**Gyenes Gábor**

# PÓLYA GYÖRGY

DOI: https://doi.org/10.32558/abszolut.2021.35

*Pólya György (1887–1985)*

A történet hőse egy olyan volt berzsenyis diák, aki világhírű matematikus lett, bár a középiskola után nem annak készült.

Foglalkozott a matematika különböző területeivel: kombinatorikával, valószínűségszámítással, valós és komplex függvényekkel, analízissel, geometriával, számelmélettel, az algebrai egyenletek elméletével, matematikai fizikával. Ő alkotta meg a modern matematikai heurisztikát. Heurisztikus módszerét ma már nemcsak a matematikában és a természettudományokban, hanem minden kutatási eljárásnál alkalmazzák.

A heurisztika a görög heureszisz (rátalálás) szóból származik. (Állítólag Arkhimédész is heurékát kiáltott, mikor meztelenül rohant végig a városon.) Az új igazságok módszeres fölfedezésének művészete, az a folyamat, amelynek során nem szigorúan szabatos logikai következtetéssel jutunk el a probléma indulásától a következtetésig, ám az eredmény helyes lesz. Másképpen: az egyértelmű eljárások helyett próbálkozásokkal, korábban megszerzett tapasztalatok felhasználásával működő feladatmegoldási módszer.[1]

Pólya személyében a matematikai tehetség és a tanítás képessége ötvöződött egybe. Igazi tanáregyéniség volt, nem a rettegettek, hanem a

[1] https://hu.wikipedia.org/wiki/Heurisztika

szeretettek közül. Türelme, meleg hangvétele, bánásmódja, pedagógiai érzéke, finom iróniája, tantárgyának szeretete és mindenoldalú ismerete, sőt saját bevallása szerint még színészi hajlama is minden rendű és korú hallgatója számára emlékezetessé tették előadásait. Számos továbbképző előadást és bemutató órát tartott középiskolai tanároknak, főleg Amerikában, de magyarországi látogatásai alatt szülőhazájában is.

Munkássága során Pólya 250 tudományos cikket és tíz könyvet írt egyedül, illetve társszerzőként. Összegyűjtött műveit 4 kötetben adták ki Cambridge-ben 1974 és 1984 között.

Matematikai eredményeire rendszeresen hivatkoznak. Tanítással foglalkozó könyveit sok helyen „bibliának" tekintik. A XX. század matematikájáról nem lehet nevének említése nélkül beszélni.

Pólya élete folyamán többször is nyelvet cserélt. Eredetiben olvasta és szerette a magyar, német, latin, görög, francia, olasz és angol irodalmat. Négy nyelven adott elő folyékonyan, köztük természetesen anyanyelvén is.

Kezdjük az elején.

Zsidó családba született. Édesapja jogot végzett, egy nagy nemzetközi biztosítótársaság munkatársaként nemzetgazdasági kérdésekkel foglalkozhatott. Ami igazán érdekelte, az a közgazdaságtan és a statisztika. Minden vágya egy egyetemi kinevezés megszerzése volt. A kiegyezés utáni Magyarországon úgy érezte, hogy ehhez neve túl zsidós. Ezért a Pollákot Pólyára magyarosította, és a család a zsidó vallásról a római katolikusra tért át még György születése előtt. György apjának fontos tanulmányai jelentek meg.1891-ben a budapesti egyetem magántanára lett, sőt a Magyar Tudományos Akadémia levelező tagjai közé választotta.

Pólya György 1887-ben született. Édesapja 1897-ben meghalt, édesanyja hat gyerekével egyedül maradt. Az apa tudományos karrierje ellenére addig sem éltek túl fényesen, de ezután anyagi helyzetük igen nehéz lett. Ennek tudható be, hogy legidősebb bátyja, aki matematikus szeretett volna lenni, a jobban fizető orvosi pályát választotta. Világhírű sebész lett, később ő fedezte György tanulmányait. (A zsidótörvények után családját külföldre menekítette, ő itthon maradt, de a nyilasok megtalálták, és a Dunába lőtték.) Hogy a család anyagi helyzetén segítsen, két idősebb nővére nem tanult tovább, apjuk halála után a biztosítótársaságnál helyezkedtek el. (Érdekes, hogy egyikük mindkét fia szintén matematikus lett később.) Pólya György a legfiatalabb gyermek volt a családban. Állítólag a család legtehetségesebb tagja másik bátyja volt, aki fiatalon elesett az első világháborúban.

