SZÉKFOGLALÓ ELŐADÁSOK A MAGYAR TUDOMÁNYOS AKADÉMIÁN

Balás Egon

EGÉSZÉRTÉKŰ PROGRAMOZÁS: POLIÉDERES MÓDSZEREK

Tekintetes Nagygy[...]

[...] fennálló szabályainak 32-ika így szól:
[...] újonnan választott tag, a külsők kivéte-
[...] osztályába tartozó dolgozat felolvasásával,
[...] személyes megnem jelenhetés esetén beküldé-
[...] legfelebb egy év alatt széket foglal; különben meg-
[...] ztása megsemmisítőén."

Lehetnek esetek, melyekben kivált vidéken la-
[...] gátoltatnak a határidőt megtartani: de hallga-
[...] elnézni e szabály meg nem tartatását, annyi[...]
[...], mint összes szabályzatunkat erőtlennek tekinten[...]
[...] következményeire figyelmessé tenni a T. Akadém[...]
[...] szükségtelen.

Indítványba hozatik tehát, hogy egyelőre az
[18]61. ig választott s székfoglalás által meg nem erő-
[...] tett rendes tagok nevei a névkönyvből kitöröltessenek, az 1861-
[...] 65-ig választottak a szabályokra emlékeztessenek, jö-
[...] vőre pedig a titoknoki hivatal oda utasíttassék, hogy
[...] evidentiában tartás végett az újdon választottakat,
míg széket nem foglaltak, a sorozatba fel ne vegye."

853
1865

[...], jan. 26. 1865.

B. Kemény Zsigmond
[illegible] László

Ballagi Mór
[illegible]
Fogarasi
Hollán Ernő

Tóth Lőrincz r. tag
Toldy Ferencz r. tag
Greguss Ágost

Balas Egon

EGÉSZÉRTÉKŰ PROGRAMOZÁS:

POLIÉDERES MÓDSZEREK

SZÉKFOGLALÓK
A MAGYAR TUDOMÁNYOS AKADÉMIÁN

A 2004. május 3-án megválasztott
akadémikusok székfoglalói

Balas Egon

EGÉSZÉRTÉKŰ PROGRAMOZÁS: POLIÉDERES MÓDSZEREK

Magyar Tudományos Akadémia • 2014

Az előadás elhangzott 2004. október 13-án

Sorozatszerkesztő: Bertók Krisztina

Olvasószerkesztő: Laczkó Krisztina

Borító és tipográfia: Auri Grafika

ISSN 1419-8959

ISBN 978-963-508-733-4

Kiadja a Magyar Tudományos Akadémia
Kiadásért felel: Lovász László, az MTA elnöke
Felelős szerkesztő: Kindert Judit
Nyomdai munkálatok: Kódex Könyvgyártó Kft.

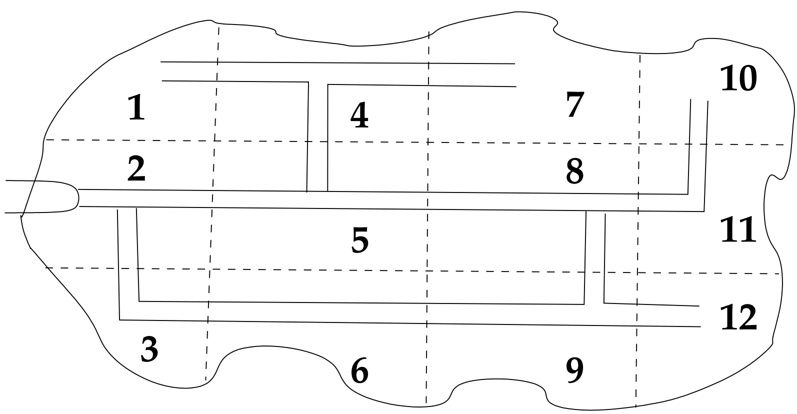
Kolozsváron, Erdély fővárosában születtem és nőttem fel. Középiskolás koromban a matematika és fizika voltak kedvenc tantárgyaim, de a háború kitörése más irányt adott az életemnek: politikai tevékenységbe sodort, ami minden egyebet elsöpört. Náciellenes föld alatti szervezkedés, bujdosás, majd letartóztatás, vallatás, börtön, szökés és felszabadulás követték egymást. A háború után román diplomáciai küldetés Londonba, majd letartóztatás és kétévi magánzárka a bukaresti Securitate hírhedt vallatóközpontjában. Sztálin halála után szabadon bocsátottak. Az ötvenes évek közepe táján pár évig mint gazdasági kutató működtem, és könyvet írtam Keynes tanairól. Ennek kapcsán 1959 tavaszán kizártak a pártból, és kidobtak a kutatóintézetből. Ekkor határoztam el, hogy szakmát változtatok, és 37 éves fejjel visszatérek ifjúkori szerelmemhez, a matematikához. (Mindezt megírtam máshol [9][1]).

Átrágtam magam néhány matematikai és operációkutatási könyvön, és bedolgoztam magam a lineáris programozásba, miközben egy bukaresti faipari tervezőintézetben dolgoztam. Első operációkutatási munkáimban Hammer Péterrel a szállítási feladat paraméteres változatát dolgoztuk ki. Az egészértékű programozás nem érdekelt különösebben: a változók egészértékűségére vonatkozó feltétel nem tűnt számomra gyakorlati fontosságúnak. De 1962-ben a tervezőintézeti munkámban olyan erdőgazdálkodási feladatra bukkantam, amely felnyitotta a szememet az egészértékű programozás óriási gyakorlati jelentőségére.

[1] Egon Balas, Carnegie Mellon University, eb17@andrew.cmu.edu

Az egészértékű programozás madártávlatból

Erdőirtási tervet kellett kidolgoznunk bizonyos parcellákra osztott területre, ahol meg volt adva minden (homogénnek számító) parcellára az ott termő fa mennyisége, valamint minőség, fajta és kor alapján megállapított értéke, továbbá bizonyos korlátok az évente betakarítandó fa mennyiségére. Minthogy a betakarításból származó haszon nagyjából arányos volt a begyűjtött fa mennyiségével, úgy nézett ki, hogy egyszerű lineáris programozási feladattal állunk szemben. Kiderült azonban, hogy az egyik fő költségtétel semmiképpen sem ábrázolható lineárisan. A különböző parcellák eléréséhez úthálózatot kellett építeni. Attól függően, hogy melyik parcelláról lesz fabegyűjtés, az úthálózat egyik vagy másik szakasza került volna megépítésre, és az ez irányú döntések igen bonyolult módon függtek össze. Az 1. ábra illusztrálja a helyzetet. Ha például fát akarunk begyűjteni a 9-es parcelláról,

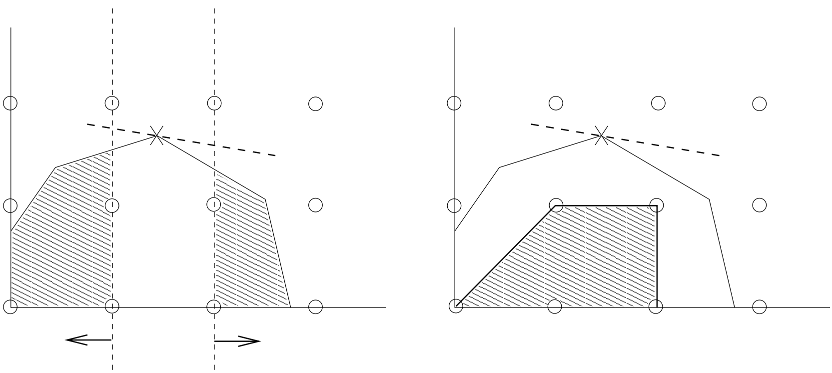


1. ábra. Erdőirtási feladat

akár sokat, akár keveset, akkor meg kell építeni azt az útszakaszt, amely ezt a parcellát a 6-os vagy a 8-as parcellához köti. Ha viszont ezek bármelyikét megépítjük, akkor további útszakaszok válnak szükségessé, és így tovább. Ez egy 0-1 változós programozási feladathoz vezetett, és egyszeriből felnyitotta a szememet az így felfedezett ábrázolási eszköz fontosságára: 0-1-es változókkal ábrázolni lehet a legkülönbözőbb logikai feltételeket, amelyek jelenléte áthatja a mindennapi életben előforduló legtöbb helyzetet. Mi több, a 0-1-es programozás eszközt szolgáltat mindenféle nem konvex, nem folytonos, szabálytalan összefüggés ábrázolására.

Minthogy akkoriban nem volt forgalomban e típusú feladat megoldására alkalmas számítógépes program, kidolgoztam egy eljárást, amelyet additív algoritmusnak neveztem, mert csak összeadási és összehasonlítási műveleteket használt. Szélesebb körben implicit leszámlálásként vált ismeretessé. Főként logikai tesztelésből állt, amely a különböző változók 0-ra vagy 1-re való rögzítésének a következményeit fürkészte ki; így talán a jelenkori informatikában „feltételpropagálás" (constraint propagation) néven szereplő eljárás szellemi előfutárának tekinthető. Egyszerű volt számítógépre programozni, nem igényelt lineáris programozási szoftvert, és többé-kevésbé megbízhatóan képes volt kb. 30 változós feladatokat megoldani [1]. Erdőirtási feladatunk jó néhány kérdésére sikerült általa választ kapnunk.

