}, \mathfrak{Q} \mid Y_0)$*-szomszédságtartó.* ∎

(2.6.22) mintájára:

(3.1.48) *Legyen* $f : X \to Y, \emptyset \neq X_0 \subset X, g = f \mid X_0$. *Ha* f $(\mathcal{S},\mathfrak{Q})$*-szomszédságtartó, akkor* g $(\mathcal{S} \mid X_0, \mathfrak{Q})$*-szomszédságtartó.* ∎

(3.1.49) *Legyen* $[X, \mathcal{S}]$ *és* $[Y, \mathfrak{Q}]$ *szomszédsági tér,* $\mathcal{S}$ *a* $\mathcal{T} = \mathcal{T}_\mathcal{S}$ *topológia Čech—Stone-féle szomszédsági relációja,* $f : X \to Y$. *Ha* f $(\mathcal{T}_\mathcal{S}, \mathcal{T}_\mathfrak{Q})$*-folytonos, akkor* $(\mathcal{S}, \mathfrak{Q})$*-szomszédságtartó is.*

Bizonyítás. (2.6.33) folytán $f^{-1}(\mathcal{T}_\mathfrak{Q}) < \mathcal{T}_\mathcal{S}$. Legyen $\mathcal{S}' = \sup\{\mathcal{S}, f^{-1}(\mathfrak{Q})\}$. Ekkor (3.1.21) értelmében $\mathcal{T}_{\mathcal{S}'} = \sup\{\mathcal{T}_\mathcal{S}, f^{-1}(\mathcal{T}_\mathfrak{Q})\} = \mathcal{T}_\mathcal{S}$, ugyanis (3.1.33) szerint $\mathcal{T}_{f^{-1}(\mathfrak{Q})} = f^{-1}(\mathcal{T}_\mathfrak{Q})$. A Čech—Stone-féle szomszédsági reláció értelmezése szerint $\mathcal{S}' < \mathcal{S}$, azaz $\mathcal{S}' = \mathcal{S}$, és így $f^{-1}(\mathfrak{Q}) < \mathcal{S}$. (3.1.39) és (3.1.43) folytán f $(\mathcal{S}, \mathfrak{Q})$-szomszédságtartó. ∎

Ha $[E, \mathcal{S}]$ szomszédsági tér, és $f : E \to \mathbf{R}$ valós függvény, akkor f-et **szomszédságtartó függvény**nek (vagy $\mathcal{S}$-szomszédságtartó függvénynek) mondjuk, feltéve, hogy $(\mathcal{S}, \mathcal{S}_{\rho_1})$-szomszédságtartó, ahol ρ_1 az euklideszi távolságot jelöli a számegyenesen.

Ha $f : X \to Y$ $(\mathcal{S}, \mathfrak{Q})$-szomszédságtartó bijektív leképezés, továbbá f^{-1} $(\mathfrak{Q}, \mathcal{S})$-szomszédságtartó, akkor f-et az $[X, \mathcal{S}]$ és $[Y, \mathfrak{Q}]$ szomszédsági terek **ekvimorfizmusá**nak, másként $(\mathcal{S}, \mathfrak{Q})$-**ekvimorfizmus**nak mondjuk. Ekvimorfizmus inverze és ekvimorfizmusok összetétele is ekvimorfizmus. Ha létezik az $[X, \mathcal{S}]$ és $[Y, \mathfrak{Q}]$ szomszédsági terek között ekvimorfizmus, akkor a két teret **ekvimorf**nak mondjuk. Ez a reláció reflexív, szimmetrikus és tranzitív. Minthogy egy ekvimorfizmus egyben homeomorfizmus is $[X, \mathcal{T}_\mathcal{S}]$ és $[Y, \mathcal{T}_\mathfrak{Q}]$ között, azért ekvimorf terek homeomorfak is.

(2.6.44) mintájára igazolható:

(3.1.50) *Legyen* $[X, \mathcal{S}]$ *és* $[Y, \mathfrak{Q}]$ *két szomszédsági tér,* $f : X \to Y$. *Ekkor*

(a) f *pontosan akkor* $(\mathcal{S}, \mathfrak{Q})$*-szomszédságtartó, ha* $\mathcal{S} > f^{-1}(\mathfrak{Q})$;

(b) *ha* f *injektív, akkor* $\mathcal{S} = f^{-1}(\mathfrak{Q})$ *pontosan akkor áll, ha* $h = f|_X^{f(X)}$ $(\mathcal{S}, \mathfrak{Q} \mid f(X))$*-ekvimorfizmus;*

(c) *ha* f *bijektív, akkor* $\mathcal{S} = f^{-1}(\mathfrak{Q})$ *pontosan akkor áll, ha* f $(\mathcal{S}, \mathfrak{Q})$*-ekvimorfizmus.* ∎

3.1.h. Gyakorlatok. 1. Legyen $[E, \rho]$ félmetrikus tér, és $A, B \subset E$ esetén álljon $A\,\overline{\mathcal{S}}\,B$ pontosan akkor, ha A és B közül legalább az egyik korlátos, és $\bar{A} \cap \bar{B} = \emptyset$. Mutassuk meg, hogy $\mathcal{S}$ szomszédsági reláció.

[Ha A korlátos, és $\bar{A} \cap \bar{B} \neq \emptyset$, akkor van olyan nyílt P, hogy $\bar{A} \subset P \subset \bar{P} \subset E - \bar{B}$, és $x \in P$ esetén $\rho(x, A) < 1$.]

2. Legyen $[E, \mathcal{T}]$ topologikus tér, $\mathfrak{H}$ pedig olyan E-beli halmazrendszer, hogy

(a) $H_1, H_2 \in \mathfrak{H}$ esetén $H_1 \cup H_2 \in \mathfrak{H}$;

(b) ha $H_1 \subset H_2 \in \mathfrak{H}$ és H_1 zárt, akkor $H_1 \in \mathfrak{H}$.

Álljon $A\,\overline{\mathcal{S}}\,B$ pontosan akkor, ha van olyan P és Q, hogy $A \subset P$, $B \subset Q$,

$P \cap Q = \emptyset$, továbbá $\operatorname{mar} P \in \mathfrak{H}$, $\operatorname{mar} Q \in \mathfrak{H}$. Mutassuk meg, hogy $\mathcal{S}$ szomszédsági reláció.

3. Legyen Φ az E halmazon értelmezett függvények családja a következő tulajdonságokkal:

(a) $c \in \mathbf{R}$ esetén a c-vel egyenlő állandó függvény Φ-hez tartozik;

(b) $f \in \Phi$, $c \in \mathbf{R}$ esetén $f + c \in \Phi$, $cf \in \Phi$;

(c) $f, g \in \Phi$ esetén $\max(f, g) \in \Phi$, $\min(f, g) \in \Phi$.

Álljon $A \overline{\mathcal{S}} B$ pontosan akkor, ha van olyan $f \in \Phi$, hogy $x \in E$ esetén $0 \leqq f(x) \leqq 1$, $x \in A$ esetén $f(x) = 0$, $x \in B$ esetén $f(x) = 1$. Mutassuk meg, hogy $\mathcal{S}$ szomszédsági reláció.

4. Legyen E tetszőleges halmaz, és $\emptyset \neq A \subset E$ esetén $\mathfrak{p}(A)$ olyan E-beli szűrő, hogy fennáll (3.1.10) (a) — (e) mindegyike, továbbá $\mathfrak{p}(\emptyset)$ jelentse E összes részhalmazainak rendszerét. Álljon $A \overline{\mathcal{S}} B$ pontosan akkor, ha $E - B \in \mathfrak{p}(A)$. Mutassuk meg, hogy $\mathcal{S}$ szomszédsági reláció, és hogy $\mathfrak{p}(A)$ $(A \neq \emptyset)$ éppen A-nak erre vonatkozó szomszédságszűrője.

5. Mutassuk meg, hogy ha $[E, \mathcal{T}]$ topologikus tér, és $A \neq \emptyset$ esetén $\mathfrak{p}(A)$ az A halmaz környezetszűrőjét jelöli, akkor teljesülnek a (3.1.10) alatti állítások **(b)** kivételével.

6. Legyen $[E, \rho]$ félmetrikus tér és $\mathcal{S}$ az 1. feladatban értelmezett szomszédsági reláció. Mutassuk meg, hogy $\mathcal{T}_{\mathcal{S}} = \mathcal{T}_{\rho}$, de általában $\mathcal{S} \neq \mathcal{S}_{\rho}$.

$[[E, \rho] = [\mathbf{R}, \rho_1]$, A a páros, B a páratlan számok halmaza.$]$

7. Legyen $E = \mathbf{R}$, $\rho_1(x, y) = |x - y|$, $\rho(x, y) = |e^x - e^y|$, $\rho'(x, y) = |\operatorname{arc\,tg} x - \operatorname{arc\,tg} y|$, $\mathcal{S}_1$, $\mathcal{S}$, $\mathcal{S}'$ a ρ_1-ből, ρ-ból, ill. ρ'-ből kiindulva az 1. feladat mintájára értelmezett szomszédsági reláció. Mutassuk meg, hogy

(a) $\mathcal{T}_{\rho_1} = \mathcal{T}_{\rho} = \mathcal{T}_{\rho'} = \mathcal{E}$;

(b) $\mathcal{S}_1 < \mathcal{S}_{\rho_1}$, $\mathcal{S}_1 \neq \mathcal{S}_{\rho_1}$;

(c) $\mathcal{S}_{\rho'} < \mathcal{S}'$, $\mathcal{S}_{\rho'} \neq \mathcal{S}'$;

(d) $\mathcal{S}$ és $\mathcal{S}_{\rho}$ közül egyik sem finomabb a másiknál.

8. Legyen $[E, \mathcal{T}] = [\mathbf{R}, \mathcal{E}]$, $\mathcal{S}$ a 2. feladatban értelmezett szomszédsági reláció. Mutassuk meg, hogy

(a) ha $\mathfrak{H}$ a véges halmazokból áll, akkor $\mathcal{T} < \mathcal{T}_{\mathcal{S}}$, $\mathcal{T} \neq \mathcal{T}_{\mathcal{S}}$;

(b) ha $\mathfrak{H}$ az $\mathbf{N}$ halmaz részhalmazaiból áll, akkor $\mathcal{T}$ és $\mathcal{T}_{\mathcal{S}}$ közül egyik sem finomabb a másiknál;

(c) ha $\mathfrak{H}$ egyedül az üres halmazból áll, akkor $\mathcal{T}_{\mathcal{S}} < \mathcal{T}$, $\mathcal{T}_{\mathcal{S}} \neq \mathcal{T}$.

9. Legyen $[E, \mathcal{T}]$ topologikus tér, $\mathfrak{H}$ álljon egyedül az üres halmazból, s jelentse $\mathcal{S}$ a 2. feladatban értelmezett szomszédsági relációt. Mutassuk meg, hogy

(a) $\mathcal{T}_{\mathcal{S}} < \mathcal{T}$;

(b) $\mathcal{T}_{\mathcal{S}} = \mathcal{T}$ pontosan akkor áll, ha $\mathcal{T}$-ben a nyílt-zárt halmazok bázist alkotnak.

10. Legyen $[E, \mathcal{T}]$ topologikus tér, Φ a 3. feladatban szereplő függvénycsalád. Mutassuk meg, hogy

(a) minden $f \in \Phi$ függvény $\mathcal{T}_{\mathcal{S}}$-folytonos;

(b) ha minden $f \in \Phi$ $\mathcal{T}$-folytonos, akkor $\mathcal{T}_{\mathcal{S}} < \mathcal{T}$.

11. Legyen $[E, \mathcal{T}] = [\mathbf{R}, \mathcal{E}]$, $\mathcal{S}$ a (3.1.8)-ban értelmezett szomszédsági reláció. Tudjuk, hogy $\mathcal{S} \neq \mathcal{S}_{\rho_1}$. Mutassuk meg, hogy $\mathcal{S} \mid \mathbf{I} = \mathcal{S}_{\rho_1} \mid \mathbf{I}$.

12. Legyen $E = \mathbf{R}^2$, $\mathcal{S}_1$ és $\mathcal{S}_2$ az x-, ill. az y-tengelyen a ρ_1 távolsággal indukált szomszédsági reláció, $f_1(x, y) = x, f_2(x, y) = y$. Mutassuk meg, hogy
(a) a $\mathcal{S} = \sup \{f_1^{-1}(\mathcal{S}_1), f_2^{-1}(\mathcal{S}_2)\}$ jelöléssel $\mathcal{T}_\mathcal{S} = \mathcal{E}^2$;
(b) $\mathcal{S} < \mathcal{S}_{\rho_2}$;
(c) $A = \{(x, y) : x = y\}$, $B = \{(x, y) : |x - y| \geqq 1\}$ esetén $A \mathcal{S} B$, holott $A \overline{\mathcal{S}}_{\rho_2} B$.
[$A = \bigcup_1^n A_i$ esetén az A_i halmazok között van nem-korlátos, s akkor olyan $(x, x) \in A_i$, $(y, y) \in A_i$, hogy $|x - y| \geqq 1$.]
13. Legyen $[X, \mathcal{S}] = [Y, \mathfrak{Q}] = [\mathbf{R}, \mathcal{S}_{\rho_1}]$, $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$. Mutassuk meg, hogy
(a) ha $f(x) = x^2$, akkor f folytonos, de nem szomszédságtartó;
(b) ha $f(x) = \operatorname{arsh} x$, akkor f szomszédságtartó, de nem ekvimorfizmus.
14. Mutassuk meg, hogy ha $[E, \mathcal{S}]$ szomszédsági tér, f_n ($n \in \mathbf{N}$) szomszédságtartó függvény, és $f_n \to f$ egyenletesen, akkor f is szomszédságtartó.
15. Legyen Φ és $\mathcal{S}$ a 3. feladatban szereplő függvénycsalád, ill. szomszédsági reláció. Mutassuk meg, hogy ha g korlátos, $\mathcal{S}$-szomszédságtartó függvény, akkor van olyan (f_n) függvénysorozat, hogy $f_n \in \Phi$ és $f_n \to g$ egyenletesen.
[Ha $a \leqq g(x) \leqq b$ $(x \in E)$, $a = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = b$, $t_i - t_{i-1} < \varepsilon$ $(i = 1, \ldots, n)$, akkor $i = 1, \ldots, n$ esetén van olyan $g_i \in \Phi$, hogy $a \leqq g_i(x) \leqq t_i$ $(x \in E)$, $g(x) \leqq t_{i-1}$ esetén $g_i(x) = a$, $g(x) \geqq t_i$ esetén $g_i(x) = t_i$; az $f = \max(g_1, \ldots, g_n)$ függvényre $f \in \Phi$ és $|f - g| \leqq \varepsilon$.]
16. Legyen Φ és $\mathcal{S}$ ismét a 3. feladatban szereplő függvénycsalád, ill. szomszédsági reláció. Mutassuk meg, hogy
(a) ha $f \in \Phi$ korlátos, akkor $\mathcal{S}$-szomszédságtartó;
(b) ha Φ csupa korlátos függvényből áll, akkor a korlátos, $\mathcal{S}$-szomszédságtartó függvények nem mások, mint a Φ-ből vett egyenletesen konvergens sorozatok limeszfüggvényei.
[Ha $A, B \subset \mathbf{R}$, $\rho_1(A, B) = \varepsilon > 0$, $f \in \Phi$, és $C_i = f^{-1}\left(\left[(i-1)\frac{\varepsilon}{3}, i\frac{\varepsilon}{3}\right]\right)$ $(i = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$, akkor $f^{-1}(A)$ is, $f^{-1}(B)$ is befedhető véges számú C_i-vel, $f^{-1}(A) \cap C_i \neq \emptyset \neq f^{-1}(B) \cap C_j$ esetén $|i - j| \geqq 2$, és $|i - j| \geqq 2$ esetén $C_i \overline{\mathcal{S}} C_j$; a többi a 14. és 15. feladat állításából következik.]

3.2. UNIFORM TEREK

3.2.a. Félmetrikus tér ε-környékei. Az $\mathbf{R}^m$-ben értelmezett valós függvény folytonosságának fogalmát azáltal sikerült tetszőleges topologikus (sőt környezet-) terek leképezéseire általánosítani, hogy „az x pont δ-nál közelebb esik az x_0 ponthoz valamely $\delta > 0$-ra" helyettesíthető volt „az x pont beleesik az x_0 pont valamely V környezetébe" kifejezéssel.

Ismeretes és az analízis elemeiben fontos szerepet játszik egy $f : \mathbf{R}^m \to \mathbf{R}$ függvénynek ún. egyenletes folytonossága is. Akkor mondjuk, hogy az ilyen f függvény egyenletesen folytonos, ha $\varepsilon > 0$-hoz található olyan $\delta > 0$, hogy $x, y \in \mathbf{R}^m$, $\rho_m(x, y) < \delta$ esetén $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$. A definíció szóról-szóra átvihető félmetrikus $[E, \rho]$ téren értelmezett valós függvényekre. Tetszőleges topologikus térre való átvitelének azonban az az akadálya, hogy ehhez „az x és y pont δ-nál közelebb van egymáshoz valamely $\delta > 0$-ra" átültetésére volna szükség, vagyis az „egymástól δ-nál kisebb távolságra levő (x, y) pontpárok összessége" megfelelő általánosítására.

Ennek alapján várható, hogy az egyenletes folytonosság fogalmát olyan E halmazon értelmezett függvényekre sikerül majd átvinni, amelynek elemeiből alkotott elempárok bizonyos halmazai vannak kijelölve; az ilyen elempárhalmazok veszik majd át azt a szerepet, amelyet a félmetrikus térben az egymástól δ-nál kisebb távolságra levő pontok párjainak halmazai játszanak. Annak érdekében, hogy jól használható általánosításhoz jussunk, tekintsük át, milyen egyszerű tulajdonságai vannak a félmetrikus terek ilyen pontpár-halmazainak.

Legyen tehát $[E, \rho]$ félmetrikus tér, és $\varepsilon > 0$ mellett legyen $U_{\rho,\varepsilon}$ vagy röviden U_ε azon $x, y \in E$ pontokból álló (x, y) pontpárok halmaza, amelyekre $\rho(x, y) < \varepsilon$:

(3.2.1) $\quad U_\varepsilon = \{(x, y) : x \in E,\ y \in E,\ \rho(x, y) < \varepsilon\}.$

Ekkor nyilván érvényesek a következő állítások:

(3.2.2) *$(x, y) \in U_\varepsilon$ esetén $(y, x) \in U_\varepsilon$.* ∎

(3.2.3) *$x \in E$ esetén $(x, x) \in U_\varepsilon$ minden $\varepsilon > 0$-ra.* ∎

(3.2.4) *Az $\{U_\varepsilon : \varepsilon > 0\}$ halmazrendszer rács.*

Bizonyítás. $U_{\varepsilon_1} \cap U_{\varepsilon_2} \supset U_\varepsilon$, hacsak $0 < \varepsilon < \min(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$. ∎

(3.2.5) *Minden U_ε-hoz van olyan U_δ, hogy $(x, y) \in U_\delta$, $(y, z) \in U_\delta$ esetén $(x, z) \in U_\varepsilon$.*

Bizonyítás. $\delta = \dfrac{\varepsilon}{2}$ választása megfelel:

$$\rho(x, z) \leqq \rho(x, y) + \rho(y, z) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,$$

ha

$$\rho(x, y) < \frac{\varepsilon}{2}, \quad \rho(y, z) < \frac{\varepsilon}{2}. \ ∎$$

A (3.2.1) alatti U_ε halmazt az $[E, \rho]$ félmetrikus tér **ε-környékének** nevezzük.

3.2.b. Két halmaz Descartes-szorzata. A félmetrikus terekben előbb bevezetett U_ε halmazok elemei az E alaphalmaz elemeiből alkotott bizonyos elempárok voltak. A továbbiak érdekében hasznos lesz, ha alaposabban tanulmányozzuk azt a műveletet, amellyel egy A halmaz és egy B halmaz elemeiből alkotott elempárok halmazát készítjük el; ezt a halmazt az A és B halmaz **Descartes-féle szorzat**ának nevezzük és $(A \times B)$-vel jelöljük:

$$A \times B = \{(x, y) : x \in A,\ y \in B\}.$$

A „Descartes-féle" elnevezést indokolja, hogy a sík pontjai éppen a Descartes-féle koordináták bevezetése révén azonosíthatók a számegyenes elemeiből alkotott elempárok halmazával, vagyis az $\mathbf{R} \times \mathbf{R}$ halmazzal: $\mathbf{R}^2 = \mathbf{R} \times \mathbf{R}$. A „szorzat" elnevezést és a jelölést viszont az indokolja, hogy ha A és B véges halmaz, akkor $A \times B$ elemeinek száma éppen A és B elemszámának szorzata. Az aritmetikai analógiát tovább folytatva A-t és B-t az $A \times B$ Descartes-féle szorzat **tényezőinek** nevezik. További példaként vegyük észre, hogy $a \leqq b$, $c \leqq d$ esetén

$$(a, c; b, d) = (a, b) \times (c, d),$$

$$[a, c; b, d] = [a, b] \times [c, d]$$

stb.

Észrevehetjük, hogy ha ρ távolság vagy eltérés az E halmazon, akkor voltaképpen egy $\rho : E \times E \to \mathbf{R}$ függvényről van szó, és az $E_0 \subset E$ halmaznak megfelelő altér képzésekor a $\rho \mid E_0 \times E_0$ megszorítás lép fel; ehelyett írtunk eddig az egyszerűség kedvéért $\rho \mid E_0$-t (és fogjuk is a továbbiakban ezt a zavart nem okozó pontatlan jelölést használni).

A definícióból rögtön adódnak a következő általánosítások:

(3.2.6) *$A \times B = \emptyset$ pontosan akkor, ha $A = \emptyset$ vagy $B = \emptyset$.* ▮

(3.2.7) *$A \subset A'$, $B \subset B'$ esetén $A \times B \subset A' \times B'$. Viszont ha $\emptyset \neq A \times B \subset$ $\subset A' \times B'$, akkor $A \subset A'$, $B \subset B'$.*

Bizonyítás. Pl. $x \in A - A'$ esetén tetszőleges $y \in B$ elemet választva $(x, y) \in A \times B$, de $(x, y) \notin A' \times B'$. ▮

(3.2.8) $\bigcap_{i \in I} (A_i \times B_i) = (\bigcap_{i \in I} A_i) \times (\bigcap_{i \in I} B_i)$. ▮

(3.2.9) $(\bigcup_{i \in I} A_i) \times (\bigcup_{j \in J} B_j) = \bigcup_{i \in I} \bigcup_{j \in J} (A_i \times B_j)$. ▮

Ahhoz hasonlóan, ahogyan az egyváltozós valós $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ függvényt szemléltetni lehet a síkban az $y = f(x)$ összefüggésnek eleget tevő $(x, y) \in \mathbf{R} \times \mathbf{R}$ párok halmazával, értelmezzük tetszőleges $f : X \to Y$ leképezés **gráfját** a

$$G_f = \{(x, y) : x \in X,\ y = f(x)\} \subset X \times Y$$

halmazként. Világos, hogy ennek a halmaznak a megadása a leképezést egyértelműen meghatározza, hiszen minden $x \in X$ elemhez kijelöli azt az egyetlen $y \in Y$ elemet, amelyre $(x, y) \in G_f$, azaz amelyre $y = f(x)$. Ezért lehet és szokás az $f : X \to Y$ leképezést a G_f gráffal azonosítani, azaz az f leképezést $X \times Y$ részhalmazának tekinteni.

Ez a felfogás módot nyújt arra, hogy bizonyos eredetileg leképezésekre értelmezett fogalmakat tetszőleges $U \subset X \times Y$ részhalmazokra általánosítsunk. Például $A \subset X$ esetén $f(A)$ azon $y \in Y$ elemek halmaza, amelyekhez található olyan $x \in A$, hogy $(x, y) \in G_f$. Ennek mintájára tetszőleges $U \subset X \times Y$, $A \subset X$ esetén legyen $U(A)$ azon $y \in Y$-ok halmaza, amelyekhez van olyan $x \in A$, hogy $(x, y) \in U$. Ekkor (2.6.1) általánosításaként:

(3.2.10) *Bármely $U \subset X \times Y$ halmazra*

(a) *$A \subset B \subset X$ esetén $U(A) \subset U(B)$;*

(b) *$A = \bigcup_{i \in I} A_i$ esetén $U(A) = \bigcup_{i \in I} U(A_i)$;*

(c) *$U_1 \subset U$, $A \subset X$ esetén $U_1(A) \subset U(A)$.* ▮

$U(\{x\})$ helyett egyszerűen $U(x)$-et írunk.

Ha $f : X \to Y$ bijektív, akkor az f^{-1} inverz leképzés gráfja $Y \times X$ azon (y, x) elemeiből áll, amelyekre $(x, y) \in G_f$. Hasonlóan tetszőleges $U \subset X \times Y$ halmaz esetén legyen U^{-1} azon $(y, x) \in Y \times X$ párok halmaza, melyekre $(x, y) \in U$. Ekkor tehát $G_{f^{-1}} = G_f^{-1}$. Vegyük észre, hogy tetszőleges $f : X \to Y$, $B \subset Y$ esetén $f^{-1}(B) = G_f^{-1}(B)$.

Végül, ha $f : X \to Y$, $g : Y \to Z$, $h = g \circ f$, akkor G_h azokból az (x, z) párokból áll, amelyekhez található olyan y, hogy $(x, y) \in G_f$, $(y, z) \in G_g$. Ennek mintájára állapodjunk meg abban, hogy tetszőleges $U \subset X \times Y$, $V \subset Y \times Z$ halmazok esetén $V \circ U \subset X \times Z$ azokból az (x, z) párokból áll, amelyekhez található olyan y, hogy $(x, y) \in U$, $(y, z) \in V$. Eszerint $G_{g \circ f} = G_g \circ G_f$.

Részben (2.6.5) általánosításaként nyilván érvényes:

(3.2.11) *$U \subset X \times Y$, $V \subset Y \times Z$, $W \subset Z \times S$ esetén*

(a) $(V \circ U)^{-1} = U^{-1} \circ V^{-1}$;

(b) $W \circ (V \circ U) = (W \circ V) \circ U$;

(c) *$U_1 \subset U$, $V_1 \subset V$ esetén $V_1 \circ U_1 \subset V \circ U$.* ▮

Az $E \times E$ Descartes-szorzat **átlóján** az (x, x) $(x \in E)$ alakú párok halmazát értjük. A félmetrikus térben definiált ε-környékek eszerint az $E \times E$ Descartes-szorzatnak az átlót tartalmazó bizonyos részhalmazai, mintegy az „átló környékei" (innen ered az elnevezés).

Általánosabban **szimmetrikus**nak mondjuk az $A \subset E \times E$ halmazt, ha $A^{-1} = A$, vagyis ha $(x, y) \in A$ esetén $(y, x) \in A$, E-beli **környéke**n pedig olyan $U \subset E \times E$ halmazt értünk, amely $E \times E$ átlóját tartalmazza és szimmetrikus.

3.2.c. Uniform tér. A félmetrikus térben bevezetett (3.2.1) ε-környékek (3.2.2)–(3.2.5) tulajdonságait általánosítva **uniform bázis**nak nevezünk az E halmazon egy $E \times E$-beli $\mathfrak{U}$ halmazrendszert, ha

(U_1) *$x \in E$, $U \in \mathfrak{U}$ esetén $(x, x) \in U$;*

(U_2) *$\mathfrak{U}$ $(E \times E)$-beli rács;*

(U_3) *$U \in \mathfrak{U}$ esetén $U^{-1} = U$;*

(U_4) *Minden $U \in \mathfrak{U}$-hoz található olyan $U_1 \in \mathfrak{U}$, hogy $U_1 \circ U_1 \subset U$.*

(U_1) — (U_3) úgy is összefoglalható, hogy $\mathfrak{U}$ E-beli környékekből álló rács.

Uniform struktúra az E halmazon az olyan $\mathcal{U}$ $(E \times E)$-beli szűrő, amely (mint rács) ekvivalens egy $\mathfrak{U}$ uniform bázissal. Az E halmazból és az E fölötti $\mathcal{U}$ uniform struktúrából álló $[E, \mathcal{U}]$ párt **uniform tér**nek nevezzük.

(3.2.12) *Az $[E, \rho]$ félmetrikus térben definiált U_ε ε-környékek $\mathfrak{U}_\rho = \{U_\varepsilon : \varepsilon > 0\}$ rendszere uniform bázis E-n. Az ezáltal generált $\mathcal{U}_\rho$ szűrő az $[E, \rho]$* **félmetrikus tér uniform struktúrája.** ▮

Az $\mathcal{U}$ uniform struktúrát és az $[E, \mathcal{U}]$ uniform teret **(fél)metrizálható**nak mondjuk, ha van olyan távolság (eltérés) E-n, hogy $\mathcal{U} = \mathcal{U}_\rho$.

(3.2.13) Ha *$\mathfrak{U}$ uniform bázis E-n, és egy szimmetrikus halmazokból álló $(E \times E)$-beli $\mathfrak{U}'$ halmazrendszer ekvivalens $\mathfrak{U}$-val, akkor $\mathfrak{U}'$ is uniform bázis E-n.*

Bizonyítás. $U' \in \mathfrak{U}'$ esetén van olyan $U \in \mathfrak{U}$, hogy $U \subset U'$; így $x \in E$ esetén $(x, x) \in U'$. (2.1.5)-ből következik, hogy $\mathfrak{U}'$ $(E \times E)$-beli rács. $U' \in \mathfrak{U}'$-höz legyen $U \in \mathfrak{U}$ olyan, hogy $U \subset U'$, majd $U_1 \in \mathfrak{U}$ olyan, hogy $U_1 \circ U_1 \subset U$, végül $U_1' \in \mathfrak{U}'$ olyan, hogy $U_1' \subset U_1$. Ekkor (3.2.11) (c) folytán $U_1' \circ U_1' \subset U'$. ▮

Például ha $\mathcal{U}$ uniform struktúra, akkor az összes $\mathcal{U}$-beli környékek egy $\mathcal{U}$-t generáló uniform bázist alkotnak; ez egyben a legbővebb $\mathcal{U}$-t generáló uniform bázis.

Érdemes még megjegyezni, hogy ha U környék, akkor $U \subset U \circ U$, hiszen $(x, y) \in U$ esetén $(x, x) \in U$ miatt $(x, y) \in U \circ U$ is áll. Ebből könnyen adódik, hogy ha $\mathfrak{U}$ uniform bázis, $U \in \mathfrak{U}$ adott, és n adott természetes szám, akkor van olyan $U' \in \mathfrak{U}$ környék, hogy $U' \circ \cdots \circ U' \subset U$ (ahol U' n-szer szerepel). Valóban, legyenek $U_0 = U$, U_1, U_2, ... olyan $\mathfrak{U}$-beli környékek, hogy $U_i \circ U_i \subset U_{i-1}$ ($i \in \mathbf{N}$). Ha i olyan nagy, hogy $n < 2^i$, akkor az előbb mondottak szerint $U_i \circ \cdots \circ U_i$ (n-szer) $\subset U_i \circ \cdots \circ U_i$ (2^i-szer) $\subset U$.

Az uniform struktúrák közvetlen jellemzéséről a következő mondható:

(3.2.14) *Egy $E \times E$-beli $\mathcal{U}$ szűrő pontosan akkor uniform struktúra, ha*

(a) *$U \in \mathcal{U}$ esetén U tartalmazza $E \times E$ átlóját;*

(b) *$U \in \mathcal{U}$ esetén $U^{-1} \in \mathcal{U}$;*

(c) *Minden $U \in \mathcal{U}$-hoz van olyan $U_1 \in \mathcal{U}$, hogy $U_1 \circ U_1 \subset U$.*

Bizonyítás. Ha $\mathcal{U}$ uniform struktúra, és $\mathfrak{U}$ $\mathcal{U}$-val ekvivalens uniform bázis, akkor $U \in \mathcal{U}$-hoz legyen $U' \in \mathfrak{U}$ olyan, hogy $U' \subset U$; U' tartalmazza az átlót, tehát U is, továbbá $U' = U'^{-1} \subset U^{-1}$ miatt $U^{-1} \in \mathcal{U}$, végül ha $U_1 \in \mathfrak{U}$ olyan, hogy $U_1 \circ U_1 \subset U'$, akkor $U_1 \in \mathcal{U}$, és $U_1 \circ U_1 \subset U$. Így (a) — (c) szükséges.

Megfordítva, ha (a) – (c) teljesül, jelölje $\mathfrak{U}$ az $\mathcal{U}$-beli környékek halmazát. $U \in \mathcal{U}$ esetén $U \cap U^{-1} \in \mathcal{U}$ nyilván szimmetrikus és (a) miatt környék, tehát $U \supset U \cap U^{-1} \in \mathfrak{U}$. Eszerint $\mathfrak{U}$ $\mathcal{U}$-val ekvivalens, és (2.1.5) folytán rács. $U \in \mathfrak{U}$-hoz legyen $U_1 \in \mathcal{U}$ olyan, hogy $U_1 \circ U_1 \subset U$, majd $U_2 \in \mathfrak{U}$ olyan, hogy $U_2 \subset U_1$; ekkor $U_2 \circ U_2 \subset U$, úgyhogy $\mathfrak{U}$ uniform bázis, $\mathcal{U}$ pedig uniform struktúra. ∎

Uniform szubbázisnak nevezzük az E halmazon a $\mathfrak{S}$ halmazrendszert, ha E-beli környékekből áll, és ha minden $S \in \mathfrak{S}$-hez van olyan $S_1 \in \mathfrak{S}$, hogy $S_1 \circ S_1 \subset S$.

(3.2.15) *Ha $\mathfrak{S}$ uniform szubbázis E-n, akkor centrált rendszer, az $\mathfrak{S}$-beli halmazok véges metszetei uniform bázist alkotnak E-n, az $\mathfrak{S}$ által generált $E \times E$-beli szűrő pedig uniform struktúra E-n.*

Bizonyítás. Minden $S \in \mathfrak{S}$ halmaz tartalmazza $E \times E$ átlóját; így $\mathfrak{S}$ mindenesetre centrált rendszer, s az $\mathfrak{S}$-beli halmazok véges metszetei egy $\mathfrak{U}$ rácsot alkotnak. Véges számú környék metszete nyilván környék, úgyhogy $\mathfrak{U}$ is környékekből áll. Ha $S_i \in \mathfrak{S}$-hez $S_i' \in \mathfrak{S}$ olyan, hogy $S_i' \circ S_i' \subset S_i$, akkor az $U = \bigcap_1^n S_i$, $U' = \bigcap_1^n S_i'$ jelöléssel U, $U' \in \mathfrak{U}$, és $U' \circ U' \subset U$. Így $\mathfrak{U}$ uniform bázis, s az általa generált $E \times E$-beli szűrő — amely uniform struktúra — azonos az $\mathfrak{S}$ által generált szűrővel. ∎

3.2.d. Eltérés-család által indukált uniform struktúra. További nevezetes módszer uniform struktúrák származtatására a következő. Legyen Σ az E halmazon értelmezett eltéréseknek tetszőleges nem-üres családja. Ha $\sigma \in \Sigma$, akkor $\varepsilon > 0$ esetén

$$U_{\sigma,\varepsilon} = \{(x, y) \colon \sigma(x, y) < \varepsilon\} \subset E \times E$$

nyilván E-beli környék, továbbá $U_{\sigma,\frac{\varepsilon}{2}} \circ U_{\sigma,\frac{\varepsilon}{2}} \subset U_{\sigma,\varepsilon}$. Így az összes $U_{\sigma,\varepsilon}$ halmazok ($\sigma \in \Sigma$, $\varepsilon > 0$) uniform szubbázist alkotnak E-n. Mármost minden véges $\emptyset \neq \Sigma' \subset \Sigma$ részhalmazhoz és minden $\varepsilon > 0$-hoz rendeljük hozzá az

(3.2.16) $\quad U_{\Sigma',\varepsilon} = \{(x, y) : \sigma(x, y) < \varepsilon, \text{ ha } \sigma \in \Sigma'\} \subset E \times E$

halmazt. Ha Σ' befutja Σ összes véges, nem-üres részhalmazait, ε pedig az összes pozitív valós számokat, a keletkező halmazrendszert jelöljük $\mathfrak{U}_\Sigma$-val.

(3.2.17) *Ha $\Sigma \neq \emptyset$ eltérés-család E-n, akkor a* (3.2.16) *halmazok*

(3.2.18) $\quad \mathfrak{U}_\Sigma = \{U_{\Sigma',\varepsilon} : \emptyset \neq \Sigma' \subset \Sigma \text{ véges}, \varepsilon > 0\}$

rendszere uniform bázis E-n. Az $\mathfrak{U}_\Sigma$ által generált $\mathcal{U}_\Sigma$ uniform struktúrát a Σ **eltérés-család által indukált uniform struktúrá***nak mondjuk.*

Bizonyítás. (3.2.15) szerint az $U_{\sigma,\varepsilon}$ halmazok véges metszetei uniform bázist alkotnak. $\mathfrak{U}_\Sigma$ viszont ezzel ekvivalens, hiszen $\Sigma' = \{\sigma_1, \ldots, \sigma_n\}$ esetén

$$U_{\Sigma',\varepsilon} = \bigcap_1^n U_{\sigma_i,\varepsilon},$$

továbbá $0 < \varepsilon \leqq \min(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n)$ esetén

$$\bigcap_1^n U_{\sigma_i,\varepsilon_i} \supset U_{\Sigma',\varepsilon}. \blacksquare$$

Világos, hogy az $[E, \rho]$ félmetrikus tér uniform struktúrája nem más, mint az egyelemű $\{\rho\}$ eltérés-család által indukált uniform struktúra.

3.2.e. Uniform tér szomszédsági relációja és topológiája. Az $[E, \rho]$ félmetrikus térben A-t és B-t akkor mondtuk szomszédosnak, ha $\rho(A, B) = 0$. Ez más szóval azt jelenti, hogy minden $\varepsilon > 0$-hoz van olyan $x \in A$ és $y \in B$, hogy $\rho(x, y) < \varepsilon$, azaz hogy $(x, y) \in U_\varepsilon$. Ennek mintájára állapodjunk meg abban, hogy egy $[E, \mathcal{U}]$ uniform térben az $A, B \subset E$ halmazt szomszédosnak mondjuk, ha minden $U \in \mathcal{U}$ környékhez található olyan $x \in A$ és $y \in B$, hogy $(x, y) \in U$; ilyenkor az $A\, \mathcal{S}_{\mathcal{U}}\, B$ jelölést alkalmazzuk.

(3.2.19) *Legyen az $[E, \mathcal{U}]$ uniform térben az $A, B \subset E$ halmazokra $A\, \mathcal{S}_{\mathcal{U}}\, B$ pontosan akkor érvényes, ha minden $U \in \mathcal{U}$ környékre $(A \times B) \cap U \neq \emptyset$. Ekkor $\mathcal{S}_{\mathcal{U}}$ szomszédsági reláció E-n, amelyet az $\mathcal{U}$* **uniform struktúra által indukált szomszédsági relációnak** *nevezünk.*

Bizonyítás. (P_1) abból következik, hogy minden U környékre $U^{-1} = U$. $x \in A \cap B$ esetén $(x, x) \in (A \times B) \cap U$ minden U környékre, így áll (P_2). $A \subset A'$, $B \subset B'$ esetén $A \times B \subset A' \times B'$, így ($P_3$) is teljesül. ($P_4$) a $\emptyset \times E = \emptyset$ egyenlőség következménye. Ha $A\, \overline{\mathcal{S}}_{\mathcal{U}}\, C$ és $B\, \overline{\mathcal{S}}_{\mathcal{U}}\, C$, akkor alkalmas U_1 és U_2 környékre

$$(A \times C) \cap U_1 = \emptyset, \ (B \times C) \cap U_2 = \emptyset,$$

és olyan U környéket választva, hogy $U \subset U_1 \cap U_2$, nyilván

$$((A \cup B) \times C) \cap U = ((A \times C) \cap U) \cup ((B \times C) \cap U) = \emptyset.$$

Eszerint áll (P_5) is. Végül ha $A \overline{\mathcal{S}}_{\mathcal{U}} B$, egy U környékre $(A \times B) \cap U = \emptyset$. Legyen U_1 olyan környék, hogy $U_1 \circ U_1 \subset U$, és $P = U_1(A)$, $Q = U_1(B)$. Ekkor $P \cap Q = \emptyset$, hiszen $y \in P \cap Q$ esetén volna olyan $x \in A$ és $z \in B$, hogy $(x, y) \in U_1$, $(z, y) \in U_1$, és így $(y, z) \in U_1$ figyelembevételével $(x, z) \in U$ adódnék. Továbbá nyilván

$$(A \times (E - P)) \cap U_1 = \emptyset,$$

$$(B \times (E - Q)) \cap U_1 = \emptyset,$$

úgyhogy $A \overline{\mathcal{S}}_{\mathcal{U}} E - P$, $B \overline{\mathcal{S}}_{\mathcal{U}} E - Q$. ∎

(3.2.20) *Legyen $\mathfrak{U}$ az $\mathcal{U}$ uniform struktúrát generáló uniform bázis E-n. Ekkor $A \mathcal{S}_{\mathcal{U}} B$ pontosan akkor áll, ha minden $U \in \mathfrak{U}$ környékre $(A \times B) \cap U \neq \emptyset$.*

Bizonyítás. Azt kell észrevenni, hogy $A \mathcal{S}_{\mathcal{U}} B$ a $\emptyset \notin \{A \times B\} (\cap) \mathcal{U}$ relációval egyenértékű, úgyhogy itt $\mathcal{U}$ helyébe bármely vele ekvivalens halmazrendszer tehető. ∎

(3.2.20)-at egy félmetrikus tér ε-környékeinek rendszerére alkalmazva adódik:

(3.2.21) *Az $[E, \rho]$ félmetrikus tér $\mathcal{S}_\rho$ szomszédsági relációja nem egyéb, mint az $\mathcal{U}_\rho$ uniform struktúra által indukált $\mathcal{S}_{\mathcal{U}_\rho}$ szomszédsági reláció.* ∎

(3.2.22) *Legyen $[E, \mathcal{U}]$ uniform tér, $\mathfrak{U}$ egy $\mathcal{U}$-t generáló uniform bázis, $\emptyset \neq A \subset E$, $\mathfrak{p}(A)$ az A halmaz $\mathcal{S}_{\mathcal{U}}$-szomszédságszűrője. Ekkor a $\mathfrak{p}(A)$ szűrő bázisát alkotja az $\{U(A): U \in \mathfrak{U}\}$ rács.*

Bizonyítás. Minthogy $(A \times (E - U(A))) \cap U = \emptyset$, azért $A \overline{\mathcal{S}}_{\mathcal{U}} E - U(A)$, és $U(A) \in \mathfrak{p}(A)$. Másrészt $P \in \mathfrak{p}(A)$ esetén $(A \times (E - P)) \cap U = \emptyset$ valamely $U \in \mathfrak{U}$-ra (3.2.20) folytán, úgyhogy $U(A) \subset P$. ∎

Az $\mathcal{U}$ **uniform struktúra által indukált topológián** értjük és $\mathcal{T}_{\mathcal{U}}$-val jelöljük a $\mathcal{S}_{\mathcal{U}}$ által indukált $\mathcal{T}_{\mathcal{S}_{\mathcal{U}}}$ topológiát. (3.2.22)-t az $A = \{x\}$ esetre alkalmazva nyerjük:

(3.2.23) *Legyen $[E, \mathcal{U}]$ uniform tér, $\mathfrak{U}$ egy $\mathcal{U}$-t generáló uniform bázis, $x \in E$. Az x pontnak $\mathcal{T}_{\mathcal{U}}$-környezetbázisa az $\{U(x): U \in \mathfrak{U}\}$ rács.* ∎

Az E fölötti $\mathcal{U}$ uniform struktúrát, ill. az $[E, \mathcal{U}]$ uniform teret **szeparáltnak** mondjuk, ha $x, y \in E$, $x \neq y$ esetén van olyan $U \in \mathcal{U}$ környék, hogy $(x, y) \notin U$. (3.1.16)-ra is hivatkozva kimondható:

(3.2.24) *Az $\mathcal{U}$ uniform struktúra pontosan akkor szeparált, ha a $\mathcal{S}_{\mathcal{U}}$ szomszédsági reláció szeparált, azaz ha $\mathcal{T}_{\mathcal{U}}$ T_0-topológia.* ∎

A Σ eltérés-család által indukált $\mathcal{U}_\Sigma$ uniform struktúra $\mathcal{S}_{\mathcal{U}_\Sigma}$ szomszédsági relációját és $\mathcal{T}_{\mathcal{U}_\Sigma}$ topológiáját röviden a Σ **eltérés-család által indukált szomszédsági relációnak**, ill. **topológiának** nevezzük és $\mathcal{S}_\Sigma$-val, ill. $\mathcal{T}_\Sigma$-val jelöljük.

3.2.f. Uniform struktúrák összehasonlítása. Egy E halmazon adott $\mathcal{U}_1$ és $\mathcal{U}_2$ uniform struktúrák összehasonlítása a szűrők összehasonlításán alapszik: $\mathcal{U}_1$ **durvább,** mint $\mathcal{U}_2$, azaz $\mathcal{U}_2$ **finomabb,** mint $\mathcal{U}_1$, jelben $\mathcal{U}_1 < \mathcal{U}_2$ vagy $\mathcal{U}_2 > \mathcal{U}_1$, ha ez a reláció az $\mathcal{U}_1$ és $\mathcal{U}_2$ szűrők között fennáll. Így aztán:

(3.2.25) *Legyen $\mathcal{U}_1, \mathcal{U}_2, \mathcal{U}_3$ uniform struktúra E-n. Ekkor*

(a) $\mathcal{U}_1 < \mathcal{U}_1$;

(b) $\mathcal{U}_1 < \mathcal{U}_2$, $\mathcal{U}_2 < \mathcal{U}_1$ *esetén* $\mathcal{U}_1 = \mathcal{U}_2$;

(c) $\mathcal{U}_1 < \mathcal{U}_2$, $\mathcal{U}_2 < \mathcal{U}_3$ *esetén* $\mathcal{U}_1 < \mathcal{U}_3$. ∎

(3.2.26) *Ha $\mathcal{U}_1$ és $\mathcal{U}_2$ uniform struktúra E-n és $\mathcal{U}_1 < \mathcal{U}_2$, akkor $\mathcal{S}_{\mathcal{U}_1} < \mathcal{S}_{\mathcal{U}_2}$, és $\mathcal{T}_{\mathcal{U}_1} < \mathcal{T}_{\mathcal{U}_2}$.*

Bizonyítás. $\emptyset \notin \{A \times B\}\,(\cap)\,\mathcal{U}_2$ esetén annál inkább $\emptyset \notin \{A \times B\}\,(\cap)\,\mathcal{U}_1$, azaz $A\, \mathcal{S}_{\mathcal{U}_2}\, B$ esetén $A\, \mathcal{S}_{\mathcal{U}_1}\, B$. Ebből adódik (3.1.18) alapján a második állítás. ∎

Itt is meg kell jegyezni, hogy viszont $\mathcal{S}_{\mathcal{U}_1} < \mathcal{S}_{\mathcal{U}_2}$ nem vonja maga után $\mathcal{U}_1 < \mathcal{U}_2$ teljesülését; például előfordulhat, hogy $\mathcal{S}_{\mathcal{U}_1} = \mathcal{S}_{\mathcal{U}_2}$, de $\mathcal{U}_1 \neq \mathcal{U}_2$. Valóban, legyen egy végtelen E halmazon a ρ távolság a

$$\rho(x, y) = \begin{cases} 1, \text{ ha } x \neq y, \\ 0, \text{ ha } x = y \end{cases}$$

képlettel értelmezve, és $\mathcal{U}_1 = \mathcal{U}_\rho$. Világos, hogy $\mathcal{S}_{\mathcal{U}_1}$ azonos E diszkrét szomszédsági relációjával. Másrészt legyen $\mathfrak{F}$ az E halmaz tetszőleges $E = \bigcup\limits_1^n E_i$ felbontása véges számú páronként közös pont nélküli részhalmazra, és legyen $U_{\mathfrak{F}} = \bigcup\limits_1^n (E_i \times E_i)$. Az összes ilyen $\mathfrak{F}$ felbontásoknak megfelelő $U_{\mathfrak{F}}$ halmazok egy $\mathfrak{U}$ uniform bázist alkotnak, ugyanis $U_{\mathfrak{F}} \subset U_{\mathfrak{F}_1} \cap U_{\mathfrak{F}_2}$, ha $\mathfrak{F}_1$ az $E = \bigcup\limits_1^p A_i$, $\mathfrak{F}_2$ az $E = \bigcup\limits_1^q B_j$, $\mathfrak{F}$ pedig az $E = \bigcup\limits_{i=1}^p \bigcup\limits_{j=1}^q (A_i \cap B_j)$ felbontást jelöli, továbbá nyilván $U_{\mathfrak{F}} \circ U_{\mathfrak{F}} = U_{\mathfrak{F}}$ minden $\mathfrak{F}$-re. Legyen $\mathcal{U}_2$ az előbbi $\mathfrak{U}$ által generált uniform struktúra. $\mathcal{S}_{\mathcal{U}_2}$ is a diszkrét szomszédsági reláció, hiszen $A \cap B = \emptyset$ esetén az $\mathfrak{F} : E = A \cup (E - A)$ felbontásra nyilván $(A \times B) \cap U_{\mathfrak{F}} = \emptyset$. Végül $\mathcal{U}_1 \neq \mathcal{U}_2$, ugyanis az $\mathcal{U}_1$ struktúrában $0 < \varepsilon < 1$ esetén U_ε azonos $E \times E$ átlójával, és ez egyetlen véges $\mathfrak{F}$ felbontásra sem tartalmazhatja $U_{\mathfrak{F}}$-et, hiszen a felbontásnak legalább egyik tagja több pontból áll.

Az előbbi $\mathcal{U}_1$ uniform struktúrával kapcsolatban jegyezzük még meg, hogy bármely $E \neq \emptyset$ halmazon a diszkrét szomszédsági relációt indukáló uniform struktúrát generál az egyedül $E \times E$ átlójából álló uniform bázis; ez nyilván a legfinomabb E fölötti uniform struktúra, neve **diszkrét uniform struktúra.** Másrészt az egyedül magából $(E \times E)$-ből álló uniform struktúra a legdurvább E fölötti uniform struktúra; ennek neve **indiszkrét uniform struktúra,** s nyilván az indiszkrét szomszédsági relációt indukálja.

(3.2.27) *Legyen $\mathcal{U}_i$ $(i \in I \neq \emptyset)$ uniform struktúra E-n, $\mathfrak{U}_i$ $\mathcal{U}_i$-t generáló uniform bázis. Ekkor $\bigcup\limits_{i \in I} \mathfrak{U}_i$ uniform szubbázis, s az általa generált $(E \times E)$-beli szűrő azonos az összes $\mathcal{U}_i$-knél finomabb uniform struktúrák között a legdurvábbal, ennek jele* $\sup\, \{\mathcal{U}_i : i \in I\}$.

Bizonyítás. $\mathfrak{S} = \bigcup\limits_{i \in I} \mathfrak{U}_i$ csakugyan uniform szubbázis, mert környékekből áll, és $U \in \mathfrak{U}_i$ esetén van olyan $U_1 \in \mathfrak{U}_i \subset \mathfrak{S}$, hogy $U_1 \circ U_1 \subset U$. (3.2.15) szerint az $\mathfrak{S}$ által generált $(E \times E)$ -beli szűrő uniform struktúra E-n. $\mathfrak{U}_i \subset \mathfrak{S} \subset \mathcal{U}$ miatt $\mathcal{U}_i < \mathcal{U}$ minden i-re, s viszont, ha $\mathcal{U}'$ mindegyik $\mathcal{U}_i$-nél finomabb uniform struktúra, akkor $\mathcal{U}_i \subset \mathcal{U}'$ minden i-re, úgyhogy $\mathfrak{S} \subset \mathcal{U}'$, és $\mathcal{U} \subset \mathcal{U}'$, azaz $\mathcal{U} < \mathcal{U}'$. ∎

Vegyük észre, hogy a most bevezetett művelet révén egy Σ eltérés-család által indukált uniform struktúra származtatható az egyes $\sigma \in \Sigma$ eltérések által indukált uniform struktúrákból:

(3.2.28) *Legyen Σ eltérés-család E-n. Ekkor*

$$\mathcal{U}_\Sigma = \sup \{\mathcal{U}_\sigma : \sigma \in \Sigma\}.$$

Bizonyítás. (3.2.17) bizonyításában láttuk, hogy $\mathcal{U}_\Sigma$-t az $\bigcup_{\sigma\in\Sigma} \bigcup_{\varepsilon>0} U_{\sigma,\varepsilon} = \bigcup_{\sigma\in\Sigma} \mathfrak{U}_\sigma$ uniform szubbázis generálja, ahol $\mathfrak{U}_\sigma$ $\mathcal{U}_\sigma$-t generáló uniform bázis. ∎

(3.2.29) *Legyen $\mathcal{U}_i$ $(i \in I)$ uniform struktúra E-n, $\mathcal{U} = \sup \{\mathcal{U}_i : i \in I\}$. Ekkor*

$$\mathcal{T}_{\mathcal{U}} = \sup \{\mathcal{T}_{\mathcal{U}_i} : i \in I\}.$$

Bizonyítás. (3.2.27) és (3.2.26) alapján $\mathcal{T}_{\mathcal{U}_i} < \mathcal{T}_{\mathcal{U}}$ minden i-re, így a

$$\mathcal{T} = \sup \{\mathcal{T}_{\mathcal{U}_i} : i \in I\}$$

jelöléssel $\mathcal{T} < \mathcal{T}_{\mathcal{U}}$. Másrészt, ha V $\mathcal{T}_{\mathcal{U}}$-környezete $x \in E$-nek, akkor (3.2.27) és (3.2.23) értelmében $V \supset \bigcap_{k=1}^{n} U_{i_k}(x)$, ahol $U_{i_k} \in \mathcal{U}_{i_k}$, $i_k \in I$ $(k = 1, \dots, n)$, hiszen az $U = \bigcap_{k=1}^{n} U_{i_k}$ jelöléssel nyilván $U(x) = \bigcap_{k=1}^{n} U_{i_k}(x)$. Minthogy itt $U_{i_k}(x)$ $\mathcal{T}_{\mathcal{U}_{i_k}}$-környezete x-nek, egyben $\mathcal{T}$-környezete is, és így V is $\mathcal{T}$-környezet, azaz $\mathcal{T}_{\mathcal{U}} < \mathcal{T}$. ∎

(3.2.30) *Legyen $\mathcal{U}_i$ $(i \in I \neq \emptyset)$ uniform struktúra E-n. Ekkor létezik olyan $\mathcal{U}$ uniform struktúra, amely a legfinomabb az összes $\mathcal{U}_i$-knél durvább uniform struktúrák között, jele*

$$\mathcal{U} = \inf \{\mathcal{U}_i : i \in I\}.$$

Bizonyítás. Minthogy az E fölötti indiszkrét uniform struktúra minden $\mathcal{U}_i$-nél durvább, lehet beszélni az összes $\mathcal{U}_i$-knél durvább uniform struktúrák szuprémumáról; ez megfelel $\mathcal{U}$-nak. ∎

(3.2.31) *Ha egy $\mathcal{T}$ topológia indukálható uniform struktúrával, akkor az összes $\mathcal{T}$-t indukáló uniform struktúrák között létezik legfinomabb.*

Bizonyítás. (3.2.29) szerint ez a $\mathcal{T}$-t indukáló összes uniform struktúrák szuprémuma. ∎

3.2.g. Uniform struktúrák megszorítása. Ha $[E, \rho]$ félmetrikus tér, és $\emptyset \neq E_0 \subset E$, akkor az E_0-on tekintett ρ eltérésre nyilván

$$\{(x, y) : x, y \in E_0, \rho(x, y) < \varepsilon\} = U_\varepsilon \cap (E_0 \times E_0),$$

ahol U_ε a (3.2.1) ε-környék. Ennek mintájára általában kimondható:

(3.2.32) *Legyen $[E, \mathcal{U}]$ uniform tér, $\emptyset \neq E_0 \subset E$. Az $\mathcal{U} (\cap) \{E_0 \times E_0\}$ $(E_0 \times E_0)$-beli szűrő uniform struktúra E_0-on; ezt $\mathcal{U}$ E_0-ra való* **megszorításának** *nevezzük és $\mathcal{U} \mid E_0$-lal jelöljük. Ha $\mathfrak{U}$ $\mathcal{U}$-t generáló uniform bázis, akkor $\mathfrak{U} (\cap) \{E_0 \times E_0\}$ $(\mathcal{U} \mid E_0)$-t generáló uniform bázis E_0-on. Az $[E_0, \mathcal{U} \mid E_0]$ uniform tér az $[E, \mathcal{U}]$ uniform tér* **altere**.

Bizonyítás. (2.1.25)-ből látszik, hogy $\mathcal{U}_0 = \mathcal{U}(\cap)\{E_0 \times E_0\}$ $(E_0 \times E_0)$-beli szűrő, hiszen $x \in E_0$ esetén $(x, x) \in U \cap (E_0 \times E_0)$ minden $U \in \mathcal{U}$-ra. Ha $\mathfrak{U}$ egy $\mathcal{U}$-t generáló uniform bázis, és $\mathfrak{U}_0 = \mathfrak{U}(\cap)\{E_0 \times E_0\}$, akkor $\mathfrak{U}_0$-ra (E helyett E_0-lal) nyilván teljesül $(U_1)-(U_3)$, sőt (U_4) is, hiszen $U_1 \circ U_1 \subset U$ esetén nyilván

$$(U_1 \cap (E_0 \times E_0)) \circ (U_1 \cap (E_0 \times E_0)) \subset U \cap (E_0 \times E_0).$$

Így $\mathfrak{U}_0$ uniform bázis E_0-on, s persze $\mathfrak{U}_0 \sim \mathcal{U}_0$ (2.1.17) folytán. ▮

Bevezető megjegyzésünkből rögtön kiolvasható:

(3.2.33) *Félmetrikus tér alterének uniform struktúrája a tér uniform struktúrájának megszorítása.* ▮

Általánosabban igaz a következő állítás:

(3.2.34) *Legyen Σ eltérés-család E-n, $\emptyset \neq E_0 \subset E$, és legyen $\sigma \in \Sigma$ esetén $\sigma^* = \sigma \mid E_0$. Ekkor $\Sigma^* = \{\sigma^* : \sigma \in \Sigma\}$ eltérés-család E_0-on, és $\mathcal{U}_{\Sigma^*} = \mathcal{U}_\Sigma \mid E_0$.*

Bizonyítás. Bármely $\emptyset \neq \Sigma_1 \subset \Sigma$ véges eltéréshalmazra Σ_1^*-gal jelölve a $\sigma \in \Sigma_1$ eltérések σ^* megszorításainak halmazát, nyilván

$$\begin{aligned} U_{\Sigma_1^*,\varepsilon} &= \{(x, y) : x, y \in E_0, \quad \sigma^*(x, y) < \varepsilon \quad (\sigma^* \in \Sigma_1^*)\} = \\ &= \{(x, y) : x, y \in E_0, \quad \sigma(x, y) < \varepsilon \quad (\sigma \in \Sigma_1)\} = \\ &= U_{\Sigma_1,\varepsilon} \cap (E_0 \times E_0). \end{aligned}$$

A bal oldali halmazok generálják $\mathcal{U}_{\Sigma^*}$-ot, a jobb oldaliak $(\mathcal{U}_\Sigma \mid E_0)$-t. ▮

(3.2.35) *Ha $[E, \mathcal{U}]$ uniform tér, $\emptyset \neq E_0 \subset E$, akkor*

$$\mathcal{S}_{\mathcal{U}\mid E_0} = \mathcal{S}_{\mathcal{U}} \mid E_0, \quad \mathcal{T}_{\mathcal{U}\mid E_0} = \mathcal{T}_{\mathcal{U}} \mid E_0.$$

Bizonyítás. $A, B \subset E_0$ esetén $(A \times B) \cap U = (A \times B) \cap U \cap (E_0 \times E_0)$ minden $U \in \mathcal{U}$ környékre. Ez igazolja az első állítást; ebből a második (3.1.27) alapján adódik. ▮

(2.1.16)-ból következik:

(3.2.36) *Ha $\mathcal{U}_1$ és $\mathcal{U}_2$ uniform struktúra E-n, $\mathcal{U}_1 < \mathcal{U}_2$, $\emptyset \neq E_0 \subset E$, akkor*

$$\mathcal{U}_1 \mid E_0 < \mathcal{U}_2 \mid E_0. \ ▮$$

(3.2.37) *Legyen $\mathcal{U}_i$ $(i \in I \neq \emptyset)$ uniform struktúra E-n, $\emptyset \neq E_0 \subset E$, $\mathcal{U} = \sup\{\mathcal{U}_i : i \in I\}$. Ekkor*

$$\sup\{\mathcal{U}_i \mid E_0 : i \in I\} = \mathcal{U} \mid E_0.$$

Bizonyítás. Tetszőleges $U_{i_k} \in \mathcal{U}_{i_k}$, $i_k \in I$ $(k = 1, \ldots, n)$ környékekre

$$\left(\bigcap_{k=1}^{n} U_{i_k}\right) \cap (E_0 \times E_0) = \bigcap_{k=1}^{n} (U_{i_k} \cap (E_0 \times E_0)),$$

és a bal oldali halmazok alkotta rács $(\mathcal{U} \mid E_0)$-t, a jobb oldaliak alkotta pedig $\sup\{\mathcal{U}_i \mid E_0 : i \in I\}$-t generálja. ▮

(3.2.38) *Ha* $\mathcal{U}$ *uniform struktúra E-n,* $\emptyset \neq E_0 \subset E_1 \subset E$, *akkor*

$$(\mathcal{U} \mid E_1) \mid E_0 = \mathcal{U} \mid E_0. \blacksquare$$

3.2.h. Uniform struktúrák inverz képe. Most is tekinthetjük a megszorítás műveletét egy általánosabb művelet speciális esetének:

(3.2.39) *Legyen* $f: X \to Y$, $\mathcal{U}$ *uniform struktúra Y-on, és* $g: X \times X \to Y \times Y$ *az a leképezés, amely* (x, y)*-t* $(f(x), f(y))$*-ba viszi át. Ekkor a* $g^{-1}(\mathcal{U})$ *rács által generált* $(X \times X)$*-beli szűrő uniform struktúra X-en, amelyet az* $\mathcal{U}$ **uniform struktúra inverz képének** *nevezünk és* $f^{-1}(\mathcal{U})$*-val jelöljük.*

Bizonyítás. Legyen $\mathfrak{U}_0 = \{g^{-1}(U): U \in \mathcal{U} \text{ környék}\}$. Ekkor $\mathfrak{U}_0$ uniform bázis X-en, hiszen (U_1) és (U_3) nyilvánvaló, (U_2) (2.6.9) (e) miatt teljesül, (U_4) pedig abból látszik, hogy $U_1 \circ U_1 \subset U$ esetén

$$g^{-1}(U_1) \circ g^{-1}(U_1) \subset g^{-1}(U),$$

ugyanis $(x, y) \in g^{-1}(U_1)$, $(y, z) \in g^{-1}(U_1)$ esetén

$$(f(x), f(y)) \in U_1, \quad (f(y), f(z)) \in U_1,$$

tehát $(f(x), f(z)) \in U$, és $(x, z) \in g^{-1}(U)$. (2.6.9) (b) folytán $g^{-1}(\mathcal{U}) \sim \mathfrak{U}_0$, úgyhogy a $g^{-1}(\mathcal{U})$ által generált $(X \times X)$-beli szűrő az $\mathfrak{U}_0$ által generálttal azonos. $\blacksquare$

A jelölés nem egészen következetes, hiszen f Y-ba vezető leképezés, $\mathcal{U}$ pedig $(Y \times Y)$-beli szűrő, de éppen ezért nem okozhat félreértést. A definíciókból rögtön adódik:

(3.2.40) *Legyen* $[E, \mathcal{U}]$ *uniform tér,* $\emptyset \neq E_0 \subset E$, $f: E_0 \to E$ *a kanonikus injekció. Ekkor* $f^{-1}(\mathcal{U}) = \mathcal{U} \mid E_0$. $\blacksquare$

(3.2.34) mintájára érvényes:

(3.2.41) *Legyen* $f: X \to Y$, Σ *eltérés-család Y-on, és* $\sigma \in \Sigma$ *esetén legyen* σ^* *az X-en a*

$$\sigma^*(x, y) = \sigma(f(x), f(y)) \tag{3.2.42}$$

képlettel értelmezett eltérés, $\Sigma^* = \{\sigma^*: \sigma \in \Sigma\}$. *Ekkor* $\mathcal{U}_{\Sigma^*} = f^{-1}(\mathcal{U}_\Sigma)$.

Bizonyítás. Világos, hogy σ-val együtt a (3.2.42) alatti σ^* is eltérés. Ha $\emptyset \neq \Sigma_1 \subset \Sigma$ véges, és $\Sigma_1^* = \{\sigma^*: \sigma \in \Sigma_1\}$, akkor nyilván

$$\begin{aligned} U_{\Sigma_1^*, \varepsilon} &= \{(x, y): \sigma^*(x, y) < \varepsilon, \text{ ha } \sigma^* \in \Sigma_1^*\} = \\ &= \{(x, y): \sigma(f(x), f(y)) < \varepsilon, \text{ ha } \sigma \in \Sigma_1\} \\ &= g^{-1}(U_{\Sigma_1, \varepsilon}), \end{aligned}$$

ahol g a (3.2.39)-ben szereplő leképezés. Minthogy az $U_{\Sigma_1, \varepsilon}$ környékekből álló rács $\mathcal{U}_\Sigma$-t generálja, az $U_{\Sigma_1^*, \varepsilon}$-okból álló pedig $\mathcal{U}_{\Sigma^*}$-ot, az állítás (2.6.9) (b)-ből adódik. $\blacksquare$

(3.2.35) általánosítása:

(3.2.43) *Ha* $f: X \to Y$, *és* $\mathcal{U}$ *uniform struktúra Y-on, akkor*

$$f^{-1}(\mathcal{B}_{\mathcal{U}}) = \mathcal{B}_{f^{-1}(\mathcal{U})}, \quad f^{-1}(\mathcal{T}_{\mathcal{U}}) = \mathcal{T}_{f^{-1}(\mathcal{U})}.$$

Bizonyítás. Ha $A, B \subset X$, és $U \in \mathcal{U}$ környék, akkor $(A \times B) \cap g^{-1}(U) \neq \emptyset$ azzal egyenértékű, hogy $(f(A) \times f(B)) \cap U \neq \emptyset$. ∎

(2.6.9) (a) következménye:

(3.2.44) *Ha $f: X \to Y$, $\mathcal{U}_1$ és $\mathcal{U}_2$ uniform struktúra Y-on, $\mathcal{U}_1 < \mathcal{U}_2$, akkor $f^{-1}(\mathcal{U}_1) < f^{-1}(\mathcal{U}_2)$.* ∎

(3.2.45) *Legyen $\mathcal{U}_i$ uniform struktúra Y-on ($i \in I \neq \emptyset$), $\mathcal{U} = \sup\{\mathcal{U}_i : i \in I\}$, $f: X \to Y$. Ekkor*

$$\sup\{f^{-1}(\mathcal{U}_i) : i \in I\} = f^{-1}(\mathcal{U}).$$

Bizonyítás. $\mathcal{U}$-t a $\bigcap_{k=1}^{n} U_{i_k}$ alakú halmazok generálják, ahol $U_{i_k} \in \mathcal{U}_{i_k}$ ($i_k \in I$, $k = 1, \dots, n$) tetszőleges környék, s így $f^{-1}(\mathcal{U})$-t a

$$g^{-1}\left(\bigcap_{k=1}^{n} U_{i_k}\right) = \bigcap_{k=1}^{n} g^{-1}(U_{i_k})$$

alakú halmazok. Ugyanezek generálják azonban az $f^{-1}(\mathcal{U}_i)$-k szuprémumát is. ∎

(3.2.46) *Legyen $f_1: X \to Y$, $f_2: Y \to Z$, $\mathcal{U}$ uniform struktúra Z-n, $f_3 = f_2 \circ f_1$. Ekkor*

$$f_3^{-1}(\mathcal{U}) = f_1^{-1}(f_2^{-1}(\mathcal{U})).$$

Bizonyítás. A (3.2.39) mintájára értelmezett g_1, g_2, g_3 leképezésekre $g_3 = g_2 \circ g_1$, így (2.6.5) (b) értelmében $g_3^{-1}(\mathcal{U}) = g_1^{-1}(g_2^{-1}(\mathcal{U}))$, és $g_2^{-1}(\mathcal{U}) \sim f_2^{-1}(\mathcal{U})$ folytán $g_1^{-1}(g_2^{-1}(\mathcal{U})) \sim g_1^{-1}(f_2^{-1}(\mathcal{U})) \sim f_1^{-1}(f_2^{-1}(\mathcal{U}))$, tekintettel (2.6.9) (b)-re. ∎

3.2.i. Egyenletesen folytonos leképezések. Említettük, hogy egy $[E, \rho]$ félmetrikus térben értelmezett f valós függvényt egyenletesen folytonosnak mondunk, ha minden $\varepsilon > 0$-hoz van olyan $\delta > 0$, hogy $\rho(x, y) < \delta$ esetén $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$. Ha bevezetjük az $\mathbf{R}$ számegyenesen a $\rho_1(u, v) = |u - v|$ távolságot, akkor azt is mondhatjuk, hogy $f: E \to \mathbf{R}$ egyenletesen folytonos, ha $\varepsilon > 0$-hoz van olyan $\delta > 0$, hogy $\rho(x, y) < \delta$ esetén $\rho_1(f(x), f(y)) < \varepsilon$. Nyilvánvaló, hogy ezt a definíciót azonnal ki lehet terjeszteni olyan $f: X \to Y$ leképezésekre, amelyek egy $[X, \rho]$ félmetrikus térből egy $[Y, \sigma]$ félmetrikus térbe vezetnek, és rögtön világos az is, hogy a (3.2.1) szerint értelmezett környékek segítségével ez úgy is megfogalmazható, hogy minden $U_{\sigma,\varepsilon}$ környékhez található olyan $U_{\rho,\delta}$ környék, hogy $(x, y) \in U_{\rho,\delta}$ esetén $(f(x), f(y)) \in U_{\sigma,\varepsilon}$.

Ezt a fogalmazást azután kiterjeszthetjük tetszőleges uniform terekre is. Vagyis az $[X, \mathcal{U}_1]$ uniform térből az $[Y, \mathcal{U}_2]$ uniform térbe vezető $f: X \to Y$ leképezést **egyenletesen folytonos**nak [pontosabban $(\mathcal{U}_1, \mathcal{U}_2)$-**egyenletesen folytonos**nak] mondjuk, ha minden $U_2 \in \mathcal{U}_2$ környékhez található olyan $U_1 \in \mathcal{U}_1$ környék, hogy $(x, y) \in U_1$ esetén $(f(x), f(y)) \in U_2$. A (3.2.39)-ben bevezetett g leképezés segítségével ez még másképp is megfogalmazható:

(3.2.47) *Legyen $[X, \mathcal{U}_1]$ és $[Y, \mathcal{U}_2]$ uniform tér, $f: X \to Y$, és $g: X \times X \to Y \times Y$ az a leképezés, amely (x, y)-nak $(f(x), f(y))$-t felelteti meg. f pontosan akkor $(\mathcal{U}_1, \mathcal{U}_2)$-egyenletesen folytonos, ha $g(\mathcal{U}_1) > \mathcal{U}_2$, illetőleg, ha $\mathcal{U}_1 > g^{-1}(\mathcal{U}_2)$.*

Bizonyítás. Ha $\mathfrak{U}_1$, ill. $\mathfrak{U}_2$ jelöli az összes $\mathcal{U}_1$-beli, ill. $\mathcal{U}_2$-beli környékekből álló uniform bázist, akkor a definícióban foglalt feltétel $g(\mathfrak{U}_1) > \mathfrak{U}_2$ vagy $\mathfrak{U}_1 > g^{-1}(\mathfrak{U}_2)$ alakban írható. Ebből az állítás (2.6.7) (b) és (2.6.9) (b) alapján következik. ∎

Például nyilvánvaló:

(3.2.48) *Ha $[X, \mathcal{U}_1]$ tetszőleges, $[Y, \mathcal{U}_2]$ pedig diszkrét uniform tér (speciálisan ha Y egyetlen pontból áll), akkor bármely $f: X \to Y$ leképezés $(\mathcal{U}_1, \mathcal{U}_2)$-egyenletesen folytonos.* ∎

(3.2.47)-ből (2.6.7) (b) felhasználásával következik, hogy az egyenletes folytonosság definíciójában az összes $\mathcal{U}_1$-beli, ill. $\mathcal{U}_2$-beli környékek helyett elég lett volna egy-egy $\mathcal{U}_1$-et, ill. $\mathcal{U}_2$-t generáló uniform bázishoz tartozó környékekről beszélni. Végső soron ez a megjegyzés mutatja, hogy a félmetrikus terekre előbb megfogalmazott definíció valóban speciális esete az általánosnak.

Rögtön látszik (3.2.47)-ből (3.2.39) alapján:

(3.2.49) *Legyen $f: X \to Y$, és $\mathcal{U}_2$ uniform struktúra Y-on. $f^{-1}(\mathcal{U}_2) = \mathcal{U}_1$ a legdurvább uniform struktúra X-en, amelyre f $(\mathcal{U}_1, \mathcal{U}_2)$-egyenletesen folytonos.* ∎

(3.1.40)-hez hasonlóan érvényes:

(3.2.50) *Ha $f: X \to Y$ $(\mathcal{U}_1, \mathcal{U}_2)$-egyenletesen folytonos, akkor $(\mathcal{S}_{\mathcal{U}_1}, \mathcal{S}_{\mathcal{U}_2})$-szomszédságtartó és így $(\mathcal{T}_{\mathcal{U}_1}, \mathcal{T}_{\mathcal{U}_2})$-folytonos is.*

Bizonyítás. $A, B \subset Y$, $A \overline{\mathcal{S}_{\mathcal{U}_2}} B$ esetén van olyan $U_2 \in \mathcal{U}_2$ környék, hogy $(A \times B) \cap U_2 = \emptyset$. Legyen $U_1 \in \mathcal{U}_1$ olyan környék, hogy $(x, y) \in U_1$ esetén $(f(x), f(y)) \in U_2$. Ekkor $(f^{-1}(A) \times f^{-1}(B)) \cap U_1 = \emptyset$, azaz $f^{-1}(A) \overline{\mathcal{S}_{\mathcal{U}_1}} f^{-1}(B)$, és (3.1.38) alkalmazható. ∎

Az összetett leképezésről nyilván elmondható:

(3.2.51) *Ha $f: X \to Y$ $(\mathcal{U}_1, \mathcal{U}_2)$-egyenletesen folytonos, $g: Y \to Z$ $(\mathcal{U}_2, \mathcal{U}_3)$-egyenletesen folytonos, akkor $h = g \circ f$ $(\mathcal{U}_1, \mathcal{U}_3)$-egyenletesen folytonos.* ∎

(3.1.42)-hez hasonlóan:

(3.2.52) *Legyen $\mathcal{U}_1$ és $\mathcal{U}_2$ két uniform struktúra X-en. Az X halmaz f identitása pontosan akkor $(\mathcal{U}_1, \mathcal{U}_2)$-egyenletesen folytonos, ha $\mathcal{U}_1 > \mathcal{U}_2$.*

Bizonyítás. (3.2.47)-re lehet hivatkozni, mert most az ottani g éppen $X \times X$ identitása. ∎

(3.2.51)-ből és (3.2.52)-ből adódik:

(3.2.53) *Legyen $f: X \to Y$ $(\mathcal{U}_1, \mathcal{U}_2)$-egyenletesen folytonos, $\mathcal{U}_1'$ $\mathcal{U}_1$-nél finomabb uniform struktúra X-en, $\mathcal{U}_2'$ $\mathcal{U}_2$-nél durvább uniform struktúra Y-on. Ekkor f $(\mathcal{U}_1', \mathcal{U}_2')$-egyenletesen folytonos.* ∎

(3.1.44) megfelelője:

(3.2.54) *Legyen $f: X \to Y$, $\mathcal{U}$ uniform struktra X-en, $\mathcal{U}_i$ $(i \in I \neq \emptyset)$ uniform struktúra Y-on, $\mathcal{U}' = \sup \{\mathcal{U}_i : i \in I\}$. f pontosan akkor $(\mathcal{U}, \mathcal{U}')$-egyenletesen folytonos, ha minden i-re $(\mathcal{U}, \mathcal{U}_i)$-egyenletesen folytonos.*

Bizonyítás. (3.2.49) és (3.2.53) folytán f-nek $(\mathcal{U}, \mathcal{U}')$-egyenletes folytonossága egyenértékű az $f^{-1}(\mathcal{U}') < \mathcal{U}$ összefüggéssel, az $(\mathcal{U}, \mathcal{U}_i)$-egyenletes folytonosság pedig az $f^{-1}(\mathcal{U}_i) < \mathcal{U}$ összefüggéssel. Így az állítás (3.2.45)-ből következik. ∎

Hasonlóan (3.1.45)-nek analogonja:

(3.2.55) *Legyen $f: X \to Y$, $\mathcal{U}$ uniform struktúra Y-on, $\mathcal{U}_i$ $(i \in I \neq \emptyset)$ uniform* *struktúra X-en,* $\mathcal{U}' = \inf\{\mathcal{U}_i : i \in I\}$. *f pontosan akkor* $(\mathcal{U}', \mathcal{U})$*-egyenletesen folytonos, ha minden i-re* $(\mathcal{U}_i, \mathcal{U})$*-egyenletesen folytonos.*

Bizonyítás. Mint előbb, most is arról van szó, hogy $f^{-1}(\mathcal{U}) < \mathcal{U}'$ pontosan akkor áll, ha minden i-re $f^{-1}(\mathcal{U}) < \mathcal{U}_i$. ∎

A megszorításokkal kapcsolatos (3.1.46) – (3.1.48) tételeknek megfelelően most is áll:

(3.2.56) *Legyen* $f : X \to Y$, $f(X) \subset Y_0 \subset Y$, $\mathcal{U}_1$ és $\mathcal{U}_2$ *uniform struktúra X-en, ill. Y-on,* $g = f\,|_X^{Y_0}$. *f pontosan akkor* $(\mathcal{U}_1, \mathcal{U}_2)$*-egyenletesen folytonos, ha g* $(\mathcal{U}_1, \mathcal{U}_2 \mid Y_0)$*-egyenletesen folytonos.*

Bizonyítás. $f^{-1}(\mathcal{U}_2) < \mathcal{U}_1$ pontosan akkor áll, ha — $h : Y_0 \to Y$ a kanonikus injekció – $f = h \circ g$ folytán $g^{-1}(h^{-1}(\mathcal{U}_2)) < \mathcal{U}_1$, s itt (3.2.40) értelmében $h^{-1}(\mathcal{U}_2) = \mathcal{U}_2 \mid Y_0$. ∎

(3.2.57) *Legyen* $f : X \to Y$ $(\mathcal{U}_1, \mathcal{U}_2)$*-egyenletesen folytonos,* $\emptyset \neq X_0 \subset X$. *Ekkor* $f \mid X_0$ $(\mathcal{U}_1 \mid X_0, \mathcal{U}_2)$*-egyenletesen folytonos.*

Bizonyítás. Ha $g : X_0 \to X$ a kanonikus injekció, akkor $\mathcal{U}_1 \mid X_0 = g^{-1}(\mathcal{U}_1)$, így g $(\mathcal{U}_1 \mid X_0, \mathcal{U}_1)$-egyenletesen folytonos, és $f \mid X_0 = f \circ g$. ∎

(3.1.49) mintájára kimondható:

(3.2.58) *Legyen* $f : X \to Y$, $\mathcal{T}_1$ *és* $\mathcal{T}_2$ *topológia X-en, ill. Y-on,* $\mathcal{U}_1$ *és* $\mathcal{U}_2$ $\mathcal{T}_1$*-et, ill.* $\mathcal{T}_2$*-t indukáló uniform struktúra, mégpedig* $\mathcal{U}_1$ *a* $\mathcal{T}_1$*-et indukáló legfinomabb uniform struktúra. Ha f* $(\mathcal{T}_1, \mathcal{T}_2)$*-folytonos, akkor* $(\mathcal{U}_1, \mathcal{U}_2)$*-egyenletesen folytonos is.*

Bizonyítás. Legyen $\mathcal{U} = \sup\{\mathcal{U}_1, f^{-1}(\mathcal{U}_2)\}$. Ekkor (3.2.29) értelmében $\mathcal{T}_{\mathcal{U}} = \sup\{\mathcal{T}_{\mathcal{U}_1}, \mathcal{T}_{f^{-1}(\mathcal{U}_2)}\} = \sup\{\mathcal{T}_1, f^{-1}(\mathcal{T}_{\mathcal{U}_2})\} = \mathcal{T}_1$, tekintettel (3.2.43)-ra és (2.6.33)-ra. Feltevésünk szerint $\mathcal{U} < \mathcal{U}_1$, azaz $\mathcal{U} = \mathcal{U}_1$, s akkor $f^{-1}(\mathcal{U}_2) < \mathcal{U}_1$, úgyhogy az állítás (3.2.49)-ből és (3.2.53)-ból következik. ∎

Nevezetes hasonló jellegű állítás mondható ki félmetrikus terek esetére:

(3.2.59) *Legyen* $[X, \rho]$ *és* $[Y, \sigma]$ *félmetrikus tér,* $f : X \to Y$. *Ha f* $(\mathcal{S}_\rho, \mathcal{S}_\sigma)$*-szomszédságtartó, akkor* $(\mathcal{U}_\rho, \mathcal{U}_\sigma)$*-egyenletesen folytonos is.*

Bizonyítás. Ellenkező esetben volna olyan $\varepsilon > 0$, hogy minden $n \in \mathbf{N}$-hez találhatók $x_n, y_n \in X$ pontok úgy, hogy

$$\rho(x_n, y_n) < \frac{1}{n}, \quad \sigma(f(x_n), f(y_n)) \geqq \varepsilon. \tag{3.2.60}$$

Tegyük először fel, hogy van egy n_0 index és a természetes számoknak egy végtelen (n_i) sorozata, amelyre

$$\sigma(f(y_{n_0}), f(x_{n_i})) < \frac{\varepsilon}{4} \quad (i \in \mathbf{N}). \tag{3.2.61}$$

Legyen ekkor

$$A = \{x_{n_i} : \; i \in \mathbf{N}\}, \quad B = \{y_{n_i} : \; i \in \mathbf{N}\}. \tag{3.2.62}$$

Ekkor $\sigma(f(A), f(B)) \geqq \frac{\varepsilon}{2}$, hiszen ellenkező esetben alkalmas i-re és j-re

$\sigma(f(x_{n_i}), f(y_{n_i})) < \frac{\varepsilon}{2}$ volna, és így (3.2.61) miatt

$$\sigma(f(x_{n_i}), f(y_{n_i})) \leqq \sigma(f(x_{n_i}), f(y_{n_0})) +$$

$$+ \sigma(f(y_{n_0}), f(x_{n_0})) + \sigma(f(x_{n_0}), f(y_{n_i})) < \frac{\varepsilon}{4} + \frac{\varepsilon}{4} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

adódnék, ami ellentmond (3.2.60)-nak. Viszont (3.2.60) első egyenlőtlenségéből $\rho(A, B) = 0$, és így f szomszédságtartó voltából mégis $\sigma(f(A), f(B)) = 0$ következnék.

A mondottakból látszik, hogy (3.2.61)-et kielégítő n_0 és (n_i) sorozat nincsen. Ugyanígy nincs olyan n_0 és olyan végtelen (n_i) sorozat sem, hogy

$$\sigma(f(x_{n_0}), \ f(y_{n_i})) < \frac{\varepsilon}{4} \quad (i \in \mathbf{N}).$$

Más szóval minden $n \in \mathbf{N}$-hez található olyan k_n küszöbindex, hogy $i \geqq k_n$ esetén

$$\sigma(f(y_n), f(x_i)) \geqq \frac{\varepsilon}{4},$$

$$\sigma(f(x_n), f(y_i)) \geqq \frac{\varepsilon}{4}.$$

Kiindulva az $n_1 = 1$ értékből, ennek alapján készíthető olyan növekvő $n_1 < n_2 < \ldots$ sorozat, hogy

(3.2.63) $$\sigma(f(y_{n_j}), f(x_{n_i})) \leqq \frac{\varepsilon}{4}, \quad \sigma(f(x_{n_j}), f(y_{n_i})) \geqq \frac{\varepsilon}{4},$$

$i \in \mathbf{N}$ és $j = 1, \ldots, i-1$ esetén; elég e célból n_i-t a $k_{n_1}, \ldots, k_{n_{i-1}}$ küszöbindexek mindegyikénél nagyobbnak választani. Ezzel az (n_i) sorozattal elkészítve a (3.2.62) alatti A és B halmazt, ismét $\rho(A, B) = 0$, azonban $\sigma(f(A), f(B)) \geqq \frac{\varepsilon}{4}$, hiszen $\sigma(f(x_{n_i}), f(y_{n_i})) \geqq \varepsilon$ is áll (3.2.63)-on kívül. ∎

Ha $[E, \mathcal{U}]$ uniform tér, és $f : E \to \mathbf{R}$, akkor f-et **egyenletesen folytonos függvénynek** (vagy $\mathcal{U}$-egyenletesen folytonos függvénynek) mondjuk, ha $(\mathcal{U}, \mathcal{U}_{\rho_1})$-egyenletesen folytonos, ahol ρ_1 az euklideszi távolság $\mathbf{R}$-en.

(3.2.64) *Legyen* $[E, \mathcal{U}]$ *uniform tér,* f *és* g $\mathcal{U}$*-egyenletesen folytonos függvény,* $c \in \mathbf{R}$. *Ekkor*

(a) cf,

(b) $f + g$,

(c) $|f|$,

(d) $\max(f, g)$ *és* $\min(f, g)$

is $\mathcal{U}$*-egyenletesen folytonos.*

Bizonyítás. (a): $c = 0$ esetén evidens, $c \neq 0$ esetén legyen $\varepsilon > 0$-hoz $U \in \mathcal{U}$ olyan környék, hogy $(x, y) \in U$ esetén $|f(x) - f(y)| < \frac{\varepsilon}{|c|}$; ekkor $|cf(x) - cf(y)| < \varepsilon$.

(b): Legyen $\varepsilon > 0$-hoz $U_1, U_2, U \in \mathcal{U}$ olyan környék, hogy $(x, y) \in U_1$ esetén $|f(x) - f(y)| < \frac{\varepsilon}{2}$, $(x, y) \in U_2$ esetén $|g(x) - g(y)| < \frac{\varepsilon}{2}$, és $U \subset U_1 \cap U_2$. Ekkor $(x, y) \in U$ esetén

$$|[f(x) + g(x)] - [f(y) + g(y)]| \leqq |f(x) - f(y)| + |g(x) - g(y)| < \frac{\varepsilon}{2} = \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

(c): Legyen $\varepsilon > 0$-hoz $U \in \mathcal{U}$ olyan környék, hogy $(x, y) \in U$ esetén $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$. Ekkor

$$||f(x)| - |f(y)|| \leqq |f(x) - f(y)| < \varepsilon.$$

(d): $$\max(f, g) = \frac{1}{2}(f+g) + \frac{1}{2}|f-g|,$$

$$\min(f, g) = \frac{1}{2}(f+g) - \frac{1}{2}|f-g|. \blacksquare$$

Legyen $[X, \mathcal{U}_1]$ és $[Y, \mathcal{U}_2]$ uniform tér. Az $f: X \to Y$ leképezést **unimorfizmus**nak (vagy **uniform izomorfizmus**nak) nevezzük, ha bijekció, és ő maga $(\mathcal{U}_1, \mathcal{U}_2)$-egyenletesen folytonos, inverze pedig $(\mathcal{U}_2, \mathcal{U}_1)$-egyenletesen folytonos. Világos hogy unimorfizmus inverze és unimorfizmusok összetétele is unimorfizmus. Az $[X, \mathcal{U}_1]$ és $[Y, \mathcal{U}_2]$ uniform tereket **unimorf**nak (**uniform-izomorf**nak) mondjuk, ha létezik egy $f: X \to Y$ unimorfizmus. Ez a reláció reflexív, szimmetrikus és tranzitív. Minthogy egy $(\mathcal{U}_1, \mathcal{U}_2)$-unimorfizmus egyúttal $(\mathcal{S}_{\mathcal{U}_1}, \mathcal{S}_{\mathcal{U}_2})$-ekvimorfizmus és $(\mathcal{T}_{\mathcal{U}_1}, \mathcal{T}_{\mathcal{U}_2})$-homeomorfizmus is, azért ha $[E_1, \mathcal{U}_1]$ és $[E_2, \mathcal{U}_2]$ unimorf, akkor $[E_1, \mathcal{S}_{\mathcal{U}_1}]$ és $[E_2, \mathcal{S}_{\mathcal{U}_2}]$ ekvimorf, $[E_1, \mathcal{T}_{\mathcal{U}_1}]$ és $[E_2, \mathcal{T}_{\mathcal{U}_2}]$ pedig homeomorf.

(2.6.44), ill. (3.1.50) mintájára igazolható:

(3.2.65) *Legyen* $[X, \mathcal{U}_1]$ *és* $[Y, \mathcal{U}_2]$ *két uniform tér,* $f: X \to Y$. *Ekkor*

(a) f *pontosan akkor* $(\mathcal{U}_1, \mathcal{U}_2)$*-egyenletesen folytonos, ha* $\mathcal{U}_1 > f^{-1}(\mathcal{U}_2)$;

(b) *ha* f *injektív, akkor* $\mathcal{U}_1 = f^{-1}(\mathcal{U}_2)$ *pontosan akkor áll, ha* $h = f|_X^{f(X)}$ $((\mathcal{U}_1, \mathcal{U}_2 | f(X))$*-unimorfizmus;*

(c) *ha* f *bijektív, akkor* $\mathcal{U}_1 = f^{-1}(\mathcal{U}_2)$ *pontosan akkor áll, ha* f $(\mathcal{U}_1, \mathcal{U}_2)$*-unimorfizmus.* $\blacksquare$

(3.2.66) *Ha* $[Y, \rho]$ *félmetrikus tér,* $f: X \to Y$, *és* $x, y \in X$ *esetén* $\rho^*(x, y) = \rho(f(x), f(y))$ *akkor* ρ^* *eltérés* X*-en, és*

$$\mathcal{U}_{\rho^*} = f^{-1}(\mathcal{U}_\rho), \quad \mathcal{S}_{\rho^*} = f^{-1}(\mathcal{S}_\rho), \quad \mathcal{T}_{\rho^*} = f^{-1}(\mathcal{T}_\rho).$$

Ezért (fél)metrizálható uniform, szomszédsági vagy topologikus térrel unimorf, ill. ekvimorf, ill. homeomorf tér maga is (fél)metrizálható.

Bizonyítás. (3.2.41)-ből adódik, hogy ρ^* eltérés, és $\mathcal{U}_{\rho^*} = f^{-1}(\mathcal{U}_\rho)$. Innen (3.2.21) és (3.2.43) folytán $\mathcal{S}_{\rho^*} = \mathcal{S}_{\mathcal{U}_{\rho^*}} = f^{-1}(\mathcal{S}_{\mathcal{U}_\rho}) = f^{-1}(\mathcal{S}_\rho)$, majd (3.1.33) és (3.1.12) alapján $\mathcal{T}_{\rho^*} = \mathcal{T}_{\mathcal{S}_{\rho^*}} = f^{-1}(\mathcal{S}_{\mathcal{S}_\rho}) = f^{-1}(\mathcal{T}_\rho)$ következik. Ha $\mathcal{U}$, $\mathcal{S}$, ill. $\mathcal{T}$ uniform struktúra, szomszédsági reláció, ill. topológia X-en, és f $(\mathcal{U}, \mathcal{U}_\rho)$-unimorfizmus, ill. $(\mathcal{S}, \mathcal{S}_\rho)$-ekvimorfizmus, ill. $(\mathcal{T}, \mathcal{T}_\rho)$-homeomorfizmus, akkor (3.2.65) (c), ill. (3.1.50) (c), ill. (2.6.44) (c) szerint $\mathcal{U} = f^{-1}(\mathcal{U}_\rho)$, ill. $\mathcal{S} = f^{-1}(\mathcal{S}_\rho)$, ill. $\mathcal{T} = f^{-1}(\mathcal{T}_\rho)$, azaz $\mathcal{U} = \mathcal{U}_{\rho^*}$, ill. $\mathcal{S} = \mathcal{S}_{\rho^*}$, ill. $\mathcal{T} = \mathcal{T}_{\rho^*}$. Végül ha ρ távolság, és f injektív, akkor nyilván ρ^* is távolság. ∎

3.2.j. Teljesen korlátos uniform terek. Az imént szó esett olyan feltételekről, amelyek biztosítják, hogy egy szomszédságtartó leképezés egyenletesen folytonos is. A következőkben egy további ilyen feltételről lesz szó.

Legyen először $[E, \rho]$ félmetrikus tér. Állapodjunk meg abban, hogy ezt **teljesen korlátosnak** mondjuk, ha minden $\varepsilon > 0$-hoz van a térnek véges befedése csupa ε-nál kisebb átmérőjű halmazzal. Az elnevezést indokolja, hogy teljesen korlátos félmetrikus tér (2.1.15) értelmében korlátos is. Megfordítva azonban például egy végtelen diszkrét metrikus tér nyilván korlátos, de nem teljesen korlátos.

Nevezetes tény, hogy az $\mathbf{R}^m$ tér altereinél e két fogalom egybeesik:

(3.2.67) *Ha E az* $\mathbf{R}^m$ *tér korlátos altere, akkor teljesen korlátos is.*

Bizonyítás. Legyen K E-nek $\mathbf{R}^m$-beli lezárása Az $\left\{S\left(x, \frac{\varepsilon}{3}\right) : x \in K\right\}$ befedésből K korlátos, zárt volta miatt az (1.2.35) Borel-féle tétel értelmében kiválasztható K-nak, s akkor még inkább E-nek, véges befedése. Az $E \cap S\left(x, \frac{\varepsilon}{3}\right)$ halmazok átmérője $\leqq \frac{2\varepsilon}{3} < \varepsilon$ lévén, az állítás adódik. ∎

Jegyezzük még meg:

(3.2.68) *Minden teljesen korlátos félmetrikus tér szeparábilis.*

Bizonyítás. Legyen az $[E, \rho]$ félmetrikus térben $E = \bigcup_{i=1}^{k_n} A_{ni}$, ahol $\delta(A_{ni}) < \frac{1}{n}$, és $x_{ni} \in A_{ni}$ tetszőleges. Az $S = \{x_{ni} : n \in \mathbf{N}, i = 1, \ldots, k_n\}$ halmaz megszámlálható és sűrű, hiszen bármely $x \in E$ pontra adott $n \in \mathbf{N}$ mellett van olyan i, hogy $x \in A_{ni}$, s akkor $x_{ni} \in S\left(x, \frac{1}{n}\right) \cap S$. ∎

Abból a célból, hogy ezt a definíciót tetszőleges uniform térre kiterjeszthessük, nevezzük az $[E, \mathcal{U}]$ uniform tér $A \subset E$ részhalmazát adott $U \in \mathcal{U}$ környék mellett **U-rendben kicsiny**nek, ha $x, y \in A$ esetén $(x, y) \in U$, azaz ha $A \times A \subset U$. Mármost az $[E, \mathcal{U}]$ teret (és az $\mathcal{U}$ uniform struktúrát) **teljesen korlátos**nak mondjuk, ha minden $U \in \mathcal{U}$ környékhez megadható E-nek U-rendben kicsiny halmazokból álló véges befedése. Tekintettel arra, hogy $U_1 \subset U$ esetén egy U_1-rendben kicsiny halmaz U-rendben is kicsiny, elég volna itt egy $\mathcal{U}$-t generáló uniform bázishoz tartozó U környékekről szólni. Ebből a körülményből és abból, hogy egy félmetrikus térben egy U_ε-rendben kicsiny halmaz átmérője $\leqq \varepsilon$, s viszont ha $\delta(A) < \varepsilon$, akkor A nyilván U_ε-rendben kicsiny, kiolvasható:

(3.2.69) *Egy $[E, \rho]$ félmetrikus tér pontosan akkor teljesen korlátos, ha az U_ρ uniform struktúra teljesen korlátos.* ▮

Az $[E, \mathcal{U}]$ uniform tér $E_0 \subset E$ **részhalmazát teljesen korlátos**nak mondjuk, ha $E_0 = \emptyset$, vagy pedig $E_0 \neq \emptyset$, és az $\mathcal{U} \mid E_0$ uniform struktúra teljesen korlátos; ez nyilván pontosan akkor áll, ha E_0-nak van minden $U \in \mathcal{U}$ környékhez U-rendben kicsiny halmazokból álló véges befedése. Ebből, és abból, hogy U-rendben kicsiny halmaz minden részhalmaza is U-rendben kicsiny, nyilván következik:

(3.2.70) *Teljesen korlátos uniform tér minden altere is teljesen korlátos.* ▮

Másrészt viszont:

(3.2.71) *Ha az $[E, \mathcal{U}]$ uniform térben $E_i \subset E$, és E_i teljesen korlátos minden i-re $(i = 1, \ldots, n)$, akkor $\bigcup_1^n E_i$ is teljesen korlátos.* ▮

(3.2.70)-nél általánosabban:

(3.2.72) *Ha $f : X \to Y$, és $\mathcal{U}$ teljesen korlátos uniform struktúra Y-on, akkor $f^{-1}(\mathcal{U})$ is teljesen korlátos.*

Bizonyítás. Adott $U \in \mathcal{U}$ környékhez legyen $Y = \bigcup_1^n Y_i$, ahol Y_i U-rendben kicsiny. Ekkor $X = \bigcup_1^n f^{-1}(Y_i)$, és $f^{-1}(Y_i)$ nyilván $g^{-1}(U)$-rendben kicsiny, ha g a (3.2.39) alatti leképezés. ▮

Megfordítva:

(3.2.73) *Legyen $f : X \to Y$ $(\mathcal{U}_1, \mathcal{U}_2)$-egyenletesen folytonos szuperjektív leképezés. Ha $\mathcal{U}_1$ teljesen korlátos, akkor $\mathcal{U}_2$ is teljesen korlátos.*

Bizonyítás. Az $U_2 \in \mathcal{U}_2$ környékhez válasszunk olyan $U_1 \in \mathcal{U}_1$ környéket, hogy $(x, y) \in U_1$ esetén $(f(x), f(y)) \in U_2$ legyen. Ha $X = \bigcup_1^n X_i$, és X_i U_1-rendben kicsiny, akkor $Y = \bigcup_1^n f(X_i)$, és $f(X_i)$ U_2-rendben kicsiny minden i-re. ▮

Speciálisan:

(3.2.74) *Ha $\mathcal{U}_1$ és $\mathcal{U}_2$ uniform struktúra E-n, $\mathcal{U}_1 < \mathcal{U}_2$, és $\mathcal{U}_2$ teljesen korlátos, akkor $\mathcal{U}_1$ is teljesen korlátos.*

Ezzel ellentétben viszont:

(3.2.75) *Legyen $\mathcal{U}_i$ $(i \in I \neq \emptyset)$ teljesen korlátos uniform struktúra E-n. Ekkor $\mathcal{U} = \sup \{\mathcal{U}_i : i \in I\}$ is teljesen korlátos.*

Bizonyítás. Tekintsük az $\mathcal{U}$-t generáló uniform bázisnak $U = \bigcap_1^n U_{i_k}$ környékét, ahol $U_{i_k} \in \mathcal{U}_{i_k}$, $i_k \in I$ $(k = 1, \ldots, n)$. Legyen $E = \bigcup_{j=1}^{n_k} A_{kj}$ U_{i_k}-rendben kicsiny halmazokból álló véges befedés, Az összes

$$\bigcap_{k=1}^{n} A_{kj_k} \quad (1 \leqq j_k \leqq n_k)$$

alakú halmazok nyilván U-rendben kicsinyek és E-nek véges befedését adják. ▮

(3.2.70) megfordításának tekinthető bizonyos értelemben:

(3.2.76) *Legyen* $[E, \mathcal{U}]$ *uniform tér,* S $\mathcal{S}_{\mathcal{U}}$*-sűrű és teljesen korlátos. Ekkor a tér maga is teljesen korlátos.*

Bizonyítás. Adott $U \in \mathcal{U}$ környékhez legyen az $U_1 \in \mathcal{U}$ környék úgy választva, hogy $U_1 \circ U_1 \circ U_1 \subset U$. Legyen $S = \bigcup_1^n S_i$, ahol S_i U_1-rendben kicsiny. (2.2.16) (e) alapján $E = \bar{S} = \bigcup_1^n \bar{S}_i$, úgyhogy elég megmutatni, hogy $\bar{S}_i$ U-rendben kicsiny.

Mármost $x, y \in \bar{S}_i$ esetén (3.2.23) folytán van olyan $u, v \in S_i$, hogy $u \in U_1(x)$, $v \in U_1(y)$, azaz hogy $(x, u) \in U_1$, $(v, y) \in U_1$. Minthogy még $(u, v) \in U_1$ is áll, azért $(x, y) \in U$. ▮

Rátérve a bevezetőben említett tételre, megmutatjuk:

(3.2.77) *Legyen* $f: X \to Y$, $\mathcal{U}_1$ *és* $\mathcal{U}_2$ *uniform struktúra X-en, ill. Y-on,* $\mathcal{U}_2$ *teljesen korlátos. Ha* f $(\mathcal{S}_{\mathcal{U}_1}, \mathcal{S}_{\mathcal{U}_2})$*-szomszédságtartó, akkor* $(\mathcal{U}_1, \mathcal{U}_2)$*-egyenletesen folytonos is.*

Bizonyítás. Adott $U_2 \in \mathcal{U}_2$ környékhez legyen $U_2' \in \mathcal{U}_2$ úgy megválasztva, hogy $U_2' \circ U_2' \circ U_2' \subset U_2$ legyen. Ekkor van olyan $Y = \bigcup_1^n Y_i$ befedés, amelyben Y_i U_2'-rendben kicsiny. Tekintsük azokat az (i, j) indexpárokat, amelyekre $Y_i \overline{\mathcal{S}_{\mathcal{U}_2}} Y_j$; ezekre az $X_i = f^{-1}(Y_i)$ jelöléssel $X_i \overline{\mathcal{S}_{\mathcal{U}_1}} X_j$, és így található olyan $U_{ij} \in \mathcal{U}_1$ környék, hogy $(X_i \times X_j) \cap U_{ij} = \emptyset$. Legyen $U_1 \in \mathcal{U}_1$ olyan környék, hogy U_1 az így kapott (véges számú) U_{ij} mindegyikének része.

Ha most $(x, y) \in U_1$, és $x \in X_i$, $y \in X_j$, akkor az (i, j) pár nem tartozhat az imént vizsgáltak közé, úgyhogy $Y_i \mathcal{S}_{\mathcal{U}_2} Y_j$, és így található egy $(u, v) \in (Y_i \times Y_j) \cap U_2'$ pontpár. Az $f(x), u \in Y_i$, $v, f(y) \in Y_j$ relációkból $(f(x), u) \in U_2'$, $(v, f(y)) \in U_2'$ adódik, hiszen Y_i és Y_j U_2'-rendben kicsiny, és innen $(u, v) \in U_2'$ folytán $(f(x), f(y)) \in U_2$.

Speciálisan:

(3.2.78) *Ha* $\mathcal{U}$ *teljesen korlátos uniform struktúra E-n, akkor* $\mathcal{U}$ *a legdurvább uniform struktúra, amely a* $\mathcal{S} = \mathcal{S}_{\mathcal{U}}$ *szomszédsági relációt indukálja.* ▮

Teljesen korlátos uniform struktúrákra érvényes a (3.2.29)-cel analóg következő tétel:

(3.2.79) *Legyen* $\mathcal{U}_1$ *és* $\mathcal{U}_2$ *uniform struktúra E-n,* $\mathcal{U}_1$ *teljesen korlátos,* $\mathcal{U} = \sup \{\mathcal{U}_1, \mathcal{U}_2\}$. *Ekkor*

$$\mathcal{S}_{\mathcal{U}} = \sup \{\mathcal{S}_{\mathcal{U}_1}, \mathcal{S}_{\mathcal{U}_2}\}.$$

Bizonyítás. A $\mathcal{S} = \sup \{\mathcal{S}_{\mathcal{U}_1}, \mathcal{S}_{\mathcal{U}_2}\}$ jelöléssel $\mathcal{U}_i < \mathcal{U}$ $(i = 1, 2)$ következtében (3.2.26) szerint $\mathcal{S}_{\mathcal{U}_i} < \mathcal{S}_{\mathcal{U}}$ $(i = 1, 2)$, és így $\mathcal{S} < \mathcal{S}_{\mathcal{U}}$. Meg kell mutatnunk, hogy $\mathcal{S}_{\mathcal{U}} < \mathcal{S}$, azaz hogy $A \mathcal{S} B$ esetén $A \mathcal{S}_{\mathcal{U}} B$.

Legyen e célból $U_1 \in \mathcal{U}_1$ és $U_2 \in \mathcal{U}_2$ tetszőleges környék. (3.2.27) és (3.2.20) értelmében azt kell igazolnunk, hogy $(A \times B) \cap U_1 \cap U_2 \neq \emptyset$. Legyen mármost $U_1' \in \mathcal{U}_1$ olyan környék, hogy $U_1' \circ U_1' \circ U_1' \subset U_1$, és $E = \bigcup_1^n E_j$, ahol E_j U_1'-rendben kicsiny. Az $A_j = A \cap E_j$, $B_j = B \cap E_j$ jelöléssel

$$A = \bigcup_1^n A_j, \quad B = \bigcup_1^n B_j,$$

tehát (3.1.21) szerint van olyan j és k index, hogy $A_j \mathcal{S}_1 B_k$, $A_j \mathcal{S}_2 B_k$. Ekkor $(A_j \times B_k) \cap U_1' \neq \emptyset$, azaz van olyan $a \in A_j$ és $b \in B_k$, hogy $(a, b) \in U_1'$, s akkor tetszőleges $x \in A_j$, $y \in B_k$ esetén $(x, a) \in U_1'$, $(b, y) \in U_1'$ miatt $(x, y) \in U_1$. De van olyan $x \in A_j$, $y \in B_k$ is, hogy $(x, y) \in U_2$, és akkor erre a párra

$$(x, y) \in (A_j \times B_k) \cap U_1 \cap U_2 \subset (A \times B) \cap U_1 \cap U_2. \blacksquare$$

(3.2.80) *Legyen* $\mathcal{U}_i$ ($i \in I \neq \emptyset$) *teljesen korlátos, uniform struktúra E-n,* $\mathcal{U} = \sup\{\mathcal{U}_i : i \in I\}$. *Ekkor*

$$\mathcal{S}_{\mathcal{U}} = \sup\{\mathcal{S}_{\mathcal{U}_i} : i \in I\}.$$

Bizonyítás. A $\mathcal{S} = \sup\{\mathcal{S}_{\mathcal{U}_i} : i \in I\}$ jelöléssel most is $\mathcal{S} < \mathcal{S}_{\mathcal{U}}$, tehát ismét azt kell belátni, hogy $A \mathcal{S} B$ esetén $A \mathcal{S}_{\mathcal{U}} B$, ami azt jelenti, hogy tetszőleges $U_{i_k} \in \mathcal{U}_{i_k}$ ($i_k \in I$, $k = 1, \ldots, n$) környékekre

$$(A \times B) \cap \bigcap_1^n U_{i_k} \neq \emptyset.$$

Legyen $U_{i_k}' \in \mathcal{U}_{i_k}$ olyan környék, hogy

$$U_{i_k}' \circ U_{i_k}' \circ U_{i_k}' \subset U_{i_k} \quad (k = 1, \ldots, n),$$

és

$$E = \bigcup_{j=1}^{n_k} E_{kj} \quad (k = 1, \ldots, n),$$

ahol E_{kj} U_{i_k}'-rendben kicsiny. Az összes

$$\bigcap_{k=1}^n E_{kj_k} \quad (1 \leqq j_k \leqq n_k)$$

alakú halmazok egy

$$E = \bigcup_1^m H_p$$

befedést adnak, és minden H_p halmaz U_{i_k}'-rendben kicsiny minden $k = 1, \ldots, n$ indexre. Legyen

$$A = \bigcup_1^m (A \cap H_p), \quad B = \bigcup_1^m (B \cap H_p).$$

(3.1.21) szerint van olyan p és q, hogy $A \cap H_p$ és $B \cap H_q$ minden i-re $\mathcal{S}_i$-szomszédos. Így minden k-ra van olyan $x_k \in A \cap H_p$, $y_k \in B \cap H_q$, hogy $(x_k, y_k) \in U_{i_k}'$, s akkor $x \in A \cap H_p$, $y \in B \cap H_q$ esetén $(x, x_k) \in U'_{i_k}$, $(y_k, y) \in U'_{i_k}$ folytán $(x, y) \in U_{i_k}$ is áll. Végül is tehát tetszőlegesen választott $x \in A \cap H_p$ és $y \in B \cap H_q$ mellett

$$(x, y) \in (A \times B) \cap \bigcap_{1}^{n} U_{i_k}. \blacksquare$$

(3.2.81) *Legyen* $\mathcal{U}_i$ $(i \in I \neq \emptyset)$ *uniform struktúra E-n, az* $\mathcal{U}_i$*-k legyenek egy kivételével teljesen korlátosak, s legyen* $\mathcal{U} = \sup\{\mathcal{U}_i : i \in I\}$. *Ekkor*

$$\mathcal{S}_{\mathcal{U}} = \sup\{\mathcal{S}_{\mathcal{U}_i} : i \in I\}.$$

Bizonyítás. Ha $i_0 \in I$ olyan index, hogy $i \in I$, $i \neq i_0$ esetén $\mathcal{U}_i$ teljesen korlátos, akkor az $\mathcal{U}' = \sup\{\mathcal{U}_i : i \in I,\ i \neq i_0\}$ jelöléssel $\mathcal{U}'$ (3.2.75) szerint teljesen korlátos, továbbá nyilván

$$\mathcal{U} = \sup\{\mathcal{U}_{i_0}, \mathcal{U}'\}.$$

Így $\mathcal{S}_{\mathcal{U}} = \sup\{\mathcal{S}_{\mathcal{U}_{i_0}}, \mathcal{S}_{\mathcal{U}'}\}$ (3.2.79) szerint, és $\mathcal{S}_{\mathcal{U}'} = \sup\{\mathcal{S}_{\mathcal{U}_i} : i \in I,\ \ i \neq i_0\}$ (3.2.80) szerint. Ennélfogva

$$\mathcal{S}_{\mathcal{U}} = \sup\{\mathcal{S}_{\mathcal{U}_i} : i \in I\}. \blacksquare$$

3.2.k. Gyakorlatok. 1. Mutassuk meg, hogy

$$(A \times B) - (C \times D) = \big((A - C) \times B\big) \cup \big((A \cap C) \times (B - D)\big).$$

2. Legyen $A \subset X$, $U_i \subset X \times Y$ $(i \in I)$, $U = \bigcup_{i \in I} U_i$. Mutassuk meg, hogy $U(A) = \bigcup_{i \in I} U_i(A)$.

3. Legyen $x \in X$, $U_i \subset X \times Y$ $(i \in I)$, $U = \bigcap_{i \in I} U_i$. Mutassuk meg, hogy $U(x) = \bigcap_{i \in I} U_i(x)$, azonban $A \subset X$ esetén általában $U(A) \neq \bigcap_{i \in I} U_i(A)$.

4. Legyen $s : X \times Y \to Y \times X$ az $s(x, y) = (y, x)$ képlettel [ahol $s(x, y)$ voltaképpen $s((x, y))$ helyett áll] értelmezett leképezés. Mutassuk meg, hogy
(a) s bijektív;
(b) $U \subset X \times Y$ esetén $s(U) = U^{-1}$;
(c) $U_i \subset X \times Y$, $U = \bigcup_{i \in I} U_i$, $V = \bigcap_{i \in I} U_i$ esetén $U^{-1} = \bigcup_{i \in I} U_i^{-1}$, $V^{-1} = \bigcap_{i \in I} U_i^{-1}$;
(d) $U, V \subset X \times Y$ esetén $(U - V)^{-1} = U^{-1} - V^{-1}$.

5. Legyen $U, V, U_i \subset E \times E$. Mutassuk meg, hogy
(a) ha U_i $(i \in I)$ szimmetrikus, akkor $\bigcup_{i \in I} U_i$ és $\bigcap_{i \in I} U_i$ is szimmetrikus;
(b) U-val és V-vel együtt $U - V$ is szimmetrikus;
(c) U-val együtt $U \circ U$ is szimmetrikus.

6. Legyen $U, U_i \subset X \times Y$, $V, V_i \subset Y \times Z$. Mutassuk meg, hogy
(a) $(\bigcup_{i \in I} U_i) \circ V = \bigcup_{i \in I} (U_i \circ V)$;
(b) $U \circ (\bigcup_{i \in I} V_i) = \bigcup_{i \in I} (U \circ V_i)$;

(c) általában

$$(\bigcap_{i\in I} U_i)\circ V \neq \bigcap_{i\in I} (U_i\circ V).$$

7. Az E halmaz elemei között értelmezett R reláció jellemezhető a

$$G_R = \{(x, y) : x\, R\, y\} \subset E\times E$$

halmazzal. Mutassuk meg, hogy

(a) R pontosan akkor reflexív, ha G_R tartalmazza $E\times E$ átlóját;

(b) R pontosan akkor szimmetrikus, ha G_R szimmetrikus;

(c) R pontosan akkor tranzitív, ha $G_R \circ G_R \subset G_R$.

8. Legyen $\mathfrak{F}$ az $E \neq \emptyset$ halmaz felbontása, azaz $\mathfrak{F} = \{E_i : i \in I\}$, ahol $E = \bigcup_{i\in I} E_i$, és $i \neq j$ esetén $E_i \cap E_j = \emptyset$. Legyen

$$U_{\mathfrak{F}} = \bigcup_{i\in I} (E_i \times E_i).$$

Mutassuk meg, hogy

(a) $U_{\mathfrak{F}}$ környék;

(b) $U_{\mathfrak{F}} \circ U_{\mathfrak{F}} = U_{\mathfrak{F}}$;

(c) Ha $\Phi \neq \emptyset$ az ilyen felbontásoknak tetszőleges családja, akkor $\mathcal{U}_\Phi = \{U_{\mathfrak{F}} : \mathfrak{F} \in \Phi\}$ uniform szubbázis, amely egy $\mathcal{U}_\Phi$ uniform struktúrát generál;

(d) Ha $\mathfrak{B}$ olyan E-beli halmazrendszer, hogy $E \in \mathfrak{B}$, és $B_1, B_2 \in \mathfrak{B}$ esetén $B_1 \cap B_2 \in \mathfrak{B}$, akkor Φ_1-gyel, Φ_2-vel, ill. Φ_3-mal jelölve az olyan véges, megszámlálható, ill. tetszőleges $\mathfrak{F}$ felbontásoknak a családját, amelyekben $E_i \in \mathfrak{B}$ $(i \in I)$, $\mathfrak{U}_{\Phi_1}$, $\mathfrak{U}_{\Phi_2}$, $\mathfrak{U}_{\Phi_3}$ mindegyike uniform bázis.

9. Legyen $E = \mathbf{R}^m$, $\sigma_i(x, y) = |x_i - y_i|$, ha $x = (x_1, \ldots, x_m)$, $y = (y_1, \ldots, y_m)$ $(i = 1\ \ldots, m)$, $\Sigma = \{\sigma_1, \ldots, \sigma_m\}$. Mutassuk meg, hogy σ_i eltérés, és $\mathcal{U}_\Sigma = \mathcal{U}_{\rho_m}$.

10. Legyen σ eltérés E-n, és $\sigma'(x, y) = \min\big(\sigma(x, y), 1\big)$. Mutassuk meg, hogy σ' is eltérés, és $\mathcal{U}_{\sigma'} = \mathcal{U}_\sigma$.

11. Legyen $n \in \mathbf{N}$ esetén σ_n eltérés E-n, és $x, y \in E$, $n \in \mathbf{N}$ mellett $\sigma_n(x, y) \leqq 1$, továbbá

$$\sigma(x, y) = \sum_1^\infty 2^{-n}\sigma_n(x, y).$$

Mutassuk meg, hogy σ is eltérés E-n, és a $\Sigma = \{\sigma_n : n \in \mathbf{N}\}$ jelöléssel $\mathcal{U}_\Sigma = \mathcal{U}_\sigma$.

$$\left[U_{\sigma,2^{-n}\varepsilon} \subset U_{\sigma_1,\ldots,\sigma_n;\,\varepsilon}, \text{ és } \frac{1}{2^n} < \frac{\varepsilon}{2} \text{ esetén } U_{\sigma_1,\ldots,\sigma_n;\,\varepsilon/2} \subset U_{\sigma,\varepsilon}. \right]$$

12. Mutassuk meg, hogy megszámlálható eltérés-család által indukált uniform struktúra mindig félmetrizálható.

13. A 8. (d) alatti jelölésekkel tegyük fel, hogy $B \in \mathfrak{B}$ esetén $E - B = \bigcup_1^n B_i$ alakban írható, ahol $B_i \in \mathfrak{B}$ és $i \neq j$ esetén $B_i \cap B_j = \emptyset$.

Mutassuk meg, hogy

(a) $\mathscr{T}_{\mathfrak{U}_{\Phi_1}} = \mathscr{T}_{\mathfrak{U}_{\Phi_2}} = \mathscr{T}_{\mathfrak{U}_{\Phi_3}} = \mathscr{T}$;

(b) $\mathscr{T}$ számára $\mathfrak{B}$ bázis;

(c) $\mathfrak{U}_{\Phi_1} < \mathfrak{U}_{\Phi_2} < \mathfrak{U}_{\Phi_3}$.

14. Legyen az előző feladat jelöléseivel $E = \mathbf{R}$, $\mathfrak{B}$ álljon $\mathbf{R}$ összes részhalmazaiból. Mutassuk meg, hogy

(a) $\mathscr{S}_{\mathfrak{U}_{\Phi_1}} = \mathscr{S}_{\mathfrak{U}_{\Phi_2}} = \mathscr{S}_{\mathfrak{U}_{\Phi_3}} = \mathscr{S}$;

(b) $\mathscr{S}$ azonos $\mathbf{R}$ diszkrét szomszédsági relációjával;

(c) $\mathfrak{U}_{\Phi_1} \neq \mathfrak{U}_{\Phi_2} \neq \mathfrak{U}_{\Phi_3}$;

(d) $\mathfrak{U}_{\Phi_3}$ diszkrét uniform struktúra.

15. Legyen a 13. alatti jelölésekkel $E = \mathbf{R}$, $\mathfrak{B}$ álljon a $(-\infty, +\infty)$, $(-\infty, b)$, $[a, +\infty)$, $[c, d)$ alakú intervallumokból, $(a, b, c, d \in \mathbf{R}, c < d)$. Mutassuk meg, hogy

(a) $\mathscr{T}_{\mathfrak{U}_{\Phi_1}} = \mathscr{T}_{\mathfrak{U}_{\Phi_2}} = \mathscr{T}_{\mathfrak{U}_{\Phi_3}} = \mathscr{E}^+$;

(b) $\mathscr{S}_{\mathfrak{U}_{\Phi_1}} \neq \mathscr{S}_{\mathfrak{U}_{\Phi_2}}$;

(c) $\mathfrak{U}_{\Phi_2} = \mathfrak{U}_{\Phi_3}$.

[Ha A a páros, B a páratlan számok halmaza, akkor $A\, \mathscr{S}_{\mathfrak{U}_{\Phi_1}} B$, de $A\, \overline{\mathscr{S}}_{\mathfrak{U}_{\Phi_2}} B$.]

16. Legyen $[E, \mathscr{T}]$ olyan topologikus tér, amelyben a nyílt-zárt halmazok bázist alkotnak, $\mathfrak{H} = \{\emptyset\}$, és $\mathscr{S}$ a 3.1. alatti 9. feladatban vizsgált szomszédsági reláció. Mutassuk meg, hogy ha a 13. feladatbeli $\mathfrak{B}$ a $\mathscr{T}$-re nézve nyílt-zárt halmazokból áll, akkor

$$\mathscr{S}_{\mathfrak{U}_{\Phi_1}} = \mathscr{S}_{\mathfrak{U}_{\Phi_2}} = \mathscr{S}_{\mathfrak{U}_{\Phi_3}} = \mathscr{S}.$$

17. Legyen a 13. alatti feltevésekkel $\emptyset \neq E_0 \subset E$, $\mathfrak{B}_0 = \mathfrak{B}\,(\cap)\,\{E_0\}$, Φ_0 az E_0 halmaz $\mathfrak{B}_0$-ból vett tagú véges felbontásainak családja. Mutassuk meg, hogy $\mathfrak{U}_{\Phi_1} \mid E_0 = \mathfrak{U}_{\Phi_0}$.

18. Adjunk példát olyan $[X, \mathfrak{U}_1]$ és $[Y, \mathfrak{U}_2]$ uniform térre és $f : X \to Y$ leképezésre, amely $(\mathscr{S}_{\mathfrak{U}_1}, \mathscr{S}_{\mathfrak{U}_2})$-ekvimorfizmus, de nem $(\mathfrak{U}_1, \mathfrak{U}_2)$-unimorfizmus.

19. Adjunk példát olyan $[E, \mathfrak{U}]$ uniform térre és $\mathfrak{U}$-egyenletesen folytonos f, g függvényre, hogy fg nem $\mathfrak{U}$-egyenletesen folytonos.

20. Mutassuk meg, hogy ha $[E, \mathfrak{U}]$ uniform tér, f és g pedig korlátos $\mathfrak{U}$-egyenletesen folytonos függvény, akkor fg is $\mathfrak{U}$-egyenletesen folytonos.

21. Mutassuk meg, hogy ha $[E, \mathfrak{U}]$ uniform tér, f_n $(n \in \mathbf{N})$ $\mathfrak{U}$-egyenletesen folytonos függvény, és $f_n \to f$ egyenletesen, akkor f is $\mathfrak{U}$-egyenletesen folytonos.

22. Mutassuk meg, hogy ha ρ eltérés E-n, $\emptyset \neq A \subset E$, akkor $f(x) = \rho(x, A)$ esetén f $\mathfrak{U}_\rho$-egyenletesen folytonos függvény.

23. Legyen $E = \mathbf{R}$, $f(x) = x$, $g(x) = \sin x$. Mutassuk meg, hogy f és g $\mathfrak{U}_{\rho_1}$-egyenletesen folytonos, de fg nem $\mathscr{S}_{\rho_1}$-szomszédságtartó.

24. Mutassuk meg, hogy ha ρ és σ eltérés E-n, és $\mathscr{S}_\rho < \mathscr{S}_\sigma$, akkor $\mathfrak{U}_\rho < \mathfrak{U}_\sigma$.

25. Mutassuk meg, hogy a 13. alatti jelölésekkel $\mathfrak{U}_{\Phi_1}$ teljesen korlátos.

IV. TELJESEN REGULÁRIS TEREK

4.1. URISZON-FÉLE LEMMA

4.1.a. Rendezés szomszédsági és uniform terekben. A szomszédsági relációk és az uniform struktúrák előbb bevezetett fogalma számos további problémát vet fel. Így mindenekelőtt kérdéses, hogy mely topológiák indukálhatók egy szomszédsági relációval; (3.1.15)-ből tudjuk, hogy az ilyen topológia szükségképpen reguláris, viszont (3.1.13) szerint az S_4-topológiák mind ilyenek. Eszerint a keresett feltétel valahol az (S_3) és (S_4) axióma „között" található.

Láttuk azután, hogy minden uniform struktúra indukál egy szomszédsági relációt; kérdéses, hogy viszont mely szomszédsági relációk indukálhatók egy uniform struktúrával. Minden eltérés-család indukál egy uniform struktúrát; kérdéses, hogy viszont mely uniform struktúrák indukálhatók eltérés-családdal, speciálisan egyetlen eltéréssel.

Mindezekre a kérdésekre — és számos továbbira is — a válasz egy nevezetes tételen, az Uriszon-féle lemmán alapul. Ennek kellően általános alakban való bizonyítása céljából hasznos, ha először alkalmas jelöléseket vezetünk be, és tanulmányozzuk a velük kapcsolatos alapvető összefüggéseket.

Legyen először $[E, \mathscr{S}]$ szomszédsági tér. Állapodjunk meg a következő jelölésben: $A, B \subset E$ esetén azt írjuk, hogy $A < B$, ha $A \overline{\mathscr{S}} E - B$, azaz ha B szomszédsága A-nak, $B \in \mathfrak{p}(A)$. Az így bevezetett relációról rögtön láthatók a következő állítások:

(4.1.1) *Legyen $[E, \mathscr{S}]$ szomszédsági tér, és álljon $A, B \subset E$ esetén $A < B$ pontosan akkor, ha $A \overline{\mathscr{S}} E - B$. Ekkor*

(O_1) $\emptyset < \emptyset$, $E < E$;

(O_2) $A < B$ *esetén* $A \subset B$;

(O_3) $A' \subset A < B \subset B'$ *esetén* $A' < B'$;

(O_4) $A < B$ *esetén* $E - B < E - A$;

(O_5) $A_1 < B_1$, $A_2 < B_2$ *esetén* $A_1 \cup A_2 < B_1 \cup B_2$, $A_1 \cap A_2 < B_1 \cap B_2$;

(O_6) $A < B$ *esetén van olyan* C, *hogy* $A < C < B$.

Bizonyítás. (O_1) rögtön következik (P_4)-ből és (P_1)-ből.

(O_2) következménye (P_2)-nek.

(O_3) adódik (P_3)-ból.

(O_4) ismét (P_1)-ből nyerhető.

(O_5) első állítása (P_5)-ből és (P_3)-ból látható:

$$A_1 \overline{\mathscr{S}} E - B_1 \supset E - (B_1 \cup B_2),$$

$$A_2 \overline{\mathscr{S}} E - B_2 \supset E - (B_1 \cup B_2),$$

tehát

$$A_1 \cup A_2 \bar{\mathcal{S}} E - (B_1 \cup B_2).$$

A második állítás ebből (O_4) alapján adódik:

$$E - B_1 < E - A_1, \ E - B_2 < E - A_2,$$

$$(E - B_1) \cup (E - B_2) = E - (B_1 \cap B_2) < (E - A_1) \cup (E - A_2) = E - (A_1 \cap A_2),$$

$$A_1 \cap A_2 < B_1 \cap B_2.$$

Végül (O_6) (3.1.10) (e)-ből adódik. ∎

Megjegyezzük, hogy a $<$ jelölést bizonyos mértékig indokolja az a körülmény, hogy ez a reláció tranzitív, azaz $A < B$, $B < C$ esetén $A < C$; ez (O_2)-ből és (O_3)-ból azonnal látható.

Legyen most $[E, \mathcal{U}]$ uniform tér, $U \in \mathcal{U}$ egy környék, és $A, B \subset E$ esetén álljon $A <_U B$ pontosan akkor, ha $U(A) \subset B$. Megmutatjuk, hogy az így értelmezett $< \, = \, <_U$ relációra is teljesülnek az előzőkhöz hasonló állítások:

(4.1.2) *Legyen $\mathcal{U}$ uniform struktúra E-n, és minden $U \in \mathcal{U}$ környékhez értelmezzünk egy $<_U$ relációt E részhalmazai között a következő módon:*

$$A <_U B \Leftrightarrow U(A) \subset B.$$

Ekkor bármely $< \, = \, <_U$ relációra teljesül $(O_1) - (O_5)$, *továbbá*

(O_6') *Ha az $U \in \mathcal{U}$ és $U_1 \in \mathcal{U}$ környékekre $U_1 \circ U_1 \subset U$, akkor $A <_U B$ esetén van olyan C, hogy $A <_{U_1} C <_{U_1} B$.*

Bizonyítás. (O_1) teljesül, mert $U(\emptyset) = \emptyset$.

(O_2) fennáll, mert (U_1) folytán $A \subset U(A)$.

(O_3) következik (3.2.10) (a)-ból.

(O_4) is teljesül, hiszen $U(A) \subset B$ és $U(E - B) \subset E - A$ $U^{-1} = U$ miatt egyaránt azt jelenti, hogy $x \in A$, $(x, y) \in U$ esetén $y \in B$.

(O_5) első része (3.2.10) (b)-ből adódik, a második rész pedig ebből és (O_4)-ből mint az előző bizonyításban.

Végül, ha $U_1 \circ U_1 \subset U$, és $U(A) \subset B$, akkor legyen $C = U_1(A)$. Ekkor nyilván $A <_{U_1} C$, és $y \in C$, $(y, z) \in U_1$ esetén alkalmas $x \in A$-ra $(x, y) \in U_1$, tehát $(x, z) \in U$, és $z \in U(A) \subset B$, úgyhogy $U_1(C) \subset B$, $C <_{U_1} B$.

4.1.b. Uriszon-féle lemma. Legyen most megadva egy E halmaz részhalmazai között értelmezett relációknak egy $\{<_n : n = 0, 1, 2, \ldots\}$ rendszere. Tegyük fel, hogy minden egyes $< \, = \, <_n$ relációra teljesülnek az $(O_1) - (O_5)$ állítások, továbbá, hogy $A <_n B$ esetén van olyan C, amelyre $A <_{n+1} C <_{n+1} B$.

Legyen azután $\mathbf{I} \subset \mathbf{R}$ a $[0, 1]$ intervallum. Egy $f : E \to \mathbf{R}$ függvényt a $(<_n)$ sorozathoz *asszociáltnak* mondunk, ha $f(E) \subset \mathbf{I}$, és $P, Q \subset \mathbf{I}$, $\rho_1(P, Q) > \dfrac{1}{2^n}$ esetén $f^{-1}(P) <_{n+2} f^{-1}(\mathbf{I} - Q)$ minden $n \in \mathbf{N}$-re; itt $\rho_1(x, y) = |x - y|$ az euklideszi távolságot jelenti $\mathbf{R}$-ren.

Érvényes most már a következő

(4.1.3.) **Uriszon-féle lemma.** *Legyen az E halmaz részhalmazai között értelmezett $<_n$ ($n = 0, 1, 2, \ldots$) relációk mindegyikére érvényes ($<$ helyett $<_n$-nel) (O_1) – (O_5), továbbá $A <_n B$ esetén létezzék olyan C, hogy $A <_{n+1} C <_{n+1} B$. Ha most $M <_0 N$, akkor van olyan, a $(<_n)$ sorozathoz asszociált f függvény, amelyre $x \in M$ esetén $f(x) = 0$, $x \in E - N$ esetén $f(x) = 1$.*

Bizonyítás. Először is definiálunk minden 0 és 1 közötti $\frac{p}{2^n}$ alakú ($p = 0, 1, \ldots, 2^n$) törtre egy $A\left(\frac{p}{2^n}\right)$ halmazt olyan módon, hogy $A(0) = M$, $A(1) = N$ legyen, továbbá $A\left(\frac{p}{2^n}\right) <_n A\left(\frac{p+1}{2^n}\right)$ fennálljon ($n = 0, 1, 2, \ldots$; $p = 0, \ldots, 2^n - 1$). A definíciót n szerinti rekurzióval végezzük az

$$A(0) = M, \quad A(1) = N \tag{4.1.4}$$

megállapodásból kiindulva, amikor is $A(0) <_0 A(1)$ csakugyan fennáll.

Tegyük most fel, hogy már értelmeztük az $A\left(\frac{p}{2^n}\right)$ halmazokat valamely $n \geqq 0$ egész számra és $p = 0, 1, \ldots, 2^n$ minden értékére, mégpedig úgy, hogy

$$A\left(\frac{p}{2^n}\right) <_n A\left(\frac{p+1}{2^n}\right) \qquad (p = 0, 1, \ldots, 2^n - 1). \tag{4.1.5}$$

Feltevésünk szerint ekkor minden ilyen p-hez található egy C_p halmaz úgy, hogy

$$A\left(\frac{p}{2^n}\right) <_{n+1} C_p <_{n+1} A\left(\frac{p+1}{2^n}\right)$$

legyen; definiáljuk az $A\left(\frac{2p+1}{2^{n+1}}\right)$ halmazt az

$$A\left(\frac{2p+1}{2^{n+1}}\right) = C_p \qquad (p = 0, 1, \ldots, 2^n - 1)$$

képlettel. Világos, hogy ezzel megtörtént $A\left(\frac{q}{2^{n+1}}\right)$ értelmezése minden $q = 0, 1, \ldots, 2^{n+1}$ értékre, s hogy (4.1.5)-höz hasonlóan

$$A\left(\frac{q}{2^{n+1}}\right) <_{n+1} A\left(\frac{q+1}{2^{n+1}}\right).$$

Így a rekurziót folytathatjuk minden $n = 0, 1, \ldots$ számra, és fennáll (4.1.4) és (4.1.5), az utóbbi minden n-re.

Értelmezzük még $A(r)$-et akkor is, ha $r > 1$ diadikusan racionális szám $\left(\text{azaz } \frac{p}{2^n} \text{ alakú, ahol } n = 0, 1, 2, \ldots, p = 2^n + 1, 2^n + 2, \ldots\right)$, mégpedig az

(4.1.6) $$A(r) = E \qquad (r > 1)$$

képlettel. (O_1)-ből és (O_3)-ból látszik, hogy most már

(4.1.7) $$A\left(\frac{p}{2^n}\right) <_n A\left(\frac{p+1}{2^n}\right) \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots; \; p = 0, 1, 2, \ldots).$$

(O_2)-ből rögtön látszik az is, hogy

$$A\left(\frac{p}{2^n}\right) \subset A\left(\frac{p+1}{2^n}\right) \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots; \; p = 0, 1, 2, \ldots),$$

és így általában, a nem-negatív diadikusan racionális számok halmazát R-rel jelölve

(4.1.8) $$A(r) \subset A(s) \quad (r, s \in R, \; r < s).$$

Most már értelmezhetjük a keresett f függvényt:

(4.1.9) $$f(x) = \inf \{r : x \in A(r), \; r \in R\} \quad (x \in E).$$

Rögtön világos, hogy minden $x \in E$-re $f(x) \geqq 0$, továbbá (4.1.6) folytán $f(x) \leqq 1$. Eszerint csakugyan $f(E) \subset \mathbf{I}$. (4.1.4)-ből az is látszik, hogy $x \in M$ esetén $f(x) = 0$, és $x \in E - N$ esetén $f(x) = 1$, hiszen ekkor $x \notin A(1)$, és (4.1.8) folytán $r \in R$, $r < 1$ esetén annál inkább $x \notin A(r)$.

Hátra van még annak a megmutatása, hogy f asszociált a $(<_n)$ sorozathoz. Legyen ezért $P, Q \subset \mathbf{I}$, $\rho_1(P, Q) > \frac{1}{2^n}$, továbbá

$$I_p = \left[\frac{p}{2^{n+1}}, \frac{p+1}{2^{n+1}}\right] \qquad (p = 0, 1, \ldots, 2^{n+1} - 1),$$

$$J_p = \left[\frac{p-1}{2^{n+1}}, \frac{p+2}{2^{n+1}}\right] \qquad (p = 0, 1, \ldots, 2^{n+1} - 1).$$

Világos, hogy ha $P \cap I_p \neq \emptyset$, akkor $Q \cap J_p = \emptyset$, hiszen I_p-nek tetszőleges pontja és J_p-nek bármelyik pontja között a távolság $\leqq \frac{1}{2^n}$. Ha tehát P' jelöli a P-t metsző I_p intervallumok egyesítését, Q' pedig a megfelelő J_p-k egyesítését, akkor

$$P \subset P' \subset Q' \cap \mathbf{I} \subset \mathbf{I} - Q,$$

tehát

$$f^{-1}(P) \subset f^{-1}(P') \subset f^{-1}(Q' \cap \mathbf{I}) \subset f^{-1}(\mathbf{I} - Q).$$

Tekintettel (O_3)-ra és (O_5)-re, elég tehát megmutatnunk, hogy $p = 0, 1, \ldots, 2^{n+1} - 1$ esetén

$$f^{-1}(I_p) <_{n+2} f^{-1}(J_p \cap \mathrm{I}) = f^{-1}(J_p).$$

Azonban

$$f^{-1}(I_p) = f^{-1}\left(\left[0, \frac{p+1}{2^{n+1}}\right]\right) \cap f^{-1}\left(\left[\frac{p}{2^{n+1}}, 1\right]\right),$$

$$f^{-1}(J_p) = f^{-1}\left(\left[0, \frac{p+2}{2^{n+1}}\right]\right) \cap f^{-1}\left(\left[\frac{p-1}{2^{n+1}}, 1\right]\right),$$

és így ismét (O_5) miatt elég azt megmutatni, hogy

$$f^{-1}\left(\left[0, \frac{p+1}{2^{n+1}}\right]\right) <_{n+2} f^{-1}\left(\left[0, \frac{p+2}{2^{n+1}}\right]\right), \tag{4.1.10}$$

$$f^{-1}\left(\left[\frac{p}{2^{n+1}}, 1\right]\right) <_{n+2} f^{-1}\left(\left[\frac{p-1}{2^{n+1}}, 1\right]\right). \tag{4.1.11}$$

Mármost (4.1.10) a $p = 2^{n+1} - 1$ esetben az $E <_{n+2} E$ képletbe megy át, s ez (O_1) miatt érvényes. Viszont $p < 2^{n+1} - 1$ esetén $f(x) \leqq \frac{p+1}{2^{n+1}}$ maga után vonja (4.1.8) és (4.1.9) értelmében, hogy $x \in A\left(\frac{2p+3}{2^{n+2}}\right)$, és $x \in A\left(\frac{2p+4}{2^{n+2}}\right) = A\left(\frac{p+2}{2^{n+1}}\right)$-ből (4.1.9) alapján $f(x) \leqq \frac{p+2}{2^{n+1}}$ következik. Más szóval ekkor (4.1.7) szerint

$$f^{-1}\left(\left[0, \frac{p+1}{2^{n+1}}\right]\right) \subset A\left(\frac{2p+3}{2^{n+2}}\right) <_{n+2} A\left(\frac{2p+4}{2^{n+2}}\right) \subset f^{-1}\left(\left[0, \frac{p+2}{2^{n+1}}\right]\right),$$

tehát (O_3) értelmében most is fennáll (4.1.10).

(4.1.11) a $p = 0$ esetben az $E <_{n+2} E$ összefüggésbe, a $p = 1$ esetben pedig az

$$f^{-1}\left(\left[\frac{1}{2^{n+1}}, 1\right]\right) <_{n+2} E$$

összefüggésbe megy át, ezek pedig (O_1) és (O_3) folytán érvényesek. A $p = 2, \ldots, 2^{n+1} - 1$ esetekben pedig (O_4)-re tekintettel elég igazolni, hogy

$$f^{-1}\left(\left[0, \frac{p-1}{2^{n+1}}\right)\right) <_{n+2} f^{-1}\left(\left[0, \frac{p}{2^{n+1}}\right)\right).$$

De $f(x) < \frac{p-1}{2^{n+1}}$ esetén (4.1.8) és (4.1.9) miatt $x \in A\left(\frac{p-1}{2^{n+1}}\right)$, viszont $x \in A\left(\frac{2p-1}{2^{n+2}}\right)$ esetén $f(x) \leqq \frac{2p-1}{2^{n+2}} < \frac{p}{2^{n+1}}$, úgyhogy

$$f^{-1}\left(\left[0, \frac{p-1}{2^{n+1}}\right]\right) \subset A\left(\frac{2p-2}{2^{n+1}}\right) <_{n+2} A\left(\frac{2p-1}{2^{n+2}}\right) \subset f^{-1}\left[0, \frac{p}{2^{n+1}}\right),$$

és ismét (O_3) figyelembevételével adódik az állítás. ▮

A (4.1.3) tétel rövidebben megfogalmazható, ha bevezetjük a következő elnevezést: az E halmazon értelmezett $f: E \to \mathbf{R}$ függvényről azt mondjuk, hogy **szétválasztja** az A és B halmazt, ha $x \in E$ esetén $0 \leqq f(x) \leqq 1$, $x \in A$ esetén $f(x) = 0$, $x \in B$ esetén $f(x) = 1$. Ha pedig Φ az E-n értelmezett függvényeknek egy családja, az $A, B \subset E$ halmazokat **Φ-szétválaszthatóknak** mondjuk, ha van őket szétválasztó $f \in \Phi$ függvény.

Érdemes még megjegyezni a következőt:

(4.1.12) *Legyen* (4.1.3) *feltételei mellett* f *a* $(<_n)$ *sorozathoz asszociált függvény. Ha* $|f(x) - f(y)| > \frac{1}{2^n}$ $(n = 1, 2, \ldots)$, *akkor* $\{x\} <_{n+2} E - \{y\}$.

Bizonyítás. Feltevésünk szerint $\rho_1(\{f(x)\}, \{f(y)\}) > \frac{1}{2^n}$. Így

$$f^{-1}(f(x)) <_{n+2} f^{-1}(\mathrm{I} - \{f(y)\}) = E - f^{-1}(f(y)).$$

De $\{x\} \subset f^{-1}(f(x))$, $\{y\} \subset f^{-1}(f(y))$ folytán (O_3) miatt $\{x\} <_{n+2} E - \{y\}$. ▮

4.1.c. Gyakorlatok. 1. Legyen $[E, \mathfrak{T}]$ topologikus tér, és $A < B$ álljon pontosan akkor, ha $A \subset \operatorname{int} B \subset E$. Mutassuk meg, hogy teljesül $(O_1) - (O_3)$, (O_5) és (O_6).

2. Az előbbi feladat akkor, ha $A < B$ azt jelenti, hogy $\bar{A} \subset B \subset E$.

3. Legyen $<$ az $E \neq \emptyset$ halmaz részhalmazai között értelmezett olyan reláció, amelyre teljesül (O_1) — (O_6), és álljon $A \,\bar{\mathfrak{S}}\, B$ pontosan akkor, ha $A < E - B$. Mutassuk meg, hogy $\mathfrak{S}$ szomszédsági reláció E-n.

4. Legyen $<_i$ $(i \in I)$ olyan reláció $E \neq \emptyset$ részhalmazai között, hogy ($<$ helyett $<_i$-re) teljesül (O_1) — (O_4), továbbá (O_5) helyett a következő erősebb állítás: ha $i \in I$, és minden $j \in J$-re $A_j <_i B_j$, akkor

$$\bigcup_{j \in J} A_j <_i \bigcup_{j \in J} B_j, \quad \bigcap_{j \in J} A_j <_i \bigcap_{j \in J} B_j,$$

végül minden $i \in I$-hez legyen olyan $j \in I$, hogy $A <_i B$ esetén alkalmas C halmazra $A <_j C <_j B$. Mutassuk meg, hogy az

$$U_i' = \{(x, y) : \{x\} <_i E - \{y\}\} \subset E \times E,$$

$$U_i = (E \times E) - U_i', \quad \mathfrak{S} = \{U_i : i \in I\}$$

jelöléssel $\mathfrak{S}$ uniform szubbázis E-n, és a (4.1.2) alatti értelemben $<_i = <_{U_i}$.

5. Legyen $<$ olyan reláció $E \neq \emptyset$ részhalmazai között, amelyre teljesül (O_1) – (O_3), (O_5) és (O_6), továbbá $A_i < B_i$ $(i \in I)$ esetén $\bigcup_{i \in I} A_i < \bigcup_{i \in I} B_i$. Mutassuk meg, hogy azok a $G \subset E$ halmazok, amelyekre $G < G$, egy E fölötti $\mathcal{T}$ topológia nyílt halmazaival azonosak, és $A < B$ pontosan akkor áll, ha $A \subset \operatorname{int} B$.

4.2. TELJESEN REGULÁRIS TEREK

4.2.a. A teljesen reguláris tér fogalma. Az Uriszon-féle lemma első alkalmazásaképpen a következő tételt bizonyítjuk be:

(4.2.1) *Legyen $[E, \mathcal{S}]$ szomszédsági tér, Φ azon E-beli szomszédságtartó függvények családja, amelyekre $x \in E$ esetén $0 \leq f(x) \leq 1$, és $A \bar{\mathcal{S}} B$. Ekkor A és B Φ-szétválasztható.*

Bizonyítás. (4.1.3) feltételei teljesülnek, ha $<_n$ minden n-re a (4.1.1)-ben értelmezett $<$ relációval azonos. Ha $A \bar{\mathcal{S}} B$, akkor tehát $A < E - B$, és így (4.1.3) szerint egy ehhez a sorozathoz asszociált f függvény szétválasztja A-t és B-t. Erre $f(E) \subset \mathbf{I} = [0,1]$, és f szomszédságtartó, hiszen ha $X, Y \subset \mathbf{R}$, és $\rho_1(X, Y) > 0$, akkor a $P = X \cap \mathbf{I}$, $Q = Y \cap \mathbf{I}$ jelöléssel $\rho_1(P, Q) > \frac{1}{2^n}$ alkalmas n-re, $f^{-1}(X) = f^{-1}(P)$, $f^{-1}(Y) = f^{-1}(Q)$, és $f^{-1}(P) < f^{-1}(\mathbf{I} - Q) = E - f^{-1}(Q)$ miatt $f^{-1}(P) \bar{\mathcal{S}} f^{-1}(Q)$, úgyhogy (3.1.38) alkalmazható. ∎

Ebből rögtön következik az alábbi tétel (tulajdonképpen ezt bizonyította be Uriszon):

(4.2.2) *Legyen $[E, \mathcal{T}]$ normális topologikus tér, A és B zárt, $A \cap B = \emptyset$, Φ a $\mathcal{T}$-folytonos függvények osztálya. Ekkor A és B Φ-szétválasztható.*

Bizonyítás. Vezessük be E-n a (3.1.8)-ban definiált $\mathcal{S}$ szomszédsági relációt. Ekkor $A \bar{\mathcal{S}} B$, tehát (4.2.1) szerint A-t és B-t szétválasztja egy $\mathcal{S}$-szomszédságtartó f függvény. Minthogy (3.1.40) szerint a $\mathcal{S}$-szomszédságtartó f (3.1.12) felhasználásával $\mathcal{T}_{\mathcal{S}}$-folytonos is, és (3.1.13) folytán $\mathcal{T}_{\mathcal{S}} < \mathcal{T}$, azért f (2.6.18) értelmében $\mathcal{T}$-folytonos is. ∎

(4.2.1)-ből újabb szükséges feltételt vezethetünk le ahhoz, hogy egy topológia szomszédsági relációval indukálható legyen:

(4.2.3) *Ha $\mathcal{S}$ szomszédsági reláció E-n, $x \in E$, F $\mathcal{T}_{\mathcal{S}}$-zárt, és $x \notin F$, akkor $\{x\}$ és F $\mathcal{T}_{\mathcal{S}}$-folytonos függvénnyel szétválasztható.*

Bizonyítás. Minthogy $E - F$ $\mathcal{T}_{\mathcal{S}}$-környezete x-nek, azért (3.1.11) értelmében $\{x\} \bar{\mathcal{S}} F$. (4.2.1) folytán $\{x\}$ és F egy $\mathcal{S}$-szomszédságtartó f függvénnyel szétválasztható, s ez (3.1.40) és (3.1.12) következtében $\mathcal{T}_{\mathcal{S}}$-folytonos is. ∎

A (4.2.3) tételben talált feltételt egy újabb szétválasztási axióma alakjában fogalmazhatjuk meg. Jegyezzük meg ebből a célból:

(4.2.4) *Ha az $[E, \mathcal{T}]$ topologikus térben az A és B halmazt egy folytonos függvény szétválasztja, akkor A és B szétválasztható és erősen széteső.*

Bizonyítás. Ha f az A-t és B-t szétválasztó folytonos függvény, akkor $f^{-1}\left(\left(-\infty, \frac{1}{2}\right)\right)$ és $f^{-1}\left(\left(\frac{1}{2}, +\infty\right)\right)$ A-nak, ill. B-nek diszjunkt nyílt környezete, $f^{-1}(0)$ és $f^{-1}(1)$ pedig két diszjunkt zárt halmaz, amely $\bar{A}$-t, ill. $\bar{B}$-t tartalmazza. ∎

Nevezzük most már az $[E, \mathcal{T}]$ topologikus teret, ill. a $\mathcal{T}$ topológiát **teljesen reguláris**nak, ha benne bármely $x \in E$ pontra és x-et nem tartalmazó F zárt halmazra $\{x\}$ és F folytonos függvénnyel szétválasztható. A teljesen reguláris tereket még S_π-tereknek is fogjuk mondani. T_π-térnek vagy **Tyihonov-féle tér**nek mondjuk a teljesen reguláris T_0-tereket.

Az elnevezést és a jelölést indokolja:

(4.2.5) *Minden S_4-tér S_π-tér, és minden S_π-tér S_3-tér. Hasonlóan, minden T_4-tér T_π-tér és minden T_π-tér T_3-tér.*

Bizonyítás, Legyen $[E, \mathcal{T}]$ S_4-tér, azaz normális S_1-tér, $x \notin F = \bar{F}$. Ekkor (2.5.8) szerint $\bar{x} \cap F = \emptyset$, úgyhogy $\bar{x}$ és F, s annál inkább $\{x\}$ és F (4.2.2) értelmében folytonos függvénnyel szétválasztható.

(4.2.4) mutatja, hogy minden S_π-tér reguláris, azaz S_3-tér.

A második rész ebből már adódik, mert (T_4), (T_π) és (T_3) a (T_0) axióma hozzávételével keletkezik (S_4)-ből, (S_π)-ből, ill. (S_3)-ból. ∎

Például (2.5.4C)-ből adódik, hogy minden félmetrikus tér teljesen reguláris, minden metrikus tér pedig Tyihonov-féle.

Az (S_π) és (T_π) axióma abból a szempontból is beilleszkedik az (S_i) és (T_i) axiómák közé, hogy érvényes rá (2.6.42) megfelelője:

(4.2.6) *Legyen $f : X \to Y$, és $\mathcal{T}$ S_π-topológia Y-on. Ekkor $f^{-1}(\mathcal{T})$ is S_π-topológia.*

Bizonyítás. Legyen $x \in X$, és $F_1 \subset X$ $f^{-1}(\mathcal{T})$-zárt, azaz $F_1 = f^{-1}(F)$, F $\mathcal{T}$-zárt, $x \notin F_1$. Ekkor $f(x) \notin F$, úgyhogy van olyan $\mathcal{T}$-folytonos $g : Y \to \mathbf{R}$, amely $\{f(x)\}$-et és F-et szétválasztja. Világos, hogy $h = g \circ f$ x-et és F_1-et szétválasztja, és h (2.6.33) és (2.6.15) alapján $f^{-1}(\mathcal{T})$-folytonos. ∎

Speciálisan:

(4.2.7) *Teljesen reguláris tér bármely altere is teljesen reguláris; Tyihonov-tér altere is Tyihonov-féle.* ∎

(4.2.8) *Ha $\mathcal{T}_i$ teljesen reguláris topológia E-n, és $\mathcal{T} = \sup\{\mathcal{T}_i : i \in I\}$, akkor $\mathcal{T}$ is teljesen reguláris.*

Bizonyítás. Legyen $x \notin F$, F $\mathcal{T}$-zárt. Ekkor $x \in \bigcap_{1}^{n} G_{i_j} \subset E - F$, ahol $i_j \in I$, G_{i_j} $\mathcal{T}_{i_j}$-nyílt. Legyen f_j $\{x\}$-et és $(E - G_{i_j})$-t szétválasztó $\mathcal{T}_{i_j}$-folytonos, s egyúttal természetesen $\mathcal{T}$-folytonos függvény. Ekkor $f = \max(f_1, \ldots, f_n)$ nyilván szétválasztja $\{x\}$-et és F-et, és (2.6.27) szerint $\mathcal{T}$-folytonos. ∎

4.2.b. Függvénycsaládok. Következő feladatunk annak megmutatása lesz, hogy egy topológiának szomszédsági relációval való indukálhatóságához a teljes regularitás feltétele nemcsak szükséges, hanem elégséges is. Ehhez, és további fontos eredményekhez, hasznos segédeszközül fog szolgálni a függvénycsalád fogalma.

Legyen $E \neq \emptyset$ tetszőleges halmaz. E feletti **függvénycsalád**on értjük az E-n értelmezett valós függvények tetszőleges nem-üres Φ halmazát. A Φ függvénycsaládot

korlátosnak mondjuk, ha minden $f \in \Phi$ függvény korlátos (vagyis $f(E) \subset \mathbf{R}$ korlátos halmaz).

Minden E feletti függvénycsalád származtat egy E feletti eltérés-családot. Ez a következő észrevételen alapszik:

(4.2.9) *Ha* $f : E \to \mathbf{R}$, *akkor*

$$\sigma(x, y) = |f(x) - f(y)|$$

eltérés E*-n.* ∎

Mármost a Φ **függvénycsalád által indukált eltéréscsaládon** a

$$\Sigma_\Phi = \{\sigma_f : f \in \Phi\}$$

eltérés-családot értjük. A Σ_Φ által indukált $\mathcal{U}_{\Sigma_\Phi}$ uniform struktúrát, $\mathcal{S}_{\Sigma_\Phi}$ szomszédsági relációt és $\mathcal{T}_{\Sigma_\Phi}$ topológiát röviden a Φ **függvénycsalád által indukált uniform struktúrának, szomszédsági relációnak,** ill. **topológiának** mondjuk és $\mathcal{U}_\Phi$-vel, $\mathcal{S}_\Phi$-vel, ill. $\mathcal{T}_\Phi$-vel jelöljük.

(3.2.34)-ből azonnal kiolvasható:

(4.2.10) *Legyen* Φ *függvénycsalád* E*-n,* $\emptyset \neq E_0 \subset E$, *és* $\Phi_0 = \{f | E_0 : f \in \Phi\}$. *Ekkor* Φ_0 *függvénycsalád* E_0*-on, és*

$$\mathcal{U}_{\Phi_0} = \mathcal{U}_\Phi | E_0, \quad \mathcal{S}_{\Phi_0} = \mathcal{S}_\Phi | E_0, \quad \mathcal{T}_{\Phi_0} = \mathcal{T}_\Phi | E_0. \ ∎$$

(4.2.11) *Legyen* Φ *függvénycsalád* E*-n,* ρ_1 *az euklideszi távolság* $\mathbf{R}$*-en.* $f \in \Phi$ *esetén a* (4.2.9) *alatti jelöléssel* $\mathcal{U}_{\sigma_f} = f^{-1}(\mathcal{U}_{\rho_1})$, *továbbá*

$$\mathcal{U}_\Phi = \sup\{f^{-1}(\mathcal{U}_{\rho_1}) : f \in \Phi\}.$$

Bizonyítás. Az első állítás abból adódik, hogy $\varepsilon > 0$ esetén $(x, y) \in \mathcal{U}_{\sigma_f, \varepsilon}$ pontosan akkor áll, ha $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$, azaz ha $(f(x), f(y)) \in U_{\rho_1, \varepsilon}$, úgyhogy (3.2.39) alkalmazható. Ebből a második állítás (3.2.28) következtében adódik. ∎

(4.2.11)-ből azonnal kiolvasható (3.2.49) alapján:

(4.2.12) *Ha* Φ *tetszőleges függvénycsalád* E*-n, akkor* $\mathcal{U}_\Phi$ *a legdurvább uniform struktúra, amelyre nézve mindegyik* $f \in \Phi$ *függvény egyenletesen folytonos.* ∎

(4.2.13) *Ha* Φ *korlátos függvénycsalád* E*-n, akkor* $\mathcal{U}_\Phi$ *és* $\mathcal{U}_{\sigma_f}$ $(f \in \Phi)$ *teljesen korlátos.*

Bizonyítás. Ha $f \in \Phi$, és $g : f(E) \to \mathbf{R}$ a kanonikus injekció, $h = f|_E^{f(E)}$, akkor $f = g \circ h$, tehát $f^{-1}(\mathcal{U}_{\rho_1}) = h^{-1}(g^{-1}(\mathcal{U}_{\rho_1})) = h^{-1}(\mathcal{U}_{\rho_1} | f(E))$ tekintettel (3.2.46)-ra és (3.2.40)-re. De (3.2.67) és (3.2.69) szerint $\mathcal{U}_{\rho_1} | f(E)$ teljesen korlátos, így (3.2.72) és (4.2.11) értelmében $\mathcal{U}_{\sigma_f} = f^{-1}(\mathcal{U}_{\rho_1})$ is, (3.2.75) alapján pedig $\mathcal{U}_\Phi$ is. ∎

(4.2.14) *Legyen* Φ *függvénycsalád* E*-n,* ρ_1 *az euklideszi távolság* $\mathbf{R}$*-en. Minden* $f \in \Phi$ *függvényre* $\mathcal{S}_{\sigma_f} = f^{-1}(\mathcal{S}_{\rho_1})$, *és ha* Φ *korlátos, akkor*

$$\mathcal{S}_\Phi = \sup\{\mathcal{S}_{\sigma_f} : f \in \Phi\}.$$

Bizonyítás. Az első állítás (4.2.11)-ből (3.2.43) alapján, a második pedig ebből (3.2.80) alapján következik, tekintettel $\mathcal{U}_{\sigma_f}$ $(f \in \Phi)$ (4.2.13) szerint teljesen korlátos voltára. ∎

(4.2.14)-ből (3.1.39) alapján adódik:

(4.2.15) *Ha Φ korlátos függvénycsalád, akkor $\mathcal{S}_\Phi$ a legdurvább szomszédsági reláció, amelyre nézve mindegyik $f \in \Phi$ szomszédságtartó.* ▮

(4.2.16) *Bármely Φ függvénycsaládra $f \in \Phi$ esetén $\mathcal{T}_{\sigma_f} = f^{-1}(\mathcal{E})$, és*

$$\mathcal{T}_\Phi = \sup\{f^{-1}(\mathcal{E}) : f \in \Phi\}.$$

Bizonyítás. Az első állítás (4.2.14)-ből (3.1.33) alapján adódik, a második ebből (3.2.28) és (3.2.29) alapján. ▮

(4.2.17) *Ha Φ tetszőleges függvénycsalád, akkor $\mathcal{T}_\Phi$ a legdurvább topológia, amelyre nézve mindegyik $f \in \Phi$ folytonos.* ▮

Megjegyzendő, hogy (3.2.80) helyett (3.2.81)-et felhasználva (4.2.14) második állítása akkor is igaz, ha az $f \in \Phi$ függvények egy kivételével korlátosak. Enélkül azonban az állításnak nem kell érvényesnek lennie. Ezt a következő példa mutatja.

Legyen $E = \mathbf{R}^2$, és Φ álljon két függvényből:

$$f(x, y) = x \text{ és } g(x, y) = y.$$

Legyen továbbá

$$A = \{(x, y) : x + y \leqq 0\},$$

$$B = \{(x, y) : x + y \geqq 1\}.$$

Ekkor $A \bar{\mathcal{S}}_\Phi B$, hiszen $(A \times B) \cap U_{\{f,g\},\frac{1}{2}} = \emptyset$, mivel $(x_1, y_1) \in A$, $|x_2 - x_1| < \frac{1}{2}$, $|y_2 - y_1| < \frac{1}{2}$ esetén $(x_2, y_2) \notin B$. Viszont a

$$\mathcal{S} = \sup\{\mathcal{S}_{\sigma_f}, \mathcal{S}_{\sigma_g}\}$$

jelöléssel $A \mathcal{S} B$. Valóban, ha

$$A = \bigcup_1^p A_i, \quad B = \bigcup_1^q B_j$$

két tetszőleges felbontás, akkor van olyan i, hogy A_i tartalmaz egy $(u, -u)$ és egy $(v, -v)$ pontot, melyekre $v > u + 1$, ugyanis a véges számú A_i halmaz befedi az $x + y = 0$ egyenest, tehát legalább egyikük ennek nem-korlátos részét tartalmazza. Ekkor azonban $(v, -u) \in B$, tehát valamely j-re $(v, -u) \in B_j$, és akkor $A_i \mathcal{S}_{\sigma_f} B_j$, $A_i \mathcal{S}_{\sigma_g} B_j$, ugyanis $\sigma_f(A_i, B_j) = \sigma_g(A_i, B_j) = 0$, hiszen

$$|f(v, -v) - f(v, -u)| = |v - v| = 0,$$

$$|g(u, -u) - g(v, -u)| = |-u - (-u)| = 0.$$

Ez a példa mutatja azt is, hogy (3.2.81)-ben a teljes korlátosság feltevése nem hagyható el.

4.2.c. Topológiák és szomszédsági relációk indukálása függvénycsaláddal. Most már megmutathatjuk, hogy minden teljesen reguláris topológia származtatható függvénycsaládból. Először a következő tételt bizonyítjuk be:

(4.2.18) *Legyen* $[E, \mathcal{T}]$ *topologikus tér,* Φ *pedig olyan* $\mathcal{T}$*-folytonos függvényekből álló függvénycsalád, hogy* $x \in E$, $F = \bar{F} \subset E$, $x \notin F$ *esetén* $\{x\}$ *és* F Φ*-szétválasztható. Ekkor* $\mathcal{T}_\Phi = \mathcal{T}$.

Bizonyítás. (4.2.17) értelmében $\mathcal{T}_\Phi < \mathcal{T}$. Másrészt ha G $\mathcal{T}$-nyílt, és $x \in G$, akkor van olyan $f \in \Phi$, amely $\{x\}$-et és $(E - G)$-t szétválasztja. Ekkor $U_{\sigma_f, 1}(x) \subset G$, úgyhogy G $\mathcal{T}_\Phi$-nyílt is. Így $\mathcal{T} < \mathcal{T}_\Phi$. ∎

(4.2.18)-ból most már azonnal következik:

(4.2.19) *Ha* $[E, \mathcal{T}]$ *teljesen reguláris topologikus tér, és* Φ *az összes* $\mathcal{T}$*-folytonos függvényekből álló függvénycsalád, akkor* $\mathcal{T}_\Phi = \mathcal{T}$. ∎

(4.2.3) és (4.2.19) egybevetéséből adódik a $\mathcal{T}_\Phi = \mathcal{T}_{\mathcal{S}_\Phi}$ egyenlőség felhasználásával:

(4.2.20) *Egy* $\mathcal{T}$ *topológia pontosan akkor indukálható szomszédsági relációval, ha teljesen reguláris.* ∎

Ezzel válaszoltunk az e fejezet elején felvetett egyik alapvető kérdésre. Rögtön megjegyezhetjük azt is, hogy a (4.2.19)-ben szereplő Φ-ből származó $\mathcal{S}_\Phi$ szomszédsági reláció a teljesen reguláris $\mathcal{T}$ topológiának kitüntetett szomszédsági relációja:

(4.2.21) *Legyen* $\mathcal{T}$ *teljesen reguláris topológia,* Φ *az összes* $\mathcal{T}$*-folytonos függvényekből,* Φ^* *pedig az összes korlátos* $\mathcal{T}$*-folytonos függvényekből álló függvénycsalád. Ekkor* $\mathcal{S}_\Phi = \mathcal{S}_{\Phi^*} = \mathcal{S}$ *éppen* $\mathcal{T}$ *Čech—Stone-féle szomszédsági relációja.* $A \,\overline{\mathcal{S}}\, B$ *pontosan akkor áll, ha* A *és* B $\mathcal{T}$*-folytonos függvénnyel szétválasztható.*

Bizonyítás. Legyen a rövidség kedvéért $\mathcal{S}_1 = \mathcal{S}_\Phi$, $\mathcal{S}_2 = \mathcal{S}_{\Phi^*}$, $\mathcal{S}$ a $\mathcal{T}$ topológia Čech—Stone-féle szomszédsági relációja. $\Phi^* \subset \Phi$ miatt $\Sigma_{\Phi^*} \subset \Sigma_\Phi$, s így nyilván $\mathcal{S}_2 < \mathcal{S}_1 < \mathcal{S}$, hiszen (4.2.19) szerint $\mathcal{T}_{\mathcal{S}_1} = \mathcal{T}$, és $\mathcal{S}$ a legfinomabb szomszédsági reláció, amelyre $\mathcal{T}_\mathcal{S} = \mathcal{T}$. $A \,\overline{\mathcal{S}}\, B$ esetén (4.2.1) szerint van olyan $\mathcal{S}$-szomszédságtartó, és így (3.1.40) miatt $\mathcal{T}$-folytonos f, amely A-t és B-t szétválasztja. Másrészt, ha valamely $\mathcal{T}$-folytonos f szétválasztja A-t és B-t, akkor $0 \leqq f \leqq 1$ miatt $f \in \Phi^*$, és $(A \times B) \cap U_{\sigma_f, 1} = \emptyset$, tehát $A \,\overline{\mathcal{S}_2}\, B$. Így $\mathcal{S} < \mathcal{S}_2$, tehát $\mathcal{S}_2 = \mathcal{S}_1 = \mathcal{S}$, és $A \,\overline{\mathcal{S}}\, B$ pontosan akkor áll, ha A és B $\mathcal{T}$-folytonos függvénnyel szétválasztható. ∎

A szomszédsági relációknak uniform struktúrákkal való indukálására vonatkozó másik alapvető kérdésünkre a következő tétel segítségével adhatunk választ:

(4.2.22) *Legyen* $[E, \mathcal{S}]$ *szomszédsági tér, és* Φ *olyan* $\mathcal{S}$*-szomszédságtartó függvényekből álló korlátos függvénycsalád, hogy ha* $A \,\overline{\mathcal{S}}\, B$, *akkor* A *és* B Φ*-szétválasztható. Ekkor* $\mathcal{S} = \mathcal{S}_\Phi$.

Bizonyítás. (4.2.15) szerint $\mathcal{S}_\Phi < \mathcal{S}$. Viszont $A \,\overline{\mathcal{S}}\, B$ esetén van olyan $f \in \Phi$, amely A-t és B-t szétválasztja, amelyre tehát $(A \times B) \cap U_{\sigma_f, 1} = \emptyset$, Ezért $A \,\overline{\mathcal{S}_\Phi}\, B$, és $\mathcal{S} < \mathcal{S}_\Phi$. ∎

(4.2.1) alapján adódik ebből:

(4.2.23) *Ha* $\mathcal{S}$ *tetszőleges szomszédsági reláció, és* Φ *a korlátos* $\mathcal{S}$*-szomszédságtartó függvények családja,* Φ^* *pedig azoké, amelyekre* $x \in E$ *esetén* $0 \leqq f(x) \leqq 1$, *akkor* $\mathcal{S}_\Phi = \mathcal{S}_{\Phi^*} = \mathcal{S}$. ∎

A $\mathcal{S}_\Phi = \mathcal{S}_{\mathcal{U}_\Phi}$ egyenlőségből ezek után kiolvasható:

(4.2.24) *Minden szomszédsági reláció indukálható uniform struktúrával.* ∎

Sőt (4.2.13) alapján mindjárt hozzátehetjük:

(4.2.25) *Minden szomszédsági reláció indukálható teljesen korlátos uniform struktúrával.* ∎

(3.2.78) és (4.2.23) összefoglalásával a következőt mondhatjuk:

(4.2.26) *Egy E halmaz fölötti összes $\mathscr{S}$ szomszédsági relációk halmaza és az E fölötti összes $\mathcal{U}$ teljesen korlátos uniform struktúrák halmaza kölcsönösen egyértelmű kapcsolatban áll egymással. Az $\mathcal{U}$ teljesen korlátos uniform struktúrának megfelel a $\mathscr{S} = \mathscr{S}_{\mathcal{U}}$ szomszédsági reláció, s viszont a $\mathscr{S}$ szomszédsági relációnak megfelel az $\mathcal{U} = \mathcal{U}_{\Phi}$ teljesen korlátos uniform struktúra, ahol Φ az összes korlátos $\mathscr{S}$-szomszédságtartó függvények családja.* ∎

Ezzel tisztáztuk a másik alapvető kérdést is.

4.2.d. Uniform struktúrák indukálása eltérés-családdal. A harmadik alapvető kérdés tisztázása érdekében jegyezzük meg:

(4.2.27) *Legyen σ_i $(i \in I \neq \emptyset)$ az E halmazon értelmezett eltérések tetszőleges halmaza, és tegyük fel, hogy bármely $x, y \in E$ esetén a $\{\sigma_i(x, y): i \in I\}$ számhalmaz felülről korlátos. Ekkor*

$$\sigma(x, y) = \sup \{\sigma_i(x, y): i \in I\}$$

is eltérés E-n.

Bizonyítás. Csak a háromszög-egyenlőtlenség szorul igazolásra. De $x, y, z \in E$ esetén minden i-re

$$\sigma_i(x, z) \leqq \sigma_i(x, y) + \sigma_i(y, z) \leqq \sigma(x, y) + \sigma(y, z),$$

így egyúttal $\sigma(x, z) \leqq \sigma(x, y) + \sigma(y, z)$. ∎

(4.2.28) *Legyen σ eltérés E-n, $c > 0$, $\sigma' = \min(\sigma, c)$. Ekkor σ' is eltérés E-n.*

Bizonyítás. Ismét csak a háromszög-egyenlőtlenséget kell belátnunk. Azonban $\sigma'(x, z) \leqq \sigma'(x, y) + \sigma'(y, z)$ triviális, ha a jobb oldalon bármelyik tag c-vel egyenlő egyébként pedig a σ-ra vonatkozó egyenlőtlenségre lehet hivatkozni. ∎

(4.2.29) *Legyen $U = U_0, U_1, U_2, \ldots$ az E-beli környékeknek olyan sorozata, hogy $U_{n+1} \circ U_{n+1} \subset U_n$ $(n = 0, 1, 2, \ldots)$. Ekkor $\mathfrak{U} = \{U_n : n = 0, 1, 2, \ldots\}$ uniform bázis E-n; legyen $\mathcal{U}$ az általa generált uniform struktúra. Jelölje $<_n$ azt a relációt E részhalmazai között, amelyre $A <_n B$ pontosan akkor áll, ha $U_n(A) \subset B$. Legyen Φ a $(<_n)$ sorozathoz asszociált összes f függvények családja, és $x, y \in E$ esetén*

$$\sigma_U(x, y) = \sup \{\sigma_f(x, y): f \in \Phi\}. \tag{4.2.30}$$

Ekkor σ_U eltérés E-n, és $\mathcal{U} = \mathcal{U}_{\sigma_U}$.

Bizonyítás. $\mathfrak{U}$ uniform bázis voltához csak azt kell igazolnunk, hogy $\mathfrak{U}$ rács; ez azonban abból következik, hogy $U_{n+1} \subset U_{n+1} \circ U_{n+1} \subset U_n$ miatt $n < m$ esetén $U_n \supset U_m$. (4.1.2) szerint a $(<_n)$ sorozat eleget tesz a (4.1.3)-ban kirótt feltételeknek, úgyhogy lehet beszélni az e sorozathoz asszociált függvényekről. Minthogy ezeknek értékkészlete [0,1]-be esik, (4.2.27) értelmében a (4.2.30)-cal értelmezett σ_U csakugyan eltérés E-n.

Megmutatjuk, hogy $\frac{1}{2^n} < \varepsilon$ esetén $U_{\sigma_U, \varepsilon} \supset U_{n+2}$. Valóban, ha $(x, y) \notin U_{\sigma_U, \varepsilon}$, azaz ha $\sigma_U(x, y) \geqq \varepsilon$, akkor $\sigma_U(x, y) > \frac{1}{2^n}$ folytán van olyan $f \in \Phi$, hogy $\sigma_f(x, y) >$

$> \frac{1}{2^n}$, azaz hogy $|f(x)-f(y)| > \frac{1}{2^n}$. Csakhogy f a $(<_n)$ sorozathoz asszociált, és így (4.1.12) alapján $\{x\} <_{n+2} E - \{y\}$, azaz $(x, y) \notin U_{n+2}$.

Megmutatjuk másrészt, hogy $U_m \supset U_{\sigma_U, 2^{-m}}$ $(m = 0, 1, 2, \ldots)$. Valóban, ha $(x, y) \notin U_m$, akkor (4.1.3)-at a $\{<_n : n = m, m+1, \ldots\}$ rendszerre alkalmazhatjuk, hiszen $\{x\} <_m E - \{y\}$, és így létezik egy f függvény, amely a $<_m, <_{m+1}, <_{m+2}, \ldots$ sorozathoz asszociált, és amelyre $f(x) = 0, f(y) = 1$. Tekintsük a $g = \frac{1}{2^m} f$ függvényt. Ez asszociált a $<_0, <_1, <_2, \ldots$ sorozathoz. Egyrészt ugyanis $g(E) \subset \left[0, \frac{1}{2^m}\right] \subset [0,1] = \mathbf{I}$, másrészt $P, Q \subset \mathbf{I}$, $\rho_1(P, Q) > \frac{1}{2^n}$ $(n \in \mathbf{N})$ esetén vagy $n > m$, s akkor bármely $x' \in g^{-1}(P)$, $y' \in g^{-1}(Q)$ pontra $|g(x') - g(y')| > \frac{1}{2^n}$, tehát $|f(x') - f(y')| > \frac{1}{2^{n-m}}$, úgyhogy f-nek a $<_m, <_{m+1}, \ldots$ sorozathoz való asszociáltsága miatt (4.1.12) alapján $(x', y') \notin U_{m+n-m+2} = U_{n+2}$, azaz $g^{-1}(P) <_{n+2} E - g^{-1}(Q) = g^{-1}(\mathbf{I} - Q)$, vagy pedig $n \leqq m$, s akkor $g^{-1}(P)$ és $g^{-1}(Q)$ közül egyik üres, úgyhogy (O_1) és (O_3) miatt áll ismét $g^{-1}(P) <_{n+2} E - g^{-1}(Q) = g^{-1}(\mathbf{I} - Q)$. Mármost abból, hogy g a $(<_n)$ sorozathoz asszociált, azaz $g \in \Phi$, következik, hogy $\sigma_U(x, y) \geqq |g(x) - g(y)| = \frac{1}{2^m}$, azaz hogy $(x, y) \notin U_{\sigma_U, 2^{-m}}$. ▌

(4.2.31) *Legyen* $[E, \mathfrak{U}]$ *uniform tér,* $\mathfrak{U}$ *egy* $\mathfrak{U}$*-t generáló uniform bázis. Minden* $U \in \mathfrak{U}$ *környékhez keressünk olyan* $U_n \in \mathfrak{U}$ $(n = 0, 1, 2, \ldots)$ *környékeket, hogy* $U_0 = U$, $U_{n+1} \circ U_{n+1} \subset U_n$ $(n = 0, 1, 2, \ldots)$, *és legyen* σ_U *az* (U_n) *sorozatból a* (4.2.30) *képlet alapján készített eltérés, továbbá*

$$\Sigma = \{\sigma_U : U \in \mathfrak{U}\}.$$

Ekkor $\mathfrak{U} = \mathfrak{U}_\Sigma$.

Bizonyítás. (U_4) biztosítja, hogy minden $U \in \mathfrak{U}$ környékhez csakugyan készíthető a kívánt tulajdonságú (U_n) sorozat. $U \in \mathfrak{U}$ esetén (4.2.29) értelmében van olyan $\varepsilon > 0$, hogy $U \supset U_{\sigma_U, \varepsilon}$ (sőt a bizonyítás szerint $\varepsilon = 1$ is megfelel). Másrészt tekintsünk egy véges $\emptyset \neq \Sigma' \subset \Sigma$ részhalmazt, legyen mondjuk $\Sigma' = \{\sigma_i : i = 1, \ldots, m\}$, $\sigma_i = \sigma_{U^i}$, $U^i \in \mathfrak{U}$. Ekkor bármely $\varepsilon > 0$-ra

$$U_{\Sigma', \varepsilon} = \bigcap_{1}^{m} U_{\sigma_i, \varepsilon},$$

és (4.2.29) szerint minden i-hez található olyan n_i, hogy $U_{\sigma_i, \varepsilon} \supset U^i_{n_i}$ (sőt a bizonyítás szerint megfelel $n_i = n + 2$, hacsak $\frac{1}{2^n} < \varepsilon$). Így olyan $U \in \mathfrak{U}$-t választva, hogy $\bigcap_{1}^{m} U^i_{n_i} \supset U$, ami $U^i_{n_i} \in \mathfrak{U}$ és (U_2) miatt lehetséges, $U_{\Sigma', \varepsilon} \supset U$. ▌

Most már megadhatjuk a választ harmadik alapvető kérdésünkre is:

(4.2.32) *Minden uniform struktúra indukálható eltérés-családdal.* ▌

(4.2.29)-ből egy további nevezetes állítást is kiolvashatunk:

(4.2.33) *Egy $\mathcal{U}$ uniform struktúra pontosan akkor félmetrizálható, ha van $\mathcal{U}$-t generáló megszámlálható uniform bázis, és pontosan akkor metrizálható, ha van megszámlálható uniform bázisa és még szeparált is.*

Bizonyítás. Ha $\mathcal{U} = \mathcal{U}_\rho$, akkor $\{U_{\rho,\frac{1}{n}} : n \in \mathbf{N}\}$ nyilván $\mathcal{U}$-t generáló megszámlálható uniform bázis. Ha $\mathcal{U}$ metrizálható, akkor topológiája (2.5.5) és (3.2.21) szerint T_0-topológia, tehát $\mathcal{U}$ (3.2.24) miatt szeparált.

Legyen megfordítva $\{U_n' : n = 0, 1, 2, \dots\}$ $\mathcal{U}$-t generáló uniform bázis. Legyen $U = U_0 = U_0'$, és ha az $U_n \in \mathcal{U}$ környék már meg van választva, legyen $U_{n+1} \in \mathcal{U}$ olyan környék, hogy $U_{n+1} \circ U_{n+1} \subset U_n$ és $U_{n+1} \subset U_{n+1}'$; ilyen (U_2) és (U_4) felhasználásával nyilván található. Ekkor $\mathfrak{U} = \{U_n : n = 0, 1, 2, \dots\}$ is $\mathcal{U}$-t generálja, és így (4.2.29) folytán $\mathcal{U} = \mathcal{U}_{\sigma_U}$. Ha $\mathcal{U}$ még szeparált is, akkor topológiája T_0-topológia, tehát σ_U (2.5.5) szerint távolság. ▮

(4.2.34) *Legyen I megszámlálható, és $i \in I$ esetén $\mathcal{U}_i$ (fél)metrizálható uniform struktúra E-n. Ekkor $\mathcal{U} = \sup \{\mathcal{U}_i : i \in I\}$ is (fél)metrizálható.*

Bizonyítás. Ha $\mathfrak{U}_i$ megszámlálható uniform bázis $\mathcal{U}_i$ számára, akkor $\bigcup_{i \in I} \mathfrak{U}_i$ is megszámlálható, és a belőle alkotott véges metszetek (3.2.27) szerint megszámlálható uniform bázist alkotnak $\mathcal{U}$ számára. Így az állítás félmetrizálhatóságra vonatkozó része (4.2.33)-ból következik. Ha az $\mathcal{U}_i$-k metrizálhatók, sőt ha közülük csak egy is metrizálható, akkor ennek topológiája (2.5.5) szerint T_0-topológia, és $\mathcal{T}_{\mathcal{U}}$ (2.5.7) szerint ugyancsak az, tehát $\mathcal{U}$ metrizálható. ▮

4.2.e. Gyakorlatok. 1. Legyen ρ eltérés E-n, $A, B \subset E$, $\rho(A, B) = d > 0, f(x) = \rho(x, A)$, $g = \min \left(\frac{1}{d} f, 1\right)$. Mutassuk meg, hogy g $\mathcal{U}_\rho$-egyenletesen folytonos, és szétválasztja A-t és B-t.

2. Legyen $[E, \mathcal{U}]$ uniform tér, $A \,\overline{\mathcal{S}}_{\mathcal{U}}\, B$. Mutassuk meg, hogy A és B $\mathcal{U}$-egyenletesen folytonos függvénnyel szétválasztható.

[Ha $U \in \mathcal{U}$ olyan környék, hogy $(A \times B) \cap U = \emptyset$, és az $U_n \in \mathcal{U}$ környékek úgy vannak megválasztva, hogy $U_0 = U$, $U_{n+1} \circ U_{n+1} \subset U_n$, továbbá $C <_n D$ azt jelenti, hogy $U_n(C) \subset D$, akkor a $(<_n)$ sorozathoz asszociált f függvény $\mathcal{U}$-egyenletesen folytonos.]

3. Mutassuk meg, hogy ha egy topologikus térben a nyílt—zárt halmazok bázist alkotnak, akkor a tér teljesen reguláris.

4. Legyen $E = \mathbf{R}^m$, $\Phi = \{f_1, \dots, f_m\}$, ahol $f_i(x_1, \dots, x_m) = x_i$. Mutassuk meg, hogy $\mathcal{U}_\Phi = \mathcal{U}_{\rho_m}$, $\mathcal{T}_\Phi = \mathcal{E}^m$.

5. Legyen $E = \mathbf{R}^2, f(x, y) = x, g(x, y) = y, \mathcal{S} = \sup \{\mathcal{S}_{\sigma_f}, \mathcal{S}_{\sigma_g}\}$. Mutassuk meg, hogy f és g $\mathcal{S}$-szomszédságtartó függvény, de $f + g = h$, $\max(f, g) = k$, $\min(f, g) = m$, $fg = p$ nem $\mathcal{S}$-szomszédságtartó.

[$A = (-\infty, -1] \cup [1, +\infty)$ jelöléssel $h^{-1}(\{0\})$ és $h^{-1}(A)$ $\mathcal{S}$-szomszédos. Ugyanígy B-vel a páros, C-vel a páratlan számok halmazát jelölve, $k^{-1}(B) \,\mathcal{S}\, k^{-1}(C)$, ugyanis bármely $k^{-1}(B) = \bigcup_1^n B_i$, $k^{-1}(C) = \bigcup_1^{n'} C_j$ felbontás mellett egyik B_i tartalmaz $(2m, 2m-1)$, $(2n, 2n-1)$ alakú pontokat, ahol $m, n \in \mathbf{N}$, $m < n$, s akkor

$(2m, 2n-1) \in C_j$ valamely j-re. Hasonlóan $m^{-1}(B)\,\mathcal{S}\,m^{-1}(C)$. Végül $p^{-1}(\{0\})$ és $p^{-1}(\{1\})$ már a $\mathcal{S}$-nél finomabb $\mathcal{S}_{\rho_2}$-re nézve is szomszédos.]

6. Legyen $[E, \mathcal{S}]$ szomszédsági tér, f és g korlátos $\mathcal{S}$-szomszédságtartó függvény. Mutassuk meg, hogy $f+g$, $\max(f, g)$, $\min(f, g)$, fg is $\mathcal{S}$-szomszédságtartó.

[Φ-vel a korlátos, $\mathcal{S}$-szomszédságtartó függvények családját jelölve, f és g $\mathcal{U}_\Phi$-egyenletesen folytonos, és minden $\mathcal{U}_\Phi$-egyenletesen folytonos függvény $\mathcal{S}_\Phi = \mathcal{S}$-szomszédságtartó.]

7. Mutassuk meg, hogy (4.2.22) állítása akkor is igaz, ha Φ korlátossága helyett azt tesszük fel, hogy Φ csak egy nem-korlátos függvényt tartalmaz.

8. Mutassuk meg, hogy ha az $[E, \mathcal{S}]$ szomszédsági térben f és g szomszédságtartó függvény, és f korlátos, akkor $f+g$, $\max(f, g)$, $\min(f, g)$ is szomszédságtartó.

[Álljon Φ a $\mathcal{S}$-szomszédságtartó, korlátos függvényekből és g-ből; most is $\mathcal{S}_\Phi = \mathcal{S}$.]

9. Legyen az $E \neq \emptyset$ halmazon $\mathcal{T}$ topológia, $\mathcal{S}$ szomszédsági reláció, $\mathcal{U}$ uniform struktúra, és jelölje Φ_1, Φ_2, Φ_3 rendre a $\mathcal{T}$-folytonos, $\mathcal{S}$-szomszédságtartó, ill. $\mathcal{U}$-egyenletesen folytonos függvények osztályát. Legyen továbbá $\emptyset \neq A \subset E$, Φ_i' $(i = 1, 2, 3)$ pedig Φ_i-hez hasonlóan értelmezve, de $\mathcal{T} \mid A$, $\mathcal{S} \mid A$, ill. $\mathcal{U} \mid A$ felhasználásával. Bizonyítandó, hogy

(a) Ha $f \in \Phi_i'$, $|f| \leqq c \in \mathbf{R}$, akkor van olyan $g \in \Phi_i$, hogy $|g| \leqq \frac{1}{3}c$, és A-n $|f-g| \leqq \frac{2}{3}c$ (az $i=1$ esetben még azt is kikötve, hogy $\mathcal{T}$ normális és A zárt);

(b) Az előbbi feltevésekkel van olyan $g_k \in \Phi_i$ $(k \in \mathbf{N})$, hogy minden n-re $\left|f - \sum_1^n g_k\right| \leqq \left(\frac{2}{3}\right)^n c$ az A halmazon;

(c) Ugyanezen feltevésekkel van olyan $g \in \Phi_i$ is, hogy $g \mid A = f$, $|g| \leqq c$.

10. Legyen $[E, \mathcal{T}]$ normális tér, $\emptyset \neq A \subset E$ zárt, f $\mathcal{T} \mid A$-folytonos függvény. Mutassuk meg, hogy van olyan $\mathcal{T}$-folytonos g függvény, amelyre $g \mid A = f$.

[Legyen $f_0 = \operatorname{arctg} f$, g_0 olyan $\mathcal{T}$-folytonos függvény, hogy $g_0 \mid A = f_0$, $|g_0| \leqq \leqq \frac{\pi}{2}$, $B = \left\{x : |g_0(x)| = \frac{\pi}{2}\right\}$, h $\mathcal{T}$-folytonos, $0 \leqq h \leqq 1$, A-n $h = 1$, B-n $h = 0$, $g_1 = g \circ h$, és $g = \operatorname{tg} g_1$.]

