SZÉKFOGLALÓ ELŐADÁSOK A MAGYAR TUDOMÁNYOS AKADÉMIÁN

Domokos Gábor

MODELLEK A DISZKRÉT ÉS FOLYTONOS KÖZÖTT, AVAGY DIALÓGUS A KONTINUUMRÓL

Tekintetes Nagygy...

...fennálló szabályainak 32-ik a így szól:
"...újonnan választott tag, a külsők kivéte-
...osztályába tartozó dolgozat felolvasásával,
...személyes megnem jelenhetés esetén beküldé-
...legfelebb egy év alatt széket foglal; különben meg-
...ztása megsemmisítőén."

Lehetnek esetek, melyekben kiválts vidéken la-
...gátoltatnak a határidőt megtartani: de hallga-
...elnézni e szabály meg nem tartatását, annyi-
..., mint összes szabályzatunkat erőtlennek tekinteni
...következményekre figyelmessé tenni a T. Akadém...
...szükségtelen.

Indítványba hozatik tehát, hogy egyelőre az
...861. 9 választott s székfoglalás által meg nem erő-
...sített rendes tagok nevei a névkönyvből kitöröltessenek, az 1861-
...65-ig választottak a szabályokra emlékeztessenek, jö-
...vőre pedig a titoknoki hivatal oda utasíttassék, hogy
...evidentiában tartás végett az újdon választottakat,
míg széket nem foglaltak, a sorozatba fel ne vegye."

853/1865

...l, jan. 26. 1865.

B. Kemény Zsigmond
Kőváry László

Ballagi Mór
[illegible]
Fogarasi
Hollán Ernő

Török János r. tag
Toldy Ferenc r. tag
Gyergyai Arnold

Domokos Gábor

MODELLEK A DISZKRÉT ÉS FOLYTONOS KÖZÖTT,

AVAGY

DIALÓGUS A KONTINUUMRÓL

SZÉKFOGLALÓK
A MAGYAR TUDOMÁNYOS AKADÉMIÁN

A 2004. május 3-án megválasztott
akadémikusok székfoglalói

Domokos Gábor

MODELLEK A DISZKRÉT ÉS FOLYTONOS KÖZÖTT, AVAGY DIALÓGUS A KONTINUUMRÓL

Magyar Tudományos Akadémia • 2014

Az előadás elhangzott 2004. szeptember 27-én

Sorozatszerkesztő: Bertók Krisztina

Olvasószerkesztő: Laczkó Krisztina

Borító és tipográfia: Auri Grafika

ISSN 1419-8959

ISBN 978-963-508-710-5

Kiadja a Magyar Tudományos Akadémia
Kiadásért felel: Pálinkás József, az MTA elnöke
Felelős szerkesztő: Kindert Judit
Nyomdai munkálatok: Kódex Könyvgyártó Kft.

2004. szeptember 27-én, délután 4 órakor tartottam székfoglaló előadásomat az MTA Székház Kistermében. Meglepetésemre a közönség soraiban felfedeztem Arisztotelészt, aki élénken érdeklődött a téma iránt. Kérdései nyomán az előadás érdekes fordulatot vett, az alábbiakban megkísérlem az elhangzott dialógust lehetőleg pontosan visszaadni.

D. G.*:* Előadásomban kaotikus dinamikai rendszerek néhány sajátosságáról szeretnék beszélni. (Felteszi az első fóliát, ahol szerepel az $x \to 2x$ leképezés, az x változó $x \in [0,1]$ módon van megadva.) Az ilyen rendszerek egyik legfontosabb tulajdonsága a *nyújtás*, amelyet már ezen a rendkívül egyszerű modellen is tanulmányozhatunk.

A.: Elnézést, hogy közbeszólok, de nem értem a felírt jelölést.

D. G. *(A.-hoz fordul):* Az $x \in [0,1]$ azt jelöli, hogy x bármely, 0 és 1 közötti értéket felvehet.

---

[*] Az előadás megjelent a Természet Világa 2005. decemberi számában.

A.: Nem lett volna-e egyszerűbb ezeket felsorolni? Diktálom, hogy mire gondolok. *(D. G. írja)*: $\left\{\frac{1}{2},\frac{1}{3},\frac{2}{3},\frac{1}{4},\left(\frac{2}{4}\right),\frac{3}{4},\frac{1}{5},\frac{2}{5},\frac{3}{5},\frac{4}{5},\frac{1}{6},\ldots\right\}$

D. G.: Ez a szellemes felsorolás – amelyet egyébként én Georg Cantor műveiből ismertem meg – valóban tartalmazza az összes 0 és 1 közé eső, két egész szám hányadosaként felírható, úgynevezett *racionális* számot. Az eredeti jelölés azonban nemcsak ezekre, hanem az *irracionális számokra* is vonatkozott.

***A:* Nem ismerem ezt a kifejezést. Felírna egy ilyen számot?**

D. G. *(írja):* $$a = \cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\ldots}}}}$$

A.: Mit jelöl ez a szám, amelyet számjegyek végtelen sorozatával adott meg?

D. G.: Például a szabályos ötszög oldalának és átfogójának az arányát. Aranymetszésnek is szokták nevezni.

A. *(körülnéz):* Pitagorasz nincs itt? Az ő egyik tanítványa, Hippaszosz mutatta meg, hogy ez a két szakasz összemérhetetlen, vagyis arányuk nem írható fel két egész szám hányadosaként.

D. G.: Azt olvastam, hogy Hippaszoszt társai megölték. Igaz ez?

A.: Én is így hallottam, és nem lep meg a történet. A pithagóreusok nem örültek ennek a felfedezésnek, mert bebizonyosodott, hogy egyes geometriai objektumok nem írhatók le egész számok segítségével. Az ő világképükben az egész számok központi szerepet játszottak,

mindent ezek segítségével akartak leírni, megmagyarázni. Tulajdonképpen Hippaszosz felfedezésétől számíthatjuk a folytonos (kiterjedt) objektumokkal foglalkozó geometria és a diszkrét (kiterjedés nélküli) számokat vizsgáló aritmetika[1] különválását. De mintha az Ön által legutóbb felírt furcsa kifejezésben ez a két terület keveredne.

D. G.: Pontosan így van. Az Önök egyik legnagyobb matematikusa, Eudoxosz kifejlesztette az arányok elméletét, amelyben szerepelhettek összemérhetetlen arányok is. Jóval később, a 16–17. században Simon Stevin, John Wallis és mások elkezdték ezeket az arányokat *számokként* kezelni, és elnevezték őket irracionális számoknak. Az irracionális és a racionális számok együttesét pedig *valós* számoknak nevezték. Úgy vélték, hogy az arányok számokként való értelmezése csupán technikai fogás.

