SZÉKFOGLALÓ ELŐADÁSOK A MAGYAR TUDOMÁNYOS AKADÉMIÁN

Pintz János

A GOLDBACH-SEJTÉSRŐL

Tekintetes Nagygy…

…fennálló szabályainak 32-ika így szól:
"…újonnan választott tag, a külsők kivéte-
…osztályába tartozó dolgozat felolvasásával,
…személyes megnem jelenhetés esetén beküldé-
…legfelebb egy év alatt székét foglal; különben meg-
…tására megsem misülvén."

Lehetnek esetek, melyekben kivált vidéken la-
…gátoltatnak a határidőt megtartani: de hallga-
…elnézni e szabály meg nem tartatását, annyi…
…, mint összes szabályzatunkat erőtleneknek tekinten…
…következményeire figyelmessé tenni a T. Akadem…
…szükségtelen.

Indítványba hozatik tehát, hogy egyelőre az
…61. ig választott s székfoglalás által meg nemerő-
…tett rendes tagok nevei a névkönyvből kitöröltessenek, az 1861-
…63-ig választottak a szabályokra emlékeztessenek, jö-
…vőre pedig a titoknoki hivatal oda utasíttassék, hogy
evidentiában tartás végett az újdon választottakat,
míg széket nem foglaltak, a sorozatba fel ne vegye."

853/1865

…, jan. 26. 1865.

Ballagi Mór
Szász …
Fogarasi
Hollán Ernő

B. Kemény Zsigmond
Kőváry László
Török János r. tag
Toldy Ferencz r. tag
Gengery Arnold

Pintz János

A GOLDBACH-SEJTÉSRŐL

SZÉKFOGLALÓK
A MAGYAR TUDOMÁNYOS AKADÉMIÁN

A 2004. május 3-án megválasztott
akadémikusok székfoglalói

Pintz János

A GOLDBACH-SEJTÉSRŐL

Magyar Tudományos Akadémia • 2015

Az előadás elhangzott 2005. március 9-én

Sorozatszerkesztő: Bertók Krisztina

Olvasószerkesztő: Laczkó Krisztina

Borító és tipográfia: Auri Grafika

ISSN 1419-8959

ISBN 978-963-508-783-9

Kiadja a Magyar Tudományos Akadémia
Kiadásért felel: Lovász László, az MTA elnöke
Felelős szerkesztő: Kindert Judit
Nyomdai munkálatok: Kódex Könyvgyártó Kft.

1. A probléma eredete

A Goldbach-sejtés egyike a matematika legegyszerűbben megfogalmazható megoldatlan problémáinak. Nehézségét az okozza, hogy az egész számok additív és multiplikatív struktúráját (amelyek külön-külön igen egyszerűek és áttekinthetők) kapcsolja össze. A számelmélet alaptétele szerint minden egész szám egyértelműen áll elő prímszámok szorzataként (a sorrendtől eltekintve). Tehát a multiplikatív struktúrában a prímszámok az elemi építőkövek, az oszthatatlan elemi részecskék szerepét játsszák. Az egész számok additív struktúrája még egyszerűbb: minden pozitív egész szám egyértelműen áll elő az 1 szám ismételt összeadásával. Ugyanakkor a két prímszám összegeként előálló számok jellemzése (pontosabban annak bizonyítása, hogy minden kettőnél nagyobb páros szám ilyen) már több mint negyed évezrede állítja máig megoldhatatlan feladat elé matematikusok generációit. Az előadásban áttekintjük a probléma megoldására az elmúlt csaknem száz évben tett kísérleteket és a probléma különböző irányú megközelítései terén elért rendkívül fontos részeredményeket. Ezek eredményeképp több irányból is már (legalábbis látszólag) karnyújtásnyira vagyunk az eredeti probléma megoldásától. Ennek ellenére az utolsó, döntő lépés megtétele minden bizonnyal az eddigieknél jóval mélyebb, máig ismeretlen módszerek megteremtését igényli, és nem elegendő az eddigi módszerek finomítása és technikai jellegű továbbfejlesztése.

Bár a jelen szóhasználat nem egységes, a legelfogadottabb megfogalmazás szerint célszerű, ha két sejtésről, nevezetesen a bináris Goldbach-sejtésről és a terner Goldbach-sejtésről beszélünk.

Bináris (páros) Goldbach-sejtés (BGS). *Minden kettőnél nagyobb páros egész szám felírható két prímszám összegeként.*

Terner (páratlan) Goldbach-sejtés (TGS). *Minden ötnél nagyobb páratlan egész szám felírható három prímszám összegeként.*

Meg kell jegyeznünk, hogy a Goldbach-sejtéseket gyakran páratlan prímszámokkal (vagy BGS esetében egymástól eltérő páratlan prímszámokkal) fogalmazzák meg.

Mivel a TGS egyszerű következménye a BGS-nek, és mivel I. M. Vinogradov (1937) megmutatta, hogy a TGS érvényes minden elég nagy páratlan egész számra, ezért főleg a BGS-re fogunk koncentrálni. A TGS-t ebben az összefüggésben a BGS egyik legfontosabb approximációjának tekinthetjük.

A Goldbach-probléma eredeti megfogalmazásának jó megértéséhez tudnunk kell, hogy Goldbach idejében az *egyet* prímszámnak tekintették. Ennek megfelelően különbséget kell tennünk a prímszámok jelenlegi és egykori meghatározása között, azaz az eggyel egyenlő összeadandók kizárásával kissé módosíthatjuk az eredeti megfogalmazásokat.

1742. május 27-i, Eulernek küldött levelében Goldbach a következőket írja: „ilyen módon megkockáztatok egy sejtést: minden szám, amelyik két páros szám összege, felírható tetszőleges számú prímszám összegeként" (Euler–Goldbach 1965).

Jelöljük $\mathcal{P}$-vel a prímszámok halmazát, legyen $\mathcal{P}' = \mathcal{P} \cup \{1\}$ és legyen N tetszőleges természetes szám, továbbá

$$\mathcal{A} + \mathcal{A} = 2\mathcal{A} = \{a_i + a_j;\ a_i \in \mathcal{A},\ a_j \in \mathcal{A}\}, \tag{1.1}$$

$$k\mathcal{A} = \{a_{i_1} + \cdots + a_{i_k},\ a_{i_\nu} \in \mathcal{A}\ (1 \leq \nu \leq k)\}. \tag{1.2}$$

A fent megadott jelöléssel Goldbach eredeti hipotézisét a következőképpen fogalmazhatjuk meg:

Eredeti Goldbach-sejtés (EGS). *Ha $N \in 2\mathcal{P}'$, akkor $N \in k\mathcal{P}'$, $2 \leq k \leq N$ esetén.*

Első pillantásra ez a sejtés eléggé eltérőnek tűnhet a BGS-től és a TGS-től is. A különböző megfogalmazások rövid elemzése azonban megmutatja, hogy ez a látszat csal.

Fermat utolsó tételének esetétől eltérően általában nem szokták hangsúlyozni a matematikusok, hogy Goldbachnak egy fontos megjegyzése a lap szélén, a margón található az előbb idézett levélben: „Miután ezt újraolvastam, úgy találom, hogy a sejtés egzakt módon bizonyítható $n+1$-re, amennyiben igaz n-re és $n+1$ felírható két prímszám összegeként. A bizonyítás igen egyszerű. Úgy látszik, hogy minden 2-nél nagyobb szám felírható 3 prímszám összegeként."

A fent idézett sorok utolsó mondatát a következőképpen fogalmazhatjuk meg:

Lapszéli Goldbach-sejtés (LGS). *Ha $N > 2$, akkor $N \in 3\mathcal{P}'$.*

Látni fogjuk, hogy az LGS sokkal szorosabban kapcsolódik a BGS-hez (valójában ekvivalens vele), mint a TGS-hez.

Nincs egyetértés abban, vajon a BGS Eulernek vagy Goldbachnak tulajdonítható-e. Az Euler elsőbbségét hangoztató álláspont a következő – Eulernek 1742. június 19-én Goldbachhoz írt válaszleveléből vett – idézet utolsó mondatán alapul:

„Az, hogy egy olyan szám, amely felírható 2 prím összegeként, egyúttal tetszőleges számú prím összegeként is felírható, levezethető egy megfigyelésből, amit Méltóságod egy alkalommal velem közölt, mely szerint bármely páros szám felírható két prímszám összegeként. Egy n páros számot tekintve $n-2$ felírható két prím összegeként, így n is felírható három, vagy hasonlóképp négy, illetve akárhány prím összegeként. Amennyiben n páratlan, akkor $n-1$ páros és így n felírható három vagy akárhány prím összegeként. Azt az állítást, hogy minden páros szám felírható két prímszám összegeként, én egy teljesen bizonyos tételnek tartom, habár nem tudom bizonyítani” (Euler–Goldbach 1965).

Az idézet első néhány sora mindenesetre nyilvánvalóvá teszi, hogy maga Euler tulajdonította a BGS-t Goldbach egy korábbi szóbeli közlésének.

Az utolsó mondatot a mi jelölésünkkel a következőképpen fejezhetjük ki:

BGS1. *Ha* $2 \mid N$*, akkor* $N \in 2\mathcal{P}'$*.*

Az idézet ezt megelőző részét a következő állítás bizonyításaként foglalhatjuk össze.

1. állítás. *BGS1* $\Rightarrow$ *EGS.*

A matematikai logika mai szempontjából érdekes megjegyezni, hogy Euler a „Theorema” szót használja a BGS1 bizonyítatlan állítással kapcsolatban, annak ellenére, hogy ő maga nem volt képes azt bizonyítani. Azt azonban nem mondja ki, hogy vajon a fordított következtetés igaz-e, vagy sem.

Meglehetősen kevéssé ismert tény, hogy Descartes (1596–1650) a 17. században már kimondott egy hasonló sejtést (a szerző Dieter Wolke egy kéziratából szerzett tudomást róla, bár Dickson [1919] könyve is tartalmazza). Descartes sejtése azonban csak sokkal később, 1908-ban jelent meg nyomtatásban (Descartes 1908), és a Goldbach-sejtés ismertsége folytán nem került be a köztudatba.

Eléggé különös módon Descartes eredeti megfogalmazása csak páros egész számokra vonatkozik. Descartes összegyűjtött műveiben az Opuscula Posthuma, Excerpta Mathematica részben találjuk a következő sorokat (Vol. 10, 298): „Minden páros szám felírható egy vagy két vagy három prímszám összegeként." Jelölésünket használva az eredeti Descartes-sejtést a következő módon fogalmazhatjuk meg.

Eredeti Descartes-sejtés (EDS). *Ha* $2 \mid N$, *akkor* $N \in \mathcal{P}' \cup 2\mathcal{P}' \cup 3\mathcal{P}'$.

Meglepő, hogy Descartes a fenti módon fejezte ki sejtését, ahelyett, hogy a következő két, nem egyenértékű változat egyikét alkalmazta volna:

(DSA) Minden páros egész szám felírható legfeljebb két prím összegeként.

(DSB) Minden egész szám felírható legfeljebb három prím összegeként.

DSA nyilván ekvivalens BGS1-gyel, ugyanakkor DSB és az EDS határozottan gyengébbek.

2. A sejtések logikai összefüggése

A következőkben elemezni fogjuk az 1. fejezetben említett sejtések különböző alakjai közötti logikai összefüggéseket. Noha ezek nagyon egyszerűek, a szerzőnek nincs tudomása ilyen vizsgálódásokról, Euler érvelését kivéve, amelyet az 1. fejezet 1. állításként tartalmaz. Az első, némileg meglepő állításunk az, hogy az 1. állítás fordítottja is igaz, azaz hogy az eredeti Goldbach-sejtés ekvivalens a BGS1-gyel.

2. állítás. EGS $\Rightarrow$ BGS1.

Bizonyítás. Legyen $\mathcal{G}' = 2\mathcal{P}'$, és tegyük fel, hogy az EGS igaz. Meg kell mutatnunk, hogy minden páros szám $\mathcal{G}'$-hez tartozik. Ha $2k \in \mathcal{G}'$, akkor az EGS szerint $2k \in 3\mathcal{P}'$. Következésképp az összeadandók egyikének párosnak, tehát 2-vel egyenlőnek kell lennie. Így $2k - 2 \in \mathcal{G}'$. Mivel $\mathcal{G}'$ nyilván tartalmaz tetszőlegesen nagy számokat, minden páros egész szám $\mathcal{G}'$-hez tartozik. Q.E.D.

Még könnyebb azt megmutatni, hogy a lapszéli Goldbach-sejtés szintén egyenértékű a BGS1-gyel.

3. állítás. LGS $\Leftrightarrow$ BGS1.

Bizonyítás. Ha az LGS igaz, akkor $2k + 2 \in 3\mathcal{P}'$ igaz bármely $k \geq 1$-re. Mivel az összeadandók egyikének 2-nek kell lennie, a $2k \in 2\mathcal{P}' = \mathcal{G}'$ összefüggés igaz kell, hogy legyen.