11. Legyen $[E, \mathcal{T}]$ topologikus tér. Mutassuk meg, hogy a következő állítások egyenértékűek:

(a) $\mathcal{T}$ normális;

(b) Ha $A \subset E$ zárt, és f $\mathcal{T} \mid A$-folytonos függvény, akkor f-nek van $\mathcal{T}$-folytonos kiterjesztése;

(c) Ha $A \subset E$ zárt, és f $\mathcal{T} \mid A$-folytonos, korlátos függvény, akkor f-nek van $\mathcal{T}$-folytonos kiterjesztése.

12. Legyen E az $\mathbf{R}$-en értelmezett valós függvények halmaza, s ha $I \subset \mathbf{R}$ véges intervallum, $\varepsilon > 0$, akkor legyen $U_{I,\varepsilon}$ azoknak az $(f, g) \in E \times E$ pároknak a halmaza, amelyekre $t \in I$ esetén $|f(t) - g(t)| < \varepsilon$. Mutassuk meg, hogy

(a) az $U_{I,\varepsilon}$ halmazok uniform bázist alkotnak egy E fölötti $\mathcal{U}$ uniform struktúra számára;

(b) egy E-beli (f_n) sorozat pontosan akkor konvergál $\mathcal{T}_{\mathcal{U}}$-ra nézve egy $f \in E$ függvényhez, ha $f_n \to f$ minden véges $I \subset \mathbf{R}$ intervallumon egyenletesen;

(c) $\mathcal{U}$ metrizálható.

13. Legyen $\Sigma = \{\sigma_i : i \in \mathbf{N}\}$ megszámlálható eltérés-család E-n. Mutassuk meg, hogy $\mathcal{U}_\Sigma$ félmetrizálható, és adjunk meg olyan ρ eltérést, amelyre $\mathcal{U}_\rho = \mathcal{U}_\Sigma$.

$\left[\text{A } \sigma_i' = \min(\sigma_i, 1) \text{ jelöléssel } \rho = \sum_1^\infty 2^{-i}\sigma_i' \text{ megfelel.}\right]$

14. Mutassuk meg, hogy ha $\mathcal{U}$ félmetrizálható uniform struktúra, $\mathfrak{U}$ pedig $\mathcal{U}$-t generáló uniform bázis, akkor van olyan $U_n \in \mathfrak{U}$ $(n \in \mathbf{N})$, hogy $U_{n+1} \circ U_{n+1} \subset U_n$, és $\mathfrak{U}' = \{U_n : n \in \mathbf{N}\}$ is $\mathcal{U}$-t generálja.

15. Legyen $E \neq \emptyset$ tetszőleges halmaz, álljon $\mathfrak{B}$ E összes részhalmazaiból, és a **3.2.** alatti 8. feladat jelölésével legyen $\mathcal{U} = \mathcal{U}_{\Phi_1}$. Mutassuk meg, hogy

(a) ha E véges, akkor $\mathcal{U}$ metrizálható;

(b) ha E végtelen, akkor $\mathcal{U}$ nem metrizálható, de $\mathcal{S}_{\mathcal{U}}$ metrizálható.

16. Legyen Φ a **3.1.** alatti 3. feladat feltételeinek eleget tevő függvénycsalád, $\mathcal{S}$ pedig az ott értelmezett szomszédsági reláció. Mutassuk meg, hogy

(a) $\mathcal{S} < \mathcal{S}_\Phi$;

(b) ha Φ korlátos, akkor $\mathcal{S} = \mathcal{S}_\Phi$.

[Használjuk fel a **3.1.** alatti 16. feladat (a) állítását és (4.2.15)-öt.]

17. Legyen Φ a **3.1.** alatti 3. feladat feltételeinek eleget tevő korlátos függvénycsalád. Mutassuk meg, hogy minden korlátos $\mathcal{S}_\Phi$-szomszédságtartó függvény limesze egy Φ-ből vett egyenletesen konvergens sorozatnak.

[A 16. feladat mellett a **3.1.** 15. feladat állítására támaszkodhatunk.]

18. Mutassuk meg, hogy az előző feladat állítása teljesül akkor is, ha Φ olyan korlátos függvénycsalád E-n, amely tartalmazza az összes állandókat, s amelyre $f, g \in \Phi$ esetén $f + g \in \Phi$, $fg \in \Phi$.

[Legyen $\Phi^* \supset \Phi$ a Φ-ből vett egyenletesen konvergens sorozatok limeszfüggvényeinek rendszere; $f, g \in \Phi^*$ esetén $f + g \in \Phi^*$, $fg \in \Phi^*$, és $f \in \Phi^*$ esetén $|f| \in \Phi^*$, mert az $|u|$ függvényt egy véges intervallumon $\sum_0^n a_i u^i$ alakú függvények egyenletesen konvergens sorozatának limeszeként lehet előállítani. Így Φ^* eleget tesz a 17. feladat feltételeinek; ha f korlátos és $\mathcal{S}_\Phi$-szomszédságtartó, akkor $\mathcal{S}_{\Phi^*}$-szomszédságtartó is, tehát Φ^*-beli egyenletesen konvergens sorozatnak limesze, s akkor Φ-belinek is.]

19. Legyen $E = S \cup H \cup T \cup \{\alpha, \omega\} \subset \mathbf{R}^2$, ahol

$$S = \{p_{nk} : n \in Q,\ k \in \mathbf{N}\},\quad p_{nk} = \left(n,\ 1 - \frac{1}{k+1}\right),$$

$$H = \bigcup_{n \in Q} \bigcup_{k \in \mathbf{N}} H_{nk},$$

H_{nk} annak a két p_{nk}-ból kiinduló szakasznak az egyesítése, amelyek jobbra és balra az $y = -x$ és az $y = x$ egyenessel párhuzamosan az $y = 0$ egyenesig terjednek, magát p_{nk}-t hozzájuk nem számítva,

$T = \bigcup_{n \in P} T_n$,

$T_n = \left\{(n, y) : 0 \leqq y < \frac{1}{2}\right\}$,

$\alpha = (0, -1)$, $\omega = (0, 1)$,

P a páros egész számok, Q a páratlan egész számok halmaza.

Alkossa $z \in E$ környezetbázisát a következő alakú halmazok rendszere:

$z \in H_{nk}$ esetén $\{z\}$;

$z = p_{nk}$ esetén $\{z\} \cup (H_{nk} - F)$;

$z \in T$ esetén $\{z\} \cup \big(V(z) - F\big)$,

ahol F véges halmaz, $V(z)$ pedig a z középpontú, 2 hosszúságú vízszintes szakasznak E-be eső részét jelöli;

$z = \alpha$ esetén $\{z\} \cup \big(E \cap \big((-\infty, -t) \times \mathbf{R}\big)\big)$;

$z = \omega$ esetén $\{z\} \cup \big(E \cap \big((t, +\infty) \times \mathbf{R}\big)\big)$,

ahol t a pozitív valós számokon fut végig.

Mutassuk meg, hogy

(a) ezáltal E-n egy $\mathcal{T}$ T_3-topológia keletkezik;

(b) ha f $\mathcal{T}$-folytonos függvény E-n, akkor H_{nk} pontjaiban legfeljebb megszámlálható sok kivétellel $f(z) = f(p_{nk})$;

(c) ha Y_{nk} jelöli a (b) alatt említett kivételes pontok ordinátáinak halmazát, és $Y = \bigcup_{n \in Q} \bigcup_{k \in \mathbf{N}} Y_{nk}$, továbbá $y \in \left[0, \frac{1}{2}\right) - Y$, $q_n = (n, y)$ $(n \in P)$, akkor

$f(q_{n-1}) = f(q_{n+1}) = \lim_{k \to \infty} f(p_{nk}) \quad (n \in Q)$;

(d) $f(\alpha) = f(\omega)$;

(e) E nem teljesen reguláris.

V. TELJES ÉS KOMPAKT TEREK

5.1. TELJES UNIFORM TEREK

5.1.a. Cauchy-rácsok. Láttuk, hogy a teljesen reguláris topologikus terek — és csak ezek — felruházhatók olyan struktúrákkal (szomszédsági relációkkal és uniform struktúrákkal), amelyek a metrikus, ill. félmetrikus terek bizonyos tulajdonságait viszik át ezekre az általánosabb terekre. A félmetrikus tereknek egyik fontos tulajdonsága, hogy bennük egy sorozat konvergenciájára adható a limeszpont ismerete nélkül is szükséges feltétel. Vizsgáljuk meg, mi a helyzet ebben a vonatkozásban az uniform és a szomszédsági terek esetében; tudva azt, hogy általános topologikus terekben a sorozatok konvergenciájának szerepét a rácsok konvergenciája veszi át, sorozatok helyett általánosabban rácsokat fogunk tekinteni.

Vegyük először is észre, hogy egy $[E, \rho]$ félmetrikus térben az (x_n) pontsorozat pontosan akkor Cauchy-sorozat, ha minden $\varepsilon > 0$-hoz megadható olyan n_0, hogy $n, m \geqq n_0$ esetén $(x_n, x_m) \in U_\varepsilon$, ahol $U_\varepsilon = U_{\rho,\varepsilon}$ az $\mathcal{U}_\rho$ uniform struktúra ε-környékét jelöli. Ez még másképpen is megfogalmazható, ti. úgy, hogy minden $\varepsilon > 0$-hoz található az (x_n) sorozathoz tartozó $\mathfrak{r}$ sorozatrácsban egy U_ε-rendben kicsiny halmaz.

Ezekután kézenfekvő a következő definíció: Legyen $[E, \mathcal{U}]$ uniform tér, és $\mathfrak{r}$ E-beli rács. $\mathfrak{r}$-et **Cauchy-rács**nak ($\mathcal{U}$-Cauchy-rácsnak) mondjuk, ha minden $U \in \mathcal{U}$ környékhez található egy U-rendben kicsiny $R \in \mathfrak{r}$ halmaz. Az $(x_n) \subset E$ sorozatot akkor nevezzük **Cauchy-sorozat**nak, ha a megfelelő sorozatrács Cauchy-rács. Világos, hogy itt az összes $U \in \mathcal{U}$ környékek helyett elég volna egy $\mathcal{U}$-t generáló $\mathfrak{U}$ uniform bázishoz tartozó környékekről beszélni; ebből látszik, hogy az $[E, \rho]$ félmetrikus tér Cauchy-sorozatai azonosak az $\mathcal{U}_\rho$-Cauchy-sorozatokkal.

Ha még megállapodunk abban, hogy egy $[E, \mathcal{U}]$ **uniform tér**ben (vagy egy $[E, \mathcal{S}]$ **szomszédsági tér**ben) a rácsok **konvergenciáj**án a $\mathcal{T}_\mathcal{U}$ (ill. $\mathcal{T}_\mathcal{S}$) topológiára vonatkozó konvergenciát értjük, látható, hogy az imént bevezetett definíció megfelel a kívánt célra:

(5.1.1) *Ha $\mathfrak{r}$ konvergens rács az $[E, \mathcal{U}]$ uniform térben, akkor Cauchy-rács.*

Bizonyítás. Tegyük fel, hogy $\mathfrak{r} \to x$. Adott $U \in \mathcal{U}$ környékhez legyen $U_1 \in \mathcal{U}$ olyan környék, hogy $U_1 \circ U_1 \subset U$. Ekkor van olyan $R \in \mathfrak{r}$, hogy $R \subset U_1(x)$. Ez az R U-rendben kicsiny, hiszen $y, z \in R$ esetén $(y, x) \in U_1$, $(x, z) \in U_1$, tehát $(y, z) \in U$. ∎

Áttekintjük a Cauchy-rácsok néhány tulajdonságát.

(5.1.2) *Legyen $[X, \mathcal{U}_1]$ és $[Y, \mathcal{U}_2]$ uniform tér, és $f: X \to Y$ egyenletesen folytonos. Ha $\mathfrak{r}$ X-beli Cauchy-rács, akkor $f(\mathfrak{r})$ Y-beli Cauchy-rács.*

Bizonyítás. Ha $U_2 \in \mathcal{U}_2$-höz $U_1 \in \mathcal{U}_1$ olyan környék, hogy $(x, y) \in U_1$ esetén $(f(x), f(y)) \in U_2$, és $R \in \mathfrak{r}$ U_1-rendben kicsiny, akkor $f(R)$ U_2-rendben kicsiny. ∎

Speciálisan:

(5.1.3) *Ha $\mathcal{U}_1$ és $\mathcal{U}_2$ uniform struktúra E-n, és $\mathcal{U}_1 < \mathcal{U}_2$, akkor minden $\mathcal{U}_2$-Cauchy-rács egyúttal $\mathcal{U}_1$-Cauchy-rács is.* ∎

Ezzel szemben:

(5.1.4) *Legyen $\mathcal{U}_i$ $(i \in I \neq \emptyset)$ uniform struktúra E-n, és $\mathcal{U} = \sup \{\mathcal{U}_i : i \in I\}$. Ha $\mathfrak{r}$ minden $i \in I$-re $\mathcal{U}_i$-Cauchy-rács, akkor $\mathcal{U}$-Cauchy-rács is.*

Bizonyítás. Elég $\mathcal{U}$-ból az $U = \bigcap_{1}^{n} U_{i_k}$ alakú környékeket tekinteni, ahol $U_{i_k} \in \mathcal{U}_{i_k}$, és $i_k \in I$ $(k = 1, \ldots, n)$. Ha $R_k \in \mathfrak{r}$ U_{i_k}-rendben kicsiny, és $R \in \mathfrak{r}$, $R \subset \bigcap_{1}^{n} R_k$, akkor R U-rendben kicsiny. ∎

(5.1.2)-nek fontos kiegészítése:

(5.1.5) *Legyen $f : X \to Y$, és $\mathcal{U}$ uniform struktúra Y-on. Egy X-beli $\mathfrak{r}$ rács pontosan akkor $f^{-1}(\mathcal{U})$-Cauchy-rács, ha $f(\mathfrak{r})$ $\mathcal{U}$-Cauchy-rács.*

Bizonyítás. A szokásos $g(x, y) = (f(x), f(y))$ jelöléssel tetszőleges $U \in \mathcal{U}$ környékre áll, hogy R pontosan akkor $g^{-1}(U)$-rendben kicsiny, ha $f(R)$ U-rendben kicsiny. ∎

Speciálisan:

(5.1.6) *Legyen $[E, \mathcal{U}]$ uniform tér, $\emptyset \neq E_0 \subset E$. Egy E_0-beli rács pontosan akkor $(\mathcal{U} \mid E_0)$-Cauchy-rács, ha $\mathcal{U}$-Cauchy-rács.* ∎

(5.1.7) *Egy Cauchy-rácsnál finomabb rács maga is Cauchy-rács. Ekvivalens rácsok egyszerre Cauchy-rácsok.*

Bizonyítás. U-rendben kicsiny halmaz részhalmaza is U-rendben kicsiny. ∎

(5.1.8) *Legyen $[E, \rho]$ félmetrikus tér. Egy E-beli $\mathfrak{r}$ rács pontosan akkor Cauchy-rács (azaz $\mathcal{U}_\rho$-Cauchy-rács), ha minden $\varepsilon > 0$-hoz van olyan $R \in \mathfrak{r}$, amelynek átmérője $< \varepsilon$.*

Bizonyítás. Ha $\delta(R) < \varepsilon$, akkor R U_ε-rendben kicsiny. Viszont ha $0 < \varepsilon_1 < \varepsilon$, és R U_{ε_1}-rendben kicsiny, akkor $\delta(R) \leqq \varepsilon_1 < \varepsilon$. ∎

(5.1.8)-ból, (5.1.3)-ból és (5.1.4)-ből (3.2.28) alapján következik:

(5.1.9) *Legyen Σ eltérés-család E-n. Egy E-beli $\mathfrak{r}$ rács pontosan akkor $\mathcal{U}_\Sigma$-Cauchy-rács, ha minden $\sigma \in \Sigma$-hoz és $\varepsilon > 0$-hoz van olyan $R \in \mathfrak{r}$, amelynek σ-átmérője $< \varepsilon$.* ∎

5.1.b. Teljes uniform terek. A teljes félmetrikus tér definíciójának mintájára állapodjunk meg abban, hogy az $[E, \mathcal{U}]$ **uniform teret** és az $\mathcal{U}$ **uniform struktúrát teljes**nek mondjuk, hogy ha minden $\mathcal{U}$-Cauchy-rács $\mathcal{T}_{\mathcal{U}}$-konvergens.

Nem magától értetődő, hogy a definíció félmetrikus terekre alkalmazva egyenértékű a korábbival, ugyanis a félmetrikus tér teljességét nem Cauchy-rácsok, hanem Cauchy-sorozatok segítségével értelmeztük. Mégis igaz:

(5.1.10) *Egy $[E\ \rho]$ félmetrikus tér pontosan akkor teljes, ha az $\mathcal{U}_\rho$ uniform struktúra teljes.*

Bizonyítás. Ha $\mathcal{U}_\rho$ teljes, és (x_n) Cauchy-sorozat ρ-ra nézve, akkor a hozzátartozó sorozatrács $\mathcal{U}_\rho$-Cauchy-rács, tehát konvergens, s vele az (x_n) sorozat is konvergens.

Tegyük most fel, hogy minden Cauchy-sorozat konvergens $[E, \rho]$-ban, s legyen $\mathfrak{r}$ $\mathcal{U}_\rho$-Cauchy-rács. Minden $n \in \mathbf{N}$-re legyen $R_n \in \mathfrak{r}$ $\frac{1}{n}$-nél kisebb átmérőjű (5.1.8) felhasználásával, s legyen $x_n \in R_n$ tetszőleges pont. Az (x_n) sorozat Cauchy-sorozat, ugyanis, ha $\varepsilon > 0$-hoz $n_0 > \frac{2}{\varepsilon}$, akkor $n, m \geqq n_0$ esetén $R_n \cap R_m \neq \emptyset$ miatt nyilván $\rho(x_n, x_m) \leqq \delta(R_n) + \delta(R_m) < \frac{1}{n} + \frac{1}{m} < \varepsilon$. Így $x_n \to x$, és ekkor $\mathfrak{r} \to x$ is áll, hiszen ha adott $\varepsilon > 0$-hoz n olyan nagy, hogy $\rho(x_n, x) < \frac{\varepsilon}{2}$, és $\frac{1}{n} < \frac{\varepsilon}{2}$, akkor nyilván $R_n \subset S(x, \varepsilon)$. ∎

(5.1.11) *Legyen $[X, \mathcal{U}_1]$ és $[Y, \mathcal{U}_2]$ uniform tér, $f: X \to Y$ bijekció, f $(\mathcal{U}_1, \mathcal{U}_2)$-egyenletesen folytonos, és f^{-1} $(\mathcal{T}_{\mathcal{U}_2}, \mathcal{T}_{\mathcal{U}_1})$-folytonos. Ha $\mathcal{U}_2$ teljes, akkor $\mathcal{U}_1$ is teljes.*

Bizonyítás. Ha $\mathfrak{r}$ $\mathcal{U}_1$-Cauchy-rács, akkor (5.1.2) szerint $f(\mathfrak{r})$ $\mathcal{U}_2$-Cauchy-rács, tehát $f(\mathfrak{r}) \to y \in Y$ $\mathcal{T}_{\mathcal{U}_2}$-re nézve. Ekkor $f^{-1}(f(\mathfrak{r})) = \mathfrak{r} \to f^{-1}(y) \in X$ $\mathcal{T}_{\mathcal{U}_1}$-re nézve (2.6.13) folytán. ∎

Ennek speciális esetei:

(5.1.12) *Ha $[X, \mathcal{U}_1]$ és $[Y, \mathcal{U}_2]$ egymással unimorf uniform terek s egyikük teljes, akkor a másik is teljes.* ∎

(5.1.13) *Ha $\mathcal{U}_1$ és $\mathcal{U}_2$ uniform struktúra E-n, $\mathcal{U}_1 < \mathcal{U}_2$, és $\mathcal{T}_{\mathcal{U}_1} = \mathcal{T}_{\mathcal{U}_2}$, továbbá $\mathcal{U}_1$ teljes, akkor $\mathcal{U}_2$ is teljes.* ∎

(5.1.12)-nek más irányú általánosítása:

(5.1.14) *Legyen $f: X \to Y$ szuperjekció, és $\mathcal{U}$ teljes uniform struktúra Y-on. Ekkor $f^{-1}(\mathcal{U})$ is teljes.*

Bizonyítás. Ha $\mathfrak{r}$ $f^{-1}(\mathcal{U})$-Cauchy-rács, akkor (5.1.5) szerint $f(\mathfrak{r})$ $\mathcal{U}$-Cauchy-rács, tehát $f(\mathfrak{r}) \to y \in Y$ $\mathcal{T}_{\mathcal{U}}$-ra nézve. Legyen $x \in X$ olyan, hogy $f(x) = y$. Ekkor $\mathfrak{r} \to x$ $f^{-1}(\mathcal{T}_{\mathcal{U}})$-ra nézve (2.6.40) szerint. Azonban (3.2.43) értelmében $f^{-1}(\mathcal{T}_{\mathcal{U}}) = \mathcal{T}_{f^{-1}(\mathcal{U})}$. ∎

(5.1.15) *Legyen $[E, \mathcal{U}]$ teljes uniform tér, és $\emptyset \neq E_0 \subset E$ $\mathcal{T}_{\mathcal{U}}$-zárt. Ekkor $\mathcal{U} | E_0$ is teljes.*

Bizonyítás. Ha $\mathfrak{r}$ E_0-beli $(\mathcal{U} | E_0)$-Cauchy-rács, akkor $\mathfrak{r}$ (5.1.6) szerint $\mathcal{U}$-Cauchy-rács is, és így $\mathfrak{r} \to x \in E$ $\mathcal{T}_{\mathcal{U}}$-ra nézve. (2.4.2) szerint $x \in E_0$, és akkor $\mathfrak{r} \to x$ $(\mathcal{T}_{\mathcal{U}} | E_0)$-ra nézve is (2.4.8) értelmében. Azonban (3.2.35) szerint $\mathcal{T}_{\mathcal{U}} | E_0 = \mathcal{T}_{\mathcal{U} | E_0}$. ∎

Megfordítva:

(5.1.16) *Legyen $[E, \mathcal{U}]$ szeparált uniform tér, $\emptyset \neq E_0 \subset E$, és $\mathcal{U} | E_0$ teljes. Ekkor E_0 $\mathcal{T}_{\mathcal{U}}$-zárt.*

Bizonyítás. (2.4.2) értelmében elég azt belátni, hogy ha $\mathfrak{r}$ E_0-beli rács, és $\mathfrak{r} \to x \in E$ $\mathcal{T}_{\mathcal{U}}$-ra nézve, akkor $x \in E_0$. Csakhogy ekkor (5.1.1) szerint $\mathfrak{r}$ $\mathcal{U}$-Cauchy-rács, és (5.1.6) szerint $(\mathcal{U} | E_0)$-Cauchy-rács is. Ezért $\mathfrak{r} \to y \in E_0$ $\mathcal{T}_{\mathcal{U} | E_0}$-ra, azaz (3.2.35) értelmében $(\mathcal{T}_{\mathcal{U}} | E_0)$-ra nézve, és (2.4.8) miatt $\mathcal{T}_{\mathcal{U}}$-ra nézve is. Minthogy (3.2.24) és (3.1.15) folytán $\mathcal{T}_{\mathcal{U}}$ T_3-topológia s annál inkább T_2-topológia is, azért (2.5.19) szerint $x = y \in E_0$. ∎

5.1.c. Gyakorlatok. 1. Legyen $[E, \mathcal{U}]$ a **4.2.** alatti 12. feladatban vizsgált uniform tér, E_0 az **R**-en folytonos függvények, E_1 az **R**-en korlátos függvények,

E_2 az **R**-en folytonos és egy véges intervallumon kívül eltűnő függvények halmaza. Mutassuk meg, hogy $\mathcal{U}$ és $\mathcal{U} \mid E_0$ teljes, $\mathcal{U} \mid E_1$ és $\mathcal{U} \mid E_2$ azonban nem teljes.

[Legyen $f_n(t) = t$, ha $|t| \leqq n$, $f_n(t) = 2n - t$, ha $n \leqq t \leqq 2n$, $f_n(t) = -2n - t$, ha $-2n \leqq t \leqq -n$, és $f_n(t) = 0$, ha $|t| \geqq 2n$.]

2. Legyen $\mathcal{U}$ a **4.2.** alatti 15. feladatban szereplő uniform struktúra. Igazoljuk, hogy egy E-beli $\mathfrak{z}$ szűrő pontosan akkor $\mathcal{U}$-Cauchy-szűrő, ha minden $A \subset E$ halmazra vagy $A \in \mathfrak{z}$, vagy $E - A \in \mathfrak{z}$.

3. Legyen E végtelen halmaz, és álljon Φ E-nek összes olyan véges felbontásaiból, amelyekben a tagok egy kivételével végesek. Tekintsük a **3.2.** alatti 8. feladat jelölésével az $\mathcal{U} = \mathcal{U}_\Phi$ uniform struktúrát. Mutassuk meg, hogy

(a) $A \overline{\mathcal{S}}_{\mathcal{U}} B$ pontosan akkor áll, ha $A \cap B = \emptyset$, és A és B közül legalább az egyik véges;

(b) $\mathcal{T}_{\mathcal{U}}$ azonos E diszkrét topológiájával;

(c) $\mathcal{U}$ teljesen korlátos;

(d) Egy E-beli $\mathfrak{z}$ szűrő pontosan akkor $\mathcal{U}$-Cauchy-szűrő, ha minden véges $A \subset E$ halmazra vagy $A \in \mathfrak{z}$, vagy $E - A \in \mathfrak{z}$;

(e) Az összes $\mathcal{U}$-Cauchy-szűrők a következők: az $\dot{x}$ $(x \in E)$ alapszűrők, és a véges komplementumú halmazokból álló szűrők;

(f) $\mathcal{U}$ nem teljes.

4. Legyen E a $H \neq \emptyset$ halmazon értelmezett függvények összessége, továbbá $t \in H$, $\varepsilon > 0$ esetén $U_{t,\varepsilon} = \{(f, g) : |f(t) - g(t)| < \varepsilon\} \subset E \times E$. Mutassuk meg, hogy

(a) $\{U_{t,\varepsilon} : t \in H,\ \varepsilon > 0\}$ uniform szubbázis, amely egy $\mathcal{U}$ uniform struktúrát generál;

(b) $\mathcal{T}_{\mathcal{U}}$ azonos a pontonkénti konvergencia topológiájával;

(c) ha $\mathfrak{r}$ $\mathcal{U}$-Cauchy-rács, akkor bármely $t \in H$ mellett az $R_t = \{f(t) : f \in R\}$ jelöléssel $\mathfrak{r}_t = \{R_t : R \in \mathfrak{r}\}$ $\mathcal{U}_{\rho_1}$-Cauchy-rács **R**-en;

(d) ha $\mathfrak{r}$ $\mathcal{U}$-Cauchy-rács, és $t \in H$ esetén $\mathfrak{r}_t \to g(t)$ $(\mathcal{E})$, akkor $\mathfrak{r} \to g$ $(\mathcal{T}_{\mathcal{U}})$;

(e) $\mathcal{U}$ teljes;

(f) ha H nem-megszámlálható, akkor $\mathcal{U}$ nem metrizálható.

5. Adjunk példát olyan $[X, \mathcal{U}_1]$ és $[Y, \mathcal{U}_2]$ uniform terekre és $f : X \to Y$ leképezésre, amely nem egyenletesen folytonos, de ha $\mathfrak{r}$ $\mathcal{U}_1$-Cauchy-rács, akkor $f(\mathfrak{r})$ $\mathcal{U}_2$-Cauchy-rács.

[$X = Y = \mathbf{R}$, $\mathcal{U}_1 = \mathcal{U}_2 = \mathcal{U}_{\rho_1}$, $f(x) = x^2$.]

5.2. KOMPAKT SZOMSZÉDSÁGI TEREK

5.2.a. Komprimált rácsok. Rácsok konvergenciájára szomszédsági terekben is lehet szükséges feltételt adni. Ebből a célból állapodjunk meg a következő elnevezésben: ha $[E, \mathcal{S}]$ szomszédsági tér, az E-beli $\mathfrak{r}$ rácsot **komprimált**nak ($\mathcal{S}$-komprimáltnak) mondjuk, ha bármely két $\mathcal{S}$-távoli A és B halmazhoz található olyan

$R \in \mathfrak{r}$, amely A és B közül legfeljebb az egyiket metszi, vagyis ha abból, hogy minden $R \in \mathfrak{r}$ halmazra $A \cap R \neq \emptyset \neq B \cap R$, következik, hogy $A \mathcal{S} B$.

Most már könnyen belátható:

(5.2.1) *Szomszédsági térben minden konvergens rács komprimált.*

Bizonyítás. Ha az $[E, \mathcal{S}]$ térben $\mathfrak{r} \to x$, és $A \overline{\mathcal{S}} B$, akkor (P_8) értelmében van olyan P és Q, hogy $P \cap Q = \emptyset$, $A \overline{\mathcal{S}} E - P$, $B \overline{\mathcal{S}} E - Q$. Az $x \notin P$ és $x \notin Q$ relációk közül legalább az egyik teljesül, mondjuk $x \notin P$. Ekkor (P_1) és (P_3) folytán $\{x\} \overline{\mathcal{S}} A$, úgyhogy $E - A \in \mathfrak{p}(\{x\})$, $E - A$ $\mathcal{S}_g$-környezete x-nek (3.1.11) értelmében, és valamely $R \in \mathfrak{r}$ halmazra $R \subset E - A$. Hasonlóan, ha $x \notin Q$, akkor van olyan $R \in \mathfrak{r}$, hogy $R \subset E - B$. ∎

A Cauchy-rácsok analógiájára igazolható:

(5.2.2) *Legyen $[X, \mathcal{S}]$ és $[Y, \mathfrak{Q}]$ szomszédsági tér, $f: X \to Y$ szomszédságtartó. Ha $\mathfrak{r}$ komprimált rács X-ben, akkor $f(\mathfrak{r})$ komprimált rács Y-ban.*

Bizonyítás. A, $B \subset Y$, $A \overline{\mathfrak{Q}} B$ esetén (3.1.38) szerint $f^{-1}(A) \overline{\mathcal{S}} f^{-1}(B)$, tehát alkalmas $R \in \mathfrak{r}$ halmazra például $R \cap f^{-1}(B) = \emptyset$, azaz $f(R) \cap B = \emptyset$. ∎

Speciálisan:

(5.2.3) *Ha $\mathcal{S}_1$ és $\mathcal{S}_2$ szomszédsági reláció E-n, $\mathcal{S}_1 < \mathcal{S}_2$, és a $\mathfrak{r}$ rács $\mathcal{S}_2$-komprimált, akkor $\mathfrak{r}$ $\mathcal{S}_1$-komprimált is.* ∎

(5.2.4) *Legyen $\mathcal{S}_i$ $(i \in I \neq \emptyset)$ szomszédsági reláció E-n, és $\mathcal{S} = \sup \{\mathcal{S}_i : i \in I\}$. Ha $\mathfrak{r}$ minden $i \in I$-re $\mathcal{S}_i$-komprimált, akkor $\mathcal{S}$-komprimált is.*

Bizonyítás. $A \overline{\mathcal{S}} B$ esetén

$$A = \bigcup_{1}^{p} A_j, \qquad B = \bigcup_{1}^{q} B_k,$$

és minden j-hez és k-hoz van olyan $i(j, k) \in I$, hogy $A_j \overline{\mathcal{S}}_{i(j,k)} B_k$. Legyen $R_{jk} \in \mathfrak{r}$ olyan halmaz, amely A_j és B_k közül legfeljebb az egyiket metszi, és $R \in \mathfrak{r}$ olyan, hogy $R \subset \bigcap_{j=1}^{p} \bigcap_{k=1}^{q} R_{jk}$. Ha $A \cap R \neq \emptyset$, akkor egy j indexre $A_j \cap R \neq \emptyset$, s akkor erre a j-re és minden k-ra $A_j \cap R_{jk} \neq \emptyset$, tehát $B_k \cap R_{jk} = \emptyset$, és annál inkább $B_k \cap R = \emptyset$. Így $B \cap R = \emptyset$. ∎

(5.2.5) *Legyen $f: X \to Y$, $\mathcal{S}$ szomszédsági reláció Y-on. Egy X-beli $\mathfrak{r}$ rács pontosan akkor $f^{-1}(\mathcal{S})$-komprimált, ha $f(\mathfrak{r})$ $\mathcal{S}$-komprimált.*

Bizonyítás. Ha $f(\mathfrak{r})$ $\mathcal{S}$-komprimált, és $A \overline{f^{-1}(\mathcal{S})} B$, akkor $f(A) \overline{\mathcal{S}} f(B)$ miatt van olyan $R \in \mathfrak{r}$, hogy például $f(R) \cap f(A) = \emptyset$. Ekkor $R \cap A = \emptyset$. Ha viszont $\mathfrak{r}$ $f^{-1}(\mathcal{S})$-komprimált, és $C \overline{\mathcal{S}} D$, akkor $f^{-1}(C) \overline{f^{-1}(\mathcal{S})} f^{-1}(D)$ miatt van olyan $R \in \mathfrak{r}$, hogy például $R \cap f^{-1}(C) = \emptyset$, s akkor $f(R) \cap C = \emptyset$. ∎

Speciálisan:

(5.2.6) *Legyen $[E, \mathcal{S}]$ szomszédsági tér, $\emptyset \neq E_0 \subset E$. Egy E_0-beli $\mathfrak{r}$ rács pontosan akkor $(\mathcal{S} \mid E_0)$-komprimált, ha $\mathcal{S}$-komprimált.* ∎

(5.2.7) *Komprimált rácsnál finomabb rács maga is komprimált. Ekvivalens rácsok egyszerre komprimáltak.* ∎

A komprimált és Cauchy-rácsok között létesítenek kapcsolatot a következő tételek:

(5.2.8) *Ha* $[E, \mathfrak{U}]$ *uniform tér, és* $\mathfrak{r}$ $\mathfrak{U}$*-Cauchy-rács, akkor* $\mathcal{S}_{\mathfrak{U}}$*-komprimált is.*

Bizonyítás. $A \,\overline{\mathcal{S}}_{\mathfrak{U}}\, B$ esetén alkalmas $U \in \mathfrak{U}$ környékre $(A \times B) \cap U = \emptyset$. Legyen $R \in \mathfrak{r}$ U-rendben kicsiny. Ha $A \cap R \neq \emptyset$, akkor $R \subset U(A)$ folytán $B \cap R = \emptyset$. ∎

(5.2.9) *Ha* $\mathfrak{U}$ *teljesen korlátos uniform struktúra E-n, és* $\mathfrak{r}$ $\mathcal{S}_{\mathfrak{U}}$*-komprimált rács, akkor* $\mathfrak{r}$ $\mathfrak{U}$*-Cauchy-rács is.*

Bizonyítás. Adott $U \in \mathfrak{U}$ környékhez legyen az $U_1 \in \mathfrak{U}$ környék úgy megválasztva, hogy $U_1 \circ U_1 \circ U_1 \subset U$, és legyen $E = \bigcup_1^n E_i$, ahol E_i U_1-rendben kicsiny. Minden olyan (i, j) indexpárra, amelyre $E_i \,\overline{\mathcal{S}}_{\mathfrak{U}}\, E_j$, legyen $R_{ij} \in \mathfrak{r}$ olyan halmaz, amely E_i és E_j közül legfeljebb az egyiket metszi, s legyen $R \in \mathfrak{r}$, $R \subset \bigcap R_{ij}$. Ha $x, y \in R$, s mondjuk $x \in E_i$, $y \in E_j$, akkor tehát $E_i \,\mathcal{S}_{\mathfrak{U}}\, E_j$, és így van oly $u \in E_i$, $v \in E_j$, hogy $(u, v) \in U_1$. Minthogy még $(x, u) \in U_1$ és $(v, y) \in U_1$ is áll, azért $(x, y) \in U$. Eszerint R U-rendben kicsiny. ∎

Meg fogjuk mutatni, hogy az (5.2.9)-ben kimondott állítás jellemzi a teljesen korlátos uniform struktúrákat. Ehhez azonban szükségünk lesz egy később is fontos szerepet játszó segédeszközre.

5.2.b. Ultraszűrők. Legyen E nem-üres halmaz. E-beli **ultraszűrő**nek nevezzük az E-beli maximális szűrőt, vagyis az olyan E-beli $\mathfrak{u}$ szűrőt, hogy ha $\mathfrak{z}$ is E-beli szűrő, és $\mathfrak{z} \supset \mathfrak{u}$, akkor $\mathfrak{z} = \mathfrak{u}$. Ilyenre egyszerű példát adni:

(5.2.10) *Ha* $x \in E$, *akkor az* $\dot{x}$ *alapszűrő E-beli ultraszűrő.*

Bizonyítás. Ha $\mathfrak{z} \supset \dot{x}$ E-beli szűrő, és $S \in \mathfrak{z}$, akkor $\{x\} \in \dot{x} \subset \mathfrak{z}$ miatt $x \in S$, azaz $S \in \dot{x}$. ∎

Az E-beli alapszűrőket **triviális ultraszűrő**knek nevezzük, a többiek a **nem-triviális ultraszűrő**k.

(5.2.11) *Ha* $\mathfrak{u}$ *E-beli ultraszűrő, és* $A \subset E$, *akkor vagy* $A \in \mathfrak{u}$, *vagy* $E - A \in \mathfrak{u}$.

Bizonyítás. Ha $E - A \notin \mathfrak{u}$, akkor minden $U \in \mathfrak{u}$ halmazra $U \cap A \neq \emptyset$. Így (2.1.21) szerint $\mathfrak{u}\,(\cap)\,\{A\}$ E-beli rács, amely (2.1.6) értelmében belefoglalható egy E-beli $\mathfrak{z}$ szűrőbe. Természetesen $\mathfrak{z} \supset \mathfrak{u}$, úgyhogy $\mathfrak{z} = \mathfrak{u}$, s így $A = E \cap A \in \mathfrak{z}$ miatt $A \in \mathfrak{u}$. ∎

Megfordítva:

(5.2.12) *Ha* $\mathfrak{u}$ *E-beli szűrő, és minden* $A \subset E$ *halmazra vagy* $A \in \mathfrak{u}$, *vagy* $E - A \in \mathfrak{u}$, *akkor* $\mathfrak{u}$ *E-beli ultraszűrő.*

Bizonyítás. Ha $\mathfrak{z} \supset \mathfrak{u}$ E-beli szűrő, és $S \in \mathfrak{z}$ akkor $S \cap (E - S) = \emptyset$ miatt $E - S \notin \mathfrak{z}$, így $E - S \notin \mathfrak{u}$, tehát $S \in \mathfrak{u}$, és $\mathfrak{z} = \mathfrak{u}$. ∎

(5.2.11) általánosításaként:

(5.2.13) *Ha* $\mathfrak{u}$ *E-beli ultraszűrő,* $A \in \mathfrak{u}$, *és* $A = \bigcup_1^n A_i$, *akkor legalább egy i-re* $A_i \in \mathfrak{u}$.

Bizonyítás. Ellenkező esetben $E - A_i \in \mathfrak{u}$ volna minden i-re, s így $E - A = \bigcap_1^n (E - A_i) \in \mathfrak{u}$, ami ellentmond $A \in \mathfrak{u}$-nak. ∎

(5.2.14) *Ha* $\mathfrak{u}$ *E-beli ultraszűrő,* $\mathfrak{c}$ *E-beli centrált rendszer, és* $\mathfrak{c} \supset \mathfrak{u}$, *akkor* $\mathfrak{c} = \mathfrak{u}$.

Bizonyítás. (2.1.9) szerint $\mathfrak{c}$ belefoglalható egy E-beli $\mathfrak{z}$ szűrőbe, s erre $\mathfrak{z} = \mathfrak{u}$. ∎

Alapvető jelentőségű mármost a következő tétel:

(5.2.15) *Minden E-beli centrált rendszer belefoglalható egy E-beli ultraszűrőbe.*

Bizonyítás. Ismét (2.1.9)-re hivatkozva elég megmutatni, hogy minden E-beli szűrő belefoglalható egy E-beli ultraszűrőbe. Ez azonban az (1.1.28) Kuratowski—Zorn-féle lemmából következik, mert az E-beli szűrők rendszere induktív. Valóban, ha $\{\mathfrak{z}_i : i \in I\}$ a tartalmazásra nézve rendezett, és minden $\mathfrak{z}_i$ E-beli szűrő, akkor $\mathfrak{z} = \bigcup_{i \in I} \mathfrak{z}_i$ is E-beli szűrő, hiszen $S \in \mathfrak{z}$, $S \subset S' \subset E$ esetén $S \in \mathfrak{z}_i$ valamely i-re, s akkor $S' \in \mathfrak{z}_i \subset \mathfrak{z}$, továbbá $S_1, S_2 \in \mathfrak{z}$ esetén $S_1 \in \mathfrak{z}_i$, $S_2 \in \mathfrak{z}_j$ alkalmas i-re és j-re, és például $\mathfrak{z}_i \subset \mathfrak{z}_j$ esetén $S_1, S_2 \in \mathfrak{z}_j$, tehát $S_1 \cap S_2 \in \mathfrak{z}_j \subset \mathfrak{z}$. ∎

Az ultraszűrőknek a szomszédsági terek elméletében való alkalmazása a következő észrevételen alapszik:

(5.2.16) *Egy E-beli szűrő pontosan akkor ultraszűrő, ha E diszkrét szomszédsági relációjára nézve komprimált.*

Bizonyítás. Ha $\mathfrak{u}$ ultraszűrő, és $A, B \subset E$, $A \cap B = \emptyset$, akkor (5.2.11) szerint vagy $A \in \mathfrak{u}$, vagy $E - A \in \mathfrak{u}$, tehát van $\mathfrak{u}$-ban vagy B-t, vagy A-t nem metsző halmaz. Ha viszont az $\mathfrak{u}$ szűrő a diszkrét szomszédsági relációra nézve komprimált, akkor A és $E - A$ távolisága miatt van benne vagy olyan halmaz, amely A-nak része, vagy olyan, amely $(E - A)$-nak része, s akkor vagy $A \in \mathfrak{u}$, vagy $E - A \in \mathfrak{u}$, úgyhogy (5.2.12) alapján $\mathfrak{u}$ ultraszűrő. ∎

Ebből (5.2.3) alapján adódik:

(5.2.17) *Ha* $[E, \mathfrak{S}]$ *szomszédsági tér, és* $\mathfrak{u}$ *E-beli ultraszűrő, akkor* $\mathfrak{u}$ *komprimált.* ∎

Most már igazolhatjuk a teljesen korlátos uniform struktúrák ígért jellemzését:

(5.2.18) *Legyen* $[E, \mathcal{U}]$ *uniform tér. A következő állítások egyenértékűek:*

(a) $\mathcal{U}$ *teljesen korlátos;*

(b) *a* $\mathfrak{S}_{\mathcal{U}}$*-komprimált rácsok azonosak az* $\mathfrak{U}$*-Cauchy-rácsokkal;*

(c) *minden* $\mathfrak{S}_{\mathcal{U}}$*-komprimált rács* $\mathcal{U}$*-Cauchy rács;*

(d) *minden E-beli ultraszűrő* $\mathcal{U}$*-Cauchy-szűrő.*

Bizonyítás. (a) $\Rightarrow$ (b): (5.2.8) és (5.2.9).

(b) $\Rightarrow$ (c): Evidens.

(c) $\Rightarrow$ (d): (5.2.17)-ből adódik.

(d) $\Rightarrow$ (a): Tegyük fel, hogy teljesül (d), de $\mathcal{U}$ nem teljesen korlátos. Ekkor van olyan $U \in \mathcal{U}$ környék, hogy E nem bontható véges számú U-rendben kicsiny halmaz egyesítésére. Tekintsük most az $E - \bigcup_{1}^{n} A_i$ alakú halmazokat, ahol $n \in \mathbf{N}$, és A_i U-rendben kicsiny minden i-re. Feltevésünk szerint ezek nem-üresek, és két ilyen alakú halmaz metszete is ilyen alakú, úgyhogy ezek a halmazok egy $\mathfrak{r}$ rácsot alkotnak. (5.2.15) szerint $\mathfrak{r}$ belefoglalható egy $\mathfrak{u}$ ultraszűrőbe. Ez $\mathcal{U}$-Cauchy-szűrő, és így van benne egy U-rendben kicsiny $R \in \mathfrak{u}$ halmaz. Ekkor azonban $E - R \in \mathfrak{r} \subset \mathfrak{u}$, ami lehetetlen. ∎

5.2.c. Kompakt szomszédsági terek. A teljes uniform terekhez hasonló fogalmat értelmezhetünk a szomszédsági terek körében is: egy $[E, \mathcal{S}]$ **szomszédsági teret** (vagy egy $\mathcal{S}$ **szomszédsági relációt**) **kompakt**nak mondunk, ha minden komprimált rács konvergens. Az $[E, \mathcal{U}]$ **uniform teret** és az $\mathcal{U}$ **uniform struktúrát** akkor mondjuk **kompakt**nak, ha a $\mathcal{S}_{\mathcal{U}}$ szomszédsági reláció kompakt.

Tekintettel arra, hogy az $[E, \mathcal{U}]$ uniform térben és az $[E, \mathcal{S}_{\mathcal{U}}]$ szomszédsági térben a konvergencia ugyanazt jelenti (ti. a $\mathcal{T}_{\mathcal{U}} = \mathcal{T}_{\mathcal{S}_{\mathcal{U}}}$ topológiára nézve való konvergenciát), (5.2.8) alapján kimondhatjuk:

(5.2.19) *Minden kompakt uniform tér teljes.* ∎

(5.2.18) viszont a következőt vonja maga után:

(5.2.20) *Egy teljesen korlátos uniform tér pontosan akkor kompakt, ha teljes.* ∎

Erre való tekintettel szokás a „teljesen korlátos uniform tér" és „teljesen korlátos uniform struktúra" elnevezés helyett a **prekompakt** uniform tér, ill. struktúra elnevezést is használni. A következőkben mi is erre a rövidebb elnevezésre térünk rá.

(5.2.18)-ból mindjárt a következő fontos állítást is kiolvashatjuk:

(5.2.21) *Minden kompakt uniform tér prekompakt.*

Bizonyítás. Ha $[E, \mathcal{U}]$ kompakt, és $\mathfrak{r}$ $\mathcal{S}_{\mathcal{U}}$-komprimált, akkor $\mathfrak{r}$ konvergens, tehát (5.1.1) szerint $\mathcal{U}$-Cauchy-rács. Így (5.2.18) alkalmazható. ∎

(5.2.19)—(5.2.21) összefoglalásaképpen:

(5.2.22) *Egy uniform tér pontosan akkor kompakt, ha prekompakt és teljes.* ∎

(5.2.23) *Egy kompakt szomszédsági reláció pontosan egy uniform struktúrával indukálható.*

Bizonyítás. (5.2.22) szerint egy $\mathcal{S}$ kompakt szomszédsági relációt csak prekompakt uniform struktúra indukálhat, ilyen pedig (4.2.26) értelmében pontosan egy található. ∎

5.2.d. Rácsok torlódási pontjai. Nevezetes tény, hogy egy szomszédsági tér vagy egy uniform tér kompakt volta csupán a tér topológiájától függ. Ez nagymértékben meglepő, hiszen a kompaktság definíciójában a komprimált rács fogalma, tehát egy, a tér szomszédsági relációjával szorosan összefüggő fogalom szerepelt.

Az említett nevezetes tény kimutatása érdekében a következő definíciót vezetjük be: ha $[E, \mathcal{T}]$ topologikus tér, az E-beli $\mathfrak{r}$ **rács torlódási pont**ján az olyan $x \in E$ pontot értjük, amelynek minden környezete metszi a rács minden halmazát. Egy (x_n) **pontsorozat torlódási pont**ján a hozzátartozó sorozatrács torlódási pontját értjük.

Könnyen belátható a következő állítás:

(5.2.24) *Legyen $[E, \mathcal{T}]$ topologikus tér, $x \in E$, $\mathfrak{v}(x)$ és $\mathfrak{b}(x)$ az x pont környezetszűrője, ill. egy környezetbázisa, $\mathfrak{r}$ pedig E-beli rács. A következő állítások egyenértékűek:*

(a) *x torlódási pontja $\mathfrak{r}$-nek;*

(b) $\emptyset \notin \mathfrak{v}(x)\,(\cap)\,\mathfrak{r}$;

(c) $\emptyset \notin \mathfrak{b}(x)\,(\cap)\,\mathfrak{r}$;

(d) *van $\mathfrak{r}$-nél finomabb x-hez tartó rács;*

(e) $x \in \bigcap\,\{\bar{R}\colon R \in \mathfrak{r}\}$.

Bizonyítás. (a) $\Rightarrow$ (b) $\Rightarrow$ (c): Evidens.

(c) $\Rightarrow$ (d): $\mathfrak{r}' = \mathfrak{b}(x)\,(\cap)\,\mathfrak{r}$ (2.1.21) szerint $\mathfrak{r}$-nél finomabb rács, és $\mathfrak{r}' > \mathfrak{b}(x) \sim \mathfrak{v}(x)$ miatt $\mathfrak{r}' \to x$.

(d) $\Rightarrow$ (e): Ha $\mathfrak{r}' > \mathfrak{r}$, és $\mathfrak{r}' \to x$, akkor $R \in \mathfrak{r}$ és $V \in \mathfrak{v}(x)$ esetén van olyan $R_1' \in \mathfrak{r}'$, hogy $R_1' \subset V$, továbbá olyan $R_2' \in \mathfrak{r}'$, hogy $R_2' \subset R$, s végül olyan $R_3' \in \mathfrak{r}'$, hogy $\emptyset \neq R_3' \subset R_1' \cap R_2' \subset V \cap R$. Eszerint $x \in \bar{R}$ minden $R \in \mathfrak{r}$-re.

(e) $\Rightarrow$ (a): Evidens. ∎

(5.2.24)-ből azonnal következik:

(5.2.25) *Ha $\mathfrak{r} \to x$, akkor x torlódási pontja az $\mathfrak{r}$ rácsnak.* ∎

(5.2.26) *Ha x torlódási pontja az $\mathfrak{r}$ rácsnak, és $\mathfrak{r}_1 < \mathfrak{r}$, akkor x torlódási pontja $\mathfrak{r}_1$-nek is.* ∎

(5.2.27) *Legyen $[E, \mathcal{T}]$ topologikus tér, $\emptyset \neq E_0 \subset E$, $\mathfrak{r}$ E_0-beli rács, $x \in E_0$. Az x pont pontosan akkor $(\mathcal{T} \mid E_0)$-torlódási pontja $\mathfrak{r}$-nek, ha $\mathcal{T}$-torlódási pontja.*

Bizonyítás. Feltevéseink mellett $\mathfrak{v}(x)\,(\cap)\,\mathfrak{r} = \mathfrak{v}(x)\,(\cap)\,\{E_0\}\,(\cap)\,\mathfrak{r}$. ∎

Fontos az (5.2.25) állítás következő megfordítása:

(5.2.28) *Ha $\mathfrak{r}$ komprimált rács az $[E, \mathcal{S}]$ szomszédsági térben (speciálisan, ha $\mathfrak{r}$ Cauchy-rács az $[E, \mathcal{U}]$ uniform térben), és x torlódási pontja $\mathfrak{r}$-nek, akkor $\mathfrak{r} \to x$.*

Bizonyítás. Ha V x-nek egy környezete, azaz ha $x\,\bar{\mathcal{S}}\,E - V$, akkor ($P_6$) szerint van olyan P és Q, hogy $P \cap Q = \emptyset$, $\{x\}\,\bar{\mathcal{S}}\,E - P$, $E - V\,\bar{\mathcal{S}}\,E - Q$. Így P is környezete x-nek, s ezért metsz minden $R \in \mathfrak{r}$ halmazt. $P \subset E - Q\,\bar{\mathcal{S}}\,E - V$ miatt van az $\mathfrak{r}$-beli halmazok között olyan, amely P és $E - V$ közül legfeljebb az egyiket, tehát csak P-t metszi: $R \in \mathfrak{r}$, és $R \subset V$. ∎

Hasonló ehhez a következő állítás:

(5.2.29) *Legyen $[E, \mathcal{T}]$ topologikus tér, $\mathfrak{u}$ E-beli ultraszűrő, x $\mathfrak{u}$-nak torlódási pontja. Ekkor $\mathfrak{u} \to x$.*

Bizonyítás. Legyen V x-nek tetszőleges környezete. Ekkor (5.2.11) szerint vagy $V \in \mathfrak{u}$, vagy $E - V \in \mathfrak{u}$. Az utóbbi ellentmond annak, hogy x torlódási pontja $\mathfrak{u}$-nak. ∎

Most már igazolhatjuk a következő tételt:

(5.2.30) *Egy szomszédsági tér pontosan akkor kompakt, ha benne minden rácsnak van torlódási pontja.*

Bizonyítás. Ha $[E, \mathcal{S}]$ kompakt, és $\mathfrak{r}$ E-beli rács, akkor (5.2.15) szerint van $\mathfrak{r}$-t tartalmazó (s így $\mathfrak{r}$-nél finomabb) E-beli $\mathfrak{u}$ ultraszűrő. (5.2.17) szerint $\mathfrak{u}$ komprimált, tehát konvergens: $\mathfrak{u} \to x$. (5.2.24) értelmében x torlódási pontja $\mathfrak{r}$-nek.

Ha viszont minden E-beli rácsnak van torlódási pontja, és $\mathfrak{r}$ komprimált rács, akkor (5.2.28) szerint $\mathfrak{r}$ konvergál bármelyik torlódási pontjához. ∎

Az (5.2.30) tétel valóban azt mutatja, hogy egy szomszédsági tér kompaktsága csakis a tér topológiáján múlik, hiszen egy rács torlódási pontjának létezése a pontok környezetszűrőinek megadásával egyértelműen determinálva van. Sőt (5.2.30) kapcsán mód nyílik arra, hogy topologikus terek kompaktságát úgy értelmezzük, hogy a szomszédsági terek korábban definiált kompaktságával összhangban maradjunk: nevezzük az $[E, \mathcal{T}]$ **topologikus ter**et és a $\mathcal{T}$ **topológiát kompakt**nak, ha minden E-beli rácsnak van torlódási pontja. Ezzel a terminológiával (5.2.30) így fejezhető ki:

(5.2.31) *Az* $[E, \mathcal{S}]$ *szomszédsági tér pontosan akkor kompakt, ha a* $\mathcal{T}_{\mathcal{S}}$ *topológia kompakt.* ▮

5.2.e. Gyakorlatok. 1. Legyen $\mathcal{S}$ a **3.1.** alatti 2. feladatban értelmezett szomszédsági reláció. Mutassuk meg, hogy egy E-beli $\mathfrak{z}$ szűrő pontosan akkor komprimált, ha mar $P \in \mathfrak{H}$ esetén vagy $P \in \mathfrak{z}$, vagy $E - P \in \mathfrak{z}$.

2. Legyen Φ korlátos függvénycsalád E-n. Mutassuk meg, hogy egy E-beli $\mathfrak{r}$ rács pontosan akkor $\mathcal{S}_\Phi$-komprimált, ha minden $f \in \Phi$-hez és $\varepsilon > 0$-hoz van olyan $R \in \mathfrak{r}$, hogy $\delta(f(R)) < \varepsilon$.

[$\mathcal{U}_\Phi$ prekompakt, tehát $\mathfrak{r}$ pontosan akkor $\mathcal{S}_\Phi$-komprimált, ha $\mathcal{U}_\Phi$-Cauchy-rács, azaz ha $\mathcal{U}_\Sigma$-Cauchy-rács, ahol $\Sigma = \{\sigma_f : f \in \Phi\}$.]

3. Legyen ρ eltérés E-n, $\mathfrak{r}$ E-beli rács. Mutassuk meg, hogy $\mathfrak{r}$ pontosan akkor $\mathcal{S}_\rho$-komprimált, ha minden korlátos, $\mathcal{U}_\rho$-egyenletesen folytonos f függvényhez és $\varepsilon > 0$-hoz van olyan $R \in \mathfrak{r}$, hogy $\delta(f(R)) < \varepsilon$.

[$\mathcal{S}_\rho = \mathcal{S}_\Phi$, ahol Φ a korlátos, $\mathcal{S}_\rho$-szomszédságtartó, azaz $\mathcal{U}_\rho$-egyenletesen folytonos függvényekből áll.]

4. Legyen E végtelen halmaz, $\mathcal{S}$ ennek diszkrét szomszédsági relációja, $\mathcal{U}$ a $\mathcal{S}$-t indukáló prekompakt uniform struktura. Mutassuk meg, hogy

(a) az $\mathcal{U}$-Cauchy-szűrők azonosak az E-beli ultraszűrőkkel;

(b) $\mathcal{U}$ nem kompakt, s így nem is teljes;

(c) ha egy E-beli (x_n) sorozat nem $\mathcal{T}_\mathcal{U}$-konvergens, akkor van olyan $A \subset E$ halmaz, hogy végtelen sok n-re lesz $x_n \in A$, és végtelen sok n-re lesz $x_n \in E - A$ is;

(d) minden $\mathcal{S}$-komprimált, azaz $\mathcal{U}$-Cauchy-sorozat $\mathcal{T}_\mathcal{U}$-konvergens;

(e) $\mathcal{U}$ nem metrizálható, de $\mathcal{S}$ metrizálható. (Vö. **4.2.** 15. feladat.)

5. Legyen $[E, \mathcal{U}]$ az **5.1.** alatti 4. feladatban vizsgált uniform tér, és álljon $E_0 \subset E$ azokból az f függvényekből, amelyekre $t \in H$ esetén $|f(t)| \leqq 1$. Mutassuk meg, hogy

(a) E_0 $\mathcal{T}_\mathcal{U}$-zárt;

(b) $\mathcal{U} | E_0$ teljes;

(c) ha $t_i \in H$, $\varepsilon_i > 0$ $(i = 1, \dots, n)$, és $U = (E_0 \times E_0) \cap \bigcap_1^n U_{t_i, \varepsilon_i}$, továbbá $m \in \mathbf{N}$ olyan, hogy $\frac{1}{m} < \min(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n)$, végül $I_k = \left[\frac{k}{m}, \frac{k+1}{m}\right]$ $(k \in \mathbf{N})$, akkor az

$$A_{k_1, \dots, k_n} = \{f : f(t_i) \in I_{k_i} \quad (i = 1, \dots, n)\}$$

jelöléssel $A_{k_1, \dots, k_n}$ U-rendben kicsiny, és

$$E_0 = \bigcup_{k_1 = -m}^{m-1} \dots \bigcup_{k_n = -m}^{m-1} A_{k_1, \dots, k_n};$$

(d) $\mathcal{U} | E_0$ prekompakt;

(e) $\mathcal{U} | E_0$ kompakt.

6. Legyen $[E, \mathcal{T}]$ topologikus tér, $\mathfrak{r}$ E-beli rács, $x \in E$. Mutassuk meg, hogy

(a) $\mathfrak{r} \to x$ pontosan akkor áll, ha x minden $\mathfrak{r}$-nél finomabb rácsnak torlódási pontja;

(b) ha $\mathfrak{T}$ kompakt, és $\mathfrak{r}$-nek nincs x-től különböző torlódási pontja, akkor $\mathfrak{r} \to x$;

(c) ha $[E, \mathfrak{T}]$ T_2-tér, és $\mathfrak{r} \to x$, akkor $\mathfrak{r}$-nek x az egyetlen torlódási pontja.

7. Adjunk példát teljes, de nem kompakt uniform térre.

[$[\mathbf{R}, \mathcal{U}_{\rho_1}]$ ilyen.]

8. Mutassuk meg, hogy minden végtelen E halmazban van nem-triviális ultraszűrő.

[Ha $x_n \in E$, $x_n \neq x_m$ ($n \neq m$, $n, m \in \mathbf{N}$), $R_k = \{x_n\colon n \geqq k\}$, akkor tekintsünk egy olyan ultraszűrőt, amely a $\mathfrak{r} = \{R_k\colon k \in \mathbf{N}\}$ rácsot tartalmazza.]

9. Legyen $\mathfrak{u}$ E-beli ultraszűrő, $A \in \mathfrak{u}$. Mutassuk meg, hogy $\mathfrak{u}\,(\cap)\,\{A\}$ A-beli ultraszűrő.

10. Adjunk meg az $[\mathbf{R}, \mathcal{U}_{\rho_1}]$ uniform térben olyan komprimált szűrőt, amely nem Cauchy-szűrő.

[Tekintsünk olyan ultraszűrőt, amely tartalmazza az $\{[x, +\infty)\colon x \in \mathbf{R}\}$ rácsot.]

5.3. KOMPAKT TOPOLOGIKUS TEREK

5.3.a. Különféle jellemzések. Mindenekelőtt megmutatjuk, hogy az előbb megfogalmazott definíció mellett a kompakt topologikus terek további nevezetes tulajdonságaikkal is jellemezhetők:

(5.3.1) *Legyen $[E, \mathfrak{T}]$ topologikus tér, és jelöljük ki minden $x \in E$ pontnak egy $\mathfrak{b}(x)$ környezetbázisát, valamint $\mathfrak{T}$-nek egy $\mathfrak{S}$ szubbázisát. A következő állítások egyenértékűek egymással, vagyis azzal, hogy a tér kompakt:*

(a) *Minden E-beli rácsnak van torlódási pontja;*

(b) *Minden E-beli $\mathfrak{c}$ centrált rendszerre*

$$\bigcap \{\bar{C}\colon C \in \mathfrak{c}\} \neq \emptyset;$$

(c) *E-nek minden nyílt befedéséből kiválasztható véges befedés;*

(d) *Ha minden $x \in E$-hez megadunk egy $V_x \in \mathfrak{b}(x)$ halmazt, akkor a $\{V_x\colon x \in E\}$ befedésből kiválasztható egy véges befedés;*

(e) *E-nek minden $\mathfrak{S}$-beli halmazokból álló befedéséből kiválasztható véges befedés;*

(f) *Minden E-beli ultraszűrő konvergens.*

Rögtön egy kissé általánosabb tételt bizonyítunk be.

Állapodjunk meg e célból abban, hogy az $[E, \mathfrak{T}]$ topologikus térben a $K \subset E$ halmazt **kompakt**nak mondjuk, ha $K = \emptyset$, vagy pedig $K \neq \emptyset$ és a $\mathfrak{T} \mid K$ topológia kompakt. Ekkor a következő mondható:

(5.3.2) *Legyen $[E, \mathfrak{T}]$ topologikus tér, $\mathfrak{S}$ szubbázis $\mathfrak{T}$ számára, minden $x \in E$ pontnak jelöljük ki egy $\mathfrak{b}(x)$ környezetbázisát, s legyen $\emptyset \neq K \subset E$. A következő állítások egyenértékűek egymással:*

(a) *K kompakt;*

(b) *Minden K-beli rácsnak van K-ban $\mathfrak{T}$-torlódási pontja;*

(c) *Ha* $\mathfrak{c}$ *K-beli centrált rendszer, akkor*

$$K \cap \bigcap \{\bar{C}\colon C \in \mathfrak{c}\} \neq \emptyset,$$

ahol $\bar{C}$ *C-nek* $\mathfrak{T}$*-lezárását jelöli;*

(d) *K-nak minden* $\mathfrak{T}$*-nyílt befedéséből kiválasztható K-nak véges befedése;*

(e) *Ha minden* $x \in K$*-hoz megadunk egy* $V_x \in \mathfrak{b}(x)$ *halmazt, akkor a* $\{V_x\colon x \in K\}$ *befedésből kiválasztható K-nak véges befedése;*

(f) *K-nak minden* $\mathfrak{S}$*-beli halmazokból álló befedéséből kiválasztható K-nak véges befedése;*

(g) *Minden K-beli ultraszűrő* $\mathfrak{T}$*-konvergál egy K-beli ponthoz.*

Bizonyítás. (a)$\Rightarrow$(b): Ha $\mathfrak{r}$ K-beli rács, és $x \in K$ $\mathfrak{r}$-nek $(\mathfrak{T} \mid K)$-torlódási pontja, akkor x (5.2.27) szerint $\mathfrak{T}$-torlódási pont is.

(b) $\Rightarrow$ (c): (2.1.9) szerint $\mathfrak{c}$ belefoglalható egy K-beli $\mathfrak{r}$ rácsba, és ha $x \in K$ ennek $\mathfrak{T}$-torlódási pontja, akkor (5.2.24) szerint

$$x \in K \cap \bigcap \{\bar{R}\colon R \in \mathfrak{r}\} \subset K \cap \bigcap \{\bar{C}\colon C \in \mathfrak{c}\}.$$

(c) $\Rightarrow$ (d): Legyen $\mathfrak{G}$ K-nak $\mathfrak{T}$-nyílt befedése, és tegyük fel, hogy ebből nem választható ki véges befedés. Legyen $\mathfrak{r}$ a $K - \bigcup_1^n G_i$ alakú halmazok összessége, ahol $n \in \mathrm{N}$, és $G_i \in \mathfrak{G}$ $(i = 1, \ldots, n)$. A feltevés szerint ezek a halmazok nemüresek, és két ilyen alakú halmaz metszete is ilyen alakú; így $\mathfrak{r}$ K-beli rács, s még inkább centrált rendszer. Legyen

$$x \in K \cap \bigcap \{\bar{R}\colon R \in \mathfrak{r}\} = \bigcap \{K \cap \bar{R}\colon R \in \mathfrak{r}\} = \bigcap \{R\colon R \in \mathfrak{r}\},$$

hiszen az $\mathfrak{r}$-beli halmazok $(\mathfrak{T} \mid K)$-zártak. Ha $x \in G \in \mathfrak{G}$, akkor $K - G \in \mathfrak{r}$: ellentmondás.

(d) $\Rightarrow$ (e): Ha $x \in K$ esetén $V_x \in \mathfrak{b}(x)$, akkor az $\{\operatorname{int} V_x\colon x \in K\}$ rendszer K-nak $\mathfrak{T}$-nyílt befedése. Így $K \subset \bigcup_1^n \operatorname{int} V_{x_i}$ alkalmas x_i pontokra, s annál inkább $K \subset \bigcup_1^n V_{x_i}$.

(e) $\Rightarrow$ (f): Ha $K \subset \bigcup_{i \in I} S_i$, $S_i \in \mathfrak{S}$, akkor minden $x \in K$ ponthoz található egy $i(x) \in I$, amelyre $x \in S_{i(x)}$, és egy $V_x \in \mathfrak{b}(x)$, amelyre $x \in V_x \subset S_{i(x)}$. Legyen $K \subset \bigcup_1^n V_{x_j}$. Ekkor $K \subset \bigcup_1^n S_{i(x_j)}$.

(f) $\Rightarrow$ (g): Ha a K-beli $\mathfrak{u}$ ultraszűrő nem tartana K-nak egy pontjához sem, akkor minden $x \in K$ ponthoz található volna olyan B_x halmaz, amely véges számú $\mathfrak{S}$-beli halmaz metszete, $x \in B_x$, és $K \cap B_x \notin \mathfrak{u}$. (5.2.11) szerint $K - B_x \in \mathfrak{u}$, és ha $B_x = \bigcap_1^n S_i$, $S_i \in \mathfrak{S}$, akkor $K - B_x = \bigcup_1^n (K - S_i)$, és (5.2.13) folytán egy i indexre $K - S_i \in \mathfrak{u}$. Eszerint minden $x \in K$ ponthoz található egy $S_x \in \mathfrak{S}$ úgy, hogy $x \in S_x$,

$K - S_x \in \mathfrak{u}$. Legyen $K \subset \bigcup_1^m S_{x_i}$, azaz $D = \bigcap_1^m (K - S_{x_i}) = \emptyset$; ez ellentmond annak, hogy $D \in \mathfrak{u}$.

(g) $\Rightarrow$ (a): Ha $\mathfrak{r}$ K-beli rács, akkor (5.2.15) szerint van $\mathfrak{r}$-et tartalmazó K-beli $\mathfrak{u}$ ultraszűrő. Ha $\mathfrak{u} \to x \in K$ $\mathcal{T}$-re nézve, akkor (5.2.24) szerint x $\mathcal{T}$-torlódási pontja, és (5.2.27) szerint egyúttal $(\mathcal{T} \mid K)$-torlódási pontja is $\mathfrak{r}$-nek. ▌

Világos, hogy (5.3.2)-ből (5.3.1) a $K = E$ választással következik. ▌

(5.3.2)-ből az (1.2.35) Borel-féle tétel alapján rögtön következik:

(5.3.3) *Az* $[\mathbf{R}^m, \mathcal{E}^m]$ *térben minden korlátos, zárt halmaz kompakt.* ▌

További példa kompakt térre az $[E, \mathcal{F}_E]$ tér tetszőleges $E \neq \emptyset$ alaphalmaz esetén. Valóban, ebben a térben minden nem-üres, nyílt halmaz komplementuma véges, úgyhogy egy nyílt befedésből egy tagot kiválasztva, a még kimaradó véges számú pont a befedés további véges számú tagjával befedhető.

5.3.b. Kompakt terek és halmazok tulajdonságai.

(5.3.4) *Egy kompakt halmaz minden zárt részhalmaza is kompakt.*

Bizonyítás. Legyen az $[E, \mathcal{T}]$ topologikus térben K kompakt, $F \subset K$ zárt. Ha $\mathfrak{r}$ F-beli rács, akkor van (5.3.2) szerint K-ban fekvő x torlódási pontja, amelyre (5.2.24) szerint

$$x \in \bigcap \{\bar{R}\colon R \in \mathfrak{r}\} \subset F. \ ▌$$

Megfordítva:

(5.3.5) *T_2-térben minden kompakt részhalmaz zárt.*

Bizonyítás. Legyen az $[E, \mathcal{T}]$ T_2-térben K kompakt. Ha $\mathfrak{r}$ K-beli rács, és $\mathfrak{r} \to x \in E$, akkor $\mathfrak{r}$-nek van (5.3.2) szerint K-beli y torlódási pontja. Ha $x \neq y$, akkor x-nek és y-nak diszjunkt V és W környezetét felvéve, minden $R \in \mathfrak{r}$-re $R \cap W \neq \emptyset$, viszont alkalmas $R \in \mathfrak{r}$-re $R \subset V$: ellentmondás. Így $x = y$, és K (2.4.2) alapján zárt. ▌

(5.3.6) *Véges számú kompakt halmaz egyesítése is kompakt.*

Bizonyítás. Ha K_i $(i = 1, \ldots, n)$ kompakt az $[E, \mathcal{T}]$ térben, és $K = \bigcup_1^n K_i$, akkor K minden nyílt befedéséből minden i-re kiválasztható véges számú halmaz, amely K_i-t befedi; ezek együtt befedik K-t. ▌

(5.3.7) *Félmetrikus térben minden kompakt halmaz korlátos.*

Bizonyítás. Ha K kompakt az $[E, \rho]$ félmetrikus térben, akkor (5.2.31) szerint a $\mathcal{S}_\rho \mid K$ szomszédsági reláció is kompakt, tehát (5.2.21) szerint $\mathcal{U}_\rho \mid K$ teljesen korlátos, akkor pedig K korlátos. ▌

(5.3.3), (5.3.5) és (5.3.7) alapján kimondható:

(5.3.8) *Az* $[\mathbf{R}^m, \mathcal{E}^m]$ *térben egy halmaz pontosan akkor kompakt, ha korlátos és zárt.* ▌

(5.3.9) *Ha egy* $\mathfrak{r}$ *rácsban van kompakt halmaz, akkor* $\mathfrak{r}$*-nek van torlódási pontja.*

Bizonyítás. Legyen $K \in \mathfrak{r}$ kompakt. (2.1.21) szerint $\mathfrak{r} \, (\cap) \, \{K\}$ $\mathfrak{r}$-nél finomabb K-beli rács, amelynek (5.3.2) szerint van torlódási pontja; ugyanez (5.2.26) szerint $\mathfrak{r}$-nek is torlódási pontja. ▌

A kompakt topologikus tér definíciójából könnyen kiolvasható, hogy kompakt térrel homeomorf tér is kompakt. Ennél azonban sokkal több is igaz:

(5.3.10) *Kompakt topologikus tér folytonos képe is kompakt.*

Bizonyítás. Legyen $[X, \mathcal{T}_1]$ és $[Y, \mathcal{T}_2]$ topologikus tér, $f : X \to Y$ folytonos szuperjekció, és $\mathcal{T}_1$ kompakt. Ha $Y = \bigcup_{i \in I} G_i$, és minden G_i $\mathcal{T}_2$-nyílt, akkor $X = \bigcup_{i \in I} f^{-1}(G_i)$, és minden $f^{-1}(G_i)$ $\mathcal{T}_1$-nyílt, tehát $X = \bigcup_{j=1}^{n} f^{-1}(G_{i_j})$ alkalmas $i_j \in I$ indexekre. Ekkor (2.6.4) szerint $f\big(f^{-1}(G_{i_j})\big) = G_{i_j}$ minden j-re, tehát $Y = \bigcup_{j=1}^{n} G_{i_j}$. ∎

Speciálisan:

(5.3.11) *Ha $\mathcal{T}_1$ és $\mathcal{T}_2$ két topológia E-n, $\mathcal{T}_1 < \mathcal{T}_2$, és $\mathcal{T}_2$ kompakt, akkor $\mathcal{T}_1$ is kompakt.* ∎

Megfordítva:

(5.3.12) *Ha $f : X \to Y$ szuperjektív, és $\mathcal{T}$ kompakt topológia Y-on, akkor $f^{-1}(\mathcal{T})$ is kompakt.*

Bizonyítás. Ha $X = \bigcup_{i \in I} G_i$ $f^{-1}(\mathcal{T})$-nyílt befedés, akkor $G_i = f^{-1}(H_i)$, ahol H_i $\mathcal{T}$-nyílt, és $Y = \bigcup_{i \in I} H_i$. Legyen $Y = \bigcup_{j=1}^{n} H_{i_j}$ $(i_j \in I,\ j = 1, \ldots, n)$. Ekkor $X = \bigcup_{j=1}^{n} f^{-1}(H_{i_j}) = \bigcup_{j=1}^{n} G_{i_j}$. ∎

Nevezetes kiegészítése (5.3.10)-nek a következő tétel:

(5.3.13) *Legyen $[X, \mathcal{T}_1]$ és $[Y, \mathcal{T}_2]$ két topologikus tér, $f : X \to Y$ folytonos bijekció, $\mathcal{T}_1$ kompakt, és $\mathcal{T}_2$ T_2-topológia. Ekkor f homeomorfizmus.*

Bizonyítás. Csak f^{-1} $(\mathcal{T}_2, \mathcal{T}_1)$-folytonosságát kell kimutatnunk, vagyis (2.6.23) szerint azt, hogy minden $\mathcal{T}_1$-zárt F halmazra $f(F)$ $\mathcal{T}_2$-zárt. Azonban (5.3.4) szerint F kompakt, tehát (5.3.10) szerint $f(F)$ is kompakt (ugyanis $g = f|_F^{f(F)} : F \to f(F)$ (2.6.21) és (2.6.22) szerint $(\mathcal{T}_1 | F, \mathcal{T}_2 | f(F))$-folytonos szuperjekció, úgyhogy $(\mathcal{T}_1 | F)$-fel együtt $\mathcal{T}_2 | f(F)$ is kompakt). (5.3.5) szerint $f(F)$ $\mathcal{T}_2$-zárt. ∎

(5.3.14) *Ha $\mathcal{T}_1$ T_2-topológia, $\mathcal{T}_2$ kompakt topológia E-n, és $\mathcal{T}_1 < \mathcal{T}_2$, akkor $\mathcal{T}_1 = \mathcal{T}_2$.* ∎

Nevezetes tételek mondhatók ki kompakt terekre a szétválasztási axiómák kérdéskörében.

(5.3.15) *S_1-térben minden pont lezárása kompakt.*

Bizonyítás. Ha $\bar{x} \subset \bigcup_{i \in I} G_i$, G_i nyílt, akkor egy i indexre $x \in G_i$, és (2.5.8) szerint $\bar{x} \subset G_i$. ∎

(5.3.16) *Ha az $[E, \mathcal{T}]$ topologikus térben egy $K \subset E$ kompakt halmaz minden pontja szétválasztható egy A halmaztól, akkor K és A is szétválasztható.*

Bizonyítás. Legyen $x \in K$ esetén V_x x-nek, W_x A-nak olyan nyílt környezete, hogy $V_x \cap W_x = \emptyset$. Ekkor $K \subset \bigcup_1^n V_{x_i}$ alkalmas $x_i \in K$ $(i = 1, \dots, n)$ pontokra. Így $A \subset \bigcap_1^n W_{x_i}$, az utóbbi halmaz nyílt, és nyilván

$$\left(\bigcup_1^n V_{x_i}\right) \cap \left(\bigcap_1^n W_{x_i}\right) = \emptyset. \blacksquare$$

(5.3.17) *Ha az $[E, \mathcal{T}]$ S_2-térben K kompakt, zárt, és $x \notin K$, akkor x és K szétválasztható.*

Bizonyítás. $E - K$ környezete x-nek, úgyhogy x és K bármely pontja gyengén széteső, s így feltevésünk szerint szétválasztható. (5.3.16) alkalmazható az $A = \{x\}$ választással. $\blacksquare$

(5.3.18) *Ha az $[E, \mathcal{T}]$ S_2-térben K_1 és K_2 kompakt, K_1 zárt, és $K_1 \cap K_2 = \emptyset$, akkor K_1 és K_2 szétválasztható.*

Bizonyítás. (5.3.17) szerint K_1 és bármely $x \in K_2$ pont szétválasztható, tehát (5.3.16) szerint K_1 és K_2 is. $\blacksquare$

(5.3.19) *Ha az $[E, \mathcal{T}]$ S_2-térben K kompakt, F zárt, és $K \cap F = \emptyset$, akkor $\bar{K} \cap F = \emptyset$.*

Bizonyítás. $x \in K$, $y \in F$ esetén $E - F$ környezete x-nek, tehát x és y gyengén széteső, és így szétválasztható is. (5.3.16)-ot az $A = \{y\}$ választással alkalmazva K és y is szétválasztható, úgyhogy y-nak van K-t nem metsző környezete, $y \notin \bar{K}$. $\blacksquare$

(5.3.20) *Ha az $[E, \mathcal{T}]$ S_2-térben K kompakt, akkor $\bar{K}$ is kompakt.*

Bizonyítás. Legyen $\bar{K} \subset \bigcup_{i \in I} G_i$, G_i nyílt minden i-re. Ekkor $K \subset \bigcup_{j=1}^n G_{i_j}$, $i_j \in I$ $(j = 1, \dots, n)$. Az $E - \bigcup_{j=1}^n G_{i_j} = F$ zárt halmazra (5.3.19)-et alkalmazva $\bar{K} \cap F = \emptyset$, azaz $\bar{K} \subset \bigcup_{j=1}^n G_{i_j}$. $\blacksquare$

(5.3.21) *Ha az $[E, \mathcal{T}]$ reguláris térben K kompakt, F zárt, és $K \cap F = \emptyset$, akkor K és F szétválasztható.*

Bizonyítás. (5.3.16) alkalmazható az $A = F$ választással. $\blacksquare$

(5.3.22) *Minden kompakt S_2-tér normális, tehát S_4-tér.*

Bizonyítás. Ha A és B zárt, $A \cap B = \emptyset$, akkor (5.3.4) szerint A is, B is kompakt, tehát (5.3.18) szerint szétválasztható. $\blacksquare$

Ebből rögtön adódik:

(5.3.23) *Minden kompakt T_2-tér egyúttal T_4-tér is.* $\blacksquare$

(5.3.22) és (3.1.13) szerint egy kompakt S_2-topológia indukálható a (3.1.8)-ban értelmezett szomszédsági relációval. Nevezetes tény, hogy ez az egyetlen, az adott topológiát indukáló szomszédsági reláció. Ennek igazolására először is bebizonyítjuk (5.3.21) következő analogonját:

(5.3.24) *Ha egy $[E, \mathcal{S}]$ szomszédsági térben K kompakt, F zárt, és $K \cap F = \emptyset$, akkor $K \bar{\mathcal{S}} F$.*

Bizonyítás. $x \in K$ esetén $E - F$ környezete x-nek, tehát szomszédsága $\{x\}$-nek: $\{x\} \overline{\mathfrak{S}} F$. ($P_6$) szerint tehát minden $x \in K$-hoz van olyan P_x és Q_x, hogy $P_x \cap Q_x = \emptyset$, $\{x\} \overline{\mathfrak{S}} E - P_x$, $F \overline{\mathfrak{S}} E - Q_x$. Mivel így P_x környezete x-nek, $K \subset \bigcup_1^n P_{x_i}$ alkalmas $x_i \in K$ $(i = 1, \ldots, n)$ pontokra. A $Q = \bigcap_1^n Q_{x_i}$ halmazra teljesül $\left(\bigcup_1^n P_{x_i}\right) \cap Q = \emptyset$, tehát $K \cap Q = \emptyset$, és $E - Q = \bigcup_1^n (E - Q_{x_i}) \overline{\mathfrak{S}} F$ (P_5) szerint. Így (P_3) folytán $K \overline{\mathfrak{S}} F$. ∎

Most már bebizonyíthatjuk:

(5.3.25) *Egy kompakt S_2-topológia pontosan egy szomszédsági relációval indukálható, ti. a* (3.1.8) *alattival.*

Bizonyítás. Azt kell megmutatnunk, hogy ha $[E, \mathfrak{T}]$ kompakt S_2-tér, és $\mathfrak{S}$ olyan szomszédsági reláció, hogy $\mathfrak{T}_{\mathfrak{S}} = \mathfrak{T}$, akkor $A \mathfrak{S} B$ esetén $\bar{A} \cap \bar{B} \neq \emptyset$, ugyanis (3.1.19) szerint $\mathfrak{S}$ mindenesetre durvább a (3.1.8) alatti relációnál. Mármost, ha $\bar{A} \cap \bar{B} = \emptyset$ volna, akkor (5.3.4) folytán $\bar{A}$ kompakt, $\bar{B}$ zárt, úgyhogy (5.3.24) értelmében $\bar{A} \overline{\mathfrak{S}} \bar{B}$ s annál inkább $A \overline{\mathfrak{S}} B$ adódnék. ∎

(5.2.23) és (4.2.19) alapján mindjárt hozzátehetjük:

(5.3.26) *Egy $\mathfrak{T}$ kompakt S_2-topológia pontosan egy uniform struktúrával indukálható, ti. $\mathfrak{U}_\Phi$-vel, ahol Φ az összes $\mathfrak{T}$-folytonos függvényekből álló függvénycsalád.* ∎

A korlátos, zárt halmazon folytonos függvényeknek az analízis elemeiből ismert tulajdonságai az előzők felhasználásával a következőképpen általánosíthatók:

(5.3.27) *Kompakt térben minden folytonos függvény felvesz egy legnagyobb és egy legkisebb értéket.*

Bizonyítás. Ha $[E, \mathfrak{T}]$ kompakt tér, és $f: E \to \mathbf{R}$ folytonos, akkor $g = f|_E^{f(E)}$: $E \to f(E)$ (2.6.21) szerint $(\mathfrak{T}, \mathfrak{E} | f(E))$-folytonos szuperjekció, úgyhogy (5.3.10) szerint $f(E)$ $\mathbf{R}$-nek kompakt részhalmaza, tehát (5.3.8) szerint korlátos és zárt; így $\sup f(E)$ és $\inf f(E)$ létezik, és nyilván hozzá is tartozik $f(E)$-hez. ∎

(5.3.28) *Ha $[X, \mathfrak{S}]$ és $[Y, \mathfrak{Q}]$ szomszédsági tér, $\mathfrak{S}$ kompakt, és $f: X \to Y$ $(\mathfrak{T}_{\mathfrak{S}}, \mathfrak{T}_{\mathfrak{Q}})$-folytonos, akkor f $(\mathfrak{S}, \mathfrak{Q})$-szomszédságtartó is.*

Bizonyítás. (3.1.15) szerint $\mathfrak{T}_{\mathfrak{S}}$ S_3- s még inkább S_2-topológia, és (5.2.31) folytán kompakt. (5.3.25) értelmében $\mathfrak{S}$ az egyetlen $\mathfrak{T}_{\mathfrak{S}}$-t indukáló szomszédsági reláció, tehát azonos $\mathfrak{T}_{\mathfrak{S}}$ Čech—Stone-féle szomszédsági relációjával. Így (3.1.49) alkalmazható. ∎

Ehhez hasonlóan érvényes az analízis egy klasszikus tételének általánosításaként:

(5.3.29) *Ha $[X, \mathfrak{U}_1]$ és $[Y, \mathfrak{U}_2]$ uniform tér, $\mathfrak{U}_1$ kompakt, és $f: X \to Y$ $(\mathfrak{T}_{\mathfrak{U}_1}, \mathfrak{T}_{\mathfrak{U}_2})$-folytonos, akkor f $(\mathfrak{U}_1, \mathfrak{U}_2)$-egyenletesen folytonos is.*

Bizonyítás. (5.3.28) szerint f $(\mathfrak{S}_{\mathfrak{U}_1}, \mathfrak{S}_{\mathfrak{U}_2})$-szomszédságtartó, tehát $g = f|_X^{f(X)}$: $X \to f(X)$ (3.1.47) értelmében $(\mathfrak{S}_{\mathfrak{U}_1}, \mathfrak{S}_{\mathfrak{U}_2} | f(X))$-szomszédságtartó, továbbá (2.6.21) folytán $(\mathfrak{T}_{\mathfrak{U}_1}, \mathfrak{T}_{\mathfrak{U}_2} | f(X))$-folytonos is. (5.3.10) szerint $\mathfrak{T}_{\mathfrak{U}_2} | f(X)$ kompakt, és így (5.2.31) és (5.2.21) szerint $\mathfrak{U}_2 | f(X)$ prekompakt. Így g (3.2.77) szerint $(\mathfrak{U}_1, \mathfrak{U}_2 | f(X))$-egyenletesen, f pedig (3.2.56) értelmében $(\mathfrak{U}_1, \mathfrak{U}_2)$-egyenletesen folytonos. ∎

5.3.c. Megszámlálhatóan kompakt terek. A kompakt tér fogalmának különféle általánosításaival foglalkozunk. Egy ilyen a következő: egy **topologikus teret** (ill. egy topológiát) **megszámlálhatóan kompakt**nak mondunk, ha benne minden megszámlálható rácsnak van torlódási pontja.

(Megjegyzendő, hogy az itt használt terminológiától eltérően szokás a megszámlálhatóan kompakt tereket kompaktnak, a kompaktakat pedig bikompaktnak nevezni.)

A definícióból nyilvánvaló:

(5.3.30) *Minden kompakt topologikus tér megszámlálhatóan kompakt.* ∎

Itt is adhatók különféle ekvivalens jellemzések:

(5.3.31) *Legyen* $[E, \mathfrak{T}]$ *topologikus tér. A következő állítások egyenértékűek egymással, vagyis azzal, hogy* $\mathfrak{T}$ *megszámlálhatóan kompakt:*

(a) *Minden E-beli megszámlálható rácsnak van torlódási pontja;*

(b) *Minden E-beli megszámlálható centrált* $\mathfrak{c}$ *rendszerre*

$$\bigcap \{\bar{C}\colon C \in \mathfrak{c}\} \neq \emptyset;$$

(c) *E-beli nem-üres, zárt halmazoknak monoton fogyó* $F_1 \supset F_2 \supset F_3 \supset \ldots$ *sorozatára* $\bigcap\limits_1^\infty F_i \neq \emptyset$;

(d) *E-nek minden megszámlálható nyílt befedéséből kiválasztható véges befedés;*

(e) *Minden E-beli pontsorozatnak van torlódási pontja.*

Bizonyítás. (a) $\Rightarrow$ (b): A $\bigcap\limits_1^n C_i$ $(C_i \in \mathfrak{c})$ alakú halmazok megszámlálható $\mathfrak{r}$ rácsot alkotnak. Ha x ennek torlódási pontja, akkor

$$x \in \bigcap \{\bar{R}\colon R \in \mathfrak{r}\} \subset \bigcap \{\bar{C}\colon C \in \mathfrak{c}\}.$$

(b) $\Rightarrow$ (c): Az $\{F_i\colon i \in \mathrm{N}\}$ rendszer megszámlálható centrált rendszer.

(c) $\Rightarrow$ (d): Legyen $E = \bigcup\limits_1^\infty G_i$, G_i nyílt. Az $F_n = E - \bigcup\limits_1^n G_i$ halmazokra teljesülnek (c) feltevései, ha a $\{G_i\colon i \in \mathrm{N}\}$ befedésből nem választható ki véges befedés. Ebből $\bigcap\limits_1^\infty F_n \neq \emptyset$, azaz $\bigcup\limits_1^\infty G_i \neq E$ következnék.

(d) $\Rightarrow$ (e): Ha az (x_n) sorozatnak nem volna torlódási pontja, akkor az $R_i = \{x_n\colon n \geqq i\}$ jelöléssel az int $(E - R_i)$ halmazok befednék E-t. Ezek monoton növekvő sorozatot alkotnak, úgyhogy ha közülük már véges számú befedi E-t, akkor egy is befedi, azaz egy n-re int $(E - R_n) = E$, $R_n = \emptyset$: ellentmondás.

(e) $\Rightarrow$ (a): Legyen $\mathfrak{r} = \{R_i\colon i \in \mathrm{N}\}$ E-beli megszámlálható rács, és $x_n \in \bigcap\limits_1^n R_i$. Ha x az (x_n) sorozatnak torlódási pontja, akkor minden $m \in \mathrm{N}$-re és x minden V környezetére van olyan $n \geqq m$, hogy $x_n \in V$, s akkor $x_n \in R_m \cap V$. Így x torlódási pontja $\mathfrak{r}$-nek. ∎

(5.2.21) általánosításaként érvényes:

(5.3.32) *Minden megszámlálhatóan kompakt uniform tér prekompakt.*

Bizonyítás. Tegyük fel, hogy $[E, \mathcal{U}]$ olyan uniform tér, amelyet egy $U \in \mathcal{U}$ környék mellett nem lehet véges számú U-rendben kicsiny halmazzal befedni, és legyen $U_1 \in \mathcal{U}$ olyan környék, hogy $U_1 \circ U_1 \subset U$. Egy $x_1 \in E$ pontból kiindulva legyen $x_{n+1} \in E$ olyan pont, hogy $x_{n+1} \notin \bigcup_1^n U_1(x_i)$. Minthogy $U_1(x_i)$ U-rendben kicsiny, azért ilyen x_{n+1} feltevésünk szerint biztosan található. Az így keletkező (x_n) sorozatnak nem lehet torlódási pontja, hiszen $n \neq m$ esetén $(x_n, x_m) \notin U_1$, úgyhogy ha $U_2 \in \mathcal{U}$ olyan környék, hogy $U_2 \circ U_2 \subset U_1$, akkor bármely $x \in E$ pontra legfeljebb egy n mellett állhat $x_n \in U_2(x)$. Ezért a tér nem lehet megszámlálhatóan kompakt. ∎

Ennek segítségével bebizonyítható az a nevezetes tény, hogy a félmetrikus terek körében a kompaktság és a megszámlálható kompaktság fogalma egybeesik:

(5.3.33) *Egy félmetrikus tér pontosan akkor kompakt, ha megszámlálhatóan kompakt.*

Bizonyítás. (5.3.30)-ra tekintettel csak azt kell belátni, hogy ha az $[E, \rho]$ félmetrikus tér megszámlálhatóan kompakt, akkor kompakt is. Tudjuk (5.3.32)-ből, hogy a tér $\mathcal{U}_\rho$ uniform struktúrája prekompakt, megmutatjuk, hogy teljes, s akkor az állítás (5.2.22)-ből következik. (5.1.10) alapján elég magáról $[E, \rho]$-ról megmutatni, hogy teljes. Márpedig ha (x_n) Cauchy-sorozat E-ben, és x ennek torlódási pontja, akkor (5.2.28) szerint $x_n \to x$. ∎

Ehhez hasonlóan rögtön következik (5.3.31) (d)-ből:

(5.3.34) *Egy Lindelöf-tér pontosan akkor kompakt, ha megszámlálhatóan kompakt.* ∎

Jegyezzük még meg, hogy (5.3.32) és (3.2.68) értelmében:

(5.3.35) *Minden (megszámlálhatóan) kompakt félmetrikus tér szeparábilis.* ∎

A kompakt terek tulajdonságainak egy része átvihető a megszámlálhatóan kompakt terekre is. Ennek érdekében az $[E, \mathcal{T}]$ topologikus térben egy $K \subset E$ **halmazt megszámlálhatóan kompakt**nak mondunk, ha $K = \emptyset$, vagy pedig $K \neq \emptyset$, és $\mathcal{T} \mid K$ megszámlálhatóan kompakt. Az (5.3.31)-ben felsorolt tulajdonságok átfogalmazhatók erre az esetre is; közülük elég lesz megemlíteni a következőt:

(5.3.36) *Az $[E, \mathcal{T}]$ topologikus térben K pontosan akkor megszámlálhatóan kompakt, ha minden K-beli pontsorozatnak van K-ban $\mathcal{T}$-torlódási pontja, illetőleg ha K-nak minden megszámlálható $\mathcal{T}$-nyílt befedéséből kiválasztható K-nak véges befedése.*

Bizonyítás. $x \in K$ pontosan akkor $\mathcal{T}$-torlódási pontja a K-beli (x_n) sorozatnak, ha $(\mathcal{T}|K)$-torlódási pontja. Másrészt K-nak $(\mathcal{T}|K)$-nyílt befedései azonosak a $\mathcal{T}$-nyílt befedések egyes tagjainak K-val való metszése útján keletkező befedésekkel. ∎

(5.3.37) *Megszámlálhatóan kompakt halmaz zárt részhalmaza is megszámlálhatóan kompakt.*

Bizonyítás. Ha K megszámlálhatóan kompakt, $F \subset K$, F zárt, és (x_n) F-beli sorozat, akkor (x_n)-nek van $x \in K$ torlódási pontja. Nyilván $x \in \bar{F} = F$. ∎

(5.3.6) mintájára igazolható:

(5.3.38) *Véges számú megszámlálhatóan kompakt halmaz egyesítése is megszámlálhatóan kompakt.* ∎

(5.3.10) analógiájára érvényes:

(5.3.39) *Megszámlálhatóan kompakt topologikus tér folytonos képe is megszámlálhatóan kompakt.* ∎

(5.3.40) *Ha* $\mathfrak{T}_1$ *és* $\mathfrak{T}_2$ *topológia E-n,* $\mathfrak{T}_1 < \mathfrak{T}_2$, *és* $\mathfrak{T}_2$ *megszámlálhatóan kompakt, akkor* $\mathfrak{T}_1$ *is ilyen.* ∎

(5.3.10) helyett (5.3.39)-re és (5.3.33)-ra hivatkozva, (5.3.27) mintájára igazolható:

(5.3.41) *Megszámlálhatóan kompakt térben minden folytonos függvény felvesz egy legnagyobb és egy legkisebb értéket.* ∎

Az olyan topologikus teret, amelyben minden folytonos függvény korlátos, **pszeudokompakt**nak mondják. (5.3.41)-ből következik:

(5.3.42) *Minden megszámlálhatóan kompakt tér pszeudokompakt.* ∎

(5.3.5) mintájára:

(5.3.43) *Ha* $[E, \mathfrak{T}]$ T_2*-tér és* M_1*-tér, akkor benne minden megszámlálhatóan kompakt halmaz zárt.*

Bizonyítás. Ha K ilyen, elég (2.4.10) alapján megmutatni, hogy ha $x_n \in K$, és $x_n \to x \in E$, akkor $x \in K$. Az (5.3.5) bizonyításában követett meggondolást az (x_n)-hez tartozó $\mathfrak{r}$ sorozatrácsra alkalmazva adódik az állítás. ∎

(5.3.13) bizonyításában (5.3.4) helyett (5.3.37)-et, (5.3.10) helyett (5.3.39)-et és (5.3.5) helyett (5.3.43)-at alkalmazva nyerjük:

(5.3.44) *Legyen* $[X, \mathfrak{T}_1]$ *és* $[Y, \mathfrak{T}_2]$ *két topologikus tér,* $f : X \to Y$ *folytonos bijekció,* $\mathfrak{T}_1$ *megszámlálhatóan kompakt,* $\mathfrak{T}_2$ T_2*-topológia és* M_1*-topológia. Ekkor f homeomorfizmus.* ∎

5.3.d. Sorozatkompakt terek. Az $\mathbf{R}^m$ tér korlátos zárt halmazainak a Bolzano—Weierstrass-féle tételben kimondott tulajdonságát felhasználva egy topologikus teret vagy topológiát **sorozatkompakt**nak mondunk, ha benne minden pontsorozatnak van konvergens részsorozata. (5.2.24)-ből és (5.3.31)-ből rögtön következik:

(5.3.45) *Minden sorozatkompakt tér megszámlálhatóan kompakt.* ∎

Megfordítva csak ennyi mondható:

(5.3.46) *Minden megszámlálhatóan kompakt* M_1*-tér sorozatkompakt is.*

Bizonyítás. Legyen (x_n) tetszőleges sorozat az $[E, \mathfrak{T}]$ térben, és x ennek torlódási pontja. (2.4.13) felhasználásával legyen $\{V_n \colon i \in \mathrm{N}\}$ x-nek olyan környezetbázisa, hogy $V_1 \supset V_2 \supset V_3 \supset \ldots$, és készítsük el az (x_{n_i}) részsorozatot így: legyen $x_{n_1} \in V_1$, s ha $x_{n_{i-1}}$ már megvan, legyen $n_i > n_{i-1}$ olyan, hogy $x_{n_i} \in V_i$. Világos, hogy $x_{n_i} \to x$. ∎

Minthogy egy félmetrikus tér mindig M_1-tér, (5.3.45), (5.3.46) és (5.3.33) alapján kimondható:

(5.3.47) *Egy félmetrikus tér pontosan akkor kompakt, ha sorozatkompakt.* ∎

Ha a szokásos módon az $[E, \mathfrak{T}]$ topologikus tér K részhalmazát akkor mondjuk sorozatkompaktnak, ha $K = \emptyset$, vagy pedig $K \neq \emptyset$, és $\mathfrak{T}|K$ sorozatkompakt, akkor (5.3.37) mintájára igazolható:

(5.3.48) *Sorozatkompakt halmaz zárt részhalmaza is sorozatkompakt.* ∎

(5.3.49) *Véges számú sorozatkompakt halmaz egyesítése is sorozatkompakt.*

Bizonyítás. Ha K_i sorozatkompakt, és $K = \bigcup_{1}^{m} K_i$, akkor tetszőleges K-beli (x_n) sorozatnak alkalmas részsorozata egyik K_i tagban van, s ennek egy részsorozata egy K_i-beli ponthoz tart. ∎

(5.3.50) *Sorozatkompakt tér folytonos képe is sorozatkompakt.*

Bizonyítás. Legyen $f: X \to Y$ folytonos szuperjekció. Ha (y_n) tetszőleges Y-beli sorozat, legyen $x_n \in X$ olyan, hogy $f(x_n) = y_n$. Ha $x_{n_i} \to x$, akkor (2.6.13) szerint $y_{n_i} = f(x_{n_i}) \to f(x)$. ∎

(5.3.51) *Ha $\mathcal{T}_1$ és $\mathcal{T}_2$ topológia E-n, $\mathcal{T}_1 < \mathcal{T}_2$, és $\mathcal{T}_2$ sorozatkompakt, akkor $\mathcal{T}_1$ is ilyen.* ∎

5.3.e. Lokálisan kompakt terek. Az, hogy egy tér kompakt, erős megszorítást jelent; például az $[\mathbf{R}^m, \mathcal{E}^m]$ térre ez a megszorítás nem teljesül. Igaz azonban $\mathbf{R}^m$-ben az, hogy minden pontnak van kompakt környezete: az $\bar{S}(x, \varepsilon)$ zárt gömb bármely $x \in \mathbf{R}^m$ pont és bármely $\varepsilon > 0$ esetében (5.3.3) szerint x-nek kompakt környezete.

Ennek mintájára érdemes tanulmányozni az olyan $[E, \mathcal{T}]$ topologikus tereket, amelyekben minden pontnak van kompakt környezete; az ilyen teret **lokálisan kompakt**nak mondjuk.

Az előbbi megjegyzés értelmében:

(5.3.52) *Az $[\mathbf{R}^m, \mathcal{E}^m]$ tér lokálisan kompakt.* ∎

További példa lokálisan kompakt térre bármely diszkrét tér.

(5.3.53) *Lokálisan kompakt tér zárt altere is lokálisan kompakt.*

Bizonyítás. Ha az $[E, \mathcal{T}]$ térben $\emptyset \neq E_0 \subset E$ zárt, és $x \in E_0$-nak K kompakt $\mathcal{T}$-környezete, akkor $K \cap E_0$ $(\mathcal{T}|K)$-zárt, és így (5.3.4) szerint $(\mathcal{T}|K)$-kompakt, vagyis $((\mathcal{T}|K)|K \cap E_0)$-kompakt, ennek folytán $(\mathcal{T}|K \cap E_0)$-kompakt, s egyúttal $((\mathcal{T}|E_0)|K \cap E_0)$-kompakt; itt ismételten támaszkodtunk (2.3.17)-re. Így $K \cap E_0$ az $[E_0, \mathcal{T}|E_0]$ altérben x-nek kompakt környezete. ∎

Különösen hasznos tulajdonságaik vannak a lokálisan kompakt S_2-tereknek.

(5.3.54) *Lokálisan kompakt S_2-térben minden pontnak van csupa kompakt, zárt halmazból álló környezetbázisa.*

Bizonyítás. Legyen az $[E, \mathcal{T}]$ S_2-térben az x pontnak K kompakt környezete. (5.3.20) miatt mindjárt feltehetjük, hogy K zárt is. Legyen V x-nek tetszőleges környezete, és $G = \operatorname{int} V$. Ekkor $K - G = (E - G) \cap K$ (5.3.4) szerint kompakt és zárt, így $x \notin K - G$ folytán (5.3.17) szerint van olyan nyílt V_1 és G_1, hogy $x \in V_1$, $K - G \subset G_1$, $V_1 \cap G_1 = \emptyset$. Ekkor $\overline{V}_1 \subset E - G_1$ következtében $\overline{V}_1 \cap K$ x-nek olyan kompakt, zárt környezete, hogy $\overline{V}_1 \cap K \subset G \subset V$. ∎

(5.3.55) *Lokálisan kompakt S_2-tér nyílt altere is lokálisan kompakt.*

Bizonyítás. Ha az $[E, \mathcal{T}]$ lokálisan kompakt S_2-térben $x \in E_0 \subset E$, és E_0 $\mathcal{T}$-nyílt, akkor (5.3.54) szerint van olyan $\mathcal{T}$-kompakt K, amelyre $K \subset E_0$, és amely x-nek $\mathcal{T}$-környezete. Ez a K persze x-nek $(\mathcal{T}|E_0)$-környezete, és $(\mathcal{T}|E_0)$-kompakt is. ∎

Ennek megfordításaképpen érvényes:

(5.3.56) *T_2-térben minden lokálisan kompakt sűrű altér nyílt.*

Bizonyítás. Legyen $[E, \mathcal{T}]$ T_2-tér, $E_0 \subset E$ sűrű, és $\mathcal{T}|E_0$ lokálisan kompakt. Ha $x \in E_0$, akkor tehát van x-nek kompakt K $(\mathcal{T}|E_0)$-környezete. Legyen G olyan $\mathcal{T}$-nyílt halmaz, hogy $x \in G \cap E_0 \subset K$. $y \in G$ esetén y-nak minden $\mathcal{T}$-nyílt V környezetére E_0 sűrű volta miatt $V \cap G \cap E_0 \neq \emptyset$, azaz $y \in \overline{G \cap E_0}$, és így $G \subset \overline{G \cap E_0} \subset \subset K$, hiszen K (5.3.5) szerint $\mathcal{T}$-zárt. Ennélfogva $x \in G \subset K \subset E_0$, $x \in \operatorname{int} E_0$. ∎

(5.3.54)-ből látszik, hogy minden lokálisan kompakt S_2-tér reguláris. Ennél azonban több is igaz: az ilyen terek teljesen regulárisak. Ezt úgy mutatjuk meg, hogy megadunk egy, a tér topológiáját indukáló szomszédsági relációt:

(5.3.57) *Legyen $[E, \mathcal{T}]$ lokálisan kompakt S_2-tér, és legyen $A \overline{\mathcal{S}} B$ pontosan akkor, ha $\bar{A} \cap \bar{B} = \emptyset$, és az $\bar{A}$ és $\bar{B}$ halmazok közül legalább az egyik kompakt. Ekkor $\mathcal{S}$ a $\mathcal{T}$ topológiát indukáló szomszédsági reláció, mégpedig a $\mathcal{T}$-t indukáló szomszédsági relációk között a legdurvább.*

Bizonyítás. (P_1) és (P_2) nyilván teljesül a $\mathcal{S}$ relációra. $A' \overline{\mathcal{S}} B'$, $A \subset A'$, $B \subset B'$ esetén $A \overline{\mathcal{S}} B$ is áll, mert ha pl. $\bar{A}'$ kompakt, akkor $\bar{A} \subset \bar{A}'$ miatt (5.3.4) alapján $\bar{A}$ is kompakt; így (P_3) is fennáll. (P_4) abból következik, hogy $\bar{\emptyset} = \emptyset$ kompakt. Ha $A \overline{\mathcal{S}} C$ és $B \overline{\mathcal{S}} C$, akkor $\bar{A} \cap \bar{C} = \bar{B} \cap \bar{C} = \emptyset$, s így $\overline{A \cup B} = \bar{A} \cup \bar{B}$ folytán $\overline{A \cup B} \cap \bar{C} = \emptyset$, és ha $\bar{C}$ kompakt, akkor evidensen áll $A \cup B \overline{\mathcal{S}} C$, ha pedig $\bar{C}$ nem kompakt, akkor $\bar{A}$ és $\bar{B}$, tehát (5.3.6) folytán $\bar{A} \cup \bar{B} = \overline{A \cup B}$ kompakt. Eszerint teljesül (P_5). Legyen végül $\bar{A} \cap \bar{B} = \emptyset$, és mondjuk $\bar{A}$ kompakt. (5.3.54) következtében minden $x \in \bar{A}$ pontnak megadható olyan kompakt, zárt K_x környezete, hogy $K_x \cap \bar{B} = \emptyset$. A kompakt $\bar{A}$ halmazt az $\operatorname{int} K_x$ halmazok közül véges számú is befedi: $\bar{A} \subset \bigcup_1^n \operatorname{int} K_{x_i}$, $x_i \in \bar{A}$ $(i = 1, \ldots, n)$. Legyen $K = \bigcup_1^n K_{x_i}$. Ekkor (5.3.6) alapján K kompakt, zárt, $K \cap \bar{B} = \emptyset$, és $\bar{A} \subset \operatorname{int} K$. A $P = \operatorname{int} K$, $Q = = E - K$ jelöléssel $P \cap Q = \emptyset$, továbbá $\bar{A} \cap \overline{E - P} = \emptyset$, $\bar{B} \cap \overline{E - Q} = \emptyset$, végül $\bar{A}$ és $\overline{E - Q} = \bar{K} = K$ kompakt. Így teljesül (P_6).

Az eddigiek alapján kimondhatjuk, hogy $\mathcal{S}$ szomszédsági reláció E-n. Ha $x \in E$, és V szomszédsága $\{x\}$-nek, akkor $\bar{x} \cap \overline{E - V} = \emptyset$, így $x \notin \overline{E - V}$, és $E - \overline{E - V} \subset \subset V$ környezete x-nek. Megfordítva, ha W környezete x-nek, akkor $x \in \operatorname{int} W$ miatt $x \notin \overline{E - \operatorname{int} W}$, továbbá (2.5.8) szerint $\bar{x} \cap \overline{E - \operatorname{int} W} = \emptyset$, és (5.3.15) értelmében $\bar{x}$ kompakt. Eszerint $\{x\} \overline{\mathcal{S}} E - \operatorname{int} W$, s annál inkább $\{x\} \overline{\mathcal{S}} E - W$, W szomszédsága $\{x\}$-nek. Ilyen módon $\mathcal{S}$ a $\mathcal{T}$ topológiát indukálja.

Legyen végül $\mathcal{S}'$ tetszőleges $\mathcal{T}$-t indukáló szomszédsági reláció. Ha $A \overline{\mathcal{S}} B$, akkor (5.3.24) szerint $\bar{A} \overline{\mathcal{S}'} \bar{B}$, s annál inkább $A \overline{\mathcal{S}'} B$. Így $\mathcal{S} < \mathcal{S}'$. ∎

5.3.f. Peremkompakt terek. A lokálisan kompakt terekhez sok tekintetben hasonló tulajdonságú és — legalábbis S_2-terekre szorítkozva — náluk általánosabb terekkel foglalkozunk.

Az $[E, \mathcal{T}]$ topologikus teret (és a $\mathcal{T}$ topológiát) **peremkompakt**nak mondjuk ha van benne kompakt határú halmazokból álló bázis.

(5.3.58) *Minden lokálisan kompakt S_2-tér peremkompakt.*

Bizonyítás. Ha $[E, \mathcal{T}]$ ilyen tér, és $x \in E$-nek V tetszőleges környezete, akkor (5.3.54) szerint van olyan kompakt, zárt K, hogy $x \in \operatorname{int} K \subset V$. A $G = \operatorname{int} K$ jelöléssel (2.2.20) értelmében mar $G \subset \bar{G} \subset K$, és mar G zárt, úgyhogy (5.3.4) szerint kompakt is. Így a kompakt határú nyílt halmazok bázist alkotnak $\mathcal{T}$ számára. ▌

További példa peremkompakt topológiára $\mathcal{E}|\mathbf{Q}$; erre nézve ugyanis bázist alkotnak az $I \cap \mathbf{Q}$ alakú halmazok, ahol $I \subset \mathbf{R}$ nyílt intervallum, s ezeknek a határa legfeljebb két pontból áll, tehát kompakt. (5.3.56)-ból látszik, hogy $\mathcal{E}|\mathbf{Q}$ nem lokálisan kompakt, hiszen $\mathbf{Q}$ $\mathcal{E}$-sűrű, de nem $\mathcal{E}$-nyílt.

Vegyük észre, hogy $\mathcal{E}|\mathbf{Q}$ számára már azok az $I \cap \mathbf{Q}$ halmazok is bázist alkotnak, amelyekben I irracionális végpontú nyílt intervallum, ezeknek $(\mathcal{E}|\mathbf{Q})$-ra vonatkozó határa pedig üres, azaz ezek (2.2.22) értelmében nyílt-zárt halmazok. Az olyan topologikus teret, ill. topológiát, amelyben van nyílt-zárt halmazokból álló bázis, **nulladimenziós**nak mondjuk. Előbbi példánk általánosításaként rögtön kimondható:

(5.3.59) *Minden nulladimenziós tér peremkompakt.* ▌

(5.3.53) mintájára érvényes:

(5.3.60) *Peremkompakt tér zárt altere is peremkompakt.*

Bizonyítás. Ha $E_0 \neq \emptyset$ zárt az $[E, \mathcal{T}]$ topologikus térben, G nyílt, és mar G kompakt, akkor $G \cap E_0$ $(\mathcal{T}|E_0)$-nyíltsága miatt e halmaznak $(\mathcal{T}|E_0)$-határa (2.2.20) szerint $H = (\overline{G \cap E_0} \cap E_0) - (G \cap E_0) \subset \bar{G} - G = \text{mar } G$, s minthogy H $(\mathcal{T}|E_0)$-zárt, tehát $\mathcal{T}$-zárt is, azért (5.3.4) szerint kompakt. ▌

(5.3.54) helyett most ennyit mondhatunk:

(5.3.61) *Minden peremkompakt S_2-tér reguláris.*

Bizonyítás. Ha V x-nek környezete, legyen $x \in G \subset V$, G nyílt, mar G kompakt. x és mar G bármely pontja gyengén széteső, és így szétválasztható. Minden $y \in \text{mar } G$ ponthoz keressünk olyan nyílt V_y halmazt, hogy $x \notin \bar{V}_y$. Ekkor

$$\text{mar } G \subset \bigcup_{1}^{n} V_{y_i} \quad (y_i \in \text{mar } G, \qquad i = 1, \ldots, n).$$

Legyen

$$W = G \cap \bigcap_{1}^{n} (E - \bar{V}_{y_i}).$$

Ez x-nek nyílt környezete, és $\bar{W} \subset V$, hiszen $\bar{W} \subset \bar{G}$, G pontjai V-hez tartoznak, mar G minden pontja pedig benne van egy V_{y_i}-ben, tehát $W \subset E - \bar{V}_{y_i} \subset E - V_{y_i}$, $\bar{W} \subset E - V_{y_i}$ miatt nem tartozhat $\bar{W}$-hoz. ▌

(5.3.55)-nek megfelelően:

(5.3.62) *Peremkompakt S_2-tér nyílt altere is peremkompakt.*

Bizonyítás. Ha $E_0 \neq \emptyset$ nyílt $[E, \mathcal{T}]$-ben, és $x \in E_0$ adott $\mathcal{T}$-nyílt $V \subset E_0$ környezetéhez G olyan kompakt $\mathcal{T}$-határú $\mathcal{T}$-nyílt halmaz, hogy $x \in G \subset \bar{G} \subset V$ (ilyen (5.3.61) szerint található), akkor G $(\mathcal{T}|E_0)$-nyílt is, és $(\mathcal{T}|E_0)$-határa (2.2.20) szerint

$$(\bar{G} \cap E_0) - G = \bar{G} - G = \text{mar } G,$$

s így kompakt. ▌

A továbbiakban hasznosak lesznek a következő észrevételek:

(5.3.63) *Ha A és B kompakt határú halmaz, akkor $A \cup B$, $A \cap B$, $A - B$ is kompakt határú.*

Bizonyítás. (2.2.20) szerint az említett halmazok határa zárt, és (2.2.21) szerint része (mar $A \cup$ mar B)-nek, tehát (5.3.6) és (5.3.4) folytán kompakt. ∎

(5.3.64) *Ha A kompakt határú halmaz, akkor* int A *és* $\bar{A}$ *is kompakt határú.*

Bizonyítás. (2.2.20) szerint mar int A és mar $\bar{A}$ zárt, mar int $A = \overline{\text{int}\, A} - \text{int}\, A \subset \bar{A} - \text{int}\, A = \text{mar}\, A$, $\text{mar}\, \bar{A} = \bar{A} - \text{int}\, \bar{A} \subset \bar{A} - \text{int}\, A = \text{mar}\, A$. ∎

A következő gondolatmenet célja az, hogy megmutassa, minden peremkompakt S_2-topológia származtatható szomszédsági relációból, s így teljesen reguláris.

(5.3.65) *Legyen $[E, \mathfrak{T}]$ peremkompakt S_2-tér, s jelöljük $\mathfrak{P}$-vel a kompakt határú nyílt halmazok, $\mathfrak{Q}$-val a kompakt határú zárt halmazok rendszerét. Ekkor*

(a) *$P \in \mathfrak{P}$ esetén $E - P \in \mathfrak{Q}$;*

(b) *$Q \in \mathfrak{Q}$ esetén $E - Q \in \mathfrak{P}$;*

(c) *$P_1, P_2 \in \mathfrak{P}$ esetén $P_1 \cup P_2 \in \mathfrak{P}$, $P_1 \cap P_2 \in \mathfrak{P}$;*

(d) *$Q_1, Q_2 \in \mathfrak{Q}$ esetén $Q_1 \cup Q_2 \in \mathfrak{Q}$, $Q_1 \cap Q_2 \in \mathfrak{Q}$;*

(e) *ha K kompakt, zárt, $x \in E - K$, akkor van olyan $P_1, P_2 \in \mathfrak{P}$, hogy $x \in P_1$, $K \subset P_2$, $\bar{P}_1 \cap \bar{P}_2 = \emptyset$;*

(f) *ha K_1 és K_2 kompakt, egyikük zárt, és $K_1 \cap K_2 = \emptyset$, akkor van olyan $P_1, P_2 \in \mathfrak{P}$, hogy $K_1 \subset P_1$, $K_2 \subset P_2$, $\bar{P}_1 \cap \bar{P}_2 = \emptyset$;*

(g) *ha $x \in P \in \mathfrak{P}$, akkor van olyan $Q \in \mathfrak{Q}$, hogy $x \in Q \subset P$;*

(h) *ha $Q_1, Q_2 \in \mathfrak{Q}$, $Q_1 \cap Q_2 = \emptyset$, akkor van olyan $P_1, P_2 \in \mathfrak{P}$, hogy $Q_1 \subset P_1$, $Q_2 \subset P_2$, $P_1 \cap P_2 = \emptyset$.*

Bizonyítás. (a)—(d): (5.3.63)-ból adódik, hiszen mar $E = \emptyset$ miatt $E \in \mathfrak{P} \cap \mathfrak{Q}$.

(e): x és minden $y \in K$ gyengén széteső, tehát szétválasztható. Minthogy $\mathfrak{P}$ bázis, és a tér (5.3.61) szerint reguláris, azért $y \in K$-hoz található olyan $P_1(y)$, $P_2(y) \in \mathfrak{P}$, hogy $x \in P_1(y)$, $y \in P_2(y)$, $\overline{P_1(y)} \cap \overline{P_2(y)} = \emptyset$. Legyen $K \subset \bigcup_1^n P_2(y_i)$. Ekkor

$$P_1 = \bigcap_1^n P_1(y_i), \qquad P_2 = \bigcup_1^n P_2(y_i)$$

megfelel, hiszen (c) szerint $P_1, P_2 \in \mathfrak{P}$, és $\bar{P}_1 \subset \overline{P_1(y_i)} \subset E - \overline{P_2(y_i)}$, $\bar{P}_2 = \bigcup_1^n \overline{P_2(y_i)}$ miatt $\bar{P}_1 \cap \bar{P}_2 = \emptyset$.

(f): Legyen pl. K_2 zárt. Ekkor (e) szerint $x \in K_1$-hez van olyan $P_1(x), P_2(x) \in \mathfrak{P}$, hogy $x \in P_1(x)$, $K_2 \subset P_2(x)$, $\overline{P_1(x)} \cap \overline{P_2(x)} = \emptyset$. Ha $K_1 \subset \bigcup_1^n P_1(x_i)$, akkor

$$P_1 = \bigcup_1^n P_1(x_i), \qquad P_2 = \bigcap_1^n P_2(x_i)$$

megfelel.

(g): Legyen $P_1, P_2 \in \mathfrak{P}$ (e) alapján olyan, hogy $x \in P_1$, $\operatorname{mar} P \subset P_2$, $\bar{P}_1 \cap \bar{P}_2 = \emptyset$. Ekkor

$$Q = P - P_2 = \bar{P} - P_2 = \bar{P} \cap (E - P_2)$$

megfelel, ugyanis (5.3.64) szerint $\bar{P} \in \mathfrak{Q}$, tehát (a) és (d) szerint $Q \in \mathfrak{Q}$.

(h) Minthogy $\operatorname{mar} Q_1 \cap \operatorname{mar} Q_2 \subset Q_1 \cap Q_2 = \emptyset$, azért (f) szerint van olyan $P_1', P_2' \in \mathfrak{P}$, hogy

$$\operatorname{mar} Q_1 \subset P_1', \ \operatorname{mar} Q_2 \subset P_2', \ \bar{P}_1' \cap \bar{P}_2' = \emptyset.$$

Legyen

$$P_1 = (Q_1 \cup P_1') \cap (E - Q_2),$$

$$P_2 = (Q_2 \cup P_2') \cap (E - Q_1).$$

Ekkor $Q_1 \cup P_1' = \operatorname{int} Q_1 \cup P_1' \in \mathfrak{P}$, mert (5.3.64) miatt $\operatorname{int} Q_1 \in \mathfrak{P}$, úgyhogy (b) és (c) folytán $P_1 \in \mathfrak{P}$. Ugyanígy $P_2 \in \mathfrak{P}$. Nyilván $Q_1 \subset P_1$, $Q_2 \subset P_2$, végül

$$P_1 \cap P_2 = (Q_1 \cup P_1') \cap (E - Q_2) \cap (Q_2 \cup P_2') \cap (E - Q_1) =$$
$$= P_1' \cap (E - Q_2) \cap P_2' \cap (E - Q_1) \subset P_1' \cap P_2' = \emptyset. \blacksquare$$

Megjegyezzük, hogy az itteni (c) feltételnek eleget tevő $\mathfrak{P}$ halmazrendszert **hálónak** nevezik.

A kitűzött célt mármost a következő tétel szolgáltatja:

(5.3.66) *Legyen $\mathfrak{P}$ és $\mathfrak{Q}$ egy $E \neq \emptyset$ halmaz részhalmazaiból álló olyan két halmazrendszer, amelyre $\emptyset \in \mathfrak{P} \cap \mathfrak{Q}$, továbbá amely eleget tesz az* (5.3.65) *alatti* (a), (b), (c), (d) *és* (h) *feltételnek. Ekkor a $\mathfrak{P}$ relációt úgy értelmezve, hogy $A \,\overline{\mathcal{S}}\, B$ pontosan akkor álljon, ha van olyan $Q_1, Q_2 \in \mathfrak{Q}$, hogy $A \subset Q_1$, $B \subset Q_2$, $Q_1 \cap Q_2 = \emptyset$, $\mathcal{S}$ szomszédsági reláció E-n. Ha még $\mathcal{T}$ olyan topológia E-n, amelyre nézve $\mathfrak{P}$ bázis, és teljesül* (5.3.65) (g) *is, akkor $\mathcal{T} = \mathcal{T}_{\mathcal{S}}$.*

Bizonyítás. (P_1), (P_2), (P_3) evidens. (P_4) abból következik, hogy $\emptyset \in \mathfrak{Q}$, és (a) miatt $E \in \mathfrak{Q}$. (P_5) könnyen adódik (d)-ből. (P_6) is áll, mert $A \,\overline{\mathcal{S}}\, B$ esetén

$$A \subset Q_1, \ B \subset Q_2, \ Q_1 \cap Q_2 = \emptyset, \ Q_1, Q_2 \in \mathfrak{Q},$$

így (h) miatt

$$Q_1 \subset P_1 \in \mathfrak{P}, \ Q_2 \subset P_2 \in \mathfrak{P}, \ P_1 \cap P_2 = \emptyset,$$

és (a)-ra tekintettel

$$A \subset Q_1, \ E - P_1 \in \mathfrak{Q}, \ Q_1 \cap (E - P_1) = \emptyset,$$

$$B \subset Q_2, \ E - P_2 \in \mathfrak{Q}, \ Q_2 \cap (E - P_2) = \emptyset,$$

úgyhogy $A \,\overline{\mathcal{S}}\, E - P_1$, $B \,\overline{\mathcal{S}}\, E - P_2$.

Eszerint $\mathcal{S}$ valóban szomszédsági reláció E-n. Ha kiegészítő feltevéseink is teljesülnek, és V x-nek $\mathcal{T}$-környezete, akkor van olyan $P \in \mathfrak{P}$, hogy $x \in P \subset V$, majd (g) miatt olyan $Q \in \mathfrak{Q}$, hogy $x \in Q \subset P$, s akkor

$$\{x\} \subset Q, \ E - V \subset E - P \in \mathfrak{Q}$$

miatt $\{x\} \bar{\mathcal{S}} E - V$, és V $\mathcal{T}_{\mathcal{S}}$-környezete is x-nek. Megfordítva, ha $\{x\} \bar{\mathcal{S}} E - V$, akkor $x \in Q_1 \subset E - Q_2 \subset V$, ahol $Q_1, Q_2 \in \mathfrak{Q}$, tehát a $\mathcal{T}$-nyílt $E - Q_2 \in \mathfrak{P}$-vel együtt V is $\mathcal{T}$-környezete x-nek. ∎

(5.3.65) és (5.3.66) alapján most már kimondhatjuk:

(5.3.67) *Legyen* $[E, \mathcal{T}]$ *peremkompakt* S_2*-tér, és álljon* $A \bar{\mathcal{S}} B$ *pontosan akkor, ha van olyan kompakt határú, zárt* Q_1 *és* Q_2, *hogy* $A \subset Q_1$, $B \subset Q_2$, $Q_1 \cap Q_2 = \emptyset$. *Ekkor* $\mathcal{S}$ *szomszédsági reláció E-n, és* $\mathcal{T} = \mathcal{T}_{\mathcal{S}}$. ∎

Az imént definiált $\mathcal{S}$-t a tér **Freudenthal-féle szomszédsági relációjának** mondjuk.

5.3.g. Gyakorlatok. 1. Legyen E több elemű, rendezett halmaz, $\mathcal{T}$ E-nek rendezés-topológiája (l. **2.2.** 8. feladat). Mutassuk meg, hogy $\mathcal{T}$ pontosan akkor kompakt, ha E-ben van legkisebb és legnagyobb elem, továbbá E rendezése teljes (l. **2.3.** 14. feladat).

[Ha E-ben nincs legnagyobb elem, akkor a $(\leftarrow, x)$ $(x \in E)$ halmazok, ha nincs legkisebb elem, az $(x, \rightarrow)$ halmazok, ha pedig $A \subset E$ felülről korlátos, de nincs legkisebb felső korlátja, a $(\leftarrow, x)$ $(x \in A)$ és $(y, \rightarrow)$ (y felső korlátja A-nak) halmazok alkotta nyílt befedést vizsgáljuk. Ha viszont a feltétel teljesül, tekintsük E-nek egy nyílt befedését, és azokat az x-eket, amelyekre — a legkisebb elemet a-val jelölve — $[a, x]$ az adott halmazok közül véges számúval befedhető, majd az ilyen x-ek legkisebb felső korlátját.]

2. Legyen $[E, \mathcal{T}]$ kompakt topologikus tér, Φ pedig $\mathcal{T}$-folytonos függvényeknek olyan családja, hogy $f \in \Phi$ esetén $f \geqq 0$, továbbá $f, g \in \Phi$ esetén van olyan $h \in \Phi$, hogy $h \leqq \min(f, g)$, végül minden $x \in E$ helyen $\inf\{f(x): f \in \Phi\} = 0$. Mutassuk meg, hogy minden $\varepsilon > 0$-hoz található olyan $f \in \Phi$, hogy $x \in E$ esetén $f(x) < \varepsilon$.

[Tekintsük a $C_f = \{x : f(x) \geqq \varepsilon\}$ halmazokat.]

3. Mutassuk meg, hogy az $[\mathbf{R}, \bar{\mathcal{E}}]$ térben egy $A \neq \emptyset$ halmaz pontosan akkor kompakt, ha van benne legnagyobb elem.

4. Mutassuk meg, hogy $E \neq \emptyset$ esetén az $[E, \mathcal{F}_E]$ térben minden halmaz kompakt.

5. Legyen E végtelen halmaz, $\omega \in E$, $\mathfrak{u}$ az $E - \{\omega\} = E_0$ halmazban nemtriviális ultraszűrő. Alkossa $x \in E_0$ esetén x-nek környezetbázisát $\{x\}$, ω-nak pedig álljon a környezetszűrője az $U \cup \{\omega\}$ alakú halmazokból, ahol $U \in \mathfrak{u}$. Mutassuk meg, hogy

(a) a leírt módon E-n $\mathcal{T}$ topológiát kapunk;

(b) $A \subset E_0$ esetén $\omega \in \bar{A}$ pontosan akkor áll, ha $A \in \mathfrak{u}$;

(c) $\mathcal{T}$ T_1-topológia;

(d) $\omega \notin \bar{A}$ esetén A és $E - A$ nyílt;

(e) $\mathcal{T}$ T_5-topológia;

(f) $\omega \in A$ esetén vagy A nyílt, vagy $(E - A) \cup \{\omega\}$ nyílt;

(g) egy $A \subset E$ halmaz pontosan akkor kompakt, ha véges.

6. Adjunk példát olyan T_1-térre, amelyben nem minden kompakt részhalmaz zárt.

[$[E, \mathcal{F}_E]$, E végtelen.]

7. Adjunk példát olyan $\mathcal{T}_1$ és $\mathcal{T}_2$ topológiára egy E halmazon, hogy $\mathcal{T}_i$ T_i-topológia, mindkettő kompakt, $\mathcal{T}_1 < \mathcal{T}_2$, de $\mathcal{T}_1 \neq \mathcal{T}_2$.

[$E = \mathbf{I}$, $\mathcal{T}_1 = \mathcal{F}_{\mathbf{I}}$, $\mathcal{T}_2 = \mathcal{E}|\mathbf{I}$.]

8. Adjunk példát olyan T_0-térre, amelyben egy pont lezárása nem kompakt. $[[\mathbf{R}, \bar{\mathscr{E}}].]$

9. Legyen $[E, \mathscr{T}]$ topologikus tér, $K \subset E$ kompakt, $A \subset E$, és tegyük fel, hogy K minden pontja és A folytonos függvénnyel szétválasztható. Mutassuk meg, hogy K és A is szétválasztható folytonos függvénnyel.

$\Big[$Ha f_x x-et és A-t szétválasztó folytonos függvény, a $V_x = \left\{y : f_x(y) < \frac{1}{2}\right\}$ jelöléssel $K \subset \bigcup_{1}^{n} V_{x_i}$, és $g = 2 \max\left(\frac{1}{2}, \min(f_{x_1}, \dots, f_{x_n})\right) - 1.\Big]$

10. Mutassuk meg, hogy ha egy topologikus térben bármely két $x \neq y$ pont folytonos függvénnyel szétválasztható, akkor bármely két kompakt K_1, K_2 halmaz is $K_1 \cap K_2 = \emptyset$ esetén folytonos függvénnyel szétválasztható.

11. Mutassuk meg, hogy ha egy teljesen reguláris térben K kompakt, F zárt, és $K \cap F = \emptyset$, akkor K és F folytonos függvénnyel szétválasztható.

12. Legyen H azoknak az (x_i) sorozatoknak a halmaza, amelyekre $x_i \in \mathbf{R}$, $|x_i| \leqq 1$ $(i \in \mathbf{N})$. Tekintsük az **5.2.** alatti 5. feladatban szereplő $\mathscr{U}_0 = \mathscr{U}|E_0$ uniform struktúrát, s legyen $\mathscr{T} = \mathscr{T}_{\mathscr{U}_0}$. Mutassuk meg, hogy

(a) $\mathscr{T}$ kompakt;

(b) ha $f_n \in E_0$ az a függvény, amelyre $x = (x_i)$ esetén $f_n(x) = x_n$, akkor az (f_n) sorozatnak nincs $\mathscr{T}$-konvergens részsorozata;

(c) $\mathscr{T}$ nem sorozatkompakt.

[$\mathbf{N}$-nek bármely (i_n) részsorozatára legyen $x_{i_n} = 1$, ha n páros, egyébként $x_i = 0$, és $x = (x_i)$; ekkor $(f_{i_n}(x))$ nem konvergens.]

13. Legyen W nem-megszámlálható jólrendezett halmaz, amelyben $x \in W$ esetén $(\leftarrow, x)$ megszámlálható (l. **1.1.**, 18. feladat), $\mathscr{T}$ pedig W-nek rendezéstopológiája. Mutassuk meg, hogy

(a) W-ben nincs legnagyobb elem;

(b) $\mathscr{T}$ nem kompakt;

(c) W legkisebb elemét a-val jelölve, $x \in W$ esetén $[a, x]$ rendezéstopológiája $\mathscr{T}|[a, x]$-szel azonos;

(d) $x \in W$ esetén $\mathscr{T}|[a, x]$ kompakt M_1-topológia;

(e) W-ben minden megszámlálható halmaz korlátos;

(f) $\mathscr{T}$ sorozatkompakt, tehát megszámlálhatóan kompakt és pszeudokompakt.

[Alkalmazzuk a **2.3.** alatti 14. feladatot és az 1. feladatot.]

14. Legyen $[E, \mathscr{T}]$ megszámlálhatóan kompakt tér, f_n $\mathscr{T}$-folytonos függvény, $f_1 \geqq f_2 \geqq f_3 \geqq \dots$, és $x \in E$ esetén $f_n(x) \to 0$. Mutassuk meg, hogy minden $\varepsilon > 0$-hoz van olyan $n \in \mathbf{N}$, hogy $x \in E$ esetén $f_n(x) < \varepsilon$.

15. Mutassuk meg, hogy az $[\mathbf{R}, \bar{\mathscr{E}}]$ térben minden folytonos függvény állandó, úgyhogy a tér pszeudokompakt, azonban nem megszámlálhatóan kompakt.

16. Egészítsük ki a 13. feladatban szereplő jólrendezett W halmazt egy w elemmel, amely W-nek minden eleménél nagyobb, legyen $W^* = W \cup \{w\}$, $\mathscr{T}^*$ pedig W^*-nak rendezéstopológiája. Mutassuk meg, hogy

(a) W^* jólrendezett;

(b) $\mathcal{T}^*$ kompakt;

(c) $\mathcal{T} = \mathcal{T}^*|W$ azonos W-nek rendezéstopológiájával;

(d) $w \in \overline{W}$;

(e) W megszámlálhatóan kompakt, de nem zárt;

(f) $\mathcal{T}^*$ sorozatkompakt, de nem M_1-topológia.

17. Legyen $\mathcal{T}$ a **2.5.e.** pont végén **R** fölött értelmezett nem-reguláris T_2-topológia, továbbá $\mathcal{T}_0 = \mathcal{T}|\mathbf{I}$. Mutassuk meg, hogy

(a) $\mathcal{T}_0 > \mathcal{E}|\mathbf{I}$, $\mathcal{T}_0 \neq \mathcal{E}|\mathbf{I}$;

(b) $\mathcal{T}_0$ nem megszámlálhatóan kompakt;

(c) minden $\mathcal{T}_0$-folytonos függvény $\mathcal{E}|\mathbf{I}$-folytonos is;

(d) $\mathcal{T}_0$ pszeudokompakt.

18. Mutassuk meg, hogy ha egy több pontból álló rendezett E halmaz rendezése teljes, akkor rendezéstopológiája lokálisan kompakt.

19. Legyen E az $\mathcal{E}|\mathbf{I}$-folytonos függvények halmaza a

$$\rho(f, g) = \sup \{|f(t) - g(t)| : t \in \mathbf{I}\}$$

távolsággal. Mutassuk meg, hogy

(a) az $a_n = \dfrac{1}{n}$ jelöléssel azt a szakaszonként lineáris f_n függvényt tekintve, amelyre $f_n(a_n) = 1$, $0 \leqq t \leqq \dfrac{a_n + a_{n+1}}{2}$ és $\dfrac{a_n + a_{n-1}}{2} \leqq t \leqq 1$ esetén pedig $f_n(t) = 0$, az (f_n) sorozatnak nincs $\mathcal{T}_\rho$-torlódási pontja;

(b) $f \in E$, $\varepsilon > 0$ esetén $f + \varepsilon f_n \in \bar{S}(f, \varepsilon)$;

(c) $\mathcal{T}_\rho$ nem lokálisan kompakt.

20. Legyen $[E_0, \mathcal{T}_0]$ T_1-tér, $E = E_0 \cup \{\omega\}$, $\omega \notin E_0$, s egy E fölötti $\mathcal{T}$ topológia számára álljon $x \in E_0$ környezetbázisa az x-et tartalmazó $\mathcal{T}_0$-nyílt halmazokból, ω-é pedig az ω-t tartalmazó véges komplementumú halmazokból. Mutassuk meg, hogy

(a) így E-n csakugyan topológia van értelmezve;

(b) $\mathcal{T}$ T_1-topológia;

(c) $\mathcal{T}_0 = \mathcal{T}|E_0$;

(d) E_0 $\mathcal{T}$-nyílt;

(e) $\mathcal{T}$ kompakt;

(f) ha $\mathcal{T}_0$ nem lokálisan kompakt, akkor $[E, \mathcal{T}]$ olyan kompakt T_1-tér, amelyben egy nyílt altér nem lokálisan kompakt, és amelyben nincs minden pontnak kompakt halmazokból álló környezetbázisa.

21. Mutassuk meg, hogy ha $E = A \cup B$, A és B végtelen, $A \cap B = \emptyset$, akkor $\mathcal{F}_E|A$ kompakt, A $\mathcal{F}_E$-sűrű, de A nem nyílt.

22. Legyen

$$A = \{(x, 0) : x \in \mathbf{I}\},\ B = \{(x, 1) : x \in \mathbf{I}\},\ E = A \cup B,$$

és

$$\rho((x, u), (y, v)) = |x - y|.$$

Mutassuk meg, hogy

(a) ρ eltérés E-n;

(b) $[A, \mathcal{T}_\rho|A]$ is, $[B, \mathcal{T}_\rho|B]$ is $[\mathbf{I}, \mathcal{E}|\mathbf{I}]$-vel homeomorf;

(c) $\mathcal{T}_\rho$ kompakt S_2-topológia;

(d) A $\mathcal{T}_\rho$-sűrű;

(e) A kompakt, de nem $\mathcal{T}_\rho$-zárt;

(f) A lokálisan kompakt, de nem $\mathcal{T}_\rho$-nyílt.

23. Mutassuk meg, hogy ha $f: X \to Y$, és $\mathcal{T}$ nulladimenziós topológia Y-on, akkor $f^{-1}(\mathcal{T})$ is nulladimenziós. Speciálisan nulladimenziós tér minden altere is ilyen.

24. Adjunk példát olyan E halmazra és E fölötti $\mathcal{T}_1 < \mathcal{T}_2$ T_2-topológiára, hogy $\mathcal{T}_2$ lokálisan kompakt, $\mathcal{T}_1$ azonban nem.

[Legyen $\mathcal{T}_2$ diszkrét.]

25. Mutassuk meg, hogy minden pszeudokompakt uniform tér prekompakt.

[Ha $[E, \mathcal{U}]$ nem prekompakt, $U \in \mathcal{U}$ olyan környék, hogy E-nek nincs U-rendben kicsiny halmazokból álló véges befedése, $U_1, U_2 \in \mathcal{U}$ pedig olyan környék, hogy $U_1 \circ U_1 \subset U$, $U_2 \circ U_2 \circ U_2 \circ U_2 \subset U_1$, akkor (5.3.32) bizonyításának mintájára készíthető olyan (x_i) sorozat, hogy $i \neq j$ esetén $(x_i, x_j) \notin U_1$, s akkor $x \in E$ esetén $U_2(x)$ legfeljebb egyet metsz az $U_2(x_i)$ halmazok közül. Ha f_i olyan $\mathcal{T}_\mathcal{U}$-folytonos függvény, hogy $x \in E - U_2(x_i)$ esetén $f_i(x) = 0, f_i(x_i) = i$, akkor $f = \sum_1^\infty f_i$ $\mathcal{T}_\mathcal{U}$-folytonos és nem korlátos.]

26. Legyen $[E, \mathcal{T}]$ teljesen reguláris tér, Φ az összes $\mathcal{T}$-folytonos függvények családja. Mutassuk meg, hogy a következő állítások egyenértékűek:

(a) $\mathcal{T}$ pszeudokompakt;

(b) Minden $\mathcal{T}$-t indukáló uniform struktúra prekompakt;

(c) $\mathcal{U}_\Phi$ prekompakt.

VI. TÉRBŐVÍTÉSEK

6.1. TOPOLOGIKUS TEREK BŐVÍTÉSEI

6.1.a. A bővítés fogalma. Az **1.3.c.** pontban megjegyeztük, hogy ha egy teljes metrikus térből egyes pontokat kihagyunk, akkor a tér elveszítheti teljességét. Természetesen vetődik fel ennek a jelenségnek megfordításaként az a kérdés, hogy egy nem-teljes metrikus teret, vagy általánosabban, egy nem-teljes uniform teret nem lehet-e további pontok hozzávételével úgy kivőbíteni, hogy teljessé váljék. Ezzel analóg az a kérdés, hogy egy szomszédsági teret vagy egy topologikus teret, amely nem kompakt, mert benne egyes rácsoknak nincsen torlódási pontjuk, nem lehet-e további pontok hozzávételével úgy kibővíteni, hogy kompakttá váljék. Egy ilyen bővítés során természetesen elsősorban a torlódási ponttal nem rendelkező rácsok hiányzó torlódási pontjait kell valamilyen módon előteremteni, egyúttal arról is gondoskodva, hogy a bővebb térben alkotható újabb rácsok is kapjanak torlódási pontot.

Mindezekben a kérdésekben az a feladat, hogy egy adott térhez olyan bővebb teret készítsünk, amelynek az eredeti tér altere, és amely még további előírt kikötéseknek is eleget tesz (például teljes vagy kompakt). Az utóbbi feladatok fényében érthető, hogy elsősorban olyan bővebb tereket keresünk, amelyeknek az adott tér sűrű altere, ugyanis ha például egy topologikus teret sikerül belefoglalni egy bővebb kompakt térbe, akkor az adott térnek a bővebb térben vett lezárása szintén kompakt, s benne az adott tér már sűrű.

Mindezekre tekintettel — egyelőre topologikus terekre szorítkozva — állapodjunk meg abban, hogy egy $[E, \mathcal{T}]$ topologikus tér **bővítésén** olyan $[E', \mathcal{T}']$ topologikus teret értünk, amelyre $E' \supset E$, $\mathcal{T} = \mathcal{T}'|E$, és E $\mathcal{T}'$-sűrű E'-ben. Ilyenkor azt is mondjuk, hogy a $\mathcal{T}'$ topológia bővítése a $\mathcal{T}$ topológiának. Először is azzal a kérdéssel foglalkozunk, hogyan lehet egy adott topologikus térhez ilyen bővítéseket készíteni.

Legyen tehát megadva egy $[E, \mathcal{T}]$ topologikus tér, továbbá egy E-t tartalmazó $E' \supset E$ halmaz. Ha sikerül olyan $\mathcal{T}'$ topológiát értelmezni E'-n, hogy $[E', \mathcal{T}']$ bővítése legyen $[E, \mathcal{T}]$-nek, akkor minden $x \in E'$ pont minden $\mathcal{T}'$-környezete — E-nek feltételezett sűrűsége miatt — metszi E-t, és így az x pont $\mathfrak{v}'(x)$ $\mathcal{T}'$-környezetszűrőjéből (2.1.25) szerint egy $\mathfrak{z}(x) = \mathfrak{v}'(x)\ (\cap)\ \{E\}$ E-beli szűrőt lehet készíteni; ezt a $\mathfrak{v}'(x)$ környezetszűrő E-beli **nyomszűrő**jének fogjuk nevezni. (2.3.9) szerint $x \in E$ esetén a $\mathfrak{z}(x)$ nyomszűrő éppen azonos az x pont $\mathfrak{v}(x)$ $\mathcal{T}$-környezetszűrőjével.

Kézenfekvő mármost az a gondolat, hogy a $\mathcal{T}'$ topológiát az E' halmazon azáltal adjuk meg, hogy minden $x \in E'$ ponthoz kijelöljük a hozzá tartozó $\mathfrak{z}(x)$ nyomszűrőt. Ezzel kapcsolatban két kérdés merül fel rögtön: tetszőlegesen választhatjuk-e a $\mathfrak{z}(x)$ nyomszűrőket, vagy valamilyen megszorításnak kell őket alávetnünk, és meghatározzák-e a nyomszűrők egyértelműen a $\mathfrak{T}'$ topológiát.

Az első kérdésre rögtön válaszolhatjuk, hogy az $x \in E$ pontokhoz tartozó nyomszűrő adott, azonos a $\mathfrak{v}(x)$ környezetszűrővel; de az $x \in E' - E$ pontokhoz tartozó nyomszűrő sem lehet akármilyen, hiszen egy topologikus térben egy pont környezetszűrőjének van csupa nyílt halmazból álló bázisa, s minthogy egy $\mathfrak{T}'$-nyílt halmaznak E-vel való metszete $\mathfrak{T}$-nyílt, (2.1.17) következtében ugyanez mondható a $\mathfrak{z}(x)$ nyomszűrőről is. Ha tehát megállapodunk még abban, hogy egy topologikus térben egy szűrőt **nyílt szűrő**nek mondunk, ha van csupa nyílt halmazból álló bázisa, az eddigieket a következőkben foglalhatjuk össze:

(6.1.1) *Legyen* $[E', \mathfrak{T}']$ *az* $[E, \mathfrak{T}]$ *topologikus tér bővítése,* $x \in E'$ *esetén* $\mathfrak{v}'(x)$ *az* x *pont* $\mathfrak{T}'$*-környezetszűrője, és* $\mathfrak{z}(x) = \mathfrak{v}'(x) (\cap) \{E\}$ *a megfelelő nyomszűrő. Ekkor* $\mathfrak{z}(x)$ E*-beli* $\mathfrak{T}$*-nyílt szűrő, speciálisan* $x \in E$ *esetén* $\mathfrak{z}(x) = \mathfrak{v}(x)$ *az* x *pont* $\mathfrak{T}$*-környezetszűrője.* ▮

A második kérdésre is negatív választ kell általában adni. Legyen például $E = \mathbf{Q}$, $E' = \mathbf{R}$, és $\mathbf{R}$-en tekintsük egyrészt az $\mathfrak{E}$ topológiát, másrészt azt a $\mathfrak{T}' \neq \mathfrak{E}$ topológiát, amelynek számára szubbázist alkotnak az $\mathfrak{E}$-nyílt halmazok és ezenkívül maga $\mathbf{Q}$. Rögtön világos, hogy $\mathfrak{E}|\mathbf{Q} = \mathfrak{T}'|\mathbf{Q}$, úgyhogy ezt a topológiát $\mathfrak{T}$-vel jelölve $[\mathbf{R}, \mathfrak{E}]$ is, $[\mathbf{R}, \mathfrak{T}']$ is bővítése $[\mathbf{Q}, \mathfrak{T}]$-nek; az, hogy $\mathbf{Q}$ nemcsak $\mathfrak{E}$-sűrű, hanem $\mathfrak{T}'$-sűrű is, abból tűnik ki, hogy egy $x \in \mathbf{R} - \mathbf{Q}$ pont bármely $\mathfrak{T}'$-környezete egyben $\mathfrak{E}$-környezete is x-nek, és $\mathfrak{E} < \mathfrak{T}'$ miatt persze x $\mathfrak{E}$-környezetei egyben $\mathfrak{T}'$-környezetek is, úgyhogy az $\mathfrak{E}$-nyomszűrők azonosak a $\mathfrak{T}'$-nyomszűrőkkel.

Megmutatjuk azonban, hogy ha a nyomszűrőket — a (6.1.1) tételben megadott korlátozások mellett tetszőlegesen — előírjuk, akkor mindig van az adott nyomszűrőket szolgáltató bővítés, sőt ezek között van egy kitüntetett is:

(6.1.2) *Legyen* $[E, \mathfrak{T}]$ *topologikus tér,* $E' \supset E$*. Minden* $x \in E'$ *ponthoz írjunk elő egy* E*-beli* $\mathfrak{T}$*-nyílt* $\mathfrak{z}(x)$ *szűrőt, mégpedig* $x \in E$ *esetén legyen* $\mathfrak{z}(x) = \mathfrak{v}(x)$ *az* x *pont* $\mathfrak{T}$*-környezetszűrője. Legyen* $A \subset E$ *esetén*

(6.1.3) $$s(A) = \{x\colon\, x \in E',\ A \in \mathfrak{z}(x)\}.$$

Ekkor

(6.1.4) $$\mathfrak{S} = \{s(G)\colon\, G \subset E\ \mathfrak{T}\text{-nyílt}\}$$

bázist alkot egy E' *fölötti* $\mathfrak{T}'$ *topológia számára.* $\mathfrak{T}'$ *a legdurvább olyan topológia* E'*-n, amelyre nézve minden* $x \in E'$ *ponthoz nyomszűrőként az előírt* $\mathfrak{z}(x)$ *szűrő tartozik. Fennáll* $\mathfrak{T}'|E = \mathfrak{T}$.

Bizonyítás. Bármely E-beli $\mathfrak{z}$ szűrőre és $A, B \subset E$ halmazra $A \subset B$, $A \in \mathfrak{z}$ esetén $B \in \mathfrak{z}$, továbbá $A \cap B \in \mathfrak{z}$ pontosan akkor áll, ha $A \in \mathfrak{z}$ és $B \in \mathfrak{z}$. Ezért

(6.1.5) $$A \subset B \Rightarrow s(A) \subset s(B),\quad s(A \cap B) = s(A) \cap s(B) \quad (A, B \subset E),$$

továbbá persze $s(E) = E'$. Ebből látszik, hogy $\mathfrak{S}$-re teljesülnek (2.2.8) kikötései, úgyhogy $\mathfrak{S}$ csakugyan bázis egy E' feletti $\mathfrak{T}'$ topológia számára.

Az $x \in E'$ pont $\mathfrak{v}'(x)$ $\mathfrak{T}'$-környezetszűrőjét (2.2.7) szerint az

$$\{s(G)\colon\, G\ \mathfrak{T}\text{-nyílt},\ x \in s(G)\}$$

halmazrendszer generálja, s minthogy (6.1.3) szerint $x \in s(A)$ egyenértékű azzal, hogy $A \in \mathfrak{z}(x)$, ez még

$$\{s(G)\colon G\ \mathfrak{T}\text{-nyílt},\ G \in \mathfrak{z}(x)\}$$

alakban is írható. A $\mathfrak{v}'(x)\,(\cap)\,\{E\}$ nyomszűrőt (2.1.17) szerint az

$$(6.1.6)\qquad \{s(G) \cap E\colon G\ \mathfrak{T}\text{-nyílt},\ G \in \mathfrak{z}(x)\}$$

rendszer fogja generálni. Csakhogy $x \in E$ esetén $\mathfrak{z}(x) = \mathfrak{v}(x)$ folytán a $\mathfrak{T}$-nyílt G halmazra $G \in \mathfrak{z}(x)$ pontosan akkor áll, ha $x \in G$, azaz

$$(6.1.7)\qquad s(G) \cap E = G\quad (G\ \mathfrak{T}\text{-nyílt}).$$

Így a (6.1.6) rendszer nem más, mint a $\mathfrak{z}(x)$-beli $\mathfrak{T}$-nyílt halmazok rendszere, ez pedig éppen $\mathfrak{z}(x)$-et generálja, hiszen $\mathfrak{z}(x)$ $\mathfrak{T}$-nyílt szűrő. Ennélfogva

$$\mathfrak{v}'(x)\,(\cap)\,\{E\} = \mathfrak{z}(x),$$

speciálisan $x \in E$ esetén $\mathfrak{v}'(x)\,(\cap)\,\{E\} = \mathfrak{v}(x)$. Ez mutatja, hogy $\mathfrak{T}'$ csakugyan bővítése $\mathfrak{T}$-nek, mégpedig éppen az adott $\mathfrak{z}(x)$ nyomszűrőket szolgáltató bővítés.

Legyen most $\mathfrak{T}_1'$ egy másik topológia E'-n, $\mathfrak{v}_1'(x)$ az $x \in E'$ pont $\mathfrak{T}_1'$-környezetszűrője, s tegyük fel, hogy minden $x \in E'$ pontra

$$\mathfrak{v}_1'(x)\,(\cap)\,\{E\} = \mathfrak{z}(x).$$

Ha $x \in s(G)$, G $\mathfrak{T}$-nyílt, akkor $G \in \mathfrak{z}(x)$ folytán van x-nek olyan V_1' $\mathfrak{T}_1'$-környezete, hogy $G = V_1' \cap E$, s aztán van olyan $\mathfrak{T}_1'$-nyílt G_1' halmaz, hogy $x \in G_1' \subset V_1'$. Ha $y \in G_1'$, akkor $G_1' \in \mathfrak{v}_1'(y)$, tehát $G_1' \cap E \in \mathfrak{z}(y)$, és $G_1' \cap E \subset V_1' \cap E = G$ miatt $G \in \mathfrak{z}(y)$, $y \in s(G)$. Így $\mathfrak{T}$-nyílt G esetén $s(G)$ tartalmazza bármely x pontjának egy G_1' $\mathfrak{T}_1'$-környezetét, azaz $s(G)$ $\mathfrak{T}_1'$-nyílt. Ez mutatja, hogy minden $\mathfrak{T}'$-nyílt halmaz $\mathfrak{T}_1'$-nyílt is, $\mathfrak{T}' < \mathfrak{T}_1'$. ∎

6.1.b. Szoros bővítések. A (6.1.2) tételben leírt módon keletkező bővítéseket szoros bővítéseknek nevezzük. Pontosabban szólva az $[E, \mathfrak{T}]$ **topologikus tér szoros bővítésének** mondjuk az $[E', \mathfrak{T}']$ topologikus teret (vagy a $\mathfrak{T}$ **topológia szoros bővítésének** a $\mathfrak{T}'$ topológiát), ha $E \subset E'$, $\mathfrak{T} = \mathfrak{T}'|E'$, E $\mathfrak{T}'$-sűrű, és $x \in E'$ esetén a $\mathfrak{v}'(x)$ $\mathfrak{T}'$-környezetszűrő $\mathfrak{v}'(x)\,(\cap)\,\{E\}$ nyomszűrőjét $\mathfrak{z}(x)$-szel, továbbá $A \subset E$ esetén a (6.1.3) halmazt $s(A)$-val jelölve, a (6.1.4) alatti $\mathfrak{S}$ halmazrendszer bázis $\mathfrak{T}'$ számára.

Ezzel az elnevezéssel (6.1.2)-ből kiolvasható:

(6.1.8) *Legyen $[E, \mathfrak{T}]$ topologikus tér, $E' \supset E$, minden $x \in E'$ ponthoz rendeljünk egy $\mathfrak{T}$-nyílt E-beli $\mathfrak{z}(x)$ szűrőt, s $x \in E$ esetén legyen $\mathfrak{z}(x)$ x-nek $\mathfrak{T}$-környezetszűrője. Ekkor E'-n pontosan egy $\mathfrak{T}'$ topológia van, amely $\mathfrak{T}$-nek az adott $\mathfrak{z}(x)$ szűrőket nyomszűrőként szolgáltató szoros bővítése; ez az adott nyomszűrőkhöz vezető E' fölötti topológiák között a legdurvább.* ∎

A szoros bővítések közelebbi jellemzése érdekében jegyezzük meg a következőt:

(6.1.9) *Legyen* $[E', \mathfrak{T}']$ *topologikus tér,* $E \subset E'$ $\mathfrak{T}'$*-sűrű,* $\mathfrak{T} = \mathfrak{T}'|E$, $x \in E'$ $\mathfrak{T}'$*-környezetszűrője* $\mathfrak{v}'(x)$, $\mathfrak{z}(x) = \mathfrak{v}'(x)\,(\cap)\,\{E\}$, $A \subset E$ *esetén*

$$s(A) = \{x\colon\ x \in E',\ A \in \mathfrak{z}(x)\}.$$

Ekkor

(a) $B \subset E$ *esetén a* B *halmaz* $\mathfrak{T}'$*-lezárása* $E' - s(E - B)$;

(b) *Ha* $G \subset E$ $\mathfrak{T}$*-nyílt, akkor* $s(G)$ *a legnagyobb* $\mathfrak{T}'$*-nyílt halmaz, amely* E*-ből* G*-t metszi ki.*

Bizonyítás. (a): $x \in E'$ pontosan akkor nem tartozik B $\mathfrak{T}'$-lezárásához, ha nem $\mathfrak{T}'$-érintkezési pontja B-nek, azaz ha van $\mathfrak{v}'(x)$-ben B-t nem metsző halmaz, ami pontosan akkor áll, ha van $\mathfrak{z}(x)$-ben B-t nem metsző halmaz, azaz ha $E - B \in \mathfrak{z}(x)$, $x \in s(E - B)$.

(b): Az előbbiek szerint $E' - s(G)$ az $E - G$ halmaz $\mathfrak{T}'$-lezárása, vagyis a legkisebb $\mathfrak{T}'$-zárt halmaz, amely E-ből $(E - G)$-t metszi ki. A komplementumokra áttérve adódik az állítás. ∎

Vezessük most be a következő elnevezést: az $[E, \mathfrak{T}]$ topologikus térben (ill. a $\mathfrak{T}$ topológia számára) **zárt bázis** az $\mathfrak{F}$ halmazrendszer, ha az $\{E - F\colon F \in \mathfrak{F}\}$ rendszer bázis $\mathfrak{T}$ számára, azaz (2.2.6)-ra tekintettel ha az $F \in \mathfrak{F}$ halmazok $\mathfrak{T}$-zártak, és minden E-től különböző $\mathfrak{T}$-zárt halmaz előállítható $\mathfrak{F}$-hez tartozó halmazok metszeteként.

Most már könnyen igazolható:

(6.1.10) *Legyen az* $[E', \mathfrak{T}']$ *topologikus tér* $[E, \mathfrak{T}]$*-nek bővítése.* $\mathfrak{T}'$ *pontosan akkor szoros bővítése* $\mathfrak{T}$*-nek, ha a* $B \subset E$ *(*$\mathfrak{T}$*-zárt) halmazok* $\mathfrak{T}'$*-lezárásai zárt bázist alkotnak* $\mathfrak{T}'$ *számára.*

Bizonyítás. Ha $\mathfrak{T}'$ szoros bővítése $\mathfrak{T}$-nek, akkor $\mathfrak{T}'$ számára bázist alkotnak az $s(G)$ alakú halmazok, ahol G $\mathfrak{T}$-nyílt; (6.1.9) szerint $E' - s(G)$ azonos $E - G$ $\mathfrak{T}'$-lezárásával, úgyhogy már a $\mathfrak{T}$-zárt halmazok $\mathfrak{T}'$-lezárásai is zárt bázist szolgáltatnak.

Megfordítva, ha $\mathfrak{T}'$ számára zárt bázist alkotnak az E-beli halmazok $\mathfrak{T}'$-lezárásai, akkor ugyanezt megteszik már a $\mathfrak{T}$-zárt halmazok $\mathfrak{T}'$-lezárásai is, hiszen egy $B \subset E$ halmaz $\mathfrak{T}'$-lezárása nyilván azonos B $\mathfrak{T}$-lezárásának $\mathfrak{T}'$-lezárásával. Így ekkor (6.1.9) értelmében az $s(G)$ alakú halmazok, ahol G $\mathfrak{T}$-nyílt, szolgáltatnak $\mathfrak{T}'$-bázist, úgyhogy $\mathfrak{T}'$ csakugyan szoros bővítése $\mathfrak{T}$-nek. ∎

(6.1.11) *Ha* (6.1.9) *feltevései és jelölései mellett a* $\mathfrak{T}'$ *topológia reguláris, akkor szoros bővítése* $\mathfrak{T}$*-nek.*

Bizonyítás. Tetszőleges $x \in E'$ ponthoz s ennek V' $\mathfrak{T}'$-környezetéhez található olyan $\mathfrak{T}'$-nyílt G' és $\mathfrak{T}'$-zárt F', hogy $x \in G' \subset F' \subset V'$. Legyen $F = (E' - G') \cap E$. Ekkor $F \subset E' - G'$ miatt x nem tartozhat F-nek $\mathfrak{T}'$-lezárásához. Viszont $y \in E' - V'$ esetén $y \in E' - F'$ miatt y minden V_1' $\mathfrak{T}'$-környezetével együtt $(E' - F') \cap V_1'$ is $\mathfrak{T}'$-környezete y-nak, amely E $\mathfrak{T}'$-sűrűsége miatt metszi E-t, azaz V_1' metszi az $(E' - F') \cap E \subset (E' - G') \cap E = F$ halmazt. Eszerint F $\mathfrak{T}'$-lezárásának komplementuma x-nek V'-ben foglalt $\mathfrak{T}'$-környezete. Ennélfogva (6.1.10) alkalmazható. ∎

(6.1.12) *Legyen* $E \subset E' \subset E''$, $\mathfrak{T}$, $\mathfrak{T}'$, $\mathfrak{T}''$ *topológia rendre* E*-n,* E'*-n és* E''*-n. Ha* $\mathfrak{T}'$ *bővítése* $\mathfrak{T}$*-nek,* $\mathfrak{T}''$ *pedig* $\mathfrak{T}'$*-nek, akkor* $\mathfrak{T}''$ *is bővítése* $\mathfrak{T}$*-nek.*

Bizonyítás. Ha $\mathfrak{T} = \mathfrak{T}'|E$, $\mathfrak{T}' = \mathfrak{T}''|E'$, akkor (2.3.17) szerint $\mathfrak{T} = \mathfrak{T}''|E$. Ha E $\mathfrak{T}'$-sűrű, E' pedig $\mathfrak{T}''$-sűrű, akkor minden $x \in E''$ pont minden $\mathfrak{T}''$-nyílt G'' környezetére $G'' \cap E' \neq \emptyset$, tehát $G'' \cap E'$ $\mathfrak{T}'$-nyíltsága miatt $G'' \cap E' \cap E = G'' \cap E \neq \emptyset$, és E $\mathfrak{T}''$-sűrű. ∎

(6.1.13) *Legyen* $E \subset E' \subset E''$, $\mathfrak{T}''$ *topológia* E''-*n*, $\mathfrak{T}' = \mathfrak{T}''|E'$, $\mathfrak{T} = \mathfrak{T}''|E = \mathfrak{T}'|E$. *Ha* $\mathfrak{T}''$ *(szoros) bővítése* $\mathfrak{T}$-*nek, akkor* $\mathfrak{T}'$ *is (szoros) bővítése* $\mathfrak{T}$-*nek,* $\mathfrak{T}''$ *pedig* $\mathfrak{T}'$-*nek.*

Bizonyítás. Ha E $\mathfrak{T}''$-sűrű, akkor $\mathfrak{T}'$-lezárása $E'' \cap E' = E'$-vel egyenlő, s így $\mathfrak{T}'$-sűrű is, továbbá E' $\mathfrak{T}''$-lezárása is E'', tehát E' is $\mathfrak{T}''$-sűrű.

Legyen most $x \in E''$ esetén $\mathfrak{z}(x) = \mathfrak{v}''(x) \cap \{E\}$, ahol $\mathfrak{v}''(x)$ x-nek $\mathfrak{T}''$-környezetszűrője; $x \in E'$ esetén $\mathfrak{z}(x)$ egyúttal x $\mathfrak{T}'$-környezetszűrőjének E-beli nyomszűrője is. Ha $A \subset E$ esetén

$$s'(A) = \{x\colon\ x \in E',\ A \in \mathfrak{z}(x)\},$$

$$s''(A) = \{x\colon\ x \in E'',\ A \in \mathfrak{z}(x)\},$$

akkor nyilván $s'(A) = s''(A) \cap E'$. Minthogy $\mathfrak{T}''$ számára bázist alkotnak a $\mathfrak{T}$-nyílt G-knek megfelelő $s''(G)$ halmazok, s így $\mathfrak{T}'$ számára az ugyanezen G-knek megfelelő $s''(G) \cap E' = s'(G)$ halmazok, azért $\mathfrak{T}'$ csakugyan szoros bővítése $\mathfrak{T}$-nek. Másrészt (6.1.10) szerint a $B \subset E$ halmazok $\mathfrak{T}''$-lezárásainak komplementumai bázist alkotnak $\mathfrak{T}''$ számára; így annál inkább bázist alkotnak a $B \subset E'$ halmazok lezárásainak komplementumai. ∎

A szoros bővítések szétválasztási tulajdonságaival kapcsolatban jegyezzük meg:

(6.1.14) *A* (6.1.9) *alatti feltevésekkel és jelölésekkel legyen* $\mathfrak{T}'$ *szoros bővítése* $\mathfrak{T}$-*nek, és* $x, y \in E'$.

(a) x *és* y *pontosan akkor gyengén széteső, ha* $\mathfrak{z}(x) \neq \mathfrak{z}(y)$;

(b) x *és* y *pontosan akkor széteső, ha* $\mathfrak{z}(x)$ *és* $\mathfrak{z}(y)$ *közül egyik sem tartalmazza a másikat;*

(c) x *és* y *pontosan akkor szétválasztható, ha* $\emptyset \in \mathfrak{z}(x)\ (\cap)\ \mathfrak{z}(y)$.

Bizonyítás. (a): x és y (2.5.4) szerint pontosan akkor gyengén széteső, ha $\mathfrak{v}'(x) \neq \mathfrak{v}'(y)$. Ha $\mathfrak{z}(x) \neq \mathfrak{z}(y)$, akkor természetesen $\mathfrak{v}'(x) \neq \mathfrak{v}'(y)$ is áll. Ha viszont $\mathfrak{v}'(x) \neq \mathfrak{v}'(y)$, akkor pl. x-nek van olyan $\mathfrak{T}'$-környezete, amely y-nak nem $\mathfrak{T}'$-környezete, s akkor van olyan $s(G)$ alakú halmaz is, ahol G $\mathfrak{T}$-nyílt, hogy $x \in s(G)$, $y \notin s(G)$, azaz hogy $G \in \mathfrak{z}(x)$, $G \notin \mathfrak{z}(y)$.

(b): Ha $\mathfrak{z}(x)$ és $\mathfrak{z}(y)$ közül egyik sem tartalmazza a másikat, akkor e szűrők nyíltsága miatt van olyan $\mathfrak{T}$-nyílt G_1 és G_2, hogy $G_1 \in \mathfrak{z}(x)$, $G_1 \notin \mathfrak{z}(y)$, $G_2 \in \mathfrak{z}(y)$, $G_2 \notin \mathfrak{z}(x)$. Ekkor $s(G_1)$ x-nek y-t nem tartalmazó, $s(G_2)$ pedig y-nak x-et nem tartalmazó $\mathfrak{T}'$-környezete. Másrészt ha van x-nek y-t nem tartalmazó és y-nak x-et nem tartalmazó $\mathfrak{T}'$-környezete, akkor ezek felvehetők $s(G_1)$ és $s(G_2)$ alakban, ahol G_1 és G_2 $\mathfrak{T}$-nyílt, és $G_1 \in \mathfrak{z}(x)$, $G_1 \notin \mathfrak{z}(y)$, $G_2 \in \mathfrak{z}(y)$, $G_2 \notin \mathfrak{z}(x)$.

(c): Ha van x-nek és y-nak diszjunkt V_1' és V_2' $\mathfrak{T}'$-környezete, akkor $V_1' \cap E \in \mathfrak{z}(x)$ és $V_2' \cap E \in \mathfrak{z}(y)$ is diszjunkt. Ha viszont $\emptyset \in \mathfrak{z}(x)\ (\cap)\ \mathfrak{z}(y)$, akkor a nyíltság miatt van olyan $\mathfrak{T}$-nyílt G_1 és G_2, hogy $G_1 \in \mathfrak{z}(x)$, $G_2 \in \mathfrak{z}(y)$, $G_1 \cap G_2 = \emptyset$; ekkor $s(G_1)$ és $s(G_2)$ lesz x-nek és y-nak diszjunkt $\mathfrak{T}'$-környezete, hiszen (6.1.5) szerint $s(G_1) \cap s(G_2) = s(G_1 \cap G_2) = s(\emptyset) = \emptyset$. ∎

Ezzel kapcsolatban vezessük be a következő elnevezést: az $[E, \mathfrak{T}]$ topologikus tér $[E', \mathfrak{T}']$ bővítését (vagy a $\mathfrak{T}$ topológia $\mathfrak{T}'$ bővítését) **redukált** bővítésnek mondjuk, ha $x \in E' - E$, $y \in E'$, $x \neq y$ esetén x és y gyengén széteső. A definícióból azonnal következik:

(6.1.15) *Ha az $[E, \mathfrak{T}]$ tér $[E', \mathfrak{T}']$ bővítése T_0-tér, akkor redukált bővítés.* ∎

(6.1.16) *Ha $[E, \mathfrak{T}]$ T_0-tér, és $[E', \mathfrak{T}']$ redukált bővítése $[E, \mathfrak{T}]$-nek, akkor $[E', \mathfrak{T}']$ is T_0-tér.*

Bizonyítás. Azt kell csak belátnunk, hogy $x, y \in E$, $x \neq y$ esetén x és y gyengén széteső $\mathfrak{T}'$-re nézve. De ilyenkor x és y gyengén széteső $\mathfrak{T}$-re nézve, tehát van pl. olyan $\mathfrak{T}$-nyílt G, hogy $x \in G$, $y \notin G$. Alkalmas $\mathfrak{T}'$-nyílt G'-re $G = G' \cap E$, s akkor $x \in G'$, $y \notin G'$. ∎

(6.1.17) *Legyen $[E', \mathfrak{T}']$ szoros bővítése $[E, \mathfrak{T}]$-nek, $x \in E'$ esetén $\mathfrak{z}(x)$ az x pont $\mathfrak{T}'$-környezetszűrőjének E-beli nyomszűrője. $[E', \mathfrak{T}']$ pontosan akkor redukált bővítése $[E, \mathfrak{T}]$-nek, ha $x \in E' - E$, $y \in E'$, $x \neq y$ esetén $\mathfrak{z}(x) \neq \mathfrak{z}(y)$.*

Bizonyítás. (6.1.14) (a). ∎

(6.1.18) *Legyen $E \subset E' \subset E''$, $\mathfrak{T}''$ topológia E''-n, $\mathfrak{T}' = \mathfrak{T}''|E'$, $\mathfrak{T} = \mathfrak{T}'|E = \mathfrak{T}''|E$, E $\mathfrak{T}''$-sűrű. Ha $\mathfrak{T}''$ redukált bővítése $\mathfrak{T}$-nek, akkor $\mathfrak{T}'$ is ilyen. Megfordítva, ha $\mathfrak{T}'$ redukált bővítése $\mathfrak{T}$-nek, $\mathfrak{T}''$ pedig $\mathfrak{T}'$-nek, akkor $\mathfrak{T}''$ redukált bővítése $\mathfrak{T}$-nek is.*

Bizonyítás. Ha $\mathfrak{T}''$ redukált bővítése $\mathfrak{T}$-nek, és $x \in E' - E$, $y \in E'$, $x \neq y$, akkor van olyan $\mathfrak{T}''$-nyílt G'', hogy pl. $x \in G''$, $y \notin G''$, s így $G'' \cap E'$ x-nek y-t nem tartalmazó $\mathfrak{T}'$-környezete.

Tegyük most fel, hogy $\mathfrak{T}'$ $\mathfrak{T}$-nek, $\mathfrak{T}''$ $\mathfrak{T}'$-nek redukált bővítése, és legyen $x \in E'' - E$, $y \in E''$, $x \neq y$. Ha $x \in E'' - E'$, akkor x és y gyengén $\mathfrak{T}''$-széteső. Ha $x \in E' - E$, $y \in E'' - E'$, akkor ugyanez mondható, ismét $\mathfrak{T}''$-nek $\mathfrak{T}'$-re vonatkozó redukáltsága miatt. Végül ha $x \in E' - E$, $y \in E'$, akkor van olyan $\mathfrak{T}'$-nyílt G', hogy pl. $x \in G'$, $y \notin G'$, és olyan $\mathfrak{T}''$-nyílt G''-t választva, hogy $G' = G'' \cap E'$, egyúttal $x \in G''$, $y \notin G''$ lesz. ∎

A következő tétel tartalma az, hogy a szoros bővítéseket lényegében véve a nyomszűrők kijelölése egyértelműen meghatározza. Ennek pontosabb megfogalmazása érdekében legyen $[E_1', \mathfrak{T}_1']$ és $[E_2', \mathfrak{T}_2']$ az $[E, \mathfrak{T}]$ tér két bővítése, $f : E_1' \to E_2'$ pedig olyan leképezés, amelyre $x \in E$ esetén $f(x) = x$; az ilyen leképezést **E-t rögzítő leképezés**nek fogjuk mondani.

(6.1.19) *Legyen $[E_1', \mathfrak{T}_1']$ és $[E_2', \mathfrak{T}_2']$ az $[E, \mathfrak{T}]$ topologikus térnek két szoros bővítése, $x \in E_1'$ és $y \in E_2'$ esetén*

$$\mathfrak{z}_1(x) = \mathfrak{v}_1'(x)\,(\cap)\,\{E\}, \quad \mathfrak{z}_2(y) = \mathfrak{v}_2'(y)\,(\cap)\,\{E\},$$

ahol $\mathfrak{v}_1'(x)$ és $\mathfrak{v}_2'(y)$ a $\mathfrak{T}_1'$-, ill. $\mathfrak{T}_2'$-környezetszűrőt jelöli, és legyen $f : E_1' \to E_2'$ E-t rögzítő injekció. $f|_{E_1'}^{f(E_1')} = h$ pontosan akkor $(\mathfrak{T}_1', \mathfrak{T}_2'|f(E_1'))$-homeomorfizmus, ha $y = f(x)$ esetén $\mathfrak{z}_1(x) = \mathfrak{z}_2(y)$. Ha $\mathfrak{T}_2'$ redukált bővítése $\mathfrak{T}$-nek, és $f_1 : E_1' \to E_2'$ is, $f_2 : E_1' \to E_2'$ is E-t rögzítő leképezés, mégpedig olyan, hogy $f_1|_{E_1'}^{f_1(E_1')}$ $(\mathfrak{T}_1', \mathfrak{T}_2' \mid f_1(E_1'))$-homeomorfizmus, $f_2|_{E_1'}^{f_2(E_1')}$ pedig $(\mathfrak{T}_1', \mathfrak{T}_2' \mid f_2(E_1'))$-homeomorfizmus, akkor $f_1 = f_2$.

Bizonyítás. Ha h $(\mathfrak{T}_1', \mathfrak{T}_2'|f(E_1'))$-homeomorfizmus, akkor $y = f(x) = h(x)$, $x \in E_1'$ esetén $f(\mathfrak{v}_1'(x)) = \mathfrak{v}_2'(y)\,(\cap)\,\{f(E_1')\}$, tehát

$$\mathfrak{z}_1(x) = \mathfrak{v}_1'(x)\,(\cap)\,\{E\} = f(\mathfrak{v}_1'(x))\,(\cap)\,\{E\} = \mathfrak{v}_2'(y)\,(\cap)\,\{f(E_1')\} \cap \{E\} =$$
$$= \mathfrak{v}_2'(y)\,(\cap)\,\{E\} = \mathfrak{z}_2(y).$$

Tegyük most fel, hogy $x \in E_1'$, $y = f(x)$ esetén $\mathfrak{z}_1(x) = \mathfrak{z}_2(y)$. A szokásos

$$s_1(A) = \{x\colon\ x \in E_1',\ A \in \mathfrak{z}_1(x)\},$$

$$s_2(A) = \{y\colon\ y \in E_2',\ A \in \mathfrak{z}_2(y)\}$$

jelölésekkel az $s_1(G)$ halmazok $\mathfrak{T}_1'$-bázist, az $s_2(G)$ halmazok $\mathfrak{T}_2'$-bázist, az $s_2(G) \cap f(E_1')$ halmazok pedig $\mathfrak{T}_2'|f(E_1')$-bázist alkotnak; G mindig a $\mathfrak{T}$-nyílt halmazokon fut végig. Azonban feltevésünk szerint $x \in s_1(G)$, azaz $G \in \mathfrak{z}_1(x)$ pontosan akkor áll, ha $G \in \mathfrak{z}_2(f(x))$, azaz $f(x) \in s_2(G) \cap f(E_1')$, s így h tényleg $(\mathfrak{T}_1', \mathfrak{T}_2'|f(E_1'))$-homeomorfizmus.

Ha f_1 is, f_2 is a feltevéseknek megfelelő homeomorfizmus, akkor az első állítás szerint $x \in E_1'$ esetén $\mathfrak{z}_2(f_1(x)) = \mathfrak{z}_2(f_2(x)) = \mathfrak{z}_1(x)$. Azonban $x \in E$ esetén $f_1(x) = f_2(x) = x$, $x \in E_1' - E$ esetén pedig $\mathfrak{T}_2'$ redukáltsága miatt $\mathfrak{z}_2(f_1(x)) = \mathfrak{z}_2(f_2(x))$ csak $f_1(x) = f_2(x)$ esetén állhat (6.1.17) értelmében. ∎

Említettük már, hogy a topologikus terek bővítéseinek tanulmányozása főként kompakt bővítések előállításának érdekében történik. Erre a célra különösen alkalmasak a szoros bővítések, hiszen ha egy térnek ismeretes egy kompakt bővítése, akkor az ugyanazon nyomszűrőkhöz tartozó szoros bővítés (6.1.8) és (5.3.11) szerint ugyancsak kompakt. Ezzel kapcsolatban jegyezzük meg:

(6.1.20) *A* (6.1.9) *alatti feltevésekkel és jelölésekkel legyen $\mathfrak{T}'$ szoros bővítése $\mathfrak{T}$-nek. $\mathfrak{T}'$ pontosan akkor kompakt, ha a $\mathfrak{T}$-nyílt halmazok bármely olyan $\{G_i\colon i \in I\}$ rendszeréből, amelyben minden $x \in E'$-höz található egy $G_i \in \mathfrak{z}(x)$, kiválasztható egy ugyanilyen tulajdonságú véges $\{G_{i_j}\colon j = 1, \ldots, n\}$ részrendszer.*

Bizonyítás. (5.3.2) (f) alapján $\mathfrak{T}'$ pontosan akkor kompakt, ha E'-nek minden $s(G)$ (G $\mathfrak{T}$-nyílt) alakú halmazokból álló befedéséből kiválasztható véges befedés. ∎

Egy $[E, \mathfrak{T}]$ topologikus tér minden kompakt $[E', \mathfrak{T}']$ bővítését a tér (ill. $\mathfrak{T}'$-t a $\mathfrak{T}$ topológia) **kompaktifikációjának** nevezzük.

6.1.c. Alekszandrov-féle kompaktifikáció. A szoros bővítések első alkalmazásaként legyen $[E, \mathfrak{T}]$ tetszőleges nem-kompakt tér. Tekintsük E-ben a kompakt, zárt halmazok komplementumait. Ezek a feltevés szerint nem-üresek, és (5.3.6) következtében nyílt halmazokból álló rácsot alkotnak. Jelöljük $\mathfrak{w}$-vel az e rács által generált (nyílt) szűrőt, és készítsük el $[E, \mathfrak{T}]$-nek azt a szoros $[E', \mathfrak{T}']$ bővítését, amelyben E' E-ből egyetlen új ω pont hozzávételével keletkezik, és $\mathfrak{z}(\omega) = \mathfrak{w}$. Az $x \in E$ pontokhoz természetesen a megfelelő $\mathfrak{v}(x)$ $\mathfrak{T}$-környezetszűrőt rendelve $\mathfrak{z}(x)$-ként, a keletkező bővítés kompakt lesz. Valóban, ha $\{G_i\colon\ i \in I\}$ a $\mathfrak{T}$-nyílt halmazoknak olyan rendszere, hogy minden $x \in E'$-höz van oly $i \in I$, amelyre $G_i \in \mathfrak{z}(x)$, akkor ez $x = \omega$ esetén is áll, azaz van olyan $i_0 \in I$ és olyan kompakt, $\mathfrak{T}$-zárt $K \subset E$, hogy $E - K \subset G_{i_0}$; az $x \in K$ pontok mindegyikéhez is tartozik olyan $i_x \in I$, hogy $G_{i_x} \in \mathfrak{v}(x)$, azaz hogy $x \in G_{i_x}$. A kompakt K halmaz így nyert befedéséből válasszunk ki egy véges befedést:

$$K \subset \bigcup_{j=1}^{n} G_{i_{x_j}} \quad (x_j \in K,\ i_{x_j} \in I).$$

A $\{G_{i_0}, G_{i_{x_1}}, \ldots, G_{i_{x_n}}\}$ rendszerre is áll, hogy $x \in E'$ esetén egyik tagja $\mathfrak{z}(x)$-hez tartozik, ti. $x = \omega$ vagy $x \in E - K$ esetén ez G_{i_0}, $x \in K$ esetén pedig egyik $G_{i_{x_j}}$. (6.1.20)-ra hivatkozva tehát a következő állítást igazoltuk:

(6.1.21) *Ha $[E, \mathfrak{T}]$ nem-kompakt topologikus tér, $E' = E \cup \{\omega\}$, $\mathfrak{z}(\omega)$ a kompakt, zárt halmazok komplementumai által generált E-beli $\mathfrak{w}$ szűrő, akkor az e választásnak megfelelő $[E', \mathfrak{T}']$ szoros bővítés kompakt.* ▌

A (6.1.21)-ben leírt bővítést az $[E, \mathfrak{T}]$ tér (ill. topológiáját a $\mathfrak{T}$ topológia) **Alekszandrov-féle kompaktifikációjának** nevezik. (6.1.19)-ből látszik, hogy egy $[E, \mathfrak{T}]$ tér Alekszandrov-féle kompaktifikációja E-t rögzítő homeomorfizmustól eltekintve egyértelműen meg van határozva.

(6.1.22) *A (6.1.21) alatti feltevésekkel és jelölésekkel egyetlen $x \in E$ pontra sem állhat $\mathfrak{z}(x) \subset \mathfrak{z}(\omega)$.*

Bizonyítás. Feltéve, hogy $\mathfrak{z}(x) \subset \mathfrak{z}(\omega)$, azaz hogy $\mathfrak{v}(x) \subset \mathfrak{w}$, legyen $E = \bigcup_{i \in I} G_i$, G_i $\mathfrak{T}$-nyílt. Ekkor egy $i_0 \in I$ indexre $x \in G_{i_0}$, s akkor van oly kompakt, zárt K, hogy $E - K \subset G_{i_0}$. A K halmazt véges számú G_i befedi, holott E nem kompakt: ellentmondás. ▌

Ebből (6.1.17) és (6.1.16) alapján következik:

(6.1.23) *Bármely tér Alekszandrov-féle kompaktifikációja redukált bővítés. Ha a tér T_0-tér, akkor Alekszandrov-féle kompaktifikációja is ilyen.* ▌

(6.1.24) *S_1-tér Alekszandrov-féle kompaktifikációja is ilyen.*

Bizonyítás. (6.1.14) értelmében azt kell belátni, hogy $x, y \in E'$, $\mathfrak{z}(x) \subset \mathfrak{z}(y)$ esetén $\mathfrak{z}(x) = \mathfrak{z}(y)$. Ez $x, y \in E$ esetén így van, mert $[E, \mathfrak{T}]$ S_1-tér. (6.1.22)-ből tudjuk, hogy $x \in E$ esetén $\mathfrak{z}(x) \subset \mathfrak{z}(\omega)$ lehetetlen, és ekkor $\mathfrak{z}(\omega) \subset \mathfrak{z}(x)$ sem állhat, hiszen (5.3.15) szerint $E - \bar{x} \in \mathfrak{w}$, de persze ez a halmaz nem környezete x-nek. ▌

(6.1.25) *Az $[E, \mathfrak{T}]$ tér Alekszandrov-féle kompaktifikációja pontosan akkor S_2-tér, ha $[E, \mathfrak{T}]$ lokálisan kompakt S_2-tér.*

Bizonyítás. Ha $[E, \mathfrak{T}]$ lokálisan kompakt S_2-tér, akkor ismét (6.1.21) jelöléseivel $\mathfrak{z}(x) \neq \mathfrak{z}(y)$ esetén $\emptyset \in \mathfrak{z}(x)\,(\cap)\,\mathfrak{z}(y)$, ami $x, y \in E$ esetén azért igaz, mert $\mathfrak{T}$-re áll (S_2), $x \in E$ és $y = \omega$ esetén pedig azért, mert (5.3.54) szerint x-nek van kompakt, zárt K környezete, s akkor $(E - K) \cap K = \emptyset$, $E - K \in \mathfrak{z}(\omega)$, $K \in \mathfrak{z}(x)$. Így (6.1.14) értelmében $[E', \mathfrak{T}']$ S_2-tér.

Ha viszont $[E', \mathfrak{T}']$ S_2-tér, akkor (2.5.20) szerint $[E, \mathfrak{T}]$ is S_2-tér. Továbbá $x \in E$ esetén (6.1.22) szerint $\mathfrak{z}(x) \neq \mathfrak{z}(\omega)$, tehát $\emptyset \in \mathfrak{z}(x)\,(\cap)\,\mathfrak{z}(\omega)$, úgyhogy x-nek van $[E, \mathfrak{T}]$-ben olyan környezete, amely nem metszi egy kompakt, zárt halmaz komplementumát, s így van kompakt környezete is. ▌

(6.1.25)-ből (5.3.22) alapján újra következik, hogy lokálisan kompakt S_2-tér teljesen reguláris (ezt régebben (5.3.57)-ből vezettük le).

6.1.d. $\mathfrak{H}$-szűrők. A szoros bővítések további alkalmazása érdekében vezessünk be néhány új elnevezést, és vizsgáljuk kapcsolataikat.

Egy $\mathfrak{H}$ halmazrendszert **félhálónak** nevezünk, ha $H_1, H_2 \in \mathfrak{H}$ esetén $H_1 \cap H_2 \in \mathfrak{H}$. Minden E-beli szűrő E-beli félháló is. Egy topologikus térben akár a nyílt, akár a zárt halmazok félhálót alkotnak.

Legyen most $E \neq \emptyset$ tetszőleges halmaz, és $\mathfrak{H}$ egy E-beli félháló. Az E-beli $\mathfrak{h}$ szűrőt **$\mathfrak{H}$-szűrőnek** mondjuk, ha van csupa $\mathfrak{H}$-hoz tartozó halmazból álló bázisa. Ha $[E, \mathfrak{T}]$ topologikus tér, és $\mathfrak{H}$ a $\mathfrak{T}$-nyílt halmazokból álló félhálót jelenti, a $\mathfrak{H}$-szűrők azonosak a már korábban bevezetett nyílt szűrőkkel; ha $\mathfrak{H}$ a zárt halmazok félhálója, a $\mathfrak{H}$-szűrőket **zárt szűrőknek** fogjuk mondani.

Ha $\mathfrak{H}$ E-beli félháló, akkor E-beli **ultra-$\mathfrak{H}$-szűrőnek** mondjuk az olyan E-beli $\mathfrak{h}$ szűrőt, amely máximális $\mathfrak{H}$-szűrő, vagyis egyrészt $\mathfrak{H}$-szűrő, másrészt ha $\mathfrak{h}'$ egy E-beli $\mathfrak{H}$-szűrő, és $\mathfrak{h}' \supset \mathfrak{h}$, akkor $\mathfrak{h}' = \mathfrak{h}$. Ha $[E, \mathfrak{T}]$ topologikus tér, és $\mathfrak{H}$ a nyílt, ill. a zárt halmazok félhálóját jelenti, akkor E-beli **ultranyílt**, ill. **ultrazárt szűrőről** beszélünk.