A.: Rendkívül érdekes, amit mond. Megjegyzem, hogy én egyáltalán nem értek egyet a legutóbbi kijelentéssel, szerintem ugyanis nem technikai, hanem filozófiai akadálya van az összemérhetetlen arányok számokként való kezelésének. Mielőtt ezt kifejteném, megkérem, hogy a racionális számokhoz hasonlóan sorolja fel az irracionális számokat is.

D. G.: Sajnos, ez lehetetlen, mint ahogy azt a már említett Georg Cantor bebizonyította.

A.: De ha nem tudja őket felsorolni, akkor hogyan tudja őket megnevezni?

D. G.: A lényegre tapintott, az irracionális számok többségét nem lehet megnevezni. Sőt, eljárást sem tudunk adni a kiszámításukhoz.

[1] *Categoriae*, 4 b, 20; *Meta fizika*, 1020 a, 7–14.

A.: Összefoglalva: az irracionális számok olyan, többnyire megnevezhetetlen és kiszámíthatatlan objektumok, amelyeket felsorolni lehetetlen, és minden egyes ilyen szám megadásához végtelenül sok számjegyet kell leírnunk. Talán nem veszi rossznéven, ha megkérdezem, miért volt szükség ilyen számok bevezetésére?

D. G.: Ahogy említettem, technikai jellegű kiegészítésnek tűnt a matematikusok számára. Úgy látták, hogy számos fizikai jelenség leírása leegyszerűsödik, ha bevezetik az irracionális számokat.

A.: Műveimben több helyen is leírtam, hogy a végtelen csak potenciálisan létezik, aktuális végtelen nincsen.[2] Márpedig egy irracionális számot csak végtelenül sok számjeggyel, tehát végtelen idő alatt lehet megadni. Éppen ezért az irracionális számok csak potenciálisan léteznek, és filozófiai szempontból világosan elkülönülnek az aktuálisan létező racionális számoktól. Csodálkoznék, ha a két számtípus egy kalap alá vétele nem vezetett volna filozófiai ellentmondásokra.

D. G.: Ön ismét a lényeget fogalmazta meg. Valóban, rengeteg vita kísérte az irracionális számok bevezetését, mígnem 2300 évvel az Ön halála után egy Brouwer nevű holland matematikus rámutatott, hogy az irracionális számok bevezetése egyenértékű az Önről elnevezett kétértékű logika elvetésével.

A.: Ez igazán nem lep meg. Természetfilozófiáról szóló egyik művemben kifejtem, hogy a jövőre (vagyis a potenciálisan létezőre) vonatkozó

---

[2] VII. könyv 3. fejezet; Ross, 118: A végtelennek két fajtája van: (1) az összeadás szerinti végtelen, amely nem meríthető ki részek egymáshoz adása útján és (2) a felosztás szerint való végtelen, amely ad infinitum osztható. A szám az első, a tér a második, az idő pedig mindkét értelemben végtelen. Arisztotelész szerint az (1) értelemben van, a (2) értelemben nincsen végtelen. A térbeli kiterjedés nem végtelen aktuálisan, de végtelen föloszthatósága szerint, potenciálisan. Egy térbeli kiterjedés soha nem osztható fel aktuálisan végtelen számú részre. VI. könyv, 1. fejezet; Ross, 129: Egyetlen kontinuum sem épülhet fel oszthatatlan entitásokból – *például a szakasz nem állhat pontokból*.

állítások esetében már nem érvényes a kizárt harmadik elve.[3] Az irracionális számok, ahogy azt korábban megállapítottuk, nem a jelenben (aktuálisan), hanem a jövőben (potenciálisan) létező objektumok, tehát nem vonatkozik rájuk a kizárt harmadik elve. Kérem, adja át Brouwernek üdvözletemet.

D. G.: Sajnos, ez nem lehetséges, hiszen már ő is halott. Érdemes viszont megjegyezni, hogy sok kiválóság, köztük Hermann Weyl,[4] osztotta Brouwer nézeteit. Esetleg Ön meg tudná-e világítani egy egyszerű példával, hogy mit jelent a jövőbeli eseményekre vonatkozóan a kizárt harmadik elvének a tagadása?

A.: Szívesen mondok ilyen példát: szükségszerű, hogy holnap vagy esik az eső, vagy nem esik, de ez sem azt nem jelenti, hogy holnap biztosan esik, sem pedig azt, hogy biztosan nem esik.

D. G.: Mondhatjuk-e tehát azt, hogy egy jövőbeli esemény, még ha determinált is, mégsem megjósolható, kiszámítható?

A.: Igen, ez találó megfogalmazás.

D. G.: És hogyan jelentkezik ez a probléma az irracionális számok esetében?

A.: Annak alapján, amit az imént mondott, erről Brouwer talán többet tudna mondani, de én is megpróbálom összefoglalni a lényeget. A fólián szereplő irracionális számot Ön egy olyan képlettel adta meg,

---

3 *De Interpretatione (Herméneutika)*, 9. fejezet, Ross, 114: Bármire vonatkozóan szükségszerűen igaz, hogy vagy lesz, vagy nem lesz – *de sem az nem igaz, hogy lesz, sem az, hogy nem lesz*.

4 *The Continuum.* Dover, 1994, 93: Az intuitív [lényegében arisztotelészi] és a matematikai [tehát pontokból és az azoknak megfeleltetett irracionális számokból felépített] kontinuum bizonyosan eltér egymástól; áthidalhatatlan szakadék tátong közöttük. De vannak olyan racionális okok, amelyek arra késztetnek, hogy áttérjünk az egyikről a másikra, ha meg akarjuk érteni a természetet [...] Azt mondhatjuk, hogy az analízis tartalmazza a *kontinuum elméletét*, amely, más fizikai elméletekhez hasonlóan, igazolásra szorul.

amelynek segítségével *egyértelműen* kiszámítható, tehát determinált. Mivel azonban ez a számítás végtelen időt vesz igénybe, a jelenben feltehetők *eldönthetetlen* kérdések. Például, ha a szám második, tizedestört-alakját használjuk, feltehetjük a kérdést, hogy a számjegyek *átlaga* vajon 9/2-nél kisebb vagy nagyobb. Ezt nyilván nem lehet eldönteni.

D. G.: Értem a példát. Egyesek azt az ellenvetést hoznák fel, hogy az említett kérdés (bár valóban eldönthetetlen), mégis teljesen érdektelen, ugyanis tetszőleges, véges számú számjegy átlagát pontosan meghatározhatjuk.