Pólya György az elemi iskolát szorgalmas és jó magaviseletű diákként végezte. Ezután iratkozott be a Berzsenyi Gimnázium egyik elődjébe, az 1858-ban első állami gimnáziumként alapított Pesti Császári és Királyi Katolikus Főgimnáziumba.

Ebben az iskolában ekkor a magyar mellett latinul, ógörögül, németül tanult, de kedvenc tantárgya az irodalom és a biológia volt. Azt olvastam, hogy ezekből a tárgyakból kiemelkedő minősítést (mai szóhasználattal dicséretes jelest) kapott, de ugyanígy földrajzból és más tárgyakból is. A matematikában nem jeleskedett, sőt geometriából csak elégségest érdemelt. Ennek okáról később azt írta, hogy a matektanítás a suliban rossz volt, nevezetesen három tanára közül kettő megvetésre méltó, vacak tanár volt („despicable teachers"). Árnyaltabban és részletesebben megírja mindezt *A problémamegoldás iskolája* című könyve magyar kiadásának előszavában:

„Jóval több mint fél évszázad előtt jártam én a Markó utcai Főgimnáziumba. Nyolc évig volt matematikánk, de ez az úgynevezett matematika (eltekintve néhány órától, melyekért én még ma is hálás vagyok Wagner Alajos főigazgató úrnak[2]) igen kevés örömet okozott nekem. Hiszen nehéz nem volt, elég jó osztályzatot kaptam belőle általában úgyszólván tanulás nélkül, de unalmas volt, szürke, érdektelen. Pedig – és ezt nem szemrehányásként mondom, csak melankolikusan – érdekes, színes, mulatságos lehetett volna a matematika a gimnáziumban, és felkelthette volna fiatal ambícióinkat.

Igenis a matematikaóra lehet érdekes és hasznos, és még több is: amint azt Descartes oly szépen mondta, „hozzászoktatja szemünket, hogy lássa az igazságot tisztán és világosan".

Kitüntetéssel érettségizett, magyar kivételével mindenből jelesre. (Nem tudom, mi történt vele a magyar írásbelin, de az a jegye elégséges volt, a jeles szóbelivel javította a végső jegyet négyesre.) A nem érettségi tantárgyakból is jeles van beírva, kivéve a rajz elégségest. Az érettségi tárgyak egyébként: magyar, latin, görög, német, történelem, mennyiségtan (ez ma matematika), természettan (fizika).

Döbbenten vettem észre, hogy ennek a 1905-ös A osztálynak az érettségi lapjain 65 tanuló szerepel. Sok. Ráadásul lányok is voltak közöttük, még egy igazi grófnő is. Jobban megnézve láttam, hogy az osztály maga 43 fős volt, és a lányok persze nem velük jártak, hanem egyéb helyekre, és legtöbbjüket külön készítették fel az érettségire szervezett formában.

Hogy is volt ez?

[2] Dr. Wagner Alajos neves matematika-fizika tanár, tankönyvíró, az iskola igazgatója volt 1897 és 1910 között.

Trefort Ágoston idejében épült ki a nyolcosztályos gimnázium és a nyolcosztályos reáliskola rendszere, ekkor vált egységessé a tanítási órák száma. Az 1879. évi gimnáziumi tanterv és az 1883. évi XXX. számú középiskolai törvény által elismert kétféle iskola elméletileg egyenrangú, de volt köztük egy döntő különbség: míg a gimnáziumi érettségivel bármilyen felsőoktatási intézményben lehetővé váltak a tanulmányok, addig a reáliskolai érettségivel csak a Műegyetemen, a természettudományi karokon és a gazdasági akadémiákon lehetett továbbtanulni. Reáliskolában nem volt latin és ógörög, de két modern idegen nyelvből itt is érettségit kellett tenni.