Az ultra-$\mathfrak{H}$-szűrő fogalma az ultraszűrő fogalmának általánosítása: ha $\mathfrak{H}$ E összes részhalmazaiból áll, akkor az E-beli $\mathfrak{H}$-szűrők az E-beli szűrőkkel, az ultra-$\mathfrak{H}$-szűrők az ultraszűrőkkel azonosak. Ennek megfelelően az ultraszűrők alapvető tulajdonságai átvihetők ultra-$\mathfrak{H}$-szűrőkre is:

(6.1.26) *Legyen $\mathfrak{H}$ E-beli félháló, $\mathfrak{h}$ E-beli $\mathfrak{H}$-szűrő. $\mathfrak{h}$ pontosan akkor E-beli ultra-$\mathfrak{H}$-szűrő, ha $H \in \mathfrak{H}$ esetén vagy $H \in \mathfrak{h}$, vagy $E - H \in \mathfrak{h}$.*

Bizonyítás. Ha $\mathfrak{h}$-ra teljesül ez a feltétel, és $\mathfrak{h}' \supset \mathfrak{h}$ E-beli $\mathfrak{H}$-szűrő, akkor $A \in \mathfrak{h}'$ esetén van olyan $H \in \mathfrak{H}$, hogy $H \subset A$, $H \in \mathfrak{h}'$. Ekkor $E - H \in \mathfrak{h} \subset \mathfrak{h}'$ lehetetlen, úgyhogy $H \in \mathfrak{h}$, s még inkább $A \in \mathfrak{h}$. Így ekkor $\mathfrak{h}$ ultra-$\mathfrak{H}$-szűrő.

Megfordítva, ha $\mathfrak{h}$ ultra-$\mathfrak{H}$-szűrő, $H \in \mathfrak{H}$, és $E - H \notin \mathfrak{h}$, akkor minden $\mathfrak{h}$-beli halmaz metszi H-t. A $\mathfrak{h}$-beli $\mathfrak{H}$-hoz tartozó halmazok H-val alkotott metszetei nyilván $\mathfrak{H}$-beli halmazokból álló rácsot alkotnak, amely egy $\mathfrak{h}'$ E-beli $\mathfrak{H}$-szűrőt generál. Mivel $\mathfrak{h}' \supset \mathfrak{h}$, azért $\mathfrak{h}' = \mathfrak{h}$, és így $H = H \cap E \in \mathfrak{h}$. ∎

(6.1.27) *Ha $\mathfrak{H}$ E-beli félháló, $\mathfrak{h}$ E-beli ultra-$\mathfrak{H}$-szűrő, $H_i \in \mathfrak{H}$ $(i = 1, \ldots, n)$, és $\bigcup_1^n H_i \in \mathfrak{h}$, akkor legalább egy i-re $H_i \in \mathfrak{h}$.*

Bizonyítás. Ellenkező esetben (6.1.26) szerint $E - H_i \in \mathfrak{h}$ minden i-re, tehát $\bigcap_1^n (E - H_i) = E - \bigcup_1^n H_i \in \mathfrak{h}$ volna. ∎

(6.1.28) *Legyen $\mathfrak{H}$ E-beli félháló, $\mathfrak{h}_1$ E-beli $\mathfrak{H}$-szűrő, $\mathfrak{h}_2$ pedig ultra-$\mathfrak{H}$-szűrő. Ha $\emptyset \notin \mathfrak{h}_1 (\cap) \mathfrak{h}_2$, akkor $\mathfrak{h}_1 < \mathfrak{h}_2$. Ha tehát $\mathfrak{h}_1$ is, $\mathfrak{h}_2$ is ultra-$\mathfrak{H}$-szűrő, és $\mathfrak{h}_1 \neq \mathfrak{h}_2$, akkor van olyan $H_1 \in \mathfrak{h}_1 \cap \mathfrak{H}$, $H_2 \in \mathfrak{h}_2 \cap \mathfrak{H}$, hogy $H_1 \cap H_2 = \emptyset$.*

Bizonyítás. $\mathfrak{h} = \mathfrak{h}_1 (\cap) \mathfrak{h}_2$ (2.1.24) és (2.1.17) szerint $\mathfrak{H}$-szűrő, és $\mathfrak{h} \supset \mathfrak{h}_2$, úgyhogy $\mathfrak{h} = \mathfrak{h}_2$. ∎

(6.1.29) *Legyen $\mathfrak{H}$ E-beli félháló. Ekkor minden E-beli $\mathfrak{H}$-szűrő belefoglalható E-beli ultra-$\mathfrak{H}$-szűrőbe.*

Bizonyítás. Az (5.2.15) tétel bizonyításában követett módon azt kell belátni, hogy az E-beli $\mathfrak{H}$-szűrők rendszere induktív. Ha azonban $\{\mathfrak{h}_i : i \in I\}$ E-beli $\mathfrak{H}$-szűrőknek a tartalmazásra nézve rendezett rendszere, akkor $\mathfrak{h} = \bigcup_{i \in I} \mathfrak{h}_i$ szűrő, még pedig nyilván $\mathfrak{H}$-szűrő. ∎

Legyen most $\mathfrak{P}$ E részhalmazaiból álló háló, és $\emptyset$, $E \in \mathfrak{P}$, vagyis

(6.1.30) (a) $P \in \mathfrak{P}$ *esetén* $P \subset E$;

(b) $\emptyset, E \in \mathfrak{P}$;

(c) $P_1, P_2 \in \mathfrak{P}$ *esetén* $P_1 \cup P_2 \in \mathfrak{P}$, $P_1 \cap P_2 \in \mathfrak{P}$,

továbbá álljon $\mathfrak{Q}$ a $\mathfrak{P}$-beli halmazok komplementumaiból, $\mathfrak{M}$ pedig a $P \cap Q$ alakú halmazokból, ahol $P \in \mathfrak{P}$, $Q \in \mathfrak{Q}$:

(d) $\mathfrak{Q} = \{E - P\colon P \in \mathfrak{P}\}$;

(e) $\mathfrak{M} = \mathfrak{P}(\cap)\mathfrak{Q}$.

Ekkor $\mathfrak{Q}$ nyilván háló, $\mathfrak{M}$ félháló, és $\mathfrak{P} \subset \mathfrak{M}$, $\mathfrak{Q} \subset \mathfrak{M}$.

(6.1.31) *A* (6.1.30) *alatti feltételek mellett legyen* $x \in E$. *Az* x*-et tartalmazó* $\mathfrak{M}$*-beli halmazok olyan rácsot alkotnak, amely* E*-ben ultra-*$\mathfrak{M}$*-szűrőt generál.*

Bizonyítás. Az világos, hogy az x-et tartalmazó $\mathfrak{M}$-beli halmazok rácsot alkotnak. Legyen $\mathfrak{m}$ az általa generált E-beli szűrő. Ha $M \in \mathfrak{M}$, $M = P \cap Q$, $P \in \mathfrak{P}$, $Q \in \mathfrak{Q}$, akkor vagy $x \in M$, és $M \in \mathfrak{m}$, vagy $x \in E - M = (E - P) \cup (E - Q)$, s akkor vagy $x \in E - P$, vagy $x \in E - Q$; minthogy $E - P \in \mathfrak{Q} \subset \mathfrak{M}$, $E - Q \in \in \mathfrak{P} \subset \mathfrak{M}$, azért vagy $E - P \in \mathfrak{m}$, vagy $E - Q \in \mathfrak{m}$, s mindenképpen $E - M \in \mathfrak{m}$. (6.1.26) szerint tehát $\mathfrak{m}$ ultra-$\mathfrak{M}$-szűrő. ∎

A (6.1.31)-ben leírt ultra-$\mathfrak{M}$-szűrőt az x ponthoz tartozó **triviális ultra-$\mathfrak{M}$-szűrőnek** mondjuk.

Az ultra-$\mathfrak{M}$-szűrők egyszerű kapcsolatban állnak az ultra-$\mathfrak{P}$- és ultra-$\mathfrak{Q}$-szűrőkkel:

(6.1.32) (6.1.30) *feltevéseivel az ultra-*$\mathfrak{P}$*-(ultra-*$\mathfrak{Q}$*-) szűrők nem egyebek, mint azok az ultra-*$\mathfrak{M}$*-szűrők, amelyek egyúttal* $\mathfrak{P}$*- (*$\mathfrak{Q}$*-) szűrők.*

Bizonyítás. Minthogy $\mathfrak{P} \subset \mathfrak{M}$, $\mathfrak{Q} \subset \mathfrak{M}$, azért minden $\mathfrak{P}$- vagy $\mathfrak{Q}$-szűrő egyúttal $\mathfrak{M}$-szűrő is. Ezért egy $\mathfrak{m}$ $\mathfrak{P}$- (vagy $\mathfrak{Q}$-) szűrő, amely ultra-$\mathfrak{M}$-szűrő, egyben ultra-$\mathfrak{P}$- (ultra-$\mathfrak{Q}$-) szűrő is, hiszen ha $\mathfrak{z} \supset \mathfrak{m}$ $\mathfrak{P}$- ($\mathfrak{Q}$-) szűrő, akkor $\mathfrak{z}$ $\mathfrak{M}$-szűrő is, tehát $\mathfrak{z} = \mathfrak{m}$.

Másrészt ha $\mathfrak{z}$ ultra-$\mathfrak{P}$- (ultra-$\mathfrak{Q}$-) szűrő, akkor $\mathfrak{M}$-szűrő is, méghozzá (6.1.26) szerint ultra-$\mathfrak{M}$-szűrő. Valóban, ha $M = P \cap Q$, $P \in \mathfrak{P}$, $Q \in \mathfrak{Q}$, akkor (6.1.26)-ot a $\mathfrak{P}$ ($\mathfrak{Q}$) félhálóra alkalmazva $P \in \mathfrak{P}$ és $E - P \in \mathfrak{Q}$ közül is, $Q \in \mathfrak{Q}$ és $E - Q \in \mathfrak{P}$ közül is az egyik $\mathfrak{z}$-hez tartozik; $P \in \mathfrak{z}$, $Q \in \mathfrak{z}$ esetén $M \in \mathfrak{z}$, ha pedig $E - P \in \mathfrak{z}$ vagy $E - Q \in \mathfrak{z}$, akkor annál inkább $E - M = (E - P) \cup (E - Q) \in \mathfrak{z}$. ∎

(6.1.33) *Ha* (6.1.30) *feltevéseivel* $\mathfrak{r}$ E*-beli rács, akkor azok az* $A \subset E$ *halmazok, amelyekhez található olyan* $P \in \mathfrak{P}$ *és* $R \in \mathfrak{r}$, *hogy* $A \supset P \supset R$, $\mathfrak{P}$*-szűrőt alkotnak, amelyet* $\mathfrak{P}(\mathfrak{r})$*-rel jelölünk.*

Bizonyítás. $A_1, A_2 \in \mathfrak{P}(\mathfrak{r})$ esetén

$$A_1 \supset P_1 \supset R_1,\ A_2 \supset P_2 \supset R_2,\ P_1, P_2 \in \mathfrak{P},\ R_1, R_2 \in \mathfrak{r},$$

és ha $R \in \mathfrak{r}$ olyan, hogy $R \subset R_1 \cap R_2$, akkor

$$A_1 \cap A_2 \supset P_1 \cap P_2 \supset R,\ P_1 \cap P_2 \in \mathfrak{P},\ R \in \mathfrak{r}.$$

Minthogy $\mathfrak{P}(\mathfrak{r})$ nyilván E-ben felszálló rendszer, azért E-beli szűrő is, mégpedig evidensen $\mathfrak{P}$-szűrő. ∎

(6.1.34) *A* (6.1.33) *alatti feltevésekkel* $\mathfrak{P}(\mathfrak{r})$ *a legfinomabb* $\mathfrak{P}$*-szűrő, amely* $\mathfrak{r}$*-nél durvább.* ∎

(6.1.35) *A* (6.1.30) *alatti feltevésekkel legyen* $\mathfrak{r}_1$, $\mathfrak{r}_2$ *E-beli rács,* $\mathfrak{r}_1 < \mathfrak{r}_2$. *Ekkor* $\mathfrak{P}(\mathfrak{r}_1) < \mathfrak{P}(\mathfrak{r}_2)$, $\mathfrak{r}_1 \sim \mathfrak{r}_2$ *esetén* $\mathfrak{P}(\mathfrak{r}_1) = \mathfrak{P}(\mathfrak{r}_2)$. ∎

(6.1.36) *A* (6.1.30) *alatti feltevésekkel legyen* $\mathfrak{m}_1$ *és* $\mathfrak{m}_2$ *ultra-*$\mathfrak{M}$*-szűrő,* $\mathfrak{m}_1 \neq \mathfrak{m}_2$. *Ekkor*

(a) $\mathfrak{P}(\mathfrak{m}_1) \neq \mathfrak{P}(\mathfrak{m}_2)$;

(b) *Ha* $\mathfrak{m}_1$ $\mathfrak{Q}$*-szűrő, akkor* $\emptyset \in \mathfrak{m}_1 (\cap) \mathfrak{P}(\mathfrak{m}_2)$.

Bizonyítás. (6.1.28) szerint van olyan $M_1 \in \mathfrak{m}_1$, $M_2 \in \mathfrak{m}_2$, $M_1, M_2 \in \mathfrak{M}$, hogy $M_1 \cap M_2 = \emptyset$.

(a): $M_1 = P \cap Q$, $P \in \mathfrak{P}$, $Q \in \mathfrak{Q}$. Nyilván $P \in \mathfrak{m}_1$, tehát $P \in \mathfrak{P}(\mathfrak{m}_1)$, s ha állításunkkal ellentétben $\mathfrak{P}(\mathfrak{m}_1) = \mathfrak{P}(\mathfrak{m}_2)$ volna, akkor $P \in \mathfrak{P}(\mathfrak{m}_2) \subset \mathfrak{m}_2$ is állna. Másrészt $E - Q \in \mathfrak{m}_2$ esetén $E - Q \in \mathfrak{P}$ miatt $E - Q \in \mathfrak{P}(\mathfrak{m}_2) = \mathfrak{P}(\mathfrak{m}_1) \subset \mathfrak{m}_1$ állna, holott $Q \in \mathfrak{m}_1$ miatt $E - Q \notin \mathfrak{m}_1$. Ennélfogva $E - Q \notin \mathfrak{m}_2$, és (6.1.26) szerint $Q \in \mathfrak{m}_2$. Végül is $M_1 \in \mathfrak{m}_2$, holott $M_1 \cap M_2 = \emptyset$, $M_2 \in \mathfrak{m}_2$.

(b): Most feltehető, hogy $M_1 \in \mathfrak{Q}$, tehát $E - M_1 \in \mathfrak{P}$, $E - M_1 \supset M_2 \in \mathfrak{m}_2$ miatt $E - M_1 \in \mathfrak{P}(\mathfrak{m}_2)$. ∎

A következőkben feltesszük, hogy az E halmazon meg van adva egy $\mathfrak{T}$ topológia, és $\mathfrak{P}$ bázis $\mathfrak{T}$ számára.

(6.1.37) *Ha* (6.1.30) *feltevései mellett* $\mathfrak{P}$ *bázis a* $\mathfrak{T}$ *topológia számára, és* $\mathfrak{m}$ *az* $x \in E$ *ponthoz tartozó ultra-*$\mathfrak{M}$*-szűrő, akkor* $\mathfrak{P}(\mathfrak{m}) = \mathfrak{v}(x)$, *ahol* $\mathfrak{v}(x)$ *az* x *pont* $\mathfrak{T}$*-környezetszűrője.*

Bizonyítás. Ha $V \in \mathfrak{P}(\mathfrak{m})$, akkor

$$x \in M \subset P \subset V, \quad M \in \mathfrak{M}, \quad P \in \mathfrak{P},$$

és P nyíltsága miatt $V \in \mathfrak{v}(x)$. Megfordítva, $V \in \mathfrak{v}(x)$ esetén $\mathfrak{P}$ bázis volta miatt van olyan $P \in \mathfrak{P} \subset \mathfrak{M}$, hogy $x \in P \subset V$, tehát $V \in \mathfrak{P}(\mathfrak{m})$. ∎

(6.1.38) *Ha* (6.1.30) *feltevéseivel* $\mathfrak{P}$ *bázisa* $\mathfrak{T}$*-nek, és* $\mathfrak{m}$ *ultra-*$\mathfrak{M}$*-szűrő,* $x \in E$, *akkor a következő állítások egyenértékűek:*

(a) $\mathfrak{m} \to x$;

(b) x *torlódási pontja* $\mathfrak{m}$*-nek.*

Bizonyítás. (a) $\Rightarrow$ (b): (5.2.24).

(b) $\Rightarrow$ (a): $x \in P \in \mathfrak{P}$ esetén (6.1.26) miatt $P \in \mathfrak{m}$. ∎

(6.1.39) *Ha* (6.1.30) *feltevéseivel* $\mathfrak{P}$ *bázisa* $\mathfrak{T}$*-nek, és* $\mathfrak{r} \to x$, *akkor* $\mathfrak{P}(\mathfrak{r}) \to x$.

Bizonyítás. $x \in P \in \mathfrak{P}$ esetén van olyan $R \in \mathfrak{r}$, hogy $R \subset P$, úgyhogy $P \in \mathfrak{P}(\mathfrak{r})$. ∎

Különösen fontos az az eset, amikor $\mathfrak{T}$ adott topológia E-n, és $\mathfrak{P}$ az összes $\mathfrak{T}$-nyílt halmazok rendszerével esik egybe. Ekkor nyilván teljesülnek a (6.1.30) alatti feltevések; $\mathfrak{Q}$ az összes $\mathfrak{T}$-zárt halmazok rendszere lesz, $\mathfrak{M}$ a $G \cap F$ alakú halmazokból áll, ahol G nyílt, F pedig zárt, a (6.1.33)-ban értelmezett $\mathfrak{P}(\mathfrak{r})$ pedig nyilván az összes $R \in \mathfrak{r}$ halmazok összes környezeteiből áll. Az utóbbi szűrőt a $\mathfrak{r}$ rács **környezetszűrőjének** szokás nevezni és $\mathfrak{v}(\mathfrak{r})$-rel jelölni.

Erre az esetre vonatkozóan a következő további állítások mondhatók ki:

(6.1.40) *Legyen* $[X, \mathfrak{T}_1]$ *és* $[Y, \mathfrak{T}_2]$ *két topologikus tér,* $f : X \to Y$ *folytonos,* $\mathfrak{m}$ *ultra-*$\mathfrak{M}_1$*-szűrő X-ben,* $\mathfrak{z}$ *pedig az* $f(\mathfrak{m})$ *rács által Y-ban generált szűrő. Ekkor*

$M_2 \in \mathfrak{M}_2$ esetén vagy $M_2 \in \mathfrak{z}$, vagy $Y - M_2 \in \mathfrak{z}$. Ha tehát $\mathfrak{z}$ $\mathfrak{M}_2$-szűrő, akkor ultra-$\mathfrak{M}_2$-szűrő. ($\mathfrak{M}_1$ és $\mathfrak{M}_2$ jelöli a $\mathfrak{T}_1$, ill. $\mathfrak{T}_2$ topológiára vonatkozó nyílt és zárt halmazok metszeteiből álló félhálót.)

Bizonyítás. Legyen $M_2 \in \mathfrak{M}_2$, $M_2 = F_2 \cap G_2$, F_2 $\mathfrak{T}_2$-zárt, G_2 $\mathfrak{T}_2$-nyílt. Ekkor $f^{-1}(M_2) = f^{-1}(F_2) \cap f^{-1}(G_2) \in \mathfrak{M}_1$, hiszen $f^{-1}(F_2)$ $\mathfrak{T}_1$-zárt, $f^{-1}(G_2)$ $\mathfrak{T}_1$-nyílt. Így (6.1.26) szerint vagy $f^{-1}(M_2) \in \mathfrak{m}$, vagy $X - f^{-1}(M_2) = f^{-1}(Y - M_2) \in \mathfrak{m}$. Az első esetben $f(f^{-1}(M_2)) \subset M_2$ miatt M_2, a másodikban $f(f^{-1}(Y - M_2)) \subset Y - M_2$ miatt $Y - M_2$ tartozik $\mathfrak{z}$-hez. Ha $\mathfrak{z}$ $\mathfrak{M}_2$-szűrő, akkor tehát (6.1.26) értelmében ultra-$\mathfrak{M}_2$-szűrő. ∎

(6.1.41) *Legyen $[X, \mathfrak{T}_1]$ és $[Y, \mathfrak{T}_2]$ két topologikus tér, $f : X \to Y$ folytonos, $\mathfrak{r}$ X-beli rács. Ekkor $\mathfrak{v}_2(f(\mathfrak{r})) < f(\mathfrak{v}_1(\mathfrak{r}))$.*

Bizonyítás. Legyen $V_2 \in \mathfrak{v}_2(f(\mathfrak{r}))$, azaz $f(R) \subset \text{int } V_2$, $R \in \mathfrak{r}$. Ekkor $f^{-1}(\text{int } V_2)$ $\mathfrak{T}_1$-nyílt, és $R \subset f^{-1}(\text{int } V_2)$, úgyhogy $f^{-1}(\text{int } V_2) \in \mathfrak{v}_1(\mathfrak{r})$, $f(f^{-1}(\text{int } V_2)) \subset \text{int } V_2$, $f(f^{-1}(\text{int } V_2)) \in f(\mathfrak{v}_1(\mathfrak{r}))$. ∎

Vegyük észre, hogy ha $[E, \mathfrak{T}]$ diszkrét topologikus tér, tehát $\mathfrak{P}$, s vele $\mathfrak{Q}$ és $\mathfrak{M}$ E összes részhalmazaiból áll, akkor az $\mathfrak{M}$-szűrők az E-beli szűrőkkel, az ultra-$\mathfrak{M}$-szűrők az E-beli ultraszűrőkkel azonosak. Ennek alapján (6.1.40)-ből következik (2.6.8) (d) figyelembevételével:

(6.1.42) *Ha $f : X \to Y$, és $\mathfrak{u}$ X-beli ultraszűrő, akkor $f(\mathfrak{u})$ Y-beli ultraszűrőt generál; ha f szuperjekció, akkor $f(\mathfrak{u})$ Y-beli ultraszűrő.* ∎

6.1.e. Wallman-típusú komapktifikációk. A következőkben az alábbi feltevéseket és jelöléseket vezetjük be:

(6.1.43) *Legyen $[E, \mathfrak{T}]$ topologikus tér, $\mathfrak{P}$ bázis $\mathfrak{T}$ számára, $\mathfrak{P}$ háló, $\emptyset, E \in \mathfrak{P}$, $\mathfrak{Q}$ álljon a $\mathfrak{P}$-beli halmazok komplementumaiból, $\mathfrak{M} = \mathfrak{P}\ (\cap)\ \mathfrak{Q}$. Legyen $E_0' \supset E$, és az $x \in E_0' - E$ pontokhoz legyenek kölcsönösen egyértelműen hozzárendelve az összes E-beli nem-triviális ultra-$\mathfrak{M}$-szűrők; az x-hez rendelt ultra-$\mathfrak{M}$-szűrőt jelöljük $\mathfrak{m}(x)$-szel, s ugyancsak jelöljük $\mathfrak{m}(x)$-szel $x \in E$ esetén az x-hez tartozó triviális ultra-$\mathfrak{M}$-szűrőt. Legyen még $x \in E_0$ esetén $\mathfrak{z}(x) = \mathfrak{P}(\mathfrak{m}(x))$.*

Most már kimondhatjuk a következő tételt:

(6.1.44) *Legyen (6.1.43) feltevéseivel $E \subset E' \subset E_0'$, $\mathfrak{T}'$ pedig $\mathfrak{T}$-nek az a szoros bővítése, amely E'-n a $\mathfrak{z}(x)$ nyomszűrőkhöz tartozik. Ekkor*

(a) *$\mathfrak{T}'$ redukált bővítése $\mathfrak{T}$-nek;*

(b) *$\mathfrak{T}'$ számára zárt bázist alkotnak a $\bar{Q}$ alakú halmazok, ahol $Q \in \mathfrak{Q}$, és $\bar{A}$ A-nak $\mathfrak{T}'$-lezárását jelöli;*

(c) *$Q_1, Q_2 \in \mathfrak{Q}$ esetén $\overline{Q_1 \cap Q_2} = \bar{Q}_1 \cap \bar{Q}_2$.*

Bizonyítás. A $\mathfrak{P}$-beli halmazok nyíltsága miatt $\mathfrak{z}(x)$ nyílt szűrő, és $x \in E$ esetén (6.1.37) szerint $\mathfrak{z}(x) = \mathfrak{v}(x)$, úgyhogy lehet beszélni E'-n a $\mathfrak{z}(x)$ nyomszűrőkhöz tartozó szoros bővítésről.

(a): $x \in E' - E$, $y \in E'$ esetén $\mathfrak{m}(x) \neq \mathfrak{m}(y)$, tehát (6.1.36) értelmében $\mathfrak{z}(x) \neq$ $\neq \mathfrak{z}(y)$, és (6.1.17) alkalmazható.

(b): (6.1.9) szerint a $B \subset E$ halmazra

$$\bar{B} = E' - s(E - B),$$

ahol a szokásos módon

$$s(A) = \{x\colon\ x \in E',\ A \in \mathfrak{z}(x)\} \qquad (A \subset E).$$

Eszerint $Q \in \mathfrak{Q}$ esetén $E' - \bar{Q} = s(E - Q)$, s azt kell megmutatnunk, hogy $\mathfrak{T}'$ számára bázist alkotnak az $s(P)$ halmazok, ahol $P \in \mathfrak{P}$. Mármost az $s(G)$ alakú halmazok, ahol G $\mathfrak{T}$-nyílt, csakugyan bázist alkotnak, s ha G nyílt, és $x \in s(G)$, azaz $G \in \mathfrak{z}(x)$, akkor $\mathfrak{z}(x)$ $\mathfrak{P}$-szűrő lévén, van olyan $P \in \mathfrak{P}$, hogy $P \in \mathfrak{z}(x)$, $P \subset G$. Így $x \in s(P) \subset s(G)$.

(c): Az előbbiek szerint $Q \in \mathfrak{Q}$ esetén $x \in \bar{Q}$ pontosan akkor áll, ha $x \notin s(E - Q)$, azaz ha $E - Q \notin \mathfrak{z}(x) = \mathfrak{P}(\mathfrak{m}(x))$, vagyis $E - Q \in \mathfrak{P}$ miatt pontosan akkor, ha $E - Q \notin \mathfrak{m}(x)$, és (6.1.26) szerint pontosan akkor, ha $Q \in \mathfrak{m}(x)$:

$$(6.1.45) \qquad x \in \bar{Q} \Leftrightarrow Q \in \mathfrak{m}(x) \qquad (x \in E',\ Q \in \mathfrak{Q}).$$

Az állítás tehát abból következik, hogy $Q_1 \cap Q_2 \in \mathfrak{m}(x)$ pontosan akkor teljesül, ha $Q_1 \in \mathfrak{m}(x)$, $Q_2 \in \mathfrak{m}(x)$. ∎

Ha az előbbi $[E', \mathfrak{T}']$ bővítések között kompaktifikációkat keresünk, a következő tételre támaszkodhatunk:

(6.1.46) *A* (6.1.44) *alatti* $\mathfrak{T}'$ *pontosan akkor kompakt, ha* $E_1' \subset E' \subset E_0'$, *ahol* E_1' *E-ből azoknak az* $x \in E_0'$ *pontoknak a hozzávételével keletkezik, amelyekre* $\mathfrak{m}(x)$ $\mathfrak{Q}$*-szűrő.*

Bizonyítás. Legyen $E_1' \subset E' \subset E_0'$. (5.3.1) (e)-re hivatkozva megmutatjuk, hogy $E' = \bigcup_{i \in I} s(P_i)$ $(P_i \in \mathfrak{P})$ esetén E'-t már véges számú $s(P_i)$ is befedi; láttuk ugyanis, hogy az $s(P)$ $(P \in \mathfrak{P})$ halmazok $\mathfrak{T}'$-bázist alkotnak. Feltéve, hogy ez nem igaz, tekintsük az $E - \bigcup_{j=1}^{n} P_{i_j}$ $(i_j \in I)$ alakú halmazokat. Ezek nem lehetnek üresek, hiszen $E = \bigcup_{j=1}^{n} P_{i_j}$ esetén bármely $x \in E'$ mellett $E \in \mathfrak{m}(x)$ folytán (6.1.27) következtében $P_{i_j} \in \mathfrak{m}(x)$ valamely j-re, s akkor $P_{i_j} \in \mathfrak{P}(\mathfrak{m}(x)) = \mathfrak{z}(x)$, azaz $x \in s(P_{i_j})$, és $E' = \bigcup_{j=1}^{n} s(P_{i_j})$ állna. Így az $E - \bigcup_{j=1}^{n} P_{i_j}$ alakú halmazok egy $\mathfrak{Q}$-beli halmazokból álló rácsot alkotnak; ez $\mathfrak{Q}$-szűrőt generál, az pedig (6.1.29) folytán belefoglalható egy $\mathfrak{q}$ ultra-$\mathfrak{Q}$-szűrőbe. (6.1.32) értelmében van olyan $x \in E_1' \subset E'$, hogy $\mathfrak{q} = \mathfrak{m}(x)$. Legyen $i_0 \in I$ olyan, hogy $x \in s(P_{i_0})$, $P_{i_0} \in \mathfrak{z}(x)$. Ekkor $E - P_{i_0} \in \mathfrak{q} = \mathfrak{m}(x)$, holott $P_{i_0} \in \mathfrak{P}(\mathfrak{m}(x)) \subset \mathfrak{m}(x)$: ellentmondás. Így $[E', \mathfrak{T}']$ kompakt.

Tegyük fel megfordítva, hogy $E \subset E' \subset E_0'$, és $[E', \mathfrak{T}']$ kompakt. Megmutatjuk, hogy $x \in E_1' - E$ esetén $x \in E'$. Ez abból következik, hogy az $\mathfrak{m}(x)$ E-beli $\mathfrak{Q}$-szűrőnek kell, hogy E'-ben legyen torlódási pontja, ez pedig $x \notin E'$ esetén lehetetlen. Valóban, $y \in E'$, $y \neq x$ esetén $\mathfrak{m}(y) \neq \mathfrak{m}(x)$, és $\mathfrak{m}(y)$ ultra-$\mathfrak{M}$-szűrő, így (6.1.36) szerint $\emptyset \in \mathfrak{P}(\mathfrak{m}(y))$ $(\cap)$ $\mathfrak{m}(x) = \mathfrak{z}(y)$ $(\cap)$ $\mathfrak{m}(x)$. A $\mathfrak{z}(y)$ szűrő nyíltsága miatt választható olyan $\mathfrak{T}$-nyílt $G \in \mathfrak{z}(y)$ és $M \in \mathfrak{m}(x)$, hogy $G \cap M = \emptyset$. Ekkor azonban $s(G)$ y-nak $\mathfrak{T}'$-környezete, amely az $M \in \mathfrak{m}(x)$ halmazt $s(G) \cap E = G$ miatt nem metszi. ∎

Az előbb bevezetett E_1' halmaz pontjainak nevezetes tulajdonsága:

(6.1.47) *A* (6.1.43)—(6.1.46) *feltevésekkel* $x \in (E' \cap E_1') - E$ *esetén* $\{x\}$ $\mathfrak{T}'$*-zárt.*

Bizonyítás, $y \in E'$, $x \neq y$ esetén $\mathfrak{m}(x) \neq \mathfrak{m}(y)$, és $\mathfrak{m}(x)$ $\mathfrak{Q}$-szűrő, úgyhogy (6.1.36) értelmében $\emptyset \in \mathfrak{m}(x)\,(\cap)\,\mathfrak{P}(\mathfrak{m}(y))$. Így van olyan $M \in \mathfrak{m}(x)$ és $P \in \mathfrak{P}(\mathfrak{m}(y))$, hogy $M \cap P = \emptyset$, $P \in \mathfrak{P}$, s akkor $P \notin \mathfrak{m}(x)$, $P \notin \mathfrak{P}(\mathfrak{m}(x))$, $x \notin s(P)$, $y \in s(P)$. Emiatt $E' - \{x\}$ $\mathfrak{T}'$-nyílt. ∎

Jegyezzük még meg:

(6.1.48) *Legyen a* (6.1.43) *feltevésekkel* $\mathfrak{T}_0'$ *a* (6.1.44)*-ből az* $E' = E_0'$ *választással,* $\mathfrak{T}_1'$ *pedig az ugyanebből* $E' = E_1'$ *választással adódó topológia, ahol* E_1' *a* (6.1.46)*-ban értelmezett halmaz. Ekkor* $E \subset E' \subset E_0'$ *esetén a* (6.1.44)*-beli* $\mathfrak{T}'$*-re* $\mathfrak{T}' = \mathfrak{T}_0'|E'$, *speciálisan* $\mathfrak{T}_1' = \mathfrak{T}_0'|E_1'$.

Bizonyítás. (6.1.13). ∎

Megmutatjuk, hogy a (6.1.44)-ben, (6.1.46)-ban és (6.1.47)-ben felsorolt tulajdonságokkal jellemezni lehet az előbbi $[E_0', \mathfrak{T}_0']$ tér altereiként előálló bővítéseket:

(6.1.49) *Legyen* $[E, \mathfrak{T}]$ *topologikus tér,* $\mathfrak{P}$ *bázis* $\mathfrak{T}$ *számára,* $\emptyset, E \in \mathfrak{P}$, $\mathfrak{P}$ *háló,* $\mathfrak{Q}$ *az* $E - P$ $(P \in \mathfrak{P})$ *halmazok rendszere,* $[E', \mathfrak{T}']$ *pedig olyan topologikus tér, hogy*

(a) $\mathfrak{T}'$ *redukált bővítése* $\mathfrak{T}$*-nek;*

(b) $\mathfrak{T}'$ *számára zárt bázist alkotnak a* $\bar{Q}$ *alakú halmazok, ahol* $Q \in \mathfrak{Q}$, *és* $\bar{A}$ *A-nak* $\mathfrak{T}'$*-lezárását jelöli;*

(c) $Q_1, Q_2 \in \mathfrak{Q}$ *esetén* $\overline{Q_1 \cap Q_2} = \bar{Q}_1 \cap \bar{Q}_2$.

Ekkor $\mathfrak{T}'$ *szoros bővítése* $\mathfrak{T}$*-nek, és* $x \in E' - E$ *esetén* x $\mathfrak{v}'(x)$ $\mathfrak{T}'$*-környezetszűrőjének E-beli* $\mathfrak{z}(x) = \mathfrak{v}'(x)\,(\cap)\,\{E\}$ *nyomszűrője* $\mathfrak{P}(\mathfrak{m}'(x))$ *alakú, ahol* $\mathfrak{m}'(x)$ *nemtriviális ultra-*$\mathfrak{M}$*-szűrő, és* $\mathfrak{M} = \mathfrak{P}\,(\cap)\,\mathfrak{Q}$, *mégpedig* $x, y \in E' - E$, $x \neq y$ *esetén* $\mathfrak{m}'(x) \neq \mathfrak{m}'(y)$. *Ezért pontosan egy E-t rögzítő h homeomorfizmus található, amely* $[E', \mathfrak{T}']$*-t átviszi a* (6.1.48) *alatti* $[E_0', \mathfrak{T}_0']$ *térnek egy alterébe. Pontosan akkor lesz* $h(E') \supset E_1'$, *ha* $\mathfrak{T}'$ *kompakt, és pontosan akkor áll* $h(E') = E_1'$, *ha* $\mathfrak{T}'$ *kompakt, s ezenfelül* $x \in E' - E$ *esetén* $\{x\}$ $\mathfrak{T}'$*-zárt.*

Bizonyítás. (b) és (6.1.10) mutatja, hogy $\mathfrak{T}'$ valóban szoros bővítése $\mathfrak{T}$-nek. Legyen $A \subset E$ esetén

$$s'(A) = \{x\colon x \in E',\ A \in \mathfrak{z}(x)\},$$

és tekintsük azokat a $P \cap Q \in \mathfrak{M}$ halmazokat, amelyekre adott $x \in E'$ esetén

$$P \in \mathfrak{P},\ Q \in \mathfrak{Q},\ x \in s'(P) \cap \bar{Q}.$$

Ezek a halmazok rácsot alkotnak, mert nem-üresek, hiszen a (6.1.9)-ből következő

$$s'(P) = E' - \overline{E - P}$$

alapján $\{s'(P)\colon P \in \mathfrak{P}\}$ bázisa $\mathfrak{T}'$-nek, tehát

$$P \cap Q = s'(P) \cap E \cap Q = s'(P) \cap Q \neq \emptyset,$$

és (c) szerint

$$x \in s'(P_1) \cap \bar{Q}_1,\ x \in s'(P_2) \cap \bar{Q}_2,\ P_1, P_2 \in \mathfrak{P},\ Q_1, Q_2 \in \mathfrak{Q}$$

esetén

$$x \in s'(P_1) \cap s'(P_2) \cap \bar{Q}_1 \cap \bar{Q}_2 = s'(P_1 \cap P_2) \cap \overline{Q_1 \cap Q_2},$$

úgyhogy $(P_1 \cap Q_1)$-gyel és $(P_2 \cap Q_2)$-vel együtt metszetük is a vizsgált halmazok közé tartozik. Ennélfogva az említett halmazok rácsa E-ben egy $\mathfrak{m}'(x)$ $\mathfrak{M}$-szűrőt generál.

Megmutatjuk, hogy $\mathfrak{m}'(x)$ ultra-$\mathfrak{M}$-szűrő. Legyen ugyanis $M_0 = P_0 \cap Q_0 \in \mathfrak{M}$ tetszőleges, $P_0 \in \mathfrak{P}$, $Q_0 \in \mathfrak{Q}$. Ha $M_0 \notin \mathfrak{m}'(x)$, akkor vagy $x \notin \bar{Q}_0$, vagy $x \notin s'(P_0)$. Az első esetben (6.1.9) alapján $x \in s'(E-Q_0)$, tehát $x \in \bar{E}$ figyelembevételével $E - Q_0 = (E-Q_0) \cap E \in \mathfrak{m}'(x)$. A második esetben ismét (6.1.9) alapján $x \in \overline{E-P_0}$, tehát $x \in s'(E)$ miatt $E - P_0 = (E-P_0) \cap E \in \mathfrak{m}'(x)$. Így mindkét esetben $E - M_0 = (E-P_0) \cup (E-Q_0) \in \mathfrak{m}'(x)$. Ezért (6.1.26) szerint $\mathfrak{m}'(x)$ ultra-$\mathfrak{M}$-szűrő.

Most belátjuk, hogy $\mathfrak{z}(x) = \mathfrak{P}(\mathfrak{m}'(x))$. Valóban, $S \in \mathfrak{z}(x)$ esetén $S = V \cap E$, ahol $V \in \mathfrak{v}'(x)$, tehát (b) miatt van olyan $P \in \mathfrak{P}$, hogy $x \in s'(P) \subset V$. Így $P \in \mathfrak{m}'(x)$, sőt $P \in \mathfrak{P}(\mathfrak{m}'(x))$, és $P = s'(P) \cap E \subset V \cap E = S$ folytán $S \in \mathfrak{P}(\mathfrak{m}'(x))$. Másrészt ha $V_1 \in \mathfrak{P}(\mathfrak{m}'(x))$, akkor van olyan $M \in \mathfrak{m}'(x)$ és olyan $P_1 \in \mathfrak{P}$, hogy $M \subset P_1 \subset V_1$. Ekkor $P_1 \in \mathfrak{m}'(x)$, s ezért $x \in s'(P_1)$, mert ellenkező esetben (6.1.9) szerint $x \in \overline{E-P_1}$ volna, s így $E - P_1 \in \mathfrak{m}'(x)$ következnék. Eszerint $s'(P_1) \in \mathfrak{v}'(x)$, $P_1 = s'(P_1) \cap E \in \mathfrak{z}(x)$, $V_1 \in \mathfrak{z}(x)$. $x \in E$ esetén $x \in s'(P) \cap \bar{Q}$ egyenértékű azzal, hogy $x \in P \cap Q$ ($P \in \mathfrak{P}$, $Q \in \mathfrak{Q}$), ezért $\mathfrak{m}'(x)$ éppen az x-hez tartozó triviális ultra-$\mathfrak{M}$-szűrő, viszont $x \in E' - E$ esetén $\mathfrak{m}'(x)$ nemtriviális, és $x \in E' - E$, $y \in E' - E$, $x \neq y$ esetén $\mathfrak{m}'(x) \neq \mathfrak{m}'(y)$. Valóban, (a) miatt (6.1.17) szerint $x \in E' - E$, $y \in E'$, $x \neq y$ esetén $\mathfrak{z}(x) \neq \mathfrak{z}(y)$, azaz (6.1.37)-re is tekintettel $\mathfrak{P}(\mathfrak{m}'(x)) \neq \mathfrak{P}(\mathfrak{m}'(y))$, s akkor persze $\mathfrak{m}'(x) \neq \mathfrak{m}'(y)$.

Mármost $x \in E$ esetén $f(x) = x$-et, $x \in E' - E$ esetén pedig olyan $y = f(x) \in E_0' - E$ pontot választva, amelyre $\mathfrak{m}(y) = \mathfrak{m}'(x)$, az $f: E' \to E_0'$ injekció eleget tesz (6.1.19) feltevéseinek, s így $h = f|_{E'}^{f(E')}$ $(\mathfrak{T}', \mathfrak{T}_0'|f(E'))$-homeomorfizmus, mégpedig (6.1.19)-ből látszik, hogy ez az egyetlen E-t rögzítő homeomorfizmus, amely $[E', \mathfrak{T}']$-t $[E_0', \mathfrak{T}_0']$-nek egy alterére képezi le.

(6.1.46) és (6.1.48) szerint $h(E') \supset E_1'$ pontosan akkor áll, ha $\mathfrak{T}_0'|h(E')$ kompakt, azaz ha $\mathfrak{T}'$ kompakt. (6.1.47) szerint $h(E') = E_1'$ esetén az $x \in E' - E$ pontokra $\{x\}$ $\mathfrak{T}'$-zárt.

Tegyük most fel, hogy $\mathfrak{T}'$ kompakt, és $x \in E' - E$ esetén $\{x\}$ $\mathfrak{T}'$-zárt. Ekkor $h(E') \supset E_1'$ a mondottak szerint, tehát azt kell még megmutatnunk, hogy $x \in E' - E$ esetén $\mathfrak{m}'(x)$ $\mathfrak{Q}$-szűrő. Ha x ilyen, és $S \in \mathfrak{m}'(x)$, akkor van olyan $M \subset S$, hogy $M = P \cap Q$, $P \in \mathfrak{P}$, $Q \in \mathfrak{Q}$, $x \in s'(P) \cap \bar{Q}$. $\{x\}$ zártsága miatt minden $y \in E' - s'(P)$ ponthoz található olyan $P_y \in \mathfrak{P}$, hogy $y \in s'(P_y)$, $x \notin s'(P_y)$. Minthogy $E' - s'(P)$ $\mathfrak{T}'$-zártsága miatt $\mathfrak{T}'$-kompakt is, azért

$$E' - s'(P) \subset \bigcup_1^n s'(P_{y_i}),$$

és a

$$Q_0 = Q \cap \bigcap_1^n (E - P_{y_i}) \in \mathfrak{Q}$$

jeöléssel (6.1.9) szerint $x \in \overline{E - P_{y_i}}$ $(i = 1, \ldots, n)$, és (c) értelmében $x \in \bar{Q}_0$. $Q_0 \in \mathfrak{m}'(x)$, végül

$$E - P = E \cap (E' - s'(P)) \subset E \cap \bigcup_1^n s'(P_{y_i}) = \bigcup_1^n P_{y_i}$$

folytán

$$P \supset E - \bigcup_1^n P_{y_i} = \bigcap_1^n (E - P_{y_i}),$$

úgyhogy

$$S \supset M = P \cap Q \supset Q_0 \in \mathfrak{Q} \cap \mathfrak{m}'(x). \blacksquare$$

Vezessük most be a következő elnevezést: legyen $\mathfrak{P}$ bázis az $[E, \mathfrak{T}]$ topologikus térben, továbbá $\mathfrak{P}$ háló, $\emptyset, E \in \mathfrak{P}$, $\mathfrak{Q} = \{E - P\colon P \in \mathfrak{P}\}$; az $[E, \mathfrak{T}]$ tér $\mathfrak{P}$-hez tartozó **Wallman-típusú kompaktifikáció**jának mondjuk az $[E', \mathfrak{T}']$ teret (ill. $\mathfrak{T}$-ének $\mathfrak{T}'$-t), ha

(a) $\mathfrak{T}'$ redukált bővítése $\mathfrak{T}$-nek;

(b) $\mathfrak{T}'$ számára zárt bázist alkotnak a $\bar{Q}$ alakú halmazok ($Q \in \mathfrak{Q}$);

(c) $Q_1, Q_2 \in \mathfrak{Q}$ esetén $\overline{Q_1 \cap Q_2} = \bar{Q}_1 \cap \bar{Q}_2$;

(d) $\mathfrak{T}'$ kompakt;

(e) $x \in E' - E$ esetén $\{x\}$ $\mathfrak{T}'$-zárt.

(6.1.44), (6.1.46), (6.1.47) és (6.1.49) alapján kimondhatjuk:

(6.1.50) *Bármely* $[E, \mathfrak{T}]$ *topologikus térnek van bármely* $\mathfrak{P}$ *bázis-háló* ($\emptyset, E \in \mathfrak{P}$) *megadása esetén* $\mathfrak{P}$*-hez tartozó Wallman-típusú kompaktifikációja; két ilyen kompaktifikáció mindig átvihető egymásba egy egyértelműen meghatározott E-t rögzítő homeomorfizmussal.* $\blacksquare$

(6.1.16) folytán:

(6.1.51) *Ha* (6.1.50) *feltevéseivel* $[E, \mathfrak{T}]$ T_0*-tér, akkor* $\mathfrak{P}$*-hez tartozó Wallman-típusú kompaktifikációja is* T_0*-tér.* $\blacksquare$

(6.1.52) $[E, \mathfrak{T}]$*-nek* $\mathfrak{P}$*-hez tartozó Wallman-típusú kompaktifikációja pontosan akkor* S_1*-tér, ha*

(a) $x \in P \in \mathfrak{P}$ *esetén van olyan* $Q \in \mathfrak{Q}$, *hogy* $x \in Q \subset P$,

azaz ha

(b) $x \in E$ *esetén az x-hez tartozó triviális ultra-*$\mathfrak{M}$*-szűrő* $\mathfrak{Q}$*-szűrő;*

természetesen (6.1.50) *feltevései mellett* $\mathfrak{Q} = \{E - P\colon P \in \mathfrak{P}\}$, $\mathfrak{M} = \mathfrak{P}(\cap)\mathfrak{Q}$.

Bizonyítás. Ha teljesül (a), akkor (b) is, hiszen $x \in M = P \cap Q$, $P \in \mathfrak{P}$, $Q \in \mathfrak{Q}$ esetén van olyan $Q_1 \in \mathfrak{Q}$, hogy $x \in Q_1 \subset P$, és akkor $x \in Q_1 \cap Q \subset M$, $Q_1 \cap Q \in \mathfrak{Q}$. Másrészt (b)-ből nyilván következik (a).

Mármost ha $[E', \mathfrak{T}']$ $\mathfrak{P}$-hez tartozó Wallman-típusú kompaktifikációja $[E, \mathfrak{T}]$-nek, és $x, y \in E'$, $\mathfrak{z}(x) \neq \mathfrak{z}(y)$, akkor (6.1.49) szerint $\mathfrak{z}(x) = \mathfrak{P}(\mathfrak{m}(x))$, $\mathfrak{z}(y) = \mathfrak{P}(\mathfrak{m}(y))$, ahol $\mathfrak{m}(x)$ és $\mathfrak{m}(y)$ ultra-$\mathfrak{M}$-szűrő, és (b) fennállása esetén $\mathfrak{Q}$-szűrő is. Így $\mathfrak{m}(x) \neq \mathfrak{m}(y)$ (6.1.36) értelmében maga után vonja, hogy alkalmas $P \in \mathfrak{P}$, $Q \in \mathfrak{Q}$ halmazokra $P \cap Q = \emptyset$, $P \in \mathfrak{m}(x)$, $Q \in \mathfrak{m}(y)$. Ezért $P \in \mathfrak{P}(\mathfrak{m}(x)) = \mathfrak{z}(x)$, $P \notin \mathfrak{m}(y) \supset \mathfrak{P}(\mathfrak{m}(y)) = \mathfrak{z}(y)$, és $\mathfrak{z}(y)$ nem tartalmazhatja $\mathfrak{z}(x)$-et. Hasonló meggondolással $\mathfrak{z}(x)$ sem tartalmazhatja $\mathfrak{z}(y)$-t. (6.1.14)-ből következik tehát, hogy $[E', \mathfrak{T}']$ S_1-tér.

Tegyük most fel, hogy (a) nem áll. Ekkor van olyan $x \in E$ és $P \in \mathfrak{P}$, hogy $x \in P$ és minden x-et tartalmazó $Q \in \mathfrak{Q}$ metszi $(E-P)$-t. Ezek a Q-k $(E-P)$-vel együtt Q-beli halmazokból álló rácsot alkotnak; legyen (6.1.29) felhasználásával $\mathfrak{q}$ ezt tartalmazó ultra-$\mathfrak{Q}$-szűrő. (6.1.32) szerint $\mathfrak{q}$ ultra-$\mathfrak{M}$-szűrő is, úgyhogy van olyan $y \in E'$, amelyre $\mathfrak{q} = \mathfrak{m}(y)$. Ekkor $P \in \mathfrak{z}(x)$, de $P \notin \mathfrak{P}(\mathfrak{m}(y)) = \mathfrak{z}(y)$, úgyhogy $\mathfrak{z}(x) \neq \mathfrak{z}(y)$. Viszont $S \in \mathfrak{z}(y)$ esetén van olyan $P_1 \in \mathfrak{P}$, hogy $P_1 \subset S$, $P_1 \in \mathfrak{m}(y)$; ha $x \notin P_1$ volna, akkor $x \in E - P_1 \in \mathfrak{q} = \mathfrak{m}(y)$ adódnék, ami lehetetlen, úgyhogy $x \in P_1$, és $P_1 \in \mathfrak{z}(x)$, $S \in \mathfrak{z}(x)$. Eszerint $\mathfrak{z}(y) \subset \mathfrak{z}(x)$, mutatva, hogy $[E', \mathfrak{T}']$ nem S_1-tér. ∎

(6.1.53) *A* (6.1.52) *alatti feltevésekkel* $[E, \mathfrak{T}]$ $\mathfrak{P}$*-hez tartozó Wallman-típusú kompaktifikációja pontosan akkor* S_2*-tér, ha az* (a), *ill.* (b) *feltétel mellett még fennáll*

(c) $Q_1, Q_2 \in \mathfrak{Q}$, $Q_1 \cap Q_2 = \emptyset$ *esetén van olyan* $P_1, P_2 \in \mathfrak{P}$, *hogy* $Q_1 \subset P_1$, $Q_2 \subset P_2$, $P_1 \cap P_2 = \emptyset$.

Bizonyítás. Az előző bizonyítás jelöléseit használjuk. Ha teljesül (b) és (c), akkor $x, y \in E'$, $\mathfrak{z}(x) \neq \mathfrak{z}(y)$ esetén $\mathfrak{z}(x) = \mathfrak{P}(\mathfrak{m}(x))$, $\mathfrak{z}(y) = \mathfrak{P}(\mathfrak{m}(y))$, $\mathfrak{m}(x) \neq \neq \mathfrak{m}(y)$ két ultra-$\mathfrak{M}$-szűrő, s egyben $\mathfrak{Q}$-szűrő. Így (6.1.28) alapján van olyan $Q_1, Q_2 \in \mathfrak{Q}$, hogy $Q_1 \in \mathfrak{m}(x)$, $Q_2 \in \mathfrak{m}(y)$, $Q_1 \cap Q_2 = \emptyset$. Ennélfogva van olyan $P_1, P_2 \in \mathfrak{P}$, hogy $Q_1 \subset P_1$, $Q_2 \subset P_2$, $P_1 \cap P_2 = \emptyset$. Ezekre $P_1 \in \mathfrak{z}(x)$, $P_2 \in \mathfrak{z}(y)$, úgyhogy (6.1.14) alapján $[E', \mathfrak{T}']$ S_2-tér.

Megfordítva, ha $[E', \mathfrak{T}']$ S_2-tér, akkor S_1-tér is, és (6.1.52) miatt fennáll (b). Ha $Q_1, Q_2 \in \mathfrak{Q}$, $Q_1 \cap Q_2 = \emptyset$, akkor $\mathfrak{T}'$-lezárásaikra a Wallman-típusú kompaktifikáció definíciója alapján $\bar{Q}_1 \cap \bar{Q}_2 = \emptyset$. Minthogy $\mathfrak{T}'$ (5.3.22) miatt normális, van olyan $\mathfrak{T}'$-nyílt G_1 és G_2, hogy $\bar{Q}_1 \subset G_1$, $\bar{Q}_2 \subset G_2$, $G_1 \cap G_2 = \emptyset$, s aztán mivel $\{s(P)\colon P \in \mathfrak{P}\}$ $\mathfrak{T}'$-bázis, $\bar{Q}_1$ és $\bar{Q}_2$ kompaktságát felhasználva

$$\bar{Q}_1 \subset \bigcup_1^m s(P_i) \subset G_1, \qquad \bar{Q}_2 \subset \bigcup_1^n s(P'_j) \subset G_2,$$

ahol $P_i, P'_j \in \mathfrak{P}$ Így

$$Q_1 = \bar{Q}_1 \cap E \subset \bigcup_1^m (s(P_i) \cap E) = \bigcup_1^m P_i = P \in \mathfrak{P},$$

$$Q_2 = \bar{Q}_2 \cap E \subset \bigcup_1^n (s(P'_j) \cap E) = \bigcup_1^n P'_j = P' \in \mathfrak{P},$$

és $P \cap P' \subset G_1 \cap G_2 = \emptyset$. ∎

Nevezetes, hogy a Wallman-típusú kompaktifikációkat a definícióban szereplő tulajdonságoknál kevesebbet követelő feltételekkel is lehet jellemezni. Vegyük észre e célból, hogy $\mathfrak{Q}$ háló voltát felhasználva a

(c) $\qquad Q_1, Q_2 \in \mathfrak{Q}$ esetén $\overline{Q_1 \cap Q_2} = \bar{Q}_1 \cap \bar{Q}_2$

kikötésből következik

$$Q_i \in \mathfrak{Q} \quad (i=1,\dots,n), \quad \text{esetén} \quad \overline{\bigcap_1^n Q_i} = \bigcap_1^n \bar{Q}_i,$$

ebből pedig nyilván

$$\text{(c')} \qquad Q_i \in \mathfrak{Q} \quad (i=1,\dots,n), \bigcap_1^n Q_i = \emptyset \quad \text{esetén} \quad \bigcap_1^n \bar{Q}_i = \emptyset$$

adódik. Mármost megmutatjuk, hogy (c) helyettesíthető (c′)-vel, sőt ha a kompaktifikáció S_2-tér, akkor (c′)-t elég csak $n = 2$ esetére megkövetelni:

(6.1.54) *Legyen* $\mathfrak{P}$ *bázis-háló az* $[E, \mathfrak{T}]$ *topologikus térben,* $\emptyset, E \in \mathfrak{P}$, $\mathfrak{Q} = \{E - P\colon P \in \mathfrak{P}\}$, $[E', \mathfrak{T}']$ *pedig olyan tér, hogy*

(a) $\mathfrak{T}'$ *redukált bővítése* $\mathfrak{T}$*-nek;*

(b) $\mathfrak{T}'$ *számára zárt bázist alkotnak a* $\bar{Q}$ *alakú halmazok* ($Q \in \mathfrak{Q}$);

(c′) $Q_i \in \mathfrak{Q}$ $(i = 1, \dots, n)$, $\bigcap_1^n Q_i = \emptyset$ *esetén* $\bigcap_1^n \bar{Q}_i = \emptyset$;

(d) $\mathfrak{T}'$ *kompakt;*

(e) $x \in E' - E$ *esetén* $\{x\}$ $\mathfrak{T}'$*-zárt.*

Ekkor $\mathfrak{T}'$ $\mathfrak{T}$*-nek* $\mathfrak{P}$*-hez tartozó Wallman-típusú kompaktifikációja. Ugyanez áll akkor is, ha* (c′) *helyébe a*

(c″) $Q_1, Q_2 \in \mathfrak{Q}$, $Q_1 \cap Q_2 = \emptyset$ *esetén* $\bar{Q}_1 \cap \bar{Q}_2 = \emptyset$,

s egyúttal (e) *helyébe az*

(e′) $\mathfrak{T}'$ S_2*-topológia*

feltételt tesszük.

Bizonyítás. Először is megmutatjuk, hogy (a), (b), (c′), (d), (e) maga után vonja

(c) $Q_1, Q_2 \in \mathfrak{Q}$ esetén $\overline{Q_1 \cap Q_2} = \bar{Q}_1 \cap \bar{Q}_2$

fennállását. Itt a $\subset$ jel evidens. Legyen tehát $x \in \bar{Q}_1 \cap \bar{Q}_2$, s mutassuk meg, hogy $x \in \overline{Q_1 \cap Q_2}$. Ez $x \in E$ esetén Q_1 és Q_2 $\mathfrak{T}$-zártságából következik; legyen ezért $x \in E' - E$, s tegyük fel, hogy a $Q_0 = Q_1 \cap Q_2 \in \mathfrak{Q}$ jelöléssel $x \notin \bar{Q}_0$.

Ekkor (e) és (b) folytán minden $y \in \bar{Q}_0$ ponthoz megadható olyan $Q_y \in \mathfrak{Q}$, hogy

$$y \in E' - \bar{Q}_y, \; x \notin E' - \bar{Q}_y, \; \text{azaz} \; x \in \bar{Q}_y.$$

(d)-re tekintettel

$$\bar{Q}_0 \subset \bigcup_1^n (E' - \bar{Q}_{y_i}) = E' - \bigcap_1^n \bar{Q}_{y_i},$$

tehát

$$E \cap \bar{Q}_0 = Q_0 \subset E - \bigcap_1^n Q_{y_i},$$

azaz

$$Q_1 \cap Q_2 \cap \bigcap_1^n Q_{y_i} = \emptyset;$$

és (c′) miatt innen következnék

$$\bar{Q}_1 \cap \bar{Q}_2 \cap \bigcap_1^n \bar{Q}_{y_i} = \emptyset,$$

ellentétben azzal, hogy ez a halmaz x-et tartalmazza.

A második állítás igazolására jegyezzük meg először is, hogy (e′) és (a) következtében $x \in E' - E$, $y \in E'$, $x \neq y$ esetén x-nek és y-nak van diszjunkt környezete, úgyhogy (e) mindenesetre teljesül. Így újra (c) fennállását kell igazolnunk; mint előbb, most is feltesszük, hogy

$$x \in E' - E, \qquad x \in \bar{Q}_1 \cap \bar{Q}_2, \text{ de } x \notin \bar{Q}_0,$$

ahol $Q_0 = Q_1 \cap Q_2 \in \mathfrak{Q}$. Ekkor x és bármely $y \in \bar{Q}_0$ pont gyengén széteső, tehát szétválasztható, és így (b) miatt van olyan $Q_y, Q'_y \in \mathfrak{Q}$, hogy

$$x \in E' - \bar{Q}_y, \qquad y \in E' - \bar{Q}'_y, \qquad (E' - \bar{Q}_y) \cap (E' - \bar{Q}'_y) = \emptyset.$$

$\bar{Q}_0$ kompaktsága miatt

$$\bar{Q}_0 \subset \bigcup_1^n (E' - \bar{Q}'_{y_i}) = E' - \bigcap_1^n \bar{Q}'_{y_i},$$

tehát

$$Q_0 = E \cap \bar{Q}_0 \subset E - \bigcap_1^n Q'_{y_i};$$

legyen

$$Q'_0 = \bigcap_1^n Q'_{y_i} \in \mathfrak{Q},$$

úgyhogy

$$Q_0 \cap Q'_0 = \emptyset.$$

Viszont

$$(E' - \bar{Q}_{y_i}) \cap (E' - \bar{Q}'_{y_i}) = E' - (\bar{Q}_{y_i} \cup \bar{Q}'_{y_i}) = \emptyset$$

következtében

$$E - (Q_{y_i} \cup Q'_{y_i}) = \emptyset, \qquad E = Q_{y_i} \cup Q'_{y_i},$$

s innen

$$E = \bigcup_1^n Q_{y_i} \cup \bigcap_1^n Q'_{y_i} = \bigcup_1^n Q_{y_i} \cup Q'_0,$$

tehát

$$E' = \bigcup_1^n \bar{Q}_{y_i} \cup \bar{Q}'_0, \qquad x \in E' - \bigcup_1^n \bar{Q}_{y_i} \subset \bar{Q}'_0.$$

Eszerint $\bar{Q}'_0$ környezete x-nek, úgyhogy x-nek bármely V környezetére $Q_1 \cap V \cap \bar{Q}'_0 \neq \emptyset$, azaz $Q_1 \cap V \cap Q'_0 \neq \emptyset$, s így $x \in \overline{Q_1 \cap Q'_0}$. Ugyanígy adódik $x \in \overline{Q_2 \cap Q'_0}$.

(c″)-t a $Q_1 \cap Q_0' \in \mathfrak{Q}$ és $Q_2 \cap Q_0' \in \mathfrak{Q}$ halmazra alkalmazva

$$\overline{Q_1 \cap Q_0'} \cap \overline{Q_2 \cap Q_0'} \neq \emptyset$$

miatt

$$Q_1 \cap Q_0' \cap Q_2 \cap Q_0' \neq \emptyset,$$

ellentétben a már megállapított

$$Q_1 \cap Q_2 \cap Q_0' = Q_0 \cap Q_0' = \emptyset$$

egyenlőséggel. ∎

6.1.f. Wallman-féle kompaktifikáció. Alkalmazzuk az előző eredményeket arra az esetre, amikor $\mathfrak{P}$ az $[E, \mathfrak{T}]$ topologikus tér összes nyílt halmazaiból áll. Ekkor $\mathfrak{Q}$ az összes $\mathfrak{T}$-zárt halmazok rendszere. Az ehhez a $\mathfrak{P}$-hez tartozó Wallman-típusú kompaktifikációt $[E, \mathfrak{T}]$ (ill. $\mathfrak{T}$) **Wallman-féle kompaktifikációjának** nevezzük.

(6.1.55) *Az $[E', \mathfrak{T}']$ topologikus tér pontosan akkor Wallman-féle kompaktifikációja az $[E, \mathfrak{T}]$ térnek, ha*

(a) *$\mathfrak{T}'$ redukált, szoros bővítése $\mathfrak{T}$-nek;*

(b) *$\mathfrak{T}$-zárt A, B esetén a $\mathfrak{T}'$-lezárásokra $\overline{A \cap B} = \bar{A} \cap \bar{B}$;*

(c) *$\mathfrak{T}'$ kompakt;*

(d) *$x \in E' - E$ esetén $\{x\}$ $\mathfrak{T}'$-zárt.*

(b) *helyett tehető:*

(b′) *Ha A_i $\mathfrak{T}$-zárt, $\bigcap_1^n A_i = \emptyset$, akkor $\bigcap_1^n \bar{A}_i = \emptyset$.*

Bármely topologikus térnek van Wallman-féle kompaktifikációja, és az $[E, \mathfrak{T}]$ tér két Wallman-féle kompaktifikációja egymásba egy egyértelműen meghatározott E-t rögzítő homeomorfizmussal átvihető.

Bizonyítás. Minden következik (6.1.50)-ből és (6.1.54)-ből, hiszen (6.1.10) értelmében $\mathfrak{T}'$ pontosan akkor szoros bővítése $\mathfrak{T}$-nek, ha a $\mathfrak{T}$-zárt halmazok $\mathfrak{T}'$-lezárásainak E'-beli komplementumai $\mathfrak{T}'$-bázist alkotnak. ∎

(6.1.56) *Az $[E, \mathfrak{T}]$ topologikus tér Wallman-féle kompaktifikációja pontosan akkor T_0-, S_1-, ill. T_1-tér, ha maga $[E, \mathfrak{T}]$ ugyanilyen.*

Bizonyítás. A feltételek szükségessége következik (2.5.6), (2.5.9) és (2.5.12) alapján. Az elégségesség viszont (6.1.51)-ből és (6.1.52)-ből adódik, ugyanis az utóbbi tétel (a) feltétele a mostani $\mathfrak{P}$ mellett (2.5.8) folytán éppen azt jelenti, hogy $\mathfrak{T}$ S_1-topológia. ∎

(6.1.57) *Az $[E, \mathfrak{T}]$ topologikus tér Wallman-féle kompaktifikációja pontosan akkor S_2-tér, ha $[E, \mathfrak{T}]$ normális S_1-tér.*

Bizonyítás. A szükségesség (2.5.20)-ból és (6.1.53)-ból következik, az utóbbi (c) feltétele ugyanis most éppen abba megy át, hogy $\mathfrak{T}$ normális. Ugyanebből adódik az elégségesség is, hiszen a (6.1.52)-beli (a) azt jelenti éppen, hogy $[E, \mathfrak{T}]$ S_1-tér. ∎

Ha feltesszük, hogy $[E, \mathfrak{T}]$ T_0-tér, akkor (6.1.55)-ben az (a) feltételt azzal helyettesíthetjük (6.1.15) és (6.1.16) alapján, hogy $\mathfrak{T}'$ T_0-topológia és szoros bővítése

$\mathfrak{T}$-nek. Ha pedig $[E, \mathfrak{T}]$ T_1-tér, akkor (6.1.56) alapján (6.1.55)-ben (d) azzal pótolható, hogy $[E', \mathfrak{T}']$ T_1-tér.

Így a következő tételhez jutunk:

(6.1.58) *Legyen* $[E, \mathfrak{T}]$ T_1-*tér. Az* $[E', \mathfrak{T}']$ *tér pontosan akkor Wallman-féle kompaktifikációja* $[E, \mathfrak{T}]$-*nek, ha*

(a) $\mathfrak{T}'$ *szoros bővítése* $\mathfrak{T}$-*nek;*

(b) $\mathfrak{T}$-*zárt* $A, B \subset E$ *esetén* $\overline{A \cap B} = \bar{A} \cap \bar{B}$;

(c) $[E', \mathfrak{T}']$ *kompakt;*

(d) $[E', \mathfrak{T}']$ T_1-*tér.*

(b) *helyett tehető*

(b') $\mathfrak{T}$-*zárt* A_i *és* $\bigcap_1^n A_i = \emptyset$ *esetén* $\bigcap_1^n \bar{A}_i = \emptyset$. ▌

Eredményeink alapján a kompakt topologikus terek újabb jellemző tulajdonságait mondhatjuk ki:

(6.1.59) *Legyen* $[E, \mathfrak{T}]$ *topologikus tér. A következő állítások egyenértékűek:*

(a) $[E, \mathfrak{T}]$ *kompakt;*

(b) $[E, \mathfrak{T}]$-*ben minden ultra-*$\mathfrak{M}$-*szűrő konvergens;*

(c) $[E, \mathfrak{T}]$-*ben minden ultrazárt szűrő konvergens;*

(d) $[E, \mathfrak{T}]$ *saját magának Wallman-kompaktifikációja.*

Itt $\mathfrak{M} = \{G \cap F\colon G$ $\mathfrak{T}$-*nyílt*, F $\mathfrak{T}$-*zárt*$\}$.

Bizonyítás. (a) $\Rightarrow$ (b): Ha $\mathfrak{m}$ ultra-$\mathfrak{M}$-szűrő, és $\mathfrak{m}$-nek x torlódási pontja, akkor $\mathfrak{m} \to x$ (6.1.38) szerint.

(b) $\Rightarrow$ (c): (6.1.32) szerint minden ultrazárt szűrő egyúttal ultra-$\mathfrak{M}$-szűrő is.

(c) $\Rightarrow$ (d): Ha $[E, \mathfrak{T}]$-ben minden ultrazárt szűrő konvergens, akkor nincs nemtriviális ultrazárt szűrő, hiszen ha $\mathfrak{m}$ ultrazárt szűrő, és $\mathfrak{m} \to x$, akkor $\mathfrak{m}$ azonos az x-hez tartozó $\mathfrak{m}(x)$ triviális ultra-$\mathfrak{M}$-szűrővel; valóban, $\mathfrak{m} \neq \mathfrak{m}(x)$ esetén (6.1.36) szerint $\emptyset \in \mathfrak{v}(\mathfrak{m}(x))$ $(\cap)$ $\mathfrak{m}$ volna, holott (6.1.37) szerint $\mathfrak{v}(\mathfrak{m}(x)) = \mathfrak{v}(x)$. Így ekkor a Wallman-kompaktifikációt maga E hordozza.

(d) $\Rightarrow$ (a): Triviális.

6.1.g. Freudenthal-féle kompaktifikáció. Legyen $[E, \mathfrak{T}]$ peremkompakt topologikus tér, és álljon $\mathfrak{P}$ az összes kompakt határú nyílt halmazokból. (5.3.63)-ból látszik, hogy ekkor $\mathfrak{P}$-re teljesülnek (6.1.43) feltevései; speciálisan $\mathfrak{Q}$ a kompakt határú zárt halmazokból áll. Így beszélhetünk a tér $\mathfrak{P}$-hez tartozó Wallman-típusú kompaktifikációjáról; ezt a peremkompakt $[E, \mathfrak{T}]$ tér **Freudenthal-féle kompaktifikáció**jának nevezzük.

(6.1.50)-ből kiolvasható:

(6.1.60) *Bármely* $[E, \mathfrak{T}]$ *peremkompakt térnek van Freudenthal-féle kompaktifikációja, és két ilyen kompaktifikációt mindig átvisz egymásba egy egyértelműen meghatározott E-t rögzítő homeomorfizmus.* ▌

Ennek a kompaktifikációnak nevezetes sajátsága:

(6.1.61) *Ha* $[E', \mathfrak{T}']$ *az* $[E, \mathfrak{T}]$ *peremkompakt tér Freudenthal-féle kompaktifikációja, és* $D = E' - E$, *akkor* $\mathfrak{T}'|D$ *nulladimenziós.*

Bizonyítás. Minthogy — a szokásos jelölésekkel — $\mathfrak{T}'|D$ számára bázist alkotnak az $s(P) \cap D$ halmazok ($P \in \mathfrak{P}$), elég belátni, hogy ezek $\mathfrak{T}'|D$-re nézve nyílt-zártak. Azt mutatjuk meg pontosabban, hogy $P \in \mathfrak{P}$ esetén a $P' = E - \bar{P}$ jelöléssel ($\bar{P}$-sal most P-nek $\mathfrak{T}$-lezárását jelölve)

$$D - s(P) = s(P') \cap D,$$

ami $s(P)$ és $s(P')$ $\mathfrak{T}'$-nyiltsága miatt ((5.3.64) alapján $P' \in \mathfrak{P}$) az állítást adja. $P \cap P' = \emptyset$ következtében $s(P) \cap s(P') = \emptyset$, úgyhogy azt kell csak igazolni, hogy $D \subset s(P) \cup s(P')$.

Mármost $E = P \cup P' \cup \operatorname{mar} P$, s itt

$$Q = \operatorname{mar} P = E - (P \cup P') \in \mathfrak{Q};$$

ezért $x \in D$ esetén a P, P' és Q halmazok egyike $\mathfrak{m}(x)$-hez tartozik (6.1.27) miatt. Azonban $Q \in \mathfrak{m}(x)$ esetén $\mathfrak{m}(x)\,(\cap)\,\{Q\}$ Q-beli rács volna, amelynek Q kompaktsága folytán volna egy $y \in Q$ torlódási pontja; minden $\mathfrak{m}(x)$-hez tartozó $\mathfrak{Q}$-beli halmaz tartalmazná emiatt y-t, s minthogy $\mathfrak{m}(x)$ $\mathfrak{Q}$-szűrő, $\mathfrak{m}(x) \subset \mathfrak{m}(y)$ állna, azaz $\mathfrak{m}(x) = \mathfrak{m}(y)$, holott $\mathfrak{m}(x)$ nem-triviális ultra-$\mathfrak{M}$-szűrő. Így aztán vagy $P \in \mathfrak{m}(x)$, vagy $P' \in \mathfrak{m}(x)$, azaz $P \in \mathfrak{P}(\mathfrak{m}(x)) = \mathfrak{z}(x)$ vagy $P' \in \mathfrak{z}(x)$, és $x \in s(P)$ vagy $x \in s(P')$. ∎

(6.1.62) *Az* $[E, \mathfrak{T}]$ *peremkompakt tér Freudenthal-féle kompaktifikációja pontosan akkor* T_0-, S_1-, T_1-, S_2- *vagy* T_2-*tér, ha maga* $[E, \mathfrak{T}]$ *ilyen.*

Bizonyítás. A szükségesség az említett szétválasztási axiómák öröklődő voltából adódik, az elégségesség pedig (6.1.16)-ból, (6.1.52)-ből és (6.1.53)-ból, ugyanis a $\mathfrak{P}$ bázis-háló a (6.1.52)-beli (a), ill. a (6.1.53)-beli (c) feltételnek eleget tesz, mihelyt $\mathfrak{T}$ S_1-, ill. S_2-topológia. Az utóbbi állítás (5.3.65) (h)-ba van foglalva, az előbbi pedig (2.5.8) és (5.3.15) alapján következik, hiszen S_1-térben $x \in P \in \mathfrak{P}$ esetén $x \in \bar{x} \subset P$, és itt $\bar{x}$ kompakt volta miatt $E - \bar{x} \in \mathfrak{P}$, $\bar{x} \in \mathfrak{Q}$. ∎

A Freudenthal-féle kompaktifikáció jellemzéséről (6.1.54) figyelembevételével a következőt mondhatjuk:

(6.1.63) *Legyen* $[E, \mathfrak{T}]$ *peremkompakt tér. Az* $[E', \mathfrak{T}']$ *tér pontosan akkor Freudenthal-féle kompaktifikációja* $[E, \mathfrak{T}]$-*nek, ha*

(a) $\mathfrak{T}'$ *redukált bővítése* $\mathfrak{T}$-*nek;*

(b) *a kompakt határú zárt E-beli halmazok* $\mathfrak{T}'$-*lezárásai* $\mathfrak{T}'$-*re nézve zárt bázist alkotnak;*

(c) *kompakt határú, zárt* $A, B \subset E$ *halmazokra*

$$\overline{A \cap B} = \bar{A} \cap \bar{B},$$

vonással a $\mathfrak{T}'$-*lezárást jelölve;*

(d) $\mathfrak{T}'$ *kompakt;*

(e) $x \in E' - E$ *esetén* $\{x\}$ $\mathfrak{T}'$-*zárt.*

(c) *helyett tehető:*

(c′) *Kompakt határú, zárt* $A_i \subset E$ *halmazokra* $\bigcap_1^n A_i = \emptyset$ *esetén* $\bigcap_1^n \bar{A}_i = \emptyset$.

Ha $[E, \mathfrak{T}]$ S_2-*tér, akkor* (e) *azzal helyettesíthető, hogy* $[E', \mathfrak{T}']$ S_2-*tér, s akkor egyúttal* (c) *helyébe is tehető:*

(c″) *Kompakt határú, zárt* $A, B \subset E$ *halmazokra* $A \cap B = \emptyset$ *esetén* $\bar{A} \cap \bar{B} = \emptyset$. ∎

6.1.h. H-zárt bővítések. Az előzőkben tárgyalt kompaktifikációkkal kapcsolatban megfigyelhettük, hogy egy S_2-tér vagy T_2-tér kompaktifikációjáról csak bizonyos kikötések teljesülése esetén lehetett azt állítani, hogy újra S_2-tér, ill. T_2-tér. Ez természetes is: tudjuk, hogy minden kompakt S_2-tér normális, így reguláris (sőt teljesen reguláris), és (teljesen) reguláris tér altere is (teljesen) reguláris. Eszerint például egy nem-reguláris T_2-térnek biztosan nincs olyan kompaktifikációja, amely T_2-tér.

Így felmerül az a kérdés, hogy tetszőleges T_2-térnek nem lehet-e olyan bővítését megadni, amely T_2-tér, és a tereknek olyan osztályához tartozik, amely legalább bizonyos tekintetben emlékeztet a kompakt terekre. A T_2-terek körében valóban meg lehet adni egy ilyen jellegű, a kompakt terek osztályánál bővebb osztályt. Jegyezzük meg ennek érdekében, hogy (5.3.5) szerint egy kompakt T_2-tér minden őt tartalmazó T_2-térben zárt, s ennélfogva nincs valódi T_2-, azaz Hausdorff-féle bővítése. Látni fogjuk, hogy ez a tulajdonsága megvan bizonyos nem-kompakt T_2-tereknek is, úgyhogy a következő definíciót vezetjük be: egy $[E, \mathfrak{T}]$ T_2-teret **Hausdorff-zárt**nak, vagy röviden **H-zárt**nak nevezünk, ha nincs valódi Hausdorff-féle bővítése, vagyis ha E $\mathfrak{T}_1$-zárt minden olyan $[E_1, \mathfrak{T}_1]$ T_2-térben, amelynek $[E, \mathfrak{T}]$ altere. A mondottak szerint minden kompakt T_2-tér H-zárt.

A H-zárt tereknek a kompakt terekkel való rokonságára mutat a következő tétel:

(6.1.64) *Ha az $[E, \mathfrak{T}]$ T_2-térben minden nyílt szűrőnek van torlódási pontja, akkor $[E, \mathfrak{T}]$ H-zárt.*

Bizonyítás. Tegyük fel az állítással ellentétben, hogy van olyan $[E_1, \mathfrak{T}_1]$ T_2-tér, amelynek $[E, \mathfrak{T}]$ altere, s ebben olyan $x \in E_1 - E$ pont, amely E-nek $\mathfrak{T}_1$-érintkezési pontja. Ekkor az x pont $\mathfrak{v}_1(x)$ $\mathfrak{T}_1$-környezetszűrőjének $\mathfrak{z}(x) = \mathfrak{v}_1(x)\,(\cap)\,\{E\}$ nyomszűrője E-beli nyílt szűrő. Legyen $y \in E$ $\mathfrak{z}(x)$-nek torlódási pontja. (5.2.24) szerint van olyan $\mathfrak{z}(x)$-nél finomabb E-beli $\mathfrak{r}$ rács, hogy $\mathfrak{r} \to y$ $\mathfrak{T}$-re nézve, s akkor $\mathfrak{T}_1$-re nézve is. Minthogy $\mathfrak{v}_1(x) < \mathfrak{z}(x) < \mathfrak{r}$, azért $\mathfrak{r} \to x$ is áll, és ez (2.5.19) szerint maga után vonja, hogy $x = y \in E$: ellentmondás. ∎

Állapodjunk meg ezzel kapcsolatban abban, hogy egy (nem feltétlenül Hausdorff-féle) topologikus teret vagy topológiát **majdnem kompakt**nak nevezünk, ha benne minden nyílt szűrőnek van torlódási pontja. Az előző tétel eszerint azt mondja ki, hogy minden majdnem kompakt T_2-tér H-zárt. Világos, hogy minden kompakt tér majdnem kompakt; ennek részleges megfordításaként pedig:

(6.1.65) *Minden majdnem kompakt reguláris tér kompakt.*

Bizonyítás. Legyen $\mathfrak{r}$ tetszőleges rács a majdnem kompakt, reguláris $[E, \mathfrak{T}]$ térben. $\mathfrak{v}(\mathfrak{r})$ nyílt szűrő, tehát feltevésünk értelmében van egy $x \in E$ torlódási pontja. $V \in \mathfrak{v}(x)$ esetén van olyan zárt $V_1 \in \mathfrak{v}(x)$, hogy $V_1 \subset V$. Ha volna olyan $R \in \mathfrak{r}$, amely nem metszi V-t, akkor $R \subset E - V \subset E - V_1$ miatt $E - V_1 \in \mathfrak{v}(\mathfrak{r})$ volna: ellentmondás. Így minden $\mathfrak{r}$-beli halmaz metszi V-t, x torlódási pontja $\mathfrak{r}$-nek. ∎

A majdnem kompakt tereknek a kompakt terekkel való rokonságát mutatja a következő tétel is:

(6.1.66) *Tetszőleges* $[E, \mathfrak{T}]$ *topologikus tér esetén egyenértékűek egymással a következő állítások:*

(a) $\mathfrak{T}$ *majdnem kompakt;*

(b) *Minden* $\mathfrak{T}$*-nyílt halmazokból álló* $\mathfrak{c}$ *centrált rendszerre*

$$\bigcap \{\bar{C}\colon C \in \mathfrak{c}\} \neq 0;$$

(c) *Ha* $E = \bigcup_{i \in I} G_i$, G_i $\mathfrak{T}$*-nyílt* $(i \in I)$, *akkor van véges számú* $G_{i_1}, \dots, G_{i_n}$ $(i_k \in I)$ *úgy, hogy* $E = \bigcup_1^n \bar{G}_{i_k}$;

(d) *Minden E-beli ultranyílt szűrő konvergens.*

Bizonyítás. (a) $\Rightarrow$ (b): Ha $\mathfrak{c}$ nyílt halmazokból álló centrált rendszer, akkor a $\bigcap_1^n C_i$ $(C_i \in \mathfrak{c})$ alakú halmazok nyílt szűrőt generálnak, s ha x ennek torlódási pontja, akkor $x \in \bigcap \{\bar{C}\colon C \in \mathfrak{c}\}$.

(b) $\Rightarrow$ (c): Ha $E = \bigcup_{i \in I} G_i$, G_i nyílt minden i-re, de bárhogyan választva véges számú $i_k \in I$ indexet, $E - \bigcup_1^n \bar{G}_{i_k} \neq \emptyset$, akkor az utóbbi alakú halmazok nyílt halmazokból álló rácsot s egyúttal $\mathfrak{c}$ centrált rendszert alkotnak. Minden $x \in E$-hez van olyan $i_0 \in I$, hogy $x \in G_{i_0}$, s akkor $G_{i_0} \cap (E - \bar{G}_{i_0}) = \emptyset$ miatt x nem érintkezési pontja az $E - \bar{G}_{i_0} \in \mathfrak{c}$ halmaznak, (b)-vel ellentétben.

(c) $\Rightarrow$ (d): Ha $\mathfrak{g}$ ultranyílt szűrő, és feltesszük, hogy nem konvergens, akkor minden $x \in E$-hez található olyan nyílt G_x, hogy $G_x \notin \mathfrak{g}$. Legyen $E = \bigcup_1^n \bar{G}_{x_i}$. (6.1.26) miatt $E - G_{x_i} \in \mathfrak{g}$, s minthogy $\mathfrak{g}$ nyílt szűrő, egyben $\operatorname{int}(E - G_{x_i}) = E - \bar{G}_{x_i} \in \mathfrak{g}$, azaz $\emptyset = \bigcap_1^n (E - \bar{G}_{x_i}) \in \mathfrak{g}$: ellentmondás.

(d) $\Rightarrow$ (a): Ha $\mathfrak{g}$ nyílt szűrő, akkor található (6.1.29) szerint egy $\mathfrak{g}_1$ ultranyílt szűrő, amelyre $\mathfrak{g}_1 \supset \mathfrak{g}$. Ha $\mathfrak{g}_1 \to x$, akkor x (5.2.24) szerint torlódási pontja $\mathfrak{g}$-nek. ∎

Meg fogjuk mármost mutatni, hogy minden T_2-térnek van H-zárt bővítése; ha nem-reguláris T_2-térből indulunk ki — ilyenre láttunk példát —, akkor ez a bővítés biztosan nem-kompakt H-zárt tér.

(6.1.64) szerint olyan bővítést kell keresnünk, amely T_2-tér, s amely majdnem kompakt. Ennek érdekében először is jegyezzük meg:

(6.1.67) *Legyen* $[E, \mathfrak{T}]$ *topologikus tér,* $\mathfrak{P}$ *a* $\mathfrak{T}$*-nyílt halmazok rendszere, s alkalmazzuk a* (6.1.44)*-beli jelöléseket. Legyen* E_2' *az* E_0' *halmaz ama része, amely E pontjaiból s ezenkívül azokból az* $x \in E_0' - E$ *pontokból áll, amelyekre* $\mathfrak{m}(x)$ $\mathfrak{T}$*-re nézve nem-konvergens ultranyílt szűrő,* $\mathfrak{T}_2' = \mathfrak{T}_0'|E_2'$. *Ekkor az* $[E_2', \mathfrak{T}_2']$ *tér majdnem kompakt.*

Bizonyítás. Legyen $\mathfrak{g}$ $\mathfrak{T}'$-nyílt szűrő E_2'-ben. Minthogy E $\mathfrak{T}_2'$-sűrű, azért $\mathfrak{g}$ minden halmaza metszi E-t, és így $\mathfrak{g}_1 = \mathfrak{g}_2 (\cap) \{E\}$ E-beli szűrő, mégpedig nyilván $\mathfrak{T}$-nyílt szűrő. Legyen (6.1.29) értelmében $\mathfrak{g}_2$ egy $\mathfrak{g}_1$-et tartalmazó ultranyílt E-beli szűrő.

Vagy $\mathfrak{g}_2$ konvergál $\mathfrak{T}$-re nézve valamely $x \in E$ ponthoz, vagy van olyan $x \in E_2'$, hogy $\mathfrak{g}_2 = \mathfrak{m}(x)$, és $\mathfrak{v}_2'(x) < \mathfrak{z}(x) < \mathfrak{m}(x)$ folytán (ahol $\mathfrak{v}_2'(x)$ jelöli x $\mathfrak{T}_2'$-környezetszűrőjét) $\mathfrak{g}_2 \to x$ $\mathfrak{T}_2'$-re nézve. Tekintettel arra, hogy $\mathfrak{g} < \mathfrak{g}_1 < \mathfrak{g}_2$, x mindkét esetben $\mathfrak{T}_2'$-torlódási pontja $\mathfrak{g}$-nek. ▮

Ami $[E_2', \mathfrak{T}_2']$ szétválasztási tulajdonságait illeti, a következőt mondhatjuk:

(6.1.68) *A* (6.1.67)*-beli jelölésekkel $x \in E_2' - E$, $y \in E_2'$, $x \neq y$ esetén x és y szétválasztható. Ezért ha $[E, \mathfrak{T}]$ T_0-, S_1-, T_1, S_2- vagy T_2-tér, $[E_2', \mathfrak{T}_2']$ is ugyanilyen.*

Bizonyítás. Minthogy $x \in E_2' - E$ esetén $\mathfrak{m}(x)$ nyílt szűrő, azért (6.1.34) szerint $\mathfrak{z}(x) = \mathfrak{v}(\mathfrak{m}(x)) = \mathfrak{m}(x)$. Ezért $x, y \in E_2' - E$, $x \neq y$ esetén $\mathfrak{m}(x) \neq \mathfrak{m}(y)$ folytán (6.1.28) szerint $\emptyset \in \mathfrak{m}(x) (\cap) \mathfrak{m}(y)$, és ezzel $\emptyset \in \mathfrak{z}(x) (\cap) \mathfrak{z}(y)$ is teljesül. Ha viszont $x \in E$, $y \in E_2' - E$, akkor $\emptyset \notin \mathfrak{z}(x) (\cap) \mathfrak{z}(y)$ ismét (6.1.28) szerint azt vonná maga után, hogy $\mathfrak{z}(y) > \mathfrak{z}(x) = \mathfrak{v}(x)$, azaz hogy $\mathfrak{m}(y) = \mathfrak{z}(y)$ konvergens $\mathfrak{T}$-re nézve. Így az állítás (6.1.14)-ből következik. ▮

A (6.1.64), (6.1.67) és (6.1.68) tételből most már kiolvashatjuk:

(6.1.69) *Ha $[E, \mathfrak{T}]$ T_2-tér, akkor a* (6.1.67)*-ben szereplő $[E_2', \mathfrak{T}_2']$ tér $[E, \mathfrak{T}]$-nek H-zárt bővítése.* ▮

Ennek alapján (6.1.64)-et a következőképpen egészíthetjük ki:

(6.1.70) *Egy T_2-tér pontosan akkor H-zárt, ha majdnem kompakt.*

Bizonyítás. Ha az $[E, \mathfrak{T}]$ T_2-tér majdnem kompakt, akkor (6.1.64) szerint H-zárt. Ha viszont ez a tér nem majdnem kompakt, akkor (6.1.66) értelmében van benne nem-konvergens ultranyílt szűrő. Ezért a (6.1.67)-ben megkonstruált bővítés valódi T_2-bővítés, és így $[E, \mathfrak{T}]$ nem H-zárt. ▮

6.1.i. Gyakorlatok. 1. Legyen $[E', \mathfrak{T}']$ olyan topologikus tér, amelyben a zárt halmazok belsejei bázist alkotnak, továbbá $E \subset E'$ sűrű, $\mathfrak{T} = \mathfrak{T}'|E$. Mutassuk meg, hogy

(a) $\mathfrak{T}'$-re nézve zárt bázist alkotnak a $\mathfrak{T}'$-nyílt halmazok lezárásai;

(b) ha G' $\mathfrak{T}'$-nyílt, akkor $\overline{G'} = \overline{G' \cap E}$;

(c) $\mathfrak{T}'$ szoros bővítése $\mathfrak{T}$-nek.

2. Mutassuk meg, hogy reguláris térben a zárt halmazok belsejei bázist alkotnak. Legyen viszont $E = A \cup B \cup C \cup \{a\} \cup \{b\}$, ahol a jobb oldali halmazok diszjunktak, továbbá

$$A = \{a_{ij}\colon i, j \in \mathbf{N}\},\ B = \{b_{ij}\colon i, j \in \mathbf{N}\},$$
$$C = \{c_i\colon i \in \mathbf{N}\},\ V(a_{ij}) = \{a_{ij}\},\ V(b_{ij}) = \{b_{ij}\},$$

és $n \in \mathbf{N}$ esetén

$$V_n(c_i) = \{c_i\} \cup \{a_{ij}\colon j \geqq n\} \cup \{b_{ij}\colon j \geqq n\},$$
$$V_n(a) = \{a\} \cup \{a_{ij}\colon i \geqq n, j \in \mathbf{N}\},$$
$$V_n(b) = \{b\} \cup \{b_{ij}\colon i \geqq n, j \in \mathbf{N}\}.$$

Mutassuk meg, hogy

(a) a

$$\mathfrak{b}(a_{ij}) = \{V(a_{ij})\},\ \mathfrak{b}(b_{ij}) = \{V(b_{ij})\},$$
$$\mathfrak{b}(c_i) = \{V_n(c_i)\colon n \in \mathbf{N}\},$$
$$\mathfrak{b}(a) = \{V_n(a)\colon n \in \mathbf{N}\},$$
$$\mathfrak{b}(b) = \{V_n(b)\colon n \in \mathbf{N}\}$$

környezetbázisok egy $\mathfrak{T}$ topológiát határoznak meg E-n;

(b) $\mathfrak{T}$ T_2-topológia;

(c) $V(a_{ij})$, $V(b_{ij})$, $V_n(c_i)$ nyílt-zárt;

(d) $V_n(a) = \operatorname{int} \overline{V}_n(a)$, $V_n(b) = \operatorname{int} \overline{V}_n(b)$;

(e) $\overline{V}_n(a) - V_m(a) \neq \emptyset$ $(n, m \in \mathbf{N})$;

(f) $\mathfrak{T}$ számára bázist alkotnak a zárt halmazok belsejei, de $\mathfrak{T}$ nem reguláris.

3. Legyen $E = \mathbf{R} - \mathbf{Q}$, $E' = \mathbf{R}$, $E'' = \mathbf{R} \cup \{\omega\}$, ahol $\omega \notin \mathbf{R}$, $\mathfrak{T} = \mathfrak{E}|E$, $\mathfrak{T}' = \mathfrak{E}$, $\mathfrak{z}$ az $(x, +\infty) - \mathbf{N}$ alakú halmazok által generált $\mathbf{R}$-beli szűrő $(x \in \mathbf{R})$, $\mathfrak{T}''$ pedig $\mathfrak{T}'$-nek az a szoros bővítése, amely a $\mathfrak{z}(\omega) = \mathfrak{z}$ választással keletkezik. Mutassuk meg, hogy

(a) $\mathfrak{T}'$ szoros bővítése $\mathfrak{T}$-nek, $\mathfrak{T}''$ pedig $\mathfrak{T}'$-nek;

(b) $[E'', \mathfrak{T}'']$ T_2-tér;

(c) $\mathbf{N}$ $\mathfrak{T}''$-zárt;

(d) ha $A \subset E$, és A-nak $\mathfrak{T}''$-lezárása tartalmazza $\mathbf{N}$-t, akkor ω-t is;

(e) $\mathfrak{T}''$ nem szoros bővítése $\mathfrak{T}$-nek.

4. Legyen $[E, \mathfrak{T}]$ topologikus tér, $E' \supset E$, és minden $x \in E'$-höz legyen előírva egy $\mathfrak{z}(x)$ nyílt E-beli szűrő, speciálisan $x \in E$ esetén $\mathfrak{z}(x) = \mathfrak{v}(x)$ legyen x-nek $\mathfrak{T}$-környezetszűrője. Legyen $\mathfrak{b}'(x) = \{S \cup \{x\}\colon S \in \mathfrak{z}(x)\}$. Mutassuk meg, hogy

(a) $\mathfrak{b}'(x)$ x-nek környezetbázisa egy $\mathfrak{T}'$ topológia számára;

(b) $\mathfrak{T}'$ redukált bővítése $\mathfrak{T}$-nek;

(c) $x \in E'$ $\mathfrak{v}'(x)$ $\mathfrak{T}'$-környezetszűrőjének E-beli nyomszűrője $\mathfrak{z}(x)$;

(d) ha $\mathfrak{T}''$ olyan E' fölötti topológia, amelyhez a $\mathfrak{z}(x)$ nyomszűrők tartoznak, akkor $\mathfrak{T}'' < \mathfrak{T}'$.

5. A 4. alatti feltevésekkel és jelölésekkel mutassuk meg, hogy

(a) $\mathfrak{T}'$ pontosan akkor S_1-topológia, ha $\mathfrak{T}$ S_1-topológia, és $x \in E' - E$ esetén

$$\bigcap \{S\colon S \in \mathfrak{z}(x)\} = \emptyset;$$

(b) $\mathfrak{T}'$ pontosan akkor S_2-topológia, ha $\mathfrak{T}$ S_2-topológia, $x \in E' - E$ esetén $\mathfrak{z}(x)$-nek nincs $\mathfrak{T}$-torlódási pontja, és $x \in E' - E$, $y \in E' - E$, $x \neq y$ esetén $\emptyset \in \mathfrak{z}(x) (\cap) \mathfrak{z}(y)$.

6. Legyen a 4. alatti feltevésekkel és jelölésekkel $\mathfrak{T}''$ a $\mathfrak{z}(x)$ nyomszűrőkhöz tartozó szoros bővítése $\mathfrak{T}$-nek.

(a) Mutassuk meg, hogy ha $\mathfrak{T}'$ S_2-topológia, akkor $\mathfrak{T}''$ is ilyen;

(b) Adjunk példát arra, hogy $\mathfrak{T}'$ T_1-topológia, de $\mathfrak{T}''$ nem redukált;

(c) Adjunk példát arra, hogy $\mathfrak{T}'$ T_1-topológia, $\mathfrak{T}''$ pedig T_0-topológia, de nem S_1-topológia.

7. Mutassuk meg, hogy az

$$\mathbf{S}_m = \left\{(x_1, \ldots, x_{m+1})\colon \sum_1^{m+1} x_i^2 = 1\right\} \subset \mathbf{R}^{m+1}$$

m-dimenziós gömbfelület homeomorf az $[\mathbf{R}^m, \mathfrak{E}^m]$ tér Alekszandrov-féle kompaktifikációjával.

[Az utóbbit $[E, \mathfrak{T}]$-vel jelölve, ahol $E = \mathbf{R}^m \cup \{\omega\}$, az

$$f(x_1, \ldots, x_m) = \left(\frac{2x_1}{r^2+1}, \ldots, \frac{2x_m}{r^2+1}, \frac{r^2-1}{r^2+1}\right),$$

$$r^2 = \sum_1^m x_i^2, \qquad f(\omega) = (0, \ldots, 0,1) \in \mathbf{S}_m$$

képletekkel adott leképezés — $\mathbf{R}^m$ vetítése $\mathbf{S}_m$-re a $(0, \ldots, 0, 1)$ pontból — a keresett $(\mathfrak{T}, \mathfrak{E}^{m+1}|\mathbf{S}_m)$-hcmecmorfizmus.]

8. Legyen $E = \mathbf{R}$, $\mathfrak{H} = \{[a, b)\colon a, b \in \mathbf{R},\ a \leqq b\}$. Mutassuk meg, hogy $\mathfrak{H}$ félháló, és adjuk meg az összes ultra-$\mathfrak{H}$-szűrőket.

[Az utóbbiakat az $\mathfrak{r}^+(a) = \{[a, a+\varepsilon)\colon \varepsilon > 0\}$ és $\mathfrak{r}^-(a) = \{[a-\varepsilon, a)\colon \varepsilon > 0\}$ $(a \in \mathbf{R})$ rácsok generálják.]

9. Legyen E végtelen halmaz, álljon $\mathfrak{P}$ E-ből és E-nek véges részhalmazaiból, legyen $\mathfrak{Q} = \{E - P\colon P \in \mathfrak{P}\}$, $\mathfrak{M} = \mathfrak{P}\,(\cap)\,\mathfrak{Q}$, és határozzuk meg az összes ultra-$\mathfrak{M}$-szűrőket.

[Ezek az $\dot{x}$ $(x \in E)$ szűrők, továbbá az E összes véges komplementumú halmazaiból álló szűrő.]

10. Legyen $E = \mathbf{R}$, és álljon $\mathfrak{P}$ az $\bigcup_1^n (a_i, b_i)$ alakú halmazokból $(n \in \mathbf{N}$, $a_i, b_i \in \mathbf{R}$, $a_i < b_i)$, továbbá $\emptyset$-ból és E-ből. Mutassuk meg, hogy $\mathfrak{P}$ háló, továbbá a $\mathfrak{Q} = \{E - P\colon P \in \mathfrak{P}\}$, $\mathfrak{M} = \mathfrak{P}\,(\cap)\,\mathfrak{Q}$ jelölésekkel adjuk meg az összes ultra-$\mathfrak{M}$-szűrőket.

[Az utóbbiakat a $\mathfrak{r}(\infty) = \{(-\infty, -a) \cup (a, +\infty)\colon a > 0\}$, $\mathfrak{r}(a) = \{a\}$, $\mathfrak{r}^+(a) = \{(a, a+\varepsilon)\colon \varepsilon > 0\}$ és $\mathfrak{r}^-(a) = \{(a-\varepsilon, a)\colon \varepsilon > 0\}$ $(a \in \mathbf{R})$ rácsok generálják.]

11. Legyen $\mathfrak{T}_1$ és $\mathfrak{T}_2$ két topológia E-n, $\mathfrak{P}_1$ és $\mathfrak{P}_2$ bázisháló $\mathfrak{T}_1$, ill. $\mathfrak{T}_2$ számára, és az ezekből kiindulva (6.1.43) szerint elkészített E_0', ill. E_0'' halmazon legyen $\mathfrak{T}_1'$, ill. $\mathfrak{T}_2'$ $\mathfrak{T}_1$-nek, ill. $\mathfrak{T}_2$-nek (6.1.44)-beli szoros bővítése. Mutassuk meg, hogy $\mathfrak{P}_1 \subset \mathfrak{P}_2$ esetén — az értelemszerű $\mathfrak{Q}_1, \mathfrak{Q}_2, \mathfrak{M}_1, \mathfrak{M}_2, \mathfrak{m}_1(x), \mathfrak{m}_2(x)$ jelölésekkel —:

(a) Bármely ultra-$\mathfrak{M}_2$-szűrőben az $\mathfrak{M}_1$-hez tartozó halmazok ultra-$\mathfrak{M}_1$-szűrőt generálnak;

(b) Ha $f\colon E_0'' \to E_0'$ olyan E-t rögzítő leképezés, amelyre $\mathfrak{m}_1(f(x))$ éppen az $\mathfrak{m}_2(x)$-ben foglalt $\mathfrak{M}_1$-hez tartozó halmazok által van generálva, akkor f $(\mathfrak{T}_2', \mathfrak{T}_1')$-folytonos szuperjekció.

12. Tekintsük a 9. alatti E halmazt és a $\mathfrak{P}$ hálót, amely a $\mathfrak{D}_E$ topológia számára bázis. Állítsuk elő az $[E, \mathfrak{D}_E]$ tér $\mathfrak{P}$-hez tartozó Wallman-típusú kompaktifikációját.

[$E' = E \cup \{\omega\}$, E pontjai $\mathfrak{T}'$-nyíltak, ω egyetlen $\mathfrak{T}'$-környezete E'.]

13. Ugyanez a feladat a 10. alatti E és $\mathfrak{P}$ esetére (amikor is $\mathfrak{T} = \mathfrak{E}$).

[$E' = E \cup \{\omega\}$, $x \in E$ $\mathfrak{E}$-környezetbázisa $\mathfrak{T}'$-környezetbázis is, ω egyetlen környezete E'.]

14. Legyen $[E, \mathfrak{T}]$ lokálisan kompakt, nem-kompakt S_2-tér, és $\mathfrak{P}$ álljon azokból a nyílt halmazokból, amelyekre vagy $\bar{P}$, vagy $E - P$ kompakt. Mutassuk meg, hogy

(a) $\mathfrak{P}$ bázis-háló;

(b) $[E, \mathfrak{T}]$ Alekszandrov-féle kompaktifikációjára teljesülnek a (6.1.54) alatti (a), (b), (c″), (d), (e′) feltételek, s így ez éppen $[E, \mathfrak{T}]$-nek $\mathfrak{P}$-hez tartozó Wallman-típusú kompaktifikációja.

15. Legyen $[E, \mathfrak{T}]$ nulladimenziós tér, $\mathfrak{P}$ álljon a nyílt-zárt halmazokból. Mutassuk meg, hogy

(a) ha A és B kompakt határú, zárt halmaz, és $A \cap B = \emptyset$, akkor van olyan nyílt-zárt C és D, hogy $A \subset C$, $B \subset D$, $C \cap D = \emptyset$;

(b) ha $[E', \mathfrak{T}']$ $[E, \mathfrak{T}]$-nek $\mathfrak{P}$-hez tartozó Wallman-típusú kompaktifikációja, akkor $\mathfrak{T}$ S_2-topológia;

(c) $[E', \mathfrak{T}']$ egyúttal $[E, \mathfrak{T}]$-nek Freudenthal-féle kompaktifikációja is.

16. Legyen $[E, \mathfrak{T}]$ topologikus tér, $\mathfrak{P}$ bázisháló $\mathfrak{T}$ számára, $[E', \mathfrak{T}']$ a $\mathfrak{P}$-hez tartozó Wallman-típusú kompaktifikáció. Mutassuk meg, hogy (a szokásos jelöléssel) minden E-beli ultra-$\mathfrak{M}$-szűrő $\mathfrak{T}'$-konvergens.

17. Legyen $[E, \mathfrak{T}]$ topologikus tér, $\mathfrak{P}$ bázisháló $\mathfrak{T}$ számára, $\mathfrak{Q} = \{E - P : P \in \mathfrak{P}\}$, $[E', \mathfrak{T}']$ pedig olyan redukált, kompakt bővítése $[E, \mathfrak{T}]$-nek, amelyben $\{\bar{Q} : Q \in \mathfrak{Q}\}$ zárt bázis, $Q_1, Q_2 \in \mathfrak{Q}$ esetén $\overline{Q_1 \cap Q_2} = \bar{Q}_1 \cap \bar{Q}_2$, és ha $E \subset K \subset E'$ kompakt, akkor $K = E'$. Mutassuk meg, hogy ekkor $\mathfrak{T}'$ éppen $\mathfrak{T}$-nek $\mathfrak{P}$-hez tartozó Wallman-típusú kompaktifikációja.

18. Mutassuk meg, hogy majdnem kompakt tér folytonos képe is majdnem kompakt.

19. Mutassuk meg, hogy ha $[E, \mathfrak{T}]$ topologikus tér, $E = \bigcup_{1}^{n} E_i$, és $\mathfrak{T}|E_i$ majdnem kompakt ($i = 1, \dots, n$), akkor $\mathfrak{T}$ is majdnem kompakt.

20. Legyen $[E, \mathfrak{T}]$ kompakt S_2-tér, $a \in E$, $\{a\}$ $\mathfrak{T}$-zárt, $A = E - \{a\}$, $a \in \bar{A}$. Mutassuk meg, hogy $[E, \mathfrak{T}]$ az $[A, \mathfrak{T}|A]$ altérnek Alekszandrov-féle kompaktifikációja.

[(6.1.11) szerint $\mathfrak{T}$ szoros bővítése $\mathfrak{T}|A$-nak. Ha G a-nak $\mathfrak{T}$-nyílt környezete, akkor $E - G$ $\mathfrak{T}|A$-kompakt és $\mathfrak{T}|A$-zárt. Viszont ha $K \subset A$ kompakt és $\mathfrak{T}|A$-zárt, akkor $\mathfrak{T}$-zárt is, mert különben $a \in \bar{K}$ folytán $\mathfrak{v}(a)$-nak volna K-ban torlódási pontja, ami (S_2)-nek ellentmond; így $E - K$ a-nak környezete.]

6.2. LEKÉPEZÉSEK KITERJESZTÉSE

6.2.a. Folytonos leképezések kiterjesztése. A topologikus terek bővítésének előbb tárgyalt kérdésével kapcsolatban természetesen vetődik fel a következő probléma. Legyen $[X, \mathfrak{T}]$ egy topologikus tér, $[X', \mathfrak{T}']$ ennek egy bővítése, $[Y, \mathfrak{T}^*]$ egy további topologikus tér, $f : X \to Y$ $(\mathfrak{T}, \mathfrak{T}^*)$-folytonos leképezés. Kérdés, létezik-e f-nek folytonos **kiterjesztése** X'-re, vagyis olyan $g : X' \to Y$ leképezés, amely $(\mathfrak{T}', \mathfrak{T}^*)$-folytonos, s amelyre $g|X = f$.

Ilyen g létezésének egy szükséges feltételét rögtön megfogalmazhatjuk. Jelöljük e célból szokás szerint az $x \in X$ pont $\mathfrak{T}$-környezetszűrőjét $\mathfrak{v}(x)$-szel, az $x \in X'$ pont $\mathfrak{T}'$-környezetszűrőjét $\mathfrak{v}'(x)$-szel, ennek X-beli $\mathfrak{v}'(x)\,(\cap)\,\{X\}$ nyomszűrőjét pedig $\mathfrak{z}(x)$-szel. Mivel $\mathfrak{z}(x) > \mathfrak{v}'(x)$, azért $\mathfrak{z}(x) \to x$ $\mathfrak{T}'$-re nézve, tehát ha g $(\mathfrak{T}', \mathfrak{T}^*)$-folytonos, akkor (2.6.13) szerint $g(\mathfrak{z}(x)) \to g(x)$, s ha még $g|X = f$, akkor $f(\mathfrak{z}(x)) \to$ $\to g(x)$.

Ennek alapján (2.6.22)-re is tekintettel kimondhatjuk:

(6.2.1) *Legyen* $[X, \mathfrak{T}]$ *és* $[Y, \mathfrak{T}^*]$ *két topologikus tér,* $[X', \mathfrak{T}']$ *az* $[X, \mathfrak{T}]$ *térnek egy bővítése,* $f : X \to Y$, $x \in X'$ *esetén* $\mathfrak{v}'(x)$ *az* x *pont* $\mathfrak{T}'$*-környezetszűrője,* $\mathfrak{z}(x) = \mathfrak{v}'(x)\,(\cap)\,\{X\}$. *Ahhoz, hogy létezzék olyan* $g : X' \to Y$ $(\mathfrak{T}', \mathfrak{T}^*)$*-folytonos leképezés, amelyre* $g|X = f$, *szükséges, hogy* f $(\mathfrak{T}, \mathfrak{T}^*)$*-folytonos legyen, továbbá, hogy* $x \in X'$ *esetén* $f(\mathfrak{z}(x))$ $\mathfrak{T}^*$*-konvergens rács legyen.* ∎

Nevezetes tény, hogy ha $\mathfrak{T}^*$ reguláris, akkor ezek a feltételek elegendők is a folytonos kiterjesztés létezéséhez:

(6.2.2) *A* (6.2.1)*-beli jelölésekkel legyen* $\mathfrak{T}^*$ *reguláris,* f $(\mathfrak{T}, \mathfrak{T}^*)$*-folytonos, és tegyük fel, hogy* $x \in X'$ *esetén* $f(\mathfrak{z}(x))$ $\mathfrak{T}^*$*-konvergens rács. Legyen* $x \in X$ *esetén* $g(x) = f(x)$, $x \in X' - X$ *esetén pedig válasszuk a* $g(x) \in Y$ *pontot úgy, hogy* $f(\mathfrak{z}(x)) \to g(x)$ *legyen* $\mathfrak{T}^*$*-ra nézve. Ekkor* g $(\mathfrak{T}', \mathfrak{T}^*)$*-folytonos, és* $g|X = f$.

Bizonyítás. Az f leképezés $(\mathfrak{T}, \mathfrak{T}^*)$-folytonossága miatt $x \in X$ esetén is érvényes $f(\mathfrak{z}(x)) \to f(x) = g(x)$. (2.6.10) értelmében azt kell megmutatnunk, hogy $x \in X'$ esetén $g(\mathfrak{v}'(x)) \to g(x)$. Legyen V^* $g(x)$-nek tetszőleges $\mathfrak{T}^*$-környezete, $V_1^* \subset V^*$ pedig $g(x)$-nek zárt $\mathfrak{T}^*$-környezete. $f(\mathfrak{z}(x)) \to g(x)$ miatt van x-nek olyan $\mathfrak{T}'$-nyílt G környezete, hogy $f(G \cap X) \subset V_1^*$. Tetszőleges $y \in G$ pontra G y-nak is $\mathfrak{T}'$-környezete, így $G \cap X \in \mathfrak{z}(y)$, és $f(\mathfrak{z}(y)) \to g(y)$ folytán (5.2.24) miatt $g(y) \in \overline{f(G \cap X)} \subset$ $\subset V_1^* \subset V^*$. Eszerint $g(G) \subset V^*$. ∎

Ami a folytonos kiterjesztés egyértelműségét illeti, a következőt mondhatjuk:

(6.2.3) *Legyen* (6.2.1) *jelöléseivel* $g_1 : X' \to Y$ *és* $g_2 : X' \to Y$ $(\mathfrak{T}', \mathfrak{T}^*)$*-folytonos,* $\mathfrak{T}^*$ T_2*-topológia, továbbá* $g_1|X = g_2|X = f$. *Ekkor* $g_1 = g_2$.

Bizonyítás. Tetszőleges $x \in X'$ pontra $\mathfrak{z}(x) \to x$ folytán (2.6.13) szerint $g_1(\mathfrak{z}(x)) \to$ $\to g_1(x)$, $g_2(\mathfrak{z}(x)) \to g_2(x)$, és $g_1(\mathfrak{z}(x)) = g_2(\mathfrak{z}(x)) = f(\mathfrak{z}(x))$. (2.5.19) szerint tehát $g_1(x) = g_2(x)$. ∎

A (6.2.2) tétel első alkalmazásaként kimutatjuk a Wallman-féle kompaktifikációnak egy nevezetes tulajdonságát:

(6.2.4) *Legyen* $[X, \mathfrak{T}]$ *tetszőleges topologikus tér,* $[X', \mathfrak{T}']$ *ennek Wallman-féle kompaktifikációja,* $[Y, \mathfrak{T}^*]$ *kompakt* S_2*-tér,* $f : X \to Y$ $(\mathfrak{T}, \mathfrak{T}^*)$*-folytonos. Ekkor létezik* f*-nek* $(\mathfrak{T}', \mathfrak{T}^*)$*-folytonos kiterjesztése.*

Bizonyítás. (6.2.2) szerint azt kell megmutatnunk, hogy $x \in X'$ esetén $f(\mathfrak{z}(x))$ $\mathfrak{T}^*$-konvergens rács, hiszen $\mathfrak{T}^*$ reguláris (5.3.22) szerint. Azonban a szokásos jelölésekkel $\mathfrak{z}(x) = \mathfrak{v}(\mathfrak{m}(x))$, ahol $\mathfrak{m}(x)$ X-beli ultra-$\mathfrak{M}$-szűrő. $\mathfrak{T}^*$ kompaktsága miatt az $f(\mathfrak{m}(x))$ által Y-ban generált $\mathfrak{m}^*$ szűrőnek van egy $y \in Y$ torlódási pontja. Ha G y-nak nyílt környezete, akkor (6.1.40) szerint vagy $G \in \mathfrak{m}^*$, vagy $Y - G \in \mathfrak{m}^*$. Az utóbbi ellentmond annak, hogy y torlódási pontja $\mathfrak{m}^*$-nak, tehát $G \in \mathfrak{m}^*$, és így $\mathfrak{m}^* \to y$. De (6.1.39) miatt $\mathfrak{v}^*(\mathfrak{m}^*) \to y$ is áll, (6.1.35) és (6.1.41) szerint pedig $\mathfrak{v}^*(\mathfrak{m}^*) = \mathfrak{v}^*(f(\mathfrak{m}(x))) < f(\mathfrak{v}(\mathfrak{m}(x))) = f(\mathfrak{z}(x))$. Így $f(\mathfrak{z}(x)) \to y$. ∎

Vegyük észre, hogy (6.2.4) bizonyítása sokkal általánosabb eredményt is nyújt, Valóban, legyen $\mathfrak{P}$ az $[X, \mathfrak{T}]$ topologikus tér összes nyílt halmazainak, $\mathfrak{Q}$ tehát összes zárt halmazainak rendszere, $[X_0', \mathfrak{T}_0']$ pedig $[X, \mathfrak{T}]$-nek (6.1.43) és (6.1.44) mintájára elkészített bővítése (az ottani E, ill. E_0' helyett most X-et, ill. X_0'-t írva).

Ha most $[Y, \mathcal{T}^*]$ kompakt S_2-tér, $f: X \to Y$ pedig $(\mathcal{T}, \mathcal{T}^*)$-folytonos, akkor (6.2.4) bizonyításának mintájára látható, hogy létezik f-nek $(\mathcal{T}_0', \mathcal{T}^*)$-folytonos kiterjesztése. Ebből aztán nyomban következik, hogy ha még $X \subset X' \subset X_0'$ és $\mathcal{T}' = \mathcal{T}_0'|X'$, akkor f $(\mathcal{T}_0', \mathcal{T}^*)$-folytonos kiterjesztésének X'-re való megszorítása f-nek $(\mathcal{T}', \mathcal{T}^*)$-folytonos kiterjesztését szolgáltatja. Innen visszajuthatunk (6.2.4) állításához, ha $[X', \mathcal{T}']$-nek a Wallman-féle kompaktifikációt választjuk, további alkalmazásképpen pedig választhatjuk $[X', \mathcal{T}']$-nek pl. az $[X, \mathcal{T}]$ tér (6.1.69)-ben elkészített H-zárt bővítését.

6.2.b. Egyenletesen folytonos leképezések kiterjesztése. Legyen most $[X, \mathcal{U}]$ és $[Y, \mathcal{U}^*]$ két uniform tér, $f: X \to Y$ $(\mathcal{U}, \mathcal{U}^*)$-egyenletesen folytonos leképezés, és azt a kérdést vizsgáljuk, kiterjeszthető-e f egyenletesen folytonos módon az $[X, \mathcal{U}]$ térnek egy $[X', \mathcal{U}']$ bővítésére, azaz található-e olyan $(\mathcal{U}', \mathcal{U}^*)$-egyenletesen folytonos $g: X' \to Y$ leképezés, amelyre $g|X = f$. Természetesen azon, hogy az $[X', \mathcal{U}']$ **uniform tér bővítése** az $[X, \mathcal{U}]$ uniform térnek (vagy hogy $\mathcal{U}'$ bővítése $\mathcal{U}$-nak), azt értjük, hogy $X \subset X'$, $\mathcal{U}'|X = \mathcal{U}$, és X $\mathcal{T}_{\mathcal{U}'}$-sűrű X'-ben. Ilyen g létezésének (3.2.50)-re tekintettel nyilvánvalóan szükséges feltétele az, hogy legyen f-nek $(\mathcal{T}_{\mathcal{U}'}, \mathcal{T}_{\mathcal{U}^*})$-folytonos kiterjesztése X'-re. Nevezetes tény, hogy ez a feltétel elegendő is:

(6.2.5) *Legyen $[X, \mathcal{U}]$, $[X', \mathcal{U}']$, $[Y, \mathcal{U}^*]$ három uniform tér, $[X', \mathcal{U}']$ bővítése $[X, \mathcal{U}]$-nak, $f: X \to Y$ $(\mathcal{U}, \mathcal{U}^*)$-egyenletesen folytonos, $g: X' \to Y$ $(\mathcal{T}_{\mathcal{U}'}, \mathcal{T}_{\mathcal{U}^*})$-folytonos, és $g|X = f$. Ekkor g $(\mathcal{U}', \mathcal{U}^*)$-egyenletesen folytonos is.*

Bizonyítás. Legyen $U^* \in \mathcal{U}^*$ tetszőlegesen adott környék, $U_1^* \in \mathcal{U}^*$ olyan környék, hogy $U_1^* \circ U_1^* \circ U_1^* \subset U^*$, $U \in \mathcal{U}$ olyan környék (hivatkozva f egyenletes folytonosságára), hogy $(x, y) \in U$ esetén $(f(x), f(y)) \in U_1^*$, aztán $U' \in \mathcal{U}'$ olyan környék, hogy $U' \cap (E \times E) \subset U$, végül $U_1' \in \mathcal{U}'$ olyan környék, hogy $U_1' \circ U_1' \circ U_1' \subset U'$. Megmutatjuk, hogy $(x, y) \in U_1'$ esetén $(g(x), g(y)) \in U^*$.

Jelöljük az $x \in X'$ pont $\mathcal{T}_{\mathcal{U}'}$-környezetszűrőjét $\mathfrak{v}'(x)$-szel. Minthogy g $(\mathcal{T}_{\mathcal{U}'}, \mathcal{T}_{\mathcal{U}^*})$-folytonos, azért $U_1^*(g(x))$-hez, amely $g(x)$-nek $\mathcal{T}_{\mathcal{U}^*}$-környezete, megadható olyan $V_1' \in \mathfrak{v}'(x)$, hogy $g(V_1') \subset U_1^*(g(x))$. Hasonlóan, van olyan $V_2' \in \mathfrak{v}'(y)$, hogy $g(V_2') \subset U_1^*(g(y))$. Mivel $V_1' \cap U_1'(x) \in \mathfrak{v}'(x)$, és X $\mathcal{T}_{\mathcal{U}'}$-sűrű, azért található egy $x_1 \in V_1' \cap U_1'(x) \cap X$ pont. Ugyanígy van egy $y_1 \in V_2' \cap U_1'(y) \cap X$ pont is. Mármost $(x_1, x) \in U_1'$, $(x, y) \in U_1'$, $(y, y_1) \in U_1'$ maga után vonja, hogy $(x_1, y_1) \in U'$, s akkor $(x_1, y_1) \in U$, s ezzel $(f(x_1), f(y_1)) = (g(x_1), g(y_1)) \in U_1^*$. Minthogy továbbá $g(x_1) \in U_1^*(g(x))$, $g(y_1) \in U_1^*(g(y))$, azért végül $(g(x), g(y)) \in U^*$. ∎

A következő bizonyítás érdekében bocsássunk előre egy megjegyzést:

(6.2.6) *Ha $[E', \mathcal{U}']$ bővítése az $[E, \mathcal{U}]$ uniform térnek, akkor a $\mathcal{T}_{\mathcal{U}'}$ topológia (szoros) bővítése $\mathcal{T}_{\mathcal{U}}$-nak.*

Bizonyítás. Feltevés szerint E $\mathcal{T}_{\mathcal{U}'}$-sűrű E'-ben. Abból, hogy $\mathcal{U}'|E = \mathcal{U}$, (3.2.35) alapján következik, hogy $\mathcal{T}_{\mathcal{U}'}|E = \mathcal{T}_{\mathcal{U}}$. A $\mathcal{T}_{\mathcal{U}'}$ topológia tehát bővítése $\mathcal{T}_{\mathcal{U}}$-nak, mégpedig (6.1.11) szerint szoros bővítése, hiszen $\mathcal{T}_{\mathcal{U}'}$ (3.1.15) és $\mathcal{T}_{\mathcal{U}'} = \mathcal{T}_{\mathcal{S}\mathcal{U}'}$ értelmében reguláris. ∎

Most már bebizonyíthatjuk a következő nevezetes kiterjesztési tételt:

(6.2.7) *Legyen $[X, \mathcal{U}]$, $[X', \mathcal{U}']$, $[Y, \mathcal{U}^*]$ három uniform tér, $[X', \mathcal{U}']$ bővítése $[X, \mathcal{U}]$-nak, $[Y, \mathcal{U}^*]$ pedig teljes. Ha $f: X \to Y$ $(\mathcal{U}, \mathcal{U}^*)$-egyenle-*

tesen folytonos, akkor van olyan $(\mathfrak{U}', \mathfrak{U}^*)$*-egyenletesen folytonos* $g : X' \to Y$, *amelyre* $g|X = f$.

Bizonyítás. (6.2.5)-re tekintettel elég azt megmutatni, hogy f-nek van $(\mathcal{T}_{\mathfrak{U}'}, \mathcal{T}_{\mathfrak{U}^*})$-folytonos kiterjesztése, ehhez pedig (6.2.2) alapján azt, hogy ha $\mathfrak{z}(x)$ jelöli az $x \in X'$ pont $\mathcal{T}_{\mathfrak{U}'}$-környezetszűrőjének X-beli nyomszűrőjét, akkor $f(\mathfrak{z}(x))$ minden $x \in X'$-re $\mathcal{T}_{\mathfrak{U}^*}$-konvergens. Valóban, $\mathcal{T}_{\mathfrak{U}^*}$ regularitása $\mathcal{T}_{\mathfrak{U}^*} = \mathcal{T}_{\mathcal{S}_{\mathfrak{U}^*}}$ miatt (3.1.15)-ből, f $(\mathcal{T}_{\mathfrak{U}}, \mathcal{T}_{\mathfrak{U}^*})$-folytonossága (3.2.50)-ből következik, és $[X', \mathcal{T}_{\mathfrak{U}'}]$ bővítése $[X, \mathcal{T}_{\mathfrak{U}}]$-nak (6.2.6) miatt.

Mármost $\mathfrak{z}(x) \to x$ $\mathcal{T}_{\mathfrak{U}'}$-re nézve, így $\mathfrak{U}'$-Cauchy-rács (5.1.1) miatt, s akkor (5.1.6) folytán $\mathfrak{U}$-Cauchy-rács is. Így (5.1.2) szerint $f(\mathfrak{z}(x))$ $\mathfrak{U}^*$-Cauchy-rács, és $\mathfrak{U}^*$ teljessége folytán $\mathcal{T}_{\mathfrak{U}^*}$-konvergens. ∎

6.2.c. Szomszédságtartó leképezések kiterjesztése. Az előzőkhöz hasonló tételeket bizonyíthatunk be szomszédságtartó leképezésekkel kapcsolatban. E célból azt a kézenfekvő megállapodást vezetjük be, hogy az $[X, \mathcal{S}]$ **szomszédsági tér bővítésének** mondjuk az $[X', \mathcal{S}']$ szomszédsági teret, ha $X \subset X'$, $\mathcal{S}'|X = \mathcal{S}$, és X $\mathcal{T}_{\mathcal{S}'}$-sűrű X'-ben. Ugyanekkor persze $\mathcal{S}'$-t is $\mathcal{S}$ bővítésének fogjuk mondani.

A definícióból rögtön következik:

(6.2.8) *Ha* $[E', \mathfrak{U}']$ *bővítése az* $[E, \mathfrak{U}]$ *uniform térnek, akkor* $\mathcal{S}_{\mathfrak{U}'}$ *is bővítése* $\mathcal{S}_{\mathfrak{U}}$*-nak.*

Bizonyítás. (3.2.35) szerint $\mathcal{S}_{\mathfrak{U}'}|E = \mathcal{S}_{\mathfrak{U}}$, és $\mathcal{T}_{\mathfrak{U}'} = \mathcal{T}_{\mathcal{S}_{\mathfrak{U}'}}$ folytán E $\mathcal{T}_{\mathcal{S}_{\mathfrak{U}'}}$-sűrű E'-ben. ∎

(6.2.9) *Ha* $[E', \mathcal{S}']$ *bővítése az* $[E, \mathcal{S}]$ *szomszédsági térnek, akkor a* $\mathcal{T}_{\mathcal{S}'}$ *topológia szoros bővítése* $\mathcal{T}_{\mathcal{S}}$*-nek.*

Bizonyítás. (3.1.27) szerint $\mathcal{T}_{\mathcal{S}'}|E = \mathcal{T}_{\mathcal{S}}$, és a feltevés szerint E $\mathcal{T}_{\mathcal{S}'}$-sűrű. $\mathcal{T}_{\mathcal{S}'}$ (3.1.15) szerint reguláris, úgyhogy (6.1.11) értelmében szoros bővítése $\mathcal{T}_{\mathcal{S}}$-nek. ∎

Érvényes a (6.2.5)-tel és (6.2.7)-tel analóg következő két tétel:

(6.2.10) *Legyen* $[X, \mathcal{S}]$, $[X', \mathcal{S}']$, $[Y, \mathcal{S}^*]$ *három szomszédsági tér,* $[X', \mathcal{S}']$ *bővítése* $[X, \mathcal{S}]$*-nek,* $f : X \to Y$ $(\mathcal{S}, \mathcal{S}^*)$*-szomszédságtartó,* $g : X' \to Y$ $(\mathcal{T}_{\mathcal{S}'}, \mathcal{T}_{\mathcal{S}^*})$*-folytonos,* $g|X = f$. *Ekkor* g $(\mathcal{S}', \mathcal{S}^*)$*-szomszédságtartó is.*

Bizonyítás. Legyen $\mathfrak{U}'$, ill. $\mathfrak{U}^*$ a $\mathcal{S}'$, ill. $\mathcal{S}^*$ szomszédsági relációt indukáló prekompakt uniform struktúra; ilyen (4.2.25) szerint létezik. Az $\mathfrak{U}'|X = \mathfrak{U}$ jelöléssel (3.2.35) folytán $\mathcal{S}_{\mathfrak{U}} = \mathcal{S}$, úgyhogy f (3.2.77) szerint $(\mathfrak{U}, \mathfrak{U}^*)$-egyenletesen folytonos. Ezért (6.2.5) alkalmazható, és mutatja, hogy g $(\mathfrak{U}', \mathfrak{U}^*)$-egyenletesen folytonos, tehát (3.2.50)-re tekintettel $(\mathcal{S}', \mathcal{S}^*)$-szomszédságtartó. ∎

(6.2.11) *Legyen* $[X, \mathcal{S}]$, $[X', \mathcal{S}']$, $[Y, \mathcal{S}^*]$ *három szomszédsági tér,* $[X', \mathcal{S}']$ *bővítése* $[X, \mathcal{S}]$*-nek,* $[Y, \mathcal{S}^*]$ *pedig kompakt. Ha* $f : X \to Y$ $(\mathcal{S}, \mathcal{S}^*)$*-szomszédságtartó, akkor van olyan* $(\mathcal{S}', \mathcal{S}^*)$*-szomszédságtartó* $g : X' \to Y$, *amelyre* $g|X = f$.

Bizonyítás. Vezessük be ismét a $\mathcal{S}'$-t, ill. $\mathcal{S}^*$-ot indukáló $\mathfrak{U}'$ és $\mathfrak{U}^*$ prekompakt uniform struktúrákat. Az $\mathfrak{U} = \mathfrak{U}'|X$ jelöléssel f most is $(\mathfrak{U}, \mathfrak{U}^*)$-egyenletesen folytonos, és $\mathfrak{U}^*$ (5.2.22) szerint teljes. (6.2.7) mutatja, hogy f-nek van $(\mathfrak{U}', \mathfrak{U}^*)$-folytonos $g : X' \to Y$ kiterjesztése, amely (3.2.50) szerint $(\mathcal{S}', \mathcal{S}^*)$-szomszédságtartó is. ∎

6.2.d. Gyakorlatok. 1. Legyen $[E_1, \mathcal{T}_1]$ és $[E_2, \mathcal{T}_2]$ két topologikus tér, $\mathfrak{P}_1$ és $\mathfrak{P}_2$ bázis-háló $\mathcal{T}_1$ és $\mathcal{T}_2$ számára, $[E_1', \mathcal{T}_1']$ és $[E_2', \mathcal{T}_2']$ a megfelelő Wallman-típusú kompaktifikációk. Mutassuk meg, hogy ha $\mathcal{T}_2'$ S_2-topológia, és $f : E_1 \to E_2$ olyan leképezés, amelyre $P_2 \in \mathfrak{P}_2$ esetén $f^{-1}(P_2) \in \mathfrak{P}_1$, akkor f-nek van $(\mathcal{T}_1', \mathcal{T}_2')$-folytonos $g : E_1' \to E_2'$ kiterjesztése (amelyre tehát $g \mid {}_{E_1}^{E_2} = f$).

[Ha $\mathfrak{m}_1$ ultra-$\mathfrak{M}_1$-szűrő, és y $\mathcal{T}_2'$-torlódási pontja $f(\mathfrak{m}_1)$-nek, akkor $f(\mathfrak{P}_1(\mathfrak{m}_1)) \to y$.]

2. Legyen $[E_1, \mathcal{T}_1]$ peremkompakt tér, $[E_2, \mathcal{T}_2]$ nulladimenziós T_0-tér, $[E_1', \mathcal{T}_1']$ és $[E_2', \mathcal{T}_2']$ a megfelelő Freudenthal-féle kompaktifikációk, $f : E_1 \to E_2$ pedig $(\mathcal{T}_1, \mathcal{T}_2)$-folytonos. Mutassuk meg, hogy van olyan $(\mathcal{T}_1', \mathcal{T}_2')$-folytonos $g : E_1' \to E_2'$, amelyre $g \mid {}_{E_1}^{E_2} = f$.

[Használjuk fel a **6.1.** alatti 15. feladat eredményét, valamint 1-et.]

3. Legyen $\mathfrak{P}_1$ és $\mathfrak{P}_2$ bázis-háló E-n egy $\mathcal{T}_1$, ill. $\mathcal{T}_2$ topológia számára, $[E_1', \mathcal{T}_1']$ és $[E_2', \mathcal{T}_2']$ a megfelelő Wallman-típusú kompaktifikációk. Mutassuk meg, hogy $\mathfrak{P}_2 \subset \mathfrak{P}_1$ esetén létezik E-t rögzítő $(\mathcal{T}_1', \mathcal{T}_2')$-folytonos $f : E_1' \to E_2'$ szuperjekció.

4. Legyen f olyan $\mathcal{E}$-folytonos függvény, amelyre $x, y \in \mathbf{R}$ esetén $f(x+y) = f(x) + f(y)$. Mutassuk meg, hogy ekkor alkalmas $c \in \mathbf{R}$ mellett $f(x) = cx$ minden $x \in \mathbf{R}$-re.

[A $c = f(1)$ választással $f(x) = cx$, ha $x \in \mathbf{Q}$.]

5. Legyen $[X, \rho]$ és $[Y, \sigma]$ két félmetrikus tér, $E \subset X$ $\mathcal{T}_\rho$-sűrű, $[Y, \sigma]$ teljes, $f : E \to Y$ pedig olyan leképezés, hogy $x_1, x_2 \in E$ esetén

$$\sigma(f(x_1), f(x_2)) \leqq c\,\rho(x_1, x_2)$$

alkalmas $c > 0$ mellett. Mutassuk meg, hogy ekkor létezik olyan $g : X \to Y$, amelyre $g|E = f$, és $x_1, x_2 \in X$ esetén

$$\sigma(g(x_1), g(x_2)) \leqq c\,\rho(x_1, x_2).$$

[f $(\mathcal{U}_\rho|E, \mathcal{U}_\sigma)$-egyenletesen folytonos.]

6. Legyen Φ a **3.1.** alatti 3. feladatban szereplő függvénycsalád az E halmazon, $\mathcal{S}$ az ott értelmezett szomszédsági reláció, $A \subset E$ $\mathcal{T}_{\mathcal{S}}$-sűrű, $[K, \mathcal{T}]$ pedig kompakt S_2-tér. Legyen $f : A \to K$ olyan leképezés, hogy ha $C, D \subset K$ $\mathcal{T}$-zárt, $C \cap D = \emptyset$, akkor van olyan $g \in \Phi$ és $c, d \in \mathbf{R}$, hogy $c < d$, $f(x) \in C$ esetén $g(x) \leqq c$, $f(x) \in D$ esetén $g(x) \geqq d$. Mutassuk meg, hogy ekkor létezik olyan $(\mathcal{T}_{\mathcal{S}}, \mathcal{T})$-folytonos $h : E \to K$, hogy $f = h|A$.

[Ha $\mathfrak{Q}$ a $\mathcal{T}$-t indukáló szomszédsági reláció, akkor f $(\mathcal{S}|A, \mathfrak{Q})$-szomszédságtartó.]

6.3. UNIFORM TEREK BŐVÍTÉSEI

6.3.a. Kerek szűrők. Előző eredményeink alapján beláthatjuk, hogy akárcsak a topologikus terek szoros bővítéseit, uniform terek és szomszédsági terek bővítéseit is meghatározza az egyes pontok környezetszűrőiből keletkező nyomszűrők megadása:

(6.3.1) *Legyen* $[E, \mathfrak{U}]$ *uniform tér,* $E' \supset E$, $\mathfrak{U}_1'$ *és* $\mathfrak{U}_2'$ *két olyan uniform struktúra* E'*-n, hogy* $[E', \mathfrak{U}_1']$ *is,* $[E', \mathfrak{U}_2']$ *is bővítése* $[E, \mathfrak{U}]$*-nak, legyen az* $x \in E'$ *pont* $\mathfrak{T}_{\mathfrak{U}_1'}$*-, ill.* $\mathfrak{T}_{\mathfrak{U}_2'}$*-környezetszűrője* $\mathfrak{v}_1'(x)$*, ill.* $\mathfrak{v}_2'(x)$*, és tegyük fel, hogy minden* $x \in E'$*-re*

$$(6.3.2) \qquad \mathfrak{v}_1'(x) \,(\cap)\, \{E\} = \mathfrak{v}_2'(x) \,(\cap)\, \{E\} = \mathfrak{z}(x).$$

Ekkor $\mathfrak{U}_1' = \mathfrak{U}_2'$.

Bizonyítás. Legyen $g : E' \to E'$ az E' halmaz identitása, $f = g|E$. (6.1.8) szerint $\mathfrak{T}_{\mathfrak{U}_1'} = \mathfrak{T}_{\mathfrak{U}_2'}$, hiszen (6.2.6) szerint mindkettő azonos $\mathfrak{T}_{\mathfrak{U}}$-nak a $\mathfrak{z}(x)$ nyomszűrőkhöz tartozó szoros bővítésével. Ennélfogva g $(\mathfrak{T}_{\mathfrak{U}_1'}, \mathfrak{T}_{\mathfrak{U}_2'})$-folytonos, f pedig nyilván $(\mathfrak{U}, \mathfrak{U}_2')$-egyenletesen folytonos. Ez lehetővé teszi (6.2.5) alkalmazását, úgyhogy g $(\mathfrak{U}_1', \mathfrak{U}_2')$-egyenletesen folytonos. Ugyanilyen meggondolás mutatja, hogy g $(\mathfrak{U}_2', \mathfrak{U}_1')$-egyenletesen folytonos. Így (3.2.52) szerint $\mathfrak{U}_1' < \mathfrak{U}_2' < \mathfrak{U}_1'$, és $\mathfrak{U}_1' = \mathfrak{U}_2'$. ∎

Pontosan ugyanilyen gondolatmenettel, de (6.2.5) helyett (6.2.10)-re hivatkozva igazolható:

(6.3.3) *Legyen* $[E, \mathfrak{S}]$ *szomszédsági tér,* $E' \supset E$, $\mathfrak{S}_1'$ *és* $\mathfrak{S}_2'$ *két szomszédsági reláció* E'*-n,* $[E', \mathfrak{S}_1']$ *és* $[E', \mathfrak{S}_2']$ *bővítése* $[E, \mathfrak{S}]$*-nek, az* $x \in E'$ *pont* $\mathfrak{T}_{\mathfrak{S}_1'}$*-, ill.* $\mathfrak{T}_{\mathfrak{S}_2'}$*-környezetszűrője* $\mathfrak{v}_1'(x)$*, ill.* $\mathfrak{v}_2'(x)$*, és minden* $x \in E'$*-re álljon* (6.3.2)*. Ekkor* $\mathfrak{S}_1' = \mathfrak{S}_2'$. ∎

Ezek után természetszerűen merül fel két kérdés. Legyen megadva egy $[E, \mathfrak{S}]$ szomszédsági tér vagy egy $[E, \mathfrak{U}]$ uniform tér, továbbá egy $E' \supset E$ halmaz, és jelöljünk ki minden $x \in E'$ ponthoz egy $\mathfrak{z}(x)$ E-beli szűrőt. Milyen feltételt kell a $\mathfrak{z}(x)$ szűrőkre kiróni annak érdekében, hogy legyen E'-n egy $\mathfrak{S}'$ szomszédsági reláció, ill. egy $\mathfrak{U}'$ uniform struktúra, amely bővítése $\mathfrak{S}$-nek, ill. $\mathfrak{U}$-nak, és amelyre minden $x \in E'$ esetén $\mathfrak{z}(x)$ egyenlő az x pont $\mathfrak{T}_{\mathfrak{S}'}$-, ill. $\mathfrak{T}_{\mathfrak{U}'}$-környezetszűrőjének E-beli nyomszűrőjével? (6.3.3), ill. (6.3.1) azt mutatja, hogy legfeljebb egy ilyen $\mathfrak{S}'$, ill. $\mathfrak{U}'$ van, de kérdés, hogy mikor van ilyen egyáltalán.

Szükséges feltételek keresése céljából foglalkozzunk először a szomszédsági relációk esetével; a talált feltételek ugyanis szükségesek lesznek az uniform struktúrákra vonatkozó esetben is, hiszen (6.2.8) szerint $\mathfrak{S}_{\mathfrak{U}'}$ bővítése $\mathfrak{S}_{\mathfrak{U}}$-nak, ha $\mathfrak{U}'$ bővítése $\mathfrak{U}$-nak.

Egy ilyen feltétel megfogalmazása érdekében vezessük be a következő elnevezést: egy $[E, \mathfrak{S}]$ szomszédsági térben az E-beli $\mathfrak{z}$ szűrőt **kerek**nek mondjuk, ha $S \in \mathfrak{z}$ esetén van olyan $S_1 \in \mathfrak{z}$, hogy $S \in \mathfrak{p}(S_1)$; itt $\mathfrak{p}(S_1)$ szokás szerint az S_1 halmaz szomszédságszűrőjét jelöli.

(6.3.4) *Egy* $[E, \mathfrak{S}]$ *szomszédsági térben bármely* $\emptyset \neq A \subset E$ *halmaz* $\mathfrak{p}(A)$ *szomszédságszűrője, speciálisan bármely* $x \in E$ *pont* $\mathfrak{v}(x)$ $\mathfrak{T}_{\mathfrak{S}}$*-környezetszűrője, kerek szűrő.*

Bizonyítás. (3.1.10) (e), figyelembe véve még a $\mathfrak{v}(x) = \mathfrak{p}(\{x\})$ egyenlőséget. ∎

(6.3.5) *Egy* $[E, \mathfrak{S}]$ *szomszédsági térben minden kerek szűrő* $\mathfrak{T}_{\mathfrak{S}}$*-nyílt szűrő.*

Bizonyítás. Legyen $\mathfrak{z}$ kerek szűrő, és $S \in \mathfrak{z}$, $S_1 \in \mathfrak{z}$ pedig olyan, hogy $S \in \mathfrak{p}(S_1)$, azaz hogy $S_1 \,\overline{\mathfrak{S}}\, E - S$. (3.1.14) szerint $\overline{S_1} \,\overline{\mathfrak{S}}\, \overline{E - S} = E - \operatorname{int} S$. Így

$$S_1 \subset \bar{S}_1 \subset \operatorname{int} S \subset S$$

folytán $\operatorname{int} S \in \mathfrak{z}$. ∎

(6.3.6) *Ha* $\mathfrak{z}$ *kerek szűrő az* $[E, \mathfrak{S}]$ *szomszédsági térben,* $E_0 \subset E$*, és* $\emptyset \notin \mathfrak{z} \,(\cap)\, \{E_0\}$*, akkor* $\mathfrak{z}_0 = \mathfrak{z} \,(\cap)\, \{E_0\}$ *kerek szűrő az* $[E_0, \mathfrak{S}|E_0]$ *altérben.*

Bizonyítás. (2.1.25)-ből tudjuk, hogy $\mathfrak{z}_0$ E_0-beli szűrő. Legyen $S_0 \in \mathfrak{z}_0$ tetszőleges. Ekkor $S_0 = S \cap E_0$, $S \in \mathfrak{z}$, és ehhez található olyan $S_1 \in \mathfrak{z}$, hogy $S \in \mathfrak{p}(S_1)$. Az $S_2 = S_1 \cap E_0$ jelöléssel $S_2 \in \mathfrak{z}_0$, továbbá (3.1.10) (c) miatt $S \in \mathfrak{p}(S_2)$, tehát (3.1.27) folytán $S_0 = S \cap E_0 \in \mathfrak{p}_0(S_2)$, ahol $\mathfrak{p}_0(S_2)$ jelöli a $(\mathcal{S}|E_0)$-szomszédságszűrőt. ∎

(6.3.7) *Ha $\mathfrak{z}$ kerek szűrő az $[E, \mathcal{S}]$ szomszédsági térben, és $E_0 \subset E$ $\mathcal{T}_{\mathcal{S}}$-sűrű, akkor $\emptyset \notin \mathfrak{z} (\cap) \{E_0\}$.*

Bizonyítás. $S \in \mathfrak{z}$ esetén (6.3.5) szerint van olyan $\mathcal{T}_{\mathcal{S}}$-nyílt $G \subset S$, hogy $G \in \mathfrak{z}$. Bármely $x \in G$ pontra G $\mathcal{T}_{\mathcal{S}}$-környezete x-nek, úgyhogy $G \cap E_0 \neq \emptyset$, s annál inkább $S \cap E_0 \neq \emptyset$. ∎

(6.3.8) *Ha $\mathfrak{z}_1$ és $\mathfrak{z}_2$ kerek szűrő az $[E, \mathcal{S}]$ szomszédsági térben, akkor $\emptyset \notin \mathfrak{z}_1 (\cap) \mathfrak{z}_2$ esetén $\mathfrak{z}_1 (\cap) \mathfrak{z}_2 = \mathfrak{z}$ is kerek szűrő.*

Bizonyítás. (2.1.24) szerint $\mathfrak{z}$ is E-beli szűrő. $S_1 \in \mathfrak{z}_1$, $S_2 \in \mathfrak{z}_2$ esetén van olyan $S_1' \in \mathfrak{z}_1$, $S_2' \in \mathfrak{z}_2$, hogy $S_1 \in \mathfrak{p}(S_1')$, $S_2 \in \mathfrak{p}(S_2')$. (3.1.10) (f) szerint $S_1 \cap S_2 \in \mathfrak{p}(S_1' \cap S_2')$. ∎

(6.3.9) *Ha $[E, \mathcal{S}]$ szomszédsági tér, és $\mathfrak{r}$ E-beli rács, akkor az összes $R \in \mathfrak{r}$ halmazok összes szomszédságai kerek szűrőt alkotnak, amelyet az $\mathfrak{r}$* **rács szomszédságszűrőjé***nek nevezünk és $\mathfrak{p}(\mathfrak{r})$-rel jelölünk.*

Bizonyítás. Ha $S_1 \in \mathfrak{p}(R_1)$, $S_2 \in \mathfrak{p}(R_2)$, $R_1, R_2 \in \mathfrak{r}$, akkor van olyan $R \in \mathfrak{r}$, hogy $R \subset R_1 \cap R_2$. (3.1.10) (f) és (c) szerint $S_1 \cap S_2 \in \mathfrak{p}(R_1 \cap R_2) \subset \mathfrak{p}(R)$. Eszerint $\mathfrak{p}(\mathfrak{r})$ E-beli szűrő, ugyanis nyilvánvaló, hogy E-ben felszálló. $S \in \mathfrak{p}(\mathfrak{r})$, azaz $S \in \mathfrak{p}(R)$, $R \in \mathfrak{r}$ esetén (3.1.10) (e) miatt van olyan S_1, hogy $S_1 \in \mathfrak{p}(R)$, $S \in \mathfrak{p}(S_1)$. Így $S_1 \in \mathfrak{p}(\mathfrak{r})$, és $\mathfrak{p}(\mathfrak{r})$ kerek szűrő. ∎

(6.3.10) *Ha $\mathfrak{r}$ komprimált rács az $[E, \mathcal{S}]$ szomszédsági térben, akkor $\mathfrak{p}(\mathfrak{r})$ is komprimált.*

Bizonyítás. $A \overline{\mathcal{S}} B$ esetén legyen $P, Q \subset E$ olyan, hogy $P \cap Q = \emptyset$, $A \overline{\mathcal{S}} E - P$, $B \overline{\mathcal{S}} E - Q$, s aztán $P_1, Q_1 \subset E$ olyan, hogy $P_1 \cap Q_1 = \emptyset$, $A \overline{\mathcal{S}} E - P_1$, $E - P \overline{\mathcal{S}} E - Q_1$. $\mathfrak{r}$ komprimáltsága miatt vagy van olyan $R \in \mathfrak{r}$, hogy $R \cap (E - P) = \emptyset$, azaz $R \subset P$, vagy van olyan $R \in \mathfrak{r}$, hogy $R \cap (E - Q_1) = \emptyset$, azaz $R \subset Q_1$. Ha $R \in \mathfrak{r}$ olyan, hogy $R \subset P$, akkor $P \subset E - Q \overline{\mathcal{S}} B$ folytán $E - B \in \mathfrak{p}(R) \subset \mathfrak{p}(\mathfrak{r})$. Ha viszont $R \in \mathfrak{r}$ olyan, hogy $R \subset Q_1$, akkor $Q_1 \subset E - P_1 \overline{\mathcal{S}} A$ miatt $R \overline{\mathcal{S}} A$, azaz $E - A \in \mathfrak{p}(R) \subset \mathfrak{p}(\mathfrak{r})$. ∎

(6.3.11) *Ha az $[E, \mathcal{S}]$ szomszédsági térben $\mathfrak{r} \to x$, akkor $\mathfrak{p}(\mathfrak{r}) \to x$.*

Bizonyítás. (5.2.1) szerint $\mathfrak{r}$ komprimált, tehát (6.3.10) szerint $\mathfrak{p}(\mathfrak{r})$ is. Nyilván $\mathfrak{p}(\mathfrak{r}) < \mathfrak{r}$, így x (5.2.24) értelmében torlódási pontja $\mathfrak{p}(\mathfrak{r})$-nek, s az állítás (5.2.28)-ból következik. ∎

Nevezetes tény, hogy a kerek szűrők körében a komprimáltak éppen azonosak a maximálisakkal.

(6.3.12) *Legyen az $[E, \mathcal{S}]$ szomszédsági térben $\mathfrak{z}$ kerek szűrő. Ha $\mathfrak{z}$ komprimált, és $\mathfrak{z}_1 \supset \mathfrak{z}$ is kerek szűrő, akkor $\mathfrak{z}_1 = \mathfrak{z}$. Ha viszont nincsen $\mathfrak{z}$-et tartalmazó tőle különböző kerek szűrő, akkor $\mathfrak{z}$ komprimált.*

Bizonyítás. Tegyük fel, hogy $\mathfrak{z}$ komprimált, $\mathfrak{z}_1 \supset \mathfrak{z}$ pedig kerek szűrő. Ha $A \in \mathfrak{z}_1$, akkor van olyan $B \in \mathfrak{z}_1$, hogy $B \overline{\mathcal{S}} E - A$, és akkor van olyan $S \in \mathfrak{z}$, hogy vagy

$S \subset A$, vagy $S \subset E - B$. A második eset $S \in \mathfrak{z}_1$ miatt lehetetlen, úgyhogy $A \in \mathfrak{z}$, és $\mathfrak{z}_1 = \mathfrak{z}$.

Tegyük most fel, hogy $\mathfrak{z}$ nem komprimált. Ekkor van olyan $A, B \subset E$, hogy $A \overline{\mathcal{S}} B$, és $E - A \notin \mathfrak{z}$, $E - B \notin \mathfrak{z}$. Így $A \neq \emptyset$, $E - B \in \mathfrak{p}(A)$, és (3.1.10) (e) ismételt alkalmazásával készíthető olyan (C_n) sorozat, hogy $C_1 \subset E - B$, $C_n \in \mathfrak{p}(A)$, $C_n \in \mathfrak{p}(C_{n+1})$ minden n-re. Világos, hogy a C_n halmazok rácsot alkotnak; legyen $\mathfrak{z}_0$ az általa generált E-beli szűrő. $\mathfrak{z}_0$ kerek szűrő, hiszen $S_0 \in \mathfrak{z}_0$ esetén van olyan $n \in \mathbf{N}$, hogy $C_n \subset S_0$, s akkor $C_{n+1} \in \mathfrak{z}_0$, $S_0 \in \mathfrak{p}(C_{n+1})$. Legyen végül $\mathfrak{z}_1 = \mathfrak{z}\,(\cap)\,\mathfrak{z}_0$. (6.3.8) szerint $\mathfrak{z}_1$ kerek szűrő, hiszen $E - A \notin \mathfrak{z}$ folytán minden $\mathfrak{z}$-beli halmaz metszi A-t s vele mindegyik C_n-t is. Nyilván $\mathfrak{z}_1 \supset \mathfrak{z}$, és $\mathfrak{z}_1 \neq \mathfrak{z}$, hiszen $E - B \in \mathfrak{z}_1$, de $E - B \notin \mathfrak{z}$. ∎

(6.3.13) *Ha az $[E, \mathcal{S}]$ szomszédsági térben $\mathfrak{z}$ kerek szűrő, és $\mathfrak{z} \to x$, akkor $\mathfrak{z} = \mathfrak{v}(x)$, ahol $\mathfrak{v}(x)$ az x pont $\mathcal{T}_{\mathcal{S}}$-környezetszűrője.*

Bizonyítás. (6.3.4) szerint $\mathfrak{v}(x)$ kerek, és (5.2.1) szerint komprimált is. Ha tehát $\mathfrak{z}$ kerek szűrő, és $\mathfrak{z} > \mathfrak{v}(x)$, azaz $\mathfrak{z} \supset \mathfrak{v}(x)$, akkor $\mathfrak{z} = \mathfrak{v}(x)$. ∎

Egy $[E, \mathcal{U}]$ uniform térben a „kerek szűrő" és a „rács szomszédságszűrője" fogalmakat mindig a $\mathcal{S}_{\mathcal{U}}$ szomszédsági relációra vonatkoztatjuk.

(6.3.14) *Ha $\mathfrak{r}$ Cauchy-rács az $[E, \mathcal{U}]$ uniform térben, akkor szomszédságszűrője Cauchy-szűrő.*

Bizonyítás. Legyen $U \in \mathcal{U}$ tetszőleges környék, és $U_1 \in \mathcal{U}$ olyan környék, hogy $U_1 \circ U_1 \circ U_1 \subset U$. Ha $R \in \mathfrak{r}$ U_1-rendben kicsiny, akkor $U_1(R) \in \mathfrak{p}(\mathfrak{r})$, hiszen $(R \times (E - U_1(R))) \cap U_1 = \emptyset$, tehát $R\, \overline{\mathcal{S}}_{\mathcal{U}}\, E - U_1(R)$, és $U_1(R)$ U-rendben kicsiny. ∎

6.3.b. Uniform tér bővítései. Most már válaszolhatunk az előző pontban felvetett kérdések közül az uniform terekkel kapcsolatosra.

(6.3.15) *Ha $[E', \mathcal{U}']$ az $[E, \mathcal{U}]$ uniform tér tetszőleges bővítése, $x \in E'$ esetén $\mathfrak{v}'(x)$ jelöli x $\mathcal{T}_{\mathcal{U}'}$-környezetszűrőjét, és $\mathfrak{z}(x) = \mathfrak{v}'(x)\,(\cap)\,\{E\}$ ennek E-beli nyomszűrője, akkor $\mathfrak{z}(x)$ kerek Cauchy-szűrő $[E, \mathcal{U}]$-ban, speciálisan $x \in E$ esetén x-nek $\mathfrak{v}(x)$ $\mathcal{T}_{\mathcal{U}}$-környezetszűrőjével azonos.*

Bizonyítás. Minthogy (6.2.6) értelmében $\mathcal{T}_{\mathcal{U}'}$ bővítése $\mathcal{T}_{\mathcal{U}}$-nak, azért $x \in E$ esetén $\mathfrak{z}(x)$ csakugyan azonos $\mathfrak{v}(x)$-szel. $\mathfrak{v}'(x)$ (6.3.4) szerint $\mathcal{S}_{\mathcal{U}'}$-kerek, és (6.2.8) szerint $\mathcal{S}_{\mathcal{U}'}$ is bővítése $\mathcal{S}_{\mathcal{U}}$-nak; ezért (6.3.6) szerint $\mathfrak{z}(x)$ $\mathcal{S}_{\mathcal{U}}$-kerek. Végül $\mathfrak{v}'(x)$, $\mathcal{T}_{\mathcal{U}'}$-konvergens lévén, $\mathcal{U}'$-Cauchy-szűrő (5.1.1) szerint, így (5.1.7) szerint $\mathfrak{z}(x)$ is $\mathcal{U}'$-Cauchy-rács, (5.1.6) szerint pedig $\mathcal{U}$-Cauchy-szűrő. ∎

(6.3.16) *Legyen $[E, \mathcal{U}]$ uniform tér, $E' \supset E$, és legyen minden $x \in E'$ ponthoz hozzárendelve egy E-beli kerek $\mathfrak{z}(x)$ Cauchy-szűrő, speciálisan $x \in E$ esetén legyen $\mathfrak{z}(x) = \mathfrak{v}(x)$ x-nek $\mathcal{T}_{\mathcal{U}}$-környezetszűrője. Ekkor pontosan egy olyan $\mathcal{U}'$ uniform struktúra van E'-n, hogy $\mathcal{U}'$ bővítése $\mathcal{U}$-nak, és minden $x \in E'$-re $\mathfrak{z}(x) = \mathfrak{v}'(x)\,(\cap)\,\{E\}$, ahol $\mathfrak{v}'(x)$ x-nek $\mathcal{T}_{\mathcal{U}'}$-környezetszűrője.*

Bizonyítás. (6.3.1)-ből tudjuk, hogy legfeljebb egy ilyen $\mathcal{U}'$ van. Megmutatjuk, hogy tényleg létezik is ilyen.

Tetszőleges $U \in \mathcal{U}$ környékhez rendeljük hozzá $(E' \times E')$-nek egy U' részhalmazát a következő módon: $(x, y) \in U'$ pontosan akkor, ha minden $X \in \mathfrak{z}(x)$ és $Y \in \mathfrak{z}(y)$ halmazra $(X \times Y) \cap U \neq \emptyset$. Megmutatjuk, hogy az így nyert U' halmazok egy $\mathfrak{U}' = \{U' : U \in \mathcal{U} \text{ környék}\}$ uniform bázist alkotnak E'-n.

$x = y$ esetén $X \cap Y \neq \emptyset$ bármely $X \in \mathfrak{z}(x)$, $Y \in \mathfrak{z}(x)$ halmazra, és $z \in X \cap Y$ esetén $(z, z) \in (X \times Y) \cap U$, úgyhogy $(x, x) \in U'$.

A definícióból evidens, hogy $(x, y) \in U'$ esetén $(y, x) \in U'$ is áll, hiszen $U^{-1} = U$.

Világos az is, hogy $U_1 \subset U_2$ esetén $U_1' \subset U_2'$. Ebből és az $\mathcal{U}$-beli környékek rács-tulajdonságából azonnal adódik, hogy $\mathfrak{U}'$ is rács.

Legyen végül adott $U \in \mathcal{U}$ környékhez $U_1 \in \mathcal{U}$ olyan környék, hogy $U_1 \circ U_1 \circ \circ U_1 \subset U$. Megmutatjuk, hogy $U_1' \circ U_1' \subset U'$. Valóban, ha $(x, y) \in U_1'$, $(y, z) \in U_1'$, legyen $X \in \mathfrak{z}(x)$ és $Z \in \mathfrak{z}(z)$ tetszőleges, $Y \in \mathfrak{z}(y)$ pedig U_1-rendben kicsiny halmaz. Ekkor van olyan $x_1 \in X$, $y_1 \in Y$, hogy $(x_1, y_1) \in U_1$, és olyan $y_2 \in Y$, $z_2 \in Z$, hogy $(y_2, z_2) \in U_1$. Minthogy még $(y_1, y_2) \in U_1$ is áll, azért $(x_1, z_2) \in U$, úgyhogy $(X \times Z) \cap \cap U \neq \emptyset$.

Ilyenformán $\mathfrak{U}'$ tényleg uniform bázis E'-n, és generál egy E' fölötti $\mathcal{U}'$ uniform struktúrát. Megmutatjuk, hogy $\mathcal{U}'|E = \mathcal{U}$. Legyen e célból először egy $U \in \mathcal{U}$ környékhez az $U_1 \in \mathcal{U}$ környék ismét úgy megválasztva, mint előbb. Belátjuk, hogy $U_1' \cap (E \times E) \subset U$. Csakugyan, $x, y \in E$, $(x, y) \in U_1'$ esetén $U_1(x) \in \mathfrak{z}(x)$, $U_1(y) \in \mathfrak{z}(y)$ folytán van olyan $x_1 \in U_1(x)$, $y_1 \in U_1(y)$, hogy $(x_1, y_1) \in U_1$, s akkor $(x, y) \in U$. Másrészt bármely $U \in \mathcal{U}$ környékre $U \subset U' \cap (E \times E)$, hiszen $(x, y) \in U$ esetén $(x, y) \in \in (X \times Y) \cap U$ minden $X \in \mathfrak{z}(x)$, $Y \in \mathfrak{z}(y)$ halmazpárra.

Legyen most az $x \in E'$ pont $\mathcal{T}_{\mathcal{U}'}$-környezetszűrője $\mathfrak{v}'(x)$. $V' \in \mathfrak{v}'(x)$ esetén van olyan $U \in \mathcal{U}$ környék, hogy $U'(x) \subset V'$. Legyen $S \in \mathfrak{z}(x)$ U-rendben kicsiny halmaz. Ha $y \in S$, $X \in \mathfrak{z}(x)$ és $Y \in \mathfrak{z}(y)$ tetszőleges, akkor $x_1 \in X \cap S$ esetén $(x_1, y) \in \in (X \times Y) \cap U$, tehát $(x, y) \in U'$, $y \in U'(x) \cap E$. Eszerint $S \subset U'(x) \cap E \subset V' \cap E$, és $V' \cap E \in \mathfrak{z}(x)$. Másrészt, ha $S \in \mathfrak{z}(x)$ tetszőleges, akkor van olyan $S_1 \in \mathfrak{z}(x)$, hogy $S_1 \overline{\mathcal{T}}_{\mathcal{U}} E - S$, és így alkalmas $U \in \mathcal{U}$ környékre $(S_1 \times (E - S)) \cap U = \emptyset$. Legyen $U_1 \in \mathcal{U}$ olyan környék, hogy $U_1 \circ U_1 \subset U$. Ekkor $U_1'(x) \cap E \subset S$, és ezért $S \in \mathfrak{v}'(x) (\cap) \{E\}$. Valóban, ha $y \in U_1'(x) \cap E$, akkor $(x, y) \in U_1'$ miatt az $S_1 \in \mathfrak{z}(x)$, $U_1(y) \in \mathfrak{z}(y)$ halmazokban található egy $x_1 \in S_1$ és egy $y_1 \in U_1(y)$ pont úgy, hogy $(x_1, y_1) \in U_1$. Így $(x_1, y) \in U$, tehát $y \in U(S_1) \subset S$.

Az elmondottak szerint $\mathfrak{v}'(x) (\cap) \{E\} = \mathfrak{z}(x)$ minden $x \in E'$-re. Ebből kitűnik az is, hogy E $\mathcal{T}_{\mathcal{U}'}$-sűrű E'-ben, úgyhogy $\mathcal{U}'$ bővítése $\mathcal{U}$-nak. ▮

Abból az előbb tett megjegyzésből, hogy $U_1, U_2 \in \mathcal{U}$, $U_1 \subset U_2$ esetén $U_1' \subset' U_2'$, nyilván adódik:

(6.3.17) *Legyen* (6.3.16) *feltevéseivel és jelöléseivel* $\mathfrak{U}$ *egy* $\mathcal{U}$*-t generáló uniform bázis. Ekkor az* $U \in \mathfrak{U}$ *környékekből készített* U'*-k* $\mathcal{U}'$*-t generáló uniform bázist alkotnak.* ▮

(6.3.1)-ből és (6.3.15)-ből azonnal kiolvasható:

(6.3.18) *Egy* $[E, \mathcal{U}]$ *uniform tér minden bővítése előállítható a* (6.3.16)*-ban leírt konstrukcióval.* ▮

Ebből és (6.3.17)-ből (4.2.33) alapján következik:

(6.3.19) *Félmetrizálható uniform tér minden bővítése is félmetrizálható.* ▮

(6.3.20) *Legyen* (6.3.16) *feltevéseivel és jelöléseivel* $E \subset E_1' \subset E'$, *és jelölje* $\mathcal{U}_1'$ *az* E_1'*-n a* $\mathfrak{z}(x)$ $(x \in E_1')$ *nyomszűrők segítségével készített bővítését* $\mathcal{U}$*-nak. Ekkor* $\mathcal{U}_1' = = \mathcal{U}'|E_1'$.

Bizonyítás. (3.2.38)-ból és (3.2.35)-ből következik, hogy $\mathfrak{U}'|E_1'$ is bővítése $\mathfrak{U}$-nak, mégpedig éppen a $\mathfrak{z}(x)$ $(x \in E_1')$ nyomszűrőkkel. Így (6.3.16) és (6.3.1) értelmében $\mathfrak{U}_1' = \mathfrak{U}'|E_1'$. ∎

(6.3.21) *Legyen* $[E', \mathfrak{U}']$ *az* $[E, \mathfrak{U}]$ *uniform tér bővítése, és* $x \in E'$ *esetén* $\mathfrak{z}(x)$ *az* x *pont* $\mathcal{T}_{\mathfrak{U}'}$*-környezetszűrőjének* E*-beli nyomszűrője. A következő állítások ekvivalensek:*

(a) $\mathcal{T}_{\mathfrak{U}'}$ *redukált bővítése* $\mathcal{T}_{\mathfrak{U}}$*-nak;*

(b) $x \in E' - E$ *esetén* $\mathfrak{z}(x)$ *nem-konvergens* $\mathcal{T}_{\mathfrak{U}}$*-ra nézve, és* $x, y \in E' - E$, $x \neq y$ *esetén* $\mathfrak{z}(x) \neq \mathfrak{z}(y)$*;*

(c) $x \in E' - E$ *esetén* $\mathfrak{z}(x) \to y \in E'$ $\mathcal{T}_{\mathfrak{U}'}$*-re nézve (akkor és) csak akkor áll, ha* $y = x$.

Bizonyítás. (a) $\Rightarrow$ (b): (6.2.6) és (6.1.17) szerint (a) azt jelenti, hogy $x \in E' - E$, $y \in E'$, $x \neq y$ esetén $\mathfrak{z}(x) \neq \mathfrak{z}(y)$. Ez azonban maga után vonja (b)-t, hiszen ha $x \in E' - E$, $\mathfrak{z}(x) \to y \in E$ volna $\mathcal{T}_{\mathfrak{U}}$-ra nézve, akkor (6.3.13) értelmében $\mathfrak{z}(x) = \mathfrak{v}(y) = \mathfrak{z}(y)$ adódnék, mivel $\mathfrak{z}(x)$ (6.3.15) szerint kerek szűrő $[E, \mathfrak{U}]$-ban.

(b) $\Rightarrow$ (c): $x \in E' - E$ esetén (b) szerint $\mathfrak{z}(x) \to y \in E$ nem állhat $\mathcal{T}_{\mathfrak{U}'}$-re nézve, mert akkor (2.4.8) szerint ugyanez állna $\mathcal{T}_{\mathfrak{U}}$-ra nézve is. Másrészt, ha $\mathfrak{z}(x) \to y \in E' - E$ $\mathcal{T}_{\mathfrak{U}'}$-re nézve, akkor $\mathfrak{z}(x)$ finomabb y $\mathcal{T}_{\mathfrak{U}'}$-környezetszűrőjénél, s persze ennek $\mathfrak{z}(y)$ nyomszűrőjénél is; de $\mathfrak{z}(x) \supset \mathfrak{z}(y)$ (6.3.12) értelmében csak a $\mathfrak{z}(x) = \mathfrak{z}(y)$ esetben lehetséges, hiszen $\mathfrak{z}(x)$ és $\mathfrak{z}(y)$ (6.3.15) szerint kerek, komprimált szűrő $[E, \mathfrak{U}]$-ban. Így (b) szerint $x = y$. Természetesen $\mathfrak{z}(x) \to x$ mindenesetre fennáll.

(c) $\Rightarrow$ (a): Meg kell mutatnunk, hogy (c) teljesülése esetén $x \in E' - E$, $y \in E'$, $x \neq y$ maga után vonja a $\mathfrak{z}(x) \neq \mathfrak{z}(y)$ relációt. Csakhogy $\mathfrak{z}(x) = \mathfrak{z}(y)$ esetén nyilván $\mathfrak{z}(x) \to y$ volna $\mathcal{T}_{\mathfrak{U}'}$-re nézve. ∎

Állapodjunk meg abban, hogy az $[E, \mathfrak{U}]$ uniform tér $[E', \mathfrak{U}']$ bővítését (vagy az $\mathfrak{U}$ uniform struktúra $\mathfrak{U}'$ bővítését) **redukált**nak mondjuk, ha $\mathcal{T}_{\mathfrak{U}'}$ redukált bővítése $\mathcal{T}_{\mathfrak{U}}$-nak, vagyis ha az előbbi tétel (b) vagy (c) kikötése teljesül.

(6.3.22) *Ha* $[E, \mathfrak{U}]$ *szeparált uniform tér, és* $[E', \mathfrak{U}']$ *redukált bővítése* $[E, \mathfrak{U}]$*-nak, akkor* $[E', \mathfrak{U}']$ *is szeparált.*

Bizonyítás. (3.2.24) szerint $\mathfrak{U}$, ill. $\mathfrak{U}'$ szeparáltsága a $\mathcal{T}_{\mathfrak{U}}$, ill. $\mathcal{T}_{\mathfrak{U}'}$ topológia T_0-voltával egyértelmű. Így azonban (6.1.16) adja az állítást. ∎

6.3.c. Uniform tér teljes burka. Az uniform terek elméletében alapvető jelentőségű a következő tétel:

(6.3.23) *Legyen* $[E, \mathfrak{U}]$ *tetszőleges uniform tér,* $E_c' \supset E$ *pedig olyan halmaz, hogy* $x \in E_c' - E$ *pontjaihoz kölcsönösen egyértelműen hozzá legyenek rendelve az* $[E, \mathfrak{U}]$*-beli összes nem* $\mathcal{T}_{\mathfrak{U}}$*-konvergens, kerek Cauchy-szűrők. Az* $x \in E_c' - E$ *ponthoz így rendelt szűrőt* $\mathfrak{z}(x)$*-szel jelölve, és* $x \in E$ *esetén* $\mathfrak{z}(x)$*-et* x $\mathfrak{v}(x)$ $\mathcal{T}_{\mathfrak{U}}$*-környezetszűrőjével egyenlővé téve, legyen* $\mathfrak{U}_c'$ *a* (6.3.16) *szerint készített uniform struktúra* E_c'*-n. Ekkor* $\mathfrak{U}_c'$ *teljes, és redukált bővítése* $\mathfrak{U}$*-nak.*

Bizonyítás. Csak $\mathfrak{U}_c'$ teljességét kell bizonyítani, mert a többi (6.3.21)-ből következik. Legyen tehát $\mathfrak{r}'$ $\mathfrak{U}_c'$-Cauchy-rács. Tekintsük $\mathfrak{r}'$-nek $\mathfrak{p}'(\mathfrak{r}')$ szomszédságszűrőjét a $\mathcal{S}_{\mathfrak{U}_c'}$ szomszédsági relációra nézve. Ez (6.3.14) értelmében $\mathfrak{U}_c'$-Cauchy-szűrő, továbbá (6.3.9) szerint $\mathcal{S}_{\mathfrak{U}_c'}$-kerek is. (6.3.7) szerint lehet beszélni a $\mathfrak{z} = \mathfrak{p}'(\mathfrak{r}')(\cap)\{E\}$ szűrőről, és (6.3.6) szerint $\mathfrak{z}$ kerek szűrő a $\mathcal{S}_{\mathfrak{U}_c'}|E = \mathcal{S}_{\mathfrak{U}}$ szomszédsági relációra nézve (ez az egyenlőség (6.2.8)-ból következik). (5.1.7) szerint $\mathfrak{z}$ $\mathfrak{U}_c'$-Cauchy-rács, és így (5.1.6) szerint $\mathcal{U}$-Cauchy-szűrő. Ezért van olyan $x \in E'_c$, hogy $\mathfrak{z} = \mathfrak{z}(x)$; ha ugyanis $\mathfrak{z}$ konvergál $\mathcal{T}_{\mathcal{U}}$-ra nézve valamely $x \in E$ ponthoz, akkor (6.3.13) szerint $\mathfrak{z} = \mathfrak{z}(x)$, ha pedig $\mathfrak{z}$ nem $\mathcal{T}_{\mathcal{U}}$-konvergens, akkor valamelyik $x \in E'_c - E$ pontra lesz $\mathfrak{z} = \mathfrak{z}(x)$. Azonban x-nek $\mathcal{T}_{\mathcal{U}'_c}$-környezetszűrőjét $\mathfrak{v}'(x)$-szel jelölve $\mathfrak{z}(x) = \mathfrak{v}'(x)\,(\cap)\,\{E\} > \mathfrak{v}'(x)$ folytán $\mathfrak{z}(x) \to x$ $\mathcal{T}_{\mathcal{U}'_c}$-re nézve, és így x a $\mathfrak{p}'(\mathfrak{r}')$ szűrőnek (5.2.24) szerint $\mathcal{T}_{\mathcal{U}'_c}$-torlódási pontja. (5.2.28) szerint $\mathfrak{p}'(\mathfrak{r}') \to x$, és $\mathfrak{r}' > \mathfrak{p}'(\mathfrak{r}')$ folytán annál inkább $\mathfrak{r}' \to x$ $\mathcal{T}_{\mathcal{U}'_c}$-re nézve. ▌

Ezt mindjárt kiegészíthetjük a következő megjegyzéssel:

(6.3.24) *Legyen* $[E, \mathcal{U}]$ *tetszőleges uniform tér,* $[E'_c, \mathcal{U}'_c]$ *ennek* (6.3.23)*-ban elkészített bővítése,* $E \subset E' \subset E'_c$. *Ha* $[E', \mathcal{U}'_c|E']$ *teljes, akkor* $E' = E'_c$.

Bizonyítás. Tegyük fel, hogy $x \in E'_c - E'$. Ekkor $\mathfrak{z}(x) \to x$, de $\mathfrak{z}(x)$ (5.1.6) szerint $(\mathcal{U}'_c|E')$-Cauchy-rács is, úgyhogy van olyan $y \in E'$, hogy $\mathfrak{z}(x) \to y$ $\mathcal{T}_{\mathcal{U}'_c|E'} = \mathcal{T}_{\mathcal{U}'_c}|E'$-re, azaz $\mathcal{T}_{\mathcal{U}'_c}$-re nézve (figyelembe véve (3.2.35)-öt és (2.4.8)-at). Csakhogy x és y gyengén széteső, tehát $\mathcal{T}_{\mathcal{U}'_c}$ regularitása miatt szétválasztható, és (2.5.1)-gyel jutunk ellentmondásba. ▌

(6.3.25) *Legyen* $[E, \mathcal{U}]$ *uniform tér,* $[E'_c, \mathcal{U}'_c]$ *ennek* (6.3.23)*-ban megkonstruált bővítése,* $[E', \mathcal{U}']$ *pedig* $[E, \mathcal{U}]$*-nak tetszőleges redukált bővítése. Ekkor létezik egy egyértelműen meghatározott E-t rögzítő h unimorfizmus, amely* $[E', \mathcal{U}']$*-t* $[E'_c, \mathcal{U}'_c]$*-nek egy alterére képezi le.* $\mathcal{U}'$ *pontosan akkor teljes, ha* $h(E') = E'_c$.

Bizonyítás. Legyen $x \in E'$ esetén x-nek $\mathcal{T}_{\mathcal{U}'}$-környezetszűrője $\mathfrak{v}'(x)$. (6.3.15) szerint ennek $\mathfrak{z}'(x) = \mathfrak{v}'(x)\,(\cap)\,\{E\}$ nyomszűrője kerek Cauchy-szűrő $[E, \mathcal{U}]$-ban, mégpedig (6.3.21) szerint $\mathfrak{z}'(x)$ nem $\mathcal{T}_{\mathcal{U}}$-konvergens, ha $x \in E' - E$, és $x, y \in E' - E$, $x \neq y$ esetén $\mathfrak{z}'(x) \neq \mathfrak{z}'(y)$. Így megadható egy egyértelműen meghatározott $h : E' \to E''$ bijekció alkalmas $E \subset E'' \subset E'_c$ halmazra oly módon, hogy $x \in E$ esetén $h(x) = x$, $x \in E' - E$ esetén pedig $\mathfrak{z}'(x) = \mathfrak{z}(h(x))$ legyen, ahol $\mathfrak{z}(h(x))$ a $h(x) \in E'_c$ ponthoz (6.3.23) értelmében tartozó szűrőt jelöli. Jelölje $\mathcal{U}''$ az E'' halmazon (6.3.16) alapján a $\mathfrak{z}(y)$ $(y \in E'')$ nyomszűrőkből kiindulva készített bővítését $\mathcal{U}$-nak. Ekkor (6.2.6) szerint $\mathcal{T}_{\mathcal{U}''}$, ill. $\mathcal{T}_{\mathcal{U}'}$ a $\mathfrak{z}''(y)$, ill. $\mathfrak{z}'(x)$ nyomszűrőkhöz tartozó szoros bővítése $\mathcal{T}_{\mathcal{U}}$-nak, úgyhogy (6.1.19) értelmében h $(\mathcal{T}_{\mathcal{U}'}, \mathcal{T}_{\mathcal{U}''})$-homeomorfizmus. Minthogy $h|E : E \to E''$ éppen E kanonikus injekciója E''-be, és $\mathcal{U} = \mathcal{U}''|E$, azért $h|E$ még $(\mathcal{U}, \mathcal{U}'')$-egyenletesen folytonos is, úgyhogy (6.2.5) alkalmazható, és azt mutatja, hogy h $(\mathcal{U}', \mathcal{U}'')$-egyenletesen folytonos. E' és E'' szerepét felcserélve ugyanígy adódik, hogy h^{-1} $(\mathcal{U}'', \mathcal{U}')$-egyenletesen folytonos. Eszerint h a keresett $(\mathcal{U}', \mathcal{U}'')$-unimorfizmus, mert (6.3.20) szerint $\mathcal{U}'' = \mathcal{U}'_c|E'$. h unicitása abból adódik, hogy egy $(\mathcal{U}', \mathcal{U}'_c|E'')$-unimorfizmus $E \subset E'' \subset E'_c$ esetén $(\mathcal{T}_{\mathcal{U}'}, \mathcal{T}_{\mathcal{U}'_c}|E'')$-homeomorfizmus is, úgyhogy (6.1.19) alkalmazható.

(5.1.12) értelmében $\mathcal{U}'$ és $\mathcal{U}'_c|h(E')$ egyszerre teljes, mégpedig (6.3.24) szerint akkor, ha $h(E') = E'_c$. ▌

Az $[E', \mathcal{U}']$ uniform teret az $[E, \mathcal{U}]$ uniform tér (és $\mathcal{U}'$-t az $\mathcal{U}$ uniform struktúra) **teljes burkának** nevezzük, ha $\mathcal{U}'$ redukált, teljes bővítése $\mathcal{U}$-nak.

(6.3.23)-ból és (6.3.25)-ből kiolvasható:

(6.3.26) *Minden* $[E, \mathcal{U}]$ *uniform térnek van teljes burka; ilyen a* (6.3.23)*-ban elkészített* $[E'_c, \mathcal{U}'_c]$. *Az* $[E, \mathcal{U}]$ *tér két teljes burka egymásba egy egyértelműen meghatározott E-t rögzítő unimorfizmussal átvihető.* ▌

(6.3.27) *Legyen $[E, \mathfrak{U}]$ tetszőleges uniform tér, $[E', \mathfrak{U}']$ ennek redukált bővítése, $[E'', \mathfrak{U}'']$ pedig $[E', \mathfrak{U}']$-nek teljes burka. Ekkor $[E'', \mathfrak{U}'']$ az $[E, \mathfrak{U}]$ térnek is teljes burka.*

Bizonyítás. Csak azt kell belátnunk, hogy $[E'', \mathfrak{U}'']$ redukált bővítése $[E, \mathfrak{U}]$-nak, ez azonban (6.2.6)-ból és (6.1.18)-ból következik. ▌

(6.3.28) *Ha az $[E'', \mathfrak{U}'']$ uniform tér teljes burka $[E, \mathfrak{U}]$-nak, és $E \subset E' \subset E''$, $\mathfrak{U}' = \mathfrak{U}''|E'$, akkor $[E'', \mathfrak{U}'']$ teljes burka $[E', \mathfrak{U}']$-nek is.*

Bizonyítás. Ismét (6.2.6) és (6.1.18) alkalmazható. ▌

(6.3.22)-ből rögtön következik:

(6.3.29) *Szeparált uniform tér teljes burka is szeparált.* ▌

(6.3.19)-ből (6.3.29) figyelembevételével adódik:

(6.3.30) *Félmetrizálható (metrizálható) uniform tér teljes burka is félmetrizálható (metrizálható).* ▌

A „prekompakt" elnevezés jelentőségét mélyebben megvilágítja a következő tétel:

(6.3.31) *Legyen $[E, \mathfrak{U}]$ uniform tér. A következő állítások egyenértékűek:*

(a) *$[E, \mathfrak{U}]$ prekompakt;*

(b) *$[E, \mathfrak{U}]$ teljes burka kompakt;*

(c) *$[E, \mathfrak{U}]$-nak van kompakt bővítése.*

Bizonyítás. (a) $\Rightarrow$ (b): Ha $[E', \mathfrak{U}']$ jelöli $[E, \mathfrak{U}]$ teljes burkát, akkor (3.2.76) szerint $\mathfrak{U}'$ is prekompakt, és így (5.2.20) szerint kompakt is.

(b) $\Rightarrow$ (c): Evidens.

(c) $\Rightarrow$ (a): Ha $[E', \mathfrak{U}']$ az $[E, \mathfrak{U}]$ térnek kompakt bővítése, akkor (5.2.21) szerint $\mathfrak{U}'$ prekompakt, s így (3.2.70) miatt $\mathfrak{U}$ is prekompakt. ▌

6.3.d. Gyakorlatok. 1. Legyen $\mathfrak{z}_1$ és $\mathfrak{z}_2$ kerek szűrő az $[E, \mathfrak{S}]$ szomszédsági térben. Bizonyítandó, hogy $\mathfrak{z}_1 (\cup) \mathfrak{z}_2$ is kerek szűrő.

2. Legyen $\mathfrak{r}$ rács az $[E, \mathfrak{S}]$ szomszédsági térben. Mutassuk meg, hogy $\mathfrak{p}(\mathfrak{r})$ a legfinomabb $\mathfrak{r}$-nél durvább kerek szűrő.

3. Legyen $\mathfrak{r}_1$ és $\mathfrak{r}_2$ rács az $[E, \mathfrak{S}]$ szomszédsági térben. Mutassuk meg, hogy

(a) $\mathfrak{p}(\mathfrak{r}_1 (\cup) \mathfrak{r}_2) = \mathfrak{p}(\mathfrak{r}_1) (\cup) \mathfrak{p}(\mathfrak{r}_2)$;

(b) $\mathfrak{p}(\mathfrak{r}_1 (\cap) \mathfrak{r}_2) > \mathfrak{p}(\mathfrak{r}_1) (\cap) \mathfrak{p}(\mathfrak{r}_2)$, ha $\emptyset \notin \mathfrak{r}_1 (\cap) \mathfrak{r}_2$;

(c) általában itt nem áll egyenlőség.

[$E = \mathbf{R}$, $\mathfrak{S} = \mathfrak{S}_{\rho_1}$, $\mathfrak{r}_i = \{R_{in} : n \in \mathbf{N}\}$, $R_{1n} = \{0\} \cup (\mathbf{Q} \cap (n + \infty))$, $R_{2n} = \{0\} \cup ((n, + \infty) - \mathbf{Q})$.]

4. Legyen $[E', \mathfrak{S}']$ az $[E, \mathfrak{S}]$ szomszédsági tér bővítése, $\mathfrak{z}$ pedig kerek szűrő $[E, \mathfrak{S}]$-ben. Mutassuk meg, hogy van olyan $\mathfrak{z}'$ $[E', \mathfrak{S}']$-ben kerek szűrő, amelyre $\mathfrak{z} = \mathfrak{z}' (\cap) \{E\}$.

[Legyen $\mathfrak{z}'$ az $S \in \mathfrak{z}$ halmazok $\mathfrak{T}_{\mathfrak{S}'}$-lezárásai által generált E'-beli szűrő.]

5. Legyen Φ függvénycsalád E-n, $[E', \mathfrak{U}']$ pedig $[E, \mathfrak{U}_\Phi]$-nek bővítése. Mutassuk meg, hogy minden $f \in \Phi$ függvénynek pontosan egy $\mathfrak{T}_{\mathfrak{U}'}$-folytonos f' kiterjesztése van, és hogy a $\Phi' = \{f' : f \in \Phi\}$ jelöléssel $\mathfrak{U}' = \mathfrak{U}_{\Phi'}$.

[Minden $f \in \Phi$ $\mathfrak{U}_\Phi$-egyenletesen folytonos, $\mathfrak{U}_{\rho_1}$ szeparált és teljes, amiből f' létezése, egyértelműsége és $\mathfrak{U}'$-egyenletes folytonossága következik. Ezért $\mathfrak{U}_{\Phi'} < \mathfrak{U}'$, s viszont ha $f_1, \ldots, f_n \in \Phi$, $\varepsilon > 0$, és $x', y' \in E'$ olyan, hogy $|f_i'(x') - f_i'(y')| < \frac{\varepsilon}{2}$

$(i = 1, \ldots, n)$, akkor x' és y' $\mathfrak{T}_{\mathcal{U}'}$-környezetszűrőjének E-beli nyomszűrőjéből egy-egy X, ill. Y halmazt véve, van olyan $x \in X$ és $y \in Y$, hogy $|f_i'(x) - f_i'(x')| < \frac{\varepsilon}{4}$ $|f_i'(y) - f_i'(y')| < \frac{\varepsilon}{4}$ $(i = 1, \ldots, n)$, úgyhogy $(X \times Y) \cap U_{\{\sigma f_1, \ldots, \sigma f_n\}, \varepsilon} \neq \emptyset$.]

6. Legyen $[E, \mathcal{U}]$ szeparált, teljes uniform tér, $A \subset E$, $\bar{A}$ A-nak $\mathfrak{T}_{\mathcal{U}}$-lezárása. Mutassuk meg, hogy $[\bar{A}, \mathcal{U}|\bar{A}]$ teljes burka $[A, \mathcal{U}|A]$-nak.

7. Az előbbi jelölésekkel ejtsük el azt a kikötést, hogy $\mathcal{U}$ szeparált, és $A \subset A' \subset \bar{A}$ legyen olyan, hogy ha $x \in \bar{A}$, és $\bar{x} \cap A = \emptyset$, akkor $\bar{x} \cap A'$ pontosan egy pontból áll, ha pedig $x \in \bar{A} - A$, $\bar{x} \cap A \neq \emptyset$, akkor $x \notin A'$. Mutassuk meg, hogy $[A', \mathcal{U}|A']$ teljes burka $[A, \mathcal{U}|A]$-nak.

8. Legyen $[H, \mathcal{S}]$ T_π-tér, $[E, \mathcal{U}]$ az **5.1.** alatti 4. feladatban értelmezett uniform tér, $A \subset E$ pedig álljon a $\mathcal{S}$-folytonos függvényekből. Mutassuk meg, hogy $[E, \mathcal{U}]$ teljes burka $[A, \mathcal{U}|A]$-nak.

[Tudjuk, hogy $\mathcal{U}$ teljes; A $\mathfrak{T}_{\mathcal{U}}$-sűrű, mert $t_1, \ldots, t_n \in H$, $t_i \neq t_j$ $(i \neq j)$, $c_1, \ldots, c_n \in \mathbf{R}$ esetén t_i-nek olyan V_i környezetét véve, hogy $i \neq j$ esetén $V_i \cap V_j = \emptyset$ legyen, vannak olyan $\mathcal{S}$-folytonos f_i függvények, hogy $f_i(t_i) = c_i$, és V_i-n kívül $f_i(t) = 0$, s ezekből készíthető olyan $f \in A$, hogy $f(t_i) = c_i$.]

