SZÉKFOGLALÓ ELŐADÁSOK A MAGYAR TUDOMÁNYOS AKADÉMIÁN

Zalai Ernő

REDUCIBILITÁS ÉS EGYENSÚLY LEONTIEF- ÉS NEUMANN-TÍPUSÚ STACIONÁRIUS MODELLEKBEN

Tekintetes Nagygy[...]

[...] fennálló szabályainak 32-ka így szól:
[...] újonnan választott tag, a külsők kivéte-
[...]sztályába tartozó dolgozat felolvasásával,
[...]személyes megnem jelenhetés esetén beküldé-
[...]legfelebb egy év alatt széket foglal; különben meg-
[...]ztása megsemmisítőén."
Lehetnek esetek, melyekben kivált vidéken la-
[...] gátoltatnak a határidőt megtartani: de hallga-
[...]elnézni e szabály meg nem tartatását, annyi[...]
[...], mint összes szabályzatunkat erőtlennek tekinten[...]
[...]következményeire figyelmessé tenni a T. Akadem[...]
[...]szükségtelen.
Inditványba hozatik tehát, hogy egyelőre az
[...] választott s székfoglalás által meg nem erő-
[...]tett rendes tagok nevei a névkönyvből kitöröltessenek, az 1861-
[...]861. 1862 választott a szabályokra emlékeztessenek, jö-
[...]65-ig választottak a szabályokra emlékeztessenek, jö-
[...]vőre pedig a titoknoki hivatal oda utasíttassék, hogy
[...] evidentiában tartás végett az újdon választottakat,
[...] míg széket nem foglaltak, a sorozatba fel ne vegye."

[...], jan. 26. 1865.

Ballagi Mór
[...]
Fogarasi
Hollán Ernő

853
1865

B Kemény Zsigmond
Kőrösi László
Török [...]
r. tag
Toldy Ferenc r. tag
Gyurgy[...]

Zalai Ernő

REDUCIBILITÁS ÉS EGYENSÚLY LEONTIEF- ÉS NEUMANN-TÍPUSÚ STACIONÁRIUS MODELLEKBEN

SZÉKFOGLALÓK
A MAGYAR TUDOMÁNYOS AKADÉMIÁN

A 2004. május 3-án megválasztott
akadémikusok székfoglalói

Zalai Ernő

REDUCIBILITÁS ÉS EGYENSÚLY LEONTIEF- ÉS NEUMANN-TÍPUSÚ STACIONÁRIUS MODELLEKBEN

Magyar Tudományos Akadémia • 2014

Az előadás elhangzott 2005. április 13-án

Sorozatszerkesztő: Bertók Krisztina

Olvasószerkesztő: Laczkó Krisztina

Borító és tipográfia: Auri Grafika

ISSN 1419-8959
ISBN 978-963-508-701-3

Kiadja a Magyar Tudományos Akadémia
Kiadásért felel: Pálinkás József, az MTA elnöke
Felelős szerkesztő: Kindert Judit
Nyomdai munkálatok: Kódex Könyvgyártó Kft.

„De minden tudomány így indult,
és a közgazdaságtan mint tudomány csak néhány száz éves.
A természettudományok több mint ezer évesek voltak,
amikor az első valóban fontos előrelépés megtörtént.”
(Neumann János, 1955)

1. Bevezetés

A stílus maga az ember – mondja a közkeletű szólás. A mottó pedig az előadás üzenetének tömény kivonata, kvintesszenciája. De vajon mit és kinek üzen Neumann János a fenti megállapításával? Ennek megértéséhez érdemes emlékeztetni magára a környezetre, ahol az idézett beszéd elhangzott. Ez pedig a *National Planning Association* egy 1955-ben adott villásreggelije volt, ahol Neumann volt a meghívott előadó. S ki másnak, mi másnak szóltak volna a polihisztor tudós bátorító szavai, mint azoknak a biztató korabeli erőfeszítéseknek, amelyek egy olyan közgazdaságtan kialakítását tűzték ki célul, amely módszertani szigorúságával, az empíriát és a gyakorlati alkalmazásokat szem előtt tartó metodológiájával közelít a természettudományos elvárásokhoz.

Nem mellékes az sem, hogy bár egyetlen *par excellence* közgazdasági dolgozatával és a játékelmélet megalapozásával Neumann János örökre beírta a nevét a közgazdaságtan történetébe, szakterületét tekintve nem közgazdász volt. Nem lehet tehát a saját szakmája iránti elfogultsággal vádolni őt. Az is figyelemre méltó, hogy a fórum a *National Planning Association* és nem az a *Cowless*

Commission volt, ahol ezekben az években, a „kellően megbízható kísérleti alap" (Debreu 1991) hiányára hivatkozva, az empíria felől egyre inkább az elvont, „tiszta" tudomány irányába terelték a közgazdaságtani kutatásokat.

50 év telt el Neumann idézett beszéde óta. Fél évszázad a „több mint ezer év"-hez képest elenyésző, éppen csak egy emberöltő. Csodálkozhat-e hát bárki, hogy nem következett be látványos előrelépés a közgazdaságtanban ennyi idő alatt? Volt és van haladás, de a helyzet alapvetően változatlan. A szakma továbbra is meglehetősen kiforratlan, és erősen megosztott a diszciplínája mibenlétét, követendő módszereit és elért eredményeit illetően. Még ma is jogosan kérdezheti valaki, mennyiben tudomány, mennyiben művészet (gyakorlat) a közgazdaságtan, hova sorolandó vizsgálati módszere, nyelvezete tekintetében?

A tudomány és művészet kifejezésekhez nem kellene semmiféle minősítést, értékítéletet társítani. Az angol *science* és *art*, vagy ha jobban tetszik, a középkori „*artes liberales*" és „*artes mechanicae*" jelentésének megfelelően kérem értelmezni őket.[1] A bölcsészet és a morálfilozófia köntöséből kibontakozó modern közgazdaságtanban kezdetektől fogva jelen van ez a fajta kettősség, a műfajválasztás lehetősége és kényszere. A természettudományok látványos megújulása és sikere a 19. században, az ennek alapjául szolgáló, akkor még töretlen hit a világ korlátlan megismerhetőségében, magával sodorta a közgazdaságtant is, legalábbis annak egyes áramlatait. Utat tört magának a hipotetikus-deduktív módszer.

Elsősorban a fizika (mechanika, energetika, termodinamika) módszertanának átvételével nyert fokozatosan teret az axiomatikus, kvantitatív megközelítés a közgazdaságtanban, amellyel manapság elsősorban a matematikai közgazdaságtan, az ökonometria és az operációkutatás elnevezés alatt találkoz-

[1] Elgondolkodtató, hogy a magyar és a német nyelvben nem tesznek különbséget a két, jellegében és módszertanában egymástól markánsan különböző tudásterület között.

hatunk. Ezek az irányzatok kiterjedten alkalmazzák a tudományok nyelvezetét és eszköztárát, a matematikát, és axiomatikus felépítésű elméleteket és ezekre épülő modelleket vesznek igénybe a közgazdaságtani problémák kifejtésére és elemzésére. Ám ez a megközelítés nem vált egyeduralkodóvá. Egyenrangú alternatívaként fennmaradt a problémák történeti, szociológiai, „liberal arts" jellegű, a magyarázó (interpretative) megértésen alapuló megközelítése is.

Sokan kétségbe vonják ma is, nyíltan vagy burkoltan, hogy feltárhatók, sőt egyáltalán léteznek-e a gazdaságban olyan, a természeti törvényekhez hasonló, tartós és általános törvényszerűségek, amelyekre biztonsággal építhetnek a gazdasági, gazdaságpolitikai döntések előkészítői. Minden az adott kortól és a konkrét helyzettől függ, az egyetlen törvény az állandó változás – vallják a történeti iskolák képviselői. Az elvont elméleti konstrukciókkal szemben fontosabbnak tartják a gyakorlati tapasztalatot, a konkrét és részletes információk gazdagságát, ezek informális rendszerezését és feldolgozását, a konkrét helyzet kellő intuíción és lényeglátáson alapuló konkrét elemzését. Ennek az irányzatnak a legkiválóbb képviselői bizonyítottan rendelkeztek ezekkel a képességekkel. Színvonalas esszékben, a gyakorlati életből vett, persze célzatosan kiválasztott példákkal és adatokkal, sőt megfelelő módszertani képzettség birtokában még elegáns elméleti konstrukciókkal is alátámasztva teszik közzé intuitív úton nyert ismereteiket, szakmai meggyőződésüket.

Mindezt azért hangsúlyozom, mert egy percig sem szeretném azt a látszatot kelteni, hogy – mint matematikai közgazdász – alacsonyabb rangúnak tekinteném a nem formalizált elméleteken, modelleken nyugvó megközelítéseket, a valóság megismerésének a művészet által követett útját. A két, módszertanát tekintve erősen különböző irányzat között nem a színvonal vagy a minőség, hanem csak a másság alapján lehet és szabad különbséget tenni. Mindkét műfajt lehet igényesen és igénytelenül, tisztességes tudós vagy szemfényvesztő sarlatán módjára művelni. Nyelvezet és módszertan, de mindenekelőtt hit és neveltetés kérdése, ki mikor, melyik irányzat mellett kötelezi el magát ebben a többszörösen megosztott világunkban.

Aki felül tud emelkedni saját „*tudományos kutatási programja*” (vö. Lakatos Imre) korlátjain, annak el kell ismernie, hogy egyik irányzat képviselői sem birtokolják a biztos tudást a közgazdaságtanban. A verbális és a matematikai irányzat és ezek egymással kommunikálni is alig képes képviselői még hosszú ideig fognak együtt élni és dolgozni a társadalomtudományokban. Máig kísért egy korai olvasmányélményem, Hutchinson (1938) sommás és meghökkentő ítélete, aki szerint a társadalomtudományokban még nem született olyan elmélet, amely a természettudományokban elvárt szigorúsággal empirikus ellenőrzésnek lett volna alávethető. A számszerűsített modellekkel végzett kísérletek, írta az 1930-as években, legjobb esetben is csak az adott elmélet illusztrációjának tekinthetők. Tartok tőle, ma sem fogalmazna sokkal enyhébben. Sok időbe fog telni, míg kellő számban napvilágot látnak olyan elméletek és modellek, amelyek megbízhatósága, szoros hibahatárokkal, empirikusan visszaigazolható lesz.

A zseniális megsejtéseivel számos tudományágat gazdagító Neumann János figyelemre méltó empátiával megfogalmazott szentenciája, amelyet előadásom mottójául választottam, ebben a környezetben nyer számomra igazi értelmet. Ez teszi érthetőbbé és elviselhetőbbé számomra szakmánk kettősségét és megosztottságát, ez segít oldani a logikai egzaktság és a módszertani igényesség, illetve a gyakorlati relevancia között feszülő ellentétet. Hogy is fogalmazta meg Neumann? „A közgazdaságtan mint tudomány csak néhány száz éves”, és ehhez azt is hozzátehetjük, hogy a közgazdaság-tudomány egyáltalán nincs rosszabb helyzetben, mint a többi társadalomtudomány. Vannak biztató híreink és tapasztalataink is, amelyek jelzik, hogy egy sor területen ment és megy előre a közgazdaságtan a tudományos egzaktság és a gyakorlati relevancia irányába.

Saját kutatási területeim egyikét hozom fel példaképpen, a számszerűsített általános egyensúlyelméleti (CGE) modellezést, amelynek területén akár látványosnak is nevezhető haladás volt megfigyelhető az elmúlt húsz-huszonöt évben. Ezek a sok szempontból még mindig kezdetlegesnek minősíthető többszektoros makrogazdasági modellek hasznosan ötvözni tudják mindazt, amit a különböző közgazdasági elméletek, illetve a matematikai közgazdaságtan és az ökonometria módszerei a gyakorlati felhasználás céljára kínálnak, természetesen a rendelkezésre álló megfigyelések, statisztikai adatok szabta korlátokon belül.