A.: Természetesen ez így van. Akik így érvelnek, lényegében azt mondják, hogy nincs szükség irracionális számokra, hiszen az említett véges számjegysorozatok kivétel nélkül racionális számoknak felelnek meg. Én sem tudom, hogy szükség van-e a matematikában irracionális számok bevezetésére. *De ha igen, akkor számolnunk kell azzal, hogy velük együtt eldönthetetlen kérdések, megjósolhatatlan események kerülnek be a matematikai modellbe.* Engem az érdekelne, hogy Brouwer eredménye után „valós számként" továbbra is együtt használták az irracionális és a racionális számokat?

D. G.: Igen, bár a vita az irracionális számok létéről és jelentéséről mind a mai napig tart. Példaként idézek egy neves matematikus, Reuben Hersh *A matematika természete* című, filozófiai kérdéseket is érintő, 1997-ben megjelent könyvéből:[5]

„A fizikai elméletben a kényelem, a hagyomány és a megszokás kedvéért használunk valós számokat. Fizikai szempontból a kiindulópont és a cél egyaránt a véges, diszkrét modell [...] A valós számok kényelmesebbé teszik a számolást,

[5] Hersh, Reuben: *A matematika természete.* Typotex, 2000, 185. Eredeti: *What is mathematics, really?* Oxford, University Press, 1997.

a matematika simább, kellemesebb alakot ölt a valós számok lágy hullámain. Az elméleti fizikához azonban nem lényegesek, tényleges számításokra nem használjuk őket.”

Hersh itt nyilván arra céloz, hogy egyes fizikai folyamatok lényegének leírásához valóban szükségtelenek az irracionális számok. Nézetem szerint ez a fő oka annak, hogy a tárgyalt filozófiai kérdések következményeire nem terjedt ki a vita. Ugyanakkor egy másik könyvet is említenék. Négy kiváló matematikus, Steven Smale, Michael Shub, Felipe Cucker és Lenore Blum azt vizsgálja 2002-ben kiadott művében, hogy a számítási bonyolultság elméletét hogyan lehetne olyan számítógépekből kiindulva felépíteni, amelyek nemcsak racionális, hanem irracionális számokkal is képesek pontos műveleteket végezni.

A.: Nagyon érdekes ez a vita. Természetesen én az irracionális számok létét se nem állítom, se nem tagadom. Pusztán azt szögezem le, hogy a racionális számoktól alapvetően eltérő objektumokról van szó. De kíváncsi vagyok az Ön véleményére is.

D. G : Az irracionális számok létéről folytatott vitában én sem szeretnék állást foglalni. Ez a probléma lényegében a kontinuum két alapvetően eltérő megközelítésére vezethető vissza: az úgynevezett atomisztikus megközelítés szerint a kontinuumot alkotó pontok azonosíthatók, megjelölhetők – ezért vezetik be az irracionális számokat. A másik, a kontinuumot folytonos egészként kezelő, az Ön filozófiai nézeteihez közeli holisztikus álláspont szerint egyes pontok megjelölése *jelen időben* nem lehetséges, a kontinuum folytonos egészet alkot. A két szemlélet közötti szakadék áthidalhatatlan. Kétségtelen, hogy ha a természeti folyamatokat kvantitatív módon le kívánjuk írni, akkor az atomisztikus megközelítést kell alkalmaznunk, de jól tesszük, ha tudatában vagyunk, hogy ennek mi is az ára. Amennyiben az adott jelenség leírására elegendő a kontinuum racionális része (tehát a racionális számok), úgy a jelenség a modell alapján kiszámítható, megjósolható. Hersh idézett művében ilyen jelenségekre célzott. Egyéb esetben azonban a jelenség modellezéséhez szükség van az irracionális számokra. Mérnökként úgy fogalmaznék, hogy az utóbbi esetben érdemes bevezetni az irracionális számokat. Természetesen azt várjuk, hogy ezek a jelenségek nem lesznek kiszámíthatók, megjósolhatók.

A.: Ez nem meglepő, hiszen leírásukhoz *jelen időben nem értelmezhető* fogalmakat kellett bevezetni. Ezek után azt gyanítom, hogy éppen ilyen fizikai jelenségeket szándékozik bemutatni.

D. G.: Így van, ez előadásom célja. Mint látni fogjuk, ezek a jelenségek valóban „öröklik" az irracionális számokkal kapcsolatban felvetett filozófiai aggályokat: véges idő alatt, véges pontosságú számítógéppel nem jelezhetők előre, vagyis megjósolhatatlan módon viselkednek. Köszönöm, hogy segített ezen problémák gyökereinek a kifejtésében.

Visszatérek előadásom eredeti fonalához: a kaotikus dinamikai rendszerek két alapvető tulajdonsága a *nyújtás* és a *keverés*. Látszólag rendkívül egyszerű modellek is rendelkeznek ezekkel a tulajdonságokkal, egyik közismert példa a *diadikus leképezés:* $x_{i+1} = 2x_i \bmod 1$, amelyet a korábban említett $x \to 2x$ leképezésből származtathatunk. Egy magyar matematikus, Rényi Alfréd bizonyította be elsőként, hogy *irracionális* kezdeti értéktől (x_0) indítva a diadikus leképezés által szolgáltatott x_i számsorozat *véletlenszerű módon* viselkedik, függetlenül a kezdeti értéktől mindig azonos valószínűségi mérték szerint fog eloszlani az egységintervallumon. A diadikus leképezés esetén ez az egyenletes mérték. Igaz ugyan tehát, hogy minden egyes lépés determinisztikus, a hosszú távú viselkedés mégis megjósolhatatlan.

A.: Jól értem-e tehát, hogy irracionális x_0 értékből indítva az x_i számsorozatnak minden eleme irracionális lesz? És vajon igaz-e a fordított állítás is, vagyis racionális kezdeti érték után csupa racionális szám fog-e következni?

D. G.: Ön pontosan fogalmazott. A matematikusok ezt úgy fejezik ki, hogy mind az irracionális, mind a racionális számok halmaza *invariáns*, vagyis ha már egyszer belekerültünk, nem tudunk belőlük kilépni. Van azonban egy igen lényeges különbség a két számhalmaz között: Rényi említett eredménye – más megfogalmazásban – azt jelenti, hogy az irracionális számok halmazán *belül* nincsen invariáns részhalmaz, vagyis bárhonnan indítva a számsorozatot, az „bejárja" az egész halmazt. Teljesen más a helyzet racionális kezdeti érték esetén: ilyenkor minden esetben periodikus viselkedést tapasztalhatunk. Ha egyszer egy ciklusba belépett a leképezés, onnan többet nem léphet ki, tehát a ciklusok invariáns részhalmazai a racionális számoknak.

A.: Ez valóban alapvető eltérésnek tűnik. Az említett ciklusokon kívül, ki lehet-e jelölni más invariáns részeit is a racionális számoknak?