A gimnázium elvégzése után 1905-ben, valószínűleg édesanyja kívánságára a jogi egyetemre iratkozott be, amit az első szemeszter után otthagyott, és átiratkozott magyar-latin szakra, ahol két év után gimnáziumi tanári diplomát kapott, amit sosem használt. Kedvenc tanára az egyetemen Alexander Bernát (1876–1904-ig a Főreál tanára, 1904-től 1919-ig a budapesti tudományegyetem első filozófiatörténet professzora. A Magyar Tudományos Akadémia levelező (1892), majd 1915-ben rendes tagja). Hatására a filozófia érdekelte, de tanára azt javasolta, hogy mielőtt ebben elmélyedne, tanuljon matematikát és fizikát.

Később Pólya viccesen így kommentálta választását:

„*Nem vagyok elég jó fizikusnak, túl jó vagyok a filozófiához, a matematika a kettő között van*."

Fizikából Eötvös Loránd, matematikából a „mágikus tanár", Fejér Lipót tanította, akinek hatására lett matematikus.

Pólya egy évet gyakorló tanárként a Berzsenyi másik elődgimnáziumában, az V. kerületi Főreálban töltött a híres Fröhlich Károly mellett, akinek neve az iskola honlapján a kiemelkedően jó tanárok között szerepel. Matematika és fizika tanár volt, országosan ismert, cikkeket, tankönyvet írt. Igen ám, de az irodalomban jártasak e nevet máshonnan ismerhetik. Nézzük mit ír róla Karinthy a „*Tanár úr kérem*" -ben:

„*Első óra mennyiségtan. Az irracionális egyenleteknél tartunk, de a múlt órán még nem fejeztük be. Felelés eshetősége 25–27 százalék. Ebben a kis százalékban szerepet játszik az a körülmény, hogy sokan még nem javítottak, s hogy Frőhlich megbízhatatlan jellemű, ingatag és gyenge akaratú ember, aki a múlt órán talán még maga is azt hitte, hogy jövőre tovább magyaráz, és most egyszerre, szinte öntudatlanul, feleltetni kezd. Az emberi lélek mélyén vannak ilyen kóros tünetek, amikkel számolni kell*."

Megtaláltam Karinthyék érettségi anyakönyvét. Steinmann érettségije persze sokkal jobb mennyiségtanból és természettanból Karinthyénál – jó, azaz négyes az elégséges helyett –, de nem jeles. Az érettségizők között volt Eglmayer is, mindenből elégséges. Tehát a könyvbéli nevek egy része valós személyt takar.

De folytassuk Pólyával.

Azt nyilatkozta valahol, hogy matematikussá válásában Fejér Lipót és a *Középiskolai Matematikai Lapok (KöMaL)* játszottak meghatározó szerepet. Ezért utánajártam, hogy szerepel-e a neve valahol a régi matlapokban, megoldóként. Nem találtam, de elképzelhető, hogy valamilyen szakkörön foglalkoztak a példákkal. Országos matekversenyeken is indult, de nem volt eredményes.

Mindez csak azért érdekes, mert megszokhattuk, hogy a matematikusok zsenialitása már gyermekkorban, de legkésőbb a gimnáziumban megmutatkozott (Neumann, Teller, Wigner, Kármán). Ráadásul kiemelkedő eredményeket értek el a tudományban már egész fiatalon. Ez alól Pólya kivétel.

Pólya 1910/11-ben Bécsben matematikát hallgat, de továbbra is élénken érdeklik a fizika témájú előadások is (relativitáselmélet, optika stb.).

Már egyetemi hallgatóként is publikált külföldi tudományos folyóiratokban, és közvetlenül az egyetemi tanulmányainak befejezése után, 1912-ben benyújtotta A valószínűség-számítás néhány kérdéséről és bizonyos velük összefüggő határozott integrálokról című doktori disszertációját.

Az egyetem után Göttingenbe kerül. Ebben az időben ez a matematika egyik fővárosa. Itt kerül kapcsolatba sok világhírű matematikussal, fizikussal (Klein, Hilbert, Landau). Maradt volna, de egy szerencsétlen incidens közbejött.