6.4. SZOMSZÉDSÁGI TEREK BŐVÍTÉSEI

6.4.a. Szomszédsági tér bővítései. Rátérhetünk a **6.3.a.** alatt felvetett második kérdésre, és eddigi eredményeink alapján könnyen válaszolhatunk is rá. Mindenekelőtt kimondhatjuk (6.3.15) következő analogonját:

(6.4.1) *Ha $[E', \mathcal{S}']$ az $[E, \mathcal{S}]$ szomszédsági tér tetszőleges bővítése, $x \in E'$ esetén $\mathfrak{v}'(x)$ jelöli x $\mathfrak{T}_{\mathcal{S}'}$-környezetszűrőjét, és $\mathfrak{z}(x) = \mathfrak{v}'(x)\,(\cap)\,\{E\}$ ennek E-beli nyomszűrője, akkor $\mathfrak{z}(x)$ kerek, komprimált szűrő $[E, \mathcal{S}]$-ben, speciálisan $x \in E$ esetén x-nek $\mathfrak{v}(x)$ $\mathfrak{T}_{\mathcal{S}}$-környezetszűrőjével azonos.*

Bizonyítás. (6.2.9) szerint $\mathfrak{T}_{\mathcal{S}'}$ bővítése $\mathfrak{T}_{\mathcal{S}}$-nek, úgyhogy $x \in E$ esetén $\mathfrak{z}(x) = \mathfrak{v}(x)$. (6.3.4) szerint $\mathfrak{v}'(x)$ minden $x \in E'$-re $\mathcal{S}'$-kerek, tehát (6.3.6) folytán $\mathfrak{z}(x)$ $\mathcal{S}$-kerek. (5.2.1) szerint $\mathfrak{v}'(x)$ $\mathcal{S}'$-komprimált, tehát (5.2.7) folytán $\mathfrak{z}(x)$ is $\mathcal{S}'$-komprimált, s akkor (5.2.6) miatt $\mathcal{S}$-komprimált is. ∎

A (6.3.16)-nak megfelelő tétel bizonyítása céljából először is jegyezzük meg:

(6.4.2) *Legyen $[E', \mathcal{S}']$ bővítése az $[E, \mathcal{S}]$ szomszédsági térnek, és $\mathcal{U}$, ill. $\mathcal{U}'$ a $\mathcal{S}$-t, ill. $\mathcal{S}'$-t indukáló prekompakt uniform struktúra. Ekkor $\mathcal{U}'$ bővítése $\mathcal{U}$-nak.*

Bizonyítás. (3.2.35) szerint $\mathcal{S}_{\mathcal{U}'|E} = \mathcal{S}_{\mathcal{U}'}|E = \mathcal{S}'|E = \mathcal{S}$, és (3.2.70) szerint $\mathcal{U}'|E$ prekompakt. (3.2.78) értelmében tehát $\mathcal{U}'|E = \mathcal{U}$, továbbá $\mathfrak{T}_{\mathcal{U}'} = \mathfrak{T}_{\mathcal{S}_{\mathcal{U}'}} = \mathfrak{T}_{\mathcal{S}'}$ miatt E $\mathfrak{T}_{\mathcal{U}'}$-sűrű. ∎

Mármost (6.3.16)-nak a következő tétel felel meg:

(6.4.3) *Legyen $[E, \mathcal{S}]$ szomszédsági tér, $E' \supset E$, és legyen minden $x \in E'$ ponthoz hozzárendelve egy E-beli kerek, komprimált szűrő, speciálisan $x \in E$ esetén legyen*

$\mathfrak{z}(x) = \mathfrak{v}(x)$ *x-nek* $\mathcal{T}_{\mathcal{S}}$*-környezetszűrője. Ekkor pontosan egy olyan* $\mathcal{S}'$ *szomszédsági reláció van* E'*-n, hogy* $\mathcal{S}'$ *bővítése* $\mathcal{S}$*-nek, és minden* $x \in E'$*-re* $\mathfrak{z}(x) = \mathfrak{v}'(x)\,(\cap)\,\{E\}$, *ahol* $\mathfrak{v}'(x)$ *x-nek* $\mathcal{T}_{\mathcal{S}'}$*-környezetszűrője.*

Bizonyítás. A mondott tulajdonságú $\mathcal{S}'$ szomszédsági reláció egyértelműsége (6.3.3)-ból következik. Mutassuk meg, hogy létezik is ilyen $\mathcal{S}'$.

Legyen $\mathcal{U}$ a $\mathcal{S}$-t indukáló prekompakt uniform struktúra; ilyen (4.2.26) szerint létezik. A $\mathfrak{z}(x)$ szűrők (5.2.9) szerint $\mathcal{U}$-Cauchy-szűrők is, úgyhogy (6.3.16) biztosítja $\mathcal{U}$ olyan $\mathcal{U}'$ bővítésének létezését, amely éppen az adott $\mathfrak{z}(x)$ nyomszűrőkhöz vezet. Ekkor a $\mathcal{S}' = \mathcal{S}_{\mathcal{U}'}$ szomszédsági reláció megfelel, hiszen (6.2.8) szerint $\mathcal{S}_{\mathcal{U}'}$ bővítése $\mathcal{S}_{\mathcal{U}} = \mathcal{S}$-nek. ∎

Az előbbi tételben $\mathcal{S}'$ megszerkesztése a $\mathcal{S}$-t indukáló prekompakt uniform struktúra bővítésének révén történt. Megkaphatjuk azonban $\mathcal{S}'$-t a $\mathcal{S}$ által indukált topológia bővítése útján is:

(6.4.4) *Legyen* (6.4.3) *feltételei mellett* $\mathcal{T}'$ *a* $\mathcal{T}_{\mathcal{S}}$ *topológiának a* $\mathfrak{z}(x)$ *nyomszűrőkhöz tartozó szoros bővítése. Ekkor* $A', B' \subset E'$ *esetén* $A' \,\overline{\mathcal{S}'}\, B'$ *pontosan akkor áll, ha van olyan* $A, B \subset E$, *hogy* $A \,\overline{\mathcal{S}}\, B$, $A' \subset \bar{A}$, $B' \subset \bar{B}$; *itt* $\bar{X}$ *az* $X \subset E'$, *halmaz* $\mathcal{T}'$*-lezárását jelöli.*

Bizonyítás. (6.2.9) szerint $\mathcal{T}_{\mathcal{S}'}$ szoros bővítése $\mathcal{T}_{\mathcal{S}}$-nek, és (6.1.8) szerint $\mathcal{T}' = \mathcal{T}_{\mathcal{S}'}$.

Ha most $A \,\overline{\mathcal{S}}\, B$, akkor $A \,\overline{\mathcal{S}'}\, B$, és (3.1.14) szerint $\bar{A} \,\overline{\mathcal{S}'}\, \bar{B}$, úgyhogy $A' \subset \bar{A}$, $B' \subset \bar{B}$ esetén annál inkább $A' \,\overline{\mathcal{S}'}\, B'$. Megfordítva, ha $A' \,\overline{\mathcal{S}'}\, B'$, akkor $E' - B' \in$ $\in \mathfrak{p}'(A')$ (így jelölve A' $\mathcal{S}'$-szomszédságszűrőjét), tehát (3.1.10) (e) szerint van olyan $C', D' \subset E'$, hogy $C' \in \mathfrak{p}'(A')$, $D' \in \mathfrak{p}'(C')$, $E' - B' \in \mathfrak{p}'(D')$, azaz hogy $C' \,\overline{\mathcal{S}'}\, E' - D'$ és (3.1.10) (b) figyelembevételével $E' - D' \in \mathfrak{p}'(B')$. Legyen $A = C' \cap E$, $B = (E' - D') \cap E$. Ekkor $A \,\overline{\mathcal{S}'}\, B$, s egyben $A \,\overline{\mathcal{S}}\, B$, továbbá $A' \subset \bar{A}$, $B' \subset \bar{B}$. Valóban, $x \in A'$ esetén véve tetszőleges $V \in \mathfrak{v}'(x) = \mathfrak{p}'(\{x\})$ halmazt, (3.1.10) (c) szerint $C' \in \mathfrak{p}'(\{x\})$, tehát $V \cap C' \in \mathfrak{p}'(\{x\})$, és E $\mathcal{T}'$-sűrű volta miatt $V \cap C' \cap E \neq \emptyset$, azaz $V \cap A \neq \emptyset$. Hasonlóan igazolható $B' \subset \bar{B}$. ∎

(6.4.5) *Legyen* (6.4.3) *feltevéseivel* $E \subset E_1' \subset E'$, *és* $\mathcal{S}_1'$ $\mathcal{S}$*-nek* E_1'*-n a* $\mathfrak{z}(x)$ $(x \in E_1')$ *nyomszűrők segítségével készített bővítése. Ekkor* $\mathcal{S}_1' = \mathcal{S}'|E_1'$.

Bizonyítás. (3.1.27) szerint $\mathcal{S}'|E_1'$ is bővítése $\mathcal{S}$-nek, mégpedig a $\mathfrak{z}(x)$ nyomszűrőkkel. ∎

(6.4.6) *A* (6.4.3) *alatti feltevésekkel a következő két állítás egyenértékű:*

(a) $x \in E' - E$ *esetén* $\mathfrak{z}(x)$ *nem-konvergens* $\mathcal{T}_{\mathcal{S}}$*-re nézve, és* $x, y \in E' - E$, $x \neq y$ *esetén* $\mathfrak{z}(x) \neq \mathfrak{z}(y)$;

(b) $\mathcal{T}_{\mathcal{S}'}$ *redukált bővítése* $\mathcal{T}_{\mathcal{S}}$*-nek.*

Bizonyítás. (6.2.9) és (6.1.17) szerint (b) azt jelenti, hogy $x \in E' - E$, $y \in E'$, $x \neq y$ esetén $\mathfrak{z}(x) \neq \mathfrak{z}(y)$, s ez (6.3.13)-ra tekintettel ugyanaz, mint (a). ∎

Nevezzük az $[E, \mathcal{S}]$ szomszédsági tér $[E', \mathcal{S}']$ bővítését (ill. a $\mathcal{S}$ szomszédsági reláció $\mathcal{S}'$ bővítését) **redukált**nak, ha teljesül rá (6.4.6) (b) állítása (ennek feltétele tehát az ottani (a)). (6.3.22) mintájára igazolható:

(6.4.7) *Szeparált szomszédsági térnek minden redukált bővítése szeparált.* ∎

6.4.b. Szomszédsági tér kompaktifikációja. A (6.3.23) tételnek most a következő felel meg:

(6.4.8) *Legyen* $[E, \mathcal{S}]$ *tetszőleges szomszédsági tér,* $E'_k \supset E$ *pedig olyan halmaz, hogy* $x \in E'_k - E$ *pontjaihoz kölcsönösen egyértelműen hozzá legyenek rendelve az* $[E, \mathcal{S}]$*-beli összes nem* $\mathfrak{T}_{\mathcal{S}}$*-konvergens, kerek, komprimált szűrők. Az* $x \in E'_k - E$ *ponthoz így rendelt szűrőt* $\mathfrak{z}(x)$*-szel jelölve, legyen még* $x \in E$ *esetén* $\mathfrak{z}(x) = \mathfrak{v}(x)$ x*-nek* $\mathfrak{T}_{\mathcal{S}}$*-környezetszűrője. Ekkor a* (6.4.3) *szerint elkészített* $\mathcal{S}'_k$ *szomszédsági reláció* E'_k*-n kompakt, és redukált bővítése* $\mathcal{S}$*-nek.*

Bizonyítás. Ha $\mathcal{U}$ jelöli a $\mathcal{S}$-t indukáló prekompakt uniform struktúrát, akkor (5.2.18) szerint a nem-konvergens, kerek, komprimált szűrők $[E, \mathcal{S}]$-ben ugyanazok, mint a nem-konvergens, kerek Cauchy-szűrők $[E, \mathcal{U}]$-ban. Eszerint (6.3.23) jelöléseivel $E'_k = E'_c$ írható, és (6.4.3) szerint $\mathcal{S}'_k = \mathcal{S}_{\mathcal{U}'_c}$. Minthogy (6.3.31) értelmében $\mathcal{U}'_c$ kompakt, azért (6.3.23)-ra tekintettel valamennyi állítást igazoltuk. ∎

(6.4.9) *Legyen* $[E, \mathcal{S}]$ *tetszőleges szomszédsági tér,* $[E'_k, \mathcal{S}'_k]$ *ennek* (6.4.8)*-beli bővítése,* $E \subset E' \subset E'_k$. *Ha* $[E', \mathcal{S}'_k|E']$*-kompakt, akkor* $E' = E'_k$.

Bizonyítás. Legyen $\mathcal{U}'$ a $\mathcal{S}'_k$-t indukáló prekompakt struktúra. (5.2.19) szerint $\mathcal{U}'$ teljes, továbbá nyilván redukált bővítése $\mathcal{U}'|E = \mathcal{U}$-nak, s így azonos $\mathcal{U}$ teljes bővítésével. Ha $\mathcal{S}'_k|E'$ kompakt, akkor $\mathcal{U}'|E'$ teljes, és így az állítás (6.3.24)-ből és (6.3.26)-ból következik. ∎

(6.4.10) *Legyen* $[E'_k, \mathcal{S}'_k]$ *az* $[E, \mathcal{S}]$ *szomszédsági tér* (6.4.8)*-beli bővítése,* $[E', \mathcal{S}']$ *pedig ugyanezen tér tetszőleges redukált bővítése. Ekkor* $[E', \mathcal{S}']$*-t egy* E*-t rögzítő, egyértelmű meghatározott* h *ekvimorfizmussal át lehet vinni* $[E'_k, \mathcal{S}'_k]$*-nak alkalmas* $[E'', \mathcal{S}'']$ *alterébe, ahol tehát* $E \subset E'' \subset E'_k$, $\mathcal{S}'' = \mathcal{S}'_k|E''$. $\mathcal{S}'$ *pontosan akkor kompakt ha* $h(E') = E'' = E'_k$.

Bizonyítás. Legyen rendre $\mathcal{U}, \mathcal{U}'_c, \mathcal{U}'$ a $\mathcal{S}, \mathcal{S}'_k, \mathcal{S}'$ szomszédsági relációt indukáló prekompakt uniform struktúra. (6.4.2) szerint $\mathcal{U}'_c$ és $\mathcal{U}'$ bővítése, mégpedig nyilván redukált bővítése $\mathcal{U}$-nak, (5.2.19) szerint $\mathcal{U}'_c$ teljes is, és így (6.3.25) folytán létezik egy E-t rögzítő $h : E' \to E''$ bijekció, amely $(\mathcal{U}', \mathcal{U}'_c|E'')$-unimorfizmus, alkalmas $E \subset E'' \subset E'_k$ halmazzal. (3.2.50) szerint h $(\mathcal{S}', \mathcal{S}'_k|E'')$-ekvimorfizmus is. Másrészt, ha $g : E' \to E''$ egy $E \subset E'' \subset E'_k$ halmazzal E-t rögzítő $(\mathcal{S}', \mathcal{S}'_k|E'')$-ekvimorfizmus, akkor g (3.2.77) szerint $(\mathcal{U}', \mathcal{U}'_c|E'')$-unimorfizmus is, hiszen (3.2.70) szerint $\mathcal{U}'_c|E''$ is prekompakt. Így (6.3.25) értelmében $g = h$. $\mathcal{S}'$ és $\mathcal{S}'_k|E''$ egyszerre kompakt, mégpedig (6.4.9) szerint akkor, ha $E'' = E'_k$. ∎

Nevezzük az $[E, \mathcal{S}]$ szomszédsági tér **(Szmirnov-féle) kompaktifikáció**jának az $[E', \mathcal{S}']$ szomszédsági teret (ill. $\mathcal{S}$ kompaktifikációjának $\mathcal{S}'$-t), ha $\mathcal{S}'$ kompakt, és redukált bővítése $\mathcal{S}$-nek.

(6.4.8) és (6.4.10) alapján kimondható:

(6.4.11) *Minden* $[E, \mathcal{S}]$ *szomszédsági térnek létezik kompaktifikációja; ilyen a* (6.4.8)*-beli* $[E'_k, \mathcal{S}'_k]$. *Az* $[E, \mathcal{S}]$ *tér két kompaktifikációja egymásba* E*-t rögzítő egyértelműen meghatározott ekvimorfizmussal átvihető.* ∎

(6.4.7) alapján kimondható:

(6.4.12) *Szeparált szomszédsági tér kompaktifikációja is szeparált.* ∎

(6.4.13) *Legyen* $[E, \mathcal{S}]$ *szomszédsági tér,* $[E', \mathcal{S}']$ *ennek kompaktifikációja. Ha* $\mathcal{U}$ $\mathcal{S}$*-t indukáló uniform struktúra, akkor tartozik hozzá egy egyértelműen meghatározott* $E \subset E'_{\mathcal{U}} \subset E'$ *halmaz és ezen egy egyértelműen meghatározott* $\mathcal{U}'_{\mathcal{U}}$ *uniform* *struktúra úgy, hogy* $[E'_{\mathcal{U}}, \mathcal{U}'_{\mathcal{U}}]$ *teljes burka legyen* $[E, \mathcal{U}]$*-nak, és teljesüljön* $\mathcal{S}_{\mathcal{U}'_{\mathcal{U}}} = \mathcal{S}'|E'_{\mathcal{U}}$. *Ha* $\mathcal{U}_1 < \mathcal{U}_2$ *két* $\mathcal{S}$*-t indukáló uniform struktúra, akkor* $E'_{\mathcal{U}_1} \supset E'_{\mathcal{U}_2}$.

Bizonyítás. Ha $\mathcal{S}_{\mathcal{U}} = \mathcal{S}$, és $[E'_c, \mathcal{U}'_c]$ az $[E, \mathcal{U}]$ tér teljes burka, akkor $[E'_c, \mathcal{S}_{\mathcal{U}'_c}]$ nyilván redukált bővítése $[E, \mathcal{S}]$-nek, s így létezik egy egyértelműen meghatározott $E \subset E'_{\mathcal{U}} \subset E'$ halmaz és egy egyértelműen meghatározott E-t rögzítő h ekvimorfizmus, amely $[E'_c, \mathcal{S}_{\mathcal{U}'_c}]$-t $[E'_{\mathcal{U}}, \mathcal{S}'|E'_{\mathcal{U}}]$-be viszi át. Ha f jelöli ennek inverzét, és $\mathcal{U}'_{\mathcal{U}} = f^{-1}(\mathcal{U}'_c)$, akkor $\mathcal{U}'_{\mathcal{U}}$ a keresett uniform struktúra $E'_{\mathcal{U}}$-n, ugyanis (3.2.65) szerint f $(\mathcal{U}'_{\mathcal{U}}, \mathcal{U}'_c)$-unimorfizmus, (3.2.43) szerint $\mathcal{S}_{\mathcal{U}'_{\mathcal{U}}} = f^{-1}(\mathcal{S}_{\mathcal{U}'_c})$, és így (3.1.50) szerint $\mathcal{S}_{\mathcal{U}'_{\mathcal{U}}} = \mathcal{S}'|E'_{\mathcal{U}}$. (6.3.23) és (6.3.25) értelmében $E'_{\mathcal{U}}$ nyilván azokból az $x \in E'$ pontokból áll, amelyeknek $\mathcal{T}_{\mathcal{S}'}$-környezetszűrőjéből E-ben olyan $\mathfrak{z}(x)$ nyomszűrő adódik, amely $\mathcal{U}$-Cauchy-szűrő. Ebből és (5.1.3)-ból következik, hogy $\mathcal{U}_1 < \mathcal{U}_2$ esetén $E'_{\mathcal{U}_1} \supset E'_{\mathcal{U}_2}$. ∎

6.4.c. Teljesen reguláris tér kompaktifikációi. Eredményeink lehetővé teszik az S_2-kompaktifikációk alaposabb vizsgálatát. (5.3.22)-ből tudjuk, hogy minden kompakt S_2-tér S_4-tér, így S_π-tér is, és (4.2.7) szerint minden S_π-tér minden altere is S_π-tér. Eszerint S_2-kompaktifikációja csak teljesen reguláris térnek lehet. Megmutatjuk, hogy minden ilyen térnek van is S_2-kompaktifikációja, sőt a redukált S_2-kompaktifikációkról teljes áttekintést tudunk adni.

Állapodjunk meg a következő elnevezésekben. A teljesen reguláris $[E, \mathcal{T}]$ tér (vagy a $\mathcal{T}$ topológia) **szabályos kompaktifikáció**jának mondjuk az $[E', \mathcal{T}']$ teret (ill. a $\mathcal{T}'$ topológiát), ha $[E', \mathcal{T}']$ kompakt S_2-tér, és redukált bővítése $[E, \mathcal{T}]$-nek. Legyen $[E'_1, \mathcal{T}'_1]$ és $[E'_2, \mathcal{T}'_2]$ az $[E, \mathcal{T}]$ tér két szabályos kompaktifikációja. Azt mondjuk, hogy $[E'_1, \mathcal{T}'_1]$ **durvább kompaktifikáció,** mint $[E'_2, \mathcal{T}'_2]$ (vagy hogy $[E'_2, \mathcal{T}'_2]$ **finomabb kompaktifikáció,** mint $[E'_1, \mathcal{T}'_1]$), ha létezik E-t rögzítő $f: E'_2 \to E'_1$ $(\mathcal{T}'_2, \mathcal{T}'_1)$-folytonos szuperjekció. Azt mondjuk, hogy $[E'_1, \mathcal{T}'_1]$ és $[E'_2, \mathcal{T}'_2]$ egymással **ekvivalens kompaktifikáció**k, ha létezik E-t rögzítő $(\mathcal{T}'_1, \mathcal{T}'_2)$-homeomorfizmus; ez utóbbi reláció nyilván reflexív, szimmetrikus és tranzitív.

Előrebocsátjuk most már a következő észrevételt:

(6.4.14) *Legyen* $[E, \mathcal{T}]$ *teljesen reguláris tér,* $\mathcal{S}$ *egy* $\mathcal{T}$*-t indukáló szomszédsági reláció,* $[E', \mathcal{S}']$ *az* $[E, \mathcal{S}]$ *tér kompaktifikációja. Ekkor* $[E', \mathcal{T}_{\mathcal{S}'}]$ *az* $[E, \mathcal{T}]$ *térnek szabályos kompaktifikációja.*

Bizonyítás. $[E', \mathcal{T}_{\mathcal{S}'}]$ redukált bővítése $[E, \mathcal{T}]$-nek, kompakt, (3.1.15) szerint S_3-tér, és annál inkább S_2-tér. ∎

Ezen a módon minden szabályos kompaktifikációt megkaphatunk:

(6.4.15) *Legyen* $[E, \mathcal{T}]$ *teljesen reguláris tér,* $[E', \mathcal{T}']$ *ennek szabályos kompaktifikációja. Ekkor pontosan egy olyan* $\mathcal{T}'$*-t indukáló* $\mathcal{S}'$ *szomszédsági reláció van* E'*-n, hogy* $[E', \mathcal{S}']$ *kompaktifikációja* $[E, \mathcal{S}'|E]$*-nek, és* $\mathcal{T} = \mathcal{T}_{\mathcal{S}'|E}$.

Bizonyítás. (5.3.25) szerint pontosan egy $\mathcal{T}'$-t indukáló $\mathcal{S}'$ szomszédsági reláció van, és (3.1.27) szerint $\mathcal{T} = \mathcal{T}'|E = \mathcal{T}_{\mathcal{S}'|E}$, így $[E', \mathcal{S}']$ redukált, kompakt bővítése $[E, \mathcal{S}'|E]$-nek. ∎

E két tételt összefoglalja és kiegészíti a nevezetes

(6.4.16) **Szmirnov-féle tétel.** *Legyen* $[E, \mathcal{T}]$ *teljesen reguláris tér. E tér minden szabályos kompaktifikációja úgy származik, hogy egy* $\mathcal{T}$*-t indukáló* $\mathcal{S}$ *szomszédsági relációhoz elkészítjük* $[E, \mathcal{S}]$*-nek* $[E', \mathcal{S}']$ *kompaktifikációját, és* $\mathcal{T}'$*-t* $\mathcal{T}_{\mathcal{S}'}$*-vel egyen-*

lőnek választjuk. Bármely $\mathcal{T}$-t indukáló $\mathcal{S}$ szomszédsági relációból ezen a módon $[E, \mathcal{T}]$-nek szabályos kompaktifikációja keletkezik. Legyen $\mathcal{S}_1$ és $\mathcal{S}_2$ két $\mathcal{T}$-t indukáló szomszédsági reláció, $[E_1', \mathcal{T}_1']$ és $[E_2', \mathcal{T}_2']$ pedig nekik az előbbi módon megfelelő szabályos kompaktifikációk. Az $[E_1', \mathcal{T}_1']$ kompaktifikáció pontosan akkor durvább az $[E_2', \mathcal{T}_2']$ kompaktifikációnál, ha $\mathcal{S}_1 < \mathcal{S}_2$. E két kompaktifikáció pontosan akkor ekvivalens, ha $\mathcal{S}_1 = \mathcal{S}_2$.

Bizonyítás. Az első két állítás (6.4.14) és (6.4.15) megismétlése. Legyen $\mathcal{S}_1, \mathcal{S}_2$, $[E_1', \mathcal{T}_1']$ és $[E_2', \mathcal{T}_2']$ a tételben leírt tulajdonságú, és $\mathcal{S}_1'$, ill. $\mathcal{S}_2'$ a $\mathcal{T}_1'$-t, ill. $\mathcal{T}_2'$-t indukáló bővítése $\mathcal{S}_1$-nek, ill. $\mathcal{S}_2$-nek. Ha az $[E_1', \mathcal{T}_1']$ kompaktifikáció durvább $[E_2', \mathcal{T}_2']$-nél, akkor van egy E-t rögzítő $f : E_2' \to E_1'$ $(\mathcal{T}_2', \mathcal{T}_1')$-folytonos szuperjekció. (5.3.28) szerint f egyúttal $(\mathcal{S}_2', \mathcal{S}_1')$-szomszédságtartó is, s ekkor (3.1.47) és (3.1.48) szerint $f|_E^E$ $(\mathcal{S}_2, \mathcal{S}_1)$-szomszédságtartó, úgyhogy (3.1.42) értelmében $\mathcal{S}_1 < \mathcal{S}_2$. Megfordítva, ha $\mathcal{S}_1 < \mathcal{S}_2$, akkor E-nek identitása $(\mathcal{S}_2, \mathcal{S}_1)$-szomszédságtartó, és így (3.1.47) szerint, E-nek E_1'-be való kanonikus injekcióját g-vel jelölve, g $(\mathcal{S}_2, \mathcal{S}_1')$-szomszédságtartó. Így (6.2.11) biztosítja olyan $(\mathcal{S}_2', \mathcal{S}_1')$-szomszédságtartó $f : E_2' \to E_1'$ leképezés létezését, amelyre $f|E = g$. Eszerint f E-t rögzítő $(\mathcal{T}_2', \mathcal{T}_1')$-folytonos leképezés, tekintettel (3.1.40)-re. (5.3.10) szerint $\mathcal{T}_1'|f(E_2')$ kompakt, és $E \subset f(E_2') \subset E_1'$ miatt (6.4.9) és (6.4.11) alapján $f(E_2') = E_1'$.

Ha az $[E_1', \mathcal{T}_1']$ és $[E_2', \mathcal{T}_2']$ kompaktifikációk ekvivalensek egymással, akkor nyilván bármelyik durvább a másiknál, és így az előzők szerint $\mathcal{S}_1 < \mathcal{S}_2 < \mathcal{S}_1$ miatt $\mathcal{S}_1 = \mathcal{S}_2$. Ha viszont $\mathcal{S}_1 = \mathcal{S}_2$, akkor $[E_1', \mathcal{S}_1']$ és $[E_2', \mathcal{S}_2']$ az $[E, \mathcal{S}]$ (ahol $\mathcal{S} = \mathcal{S}_1 = \mathcal{S}_2$) szomszédsági tér két kompaktifikációja, tehát (6.4.11) szerint létezik egy E-t rögzítő $(\mathcal{S}_1', \mathcal{S}_2')$-ekvimorfizmus, amely (3.1.40) szerint $(\mathcal{T}_1', \mathcal{T}_2')$-homeomorfizmus is. ∎

Jegyezzük még meg:

(6.4.17) *Egy Tyihonov-tér szabályos kompaktifikációi nem mások, mint a tér T_2-kompaktifikációi.*

Bizonyítás. Ha $[E, \mathcal{T}]$ teljesen reguláris T_0-tér, akkor (6.1.16) szerint szabályos kompaktifikációi egyszerre T_0- és S_2-terek, s így T_2-terek. Megfordítva, egy T_2-kompaktifikáció S_2-tér is, T_0-tér is, tehát (6.1.15) szerint redukált S_2-kompaktifikáció. ∎

Az a szomszédsági reláció, amely (6.4.16) értelmében egy adott szabályos kompaktifikációhoz tartozik, közvetlenül megkapható:

(6.4.18) *Legyen $[E, \mathcal{T}]$ teljesen reguláris tér, $\mathcal{S}$ egy $\mathcal{T}$-t indukáló szomszédsági reláció, $[E', \mathcal{S}']$ az $[E, \mathcal{S}]$ tér kompaktifikációja, $\mathcal{T}' = \mathcal{T}_{\mathcal{S}'}$. Ekkor $A, B \subset E$ esetén $A \mathcal{S} B$ pontosan akkor áll, ha $\bar{A} \cap \bar{B} \neq \emptyset$; itt $\bar{X}$ az X halmaz $\mathcal{T}'$-lezárását jelenti.*

Bizonyítás. $A \overline{\mathcal{S}} B$ pontosan akkor áll, ha $A \overline{\mathcal{S}'} B$, s ez (3.1.14) szerint pontosan akkor, ha $\bar{A} \overline{\mathcal{S}'} \bar{B}$. Az utóbbi (5.3.25) értelmében azzal egyenértékű, hogy $\bar{A} \cap \bar{B} = \emptyset$. ∎

Ennek felhasználásával könnyen igazolható:

(6.4.19) *Legyen $[E, \mathcal{T}]$ nem-kompakt, teljesen reguláris tér. E tér Alekszandrov-féle kompaktifikációja pontosan akkor szabályos kompaktifikáció, ha a tér lokálisan kompakt, s akkor ez a tér legdurvább szabályos kompaktifikációja.*

Bizonyítás. (6.1.23) szerint az $[E', \mathfrak{T}']$ Alekszandrov-féle kompaktifikáció mindig redukált bővítés, és (6.1.25) szerint — ha $\mathfrak{T}$ teljesen reguláris — pontosan akkor S_2-tér, ha $\mathfrak{T}$ lokálisan kompakt. Ilyen $[E, \mathfrak{T}]$ tér esetében az $[E', \mathfrak{T}']$-höz tartozó $\mathfrak{S}$ szomszédsági reláció E-n (6.4.18) szerint pontosan akkor áll fenn A és B között, ha A és B $\mathfrak{T}'$-lezárása metszi egymást, más szóval $A \overline{\mathfrak{S}} B$ akkor áll, ha $\bar{A} \cap \bar{B} = \emptyset$, ahol $\bar{X}$ X-nek $\mathfrak{T}'$-lezárását jelöli. Az utóbbi azzal egyenértékű, hogy A-nak és B-nek $\mathfrak{T}$-lezárása nem metszi egymást, s ezenkívül — a szokásos $E' = E \cup \{\omega\}$ jelöléssel — $\bar{A}$ és $\bar{B}$ közül legfeljebb az egyik tartalmazza ω-t. Csakhogy $\omega \notin \bar{A}$ esetén $\bar{A} = \bar{A} \cap E$ A-nak $\mathfrak{T}$-lezárása és (5.3.4) szerint kompakt; másrészt ha $\bar{A} \cap E$ kompakt, akkor $E - \bar{A}$ hozzátartozik a $\mathfrak{z}(\omega)$ nyomszűrőhöz, tehát $(E - \bar{A}) \cup \{\omega\}$ ω-nak A-t nem metsző $\mathfrak{T}'$-környezete, és $\omega \notin \bar{A}$. Mindent összefoglalva $\mathfrak{S}$ azonos az (5.3.57)-ben definiált szomszédsági relációval, s arról tudjuk, hogy a legdurvább $\mathfrak{T}$-t indukáló szomszédsági reláció. ∎

(6.4.20) *Legyen $\mathfrak{P}$ bázis-háló az $[E, \mathfrak{T}]$ topologikus térben, $\emptyset, E \in \mathfrak{P}$, $\mathfrak{Q} = \{E - P : P \in \mathfrak{P}\}$, $[E', \mathfrak{T}']$ az $[E, \mathfrak{T}]$ térnek $\mathfrak{P}$-hez tartozó Wallman-típusú kompaktifikációja. A következő állítások egyenértékűek:*

(a) *$\mathfrak{T}$ teljesen reguláris, és $\mathfrak{T}'$ szabályos kompaktifikációja $\mathfrak{T}$-nek;*

(b) *$\mathfrak{P}$-re teljesül a* (6.1.52) (a) *és a* (6.1.53) (c) *feltétel.*

Ha (a), *ill.* (b) *teljesül, akkor a $\mathfrak{T}'$-höz* (6.4.16) *értelmében tartozó szomszédsági reláció azonos az* (5.3.66)*-ban értelmezettel.*

Bizonyítás. (a) ⟹ (b): Ha $\mathfrak{T}'$ szabályos kompaktifikáció, akkor S_2-topológia, és (6.1.53)-ból adódik, hogy teljesül (b).

(b) ⟹ (a): Ismét (6.1.53) alkalmazható, és biztosítja, hogy $\mathfrak{T}'$ kompakt S_2-topológia, tehát ő és vele együtt $\mathfrak{T}$ teljesen reguláris, ezen felül $\mathfrak{T}'$ redukált bővítése is $\mathfrak{T}$-nek.

Tegyük most fel, hogy teljesül (b), és legyen $\mathfrak{S}$ az (5.3.66)-beli szomszédsági reláció, azaz álljon $A \overline{\mathfrak{S}} B$ pontosan akkor, ha van olyan $Q_1, Q_2 \in \mathfrak{Q}$, hogy $A \subset Q_1$, $B \subset Q_2$, $Q_1 \cap Q_2 = \emptyset$. A Wallman-típusú kompaktifikáció definíciója szerint tehát (vonással a $\mathfrak{T}'$-lezárást jelölve) $A \overline{\mathfrak{S}} B$ esetén $\bar{Q}_1 \cap \bar{Q}_2 = \overline{Q_1 \cap Q_2} = \emptyset$, s annál inkább $\bar{A} \cap \bar{B} = \emptyset$. Megfordítva, $\bar{A} \cap \bar{B} = \emptyset$ esetén legyen

$$\bar{A} = \bigcap_{i \in I} \bar{Q}_i, \qquad \bar{B} = \bigcap_{i \in J} \bar{Q}'_j,$$

ahol $Q_i, Q'_j \in \mathfrak{Q}$; ilyen előállítások lehetőségét az biztosítja, hogy a $\mathfrak{T}'$-nyílt $E' - \bar{A}$ és $E' - \bar{B}$ halmaz $E' - \bar{Q}$ $(Q \in \mathfrak{Q})$ alakú halmazok egyesítése. Minthogy $\mathfrak{T}'$ kompakt, és

$$\Big(\bigcap_{i \in I} \bar{Q}_i\Big) \cap \Big(\bigcap_{j \in J} \bar{Q}'_j\Big) = \emptyset,$$

azért az összes $\bar{Q}_i$ és $\bar{Q}'_j$ halmazok rendszere nem lehet centrált, és ez $\bar{A} \neq \emptyset$, $\bar{B} \neq \emptyset$ esetén csak úgy lehetséges, hogy

$$\Big(\bigcap_{k=1}^{m} \bar{Q}_{i_k}\Big) \cap \Big(\bigcap_{l=1}^{n} \bar{Q}'_{j_l}\Big) = \emptyset$$

alkalmas $m, n \geq 1$, $i_1, \ldots, i_m$, $j_1, \ldots, j_n$ mellett.

Ekkor azonban

$$A \subset \bar{A} \cap E \subset \bigcap_{k=1}^{m} (\bar{Q}_{i_k} \cap E) = \bigcap_{k=1}^{m} Q_{i_k} = Q \in \mathfrak{Q},$$

$$B \subset \bar{B} \cap E \subset \bigcap_{l=1}^{n} (\bar{Q}'_{j_l} \cap E) = \bigcap_{l=1}^{n} Q'_{j_l} = Q' \in \mathfrak{Q},$$

továbbá $Q \cap Q' = \emptyset$. Ugyanez áll $\bar{A} = \emptyset$ vagy $\bar{B} = \emptyset$ esetén a $Q = \emptyset$, $Q' = E$, ill. $Q = E$, $Q' = \emptyset$ választással. ∎

(6.4.20)-ból (5.3.65) és (5.3.67) alapján kiolvasható:

(6.4.21) *Egy peremkompakt S_2-tér Freudenthal-féle kompaktifikációja nem más, mint a tér Freudenthal-féle szomszédsági relációjához tartozó szabályos kompaktifikáció.* ∎

6.4.d. Čech – Stone-féle kompaktifikáció. Tudjuk, hogy egy teljesen reguláris $\mathcal{T}$ topológiát indukáló szomszédsági relációk között van egy legfinomabb, a Čech—Stone-féle. (6.4.16) értelmében az ehhez tartozó szabályos kompaktifikáció a legfinomabb szabályos kompaktifikáció. (4.2.21) figyelembevételével kimondhatjuk tehát:

(6.4.22) *Legyen $[E, \mathcal{T}]$ teljesen reguláris tér, $\mathcal{S}$ az a szomszédsági reláció E-n, amelyre $A \overline{\mathcal{S}} B$ pontosan akkor áll, ha A és B $\mathcal{T}$-folytonos függvénnyel szétválasztható, $[E', \mathcal{S}']$ az $[E, \mathcal{S}]$ tér kompaktifikációja, és $\mathcal{T}' = \mathcal{T}_{\mathcal{S}'}$. Ekkor $[E', \mathcal{T}']$ az $[E, \mathcal{T}]$ tér legfinomabb szabályos kompaktifikációja.* ∎

A (6.4.22)-beli $[E', \mathcal{T}']$ teret az $[E, \mathcal{T}]$ tér, a $\mathcal{T}'$ topológiát a $\mathcal{T}$ topológia **Čech—Stone-féle kompaktifikáció**jának nevezzük. (6.4.16)-ból azonnal következik, hogy $[E, \mathcal{T}]$ két Čech—Stone-féle kompaktifikációja egymásba E-t rögzítő homeomorfizmussal átvihető.

A Čech—Stone-féle kompaktifikáció nevezetes és egyúttal jellemző tulajdonságát mondja ki a következő tétel:

(6.4.23) *Legyen $[E', \mathcal{T}']$ szabályos kompaktifikációja az $[E, \mathcal{T}]$ teljesen reguláris térnek. A következő állítások egyenértékűek:*

(a) *$[E', \mathcal{T}']$ Čech—Stone-féle kompaktifikációja $[E, \mathcal{T}]$-nek;*

(b) *Ha $[X, \mathcal{T}_1]$ kompakt S_2-tér, és $f : E \to X$ $(\mathcal{T}, \mathcal{T}_1)$-folytonos, akkor van olyan $(\mathcal{T}', \mathcal{T}_1)$-folytonos $g : E' \to X$, hogy $g|E = f$;*

(c) *Ha f $\mathcal{T}$-folytonos, korlátos függvény, akkor van olyan g $\mathcal{T}'$-folytonos függvény, hogy $g|E = f$.*

Bizonyítás. (a) $\Rightarrow$ (b): Legyen $\mathcal{S}$ a $\mathcal{T}$ topológia Čech—Stone-féle szomszédsági relációja, $\mathcal{S}'$ ennek $\mathcal{T}'$-t indukáló bővítése, $\mathcal{S}_1$ pedig a $\mathcal{T}_1$-et indukáló (egyetlen, l. (5.3.25)) szomszédsági reláció. Ha $f : E \to X$, $(\mathcal{T}, \mathcal{T}_1)$-folytonos, akkor (3.1.49) szerint $(\mathcal{S}, \mathcal{S}_1)$-szomszédságtartó is, és így (6.2.11) szerint van olyan $(\mathcal{S}', \mathcal{S}_1)$-szomszédságtartó $g : E' \to X$, hogy $g|E = f$. Ez a g $(\mathcal{T}', \mathcal{T}_1)$-folytonos is.

(b) $\Rightarrow$ (c): Legyen $I \subset \mathbf{R}$ olyan véges, zárt intervallum, hogy $f(E) \subset I$. Ekkor $h = f\,|_E^I : E \to I$ $(\mathcal{T}, \mathcal{E}|I)$-folytonos (2.6.21) szerint, s minthogy (5.3.3) szerint $\mathcal{E}|I$

kompakt, és természetesen T_2-topológia is, azért van olyan $k : E' \to I$, amely $(\mathfrak{T}', \mathfrak{E}|I)$-folytonos, és $k|E = h$. Ha még $m : I \to \mathbf{R}$ a kanonikus injekció, és $g = m \circ k$, akkor $g : E' \to \mathbf{R}$ f-nek keresett $(\mathfrak{T}', \mathfrak{E})$-folytonos kiterjesztése.

(c) $\Rightarrow$ (a): Legyen $\mathfrak{S}_0'$ a $\mathfrak{T}'$-t indukáló szomszédsági reláció, $\mathfrak{S}_0 = \mathfrak{S}_0'|E$. Azt kell megmutatnunk, hogy $\mathfrak{S}_0$ azonos $\mathfrak{T}$-nek $\mathfrak{S}$ Čech—Stone-féle szomszédsági relációjával, azaz $\mathfrak{S}_0 < \mathfrak{S}$-re tekintettel azt, hogy $\mathfrak{S} < \mathfrak{S}_0$. Ha azonban $A \overline{\mathfrak{S}} B$, azaz ha (4.2.21) értelmében A és B egy $\mathfrak{T}$-folytonos f függvénnyel szétválasztható, akkor legyen $g : E' \to \mathbf{R}$ olyan $\mathfrak{T}'$-folytonos függvény, amelyre $g|E = f$. (2.6.23) (e) miatt g még A-nak $\mathfrak{T}'$-lezárásán is 0-val, B-nek $\mathfrak{T}'$-lezárásán is 1-gyel egyenlő, úgyhogy e két lezárás nem metszi egymást. (6.4.18)-ból következik, hogy $A \overline{\mathfrak{S}_0} B$. ▌

A Čech—Stone-féle kompaktifikációk altereit viszont így jellemezhetjük:

(6.4.24) *Legyen $[E, \mathfrak{T}]$ teljesen reguláris tér, $[E_1, \mathfrak{T}_1]$ pedig ennek teljesen reguláris, redukált bővítése. Ha $[E_1, \mathfrak{T}_1]$ az $[E, \mathfrak{T}]$ tér Čech—Stone-féle kompaktifikációjának altere, akkor minden korlátos, $\mathfrak{T}$-folytonos függvénynek van $\mathfrak{T}_1$-folytonos kiterjesztése; ha viszont $[E_1, \mathfrak{T}_1]$ az utóbbi tulajdonsággal rendelkezik, akkor $[E_1, \mathfrak{T}_1]$-nek valamely $[E_2, \mathfrak{T}_2]$ Čech—Stone-féle kompaktifikációja egyúttal $[E, \mathfrak{T}]$-nek is Čech—Stone-féle kompaktifikációja.*

Bizonyítás. Az első állítás (6.4.23)-ból azonnal következik. A másodikra térve, (6.1.18) szerint $[E_2, \mathfrak{T}_2]$ redukált bővítése, és így szabályos kompaktifikációja $[E, \mathfrak{T}]$-nek. Ha f korlátos, $\mathfrak{T}$-folytonos függvény, akkor van $\mathfrak{T}_1$-folytonos kiterjesztése, amely (2.6.23) (e) miatt maga is korlátos, és így $\mathfrak{T}_2$-folytonosan kiterjeszthető E_2-re. Így az állítás (6.4.23)-ból következik. ▌

A Wallman-féle és a Cech—Stone-féle kompaktifikáció kapcsolatáról a következő mondható:

(6.4.25) *Legyen $[E, \mathfrak{T}]$ teljesen reguláris tér, $[E', \mathfrak{T}']$ ennek Wallman-féle kompaktifikációja. $[E', \mathfrak{T}']$ pontosan akkor szabályos kompaktifikációja $[E, \mathfrak{T}]$-nek, ha $\mathfrak{T}$ normális, s akkor azonos $[E, \mathfrak{T}]$ Čech—Stone-féle kompaktifikációjával.*

Bizonyítás. (6.1.55) szerint $[E', \mathfrak{T}']$ redukált kompaktifikációja $[E, \mathfrak{T}]$-nek, s így pontosan akkor szabályos kompaktifikáció, ha S_2-tér. Ez (6.1.57) szerint akkor következik be, ha $\mathfrak{T}$ normális. Ekkor viszont (6.2.4) szerint teljesül rá a (6.4.23) (b) állítás. ▌

A Čech—Stone-féle kompaktifikációt eredetileg a Čech—Stone-féle szomszédsági reláció segítségével értelmeztük. Előállíthatjuk azonban egy uniform struktúra segítségével is:

(6.4.26) *Legyen $[E, \mathfrak{T}]$ teljesen reguláris tér, és Φ^* az összes korlátos, $\mathfrak{T}$-folytonos függvényekből álló függvénycsalád. Ekkor az $[E, \mathfrak{U}_{\Phi^*}]$ uniform tér teljes burkát $[E', \mathfrak{U}']$-vel jelölve, $[E', \mathfrak{T}_{\mathfrak{U}'}]$ Čech—Stone-féle kompaktifikációja $[E, \mathfrak{T}]$-nek.*

Bizonyítás. (4.2.21) szerint $\mathfrak{S}_{\mathfrak{U}_{\Phi^*}} = \mathfrak{S}_{\Phi^*}$ azonos $\mathfrak{T}$ Čech—Stone-féle szomszédsági relációjával, és $\mathfrak{U}_{\Phi^*}$ (4.2.13) szerint prekompakt. (6.3.31) szerint $[E', \mathfrak{U}']$ kompakt, redukált bővítése $[E, \mathfrak{U}_{\Phi^*}]$-nak, tehát $[E', \mathfrak{S}_{\mathfrak{U}'}]$ azonos $[E, \mathfrak{S}_{\Phi^*}]$ kompaktifikációjával, $[E', \mathfrak{T}_{\mathfrak{S}_{\mathfrak{U}'}}] = [E', \mathfrak{T}_{\mathfrak{U}'}]$ pedig $[E, \mathfrak{T}]$-nek Čech—Stone-féle kompaktifikációjával. ▌

Így aztán a teljesen reguláris terek körében a kompakt terek a következőképpen is jellemezhetők:

(6.4.27) *Legyen* $[E, \mathfrak{T}]$ *teljesen reguláris tér,* Φ^* *a korlátos,* $\mathfrak{T}$*-folytonos függvényekből álló függvénycsalád. A következő állítások egyenértékűek:*

(a) $[E, \mathfrak{T}]$ *kompakt;*

(b) $\mathcal{U}_{\Phi^*}$ *teljes;*

(c) $[E, \mathfrak{T}]$ *önmagának Čech—Stone-féle kompaktifikációja.*

Bizonyítás. (a) $\Rightarrow$ (b): (4.2.21) szerint $\mathfrak{T}_{\mathcal{U}_{\Phi^*}} = \mathfrak{T}$, úgyhogy (5.2.19) szerint $\mathfrak{T}$ kompaktságából $\mathcal{U}_{\Phi^*}$ teljessége következik.

(b) $\Rightarrow$ (c): Ha $\mathcal{U}_{\Phi^*}$ teljes, akkor $[E, \mathcal{U}_{\Phi^*}]$ önmagának teljes burka, és (6.4.26) szerint $[E, \mathfrak{T}]$-nek Čech—Stone-féle kompaktifikációja $[E, \mathfrak{T}_{\mathcal{U}_{\Phi^*}}] = [E, \mathfrak{T}]$.

(c) $\Rightarrow$ (a): Triviális. ∎

6.4.e. Reálkompakt terek. A kompakt teljesen reguláris tereknek az előző tételben adott jellemzése felveti a kompaktság fogalmával kapcsolatos újabb általánosítás lehetőségét. (4.2.21)-ből tudjuk ugyanis, hogy ha $[E, \mathfrak{T}]$ teljesen reguláris tér, akkor nemcsak a korlátos $\mathfrak{T}$-folytonos függvények alkotnak $\mathfrak{T}$-t indukáló függvénycsaládot, hanem az összes $\mathfrak{T}$-folytonos függvények is. Legyen Φ ez a függvénycsalád, és nevezzük az $[E, \mathfrak{T}]$ teljesen reguláris teret (és a $\mathfrak{T}$ topológiát) **reálkompakt**nak, ha az $\mathcal{U}_{\Phi}$ uniform struktúra teljes.

Könnyű megmutatni, hogy itt csakugyan a kompaktság fogalmának egy — csupán teljesen reguláris terekre szorítkozó — általánosításáról van szó. Pontosabban szólva:

(6.4.28) *Egy teljesen reguláris tér pontosan akkor kompakt, ha reálkompakt és pszeudokompakt.*

Bizonyítás. (5.3.27)-ből következik, hogy minden kompakt tér pszeudokompakt. Másrészt (5.2.19) szerint $\mathfrak{T}$ kompaktságából a (4.2.21) alapján fennálló $\mathfrak{T} = \mathfrak{T}_{\mathcal{U}_{\Phi}}$ egyenlőség miatt $\mathcal{U}_{\Phi}$ teljessége is következik. Viszont ha $\mathfrak{T}$ pszeudokompakt, akkor az előbbi jelölésekkel $\Phi = \Phi^*$, tehát $\mathcal{U}_{\Phi}$ teljessége $\mathcal{U}_{\Phi^*}$ teljességét és (6.4.27) szerint $\mathfrak{T}$ kompaktságát vonja maga után. ∎

Az, hogy itt valódi általánosításról van szó, kitűnik, ha sikerül példát adnunk reálkompakt, de nem kompakt térre. Ennek érdekében jegyezzük meg mindenek előtt:

(6.4.29) *Legyen* $[E, \mathfrak{T}]$ *teljesen reguláris tér,* Φ *a* $\mathfrak{T}$*-folytonos függvényekből álló függvénycsalád,* ρ_1 *az euklideszi távolság* **R**-*en. Egy E-beli* $\mathfrak{r}$ *rács pontosan akkor* $\mathcal{U}_{\Phi}$*-Cauchy-rács, ha minden* $f \in \Phi$ *függvényre* $f(\mathfrak{r})$ $\mathcal{U}_{\rho_1}$*-Cauchy-rács.*

Bizonyítás. Ha $\mathfrak{r}$ $\mathcal{U}_{\Phi}$-Cauchy-rács, akkor bármely $f \in \Phi$-hez és bármely $\varepsilon > 0$-hoz található $U_{\sigma_f, \varepsilon}$-rendben kicsiny $R \in \mathfrak{r}$ halmaz, vagyis olyan $f(R) \in f(\mathfrak{r})$ halmaz, hogy $x, y \in R$ esetén $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$ legyen; ekkor tehát $f(\mathfrak{r})$ $\mathcal{U}_{\rho_1}$-Cauchy-rács. Megfordítva, ha $f(\mathfrak{r})$ minden $f \in \Phi$ mellett $\mathcal{U}_{\rho}$ -Cauchy-rács, és $U \in \mathcal{U}_{\Phi}$ tetszőleges környék, akkor található véges számú $f_1, \ldots, f_n \in \Phi$ függvény és egy $\varepsilon > 0$ úgy, hogy $U_{\{\sigma_{f_1}, \ldots, \sigma_{f_n}\}, \varepsilon} \subset U$. Legyen $R_i \in \mathfrak{r}$ $(i = 1, \ldots, n)$ olyan halmaz, hogy $f_i(R_i)$ ε-rendben kicsiny, és $R \in \mathfrak{r}$, $R \subset \bigcap_1^n R_i$. Ekkor nyilvánvaló, hogy R $U_{\{\sigma_{f_1}, \ldots, \sigma_{f_n}\}, \varepsilon}$-rendben, s még inkább U-rendben kicsiny. ∎

Most már könnyen belátható:

(6.4.30) *Az* $[\mathbf{R}^m, \mathfrak{S}^m]$ *tér reálkompakt.*

Bizonyítás. Ha Φ az $\mathfrak{G}^m$-folytonos függvények összessége, és $\mathfrak{r}$ $\mathbf{R}^m$-beli $\mathcal{U}_\Phi$-Cauchy-rács, akkor (6.4.29) szerint az $f_i(x_1, \ldots, x_m) = x_i$ $(i = 1, \ldots, m)$ függvények mindegyikére $f_i(\mathfrak{r})$ $\mathcal{U}_{\rho_1}$-Cauchy-rács, és így adott $\varepsilon > 0$-hoz van olyan $R_i \in \mathfrak{r}$, hogy $x, y \in R_i$ esetén $|x_i - y_i| < \dfrac{\varepsilon}{m}$. Ha még $R \in \mathfrak{r}$, $R \subset \bigcap\limits_1^n R_i$, akkor $x, y \in R$ esetén — ρ_m-mel jelölve az $\mathbf{R}^m$-beli euklideszi távolságot — (1.2.10) szerint $\rho_m(x, y) < \varepsilon$. Eszerint minden $\mathcal{U}_\Phi$-Cauchy-rács $\mathcal{U}_{\rho_m}$-Cauchy-rács is, úgyhogy (5.1.10) és (1.2.12) szerint $\mathfrak{r}$ konvergens. ∎

A pszeudokompakt és a reálkompakt teljesen reguláris terek újabb, nevezetes jellemzése adható meg a Čech—Stone-féle kompaktifikáció felhasználásával. Ennek érdekében vezessük be az $[\mathbf{R}, \mathfrak{G}]$ tér Alekszandrov-féle kompaktifikációját, az $\mathbf{R}$-hez hozzávett újabb pontot ∞-nel jelölve: $\mathbf{R}^* = \mathbf{R} \cup \{\infty\}$; a megfelelő topológiát jelöljük $\mathfrak{G}^*$-gal. Eszerint $[\mathbf{R}, \mathfrak{G}]$ altere $[\mathbf{R}^*, \mathfrak{G}^*]$-nak. Minthogy $[\mathbf{R}, \mathfrak{G}]$ (5.3.52) szerint lokálisan kompakt T_2-tér, azért (6.1.25) és (6.1.23) szerint $[\mathbf{R}^*, \mathfrak{G}^*]$ kompakt T_2-tér. Érvényes mármost a következő fontos megjegyzés:

(6.4.31) *Legyen $[E, \mathfrak{T}]$ teljesen reguláris tér, $[E', \mathfrak{T}']$ ennek Čech—Stone-féle kompaktifikációja, Φ a $\mathfrak{T}$-folytonos függvények családja, $[\mathbf{R}^*, \mathfrak{G}^*]$ az $[\mathbf{R}, \mathfrak{G}]$ tér Alekszandrov-féle kompaktifikációja, $\mathbf{R}^* = \mathbf{R} \cup \{\infty\}$. Ekkor minden $f \in \Phi$ függvényhez pontosan egy $f^* : E' \to \mathbf{R}^*$ $(\mathfrak{T}', \mathfrak{G}^*)$-folytonos leképezés létezik, amelyre $f^* \mid_E^{\mathbf{R}} = f$.*

Bizonyítás. Legyen $f \in \Phi$, és jelöljük g-vel $\mathbf{R}$-nek $\mathbf{R}^*$-ba való kanonikus injekcióját. Ekkor $g \circ f$ (2.6.21) szerint $(\mathfrak{T}, \mathfrak{G}^*)$-folytonos, és így (6.4.23) szerint van olyan $f^* : E' \to \mathbf{R}^*$ $(\mathfrak{T}', \mathfrak{G}^*)$-folytonos leképezés, hogy $f^* \mid E = g \circ f$, s innen $f^* \mid_E^{\mathbf{R}} = f$. Másrészt ha f_1^* és f_2^* $(\mathfrak{T}', \mathfrak{G}^*)$-folytonos, és $f_1^* \mid_E^{\mathbf{R}} = f_2^* \mid_E^{\mathbf{R}} = f$, akkor persze $f_1^* \mid E = f_2^* \mid E = g \circ f$, és így (6.2.3) szerint $f_1^* = f_2^*$. ∎

(6.4.31) tekintetbevételével mármost — az ottani jelöléseket használva — az $[E', \mathfrak{T}']$ Čech—Stone-féle kompaktifikáció pontjait két csoportba sorolhatjuk: az $x \in E'$ pontot **végesnek** mondjuk, ha $f^*(x) \in \mathbf{R}$ minden $f \in \Phi$ függvényre, és **végtelennek**, ha legalább egy $f \in \Phi$ függvényre $f^*(x) = \infty$. Természetesen az E tér pontjai mind végesek, ez a megkülönböztetés csakis az $E' - E$ halmazhoz tartozó pontok esetében érdekes.

Ennek segítségével most már így jellemezhetjük a pszeudokompakt teljesen reguláris tereket:

(6.4.32) *Egy teljesen reguláris tér pontosan akkor pszeudokompakt, ha Čech—Stone-féle kompaktifikációjában minden pont véges.*

Bizonyítás. A (6.4.31) alatti jelöléseket használjuk. Ha $[E, \mathfrak{T}]$ pszeudokompakt, és $f \in \Phi$, akkor f-nek korlátossága miatt van $(\mathfrak{T}', \mathfrak{G})$-folytonos f_1 kiterjesztése (6.4.23) szerint, s ebből f^* az $f^* = g \circ f_1$ képlettel kapható (2.6.21) alapján ($g: \mathbf{R} \to \mathbf{R}^*$ ismét a kanonikus injekció). Így ekkor $f^*(x) = f_1(x) \in \mathbf{R}$ minden $x \in E'$ pontra és $f \in \Phi$ függvényre. Megfordítva, ha E'-ben minden pont véges, akkor tetszőleges $f \in \Phi$ függvényre $f^* \mid_E^{\mathbf{R}}$ f-nek $(\mathfrak{T}', \mathfrak{G})$-folytonos kiterjesztése, és $\mathfrak{T}'$ kompaktsága miatt (5.3.27) szerint korlátos; vele együtt persze f is korlátos lesz. ∎

Szükségünk lesz a véges pontok következő jellemzésére:

(6.4.33) *Legyen* $[E, \mathfrak{T}]$ *teljesen reguláris tér,* $[E', \mathfrak{T}']$ *ennek Čech—Stone-féle kompaktifikációja, és* $x \in E'$ *esetén* $\mathfrak{v}'(x)$ *az* x *pont* $\mathfrak{T}'$*-környezetszűrője,* $\mathfrak{z}(x) = \mathfrak{v}'(x) (\cap) \{E\}$ *pedig az utóbbinak E-beli nyomszűrője. Az* $x \in E'$ *pont pontosan akkor véges, ha* $\mathfrak{z}(x)$ $\mathfrak{U}_\Phi$*-Cauchy-szűrő* (Φ *szokás szerint a* $\mathfrak{T}$*-folytonos függvények családja*).

Bizonyítás. Ha x véges pont, akkor $f \in \Phi$ esetén — (6.4.31) jelöléseivel — $f^*(x) \in \mathbf{R}$, és így $h = f^* | ^{\mathbf{R}}_{E \cup \{x\}} (\mathfrak{T}' | E \cup \{x\}, \mathfrak{E})$-folytonos (2.6.21) és (2.6.22) miatt, úgyhogy $h(\mathfrak{z}(x)) \to h(x)$ $\mathfrak{E}$-re nézve, s akkor $f(\mathfrak{z}(x)) = h(\mathfrak{z}(x))$ $\mathfrak{U}_{\rho_1}$-Cauchy-rács, tehát (6.4.29) szerint $\mathfrak{z}(x)$ $\mathfrak{U}_\Phi$-Cauchy-rács.

Ha viszont x végtelen pont, akkor van olyan $f \in \Phi$, hogy $f^*(x) = \infty$. Így $n \in \mathbf{N}$ esetén található olyan $S_n \in \mathfrak{z}(x)$, hogy $y \in S_n$ esetén $|f(y)| > n$. Tetszőleges $S \in \mathfrak{z}(x)$ halmazból egy $z \in S$ pontot választva, legyen $y_n \in S \cap S_n$. Ekkor $|f(y_n) - f(z)| \to \infty$ folytán $f(S)$ nem korlátos, és $\mathfrak{z}(x)$ nem lehet $\mathfrak{U}_\Phi$-Cauchy-szűrő. ∎

Ennek felhasználásával igazolhatjuk (6.4.32) következő megfelelőjét:

(6.4.34) *Az* $[E, \mathfrak{T}]$ *teljesen reguláris tér pontosan akkor reálkompakt, ha* $[E', \mathfrak{T}']$ *Čech—Stone-féle kompaktifikációjában minden* $x \in E' - E$ *pont végtelen.*

Bizonyítás. (6.4.33) jelöléseit alkalmazzuk. Ha $\mathfrak{U}_\Phi$ teljes, és $x \in E' - E$, akkor x nem lehet véges, hiszen ebből (6.4.33) szerint az következnék, hogy $\mathfrak{z}(x)$ $\mathfrak{U}_\Phi$-Cauchy-szűrő, tehát $\mathfrak{z}(x) \to y \in E$ $\mathfrak{T}$-re nézve, holott $\mathfrak{z}(x)$ nem $\mathfrak{T}$-konvergens $[E', \mathfrak{T}']$ definíciója szerint (l. (6.4.8) és (6.4.10)).

Megfordítva, ha minden $x \in E' - E$ pont végtelen, és $\mathfrak{r}$ $\mathfrak{U}_\Phi$-Cauchy-rács, akkor a $\mathfrak{S} = \mathfrak{S}_{\mathfrak{U}_\Phi}$ jelöléssel legyen $\mathfrak{z} = \mathfrak{p}(\mathfrak{r})$ $\mathfrak{r}$-nek $\mathfrak{S}$-szomszédságszűrője. (6.3.9) és (6.3.14) szerint $\mathfrak{z}$ kerek Cauchy-szűrő $\mathfrak{U}_\Phi$-re nézve. Ha $\mathfrak{z}$ nem volna $\mathfrak{T}$-konvergens, akkor alkalmas $x \in E' - E$-re $\mathfrak{z} = \mathfrak{z}(x)$ volna, ugyanis $\mathfrak{S}$ (4.2.21) szerint éppen $\mathfrak{T}$ Čech—Stone-féle szomszédsági relációja, és $\mathfrak{z}$ (5.2.8) miatt $\mathfrak{S}$-komprimált. Feltevésünk szerint azonban $\mathfrak{z}(x)$ nem lehet $\mathfrak{U}_\Phi$-Cauchy-szűrő. Így $\mathfrak{z}$, s annál inkább $\mathfrak{r} > \mathfrak{z}$, $\mathfrak{T}$-konvergens. Ennélfogva $\mathfrak{U}_\Phi$ teljes, $\mathfrak{T}$ reálkompakt. ∎

A véges pontoknak nyomszűrőjükkel való újabb jellemzése érdekében vezessük be a következő elnevezést: egy $\mathfrak{A}$ halmazrendszert **erősen centráltnak** mondunk, ha bárhogyan választva megszámlálható sok $A_n \in \mathfrak{A}$ ($n \in \mathbf{N}$) halmazt, $\bigcap_1^\infty A_n \neq \emptyset$.

Mármost a következő egyszerű tétel mondható ki:

(6.4.35) A (6.4.33) *alatti jelölésekkel egy* $x \in E'$ *pont pontosan akkor véges, ha* $\mathfrak{z}(x)$ *erősen centrált.*

Bizonyítás. Ha x végtelen, akkor van olyan $f \in \Phi$ — a szokott (6.4.31) alatti jelölésekkel —, hogy $f^*(x) = \infty$. Ezért minden $n \in \mathbf{N}$-hez található olyan $S_n \in \mathfrak{z}(x)$, hogy $y \in S_n$ esetén $|f(y)| > n$. Világos, hogy $\bigcap_1^\infty S_n = \emptyset$, és így $\mathfrak{z}(x)$ nem erősen centrált.

Tegyük fel megfordítva, hogy $\mathfrak{z}(x)$ nem erősen centrált, azaz találhatók olyan $A_n \in \mathfrak{z}(x)$ halmazok, hogy $\bigcap_1^\infty A_n = \emptyset$. Jelöljük $\mathfrak{S}$-vel $\mathfrak{T}$ Čech—Stone-féle szomszédsági relációját, és készítsünk olyan $B_n \in \mathfrak{z}(x)$ halmazokat, hogy $B_n \subset A_n$, és $B_{n+1}\, \overline{\mathfrak{F}}\, E - B_n$. E célból legyen $B_1 = A_1$, s ha $B_n \in \mathfrak{z}(x)$ már értelmezve van, legyen $\mathfrak{z}(x)$ $\mathfrak{F}$-kerek voltára hivatkozva $B \in \mathfrak{z}(x)$ olyan, hogy $B\, \overline{\mathfrak{F}}\, E - B_n$, majd $B_{n+1} = B \cap A_{n+1}$. Ekkor a B_n halmazok valóban a kívánt tulajdonságúak. $B_n \subset A_n$ miatt persze $\bigcap\limits_1^\infty B_n = \emptyset$.

(4.2.21) szerint minden $n \in \mathbf{N}$-hez található olyan $f_n \in \Phi$ függvény, amely B_{n+1}et és $(E - B_n)$-t szétválasztja, azaz $x' \in E$ esetén $0 \leqq f_n(x') \leqq 1$, $x' \in B_{n+1}$ esetén $f_n(x') = 0$, $x' \in E - B_n$ esetén $f_n(x') = 1$. Legyen $x' \in E$ esetén $f(x') = \sum\limits_1^\infty \frac{1}{2^n} f_n(x')$. (2.6.30) és (2.6.29) szerint $f \in \Phi$, s nyilván $f(x') > 0$ minden $x' \in E$ helyen, mert $\bigcap\limits_1^\infty B_n = \emptyset$ folytán valamely n-re $x' \in E - B_n$, s akkor $f(x') \geqq \frac{1}{2^n} f_n(x') = \frac{1}{2^n} > 0$. (2.6.27) szerint tehát $h = \frac{1}{f} \in \Phi$. Viszont $x' \in B_{n+1}$ esetén $f_i(x') = 0$ $(i = 1, \ldots, n)$, hiszen $B_{n+1}\, \overline{\mathfrak{F}}\, E - B_n$ folytán $B_{n+1} \subset B_n$ minden n-re, így pedig ekkor

$$0 < f(x') \leqq \sum_{n+1}^{\infty} \frac{1}{2^i} = \frac{1}{2^n},$$

azaz $h(x') \geqq 2^n$. Ez $x \in \bar{B}_n$ $(n \in \mathbf{N})$ miatt csak $h^*(x) = \infty$ esetén lehetséges, és x végtelen pont. ∎

(6.4.35) felhasználásával igazolható (6.4.30) következő messzemenő általánosítása:

(6.4.36) *Minden teljesen reguláris Lindelöf-tér reálkompakt.*

Bizonyítás. (6.4.34)-re tekintettel azt kell megmutatnunk, hogy a szokott jelölésekkel $x \in E' - E$ esetén x végtelen pont. Tegyük fel ezzel ellentétben, hogy x véges. Ekkor a megfelelő $\mathfrak{z} = \mathfrak{z}(x)$ nyomszűrő nem $\mathfrak{T}$-konvergens, továbbá (6.4.33) szerint $\mathfrak{U}_\Phi$-Cauchy-szűrő, (6.4.35) szerint pedig erősen centrált. (5.2.28) szerint $\mathfrak{z}$-nek $\mathfrak{T}$-torlódási pontja sem lehet, és így minden $y \in E$ pontnak van olyan nyílt V_y $\mathfrak{T}$-környezete, hogy V_y $\mathfrak{z}$-nek alkalmas halmazát nem metszi, úgyhogy $E - V_y \in \mathfrak{z}$. Legyen $E = \bigcup\limits_1^\infty V_{y_i}$. Ekkor $E - V_{y_i} \in \mathfrak{z}$, $\bigcap\limits_1^\infty (E - V_{y_i}) = \emptyset$ ellentmond $\mathfrak{z}$ erősen centrált voltának. ∎

Jegyezzük még meg:

(6.4.37) *Reálkompakt tér zárt altere is reálkompakt.*

Bizonyítás. Legyen $E_0 \neq \emptyset$ zárt az $[E, \mathfrak{T}]$ reálkompakt teljesen reguláris térben, $\mathfrak{T}_0 = \mathfrak{T} \mid E_0$. Ekkor (4.2.7) szerint $[E_0, \mathfrak{T}_0]$ is teljesen reguláris. Legyen Φ, ill. Φ_0 a $\mathfrak{T}$-folytonos, ill. a $\mathfrak{T}_0$-folytonos függvények családja. Az $f \in \Phi$ függvények $f \mid E_0$ megszorításai olyan Φ' függvénycsaládot alkotnak E_0-on, amelyre (2.6.22) szerint $\Phi' \subset \Phi_0$ és (3.2.34) értelmében $\mathfrak{U}_{\Phi'} = \mathfrak{U}_\Phi \mid E_0$. Minthogy nyilván $\mathfrak{U}_{\Phi'} < \mathfrak{U}_{\Phi_0}$, és $\mathfrak{U}_{\Phi'}$ (5.1.15) szerint teljes, továbbá $\mathfrak{T}_{\mathfrak{U}_{\Phi'}} = \mathfrak{T}_{\mathfrak{U}_{\Phi_0}} = \mathfrak{T}_0$, azért (5.1.13) szerint $\mathfrak{U}_{\Phi_0}$ is teljes. ∎

(6.4.38) *Legyen* $[X, \mathcal{T}_1]$ *és* $[Y, \mathcal{T}_2]$ *két teljesen reguláris tér,* Φ_1 és Φ_2 *a* $\mathcal{T}_1$*-folytonos, ill. a* $\mathcal{T}_2$*-folytonos függvények családja,* $f : X \to Y$. f *pontosan akkor* $(\mathcal{T}_1, \mathcal{T}_2)$*-folytonos, ha* $(\mathcal{U}_{\Phi_1}, \mathcal{U}_{\Phi_2})$*-egyenletesen folytonos.*

Bizonyítás. Ha f $(\mathcal{U}_{\Phi_1}, \mathcal{U}_{\Phi_2})$-egyenletesen folytonos, akkor persze $(\mathcal{T}_{\mathcal{U}_{\Phi_1}}, \mathcal{T}_{\mathcal{U}_{\Phi_2}})$-folytonos is, és (4.2.21) szerint $\mathcal{T}_{\mathcal{U}_{\Phi_1}} = \mathcal{T}_1$, $\mathcal{T}_{\mathcal{U}_{\Phi_2}} = \mathcal{T}_2$. Legyen megfordítva f $(\mathcal{T}_1, \mathcal{T}_2)$-folytonos. Ha $U \in \mathcal{U}_{\Phi_2}$ tetszőleges környék, akkor vannak olyan $g_i \in \Phi_2$ $(i = 1, \ldots, n)$ függvények és olyan $\varepsilon > 0$, hogy $U \subset U_{\{\sigma_{g_1}, \ldots, \sigma_{g_n}\}, \varepsilon}$. Legyen $h_i = g_i \circ f$. Ekkor (2.6.15) szerint h_i $\mathcal{T}_1$-folytonos minden i-re, úgyhogy $U_{\{\sigma_{h_1}, \ldots, \sigma_{h_n}\}, \varepsilon} \in \mathcal{U}_{\Phi_1}$. Világos másrészt, hogy $(x, y) \in U_{\{\sigma_{h_1}, \ldots, \sigma_{h_n}\}, \varepsilon}$ esetén $(f(x), f(y)) \in U_{\{\sigma_{g_1}, \ldots, \sigma_{g_n}\}, \varepsilon} \subset U$. ∎

(6.4.39) *Ha egy tér homeomorf egy reálkompakt térrel, akkor maga is reálkompakt.*

Bizonyítás. Ha (6.4.38) jelöléseivel f $(\mathcal{T}_1, \mathcal{T}_2)$-homeomorfizmus, akkor $(\mathcal{U}_{\Phi_1}, \mathcal{U}_{\Phi_2})$-unimorfizmus is, és (5.1.12) folytán $\mathcal{U}_{\Phi_1}$ teljességéből $\mathcal{U}_{\Phi_2}$ teljessége következik. ∎

A reálkompakt tereknek egy további nevezetes jellemzéséhez egy más alkalommal is jól felhasználható segédtételre lesz szükségünk. Ennek megfogalmazása érdekében vezessük be a következő elnevezést. Legyen $[E, \mathcal{U}]$ uniform tér, $U \in \mathcal{U}$ egy környék, $\mathfrak{A}$ egy E-beli halmazrendszer. Azt mondjuk, hogy $\mathfrak{A}$ **U-diszkrét**, ha $A_1, A_2 \in \mathfrak{A}$, $A_1 \neq A_2$, $x \in A_1$, $y \in A_2$ esetén $(x, y) \notin U$; $\mathfrak{A}$-t **$\mathcal{U}$-diszkrét**nek mondjuk, ha van olyan $U \in \mathcal{U}$ környék, amelyre $\mathfrak{A}$ U-diszkrét.

Az említett segédtétel mármost a következő:

(6.4.40). *Legyen* $[E, \mathcal{U}]$ *uniform tér,* $U \in \mathcal{U}$ *tetszőleges környék. Ekkor van E-nek olyan* $\mathfrak{B} = \bigcup_1^\infty \mathfrak{B}_n$ *nyílt befedése, hogy minden* $B \in \mathfrak{B}$ *halmaz U-rendben kicsiny, és* $n \in \mathbf{N}$ *esetén* $\mathfrak{B}_n$ $\mathcal{U}$*-diszkrét.*

Bizonyítás. Legyenek az $U_{-2} = U$ jelöléssel az $U_n \in \mathcal{U}$ környékek úgy megválasztva, hogy $U_n \circ U_n \subset U_{n-1}$ $(n = -1, 0, 1, \ldots)$. Minden $x \in E$-re legyen

$$A_{xn} = \{y : y \in E,\ U_n(y) \subset U_1(x)\} \quad (n \in \mathbf{N}).$$

$n \in \mathbf{N}$ esetén $x \in U_n(x) \subset U_1(x)$, úgyhogy $x \in A_{xn}$, és adott $n \in \mathbf{N}$ mellett az A_{xn} halmazok befedik E-t.

Legyen most $\{x_i : i \in I\}$ az E halmaznak egy jólrendezése, az I indexhalmazban a rendezési relációt jelölje $<$; ilyen jólrendezés (1.1.27) értelmében létezik. Tekintsük a

$$C_{in} = A_{x_i n} - \bigcup_{j<i} A_{x_j, n+1} \qquad (i \in I,\ n \in \mathbf{N})$$

halmazokat. Megmutatjuk, hogy a

$$B_{in} = \operatorname{int} U_{n+3}(C_{in}), \quad \mathfrak{C}_n = \{C_{in} : i \in I\},$$

$$\mathfrak{B}_n = \{B_{in} : i \in I\}, \qquad \mathfrak{B} = \bigcup_1^\infty \mathfrak{B}_n$$

jelöléssel a tétel állításainak eleget teszünk.

Először is $C_{in} \subset A_{x_in} \subset U_1(x_i)$ az $U_1 \circ U_1 \subset U_0$ kikötés miatt U_0-rendben, és így B_{in} U-rendben kicsiny. Másrészt $\mathfrak{B}$ befedése E-nek, mert $x \in E$ esetén van I-ben egy legkisebb index, amelyre legalább egy n mellett $x \in A_{x_in}$; ekkor $j < i$ esetén $x \notin A_{x_j, n+1}$, tehát $x \in C_{in}$, $U_{n+3}(x) \subset U_{n+3}(C_{in})$ miatt pedig $x \in B_{in}$ is. Végül $\mathfrak{C}_n$ U_{n+1}-diszkrét. Valóban, ha $j < i$, $x \in C_{jn}$, $(x, y) \in U_{n+1}$, akkor $x \in A_{x_jn}$ miatt $U_n(x) \subset U_1(x_j)$, tehát $U_{n+1}(y) \subset (U_{n+1} \circ U_{n+1})(x) \subset U_n(x) \subset U_1(x_j)$, úgyhogy $y \in A_{x_j, n+1}$, $y \notin C_{in}$. Ebből következik, hogy $\mathfrak{B}_n$ U_{n+3}-diszkrét, hiszen $p \in B_{jn}$, $q \in B_{in}$, $(p, q) \in U_{n+3}$ esetén volna olyan $x \in C_{jn}$, $y \in C_{in}$, hogy $(x, p) \in U_{n+3}$, $(q, y) \in U_{n+3}$, azaz $(x, y) \in U_{n+1}$, ami, mint láttuk, lehetetlen. ∎

A reálkompakt terek említett jellemzéséhez állapodjunk még meg abban, hogy ha $[E, \mathfrak{U}]$ uniform tér, $U \in \mathfrak{U}$ egy környék, akkor a $D \subset E$ halmazt **U-diszkrét**-nek mondjuk, ha az $\{\{x\} : x \in D\}$ halmazrendszer U-diszkrét, azaz ha $x, y \in D$, $x \neq y$ esetén $(x, y) \notin U$; D **$\mathfrak{U}$-diszkrét,** ha van olyan $U \in \mathfrak{U}$ környék, amelyre nézve D U-diszkrét.

Bebizonyítjuk mármost a következő nevezetes tételt:

(6.4.41) **Shirota tétele.** *Egy $[E, \mathfrak{T}]$ topologikus tér pontosan akkor reálkompakt, ha van olyan $\mathfrak{T}$-t indukáló teljes $\mathfrak{U}$ uniform struktúra, hogy minden $\mathfrak{U}$-diszkrét altér reálkompakt.*

Bizonyítás. Ha $[E, \mathfrak{T}]$ reálkompakt, akkor az összes $\mathfrak{T}$-folytonos függvények Φ függvénycsaládja által indukált $\mathfrak{U}_\Phi$ uniform struktúra megfelel, hiszen ez $\mathfrak{T}$-t indukálja, definíció szerint teljes, s ha D $\mathfrak{U}_\Phi$-diszkrét, akkor $\mathfrak{T} \mid D$ reálkompakt. Valóban, ha Φ' a $(\mathfrak{T} \mid D)$-folytonos függvények családja, akkor (6.4.29) szerint minden $\mathfrak{r}$ $\mathfrak{U}_{\Phi'}$-Cauchy-rács $\mathfrak{U}_\Phi$-Cauchy-rács is, tehát $\mathfrak{T}$-konvergens, mondjuk $\mathfrak{r} \to x \in E$. Ha D U-diszkrét, $U \in \mathfrak{U}_\Phi$, és $U_1 \in \mathfrak{U}_\Phi$ olyan környék, hogy $U_1 \circ U_1 \subset U$, akkor $U_1(x)$ legfeljebb egy $y \in D$ pontot tartalmazhat, tehát $\{y\} \in \mathfrak{r}$, és

$$\mathfrak{r} \to y \in D \ (\mathfrak{T} \mid D)$$

is áll.

Tegyük fel most megfordítva, hogy $\mathfrak{U}$ teljes uniform struktúra, $\mathfrak{T} = \mathfrak{T}_\mathfrak{U}$, és minden $\mathfrak{U}$-diszkrét $D \subset E$ halmazra $\mathfrak{T} \mid D$ reálkompakt. (6.4.34) szerint azt kell megmutatnunk, hogy ha $[E', \mathfrak{T}']$ jelöli $[E, \mathfrak{T}]$ Čech—Stone-féle kompaktifikációját, akkor minden $p \in E' - E$ pont végtelen. Ehhez elég azt belátni, hogy ha a $p \in E'$ pont véges, akkor $\mathfrak{T}'$-környezetszűrőjének $\mathfrak{z}(p)$ nyomszűrője $\mathfrak{U}$-Cauchy-szűrő; ekkor ugyanis $\mathfrak{U}$ teljessége miatt $\mathfrak{z}(p)$ $\mathfrak{T}$-konvergál egy $x \in E$ ponthoz, ami csak $p \in E$ esetén lehetséges, hiszen az $(E' - E)$-beli pontok nyomszűrői definíció szerint $\mathfrak{T}$-re nézve nem-konvergens szűrők.

Legyen tehát $p \in E'$ véges pont, és $U \in \mathfrak{U}$ tetszőleges környék. Válasszuk meg az $U_1 \in \mathfrak{U}$ környéket úgy, hogy $U_1 \circ U_1 \circ U_1 \subset U$ legyen, majd készítsük el (6.4.40) értelmében E-nek olyan $\mathfrak{B} = \bigcup_1^\infty \mathfrak{B}_n$ befedését, hogy minden $B \in \mathfrak{B}$ halmaz U_1-rendben kicsiny, és minden $n \in \mathbf{N}$-re $\mathfrak{B}_n$ $\mathfrak{U}$-diszkrét. Az $A_n = \bigcup \{B : B \in \mathfrak{B}_n\}$ jelöléssel $\bigcap_1^\infty (E - A_n) = \emptyset$, így valamely n-re $E - A_n \notin \mathfrak{z}(p)$, hiszen (6.4.35) szerint $\mathfrak{z}(p)$ erősen centrált. Eszerint alkalmas $n \in \mathbf{N}$ indexre minden $\mathfrak{z}(p)$-beli halmaz metszi A_n-t.

Egy ilyen n-t rögzítve legyen $U_2 \in \mathcal{U}$ olyan környék, hogy $\mathfrak{B}_n$ U_2-diszkrét, $U_3 \in \mathcal{U}$ pedig olyan környék, hogy $U_3 \circ U_3 \circ U_3 \subset U_2$. Minden $B \in \mathfrak{B}_n$ halmazból válasszunk ki egy $x_B \in B$ pontot (nyilván feltehető, hogy a $B \in \mathfrak{B}_n$ halmazok egyike sem üres), és legyen $D = \{x_B : B \in \mathfrak{B}_n\}$. Világos, hogy D U_2-diszkrét.

Legyen most $X \subset D$ esetén

$$D_X = \bigcup \{B : B \in \mathfrak{B}_n,\ x_B \in X\},$$

és $\mathfrak{u}$ azoknak az $X \subset D$ halmazoknak a rendszere, amelyekre D_X metszi $\mathfrak{z}(p)$-nek minden halmazát. Világos, hogy $\mathfrak{u}$ D-ben felszálló rendszer, hiszen $X \subset Y \subset D$ esetén $D_X \subset D_Y$. Továbbá $X \subset D$ esetén az X és $D - X$ halmazok közül pontosan az egyik tartozik $\mathfrak{u}$-hoz. Valóban, $D_X \cup D_{D-X} = A_n$ folytán legalább az egyik metszi $\mathfrak{z}(p)$ minden halmazát, ha ugyanis $D_X \cap S_1 = D_{D-X} \cap S_2 = \emptyset$, $S_1, S_2 \in \mathfrak{z}(p)$ volna, akkor ebből $S_1 \cap S_2 \in \mathfrak{z}(p)$, $A_n \cap S_1 \cap S_2 = \emptyset$ következnék n választásával ellentétben. Másrészt ha $\mathcal{S}$ jelöli $\mathcal{T}$-nek Čech—Stone-féle szomszédsági relációját, akkor $\mathcal{S}_{\mathcal{U}} < \mathcal{S}$, tehát $D_X\, \overline{\mathcal{S}_{\mathcal{U}}}\, E - U_3(D_X)$ következtében $D_X\, \overline{\mathcal{S}}\, E - U_3(D_X)$, s ugyanígy $D_{D-X}\, \overline{\mathcal{S}}\, E - U_3(D_{D-X})$; mivel $\mathfrak{z}(p)$ $\mathcal{S}$-komprimált, $X \in \mathfrak{u}$ esetén $U_3(D_X) \in \mathfrak{z}(p)$, $D - X \in \mathfrak{u}$ esetén $U_3(D_{D-X}) \in \mathfrak{z}(p)$ adódik, s ezek egyszerre nem állhatnak, mert $\mathfrak{B}_n$ U_2-diszkrétségéből $U_3(D_X) \cap U_3(D_{D-X}) = \emptyset$ következik. Most már látható, hogy $X, Y \in \mathfrak{u}$ esetén $X \cap Y \in \mathfrak{u}$, hiszen különben $D - (X \cap Y) = (D - X) \cup (D - Y) \in \mathfrak{u}$ volna, márpedig $D - X \notin \mathfrak{u}$, $D - Y \notin \mathfrak{u}$ következtében alkalmas $S_1, S_2 \in \mathfrak{z}(p)$ halmazokra $(D - X) \cap S_1 = (D - Y) \cap S_2 = \emptyset$, s akkor $\big((D - X) \cup (D - Y)\big) \cap S_1 \cap S_2 = \emptyset$, $S_1 \cap S_2 \in \mathfrak{z}(p)$.

Mindez együtt (5.2.12) alapján azt mutatja, hogy $\mathfrak{u}$ D-beli ultraszűrő. Minthogy $x \in D$ esetén $U_2(x) \cap D = \{x\}$, azért $\mathcal{T} \mid D$ azonos D-nek $\mathfrak{D}$ diszkrét topológiájával, amelynek Čech—Stone-féle szomszédsági relációja természetesen D diszkrét szomszédsági relációja, erre nézve pedig $\mathfrak{u}$ nyilván kerek, komprimált szűrő. Tegyük fel, hogy $\mathfrak{u}$ nem-triviális ultraszűrő, azaz hogy nem $\mathfrak{D}$-konvergens; ekkor $\mathfrak{u}$ azonos a $[D, \mathfrak{D}]$ tér $[D', \mathfrak{D}']$ Čech—Stone-féle kompaktifikációjának valamely $q \in D' - D$ pontjához tartozó nyomszűrővel, és minthogy feltevésünk szerint $\mathfrak{D}$ reálkompakt, azért q végtelen pont, azaz van olyan $f : D' \to \mathbf{R}^*$ $\mathfrak{D}'$-folytonos leképezés, amely D-n véges értékű, és amelyre $f(q) = \infty$.

Mármost $B \in \mathfrak{B}_n$ esetén $B\, \overline{\mathcal{S}_{\mathcal{U}}}\, E - U_3(B)$, s annál inkább $B\, \overline{\mathcal{S}}\, E - U_3(B)$, tehát (4.2.21) szerint van olyan $\mathcal{T}$-folytonos g_B függvény, amelyre $x \in E$ esetén $0 \leqq g_B(x) \leqq 1$, $x \in B$ esetén $g_B(x) = 1$, $x \in E - U_3(B)$ esetén $g_B(x) = 0$. Legyen $g(x) = \sum_{B \in \mathfrak{B}_n} f(x_B)\, g_B(x)$. A látszólag végtelen sok tagú összeg értelmes, hiszen $x \in E$ esetén $U_3(x)$ legfeljebb egy $U_3(B)$ $(B \in \mathfrak{B}_n)$ halmazt metszhet, tehát $U_3(x)$-ben az összegnek legfeljebb egy tagja nem 0; ebből mindjárt az is látszik, hogy g az x pontban $\mathcal{T}$-folytonos. Minthogy p véges pont, $g(\mathfrak{z}(p))$-nek véges határértékhez kell tartania, viszont $f(q) = \infty$ miatt minden $c \in \mathbf{R}$-hez van olyan $X \in \mathfrak{u}$, hogy $x \in X$ esetén $|f(x)| > |c|$, és így $x \in D_X$ esetén $|g(x)| > |c|$ is, úgyhogy elég nagy $|c|$ esetén $\mathfrak{z}(p)$-nek nem metszhetné minden halmaza D_X-et. Ez az ellentmondás mutatja, hogy $\mathfrak{u}$ triviális ultraszűrő, azaz hogy valamely $B \in \mathfrak{B}_n$ halmazra $\{x_B\} \in \mathfrak{u}$, és $\mathfrak{z}(p)$ minden halmaza metszi B-t, tehát $\mathfrak{z}(p)$ $\mathcal{F}$-komprimáltsága miatt $U_1(B) \in \mathfrak{z}(p)$. Csakhogy B U_1-rendben kicsiny, úgyhogy $U_1(B)$ U-rendben kicsiny. ∎

Világos, hogy ha $D \subset E$ a Shirota-féle tétel feltételében szereplő $\mathcal{U}$-diszkrét altér, akkor a $\mathcal{T} \mid D$ topológia diszkrét. A tétel érdekességét mármost az a körülmény adja meg, hogy nincs eldöntve, vajon minden diszkrét topologikus tér reálkompakt-e. Ha erre a kérdésre pozitív volna a válasz, akkor a tételt egyszerűen úgy lehetne megfogalmazni, hogy egy tér pontosan akkor reálkompakt, ha topológiája származtatható teljes uniform struktúrából.

6.4.f. Hewitt-féle reálkomapktifikáció. Egy $[E, \mathcal{T}]$ teljesen reguláris tér (ill. a $\mathcal{T}$ topológia) **reálkompaktifikáció**ján értjük $[E, \mathcal{T}]$-nek (ill. $\mathcal{T}$-nek) minden olyan bővítését, amely reálkompakt. Eszerint $[E, \mathcal{T}]$ minden szabályos kompaktifikációja reálkompaktifikáció is. A reálkompaktifikációk között kitüntetett szerepet játszik az, amelyről a következő tétel szól:

(6.4.42) *Legyen $[E, \mathcal{T}]$ teljesen reguláris tér, Φ a $\mathcal{T}$-folytonos függvények családja, $[E'_h, \mathcal{U}']$ pedig az $[E, \mathcal{U}_\Phi]$ uniform tér teljes burka. Ekkor a $\mathcal{T}'_h = \mathcal{T}_{\mathcal{U}'}$ jelöléssel $[E'_h, \mathcal{T}'_h]$ az $[E, \mathcal{T}]$ térnek redukált, reálkompakt bővítése, és Φ azonos a $\mathcal{T}'_h$-folytonos függvények E-re való megszorításaiból álló családdal, s a $\mathcal{T}'_h$-folytonos függvények családját Φ'_h-vel jelölve, $\mathcal{U}' = \mathcal{U}_{\Phi'_h}$.*

Bizonyítás. A (4.2.21)-ből következő $\mathcal{T} = \mathcal{T}_{\mathcal{U}_\Phi}$ egyenlőség folytán $[E'_h, \mathcal{T}_{\mathcal{U}'}]$ (6.2.6) szerint bővítése $[E, \mathcal{T}]$-nek, mégpedig nyilván redukált bővítése. Ha $f \in \Phi$, akkor f $(\mathcal{U}_\Phi, \mathcal{U}_{\rho_1})$-egyenletesen folytonos (4.2.12) szerint (ρ_1-gyel ismét az euklideszi távolságot jelölve $\mathbf{R}$-en), és így (6.2.7) szerint van $(\mathcal{U}', \mathcal{U}_{\rho_1})$-egyenletesen folytonos, s még inkább $\mathcal{T}_{\mathcal{U}'} = \mathcal{T}'_h$-folytonos kiterjesztése E'_h-re. Ebből és (2.6.22)-ből következik, hogy Φ azonos a $\mathcal{T}'_h$-folytonos függvényekből álló Φ'_h függvénycsalád elemeinek E-re való megszorításaiból álló családdal. Ezért (3.2.34) értelmében $\mathcal{U}_{\Phi'_h} \mid E = \mathcal{U}_\Phi$, és (4.2.21) szerint, figyelembe véve $\mathcal{T}'_h$ teljesen reguláris voltát, $\mathcal{T}_{\Phi'_h} = \mathcal{T}'_h$. (6.3.1) értelmében tehát $\mathcal{U}' = \mathcal{U}_{\Phi'_h}$, és $\mathcal{U}'$ teljessége miatt $\mathcal{T}'_h$ reálkompakt. ∎

Az $[E, \mathcal{T}]$ tér (ill. a $\mathcal{T}$ topológia) **Hewitt-féle reálkompaktifikáció**jának a (6.4.42)-ben megkonstruált $[E'_h, \mathcal{T}'_h]$ teret (ill. a $\mathcal{T}'_h$ topológiát) nevezzük.

(6.4.43) *Ha $[E'_1, \mathcal{T}'_1]$ és $[E'_2, \mathcal{T}'_2]$ az $[E, \mathcal{T}]$ tér két Hewitt-féle reálkompaktifikációja, akkor $[E'_1, \mathcal{T}'_1]$ átvihető $[E'_2, \mathcal{T}'_2]$-be egy E-t rögzítő, egyértelműen meghatározott homeomorfizmussal.*

Bizonyítás. (6.3.26) szerint pontosan egy E-t rögzítő f $(\mathcal{U}'_1, \mathcal{U}'_2)$-unimorfizmus van, ahol $[E'_1, \mathcal{U}'_1]$, ill. $[E'_2, \mathcal{U}'_2]$ jelöli az $[E, U_\Phi]$ tér két teljes burkát. f természetesen $(\mathcal{T}'_1, \mathcal{T}'_2)$-homeomorfizmus is. Megfordítva, ha g tetszőleges E-t rögzítő $(\mathcal{T}'_1, \mathcal{T}'_2)$-homeomorfizmus, akkor (6.4.38) és (6.4.42) szerint $(\mathcal{U}'_1, \mathcal{U}'_2)$-unimorfizmus is, és így f-fel azonos. ∎

(6.4.44) *Ha $[E'_h, \mathcal{T}'_h]$ az $[E, \mathcal{T}]$ teljesen reguláris tér Hewitt-féle reálkompaktifikációja, $[E', \mathcal{T}']$ pedig $[E, \mathcal{T}]$ Čech—Stone-féle kompaktifikációja, akkor $[E'_h, \mathcal{T}'_h]$*

egy egyértelműen meghatározott E-t rögzítő homeomorfizmussal átvihető $[E', \mathfrak{T}']$-*nek egy alterébe.*

Bizonyítás. Minthogy (4.2.21) szerint $\mathfrak{S}_{\mathfrak{U}_\Phi}$ azonos $\mathfrak{T}$ Čech—Stone-féle szomszédsági relációjával, (6.4.13) szerint van $[E', \mathfrak{T}']$-nek egy egyértelműen meghatározott altere, amely $[E, \mathfrak{T}]$-nek Hewitt-féle reálkompaktifikációja. Ebbe $[E'_h, \mathfrak{T}'_h]$ (6.4.43) szerint egy egyértelműen meghatározott E-t rögzítő homeomorfizmussal átvihető. ∎

Megfordítva, (6.4.24)-ből rögtön kiolvasható:

(6.4.45) *Ha* $[E'_h, \mathfrak{T}'_h]$ *az* $[E, \mathfrak{T}]$ *teljesen reguláris tér Hewitt-féle reálkompaktifikációja,* $[E', \mathfrak{T}']$ *pedig az* $[E'_h, \mathfrak{T}'_h]$ *tér Čech—Stone-féle kompaktifikációja, akkor* $[E', \mathfrak{T}']$ *egyúttal* $[E, \mathfrak{T}]$*-nek is Čech—Stone-féle kompaktifikációja.* ∎

A Hewitt-féle reálkompaktifikációnak (6.4.23)-hoz hasonló jellemzését tartalmazza a következő tétel:

(6.4.46) *Legyen* $[E, \mathfrak{T}]$ *teljesen reguláris tér,* $[E_1, \mathfrak{T}_1]$ *ennek redukált reálkompaktifikációja. A következő állítások ekvivalensek:*

(a) $[E_1, \mathfrak{T}_1]$ *Hewitt-féle reálkompaktifikációja* $[E, \mathfrak{T}]$*-nek;*

(b) *Minden* $\mathfrak{T}$*-folytonos függvénynek van* $\mathfrak{T}_1$*-folytonos kiterjesztése;*

(c) *Ha* $[X, \mathfrak{T}_2]$ *tetszőleges reálkompakt tér, és* $f : E \to X$ $(\mathfrak{T}, \mathfrak{T}_2)$*-folytonos, akkor van f-nek* $(\mathfrak{T}_1, \mathfrak{T}_2)$*-folytonos kiterjesztése.*

Bizonyítás. (a) ⇒ (b): (6.4.42) következménye.

(b) ⇒ (c): A szokásos jelölésekkel f (6.4.38) szerint $(\mathfrak{U}_\Phi, \mathfrak{U}_{\Phi_2})$-egyenletesen folytonos, és (4.2.10)-ből tudjuk, hogy $\mathfrak{U}_{\Phi_1}$ bővítése $\mathfrak{U}_\Phi$-nek, $\mathfrak{U}_{\Phi_2}$ pedig teljes. (6.2.7) szerint van f-nek $(\mathfrak{U}_{\Phi_1}, \mathfrak{U}_{\Phi_2})$-folytonos kiterjesztése, amely persze $(\mathfrak{T}_1, \mathfrak{T}_2)$-folytonos is.

(c) ⇒ (a): Minthogy (6.4.30) szerint $[\mathbf{R}, \mathfrak{E}]$ reálkompakt, azért Φ ismét azonos a Φ_1-beli függvények E-re való megszorításaiból álló családdal, és így (3.2.34) szerint $\mathfrak{U}_{\Phi_1}$ bővítése $\mathfrak{U}_\Phi$-nek, mégpedig redukált és teljes. ∎

Ebből rögtön következik:

(6.4.47) *Egy teljesen reguláris tér pontosan akkor reálkompakt, ha saját magának Hewitt-féle reálkompaktifikációja.* ∎

(6.4.24) mintájára érvényes, s ahhoz hasonlóan bizonyítható:

(6.4.48) *Legyen* $[E, \mathfrak{T}]$ *teljesen reguláris tér,* $[E_1, \mathfrak{T}_1]$ *ennek redukált, teljesen reguláris bővítése. Ha* $[E_1, \mathfrak{T}_1]$ *altere* $[E, \mathfrak{T}]$ *Hewitt-féle reálkompaktifikációjának, akkor minden* $\mathfrak{T}$*-folytonos függvénynek van* $\mathfrak{T}_1$*-folytonos kiterjesztése; megfordítva, ha* $[E_1, \mathfrak{T}_1]$ *az utóbbi tulajdonsággal rendelkezik, akkor* $[E_1, \mathfrak{T}_1]$*-nek Hewitt-féle reálkompaktifikációja egyúttal* $[E, \mathfrak{T}]$*-nek is Hewitt-féle reálkompaktifikációja.* ∎

6.4.g. Gyakorlatok. 1. Legyen Φ korlátos függvénycsalád az E halmazon, $[E', \mathfrak{S}']$ pedig $[E, \mathfrak{S}_\Phi]$-nek bővítése. Mutassuk meg, hogy minden $f \in \Phi$ függvénynek pontosan egy $\mathfrak{T}_{\mathfrak{S}'}$-folytonos f' kiterjesztése van, és hogy a $\Phi' = \{f' : f \in \Phi\}$ jelöléssel $\mathfrak{S}' = \mathfrak{S}_{\Phi'}$.

[Legyen $\mathfrak{U}'$ a $\mathfrak{S}'$-t indukáló prekompakt uniform struktúra; ekkor $\mathfrak{U}' \mid E = \mathfrak{U}_\Phi$, mert mindkét oldal prekompakt és $\mathfrak{S}$-t indukálja, s akkor a **6.3.** alatti 5. feladatra lehet hivatkozni.]

2. Legyen $[E, \mathcal{S}]$ szeparált, kompakt szomszédsági tér, $A \subset E$, $\bar{A}$ A-nak $\mathcal{T}_{\mathcal{S}}$-lezárása. Mutassuk meg, hogy $[A, \mathcal{S} \mid A]$ kompaktifikációja $[\bar{A}, \mathcal{S} \mid \bar{A}]$.

3. Az előbbi jelölésekkel ejtsük el azt a feltevést, hogy $\mathcal{S}$ szeparált, és $A \subset A' \subset \bar{A}$ legyen olyan halmaz, hogy ha $x \in \bar{A}$, $\bar{x} \cap A = \emptyset$, akkor $\bar{x} \cap A'$ pontosan egy pontból áll, ha pedig $x \in \bar{A} - A$, $\bar{x} \cap A \neq \emptyset$, akkor $x \notin A'$. Mutassuk meg, hogy $[A', \mathcal{S} \mid A']$ kompaktifikációja $[A, \mathcal{S} \mid A]$-nak.

4. Legyen $[X, \mathcal{S}]$ és $[Y, \mathcal{Q}]$ szomszédsági tér, és $f : X \to Y$ olyan leképezés, hogy ha $\mathfrak{r}$ $\mathcal{S}$-komprimált X-beli rács, akkor $f(\mathfrak{r})$ $\mathcal{Q}$-komprimált. Mutassuk meg, hogy f $(\mathcal{S}, \mathcal{Q})$-szomszédságtartó. (Vö. az **5.1.** alatti 5. feladattal.)

[Legyen $[X', \mathcal{S}']$, ill. $[Y', \mathcal{Q}']$ az adott terek kompaktifikációja, $x \in X'$ esetén $\mathfrak{v}'(x)$ x-nek $\mathcal{T}_{\mathcal{S}'}$-környezetszűrője. $f(\mathfrak{v}'(x)\,(\cap)\,\{X\})$ komprimáltságából (6.2.2) felhasználásával következik, hogy f-nek van $(\mathcal{T}_{\mathcal{S}'}, \mathcal{T}_{\mathcal{Q}'})$-folytonos g kiterjesztése, amely $(\mathcal{S}', \mathcal{Q}')$-szomszédságtartó is.]

5. Legyen $\mathcal{S}$ és $\mathcal{Q}$ szomszédsági reláció az E halmazon, s tegyük fel, hogy minden $\mathcal{S}$-komprimált rács egyúttal $\mathcal{Q}$-komprimált is. Mutassuk meg, hogy $\mathcal{S} > \mathcal{Q}$.

6. Legyen Φ az $\mathbf{R}$ halmaz összes megszámlálható felbontásainak rendszere. A **3.2.** alatti 8. feladat jelöléseit használva mutassuk meg, hogy

(a) $\{U_{\mathfrak{F}} : \mathfrak{F} \in \Phi\}$ uniform bázis;

(b) $\mathcal{S}_{\mathcal{U}_\Phi}$ azonos $\mathbf{R}$ diszkrét szomszédsági relációjával;

(c) $\mathcal{U}_\Phi$ nem azonos $\mathbf{R}$ diszkrét $\mathcal{U}_1$ uniform struktúrájával;

(d) $\mathcal{U}_\Phi$ teljes;

(e) (6.4.13)-ban $E = \mathbf{R}$, $\mathcal{U}_2 = \mathcal{U}_\Phi$, $\mathcal{S} = \mathcal{S}_{\mathcal{U}_2} = \mathcal{S}_{\mathcal{U}_1}$ esetén $E'_{\mathcal{U}_1} = E'_{\mathcal{U}_2} = \mathbf{R}$, holott $\mathcal{U}_1 \neq \mathcal{U}_2$.

$\left[\text{Az } \left\{\left[\frac{i-1}{n}, \frac{i}{n}\right) : i = 0, \pm 1, \pm 2, \dots\right\}\right.$ felbontásból látszik $(n \in \mathrm{N})$, hogy egy $\mathfrak{r}$ $\mathcal{U}_\Phi$-Cauchy-rács egyúttal $\mathcal{U}_{p_1}$-Cauchy-rács is; ha $\mathfrak{r} \to a$ $\mathcal{E}$-re nézve, akkor az $\{a\}$, $[a+1, +\infty)$, $(-\infty, a-1]$, $\left[a + \frac{1}{n+1}, a + \frac{1}{n}\right)$ és $\left(a - \frac{1}{n}, a - \frac{1}{n+1}\right]$ $(n \in \mathrm{N})$ halmazokból álló felbontást tekintve látszik, hogy $\{a\} \in \mathfrak{r}$, és $\mathfrak{r}$ $\mathcal{T}_{\mathcal{U}_\Phi}$-re nézve is konvergens.]

7. Legyen $[W, \mathcal{T}]$ az **5.3.** alatti 13. feladatban vizsgált tér. Mutassuk meg, hogy

(a) ha $A \subset W$ és $B \subset W$ $\mathcal{T}$-zárt, és $A \cap B = \emptyset$, akkor egyikük felülről korlátos W rendezésében;

(b) $\mathcal{T}$ normális;

(c) $\mathcal{T}$ Čech—Stone-féle szomszédsági relációja azonos az (5.3.57)-ben definiálttal;

(d) a (nem-kompakt) $\mathcal{T}$ topológiát pontosan egy $\mathcal{S}$ szomszédsági reláció indukálja;

(e) $[W, \mathcal{T}]$-nek ekvivalenciától eltekintve egyetlen szabályos kompaktifikációja az **5.3.** alatti 16. feladatban értelmezett $[W^*, \mathcal{T}^*]$ tér.

[Ha sem A, sem B nem korlátos, akkor lehet készíteni olyan $x_1 < x_2 < x_3 < \dots$ sorozatot, hogy $x_{2n} \in B$, $x_{2n-1} \in A$ $(n \in \mathrm{N})$, s ha $x_0 \in W$ ennek legkisebb felső korlátja, akkor $x_0 \in A \cap B$.]

8. Legyen $[E, \mathfrak{T}]$ topologikus tér, és minden E-n értelmezett f függvényre $Z_f = \{x : f(x) = 0\}$, $N_f = \{x : f(x) \neq 0\}$, továbbá $\mathfrak{Z}$ és $\mathfrak{N}$ a $\mathfrak{T}$-folytonos f-ekhez tartozó Z_f, ill. N_f halmazok rendszere. Mutassuk meg, hogy

(a) $\mathfrak{Z}$ és $\mathfrak{N}$ $\emptyset$-t és E-t tartalmazó háló, és $\mathfrak{Z} = \{E - N : N \in \mathfrak{N}\}$;

(b) $\mathfrak{N}$-re ($\mathfrak{P}$ helyett) teljesül a (6.1.52) (a) és (6.1.53) (c) feltétel;

(c) $A, B \subset E$ pontosan akkor választható szét $\mathfrak{T}$-folytonos függvénnyel, ha van olyan $Z_1, Z_2 \in \mathfrak{Z}$, hogy $A \subset Z_1$, $B \subset Z_2$, $Z_1 \cap Z_2 = \emptyset$;

(d) $\mathfrak{N}$ pontosan akkor bázis $\mathfrak{T}$ számára, ha $\mathfrak{T}$ teljesen reguláris;

(e) teljesen reguláris $\mathfrak{T}$ esetén az $\mathfrak{N}$-hez tartozó Wallman-típusú kompaktifikáció azonos a Čech—Stone-félével.

[$Z_{fg} = Z_f \cup Z_g$, $Z_{|f|+|g|} = Z_f \cap Z_g$; ha $x \in N_f$, $f(x) = c \neq 0$, akkor $x \in Z_{f-c} \subset N$ ha f szétválasztja A-t és B-t, akkor $A \subset Z_f$, $B \subset Z_{f-1}$, $Z_f \cap Z_{f-1} = \emptyset$;

ha $Z_f \cap Z_g = \emptyset$, akkor $h = \dfrac{|f|}{|f| + |g|}$ szétválasztja Z_f-et és Z_g-t, továbbá

$$Z_f \subset N_{f_1},\ Z_g \subset N_{g_1},\ N_{f_1} \cap N_{g_1} = \emptyset, \text{ahol } f_1 = \min\left(h - \frac{1}{2}, 0\right),\ g_1 = \max\left(h - \frac{1}{2}, 0\right).]$$

9. Legyen $[E, \mathfrak{T}]$ teljesen reguláris tér, $[E', \mathfrak{T}']$ ennek bővítése, s alkalmazzuk az előző feladat jelöléseit. Mutassuk meg, hogy akár (a), (b), (c), akár (a), (b), (c′) szükséges és elegendő ahhoz, hogy $\mathfrak{T}'$ Čech—Stone-féle kompaktifikációja legyen $\mathfrak{T}$-nek:

(a) $\mathfrak{T}'$ kompakt S_2-topológia, és $\mathfrak{T}$-nek redukált bővítése;

(b) $\{\bar{Z} : Z \in \mathfrak{Z}\}$ zárt bázis $\mathfrak{T}'$ számára;

(c) $Z_1, Z_2 \in \mathfrak{Z}$ esetén $\overline{Z_1 \cap Z_2} = \bar{Z}_1 \cap \bar{Z}_2$;

(c′) $Z_1, Z_2 \in \mathfrak{Z}$, $Z_1 \cap Z_2 = \emptyset$ esetén $\bar{Z}_1 \cap \bar{Z}_2 = \emptyset$.

10. Mutassuk meg, hogy ha $\mathfrak{T}$ félmetrizálható topológia, akkor a 8. alatti jelöléssel $\mathfrak{Z}$ az összes $\mathfrak{T}$-zárt halmazokból áll.

[$\mathfrak{T} = \mathfrak{T}_\rho$, $F = \bar{F}$ esetén $F = Z_f$, ahol $f(x) = \rho(x, F)$.]

11. Mutassuk meg, hogy minden diszkrét tér Čech—Stone-féle komapktifikációja nulladimenziós.

[$Z \subset E$ esetén $E' - \bar{Z} = \overline{E - Z}$.]

12. Adjunk példát olyan teljesen reguláris térre, amely

(a) reálkompakt, de nem pszeudokompakt;

(b) pszeudokompakt, de nem reálkompakt.

[[$\mathbf{R}$, $\mathfrak{E}$], ill. a 7. alatti $[W, \mathfrak{T}]$.]

13. A 7. alatti jelölésekkel mutassuk meg, hogy ha f $\mathfrak{T}$-folytonos függvény, akkor van olyan $a \in W$ és $c \in \mathbf{R}$, hogy $x > a$, $x \in W$ esetén $f(x) = c$.

[Legyen f^* f-nek $\mathfrak{T}^*$-folytonos kiterjesztése, $c = f^*(w)$, $x_n \in W$ olyan, hogy $x > x_n$ esetén $|f(x) - c| < \dfrac{1}{n}$, végül $a \in W$ olyan, hogy $a > x_n$ $(n \in \mathbf{N})$.]

14. Mutassuk meg, hogy ha $[E, \mathfrak{T}]$ teljesen reguláris tér, akkor az alábbi feltételek mindegyike maga után vonja, hogy a tér minden altere reálkompakt:

(a) $\mathfrak{T}$ M_2-topológia;

(b) E megszámlálható;

(c) $[E, \mathfrak{T}] = [\mathbf{R}, \mathfrak{G}^+]$.

15. Az $E \neq \emptyset$ halmazon értelmezett diszkrét mértéknek nevezzük az E összes részhalmazain értelmezett olyan μ függvényt, amely csak a 0 és 1 értéket veszi fel, véges A-ra $\mu(A) = 0$, és ha $X = \bigcup_1^\infty X_i \subset E$, $X_i \cap X_j = \emptyset$ $(i \neq j)$, akkor $\mu(X) = \sum_1^\infty \mu(X_i)$. A μ diszkrét mérték triviális, ha $\mu(E) = 0$. Mutassuk meg, hogy E-n pontosan akkor létezik nemtriviális diszkrét mérték, ha a $\mathfrak{D}_E$ topológia nem reálkompakt.

[Ha μ nemtriviális diszkrét mérték, akkor $\{X : \mu(X) = 1\}$ erősen centrált nemtriviális ultraszűrő, s viszont ha $\mathfrak{u}$ erősen centrált nemtriviális ultraszűrő, és $\mu(X) = 0$ vagy 1 aszerint, hogy $X \notin \mathfrak{u}$ vagy $X \in \mathfrak{u}$, akkor μ nemtriviális diszkrét mérték.]

16. Legyen $[E, \mathfrak{T}]$ teljesen reguláris tér, $[E', \mathfrak{T}']$ ennek Čech—Stone-féle kompaktifikációja, $E \subset E'' \subset E'$ pedig olyan, hogy $[E'', \mathfrak{T}' \mid E'']$ $[E, \mathfrak{T}]$-nek Hewitt-féle reálkompaktifikációja. Mutassuk meg, hogy $x \in E''$ pontosan akkor áll, ha x véges pontja E'-nek.

[$[E', \mathfrak{T}']$ $[E'', \mathfrak{T}' \mid E'']$-nek is Čech—Stone-féle kompaktifikációja, és a $\mathfrak{T}' \mid E''$-folytonos függvények azonosak a $\mathfrak{T}$-folytonos függvények kiterjesztéseivel, úgyhogy bármely $x \in E'$ pont egyszerre véges $[E, \mathfrak{T}]$-re és $[E'', \mathfrak{T}' \mid E'']$-re nézve.]

17. Legyen $[E', \mathfrak{T}']$ az $[\mathbf{R}, \mathfrak{G}]$ tér Čech—Stone-féle kompaktifikációja, $\overline{\mathbf{N}} \subset E'$ $\mathbf{N}$-nek $\mathfrak{T}'$-lezárása, $E = (E' - \overline{\mathbf{N}}) \cup \mathbf{R}$, $\mathfrak{T} = \mathfrak{T}' \mid E$. Mutassuk meg, hogy

(a) $\mathfrak{T}$ T_π-topológia;

(b) az (n) sorozatnak $(n \in \mathbf{N})$ nincs $\mathfrak{T}$-torlódási pontja;

(c) $\mathfrak{T}$ nem megszámlálhatóan kompakt;

(d) $\mathbf{R} - \mathbf{N}$ $\mathfrak{T}$-sűrű;

(e) minden $(\mathbf{R} - \mathbf{N})$-beli sorozatnak van $\mathfrak{T}$-torlódási pontja;

(f) $\mathfrak{T}$ pszeudokompakt.

[Ha (x_n) $(\mathbf{R} - \mathbf{N})$-beli sorozat $\mathfrak{T}$-torlódási pont nélkül, akkor $A = \{x_n : n \in \mathbf{N}\}$ $\mathfrak{G}$-zárt, és így van A-t és $\mathbf{N}$-et szétválasztó $\mathfrak{G}$-folytonos függvény, s ennek $\mathfrak{T}'$-folytonos kiterjesztése; ez azonban (x_n)-nek egy x $\mathfrak{T}'$-torlódási pontjában, amelyre tehát $x \in \overline{\mathbf{N}}$, ellentmondáshoz vezet. Ha f $\mathfrak{T}$-folytonos, de nem korlátos, akkor van olyan $x_n \in \mathbf{R} - \mathbf{N}$, hogy $|f(x_n)| > n$, és (x_n)-nek nem lehet $\mathfrak{T}$-torlódási pontja.]

18. Legyen $[E, \mathfrak{T}]$ S_4-tér. Mutassuk meg, hogy

(a) ha (x_n) E-beli sorozat $\mathfrak{T}$-torlódási pont nélkül, akkor van (x_n)-nek olyan (x_{k_n}) részsorozata, hogy $n \neq m$ esetén $\bar{x}_{k_n} \cap \bar{x}_{k_m} = \emptyset$, és $F = \bigcup_1^\infty \bar{x}_{k_n}$ zárt;

(b) ha az előző jelölésekkel $x \in \bar{x}_{k_n}$ esetén $f(x) = n$, akkor f $\mathfrak{T} \mid F$-folytonos, s így van $\mathfrak{T}$-folytonos kiterjesztése;

(c) ha $\mathfrak{T}$ pszeudokompakt, akkor megszámlálhatóan kompakt is;

(d) az előző feladatban értelmezett $\mathfrak{T}$ nem normális.

[Hivatkozzunk a **4.2.** alatti 11. feladatra.]

19. Adjunk példát olyan kompakt T_2-térre, amelynek van nem-normális altere.

[[$\mathbf{R}$, $\mathfrak{E}$] Čech—Stone-féle kompaktifikációja ilyen.]

20. Legyen $[E', \mathfrak{T}']$ a teljesen reguláris $[E, \mathfrak{T}]$ tér Čech—Stone-féle kompaktifikációja. Mutassuk meg, hogy ha $E' - E$ egyetlen pontból áll, akkor $\mathfrak{T}'$ azonos $\mathfrak{T}$ Alekszandrov-féle kompaktifikációjával.

[A 8. és a **6.1.** alatti 20. feladatra támaszkodunk.]

VII. SZORZAT- ÉS KVÓCIENSTEREK

7.1. TOPOLOGIKUS TEREK SZORZATA

7.1.a. Projektív előállítás. Tudjuk, hogy ha $f: E \to Y$ az E halmaz tetszőleges leképezése egy $[Y, \mathfrak{T}]$ topologikus térbe, akkor az $f^{-1}(\mathfrak{T})$ topológia a legdurvább olyan $\mathfrak{T}^*$ topológia E-n, amelyre f $(\mathfrak{T}^*, \mathfrak{T})$-folytonos. Tudjuk azt is, hogy ha Φ tetszőleges függvénycsalád E-n, akkor a $\mathfrak{T}_\Phi$ topológia a legdurvább olyan $\mathfrak{T}^*$ topológia E-n, amelyre az $f \in \Phi$ függvények mindegyike $\mathfrak{T}^*$-folytonos, azaz $f: E \to \mathbf{R}$ leképezésként $(\mathfrak{T}^*, \mathfrak{E})$-folytonos.

Ezek közös általánosításaként a következő eljárást fogalmazhatjuk meg adott topológiákból egy további topológiának a származtatására:

(7.1.1) *Legyen $E \neq \emptyset$ adott halmaz, $I \neq \emptyset$ egy indexhalmaz, minden $i \in I$ indexhez legyen megadva egy $[E_i, \mathfrak{T}_i]$ topologikus tér, továbbá egy $f_i: E \to E_i$ leképezés. Ekkor van E-n egy legdurvább $\mathfrak{T}^*$ topológia, amelyre az f_i leképezések mindegyike $(\mathfrak{T}^*, \mathfrak{T}_i)$-folytonos, mégpedig*

$$\mathfrak{T}^* = \sup \{f_i^{-1}(\mathfrak{T}_i) : i \in I\}. \tag{7.1.2}$$

A (7.1.2) *topológiát az $\{f_i, \mathfrak{T}_i : i \in I\}$ rendszer által* **projektíven előállított topológiá***nak mondjuk.*

Bizonyítás. (2.6.44) (a) alapján f_i pontosan akkor $(\mathfrak{T}', \mathfrak{T}_i)$-folytonos valamely $i \in I$-re, ha $f_i^{-1}(\mathfrak{T}_i) < \mathfrak{T}'$: így az állítás (2.3.3)-ból adódik. ∎

(2.6.36) és (2.3.6) mindjárt a (7.1.2) alatti $\mathfrak{T}^*$ topológia megszerkesztését is lehetővé teszi:

(7.1.3) *A* (7.1.1) *alatti jelölésekkel a* (7.1.2) *topológia számára szubbázist alkotnak az $f_i^{-1}(G)$ alakú halmazok, ahol $i \in I$, és G a $\mathfrak{T}_i$ topológia egy $\mathfrak{S}_i$ szubbázisából van véve.* ∎

Rögtön látható, hogy a (7.1.2)-ben szereplő két művelet (ti. az inverz kép és a szuprémum képzése) maga is speciális esete a projektív előállításnak. Pontosabban szólva, ha egyetlen $f: E \to Y$ leképezés van megadva az $[Y, \mathfrak{T}]$ topologikus térbe, akkor az $\{f, \mathfrak{T}\}$ rendszer által projektíven előállított topológia éppen $f^{-1}(\mathfrak{T})$. Ha viszont minden $i \in I$-re $E_i = E$, és f_i az E halmaz identitása, akkor az $\{f_i, \mathfrak{T}_i : i \in I\}$ rendszer által projektíven előállított topológia nem más, mint $\sup \{\mathfrak{T}_i : i \in I\}$.

A projektíven előállított topológia fontos tulajdonságát fejezi ki a következő tétel:

(7.1.4) *Legyen* (7.1.1) *jelöléseivel* $\mathcal{T}^*$ az $\{f_i, \mathcal{T}_i : i \in I\}$ *rendszer által projektíven előállított topológia,* $[X, \mathcal{T}]$ *egy topologikus tér, és* $g : X \to E$. *A* g *leképezés pontosan akkor* $(\mathcal{T}, \mathcal{T}^*)$*-folytonos, ha* $f_i \circ g$ *minden* $i \in I$*-re* $(\mathcal{T}, \mathcal{T}_i)$*-folytonos.*

Bizonyítás. Ha g $(\mathcal{T}, \mathcal{T}^*)$-folytonos, akkor f_i $(\mathcal{T}^*, \mathcal{T}_i)$-folytonosságából $f_i \circ g$ $(\mathcal{T}, \mathcal{T}_i)$-folytonossága (2.6.15) alapján adódik. Ha viszont $g_i = f_i \circ g$ minden i-re $(\mathcal{T}, \mathcal{T}_i)$-folytonos, akkor (2.6.44) (a) szerint $g_i^{-1}(\mathcal{T}_i) < \mathcal{T}$, azaz (2.6.39) szerint $g^{-1}(f_i^{-1}(\mathcal{T}_i)) < \mathcal{T}$ minden i-re, és így (2.6.38) szerint $g^{-1}(\mathcal{T}^*) < \mathcal{T}$; ez éppen g $(\mathcal{T}, \mathcal{T}^*)$-folytonosságát jelenti. ∎

Ebből rögtön a következő általános tétel adódik:

(7.1.5) *Legyen minden* $i \in I$*-re megadva az* $[E_{ij}, \mathcal{T}_{ij}]$ $(j \in J_i)$ *topologikus tereknek és az* $f_{ij} : E_i \to E_{ij}$ *leképezéseknek olyan rendszere, hogy* $\mathcal{T}_i$ *azonos legyen az* $\{f_{ij}, \mathcal{T}_{ij} : j \in J_i\}$ *rendszer által projektíven előállított topológiával. Ekkor az* $\{f_i, \mathcal{T}_i : i \in I\}$ *rendszer által projektíven előállított* $\mathcal{T}^*$ *topológia azonos az* $\{f_{ij} \circ f_i, \mathcal{T}_{ij} : i \in I, j \in J_i\}$ *rendszer által projektíven előállított topológiával.*

Bizonyítás. (7.1.4) szerint f_i pontosan akkor lesz minden $i \in I$-re $(\mathcal{T}^*, \mathcal{T}_i)$-folytonos, ha $f_{ij} \circ f_i$ minden $i \in I$-re és $j \in J_i$-re $(\mathcal{T}^*, \mathcal{T}_{ij})$-folytonos. ∎

(7.1.5)-nek speciális esete:

(7.1.6) *Legyen* (7.1.1) *jelöléseivel* $g : X \to E$. *Ekkor az* $\{f_i \circ g, \mathcal{T}_i : i \in I\}$ *rendszer által projektíven előállított topológia nem más, mint* $g^{-1}(\mathcal{T}^*)$. ∎

(7.1.7) *Legyen* (7.1.1) *jelöléseivel* $\emptyset \neq E_0 \subset E$, *és* $f_i(E_0) \subset X_i \subset E_i$ *minden* i*-re. Ekkor az* $\{f_i \,|\, ^{X_i}_{E_0}, \mathcal{T}_i \,|\, X_i : i \in I\}$ *rendszer által projektíven előállított topológia éppen* $\mathcal{T}^* \,|\, E_0$.

Bizonyítás. Jelölje $g : E_0 \to E$ és $g_i : X_i \to E_i$ a kanonikus injekciókat. (2.6.34) szerint $\mathcal{T}^* \,|\, E_0 = g^{-1}(\mathcal{T}^*)$, s ez (7.1.6) értelmében az $\{f_i \circ g, \mathcal{T}_i : i \in I\}$ rendszer által van projektívan előállítva. Azonban $f_i \circ g = g_i \circ h_i$, ahol $h_i = f_i \,|\, ^{X_i}_{E_0}$, és (2.6.21) szerint $g_i \circ h_i$ pontosan akkor $(\mathcal{T}, \mathcal{T}_i)$-folytonos, ha h_i $(\mathcal{T}, \mathcal{T}_i \,|\, X_i)$-folytonos. ($\mathcal{T}$ tetszőleges topológia E_0-on.) ∎

Ismét (7.1.5) speciális esete:

(7.1.8) *Legyen* (7.1.1) *jelöléseivel* $[Z_i, \mathcal{T}'_i]$ *minden* $i \in I$*-re olyan topologikus tér és* $g_i : E_i \to Z_i$ *olyan leképezés, hogy* $\mathcal{T}_i = g_i^{-1}(\mathcal{T}'_i)$. *Ekkor az* $\{f_i, \mathcal{T}_i : i \in I\}$ *rendszer által projektíven előállított topológia azonos a* $\{g_i \circ f_i, \mathcal{T}'_i : i \in I\}$ *rendszer által projektíven előállított topológiával.* ∎

Ebből (2.6.44) (c) alapján adódik:

(7.1.9) *Ha* (7.1.1) *jelöléseivel* $g_i : E_i \to Z_i$ *minden* i*-re* $(\mathcal{T}_i, \mathcal{T}'_i)$*-homeomorfizmus, akkor az* $\{f_i, \mathcal{T}_i : i \in I\}$ *rendszer projektíven ugyanazt a topológiát állítja elő, mint a* $\{g_i \circ f_i, \mathcal{T}'_i : i \in I\}$ *rendszer.* ∎

(7.1.10) *Legyen* (7.1.1) *jelöléseivel* $I = \bigcup_{j \in J} I_j$, *és* $\mathcal{T}_j^*$ *az* $\{f_i, \mathcal{T}_i : i \in I_j\}$ *rendszer által projektíven előállított topológia. Ekkor* $\mathcal{T}^* = \sup \{\mathcal{T}_j^* : j \in J\}$. ∎

(7.1.2)-ből (2.6.37) alapján adódik:

(7.1.11) *Ha* $\mathcal{T}_i$ *és* $\mathcal{T}'_i$ *két topológia* E_i*-n,* $\mathcal{T}_i < \mathcal{T}'_i$, *továbbá* $f_i : E \to E_i$ $(i \in I \neq \emptyset)$, *akkor az* $\{f_i, \mathcal{T}_i : i \in I\}$ *rendszer által projektíven előállított topológia durvább az* $\{f_i, \mathcal{T}'_i : i \in I\}$ *rendszer által projektíven előállított topológiánál.* ∎

(2.4.6)-ból, (2.4.7)-ből és (2.6.40)-ből azonnal következik:

(7.1.12) *A* (7.1.1) *alatti jelölésekkel egy E-beli* $\mathfrak{r}$ *rács pontosan akkor tart* $\mathcal{T}^*$*-ra nézve* $x \in E$*-hez, ha* $f_i(\mathfrak{r}) \to f_i(x)$ $\mathcal{T}_i$*-re nézve minden* $i \in I$ *mellett.* ∎

(2.4.20)-ból és (2.6.41)-ből rögtön adódik:

(7.1.13) *Ha* (7.1.1) *jelöléseivel I megszámlálható, és minden* $\mathcal{T}_i$ M_1*-* (M_2*-*) *topológia, akkor* $\mathcal{T}^*$ *is ilyen.* ∎

A szétválasztási axiómákkal kapcsolatban (2.5.14), (2.5.23), (2.5.27), (2.6.42), (4.2.6) és (4.2.8) alapján kimondható:

(7.1.14) *Ha* (7.1.1) *jelöléseivel* $\mathcal{T}_i$ S_1*-*, S_2*-*, S_3*- vagy* S_π*-topológia minden i-re, akkor* $\mathcal{T}^*$ *is ilyen.* ∎

7.1.b. Halmazok Descartes-féle szorzata. Tekintsük az $[\mathbf{R}^m, \mathcal{E}^m]$ teret, és legyen $p_i : \mathbf{R}^m \to \mathbf{R}$ az a leképezés, amely az $x = (x_1, \ldots, x_m) \in \mathbf{R}^m$ pontnak a $p_i(x) = x_i \in \mathbf{R}$ pontot felelteti meg. Könnyen látható, hogy a $\{p_i, \mathcal{T}_i : i = 1, \ldots, m\}$ rendszer, ahol $\mathcal{T}_i = \mathcal{E}$ minden i-re, projektíven előállítja az $\mathcal{E}^m$ topológiát, hiszen ha $\mathcal{E}$ (szub)bázisaként a nyílt intervallumok rendszerét választjuk, akkor a $p_i^{-1}((a, b))$ alakú halmazok véges metszetei éppen a nyílt téglák $\mathbf{R}^m$-ben, s ezek bázist alkotnak $\mathcal{E}^m$ számára.

Előbbi példánkban az $\mathbf{R}^m$ halmazt az olyan m-tagú $(x_1, \ldots, x_m)$ sorozatok alkották, amelyekben $x_i \in \mathbf{R}$. Speciálisan az $m = 2$ esetben az (x_1, x_2) párok halmazáról van szó ($x_i \in \mathbf{R}$), amelyet $(\mathbf{R} \times \mathbf{R})$-rel jelöltünk. Kézenfekvő ennek mintájára megállapodni abban, hogy tetszőleges $A_1, \ldots, A_m$ halmazok Descartes-féle szorzatán értjük és az $A_1 \times \ldots \times A_m$ vagy rövidebben $\bigtimes_1^m A_i$ szimbólummal jelöljük az olyan m-tagú $(x_1, \ldots, x_m)$ sorozatok halmazát, amelyekben $x_i \in A_i$ ($i = 1, \ldots, m$). Eszerint pl. a nyílt, ill. zárt téglák így is írhatók:

$$(a_1, \ldots, a_m; b_1, \ldots, b_m) = \bigtimes_1^m (a_i, b_i),$$

$$[a_1, \ldots, a_m; b_1, \ldots, b_m] = \bigtimes_1^m [a_i, b_i].$$

Rögtön még tovább is mehetünk; az $\{1, \ldots, m\}$ indexhalmaz szerepét tetszőleges (általában végtelen) halmaznak adhatjuk. Legyen tehát $I \neq \emptyset$ tetszőleges indexhalmaz, és $i \in I$ esetén legyen megadva egy A_i halmaz. Az így megadott A_i halmazok **Descartes-féle szorzatán** értjük és a $\bigtimes_{i \in I} A_i$ szimbólummal jelöljük az olyan I-n értelmezett $x : I \to \bigcup_{i \in I} A_i$ leképezések halmazát, amelyekre $x(i) \in A_i$. Itt $x(i)$ helyett x_i-t szoktunk írni, és x_i-t az x pont ***i*-edik koordinátájá**nak nevezzük; világos, hogy az $I = \{1, \ldots, m\}$ esetben az előbbi definícióra jutunk vissza; az $I = \mathbf{N}$ esetben a $\bigtimes_1^\infty A_i$ jelölést is használjuk. Az A_i halmazt a $\bigtimes_{i \in I} A_i$ Descartes-szorzat ***i*-edik tényezőjé**nek nevezzük (jóllehet nem szükséges, hogy az I indexhalmaz rendezett halmaz legyen, úgyhogy az „i-edik” kifejezést csak a szemléletesség kedvéért használjuk). Vezessük még be azokat a $p_i : \bigtimes_{i \in I} A_i \to A_i$ leképezéseket, amelyekre $p_i(x) = x_i$; p_i-t a Descartes-szorzat i-edik tényezőre való **vetítésének** vagy **projekciójának** mondjuk. Az $x \in \times_{i\in I} A_i$, $p_i(x) = x_i$ esetben az $x = (x_i)$ jelölést fogjuk használni.

A kéttényezős Descartes-szorzatokra vonatkozó, a **3.2.b.** pontban kapott eredményekhez hasonlóan itt is érvényes:

(7.1.15) *$\times_{i\in I} A_i = \emptyset$ pontosan akkor, ha legalább egy i-re $A_i = \emptyset$.* ▌

(7.1.16) *Ha minden $i \in I$-re $A_i \subset B_i$, akkor $\times_{i\in I} A_i \subset \times_{i\in I} B_i$. Viszont ha $\emptyset \neq \times_{i\in I} A_i \subset \times_{i\in I} B_i$, akkor minden i-re $A_i \subset B_i$.* ▌

(7.1.17) $\bigcap_{j\in J} (\times_{i\in I} A_{ji}) = \times_{i\in I} (\bigcap_{j\in J} A_{ji})$. ▌

(7.1.18) $\times_{i\in I} (\bigcup_{j\in J_i} A_{ij}) = \bigcup_{(j_i)} \times_{i\in I} A_{ij_i}$,

ahol a jobb oldalon (j_i) a $\times_{i\in I} J_i$ halmazt futja be.

Bizonyítás. $x = (x_i)$ pontosan akkor tartozik akár a bal oldali, akár a jobb oldali halmazhoz, ha minden $i \in I$ indexhez található egy $j_i \in J_i$ úgy, hogy $x_i \in A_{ij_i}$ legyen. ▌

A Descartes-féle szorzás művelete a kommutatív és asszociatív törvénynek nyilván nem tesz eleget; általában $A \times B \neq B \times A$ (csak $A = B$ esetén áll $=$ jel), és $A \times (B \times C) \neq A \times B \times C$ (az első halmaz elemei $(a, (b, c))$ alakú, a másodiké (a, b, c) alakú kifejezések, ahol $a \in A$, $b \in B$, $c \in C$). Mégis, ha az (a, b) párnak a (b, a) párt feleltetjük meg, egy $(A \times B)$-t $(B \times A)$-ba átvívő, ha pedig (a, b, c)-nek $(a, (b, c))$-t, akkor $A \times B \times C$-t $A \times (B \times C)$-be átvivő bijekciót kapunk. Ennek megfelelően általában is kimondhatjuk:

(7.1.19) *Legyen $f : I \to J$ bijekció, és $B_i = A_{f(i)}$ $(i \in I)$. Ekkor $B = (\times_{i\in I} B_i)$-t $A = (\times_{j\in J} A_j)$-be viszi át az a g bijekció, melynél $b = (b_i)$, $a = g(b)$ esetén $a_{f(i)} = b_i$ $(i \in I)$.* ▌

(7.1.20) *Legyen $I = \bigcup_{j\in J} I_j$, $I_{j_1} \cap I_{j_2} = \emptyset$ $j_1, j_2 \in J$, $j_1 \neq j_2$ esetén, $B_j = \times_{i\in I_j} A_i$, $A = \times_{i\in I} A_i$, $B = \times_{j\in J} B_j$. Ekkor A-t B-be viszi át az az f bijekció, amelynél a $p_i : A \to A_i$, $q_j : B \to B_j$, $r_{ji} : B_j \to A_i$ vetítéseket bevezetve $x \in A$ esetén $r_{ji}(q_j(f(x))) = p_i(x)$.* ▌

7.1.c. Topologikus terek szorzata. Legyen az $I \neq \emptyset$ indexhalmaz minden $i \in I$ elemére megadva egy $[E_i, \mathfrak{T}_i]$ topologikus tér és tekintsük az $E = \times_{i\in I} E_i$ Descartes-féle szorzaton azt a topológiát, amelyet a $\{p_i, \mathfrak{T}_i : i \in I\}$ rendszer állít elő projektíven, ahol $p_i : E \to E_i$ az i-edik tényezőre való vetítés. Ezt a $\mathfrak{T}$ topológiát a $\mathfrak{T}_i$ **topológiák szorzatának** nevezzük és a $\times_{i\in I} \mathfrak{T}_i$ szimbólummal jelöljük; ha $I = \{1, \ldots, m\}$, akkor a $\mathfrak{T}_1 \times \ldots \times \mathfrak{T}_m$ vagy $\times_{1}^{m} \mathfrak{T}_i$ jelölést, $I = \mathrm{N}$ esetén a

$\overset{\infty}{\underset{1}{\times}} \mathcal{T}_i$ jelölést is használjuk. Az előző pont elején tett megjegyzésünk alapján kimondható:

(7.1.21) $\mathcal{E}^m = \overset{m}{\underset{1}{\times}} \mathcal{T}_i$, *ahol* $\mathcal{T}_i = \mathcal{E}$ $(i = 1, \ldots, m)$. ▌

A $[\underset{i\in I}{\times} E_i, \underset{i\in I}{\times} \mathcal{T}_i]$ topologikus teret az $[E_i, \mathcal{T}_i]$ **topologikus terek szorzatának** mondjuk. Olyankor, amikor minden $i \in I$-re $[E_i, \mathcal{T}_i]$ ugyanazzal az $[E, \mathcal{T}]$ térrel egyenlő, szokás $\underset{i\in I}{\times} E_i$ helyett röviden E^I-t, $\underset{i\in I}{\times} \mathcal{T}_i$ helyett röviden $\mathcal{T}^I$-t írni; speciálisan $I = \{1, \ldots, m\}$ esetén E^I helyett E^m-et, $\mathcal{T}^I$ helyett $\mathcal{T}^m$-et írunk, összhangban a már korábban bevezetett $\mathbf{R}^m$ és $\mathcal{E}^m$ jelölésekkel.

A következő tételekben legyen mindig $I \neq \emptyset$ egy indexhalmaz, $i \in I$ esetén $[E_i, \mathcal{T}_i]$ egy topologikus tér, $E = \underset{i\in I}{\times} E_i$, $\mathcal{T} = \underset{i\in I}{\times} \mathcal{T}_i$, $p_i : E \to E_i$ az E-re való vetítés.

A szorzattopológia konstrukciójára vonatkozólag a következőket jegyezhetjük meg:

(7.1.22) *Legyen* $x = (x_i) \in E$, *és minden i-re* $\mathfrak{b}_i(x_i)$ $\mathcal{T}_i$-*környezetbázisa* x_i-*nek. Ekkor x-nek* $\mathcal{T}$-*környezetbázisát alkotják a* $\underset{i\in I}{\times} V_i$ *alakú halmazok, ahol véges számú i-re* $V_i \in \mathfrak{b}_i(x_i)$, *a többi i-re pedig* $V_i = E_i$.

Bizonyítás. Ha $I' \subset I$ véges, és $i \in I'$ esetén $V_i \in \mathfrak{b}_i(x_i)$, $i \in I - I'$ esetén pedig $V_i = E_i$, akkor $i \in I'$ esetén van olyan $\mathcal{T}_i$-nyílt G_i, hogy $x_i \in G_i \subset V_i$. Ha még $i \in I - I'$ esetén $G_i = E_i$, akkor $x \in \underset{i\in I}{\times} G_i = \underset{i\in I'}{\bigcap} p_i^{-1}(G_i) \subset \underset{i\in I}{\times} V_i$, és (7.1.3) szerint a $\underset{i\in I'}{\bigcap} p_i^{-1}(G_i)$ halmaz $\mathcal{T}$-nyílt, úgyhogy $\underset{i\in I}{\times} V_i$ valóban $\mathcal{T}$-környezete x-nek.

Másrészt, ha G $\mathcal{T}$-nyílt, és $x \in G$, akkor van olyan $V = \overset{n}{\underset{j=1}{\bigcap}} p_{i_j}^{-1}(G_{i_j})$ halmaz, hogy $i_j \in I$, G_{i_j} $\mathcal{T}_{i_j}$-nyílt, és $x \in V \subset G$. Legyen $I' = \{i_1, \ldots, i_m\}$ (ahol $j_1 \neq j_2$ esetén lehet $i_{j_1} = i_{j_2}$ is). Minden $i \in I'$ indexre $p_i(x) = x_i \in \underset{i_j = i}{\bigcap} G_{i_j}$, és az utóbbi halmaz $\mathcal{T}_i$-nyílt, úgyhogy található olyan $V_i \in \mathfrak{b}_i(x_i)$, hogy $x_i \in V_i \subset \underset{i_j=i}{\bigcap} G_{i_j}$. Ha még $i \in I - I'$ esetén $V_i = E_i$, akkor nyilván $x \in \underset{i\in I}{\times} V_i = \underset{i\in I'}{\bigcap} p_i^{-1}(V_i) \subset V \subset G$. ▌

Innen (2.2.7) alapján rögtön következik:

(7.1.23) *Legyen* $i \in I$ *esetén* $\mathfrak{B}_i$ *bázis* $\mathcal{T}_i$ *számára. Ekkor* $\mathcal{T}$ *számára bázist alkotnak a* $\underset{i\in I}{\times} B_i$ *alakú halmazok, ahol véges számú i-re* $B_i \in \mathfrak{B}_i$, *a többi i-re pedig* $B_i = E_i$. ▌

(7.1.22) felhasználásával további korábban szerepelt terekről ismerhetjük fel, hogy valójában szorzatterek. Így a (2.4.22)-ben szereplő $[\mathbf{R}^2, \mathcal{T}]$ tér esetében az $x = (x_1, x_2)$ pont környezetbázisát a $Q(x, \varepsilon) = [x_1, x_1 + \varepsilon) \times [x_2, x_2 + \varepsilon)$ halmazok alkotják, s így (7.1.22)-ből könnyen kiolvasható, hogy $\mathcal{T} = \mathcal{E}^+ \times \mathcal{E}^+$:

(7.1.24) *A* (2.4.22)-*ben szereplő* $\mathcal{T}$ *azonos az* $\mathcal{E}^+ \times \mathcal{E}^+$ *szorzattopológiával.* ▌

A pontonkénti konvergencia topológiájának értelmezésekor egy H halmazon értelmezett összes valós függvények halmazát tekintettük E térnek. Most bevezetett jelöléseinkkel ezt az $\mathbf{R}^H$ szimbólummal jelölhetjük. Az említett topológia számára az $x \in \mathbf{R}^H$, azaz $x : H \to \mathbf{R}$ függvény környezetszubbázisát alkották a

$$V_{t,\varepsilon} = \{y : y \in \mathbf{R}^H, \ |y(t) - x(t)| < \varepsilon\}$$

halmazok, ahol $t \in H$ és $\varepsilon > 0$. Világos, hogy a „t-edik tényezőre való vetítést" p_t-vel jelölve,

$$V_{t,\varepsilon} = p_t^{-1}\big((x(t) - \varepsilon, x(t) + \varepsilon)\big),$$

s minthogy az $\big(x(t) - \varepsilon, x(t) + \varepsilon\big)$ intervallumok $x(t)$-nek $\mathcal{E}$-környezetbázisát alkotják, azért (7.1.22) alapján kimondhatjuk:

(7.1.25) *A H alaphalmaz esetében a pontonkénti konvergencia topológiája nem más, mint $\mathcal{E}^H$, az $E = \mathbf{R}^H$ halmaz felett.* ∎

A projektív előállítás definíciója szerint a p_j vetítés mindig $(\bigtimes_{i \in I} \mathcal{T}_i, \mathcal{T}_j)$-folytonos. Ennek fontos kiegészítése a következő megjegyzés:

(7.1.26) *Ha G $\mathcal{T}$-nyílt, akkor $p_j(G)$ $\mathcal{T}_j$-nyílt minden $j \in I$-re.*

Bizonyítás. Legyen $x_j \in p_j(G)$, azaz $x_j = p_j(x)$, $x \in G$. Ekkor alkalmas $\mathcal{T}_i$-nyílt G_i halmazokra (7.1.23) szerint $x \in \bigtimes_{i \in I} G_i \subset G$. Világos, hogy $x_j \in G_j \subset p_j(G)$. ∎

(7.1.27) *Ha $A_i \subset E_i$, $A = \bigtimes_{i \in I} A_i$, akkor A-nak $\mathcal{T}$-lezárása éppen $\bigtimes_{i \in I} \bar{A}_i$, ahol $\bar{A}_i$ A_i-nek $\mathcal{T}_i$-lezárását jelöli. Ha A_i $\mathcal{T}_i$-zárt minden i-re, akkor A $\mathcal{T}$-zárt.*

Bizonyítás. A második állítás a p_i vetítés $(\mathcal{T}, \mathcal{T}_i)$-folytonosságából és az $A = \bigcap_{i \in I} p_i^{-1}(A_i)$ egyenlőségből következik. Ezért tetszőleges $A_i \subset E_i$ esetén $\bigtimes_{i \in I} \bar{A}_i$ $\mathcal{T}$-zárt lesz és tartalmazza $\bar{A}$-t (így jelölve A-nak $\mathcal{T}$-lezárását). Másrészt $x \in \bigtimes_{i \in I} \bar{A}_i$ esetén tetszőleges véges $I' \subset I$ halmazt és $i \in I'$ mellett egy $\mathcal{T}_i$-nyílt G_i-t választva, majd $i \in I - I'$ esetére a $G_i = E_i$ megállapodással, $x \in \bigtimes_{i \in I} G_i = V$ esetén van $y_i \in G_i \cap A_i$ pont minden i-re, tehát $y = (y_i) \in A \cap V$, úgyhogy $x \in \bar{A}$. ∎

A következő tételek a projektíven előállított topológiák általános tulajdonságaiból közvetlenül adódnak. Így (7.1.4)-ből következik:

(7.1.28) *Legyen $[X, \mathcal{T}']$ topologikus tér, és $f : X \to E$. Az f leképezés pontosan akkor $(\mathcal{T}', \mathcal{T})$-folytonos, ha minden $i \in I$-re $p_i \circ f$ $(\mathcal{T}', \mathcal{T}_i)$-folytonos.* ∎

(7.1.11) szerint:

(7.1.29) *Legyen $\mathcal{T}_i$* és *$\mathcal{T}_i'$ két topológia E_i-n, $\mathcal{T}_i < \mathcal{T}_i'$ minden i-re, $\mathcal{T} = \bigtimes_{i \in I} \mathcal{T}_i$, $\mathcal{T}' = \bigtimes_{i \in I} \mathcal{T}_i'$. Ekkor $\mathcal{T} < \mathcal{T}'$.* ∎

(7.1.30) *Legyen $\emptyset \neq A_i \subset E_i$ minden i-re, és $A = \bigtimes_{i \in I} A_i$. Ekkor $\mathcal{T} \mid A = \bigtimes_{i \in I} (\mathcal{T}_i \mid A_i)$.*

Bizonyítás. Az állítás (7.1.7)-ből következik, mert a $p_i : E \to E_i$ vetítés $p_i \mid_A^{A_i}$ megszorítása nyilván nem más, mint A vetítése A_i-re. ∎

(7.1.31) *Ha a* (7.1.30) *alatti jelölésekkel egy $j \in I$ indexre $A_j = E_j$, a többi $i \in I - \{j\}$ indexre pedig $A_i = \{y_i\}$ egyetlen $y_i \in E_i$ pontból áll, akkor $p_j \mid A$ $(\mathfrak{T} \mid A, \mathfrak{T}_j)$-homeomorfizmus.*

Bizonyítás. Legyen $q_i = p_i \mid_A^{A_i} (i \in I)$. A q_j leképezés nyilván bijektív. (7.1.30) szerint $\mathfrak{T} \mid A = \underset{i \in I}{\times} (\mathfrak{T}_i \mid A_i) = \sup \{q_i^{-1}(\mathfrak{T}_i \mid A_i) : i \in I\}$. Csakhogy $i \neq j$ esetén q_i állandó leképezés, s így (2.6.16) folytán $(q_j^{-1}(\mathfrak{T}_j), \mathfrak{T}_i \mid A_i)$-folytonos, $q_i^{-1}(\mathfrak{T}_i \mid A_i) < q_j^{-1}(\mathfrak{T}_j)$. Így $\sup \{q_i^{-1}(\mathfrak{T}_i \mid A_i) : i \in I\} = q_j^{-1}(\mathfrak{T}_j)$. Eszerint az állítás (2.6.44) (c)-ből következik. ∎

(7.1.12)-ből következik:

(7.1.32) *Egy E-beli $\mathfrak{r}$ rács pontosan akkor tart $x \in E$-hez $\mathfrak{T}$-re nézve, ha minden $i \in I$ esetén $p_i(\mathfrak{r}) \to x_i = p_i(x)$ $\mathfrak{T}_i$-re nézve.* ∎

(7.1.13)-ból adódik:

(7.1.33) *Megszámlálható sok M_1-(M_2-)tér szorzata is M_1-(M_2-)tér.* ∎

Ehhez tegyük még hozzá:

(7.1.34) *Megszámlálható sok szeparábilis tér szorzata is szeparábilis.*

Bizonyítás. Legyen S_i megszámlálható $\mathfrak{T}_i$-sűrű halmaz minden $i \in \mathbf{N}$-re, és válasszunk még ki egy-egy $z_i \in E_i$ pontot is. Legyen S azon $x \in E$ pontok halmaza, melyeknek koordinátáira véges számú i kivételével $x_i = z_i$, a kivételes i indexekre pedig $x_i \in S_i$; más szóval

$$S = \bigcup_{I' \subset I} S_{I'},$$

ahol I' végigfut I véges részhalmazain, és

$$S_{I'} = \underset{i \in I}{\times} T_i,$$

ahol $i \in I'$ esetén $T_i = S_i$, $i \in I - I'$ esetén pedig $T_i = \{z_i\}$. Könnyen látható, hogy minden $S_{I'}$ halmaz, s akkor S is megszámlálható. Másrészt S $\mathfrak{T}$-sűrű, hiszen ha $y \in E$, $y \in V = \underset{i \in I}{\times} G_i$, $i \in I'$ esetén G_i $\mathfrak{T}_i$-nyílt, és $i \in I - I'$ esetén $G_i = E_i$ ($I' \subset I$ véges), akkor minden $i \in I'$-höz egy $x_i \in S_i \cap G_i$ pontot keresve és $i \in I - I'$ esetére $x_i = z_i$-t téve $x = (x_i) \in S_{I'} \subset S$, és $x \in V$. ∎

(7.1.14)-ből kiolvasható:

(7.1.35) *S_1-, S_2-, S_3- vagy S_π-terek szorzata is ilyen.* ∎

Tegyük ehhez még hozzá:

(7.1.36) *T_0-terek szorzata is T_0-tér.*

Bizonyítás. Ha $x, y \in E$, $x \neq y$, akkor legalább egy $i \in I$-re $x_i \neq y_i$. Legyen G_i pl. olyan $\mathfrak{T}_i$-nyílt halmaz, hogy $x_i \in G_i$, $y_i \notin G_i$. Ekkor $G = p_i^{-1}(G_i)$ $\mathfrak{T}$-nyílt, $x \in G$, $y \notin G$. ∎

(7.1.35) és (7.1.36) szolgáltatja:

(7.1.37) *T_1-, T_2-, T_3-, T_π-terek szorzata is ilyen.* ∎

Szorzatterek egymásba való leképezéseiről szólnak a következő tételek:

(7.1.38) *Legyen a szokott jelöléseken kívül még* $[E_i', \mathcal{T}_i']$ *minden i-re egy másik topologikus tér,* $f_i : E_i \to E_i'$ $(\mathcal{T}_i, \mathcal{T}_i')$*-folytonos,* $E' = \bigtimes_{i \in I} E_i'$, $\mathcal{T}' = \bigtimes_{i \in I} \mathcal{T}_i'$, $p_i' : E' \to E_i'$ *az i-edik vetítés,* $f : E \to E'$ *pedig az a leképezés, melyre* $f_i \circ p_i = p_i' \circ f$. *Ekkor* f $(\mathcal{T}, \mathcal{T}')$*-folytonos.*

Bizonyítás. (7.1.28) szerint elég $p_i' \circ f$ $(\mathcal{T}, \mathcal{T}_i')$-folytonosságát belátni minden $i \in I$-re. Ez azonban p_i $(\mathcal{T}, \mathcal{T}_i)$- és f_i $(\mathcal{T}_i, \mathcal{T}_i')$-folytonosságából következik. ∎

(7.1.39) *Ha* (7.1.38) *feltételei mellett* f_i *minden i-re* $(\mathcal{T}_i, \mathcal{T}_i')$*-homeomorfizmus, akkor* f *is* $(\mathcal{T}, \mathcal{T}')$*-homeomorfizmus.*

Bizonyítás. Ha $g : E' \to E$ az $f_i^{-1} \circ p_i' = p_i \circ g$ képlettel van értelmezve, akkor $g \circ f$ E-nek, $f \circ g$ pedig E'-nek identitása, úgyhogy f bijektív, és $g = f^{-1}$. f $(\mathcal{T}, \mathcal{T}')$-folytonossága és g $(\mathcal{T}', \mathcal{T})$-folytonossága (7.1.38)-ból adódik. ∎

(7.1.40) *Legyen* (7.1.19) *jelöléseivel* $\mathcal{T}_i$ *topológia* B_i*-n,* $\mathcal{T}_{f(i)}' = \mathcal{T}_i$, $\mathcal{T} = \bigtimes_{i \in I} \mathcal{T}_i$, $\mathcal{T}' = \bigtimes_{j \in J} \mathcal{T}_j'$. *Ekkor* g $(\mathcal{T}, \mathcal{T}')$*-homeomorfizmus.*

Bizonyítás. $g(b)$ $f(i)$-edik koordinátája b_i-vel egyenlő, s ez B-nek B_i-re való vetítésével keletkezik b-ből, úgyhogy $(\mathcal{T}, \mathcal{T}_i)$-, azaz $(\mathcal{T}, \mathcal{T}_{f(i)}')$-folytonosan. Így g $(\mathcal{T}, \mathcal{T}')$-folytonos, és hasonlóan látható, hogy g^{-1} $(\mathcal{T}', \mathcal{T})$-folytonos. ∎

(7.1.41) *Legyen* (7.1.20) *jelöléseivel* $\mathcal{T}_i$ *topológia* A_i*-n,* $\mathcal{T} = \bigtimes_{i \in I} \mathcal{T}_i$, $\mathcal{T}_j' = \bigtimes_{i \in I_j} \mathcal{T}_i$, $\mathcal{T}' = \bigtimes_{j \in J} \mathcal{T}_j'$. *Ekkor* f $(\mathcal{T}, \mathcal{T}')$*-homeomorfizmus.*

Bizonyítás. (7.1.28) ismételt alkalmazásával p_i $(\mathcal{T}, \mathcal{T}_i)$-folytonosságából $(i \in I)$ $q_j \circ f$ $(\mathcal{T}, \mathcal{T}_j')$-folytonossága, majd ebből f $(\mathcal{T}, \mathcal{T}')$-folytonossága következik. Másrészt $r_{ji} \circ q_j = p_i \circ f^{-1}$ folytán a bal oldal q_j $(\mathcal{T}', \mathcal{T}_j')$- és r_{ji} $(\mathcal{T}_j', \mathcal{T}_i)$-folytonosságából adódó $(\mathcal{T}', \mathcal{T}_i)$-folytonossága miatt f^{-1} $(\mathcal{T}', \mathcal{T})$-folytonos. ∎

7.1.d. Kompakt terek szorzata. Nevezetes tételek foglalkoznak azzal a kérdéssel, hogy a kompaktság és különféle általánosításai hogyan viselkednek a szorzatterek képzésekor.

(7.1.42) **Tyihonov tétele.** *Kompakt terek szorzata is kompakt.*

Bizonyítás. (5.3.1)-re hivatkozunk. Ha $\mathfrak{u}$ E-beli ultraszűrő, akkor $p_i(\mathfrak{u})$ (6.1.42) szerint E_i-beli ultraszűrő, és így $p_i(\mathfrak{u}) \to x_i \in E_i$ $\mathcal{T}_i$-re nézve. Az $x = (x_i)$ jelöléssel $\mathfrak{u} \to x$ $\mathcal{T}$-re nézve (7.1.32) értelmében. ∎

Ebből (7.1.22) alapján rögtön adódik:

(7.1.43) *Véges számú lokálisan kompakt tér szorzata is lokálisan kompakt.*

Bizonyítás. Ha $x \in \bigtimes_1^m E_i$, és V_i x_i-nek $\mathcal{T}_i$-kompakt környezete, akkor (7.1.22) szerint $\bigtimes_1^m V_i$ $\mathcal{T}$-környezete x-nek, továbbá $\bigtimes_1^m (\mathcal{T}_i \mid V_i)$ (7.1.42) szerint kompakt. (7.1.30) szerint az utóbbi topológia $(\mathcal{T} \mid \bigtimes_1^m V_i)$-vel azonos. ∎

(7.1.44) *Megszámlálható sok sorozatkompakt tér szorzata is sorozatkompakt.*

Bizonyítás. Legyen (x_n) tetszőleges sorozat a $\overset{\infty}{\underset{1}{\times}} E_i = E$ halmazban. Ennek van olyan $\xi_1 = (x_{1n})$ részsorozata, hogy $p_1(x_{1n}) \to y_1$ $\mathcal{T}_1$-re nézve. A $\xi_1 = (x_{1n})$ sorozatnak van olyan $\xi_2 = (x_{2n})$ részsorozata, hogy $p_2(x_{2n}) \to y_2$ $\mathcal{T}_2$-re nézve. Így olyan $\xi_k = \{x_{kn} : n \in \mathbf{N}\}$ sorozatokat kapunk, hogy ξ_k részsorozata ξ_{k-1}-nek, és $n \to \infty$ esetén $p_k(x_{kn}) \to y_k \in E_k$ $\mathcal{T}_k$-ra nézve. Tekintsük a $\xi = (x_{nn})$ sorozatot. Ez részsorozata (x_n)-nek, és a k-adik tagtól kezdve részsorozata ξ_k-nak is, ezért minden k-ra áll, hogy $p_k(x_{nn}) \to y_k$ $n \to \infty$ esetén $\mathcal{T}_k$-ra nézve. (7.1.32) szerint $x_{nn} \to y = (y_i) \in E$ $\mathcal{T}$-re nézve. ∎

Érdemes az előbbi bizonyítás magvát alkotó gondolatot, amelyet az „átlós kiválasztás elvének" neveznek, külön is megfogalmazni későbbi felhasználás céljából:

(7.1.45) *Legyen $\xi_0 = (x_n)$ adott sorozat, $\xi_1, \xi_2, \ldots$ pedig ennek olyan részsorozatai, hogy $\xi_k = \{x_{kn} : n \in \mathbf{N}\}$ részsorozata ξ_{k-1}-nek $(k = 2, 3, \ldots)$. Ekkor a $\xi = (x_{nn})$ sorozat a k-adik tagtól kezdve részsorozata ξ_k-nak minden $k \in \mathbf{N}$-re.* ∎

(7.1.46) *Egy megszámlálhatóan kompakt és egy sorozatkompakt tér szorzata megszámlálhatóan kompakt.*

Bizonyítás. Legyen $[X, \mathcal{T}_1]$ sorozatkompakt, $[Y, \mathcal{T}_2]$ megszámlálhatóan kompakt, és $\{(x_n, y_n) : n \in \mathbf{N}\} \subset X \times Y$ tetszőleges sorozat. Az (x_n) sorozatnak van konvergens részsorozata, mondjuk $x_{n_i} \to x \in X$. Legyen y az (y_{n_i}) sorozatnak torlódási pontja. Ha V az (x, y) pont tetszőleges $(\mathcal{T}_1 \times \mathcal{T}_2)$-környezete, akkor van x-nek olyan V_1 $\mathcal{T}_1$-, és y-nak olyan V_2 $\mathcal{T}_2$-környezete, hogy $V_1 \times V_2 \subset V$. Alkalmas i_0-ra $i \geqq i_0$ esetén $x_{n_i} \in V_1$, és végtelen sok i-re $y_{n_i} \in V_2$, úgyhogy végtelen sok i-re $(x_{n_i}, y_{n_i}) \in V$. ∎

(7.1.47) *Reálkompakt terek szorzata is reálkompakt.*

Bizonyítás. Legyen Φ_i a $\mathcal{T}_i$-folytonos, Φ a $\mathcal{T}$-folytonos függvények családja. Ha $\mathfrak{r}$ $\mathcal{U}_\Phi$-Cauchy-rács E-ben, akkor minden i-re $p_i(\mathfrak{r})$ $\mathcal{U}_{\Phi_i}$-Cauchy-rács E_i-ben, hiszen bármely $f \in \Phi_i$ függvényre $f \circ p_i \in \Phi$ miatt $f(p_i(\mathfrak{r}))$ $\mathcal{U}_{\rho_1}$-Cauchy-rács, és (6.4.29) alkalmazható. Így $p_i(\mathfrak{r}) \to x_i \in E_i$ $\mathcal{T}_i$-re nézve, s akkor (7.1.32) szerint $\mathfrak{r} \to x = (x_i) \in E$ $\mathcal{T}$-re nézve. ∎

Érdemes megjegyezni, hogy két Lindelöf-tér szorzata nem feltétlenül Lindelöf-tér. Ezt az $[\mathbf{R}, \mathcal{E}^+]$ tér példája mutatja: ez (2.4.21) szerint Lindelöf-tér, viszont (7.1.24) és (2.4.22) értelmében $[\mathbf{R} \times \mathbf{R}, \mathcal{E}^+ \times \mathcal{E}^+]$ nem az.

Tételeinkből könnyen kaphatunk olyan példákat, amelyek a kompaktság és a sorozatkompaktság fogalma közötti kapcsolatot tisztázzák:

Legyen $H = [0,1)$, $\mathbf{I} = [0,1]$, $E = \mathbf{I}^H$, $\mathcal{T} = (\mathcal{E} \mid \mathbf{I})^H$, A pedig azoknak az $x \in E$ pontoknak a halmaza, amelyeknek csak megszámlálható sok koordinátájuk különbözik 0-tól. Ekkor $[E, \mathcal{T}]$ kompakt (és megszámlálhatóan kompakt), de nem sorozatkompakt, $[A, \mathcal{T} \mid A]$ viszont sorozatkompakt (és megszámlálhatóan kompakt), de nem kompakt.

Bizonyítás. Minthogy $\mathcal{E} \mid \mathbf{I}$ (5.3.3) szerint kompakt, azért (7.1.42) szerint $\mathcal{T}$ is kompakt, továbbá (7.1.37) szerint T_2-topológia. Ezért nem lehet $\mathcal{T} \mid A$ kompakt, hiszen akkor A-nak (5.3.5) szerint $\mathcal{T}$-zártnak kellene lennie, márpedig H nem-megszámlálható volta miatt $A \neq E$, és A $\mathcal{T}$-sűrű. Valóban, $x \in E$ esetén legyen $x \in V = \bigtimes_{t \in H} G_t$, ahol G_t egy véges $H' \subset H$ halmazból vett t-kre $(\mathcal{E} \mid \mathbf{I})$-nyílt, a többi t-re pedig $G_t = \mathbf{I}$. Az $y_t = x_t$, ha $t \in H'$, és $y_t = 0$, ha $t \in H - H'$ jelöléssel $y = (y_t) \in A \cap V$.

A sorozatkompaktsággal kapcsolatos állítások igazolása céljából gondoljuk meg, hogy (7.1.30) szerint $\mathcal{T} = \mathcal{E}^H \mid E$, úgyhogy (7.1.25)-re tekintettel egy E-beli (x_n) sorozat $\mathcal{T}$-konvergenciája a H-n értelmezett függvénynek tekintett x_n-ek pontonkénti konvergenciáját jelenti.

Mármost legyen x_n az a függvény, amely a $\left[\frac{k-1}{2^n}, \frac{k}{2^n}\right]$ intervallumon a 0 vagy 1 értéket veszi föl aszerint, hogy k páros, vagy páratlan ($k = 1, \ldots, 2^n$). Ennek az (x_n) sorozatnak egyetlen (x_{n_i}) részsorozata sem pontonként konvergens. Vegyük ugyanis észre, hogy minden olyan 2^{-n_i} hosszúságú intervallumnak, amelyen x_{n_i} állandó, van olyan $2^{-n_{i+1}}$ hosszúságú részintervalluma is, amelyen $x_{n_{i+1}}$ 0-val, és olyan is, amelyen $x_{n_{i+1}}$ 1-gyel egyenlő. Legyen tehát $[a_1, b_1)$ egy 2^{-n_1} hosszúságú intervallum, amelyen $x_{n_1} = 1$, aztán $[a_2, b_2)$ ennek egy 2^{-n_2} hosszúságú részintervalluma, amelyen $x_{n_2} = 0$, s általában $[a_{i+1}, b_{i+1})$ a már kiválasztott 2^{-n_i} hosszúságú intervallumnak olyan $2^{-n_{i+1}}$ hosszúságú részintervalluma, amelyen $x_{n_{i+1}} = 0$, ill. 1 aszerint, hogy i páros vagy páratlan. Az $[a_1, b_1] \supset \supset [a_2, b_2] \supset \ldots$ sorozatnak van (1.2.33) szerint egy közös t pontja. Egyetlen i-re sem lehet $t = b_i$, mert ez azt jelentené, hogy az i-edik lépéstől kezdve mindig egy b_i-nél végződő részintervallumot választottunk, amelyben az x_{n_j} függvény $j > i$ esetén 0-val egyenlő. Így $t \in [a_i, b_i)$ minden i-re, speciálisan $t \in H$, és az $(x_{n_i}(t))$ sorozat a nem-konvergens $(1, 0, 1, 0, \ldots)$ sorozattal azonos.

Legyen viszont (y_n) tetszőleges A-beli sorozat, $M_n \subset H$ az a megszámlálható halmaz, amelyen kívül $y_n = 0$, és $M = \bigcup_{1}^{\infty} M_n$. A megszámlálható M halmazt rendezzük el $M = \{t_i : i \in \mathrm{N}\}$ sorozatba. A $\xi_0 = (y_n)$ sorozatnak legyen $\xi_1 = (y_{1n})$ olyan részsorozata, hogy $n \to \infty$ esetén $y_{1n}(t_1) \to a_1$, ahol $0 \leqq a_1 \leqq 1$; ilyen részsorozat $0 \leqq y_n(t_1) \leqq 1$ miatt a Bolzano—Weierstrass-féle tétel szerint létezik. Legyen aztán ξ_2 a ξ_1 sorozatnak olyan részsorozata, amely a t_2 helyen tart egy $0 \leqq a_2 \leqq 1$ határértékhez, s általában ξ_i a ξ_{i-1} sorozatnak olyan részsorozata, amely a t_i helyen konvergens. A (7.1.45) szerint elkészített $\xi = (z_n)$ sorozat ξ_0-nak olyan részsorozata, amely az i-edik tagtól kezdve ξ_i-nek részsorozata, és így a t_i helyen a_i-hez tart. Minthogy $t \in H - M$ esetén $z_n(t) = 0$ minden n-re, azért z_n pontonként tart ahhoz a $z \in A$ függvényhez, amelyre $z(t_i) = a_i$, és $t \in H - M$ esetén $z(t) = 0$. ▮

7.1.e. Beágyazási tételek. A szorzattopológia értelmezését a projektíven előállított topológia speciális eseteként vezettük be. Nevezetes tény, hogy némi megszorítással a projektív előállítás viszont visszavezethető a szorzattopológia képzésére, amennyiben a projektíven előállított topológia homeomorf a szorzattopológiának egy megszorításával, azaz a projektíven előállított tér topologikusan beágyazható a szorzattérbe. Erről szól a következő tétel:

(7.1.48) *Legyen* $I \neq \emptyset$, $i \in I$ *esetén* $[E_i, \mathcal{T}_i]$ *topologikus tér*, $X \neq \emptyset$ *adott halmaz*, $f_i : X \to E_i$, $\mathcal{T}^*$ *az* $\{f_i, \mathcal{T}_i : i \in I\}$ *rendszer által projektíven előállított topológia*, $E = \bigtimes_{i \in I} E_i$, $\mathcal{T} = \bigtimes_{i \in I} \mathcal{T}_i$, $p_i : E \to E_i$ *az i-edik vetítés, és* $f : X \to E$ *az a leképezés, amelyre* $x \in X$ *esetén* $f(x)$ *i-edik koordinátája* $f_i(x) \in E_i$, *végül* $h = f|_X^{f(X)}$. *Ha feltesszük, hogy* $x, y \in X$, $x \neq y$ *esetén van olyan* $i \in I$, *amelyre* $f_i(x) \neq f_i(y)$, *akkor* h $(\mathcal{T}^*, \mathcal{T} \mid f(X))$*-homeomorfizmus. Ez a feltevés mindenesetre teljesül, ha* $\mathcal{T}^*$ T_0*-topológia.*

Bizonyítás. Minthogy $p_i \circ f = f_i$, azért (7.1.6) szerint $\mathcal{T}^* = f^{-1}(\mathcal{T})$, s akkor (2.6.44) (b)-ből következik, hogy h homeomorfizmus, hiszen feltételeink szerint f injektív, és h bijektív.

Ha $\mathcal{T}^*$ T_0-topológia, akkor $x \neq y$, $x, y \in X$ esetén van például olyan $\mathcal{T}^*$-nyílt G, hogy $x \in G$, $y \notin G$. Ekkor (7.1.3) szerint van véges számú $i_j \in I$ index és G_{i_j} $\mathcal{T}_{i_j}$-nyílt halmaz úgy, hogy $x \in \bigcap_{j=1}^{n} f_{i_j}^{-1}(G_{i_j}) \subset G$. Így legalább egy j-re $y \notin f_{i_j}^{-1}(G_{i_j})$, azaz $f_{i_j}(x) \in G_{i_j}$, $f_{i_j}(y) \notin G_{i_j}$. ∎

(7.1.48)-ból rögtön következik:

(7.1.49) *Legyen* $[X, \mathcal{T}^*]$ *Tyihonov-féle tér;* $\Phi = \{f_i : i \in I\}$ *pedig olyan függvénycsalád, hogy* $\mathcal{T}^* = \mathcal{T}_\Phi$, *továbbá* $f_i(X) \subset K_i \subset \mathbf{R}$. *Ekkor* $[X, \mathcal{T}^*]$ *topologikusan beágyazható a* $[\bigtimes_{i \in I} K_i, \bigtimes_{i \in I} (\mathcal{E} \mid K_i)]$ *szorzattérbe.* ∎

(4.2.21)-ből tudjuk, hogy Φ állhat például az összes korlátos, $\mathcal{T}^*$-folytonos függvényekből. Ekkor minden K_i választható korlátos, zárt intervallumnak, és ha még $\mathbf{I} = [0, 1]$, akkor $[K_i, \mathcal{E} \mid K_i]$ nyilván homeomorf $[\mathbf{I}, \mathcal{E} \mid \mathbf{I}]$-vel ($K_i = [a, b]$) esetén az utóbbit a $g(t) = a + t(b - a)$ képlettel adott homeomorfizmus viszi az előbbibe). Nevezzük az $[\mathbf{I}^I, (\mathcal{E} \mid \mathbf{I})^I]$ alakú tereket **Tyihonov-féle kockák**nak; ekkor kimondhatjuk:

(7.1.50) *Egy topologikus tér pontosan akkor Tyihonov-féle, ha homeomorf egy Tyihonov-féle kockának egy alterével.*

Bizonyítás. (7.1.39) szerint $[\bigtimes_{i \in I} K_i, \bigtimes_{i \in I} (\mathcal{E} \mid K_i)]$ homeomorf egy Tyihonov-féle kockával, ha K_i korlátos, zárt intervallum. Másrészt $\mathcal{E} \mid \mathbf{I}$ metrizálható lévén, Tyihonov-féle, tehát (7.1.37) szerint a Tyihonov-féle kockák, s akkor persze ezek alterei is, Tyihonov-terek. ∎

(7.1.51) *Egy Tyihonov-tér pontosan akkor kompakt, ha homeomorf egy Tyihonov-féle kockának egy zárt alterével.*

Bizonyítás. Egy kompakt Tyihonov-tér (7.1.50) szerint homeomorf egy Tyihonov-féle kockának egy, természetesen kompakt, s akkor zárt alterével, hiszen a kocka T_2-tér. Viszont (7.1.42) szerint minden Tyihonov-kocka kompakt, s akkor zárt alterei is ilyenek. ∎

A (7.1.49) tétel segítségével a Tyihonov-féle terek Čech—Stone-féle kompaktifikációjának újabb érdekes konstrukciójához juthatunk:

(7.1.52) *Legyen* $[X, \mathcal{T}^*]$ *Tyihonov-tér*, $\{g_i : i \in I\}$ *az összes korlátos*, $\mathcal{T}^*$*-folytonos függvények családja*, $g_i(X) \subset E_i \subset \mathbf{R}$, E_i *korlátos, zárt intervallum*, $\mathcal{T}_i = \mathcal{E} \mid E_i$, $f_i = g_i|_X^{E_i}$, *és* (7.1.48) *jelöléseivel* $E' = f(X)$, $\mathcal{T}' = \mathcal{T} \mid E'$, E'' *pedig* E'*-nek*

$\mathcal{T}$-lezárása, $\mathcal{T}'' = \mathcal{T} \mid E''$. Ekkor $[E'', \mathcal{T}'']$ Čech—Stone-féle kompaktifikációja $[E', \mathcal{T}']$-nek (és így $[X, \mathcal{T}^*]$ Čech—Stone-féle kompaktifikációjával homeomorf).

Bizonyítás. A (7.1.42) szerint kompakt és (7.1.37) szerint Tyihonov-féle $[E, \mathcal{T}]$ tér $[E'', \mathcal{T}'']$ zárt altere is kompakt Tyihonov-tér, benne E' természetesen sűrű, és így $[E'', \mathcal{T}'']$ szabályos kompaktifikációja $[E', \mathcal{T}']$-nek. (6.4.23) szerint azt kell megmutatnunk, hogy minden $\mathcal{T}'$-folytonos, korlátos függvénynek van $\mathcal{T}''$-folytonos kiterjesztése. Ha azonban g $\mathcal{T}'$-folytonos, korlátos, akkor $g \circ h$ $\mathcal{T}^*$-folytonos, korlátos, és így egy $i \in I$-re $g \circ h = g_i$, $g = g_i \circ h^{-1}$, $g \mid_{E'}^{E_i} = f_i \circ h^{-1} = p_i \mid E'$. Csakhogy $(p_i \mid E')$-nek van nemcsak $(\mathcal{T}'', \mathcal{T}_i)$-folytonos, hanem akár $(\mathcal{T}, \mathcal{T}_i)$-folytonos kiterjesztése is, nevezetesen maga p_i. Mindenesetre $g_i' = p_i \mid E''$ $(\mathcal{T}'', \mathcal{T}_i)$-folytonos kiterjesztése $g \mid_{E'}^{E_i}$-nek, és még a $k_i : E_i \to \mathbf{R}$ kanonikus injekciót bevezetve $k_i \circ g_i'$ $\mathcal{T}''$-folytonos kiterjesztése g-nek. Eszerint $[E'', \mathcal{T}'']$ valóban Čech—Stone-féle kompaktifikációja $[E', \mathcal{T}']$-nek. (6.4.23)-ból (6.2.3) alapján következik, hogy a h homeomorfizmus kiterjeszthető $[X, \mathcal{T}^*]$ Čech—Stone-féle kompaktifikációjának $[E'', \mathcal{T}'']$-re való homeomorfizmusává. Valóban, ha $[X', \mathcal{T}^{**}]$ jelöli $[X, \mathcal{T}^*]$ Čech—Stone-féle kompaktifikációját, akkor h-nak van $(\mathcal{T}^{**}, \mathcal{T}'')$-folytonos h_1, h^{-1}-nek pedig $(\mathcal{T}'', \mathcal{T}^{**})$-folytonos h_2 kiterjesztése, s minthogy $h_2 \circ h_1 \mid X$ éppen X-nek, $h_1 \circ h_2 \mid E'$ pedig E'-nek identitása, azért $h_2 \circ h_1$ is X'-nek, $h_1 \circ h_2$ E''-nek identitása, azaz h_1 bijektív, és $h_1^{-1} = h_2$. ∎

Hasonlóan igazolható (7.1.42) helyett (7.1.47)-re, (6.4.23) helyett (6.4.46)-ra támaszkodva, a Tyihonov-terek Hewitt-féle reálkompaktifikációjának következő konstrukciója:

(7.1.53) *Legyen $[X, \mathcal{T}^*]$ Tyihonov-tér, $\{f_i : i \in I\}$ az összes $\mathcal{T}^*$-folytonos függvények családja, és* (7.1.48) *jelöléseivel $E_i = \mathbf{R}$, $\mathcal{T}_i = \mathcal{E}$, $E' = f(X)$, $\mathcal{T}' = \mathcal{T} \mid E'$, E'' pedig E'-nek $\mathcal{T}$-lezárása, $\mathcal{T}'' = \mathcal{T} \mid E''$. Ekkor $[E'', \mathcal{T}'']$ Hewitt-féle reálkompaktifikációja $[E', \mathcal{T}']$-nek (és így $[X, \mathcal{T}^*]$ Hewitt-féle reálkompaktifikációjával homeomorf).*

Bizonyítás. (6.4.30), (7.1.47) és (6.4.37) szerint $[E'', \mathcal{T}'']$ redukált reálkompaktifikációja $[E', \mathcal{T}']$-nek. Ha g $\mathcal{T}'$-folytonos, akkor $g \circ h$ $\mathcal{T}^*$-folytonos függvény, és így valamely i-re $g \circ h = f_i$, $g = f_i \circ h^{-1} = p_i \mid E'$. Így $p_i \mid E''$ g-nek $\mathcal{T}''$-folytonos kiterjesztése. Ezért $[E'', \mathcal{T}'']$ az $[E', \mathcal{T}']$ tér Hewitt-féle reálkompaktifikációja (6.4.46) értelmében. Ugyancsak e tétel miatt h kiterjeszthető $[X, \mathcal{T}^*]$ Hewitt-féle reálkompaktifikációjának $[E'', \mathcal{T}'']$-re való homeomorfizmusává. ∎

(7.1.54) *Egy Tyihonov-tér pontosan akkor reálkompakt, ha homeomorf egy $[\mathbf{R}^I, \mathcal{E}^I]$ alakú tér valamely zárt alterével.*

Bizonyítás. Ha $[X, \mathcal{T}^*]$ ((7.1.53) jelöléseivel) reálkompakt, akkor $[E', \mathcal{T}']$ is reálkompakt (6.4.39) szerint, tehát azonos (6.4.47) értelmében saját Hewitt-féle reálkompaktifikációjával, és így zárt $[\mathbf{R}^I, \mathcal{E}^I]$-ben. Másrészt (7.1.47), (6.4.37) és (6.4.39) szerint az $[\mathbf{R}^I, \mathcal{E}^I]$ egy zárt alterével homeomorf tér reálkompakt. ∎

További beágyazási tételek előállítása végett bocsássuk előre a következő megjegyzést, amely (2.6.44) (b)-nek általánosítása:

(7.1.55) *Legyen $[X, \mathcal{T}^*]$ T_0-tér, $I \neq \emptyset$, $i \in I$ esetén $[E_i, \mathcal{T}_i]$ topologikus tér, $f_i : X \to E_i$ $(\mathcal{T}^*, \mathcal{T}_i)$-folytonos, és tegyük fel, hogy ha $x \in X$, és V x-nek $\mathcal{T}^*$-környezete, akkor található véges számú $i_1, \ldots, i_n \in I$ index és $f_{i_j}(x) \in G_{i_j}$ $\mathcal{T}_{i_j}$-nyílt* *halmaz úgy, hogy $f_{i_j}(y) \in G_{i_j}$ $(j = 1, \ldots, n)$ esetén $y \in V$. Ekkor az $\{f_i, \mathfrak{T}_i : i \in I\}$ rendszer projektíven előállítja a $\mathfrak{T}^*$ topológiát, és így $[X, \mathfrak{T}^*]$ topologikusan beágyazható a $[\underset{i \in I}{\times} E_i, \underset{i \in I}{\times} \mathfrak{T}_i]$ szorzattérbe ama h homeomorfizmus segítségével, amely az $f : X \to E$, $f(x)_i = f_i(x)$, $h = f|_X^{f(X)}$ képletekkel van értelmezve.*

Bizonyítás. Feltevésünk pontosan azt fejezi ki, hogy $\mathfrak{T}^*$ számára szubbázist alkotnak az $f_i^{-1}(G_i)$ (G_i $\mathfrak{T}_i$-nyílt) halmazok, hogy tehát $\mathfrak{T}^*$ (7.1.3) értelmében az $\{f_i, \mathfrak{T}_i : i \in I\}$ rendszer által projektíven előállított topológia. Ezért (7.1.48) alkalmazható. ∎

Lemmánkból könnyen kaphatunk érdekes beágyazási tételeket:

(7.1.56) *Legyen* $[\mathbf{P}, \mathfrak{C}]$ *az* **„összefüggő pontpár"**, *vagyis az a topologikus tér, amelyben* $\mathbf{P} = \{0, 1\}$ *kételemű halmaz,* $\mathfrak{C}$*-re nézve pedig a nyílt halmazok a* $\emptyset$, $\{0\}$, $\mathbf{P}$ *halmazok. A (megszámlálható bázisú)* T_0*-terek nem mások, mint a* $[\mathbf{P}^I, \mathfrak{C}^I]$ ($[\mathbf{P}^\mathbf{N}, \mathfrak{C}^\mathbf{N}]$) *terek altereivel homeomorf terek.*

Bizonyítás. Világos, hogy $\mathfrak{C}$ T_0-topológia, úgyhogy bármilyen $I \neq \emptyset$ indexhalmaz esetén $[\mathbf{P}^I, \mathfrak{C}^I]$ (7.1.36) szerint, ennek alterei pedig (2.5.6) szerint T_0-terek. Másrészt, ha $[X, \mathfrak{T}^*]$ T_0-tér, akkor legyen $\{B_i : i \in I\}$ bázis $\mathfrak{T}^*$ számára, és minden B_i halmazhoz készítsük el az $f_i : X \to \mathbf{P}$ leképezést úgy, hogy $x \in B_i$ esetén $f_i(x) = 0$, $x \in X - B_i$ esetén $f_i(x) = 1$ legyen. Világos, hogy f_i $(\mathfrak{T}^*, \mathfrak{C})$-folytonos, továbbá ha $x \in B_i \subset V$, akkor $f_i(x) \in \{0\}$, és $f_i(y) \in \{0\}$ esetén $y \in B_i \subset V$. Így (7.1.55) szerint $[X, \mathfrak{T}^*]$ homeomorf $[\mathbf{P}^I, \mathfrak{C}^I]$ egy alterével; speciálisan, ha $\mathfrak{T}^*$ M_2-topológia, $I = \mathbf{N}$ választható. Végül (7.1.33) szerint $\mathfrak{C}^\mathbf{N}$, és (2.4.19) szerint ennek megszorításai M_2-topológiák. ∎

Az M_2-terekre vonatkozó élesítéssel kiegészíthetjük (7.1.50)-et is:

(7.1.57) *A megszámlálható bázisú Tyihonov-terek nem mások, mint az* $[\mathbf{I}^\mathbf{N}, (\mathfrak{E} \mid \mathbf{I})^\mathbf{N}]$ *tér altereivel homeomorf terek.*

Bizonyítás. (7.1.50)-ből, (7.1.33)-ból és (2.4.19)-ből látszik, hogy az $[\mathbf{I}^\mathbf{N}, (\mathfrak{E} \mid \mathbf{I})^\mathbf{N}]$ altereivel homeomorf terek valóban M_2- és Tyihonov-terek. Legyen megfordítva $[X, \mathfrak{T}^*]$ Tyihonov-tér, és $\mathfrak{B}$ megszámlálható bázis $\mathfrak{T}^*$ számára. Tekintsük az összes olyan (B_i, B_i') párokat, amelyekben $B_i, B_i' \in \mathfrak{B}$, $B_i \subset B_i'$, és B_i-t $(X - B_i')$-től szétválasztja egy g_i $\mathfrak{T}^*$-folytonos függvény. Ilyen pár $\mathfrak{B}$ megszámlálhatósága miatt megszámlálható sok van csak, úgyhogy az i indexet $\mathbf{N}$-en futtathatjuk végig. Ha $x \in X$, és V x-nek $\mathfrak{T}^*$-környezete, akkor van olyan $B' \in \mathfrak{B}$, hogy $x \in B' \subset V$; legyen f egy $\{x\}$-et $(X - B')$-től szétválasztó $\mathfrak{T}^*$-folytonos függvény, és $B \in \mathfrak{B}$ olyan, hogy $x \in B$, és $y \in B$ esetén $f(y) < \frac{1}{2}$. A (B, B') pár az előbb tekintettek között van, mert a $g(t) = 2 \max \left(f(t) - \frac{1}{2}, 0\right)$ $\mathfrak{T}^*$-folytonos függvény szétválasztja B-t és $(X - B')$-t. Legyen $(B, B') = (B_j, B_j')$. Ha $f_i = g_i|_X^\mathbf{I}$, akkor f_i $(\mathfrak{T}^*, \mathfrak{E} \mid \mathbf{I})$-folytonos minden $i \in \mathbf{N}$-re, továbbá az előbbiek szerint $f_j(x) \in \left[0, \frac{1}{2}\right)$ és $f_j(y) \in \left[0, \frac{1}{2}\right)$ esetén $y \in B_j' \subset V$, úgyhogy (7.1.55) feltételei teljesülnek az $E_i = \mathbf{I}$, $\mathfrak{T}_i = \mathfrak{E} \mid \mathbf{I}$ választással. ∎

Az itt szereplő $[\mathbf{I}^{\mathbf{N}}, (\mathfrak{E} \mid \mathbf{I})^{\mathbf{N}}]$ speciális Tyihonov-féle kockát **Hilbert-féle kockának** szokás nevezni.