D. G.: Könnyű belátni, hogy a k/N ($k = 0,1,\ldots N-1$) típusú racionális számhalmazok is invariánsak (ezeken belül találhatjuk meg a korábban említett ciklusokat). Az ilyen típusú racionális számhalmazra megszorított – vagyis egy $N \times N$-es négyzetrácson lezajló – leképezést nevezzük az eredeti, folytonos leképezés *diszkretizáltjainak*. Az elmondottak alapján érthető, hogy a diszkrét leképezésben tetszőleges, $x_0 = k/N$ kezdeti értékből indulva periodikus pályát találunk. Rögzített N érték mellett több ciklus is létezhet párhuzamosan, különböző vonzásterülettel.

A.: Úgy látom, hogy ez a leképezés alapvetően eltérően viselkedik a racionális és az irracionális számok halmazán, így közvetlenül igazolja az irracionális számokkal kapcsolatban korábban megfogalmazott nézeteimet, nevezetesen azt, hogy ezek a számok lényegükben térnek el a racionális számoktól. Az imént azonban nem matematikai, hanem fizikai példákat ígért.

D. G.: Jogos a felvetése. Először a modellt mutattam be, és csak most térnék rá a modellezendő folyamatra. Nem olyan régen, mintegy negyven éve publikálta Edward Lorenz azt a dolgozatát, amelyben légköri áramlások matematikai modelljeit kereste. A jelenséget általánosan leíró Navier–Stokes parciális differenciálegyenleteket radikálisan leegyszerűsítve egy mindössze 3 dimenziós közönséges differenciálegyenlet-rendszerre jutott. Ez a drasztikusan redukált modell is komplex és meglepő viselkedést mutatott azonban: a 3 dimenziós fázistérben a megoldásgörbék egy közel 2 dimenziós objektumra húzódtak rá, és azon belül haladtak tovább. Ezt a – később mások által *különös attraktornak* nevezett – objektumot egy síkkal metszve a megoldásgörbék egydimenziós pontsorozatot jelölnek ki. Ha ezt egydimenziós leképezésként ábrázoljuk, akkor a diadikus leképezéshez hasonló grafikont kapunk. Bár a két leképezés nem azonos, több lényeges tulajdonságuk megegyezik: mindkét esetben igaz, hogy *tipikus (irracionális)* kezdeti értékből indítva véletlenszerű viselkedést tapasztalhatunk. Ugyancsak igaz mindkét esetben, hogy az $N \times N$ *racionális rácson* diszkretizált leképezés minden kezdeti érték esetén ciklusba jut. (A Lorenz-modell esetén azonban már nem igaz a diadikusnak az a tulajdonsága, hogy az irracionális és a racionális számok halmaza külön-külön invariáns.) Azt mondhatjuk tehát, hogy ennél a fizikai jelenségnél (Lorenz-modell) lényeges eltérést mutat az irracionális számokat is tartalmazó folytonos leírás és a pusztán racionális számokat használó diszkrét leírás. Mivel a digitális számítógépek csak az utóbbira alkalmasak, felvetődik a jelenség kiszámíthatóságának és megjósolhatóságának a kérdése.

A.: Nem tudom, hogy mit jelent a digitális számítógép, de azt bizton mondhatom, hogy a légköri folyamatokat nehéz megjósolni. Számos „jövendőmondónak” származik ebből a megélhetése.

D. G.: Az utóbbi 2500 év ezen a területen nem sok változást hozott. Érdekes azonban, hogy a megjósolhatatlanságot nem a légkörben található részecskék nagy száma, hanem a rendszer mélyén megbújó kaotikus „motor" okozza.

A.: Ha jól értem, akkor a légkör példa olyan fizikai rendszerre, amely az irracionális számok használata nélkül nem írható le még közelítően sem. Mivel az irracionális számok a jelenben nem értelmezhető objektumok, tehát konkrét számításokhoz nyilván nem használhatók. De ez arra mutat, hogy a körülöttünk lévő világ bizonyos jelenségeit soha nem írhatjuk le pontosan, nem ismerhetjük meg őket.

D. G.: Igen, pontosan ez az egyik fontos következtetés. Ilyen jelenségekre a fizikusok már korábban is mutattak példát, de azok a szemmel nem látható, elemi részecskék világában zajlanak. A kvantummechanikai jelenségek esetén – hasonlóan az irracionális számokkal kapcsolatban említettekkel – nem lehet alkalmazni az Önről elnevezett kétértékű logikát, ezért Garrett Birkhoff és Neumann János kidolgozta az úgynevezett *kvantumlogika* alapjait.[6]

A.: Nagyon érdekelnek ennek a részletei. Ezek szerint *káoszlogikát* is ki lehetne dolgozni?

D. G.: Minden bizonnyal, sajnos én ebben nem vagyok annyira jártas, hogy pontosan tudjak válaszolni. Van analógia a két terület között, de a különbség is jelentős. Bár kétségtelen, hogy filozófiai szempontból hatalmas port kavart a kvantummechanika határozatlansági elvének a felfedezése, a mindennapi, érzékszerveinkkel tapasztalható világra gyakorlatilag nincsen hatása. Más a helyzet a kaotikus folyamatokkal, amelyek sokkal nagyobb léptékben zajlanak.

A.: Tudna mondani egyéb példát?

[6] Bikhoff, G., Neumann, J. v.: The Logic of Quantum Mechanics. *Ann. of Math.*, 37, (1936) 823–842.

D. G.: Például a Naprendszer bolygói maguk is kaotikus rendszert alkotnak, annak ellenére, hogy viselkedésük jó közelítéssel periodikus. Ez azonban csak átmenetinek tekinthető, akár néhány millió év múlva is már jelentősen módosulhatnak a bolygók pályái.

A.: Valóban? Én a bolygók mozgását 55 egymásba ágyazott, koncentrikus gömb (az úgynevezett szférák) segítségével próbáltam leírni. Ez a modell nagymértékben támaszkodott Eudoxosz elméletére, amelyet Kallipposz fejlesztett tovább. Ezen elméletek pusztán a mozgás geometriájára vonatkoztak, a mechanikára vonatkozó javaslatuk nincs. Csodálattal hallom, hogy időközben az emberiség megoldotta ezt a nehéz feladatot.

D. G.: Nagyon lassan, sok-sok tévedés után, és csak részleges választ tudunk adni a Naprendszer jövőbeli mozgására vonatkozó kérdésekre. Bizonyos szempontból Önök kellemesebb helyzetben voltak, ugyanis modelljük nem írta le a mozgás mechanikáját. A tudomány mai modellje ezt leírja, és ez többekben azt a téves képzetet kelti, hogy ezáltal a mozgás megismerhető.