Kerek huszonöt éve veszek részt ilyen irányú, többnyire nemzetközi együttműködésben végzett kutatásokban és alkalmazásokban. Mintegy tizenöt éve szoros munkakapcsolatban Révész Tamás kollegámmal, akinek értékes segítségét ezúttal is szeretném megköszönni. Ma már nincs olyan fejlett gazdaság, ahol ne vennék igénybe ezeket a többszektoros modelleket különböző adó- és kereskedelempolitikai, fejlesztéspolitikai, energia- és környezetpolitikai, valamint hasonló gazdaságpolitikai kérdések elemzésére. De nemcsak a fejlett országokban, hanem egy sor fejlődő ország fejlesztéstervezésében is kiterjedten alkalmazzák ezeket a CGE-modelleket.

Erről a modellezési irányzatról különböző hazai fórumokon és szakmai folyóiratokban magunk többször is számot adtunk.[2] A botladozva átalakuló Kelet-Európában azonban, ritka kivételektől eltekintve, a gazdaságpolitikai döntéshozók és a döntések előkészítői nem tartanak igényt tudományosan megalapozott elemzésekre, és nem is nagyon ismerik ezeket a modelleket. De ezen nem is lehet csodálkozni, régi történelmi hagyománya van ennek az elzárkózásnak. A voluntarizmusra hajló, zavarosban halászó gazdaságpolitikusokat

2 Lásd például Zalai (1998), Révész–Zalai (2000).

mindig is zavarták azok a koordinációs modellek, amelyek ráirányították a figyelmet az előterjesztések inkonzisztenciájára.

E kissé hosszúra sikeredett bevezető gondolatok után itt az ideje, hogy rátérjek előadásomnak a címben jelzett, szűkebb szakmai témájára, amellyel Neumann János egy másik megszívlelendő figyelmeztető megállapítását szeretném alátámasztani: „Ha egy […] diszciplína messzire távolodik el tapasztalati forrásaitól [...] ez súlyos veszélyt rejt magában. Egyre inkább tiszta esztétizálássá válik, egyre tisztább *l'art pour l'art*-á. […] Tapasztalati forrásától nagy távolságban vagy sok absztrakt „behatás" után […] a degenerálódás fenyegeti [...] Kezdetben a stílus rendszerint klasszikus; amikor a barokká válás jelei mutatkoznak, a vészjelzés adott" (1947, a magyar kiadásban: 21 és 27).

Az idézetet nem ismerő olvasó számára talán meglepetésként fog hatni, hogy az idézet a matematikáról és nem a közgazdaságtanról szól. Hát hogyne lenne még inkább érvényes a fenti figyelmeztetés – mi több, kritika – az utóbbira. Ez az, ami miatt az elmúlt évtizedekben ismét egyre többen és egyre erőteljesebben bírálják a modern közgazdaságtant, különösen annak neoklasszikus főáramlatát. A bemutatott példa jól illusztrálja, milyen csapdákat rejt magában az empirikus forrásaitól elzárkózó, „tiszta esztétizálássá […], egyre tisztább *l'art pour l'art*-á" váló absztrakt teoretizálás. A történetnek – Mirowski után szabadon[3] – akár a 'nagyobb a füstje, mint a lángja' címet is adhattuk volna.

2. Ingyen bérmunka és „egymás alá rendelt" egyensúlyi növekedési pályák a Neumann-modellben?

Az alcímben jelzett kérdés már régebb óta foglalkoztatott, de csak az utóbbi években tudtam elegendő időt szakítani arra, hogy jobban elmélyüljek benne.

[3] Mirowski (1989) *More Heat Than Light* cím alatt megjelent, nagy vitát kiváltó könyvében azon az alapon bírálja a neoklasszikus közgazdaságtant, hogy szerinte az nem más, mint a 19. századi fizika átértelmezése a közgazdaságtanra.

A történet Neumann nevezetes stacionárius növekedési modelljéhez kapcsolódik, de a jelenség maga – mint majd látni fogjuk – sokkal tisztább és áttekinthetőbb formában megjelenik a stacionárius Leontief-modell egy Neumannéhoz hasonló változatában is. A vizsgált modell és jelenség szorosan kapcsolódik a neoklasszikus növekedési modell úgynevezett bér-profit, illetve felhalmozás-fogyasztás átváltási határgörbéihez is. Tehát egy önmagában is elég általános és érdekes, módszertanokon és iskolákon átívelő jelenségről van szó, amely szélesebb kör érdeklődésére tarthat számot.

Már csak a rendelkezésre álló idő rövidsége miatt is kénytelen vagyok, amennyire csak a téma kifejtése megengedi, kerülni a technikai, matematikai részleteket. Ezzel is igyekszem betartani Marshall nevezetes, de gyakran megszegett „hatparancsolatából" legalább az első hármat: „(1) A matematikát csak gyorsírásként használd, s ne a kutatás mozgatóerejeként! (2) Csak addig használd, míg eredményre nem jutottál! (3) Az eredményt fordítsd le angolra [mindenki által érthető nyelvre Z. E.]! – s ha nem tudod megoldani sikeresen a feladatot, vesd tűzbe a matematikai változatot!" (Pigou, 1925: 427).

A történet magját képező probléma Neumann modelljének az általánosítása kapcsán bukkant fel. Emlékeztetünk arra, hogy Neumann egy olyan absztrakt gazdaságot vizsgált nevezetes modelljében, amelyben a fogyasztási szokások és termelési (műszaki) lehetőségek egyszer s mindenkorra adottak, és ennek következtében mind az egyensúlyi termelési szerkezet (**x**), mind az árarányok (**p**) időben változatlannak tekinthetők. Ilyen *stacionárius egyensúlyi* állapotban a termékek kibocsátása (**Kx**) és felhasználása (**Rx**) az egyik időszakról a másikra *egyenletes* (λ) *ütemben* változik. A (hosszú távú) *egyensúlyi árak* pedig olyanok lesznek, amelyek egységnyi értékű befektetésre minden alkalmazott tevékenység esetén ugyanakkora *megtérülési* (kamat- vagy profit-) *rátát* (π) eredményeznek. Ebben a sok szempontból briliáns modellben igazolta elsők között Neumann az általános egyensúly létezésének lehetőségét, és elemezte az egyensúlyi megoldások tulajdonságait.[4]

Neumann feltette, hogy kibocsátásként és/vagy ráfordításként minden egyes termék megjelenik minden tevékenységben, azaz $\mathbf{K} + \mathbf{R} > \mathbf{0}$. Ezzel a feltevéssel biztosította a bővülési és a tőkemegtérülési tényező egyértelműségét és azonosságát, ami több szempontból is fontos volt számára. Itt csak azt emeljük ki, hogy a két tényező közös egyensúlyi értéke egyik oldalról nem más, mint az adott termelési-felhasználási együtthatók által lehetővé tett *legnagyobb növekedési ráta*, másik oldalról pedig, a lehetséges árak mellett adódó *legkisebb egyöntetű megtérülési ráta*, amely később szerephez jut dolgozatunkban is.[5]

A fenti feltevés kapcsán Neumann megjegyezte: „másképpen *W* [a gazdaság] össze nem függő részekre bomolhat" (i. m. 166). Ez a megjegyzés, illetve feltevésének következménye kapcsolja össze a Neumann-modellt és a vizsgált kérdést a gazdaság felbonthatóságának a fogalmával. Neumann, mint jelzi, azt akarta kizárni, hogy a gazdaságnak legyen olyan része, amely a gazdaság többi részétől függetlenül is képes működni, mivel nincs szüksége olyan termékekre, amelyeket csak a gazdaság többi, ezen alrendszeren kívüli tevékenységei tudnak kizárólag előállítani.

Egy ilyen *független* alrendszert a teljes technológiai mátrixok meghatározott tulajdonságú alblokkjai képezhetnek. Az input-output modellek esetén, azaz egy Leontief-gazdaságban, az ilyen független alblokk létezése matematikai szempontból annyit jelent, hogy a ráfordítási együtthatók négyzetes mátrixa (**R**) dekomponálható, más szóval reducibilis. Egy Leontief-gazdaság esetében Neumann feltevése elégséges, de nem szükséges feltétele az együttható mátrix

[4] Elemzése számos későbbi fontos modern matematikai közgazdaságtani eredmény zseniális megsejtését rejtette magában (bővebben erről lásd Zalai 1999 és 2004).

[5] Lásd bővebben erről a kérdésről a 2004-es tanulmányomat.

irreducibilitásának. Ebből is sejthető, hogy Neumann matematikai feltevése, amely közgazdasági szempontból indokolhatatlan, a szükségesnél erősebb megkötés. A Neumann által elérni kívánt egyértelmű megoldáshoz elegendő lenne egy olyan feltevés, amely garantálja, hogy egyensúlyi megoldás csak olyan lehet, amelyben minden jószágot termelnek, azaz a kibocsátási vektor pozitív ($\mathbf{Kx} > \mathbf{0}$). Ezt javasolta Gale (1960) elfogadni az irreducibilitás definíciójának a Neumann-modell esetén, és egyúttal azt is elemezte, hogy a $\mathbf{K}$ és $\mathbf{R}$ mátrixok tekintetében ez milyen szerkezeti tulajdonságoknak felel meg.[6]

A Neumann bizonyítását egyszerűsítő Kemeny, Morgenstern és Thompson (1956) szerzők viszont egyáltalán nem ragaszkodtak az irreducibilitás feltevéséhez. A $\mathbf{K} + \mathbf{R} > \mathbf{0}$ feltevés helyett csak azt tették fel, hogy minden jószág újratermelhető, vagyis termék ($\mathbf{K1} > \mathbf{0}$), illetve nem lehet kibocsátás ráfordítás nélkül ($\mathbf{1R} > \mathbf{0}$). De egyidejűleg kiegészítették az egyensúly Neumann által adott feltételeit egy pótlólagos kikötéssel. Nevezetesen előírták azt a teljesen magától érthető feltételt, hogy csak azok a matematikai megoldások érdekesek közgazdasági szempontból, amelyek esetében a *kibocsátások összértéke pozitív* ($\mathbf{pKx} > 0$).

Ez a kiegészítő feltétel elegendő volt az egyensúlyi megoldás létezésének szavatolásához, de már nem garantálta annak Neumann által elvárt egyértelműségét, vagyis megnyílt az út a dekomponálható gazdaságok elemzése számára. A KMT-szerzők meg is mutatták, hogy ilyen gazdaságokban potenciálisan több, véges számú, eltérő egyensúlyi tényezővel rendelkező növekedési pálya létezhet. A dekomponálható gazdaságokkal foglalkozó elemzéseknek kiterjedt irodalma keletkezett, amelyek számos, elsősorban matematikai szempontból érdekes eredményről számoltak be.

[6] Móczár (1980) később pontosította Gale-nek az együttható mátrixok szerkezetére megfogalmazott követelményét.

Úgy tűnt fel, hogy ezek az eredmények közgazdasági szempontból is fontosak lehetnek. Morishima (1971) például a következőképpen indokolta az alternatív növekedési pályák gyakorlati fontosságát: „mind elméleti, mind tervezési szempontból fontos, mivel a valós, dezaggregált gazdaságok általában dekomponálhatók, és történelmi vagy politikai okoknál fogva a kormányzatok gyakran kénytelenek megelégedni [a legnagyobb bővülési ütemnél, Z. E.] alacsonyabb szintű" (i. m. 32) növekedési pályákkal.