Ha a BGS1 igaz, akkor az összes, 2-nél nagyobb páros egész szám felírható $p_1' + p_2' + 2$ alakban, az összes 1-nél nagyobb páratlan egész pedig $p_1' + p_2' + 1$ alakban, ahol $p_i' \in \mathcal{P}'$. Q.E.D.

Az előbbiekből következik, hogy Goldbachnak mindkét, látszólag különböző sejtése (vagyis az EGS és az LGS) ekvivalens egymással és a BGS1-gyel (a bináris Goldbach-sejtésnek azzal a csekély módosításával, hogy 1-et prímnek tekintjük). Érvelésünket tehát így összegezhetjük:

1. sejtés. BGS1 $\Leftrightarrow$ EGS $\Leftrightarrow$ LGS.

Tekintsük most a Descartes-sejtés különböző alakjai, nevezetesen az EDS és a DSB közötti összefüggést. Ezt a következőképpen fejezhetjük ki.

4. állítás. EDS $\Leftrightarrow$ DSB.

Tételezzük fel az EDS érvényességét (mivel a másik következtetés triviális). Az EDS azt állítja, hogy $2 \mid N$-ből $N \in 2\mathcal{P}' \cup 3\mathcal{P}'$ következik, és így $N \in \mathcal{G}'$ vagy $N - 2 \in \mathcal{G}'$. Ebből bármely $k > 1$ egész számra $2k - 2 \in \mathcal{G}'$ vagy $2k - 4 \in \mathcal{G}'$. Innen $2k + 1 = 2k - 2 + 3 = 2k - 4 + 5 \in 3\mathcal{P}'$ következik. Q.E.D.

A prímszámoknak $\mathcal{P}'$ helyett a jelenlegi $\mathcal{P}$ definícióját használva így megfogalmazhatjuk a következő sejtést, amely lényegében Descartes-nak tulajdonítható:

Descartes-sejtés (DS): *Minden 1-nél nagyobb egész szám felírható legfeljebb három prím összegeként ($N \in \mathcal{P} \cup 2\mathcal{P} \cup 3\mathcal{P}$ minden $N > 1$-re).*

Később felhasználjuk a következő definíciót.

Definíció. *Egy N páros egész szám Goldbach-szám, ha N felírható két prím összegeként.*

Előző (1.1)–(1.2) jelöléseinket használva a Goldbach-számok halmazát a következő módon jelölhetjük:

$$\mathcal{G} = 2\mathcal{P} = \mathcal{P} + \mathcal{P} \ . \tag{2.1}$$

Ekkor a 4. állításban mondottakhoz hasonlóan azt kapjuk, hogy

5. állítás. DS $\Leftrightarrow$ $\{2 \mid N \ \Rightarrow \ N \in \mathcal{G}$ vagy $N + 2 \in \mathcal{G}\}$.

Ez azt mutatja, hogy amíg a bináris Goldbach-sejtés különböző alakjai ekvivalensek, Descartes sejtése nyilvánvalóan a BGS egy következménye. Másrészt a Descartes-sejtésből következik a terner Goldbach-sejtés. Végül érvelésünket a következőképpen összegezhetjük:

6. állítás. BGS $\Rightarrow$ DS $\Rightarrow$ TGS.

3. A bináris Goldbach-sejtés közelítései

Minthogy a bináris Goldbach-sejtés bizonyítása (a továbbiakban gyakran röviden csak Goldbach-sejtés) a jelen matematika korlátain túlinak tűnik, különböző megközelítései fontos szerepet játszottak az elmúlt 260 év során.

A. Desboves-nak (1855) 10^4-ig terjedő számszerű ellenőrzésén és Sylvesternek (1871) a páros egész számok Goldbach-reprezentációinak számára vonatkozó, részben hibás heurisztikus képletén kívül a 18. és a 19. században ebben a tárgyban nem történt előrelépés.

A BGS fontosságát Hilbert (1935) hangsúlyozta a Nemzetközi Matematikai Kongresszuson 1900-ban Párizsban tartott előadásában. Ő itt a Goldbach-sejtést a nyolcadik számú problémaként sorolta fel, együtt a Riemann-hipotézissel és az ikerprímproblémával:

„A Riemann-féle prímszámformula kimerítő diszkussziója után talán egyszer elérhetjük, hogy a Goldbach-problémára egzakt választ adjunk, hogy vajon minden páros szám előáll-e két prímszám összegeként, továbbá az ismert kérdésre, hogy vajon végtelen sok prímpár létezik-e, melyek különbsége 2, vagy akár az általános problémára, hogy az

$$ax + by + c = 0$$

alakú lineáris diofantikus egyenletnek adott egymáshoz relatív prím a, b, c együtthatók esetén van-e mindig x, y megoldása a prímszámok körében."

Mindezen problémákat (a BGS-t, a Riemann-hipotézist és az ikerprím-problémát) Landau a Nemzetközi Matematikai Kongresszuson Cambridge-ben tartott előadásában még 1912-ben is így jellemzi: „unangreifbar beim heutigen Stand der Wissenschaften" (a tudomány mai állása szerint megtámadhatatlanok) (Landau 1912).

A következőkben a BGS-hez közelítés típusának megfelelően kilenc témakörbe csoportosítva áttekintést adunk a Landau előadása óta született legfontosabb eredményekről. (Megemlítjük, hogy a TGS és a DS egyaránt a BGS approximációjának tekinthető.)

Természetesen nem próbálunk teljes áttekintést adni. Néhány témában az olvasó fordulhat W. Narkiewicz (2000) prímszámokról szóló vagy Pan Chengdong és Pan Chengbiao (1992) Goldbach-sejtésről írt monográfiáihoz. A közelítések első hat csoportja hagyományosabb, az utolsó három csoport viszonylag vagy teljesen új. Felsoroljuk mind a feltétel nélküli, mind a Riemann-hipotézisből (RH) vagy az általánosított Riemann-hipotézisből (ÁRH) következő feltételes eredményeket.

A továbbiakban n, N és k tetszőleges természetes számokat fog jelölni; P, p, p', p_i, q_i prímeket, $\mathbb{N}, \mathcal{G}$ és $\mathcal{P}$ pedig az összes természetes, Goldbach-, illetve prímszámot. N_0 egy megfelelően választott, elég nagy abszolút állandót fog jelölni, amelynek értéke a különböző előfordulások alkalmával más és más lehet. A problémák legtöbbjénél be kell érnünk azokkal az eredményekkel, amelyek minden elég nagy egész számra érvényesek, mert jelenleg majdnem reménytelen ezeknél teljesebb változatokat bizonyítani.

Ha egy írott betűt, mondjuk $\mathcal{A}$-t a természetes számok egy részhalmazára használunk, akkor A-t, ugyanazt a betűt egyszerű dőlt nyomtatott alakban a halmaz adott korlát alatti elemeinek számát meghatározó

$$A(X) = \#\{n \leq X;\ n \in \mathcal{A}\}$$

számoló függvényének a jelölésére használjuk. Továbbá bevezetjük a következő jelölést:

$$A(X, Y) = \#\{X < n \leq X + Y;\ n \in \mathcal{A}\}.$$

A különböző közelítéseket az első megjelenésük ideje szerint fogjuk sorrendbe állítani, vagyis aszerint, mikor volt bizonyítva az első jelentős eredmény az adott irányban. A közelítések típusa és a legfontosabb publikált eredmények (ha vannak ilyenek) minden egyes fejezeten belül időrendben jelennek meg. Végül a szerző módszere által nyerhető új (még publikálatlan) eredmények (bizonyítás nélküli) leírása található a 14. részben.

4. Majdnem prímek

A Goldbach-sejtésre irányuló első jelentős eredményt Vigo Brun (1920) érte el. Goldbach-típusú felbontást tudott bizonyítani minden elég nagy páros egész számra, ha a prímeket P_k „majdnem prímekkel" helyettesítette. P_k-val a legfeljebb k prímtényezőjű számokat jelöljük ($P_1 = P$). Szitamódszere segítségével Brun be tudta bizonyítani, hogy minden elegendően nagy páros egész szám felírható két P_9 szám összegeként. Továbbá az $\{a, b\}$ állítás azt fogja jelenteni, hogy minden nagy páros egész szám felírható P_a+P_b alakban. Az $\{a, b\}$, $a + b \leq k$ állítás azt fogja jelenteni, hogy minden nagy páros egész szám felírható P_a+P_b-ként az $a+b \leq k$ egyenlőtlenséget kielégítő valamilyen a, b értékekkel.

A Brun szitamódszerével bizonyított eredmények az alábbiak voltak:

$\{7,7\}$ H. Rademacher (1924)
$\{6,6\}$ T. Estermann (1932)
$\{5,7\}$, $\{4,9\}$, $\{3,15\}$ $\{2,366\}$ G. Ricci (1936, 1937)
$\{5,5\}$ A. A. Buhštab (1938)
$\{4,4\}$ W. Tartakowski (1939a, 1939b), A. A. Buhštab (1940)

1941-ben P. Kuhn megalkotta az úgynevezett súlyozott szitát, és be tudta bizonyítani $\{a,b\}$-t, ahol $a+b\leq 6$ (P. Kuhn 1941, 1953, 1954).

Selberg (1950) bevezette saját szitamódszerét, és bejelentette, hogy a módszere segítségével a $\{2,3\}$ eredmény bizonyítható, de a bizonyítást nem publikálta.

A következő eredmények bizonyításához a szerzők valóban a Selberg-szitát használták.

$\{3,4\}$ Wang Yuan (1956)
$\{3,3\}$ A. I. Vinogradov (1957)
$\{2,3\}$ Wang Yuan (1958)

Mindezen eredményeknek azonban az volt a hátrányuk, hogy nem voltak képesek legalább egy prím összeadandót biztosítani a felbontásban.

Az első eredményt, amelyben legalább egy prím összeadandó volt a felbontásban, Linnik „nagy szita” módszerét használva Rényi Alfréd bizonyította 1947/48-ban. Rényi (1947, 1948) K nagy, nem meghatározott értékére bizonyította az $\{1,K\}$ eredményt.

Ilyen típusú későbbi eredményeket bizonyítottak K kis értékeivel a következők:

$\{1, 4\}$ Pan Cheng Dong (1962/63), M. B. Barban (1963)
$\{1, 3\}$ A. A. Buhštab (1965)

Ezek az eredmények, Rényiét is beleértve, bizonyos statisztikai tételeken alapultak, amelyek az X-nél kisebb prímszámok számtani sorozatokban történő egyenletes eloszlását igazolták $q \leq X^{a-\varepsilon}$ különbségű számtani sorozatok esetén. Az előbb idézett, $K = 3$ és 4-re vonatkozó eredmények a Pan Cheng Dong és M. B. Barban által elért $a = 1/3$ és $a = 3/8$ eredményre épülnek.

Az $a = 1/2$-nek megfelelő híres Bombieri–Vinogradov-tétel (Bombieri 1965, Vinogradov 1965) – amely az ÁRH helyettesítésének tekinthető – nagyon leegyszerűsítette Buhštab $\{1, 3\}$-as, legerősebb eredményének bizonyítását. Nem eredményezte azonban $K = 2$-t.

1966-ban J. R. Chen röviden leírt egy új módszert, amely $K = 2$-höz vezet. Erről 1973-ban jelent meg részletes bizonyítása. A Bombieri–Vinogradov-tétel egy másik változatának kidolgozása mellett Chen egy új súlyozott szitát alkotott és alkalmazott erre a problémára. Tehát az e területre vonatkozó jelenlegi tudásunkat Chen híres tételével összegezhetjük:

Chen tétele. (Chen 1966, 1973) *Minden N elég nagy páros egész szám felírható $N = P + P_2$ alakban.*

5. A kivételes halmaz a Goldbach-problémában

A BGS-nek talán legközvetlenebb közelítése a Goldbach-számok $\mathcal{G}$ halmaza sűrűségének alsó becslése vagy ezzel ekvivalensen az

$$\mathcal{E} = \{N;\ 2 \mid N,\ N \notin \mathcal{G}\} = \{N;\ 2 \mid N,\ N \neq p + p'\}, \tag{5.1}$$

kivételes halmaz méretére vonatkozó felső becslés, pontosabban a kivételes halmaz

$$E(X) = \#\{N;\ N \leq X,\ N \in \mathcal{E}\} \tag{5.2}$$

számoló függvényének felső becslése. A BGS nyilván ekvivalens $\mathcal{E} = \{2\}$-vel, azaz az $E(X) = 1$ ($X \geq 2$) egyenlőséggel.

Az első, bár feltételes eredményt ebben az irányban Hardy és Littlewood (1924) érte el. Ők a Hardy, Littlewood és Ramanujan által kifejlesztett híres körmódszert alkalmazták.