Az egészértékű programozás területe, amelyre így rásodródtam, alig néhány évvel előbb vette kezdetét. Az egészértékűségi feltétellel lényegében két módon lehet megbirkózni. Az egyik abból áll, hogy megvizsgáljuk a lehetséges egészértékű hozzárendelések egy jól megválasztott részhalmazát, oly módon, hogy ezáltal közvetve az összes ilyen hozzárendelésekkel számolunk. Ez implicit leszámlálás néven ismeretes, és legjobban úgy valósítható meg, amint arra Land és Doig [29], valamint mások rámutattak, hogy a feladat lineáris relaxációjából korlátokat nyerünk az optimális megoldás értékére minden, a hozzárendelések által definiált részfeladatban – innen a korlátozás és szétválasztás elnevezés. A másik megközelítés, amelynek úttörője Gomory [24] volt, megkísérli a megoldáshalmazt konvexifikálni, illetve megtalálni a megengedett egészértékű megoldások konvex burkát, vagy ha ez nem lehetséges, akkor érvényes metszősíkok által megközelíteni a konvex burkot, vagyis olyan lineáris egyenlőtlenségek által, amelyek lemetszik a megengedett folytonos megoldások egy részhalmazát, de nem metszenek le megengedett egészértékű pontot. A 2(a) és 2(b) ábrák illusztrálják ezt a két megközelítést.



2(a) ábra. Leszámlálás: korlátozás és szétválasztás

2(b) ábra. Konvexifikálás: metszési módszerek

A hatvanas évek közepe táján furcsa helyzet alakult ki az egészértékű programozás terén. Implicit leszámlálási, vagyis korlátozási és szétválasztási eljárásokat sikeresen programoztak számítógépre, és használtak a gyakorlatban előforduló kis vagy néha közepes nagyságú feladatok megoldására. Viszont ezek az algoritmusok, habár idővel jóval kifinomultabbak lettek eredeti prototípusaiknál, nem épültek semmilyen mélyebb meglátásra a feladat tulajdonságait illetően, és nem voltak alkalmasak arra, hogy alapul szolgáljanak elméleti vizsgálatokhoz. Mi több, ezek az algoritmusok természetüknél fogva exponenciális komplexitásúak voltak. Másrészt a konvexifikálási megközelítés, amely azzal kecsegtetett, hogy a látszólag megoldhatatlan egészértékű programozási feladatot a konvex burokra alkalmazott lineáris programozási feladatra vezeti vissza, komoly elméleti erőfeszítéseket váltott ki, amelyek jelentős eredményeket értek el a különböző metszősíkok tulajdonságait illetően, lapmeghatározó metszések jellemzése terén stb., de mindezek az eredmények jó ideig nem vezettek még csak mérsékelten hatékony algoritmusokhoz vagy programokhoz sem. Így tehát, míg az elméleti munka és az erőfeszítések zöme a metszősíkokra összpontosult, mikor gyakorlati feladatok megoldására került a sor, az egyetlen fajta használható szoftver a korlátozás és szétválasztás valamelyik variánsa volt, és az is csak aránylag kis feladatokkal volt képes megbirkózni. Az egész terület bizonyos fajta skizofréniában szenvedett: az alkalmazott operációkutatók esküdtek a korlátozás és szétválasztásra, és lekicsinylően viszonyultak a metszősíkos megközelítéshez, amelyet gyakorlati jelentőség nélküli elméletnek tartottak; miközben a matematikus kutatók majdnem kizárólagosan a metszősíkelméletre összpontosították erőfeszítéseiket, és a leszámlálási eljárásokat lekicsinylően gyalogló, nyers erőn alapuló módszerként kezelték. De e hasadástól eltekintve is, a hatvanas években kezdődő két, két és fél évtizeden át az egészértékű programozás egyrészt mint kváziegyetemes modellezési eszköz vált ismertté, amellyel szinte bármilyen helyzetet vagy feltételt kielégítő hűséggel lehet ábrázolni, másrészt mint olyan modellkategória, amelyet a gyakorlatban megoldani csak kifejezetten kisméretű feladatok esetében lehet. Ez a helyzet a nyolcvanas évek végéig tartott, amikor végül is a metszősíkok gyakorlatilag hasznosnak bizonyultak: leszámlálással kombinálva, „branch-and-cut" (szétválasztás és metszés) vagy „cut-and-branch" (metszés és szétválasztás) néven (a kettő nem ugyanaz), a kilencvenes évek közepe felé már sikerült megoldaniuk jelentős részét azoknak a feladatoknak, amelyekkel a leszámlálási algoritmusok nem voltak képesek megbirkózni. Végül is, mondhatni, hogy az utolsó tizenöt évben gyökeresen kibővült az egészértékű programozás gyakorlati alkalmazhatósága.

Ezt a változást csupán két ténnyel szeretném illusztrálni:

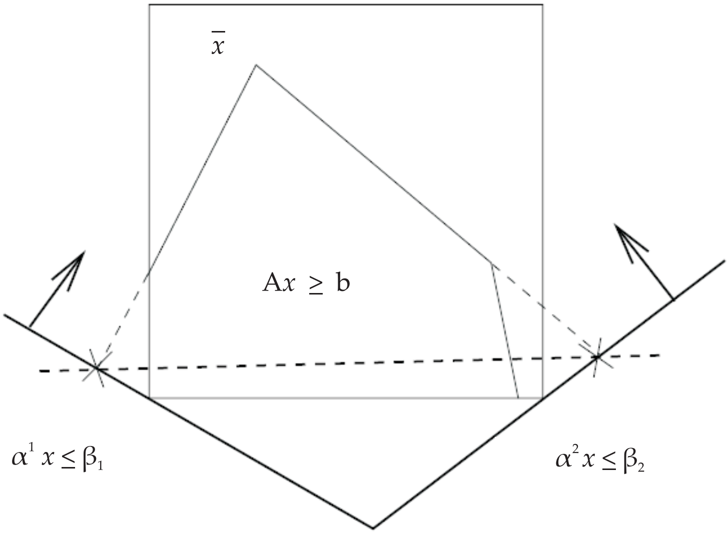
- 1977-ben Vancouverben diszkrét optimalizálási értekezlet folyt le a terület minden számottevő képviselőjének a részvételével, ahol 24 előadás és 16 bizottsági jelentés hangzott el a szakma állásáról [27]. Az előadások közül egyetlenegy tartalmazott számítási eredményeket: a szerzők négy kisebb méretű feladattal próbáltak megbirkózni, amelyekből hármat sikerült is megoldani. A jelentések értékelése szerint egészértékű programozásban sikeres megoldásra csak 30-nál kevesebb egészértékű változó esetében lehet számítani.
- 2003 nyarán Koppenhágában, a 18-ik Nemzetközi Matematikai Programozási Konferencián, előadás hangzott el az emelés és vetítés típusú metszéseknek az XPRESS nevű kereskedelmi szoftver egészértékű programozási modulusába való integrálásáról. Egyebek között az előadó, M. Perregaard [32], beszámolt száznál több nehéz, többnyire sok száz változós egészértékű programozási feladaton végzett számítási kísérleteiről, amelyek során a 113 lefuttatott feladat közül 95-öt sikerült egyenként 30 percen belül (legtöbb esetben másodpercek alatt) megoldania.

Minek tudható be ez az ugrásszerű változás? Több tényező is közrejátszott: gyorsabb számítógépek, hatékonyabb és megbízhatóbb lineáris programozási szoftver stb.; de nem utolsósorban, számottevő javulás a metszési módszerek téren, egyrészt maguknak a metszősíkoknak a minőségében, másrészt a metszősíkoknak a szétválasztási folyamatba való beágyazása révén. Ebben az összefüggésben nem kis elégtétellel éltem meg a kilencvenes évek elején az emelés és vetítés néven ismertté vált módszer sikerét, amelynek gyökerei a hetvenes évek elején kidolgozott diszjunktív programozási módszerre nyúlnak vissza.

Mi is a diszjunktív programozás, és hogyan keveredtem bele?

Átszúrásos metszések

Mint említettem, jómagam a leszámlálási/szétválasztási bejáraton át léptem az egészértékű programozás területére. Ennek ellenére, habár az additív algoritmusom a hatvanas években roppant népszerű volt, és a hetvenes évek közepéig az is maradt, én magam élénken érzékeltem e megközelítés korlátozott voltát, és a hatvanas évek vége felé konvexifikálással kezdtem foglalkozni. Az akkor divatos irányzat a metszősíkkutatás terén a csoportelméleti megközelítés volt; de minthogy érdeklődésem központjában a tiszta és vegyes 0-1-es programozás állt, más irányba fordultam, és a konvex analízis fogalmait és eszközeit próbáltam felhasználni, mint például a polaritás, vetítés, maximális konvex bővítés stb. Rájöttem, hogy igen érdekes metszősíkcsaládot lehet előállítani olyan tetszőleges konvex S halmaz segítségével, amely tartalmazza a feladat lineáris relaxációjának optimumát, de amelynek belseje nem tartalmaz megengedett egészértékű pontot [2]. Ez úgy történik, hogy megoldjuk a feladat lineáris programozási relaxációját, és az optimális megoldás által meghatározott poliedrális kónusz minden extremális sugarával átszúrjuk az adott S halmaz határát. Az így nyert átszúrási pontok úgynevezett átszúrásos metszést (intersection cut) határoznak meg, amely levágja a lineáris program optimumát, de nem vág le megengedett egészér-