1913 karácsonyán a vonaton utazott, amikor összeszólalkozott egy vele szemben ülő utassal, aki megjegyzést tett arra, amikor Pólya kosara a csomagtartóból leesett. Ha jól értem, amit erről az esetről ír, az történhetett, hogy a feldühödött Pólya verekedést akart kezdeményezni, s mivel az illető erre nem reagált, fültövön ütötte. Később kiderült, hogy az illető egy befolyásos göttingeni úr fia, és Pólyát eltanácsolták az egyetemről.

Rövid párizsi kitérő után (itt is több neves matematikussal találkozott) meghívást kapott Zürichbe (1914), az általa csodált Hurvitztól, akivel annak haláláig, 1919-ig együtt dolgozott, és aki Pólya szerint a legnagyobb hatással volt rá.

1914 az első világháború kitörésének éve. Pólyát egy korábbi futballsérülése miatt alkalmatlannak nyilvánították. Később azonban minden hadrafogható katonára szüksége volt már a Monarchiának, és újabb orvosi felülvizsgálatra hazarendelték. Pólya biztos volt abban, hogy nem úszhatja meg a frontszolgálatot, ezért háborúellenessége megtagadta a jelentkezést. Ezzel elvágta a későbbi hazajövetel lehetőségét, mert tettéért itthon a háború után is börtön járt volna. Felvette a svájci állampolgárságot, Magyarországra csak több mint 50 évvel később, 1967-ben jött. Annak ellenére, hogy mindvégig szoros kapcsolatban volt a magyar matematikusokkal, barátaival, az első látogatásra nehezen szánta el magát. Itt maradt rokonságának nagy része elpusztult a háború alatt, és félt a rátörő emlékektől. (Az 1939-es második zsidó-törvény szerint zsidónak számított az a keresztény állampolgár is, akinek legalább egyik szülője, vagy két nagyszülője izraelita volt.) Az első látogatást azután már továbbiak követték.

1918-ban megnősül, feleségével élete végéig együtt él, gyermekük nem születik.

1920-tól már címzetes egyetemi tanár Zürichben. (A tényleges professzori minősítést majd 1928-ban kapja meg.) Itt tanítja Neumann Jánost is, aki 1925-ben szerez vegyészi diplomát. Az idősebbek emlékezhetnek rá, hogy ő volt az egyetlen diákja, akitől félt, mert egy szemináriumon ismertetett egy addig még nem bizonyított tételt, és Neumann 5 perc után jelentkezett a bizonyítással.

1925-ben Szegő Gáborral közös könyvet publikál Feladatok és tételek az analízis köréből címmel. A könyv újdonsága volt, hogy a feladatokat nem tárgyuk szerint, hanem a megoldás módszere szerint csoportosította. (Szegő Gáborral, akit még a pesti egyetemről ismert, szinte élete végéig együtt dolgozott ezután.) A könyv nagy nemzetközi elismerést hozott mindkettőjüknek.

1933-ban Rockefeller-ösztöndíjjal Amerikában dolgozott, de visszatért Svájcba.

Kitört a II. világháború. Ő zsidóként még a semleges Svájcban sem érezte biztonságban magát, és Szegő meghívására véglegesen Amerikába költözött. Itt fejezte be a *Gondolkodás iskolája* című művét, melyet németül írt eredetileg, de megjelentetését több német kiadó visszautasította. Végül világsiker lett, 17 nyelvre fordították le, több mint egymillió példányban kelt el. A könyvre még visszatérek, de fejezzük be előbb az életrajzot.

Amerikában 1942-től 1953-as nyugdíjazásáig a Stanford egyetem professzora volt.

A nyugdíj nem jelentett visszavonulást. Előadásait még 90 évesen is megtartotta. Figyelme egyre inkább a matematika tanítása felé fordult. Kiváló tanár, jó előadó volt. Még 1981-ben is publikált. 1985-ben halt meg 98 éves korában. Barátját és alkotótársát, Szegő Gábort 1 hónappal élte túl, és még megérte, hogy összegyűjtött írásait 4 kötetben meg jelentették.