Ez valóban izgalmas felfedezésnek hat, mert arra utal, hogy a bér és a profit, illetve a jelen és a jövőbeli fogyasztás csak egy adott növekedési pálya mentén versenyez egymással. Az okos kormányzat képes egy alacsonyabbról magasabb növekedési pályára vezérelni a gazdaságot, és így növelheti az egymással versenyzőnek tűnő célok mindegyikének a szintjét. Izgalmas és érdekes elemzése módszertani szempontból is előremutató volt, részletes matematikai jellemzést adott az 'egymás alá rendelt' (subordinate) egyensúlyi pályákra.

A konklúziók azonban tévesek. Az alábbiakban megmutatjuk, hogy a legnagyobb növekedési ütemnél alacsonyabb szintű egyensúlyi megoldások közgazdasági szempontból értelmetlenek, mert *ingyen bérmunkát* implikálnak. Ezzel azt is igazoljuk, hogy Neumann intuíciója ezúttal is jól működött, helyesen ragaszkodott az egyértelmű megoldáshoz. Ám ehhez nem szükséges feltenni, hogy a gazdaság nem dekomponálható. Ennek belátásához azonban a személyes fogyasztást explicitté kell tenni a modellben, tehát ilyen irányban kell kiterjeszteni, általánosítani Neumann modelljét.

Neumann nem bontotta fel a termékek felhasználását termelő- és személyes fogyasztásra, a konstansnak feltételezett **R** ráfordítási együtthatók ezeket együtt képviselték a modelljében. Az **R** = **A** + **C** összefüggés alapján szétválaszthatjuk egymástól a kétféle célú fogyasztás együtthatóit, ahol **A** mátrix a termelő, **C** a személyes fogyasztási együtthatókat tartalmazza. Ennek alapján értelmezhető lesz a szükséges fogyasztás értéke (**pCx**), amely a klasszikus feltevések szerint meghatározza a béreket.

Nos, éppen ez okozza a vizsgált problémát. A **C** mátrix elemeinek bizonyos értékei mellett ugyanis előfordulhat, hogy a fogyasztás egyensúlyi értéke *nulla* lesz. Ez pedig – tőkés árutermelés és létfenntartó bérek feltevése esetén – egyenesen *ingyen bérmunkát* (zérus egyensúlyi bérrátát) jelent. Homogén munkaerő és egységes bér feltételezése mellett Morishima (1964) azt is megmutatta, hogy e paradox jelenség előfordulásának az a szükséges és elégséges feltétele, hogy az egyórai munkára jutó fogyasztást egy óránál kevesebb munkával is elő lehessen állítani.

A fogyasztás explicit ábrázolására egyébként több út is kínálkozik.[7] Morishima nyomán a klasszikus feltevést vesszük alapul, amely a tiszta tőkés árutermelés egy olyan Neumann-jellegű modelljéhez vezet, amely megtartja az eredeti modell *szimmetriáját*, a felhasználási és a ráfordítási mátrixok azonosságát. Ezen klasszikus feltevés alapján ábrázolta Bródy András (1969) is a munkaerőt és a munkabért a tőkés árutermelés Leontief-típusú zárt modelljében.

Homogén munkaerő esetén a munkaerő felhasználási együtthatóit egy **m** (legalább félig pozitív) sorvektorban foghatjuk össze. Az egy munkaórára jutó (a munkaerő újratermeléséhez *szükséges*) *fogyasztást* egy **c** (szintén legalább félig pozitív) oszlopvektor elemeiként ábrázolhatjuk. Így a fogyasztási együtthatók **C** mátrixát a $\mathbf{c}\circ\mathbf{m}$ diadikus szorzat formájában definiálhatjuk. Ezt az utat követve a Neumann-modell **R** ráfordítási együtthatóit $\mathbf{A} + \mathbf{c}\circ\mathbf{m}$ formában bonthatjuk fel. Az így kapott, Morishima által Marx és Neumann nevével fémjelzett modell egyensúlyi feltételeinek magvát az alábbi feltételek adják:

[7] Lásd Bauer (1974) áttekintő cikkét ezekről a lehetőségekről.

(MN-0)	$\alpha > 0,\ \mathbf{x}, \mathbf{p} \geq \mathbf{0}$	(a változók előjele)
(MN-1)	$\mathbf{Kx} \geqq \alpha \cdot (\mathbf{A} + \mathbf{c} \circ \mathbf{m})\mathbf{x}$	(egyensúlyi termelés)
(MN-2)	$\mathbf{pK} \leqq \alpha \cdot \mathbf{p}(\mathbf{A} + \mathbf{c} \circ \mathbf{m})$	(egyensúlyi árrendszer)[8],

ahol **K** a kibocsátási együtthatók nem negatív mátrixa, α pedig a bővülési, illetve kamattényező közös értéke ($\lambda = \pi = \alpha - 1$ bővülési ütem, illetve kamatláb), amelyre a továbbiakban *egyensúlyi tényezőként* fogunk utalni az egyszerűség kedvéért.

A modell még nem teljes, mert egyelőre még nyitva hagytuk azokat a kérdéseket, hogy milyen feltevésekkel élünk a modell paramétereire, illetve hogyan kötjük meg az **x** és a **p** változók szintjét, továbbá, hogy élünk-e a KMT-féle kiegészítő egyensúlyi feltétellel. Mielőtt azonban ezekre a kérdésekre válaszolnánk, átmenetileg kiiktatjuk az ikertermelést és a technológiai választékot, vagyis a Leontief-féle input-output technológia feltevésével élve egyszerűsítjük az elemzést. A modell így nyert változata sokat fog segíteni a jelentkező problémák közgazdasági természetének a tisztázásában.

3. A paradox jelenségek elemzése a modell Leontief-technológián alapuló változatában

Ha mindegyik tevékenység csak egy terméket, és mindegyik terméket csak egy tevékenység állít elő, akkor a kibocsátási mátrix az egységmátrix (**E**), a termelő ráfordítási együtthatók mátrixa (**A**) pedig egy nemnegatív négyzetes mátrix lesz. Ez utóbbiak elemzéseinket jelentős mértékben megkönnyítik, mivel építhetünk a nevezetes és erőteljes Perron–Frobenius-féle tételekre. Hangsúlyozni szeretném, hogy ettől a modell még megőrzi alapvető Neumann-szemléletét, és

[8] A $\geqq$ ($\leqq$) jelek gyenge, a $\geq$ ($\leq$) jelek félig, legalább részben egyenlőtlenséget jelentenek.

még mindig közelebb fog állni ahhoz, mint a stacionárius Leontief-modellhez. Az így kapott modellt *Leontief–Neumann-modellnek* fogjuk nevezni.

A Neumann- és a Leontief-féle modellek számos lényeges alapvonásukban eltérnek egymástól, ezt gyakran eltakarja a konstans ráfordítási együtthatók alkalmazásában megmutatkozó hasonlóságuk. A lényeges különbségek érzékeltetése céljából érdemes röviden rámutatni, hogyan juthatunk el ugyanehhez a modellváltozathoz egy stacionárius Leontief-modellből kiindulva.

A Leontief-modellek jellemzően nem zárt, hanem nyílt modellek (van külső fogyasztás), és az egyensúlyi feltételeket egyenlőségek és nem egyenlőtlenségek formájában írjuk elő, rendszerint elvárjuk (*ex post* elemzésekben pedig egyenesen megköveteljük), hogy a termelési és az árváltozók mind pozitívak legyenek. Ha az egyensúlyi feltételeket átírjuk gyenge egyenlőtlenségek formájába, kibővül a Leontief-modell potenciális megoldásainak a köre, és már nem lesz mindig és minden változó egyensúlyi értéke pozitív. Továbbá, Neumann éves termelési ciklust és tőkemegtérülést feltételezett, emiatt a lekötött tőkék megegyeznek a felhasznált tőkékkel. A több időszakos Leontief-modellekben ezzel szemben csak a beruházások beérése tekintetében élünk az éves beérési ciklus feltevésével, a tőkelekötési együtthatók és a folyó ráfordítási együtthatók mátrixai jellemzően különböznek egymástól. Ezt is fel kell adnunk ahhoz, hogy eljussunk a Leontief-technológián nyugvó Neumann-modellhez.

A *Leontief–Neumann-modell* egyensúly feltételei a következők lesznek:

$$\alpha > 0,\ \mathbf{x},\ \mathbf{p} \geqq \mathbf{0},\ \mathbf{1x} = \mathbf{p1} = 1$$

$$\text{(LNM–KMT)} \qquad \mathbf{x} \geqq \alpha\cdot\mathbf{Rx} = \alpha\cdot(\mathbf{A} + \mathbf{c}\circ\mathbf{m})\mathbf{x}$$

$$\mathbf{p} \leqq \alpha\cdot\mathbf{pR} = \alpha\cdot\mathbf{p}(\mathbf{A} + \mathbf{c}\circ\mathbf{m})$$

$$\mathbf{px} > 0.$$

Az LNM–KMT-modellnek mindig lesz megoldása, ha teljesül az $\mathbf{1R} > \mathbf{0}$ kikötés, ezt biztosítja a *munkaerő nélkülözhetetlensége* feltevés elfogadása. Ennek a Morishima (1964) által bevezetett feltevésnek az értelemszerű definíciója a következő: nem lehetséges újratermelés munkaerő felhasználása nélkül, azaz nincs olyan $\alpha > 0$ és $\mathbf{x} \geq \mathbf{0}$, amelyek esetén teljesülnek az $\mathbf{x} \geqq \alpha \cdot (\mathbf{A} + \mathbf{c} \circ \mathbf{m})\mathbf{x}$ mérlegegyensúlyi feltételek (lehetséges újratermelés), és $\mathbf{mx} = 0$ (nem használnak fel munkaerőt).

Ha a munka nélkülözhetetlen, és van személyes fogyasztás, akkor vannak olyan *termékek (alapvető* vagy *létfenntartó javak)*, amelyek – közvetlenül vagy közvetve – minden termék előállításához szükségesek. Ezek pedig nem mások, mint mindazok a javak, amelyekre a $\mathbf{c}$ fogyasztási kosárban lévő termékek előállításához szükség van.

1. *megállapítás:* az LNM–KMT-modellben ábrázolt gazdaság pontosan akkor *reducibilis*, ha léteznek *luxus-* (nem létfenntartó) *termékek*. A létfenntartó árukat termelő ágak együttesét *létfenntartó algazdaságnak*, a luxustermékeket előállító ágazatok együttesét *luxus algazdaságnak* fogjuk hívni.[9]

Ha léteznek luxustermékek is, akkor a termelőágakat és a termékeket egyértelműen és teljes körűen be tudjuk sorolni a két algazdaság valamelyikébe. Soroljuk előre a létfenntartó ágakat és a termékeket, és jelölje ezek indexhalmazát I_1, I_2 pedig a luxusterméket. Feltevéseink mellett létfenntartó termékek mindig vannak, de a luxustermékek nem feltétlenül (I_2 üres halmaz is lehet). Egyszerűen belátható, hogy az utóbbi esetben az $\mathbf{R} = (\mathbf{A} + \mathbf{c} \circ \mathbf{m})$ mátrix *irreducibilis*

[9] A létfontosságú és a luxusáruk fenti fogalma nyilvánvalóan rokon Sraffa (1960) *bázis-* és *luxustermék* fogalmával, erről tanúskodnak a használt elnevezések is. Sraffa azonban csak a termelés körén belül (az $\mathbf{A}$ mátrixra) definiálta a bázistermékeket, és posztulátumának nem volt valós közgazdasági alapja (egyszerűen feltette ilyenek létezését).

lesz. Ellenkező esetben az **A** mátrix $\mathbf{A}_{21}$ és a **c** vektor $\mathbf{c}_2$ alblokkjának minden eleme 0 lesz, és az **R** mátrixot felbonthatjuk az alábbi formában:

$$\begin{array}{c|c|c|}
 & I_1 & I_2 \\
\hline
I_1 & \mathbf{R}_{11} & \mathbf{R}_{12} \\
\hline
I_2 & \mathbf{0} & \mathbf{R}_{22} \\
\hline
\end{array}
\quad \text{ill.} \quad
\begin{array}{|c|c|}
\multicolumn{1}{c}{I_1} & \multicolumn{1}{c}{I_2} \\
\hline
\mathbf{A}_{11}+\mathbf{C}_{11} & \mathbf{A}_{12}+\mathbf{C}_{12} \\
\hline
\mathbf{0} & \mathbf{A}_{22} \\
\hline
\end{array}$$

ahol $\mathbf{C}_{11} = \mathbf{c}_1 \circ \mathbf{m}_1$ és $\mathbf{C}_{12} = \mathbf{c}_1 \circ \mathbf{m}_2$.