Tétel. (Hardy–Littlewood): *Az ÁRH-ból következik*

$$E(X) \ll_\varepsilon X^{1/2+\varepsilon} \ \textit{bármely}\ \varepsilon > 0\textit{-ra}. \tag{5.3}$$

Ez lényegében még ma is – az ÁRH szerinti – legjobb ismert becslés, eltekintve attól, hogy X^ε-t $\log^3 X$-szel lehet helyettesíteni, ahogyan azt Goldston (1989/1992) megmutatta.

Az eredeti Hardy–Littlewood megközelítés azonban nem működött feltétel nélkül abban az időben. Ezért még a láthatóan nagyon gyenge

$$E(X) \leq (1-c)\frac{X}{2} \text{ ha } X \geq 4,\ c > 0 \text{ fix}, \tag{5.4}$$

felső becslést – amely ekvivalens azzal az állítással, hogy $\mathcal{G}$-nek pozitív alsó aszimptotikus sűrűsége van – Schnirelman (1930, 1933) egy teljesen más elemi módszer segítségével bizonyította be: Brun szitamódszerével. (Részletesebben l. a 6. részben.)

A döntő módszert, amely lehetővé tette a Hardy–Littlewood-módszer bizonyítatlan hipotézisek nélküli használatát, I. M. Vinogradov (1937) alkotta meg. Ez prímekre vonatkozó trigonometrikus összegek becslését tette lehetővé.

I. M. Vinogradov módszere a TGS bizonyítására ($N > N_0$ esetén) lehetővé tette van der Corput (1937), Estermann (1938) és Čudakov (1938) számára, hogy egyidejűleg és függetlenül bebizonyítsák az

$$E(X) \ll_A \; X(\log X)^{-A} \text{ bármely } A > 0\text{-ra} \tag{5.5}$$

a becslést.

Az (5.5) egyenlőtlenség megmutatja, hogy majdnem minden páros szám Goldbach-szám. Ez azt jelenti, hogy a bináris Goldbach-sejtés legalább statisztikailag igaz.

Érdemes megemlíteni, hogy (5.5)-ből – amelyet Vinogradov módszerének alkalmazásával bizonyítottak – valójában a Goldbach–Vinogradov-tétel is egyszerűen következik. Ha ugyanis

$$E(2k) < \pi(2k) \tag{5.6}$$

igaz bármely $k \in N$-re, $k > 1$, akkor igaz a TGS, mivel az alábbi $\ell - 1$ páros egész szám legalább egyike ($\ell = \pi(2k)$)

$$2k + 3 - 3,\; 2k + 3 - 5, \ldots, 2k + 3 - p_\ell \in [4, 2k] \tag{5.7}$$

Goldbach-szám lesz. Ezért $2k + 3 \in 3\mathcal{P}$. Az (5.6) egyenlőtlenség megmutatja, hogy az $\mathcal{E}$ kivételes halmaz mérete szorosan összefügg a TGS-sel.

Hosszú időbe telt, amíg (5.5)-nek bármilyen javítását sikerült elérni. R. C. Vaughannak (1972) sikerült bebizonyítani az élesebb

$$E(X) \ll X \exp(-c\sqrt{\log X}). \tag{5.8}$$

becslést.

Az áttörés 1975-ben következett be, amikor H. L. Montgomery és R. C. Vaughan (1975) bebizonyította az

$$E(X) \le X^{1-\delta}, \quad \text{ha } X > X_0 \tag{5.9}$$

becslést egy nem meghatározott, de explicite kiszámolható $\delta > 0$ értékre. Megjegyezzük, hogy míg (5.5) ineffektív volt Siegel (1936) tételének használata miatt, (5.8) és (5.9) egyaránt effektív volt.

Nagyon nehéznek bizonyult (5.9), Montgomery–Vaughan tételének bizonyítása δ ésszerű (nem túl kis) értékére. J. R. Chen és J. M. Liu (1989) bizonyította, hogy

$$E(X) \ll X^{0.95}, \tag{5.10}$$

ezt H. Z. Li (1999) javította a következőképpen:

$$E(X) \ll X^{0.921}. \tag{5.11}$$

Végül bebizonyította az alábbi tételt.

Tétel. (H. Z. Li 2000a): *Van olyan X_0 ineffektív állandó, amelyre*

$$E(X) < X^{0.914} \ \textit{ha} \ X > X_0. \tag{5.12}$$

Egyelőre ez a legjobb publikált eredmény. (Megjegyezzük, hogy az (5.10)–(5.12) becslések mind ineffektívek.)

A szerző által használt módszer legfontosabb következménye az, hogy a fenti kitevő 2/3-ra csökkenthető (részletesen l. a 14. részben).

A BGS érvényességét a kiszámolható tartományban J. Richstein (2001) számításai igazolták minden $4 \cdot 10^{14}$ alatti egész számra.

6. A $\mathcal{P} \cup \{0\}$ mint bázis

A nemnegatív egész számok egy $\mathcal{A}$ halmazát k-ad rendű bázisnak nevezzük, ha minden pozitív egész szám felírható A pontosan k elemének összegeként. Ha ugyanezt csak minden elegendően nagy pozitív egész számra követeljük meg, akkor $\mathcal{A}$-t aszimptotikus bázisnak nevezzük.

Landau (1912) a Nemzetközi Matematikai Kongresszuson Cambridgeben tartott előadásában a Goldbach-sejtés következő gyengébb alakját javasolta.

Landau sejtése (LS): *Létezik olyan k, amelyre minden 1-et meghaladó egész szám felírható legfeljebb k prímszám összegeként.*

Landau sejtésének egy más alakját a következőképpen fogalmazhatjuk meg:

(LS′): *Létezik olyan k_1, amelyre minden elég nagy egész szám felírható legfeljebb k_1 prímszám összegeként.*

Észrevehetjük, hogy LS és LS′ ekvivalens, mivel bármely $N > 1$ egész szám felírható $[N/2]$ prímszám összegeként, amint az a

$$\begin{aligned} 2\ell &= 2 + 2 + \cdots + 2, \\ 2\ell + 1 &= 3 + 2 + \cdots + 2 \end{aligned} \tag{6.1}$$

egyenlőségekből látható. Jelöljük S-sel, illetve S_1-gyel k és k_1 minimális értékeit, amelyekre LS és LS′ érvényesek. A 2. részben láttuk, hogy S-ről az optimális sejtés az $S = 3$ Descartes-sejtés (hasonlóképp $S_1 = 3$ tűnik legvalószínűbbnek). Könnyű belátni, hogy a TGS-ből $S \leq 4$ következik. Ezt a 6. állítás finomításaként összegezhetjük:

7. állítás. BGS $\Rightarrow$ DS $\Leftrightarrow$ $S = 3$ $\Rightarrow$ TGS $\Rightarrow$ $S \leq 4$.

Az első feltételes eredményt ebben az irányban Hardy és Littlewood (1923) érte el.

Feltételezték a következő analitikus sejtést, amelyet általánosított kvázi-Riemann-hipotézisnek nevezhetünk:

H sejtés *Létezik olyan $\theta < 3/4$, amelyre*

$$L(s, \chi) \neq 0, \quad ha \quad Res > \theta \tag{6.2}$$

érvényes bármely Dirichlet L-függvényre.

Megmutatták, hogy H-ból a TGS következik $N > N_0$-ra, ezért LS′ és LS szintén következik H-ból.

Landau sejtését feltétel nélkül először Schnirelman (1930, 1933) bizonyította úttörő munkáiban. Erről az 5. részben tettünk említést. Az eredmény az ő alábbi két fontos tételéből következik.

A tétel. *$G(X) \geq cX$ pozitív $c > 0$-re, ha $X \geq 4$.*

B tétel. *Pozitív alsó aszimptotikus sűrűségű természetes számok minden $\mathcal{A}$ részhalmaza (azaz $\liminf_{x\to\infty} A(x)/x > 0$) véges rendű aszimptotikus bázist alkot.*

Ebből következik, hogy $\mathcal{G}$ és így $\mathcal{P}$ véges rendű aszimptotikus bázis, azaz LS′, ebből kifolyólag LS igaz.

Ezt követően explicit becsléseket ért el S_1-re N. P. Romanov (1935) ($S_1 \leq 2208$), H. Heilbronn – E. Landau – P. Scherk (1936) ($S_1 \leq 71$) és G. Ricci (1936, 1937) ($S_1 \leq 67$).

Végül 1937-ben I. M. Vinogradov közreadta a TGS $N > N_0$ esetére vonatkozó, feltétel nélküli bizonyítását (Vinogradov 1937), ezáltal igazolva Landau sejtését a közel optimális $S_1 \leq 4$ értékkel.

Vinogradov eredeti bizonyítása Siegel ineffektív tételén alapult:

$$L(s, \chi) \neq 0, \quad \text{ha} \quad s \in [1 - c(\varepsilon)q^{-\varepsilon}, 1] \tag{6.3}$$

bármely χ mod q valós karakterre és bármely $\varepsilon > 0$-ra (Siegel 1936). Tehát Vinogradov tétele nem vezetett semmilyen N_0 explicit értékhez. Ahhoz, hogy explicit értéket érjünk el, el kell hagynunk Siegel tételét, és azt Page és Landau korábbi eredményeivel kell helyettesítenünk. K. G. Borozdkin (1956) állította, hogy $N_0 = \exp(\exp(16.038))$ megengedhető. J. R. Chen és T. Wang egy cikksorozatának az $N_0 = \exp(\exp(9.715))$ eredmény volt a csúcspontja (Chen, Wang 1996). Végül Liu Ming-Chit és Wang Tianze (2002) érte el az $N_0 = e^{3100}$-t. Az ÁRH-t feltételezve D. Zinoview (1997) megmutatta, hogy $N_0 = 10^{20}$ megengedhető. Mivel Deshouillers, Effinger, te Riele, Zinoview (1997) és Saouter (1998) számításai bebizonyították, hogy a TGS érvényes páratlan egész számokra a $[7, 10^{20}]$ intervallumban, jelenlegi feltételes tudásunkat a következő módon összegezhetjük:

Tétel. (Deshouillers, Effinger, te Riele, Saouter, Zinoview):

$$\text{ÁRH} \ \Rightarrow \ \text{TGS} \ \Rightarrow \ S \leq 4.$$

Az RH feltételezésével ismert legjobb eredmény Kanieckié (1995).

Tétel. (Kaniecki): RH-*ból* $S \leq 6$ *következik*.

Bár Vinogradov tétele nagyon nagy mértékben javította S_1 értékét, S explicit értékéhez nem adott vezérfonalat.

S explicit értékeit ezt követően vagy tisztán a Schnirelman által bevezetett elemi módszerek segítségével vagy később az elemi és analitikus módszerek kombinációjával bizonyították:

$S < 2 \cdot 10^{10}$ Šanin (1964)
$S \leq 610^9$ Klimov (1969)
$S \leq 159$ Deshouillers (1972/73)
$S \leq 115$ Klimov, Pil'tjai, Šeptickaja (1972)
$S \leq 61$ Klimov (1978)
$S \leq 55$ Klimov (1975)
$S \leq 27$ Vaughan (1977)
$S \leq 26$ Deshouillers (1975/76)
$S \leq 24$ Zhang, Ding (1983)
$S \leq 19$ Riesel, Vaughan (1983)
$S \leq 7$ Ramaré (1995)

Végül megemlítjük, hogy Ramaré és Saouter (2003) bizonyították, hogy a TGS érvényes minden páratlan $N < 1.13256 \cdot 10^{22}$-re.

7. Az egymást követő Goldbach-számok közötti hézagok

Jelölje $g_1 = 4$, $g_2 = 6 \ldots$, az egymást követő Goldbach-számokat. A BGS nyilvánvalóan ekvivalens $g_{k+1} - g_k = 2$, $g_k = 2(k+1)$-gyel minden $k \geq 1$-re. Így a BGS-hez természetes közelítés ezeknek a hézagoknak a felső becslése vagy – ami ezzel ekvivalens –

$$A(x) = \max_{g_k \leq x}(g_{k+1} - g_k) \tag{7.1}$$

felső becslése.