A.: Csakhogy, ha jól értettem a korábban elhangzottakat, hiába tudták felállítani a mechanikai modellt, ha annak kiszámítása az irracionális számok használata nélkül lehetetlen. A modell így – bizonyos értelemben – illúzió.

D. G.: Bár ez erős megfogalmazás, de a lényegre tapintott. Ugyanakkor rendkívüli felismerésnek tartom, hogy a Naprendszer éppen ilyen modell segítségével írható le. Ezzel a fizika megfoghatóvá tette, hogy mitől megfoghatatlan a bolygók mozgása.

A.: Egyetértek Önnel, csodálatos eredmény. Ugyanakkor meglepne, ha ennek tudatában az emberek feladták volna a világ pontosabb megismeréséért folytatott küzdelmet.

D. G.: Jól sejti, és hamarosan rátérek ennek rövid ismertetésére, előbb azonban szeretném megmutatni, hogy az iménti problémának az inverze is jelentkezhet a modellezés során.

A.: Úgy érti, hogy valamilyen diszkrét jelenséget próbálnak meg leírni folytonos modellel, a kaotikus jelleg miatt azonban ez nehézségekbe ütközik?

D. G.: Pontosan erről van szó. A jelenséget egy egyszerű, elvi példával szeretném szemléltetni. Brehm szerint[7] a lemmingek (Lemmus lemmus) Skandinávia legrejtélyesebb állatai. Az egérhez hasonló kis rágcsálók hosszú időszakokra eltűnnek, majd hirtelen ellepik a környéket. Olaus Wornius 1633-ban könyvet írt róluk, és azt igyekezett bizonyítani, hogy a felhőkből hullanak alá, és ráolvasással sem lehet őket elűzni. Nem kísérelem meg, hogy megmagyarázzam a lemmingek titokzatos viselkedését, csupán egy rendkívül egyszerű, kvalitatív modell segítségével próbálom megmutatni, hogy milyen populációdinamika állhat esetleg a jelenség mögött. Tételezzük fel, hogy a lemmingpopuláció azonos időnként megduplázódik, viszont ha elér vagy túllép egy rögzített N küszöbszámot, akkor N lemming elpusztul, a többi elvándorol, és a korábbi szabály szerint továbbszaporodik. A küszöbszámot indokolhatja a lemmingek adott környezetében fellelhető táplálék mennyisége. Képletbe foglalva a lemmingpopulációt szabályozó törvényt egy rekurzióhoz jutunk, amely az i-edik állapotban mérhető X_i létszám függvényeként adja meg az (i+1)-edik állapot X_{i+1} létszámát: $X_{i+1} = 2\ X_i \bmod N$. Láthatjuk, hogy mindössze az $x_i = X_i/N$ transzformációt kell végrehajtanunk, és máris a diadikus leképezéshez érkeztünk.

7 Brehm, A.: *Az állatok világa*. ÁKV–Maecenas Kiadó, Budapest, 1990.

A.: Ismét a diadikus leképezés. Bizonyára most az a kérdés, hogy Rényi eredményeiből következtethetünk-e nagy lemmingpopulációk létszámának az alakulására, vagyis 1 és N között minden létszám nagyjából azonos gyakorisággal fog-e előfordulni az idő folyamán. Persze látom, hogy negatív a válasz, hiszen a populáció *diszkrét*, vagyis egész (racionális) számokkal leírható, míg a Rényi által bizonyított véletlenszerűség forrása a *folytonos* diadikus leképezésben megtalálható irracionális számok.

D. G.: Ön tökéletesen megértette a mondandómat. Bár a populációdinamikában előszeretettel alkalmaznak folytonos modelleket, a lemmingek egyszerű példája mutatja, hogy kaotikus rendszerek esetén ez nehézségekbe ütközhet.

A.: Egy apróságot nem értek. Ön azt mondta, hogy a diszkrét modellekben csak periodikus viselkedést tapasztalhatunk. Hogyan mondhatjuk tehát egy ilyen rendszerre, hogy kaotikus?

D. G.: Pontatlanul fogalmaztam, Önnek van igaza: maga a populáció természetesen nem viselkedhet kaotikusan. A folytonos modellek alkalmazását akkor kell komolyan megfontolnunk, ha *maga a folytonos modell* mutat kaotikus viselkedést. Ilyen esetben ugyanis a modell előrejelzése jelentősen eltérhet a valóságtól.

A.: Így már világos. Van azonban még valami, amit nem értek. Ön korábban azt mondta, hogy a folytonos modelleket a számítások során szükségszerűen diszkrétekkel kell helyettesíteni, hiszen műveleteket csak racionális számokkal lehet végrehajtani. (Ön „digitális számítógépeket" emlegetett, ezeket nem ismerem, de pusztán filozófiai alapon az állítást elfogadom. *Jelen* időben nem végezhetünk korlátlanul műveleteket *jövő* időben értelmezett objektumokkal.) Ezek szerint még abban az esetben is, ha egy populáció viselkedését kaotikus foly-

tonos modellel írjuk le, a számításokban már egy diszkrét modell fog szerepelni. Az utóbbitól viszont joggal várhatnánk, hogy jól közelíti a biológiai rendszert.

D. G.: Bár amit állít teljesen logikus, a végső következtetés mégsem helyes, ugyanis a folytonos, kaotikus modellek diszkretizálásával nyert leképezések egy fontos tulajdonságát még nem említettem. Általánosan igaz, hogy az ilyen leképezésekben mindig periodikus viselkedést fogunk tapasztalni, ám *a periódusok hossza érzékenyen fog függeni a diszkretizáláskor használt N számtól*. Mondok egy egyszerű példát. A diadikus leképezés esetében, ha N = 16, akkor egyetlen darab, egyelemű ciklus (fixpont) létezik, ez az X = 0. Minden ide fut be, más szóval, a lemmingpopuláció, függetlenül a lemmingek kezdeti számától, *mindig kihal* néhány lépésen belül. Ha azonban N = 17, akkor két darab 8-as ciklus létezik az X = 0 fixponton kívül. Ekkor a modell szerint a populáció *sosem hal ki* (hacsak nem zérus darab lemminggel indítunk).

A.: Értem. Tehát ugyanazon folytonos modellből két eltérő N-nel származtatott diszkrét modell alapvetően eltérő viselkedést jósol, így az egyik segítségével nem következtethetünk a másikra.

D. G.: Így van. Amikor egy folytonos modellt a számítások miatt diszkretizálunk, általában rendkívül nagy, a populációk létszámánál nagyságrendekkel nagyobb N-et használunk (az említett digitális számítógépek nagy teljesítménye miatt), így a két diszkrét rendszer – az eredeti diszkrét folyamat, valamint a folytonos modell véges pontosságú számítógépen futtatott változata – között semmilyen érdemi kapcsolat sincs.