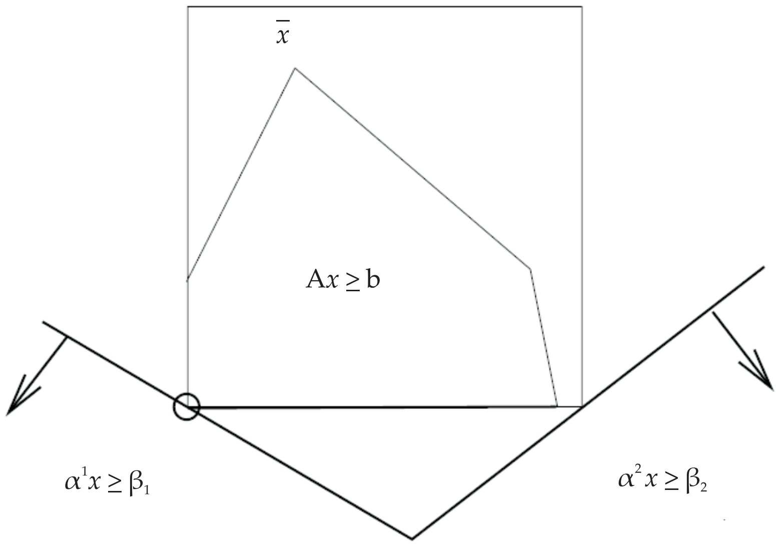
3. ábra. Átszúrásos metszés

tékű pontot. Ezt a 3. ábra illusztrálja, ahol LP a lineáris relaxáció megengedett halmaza, $\bar{x}$ a lineáris program optimális megoldása, az S halmaz a két lineáris egyenlőtlenség által meghatározott féltérnek a metszete, és a két átszúrási ponton átmenő pontozott vonal ábrázolja az átszúrásos metszést. Aszerint, hogy hogyan választjuk meg a konvex S halmazt, különböző tulajdonságú átszúrásos metszést kapunk. Ha például S az egységköb két szembenálló lapját tartalmazó két sík által meghatározott féltér metszése, akkor a vegyes integer Gomory- [25] féle metszősíkkal közeli rokonságban lévő átszúrásos metszősíkot nyerünk. Minthogy a metszés mélysége az S halmaz alakjától és nagyságától függ, egy ideig az egységkööböt tartalmazó különböző formájú halmazok maximális konvex bővítését vizsgáltam, és ez elvezetett a konvex burok külső polárisának a fogalmához, mint a legnagyobb olyan konvex halmazhoz, amelyet tulajdonságai alkalmassá tesznek átszúrásos metszősíkok előállítására [3].

Másrészt rövidesen kiderült, hogy minden átszúrásos metszés egyaránt tekinthető diszjunktív, vagyis diszjunkcióból nyert metszésnek is. Ha ugyanis az S konvex halmazt például két, az $\alpha^1 x \leq \beta_1$ és $\alpha^2 x \leq \beta_2$ egyenlőtlenségek által definiált féltér határozza meg, mint a 3. ábrán, akkor az a feltétel, miszerint az S halmaznak nem szabad megengedett egészértékű pontot mint belső pontot tartalmaznia, egyenértékű azzal a feltétellel, hogy minden megengedett egészértékű pontnak ki kell elégítenie az $(\alpha^1 x \geq \beta_1) \vee (\alpha^2 x \geq \beta_2)$ diszjunkciót, és az S konvex halmazból nyert átszúrásos metszést egyaránt tekinthetjük ebből a diszjunkcióból nyert diszjunktív metszésnek. Mindez rendben volna, de ha az átszúrásos metszés és a diszjunktív metszés közötti különbség csak értelmezésen múlik, vagyis csupán terminológiai, akkor mi a jelentősége a terminológiaváltásnak? Az igazság az, hogy a megváltozott nézőpont fontos új általánosításokat sugalmaz. Ha feladatunk lineáris programozási relaxációja például $Ax \geq b$, akkor a fenti diszjunktív feltételt megtoldhatjuk e rendszernek mindkét taghoz való hozzácsatolásával, és az

$$\begin{pmatrix} Ax & \geq & b \\ \alpha^1 x & \geq & b_1 \end{pmatrix} \vee \begin{pmatrix} Ax & \geq & b \\ \alpha^2 x & \geq & \beta_2 \end{pmatrix} \tag{1}$$

feltételt nyerjük. E diszjunkciónak nyilván mindkét tagja poliéder, tehát e mellett a diszjunktív feltétel mellett optimalizálni annyi, mint poliéderek unióján optimalizálni. Mi több, a 3. ábra példájának esetében a két poliéder egyike egy pontra redukálódik, a másika pedig üres, és így a két poliéder uniójának konvex burka egyetlen pontból áll (lásd a 4. ábrát).



4. ábra. A diszjunktív halmaz konvex burka

Diszjunktív programozás

Így jutottam el tehát a diszjunktív programozáshoz, mint a konvex poliéderek unióján való optimalizáláshoz. A konvex poliéderek uniója persze nem konvex halmaz. Általánosabban, diszjunktív programozáson olyan optimalizálási feladatot értünk, amelynek feltételei konjunkció és diszjunkció által összekötött egyenlőtlenségek. Az ilyen feladat megengedett megoldásainak halmazát diszjunktív halmaznak, röviden *d*-halmaznak nevezzük. Egy diszjunktív halmaz több alakban is kifejezhető; ezek legfontosabbika a diszjunktív normál alak és a konjunktív normál alak. Röviden, a diszjunktív normál alak olyan diszjunkció, amelynek minden tagja diszjunkciómentes; és a konjunktív normál alak olyan konjunkció, amelynek minden tényezője konjunkciómentes. A diszjunktív programozás fő alkalmazási területe, és az érdeklődésem középpontja, a tiszta és vegyes 0-1-es programozás volt; de persze ez a keret és maga a fogalom ennél jóval tágabb szférát ölel fel.

A diszjunktív programozásnak két alapvető eredménye van, amely a 0-1-es programozásra döntő módon releváns [4, 5, 6]. Az első konvex poliéderek uniójára vonatkozik, vagyis diszjunktív normál alakban megadott d-halmazra. Azt mondja ki, hogy poliéderek uniójának zárt konvex burka tömören ábrázolható magasabb dimenziójú térben. Ebben az ábrázolásban a változók és a feltételek száma lineáris függvénye az unió tagjai számának, tehát nem túl nagyszámú poliéder uniójának konvex burka efficiensen előállítható. A második eredmény bizonyos gyakori tulajdonsággal rendelkező, konjunktív normál alakban megadott, d-halmazra vonatkozik. Azt mondja ki, hogy az ilyen d-halmaz zárt konvex burka előállítható a diszjunkciók egyenkénti, egymás utáni aktiváltatásával, tehát annyi lépésben, amennyi az előforduló diszjunkciók száma. Minden lépés egy-egy újabb diszjunkciót aktiváltat, és előállítja az így definiált (átmeneti) d-halmaz konvex burkát. Az utolsó lépés eredménye az eredeti d-halmaz zárt konvex burka. Íme a részletek:

Adva lévén poliéderek egy véges sokasága az n-dimenziós térben, $P_i := \{x \in \mathbb{R}^n : A^i x \geq b^i\} \neq \emptyset$, $i \in Q$, határozzuk meg az adott poliéderek uniójának zárt konvex burkát, vagyis P_Q-t, ahol $P_Q = \operatorname{conv}(\bigcup_{i \in Q} P_i)$ és $\operatorname{conv}(S)$ az S halmaz zárt konvex burkát jelenti. Vezessünk be az unió minden tagjára egy $(n+1)$ dimenziós vektort, (y^i, y_0^i)-t, és ezek segítségével definiáljuk az M halmazt mint

$$M := \{(x, \{y^i, y_0^i\}_{i \in Q}) : x - \sum(y^i : i \in Q) = 0$$

$$\begin{array}{rcl} A^i y^i - b^i y_0^i & \geq & 0 \\ y_0^i & \geq & 0, \quad i \in Q \\ \sum(y_0^i : i \in Q) & = & 1\}. \end{array}$$

Legyen $\mathrm{Proj}_x(M)$ az M halmaz vetülete az x vektort tartalmazó altérre.

1. tétel. $P_Q = \mathrm{Proj}_x(M)$.

Az M halmaz tehát a poliéderek uniójának konvex burkát ábrázolja magasabb dimenziójú térben. Az ábrázolás lineáris, és az M-et definiáló rendszer minden bázismegoldása a következő formát ölti: $(y^k, y_0^k) = (x, 1)$ bizonyos k indexre, és $(y^i, y_0^i) = (0, 0)$ minden k-tól különböző i-re. Megjegyzendő, hogy bár az M definíciója nem tartalmaz egészértékűségi követelményt, a y_0^i változók értéke minden bázismegoldásban 0 vagy 1.