## 1. A heurisztika

A matematikában heurisztikusnak az olyan gondolatmenetet nevezik, amely még nem bizonyított állítások mellett érvel, tapasztalati tényekből megfogalmazott tulajdonságok segítségével.

Ha heurisztika útján sikerül egy problémát megoldani, akkor a bizonyítás már szigorú logikai úton is elvégezhető, az eredeti heurisztikus módszerek feleslegessé válnak.

Matematikában az eljárást Pólya könyveiben találjuk, amely szerint a tanító az ő kérdései, valamint a tanulóknak e kérdésekre adott feleletei segítésével törekszik tanítványai tudatában általános ítéleteket, igazságokat, szabályokat, törvényeket elültetni. A heurisztika a párbeszédes tanítás egyik fajtája, s így ellentéte annak, hogy a tanító maga beszél, magyaráz, közöl s adja készen a tudásanyagot.

A gondolkodás iskolája könyvborítóján ez található:

1. Értsd meg a feladatot.
2. Keress összefüggést az adatok és az ismeretlen között. Ha nem találsz közvetlen összefüggést, nézz segédfeladat után. Végül készítsd el a megoldás tervét.
3. Hajtsd végre a tervedet.
4. Vizsgáld meg a megoldást.

A könyv alapján e lépések kiegészíthetők még néhány gondolattal:

5. Ha nem tudod a megoldást, keress hasonlót, rokont, vagy bontsd részletekre, amelyet meg tudsz oldani.
6. Ha a kiinduló adatokból kezdve nem jutsz előbbre, kísérelj meg feltételezni megoldást, részmegoldást és ellenőrizd helyességét vagy helytelenségét. Ha helytelen, válassz másikat!
7. Mindig vizsgáljuk meg, ha eredményre jutunk, hogy létezik-e további megoldás is!
8. A probléma és a megoldása is csak bizonyos esetekben érvényes, létező, tehát mindig meg kell határoznunk az eredmény létezésének körülményeit, feltételeit.

Pólya a matematikai heurisztika megalkotója, a gondolkodás módszereinek Descartes után ismételt középpontba helyezője. Idézem néhány gondolatát:

„*A heurisztika, egy jelző, a felfedezés kiszolgálását jelenti. A heurisztikus okoskodás nem mint végső, visszavonhatatlan jelenik meg, hanem csak, mint időleges, átmeneti gondolat, amelynek célja, hogy elősegítse az adott probléma megoldását.*" – írja Pólya „*A gondolkodás iskolája*" című művében. „*Gyakran vagyunk kénytelenek heurisztikusan okoskodni. El fogjuk érni a teljes bizonyosságot, amint eljutunk a teljes megoldáshoz, de addig meg kell elégednünk többé-kevésbé plauzibilis – nyilvánvaló - gondolatokkal. Erre éppúgy szükségünk van, mint egy építkezésnél az állványozásra.*" – folytatja.

*„A heurisztikus okoskodás a maga helyén nagyon jó! Ami rossz lehet, az a szigorú bizonyítással való összekeverése és ami még ennél is rosszabb, a heurisztikus okoskodás feladása a szigorú bizonyítás kedvéért.*"

Nyilvánvaló, hogy általános recept nincsen, továbbá az is nyilvánvaló, hogy minél több tudással rendelkezünk az adott probléma körében, annál könnyebb dolgunk lehet. Ahogy Pólya fogalmaz: „*A problémamegoldás csakúgy gyakorlat kérdése, mint az úszás. Megtanulni is csak utánzás és gyakorlás útján lehet. Nincs bűvös kulcs. Aki úszni akar tanulni, annak vízbe kell ugrania, aki problémát megoldani akar tanulni, annak problémák megoldását kell gyakorolnia.*"

Pólya gondolkodási módszerét feladatokon, illetve azok megoldásán keresztül mutatja be erről szóló könyveiben.

Vegyünk tőle egy példát, *A problémamegoldás iskolája* című könyve második fejezetének bevezető feladatát.