A következő beágyazási tétel nulladimenziós terekről szól. Ezeknek definíciójából (2.3.13) (e), (7.1.23) és (7.1.27) felhasználásával rögtön következik:

(7.1.58) *Nulladimenziós tér bármely altere, továbbá nulladimenziós terek szorzata is nulladimenziós.* ∎

Minden diszkrét tér nyilván nulladimenziós. További példaként említsük meg:

(7.1.59) *Ha $A \subset \mathbf{R}$, és A-nak nincs $\mathfrak{E}$-belső pontja, akkor az $[A, \mathfrak{E} \mid A]$ altér nulladimenziós.*

Bizonyítás. $\mathfrak{E} \mid A$ számára bázist alkotnak az olyan $(a, b) \cap A$ alakú halmazok, ahol $a, b \in \mathbf{R} - A$, s ezek $(a, b) \cap A = [a, b] \cap A$ miatt $(\mathfrak{E} \mid A)$-ra nézve nyílt-zártak. ∎

Ha most $\mathfrak{D}$-vel jelöljük a $\mathbf{P} = \{0, 1\}$ pontpár diszkrét topológiáját, akkor kimondhatjuk:

(7.1.60) *A (megszámlálható bázisú) nulladimenziós T_0-terek nem mások, mint a $[\mathbf{P}^I, \mathfrak{D}^I]$ $([\mathbf{P}^{\mathbf{N}}, \mathfrak{D}^{\mathbf{N}}])$ terek altereivel homeomorf terek.*

Bizonyítás. (7.1.58) mutatja, hogy az említett alterek (s persze a velük homeomorf terek is) nulladimenziósak, s nyilván T_0-terek. Másrészt ha az $[X, \mathfrak{T}^*]$ T_0-térben $\mathfrak{B} = \{B_i : i \in I\}$ nyílt-zárt halmazokból álló bázis, $f_i : X \to \mathbf{P}$ pedig az a leképezés, amelyre $x \in B_i$ esetén $f_i(x) = 0$, $x \in X - B_i$ esetén $f_i(x) = 1$, akkor egyrészt f_i $(\mathfrak{T}^*, \mathfrak{D})$-folytonos, másrészt ha V $\mathfrak{T}^*$-környezete x-nek, akkor van olyan $i \in I$, hogy $x \in B_i \subset V$, s akkor $f_i(x) \in \{0\}$, és $f_i(y) \in \{0\}$ esetén $y \in B_i \subset V$. Így (7.1.55) alkalmazható. Ha $\mathfrak{T}^*$ M_2-topológia, akkor (2.4.17) szerint $I = \mathbf{N}$ választható. ∎

(7.1.59) és (7.1.60) értelmében **a számegyenes belső pont nélküli részhalmazai** ($[\mathbf{R}, \mathfrak{E}]$ altereinek tekintve) **topologikusan beágyazhatók a $[\mathbf{P}^{\mathbf{N}}, \mathfrak{D}^{\mathbf{N}}]$ térbe.** Ennek nevezetes kiegészítése is adható. E célból egy topologikus tér A részhalmazának $x \in A$ pontját nevezzük A **izolált pont**jának, ha van olyan V környezete, amelyre $V \cap A = \{x\}$. Mármost kimondható:

(7.1.61) *Legyen $\emptyset \neq P \subset \mathbf{R}$ kompakt, belső pont és izolált pont nélküli halmaz az $[\mathbf{R}, \mathfrak{E}]$ térben, $\mathfrak{T}^* = \mathfrak{E} \mid P$. Ekkor $[P, \mathfrak{T}^*]$ homeomorf a $[\mathbf{P}^{\mathbf{N}}, \mathfrak{D}^{\mathbf{N}}]$ térrel.*

Bizonyítás. Vezessük be $\mathbf{R}$-en a ρ_1 euklideszi távolságot. (5.3.7) szerint P korlátos, (5.3.5.) szerint $\mathfrak{E}$-zárt, és (5.3.27) szerint az $f(x) = x$ folytonos függvénynek van P-n legkisebb és legnagyobb értéke, azaz van P-nek legkisebb és legnagyobb abszcisszájú pontja. Ha ezek a, ill. b, akkor tehát $\delta(P) = b - a$. Legyen c az $\dfrac{a+b}{2}$ ponthoz olyan közeli, P-hez nem tartozó pont, hogy $\left| c - \dfrac{a+b}{2} \right| < \dfrac{b-a}{4}$ legyen. Ilyen c van, mert P-nek nincs $\mathfrak{E}$-belső pontja. Tekintsük a $P_0 = P \cap [a, c)$, $P_1 = P \cap (c, b]$ halmazokat. Világos, hogy $P = P_0 \cup P_1$, $P_0 \cap P_1 = \emptyset$, $P_k \neq \emptyset$, $\delta(P_k) \leqq \dfrac{3}{4}\,\delta(P)$. Ezenkívül $P_0 = P \cap (a-1, c) = P \cap [a, c]$ miatt P_0 $\mathfrak{T}^*$-ra nézve nyílt-zárt, ezért $\mathfrak{E}$-re nézve is zárt, továbbá korlátos, P-vel együtt ennek sincs belső pontja, és nincs izolált pontja sem. Ugyanezek elmondhatók P_1-ről is.

Az előbbi eljárást megismételve P_0-t a P_{00} és P_{01}, P_1-et a P_{10} és P_{11} nem-üres diszjunkt, korlátos, zárt, belső és izolált pont nélküli halmazok egyesítésére bonthatjuk, amelyeknek átmérője legfeljebb $\frac{3}{4}$-szerese $\delta(P_0)$-nak, ill. $\delta(P_1)$-nek, s legfeljebb $\left(\frac{3}{4}\right)^2 \delta(P)$, továbbá P_{k_l} nyílt-zárt $(\mathscr{E} \mid P_k)$-ra nézve, s akkor $\mathscr{T}^* = (\mathscr{E} \mid P)$-re nézve is.

Eljárásunkat i-szer megismételve i indexes $P_{k_1 \ldots k_l} \neq \emptyset$ halmazok keletkeznek, ahol minden k_j vagy 0, vagy 1; ezek a halmazok diszjunktak, egyesítésük P, mindegyik nyílt-zárt $\mathscr{T}^*$-ra nézve, átmérőjük legfeljebb $\left(\frac{3}{4}\right)^l \delta(P)$, és $P_{k_1 \ldots k_{l-1} k_l} \subset P_{k_1 \ldots k_{l-1}}$.

Értelmezzünk most minden $i \in \mathbf{N}$ indexre egy $f_l : P \to \mathbf{P}$ leképezést úgy, hogy ha $x \in P_{k_1 \ldots k_l}$, akkor $f_l(x) = k_l$ legyen. A mondottak szerint minden $x \in P$ pontosan egy i indexes halmazhoz tartozik, úgyhogy f_l egyértelműen értelmezve van. A $P_{k_1 \ldots k_l}$ halmazok nyílt-zárt volta miatt f_l $(\mathscr{T}^*, \mathscr{D})$-folytonos is. Legyen továbbá $x \in P$, V x-nek $\mathscr{T}^*$-környezete. $\delta(P_{k_1 \ldots k_l}) \leqq \left(\frac{3}{4}\right)^l \delta(P)$ miatt elég nagy i-re alkalmas $k_1, \ldots, k_l$ mellett $x \in P_{k_1 \ldots k_l} \subset V$, és ekkor az $f_1, \ldots, f_l$ leképezések a $G_j = \{k_j\}$ választással eleget tesznek (7.1.55) kikötésének, ugyanis ha $f_j(y) \in \{k_j\}$ $(j = 1, \ldots, i)$, akkor szükségképpen $y \in P_{k_1} \cap P_{k_1 k_2} \cap \ldots \cap P_{k_1 \ldots k_l} = P_{k_1 \ldots k_l} \subset V$. Így az $f(x)_l = f_l(x)$, $h = f \mid_P^{f(P)}$ képletekkel értelmezett h topologikusan beágyazza $[P, \mathscr{T}^*]$-ot $[\mathbf{P}^{\mathbf{N}}, \mathscr{D}^{\mathbf{N}}]$-be.

Meg kell még mutatnunk, hogy $h(P) = f(P) = \mathbf{P}^{\mathbf{N}}$. Valóban, tetszőleges $\xi = (k_l) \in \mathbf{P}^{\mathbf{N}}$ csupa 0-ból és 1-ből álló sorozatra $\bigcap_{l=1}^{\infty} P_{k_1 \ldots k_l} \neq \emptyset$, hiszen a

$$P_{k_1} \supset P_{k_1 k_2} \supset \ldots \supset P_{k_1 \ldots k_l} \supset \ldots$$

sorozatra (1.2.33) alkalmazható. Ha $x \in \bigcap_{l=1}^{\infty} P_{k_1 \ldots k_l}$, akkor $f_l(x) = k_l$ miatt $h(x) = \xi$. ∎

Könnyű belátni, hogy az előző tétel feltevéseinek eleget tevő halmazhoz jutunk például a következő módon: a $[0, 1]$ intervallumból hagyjuk ki az $\left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right)$ intervallumot, aztán a megmaradó két intervallumnak a középső harmadát, vagyis az $\left(\frac{1}{9}, \frac{2}{9}\right)$ és a $\left(\frac{7}{9}, \frac{8}{9}\right)$ intervallumot, a visszamaradó négy intervallumnak ismét a középső nyílt harmadát, és így tovább. A $[0, 1]$-ből végül is megmaradó pontok alkotják a keresett P halmazt. Ezt a halmazt szokás **Cantor-féle halmaz**nak nevezni.

További nevezetes szorzat-előállítási tétel a következő:

(7.1.62) *Legyen* $M \subset \mathbf{R}$ *megszámlálható,* $\mathscr{E}$*-sűrű halmaz.* $N = \mathbf{R} - M$, $\mathscr{T}^* =$

$= \mathfrak{S} \mid N$, *Q az egész számok halmaza,* $\mathfrak{D}$ *ennek diszkrét topológiája. Ekkor* $[N, \mathfrak{T}^*]$ *homeomorf* $[Q^{\mathrm{N}}, \mathfrak{D}^{\mathrm{N}}]$*-nel.*

Bizonyítás. Legyen $M = \{m_i : i \in \mathrm{N}\}$. Keressünk a számegyenesen a k egész számhoz egy tőle $\frac{1}{4}$-nél kisebb távolságban levő, M-hez tartozó a_k pontot. Világos, hogy $0 < a_{k+1} - a_k < \frac{3}{2}$ minden k-ra. Legyen $N_k = N \cap (a_k, a_{k+1})$. Ekkor az N_k-k diszjunktak, egyesítésük N, és $\mathfrak{T}^*$-ra nézve nyilván nyílt-zártak, mert $N_k = N \cap [a_k, a_{k+1}]$ is írható; természetesen $N_k \neq \emptyset$, mert M megszámlálható, (a_k, a_{k+1}) pedig nem-megszámlálható.

Szemeljünk ki egyet az (a_k, a_{k+1}) intervallumok közül. Válasszunk ki tetszés szerint egy $a_{k0} \in M \cap (a_k, a_{k+1})$ pontot, és készítsünk egy szigorúan monoton növekedő $a_{k0} < a_{k1} < a_{k2} < \ldots$ sorozatot csupa M-hez tartozó pontból úgy, hogy $a_{k,m+1} - a_{km} < \frac{1}{2}$ legyen, és $\lim_{m\to\infty} a_{km} = a_{k+1}$ álljon. Készítsünk aztán egy szigorúan monoton fogyó $a_{k0} > a_{k,-1} > a_{k,-2} > \ldots$ sorozatot is, ugyancsak M-hez tartozó pontokból, ismét úgy, hogy a szomszédos tagok távolsága $\frac{1}{2}$-nél kisebb legyen, és $\lim_{n\to-\infty} a_{km} = a_k$ álljon. Mindez M sűrű volta miatt megtehető. Végül is olyan $a_{km} \in M$ pontokat kapunk, hogy $0 < a_{k,m+1} - a_{km} < \frac{1}{2}$ minden $m \in Q$-ra, és $m \to +\infty$ esetén $a_{km} \to a_{k+1}$, $m \to -\infty$ esetén $a_{km} \to a_k$. Az $N_{km} = N \cap (a_{km}, a_{k,m+1})$ jelöléssel az N_{km}-ek $\mathfrak{T}^*$-ra nézve ismét nyílt-zárt halmazok, diszjunktak, egyesítésük N_k, továbbá $N_{km} \neq \emptyset$.

Ha az előbbi konstrukciót minden $k \in Q$-ra elvégezzük, kétindexes $N_{k_1k_2}$ halmazokat kapunk, amelyek $\mathfrak{T}^*$-nyílt-zártak, nem-üresek, diszjunktak, átmérőjük $< \frac{1}{2}$, és $N_{k_1} = \bigcup_{k_2\in Q} N_{k_1k_2}$ minden $k_1 \in Q$-ra. Minthogy az előbb a_{k0}-t szabadon választottuk $M \cap (a_k, a_{k+1})$ pontjai közül, kiköthetjük még azt is, hogy az $a_{k_1k_2}$ pontok között szerepeljen m_1, ha még az a_k-k között nem szerepelt.

Eljárásunkat l-szer megismételve l indexes $N_{k_1\ldots k_l}$ halmazok keletkeznek, amelyek $\mathfrak{T}^*$-nyílt-zártak, nem-üresek, diszjunktak, átmérőjük $< \frac{1}{l}$, $N_{k_1\ldots k_{l-1}} = \bigcup_{k_l\in Q} N_{k_1\ldots k_l}$, és az $N_{k_1\ldots k_l}$ halmazokat N-ből kimetsző intervallumok M-hez tartozó végpontjai között m_{l-1} szerepel, ha még az addigi lépések során nem lépett fel ilyen végpontként. Jegyezzük még meg, hogy az $N_{k_1\ldots k_l}$-t kimetsző intervallumnak még a végpontjai is az $N_{k_1\ldots k_{l-1}}$-et kimetsző intervallum belsejében vannak.

Legyen most $x \in N$ esetén $f_l(x) = k_l$, ha $x \in N_{k_1\ldots k_l}$. Ez egyértelműen meg van határozva, és N-t Q-ba képezi le. Az $N_{k_1\ldots k_l}$ halmazok $\mathfrak{T}^*$-nyíltsága miatt f_l $(\mathfrak{T}^*, \mathfrak{D})$-folytonos. Továbbá ha $x \in N$, V x-nek $\mathfrak{T}^*$-környezete, akkor $\delta(N_{k_1\ldots k_l}) < \frac{1}{l}$ miatt elég nagy l-re alkalmas $k_1, \ldots, k_l$ mellett $x \in N_{k_1\ldots k_l} \subset V$; legyen

$j = 1, \ldots, i$ esetén $G_j = \{k_j\}$, úgyhogy $f_j(x) \in G_j$, továbbá ha $f_j(y) \in G_j$ ($j = 1, \ldots, i$), akkor $y \in N_{k_1} \cap N_{k_1k_2} \cap \ldots \cap N_{k_1 \ldots k_i} = N_{k_1 \ldots k_i} \subset V$. Így (7.1.55) biztosítja, hogy az $f(x)_i = f_i(x)$, $h = f|_N^{f(N)}$ képletekkel definiált h topologikusan beágyazza $[N, \mathcal{T}^*]$-ot $(Q^{\mathbf{N}}, \mathfrak{D}^{\mathbf{N}}]$-be.

Megmutatjuk, hogy $h(N) = f(N) = Q^{\mathbf{N}}$. Legyen $\xi = (k_i) \in Q^{\mathbf{N}}$ tetszőleges. Ekkor

$$N_{k_1} \supset N_{k_1k_2} \supset \ldots \supset N_{k_1 \ldots k_i} \supset \ldots,$$

és $\bigcap_{i=1}^{\infty} \bar{N}_{k_1 \ldots k_i} \neq \emptyset$ (itt $\bar{A}$ az $\mathfrak{E}$-lezárást jelöli) (1.2.33) következtében. Ha x az utóbbi metszetnek egy pontja, akkor $x \in N$. Valóban, az M halmaz bármely m_l pontja szerepel valamelyik, mondjuk a j-edik, lépésben osztópontként, és az $N_{k_1 \ldots k_{j+1}}$ halmazt kimetsző intervallumnak még a lezárása sem tartalmazhatja ezt az osztópontot. Mármost világos, hogy $x \in \bigcap_{i=1}^{\infty} N_{k_1 \ldots k_i}$, tehát $f_i(x) = k_i$ minden i-re, és $h(x) = \xi$. ∎

7.1.f. Gyakorlatok. 1. Legyen $I \neq \emptyset$ részben rendezett indexhalmaz, amelyen tehát egy $\leqq$ reflexív és tranzitív reláció van értelmezve úgy, hogy $i \leqq j$, $j \leqq i$ esetén $i = j$. Legyen továbbá $i \in I$ esetén $E_i \neq \emptyset$, és $i, j \in I$, $i \leqq j$ esetén $p_{ij} : E_j \to E_i$ olyan leképezés, hogy p_{ii} éppen E_i-nek identitása, $i \leqq j \leqq k$ esetén pedig $p_{ik} = p_{ij} \circ p_{jk}$. Álljon E a $\times_{i \in I} E_i$ halmaz azon $x = (x_i)$ elemeiből, amelyekre $i, j \in I$, $i \leqq j$ esetén $x_i = p_{ij}(x_j)$. E-t az $\{E_i, p_{ij}\}$ rendszer projektív limeszének mondjuk. (Lehet $E = \emptyset$ is.) Ha $E \neq \emptyset$, akkor legyen $p_i : E \to E_i$ a $\times_{i \in I} E_i$ szorzat E_i-re való vetítésének megszorítása E-re.

Ha még $\mathcal{T}_i$ topológia E_i-n, p_{ij} $(\mathcal{T}_j, \mathcal{T}_i)$-folytonos minden $i, j \in I$, $i \leqq j$ esetén, és $E \neq \emptyset$, akkor a $\{p_i, \mathcal{T}_i : i \in I\}$ rendszer által projektíven előállított $\mathcal{T}$ topológiát a $\{\mathcal{T}_i, p_{ij}\}$ rendszer projektív limeszének nevezzük.

Mutassuk meg, hogy

(a) $\mathcal{T} = \times_{i \in I} \mathcal{T}_i \mid E$;

(b) Ha $[E', \mathcal{T}']$ topologikus tér, és $f_i : E' \to E_i$ olyan $(\mathcal{T}', \mathcal{T}_i)$-folytonos leképezés, hogy $i \leqq j$ esetén $f_i = p_{ij} \circ f_j$, akkor van egy egyértelműen meghatározott $f : E' \to E$ $(\mathcal{T}', \mathcal{T})$-folytonos leképezés, amelyre $f_i = p_i \circ f$;

(c) Ha $[E^*, \mathcal{T}^*]$ olyan topologikus tér, és $p_i^* : E^* \to E_i$ olyan $(\mathcal{T}^*, \mathcal{T}_i)$-folytonos leképezés, hogy $i \leqq j$ esetén $p_i^* = p_{ij} \circ p_j^*$, továbbá bármely $[E', \mathcal{T}']$ topologikus térhez és $f_i : E' \to E_i$ $(\mathcal{T}', \mathcal{T}_i)$-folytonos leképezésekhez, amelyekre $i \leqq j$ esetén $f_i = p_{ij} \circ f_j$, tartozik egy egyértelműen meghatározott $f^* : E' \to E^*$ $(\mathcal{T}', \mathcal{T}^*)$-folytonos leképezés úgy, hogy $f_i = p_i^* \circ f^*$, akkor $[E, \mathcal{T}]$ és $[E^*, \mathcal{T}^*]$ egymással homeomorf.

[$t \in E'$ esetén $f(t) = (f_i(t))$; ha $p_i^*(x) = p_i^*(y)$ minden i-re, akkor $x = y$; $x \in E$ esetén $h : E \to E^*$ legyen olyan, hogy $p_i = p_i^* \circ h$.]

2. Legyen $[E_0, \mathcal{T}_0]$ topologikus tér, $I = \mathbf{N}$, $\leqq$ a természetes számok szokásos rendezése, $E_0 \supset E_1 \supset E_2 \supset \ldots$, $p_{ij} : E_j \to E_i$ a kanonikus injekció, $\mathcal{T}_i = \mathcal{T}_0 \mid E_i$.

Mutassuk meg, hogy az $\{E_i, p_{ij}\}$ rendszer E projektív limesze pontosan akkor nem üres, ha $D = \bigcap_1^\infty E_i \neq \emptyset$, s akkor a $\{\mathcal{T}_i, p_{ij}\}$ rendszer $\mathcal{T}$ projektív limeszére $[E, \mathcal{T}]$ homeomorf $[D, \mathcal{T}_0 \mid D]$-vel.

3. Legyen $I = \mathbf{N}$, $\leqq$ a szokásos rendezés, $[E'_i, \mathcal{T}'_i]$ topologikus tér, $E_i = \bigtimes_1^n E'_i$, $\mathcal{T}_i = \bigtimes_1^n \mathcal{T}'_i$, $i \leqq j$ esetén $p_{ij}(x_1, \dots, x_j) = (x_1, \dots, x_i)$. Mutassuk meg, hogy az $\{E_i, p_{ij}\}$, ill. $\{\mathcal{T}_i, p_{ij}\}$ rendszer projektív limeszét E-vel, ill. $\mathcal{T}$-vel jelölve $[E, \mathcal{T}]$ homeomorf $[\bigtimes_1^\infty E'_i, \bigtimes_1^\infty \mathcal{T}'_i]$-vel.

4. Mutassuk meg, hogy ha az 1. alatti jelölésekkel $\mathcal{T}_i$ minden i-re T_2-topológia, akkor E $\bigtimes_{i \in I} \mathcal{T}_i$-zárt.

5. Legyen $\mathcal{T}^*$ az $\{f_i, \mathcal{T}_i : i \in I\}$ rendszer által projektíven előállítva, és $\mathcal{T}_i$ minden i-re T_0-topológia. Mutassuk meg, hogy $\mathcal{T}^*$ pontosan akkor T_0-topológia, ha $x \neq y$ esetén van olyan $i \in I$, hogy $f_i(x) \neq f_i(y)$.

6. Mutassuk meg, hogy ha $\bigtimes_{i \in I} \mathcal{T}_i$ M_1-, M_2-, S_1-, S_2-, S_3-, S_π-, S_5-, T_0-, T_1-, T_2-, T_3-, T_π-, T_5-topológia, akkor mindegyik $\mathcal{T}_i$ is ilyen.

7. Mutassuk meg, hogy ha $\bigtimes_{i \in I} \mathcal{T}_i$ normális T_1-topológia, akkor mindegyik $\mathcal{T}_i$ is ilyen.

8. Legyen $W^* = W \cup \{w\}$ és $\mathcal{T}^*$ az **5.3.** alatti 16. feladatban szereplő halmaz, ill. topológia, továbbá $K = \{0\} \cup \left\{\frac{1}{n} : n \in \mathbf{N}\right\} \subset \mathbf{R}$, $\mathcal{T}' = \mathcal{E} \mid K$, $E = (W^* \times K) - \{(w, 0)\}$, $\mathcal{T} = \mathcal{T}^* \times \mathcal{T}' \mid E$. Mutassuk meg, hogy

(a) $\mathcal{T}$ Tyihonov-féle;

(b) $A = W \times \{0\}$ és $B = \{w\} \times \left\{\frac{1}{n} : n \in \mathbf{N}\right\}$ $\mathcal{T}$-zárt;

(c) ha G_1 és G_2 $\mathcal{T}$-nyílt, $A \subset G_1$, $B \subset G_2$, akkor $G_1 \cap G_2 \neq \emptyset$;

(d) $\mathcal{T}$ nem normális;

(e) $\mathcal{T}^* \times \mathcal{T}'$ T_4-topológia, de nem T_5-topológia.

[Minden $n \in \mathbf{N}$-hez van olyan $x_n \in W$, hogy $x_n \in W$, $x > x_n$ esetén $\left(x, \frac{1}{n}\right) \in G_2$, majd olyan $a \in W$, hogy minden n-re $x_n < a$, végül olyan $m \in \mathbf{N}$, hogy $\left(a, \frac{1}{m}\right) \in G_1 \cap G_2$.]

9. Legyen I nem-megszámlálható indexhalmaz, $i \in I$ esetén $[E_i, \mathcal{T}_i]$ topologikus tér, E_i álljon egynél több pontból, s legyen $E = \bigtimes_{i \in I} E_i$, $\mathcal{T} = \bigtimes_{i \in I} \mathcal{T}_i$. Mutassuk meg, hogy

(a) a $\bigtimes_{i\in I} A_i$ alakú halmazok, ahol megszámlálható sok i kivételével $A_i = E_i$, egy $\mathcal{T}'$ topológia bázisát alkotják E-n;

(b) $\mathcal{T} < \mathcal{T}'$;

(c) megszámlálható sok $\mathcal{T}'$-nyílt halmaz metszete is nyílt;

(d) $x \in E$ esetén $\{x\}$ nem $\mathcal{T}'$-nyílt;

(e) $x \in E$ esetén $\{x\}$ nem metszete megszámlálható sok $\mathcal{T}$-nyílt halmaznak.

10. Adjunk példát olyan kompakt T_2-térre, amelyben a **6.4.** alatti 8. feladat jelölésével nem minden zárt halmaz tartozik $\mathfrak{Z}$-hez.

$\left[Z_f = \bigcap_{1}^{\infty} \left\{x : |f(x)| < \frac{1}{n}\right\}.\right]$

11. Mutassuk meg, hogy ha a $\bigtimes_{i\in I} \mathcal{T}_i$ topológia kompakt, akkor minden $\mathcal{T}_i$ is kompakt.

12. Mutassuk meg, hogy $\mathcal{T} = \bigtimes_{i\in I} \mathcal{T}_i$ pontosan akkor lokálisan kompakt, ha minden $\mathcal{T}_i$ lokálisan kompakt, és véges számú i kivételével $\mathcal{T}_i$ kompakt.

[Ha V x-nek kompakt $\mathcal{T}$-környezete, akkor $p_i(V)$ $p_i(x)$-nek kompakt $\mathcal{T}_i$-környezete, és véges számú i kivételével $p_i(V) = E_i$.]

13. Adjunk példát olyan reálkompakt térre, amely nem Lindelöf-tér.

14. Adjunk példát olyan megszámlálhatóan kompakt topológiára, amely sem nem kompakt, sem nem sorozatkompakt.

[$\mathcal{T}_1 \times \mathcal{T}_2$, ahol $\mathcal{T}_1$ kompakt, de nem sorozatkompakt, $\mathcal{T}_2$ pedig sorozatkompakt, de nem kompakt.]

15. Legyen az 1. alatti jelölésekkel $[E_i, \mathcal{T}_i]$ minden $i \in I$-re kompakt T_2-tér, és tegyük fel, hogy I irányított, azaz hogy $i, j \in I$ esetén van olyan $k \in I$, amelyre $i \leqq k, j \leqq k$. Mutassuk meg, hogy

(a) adott $i_1, \ldots, i_n$, $j \in I$, $i_s \leqq j$ $(s = 1, \ldots, n)$ esetén az

$$A_{i_1,\ldots,i_n;j} = \{x : x = (x_i) \in \bigtimes_{i\in I} E_i,\ p_{i_s j}(x_j) = x_{i_s} \quad (s = 1, \ldots, n)\}$$

halmaz $\bigtimes_{i\in I} \mathcal{T}_i$-zárt;

(b) az $A_{i_1,\ldots,i_n;j}$ halmazok egy $\mathfrak{r}$ rácsot alkotnak;

(c) x $\mathfrak{r}$-nek pontosan akkor $\bigtimes_{i\in I} \mathcal{T}_i$-torlódási pontja, ha $x \in E$;

(d) a $\{\mathcal{T}_i, p_{ij}\}$ rendszer projektív limesze kompakt $\mathcal{T}_2$-topológia.

16. Legyen $[E, \mathcal{T}]$ kompakt tér, és Φ olyan $\mathcal{T}$-folytonos függvényekből álló függvénycsalád, hogy $x, y \in E$, $x \neq y$ esetén van olyan $f \in \Phi$, amelyre $f(x) \neq f(y)$. Mutassuk meg, hogy $\mathcal{T}$ T_2-topológia, és hogy az $\mathcal{U}_\Phi$ uniform struktúra $\mathcal{T}$-t indukálja.

[Ha $\mathcal{U}$ olyan uniform struktúra, amelyre $\mathcal{T} = \mathcal{T}_{\mathcal{U}}$, akkor $\mathcal{U}_\Phi < \mathcal{U}$. Viszont, ha $U \in \mathcal{U}$ tetszőleges környék, $U_1 \in \mathcal{U}$ pedig olyan környék, hogy $U_1 \circ U_1 \subset U$, akkor $(E \times E)$-t befedik az $U_1(x) \times U_1(x)$ $(x \in E)$ alakú, valamint $x \neq y$ esetén a

$V_{x,y} \times W_{x,y}$ alakú halmazok, ahol $V_{x,y}$ és $W_{x,y}$ $\mathcal{T}$-nyílt, $x \in V_{x,y}$, $y \in W_{x,y}$, és alkalmas $f_{x,y} \in \Phi$-re és $\varepsilon_{x,y} > 0$-ra $x' \in V_{x,y}$, $y' \in W_{x,y}$ esetén $|f_{x,y}(x') - f_{x,y}(y')| \geqq \varepsilon_{x,y}$. Véges részbefedést kiválasztva és az ebben fellépő $f_{x,y}$-okat $f_1, \ldots, f_n$-nel jelölve, $\varepsilon > 0$-t a fellépő $\varepsilon_{x,y}$-oknál a kisebbnek választva $U_{\{f_1,\ldots,f_n\},\varepsilon} \subset U$.]

17. Legyen $[E, \mathcal{T}]$ kompakt topologikus tér, Φ pedig olyan függvénycsalád, amely $\mathcal{T}$-folytonos függvényekből áll, tartalmazza az összes állandókat, $x, y \in E$, $x \neq y$ esetén van olyan $f \in \Phi$, hogy $f(x) \neq f(y)$, továbbá vagy

(a) $c \in \mathbf{R}$, $f \in \Phi$ esetén $f + c \in \Phi$, $cf \in \Phi$;

és

(b) $f, g \in \Phi$ esetén $\max(f, g) \in \Phi$, $\min(f, g) \in \Phi$;

vagy pedig

(c) $f, g \in \Phi$ esetén $f + g \in \Phi$, $fg \in \Phi$.

Mutassuk meg, hogy ekkor minden $\mathcal{T}$-folytonos függvény egy Φ-ből vett egyenletesen konvergens sorozat limeszeként állítható elő.

[Ha f $\mathcal{T}$-folytonos, akkor az előző feladat állítása és (5.3.28) szerint $\mathcal{S}_\Phi$-szomszédságtartó, úgyhogy a **4.2.** alatti 17. ill. 18. feladatra lehet hivatkozni.]

18. Legyen $A \subset \mathbf{R}$ a Cantor-féle halmaz, $\mathcal{T} = \mathcal{E} \mid A$. Mutassuk meg, hogy tetszőleges $n \in \mathbf{N}$ esetén $\mathcal{T}^n$, továbbá $\mathcal{T}^{\mathbf{N}}$ is homeomorf $\mathcal{T}$-vel.

19. Ugyanez a feladat, ha $A = \mathbf{R} - \mathbf{Q}$ az összes irracionális számok halmazát jelenti.

20. Legyen A a Cantor-halmaz, $B = \mathbf{R} - \mathbf{Q}$, $\mathcal{T}_1 = \mathcal{E} \mid A$, $\mathcal{T}_2 = \mathcal{E} \mid B$. Mutassuk meg, hogy az $[A, \mathcal{T}_1]$ és $[B, \mathcal{T}_2]$ terek mindegyikének van a másikkal homeomorf altere.

21. Igazoljuk, hogy a Cantor-féle halmaz nem-megszámlálható.

7.2. SZOMSZÉDSÁGI TEREK SZORZATA

7.2.a. Szomszédsági relációk projektív előállítása. Csaknem változtatás nélkül lemásolhatjuk a topológiák projektív előállításáról elmondottakat. Így (3.1.50) (a) és (3.1.21) alapján kimondható:

(7.2.1) *Legyen $I \neq \emptyset$, $E \neq \emptyset$, $[E_i, \mathcal{S}_i]$ szomszédsági tér, $f_i : E \to E_i$ minden $i \in I$-re. Ekkor létezik E-en egy legdurvább $\mathcal{S}^*$ szomszédsági reláció, amelyre f_i minden $i \in I$ mellett $(\mathcal{S}^*, \mathcal{S}_i)$-szomszédságtartó, mégpedig*

$$\mathcal{S}^* = \sup \{f^{-1}(\mathcal{S}_i) : i \in I\}. \tag{7.2.2}$$

$\mathcal{S}^*$-ot az $\{f_i, \mathcal{S}_i : i \in I\}$ rendszer által projektíven előállított szomszédsági relációnak nevezzük. ▌

Például (4.2.15) mutatja, hogy ha $\Phi = \{f_i : i \in I\}$ korlátos függvénycsalád E-n, és ρ_1 az euklideszi távolság $\mathbf{R}$-en, akkor $\mathcal{S}_\Phi$ azonos az $\{f_i, \mathcal{S}_i : i \in I\}$ rendszer által projektíven előállított szomszédsági relációval, ha minden i-re $\mathcal{S}_i = \mathcal{S}_{\rho_1}$. Még egyszerűbben, egy $\mathcal{S}$ szomszédsági reláció $f^{-1}(\mathcal{S})$ inverz képe nem más, mint az egyelemű $\{f, \mathcal{S}\}$ rendszer által projektíven előállított szomszédsági reláció.

Ha viszont minden $i \in I$-re $E_i = E$, f_i pedig E identitása, akkor az $\{f_i, \mathscr{S}_i : i \in I\}$ rendszer projektíven éppen a sup $\{\mathscr{S}_i : i \in I\}$ szomszédsági relációt állítja elő.

A továbbiakban mindenütt (7.2.1) jelöléseit alkalmazzuk. (3.1.21)-ből és (3.1.31)-ből kiolvasható:

(7.2.3) *$A, B \subset E$ esetén $A\ \mathscr{S}^*\ B$ pontosan akkor áll, ha bármely*

$$A = \bigcup_1^p A_j, \qquad B = \bigcup_1^q B_k$$

véges felbontáshoz van olyan j és k, hogy minden $i \in I$ indexre $f_i(A_j)\ \mathscr{S}_i f_i(B_k)$. ∎

(3.1.41), (3.1.50) (a), (3.1.36) és (3.1.35) alapján adódik:

(7.2.4) *Ha $[X, \mathscr{S}]$ szomszédsági tér, és $g : X \to E$, akkor g pontosan akkor $(\mathscr{S}, \mathscr{S}^*)$-szomszédságtartó, ha $f_i \circ g$ minden $i \in I$-re $(\mathscr{S}, \mathscr{S}_i)$-szomszédságtartó.* ∎

(7.2.4)-ből adódik:

(7.2.5) *Legyen minden $i \in I$-re $J_i \neq \emptyset$ egy indexhalmaz, $[E_{ij}, \mathscr{S}_{ij}]$ szomszédsági tér $i \in I$, $j \in J_i$ esetén, $f_{ij} : E_i \to E_{ij}$ olyan leképezés, hogy $\mathscr{S}_i$ az $\{f_{ij}, \mathscr{S}_{ij} : j \in J_i\}$ rendszer által projektíven előállított szomszédsági reláció. Ekkor $\mathscr{S}^*$ azonos az $\{f_{ij} \circ f_i, \mathscr{S}_{ij} : i \in I,\ j \in J_i\}$ rendszer által projektíven előállított szomszédsági relációval.* ∎

(7.2.5) speciális esete:

(7.2.6) *Ha $g : X \to E$, $X \neq \emptyset$, akkor $g^{-1}(\mathscr{S}^*)$ éppen az $\{f_i \circ g, \mathscr{S}_i : i \in I\}$ rendszer által projektíven előállított szomszédsági reláció.* ∎

(7.2.5)-ből (3.1.32) és (3.1.47) felhasználásával adódik:

(7.2.7) *Legyen $\emptyset \neq E_0 \subset E$, és $f_i(E_0) \subset X_i \subset E_i$ minden i-re. Ekkor az $\{f_i \mid_{E_0}^{X_i}, \mathscr{S}_i \mid X_i : i \in I\}$ rendszer által projektíven előállított szomszédsági reláció $\mathscr{S}^* \mid E_0$.* ∎

Ismét (7.2.5)-ből következik:

(7.2.8) *Legyen $[Z_i, \mathscr{S}'_i]$ olyan szomszédsági tér és $g_i : E_i \to Z_i$ olyan leképezés, hogy $\mathscr{S}_i = g_i^{-1}(\mathscr{S}'_i)$. Ekkor $\mathscr{S}^*$ azonos a $\{g_i \circ f_i, \mathscr{S}'_i : i \in I\}$ rendszer által projektíven előállított szomszédsági relációval.* ∎

Innen nyernető (3.1.50) (c) alapján:

(7.2.9) *Ha $g_i : E_i \to Z_i$ minden $i \in I$-re $(\mathscr{S}_i, \mathscr{S}'_i)$-ekvimorfizmus, akkor $\mathscr{S}^*$ azonos a $\{g_i \circ f_i, \mathscr{S}'_i : i \in I\}$ rendszer által projektíven előállított szomszédsági relációval.* ∎

(7.2.10) *Ha $I = \bigcup_{j \in J} I_j$, és $\mathscr{S}_j^*$ az $\{f_i, \mathscr{S}_i : i \in I_j\}$ rendszer által projektíven előállított szomszédsági reláció, akkor $\mathscr{S}^* = \sup\{\mathscr{S}_j^* : j \in J\}$.* ∎

(3.1.34) evidens következménye:

(7.2.11) *Ha $\mathscr{S}'_i$ olyan szomszédsági reláció E_i-n, hogy $\mathscr{S}_i < \mathscr{S}'_i$ minden i-re, és $\mathscr{S}^{**}$ az $\{f_i, \mathscr{S}'_i : i \in I\}$ rendszer által projektíven előállított szomszédsági reláció, akkor $\mathscr{S}^* < \mathscr{S}^{**}$.* ∎

Végül (3.1.33) és (3.1.21) alapján kapcsolat létesíthető a szomszédsági relációk és a topológiák projektív előállítása között:

(7.2.12) *Az $\{f_i, \mathscr{T}_{\mathscr{S}_i} : i \in I\}$ rendszer által projektíven előállított topológia éppen $\mathscr{T}_{\mathscr{S}^*}$.* ∎

7.2.b. Szomszédsági terek szorzata. Legyen $I \neq \emptyset$, minden $i \in I$-re $[E_i, \mathscr{S}_i]$ egy szomszédsági tér, $E = \bigtimes_{i \in I} E_i$, $p_i : E \to E_i$ az i-edik vetítés. A $\{p_i, \mathscr{S}_i : i \in I\}$ rendszer által E-n projektíven előállított $\mathscr{S}$ szomszédsági relációt a $\mathscr{S}_i$ **szomszédsági relációk szorzatának** nevezzük és $(\bigtimes_{i \in I} \mathscr{S}_i)$-vel jelöljük. A $[\bigtimes_{i \in I} E_i, \bigtimes_{i \in I} \mathscr{S}_i]$ szomszédsági tér az $[E_i, \mathscr{S}_i]$ **szomszédsági terek szorzata.** Nem szorulnak magyarázatra a $\bigtimes_1^m \mathscr{S}_i$, $\bigtimes_1^\infty \mathscr{S}_i$, $\mathscr{S}^I$, $\mathscr{S}^m$ jelölések.

A fenti jelöléseket használjuk a továbbiakban is.

Például a 147. oldalon értelmezett $\mathscr{S}$ szomszédsági reláció nem egyéb, mint $\mathscr{S}_{\rho_1} \times \mathscr{S}_{\rho_1}$, ahol ρ_1 az euklideszi távolságot jelenti **R**-en.

(7.2.3)-ból rögtön következik:

(7.2.13) *$A, B \subset E$ esetén $A \mathscr{S} B$ pontosan akkor áll, ha bármely*

$$A = \bigcup_1^p A_j, \qquad B = \bigcup_1^q B_k$$

felbontáshoz található olyan j és k, hogy $p_i(A_j)\, \mathscr{S}_i\, p_i(B_k)$ minden $i \in I$-re. ▌

(7.2.4) következménye:

(7.2.14) *Legyen $[X, \mathscr{S}']$ szomszédsági tér, $g : X \to E$. g pontosan akkor $(\mathscr{S}', \mathscr{S})$-szomszédságtartó, ha minden i-re $p_i \circ g$ $(\mathscr{S}', \mathscr{S}_i)$-szomszédságtartó.* ▌

(7.2.11)-ből adódik:

(7.2.15) *Ha $\mathscr{S}'_i$ szomszédsági reláció E_i-n, $\mathscr{S}_i < \mathscr{S}'_i$, akkor $\bigtimes_{i \in I} \mathscr{S}_i < \bigtimes_{i \in I} \mathscr{S}'_i$.* ▌

(7.2.6)-ből kiolvasható:

(7.2.16) *Ha $\emptyset \neq A_i \subset E_i$, és $A = \bigtimes_{i \in I} A_i$, akkor $\bigtimes_{i \in I} (\mathscr{S}_i \mid A_i) = \mathscr{S} \mid A$.* ▌

Ebből és (3.1.37)-ből (3.1.50) (c) alapján következik:

(7.2.17) *Legyen (7.2.16) feltételei mellett $A_j = E_j$ egy $j \in I$-re, a többi $i \in I$-re pedig $A_i = \{y_i\}$, $y_i \in E_i$. Ekkor $p_j \mid A$ $(\mathscr{S} \mid A, \mathscr{S}_j)$-ekvimorfizmus.* ▌

(7.2.14)-ből könnyen adódik:

(7.2.18) *Legyen $[E'_i, \mathscr{S}'_i]$ minden $i \in I$-re olyan szomszédsági tér és $f_i : E_i \to E'_i$ olyan tulajdonságú leképezés, hogy f_i $(\mathscr{S}_i, \mathscr{S}'_i)$-szomszédságtartó, $E' = \bigtimes_{i \in I} E'_i$, $\mathscr{S}' = \bigtimes_{i \in I} \mathscr{S}'_i$, $p'_i : E' \to E'_i$ az i-edik vetítés, $f : E \to E'$ az a leképezés, amelyre $f_i \circ p_i = p'_i \circ f$. Ekkor f $(\mathscr{S}, \mathscr{S}')$-szomszédságtartó.* ▌

Ebből nyerhető:

(7.2.19) *Ha (7.2.18) feltételei mellett f_i $(\mathscr{S}_i, \mathscr{S}'_i)$-ekvimorfizmus, akkor f is $(\mathscr{S}, \mathscr{S}')$-ekvimorfizmus.* ▌

Ismét (7.2.14) felhasználásával igazolható:

(7.2.20) *Legyen (7.1.19) jelöléseivel $\mathscr{S}_i$ szomszédsági reláció B_i-n, $\mathscr{S}'_{f(i)} = \mathscr{S}_i$, $\mathscr{S} = \bigtimes_{i \in I} \mathscr{S}_i$, $\mathscr{S}' = \bigtimes_{j \in J} \mathscr{S}'_j$. Ekkor g $(\mathscr{S}, \mathscr{S}')$-ekvimorfizmus.* ▌

Ugyancsak (7.2.14)-ből nyerhető:

(7.2.21) *Legyen* (7.1.20) *jelöléseivel* $\mathcal{S}_i$ *szomszédsági reláció* A_i*-n*, $\mathcal{S} = \bigtimes_{i\in I} \mathcal{S}_i$, $\mathcal{S}'_j = \bigtimes_{i\in I_j} \mathcal{S}_i$, $\mathcal{S}' = \bigtimes_{j\in J} \mathcal{S}'_j$. *Ekkor* f $(\mathcal{S}, \mathcal{S}')$*-ekvimorfizmus.* ▮

(7.2.12)-ből kiolvasható:

(7.2.22) *Ha* $\mathcal{S} = \bigtimes_{i\in I} \mathcal{S}_i$, *akkor* $\mathcal{T}_{\mathcal{S}} = \bigtimes_{i\in I} \mathcal{T}_{\mathcal{S}_i}$. ▮

Ebből és (7.1.36)-ből adódik:

(7.2.23) *Szeparált szomszédsági terek szorzata is szeparált.* ▮

7.2.c. Beágyazási tételek. Itt is érvényes a (7.1.48)-nak megfelelő tétel:

(7.2.24) *Legyen* $I \neq \emptyset$, $i \in I$ *esetén* $[E_i, \mathcal{S}_i]$ *szomszédsági tér,* $X \neq \emptyset$ *adott halmaz,* $f_i : X \to E_i$, $\mathcal{S}^*$ *az* $\{f_i, \mathcal{S}_i : i \in I\}$ *rendszer által projektíven előállított szomszédsági reláció,* $E = \bigtimes_{i\in I} E_i$, $\mathcal{S} = \bigtimes_{i\in I} \mathcal{S}_i$, $p_i : E \to E_i$ *az i-edik vetítés, és* $f : X \to E$ *az a leképezés, amelyre* $p_i \circ f = f_i$, *végül* $h = f\,|^{f(X)}_X$. *Ha feltesszük, hogy* $x, y \in X$, $x \neq y$ *esetén legalább egy* $i \in I$*-re* $f_i(x) \neq f_i(y)$, *akkor* h $(\mathcal{S}^*, \mathcal{S}\,|\,f(X))$*-ekvimorfizmus. Ez a feltevés biztosan teljesül, ha* $\mathcal{S}^*$ *szeparált.*

Bizonyítás. (7.2.6)-ból látható, hogy $\mathcal{S}^* = f^{-1}(\mathcal{S})$, s akkor (3.1.50) (b) mutatja hogy h ekvimorfizmus, hiszen bijektív. Ha $\mathcal{S}^*$ szeparált, és $x, y \in X$, $x \neq y$, akkor $\{x\}\,\overline{\mathcal{S}^*}\,\{y\}$ miatt (7.2.3) szerint van olyan $i \in I$, amelyre $\{f_i(x)\}\,\overline{\mathcal{S}_i}\,\{f_i(y)\}$, s így $f_i(x) \neq f_i(y)$. ▮

(7.2.24)-ből (4.2.23) alapján azonnal következik:

(7.2.25) *Legyen* $[X, \mathcal{S}^*]$ *szeparált szomszédsági tér,* $\mathbf{I} = [0, 1]$, $\mathcal{S} = \mathcal{S}_{\rho_1}\,|\,\mathbf{I}$, ρ_1 *az euklideszi távolság* $\mathbf{R}$*-en. Ekkor alkalmas* I *mellett* $[X, \mathcal{S}^*]$ *ekvimorf az* $[\mathbf{I}^I, \mathcal{S}^I]$ *tér egy alterével.*

Bizonyítás. Ha $\{g_i : i \in I\}$ az összes $\mathbf{I}$-be eső értékű szomszédságtartó függvények családja, akkor (4.2.23) és (4.2.15) szerint $\mathcal{S}^*$ a $\{g_i, \mathcal{S}_{\rho_1} : i \in I\}$ rendszer által projektíven előállított szomszédsági reláció, és (3.1.47) értelmében ugyanez mondható az $f_i = g_i\,|^{\mathbf{I}}_X$ jelöléssel az $\{f_i, \mathcal{S} : i \in I\}$ rendszerről. ▮

Természetesen (7.2.22) miatt az itt szereplő $\mathcal{S}^I$ nem más, mint az $[\mathbf{I}^I, (\mathcal{G}\,|\,\mathbf{I})^I]$ Tyihonov-féle kocka (egyetlen) szomszédsági relációja. Az $[\mathbf{I}^I, \mathcal{S}^I]$ tér (7.1.42) miatt kompakt, és így valamely alterének lezárása egyben az illető altér kompaktifikációját szolgáltatja. Ez — szeparált szomszédsági terekre szorítkozva — a Szmirnov-féle kompaktifikáció létezésének újabb bizonyítását adja.

7.2.d. Gyakorlatok. 1. Legyen a **7.1.** alatti 1. feladat jelöléseivel $\mathcal{S}_i$ szomszédsági reláció E_i-n, p_{ij} $(\mathcal{S}_j, \mathcal{S}_i)$-szomszédságtartó, és $E \neq \emptyset$. Ekkor a $\{p_i, \mathcal{S}_i : i \in I\}$ rendszer által projektíven előállított $\mathcal{S}$ szomszédsági relációt a $\{\mathcal{S}_i, p_{ij}\}$ rendszer projektív limeszének mondjuk. Mutassuk meg, hogy $\mathcal{T}_{\mathcal{S}}$ éppen a $\{\mathcal{T}_{\mathcal{S}_i}, p_{ij}\}$ rendszer projektív limesze, s hogy $\mathcal{S} = \bigtimes_{i\in I} \mathcal{S}_i\,|\,E$, továbbá igazoljuk az idézett feladat (b) és (c) állításainak megfelelőit.

2. Legyen $\mathcal{S}^*$ az $\{f_i, \mathcal{S}_i : i \in I\}$ rendszer által projektíven előállított szomszédsági reláció, és $\mathcal{S}_i$ minden i-re szeparált. Mutassuk meg, hogy $\mathcal{S}^*$ pontosan akkor szeparált, ha $x \neq y$ esetén van olyan $i \in I$, hogy $f_i(x) \neq f_i(y)$.

3. Legyen $\mathcal{S}$ az $\mathcal{G}$ topológiához tartozó Čech—Stone-féle szomszédsági reláció

R-en, továbbá

$$A = \{(x, y) : x + y \leqq 0\}, \; B = \{(x, y) : x + y \geqq 1\}.$$

Mutassuk meg, hogy

(a) $A \mathscr{S}^2 B$;

(b) A és B távoli $\mathscr{E}^2$ Čech—Stone-féle szomszédsági relációjára nézve.

[A 147. oldal gondolatmenete alkalmazható.]

4. Mutassuk meg, hogy az előző feladat A és B halmazára $A \mathscr{S}^2 B$ akkor is, ha $\mathscr{S}$ **R**-nek diszkrét szomszédsági relációját jelöli. Eszerint két diszkrét szomszédsági tér szorzata nem feltétlenül diszkrét, holott két diszkrét topológia szorzata diszkrét.

5. Legyen $\mathscr{S}$ az $\mathscr{E}$-t indukáló legdurvább szomszédsági reláció **R**-en, $\mathscr{S}'$ pedig az $\mathscr{E}^2$-et indukáló legdurvább szomszédsági reláció $\mathbf{R}^2$-en. Mutassuk meg, hogy $\mathbf{R}^2$-nek egyik tényezőjére való vetítése sem $(\mathscr{S}', \mathscr{S})$-szomszédságtartó s így $\mathscr{S}' \neq \mathscr{S}^2$.

[Ha $A = \{(x, 0) : x \geqq 1\}, B = \{(0, y) : y \geqq 1\}$, akkor $A \mathscr{S}' B$, de $p_1(A) \overline{\mathscr{S}} p_1(B)$, $p_2(A) \overline{\mathscr{S}} p_2(B)$.]

6. Legyen $\mathscr{S}^*$ az $\{f_i, \mathscr{S}_i : i \in I\}$ rendszer által projektíven előállított szomszédsági reláció. Mutassuk meg, hogy egy $\mathfrak{r}$ rács pontosan akkor $\mathscr{S}^*$-komprimált, ha $f_i(\mathfrak{r})$ minden i-re $\mathscr{S}_i$-komprimált.

[$A \overline{\mathscr{S}^*} B$ esetén $A = \bigcup_{j=1}^{m} A_j$, $B = \bigcup_{k=1}^{n} B_k$ úgy, hogy minden j, k párra alkalmas $i(j, k)$ mellett $f_i(A_j) \overline{\mathscr{S}}_{i(j,k)} f_i(B_k)$. Így van olyan $R_{jk} \in \mathfrak{r}$, amelyre $f_i(R_{jk})$ $f_i(A_j)$ és $f_i(B_k)$ közül legfeljebb egyet metsz, tehát R_{jk} is A_j és B_k közül legfeljebb egyet metszhet. Ha $R \in \mathfrak{r}$ olyan, hogy $R \subset \bigcap_{j=1}^{m} \bigcap_{k=1}^{n} R_{jk}$, akkor R A és B közül csak egyiket metszheti.]

7.3. UNIFORM TEREK SZORZATA

7.3.a. Uniform struktúrák projektív előállítása. A topológiák és szomszédsági relációk előállításának mintájára analóg definíciót és tételeket állíthatunk fel. (3.2.27) és (3.2.39) szerint:

(7.3.1) *Legyen $I \neq \emptyset$, $E \neq \emptyset$, minden $i \in I$-re $[E_i, \mathfrak{U}_i]$ uniform tér, $f_i : E \to E_i$. Ekkor van E-n egy legdurvább $\mathfrak{U}^*$ uniform struktúra, amelyre nézve minden f_i $(\mathfrak{U}^*, \mathfrak{U}_i)$-egyenletesen folytonos, mégpedig*

$$\mathfrak{U}^* = \sup \{f_i^{-1}(\mathfrak{U}_i) : i \in I\}. \quad \blacksquare \tag{7.3.2}$$

A (7.3.2) alatti $\mathfrak{U}^*$-ot mondjuk az $\{f_i, \mathfrak{U}_i : i \in I\}$ rendszer által **projektíven előállított uniform struktúrá**nak. A továbbiakban mindig a (7.3.1) alatti jelöléseket használjuk.

Például (4.2.12) értelmében a Φ függvénycsalád által indukált $\mathcal{U}$ uniform struktúra nem más, mint — a $\Phi = \{f_i : i \in I\}$ jelöléssel — az $\{f_i, \mathcal{U}_i : i \in I\}$ rendszer által projektíven előállított uniform struktúra (ahol $\mathcal{U}_i = \mathcal{U}_{\rho_1}$ minden i-re, ρ_1 az euklideszi távolság **R**-en). Ha $f : X \to Y$, $\mathcal{U}$ uniform struktúra Y-on, akkor $f^{-1}(\mathcal{U})$ éppen az egyelemű $\{f, \mathcal{U}\}$ rendszer által projektíven előállított uniform struktúra, ha pedig minden i-re $E_i = E$, f_i az E halmaz identitása, akkor $\mathcal{U}^* = \sup \{\mathcal{U}_i : i \in I\}$. ∎

A (7.3.2)-ben szereplő $\mathcal{U}^*$ megkonstruálására (3.2.27) és (3.2.39) alapján a következő eljárás adható:

(7.3.3) *Legyen* $\mathfrak{U}_i$ *egy* $\mathcal{U}_i$*-t generáló uniform bázis,* $g_i : E \times E \to E_i \times E_i$ *pedig a* $g_i(x, y) = (f_i(x), f_i(y))$ *képlettel megadott leképezés. Ekkor* $\mathcal{U}^*$ *számára uniform szubbázist alkotnak a* $g_i^{-1}(U_i)$ *alakú környékek, ahol* $i \in I$, $U_i \in \mathfrak{U}_i$, *és így uniform bázist alkotnak a* $\bigcap_{j=1}^{n} g_{i_j}^{-1}(U_{i_j})$ *alakú környékek, ahol* $i_j \in I$, $U_{i_j} \in \mathfrak{U}_{i_j}$ $(j = 1, \ldots, n)$. ∎

(3.2.51), (3.2.65) (a), (3.2.46) és (3.2.45) felhasználásával könnyen igazolható:

(7.3.4) *Legyen* $[X, \mathcal{U}]$ *uniform tér,* $g : X \to E$. g *pontosan akkor* $(\mathcal{U}, \mathcal{U}^*)$*-egyenletesen folytonos, ha* $f_i \circ g$ *minden* $i \in I$*-re* $(\mathcal{U}, \mathcal{U}_i)$*-egyenletesen folytonos.* ∎

Ebből rögtön adódik:

(7.3.5) *Legyen minden* $i \in I$*-re* $J_i \neq \emptyset$, $[E_{ij}, \mathcal{U}_{ij}]$ *és* $f_{ij} : E_i \to E_{ij}$ $(j \in J_i)$ *olyan, hogy* $\mathcal{U}_i$ *az* $\{f_{ij}, \mathcal{U}_{ij} : j \in J_i\}$ *rendszer által projektíven előállított uniform struktúra. Ekkor* $\mathcal{U}^*$ *az* $\{f_{ij} \circ f_i, \mathcal{U}_{ij} : i \in I, j \in J_i\}$ *rendszer által projektíven előállított uniform struktúrával azonos.* ∎

Ennek speciális esete:

(7.3.6) *Ha* $g : X \to E$, *akkor* $g^{-1}(\mathcal{U}^*)$ *nem más, mint az* $\{f_i \circ g, \mathcal{U}_i : i \in I\}$ *rendszer által projektíven előállított uniform struktúra.* ∎

Innen aztán (3.2.40) és (3.2.56) alapján nyerhető:

(7.3.7) *Legyen* $\emptyset \neq E_0 \subset E$, *és* $f_i(E_0) \subset X_i \subset E_i$. *Ekkor* $\mathcal{U}^*|E_0$ *éppen az* $\{f_i|_{E_0}^{X_i}, \mathcal{U}_i \mid X_i : i \in I\}$ *rendszer által projektíven előállított uniform struktúra.* ∎

(7.3.5)-ből kiolvasható:

(7.3.8) *Legyen* $[Z_i, \mathcal{U}'_i]$ *olyan uniform tér és* $h_i : E_i \to Z_i$ *olyan leképezés* $(i \in I)$, *hogy* $\mathcal{U}_i = h_i^{-1}(\mathcal{U}'_i)$. *Ekkor* $\mathcal{U}^*$ *azonos a* $\{h_i \circ f_i, \mathcal{U}'_i : i \in I\}$ *rendszer által projektíven előállított uniform struktúrával.* ∎

Speciálisan (3.2.65) (c) figyelembevételével:

(7.3.9) *Ha* (7.3.8) *jelöléseivel* h_i $(\mathcal{U}_i, \mathcal{U}'_i)$*-unimorfizmus, akkor* $\mathcal{U}^*$ *azonos a* $\{h_i \circ f_i, \mathcal{U}'_i : i \in I\}$ *rendszer által projektíven előállított uniform struktúrával.* ∎

(7.3.10) *Legyen* $I = \bigcup_{j \in J} I_j$, $\mathcal{U}^*_j$ *az* $\{f_i, \mathcal{U}_i : i \in I_j\}$ *rendszer által projektíven előállított uniform struktúra. Ekkor* $\mathcal{U}^* = \sup \{\mathcal{U}^*_j : j \in J\}$. ∎

(3.2.44) közvetlen következménye:

(7.3.11) *Ha* $\mathcal{U}'_i$ *is uniform struktúra* E_i*-n,* $\mathcal{U}_i < \mathcal{U}'_i$, $\mathcal{U}^{**}$ *az* $\{f_i, \mathcal{U}'_i : i \in I\}$ *rendszer által projektíven előállított uniform struktúra, akkor* $\mathcal{U}^* < \mathcal{U}^{**}$. ∎

(7.3.3)-ból (4.2.33) alapján következik:

(7.3.12) *Ha I megszámlálható, és $\mathfrak{U}_i$ minden i-re félmetrizálható, akkor $\mathfrak{U}^*$ is félmetrizálható.* ∎

(3.2.72)-ből és (3.2.75)-ből adódik:

(7.3.13) *Ha minden $\mathfrak{U}_i$ prekompakt, akkor $\mathfrak{U}^*$ is prekompakt.* ∎

Az (5.1.3)—(5.1.5) tételekből könnyen kiolvasható:

(7.3.14) *Egy E-beli $\mathfrak{r}$ rács pontosan akkor $\mathfrak{U}^*$-Cauchy-rács, ha $f_i(\mathfrak{r})$ minden i-re $\mathfrak{U}_i$-Cauchy-rács.* ∎

(3.2.43)-ból és (3.2.29)-ből következik:

(7.3.15) *$\mathcal{T}_{\mathfrak{U}^*}$ éppen az $\{f_i, \mathcal{T}_{\mathfrak{U}_i} : i \in I\}$ rendszer által projektíven előállított topológia.* ∎

Innen (7.3.12) alapján adódik:

(7.3.16) *Az $\{f_i, \mathcal{T}_i : i \in I\}$ rendszer által projektíven előállított topológia félmetrizálható, ha minden $\mathcal{T}_i$ félmetrizálható, és I megszámlálható.* ∎

(3.2.43), (3.2.72) és (3.2.81) következménye:

(7.3.17) *Ha az $\mathfrak{U}_i$-k legfeljebb egy kivétellel prekompaktak, akkor az $\{f_i, \mathcal{S}_{\mathfrak{U}_i} : i \in I\}$ rendszer által projektíven előállított szomszédsági reláció azonos $\mathcal{S}_{\mathfrak{U}^*}$-gal.* ∎

7.3.b. Uniform terek szorzata. Legyen minden $i \in I \neq \emptyset$ indexre $[E_i, \mathfrak{U}_i]$ uniform tér, $E = \bigtimes_{i \in I} E_i$, $p_i : E \to E_i$ az i-edik vetítés, és tekintsük a $\{p_i, \mathfrak{U}_i : i \in I\}$ rendszer által projektíven előállított $\mathfrak{U}$ uniform struktúrát E-n. Ezt nevezzük az $\mathfrak{U}_i$ **uniform struktúrák szorzatá**nak, és jelöljük a $\bigtimes_{i \in I} \mathfrak{U}_i$ szimbólummal (ahol tehát *nem* az $\mathfrak{U}_i$ szűrőknek mint halmazoknak Descartes-féle szorzatára kell gondolni). A $[\bigtimes_{i \in I} E_i, \bigtimes_{i \in I} \mathfrak{U}_i]$ uniform tér az $[E_i, \mathfrak{U}_i]$ **uniform terek szorzata.** Világos, hogy mit kell a $\bigtimes_{1}^{m} \mathfrak{U}_i$, $\bigtimes_{1}^{\infty} \mathfrak{U}_i$, $\mathfrak{U}^I$, $\mathfrak{U}^m$ szimbólumokon érteni.

A következőkben mindig az előbbi jelöléseket használjuk.

(7.3.3)-ból kiolvasható a következő konstrukció:

(7.3.18) *Legyen $\mathfrak{u}_i$ uniform bázis $\mathfrak{U}_i$ számára, és $g_i : E \times E \to E_i \times E_i$ a $g_i(x, y) = (p_i(x), p_i(y))$ képlettel értelmezett leképezés. Ekkor $\mathfrak{U}$ számára uniform szubbázist alkotnak a $g_i^{-1}(U_i)$ alakú halmazok ($i \in I$, $U_i \in \mathfrak{u}_i$), és így a $\bigcap_{j=1}^{n} g_{i_j}^{-1}(U_{i_j})$ alakú halmazok, ahol $i_j \in I$, $U_{i_j} \in \mathfrak{u}_{i_j}$ ($j = 1, \ldots, n$), uniform bázist alkotnak $\mathfrak{U}$ számára.* ∎

$\mathfrak{u}_i$ rács-tulajdonságát felhasználva még hozzátehetjük, hogy ki lehet kötni azt is, hogy $j_1 \neq j_2$ esetén $i_{j_1} \neq i_{j_2}$ legyen. Ekkor tehát az $\mathfrak{U}$-t generáló uniform bázis tagjait úgy kapjuk, hogy kiválasztunk véges számú i indexet I-ből, mindegyikhez egy U_i környéket $\mathfrak{u}_i$-ből, és tekintjük azon $(x, y) \in E \times E$ párok halmazát, melyekre, a kiválasztott i-k mindegyikére, $(p_i(x), p_i(y)) \in U_i$ áll fenn.

Például:

(7.3.19) *Ha ρ_1, ill. ρ_m jelöli az euklideszi távolságot $\mathbf{R}$-en, ill. $\mathbf{R}^m$-en, akkor $\mathfrak{U}_{\rho_m} = \mathfrak{U}_1 \times \ldots \times \mathfrak{U}_m$, ahol $\mathfrak{U}_i = \mathfrak{U}_{\rho_1}$ minden i-re.*

Bizonyítás. Legyen $x = (x_i) \in \mathbf{R}^m$, $y = (y_i) \in \mathbf{R}^m$. Ha $\rho_m(x, y) < \varepsilon = \min(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_m)$, akkor (1.2.10) szerint $\rho_1(x_i, y_i) < \varepsilon_i$ minden i-re, tehát a $g_i(x, y) = (p_i(x), p_i(y)) = (x_i, y_i)$ jelöléssel $U_{\rho_m, \varepsilon} \subset \bigcap_1^m g_i^{-1}(U_{\rho_1, \varepsilon_i})$. Viszont ha $\rho_1(x_i, y_i) < \frac{\varepsilon}{m}$ minden i-re, akkor $\rho_m(x, y) < \varepsilon$, azaz

$$\bigcap_1^m g_i^{-1}(U_{\rho_1, \frac{\varepsilon}{m}}) \subset U_{\rho_m, \varepsilon}. \blacksquare$$

(7.3.4) alapján kimondható:

(7.3.20) *Legyen* $[X, \mathfrak{U}']$ *uniform tér,* $g : X \to E$. *g pontosan akkor* $(\mathfrak{U}', \mathfrak{U})$*-egyenletesen folytonos, ha* $p_i \circ g$ *minden i-re* $(\mathfrak{U}', \mathfrak{U}_i)$*-egyenletesen folytonos.* $\blacksquare$

(7.3.7) következménye:

(7.3.21) *Legyen* $\emptyset \neq A_i \subset E_i$, $A = \times_{i \in I} A_i$. *Ekkor* $\times_{i \in I} (\mathfrak{U}_i \mid A_i) = \mathfrak{U} \mid A$. $\blacksquare$

Innen (3.2.48) és (3.2.65) (c) felhasználásával adódik:

(7.3.22) *Ha* (7.3.21) *jelöléseivel* $A_j = E_j$ *egy* $j \in I$ *indexre, a többi i-re pedig* $A_i = \{y_i\}$ *egyetlen* $y_i \in E_i$ *pontból áll, akkor* $p_j \mid A$ $(\mathfrak{U} \mid A, \mathfrak{U}_j)$*-unimorfizmus.* $\blacksquare$

(7.3.11) alapján kimondható:

(7.3.23) *Ha* $\mathfrak{U}_i'$ *is uniform struktúra* E_i*-n, és* $\mathfrak{U}_i < \mathfrak{U}_i'$ *minden i-re, akkor* $\times_{i \in I} \mathfrak{U}_i < \times_{i \in I} \mathfrak{U}_i'$. $\blacksquare$

(7.3.20) szerint érvényes ennek általánosításaként:

(7.3.24) *Legyen* $[E_i', \mathfrak{U}_i']$ *uniform tér,* $f_i : E_i \to E_i'$ $(\mathfrak{U}_i, \mathfrak{U}_i')$*-egyenletesen folytonos minden i-re,* $E' = \times_{i \in I} E_i'$, $\mathfrak{U}' = \times_{i \in I} \mathfrak{U}_i'$, $p_i' : E' \to E_i'$ *az i-edik vetítés,* $f : E \to E'$ *az a leképezés, amelyre* $f_i \circ p_i = p_i' \circ f$. *Ekkor* f $(\mathfrak{U}, \mathfrak{U}')$*-egyenletesen folytonos. Ha minden* f_i $(\mathfrak{U}_i, \mathfrak{U}_i')$*-unimorfizmus, akkor* f *is* $(\mathfrak{U}, \mathfrak{U}')$*-unimorfizmus.* $\blacksquare$

Ugyancsak (7.3.20)-ból nyerhető:

(7.3.25) *Legyen* (7.1.19) *jelöléseivel* $\mathfrak{U}_i$ *uniform struktúra* B_i*-n,* $\mathfrak{U}_{f(i)}' = \mathfrak{U}_i$, $\mathfrak{U} = \times_{i \in I} \mathfrak{U}_i$, $\mathfrak{U}' = \times_{j \in J} \mathfrak{U}_j'$. *Ekkor* g $(\mathfrak{U}, \mathfrak{U}')$*-unimorfizmus.* $\blacksquare$

(7.3.26) *Legyen* (7.1.20) *jelöléseivel* $\mathfrak{U}_i$ *uniform struktura* A_i*-n,* $\mathfrak{U} = \times_{i \in I} \mathfrak{U}_i$, $\mathfrak{U}_j' = \times_{i \in I_j} \mathfrak{U}_i$, $\mathfrak{U}' = \times_{j \in J} \mathfrak{U}_j'$. *Ekkor* f $(\mathfrak{U}, \mathfrak{U}')$ *unimorfizmus.* $\blacksquare$

(7.3.12) következménye:

(7.3.27) *Megszámlálható sok félmetrizálható uniform tér szorzata is félmetrizálható.* $\blacksquare$

(7.3.13)-ból folyik:

(7.3.28) *Prekompakt uniform terek szorzata is prekompakt.* $\blacksquare$

(7.3.14)-ből adódik:

(7.3.29) *Egy E-beli* $\mathfrak{r}$ *rács pontosan akkor* $\mathfrak{U}$*-Cauchy-rács, ha minden i-re* $p_i(\mathfrak{r})$ $\mathfrak{U}_i$*-Cauchy-rács.* $\blacksquare$

(7.3.15)-ből következik:

(7.3.30) $\mathfrak{T}_{\mathfrak{U}} = \times_{i \in I} \mathfrak{T}_{\mathfrak{U}_i}$. $\blacksquare$

Ennek fontos következménye:

(7.3.31) *Teljes uniform terek szorzata is teljes.*

Bizonyítás. Ha $\mathfrak{r}$ $\mathcal{U}$-Cauchy-rács, akkor (7.3.29) szerint $p_i(\mathfrak{r})$ $\mathcal{U}_i$-Cauchy-rács, és így $p_i(\mathfrak{r}) \to x_i \in E_i$ $\mathcal{T}_{\mathcal{U}_i}$-re nézve ($i \in I$). Legyen $x = (x_i) \in E$. Ekkor (7.1.32) szerint $\mathfrak{r} \to x$ a $\underset{i \in I}{\times} \mathcal{T}_{\mathcal{U}_i}$, azaz (7.3.30) szerint a $\mathcal{T}_{\mathcal{U}}$ topológiára nézve. ∎

(7.3.16)-ból azonnal következik:

(7.3.32) *Megszámlálható sok félmetrizálható topologikus tér szorzata is félmetrizálható.* ∎

Ehhez (2.5.5) és (7.1.36) felhasználásával hozzátehetjük:

(7.3.33) *Megszámlálható sok metrizálható topologikus tér szorzata is metrizálható.* ∎

Ugyancsak (7.1.36)-ból adódik (7.3.30) alapján:

(7.3.34) *Szeparált uniform terek szorzata is szeparált.* ∎

Ebből és (7.3.27)-ből aztán adódik:

(7.3.35) *Megszámlálható sok metrizálható uniform tér szorzata is metrizálható.* ∎

(7.3.33) szerint a Hilbert-féle kocka metrizálható, (2.3.12) szerint minden altere is, (3.2.66) szerint pedig az ezekkel homeomorf terek is. Eszerint (7.1.57)-ből adódik:

(7.3.36) *Minden megszámlálható bázisú Tyihonov-tér metrizálható.* ∎

(7.3.37) **Uriszon-féle beágyazási tétel.** *Egy topologikus tér pontosan akkor metrizálható és szeparábilis, ha homeomorf a Hilbert-féle kocka egy alterével.*

Bizonyítás. Ha $[X, \mathcal{T}^*]$ metrizálható és szeparábilis, akkor (2.4.16) szerint M_2-tér, továbbá (4.2.20) és (2.5.5) szerint Tyihonov-tér, ennélfogva (7.1.57) szerint homeomorf a Hilbert-kocka egy alterével. Megfordítva, ezek az alterek (7.3.33) és (2.3.12) szerint metrizálhatók, továbbá (7.1.33) és (2.4.19) szerint M_2-terek, és (3.2.66) értelmében ugyanilyenek a velük homeomorf terek is. Végül (2.4.15)-re hivatkozva e terek szeparábilisak. ∎

(7.3.17)-ből adódik:

(7.3.38) *Ha az $\mathcal{U}_i$-k legfeljebb egynek a kivételével prekompaktak, akkor* $\mathcal{S}_{\mathcal{U}} = \underset{i \in I}{\times} \mathcal{S}_{\mathcal{U}_i}$. ∎

Érdemes itt megjegyezni, hogy az utóbbi egyenlőség fennállásához szükséges is, hogy az $\mathcal{U}_i$-k legfeljebb egynek a kivételével prekompaktak legyenek. Valóban:

(7.3.39) *Legyen $j, k \in I$, $j \neq k$, $\mathcal{U}_j$ és $\mathcal{U}_k$ nem prekompakt. Ekkor* $\mathcal{S}_{\mathcal{U}} \neq \underset{i \in I}{\times} \mathcal{S}_{\mathcal{U}_i}$.

Bizonyítás. Feltevésünk szerint van olyan $U'_j \in \mathcal{U}_j$ környék, hogy E_j nem egyesítése véges számú U'_j-rendben kicsiny halmaznak. Ha $U_j \in \mathcal{U}_j$ olyan környék, hogy $U_j \circ U_j \subset U'_j$, akkor készíthető olyan E_j-beli végtelen (x_n) sorozat, hogy $n \neq m$ esetén $(x_n, x_m) \notin U_j$, hiszen ha a már kiválasztott $x_1, \dots, x_n$ pontokhoz nem lehetne olyan x_{n+1}-et találni, amelyre $(x_i, x_{n+1}) \notin U_j$ minden $i = 1, \dots, n$ indexre, az azt jelentené, hogy $E_j = \bigcup_{i=1}^{n} U_j(x_i)$, és itt minden $U_j(x_i)$ U'_j-rendben kicsiny. Teljesen hasonlóan készíthető olyan E_k-beli végtelen (y_n) sorozat, hogy egy alkalmas $U_k \in \mathcal{U}_k$ környékre $n \neq m$ esetén $(y_n, y_m) \notin U_k$ legyen.

Tekintsük most az $A = \bigcup\limits_{1}^{\infty} A_n$ és $B = \bigcup\limits_{s=1}^{\infty} \bigcup\limits_{\substack{t=1 \\ s\neq t}}^{\infty} B_{st}$ halmazt, ahol

$$A_n = \mathop{\times}_{i\in I} A_n^i, \qquad B_{st} = \mathop{\times}_{i\in I} B_{st}^i,$$

és $i \neq j, k$ esetén $A_n^i = B_{st}^i = \{z_i\}$, ahol $z_i \in E_i$, továbbá $A_n^j = \{x_n\}$, $A_n^k = \{y_n\}$, $B_{st}^j = \{x_s\}$, $B_{st}^k = \{y_t\}$.

Ekkor $A\, \overline{\mathfrak{F}}_{\mathfrak{U}}\, B$. Valóban, tetszőleges $a \in A$ és $b \in B$ pontot véve, $a \in A_n$ és $b \in B_{st}$ alkalmas $n, s, t \in \mathbf{N}$ indexekre, és itt $s \neq t$ miatt vagy $s \neq n$, vagy $t \neq n$; az első esetben $(p_j(a), p_j(b)) = (x_n, x_s) \notin U_j$, a másodikban $(p_k(a), p_k(b)) = (y_n, y_t) \notin U_k$, úgyhogy $(a, b) \notin U$, U-val jelölve azon $(u, v) \in E \times E$ párok halmazát, amelyekre $(p_j(u), p_j(v)) \in U_j$, $(p_k(u), p_k(v)) \in U_k$; (7.3.18) szerint $U \in \mathfrak{U}$.

Másrészt, ha $A = \bigcup\limits_{1}^{p} A'_m$, $B = \bigcup\limits_{1}^{q} B'_r$ tetszőleges véges felbontás, akkor legalább egy A'_m legalább kettőt metsz az A_n halmazok közül, mondjuk $a_1 \in A_{n_1} \cap A'_m$, $a_2 \in A_{n_2} \cap A'_m$, $n_1 \neq n_2$. Legyen $\{b\} = B_{n_1 n_2}$, és r olyan index, amelyre $b \in B'_r$. Ekkor $i \neq j, k$ esetén $z_i = p_i(a_1) = p_i(b) \in p_i(A'_m) \cap p_i(B'_r)$, továbbá $x_{n_1} = p_j(a_1) = p_j(b) \in p_j(A'_m) \cap p_j(B'_r)$, $y_{n_2} = p_k(a_2) = p_k(b) \in p_k(A'_m) \cap p_k(B'_r)$, úgyhogy mindenesetre $p_i(A'_m)\, \mathfrak{F}_{\mathfrak{U}_i}\, p_i(B'_r)$ minden $i \in I$-re. Ezért (7.2.13) értelmében $A\, \mathfrak{F}\, B$, ahol $\mathfrak{F} = \mathop{\times}\limits_{i\in I} \mathfrak{F}_{\mathfrak{U}_i}$. ∎

Vegyük észre, hogy a 147. oldalon levő példa a (7.3.39) tételt illusztrálta.

7.3.c. Beágyazási tételek. Természetesen uniform struktúrákra is érvényes egy beágyazási tétel:

(7.3.40) *Legyen $I \neq \emptyset$, $i \in I$ esetén $[E_i, \mathfrak{U}_i]$ uniform tér, $X \neq \emptyset$ adott halmaz, $f_i : X \to E_i$, $\mathfrak{U}^*$ az $\{f_i, \mathfrak{U}_i : i \in I\}$ rendszer által projektíven előállított uniform struktúra, $E = \mathop{\times}\limits_{i\in I} E_i$, $\mathfrak{U} = \mathop{\times}\limits_{i\in I} \mathfrak{U}_i$, $p_i : E \to E_i$ az i-edik vetítés, és $f : X \to E$ az a leképezés, amelyre $p_i \circ f = f_i$, végül $h = f|_X^{f(X)}$. Ha $x, y \in X$, $x \neq y$ esetén $f_i(x) \neq f_i(y)$ legalább egy i-re, akkor h $(\mathfrak{U}^*, \mathfrak{U}|f(X))$-unimorfizmus; ez a kikötés biztosan teljesül, ha $\mathfrak{U}^*$ szeparált.*

Bizonyítás. (7.3.6) szerint $\mathfrak{U}^* = f^{-1}(\mathfrak{U})$, s akkor (3.2.65) (b) mutatja, hogy h unimorfizmus. Ha $\mathfrak{U}^*$ szeparált, akkor $x \neq y$ esetén legalább egy i-re és alkalmas $U_i \in \mathfrak{U}_i$ környékre $(f_i(x), f_i(y)) \notin U_i$, s akkor biztosan $f_i(x) \neq f_i(y)$. ∎

Ebből (4.2.12) alapján kiolvasható:

(7.3.41) *Egy Φ függvénycsalád által indukált $\mathfrak{U}_\Phi$ szeparált uniform struktúra unimorf alkalmas I mellett az $[\mathbf{R}^I, \mathfrak{U}_{\rho_1}^I]$ térnek egy alterével; itt ρ_1 az euklideszi távolság $\mathbf{R}$-en.* ∎

(7.3.42) *Minden szeparált, prekompakt uniform tér unimorf alkalmas I mellett az $[\mathbf{I}^I, (\mathfrak{U}_{\rho_1}|\mathbf{I})^I]$ térnek egy alterével; itt $\mathbf{I} = [0,1]$, és ρ_1 az euklideszi távolság $\mathbf{R}$-en. Ha a tér metrizálható, akkor $I = \mathbf{N}$ választható.*

Bizonyítás. Legyen $[X, \mathfrak{U}^*]$ szeparált, prekompakt uniform tér, és $[X', \mathfrak{U}']$ ennek teljes bővítése. Ez (6.3.29) szerint szeparált, (6.3.31) szerint kompakt, és ha

$\mathcal{U}^*$ metrizálható, akkor (6.3.30) szerint metrizálható. (7.1.50) szerint van olyan $h : X' \to X'' \subset \mathbf{I}^I$ leképezés alkalmas I mellett, amely $(\mathfrak{T}_{\mathcal{U}'}, (\mathcal{E}|\mathbf{I})^I|X'')$-homeomorfizmus, és (7.3.37) szerint a metrizálható esetben $I = \mathbf{N}$ választható, tekintettel (5.3.35)-re. Természetesen $[X'', \mathfrak{T}'']$ is kompakt, ahol $\mathfrak{T}'' = (\mathcal{E}|\mathbf{I})^I|X''$. Minthogy $\mathfrak{T}'' = \mathfrak{T}_{(\mathcal{U}_{\rho_1}|\mathbf{I})^I|X''}$ (3.2.35) és (7.3.30) szerint, azért (5.3.29) értelmében h $(\mathcal{U}', (\mathcal{U}_{\rho_1}|\mathbf{I})^I|X'')$-unimorfizmus is. ∎

(7.3.43) *Minden uniform tér unimorfan beágyazható félmetrizálható uniform terek szorzatába.*

Bizonyítás. Ha $\Sigma = \{\sigma_i\colon i \in I\}$ olyan eltéréscsalád, amelyre $\mathcal{U}_\Sigma = \mathcal{U}^*$, és $E_i = E$ minden i-re, $\mathcal{U}_i = \mathcal{U}_{\sigma_i}$, végül f_i az E halmaz identitása, akkor (3.2.28) szerint az $\{f_i, \mathcal{U}_i\colon i \in I\}$ rendszer projektíven előállítja az $\mathcal{U}^*$ uniform struktúrát, és (4.2.32) szerint adott $\mathcal{U}^*$-hoz mindig lehet ilyen Σ-t találni. (7.3.40) feltételei nyilván teljesülnek, tehát belőle az állítás következik. ∎

(7.3.44) *Minden szeparált uniform tér unimorfan beágyazható metrizálható uniform terek szorzatába.*

Bizonyítás. Legyen $[X, \mathcal{U}^*]$ szeparált uniform tér, és $\Sigma = \{\sigma_i\colon i \in I\}$ egy $\mathcal{U}^*$-ot indukáló eltérés-család. Az (1.3.19) tételt felhasználva minden i-re megadható egy $[E_i, \rho_i]$ metrikus tér és egy $f_i : X \to E_i$ leképezés úgy, hogy $\rho_i(f_i(x), f_i(y)) = \sigma_i(x, y)$ legyen minden $i \in I$-re és $x, y \in X$-re. Ekkor nyilván $f^{-1}(\mathcal{U}_{\rho_i}) = \mathcal{U}_{\sigma_i}$, úgyhogy (3.2.28) szerint az $\{f_i, \mathcal{U}_{\rho_i}\colon i \in I\}$ rendszer projektíven előállítja $\mathcal{U}^*$-ot. Eszerint (7.3.40) szolgáltatja az állítást. ∎

7.3.d. Uniform struktúrák négyzete. Legyen $[E, \mathcal{U}]$ uniform tér, $\mathfrak{T} = \mathfrak{T}_{\mathcal{U}}$ ennek topológiája. Az $E \times E$ halmazt, amelynek az $\mathcal{U}$-beli halmazok részei, felruházhatjuk az $\mathcal{U} \times \mathcal{U}$ uniform struktúrával, és az ezáltal indukált $\mathfrak{T}_{\mathcal{U}\times\mathcal{U}} = \mathfrak{T} \times \mathfrak{T}$ topológiával, tekintettel (7.3.30)-ra. Vezessük még be az $E \times E = E^2$, $\mathcal{U} \times \mathcal{U} = \mathcal{U}^2$, $\mathfrak{T} \times \mathfrak{T} = \mathfrak{T}^2$ rövidítést.

(7.3.45) *Ha U, $U_1 \in \mathcal{U}$ két olyan környék, hogy $U \circ U \circ U \circ U \circ U \subset U_1$, akkor U-nak $\mathfrak{T}^2$-lezárása része U_1 $\mathfrak{T}^2$-belsejének.*

Bizonyítás. Legyen $(x_0, y_0) \in \overline{U}$, így jelölve U-nak $\mathfrak{T}^2$-lezárását. Ekkor $U(x_0) \times U(y_0)$ (x_0, y_0)-nak $\mathfrak{T}^2$-környezete (7.1.22) és (3.2.23) szerint, tehát alkalmas $(x_1, y_1) \in U$ pontra $x_1 \in U(x_0)$, $y_1 \in U(y_0)$. Legyen most $(x, y) \in U(x_0) \times U(y_0)$ tetszőleges. Ekkor (x, x_0), (x_0, x_1), (x_1, y_1), (y_1, y_0), $(y_0, y) \in U$ folytán $(x, y) \in U_1$. ∎

(7.3.46) *Bármely $\mathcal{U}$ uniform struktúrának van csupa $\mathfrak{T}^2$-nyílt környékből és csupa $\mathfrak{T}^2$-zárt környékből álló uniform bázisa.*

Bizonyítás. (7.3.45) miatt elég meggondolni, hogy bármely környék $\mathfrak{T}^2$-belseje is, $\mathfrak{T}^2$-lezárása is szimmetrikus halmaz. ∎

A $\mathfrak{T}^2$-nyílt környékek hasznosságára a következő egyszerű tétel világít rá:

(7.3.47) *Ha $[E, \mathfrak{T}]$ tetszőleges topologikus tér, és $U \subset E \times E$ $(\mathfrak{T} \times \mathfrak{T})$-nyílt halmaz, akkor bármely $A \subset E$ esetén $U(A)$ $\mathfrak{T}$-nyílt.*

Bizonyítás. $y \in U(A)$ esetén van olyan $x \in A$, hogy $(x, y) \in U$, s x-nek, ill. y-nak olyan V, ill. W $\mathfrak{T}$-környezete, hogy $V \times W \subset U$. Világos, hogy $z \in W$ esetén $(x, z) \in V \times W \subset U$, tehát $z \in U(A)$. Így $W \subset U(A)$. ∎

(7.3.48) *Legyen σ eltérés E-n, $\mathcal{U} = \mathcal{U}_\sigma$. Ekkor $\sigma : E^2 \to \mathbf{R}$ $\mathcal{U}^2$-egyenletesen folytonos.*

Bizonyítás. Adott $\varepsilon > 0$-hoz tekintsük azt az $U \in \mathcal{U}^2$ környéket, amelyre $((x, y), (u, v)) \in U$ pontosan akkor áll, ha $(x, u) \in U_{\sigma, \frac{\varepsilon}{2}}$, $(y, v) \in U_{\sigma, \frac{\varepsilon}{2}}$ azaz ha $\sigma(x, u) < \frac{\varepsilon}{2}$, $\sigma(y, v) < \frac{\varepsilon}{2}$. Ekkor $((x, y), (u, v)) \in U$ esetén

$$\sigma(x, y) \leqq \sigma(x, u) + \sigma(u, v) + \sigma(v, y) < \sigma(u, v) + \varepsilon,$$

$$\sigma(u, v) \leqq \sigma(u, x) + \sigma(x, y) + \sigma(y, v) < \sigma(x, y) + \varepsilon,$$

tehát $|\sigma(x, y) - \sigma(u, v)| < \varepsilon$. ∎

(7.3.49) *Legyen $[E, \mathcal{U}]$ uniform tér, Σ eltérés-család E-n. Az $\mathcal{U}_\Sigma < \mathcal{U}$ reláció pontosan akkor áll, ha minden $\sigma \in \Sigma$ eltérés $\mathcal{U}^2$-egyenletesen folytonos.*

Bizonyítás. $\sigma \in \Sigma$ esetén (3.2.28) értelmében $\mathcal{U}_\sigma < \mathcal{U}_\Sigma$, tehát ha még $\mathcal{U}_\Sigma < \mathcal{U}$, akkor (7.3.23) miatt $\mathcal{U}_\sigma^2 < \mathcal{U}^2$, s így σ (7.3.48) és (3.2.53) folytán $\mathcal{U}^2$-egyenletesen folytonos. Ha viszont σ $\mathcal{U}^2$-egyenletesen folytonos, akkor $\varepsilon > 0$-hoz van olyan $U_1, U_2 \in \mathcal{U}$ környék, hogy $(x, u) \in U_1$, $(y, v) \in U_2$ esetén $|\sigma(x, y) - \sigma(u, v)| < \varepsilon$. Ha most $(x, y) \in U_1$, akkor $(y, y) \in U_2$ miatt $|\sigma(x, y) - \sigma(y, y)| < \varepsilon$, azaz $\sigma(x, y) < \varepsilon$, úgyhogy $U_1 \subset U_{\sigma, \varepsilon}$, és $\mathcal{U}_\sigma < \mathcal{U}$. Ebből (3.2.28) felhasználásával $\mathcal{U}_\Sigma < \mathcal{U}$ következik. ∎

Már (3.2.31)-ből tudjuk, hogy az egy adott topológiát indukáló uniform struktúrák között van legfinomabb. Ezt most könnyen meg is konstruálhatjuk:

(7.3.50) *Legyen $[E, \mathcal{T}]$ teljesen reguláris tér, és Σ az összes $\mathcal{T}^2$-folytonos eltérések családja. Ekkor $\mathcal{U}_\Sigma$ a legfinomabb $\mathcal{T}$-t indukáló uniform struktúra.*

Bizonyítás. $\sigma \in \Sigma$, $\varepsilon > 0$ esetén $U_{\sigma, \varepsilon} = \{(x, y): \sigma(x, y) < \varepsilon\}$ $\mathcal{T}^2$-nyílt, tehát (7.3.47) szerint $x \in E$, $\varepsilon > 0$, $\sigma_1, \dots, \sigma_n \in \Sigma$ esetén $U_{\sigma_1, \dots, \sigma_n; \varepsilon}(x) = \bigcap_1^n U_{\sigma_i, \varepsilon}(x)$ $\mathcal{T}$-nyílt. Ezért $\mathcal{T}_{\mathcal{U}_\Sigma} < \mathcal{T}$. Másrészt bármely $\mathcal{T}$-t indukáló $\mathcal{U}$ uniform struktúra indukálható egy Σ' eltérés-családdal, amelynek eltérései (7.3.49) szerint $\mathcal{U}^2$-egyenletesen folytonosak, tehát $\mathcal{T}_{\mathcal{U}^2} = \mathcal{T}^2$-folytonosak is. Ezért $\Sigma' \subset \Sigma$, úgyhogy $\mathcal{U} = \mathcal{U}_{\Sigma'} < \mathcal{U}_\Sigma$, tehát $\mathcal{T} = \mathcal{T}_\mathcal{U} < \mathcal{T}_{\mathcal{U}_\Sigma}$. Végül is $\mathcal{T} = \mathcal{T}_{\mathcal{U}_\Sigma}$, és minden $\mathcal{T}$-t indukáló $\mathcal{U}$ uniform struktúrára $\mathcal{U} < \mathcal{U}_\Sigma$. ∎

(7.3.48) felhasználásával a (6.3.30) tétel lényegesen élesíthető: a (fél)metrizálható uniform tér teljes burka az adott eltérés, ill. távolság kiterjesztésével látható el. Általánosabban:

(7.3.51) *Legyen Σ eltérés-család E-n, $[E', \mathcal{U}']$ pedig az $[E, \mathcal{U}_\Sigma]$ uniform tér teljes burka. Ekkor minden $\sigma \in \Sigma$ eltérés egyértelműen kiterjeszthető E'^2-re úgy, hogy az így kapott σ' kiterjesztések egy Σ' eltérés-családot alkossanak E'-n, amelyre $\mathcal{U}' = \mathcal{U}_{\Sigma'}$.*

Bizonyítás. $[E'^2, \mathcal{U}'^2]$ bővítése az $[E^2, \mathcal{U}_\Sigma^2]$ térnek, hiszen az utóbbi (7.3.21) szerint altere az előbbinek, és E^2 (7.1.27) szerint $\mathcal{T}^2_{\mathcal{U}'} = \mathcal{T}_{\mathcal{U}'^2}$-sűrű (7.3.30) miatt.

Ha $\sigma \in \Sigma$, akkor σ (7.3.49) szerint $\mathcal{U}_\Sigma^2$-egyenletesen folytonos. Az $[\mathbf{R}, \mathcal{U}_{\rho_1}]$ tér teljessége folytán (6.2.7) alkalmazható, és mutatja, hogy σ-nak van $\mathcal{U}'^2$-egyenletesen folytonos σ' kiterjesztése. Meg kell mutatnunk, hogy σ' eltérés E'-n, és hogy a $\Sigma' = \{\sigma': \sigma \in \Sigma\}$ eltérés-családra $\mathcal{U}_{\Sigma'} = \mathcal{U}'$. Az állított egyértelműség azután abból következik, hogy valamely $\mathcal{U}'$-t indukáló eltérés-család bármelyik eltérése (7.3.49) szerint szükségképpen $\mathcal{U}'^2$-egyenletesen folytonos, és σ-nak E'^2-re (6.2.3) szerint egyetlen $\mathcal{T}_{\mathcal{U}'^2}$-folytonos kiterjesztése van csak.

Mármost $\sigma(x, y) \in [0, +\infty)$ minden $(x, y) \in E^2$-re, és $[0, +\infty)$ $\mathcal{S}$-zárt, így (2.6.23) (e) szerint $\sigma'(x, y) \in [0, +\infty)$ minden $(x, y) \in E'^2$-re. Minthogy az az $f : E' \to E'^2$ leképezés, amelyre $f(x) = (x, x)$, (7.1.28) szerint $(\mathcal{T}_{\mathcal{U}'}, \mathcal{T}^2_{\mathcal{U}'})$-folytonos, azért a $\sigma_0'(x) = \sigma'(x, x)$ képlettel definiált $\sigma_0' : E' \to \mathbf{R}$ függvény $\mathcal{T}_{\mathcal{U}'}$-folytonos, továbbá E-n megegyezik az ugyancsak $\mathcal{T}_{\mathcal{U}'}$-folytonos azonosan 0 függvénnyel, tehát (6.2.3) szerint E'-n is megegyezik vele. Eszerint $\sigma'(x, x) = 0$ minden $x \in E'$-re.

Legyen most $g : E'^2 \to E'^2$ a $g(x, y) = (y, x)$ képlettel adott leképezés. Ismét (7.1.28)-ból következik, hogy ez $(\mathcal{T}^2_{\mathcal{U}'}, \mathcal{T}^2_{\mathcal{U}'})$-folytonos, és így a $\sigma_1'(x, y) = \sigma'(y, x)$ képlettel megadott σ_1' $\mathcal{T}^2_{\mathcal{U}'}$-folytonos függvény, amely E^2-en σ'-vel egyezik meg. (6.2.3) mutatja, hogy E'^2-en is $\sigma_1' = \sigma'$, azaz $\sigma'(y, x) = \sigma'(x, y)$.

Tekintsük most az $E' \times E' \times E' = E'^3$ halmazon értelmezett $\sigma_2'(x, y, z) = \sigma'(x, y) + \sigma'(y, z) - \sigma'(x, z)$ függvényt. Újra (7.1.28) mutatja, hogy az E'^3-ból E'^2-be vezető

$$q_1(x, y, z) = (y, z), \quad q_2(x, y, z) = (x, z), \quad q_3(x, y, z) = (x, y)$$

leképezések $(\mathcal{T}^3_{\mathcal{U}'}, \mathcal{T}^2_{\mathcal{U}'})$-folytonosak, és így σ_2' (2.6.27) figyelembevételével $\mathcal{T}^3_{\mathcal{U}'}$-folytonos függvény. Ennek értékei a (7.1.27) szerint $\mathcal{T}^3_{\mathcal{U}'}$-sűrű E^3 halmazon $[0, +\infty)$-be esnek, tehát (2.6.23) (e) szerint E'^3-ön is. Más szóval

$$\sigma'(x, z) \leqq \sigma'(x, y) + \sigma'(y, z) \qquad ((x, y, z) \in E'^3).$$

A mondottak értelmében σ' eltérés és Σ' eltérés-család E'-n. (7.3.49) mutatja, hogy $\mathcal{U}_{\Sigma'} < \mathcal{U}'$. Minthogy E $\mathcal{T}_{\mathcal{U}'}$-sűrű, $\mathcal{T}_{\mathcal{U}_{\Sigma'}} < \mathcal{T}_{\mathcal{U}'}$ miatt annál inkább $\mathcal{T}_{\mathcal{U}_{\Sigma'}}$-sűrű is, azaz $[E', \mathcal{U}_{\Sigma'}]$ is bővítése $[E, \mathcal{U}_{\Sigma}]$-nak, hiszen (3.2.34) értelmében $\mathcal{U}_{\Sigma'}|E = \mathcal{U}_{\Sigma}$.

Mármost E identitásának $\mathcal{U}'$ teljessége miatt (6.2.7) szerint van $(\mathcal{U}_{\Sigma'}, \mathcal{U}')$-egyenletesen folytonos h kiterjesztése E'-re. Így h (3.2.53) szerint $(\mathcal{U}', \mathcal{U}')$-egyenletesen folytonos, E-t rögzítő leképezés. Ha $x \in E' - E$ $\mathcal{T}_{\mathcal{U}'}$-környezetszűrőjének E-beli nyomszűrője $\mathfrak{z}(x)$, akkor $\mathfrak{z}(x) \to x$ $\mathcal{T}_{\mathcal{U}'}$-re nézve, tehát $\mathfrak{z}(x) = h(\mathfrak{z}(x)) \to h(x)$ ugyancsak $\mathcal{T}_{\mathcal{U}'}$-re nézve, és ez (6.3.21) értelmében csak $h(x) = x$ esetén lehetséges. Ennélfogva h nem más, mint E' identitása, amiből (3.2.52) miatt $\mathcal{U}' < \mathcal{U}_{\Sigma'}$ adódik. Eszerint $\mathcal{U}_{\Sigma'} = \mathcal{U}'$. ∎

(7.3.51)-ből (6.3.27) és (3.2.34) alapján rögtön következik:

(7.3.52) *A* (7.3.51) *tétel állítása akkor is érvényes, ha* $[E', \mathcal{U}']$ *tetszőleges redukált bővítése* $[E, \mathcal{U}]$*-nak.* ∎

7.3.e. Gyakorlatok. 1. Legyen a **7.1.** alatti 1. feladat jelöléseivel $\mathcal{U}_i$ uniform struktúra E_i-n, p_{ij} $(\mathcal{U}_j, \mathcal{U}_i)$-egyenletesen folytonos, és $E \neq \emptyset$. A $\{p_i, \mathcal{U}_i : i \in I\}$ rendszer által projektíven előállított $\mathcal{U}$ uniform struktúrát az $\{\mathcal{U}_i, p_{ij}\}$ rendszer projektív limeszének mondjuk. Mutassuk meg, hogy

(a) $\mathcal{U} = \underset{i \in I}{\times} \mathcal{U}_i | E$;

(b) $\mathcal{T}_{\mathcal{U}}$ a $\{\mathcal{T}_{\mathcal{U}_i}, p_{ij}\}$ rendszer projektív limesze;

(c) ha az $\mathcal{U}_i$-k legfeljebb egy kivétellel prekompaktak, akkor $\mathcal{S}_{\mathcal{U}}$ a $\{\mathcal{S}_{\mathcal{U}_i}, p_{ij}\}$ rendszer projektív limesze;

(d) ha minden $\mathcal{U}_i$ szeparált és teljes, akkor $\mathcal{U}$ is teljes;

(e) ha minden $\mathcal{U}_i$ prekompakt, akkor $\mathcal{U}$ is ilyen;

(f) ha minden $\mathcal{U}_i$ (fél)metrizálható, és I megszámlálható, akkor $\mathcal{U}$ is (fél)-metrizálható;

(g) igazoljuk az idézett feladat (b) és (c) állításának megfelelőit.

2. Legyen σ_i ($i \in \mathbf{N}$) eltérés E_i-n, $f_i : E \to E_i$, $\mathcal{U}^*$ az $\{f_i, \mathcal{U}_{\sigma_i}: i \in \mathbf{N}\}$ rendszer által projektíven előállított uniform struktúra, továbbá $\sigma_i' = \min(\sigma_i, 1)$, és $x, y \in E$ esetén

$$\rho(x, y) = \sum_1^\infty 2^{-i} \sigma_i'(f_i(x), f_i(y)).$$

Mutassuk meg, hogy $\mathcal{U}^* = \mathcal{U}_\rho$.

3. Mutassuk meg, hogy egy topologikus tér pontosan akkor kompakt és metrizálható, ha homeomorf a Hilbert-féle kocka egy zárt alterével.

4. Legyen $\mathcal{S} = \mathcal{S}_{\rho_1}$, $\mathcal{U} = \mathcal{U}_{\rho_1}$, $\mathcal{U}_0$ pedig a $\mathcal{S}$-t indukáló prekompakt uniform struktúra. Mutassuk meg, hogy

(a) $\mathcal{S}_{\mathcal{U} \times \mathcal{U}_0} = \mathcal{S}_{\mathcal{U}_0 \times \mathcal{U}} = \mathcal{S} \times \mathcal{S}$;

(b) $\sup\{\mathcal{U} \times \mathcal{U}_0, \mathcal{U}_0 \times \mathcal{U}\} = \mathcal{U} \times \mathcal{U} = \mathcal{U}_{\rho_2}$;

(c) a $\mathcal{S} \times \mathcal{S}$-t indukáló uniform struktúrák között nincs legfinomabb.

[Ha $\mathcal{U}'$ ilyen volna, akkor $\mathcal{U} \times \mathcal{U}_0 < \mathcal{U}'$, $\mathcal{U}_0 \times \mathcal{U} < \mathcal{U}'$ miatt $\mathcal{U}_{\rho_2} < \mathcal{U}'$ és $\mathcal{S}_{\mathcal{U}_{\rho_2}} = \mathcal{S}_{\rho_2} < \mathcal{S} \times \mathcal{S}$ is állna.]

5. Legyen ρ eltérés E-n. Mutassuk meg, hogy

(a) $\mathcal{U}_\rho$ a $\mathcal{S}_\rho$-t indukáló uniform struktúrák között a legfinomabb;

(b) az előző feladatbeli $\mathcal{S} \times \mathcal{S}$ szomszédsági reláció nem metrizálható, holott $\mathcal{T}_{\mathcal{S} \times \mathcal{S}} = \mathcal{E}^2 = \mathcal{T}_{\rho_2}$ metrizálható.

[Ha $\mathcal{S}_\rho = \mathcal{S}_{\mathcal{U}}$, $\mathcal{U} = \mathcal{U}_\Sigma$, akkor $\sigma \in \Sigma$ esetén $\mathcal{S}_\rho = \mathcal{S}_{\mathcal{U}_\sigma} < \mathcal{S}_{\mathcal{U}} = \mathcal{S}_\rho$, tehát E identitása $(\mathcal{S}_\rho, \mathcal{S}_\sigma)$-szomszédságtartó, s akkor $(\mathcal{U}_\rho, \mathcal{U}_\sigma)$-egyenletesen folytonos, azaz $\mathcal{U}_\sigma < \mathcal{U}_\rho$, és $\mathcal{U}_\Sigma < \mathcal{U}_\rho$.]

6. Mutassuk meg, hogy ha egy $[E, \mathcal{U}]$ uniform tér valamely I indexhalmaz mellett unimorf az $[\mathbf{R}^I, \mathcal{U}_{\rho_1}^I]$ térnek egy alterével, akkor minden $U \in \mathcal{U}$ környékhez megadható E-nek egy $E = \bigcup_1^\infty A_i$ alakú előállítása, ahol minden A_i U-rendben kicsiny.

7. Mutassuk meg, hogy egy nem-megszámlálható halmaz diszkrét uniform struktúrával semmilyen I mellett sem ágyazható be unimorfan $[\mathbf{R}^I, \mathcal{U}_{\rho_1}^I]$-be.

8. Legyen $[E, \mathcal{T}]$ topologikus tér, $\mathcal{D}$ pedig E diszkrét topológiája. Mutassuk meg, hogy ha $U_1 \subset E^2$ $(\mathcal{T} \times \mathcal{D})$-nyílt, $U_2 \subset E^2$ pedig $(\mathcal{D} \times \mathcal{T})$-nyílt, akkor $U_1 \circ U_2$ $\mathcal{T}^2$-nyílt. Speciálisan $\mathcal{T}^2$-nyílt U_1 és U_2 esetén $U_1 \circ U_2$ is ilyen.

9. Legyen $[E, \mathcal{T}]$ topologikus tér. Mutassuk meg, hogy

(a) ha $\mathcal{T}$ S_1-topológia, akkor ahhoz, hogy S_2-topológia legyen, szükséges és elegendő, hogy E^2 átlójának minden $\mathcal{T}^2$-környezete tartalmazza az átló $\mathcal{T}^2$-lezárását;

(b) $\mathcal{T}$ pontosan akkor T_2-topológia, ha E^2 átlója $\mathcal{T}^2$-zárt.

7.4. KVÓCIENSTEREK

7.4.a. Topológiák induktív előállítása. A projektív előállítással pontosan analóg a következő eljárás. Egy E halmazba vezető $f_i : E_i \to E$ leképezéseket tekintünk, E_i-n egy $\mathcal{T}_i$ topológiát adunk meg, és most a legfinomabb $\mathcal{T}^*$ topológiát keressük E-n, amely az f_i leképezések mindegyikét $(\mathcal{T}_i, \mathcal{T}^*)$-folytonossá teszi. Erről szól a következő tétel:

(7.4.1) *Legyen $I \neq \emptyset$, minden $i \in I$-re $[E_i, \mathcal{T}_i]$ topologikus tér, és $f_i : E_i \to E$ egy adott E halmazba vezető leképezés. Ekkor van E-n egy legfinomabb $\mathcal{T}^*$ topológia, amelyre minden f_i leképezés $(\mathcal{T}_i, \mathcal{T}^*)$-folytonos, mégpedig egy $G \subset E$ halmaz pontosan akkor $\mathcal{T}^*$-nyílt, ha $f_i^{-1}(G)$ minden $i \in I$-re $\mathcal{T}_i$-nyílt.*

Bizonyítás. Világos, hogy ha $\mathcal{T}'$ olyan topológia E-n, hogy minden f_i leképezés $(\mathcal{T}_i, \mathcal{T}')$-folytonos, akkor a $\mathcal{T}'$-nyílt G halmazok $f_i^{-1}(G)$ inverz képei szükségképpen $\mathcal{T}_i$-nyíltak. Így csak azt kell belátni, hogy az összes ilyen G-k egy $\mathcal{T}^*$ topológia nyílt halmazait alkotják. Azonban az

$$f_i^{-1}(\emptyset) = \emptyset, \qquad f_i^{-1}(E) = E_i,$$

$$f_i^{-1}\Big(\bigcup_{k \in K} G_k\Big) = \bigcup_{k \in K} f_i^{-1}(G_k),$$

$$f_i^{-1}(G_1 \cap G_2) = f_i^{-1}(G_1) \cap f_i^{-1}(G_2)$$

egyenlőségekből ez rögtön kiolvasható. ∎

A (7.4.1) alatti $\mathcal{T}^*$ topológiát az $\{f_i, \mathcal{T}_i : i \in I\}$ rendszer által **induktívan előállított topológiá**nak nevezik. Világos például, hogy ha minden i-re $E_i = E$, és f_i az E halmaz identitása, akkor $\mathcal{T}^* = \inf \{\mathcal{T}_i : i \in I\}$.

Másik nevezetes speciális esetként említsük meg azt, amikor egyetlen $[E', \mathcal{T}']$ topologikus tér és $f : E' \to E$ leképezés van megadva. Ilyenkor tehát azok a $G \subset E$ halmazok lesznek $\mathcal{T}^*$-nyíltak, amelyekre $f^{-1}(G)$ $\mathcal{T}'$-nyílt. Az így nyert $\mathcal{T}^*$ topológiát a $\mathcal{T}'$ topológiához és az f leképezéshez tartozó **kvócienstopológiá**nak nevezzük, és az $f(\mathcal{T}')$ szimbólummal fogjuk jelölni. Ez a jelölés zavart okozhatna az inverz kép jelölésével kapcsolatban olyankor, amikor f egy $g : E \to E'$ bijekció inverzével azonos, és így $g^{-1}(\mathcal{T}')$ egyaránt jelölhetné az $f = g^{-1}$ leképezéshez és $\mathcal{T}'$-höz tartozó kvócienstopológiát, valamint a $\mathcal{T}'$ topológia g-hez tartozó inverz képét. Azonban zavarról nincs szó; a definícióból ugyanis azonnal kiolvasható:

(7.4.2) *Ha $g : E \to E'$ bijekció, $f = g^{-1}$, $\mathcal{T}'$ topológia E'-n, akkor $f(\mathcal{T}') = g^{-1}(\mathcal{T}')$.*

Bizonyítás. $G \subset E$ pontosan akkor $f(\mathcal{T}')$-nyílt, ha $f^{-1}(G)$ $\mathcal{T}'$-nyílt, azaz ha $G = g^{-1}(G')$, ahol G' $\mathcal{T}'$-nyílt. ∎

Mármost az induktív előállítás ugyanúgy visszavezethető a most említett két speciális esetre, mint ahogyan a (7.1.2) képlet a projektív előállítást visszavezette két speciális esetére. A továbbiakban mindig (7.4.1) jelöléseit használva, kimondható ugyanis (2.3.3) alapján:

(7.4.3) $\mathcal{T}^* = \inf \{f_i(\mathcal{T}_i) : i \in I\}$. ∎

A definícióból rögtön következik:

(7.4.4) *Ha* $\mathcal{T}'_i$ *olyan topológia* E_i*-n, hogy* $\mathcal{T}_i < \mathcal{T}'_i$*, akkor az* $\{f_i, \mathcal{T}'_i : i \in I\}$ *rendszer által induktívan előállított topológia finomabb* $\mathcal{T}^*$*-nál.* ▮

Alapvető jelentőségű a következő tétel:

(7.4.5) *Legyen* $[X, \mathcal{T}']$ *topologikus tér, és* $g : E \to X$. g *pontosan akkor* $(\mathcal{T}^*, \mathcal{T}')$*-folytonos, ha* $g \circ f_i$ *minden* $i \in I$*-re* $(\mathcal{T}_i, \mathcal{T}')$*-folytonos.*

Bizonyítás. (2.6.44) (a) szerint g pontosan akkor $(\mathcal{T}^*, \mathcal{T}')$-folytonos, ha $g^{-1}(\mathcal{T}') < \mathcal{T}^*$, ez pedig (2.6.18) és (7.4.1) szerint pontosan akkor áll, ha minden f_i leképezés $(\mathcal{T}_i, g^{-1}(\mathcal{T}'))$-folytonos, azaz, (2.6.39)-re tekintettel, ha $f_i^{-1}(g^{-1}(\mathcal{T}')) = (g \circ f_i)^{-1}(\mathcal{T}') < \mathcal{T}_i$ minden i-re, ami $g \circ f_i$ $(\mathcal{T}_i, \mathcal{T}')$-folytonosságának megkövetelésével azonos. ▮

Ebből azonnal adódik:

(7.4.6) *Legyen minden i-re* $J_i \neq \emptyset$, $i \in I$ *és* $j \in J_i$ *esetén* $[E_{ij}, \mathcal{T}_{ij}]$ *topologikus tér,* $f_{ij} : E_{ij} \to E_i$ *pedig olyan leképezés, hogy* $\mathcal{T}_i$ *az* $\{f_{ij}, \mathcal{T}_{ij} : j \in J_i\}$ *rendszer által induktívan előállított topológia. Ekkor* $\mathcal{T}^*$ *nem más, mint az* $\{f_i \circ f_{ij}, \mathcal{T}_{ij}\}$ *rendszer által induktívan előállított topológia.* ▮

Speciálisan:

(7.4.7) *Ha minden* $i \in I$*-re* $[Z_i, \mathcal{T}'_i]$ *olyan topologikus tér, és* $g_i : Z_i \to E_i$ *olyan leképezés, hogy* $\mathcal{T}_i = g_i(\mathcal{T}'_i)$*, akkor* $\mathcal{T}^*$ *azonos az* $\{f_i \circ g_i, \mathcal{T}'_i : i \in I\}$ *rendszer által induktívan előállított topológiával.* ▮

Ebből (7.4.2)-re és (2.6.44) (c)-re tekintettel adódik:

(7.4.8) *A (7.4.7) tétel állítása érvényes, ha* g_i *minden i-re* $(\mathcal{T}'_i, \mathcal{T}_i)$*-homeomorfizmus.* ▮

7.4.b. Kvócienstopológiák. Szemben a projektív előállítással, amely a topológiák számos fontos tulajdonságát megőrizte, az induktív előállításról ilyen jellegű tételek csupán erősebb megszorítások mellett mondhatók ki. Így részletesebb tanulmányozás alá csak a legegyszerűbb speciális esetet, a kvócienstopológiák esetét vesszük.

A definícióból azonnal következik:

(7.4.9) *Legyen* $[X, \mathcal{T}_1]$ *topologikus tér,* $f : X \to Y$, $\mathcal{T}_2 = f(\mathcal{T}_1)$. *Egy* $F \subset Y$ *halmaz pontosan akkor* $\mathcal{T}_2$*-zárt, ha* $f^{-1}(F)$ $\mathcal{T}_1$*-zárt.* ▮

(7.4.10) *Legyen* $[X, \mathcal{T}_1]$ *és* $[Y, \mathcal{T}_2]$ *két topologikus tér,* $f : X \to Y$. *A következő állítások egyenértékűek:*

(a) f $(\mathcal{T}_1, \mathcal{T}_2)$*-folytonos;*

(b) $\mathcal{T}_2 < f(\mathcal{T}_1)$;

(c) $f^{-1}(\mathcal{T}_2) < \mathcal{T}_1$.

Bizonyítás. (a) $\Rightarrow$ (b): $f(\mathcal{T})$ definíciójából azonnal adódik.

(b) $\Rightarrow$ (a): Ismét $f(\mathcal{T}_1)$ definíciója szerint f $(\mathcal{T}_1, f(\mathcal{T}_1))$-folytonos, és (2.6.18) értelmében $(\mathcal{T}_1, \mathcal{T}_2)$-folytonos is.

(a) $\Leftrightarrow$ (c): (2.6.44) (a)-ból ismeretes. ▮

(7.4.5)-ből könnyen következik:

(7.4.11) *Legyen* $[X, \mathcal{T}_1]$, $[Y, \mathcal{T}_2]$, $[Z, \mathcal{T}_3]$ *három topologikus tér,* $f : X \to Y$, $g : Y \to Z$, $\mathcal{T}_2 = f(\mathcal{T}_1)$. g *pontosan akkor* $(\mathcal{T}_2, \mathcal{T}_3)$*-folytonos, ha* $g \circ f$ $(\mathcal{T}_1, \mathcal{T}_3)$*-folytonos.* ▮

Egy $[X, \mathcal{T}_1]$ topologikus térnek egy $[Y, \mathcal{T}_2]$ topologikus térbe vezető $f : X \to Y$ leképezését **nyílt,** ill. **zárt leképezés**nek mondjuk, ha szuperjektív, és ha nyílt (zárt) halmaz képe ismét nyílt (zárt).

(7.4.12) *Legyen* $[X, \mathcal{T}_1]$ *és* $[Y, \mathcal{T}_2]$ *két topologikus tér*, $f : X \to Y$. *Ha* f *folytonos és nyílt, vagy folytonos és zárt, akkor* $\mathcal{T}_2 = f(\mathcal{T}_1)$.

Bizonyítás. Legyen először f folytonos és nyílt. Ha G $\mathcal{T}_2$-nyílt, akkor $f^{-1}(G)$ $\mathcal{T}_1$-nyílt, tehát G $f(\mathcal{T}_1)$-nyílt. Ha G $f(\mathcal{T}_1)$-nyílt, azaz $f^{-1}(G)$ $\mathcal{T}_1$-nyílt, akkor $G = f(f^{-1}(G))$ $\mathcal{T}_2$-nyílt (figyelembe véve, hogy f szuperjekció).

Legyen most f folytonos és zárt. Ha F $\mathcal{T}_2$-zárt, akkor $f^{-1}(F)$ $\mathcal{T}_1$-zárt, és F (7.4.9) szerint $f(\mathcal{T}_1)$-zárt. Ha F $f(\mathcal{T}_1)$-zárt, akkor $f^{-1}(F)$ $\mathcal{T}_1$-zárt, tehát $F = f(f^{-1}(F))$ $\mathcal{T}_2$-zárt. ∎

(7.1.26)-ból tudjuk, hogy topologikus terek szorzatának vetítése egyik tényezőre nyílt leképezés. Ezért:

(7.4.13) *Ha* $I \neq \emptyset$, $[E_i, \mathcal{T}_i]$ *topologikus tér minden i-re*, $E = \times_{i \in I} E_i$, $\mathcal{T} = \times_{i \in I} \mathcal{T}_i$, $p_i : E \to E_i$ *az i-edik vetítés, akkor* $\mathcal{T}_i = p_i(\mathcal{T})$ *minden i-re.* ∎

Innen ered a „kvócienstopológia" elnevezés: ez az az eljárás, amely a szorzat ismeretében az egyes tényezők meghatározását lehetővé teszi.

Ami a topologikus terek tulajdonságainak a kvócienstopológiára való átmenetelét illeti, majdnem semmit sem lehet mondani általában. Természetesen szuperjektív leképezés esetén alkalmazhatók azok a tételek, amelyek egyes tulajdonságoknak a terek folytonos képeire való átvitelét biztosítják (pl. a szeparabilitásét, vagy a kompaktságét). A szétválasztási axiómákat illetően a következőket jegyezhetjük meg:

(7.4.14) *Legyen* $[X, \mathcal{T}_1]$ *és* $[Y, \mathcal{T}_2]$ *két topologikus tér*, $f : X \to Y$. *Ekkor*

(a) *Ha* f *zárt leképezés, és* $\mathcal{T}_1$ T_1*-topológia, akkor* $\mathcal{T}_2$ *is az;*

(b) *Ha* f *folytonos, zárt leképezés, és* $\mathcal{T}_1$ S_1*-topológia, akkor* $\mathcal{T}_2$ *is az;*

(c) *Ha* f *folytonos, zárt leképezés,* $\mathcal{T}_1$ S_2*-topológia, továbbá* $y \in Y$ *esetén* $f^{-1}(y)$ $\mathcal{T}_1$*-kompakt, akkor* $\mathcal{T}_2$ *is* S_2*-topológia;*

(d) *Ha a* (c) *alatti feltételek mellett* $\mathcal{T}_1$ T_2*-topológia, akkor* $\mathcal{T}_2$ *is az;*

(e) *Ha* f *folytonos, zárt, és* $\mathcal{T}_1$ *normális, akkor* $\mathcal{T}_2$ *is az.*

Bizonyítás. (a): (2.5.11) következménye.

(b): Legyen $x', y' \in Y$, G $\mathcal{T}_2$-nyílt, $x' \in G$, $y' \notin G$. Ekkor $f^{-1}(x') \subset f^{-1}(G)$, $f^{-1}(y') \cap f^{-1}(G) = \emptyset$, és $f^{-1}(G)$ $\mathcal{T}_1$-nyílt. Legyen $x \in f^{-1}(x')$. Ekkor minden $y \in f^{-1}(y')$ ponthoz található olyan $\mathcal{T}_1$-nyílt V_y, hogy $y \in V_y$, $x \notin V_y$. A $V = \bigcup_{y \in f^{-1}(y')} V_y$ jelöléssel V $\mathcal{T}_1$-nyílt, $f^{-1}(y') \subset V$, $x \notin V$. Így $V' = Y - f(X - V)$ $\mathcal{T}_2$-nyílt, $x' = f(x) \notin V'$, és $y' \in V'$.

(c): Legyen ismét $x', y' \in Y$, G $\mathcal{T}_2$-nyílt, $x' \in G$, $y' \notin G$, úgyhogy $f^{-1}(x') = A \subset f^{-1}(G)$, $f^{-1}(y') = B \subset X - f^{-1}(G)$, $f^{-1}(G)$ $\mathcal{T}_1$-nyílt, továbbá A és B kompakt. (5.3.20) szerint még $\bar{B}$ is kompakt, és $\bar{B} \subset X - f^{-1}(G)$ folytán $A \cap \bar{B} = \emptyset$. Így (5.3.18) miatt van olyan $\mathcal{T}_1$-nyílt U és V, hogy $A \subset U$, $\bar{B} \subset V$, $U \cap V = \emptyset$. Legyen $U' = Y - f(X - U)$, $V' = Y - f(Y - V)$. Világos, hogy $x' \in U'$, $y' \in V'$, U' és V' $\mathcal{T}_2$-nyílt, továbbá

$$U' \cap V' = Y - \big(f(X - U) \cup f(X - V)\big) =$$
$$= Y - f(X - (U \cap V)) = Y - f(X) = \emptyset.$$

(d): (a) és (c) következménye.

(e): Legyen A', B' $\mathfrak{T}_2$-zárt, $A' \cap B' = \emptyset$. Ekkor $A = f^{-1}(A')$, $B = f^{-1}(B')$ $\mathfrak{T}_1$-zárt, $A \cap B = \emptyset$. Így van olyan $\mathfrak{T}_1$-nyílt U és V, hogy $A \subset U$, $B \subset V$, $U \cap V = \emptyset$. Az $U' = Y - f(X - U)$, $V' = Y - f(X - V)$ jelöléssel ismét $U' \cap V' = \emptyset$, U' és V' $\mathfrak{T}_2$-nyílt, végül $A' \subset U'$, $B' \subset V'$. ∎

(7.4.15) *Legyen $[X, \mathfrak{T}_1]$ és $[Y, \mathfrak{T}_2]$ két topologikus tér, $f : X \to Y$ $(\mathfrak{T}_1, \mathfrak{T}_2)$-folytonos szuperjekció, $\mathfrak{T}_1$ kompakt T_2-topológia. $\mathfrak{T}_2$ pontosan akkor T_2-topológia, ha f zárt leképezés.*

Bizonyítás. (5.3.10) szerint $\mathfrak{T}_2$ kompakt. Ha f zárt, akkor $\mathfrak{T}_2$ (7.4.14) (a) szerint $\mathfrak{T}_1$-topológia, tehát (2.5.11) szerint minden $y \in Y$ pontra $\{y\}$ $\mathfrak{T}_2$-zárt, úgyhogy $f^{-1}(y)$ $\mathfrak{T}_1$-zárt, és (5.3.4) értelmében $\mathfrak{T}_1$-kompakt is. Így (7.4.14) (d) alkalmazható. Megfordítva, ha $\mathfrak{T}_2$ T_2-topológia, akkor minden $\mathfrak{T}_1$-zárt F halmaz $\mathfrak{T}_1$-kompakt lévén, $f(F)$ képe $\mathfrak{T}_2$-kompakt, és (5.3.5) folytán $\mathfrak{T}_2$-zárt is. ∎

7.4.c. Kvócienterek. Egy E halmaz **felbontásán** a továbbiakban olyan $\mathfrak{Z}$ halmazrendszert fogunk érteni, amelynek elemei páronként diszjunktak, nem-üresek, és egyesítésük E. A $\mathfrak{Z}$ felbontás elemeit (amelyek tehát E-nek részhalmazai) a felbontás **celláinak** mondjuk. Az a $p : E \to \mathfrak{Z}$ leképezés, amely valamely $x \in E$ elemhez az őt tartalmazó (egyértelműen meghatározott) Z cellát rendeli, nyilván szuperjektív; ezt a $\mathfrak{Z}$ felbontáshoz tartozó **kanonikus szuperjekciónak** mondjuk.

Ha $[E, \mathfrak{T}]$ topologikus tér, és $\mathfrak{Z}$ E-nek egy felbontása, tekinthetjük a $p(\mathfrak{T})$ kvócienstopológiát a $\mathfrak{Z}$ halmazon. A $[\mathfrak{Z}, p(\mathfrak{T})]$ teret az $[E, \mathfrak{T}]$ tér $\mathfrak{Z}$ felbontáshoz tartozó **kvócienterének** nevezzük. Erre természetesen alkalmazhatjuk a kvócienstopológiákra vonatkozó, előzőleg bizonyított tételeket; minthogy ezekben igen gyakran szerepelt az a kikötés, hogy a vizsgált leképezés zárt legyen, érdemes megvizsgálni, mi biztosítja azt, hogy a p kanonikus szuperjekció $(\mathfrak{T}, p(\mathfrak{T}))$-zárt legyen.

Az erre vonatkozó feltétel könnyű megfogalmazása érdekében vezessük be a következő elnevezést. Ha $\mathfrak{A}$ tetszőleges halmazrendszer, B pedig tetszőleges halmaz, a B halmaz **$\mathfrak{A}$-csillagán** értjük, és $\mathfrak{A}(B)$-vel jelöljük, a B-t metsző $\mathfrak{A}$-beli halmazok egyesítését:

$$\mathfrak{A}(B) = \bigcup \{A : A \in \mathfrak{A},\ B \cap A \neq \emptyset\}. \tag{7.4.16}$$

Mármost felvetett kérdésünkre így válaszolhatunk:

(7.4.17) *Legyen $[E, \mathfrak{T}]$ topologikus tér, $\mathfrak{Z}$ E-nek felbontása, $p : E \to \mathfrak{Z}$ a kanonikus szuperjekció. p pontosan akkor $(\mathfrak{T}, p(\mathfrak{T}))$-nyílt, ha minden $\mathfrak{T}$-nyílt halmaz $\mathfrak{Z}$-csillaga $\mathfrak{T}$-nyílt, és pontosan akkor $(\mathfrak{T}, p(\mathfrak{T}))$-zárt, ha minden $\mathfrak{T}$-zárt halmaz $\mathfrak{Z}$-csillaga $\mathfrak{T}$-zárt.*

Bizonyítás. $X \subset E$ esetén $p(X)$ pontosan akkor $p(\mathfrak{T})$-nyílt, ill. $p(\mathfrak{T})$-zárt, ha $p^{-1}(p(X))$ $\mathfrak{T}$-nyílt, ill. $\mathfrak{T}$-zárt. Azonban $p^{-1}(p(X))$ éppen $\mathfrak{Z}(X)$-szel azonos. ∎

Az itt szereplő típusú felbontást kapunk például, ha E-ben megadunk véges számú diszjunkt $\mathfrak{T}$-zárt $Z_1, \dots, Z_n$ halmazt, és $\mathfrak{Z}$ azt a felbontást jelöli, amelynek cellái a $Z_1, \dots, Z_n$ halmazok, valamint az $E - \bigcup_{1}^{n} Z_i$ halmaz egyes pontjaiból álló egyelemű halmazok. Ekkor minden egyes $X \subset E$ halmazra $\mathfrak{Z}(X) = X \cup \bigcup \{Z_i : Z_i \cap X \neq \emptyset\}$, tehát ha X $\mathfrak{T}$-zárt, $\mathfrak{Z}(X)$ is az.

A felbontásokhoz tartozó kvócienstér értelmezését a leképezéshez tartozó kvócienstopológia képzésére vezettük vissza. Megfordítva azonban az utóbbi, legalábbis szuperjektív leképezés esetén, lényegében véve visszavezethető a felbontásokhoz tartozó kvóciensterek képzésére. Erről szól a következő tétel:

(7.4.18) *Legyen $[E, \mathfrak{T}]$ topologikus tér, $f : E \to Y$ szuperjekció, $\mathfrak{Z}$ E-nek az a felbontása, amelynek cellái az $f^{-1}(y)$ $(y \in Y)$ halmazok, $p : E \to \mathfrak{Z}$ a kanonikus szuperjekció, $h : Y \to \mathfrak{Z}$ pedig az a leképezés, amelyre $h(y) = f^{-1}(y)$. Ekkor h $(f(\mathfrak{T}), p(\mathfrak{T}))$-homeomorfizmus.*

Bizonyítás. Világos, hogy h bijekció, továbbá $p = h \circ f$, és a $g = h^{-1}$ jelöléssel $f = g \circ p$. Így h $(f(\mathfrak{T}), p(\mathfrak{T}))$-folytonossága és g $(p(\mathfrak{T}), f(\mathfrak{T}))$-folytonossága egyaránt kiolvasható (7.4.11)-ből. ∎

Érdemes még megjegyezni:

(7.4.19) *Legyen $[E, \mathfrak{T}]$ topologikus tér, $\mathfrak{Z}$ E-nek felbontása, $p : E \to \mathfrak{Z}$ a kanonikus szuperjekció, $f : E \to Y$ olyan leképezés, amely $\mathfrak{Z}$ minden egyes celláján állandó, végül $\mathfrak{T}'$ topológia Y-on. Ekkor létezik pontosan egy olyan $g : \mathfrak{Z} \to Y$ leképezés, amelyre $f = g \circ p$; f pontosan akkor $(\mathfrak{T}, \mathfrak{T}')$-folytonos, ha g $(p(\mathfrak{T}), \mathfrak{T}')$-folytonos.*

Bizonyítás. A szóban forgó g leképezés nyilván úgy adódik, hogy minden $Z \in \mathfrak{Z}$ cellához hozzárendeljük f-nek rajta felvett állandó értékét. A többi (7.4.11)-ből nyerhető. ∎

Egy E halmaz felbontását gyakran úgy adjuk meg, hogy megadunk E-n egy $\mathfrak{R}$ ekvivalencia-relációt, és a felbontás celláit a hozzá tartozó ekvivalencia-osztályokkal azonosítjuk. Ilyenkor a keletkező kvóciensteret az $\mathfrak{R}$ **ekvivalencia-reláció szerinti kvócienstér**nek is szokták mondani.

Erre nevezetes példa a következő: legyen az $[E, \mathfrak{T}]$ topologikus térben az x pont környezetszűrője $\mathfrak{v}(x)$. Ha x-et y-nal ekvivalensnek pontosan akkor mondjuk, amikor $\mathfrak{v}(x) = \mathfrak{v}(y)$, nyilván ekvivalencia-relációt kapunk E-n. Az ennek megfelelő $\mathfrak{Z}$ felbontást a $\mathfrak{T}$ topológiához tartozó **szeparatív felbontás**nak nevezzük.

(7.4.20) *Legyen $[E, \mathfrak{T}]$ topologikus tér, $\mathfrak{Z}$ a $\mathfrak{T}$-hez tartozó szeparatív felbontás, $p : E \to \mathfrak{Z}$ a kanonikus szuperjekció. Ekkor*

(a) *minden $\mathfrak{T}$-nyílt és minden $\mathfrak{T}$-zárt halmaz $\mathfrak{Z}$-beli cellák egyesítése;*

(b) $\mathfrak{T} = p^{-1}(p(\mathfrak{T}))$;

(c) *$p(\mathfrak{T})$ T_0-topológia;*

(d) *$p(\mathfrak{T})$ pontosan akkor T_i-topológia* ($i = 1, \ldots, 5$ vagy π), *normális vagy teljesen normális, ha $\mathfrak{T}$ S_i-topológia, normális, ill. teljesen normális.*

Bizonyítás. (a): Legyen G $\mathfrak{T}$-nyílt, $x \in G$, $Z = p(x)$. Minthogy $G \in \mathfrak{v}(x)$, és minden $y \in Z$ pontra $\mathfrak{v}(y) = \mathfrak{v}(x)$, azért az ilyen y-okra $G \in \mathfrak{v}(y)$, tehát $y \in G$, azaz $Z \subset G$. Így G cellák egyesítése, és ugyanez áll $(E - G)$-re is.

(b): (7.4.10) szerint $p^{-1}(p(\mathfrak{T})) < \mathfrak{T}$. Viszont ha G $\mathfrak{T}$-nyílt, akkor (a) szerint $G = p^{-1}(p(G))$, tehát $p(G)$ $p(\mathfrak{T})$-nyílt, és G $p^{-1}(p(\mathfrak{T}))$-nyílt is.

(c): Legyen $Z_1, Z_2 \in \mathfrak{Z}$, $Z_1 \neq Z_2$, $x \in Z_1$, $y \in Z_2$. Ekkor $\mathfrak{v}(x) \neq \mathfrak{v}(y)$, tehát van pl. olyan $\mathfrak{T}$-nyílt G, hogy $x \in G$, $y \in E - G$. (a) folytán $Z_1 \subset G$, $Z_2 \subset E - G$, és így $Z_1 \in p(G)$, $Z_2 \notin p(G)$, és $p(G)$ $p(\mathfrak{T})$-nyílt a (b) bizonyításában végzett meggondolás szerint.

(d): (c)-ből és (a)-ból (2.6.42) és (2.6.43) alapján adódik, figyelembe véve még (4.2.6)-ot is, kivéve azt az állítást, hogy ha $\mathcal{T}$ S_π-topológia, akkor $p(\mathcal{T})$ is ilyen, Ha azonban $Z \in \mathfrak{Z}$, F $p(\mathcal{T})$-zárt, $Z \notin F$, akkor valamely $x \in Z$ pontot választva $x \notin p^{-1}(F)$, és $p^{-1}(F)$ $\mathcal{T}$-zárt. Így van olyan $\mathcal{T}$-folytonos f függvény, amely $\{x\}$-et és $p^{-1}(F)$-et szétválasztja. Bármely $y \in \mathbf{R}$ számra $f^{-1}(y)$ $\mathcal{T}$-zárt, s így (a) szerint cellák egyesítése. Ezért (7.4.19) szerint $f = g \circ p$, ahol g $p(\mathcal{T})$-folytonos, és nyilván szétválasztja $\{Z\}$-t és F-et. ∎

7.4.d. Szomszédsági terek kvócienseterei. Legyen most $[E_i, \mathcal{S}_i]$ minden $i \in I$-re szomszédsági tér, $f_i : E_i \to E$ adott leképezés, és tekintsük a legfinomabb $\mathcal{S}^*$ szomszédsági relációt E-n, amellyel az f_i leképezések mindegyike $(\mathcal{S}_i, \mathcal{S}^*)$-szomszédságtartó. Ilyen van, hiszen E indiszkrét szomszédsági relációjára nézve (3.1.37) szerint minden f_i szomszédságtartó, és akkor nem kell mást tenni, mint venni az összes olyan $\mathcal{S}$ szomszédsági relációkat, amelyekre minden f_i $(\mathcal{S}_i, \mathcal{S})$-szomszédságtartó, és ezek szuprémumát jelölni $\mathcal{S}^*$-gal:

(7.4.21) *Legyen minden $i \in I \neq \emptyset$ esetén $[E_i, \mathcal{S}_i]$ szomszédsági tér, $f_i : E_i \to E$, és $\mathcal{S}^*$ azon $\mathcal{S}$ szomszédsági relációk szuprémuma, amelyekre f_i $(\mathcal{S}_i, \mathcal{S})$-szomszédságtartó $(i \in I)$. Ekkor $\mathcal{S}^*$ a legfinomabb a tekintett szomszédsági relációk között.*

Bizonyítás. Azt kell csak belátni, hogy minden f_i $(\mathcal{S}_i, \mathcal{S}^*)$-szomszédságtartó, azaz (3.1.50) (a) értelmében azt, hogy $f_i^{-1}(\mathcal{S}^*) < \mathcal{S}_i$ minden i-re. Azonban ez (3.1.35)-ből azonnal következik. ∎

Azt mondjuk, hogy $\mathcal{S}^*$-ot **induktívan állítja elő** az $\{f_i, \mathcal{S}_i : i \in I\}$ rendszer. Sajnos, a topológiák induktív előállításával szemben lényeges különbség, hogy $\mathcal{S}^*$-ot általában nem lehet az adott f_i-k és $\mathcal{S}_i$-k segítségével egyszerűen előállítani, még abban a speciális esetben sem, amikor egyetlen $[E', \mathcal{S}']$ szomszédsági tér és egyetlen $f : E' \to E$ leképezés van adva; ilyenkor a $\mathcal{S}^* = f(\mathcal{S}')$ jelölést alkalmazzuk és a $\mathcal{S}'$-höz és f-hez tartozó **kvóciens-reláció**ról beszélünk.

Valóban, ha E-n olyan szomszédsági relációt adunk meg, amely f-et szomszédságtartóvá teszi, akkor $A, B \subset E$, $f^{-1}(A)\, \mathcal{S}'\, f^{-1}(B)$ esetén $f(f^{-1}(A)) \subset A$ és $f(f^{-1}(B)) \subset B$ szomszédos, s így szükségképpen A és B is szomszédos. Ha tehát egy $\mathcal{S}$ relációt úgy definiálunk, hogy $A\, \mathcal{S}\, B$ pontosan akkor álljon, amikor $f^{-1}(A)\, \mathcal{S}'\, f^{-1}(B)$, és az így értelmezett $\mathcal{S}$ szomszédsági reláció E-n, akkor $\mathcal{S}$-re nézve a lehető legkevesebb halmazpár szomszédos, és így $\mathcal{S}$ azonos $f(\mathcal{S}')$-vel. Mármost könnyű belátni, hogy ha f szuperjektív, akkor az így értelemezett $\mathcal{S}$-re a (P_1) – (P_5) axiómák mindenesetre teljesülnek; (P_6) pontosan akkor teljesül, ha $f^{-1}(A)\, \overline{\mathcal{S}}'\, f^{-1}(B)$ esetén van olyan P és Q, hogy $P \cap Q = \emptyset$, $f^{-1}(A)\, \overline{\mathcal{S}}'\, f^{-1}(E-P)$, $f^{-1}(B)\, \overline{\mathcal{S}}'\, f^{-1}(E-Q)$.

Az utóbbi feltétel nincs mindig kielégítve. Legyen például $E' = \mathbf{R}$, $\mathcal{S}' = \mathcal{S}_{\rho_1}$ (ahol ρ_1 az euklideszi távolság), E az egész számok halmaza, $f : E' \to E$ pedig az $f(x) = [x]$ képlettel értelmezve (azaz ha n egész szám, és $n \leqq x < n+1$, akkor $f(x) = n$). $A = \{0\}$, $B = \{2\}$ esetén $f^{-1}(A) = [0,1)$, $f^{-1}(B) = [2,3)$, úgyhogy $f^{-1}(A)\, \overline{\mathcal{S}}'\, f^{-1}(B)$. Bárhogyan választjuk azonban a $P, Q \subset E$ halmazokat, az a kikötés, hogy $[0,1)\, \overline{\mathcal{S}}'\, f^{-1}(E-P)$, $[2,3)\, \overline{\mathcal{S}}'\, f^{-1}(E-Q)$ legyen, maga után vonja, hogy $f^{-1}(P)$ is, $f^{-1}(Q)$ is metszi az $[1,2)$ intervallumot, és így $1 \in P \cap Q$ teljesül.

Meggondolásaink eredményeképpen tehát csak a következőt mondhatjuk:

(7.4.22) *Legyen* $[E', \mathcal{S}']$ *szomszédsági tér,* $f : E' \to E$, *és* $A, B \subset E$ *esetén álljon* $A \mathcal{S} B$ *pontosan akkor, ha* $f^{-1}(A) \mathcal{S}' f^{-1}(B)$. *Ha az így értelmezett* $\mathcal{S}$ *szomszédsági reláció* E*-n, akkor* $\mathcal{S} = f(\mathcal{S}')$. *Ez bekövetkezik, ha* f *szuperjektív, és* $A, B \subset E$, $f^{-1}(A) \overline{\mathcal{S}}' f^{-1}(B)$ *esetén van olyan* $P, Q \subset E$, *hogy* $P \cap Q = \emptyset, f^{-1}(A) \overline{\mathcal{S}}' f^{-1}(E - P)$, $f^{-1}(B) \overline{\mathcal{S}}' f^{-1}(E - Q)$. ∎

Az itt megfogalmazott feltétel biztosan teljesül, ha f bijekció; ilyenkor olyan $P', Q' \subset E'$ halmazokat választva, amelyekre $P' \cap Q' = \emptyset$, $f^{-1}(A) \overline{\mathcal{S}}' E' - P'$, $f^{-1}(B) \overline{\mathcal{S}}' E' - Q'$, az $f(P') = P, f(Q') = Q$ választás nyilván megfelel. Így jutunk a (7.4.2)-vel analóg (jelölésünket végső soron jogosulttá tevő) állításhoz:

(7.4.23) *Ha* $g : E \to E'$ *bijekció,* $f = g^{-1}$, $\mathcal{S}'$ *szomszédsági reláció* E'*-n, akkor* $f(\mathcal{S}') = g^{-1}(\mathcal{S}')$. ∎

A definícióból kiindulva minden nehézség nélkül bebizonyíthatók a (7.4.3)—(7.4.8), (7.4.10), (7.4.11) tételek megfelelői; csupán topológia helyett kell mindenütt szomszédsági relációt, folytonos leképezés helyett szomszédságtartó leképezést írni.

Érvényes a (7.4.13) tétel analogonja is.

(7.4.24) *Ha* $I \neq \emptyset$, $[E_i, \mathcal{S}_i]$ *szomszédsági tér minden* i*-re,* $E = \bigtimes_{i \in I} E_i$, $\mathcal{S} = \bigtimes_{i \in I} \mathcal{S}_i$, $p_i : E \to E_i$ *az* i*-edik vetítés, akkor* $\mathcal{S}_j = p_j(\mathcal{S})$ *minden* $j \in I$*-re.*

Bizonyítás. (7.4.22) értelmében azt kell megmutatnunk, hogy $A_j, B_j \subset E_j$ esetén $A_j \mathcal{S}_j B_j$ pontosan akkor áll, ha $p_j^{-1}(A_j) \mathcal{S} p_j^{-1}(B_j)$. Mármost p_j $(\mathcal{S}, \mathcal{S}_j)$-szomszédságtartó voltából adódik, hogy az utóbbi összefüggés maga után vonja az előbbit. Tegyük tehát fel, hogy $A_j \mathcal{S}_j B_j$, legyen $A = p_j^{-1}(A_j)$, $B = p_j^{-1}(B_j)$, és $A = \bigcup_1^a C_s$, $B = \bigcup_1^b D_t$. Tekintsük a $p_j(C_s) = C_s'$ halmazokat $(s = 1, \ldots, a)$, és készítsük el az összes $\bigcap_1^a X_s$ alakú halmazokat, ahol minden s-re $X_s = C_s'$ vagy $X_s = A_j - C_s'$. Ezeket a metszeteket $P_1, \ldots, P_p$-vel jelölve, nyilván $A_j = \bigcup_1^p P_m$, a P_m-ek diszjunktak, és mindegyik C_s' halmaz az általa tartalmazott P_m-ek egyesítése. Hasonlóan készíthetünk olyan diszjunkt $Q_1, \ldots, Q_q$ halmazokat, hogy $B_j = \bigcup_1^q Q_n$, és minden $D_t' = p_j(D_t)$ halmaz az általa tartalmazott Q_n-ek egyesítése.

Mármost nyilván van egy olyan m és egy olyan n index, hogy $P_m \mathcal{S}_j Q_n$. Legyen minden $i \in I - \{j\}$ indexre $x_i = y_i \in E_i$ tetszőlegesen kiválasztva, továbbá $x_j \in P_m$, $y_j = Q_n$. Ekkor $x = (x_i) \in A$, $y = (y_i) \in B$, tehát alkalmas s és t indexre $x \in C_s$, $y \in D_t$, úgyhogy $x_j \in C_s', y_j \in D_t'$. Ennélfogva $P_m \subset C_s', Q_n \subset D_t'$, tehát $p_j(C_s) \mathcal{S}_j p_j(D_t)$, továbbá $i \neq j$ esetén $x_i \in p_i(C_s)$, $y_i \in p_i(D_t)$ következtében $p_i(C_s) \mathcal{S}_i p_i(D_t)$ is áll, és így (7.2.13) szerint $A \mathcal{S} B$. ∎

Éppen úgy, mint a topologikus terek esetében, most is lehet beszélni egy **szomszédsági tér**nek egy felbontáshoz tartozó, ill. egy ekvivalenciareláció szerinti

kvóciensteréről. Külön figyelmet érdemel a $\mathfrak{T}_{\mathfrak{s}}$ topológia szeparatív felbontására vonatkozó kvócienstér esete:

(7.4.25) *Legyen* $[E, \mathfrak{S}]$ *szomszédsági tér,* $\mathfrak{Z}$ *a* $\mathfrak{T}_{\mathfrak{s}}$ *topológiának megfelelő szeparatív felbontás,* $p : E \to \mathfrak{Z}$ *a hozzá tartozó kanonikus szuperjekció. Ekkor*

(a) x *és* y *pontosan akkor tartozik ugyanazon* $Z \in \mathfrak{Z}$ *cellához, ha* $\{x\} \mathfrak{S} \{y\}$;

(b) $A\ p(\mathfrak{S})\ B$ *pontosan akkor áll, ha* $p^{-1}(A)\ \mathfrak{S}\ p^{-1}(B)$;

(c) $p^{-1}(p(\mathfrak{S})) = \mathfrak{S}$;

(d) $\mathfrak{T}_{p(\mathfrak{s})} = p(\mathfrak{T}_{\mathfrak{s}})$;

(e) $p(\mathfrak{S})$ *szeparált.*

Bizonyítás. (a): Ha $\{x\} \overline{\mathfrak{S}} \{y\}$, akkor a szokásos jelölésekkel $E - \{y\} \in \mathfrak{p}(\{x\}) = \mathfrak{v}(x)$, úgyhogy $\mathfrak{v}(y) \neq \mathfrak{v}(x)$. Megfordítva, ha $\mathfrak{v}(y) \neq \mathfrak{v}(x)$, akkor van például olyan $\mathfrak{T}_{\mathfrak{s}}$-nyílt G, hogy $x \in G$, $y \notin G$. Ekkor $\{x\} \overline{\mathfrak{S}}\ E - G$, $\{y\} \subset E - G$ miatt $\{x\} \overline{\mathfrak{S}} \{y\}$.

(b): Jegyezzük meg először is, hogy p-re teljesül a (7.4.22)-ben megfogalmazott feltétel. Valóban, ha $A, B \subset \mathfrak{Z}$, $p^{-1}(A)\ \overline{\mathfrak{S}}\ p^{-1}(B)$, akkor legyen $P_1, Q_1 \subset E$ olyan, hogy

$$P_1 \cap Q_1 = \emptyset,\ p^{-1}(A)\ \overline{\mathfrak{S}}\ E - P_1,\ p^{-1}(B)\ \overline{\mathfrak{S}}\ E - Q_1.$$

(3.1.14) szerint még

$$p^{-1}(A)\ \overline{\mathfrak{S}}\ \overline{E - P_1},\ p^{-1}(B)\ \overline{\mathfrak{S}}\ \overline{E - Q_1}$$

is fennáll, és (7.4.20) (a) értelmében

$$\overline{E - P_1} \supset p^{-1}(p(E - P_1)),\ \overline{E - Q_1} \supset p^{-1}(p(E - Q_1)),$$

úgyhogy a

$$P = \mathfrak{Z} - p(E - P_1),\ Q = \mathfrak{Z} - p(E - Q_1)$$

halmazok megfelelnek, ugyanis

$$P \cap Q = \mathfrak{Z} - (p(E - P_1) \cup p(E - Q_1)) = \mathfrak{Z} - p((E - P_1) \cup (E - Q_1)) =$$
$$= \mathfrak{Z} - p(E - (P_1 \cap Q_1)) = \mathfrak{Z} - p(E) = \emptyset,$$

továbbá

$$p^{-1}(\mathfrak{Z} - P) = p^{-1}(p(E - P_1))\ \overline{\mathfrak{S}}\ p^{-1}(A),$$
$$p^{-1}(\mathfrak{Z} - Q) = p^{-1}(p(E - Q_1))\ \overline{\mathfrak{S}}\ p^{-1}(B).$$

Eszerint (7.4.22) alkalmazható, és mutatja az állítás helyességét.

(c): Minthogy p $(\mathfrak{S}, p(\mathfrak{S}))$-szomszédságtartó, mindenesetre $p^{-1}(p(\mathfrak{S})) < \mathfrak{S}$. Másrészt, ha $A\ \overline{\mathfrak{S}}\ B$, akkor (3.1.14) szerint $\bar{A}\ \overline{\mathfrak{S}}\ \bar{B}$, tehát ismét (7.4.20) (a)-ra hivatkozva $p^{-1}(p(A))\ \overline{\mathfrak{S}}\ p^{-1}(p(B))$, azaz (b)-re tekintettel $p(A)\ \overline{p(\mathfrak{S})}\ p(B)$, és (3.1.31) értelmében $A\ \overline{p^{-1}(p(\mathfrak{S}))}\ B$.

(d): Minthogy p $(\mathfrak{S}, p(\mathfrak{S}))$-szomszédságtartó, azért $(\mathfrak{T}_{\mathfrak{s}}, \mathfrak{T}_{p(\mathfrak{s})})$-folytonos is, és így $\mathfrak{T}_{p(\mathfrak{s})} < p(\mathfrak{T}_{\mathfrak{s}})$. Másrészt, ha G $p(\mathfrak{T}_{\mathfrak{s}})$-nyílt, azaz ha $p^{-1}(G)$ $\mathfrak{T}_{\mathfrak{s}}$-nyílt, és $x \in p^{-1}(G)$, akkor $\{x\} \overline{\mathfrak{S}}\, E - p^{-1}(G)$, így (3.1.14) folytán $\bar{x} \overline{\mathfrak{S}}\, E - p^{-1}(G)$; csakhogy (7.4.20) (a) miatt még $p^{-1}(p(x)) \overline{\mathfrak{S}}\, E - p^{-1}(G)$ is áll, azaz (b) szerint $\{p(x)\} \overline{p(\mathfrak{S})}\, \mathfrak{Z} - G$. Ennélfogva G $\mathfrak{T}_{p(\mathfrak{S})}$-nyílt is.

(e): (d)-ből és (7.4.20) (c)-ből adódik. ▌

7.4.e. Uniform terek kvócienseterei. Uniform struktúrák induktív előállítását a szokásos módon értelmezhetjük: az E halmazon az $\mathcal{U}^*$ **uniform struktúrát induktívan állítja elő** az $\{f_i, \mathcal{U}_i \colon i \in I\}$ rendszer, ha $I \neq \emptyset$, minden $i \in I$-re $[E_i, \mathcal{U}_i]$ uniform tér, $f_i : E_i \to E$, és $\mathcal{U}^*$ a legfinomabb uniform struktúra, amelyre minden f_i $(\mathcal{U}_i, \mathcal{U}^*)$-egyenletesen folytonos. Ilyen $\mathcal{U}^*$ létezése hasonlóan látható be, mint a szomszédsági relációk induktív előállítására vonatkozó analóg állítás. Legfontosabb itt is az az eset, amikor egyetlen $f : E' \to E$ leképezés és egyetlen $[E', \mathcal{U}']$ uniform tér van megadva; ilyenkor $\mathcal{U}^*$-ot az f-hez és $\mathcal{U}'$-höz tartozó **kvóciensstruktúrá**nak mondjuk, és $f(\mathcal{U}')$-vel jelöljük.

A $g : E' \times E' \to E \times E$ leképezést a $g(x, y) = \big(f(x), f(y)\big)$ képlettel a szokásos módon értelmezve világos, hogy egy f-et egyenletesen folytonossá tevő uniform struktúrához csak olyan U környékek tartozhatnak, amelyekre $g^{-1}(U) \in \mathcal{U}'$. Ha tehát az összes ilyen U-k uniform bázist alkotnak E-n, akkor biztosan ez generálja $f(\mathcal{U}')$-t. Az világos, hogy ezek az U-k az $(U_1) - (U_3)$ axiómának eleget tesznek, (U_4)-nek azonban pontosan akkor, ha minden ilyen U-hoz van egy ilyen U_1 is, amelyre $U_1 \circ U_1 \subset U$. Így a következő tételt nyerjük:

(7.4.26) *Legyen* $[E', \mathcal{U}']$ *uniform tér,* $f : E' \to E$, $g : E' \times E' \to E \times E$ *a* $g(x, y) = \big(f(x), f(y)\big)$ *képlettel értelmezve, és tegyük fel, hogy azok az E-beli U környékek, amelyekre* $g^{-1}(U) \in \mathcal{U}'$, *egy* $\mathfrak{U}$ *uniform bázist alkotnak; ekkor* $\mathfrak{U}$ *éppen* $f(\mathcal{U}')$*-t generálja. Ez a feltétel pontosan akkor teljesül, ha minden olyan E-beli U környékhez, amelyre* $g^{-1}(U) \in \mathcal{U}'$, *található olyan E-beli* U_1 *környék, hogy* $g^{-1}(U_1) \in \mathcal{U}'$, *és* $U_1 \circ U_1 \subset U$. ▌

Ennek alkalmazásaképpen, illetőleg közvetlenül a definícióból levezethetők a (7.4.2)—(7.4.8), (7.4.10), (7.4.11) tételekkel analóg tételek, topológia helyébe mindenütt uniform struktúrát, folytonosság helyett egyenletes folytonosságot írva, és nehézség nélkül igazolható (7.4.13) megfelelője is:

(7.4.27) *Ha* $I = \emptyset$, $i \in I$ *esetén* $[E_i, \mathcal{U}_i]$ *uniform tér,* $E = \bigtimes_{i \in I} E_i$, $\mathcal{U} = \bigtimes_{i \in I} \mathcal{U}_i$, $p_i : E \to E_i$ *az i-edik vetítés, akkor bármely* $j \in I$*-re* $\mathcal{U}_j = p_j(\mathcal{U})$.

Bizonyítás. (7.4.26) alapján elég megmutatnunk, hogy egy E_j-beli U környékre pontosan akkor áll $g_j^{-1}(U) \in \mathcal{U}$, ha $U \in \mathcal{U}_j$; itt $g_j : E \times E \to E_j \times E_j$ a $g_j(x, y) = \big(p_j(x), p_j(y)\big)$ képlettel van értelmezve. Azonban $U \in \mathcal{U}_j$ esetén $g_j^{-1}(U) \in \mathcal{U}$ (7.3.18) miatt. Megfordítva, ha U E-beli környék, és $g_j^{-1}(U) \in \mathcal{U}$, akkor vannak olyan $i_1, \ldots, i_n \in I$ indexek és $k = 1, \ldots, n$ esetén olyan $U_{i_k} \in \mathcal{U}_{i_k}$ környékek, hogy

$$U' = \bigcap_{k=1}^{n} g_{i_k}^{-1}(U_{i_k}) \subset g_j^{-1}(U),$$

ahol $g_{i_k}(x, y) = \big(p_{i_k}(x), (p_{i_k}(y)\big)$. Legyen $x_j, y_j \in E_j$, $i \neq j$ esetén pedig $x_i = y_i \in E_i$. Ha j nem szerepel az $i_1, \ldots, i_n$ indexek között, akkor tetszőleges $x_j, y_j \in E_j$ mellett az $x = (x_i)$, $y = (y_i)$ jelöléssel $(x, y) \in U'$ folytán $(x_j, y_j) \in U$, azaz $U = E_j \times E_j$, s így $U \in \mathcal{U}_j$. Ha viszont j szerepel az i_k-k között, mondjuk $i_1, \dots, i_p = j$, $i_{p+1}, \dots, i_n \neq j$, akkor $(x_j, y_j) \in \bigcap_{k=1}^{p} U_{i_k}$ esetén $(x, y) \in U'$, tehát $(x_j, y_j) \in U$, úgyhogy $\bigcap_{k=1}^{p} U_{i_k} \subset U$, s minthogy $\bigcap_{k=1}^{p} U_{i_k} \in \mathcal{U}_j$, egyúttal $U \in \mathcal{U}_j$ is áll. ∎

Nem szorul magyarázatra, hogyan történik egy **uniform tér** valamely felbontáshoz tartozó, ill. valamely ekvivalencia-reláció szerinti **kvócienster**ének értelmezése. Különösen fontos példaként ismét a szeparatív felbontás esetét említhetjük meg:

(7.4.28) *Legyen* $[E, \mathcal{U}]$ *uniform tér,* $\mathfrak{Z}$ *a* $\mathcal{T}_{\mathcal{U}}$ *topológiához tartozó szeparatív felbontás,* $p : E \to \mathfrak{Z}$ *a kanonikus szuperjekció. Ekkor*

(a) *x és y pontosan akkor tartozik ugyanahhoz a* $Z \in \mathfrak{Z}$ *cellához, ha* $(x, y) \in U$ *minden* $U \in \mathcal{U}$ *környékre;*

(b) *Az*

$$U' = \{(Z_1, Z_2) : Z_1, Z_2 \in \mathfrak{Z},\ Z_1 \times Z_2 \subset U\} \tag{7.4.29}$$

halmazok, ahol $U \in \mathcal{U}$ *tetszőleges környék,* $p(\mathcal{U})$*-t generáló uniform bázist alkotnak;*

(c) $p^{-1}(p(\mathcal{U})) = \mathcal{U}$;

(d) $\mathcal{S}_{p(\mathcal{U})} = p(\mathcal{S}_{\mathcal{U}})$;

(e) $\mathcal{T}_{p(\mathcal{U})} = p(\mathcal{T}_{\mathcal{U}})$;

(f) $p(\mathcal{U})$ *szeparált.*

Bizonyítás. (a): (7.4.25) (a)-nak a $\mathcal{S}_{\mathcal{U}}$ szomszédsági relációra való alkalmazásával adódik.

(b): A $q(x, y) = (p(x), p(y))$ jelölést bevezetve, egy $\mathfrak{Z}$-beli U' környékre $q^{-1}(U') = U \in \mathcal{U}$ pontosan akkor áll, ha $U \in \mathcal{U}$, és U' a (7.4.29) képlettel van megadva. Eszerint p-re teljesül a (7.4.26)-ban szereplő feltétel: $q^{-1}(U') = U \in \mathcal{U}$ esetén legyen $U_1 \in \mathcal{U}$ olyan környék, hogy $U_1 \circ U_1 \subset U$, és U_1'-t értelmezzük (7.4.29)-cel, de U helyébe U_1-et téve. Ekkor U_1' (a) miatt környék, továbbá $U_1' \circ U_1' \subset U'$, hiszen $(Z_1, Z_2) \in U_1'$, $(Z_2, Z_3) \in U_1'$ esetén tetszőleges $z_1 \in Z_1$, $z_3 \in Z_3$ pontokhoz egy $z_2 \in Z_2$ pontot választva, $(z_1, z_2) \in U_1$, $(z_2, z_3) \in U_1$ miatt $(z_1, z_3) \in U$, azaz $Z_1 \times Z_3 \subset U$, és $(Z_1, Z_3) \in U'$. Így az állítás (7.4.26)-ból következik.

(c): Láttuk, hogy a (7.4.29) által értelmezett U'-re $q^{-1}(U') = U$, s innen az állítás (3.2.39) alapján adódik.

(d): Minthogy p $(\mathcal{U}, p(\mathcal{U}))$-egyenletesen folytonos, azért $(\mathcal{S}_{\mathcal{U}}, \mathcal{S}_{p(\mathcal{U})})$-szomszédságtartó is, és így $\mathcal{S}_{p(\mathcal{U})} < p(\mathcal{S}_{\mathcal{U}})$. Viszont, ha $A\, \overline{p(\mathcal{S}_{\mathcal{U}})}\, B$, azaz ha $p^{-1}(A)\, \overline{\mathcal{S}}_{\mathcal{U}}\, p^{-1}(B)$, akkor van olyan $U \in \mathcal{U}$ környék, hogy $(p^{-1}(A) \times p^{-1}(B)) \cap U = \emptyset$. Így $Z_1 \in A$, $Z_2 \in B$ esetén $(Z_1, Z_2) \notin U'$, ahol U'-t ismét (7.4.29) adja meg, hiszen tetszőlegesen választott $z_1 \in Z_1$, $z_2 \in Z_2$ pontokra $z_1 \in p^{-1}(A)$, $z_2 \in p^{-1}(B)$ folytán $(z_1, z_2) \notin U$. Ennélfogva $(A \times B) \cap U' = \emptyset$, és $A\, \overline{\mathcal{S}}_{p(\mathcal{U})}\, B$.

(e) és (f): (d)-ből (7.4.25) (d) és (e) segítségével következik. ∎

Az előbbi tételt könnyen kapcsolatba hozhatjuk a félmetrikus terekre vonatkozó (1.3.19) tétellel:

(7.4.30) *Legyen ρ eltérés E-n. Ekkor a $\mathcal{T}_\rho$ topológiának megfelelő $\mathfrak{Z}$ szeparatív felbontás azonos az* (1.3.19)*-ben leírt ekvivalencia-osztályokra való felbontással, úgyhogy az* (1.3.20)*-beli ρ^* távolság $\mathfrak{Z}$-en. $\mathcal{U}_{\rho^*}$ nem más, mint az $\mathcal{U}_\rho$ uniform struktúrának $\mathfrak{Z}$ szerinti kvóciensstruktúrája.*

Bizonyítás. (7.4.28) (a) szerint x és y akkor tartozik $\mathfrak{Z}$-nek ugyanazon cellájához, ha $\rho(x, y) = 0$. A (7.4.29) alatti jelöléssel $(Z_1, Z_2) \in \mathcal{U}'_{\rho,\varepsilon}$ pontosan akkor áll, ha $x \in Z_1$, $y \in Z_2$ esetén $\rho(x, y) < \varepsilon$, azaz ha $\rho^*(Z_1, Z_2) < \varepsilon$. ∎

7.4.f. Gyakorlatok. 1. Legyen $I \neq \emptyset$, $i \in I$ esetén $[E_i, \mathcal{T}_i]$ topologikus tér, $i \neq j$ esetén $E_i \cap E_j = \emptyset$, $E = \bigcup_{i \in I} E_i$, $p_i : E_i \to E$ a kanonikus injekció. A $\{p_i, \mathcal{T}_i : i \in I\}$ rendszer által induktívan előállított $\mathcal{T}$ topológiát a $\mathcal{T}_i$ topológiák összegének mondjuk és a $\mathcal{T} = \sum_{i \in I} \mathcal{T}_i$ szimbólummal jelöljük. Mutassuk meg, hogy

(a) $A \subset E$ pontosan akkor $\mathcal{T}$-nyílt ($\mathcal{T}$-zárt), ha $A \cap E_i$ minden i-re $\mathcal{T}_i$-nyílt ($\mathcal{T}_i$-zárt);

(b) $\mathcal{T} | E_i = \mathcal{T}_i$ $(i \in I)$;

(c) E_i nyílt-zárt $\mathcal{T}$-re nézve $(i \in I)$;

(d) a (b) és (c) tulajdonság $\mathcal{T}$-t egyértelműen meghatározza.

2. Az előző feladat feltevéseivel legyen még $f_i : E_i \to E'$ adott leképezés minden i-re. Mutassuk meg, hogy

(a) pontosan egy olyan $f : E \to E'$ leképezés van, amelyre $f_i = f \circ p_i$ $(i \in I)$;

(b) az $\{f_i, \mathcal{T}_i : i \in I\}$ rendszer által induktívan előállított topológia éppen $f(\sum_{i \in I} \mathcal{T}_i)$.

3. Mutassuk meg az 1. feladat jelöléseivel, hogy

(a) $\sum_{i \in I} \mathcal{T}_i$ pontosan akkor T_k-topológia ($k = 0, \ldots, 5$ vagy π), S_k-topológia ($k = 1, \ldots, 5$ vagy π), normális vagy teljesen normális, ha minden $\mathcal{T}_i$ ilyen;

(b) $\sum_{i \in I} \mathcal{T}_i$ pontosan akkor M_1-topológia, lokálisan kompakt, nulladimenziós vagy peremkompakt, ha minden $\mathcal{T}_i$ ilyen;

(c) $\sum_{i \in I} \mathcal{T}_i$ pontosan akkor M_2-topológia, Lindelöf-topológia vagy szeparábilis, ha minden $\mathcal{T}_i$ ilyen, és I megszámlálható;

(d) $\sum_{i \in I} \mathcal{T}_i$ pontosan akkor kompakt, megszámlálhatóan kompakt vagy sorozat-kompakt, ha minden $\mathcal{T}_i$ ilyen, és I véges;

(e) Ha $\mathcal{T}_i$ minden i-re (fél)metrizálható, akkor $\mathcal{T}$ is ilyen.

[$\mathcal{T}_i = \mathcal{T}_{\rho_i}$ esetén legyen $\rho'_i = \min(\rho_i, 1)$, és

$$\rho(x, y) = \begin{cases} \rho_i(x, y), & \text{ha } x, y \in E_i \ (i \in I), \\ 2 & \text{különben.} \end{cases}]$$

4. Mutassuk meg, hogy ha $[X, \mathcal{T}_1]$ kompakt, $[Y, \mathcal{T}_2]$ pedig T_2-tér, és $f : X \to Y$ folytonos és szuperjektív, akkor zárt is.

5. Mutassuk meg, hogy ha $f : \mathbf{R} \to [-1, 1]$ a következőképpen van értelmezve:

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{ha } |x| \leqq \pi, \\ \sin x, & \text{ha } |x| \geqq \pi, \end{cases}$$

akkor f sem nem nyílt, sem nem zárt, de $f(\mathcal{E}) = \mathcal{E}|[-1, 1]$.

6. Mutassuk meg, hogy ha $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ így van értelmezve:

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{ha} \quad |x| \leqq 1, \\ x-1, & \text{ha} \quad x \geqq 1, \\ x+1, & \text{ha} \quad x \leqq -1, \end{cases}$$

akkor f $(\mathscr{E}, \mathscr{E})$-folytonos és zárt, de nem nyílt.

7. Mutassuk meg, hogy ha $f : \mathbf{R}\times\mathbf{R} \to \mathbf{R}$ az első tényezőre való vetítés, akkor $(\mathscr{E}\times\mathscr{E}, \mathscr{E})$-folytonos és nyílt, de nem zárt.

8. Legyen $[X, \mathscr{T}_1]$ és $[Y, \mathscr{T}_2]$ topologikus tér, $f : X \to Y, A \subset X, A = f^{-1}(f(A))$. Mutassuk meg, hogy ha f nyílt (zárt) leképezés, akkor $f|_A^{f(A)} = g$ is ilyen $(\mathscr{T}_1|A)$-ra és $(\mathscr{T}_2|f(A))$-ra nézve.

$[g(G \cap A) = f(G) \cap f(A).]$

9. Legyen $\mathfrak{Z}$ $\mathbf{R}$-nek felbontása, p a kanonikus szuperjekció. Mutassuk meg hogy

(a) ha $\mathfrak{Z} = \{\mathbf{Q}, \mathbf{R}-\mathbf{Q}\}$, akkor $p(\mathscr{E})$ nem T_0-topológia, de félmetrizálható, és p nem $(\mathscr{E}, p(\mathscr{E}))$-zárt;

(b) ha $\mathfrak{Z}$ a $(-1,1)$ intervallumból és az $\{x\}$ $(|x| \geqq 1)$ halmazokból áll, akkor $p(\mathscr{E})$ T_0-topológia, de nem T_1-topológia, továbbá p $(\mathscr{E}, p(\mathscr{E}))$-nyílt;

(c) ha $\mathfrak{Z}$ az $\{x, -x\}$ $(|x| < 1)$ és $\{x\}$ $(|x| \geqq 1)$ halmazokból áll, akkor $p(\mathscr{E})$ T_1-topológia, de nem T_2-topológia, és p nem $(\mathscr{E}, p(\mathscr{E}))$-zárt, de $(\mathscr{E}, p(\mathscr{E}))$-nyílt.

10. Legyen $x, y \in \mathbf{R}$ ekvivalens, ha $x-y$ egész szám. Mutassuk meg, hogy $[\mathbf{R}, \mathscr{E}]$-nek ehhez tartozó kvócienstere egy körvonallal homeomorf.

$[f(x) = (\cos \pi x, \sin \pi x)$ esetén $f(\mathbf{R}) = K$, és $f(\mathscr{E}) = \mathscr{E}^2 | K.]$

11. Legyen $[E, \mathscr{T}]$ topologikus tér, $f : E \to E', A \subset E$. Mutassuk meg, hogy az $f|_A^{f(A)} = g$ jelöléssel

(a) $f(\mathscr{T})|f(A) < g(\mathscr{T}|A)$;

(b) ha $f^{-1}(f(A)) = A$, és f $(\mathscr{T}, f(\mathscr{T}))$-nyílt vagy $(\mathscr{T}, f(\mathscr{T}))$-zárt, akkor $f(\mathscr{T})|f(A) = g(\mathscr{T}|A)$;

(c) ha $[E, \mathscr{T}] = [\mathbf{R}, \mathscr{E}]$, A a pozitív racionális számokból és a negatív irracionális számokból áll, $f(x) = |x|$, $E' = [0, +\infty)$, akkor $f(\mathscr{T})|f(A) \neq g(\mathscr{T}|A)$, holott f $(\mathscr{T}, f(\mathscr{T}))$-zárt;

(d) ha a (b) alatti feltevések mellett g bijektív, akkor $(\mathscr{T}|A, f(\mathscr{T})|f(A))$-homeomorfizmus.

12. Legyen $[E, \mathscr{T}]$ teljesen reguláris tér, $[E', \mathscr{T}']$ ennek szabályos kompaktifikációja, $x, y \in E'-E$, $x \neq y$, álljon E'-nek $\mathfrak{Z}$ felbontása az $\{x, y\}$ halmazból és a $\{z\}$ halmazokból $(z \in E' - \{x, y\})$, legyen $p : E' \to \mathfrak{Z}$ a kanonikus szuperjekció, $p(E) = E_0$, $p(E') = E_0'$. Mutassuk meg, hogy

(a) p $(\mathscr{T}', p(\mathscr{T}'))$-zárt;

(b) $p(\mathscr{T}')$ kompakt, normális S_1-topológia;

(c) $q = p|_E^{E_0}$ $(\mathscr{T}, p(\mathscr{T}')|E_0)$-homeomorfizmus;

(d) $[E_0', p(\mathscr{T}')]$ szabályos kompaktifikációja $[E_0, p(\mathscr{T}')|E_0]$-nak;

(e) ha V_x és V_y x-nek, ill. y-nak diszjunkt, zárt környezete, $A = V_x \cap E$, $B = V_y \cap E$, akkor $x \in \bar{A}$, $y \in \bar{B}$, $\bar{A} \cap \bar{B} = \emptyset$ $(\mathscr{T}'$-re nézve), viszont $\overline{q(A)} \cap \overline{q(B)} \neq \emptyset$ $(p(\mathscr{T}')$-re nézve);

(f) ha egy teljesen reguláris tér szabályos kompaktifikációi között van legdurvább, akkor a tér vagy kompakt, vagy lokálisan kompakt (és legdurvább szabályos kompaktifikációja az Alekszandrov-féle).

13. Legyen $[E, \mathfrak{T}]$ topologikus tér. Mutassuk meg, hogy a következő állítások egyenértékűek:

(a) $[E, \mathfrak{T}]$ S_1-tér;

(b) Az $\bar{x}$ halmazok $(x \in E)$ E-nek felbontását alkotják;

(c) A $V(x) = \bigcap \{V : V \in \mathfrak{v}(x)\}$ halmazok $(x \in E)$ E-nek felbontását alkotják.

S_1-térben a (b) és (c) alatti felbontás egybeesik a tér szeparatív felbontásával.

14. Legyen $\mathfrak{Z}$ **R**-nek ahhoz az ekvivalencia-relációhoz tartozó felbontása, amelyben x és y akkor ekvivalens, ha $x - y$ egész szám, f pedig a kanonikus szuperjekció. Mutassuk meg, hogy f $(\mathfrak{E}, f(\mathfrak{E}))$-nyílt és -zárt, de $f(\mathfrak{E})$ nem T_0-topológia (holott $\mathfrak{E}$ T_0-topológia).

15. Legyen $[E, \mathfrak{T}]$ topologikus tér, $E = E_1 \cup E_2$, $E_1' = \{1\} \times E_1$, $E_2' = \{2\} \times E_2$, $f_1(x) = (1, x)$ $(x \in E_1)$, $f_2(x) = (2, x)$ $(x \in E_2)$, $\mathfrak{T}_1' = f_1(\mathfrak{T}|E_1)$, $\mathfrak{T}_2' = f_2(\mathfrak{T}|E_2)$, $E' = E_1' \cup E_2'$, $\mathfrak{T}' = \sum_{i=1}^{2} \mathfrak{T}_i'$, végül $g : E' \to E$ a $g(1, x) = x$ $(x \in E_1)$, $g(2, x) = x$ $(x \in E_2)$ képletekkel értelmezve. Mutassuk meg, hogy

(a) f_1 $(\mathfrak{T}|E_1, \mathfrak{T}_1')$-, f_2 pedig $(\mathfrak{T}|E_2, \mathfrak{T}_2')$-homeomorfizmus;

(b) $\mathfrak{T} < g(\mathfrak{T}')$, azaz g $(\mathfrak{T}', \mathfrak{T})$-folytonos;

(c) ha E_1 és E_2 $\mathfrak{T}$-nyílt (-zárt), akkor g $(\mathfrak{T}', \mathfrak{T})$-nyílt (-zárt), és így $\mathfrak{T} = g(\mathfrak{T}')$.

16. Legyen $[E, \mathfrak{T}]$ topologikus tér, $E = E_1 \cup E_2$, E_1 és E_2 $\mathfrak{T}$-zárt. Mutassuk meg, hogy ha $\mathfrak{T}|E_1$ és $\mathfrak{T}|E_2$ T_1-, T_2-, S_1-, S_2-topológia, ill. normális, akkor $\mathfrak{T}$ is ilyen.

17. Legyen $I \neq \emptyset$ részben rendezett, irányított indexhalmaz, $i \in I$ esetén $E_i \neq \emptyset$, és $i \leqq j$ esetén $p_{ij} : E_i \to E_j$ olyan leképezés, hogy p_{ii} E_i-nek identitása, $i \leqq j \leqq k$ esetén pedig $p_{ik} = p_{jk} \circ p_{ij}$. Képezzük az $S_i = \{(i, x) : x \in E_i\}$ halmazokat, továbbá ezeknek $S = \bigcup_{i \in I} S_i$ egyesítését, s legyen $q_i : E_i \to S$ a $q_i(x) = (i, x)$ képlettel értelmezve. Mutassuk meg, hogy

(a) S-en ekvivalencia-relációt kapunk, ha (i, x)-et és (j, y)-t akkor mondjuk ekvivalensnek, ha van olyan $k \in I$, hogy $i \leqq k, j \leqq k$, és $p_{ik}(x) = p_{jk}(y)$;

(b) ha E jelöli az előbbi ekvivalencia-relációnak megfelelő ekvivalencia-osztályok halmazát, és $q : S \to E$ a kanonikus szuperjekció, akkor a $p_i = q \circ q_i : E_i \to E$ leképezésekre $i \leqq j$ esetén $p_i = p_j \circ p_{ij}$;

(c) ha még E_i-n meg van adva egy $\mathfrak{T}_i$ topológia, akkor a $\{p_i, \mathfrak{T}_i : i \in I\}$ rendszer által induktívan előállított $\mathfrak{T}$ topológiára az $r_i = q_i|_{E_i}^{S_i}$ jelöléssel

$$\mathfrak{T} = q(\sum_{i \in I} r_i(\mathfrak{T}_i))\,;$$

(d) ha $[E', \mathfrak{T}']$ tetszőleges topologikus tér, és $f_i : E_i \to E'$ olyan $(\mathfrak{T}_i, \mathfrak{T}')$-folytonos leképezés, hogy $i \leqq j$ esetén $f_i = f_j \circ p_{ij}$, akkor létezik egy egyértelműen meghatározott $f : E \to E'$ $(\mathfrak{T}, \mathfrak{T}')$- folytonos leképezés, amelyre $f_i = f \circ p_i$;

(e) ha $[E^*, \mathfrak{T}^*]$ olyan topologikus tér, és $p_i^* : E_i \to E^*$ olyan $(\mathfrak{T}_i, \mathfrak{T}^*)$-folytonos leképezés, hogy $i \leqq j$ esetén $p_i^* = p_j^* \circ p_{ij}$, továbbá bármely $[E', \mathfrak{T}']$ topologikus térre és $i \leqq j$ esetén $f_i = f_j \circ p_{ij}$ tulajdonságú $f_i : E_i \to E'$ $(\mathcal{T}_i, \mathcal{T}')$-folytonos leképezésekre pontosan egy $f^* : E^* \to E'$ $(\mathcal{T}^*, \mathcal{T}')$-folytonos leképezés létezik az $f_i = f^* \circ p_i^*$ tulajdonsággal, akkor $[E, \mathcal{T}]$ és $[E^*, \mathcal{T}^*]$ homeomorf egymással.

Az itt leírt E-t az $\{E_i, p_{ij}\}$ rendszer, $\mathcal{T}$-t a $\{\mathcal{T}_i, p_{ij}\}$ rendszer induktív limeszének mondjuk.

18. Legyen $E = \bigcup_{i \in I} E_i$, I irányított indexhalmaz, $i \leqq j$ esetén $E_i \subset E_j$, $p_{ij} : E_i \to E_j$ a kanonikus injekció, $\mathcal{T}$ topológia E-n, E_i $\mathcal{T}$-nyílt minden i-re. Mutassuk meg, hogy $\mathcal{T}$ homeomorf a $\{\mathcal{T}_i, p_{ij}\}$ rendszer induktív limeszével.

19. Legyen az 1. alatti jelölésekkel $\mathcal{S}_i$ szomszédsági reláció E-n. Mutassuk meg, hogy

(a) a $\{p_i, \mathcal{S}_i : i \in I\}$ rendszer által induktívan előállított $\mathcal{S}$ szomszédsági relációra $A \mathcal{S} B$ pontosan akkor áll, ha legalább egy $i \in I$ indexre $A \cap E_i \mathcal{S}_i B \cap E_i$;

(b) $\mathcal{S} \mid E_i = \mathcal{S}_i$;

(c) $\mathcal{T}_{\mathcal{S}} = \sum_{i \in I} \mathcal{T}_{\mathcal{S}i}$.

$\mathcal{S}$-t a $\mathcal{S}_i$ szomszédsági relációk összegének mondjuk, és a $\sum_{i \in I} \mathcal{S}_i$ szimbólummal jelöljük.

20. Legyen az 1. alatti jelölésekkel $\mathcal{U}_i$ uniform struktúra E_i-n, válasszunk ki minden $i \in I$-re egy $U_i \in \mathcal{U}_i$ környéket, s legyen $U = \bigcup_{i \in I} U_i$. Mutassuk meg, hogy

(a) az így keletkező U E-beli környék, és ezek az ($U_i \in \mathcal{U}_i$ összes lehetséges választásának megfelelő) U-k egy E fölötti $\mathfrak{U}$ uniform bázist alkotnak;

(b) az $\mathfrak{U}$ által generált $\mathcal{U}$ uniform struktúra a $\{p_i, \mathcal{U}_i\}$ rendszerrel van induktívan előállítva;

(c) $\mathcal{U} \mid E_i = \mathcal{U}_i$;

(d) $\mathcal{S}_{\mathcal{U}} = \sum_{i \in I} \mathcal{S}_{\mathcal{U}i}$;

(e) $\mathcal{T}_{\mathcal{U}} = \sum_{i \in I} \mathcal{T}_{\mathcal{U}i}$.

$\mathcal{U}$-t az $\mathcal{U}_i$ uniform struktúrák összegének mondjuk, és $\sum_{i \in I} \mathcal{U}_i$-val jelöljük.

21. Az előző feladat jelöléseivel mutassuk meg, hogy

(a) A pontosan akkor U-rendben kicsiny, ha van olyan $i \in I$, hogy $A \subset E_i$, és A U_i-rendben kicsiny;

(b) $\mathcal{U}$ pontosan akkor prekompakt, ha minden $\mathcal{U}_i$ prekompakt és I véges;

(c) $\mathfrak{r}$ pontosan akkor $\mathcal{U}$-Cauchy-rács, ha van olyan $i \in I$ és $R \in \mathfrak{r}$, hogy $R \subset E_i$, és $\mathfrak{r} (\cap) \{E_i\}$ $\mathcal{U}_i$-Cauchy-rács;

(d) $\mathcal{U}$ pontosan akkor teljes, ha $\mathcal{U}_i$ minden i-re teljes;

(e) ha minden $\mathcal{U}_i$ (fél)metrizálható, és I véges, akkor $\mathcal{U}$ is (fél)metrizálható;

(f) ha $I = \mathbf{N}$, $E_i = (i, i+1) \subset \mathbf{R}$, $\mathcal{U}_i = \mathcal{U}_{\rho_1} | E_i$, akkor $\mathcal{U}$ nem metrizálható (holott $\mathcal{T}_{\mathcal{U}}$ ilyen).

[Ha $\{U^n : n \in \mathbf{N}\}$ $\mathcal{U}$-t generáló uniform bázis volna, legyen $0 < \varepsilon_{ni} < 1$ olyan, hogy

$$\bigcup_{i=1}^{\infty} \{(x, y) : x, y \in E_i, | x - y | < \varepsilon_{ni}\} \subset U^n;$$

ekkor

$$U = \bigcup_{i=1}^{\infty} \{(x, y) : x, y \in E_i, |x - y| < \frac{1}{2}\varepsilon_{ii}\} \in \mathcal{U},$$

azonban $U^n \subset U$ egyetlen n-re sem áll.]

22. Legyen $[E, \mathfrak{T}]$ teljesen reguláris tér, $[E', \mathfrak{T}']$ ennek Čech—Stone-féle kompaktifikációja. Mutassuk meg, hogy a következő állítások egyenértékűek:

(a) $\mathfrak{T}$ pontosan egy szomszédsági relációval indukálható;

(b) $E' - E$ legfeljebb egy pontból áll;

(c) $\mathfrak{T}$ pontosan egy uniform struktúrával indukálható.

[(a) $\Rightarrow$ (b): (6.4.16) és 12. feladat (f); (b) $\Rightarrow$ (a): a **6.4.** alatti 20. feladat, (6.4.19), (6.4.22); (a) $\Rightarrow$ (c): $\mathfrak{T}$ pszeudokompakt, mert ha f nem-korlátos, $\mathfrak{T}$-folytonos függvény, és (x_i) olyan sorozat, hogy $i < j$ esetén $|f(x_i) - f(x_j)| > j - i$, akkor $A = \{x_{2n} : n \in \mathbf{N}\}$ és $B = \{x_{2n-1} : n \in \mathbf{N}\}$ $\mathfrak{T}_\Phi$-távoli (Φ-vel jelölve a $\mathfrak{T}$-folytonos függvények családját), az (5.3.57) alatti szomszédsági relációra nézve pedig szomszédos, hiszen sem $\bar{A}$, sem $\bar{B}$ nem lehet $\mathfrak{T}$-kompakt: ellentmondás; így az **5.3.** alatti 26. feladat és (4.2.26) alkalmazható.]

VIII. PARAKOMPAKT TEREK

8.1. OSZTHATÓ TEREK

8.1.a. Átlókörnyezetek. (7.3.46)-ból tudjuk, hogy ha $[E, \mathcal{U}]$ uniform tér, $\mathfrak{T} = \mathfrak{T}_{\mathcal{U}}$, akkor $\mathcal{U}$-nak minden eleme tartalmaz egy, az $E^2 = E \times E$ halmaz átlóját tartalmazó, a $\mathfrak{T} \times \mathfrak{T} = \mathfrak{T}^2$ topológiára nézve nyílt halmazt, azaz az átlónak $\mathfrak{T}^2$-környezetét.

Legyen most megfordítva $[E, \mathfrak{T}]$ tetszőleges topologikus tér, $E^2 = E \times E$, $\mathfrak{T}^2 = \mathfrak{T} \times \mathfrak{T}$, és $D = \{(x, x) : x \in E\}$ az E^2 halmaz átlója. Jelöljük $\mathcal{U}$-val a D halmaz $\mathfrak{T}^2$-környezetszűrőjét. Ekkor $\mathcal{U}$ elemei mindenesetre D-t tartalmazó halmazok, szűrőt alkotnak, és ennek a szűrőnek van környékekből álló bázisa. Valóban, ha $U \in \mathcal{U}$, akkor $U^{-1} \in \mathcal{U}$ is, hiszen ha V_1 és V_2 x-nek olyan $\mathfrak{T}$-környezete, hogy $V_1 \times V_2 \subset U$, akkor $V_2 \times V_1 \subset U^{-1}$, és $V_2 \times V_1$ is $\mathfrak{T}^2$-környezete (x, x)-nek; így $U \cap U^{-1} \subset U$ szimmetrikus környezete D-nek, azaz $\mathcal{U}$-beli környék.

Ennélfogva $\mathcal{U}$ uniform struktúra E-n, mihelyt az $\mathcal{U}$-beli környékek rendszere uniform bázis, amihez pontosan az kell, hogy teljesüljön (U_4) : minden $\mathcal{U}$-beli U környékhez legyen olyan $\mathcal{U}$-beli U_1 környék, hogy $U_1 \circ U_1 \subset U$. Az olyan topologikus tereket, amelyekre ez a kikötés teljesül, osztható tereknek nevezzük. Meggondolásunkat így foglalhatjuk össze:

(8.1.1) *Legyen $[E, \mathfrak{T}]$ topologikus tér, $E^2 = E \times E$, $\mathfrak{T}^2 = \mathfrak{T} \times \mathfrak{T}$, D az E^2 halmaz átlója. Az $[E, \mathfrak{T}]$ teret (és a $\mathfrak{T}$ topológiát)* **osztható***nak mondjuk, ha D-nek minden szimmetrikus U $\mathfrak{T}^2$-környezetéhez található D-nek olyan szimmetrikus U_1 $\mathfrak{T}^2$-környezete, hogy $U_1 \circ U_1 \subset U$. Ha ez a kikötés teljesül, akkor D-nek $\mathfrak{T}^2$-környezetei egy $\mathcal{U}_{\mathfrak{T}}$ uniform struktúrát alkotnak E-n.* ▌

Minthogy $(x, y) \in V_1 \times V_2 \subset U = U^{-1}$ esetén $(y, x) \in V_2 \times V_1 \subset U$ folytán U-val együtt int U is szimmetrikus (így jelölve U-nak $\mathfrak{T}^2$-belsejét), és D környezetszűrőjének bázisát alkotják D nyílt környezetei, hozzátehetjük:

(8.1.2) *Ha $[E, \mathfrak{T}]$ osztható tér, akkor D szimmetrikus, $\mathfrak{T}^2$-nyílt környezetei $\mathcal{U}_{\mathfrak{T}}$-t generáló uniform bázist alkotnak.* ▌

Osztható térre triviális példa $[\mathbf{R}, \overline{\mathfrak{S}}]$; rögtön látható ugyanis, hogy ekkor D egyetlen környezete $\mathbf{R}^2$. További példák későbbi eredményeinkből adódnak majd.

Az előbbi példa mutatja, hogy osztható térben az $\mathcal{U}_{\mathfrak{T}}$ uniform struktúra nem mindig indukálja a $\mathfrak{T}$ topológiát. Erre nézve a következő mondható:

(8.1.3) *Legyen $[E, \mathfrak{T}]$ osztható tér. Az $\mathcal{U}_{\mathfrak{T}}$ uniform struktúra által indukált topológia mindig durvább $\mathfrak{T}$-nél, és pontosan akkor azonos $\mathfrak{T}$-vel, ha $\mathfrak{T}$ S_1-topológia. Ekkor $\mathcal{U}_{\mathfrak{T}}$ a legfinomabb $\mathfrak{T}$-t indukáló uniform struktúra.*

Bizonyítás. Ha $U \in \mathcal{U}_{\mathfrak{T}}$ $\mathfrak{T}^2$-nyílt környék, akkor (7.3.47) miatt $U(x)$ $\mathfrak{T}$-nyílt minden $x \in E$ pontra. Ebből következik, hogy $\mathfrak{T}_{\mathcal{U}_{\mathfrak{T}}} < \mathfrak{T}$. Minthogy $\mathfrak{T}_{\mathcal{U}_{\mathfrak{T}}}$ teljesen reguláris, itt egyenlőség csak akkor állhat, ha $\mathfrak{T}$ S_1-topológia. Ha viszont ez a feltétel teljesül, és V x-nek tetszőleges nyílt $\mathfrak{T}$-környezete, akkor minden $y \in E - V$ ponthoz keressünk olyan $\mathfrak{T}$-nyílt V_y-t, hogy $y \in V_y$, $x \notin V_y$. Az $U = (V \times V) \cup \cup \bigcup_{y \in E-V} (V_y \times V_y)$ halmaz $\mathfrak{T}^2$-nyílt környék; $(x, z) \in U$ esetén csak $(x, z) \in V \times V$ lehetséges, azaz $U(x) \subset V$, és $\mathfrak{T} < \mathfrak{T}_{\mathcal{U}_\mathfrak{T}}$. Végül (7.3.46) szerint bármely $\mathfrak{T}$-t indukáló uniform struktúra része $\mathcal{U}_\mathfrak{T}$-nek. ▮

8.1.b. Multinormális terek. Az előző tétel mutatja, hogy minden osztható S_1-tér teljesen reguláris. Meg fogjuk mutatni, hogy minden osztható tér normális, sőt még egy ennél jóval erősebb szétválasztási axiómának is eleget tesz. Ennek megfogalmazása végett először is a következő elnevezésre lesz szükségünk: egy $[E, \mathfrak{T}]$ topologikus térben a $\mathfrak{A}$ E-beli halmazrendszert **diszkrét**nek mondjuk, ha minden $x \in E$ pontnak van olyan környezete, amely $\mathfrak{A}$-nak legfeljebb egy elemét metszi. Az elnevezés alátámasztására vegyük észre:

(8.1.4) *Ha $\mathfrak{T} > \mathfrak{T}_\mathcal{U}$, $\mathcal{U}$ uniform struktúra, és $\mathfrak{A}$ $\mathcal{U}$-diszkrét, akkor diszkrét is.*

Bizonyítás. Ha $U \in \mathcal{U}$ olyan környék, hogy $\mathfrak{A}$ U-diszkrét, $U_1 \in \mathcal{U}$ pedig olyan környék, hogy $U_1 \circ U_1 \subset U$, akkor $x \in E$ esetén $U_1(x)$ legfeljebb egy $\mathfrak{A}$-beli halmazt metszhet. ▮

Nevezzük most már az $[E, \mathfrak{T}]$ teret (és a $\mathfrak{T}$ topológiát) **multinormális**nak (**kollektíven normális**nak), ha tetszőleges $\mathfrak{A} = \{A_i : i \in I\}$ diszkrét halmazrendszerhez találhatók olyan páronként diszjunkt nyílt G_i halmazok, hogy $A_i \subset G_i$.