A.: Ezek szerint a nagy teljesítményű gépekkel végzett számítások érdekes tulajdonsága, hogy az eredményükből sem a folytonos modell viselkedésére, sem pedig az eredeti, diszkrét populációra nem lehet közvetlenül következtetni. Miért használnak az emberek ilyen gépeket?

D. G.: Bár kétségtelen, hogy a gépek segítségével sokszor – például nem kaotikus rendszerek esetében – értékes információhoz juthatunk, valóban nem ártana, ha az emberek kicsit óvatosabban kezelnék a gépi számítások eredményeit. Ön korábban azt mondta, hogy meglepné, ha az elmondottak tudatában az emberek feladták volna a világ pontosabb megismeréséért folytatott küzdelmet. Nos, egyáltalán nem adták fel, és a további küzdelem egyik fő motiválói éppen a digitális számítógépek voltak. Ezeket a csodálatos berendezéseket, amelyek a másodperc milliomod része alatt algebrai műveletek ezreit képesek végrehajtani, nem olyan régen, alig több mint fél évszázaddal ezelőtt építették, szintén egy magyar matematikus, a kvantumlogikával kapcsolatban már említett Neumann János ötletei alapján. Ő volt az, aki először átlátta, hogy a számítógép diszkrét (digitális) jellege miatt egyes fizikai folyamatok modellezésére közvetlenül nem alkalmas. A fiatal, rendkívül tehetséges lengyel matematikust, Stanislaw Ulamot meghívta csapatába. Ulam egyik feladata éppen az volt, hogy bonyolult (kaotikus) dinamikával rendelkező folyamatok gépi modellezhetőségével foglalkozzon.

A.: A kaotikus folyamatok pontos modellezése – első hallásra – megoldhatatlannak tűnik a számomra, és eddig úgy értetten, hogy Ön is ezen a nézeten van.

D. G.: Ez persze azon múlik, hogy *mi is pontosan a kitűzött feladat*. Ulam hamar átlátta, amit Ön az imént mondott, vagyis azt, hogy digitális gépekkel soha nem lehet kaotikus dinamikát *pontosan* modellezni. Egyúttal azt is megértette, hogy a helyzet még ennél is rosszabb: a számítógép által szolgáltatott végeredmény még *statisztikus értelemben sem* hasonlított a folytonos rendszerhez.

A.: Ezek szerint a két állítás független?

D. G.: Nem független, hiszen ha két adatsor azonos, akkor statisztikus értelemben is az. Fordítva azonban ez nem igaz: a statisztikus egyezésből egyáltalán nem következik a teljes egyezés. Ulam azt tűzte ti célul, hogy a gépi számítás legalább statisztikus értelemben jól közelítse a folytonos esetet.

A.: Meg tudná-e határozni, hogy mikor nevezünk két idősort statisztikus értelemben hasonlónak? Nem ismerem ezt a fogalmat.

D. G.: Osszuk fel az egységintervallumot képzeletben D darab egyforma dobozra. Legegyszerűbb, ha a D = N esetet képzeljük el. Indítsuk el mindkét (folytonos és diszkrét) leképezést valamely kezdeti x_0, illetve X_0 értéktől, majd figyeljük mindkét folyamatot hosszú (T>>D) időn keresztül. Ezalatt megszámoljuk, hogy melyik dobozban hány alkalommal található x_i, illetve X_i, majd az előfordulások számát elosztjuk T-vel. Mindkét – folytonos és diszkrét – folyamat esetére ez egy D értékkel megadott diszkrét függvényt eredményez, amelyet az úgynevezett *valószínűségi mérték* statisztikus közelítésének nevezünk. Ha ez a két függvény kellően közel van egymáshoz, azt mondjuk, hogy statisztikus értelemben a két folyamat hasonlít.

A.: Nem éppen erre vonatkozott Rényi eredménye? Ön azt állította az imént, hogy Rényi szerint egy kaotikus leképezés által szolgáltatott x_i számsorozat *véletlenszerű módon* viselkedik, és függetlenül a kezdeti értéktől mindig ugyanazon valószínűségi mérték szerint fog eloszlani az egységintervallumon. Ezek szerint Ulam azt kutatta, hogy ezt a valószínűségi mértéket hogyan lehet számítógéppel jól közelíteni.

D. G.: Pontosan. A fizikai folyamatok megismerése szempontjából ez is igen fontos kérdésnek tűnt.

A.: Filozófiai szempontból is igen érdekes ez a kérdés. Bár az irracionális számok világában lezajló kaotikus folyamat megoldásáról nem tudjuk megmondani, hogy adott pillanatban pontosan hol található, azt azonban vizsgálhatjuk, hogy *általában* hol szokott tartózkodni.

D. G.: Korábban említettem, hogy a részecskefizikában is találkoztak *elvileg is* megjósolhatatlan folyamatokkal. Ott is érdekes kérdés a részecske helyének statisztikus leírása. Visszatérve azonban Ulam munkájára, rövidesen megoldotta a kérdést, megalkotta az úgynevezett Ulam-sémát, amelynek segítségével elvben jó statisztikus közelítést lehetett készíteni. Sajnos az Ulam-séma eredeti formájában nem volt közvetlenül programozható, ezért ezután még sokan finomították. Kollégámmal, Szász Domokossal hosszan dolgoztunk az Ulam-séma mélyebb megértésén, és sikerült egy olyan, az eredeti sémával egyenértékű módszert kidolgoznunk, amely egyrészt könnyen programozható, másrészt a séma egy addig rejtett érdekes tulajdonságát mutatta meg. Módszerünk lényege, hogy a diszkretizált leképezéshez pontosan definiált jellegű *véletlen zajt* adunk hozzá. A mikrovéletlennel megzavart diszkrét leképezés statisztikus értelemben bizonyítható módon hasonlítani fog a folytonoshoz.

A.: Érdekelne, hogy gyakorlati szempontból mi a jelentősége ennek a felismerésnek. Az Ön által elmondottakból úgy tűnik, mintha a véletlen bevezetése leegyszerűsítette volna a számításokat. Nem értem, hogy milyen módon lehet *véletlen* számokkal műveletet végezni. Ha véges idő alatt elő lehet állítani ilyen számokat, akkor nem lehetnek egyenértékűek az irracionális számokkal. Ha viszont nem, akkor mit nyertünk a bevezetésükkel?