Viszonylag egyszerűen igazolhatók[10] az alábbi megállapítások.

2. *megállapítás*: a *létfenntartó algazdaság* $\mathbf{R}_{11}$ együttható mátrixa irreducibilis, és $\mathbf{R}_{12}$ nem lehet a nulla mátrix (azaz vagy az $\mathbf{1A}_{12}$ vagy az $\mathbf{m}_2$ vektornak szükségképpen van pozitív komponense), sőt $\mathbf{1R}_{12}(\mathbf{E} - \mathbf{R}_{22})^{-1} > \mathbf{0}$, ha $\mathbf{R}_{22}$ produktív. Az $\mathbf{R}_{11} = (\mathbf{A}_{11} + \mathbf{C}_{11})$, illetve az $\mathbf{R}_{22} = \mathbf{A}_{22}$ mátrix *domináns sajátértéke*, a két mátrix irreducibilitását szavatoló feltevéseink miatt pozitív lesz.

Definíció: Az $\mathbf{R}_{11} = (\mathbf{A}_{11} + \mathbf{C}_{11})$, illetve az $\mathbf{R}_{22} = \mathbf{A}_{22}$ mátrixok *domináns sajátértékének* reciprokait a két algazdaság *saját megtérülési tényezőinek* vagy *saját bővülési potenciáljainak* nevezzük, és $\rho^{(1)}$ és $\rho^{(2)}$ skalárral jelöljük.

Ha vannak luxustermékek, akkor az egyensúlyi feltételeket létfenntartó és luxustermékek szerint felbontva kapjuk:

$$\mathbf{x}_1 \geqq \alpha \cdot (\mathbf{R}_{11}\mathbf{x}_1 + \mathbf{R}_{12}\mathbf{x}_2)$$

$$\mathbf{x}_2 \geqq \alpha \cdot \mathbf{R}_{22}\mathbf{x}_2$$

$$\mathbf{p}_1 \leqq \alpha \cdot \mathbf{p}_1\mathbf{R}_{11}$$

[10] Az érdeklődő a dolgozatban közölt tételek döntő többségének bizonyítását megtalálja a Zalai (2000)-es könyvben.

$$\mathbf{p}_2 \leqq \alpha\cdot(\mathbf{p}_1\mathbf{R}_{12} + \mathbf{p}_2\mathbf{R}_{22}).$$

Az elemzések egyszerűbbé tétele érdekében a továbbiakban feltesszük, hogy az $\mathbf{R}_{22} = \mathbf{A}_{22}$ mátrix irreducibilis. A kapott felbontás matematikai elemzéséből a következőket állapíthatjuk meg.

> *3. megállapítás* (Az LNM–KMT-modell megoldásainak jellemzése): Ha *nincsenek luxusáruk*, akkor *egyetlen* egyensúlyi megoldás létezik, amelynek α bővülési tényezője az $\mathbf{R}$ mátrix (pozitív) domináns sajátértékének reciproka, az egyensúlyi árak ($\mathbf{p}$) és a tevékenység- (kibocsátás-) szintek ($\mathbf{x}$) vektora pedig az ahhoz tartozó, *arányaikban egyértelműen meghatározott*, határozottan *pozitív* bal és jobb oldali sajátvektorok lesznek.

Ha *vannak luxusáruk*, akkor két egyensúlyi megoldás is létezhet. Mindig lehetséges megoldás

$$\text{(M1)} \qquad \alpha = \rho^{(1)}, \quad \mathbf{x}^{(1)} = (\mathbf{x}_1^*, \mathbf{0}) \quad \text{és} \quad \mathbf{p}^{(1)} = (\mathbf{p}_1^*, \mathbf{p}_2),$$

ahol $\mathbf{x}_1^*$ és $\mathbf{p}_1^*$ az $\mathbf{R}_{11}$ együttható mátrix domináns sajátértékéhez tartozó, arányaikban egyértelműen meghatározott, határozottan pozitív jobb és bal oldali *sajátvektorok*, és $\mathbf{p}_2$ értéke általában nem egyértelműen meghatározott. $\mathbf{p}_2 = \mathbf{0}$ mindig lehetséges megoldás, de $\mathbf{p}_2$ lehet határozottan pozitív is, sőt, ha $\rho^{(2)} > \rho^{(1)}$, akkor van olyan lehetséges pozitív értéke is, amely eleget tesz a $\mathbf{p}_2 = \alpha\cdot(\mathbf{p}_1\mathbf{R}_{12} + \mathbf{p}_2\mathbf{R}_{22})$ egyenlőségnek.

Ha $\rho^{(2)} > \rho^{(1)}$, akkor létezik *másik megoldás* is, éspedig

$$\text{(M2)} \qquad \alpha = \rho^{(2)}, \quad \mathbf{x}^{(2)} = (\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2^*) \quad \text{és} \quad \mathbf{p}^{(2)} = (\mathbf{0}, \mathbf{p}_2^*),$$

ahol $\mathbf{x}_2^*$ és $\mathbf{p}_2^*$ az $\mathbf{R}_{22}$ együttható mátrix domináns sajátértékéhez tartozó, arányaikban egyértelműen meghatározott, határozottan pozitív jobb és bal oldali *sajátvektorok*. $\mathbf{x}_1$ szintén határozottan pozitív vektor, de nagysága nem egyértelműen meghatározott, és megválasztható olyannak is, amely esetén a létfenntartó árukból többlet (túlkínálat) lesz: $\mathbf{x}_1 > \rho^{(2)} \cdot (\mathbf{R}_{11}\mathbf{x}_1 + \mathbf{R}_{12}\mathbf{x}_2)$.[11]

A fenti megállapítások bizonyításának közlése helyett a közgazdasági tartalmukra összpontosítjuk a figyelmet.

Ha a munkaerő nem nélkülözhető, akkor mindig létezik pozitív létfenntartó bérrátát ($w = \mathbf{pc}$) eredményező, közgazdasági szempontból elfogadható megoldása az LNM–KMT-modellnek (M1). Egyensúlyi állapotban *luxusárukat nem termelhetnek*, hiába tartalmazza a figyelembe vett technológia ennek lehetőségét. Az egyensúlyi tényező mindig megegyezik a létfenntartó algazdaság *saját bővülési* (profit-) *potenciáljával*. *Luxusárukat* még akkor sem termelnek, ha egyébként lehetne találni olyan árrendszert, amely ugyanakkora profitrátát szavatolna az utóbbiak termelése, mint a létfenntartó termékeké esetén. Ilyen árak ugyanis csak akkor létezhetnének, ha a létfenntartó iparágak bővülési potenciálja kisebb lenne, mint a luxusiparágaké, amely miatt nem lennének képesek lépést tartani a létfenntartó alrendszer növekedésével.

Látjuk ugyanakkor, hogy az LNM–KMT-modell egyensúlyi feltételeinek létezhet olyan matematikai megoldása is (M2), amelyben termelnek luxusárukat is. Ilyen megoldás akkor és csak akkor létezik, ha a *luxusiparágak* alrendszerének *saját* bővülési potenciálja *kisebb*, mint a létfenntartó alrendszeré. Ebben a megoldásban a gazdaság nem nő a lehetséges legnagyobb ütemben, és a fogyasztás egyensúlyi értéke csak nulla lehet. Ilyenkor a luxus algazdaság a létfenntartó algazdaságnál kisebb bővülési potenciálja határozná meg az egész gazdaság általános növekedési ütemét, a létfenntartó áruk pedig szabad javak-

[11] Ha $\mathbf{R}_{22}$ reducibilis lenne, akkor a luxuságazatokat magukat is további alágazatokba sorolhatjuk. Ilyen esetben további megoldások is létezhetnének, amelyek természete hasonló lenne az M2 megoldásához. Ezek tárgyalása csak feleslegesen bonyolítaná a jelen elemzést. Ennek elkerülése végett tettük fel $\mathbf{R}_{22}$-ről, hogy irreducibilis.

ká válnának, ez pedig közgazdasági szempontból értelmetlen, fenntarthatatlan egyensúlyi megoldás.

A fenti elemzésből az is világossá válik, hogy mi teszi lehetővé a közgazdasági szempontból értelmetlen, illetve több matematikai megoldás létezését. Az, hogy miközben a figyelembe vett technológia tartalmazza a luxusáruk termelésének a lehetőségét, addig *luxusfogyasztás* egyáltalán nem szerepel a modellben, amely az utóbbi áruk termelésének értelmet adhatna. A *luxustermékeket* teljesen *öncélúan*, csak saját maguk újratermelése céljából állítanák elő az ilyen gazdaságban.

A luxustermékek előállítására fordított minden ráfordítás, így a munkaerő is, teljesen veszendőbe menne ilyen esetben. Megmutatható, hogy növelni lehetne az egy munkaórára jutó fogyasztás szintjét (nagyobb **c** együtthatók) anélkül, hogy emiatt akár a növekedési ütem, akár a profitráta csökkenne.[12] Nem beszélve arról, hogy ha a létfenntartó cikkek szabad javak, vajon mi fogná vissza fogyasztásuk minden határon túli növelését? Egyáltalán mi ösztönözné a munkásokat ingyen bérmunka vállalására egy piacgazdaságban? Mindez teljesen ellentétes a piaci egyensúly szellemével.

A közgazdasági szempontból értelmetlen megoldás valódi oka tehát az, hogy *luxusfogyasztás* nélkül teljesen értelmetlen *luxusáruk* szerepeltetése a stacionárius egyensúly Leontief–Neumann-modelljében. Két dolgot tehetünk.

A) Megtartjuk Neumann eredeti feltevését, az árak meghatározásában szereplő *ráfordítási* és a mérlegegyensúlyi feltételekben megjelenő *felhasználási együtthatók* azonosságát, a naturális (primális) és értékbeli (duális) egyensúly feltételeinek szigorú szimmetriáját. Ennek a feltevésnek a közgazdasági tartal-

[12] Egy másik lehetőség: változatlan foglalkoztatási szint mellett csökkenteni lehetne az egy munkás által ledolgozandó munkaórák számát (nagyobb **m** együtthatók).

ma szerint minden folyó felhasználás a termelés érdekében történik, és így a termelési költségek részévé válik. A ráfordítási együtthatók által képviselt (szükséges) fogyasztáson felül tehát nincs más (luxus-) fogyasztás. Ha viszont nincs luxusfogyasztás, akkor nincs helye a modellben a luxustermékeknek sem. A jól specifikált modellel ábrázolt gazdaság tehát *szükségképpen irreducibilis*. Ez a megállapítás igazolni látszik Neumannt, aki ki akarta zárni elemzéséből a dekomponálható gazdaságokat.