Minthogy két diszjunkt, zárt F_1, F_2 halmaz nyilván diszkrét $\{F_1, F_2\}$ rendszert alkot:

(8.1.5) *Minden multinormális tér normális.* ▮

Könnyű most már kimutatni:

(8.1.6) *Minden osztható tér multinormális.*

Bizonyítás. Legyen az $[E, \mathfrak{T}]$ osztható térben $\mathfrak{A} = \{A_i : i \in I\}$ diszkrét halmazrendszer, és minden $x \in E$ ponthoz V_x olyan nyílt környezete x-nek, amely legfeljebb egy A_i-t metsz. Az $U = \bigcup_{x \in E} (V_x \times V_x)$ halmazhoz legyen U_1 olyan $\mathfrak{T}^2$-nyílt környék, hogy $U_1 \circ U_1 \subset U$, és $G_i = U_1(A_i)$. Ekkor (7.3.47) szerint G_i nyílt, és $i \neq j$ esetén $G_i \cap G_j = \emptyset$, hiszen $x \in A_i, (x, y) \in U_1, (y, z) \in U_1, z \in A_j$ esetén $(x, z) \in U$, tehát valamely $p \in E$-re $(x, z) \in V_p \times V_p$ állna, holott V_p nem metszheti A_i-t is, A_j-t is. ▮

Érdemes megjegyezni, hogy multinormális terekben a definícióban foglalt tulajdonságnál valamivel több is mondható:

(8.1.7) *Ha $\mathfrak{A} = \{A_i : i \in I\}$ diszkrét halmazrendszer a multinormális $[E, \mathfrak{T}]$ térben, akkor találhatók olyan G_i nyílt halmazok, hogy $A_i \subset G_i$, és a $\{G_i : i \in I\}$ rendszer is diszkrét.*

Bizonyítás. Világos, hogy az $\{\bar{A}_i : i \in I\}$ halmazrendszer is diszkrét, hiszen ha egy x pontnak egy nyílt környezete nem metszi A_i-t, akkor nem metszi $\bar{A}_i$-t sem.

Legyen $H_i \supset \bar{A}_i$ olyan nyílt halmaz, hogy $i \neq j$ esetén $H_i \cap H_j = \emptyset$. Legyen $A = \bigcup_{i \in I} \bar{A}_i$, $B = E - \bigcup_{i \in I} H_i$. Ekkor $A \cap B = \emptyset$, B zárt, és A is zárt, mert $x \notin A$ esetén x alkalmas környezete legfeljebb egy $\bar{A}_i$-t metsz, és $x \notin \bar{A}_i$ miatt egy másik környezete egyet sem. Legyen (8.1.5)-re tekintettel G és H nyílt, $A \subset G$, $B \subset H$, $G \cap H = \emptyset$, és $G_i = G \cap H_i$ $(i \in I)$. Ekkor $A_i \subset G_i$ minden i-re, és $\{G_i : i \in I\}$ diszkrét. Valóban, $x \in B$ esetén $x \in H$, és $H \cap G_i = \emptyset$ minden i-re; $x \notin B$ esetén viszont valamely j-re $x \in H_j$, s akkor $H_j \cap G_i = \emptyset$, ha $i \neq j$. ∎

8.1.c. Egyformán folytonos függvények. Az osztható terek további jellemzése érdekében egy újabb fogalomra lesz szükségünk.

Legyen $[X, \mathcal{T}]$ topologikus tér, $Y \neq \emptyset$ tetszőleges halmaz, f $(X \times Y)$-on értelmezett függvény. Azt mondjuk, hogy f **egyformán** ($\mathcal{T}$-) **folytonos**, ha adott $x_0 \in X$ ponthoz és $\varepsilon > 0$ számhoz található x-nek olyan V környezete, hogy $x \in V$ esetén $|f(x, y) - f(x_0, y)| < \varepsilon$ minden $y \in Y$-ra.

Egyformán folytonos függvényekre két fontos példát említhetünk:

(8.1.8) *Legyen $[X, \mathcal{T}_1]$ és $[Y, \mathcal{T}_2]$ topologikus tér, $\mathcal{T}_2$ kompakt, f $(\mathcal{T}_1 \times \mathcal{T}_2)$-folytonos. Ekkor f egyformán $\mathcal{T}_1$-folytonos.*

Bizonyítás. Adott $x_0 \in X$-hez és $\varepsilon > 0$-hoz legyen $y \in Y$ mellett V_y olyan $\mathcal{T}_1$-nyílt, W_y olyan $\mathcal{T}_2$-nyílt halmaz, hogy $x_0 \in V_y$, $y \in W_y$, és $(x_1, y_1) \in V_y \times W_y$ esetén $|f(x_1, y_1) - f(x_0, y)| < \dfrac{\varepsilon}{2}$. A W_y-ok Y-nak nyílt befedését alkotják, úgyhogy $Y = \bigcup_1^n W_{y_i}$. Legyen $V = \bigcap_1^n V_{y_i}$. Ekkor $x \in V$, $y \in Y$ esetén valamely i-re $y \in W_{y_i}$, s akkor $(x, y) \in V_{y_i} \times W_{y_i}$, $(x_0, y) \in V_{y_i} \times W_{y_i}$, úgyhogy

$$|f(x, y) - f(x_0, y)| \leqq |f(x, y) - f(x_0, y_i)| + |f(x_0, y_i) - f(x_0, y)| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon. \;\blacksquare$$

(8.1.9) *Legyen σ $\mathcal{T}^2$-folytonos eltérés az $[E, \mathcal{T}]$ topologikus térben. Ekkor σ egyformán $\mathcal{T}$-folytonos.*

Bizonyítás. Adott $x_0 \in E$-nek legyen V olyan $\mathcal{T}$-környezete, hogy $(x, y) \in V \times V$ esetén

$$|\sigma(x, y) - \sigma(x_0, x_0)| = \sigma(x, y) < \varepsilon.$$

Ha most $y \in E$ tetszőleges, akkor $x \in V$ esetén

$$\sigma(x, y) \leqq \sigma(x, x_0) + \sigma(x_0, y),$$

$$\sigma(x_0, y) \leqq \sigma(x_0, x) + \sigma(x, y),$$

tehát

$$|\sigma(x, y) - \sigma(x_0, y)| \leqq \sigma(x_0, x) < \varepsilon. \;\blacksquare$$

Jegyezzük még meg, hogy a definícióból rögtön adódik:

(8.1.10) *Legyen $[X, \mathcal{T}]$ topologikus tér, $Y \neq \emptyset$, $\emptyset \neq X_0 \subset X$, $\emptyset \neq Y_0 \subset Y$, $\mathcal{T}_0 = \mathcal{T} | X_0$. Ha $f : X \times Y \to \mathbf{R}$ egyformán $\mathcal{T}$-folytonos, akkor $f | X_0 \times Y_0$ egyformán $\mathcal{T}_0$-folytonos.* ∎

8.1.d. További jellemzések. Kimondhatjuk mármost a következő tételt:

(8.1.11) *Legyen $[E, \mathcal{T}]$ topologikus tér. A következő állítások egyenértékűek:*

(a) *$\mathcal{T}$ osztható;*

(b) *Ha U E^2-ben a D átlónak szimmetrikus $\mathcal{T}^2$-környezete, akkor D és $E^2 - U$ $\mathcal{T}^2$-folytonos eltéréssel szétválasztható;*

(c) *Az előbbi feltételek mellett D és $E^2 - U$ egyformán $\mathcal{T}$-folytonos függvénnyel szétválasztható.*

Bizonyítás. (a) $\Rightarrow$ (b): Legyen Σ az $\mathcal{U}_{\mathcal{T}}$ uniform struktúrát indukáló eltéréscsalád; a Σ-beli eltérések (7.3.49) szerint $\mathcal{U}_{\mathcal{T}}^2$-egyenletesen folytonosak, tehát $\mathcal{T}^2_{\mathcal{U}_{\mathcal{T}}}$-folytonosak, és (8.1.3) szerint $\mathcal{T}^2$-folytonosak is. Ha $U \in \mathcal{U}_{\mathcal{T}}$ tetszőleges környék, akkor van olyan $\sigma_1, \ldots, \sigma_n \in \Sigma$ és $\varepsilon > 0$, hogy $U_{\sigma_1, \ldots, \sigma_n; \varepsilon} \subset U$. Legyen $\sigma_0 =$
$= \max(\sigma_1, \ldots, \sigma_n)$, $\sigma' = \min(\sigma_0, \varepsilon)$, $\sigma = \dfrac{1}{\varepsilon}\sigma'$. Ekkor (4.2.27) és (4.2.28) szerint σ_0, σ' s persze σ is eltérés E-n, továbbá (2.6.27) értelmében mindegyik $\mathcal{T}^2$-folytonos. Világos, hogy σ szétválasztja D-t és $(E^2 - U)$-t.

(b) $\Rightarrow$ (c): (8.1.9) következménye.

(c) $\Rightarrow$ (a): Legyen U D-nek szimmetrikus $\mathcal{T}^2$-környezete, és f egyformán $\mathcal{T}$-folytonos függvény E^2-en, amely D-t és $(E^2 - U)$-t szétválasztja. $x, y, t \in E$ esetén $g_t(x, y) = |f(x, t) - f(y, t)|$, továbbá

$$\sigma(x, y) = \sup\{g_t(x, y) : t \in E\}.$$

Minthogy $0 \leqq g_t(x, y) \leqq 1$, azért $0 \leqq \sigma(x, y) \leqq 1$. (4.2.9) és (4.2.27) mutatja, hogy σ eltérés E-n, és $(x, y) \in E^2 - U$ esetén $f(x, y) = 1$, $f(y, y) = 0$, tehát $g_y(x, y) = 1$, és $\sigma(x, y) = 1$.

Ha $U_1 = \left\{(x, y) : \sigma(x, y) < \dfrac{1}{2}\right\}$, akkor a háromszög-egyenlőtlenség miatt $U_1 \circ U_1 \subset U$, úgyhogy elég belátnunk, hogy U_1 D-nek $\mathcal{T}^2$-környezete. Mármost adott $x_0 \in E$-hez legyen V x_0-nak olyan $\mathcal{T}$-környezete, hogy $x \in V$, $t \in E$ esetén $|f(x, t) - f(x_0, t)| < \dfrac{1}{5}$. Ekkor $x, y \in V$ esetén minden $t \in E$-re

$$|f(x, t) - f(y, t)| \leqq |f(x, t) - f(x_0, t)| + |f(x_0, t) - f(y, t)| < \frac{1}{5} + \frac{1}{5} = \frac{2}{5},$$

tehát $g_t(x, y) \leqq \dfrac{2}{5}$, $\sigma(x, y) < \dfrac{1}{2}$. Eszerint $V \times V \subset U_1$. ∎

8.1.e. Gyakorlatok. 1. Legyen $[E, \rho]$ félmetrikus tér, $x \in E$ esetén $\varepsilon_x > 0$, $U =$
$= \bigcup\limits_{x \in E} (S(x, \varepsilon_x) \times S(x, \varepsilon_x))$, $U_1 = \bigcup\limits_{x \in E} \left(S\left(x, \dfrac{\varepsilon_x}{2}\right) \times S\left(x, \dfrac{\varepsilon_x}{2}\right)\right)$. Mutassuk meg, hogy

(a) $U_1 \circ U_1 \subset U$;

(b) minden félmetrizálható tér osztható.

2. Legyen $x \in \mathbf{R}$ esetén $\varepsilon_x > 0$. Mutassuk meg, hogy

(a) van olyan (x_i) $(i \in \mathbf{N})$ sorozat, hogy $\mathbf{R} = \bigcup\limits_{1}^{\infty} [x_i, x_i + \varepsilon_{x_i})$;

(b) az $A_i = [x_i, x_i + \varepsilon_{x_i})$ jelöléssel a $B_i = A_i - \bigcup\limits_{1}^{i-1} A_j$, $B_1 = A_1$ halmazok mindegyike $\mathcal{E}^+$-nyílt, $\mathbf{R} = \bigcup\limits_{1}^{\infty} B_i$, és a B_i-k diszjunktak;

(c) az $U = \bigcup_{x\in\mathbf{R}} \left([x, x + \varepsilon_x)\times[x, x + \varepsilon_x)\right)$ és $U_1 = \bigcup_{1}^{\infty} (B_i\times B_i)$ jelöléssel $U_1\circ U_1 = U_1 \subset U$;

(d) $\mathfrak{S}^+$ osztható.

3. Mutassuk meg, hogy osztható tér zárt altere mindig osztható.

[Ha G $\mathfrak{T}^2$-nyílt, és $x\in E-A$ esetén V_x x-nek A-t nem metsző $\mathfrak{T}$-környezete, akkor

$$G\cap(A\times A) = \left(G\cup\bigcup_{x\in E-A}(V_x\times V_x)\right)\cap(A\times A).]$$

4. Legyen $[E, \mathfrak{T}]$ megszámlálhatóan kompakt tér. Mutassuk meg, hogy

(a) minden $\mathfrak{T}$-diszkrét halmazrendszer véges;

(b) ha $\mathfrak{T}$ normális, akkor egyúttal multinormális is.

5. Mutassuk meg, hogy multinormális tér zárt altere is multinormális.

6. Adjunk példát $\mathbf{R}^2$-en olyan függvényre, amely $\mathfrak{S}^2$-folytonos, de nem egyformán $\mathfrak{S}$-folytonos.

[$f(x, y) = xy$.]

7. Legyen $[E, \mathfrak{T}]$ kompakt S_2-tér, U E^2 D átlójának $\mathfrak{T}^2$-környezete. Mutassuk meg, hogy

(a) $\bar{D}\subset \operatorname{int} U$;

(b) D és E^2-U $\mathfrak{T}^2$-folytonos függvénnyel szétválasztható;

(c) $\mathfrak{T}$ osztható.

8. Adjunk példát

(a) olyan osztható térre, amelynek egy altere nem osztható;

(b) olyan multinormális térre, amelynek egy altere nem multinormális.

[A **7.1.** alatti 8. feladat tere.]

9. Legyen $[X, \mathfrak{T}_1]$ M_1-tér, $[Y, \mathfrak{T}_2]$ pedig megszámlálhatóan kompakt tér, f $(\mathfrak{T}_1\times\mathfrak{T}_2)$-folytonos függvény. Mutassuk meg, hogy f egyformán $\mathfrak{T}_1$-folytonos.

[Ha $x_0\in X$, $\{V_n : n\in\mathbf{N}\}$ x_0-nak olyan $\mathfrak{T}_1$-környezetbázisa, hogy $V_1\supset V_2\supset \supset V_3\supset\ldots$, és $\varepsilon>0$ mellett $x_n\in V_n$, $y_n\in Y$, $|f(x_n, y_n)-f(x_0, y_n)|\geq\varepsilon$, akkor y_0-lal jelölve az (y_n) sorozatnak egy torlódási pontját, van olyan $n_0\in\mathbf{N}$ és y_0-nak olyan W $\mathfrak{T}_2$-környezete, hogy $(x, y)\in V_{n_0}\times W$ esetén

$$|f(x, y)-f(x_0, y_0)| < \frac{\varepsilon}{2};$$

alkalmas $n>n_0$ mellett $y_n\in W$, tehát

$$|f(x_n, y_n)-f(x_0, y_0)| < \frac{\varepsilon}{2},\quad |f(x_0, y_n)-f(x_0, y_0)| < \frac{\varepsilon}{2}.]$$

10. Legyen $[X, \mathfrak{T}_1]$ és $[Y, \mathfrak{T}_2]$ topologikus tér, $f: X\to Y$ folytonos, zárt leképezés. Mutassuk meg, hogy

(a) ha $\{A_i : i\in I\}$ $\mathfrak{T}_2$-diszkrét halmazrendszer, akkor $\{f^{-1}(A_i) : i\in I\}$ $\mathfrak{T}_1$-diszkrét;

(b) ha $f^{-1}(A_i)\subset G_i$, akkor $A_i\subset G_i' = Y-f(X-G_i)$;

(c) ha $G_i\cap G_j = \emptyset$, akkor $G_i'\cap G_j' = \emptyset$;

(d) ha $\mathfrak{T}_1$ multinormális, akkor $\mathfrak{T}_2$ is ilyen.

8.2. EGÉSZEN NORMÁLIS TEREK

8.2.a. Halmazrendszer finomítása és csillagfinomítása. Legyen $\mathfrak{A}$ és $\mathfrak{B}$ két halmazrendszer. Azt mondjuk, hogy $\mathfrak{A}$ **finomítása** $\mathfrak{B}$-nek, jelben $\mathfrak{A} \preccurlyeq \mathfrak{B}$, ha minden $A \in \mathfrak{A}$ halmazhoz található olyan $B \in \mathfrak{B}$, amelyre $A \subset B$.

Ezt a fogalmat nem szabad összetévesztenünk a már korábban bevezetett $\mathfrak{A} < \mathfrak{B}$ fogalommal ($\mathfrak{B}$ finomabb $\mathfrak{A}$-nál); ott azt kívántuk, hogy $A \in \mathfrak{A}$-hoz legyen olyan $B \in \mathfrak{B}$, amelyre $A \supset B$!

A definícióból rögtön következik:

(8.2.1) *Tetszőleges $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$ halmazrendszerre*

(a) $\mathfrak{A} \subset \mathfrak{B}$ *esetén* $\mathfrak{A} \preccurlyeq \mathfrak{B}$;

(b) $\mathfrak{A} \preccurlyeq \mathfrak{B}$, $\mathfrak{B} \preccurlyeq \mathfrak{C}$ *esetén* $\mathfrak{A} \preccurlyeq \mathfrak{C}$. ▌

Ha $\mathfrak{A}$ E-beli halmazrendszer, vezessük be az

$$U_{\mathfrak{A}} = \bigcup \{A \times A : A \in \mathfrak{A}\} \tag{8.2.2}$$

jelölést. Ekkor $U_{\mathfrak{A}}$ nyilván $E^2 = E \times E$-nek szimmetrikus részhalmaza.

(8.2.3) *Legyen $\mathfrak{A}$ és $\mathfrak{B}$ E-beli halmazrendszer.*

(a) *$U_{\mathfrak{A}}$ pontosan akkor környék, ha $\mathfrak{A}$ E-nek befedése;*

(b) $\mathfrak{A} \preccurlyeq \mathfrak{B}$ *esetén* $U_{\mathfrak{A}} \subset U_{\mathfrak{B}}$. ▌

Megjegyezzük, hogy a (b) állítás megfordítása nem érvényes; ha $\mathfrak{A} = \{E\}$, $\mathfrak{B}$ pedig E összes kételemű részhalmazaiból áll, akkor $U_{\mathfrak{A}} = U_{\mathfrak{B}} = E^2$, de $\mathfrak{A}$ nem finomítása $\mathfrak{B}$-nek, mihelyt E legalább három elemet tartalmaz.

Azt mondjuk, hogy a $\mathfrak{A}$ halmazrendszer **erős finomítása** a $\mathfrak{B}$ halmazrendszernek, jelben $\mathfrak{A} \lll \mathfrak{B}$, ha $A_1, A_2 \in \mathfrak{A}$, $A_1 \cap A_2 \neq \emptyset$ esetén van olyan $B \in \mathfrak{B}$, hogy $A_1 \cup A_2 \subset B$.

(8.2.4) $\mathfrak{A} \lll \mathfrak{B}$ *esetén* $\mathfrak{A} \preccurlyeq \mathfrak{B}$. ▌

(8.2.5) $\mathfrak{A} \preccurlyeq \mathfrak{B}$, $\mathfrak{B} \lll \mathfrak{C}$, $\mathfrak{C} \preccurlyeq \mathfrak{D}$ *esetén* $\mathfrak{A} \lll \mathfrak{C}$ *és* $\mathfrak{B} \lll \mathfrak{D}$. ▌

(8.2.6) *Tetszőleges E-beli $\mathfrak{A}$ és $\mathfrak{B}$ halmazrendszerre* $\mathfrak{A} \lll \mathfrak{B}$ *esetén* $U_{\mathfrak{A}} \circ U_{\mathfrak{A}} \subset U_{\mathfrak{B}}$.

Bizonyítás. $(x, y) \in U_{\mathfrak{A}}$, $(y, z) \in U_{\mathfrak{A}}$ esetén $x, y \in A_1$, $y, z \in A_2$, $A_1, A_2 \in \mathfrak{A}$, tehát ha $\mathfrak{A} \lll \mathfrak{B}$, akkor $A_1 \cup A_2 \subset B \in \mathfrak{B}$, és $x, z \in B$ miatt $(x, z) \in U_{\mathfrak{B}}$. ▌

(8.2.7) *Ha $\mathfrak{B}$ E-beli halmazrendszer, akkor egy $A \subset E$ halmaz $\mathfrak{B}(A)$ csillaga azonos a* (8.2.2) *jelölés mellett $U_{\mathfrak{B}}(A)$-val.* ▌

Az $x \in E$ elem $\mathfrak{B}$-csillagán ennek megfelelően az $U_{\mathfrak{B}}(x) = U_{\mathfrak{B}}(\{x\})$ halmazt értjük; ezt a kapcsos zárójel elhagyásával röviden $\mathfrak{B}(x)$-szel fogjuk jelölni.

(8.2.2) egy E-beli halmazrendszerhez rendelte E^2-nek egy szimmetrikus részhalmazát. Legyen most megfordítva $U \subset E^2$ szimmetrikus, és nevezzük U-hoz tartozó **csillagrendszernek** az

$$\operatorname{st} U = \{U(x) : x \in E\} \tag{8.2.8}$$

E-beli halmazrendszert; speciálisan ha $U = U_{\mathfrak{B}}$, $\mathfrak{B}$ E-beli halmazrendszer, akkor st $U_{\mathfrak{B}}$ helyett st $\mathfrak{B}$-t írunk, és a $\mathfrak{B}$-hez tartozó csillagrendszerről beszélünk. Eszerint

$$\operatorname{st} \mathfrak{B} = \{\mathfrak{B}(x) : x \in E\}. \tag{8.2.9}$$

(8.2.10) *Legyen U és V E^2-nek szimmetrikus részhalmaza. Ekkor:*
(a) *Ha U környék, akkor* st U *E-nek befedése:*
(b) *$U \subset V$ esetén* st $U \ll$ st V;
(c) *Ha egy $\mathfrak{A}$ halmazrendszer minden halmaza U-rendben kicsiny, akkor* $\mathfrak{A} \ll$ st U;
(d) $U_{\mathrm{st}\,U} = U \circ U$. ∎

(8.2.11) *Legyen $\mathfrak{B}$ E-beli halmazrendszer.*
(a) *$x \in B \in \mathfrak{B}$ esetén $B \subset \mathfrak{B}(x)$;*
(b) $\mathfrak{B} \lll \mathrm{st}\,\mathfrak{B}$;
(c) *Ha $\mathfrak{B}$ A-nak befedése,* st $\mathfrak{B}$ *is az;*
(d) $U_{\mathfrak{B}} \circ U_{\mathfrak{B}} = U_{\mathrm{st}\,\mathfrak{B}}$. ∎

Legyen ismét $\mathfrak{A}$ és $\mathfrak{B}$ E-beli halmazrendszer. Azt mondjuk, hogy $\mathfrak{A}$ **csillagfinomítása** $\mathfrak{B}$-nek, ha st $\mathfrak{A} \ll \mathfrak{B}$.

(8.2.12) *Ha $\mathfrak{A}$ és $\mathfrak{B}$ E-beli halmazrendszer, és $\mathfrak{A}$ csillagfinomítása $\mathfrak{B}$-nek, akkor $\mathfrak{A}$ erős finomítása, tehát finomítása is $\mathfrak{B}$-nek.* ∎

8.2.b. Egészen normális terek. Legyen $[E, \mathfrak{T}]$ tetszőleges topologikus tér. Ha $\mathfrak{B}$ E-nek nyílt befedése, akkor $U_{\mathfrak{B}}$ nyilván $\mathfrak{T}^2$-nyílt környék; megfordítva, ha U E^2 átlójának környezete, és minden $x \in E$-hez olyan $\mathfrak{T}$-nyílt V_x-et választunk, hogy $(x, x) \in V_x \times V_x \subset U$, akkor $\mathfrak{B} = \{ V_x : x \in E\}$ E-nek $\mathfrak{T}$-nyílt befedése, és $U_{\mathfrak{B}} \subset U$. Eszerint:

(8.2.13) *Az $[E, \mathfrak{T}]$ topologikus tér pontosan akkor osztható, ha E-nek minden nyílt $\mathfrak{B}$ befedéséhez található olyan $\mathfrak{A}$ nyílt befedés, hogy $U_{\mathfrak{A}} \circ U_{\mathfrak{A}} \subset U_{\mathfrak{B}}$.* ∎

Ebből (8.2.6) alapján következik:

(8.2.14) *Ha az $[E, \mathfrak{T}]$ topologikus térben minden $\mathfrak{B}$ nyílt befedéshez található olyan $\mathfrak{A}$ nyílt befedés, hogy $\mathfrak{A} \lll \mathfrak{B}$, akkor a tér osztható.* ∎

Az itt megfogalmazott feltevés (8.2.12) szerint biztosan teljesül, ha feltesszük, hogy minden nyílt befedésnek van olyan csillagfinomítása, amely ugyancsak nyílt befedés; az ilyen topologikus teret (és topológiát) **egészen normális**nak mondjuk. Így (8.1.6) és (8.1.5) figyelembevételével kimondhatjuk:

(8.2.15) *Minden egészen normális tér osztható, tehát multinormális és normális.* ∎

Az egészen normális, s így az osztható S_1-tereknek fontos példáját adják a félmetrizálható terek:

(8.2.16) *Minden félmetrizálható tér egészen normális.*

Bizonyítás. Legyen $[E, \rho]$ félmetrikus tér, $\mathfrak{B}$ E-nek $\mathfrak{T}_\rho$-nyílt befedése. Minden $x \in E$-hez rendeljük hozzá a legkisebb n természetes számot, amelyre $S\left(x, \frac{1}{n}\right)$ része egy $B \in \mathfrak{B}$ halmaznak; ezt jelöljük $n(x)$-szel. Ha most $\mathfrak{A} = \left\{S\left(x, \frac{1}{3n(x)}\right) : x \in E\right\}$, akkor $\mathfrak{A}$ egyrészt nyílt befedése E-nek, másrészt st $\mathfrak{A} \ll \mathfrak{B}$. Valóban, ha $x \in E$ esetén Y azoknak az $y \in E$ pontoknak a halmaza, amelyekre $x \in S\left(y, \frac{1}{3n(y)}\right)$, és $n_0 = n(y_0)$ az $y \in Y$ pontokhoz tartozó $n(y)$ számok minimuma, $y_0 \in Y$, akkor $\mathfrak{A}(x) \subset S\left(y_0, \frac{1}{n(y_0)}\right) \subset B \in \mathfrak{B}$ fogja adni az állítást. Azonban $z \in \mathfrak{A}(x)$ esetén van olyan $y \in E$, hogy $x, z \in S\left(y, \frac{1}{3n(y)}\right)$, tehát $y \in Y$, úgyhogy

$$\rho(y_0, z) \leqq \rho(y_0, x) + \rho(x, y) + \rho(y, z) < \frac{1}{3n(y_0)} + \frac{1}{3n(y)} + \frac{1}{3n(y)} \leqq 3\frac{1}{3n_0} = \frac{1}{n_0}. \blacksquare$$

8.2.c. Ultrateljes terek. Láttuk, hogy minden egészen normális tér osztható; az $\mathfrak{U}_g$ uniform struktúráról ilyenkor további fontos állítások is kimondhatók. Ennek érdekében vezessük be a következő elnevezéseket.

Legyen $[E, \mathfrak{U}]$ uniform tér, $\mathfrak{r}$ E-beli rács. Az $\mathfrak{r}$ rácsot **Corson-féle rács**nak mondjuk, ha minden $U \in \mathfrak{U}$ környékhez található olyan U-rendben kicsiny halmaz, amely minden $\mathfrak{r}$-beli halmazt metsz.

(8.2.17) *Egy uniform térben minden Cauchy-rács Corson-rács.*

Bizonyítás. Ha $\mathfrak{r}$ Cauchy-rács $[E, \mathfrak{U}]$-ban, és $U \in \mathfrak{U}$ tetszőleges környék, akkor van U-rendben kicsiny $R \in \mathfrak{r}$ halmaz, és ez $\mathfrak{r}$ centráltsága miatt minden $\mathfrak{r}$-beli halmazt metsz. $\blacksquare$

Ha ρ_1 az euklideszi távolság **R**-en, és $\mathfrak{r} = \dot{Q}$, akkor $\mathfrak{r}$ nem Cauchy-rács, de Corson-rács $\mathfrak{U}_{\rho_1}$-re nézve, hiszen tetszőleges $\varepsilon > 0$-hoz egy ε-nál rövidebb (a, b) intervallumot véve, (a, b) $U_{\rho_1,\varepsilon}$-rendben kicsiny, és metszi $\mathfrak{r}$-nek minden halmazát.

(5.1.2) mintájára igazolható:

(8.2.18) *Legyen $[X, \mathfrak{U}_1]$ és $[Y, \mathfrak{U}_2]$ uniform tér, $f : X \to Y$ egyenletesen folytonos. Ha $\mathfrak{r}$ X-beli Corson-rács, akkor $f(\mathfrak{r})$ Y-beli Corson-rács.* $\blacksquare$

Ezzel szemben (5.1.7)-tel éppen ellentétes állítás érvényes:

(8.2.19) *Ha az $[E, \mathfrak{U}]$ uniform térben $\mathfrak{r}_1 < \mathfrak{r}_2$ két rács, és $\mathfrak{r}_2$ Corson-rács, akkor $\mathfrak{r}_1$ is az.* $\blacksquare$

Az $[E, \mathfrak{U}]$ uniform teret (és az $\mathfrak{U}$ uniform struktúrát) **ultrateljes**nek mondjuk, ha benne minden Corson-rácsnak van torlódási pontja.

(8.2.20) *Ha egy uniform tér ultrateljes, akkor teljes is.*

Bizonyítás. Legyen $\mathfrak{r}$ Cauchy-rács. Ekkor (8.2.17) szerint $\mathfrak{r}$ Corson-rács is, és így van egy x torlódási pontja. (5.2.28) szerint $\mathfrak{r} \to x$. $\blacksquare$

(8.2.21) *Az $[E, \mathfrak{U}]$ uniform tér pontosan akkor ultrateljes, ha minden nyílt $\mathfrak{B}$ befedéséhez található olyan $U \in \mathfrak{U}$ környék, hogy minden U-rendben kicsiny halmaz befedhető véges számú $\mathfrak{B}$-beli halmazzal.*

Bizonyítás. Legyen a tér ultrateljes, $\mathfrak{B}$ nyílt befedés. Ekkor a $\bigcap_{1}^{n} (E - B_i)$ $(B_i \in \mathfrak{B}$, $n \in \mathbf{N})$ alakú halmazok zártak, és feltehető, hogy egy $\mathfrak{r}$ rácsot alkotnak, hiszen ellenkező esetben volna közöttük üres, tehát maga E is befedhető volna véges számú $\mathfrak{B}$-beli halmazzal. $\mathfrak{r}$-nek nincsen torlódási pontja, hiszen az összes $\mathfrak{r}$-beli halmazok metszete $\bigcap \{E - B : B \in \mathfrak{B}\} = E - \bigcup \{B : B \in \mathfrak{B}\} = \emptyset$, (5.2.24) (e)-vel ellentétben. Így $\mathfrak{r}$ nem lehet Corson-rács, úgyhogy van olyan $U \in \mathfrak{U}$ környék, hogy egyetlen U-rendben kicsiny halmaz sem metszi $\mathfrak{r}$ minden halmazát, más szóval minden U-rendben kicsiny halmaz része alkalmas n és $B_i \in \mathfrak{B}$ mellett $\bigcup_{1}^{n} B_i$-nek.

Megfordítva, ha az állításban foglalt feltétel teljesül, és az $\mathfrak{r}$ rácsnak nincs torlódási pontja, akkor (5.2.24) (e) szerint az $\{E - \bar{R} : R \in \mathfrak{r}\}$ rendszer E-nek nyílt befedése. Legyen $U \in \mathcal{U}$ olyan környék, hogy minden U-rendben kicsiny A halmazra alkalmas $n \in \mathbf{N}$ és $R_i \in \mathfrak{r}$ mellett $A \subset \bigcup\limits_1^n (E - \bar{R}_i)$. De ha $R \in \mathfrak{r}$, $R \subset \bigcap\limits_1^n R_i$, akkor $A \subset \bigcup\limits_1^n (E - R_i) = E - \bigcap\limits_1^n R_i \subset E - R$ mutatja, hogy egyetlen U-rendben kicsiny halmaz sem metszheti $\mathfrak{r}$-nek minden halmazát, és $\mathfrak{r}$ nem Corson-rács. Más szóval minden Corson-rácsnak van torlódási pontja. ∎

Mármost (8.2.15) így egészíthető ki:

(8.2.22) *Ha $[E, \mathfrak{T}]$ egészen normális tér, akkor osztható, és $\mathcal{U}_{\mathfrak{T}}$ ultrateljes.*

Bizonyítás. Legyen $\mathfrak{A}$ E-nek $\mathfrak{T}_{\mathcal{U}_{\mathfrak{T}}}$-nyílt befedése. Ez (8.1.3) szerint $\mathfrak{T}$-nyílt is, tehát van olyan $\mathfrak{B}$ $\mathfrak{T}$-nyílt befedés, hogy st $\mathfrak{B} \ll \mathfrak{A}$. Ekkor $U_{\mathfrak{B}} \in \mathcal{U}_{\mathfrak{T}}$, és ha C $U_{\mathfrak{B}}$-rendben kicsiny, akkor (8.2.10) (c) szerint van st $\mathfrak{B}$-nek, s annál inkább $\mathfrak{A}$-nak egyetlen C-t tartalmazó halmaza. Így az állítás (8.2.21)-ből következik. ∎

8.2.d. Gyakorlatok. 1. Legyen E legalább háromelemű halmaz, $\mathfrak{A} = \{E\}$, $\mathfrak{B}$ álljon E-nek kételemű halmazaiból. Mutassuk meg, hogy

(a) $\mathfrak{B} \ll \mathfrak{B}$, de $\mathfrak{B} \lll \mathfrak{B}$ nem áll;

(b) $U_{\mathfrak{A}} \circ U_{\mathfrak{A}} \subset U_{\mathfrak{B}}$, de $\mathfrak{A} \ll \mathfrak{B}$ nem áll.

2. Legyen

$$U = \{(x, 0) : x \in \mathbf{R}\} \cup \{(0, y) : y \in \mathbf{R}\} \subset \mathbf{R}^2.$$

Mutassuk meg, hogy st U $\mathbf{R}$-nek befedése, holott U nem környék.

3. Adjunk példát $E = \mathbf{R}$ esetén olyan U és V környékre, hogy st $U \ll$ st V, de U nem része V-nek.

[V álljon az átló és a koordinátatengelyek egyesítéséből, U legyen tetszőleges környék.]

4. Mutassuk meg, hogy ha $U \subset E^2$ szimmetrikus, akkor st U halmazai $U \circ U$-rendben kicsinyek.

5. Mutassuk meg, hogy ha $\mathfrak{B}$ E-beli halmazrendszer, és st $\mathfrak{B}$ A-nak befedése, akkor $\mathfrak{B}$ is az.

6. Legyen E végtelen halmaz, álljon $\mathfrak{A}$ és $\mathfrak{B}$ E-nek összes két-, ill. háromelemű halmazaiból. Mutassuk meg, hogy $\mathfrak{A}$ erős finomítása, de nem csillagfinomítása $\mathfrak{B}$-nek.

7. Mutassuk meg, hogy ha $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$ E-beli halmazrendszer, és st $\mathfrak{A} \ll \mathfrak{B}$, st $\mathfrak{B} \ll \mathfrak{C}$, akkor $A \in \mathfrak{A}$ esetén $\mathfrak{A}(A) \subset C \in \mathfrak{C}$ alkalmas C-re.

[$x \in A$ esetén $\mathfrak{A}(A) \subset \mathfrak{B}(x)$.]

8. Legyen $[E, \mathfrak{T}]$ nulladimenziós Lindelöf-tér, $\mathfrak{A}$ nyílt befedés. Mutassuk meg, hogy

(a) van olyan csupa nyílt-zárt halmazból álló $\mathfrak{B}$ befedés, hogy $\mathfrak{B} \ll \mathfrak{A}$;

(b) van $\mathfrak{B}$-nek megszámlálható $\mathfrak{C} = \{C_i : i \in \mathbf{N}\}$ rész-befedése;

(c) ha $D_i = C_i - \bigcup_{1}^{i-1} C_j$, $D_1 = C_1$, akkor $\mathfrak{D} = \{D_i : i \in \mathbf{N}\}$ is nyílt befedés, és

$$\mathrm{st}\,\mathfrak{D} \ll \mathfrak{C} \ll \mathfrak{B} \ll \mathfrak{A};$$

(d) $\mathfrak{T}$ egészen normális.

9. Mutassuk meg, hogy $[\mathbf{R}, \mathfrak{E}^+]$ minden altere egészen normális.

10. Mutassuk meg, hogy $\overline{\mathfrak{E}}$ nem egészen normális (de osztható).

11. Legyen $[E, \mathfrak{T}]$ kompakt S_2-tér, $\mathfrak{A}$ E-nek nyílt befedése, $\mathfrak{B} \subset \mathfrak{A}$ E-nek véges befedése, $\mathfrak{C}$ E-nek olyan nyílt befedése, hogy minden $C \in \mathfrak{C}$ halmazra $\bar{C} \subset B \in \mathfrak{B}$ álljon alkalmas B-vel, $\mathfrak{D} \subset \mathfrak{C}$ E-nek véges befedése, végül $x \in E$ esetén

$$G_x = \bigcap \{B : x \in B \in \mathfrak{B}\} - \bigcup \{\bar{D} : x \notin \bar{D}, D \in \mathfrak{D}\},$$

$\mathfrak{G} = \{G_x : x \in E\}$. Mutassuk meg, hogy

(a) $x \in D \subset \bar{D} \subset B \in \mathfrak{B}$, $D \in \mathfrak{D}$, $x \in G_y$ esetén $y \in \bar{D} \subset B$, tehát $G_y \subset B$;

(b) $\mathrm{st}\,\mathfrak{G} \ll \mathfrak{A}$;

(c) $\mathfrak{T}$ egészen normális.

12. Legyen $[E, \mathcal{U}]$ uniform tér, $\emptyset \neq A \subset E$, $\mathfrak{r}$ A-beli rács. Mutassuk meg, hogy $\mathfrak{r}$ pontosan akkor $\mathcal{U}|A$-Corson-rács, ha $\mathcal{U}$-Corson-rács.

13. Mutassuk meg, hogy ha egy uniform térben egy rácsnak van torlódási pontja, akkor Corson-rács.

14. Legyen az $[\mathbf{R}^2, \mathcal{U}^2_{\rho_1}]$ térben $x_n = (n, 0)$, ha n páros, és $x_n = (0, n)$, ha n páratlan ($n \in \mathbf{N}$), $\mathfrak{r}$ pedig az (x_n)-hez tartozó sorozatrács. Mutassuk meg, hogy a $p_1(\mathfrak{r})$ és $p_2(\mathfrak{r})$ rács $\mathcal{U}_{\rho_1}$-Corson-rács, $\mathfrak{r}$ azonban nem $\mathcal{U}^2_{\rho_1}$-Corson-rács.

15. Mutassuk meg, hogy minden kompakt uniform tér ultrateljes.

16. Mutassuk meg, hogy az $[\mathbf{R}^m, \mathcal{U}_{\rho_m}]$ tér ultrateljes.

17. Legyen E a $H = [0, \pi]$ intervallumon $\mathfrak{E}|H$-folytonos függvények halmaza, $x, y \in E$ esetén

$$\rho(x, y) = \sup \{ \,|\, x(t) - y(t) \,|\, : t \in H\},$$

$x_n(t) = \sin 2^n t$, $y_{nm} = x_n + \dfrac{1}{n+1} x_m$, (z_k) az összes y_{nm} ($n, m \in \mathbf{N}$) függvényeknek egy sorozatba rendezése, végül $\mathfrak{r}$ a (z_k)-hoz tartozó sorozatrács. Mutassuk meg, hogy

(a) $n_1 \neq n_2$ esetén $1 \leqq \rho(x_{n_1}, x_{n_2}) \leqq 2$;

(b) $\mathfrak{r}$ $\mathcal{U}_\rho$-Corson-rács;

(c) $\mathfrak{r}$-nek nincs torlódási pontja;

(d) $\mathcal{U}_\rho$ nem ultrateljes (de teljes).

18. Mutassuk meg, hogy egy ultrateljes uniform térnek minden zárt altere is ultrateljes.

19. Legyen $U \subset \mathbf{R}^2$ szimmetrikus $(\mathfrak{E}^+)^2$-környezete $\mathbf{R}^2$ átlójának, $\varepsilon > 0$ olyan, hogy $[0, \varepsilon) \times [0, \varepsilon) \subset U$, $0 < \delta < \varepsilon$ olyan, hogy $[-\varepsilon, -\varepsilon + \delta) \times [-\varepsilon, -\varepsilon + \delta) \subset U$, (r_n) a racionális számok elrendezése egy sorozatba, $x_n = (r_n, -r_n)$, $\mathfrak{r}$ az (x_n)-hez tartozó sorozatrács. Mutassuk meg, hogy

(a) $[-\varepsilon, -\varepsilon+\delta)\times[\varepsilon-\delta, \varepsilon) = Q$ vetülete mindkét tengelyen U-rendben kicsiny;

(b) Q metszi $\mathfrak{r}$-nek mindegyik halmazát;

(c) $\mathfrak{r}$ $\mathcal{U}^2_{\mathcal{E}^+}$-Corson-rács;

(d) $\mathfrak{r}$-nek nincs $(\mathcal{E}^+)^2$-torlódási pontja;

(e) $\mathcal{U}^2_{\mathcal{E}^+}$ nem ultrateljes;

(f) $\mathcal{U}_{\mathcal{E}^+}$ ultrateljes.

8.3. PARAKOMPAKT TEREK

8.3.a. Lokálisan véges halmazrendszerek. Az előzőkben tárgyalt egészen normális terek kapcsolatba hozhatók a topologikus terek további osztályaival, amelyeknek definíciójában a lokálisan véges halmazrendszer fogalma játszik lényeges szerepet.

Egy $[E, \mathfrak{T}]$ topologikus térben a $\mathfrak{A}$ halmazrendszert diszkrétnek mondtuk, ha minden pontnak van olyan környezete, amely legfeljebb egy $\mathfrak{A}$-beli halmazt metsz; általánosabban, **lokálisan végesnek** mondjuk $\mathfrak{A}$-t, ha minden pontnak van olyan környezete, amely csak véges számú $\mathfrak{A}$-beli halmazt metsz. Továbbá $\mathfrak{A}$ **σ-diszkrét** (**σ-lokálisan véges**), ha $\mathfrak{A} = \bigcup_{1}^{\infty} \mathfrak{A}_n$, és minden $\mathfrak{A}_n$ diszkrét (lokálisan véges).

(8.3.1) *Ha $\mathfrak{A} \subset \mathfrak{B}$, és $\mathfrak{B}$ diszkrét, lokálisan véges, σ-diszkrét, vagy σ-lokálisan véges, akkor $\mathfrak{A}$ ugyanilyen.* ∎

(8.3.2) *Minden véges halmazrendszer lokálisan véges.* ∎

(8.3.3) *Minden (σ-) diszkrét halmazrendszer (σ-) lokálisan véges.* ∎

(8.3.4) *Minden megszámlálható halmazrendszer σ-diszkrét.* ∎

(8.3.5) *Véges számú lokálisan véges halmazrendszer egyesítése is lokálisan véges.*

Bizonyítás. Ha x-nek V_i környezete a $\mathfrak{A}_i$ rendszernek csak véges számú halmazát metszi, akkor $\bigcap_{1}^{n} V_i$ ugyanezt teszi az $\bigcup_{1}^{n} \mathfrak{A}_i$ rendszerrel. ∎

A (8.1.7) bizonyításának elején tett megjegyzés általánosításaképpen kimondható:

(8.3.6) *Ha $\mathfrak{A}$ (σ-) diszkrét vagy (σ-) lokálisan véges halmazrendszer, akkor az $\{\bar{A} : A \in \mathfrak{A}\}$ rendszer is ilyen.* ∎

A lokálisan véges halmazrendszerek leglényegesebb tulajdonságát mondja ki a következő tétel (amelyet diszkrét rendszerekre lényegében véve már fel is használtunk):

(8.3.7) *Ha $\mathfrak{A} = \{A_i : i \in I\}$ lokálisan véges halmazrendszer, és $A = \bigcup_{i\in I} A_i$, akkor $\bar{A} = \bigcup_{i\in I} \bar{A}_i$.*

Bizonyítás. Az $\bigcup_{i\in I} \bar{A}_i \subset \bar{A}$ reláció evidens. Ha $x \notin \bigcup_{i\in I} \bar{A}_i$, akkor legyen V_0 x-nek olyan környezete, amely az $\mathfrak{A}$-beli halmazok közül csak véges számút metsz, mondjuk az $A_{i_1}, \ldots, A_{i_k}$ halmazokat. $x \notin \bar{A}_{i_j}$ miatt van $j = 1, \ldots, k$ esetén x-nek olyan V_j környezete, hogy $V_j \cap A_{i_j} = \emptyset$. Ekkor $V = \bigcap_0^k V_j$ x-nek olyan környezete, amelyre $V \cap A = \emptyset$, tehát $x \notin \bar{A}$. ∎

(8.3.2) megfordításaképpen kimondhatjuk még:

(8.3.8) *Egy megszámlálhatóan kompakt halmaz egy lokálisan véges halmazrendszernek csak véges számú halmazát metszheti.*

Bizonyítás. Ha $A_n \in \mathfrak{A}$ $(n \in \mathrm{N})$, és $x_n \in A_n \cap K$, továbbá K megszámlálhatóan kompakt, akkor az (x_n) sorozatnak van egy $x \in K$ torlódási pontja; x minden környezete végtelen sok n-re metszi A_n-t, tehát $\mathfrak{A}$ nem lehet lokálisan véges. ∎

Hasonló megfordítása (8.3.4)-nek:

(8.3.9) *Lindelöf-térben minden σ-lokálisan véges halmazrendszer megszámlálható.*

Bizonyítás. Elég az állítást lokálisan véges halmazrendszerre igazolni. Ha azonban minden pontnak elkészítjük egy nyílt környezetét, amely a rendszerből csak véges számú halmazt metsz, s aztán az így kapott nyílt befedésből kiválasztunk egy megszámlálható befedést, az állítást nyerjük. ∎

8.3.b. Parakompakt terek. Az $[E, \mathfrak{T}]$ topologikus teret (és a $\mathfrak{T}$ topológiát) ***a*-parakompakt**nak, **parakompakt**nak, ill. ***z*-parakompakt**nak mondjuk, ha E minden nyílt befedésének van olyan lokálisan véges finomítása, amely E-nek befedése, nyílt befedése ill. zárt befedése.

Világos, hogy minden parakompakt tér a-parakompakt, és látni fogjuk, hogy minden z-parakompakt tér parakompakt. Előbb azonban vizsgáljuk ezeknek az egészen normális terekkel való kapcsolatát.

(8.3.10) *Minden z-parakompakt tér egészen normális.*

Bizonyítás. Legyen $\mathfrak{B}$ az $[E, \mathfrak{T}]$ z-parakompakt tér nyílt befedése, $\mathfrak{C}$ pedig $\mathfrak{B}$-nek olyan lokálisan véges finomítása, amely E-nek zárt befedése. Minden $C \in \mathfrak{C}$ halmazhoz válasszunk ki egy olyan $B_C \in \mathfrak{B}$ halmazt, hogy $C \subset B_C$.

Legyen $x \in E$ esetén

$$A_x = \bigcap \{B_C : x \in C \in \mathfrak{C}\} - \bigcup \{C : x \notin C \in \mathfrak{C}\}.$$

Ekkor $\mathfrak{C}$ lokálisan véges volta miatt a jobb oldal első tagja véges számú nyílt halmaz metszete, a második tag pedig (8.3.1) és (8.3.7) szerint zárt. Így A_x nyílt, s minthogy $x \in A_x$, azért $\mathfrak{A} = \{A_x : x \in E\}$ E-nek nyílt befedése. Megmutatjuk, hogy st $\mathfrak{A} \ll \mathfrak{B}$. Valóban, ha $y \in E$, akkor $y \in A_x$ esetén minden y-t tartalmazó $C \in \mathfrak{C}$ halmaz x-et is tartalmazza, tehát egy y-t tartalmazó $C_0 \in \mathfrak{C}$ halmazt választva

$$A_x \subset \bigcap \{B_C : x \in C \in \mathfrak{C}\} \subset B_{C_0},$$

$$\mathfrak{A}(y) = \bigcup \{A_x : y \in A_x\} \subset B_{C_0} \in \mathfrak{B}. \ ∎$$

Ezen túlmenően érvényes a következő tétel:

(8.3.11) *Legyen $[E, \mathfrak{T}]$ topologikus tér. Az alábbi állítások mindegyike maga után vonja a következőt:*

(a) *$\mathfrak{T}$ z-parakompakt;*

(b) *$\mathfrak{T}$ egészen normális;*

(c) *E minden nyílt befedésének van olyan σ-diszkrét finomítása, amely nyílt befedés;*

(d) *E minden nyílt befedésének van olyan σ-lokálisan véges finomítása, amely nyílt befedés;*

(e) $\mathfrak{T}$ *a-parakompakt.*

Bizonyítás. (a) ⇒ (b): (8.3.10).

(b) ⇒ (c): (8.2.15) szerint $\mathfrak{T}$ osztható. Legyen $\mathfrak{A}$ E-nek nyílt befedése, $\mathfrak{B}$ pedig olyan nyílt befedés, amely $\mathfrak{A}$-nak csillagfinomítása. Ekkor $U_{\mathfrak{B}} \in \mathcal{U}_{\mathfrak{T}}$, és így (6.4.40) értelmében van E-nek olyan $\mathfrak{T}_{\mathcal{U}_{\mathfrak{T}}}$-nyílt, és (8.1.3) szerint annál inkább $\mathfrak{T}$-nyílt $\mathfrak{C}$ befedése, hogy minden $C \in \mathfrak{C}$ halmaz $U_{\mathfrak{B}}$-rendben kicsiny, továbbá $\mathfrak{C} = \bigcup_1^\infty \mathfrak{C}_n$, és minden $\mathfrak{C}_n$ $\mathcal{U}_{\mathfrak{T}}$-diszkrét, tehát (8.1.4) szerint $\mathfrak{T}$-diszkrét. (8.2.10) (c) szerint $\mathfrak{C} \ll \text{st}\,\mathfrak{B} \ll \mathfrak{A}$.

(c) ⇒ (d): Evidens.

(d) ⇒ (e): Legyen $\mathfrak{A}$ tetszőleges nyílt befedés, $\mathfrak{B}$ pedig olyan nyílt befedés, hogy $\mathfrak{B} \ll \mathfrak{A}$, $\mathfrak{B} = \bigcup_1^\infty \mathfrak{B}_n$, $\mathfrak{B}_n$ lokálisan véges. A $G_n = \bigcup \{B : B \in \mathfrak{B}_n\}$ jelöléssel G_n nyílt, $E = \bigcup_1^\infty G_n$. Legyen $B \in \mathfrak{B}_n$ esetén $C_B = B - \bigcup_0^{n-1} G_i$ $(G_0 = \emptyset)$. Ekkor $\mathfrak{C} = \{C_B : B \in \mathfrak{B}\}$ E-nek befedése, hiszen ha $x \in E$-hez kikeressük a legkisebb n-et, amelyre $x \in G_n$, akkor egy $B \in \mathfrak{B}_n$-re $x \in C_B$. Továbbá $\mathfrak{C}$ lokálisan véges, mert $x \in G_n$ esetén x-nek alkalmas V környezete (8.3.5) szerint az $\bigcup_1^n \mathfrak{B}_i$ rendszernek csak véges számú halmazát metszi, $V \cap G_n$ tehát ugyanezt teszi $\mathfrak{C}$-vel, hiszen $C_B \subset B$, és $B \in \mathfrak{B}_m$, $m > n$ esetén $C_B \cap G_n = \emptyset$. Végül $\mathfrak{C} \ll \mathfrak{B} \ll \mathfrak{A}$. ∎

8.3.c. Egységfelosztások. Azt, hogy minden z-parakompakt tér parakompakt. egy további nevezetes fogalom segítségével mutatjuk ki.

Legyen Φ az $[E, \mathfrak{T}]$ topologikus térben folytonos függvények családja. Φ-t **lokálisan végesnek** mondjuk, ha minden $x \in E$ pontnak van olyan környezete, amelyben Φ elemei véges számú kivétellel eltűnnek.

(8.3.12) *Ha Φ lokálisan véges függvénycsalád, akkor a $g = \sum_{f \in \Phi} f$ függvény folytonos.*

Bizonyítás. A g-t értelmező összegnek minden egyes $x \in E$ pont alkalmas környezetében véges számú kivétellel minden tagja 0; az összeg értékén a fennmaradó tagok összegét kell érteni. Ez azonban (2.6.27) szerint folytonos az x pontban. ∎

Egységfelosztáson az olyan lokálisan véges Φ függvénycsaládot értjük, amelyre $f \in \Phi$, $x \in E$ esetén $f(x) \geqq 0$, és $\sum_{f \in \Phi} f = 1$. Azt mondjuk, hogy a Φ egységfelosztás egy $\mathfrak{A}$ halmazrendszernek **alárendelt,** ha minden $f \in \Phi$-hez található olyan $A \in \mathfrak{A}$, hogy A-n kívül $f(x) = 0$.

(8.3.13) *Ha $[E, \mathfrak{T}]$ z-parakompakt tér, akkor minden nyílt $\mathfrak{A}$ befedéshez található $\mathfrak{A}$-nak alárendelt egységfelosztás.*

Bizonyítás. Legyen $\mathfrak{A}$ tetszőleges nyílt befedés, $\mathfrak{B}$ pedig olyan lokálisan véges, zárt befedés, hogy $\mathfrak{B} \ll \mathfrak{A}$. Tekintsük minden $x \in E$ pontnak olyan nyílt V_x környezetét, amely csak véges számú $\mathfrak{B}$-beli halmazt metsz, és legyen $\mathfrak{C} = \{V_x : x \in E\}$. Minthogy (8.3.10) szerint a tér egészen normális, találhatók olyan $\mathfrak{D}$ és $\mathfrak{F}$ nyílt befedések, hogy st $\mathfrak{D} \ll \mathfrak{C}$, st $\mathfrak{F} \ll \mathfrak{D}$. Legyen minden $B \in \mathfrak{B}$-hez egy olyan $A_B \in \mathfrak{A}$ kijelölve, hogy $B \subset A_B$, és végül legyen $G_B = \mathfrak{F}(B) \cap A_B$, $\mathfrak{G} = \{G_B : B \in \mathfrak{B}\}$.

Ekkor $\mathfrak{F}(B)$ s vele G_B is nyílt, továbbá $B \subset G_B \subset A_B$. $\mathfrak{G}$ lokálisan véges. Valóban, ha $x \in E$, $B \in \mathfrak{B}$, $\mathfrak{F}(x) \cap \mathfrak{F}(B) \neq \emptyset$, mondjuk $y \in \mathfrak{F}(x) \cap \mathfrak{F}(B)$, akkor alkalmas $F_1, F_2 \in \mathfrak{F}$ halmazra és z pontra $x, y \in F_1$, y, $z \in F_2$, $z \in B$. Így $x, z \in \mathfrak{F}(y) \subset$ $\subset D \in \mathfrak{D}$, és $D \subset \mathfrak{D}(x)$ miatt $\mathfrak{D}(x) \cap B \neq \emptyset$. Ez $\mathfrak{D}(x) \subset C \in \mathfrak{C}$ folytán csak véges számú B-re következhet be.

Mármost (8.2.15) szerint a tér normális, így minden $B \in \mathfrak{B}$-re az $E - G_B$ és B halmaz (4.2.2) szerint szétválasztható egy folytonos g_B függvénnyel. Minthogy G_B-n kívül g_B eltűnik, a $\Psi = \{g_B : B \in \mathfrak{B}\}$ függvénycsalád lokálisan véges. Ezért $g = \sum_{g_B \in \Psi} g_B$ folytonos, és $g(x) \geqq 1$ minden x helyen, hiszen $g_B(x) \geqq 0$ minden B-re, és $x \in B$ esetén $g_B(x) = 1$. Így aztán $\Phi = \left\{\dfrac{g_B}{g} : B \in \mathfrak{B}\right\}$ egységfelosztás, mégpedig $G_B \subset A_B \in \mathfrak{A}$ miatt $\mathfrak{A}$-nak alárendelt. ∎

(8.3.14) *Ha az $[E, \mathfrak{T}]$ topologikus térben minden $\mathfrak{A}$ nyílt befedéshez található $\mathfrak{A}$-nak alárendelt egységfelosztás, akkor $\mathfrak{T}$ parakompakt.*

Bizonyítás. Ha Φ $\mathfrak{A}$-nak alárendelt egységfelosztás, és $f \in \Phi$ esetén $B_f =$ $= \{x : f(x) > 0\}$, akkor $\mathfrak{B} = \{B_f : f \in \Phi\}$ lokálisan véges, és nyílt befedés, mert $x \in E$ esetén $\sum_{f \in \Phi} f(x) = 1$ miatt legalább egy $f \in \Phi$-re $f(x) > 0$. Végül $\mathfrak{B} \ll \mathfrak{A}$. ∎

8.3.d. Egyenértékű jellemzések. Nevezetes tény, hogy bizonyos szétválasztási axiómák feltételezésével az előbbiekben tárgyalt különféle tértípusok egymásba mennek át:

(8.3.15) *Bármely $[E, \mathfrak{T}]$ topologikus térre az alábbi állítások egyenértékűek egymással:*

(a) *$\mathfrak{T}$ z-parakompakt S_1-topológia;*

(b) *$\mathfrak{T}$ egészen normális S_1-topológia;*

(c) *$\mathfrak{T}$ osztható S_1-topológia, és $\mathfrak{U}_g$ ultrateljes;*

(d) *$\mathfrak{T}$ reguláris, és minden nyílt befedésnek van olyan σ-diszkrét finomítása, amely nyílt befedés;*

(e) *$\mathfrak{T}$ reguláris, és minden nyílt befedésnek van olyan σ-lokálisan véges finomítása, amely nyílt befedés;*

(f) *$\mathfrak{T}$ reguláris és a-parakompakt;*

(g) *$\mathfrak{T}$ S_2-topológia, és minden $\mathfrak{A}$ nyílt befedéshez található $\mathfrak{A}$-nak alárendelt egységfelosztás;*

(h) *$\mathfrak{T}$ parakompakt S_2-topológia.*

Bizonyítás. A következő implikációkat igazoljuk:

$$(a) \Rightarrow (b) \begin{matrix} \Rightarrow (c) \Rightarrow \\ \Rightarrow (d) \Rightarrow \end{matrix} (e) \Rightarrow (f) \Rightarrow (a) \Rightarrow (g) \Rightarrow (h) \Rightarrow (f).$$

Ebből (8.3.11) alapján (a) $\Rightarrow$ (b) és (d) $\Rightarrow$ (e) $\Rightarrow$ (f), (8.2.22) alapján (b) $\Rightarrow$ (c), (8.3.14) alapján (g) $\Rightarrow$ (h) már bizonyítva van, (b) $\Rightarrow$ (d) és (a) $\Rightarrow$ (g) igazolásához pedig (8.3.11)-en, ill. (8.3.13)-on kívül csak azt kell még megjegyezni, hogy ha $\mathfrak{T}$ egészen normális S_1-topológia, akkor (8.2.15) szerint S_4-topológia is, s annál inkább reguláris.

(c) $\Rightarrow$ (e): (8.1.3) szerint $\mathcal{U}_\mathfrak{T}$ éppen a $\mathfrak{T}$ topológiát indukálja. Ezért (8.2.21) felhasználásával E-nek bármely $\mathfrak{T}$-nyílt $\mathfrak{A}$ befedéséhez található olyan $U \in \mathcal{U}_\mathfrak{T}$ környék, hogy minden U-rendben kicsiny halmaz véges számú $\mathfrak{A}$-beli halmazzal befedhető. (6.4.40) felhasználásával legyen $\mathfrak{B}$ E-nek U-rendben kicsiny halmazokból álló olyan $\mathfrak{T}_{\mathcal{U}_\mathfrak{T}}$-nyílt, azaz $\mathfrak{T}$-nyílt befedése, hogy $\mathfrak{B} = \bigcup_1^\infty \mathfrak{B}_n$, és $\mathfrak{B}_n$ $\mathcal{U}_\mathfrak{T}$-diszkrét, azaz (8.1.4) szerint $\mathfrak{T}$-diszkrét minden n-re. Válasszuk ki minden $B \in \mathfrak{B}$-hez az $A_1^B, \dots, A_{k_B}^B \in \mathfrak{A}$ halmazokat úgy, hogy $B \subset \bigcup_{i=1}^{k_B} A_i^B$ legyen, és vezessük be a

$$C_i^B = B \cap A_i^B \quad (B \in \mathfrak{B}, \quad i = 1, \dots, k_B),$$
$$\mathfrak{C}_n = \{C_i^B : B \in \mathfrak{B}_n, \quad i = 1, \dots, k_B\},$$
$$\mathfrak{C} = \bigcup_1^\infty \mathfrak{C}_n$$

jelöléseket. Világos, hogy $C_i^B \subset A_i^B$ miatt $\mathfrak{C} \ll \mathfrak{A}$, továbbá $\mathfrak{C}$ E-nek nyílt befedése, végül $\mathfrak{C}_n$ lokálisan véges, mert minden pontnak van olyan környezete, amely $\mathfrak{B}_n$-nek legfeljebb egy B halmazát, s akkor $\mathfrak{C}_n$-ből legfeljebb az ehhez tartozó $C_1^B, \dots, C_{k_B}^B$ halmazokat metszi.

(f) $\Rightarrow$ (a): A $\mathfrak{A}$ nyílt befedéshez készítsük el minden $x \in E$ pontnak olyan nyílt V_x környezetét, hogy még $\overline{V}_x$ is része legyen egy $A \in \mathfrak{A}$ halmaznak. Legyen $\mathfrak{B} = \{V_x : x \in E\}$, $\mathfrak{C} \ll \mathfrak{B}$ lokálisan véges befedés, és $\mathfrak{D} = \{\overline{C} : C \in \mathfrak{C}\}$. Ekkor nyilván $\mathfrak{D} \ll \mathfrak{A}$, és (8.3.6) szerint $\mathfrak{D}$ is lokálisan véges.

(h) $\Rightarrow$ (f): Csak azt kell belátnunk, hogy minden parakompakt S_2-tér reguláris. Mármost ha F zárt, és $x \notin F$, akkor x és bármely $y \in F$ pont gyengén széteső, tehát vannak diszjunkt $x \in V_y$, $y \in W_y$ nyílt környezeteik, és $x \notin \overline{W}_y$ minden $y \in F$ esetén. Az $E - F$ és a W_y $(y \in F)$ halmazokból álló nyílt befedéshez készítsünk egy lokálisan véges, nyílt $\mathfrak{B}$ befedést, amely az előbbinek finomítása. $B \in \mathfrak{B}$, $B \cap F \neq \emptyset$ esetén $B \subset W_y$ valamely $y \in F$-re, tehát $x \notin \overline{B}$. Legyen $G = \bigcup \{B : B \in \mathfrak{B}, B \cap F \neq \emptyset\}$. Ekkor G nyílt, $F \subset G$, és (8.3.7) miatt $x \notin \overline{G} = \bigcup \{\overline{B} : B \in \mathfrak{B}, B \cap F \neq \emptyset\}$. $E - \overline{G}$ és G eszerint x-nek, ill. F-nek diszjunkt környezetei. ▌

8.3.e. Példák parakompakt terekre. Az előző tételre tekintettel a parakompakt tereket vesszük alaposabb vizsgálat alá; a megfelelő szétválasztási axiómák feltételezésével a többi tértípusra is kapunk példákat.

Minthogy minden félmetrizálható tér S_1-tér, (8.2.16) alapján kimondható:

(8.3.16) *Minden félmetrizálható tér parakompakt.* ▌

(8.3.2)-ből evidensen adódik:

(8.3.17) *Minden kompakt tér parakompakt.* ▌

Ezzel szemben:

(8.3.18) *Minden megszámlálhatóan kompakt, a-parakompakt tér kompakt.*

Bizonyítás. A tér minden $\mathfrak{A}$ nyílt befedésének van lokálisan véges, tehát (8.3.8) szerint véges finomítása, amely befedés. Az utóbbinak minden eleméhez egy őt tartalmazó $\mathfrak{A}$-beli halmazt választva $\mathfrak{A}$-ból véges befedést választottunk ki. ∎

(8.3.19) *Minden Lindelöf-tér a-parakompakt.*

Bizonyítás. (8.3.4) szerint az ilyen tér eleget tesz (8.3.11) (c)-nek. ∎

Egy topologikus teret **σ-kompakt**nak mondunk, ha megszámlálható sok kompakt alterének egyesítése.

(8.3.20) *Minden σ-kompakt tér Lindelöf-tér, és így a-parakompakt.* ∎

(8.3.21) *Ha $A \subset E$ $\mathfrak{T}$-zárt, és $[E, \mathfrak{T}]$ parakompakt (z-parakompakt, a-parakompakt), akkor $\mathfrak{T}|A$ is ilyen.*

Bizonyítás. Legyen $\mathfrak{B}$ A-nak $\mathfrak{T}|A$-nyílt befedése, $B \in \mathfrak{B}$ esetén $B = C_B \cap A$, ahol C_B $\mathfrak{T}$-nyílt, és $\mathfrak{C}$ a C_B halmazokból, továbbá $(E - A)$-ból álló nyílt befedése E-nek. Ha $\mathfrak{D}$ ennek olyan lokálisan véges finomítása, amely E-nek nyílt (zárt, tetszőleges) befedése, akkor $\mathfrak{D}\ (\cap)\ \{A\}$ $\mathfrak{T}|A$-ra nézve ugyanilyen befedése A-nak, továbbá finomítása $\mathfrak{B}$-nek, hiszen $\mathfrak{D}$-nek A-t metsző halmazai valamelyik C_B-nek részei, és $\mathfrak{T}|A$-ra nézve nyilván lokálisan véges. ∎

(8.3.22) *Ha* $A = \bigcup_{1}^{\infty} F_n$, F_n *$\mathfrak{T}$-zárt, és $[E, \mathfrak{T}]$ parakompakt, akkor $\mathfrak{T}|A$ a-parakompakt.*

Bizonyítás. Legyen ismét $\mathfrak{B}$ A-nak $\mathfrak{T}|A$-nyílt befedése, $B \in \mathfrak{B}$ esetén $B = C_B \cap A$, ahol C_B $\mathfrak{T}$-nyílt, és $\mathfrak{C}_n$ az F_n-t metsző $B \in \mathfrak{B}$ halmazoknak megfelelő C_B-kből és $(E - F_n)$-ből álló nyílt befedése E-nek. Ha $\mathfrak{D}_n \ll \mathfrak{C}_n$ lokálisan véges, és E-nek nyílt befedése, akkor $\mathfrak{D} = \bigcup_{1}^{\infty} (\mathfrak{D}_n\ (\cap)\ \{A\})$ A-nak $\mathfrak{T}|A$-nyílt befedése, hiszen $x \in A$ esetén valamely n-re $x \in F_n$, s akkor egy $D \in \mathfrak{D}_n$ halmazra $x \in D \cap A$; itt $D \subset E - F_n$ lehetetlen, úgyhogy $D \subset C_B$ valamely F_n-t metsző $B \in \mathfrak{B}$-re, úgyhogy $\mathfrak{D} \ll \mathfrak{B}$ is áll. Végül $\mathfrak{D}$ nyilván σ-lokálisan véges $\mathfrak{T}|A$-ra nézve, úgyhogy (8.3.11) (d) teljesül $\mathfrak{T}|A$-ra. ∎

(8.3.23) *Legyen az $[E, \mathfrak{T}]$ topologikus térben $E = \bigcup_{i \in I} E_i$, ahol minden $E_i \neq \emptyset$ nyílt, és $i, j \in I$, $i \neq j$ esetén $E_i \cap E_j = \emptyset$. $\mathfrak{T}$ pontosan akkor parakompakt (z-parakompakt, a-parakompakt), ha $\mathfrak{T}|E_i$ minden i-re ilyen.*

Bizonyítás. Az állítás egyik fele (8.3.21)-ből adódik, hiszen $E_i = E - \bigcup_{j \neq i} E_j$ zárt is. Legyen most $\mathfrak{A}$ E-nek nyílt befedése, és $\mathfrak{B}_i \ll \mathfrak{A}\ (\cap)\{E_i\}$ E_i-nek $\mathfrak{T}|E_i$-re nézve lokálisan véges, nyílt (zárt, tetszőleges) befedése. Világos, hogy $\mathfrak{B} = \bigcup_{i \in I} \mathfrak{B}_i$ $\mathfrak{T}$-re nézve nyílt (zárt, tetszőleges) befedése E-nek, $\mathfrak{B} \ll \mathfrak{A}$, és $\mathfrak{B}$ lokálisan véges, hiszen $x \in E_i$ esetén olyan $\mathfrak{T}|E_i$-nyílt V halmazt véve, amely csak véges számú $\mathfrak{B}_i$-beli halmazt metsz, és $x \in V$, ez a V egyúttal $\mathfrak{T}$-nyílt is, és a $\mathfrak{B}$-beli halmazok közül csak a $\mathfrak{B}_i$-belieket metszheti. ∎

Nevezetes tény, hogy a lokálisan kompakt, parakompakt terek az előbbi módon épülnek fel σ-kompakt terekből:

(8.3.24) *Ha $[E, \mathfrak{T}]$ lokálisan kompakt, parakompakt tér, akkor $E = \bigcup_{i \in I} E_i$, ahol E_i nyílt, $i \neq j$ esetén $E_i \cap E_j = \emptyset$, és $\mathfrak{T}|E_i$ minden i-re σ-kompakt.*

Bizonyítás. Minden $x \in E$-re legyen V_x x-nek kompakt környezete, $\mathfrak{B}$ pedig olyan nyílt befedés, amely az $\{\text{int } V_x : x \in E\}$ befedésnek lokálisan véges finomítása. Vezessünk be E-ben egy ekvivalencia-relációt a következő módon: $x \sim y$, ha van véges számú $B_k \in \mathfrak{B}$ halmaz úgy, hogy $x \in B_0$, $y \in B_n$, és minden $k = 1, \dots, n$ indexre $B_{k-1} \cap B_k \neq \emptyset$. Legyen $E = \bigcup_{i \in I} E_i$ az ennek megfelelő ekvivalencia-osztályokra való felbontás. Világos, hogy $A \subset E_i$ esetén $\mathfrak{B}(A) \subset E_i$; speciálisan $x \in E_i$ esetén $\mathfrak{B}(x) \subset E_i$ mutatja, hogy E_i nyílt, s akkor $E_i = E - \bigcup_{j \neq i} E_j$ folytán zárt is.

Mármost minden $B \in \mathfrak{B}$ halmaz része egy kompakt halmaznak, s akkor (5.3.6) szerint ugyanez mondható véges számú $\mathfrak{B}$-beli halmaz egyesítéséről. Továbbá (8.3.8) szerint minden olyan $A \subset E$ halmaz, amely egy kompakt halmaznak része, csak véges számú $\mathfrak{B}$-beli halmazt metszhet. Így egy $x \in E_i$ pontból kiindulva, a $C_1 = \mathfrak{B}(x)$, $C_2 = \mathfrak{B}(C_1), \dots, C_{n+1} = \mathfrak{B}(C_n), \dots$ képletekkel értelmezett C_n halmazok mindegyike része egy kompakt K_n halmaznak. Világos, hogy $E_i = \bigcup_1^\infty C_n$, s E_i zártsága miatt $K_n \cap E_i$ is kompakt, $E_i = \bigcup_1^\infty (K_n \cap E_i)$ pedig σ-kompakt. ∎

8.3.f. Szorzattételek. Tyihonov tételének analógiájára azt várnánk, hogy parakompakt terek szorzata is parakompakt. Ennél sokkal kevesebb igaz.

(8.3.25) *Egy (a-)parakompakt és egy kompakt tér szorzata is (a-)parakompakt.*

Bizonyítás. Legyen $[X, \mathfrak{T}]$ az egyik tér, $[Y, \mathfrak{T}']$ a másik, az utóbbi legyen kompakt. Adjuk meg $(X \times Y)$-nak tetszőleges nyílt $\mathfrak{A}$ befedését, és minden $(x, y) \in X \times Y$ ponthoz keressük meg x-nek olyan $V_{x,y}$, y-nak olyan $W_{x,y}$ nyílt környezetét, hogy $V_{x,y} \times W_{x,y} \subset A \in \mathfrak{A}$. Adott $x \in X$ mellett $\{W_{x,y} : y \in Y\}$ Y-nak nyílt befedése, tehát $Y = \bigcup_{i=1}^{n(x)} W_{x,y_i(x)}$. Legyen

$$V_x = \bigcap_{i=1}^{n(x)} V_{x,y_i(x)} \qquad (x \in X).$$

A V_x halmazok X-nek nyílt befedését alkotják, tehát található ennek olyan lokálisan véges $\mathfrak{B}$ finomítása, amely X-nek nyílt (tetszőleges) befedése. Minden $B \in \mathfrak{B}$-hez válasszunk egy olyan $x(B) \in X$ pontot, hogy $B \subset V_{x(B)}$, és tekintsük a $B \times W_{x(B),y_i(x(B))}$ alakú halmazokat. Ezek $(X \times Y)$-nak nyílt (tetszőleges) befedését alkotják, amely

$$B \times W_{x(B),y_i(x(B))} \subset V_{x(B),y_i(x(B))} \times W_{x(B),y_i(x(B))}$$

miatt finomítása $\mathfrak{A}$-nak, és lokálisan véges, mert ha az $(x_0, y_0) \in X \times Y$ ponthoz megkeressük x_0-nak olyan V környezetét, amely csak véges számú $B \in \mathfrak{B}$ halmazt metsz, akkor $V \times Y$ (x_0, y_0)-nak olyan környezete lesz, amely csak a V által metszett B-knek megfelelő $B \times W_{x(B),y_i(x(B))}$ $(i = 1, \dots, n(x(B)))$ halmazokat metszi. ∎

(8.3.26) *Egy z-parakompakt tér és egy kompakt S_2-tér szorzata z-parakompakt.*

Bizonyítás. Az előbbi gondolatmenetet ismételhetjük meg a következő eltérésekkel: $W_{x,y}$-t úgy választjuk (5.3.22)-re hivatkozva, hogy $V_{x,y} \times \overline{W}_{x,y} \subset A$ legyen; $\mathfrak{B}$-t zárt befedésnek választjuk; a keresett zárt befedést a $B\times\overline{W}_{x(B),y(x(B))}$ halmazok szolgáltatják. ∎

(8.3.25)-ből következik, hogy egy parakompakt S_2-térnek és egy kompakt S_2-térnek a szorzata parakompakt S_2-tér, amely tehát a (8.3.15) alaptétel szerint egészen normális, s így normális. Figyelemre méltó ennek következő megfordítása:

(8.3.27) *Legyen* $[E', \mathfrak{T}']$ *kompakt* S_2*-tér,* $[E, \mathfrak{T}]$ *pedig* $[E', \mathfrak{T}']$*-nek olyan altere, hogy* $\mathfrak{T}\times\mathfrak{T}'$ *normális. Ekkor* $\mathfrak{T}$ *parakompakt.*

Bizonyítás. Azt fogjuk megmutatni, hogy teljesül a (8.3.15) (c) állítás. Tekintsük e célból az $[E\times E', \mathfrak{T}\times\mathfrak{T}']$ teret, amelynek $[E\times E, \mathfrak{T}\times\mathfrak{T}]$ altere. Az utóbbi D átlójának tekintsük egy $(\mathfrak{T}\times\mathfrak{T})$-nyílt U környezetét, amely tehát $U = U' \cap (E\times E)$ alakban írható, ahol U' $(\mathfrak{T}\times\mathfrak{T}')$-nyílt. D-nek $\bar{D}$ $(\mathfrak{T}\times\mathfrak{T}')$-lezárása része U'-nek, hiszen $(x, y) \in (E\times E') - U'$ esetén van x-nek olyan $\mathfrak{T}$-nyílt V és $\mathfrak{T}'$-nyílt V' környezete, hogy $V\times V' \subset U'$, tehát $y \notin V'$, és így x és y gyengén széteső. Csakhogy $\mathfrak{T}'$ S_2-topológia, úgyhogy van x-nek és y-nak diszjunkt W és W' $\mathfrak{T}'$-környezete is, s akkor $(W\cap E)\times W'$ (x, y)-nak D-t nem metsző környezete.

(4.2.2) szerint van olyan $(\mathfrak{T}\times\mathfrak{T}')$-folytonos f függvény, amely $\bar{D}$-t és az $(E\times E') - U'$ halmazt szétválasztja. (8.1.8) szerint f egyformán $\mathfrak{T}$-folytonos, és (8.1.10) szerint ugyanez áll $(f\,|\,E\times E)$-re is; minthogy az utóbbi szétválasztja D-t és $((E\times E) - U)$-t, azért (8.1.11) szerint $\mathfrak{T}$ osztható.

Megmutatjuk, hogy $\mathcal{U}_{\mathfrak{T}}$ ultrateljes. Tegyük fel, hogy $\mathfrak{r}$ Corson-rács, de nincs $\mathfrak{T}_{\mathcal{U}_{\mathfrak{T}}} = \mathfrak{T}$-re nézve (ez (8.1.3) miatt érvényes) torlódási pontja. Ekkor $\mathfrak{r}$ $\mathfrak{T}'$-torlódási pontjai olyan — (5.2.24) (e) miatt $\mathfrak{T}'$-zárt — A halmazt alkotnak, hogy $A\cap E = \emptyset$. Így $E\times A$ D-t nem metsző $(\mathfrak{T}\times\mathfrak{T}')$-zárt halmaz, és az előbb mondottak szerint $\bar{D}\cap (E\times A) = \emptyset$; ezért van olyan $(\mathfrak{T}\times\mathfrak{T}')$-nyílt U', hogy $\bar{D} \subset U' \subset \bar{U}' \subset (E\times E') - (E\times A)$. Legyen U D-nek $(\mathfrak{T}\times\mathfrak{T})$-nyílt, szimmetrikus környezete, amelyre $U\subset U'$.

Ha B olyan U-rendben kicsiny halmaz, amely minden $\mathfrak{r}$-beli halmazt metsz, akkor $\mathfrak{r}' = \mathfrak{r}\,(\cap)\,\{B\} > \mathfrak{r}$ olyan rács, amelynek nincs $\mathfrak{T}'$-torlódási pontja; valóban ilyen csak A-ban lehetne, de $R' \in \mathfrak{r}'$, $x \in R'$ esetén nyilván $\{x\}\times R' \subset U$, tehát $\{x\}\times\bar{R}' \subset \bar{U} \subset (E\times E') - (E\times A)$, úgyhogy $\bar{R}'\cap A = \emptyset$. Ez azonban ellene mond $\mathfrak{T}'$ kompaktságának. ∎

A teljesen reguláris, parakompakt tereknek az előbbiek alapján érdekes jellemzéseit adhatjuk meg:

(8.3.28) *Legyen* $[E, \mathfrak{T}]$ *teljesen reguláris tér. A következő állítások egyenértékűek:*

(a) $\mathfrak{T}$ *parakompakt;*

(b) $\mathfrak{T}\times\mathfrak{T}'$ *parakompakt minden kompakt* $\mathfrak{T}'$ *topológiára;*

(c) $\mathfrak{T}\times\mathfrak{T}'$ *parakompakt, ha* $\mathfrak{T}'$ *kompakt* S_2*-topológia;*

(d) $\mathfrak{T}\times\mathfrak{T}'$ *normális, ha* $\mathfrak{T}'$ *kompakt* S_2*-topológia;*

(e) $\mathfrak{T}\times\mathfrak{T}'$ *normális legalább egy olyan* $\mathfrak{T}'$ *kompakt* S_2*-topológiára, amelynek* $\mathfrak{T}$ *megszorítása.*

Bizonyítás. (a) $\Rightarrow$ (b): (8.3.25) következménye.

(b) $\Rightarrow$ (c): Triviális.

(c) $\Rightarrow$ (d): (8.3.15)-ből adódik, mert $\mathfrak{T}\times\mathfrak{T}'$ S_2-topológia.

(d) $\Rightarrow$ (e): $\mathfrak{T}'$ választható $\mathfrak{T}$ valamely szabályos kompaktifikációjának.

(e) $\Rightarrow$ (a): (8.3.27)-ből következik. ∎

(8.3.29) *Ha* $[X, \mathfrak{T}]$ *parakompakt,* $[Y, \mathfrak{T}']$ *σ-kompakt és reguláris, akkor* $\mathfrak{T}\times\mathfrak{T}'$ *a-parakompakt.*

Bizonyítás. Legyen $[Y_1, \mathfrak{T}_1']$ az $[Y, \mathfrak{T}']$ tér szabályos kompaktifikációja; ilyen van, hiszen (8.3.20) és (8.3.15) szerint $\mathfrak{T}'$ S_4-topológia, s így teljesen reguláris. Ha $Y = \bigcup_1^\infty K_n$, és K_n $\mathfrak{T}'$-kompakt, akkor $\bar{K}_n$ $\mathfrak{T}_1'$-lezárása is kompakt (5.3.4) értelmében, és $\bar{K}_n \subset Y$, mert Y_1 redukált bővítése Y-nak, tehát $y \in K_n$, $z \in Y_1 - Y$ esetén y és z gyengén széteső, s akkor szétválasztható is, és így (5.3.16) miatt $z \notin \bar{K}_n$. Eszerint $Y = \bigcup_1^\infty \bar{K}_n$, $X\times Y = \bigcup_1^\infty (X\times\bar{K}_n)$. Minthogy (8.3.25) szerint $\mathfrak{T}\times\mathfrak{T}_1'$ parakompakt, azért (8.3.22) értelmében $\mathfrak{T}\times\mathfrak{T}'$ a-parakompakt. ∎

(8.3.30) *Ha* $[X, \mathfrak{T}]$ *parakompakt,* $[Y, \mathfrak{T}']$ *lokálisan kompakt, parakompakt* S_2*-tér, akkor* $\mathfrak{T}\times\mathfrak{T}'$ *a-parakompakt.*

Bizonyítás. (8.3.24) szerint $Y = \bigcup_{i\in I} Y_i$, Y_i $\mathfrak{T}'$-nyílt, $i \neq j$ esetén $Y_i \cap Y_j = \emptyset$, és $\mathfrak{T}'|Y_i$ σ-kompakt. Egyúttal $\mathfrak{T}'|Y_i$ reguláris is, tekintettel (5.3.54)-re. Ezért (8.3.29) szerint $\mathfrak{T}\times(\mathfrak{T}'|Y_i) = (\mathfrak{T}\times\mathfrak{T}'|X\times Y_i)$ a-parakompakt minden i-re; minthogy $X\times Y = \bigcup_{i\in I}(X\times Y_i)$, és itt a tagok diszjunktak és $(\mathfrak{T}\times\mathfrak{T}')$-nyíltak, azért (8.3.23) adja az állítást. ∎

(8.3.31) *Ha* $[X, \mathfrak{T}]$ *z-parakompakt* M_1*-tér,* $[Y, \mathfrak{T}']$ *pedig megszámlálhatóan kompakt és normális, akkor* $\mathfrak{T}\times\mathfrak{T}'$ *is normális.*

Bizonyítás. Legyen $A, B \subset X\times Y$, $A\cap B = \emptyset$, A és B $(\mathfrak{T}\times\mathfrak{T}')$-zárt. Ha $\{V_n : n\in\mathbf{N}\}$ egy $x\in X$ pontnak megszámlálható $\mathfrak{T}$-környezetbázisa nyílt V_n halmazokból, és az $\overline{A(V_n)} \cap \overline{B(V_n)} \subset Y$ halmazok egyike sem üres, akkor ezek Y-ban megszámlálható rácsot alkotnak, amelynek tehát van egy y torlódási pontja:

$$y \in \bigcap_1^\infty (\overline{A(V_n)} \cap \overline{B(V_n)}).$$

Ez azonban lehetetlen, hiszen alkalmas n-re és y-nak alkalmas W $\mathfrak{T}'$-környezetére $V_n\times W$ vagy A-t, vagy B-t nem metszi, és például $(V_n\times W)\cap A = \emptyset$ esetén $W \cap A(V_n) = \emptyset$; $y \notin \overline{A(V_n)}$.

Eszerint van X-nek olyan nyílt $\mathfrak{V}$ befedése, hogy $V\in\mathfrak{V}$ esetén $\overline{A(V)} \cap \overline{B(V)} = \emptyset$. (8.3.13) értelmében létezik X-ben egy $\mathfrak{V}$-nak alárendelt $\Phi = \{f_i : i\in I\}$ egységfelosztás. Minden $i\in I$-re legyen $V_i\in\mathfrak{V}$ olyan halmaz, amelyen kívül f_i eltűnik, g_i pedig olyan $\mathfrak{T}'$-folytonos függvény, amely $\overline{A(V_i)}$-t és $\overline{B(V_i)}$-t szétválasztja. A $h_i(x, y) = f_i(x)g_i(y)$ jelöléssel $\{h_i : i\in I\}$ nyilván $(\mathfrak{T}\times\mathfrak{T}')$-lokálisan véges függvénycsalád, hiszen ha x-nek egy V környezetében csak véges számú f_i nem tűnik el, akkor bármely (x, y) pont $V\times Y$ környezetében csak az ugyanilyen indexű h_i-k nem tűnnek el. Legyen $f = \sum_{i\in I} h_i$; ez (8.3.12) szerint $(\mathfrak{T}\times\mathfrak{T}')$-folytonos. Minthogy $0 \leq f_i(x) \leq 1$, $0 \leq g_i(y) \leq 1$ minden $x\in X$, $y\in Y$ pontra, azért $0 \leq h_i(x, y) \leq 1$, s így

$$0 \leq f(x, y) \leq \sum_{i\in I} f_i(x) = 1 \qquad ((x, y)\in X\times Y).$$

$(x, y) \in A$ esetén $f_i(x) \neq 0$-ból $x \in V_i$, tehát $y \in A(V_i)$ következik, és $g_i(y) = 0$, $h_i(x, y) = 0$, úgyhogy $f(x, y) = 0$. Viszont $(x, y) \in B$ esetén $f_i(x) \neq 0$-ból $y \in B(V_i)$ és $g_i(y) = 1$ adódik, úgyhogy $\sum_{i \in I} h_i(x, y) = \sum_{i \in I} f_i(x) = 1$. Eszerint A és B $(\mathfrak{T} \times \mathfrak{T}')$-folytonos függvénnyel szétválasztható, s még inkább $(\mathfrak{T} \times \mathfrak{T}')$-szétválasztható. ∎

8.3.g. Metakompakt terek. Egy E-beli $\mathfrak{A}$ halmazrendszert **pontonként végesnek** mondunk, ha minden $x \in E$ pont csak véges számú $\mathfrak{A}$-beli halmaznak eleme.

(8.3.32) *Ha $\mathfrak{A}$ pontonként véges E-beli halmazrendszer, és $\mathfrak{B} \subset \mathfrak{A}$, akkor $\mathfrak{B}$ is pontonként véges.* ∎

(8.3.33) *Véges számú pontonként véges E-beli halmazrendszer egyesítése is pontonként véges.* ∎

(8.3.34) *Egy topologikus térben minden lokálisan véges halmazrendszer pontonként véges.* ∎

Az $[E, \mathfrak{T}]$ topologikus teret (és a $\mathfrak{T}$ topológiát) **metakompakt**nak mondjuk, ha minden nyílt befedésnek van olyan pontonként véges finomítása, amely ugyancsak nyílt befedés. (8.3.34) értelmében:

(8.3.35) *Minden parakompakt tér metakompakt.* ∎

Nevezetes, hogy viszont a metakompaktságból bizonyos feltételek mellett a parakompaktságra lehet következtetni. Ennek érdekében először is jegyezzük meg:

(8.3.36) *Ha $\mathfrak{A} = \{A_n : n \in \mathrm{N}\}$ az $[E, \mathfrak{T}]$ normális térnek megszámlálható, pontonként véges, nyílt befedése, akkor megadhatók olyan G_n nyílt halmazok, hogy $G_n \subset A_n$, és $\{G_n : n \in \mathrm{N}\}$ lokálisan véges, nyílt befedés.*

Bizonyítás. Legyen $B_n = E - \bigcup_{n+1}^{\infty} A_i$; ekkor B_n zárt, $B_n \subset B_{n+1}$ minden n-re, s abból, hogy $\mathfrak{A}$ pontonként véges, következik, hogy $E = \bigcup_{1}^{\infty} B_n$.

n szerinti indukcióval olyan V_n és G_n nyílt halmazokat fogunk készíteni, hogy

$$G_n \subset A_n,\ B_n \subset V_n \subset \overline{V}_n \subset \bigcup_{1}^{n} G_i. \tag{8.3.37}$$

Legyen először is $G_1 = A_1$, V_1 pedig olyan nyílt halmaz, hogy $B_1 \subset V_1 \subset \overline{V}_1 \subset A_1$. Ilyen V_1 van, mert $B_1 \subset A_1$, hiszen $\mathfrak{A}$ E-nek befedése, és B_1 zártságából, A_1 nyíltságából és $\mathfrak{T}$ normalitásából V_1 létezése következik. Így (8.3.37) $n = 1$-re teljesül.

Tegyük fel, hogy a V_i és G_i nyílt halmazok $i = 1, \ldots, n-1$ esetén már elkészültek, és (8.3.37)-nek eleget tesznek. A $B_n - B_{n-1} \subset A_n$ összefüggésből (8.3.37) alapján

$$B_n - \bigcup_{1}^{n-1} G_i \subset B_n - B_{n-1} \subset A_n,$$

tehát

$$B_n - \bigcup_{1}^{n-1} G_i \subset A_n - \bigcup_{1}^{n-1} G_i \subset A_n - \bigcup_{1}^{n-1} \overline{V}_i.$$

Legyen

(8.3.38) $$G_n = A_n - \bigcup_1^{n-1} \overline{V}_i;$$

ez nyílt, és $G_n \subset A_n$, továbbá $B_n \subset \bigcup_1^n G_i$ miatt, $\mathfrak{T}$ normalitását újból felhasználva, található olyan nyílt V_n, hogy

$$B_n \subset V_n \subset \overline{V}_n \subset \bigcup_1^n G_i.$$

Mármost (8.3.37) miatt $E = \bigcup_1^\infty B_n = \bigcup_1^\infty G_n$, és a $\{G_n : n \in \mathbf{N}\}$ befedés lokálisan véges; valóban, (8.3.38) szerint $i \leqq n-1$ esetén $V_i \cap G_n = \emptyset$, tehát ha $x \in E$-hez i úgy van megválasztva, hogy $x \in B_i$ legyen, akkor x-nek V_i környezete a G_n halmazokat $n \geqq i+1$ esetén nem metszi. ∎

(8.3.39) *Multinormális térben minden pontonként véges, nyílt befedésnek van olyan lokálisan véges finomítása, amely szintén nyílt befedés.*

Bizonyítás. Legyen $\mathfrak{B}$ a multinormális $[E, \mathfrak{T}]$ térnek pontonként véges, nyílt befedése. Elkészítjük a tér $\mathfrak{A} = \{A_n : n \in \mathbf{N}\}$ megszámlálható, pontonként véges, nyílt befedését a következő tulajdonságokkal (ahol $A_0 = \emptyset$):

(a) $x \in A_n$ esetén x-et legalább n $\mathfrak{B}$-beli halmaz tartalmazza;

(b) Ha $x \in E$-t legfeljebb n $\mathfrak{B}$-beli halmaz tartalmazza, akkor $x \in \bigcup_0^n A_i$;

(c) $A_n = \bigcup_{i \in I_n} A_{ni}$, ahol A_{ni} nyílt, a $\mathfrak{A}_n = \{A_{ni} : i \in I_n\}$ rendszer diszkrét, és $\mathfrak{A}_n \ll \mathfrak{B}$.

$n = 0$-ra az (a), (b), (c) állítások triviálisan teljesülnek; tegyük fel, hogy $i = 0, 1, \ldots, n$ esetén már elkészítettük a $\mathfrak{A}_i$ rendszert és az A_i halmazt.

Válasszunk ki $\mathfrak{B}$-ből $n+1$ halmazt:

$$\mathfrak{B}' = \{B_1, \ldots, B_{n+1}\},$$

és legyen

$$C(\mathfrak{B}') = E - \Bigl(\bigcup_0^n A_i \cup \bigcup \{B : B \in \mathfrak{B} - \mathfrak{B}'\}\Bigr).$$

Ekkor $C(\mathfrak{B}')$ zárt, és ha $\mathfrak{B}'$ befutja a $\mathfrak{B}$ rendszer összes $n+1$ elemű részhalmazait, az összes így keletkező $C(\mathfrak{B}')$ halmazok diszkrét rendszert alkotnak. Valóban, ha $x \in E$ legalább $n+2$ $\mathfrak{B}$-beli halmaznak eleme, akkor $n+2$ ilyen halmaz metszete x-nek $C(\mathfrak{B}')$-t nem metsző környezetét szolgáltatja, ugyanis közülük legalább egy $(\mathfrak{B} - \mathfrak{B}')$-hoz tartozik. Ha x legfeljebb n $\mathfrak{B}$-beli halmaznak eleme, akkor (b) miatt $\bigcup_0^n A_i$ szolgáltatja x-nek $C(\mathfrak{B}')$-t nem metsző környezetét. Végül ha x éppen $n+1$ $\mathfrak{B}$-beli halmaznak eleme, s ezeknek halmaza $\mathfrak{B}'$, akkor $\bigcap_1^{n+1} B_i$ lesz x-nek olyan környezete, amely $\mathfrak{B}'' = \{B_1', \ldots, B_{n+1}'\} \neq \mathfrak{B}'$ esetén $C(\mathfrak{B}'')$-t nem metszi, hiszen a B_i-k közül legalább egy $(\mathfrak{B} - \mathfrak{B}'')$-höz tartozik.

Legyenek most (8.1.7) felhasználásával a $D(\mathfrak{B}')$ nyílt halmazok úgy megválasztva hogy $C(\mathfrak{B}') \subset D(\mathfrak{B}')$, és $\{D(\mathfrak{B}')\}$ diszkrét rendszer legyen. Mivel $B_i \in \mathfrak{B}'$ esetén $C(\mathfrak{B}') \subset B_i$, hiszen ellenkező esetben valamely $x \in C(\mathfrak{B}')$ pont legfeljebb n $\mathfrak{B}$-beli halmaznak volna eleme, s az ilyen x $\bigcup\limits_0^n A_i$-hez tartozik, azért az

$$A(\mathfrak{B}') = D(\mathfrak{B}') \cap \bigcap_1^{n+1} B_i \supset C(\mathfrak{B}')$$

jelöléssel $\mathfrak{A}_{n+1} = \{A(\mathfrak{B}')\}$ nyílt halmazokból álló diszkrét rendszer, és $\mathfrak{A}_{n+1} \ll \mathfrak{B}$. Eszerint n helyett $(n+1)$-re teljesül (c), s nyilván (a) is fennáll az $A_{n+1} = \bigcup \{A(\mathfrak{B}') : A(\mathfrak{B}') \in \mathfrak{A}_{n+1}\}$ jelöléssel. Ha most x-et legfeljebb $n+1$ $\mathfrak{B}$-beli elem tartalmazza, akkor vagy $x \in \bigcup\limits_0^n A_i$, vagy ha nem, akkor az x-et tartalmazó $\mathfrak{B}$-beli halmazok száma pontosan $n+1$, s ha ezek a $\mathfrak{B}'$ rendszert alkotják, akkor $x \in C(\mathfrak{B}') \subset A(\mathfrak{B}') \subset A_{n+1}$. Így teljesül (b) is.

Mármost (b) következtében, tekintettel $\mathfrak{B}$ pontonként véges voltára, $\mathfrak{A}$ is nyílt befedés, és (a) miatt pontonként véges. Legyenek a G_n nyílt halmazok úgy megválasztva, hogy $G_n \subset A_n$, és $\{G_n : n \in \mathbf{N}\}$ lokálisan véges nyílt befedés. Ez (8.3.36) értelmében lehetséges, figyelembe véve (8.1.5)-öt is. Végül is a $G_n \cap A_{ni}$ ($n \in \mathbf{N}$, $i \in I_n$) halmazok E-nek olyan nyílt befedését adják, amely $\mathfrak{A}_n \ll \mathfrak{B}$ miatt $\mathfrak{B}$-nek finomítása, és lokálisan véges, mert bármely $x \in E$ alkalmas V környezete csak véges számú n-re metszi G_n-t, s minden ilyen n-re egy alkalmas V_n környezete legfeljebb egy A_{ni} halmazt metsz. ∎

Eszerint a következő érdekes tételt mondhatjuk ki:

(8.3.40) *Legyen* $[E, \mathfrak{T}]$ *topologikus tér. Az alábbi állítások mindegyike maga után vonja az utána következőt:*

(a) $\mathfrak{T}$ *z-parakompakt;*

(b) $\mathfrak{T}$ *multinormális és metakompakt;*

(c) $\mathfrak{T}$ *parakompakt.*

Bizonyítás. (a) $\Rightarrow$ (b): $\mathfrak{T}$ (8.3.11) és (8.2.15) szerint multinormális, (8.3.13) és (8.3.14) szerint parakompakt, tehát (8.3.35) szerint metakompakt.

(b) $\Rightarrow$ (c): (8.3.39)-ből rögtön adódik. ∎

(8.3.41) *A következő állítások bármely* $[E, \mathfrak{T}]$ *topologikus térre egyenértékűek:*

(a) $\mathfrak{T}$ *parakompakt* S_2*-topológia;*

(b) $\mathfrak{T}$ *metakompakt és multinormális* S_1*-topológia.*

Bizonyítás. (8.3.15) és (8.2.15) szerint (a)-ból következik, hogy $\mathfrak{T}$ multinormális, és (8.3.35) szerint metakompakt. Viszont (b)-ből (8.3.40) szerint $\mathfrak{T}$ parakompaktsága következik, (8.1.5) miatt pedig $\mathfrak{T}$ normális, s akkor S_4- és S_2-topológia is. ∎

8.3.h. Parakompakt terek folytonos, zárt képe. Minthogy minden diszkrét tér parakompakt, azért egy parakompakt tér folytonos képe nem mindig parakompakt. Megmutatjuk, azonban, hogy egy parakompakt S_2-tér folytonos, zárt képe ismét parakompakt. Ehhez a parakompakt S_2-tereknek egy újabb érdekes jellemzésére lesz szükségünk.

Egy $[E, \mathfrak{T}]$ topologikus térben a $\mathfrak{A} = \{A_i : i \in I\}$ halmazrendszert **konzervatív**-nak mondjuk, ha $J \subset I$ esetén

$$\overline{\bigcup_{i \in J} A_i} = \bigcup_{i \in J} \bar{A}_i.$$

(8.3.42) *A következő állítások bármely $\mathfrak{A} = \{A_i : i \in I\}$ halmazrendszerre egyenértékűek:*

(a) *$\mathfrak{A}$ konzervatív;*

(b) *$J \subset I$ esetén $\bigcup_{i \in J} \bar{A}_i$ zárt;*

(c) *Az $\{\bar{A}_i : i \in I\}$ rendszer konzervatív.*

Bizonyítás. (a) $\Rightarrow$ (b) $\Rightarrow$ (c): Evidens.

(c) $\Rightarrow$ (a):

$$\bigcup_{i \in J} \bar{A}_i = \overline{\bigcup_{i \in J} \bar{A}_i} \supset \overline{\bigcup_{i \in J} A_i} \supset \bigcup_{i \in J} \bar{A}_i. \blacksquare$$

(8.3.1)-ből és (8.3.7)-ből következik:

(8.3.43) *Minden lokálisan véges halmazrendszer konzervatív.* ▮

A parakompakt S_2-terek újabb jellemzésének magvát mármost a következő tétel alkotja:

(8.3.44) *Legyen $[E, \mathfrak{T}]$ topologikus tér. Az alábbi állítások mindegyike maga után vonja a következőt:*

(a) *$\mathfrak{T}$ z-parakompakt;*

(b) *Minden nyílt befedésnek van olyan finomítása, amely konzervatív, zárt befedés;*

(c) *Minden nyílt befedésnek van olyan finomítása, amely σ-diszkrét, nyílt befedés;*

(d) *$\mathfrak{T}$ a-parakompakt;*

(e) *Minden nyílt befedésnek van olyan finomítása, amely konzervatív befedés.*

Bizonyítás. (a) $\Rightarrow$ (b): (8.3.43).

(b) $\Rightarrow$ (c): Jegyezzük meg először is, hogy ha $\mathfrak{G} = \{G_i : i \in I\}$ nyílt befedés, akkor van olyan konzervatív, zárt $\{F_i : i \in I\}$ befedés, hogy $F_i \subset G_i$. Valóban, ha $\mathfrak{A} = \{A_j : j \in J\}$ $\mathfrak{G}$-nek olyan finomítása, amely konzervatív, zárt befedés, és $F_i = \bigcup \{A_j : A_j \subset G_i\} \subset G_i$, akkor $\{F_i : i \in I\}$ (8.3.42) szerint zárt befedés, és ismét (8.3.42) alapján konzervatív is.

Legyen $A, B \subset E$ zárt, $A \cap B = \emptyset$, és alkalmazzuk az előbbi megjegyzést az $\{E - A, E - B\}$ nyílt befedésre; eszerint van olyan zárt M és N, hogy $M \cup N = E$, $M \subset E - A$, $N \subset E - B$. Így $E - M$ és $E - N$ nyílt, $A \subset E - M$, $B \subset E - N$, és $(E - M) \cap (E - N) = \emptyset$. Ennélfogva $\mathfrak{T}$ normális.

Legyen most $\mathfrak{A} = \{A_i : i \in I\}$ tetszőleges nyílt befedés, és (1.1.27)-re hivatkozva lássuk el I-t jólrendezéssel. Minden $n \in \mathbf{N}$-hez el fogunk készíteni egy olyan $\mathfrak{B}_n = \{B_{in} : i \in I\}$ konzervatív, zárt befedést, hogy

$$B_{in} \subset A_i, \quad \text{és} \quad B_{i,n+1} \cap \Big(\bigcup_{j<i} B_{jn}\Big) = \emptyset. \tag{8.3.45}$$

Evégből legyen $\mathfrak{B}_1 = \{B_{i1} : i \in I\}$ olyan konzervatív, zárt befedés, hogy $B_{i1} \subset A_i$. Tegyük fel, hogy a kívánt tulajdonságú $\mathfrak{B}_n$-ek $n \leqq m \in \mathbf{N}$ esetén már elkészültek. Legyen

(8.3.46)
$$G_{i,m+1} = A_i - \bigcup_{j<i} B_{jm},$$

$$\mathfrak{G}_{m+1} = \{G_{i,m+1} : i \in I\}.$$

Ekkor $G_{i,m+1}$ nyílt, és $\mathfrak{G}_{m+1}$ E-nek befedése, hiszen ha adott $x \in E$-hez $i \in I$ a legkisebb olyan index, amelyre $x \in A_i$, akkor $j < i$ esetén $x \notin A_j \supset B_{jm}$, $x \in G_{i,m+1}$. Legyen $\mathfrak{B}_{m+1} = \{B_{i,m+1} : i \in I\}$ olyan konzervatív, zárt befedés, hogy

(8.3.47)
$$B_{i,m+1} \subset G_{i,m+1}.$$

Ekkor $B_{i,m+1} \subset A_i$, és $B_{i,m+1} \cap \left(\bigcup_{j<i} B_{jm}\right) = \emptyset$.

Legyen most

(8.3.48)
$$C_{in} = E - \bigcup_{j \neq i} B_{jn} \quad (i \in I, \quad n \in \mathbf{N}).$$

Ekkor C_{in} nyílt, és

(8.3.49)
$$C_{in} \subset B_{in} \subset A_i.$$

Ezért a

$$\mathfrak{C}_n = \{C_{in} : i \in I\}, \quad \mathfrak{C} = \bigcup_1^{\infty} \mathfrak{C}_n$$

jelöléssel $\mathfrak{C}$ finomítása $\mathfrak{A}$-nak. Megmutatjuk, hogy $\mathfrak{C}$ E-nek befedése. Valóban, $x \in E$, $n \in \mathbf{N}$ esetén legyen i_n a legkisebb elem I-ből, amelyre $x \in B_{i_n n}$, és i az összes i_n-ek közül a legkisebb, mondjuk $i = i_m$. Ekkor (8.3.45) miatt $x \in B_{i_m m} \subset A_{i_m}$, és $j \neq i_m$ esetén $x \notin B_{j,m+1}$, mert $j < i_m$ esetén $j < i_{m+1}$ is áll, hiszen $i_m \leqq i_{m+1}$, $j > i_m$ esetén pedig (8.3.46) és (8.3.47) szerint

$$x \notin E - B_{i_m m} \supset A_j - \bigcup_{k<j} B_{km} = G_{j,m+1} \supset B_{j,m+1}.$$

Így $x \in C_{i_m, m+1}$ a (8.3.48) definíció alapján.

Készítsünk most $\mathfrak{C}$-hez olyan

$$\mathfrak{D} = \{D_{in} : i \in I, \ n \in \mathbf{N}\}$$

konzervatív, zárt befedést, hogy $D_{in} \subset C_{in}$, majd $\bigcup_{i \in I} D_{in}$ zártságát és $\mathfrak{T}$ normalitását felhasználva olyan W_n nyílt halmazokat, hogy

$$\bigcup_{i \in I} D_{in} \subset W_n \subset \overline{W}_n \subset \bigcup_{i \in I} C_{in}.$$

Legyen végül

$$S_{in} = C_{in} \cap W_n, \quad \mathfrak{S}_n = \{S_{in} : i \in I\}, \quad \mathfrak{S} = \bigcup_1^{\infty} \mathfrak{S}_n.$$

Ekkor S_{in} nyílt, $S_{in} \subset C_{in} \subset A_i$ (8.3.49) miatt, így $\mathfrak{S} \ll \mathfrak{A}$, és $\mathfrak{S}$ E-nek befedése, hiszen $x \in E$ esetén alkalmas i-re és n-re $x \in D_{in} \subset C_{in} \cap W_n = S_{in}$. Belátjuk, hogy $\mathfrak{S}_n$ diszkrét. Valóban, $x \notin \bigcup_{i \in I} C_{in}$ esetén x-nek $E - \overline{W}_n$ olyan környezete, amely $\mathfrak{S}_n$-nek egyik elemét sem metszi. Ha viszont $x \in C_{in}$, akkor $j \neq i$ esetén (8.3.49) értelmében

$$C_{in} \cap S_{jn} \subset C_{in} \cap C_{jn} \subset C_{in} \cap B_{jn} = \emptyset,$$

tehát C_{in} lesz x-nek olyan környezete, amely $\mathfrak{S}_n$ elemei közül csak S_{in}-t metszheti.

(c) $\Rightarrow$ (d): (8.3.11)-ből ismert.

(d) $\Rightarrow$ (e): (8.3.43) következménye. ▌

Most már megadhatjuk a kívánt jellemzést:

(8.3.50) *Bármely* $[E, \mathfrak{T}]$ *topologikus térre egyenértékűek a következő állítások:*

(a) $\mathfrak{T}$ *parakompakt* S_2*-topológia;*

(b) $\mathfrak{T}$ *reguláris, és minden nyílt befedésnek van olyan finomítása, amely konzervatív befedés;*

(c) $\mathfrak{T}$ *reguláris, és minden nyílt befedésnek van olyan finomítása, amely konzervatív, zárt befedés.*

Bizonyítás. (a) $\Rightarrow$ (b): (8.3.15) és (8.3.44).

(b) $\Rightarrow$ (c): E-nek $\mathfrak{A}$ nyílt befedéséhez a regularitás felhasználásával készíthető olyan $\mathfrak{B}$ nyílt befedés, hogy $B \in \mathfrak{B}$ esetén alkalmas $A \in \mathfrak{A}$-ra $\bar{B} \subset A$. Legyen $\mathfrak{C} \ll \mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$ konzervatív befedés. (8.3.42) szerint $\{\bar{C} : C \in \mathfrak{C}\}$ konzervatív, zárt befedés, és $\mathfrak{C} \ll \mathfrak{A}$.

(c) $\Rightarrow$ (a): (8.3.44) és (8.3.15). ▌

Most már rátérhetünk a parakompakt S_2-terek folytonos, zárt képeinek vizsgálatára. (8.3.42)-ből rögtön kiolvashatjuk:

(8.3.51) *Ha* $[X, \mathfrak{T}_1]$ *és* $[Y, \mathfrak{T}_2]$ *topologikus tér,* $f: X \to Y$ *zárt leképezés, és* $\mathfrak{A}$ *zárt halmazokból álló konzervatív rendszer* $[X, \mathfrak{T}_1]$*-ben, akkor* $\{f(A) : A \in \mathfrak{A}\}$ *ugyanilyen rendszer* $[Y, \mathfrak{T}_2]$*-ben.* ▌

(8.3.52) *Legyen* $[X, \mathfrak{T}_1]$ *és* $[Y, \mathfrak{T}_2]$ *topologikus tér,* $f: X \to Y$ *folytonos és zárt. Ha* $\mathfrak{T}_1$ *z-parakompakt, akkor* $\mathfrak{T}_2$ *a-parakompakt. Ha* $\mathfrak{T}_1$ *parakompakt* S_2-$((T_2)$-$)$ *topológia, akkor* $\mathfrak{T}_2$ *is ilyen.*

Bizonyítás. Legyen $\mathfrak{G}$ Y-nak nyílt befedése. Ekkor $\{f^{-1}(G) : G \in \mathfrak{G}\}$ X-nek lesz nyílt befedése. Ennek (8.3.44) szerint van olyan $\mathfrak{A}$ finomítása, amely konzervatív, zárt befedés. (8.3.51) szerint $\{f(A) : A \in \mathfrak{A}\}$ Y-nak konzervatív, zárt befedése, s nyilván finomítása $\mathfrak{G}$-nek; így $\mathfrak{T}_2$ a-parakompakt.

Ha $\mathfrak{T}_1$ parakompakt S_2-topológia, akkor (8.3.15) szerint z-parakompakt is, és így $\mathfrak{T}_2$ a-parakompakt. Másrészt $\mathfrak{T}_1$ (8.3.15) és (8.2.15) értelmében S_4-topológia, s akkor (7.4.14) következtében $\mathfrak{T}_2$ is ilyen, s egyúttal reguláris is. Ismét (8.3.15)-re hivatkozva $\mathfrak{T}_2$ is parakompakt S_2-topológia. Ha $\mathfrak{T}_1$ parakompakt T_2-topológia, akkor $\mathfrak{T}_2$ (7.4.14) szerint még T_1-topológia is. ▌

8.3.i. Gyakorlatok. 1. Legyen $[E, \mathfrak{T}]$ topologikus tér, $A \subset E$. Mutassuk meg, hogy ha egy $\mathfrak{B}$ halmazrendszer $\mathfrak{T}$-re nézve (σ-) diszkrét vagy (σ-) lokálisan véges, akkor $\mathfrak{B}\,(\cap)\,\{A\}$ ugyanilyen $\mathfrak{T}|A$-ra nézve.

2. Legyen $[X, \mathfrak{T}_1]$ és $[Y, \mathfrak{T}_2]$ topologikus tér, $\mathfrak{A}$ $X\times Y$-beli halmazrendszer. Mutassuk meg, hogy

(a) ha $\mathfrak{B} = \{p_1(A) : A \in \mathfrak{A}\}$ (σ-) diszkrét vagy (σ-) lokálisan véges $\mathfrak{T}_1$-re nézve, akkor $\mathfrak{A}$ is ugyanilyen $\mathfrak{T}_1\times\mathfrak{T}_2$-re nézve;

(b) ha $\mathfrak{T}_2$ kompakt, és $\mathfrak{A}$ (σ-) lokálisan véges $\mathfrak{T}_1\times\mathfrak{T}_2$-re nézve, akkor $\mathfrak{B}$ ugyanilyen $\mathfrak{T}_1$-re nézve.

3. Legyen $[X, \mathfrak{T}_1]$ és $[Y, \mathfrak{T}_2]$ topologikus tér, $X = \bigcup_{i\in I} F_i$, F_i $\mathfrak{T}_1$-zárt minden i-re, $\{F_i : i \in I\}$ $\mathfrak{T}_1$-lokálisan véges, $f : X \to Y$, és $f\,|F_i$ $(\mathfrak{T}_1|F_i, \mathfrak{T}_2)$-folytonos minden i-re. Mutassuk meg, hogy f $(\mathfrak{T}_1, \mathfrak{T}_2)$-folytonos.

4. Legyen $[E, \mathfrak{T}]$ topologikus tér, $E = \bigcup_{i\in I} E_i$, $E_i' = \{i\}\times E_i$ $(i \in I)$, $f_i(x) = (i, x)$ $(x \in E_i)$, $\mathfrak{T}_1' = f_i(\mathfrak{T}|E_i)$, $E' = \bigcup_{i\in I} E_i'$, $\mathfrak{T}' = \sum_{i\in I} \mathfrak{T}_i'$, $g : E' \to E$ a $g(i, x) = x$ $(x \in E_i)$ képlettel értelmezve. Mutassuk meg, hogy

(a) f_i $(\mathfrak{T}|E_i, \mathfrak{T}_i')$-homeomorfizmus;

(b) g $(\mathfrak{T}', \mathfrak{T})$-folytonos;

(c) ha minden E_i $\mathfrak{T}$-nyílt, akkor g $(\mathfrak{T}', \mathfrak{T})$-nyílt;

(d) ha minden E_i $\mathfrak{T}$-zárt, és $\{E_i : i \in I\}$ $\mathfrak{T}$-lokálisan véges, akkor g $(\mathfrak{T}', \mathfrak{T})$-zárt;

(e) a (c) vagy (d) esetben $g(\mathfrak{T}') = \mathfrak{T}$;

(f) ha a (d) esetben $\mathfrak{T}|E_i$ minden i-re T_1-, T_2-, S_1-, S_2-topológia vagy normális, akkor $\mathfrak{T}$ is ilyen.

5. Mutassuk meg az $[\mathbf{R}, \mathfrak{E}]$ térről, hogy

(a) nem z-parakompakt;

(b) nem metakompakt, tehát nem is parakompakt;

(c) minden nyílt befedésének van olyan σ-diszkrét finomítása, amely nyílt befedés;

(d) a-parakompakt.

$[\mathbf{R} = \bigcup_1^\infty (-\infty, n) = (-\infty, 0) \cup \bigcup_1^\infty [n-1, n).]$

6. Legyen E végtelen halmaz. Mutassuk meg, hogy $\mathfrak{F}_E$ parakompakt T_1-topológia, de nem z-parakompakt, és nem is osztható.

[$\mathfrak{F}_E$ kompakt, de nem T_2-topológia.]

7. Legyen $\mathfrak{T}$ a 78. oldalon értelmezett nem-reguláris T_2-topológia $\mathbf{R}$-en. Mutassuk meg, hogy $\mathfrak{T}$ a-parakompakt, de nem parakompakt.

[$\mathfrak{T}$ Lindelöf-féle, mert $A = \mathbf{R} - \{0\}$ mellett $\mathfrak{T}|A = \mathfrak{E}|A$.]

8. Mutassuk meg, hogy az **5.3.** alatti 13. feladatban szereplő $[W, \mathfrak{T}]$ tér nem parakompakt.

9. Adjunk példát olyan multinormális T_2-térre, amely nem egészen normális.

[Ilyen $[W, \mathfrak{T}]$ a **8.1.** alatti 4. feladat szerint.]

10. Adjunk példát olyan kompakt T_2-térre, amelynek egy altere nem parakompakt.

11. Mutassuk meg, hogy az **5.3.** alatti 13. és 16. feladat jelöléseivel $\mathfrak{T}\times\mathfrak{T}^*$ nem normális.

12. Adjunk példát olyan normális T_2-terekre, amelyeknek szorzata nem normális.

13. Legyen $[W, \mathcal{T}]$ az **5.3.** alatti 13. feladatban szereplő tér. Mutassuk meg, hogy

(a) $x \in W$ esetén $C_x = [a, x] \times W$ és $D_x = W \times [a, x]$ a $\mathcal{T} \times \mathcal{T}$-ből származó altér-topológiával ellátva normális;

(b) $x \in W$ esetén a $C_x \cup D_x = S_x$ jelöléssel $\mathcal{T} \times \mathcal{T} | S_x$ is normális;

(c) ha $A, B \subset W \times W$ $\mathcal{T} \times \mathcal{T}$-zárt, és $A \cap B = \emptyset$, akkor van olyan $x \in W$, hogy $A \subset S_x$ vagy $B \subset S_x$;

(d) $\mathcal{T} \times \mathcal{T}$ normális.

[(8.3.31), a **7.4.** alatti 16. feladat; továbbá $A - S_x \neq \emptyset \neq B - S_x$ $(x \in W)$ esetén készíthető olyan (z_n) sorozat, hogy $z_{2m-1} \in A$, $z_{2m} \in B$ $(m \in \mathbf{N})$, és $p_1(z_n) < p_1(z_{n+1})$, $p_2(z_n) < p_2(z_{n+1})$, s akkor $p_1(z_n) \to x$, $p_2(z_n) \to y$, $(x, y) \in A \cap B$; végül ha $A \subset S_x$, $x < y \in W$, akkor $S_x \subset \operatorname{int} S_y$, $A \subset G$, $B \cap S_y \subset H$, G és H $\mathcal{T} \times \mathcal{T}$-nyílt, $G \cap H \cap S_y = \emptyset$, és $A \subset G \cap \operatorname{int} S_y = G_1$, $B \subset H \cup ((W \times W) - S_y) = G_2$, $G_1 \cap G_2 = \emptyset$.]

14. Mutassuk meg, hogy az előbbi jelöléssel a $[W, \mathcal{T}]$ tér osztható T_2-tér (de nem parakompakt).

[Egy olyan $\mathcal{T} \times \mathcal{T}$-folytonos függvény, amely $W \times W$ átlóját és valamely őt nem metsző zárt halmazt szétválaszt, a **8.1.** alatti 9. feladat szerint egyformán $\mathcal{T}$-folytonos.]

15. Ismét az **5.3.** alatti 13. és 16. feladat jelöléseivel mutassuk meg, hogy

(a) ha U $W \times W$ átlójának $\mathcal{T} \times \mathcal{T}$-nyílt környezete, akkor van $W^* \times W^*$ átlójának olyan U^* $\mathcal{T}^* \times \mathcal{T}^*$-nyílt környezete, hogy $U = U^* \cap (W \times W)$;

(b) $\mathcal{U}_{\mathcal{T}} = \mathcal{U}_{\mathcal{T}^*} | W \times W$;

(c) $\mathcal{U}_{\mathcal{T}}$ prekompakt;

(d) $\mathcal{U}_{\mathcal{T}}$ az egyetlen uniform struktúra, amely $\mathcal{T}$-t indukálja.

[Van olyan $x \in W$, hogy $(W \times W) - U \subset S_x$ a 13. alatti jelöléssel, úgyhogy $(W \times W) - U$ $\mathcal{T}^* \times \mathcal{T}^*$-lezárása nem metszi $W^* \times W^*$ átlóját.]

16. Adjuk meg $[\mathbf{R}, \mathcal{E}]$-nek olyan pontonként véges, nyílt befedését, amely nem lokálisan véges.

[Álljon a befedés a $(-\infty, 1)$, $(-1, +\infty)$, $\left(\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n}\right)$ $(n \in \mathbf{N})$ halmazokból.]

17. Mutassuk meg, hogy a 7. feladat $[\mathbf{R}, \mathcal{T}]$ tere metakompakt T_2-tér, de nem parakompakt.

18. Mutassuk meg, hogy egy metakompakt tér bármely zárt altere is metakompakt.

19. Mutassuk meg, hogy egy metakompakt tér és egy kompakt tér szorzata metakompakt.

[(8.3.25) mintájára.]

20. Mutassuk meg, hogy minden megszámlálhatóan kompakt, metakompakt S_4-tér kompakt.

[**8.1.**, 4. feladat.]

21. Mutassuk meg, hogy a 8. feladat $[W, \mathcal{T}]$ tere nem metakompakt.

22. Mutassuk meg, hogy ha $\mathfrak{A}$ konzervatív rendszer egy topologikus térben, és $\mathfrak{B} \subset \mathfrak{A}$, akkor $\mathfrak{B}$ is konzervatív.

23. Mutassuk meg, hogy ha $\mathfrak{A}$ konzervatív rendszer az $[X, \mathfrak{T}_1]$ topologikus térben, és $f : X \to Y$ folytonos, zárt leképezés az $[Y, \mathfrak{T}_2]$ térre, akkor $\{f(A) : A \in \mathfrak{A}\}$ is konzervatív.

$[\overline{\bigcup f(A_i)} \subset \overline{\bigcup f(\bar{A}_i)} = \overline{f(\bigcup \bar{A}_i)} = f(\bigcup \bar{A}_i) = \bigcup f(\bar{A}_i) \subset \bigcup \overline{f(A_i)}.]$

24. Adjunk példát $[\mathbf{R}, \mathfrak{E}]$-ben olyan konzervatív halmazrendszerre, amely nem lokálisan véges, sőt nem is pontonként véges.

$[A_n = [0, n].]$

25. Legyen $p : \mathbf{R} \to \mathfrak{Z}$ a **7.4.** alatti 9. feladat (c)-ben szereplő leképezése. Mutassuk meg, hogy

(a) $p(\mathfrak{E})$ parakompakt;

(b) $p(\mathfrak{E})$ nem z-parakompakt.

[p nyíltsága miatt $\mathbf{R}$ $\mathfrak{E}$-nyílt befedésének képe $p(\mathfrak{E})$-nyílt, és lokálisan véges befedés képe is ilyen, mert $\mathfrak{Z}$ elemei végesek.]

26. Legyen $\mathfrak{A} = \{A_i : i \in I\}$ és $\mathfrak{B} = \{B_i : i \in I\}$ két halmazrendszer egy topologikus térben, $B_i \subset A_i$ minden i-re. Mutassuk meg, hogy

(a) ha $\mathfrak{A}$ lokálisan véges, akkor $\mathfrak{B}$ konzervatív;

(b) előfordulhat, hogy $\mathfrak{A}$ konzervatív, de $\mathfrak{B}$ nem ilyen.

$$\left[[\mathbf{R}, \mathfrak{E}]\text{-ben } A_i = [0, i],\ B_i = \left[\frac{1}{i}, i\right], \quad i \in \mathbf{N}.\right]$$

27. Legyen $[E, \mathfrak{T}]$ teljesen reguláris tér. Mutassuk meg, hogy a következő állítások egyenértékűek:

(a) $\mathfrak{T}$ pszeudokompakt;

(b) $[E, \mathfrak{T}]$-ben minden lokálisan véges, nyílt halmazrendszer véges.

[Ha f $\mathfrak{T}$-folytonos, de nem korlátos, akkor a $G_n = \{x : |f(x)| > n\}$ jelöléssel $\{G_n : n \in \mathbf{N}\}$ lokálisan véges, de végtelen. Ha $\{G_n : n \in \mathbf{N}\}$ lokálisan véges, $x_n \in G_n$, G_n $\mathfrak{T}$-nyílt, és f_n olyan $\mathfrak{T}$-folytonos függvény, hogy $f_n(x_n) = 1$, $0 \leqq f_n \leqq 1$, $f_n(x) = 0$ $(E - G_n)$-en, akkor $\sum_{1}^{\infty} nf_n$ $\mathfrak{T}$-folytonos, de nem korlátos.]

28. Mutassuk meg, hogy minden parakompakt, pszeudokompakt S_2-tér kompakt.

8.4. METRIZÁCIÓS TÉTELEK

8.4.a. Reguláris és pont-reguláris bázisok. (4.2.33)-ban igen egyszerű szükséges és elegendő feltételt tudtunk adni arra, hogy egy uniform struktúra mikor (fél)-metrizálható, vagyis hogy mikor származtatható egy alkalmas távolságból (eltérésből). A parakompakt terekre vonatkozó eredmények lehetővé teszik a topológiák metrizálhatóságára vonatkozó hasonló feltételek felállítását.

Ezeknek megfogalmazása érdekében nevezzük egy $[E, \mathfrak{T}]$ topologikus tér $\mathfrak{B}$ **bázisát regulárisnak**, ha minden $x \in E$ pont minden V környezetéhez található x-nek olyan $V' \subset V$ környezete, hogy csak véges számú $\mathfrak{B}$-beli halmaz metszi V'-t és $(E - V)$-t egyidejűleg. A $\mathfrak{B}$ **bázist pont-regulárisnak** mondjuk, ha minden $x \in E$ pont minden V környezetére teljesül, hogy csak véges számú $\mathfrak{B}$-beli x-et tartalmazó halmaz metszi $(E - V)$-t.

(8.4.1) *Minden reguláris bázis egyúttal pont-reguláris is.* ∎

(8.4.2) *Legyen $\mathfrak{B}$ pont-reguláris bázis az $[E, \mathfrak{T}]$ topologikus térben, $\mathfrak{A} \subset \mathfrak{B}$, és $\mathfrak{M}$ a $\mathfrak{A}$-beli maximális halmazok (vagyis az olyan $M \in \mathfrak{A}$ halmazok, melyekre $M \subset A \in \mathfrak{A}$ esetén $A = M$) rendszere. Ekkor:*

(a) $\mathfrak{A} \ll \mathfrak{M}$;

(b) *Ha $\mathfrak{A}$ E-nek befedése akkor $\mathfrak{M}$ is az;*

(c) *$\mathfrak{M}$ pontonként véges;*

(d) *Ha $\mathfrak{B}$ reguláris bázis, és $\mathfrak{A}$ E-nek befedése, akkor $\mathfrak{M}$ lokálisan véges.*

Bizonyítás. (a): Legyen $\emptyset \neq A \in \mathfrak{A}$. Ha A nem maximális $\mathfrak{A}$-ban, akkor $A_0 = A$-ból kiindulva találhatók $A_1, A_2, \dots$ $\mathfrak{A}$-beli halmazok úgy, hogy A_n-nek A_{n-1} valódi része legyen; ez a sorozat azonban nem lehet végtelen, mert akkor valamely $x \in A$ pont A környezetére végtelen sok $\mathfrak{B}$-beli halmaz metszené $\{x\}$-et és $(E-A)$-t. A sorozat azonban csak olyan A_n-nél szakadhat meg, amely A-t tartalmazó $\mathfrak{A}$-ban maximális halmaz.

(b): (a)-ból evidensen következik.

(c) Ha $x \in M \in \mathfrak{M}$, akkor $\mathfrak{M}$ definíciója miatt egyetlen M-től különböző $\mathfrak{M}$-beli halmaz sem lehet M-nek része, úgyhogy az ilyenek mind metszik $(E-M)$-et, s közülük csak véges számú tartalmazhatja x-et.

(d): Legyen ismét $x \in E$; (b) miatt van olyan $M \in \mathfrak{M}$, hogy $x \in M$, és ehhez x-nek olyan V' környezete, hogy csak véges számú $\mathfrak{B}$-beli halmaz metszi egyszerre V'-t és $(E-M)$-et. Minthogy az M-től különböző $\mathfrak{M}$-beli halmazok mind metszik $(E-M)$-et, azért V'-t csak véges számú metszheti. ∎

8.4.b. Tökéletesen normális terek. Egy topologikus teret (vagy topológiát) **tökéletesen normális**nak mondunk, ha normális, és minden nyílt G halmaz megszámlálható sok zárt halmaz egyesítéseként írható; az utóbbi feltétellel nyilván egyenértékű az, hogy minden zárt halmaz megszámlálható sok nyílt halmaz metszete. (2.5.8)-ból látszik, hogy minden tökéletesen normális tér S_1-tér, s így S_4-tér is.

A definícióban megkívánt feltételnél mindjárt többet is mondhatunk:

(8.4.3) *Ha G nyílt halmaz a tökéletesen normális $[E, \mathfrak{T}]$ térben, akkor $G = \bigcup_1^\infty F_n = \bigcup_1^\infty G_n$, ahol F_n zárt, G_n nyílt, $F_n \subset$* int F_{n+1}, $\bar{G}_n \subset G_{n+1}$.

Bizonyítás. Legyen $G = \bigcup_1^\infty A_n$, ahol A_n zárt. A $\mathfrak{T}$ topológia normális volta miatt $G_0 = \emptyset$-ból kiindulva n szerinti indukcióval készíthetünk olyan G_n nyílt halmazokat, hogy $A_n \cup \bar{G}_{n-1} \subset G_n \subset \bar{G}_n \subset G$. Világos, hogy az $F_n = \bar{G}_n$ választás megfelel. ∎

Szükségünk lesz még a következő, (8.3.39)-hez hasonló tételre:

(8.4.4) *Legyen* $[E, \mathfrak{T}]$ *multinormális, tökéletesen normális tér, és* $\mathfrak{B}$ *pontonként véges, nyílt halmazokból álló halmazrendszer. Ekkor van* $\mathfrak{B}$*-nek olyan* σ*-lokálisan véges, nyílt halmazokból álló* $\mathfrak{A}$ *finomítása, hogy*

$$G = \bigcup \{B : B \in \mathfrak{B}\} = \bigcup \{A : A \in \mathfrak{A}\}.$$

Bizonyítás. Legyen $F = E - G$, és a tér tökéletesen normális voltát felhasználva $F = \bigcap\limits_{1}^{\infty} G_i$, ahol G_i nyílt. Alkalmazzuk (8.3.39)-et az E tér $\mathfrak{B}_i = \mathfrak{B} \cup \{G_i\}$ nyílt befedésére, amely $\mathfrak{B}$-vel együtt nyilván pontonként véges. Ekkor $\mathfrak{B}_i$-nek olyan lokálisan véges $\mathfrak{A}_i$ finomításához jutunk, amely E-nek nyílt befedése. Álljon $\mathfrak{A}$ az $\bigcup\limits_{1}^{\infty} \mathfrak{A}_i$ rendszer mindazon halmazaiból, amelyek valamely $\mathfrak{B}$-beli halmaznak részei. Világos, hogy $\mathfrak{A} \preccurlyeq \mathfrak{B}$ nyílt halmazokból álló, σ-lokálisan véges halmazrendszer; $x \in G$ esetén van olyan i, hogy $x \notin G_i$, s akkor $\mathfrak{A}_i$-nek egy x-et tartalmazó halmaza nem G_i-nek, hanem valamelyik $\mathfrak{B}$-beli halmaznak része. ∎

8.4.c. Metrizációs feltételek. A következő tétel a félmetrizálhatóság különféle szükséges és elégséges feltételeit mondja ki. Megfogalmazásához még a következő elnevezésre lesz szükségünk: az $[E, \mathfrak{T}]$ topologikus tér **teljes befedés-sorozatán** a nyílt befedéseknek olyan $(\mathfrak{B}_n)$ sorozatát értjük, hogy bármely $x \in E$ pontra $\{\mathfrak{B}_n(x) : n \in \mathbf{N}\}$ x-nek környezetbázisa.

(8.4.5) *Legyen* $[E, \mathfrak{T}]$ *topologikus tér. A következő állítások egyenértékűek:*

(a) $\mathfrak{T}$ *félmetrizálható;*

(b) $\mathfrak{T}$ *reguláris, és van* σ*-diszkrét bázisa;*

(c) $\mathfrak{T}$ *multinormális és tökéletesen normális, és van olyan* $\mathfrak{B} = \bigcup\limits_{1}^{\infty} \mathfrak{B}_n$ *bázisa, hogy* $\mathfrak{B}_n$ *pontonként véges;*

(d) $\mathfrak{T}$ *tökéletesen normális, és van olyan* $\mathfrak{B} = \bigcup\limits_{1}^{\infty} \mathfrak{B}_n$ *bázisa, hogy* $\mathfrak{B}_n$ *diszjunkt;*

(e) $\mathfrak{T}$ *reguláris, és van* σ*-lokálisan véges bázisa;*

(f) $\mathfrak{T}$ S_1*-topológia, és van reguláris bázisa;*

(g) $\mathfrak{T}$ *multinormális* S_1*-topológia, és van pont-reguláris bázisa;*

(h) *Létezik* E *nyílt befedéseinek olyan* $(\mathfrak{B}_n)$ *sorozata, hogy bármely* $x \in E$ *bármely* V *környezetéhez található* x*-nek olyan* V' *környezete és olyan* $n \in \mathbf{N}$*, hogy* $\mathfrak{B}_n(V') \subset \subset V$*;*

(i) $\mathfrak{T}$ *egészen normális, és létezik teljes befedés-sorozat;*

(j) $\mathfrak{T}$ *osztható, és létezik teljes befedés-sorozat;*

(k) *Létezik olyan* $(\mathfrak{B}_n)$ *teljes befedés-sorozat, hogy* $\mathfrak{B}_{n+1} \lll \mathfrak{B}_n$.

Bizonyítás. A következő implikációkat fogjuk igazolni:

$$(a) \Rightarrow (b) \begin{array}{c} \nearrow (c) \searrow \\ \searrow (d) \nearrow \end{array} (e) \Rightarrow (f) \Rightarrow (g) \Rightarrow (i) \begin{array}{c} \nearrow (j) \searrow \\ \searrow (k) \nearrow \end{array} (a) \Rightarrow (h) \Rightarrow (i).$$

(a) $\Rightarrow$ (b): Legyen $\mathfrak{T} = \mathfrak{T}_\rho$, ρ eltérés E-n. Ekkor (2.5.40) szerint $\mathfrak{T}$ reguláris, és (8.3.16) szerint parakompakt. Legyen $\mathfrak{B}_n$ olyan σ-diszkrét nyílt befedés, amely az

$U_{\rho,\frac{1}{n}}(x)$ $(x \in E)$ gömbök alkotta $\mathfrak{A}_n$ nyílt befedésnek finomítása. Ekkor $\mathfrak{B} = \bigcup_1^\infty \mathfrak{B}_n$ is σ-diszkrét, és nyilván bázis, hiszen $x \in B \subset A \in \mathfrak{A}_n$, $B \in \mathfrak{B}_n$ esetén $B \subset U_{\rho,\frac{2}{n}}(x)$.

(b) $\Rightarrow$ (c): E tetszőleges nyílt $\mathfrak{A}$ befedéséhez kiválasztva azokat a bázishalmazokat, amelyek egy $\mathfrak{A}$-beli halmaznak részei, $\mathfrak{A}$-nak σ-diszkrét finomítását nyerjük, amely nyílt befedés. Így $\mathfrak{T}$ (8.3.15) értelmében osztható, tehát (8.1.6) folytán multinormális. A σ-diszkrét bázist $\mathfrak{B} = \bigcup_1^\infty \mathfrak{B}_n$ alakban írva, ahol $\mathfrak{B}_n$ diszkrét, evidens, hogy $\mathfrak{B}_n$ pontonként véges is.

Ha G nyílt halmaz, válasszuk ki minden $x \in G$ pontnak — a regularitásra hivatkozva — olyan B báziskörnyezetét, hogy $x \in B \subset \bar{B} \subset G$. Ha F_n az így kiválasztott B halmazok közül a $\mathfrak{B}_n$-beliek lezárásainak egyesítése, akkor $G = \bigcup_1^\infty F_n$, és F_n (8.3.7) értelmében zárt. Eszerint $\mathfrak{T}$ tökéletesen normális, hiszen (8.1.5) szerint normális.

(c) $\Rightarrow$ (e): $\mathfrak{T}$ (8.1.5.) következtében S_4-, tehát S_3-topológia. Legyen $\mathfrak{B} = \bigcup_1^\infty \mathfrak{B}_n$ olyan bázis, amelyben $\mathfrak{B}_n$ pontonként véges, és álljon $k \in \mathbf{N}$ esetén $\mathfrak{B}_{nk}$ azokból a halmazokból, amelyek k számú $\mathfrak{B}_n$-beli halmaz metszeteként írhatók. $\mathfrak{B}_{nk}$ is pontonként véges, hiszen egy $x \in E$ pont csak az őt tartalmazó véges számú $\mathfrak{B}_n$-beli halmazból kiválasztott k számú halmaz metszetének lehet eleme. (8.4.4)-re hivatkozva legyen $\mathfrak{A}_{nk} \ll \mathfrak{B}_{nk}$ olyan σ-lokálisan véges, nyílt halmazokból álló halmazrendszer, hogy

$$\bigcup\{B : B \in \mathfrak{B}_{nk}\} = \bigcup\{A : A \in \mathfrak{A}_{nk}\}.$$

A

$$\mathfrak{A} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k=1}^{\infty} \mathfrak{A}_{nk}$$

halmazrendszer is σ-lokálisan véges, nyílt halmazokból áll, és $\mathfrak{T}$-nek bázisa. Valóban, ha V az $x \in E$ pontnak tetszőleges környezete, akkor van olyan $B \in \mathfrak{B}$, hogy $x \in B \subset V$. Legyen $B \in \mathfrak{B}_n$, és tegyük fel, hogy x-et pontosan k számú $\mathfrak{B}_n$-beli halmaz tartalmazza: $x \in \bigcap_1^k B_i$, $B_i \in \mathfrak{B}_n$. Ekkor van olyan $A \in \mathfrak{A}_{nk}$, hogy $x \in A$; ez az A halmaz valamely $\mathfrak{B}_{nk}$-beli halmaznak része, amely csak $\bigcap_1^k B_i$ lehet, hiszen x más $\mathfrak{B}_{nk}$-beli halmaznak nem eleme. Mivel egyik B_i azonos B-vel, azért $x \in A \subset B \subset V$.

(b) $\Rightarrow$ (d): Azt már láttuk, hogy (b)-ből $\mathfrak{T}$ tökéletesen normális volta következik, és egy diszkrét halmazrendszer nyilván diszjunkt is.

(d) $\Rightarrow$ (e): $\mathfrak{T}$ S_4-topológia, tehát reguláris. Legyen továbbá $G_n = \bigcup \{B : B \in \mathfrak{B}_n\}$ és (8.4.3) alapján $G_n = \bigcup_{i=1}^{\infty} G_{ni}$, ahol G_{ni} nyílt, és $\bar{G}_{ni} \subset G_{n,i+1}$. Ha most minden $B \in \mathfrak{B}_n$ halmazra tekintjük a $B_i = B \cap G_{ni}$ halmazokat, akkor $B = \bigcup_{i=1}^{\infty} B_i$ miatt a $\{B_i : B \in \mathfrak{B}_n, i \in \mathbf{N}, n \in \mathbf{N}\}$ halmazrendszer nyilván bázis, és rögzített n és i esetén $\mathfrak{B}_{ni} = \{B_i : B \in \mathfrak{B}_n\}$ lokálisan véges (sőt diszkrét), hiszen $x \in B \in \mathfrak{B}_n$ esetén B x-nek olyan környezete, amely a $\mathfrak{B}_{ni}$ rendszerből egyedül B_i-t metszi, mert $\mathfrak{B}_n$ diszjunkt, $x \in E - G_n$ esetén pedig $E - \bar{G}_{ni}$ lesz x-nek olyan környezete, amely egyetlen $\mathfrak{B}_{ni}$-beli halmazt sem metsz.

(e) $\Rightarrow$ (f): Legyen $\mathfrak{B}$ olyan bázis, hogy $\mathfrak{B} = \bigcup_{1}^{\infty} \mathfrak{B}_n$, és $\mathfrak{B}_n$ lokálisan véges; (8.3.5) alapján feltehető, hogy $\mathfrak{B}_n \subset \mathfrak{B}_{n+1}$ minden n-re, és hogy $E \in \mathfrak{B}_1$. Ekkor $\mathfrak{T}$ parakompakt, hiszen tetszőleges nyílt $\mathfrak{A}$ befedéshez kiválasztva $\mathfrak{B}$-ből azokat a halmazokat, amelyek egy $\mathfrak{A}$-beli halmaznak részei, nyilván olyan σ-lokálisan véges befedést kapunk, amely $\mathfrak{A}$-nek finomítása.

Legyen most $x \in E$ esetén

$$C_{x,n} = \bigcap \{B : x \in B \in \mathfrak{B}_n\} - \bigcup \{\bar{B} : x \notin \bar{B},\ B \in \mathfrak{B}_n\}.$$

Minthogy az első tag véges számú nyílt halmaz metszete, a második pedig (8.3.7) szerint zárt, $C_{x,n}$ x-nek nyílt környezete. Legyen $\mathfrak{C}_n = \{C_{x,n} : x \in E\}$, $\mathfrak{D}_n$ pedig $\mathfrak{C}_n$-nek olyan lokálisan véges finomítása, amely nyílt befedés. Megmutatjuk, hogy $\mathfrak{D} = \bigcup_{1}^{\infty} \mathfrak{D}_n$ reguláris bázis.

Ha V x-nek tetszőleges környezete, akkor van olyan $B \in \mathfrak{B}$, hogy $x \in B \subset V$, és $\mathfrak{T}$ regularitása miatt olyan $B' \in \mathfrak{B}$, hogy $x \in B' \subset \bar{B}' \subset B \subset V$. Legyen n olyan nagy, hogy $B, B' \in \mathfrak{B}_n$, V_1 x-nek olyan környezete, amely $i = 1, \dots, n$ esetén csak véges számú $\mathfrak{D}_i$-beli halmazt metsz, és $V' = V_1 \cap B'$. Megmutatjuk, hogy $i > n$ esetén egyetlen $\mathfrak{D}_i$-beli halmaz sem metszi V'-t is, $(E - V)$-t is. Azonban egy ilyen $D \in \mathfrak{D}_i$ része valamely $C_{y,i}$ halmaznak; csakhogy $i > n$ miatt $y \in B$ esetén $C_{y,i} \subset \subset B \subset V$, $y \notin B$ esetén pedig $y \notin \bar{B}'$ miatt $C_{y,i} \cap \bar{B}' = \emptyset$, azaz $C_{y,i} \cap V' = \emptyset$.

Mármost egy $i > n$ indexet véve, $\mathfrak{D}_i$-nek valamely D halmaza tartalmazza x-et, s akkor $x \in D \subset V$. Eszerint $\mathfrak{D}$ bázis, és az előző megállapítás mutatja, hogy reguláris bázis.

(f) $\Rightarrow$ (g): (8.4.1)-re tekintettel azt kell csak belátnunk, hogy $\mathfrak{T}$ multinormális. Ehhez megmutatjuk, hogy $\mathfrak{T}$ reguláris és parakompakt, s akkor (8.3.15)-re és (8.1.6)-ra lehet hivatkozni. A parakompaktság rögtön következik (8.4.2)-ből. Valóban, tetszőleges $\mathfrak{C}$ nyílt befedéshez tekintsük a $\mathfrak{B}$ reguláris bázis azon halmazainak $\mathfrak{A}$ rendszerét, amelyek valamely $\mathfrak{C}$-beli halmaznak részei, $\mathfrak{M}$ pedig legyen a $\mathfrak{A}$-ban maximális halmazok rendszere; világos, hogy $\mathfrak{A}$ s vele együtt $\mathfrak{M}$ E-nek nyílt befedése, $\mathfrak{C}$-nek finomítása, és (8.4.2) szerint lokálisan véges.

Ha most V x-nek tetszőleges nyílt környezete, és $V' \subset V$ x-nek olyan környezete, hogy csak véges számú $\mathfrak{B}$-beli halmaz metszi V'-t is, $(E-V)$-t is, akkor $\bar{V}' \subset V$, amiből a regularitás rögtön adódik. Valóban, ha $y \in E - V$, és y minden környezete metszi V'-t, akkor tehát minden y-t tartalmazó $\mathfrak{B}$-beli halmaz is metszi V'-t; ilyen csak véges számú lehet, s metszetük, mondjuk W, y legszűkebb környezete, mert $\mathfrak{B}$ bázis. Ha most $z \in V' \cap W$, akkor y-nak minden környezete tartalmazza z-t, holott V z-nek y-t nem tartalmazó környezete; ez ellene mond annak, hogy $\mathfrak{T}$ S_1-topológia.

(g) $\Rightarrow$ (i): Legyen $\mathfrak{B}$ pont-reguláris bázis; feltehető, hogy a $\mathfrak{B}$-beli halmazok nem-üresek. Jelöljük $\mathfrak{N}$-nel a $\mathfrak{B}$-ben minimális halmazok rendszerét (ezek azok az $N \in \mathfrak{B}$ halmazok, amelyekre $B \subset N$, $B \in \mathfrak{B}$ esetén $B = N$); természetesen lehet $\mathfrak{N} = \emptyset$ is.

Legyen most $\mathfrak{B}_1 = \mathfrak{B}$, $\mathfrak{M}_1$ a $\mathfrak{B}_1$-ben maximális halmazok rendszere, s ha $\mathfrak{M}_1, \ldots, \mathfrak{M}_{n-1} \subset \mathfrak{B}$ már meg van választva, legyen $\mathfrak{B}_n = (\mathfrak{B} - \bigcup_1^{n-1} \mathfrak{M}_i) \cup \mathfrak{N}$, és $\mathfrak{M}_n$ a $\mathfrak{B}_n$-ben maximális halmazok rendszere. Megmutatjuk, hogy $\mathfrak{M}_n$ minden n-re befedése E-nek, amihez (8.4.2) alapján azt kell csak belátnunk, hogy minden $\mathfrak{B}_n$ befedése E-nek. Azonban (8.4.2)-ből látszik, hogy minden $\mathfrak{M}_i$ pontonként véges, tehát ha egy $x \in E$ pont végtelen sok $\mathfrak{B}$-beli halmaznak eleme, akkor még $(\mathfrak{B} - \bigcup_1^{n-1} \mathfrak{M}_i)$-ben is van x-et tartalmazó halmaz. Ha viszont x csak véges számú $\mathfrak{B}$-beli halmazhoz tartozik hozzá, akkor ezeknek N metszete x-nek legszűkebb környezete, és maga is $\mathfrak{B}$-hez tartozik, hiszen $\mathfrak{B}$ bázis. Ekkor N minimális $\mathfrak{B}$-ben, azaz $x \in N \in \mathfrak{N}$, mert ha $B \in \mathfrak{B}$, $B \subset N$, $B \neq N$ volna, akkor szükségképpen $x \notin B$ állna, s ez lehetetlen, mert egy $y \in B$ pontot választva, y-nak volna x-et nem tartalmazó környezete, viszont x minden környezete tartalmazná y-t.

Belátjuk még, hogy $x \in E$ esetén $\{\mathfrak{M}_n(x) : n \in \mathrm{N}\}$ környezetbázisa x-nek. Legyen V x-nek tetszőleges környezete. Ha $x \in N \in \mathfrak{N}$, és $B \in \mathfrak{B}$ olyan, hogy $x \in B \subset \subset V \cap N$, akkor $B = N$, tehát $N \subset V$. Tegyük most fel, hogy egyetlen n-re sem lesz $\mathfrak{M}_n(x) \subset V$. Ekkor minden n-re van egy $M_n \in \mathfrak{M}_n$ halmaz, amelyre $x \in M_n$, $M_n \cap (E - V) \neq \emptyset$. Minthogy az előbbiek szerint $M_n \notin \mathfrak{N}$, és $n \neq m$ esetén nyilván $\mathfrak{M}_n \cap \mathfrak{M}_m \subset \mathfrak{N}$, azért tehát ekkor $M_n \neq M_m$. Ez azonban lehetetlen, mert csak véges számú x-et tartalmazó $\mathfrak{B}$-beli halmaz metszheti $(E - V)$-t.

(8.3.39) szerint E-nek pontonként véges $\mathfrak{M}_n$ nyílt befedéséhez készíthető olyan lokálisan véges $\mathfrak{A}_n$ nyílt befedés, hogy $\mathfrak{A}_n \ll \mathfrak{M}_n$. Ekkor $\mathfrak{A}_n(x) \subset \mathfrak{M}_n(x)$ minden $x \in E$-re, s így $\{\mathfrak{A}_n(x) : n \in \mathrm{N}\}$ is környezetbázisa x-nek. Ebből rögtön következik, hogy ha E-nek egy $\mathfrak{C}$ nyílt befedéséhez kikeressük az $\bigcup_1^{\infty} \mathfrak{A}_n$ halmazrendszerből azokat a halmazokat, amelyek valamely $C \in \mathfrak{C}$ halmaznak részei, E-nek olyan σ-lokálisan véges, nyílt befedését kapjuk, amely $\mathfrak{C}$-nek finomítása. Minthogy $\mathfrak{T}$ (8.1.5) szerint S_4- s még inkább S_3-topológia, azért (8.3.15) szerint egészen normális is.

(i) $\Rightarrow$ (j): (8.2.15) alapján evidens.

(j) $\Rightarrow$ (a): Legyen $(\mathfrak{B}_n)$ teljes befedéssorozat, $U_1 = U_{\mathfrak{B}_1}$, és ha az $U_n \subset E \times E$ $\mathfrak{T}^2$-nyílt környéket már megválasztottuk, legyen U_{n+1} olyan $\mathfrak{T}^2$-nyílt környék, hogy $U_{n+1} \circ U_{n+1} \subset U_n \cap U_{\mathfrak{B}_{n+1}}$. Világos, hogy ekkor $\{U_n : n \in \mathrm{N}\}$ uniform bázis, amely

(4.2.33) értelmében félmetrizálható $\mathfrak{U}$ uniform struktúrát generál. Minthogy (7.3.47) szerint $x \in E$, $n \in \mathbf{N}$ esetén $U_n(x)$ $\mathfrak{T}$-nyílt, azért $\mathfrak{T}_{\mathfrak{U}} < \mathfrak{T}$. Viszont $U_n(x) \subset U_{\mathfrak{B}_n}(x) = \mathfrak{B}_n(x)$ miatt $\mathfrak{T} < \mathfrak{T}_{\mathfrak{U}}$ is áll, és $\mathfrak{T} = \mathfrak{T}_{\mathfrak{U}}$.

(i) $\Rightarrow$ (k): Legyen ismét $(\mathfrak{B}_n)$ teljes befedéssorozat, $\mathfrak{A}_1 = \mathfrak{B}_1$, és ha a $\mathfrak{A}_n$ nyílt befedést már megválasztottuk, $\mathfrak{A}_{n+1}$ olyan nyílt befedés, hogy st $\mathfrak{A}_{n+1} \ll \mathfrak{A}_n (\cap) (\cap) \mathfrak{B}_{n+1}$. Ekkor (8.2.11) (b) miatt $\mathfrak{A}_n \ll \mathfrak{B}_n$, tehát $\mathfrak{A}_n(x) \subset \mathfrak{B}_n(x)$ minden n-re, úgyhogy $(\mathfrak{A}_n)$ is teljes befedés-sorozat, továbbá (8.2.12) szerint $\mathfrak{A}_{n+1} \lll \mathfrak{A}_n$.

(k) $\Rightarrow$ (a): Ha a $(\mathfrak{B}_n)$ teljes befedéssorozatban $\mathfrak{B}_{n+1} \lll \mathfrak{B}_n$, akkor (8.2.6) szerint az $U_n = U_{\mathfrak{B}_n}$ jelöléssel $\{U_n : n \in \mathbf{N}\}$ ismét uniform bázis, és az általa generált félmetrizálható $\mathfrak{U}$ uniform struktúrára $\mathfrak{T}_{\mathfrak{U}} = \mathfrak{T}$.

(a) $\Rightarrow$ (h): Legyen az $[E, \rho]$ félmetrikus térben $\mathfrak{B}_n$ az $U_{\rho,2^{-n}}(x)$ alakú gömbök rendszere. Ha V x-nek tetszőleges környezete, és $U_{\rho,2^{-n}}(x) \subset V$, akkor a $V' = U_{\rho,2^{-n-1}}(x)$ választással nyilván $\mathfrak{B}_{n+2}(V') \subset U_{\rho,2^{-n}}(x) \subset V$.

(h) $\Rightarrow$ (i): Legyen $(\mathfrak{B}_n)$ a feltételben szereplő tulajdonságú befedéssorozat, és $\mathfrak{A}_n = \mathfrak{B}_1 (\cap) \dots (\cap) \mathfrak{B}_n$. Ekkor $\mathfrak{A}_n$ is nyílt befedés, $\mathfrak{A}_{n+1} \ll \mathfrak{A}_n$ minden n-re, és $\mathfrak{A}_n \ll \mathfrak{B}_n$ miatt $\mathfrak{A}_n(V') \subset \mathfrak{B}_n(V')$ folytán $(\mathfrak{A}_n)$ is ugyanolyan tulajdonságú, mint $(\mathfrak{B}_n)$.

Megmutatjuk, hogy $\mathfrak{T}$ egészen normális. Legyen $\mathfrak{C}$ E-nek tetszőleges nyílt befedése és $\mathfrak{D}$ azoknak a nyílt D halmazoknak rendszere, amelyekhez található olyan $n \in \mathbf{N}$, $A \in \mathfrak{A}_n$ és $C \in \mathfrak{C}$, hogy $D \subset A$, és $\mathfrak{A}_n(D) \subset C$. Minden ilyen D-hez válaszszuk meg és rögzítsük az előbbi tulajdonságú n számot. $\mathfrak{D}$ nyílt befedése E-nek, mert $x \in E$ esetén van olyan $C \in \mathfrak{C}$, hogy $x \in C$, s ehhez olyan nyílt V környezete x-nek és olyan $n \in \mathbf{N}$, hogy $\mathfrak{A}_n(V) \subset C$; ha $x \in A \in \mathfrak{A}_n$, akkor a $D = A \cap V$ jelöléssel $x \in D \in \mathfrak{D}$. Másrészt ha $x \in E$, és az x-et tartalmazó $\mathfrak{D}$-beli D halmazokhoz hozzárendelt n számok legkisebbike n_0, s ez a $D_0 \in \mathfrak{D}$ halmazhoz tartozik, úgyhogy tehát $x \in D_0$, akkor

$$\mathfrak{D}(x) \subset \bigcap_{n=n_0}^{\infty} \mathfrak{A}_n(x) \subset \mathfrak{A}_{n_0}(x) \subset \mathfrak{A}_{n_0}(D_0),$$

s az utóbbi halmaz egy $C \in \mathfrak{C}$-nek része. Eszerint st $\mathfrak{D} \ll \mathfrak{C}$.

Belátjuk még, hogy $(\mathfrak{A}_n)$ teljes befedéssorozat. Valóban, ha x-nek V tetszőleges környezete, s hozzá x-nek V' környezete és $n \in \mathbf{N}$ úgy van választva, hogy $\mathfrak{A}_n(V') \subset V$, akkor annál inkább $\mathfrak{A}_n(x) \subset V$. ∎

(2.5.5) mutatja, hogy a (8.4.5)-beli feltételek bármelyikéhez hozzávéve a (T_0) axiómát, a tér metrizálhatóságának szükséges és elégséges feltételét nyerjük.

8.4.d. Alkalmazások. A (8.4.5) (b) feltételből rögtön kiolvasható (7.3.36) általánosításaként:

(8.4.6) *Minden reguláris M_2-tér félmetrizálható.* ∎

Viszont (8.4.5) (e) és (8.3.9) alapján kimondhatjuk:

(8.4.7) *Minden félmetrizálható Lindelöf-tér M_2-tér.*

(8.3.23) mintájára kimondható:

(8.4.8) *Ha az $[E, \mathfrak{T}]$ topologikus térben $E = \bigcup_{i \in I} E_i$, mindegyik E_i nyílt, $i \neq j$ esetén $E_i \cap E_j = \emptyset$, és $\mathfrak{T}|E_i$ minden i-re félmetrizálható, akkor $\mathfrak{T}$ is félmetrizálható.*

Bizonyítás. Minden i-re felvéve $\mathfrak{T}|E_i$-nek egy $\mathfrak{B}_i$ σ-lokálisan véges bázisát, nyilvánvaló, hogy $\mathfrak{B} = \bigcup_{i\in I} \mathfrak{B}_i$ $\mathfrak{T}$-nek lesz σ-lokálisan véges bázisa, és (8.4.5)-ből következik az állítás. ∎

(8.4.9) *Egy* $[E, \mathfrak{T}]$ *lokálisan kompakt* S_2*-tér pontosan akkor félmetrizálható, ha* $E = \bigcup_{i\in I} E_i$, E_i *nyílt,* $i \neq j$ *esetén* $E_i \cap E_j = \emptyset$, *és* $\mathfrak{T}|E_i$ M_2*-topológia minden i-re.*

Bizonyítás. Ha $\mathfrak{T}$ félmetrizálható, akkor (8.3.16) szerint parakompakt, és így E (8.3.24) értelmében diszjunkt, nyílt E_i halmazok egyesítéseként írható fel úgy, hogy minden i-re $\mathfrak{T}|E_i$ σ-kompakt, tehát (8.3.20) szerint Lindelöf-féle. Minthogy persze $\mathfrak{T}|E_i$ félmetrizálható is, azért (8.4.7) szerint M_2-topológia.

Megfordítva, ha E a tételben megfogalmazott alakú, akkor $\mathfrak{T}|E_i$ reguláris (hiszen (5.3.54) szerint $\mathfrak{T}$ reguláris), és így (8.4.6) szerint félmetrizálható, s akkor (8.4.8) szerint maga $\mathfrak{T}$ is ilyen. ∎

8.4.e. Szomszédsági terek metrizálhatósága. Érdemes megjegyezni, hogy a (8.4.5) (k) feltételhez hasonló feltételt lehet adni szomszédsági terek (fél)metrizálhatóságára is, vagyis arra, hogy $\mathfrak{S} = \mathfrak{S}_\rho$ legyen alkalmas ρ eltérés (távolság) mellett. Legyen e célból $[E, \mathfrak{S}]$ szomszédsági tér; az E halmaz $\mathfrak{C}$ befedését $\mathfrak{S}$**-befedés**nek fogjuk mondani, ha bármely $A \subset E$ halmazra $A \,\bar{\mathfrak{S}}\, E - \mathfrak{C}(A)$.

(8.4.10) *Az* $[E, \mathfrak{S}]$ *szomszédsági tér pontosan akkor félmetrizálható, ha megadható* E $\mathfrak{S}$*-befedéseinek olyan* $(\mathfrak{C}_n)$ *sorozata, hogy* $\mathfrak{C}_{n+1} \lll \mathfrak{C}_n$, *és* $A \,\bar{\mathfrak{S}}\, B$ *esetén alkalmas n-re* $\mathfrak{C}_n(A) \cap B = \emptyset$.

Bizonyítás. Ha $\mathfrak{S} = \mathfrak{S}_\rho$ egy ρ eltéréssel, és $\mathfrak{C}_n$ az $S(x, 2^{-n})$ gömbökből álló befedés, akkor a tétel kikötései nyilván teljesülnek, hiszen $\rho(A, E - \mathfrak{C}_n(A)) \geqq 2^{-n}$, mihelyt $A \neq \emptyset$, $E - \mathfrak{C}_n(A) \neq \emptyset$, $\mathfrak{C}_{n+1}(x) \subset S(x, 2^{-n})$, és $2^{-n} < \rho(A, B)$ esetén $\mathfrak{C}_{n-1}(A) \cap B \neq \emptyset$.

Legyen másrészt $(\mathfrak{C}_n)$ a mondott tulajdonságú befedéssorozat, és $U_n = U_{\mathfrak{C}_n} \subset E\times E$. (8.2.6) szerint $U_{n+1} \circ U_{n+1} \subset U_n$, úgyhogy $\{U_n : n \in \mathbf{N}\}$ uniform bázisa egy (4.2.33) alapján félmetrizálható $\mathfrak{U}$ uniform struktúrának. Minthogy (8.2.7) szerint $U_n(A) = \mathfrak{C}_n(A)$ minden $A \subset E$ halmazra, azért $A \,\bar{\mathfrak{S}}\, B$ pontosan akkor áll, ha legalább egy n-re $U_n(A) \cap B = \emptyset$, úgyhogy $\mathfrak{S}_{\mathfrak{U}} = \mathfrak{S}$. ∎

(2.5.5) és (3.1.16) alapján hozzátehetjük:

(8.4.11) *Az* $[E\,\mathfrak{S}]$ *szomszédsági tér pontosan akkor metrizálható, ha szeparált, és megadható a* (8.4.10) *alatti tulajdonságú befedéssorozata.* ∎

8.4.f. Metrizálható terek folytonos, zárt képei. A metrizálhatósági feltételek további alkalmazásaként azt a kérdést vizsgáljuk, milyen feltételek mellett lesz egy metrizálható tér képe is metrizálható. A diszkrét terek metrizálhatósága mutatja, hogy ehhez a leképezés folytonossága egymagában nem elég. A következő tétel szerint még folytonos, zárt leképezés esetén is szükség van további megszorításra:

(8.4.12) *Legyen* $[X, \mathfrak{T}_1]$ *és* $[Y, \mathfrak{T}_2]$ *topologikus tér,* $\mathfrak{T}_1$ *(fél)metrizálható,* $f : X \to Y$ $(\mathfrak{T}_1, \mathfrak{T}_2)$*-folytonos és zárt leképezés. A következő állítások egyenértékűek:*

(a) $\mathfrak{T}_2$ *(fél)metrizálható;*

(b) $\mathfrak{T}_2$ M_1*-topológia;*

(c) $y \in Y$ *esetén* mar $f^{-1}(\bar{y})$ $\mathfrak{T}_1$*-kompakt.*

Ha $\mathcal{T}_1$ metrizálható, akkor (c)*-ben* mar $f^{-1}(\bar{y})$ *helyett* mar $f^{-1}(y)$ *írható.*

Bizonyítás. (a) $\Rightarrow$ (b): Triviális.

(b) $\Rightarrow$ (c): Ha $H=$ mar $f^{-1}(\bar{y})\subset f^{-1}(\bar{y})$ nem volna $\mathcal{T}_1$-kompakt, akkor (5.3.33) szerint nem lehetne megszámlálhatóan kompakt sem, és így (5.3.31) értelmében volna H-ban olyan (x_n) sorozat, amelynek nincsen torlódási pontja. Legyen ρ olyan eltérés X-en, hogy $\mathcal{T}_1=\mathcal{T}_\rho$, (V_n) pedig (2.4.13) felhasználásával y-nak olyan nyílt $\mathcal{T}_2$-környezetbázisa, hogy $V_{n+1}\subset V_n$ $(n\in\mathbf{N})$. (7.4.14) folytán $\mathcal{T}_2$ S_1-topológia, és így $\bar{y}\subset V_n$ minden n-re, tehát $f^{-1}(V_n)\supset H$. Válasszunk olyan z_n pontokat, hogy

$$z_n\in f^{-1}(V_n)-f^{-1}(\bar{y}),\qquad \rho(x_n,z_n)<\frac{1}{n}.$$

Ekkor nyilván (z_n)-nek sincsen torlódási pontja, és így $F=\bigcup\limits_1^\infty \bar{z}_n$ zárt halmaz, hiszen $x\in X-F$ esetén x alkalmas nyílt környezete csak véges számú z_n-t tartalmaz s egyúttal csak véges számú $\bar{z}_n$-t metsz, és belőle e $\bar{z}_n$-okat levonva x-nek F-et nem metsző környezetét kapjuk. Minthogy $z_n\in X-f^{-1}(\bar{y})$, azért $\mathcal{T}_1$ S_1-volta miatt $\bar{z}_n\subset X-f^{-1}(\bar{y})$, tehát $f(\bar{z}_n)\cap\bar{y}=\emptyset$ minden n-re, és $f(F)\cap\bar{y}=\emptyset$. Másrészt $f(z_n)\in V_n$ miatt $f(z_n)\to y$, ami lehetetlen, mert $f(z_n)\in f(F)$, és $f(F)$ zárt, $y\notin f(F)$.

(c) $\Rightarrow$ (a): Legyen ismét ρ $\mathcal{T}_1$-et indukáló eltérés, és $y\in Y$, $n\in\mathbf{N}$ esetén

$$Z(y)=f^{-1}(\bar{y}),\ H(y)=\text{mar}\,Z(y)\subset Z(y),$$

$$G_n(y)=Z(y)\cup\{x:\rho(x,H(y))<2^{-n}\}.$$

$H(y)=\emptyset$ esetén itt a második tag az üres halmazzal pótlandó, ekkor tehát $G_n(y)=Z(y)$ minden n-re.

Világos, hogy $G_n(y)$ $\mathcal{T}_1$-nyílt, és így a

$$V_n(y)=Y-f(X-G_n(y))$$

jelöléssel

$$y\in\bar{y}\subset V_n(y)$$

és $V_n(y)$ nyíltsága miatt $V_n(y)$ y-nak $\mathcal{T}_2$-környezete. Ezenkívül $\{V_n(y):n\in\mathbf{N}\}$ y-nak környezetbázisa, hiszen ha $V\neq Y$ y-nak tetszőleges nyílt környezete, akkor $\mathcal{T}_2$-nek S_1-volta folytán $\bar{y}\subset V$, $H(y)\subset Z(y)\subset f^{-1}(V)$, tehát $H(y)=\emptyset$ esetén $G_n(y)=Z(y)\subset f^{-1}(V)$ minden n-re, a $H(y)\neq\emptyset$ esetben pedig $H(y)$ kompaktsága miatt van olyan $\varepsilon>0$, hogy $x\in H(y)$ esetén $\rho(x,X-f^{-1}(V))\geqq\varepsilon$, $2^{-n}<\varepsilon$ mellett tehát $G_n(y)\subset f^{-1}(V)$, és mindkét esetben $V_n(y)\subset f(G_n(y))\subset V$. Világos az is, hogy

$$G_{n+1}(y)\subset G_n(y).$$

Legyen

$$\mathfrak{B}_n=\{V_n(y):y\in Y\}.$$

Ez Y-nak nyílt befedése. Megmutatjuk, hogy a $\mathfrak{B}_n$ befedések teljes befedéssorozatot alkotnak. Legyen e célból $y\in Y$, $m\in\mathbf{N}$. Meg kell mutatnunk, hogy alkalmas n-re $\mathfrak{B}_n(y)\subset V_m(y)$, azaz, hogy van olyan $n\in\mathbf{N}$, amelyre $u\in Y$, $y\in V_n(u)$ esetén $V_n(u)\subset V_m(y)$.

Mármost $y \in V_n(u)$-ból $\bar{y} \subset V_n(u)$, $Z(y) \subset G_n(u)$ következik, s viszont $G_n(u) \subset$ $\subset G_m(y)$ maga után vonja, hogy $V_n(u) \subset V_m(y)$. Így azt kell belátnunk, hogy alkalmas n-re $Z(y) \subset G_n(u)$ esetén $G_n(u) \subset G_m(y)$.

Tegyük fel ezzel ellentétben, hogy minden $n \geqq m$-re van olyan $u_n \in Y$, hogy $Z(y) \subset G_n(u_n)$, de $G_n(u_n) - G_m(y) \neq \emptyset$. Ekkor $\bar{y} \cap \bar{u}_n = \emptyset$, hiszen $\bar{y} \cap \bar{u}_n \neq \emptyset$ esetén (S_1) miatt $\bar{y} = \bar{u}_n$ volna, azaz $Z(y) = Z(u_n)$, $G_n(u_n) = G_n(y)$, ami $n \geqq m$ esetén lehetetlen. Így $Z(y) \cap Z(u_n) = \emptyset$ is áll.

Ha $H(u_n) = \emptyset$, volna, akkor $G_n(u_n) = Z(u_n)$, tehát $Z(y) \subset Z(u_n)$ következnék az előbbiekkel ellentétben. Így $H(u_n) \neq \emptyset$, és $Z(y) \cap Z(u_n) = \emptyset$ miatt

$$Z(y) \subset \{x : \rho(x, H(u_n)) < 2^{-n}\}.$$

Legyen $x \in Z(y)$, $x_n \in H(u_n)$ pedig olyan, hogy $\rho(x, x_n) < 2^{-n}$. Ekkor $x_n \to x$, tehát $f(x_n) \to f(x)$, és $f(x_n) \in \bar{u}_n$, $f(x) \in \bar{y}$ miatt y-nak minden nyílt V környezete tartalmazza $f(x)$-et s vele $f(x_n)$-t és $\bar{u}_n$-t is elég nagy n-re (itt ismét (S_1)-re hivatkoztunk, amelyből $\overline{f(x_n)} = \bar{u}_n$ következik).

Ha most van olyan $n > m$, hogy $Z(u_n) \subset G_{m+1}(y)$, akkor $x \in H(u_n)$ esetén $\rho(x, H(y)) < 2^{-m-1}$, s innen

$$G_n(u_n) \subset G_{m+1}(y) \cup \{x : \rho(x, H(y)) < 2^{-m-1} + 2^{-n}\} \subset G_{m+1}(y) \cup G_m(y) = G_m(y).$$

Eszerint minden $n > m$-re van olyan $x_n \in Z(u_n)$, hogy $x_n \notin G_{m+1}(y)$, s akkor $\bar{x}_n \cap G_{m+1}(y) = \emptyset$.

Ha ennek az (x_n) sorozatnak nincs torlódási pontja, akkor $F = \bigcup_{m+1}^{\infty} \bar{x}_n$ zárt halmaz, így $f(F)$ is zárt, továbbá $f(F) = \bigcup_{m+1}^{\infty} \bar{u}_n$, tehát $\bar{y} \cap f(F) = \emptyset$, és az előbbiek szerint $Y - f(F)$ tartalmazná $\bar{u}_n$-t elég nagy n-re; ellentmondás.

Ha (x_n)-nek van egy x torlódási pontja, akkor van egy x-hez tartó (x_{n_k}) részsorozata is, s persze $x \notin G_{m+1}(y)$. Most $F = \bar{x} \cup \bigcup_{1}^{\infty} \bar{x}_{n_k}$ lesz zárt halmaz, hiszen $z \in X - F$ esetén $\mathcal{T}_1$ S_2-tulajdonsága miatt van x-nek és z-nek diszjunkt nyílt V_1 és V_2 környezete, és véges számú kivétellel $\bar{x}_{n_k} \subset V_1$, a többinek lezárását pedig V_2-ből levonva, z-nek F-et nem metsző környezetét nyerjük. $F \cap G_{m+1}(y) = \emptyset$ miatt természetesen $\bar{y} \cap f(F) = \emptyset$, $Y - f(F)$ ismét tartalmazza $\bar{u}_{n_k}$-t elég nagy k-ra, holott $f(x_{n_k}) \in \bar{u}_{n_k}$: ellentmondás.

Minthogy $\mathcal{T}_2$ számára van teljes befedéssorozat, (8.4.5) (i)-re tekintettel azt kell még észrevenni, hogy $\mathcal{T}_2$ egészen normális. Ez azonban (8.3.52) alapján (8.3.16)-ból és (8.3.15)-ből következik.

Ha $\mathcal{T}_1$ metrizálható, tehát T_1-topológia, akkor (7.4.14) szerint $\mathcal{T}_2$ is ilyen, és $\bar{y} = y$, $\operatorname{mar} f^{-1}(\bar{y}) = \operatorname{mar} f^{-1}(y)$. ∎

8.4.g. Gyakorlatok. 1. Adjunk meg az $[\mathbf{R}, \mathcal{E}]$ térben

(a) reguláris bázist;

(b) pont-reguláris, de nem reguláris bázist;

(c) nem pont-reguláris bázist.

[Az $\left(\frac{m}{n}, \frac{m+2}{n}\right)$ $(m=0, \pm 1, \pm 2, \ldots;\ n \in \mathbf{N})$ intervallumok rendszere; az előbbiek és a $\left[0, \frac{1}{n}\right) \cup (n, +\infty)$ $(n \in \mathbf{N})$ halmazok; a racionális végpontú intervallumok.]

2. Mutassuk meg, hogy $\overline{\mathfrak{E}}$ számára nincsen pont-reguláris bázis.

3. Mutassuk meg, hogy ha $\mathfrak{B}$ (pont-)reguláris bázis az $[E, \mathfrak{T}]$ topologikus térben, és $\emptyset \neq A \subset E$, akkor $\mathfrak{B}\,(\cap)\,\{A\}$ ugyanilyen bázis $\mathfrak{T}|A$ számára.

4. Mutassuk meg, hogy $\mathfrak{E}^+$ tökéletesen normális.

[Ha G $\mathfrak{E}^+$-nyílt, akkor $\mathfrak{E}^+|G$ Lindelöf-féle tulajdonsága miatt $G = \bigcup_1^\infty [a_i, b_i)$.]

5. Mutassuk meg, hogy ha E megszámlálhatóan végtelen, akkor minden $\mathfrak{F}_E$-nyílt halmaz megszámlálható sok $\mathfrak{F}_E$-zárt halmaz egyesítése, de $\mathfrak{F}_E$ nem normális.

6. Mutassuk meg, hogy a **7.1.** alatti 9. feladatban értelmezett $[E, \mathfrak{T}]$ tér az $E_i = \mathbf{I}$, $\mathfrak{T}_i = \mathfrak{E}|\mathbf{I}$ választással egészen normális, de nem tökéletesen normális.

7. Legyen $[E, \mathfrak{T}]$ normális tér, $F = \bigcap_1^\infty G_n$, F zárt, G_n nyílt. Mutassuk meg, hogy

(a) van olyan $\mathfrak{T}$-folytonos f függvény, hogy $x \in F$ esetén $f(x) = 0$, $x \in E - F$ esetén $f(x) > 0$;

(b) $\mathfrak{T}$ pontosan akkor tökéletesen normális, ha a **6.4.** alatti 8. feladat jelölésével $\mathfrak{Z}$ a zárt halmazok rendszerével azonos.

[Ha f_n F-et és $(E - G_n)$-t szétválasztó függvény, legyen $f = \sum_1^\infty 2^{-n} f_n$.]

8. Mutassuk meg, hogy egy tökéletesen normális térnek minden normális (speciálisan minden zárt) altere is tökéletesen normális.

9. Mutassuk meg, hogy a 78. oldalon értelmezett T_2-térnek van σ-diszkrét bázisa, de nem metrizálható.

[A tér nem-reguláris M_2-tér.]

10. Mutassuk meg, hogy $\overline{\mathfrak{E}}$ multinormális és van olyan $\mathfrak{B} = \bigcup_1^\infty \mathfrak{B}_n$ bázisa, hogy $\mathfrak{B}_n$ pontonként véges, azonban $\overline{\mathfrak{E}}$ nem tökéletesen normális.

11. Adjunk példát olyan T_0-térre, amelynek van reguláris bázisa, de nem metrizálható.

[$E = \{0,1\}$, $\mathfrak{T}$-nyílt $\emptyset$, $\{0\}$, E.]

12. Adjunk példát olyan multinormális T_0-térre, amelynek van pont-reguláris bázisa, de nem metrizálható.

13. Mutassuk meg, hogy a 9. feladatban említett nem-metrizálható T_2-térben van teljes befedéssorozat.

[$\mathfrak{B}_n$ álljon a 0-t nem tartalmazó $\frac{1}{n}$ hosszúságú nyílt intervallumokból, továbbá az $I - A$ alakú halmazokból, ahol I 0-t tartalmazó $\frac{1}{n}$ hosszúságú intervallum, $A = \left\{\frac{1}{k} : k \in \mathbf{N}\right\}$.]

14. Mutassuk meg, hogy ha $[X, \mathcal{T}_1]$ és $[Y, \mathcal{T}_2]$ topologikus tér, $f: X \to Y$ folytonos és zárt, $\mathcal{T}_1$ tökéletesen normális, akkor $\mathcal{T}_2$ is tökéletesen normális.

15. Adjuk meg **R**-nek olyan $\mathfrak{Z}$ felbontását, hogy a p kanonikus szuperjekció $(\mathcal{E}, p(\mathcal{E}))$-zárt legyen, és $z \in \mathfrak{Z}$ esetén

(a) mar $p^{-1}(z)$ kompakt, de $p^{-1}(z)$ nem minden z-re kompakt;

(b) mar $p^{-1}(z)$ nem minden z-re kompakt.

[$\mathfrak{Z}$ álljon $\{x\}$-ből, ha $|x| < 1$, továbbá $(-\infty, -1]$-ből és $[1, +\infty)$-ből; $\mathfrak{Z}$ álljon $\{x\}$-ből, ha x nem egész szám, és az egész számok Z halmazából.]

IX. BAIRE-FÉLE TEREK

9.1. RITKA ÉS SOVÁNY HALMAZOK

9.1.a. Ritka halmazok. A következőkben egy topologikus térben olyan halmazokat akarunk vizsgálni, amelyeket bizonyos értelemben „kicsinynek" lehet tekinteni. Kézenfekvő erre a célra olyan definíciót választani, amely mellett egy „kicsiny" halmaznak minden része is „kicsiny", és két (tehát véges számú) „kicsiny" halmaz egyesítése is „kicsiny" (vagyis a „kicsiny" halmazok ideált alkotnak).

Az első kikötésnek eleget tesznek pl. azok a halmazok, amelyeknek nincs belső pontjuk; a másodiknak azonban általában nem, amit az $\mathbf{R} = \mathbf{Q} \cup (\mathbf{R} - \mathbf{Q})$ felbontás mutat az $\mathfrak{E}$ topológiára nézve. Megfelelő definícióhoz jutunk azonban ennek egy kis módosításával; az $[E, \mathfrak{T}]$ topologikus térben az A halmazt **ritká**nak (másként **sehol sem sűrű**nek) mondjuk, ha $\operatorname{int} \bar{A} = \emptyset$. Ekkor az $\bar{X}$ és $\operatorname{int} X$ műveletek monotonitása miatt:

(9.1.1) *Ritka halmaz része is ritka.* ∎

Második kikötésünknél általánosabban érvényes:

(9.1.2) *Ha A ritka, és* $\operatorname{int} B = \emptyset$, *akkor* $\operatorname{int}(A \cup B) = \emptyset$.

Bizonyítás. Bármely x pont bármely nyílt V környezetében van olyan $y \in V$, hogy $y \notin \bar{A}$, és y-nak $V - \bar{A}$ nyílt környezetében olyan $z \in V - \bar{A}$, hogy $z \notin B$. Így $z \in V - (A \cup B)$. ∎

Ebből aztán adódik:

(9.1.3) *Ha A és B ritka, akkor $A \cup B$ is az.*

Bizonyítás. Ha $\operatorname{int} \bar{A} = \operatorname{int} \bar{B} = \emptyset$ akkor $\bar{\bar{A}} = \bar{A}$ miatt $\bar{A}$ is ritka, tehát $\operatorname{int}(\bar{A} \cup \bar{B}) = \operatorname{int} \overline{A \cup B} = \emptyset$ (9.1.2) szerint. ∎

(9.1.1)-ből és az imént felhasznált $\bar{\bar{A}} = \bar{A}$ egyenlőségből kiolvasható:

(9.1.4) *A pontosan akkor ritka, ha $\bar{A}$ ritka.* ∎

A zárt, ritka halmazok jellemzésének érdekében a halmaz határának fogalmát használhatjuk fel:

(9.1.5) *Legyen $[E, \mathfrak{T}]$ topologikus tér, $A \subset E$. A következő állítások egyenértékűek:*

(a) *A ritka és zárt;*

(b) $A = \operatorname{mar} A$;

(c) $A = \operatorname{mar} \bar{A}$;

(d) $A = \operatorname{mar}(E - A)$;

(e) $A = \operatorname{mar}(E - \bar{A})$;

(f) *A azonos egy nyílt halmaz határával;*

(g) *A azonos egy zárt halmaz határával.*

Bizonyítás. (a) $\Rightarrow$ (b): $A = \bar{A}$, $\operatorname{int} \bar{A} = \emptyset$, tehát (2.2.20) szerint $\operatorname{mar} A = \bar{A} - \operatorname{int} A = \bar{A} - \operatorname{int} \bar{A} = \bar{A} = A$.

(b) $\Rightarrow$ (c): $\operatorname{mar} A$ zártsága miatt $A = \bar{A}$.

(c) $\Rightarrow$ (d): $\operatorname{mar} \bar{A}$ zártsága miatt $A = \bar{A}$, tehát $A = \operatorname{mar} A = \operatorname{mar}(E - A)$, ismét (2.2.20)-ra hivatkozva.

(d) $\Rightarrow$ (e): mar $(E - A)$ zártsága folytán $A = \bar{A}$.

(e) $\Rightarrow$ (f): Triviális.

(f) $\Rightarrow$ (g): $A = \operatorname{mar} G = \operatorname{mar}(E - G)$.

(g) $\Rightarrow$ (a): ha F zárt, akkor $\operatorname{mar} F$ is zárt, továbbá ritka is, hiszen

$$x \in \operatorname{int} \overline{\operatorname{mar} F} = \operatorname{int} \operatorname{mar} F = \operatorname{int}(\bar{F} - \operatorname{int} F) \subset \operatorname{int} \bar{F} = \operatorname{int} F$$

a $\operatorname{mar} F = \bar{F} - \operatorname{int} F$ egyenlőséggel ellentétben áll. ∎

(9.1.6) *Legyen $[E, \mathfrak{T}]$ topologikus tér, $\emptyset \neq E_0 \subset E$, $A \subset E_0$. Ha A $\mathfrak{T}|E_0$-ritka, akkor $\mathfrak{T}$-ritka is. Megfordítva, ha A $\mathfrak{T}$-ritka, és E_0 $\mathfrak{T}$-nyílt, vagy egy $\mathfrak{T}$-nyílt halmaz $\mathfrak{T}$-lezárása, akkor A $\mathfrak{T}|E_0$-ritka.*

Bizonyítás. Tegyük fel, hogy A $\mathfrak{T}|E_0$-ritka, és $\operatorname{int} \bar{A} = G \neq \emptyset$. Ekkor $G \cap E_0 \neq \emptyset$, hiszen $G \subset \bar{A} \subset \bar{E}_0$, és $G \cap E_0 \subset \bar{A} \cap E_0$; eszerint A-nak $\mathfrak{T}|E_0$-lezárása tartalmaz nem-üres $\mathfrak{T}|E_0$-nyílt halmazt, holott A $\mathfrak{T}|E_0$-ritka. Így $\operatorname{int} \bar{A} = \emptyset$.

Legyen most A $\mathfrak{T}$-ritka, és E_0 $\mathfrak{T}$-nyílt. Ha volna olyan $\mathfrak{T}$-nyílt G, hogy $\emptyset \neq G \cap E_0 \subset \bar{A} \cap E_0$, akkor $G \cap E_0$ $\mathfrak{T}$-nyíltsága miatt $\operatorname{int} \bar{A} \neq \emptyset$ volna; emiatt A $\mathfrak{T}|E_0$-lezárásának $\mathfrak{T}|E_0$-belseje üres, azaz A $\mathfrak{T}|E_0$-ritka.

Végül ha $E_0 = \bar{E}_1$, és E_1 $\mathfrak{T}$-nyílt, akkor $A \subset (A \cap E_1) \cup (E_0 - E_1)$. Itt $A \cap E_1$ $\mathfrak{T}|E_1$-ritka az előbbi eredmény szerint, s akkor $\mathfrak{T}|E_0$-ritka is az első megállapítás szerint. $E_0 - E_1$ viszont a $\mathfrak{T}$-nyílt s emiatt $\mathfrak{T}|E_0$-nyílt E_1 halmaz $\mathfrak{T}$-lezárásának, azaz $\mathfrak{T}|E_0$-lezárásának és E_1-nek különbségeként E_1-nek $\mathfrak{T}|E_0$-határával azonos, és így (9.1.5) szerint $\mathfrak{T}|E_0$-ritka; (9.1.1) és (9.1.3) szerint ugyanez mondható A-ról is. ∎

(9.1.7) *Ha A minden pontjának van olyan V környezete, hogy $V \cap A$ ritka, akkor A is ritka.*

Bizonyítás. Ellenkező esetben legyen $x \in \operatorname{int} \bar{A}$, és V x-nek tetszőleges környezete. A $G = \operatorname{int} V \cap \operatorname{int} \bar{A}$ jelöléssel G nyílt, $x \in G$, és $G \subset \bar{A}$ miatt $G \subset \overline{A \cap G} \subset \overline{A \cap V}$, tehát $x \in \operatorname{int} \overline{A \cap V}$, és $A \cap V$ nem ritka. ∎

9.1.b. Sovány halmazok. Megszámlálható sok ritka halmaz egyesítése már nem mindig ritka; például az $[\mathbf{R}, \mathfrak{E}]$ térben a $\bar{\mathbf{Q}} = \mathbf{R}$ miatt nem-ritka $\mathbf{Q}$ halmaz megszámlálható sok egy pontból álló s ezért evidensen ritka halmaz egyesítése. Ezt a meggondolást a $[\mathbf{Q}, \mathfrak{E}|\mathbf{Q}]$ térre alkalmazva látható, hogy akár az egész tér is lehet megszámlálható sok ritka halmaz egyesítése.

Vezessük ezért be a következő elnevezést: egy topologikus térben egy halmazt **sovány**nak (másként **első kategóriájú**nak) mondunk, ha megszámlálható sok ritka halmaz egyesítéseként írható.