Nehéz megmondani, mit tekinthetünk e mennyiség triviális korlátjának. Ha azonban némi információnk van az egymást követő prímszámok közötti hézagokról, azaz ha felső becslésünk van a

$$B(x) = \max_{p_k \leq x}(p_{k+1} - p_k) \tag{7.2}$$

mennyiségről, akkor ebből nyilvánvalóan adódnak $A(x)$ korlátai is. Ugyanis $p_k + 3 \in \mathcal{G}$ triviálisan következik, és ezért

$$A(x) \leq B(x-3) \leq B(x). \tag{7.3}$$

Tehát ebben az értelemben bármely – a prímek közötti hézagokra vonatkozó – (triviális vagy nemtriviális) korlátból nyilvánvalóan következik a Goldbach-számok közötti hézagok korlátja. Használhatunk azonban egy mélyebb (bár még viszonylag egyszerű) összefüggést, amely prímszámok és Goldbach-számok hézagai között áll fenn. Ha Montgomery–Vaughan (1975) egyszerű ötletét egy kissé általánosabb értelemben alkalmazzuk, a következőt fogalmazhatjuk meg:

8. állítás. *Tegyük fel, hogy van négy pozitív állandónk,* ϑ_1, ϑ_2, c_1 *és* $c_2 < c_1\vartheta_1$ *a következő tulajdonságokkal:*

(a) *minden* $[X - Y, X]$ *típusú intervallum* $X^{\vartheta_1} < Y < X/2$*-re tartalmaz legalább* $c_1\, Y/\log X$ *prímszámot bármely* $X > X_0$ *mellett,*

(b) $c_2\, X/\log X$ *kivétellel minden* $n \in [X, 2X]$ *egész szám értékre az* $[n - X^{\vartheta_2}, n]$ *intervallum tartalmaz prímszámot bármely* $X > X_0$*-ra. Ekkor*

$$A(X) \ll X^{\vartheta_1 \vartheta_2}. \tag{7.4}$$

Megemlítjük, hogy bár az (a) feltételben több mint egy prím meglétét követeljük meg, a jelen módszerek, amelyek garantálják prímszám létezését egy adott intervallumban, automatikusan eredményezik a prímek várható számának legalább a megkövetelt pozitív hányadát. Következésképpen a $B(x)$-re vonatkozó jelen korlátok lényegében X^{ϑ_1} alakúak (a)-t kielégítő ϑ_1-re. A $B(x)$ „triviális becsléshez" képest a javítás tehát a $\vartheta_2 < \vartheta_1$ tényező megjelenése X kitevőjében.

Az állítás bizonyításához tegyük fel, hogy (7.4) hamis. Ekkor van olyan X értékünk, hogy az $[X - X^{\vartheta_1\vartheta_2}, X]$ intervallum nem tartalmaz Goldbach-számot. Tekintsük a $\{q_i\}_1^\ell$ prímeket az $[X - 2X^{\vartheta_1}, X - X^{\vartheta_1}]$ intervallumban. Itt $\ell \ge c_1\, X^{\vartheta_1}/\log X = c_1\vartheta_1 X^{\vartheta_1}/\log(X^{\vartheta_1})$ áll. Ekkor minden $(n_i - X^{\vartheta_1\vartheta_2}, n_i)$ $(i \le \ell)$ intervallum prímszámmentes, ha $n_i = X - q_i \in [X^{\vartheta_1}, 2X^{\vartheta_1}]$. Ez viszont ellentmondás, ha $c_2 < c_1\vartheta_1$. Q.E.D.

Ez az egyszerű érvelés megmutatja, hogy gyakorlatilag minden tétel, amely (a) értelmében prímek létezését bizonyítja rövid intervallumokban, és azok a tételek, amelyek prímek létezését a (b)-ben leírt „kivételes halmazzal" rendelkező majdnem minden rövid intervallumban bizonyítják, összekapcsolhatók annak érdekében, hogy felső korlátokat szolgáltassanak egymás után következő Goldbach-számok közötti $A(x)$ maximális hézagokra.

A következőkben az (a) és a (b) típusú eredmények terén elért újabb fejleményeket soroljuk fel.

Huxley (1972) ($\vartheta_1 = 7/12 + \varepsilon$) prímszámtételét követő, ϑ_1-re vonatkozó összes eredmény az analitikus és szitamódszerek kombinálásából született, éppen úgy, ahogy Iwaniec és Jutila (1979) esetében.

$\vartheta_1 = 13/23$ Iwaniec–Jutila (1979)
$\vartheta_1 = 11/20$ Heath-Brown, Iwaniec (1979)
$\vartheta_1 = 17/31$ Pintz (1981, 1984)
$\vartheta_1 = 23/42$ Iwaniec–Pintz (1984)
$\vartheta_1 = 11/20 - 1/384$ Mozzochi (1986)
$\vartheta_1 = 6/11$ Lou–Yao (1992, 1993)
$\vartheta_1 = 7/13$ Lou–Yao (1992, 1993)
$\vartheta_1 = 107/200$ Baker–Harman (1996)
$\vartheta_1 = 21/40$ Baker–Harman–Pintz (2001)

A Huxley eredményének bizonyításánál alkalmazott módszer analógiája (prímszámtétel majdnem minden rövid intervallumra) a $\vartheta_2 = 1/6 + \varepsilon$ értékhez vezet; ugyanakkor a későbbi eredmények a szitamódszerek alkalmazásának köszönhetően a prímek várható számának csak egy pozitív hányadát garantálták.

$\vartheta_2 = 1/10 + \varepsilon$ Harman (1982)
$\vartheta_2 = 1/14 + \varepsilon$ Ch. Jia (1995a), Watt (1995)
$\vartheta_2 = 1/15 + \varepsilon$ H. Z. Li (1997)
$\vartheta_2 = 1/20 + \varepsilon$ Ch. Jia (1996a)

A ϑ_1-re és ϑ_2-re vonatkozó legjobb becsléseket kombinálva a legélesebb jelenlegi becslést $A(X)$-re a következőképpen fejezhetjük ki:

Tétel. (R. C. Baker, G. Harman, Ch. Jia, J. Pintz): *Érvényes a*

$$g_{k+1} - g_k \ll g_k^{21/800} \Leftrightarrow A(X) \ll X^{21/800} \tag{7.5}$$

egyenlőtlenség, azaz minden $[X, X + X^{21/800}]$ *típusú intervallum tartalmaz Goldbach-számokat, ha* $X > X_0$.

(Elhagyhatjuk ε-t mivel a $\vartheta_1 = 21/40$-et tartalmazó Baker–Harman–Pintz-eredmény valójában egy kissé jobb értékhez vezet.)

Linnik (1952) bebizonyította az RH feltételezésével érvényes

$$g_{k+1} - g_k \ll \log^3 g_k \quad \Leftrightarrow \quad A(X) \ll \log^3 X \tag{7.6}$$

becslést, míg a jelenlegi legjobb eredmény Kátai (1967) érdeme:

Tétel. (Kátai): RH $\Rightarrow g_{k+1} - g_k \ll \log^2 g_k$.

A feltétel nélküli esethez hasonlóan a bizonyítás az RH feltételezésével érvényes, A. Selberg (1943) által bizonyított

$$\int_{Y/2}^{Y} \left(\sum_{y}^{y+\Theta y} \log p - \Theta y \right)^2 \mathrm{d}y \ll \Theta Y^2 \log^2 Y \ \ (0 \le \Theta \le 1), \tag{7.7}$$

egyenlőtlenségből következik.

A problémának érdekes és különleges vonása, hogy az egymást követő Goldbach-számok közötti hézagokról szóló legerősebb eredmények közvetlenül a prímekre vonatkozó mély eredményekből adódnak, anélkül, hogy az additív problémákra kidolgozott bármely különleges módszert, például Hardy és Littlewood körmódszerét alkalmaznák.

Azt is megemlíthetjük, hogy a (7.4) egyenlőtlenség helyettesíthető az erősebb

$$G(X+Y) - G(X) \geq cY, \text{ ha } Y \geq X^{\vartheta_1 \vartheta_2} \tag{7.4$'$}$$

egyenlőtlenséggel, ha (b) helyett azt kötjük ki, hogy majdnem minden $[n - X^{\vartheta_2}, n]$ intervallumnak legalább $c' X^{\vartheta_2} / \log X$ prímet kell tartalmaznia (lásd Ramachandra 1977). Minthogy Harman, Jia, Li és Watt ϑ_2-re vonatkozó összes említett eredményei kielégítik a fenti erősebb követelményt, (7.5) helyett szintén az erősebb

$$G(X+Y) - G(X) \geq cY, \text{ ha } Y \geq X^{21/800} \tag{7.5$'$}$$

egyenlőtlenségünk érvényes.

Végül megfogalmazhatunk egy sejtést az egymást követő Goldbach-számok közötti hézagokra, amelyet feltehetőleg könnyebb bizonyítani, mint magát a BGS-t.

A sejtés *Bármely $\varepsilon > 0$-re érvényes*

$$A(X) \ll_\varepsilon X^\varepsilon \Leftrightarrow g_{k+1} - g_k \ll_\varepsilon g_k^\varepsilon. \tag{7.8}$$

Megjegyzés. Látjuk, hogy a BGS-től eltérően az A sejtés a Riemann-hipotézisből következik, amint az (7.6)-ból kitűnik.

8. Goldbach kivételes számok rövid intervallumokban

Mivel már 1937–38-ban bizonyítást nyert, hogy majdnem minden páros szám Goldbach-szám, föltehető a kérdés, vajon kimutathatjuk-e ennek analógiáját rövid intervallumokban is. Legyen

$$E(X,Y) = E(X+Y) - E(X) = \#\{n \in (X, X+Y], n \in \mathcal{E}\}. \tag{8.1}$$

Bár a BGS-ből nyilvánvalóan következik, hogy $E(X, Y) = 0$ minden $X \geq 2$-re, megpróbálhatjuk bebizonyítani a gyengébb

$$E(X, Y) = o(Y) \tag{8.2}$$

egyenlőtlenséget a lehető legkisebb $Y = Y(X)$ függvénnyel. Az előző fejezet eredményei azonban határt szabnak reményeinknek.

Az első ilyenfajta eredményt K. Ramachandra (1973) érte el, aki bebizonyította, hogy

$$E(X, X^{\vartheta_3}) = o(X^{\vartheta_3}), \quad \text{ha} \quad \vartheta_3 = 3/5 + \varepsilon. \tag{8.3}$$

Ezt az eredményt húsz évvel később A. Perelli és J. Pintz (1992) élesítette $\vartheta_3 = 1/2 + \varepsilon$-ra, majd nem sokkal ezután – egyidejűleg és függetlenül – Perelli–Pintz (1993) és H. Mikawa (1992) bizonyították a $\vartheta_3 = 7/36 + \varepsilon$, illetve a $\vartheta_3 = 7/48 + \varepsilon$ eredményeket. Mikawa eredményének új vonása az volt, hogy Iwaniec és Jutila (1979) prímeket érintő módszeréhez hasonlóan (lásd 7. rész), Mikawa-szitamódszereket alkalmazott Goldbach-számok előállítására. Ez a módszer további jelentős javításokhoz vezetett:

$\vartheta = 7/78 + \varepsilon$ Ch. Jia (1995b, 1995c)
$\vartheta = 7/81 + \varepsilon$ H. Z. Li (1995)
$\vartheta = 11/160 + \varepsilon$ Baker, Harman, Pintz (1995/96)

Végül a ma ismert legerősebb eredmények a következők.

Tétel. (Ch. Jia 1996b): *Majdnem minden páros szám Goldbach-szám bármely $[X, X + X^{7/108+\varepsilon}]$ típusú intervallumban, pontosabban $\vartheta_3 = 7/108 + \varepsilon$-ra és bármely $A > 0$-ra*

$$E(X, X^{\vartheta_3}) \ll_A X^{\vartheta_3} \log^{-A} X \tag{8.4}$$

érvényes.

Tétel. (J. Kaczorowski – A. Perelli – J. Pintz 1993): *Az ÁRH-ból következik*

$$E(X, \log^{6+\varepsilon} X) = o\,(\log^{6+\varepsilon} X) \quad \textit{bármely} \quad \varepsilon > 0\textit{-ra}. \tag{8.5}$$

Megjegyezzük, hogy egyidejűleg és függetlenül G. Dufner (1994, 1995) ugyanezt az eredményt mutatta meg 6 helyett 27-tel, szintén az ÁRH feltételezésével.

Ezt a részt egy sejtés megfogalmazásával zárjuk, amely az A sejtésnél (vö. (7.8)) erősebb, de a BGS-nél gyengébb.

B sejtés. $E(X, X^{\varepsilon}) = o\,(X^{\varepsilon})$ bármely $\varepsilon > 0$-ra.

Megjegyzés. (8.5) megmutatja, hogy az ÁRH-ból a B sejtés következik.

9. A Goldbach–Linnik-probléma

Linnik (1951)-ben az ÁRH feltételezésével, két évvel később pedig feltétel nélkül bebizonyította (Linnik 1953), hogy minden elegendően nagy páros egész szám felírható két prímszám és K számú kettő hatvány összegeként, ahol K nem meghatározott abszolút állandó. Felmerül a kérdés, mi K legkisebb értéke, amelyre a tétel bebizonyítható. Természetesen $K = 0$ ekvivalens a BGS-sel $N > N_0$ esetén.