B) A másik lehetőséget a modell olyan kiterjesztése kínálja, amelyben megkülönböztetjük egymástól a *szükséges* és a *luxusfogyasztást* (**C** és **G** együtthatók), de ugyanakkor megtartjuk a *létfenntartó bérek* feltevését. A modell ilyen általánosítása megszünteti a ráfordítási (**A** + **C**) és a felhasználási (**A** + **C** + **G**) együtthatók azonosságát, a modell eredendő szimmetriáját. Egy ilyen stacionárius modellben már figyelembe vehetők luxustermékek is, lehetőség nyílik érdekes és értelmes további közgazdasági elemzésekre.[13]

4. A paradox jelenségek elemzése az általános Marx–Neumann-modellben

Emeljük ki az ikertermelés és a technológiai választék nélküli modell elemzéséből nyert fontosabb megállapításokat, és tegyük vizsgálat tárgyává őket az általános modell keretei között:

a) a modellnek mindig van olyan közgazdasági szempontból értelmes megoldása, amelyben a fogyasztás értéke pozitív;

b) az egyensúlyi tényező, sőt a pozitív skalárral való szorzástól eltekintve a termelési és az árszerkezet tekintetében is egyetlen ilyen megoldás létezik, éspedig a legnagyobb arányos növekedési ütemhez rendelhető egyensúlyi állapot;

[13] Ezekről bővebben lásd Zalai (2002).

c) más lehetséges, a fentinél kisebb ütemű arányos növekedési pályát csak olyan árrendszer tehetne egyensúlyi megoldássá, amely esetén a fogyasztás értéke nulla lenne, ez viszont közgazdasági szempontból értelmetlen megoldás;

d) ilyen megoldások esetén ugyanis az egy foglalkoztatottra eső fogyasztás növelhető lenne a növekedési ütem, illetve a profitráta csökkenése nélkül; továbbá

e) ilyen megoldás csak akkor létezhet, ha vannak luxustermékek, amelyek a termelési rendszert dekomponálhatóvá teszik;

f) az utóbbiak azonban előzetesen kiszűrhetők a modellből, és ezért joggal feltehetjük, mint Neumann tette, hogy a vizsgált gazdaság nem dekomponálható, és ez garantálja az egyensúlyi tényező tekintetében egyetlen megoldás létezését.

Nézzük meg most, fennállnak-e, illetve hogyan módosulnak ezek a megállapítások az általános Marx–Neumann-modellben. Ennek a modellnek alapvető egyensúlyi feltételei most a következők lesznek:

(MN-0) $$\alpha > 0,\ \mathbf{x},\ \mathbf{p} \geq \mathbf{0}$$

(MN-1) $$\mathbf{Kx} \geqq \alpha\cdot\mathbf{Rx} = \alpha\cdot(\mathbf{A} + \mathbf{c}\circ\mathbf{m})\mathbf{x}$$

(MN-2) $$\mathbf{pK} \leqq \alpha\cdot\mathbf{pR} = \alpha\cdot\mathbf{p}(\mathbf{A} + \mathbf{c}\circ\mathbf{m})$$

Egészítsük ki ezeket a feltételeket az egyensúlyi tevékenységek és árak szintjét meghatározó szokásos, Neumann által is alkalmazott

(N-0) $$\mathbf{1x} = \mathbf{p1} = 1$$

megkötésekkel, illetve a Kemeny–Morgenstern–Thompson-féle értékteremtés feltételével:

(KMT-3) $\mathbf{pKx} > 0.$

A fenti feltevésekkel definiált Neumann-modellnek, mint tudjuk, mindig van megoldása, ha az együttható mátrixok eleget tesznek a $\mathbf{K1} > \mathbf{0}$, illetve $\mathbf{1R} > \mathbf{0}$ KMT-feltevéseknek. A kérdés tehát csak az, hogy van-e ezek között közgazdasági szempontból értelmes megoldás. Nyilván érdektelenek az olyan megoldások, amelyekben nem használnak fel munkaerőt, azaz $\mathbf{mx} = 0$ (teljesen automatizált gazdaság), illetve amelyekben a fogyasztási cikkek mind szabad javak, azaz $\mathbf{pc} = 0$ (ingyen bérmunka).

A teljes automatizálás lehetőségét eleve kizárhatjuk a munkaerő nélkülözhetetlenségének a feltevésével. A továbbiakban ezért végig feltesszük, hogy nincs olyan $\alpha > 0$ és $\mathbf{x} \geq \mathbf{0}$, amelyek esetén $\mathbf{Kx} \geqq \alpha\cdot(\mathbf{A} + \mathbf{c}\circ\mathbf{m})\mathbf{x}$, és $\mathbf{mx} = 0$. Az ingyen bérmunka lehetőségét azonban már nem lehet egy ehhez hasonló, egyszerű és kézenfekvő előzetes feltevéssel kizárni.

A munkaerő nélkülözhetetlensége feltevés biztosítja azt is, hogy a lehetséges bővülési tényezők tartománya felülről korlátos lesz. Ez volt az $\mathbf{1R} > 0$ KMT-feltevés funkciója, amelyet ilyen feltevés mellett már nem kell külön előírni. A pozitív bővülési tényező létezését garantáló $\mathbf{K1} > 0$ feltevést viszont továbbra is megtartjuk.[14] Mindez biztosítja, hogy a fenti, a (KMT-3) feltétellel definiált Marx–Neumann-modellnek legyen megoldása.

De vajon mi dönti el, hogy létezik-e pozitív egyensúlyi bérrátával rendelkező megoldása? Erre a kérdésre világos és egyértelmű választ kapunk, ha feltesszük, hogy létezik közgazdasági szempontból értelmes megoldás, amelyben tehát $\mathbf{mx} > 0$ és $\mathbf{pc} > 0$. Ekkor nincs akadálya annak, hogy az $\mathbf{x}$ és a $\mathbf{p}$ változók

[14] Megmutatható, hogy ez a feltevés enyhíthető azzal, hogy van egyáltalán olyan $\mathbf{x}^* \geq \mathbf{0}$, amely esetén $\mathbf{Kx}^* > \mathbf{0}$. Ennek azonban csak a Neumann-modell egy olyan általánosításában van jelentősége, ahol a $\mathbf{K}$ mátrix nettó kibocsátási együtthatókat tartalmaz, így lehetnek negatív elemei is (lásd Zalai 2006).

szintjét megváltoztassuk, éspedig oly módon, hogy az $\mathbf{1x} = \mathbf{p1} = 1$ egyenletek helyett $\mathbf{mx} = \mathbf{pc} = 1$ egyenlőségek teljesüljenek. Ha ezt megtesszük, akkor az MN-modell homogén formában felírt feltevéseit átírhatjuk az alábbi inhomogén alakokba:

$$\text{(MN-1a)} \qquad \mathbf{Kx} \geqq \alpha\cdot(\mathbf{Ax} + \mathbf{c})$$

$$\text{(MN-2a)} \qquad \mathbf{pK} \leqq \alpha\cdot(\mathbf{pA} + \mathbf{m})$$

Morishima megmutatta, hogy kölcsönös és egyértelmű kapcsolat létesíthető a vizsgált modell közgazdasági szempontból értelmes megoldásai és az alábbi (LP1) lineáris programozási feladatpár (optimális) megoldásai között.

4. megállapítás: a Marx–Neumann-modellnek akkor és csak akkor létezik olyan (α, $\mathbf{x}$, $\mathbf{p}$) megoldása, amelyben $\mathbf{pc} > 0$, ha α rögzített értéke mellett létezik megoldása az LP1 feladatpárnak, és abban a célfüggvények (közös) optimális értéke 1.

$$\begin{array}{lll} & \text{(P1)} & \text{(D1)} \\ & \mathbf{x} \geqq \mathbf{0} & \mathbf{p} \geqq \mathbf{0} \\ \text{(LP1)} & [(1/\alpha)\cdot\mathbf{K} - \mathbf{A}]\mathbf{x} \geqq \mathbf{c} & \mathbf{p}[(1/\alpha)\cdot\mathbf{K} - \mathbf{A}] \leqq \mathbf{m} \\ & \mathbf{mx} \to \text{min!} & \mathbf{pc} \to \text{max!} \end{array}$$

Az $\mathbf{mx}$ függvény minimuma az a legkisebb munkaráfordítás, amely az α bővülési tényező mellett egységnyi munkaerő fogyasztásának az előállításához szükséges. Ha $\mathbf{mx}^0 = 1$, az azt jelenti, hogy minden ráfordítás a munkaerő újratermelését szolgálja. Ez vezet el a következő megállapításhoz.

5. megállapítás: adott paraméterek mellett a Marx–Neumann-modell KMT-feltételeket kielégítő α egyensúlyi tényezőjű megoldása akkor és csak akkor lesz közgazdasági szempontból értelmes, ha nincs a munkaerő-újratermelés szempontjából felesleges munkaráfordítás.

Ugyanahhoz a következtetéshez jutottunk tehát, mint a Leontief-technológia esetén, ahol láttuk, hogy a fogyasztási javak nulla ára azt jelzi, hogy az adott α bővülési tényezőt rögzítve, az egyórai munkára eső fogyasztás (**c**) növelésével vagy a munkaintenzitás csökkentésével (**m** növelésével) megteremthetjük a konzisztenciát a $\mathbf{C} = \mathbf{c} \circ \mathbf{m}$ fogyasztási és a **K** és **A** technológiai együtthatók, illetve a versenyzői egyensúly feltevése között. Ezt a következő gondolatmenettel láthatjuk be.

Helyettesítsünk az LP1 feladatban **c** helyébe $\varphi \cdot \mathbf{c}$-t, ami ugyanazt jelenti, mintha a $\mathbf{c} \circ \mathbf{m}$ fogyasztási együttható mátrixelemeit rendre megszoroznánk a φ skalárral. Láttuk, hogy adott α bővülési tényező és $\varphi \cdot \mathbf{c}$ fogyasztói kosár pontosan akkor lehet közgazdasági szempontból értelmes egyensúlyi megoldás része, ha $\varphi \cdot \mathbf{c}$ előállításának minimális munkaigénye éppen 1. Viszonylag könnyen belátható, hogy az LP1 feladat célfüggvényének optimális értéke ($\mathbf{m}\mathbf{x}^0$) φ monoton növekvő függvénye, ha a munkaerő nem nélkülözhető, mint feltettük. Ha tehát az az LP1 feladatnak egyáltalán van lehetséges megoldása, φ-nek mindig lesz olyan értéke, amely esetén $\varphi \cdot \mathbf{c}$ előállításának minimális munkaigénye éppen 1 lesz. Az is egyszerűen igazható, hogy φ ezen értékét, illetve az egyensúlyi termelési és árrendszert megkaphatjuk az alábbi LP2 feladat megoldásából:

	(P2)	(D2)
	$\varphi \geqq 0,\ \mathbf{x} \geqq \mathbf{0}$	$w \geqq 0,\ \mathbf{p} \geqq \mathbf{0}$
(LP2)	$[(1/\alpha)\cdot\mathbf{K} - \mathbf{A}]\mathbf{x} \geqq \varphi \cdot \mathbf{c}$	$\mathbf{p}[(1/\alpha)\cdot\mathbf{K} - \mathbf{A}] \leqq w \cdot \mathbf{m}$
	$\mathbf{m}\mathbf{x} \leqq 1$	$\mathbf{p}\mathbf{c} \geqq 1$
	$\varphi \to \max!$	$w \to \min!$

Fogalmazzuk meg a levonható következtetést ismét önálló megállapítás formájában.

6. *megállapítás:* ha a Marx–Neumann-modellnek a KMT-feltételek mellett kapott megoldása közgazdasági szempontból nem értelmes ($\mathbf{pc} = 0$), akkor a legnagyobb lehetséges bővülési tényezőhöz mindig egyértelműen hozzárendelhető egy olyan φ skalár, amellyel a fogyasztási együtthatókat arányosan növelve közgazdasági szempontból értelmes megoldáshoz juthatunk.