(9.1.8) *Minden ritka halmaz sovány.* ∎

(9.1.9) *Sovány halmaz része és megszámlálható sok sovány halmaz egyesítése is sovány.* ∎

Nevezetes, de jóval nehezebben bizonyítható, (9.1.7) következő megfelelője:

(9.1.10) *Egy $[E, \mathfrak{T}]$ topologikus térben egy $A \subset E$ halmaz pontosan akkor sovány, ha minden $x \in A$ pontnak van olyan V környezete, hogy $V \cap A$ sovány.*

Bizonyítás. A feltétel szükségessége a $V = E$ választással evidens. Tegyük fel, hogy a feltétel teljesül.

Tekintsük az olyan nyílt $G \neq \emptyset$ halmazokat, amelyekre $G \cap A$ sovány, és az ilyenekből álló diszjunkt $\{G_i : i \in I\}$ rendszereket (vagyis az olyanokat, hogy $i \neq j$ esetén $G_i \cap G_j = \emptyset$). Világos, hogy ezeknek összessége induktív rendszer, úgyhogy az (1.1.28) Kuratowski—Zorn-féle lemma következtében van közöttük maximális. Legyen $\{G_i : i \in I\}$ ilyen, és $G = \bigcup_{i \in I} G_i$.

Ekkor $A \subset \bar{G}$, mert $x \in A - \bar{G}$ esetén (9.1.8) miatt volna x-nek olyan nyílt V környezete, hogy $V \cap A$ sovány, és $V \cap G = \emptyset$, ez pedig a $\{G_i : i \in I\}$ rendszer maximalitásának mond ellent. Így $A - G \subset \bar{G} - G = \text{mar}\, G$, tehát $A - G$ (9.1.5) és (9.1.1) folytán ritka.

Minthogy $A \cap G_i$ sovány minden i-re, mondjuk $A \cap G_i = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_{in}$, ahol A_{in} ritka, azért az $A_n = \bigcup_{i \in I} A_{in}$ jelöléssel $A_n \cap G_i = A_{in}$ ritka minden i-re, tehát (9.1.7) szerint A_n is ritka, hiszen A_n minden pontja valamelyik G_i-ben van, s akkor G_i e pontnak olyan környezete, amely A_n-t ritka halmazban metszi. Mármost $A \cap G = \bigcup_{i \in I} (A \cap G_i) = \bigcup_{i \in I} \bigcup_{n=1}^{\infty} A_{in} = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ mutatja, hogy $A \cap G$ sovány; láttuk, hogy $A - G$ ritka, tehát A is sovány. ∎

(9.1.6) következtében kimondható még:

(9.1.11) *Legyen $[E, \mathfrak{T}]$ topologikus tér, $\emptyset \neq E_0 \subset E$, $A \subset E_0$. Ha A $\mathfrak{T}|E_0$-sovány, akkor $\mathfrak{T}$-sovány is. Megfordítva, ha A $\mathfrak{T}$-sovány, és E_0 $\mathfrak{T}$-nyílt, vagy egy $\mathfrak{T}$-nyílt halmaz $\mathfrak{T}$-lezárása, akkor A $\mathfrak{T}|E_0$-sovány is.* ∎

9.1.c. Gyakorlatok. 1. Mutassuk meg, hogy az $[\mathbf{R}, \bar{\mathfrak{E}}]$ térben A pontosan akkor ritka, ha alulról korlátos.

2. Adjunk példát egy E halmazra, olyan E fölötti $\mathfrak{T}_1$ és $\mathfrak{T}_2$ topológiára, továbbá $A, B \subset E$ részhalmazokra, hogy $\mathfrak{T}_1 < \mathfrak{T}_2$, A $\mathfrak{T}_1$-ritka, de nem $\mathfrak{T}_2$-ritka, B $\mathfrak{T}_2$-ritka, de nem $\mathfrak{T}_1$-ritka.

[$E = \mathbf{R}$, $\mathfrak{T}_1 = \bar{\mathfrak{E}}$, $\mathfrak{T}_2 = \mathfrak{E}$, $A = (0,1)$, $B = \{-n : n \in \mathbf{N}\}$.]

3. Mutassuk meg, hogy $\mathfrak{T}_E$-re nézve a ritka halmazok a véges halmazokkal azonosak.

4. Tekintsük $\mathbf{R}$-en az $\mathfrak{E}$ és $\mathfrak{E}^+$ topológiát, és mutassuk meg, hogy egy $A \subset \mathbf{R}$ halmaz pontosan akkor $\mathfrak{E}^+$-ritka, ha $\mathfrak{E}$-ritka.

[A-nak $\mathfrak{E}^+$-lezárása része $\mathfrak{E}$-lezárásának, s a kettő különbsége megszámlálható; egy halmaz $\mathfrak{E}^+$-belseje pontosan akkor üres, ha $\mathfrak{E}$-belseje üres; ha B $\mathfrak{E}^+$-zárt, M megszámlálható, $a < b$, és $(a, b) \subset B \cup M$, akkor $(a, b) \subset B$.]

5. Mutassuk meg, hogy az $[\mathbf{R}, \mathfrak{E}]$ térben minden megszámlálható halmaz sovány, és adjunk meg egy nem-megszámlálható ritka halmazt.

[A Cantor-halmaz.]

6. Legyen f $\mathbf{R}^2$-en értelmezett parciálisan folytonos (azaz $\mathfrak{E} \times \mathfrak{D}$- és $\mathfrak{D} \times \mathfrak{E}$-folytonos, ahol $\mathfrak{D}$ jelöli $\mathbf{R}$ diszkrét topológiáját) függvény. Mutassuk meg, hogy

(a) ha a $z_0 = (x_0, y_0)$ pontban f nem $\mathscr{E}^2$-folytonos, akkor van olyan racionális q, r szám, továbbá olyan $n \in \mathbf{N}$, hogy $|x - x_0| < \frac{1}{n}$ esetén $q < f(x, y_0) < r$, de z_0 minden $\mathscr{E}^2$-környezetében felvesz f vagy q-nál kisebb, vagy r-nél nagyobb értéket;

(b) az előbbi tulajdonságú z_0 pontok $A_{q,r,n}$ halmaza $\mathscr{E}^2$-ritka;

(c) azok a pontok, amelyekben f nem $\mathscr{E}^2$-folytonos, $\mathscr{E}^2$-sovány halmazt alkotnak.

7. Legyen $[X, \mathscr{T}_1]$ és $[Y, \mathscr{T}_2]$ topologikus tér, f $\mathscr{T}_1 \times \mathscr{D}_Y$- és $\mathscr{D}_X \times \mathscr{T}_2$-folytonos függvény. Mutassuk meg, hogy azok a pontok, amelyekben f nem $\mathscr{T}_1 \times \mathscr{T}_2$-folytonos, $\mathscr{T}_1 \times \mathscr{T}_2$-sovány halmazt alkotnak, ha $\mathscr{T}_1$ metrizálható vagy M_2-topológia.

9.2. BAIRE-FÉLE TEREK

9.2.a. Baire-féle terek. (9.1.9) mutatja, hogy bizonyos értelemben a sovány halmazok is „kicsinynek" tekinthetők, ugyanakkor azonban — láttuk — előfordulhat, hogy az egész tér sovány. Valóban „kicsiny" jellege a sovány halmazoknak az olyan terekben van, amelyekben az egész tér, de még egy (nem-üres) nyílt halmaz sem lehet sovány. **Baire-féle tér**nek nevezzük az olyan topologikus teret, amelyben az üres halmazon kívül más sovány, nyílt halmaz nincs; az ilyen tér topológiáját is Baire-félének mondjuk.

Baire-féle térre példa bármely diszkrét tér (mert benne egyedül az üres halmaz sovány), vagy az $[E, \mathscr{F}_E]$ tér nem-megszámlálható E halmaz esetén (mert benne a ritka halmazok végesek, tehát a soványak megszámlálhatók, a nem-üres nyílt halmazok pedig nem-megszámlálhatók). További, érdekesebb példákat később fogunk látni.

(9.2.1) *Bármely* $[E, \mathscr{T}]$ *topologikus térben a következő állítások egyenértékűek:*

(a) $\mathscr{T}$ *Baire-féle;*

(b) *Ha A sovány, akkor* $\operatorname{int} A = \emptyset$;

(c) *Ha* F_n *zárt, és* $\operatorname{int} F_n = \emptyset$, *akkor* $\operatorname{int}\left(\bigcup_1^\infty F_n\right) = \emptyset$;

(d) *Ha* G_n *nyílt és sűrű, akkor* $\bigcap_1^\infty G_n$ *is sűrű.*

Bizonyítás. (a) $\Rightarrow$ (b): Ha A sovány, akkor (9.1.9) szerint $\operatorname{int} A$ is sovány és nyílt, tehát üres.

(b) $\Rightarrow$ (c): Ha F_n zárt, és $\operatorname{int} F_n = \emptyset$, akkor F_n ritka, tehát $\bigcup_1^\infty F_n$ sovány.

(c) $\Rightarrow$ (d): Ha G_n nyílt és sűrű, akkor $E - G_n$ zárt, és $\operatorname{int}(E - G_n) = \emptyset$, tehát $\operatorname{int}\left(\bigcup_1^\infty (E - G_n)\right) = \operatorname{int}\left(E - \bigcap_1^\infty G_n\right) = \emptyset$, és $\bigcap_1^\infty G_n$ sűrű.

(d) $\Rightarrow$ (a): Ha G nyílt, $G = \bigcup_1^\infty A_n$, és A_n ritka, akkor $G_n = E - \bar{A}_n$ nyílt és sűrű, tehát $\bigcap_1^\infty (E - \bar{A}_n) = E - \bigcup_1^\infty \bar{A}_n$ sűrű, $\operatorname{int}\left(\bigcup_1^\infty \bar{A}_n\right) = \emptyset$; eszerint $G \subset \bigcup_1^\infty \bar{A}_n$ miatt $G = \emptyset$. ∎

(9.2.2) *Ha* $[E, \mathfrak{T}]$ *Baire-féle tér,* $\emptyset \neq E_0 \subset E$, *és* E_0 $\mathfrak{T}$*-nyílt, vagy egy* $\mathfrak{T}$*-nyílt halmaz* $\mathfrak{T}$*-lezárása, akkor* $\mathfrak{T}|E_0$ *is Baire-féle.*

Bizonyítás. Legyen először E_0 $\mathfrak{T}$-nyílt, és $G \cap E_0$ $\mathfrak{T}|E_0$-sovány, ahol G $\mathfrak{T}$-nyílt. Minthogy $G \cap E_0$ $\mathfrak{T}$-nyílt, továbbá (9.1.11) szerint $\mathfrak{T}$-sovány is, azért $G \cap E_0 = \emptyset$.

Ha $E_0 = \bar{E}_1$, E_1 $\mathfrak{T}$-nyílt, és $G \cap E_0$ ismét $\mathfrak{T}|E_0$-sovány, G $\mathfrak{T}$-nyílt, akkor $G \cap E_1 = (G \cap E_0) \cap E_1$ (9.1.11) szerint $\mathfrak{T}|E_1$-sovány és $\mathfrak{T}|E_1$-nyílt, tehát a már bizonyított állítás értelmében üres. Azonban $G \cap \bar{E}_1 \neq \emptyset$ maga után vonná, hogy $G \cap E_1 \neq \emptyset$; így $G \cap E_0 = \emptyset$. ∎

9.2.b. Hipokompakt terek. A Baire-féle terek további fontos példáit kaphatjuk meg a következő fogalom segítségével: a topologikus teret (és topológiáját) **hipokompakt**nak mondjuk, ha van olyan $\mathfrak{B}$ bázisa, hogy $B_n \in \mathfrak{B}$, $B_{n+1} \subset B_n$ $(n \in \mathrm{N})$ esetén $\bigcap_1^\infty \bar{B}_n \neq \emptyset$.

(9.2.3) *Minden lokálisan kompakt* S_2*-tér hipokompakt.*

Bizonyítás. Álljon $\mathfrak{B}$ az $[E, \mathfrak{T}]$ tér összes kompakt lezárású nem-üres, nyílt halmazaiból; (5.3.54) és (5.3.4) mutatja, hogy $\mathfrak{B}$ bázis. Ha $B_n \in \mathfrak{B}$, $B_{n+1} \subset B_n$, akkor $\{\bar{B}_n: n \in \mathrm{N}\}$ a $[\bar{B}_1, \mathfrak{T}|\bar{B}_1]$ kompakt altérben fekvő rács, amelynek van torlódási pontja, úgyhogy $\bigcap_1^\infty \bar{B}_n \neq \emptyset$. ∎

(9.2.4) *Minden teljes félmetrikus tér topológiája hipokompakt.*

Bizonyítás. Tekintsük adott $m \in \mathrm{N}$ mellett az $[E, \rho]$ félmetrikus tér olyan részhalmazait, melyeknek bármely két x, y pontjára $\rho(x, y) \geqq \frac{1}{m}$. Világos, hogy ezeknek a rendszere induktív, úgyhogy az (1.1.28) Kuratowski—Zorn-féle lemma szerint van az említett halmazok között egy M_m maximális halmaz. Álljon $\mathfrak{B}_m$ az $S\left(x, \frac{1}{m}\right)$ gömbökből, ahol $x \in M_m$. Az M_m halmaz maximalitása miatt $\mathfrak{B}_m$ nyílt befedése E-nek, és világos, hogy egy $\mathfrak{B}_m$-beli halmaz sem tartalmazhat egy másik $\mathfrak{B}_m$-beli halmazt.

Legyen $\mathfrak{B} = \bigcup_1^\infty \mathfrak{B}_m$; ez nyilvánvalóan bázisa a $\mathfrak{T}_\rho$ topológiának. Ha most $B_n \in \mathfrak{B}$, $B_{n+1} \subset B_n$, és a (B_n) sorozat tagjai egy indextől kezdve változatlanok, akkor $B_n \neq \emptyset$ miatt $\bigcap_1^\infty \bar{B}_n \neq \emptyset$. Ellenkező esetben készíthetünk olyan (B_{n_k}) részsorozatot, hogy $B_{n_{k+1}} \neq B_{n_k}$. Ebben a részsorozatban bármely $\mathfrak{B}_m$ rendszerből legfeljebb egy tag szerepelhet, úgyhogy $\delta(B_{n_k}) \to 0$; ezért $\{B_{n_k}: k \in \mathrm{N}\}$ Cauchy-rács, s ha ennek limesze x, akkor $x \in \bigcap_1^\infty \bar{B}_{n_k} = \bigcap_1^\infty \bar{B}_n$. ∎

(9.2.5) *Minden hipokompakt, reguláris tér Baire-féle.*

Bizonyítás. Legyen G nyílt, $G = \bigcup_1^\infty A_n$, A_n ritka, s tegyük fel, hogy $G \neq \emptyset$. Ekkor $G - \bar{A}_1 \neq \emptyset$, s egy $x \in G - \bar{A}_1$ ponthoz a regularitás miatt megválaszthatjuk a hipokompaktság definíciójában szereplő $\mathfrak{B}$ bázisnak olyan $B_1 \in \mathfrak{B}$ elemét, hogy $x \in B_1 \subset \bar{B}_1 \subset G - \bar{A}_1$. Minthogy $B_1 - \bar{A}_2 \neq \emptyset$, ugyanígy találhatunk olyan $B_2 \in \mathfrak{B}$ halmazt, hogy $\bar{B}_2 \subset B_1 - \bar{A}_2$, és készíthetünk olyan $\mathfrak{B}$-beli (B_n) sorozatot, hogy $\bar{B}_n \subset B_{n-1} - \bar{A}_n$. Ha $z \in \bigcap_1^\infty \bar{B}_n$, akkor tehát $z \in G$, de $z \notin \bigcup_1^\infty A_n$: ellentmondás. ∎

Minthogy (5.3.54) szerint minden lokálisan kompakt S_2-tér reguláris, kimondhatjuk (9.2.3) és (9.2.5) alapján:

(9.2.6) *Minden lokálisan kompakt S_2-tér Baire-féle.* ∎

(9.2.4)-ből és (9.2.5)-ből pedig, mivel minden félmetrikus tér topológiája (2.5.40) szerint reguláris, következik:

(9.2.7) **Baire-tétele.** *Minden teljes félmetrikus tér topológiája Baire-féle.* ∎

9.2.c. Szorzattételek. Olyan feltételeket keresünk, amelyek mellett Baire-féle terek szorzatáról állítható, hogy szintén Baire-féle. Először is jegyezzük meg:

(9.2.8) *Legyen $[X, \mathfrak{T}_1]$ és $[Y, \mathfrak{T}_2]$ két topologikus tér, s az utóbbi M_2-tér. Ha $A \subset X \times Y$ $\mathfrak{T}_1 \times \mathfrak{T}_2$-ritka, akkor van olyan $\mathfrak{T}_1$-sovány $S \subset X$ halmaz, hogy $x \in X - S$ esetén az $A_x = \{y: (x, y) \in A\}$ halmaz $\mathfrak{T}_2$-ritka.*

Bizonyítás. Legyen $\{B_n: n \in \mathrm{N}\}$ $(B_n \neq \emptyset)$ bázis $\mathfrak{T}_2$ számára, és C_n azoknak az $x \in X$ pontoknak a halmaza, amelyekre $B_n \subset \bar{A}_x$. Ekkor C_n $\mathfrak{T}_1$-ritka, hiszen ha G $\mathfrak{T}_1$-nyílt, és $G \subset \bar{C}_n$, akkor (7.1.27) szerint $G \times B_n \subset \bar{C}_n \times \bar{B}_n = \overline{C_n \times B_n}$, s minthogy $(x, y) \in C_n \times B_n$ esetén $(x, y) \in \{x\} \times \bar{A}_x \subset \overline{\{x\} \times A_x} \subset \bar{A}$, azaz $C_n \times B_n \subset \bar{A}$, azért $G \times B_n \subset \bar{A}$, ami csak $G \times B_n = \emptyset$, azaz $G = \emptyset$ esetén lehetséges. Az $S = \bigcup_1^\infty C_n$ $\mathfrak{T}_1$-sovány halmazra mármost fennáll, hogy $x \in X - S$ esetén A_x $\mathfrak{T}_2$-ritka, hiszen különben valamely n-re $B_n \subset \bar{A}_x$ volna. ∎

(9.2.9) *Legyen $[X, \mathfrak{T}_1]$ és $[Y, \mathfrak{T}_2]$ két topologikus tér, az utóbbi M_2-tér. Ha $A \subset X \times Y$ $\mathfrak{T}_1 \times \mathfrak{T}_2$-sovány, akkor van olyan $\mathfrak{T}_1$-sovány $S \subset X$ halmaz, hogy $x \in X - S$ esetén az $A_x = \{y: (x, y) \in A\}$ halmaz $\mathfrak{T}_2$-sovány.*

Bizonyítás. Legyen $A = \bigcup_1^\infty A_n$, ahol A_n $\mathfrak{T}_1 \times \mathfrak{T}_2$-ritka, és (9.2.8)-ra hivatkozva S_n olyan $\mathfrak{T}_1$-sovány halmaz, hogy $x \in X - S_n$ esetén $A_{nx} = \{y : (x, y) \in A_n\}$ $\mathfrak{T}_2$-ritka. Ekkor $S = \bigcup_1^\infty S_n$ is $\mathfrak{T}_1$-sovány, és $x \in X - S$ esetén $A_x = \bigcup_{n=1}^\infty A_{nx}$ $\mathfrak{T}_2$-sovány. ∎

(9.2.10) *Ha $[X, \mathfrak{T}_1]$ és $[Y, \mathfrak{T}_2]$ Baire-féle tér, s az utóbbi M_2-tér is, akkor $\mathfrak{T}_1 \times \mathfrak{T}_2$ is Baire-féle.*

Bizonyítás. Ha $G \neq \emptyset$ $\mathfrak{T}_1 \times \mathfrak{T}_2$-nyílt, akkor alkalmas $G_1 \neq \emptyset$ $\mathfrak{T}_1$-nyílt és $G_2 \neq \emptyset$ $\mathfrak{T}_2$-nyílt halmazra $G_1 \times G_2 \subset G$, és G-vel együtt $G_1 \times G_2$ is $\mathfrak{T}_1 \times \mathfrak{T}_2$-sovány volna. Minthogy $x \in G_1$ esetén $\{y : (x, y) \in G_1 \times G_2\} = G_2$, azért, ha G_2 nem volna $\mathfrak{T}_2$-sovány, (9.2.9) értelmében G_1-nek kellene $\mathfrak{T}_1$-soványnak lennie. Ebből $G_2 = \emptyset$, ill. $G_1 = \emptyset$ következnék, ami ellentmondás. ∎

Figyelemre méltó, hogy hipokompakt terekre sokkal általánosabb tételt lehet kimondani:

(9.2.11) *Hipokompakt terek szorzata is hipokompakt.*

Bizonyítás. Legyen $\mathfrak{B}_i$ az $[E_i, \mathfrak{T}_i]$ hipokompakt térben a definíciónak megfelelő bázis ($i \in I$). A $\underset{i \in I}{\times} B_i$ alakú halmazok, ahol véges számú i kivételével $B_i = E_i$ és a kivételes indexekre $B_i \in \mathfrak{B}_i$, bázist alkotnak az $[E, \mathfrak{T}] = [\underset{i \in I}{\times} E_i, \underset{i \in I}{\times} \mathfrak{T}_i]$ térben; jelöljük ezt $\mathfrak{B}$-vel. Ha $C_n \in \mathfrak{B}$, $C_{n+1} \subset C_n$, akkor a $C_n = \underset{i \in I}{\times} B_{ni}$ jelöléssel minden i-re $B_{n+1,i} \subset B_{ni}$, és vagy $B_{ni} = E_i$ minden n-re, vagy bizonyos n-től kezdve $B_{ni} \in \mathfrak{B}_i$. Mindkét esetben $\bigcap_{n=1}^{\infty} B_{ni} \neq \emptyset$, és $x_i \in \bigcap_{n=1}^{\infty} B_{ni}$ esetén az $x = (x_i)$ jelöléssel $x \in \underset{i \in I}{\times} \bigcap_{n=1}^{\infty} \bar{B}_{ni} = \bigcap_{n=1}^{\infty} \underset{i \in I}{\times} \bar{B}_{ni} = \bigcap_{n=1}^{\infty} \bar{C}_n$, tekintettel (7.1.17)-re és (7.1.27)-re. ▮

Ebből (9.2.5) és (7.1.35) alapján következik, hogy hipokompakt, reguláris terek szorzata mindig Baire-féle tér; így például ha minden tényező lokálisan kompakt S_2-tér, vagy teljes félmetrikus tér, akkor a szorzat Baire-féle.

9.2.d. Alkalmazások. Baire tételének felhasználásával a következő, többféle célra is ellenpéldaként felhasználható tételt bizonyíthatjuk be:

(9.2.12) *Az* $[\mathbf{R}^2, (\mathfrak{E}^+)^2]$ *tér nem normális.*

Bizonyítás. Tekintsük az $x + y = 0$ egyenletű egyenest, és legyen A, ill. B ezen a racionális, ill. irracionális abszcisszájú pontok halmaza. Világos, hogy A is, B is (sőt az említett egyenes bármely részhalmaza) $(\mathfrak{E}^+)^2$-zárt. Ha G és H egy A-t, ill. B-t tartalmazó $(\mathfrak{E}^+)^2$-nyílt halmaz, akkor $A = \bigcup_1^{\infty} A_n$, $B = \bigcup_1^{\infty} B_n$, ahol A_n, ill. B_n azoknak az $(x, y) \in A$, ill. $(x, y) \in B$ pontoknak a halmazát jelöli, amelyekre $Q_n(x, y) = \left[x, x + \frac{1}{n}\right) \times \left[y, y + \frac{1}{n}\right) \subset G$, ill. $Q_n(x, y) \subset H$. Ha most C_n, ill. D_n jelöli A_n-nek, ill. B_n-nek a vetületét az x-tengelyen, és $\bar{X}$ az x-tengely X részhalmazának $\mathfrak{E}$-re (!) vonatkozó lezárását jelöli, akkor $\mathbf{R} = \bigcup_1^{\infty} \bar{C}_n \cup \bigcup_1^{\infty} \bar{D}_n$ miatt (9.2.1) értelmében legalább egy n-re int $\bar{C}_n \neq \emptyset$ vagy int $\bar{D}_n \neq \emptyset$ (int is az $\mathfrak{E}$ topológiára vonatkozik), hiszen $\mathfrak{E}$ (9.2.7) szerint Baire-féle. Tegyük fel például, hogy $a < b$ és $(a, b) \subset \bar{C}_n$. Ekkor egy $a < x_0 < b$ irracionális számot választva, $(x_0, -x_0) \in B_m$ valamely m-re, tehát $Q_m(x_0, -x_0) \subset H$, viszont x_0-hoz tetszőlegesen közel találhatók $x \in C_n$ számok, márpedig $|x - x_0| < \min\left(\frac{1}{n}, \frac{1}{m}\right)$ esetén $Q_n(x, -x) \cap Q_m(x_0, -x_0) \neq \emptyset$, úgyhogy $Q_n(x, -x) \subset G$ miatt $G \cap H \neq \emptyset$. ▮

Minthogy (2.5.41) szerint $\mathfrak{E}^+$ T_5-topológia, s annál inkább T_π-topológia, azért $(\mathfrak{E}^+)^2$ is T_π-topológia (7.1.37) értelmében. Így az $[\mathbf{R}^2, (\mathfrak{E}^+)^2]$ tér példa nem-normális Tyihonov-térre. Egyúttal azt is mutatja, hogy normális, sőt teljesen normális terek szorzata nem feltétlenül normális. (2.4.21)-ből azt is tudjuk, hogy az $[\mathbf{R}, \mathfrak{E}^+]$

tér Lindelöf-tér, tehát (8.3.19) és (8.3.15) szerint parakompakt S_2-tér; ennélfogva parakompakt S_2-terek szorzata nem feltétlenül parakompakt, sőt nem feltétlenül normális.

Baire tételének, ill. a Baire-féle tereknek további nevezetes alkalmazása bizonyos egzisztenciatételek bizonyítása. Ha ugyanis valamilyen adott tulajdonságú pont, halmaz, függvény, leképezés stb. létezését akarjuk kimutatni, elég ehhez azt belátni, hogy az adott tulajdonsággal nem rendelkező pontok, halmazok, függvények, leképezések stb. valamilyen alkalmas Baire-féle topológiára nézve sovány halmazt alkotnak; ebből következik, hogy az adott tulajdonságúak halmaza nem lehet üres. Erre mutatunk két nevezetes példát.

(9.2.13) *Legyen* (f_n) *az* $[E, \mathfrak{T}]$ *topologikus térben folytonos függvényeknek pontonként konvergens sorozata,* $f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x)$ $(x \in E)$. *Ekkor* E *ama pontjai, amelyekben* f *nem folytonos, sovány halmazt alkotnak; ha* $\mathfrak{T}$ *Baire-féle, akkor* f *folytonossági pontjainak halmaza sűrű.*

Bizonyítás. Ha f az $x \in E$ pontban nem folytonos, akkor alkalmas $\varepsilon > 0$ mellett x minden V környezetében van olyan $y, z \in V$, hogy $|f(y) - f(z)| > \varepsilon$. Elég megmutatni, hogy az ilyen x-ek D_ε halmaza sovány, mert akkor a szintén sovány $\bigcup_1^\infty D_{\frac{1}{n}}$ halmaz tartalmazza mindazokat az x-eket, ahol f nem folytonos.

Legyen most A_n azon $x \in E$ pontok halmaza, amelyekre $i, j \geqq n$ esetén $|f_i(x) - f_j(x)| \leqq \frac{\varepsilon}{4}$. $|f_i - f_j|$ folytonossága miatt az ilyen x-ek halmaza adott i, j esetén zárt, és A_n ilyen halmazok metszeteként ugyancsak zárt. Minthogy a Cauchy-féle feltételből $E = \bigcup_1^\infty A_n$ következik, azért $D_\varepsilon = \bigcup_1^\infty (A_n \cap D_\varepsilon)$, és elég belátni, hogy $A_n \cap D_\varepsilon$ ritka minden $n \in \mathbf{N}$-re és $\varepsilon > 0$-ra.

Tegyük fel, hogy G nyílt, és $x \in G \subset \overline{A_n \cap D_\varepsilon}$. Ekkor $G \subset \bar{A}_n = A_n$, s ebből $y \in G$ esetére $i \geqq n$ esetén $|f_i(y) - f_n(y)| \leqq \frac{\varepsilon}{4}$, majd az $i \to \infty$ határátmenettel $|f(y) - f_n(y)| \leqq \frac{\varepsilon}{4}$ következik. Ha most V x-nek olyan nyílt környezete, hogy $y \in V$ esetén $|f_n(y) - f_n(x)| < \frac{\varepsilon}{4}$, akkor $y, z \in V \cap G$ esetén

$$|f(y) - f(z)| \leqq |f(y) - f_n(y)| + |f_n(y) - f_n(x)| + \\ + |f_n(x) - f_n(z)| + |f_n(z) - f(z)| < \varepsilon.$$

Ennélfogva $V \cap G$ a D_ε halmaznak egyetlen pontját sem tartalmazhatná, holott $G \subset \bar{D}_\varepsilon$. Ez az ellentmondás mutatja, hogy $\operatorname{int} \overline{A_n \cap D_\varepsilon} = \emptyset$. ∎

Például azt a függvényt, amely $\mathbf{R}$ racionális pontjaiban a 0, irracionális pontjaiban az 1 értéket veszi fel, biztosan nem lehet folytonos függvények sorozatának limeszfüggvényeként előállítani.

Következő alkalmazásként azt mutatjuk meg, hogy a számegyenes egy adott $[a, b]$ intervallumában folytonos függvények között van olyan, amely sehol sem differenciálható, sőt olyan is, amely egyetlen helyen sem differenciálható egy adott oldalról, pl. jobbról. Valójában ennél is többet bizonyítunk be. Gondoljuk meg e célból, hogy ha az $[a, b]$-ben folytonos f-nek az $a \leqq x < b$ helyen véges jobb oldali deriváltja van, akkor az $\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$ hányados alkalmas $\delta > 0$ mellett $0 < h \leqq \delta$ esetén korlátos marad, $\delta \leqq h \leqq b-x$ esetén viszont f korlátossága miatt lesz korlátos. Azt fogjuk mármost megmutatni, hogy van olyan $[a, b]$-ben folytonos f függvény, amelyre $\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$ egyetlen $a \leqq x < b$ mellett sem korlátos $0 < h \leqq b-x$ esetén, sőt az ilyen függvények alkotják mintegy az $[a, b]$-ben folytonos függvények többségét.

Az utóbbi kijelentés pontos megfogalmazása érdekében jelöljük E-vel az $[a, b]$-ben folytonos függvények halmazát, és vezessük be a

$$\rho(f, g) = \sup \{|f(x)-g(x)|: a \leqq x \leqq b\}$$

távolságot $f, g \in E$ esetén. **1.3.c.**-ből tudjuk, hogy $[E, \rho]$ teljes. Ennélfogva a $\mathfrak{T}_\rho$ topológia (9.2.7) értelmében Baire-féle, s azt fogjuk megmutatni, hogy erre nézve sovány halmazt alkotnak az olyan $f \in E$ függvények, amelyekre legalább egy $a \leqq x < b$ mellett $\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$ korlátos $0 < h \leqq b-x$ esetén:

(9.2.14) *Legyen $[a, b] \subset \mathbf{R}$, E az $[a, b]$-ben folytonos függvények halmaza a*

$$\rho(f, g) = \sup \{|f(x)-g(x)|: a \leqq x \leqq b\}$$

távolsággal, és $A \subset E$ azoknak az f-eknek halmaza, amelyekhez található legalább egy $a \leqq x < b$ úgy, hogy $\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$ korlátos $0 < h \leqq b-x$ esetén. Ekkor A $\mathfrak{T}_\rho$-sovány, s minthogy $\mathfrak{T}_\rho$ Baire-féle, $E - A$ $\mathfrak{T}_\rho$-sűrű.

Bizonyítás. Ha $f \in A$, akkor van olyan $a \leqq x < b$ és olyan $n \in \mathrm{N}$, hogy $a \leqq$ $\leqq x \leqq b - \frac{1}{n}$, és

$$\left|\frac{f(x+h)-f(x)}{h}\right| \leqq n \qquad (0 < h \leqq b-x).$$

Álljon $A_n \subset E$ azokból az f-ekből, amelyekre ez a két kikötés legalább egy x mellett teljesül. Elég belátnunk, hogy A_n ritka a $\mathfrak{T}_\rho$ topológiára nézve, hiszen $A = \bigcup_1^\infty A_n$.

Először is A_n $\mathcal{T}_\rho$-zárt. Valóban, ha $f_k \in A_n$ $(k \in \mathbf{N})$, és $\rho(f_k, f) \to 0$, akkor alkalmas x_k-ra $a \leqq x_k \leqq b - \frac{1}{n}$, és $0 < h \leqq b - x_k$ esetén

$$\left| \frac{f_k(x_k+h) - f_k(x_k)}{h} \right| \leqq n.$$

A Bolzano—Weierstrass-féle tétel miatt alkalmas (x_{k_l}) részsorozat tart egy x-hez, amelyre szintén teljesül $a \leqq x \leqq b - \frac{1}{n}$, és $0 < h \leqq b - x$ esetén, ha már $x_{k_l} < x + h$, akkor

$$\begin{aligned} |f(x+h) - f(x)| &\leqq |f(x+h) - f_{k_l}(x+h)| + \\ &+ |f_{k_l}(x+h) - f_{k_l}(x_{k_l})| + |f_{k_l}(x_{k_l}) - f(x_{k_l})| + \\ &+ |f(x_{k_l}) - f(x)| \leqq \rho(f, f_{k_l}) + n(x + h - x_{k_l}) + \\ &+ \rho(f_{k_l}, f) + |f(x_{k_l}) - f(x)| \to nh, \end{aligned}$$

hiszen $\rho(f, f_{k_l}) \to 0$, $x + h - x_{k_l} \to h$, és f folytonossága miatt $f(x_{k_l}) - f(x) \to 0$. Eszerint $f \in A_n$.

Az A_n halmaz ritka voltát így be fogjuk bizonyítani, ha megmutatjuk, hogy $\operatorname{int} A_n = \emptyset$, azaz hogy $E - A_n$ sűrű. Legyen e célból $f \in E$, $\varepsilon > 0$ adott. f egyenletes folytonosságát felhasználva készítsük el $[a, b]$-nek olyan $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_k = b$ felosztását, hogy $x_{i-1} \leqq x < y \leqq x_i$ esetén $|f(y) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{4}$ álljon, s legyen p az a függvény, amelyre $p(x_i) = f(x_i)$ $(i = 0, \ldots, k)$, az $[x_{i-1}, x_i]$ szakaszokon pedig lineáris. Világos, hogy $x_{i-1} \leqq x \leqq x_i$ esetén

$$|f(x)-p(x)| \leqq |f(x)-f(x_i)| + |f(x_i)- p(x_i)| + |p(x_i)-p(x)| < \frac{\varepsilon}{4} + 0 + \frac{\varepsilon}{4} = \frac{\varepsilon}{2},$$

hiszen

$$|p(x_i) - p(x)| \leqq |p(x_i) - p(x_{i-1})| = |f(x_i)- f(x_{i-1})| < \frac{\varepsilon}{4}.$$

Ezért $\rho(f, p) \leqq \frac{\varepsilon}{2}$. Legyen aztán M olyan nagy, hogy p minden lineáris szakaszának belsejében $|p'(x)| < M$ legyen, q pedig jelöljön olyan szakaszonként lineáris, folytonos függvényt, amelynek értékei 0 és $\frac{\varepsilon}{2}$ közé esnek, lineáris szakaszainak belsejében pedig $|q'(x)| > M + n$. Ekkor a $g = p + q$ jelöléssel $\rho(f, g) \leqq \rho(f, p) + \rho(p, p + q) = \rho(f, p) + \rho(0, q) \leqq \varepsilon$, és a szakaszonként lineáris g függvény lineáris szakaszainak belsejében $|g'(x)| = |p'(x) + q'(x)| > M + n - M = n$; az utóbbi okokból $g \in E - A_n$. ∎

9.2.e. Teljesen metrizálható terek. Baire tételének érdekessége, hogy a térnek egy tisztán topológiai tulajdonságát (ti. azt, hogy a tér Baire-féle) egy metrikus tulajdonság (ti. a ρ távolságra, ill. eltérésre nézve való teljesség) révén biztosítja. Előfordulhat, hogy egy metrikus tér az adott távolsággal ellátva nem teljes (és így rá Baire tétele közvetlenül nem alkalmazható), de a tér topológiáját lehet még egy másik távolságból származtatni, s azzal ellátva a tér már teljessé válik. Például ha E jelöli a számegyenesen az irracionális számok halmazát, ρ_1 pedig az euklideszi távolságot $\mathbf{R}$-en, akkor E ρ_1-gyel felruházva nem teljes (ehhez (5.1.16) értelmében $\mathcal{E}$-zártnak kellene lennie), viszont (7.1.62)-ből tudjuk, hogy $[E, \mathcal{E}|E]$ homeomorf a $[Q^{\mathbf{N}}, \mathfrak{D}^{\mathbf{N}}]$ térrel, ahol $[Q, \mathfrak{D}]$ megszámlálható diszkrét tér; minthogy az utóbbinak diszkrét uniform struktúrája metrizálható és teljes, azért (7.3.30), (7.3.31) és (7.3.35) szerint $[Q^{\mathbf{N}}, \mathfrak{D}^{\mathbf{N}}]$ is ellátható olyan távolsággal, amellyel teljes metrikus térré válik, s akkor ez $[E, \mathcal{E}|E]$-re is áll.

Ilyenformán természetszerűen vetődik fel a következő kérdés: hogyan lehet felismerni azt, hogy egy topologikus tér topológiája származtatható olyan távolságból (eltérésből), amellyel felruházva a tér teljessé válik? Az ilyen tereket **teljesen metrizálható (félmetrizálható)** tereknek nevezzük. Ehhez persze a térnek mindenekelőtt (fél)metrizálhatónak kell lennie, s minthogy erre bőségesen állnak rendelkezésünkre különféle kritériumok, tárgyalhatjuk a kérdést abban a formában is, hogy egy (fél)metrikus térről miképpen lehet felismerni azt, hogy teljesen (fél)metrizálható-e. A következő tétel erre ad elégséges, s majd látjuk, hogy lényegében véve szükséges feltételt.

(9.2.15) *Ha* $[E, \rho]$ *teljes (fél)metrikus tér,* $\emptyset \neq D = \bigcap_1^\infty G_n$, G_n $\mathcal{T}_\rho$*-nyílt, akkor* $[D, \mathcal{T}_\rho|D]$ *teljesen (fél)metrizálható.*

Bizonyítás. Felhető, hogy $D \neq E$, s akkor $G_n \neq E$ $(n \in \mathbf{N})$. Legyen $F_n = E - G_n$, $x \in E$ esetén

$$f_n(x) = \rho(x, F_n),$$

$x \in D$ esetén pedig

$$g_n(x) = \frac{1}{f_n(x)}.$$

Minthogy (2.6.32) szerint f_n $\mathcal{T}_\rho$-folytonos, és F_n zártsága miatt $x \in D$ esetén $f_n(x) > 0$, azért (2.6.22) és (2.6.27) szerint g_n $\mathcal{T}_\rho|D$-folytonos. Legyen aztán $x, y \in D$ esetén

$$\sigma_n(x, y) = |\, g_n(x) - g_n(y) \,|.$$

Ekkor (4.2.9) szerint σ_n eltérés D-n, mégpedig nyilván $(\mathcal{T}_\rho|D)^2$-folytonos. Ha most $\rho_0 = \rho|D$, és $\Sigma = \{\rho_0, \sigma_1, \sigma_2, \ldots\}$, akkor (7.3.48)-at is figyelembe véve a Σ eltéréscsalád D-n (3.2.28) és (4.2.34) értelmében olyan félmetrizálható $\mathcal{U}_\Sigma$ uniform struktúrát indukál, amelyre $\mathcal{T}_\Sigma = \mathcal{T}_{\mathcal{U}_\Sigma} < \mathcal{T}_\rho|D$ (7.3.50) miatt, viszont $\rho_0 \in \Sigma$ folytán $\mathcal{T}_{\rho_0} = \mathcal{T}_\rho|D < \mathcal{T}_\Sigma$. Eszerint $\mathcal{T}_\rho|D = \mathcal{T}_\Sigma$.

Megmutatjuk, hogy $\mathcal{U}_\Sigma$ teljes. Legyen $\mathfrak{r}$ $\mathcal{U}_\Sigma$-Cauchy-rács. Ekkor (5.1.3) szerint $\mathfrak{r}$ $\mathcal{U}_{\rho_0}$-Cauchy-rács, és minden n-re $\mathcal{U}_{\sigma_n}$-Cauchy-rács. Ezért $\mathfrak{r} \to x \in E$ a $\mathcal{T}_\rho$

topológiára nézve, továbbá $g_n(\mathfrak{r}) \to x_n \in \mathbf{R}$ $\mathscr{E}$-re nézve ($n \in \mathbf{N}$). Szükségképpen $x \in D$, mert ellenkező esetben legalább egy n-re $x \in F_n$, tehát $f_n(\mathfrak{r}) \to 0$ volna, ellentétben az imént igazolt $g_n(\mathfrak{r}) \to x_n$ relációval. Így $\mathfrak{r} \to x \in D$ $\mathscr{T}_\rho|D$-re nézve.

Ha ρ távolság, akkor $\mathscr{T}_\rho$ s vele $\mathscr{T}_\rho|D$ is T_0-topológia, úgyhogy a $\mathscr{T}_\Sigma$-t indukáló eltérés is távolság (2.5.5) szerint. ∎

A (9.2.15) tétel megfordításának igazolása végett először is néhány — önmagában is érdekes — segédtételre van szükségünk.

(9.2.16) *Legyen* $[X, \mathscr{T}]$ *topologikus tér,* $[Y, \rho]$ *teljes félmetrikus tér,* $A \subset X$ *sűrű,* $f : A \to Y$ $(\mathscr{T}|A, \mathscr{T}_\rho)$*-folytonos. Ekkor van olyan* $A \subset C \subset X$ *halmaz, amely megszámlálható sok* $\mathscr{T}$*-nyílt halmaz metszete, és olyan* $g : C \to Y$ $(\mathscr{T}|C, \mathscr{T}_\rho)$*-folytonos leképezés, hogy* $g|A = f$.

Bizonyítás. Legyen G_n azoknak az $x \in X$ pontoknak halmaza, amelyeknek van olyan nyílt V környezetük, hogy $\delta(f(A \cap V)) < \frac{1}{n}$, és $C = \bigcap_1^\infty G_n$. Minthogy G_n nyilván $\mathscr{T}$-nyílt, és $x \in A$ esetén f folytonossága miatt $x \in G_n$ minden n-re, azért $A \subset C \subset X$. Mármost $x \in C$ esetén x-nek $\mathfrak{v}(x)$ $\mathscr{T}$-környezetszűrőjére $f(\mathfrak{v}(x) (\cap) A)$ $\mathscr{U}_\rho$-Cauchy-rács, tehát $\mathscr{T}_\rho$-konvergens; így a kívánt g létezése (6.2.2)-ből következik. ∎

(9.2.17) **Lavrentyev tétele.** *Legyen* $[X, \rho_1]$ *és* $[Y, \rho_2]$ *két teljes metrikus tér,* $A \subset X$ *és* $B \subset Y$ *sűrű,* $f : A \to B$ $(\mathscr{T}_{\rho_1}|A, \mathscr{T}_{\rho_2} \mid B)$*-homeomorfizmus. Ekkor van olyan* $A \subset C \subset X$ *és* $B \subset D \subset Y$ *halmaz, hogy* C *megszámlálható sok* $\mathscr{T}_{\rho_1}$*-nyílt,* D *pedig megszámlálható sok* $\mathscr{T}_{\rho_2}$*-nyílt halmaz metszete, és olyan* $g : C \to D$ $(\mathscr{T}_{\rho_1}|C, \mathscr{T}_{\rho_2}|D)$*-homeomorfizmus, hogy* $g\mid_A^B = f$.

Bizonyítás. Legyen $k_1 : A \to X$, $k_2 : B \to Y$ a kanonikus injekció, $g_0 = k_2 \circ f$, $h_0 = k_1 \circ f^{-1}$, és alkalmazzuk (9.2.16)-ot g_0-ra és h_0-ra. Így egy $A \subset C_0 \subset X$ és egy $B \subset D_0 \subset Y$ halmaz keletkezik, amelyekre

$$C_0 = \bigcap_1^\infty G_n, \qquad D_0 = \bigcap_1^\infty H_n,$$

G_n $\mathscr{T}_{\rho_1}$-nyílt, H_n $\mathscr{T}_{\rho_2}$-nyílt, továbbá egy $g_1 : C_0 \to Y$ $(\mathscr{T}_{\rho_1}|C_0, \mathscr{T}_{\rho_2})$-folytonos és egy $h_1 : D_0 \to X$ $(\mathscr{T}_{\rho_2}|D_0, \mathscr{T}_{\rho_1})$-folytonos leképezés, amelyekre $g_1|A = g_0$, $h_1|B = h_0$. Legyen még $C = g_1^{-1}(D_0)$, $D = h_1^{-1}(C_0)$; ekkor $g_1^{-1}(D_0) = \bigcap_1^\infty g_1^{-1}(H_n)$ miatt C megszámlálható sok $\mathscr{T}_{\rho_1}|C_0$-nyílt halmaznak s így nyilván megszámlálható sok $\mathscr{T}_{\rho_1}$-nyílt halmaznak is metszeteként írható, s ugyanígy D is megszámlálható sok $\mathscr{T}_{\rho_2}$-nyílt halmaznak metszete. Továbbá $g_1^{-1}(D_0) \supset g_1^{-1}(B) \supset g_0^{-1}(B) = f^{-1}(B) = A$, s hasonlóan $h_1^{-1}(C_0) \supset B$, úgyhogy

$$A \subset C \subset C_0 \subset X, \quad B \subset D \subset D_0 \subset Y.$$

Minthogy $h_1 \circ (g_1 \mid_C^{D_0})$: $C \to X$ $(\mathscr{T}_{\rho_1}|C, \mathscr{T}_{\rho_1})$-folytonos, és A-n megegyezik C-nek X-be való, ugyancsak $(\mathscr{T}_{\rho_1}|C, \mathscr{T}_{\rho_1})$-folytonos kanonikus injekciójával, azért (6.2.3) szerint ez a két leképezés azonos, azaz $x \in C$ esetén $h_1(g_1(x)) = x$. Ugyanilyen meggondolással $y \in D$ esetén $g_1(h_1(y)) = y$.

Ebből először is látszik, hogy $g_1|C$ és $h_1|D$ injektív, továbbá

$$g_1(C) \subset h_1^{-1}(C) \subset h_1^{-1}(C_0) = D,$$

$$h_1(D) \subset g_1^{-1}(D) \subset g_1^{-1}(D_0) = C,$$

úgyhogy $h_1(g_1(C)) = C$ és $g_1(h_1(D)) = D$ folytán szükségképpen $g_1(C) = D$, $h_1(D) = C$, és a $g = g_1 \mid_C^D$, $h = h_1 \mid_D^C$ jelöléssel $g : C \to D$ és $h : D \to C$ bijektív, s végül $h = g^{-1}$. ∎

Most már bebizonyíthatjuk (9.2.15) következő megfordítását:

(9.2.18) *Legyen* $[X, \rho]$ *metrikus tér,* $D \subset X$, σ *olyan távolság* D*-n, hogy* $\mathfrak{T}_\sigma = \mathfrak{T}_\rho|D$, *és* $[D, \sigma]$ *teljes. Ekkor* D *megszámlálható sok* $\mathfrak{T}_\rho$*-nyílt halmaz metszete.*

Bizonyítás. Legyen (7.3.51) értelmében $[X', \rho']$ az $[X, \rho]$ tér teljes burka, $\rho'|X = \rho$, $\bar{D}$ pedig D $\mathfrak{T}_{\rho'}$-lezárása. Ekkor (5.1.15) szerint $[\bar{D}, \rho'|\bar{D}]$ is teljes. Ha most f jelöli a D halmaz identitását, akkor f $(\mathfrak{T}_{\rho'}|D, \mathfrak{T}_\sigma)$-homeomorfizmus, és rá (9.2.17)-et alkalmazva nyerjük, hogy f kiterjeszthető egy D-t tartalmazó C halmaznak magára D-re való homeomorfizmusává, és C $\mathfrak{T}_{\rho'}|\bar{D}$-nyílt halmazok egy sorozatának metszete; ez persze csak a $C = D$ esetben lehetséges. A $\mathfrak{T}_{\rho'}|\bar{D}$-nyílt halmazokat írhatjuk egy-egy $\mathfrak{T}_{\rho'}$-nyílt halmaznak és $\bar{D}$-nak metszeteként, s minthogy (8.4.5) értelmében $\mathfrak{T}_{\rho'}$ tökéletesen normális, azért maga $\bar{D}$ is írható megszámlálható sok $\mathfrak{T}_{\rho'}$-nyílt halmaz metszeteként. Végül is $D = \bigcap_1^\infty G_n$, ahol G_n $\mathfrak{T}_{\rho'}$-nyílt; ekkor $D = \bigcap_1^\infty (X \cap G_n)$ is, s itt $X \cap G_n$ $\mathfrak{T}_\rho$-nyílt. ∎

Végül is a következő nevezetes tételt mondhatjuk ki:

(9.2.19) *Legyen* $[E, \rho]$ *metrikus tér. A következő állítások egyenértékűek:*

(a) $[E, \rho]$ *teljesen metrizálható;*

(b) $[E, \rho]$ *minden őt altérként tartalmazó metrikus térben megszámlálható sok nyílt halmaz metszete;*

(c) $[E, \rho]$ *egy őt altérként tartalmazó teljes metrikus térben megszámlálható sok nyílt halmaz metszete.*

Bizonyítás. (a) ⇒ (b): (9.2.18).

(b) ⇒ (c): $[E, \rho]$-hoz található őt altérként tartalmazó teljes metrikus tér, ti. a teljes burka.

(c) ⇒ (a): (9.2.15). ∎

Érdemes még megjegyezni (9.2.4) következő megfordítását:

(9.2.20) *Ha egy metrikus tér hipokompakt, akkor teljesen metrizálható.*

Bizonyítás. Legyen $[E, \rho]$ hipokompakt metrikus tér, $[E', \rho']$ a teljes burka, $\rho'|E = \rho$. Ha $\mathfrak{B}$ $\mathfrak{T}_\rho$-nak a hipokompaktság definíciójában szereplő tulajdonságú bázisa, akkor minden $B \in \mathfrak{B}$ halmaz $B = B' \cap E$ alakú, ahol B' $\mathfrak{T}_{\rho'}$-nyílt, és $B \subset B' \subset \bar{B}$ miatt (ahol $\bar{B}$ a $\mathfrak{T}_{\rho'}$-lezárást jelöli) $\delta'(B') = \delta(B)$, ahol δ a ρ-ra, δ' pedig a ρ'-re vonatkozó átmérőt jelenti. Legyen G_n' azon B'-k egyesítése, amelyekre $\delta(B) < \frac{1}{n}$. Ekkor G_n' is $\mathfrak{T}_{\rho'}$-nyílt, és $E \subset G_n'$, mert minden $x \in E$-hez található $\frac{1}{n}$-nél kisebb átmérőjű, x-et tartalmazó $B \in \mathfrak{B}$. Legyen másrészt $x \in \bigcap_1^\infty G_n'$; ekkor minden n-re van olyan $B_n \in \mathfrak{B}$, hogy $x \in B_n'$, $\delta(B_n) < \frac{1}{n}$. Az $n_1 = 1$ választásból kiindulva B_n' nyíltsága és $\delta'(B_n') < \frac{1}{n}$ miatt találhatók olyan $n_1, n_2, \ldots$ indexek, hogy $B_{n_{k+1}}' \subset B_{n_k}'$, és így $B_{n_{k+1}} \subset B_{n_k}$. Ekkor van olyan $y \in E$, hogy $y \in \bigcap_1^\infty (\bar{B}_{n_k} \cap E) \subset \bigcap_1^\infty \bar{B}_{n_k}$, s mivel $x \in \bigcap_1^\infty B_{n_k}' \subset \bigcap_1^\infty \bar{B}_{n_k}$, és $\rho'(x, y) < \frac{1}{n_k}$ minden k-ra, azért $x = y \in E$.

Ennélfogva $E = \bigcap_1^\infty G_n'$, és így (9.2.19) folytán $[E, \rho]$ teljesen metrizálható. ∎

(9.2.4) és (9.2.20) egybevetéséből adódik:

(9.2.21) *Egy metrikus tér pontosan akkor hipokompakt, ha teljesen metrizálható.* ∎

9.2.f. Gyakorlatok. 1. Mutassuk meg, hogy az $[\mathbf{R}, \mathfrak{E}]$ tér hipokompakt, de nem Baire-féle.

2. Mutassuk meg, hogy az $[E, \mathfrak{F}_E]$ tér hipokompakt, és pontosan akkor Baire-féle, ha E véges vagy nem-megszámlálható.

3. Mutassuk meg, hogy az $[\mathbf{R}, \mathfrak{E}^+]$ tér Baire-féle.

[Az $\mathfrak{E}^+$-sovány halmazok azonosak az $\mathfrak{E}$-sovány halmazokkal, s ha A $\mathfrak{E}^+$-belseje nem üres, $\mathfrak{E}$-belseje sem az.]

4. Mutassuk meg, hogy $[\mathbf{R}, \mathfrak{E}^+]$ hipokompakt.

[Legyen $S_n = \{p \cdot 2^{-n} : p \text{ páratlan}\}$, álljon $\mathfrak{B}_n$ az $[x, s)$ alakú intervallumokból, ahol $x \in \mathbf{R}$, $s \in S_n$, $s - x > 2^{-n}$, s legyen $\mathfrak{B} = \bigcup_1^\infty \mathfrak{B}_n$.]

5. Mutassuk meg, hogy minden megszámlálhatóan kompakt tér hipokompakt.

6. Legyen $[X, \mathfrak{T}_1]$ és $[Y, \mathfrak{T}_2]$ Baire-tér, $\mathfrak{T}_1$ M_2-topológia, f pedig $\mathfrak{T}_1 \times \mathfrak{D}_Y$- és $\mathfrak{D}_X \times \mathfrak{T}_2$-folytonos függvény. Mutassuk meg, hogy azok a $z \in X \times Y$ pontok, amelyekben f $\mathfrak{T}_1 \times \mathfrak{T}_2$-folytonos, $\mathfrak{T}_1 \times \mathfrak{T}_2$-sűrű halmazt alkotnak.

7. Mutassuk meg, hogy az előző feladat állítása akkor is igaz, ha $\mathfrak{T}_1$ teljesen félmetrizálható, $\mathfrak{T}_2$ pedig hipokompakt és reguláris.

8. Legyen $E = \mathbf{R} \times [0, +\infty) \subset \mathbf{R}^2$, $x \in \mathbf{R}$, $\varepsilon > 0$ esetén $K(x, \varepsilon)$ az ε-sugarú (x, ε) középpontú körlapból és az $(x, 0)$ pontból álló halmaz, s jelentse $\mathfrak{T}$ azt a topológiát E-n, amelynek számára bázist alkotnak az összes $K(x, \varepsilon)$ halmazok, valamint az E-ben fekvő $\mathfrak{E}^2$-zárt körlapok $\mathfrak{E}^2$-belsejei. Mutassuk meg, hogy

(a) $\mathfrak{T}$ T_2-topológia;

(b) az a függvény, amely az $(x_0, 0)$ pontban 0, $K(x_0, \varepsilon)$-on kívül 1, és $0 < t \leqq \varepsilon$ esetén $K(x_0, t)$ kerületén $(x_0, 0)$ kivételével $\frac{t}{\varepsilon}$-nal egyenlő, $\mathfrak{T}$-folytonos;

(c) $\mathfrak{T}$ T_π-topológia;

(d) ha A a racionális x-ekhez, B az irracionális x-ekhez tartozó $(x, 0)$ alakú pontok halmaza, akkor A és B $\mathfrak{T}$-zárt;

(e) ha f $\mathfrak{T}$-folytonos függvény, akkor a $g_n(x) = f\left(x, \frac{1}{n}\right)$ képlettel értelmezett g_n $\mathfrak{E}$-folytonos, és $\lim_{n\to\infty} g_n(x) = g(x) = f(x, 0)$;

(f) a (d) alatti A és B nem választható szét $\mathfrak{T}$-folytonos függvénnyel;

(g) $\mathfrak{T}$ nem normális;

(h) $\mathfrak{T}$ hipokompakt, tehát Baire-féle.

[Az értelmezésül szolgáló bázis megfelel.]

9. Mutassuk meg, hogy az $[\mathbf{R}, \mathfrak{E}]$ térben

(a) $\mathbf{Q}$ sovány;

(b) $\mathbf{R} - \mathbf{Q}$ nem sovány;

(c) $\mathbf{R} - \mathbf{Q}$ nem írható megszámlálható sok zárt halmaz egyesítéseként.

10. Mutassuk meg, hogy ha $[E, \mathfrak{T}]$ Baire-féle tér, és S $\mathfrak{T}$-sovány, akkor $\mathfrak{T}|E - S$ is Baire-féle.

11. Legyen $E = (\mathbf{R} \times (\mathbf{R} - \{0\})) \cup (\mathbf{Q} \times \{0\})$, $\mathfrak{T} = \mathfrak{E}^2|E$. Mutassuk meg, hogy

(a) $\mathbf{R}^2 - E$ $\mathfrak{E}^2$-sovány;

(b) $\mathfrak{T}$ Baire-féle;

(c) $\mathbf{R}^2 - E$ nem írható megszámlálható sok $\mathfrak{E}^2$-zárt halmaz egyesítéseként;

(d) $\mathfrak{T}$ nem teljesen metrizálható;

(e) $\mathfrak{T}$ nem hipokompakt;

(f) az $A = \mathbf{Q} \times \{0\}$ jelöléssel A $\mathfrak{T}$-zárt, de $\mathfrak{T}|A$ nem Baire-féle.

12. Legyen $E = \mathbf{R}^2$, $\mathfrak{T} = \mathfrak{E} \times \mathfrak{D}_{\mathbf{R}}$, D az $\mathbf{R}^2$ halmaz átlója. Mutassuk meg, hogy

(a) D $\mathfrak{T}$-ritka;

(b) $x \in \mathbf{R}$ esetén $\{y: (x, y) \in D\}$ nem $\mathfrak{D}_{\mathbf{R}}$-sovány.

X. ÖSSZEFÜGGŐ TEREK

10.1. ÖSSZEFÜGGŐ HALMAZOK

10.1.a. Széteső felbontások. A következőkben pontos értelmet kívánunk adni annak a szemléletes kijelentésnek, hogy egy topologikus tér „egy darabból áll". Ezen nyilván valami olyasmit kell értenünk, hogy a tér nem bontható két „különálló" altérre; minthogy azonban minden (legalább két pontból álló) tér alaphalmazát két diszjunkt részhalmazra bontva, a teret is két altérre bontottuk fel, valamilyen célszerű megszorítást kell tennünk a fellépő alterekre. Emlékezetünkbe idézve, hogy egy topologikus tér tulajdonságainak egy része minden altérre „öröklődik", más részük azonban csak a zárt vagy a nyílt alterekre, „valódi" felbontásnak az ilyen — diszjunkt és nem-üres — alterekre való felbontást fogjuk tekinteni. Vegyük észre ezzel kapcsolatban:

(10.1.1) *Legyen* $[E, \mathfrak{T}]$ *topologikus tér,* $E = A \cup B$. *A következő állítások egyenértékűek:*

(a) $A \cap B = \emptyset$, *és* A *és* B *zárt;*

(b) A *és* B *erősen széteső;*

(c) A *és* B *széteső;*

(d) $A \cap B = \emptyset$, *és* A *és* B *nyílt;*

(e) A *és* B *szétválasztható.*

Bizonyítás. (a) $\Rightarrow$ (b) $\Rightarrow$ (c): Triviális.

(c) $\Rightarrow$ (d): $A \cap \bar{B} = \bar{A} \cap B = \emptyset$ esetén $A = \bar{A}$, $B = \bar{B}$, tehát $A = E - B$ és $B = E - A$ nyílt.

(d) $\Rightarrow$ (e): Triviális.

(e) $\Rightarrow$ (a): Ha $A \subset A_1$, $B \subset B_1$, $A_1 \cap B_1 = \emptyset$, A_1 és B_1 nyílt, akkor $A = A_1$, $B = B_1$, tehát $A = E - B_1$ és $B = E - A_1$ zárt, és $A \cap B = \emptyset$. ∎

Az előbbi feltételek bármelyikének eleget tevő $\{A, B\}$ felbontást E **$\mathfrak{T}$-széteső felbontás**ának mondjuk, mégpedig **valódi**nak, ha $A \neq \emptyset \neq B$, különben **triviális**nak. Jegyezzük még meg:

(10.1.2) *Legyen* $[E, \mathfrak{T}]$ *topologikus tér,* $A \cup B \subset E_0 \subset E$, $E_0 \neq \emptyset$. *Az* A *és* B *halmaz pontosan akkor* $\mathfrak{T}$*-széteső, ha* $(\mathfrak{T}|E_0)$*-széteső.*

Bizonyítás. $A \cap \bar{B} = \bar{A} \cap B = \emptyset$ és $A \cap \bar{B} \cap E_0 = \bar{A} \cap E_0 \cap B = \emptyset$ egyszerre áll fenn. ∎

Erre való tekintettel a $C \subset E$ halmaz $C = A \cup B$ felbontását **$\mathfrak{T}$-széteső**nek fogjuk mondani, ha A és B $\mathfrak{T}$-széteső, vagy ami $C \neq \emptyset$ esetén (10.1.2) értelmében ugyanaz, ha A és B $\mathfrak{T}|C$-széteső. (10.1.1) és (10.1.2) egybevetésével kimondható még:

(10.1.3) *Legyen* $[E, \mathfrak{T}]$ *topologikus tér,* $C = A \cup B \subset E$, C $\mathfrak{T}$*-zárt* ($\mathfrak{T}$*-nyílt*). A *és* B *pontosan akkor* $\mathfrak{T}$*-széteső, ha* $A \cap B = \emptyset$, *és* A *is,* B *is* $\mathfrak{T}$*-zárt* ($\mathfrak{T}$*-nyílt*). ∎

A C halmaz szétéső felbontását is **valódi**nak, ill. **triviális**nak mondjuk aszerint, hogy tagjai nem-üresek, vagy közülük legalább az egyik üres.

(10.1.4) *Ha az $[E, \mathfrak{T}]$ topologikus térben $C \subset A \cup B \subset E$, és A és B $\mathfrak{T}$-szétéső halmaz, akkor $C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$ C-nek $\mathfrak{T}$-szétéső felbontása.* ▮

(10.1.5) *Ha az $[E, \mathfrak{T}]$ topologikus térben egyrészt A_1 és B, másrészt A_2 és B szétéső, akkor $A_1 \cup A_2$ és B is szétéső.*

Bizonyítás. $(A_1 \cup A_2) \cap \bar{B} = (A_1 \cap \bar{B}) \cup (A_2 \cap \bar{B}) = \emptyset$, továbbá $\overline{A_1 \cup A_2} \cap B = (\bar{A}_1 \cap B) \cup (\bar{A}_2 \cap B) = \emptyset$. ▮

10.1.b. Összefüggő halmazok. Állapodjunk meg most már abban, hogy az $[E, \mathfrak{T}]$ topologikus teret (és a $\mathfrak{T}$ topológiát) **összefüggő**nek mondjuk, ha E-nek nincs valódi $\mathfrak{T}$-szétéső felbontása; a $C \subset E$ halmazt pedig akkor mondjuk $\mathfrak{T}$-összefüggőnek, ha nincs valódi $\mathfrak{T}$-szétéső felbontása.

(10.1.2)-ből következik:

(10.1.6) *Legyen $[E, \mathfrak{T}]$ topologikus tér, $C \subset E_0 \subset E$, $E_0 \neq \emptyset$. C pontosan akkor $\mathfrak{T}$-összefüggő, ha $\mathfrak{T}|E_0$-összefüggő, azaz, $C \neq \emptyset$ esetén, ha a $[C, \mathfrak{T}|C]$ altér összefüggő.* ▮

Összefüggő például bármely topologikus térben az üres halmaz és minden egyelemű halmaz. További fontos példa összefüggő térre:

(10.1.7) *Az $[\mathbf{R}, \mathfrak{E}]$ tér összefüggő.*

Bizonyítás. Legyen $\mathbf{R} = A \cup B$ szétéső felbontás, $A \neq \emptyset \neq B$. Ha $a \in A$, $b \in B$, és például $a < b$, akkor legyen

$$c = \sup (A \cap [a, b]).$$

Minthogy (10.1.1) szerint A zárt, azért $c \in A$. Így $c<b$, és minthogy A nyílt is, alkalmas $\varepsilon > 0$ mellett $[c, c + \varepsilon] \subset A$, $c + \varepsilon < b$. Ebből $c + \varepsilon \in A$ adódnék, c értelmezésével ellenetétben. ▮

(10.1.8) *Legyen $[E, \mathfrak{T}]$ topologikus tér. A következő állítások egyenértékűek:*

(a) *$\mathfrak{T}$ összefüggő;*

(b) *$[E, \mathfrak{T}]$-ben $\emptyset$-n és E-n kívül nincsen nyílt-zárt halmaz;*

(c) *$\emptyset \neq C \neq E$, $C \subset E$ esetén* mar $C \neq \emptyset$.

Bizonyítás. (a) $\Rightarrow$ (b): Ha $C \subset E$ nyílt-zárt, akkor $E = C \cup (E - C)$ szétéső felbontás.

(b) $\Rightarrow$ (c): mar $C = \emptyset$ esetén $C = \operatorname{int} C = \bar{C}$, tehát C nyílt-zárt.

(c) $\Rightarrow$ (a): Ha $E = A \cup B$ szétéső felbontás, akkor A nyílt-zárt (10.1.1) szerint, tehát $A = \bar{A} = \operatorname{int} A$, és mar $A = \emptyset$. ▮

Érdemes még a (c) tulajdonság általánosításaként megjegyezni:

(10.1.9) *Ha az $[E, \mathfrak{T}]$ topologikus térben C összefüggő, és $C \cap A \neq \emptyset \neq C - A$, akkor $C \cap$* mar *$A \neq \emptyset$.*

Bizonyítás. Ellenkező esetben $C \subset \operatorname{int} A \cup (E - \bar{A})$ volna, s mivel az utóbbi két halmaz nyilván szétéső, s feltevésünk szerint mindkettő metszi C-t, C-vel való metszetük (10.1.4) szerint C-nek valódi szétéső felbontását adná. ▮

10.1.c. Műveletek. Számos művelet adható meg, amely összefüggő halmazokból összefüggő halmazokhoz vezet.

(10.1.10) *Ha az* $[E, \mathfrak{T}]$ *topologikus térben* C *összefüggő, és* $C \subset C_1 \subset \bar{C}$, *akkor* C_1 *is összefüggő.*

Bizonyítás. Ha $C_1 = A \cup B$ valódi széteső felbontás volna, akkor $C \cap A = \emptyset$ esetén $C \subset B$, $\bar{C} \subset \bar{B}$, $A \cap \bar{B} = \emptyset$ miatt $A = \emptyset$ adódnék, úgyhogy $C \cap A \neq \emptyset$. Ugyanígy $C \cap B \neq \emptyset$. Így viszont (10.1.4) szerint $C = (C \cap A) \cup (C \cap B)$ valódi széteső felbontása C-nek, ami lehetetlen. ∎

(10.1.11) *Ha az* $[E, \mathfrak{T}]$ *topologikus térben* C_i *összefüggő* $(i \in I)$, *továbbá* $\bigcap_{i \in I} C_i \neq \emptyset$, *akkor* $C = \bigcup_{i \in I} C_i$ *is összefüggő.*

Bizonyítás. Ha $C = A \cup B$ valódi széteső felbontás, $x \in \bigcap_{i \in I} C_i$, és például $x \in A$, akkor $y \in B$ esetén valamely i-re $y \in C_i$, továbbá $x \in C_i$, és így $C_i = (A \cap C_i) \cup (B \cap C_i)$ C_i-nek valódi, (10.1.4) szerint széteső felbontása. Ez lehetetlen. ∎

(10.1.12) *Ha az* $[E, \mathfrak{T}]$ *topologikus térben bármely két* x, y *ponthoz található olyan összefüggő* C_{xy} *halmaz, hogy* $x, y \in C_{xy}$, *akkor a tér összefüggő.*

Bizonyítás. Egy $x \in E$ pontot rögzítve, $x \in \bigcap_{y \in E} C_{xy}$, $E = \bigcup_{y \in E} C_{xy}$, és (10.1.11) alkalmazható. ∎

(10.1.13) *Ha az* $[E, \mathfrak{T}]$ *összefüggő topologikus térben* $E = A \cup B \cup C$, A *és* B *széteső,* C *összefüggő,* $A \cap C \neq \emptyset$, *akkor* $A \cup C$ *is összefüggő.*

Bizonyítás. Tegyük fel, hogy $A \cup C = M \cup N$ valódi széteső felbontás. $C \cap M \neq \emptyset \neq C \cap N$ esetén (10.1.4) szerint C-nek is volna valódi széteső felbontása, úgyhogy például $C \cap M = \emptyset$, $C \subset N$. Ekkor $A \supset M$, s minthogy A és B széteső, szükségképpen M és B is széteső. (10.1.5) szerint $E = M \cup (N \cup B)$ széteső, $M \neq \emptyset$, $N \neq \emptyset$ miatt valódi felbontás volna, ami lehetetlen. ∎

(10.1.14) *Ha az* $[E, \mathfrak{T}]$ *topologikus térben* $A \cup B$ *és* $A \cap B$ *összefüggő, továbbá* A *is,* B *is zárt (nyílt), akkor* A *és* B *is összefüggő.*

Bizonyítás. (10.1.6) alapján feltehető, hogy $A \cup B = E$. Ekkor $E = (A - B) \cup (B - A) \cup (A \cap B)$, itt a tagok diszjunktak, E és $A \cap B$ összefüggő, továbbá $A - B$ és $B - A$ széteső, hiszen $\overline{A - B} \cap (B - A) \subset \bar{A} \cap (B - A) = A \cap (B - A) = \emptyset$ s ugyanígy $(A - B) \cap \overline{B - A} = \emptyset$ (ill. ha A és B nyílt, akkor $\overline{A - B} \cap (B - A) \subset \overline{E - B} \cap (B - A) = (E - B) \cap (B - A) = \emptyset$, s ugyanígy $(A - B) \cap \overline{B - A} = \emptyset$). Így (10.1.13) értelmében $A = (A - B) \cup (A \cap B)$ és $B = (B - A) \cup (A \cap B)$ is összefüggő. ∎

A definícióból rögtön következik, hogy összefüggő térrel homeomorf tér is összefüggő. Ezt jelentékenyen élesíthetjük:

(10.1.15) *Összefüggő topologikus tér folytonos képe is összefüggő.*

Bizonyítás. Legyen $[X, \mathfrak{T}_1]$ összefüggő, $f : X \to Y$ $(\mathfrak{T}_1, \mathfrak{T}_2)$-folytonos, $f(X) = Y$. Ha $Y = A \cup B$ valódi széteső felbontás volna, akkor $X = f^{-1}(A) \cup f^{-1}(B)$, $f^{-1}(A)$ és $f^{-1}(B)$ nyílt és nem-üres, továbbá

$$f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B) = f^{-1}(A \cap B) = \emptyset.$$

Ez lehetetlen. ∎

Ennek felhasználásával áttekinthetjük az $[\mathbf{R}, \mathscr{E}]$ térben az összes összefüggő halmazokat:

(10.1.16) *Az* $[\mathbf{R}, \mathscr{E}]$ *térben összefüggők az* (a, b), $(a, b]$, $[a, b)$, $[a, b]$ $(a \leqq b,$ $a, b \in \mathbf{R})$, *továbbá a*

$$(-\infty, +\infty),\ (-\infty, a),\ (-\infty, a],\ (a, +\infty),\ [a, +\infty)\ (a \in \mathbf{R})$$

alakú halmazok és csak ezek.

Bizonyítás. Azt már (10.1.7)-ből tudjuk, hogy $(-\infty, +\infty)$ összefüggő, továbbá $(a, a) = (a, a] = [a, a) = \emptyset$ és $[a, a] = \{a\}$ is összefüggő. Az $a < b$ esetén adódó (a, b) intervallum az $y = \frac{a+b}{2} + \frac{b-a}{2}\frac{x}{1+|x|}$ képlettel adott folytonos leképezésnél származó képe $\mathbf{R}$-nek, s így összefüggő. Ebből (10.1.10) alapján adódik $(a, b]$, $[a, b)$ és $[a, b]$ összefüggő volta. Minthogy (0,1)-et az $y = a - 1 + \frac{1}{x}$ leképezés $(a, +\infty)$-be viszi át, azért $(a, +\infty)$, és (10.1.10) miatt $[a, +\infty)$ is összefüggő. Az $y = -x$ leképezés $(-a, +\infty)$-t és $[-a, +\infty)$-t $(-\infty, a)$-ba, ill. $(-\infty, a]$-ba viszi át, úgyhogy ezek is összefüggők.

Viszont ha $C \subset \mathbf{R}$ nem tartozik a felsorolt típusok valamelyikébe, akkor található olyan a, b, c, hogy $a < b < c$, $a, c \in C$, $b \notin C$. Ekkor $(-\infty, b)$ és $(b, +\infty)$ széteső, és mindkettő metszi C-t, úgyhogy (10.1.4) szerint van C-nek valódi széteső felbontása. ∎

(10.1.17) *Ha* $[E_i, \mathscr{T}_i]$ *minden* $i \in I$*-re összefüggő topologikus tér, akkor* $\mathscr{T} = \bigtimes_{i \in I} \mathscr{T}_i$ *is összefüggő.*

Bizonyítás. Minden $i \in I$-re válasszunk és rögzítsünk egy $x_i \in E_i$ pontot, s legyen $x = (x_i) \in \bigtimes_{i \in I} E_i = E$. Jelölje C azoknak az $y = (y_i) \in E$ pontoknak a halmazát, amelyeknek csak véges számú koordinátája különbözik az x pont megfelelő koordinátájától. Világos, hogy $\bar{C} = E$, úgyhogy (10.1.10)-re tekintettel elég megmutatni, hogy C $\mathscr{T}$-összefüggő. Ez viszont abból fog (10.1.11) alapján következni, hogy minden $y \in C$ ponthoz található egy $C_y \subset C$ összefüggő halmaz, amelyre $x, y \in C_y$.

Legyen ennek igazolása céljából $y \in C$, mondjuk $y_i = x_i$, hacsak $i \in I - \{i_1, \ldots, i_n\}$. Legyen azután $k = 1, \ldots, n$ esetén A_k azon $z = (z_i)$ pontok halmaza, amelyekre $z_{i_j} = x_{i_j}$ $j < k$ esetén, $z_{i_j} = y_{i_j}$ $j > k$ esetén, $z_{i_k} \in E_{i_k}$ tetszőleges, végül $z_i = x_i$, ha $i \in I - \{i_1, \ldots, i_n\}$. Minthogy (7.1.31) szerint $\mathscr{T}|A_k$ homeomorf $\mathscr{T}_{i_k}$-val, azért A_k $\mathscr{T}$-összefüggő. Továbbá $y \in A_1$, $x \in A_n$, és $A_k \cap A_{k+1} \neq \emptyset$ minden $k = 1, \ldots, n-1$ indexre, ugyanis $i \in I - \{i_1, \ldots, i_n\}$ és $i = i_j$, $j \leqq k$ esetén $z_i = x_i$, $i = i_j$, $j \geqq k+1$ esetén $z_i = y_i$ jelöléssel $z = (z_i) \in A_k \cap A_{k+1}$. Ezért (10.1.11) ismételt alkalmazásával az A_1, $A_1 \cup A_2, \ldots, \bigcup_1^n A_k$ halmazok összefüggőknek bizonyulnak, és $C_y = \bigcup_1^n A_k \subset C$ megfelel. ∎

10.1.d. Komponensek. Az $[E, \mathfrak{T}]$ topologikus tér **komponens**ein a tér maximális összefüggő halmazait értjük, vagyis az olyan $C \subset E$ halmazokat, amelyek összefüggők, s ha $C \subset C_1 \subset E$, C_1 összefüggő, akkor $C_1 = C$.

(10.1.10)-ből rögtön következik:

(10.1.18) *Egy topologikus tér minden komponense zárt.* ∎

(10.1.19) *Egy topologikus tér két különböző komponense diszjunkt.*

Bizonyítás. Ha C_1 és C_2 két komponens, és $C_1 \cap C_2 \neq \emptyset$, akkor (10.1.11) szerint $C_1 \cup C_2$ is összefüggő, tehát $C_1 = C_1 \cup C_2 = C_2$. ∎

(10.1.20) *Bármely topologikus tér egyenlő komponenseinek egyesítésével.*

Bizonyítás. Az $[E, \mathfrak{T}]$ tér összes $x \in E$-t tartalmazó összefüggő halmazainak egyesítése (10.1.11) szerint összefüggő, mégpedig nyilván maximális összefüggő halmaz, úgyhogy bármely $x \in E$ pont eleme a tér valamelyik komponensének. ∎

(10.1.19) és (10.1.20) szerint minden topologikus tér komponensei a tér diszjunkt halmazokra való felbontását szolgáltatják. Az $[E, \mathfrak{T}]$ topologikus tér valamely $\emptyset \neq A \subset E$ **részhalmaz**ának **komponens**ein az $[A, \mathfrak{T}|A]$ altér komponenseit értjük.

(10.1.21) *Ha C összefüggő az $[E, \mathfrak{T}]$ topologikus térben, akkor C része a tér valamelyik komponensének.*

Bizonyítás. Ha C_1 a tér egy komponense, és $C \cap C_1 \neq \emptyset$, akkor (10.1.11) szerint $C \cup C_1$ is összefüggő, tehát $C \cup C_1 = C_1$, $C \subset C_1$. ∎

10.1.e. Kontinuumok. A kompakt, összefüggő halmazokat (egy topologikus térben) **kontinuum**oknak nevezzük. Ezekkel kapcsolatos a következő nevezetes tétel:

(10.1.22) *S_4-térben egy kontinuumokból álló rács torlódási pontjai (nem-üres) kontinuumot alkotnak.*

Bizonyítás. Legyen $[E, \mathfrak{T}]$ S_4-tér, $\mathfrak{k}$ pedig kontinuumokból álló E-beli rács. (5.3.9) szerint $\mathfrak{k}$ torlódási pontjainak C halmaza nem-üres, továbbá (5.2.24) szerint $C = \bigcap \{\bar{K} : K \in \mathfrak{k}\}$ az (5.3.20) értelmében kompakt $\bar{K}_0$ (ahol $K_0 \in \mathfrak{k}$ tetszőleges) halmaz zárt részeként (5.3.4) folytán kompakt.

Legyen $C = A \cup B$ valódi széteső felbontás. Ekkor (10.1.3) szerint A és B zárt, tehát van olyan nyílt G és H halmaz, hogy $A \subset G$, $B \subset H$, $G \cap H = \emptyset$. Ha egy $K \in \mathfrak{k}$ halmazra sem állna $\bar{K} \subset G \cup H$, akkor a $\bar{K} - (G \cup H) \neq \emptyset$ halmazok kompakt halmazokból álló rácsot alkotnának, amelynek tehát volna torlódási pontja, holott $\bigcap \{\bar{K} - (G \cup H) : K \in \mathfrak{k}\} = \bigcap \{\bar{K} : K \in \mathfrak{k}\} - (G \cup H) = \emptyset$. Így valamely $\mathfrak{k}$-beli K-ra $\bar{K} \subset G \cup H$, s minthogy G és H széteső, továbbá $\emptyset \neq A \subset \subset \bar{K} \cap G$, $\emptyset \neq B \subset \bar{K} \cap H$, azért $\bar{K} = (\bar{K} \cap G) \cup (\bar{K} \cap H)$ valódi széteső felbontás (10.1.4) szerint, holott (10.1.10) miatt $\bar{K}$ összefüggő. Ez az ellentmondás mutatja, hogy C összefüggő is. ∎

Innen (5.2.24) figyelembevételével adódik:

(10.1.23) *Ha egy S_4-térben $K_1 \supset K_2 \supset K_3 \supset \dots$ nem-üres kontinuumok sorozata, akkor $\bigcap_1^\infty \bar{K}_n \neq \emptyset$ is kontinuum.* ∎

10.1.f. Gyakorlatok. 1. Mutassuk meg, hogy

(a) az $[\mathbf{R}, \mathfrak{G}]$ tér minden altere összefüggő;

(b) bármely egynél több pontból álló T_1-térben van nem-összefüggő altér.

2. Mutassuk meg, hogy az $[E, \mathcal{F}_E]$ térben egy halmaz pontosan akkor összefüggő, ha üres, egyelemű vagy végtelen.

3. Mutassuk meg, hogy egy nulladimenziós T_0-térben csak $\emptyset$ és az egyelemű halmazok összefüggők.

4. Legyen E rendezett halmaz, $\mathcal{T}$ E-nek rendezéstopológiája. Mutassuk meg, hogy $\mathcal{T}$ pontosan akkor összefüggő, ha E rendezése teljes, és benne nincsenek szomszédos elemek (azaz $a, b \in E$, $a < b$ esetén mindig van olyan $c \in E$, hogy $a < c < b$).

[Ha $a < b$, és ezek szomszédosak, akkor $E = (\leftarrow, a] \cup [b, \rightarrow)$ valódi széteső felbontás; ha $A \subset E$, $a \in A$, b felső korlátja A-nak, de legkisebb felső korlátja nincs, akkor A felső korlátjai nyílt-zárt halmazt alkotnak, amely b-t tartalmazza, a-t nem. A feltételekből $\mathcal{T}$ összefüggő volta ugyanúgy következik, mint $\mathcal{E}$-é.]

5. Legyen $E = \mathbf{R} \times \mathbf{I}$, és (x_1, y_1), $(x_2, y_2) \in E$ esetén $(x_1, y_1) < (x_2, y_2)$, ha $x_1 < x_2$, vagy $x_1 = x_2$ és $y_1 < y_2$. Mutassuk meg, hogy E rendezéstopológiája összefüggő.

6. Mutassuk meg, hogy összefüggő és legalább két pontból álló T_π-tér nem lehet megszámlálható.

[Van olyan folytonos függvény, amelynek értékkészlete nem-megszámlálható.]

7. Mutassuk meg, hogy ha $[Y, \mathcal{T}]$ összefüggő topologikus tér, $f : X \rightarrow Y$ pedig szuperjekció, akkor $f^{-1}(\mathcal{T})$ is összefüggő.

8. Adjunk példát arra, hogy összefüggő topológiák szuprémuma nem feltétlenül összefüggő.

[$E = \{0,1\}$, $\emptyset$-n és E-n kívül $\mathcal{T}_1$-nyílt $\{0\}$, $\mathcal{T}_2$-nyílt $\{1\}$.]

9. Mutassuk meg, hogy a **9.2.** alatti 11. feladatban szereplő tér

(a) peremkompakt;

(b) nem lokálisan kompakt;

(c) nem nulladimenziós.

10. Legyen $E \subset \mathbf{R}^2$ azoknak az (x, y) pontoknak a halmaza, amelyekre x racionális, $\mathcal{T} = \mathcal{E}^2|E$. Mutassuk meg, hogy

(a) ha $z_0 = (x_0, y_0) \in E$, és V z_0-nak olyan $\mathcal{T}$-környezete, hogy $V \subset [x_0 - 1, x_0 + 1] \times [y_0 - 1, y_0 + 1]$, akkor alkalmas $\delta > 0$ mellett minden racionális $x \in [x_0 - \delta, x_0 + \delta]$-hoz van V-nek olyan $\mathcal{T}$-határpontja, amelynek abszcisszája x;

(b) az előbbi tulajdonságú V-nek $\mathcal{T}$-határa nem lehet $\mathcal{T}$-kompakt;

(c) $\mathcal{T}$ nem peremkompakt.

11. Legyen $E \subset \mathbf{R}^2$ azon (x, y) pontok halmaza, amelyekre x és y közül legalább az egyik racionális. Mutassuk meg, hogy $\mathcal{E}^2|E$ összefüggő.

12. Nevezzük $a, b \in \mathbf{R}^m$ esetén ab szakasznak az $(a_1 + t(b_1 - a_1), \dots, a_m + t(b_m - a_m))$ pontok halmazát, ahol $a = (a_1, \dots, a_m)$, $b = (b_1, \dots, b_m)$, és $t \in \mathbf{I}$. Mutassuk meg, hogy

(a) bármely ab szakasz összefüggő $[\mathbf{R}^m, \mathcal{E}^m]$-ben;

(b) $x \in S(a, \varepsilon)$ esetén az ax szakasz része $S(x, \varepsilon)$-nak;

(c) $S(a, \varepsilon)$ összefüggő.

13. Nevezzük $\mathbf{R}^m$-ben poligonnak az olyan halmazt, amely egymáshoz csatlakozó $a_0a_1, a_1a_2, \ldots, a_{n-1}a_n$ szakaszok egyesítése. Mutassuk meg, hogy

(a) $[\mathbf{R}^m, \mathscr{E}^m]$-ben minden poligon összefüggő;

(b) ha $G \subset \mathbf{R}^m$ nyílt, és $a \in G$, akkor azok az $x \in G$ pontok, amelyekhez található G-ben fekvő, a-t és x-et tartalmazó poligon, $\mathscr{E}^m|G$-nyílt-zárt halmazt alkotnak;

(c) a $G \subset \mathbf{R}^m$ nyílt halmaz pontosan akkor összefüggő, ha $a, b \in G$ esetén van G-ben fekvő, a-t és b-t tartalmazó poligon.

14. Mutassuk meg, hogy a 10. alatti $[E, \mathscr{T}]$ tér komponensei az $\{x\} \times \mathbf{R}$ alakú halmazok ($x \in \mathbf{Q}$).

15. Mutassuk meg, hogy ha az $[E, \mathscr{T}]$ topologikus térben $C \subset E$ összefüggő és nyílt-zárt, akkor E-nek komponense.

16. Mutassuk meg, hogy ha az $[E, \mathscr{T}]$ topologikus térben $C \subset A \subset B$, és C B-nek komponense, akkor A-nak is komponense.

17. Legyen $Q = [0,1] \times [0,1] \subset \mathbf{R}^2$. Távolítsuk el Q-ból a középső $\left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right) \times \left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right)$ nyílt négyzetet, majd a többi $\left[\frac{i-1}{3}, \frac{i}{3}\right] \times \left[\frac{j-1}{3}, \frac{j}{3}\right]$ négyzetekből a középső $\left(\frac{3i-2}{9}, \frac{3i-1}{9}\right) \times \left(\frac{3j-2}{9}, \frac{3j-1}{9}\right)$ nyílt négyzeteket, s ezt folytassuk minden határon túl. Mutassuk meg, hogy a Q-ból visszamaradó K halmazra $[K, \mathscr{E}^2|K]$ kontinuum.

18. Tegyük fel a **7.1.** alatti 15. feladat jelöléseivel, hogy minden $[E_i, \mathscr{T}_i]$ tér T_2-kontinuum. Mutassuk meg, hogy

(a) $i_1, \ldots, i_n, j \in I$, $i_s \leqq j$ $(s = 1, \ldots, n)$ esetén $A_{i_1, \ldots, i_n; j}$ a $\underset{i \in I}{\times} \mathscr{T}_i$-ből származó altértopológiával ellátva homeomorf a

$$[K \times \underset{\substack{i \in I \\ i \neq i_s, j}}{\times} E_i,\ \mathscr{T}' \times \underset{\substack{i \in I \\ i \neq i_s, j}}{\times} \mathscr{T}_i]$$

térrel, ahol $K \subset E_{i_1} \times \ldots \times E_{i_n} \times E_j$ az E_j tér képe a $g(x) = (p_{i_1 j}(x), \ldots, p_{i_n j}(x), x)$ képlettel adott leképezésnél, és $\mathscr{T}' = \mathscr{T}_{i_1} \times \ldots \times \mathscr{T}_{i_n} \times \mathscr{T}_j|K$;

(b) az előbbi g $(\mathscr{T}_j, \mathscr{T}')$-folytonos;

(c) $A_{i_1, \ldots, i_n; j}$ kontinuum;

(d) $[E, \mathscr{T}]$ T_2-kontinuum.

10.2. LOKÁLISAN ÖSSZEFÜGGŐ TEREK

10.2.a. Lokális összefüggés. Az $[E, \mathscr{T}]$ topologikus teret (és a $\mathscr{T}$ topológiát) **lokálisan összefüggő**nek mondjuk, ha benne minden pontnak van csupa összefüggő halmazból álló környezetbázisa.

További fontos jellemezéseket tartalmaz a következő tétel:

(10.2.1) *Legyen $[E, \mathscr{T}]$ topologikus tér. A következő állítások egyenértékűek:*

(a) *A tér lokálisan összefüggő;*

(b) *A térben minden nyílt halmaz komponensei is nyíltak;*

(c) *A térnek van csupa összefüggő halmazból álló bázisa.*

Bizonyítás. (a) $\Rightarrow$ (b): Ha G nyílt, és C G-nek egy komponense, akkor bármely $x \in C$ pontnak van olyan összefüggő V környezete, hogy $x \in V \subset G$; (10.1.21) szerint $V \subset C$ is, tehát $x \in \operatorname{int} C$, és C nyílt.

(b) $\Rightarrow$ (c): Az összes összefüggő, nyílt halmazok bázist alkotnak, mert minden nyílt halmaz előállítható (10.1.20) értelmében komponenseinek, tehát összefüggő, nyílt halmazoknak egyesítéseként.

(c) $\Rightarrow$ (a): Triviális. ∎

(10.1.16) felhasználásával azonnal látható, hogy a következő terek mindegyike lokálisan összefüggő: $[\mathbf{R}, \mathscr{E}]$, $[[a, b], \mathscr{E}|[a, b]]$ $(a, b \in \mathbf{R},\ a \leqq b)$, $[[a, b), \mathscr{E}|[a, b)]$ $(a < b)$. Ellenben nem lokálisan összefüggő például a $[\mathbf{Q}, \mathscr{E}|\mathbf{Q}]$ tér, hiszen magának a térnek a komponensei egyeleműek, s így nem nyíltak.

Az előbbi tér nem is összefüggő. Nem lokálisan összefüggő, de összefüggő térre (sőt kontinuumra) nevezetes példa a következő: legyen E a síkon a $K = \{(0, y): -1 \leqq y \leqq 1\}$ szakasz és a $C = \left\{\left(x, \sin\frac{1}{x}\right) : 0 < x \leqq \frac{2}{\pi}\right\}$ görbe egyesítése, s tekintsük az $[E, \mathscr{E}^2|E]$ teret. Könnyen látható, hogy E a síkban korlátos, zárt halmaz, tehát (5.3.8) szerint kompakt, és összefüggő is. Valóban, C összefüggő (a $\left(0, \frac{2}{\pi}\right]$ intervallumnak folytonos képe, úgyhogy (10.1.16) és (10.1.15) alkalmazható), és nyilván $E = \bar{C}$, tehát (10.1.10) értelmében összefüggő.

Az, hogy az előbbi tér nem lokálisan összefüggő, abból látszik, hogy benne nem minden nyílt halmaz komponensei nyíltak. Legyen ugyanis G az E térnek az $\left\{(x, y) : -\frac{1}{2} < y < \frac{1}{2}\right\}$ nyílt sávba eső része. Ez a $K' = \left\{(0, y) : -\frac{1}{2} < y < \frac{1}{2}\right\}$ nyílt intervallumnak, továbbá a C_n $(n \in \mathbf{N})$ halmazoknak egyesítése, ahol

$$C_n = \left\{\left(x, \sin\frac{1}{x}\right) : \frac{1}{\left(n + \frac{1}{6}\right)\pi} < x < \frac{1}{\left(n - \frac{1}{6}\right)\pi}\right\}.$$

A C_n halmazok is összefüggők, hiszen egy-egy nyílt intervallumnak folytonos képei, s mindegyik egy komponense G-nek, ugyanis

$$C_n = G \cap \left\{(x, y) : \frac{1}{\left(n + \frac{1}{6}\right)\pi} < x < \frac{1}{\left(n - \frac{1}{6}\right)\pi}\right\} =$$

$$= G \cap \left\{(x, y) : \frac{1}{\left(n + \frac{1}{6}\right)\pi} \leqq x \leqq \frac{1}{\left(n - \frac{1}{6}\right)\pi}\right\}$$

folytán C_n a $[G, \mathscr{E}^2|G]$ térben nyílt-zárt, és így C_n és $G - C_n$ széteső, C_n G-nek maximális összefüggő részhalmaza. (10.1.19) és (10.1.20) szerint tehát K' is komponense G-nek, de ez már nem $\mathscr{E}^2|G$-nyílt, hiszen nyilván $K' \subset \overline{\bigcup_{1}^{\infty} C_n}$.

Minthogy (10.1.16) szerint az $[\mathbf{R}, \mathscr{E}]$ térben összefüggő, nyílt halmaz csak (véges vagy végtelen) nyílt intervallum lehet, (10.2.1) alapján kimondható:

(10.2.2) *Az* $[\mathbf{R}, \mathscr{E}]$ *térben minden nyílt halmaz komponensei (véges vagy végtelen) nyílt intervallumok.* ∎

10.2.b. Műveletek. Egy összefüggő tér altereinek összefüggő voltáról semmit sem mondhattunk. Ezzel szemben:

(10.2.3) *Lokálisan összefüggő tér nyílt altere is lokálisan összefüggő.*

Bizonyítás. Legyen $\emptyset \neq E_0 \subset E$ nyílt az $[E, \mathscr{T}]$ lokálisan összefüggő térben. Ha $\{V_i : i \in I\}$ egy $x \in E_0$ pont összefüggő halmazokból álló $\mathscr{T}$-környezetbázisa, akkor azok a V_i-k, amelyek E_0-nak részei, x-nek $\mathscr{T}|E_0$-környezetbázisát alkotják. ∎

(10.2.4) *Véges számú lokálisan összefüggő tér szorzata is lokálisan összefüggő.*

Bizonyítás. A $[\bigtimes_1^n E_i, \bigtimes_1^n \mathscr{T}_i]$ térben nyilván bázist alkotnak a $\bigtimes_1^n B_i$ alakú halmazok, ahol B_i a $\mathscr{T}_i$ topológiának egy összefüggő halmazokból álló bázisából van véve. Ezek a halmazok azonban (10.1.17) értelmében összefüggők. ∎

(10.2.5) *Tetszőleges számú összefüggő és lokálisan összefüggő tér szorzata is (összefüggő és) lokálisan összefüggő.*

Bizonyítás. Ismét (10.1.17)-re hivatkozva összefüggők és bázist alkotnak a $\bigtimes_{i \in I} B_i$ alakú halmazok, ahol véges számú i-re B_i a $\mathscr{T}_i$ topológiának egy összefüggő halmazokból álló bázisából van véve, a többi i-re pedig $B_i = E_i$. ∎

Eszerint például $[\mathbf{R}^I, \mathscr{E}^I]$ vagy $[\mathbf{I}^I, (\mathscr{E}|\mathbf{I})^I]$ tetszőleges I indexhalmaz esetén összefüggő és lokálisan összefüggő.

10.2.c. Ívek. Az előbbiek szerint lokálisan összefüggő például az $[\mathbf{I}, \mathscr{E}|\mathbf{I}]$ tér. Minthogy természetesen egy lokálisan összefüggő térrel homeomorf terek is lokálisan összefüggők, azért ugyanez mondható az előbbi térrel homeomorf terekről is. Az ilyen tereket íveknek nevezzük; pontosabban egy $[E, \mathscr{T}]$ topologikus térben **ívnek** mondjuk az A halmazt, ha $[A, \mathscr{T}|A]$ homeomorf $[\mathbf{I}, \mathscr{E}|\mathbf{I}]$-vel. Világos, hogy $a, b \in \mathbf{R}$, $a < b$ esetén $[[a, b], \mathscr{E}|[a, b]]$ ív; ebből rögtön következik, hogy az ív előbbi definíciójában $\mathbf{I}$ helyett tetszőleges $[a, b]$ intervallum tehető.

A következőkben az lesz a célunk, hogy az íveket lehetőleg egyszerű topológiai tulajdonságaik segítségével jellemezzük. Jegyezzük meg ennek érdekében, hogy ha $x \in \mathbf{I}$, $0 \neq x \neq 1$, akkor $\mathbf{I} - \{x\} = [0, x) \cup (x, 1]$, és itt az utóbbi két halmaz nyilván $\mathscr{E}|\mathbf{I}$-széteső. Ha tehát megállapodunk abban a szóhasználatban, hogy egy $[E, \mathscr{T}]$ topologikus térben az x pont **elválasztja** az a és b pontot, ha $(E - \{x\})$-nek van olyan széteső $E - \{x\} = A \cup B$ felbontása, hogy $a \in A$, $b \in B$, mondhatjuk, hogy az $[\mathbf{I}, \mathscr{E}|\mathbf{I}]$ térben van két olyan pont (ti. 0 és 1), hogy bármely további pont elválasztja ezt a kettőt. Világos, hogy ugyanez a tulajdonsága minden ívnek is megvan, és éppen azt fogjuk megmutatni, hogy ez a tulajdonság alkalmas további kikötésekkel együtt jellemzi is az íveket.

Az erre vonatkozó főtétel magvát a következő segédtétel tartalmazza:

(10.2.6) *Legyen* $[E, \mathscr{T}]$ *összefüggő* T_1- *és* M_2-*tér, és tegyük fel, hogy van E-ben két olyan pont, hogy E-nek minden további pontja elválasztja ezt a kettőt. Ekkor megadható egy* $(\mathscr{T}, \mathscr{E}|\mathbf{I})$-*folytonos* $h : E \to \mathbf{I}$ *bijekció.*

Bizonyítás. Legyen a és b E-nek két olyan pontja, hogy minden $x \in E - \{a, b\}$ pont elválasztja a-t és b-t, mondjuk

$$E - \{x\} = A_x \cup B_x,$$

ahol A_x és B_x széteső, $a \in A_x$, $b \in B_x$. Minden a-tól és b-től különböző $x \in E$ ponthoz válasszunk meg és rögzítsünk a továbbiakra egy-egy ilyen A_x és B_x halmazt.

Minthogy a tér T_1-tér, $E - \{x\}$ nyílt, A_x és B_x pedig (10.1.3) szerint ugyancsak nyílt. Így $\bar{A}_x$ csak A_x-szel vagy $(A_x \cup \{x\})$-szel lehet egyenlő; az első esetben A_x $\emptyset$-tól és E-től különböző nyílt-zárt halmaz volna, ami (10.1.8) szerint lehetetlen. Így — és hasonló meggondolással —

$$\bar{A}_x = A_x \cup \{x\}, \ \bar{B}_x = B_x \cup \{x\} \qquad (x \in E - \{a, b\}).$$

Minthogy $\bar{A}_x \cup \bar{B}_x = E$, $\bar{A}_x \cap \bar{B}_x = \{x\}$, azért (10.1.14) értelmében $\bar{A}_x$ is, $\bar{B}_x$ is összefüggő.

Legyen most $x, y \in E - \{a, b\}$, $x \neq y$. Ha $y \in B_x$, akkor (10.1.4) miatt $\bar{A}_x \subset \subset E - \{y\} = A_y \cup B_y$ nem metszheti az A_y és B_y halmazok mindegyikét, tehát $a \in \bar{A}_x \cap A_y$ folytán $\bar{A}_x \subset A_y$; az ebből adódó $x \in A_y$ relációból ugyanilyen meggondolással $\bar{B}_y \subset B_x$ következik. Egészen hasonlóan, ha $y \in A_x$, akkor $\bar{A}_y \subset A_x$, $\bar{B}_x \subset B_y$. Más szóval, ha $x, y \in E - \{a, b\}$, $x \neq y$, akkor vagy

(*) $$\bar{A}_x \subset A_y, \ \bar{B}_y \subset B_x,$$

vagy pedig

(**) $$\bar{A}_y \subset A_x, \ \bar{B}_x \subset B_y.$$

Legyen most $\{V_n : n \in \mathbf{N}\}$ bázis $\mathcal{T}$ számára, és $x \in E - \{a, b\}$ esetén $c_n(x) = 0$ vagy 1 aszerint, hogy $V_n \cap \bar{A}_x = \emptyset$ vagy $V_n \cap \bar{A}_x \neq \emptyset$. Értelmezzünk az $E - \{a, b\}$ halmazon egy f függvényt a következő előírással:

$$f(x) = \sum_1^\infty \frac{c_n(x)}{2^n} \qquad (x \in E - \{a, b\}).$$

Világos, hogy $0 \leqq f(x) \leqq 1$ minden szóba jövő x-re; sőt mivel legalább egy n-re $x \in V_n$, azért a megfelelő $c_n(x) = 1$, s így $f(x) > 0$, s viszont legalább egy m-re $b \in V_m \subset B_x$, úgyhogy $c_m(x) = 0$, és $f(x) < 1$. Továbbá ha $x, y \in E - \{a, b\}$, $x \neq y$, és a (*) eset áll fenn, akkor $\bar{A}_x \subset \bar{A}_y$ miatt $c_n(x) \leqq c_n(y)$ minden n-re, és legalább egy n-re $y \in V_n \subset B_x$, úgyhogy $c_n(x) = 0$, $c_n(y) = 1$, és $f(x) < f(y)$; a (**) esetben hasonlóan $f(x) > f(y)$ adódik. Ennélfogva $f : E - \{a, b\} \to \mathbf{R}$ injektív leképezés. Legyen $D = f(E - \{a, b\}) \subset (0,1)$.

A D halmaz nem üres, nincs sem legkisebb, sem legnagyobb eleme, és bármely két eleme között van további elem. Valóban, $D = \emptyset$ azt jelentené, hogy $E = \{a, b\}$, ez pedig lehetetlen, mert $\mathcal{T}$ összefüggő T_1-topológia. Ha $x \in E - \{a, b\}$, akkor sem A_x, sem B_x nem zárt, tehát található $y \in A_x - \{a\}$, $z \in B_x - \{b\}$, s akkor $\bar{A}_y \subset A_x$, $\bar{B}_z \subset B_x$, tehát $f(y) < f(x) < f(z)$. Végül ha $x, y \in E - \{a, b\}$,

$f(x) < f(y)$, akkor a (*) eset áll fenn, s minthogy A_y nem zárt, van olyan z, hogy $z \in A_y - \bar{A}_x$; ekkor azonban $\bar{A}_x \subset A_z \subset \bar{A}_z \subset A_y$, és $f(x) < f(z) < f(y)$.

Most a D halmazon olyan g függvényt fogunk értelmezni, hogy $u, v \in D$, $u < v$ esetén $g(u) < g(v)$ legyen, és $\overline{g(D)} = \mathbf{I}$ álljon (a lezárást az $\mathfrak{E}$ topológiára vonatkoztatva).

Tekintsünk ennek érdekében egy megszámlálható, $\mathfrak{E}|D$-sűrű $M = \{m_i : i \in \mathbf{N}\}$ halmazt, $R = \{r_i : i \in \mathbf{N}\}$ pedig legyen a (0,1)-beli racionális számok halmaza, $i \neq j$ esetén $m_i \neq m_j$, $r_i \neq r_j$. A D halmaz hasonló tulajdonságai miatt M-ben sincs sem legkisebb, sem legnagyobb elem, s bármely két eleme között van további eleme. Ugyanezek elmondhatók persze R-ről is.

A g függvényt először M elemeire értelmezzük, mégpedig úgy, hogy $g(M) = R$ legyen. Először is legyen $g(m_1) = r_1$, $i_1 = j_1 = 1$. Az i_2 indexet válasszuk úgy, hogy $m_{i_1} < m_{i_2}$ vagy $m_{i_1} > m_{i_2}$ álljon annak megfelelően, hogy $r_1 < r_2$ vagy $r_1 > r_2$, s legyen $g(m_{i_2}) = r_2$, $j_2 = 2$. Legyen azután i_3 a legkisebb i_1-től és i_2-től különböző index, j_3 pedig olyan, hogy $r_{j_1}, r_{j_2}, r_{j_3}$ nagyság szerinti elhelyezkedése ugyanolyan legyen, mint $m_{i_1}, m_{i_2}, m_{i_3}$-é, és legyen $g(m_{i_3}) = r_{j_3}$. Általában, ha $i_1, \ldots, i_k$ és $j_1, \ldots, j_k$ már meg van választva, mégpedig úgy, hogy $m_{i_p} < m_{i_q}$ esetén $r_{j_p} < r_{j_q}$ legyen ($p, q = 1, \ldots, k$), akkor legyen páros k esetén i_{k+1} a legkisebb i_1-től, $\ldots$, i_k-tól különböző, páratlan k esetén pedig j_{k+1} a legkisebb j_1-től, $\ldots$, j_k-tól különböző természetes szám, $r_{j_{k+1}}$ ($m_{i_{k+1}}$) pedig olyan, hogy $m_{i_p} < m_{i_q}$ esetén $r_{j_p} < r_{j_q}$ álljon még $p, q = 1, \ldots, k+1$ esetén is. Az M és R halmaz rendezésére vonatkozó megállapításaink biztosítják, hogy $r_{j_{k+1}}$, ill. $m_{i_{k+1}}$ ilyen megválasztása mindig lehetséges; legyen azután $g(m_{i_{k+1}}) = r_{j_{k+1}}$. Minthogy minden második lépésben M-ből, ill. R-ből választjuk a legelső még nem szerepelt elemet, az is biztosítva van, hogy M és R minden eleme sorrakerül.

Legyen azután $u \in D$ esetén

$$g(u) = \sup \{g(m_i) : m_i \leqq u\}.$$

Ez $u \in M$ esetén nyilván összhangban van g eddigi értelmezésével, s világos az is, hogy $u, v \in D$, $u < v$ esetén $g(u) \leqq g(v)$, sőt $g(u) < g(v)$, hiszen van olyan p és q, hogy $u < m_{i_p} < m_{i_q} < v$, s akkor $g(u) \leqq g(m_{i_p}) < g(m_{i_q}) \leqq g(v)$. Az $R \subset g(D) \subset \mathbf{I}$ relációból $\overline{g(D)} = \mathbf{I}$ következik.

Legyen végül $x \in E - \{a, b\}$ esetén

$$h(x) = g(f(x)),$$

továbbá $h(a) = 0$, $h(b) = 1$. A mondottak alapján $h|E - \{a, b\}$ mindenesetre $\mathbf{I}$-be vezető injektív leképezés, sőt (0,1)-be vezető, hiszen $x \in E - \{a, b\}$ esetén van olyan p és q, hogy $m_{i_p} < f(x) < m_{i_q}$, s akkor $0 < g(m_{i_p}) < g(f(x)) < g(m_{i_q}) < 1$. Így aztán $h : E \to \mathbf{I}$ is injektív.

Megmutatjuk, hogy h $(\mathfrak{T}, \mathfrak{E}|\mathbf{I})$-folytonos. Valóban, $0 < t < 1$ esetén $g(D)$-nek t-nél kisebb elemei között nincs legnagyobb, t-nél nagyobb elemei között nincs legkisebb, hiszen $\overline{g(D)} = \mathbf{I}$; s minthogy $x \in E - \{a, b\}$ esetén $y \in A_x$ és

$h(y) < h(x)$, $z \in B_x$ és $h(z) > h(x)$ egyenértékű, azért

$$h^{-1}([0, t)) = \bigcup \{A_x\colon\ h(x) < t\},$$
$$h^{-1}((t, 1]) = \bigcup \{B_x\colon h(x) > t\}.$$

$t = 0$ esetén

$$h^{-1}([0, t)) = \emptyset,\ h^{-1}((t, 1]) = E - \{a\},$$

$t = 1$ esetén

$$h^{-1}([0, t)) = E - \{b\},\ h^{-1}((t, 1]) = \emptyset,$$

s így végül is $h^{-1}([0, t))$ és $h^{-1}((t, 1])$ minden $t \in \mathbf{I}$-re nyílt. Ebből h folytonossága következik, hiszen a $[0, t)$ és $(t, 1]$ intervallumok szubbázist alkotnak $\mathscr{E}|\mathbf{I}$ számára.

(10.1.15) szerint $h(E)$ összefüggő, ami (10.1.16) figyelembevételével csak $h(E) = \mathbf{I}$ esetén lehetséges. ∎

Most már könnyen igazolhatjuk az ívek következő nevezetes jellemzését:

(10.2.7) **Lennes tétele.** *Az $[E, \mathscr{T}]$ topologikus tér pontosan akkor ív, ha*

(a) *$\mathscr{T}$ összefüggő T_1- és M_2-topológia;*

(b) *van E-ben két olyan pont, hogy E-nek minden további pontja, elválasztja ezt a kettőt;*

(c) *$\mathscr{T}$ kompakt.*

Bizonyítás. A (b) feltétel szükségességét már beláttuk, (a)-é és (c)-é evidens. Viszont (a) és (b) maga után vonja egy $(\mathscr{T}, \mathscr{E}|\mathbf{I})$-folytonos $h : E \to \mathbf{I}$ bijekció létezését (10.2.6) alapján; (c)-ből (5.3.13) értelmében következik, hogy h homeomorfizmus. ∎

Egy másik jellemzés céljából bocsássuk előre a következő megjegyzést:

(10.2.8) *Legyen $[E, \mathscr{T}]$ lokálisan összefüggő tér, $A_i \subset E$ $(i \in I)$. Ekkor*

$$\operatorname{mar}\left(\bigcup_{i\in I} A_i\right) \subset \overline{\bigcup_{i\in I} \operatorname{mar} A_i}.$$

Bizonyítás. Tegyük fel, hogy $x \in \operatorname{mar}\left(\bigcup_{i\in I} A_i\right)$, de $x \notin \overline{\bigcup_{i\in I} \operatorname{mar} A_i}$. Ekkor van x-nek olyan összefüggő V környezete, hogy $V \cap \bigcup_{i\in I} \operatorname{mar} A_i = \emptyset$, s legalább egy i-re $V \cap A_i \neq \emptyset$. Minthogy $V \cap \operatorname{mar} A_i = \emptyset$, azért (10.1.9) szerint $V \subset A_i$, úgyhogy $x \in \operatorname{int} A_i \subset \operatorname{int}\left(\bigcup_{i\in I} A_i\right)$, holott $x \in \operatorname{mar}\left(\bigcup_{i\in I} A_i\right)$: ellentmondás. ∎

(10.2.9) **Whyburn tétele.** *Az $[E, \mathscr{T}]$ topologikus tér pontosan akkor ív, ha eleget tesz a* (10.2.7) (a) *és* (b) *feltételnek, továbbá*

(d) *$\mathscr{T}$ lokálisan összefüggő.*

Bizonyítás. A szükségesség ismét evidens. Legyen ismét (10.2.6)-ra hivatkozva $h : E \to \mathbf{I}$ folytonos bijekció, és tegyük fel, hogy h^{-1} nem $(\mathscr{E}|\mathbf{I}, \mathscr{T})$-folytonos. Ekkor van olyan $\mathscr{T}$-zárt $F \subset E$ halmaz, hogy $h(F)$ nem $\mathscr{E}|\mathbf{I}$-zárt, azaz nem $\mathscr{E}$-zárt. Így van olyan $t \in \mathbf{I} - h(F)$, amelyre $t \in \overline{h(F)}$, és akkor létezik egy $h(F)$-beli (t_n) sorozat úgy, hogy $t_n \to t$; nyilván feltehető az is, hogy ez a sorozat monoton, mondjuk $t_1 < < t_2 < \ldots$. Ha $A_n = h^{-1}([0, t_n))$, akkor A_n nyíltsága és $h^{-1}([0, t_n])$ zártsága miatt $\bar{A}_n \subset h^{-1}([0, t_n])$, mar $A_n \subset h^{-1}(t_n)$, és (10.2.8) szerint mar $(\bigcup_1^\infty A_n) \subset$ $\subset \overline{\bigcup_1^\infty h^{-1}(t_n)}$. Minthogy $t_n \in h(F)$, tehát $h^{-1}(t_n) \subset F \cap h^{-1}([0, t])$, azért

$$\text{mar}\,(\bigcup_1^\infty A_n) \subset F \cap h^{-1}([0, t]) = F \cap h^{-1}([0, t)) \subset \bigcup_1^\infty A_n,$$

úgyhogy a nyílt $\bigcup_1^\infty A_n$ halmaz zárt is, s mivel $\emptyset$-tól és E-től különböző, ellentmondásra jutottunk. ▮

További jellemzés még a következő:

(10.2.10) *Az* $[E, \mathfrak{T}]$ *topologikus tér pontosan akkor ív, ha összefüggő, lokálisan összefüggő, metrizálható, és eleget tesz a* (10.2.7) *alatti* (b) *feltételnek.*

Bizonyítás. A szükségesség ismét evidens, s az elégségességhez (10.2.9)-re tekintettel elég belátni, hogy a tér M_2-tér, azaz (2.4.16) és (3.2.68) alapján azt, hogy egy ρ távolsággal ellátva teljesen korlátos. Ennek ellenkezőjét feltéve volna olyan $\varepsilon > 0$ és olyan végtelen (x_i) sorozat, hogy $i \neq j$ esetén $\rho(x_i, x_j) \geqq \varepsilon$. Feltehető, hogy $a \neq x_i \neq b$, ahol a és b két olyan pont, amelyet minden további elválaszt. Legyen minden i-re $E - \{x_i\} = A_i \cup B_i$ olyan széteső felbontás, hogy $a \in A_i$, $b \in B_i$. Ha most van olyan i_0, hogy minden $i > i_0$-hoz található olyan $k > i$, hogy $x_i \in A_k$, akkor készíthető olyan $i_1 < i_2 < \dots$ indexsorozat, hogy $x_{i_n} \in A_{i_{n+1}}$; ha ilyen i_0 nincs, akkor viszont vannak tetszőlegesen nagy i indexek úgy, hogy $k > i$ esetén $x_i \in B_k$, és ilyen indexekből alkotva egy $i_1 < i_2 < \dots$ sorozatot, $x_{i_n} \in B_{i_{n+1}}$ lesz minden n-re. Minthogy (10.1.3) folytán A_i és B_i nyílt, azért mar $A_i \subset \{x_i\}$, mar $B_i \subset \{x_i\}$, és az első esetben (10.2.8) felhasználásával

$$\text{mar}\,(\bigcup_1^\infty A_{i_n}) \subset \overline{\bigcup_1^\infty \{x_{i_n}\}} = \bigcup_1^\infty \{x_{i_n}\} \subset \bigcup_1^\infty A_{i_n},$$

a másodikban pedig

$$\text{mar}\,(\bigcup_1^\infty B_{i_n}) \subset \overline{\bigcup_1^\infty \{x_{i_n}\}} = \bigcup_1^\infty \{x_{i_n}\} \subset \bigcup_1^\infty B_{i_n},$$

hiszen az x_{i_n}-ektől különböző x pont $\frac{\varepsilon}{2}$ sugarú környezete legfeljebb egy x_{i_n}-t, alkalmas környezete pedig egyet sem tartalmaz. Így $\bigcup_1^\infty A_{i_n}$, ill. $\bigcup_1^\infty B_{i_n}$ nyílt-zárt halmaz, s minthogy az első a-t tartalmazza, b-t nem, a második pedig b-t tartalmazza, de a-t nem, azért (10.1.8)-cal ellentmondás áll elő. ▮

A (10.2.7) (b) feltétellel kapcsolatban jegyezzük még meg a következőket. Ha $[E, \mathfrak{T}]$ ív, és h homeomorfan képezi le E-t $\mathbf{I}$-re, akkor $h^{-1}(0)$ és $h^{-1}(1)$ lesz az említett feltételben szereplő két pont. Több hasonló pont azonban nincs; pontosabban szólva, jóllehet végtelen sok különböző homeomorfizmussal lehet egy ívet $\mathbf{I}$-be átvinni (hiszen minden szigorúan monoton, folytonos függvény, amely $\mathbf{I}$-t önmagára képezi le, I-nek önmagára való homeomorfizmusa), az a két pont, amely 0-ba és 1-be megy át, sorrendtől eltekintve egyértelműen meg van határozva. Valóban, ezekre az x pontokra $E - \{x\}$ összefüggő, viszont a többi x-re $(E - \{x\})$-nek van valódi szétesö felbontása. Az ívnek azt a két pontját, amelyekre $E - \{x\}$ összefüggő, az ív **végpontjai**nak mondjuk.

10.2.d. Gyakorlatok. 1. Mutassuk meg, hogy az $[\mathbf{R}, \mathscr{E}]$, $[E, \mathscr{D}_E]$ és $[E, \mathscr{F}_E]$ tér lokálisan összefüggő, ellenben $[\mathbf{R}, \mathscr{E}^+]$ nem lokálisan összefüggő.

2. Legyen E a **10.1.** alatti 10. feladatban tekintett halmaz $\mathbf{R}^2$-ben, E_1 pedig E-nek és az $\{(x, 0): x \in \mathbf{R}\}$ egyenesnek az egyesítése. Mutassuk meg, hogy

(a) $\mathscr{E}^2|E$ nem lokálisan összefüggő;

(b) $\mathscr{E}^2|E_1$ összefüggő, de nem lokálisan összefüggő.

3. Legyen $\mathbf{R}^2$-ben $A = \mathbf{I} \times \{0\}$, $K_0 = \{0\} \times \mathbf{I}$, $K_n = \left\{\frac{1}{n}\right\} \times \left[0, 1 - \frac{1}{n}\right]$ $(n \in \mathbf{N})$, $E = A \cup \bigcup\limits_0^\infty K_n$, $\mathscr{T} = \mathscr{E}^2|E$. Mutassuk meg, hogy

(a) $\mathscr{T}$ kompakt;

(b) $\mathscr{T}$ összefüggő;

(c) $\mathscr{T}|E - A$-ra nézve $C_n = K_n - \left\{\left(\frac{1}{n}, 0\right)\right\}$ $(n \in \mathbf{N})$ nyílt-zárt;

(d) $E - A$ $\mathscr{T}$-komponensei a C_n halmazok, továbbá $C_0 = K_0 - \{(0, 0)\}$;

(e) C_0 nem nyílt $\mathscr{T}|E - A$-ra nézve;

(f) $\mathscr{T}$ nem lokálisan összefüggő.

4. Legyen $\mathbf{R}^2$-ben K_n az $a \in \mathbf{R}^2$ középpontú, $\frac{1}{n}$ sugarú körvonal, $E = \{a\} \cup \bigcup\limits_1^\infty K_n$, $\mathscr{T} = \mathscr{E}^2|E$. Mutassuk meg, hogy

(a) $\mathscr{T}$ kompakt;

(b) K_n $\mathscr{T}$-nyílt-zárt;

(c) E-nek $\mathscr{T}$-komponensei a K_n halmazok és $\{a\}$;

(d) $\mathscr{T}$ nem lokálisan összefüggő;

(e) $\mathscr{T}|E - \{a\}$ lokálisan összefüggő.

5. Legyen $\mathbf{R}^2$-ben a 3. feladat jelöléseivel $E_1 = A \cup \{(0,1)\} \cup \bigcup\limits_1^\infty K_n$, $\mathscr{T}_1 = \mathscr{E}^2|E_1$. Mutassuk meg, hogy

(a) $\mathscr{T}_1$ összefüggő, de nem lokálisan összefüggő;

(b) $\mathscr{T}_1|E_1 - \{(0,1)\}$ lokálisan összefüggő.

6. Legyen $[E, \mathscr{T}]$ kontinuum és T_2-tér, $a \in E$, és tegyük fel, hogy $\mathscr{T}|E - \{a\}$ lokálisan összefüggő; legyen továbbá V_0 és V_1 a-nak zárt környezete, $V_1 \subset \operatorname{int} V_0$, C_0 V_0-nak a-t tartalmazó komponense, $\mathfrak{C}$ pedig V_0 C_0-tól különböző komponenseinek rendszere. Feltéve, hogy $a \notin \operatorname{int} C_0$, mutassuk meg, hogy

(a) ha $C \in \mathfrak{C}$, $C \subset V_1$, akkor C komponense $(\operatorname{int} V_0 - \{a\})$-nak, s így $\mathscr{T}$-nyílt-zárt;

(b) ha $C \in \mathfrak{C}$, $C \cap V_1 \neq \emptyset$, akkor C metszi V_1 határát;

(c) ha $V \subset V_1$ a-nak környezete, és $\mathfrak{C}(V)$ jelöli a $\mathfrak{C}$-hez tartozó, V-t metsző C-k egyesítését, akkor az így kapott $\mathfrak{C}(V)$ halmazok egy $\mathfrak{r}$ rácsot alkotnak;

(d) ha b az $\mathfrak{r}(\cap)\{\text{mar } V_1\}$ rácsnak torlódási pontja, és $W \subset V_0$ b-nek összefüggő környezete, akkor $W \subset C_0$, ami lehetetlen.

Eszerint ha egy T_2-kontinuum egy pontjának elhagyásával lokálisan összefüggővé válik, akkor maga is lokálisan összefüggő.

7. Legyen K a **10.1.** alatti 17. feladatban konstruált halmaz. Mutassuk meg, hogy

(a) $K \cap \left(\left[\frac{i-1}{3^n}, \frac{i}{3^n}\right] \times \left[\frac{j-1}{3^n}, \frac{j}{3^n}\right]\right) \quad (n \in \mathbf{N}, \quad i, j = 1, \ldots, 3^n)$

vagy egy négyzetnek egy oldala, vagy egy négyzet két szomszédos oldalának egyesítése, vagy egy négyzet kerülete, vagy K-ból származik a síknak egy hasonlósági transzformációjával, s így $\mathscr{E}^2$-összefüggő;

(b) $\mathscr{E}|K$ lokálisan összefüggő.

8. Legyen E rendezett halmaz, s tegyük fel, hogy E-nek $\mathscr{T}$ rendezéstopológiája összefüggő. Mutassuk meg, hogy

(a) $\mathscr{T}$ lokálisan összefüggő;

(b) $\mathscr{T}$ lokálisan kompakt;

(c) ha $a < c < b$, akkor c szétválasztja a-t és b-t.

9. Legyen E a **10.1.** alatti 5. feladatban értelmezett rendezett halmaz, $\mathscr{T}$ ennek rendezéstopológiája, E_0 E-nek az $a = (0,0)$ és $b = (1,0)$ pontok közötti zárt intervalluma, $\mathscr{T}_0 = \mathscr{T}|E_0$. Mutassuk meg, hogy

(a) $\mathscr{T}_0$ összefüggő, kompakt és lokálisan összefüggő;

(b) E_0-nak minden a-tól és b-től különböző pontja szétválasztja a-t és b-t;

(c) $\mathscr{T}_0$ nem szeparábilis;

(d) $\mathscr{T}_0$ nem metrizálható.

10. Legyen $E \subset \mathbf{R}^2$ a $(0,0)$ pontból és az

$$\left\{\left(x, \sin\frac{1}{x}\right) : 0 < x \leqq \frac{1}{\pi}\right\}$$

görbéből álló halmaz, $\mathscr{T} = \mathscr{E}^2|E$. Mutassuk meg, hogy

(a) $\mathscr{T}$ összefüggő és metrizálható M_2-topológia;

(b) E-nek az $a = (0,0)$ és $b = \left(\frac{1}{\pi}, 0\right)$ pontoktól különböző bármely pontja szétválasztja a-t és b-t;

(c) $\mathscr{T}$ nem kompakt;

(d) $\mathscr{T}$ nem lokálisan összefüggő;

(e) $\mathscr{T}|E - \{a\}$ lokálisan összefüggő.

11. Legyen $[E, \mathscr{T}]$ S_4-tér, $K \subset E$ kontinuum, $a, b \in K$. Mutassuk meg, hogy

(a) ha $\{K_i : i \in I\}$ a-t és b-t tartalmazó kontinuumoknak a tartalmazásra nézve rendezett rendszere (azaz $i, j \in I$ esetén vagy $K_i \subset K_j$, vagy $K_i \supset K_j$), akkor $\bigcap_{i \in I} K_i$ is a-t és b-t tartalmazó kontinuum;

(b) van $[E, \mathscr{T}]$-ben olyan K_0 kontinuum, hogy $a, b \in K_0$, s ha $a, b \in K \subset K_0$, K kontinuum, akkor $K = K_0$ (azaz K_0 **a és b között irreducibilis kontinuum**).

[Az a-t és b-t tartalmazó kontinuumok komplementumainak a rendszerére alkalmazható a Kuratowski—Zorn-lemma.]

12. Mutassuk meg, hogy

(a) bármely ív a végpontjai között irreducibilis kontinuum;

(b) a 352. oldalon értelmezett $[E, \mathscr{E}^2 \mid E]$ tér bármely $a \in K$ és a $b = \left(\frac{2}{\pi}, 1\right)$ pont között irreducibilis kontinuum.

13. Legyen $[E_1, \mathscr{T}_1]$ az 5. feladatban vizsgált tér, $a = (0,0)$, $b = (0,1)$, és $C \subset E_1$ a-t és b-t tartalmazó összefüggő halmaz. Mutassuk meg, hogy

(a) $(0, c) \in C$ esetén $(0, x) \in C$ minden $0 \leqq x \leqq c$ mellett;

(b) $\left(\frac{1}{n}, d\right) \in C$ esetén $\left(\frac{1}{n}, y\right) \in C$ minden $0 \leqq y \leqq d$ mellett;

(c) $0 < \varepsilon < 1$ esetén végtelen sok n-re található olyan d_n, hogy $1 - \varepsilon < d_n \leqq \leqq 1 - \frac{1}{n}$ és $\left(\frac{1}{n}, d_n\right) \in C$;

(d) van olyan $\delta > 0$, hogy $(0, x) \in C$ minden $0 \leqq x \leqq \delta$ mellett;

(e) van C-nek olyan összefüggő $C' \subset C$ része, hogy $a, b \in C'$, $C' \neq C$.

[C-ből elhagyható egy K_n-nel közös része a talppont megtartásával.]

14. Adjunk példát olyan topologikus térre, és összefüggő halmazoknak olyan $C_1 \supset C_2 \supset C_3 \supset \ldots$ sorozatára, hogy $\bigcap_1^\infty C_n$ nem összefüggő.

[Az előbbi $[E_1, \mathscr{T}_1]$ térben legyen $C_n = (0,1) \cup \left(\left[0, \frac{1}{n}\right] \times \{0\}\right) \cup \bigcup_n^\infty K_i$.]

10.3. ÍVSZERŰEN ÖSSZEFÜGGŐ TEREK

10.3.a. Ívvel összeköthető pontok. Egy topologikus tér x és y pontjáról azt mondjuk, hogy **ívvel összeköthető,** ha $x = y$, vagy $x \neq y$ és van olyan ív a térben, melynek végpontjai éppen x és y. Ez a reláció reflexív és szimmetrikus; megmutatjuk, hogy T_2-térben tranzitív is:

(10.3.1) *Ha egy T_2-térben x és y, valamint y és z ívvel összeköthető, akkor x és z is ívvel összeköthető.*

Bizonyítás. Legyen $f : \mathbf{I} \to A$, $g : \mathbf{I} \to B$, ahol $A \subset E$, $B \subset E$, és $[E, \mathscr{T}]$ T_2-tér, továbbá f $(\mathscr{E} \mid \mathbf{I}, \mathscr{T} \mid A)$-homeomorfizmus, g $(\mathscr{E} \mid \mathbf{I}, \mathscr{T} \mid B)$-homeomorfizmus, s az A ív végpontjai x és y, a B ívái y és z. Feltehető, hogy $f(0) = x$, $f(1) = g(0) = y$, $g(1) = z$, hiszen különben vehetnők f vagy g (vagy mindkettő) összetételét a $k(t) = 1 - t$ $(t \in \mathbf{I})$ képlettel megadott leképezéssel, amely $\mathbf{I}$-nek önmagára való homeomorfizmusa.

Minthogy (5.3.5) szerint B $\mathscr{T}$-zárt, azért $f^{-1}(A \cap B)$ $\mathscr{E} \mid \mathbf{I}$-zárt. Legyen $t_0 = = \inf f^{-1}(A \cap B)$, úgyhogy $t_0 \in f^{-1}(A \cap B)$, továbbá $t_1 \in \mathbf{I}$ olyan, hogy $g(t_1) = f(t_0)$

(természetesen egyetlen ilyen t_1 van). Ha most $t_2 = t_0 + (1 - t_1)$, és

$$h(t) = \begin{cases} f(t), \text{ ha } 0 \leqq t \leqq t_0, \\ g(t_1 + t - t_0), \text{ ha } t_0 \leqq t \leqq t_2, \end{cases}$$

akkor $h : [0, t_2] \to f([0, t_0]) \cup g([t_1, 1]) = C$ nyilván bijektív, továbbá $(\mathscr{E} \mid [0, t_2], \mathscr{T} \mid C)$-folytonos is, hiszen ha F $\mathscr{T}$-zárt, akkor $h^{-1}(F \cap C)$ egyesítése $f^{-1}(F \cap A)$ $[0, t_0]$-ba eső részének, valamint annak a halmaznak, amely $g^{-1}(F \cap B)$ $[t_1, 1]$-be eső részéből **R**-nek $m(t) = t_0 + t - t_1$ képletű önmagára való homeomorfizmusával keletkezik, és így mindenesetre $\mathscr{E}$-zárt. Minthogy $\mathscr{E} \mid [0, t_2]$ kompakt, $\mathscr{T} \mid C$ pedig T_2-topológia, azért h homeomorfizmus, és $h(0) = x$, $h(t_2) = z$ miatt C nyilván x és z végpontú ív. ▮

Ilyenformán T_2-térben a pontok ívvel való összeköthetősége ekvivalenciareláció; az ennek megfelelő ekvivalencia-osztályokat a tér **pszeudo-komponens**einek nevezzük, továbbá az $[E, \mathscr{T}]$ T_2-tér $\emptyset \neq A \subset E$ halmazának pszeudo-komponensein az $[A, \mathscr{T} \mid A]$ altér pszeudo-komponenseit értjük.

10.3.b. Ívszerűen összefüggő halmazok. Az $[E, \mathscr{T}]$ topologikus teret (és topológiáját) **ívszerűen összefüggő**nek mondjuk, ha a tér bármely két pontja ívvel összeköthető; az $[E, \mathscr{T}]$ topologikus tér $\emptyset \neq A \subset E$ részhalmazáról azt mondjuk, hogy ívszerűen összefüggő, ha az $[A, \mathscr{T} \mid A]$ altér ívszerűen összefüggő.

Minthogy minden ív összefüggő, (10.1.12)-ből nyomban következik:

(10.3.2) *Minden ívszerűen összefüggő halmaz összefüggő.* ▮

Ugyancsak rögtön nyerhető a definíciókból:

(10.3.3) *Egy $[E, \mathscr{T}]$ T_2-tér $A \neq \emptyset$ részhalmazának pszeudo-komponensei nem mások, mint A maximális ívszerűen összefüggő részhalmazai.*

Bizonyítás. Legyen $C \subset A$ A-nak egy pszeudo-komponense, $x, y \in C$, $x \neq y$. Ekkor van olyan $B \subset A$ ív, amelynek végpontjai x és y, mondjuk $f : \mathbf{I} \to B$ olyan $(\mathscr{E} \mid \mathbf{I}, \mathscr{T} \mid B)$-homeomorfizmus, hogy $f(0) = x$, $f(1) = y$. Ekkor $B \subset C$, hiszen $z \in B$, $x \neq z \neq y$ esetén $z = f(t_0)$, $0 < t_0 < 1$, és $f|_{[0,t_0]}^{f([0,t_0])}$ a $[0, t_0]$ szakaszt nyilván egy x és z végpontú ívre képezi le, amely B-nek része, úgyhogy x és z A-ban ívvel össszeköthető, tehát z eleme az x-et tartalmazó C pszeudo-komponensnek. Ilyenformán C bármely két pontja már C-ben ívvel összeköthető, azaz C ívszerűen összefüggő. Ha $C \subset C_1 \subset A$, és C_1 is ívszerűen összefüggő, akkor egy $x \in C$ pont és bármely $y \in C_1$ pont C_1-ben, s annál inkább A-ban ívvel összeköthető, azaz $y \in C$, $C_1 \subset C$, és $C_1 = C$. ▮

10.3.c. Lokálisan ívszerűen összefüggő halmazok. Az $[E, \mathscr{T}]$ topologikus teret (és a $\mathscr{T}$ topológiát) **lokálisan ívszerűen összefüggő**nek mondjuk, ha a tér minden pontjának van ívszerűen összefüggő halmazokból álló környezetbázisa; a tér $A \neq \emptyset$ részhalmazát lokálisan ívszerűen összefüggőnek mondjuk, ha az $[A, \mathscr{T} \mid A]$ altér lokálisan ívszerűen összefüggő.

(10.3.2)-ből azonnal következik:

(10.3.4) *Minden lokálisan ívszerűen összefüggő tér lokálisan összefüggő.* ▮

(10.2.1) megfelelője a következő tétel:

(10.3.5) *Legyen* $[E, \mathfrak{T}]$ T_2*-tér. A következő állítások egyenértékűek:*

(a) *A tér lokálisan ívszerűen összefüggő;*

(b) *A térben minden nyílt halmaz pszeudo-komponensei nyíltak;*

(c) *A térnek van csupa ívszerűen összefüggő halmazból álló bázisa.*

Bizonyítás. (a) $\Rightarrow$ (b): Legyen $G \subset E$ nyílt, C G-nek egy pszeudo-komponense, $x \in C$. Ekkor van x-nek olyan ívszerűen összefüggő V környezete, hogy $x \in V \subset G$, s minthogy V minden pontja x-szel V-n belül, s annál inkább G-n belül, ívvel összeköthető, szükségképpen $V \subset C$, $x \in \operatorname{int} C$.

(b) $\Rightarrow$ (c): Minthogy egy nyílt halmaz pszeudo-komponenseinek egyesítése, és ezek (10.3.3) szerint ívszerűen összefüggők, az ívszerűen összefügő, nyílt halmazok bázist alkotnak.

(c) $\Rightarrow$ (a): Evidens. ∎

(10.2.3) mintájára igazolható:

(10.3.6) *Lokálisan ívszerűen összefüggő tér minden nyílt altere is lokálisan ívszerűen összefüggő.* ∎

(10.3.7) *Minden összefüggő, lokálisan ívszerűen összefüggő* T_2*-tér ívszerűen összefüggő.*

Bizonyítás. Ha a térnek legalább két pszeudo-komponense volna, akkor ezek egyike és a többinek az egyesítése (10.3.5) szerint a tér valódi, széteső felbontását adná. Így a tér egyetlen pszeudo-komponensből áll, és (10.3.3) szerint ívszerűen összefüggő. ∎

10.3.d. Láncok. A következő fontos tétel bizonyításához egy nevezetes segédtételre, ennek kimondásához pedig néhány elnevezésre lesz szükségünk.

Legyen $E \neq \emptyset$ tetszőleges halmaz. E-beli **lánc**on E részhalmazaiból álló olyan véges $(L_1, \ldots, L_n)$ sorozatot értünk, melyben $L_i \cap L_{i+1} \neq \emptyset$ $(i = 1, \ldots, n-1)$. Az L_i halmazok a lánc **szemei**. Az $(L_1, \ldots, L_n)$ lánc **tartalmazza** x-et, ill. **metszi** A-t, ha $x \in \bigcup_1^n L_i$, ill. $A \cap (\bigcup_1^n L_i) \neq \emptyset$. Az $(L_1, \ldots, L_n)$ láncot az $A \subset E$ **és** $B \subset E$ halmaz **között irreducibilis**nak mondjuk, ha $A \cap L_1 \neq \emptyset$, $B \cap L_n \neq \emptyset$, de $i > 1$ esetén $A \cap L_i = \emptyset$, $i < n$ esetén $B \cap L_n = \emptyset$, és $|i - j| > 1$ esetén $L_i \cap L_j = \emptyset$.

Az említett segédtétel most már a következő:

(10.3.8) *Legyen* $[E, \mathfrak{T}]$ *topologikus tér,* $C \subset E$ *összefüggő,* $\mathfrak{B}$ *a* C *halmaz nyílt befedése,* $A, B \subset C$, $A \neq \emptyset \neq B$. *Ekkor* $\mathfrak{B}$ *elemeiből készíthető* A *és* B *között irreducibilis lánc.*

Bizonyítás. Tekintsük mindazokat a $\mathfrak{B}$ elemeiből álló láncokat, amelyek metszik A-t. Legyen G az összes tekintett láncok összes szemeinek egyesítése. $A \subset G$, mert egy $a \in A$ pontot tartalmazó $\mathfrak{B}$-beli halmaz egymagában ilyen láncot alkot. G nyilván nyílt, úgyhogy $G \cap C$ $\mathfrak{T} \mid C$-nyílt. Másrészt $C - G$ is $\mathfrak{T} \mid C$-nyílt, hiszen $x \in C - G$ esetén legyen $x \in V \in \mathfrak{B}$; világos, hogy $V \cap G = \emptyset$, hiszen különben egy alkalmas A-t metsző, $\mathfrak{B}$ elemeiből álló láncot V-vel megtoldva A-t metsző, x-et tartalmazó lánc keletkeznék, és $x \in G$ volna. Így $C = (C \cap G) \cup (C - G)$ széteső felbontás; $A \subset C \cap G \neq \emptyset$ miatt $C - G = \emptyset$, $B \subset G$, s van A-t is, B-t is metsző, $\mathfrak{B}$ elemeiből álló lánc. Ezek közül egy olyan, amely a lehető legkisebb számú szemből áll, nyilván irreducibilis A és B között. ∎

10.3.e. Lokálisan összefüggő teljes metrikus terek. Be fogjuk bizonyítani, hogy a címben említett tulajdonságú terek mindig lokálisan ívszerűen összefüggők. Előre bocsátjuk a következő segédtételt, amely a Cantor-féle tételnek analogonja:

(10.3.9) *Legyen* $[E, \rho]$ *teljes félmetrikus tér,* $F_1 \supset F_2 \supset F_3 \supset \ldots$ *nem-üres, zárt halmazok sorozata, s tegyük fel, hogy minden* $n \in \mathrm{N}$*-re van olyan* $\delta_n > 0$, *hogy* F_n *véges számú* δ_n*-nél kisebb átmérőjű halmaz egyesítése, továbbá* $\delta_n \to 0$. *Ekkor* $\bigcap\limits_1^\infty F_n \neq \emptyset$.

Bizonyítás. Legyen $F_n = \bigcup\limits_{i=1}^{k_n} A_{ni}$, ahol $\delta(A_{ni}) < \delta_n$; feltehető, hogy A_{ni} is zárt, hiszen $\delta(\bar{A}_{ni}) = \delta(A_{ni})$.

Az $A_{11}, \ldots, A_{1k_1}$ halmazok között van olyan, amelyre $A_{1i} \cap F_n \neq \emptyset$ minden $n \in \mathrm{N}$-re. Valóban, ha minden $i = 1, \ldots, k_1$ esetén volna olyan n_i, hogy $A_{1i} \cap F_{n_i} = \emptyset$, akkor $n > \max(n_1, \ldots, n_{k_1})$ esetén $F_n \cap (\bigcup\limits_{i=1}^{k_1} A_{1i}) = F_n \cap F_1 = F_n = \emptyset$ adódnék. Legyen A_{1i_1} a mondott tulajdonságú. Hasonló meggondolással van az $A_{1i_1} \cap A_{2i}$ halmazok között olyan, hogy $A_{1i_1} \cap A_{2i} \cap F_n \neq \emptyset$ minden $n \in \mathrm{N}$-re; legyen $A_{1i_1} \cap A_{2i_2}$ ilyen tulajdonságú. A konstrukciót folytatva olyan (A_{pi_p}) sorozat keletkezik, hogy $\bigcap\limits_{p=1}^{m} A_{pi_p} \cap F_n \neq \emptyset$ minden $m, n \in \mathrm{N}$ esetén. Ebből következik, hogy a $\bigcap\limits_{p=1}^{m} A_{pi_p}$ zárt halmazok rácsot alkotnak, mégpedig

$$\delta(\bigcap_{p=1}^{m} A_{pi_p}) \leqq \delta(A_{mi_m}) < \delta_m \to 0$$

miatt Cauchy-rácsot. Ha x ennek limesze, akkor $x \in \bigcap\limits_{p=1}^{\infty} A_{pi_p} \subset \bigcap\limits_1^{\infty} F_n$. ∎

Az említett nevezetes tétel magva mármost a következő:

(10.3.10) *Legyen* $[E, \rho]$ *összefüggő, lokálisan összefüggő, teljes metrikus tér. Ekkor a tér ívszerűen összefüggő.*

Bizonyítás. Legyen $a, b \in E$, $a \neq b$. El fogjuk készíteni az $(L_{n1}, \ldots, L_{nk_n})$ láncok sorozatát ($n \in \mathrm{N}$) a következő tulajdonságokkal:

(a) Az L_{ni} halmazok $\frac{1}{n}$-nél kisebb átmérőjű, összefüggő, nyílt halmazok;

(b) $(L_{n1}, \ldots, L_{nk_n})$ $\{a\}$ és $\{b\}$ között irreducibilis lánc;

(c) Megadhatók olyan $0 = p_0^n < p_1^n < p_2^n < \ldots < p_{k_n}^n = k_{n+1}$ indexek, hogy $p_{i-1}^n < j \leqq p_i^n$ esetén $\bar{L}_{n+1,j} \subset L_{ni}$ $(i = 1, \ldots, k_n)$.

Ennek érdekében először is tekintsük (10.2.1) felhasználásával E-nek egy 1-nél kisebb átmérőjű, összefüggő, nyílt halmazokból álló befedését, és legyen (10.3.8) alapján $(L_{11}, \ldots, L_{1k_1})$ $\{a\}$ és $\{b\}$ között irreducibilis lánc a befedés elemeiből. Ekkor (a) és (b) teljesül $n = 1$-re. Tegyük fel, hogy az $(L_{n1}, \ldots, L_{nk_n})$ láncot már elkészítettük, s rá (a) és (b) teljesül.

Tekintsük most L_{n1}-nek egy előállítását $\frac{1}{n+1}$-nél kisebb átmérőjű, összefüggő, nyílt halmazok egyesítéseként, mégpedig úgy, hogy mindegyiknek még a lezárása is része legyen L_{n1}-nek; ez lehetséges, mert a tér lokálisan összefüggő és reguláris. Ismét (10.3.8) alapján legyen $(L_{n+1,1}, \ldots, L_{n+1,p_1^n})$ ezekből álló, $\{a\}$ és $L_{n1} \cap L_{n2}$ között irreducibilis lánc. Ezután L_{n2}-t állítjuk elő $\frac{1}{n+1}$-nél kisebb átmérőjű, összefüggő nyílt halmazok egyesítéseként úgy, hogy mindegyiknek a lezárása része legyen L_{n2}-nek, majd $(L_{n+1,p_1^n+1}, \ldots, L_{n+1,p_2^n})$ legyen egy ezekből álló, $L_{n2} \cap L_{n+1,p_1^n}$ és $L_{n2} \cap L_{n3}$ között irreducubilis lánc. Hasonlóan készítjük el a $p_3^n, \ldots, p_{k_n-1}^n$ indexeket és az $(L_{n+1,p_{i-1}^n+1}, \ldots, L_{n+1,p_i^n})$ láncokat $(i = 3, \ldots, k_n - 1)$; végül $(L_{n+1,p_{k_n-1}^n+1}, \ldots, L_{n+1,p_{k_n}^n})$ olyan $L_{nk_n} \cap L_{n+1,p_{k_n-1}^n}$ és $\{b\}$ között irreducibilis lánc, amely $\frac{1}{n+1}$-nél kisebb átmérőjű, L_{nk_n}ben fekvő lezárású, összefüggő, nyílt halmazokból áll.

Világos, hogy most (a) teljesül n helyett $(n + 1)$-re, és (c) fennállásáról is gondoskodtunk. (b) is teljesül azonban, hiszen $a \in L_{n+1,1}$, $b \in L_{n+1,k_{n+1}}$ (ahol $k_{n+1} = p_{k_n}^n$), és $L_{n+1,j} \cap L_{n+1,j+1} \neq \emptyset$ teljesülésére is ügyeltünk. Továbbá $j > 1$ esetén $a \notin L_{n+1,j}$, mégpedig $j \leqq p_1^n$ esetén az $(L_{n+1,1}, \ldots, L_{n+1,p_1^n})$ lánc irreducibilitása miatt, $j > p_1^n$ esetén pedig azért, mert ekkor $\bar{L}_{n+1,j} \subset L_{ni}$, $i > 1$, és az indukciófeltevés szerint $a \notin L_{ni}$. Ugyanígy látható be, hogy $j < k_{n+1}$ esetén $b \notin L_{n+1,j}$. Végül az egyes $(L_{n+1,p_{i-1}^n+1}, \ldots, L_{n+1,p_i^n})$ láncokon belül csak a szomszédos szemek metszik egymást, az i-edik és i'-edik lánc egy-egy szeme (c) és $(L_{n1}, \ldots, L_{nk_n})$ irreducibilis volta miatt nem metszheti egymást, ha $|i - i'| > 1$, továbbá $i' = i + 1$ esetén az i-edik lánc irreducibilitása miatt $L_{n+1,j}$ még nem metszi $L_{n,i+1}$-et, és $L_{n,i+1} \supset L_{n+1,j'}$, ha $p_{i-1}^n < j < p_i^n < j' \leqq p_{i+1}^n$, másrészt L_{n+1,p_i^n} nem metszi $L_{n+1,j'}$-t $p_i^n + 1 < j' \leqq p_{i+1}^n$ esetén az $(i + 1)$-edik lánc irreducibilitása miatt.

Legyen most $C_n = \bigcup_{i=1}^{k_n} L_{ni}$. Abból, hogy az L_{ni}-k összefüggők, továbbá a lánctulajdonságból (10.1.11) ismételt alkalmazásával következik, hogy C_n összefüggő, (c) miatt pedig

$$\bar{C}_{n+1} = \bigcup_{j=1}^{k_{n+1}} \bar{L}_{n+1,j} \subset \bigcup_{i=1}^{k_n} L_{ni} = C_n.$$

Ennélfogva

$$C = \bigcap_1^{\infty} C_n = \bigcap_1^{\infty} \bar{C}_n.$$

(a)-ból rögtön kiolvasható, hogy C teljesen korlátos, s minthogy zárt is a teljes térben, tehát (5.1.10) és (5.1.15) szerint mint altér ő is teljes, azért (5.2.20) szerint kompakt is.

Megmutatjuk, hogy C összefüggő. Tegyük fel, hogy $C = A \cup B$ valódi, széteső felbontás. Ekkor A és B (10.1.3) szerint zárt, s persze $A \cap B \neq \emptyset$, úgyhogy

(2.5.40) értelmében van olyan nyílt G és H, hogy $G \cap H \neq \emptyset$, $A \subset G$, $B \subset H$. Legyen $F_n = \bar{C}_n - (G \cup H)$. Ekkor $\emptyset \neq A \subset C_n \cap G$, $\emptyset \neq B \subset C_n \cap H$ miatt (10.1.10) és (10.1.4) értelmében G és H szétesső voltából $F_n \neq \emptyset$, úgyhogy (10.3.9) felhasználásával $\bigcap_1^\infty F_n \neq \emptyset$ adódnék, holott $\bigcap_1^\infty F_n \subset C - (G \cup H) = \emptyset$: ellentmondás.

Természetesen (b) következtében $a, b \in C$. Belátjuk, hogy $x \in C$, $a \neq x \neq b$ esetén x elválasztja C-ben a-t és b-t. Legyen u_n a legnagyobb index, amelyre $x \in L_{nu_n}$, v_n pedig a legkisebb index, amelyre $x \in L_{nv_n}$. A (b) állítás miatt $0 \leqq u_n - v_n \leqq 1$. Legyen most

$$A_n = \bigcup_{i=1}^{u_n} L_{ni}, \qquad B_n = \bigcup_{i=v_n}^{k_n} L_{ni}.$$

Ekkor nyilván $C_n = A_n \cup B_n$, $x \in A_n \cap B_n = L_{nu_n} \cup L_{nv_n}$ (b) miatt, továbbá $a \in A_n$, $b \in B_n$, és (c) következtében $\bar{A}_{n+1} \subset A_n$, $\bar{B}_{n+1} \subset B_n$. Így aztán az

$$A = \bigcap_1^\infty A_n = \bigcap_1^\infty \bar{A}_n, \qquad B = \bigcap_1^\infty B_n = \bigcap_1^\infty \bar{B}_n$$

halmazokra $a \in A$, $b \in B$, $x \in A \cap B$, sőt $A \cap B = \{x\}$, hiszen $A_n \cap B_n$ átmérője legfeljebb $\frac{2}{n}$, és $C = A \cup B$, mert C minden pontja vagy végtelen sok n-re A_n-hez, vagy végtelen sok n-re B_n-hez tartozik. Végül is $C - \{x\} = (A - \{x\}) \cup (B - \{x\})$ szétesső felbontás, ugyanis $\overline{A - \{x\}} \subset \bar{A} = A$, $\overline{B - \{x\}} \subset \bar{B} = B$, és $(A - \{x\}) \cap B = (B - \{x\}) \cap A = \emptyset$.

Mindent összevéve, a C altérre (5.3.35)-re tekintettel teljesülnek a (10.2.7) tétel feltételei, úgyhogy C olyan ív, amelynek éppen a és b a két végpontja. ∎

Innen most már könnyen következik a

(10.3.11) **Mazurkiewicz–Moore Menger-féle tétel.** *Minden (összefüggő és) lokálisan összefüggő, teljes metrikus tér (ívszerűen összefüggő és) lokálisan ívszerűen összefüggő.*

Bizonyítás. (10.2.1) szerint egy ilyen térnek van csupa összefüggő és (10.2.3) szerint lokálisan összefüggő halmazokból álló bázisa. Ennek halmazai (9.2.15) szerint maguk is teljesen metrizálhatók, s akkor (10.3.10) értelmében ívszerűen összefüggők. ∎

10.3.f. Gyakorlatok. 1. Legyen $E = [-1, 1] \subset \mathbf{R}$, s álljon $\mathfrak{B}$ az $(a, b) \subset (-1, 1)$ intervallumokból, továbbá a $(-1, -1 + \varepsilon) \cup (1 - \varepsilon, 1]$ és $[-1, -1 + \varepsilon) \cup (1 - \varepsilon, 1)$ $(0 < \varepsilon < 1)$ alakú halmazokból. Mutassuk meg, hogy

(a) $\mathfrak{B}$ egy E fölötti $\mathfrak{T}$ topológia bázisa;

(b) $\mathfrak{T}$ T_1-topológia;

(c) $-1 < x < 1$ esetén $\mathfrak{T} \mid [x, 1] = \mathfrak{S} \mid [x, 1]$, $\mathfrak{T} \mid [-1, x] = \mathfrak{S} \mid [-1, x]$;

(d) $[E, \mathfrak{T}]$-ben 0 és 1, továbbá 0 és -1 ívvel összeköthető;

(e) ha $-1 < a < b < 1$, $A = \{-1\} \cup [a, b] \cup \{1\}$, $[a, b]$ nyílt-zárt $\mathcal{T} \mid A$-ra nézve;

(f) ha $-1, 1 \in B \subset A$, akkor B nem $\mathcal{T}$-összefüggő;

(g) ha $-1, 1 \in C \subset E$ $\mathcal{T}$-összefüggő, akkor $\mathcal{T} \mid C$ nem T_2-topológia;

(h) $[E, \mathcal{T}]$-ben -1 és 1 nem ívvel összeköthető.

2. Legyen $\mathbf{R}$-en $\mathfrak{B}$ az $(a, b) \cup (-b, -a)$ $(a < b)$ alakú halmazok rendszere. Mutassuk meg, hogy

(a) $\mathfrak{B}$ egy $\mathbf{R}$ fölötti $\mathcal{T}$ topológia bázisa;

(b) $\mathcal{T}$ S_2-topológia;

(c) $\mathcal{T} \mid [0, +\infty) = \mathcal{E} \mid [0, +\infty)$ és $\mathcal{T} \mid (-\infty, 0] = \mathcal{E} \mid (-\infty, 0]$;

(d) $[\mathbf{R}, \mathcal{T}]$-ben 0 és $x \in \mathbf{R}$ ívvel összeköthető;

(e) ha $a, -a \in A \subset \mathbf{R}$ $(a \neq 0)$, akkor $\mathcal{T} \mid A$ nem T_0-topológia;

(f) $[\mathbf{R}, \mathcal{T}]$-ben a és $-a$ $(a \neq 0)$ nem ívvel összeköthető.

3. Legyen $E = K \cup C \subset \mathbf{R}^2$ a 352. oldalon értelmezett halmaz, $\mathcal{T} = \mathcal{E}^2 \mid E$. Mutassuk meg, hogy az $[E, \mathcal{T}]$ metrizálható kontinuumban

(a) $a = (0, y_1) \in K$ és $b = (0, y_2) \in K$ ívvel összeköthető;

(b) $a = \left(x_1, \sin \dfrac{1}{x_1}\right) \in C$ és $b = \left(x_2, \sin \dfrac{1}{x_2}\right) \in C$ ívvel összeköthető;

(c) Minden $a = (0, 0)$-t és $b = \left(\dfrac{2}{\pi}, 1\right)$-et tartalmazó $\mathcal{T}$-összefüggő halmaz tartalmazza C-t, s így ha kompakt is, E-vel azonos;

(d) K és C egy-egy pszeudo-komponens;

(e) $\mathcal{T}$ (összefüggő, de) nem ívszerűen összefüggő.

4. Álljon $E \subset \mathbf{R}^2$ az $\mathbf{R} \times (0, +\infty)$ és $\mathbf{Q} \times \{0\}$ halmazok egyesítéséből, s legyen $\mathcal{T} = \mathcal{E}^2 \mid E$. Mutassuk meg, hogy

(a) $\mathcal{T}$ metrizálható, de nem teljesen metrizálható;

(b) $\mathcal{T}$ ívszerűen összefüggő;

(c) $\mathcal{T}$ lokálisan ívszerűen összefüggő.

5. Legyen E a 3. feladatban értelmezett síkbeli halmaz, E_1 pedig E-nek, továbbá a $(0, -1)$ és $(0, -2)$ pontokat, a $(0, -2)$ és $\left(\dfrac{2}{\pi}, -2\right)$ pontokat s a $\left(\dfrac{2}{\pi}, -2\right)$, $\left(\dfrac{2}{\pi}, 1\right)$ pontokat összekötő szakaszok egyesítése, $\mathcal{T}_1 = \mathcal{E}^2 \mid E_1$. Mutassuk meg, hogy

(a) $\mathcal{T}_1$ metrizálható és kompakt;

(b) $\mathcal{T}_1$ nem lokálisan összefüggő;

(c) $\mathcal{T}_1$ ívszerűen összefüggő.

6. Legyen $[E_0, \mathcal{T}_0]$ a **10.2.** alatti 9. feladatban értelmezett tér. Mutassuk meg, hogy

(a) $\mathcal{T}_0$ kompakt, összefüggő és lokálisan összefüggő T_2-topológia;

(b) E_0-nak egyetlen a-t és b-t tartalmazó összefüggő részhalmaza saját maga;

(c) $\mathcal{T}_0$ nem ívszerűen összefüggő.

10.4. LOKÁLISAN ÖSSZEFÜGGŐ KONTINUUMOK

10.4.a. Befedés kontinuumokkal. A lokálisan összefüggő S_2-kontinuumoknak nevezetes jellemzése a következő:

(10.4.1) *Egy $[E, \mathfrak{T}]$ S_2-kontinuum pontosan akkor lokálisan összefüggő, ha minden $\mathfrak{A}$ nyílt befedésének van olyan $\mathfrak{B}$ finomítása, amely véges befedés, s amelynek elemei kontinuumok.*

Bizonyítás. Ha $\mathfrak{A}$ a lokálisan összefüggő $[E, \mathfrak{T}]$ S_2-kontinuumnak nyílt befedése, akkor minden $x \in E$ pontnak található olyan összefüggő V_x környezete, hogy $\bar{V}_x \subset A \in \mathfrak{A}$ (felhasználtuk, hogy (5.3.22) értelmében $\mathfrak{T}$ reguláris). (5.3.1) szerint létezik véges számú $x_i \in E$ $(i = 1, \ldots, n)$ úgy, hogy $E = \bigcup_1^n V_{x_i}$. Ekkor $\mathfrak{B} = \{\bar{V}_{x_i}: i = 1, \ldots, n\}$ a keresett, ugyanis $\bar{V}_{x_i}$ (5.3.4) és (10.1.10) értelmében kontinuum.

Megfordítva, ha $[E, \mathfrak{T}]$-nek megvan a szóban forgó tulajdonsága, akkor egy $x \in E$ pont tetszőleges V környezetéhez, ismét a regularitásra hivatkozva, legyen V_1 x-nek olyan zárt környezete, hogy $V_1 \subset V$, továbbá V_2 x-nek olyan zárt környezete, hogy $V_2 \subset \operatorname{int} V_1$. A $\mathfrak{A} = \{\operatorname{int} V_1, E - V_2\}$ nyílt befedéshez legyen $\mathfrak{B} = \{K_1, \ldots, K_n\}$ olyan véges befedés, hogy K_i kontinuum, és $\mathfrak{B} \ll \mathfrak{A}$. Ekkor (10.1.10) és (5.3.4) értelmében $\bar{K}_i$ is kontinuum, továbbá $K_i \subset \operatorname{int} V_1$ esetén $\bar{K}_i \subset V_1 \subset V$, $K_i \subset E - V_2$ esetén pedig $\bar{K}_i \subset E - \operatorname{int} V_2$. Így a $V_3 = \bigcup \{\bar{K}_i : x \in \bar{K}_i\}$ jelöléssel V_3 (10.1.11) miatt összefüggő, $V_3 \subset V$, hiszen $x \in \bar{K}_i$ esetén $\bar{K}_i \subset E - \operatorname{int} V_2$ lehetetlen, továbbá

$$x \in E - \bigcup \{\bar{K}_i : x \notin \bar{K}_i\} \subset V_3$$

folytán V_3 környezete x-nek. Ezért $\mathfrak{T}$ lokálisan összefüggő. ∎

Félmetrikus kontinuumok esetén az előbbi feltételnek más alakot is adhatunk. Ennek belátására bocsássuk előre a következő megjegyzést:

(10.4.2) **Lebesgue-féle lemma.** *Legyen $[E, \rho]$ kompakt félmetrikus tér, $\mathfrak{A}$ ennek nyílt befedése. Ekkor van olyan $\varepsilon > 0$, hogy minden ε-nál kisebb átmérőjű halmaz része $\mathfrak{A}$ egyetlen elemének.*

Bizonyítás. Minden $x \in E$-hez keressünk olyan $\varepsilon_x > 0$ számot, hogy $S(x, 2\varepsilon_x) \subset A \in \mathfrak{A}$ legyen alkalmas A-ra. Legyen azután (5.3.1) felhasználásával $E = \bigcup_1^n S(x_i, \varepsilon_{x_i})$, és $\varepsilon = \min(\varepsilon_{x_1}, \ldots, \varepsilon_{x_n})$. Ekkor valamely $B \subset E$ halmazra $\delta(B) < \varepsilon$ esetén $x \in B \cap S(x_i, \varepsilon_{x_i})$ választással $B \subset S(x, \varepsilon) \subset S(x_i, 2\varepsilon_{x_i}) \subset A \in \mathfrak{A}$. ∎

Ennek felhasználásával kimondhatjuk:

(10.4.3) **Sierpiński tétele.** *Egy $[E, \rho]$ félmetrikus kontinuum pontosan akkor lokálisan összefüggő, ha minden $\varepsilon > 0$-hoz megadható E-nek befedése véges számú, ε-nál kisebb átmérőjű kontinuummal.*

Bizonyítás. A szükségesség (10.4.1)-ből adódik, ha az $\left\{S\left(x, \frac{\varepsilon}{3}\right) : x \in E\right\}$ nyílt befedésre alkalmazzuk. Megfordítva, ha a feltétel teljesül, akkor adott $\mathfrak{A}$ nyílt befedéshez $\varepsilon > 0$-t (10.4.2) értelmében választva, legyen $E = \bigcup_1^n K_i$, ahol K_i kontinuum, és $\delta(K_i) < \varepsilon$. Világos, hogy $\{K_1, \ldots, K_n\} \ll \mathfrak{A}$. ∎

10.4.b. Folytonos képek. (10.1.15)-ből tudjuk, hogy összefüggő tér folytonos képe is összefüggő; (5.3.10) alapján ehhez mindjárt hozzátehetjük, hogy kontinuum folytonos képe is kontinuum. Az előző tételek fontos következménye, hogy az S_2-terek körében hasonlót lehet mondani a lokálisan összefüggő kontinuumokról:

(10.4.4) *Ha* $[X, \mathfrak{T}_1]$ *és* $[Y, \mathfrak{T}_2]$ S_2*-tér,* $f : X \to Y$ *folytonos szuperjekció, és* $[X, \mathfrak{T}_1]$ *lokálisan összefüggő kontinuum, akkor* $[Y, \mathfrak{T}_2]$ *is ilyen.*

Bizonyítás. Legyen $\mathfrak{A}$ Y-nak nyílt befedése; ekkor $\{f^{-1}(A) : A \in \mathfrak{A}\}$ X-nek lesz nyílt befedése, és (10.4.1) értelmében $X = \bigcup_1^n K_i$, ahol K_i kontinuum, és minden i-re van olyan $A_i \in \mathfrak{A}$, hogy $K_i \subset f^{-1}(A_i)$. Így $Y = \bigcup_1^n f(K_i)$, (10.1.15) és (5.3.10) folytán $f(K_i)$ kontinuum, továbbá $f(K_i) \subset A_i$. Az állítás (10.4.1)-ből következik. ∎

(10.4.4) szerint például az $[\mathbf{I}, \mathfrak{E} \mid \mathbf{I}]$ térnek minden olyan folytonos képe, amely S_2-tér, lokálisan összefüggő kontinuum. Nevezetes — és meglepő — tény, hogy a metrizálható terek körében ez az állítás megfordítható. Ennek bizonyítása további, ugyancsak adott típusú tereknek folytonos képként való előállításáról szóló, önmagukban is érdekes állításokon alapszik.

Ezeknek előkészítésére tekintsük a számegyenesen a $\mathbf{C}$ Cantor-féle halmazt, amely az $\mathbf{I} = [0, 1]$ intervallumból a középső nyílt harmad elhagyása, a megmaradó két zárt intervallum középső nyílt harmadának elhagyása, a megmaradó zárt intervallumok középső nyílt harmadának elhagyása, stb. után keletkezik. Tudjuk, hogy $\mathbf{I}$ minden eleme

$$(*) \qquad x = \sum_1^\infty \frac{c_n}{3^n}$$

alakban írható, ahol $c_n = 0, 1, 2$ lehet, és hogy x a c_n együtthatókat általában egyértelműen meghatározza, csupán azok az x-ek alkotnak kivételt, amelyek $x = \sum_1^m \frac{c_n}{3^n}$ alakban írhatók valamely $m \in \mathbf{N}$, $c_m \neq 0$ mellett (ezek ti. pontosan még egyféleképpen írhatók fel, mégpedig $x = \sum_1^\infty \frac{c_n'}{3^n}$ alakban, ahol $c_n' = c_n$, ha $n = 1, \ldots, m-1$, $c_m' = c_m - 1$, és $c_n' = 2$, ha $n > m$). Könnyű észrevenni, hogy $\mathbf{C}$ éppen azokból az $x \in \mathbf{I}$ pontokból áll, amelyek felírhatók $x = \sum_1^\infty \frac{c_n}{3^n}$ alakban, ahol c_n csak 0 vagy 2 lehet, ugyanis az n-edik lépésben elhagyott nyílt intervallumok éppen azokból az x-ekből állnak, amelyeknek (*) előállításában c_n értéke csak 1 lehet. (7.1.61)-ből tudjuk, hogy $[\mathbf{C}, \mathfrak{E} \mid \mathbf{C}]$ homeomorf a $[\mathbf{P}^{\mathbf{N}}, \mathfrak{D}^{\mathbf{N}}]$ térrel, ahol $\mathbf{P}$ egy két pontból álló halmaz, $\mathfrak{D}$ pedig $\mathbf{P}$ diszkrét topológiája.

Meg fogjuk mutatni, hogy minden kompakt, metrizálható topologikus tér folytonos képe a $[\mathbf{C}, \mathscr{G} \mid \mathbf{C}]$ térnek; ezt először speciális kompakt, metrizálható terekről mutatjuk ki.

(10.4.5) *Az* $[\mathbf{I}, \mathscr{G} \mid \mathbf{I}]$ *tér folytonos képe a* $[\mathbf{C}, \mathscr{G} \mid \mathbf{C}]$ *térnek.*

Bizonyítás. Legyen $x \in \mathbf{C}$ esetén $x = \sum_1^\infty \frac{c_n}{3^n}$, $c_n = 0$ vagy 2. Az előbb mondottak értelmében x-nek ez az előállítása egyértelmű, úgyhogy értelmezhetünk egy $f : \mathbf{C} \to \mathbf{I}$ leképezést a következő előírással:

$$x = \sum_1^\infty \frac{c_n}{3^n} \quad (c_n = 0, 2) \text{ esetén } f(x) = \frac{1}{2} \sum_1^\infty \frac{c_n}{2^n}.$$

Nyilván $0 \leqq f(x) \leqq \frac{1}{2} \sum_1^\infty \frac{2}{2^n} = 1$. Minthogy minden $y \in \mathbf{I}$ előállítható $y = \sum_1^\infty \frac{d_n}{2^n}$ ($d_n = 0$ vagy 1) alakban, esetleg kétféleképpen is, azért $x = \sum_1^\infty \frac{2d_n}{3^n}$ esetén $x \in \mathbf{C}$, és $f(x) = y$, így $f(\mathbf{C}) = \mathbf{I}$. Továbbá f folytonos is, hiszen

$$x = \sum_1^\infty \frac{c_n}{3^n}, \qquad x' = \sum_1^\infty \frac{c_n'}{3^n} \quad (c_n, c_n' = 0 \text{ vagy } 2)$$

esetén $|x - x'| < \frac{1}{3^m}$ $(m \in \mathbf{N})$ maga után vonja, hogy $n = 1, \ldots, m$ esetén $c_n = c_n'$, s akkor $|f(x) - f(x')| \leqq \frac{1}{2} \sum_{m+1}^\infty \frac{2}{2^n} = \frac{1}{2^m}$. ∎

(10.4.6) *Legyen* $F \neq \emptyset$ *zárt halmaz a* $[\mathbf{C}, \mathscr{G} \mid \mathbf{C}]$ *térben. Ekkor* $[F, \mathscr{G} \mid F]$ *folytonos képe a* $[\mathbf{C}, \mathscr{G} \mid \mathbf{C}]$ *térnek.*

Bizonyítás. Vezessük be $\mathbf{C}$-ben a $\rho_1(x, y) = |x - y|$ távolságot. F zártsága miatt minden $x \in \mathbf{C}$ ponthoz található F-ben x-hez legközelebb eső pont. Esetleg két ilyen is lehet (ti. az egyik x-től balra, a másik x-től jobbra fekhetik), ekkor azonban a kérdéses két pontot y-nal és z-vel jelölve, $x = \frac{y+z}{2}$. Ha most $y \neq z$, $x = \frac{y+z}{2}$, és

$$y = \sum_1^\infty \frac{c_n}{3^n}, \qquad z = \sum_1^\infty \frac{d_n}{3^n} \quad (c_n, d_n = 0 \text{ vagy } 2),$$

akkor $x = \sum_1^\infty \frac{a_n}{3^n}$, ahol $a_n = \frac{c_n + d_n}{2}$; minthogy legalább egy m-re $c_m \neq d_m$, azaz egyikük 0, másikuk 2, azért legalább egy m-re $a_m = 1$, s akkor $x \in F \subset \mathbf{C}$ csak úgy lehetséges, hogy $n = 1, \ldots, m - 1$ esetén $a_n = 0$ vagy 2 (tehát $c_n = d_n$), továbbá $n > m$ esetén vagy $a_n = 0$, vagy $a_n = 2$ (s ennek megfelelően vagy $c_n = d_n = 0$, vagy $c_n = d_n = 2$). Ilyenkor tehát x egyik (bal vagy jobb oldali) végpontja egy olyan nyílt intervallumnak, amelynek **C**-vel nincsen közös pontja, de végpontjai **C**-hez tartoznak, s y és z közül az egyik ennek az intervallumnak a másik végpontja, a másik pedig olyan, hogy közte és x között vannak **C**-nek további pontjai.

Értelmezzük mármost az $f : \mathbf{C} \to F$ leképezést a következőképpen: ha az $x \in \mathbf{C}$ ponthoz F-ben egyetlen hozzá legközelebb eső pont található, legyen $f(x)$ ez a pont; ha x-hez két ilyen pont is van, legyen $f(x)$ ezek közül az, amelyre x és $f(x)$ között van **C**-nek további pontja.

Világos, hogy $x \in F$ esetén $f(x) = x$; ezért $f(\mathbf{C}) = F$. Ha $x \in \mathbf{C} - F$, és x-hez F-ben egyetlen legközelebbi pont van, akkor x elég kis környezetében minden további **C**-beli ponthoz is F-nek ugyanez a pontja esik legközelebb; ugyanez elmondható akkor is, ha $x = \dfrac{y+z}{2}$, $y, z \in F$, $y < z$, de (y, z)-ben F-nek nincs pontja, hiszen ekkor x elég kis környezetében minden **C**-beli pont x-nek arra az oldalára esik, mint $f(x)$. Ezért f folytonos a $(\mathbf{C} - F)$-beli pontokban; és az F-beliekben is, hiszen egy ilyen $x_0 \in F$ pont $\dfrac{\varepsilon}{2}$ -sugarú környezetében fekvő x-ekre

$$|f(x) - x| \leqq |x_0 - x| < \frac{\varepsilon}{2}, \text{ tehát } |f(x) - f(x_0)| \leqq |f(x) - x| + |x - f(x_0)| =$$

$$= |f(x) - x| + |x - x_0| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon. \blacksquare$$

(10.4.7) *Az* $[\mathbf{I}^{\mathbf{N}}, (\mathscr{E} \mid \mathbf{I})^{\mathbf{N}}]$ *Hilbert-kocka folytonos képe a* $[\mathbf{C}, \mathscr{E} \mid \mathbf{C}]$ *térnek.*

Bizonyítás. Legyen $f : \mathbf{C} \to \mathbf{I}$ szuperjektív és $(\mathscr{E} \mid \mathbf{C}, \mathscr{E} \mid \mathbf{I})$-folytonos; ilyen f (10.4.5) szerint létezik. Legyen azután $g : \mathbf{C}^{\mathbf{N}} \to \mathbf{I}^{\mathbf{N}}$ úgy értelmezve, hogy $x = (x_i)$ esetén $g(x)$ i-edik koordinátája $f(x_i)$. Világos, hogy g is szuperjektív, és (7.1.38) szerint $((\mathscr{E} \mid \mathbf{C})^{\mathbf{N}}, (\mathscr{E} \mid \mathbf{I})^{\mathbf{N}})$-folytonos. Minthogy továbbá **N** előállítható megszámlálhatóan végtelen sok megszámlálhatóan végtelen halmaz diszjunkt egyesítéseként (például az elsőbe a páratlan számokat, a másodikba a páros, de 4-gyel nem osztható számokat, a harmadikba a 4-gyel osztható, de 8-cal nem osztható számokat, stb. téve), azért (7.1.41) felhasználásával $[\mathbf{P}^{\mathbf{N}}, \mathfrak{D}^{\mathbf{N}}]$ homeomorf egy olyan $[\times_{1}^{\infty} E_i, \times_{1}^{\infty} \mathscr{T}_i]$ szorzattal, ahol minden i-re $[E_i, \mathscr{T}_i]$ homeomorf $[\mathbf{P}^{\mathbf{N}}, \mathfrak{D}^{\mathbf{N}}]$-nel. Ez (7.1.61) értelmében maga után vonja, hogy megadható egy $h : \mathbf{C} \to \mathbf{C}^{\mathbf{N}}$ $(\mathscr{E} \mid \mathbf{C}, (\mathscr{E} \mid \mathbf{C})^{\mathbf{N}})$-homeomorfizmus, s akkor $g \circ h : \mathbf{C} \to \mathbf{I}^{\mathbf{N}}$ szuperjektív és $(\mathscr{E} \mid \mathbf{C}, (\mathscr{E} \mid \mathbf{I})^{\mathbf{N}})$-folytonos. $\blacksquare$

(10.4.8) **Hausdorff tétele.** *Minden kompakt, metrizálható tér folytonos képe a* $[\mathbf{C}, \mathscr{E} \mid \mathbf{C}]$ *térnek.*

Bizonyítás. Legyen $[E, \mathscr{T}]$ kompakt, metrizálható tér. (5.3.35) szerint $\mathscr{T}$ szeparábilis, úgyhogy (7.3.37) szerint megadható $[E, \mathscr{T}]$-nek egy f homeomorfizmusa az $[\mathbf{I}^{\mathbf{N}}, (\mathscr{E} \mid \mathbf{I})^{\mathbf{N}}]$ Hilbert-kocka egy $[E', \mathscr{T}']$ alterére; természetesen (5.3.5) szerint E' zárt $(\mathscr{E} \mid \mathbf{I})^{\mathbf{N}}$-re nézve. Legyen másrészt $g : \mathbf{C} \to \mathbf{I}^{\mathbf{N}}$ (10.4.7) alapján $(\mathscr{E} \mid \mathbf{C}, (\mathscr{E} \mid \mathbf{I})^{\mathbf{N}})$-folytonos szuperjekció, és $F = g^{-1}(E')$. Ekkor $F \subset \mathbf{C}$ $\mathscr{E} \mid \mathbf{C}$-zárt, s így

(10.4.6) szerint létezik egy $h : \mathbf{C} \to F$ ($\mathscr{E} \mid \mathbf{C}$, $\mathscr{E} \mid F$)-folytonos szuperjekció. Végül is $f^{-1} \circ g \mid_F^{E'} \circ h : \mathbf{C} \to E$ a keresett ($\mathscr{E} \mid \mathbf{C}, \mathfrak{T}$)-folytonos szuperjekció. ▮

Most már igazolhatjuk (10.4.4) kilátásba helyezett megfordítását:

(10.4.9) **Hahn–Mazurkiewicz-féle tétel.** *Minden lokálisan összefüggő, metrizálható kontinuum folytonos képe az* [$\mathbf{I}, \mathscr{E} \mid \mathbf{I}$] *térnek.*

Bizonyítás. (10.4.8) szerint a lokálisan összefüggő, metrizálható [$E, \mathfrak{T}$] kontinuumhoz megadható egy ($\mathscr{E} \mid \mathbf{C}, \mathfrak{T}$)-folytonos $f : \mathbf{C} \to E$ szuperjekció. Megmutatjuk, hogy ezt ki lehet terjeszteni egy $g : \mathbf{I} \to E$ ($\mathscr{E} \mid \mathbf{I}, \mathfrak{T}$)-folytonos leképezéssé (tehát $g \mid \mathbf{C} = f$), amely természetesen annál inkább szuperjektív lesz. Ebből a célból g-t az $\mathbf{I} - \mathbf{C}$ halmazon kell értelmeznünk; ez nem más, mint a $\mathbf{C}$ képzésekor elhagyott $\left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right), \left(\frac{1}{9}, \frac{2}{9}\right), \left(\frac{7}{9}, \frac{8}{9}\right), \ldots$ diszjunkt, nyílt intervallumok egyesítése. Jelöljük ezeket valahogyan megszámozva (a_n, b_n)-nel ($n \in \mathbf{N}$); nyilván $b_n - a_n \to 0$.

Jegyezzük meg, hogy ha E-n egy $\mathfrak{T}$-t indukáló ρ távolságot vezetünk be, akkor adott $\varepsilon > 0$-hoz található olyan $\delta > 0$, hogy $0 < \rho(x, y) < \delta$ esetén létezik E-ben x és y végpontú, ε-nál kisebb átmérőjű ív. Valóban, E a ρ távolsággal (5.2.19) szerint teljes, és így $\mathfrak{T}$ (10.3.10) és (10.3.11) értelmében ívszerűen összefüggő és lokálisan ívszerűen összefüggő; (10.3.5) felhasználásával megadható E-nek csupa ε-nél kisebb átmérőjű, ívszerűen összefüggő halmazból álló nyílt befedése, és (10.4.2) szerint ehhez található olyan $\delta > 0$, hogy $0 < \rho(x, y) < \delta$ esetén x és y belefoglalható a befedés egyik elemébe, s akkor összeköthető ε-nál kisebb átmérőjű ívvel.

Minthogy (5.3.29) szerint $\delta > 0$-hoz van olyan $\eta > 0$, hogy $u, v \in \mathbf{C}$, $|u - v| < \eta$ esetén $\rho(f(u), f(v)) < \delta$, azért végül is $\varepsilon > 0$-hoz van olyan $\eta > 0$, hogy $u, v \in \mathbf{C}$, $|u - v| < \eta$ esetén vagy $f(u) = f(v)$, vagy pedig található E-ben $f(u)$-t $f(v)$-vel összekötő, ε-nál kisebb átmérőjű ív.

Legyen most már $f(a_n) = f(b_n) = x$ esetén $g(u) = x$ az egész $[a_n, b_n]$ intervallumban. Ha viszont $f(a_n) \neq f(b_n)$, akkor értelmezzük g-t az $[a_n, b_n]$ szakaszon úgy, hogy a $g([a_n, b_n]) = A_n$ jelöléssel $g \mid_{[a_n, b_n]}^{A_n}$ ($\mathscr{E} \mid [a_n, b_n], \mathfrak{T} \mid A_n$)-homeomorfizmus, tehát A_n $f(a_n)$-t $f(b_n)$-nel összekötő E-beli ív legyen, mégpedig $\delta(A_n)$ kisebb legyen, mint az összes $f(a_n)$, $f(b_n)$ végpontú E-beli ívek átmérőinek alsó határa 2-vel szorozva. Előrebocsátott megjegyzésünk szerint $b_n - a_n \to 0$ maga után vonja, hogy $\delta(A_n) \to 0$. Az így értelmezett $g : \mathbf{I} \to E$ most már valóban folytonos. Ez egy $u_0 \in (a_n, b_n)$ pontban evidens. Ha $u_0 \in \mathbf{C}$, és u_0 végpontja egy (a_m, b_m) intervallumnak, mondjuk $u_0 = b_m$, akkor $\varepsilon > 0$-hoz van először is olyan $\delta_1 > 0$, hogy $u_0 - \delta_1 \in (a_m, b_m)$, és $u_0 - \delta_1 < u \leqq u_0$ esetén $\rho(g(u), g(u_0)) < \varepsilon$. Van azután olyan $\delta_2 > 0$, hogy $u_0 \leqq u < u_0 + \delta_2$, $u \in \mathbf{C}$ esetén $\rho(f(u), f(u_0)) < \frac{\varepsilon}{2}$, és olyan $\delta_3 > 0$, hogy $u, v \in \mathbf{C}$, $|u - v| < \delta_3$ esetén vagy $f(u) = f(v)$, vagy $f(u)$ és $f(v)$ összeköthető E-ben $\frac{\varepsilon}{4}$-nél kisebb átmérőjű ívvel. Ha δ_4 az $[u_0, u_0 + \delta_3] \cap \mathbf{C}$ halmaz átmérője, és $0 < \delta < \min(\delta_1, \delta_2, \delta_3, \delta_4)$, akkor $u \in (u_0, u_0 + \delta) - \mathbf{C}$ esetén u olyan (a_n, b_n) intervallumba esik, amely még $(u_0, u_0 + \delta_3)$-nak része, s akkor

$$\rho(g(u), g(u_0)) \leqq \rho(g(u), g(a_n)) + \rho(g(a_n), g(u_0)) \leqq$$

$$\leqq \delta(A_n) + \rho(f(a_n), f(u_0)) < 2 \cdot \frac{\varepsilon}{4} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Végül is $|u - u_0| < \delta$ esetén $\rho(g(u), g(u_0)) < \varepsilon$, és g folytonos az u_0 pontban. Hasonló meggondolás alkalmazható, ha $u_0 \in \mathbf{C}$, és u_0 nem végpontja egyetlen (a_n, b_n)-nek sem. ∎

A (10.4.9) tétel értelmében például a sík egy zárt téglalapja, a tér egy zárt téglája, s általában az $[\mathbf{I}^m, (\mathscr{E} \mid \mathbf{I})^m]$ kocka, sőt az $[\mathbf{I}^{\mathbf{N}}, (\mathscr{E} \mid \mathbf{I})^{\mathbf{N}}]$ Hilbert-kocka is folytonos képe az $[\mathbf{I}, \mathscr{E} \mid \mathbf{I}]$ szakasznak. Ez meglepő, mert szemléletünk azt várná, hogy a szakasz folytonos képe csak valami „vonalszerű" alakzat lehet.

10.4.c. Gyakorlatok. 1. Legyen E_1 a **10.3.** alatti 5. feladatban értelmezett halmaz, C pedig ennek

$$\left\{\left(x, \sin\frac{1}{x}\right) : 0 < x \leqq \frac{2}{\pi}\right\}$$

része. Mutassuk meg, hogy

(a) $[E_1, \mathscr{U}_{\rho_2} \mid E_1]$ is, $[C, \mathscr{U}_{\rho_2} \mid C]$ is prekompakt és metrizálható;

(b) $\mathscr{E}^2 \mid E_1$ is, $\mathscr{E}^2 \mid C$ is összefüggő;

(c) $\mathscr{E}^2 \mid E_1$ kompakt, $\mathscr{E}^2 \mid C$ pedig lokálisan összefüggő;

(d) $0 < \varepsilon < \dfrac{1}{2}$ esetén sem E_1, sem C nem egyesítése véges számú ε-nál kisebb átmérőjű összefüggő halmaznak.

2. Adjunk példát olyan $[X, \mathscr{T}_1]$ és $[Y, \mathscr{T}_2]$ összefüggő, metrizálható térre, hogy $\mathscr{T}_1$ lokálisan összefüggő, létezik $f : X \to Y$ $(\mathscr{T}_1, \mathscr{T}_2)$-folytonos szuperjekció, de $\mathscr{T}_2$ nem lokálisan összefüggő.

[$X = [0, +\infty)$, $\mathscr{T}_1 = \mathscr{E} \mid X$, $Y = E_1$, $\mathscr{T}_2 = \mathscr{E}^2 \mid E_1$ az előző feladat jelöléseivel.]

3. Mutassuk meg, hogy ha egy T_2-tér folytonos képe egy kompakt metrikus térnek, akkor metrizálható.

[(8.4.12)]

4. Adjunk példát olyan T_1-térre, amely folytonos képe $[\mathbf{C}, \mathscr{E} \mid \mathbf{C}]$-nek, de nem metrizálható.

[$[\mathbf{C}, \mathscr{F}_{\mathbf{C}}]$.]

5. Legyen $Q = \mathbf{I}^2$. Mutassuk meg, hogy

(a) az $\left[\frac{i-1}{3}, \frac{i}{3}\right] \times \left[\frac{j-1}{3}, \frac{j}{3}\right]$ $(i, j = 1, 2, 3)$ négyzeteket lehet jelölni $Q_1, \ldots, Q_9$-cel úgy, hogy Q_1 és Q_9 tartalmazza Q két átellenes csúcsát, és Q_{k-1} és Q_k tartalmazzon közös élt $(k = 2, \ldots, 9)$;

(b) az $\left[\frac{i-1}{3^2}, \frac{i}{3^2}\right] \times \left[\frac{j-1}{3}, \frac{j}{3^2}\right]$ $(i, j = 1, \ldots, 3^2)$ négyzeteket lehet jelölni

$Q_{11}, \ldots, Q_{99}$-cel úgy, hogy $Q_{kl} \subset Q_k$, Q_{11} és Q_{99} tartalmazza Q két átellenes csúcsát, továbbá $Q_{k,l-1}$ és Q_{kl} $(k = 1, \ldots, 9;\ l = 2, \ldots, 9)$ is, $Q_{k-1,9}$ és Q_{k1} $(k = 2, \ldots, 9)$ is tartalmazzon közös élt;

(c) $n \in \mathbf{N}$ esetén az $\left[\frac{i-1}{3^n}, \frac{i}{3^n}\right] \times \left[\frac{j-1}{3^n}, \frac{j}{3^n}\right]$ $(i, j = 1, \ldots, 3^n)$ négyzetek jelölhetők a $Q_{k_1 \ldots k_n}$ szimbólumokkal $(k_1, \ldots, k_n = 1, \ldots, 9)$ úgy, hogy

$$Q_{k_1 \ldots k_n} \subset Q_{k_1 \ldots k_{n-1}},$$

$Q_{1 \ldots 1}$ és $Q_{9 \ldots 9}$ tartalmazza Q két átellenes csúcsát, továbbá $Q_{k_1 \ldots k_{n-1}, k_n - 1}$ és $Q_{k_1 \ldots k_{n-1} k_n}$ is, $Q_{k_1 \ldots, k_{n-1}-1, 9}$ és $Q_{k_1 \ldots k_{n-1} 1}$ is tartalmaz közös élt;

(d) ha $I_{k_1 \ldots k_n}$ $(k_1, \ldots, k_n = 1, \ldots, 9)$ jelöli $\mathbf{I}$-nek $\left[\sum_{r=1}^{n} \frac{k_r - 1}{9^r}, \sum_{r=1}^{n} \frac{k_r - 1}{9^n} + \frac{1}{9^n}\right]$ részintervallumát, akkor $I_{k_1 \ldots k_n} \subset I_{k_1 \ldots k_{n-1}}$, és adott n mellett adott $x \in \mathbf{I}$ pontot az $I_{k_1 \ldots k_n}$ intervallumok közül vagy pontosan egy tartalmaz, vagy pontosan kettő, mégpedig $I_{k_1 \ldots k_{n-1}-1, 9}$ és $I_{k_1 \ldots k_{n-1} 1}$;

(e) ha $n \in \mathbf{N}$, $x \in \mathbf{I}$ esetén $V_n(x)$ jelöli az x-et tartalmazó $I_{k_1 \ldots k_n}$ intervallumok egyesítését, akkor $V_{n+1}(x) \subset V_n(x)$, és $\{V_n(x) : n \in \mathbf{N}\}$ x-nek $\mathscr{E} \mid \mathbf{I}$-környezetbázisa;

(f) ha $n \in \mathbf{N}$, $x \in \mathbf{I}$ esetén $W_n(x)$ jelöli azoknak a $Q_{k_1 \ldots k_n}$ négyzeteknek az egyesítését, amelyekre $I_{k_1 \ldots k_n} \subset V_n(x)$, akkor $W_{n+1}(x) \subset W_n(x)$, $\delta(W_n(x)) \to 0$, $W_n(x)$ $\mathscr{E}^2$-kompakt, s így $\bigcap_1^\infty W_n(x)$ pontosan egy pontból áll;

(g) $x \in \mathbf{I}$ esetén az $\{f(x)\} = \bigcap_1^\infty W_n(x)$ jelölést alkalmazva $f(\operatorname{int} V_n(x)) \subset W_n(x)$, és így $f : \mathbf{I} \to Q$ $(\mathscr{E} \mid \mathbf{I}, \mathscr{E}^2 \mid Q)$-folytonos;

(h) $y \in Q$ esetén találhatók olyan $k_1, k_2, \ldots$ számok $(k_n = 1, \ldots, 9)$, hogy $y \in Q_{k_1 \ldots k_n}$ minden n-re, s akkor $\bigcap_1^\infty I_{k_1 \ldots k_n}$ pontosan egy $x \in \mathbf{I}$ pontból áll, amelyre $Q_{k_1 \ldots k_n} \subset W_n(x)$ $(n \in \mathbf{N})$;

(i) f szuperjektív.