A fejezet címe: „A Descartes-féle megoldástípus". Descartes a problémamegoldás egyetemes módszerét akarta bemutatni. Eljárását Pólya így foglalja össze:

1. Minden problémát vezessünk vissza matematikai problémára.
2. Minden matematikai problémát vezessünk vissza algebrára.
3. Minden algebrai problémát vezessünk vissza egyetlen egyenlet megoldására.

Descartes elgondolása nem válik be mindig, de ha valaki egy szöveges feladatot egyenlet felállításával old meg, az ő eljárását követi, írja. Ezután jön a kicsi kis probléma:

Egy gazda házinyulakat meg tyúkokat tartott. Ezeknek az állatoknak volt összesen 50 feje és 140 lába. Hány tyúkja és hány nyula volt a gazdának?

Megmutatom milyen megoldásokat ír Pólya.

## 1. Próbálgatás

| Tyúk (db) | Nyúl (db) | Láb (db) |
|---|---|---|
| 50 | 0 | 100 |
| 0 | 50 | 200 |
| 25 | 25 | 150 |
| 30 | 20 | 140 |

### 2. Jó ötlet

A tyúkok álljanak féllábra, a nyulak hátsó lábukra. Így lesz 70 lába az ötven állatnak. A tyúkok fejenként egyszer jönnek számításba, a nyulak kétszer.

70 – 50 = 20 Ennyi nyúl van.

### 3. Algebra

$x + y = 50$;    $2x + 4y = 140$;

egyszerűsítve: $x + 2y = 70$; egyenleteket egymásból kivonva $y = 20$

### 4. Általánosítás

$x + y = F$;    $2x + 4y = L$;    megoldás $y = L/2 - F$

### 5. A megoldások összehasonlítása

Az első fokozatos próbálgatás (szukcesszív approximáció). Bíztatja a tanárokat, éljenek a próbálgatás módszerével. De egyszerű feladatok esetén is az algebra gyorsabban és biztonságosabban vezet célhoz.

## 2. A Pólya-féle urnamodell

Az írógép feltalálását követően elfogadottá vált billentyűkiosztást számos bírálat érte. Sokkal jobb és gyorsabb, könnyebb írást lehetővé tevő verziókat szabadalmaztattak. Ennek ellenére a billentyűzet maradt. 1985-ben a Stanford Egyetem két közgazdászprofesszora úgy magyarázta az eredeti billentyűkiosztás sikerét, hogy ha a piac egy döntő pillanatban rákap egy technológiára, az ez által meghatározott útról már akkor is nehéz letérni, ha később megjelenik egy jobb verzió. Különösen, ha az átállás (jelen esetben a gépírók átképzése) rövid távon túl nagynak tűnő ráfordítással jár. Vagyis a rosszabb technológia „foglyul ejti" a piacot. Az „útfüggőség" és a „foglyul ejtés" elméletét ezután egy sor olyan technológiai jelenségre alkalmazták, amely hasonló méltatlan diadalt aratott: például a robbanómotor a gőzmotor felett, az IBM PC-je a Macintosh felett, a VHS videorendszer a Betamax felett vagy a Windows operációs rendszer a Linux felett. De az elmélet megtermékenyített számos technika- és társadalomtörténészt is, akik rámutattak például arra, hogy egy-egy véletlenszerű apró mozzanat határozta meg örök időkre az óramutatók járásának irányát, a vasúti nyomtávot, egy-egy település főutcájának nyomvonalát (és ezzel alapszerkezetét is) vagy városnegyedek jellegét. Az ilyen, szélesebb értelemben vett útfüggőség matematikai modelljét Pólya György készítette el.

Vegyük kicsit tudományosabbra a dolgot. A Wikipédia így írja le a fogalmat:

Az útfüggőség a pozitív visszacsatolású összetett dinamikus rendszerek egyik jellegzetes viselkedési formája, mely arra a megfigyelhető jelenségre utal, hogy az ilyen rendszerek működésének korai szakaszában fellépő apró, lényegében jelentéktelen és véletlenszerű események alapvetően határozzák meg a rendszer végső állapotát még akkor is, ha kezdetben az összes lehetséges végső állapot valószínűsége egyenlő.