Elérkeztünk a dolgozatunk célja szempontjából minden bizonnyal a legfontosabb megállapításhoz. Ez lesz az, amely igazolja Neumann sejtését, hogy be lehet, sőt célszerű is bevezetni az elemzésbe olyan feltevést, amely biztosítja az egyensúlyi tényező unicitását. Ez a megállapítás egyszersmind a Neumann-modell KMT-féle általánosításának a kritikája is.

7. *megállapítás:* ha a KMT-feltételek mellett létezik közgazdasági szempontból értelmes ($\mathbf{pc} > 0$) megoldása a Marx–Neumann-modellnek, akkor annak egyensúlyi tényezője szükségképpen a legnagyobb lehetséges arányos bővülési tényező lesz.

Mivel a fenti állítás perdöntő, rövid és ebben a formájában legalábbis az irodalomban nem ismert bizonyítását kivételesen ismertetjük.[15]

Bizonyítás: Jelöljük a $\mathbf{K}$, $\mathbf{R} = (\mathbf{A} + \mathbf{c}\circ\mathbf{m})$ Neumann-technológia által megengedett növekedési tényezők halmazát $H(\mathbf{K}, \mathbf{R})$-rel:

$$H(\mathbf{K}, \mathbf{R}) = \{\alpha : \exists \mathbf{x} \geqq \mathbf{0},\ [\mathbf{K} - \alpha \cdot \mathbf{R}]\mathbf{x} \geqq \mathbf{0},\ \mathbf{1x} = 1\}.$$

[15] Ismereteim szerint Bromek (1974) volt az első, aki ezt megmutatta a fogyasztás-felhalmozás átváltási frontvonal kapcsán.

A munka nélkülözhetetlensége miatt a fenti definícióban szereplő α és $\mathbf{x}$ esetén $\mathbf{mx} > 0$, valahányszor $\alpha > 0$. Ezért az adott $\mathbf{x}$ vektorból ($\mathbf{mx}$-szel elosztva) mindig képezhető olyan $\mathbf{x}'$ vektor, amely esetén $[\mathbf{K} - \alpha\cdot\mathbf{R}]\mathbf{x}' \geqq \mathbf{0}$ és $\mathbf{mx}' = 1$.

Tegyük fel, hogy α^* nem a maximális tényező. Ekkor van olyan $\alpha' > \alpha^*$, hogy $\alpha' \in H(\mathbf{K}, \mathbf{R})$, és ahhoz tartozik olyan $\mathbf{x}' \geqq \mathbf{0}$, hogy egyrészt $\mathbf{mx}' = 1$, másrészt $[\mathbf{K} - \alpha'\cdot\mathbf{R}]\mathbf{x}' \geqq \mathbf{0}$, azaz $(1/\alpha')\cdot\mathbf{Kx}' \geqq \mathbf{Ax}' + \mathbf{c}$. Az utóbbi egyenlőtlenségből látható, hogy $[(1/\alpha')\cdot\mathbf{Kx}']_i > 0$, valahányszor $c_i > 0$, és mivel $1/\alpha^* > 1/\alpha'$, ezért

$$[(1/\alpha^*)\cdot\mathbf{Kx}' - \mathbf{Ax}']_i > c_i, \qquad \text{ha } c_i > 0,$$

$$[(1/\alpha^*)\cdot\mathbf{Kx}' - \mathbf{Ax}']_i \geqq 0, \qquad \text{egyébként.}$$

Mindezek miatt található olyan $0 < k < 1$, hogy

$$k\cdot[(1/\alpha^*)\cdot\mathbf{K} - \mathbf{A}]\mathbf{x}' \geqq \mathbf{c}.$$

Az $\mathbf{x}^* = k\cdot\mathbf{x}'$ vektor $\alpha = \alpha^*$ esetén kielégíti az (LP1) feladat primális feltételeit, és $\mathbf{mx}^* < 1$. A célfüggvény optimális értéke ennél csak kisebb lehet. A fentiek értelmében tehát (α^*, $\mathbf{p}$, $\mathbf{x}$) nem lehetett volna az MN-modell egyensúlyi megoldása. Q. E. D.

Megállapításunk egyrészt arra mutat rá, hogy ha az *a priori* adott paraméterek mellett léteznek eltérő egyensúlyi tényezővel rendelkező megoldások (a gazdaság dekomponálható), csak a legnagyobb bővülési tényezőhöz tartozó megoldások lesznek érdekesek közgazdasági szempontból, a többiek nem.

Másrészt, a paraméterekre tett KMT-feltevések ($\mathbf{K1} > \mathbf{0}$ és $\mathbf{1R} > \mathbf{0}$) már nem elégségesek a közgazdasági szempontból releváns megoldások létezéséhez, ezeket ki kell egészíteni a *paraméterek konzisztenciájára* vonatkozó feltevéssel. Ezt a konzisztenciakritérium kissé bonyolult formában ugyan, de – homogén munkaerő feltételezése esetén – a 4. megállapítás ismeretében megadható. Nevezetesen, a megállapításban szereplő „egyensúlyi tényező” helyébe „legnagyobb bővülési tényezőt” kell helyettesítenünk. Tehát a mérlegegyensúlyi feltételt kielégítő legnagyobb bővülési tényezőt kell az LP1 feladat paraméterének választani. Ez utóbbi létezését pedig a kibocsátási és a ráfordítási paraméterekre tett KMT-feltevések szavatolják.

A priori adott, voltaképpen tetszőleges paraméterekről csak utólag derülhet ki, hogy konzisztensek egymással. Ha nem, akkor a hiányzó konzisztenciáját a fogyasztási együtthatók felülvizsgálatával, például az LP2 feladat segítségével kell megteremteni.

Harmadrészt, annak ellenére, hogy a $\mathbf{pKx} > 0$ és a $\mathbf{pRx} > 0$ egyenlőtlenségek csak egyidejűleg állhatnak fenn, a közgazdasági logika alapján a $\mathbf{pRx} > 0$ kiegészítő feltétel előírása az indokolt. A termelő és személyes fogyasztási együtthatók $\mathbf{R} = \mathbf{A} + \mathbf{C}$ alakú szétválasztása esetén még ez sem elegendő, hanem a $\mathbf{pCx} > 0$ kiegészítő feltételt kell előírni, amelynek teljesüléséből természetesen következik a fenti egyenlőtlenségek fennállása is.

Ebből következően az (N-0) és a (KMT-3) feltételek helyett az

(MN-4) $$\mathbf{mx} = 1,\ \mathbf{pc} = 1$$

pótlólagos feltétellel kell kiegészíteni a Marx–Neumann-modell (MN-1), (MN-2) és (MN-3) alapösszefüggéseit. Ez utóbbi két feltétel nemcsak meghatározza az $\mathbf{x}$ és a $\mathbf{p}$ változók szintjét, hanem implikálja az értékteremtés KMT-féle $\mathbf{pKx} > 0$ feltételének a teljesülését is. Ugyanis $(\mathbf{pc})(\mathbf{mx}) = \mathbf{p}(\mathbf{c}\circ\mathbf{m})\mathbf{x} = \mathbf{pCx} = 1$, ebből következik a $\mathbf{pRx} > 0$ és a $\mathbf{pKx} > 0$ egyenlőtlenségek teljesülése.

Mindezekből adódik második legfontosabb megállapításunk.

8. *megállapítás:* a Marx–Neumann-modellt az (MN-1), (MN-2), (MN-3) feltételeken túl nem a szokásos további (KMT), hanem az (MN-4) feltételekkel kell definiálni. Az így definiált modell megoldásának létezését a paraméterekre tett alábbi feltevések biztosítják: A) $\mathbf{K1} > \mathbf{0}$; B) a munkaerő nem nélkülözhető, és C) a technológiai és a fogyasztási együtthatók konzisztensek egymással és a piaci egyensúly követelményével (lásd a 4. megállapítást). Ezek a feltevések nemcsak a közgazdasági szempontból értelmes megoldások létezését szavatolják, hanem azt is, hogy – Neumann feltevéseivel összhangban – az egyensúlyi tényező egyértelműen meghatározott *(unicitás)*, és megegyezik a legnagyobb lehetséges arányos bővülési tényezővel *(optimum)*.

A fenti megállapításokból az is kiviláglik, hogy *a priori* adott paraméterek esetén az általános modellben is ki lehet szűrni azokat a javakat és tevékenységeket, amelyek csak az alacsonyabb bővülési tényezőjű, közgazdasági szempontból irreleváns megoldásokban játszhatnak szerepet. Elegendő megtartani csak azokat a tevékenységeket, amelyek a legnagyobb arányos bővülési tényező esetén alkalmazhatók, illetve azokat, amelyek csak olyan javakat termelnek vagy használnak fel, mint az előzőek. Az így kiszűrt tevékenységek és termékek szerepeltetése, ugyanúgy, mint a luxustermékeké és tevékenységeké a Leontief-technológia esetén, teljesen felesleges.

Morishima (1971) a bennmaradókat *első osztályú* tevékenységeknek, illetve termékeknek nevezte, ez alapján a szűkítés eredményét első osztályú alrendszernek nevezhetjük. Ezek felelnek meg a Leontief-technológia esetén értelmezett *létfenntartó* termékeknek és tevékenységeknek, amelyekre az érdemi elemzéseket leszűkíthetjük. Az első osztályú alrendszer azonban, a létfenntartó alrendszerrel ellentétben, nem lesz feltétlenül irreducibilis, és az első osztályú termékek és tevékenységek nem tekinthetők feltétlenül létfenntartónak. Egyáltalán nem zárható ki ugyanis alternatív egyensúlyi tevékenységegyüttesek *(technikák)* létezése, még kevésbé lesz igaz, hogy minden első osztályú tevékenység helyet kap valamelyik egyensúlyi technikában. Az alternatív egyensúlyi technikákban helyet kapó termékek köre is eltérő lehet. De mindezek ellenére az első osztályú alrendszer megőrzi a létfenntartó Leontief-alrendszer azon tulajdonságát, hogy egyértelműen meghatározza az egyensúlyi tényezőt.

Az általános Neumann-modellben tehát nem beszélhetünk létfenntartó termékekről, illetve tevékenységekről, ezek a Leontief-gazdaság sajátos fogalmai. Ugyancsak nem tehetjük fel, nincs is rá szükség, hogy a gazdaság irreducibilis, mint a Leontief-technológia esetében. Utólag, az egyensúlyi megoldás ismeretében le lehetne ugyan redukálni a modellt egy olyan irreducibilis alrendszerére, amelynek a megoldása egyszersmind a teljes rendszernek is megoldása lenne.[16] Ez azonban nemcsak önkényes lenne, hanem ellentétes is Neumann elemzésének a szellemével, hiszen ő éppen az alternatív technikák közötti választás és az árrendszerek kölcsönös meghatározottságát kívánta demonstrálni modelljével.

5. A felhalmozás-fogyasztás és a bér-profit frontvonalak a Marx–Neumann-modellben

Végezetül szóljunk röviden arról, hogy miként elemezhetjük a felvonultatott matematikai eszközök és tételek segítségével az alcímben jelzett frontvonalakat. Bruno (1969) mutatott rá elsőként, hogy a hicksi értelemben vett „*tényező-ár*" (bér-profit), illetve az „*optimális átváltási*" (fogyasztás-felhalmozás) frontvonalak a neoklasszikus növekedéselmélet modelljében egybeesnek, „alapvető duális kapcsolat" van közöttük. Neumann eredeti modellje nem tette lehetővé ezek elemzését, ezt a lehetőséget csak Morishima tette lehetővé potenciálisan változó szintű fogyasztási együtthatók ($\varphi \cdot \mathbf{c}$) bevezetésével.