Az első explicit eredményt, $K = 770$-et az ÁRH feltételezésével csak 1998-ban bizonyította J. Y. Liu, M. C. Liu és T. Z. Wang (1998a). Ők bizonyították az első feltétel nélküli eredményt, $K = 54\,000$-et is (Liu–Liu–Wang 1998b). Röviddel ezután a következő feltétel nélküli eredmények bizonyításai jelentek meg:

$K = 25\,000$ Hongze Li (2000b)
$K = 2\,250$ Tianze Wang (1999)

$K = 1\,906$ Hongze Li (2001)

Másrészt az ÁRH-n alapuló javítások a következők voltak:

ÁRH $\Rightarrow$ $K = 200$ J. Y. Liu, M. C. Liu, T. Z. Wang (1999)
ÁRH $\Rightarrow$ $K = 160$ Tianze Wang (1999)

Ebben a vonatkozásban meg kell említenünk Gallagher (1975) fontos munkáját. Nem adott ugyan explicit korlátot K-ra, viszont jelentősen egyszerűsítette Linnik eredeti bizonyítását, és ezáltal nagyban hozzájárult e témakör későbbi fejleményeihez.

Az előadónak részben a $\sum_{\nu=1}^{L} \exp(2^\nu \alpha)$ exponenciális összeg jobb kezelésével, részben a prímszámokra vonatkozó új módszerek alkalmazásával sikerült jelentősen csökkentenie a K-ra adott korlátokat, és megmutatta, hogy a $K = 10$ (ÁRH mellett) és a $K = 12$ (feltétel nélküli) értékek megengedhetők. (Ezeket az eredményeket a debreceni számelméleti konferencián 2000-ben jelentette be a szerző.) Valamivel később, egyidejűleg és függetlenül D. R. Heath-Brown és J. C. Schlage-Puchta (2002), továbbá J. Pintz és I. Z. Ruzsa (2003) bizonyították be a legjobb jelenleg ismert eredményt.

Tétel. (Heath-Brown, Puchta; Pintz, Ruzsa): *Ha ÁRH igaz, akkor minden elegendően nagy páros szám felírható két prímszám és kettőnek legfeljebb hét hatványa összegeként, azaz $K = 7$ megengedhető.*

A legjobb ismert feltétel nélküli eredmény:

Tétel. (Heath-Brown, Puchta 2002): $K = 13$ *megengedhető a Goldbach–Linnik-problémában.*

A fent említett módszerek lehetővé teszik $K = 8$ bizonyítatlan feltétel nélküli elérését is.

Linnik eredményeit A. I. Vinogradov (1956) általánosította $g \geq 2$ tetszőleges egész szám hatványaira 2 hatványai helyett.

10. Goldbach-számok eloszlása. Mikawa egy tétele

H. Mikawa (1993) tanulmányozta a $\{g_k\}_1^\infty$ Goldbach-számok különbségeinek momentumait:

$$M_\alpha(X) = \sum_{g_n \leq X} (g^*_{n+1} - g_n)^\alpha \ , \tag{10.1}$$

ahol $g^*_k = \min(g_k, X)$, $\alpha \geq 0$, $0^0 = 1$. Bebizonyította, hogy

$$M_3(X) \ll X \log^{300} X, \tag{10.2}$$

$$M_\alpha(X) = 2^{\alpha-1}\, X + o(X), \quad \text{ha} \quad 0 < \alpha < 3\ . \tag{10.3}$$

A (10.1)-ben szereplő kifejezés ad némi információt a Goldbach kivételes számok számáról (az olyan páros számokéról, amelyek nem írhatók fel két prím összegeként) és lehetséges koncentrációjukról is. Például (10.3) érvényessége $\alpha = 0$-ra ekvivalens $E(X) = o(X)$-szel. A BGS ekvivalens az

$$M_0(X) = G(X) = [X/2] - 1 \tag{10.4}$$

egyenlőséggel és bármely $\alpha > 0$-ra az

$$M_\alpha(X) = \left(\left[\frac{X}{2}\right] - 2\right) 2^\alpha + \left(X - 2\left[\frac{X}{2}\right]\right)^\alpha, \quad \text{ha} \ \ X \geq 4 \tag{10.5}$$

egyenlőséggel. A BGS-ből

$$M_\alpha(X) = 2^{\alpha-1} X + O_\alpha(1), \quad \text{ha} \ \ X \geq 4 \tag{10.6}$$

következik. Ha bevezetjük az

$$N_\alpha(X) = \sum_{\substack{g_n \le X \\ g^*_{n+1} - g_n > 2}} (g^*_{n+1} - g_n)^\alpha \tag{10.7}$$

mennyiséget, láthatjuk, hogy

$$M_\alpha(X) - N_\alpha(X) = \sum_{\substack{g_n \le X \\ g^*_{n+1} - g_n = 2}} (g^*_{n+1} - g_n)^\alpha = 2^{\alpha-1}X + O_\alpha(E(X)). \tag{10.8}$$

Továbbá az alábbi triviális becsléseink vannak $(E_1(X) = E(X) - 1)$:

$$(E_1(X))^\alpha \ll_\alpha N_\alpha(X) \ll_\alpha E_1(X), \quad \text{ha } 0 \le \alpha \le 1 \tag{10.9}$$

és

$$E_1(X) \ll_\alpha N_\alpha(X) \ll_\alpha (E_1(X))^\alpha, \ \text{ ha } \alpha \ge 1\ . \tag{10.10}$$

Definiáljuk az $A_1(x) = \max\limits_{g_n \le x}(g^*_{n+1} - g_n)$ függvényt. Ekkor (10.10)-et a következőképp javíthatjuk:

$$E_1(X)(A_1(X))^{\alpha-1} \ll_\alpha N_\alpha(X) \ll_\alpha E_1(X), \ \text{ ha } 0 \le \alpha \le 1 \tag{10.11}$$

és

$$\max(E_1(X), (A_1(X)^\alpha) \ll_\alpha N_\alpha(X) \ll_\alpha E_1(X)(A(X))^{\alpha-1}, \quad \text{ha } \alpha \ge 1\ . \tag{10.12}$$

A fenti összefüggéseket tekintve valószerű a feltételezés, hogy (10.3) igaz α minden értékére, még jobb hibataggal is. Ebből következőleg két további sejtést fogalmazhatunk meg. Mindkettő gyengébb, mint a BGS, ebből kifolyólag talán könnyebben bizonyíthatóak.

$\mathbf{C_1}$ sejtés. $M_\alpha(X) = 2^{\alpha-1}X + o(X)$ *bármely* $\alpha \ge 0$-ra.

$\mathbf{C_2}$ sejtés. $M_\alpha(X) = 2^{\alpha-1}X + O(X^{1-\delta})$ *bármely* $\alpha \ge 0$*-ra pozitív* $\delta = \delta(\alpha)$*-val.*

A C_1 sejtés gyengébbnek tűnik, mint a C_2. Bár ez igaz lehet α egyedi értékeinél, a fent megfogalmazott alakjukban a sejtések ekvivalensek. Tehát

9. állítás. *Az A, a C_1 és a C_2 Sejtés ekvivalens.*

Bizonyítás. Tegyük fel, hogy A igaz. Ekkor a Montgomery–Vaughan-tétel (5.9), (10.8) és (10.12) révén

$$\begin{aligned} M_\alpha(X) - 2^{\alpha-1}X =& N_\alpha(X) + O_\alpha(E(X)) \ll E(X)\cdot\big(1+(A(X)^{\alpha-1}\big) \ll \\ \ll& X^{1-\delta}(1+X^{\varepsilon(\alpha-1)}) \ll X^{1-\delta'(\alpha)}, \quad \text{ha } \alpha \geq 0 \end{aligned} \tag{10.13}$$

igaz, és így C_1 és C_2 is igaz. Másrészt, ha A hamis, akkor ugyanezen összefüggések révén valamilyen $\varepsilon_0 > 0$-ra és megfelelő $X = X_n \to \infty$-re

$$M_\alpha(X) - 2^{\alpha-1}X + o(X) = N_\alpha(X) \gg X^{\alpha\,\varepsilon_0} \gg X, \tag{10.14}$$

ha $\alpha > \varepsilon_0^{-1}$. Tehát ekkor mind a C_1, mind a C_2 Sejtés hamis. Q.E.D.

Bár az A sejtés ekvivalens a C_1 és a C_2 sejtéssel, nem szükségképpen ekvivalensek megfelelő α és ε párokra. Így felmerül a kérdés, hogy α milyen nagy értékeire garantálhatjuk C_1 és C_2 érvényességét. (Mikawa módszere egyáltalán nem vezet C_2 típusú eredményekre, és nem működik C_1 esetén $\alpha > 3$-ra.) Az eddig publikált legjobb eredményeket (10.13)-ba építve jelenlegi tudásunkat a C_2 sejtésről a következőképpen fogalmazhatjuk meg:

Tétel. *A C_2 sejtés érvényes $\alpha < 449/105 = 4,276\ldots$-ra.*

Bizonyítás. A bizonyítás azonnal következik az $E(X) \ll X^{0.914}$ (vö. (5.12)), $A(X) \ll X^{21/800}$ (vö. (7.5)) és (10.13) eredményekből.

Később látni fogjuk, hogy az általunk alkalmazott módszerek 16-ot kissé meghaladó eredményre vezetnek. Ez jobb, mint a $13.698 =$

$((1/3)(800/21)+1)$ eredmény, amely az $A(X) \ll X^{21/800}$ és $E(X) \ll X^{2/3}$ révén (10.13)-ból nyerhető.

Végül megemlítjük, hogy mivel a C_1 és a C_2 sejtés ekvivalens az A sejtéssel, mindkettő következik az RH-ból (vö. (7.6)).

11. Descartes sejtése. A kivételes halmaz Descartes sejtésére

A BGS következő közelítése maga a Descartes-sejtés is lehet. Ebből következően tanulmányozhatjuk a $\mathcal{D}$ kivételes halmazt a Descartes-sejtésre, azaz azon pozitív egész számok halmazát, amelyek nem írhatók fel legfeljebb 3 prím összegeként. Pontosabban, megpróbáljuk megbecsülni $\mathcal{D}$ számoló függvényét:

$$D(X) = \{N \le X;\ N \in \mathcal{D}\}. \tag{11.1}$$

A Goldbach-sejtéshez hasonlóan Descartes sejtése ekvivalens a

$$\mathcal{D} = \{1\} \ \Leftrightarrow\ D(X) = 1, \ \text{ ha } \ X \ge 1. \tag{11.2}$$

kifejezéssel.

Mivel Vinogradov tétele szerint minden elegendően nagy páratlan szám felírható három prím összegeként, a

$$\mathcal{D}_2 = \{N;\ 2 \mid N,\ N \in \mathcal{D}\} = \{N;\ N \in \mathcal{E},\ N-2 \in \mathcal{E}\} \tag{11.3}$$

halmazra kell összpontosítanunk.

A jelenleg létező módszerek nem tudnak jobb becslést adni $\mathcal{D}_2$ számoló függvényére, mint $\mathcal{E}$-éra. Ennek következtében az (5.3) és az (5.12) becsléseket egyúttal a $D(X)$-re eddig közölt legjobb eredményeknek is tekintjük.

Ezzel ellentétben a mi módszereink lehetővé teszik, hogy jobb korlátot érjünk el $D_2(X)$-re mint az $E(X)$-re nyerhető $X^{2/3}$ becslés. Így $D_2(X)$-re (és ebből következően $D(X)$-re) be tudjuk bizonyítani az $X^{3/5+\varepsilon}$ feltétel nélküli becslést. Másfelől, ha az ÁRH igaz, nem tudjuk Hardy és Littlewood $X^{1/2+\varepsilon}$ korlátját megjavítani (vö. (5.3)).

Érdekes megemlíteni, hogy Descartes sejtése ekvivalens a sejtés egy látszólag erősebb változatával, nevezetesen az alábbival:

(DS′): Minden egyet meghaladó szám felírható legfeljebb 3 prímszám összegeként, ahol a harmadik összeadandó, ha létezik, 2-nek, 3-nak vagy 5-nek választható.

10. állítás. DS $\Leftrightarrow$ DS′.

Bizonyítás. Ahhoz, hogy belássuk, hogy DS-ből DS′ következik, elég az $N > 5$ páratlan egész számokat tekinteni. Ekkor a 2. részbeli 5′. állítás szerint $N - 3 \in \mathcal{G}$-t vagy $N - 5 \in \mathcal{G}$-t kapjuk. Q.E.D.

12. A kivételes halmaz „struktúrája”

Amint a 14. részből látható, jelentősen jobb becslést adhatunk az X alatti Goldbach kivételes számokból álló, kettő különbségű párok számára, mint az X-ig terjedő Goldbach kivételes számokéra. Felmerül a kérdés, jellemezhetjük-e a Goldbach kivételes számok $\mathcal{E}$ halmazát valamilyen módon. Mivel nagyon valószínű, hogy $\mathcal{E}$ a valóságban csak a 2-es egész számból fog állni, egy ilyen „jellemzés” nyilvánvalóan reménytelen.