Mármost ahhoz hogy az unió konvex burkát az eredeti, x-et tartalmazó térben ábrázolhassuk, vagyis hogy előállíthassuk P_Q-t, az M vetületét, szükségünk van az úgynevezett vetítési kónuszra:

$$W := \{(\alpha, \beta, \{u^i\}_{i \in Q}) : \alpha = u^i A^i, \beta \leq u^i b^i, u^i \geq 0, i \in Q\}.$$

2. tétel.

$$P_Q = \{x \in \mathbb{R}^n : \alpha x \geq \beta, \forall (\alpha, \beta) \in W_0\},$$

ahol

$$W_0 := \{(\alpha, \beta) : \exists u^i, i \in Q, (\alpha, \beta, \{u^i\}_{i \in Q}) \in W\}.$$

Ha mármost a P_Q halmaz kónikus polárisát mint az összes P_Q-re érvényes metszések (egyenlőtlenségek) halmazát definiáljuk, vagyis

$$P_Q^* := \{(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^{n+1} : \alpha x \geq \beta, \forall x \in P_Q\}, \text{ azt látjuk, hogy } P_Q^* = W_0.$$

A 0-1-es programozás esetében, ha a lineáris relaxáció megengedett halmaza $P := \{x \in \mathbb{R}^n_+ : Ax \geq b\}$, és az x_j változóra kimondjuk a 0-1 feltételt, ezzel két poliédert hozunk létre,

$$P_{j0} := \{x \in \mathbb{R}^n_+ : Ax \geq b, x_j = 0\} \text{ és } P_{j1} := \{x \in \mathbb{R}^n_+ : Ax \geq b, x_j = 1\},$$

és a conv$(P_{j0} \cup P_{j1})$-t magasabb dimenziójú térben ábrázoló M halmaz a következő alakot ölti:

$$M := \Big\{(x, y, y_0, z, z_0) \in \mathbb{R}^{3n+2}_+ : \begin{array}{rrrrcl} x & - & y & - & z & = & 0 \\ & & Ay & - & by_0 & \geq & 0 \\ & - & y_j & & & = & 0 \\ & & Az & - & bz_0 & \geq & 0 \\ & & z & - & z_0 & = & 0 \\ & & y_0 & + & z_0 & = & 1\Big\}\,. \end{array}$$

Ha most az M halmazt levetítjük az x alterére, azt kapjuk hogy

$$\text{conv}(P_{j0} \cup P_{j1}) = \{x \in \mathbb{R}^n_+ : \alpha x \geq \beta, (\alpha, \beta) \in W_0\},$$

ahol a konvex burkot definiáló egyenlőtlenségek halmaza

$$W_0 := \Big\{(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^{n+1} : \begin{array}{ccccc} \alpha & \geq & uA & - & u_0 e_j \\ \alpha & \geq & vA & + & v_0 e_j \\ \beta & \leq & ub & & \\ \beta & \leq & vb & + & v_0 \\ & & u, v \geq 0 & & \Big\}\,. \end{array}$$

A diszjunktív programozás második alapvető eredménye az olyan *d*-halmazra vonatkozik, amely a következő tulajdonsággal rendelkezik. Legyen a szóban forgó *d*-halmaz konjunktív normál alakja

$$D := \{x \in \mathbb{R}^n : Ax \geq b,\ \vee_{h \in Q_j}(d^h x \geq d^h_0), j = 1, \ldots, t\}.$$

A D diszjunktív halmazt „oldalképző”-nek (facial) nevezzük, ha a $d^h x > d^h_0$ egyenlőtlenségek mindegyike az $Ax \geq b$ által definiált poliédernek egy oldalát határozza meg. Például a vegyes 0-1-es feladat megengedett megoldásainak halmaza, mint konjunktív normál alakban felírt d-halmaz így néz ki:

$$\{x \in \mathbb{R}^n_+ : Ax \geq b,\ x_j \leq 0 \vee x_j \geq 1,\ j = 1, \ldots, t\},$$

ahol $p \leq n$, A-nak n oszlopa van, és az $Ax \geq b$ rendszer tartalmazza az $x \leq 1$ feltételeket. Ez a d-halmaz nyilván oldalképző, hiszen $x_j \leq 0$ és $x_j \geq 1$ az $Ax \geq b$ és $x \geq 0$ feltételek által definiált poliédernek egy-egy oldalát határozzák meg.

Mármost a szóban forgó tulajdonság abból áll, hogy oldalképző d-halmaz konvex burkát előállíthatjuk úgy, hogy a diszjunkciókat egyenként, tetszőleges sorrendben alkalmazzuk, és minden újabb diszjunkció alkalmazása után előállítjuk az ebből keletkező d-halmaz konvex burkát. Ezt az eljárást „egyenkénti” vagy „sor szerinti” (sequential) konvexifikálásnak nevezzük, és közelebbről így néz ki: Tegyük fel hogy a fenti D halmaz oldalképző. Definiáljuk P^0-at, $P^0 := \{x \in \mathbb{R}^n : Ax \geq b\}$, és $j = 1, \ldots, t$-re

$$P^j := \text{conv}\left(P^{j-1} \cap \{x : \vee_{h \in Q_j}(d^h x \geq d_0^h)\}\right).$$

Ekkor érvényes a

3. tétel. $P^t = \text{conv}(D)$.

Ha például D egy vegyes 0-1-es poliéder, ahol a diszjunkciók az $x_j \in \{0, 1\}$, $j = 1, \ldots, t$ alakot öltik, és $P^0 := \{x \in \mathbb{R}^n_+ : Ax \geq b\}$, akkor

$$P^j := \text{conv}\left(P^{j-1} \cap \{x : x_j \in \{0, 1\}\}\right), \quad j = 1, \ldots, t$$

és P^t a tétel szerint a megengedett 0-1-es megoldások konvex burka.

Így tehát a vegyes 0-1-es programozási feladat p lépésben megoldható, ahol p a 0-1-es változók száma. Itt egy lépés abból áll, hogy a 0-1 feltételt egy változóra, mondjuk x_j-re, alkalmazzuk, és az így nyert P_{j0} és P_{j1} poliéderek uniójának előállítjuk a konvex burkát.

Míg a (tiszta vagy vegyes) 0-1-es programozási feladat oldalképző, a (tiszta vagy vegyes) egészértékű programozási feladat, amely ha korlátos, szintén megfogalmazható diszjunktív programozási feladatként, nem oldalképző, ezért ez utóbbi esetben a megengedett megoldások konvex burka nem állítható elő sor szerinti eljárással. A diszjunktív programozás egyik korai eredménye volt, hogy felfedte a tiszta és vegyes 0-1-es programozási feladatnak eme legfontosabb megkülönböztető vonását az általános egészértékű programozáson belül.

Emelés és vetítés, mint metszési módszer

Ezeket és az ezekhez kapcsolódó más eredményeket egy 1974. júliusi kéziratban (technical report) fejtettem ki [4]. Minthogy azonban számítási eredményekkel nem tudtam őket alátámasztani, szakmai körökben hűvös fogadtatásban részesültek. Egy-két fiatal kutató kivételével, mint R. G. Jeroslow és C. Blair, akik bekapcsolódtak ebbe a kutatási irányba, és lényeges hozzájárulásokkal gazdagították a területet [19, 28], a mértékadó szakmai körök szkeptikusak voltak. Így például a fent említett kéziratom annak idején nem jelent meg nyomtatásban, minthogy nem voltam hajlandó egy referens szája íze szerint átírni. A következő 25 év alatt számtalan kérést kaptam a MSRR 348-as számú kézirat egy-egy példányára, de nyomtatásban nem került közlésre 1998-ig, amikor is mint felkérésre írott cikk jelent meg két disztingvált kolléga méltató előszavával.

Úgy látszik hogy a latin mondás, *habent sua fata libelli* (minden könyvnek megvan a maga sorsa), elméletekre is áll. Habár a diszjunktív programozás beindítása idején, a hetvenes évek közepe táján, hűvös fogadtatásban részesült, mikor úgy 15 évvel később Ceria, Cornuéjols és jómagam lényegében ugyanezeket az eredményeket új keretben mutattuk be, „emelés és vetítés" (lift and project) elnevezéssel és számítási eredményekkel alátámasztva, a visszhang egészen más volt. A diszjunktív programozás eszméihez való visszatérésünket a Lovász és Schrijvernek [30] a mátrixkónuszokra vonatkozó igen érdekes munkája váltotta ki. Röviddel, miután ezzel megismerkedtünk, rájöttünk hogy a Lovász–Schrijver-eljárásnak egy leegyszerűsített variánsa izomorfikus azzal a fent vázolt diszjunktív programozási eljárással, amely egy vegyes 0-1-es feladat konvex burkát állítja elő t lépésben [10]. Ezúttal munkánkat az algoritmikus aspektusokra összpontosítottuk, és hatékony számítógépes programot is produkáltunk MIPO (Mixed Integer Program Otimizer) néven. A MIPO segítségével kimutattuk, hogy a diszjunktív metszések bizonyos fajtája, amelyet emelés és vetítési (E&V) metszésnek kereszteltünk, kombinálva egy felerősítési eljárással és beágyazva egy korlátozás és szétválasztási sémába, képes megoldani a legtöbb ismert vegyes 0-1-es programozási feladatot, amellyel az akkor forgalomban lévő számítógépi programok nem voltak képesek megbirkózni [11].

Konkréten, az emelés és vetítés eljárással úgy állítunk elő metszéseket, hogy a feladat lineáris programozási relaxációjának megoldása után az optimális $\bar{x}$ megoldás egy 0-1-re korlátozott, de nem egészértékű komponensére, mondjuk a j-ikre, alkalmazzuk az $x_j \leq 0 \vee x_j \geq 1$ diszjunkciót, annak az (1) szerinti kibővített alakjában. Az ebből eredő két poliéder uniójának konvex burkát a 3. szakaszban leírt M halmaz segítségével ábrázoljuk, és vetítés útján e konvex burok egy megfelelően megválasztott egyenlőtlenségét állítjuk elő mint a helyileg „legmélyebb" E&V metszést. „Legmélyebb"-nek az $\bar{x}$ pont által maximálisan megszegett egyenlőtlenséget, illetve metszést nevezzük. E célból az alábbi úgynevezett metszés-előállító lineáris programot (MELP-t) oldjuk meg:

$$\min\{\bar{x}\alpha - \beta : (\alpha, \beta) \in W_0 \cap S\},$$

ahol W_0 a 3. szakaszban bevezetett kónusz és S egy normalizáló feltétel, mint például $\beta \in \{1, -1\}$ vagy $\sum_j |\alpha_j| \leq 1$. Ha az MELP optimális megoldása $(\alpha, \beta, u, u_0, v, v_0)$, akkor

4. tétel. a keresett legmélyebb E&V metszés $\alpha x \geq \beta$, és ennek együtthatói

$$\alpha_h = \begin{cases} \max\{ua_h - u_0, va_h + v_0\} & h = j \\ \max\{ua_h, va_h\} & h \in \{1, \ldots, n\} \setminus \{j\} \end{cases}$$

és $\qquad \beta = \min\{ub, vb + v_0\}.$

Az MELP szerepe a metszés előállításában a következőképpen értelmezhető. Mint említettük, az előállítandó metszést az (1) alakú diszjunkcióból származtatjuk (ahol az $\alpha^1 x \geq \beta_1 \ \vee \ \alpha^2 x \geq \beta_2$ feltételt a $-x_j \geq 0 \ \vee \ x_j \geq 1$ feltétel helyettesíti). Ez felfogható úgy, hogy az (1) mindkét tagját a tag egyenlőtlenségeinek pozitív lineáris kombinációjával helyettesítjük:

$$((uA - u_0 e_j)x \geq ub) \ \vee \ ((vA + v_0 e_j)x \geq vb + v_0),$$

ahol a metszés „ereje" vagy „mélysége" a két tag egyenlőtlenségeinek súlyozásától függ, vagyis az u, u_0, v, v_0 multiplikátorok megválasztásán múlik. Az MELP hivatása ezt a súlyozást optimalizálni.