D. G.: Ön egy nagyon lényeges pontra mutatott rá. Természetesen – az irracionális számokhoz hasonlóan – véletlen számok is csak végtelen idő alatt állíthatók elő, ugyanis a véletlent végtelen bonyolultsággal és információsűrűséggel bíró folyamatként is elképzelhetjük, ilyet pedig csak végtelenül bonyolult számítási eljárás tud csak előállítani. Az elmondottak ellenére mégis van gyakorlati jelentősége a véletlen és a zajos modellek bevezetésének. Ennek egyik oka, hogy a valóságban léteznek véges állapotterű – tehát racionális számokkal leírható –, de véletlen (környezeti) zajjal terhelt rendszerek (biológiai populációk), ezeknek pedig éppen ilyen a *pontos* modellje. A zajos modellek bevezetésének másik oka, hogy folytonos kaotikus dinamika leírásakor az irracionális számokkal operáló (pontos) modell és a véletlennel megzavart racionális modell *nem ugyanazt a célt szolgálja*, az utóbbitól jóval szerényebb, csupán statisztikus jellegű információt várunk. Ez utóbbi modellben az irracionális számokat, véges sok tizedes jegytől eltekintve, véletlennek tekintjük, a véletlent pedig „racionális véletlennel", vagyis úgynevezett véletlenszám-generáló algoritmussal közelítjük. Arra, hogy a véges hosszúságú racionális számokhoz adott, véges algoritmussal előállított kvázivéletlen miért közelíti elfogadhatóan az eredeti, irracionális számokkal működő rendszert, jelenleg nincs elfogadható matematikai magyarázat. Elméleti szempontból az sem világos, hogy ez miért hatékonyabb, mintha a kvázivéletlen számok előállítására fordított időt pontosabb racionális közelítés kiszámítására fordítottuk volna. A gyakorlati számítások azonban ezt az eljárást igazolják, a mélyebb okok megkeresése sok érdekes kérdést vet fel.

A.: Az sem világos számomra, hogy statisztikus értelemben miért nem magára a hozzáadott véletlen zajra fog hasonlítani a véletlennel megzavart folyamat?

D. G.: Természetesen ez is előfordulhat, ha a hozzáadott zaj nagy. Az Ulam-sémával egyenértékű zaj azonban *minimális* mértékű. A diszkretizálás során az eredetileg *végtelenül sűrű információt* (irracionális számokat) hordozó trajektóriák véges információtartalmúvá egyszerűsödnek. A véletlen viszont a legnagyobb lehetséges információsűrűségű folyamat, tehát a véletlen zavarás által a diszkretizálás során elvesztett információt csempésszük vissza a rendszerbe. Természetesen nem *ugyanazt* az információt, és (mivel a véletlen helyett kvázivéletlent használunk) nem is *ugyanannyit*.

A.: A populációdinamikai feladatnál nyilván nem lehet előre megtervezett méretű véletlen zajt hozzáadni a rendszerhez. Tagadhatatlan vi-

szont, hogy egy valódi populáció sosem fog teljesen determinisztikusan működni.

D. G.: Valóban, ebben az esetben az a kérdés, hogy a biológiai zaj hogyan viszonyul az Ulam-sémában előírt zajhoz. Ha ennél nagyobb, akkor a populációt jól lehet jellemezni (statisztikus értelemben) folytonos modellek alapján, ha kisebb, akkor viszont diszkrét modellt kell használni. Összefoglalva megállapíthatjuk, hogy kaotikus leképezések statisztikus viselkedésének leírásakor ekvivalens eredményre jutunk, ha irracionális számokkal végzünk műveleteket, vagy ha racionális számokkal végzünk műveleteket, de egy véletlen zavaró tagot hozzáadunk az eredményhez. Lemondhatunk tehát az irracionális számok használatáról, de akkor be kell vezetnünk a véletlent. Lemondhatunk a véletlen használatáról, de akkor be kell vezetnünk az irracionális számokat. *A kettőről egyszerre azonban nem mondhatunk le.*

A.: A legutóbbi megállapítás a véletlen és az irracionális számok „ekvivalenciájáról" matematikailag bizonyára értékes. Filozófiai szempontból is izgalmasnak tűnik, hiszen, ahogy korábban megállapítottuk, az irracionális számok *jövő időben* létező objektumok, érthető, hogy az ilyenek használata a véletlenhez hasonló bizonytalanságokat jelent. Megkísérlem másképpen is megfogalmazni: vannak olyan makroszkopikus fizikai folyamatok (kaotikus folyamatok), amelyeket nem ismerhetünk meg minden részletükben, mert végtelen bonyolultságúak. Ennek ellenére törekszünk arra, hogy matematikai leírást adjunk. Ez a leírás szükségszerűen támaszkodik „bizonytalan" – tehát jelen időben pontosan meg nem határozható – elemekre: ilyenek lehetnek az irracionális számok vagy a véletlen.

D. G.: Jobban kiemelte a lényeget, mint ahogy én tettem. Hozzáfűzném, hogy a beépített bizonytalan elemek ellenére a matematikai modellből mégis hasznos információkat nyerhetünk a rendszer viselkedéséről.

A.: Van még egy kérdés, nem tudom, hogy lehet-e rá egyértelmű választ adni. Először megpróbálom összefoglalni, amit hallottam. Előadása során beszélt arról, hogy folytonos modelleket diszkréttel próbálnak helyettesíteni (a gépi számítás ezt jelenti), illetve fordítva, hogy diszkrét jelenségeket (populációk) folytonos modellekkel próbálnak leírni. Amennyiben a folytonos modell kaotikus, úgy a diszkrét–folytonos átmenet problémás, ugyanis a diszkrét modell csak periodikusan tud viselkedni. Kérdésem az, hogy mondhatjuk-e általánosan azt, hogy a diszkrét modellek egyszerűbb viselkedést mutatnak folytonos párjaiknál?

D. G.: Ezt semmiképpen nem mondhatjuk. Egyrészt, a már bemutatott esetekben sem állíthatnánk ezt. Igaz ugyan, hogy a diszkrét modell „csak" periodikus viselkedést tud produkálni, de tartalmaz egy paramétert (N), amelytől érzékenyen függ a periodikus viselkedés jellege, és N *végtelenül sok* értéket felvehet. Így tehát *egy* folytonos modellhez egy *végtelen* elemű diszkrétmodell-család tartozik, és ezt a modellcsaládot semmiképpen nem nevezhetjük egyszerűnek. A diadikus leképezés esetén megállapítottuk, hogy a racionális számok összessége invariáns halmaz, innen tehát soha nem lép ki a leképezés. A racionális számok tartalmazzák az *összes lehetséges* $N \times N$ ráccsal jellemzett diszkrét modellt.