Az $E(X)$ felső becsléséhez vezető korábbi módszerek nem nyújtottak semmilyen további információt az $\mathcal{E}$ halmaz „struktúráját” illetően. Másrészt például a 7. és a 8. részben említett eredmények mégis tartalmaztak nemtriviális információt lehetséges Goldbach kivételes számoknak rövid intervallumokban való eloszlásáról.

Természetesen nem tudjuk leírni az $\mathcal{E}$ halmazt. Nem tudjuk például, vajon véges vagy végtelen halmaz-e. A továbbiakban legyen $\mathcal{E}(X) = \{n \in \mathcal{E},\ n \le X\}$. Ekkor képesek vagyunk leírni egy bizonyos $\mathcal{E}_0(X) \subseteq [1, X]$ halmazt, amely kielégíti az

$$\mathcal{E}(X) \subseteq \mathcal{E}_0(X) \tag{12.1}$$

feltételt. Az $\mathcal{E}_0(X)$ halmazt olyan „fekete doboz”-nak tekinthetjük, amely tartalmazza az $\mathcal{E}(X)$ kivételes halmazt. Pontosabban lesz X-től függő két $\mathcal{E}_i(X)$ ($i = 1, 2$) halmazunk, amelyekre

$$\mathcal{E}_0(X) = \mathcal{E}_1(X) \cup \mathcal{E}_2(X) \tag{12.2}$$

érvényes. Itt nem mondhatunk semmit $\mathcal{E}_2(X)$ struktúrájáról, de bizonyítani fogjuk, hogy ritka halmaz. Ugyanis

$$|\mathcal{E}_2(X)| \ll X^{3/5} \log^C X. \tag{12.3}$$

Másrészt meghatározhatjuk $\mathcal{E}_1(X)$ struktúráját. Az $\mathcal{E}_1(X)$ halmaz korlátos számú számtani sorozat uniója lesz. Ezek a számtani sorozatok (sajnos) változhatnak, amikor $X \to \infty$, de számuk egy abszolút állandó alatt marad. Különbségeik egyszerű összefüggésben vannak az r_i „rossz” modulusokkal, amelyekre vannak olyan χ_i „rossz” primitív karakterek, hogy a megfelelő L-függvények eltűnnek valahol a

$$\sigma \ge 1 - \frac{C_1}{\log X}\ ,\ \ |t| \le C_2 \tag{12.4}$$

négyszögben, ahol C_1 és C_2 megfelelően választott abszolút állandók. Ez azt is megmutatja, hogy ha valamely bizonyítatlan feltételt fogadunk el az L-függvények zérushelyeiről (például hogy a fenti tartomány zérusmentes, ha

$r_i \leq \sqrt{X}$), a „fekete doboz” $\mathcal{E}_1$ része üres lesz, és így az $X^{3/5+\varepsilon}$ felső becslés (12.3)-ban $E(X)$-re is érvényes lesz.

Az $\mathcal{E}_0(X)$ „fekete doboz” struktúrájáról nyert információ nagy segítséget fog jelenteni Mikawa tételének (vö. 10. rész) javításához és a $\mathcal{D}$ Descartes kivételes halmaz (vö. 11. rész) becsléséhez, mert mind a két probléma összefügg az $\mathcal{E}$ kivételes halmaz méretével *és* struktúrájával is.

13. Páros egész számok Goldbach-felbontásainak a száma

A 4–12. részekben a BGS-nél gyengébb különböző sejtéseket tanulmányoztunk. Ezúttal a Hardy–Littlewood-sejtéssel (1923) (HL) fogunk foglalkozni, amely erősebb, mint a BGS, és érinti a páros egész számok Goldbach felbontásainak a számát. Technikai okokból – a prímszámtétel esetével analógiában – most ekvivalens módon fogalmazzuk meg.

Legyen

$$R(m) = \sum_{p+p'=m} \log p \log p' \qquad (2 \mid m). \tag{13.1}$$

HL sejtés. *$R(m) \sim m\mathfrak{S}(m)$, ha $m \to \infty$, $2 \mid m$, ahol $\mathfrak{S}(m)$ az úgynevezett*

$$\mathfrak{S}(m) = \prod_{p \mid m} \left(1 + \frac{1}{p-1}\right) \prod_{p \nmid m} \left(1 - \frac{1}{(p-1)^2}\right) \tag{13.2}$$

szinguláris sor.

Megjegyzés. Könnyű belátni, hogy páros m-re

$$1 < 2C_0 = 2 \prod_{p>2} \left(1 - \frac{1}{(p-1)^2}\right) \leq \mathfrak{S}(m) \ll \log\log m. \tag{13.3}$$

Hardy–Littlewood (1924) az (5.3)-on túl bizonyította, hogy az ÁRH feltevése esetén

$$|R(m) - m\mathfrak{S}(m)| < m/\log m \tag{13.4}$$

is igaz $C_\varepsilon X^{1/2+\varepsilon}$ kivételével minden $m \le X$ páros számra.

Természetes megkérdezni, mit jelenthetünk ki ezzel ellentétben a BGS érvényességét illetően, ha feltesszük az ÁRH hamisságát, azaz egy $L(s, \chi, q)$ függvény legalább egy $\varrho = \beta + i\gamma$ zérushelyének a létezését (ahol $\beta > 1/2$ és esetlegesen β 1-hez közeli). Például, ha létezik $L(s, \chi, q)$-nak egy zérushelye a (12.4) négyszögben $q \le x^{1/3}$ esetén, akkor nagyon valószínűtlen, hogy az $R(m) \sim \mathfrak{S}(m)m$ aszimptotika (vagy pl. (13.4)) érvényes lenne $C_\varepsilon X^{1/2+\varepsilon}$ kivételével minden $m \le X$ páros számra. (A BGS viszont valószínűleg még ebben az esetben is igaz lesz.)

Tegyük fel most egy Siegel-gyök létezését, pontosabban legyen χ_1 valós primitív karakter mod q, $L(1 - \delta, \chi_1) = 0$-val, például

$$\delta \le 1/\log^5 q \tag{13.5}$$

tulajdonsággal. Legyen x elég nagy, például

$$x = q^{\log q} \iff \log x = \log^2 q. \tag{13.6}$$

Ez esetben viszonylag könnyű bizonyítani, hogy az aszimptotika átlagosan megsemmisül q-nak m többszöröseire, $m \in [x/2, x]$ esetén. A bizonyítás még egyszerűbb lesz, ha feltételezzük $\chi_1(-1) = -1$-t. Ha $q \mid m$, $p + p' = m$, $p \nmid q$, akkor $\chi_1(p) = 1$ vagy $\chi_1(p') = 1$. Ebből

$$R(m) \ll \log m \sum_{\substack{p \leq m \\ \chi_1(p)=1}} \log p \ll \tag{13.7}$$
$$\ll \log m \left(m - \frac{m^{1-\delta}}{1-\delta} + O\left(m^{1-c/\log q}\right)\right) \ll$$
$$\ll m \log m \left(\delta \log m + \frac{1}{q^c}\right) \ll \frac{m}{\sqrt{\log m}}$$

adódik.

14. A Goldbach-sejtésre vonatkozó új eredmények összefoglalása

A következőkben felsoroljuk a szerző legújabb (még publikálatlan) eredményeit, amelyek a bináris Goldbach-sejtéssel foglalkoznak. Megemlíthetjük eredményeinknek a terner Goldbach-sejtés élesítésére vonatkozó két következményét (7′. tétel és 9. tétel) is.

Legfontosabb eredményünk az $\mathcal{E}$ kivételes halmazra a BGS-ben:

1. tétel. *Létezik olyan $\vartheta_0 < 2/3$, hogy*

$$E(X) < X^{\vartheta_0}, \quad \textit{ha} \quad X > X_0, \tag{14.1}$$

ahol X_0 (ineffektív) abszolút állandó.

Megjegyezzük, hogy jelentős többlet-erőfeszítéssel be tudjuk bizonyítani az 1. tétel némileg gyengébb, de effektív változatát. (Az (5.9), az eredeti Montgomery–Vaughan-tétel szintén effektív, ellentétben az (5.10)–(5.12) becslésekkel.)

Ha megengedjük, hogy egy, az ÁRH-nál sokkal gyengébb hipotézist fogadjunk el, tovább javíthatjuk (14.1)-et. Feltételezésünk C_1-től és C_2-től, két pozitív állandótól függ.

$\mathbf{Z(C_1, C_2)}$ **hipotézis.** *$L(s, \chi, q) \neq 0$ érvényes a*

$$\sigma \geq 1 - \frac{C_1}{\log q}, \qquad |t| \leq C_2 \tag{14.2}$$

tartományban, ahol χ bármely mod *q vett karakter.*

2. tétel. *Vannak olyan C_1, C_2 abszolút állandók, hogy ha $Z(C_1, C_2)$ igaz, akkor*

$$E(X) \ll X^{3/5} \log^{10} X. \tag{14.3}$$

Megemlíthetjük, hogy a fenti hipotézis igaz $q > C_3$-ra $C_1 = 0,348$ és tetszőleges C_2 értékkel, Siegel-gyökök lehetséges létezésétől eltekintve (Heath-Brown 1992, Theorem 1). Ha azonban vannak Siegel-gyökök, akkor a (14.3)-mal analóg becslést tudunk igazolni X egy adott tartományára, amely a releváns primitív karakter „rossz" q konduktorától függ.

3. tétel. *Van egy c_4 állandónk, amely a következő tulajdonsággal rendelkezik. Ha létezik egy χ_1* mod *q_1 valós karakter, amelyre $L(1 - \delta_1, \chi_1) = 0$, és*

$$\delta_1 \leq c_4 / \log X, \qquad q_1 \leq X^{2/5}, \tag{14.4}$$

akkor

$$E(X) \ll X^{3/5} \log^{10} X. \tag{14.5}$$

Bár a Goldbach kivételes számok rövid intervallumokban való eloszlására vonatkozó korábbi eredményeket (vö. 7–8. rész) nem tudjuk élesíteni, meg tudjuk azonban mutatni, hogy az ilyen számok koncentrációja nagyon ritkán fordul elő.

4. tétel. *Az esetleges X alatti Goldbach kivételes számok egy legfeljebb $CX^{3/5}\log^{10} X$ elemszámú $\mathcal{E}'$ részhalmazának elhagyásával elérhető, hogy az $\mathcal{E}\setminus\mathcal{E}'$ maradék halmaznak legfeljebb C_5 eleme lesz bármely $[Y,\ Y+Y^{1/3}]\subseteq[X/2,X]$ intervallumban, explicite kiszámolható C_5 abszolút állandóval.*

Ami a Linnik–Goldbach-problémát illeti, bármely bizonyítatlan hipotézis nélkül be tudjuk bizonyítani $K=8$-at.

5. tétel. (Pintz–Ruzsa): *Minden elég nagy páros egész szám felírható két prímszám és legfeljebb nyolc 2 hatvány összegeként.*

A 4. tételben a Goldbach kivételes számok lehetséges koncentrációjáról kapott információ segíteni fog abban, hogy megmutassuk: (10.3), Mikawa tétele érvényes minden $\alpha<341/21$-ra, még a C_2 sejtésben kifejezett erősebb alakban is.

6. tétel. *Legyen $4=g_1<g_2<\dots$ a Goldbach-számok sorozata, $g_k^*=\min(g_k,X)$. Ekkor*

$$M_\alpha(X)=\sum_{g_n\le X}(g_{n+1}^*-g_n)^\alpha=2^{\alpha-1}X+O_\alpha(X^{1-\delta}) \tag{14.6}$$

igaz bármely $\alpha<341/21=16.238\ldots$-ra megfelelően választott $\delta=\delta(\alpha)>0$ mellett.

Ahogyan korábban említettük, módszereink az $\mathcal{E}$ kivételes halmaznak nem csupán a méretét, hanem „struktúráját” is képesek kezelni. A

$$\mathcal{D}_2\overset{def}{=}\{N;\ 2\mid N,\ N\in\mathcal{D}\}=\mathcal{E}\cap\{\mathcal{E}+2\} \tag{14.7}$$

összefüggést alkalmazzuk, ahol $\mathcal{A}+k=\{n+k;\ n\in\mathcal{A}\}$ (lásd a 2. rész 5. állítását). A (14.7) összefüggés lehetővé teszi, hogy $\mathcal{D}$ méretére jobb becslést adjunk, mint amilyen az 1. tételben $\mathcal{E}$ becslése.

7. tétel. *$D(X) \ll X^{3/5}\log^{10} X$, azaz $O(X^{3/5}\log^{10} X)$ kivételével minden X alatti egész szám felírható legfeljebb 3 prím összegeként.*

Mivel a Descartes-sejtés minden páros N-re azt állítja, hogy N és $N+2$ legalább egyike Goldbach-szám, feltehetjük a kérdést, mi történik, ha az N, $N+a$ és $N+b$ számok közül legalább egyet Goldbach-számnak akarunk kapni (a és b adott páros egész szám). Először is észrevehetjük, hogy ha képesek lennénk bebizonyítani a fenti állítást bármely rögzített (a,b) párra minden $N > N_0$-ra, akkor triviális következményként kapnánk, hogy

$$g_{k+1} - g_k \leq \max(a,b) = O(1); \tag{14.8}$$

ez sokkal erősebb eredmény, mint az A sejtés. Képesek vagyunk azonban az 1. tétel egyszerű következményeként megmutatni a következő tételt.