[16] Voltaképpen ezt tette Sraffa (1960), aki még azt is feltette, hogy mindig található olyan (négyzetes) egyensúlyi technika, amelyben a termékek és a tevékenységek száma megegyezik egymással.

Létfenntartó bérek feltevése következtében a φ (exogén) változó egyidejűleg képviseli a *fogyasztás* és a *reálbér szintjét*. Tegyük fel, hogy egy adott tartományban minden φ érték mellett van, éspedig az egyensúlyi *tényező* tekintetében *egyértelmű megoldása* a modellnek. Az ilyen tartományban a $\varphi \to \alpha$ hozzárendelés révén jól definiált az $\alpha(\varphi)$ függvény, amely egyik oldalról a *fogyasztás* és a *felhalmozás* (növekedési ütem), másik oldalról a *reálbér* és a *profitráta* közti átváltási lehetőséget ábrázolja. A két frontvonal tehát – ha az egyensúlyi tényező tekintetében egyértelmű a KMT-modell megoldása – egybeesik, ugyanúgy, mint az optimális növekedés neoklasszikus modelljében.

A két frontvonal közötti duális kapcsolat voltaképpen annak következménye, hogy – mint azt Neumann hangsúlyozta – modelljének egyértelműen meghatározott egyensúlyi tényezője nem más, mint az

$$F(\mathbf{x}, \mathbf{p}) = \frac{\mathbf{pKx}}{\mathbf{pRx}}$$

alakban definiált *profitfüggvény nyeregpontja*. Ha $(\alpha^*, \mathbf{x}^*, \mathbf{p}^*)$ egyensúlyi megoldás, akkor rögzített $\mathbf{x}^*$ mellett az $F(\mathbf{x}^*, \mathbf{p})$ függvény értéke a $\mathbf{p}^*$ pontban veszi fel a minimális, $\mathbf{p}^*$ rögzítése esetében viszont az $F(\mathbf{x}, \mathbf{p}^*)$ függvény az $\mathbf{x}^*$ pontban veszi fel a maximális értékét, éspedig mindkét esetben α^*-ot.

A megoldás *unicitása* az egyensúlyi tényező tekintetében azért is fontos volt Neumann számára, mert ez tette lehetővé, hogy az egyensúlyi megoldásokat egy minimax, más szóval, nyeregponti megoldás szükséges feltételeivel jellemezze. Ez kapcsolta össze növekedési modelljét a kétszemélyes játékok modelljével és egyúttal a termodinamika potenciálfüggvényével. A két tényező közös egyensúlyi értéke ugyanis egyik oldalról az adott termelési-felhasználási együtthatók által lehetővé tett *legnagyobb növekedési ráta*, másik oldalról pedig a *legkisebb megtérülési ráta* lesz:

$$\lambda^*(\varphi) = \max \{ \lambda : \exists \mathbf{x} \geq 0, \mathbf{1x} = 1, \mathbf{Kx} \geqq (1+\lambda)\cdot(\mathbf{R} + \varphi\cdot\mathbf{c}\circ\mathbf{m})\mathbf{x} \},$$

$$\pi^*(\varphi) = \min \{ \pi : \exists \mathbf{x} \geq 0, \mathbf{1x} = 1, \mathbf{pK} \leqq (1+\pi)\cdot\mathbf{p}(\mathbf{R} + \varphi\cdot\mathbf{c}\circ\mathbf{m}) \},$$

ahol $(1+\lambda^*) = (1+\pi^*) = \alpha^*$.

Morishima a fenti két összefüggéssel definiált függvényeket tekintette a felhalmozás-fogyasztás, illetve a bér-profit átváltási frontvonalak megfelelőinek a fogyasztást explicitté és változóvá tevő Marx–Neumann-modell keretében. Morishima a KMT-feltételekkel definiálta modelljét, amelyek megengedik, hogy φ adott értéke mellett akár több egyensúlyi tényezőjű megoldása is létezzen a modellnek, és így λ^* és π^* értéke különbözzön egymástól. 1971-es dolgozatában ezt a jelenséget úgy értelmezte, hogy dekomponálható gazdaságok esetében általában több, „*egymás alá rendelt*" átváltási frontvonalat lehet és kell értelmezni. Adott φ érték esetén közülük egy a „maximális növekedési ütemű", egy másik a „minimális profitrátájú" átváltási frontvonal, és közöttük még további átváltási frontvonalak lehetnek.

Morishima szerint a neoklasszikus modell „*optimális átváltási*", illetve a „*bér-profit*" görbéinek a maximális növekedési ütemű, illetve a minimális profitrátájú átváltási frontvonal felel meg, amelyek között így meg is szűnik az alapvető duális kapcsolat. Morishima megoldása azonban több szempontból is bírálható. Egyrészt, Hicks definíciójától eltérően használja a bér-profit átváltási frontvonalat. Hicks értelmezésében ugyanis a profitráta mindig az adott bér mellett lehetséges legnagyobb és nem a legkisebb érték. Másrészt, mint láttuk, j-nek lehetnek olyan értékei, amelyek mellett van ugyan, de csak közgazdasági szempontból értelmetlen megoldása a modellnek: pozitív reálbér, nulla nominális bérráta. Harmadrészt, ami a legkritikusabb észrevétel, több megoldás esetén, mint láttuk, a minimális profitrátájú frontvonalhoz tartozó nominális bérráta értéke eleve csak nulla lehet.

Mindezek miatt Bromek (1974) a fogyasztás szintje helyett a lehetséges egyensúlyi tényezőt tekintette kiinduló paraméternek, és α lehetséges értékeihez kereste meg a fogyasztás elérhető legnagyobb szintjét ($\alpha \rightarrow \varphi$ hozzárendelés). Az LP2 programozási feladat megoldásából, mint láttuk, egyértelműen meghatározhatjuk az α paraméter adott értékéhez tartozó legnagyobb fogyasztási szintet (φ^0) és az ahhoz tartozó lehetséges egyensúlyi tevékenységszintek ($\mathbf{x}^0$) és árak ($\mathbf{p}^0$) vektorát. α-t parametrikusan változtatva elvben előállíthatjuk a két tényező közötti átváltási viszonyt leíró $\varphi(\alpha)$ monoton csökkenő függvényt, az $\alpha(\varphi)$ függvény inverzét. Magát a $\varphi(\alpha)$ függvény értelmezési tartományát egy közgazdasági szempontból triviális feltevéssel adhatjuk meg.

9. *megállapítás:* az α paraméter adott értéke mellett az LP2 feladatnak *pontosan akkor létezik megoldása*, ha van olyan $\mathbf{z}^* \geqq \mathbf{0}$, amelynek esetén teljesül a $(\mathbf{B} - \alpha \cdot \mathbf{A})\mathbf{z}^* \geqq \mathbf{c}$ egyenlőtlenség, azaz a $(\mathbf{B}, \alpha \cdot \mathbf{A})$ kibocsátási/ráfordítási együtthatókkal adott technológia megengedi, hogy a fogyasztási cikkek mindegyikéből keletkezzen egyidejűleg végső kibocsátás. Az ilyen technológiát **c**-*produktívnak* nevezhetjük.

Bromek „kopernikuszi fordulata” egy csapásra megoldotta a vitatható problémákat. Először is, az így értelmezett átváltási határgörbe (α, φ) pontjai eleve csak közgazdasági szempontból értelmes megoldásokhoz tartoznak. Másodszor, összhangban a vizsgált átváltási görbék szokásos értelmezésével, az ezekben szereplő α egyensúlyi tényező az adott φ fogyasztási szint (reálbér) mellett a lehetséges legnagyobb bővülési tényező (profitráta), és fordítva. Harmadszor, az így definiált egyensúlyi felhalmozás-fogyasztás és a bér-profit átváltási frontvonalak egybeesnek, eleget téve a Bruno-féle dualitási feltételnek.

Bromek kimerítően jellemezte matematikai szempontból a $\varphi(\alpha)$ átváltási frontvonalat. Legfontosabb megállapításait – megfelelő közgazdasági értelmezéssel megfejelve – lentebb összefoglaljuk. Ehhez szükségünk lesz az *állandó tőke nélkülözhetőségének* a fogalmára. A termékráfordítások, azaz az állandó tőke, akkor és csak akkor nélkülözhető egy Marx–Neumann-gazdaságban, ha az újratermelés ezek felhasználása nélkül is folytatható, azaz létezik olyan $\alpha > 0$ és $\mathbf{x} \geq \mathbf{0}$, amelyek esetén teljesülnek a $\mathbf{Kx} \geqq \alpha\cdot(\mathbf{A} + \mathbf{c}\circ\mathbf{m})\mathbf{x}$ mérlegegyensúlyi feltételek, de ugyanakkor $\mathbf{Kx} = \mathbf{0}$.

Bizonyítás nélkül közöljük Bromek legfontosabb eredményeit, amelyekből kiolvashatók a Marx–Neumann-modell közgazdasági szempontból értelmes megoldásaival definiált felhalmozás-fogyasztás, illetve az azzal egybeeső reálbér-profitráta frontvonal tulajdonságai. A $\varphi(\alpha)$ átváltási görbe mindenhol értelmezett és monoton csökkenő a $(0; \alpha^0)$ összefüggő tartományban, ahol α^0 végtelen, ha az állandó tőke nélkülözhető. A görbe csaknem végig folytonos, legfeljebb véges számú (szinguláris) pontban lehet szakadása. A $\varphi(\alpha)$ átváltási görbe a végtelenből indul, és nullához vagy egy nem negatív φ_0 értékhez tart, amely 0, ha α^0 az értelmezési tartomány felső korlátja.

Ezek alapján már láthatjuk azt is, hogyan néz ki $\varphi(\alpha)$ átváltási görbe inverz függvénye, $\alpha(\varphi)$. Itt az értelmezési tartomány már nem összefüggő, lehetnek benne szakadási pontok. Azok a φ értékek esnek ki, amelyek mellett a KMT-feltételekkel definiált Marx–Neumann-modellnek van ugyan megoldása, de az közgazdasági szempontból nem értelmes.

10. megállapítás: legyen a munkaerő (a változó tőke) nélkülözhetetlen, és $\mathbf{K1} > \mathbf{0}$ a stacionárius egyensúly Marx–Neumann-modelljében, amelyben a fogyasztás szintje *(φ)* változó paraméter.

i) A közgazdasági szempontból értelmes egyensúlyi megoldásokban előfordulható bővülési, illetve profittényezők halmaza a nem negatív számegyenes egy nem üres, összefüggő tartomány, 0 alsó határral;

ii) a $\varphi(\alpha)$ függvény értéke, a φ fogyasztási szint a végtelenbe tart, ahogy α közelít 0-hoz;

iii) ha a termékráfordítások (az állandó tőke) is nélkülözhetetlen, akkor a lehetséges egyensúlyi tényezők halmaza felülről is korlátos tartomány, α^0 felső határral;

iv) ha α^0 nem a felső korlát, azaz nem eredményez közgazdasági szempontból értelmes megoldást, akkor a $\varphi(\alpha)$ függvény értéke 0-hoz tart, ahogy α közelít α^0-hoz, egyébként φ egy pozitív alsó korláthoz (φ_0) tarthat, miközben a nominális bérráta nullához tart;

v) $\varphi(\alpha)$ a lehetséges egyensúlyi tényezők halmaza felett végig monoton csökkenő; és

vi) folytonos minden olyan α értéknél, amely nem egyensúlyi tényezője a ($\mathbf{K}$, $\mathbf{A}$) együtthatókkal definiált Neumann-modellnek, de ez utóbbi pontokban is folytonos alulról;

vii) α^0 nem más, mint a ($\mathbf{K}$, $\mathbf{A}$) együtthatókkal definiált Neumann-modell azon legnagyobb egyensúlyi tényezője, amely esetén az egyensúlyban pozitív szinten előállítható termékek indexeinek halmaza tartalmazza a $\mathbf{c}$ vektor pozitív elemeinek az indexeit.