A.: Tudunk-e arról valamit, hogy *tipikusan* hogyan viselkedik a diszkrét modell? Ezen azt értem, hogy milyen periódushosszak várhatók?

D. G.: Erről általánosan szinte semmit sem tudunk, és ez is mutatja, hogy nem nevezhetjük egyszerűnek a diszkrét modelleket. Arra vonatkozóan, ha N értékét rögzítjük, már vannak eredmények: ekkor nagyságrendileg $\sqrt{N}$ hosszúságú ciklusokra számíthatunk.

A.: Így már érthetőbb, hogy adott esetben miért tekinthető egyszerűbbnek a folytonos modell.

D. G.: Nem véletlen, hogy a populációdinamikában is hagyományosan a folytonos modelleket részesítették előnyben. Összességében azt mondhatjuk, hogy minden egyes, kizárólag racionális számokat alkalmazó diszkrét modell viselkedése pontosan leírható ugyan, de tekintettel arra, hogy egyetlen folytonos modellhez egy végtelen diszkrétmodell-család tartozik, az utóbbit már nem nevezhetjük egyszerűnek. Folytonos modellből ugyan csak egy van, de az irracionális számok jelenléte miatt ezt nem tudjuk pontosan leírni, így erről sem állíthatjuk, hogy egyszerű.

A.: Nagyon örülök, hogy az irracionális számok problémája ma is foglalkoztatja az embereket. Ahogy említettük, 2500 évvel ezelőtt ezzel kapcsolatos rendhagyó nézetei miatt Hippaszoszt tudós társai meggyilkolták. Remélem, hogy az itt elhangzottak szintén felkeltik a kollégák érdeklődését, de abban is bízom, hogy ezt talán kevésbé heves formában hozzák az Ön tudomására.

D. G.: Tekintsük ezt a jókívánságot zárszónak. Köszönöm a figyelmüket.

Érdy János

Podhradczky József

Wenzel Gusztáv

Fábián Gábor

Nagy János

Arany János

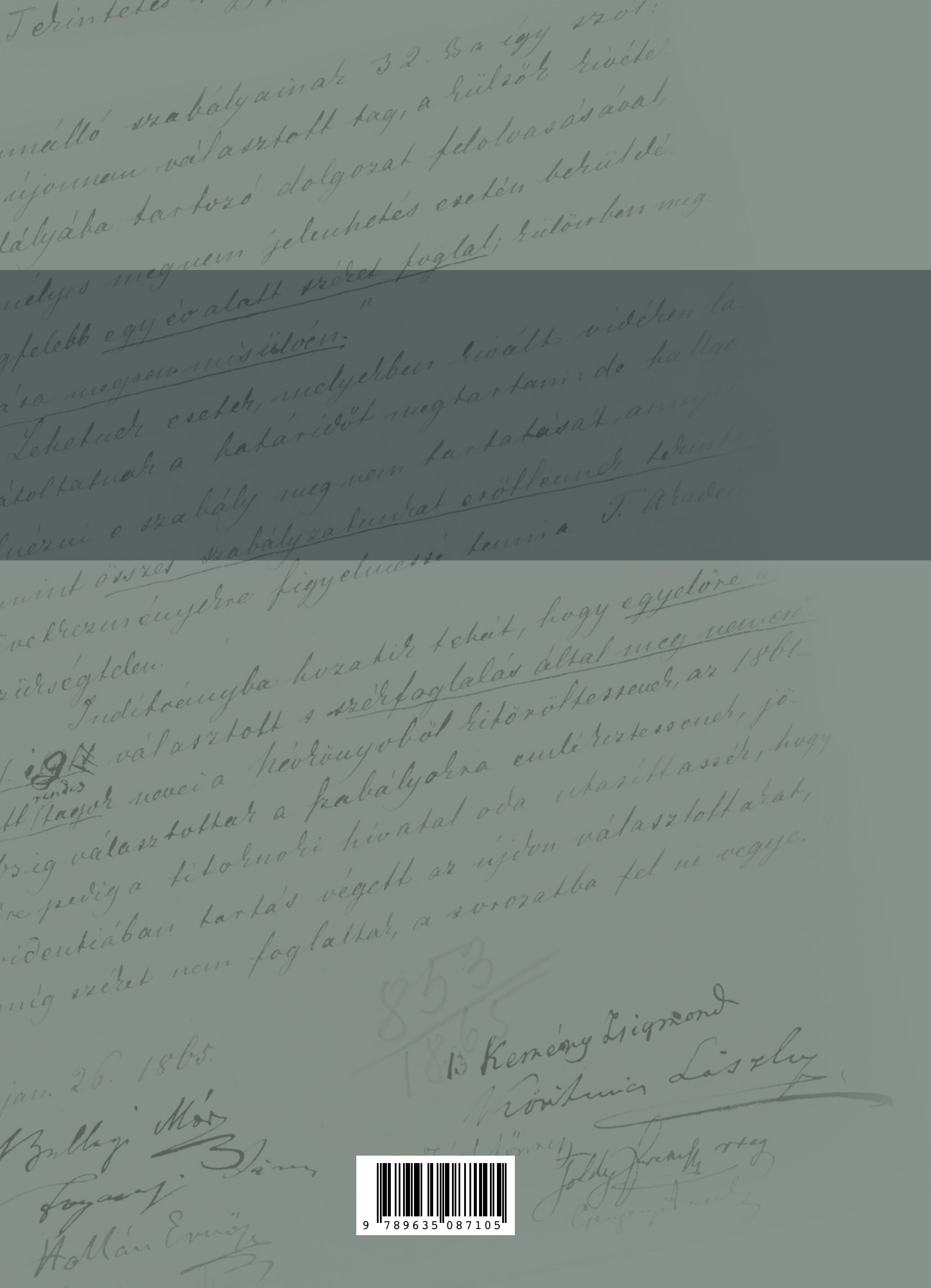
Pólya József

Tekintetes Nagygyülés!

...émia fennálló szabályainak 32-ika egy szót:
„Minden újonnan választott tag, a külsők kivéte-
lével, osztályába tartozó dolgozat felolvasásával,
vagy személyes megnem jelenhetés esetén beküldé-
sével, legfelebb egy év alatt széket foglal; különben meg-
választása megsemmisülvén."

Lehetnek esetek, melyekben kivált vidéken la-
kók gátoltatnak a határidőt megtartani: de hallga-
tag elnézni e szabály meg nem tartatását, annyit
tesz, mint összes szabályzatunkat erőtlennek tekinteni.
A körülményekre figyelmessé tenni a T. Akadém...
át szükségtelen.

Indítványba hozatik tehát, hogy egyelőre az
...választott s székfoglalás által meg nem...
...ből kitöröltessenek, az 186...
...tessenek, j...



9 789635 087105