XI. TOPOLOGIKUS CSOPORTOK

11.1. CSOPORTOK

11.1.a. A csoport fogalma. Igen gyakran előfordul, hogy egy topologikus téren még valamilyen algebrai struktúra, azaz egy vagy több művelet is van értelmezve, például az **R** halmazon a valós számok összeadása és szorzása. Az ilyen algebrai struktúrával ellátott topologikus terek elmélete a topológiának és az algebrának nevezetes határterülete. A következőkben ennek csupán egyik fejezetével, ti. a topologikus csoportok elméletével (s annak is csak az elemeivel) ismerkedünk meg.

Az $E \neq \emptyset$ halmazon értelmezett m-**változós műveleten** általában az E^m halmaznak az E halmazba való leképezését értjük (pl. a valós számok összeadása és szorzása egy-egy kétváltozós művelet az **R** halmazon). Az E halmazt **csoportnak** mondjuk, ha rajta egy kétváltozós $\pi : E \times E \to E$ művelet van értelmezve, amely **asszociatív**, azaz $x, y, z \in E$ esetén

$$\pi(\pi(x, y), z) = \pi(x, \pi(y, z)),$$

továbbá van E-ben egy π-re nézve **semleges elem**, azaz olyan $e \in E$ elem, hogy $x \in E$ esetén

$$\pi(x, e) = \pi(e, x) = x,$$

s végül minden $x \in E$-nek van π-re vonatkozó **inverze**, azaz értelmezhető olyan $\iota : E \to E$ leképezés, hogy $x \in E$ esetén

$$\pi(x, \iota(x)) = \pi(\iota(x), x) = e.$$

Kitűnik a definícióból, hogy a csoport az E halmaznak és a π műveletnek a megadásával van meghatározva, s így voltaképpen az $[E, \pi]$ párt volna helyes csoportnak nevezni; erre a pontosabb felfogásra és jelölésmódra azonban nem lesz szükségünk, mert egy halmazon nem fogunk egyidejűleg többféle művelettel csoportot értelmezni.

Az előbbi kissé körülményes jelölésmód helyett szokásosabb a csoport **multiplikatív** jelölése, ami abban áll, hogy a π leképezést a szorzás mintájára a változók egymás mellé írásával, x inverzét pedig x^{-1}-gyel jelöljük. Ezzel a jelölésmóddal a fenti kikötések tömörebben így írhatók:

(C_1) $\qquad (x,y)z = x(yz) \qquad (x, y, z \in E)$;

(C_2) *Van olyan $e \in E$, hogy $xe = ex = x$ $(x \in E)$;*

(C_3) *Minden $x \in E$-hez van olyan $x^{-1} \in E$, hogy $xx^{-1} = x^{-1}x = e$.*

A csoport **kommutatív** vagy **Abel-féle,** ha ezenkívül

(C$_4$) $\qquad xy = yx \qquad (x, y \in E).$

Kommutatív csoportokban használatos az **additív** jelölésmód is; ekkor a π leképezést az összeadás mintájára + jellel jelöljük, x inverzét pedig $(-x)$-szel:

$$\pi(x, y) = x + y, \qquad \iota(x) = -x.$$

A semleges elemet multiplikatív írásmód esetén még **egységelemnek** is, additív írásmód esetén pedig **nullaelemnek** is mondják. További szokásos egyszerűsítő jelölések: multiplikatív írásmód esetén

$$(xy)z = x(yz) = xyz,$$

$$xx = x^2, x^2x = x^3, \ldots,$$

$$x^{-1}x^{-1} = x^{-2}, x^{-2}x^{-1} = x^{-3}, \ldots,$$

additív írásmód esetén

$$(x + y) + z = x + (y + z) = x + y + z,$$

$$x + x = 2x, 2x + x = 3x, \ldots,$$

$$(-x) + (-x) = -2x, (-2x) + (-x) = -3x, \ldots,$$

$$x + (-y) = x - y.$$

Az előbbiekben „*a*" semleges elemről beszéltünk; ez indokolt, ugyanis:

(11.1.1) *Ha $x, y \in E$ esetén $xy \in E$, teljesül* (C$_1$), *és e helyett e_1-gyel és e_2-vel teljesül* (C$_2$), *akkor $e_1 = e_2$.*

Bizonyítás. (C$_2$)-t az $x = e_1$, $e = e_2$, majd $x = e_2$, $e = e_1$ választással alkalmazva $e_1e_2 = e_2e_1 = e_1$, $e_2e_1 = e_1e_2 = e_2$, azaz $e_1 = e_2$. ∎

Hasonló megjegyzést fűzhetünk (C$_3$)-hoz:

(11.1.2) *Ha $x, y \in E$ esetén $xy \in E$, teljesül* (C$_1$) *és* (C$_2$), *továbbá $x_1x = xx_2 = x_1'x = xx_2' = e$, akkor $x_1 = x_1' = x_2 = x_2'$.*

Bizonyítás. $x_1 = x_1e = x_1(xx_2) = (x_1x)x_2 = ex_2 = x_2$; ugyanígy $x_1' = x_2'$, és $x_1' = x_2$. ∎

11.1.b. Példák. (a) Ha $E = \mathbf{R}$, $\pi(x, y) = x + y$, akkor csoportot kapunk, $e = 0$, $\iota(x) = -x$ (innen erednek az additív írásmóddal kapcsolatos jelölések és elnevezések).

(b) $E = \mathbf{Q}$, π és ι mint előbb.

(c) E az egész számok halmaza, π és ι mint előbb.

(d) $E = \mathbf{R} - \{0\}$, $\pi(x, y) = xy$, $e = 1$, $\iota(x) = \dfrac{1}{x}$ (innen erednek a multiplikatív írásmóddal kapcsolatos jelölések és elnevezések).

(e) $E = \mathbf{Q} - \{0\}$, π és ι mint előbb.

(f) $E = \{x : x \in \mathbf{R}, x > 0\}$, π és ι mint előbb.

(g) $E = \mathbf{R}^m$, $\pi(x, y) = z$, ahol

$x = (x_1, \ldots, x_m)$, $y = (y_1, \ldots, y_m)$, $z = (z_1, \ldots, z_m)$, $z_i = x_i + y_i$ $(i = 1, \ldots, m)$, továbbá $e = (0, \ldots, 0)$, $\iota(x) = (-x_1, \ldots, -x_m)$.

(h) E a $H \neq \emptyset$ halmazon értelmezett valós függvények halmaza, $\pi(x, y) = x + y$, e az azonosan eltűnő függvény, $\iota(x) = -x$.

(i) E a komplex számok halmaza, $\pi(x, y) = x + y$, $e = 0$, $\iota(x) = -x$.

(j) E a 0-tól különböző komplex számok halmaza, $\pi(x, y) = xy$, $e = 1$, $\iota(x) = \dfrac{1}{x}$.

(k) E az 1 abszolút értékű komplex számok halmaza, π és ι mint előbb.

(l) E a $H \neq \emptyset$ halmaz önmagára való bijektív leképezéseinek halmaza, $\pi(f, g) = f \circ g$, e a H halmaz identikus leképezése, $\iota(f) = f^{-1}$. Most (C_1) (2.6.6) következménye.

Az (a) – (k) csoportok kommutativok, az (l) csoport általában nem. Legyen például $H = \mathbf{R}$, és $f(x) = x + a$, $g(x) = 2b - x$ (tehát f $\mathbf{R}$-nek a-val való eltolása, g pedig $\mathbf{R}$-nek b-re vonatkozó tükrözése, ahol $a, b \in \mathbf{R}$ adott). Most $h = f \circ g$, $k = g \circ f$ jelöléssel

$$h(x) = 2b + a - x, \quad k(x) = 2b - a - x.$$

Így $a \neq 0$ esetén $f \circ g \neq g \circ f$.

A következőkben (egyes konkrét példáktól eltekintve) mindig a multiplikatív írásmódot használjuk.

11.1.c. Halmazok szorzása. Igen hasznos lesz a következő jelölésmód: Ha A és B az E csoport két részhalmaza, akkor

$$AB = \{x : x = ab,\ a \in A,\ b \in B\},$$

$$A^{-1} = \{x : x = a^{-1},\ a \in A\}.$$

A definíciókból rögtön kiolvasható:

(11.1.3) *Ha E csoport, $A, B, C, A_1, B_1 \subset E$, akkor*

(a) *$AB = \emptyset$ pontosan akkor, ha $A = \emptyset$ vagy $B = \emptyset$;*

(b) *$A^{-1} = \emptyset$ pontosan akkor, ha $A = \emptyset$;*

(c) *$A(BC) = (AB)C$, $EE = E$;*

(d) *$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$;*

(e) *$(A^{-1})^{-1} = A$;*

(f) *$A \subset A_1$, $B \subset B_1$ esetén $AB \subset A_1B_1$;*

(g) *$A \subset A_1$ esetén $A^{-1} \subset A_1^{-1}$.*

Bizonyítás. Azt kell észrevenni, hogy

$$AB = \pi(A \times B), \quad A^{-1} = \iota(A),$$

továbbá (d)-hez még azt, hogy $x, y \in E$ esetén $(xy)^{-1} = y^{-1}x^{-1}$, mert

$$(xy)(y^{-1}x^{-1}) = x(yy^{-1})x^{-1} = xex^{-1} = xx^{-1} = e,$$

$$(y^{-1}x^{-1})(xy) = y^{-1}(x^{-1}x)y = y^{-1}ey = y^{-1}y = e,$$

(e)-hez pedig azt, hogy $(x^{-1})^{-1} = x$. ▮

Ha $A = \{a\}$ egyelemű, akkor a kapcsos zárójel elhagyásával $\{a\}\, B$ helyett aB-t, $B\{a\}$ helyett Ba-t írunk.

11.1.d. Eltolások. Ha E csoport, és $a \in E$, akkor E-nek önmagába való leképezéseit értelmezik a

$$\tau_a^s(x) = ax, \quad \tau_a^d(x) = xa$$

képletek; τ_a^s és τ_a^d neve a-hoz tartozó **bal oldali,** ill. **jobb oldali eltolás.**

(11.1.4) *Bármely E csoportra és $a \in E$ elemre $\tau_a^s : E \to E$ és $\tau_a^d : E \to E$ bijektív, $a, b \in E$ esetén*

$$\tau_a^s \circ \tau_b^s = \tau_{ab}^s, \quad \tau_a^d \circ \tau_b^d = \tau_{ba}^d,$$

és

$$(\tau_a^s)^{-1} = \tau_{a^{-1}}^s, \quad (\tau_a^d)^{-1} = \tau_{a^{-1}}^d.$$

Bizonyítás. $x \in E$ esetén

$$(\tau_a^s \circ \tau_b^s)(x) = \tau_a^s(\tau_b^s(x)) = a(bx) = (ab)x = \tau_{ab}^s(x),$$

$$(\tau_a^d \circ \tau_b^d)(x) = \tau_a^d(\tau_b^d(x)) = (xb)a = x(ba) = \tau_{ba}^d(x),$$

tehát

$$\tau_a^s \circ \tau_{a^{-1}}^s = \tau_{a^{-1}}^s \circ \tau_a^s = \tau_e^s,$$

$$\tau_a^d \circ \tau_{a^{-1}}^d = \tau_{a^{-1}}^d \circ \tau_a^d = \tau_e^d,$$

és $\tau_e^s = \tau_e^d$ E-nek identikus leképezése. ▌

11.1.e. Alcsoportok. Ha E csoport, $\emptyset \neq E_0 \subset E$, és az E_0 halmaz a $\pi \mid E_0 \times E_0$ művelettel csoportot alkot, akkor E_0-t az E csoport **alcsoport**jának mondjuk.

(11.1.5) *Legyen E csoport, $\emptyset \neq E_0 \subset E$. A következő állítások egyenértékűek:*

(a) *E_0 alcsoportja E-nek;*

(b) *$x, y \in E_0$ esetén $xy \in E_0$, $x^{-1} \in E_0$;*

(c) *$x, y \in E_0$ esetén $xy^{-1} \in E_0$,*

(d) *$x, y \in E_0$ esetén $x^{-1}y \in E_0$.*

Bizonyítás. (a) $\Rightarrow$ (b): $x, y \in E_0$ esetén szükségképpen $xy \in E_0$. Ha E_0 semleges eleme e_0, akkor $x \in E_0$ esetén $xe_0 = x$, tehát $x^{-1}(xe_0) = x^{-1}x$, azaz $ee_0 = e$, $e_0 = e$, és $e \in E_0$. Ha $x \in E_0$ inverze E_0-ban x_1, akkor $xx_1 = e$, tehát $x^{-1}(xx_1) = x^{-1}$, $ex_1 = x^{-1}$, $x_1 = x^{-1}$, és $x^{-1} \in E_0$.

(b) $\Rightarrow$ (c), (b) $\Rightarrow$ (d): Evidens.

(c) $\Rightarrow$ (b): $xx^{-1} = e$ miatt $e \in E_0$, továbbá $x \in E_0$ esetén $ex^{-1} = x^{-1} \in E_0$, végül $x, y \in E_0$ esetén $xy = x(y^{-1})^{-1} \in E_0$.

(d) $\Rightarrow$ (b): Ugyanígy.

(b) $\Rightarrow$ (a): $x \in E_0$ esetén $xx^{-1} = e \in E_0$. Világos, hogy (C_1), (C_2) és (C_3) teljesül E_0-ra, semleges elemként és inverzként az E-belit szerepeltetve. ▌

A **11.1.b.** alatti példák közül (b) és (c) (a)-nak, (e) és (f) (d)-nek, (k) (j)-nek alcsoportja. Ha $[H, \mathfrak{T}]$ topologikus tér, akkor az (l) csoportnak alcsoportját alkotják a tér önmagára való homeomorfizmusai, ugyanis (11.1.5) (b) teljesül, hiszen homeomorfizmusok összetétele és homeomorfizmus inverze **is homeomorfizmus.**

Ha E_0 az E csoportnak alcsoportja, akkor az aE_0, ill. E_0a alakú halmazokat E_0-hoz tartozó **bal oldali,** ill. **jobb oldali mellékosztály**oknak mondjuk.

(11.1.6) *Legyen E csoport, E_0 E-nek alcsoportja, $a, b \in E$. $aE_0 \cap bE_0 \neq \emptyset$ esetén $aE_0 = bE_0$. A különböző bal oldali mellékosztályok E-nek diszjunkt felbontását alkotják.*

Bizonyítás. Ha $c = aE_0 \cap bE_0$, mondjuk $c = ax = by$, $x, y \in E_0$, akkor tetszőleges $z \in E_0$ esetén

$$az = axx^{-1}z = b(yx^{-1}z) \in bE_0,$$

és

$$bz = byy^{-1}z = a(xy^{-1}z) \in aE_0,$$

tehát $aE_0 \subset bE_0 \subset aE_0$. Ebből a második állítás $a = ae \in aE_0$ miatt adódik. ∎

Természetesen analóg állítás mondható ki a jobb oldali mellékosztályokra is, s általában, minden csoportokra vonatkozó definícióban vagy állításban felcserélhető a balról és jobbról való szorzás szerepe.

11.1.f. Homomorfizmusok. Az E csoportnak az E' csoportba való $h : E \to E'$ leképezését **homomorfizmus**nak nevezzük, ha $x, y \in E$ esetén $h(x)h(y) = h(xy)$.

(11.1.7) *Ha E és E' csoport, $h : E \to E'$ homomorfizmus, akkor $h(E)$ E'-nek alcsoportja, $h(e)$ E' semleges eleme, $h(x^{-1}) = h(x)^{-1}$.*

Bizonyítás. $x, y \in E$ esetén $h(x)h(y) = h(xy) \in h(E)$, továbbá $x \in E$ esetén

$$h(x)h(e) = h(e)h(x) = h(xe) = h(ex) = h(x)$$

folytán $h(e)$ semleges elem $h(E)$-ben, végül

$$h(x)h(x^{-1}) = h(x^{-1})h(x) = h(xx^{-1}) = h(x^{-1}x) = h(e)$$

miatt $h(x^{-1})$ a $h(x)$ elem inverze $h(E)$-ben. Így $h(E)$ alcsoportja E'-nek. (11.1.5)-ből, (11.1.1)-ből és (11.1.2)-ből következik, hogy $h(E)$ semleges eleme ugyanaz, mint E'-é, és egy $h(E)$-beli elem $h(E)$-beli inverze ugyanaz, mint az E'-beli. ∎

(11.1.8) *Ha E és E' csoport, $h : E \to E'$ homomorfizmus, akkor $A, B \subset E$ esetén $h(AB) = h(A)h(B)$, $h(A)^{-1} = h(A^{-1})$.* ∎

(11.1.9) *Legyen E és E' csoport, $h : E \to E'$ homomorfizmus, E' semleges eleme e'. Ekkor $E_0 = h^{-1}(e')$ E-nek alcsoportja, és az E_0-hoz tartozó bal és jobb oldali mellékosztályok egybeesnek.*

Bizonyítás. $x, y \in E$, $h(x) = h(y) = e'$ esetén $h(xy) = h(x)h(y) = e'e' = e'$, továbbá $h(x^{-1}) = h(x)^{-1} = e'^{-1} = e'$. Így $h^{-1}(e')$ alcsoport (11.1.5) értelmében. Ha $a \in E$, $x \in E_0$, akkor

$$h(axa^{-1}) = h(a)h(x)h(a^{-1}) = h(a)e'h(a)^{-1} = e'$$

miatt $y = axa^{-1} \in E_0$, tehát $ax = ya$, és $aE_0 \subset E_0a$. Hasonló meggondolással $a^{-1}xa \in E_0$, és $E_0a \subset aE_0$. ∎

Az itt szereplő típusú alcsoportok, amelyeknek megfelelő bal és jobb oldali mellékosztályok egybeesnek, különösen nevezetesek; **normálosztók**nak nevezzük őket. Kommutatív csoportban minden alcsoport ilyen.

(11.1.10) *Az E csoport E_0 alcsoportja pontosan akkor normálosztó, ha minden $a \in E$-re $x \in E_0$ esetén $axa^{-1} \in E_0$.*

Bizonyítás. Ha a bal és jobb oldali mellékosztályok egybeesnek, akkor (11.1.6)-ra tekintettel $a \in E$ esetén $aE_0 = E_0a$, azaz $x \in E_0$ esetén alkalmas $y \in E_0$-ra $ax = ya$, $axa^{-1} = y \in E_0$. Megfordítva, ha $a \in E$, $x \in E_0$ esetén $axa^{-1} \in E_0$, akkor $aE_0a^{-1} \subset E_0$, azaz $aE_0a^{-1}a \subset E_0a$, $aE_0e \subset E_0a$, $aE_0 \subset E_0a$, s hasonlóan $a^{-1}E_0a \subset E_0$-ból $E_0a \subset aE_0$. ∎

A normálosztók fontosságát (11.1.9) következő megfordítása mutatja:

(11.1.11) *Legyen E csoport, E_0 E-nek normálosztója, E' az E_0-hoz tartozó mellékosztályok halmaza. Ekkor E' a* **11.1.c.***-beli $x'y'$ művelettel csoport, semleges eleme $e' = E_0$, és az a $h : E \to E'$ szuperjekció, amely $x \in E$-nek az őt tartalmazó mellékosztályt felelteti meg, homomorfizmus, melynél $h^{-1}(e') = E_0$.*

Bizonyítás. $x \in x' \in E'$, $y \in y' \in E'$ esetén (11.1.10) folytán $x' = xE_0 = E_0x$, $y' = yE_0 = E_0y$, tehát $x'y' = xE_0E_0y = xE_0y = xyE_0 \in E'$, továbbá $E_0(xE_0) = = xE_0E_0 = xE_0$, $(xE_0)E_0 = xE_0$, úgyhogy $e' = E_0$ csakugyan semleges elem, végül $xE_0E_0x^{-1} = xE_0x^{-1} = E_0$, $E_0x^{-1}xE_0 = E_0$ mutatja, hogy xE_0 inverze E_0x^{-1}. Eszerint E' valóban csoport. Minthogy $x \in x' \in E'$, $y \in y' \in E'$ esetén $xy \in x'y'$, azért h csakugyan homomorfizmus. ∎

A (11.1.11)-ben konstruált E' csoportot az E csoport E_0 szerinti **faktorcsoport**jának nevezzük, és E/E_0-lal jelöljük.

Ha E és E' csoport, $h : E \to E'$ homomorfizmus, és h injektív, ill. szuperjektív, akkor **monomorfizmus**nak, ill. **epimorfizmus**nak nevezzük; ha h egyidejűleg eleget tesz mindkét kikötésnek (azaz ha bijektív), akkor neve **izomorfizmus.**

A definíciókból (2.6.5) alapján rögtön következik:

(11.1.12) *Ha $h : E \to E'$ és $h' : E' \to E''$ homomorfizmus, monomorfizmus, epimorfizmus vagy izomorfizmus, akkor $h' \circ h$ is az.* ∎

(11.1.13) *Ha $h : E \to E'$ izomorfizmus, akkor h^{-1} is az.*

Bizonyítás. Az világos, hogy h^{-1} is bijektív. Azonban $x', y' \in E'$, $x = h^{-1}(x')$, $y = h^{-1}(y')$ esetén $h(xy) = h(x)h(y) = x'y'$, azaz $xy = h^{-1}(x'y')$, és h^{-1} homomorfizmus. ∎

Az E és E' csoportokat egymással **izomorf**nak mondjuk, ha létezik egy $h : E \to E'$ izomorfizmus. (11.1.12) és (11.1.13) mutatja, hogy ez ekvivalencia-reláció.

11.1.g. Gyakorlatok. 1. Az E halmazt (valós) vektortérnek mondjuk, ha értelmezve van benne egy $\pi : E \times E \to E$ művelet, amelynek jele $\pi(x, y) = x + y$, továbbá még egy $\mu : \mathbf{R} \times E \to E$ leképezés, amelynek jele $\mu(\alpha, x) = \alpha x$, úgy, hogy $x, y, z \in E$, $\alpha, \beta \in \mathbf{R}$ esetén

$$x + y = y + x,\ x + (y + z) = (x + y) + z,$$

$$\alpha(\beta x) = (\alpha\beta)x, \quad (\alpha + \beta)x = \alpha x + \beta x,$$

$$\alpha(x + y) = \alpha x + \alpha y,\ 0x = 0y,\ 1x = x.$$

Mutassuk meg, hogy ekkor E kommutatív csoport a π művelettel.

[Nullaeleme az az $o \in E$, amelyre $o = 0x$ minden $x \in E$ mellett, x inverze pedig $(-1)x$.]

2. Mutassuk meg, hogy a következő halmazok a megadott π és μ leképezésekkel vektorteret alkotnak:

(a) $E = \mathbf{R}^m$, $(x_1, \ldots, x_m) + (y_1, \ldots, y_m) = (x_1 + y_1, \ldots, x_m + y_m)$, $\alpha(x_1, \ldots, x_m) = (\alpha x_1, \ldots, \alpha x_m)$;

(b) E a $H \neq \emptyset$ halmazon értelmezett valós függvények halmaza, $\pi(x, y) = z$, ha $z(t) = x(t) + y(t)$, $\mu(\alpha, x) = y$, ha $y(t) = \alpha x(t)$ $(t \in H)$;

(c) E a $[H, \mathcal{T}]$ topologikus térben értelmezett folytonos függvények halmaza, π és μ mint előbb;

(d) E a $[H, \mathcal{S}]$ szomszédsági térben értelmezett korlátos, szomszédságtartó függvények halmaza, π és μ mint előbb;

(e) E a $[H, \mathcal{U}]$ uniform térben értelmezett egyenletesen folytonos függvények halmaza, π és μ mint előbb.

3. Legyen E egy $H \neq \emptyset$ halmaz önmagára való bijekcióinak halmaza, $f, g \in E$ esetén $\pi(f, g) = f \circ g$. Mutassuk meg, hogy a következő E_0 halmazok az E csoport alcsoportjai:

(a) E_0 azokból az $f \in E$-kből áll, amelyek H-nak adott t_0 elemét önmagába viszik át;

(b) E_0 azokból az f-ekből áll, amelyek egy adott H feletti $\mathcal{S}$ szomszédsági relációra nézve $(\mathcal{S}, \mathcal{S})$-ekvimorfizmusok;

(c) E_0 azokból az f-ekből áll, amelyek egy adott H feletti $\mathcal{U}$ uniform struktúrára nézve unimorfizmusok;

(d) $H \subset \mathbf{R}$ egy intervallum, és E_0 azokból az f-ekből áll, amelyek szigorúan monoton növekvők és $(\mathcal{E} \mid H, \mathcal{E} \mid H)$-folytonosak;

(e) H csoport, és E_0 azokból az f-ekből áll, amelyek izomorfizmusok.

4. Adjunk példát a **11.1.b.** (a) alatti E csoportban olyan $E_1 \subset E$ és $E_2 \subset E$ halmazra, amely nem alcsoport, jóllehet

(a) $x, y \in E_1$ esetén $x + y \in E_1$;

(b) $x \in E_2$ esetén $-x \in E_2$.

$[E_1 = (0, +\infty)$, $E_2 = (-1, 1)$.]

5. Adjunk példát az előbbi csoportban olyan $E_3 \subset E$ halmazra, amely alkalmas π művelettel csoport, de E-nek nem alcsoportja.

$[E_3 = E - \{0\}$, $\pi(x, y) = xy$.]

6. Legyen E csoport, E' az E halmaz önmagára való bijekcióinak **11.1.b.** (l)-ben értelmezett csoportja, és $f : E \to E'$ az $f(x) = \tau_x^s$ képlettel értelmezve. Mutassuk meg, hogy f monomorfizmus.

7. Legyen E csoport, $a \in E$, és $x \in E$ esetén $f(x) = axa^{-1}$. Mutassuk meg, hogy $f : E \to E$ izomorfizmus.

8. Legyen $a, b \in \mathbf{R}$, $a \neq 0$ esetén $f_{a,b} : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ az $f_{a,b}(x) = ax + b$ képlettel értelmezve. Mutassuk meg, hogy

(a) $E = \{f_{a,b} : a \in \mathbf{R} - \{0\}, b \in \mathbf{R}\}$ és $\mathbf{R}$ halmaz önmagára való bijekcióiból álló, **11.1.b.** (l)-ben értelmezett csoportnak alcsoportja;

(b) $E_0 = \{f_{a,b} : a \in (0, +\infty), b \in \mathbf{R}\}$, $E_1 = \{f_{1,b} : b \in \mathbf{R}\}$ és $E_2 = \{f_{a,0} : a \in \mathbf{R} - \{0\}\}$ E-nek alcsoportja;

(c) E_0 és E_1 normálosztója E-nek, E_2 azonban nem normálosztó.

[$f_{a,b} \circ f_{c,d} \circ f_{a,b}^{-1} = f_{c,ad-bc+b}$.]

9. Legyen E az előző feladatban vizsgált csoport, $h : E \to \mathbf{R} - \{0\}$ a $h(f_{a,b}) = a$ képlettel értelmezve. Mutassuk meg, hogy ha az $E' = \mathbf{R} - \{0\}$ halmazban $\pi(x, y) = xy$, h E-nek E'-re való epimorfizmusa, s a hozzá tartozó normálosztó E_1.

10. Legyen E csoport, E_0 E-nek alcsoportja. Mutassuk meg, hogy $a, b \in E$ pontosan akkor fekszik ugyanabban az E_0-ra vonatkozó bal oldali (jobb oldali) mellékosztályban, ha $a^{-1}b \in E_0$ ($ba^{-1} \in E_0$).

11. Mutassuk meg, hogy a 8. feladatban vizsgált csoportnak E_0 szerinti faktorcsoportja kételemű.

12. Legyen E az $\mathbf{R}$ halmaz önmagára való bijekcióiból álló, **11.1.b** (l)-ben értelmezett csoport, $E_0 \subset E$ álljon azokból a szigorúan monoton, folytonos f függvényekből, amelyekre $f(\mathbf{R}) = \mathbf{R}$, $E_1 \subset E_0$ ezek közül a szigorúan monoton növekvőkből, $E_2 \subset E_0$ azokból, amelyeknek sehol el nem tűnő deriváltjuk létezik. Mutassuk meg, hogy

(a) E_0, E_1 és E_2 E-nek alcsoportja;

(b) E_1 E_0-nak normálosztója, és E_0/E_1 kételemű;

(c) E_2 E_0-nak nem normálosztója;

(d) E_1 E-nek nem normálosztója.

[Ha $f(x) = x + 1$, $g(x) = x$, ha $x \leqq 0$, $g(x) = 2x$, ha $x \geqq 0$, akkor $f \in E_2$, $g \in E_0$, és a $h = g \circ f \circ g^{-1}$ jelöléssel $h(x) = x + 1$, ha $x \leqq -1$, $h(x) = 2x + 2$, ha $-1 \leqq x \leqq 0$, $h(x) = x + 2$, ha $x \geqq 0$, tehát $h \notin E_2$. Ugyanerre az f-re és a $k(x) = \dfrac{1}{x}$, ha $x \neq 0$, $k(0) = 0$ képletekkel értelmezett k-ra $f \in E_1$, $k \in E$, és az $m = k \circ f \circ k^{-1}$ jelöléssel $m(x) = \dfrac{x}{x + 1}$, ha $x \neq 0, -1$, $m(0) = 1$, $m(-1) = 0$, tehát $m \notin E_1$.]

13. Legyen E csoport, E_i $(i \in I)$ E-nek alcsoportja. Mutassuk meg, hogy $\bigcap_{i \in I} E_i$ is alcsoportja E-nek.

14. Legyen E csoport, $A \subset E$. Mutassuk meg, hogy E-nek legszűkebb A-t tartalmazó alcsoportja a $b_1 b_2 \dots b_n$ alakú elemekből áll, ahol $n \in \mathbf{N}$, és $b_i \in B = A \cup A^{-1}$ $(i = 1, \dots, n)$.

15. Legyen $I \neq \emptyset$ tetszőleges indexhalmaz, $i \in I$ esetén E_i csoport, $E = \times_{i \in I} E_i$. Mutassuk meg, hogy

(a) E csoport a $\pi(x, y) = (x_i y_i)$ jelöléssel, ahol $x = (x_i)$, $y = (y_i)$;

(b) E-nek alcsoportja az az $E^* \subset E$ halmaz, amely az olyan $x = (x_i) \in E$ elemekből áll, amelyekre véges számú kivétellel $x_i = e_i$ (itt e_i jelöli E_i semleges elemét);

(c) E-nek E_i-re való p_i vetítése, továbbá $p_i \mid E^*$ is epimorfizmus.

11.2. TOPOLOGIKUS CSOPORTOK

11.2.a. A topologikus csoport fogalma. Topologikus csoportról beszélünk, ha egy E csoporton olyan $\mathcal{T}$ topológia van megadva, amelyre nézve a π és ι leképezés folytonos, azaz, pontosabban szólva, $\pi : E\times E \to E$ $(\mathcal{T}\times\mathcal{T}, \mathcal{T})$-, $\iota : E \to E$ pedig $(\mathcal{T}, \mathcal{T})$-folytonos. Az E csoporton megadott, az előbbi kikötéseknek eleget tevő topológiákat a csoport **megengedett topológiá**inak nevezzük.

A **11.1.b.** alatti (a) példában $\mathcal{E}$, (b)-ben $\mathcal{E} \mid \mathbf{Q}$, (d)-ben $\mathcal{E} \mid (\mathbf{R} - \{0\})$, (e)-ben $\mathcal{E} \mid (\mathbf{Q} - \{0\})$, (f)-ben, $\mathcal{E} \mid E$, (g)-ben $\mathcal{E}^m$, (h)-ban a pontonkénti konvergencia topológiája, (i)-ben — a komplex számokat a szokásos módon a sík pontjaival azonosítva — $\mathcal{E}^2$, (j)-ben $\mathcal{E}^2 \mid E$, (k)-ban $\mathcal{E}^2 \mid E$ nyilvánvalóan megengedett topológia. Így ezek mind példák kommutatív topologikus csoportokra. Világos, az is, hogy bármely csoport a diszkrét vagy az indiszkrét topológiával ellátva szintén topologikus csoport (mert egy $f : E \to E'$ leképezés mindig folytonos, ha E topológiája diszkrét, vagy E'-é indiszkrét).

Kevésbé triviális példa nemkommutatív topologikus csoportra a következő: tekintsük az $\mathbf{R}$ halmaz $f(x) = ax + b$ $(a > 0)$ alakban megadott bijekcióit önmagára. Ezek az $\mathbf{R}$ összes bijekcióiból álló csoportnak nemkommutatív alcsoportját alkotják, ugyanis ha még $g(x) = cx + d$ $(c > 0)$, akkor $f\circ g = h, f^{-1} = k$ jelöléssel nyilván

$$h(x) = acx + (ad + b),\ k(x) = \frac{1}{a}x - \frac{b}{a}.$$

Más szóval, ha f-et azonosítjuk $\mathbf{R}^2$ (a, b) pontjával, akkor $E = \{(a, b) : (a, b) \in \mathbf{R}^2, a > 0\}$, és $(a, b), (c, d) \in E$ esetén

$$(a, b)(c, d) = (ac, ad + b),$$

$$(a, b)^{-1} = \left(\frac{1}{a}, -\frac{b}{a}\right).$$

Ebből rögtön látszik, hogy E számára $\mathcal{E}^2 \mid E$ megengedett topológia.

11.2.b. ***e*-környezetbázisok.** Egy topologikus csoport topológiája teljesen meg van határozva, mihelyt ismerjük az e semleges elemnek egy környezetbázisát. Ennek belátására jegyezzük meg először is:

(11.2.1) *Egy topologikus csoportban bármely bal oldali vagy jobb oldali eltolás, továbbá ι a csoportnak önmagára való homeomorfizmusa.*

Bizonyítás. Ha $[E, \mathcal{T}]$ topologikus csoport, $a \in E$, akkor $\tau_a^s = \pi\circ f$, ahol $f : E \to E\times E$ az $f(x) = (a, x)$ képlettel értelmezett leképezés. Az utóbbi (7.1.28) értelmében $(\mathcal{T}, \mathcal{T}\times\mathcal{T})$-folytonos, így aztán τ_a^s $(\mathcal{T}, \mathcal{T})$-folytonos, s ugyanez áll persze $\tau_{a^{-1}}^s$-re, azaz (11.1.4) szerint $(\tau_a^s)^{-1}$-re is. A τ_a^d-ra vonatkozó állítás ugyanígy igazolható.

Végül ι bijektiv, $(\mathcal{T}, \mathcal{T})$-folytonos, és $\iota^{-1} = \iota$ miatt $(\mathcal{T}, \mathcal{T})$-homeomorfizmus is. ∎

Ebből az evidens, $\tau_a^s(e) = \tau_a^d(e) = a$, $\tau_a^s(V) = aV$, $\tau_a^d(V) = Va$ képletek alapján rögtön következik:

(11.2.2) *Ha az* $[E, \mathfrak{T}]$ *topologikus csoportban* $\mathfrak{v}$ *az* e *semleges elem környezetbázisa, akkor akár* $\{aV : V \in \mathfrak{v}\}$, *akár* $\{Va : V \in \mathfrak{v}\}$ *az* $a \in E$ *elemnek környezetbázisa.* ▮

Természetes módon vetődik fel az a kérdés, hogy milyen kikötéseknek kell eleget tennie egy E csoport részhalmazaiból álló $\mathfrak{v}$ halmazrendszernek ahhoz, hogy e környezetbázisa legyen egy megengedett topológiára nézve. Ezzel kapcsolatban azonnal kimondhatjuk:

(11.2.3) *Ha* $\mathfrak{v}$ *az* $[E, \mathfrak{T}]$ *topologikus csoportban e-nek környezetbázisa, akkor*

(a) $V \in \mathfrak{v}$ *esetén* $e \in V$;

(b) $\mathfrak{v}$ *rács;*

(c) $V \in \mathfrak{v}$ *esetén van olyan* $V_1 \in \mathfrak{v}$, *hogy* $V_1V_1 \subset V$;

(d) $V \in \mathfrak{v}$ *esetén van olyan* $V_1 \in \mathfrak{v}$, *hogy* $V_1^{-1} \subset V$;

(e) $V \in \mathfrak{v}$, $a \in E$ *esetén van olyan* $V_1 \in \mathfrak{v}$, *hogy* $aV_1a^{-1} \subset V$.

Bizonyítás. (a) és (b) evidens.

(c) : $\pi(e, e) = e$ miatt $V \in \mathfrak{v}$-hoz van olyan V', $V'' \in \mathfrak{v}$, hogy $\pi(V' \times V'') \subset V$, s ha $V_1 \in \mathfrak{v}$ olyan, hogy $V_1 \subset V' \cap V''$, akkor $\pi(V_1 \times V_1) \subset V$, azaz $V_1V_1 \subset V$.

(d): $\iota(e) = e$ miatt $V \in \mathfrak{v}$-hoz van olyan $V_1 \in \mathfrak{v}$, hogy $\iota(V_1) \subset V$, azaz $V_1^{-1} \subset V$.

(e): (11.2.2) szerint $V \in \mathfrak{v}$-hoz adott $a \in E$ mellett van olyan $V_1 \in \mathfrak{v}$, hogy $aV_1 \subset \subset Va$, azaz $aV_1a^{-1} \subset Vaa^{-1} = Ve = V$. ▮

Mármost a (11.2.3) alatti feltételek elegendők is. Ez a következő, még jóval többet is kimondó tétel folyománya:

(11.2.4) *Tegyen az E csoport részhalmazaiból álló* $\mathfrak{v}$ *halmazrendszer eleget a* (11.2.3) *alatti* (a)—(e) *feltételeknek, és legyen* $V \in \mathfrak{v}$ *esetén*

$$U_V^s = \{(x, y) : x^{-1}y \in V \cap V^{-1}\} \subset E \times E,$$

$$U_V^d = \{(x, y) : xy^{-1} \in V \cap V^{-1}\} \subset E \times E.$$

Ekkor $\mathfrak{U}^s = \{U_V^s : V \in \mathfrak{v}\}$ *és* $\mathfrak{U}^d = \{U_V^d : V \in \mathfrak{v}\}$ *uniform bázis egy E feletti* $\mathcal{U}^s$ *ill.* $\mathcal{U}^d$ *uniform struktúra számára,* $\mathfrak{T}_{\mathcal{U}^s} = \mathfrak{T}_{\mathcal{U}^d}$ *megengedett topológia, s erre nézve* $\mathfrak{v}$ *e-nek,* $\{aV : V \in \mathfrak{v}\}$ *és* $\{Va : V \in \mathfrak{v}\}$ *pedig* $a \in E$*-nek környezetbázisa.*

Bizonyítás. $x \in E$ esetén $x^{-1}x = e \in V \cap V^{-1}$ (a) miatt, tehát $(x, x) \in U_V^s$. Minthogy $V_1 \subset V_2$ esetén $V_1 \cap V_1^{-1} \subset V_2 \cap V_2^{-1}$, azért $U_{V_1}^s \subset U_{V_2}^s$, s ebből (b) alapján adódik, hogy $\mathfrak{U}^s$ rács. $(x, y) \in U_V^s$, azaz $x^{-1}y \in V \cap V^{-1}$ esetén $y^{-1}x = (x^{-1}y)^{-1} \in V^{-1} \cap (V^{-1})^{-1} = V^{-1} \cap V$, tekintettel (11.1.3)-ra; eszerint U_V^s környék. Ha $V_1V_1 \subset V$, akkor $(x, y) \in U_{V_1}^s$, $(y, z) \in U_{V_1}^s$ esetén $x^{-1}y \in V_1 \cap V_1^{-1}$, $y^{-1}z \in V_1 \cap V_1^{-1}$, tehát

$$x^{-1}z = x^{-1}yy^{-1}z \in V_1V_1 \cap V_1^{-1}V_1^{-1} \subset V \cap V^{-1},$$

úgyhogy $U_{V_1}^s \circ U_{V_1}^s \subset U_V^s$. Eszerint $\mathfrak{U}^s$ csakugyan uniform bázisa egy $\mathcal{U}^s$ uniform struktúrának. Hasonló állítható $\mathfrak{U}^d$-ről és $\mathcal{U}^d$-ről is.

Az $a \in E$ pont $\mathfrak{T}_{\mathcal{U}^s}$-, ill. $\mathfrak{T}_{\mathcal{U}^d}$-környezetbázisát alkotják az $U_V^s(a)$, ill. $U_V^d(a)$ halmazok ($V \in \mathfrak{v}$). Azonban nyilván

$$U_V^s(a) = a(V \cap V^{-1}),$$

$$U_V^d(a) = (V \cap V^{-1})a,$$

és (d)-ből következik, hogy $\mathfrak{v}_1 = \{V \cap V^{-1} : V \in \mathfrak{v}\}$ $\mathfrak{v}$-val ekvivalens rács, ugyanis $V_1^{-1} \subset V$, $V_2 \subset V \cap V_1$ esetén $V_2 \subset V \cap V^{-1}$, úgyhogy a kérdéses két környezetbázissal ekvivalens $\{aV : V \in \mathfrak{v}\}$, ill. $\{Va : V \in \mathfrak{v}\}$. Minthogy (e) szerint $V \in \mathfrak{v}$-hoz van olyan $V_1 \in \mathfrak{v}$, hogy $aV_1 \subset Va$, s olyan $V_2 \in \mathfrak{v}$ is, hogy $a^{-1}V_2a \subset V$, $V_2a \subset aV$, azért e két környezetbázis egymással is ekvivalens. Így $\mathfrak{T}_{\mathfrak{U}^s} = \mathfrak{T}_{\mathfrak{U}^d}$, s ezt a topológiát $\mathfrak{T}$-vel jelölve, az $a = e$ esetben adódik, hogy $\mathfrak{v}$ $\mathfrak{T}$-környezetbázisa e-nek.

Ha $a, b, c \in E$, $ab = c$, és $V \in \mathfrak{v}$-hoz $V_1 \in \mathfrak{v}$ (c) alapján úgy van megválasztva, hogy $V_1V_1 \subset V$, továbbá $V_2 \in \mathfrak{v}$ olyan, hogy $V_2b \subset bV_1$, akkor aV_2 és bV_1 a-nak, ill. b-nek $\mathfrak{T}$-környezete, és $\pi(aV_2 \times bV_1) = aV_2bV_1 \subset abV_1V_1 \subset cV$, úgyhogy π $(\mathfrak{T} \times \mathfrak{T}, \mathfrak{T})$-folytonos. Ha pedig $V \in \mathfrak{v}$-hoz (d) alapján $V_1 \in \mathfrak{v}$ olyan, hogy $V_1^{-1} \subset V$, akkor $\iota(a^{-1}V_1) = (a^{-1}V_1)^{-1} = V_1^{-1}a \subset Va$ folytán ι $(\mathfrak{T}, \mathfrak{T})$-folytonos és $\mathfrak{T}$ megengedett. ∎

Az U_V^s és U_V^d környékek definíciója egyszerűsödik, ha V **szimmetrikus**, azaz $V^{-1} = V$; ha a $\mathfrak{v}$ rács csupa szimmetrikus halmazból áll, őt magát is szimmetrikusnak mondjuk. Ezzel kapcsolatban jegyezzük meg:

(11.2.5) *Bármely topologikus csoportban van e-nek szimmetrikus környezetbázisa.*

Bizonyítás. A (11.2.3) (d) feltételből látszik, hogy ha $\mathfrak{v}$ e-nek tetszőleges környezetbázisa, akkor $\{V \cap V^{-1} : V \in \mathfrak{v}\}$ e-nek szimmetrikus környezetbázisa. ∎

A (11.2.4)-beli $\mathfrak{U}^s$ és $\mathfrak{U}^d$ uniform struktúrák fontos tulajdonságát mondhatjuk ki. Nevezzük ebből a célból az E csoportban az U **környéket bal-**, ill. **jobbinvariánsnak**, ha $a \in E$, $(x, y) \in U$ esetén $(ax, ay) \in U$, ill. $(xa, ya) \in U$, az E feletti $\mathfrak{U}$ **uniform struktúrát** pedig **bal-**, ill. **jobbinvariánsnak** mondjuk, ha van csupa bal-, ill. jobbinvariáns környékből álló bázisa. Mármost:

(11.2.6) *A* (11.2.4)*-beli U_V^s környék, s így az $\mathfrak{U}^s$ uniform struktúra bal-, U_V^d és $\mathfrak{U}^d$ pedig jobbinvariáns.*

Bizonyítás. $a \in E$, $(x, y) \in U_V^s$ esetén

$$(ax)^{-1}ay = x^{-1}a^{-1}ay = x^{-1}ey = x^{-1}y \in V \cap V^{-1},$$

tehát $(ax, ay) \in U_V^s$. Hasonlóan $(x, y) \in U_V^d$ esetén $(xa, ya) \in U_V^d$. ∎

Eredményeinkből most már könnyen adódik a következő alapvető tétel:

(11.2.7) *Legyen $[E, \mathfrak{T}]$ topologikus csoport. Ekkor E-n pontosan egy balinvariáns és pontosan egy jobbinvariáns uniform struktúra van, amely $\mathfrak{T}$-t indukálja; ezek az e tetszőleges $\mathfrak{v}$ $\mathfrak{T}$-környezetbázisából kiindulva* (11.2.4) *szerint keletkező $\mathfrak{U}^s$ és $\mathfrak{U}^d$ struktúrával azonosak, és a csoport* **bal oldali,** *ill.* **jobb oldali uniform struktúrájá**-*nak nevezik őket.*

Bizonyítás. Legyen $\mathfrak{v}$ e-nek egy $\mathfrak{T}$-környezetbázisa, $\mathfrak{U}^s$ és $\mathfrak{U}^d$ a (11.2.4)-ben konstruált két uniform struktúra. (11.2.6) szerint $\mathfrak{U}^s$ bal-, $\mathfrak{U}^d$ jobbinvariáns, és tudjuk, hogy $\mathfrak{T}_{\mathfrak{U}^s} = \mathfrak{T}_{\mathfrak{U}^d}$-re nézve $a \in E$-nek környezetbázisa $\{aV : V \in \mathfrak{v}\}$, ill. $\{Va : V \in \mathfrak{v}\}$. Így (11.2.2) értelmében $\mathfrak{T}_{\mathfrak{U}^s} = \mathfrak{T}_{\mathfrak{U}^d} = \mathfrak{T}$.

Ha $\mathfrak{U}_1$ és $\mathfrak{U}_2$ balinvariáns uniform struktúra E-n, és $\mathfrak{T}_{\mathfrak{U}_1} = \mathfrak{T}_{\mathfrak{U}_2} = \mathfrak{T}$, akkor bármely $U_2 \in \mathfrak{U}_2$ környékhez van olyan balinvariáns $U_2' \in \mathfrak{U}_2$ környék, hogy $U_2' \subset U_2$. Minthogy $U_2'(e)$ e-nek $\mathfrak{T}$-környezete, van olyan balinvariáns $U_1 \in \mathfrak{U}_1$ környék, hogy $U_1(e) \subset U_2'(e)$. Mármost $(x, y) \in U_1$ esetén $(x^{-1}x, x^{-1}y) =$

$= (e, x^{-1}y) \in U_1$, azaz $x^{-1}y \in U_1(e) \subset U_2'(e)$, tehát $(e, x^{-1}y) \in U_2'$, $(x, xx^{-1}y) = (x, y) \in U_2' \subset U_2$, úgyhogy $U_1 \subset U_2$, és $\mathcal{U}_2 < \mathcal{U}_1$. Ugyanígy $\mathcal{U}_1 < \mathcal{U}_2$, tehát $\mathcal{U}_1 = \mathcal{U}_2$. A jobbinvariáns uniform struktúrákra vonatkozó állítás ugyanígy igazolható. ∎

Kommutatív E csoport esetén a (11.2.3) alatti (e) feltétel automatikusan teljesül, mégpedig tetszőleges $a \in E$ esetén $V_1 = V$ választható; ilyenkor a balinvariáns és jobbinvariáns uniform struktúra egybeesik, és $\mathcal{U}^s = \mathcal{U}^d$. De fennállhat ez az egyenlőség nemkommutatív csoport esetén is; például ha $\mathcal{T}$ a diszkrét topológia, akkor $\mathcal{U}^s$ és $\mathcal{U}^d$ nyilván E diszkrét uniform struktúrájával azonos, akár kommutatív az E csoport, akár nem. Hasonlóan, ha $\mathcal{T}$ kompakt, akkor $\mathcal{T}$-t egyetlen uniform struktúra indukálja (5.3.26) szerint, tehát ismét $\mathcal{U}^s = \mathcal{U}^d$.

Előfordulhat azonban hogy $\mathcal{U}^s$ és $\mathcal{U}^d$ különböző. Legyen például $[E, \mathcal{T}]$ az előző pont végén említett csoport, azaz $E = \{(a, b) : (a, b) \in \mathbf{R}^2, a > 0\}$, $(a, b)(c, d) = (ac, ad + b)$, $\mathcal{T} = \mathcal{E}^2 \mid E$. Ekkor $e = (1, 0)$, s ennek környezetbázisát alkotják a

$$V_\varepsilon = (1 - \varepsilon, 1 + \varepsilon) \times (-\varepsilon, \varepsilon) \quad (0 < \varepsilon < 1)$$

halmazok, úgyhogy $U^s_{V_\varepsilon}$ azokból az $((a, b), (c, d))$ párokból áll, amelyekre

$$(a, b)^{-1}(c, d) = \left(\frac{c}{a}, \frac{d-b}{a}\right) \in V_\varepsilon$$

és egyidejűleg

$$(c, d)^{-1}(a, b) = \left(\frac{a}{c}, \frac{b-d}{c}\right) \in V_\varepsilon,$$

azaz

$$\left|\frac{c}{a} - 1\right| < \varepsilon, \quad \left|\frac{d-b}{a}\right| < \varepsilon, \quad \left|\frac{a}{c} - 1\right| < \varepsilon, \quad \left|\frac{b-d}{c}\right| < \varepsilon.$$

Egészen hasonlóan, $U^d_{V_\varepsilon}$ az olyan $((a, b), (c, d))$ párokból áll, amelyekre

$$(a, b)(c, d)^{-1} = \left(\frac{a}{c}, \ b - \frac{ad}{c}\right) \in V_\varepsilon$$

és egyidejűleg

$$(c, d)(a, b)^{-1} = \left(\frac{c}{a}, \ d - \frac{cb}{a}\right) \in V_\varepsilon,$$

azaz

$$\left|\frac{a}{c} - 1\right| < \varepsilon, \quad \left|b - \frac{a}{c}d\right| < \varepsilon, \quad \left|\frac{c}{a} - 1\right| < \varepsilon, \quad \left|d - \frac{c}{a}b\right| < \varepsilon.$$

Mármost az első négy egyenlőtlenség teljesül, ha $a > 0$ tetszőleges, $c = a$, és $|b - d| = \frac{1}{2}\varepsilon a$; ugyanakkor az utóbbi négy közül a második és a negyedik pl. $\varepsilon = \frac{1}{2}$ mellett nem áll, mihelyt $\varepsilon a > 1$. Eszerint $U^d_{V_{1/2}}$ nem tartalmaz egyetlen $U^s_{V_\varepsilon}$-t sem.

11.2.c. Következmények. Az a körülmény, hogy egy topologikus csoport topológiája bal- ill. jobbinvariáns uniform struktúrával indukálható, nevezetes következményekkel jár. Először is:

(11.2.8) *Bármely topologikus csoport topológiája teljesen reguláris.* ▌

(11.2.9) *Legyen* $[E, \mathfrak{T}]$ *topologikus csoport. A következő állítások egyenértékűek:*

(a) $\mathfrak{T}$ T_0*-topológia;*

(b) $\mathfrak{T}$ *Tyihonov-féle;*

(c) $\mathfrak{U}^s$ *szeparált;*

(d) $\mathfrak{U}^d$ *szeparált;*

(e) *Van e-nek olyan* $\mathfrak{v}$ $\mathfrak{T}$*-környezetbázisa, hogy* $\bigcap\{V : V \in \mathfrak{v}\} = \{e\}$.

Bizonyítás. (a) $\Rightarrow$ (b) (11.2.8)-ból, (b) $\Rightarrow$ (c) és (b) $\Rightarrow$ (d) (3.2.24)-ből adódik.

(c) $\Rightarrow$ (e): $\mathfrak{T}$ T_π- és így T_1-topológia, úgyhogy $x \in E - \{e\}$ esetén van olyan $V \in \mathfrak{v}$, ahol $\mathfrak{v}$ e-nek tetszőleges környezetbázisa lehet, hogy $x \notin V$.

(d) $\Rightarrow$ (e): Ugyanígy.

(e) $\Rightarrow$ (a): $x, y \in E$, $x \neq y$ esetén van olyan $V \in \mathfrak{v}$, hogy $x^{-1}y \notin V$, azaz hogy $y \notin xV$. Ebből (11.2.2) szerint adódik, hogy $\mathfrak{T}$ T_0-topológia. ▌

A (11.2.9) alatti feltételeknek eleget tevő topologikus csoportot **szeparáltnak** mondjuk.

Az E csoporton értelmezett ρ **eltérést**, ill. **távolságot bal-**, ill. **jobbvariánsnak** nevezzük, ha $x, y, a \notin E$ esetén

$$\rho(ax, ay) = \rho(x, y), \text{ ill. } \rho(xa, ya) = \rho(x, y).$$

Kimondható mármost a következő nevezetes tétel:

(11.2.10) *Legyen* $[E, \mathfrak{T}]$ *(szeparált) topologikus csoport. A következő állítások egyenértékűek:*

(a) $\mathfrak{T}$ *félmetrizálható (metrizálható);*

(b) *e-nek van megszámlálható környezetbázisa;*

(c) $\mathfrak{T}$ *indukálható balinvariáns eltéréssel (távolsággal);*

(d) $\mathfrak{T}$ *indukálható jobbinvariáns eltéréssel (távolsággal).*

Bizonyítás. (a) $\Rightarrow$ (b): (2.4.11)-ből adódik.

(b) $\Rightarrow$ (c): Legyen $\{V_n : n = 0, 1, 2, \dots\} = \mathfrak{v}$ e-nek megszámlálható környezetbázisa. (11.2.3) felhasználásával $V_0' = V_0$-ból kiindulva legyen, ha $V_n' \in \mathfrak{v}$ már értelmezve van, $V_{n+1}' \in \mathfrak{v}$ olyan, hogy $V_{n+1}'V_{n+1}' \subset V_n' \cap V_{n+1}$ $(n = 0, 1, 2, \dots)$. Világos, hogy $\mathfrak{v}' = \{V_n' : n = 0, 1, 2, \dots\}$ is környezetbázisa e-nek. Ezért (11.2.4) és (11.2.7) értelmében az $U_n = U^s_{V_n'}$ jelöléssel $\{U_n : n = 0, 1, 2, \dots\}$ $\mathfrak{U}^s$-t generáló uniform bázis, s mindegyik U_n (11.2.6) szerint balinvariáns, továbbá $U_{n+1} \circ \circ U_{n+1} \subset U_n$. Ennélfogva alkalmazható (4.2.29), amely szerint $\mathfrak{U}^s$-t indukálja a

$$\sigma(x, y) = \sup\{\,|f(x) - f(y)| : f \in \Phi\}$$

eltérés, ahol Φ mindazon E-n értelmezett f függvények halmaza, amelyekre $x \in E$ esetén $0 \leq f(x) \leq 1$, és $P, Q \subset \mathbf{I}$, $\rho_1(P, Q) > \dfrac{1}{2^n}$ esetén

$$U_{n+2}(f^{-1}(P)) \subset f^{-1}(\mathbf{I} - Q) \quad (n \in \mathbf{N}),$$

ahol $\rho_1(u, v) = |u - v|$ az euklideszi távolság $\mathbf{R}$-en.

Legyen most $a \in E$, $f \in \Phi$ esetén f_a az az E-n értelmezett függvény, melyre $f_a(x) = f(ax)$. Világos, hogy $P, Q \subset \mathbf{I}$ esetén

$$f_a^{-1}(P) = a^{-1}f^{-1}(P), f_a^{-1}(\mathbf{I} - Q) = a^{-1}f^{-1}(\mathbf{I} - Q),$$

s minthogy U_{n+2} balinvariáns volta miatt

$$U_{n+2}(a^{-1}f^{-1}(P)) \subset a^{-1}U_{n+2}(f^{-1}(P)),$$

hiszen $x \in a^{-1}f^{-1}(P)$, $(x, y) \in U_{n+2}$ esetén $ax \in f^{-1}(P)$, $(ax, ay) \in U_{n+2}$, tehát $ay \in U_{n+2}(f^{-1}(P))$, azért f-fel együtt f_a is Φ-hez tartozik. Mármost

$$\begin{aligned}\sigma(ax, ay) &= \sup \{ |f(ax) - f(ay)| : f \in \Phi\} = \\ &= \sup \{ |f_a(x) - f_a(y)| : f \in \Phi \} \leqq \\ &\leqq \sup \{ |g(x) - g(y)| : g \in \Phi\} = \sigma(x, y),\end{aligned}$$

s ugyanezt a helyett a^{-1}-re alkalmazva

$$\sigma(x, y) = \sigma(a^{-1}ax, a^{-1}ay) \leqq \sigma(ax, ay),$$

azaz $\sigma(ax, ay) = \sigma(x, y)$. Így σ balinvariáns eltérés.

(b) $\Rightarrow$ (d) ugyanígy bizonyítható, (c) $\Rightarrow$ (a) és (d) $\Rightarrow$ (a) pedig evidens.

A zárójelbe tett módosítások ebből (2.5.5) alapján következnek. ∎

Minthogy bal-, ill. jobbinvariáns eltérés nyilván bal-, ill. jobbinvariáns uniform struktúrát indukál, azért a (11.2.10) (c)-ben, ill. (d)-ben szereplő eltérés éppen a csoport bal, ill. jobb oldali uniform struktúráját származtatja.

11.2.d. Alcsoportok. Egy topologikus csoport minden alcsoportja is topologikus csoport. Pontosabban:

(11.2.11) *Legyen $[E, \mathfrak{T}]$ topologikus csoport, E_0 E-nek alcsoportja. Ekkor $[E_0, \mathfrak{T} \mid E_0]$ is topologikus csoport, s ha $\mathfrak{U}^s$ és $\mathfrak{U}^d$ $[E, \mathfrak{T}]$-nek bal, ill. jobb oldali uniform struktúrája, akkor $[E_0, \mathfrak{T} \mid E_0]$ megfelelő uniform struktúrái $\mathfrak{U}^s \mid E_0$, ill. $\mathfrak{U}^d \mid E_0$.*

Bizonyítás. $\pi \mid ^{E_0}_{E_0 \times E_0}$ (2.6.21) és (2.6.22) szerint $(\mathfrak{T} \times \mathfrak{T} \mid E_0 \times E_0, \mathfrak{T} \mid E_0)$-folytonos, és (7.1.30) értelmében $\mathfrak{T} \times \mathfrak{T} \mid E_0 \times E_0 = (\mathfrak{T} \mid E_0) \times (\mathfrak{T} \mid E_0)$. Hasonlóan adódik, hogy $i \mid ^{E_0}_{E_0}$ $(\mathfrak{T} \mid E_0, \mathfrak{T} \mid E_0)$-folytonos. Így $[E_0, \mathfrak{T} \mid E_0]$ csakugyan topologikus csoport. Minthogy $\mathfrak{T}_{\mathfrak{U}^s \mid E_0} = \mathfrak{T}_{\mathfrak{U}^s} \mid E_0 = \mathfrak{T} \mid E_0$ (3.2.35) alapján, és $\mathfrak{U}^s$-sel együtt nyilván $\mathfrak{U}^s \mid E_0$ is balinvariáns, azért az utóbbi éppen $[E_0, \mathfrak{T} \mid E_0]$ bal oldali uniform struktúrája. Hasonlóan látható be az $\mathfrak{U}^d$-vel kapcsolatos állítás. ∎

(11.2.12) *Ha E_0 alcsoportja az $[E, \mathfrak{T}]$ topologikus csoportnak, és* $\operatorname{int} E_0 \neq \emptyset$, *akkor E_0 nyílt-zárt.*

Bizonyítás. Ha $a \in \operatorname{int} E_0$, $b \in E_0$, akkor $\tau^s_{ba^{-1}}(a) = b$, $\tau^s_{ba^{-1}}(E_0) = E_0$, úgyhogy (11.2.1) miatt $b \in \operatorname{int} E_0$. Eszerint E_0 nyílt, és nyíltak az $xE_0 = \tau^s_x(E_0)$ mellékosztályok is. Minthogy (11.1.6) szerint $E - E_0$ ilyenek egyesítése, azért E_0 zárt is. ∎

(11.2.13) *Ha E_0 alcsoport (normálosztó) az $[E, \mathfrak{T}]$ topologikus csoportban, akkor $\bar{E}_0$ is ilyen.*

Bizonyítás. $\pi^{-1}(\bar{E}_0)$ $\mathfrak{T}\times\mathfrak{T}$-zárt és tartalmazza $E_0\times E_0$-t, tehát $\bar{E}_0\times\bar{E}_0$-t is, mert ez (7.1.27) szerint $E_0\times E_0$-nak $\mathfrak{T}\times\mathfrak{T}$-lezárása. Így $\bar{E}_0\bar{E}_0\subset\bar{E}_0$. Hasonló meggondolással $\iota^{-1}(\bar{E}_0)=\bar{E}_0^{-1}$ $\mathfrak{T}$-zártsága miatt $\bar{E}_0\subset\bar{E}_0^{-1}$, $\bar{E}_0^{-1}\subset\bar{E}_0$. Ha E_0 normálosztó, akkor $a\in E$ esetén (11.1.9) szerint $aE_0a^{-1}\subset E_0$, tehát $a\bar{E}_0\subset \overline{E_0a}\subset\bar{E}_0a$, s minthogy $\bar{E}_0a$ (11.2.1) folytán zárt, azért $\overline{aE_0}=a\bar{E}_0\subset\bar{E}_0a$, $a\bar{E}_0a^{-1}\subset\bar{E}_0$. Ekkor tehát $\bar{E}_0$ is normálosztó. ∎

(11.2.14) *Bármely topologikus csoportban a csoport e-t tartalmazó komponense normálosztó.*

Bizonyítás. Ha az $[E,\mathfrak{T}]$ topologikus csoport e-t tartalmazó komponense E_0, akkor (10.1.15) és (10.1.17) szerint $E_0E_0=\pi(E_0\times E_0)$, $E_0^{-1}=\iota(E_0)$ és $a\in E$ esetén (11.2.1) miatt $aE_0a^{-1}=\tau_a^s\left(\tau_{a^{-1}}^d(E_0)\right)$ összefüggő. Minthogy $e\in E_0E_0$, $e\in E_0^{-1}$, $e\in aE_0a^{-1}$, azért (10.1.21) értelmében $E_0E_0\subset E_0$, $E_0^{-1}\subset E_0$, $aE_0a^{-1}\subset E_0$. ∎

(11.2.15) *Legyen E_0 normálosztó az $[E,\mathfrak{T}]$ topologikus csoportban, $E'=E/E_0$ a megfelelő faktorcsoport, $h:E\to E'$ az az epimorfizmus, amely $x\in E$-nek az $xE_0=E_0x\in E'$ mellékosztályt felelteti meg. Ekkor $[E',h(\mathfrak{T})]$ topologikus csoport, amelynek bal és jobb oldali uniform struktúrája $h(\mathfrak{U}^s)$, ill. $h(\mathfrak{U}^d)$. $[E',h(\mathfrak{T})]$ pontosan akkor szeparált, ha E_0 $\mathfrak{T}$-zárt.*

Bizonyítás. $A\subset E$ esetén $h^{-1}(h(A))$ az A-t metsző mellékosztályok egyesítése, azaz

$$h^{-1}(h(A))=\bigcup_{a\in A}aE_0=\bigcup_{a\in A}E_0a=AE_0=E_0A.$$

Ha A nyílt, akkor (11.2.1) szerint Ax és xA is nyílt minden $x\in E$-re, és így $AB=\bigcup_{x\in B}Ax$ és $BA=\bigcup_{x\in B}xA$ is nyílt lesz bármely $B\subset E$ mellett. Ennélfogva $\mathfrak{T}$-nyílt A esetén $h(A)$ $h(\mathfrak{T})$-nyílt lesz, hiszen $h^{-1}(h(A))=AE_0$ is $\mathfrak{T}$-nyílt.

Legyen most $\mathfrak{v}$ az összes e-t tartalmazó szimmetrikus $\mathfrak{T}$-nyílt halmazok rendszere. Mivel V-vel együtt V^{-1} és $V\cap V^{-1}$ is nyílt, $\mathfrak{v}$ e-nek $\mathfrak{T}$-környezetbázisa. Állítjuk, hogy $h(\mathfrak{v})=\{h(V):V\in\mathfrak{v}\}$ az $e'=E_0$ semleges elemnek, $\{x'h(V):V\in\mathfrak{v}\}$ pedig $x'\in E'$-nek $h(\mathfrak{T})$-környezetbázisa. Valóban, a mondottak szerint $h(V)$ és — egy $x\in x'$ elemet választva — $x'h(V)=h(x)h(V)=h(xV)$ is $h(\mathfrak{T})$-nyílt (felhasználtuk (11.1.8)-at); ha pedig $x'\in V'$, V' $h(\mathfrak{T})$-nyílt, akkor $h^{-1}(V')$ $\mathfrak{T}$-nyílt, tehát $x\in x'$ esetén $x\in h^{-1}(V')$ miatt van olyan $V\in\mathfrak{v}$, hogy $xV\subset h^{-1}(V')$, s akkor $h(xV)=h(x)h(V)=x'h(V)\subset V'$.

Eszerint annak igazolására, hogy $h(\mathfrak{T})$ az E' csoportnak megengedett topológiája, azt kell csak (11.2.4)-re tekintettel belátnunk, hogy $h(\mathfrak{v})$ eleget tesz a (11.2.3) alatti (a)–(e) feltételeknek. Csakhogy $V\in\mathfrak{v}$ esetén $e\in V$, úgyhogy $h(e)=e'\in h(V)$; $\mathfrak{v}$-val együtt (2.6.7) folytán $h(\mathfrak{v})$ is rács; ha V_1, $V\in\mathfrak{v}$, $V_1V_1\subset V$, akkor (11.1.8) értelmében $h(V_1)h(V_1)=h(V_1V_1)\subset h(V)$; $V=V^{-1}$ miatt $h(V)^{-1}=h(V^{-1})=h(V)$; végül, ha $V\in\mathfrak{v}$, $a'\in E'$, $a\in a'$, $V_1\in\mathfrak{v}$, és $aV_1a^{-1}\subset V$, akkor $a'h(V_1)a'^{-1}=h(a)h(V_1)h(a^{-1})=h(aV_1a^{-1})\subset h(V)$. Ennélfogva $[E',h(\mathfrak{T})]$ valóban topologikus csoport.

Legyen most $g:E\times E\to E'\times E'$ a $g(x,y)=(h(x),h(y))$ képlettel értelmezett leképezés. Az $[E',h(\mathfrak{T})]$ csoport bal oldali uniform struktúráját az $U^s_{h(V)}=\{(x',y'):x'^{-1}y'\in h(V)\}$ környékek generálják, hiszen V-vel együtt $h(V)$ is szimmetrikus. Mármost $g^{-1}(U^s_{h(V)})$ azon (x, y) párokból áll, amelyekre $h(x)^{-1}h(y) = h(x^{-1}y) \in h(V)$, azaz $x^{-1}y \in h^{-1}(h(V)) = VE_0$, úgyhogy $g^{-1}(U^s_{h(V)}) = U^s_{VE_0} \in \mathfrak{U}^s$, mert $VE_0 \in \mathfrak{v}$, hiszen VE_0 $\mathfrak{T}$-nyílt, és $(VE_0)^{-1} = E_0^{-1}V^{-1} = E_0V = VE_0$. Másrészt ha U' E'-beli környék, és $g^{-1}(U') \in \mathfrak{U}^s$, akkor van olyan $V \in \mathfrak{v}$, hogy $g^{-1}(U') \supset U^s_V$, azaz hogy $x^{-1}y \in V$ esetén $(h(x), h(x)) \in U'$. Ezért $U' \supset U^s_{h(V)}$, ugyanis $x'^{-1}y' \in h(V)$ esetén $x \in x'$ és $y \in y'$ elemeket választva $x^{-1}y \in VE_0$ az előbbiek szerint, tehát $x^{-1}y = va$, ahol $v \in V$, $a \in E_0$, és $x^{-1}ya^{-1} = v \in V$, $(h(x), h(ya^{-1})) \in U'$, márpedig $h(x) = x'$, $h(ya^{-1}) = h(y)h(a^{-1}) = y'e' = y'$, úgyhogy $(x', y') \in U'$. Eszerint az $\{U^s_{h(V)} : V \in \mathfrak{v}\}$ uniform bázissal ekvivalens uniform bázist alkotnak azok az U' környékek, amelyekre $g^{-1}(U') \in \mathfrak{U}^s$; ebből rögtön következik (7.4.26) alapján, hogy $[E', h(\mathfrak{T})]$ bal oldali uniform struktúrája éppen $h(\mathfrak{U}^s)$. Hasonlóan igazolható a $h(\mathfrak{U}^d)$-re vonatkozó állítás.

$[E', h(\mathfrak{T})]$ pontosan akkor szeparált, ha $h(\mathfrak{T})$ T_1-topológia, azaz ha E' minden egyelemű halmaza $h(\mathfrak{T})$-zárt, amihez (11.2.1) miatt az kell, hogy $\{e'\}$ $h(\mathfrak{T})$-zárt, azaz hogy $h^{-1}(e') = E_0$ $\mathfrak{T}$-zárt legyen. ▮

(11.2.16) *Bármely $[E, \mathfrak{T}]$ topologikus csoportban $\bar{e}$ normálosztó, és $[E/\bar{e}, h(\mathfrak{T})]$ szeparált, ahol $h : E \to E/\bar{e}$ a kanonikus epimorfizmus.*

Bizonyítás. (11.2.13) és (11.2.15). ▮

11.2.e. Homomorfizmusok. Nevezetes, hogy egy homomorfizmus folytonosságából egyenletes folytonosságára lehet következtetni. Pontosabban:

(11.2.17) *Legyen $[E, \mathfrak{T}]$ és $[E', \mathfrak{T}']$ két topologikus csoport, e és e' a semleges elemek, $\mathfrak{U}^s$, $\mathfrak{U}^d$, $\mathfrak{U}'^s$, $\mathfrak{U}'^d$ a megfelelő bal és jobb oldali uniform struktúrák. Ha egy $h : E \to E'$ homomorfizmus az e pontban $(\mathfrak{T}, \mathfrak{T}')$-folytonos, akkor $(\mathfrak{U}^s, \mathfrak{U}'^s)$- és $(\mathfrak{U}^d, \mathfrak{U}'^d)$-egyenletesen folytonos, tehát $(\mathfrak{T}, \mathfrak{T}')$-folytonos is.*

Bizonyítás. Elég az $\mathfrak{U}^s$-re és $\mathfrak{U}'^s$-re vonatkozó állítást igazolni. Ha V' e'-nek szimmetrikus $\mathfrak{T}'$-környezete, akkor van e-nek olyan szimmetrikus V $\mathfrak{T}$-környezete, hogy $h(V) \subset V'$. Ekkor $(x, y) \in U^s_V$, azaz $x^{-1}y \in V$ esetén $h(x^{-1}y) = h(x)^{-1}h(y) \in V'$, úgyhogy $(h(x), h(y)) \in U^s_{V'}$. ▮

Az $[E, \mathfrak{T}]$ és $[E', \mathfrak{T}']$ **topologikus csoport**ot egymással **izomorf**nak mondjuk, ha van $h : E \to E'$ izomorfizmus, amely egyúttal $(\mathfrak{T}, \mathfrak{T}')$-homeomorfizmus is. Ilyenkor (11.2.17) szerint h $(\mathfrak{U}^s, \mathfrak{U}'^s)$- és $(\mathfrak{U}^d, \mathfrak{U}'^d)$-unimorfizmus is.

11.2.f. Gyakorlatok. 1. Legyen $E = \mathbf{R}$, $\pi(x, y) = x + y$. Mutassuk meg, hogy π $(\mathcal{E}^+ \times \mathcal{E}^+, \mathcal{E}^+)$-folytonos, de $[\mathbf{R}, \mathcal{E}^+]$ mégsem topologikus csoport.

2. Legyen $E = \mathbf{R}$, $\mathfrak{Z}$ álljon $\mathbf{R}$ megszámlálható halmazaiból, legyen $\mathfrak{T} = \mathcal{E}_{\mathfrak{Z}}$ a (2.4.1) alatti jelöléssel, továbbá $\pi(x, y) = x + y$. Mutassuk meg, hogy

(a) $a \in \mathbf{R}$ esetén τ^s_a és τ^d_a $(\mathfrak{T}, \mathfrak{T})$-homeomorfizmus;

(b) ι $(\mathfrak{T}, \mathfrak{T})$-homeomorfizmus;

(c) $[\mathbf{R}, \mathfrak{T}]$ mégsem topologikus csoport.

[$V = (-1, 1) - \left\{\frac{1}{n} : n \in \mathbf{N}\right\}$ esetén nincs 0-nak olyan W $\mathfrak{T}$-környezete, hogy $\pi(W \times W) \subset V$.]

3. Az E vektorteret az E fölötti $\mathfrak{T}$ topologiával topologikus vektortérnek mondjuk, ha π $(\mathfrak{T} \times \mathfrak{T}, \mathfrak{T})$-folytonos, μ pedig $(\mathcal{E} \times \mathfrak{T}, \mathfrak{T})$-folytonos. Mutassuk meg, hogy minden $[E, \mathfrak{T}]$ topologikus vektortér a π művelettel topologikus csoport.

4. Legyen E vektortér, $o \in E$ ennek nullaeleme. A $v : E \to \mathbf{R}$ függvényt félnormának mondjuk, ha $x, y \in E$, $\alpha \in \mathbf{R}$ esetén

(a) $v(o) = 0$, $v(x) \geqq 0$;

(b) $v(\alpha x) = |\alpha| v(x)$;

(c) $v(x + y) \leqq v(x) + v(y)$.

A v félnormát normának mondjuk, ha $v(x) = 0$ esetén $x = o$.

Mutassuk meg, hogy

(d) ha v félnorma, akkor $\sigma(x, y) = v(x - y)$ eltérés E-n;

(e) ha $\Theta = \{v_i : i \in I\} \neq \emptyset$ félnormákból álló család, és $\sigma_i(x, y) = v_i(x - y)$, $\Sigma = \{\sigma_i : i \in I\}$, $\mathfrak{T}_\Theta = \mathfrak{T}_\Sigma$, akkor $[E, \mathfrak{T}_\Theta]$ topologikus vektortér.

Ha $\Theta = \{v\}$ egyelemű, a $\mathfrak{T}_\Theta = \mathfrak{T}_v$ jelölést használjuk.

$$[v_i((x + y) - (x_0 + y_0)) \leqq v_i(x - x_0) + v_i(y - y_0),$$

$$v_i(\alpha x - \alpha_0 x_0) \leqq |\alpha_0| v_i(x - x_0) + |\alpha - \alpha_0| v_i(x_0) + |\alpha - \alpha_0| v_i(x - x_0).]$$

5. Mutassuk meg, hogy a **11.1.** alatti 2. feladat (a) példájában $v(x) = \sqrt{\sum_1^m x_i^2}$ norma $\mathbf{R}^m$-en.

6. Legyen E a $H \neq \emptyset$ halmazon értelmezett korlátos függvények halmaza, és $x \in E$ esetén

$$v(x) = \sup \{x(t) : t \in H\}.$$

Mutassuk meg, hogy v norma E-n.

7. Legyen E az $\mathbf{I}$-n Riemann-integrálható függvények, $E_0 \subset E$ pedig az $\mathfrak{E} \mid \mathbf{I}$-folytonos függvények halmaza, és $x \in E$ esetén

$$v(x) = \int_0^1 |x(t)|\, dt.$$

Mutassuk meg, hogy v félnorma E-n, és $v_0 = v \mid E_0$ norma E_0-on.

8. Legyen $[H, \mathfrak{T}]$ topologikus tér, E a $\mathfrak{T}$-folytonos függvények halmaza, $\{K_i : i \in I\}$ legyen a $\mathfrak{T}$-kompakt halmazok rendszere. Legyen $i \in I$, $x \in E$ esetén

$$v_i(x) = \sup \{ |x(t)| : t \in K_i\}.$$

Mutassuk meg, hogy

(a) v_i félnorma;

(b) a $\Theta = \{v_i : i \in I\}$ jelöléssel $[E, \mathfrak{T}_\Theta]$ topologikus vektortér;

(c) ha $\mathfrak{T} = \mathfrak{D}_H$, akkor $\mathfrak{T}_\Theta$ a pontonkénti konvergencia topológiája.

9. Legyen $i \in I \neq \emptyset$ esetén $[E_i, \mathfrak{T}_i]$ topologikus csoport, E pedig a **11.1.** alatti 15. feladatban értelmezett csoport. Mutassuk meg, hogy $[E, \bigtimes_{i \in I} \mathfrak{T}_i^*]$ topologikus csoport.

10. Legyen E kommutatív csoport, és $\Sigma \neq \emptyset$ invariáns eltérések családja E-n. Mutassuk meg, hogy $[E, \mathfrak{T}_\Sigma]$ topologikus csoport.

[A $V_{\sigma_1,\ldots,\sigma_n;\varepsilon} = \{x : \sigma_i(e, x) < \varepsilon\ (i = 1, \ldots, n)\}$ halmazok ($n \in \mathbf{N}$, $\sigma_i \in \Sigma$, $\varepsilon > 0$) eleget tesznek (11.2.3) (a)–(e) kikötéseinek, hiszen $\sigma_i(e, xy) \leqq \sigma_i(e, x) + \sigma_i(x, xy) = \sigma_i(e, x) + \sigma_i(e, y)$, $\sigma_i(e, x^{-1}) = \sigma_i(x, e)$.]

11. Legyen H csoport, S az 1 abszolút értékű komplex számok halmaza a $\pi(x, y) = xy$ művelettel, E pedig a $\chi : H \to S$ homomorfizmusok halmaza. Mutassuk meg, hogy

(a) ha $\chi = \chi_1\chi_2$ a $\chi(t) = \chi_1(t)\chi_2(t)$ ($t \in H$) képlettel van értelmezve, akkor E kommutatív csoport;

(b) $\rho(\chi_1, \chi_2) = \sup\{\,|\chi_1(t) - \chi_2(t)| : t \in H\}$ invariáns távolság E-n;

(c) $t \in H$ esetén $\sigma_t(\chi_1, \chi_2) = |\chi_1(t) - \chi_2(t)|$ invariáns eltérés E-n;

(d) $[E, \mathcal{T}_\rho]$ és $[E, \mathcal{T}_\Sigma]$, ahol $\Sigma = \{\sigma_t : t \in H\}$, topologikus csoport.

12. Mutassuk meg, hogy a 4. feladat jelöléseivel σ_i invariáns eltérés az E csoportban.

13. Mutassuk meg, hogy ha $\Sigma \neq \emptyset$ invariáns eltérés-család az E kommutatív csoportban, akkor $\mathcal{U}_\Sigma$ azonos az $[E, \mathcal{T}_\Sigma]$ topologikus csoport invariáns uniform struktúrájával.

14. Legyen $E = \mathbf{R} - \{0\}$, $\pi(x, y) = xy$, $\mathcal{T} = \mathcal{E} \mid E$. Adjunk meg az $[E, \mathcal{T}]$ metrizálható kommutatív csoport részére $\mathcal{T}$-t indukáló invariáns távolságot.

$$[\rho(x, y) = \big|\log|x| - \log|y|\big| + |\operatorname{sgn} x - \operatorname{sgn} y|.]$$

15. Legyen T az $E \neq \emptyset$ halmaz önmagára való bijekcióiból álló **11.1.b.** (l) alatt értelmezett csoportnak alcsoportja. Az E-beli U környéket T-invariánsnak mondjuk, ha $(x, y) \in U$, $t \in T$ esetén $\big(t(x), t(y)\big) \in U$. Az E fölötti $\mathcal{U}$ uniform struktúra T-invariáns, ha van csupa T-invariáns környékből álló bázisa. Végül az E fölötti σ eltérés T-invariáns, ha $x, y \in E$, $t \in T$ esetén $\sigma\big(t(x), t(y)\big) = \sigma(x, y)$. Mutassuk meg, hogy

(a) ha σ T-invariáns eltérés, Σ pedig ilyen eltérésekből álló eltérés-család, akkor $\mathcal{U}_\sigma$ és $\mathcal{U}_\Sigma$ T-invariáns;

(b) ha U T-invariáns környék, továbbá $n = 0, 1, \ldots$ esetén U_n olyan T-invariáns környék, hogy $U_0 = U$, $U_{n+1} \circ U_{n+1} \subset U_n$, továbbá Φ azoknak az E-n értelmezett f függvényeknek a halmaza, amelyekre $0 \leqq f \leqq 1$, és $P, Q \subset \mathbf{I}$, $\rho_1(P, Q) > 2^{-n}$ esetén

$$U_{n+2}\big(f^{-1}(P)\big) \subset f^{-1}(\mathbf{I} - Q) \qquad (n \in \mathbf{N}),$$

akkor $f \in \Phi$, $t \in T$ esetén $f \circ t \in \Phi$, és

$$\sigma_U(x, y) = \sup\{\,|f(x) - f(y)| : f \in \Phi\}$$

T-invariáns eltérés E-n;

(c) ha a (b) alatti feltételek mellett U átfutja az $\mathcal{U}$ T-invariáns uniform struktúrának egy T-invariáns környékekből álló $\mathfrak{U}$ bázisát, akkor a $\Sigma = \{\sigma_U : U \in \mathfrak{U}\}$ jelöléssel $\mathcal{U}_\Sigma = \mathcal{U}$;

(d) ha $\mathcal{U}$ (fél)metrizálható, T-invariáns uniform struktúra E-n, akkor van olyan T-invariáns ρ távolság (eltérés) E-n, hogy $\mathcal{U} = \mathcal{U}_\rho$;

(e) ha $[E, \mathcal{T}]$ topologikus csoport, akkor $\mathcal{U}^s$ ($\mathcal{U}^d$) indukálható balinvariáns (jobbinvariáns) eltérésekből álló eltérés-családdal.

[(4.2.31) felhasználásával (11.2.10) mintájára.]

16. Az $[E, \mathcal{T}]$ topologikus csoportban legyen $\mathcal{S}$ $\mathcal{T}$-t indukáló szomszédsági reláció. $\mathcal{S}$-t balinvariánsnak (jobbinvariánsnak) mondjuk, ha $A \mathcal{S} B$, $x \in E$ esetén $xA \mathcal{S} xB$ ($Ax \mathcal{S} Bx$). Mutassuk meg, hogy

(a) ha $E = \mathbf{R}$, $\pi(x, y) = x + y$, $\mathcal{T} = \mathcal{E}$, akkor $\mathcal{S}_{\rho_1}$ is, és $\mathcal{E}$-nek $\mathcal{S}$ Čech—Stone-féle szomszédsági relációja is invariáns;

(b) $\mathcal{S}$ nem indukálható invariáns uniform struktúrával.

17. Legyen a 9. feladat jelöléseivel az $[E_i, \mathcal{T}_i]$ topologikus csoport bal oldali és jobb oldali uniform struktúrája $\mathcal{U}_i^s$, ill. $\mathcal{U}_i^d$. Mutassuk meg, hogy $[E, \times_{i \in I} \mathcal{T}_i]$ megfelelő uniform struktúrái $\times_{i \in I} \mathcal{U}_i^s$, ill. $\times_{i \in I} \mathcal{U}_i^d$.

18. Legyen $[E_1, \mathcal{T}_1]$ és $[E_2, \mathcal{T}_2]$ metrizálható csoport, ρ_1 és ρ_2 balinvariáns távolság E_1-en, ill. E_2-n, $\mathcal{T}_1 = \mathcal{T}_{\rho_1}$, $\mathcal{T}_2 = \mathcal{T}_{\rho_2}$, $E = E_1 \times E_2$, $\mathcal{T} = \mathcal{T}_1 \times \mathcal{T}_2$, $(x_1, x_2)(y_1, y_2) = (x_1y_1, x_2y_2)$. Mutassuk meg, hogy az $[E, \mathcal{T}]$ topologikus csoportban

$$\rho((x_1, x_2), (y_1, y_2)) = \rho_1(x_1, y_1) + \rho_2(x_2, y_2)$$

balinvariáns távolság, és $\mathcal{T}_\rho = \mathcal{T}$.

19. Legyen $E_1 = (0, +\infty)$ a $\pi_1(x, y) = xy$ művelettel, E_2 az 1 abszolút értékű komplex számok csoportja a $\pi_2(x, y) = xy$ művelettel, $\mathcal{T}_1 = \mathcal{E} \mid E_1$, $\mathcal{T}_2 = \mathcal{E}^2 \mid E_2$. Mutassuk meg, hogy a 18. alatti jelölésekkel az $[E, \mathcal{T}]$ topologikus csoport izomorf az $[E_3, \mathcal{T}_3]$ csoporttal, ahol E_3 a 0-tól különböző komplex számok halmaza a $\pi_3(x, y) = xy$ művelettel, és $\mathcal{T}_3 = \mathcal{E}^2 \mid E_3$.

20. Mutassuk meg, hogy a 19. alatti $[E_1, \mathcal{T}_1]$, $[E_2, \mathcal{T}_2]$, $[E_3, \mathcal{T}_3]$ csoportok topológiáját rendre a következő invariáns távolságok indukálják:

$$\rho_1(x, y) = |\log x - \log y|, \quad \rho_2(x, y) = |x - y|,$$

$$\rho_3(x, y) = \Big|\log|x| - \log|y|\Big| + \left|\frac{x}{|x|} - \frac{y}{|y|}\right|.$$

21. Mutassuk meg, hogy ha $[E, \mathcal{T}]$ összefüggő topologikus csoport, és V e-nek $\mathcal{T}$-környezete, akkor minden $x \in E$-hez megadhatók olyan $n \in \mathbf{N}$ és olyan $v_1, \ldots, v_n \in V$ elemek, hogy $x = v_1 \ldots v_n$.

[Ha $V' \subset V$ e-nek szimmetrikus környezete, akkor E a V'-t tartalmazó legszűkebb alcsoport.]

22. Legyen $[E, \mathcal{T}]$ a **11.2.b.** végén értelmezett topologikus csoport, E_0 E-nek $E_0 = \{(1, y) : y \in \mathbf{R}\}$ normálosztója, $h : E \to E/E_0$ a kanonikus szuperjekció. Mutassuk meg, hogy $[E/E_0, h(\mathcal{T})]$ izomorf $[E_1, \mathcal{T}_1]$-gyel, ahol $E_1 = (0, +\infty)$, $\pi_1(x, y) = xy$, $\mathcal{T}_1 = \mathcal{E} \mid E_1$.

11.3. TELJES CSOPORTOK

11.3.a. Megengedett uniform struktúrák. Legyen $[E, \mathfrak{T}]$ topologikus csoport, $\mathfrak{U}$ egy $\mathfrak{T}$-t indukáló uniform struktúra. Tudjuk, hogy az $[E, \mathfrak{U}]$ uniform tér bővíthető teljes uniform térré, ti. $[E', \mathfrak{U}']$ teljes burka olyan teljes uniform tér, amelynek $[E, \mathfrak{U}]$ $\mathfrak{T}_{\mathfrak{U}'}$-sűrű altere. Természetszerűen merül fel az a kérdés, hogy vajon bővíthető-e $[E, \mathfrak{T}]$ olyan topologikus csoporttá is, amely $\mathfrak{U}$-nak alkalmas $\mathfrak{U}'$ bővítésével ellátva teljes. A következő tétel szükséges feltételt ad ilyen bővítés létezésére:

(11.3.1) *Legyen* $[E, \mathfrak{T}]$ *és* $[E', \mathfrak{T}']$ *két topologikus csoport, mégpedig E legyen E'-nek alcsoportja,* $\mathfrak{T} = \mathfrak{T}' \mid E$, *legyen továbbá* $\mathfrak{U}'$ $\mathfrak{T}'$*-t indukáló teljes uniform struktúra, és* $\mathfrak{U} = \mathfrak{U}' \mid E$. *Ekkor*:

(a) *Ha* $\mathfrak{r}_1$ *és* $\mathfrak{r}_2$ $\mathfrak{U}$*-Cauchy-rács, akkor* $\mathfrak{r}_1\mathfrak{r}_2 = \{R_1R_2 : R_1 \in \mathfrak{r}_1,\ R_2 \in \mathfrak{r}_2\}$ *is* $\mathfrak{U}$*-Cauchy-rács;*

(b) *Ha* $\mathfrak{r}$ $\mathfrak{U}$*-Cauchy-rács, akkor*

$$\mathfrak{r}^{-1} = \{R^{-1} : R \in \mathfrak{r}\}$$

is $\mathfrak{U}$*-Cauchy-rács.*

Bizonyítás. (11.1.3)-ból rögtön következik, hogy $\mathfrak{r}_1$-gyel és $\mathfrak{r}_2$-vel együtt $\mathfrak{r}_1\mathfrak{r}_2$, $\mathfrak{r}$-rel együtt $\mathfrak{r}^{-1}$ is E-beli rács. Ha most $\mathfrak{r}_1$ és $\mathfrak{r}_2$ $\mathfrak{U}$-Cauchy-rács, akkor (5.1.6) szerint $\mathfrak{U}'$-Cauchy-rács is mind a kettő, tehát $\mathfrak{r}_1 \to x$, $\mathfrak{r}_2 \to y$ $\mathfrak{T}'$-re nézve alkalmas $x, y \in E'$ mellett. Ha most $xy = z \in E'$, és V z-nek tetszőleges $\mathfrak{T}'$-környezete, akkor olyan V_1 és V_2 $\mathfrak{T}'$-környezetét választva x-nek, ill. y-nak, hogy $V_1V_2 = \pi(V_1 \times V_2) \subset V$ legyen, alkalmas $R_1 \in \mathfrak{r}_1$, $R_2 \in \mathfrak{r}_2$ halmazra $R_1 \subset V_1$, $R_2 \subset V_2$, tehát $R_1R_2 \subset V_1V_2 \subset V$. Eszerint $\mathfrak{r}_1\mathfrak{r}_2 \to z$, úgyhogy $\mathfrak{r}_1\mathfrak{r}_2$ $\mathfrak{U}'$-Cauchy-rács, s egyúttal $\mathfrak{U}$-Cauchy-rács is. Hasonlóan, ha $\mathfrak{r}$ $\mathfrak{U}$-Cauchy-rács, tehát $\mathfrak{U}'$-Cauchy-rács, akkor $\mathfrak{r} \to x \in E'$, tehát $\mathfrak{r}^{-1} = \iota(\mathfrak{r}) \to x^{-1}$, és $\mathfrak{r}^{-1}$ is $\mathfrak{U}$ - és $\mathfrak{U}$-Cauchy-rács. ∎

Állapodjunk meg abban, hogy az $[E, \mathfrak{T}]$ topologikus csoport **megengedett uniform struktúrá**jának mondjuk az $\mathfrak{U}$ uniform struktúrát, ha $\mathfrak{T}_{\mathfrak{U}} = \mathfrak{T}$, s ha teljesül a (11.3.1) alatti (a) és (b) feltétel. Eszerint (11.3.1)-ből következik, hogy a $\mathfrak{T}$-t indukáló $\mathfrak{U}$ uniform struktúrához az $[E', \mathfrak{U}']$ teljes burkot elkészítve, csak megengedett uniform struktúra esetén várható, hogy E'-n olyan csoportműveletet lehessen értelmezni, amellyel $[E', \mathfrak{T}_{\mathfrak{U}'}]$ topologikus csoport, s ennek $[E, \mathfrak{T}]$ alcsoportja lesz; látni fogjuk, hogy ehhez $\mathfrak{U}$ megengedett volta — legalábbis szeparált csoport esetén — elegendő is.

11.3.b. A bal és jobb oldali uniform struktúra megengedett volta. Vizsgáljuk meg mindenekelőtt azt, hogy az $[E, \mathfrak{T}]$ csoport $\mathfrak{U}^s$ bal és $\mathfrak{U}^d$ jobb oldali uniform struktúrája megengedett-e. Az (a) feltétel ezekre mindenképpen teljesül:

(11.3.2) *Ha* $\mathfrak{U}^s$ *ill.* $\mathfrak{U}^d$ *az* $[E, \mathfrak{T}]$ *topologikus csoport bal, ill. jobb oldali uniform struktúrája, és* $\mathfrak{r}_1$ *is,* $\mathfrak{r}_2$ *is* $\mathfrak{U}^s$*- (*$\mathfrak{U}^d$*-) Cauchy-rács, akkor* $\mathfrak{r}_1\mathfrak{r}_2$ *is ilyen.*

Bizonyítás. Elég $\mathfrak{U}^s$ esetét tekinteni. Legyen $\mathfrak{v}$ e-nek szimmetrikus környezetbázisa, $V \in \mathfrak{v}$, és $V_1 \in \mathfrak{v}$ olyan, hogy $V_1V_1 \subset V$, $V_2 \in \mathfrak{v}$ pedig olyan, hogy $V_2V_2 \subset V_1$. Legyen $R_2 \in \mathfrak{r}_2$ $U^s_{V_2}$-rendben kicsiny, $r \in R_2$, továbbá $V_3 \in \mathfrak{v}$ olyan, hogy $r^{-1}V_3r \subset$

$\subset V_2$, végül $R_1 \in \mathfrak{r}_1$ $U^s_{V_3}$-rendben kicsiny. Ekkor $R_1R_2 \in \mathfrak{r}_1\mathfrak{r}_2$ U^s_V-rendben kicsiny lesz. Valóban, $x_1, y_1 \in R_1$, $x_2, y_2 \in R_2$ esetén

$$(x_1x_2)^{-1}(y_1y_2) = x_2^{-1}x_1^{-1}y_1y_2 = (x_2^{-1}r)(r^{-1}x_1^{-1}y_1r)(r^{-1}y_2) \in$$

$$\in V_2r^{-1}V_3rV_2 \subset V_2V_2V_2 \subset V_1V_1e \subset V_1V_2V_2 \subset V_1V_1 \subset V. \blacksquare$$

Ilyenformán $\mathcal{U}^s$, ill. $\mathcal{U}^d$ megengedett volta a (b) feltétel teljesülésén múlik. Ezzel kapcsolatban jegyezzük meg:

(11.3.3) Az *ι leképezés bármely topologikus csoportban* $(\mathcal{U}^s, \mathcal{U}^d)$*- és* $(\mathcal{U}^d, \mathcal{U}^s)$*-egyenletesen folytonos, és* $\mathcal{U}^d = \iota^{-1}(\mathcal{U}^s)$, $\mathcal{U}^s = \iota^{-1}(\mathcal{U}^d)$.

Bizonyítás. Ha V e-nek szimmetrikus környezete, és $(x, y) \in U^s_V$, azaz $x^{-1}y \in V$, akkor $(x^{-1}, y^{-1}) \in U^d_V$, hiszen $x^{-1}(y^{-1})^{-1} = x^{-1}y \in V$. Ezért ι $(\mathcal{U}^s, \mathcal{U}^d)$-egyenletesen folytonos, s a második állítás ugyanígy igazolható. A többi (3.2.65) következménye. ∎

Tegyük mindjárt ehhez hozzá:

(11.3.4) *Ha* ρ *balinvariáns (jobbinvariáns) eltérés az E csoporton, akkor a*

$$\rho'(x, y) = \rho(x^{-1}, y^{-1})$$

képlettel értelmezett ρ' *jobbinvariáns (balinvariáns) eltérés, és* $\mathcal{T}_{\rho'} = \mathcal{T}_\rho$, *ha* $\mathcal{T}_\rho$ *megengedett topológia.*

Bizonyítás. $a \in E$ esetén

$$\rho'(xa, ya) = \rho(a^{-1}x^{-1}, a^{-1}y^{-1}) = \rho(x^{-1}, y^{-1}) = \rho'(x, y).$$

Ha $\mathcal{T}_\rho$ megengedett topológia, akkor ι $(\mathcal{T}_\rho, \mathcal{T}_\rho)$-folytonos; minthogy ι nyilván $(\mathcal{T}_\rho, \mathcal{T}_{\rho'})$- és $(\mathcal{T}_{\rho'}, \mathcal{T}_\rho)$-folytonos (sőt $(\mathcal{U}_\rho, \mathcal{U}_{\rho'})$- és $(\mathcal{U}_{\rho'}, \mathcal{U}_\rho)$-egyenletesen folytonos), azért $\iota \circ \iota$, azaz E identitása, szintén $(\mathcal{T}_\rho, \mathcal{T}_{\rho'})$- és $(\mathcal{T}_{\rho'}, \mathcal{T}_\rho)$-folytonos (2.6.15) értelmében. Így (2.6.17) szerint $\mathcal{T}_{\rho'} = \mathcal{T}_\rho$. ∎

(11.3.3)-ból (5.1.2) szerint következik:

(11.3.5) *Ha egy topologikus csoportban* $\mathfrak{r}$ $\mathcal{U}^s$*-* $(\mathcal{U}^d$*-) Cauchy-rács, akkor* $\mathfrak{r}^{-1}$ $\mathcal{U}^d$*-* $(\mathcal{U}^s$*-) Cauchy-rács.* ∎

(11.3.6) *A következő állítások bármely topologikus csoportban egyenértékűek:*

(a) $\mathfrak{r}$-rel *együtt* $\mathfrak{r}^{-1}$ *is* $\mathcal{U}^s$*-Cauchy-rács;*

(b) $\mathfrak{r}$*-rel együtt* $\mathfrak{r}^{-1}$ *is* $\mathcal{U}^d$*-Cauchy-rács;*

(c) *Minden* $\mathcal{U}^s$*-Cauchy-rács* $\mathcal{U}^d$*-Cauchy-rács;*

(d) *Minden* $\mathcal{U}^d$*-Cauchy-rács* $\mathcal{U}^s$*-Cauchy-rács;*

(e) $\mathcal{U}^s$ *megengedett;*

(f) $\mathcal{U}^d$ *megengedett.*

Bizonyítás. (a) $\Leftrightarrow$ (e) és (b) $\Leftrightarrow$ (f) (11.3.2)-ből adódik. Másrészt (a) $\Leftrightarrow$ (b) (11.3.5)-ből $(\mathfrak{r}^{-1})^{-1} = \mathfrak{r}$ figyelembevételével következik.

Végül (a) $\Rightarrow$ (c), mert ha $\mathfrak{r}$ $\mathcal{U}^s$-Cauchy-rács, akkor $\mathfrak{r}^{-1}$ is az, tehát (11.3.5) értelmében $\mathfrak{r}$ $\mathcal{U}^d$-Cauchy-rács; (c) $\Rightarrow$ (a) pedig azért, mert ha $\mathfrak{r}$ $\mathcal{U}^s$-Cauchy-rács, akkor $\mathcal{U}^d$-Cauchy-rács is, s akkor $\mathfrak{r}^{-1}$ $\mathcal{U}^s$-Cauchy-rács. Hasonlóan adódik (b) $\Leftrightarrow$ (d). ∎

Az előbbi feltételek teljesülnek például, ha $\mathcal{U}^s = \mathcal{U}^d$. Pontosabban:

(11.3.7) *Bármely* $[E, \mathfrak{T}]$ *topologikus csoportban egyenértékűek a következő állítások.*

(a) $\mathfrak{U}^s = \mathfrak{U}^d$;

(b) $\mathfrak{U}^s < \mathfrak{U}^d$;

(c) $\mathfrak{U}^d < \mathfrak{U}^s$;

(d) ι $(\mathfrak{U}^s, \mathfrak{U}^s)$-*egyenletesen folytonos;*

(e) ι $(\mathfrak{U}^d, \mathfrak{U}^d)$-*egyenletesen folytonos;*

(f) *e-nek minden V környezetéhez található e-nek olyan V_1 környezete, hogy $x \in E$ esetén $xV_1x^{-1} \subset V$;*

(g) *e-nek van olyan $\mathfrak{v}$ környezetbázisa, hogy $V \in \mathfrak{v}$ esetén $V = V^{-1}$, és minden $x \in E$-re $xVx^{-1} = V$;*

(h) $\mathfrak{T}$ *indukálható csupa bal- és jobbinvariáns környékből álló uniform bázissal rendelkező uniform struktúrával.*

Ha e feltételek teljesülnek, akkor $\mathfrak{U}^s = \mathfrak{U}^d = \mathfrak{U}$ megengedett, és π $(\mathfrak{U} \times \mathfrak{U}, \mathfrak{U})$-egyenletesen folytonos.

Bizonyítás.

$$(a)\begin{matrix} \nearrow (b) \Rightarrow (d) \Rightarrow \searrow \\ \searrow (c) \Rightarrow (e) \Rightarrow \nearrow \end{matrix}(f) \Rightarrow (g) \Rightarrow (h) \Rightarrow (a).$$

(a) $\Rightarrow$ (b) és (a) $\Rightarrow$ (c) triviális.

(b) $\Rightarrow$ (d): (11.3.3) szerint ι $(\mathfrak{U}^s, \mathfrak{U}^d)$-egyenletesen folytonos, tehát (3.2.53) értelmében $(\mathfrak{U}^s, \mathfrak{U}^s)$-egyenletesen is folytonos.

(c) $\Rightarrow$ (e): Ugyanígy.

(d) $\Rightarrow$ (f): Legyen e-nek V környezetéhez V_0 e-nek olyan szimmetrikus környezete, hogy $V_0 \subset V$, s aztán V_1 e-nek olyan szimmetrikus környezete, hogy $(x, y) \in U^s_{V_1}$ esetén $(x^{-1}, y^{-1}) \in U^s_{V_0}$. Ekkor $x \in E$, $v \in V_1$ esetén $x^{-1}xv^{-1} \in V_1$ folytán $(x, xv^{-1}) \in U^s_{V_1}$, tehát $(x^{-1}, vx^{-1}) \in U^s_{V_0}$, azaz $xvx^{-1} \in V_0 \subset V$.

(e) $\Rightarrow$ (f): Ugyanígy.

(f) $\Rightarrow$ (g): Legyen e nek adott V_0 környezetéhez e-nek V_1 környezete úgy megválasztva, hogy $x \in E$ esetén $xV_1x^{-1} \subset V_0$ legyen, $V_2 = V_2^{-1}$ pedig legyen e-nek olyan környezete, hogy $V_2 \subset V_1$. Ha most

$$V = \bigcup_{y \in E} yV_2y^{-1},$$

akkor $V_2 = eV_2e^{-1} \subset V$ miatt V is e-nek környezete, továbbá $V \subset V_0$, és $x \in E$ esetén

$$xVx^{-1} = \bigcup_{y \in E} xyV_2y^{-1}x^{-1} = \bigcup_{y \in E} (xy)V_2(xy)^{-1} \subset V,$$

tehát $x \in E$ esetén

$$V = xx^{-1}Vxx^{-1} \subset xVx^{-1} \subset V,$$

s végül

$$V^{-1} = \bigcup_{y \in E} (yV_2y^{-1})^{-1} = \bigcup_{y \in E} yV_2^{-1}y^{-1} = V.$$

(g) $\Rightarrow$ (h): Ha $V \in \mathfrak{v}$, akkor $(x, y) \in U^s_V$ esetén $x^{-1}y \in V$, és így $xx^{-1}yx^{-1} = yx^{-1} \in V$, tehát $(yx^{-1})^{-1} = xy^{-1} \in V$, és $(x, y) \in U^d_V$. Így $U^s_V \subset U^d_V$, és hasonlóan adódik $U_V^d \subset U_V^s$. Eszerint $U_V^s = U_V^d$, és $\mathfrak{U} = \{U_V^s : V \in \mathfrak{v}\}$ bal- és jobbinvariáns környékekből álló uniform bázis, amely $\mathcal{U}^s$-et generálja.

(h) $\Rightarrow$ (a): Ha $\mathcal{U}$ csupa bal- és jobbinvariáns környékből álló bázissal generált uniform struktúra, és $\mathcal{T}_{\mathcal{U}} = \mathcal{T}$, akkor $\mathcal{U}$ bal- és jobbinvariáns, tehát (11.2.7) értelmében $\mathcal{U} = \mathcal{U}^s = \mathcal{U}^d$.

Ha most $\mathcal{U}^s = \mathcal{U}^d = \mathcal{U}$, és V e-nek szimmetrikus környezete, akkor legyen V_1 e-nek olyan szimmetrikus környezete, hogy $V_1V_1 \subset V$, s azután V_2 e-nek olyan szimmetrikus környezete, hogy $U_{V_2}^d \subset U_{V_1}^s$, azaz hogy $xy^{-1} \in V_2$ esetén $x^{-1}y \in V_1$. Ha most $(x_1, x_2) \in U_{V_2}^s$, $(y_1, y_2) \in U_{V_1}^s$, akkor $(x_1y_1, x_2y_2) \in U_V^s$, ugyanis $x_1^{-1}x_2 \in V_2$, $y_1^{-1}y_2 \in V_1$ folytán $y_2^{-1}y_1 \in V_1^{-1} = V_1$, és az $(x_1y_1)^{-1}(x_2y_2) = y_1^{-1}x_1^{-1}x_2y_2 = z$ jelöléssel $x_1^{-1}x_2 = y_1zy_2^{-1} \in V_2$, tehát $z^{-1}y_1^{-1}y_2 \in V_1$, $z^{-1} \in V_1y_2^{-1}y_1 \subset V_1V_1 \subset V$, s végül $z \in V^{-1} = V$. Így π csakugyan $(\mathcal{U}\times\mathcal{U}, \mathcal{U})$-egyenletesen folytonos. A (d) vagy (e) feltételből (5.1.2) és (11.3.6) alapján adódik, hogy $\mathcal{U}$ megengedett. ∎

Lehet azonban $\mathcal{U}^s$ és $\mathcal{U}^d$ megengedett akkor is, ha $\mathcal{U}^s \neq \mathcal{U}^d$. Ez a helyzet például, akkor, ha $\mathcal{U}^s$ vagy $\mathcal{U}^d$ teljes:

(11.3.8) *Ha egy topologikus csoport $\mathcal{U}^s$ bal oldali vagy $\mathcal{U}^d$ jobb oldali uniform struktúrája teljes, akkor a másik is teljes, és mindkettő megengedett.*

Bizonyítás. Ha az $[E, \mathcal{T}]$ topologikus csoportban $\mathcal{U}^s$ teljes, és $\mathfrak{r}$ $\mathcal{U}^d$-Cauchy rács, akkor (11.3.5) szerint $\mathfrak{r}^{-1}$ $\mathcal{U}^s$-Cauchy-rács, tehát $\mathfrak{r}^{-1} \to x \in E$ $\mathcal{T}$-re nézve, és ι $(\mathcal{T}, \mathcal{T})$-folytonossága miatt $\mathfrak{r} = \iota(\mathfrak{r}^{-1}) \to x^{-1}$. Hasonlóan következik $\mathcal{U}^d$ teljességéből $\mathcal{U}^s$ teljessége. Ilyenkor (11.3.6) értelmében $\mathcal{U}^s$ is, $\mathcal{U}^d$ is megengedett. ∎

A (11.3.8) feltevéseinek eleget tevő topologikus csoportot **balról teljes**nek mondjuk (ugyanilyen jogos volna a **jobbról teljes** elnevezés is). Ilyenre példa a **11.2.b.** végén bemutatott csoport (amelyben, tudjuk, $\mathcal{U}^s \neq \mathcal{U}^d$). Valóban, $\mathcal{U}^s$ teljessége abból adódik, hogy ha $\mathfrak{r}$ $\mathcal{U}^s$-Cauchy-rács, és $R \in \mathfrak{r}$ $U_{V_\varepsilon}^s$-rendben kicsiny, akkor $(a, b) \in R$, $(c, d) \in R$ esetén $1 - \varepsilon < \dfrac{a}{c} < 1 + \varepsilon$ miatt $\log(1 - \varepsilon) < \log a - - \log c < \log(1 + \varepsilon)$, úgyhogy p_1-gyel jelölve azt a leképezést, amely (a, b)-nek a-t felelteti meg, $\log(p_1(\mathfrak{r}))$ Cauchy-rács a számegyenesen, s tart egy x_0 határértékhez, amikor is $p_1(\mathfrak{r}) \to e^{x_0}$; másrészt ha $R \in \mathfrak{r}$ azon kívül, hogy $U_{V_\varepsilon}^s$-rendben kicsiny, még olyan is, hogy $(a, b) \in R$ esetén $a < 2e^{x_0}$, akkor $(a, b) \in R$, $(c, d) \in R$ esetén $|b - d| < \varepsilon a < 2\varepsilon e^{x_0}$, s így a $p_2(a, b) = b$ jelöléssel $p_2(\mathfrak{r})$ is Cauchy-rács, $p_2(\mathfrak{r}) \to y_0$. Így aztán $\mathfrak{r} \to (e^{x_0}, y_0) \in E$.

Előfordulhat azonban, hogy egy topologikus csoportban $\mathcal{U}^s$ és $\mathcal{U}^d$ nem-megengedett; erre nevezetes példa a következő. Álljon E az olyan $f : \mathbf{I} \to \mathbf{I}$ leképezésekből, amelyek $(\mathcal{E} \mid \mathbf{I}, \mathcal{E} \mid \mathbf{I})$-folytonosak, szigorúan monoton növekvők, $f(0) = 0$, $f(1) = 1$. Legyen $\pi(f, g) = f \circ g$. Világos, hogy $f, g \in E$ esetén $f \circ g \in E$, az $e(x) = x$ képlettel értelmezett $e : \mathbf{I} \to \mathbf{I}$ leképezés E semleges eleme, és $f \in E$ esetén $f^{-1} \in E$ éppen f inverze. Eszerint E csoport (alcsoportja az $[\mathbf{I}, \mathcal{E} \mid \mathbf{I}]$ tér összes önmagára való homeomorfizmusaiból álló csoportnak). Vezessük azután be $f, g \in E$ esetén a

$$\rho(f, g) = \sup\{|f(x) - g(x)| : x \in \mathbf{I}\}$$

távolságot.

$[E, \mathfrak{T}_\rho]$ topologikus csoport. Valóban, e-nek környezetbázisát alkotják a

$$V_\varepsilon = \{f : \rho(f, e) < \varepsilon\} \qquad (0 < \varepsilon < 1)$$

halmazok, ahol tehát $f \in V_\varepsilon$ azt jelenti, hogy $x \in \mathbf{I}$ esetén $|f(x) - x| < \varepsilon$. Ezeknek $\mathfrak{v} = \{V_\varepsilon : 0 < \varepsilon < 1\}$ rendszerére a (11.2.3) alatti (a) és (b) feltétel triviálisan teljesül, (c) azért, mert $f, g \in V_{\frac{\varepsilon}{2}}$ esetén

$$|f(g(x)) - x| \leqq |f(g(x)) - g(x)| + |g(x) - x| < \varepsilon,$$

(d) azért, mert $y = f(x)$ jelöléssel $|y - f^{-1}(y)| = |f(x) - x|$ miatt $V_\varepsilon^{-1} = V_\varepsilon$, végül (e) azért, mert ha $g \in E$, és ε-hoz a $0 < \delta < 1$ számot g egyenletes folytonossága alapján választjuk, akkor $f \in V_\delta$ esetén

$$|g(f(g^{-1}(x))) - x| = |g(f(g^{-1}(x))) - g(g^{-1}(x))| < \varepsilon,$$

hiszen $|f(g^{-1}(x)) - g^{-1}(x)| < \delta$ $(x \in \mathbf{I})$. Minthogy továbbá $\rho(f, g) = \rho(f \circ h, g \circ h)$ bármely $f, g, h \in E$ esetén, azért ρ jobbinvariáns távolság E-n, s így $h \in E$-nek $\mathfrak{T}_\rho$-környezetbázisát alkotják a $V_\varepsilon \circ h$ halmazok, úgyhogy (11.2.4) értelmében $\mathfrak{T}_\rho$ csakugyan megengedett topológia E-n. Egyben az is látszik, hogy $\mathfrak{U}_\rho$ éppen a csoport jobb oldali uniform struktúrája.

$\mathfrak{U}_\rho$ azonban nem megengedett, mert van olyan $\mathfrak{r}$ $\mathfrak{U}_\rho$-Cauchy-rács, amelyre $\mathfrak{r}^{-1}$ nem $\mathfrak{U}_\rho$-Cauchy-rács, ami (11.3.6) szerint az állítást adja. Legyen ugyanis

$$f_n(x) = \begin{cases} \left(2 - \dfrac{1}{n}\right)x & \left(0 \leqq x \leqq \dfrac{1}{2}\right), \\[2ex] \dfrac{x}{n} + 1 - \dfrac{1}{n} & \left(\dfrac{1}{2} \leqq x \leqq 1\right). \end{cases}$$

Ekkor $f_n \in E$,

$$\rho(f_n, f_m) = \left| f_n\left(\frac{1}{2}\right) - f_m\left(\frac{1}{2}\right) \right| = \left| \frac{1}{2m} - \frac{1}{2n} \right|,$$

de

$$\rho(f_n^{-1}, f_m^{-1}) \geqq \left| f_n^{-1}\left(1 - \frac{1}{2n}\right) - f_m^{-1}\left(1 - \frac{1}{2n}\right) \right| = \frac{1}{2} - \frac{m}{2n},$$

ha $m < n$, úgyhogy az (f_n) sorozathoz tartozó sorozatrács Cauchy-rács, az (f_n^{-1}) sorozathoz tartozó azonban nem.

11.3.c. Kétoldali uniform struktúra. Ezek után felmerül az a kérdés, található-e egyáltalán minden topologikus csoporthoz megengedett uniform struktúra. Megmutatjuk, hogy erre a kérdésre igenlő a válasz:

(11.3.9) *Legyen $[E, \mathfrak{T}]$ topologikus csoport, $\mathfrak{U}^s$ és $\mathfrak{U}^d$ a megfelelő bal oldali és jobb oldali uniform struktúra. Ekkor*

$$\mathfrak{U}^b = \sup\{\mathfrak{U}^s, \mathfrak{U}^d\}$$

megengedett uniform struktúra; ezt a csoport **kétoldali uniform struktúrá***jának nevezzük.* $\mathfrak{x}$ *pontosan akkor* $\mathcal{U}^b$*-Cauchy-rács, ha* $\mathcal{U}^s$*- és* $\mathcal{U}^d$*-Cauchy-rács egyidejűleg.*

Bizonyítás. (3.2.29) szerint $\mathcal{T}_{\mathcal{U}^b} = \mathcal{T}$, továbbá (5.1.3) és (5.1.4) értelmében egy $\mathfrak{x}$ rács pontosan akkor $\mathcal{U}^b$-Cauchy-rács, ha egyidejűleg $\mathcal{U}^s$- és $\mathcal{U}^d$-Cauchy-rács. (11.3.2)-ből következik, hogy $\mathcal{U}^b$ eleget tesz a (11.3.1)-beli (a) feltételnek, (11.3.5)-ből pedig, hogy eleget tesz (b)-nek is. ∎

Egy **topologikus csoport**ot **teljes**nek mondunk, ha kétoldali uniform struktúrája teljes.

(11.3.10) *Egy topologikus csoport pontosan akkor balról teljes, ha teljes, és bal oldali uniform struktúrája megengedett.*

Bizonyítás. Ha $\mathcal{U}^s$ teljes, akkor (11.3.1) szerint megengedett is, és egy $\mathfrak{x}$ $\mathcal{U}^b$-Cauchy-rács, (11.3.9) szerint $\mathcal{U}^s$-Cauchy-rács lévén, konvergens. Ha viszont $\mathcal{U}^b$ teljes, és $\mathcal{U}^s$ megengedett, akkor egy $\mathfrak{x}$ $\mathcal{U}^s$-Cauchy-rács (11.3.6) értelmében $\mathcal{U}^d$-Cauchy-rács, és (11.3.9) szerint $\mathcal{U}^b$-Cauchy-rács is, tehát konvergens. ∎

Előfordulhat, hogy egy csoport teljes, de nem balról teljes. Erre példa a **11.3.b.** végén tárgyalt topologikus csoport, amely nem lehet balról teljes, hiszen jobb oldali uniform struktúrája (tehát (11.3.6) szerint a bal oldali vele együtt) nem-megengedett. Viszont ez a csoport teljes. Ennek belátására elég megmutatni, hogy $[E, \mathcal{U}^b]$-ben minden Cauchy-sorozat konvergens, ugyanis $\mathcal{U}^d = \mathcal{U}_\rho$ metrizálható, tehát (11.3.4) szerint $\mathcal{U}^s$ is, s akkor (4.2.34) értelmében $\mathcal{U}^b$ is, úgyhogy (5.1.10) alkalmazható.

Mármost ha (f_n) $\mathcal{U}^b$-, azaz (11.3.9) szerint $\mathcal{U}^d$- és $\mathcal{U}^s$-Cauchy-sorozat, akkor (11.3.5) miatt (f_n^{-1}) is $\mathcal{U}^d$-Cauchy-sorozat, azaz (1.3.8) szerint (f_n) is, (f_n^{-1}) is egyenletesen konvergál egy-egy **I**-ből **I**-be vezető f, ill. g leképezéshez. Világos, hogy $f(0) = 0, f(1) = 1$, f legalább tágabb értelemben monoton növekvő, továbbá f és g (2.6.28) szerint $(\mathcal{E} \mid \mathbf{I}, \mathcal{E} \mid \mathbf{I})$-folytonos. Ha most $\varepsilon > 0$-hoz $\delta > 0$ a g leképezés egyenletes folytonossága alapján van megválasztva, és $n \geqq n_0$ esetén $|f_n(x) - f(x)| < \delta$, $|f_n^{-1}(x) - g(x)| < \varepsilon$ minden $x \in \mathbf{I}$-re, akkor ilyen n-ekre

$$|g(f(x)) - x| \leqq |g(f(x)) - g(f_n(x))| + |g(f_n(x)) - f_n^{-1}(f_n(x))| < 2\varepsilon.$$

Ezért $g(f(x)) = x$, úgyhogy f injektív, azaz szigorúan monoton, és $f \in E$.

(11.3.11) *Ha* $\mathcal{U}^b$ *egy topologikus csoport kétoldali uniform struktúrája, akkor* ι $(\mathcal{U}^b, \mathcal{U}^b)$*-egyenletesen folytonos.*

Bizonyítás. (11.3.3) szerint ι $(\mathcal{U}^b, \mathcal{U}^s)$- és $(\mathcal{U}^b, \mathcal{U}^d)$-egyenletesen folytonos (3.2.53) értelmében, és így $(\mathcal{U}^b, \mathcal{U}^b)$-egyenletesen is (3.2.54) alapján. ∎

Az előbbi példa kapcsán elvégzett okoskodás egy részének kiegészítéseképpen kimondhatjuk:

(11.3.12) *Ha az* $[E, \mathcal{T}]$ *topologikus csoport* $\mathcal{T}$ *topológiája (fél)metrizálható, akkor* $\mathcal{U}^s$, $\mathcal{U}^d$ *és* $\mathcal{U}^b$ *is ilyen.*

Bizonyítás. (11.2.10) szerint $\mathcal{T} = \mathcal{T}_{\rho_1} = \mathcal{T}_{\rho_2}$, ahol ρ_1 bal-, ρ_2 jobbinvariáns eltérés. Ekkor $\mathcal{U}_{\rho_1}$ is bal-, $\mathcal{U}_{\rho_2}$ pedig jobbinvariáns, tehát (11.2.7) szerint $\mathcal{U}_{\rho_1} = \mathcal{U}^s$, $\mathcal{U}_{\rho_2} = \mathcal{U}^d$. (4.2.34) mutatja, hogy $\mathcal{U}^b$ is félmetrizálható. ∎

(11.3.13) *Ha E_0 az $[E, \mathfrak{T}]$ topologikus csoport alcsoportja, s az utóbbinak kétoldali uniform struktúrája $\mathcal{U}^b$, akkor az $[E_0, \mathfrak{T}|E_0]$ topologikus csoport kétoldali uniform struktúrája $\mathcal{U}^b|E_0$.*

Bizonyítás. (11.2.11) és (3.2.37) következménye. ∎

(11.3.14) *Ha $[E, \mathfrak{T}]$ és $[E', \mathfrak{T}']$ topologikus csoport, $\mathcal{U}^b$, ill. $\mathcal{U}'^b$ a megfelelő kétoldali uniform struktúra, és $h : E \to E'$ $(\mathfrak{T}, \mathfrak{T}')$-folytonos homomorfizmus, akkor h $(\mathcal{U}^b, \mathcal{U}'^b)$-egyenletesen folytonos.*

Bizonyítás. (11.2.17) szerint h $(\mathcal{U}^s, \mathcal{U}'^s)$- és $(\mathcal{U}^d, \mathcal{U}'^d)$-egyenletesen folytonos (a szokásos jelölésekkel). Ebből (3.2.53) alapján h-nak $(\mathcal{U}^b, \mathcal{U}'^s)$- és $(\mathcal{U}^b, \mathcal{U}'^d)$-egyenletes folytonossága, tehát (3.2.54) szerint $(\mathcal{U}^b, \mathcal{U}'^b)$-egyenletes folytonossága következik. ∎

Speciálisan az olyan izomorfizmus, amely $(\mathfrak{T}, \mathfrak{T}')$-homeomorfizmus, egyúttal $(\mathcal{U}^b, \mathcal{U}'^b)$-unimorfizmus is.

11.3.d. Topologikus csoport teljes burka. Megmutatjuk, hogy egy megengedett uniform struktúrával ellátott, szeparált topologikus csoport bővíthető teljes topologikus csoporttá.

(11.3.15) *Legyen $[E, \mathfrak{T}]$ szeparált topologikus csoport, $\mathcal{U}$ megengedett uniform struktúra E-n, $[E', \mathcal{U}']$ az $[E, \mathcal{U}]$ uniform tér teljes burka. Ekkor E'-n pontosan egyféleképpen lehet egy $\pi' : E' \times E' \to E'$ műveletet úgy értelmezni, hogy E' π'-vel ellátva csoport, $[E', \mathfrak{T}_{\mathcal{U}'}]$ pedig topologikus csoport legyen, amelynek E alcsoportja.*

Bizonyítás. Legyen $\mathfrak{T}' = \mathfrak{T}_{\mathcal{U}'}$. Ha π' a felsorolt tulajdonságokkal rendelkezik, akkor $(\mathfrak{T}' \times \mathfrak{T}', \mathfrak{T}')$-folytonos, és $\pi'|E \times E = \pi$. Minthogy E $\mathfrak{T}'$-sűrű, tehát $E \times E$ $\mathfrak{T}' \times \mathfrak{T}'$-sűrű (7.1.27) szerint, és $\mathfrak{T}'$ $\mathcal{U}$ szeparáltsága miatt T_2-topológia (6.3.29) értelmében, azért ezek a tulajdonságok π'-t (6.2.3) szerint egyértelműen meghatározzák mint π-nek egyetlen folytonos kiterjesztését $E' \times E'$-re.

Megmutatjuk most, hogy feltevéseink mellett π-nek valóban van $(\mathfrak{T}' \times \mathfrak{T}', \mathfrak{T}')$-folytonos kiterjesztése. Ha ugyanis $(x, y) \in E' \times E'$, és $\mathfrak{w}'(x, y)$ jelöli az (x, y) pont $\mathfrak{T}' \times \mathfrak{T}'$ környezetszűrőjét, $\mathfrak{v}'(x)$ és $\mathfrak{v}'(y)$ pedig x, ill. y $\mathfrak{T}'$-környezetszűrőjét, akkor

$$\mathfrak{w}' = \{V_1' \times V_2' : V_1' \in \mathfrak{v}'(x), V_2' \in \mathfrak{v}'(y)\}$$

(7.1.22) szerint $\mathfrak{w}'(x, y)$-nal ekvivalens rács, ennélfogva $\mathfrak{w}'(x, y)\,(\cap)\,\{E \times E\} \sim \sim \mathfrak{w}'\,(\cap)\,\{E \times E\}$ (2.1.17) szerint, s nyilván

$$\mathfrak{w}'\,(\cap)\,\{E \times E\} = \{(V_1' \cap E) \times (V_2' \cap E) : V_1' \in \mathfrak{v}'(x), V_2' \in \mathfrak{v}'(y)\} =$$
$$= \{V_1 \times V_2 : V_1 \in \mathfrak{v}'(x)\,(\cap)\,\{E\}, V_2 \in \mathfrak{v}'(y)\,(\cap)\,\{E\}\}.$$

Mármost $\mathfrak{v}'(x)$ és $\mathfrak{v}'(y)$ $\mathfrak{T}'$-konvergens, tehát $\mathcal{U}'$-Cauchy-szűrő (5.1.1) szerint, így $\mathfrak{v}_1 = \mathfrak{v}'(x)\,(\cap)\,\{E\}$ és $\mathfrak{v}_2 = \mathfrak{v}'(y)\,(\cap)\,\{E\}$ is $\mathcal{U}'$-Cauchy-rács (5.1.7) s egyúttal $\mathcal{U}$-Cauchy-rács (5.1.6) értelmében. Ezért $\pi(\mathfrak{w}'\,(\cap)\,\{E \times E\}) = \mathfrak{v}_1\mathfrak{v}_2$ is $\mathcal{U}$-Cauchy-rács s egyben $\mathcal{U}'$-Cauchy-rács, úgyhogy $\pi(\mathfrak{w}'\,(\cap)\,\{E \times E\})$ $\mathfrak{T}'$-konvergens, s akkor a vele (2.6.7) szerint ekvivalens $\pi(\mathfrak{w}'(x, y)\,(\cap)\,\{E \times E\})$ is $\mathfrak{T}'$-konvergens. Ez azonban (6.2.2) alapján biztosítja π $(\mathfrak{T}' \times \mathfrak{T}', \mathfrak{T}')$-folytonos π' kiterjesztésének létezését.

Hasonló, de egyszerűbb meggondolás mutatja, hogy az $\iota : E \to E$ leképezésnek van $(\mathfrak{T}', \mathfrak{T}')$-folytonos ι' kiterjesztése, mert az előbbi jelölésekkel $x \in E'$ esetén $\iota(\mathfrak{v}'(x) (\cap) \{E\}) = \iota(\mathfrak{v}_1) = \mathfrak{v}_1^{-1}$ $\mathfrak{U}$-Cauchy-rács, és így $\mathfrak{T}'$-konvergens.

Annak belátására, hogy E' a π' művelettel felruházva csoport, megmutatjuk, hogy $x, y, z \in E'$ esetén

$$\pi'(\pi'(x, y), z) = \pi'(x, \pi'(y, z)),$$

$$\pi'(e, x) = \pi'(x, e) = x,$$

$$\pi'(\iota'(x), x) = \pi'(x, \iota'(x)) = e.$$

Ezek mind (6.2.3)-ból következnek, hiszen mindhárom egyenlőség érvényes, ha $x, y, z \in E$ (amikor is π' helyett π, ι' helyett ι írható), és az első egyenlőség mindkét oldala $(\mathfrak{T}' \times \mathfrak{T}' \times \mathfrak{T}', \mathfrak{T}')$-folytonos leképezését állítja elő $E' \times E' \times E'$-nek E'-be, a második és harmadik mindhárom tagja pedig $(\mathfrak{T}', \mathfrak{T}')$-folytonos leképezését E'-nek önmagába. Példaképpen lássuk be, hogy $f(x, y, z) = \pi'(\pi'(x, y), z)$ esetén $f: E' \times E' \times E' \to E'$ $(\mathfrak{T}' \times \mathfrak{T}' \times \mathfrak{T}', \mathfrak{T}')$-folytonos. Ha az $E' \times E' \times E'$ szorzatnak egyes tényezőire való vetítését p_1, p_2, p_3 jelöli, $q : E' \times E' \times E' \to E' \times E'$ az a leképezés, amelynél $q(x, y, z) = (x, y)$, $r : E' \times E' \times E' \to E' \times E'$ pedig az $r(x, y, z) = (\pi'(x, y), z)$ képlettel van adva, akkor p_1, p_2, p_3 $(\mathfrak{T}' \times \mathfrak{T}' \times \mathfrak{T}', \mathfrak{T}')$-folytonossága miatt (7.1.28) értelmében q $(\mathfrak{T}' \times \mathfrak{T}' \times \mathfrak{T}', \mathfrak{T}' \times \mathfrak{T}')$-folytonos, tehát (2.6.15) miatt $\pi' \circ q$ $(\mathfrak{T}' \times \mathfrak{T}' \times \mathfrak{T}', \mathfrak{T}')$-folytonos, így r $(\mathfrak{T}' \times \mathfrak{T}' \times \mathfrak{T}', \mathfrak{T}' \times \mathfrak{T}')$-folytonos, végül $f = \pi' \circ r$ valóban $(\mathfrak{T}' \times \mathfrak{T}' \times \mathfrak{T}', \mathfrak{T}')$-folytonos. Hasonlóan igazolható a többi állított folytonosság is.

$[E', \mathfrak{T}']$ topologikus csoport, mert π' definíciója szerint $(\mathfrak{T}' \times \mathfrak{T}', \mathfrak{T}')$-folytoncs. ι' pedig — amely E'-ben az inverzet adja meg — $(\mathfrak{T}', \mathfrak{T}')$-folytonos. ▌

(11.3.16) *Ha* (11.3.15) *feltevései mellett E kommutatív csoport, akkor E' is ilyen.*

Bizonyítás. Az előbbi jelölésekkel $x, y \in E'$ esetén $\pi'(x, y) = \pi'(y, x)$, ismét (6.2.3) következtében, hiszen mindkét kifejezés $(\mathfrak{T}' \times \mathfrak{T}', \mathfrak{T}')$-folytonos leképezést állít elő, és $x, y \in E$ esetén fennáll az egyenlőség. ▌

(11.3.17) *Ha* (11.3.15) *feltevései mellett* $[E', \mathfrak{T}_{\mathfrak{U}'}]$ *bal, jobb, ill. kétoldali uniform struktúrája* $\mathfrak{U}'^s$, $\mathfrak{U}'^d$, *ill.* $\mathfrak{U}'^b$, *akkor* $[E, \mathfrak{T}]$ *megfelelő uniform struktúrája* $\mathfrak{U}'^s|E$, $\mathfrak{U}'^d|E$, $\mathfrak{U}'^b|E$.

Bizonyítás. (11.2.11) és (11.3.13) következménye. ▌

Az $[E, \mathfrak{T}]$ szeparált **topologikus csoport teljes burkán** olyan $[E', \mathfrak{T}']$ szeparált topologikus csoportot értünk, amely teljes, és amelynek $[E, \mathfrak{T}]$ sűrű alcsoportja. Ilyen minden szeparált topologikus csoporthoz található:

(11.3.18) *Legyen* $[E, \mathfrak{T}]$ *szeparált topologikus csoport, kétoldali uniform struktúrája* $\mathfrak{U}^b$, $[E', \mathfrak{T}']$ *pedig a* (11.3.15) *alapján* $\mathfrak{U} = \mathfrak{U}^b$ *választással készített topologikus csoport. Ekkor* $[E', \mathfrak{T}']$ *teljes burka* $[E, \mathfrak{T}]$*-nek.*

Bizonyítás. $\mathfrak{U} = \mathfrak{U}^b$ esetén (11.3.15) valóban alkalmazható, mert (11.3.9) szerint $\mathfrak{U}^b$ megengedett. Ekkor $\mathfrak{U}'$ olyan szeparált, teljes uniform struktúra, hogy $\mathfrak{T}' = \mathfrak{T}_{\mathfrak{U}'}$, E $\mathfrak{T}'$-sűrű, és $\mathfrak{U}'|E = \mathfrak{U}^b$. Másrészt (11.3.17) szerint az $[E', \mathfrak{T}']$ csoport $\mathfrak{U}'^b$ kétoldali uniform struktúrájára is áll $\mathfrak{T}' = \mathfrak{T}_{\mathfrak{U}'^b}$ és $\mathfrak{U}'^b|E = \mathfrak{U}^b$. Ennélfogva

(6.3.1) értelmében $\mathcal{U}' = \mathcal{U}'^{b}$, úgyhogy $[E', \mathfrak{T}']$ kétoldali uniform struktúrája teljes. ∎

(11.3.19) *Ha* $[E', \mathfrak{T}']$ *és* $[E'', \mathfrak{T}'']$ *az* $[E, \mathfrak{T}]$ *szeparált topologikus csoport teljes burka, akkor létezik pontosan egy* E*-t rögzítő* $h : E' \to E''$ *izomorfizmus, amely* $(\mathfrak{T}', \mathfrak{T}'')$*-homeomorfizmus.*

Bizonyítás. Legyen $\mathcal{U}'$ és $\mathcal{U}''$ az $[E', \mathfrak{T}']$, ill. $[E'', \mathfrak{T}'']$ csoport kétoldali uniform struktúrája. (11.3.17) szerint $[E', \mathcal{U}']$ is, $[E'', \mathcal{U}'']$ is teljes burka az $[E, \mathcal{U}^{b}]$ uniform térnek, ahol $\mathcal{U}^{b}$ az $[E, \mathfrak{T}]$ csoport kétoldali uniform struktúráját jelöli, és így pontosan egy E-t rögzítő h $(\mathcal{U}', \mathcal{U}'')$-unimorfizmus van (6.3.26) szerint. Ez a h egyúttal $(\mathfrak{T}', \mathfrak{T}'')$-homeomorfizmus is; megmutatjuk, hogy $h : E' \to E''$ homomorfizmus, és így — bijektív lévén — izomorfizmus. Valóban, $x, y \in E'$ esetén

$$\pi''\big(h(x), h(y)\big) = h\big(\pi'(x, y)\big),$$

mert az a két leképezés, amely az $(x, y) \in E' \times E'$ pontot az egyenlőség bal illetve jobb oldalába viszi át, $(\mathfrak{T}' \times \mathfrak{T}', \mathfrak{T}'')$-folytonos, és $(x, y) \in E \times E$ esetén fennáll az egyenlőség $\big($átmegy $\pi(x, y) = \pi(x, y)$ -ba$\big)$, úgyhogy (6.2.3) alkalmazható. Megfordítva, minden E-t rögzítő $h_1 : E' \to E''$ izomorfizmus, amely $(\mathfrak{T}', \mathfrak{T}'')$-homeomorfizmus, (11.3.14) értelmében $(\mathcal{U}', \mathcal{U}'')$-unimorfizmus is, tehát az előbbi h-val azonos. ∎

(11.3.20) *Az* $[E, \mathfrak{T}]$ *szeparált topologikus csoport* $[E', \mathfrak{T}']$ *teljes burka pontosan akkor balról teljes, ha* $[E, \mathfrak{T}]$ *bal oldali uniform struktúrája megengedett.*

Bizonyítás. Ha $[E', \mathfrak{T}']$ $\mathcal{U}'^{s}$ bal oldali uniform struktúrája teljes, akkor (11.3.17) és (11.3.1) értelmében $[E, \mathfrak{T}]$ $\mathcal{U}^{s} = \mathcal{U}'^{s}|E$ bal oldali uniform struktúrája megengedett.

Tegyük fel megfordítva, hogy $\mathcal{U}^{s}$ megengedett, és alkalmazzuk (11.3.15)-öt az $\mathcal{U} = \mathcal{U}^{s}$ választással. Ekkor egy $[E'', \mathfrak{T}_{\mathcal{U}''}]$ topologikus csoport keletkezik, és az $\mathcal{U}''$ teljes uniform struktúra $\mathcal{U}^{s}$-nek bővítése. Minthogy (11.3.17) szerint $[E'', \mathfrak{T}_{\mathcal{U}''}]$ $\mathcal{U}''^{s}$ bal oldali uniform struktúrája is bővítése $\mathcal{U}^{s}$-nek, és $\mathfrak{T}_{\mathcal{U}''^{s}} = \mathfrak{T}_{\mathcal{U}''}$, azért (6.3.1) következtében $\mathcal{U}''^{s} = \mathcal{U}''$, és $[E'', \mathfrak{T}_{\mathcal{U}''}]$ balról teljes. Így $[E'', \mathfrak{T}_{\mathcal{U}''}]$ teljes is (11.3.10) értelmében, s minthogy $[E, \mathfrak{T}]$ $[E'', \mathfrak{T}_{\mathcal{U}''}]$-nek sűrű alcsoportja, azért $[E'', \mathfrak{T}_{\mathcal{U}''}]$ teljes burka $[E, \mathfrak{T}]$-nek. (11.3.19) szerint $[E', \mathfrak{T}']$ és $[E'', \mathfrak{T}_{\mathcal{U}''}]$ izomorf egymással, amiből rögtön következik, hogy $[E', \mathfrak{T}']$ is balról teljes. ∎

(11.3.20)-hoz (11.3.1) és (11.2.11) alapján hozzátehetjük, hogy ha van egyáltalában olyan $[E', \mathfrak{T}']$ balról teljes topologikus csoport, amelynek $[E, \mathfrak{T}]$ (nem szükségképpen sűrű) alcsoportja, akkor $[E, \mathfrak{T}]$ bal oldali uniform struktúrája megengedett.

11.3.e. Lokálisan kompakt csoportok. Láttuk, hogy a **11.2.b.** végén tárgyalt topologikus csoport balról teljes; ez következik már abból is, hogy topológiája lokálisan kompakt (hiszen az $[\mathbf{R}^2, \mathcal{E}^2]$ tér nyílt alteréről van szó):

(11.3.21) *Minden lokálisan kompakt topologikus csoport balról teljes.*

Bizonyítás. Legyen az $[E, \mathfrak{T}]$ topologikus csoportban V e-nek kompakt környezete, $\mathfrak{r}$ $\mathcal{U}^{s}$-Cauchy-rács, $R_0 \in \mathfrak{r}$ U^{s}_{V}-rendben kicsiny, $x \in R_3$ Ekkor $y \in R_0$ esetén

$x^{-1}y \in V$, tehát $y \in xV$, $R_0 \subset xV$, és (11.2.1) folytán xV is kompakt. Így a $\mathfrak{r}_0 = \mathfrak{r}(\cap)\{R_0\}$ rácsnak van xV-ben torlódási pontja; ez (5.2.26) szerint $\mathfrak{r}$-nek is torlódási pontja, s akkor $\mathfrak{r}$ (5.2.28) folytán konvergens. ∎

Felmerül az a kérdés, mely topologikus csoportok teljes burka lesz lokálisan kompakt, vagy éppen kompakt. Ezzel kapcsolatban jegyezzük meg, először:

(11.3.22) *Bármely $[E, \mathfrak{T}]$ topologikus csoportban egyenértékűek a következő állítások:*

(a) $\mathfrak{U}^s$ *prekompakt;*

(b) $\mathfrak{U}^d$ *prekompakt;*

(c) $\mathfrak{U}^b$ *prekompakt.*

Bizonyítás. (a) $\Rightarrow$ (b): (5.2.18)-ra hivatkozunk. Ha $\mathfrak{r}$ $\mathfrak{F}_{\mathfrak{U}^d}$-komprimált, akkor (11.3.3) folytán ι $(\mathfrak{F}_{\mathfrak{U}^d}, \mathfrak{F}_{\mathfrak{U}^s})$-szomszédságtartó lévén, $\mathfrak{r}^{-1} = \iota(\mathfrak{r})$ (5.2.2) miatt $\mathfrak{F}_{\mathfrak{U}^s}$-komprimált, tehát $\mathfrak{U}^s$-Cauchy-rács, s akkor (11.3.5) értelmében $\mathfrak{r}$ $\mathfrak{U}^d$-Cauchy-rács.

(b) $\Rightarrow$ (a): Ugyanígy.

(a) és (b) $\Rightarrow$ (c): (3.2.75).

(c) $\Rightarrow$ (a) és (b): (3.2.74). ∎

Nevezzük az $[E, \mathfrak{T}]$ **topologikus csoportot**, vagy az $A \subset E$ halmazt, **prekompaktnak**, ha $\mathfrak{U}^b$-re nézve prekompakt. Ekkor (6.3.31) alapján (11.3.18)-ra és (11.3.19)-re tekintettel kimondhatjuk:

(11.3.23) *Egy szeparált topologikus csoport teljes burka pontosan akkor kompakt, ha a csoport prekompakt.* ∎

(11.3.24) *Egy szeparált topologikus csoport teljes burka pontosan akkor lokálisan kompakt, ha a csoportban e-nek van prekompakt környezete.*

Bizonyítás. Ha az $[E, \mathfrak{T}]$ topologikus csoport teljes burka $[E', \mathfrak{T}']$, és V' e-nek kompakt $\mathfrak{T}'$-környezete, akkor $V' \cap E$ e-nek $\mathfrak{T}$-környezete, és $\mathfrak{U}'^b$-prekompakt (5.2.21) és (3.2.70) szerint, azaz (11.3.17) értelmében $\mathfrak{U}^b$-prekompakt.

Megfordítva, ha V e-nek $\mathfrak{U}^b$-prekompakt, azaz $\mathfrak{U}'^b$-prekompakt $\mathfrak{T}$-környezete, akkor ennek $\bar{V}$ $\mathfrak{T}'$-lezárása is $\mathfrak{U}'^b$-prekompakt (3.2.76) szerint, egyúttal $\mathfrak{U}'^b|\bar{V}$ teljes is (5.1.15) szerint, úgyhogy $\bar{V}$ $\mathfrak{T}'$-kompakt (5.2.20) alapján. Ha G olyan $\mathfrak{T}'$-nyílt halmaz, hogy $e \in G \cap E \subset V$, akkor minden $x \in G$ pontnak minden $\mathfrak{T}'$-környezetében van E $\mathfrak{T}'$-sűrű volta miatt E-beli, s akkor V-beli pont, azaz $x \in \bar{V}$, $G \subset \bar{V}$, és $\bar{V}$ $\mathfrak{T}'$-környezete e-nek. Így e-nek van kompakt $\mathfrak{T}'$-környezete, és (11.2.1) szerint E' minden más pontjának is. ∎

(11.3.25) *Ha egy topologikus csoportban A és B kompakt, akkor AB is kompakt.*

Bizonyítás. $AB = \pi(A \times B)$, úgyhogy az állítás (7.1.42) és (5.3.10) következménye. ∎

A lokálisan kompakt csoportoknak további nevezetes tulajdonságuk:

(11.3.26) *Minden lokálisan kompakt topologikus csoport parakompakt.*

Bizonyítás. Legyen az $[E, \mathfrak{T}]$ topologikus csoportban V e-nek kompakt, zárt környezete (ilyen van (5.3.54) szerint). Ha $V_0 = V \cap V^{-1}$, és $n \in \mathbf{N}$ esetén $V_n = V_{n-1}V_0$, akkor (11.2.1) miatt V^{-1} is kompakt, zárt, V_0 ennek zárt részeként (5.3.4) szerint kompakt, ebből pedig (11.3.25) miatt V_n kompaktsága következik minden n-re.

Mármost $E_0 = \bigcup\limits_0^\infty V_n$ alcsoport, hiszen $x \in V_n$, $y \in V_m$ esetén $xy \in V_{n+m}$, és $x \in V_n$ esetén $x^{-1} \in V_n$. (11.2.12) szerint E_0 nyílt-zárt, úgyhogy $E_0 = \bigcup\limits_0^\infty \overline{V}_n$ is áll, s minthogy (5.3.20) értelmében $\overline{V}_n$ is kompakt minden n-re, azért (8.3.20) folytán E_0 σ-parakompakt, s minthogy reguláris, (8.3.15) szerint parakompakt is. (11.2.1) következtében ugyanez áll az xE_0 mellékosztályokra, s akkor az állítás (11.1.6) alapján (8.3.23)-ból következik. ▮

11.3.f. Gyakorlatok. 1. Mutassuk meg, hogy az $[\mathbf{R}, \mathscr{E}]$ topologikus csoportra nézve — ahol $\pi(x, y) = x + y$ — az $\mathscr{E}$-t indukáló legfinomabb $\mathscr{U}$ uniform struktúra, amely az $\mathscr{U}^b = \mathscr{U}_{\rho_1}$ invariáns struktúrától különbözik, megengedett.

[$\mathscr{U}^b$ teljes, tehát $\mathscr{U}^b < \mathscr{U}$ miatt $\mathscr{U}$ is ilyen.]

2. Legyen $\mathbf{Q}$-n a $\pi(x, y) = x + y$ művelet értelmezve, és $\mathscr{T} = \mathscr{E}|\mathbf{Q}$. Mutassuk meg, hogy

(a) a $[\mathbf{Q}, \mathscr{T}]$ topologikus csoport nem teljes;

(b) az 1. alatti $[\mathbf{R}, \mathscr{E}]$ csoport $[\mathbf{Q}, \mathscr{T}]$-nek teljes burka;

(c) $\mathscr{T}$ indukálható teljes $\mathscr{U}$ uniform struktúrával is.

[(6.4.36).]

3. Legyen $[E, \mathscr{T}]$ topologikus csoport, $\mathscr{U}$ $\mathscr{T}$-t indukáló uniform struktúra, s tegyük fel, hogy π $(\mathscr{U}\times\mathscr{U}, \mathscr{U})$-egyenletesen folytonos. Mutassuk meg, hogy

(a) minden $U \in \mathscr{U}$ környékhez található olyan $U_1 \in \mathscr{U}$ környék, hogy $(x_1, y_1) \in U_1$, $(x_2, y_2) \in U_1$ esetén $(x_1x_2, y_1y_2) \in U$;

(b) ha U és U_1 (a)-nak megfelel, és $V = U(e)$, akkor $U_1 \subset U_V^s \cap U_V^d$;

(c) ha U és U_1 (a)-nak megfelel, akkor a $V_1 = U_1(e)$ jelöléssel $U_{V_1}^s \cup U_{V_1}^d \subset U$;

(d) $\mathscr{U}^s = \mathscr{U}^d = \mathscr{U}$.

4. Legyen E csoport, ρ balinvariáns eltérés E-n. Mutassuk meg, hogy (a) és (b), továbbá (c) és (d) egymással egyenértékű:

(a) $\mathscr{T}_\rho$ E-nek megengedett topológiája;

(b) $a \in E$-hez és $\varepsilon > 0$-hoz van olyan $\delta > 0$, hogy $\rho(a, x) < \delta$ esetén $\rho(a^{-1}, x^{-1}) < \varepsilon$;

(c) $\mathscr{T}_\rho$ E-nek megengedett topológiája, és az $[E, \mathscr{T}_\rho]$ topologikus csoportban $\mathscr{U}^s = \mathscr{U}^d$;

(d) $\varepsilon > 0$-hoz van olyan $\delta > 0$, hogy $\rho(x, y) < \delta$ esetén $\rho(x^{-1}, y^{-1}) < \varepsilon$.

[(11.2.3) (a)—(d) teljesül az $S(e, \varepsilon)$ gömbök rendszerére, (c) pedig az itteni (b)-vel ekvivalens. Ha $\mathscr{T}_\rho$ megengedett, akkor $\mathscr{U}_\rho = \mathscr{U}^s$.]

5. Legyen E az $\mathbf{I}$ intervallum önmagára való összes bijekcióinak halmaza, $\pi(f, g) = f \circ g$, és $\rho(f, g) = \sup \{|f(t) - g(t)|: t \in \mathbf{I}\}$. Mutassuk meg, hogy

(a) ρ jobbinvariáns távolság E-n;

(b) ha

$$f(t) = \begin{cases} 0 & (t = 0), \\ 1 - t & (0 < t < 1), \\ 1 & (t = 1), \end{cases}$$

továbbá

$$f_n(t) = \begin{cases} \frac{1}{n} & (t = 0), \\ 1 - t & \left(0 < t < 1 - \frac{1}{n}\right) \\ t - 1 + \frac{1}{n} & \left(1 - \frac{1}{n} \leqq t < 1\right), \\ 1 & (t = 1), \end{cases}$$

akkor

$$f, f_n \in E,\ \rho(f, f_n) = \frac{1}{n},\ \rho(f^{-1}, f_n^{-1}) = 1 - \frac{1}{n};$$

(c) $[E, \mathcal{T}_\rho]$ nem topologikus csoport.

6. Legyen $E = \mathbf{Q} \times \mathbf{R}$, $\pi((x_1, x_2), (y_1, y_2)) = (x_1 + y_1, x_2 + y_2)$. Mutassuk meg, hogy

(a) E kommutatív csoport;

(b) $\rho((x_1, x_2), (y_1, y_2)) = |x_1 - y_1|$ invariáns eltérés E-n, s így $[E, \mathcal{T}_\rho]$ topologikus csoport, amelyre $\mathcal{U}^b = \mathcal{U}_\rho$;

(c) $[E, \mathcal{U}_\rho]$ teljes burka $[E', \mathcal{U}_{\rho'}]$, ahol $E' = E \cup \{(x, 0): x \in \mathbf{R} - \mathbf{Q}\}$, és E'-n

$$\rho'((x_1, x_2), (y_1, y_2)) = |x_1 - y_1|;$$

(d) ha π-nek $(\mathcal{T}_{\rho'} \times \mathcal{T}_{\rho'}, \mathcal{T}_{\rho'})$-folytonos kiterjesztése π', akkor $\pi'((x_1, x_2), (y_1, y_2)) = (x_1 + y_1, z)$ valamilyen $z \in \mathbf{R}$ mellett;

(e) ha $x, y \in \mathbf{R} - \mathbf{Q}$, de $x + y \in \mathbf{Q}$, és $\pi'((x, 0), (y, 0)) = (x + y, z)$, akkor $z' \neq z$ esetén nincs olyan $(y_1, y_2) \in E'$, hogy $\pi'((x, 0), (y_1, y_2)) = (x + y, z')$;

(f) E'-n nem lehet olyan π'' műveletet értelmezni, hogy $[E', \mathcal{T}_{\rho'}]$ topologikus csoport legyen, amelynek $[E, \mathcal{T}_\rho]$ alcsoportja.

7. Legyen $[E, \mathcal{T}]$ szeparált topologikus csoport, Σ pedig balinvariáns eltérések olyan családja, hogy $\mathcal{T} = \mathcal{T}_\Sigma$. Legyen $[E', \mathcal{T}']$ az $[E, \mathcal{T}]$ csoport teljes burka. Mutassuk meg, hogy

(a) minden $\sigma \in \Sigma$ eltérés $(\mathcal{U}^b \times \mathcal{U}^b)$-egyenletesen folytonos;

(b) minden $\sigma \in \Sigma$-nak van egy és csak egy $(\mathcal{T}' \times \mathcal{T}')$-folytonos σ' kiterjesztése;

(c) σ' balinvariáns eltérés E'-n, és e σ'-k Σ' családjára $\mathcal{T}' = \mathcal{T}_{\Sigma'}$.

[$\mathcal{U}_\Sigma$ balinvariáns, tehát $\mathcal{U}^s$-sel egyenlő, és $\mathcal{U}^s < \mathcal{U}^b$. Így (7.3.49) alkalmazható, és σ' (7.3.51) mintájára eltérés, amely a $\sigma'(x, y) = \sigma'(zx, zy)$ egyenlőség mindkét oldalának $(\mathcal{T}' \times \mathcal{T}' \times \mathcal{T}')$-folytonossága miatt balinvariáns. (7.3.50) miatt $\mathcal{T}_{\Sigma'} < \mathcal{T}'$, s viszont ha V e-nek zárt $\mathcal{T}'$-környezete, és $\sigma_1, \ldots, \sigma_n \in \Sigma$, $\varepsilon > 0$ olyan, hogy $\sigma_i(e, x) < \varepsilon$ $(i = 1, \ldots, n)$ esetén $x \in V$, akkor $y \in E'$, $\sigma_i'(e, y) < \varepsilon$ $(i = 1, \ldots, n)$ esetén y minden $\mathcal{T}'$-környezetében van a σ_i'-k $(\mathcal{T}' \times \mathcal{T}')$-folytonossága miatt az előbbi tulajdonságú $x \in E$, úgyhogy $y \in V$, és a σ_i'-k balinvarianciája miatt $\mathcal{T}' < \mathcal{T}_{\Sigma'}$.]

8. Mutassuk meg, hogy prekompakt, szeparált topologikus csoportban $\mathcal{U}^s = \mathcal{U}^d = \mathcal{U}^b$.

[Ezek a kompakt teljes burok egyetlen uniform struktúrájának megszorításai.]

9. Mutassuk meg, hogy ha egy szeparált topologikus csoportban van megengedett prekompakt $\mathcal{U}$ uniform struktúra, akkor a csoport prekompakt, és $\mathcal{U} = \mathcal{U}^s = \mathcal{U}^d = \mathcal{U}^b$.

[(11.3.15)-öt $\mathcal{U}$-ra alkalmazva a keletkező $\mathcal{U}'$ kompakt, és $\mathcal{U}'$ $[E', \mathfrak{T}_{\mathcal{U}'}]$-nek bal, jobb és kétoldali uniform struktúrája.]

10. Mutassuk meg, hogy minden végtelen csoportban van olyan $\mathfrak{u}_1$ és $\mathfrak{u}_2$ ultraszűrő, hogy $\mathfrak{u}_1\mathfrak{u}_2$ nem generál ultraszűrőt.

[Legyen a csoport E, $\mathfrak{D}$ E-nek diszkrét topológiája, $\mathfrak{S}$ E-nek diszkrét szomszédsági relációja, $\mathcal{U}$ $\mathfrak{S}$-nek prekompakt uniform struktúrája. Az ultraszűrők azonosak az $\mathcal{U}$-Cauchy-szűrőkkel, és $\mathfrak{u}$-val együtt $\mathfrak{u}^{-1}$ is ultraszűrő. Ha ultraszűrők szorzata mindig ultraszűrőt generálna, $\mathcal{U}$ megengedett, tehát $[E, \mathfrak{D}]$ prekompakt csoport volna.]

11. Legyen E csoport, $a, b \in E$. Mutassuk meg, hogy

(a) a $\tau_{a,b}(x) = axb$ képlettel értelmezett $\tau_{a,b} : E \to E$ bijekciók az E önmagára való összes bijekcióiból álló **11.1.b.** (l) alatti csoportnak a bal és jobb oldali eltolások által generált alcsoportját alkotják;

(b) ha $[E, \mathfrak{T}]$ topologikus csoport, és $\mathcal{U}^s = \mathcal{U}^d = \mathcal{U}$, akkor a $T = \{\tau_{a,b}: a, b \in E\}$ jelöléssel $\mathcal{U}$ T-invariáns;

(c) ha az $[E, \mathfrak{T}]$ topologikus csoportban $\mathcal{U}^s = \mathcal{U}^d = \mathcal{U}$, akkor $\mathcal{U}$ indukálható bal- és jobbinvariáns eltérésekből álló eltérés-családdal;

(d) ha a (c) alatti feltételek mellett $\mathfrak{T}$ még (fél)metrizálható is, akkor van olyan bal- és jobbinvariáns ρ távolság (eltérés), hogy $\mathcal{U} = \mathcal{U}_\rho$.

[$\tau_{a,b} \circ \tau_{c,d} = \tau_{ac,db}$, $(\tau_{a,b})^{-1} = \tau_{a^{-1},b^{-1}}$, $\tau_a^s = \tau_{a,e}$, $\tau_a^d = \tau_{e,a}$, $\tau_{a,b} = \tau_a^s \circ \tau_b^d$, $\mathcal{U}^s = \mathcal{U}^d = \mathcal{U}$ esetén (11.3.7) szerint $\mathcal{U}$-nak van bal- és jobbinvariáns környékekből álló bázisa; így a **11.2.** alatti 15. feladatra lehet hivatkozni.]

IRODALOM

Az általános topológiával foglalkozó alább felsorolt tankönyveken és monográfiákon kívül többé-kevésbé bőséges általános topológiai bevezetés található a topológia többi fejezetének, ill. az analízis bizonyos fejezeteinek (valós függvénytan, funkcionálanalízis) szentelt munkák jelentékeny részében is.

(P. Sz. Alekszandrov) П. С. Александров: Введение в общую теорию множеств и функций (Москва—Ленинград, 1948)
P. Sz. Alekszandrov: Bevezetés a halmazok és függvények általános elméletébe (Budapest, 1952)
A. Alexandroff—H. Hopf: Topologie (Berlin, 1935)
A. Appert: Propriétés des espaces abstraits les plus généraux (Paris, 1934)
A. Appert—Ky-Fan: Espaces topologiques intermédiaires (Paris, 1951)
J. D. Baum: Elements of point set topology (Englewood Cliffs, 1964)
C. Berge: Espaces topologiques, fonctions multivoques (Paris, 1959)
K. Borsuk: Theory of retracts (Warszawa, 1967)
N. Bourbaki: Topologie générale (Paris, 1940—1953); egyes füzetek lényegesen bővített új kiadásban is
(N. Bourbaki) H. Бурбаки: Общая топология (Москва, 1968—1969)
D. C. J. Burgess: Analytical topology (London—Toronto—New York—Princeton, 1966)
D. Bushaw: Elements of general topology (New York—London, 1963)
S. S. Cairns: Introductory topology (New York, 1961)
E. Čech—Z. Frolík—M. Katětov: Topological spaces (Praha—London—New York—Sydney, 1966)
G. Choquet: Topologie (Paris, 1964)
G. Choquet: Topology (New York—London, 1966)
G. Choquet: Structures topologiques. Structures uniformes. Espaces de fonctions (Paris, 1964)
Á. Császár: Fondements de la topologie générale (Budapest—Paris, 1960)
Á. Császár: Foundations of general topology (Oxford—London—New York—Paris, 1963)
Á. Császár: Grundlagen der allgemeinen Topologie (Budapest—Leipzig, 1963)
H. F. Cullen: Introduction of general topology (Boston, 1968)
J. Dugundji: Topology (Boston, 1966)
M. Dutta—L. Debnath—T. K. Mukherjee: Elements of general topology (Calcutta, 1964)
R. Engelking: Outline of general topology (Warszawa—Amsterdam, 1968)
W. Franz: Allgemeine Topologie (Berlin, 1960)
M. Fréchet: Les espaces abstraits (Paris, 1928)
S. A. Gaal: Point set topology (New York—London, 1964)
M. C. Gemignani: Elementary topology (Reading—London—Don Mills, 1967)
L. Gillman—M. Jerison: Rings of continuous functions (Princeton, 1960)
J. Greever: Theory and examples of point-set topology (Belmont, 1967)
D. W. Hall—G. L. Spencer: Elementary topology (New York, 1955)
F. Hausdorff: Grundzüge der Mengenlehre (Leipzig, 1914)

F. HAUSDORFF: Mengenlehre (Berlin, 1927)
F. HAUSDORFF: Set theory (New York, 1962)
J. G. HOCKING—G. S. YOUNG: Topology (Reading, 1961)
S.-T. HU: Elements of general topology (San Francisco—London—Amsterdam, 1964)
S.-T. HU: Introduction to general topology (San Francisco—London—Amsterdam, 1966)
W. HUREWICZ—H. WALLMAN: Dimension theory (Princeton, 1948)
J. R. ISBELL: Uniform spaces (Providence, 1964)
J. L. KELLEY: General topology (Princeton—Toronto—London—New York, 1955)
B. v. KERÉKJÁRTÓ: Vorlesungen über Topologie (Berlin, 1923)
H.-J. KOWALSKY: Topologische Räume (Basel—Stuttgart, 1961)
H.-J. KOWALSKY: Topological spaces (New York—London, 1964)
K. KURATOWSKI: Topologie (Warszawa, 1933)
K. KURATOWSKI: Topologie (Warszawa, 1948—1950; 1958—1961)
K. KURATOWSKI: Topology (Warszawa—New York—London, 1966)
(K. KURATOWSKI) К. Куратовский: Топология (Москва, 1966)
K. KURATOWSKI: Introduction to set theory and topology (Warszawa—Oxford, 1961)
K. KURATOWSKI: Introduction à la théorie des ensembles et à la topologie (Genève, 1966)
S. LEFSCHETZ: Introduction to topology (Princeton, 1949)
N. N. LUSIN: Leçons sur les ensembles analytiques (Paris, 1930)
Z. P. MAMUZIĆ: Introduction to general topology (Groningen, 1963)
M. J. MANSFIELD: Introduction to topology (Princeton—Toronto—New York—London, 1963)
M. A. MAURICE: Compact ordered sets (Amsterdam, 1964)
B. MENDELSON: Introduction to topology (London, 1963)
K. MENGER: Dimensionstheorie (Leipzig—Berlin, 1928)
K. MENGER: Kurventheorie (Leipzig—Berlin, 1932)
R. L. MOORE: Foundations of point set theory (New York, 1932)
TH. O. MOORE: Elementary general topology (Englewood Cliffs, 1964)
L. NACHBIN: Topology and order (Princeton—Toronto—London, 1965)
J. NAGATA: Modern dimension theory (New York, 1965)
J. NAGATA: Modern general topology (Amsterdam—Groningen—New York, 1968)
H. NAKANO: Topology and linear topological spaces (Tokyo, 1951)
M. H. A. NEWMAN: Elements of the topology of plane sets of points (Cambridge, 1939)
G. NÖBELING: Grundlagen der analytischen Topologie (Berlin—Göttingen—Heidelberg, 1954)
E. M. PATTERSON: Topology (Edinburgh—London, 1956)
W. J. PERVIN: Foundations of general topology (New York—London, 1964)
(L. SZ. PONTRJAGIN) Л. С. Понтрягин: Топологические группы (Москва, 1938)
L. S. PONTRJAGIN: Topological groups (Princeton, 1939)
(L. SZ. PONTRJAGIN) Л. С. Понтрягин: Топологические группы (Москва, 1954)
L. S. PONTRJAGIN: Topologische Gruppen (Leipzig, 1957)
L. S. PONTRJAGIN: Topological groups (New York, 1966)
A. SCHOENFLIES: Die Entwickelung der Lehre von den Punktmannigfaltigkeiten (Leipzig 1900, 1908)
A. SCHOENFLIES: Entwickelung der Mengenlehre und ihrer Anwendungen (Leipzig—Berlin, 1913)
H. SCHUBERT: Topologie (Stuttgart, 1964)
H. SEIFERT—W. THRELFALL: Lehrbuch der Topologie (Leipzig, 1934)
W. SIERPIŃSKI: Introduction to general topology (Toronto, 1934)
W. SIERPIŃSKI: General topology (Toronto, 1952)
G. F. SIMMONS: Introduction to topology and modern analysis (New York—San Francisco—Toronto—London, 1963)
W. J. THRON: Topological structures (New York—Toronto—London, 1966)

J. W. Tukey: Convergence and uniformity in topology (Princeton, 1940)
R. Vaidyanathaswamy: Treatise on set topology (Madras, 1947)
R. Vaidyanathaswamy: Set topology (New York, 1960)
A. Weil: Sur les espaces à structure uniforme et sur la topologie générale (Paris, 1937)
G. T. Whyburn: Analytic topology (New York, 1942)
W. H. Young—G. C. Young: The theory of sets of points (Cambridge, 1906)

TÁRGYMUTATÓ

m. n. x. az *m*-edik fejezet *n*-edik szakaszának *x* pontjára utal, ha *x* helyén betű áll, és e szakasz *x*-edik feladatára, ha *x* helyén szám áll.

W

Z

JELÖLÉSEK

$x \in A$	1.1.a.	x eleme az A halmaznak
$x \notin A$	1.1.a.	x nem eleme A-nak
$\emptyset$	1.1.a.	üres halmaz
$\{a, b, c\}$	1.1.a.	az a, b, c elemekből álló halmaz
$\{x: P(x)\}$	1.1.a.	a $P(x)$ tulajdonságú x elemek halmaza
$A \subset B$	1.1.b.	A részhalmaza B-nek
$A \supset B$	1.1.b.	A tartalmazza B-t
$A \cup B$	1.1.c.	A és B egyesítése
$\bigcup \{A_i: i \in I\}$	1.1.c.	halmazrendszer egyesítése
$\bigcup\limits_{i \in I} A_i$	1.1.c.	halmazrendszer egyesítése
$\bigcup\limits_{m}^{n} A_i$	1.1.c.	véges számú halmaz egyesítése
$\bigcup\limits_{m}^{\infty} A_i$	1.1.c.	halmazsorozat egyesítése
$A \cap B$	1.1.c.	A és B metszete
$\bigcap \{A_i: i \in I\}$	1.1.c.	halmazrendszer metszete
$\bigcap\limits_{i \in I} A_i$	1.1.c.	halmazrendszer metszete
$\bigcap\limits_{m}^{n} A_i$	1.1.c.	véges számú halmaz metszete
$\bigcap\limits_{m}^{\infty} A_i$	1.1.c.	halmazsorozat metszete
$A - B$	1.1.c.	A és B különbsége
$\mathbf{R}$	1.1.e.	a valós számok halmaza
$\mathbf{N}$	1.1.e.	a természetes számok halmaza
$\mathbf{Q}$	1.1.e.	a racionális számok halmaza
(a, b)	1.1.e.	nyílt intervallum
$[a, b]$	1.1.e.	zárt intervallum
$[a, b)$	1.1.e.	balról félig zárt intervallum
$(a, b]$	1.1.e.	jobbról félig zárt intervallum

$(a, +\infty)$	1.1.e.	jobbról végtelen nyílt intervallum
$[a, +\infty)$	1.1.e.	jobbról végtelen, balról félig zárt intervallum
$(-\infty, a)$	1.1.e.	balról végtelen nyílt intervallum
$(-\infty, a]$	1.1.e.	balról végtelen, jobbról félig zárt intervallum
$(-\infty, +\infty)$	1.1.e.	az egész számegyenes
$\mathbf{I}$	1.1.e.	a [0, 1] intervallum
$\sup A$	1.1.e.	számhalmaz felső határa
$\inf A$	1.1.e.	számhalmaz alsó határa
$\|x\|$	1.1.e.	valós szám abszolút értéke
$\max(x_1, \ldots, x_n)$	1.1.e.	$x_1, \ldots, x_n$ legnagyobbika
$\min(x_1, \ldots, x_n)$	1.1.e.	$x_1, \ldots, x_n$ legkisebbike
(a_n)	1.1.f.	sorozat
$\lim a_n$	1.1.f.	számsorozat határértéke
$a_n \to a$	1.1.f.	számsorozat határértéke
$(a_1, \ldots, a_m)$	1.1.g.	m-tagú sorozat
$\mathbf{R}^m$	1.2.a.	m-dimenziós euklideszi tér
$\rho(x, y)$	1.2.a.	távolság
$S(a, \varepsilon)$	1.2.b.	gömb
$x_n \to y$	1.2.b.	pontsorozat limesze
$\lim x_n$	1.2.b.	pontsorozat limesze
$\delta(A)$	1.2.b.	ponthalmaz átmérője
$(a_1, \ldots, a_m; b_1, \ldots, b_m)$	1.2.c.	nyílt tégla
$[a_1, \ldots a_m; b_1, \ldots, b_m]$	1.2.c.	zárt tégla
$\bar{S}(a, \varepsilon)$	1.2.c.	zárt gömb
$(\mathrm{D}_1), \ldots, (\mathrm{D}_4)$	1.3.a.	távolság-axiómák
$[E, \rho]$	1.3.a.	(fél)metrikus tér
ρ_m	1.3.a.	távolság $\mathbf{R}^m$-ben
$\rho\|E_0$	1.3.a..	távolság (eltérés) megszorítása
$\rho(x, A)$	1.3.e.	pont és halmaz távolsága
$\rho(A, B)$	1.3.e.	két halmaz távolsága
$d(A, B)$	1.3.e.	Hausdorff-féle távolság
$\mathfrak{A} < \mathfrak{B}$	2.1.b.	$\mathfrak{A}$ durvább $\mathfrak{B}$-nél
$\mathfrak{A} > \mathfrak{B}$	2.1.b.	$\mathfrak{A}$ finomabb $\mathfrak{B}$-nél
$\mathfrak{A} \sim \mathfrak{B}$	2.1.b.	$\mathfrak{A}$ ekvivalens $\mathfrak{B}$-vel
$\dot{A}$	2.1.b.	A-hoz tartozó főszűrő
$\dot{x}$	2.1.b.	x-hez tartozó alapszűrő
$\mathfrak{A}\,(\cap)\,\mathfrak{B}$	2.1.b.	metszetekből álló halmazrendszer

$\mathfrak{A}\,(\cup)\,\mathfrak{B}$	2.1.b.	egyesítésekből álló halmazrendszer
$[E, \mathcal{V}]$	2.1.c.	környezettér
$\mathfrak{v}(x)$	2.1.c.	környezetszűrő
$x_n \to y$	2.1.d.	pontsorozat limesze
$\lim x_n$	2.1.d.	pontsorozat limesze
$\mathfrak{T}_\rho$	2.1.e.	eltérés által indukált topológia
$\mathfrak{E}$	2.1.e.	a számegyenes euklideszi topológiája
$\mathfrak{E}^m$	2.1.e.	$\mathbf{R}^m$ euklideszi topológiája
$\mathfrak{E}^+$	2.1.e.	a jobbról való konvergencia topológiája
$\mathfrak{E}^-$	2.1.e.	a balról való konvergencia topológiája
(V), (V′), (V″)	2.2.a.	környezet-axiómák
$(G_1), (G_2), (G_3)$	2.2.c.	a nyílt halmazok axiómái
$(F_1), (F_2), (F_3)$	2.2.c.	a zárt halmazok axiómái
$\bar{\mathfrak{E}}$	2.2.c.	a felülről félig folytonosság topológiája
$\underline{\mathfrak{E}}$	2.2.c.	az alulról félig folytonosság topológiája
$\mathfrak{F}_E$	2.2.c.	a véges-zárt topológia
$\operatorname{int} A$	2.2.d.	A belseje
$\bar{A}$	2.2.d.	A lezárása
$(K_1), \ldots, (K_4)$	2.2.d.	Kuratowski-féle lezárás-axiómák
$\operatorname{mar} A$	2.2.e.	A határa
$(H_1), \ldots, (H_4)$	2.2.f.	Hausdorff-féle környezetaxiómák
$(\leftarrow, x)$	2.2.8	balról végtelen nyílt intervallum rendezett halmazban
$(\leftarrow, x]$	2.2.8.	balról végtelen, jobbról félig zárt intervallum rendezett halmazban
$(x, \to)$	2.2.8	jobbról végtelen nyílt intervallum rendezett halmazban
$[x, \to)$	2.2.8.	jobbról végtelen, balról félig zárt intervallum rendezett halmazban
(a, b)	2.2.8.	nyílt intervallum rendezett halmazban
$[a, b)$	2.2.8.	balról félig zárt intervallum rendezett halmazban
$(a, b]$	2.2.8.	jobbról félig zárt intervallum rendezett halmazban
$\mathcal{V}_1 < \mathcal{V}_2$	2.3.a.	V_1 durvább V_2-nél
$\mathcal{V}_1 > \mathcal{V}_2$	2.3.a.	V_1 finomabb V_2-nél
$\mathfrak{D}_E$	2.3.a.	diszkrét topológia
$\inf \{\mathfrak{T}_i \colon i \in I\}$	2.3.a.	topológiák infimuma
$\sup \{\mathfrak{T}_i \colon i \in I\}$	2.3.a.	topológiák szuprémuma
$\mathcal{V} \mid E_0$	2.3.b.	környezetstruktúra megszorítása

$\mathcal{T}_I$	2.4.a.	ideállal finomított topológia
$\mathfrak{r} \to x$ ($\mathfrak{V}$)	2.4.b.	rács limesze környezettérben
$x = \lim_{\mathfrak{V}} \mathfrak{r}$	2.4.b.	rács limesze környezettérben
(M_1), (M_2)	2.4.c.	megszámlálhatósági axiómák
$\mathfrak{v}(A)$	2.5.a.	halmaz környezetszűrője
(T_0)	2.5.b.	szétválasztási axiómák
(S_1)	2.5.c.	
$\bar{x}$	2.5.c.	egyelemű halmaz lezárása
(T_1)	2.5.c.	szétválasztási axiómák
(S_2)	2.5.d.	
(T_2)	2.5.d.	
(S_3)	2.5.e.	
(T_3)	2.5.e.	
(S_4)	2.5.f.	
(T_4)	2.5.f.	
(S_5)	2.5.g.	
(T_5)	2.5.g.	
$f : X \to Y$	2.6.a.	X-nek Y-ba való leképezése
$f(x)$	2.6.a.	elem képe
$f(A)$	2.6.a.	halmaz képe
f^{-1}	2.6.a.	inverz leképezés
$f^{-1}(A)$	2.6.a.	halmaz inverz képe
$f^{-1}(y)$	2.6.a.	elem inverz képe
$f\vert_A^B$	2.6.a.	leképezés megszorítása
$f\vert A$	2.6.a.	leképezés megszorítása
$g \circ f$	2.6.a.	leképezések összetétele
$f(\mathfrak{A})$	2.6.b.	halmazrendszer képe
$f^{-1}(\mathfrak{B})$	2.6.b.	halmazrendszer inverz képe
$f^{-1}(\mathcal{T})$	2.6.f.	topológia inverz képe
$A \mathcal{S} B$	3.1.b.	A szomszédos B-vel
$A \bar{\mathcal{S}} B$	3.1.b.	A távoli B-től
$(P_1), \ldots, (P_6)$	3.1.b.	szomszédsági axiómák
$\mathcal{S}_\rho$	3.1.b.	eltérés által indukált szomszédsági reláció
$[E, \mathcal{S}]$	3.1.b.	szomszédsági tér
$\mathfrak{p}(A)$	3.1.b.	halmaz szomszédságszűrője
$\mathcal{T}_{\mathcal{S}}$	3.1.c.	szomszédsági reláció által indukált topológia
$\mathcal{S}_1 < \mathcal{S}_2$	3.1.d.	$\mathcal{S}_1$ durvább $\mathcal{S}_2$-nél

$\mathcal{S}_1 > \mathcal{S}_2$	3.1.d.	$\mathcal{S}_1$ finomabb $\mathcal{S}_2$-nél
$\sup \{\mathcal{S}_i\colon i \in I\}$	3.1.d.	szomszédsági relációk szuprémuma
$\inf \{\mathcal{S}_i\colon i \in I\}$	3.1.d.	szomszédsági relációk infimuma
$\mathcal{S} \vert E_0$	3.1.e.	szomszédsági reláció megszorítása
$f^{-1}(\mathcal{S})$	3.1.f.	szomszédsági reláció inverz képe
$U_{\rho, \varepsilon}$	3.2.a.	ε-környék félmetrikus térben
U_ε	3.2.a.	ε-környék félmetrikus térben
$A \times B$	3.2.b.	két halmaz Descartes-féle szorzata
G_f	3.2.b.	leképezés gráfja
$U(A)$	3.2.b.	A-ból vett első tagú U-ból vett párok második tagjainak halmaza
$U(x)$	3.2.b.	x első tagú U-ból vett párok második tagjainak halmaza
U^{-1}	3.2.b.	fordított sorrendű párok halmaza
$V \circ U$	3.2.b.	párhalmazok kompozíciója
$(\mathrm{U}_1), \ldots, (\mathrm{U}_4)$	3.2.c.	uniform axiómák
$\mathcal{U}_\rho$	3.2.c.	eltérés által indukált uniform struktúra
$[E, \mathcal{U}]$	3.2.c.	uniform tér
$U_{\Sigma, \varepsilon}$	3.2.d.	eltérés-családhoz tartozó ε-környék
$\mathcal{U}_\Sigma$	3.2.d.	eltérés-család által indukált uniform struktúra
$\mathcal{S}_\mathcal{U}$	3.2.e.	uniform struktúra által indukált szomszédsági reláció
$\mathcal{T}_\mathcal{U}$	3.2.e.	uniform struktúra által indukált topológia
$\mathcal{S}_\Sigma$	3.2.e.	eltérés-család által indukált szomszédsági reláció
$\mathcal{T}_\Sigma$	3.2.e.	eltérés-család által indukált topológia
$\mathcal{U}_1 < \mathcal{U}_2$	3.2.f.	$\mathcal{U}_1$ durvább $\mathcal{U}_2$-nél
$\mathcal{U}_1 > \mathcal{U}_2$	3.2.f.	$\mathcal{U}_1$ finomabb $\mathcal{U}_2$-nél
$\sup \{\mathcal{U}_i\colon i \in I\}$	3.2.f.	uniform struktúrák szuprémuma
$\inf \{\mathcal{U}_i\colon i \in I\}$	3.2.f.	uniform struktúrák infimuma
$\mathcal{U} \vert E_0$	3.2.g.	uniform struktúra megszorítása
$f^{-1}(\mathcal{U})$	3.2.h.	uniform struktúra inverz képe
$G_{\mathfrak{R}}$	3.2.7.	reláció gráfja
$U_{\mathfrak{F}}$	3.2.8.	felbontáshoz tartozó környék
$(\mathrm{O}_1), \ldots, (\mathrm{O}_6), (\mathrm{O}_6')$	4.1.a.	rendezés-axiómák
$<_U$	4.1.a.	környékhez tartozó rendezés
$(\mathrm{S}_\pi), (\mathrm{T}_\pi)$	4.2.a.	szétválasztási axiómák
$\sigma_f(x, y)$	4.2.b.	függvényhez tartozó eltérés
Σ_Φ	4.2.b.	függvénycsalád által indukált eltérés-család

$\mathfrak{U}_{\Phi}$	4.2.b.	függvénycsalád által indukált uniform struktúra
$\mathfrak{S}_{\Phi}$	4.2.b.	függvénycsalád által indukált szomszédsági reláció
$\mathfrak{T}_{\Phi}$	4.2.b.	függvénycsalád által indukált topológia
$\mathfrak{P}(\mathfrak{r})$	6.1.d.	rácsból félháló által származtatott szűrő
$\mathfrak{v}(\mathfrak{r})$	6.1.d.	rács környezetszűrője
$\mathbf{S}_m$	6.1.7.	gömbfelület
$\mathfrak{p}(\mathfrak{r})$	6.3.a.	rács szomszédságszűrője
Z_f	6.4.8.	függvény nullahelyeinek halmaza
N_f	6.4.8.	függvény el-nem-tűnési helyeinek halmaza
$\mathfrak{Z}$	6.4.8.	a nullahalmazok rendszere
$\mathfrak{N}$	6.4.8.	az el-nem-tűnési halmazok rendszere
$\mathop{\times}\limits_{1}^{m} A_i$	7.1.b.	véges számú halmaz Descartes-féle szorzata
$\mathop{\times}\limits_{i\in I} A_i$	7.1.b.	Descartes-féle szorzat
$\mathop{\times}\limits_{1}^{\infty} A_i$	7.1.b.	halmazsorozat Descartes-féle szorzata
$\mathop{\times}\limits_{\in I} \mathfrak{T}_i$	7.1.c.	topológiák szorzata
$\mathop{\times}\limits_{1}^{m} \mathfrak{T}_i$	7.1.c.	véges számú topológia szorzata
$\mathop{\times}\limits_{1}^{\infty} \mathfrak{T}_i$	7.1.c.	topológiák sorozatának szorzata
E^I	7.1.c.	egyenlő tényezők Descartes-féle szorzata
$\mathfrak{T}^I$	7.1.c.	egyenlő topológiák szorzata
E^m	7.1.c.	véges számú egyenlő tényező Descartes-féle szorzata
$\mathfrak{T}^m$	7.1.c.	véges számú egyenlő topológia szorzata
$\mathbf{P}$	7.1.e.	kételemű halmaz
$\mathfrak{C}$	7.1.e.	az összefüggő pontpár topológiája
$\mathop{\times}\limits_{i\in I} \mathfrak{S}_i$	7.2.b.	szomszédsági relációk szorzata
$\mathop{\times}\limits_{1}^{m} \mathfrak{S}_i$	7.2.b.	véges számú szomszédsági reláció szorzata
$\mathop{\times}\limits_{1}^{\infty} \mathfrak{S}_i$	7.2.b.	szomszédsági relációk sorozatának szorzata
$\mathfrak{S}^I$	7.2.b.	egyenlő szomszédsági relációk szorzata
$\mathfrak{S}^m$	7.2.b.	véges számú egyenlő szomszédsági reláció szorzata

$\times_{i\in I} \mathcal{U}_i$	7.3.b.	uniform struktúrák szorzata
$\times_{1}^{m} \mathcal{U}_i$	7.3.b.	véges számú uniform struktúra szorzata
$\times_{1}^{\infty} \mathcal{U}_i$	7.3.b.	uniform struktúrák sorozatának szorzata
$\mathcal{U}^I$	7.3.b.	egyenlő uniform struktúrák szorzata
$\mathcal{U}^m$	7.3.b.	véges számú egyenlő uniform struktúra szorzata
$f(\mathcal{T})$	7.4.a.	kvócienstopológia
$\mathfrak{A}(B)$	7.4.c.	a B halmaz $\mathfrak{A}$-csillaga
$f(\mathcal{S})$	7.4.d.	kvóciensreláció
$f(\mathcal{U})$	7.4.e.	kvóciensstruktúra
$\mathcal{U}_g$	8.1.a.	osztható tér uniform struktúrája
$\mathfrak{A} \leqslant \mathfrak{B}$	8.2.a.	$\mathfrak{A}$ finomítása $\mathfrak{B}$-nek
$U_{\mathfrak{A}}$	8.2.a.	halmazrendszerhez tartozó párhalmaz
$\mathfrak{A} \lll \mathfrak{B}$	8.2.a.	$\mathfrak{A}$ erős finomítása $\mathfrak{B}$-nek
$\mathfrak{A}(x)$	8.2.a.	az x pont $\mathfrak{A}$-csillaga
st U	8.2.a.	párhalmazhoz tartozó csillagrendszer
st $\mathfrak{A}$	8.2.a.	halmazrendszerhez tartozó csillagrendszer
$\sum_{f\in\Phi} f$	8.3.c.	lokálisan véges függvénycsalád összegfüggvénye
$\mathbf{C}$	10.4.b.	Cantor-féle halmaz
$\pi(x, y)$	11.1.a.	csoportművelet
e	11.1.a.	csoport semleges eleme
$\iota(x)$	11.1.a.	x inverze csoportban
xy	11.1.a.	csoportművelet multiplikatív jelöléssel
x^{-1}	11.1.a.	inverz elem multiplikatív jelöléssel
$(C_1), \ldots, (C_4)$	11.1.a.	csoportaxiómák
$x + y$	11.1.a.	csoportművelet additív jelöléssel
$-x$	11.1.a.	inverz elem additív jelöléssel
xyz	11.1.a.	három csoportelem szorzata
x^n	11.1.a.	egyenlő csoportelemek szorzata
x^{-n}	11.1.a.	egyenlő csoportelemek inverzeinek szorzata
$x + y + z$	11.1.a.	három csoportelem összege
nx	11.1.a.	egyenlő csoportelemek összege
$-nx$	11.1.a.	egyenlő csoportelemek inverzeinek összege
$x - y$	11.1.a.	x-nek és y inverzének összege
AB	11.1.c.	halmazok szorzata csoportban

A^{-1}	11.1.c.	halmaz inverze csoportban
aB	11.1.c.	csoportelem és halmaz szorzata
Ba	11.1.c.	halmaz és csoportelem szorzata
τ_a^s	11.1.d.	bal oldali eltolás
τ_a^d	11.1.d.	jobb oldali eltolás
E/A	11.1.f.	faktorcsoport
$\mu(\alpha, x)$	11.1.1.	számmal való szorzás vektortérben
αx	11.1.1.	számmal való szorzás vektortérben
U_V^s	11.2.b.	balinvariáns környék
U_V^d	11.2.b.	jobbinvariáns környék
$\mathcal{U}^s$	11.2.b.	bal oldali uniform struktúra
$\mathcal{U}^d$	11.2.b.	jobb oldali uniform struktúra
$\mathcal{T}_\Theta$	11.2.4.	félnormák családjával indukált topológia
$\mathcal{T}_\nu$	11.2.4.	félnormával indukált topológia
$\mathfrak{r}_1\mathfrak{r}_2$	11.3.a.	rácsok szorzata csoportban
$\mathfrak{r}^{-1}$	11.3.a.	rács inverze csoportban
$\mathcal{U}^b$	11.3.c.	kétoldali uniform struktúra

A kiadásért felelős az Akadémiai Kiadó igazgatója
Felelős szerkesztő: Horváth Ferenc — Műszaki szerkesztő: Kovács Gábor
Burkoló és kötésterv Murányi István munkája
Terjedelem: 38,5 (A/5) ív
— AK k 7577 —

70.69061 Akadémiai Nyomda, Budapest — Felelős vezető: Bernát György

1828

AKADÉMIAI KIADÓ
BUDAPEST

Ára: 82,— Ft