8. tétel. *Legyen $X > X_0$ (egy ineffektív állandó). Ekkor vannak olyan $a, b \leq X$ páros egész számok (a, b X-től függ), hogy minden páros $N \leq X$-re N, $N+a$ vagy $N+b$ legalább egyike Goldbach-szám.*

Bizonyítás. Rögzítsünk bármely $N \in \mathcal{E}$ számot. (Ha $N \in \mathcal{G}$, kész a bizonyítás.) $(2X)^{\vartheta_0}$ kivételes a-tól eltekintve a minden választására $N+a \in \mathcal{G}$-t kapjuk, és $(2X)^{\vartheta_0}$ kivételes b-től eltekintve b minden választására $N+b \in \mathcal{G}$-t. Így $(2X)^{2\vartheta_0}$ kivételével az (a,b) pár minden választására $N+a$-nak és $N+b$-nek legalább egyike Goldbach-szám lesz. Ha figyelembe vesszük, hogy $N \in \mathcal{E}$ legfeljebb X^{ϑ_0} módon választható, akkor az (a,b) párra a rossz választások teljes száma ($N \leq X$ minden választásánál) kevesebb lesz, mint

$$(2X)^{3\vartheta_0} < 4X^{3\vartheta_0} = o(X^2). \tag{14.9}$$

Ebből következik, hogy majdnem minden (a,b) pár kielégíti a megkívánt feltételt. Q.E.D.

Mivel Vinogradov (1937) bebizonyította, hogy a terner Goldbach-sejtés igaz minden elég nagy páratlan egész számra, kereshetjük a TGS lehetséges erősebb változatait.

Kiköthetünk például néhány megszorítást a prímekre egy páratlan $N > N_0$ felbontásában. Nem fogunk részletesen foglalkozni az ilyen típusú problémákkal, amelyeknek nagy irodalmuk is van. A talán legjobban ismert ilyen feltétel az, hogy három majdnem egyenlő összeadandóval kérünk felbontást, azaz hogy

$$N = p_1 + p_2 + p_3, \quad |p_i - N/3| < N^{\vartheta}, \tag{14.10}$$

amikor $N > N_0(\vartheta)$ előírt $\vartheta < 1$-gyel. Ezzel kapcsolatban megemlíthetjük, hogy R. C. Baker és G. Harman (1998) bizonyítottak egy ilyen típusú nagyon erős eredményt, nevezetesen azt, hogy (14.10) teljesíthető, ha $\vartheta = 4/7$.

A TGS-sel kapcsolatban még megemlíthetjük, hogy a 7. tétellel analóg módon kapjuk az alábbi ekvivalens tételt.

7′. tétel. *$O(X^{3/5} \log^{10} X)$ kivétellel minden X-nél kisebb páratlan egész szám felírható három prímszám összegeként, amelyek egyike 3-mal vagy 5-tel egyenlő.*

A 11. részben említett (DS′)-beli kivételes halmazt illetően a 7. tételt és a 7′. tételt a szintén ekvivalens 7″. tételben összegezhetjük (amely erősebbnek tűnik a 7. tételnél).

7″. tétel. *$O(X^{3/5} \log^{10} X)$ kivételével minden X-nél kisebb egész szám felírható legfeljebb két prím összegeként vagy három prím összegeként, azzal a megszorítással, hogy a prímszámok egyike egyenlő lesz 2-vel, 3-mal vagy 5-tel.*

A 8. tétellel analóg módon meg tudjuk mutatni, hogy az 1. tételből az alábbi tétel is következik.

9. tétel. *Legyen $X > X_0$ (egy ineffektív állandó). Létezik q_1, q_2, q_3 olyan három (X-től függő) prím, amelyekre igaz, hogy minden $N \in [X/2, X]$ páratlan szám felírható három prímszám összegeként, amelyek egyike egyenlő q_1-gyel, q_2-vel vagy q_3-mal.*

Irodalomjegyzék

[1] Baker, R. C., Harman, G. (1996): The difference between consecutive primes. Proc. London Math. Soc., (3), **72**, 261–280.

[2] Baker, R. C., Harman, G. (1998): The three primes theorem with almost equal summands. R. Soc. Lond. Philos. Trans. Ser. A, Math. Phys. Eng. Sci., **356**, no. 1738, 763–780.

[3] Baker, R. C., Harman, G., Pintz J. (1995/96): The exceptional set for Goldbach's problem in short intervals. Sieve methods, exponential sums, and their applications in number theory (Cardiff, 1995), 1–54, London Math. Soc. Lecture Note Ser. 237, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1996.

[4] Baker, R. C., Harman, G., Pintz J. (2001): The difference between consecutive primes, II. Proc. London Math. Soc., (3) **83**, no. 3. 532–562.

[5] Barban, M. B. (1963): The density of zeros of Dirichlet L-series and the problem of the sum of primes and near primes. Mat. Sb., **61**, 418–425 (oroszul).

[6] Bombieri, E. (1965): On the large sieve. Mathematika, **12**, 201–225.

[7] Borozdkin, K. G. (1956): On the problem of Vinogradov's constant. Trudy III Vsesojuzn. S'ezda, **1**, 3 (oroszul).

[8] Brun, V. (1920): Le crible d'Eratosthéne et le théorème de Goldbach. Videnselsk. Skr. **1**, Nr.3.

[9] Buhštab, A. A. (1938): New improvements in the sieve of Eratosthenes, Mat. Sb. **4**, 357–387 (oroszul).

[10] Buhštab, A. A. (1940): Sur la décomposition des nombres pairs en somme de deux composantes dont chacune est formée d'un nombre borné de facteurs premiers. Doklady Akad. Nauk. SSSR, **29**, 544–548.

[11] Buhštab, A. A. (1965): New results in the investigation of Goldbach–Euler's problem and the problem of twin prime numbers. Doklady Akad. Nauk. SSSR, **162**, 735–738 (oroszul).

[12] Chen Jing Run (1966): On the representation of a large even integer as the sum of a prime and the product of at most two primes. Kexue Tongbao, **17**, 385–386. (kínaiul).

[13] Chen Jing Run (1973): On the representation of a large even integer as the sum of a prime and the product of at most two primes. Sci. Sinica, **16**, 157–176.

[14] Chen Jing Run, Liu Jian Min (1989): The exceptional set of Goldbach numbers, III. Chinese Quart. J. Math., **4**, 1–15.

[15] Chen Jing Run, Wang, T. (1996): The Goldbach problem for odd numbers. Acta Math. Sinica, **39**, 169–174.

[16] Corput, J. G. van der (1937): Sur l'hypothése de Goldbach pour presque tous les nombres pairs. Acta Arith., **2**, 266–290.

[17] Čudakov, N. G. (1938): On the density of the set of even numbers which are not representable as a sum of two primes. Izv. Akad. Nauk. SSSR, **2**, 25–40.

[18] Davenport, H. (1980): Multiplicative Number Theory, 2nd ed., Springer, Berlin–Heidelberg.

[19] Desboves, A. (1855): Sur un théorème de Legendre et son application à la recherche de limites qui comprennent entre elles des nombres premiers. Nouv. Ann. Math., **14**, 281–295.

[20] Descartes, R. (1908): Oeuvres. Publiés par Ch. Adam et P. Tannery, Paris.

[21] Deshouillers, J.-M. (1972/73): Amélioration de la constante de Šnirelman dans le probléme de Goldbach. Sém. Delange, Pisot, Poitou, **14**, exp. 14.

[22] Deshouillers, J.-M. (1975/76): Sur la constante de Šnirelman. Sém. Delange, Pisot, Poitu, **17**, exp. 16.

[23] Deshouillers, J.-M., Effinger, G., te Riele, H., Zinoviev, D. (1997): A complete Vinogradov 3-primes theorem under the Riemann hypothesis. Electron. Res. Announc. Amer. Math. Soc., **3**, 99–104.

[24] Dickson, L. E. (1919): History of the Theory Numbers, I. Washington. [Reprint: Chelsea, New York 1952, 1966.]

[25] Dufner, G. (1994): Binäres Goldbachproblem in kurzen Intervallen, I. Period. Math. Hungar. **29**, no. 3, 213–243.

[26] Dufner, G. (1995): Binäres Goldbachproblem in kurzen Intervallen, II. Period. Math. Hungar. **30**, no. 1, 37–60

[27] Estermann, T. (1932): Eine neue Darstellung und neue Anwendungen der Viggo Brunschen Methode. J. Reine Angew. Math., **168**, 106–116.

[28] Estermann, T. (1938): On Goldbach's problem: Proof that almost all even positive integers are sums of two primes. Proc. London Math. Soc., (2), **44**, 307–314.

[29] Euler, L., Goldbach, C. (1965): Briefwechsel 1729–1764. Akademie Verlag, Berlin.

[30] Gallagher, P. X. (1970): A large sieve density estimate near $\sigma = 1$. Invent. Math., **11**, 329–339.

[31] Gallagher, P. X. (1975): Primes and powers of 2. Invent. Math. **29**, 125–142.

[32] Goldston, D. A. (1989/1992): On Hardy and Littlewood's contribution to the Goldbach Conjecture. Proceedings of the Amalfi Conference on Analytic Number Theory (Maiori, 1989), 115–155, Univ. Salerno, Salerno, 1992.

[33] Hardy, G. H., Littlewood, J. E. (1923): Some problems of 'Partitio Numerorum', III: On the expression of a number as a sum of primes. Acta Math., **44**, 1–70.

[34] Hardy, G. H., Littlewood, J. E. (1924): Some problems of 'Partitio Numerorum', V: A further contribution to the study of Goldbach's problem. Proc. London Math. Soc., (2), **22**, 46–56.

[35] Harman, G. (1982): Primes in short intervals. Math. Zeitschr., **180**, 335–348.

[36] Heath-Brown, D. R. (1992): Zero-free regions for Dirichlet L-functions and the least prime in an arithmetic progression. Proc. London Math. Soc., (3), **64**, 265–338.

[37] Heath-Brown, D. R., Iwaniec, H. (1979): On the difference between consecutive prime numbers. Invent. Math., **55**, 49–69.

[38] Heath-Brown, D. R., Puchta, J.-C. (2002): Integers represented as a sum of primes and powers of two. Asian J. Math. **6**, no. 3, 535–565.

[39] Heilbronn, H., Landau, E., Scherk, P. (1936): Alle großen ganzen Zahlen lassen sich als Summe von höchstens 71 Primzahlen darstellen. Časopis pěst. Math. Fys., **65**, 117–141. [E. Landau, Collected Works, **9**, 351–375, Thales Verlag; The Collected Papers of Hans Arnold Heilbronn, 197–211, J. Wiley 1988.]

[40] Hilbert, D. (1935): Gesammelte Abhandlungen, Vol. 3, 290–329, Springer, Berlin.

[41] Huxley, M. N. (1972): On the difference between consecutive primes. Invent Math., **15**, 164–170.

[42] Iwaniec, H., Jutila, M. (1979): Primes in short intervals. Arkiv Mat., **17**, 167–176.

[43] Iwaniec, H., Pintz, J. (1984): Primes in short intervals. Monatsh. Math., **98**, 115–143.

[44] Jia, Chaohua (1995a): Difference between consecutive primes. Sci. China, Ser. A., **38**, 1163–1186.

[45] Jia, Chaohua (1995b): Goldbach numbers in a short interval, I. Science in China **38**, 385–406.

[46] Jia, Chaohua (1995c): Goldbach numbers in a short interval, II. Science in China **38**, 513–523.

[47] Jia, Chaohua (1996a): Almost all short intervals containing prime numbers. Acta Arith., **76**, 21–84.

[48] Jia, Chaohua (1996b): On the exceptional set of Goldbach numbers in a short interval. Acta Arith. **77**, no. 3, 207–287.

[49] Jutila, M. (1977): On Linnik's constant. Math. Scand., **41**, 45–62.

[50] Kaczorowski, J., Perelli, A., Pintz, J. (1993): A note on the exceptional set for Goldbach's problem in short intervals. Monatsh. Math. **116**, no. 3–4, 275–282. Corrigendum: *ibid.* **119** (1995), 215–216.

[51] Kaniecki, L. (1995): On Šnirelman's constant under the Riemann hypothesis. Acta Arith., **72**, 361–374.

[52] Karatsuba, A. A., (1993): Basic analytic number theory, Springer, Berlin.

[53] Kátai, I., (1967): A remark on a paper of Ju. V. Linnik, Magyar Tud. Akad. Mat. Fiz. Oszt. Közl. **17**, 99–100.