A fenti metszés kizárólag az x_j-re alkalmazott diszjunkció folyománya. Ha a többi változók valamelyike ugyancsak egészértékűségi feltételnek van alávetve, akkor ezt a fentebbi metszés felerősítésére lehet felhasználni [12]. Ha az ilyen változók indexhalmaza N_1, akkor

5. tétel. a felerősített E&V metszés $\gamma x > \beta$, ahol

$$\gamma_h = \begin{cases} \min\{ua_h + u_0\lceil m_h\rceil, va_h - v_0\lfloor m_h\rfloor\}, & h \in N_1 \\ \alpha_h & \text{egyébként} \end{cases}$$

és $$m_h = (va_h - ua_h)/(u_0 + v_0).$$

(Itt $\lceil m_h\rceil$ és $\lfloor m_h\rfloor$ az m_h felkerekített, illetve lekerekített értéke).

Az emelés és vetítési módszer sikere felkeltette a gyakorlati körök érdeklődését a sokáig elhanyagolt metszési módszerek iránt általában. Kiderült, hogy a korábban gyakorlatilag haszontalannak ítélt Gomory-féle metszések is hasznosíthatók, ha megfelelő módon beágyazzák őket egy korlátozási és szétválasztási sémába. Minthogy ez utóbbi metszések számítógépes programozása roppant egyszerű, a kilencvenes évek vége felé már részeivé váltak a vezető kereskedelmi szoftvernek [18].

Az E&V metszősíkok előállítása a fent vázolt módon, habár kutatási szoftverben érdekes eredményekre vezetett (lásd pl. [20]-at), akkoriban még túl számításigényesnek nézett ki ahhoz, hogy kereskedelmi szoftverben alkalmazzák. E téren 2002-ben történt meg az áttörés, amikor is M. Perregaarddal sikerült egy pontos megfeleltetést találnunk a magasabb dimenziójú térben felállított MELP és az eredeti lineáris program (LP) bázisai között [15]. Ez lehetővé tette, hogy az MELP-et implicite oldjuk meg, az eredeti LP szimplex tábláján. Ugyanis a megfeleltetés alapján az MELP minden eleme, beleértve a redukált költségkoefficienseket, amelyeknek az előjelei irányítják az optimalizálási eljárás báziscseréit, kiszámíthatók az eredeti LP szimplex táblájának az adataiból. Így tehát az MELP megoldási folyamatának iterációit mímelni lehet az eredeti LP szimplex tábláján. Az erre a megfeleltetésre alapozott új eljárás sokszoros megtakarítást eredményezett az optimális E&V metszések előállításában, és így lehetővé tette az XPRESS kereskedelmi szoftver egészértékű programozási modulusába való beágyazását, és ez lényegesen megnövelte a modulus hatékonyságát [32].

Párosítható részgráfok poliédere

A kombinatorikus optimalizálási feladatok általában nehezek; de ha a feladat lineáris relaxáltjának van valamilyen előnyös tulajdonsága, mint például a teljes unimodularitás, akkor a feladat könnyűvé válik. Néha egy feladat relaxáltja bizonyos ábrázolásban, mondjuk mint $P := \{x \in \mathbb{R}^n : Cx \leq d\}$, nem mutat semmilyen kedvező tulajdonságot, de ha újabb változók bevezetésével magasabb dimenziójú térben ábrázoljuk (emelés!), mondjuk mint $Q := \{(x, y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p : Ax + By \leq b\}$, akkor e „bővített megfogalmazás"-ban (extended formulation) felbukkanhat a relaxáltnak valamilyen előnyös tulajdonsága. Ha e tulajdonság alapján sikerül kimutatnunk, hogy a relaxált bázismegoldásai, vagyis a Q csúcspontjai, egészértékűek, akkor Q-nek az eredeti altérre való vetítése megőrzi ezt a tulajdonságot. Tehát ha sikerül bebizonyítani, hogy $P = \text{Proj}(Q)$, akkor bebizonyítottuk, hogy P egészértékű poliéder.

Tegyük fel például, hogy adva van a $G = (V, E)$ páros gráf, és jellemezni akarjuk a V csúcshalmaz olyan W részhalmazait, amelyek teljesen párosítható $G[W]$ részgráfot feszítenek. Bár első hallásra ez a feladat kissé mesterkéltnek tűnik, valójában egy gyakorlati ütemezési feladat kapcsán merült fel. Egy holland városi autóbusztársaság számára kellett a sofőrök napi menetrendjét összeállítani úgy, hogy adott útvonalakat optimálisan fedezzenek. Ez egy jól ismert halmazfedési feladat, amelynek standard megfogalmazása

$$\min \{cx : Ax \geq e,\ x \in \{0, 1\}^n\}.$$

Itt e az 1-esek vektora, c egy költségvektor, és A az a 0-1-es mátrix, amelynek sorai egy-egy útvonalszakasz lefedési lehetőségeit, oszlopai pedig egy-egy sofőr lehetséges napi menetrendjeit ábrázolják; a feladat tehát az összes lehetséges menetrendekből egy optimális kombinációt kiválasztani. A baj ez esetben az volt, hogy az összes lehetséges menetrendeknek, vagyis az A oszlopainak a száma túl nagy volt. Közelebbi vizsgálatra azonban kiderült, hogy az A minden oszlopa egy reggeli és egy délutáni menetrend kombinációjából állt, és az oszlopok nagy száma abból eredt, hogy minden megengedett, vagyis időben és térben kompatibilis kombinációt explicite előállítottak. Ha tehát a reggeli, illetve délutáni lehetséges menetrendek száma n_1, illetve n_2, és a megengedett kombinációk aránya (az összes lehetséges kombinációkhoz viszonyítva) r, akkor az A oszlopainak száma $r \times n_1 \times n_2$. Ha ezzel szemben a reggeli és a délutáni menetrendeket olyan külön-külön feladatként kezeljük, amelyeknek a megoldásai bizonyos kompatibilitási feltételnek kell, hogy eleget tegyenek, akkor az alábbi feladatot kapjuk. Legyen $G = (V, E)$ az a páros gráf, amelynek csúcsai a reggeli (V_1), illetve délutáni (V_2) lehetséges mentrendeket képviselik, legyen (x^1, x^2) a (V_1, V_2)-höz rendelt karakterisztikus vektor, és legyen E a kompatibilis menetrendpárok listája, vagyis $(i, j) \in E$ akkor és csak akkor, ha a reggeli i mentrend kompatibilis a délutáni j menetrenddel. Keressük a $c^1x^1 + c^2x^2$ függvény minimumát, a következő feltételek mellett:

(a) $A^1x^1 \geq e^1,\ A^2x^2 \geq e^2$

(b) $x^1 \in \{0,1\}^{n_1},\ x^2 \in \{0,1\}^{n_2}$; és

(c) $G[W(x^1, x^2)]$ a G teljesen párosítható részgráfja.

Itt az (a) feltétel az $Ax \geq e$ reggeli és délutáni megfelelőit fejezi ki, míg a (c) feltételben előforduló $W(x^1, x^2)$ az (x^1, x^2) által definiált csúcshalmaz, és $G[W]$ a G-nek a W által feszített részgráfja. Az így megfogalmazott feladatnak csak $n_1 + n_2$ változója van ($r \times n_1 \times n_2$ helyett), viszont a (c) feltételt olyan egyenlőtlenség-rendszerrel kell ábrázolni, amely a G gráf teljesen párosítható részgráfjait feszítő csúcshalmazok karakterisztikus vektorainak konvex burkát definiálja. Nevezzük ezt a G gráf teljesen párosítható részgráfjai poliéderének, és jelöljük P-vel. Ha a $W \subseteq V$ csúcshalmazt képviselő bináris vektort x^W-vel jelöljük, akkor a keresett jellemzés tárgya

$$P := \text{conv}\{x^W : W \subseteq V,\ G[W] \text{ teljesen párosítható}\}.$$

Mármost a Kőnig–Hall-tétel [26] szerint G páros gráf $G[W]$ részgráfja akkor és csak akkor teljesen párosítható, ha

(i) $|W \cap V_1| = |W \cap V_2|$, és

(ii) minden $S \subseteq W \cap V_1$ részhalmazra áll, hogy $|S| \leq |N(S)|$,

ahol $N(S) := \{j \in W \cap V_2 : \exists i \in S,\ (i,j) \in E\}$. Ha ezt átültetjük a 0-1-es változókban kifejezett lineáris egyenlőtlenségek nyelvére, azt kapjuk hogy

$$\begin{aligned} P := \text{conv}\{x \in \{0,1\}^n : x(V_1) - x(V_2) &= 0 \\ x(S) - x(N(S)) &\leq 0,\ S \subseteq V_1\}. \end{aligned}$$