Némi magyarázat az érthetőség kedvéért:

Visszacsatolásról akkor beszélünk, ha egy folyamat visszahat önmagára. Pozitív visszacsatoláskor a folyamat erősödik. Mutatok egy egyszerű példát, hogy megértsék, mit nevezünk pozitív visszacsatolásnak: A fehér jég és hó sok napfényt tükröz vissza a világűrbe, ezzel segít megvédeni bolygónkat a túlmelegedéstől. Ha kevesebb a jég, a Föld több energiát nyel el és még melegebbé válik. Tehát a felmelegedés olyan változást indít el, amely egyre nagyobb felmelegedéshez vezet.

Visszatérve, az útfüggőség tehát olyan jelenség, mely a rendszerek fejlődését írja le. Lényege, hogy a pozitív visszacsatolású rendszerekben az alapvetően véletlenszerű események nem véletlenszerű fejlődést hoznak létre, hanem egyre meghatározottabb úton („kerékvágásban") haladnak. Statisztikailag megállapítható, hogy az ilyen rendszerek az első 500 esemény (választás, döntés) után a végső állapot 90%-át elérik. (Egy társadalmi forradalom során például ez a szint már a második héten elérhető!)

Pólya György egyszerű matematikai modellje a következő:

Vegyünk egy tálat (matematikusok ezt hagyományból urnának hívják), helyezzünk el benne két különböző színű golyót. Véletlenszerűen vegyünk ki egyet, majd tegyük vissza, és egy újabb golyót dobjunk mellé, oly módon, hogy az a tálból kiválasztott golyó színével legyen megegyező. A folyamatot tetszés szerinti ideig folytathatjuk. Az, hogy ugyanolyan színű golyóval növeljük minden esetben a tál tartalmát, a rendszer pozitív visszacsatolását jelenti. Tegyük fel, hogy egy fekete és egy fehér golyóval a tálban kezdünk. Csukott szemmel kiveszünk egy golyót, és a színének megfelelően kettőt helyezünk vissza. Ha fekete golyót vettünk ki, akkor két feketét teszünk vissza. Most két fekete és egy fehér van a tálban. Ezt a módszert követve a tálban lévő golyók színösszetétele idővel egy adott értékhez konvergál – meglehetősen gyorsan.

Összefoglalva, látható, hogy egyenlőségből indultunk ki, és ez már az első lépés után jelentősen felborul, azaz az esély az egyik golyó javára billen. A tálban (urnában) lévő golyók színösszetétele nagyon gyorsan konvergál az egyik szín javára, de merő véletlen, hogy melyik lesz az.

Ilyen folyamatokkal írható le a pozitív visszacsatolású rendszerekben minden változás, legyen az javulás, rosszabbodás stb. Átmeneti javulás lehetséges, hiszen húzhatunk a kevesebb számú golyókból is, de a nagyobb számúak előfordulási valószínűsége, amint láttuk, drasztikusan nő.

Ez a modell jól alkalmazható vezetéselméleti területen, szervezeti, piaci kérdésekben, tőzsdei manőverekhez, stratégiai pontok felismerésére, a stabilitás és a rugalmasság váltására stb. Közismert példája a folyamatnak a „sztárcsinálás", amikor az egyenlők közül hirtelen emelkedik ki a sztár, de hasonlóak a nagy karrierek, a váratlan csődök vagy a gazdasági csodák is. Már a bevezetőben is mutattam más példákat a Pólya-folyamatra. Mindazok az esetek ilyenek, amikor hatalmas méretű megegyezések keletkeznek, szabványok születnek, tulajdonképpen „logikus magyarázat" nélkül.

## 3. A bolyongás problémája

Egy másik Pólya nevéhez köthető, és egymás utáni véletlen események sorozatával foglalkozó probléma a bolyongás kérdése. (Angol elnevezése is tőle származik: random walk).