[54] Klimov, N. I. (1969): On the computation of Šnirelman's constant. Volžskij Mat. Sbornik, **7**, 32–40 (oroszul).

[55] Klimov, N. I. (1975): A refinement of the estimate of the absolute constant in the Goldbach–Šnirelman problem. Number theory: Collection of Studies in Additive Number Theory, Naučn. Trudy Kuibyšev. Gos. Ped. Inst. **158**, 14–30 (oroszul).

[56] Klimov, N. I. (1978): A new estimate of the absolute constant in the Goldbach–Šnirelman problem. Izv. VUZ, no. 1, 25–35 (oroszul).

[57] Klimov, N. I., Pil'tjai, G. Z., Šeptickaja, T. A. (1972): An estimate for the absolute constant in the Goldbach–Šnirelman problem. Issled. po teorii čisel, Saratov, No. 4, 35–51 (oroszul).

[58] Kuhn, P. (1941): Zur Vigo Brun'schen Siebmethode I, Norske Vid. Selsk. **14**, 145–148.

[59] Kuhn, P. (1953): Neue Abschätzungen auf Grund der Viggo Brunschen Siebmethode. 12 Skand. Mat. Kongr., 160–168.

[60] Kuhn, P. (1954): Über die Primteiler eines Polynoms, Proc. ICM Amsterdam, **2**, 35–37.

[61] Landau, E. (1912c): Gelöste und ungelöste Probleme aus der Theorie der Primzahlverteilung und der Riemannschen Zetafunktion. Jahresber. Deutsche Math. Ver., **21**, 208–228. [Proc. 5th Internat. Congress of Math., **I**, 93–108, Cambridge 1913; Collected Works, **5**, 240–255, Thales Verlag.]

[62] Li Hong Ze (1995): Goldbach numbers in short intervals. Science in China **38**, 641–652.

[63] Li Hong Ze (1997): Primes in short intervals. Math. Proc. Cambridge Philos. Soc., **122**, 193–205.

[64] Li Hong Ze (1999): The exceptional set of Goldbach numbers. Quart. J. Math. Oxford Ser.(2), **50**, no. 200, 471–482.

[65] Li Hong Ze (2000a): The exceptional set of Goldbach numbers, II. Acta Arith. **92**, no. 1, 71–88.

[66] Li Hong Ze (2000b): The number of powers of 2 in a representation of large even integers by sums of such powers and of two primes. Acta Arith. **92**, 229–237.

[67] Li Hong Ze (2001): The number of powers of 2 in a representation of large even integers by sums of such powers and of two primes, II. Acta Arith. **96**, 369–379.

[68] Li Hong Ze (2003): The exceptional set for the sum of a prime and a square. Acta Math. Hungar. **99**, no. 1–2, 123–141.

[69] Linnik, Yu. V., (1951): Prime numbers and powers of two. Trudy Mat. Inst. Steklov. **38**, 152–169 (oroszul).

[70] Linnik, Yu. V., (1952): Some conditional theorems concerning the binary Goldbach problem. Izv. Akad. Nauk. SSSR **16**, 503–520.

[71] Linnik, Yu. V., (1953): Addition of prime numbers and powers of one and the same number. Mat. Sb. (N.S.), **32**, 3–60 (oroszul).

[72] Liu, J. Y., Liu, M. C. and Wang, T. Z. (1998a): The number of powers of 2 in a representation of large even integers, I., Sci. China Ser. A., **41**, 386–397.

[73] Liu, J. Y., Liu, M. C. and Wang, T. Z. (1998b): The number of powers of 2 in a representation of large even integers, II., Sci. China Ser. A., **41**, 1255–1271.

[74] Liu, J. Y., Liu, M. C. and Wang, T. Z. (1999): On the almost Goldbach problem of Linnik, J. Théor. Nombres Bordeaux **11**, 133–147.

[75] Liu, Ming-Chit; Wang, Tianze (2002): On the Vinogradov bound in the three primes Goldbach Conjecture. Acta Arith. **105**, no. 2, 133–175.

[76] Lou, S. T., Yao, Q. (1992): A Chebychev's type of prime number theorem in a short interval, II. Hardy–Ramanujan J., **15**, 1–33.

[77] Lou, S. T., Yao, Q. (1993): The number of primes in a short interval. Hardy–Ramanujan J., **16**, 21–43.

[78] Mikawa, H. (1992): On the exceptional set in Goldbach's problem. Tsukuba J. Math. **16**, 513–543.

[79] H. Mikawa (1993): On the intervals between consecutive numbers that are sums of two primes. Tsukuba J. Math. **17**, No. 2, 443–453.

[80] Montgomery, H. L., Vaughan, R. C. (1975): The exceptional set in Goldbach's problem. Acta Arith., **27**, 353–370.

[81] Mozzochi, C. J. (1986): On the difference between consecutive primes. J. Number Th., **24**, 181–187.

[82] Narkiewicz, W. (2000): The Development of Prime Number Theory. >From Euclid to Hardy and Littlewood. Springer, Berlin.

[83] Pan Cheng Dong (1962): On the representation of even numbers as the sum of a prime and a near prime. Sci. Sinica, **11**, 873–888 (oroszul).

[84] Pan Cheng Dong (1963): On the representation of even numbers as the sum of a prime and a product of not more than 4 primes. Sci. Sinica, **12**, 455–473.

[85] Pan Cheng Dong, Pan Chen Biao (1992): Goldbach Conjecture. Science Press, Beijing.

[86] Perelli, A., Pintz, J. (1992): On the exceptional set for the $2k$-twin primes problem. Compositio Math. **82**, no. 3, 355–372.

[87] Perelli, A., Pintz, J. (1993): On the exceptional set for Goldbach's problem in short intervals. J. London Math. Soc., (2), **47**, 41–49.

[88] Pintz, J. (1981): On primes in short intervals, I. Studia Sci. Math. Hungar., **16**, 395–414.

[89] Pintz, J. (1984): On primes in short intervals, II. Studia Sci. Math. Hungar., **19**, 89–96.

[90] Pintz J., Ruzsa I. Z. (2003): On Linnik's approximation to Goldbach's problem, I., Acta Arith. **109**, no. 2, 169–194.

[91] Rademacher, H. (1924): Beiträge zur Viggo Brunschen Methode in der Zahlentheorie. Abh. Math. Sem. Hamburg, **3**, 12–30. [Collected Papers, **1**, 259–277. MIT Press, 1974.]

[92] Ramachandra, K. (1973): On the number of Goldbach numbers in small intervals. J. Indian Math. Soc. (N.S.) **37**, 157–170.

[93] Ramachandra, K. (1977): Two remarks in prime number theory. Bull. Soc. Math. France **105**, 433–437.

[94] Ramaré, O. (1995): On Šnirel'man's constant. Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa, Cl. Sci., (4), **22**, 645–706.

[95] Ramaré, O., Saouter, Y. (2003): Short effective intervals containing primes. J. Number Theory, **98**, no. 1, 10–33.

[96] Rényi, A. (1947): On the representation of an even number as the sum of a single prime and a single almost-prime number. Doklady Akad. Nauk SSSR, **56**, 455–458 (oroszul).

[97] Rényi, A. (1948): On the representation of an even number as the sum of a single prime and a single almost-prime number. Izv. Akad. Nauk SSSR, **12**, 57–78 (oroszul).

[98] Ricci, G. (1933): Ricerche arithmetiche sui polinomi. Rend. Circ. Mat. Palermo, **57**, 433–475.

[99] Ricci, G. (1936): Sur la congettura di Goldbach e la constante di Schnirelmann. Boll. Un. Math. Ital., **15**, 183–187.

[100] Ricci, G. (1937): Sur la congettura di Goldbach e la constante di Schnirelmann, II,III. Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa, Cl. Sci., (2), **6**, 71–90, 91–116.

[101] Richstein, J. (2001): Verifying the Goldbach conjecture up to $4 \cdot 10^{14}$. Math. Comp. **70**, no. 236, 1745–1749 (elektronikus).

[102] Riesel, H., Vaughan, R. C. (1983): On sums of primes. Arkiv Mat., **21**, 45–74.

[103] Romanov, N., P. (1935): On Goldbach's problem. Tomsk, Izv. Mat. Tek. I, 34–38 (oroszul).

[104] Šanin, A. A. (1964): Determination of constants in the method of Brun-Šnirelman. Volzh. Mat. Sb. **2**, 261–265 (oroszul).

[105] Saouter, Y. (1998): Checking the odd Goldbach conjecture up to 10^{20}, Math. Comp., **67**, 863–866.

[106] Schnirelman, L. G. (1930): On additive properties of numbers. Izv. Donsk. Politehn. Inst., **14**, 3–28 (oroszul).

[107] Schnirelman, L. G. (1933): Über additive Eigenschaften von Zahlen. Math. Ann., **107**, 649–690.

[108] Selberg, A. (1943): On the normal density of primes in small intervals and the difference between consecutive primes, Arch. Math. Naturvid. **47**, no. 6, 87–105.

[109] Selberg, A. (1950): The general sieve method and its place in prime number theory. Proc. Internat. Congress of Math., Cambridge, Mass., **1**, 286–292.

[110] Siegel, C. L. (1936): Über die Classenzahl quadratischer Körper. Acta Arith., **1**, 83–86. [Gesammelte Abhandlungen, **1**, 406–409. Springer, Berlin–Heidelberg 1966.]

[111] Sylvester J. J. (1871): On the partition of an even number into two primes. Proc. London Math. Soc., **4**, 4–6. [Collected Math. Papers, **2**, 709–711, Cambridge 1908.]

[112] Tartakowski, W. (1939a): Sur quelques sommes du type de Viggo Brun. C.R. Acad. Sci. URSS, N.s. **23**, 121–125.

[113] Tartakowski, W. (1939b): La méthode du crible approximatif „électif". C.R. Acad. Sci. URSS, N. s. **23**, 126–129.

[114] Vaughan, R. C. (1972): On Goldbach's problem. Acta Arith., **22**, 21–48.

[115] Vaughan, R. C. (1977): On the estimation of Schnirelman's constant. J. Reine Angew. Math., **290**, 93–108.

[116] Vinogradov, A. I. (1956): On an „almost binary" problem. Izv. Akad. Nauk. SSSR. Ser. Math. **20**, 713–750 (oroszul).

[117] Vinogradov, A. I. (1957): Application of Riemann's $\zeta(s)$ to the Eratosthenian sieve. Mat. Sb., **41**, 49–80; Corr.: *ibidem*, 415–416 (oroszul).

[118] Vinogradov, A. I. (1965): The density hypothesis for Dirichlet L-series. Izv. Akad. Nauk. SSSR, **29**, 903–934 (oroszul). Corr.: *ibidem*, **30**, 1966, 719–720.

[119] Vinogradov, I. M. (1937): Representation of an odd number as a sum of three prime numbers. Doklady Akad. Nauk. SSSR, **15**, 291–294 (oroszul).

[120] Wang Tianze (1999): On Linnik's almost Goldbach theorem. Sci. China Ser. A., **42**, 1155–1172.

[121] Wang Yuan (1956): On the representation of a large even integer as a sum of a product of at most 3 primes and a product of at most 4 primes. Acta Math. Sin. **6**, 500–513 (kínaiul).

[122] Wang Yuan (1958): On sieve methods and some of their applications, I. Acta Math. Sinica **8**, 413–429 (kínaiul). [Angol fordítás: Sci. Sinica, **8**, (1959), 357–381.]

[123] Watt, N. (1995): Short intervals almost all containing primes. Acta Arith., **72**, 131–167.

[124] Zhang, M. Y., Ding, P. (1983): An improvement to the Schnirelman constant. J. China Univ. Sci. Techn., **13**, Math. Issue, 31–53.

[125] Zinoview, D. (1997): On Vinogradov's constant in Goldbach's ternary problem. J. Number Th., **65**, 334–358.

Érdy János

Podhradszky József

Wenzel Gusztáv

Fábián Gábor

Nagy János

Arany János

Pólya József

Tekintetes Nagygyülés!

démia fennálló szabályainak 32-dika egy szót:
Minden újonnan választott tag, a külsők kivéte-
lével, osztályába tartozó dolgozat felolvasásával,
vagy személyes megnem jelenhetés esetén beküldé-
sével, legfelebb egy év alatt széket foglal; különben meg-
választása megsemmisülvén."

Lehetnek esetek, melyekben kivált vidéken la-
kók gátoltatnak a határidőt megtartani: de hallga-
tag elnézni e szabály meg nem tartatását, annyit
tesz, mint összes szabályzatunkat erőtlenné tekinteni.
A következményekre figyelmessé tenni a T. Akadém-
iát szükségtelen.

Inditványba hozatik tehát, hogy egyelőre az
választott s székfoglalás által meg nem
ből kitöröltessenek, az 18
tessenek, j

9 789635 087839