Ezzel kapcsolatban felmerül a kérdés, hogy nem fölöslegesek-e a 0-1-es feltételek, illetve nem egészértékű poliéder-e a P lineáris programozási relaxáltja. Megjegyzendő, hogy a fenti egyenlőtlenség-rendszer koefficiensmátrixa szemmel láthatóan nem teljesen unimoduláris. Hogy a kérdést megválaszoljuk, ábrázoljuk a feladatot a csúcs- és élváltozók terében (emelés!), vagyis vezessünk be minden (i,j) élre egy u_{ij} élváltozót, és jelöljük

$$u(i, N(i)) := \textstyle\sum_j (u_{ij} : j \in N(i)),\ u(N(j), j) := \sum_i (u_{ij} : i \in N(j)).$$

Akkor a feladatunkat a következő egyenlőtlenség-rendszer adja meg:

$$\begin{array}{rcrcll} u(i,N(i)) & - & x_i & & = & 0 & i \in V_1 \\ u(N(j),j) & & & - \quad x_j & = & 0 & j \in V_2 \\ & u_{ij} \geq 0, (i,j) \in E, 0 \leq x_j \leq 1, & & & & & j \in V \end{array} \tag{2}$$

E rendszer teljesen unimoduláris, tehát a neki megfelelő poliéder egészértékű. Mármost könnyű belátni, hogy egy $W \subseteq V$ csúcshalmaz akkor és csak akkor feszíti a G teljesen párosítható részgráfját, ha az $x_i = 1$, $i \in W$, $x_i = 0$, $i \in V \setminus W$ által (2) révén definiált egyenlőtlenség-rendszer megoldható. Tehát a (2) rendszer feladatunknak érvényes „megemelt" ábrázolása. Sőt ez az ábrázolás megadja a kulcsot kérdésünk megválaszolására [16]:

6. tétel

$$\begin{aligned} P := \{x \in \mathbb{R}^n : 0 \leq x \leq 1 & \\ x(V_1) - x(V_2) & = 0 \\ x(S) - x(N(S)) & \leq 0, \quad S \subseteq V_1\}. \end{aligned}$$

A tétel bizonyítása abból áll, hogy kimutatjuk, miszerint P a (2) által definiált poliéder vetülete az x-et tartalmazó altérre. A (2) vetítési kónusza

$$\begin{aligned} W := \{v \in \mathbb{R}^n : -v_i + v_j \geq 0,\ i \in V_1,\ j \in V_2,\ (i,j) \in E \\ v_i \geq 0,\ i \in V\}, \end{aligned}$$

és ennek extremális irányai azok a v vektorok, amelyekre létezik olyan $\alpha > 0$, hogy vagy

$$\text{(a) } v_i = \begin{cases} \alpha & \text{ha } i = j^* \in V_2 \\ 0 & \text{ha } i \in V_1 \cup V_2 \setminus \{j^*\}, \end{cases}$$

vagy pedig

$$\text{(b) } v_i = \begin{cases} \alpha & \text{ha } i \in S \cup N(S) \\ 0 & \text{egyébként}, \end{cases}$$

ahol $G[S \cup N(S)]$ összefüggő gráf. Minthogy a vetítés szabályai értelmében a (2) által definiált halmaz vetülete

$$P := \{x \in \mathbb{R}^n : vx \leq 0,\ x(V_1) - x(V_2) = 0,\ 0 \leq x \leq 1,\ v \in \text{extr}W\},$$

nem nehéz kimutatni, hogy az (a) eset v vektorai az $x \geq 0$ feltételeket eredményezik (fölöslegesen), míg a (b) eset v vektorai az $x(S) - x(N(S)) \leq 0$ egyenlőtlenségeket produkálják minden olyan S-re, $S \subset V_1$, amelyre az $S \cup N(S)$ csúcshalmaz összefüggő részgráfot feszít. A bizonyítás mellékeredményeként tehát azt kapjuk, hogy a Kőnig–Hall-tételben elég, ha a (ii) feltétel minden összefüggő részgráfot feszítő csúcshalmazra áll. A fenti feladat páros gráfra vonatkozott. Ha most ugyanazt a feladatot általános gráfra vonatkozólag vetjük fel, ezzel már jóval keményebb fába vágjuk a fejszénket. Az eljárás nagy vonalaiban ugyanaz, vagyis a feladatot élváltozók bevezetésével magasabb dimenziójú térbe emeljük. Ezzel az ábrázolással a (2) helyett a következő egyenlőtlenség-rendszert kapjuk:

$$\begin{array}{rcll} u(\delta(i)) \quad -x_i & = & 0, & i \in V \\ u(\gamma(S)) \qquad & \leq & (|S|-1)/2, & S \in Q \\ u_{ij} \geq 0,\ (i,j) \in E, & & 0 < x_j < 1, & j \in V \end{array} \tag{3}$$

ahol $G = (V, E)$ a szóban forgó gráf, $Q := \{S \subseteq V : |S| \geq 3 \text{ és páratlan}\}$, $\delta(i) := \{(i,j) \in E : j \in V \setminus \{i\}\}$, $\gamma(S) := \{(i,j) \in E : i,j \in S\}$.

A (2)-től eltérően, a (3)-as rendszer exponenciális számú egyenlőtlenségből áll, és a rendszer koefficiensmátrixa nem teljesen unimoduláris. Ennek ellenére, Edmonds jól ismert tételéből [22] következik, hogy a (3)-as rendszer minden bázismegoldása, vagyis a megfelelő poliéder minden csúcspontja, egészértékű. Így tehát, akárcsak a páros gráf esetében, a G teljesen párosítható részgráfjait feszítő csúcshalmazok poliéderét, vagyis ezen csúcshalmazok karakterisztikus vektorainak konvex burkát – jelöljük ezt ismét P-vel

– megkaphatjuk a (3)-as rendszer megoldáshalmazának az x-et tartalmazó altérre való levetítése révén. Maga a vetítés szintén bonyolultabb, mint páros gráf esetében, ugyanis a vetítési kónusz

$$W := \{(y,z) \in \mathbb{R}^{|V|} \times \mathbb{R}^{|Q|} : -y_i + y_j + \sum(z_S : i,j \in S,\ S \in Q) \geq 0, \\ (i,j) \in E\}$$

exponenciális dimenziójú, és nem minden esetben hegyes. Ennek ellenére kimutatható, hogy a vetület minden nemtriviális (vagyis az $x_j \geq 0$ és $x_j \leq 1$ típusútól különböző) lapja $ax \leq a_0$ formájú, ahol $a = -y$, és $a_0 = \sum(z \cdot (|S| - 1)/2 : S \in Q)$, (y,z) pedig a W kónusz egy extremális iránya. Az e tétel segítségével eszközölt vetítés a következő vetületet eredményezi, ahol $k(S)$ a $G[S]$ komponenseinek száma [17]:

7. tétel.

$$\begin{aligned} P := \{x \in \mathbb{R}^n : 0 \leq x \leq 1 \\ & x(S) - x(N(S)) \leq |S| - k(S) \quad \text{minden olyan } S\text{-re}, \\ & \text{hogy } |S| = 1 \text{ vagy } \ G[S] \ \text{ páratlan csúcsszámú gráf.} \end{aligned}$$

Irányított gráf körpoliédere

Az emelés és vetítés egy másik sikeres alkalmazása irányított gráf körpoliéderének, vagyis az irányított körök karakterisztikus vektorai konvex burkának a részleges jellemzése. Ezt a feladatot ismét gyakorlati probléma sugalmazta, mégpedig acélhengerművek mindennapi tevékenységének az ütemezése. Egy hengermű izzó acéltömböket hengerel lemezzé. A napi program összeállítása abból áll, hogy kiválasztják a hengerlésre kerülő tömböket, és felállítják a hengerlési sorrendet. A tömbök sorrendje erősen befolyásolja mind a termelési processzus efficienciáját, mind a végtermék, vagyis a lemezek minőségét. Ha a program összeállítását ketté lehetne osztani tömbkiválasztási és a kiválasztott tömbök sorbarendezési feladatára, az elsőt hátizsák-feladatként, a másodikat pedig utazóügynök-feladatként lehetne kezelni. Ez azonban nem járható út, ugyanis ha a tömbkiválasztás nem veszi tekintetbe a sorbarendezés követelményeit, akkor a kiválasztott tömbök halmazának sorbarendezési feladata könnyen megoldhatatlanná válhat. A kombinált feladat paradigmája viszont az olyan utazó ügynök esete, aki nem köteles minden helységbe ellátogatni, de ahová ellátogat, ott díjat kap; ennek folytán olyan minimális összköltségű túrát kíván összeállítani, amelyben a befolyó díjösszeg elér egy kitűzött minimumot. Ezt a feladatot a díjbeszedő utazó ügynök (prize collecting traveling salesman) problémájának [7] kereszteltük, heurisztikus megoldási módszereket dolgoztunk ki rá, majd szoftvert állítottunk össze, amely gyakorlati alkalmazást nyert: az LTV Cleveland Works acélhengerműveknél 1989-től kezdődően több mint tíz évig ezzel a szoftverrel állították össze a napi termelési menetrendet [13].