6. Összefoglalás

Kemeny, Morgenstern és Thompson Neumann modelljének általánosítása során megszüntették azt a feltevését, hogy a vizsgált gazdaság nem dekomponálható, és ezzel a modell megoldásának unicitását az egyensúlyi tényező tekintetében. Ezzel felülírták Neumann modelljének néhány alapvető tulajdonságát, és megváltoztatták eredeti tartalmát. Nemcsak a Neumann által fontosnak tartott jellemzők (nyeregponti, játékelméleti, termodinamikai kapcsolat), hanem a modell közgazdasági értelmezése tekintetében is.

Minderre csak akkor derül fény, ha szétválasztjuk egymástól a termelő- és a személyes fogyasztást. Morishima a személyes fogyasztást explicite megjelenítő Marx–Neumann-modelljében viszont arra nem figyelt fel, hogy a dekomponálható modellekben megjelenő többszörös megoldások, a legnagyobb bővülési tényezős kivételével, közgazdasági szempontból értelmetlenek, mivel azokban a fogyasztás értéke és a feltevés szerint az általa meghatározott bérráta nulla. Így bármennyire is érdekesek és eredetiek matematikai szempontból az egymás alá rendelt növekedési pályákra vonatkozó elemzései, közgazdasági szempontból azok értelmezhetetlenek, és így nincs sem alapja, sem indoka a fogyasztás-felhalmozás és bér-profit frontvonalak Morishima-féle átértelmezésének sem.

Bromek korrigálta a fenti frontvonalak Morishima-féle bírálható értelmezését, rávilágított a jelentkező problémák matematikai természetére, de adós maradt a közgazdasági következtetések levonásával és a KMT-feltevések felülvizsgálatával. Talán részben éppen ez magyarázza, hogy dolgozata szinte visszhang nélkül maradt (a scholar.google-ben, a magamén kívül, mindössze két hivatkozást találtam rá).

A szakmai közvélemény továbbra sem vesz tudomást a Neumann-modell általánosításával kapcsolatos anomáliákról és azok helyes megoldásáról. Mindennek a valódi oka az, hogy a modellel foglalkozó kiváló matematikusok nemcsak a közgazdaságtan „tapasztalati forrásaitól" álltak távol, de magától a közgazdaságtantól is, és figyelmük megrekedt a matematikai konstrukciók és problémák elemzésénél.

Hivatkozott irodalom

Bauer, L. (1974): Consumption in von Neumann matrix models. In: Łoś, J. – Łoś, M. W. (eds.), 13–25.

Bromek, T. (1974): Consumption-investment frontier in decomposable von Neumann models. In: Łoś, J. – Łoś, M. W. (eds.), 47–57.

Bródy András (1969): *Érték és újratermelés*. Közgazdasági és Jogi Könyvkiadó, Budapest.

Bruno, M. (1969): Fundamental Relations in the Pure Theory of Capital and Growth. *Review of Economic Studies* 36, 39–54.

Debreu, G. (1991): The Mathematization of Economic Theory. *American Economic Review* 81/1, 1–7.

Gale, D. (1960): *The Theory of Linear Economic Models*. McGraw-Hill, New York.

Hutchinson, T. W. (1938): *The significance and Basic Postulates of Economic Theory.* 2nd ed. 1960, Kelley, New York.

Kemeny, J. G. – Morgenstern, O. – Thompson, G. L. (1956): A Generalization of von Neumann's Model of an Expanding Economy. *Econometrica* 24, 115–135.

Łoś, J. – Łoś, M. W. (eds.) (1974): *Mathematical Models in Economics.* North-Holland, Amsterdam–New York.

Móczár József (1980): A dekompozábilitás kiterjesztése a gazdaság lineáris modelljeiben. *Szigma* 1–2, 23–45.

Móczár József (2003): Sajátérték-tételek a lineáris és nem lineáris Neumann-rendszerekben. *Szigma* 3–4, 95–118.

Mirowski, P. (1989): *More Heat Than Light: Economics as Social Physics, Physics as Nature's Economics.* Cambridge University Press, Cambridge.

Morishima, M. (1964): *Equilibrium, Stability and Growth.* Clarendon Press, Oxford.

Morishima, M. (1971): Consumption-investment Frontier, Wage-profit Frontier and the Von Neumann Growth Equilibrium. *Zeitschrift für Nationalökonomie*, Suppl. 1, 31–38.

Neumann János [1947, 1965]: The Mathematician. In: Robert B. Heywood (ed.): *The Works of Mind*. University of Chicago Press, Chicago, 180–196. (Magyarul: A matematikus. In: Neumann [1965], 11–27.)

Neumann János [1956, 1965]: Looking ahead. (Magyarul: A legújabb tudományos fejlődés hatása a gazdaságra és a közgazdaságtanra. In: Neumann [1965], 100–102.)

Neumann János [1965]: *Válogatott előadások és tanulmányok*. (Ford. Augusztinovics M.) Közgazdasági és Jogi Könyvkiadó, Budapest.

Pigou, A. C. [1925]: *Memorials of Alfred Marshall*. Macmillan, London.

Révész Tamás – Zalai Ernő (2000): A magyar gazdaságstatisztikai adatforrások és az alkalmazott egyensúlyelméleti modellezés. *Statisztikai Szemle* 78/2–3, 97–117.

Sraffa, P. (1960, 1975): *Áruk termelése áruk révén*. Közgazdasági és Jogi Könyvkiadó, Budapest. (*Production of Commodities by Means of Commodities. Prelude to a Critique of Economic Theory.* Cambridge University Press, Cambridge, 1960).

Zalai Ernő (1998): Általános egyensúlyi modellek alkalmazása gazdaságpolitikai elemzésekre. *Közgazdasági Szemle* 12, 1065–1081.

Zalai Ernő (1999): A közgazdaságtan metodológiájáról és a matematikai közgazdaságtanról a Neumann-modell ürügyén. *Közgazdasági Szemle* 7–8, 600–629.

Zalai Ernő (2000): *Matematikai közgazdaságtan. A korszerű mikroökonómiai elemzés klasszikus és neoklasszikus szemléletű modelljei*. KJK–Kerszöv, Budapest.

Zalai Ernő (2002): Stacionárius egyensúly luxustermékek esetében. In: Blahó András (szerk.): *Elmaradottság – Fejlődés – Átalakulás*, Macropolis BT, Budapest, 401–410.

Zalai Ernő (2004): The von Neumann model and the early models of general equilibrium. *Acta Oeconomica* 1, 3–38.

Zalai Ernő (2006): Leontief versus Neumann: A Neumann-modell egy Leontief-szemléletű általánosítása. In: Trautmann László (szerk.): *In memoriam Kollár Zoltán.* 156–180.

Érdy János

Podhradczky József

Wenzel Gusztáv

Fábián Gábor

Nagy János

Arany János

Pólya József

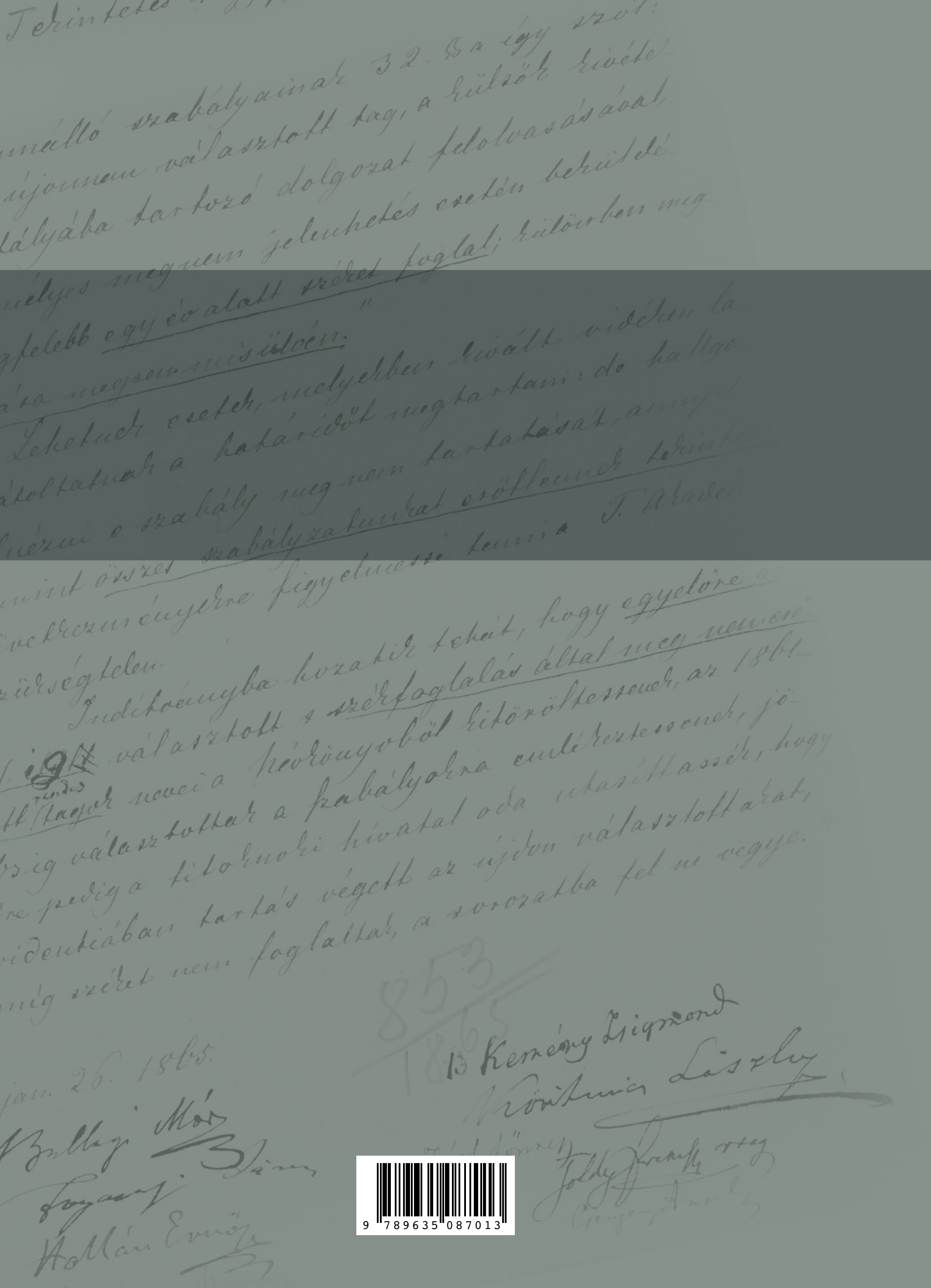
Tekintetes Nagygyülés!

...démia fennálló szabályainak 32-ka egy szót:

Minden újonnan választott tag, a külsők kivéte-
lével, osztályába tartozó dolgozat felolvasásával,
vagy személyes megnem jelenhetés esetén beküldé-
sével, legfelebb egy év alatt széket foglal; különben meg-
választása megsemmisülőén.

Lehetnek esetek, melyekben kivált vidéken la-
kók gátoltatnak a határidőt megtartani: de hallga-
tag elnézni e szabály meg nem tartatását, annyit
tesz, mint összes szabályzatunkat erőtlennek tekinteni.
A körülményekre figyelmessé tenni a T. Akadémi-
át szükségtelen.

Inditványba hozatik tehát, hogy egyelőre az
...választott s székfoglalás által meg nem...
...ből kitöröltessenek, az 18...
...ztessenek, j...



9 789635 087013