Az e feladat által sugalmazott elméleti probléma abból áll, hogy adott irányított gráf körpoliéderét jellemezzük. Minthogy ez jelenlegi eszközeinkkel elérhetetlen, megközelítő jellemzésre törekszünk, vagyis a vizsgált poliéder lapjainak legfontosabb családjait igyekszünk felfedezni. Kiindulópontul az az észrevétel szolgálhat, hogy ha feladatunkat az adott gráf Hamilton-köreire korlátozzuk, a jól ismert utazó ügynök problémáját kapjuk, amely az utolsó ötven évben intenzív és fölöttébb sikeres vizsgálatok tárgyát képezte. Ennek eredményeképp, ha az utazó ügynök poliéderének, vagyis a megoldások konvex burkának a teljes jellemzésével nem is rendelkezünk, számos lapcsaládot ismerünk, amelyek összessége elég jól megközelíti a szóban forgó poliédert ahhoz, hogy sok száz változós feladatokat sikeresen tudjunk megoldani (lásd pl. [23]-at). Persze, ha a feladatot kiterjesztjük a Hamilton-körökről tetszőleges körökre, egészen más poliédert kapunk, amelyre az utazó ügynök poliéderének lapmeghatározó egyenlőtlenségei egyszerűen nem érvényesek. Felmerül azonban a kérdés, lehet-e azt a rengeteg ismeretet, amellyel az utazó ügynök poliéderéről rendelkezünk, valamilyen módon hasznosítani az irányított gráf körpoliéderének a vizsgálatában. A válasz az, hogy igenis lehet, mégpedig emelés és vetítés útján.

Jelöljük P-vel a $G = (N, A)$ irányított gráfra definiált utazóügynök-poliédert, vagyis a Dantzig, Fulkerson és Johnson [21] megfogalmazásában,

$$\begin{aligned} P := \text{conv}\{x \in \{0,1\}^A : x(i, N(i)) &= 1, & i \in N \\ x(N(j), j) &= 1, & j \in N \\ x(S, S) &\leq |S| - 1, & \forall S \subset N, \\ 2 &\leq |S| \leq n - 1 \end{aligned}$$

ahol $x(i, N(i)) := \sum(x_{ij} : j \in N), x(N(j), j) = \sum(x_{ij} : i \in N)$, és $n = |N|$.

Itt a két első feltételcsoport megoldáshalmaza egymást nem érintő körök G-t feszítő uniója, míg az utolsó egyenlőtlenség-rendszer a résztúrákat, vagyis n-nél rövidebb köröket zárja ki. Jelöljük továbbá P_K-val a G-re definiált körpoliédert, vagyis a G irányított körei karakterisztikus vektorainak konvex burkát [14]:

$$\begin{aligned} P_K := \text{conv}\{x \in \{0,1\}^A : x(i, N(i)) &< 1, & i \in N \\ x(N(i), i) - x(i, N(i)) &= 0, & i \in N \\ \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=i+1}^{n} x_{ij} &\geq 1 \\ x(k, N) + x(\ell, N) - x(S, N \setminus S) &\leq 1, \\ \forall S \subset N,\ 2 \leq |S| \leq n-2,\ k \in S,\ \ell \in N \setminus S\}. \end{aligned}$$

Itt az első három feltételcsoport megoldáshalmaza egymást nem érintő körök nem üres uniója, míg az utolsó egyenlőtlenségcsoport kizárja az egynél több kör unióját (ha ugyanis a megoldás K_1 és K_2 csúcshalmazú köröket tartalmaz, akkor megszegi az $S = K_1$, $k \in K_1$, $\ell \in K_2$ által definiált egyenlőtlenséget, minthogy $x(k, N) = 1$, $x(\ell, N) = 1$ és $x(S, N \setminus S) = 0$).

A kérdés, amelyre választ keresünk, a következő. Tegyük fel, hogy az $\alpha x \leq \alpha_0$ egyenlőtlenség P-nek egy lapját definiálja. Lehetséges-e ebből valamilyen módon egy vagy több P_K-ra érvényes lapdefiniáló egyenlőtlenséget kapni? A válasz pozitív, és a módszer ismét csak az emelés és vetítés egy változataként adódik. Ezúttal az emelés vagy bővített megfogalmazás abból áll, hogy G minden csúcsához hozzáadunk egy hurkot, vagyis az x_{ij} élváltozók halmazát y_i hurokváltozókkal egészítjük ki. A G-ből tehát $G_H := (N, A \cup H)$ lesz, ahol H a hurkok halmaza, és a magasabb dimenziós térben a P-ből P_H lesz, a kör és hurkok poliédere:

$$P_H := \text{conv}\{(x, y) \in \{0,1\}^{A \cup H} :$$

$$\begin{array}{rrrrcll}
 & x(i, N(i)) & & +y_i & = & 1, & i \in N \\
 & x(N(j), j) & & +y_j & = & 1, & j \in N \\
 & x(N, N) & & & \geq & 2 & \\
x(S, N \setminus S) & & +y_k & +y_\ell & \geq & 1, &
\end{array}$$

$$\forall S \subset N,\ 2 \leq |S| \leq n-2,\ k \in S,\ \ell \in N \setminus S\}.$$

Itt az egyenletek biztosítják azt, hogy a megoldás a G_H minden csúcsára vagy a megfelelő hurkot, vagy egy bemenő és egy kimenő élt tartalmaz; tehát a megoldás egymást nem érintő körök és hurkok uniója. Az első egyenlőtlenség biztosítja, hogy a megoldás nem csupán hurkokból áll, míg a többi egyenlőtlenség szerepe a megoldásban előforduló körök számát egyre korlátozni.

Első lépésünk tehát az lesz, hogy a P-re érvényes lapdefiniáló $\alpha x \leq \alpha_0$ egyenlőtlenségből a P_H-ra érvényes lapdefiniáló $\alpha x + \beta y \leq \alpha_0$ egyenlőtlenséget állítsunk elő. Ez egy, a poliéderes kombinatorikában jól ismert feladattípusnak, az úgynevezett lapemelésnek (facet lifting) speciális esete. Ha e speciális esettől eltekintünk, és P-t mint egy általános P_H poliédernek az x-et tartalmazó altérre való korlátozásaként fogjuk fel (vagyis P-t az $y_i = 0$ egyenletek révén kapjuk P_H-ból), akkor jól ismert módszer [31, 33, 34] áll rendelkezésünkre a β_i koefficiensek előállítására. A baj csak az, hogy ez a módszer általában minden koefficiens kiszámítására egy 0-1-es programozási feladat megoldását igényli. A bennünket érdeklő speciális esetben viszont az alábbi eredmény folytán ez a feladat aránylag könnyen megoldható [8]:

8. tétel. Legyen $\alpha x \leq \alpha_0$ P-re érvényes, lapdefiniáló egyenlőtlenség. Minden $k \in N$ indexre legyen F_k azon $\{i, j\} \subset N$ párok halmaza, amelyekre létezik olyan $x \in P$, hogy $\alpha x = \alpha_0$ és $x_{ik} = x_{kj} = 1$.

(i) Ha $\alpha x + \beta y \leq \alpha_0$ érvényes P_H-ra, akkor
$\beta_k \leq \min\{\alpha_{ik} + \alpha_{kj} - \alpha_{ij} : \{i, j\} \in F_k\}, \quad k \in H.$

(ii) Ha $\alpha x + \beta y \leq \alpha_0$ érvényes P_H-ra és
$\beta_k = \min\{\alpha_{ik} + \alpha_{kj} - \alpha_{ij} : \{i, j\} \in F_k\}, \quad k \in H,$
akkor $\alpha x + \beta y \leq \alpha_0$ P_H egy lapját definiálja.

E tétel felhasználásával sikerült a P minden ismert lapdefiniáló egyenlőtlenségére zárt képlet alapján előállítani a P_H megfelelő lapdefiniáló egyenlőtlenségét. Ez utóbbiak tehát ma már mind ismertek.

Második lépésünk abból áll, hogy egy a P_H poliéderre érvényes lapdefiniáló egyenlőtlenségből megfelelő egyenlőtlenséget nyerjünk a P_K poliéderre. Ezt viszont vetítés útján érhetjük el [14].

9. tétel. Legyen $\alpha x + \beta y \leq \alpha_0$ P_H-ra érvényes, lapdefiniáló egyenlőtlenség. Akkor

$$\sum_{i \in N} \sum_{j \in N \setminus \{i\}} (\alpha_{ij} - \beta_i) x_{ij} \leq \alpha_0 - \sum_{i \in N} \beta_i$$

P_K-ra érvényes, lapdefiniáló egyenlőtlenség.

Így tehát emelés és vetítés útján mindazon ismereteket, amelyeket az irányított gráfra definiált utazóügynök-poliéderre vonatkozólag az utolsó harminc évben szereztünk, sikerült az irányított gráf körpoliéderére átültetni.

Irodalomjegyzék

[1] E. Balas: An Additive Algorithm for Solving Linear Programs with 0-1 Variables. *Operations Research, 13,* 1965, 517–596.

[2] E. Balas: Intersection Cuts – A New Type of Cutting Planes for Integer Programming. *Operations Research, 19*, 1971, 19–39.

[3] E. Balas: Integer Programming and Convex Analysis: Intersection Cuts from Outer Polars. *Mathematical Programming, 2,* 1972, 350–382.

[4] E. Balas: Disjunctive Programming: Properties of the Convex Hull of Feasible Points. MSRR #348, Carnegie Mellon University, July 1979. Megjelent mint felkérésre írott cikk, G. Cornuéjols és W.R. Pulleyblank előszavával, *Discrete Applied Mathematics, 89,* 1998, 1–44.

[5] E. Balas: Disjunctive Programming. *Annals of Discrete Mathematics, 5,* 1979, 3–51.

[6] E. Balas: Disjunctive Programming and a Hierarchy of Relaxations for Discrete Optimization Problems. *SIAM J. on Algebraic and Discrete Methods, 6,* 1985, 466–486.

[7] E. Balas: The Prize Collecting Traveling Salesman Problem. *Networks, 19,* 1989, 621–636.

[8] E. Balas: The Prize Collecting Traveling Salesman Problem: II. Polyhedral Results. *Networks, 25,* 1995, 199–216.

[9] E. Balas: *A szabadság vonzásában.* Vince Kiadó, Budapest, 2002.

[10] E. Balas, S. Ceria, G. Cornuéjols: A Lift-and-Project Cutting Plane Algorithm for Mixed 0-1 Programs. *Mathematical Programming, 58,* 1993, 295–324.

[11] E. Balas, S. Ceria, G. Cornuéjols: Mixed 0-1 Programming by Lift-and-Project in a Branch-and-Cut Framework. *Management Science, 42,* 1996, 1229–1246.

[12] E. Balas, R. J. Jeroslow: Strengthening Cuts for Mixed Integer Programs. *European J. of Operational Research, 4,* 1980, 224–234.

[13] E. Balas, C. H. Martin: Combinatorial Optimization in Steel Rolling. *Proceedings of the DIMACS/RUTCOR Workshop on Combinatorial Optimization in Science and Technology (COST)*, Rutgers University, April 1991.

[14] E. Balas and M. Oosten: On the Cycle Polytope of a Directed Graph. *Networks, 36,* 2000, 34–46.

[15] E. Balas and M. Perregaard: A Precise Correspondence Between Lift-and-Project Cuts, Simple Disjunctive Cuts, and Mixed Integer Gomory Cuts for 0-1 Programming. *Mathematical Programming B, 94,* 2003, 221–245.

[16] E. Balas and W. R. Pulleyblank: The Perfectly Matchable Subgraph Polytope of a Bipartite Graph. *Networks, 13,* 1983, 495–518.

[17] E. Balas, W. R. Pulleyblank: The Perfectly Matchable Subgraph Polytope of an Arbitrary Graph. *Combinatorica, 7,* 1989, 321–337.

[18] R. E. Bixby, M. Fenelon, Z. Gu, E. Rothberg and R. Wunderling: Mixed-Integer Programming: A Progress Report. In: M. Grötschel (ed.): *The Sharpest Cut.* SIAM/MPS, 2004, 309–326.

[19] C. E. Blair: Two Rules for Deducing Valid Inequalities for 0-1 Programs. *SIAM J. of Applied Math., 31,* 1976, 614–617.

[20] S. Ceria and G. Pataki: Solving Integer and Disjunctive Programs by Lift-and-Project. In R. E. Bixby et al. (eds.): *IPCO VI, Lecture Notes in Computer Science #1412*, Springer, 1998, 271–283.

[21] G. B. Dantzig, D. R. Fulkerson and S. M. Johnson: Solution of a Large-Scale Traveling Salesman Problem. *Operations Research, 2,* 1954, 393–410.

[22] J. Edmonds: Maximum Matching and a Polyhedron with 0-1 Vertices. *J. Res. Nat. Bur. Standards Sect. B, 69B,* 1965, 125–130.

[23] M. Fischetti, A. Lodi and P. Toth: Exact Methods for the Asymmetric Traveling Salesman Problem. In: G. Gutin, A. Punnen (eds.): *The Traveling Salesman Problem and Its Variations,* Kluwer, 2002, 169–206.

[24] R. E. Gomory: Outline of an Algorithm for Integer Solutions to Linear Programs. *Bulletin of the AMS, 64,* 1958, 275–278.

[25] R. E. Gomory: An Algorithm for the Mixed Integer Problem. *Technical Report RM-2597*, the RAND Corporation, 1960.

[26] P. Hall: On Representatives of Subsets. *Journal of the London Mathematical Society, 10,* 1935, 26–30.

[27] P. L. Hammer, E. Johnson and B. Korte (eds): *Discrete Optimization I-II. Annals of Discrete Mathematics, 4-5*, 1979.

[28] R. E. Jeroslow: Representability in Mixed Integer Programming I: Characterization Results. *Discrete Applied Mathematics, 17,* 1987, 223–243.

[29] A. H. Land and A. G. Doig: An Automatic Method for Solving Discrete Programming Problems. *Econometrica, 28,* 1960, 497–500.

[30] L. Lovász and A. Schrijver: Cones of Matrices and Set Functions and 0-1 Optimization. *SIAM Journal of Optimization, 1,* 1991, 166–190.

[31] M. W. Padberg: On the Facial Structure of Set Packing Polyhedra. *Mathematical Programming, 5,* 1973, 199–215.

[32] M. Perregaard: A Practical Implementation of Lift-and-Project Cuts. *Paper presented at the 18th International Symposium on Mathematical Programming*, Copenhagen, August 2003.

[33] L. Wolsey: Facets of Strong Valid Inequalities for Integer Programs. *Operations Research, 24,* 1976, 367–372.

[34] E. Zemel: Lifting the Facets of 0-1 Polytopes. *Mathematical Programming, 15,* 1978, 268–277.

Érdy János

Podhradczky József

Wenzel Gusztáv

Fábián Gábor

Nagy János

Arany János

Pólya József

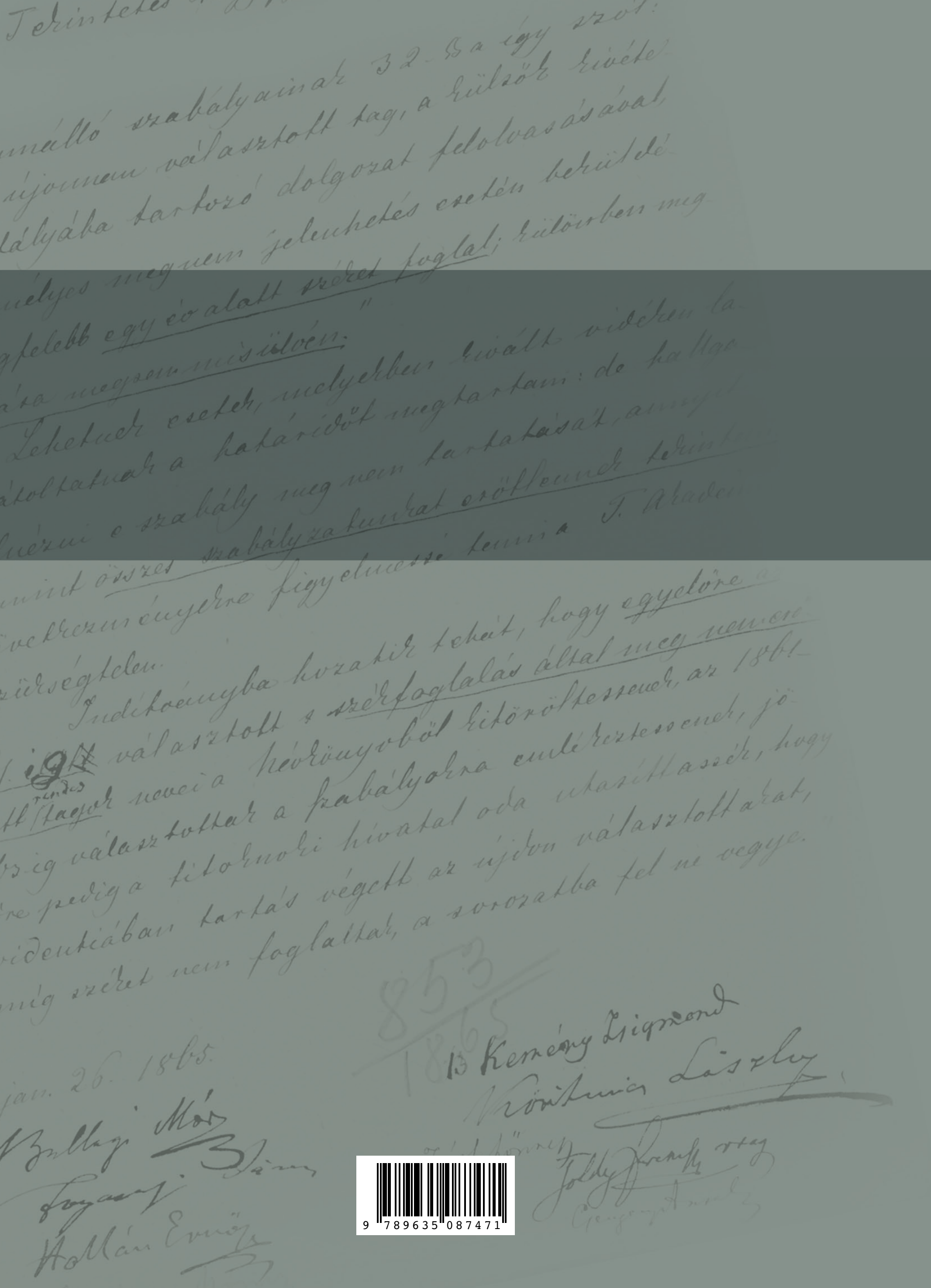
Tekintetes Nagygyülés!

…démia fennálló szabályainak 32-dika egy szót:

„Minden újonnan választott tag, a külsők kivéte-
lével, osztályába tartozó dolgozat felolvasásával,
vagy személyes megnem jelenhetés esetén beküldé-
sével, legfelebb egy év alatt székét foglal; különben meg-
választása megsemmisülőnek."

Lehetnek esetek, melyekben kivált vidéken la-
kók gátoltatnak a határidőt megtartani: de hallga-
tag elnézni e szabály meg nem tartatását, annyit
tesz, mint összes szabályzatunkat erőtlennek tekinteni.
A következményekre figyelmessé tenni a T. Akadém-
iát szükségtelen.

Inditványba hozatik tehát, hogy egyelőre az…
…választott s székfoglalás által meg nem…
…ből kitöröltessenek, az 18…
…tessenek, j…



9 789635 087471