A legegyszerűbb egydimenziós esetben induljunk a számegyenes 0 pontjáról. Azonos valószínűséggel lépkedjünk egységnyit jobbra vagy balra. Pólya bebizonyította, hogy végtelen sok lépést feltételezve egyszer biztosan visszatérünk az origóba. Két dimenzió esetén, amikor az is véletlen, hogy melyik irányba lépünk, ugyanez a helyzet. Három vagy több dimenzió esetén a visszatérés valószínűségé már nem 1. Népszerűen ez úgy mondható el, hogy a részeg ember, ha össze-vissza megy is, előbb-utóbb megtalálja a házát, de egy részeg madár nem biztos, hogy visszatalál a fészkébe.

Nehogy azt gondolja bárki, aki még nem hallott a dologról, hogy a bolyongásnál az egyetlen kérdés a kezdőpontba való visszatalálás. Rendkívül nagy a témával foglalkozó tanulmányok vagy akár matematikai feladatok száma. Kezdve a véges számú lépésekkel, annak vizsgálatával, hogy milyen távolságra jutunk átlagosan n lépés alatt. Hányszor térünk vissza? Milyen valószínűséggel jutunk n lépés alatt egy adott pontra? Mi történik magasabb dimenziók esetén? Mi van, ha korlátos tartományban lépkedhetünk, visszapattanva a határról? Mi van több bolyongó esetén, milyen valószínűséggel találkoznak újra (például a kezdőponton)?

A második világháború idején arra használták a szimmetrikus bolyongásokban elért eredményeket, hogy a hadifoglyok szökésénél kiszámítsák (lévén, hogy idegen helyen tartották őket fogva, így mozgásukban meghatározottságot nem feltételezhetünk), hogy adott idő alatt milyen messzire juthattak.

Populációgenetikában véletlen bolyongással modellezik a genetikus sodródás jelenségét, vagyis azon evolúciós folyamatokat, melyek során egy adott populáció allélgyakoriságának (allél: a kromoszóma adott helyén elhelyezkedő gén variációja) változását csupán véletlenszerű események határozzák meg.

Pszichológiában a véletlen bolyongás pontosan jellemzi a kapcsolatot a döntés meghozásához szükséges idő és egy bizonyos döntés meghozásának valószínűsége között.

Fizikában a szimmetrikus bolyongások mint a Brown-mozgás egyszerű modelljei és mint gáz- és folyadékrészecskék véletlenszerű mozgásának szimulációi használatosak. A véletlen bolyongások a kvantumtérelmélet területén is fontos szerepet játszanak.

Matematikai biológiában a szimmetrikus bolyongásokat arra használják, hogy az egyedi állati mozgásokat leírják.

Az előadás elkészítése során bukkantam egy olyan cikkre az online Pénzügyi Szemlében, amelyet az MNB igazgatója írt, aki vitába száll azokkal a közgazdászokkal, akik egyes jegybanki előrejelzésekhez használt változók statisztikai tulajdonságait elemzik. A szerzők azt találták, hogy a vizsgált idősorok ún. véletlen bolyongást követnek, és ebből arra következtettek, hogy ezek a változók nem jelezhetők előre, így a prognózisokba történő beépítésükkel gyakran helytelen előrejelzéseket készített a jegybank. Az igazgató a vita során nem használ matematikai érveket. (Pontosabban szemléletes példájának kevés köze van a matematikához, ugyanis azt feltételezi, hogy részegünk, aki a kocsmában iszik, hosszabb idő elteltével is ott lesz megtalálható.)

## 4. Csempézés

A dologhoz tudni kell, hogy Pólya 1924-ben a síkban lévő kristályszimmetriákról írt cikket, ami szorosan kapcsolódik az úgynevezett csempézés problémájához. (Hozzá szeretném tenni, hogy a szakirodalomban a csempézés mellett a parkettázás, angolban a tapétázás kifejezést is használják.)

Mit is értünk csempézésen?

A végtelen sík hézag és átfedések nélküli lefedését.

A csempézés nem foglalkozik olyan lefedéssel, ahol minden elem más. Ettől tehát eltekintünk, és két esetet különböztetünk meg.

A klasszikus eset, amivel Pólya éveket foglalkozott, és amiről cikke szól, az, amikor létezik egy elemi cella, azaz olyan legkisebb alakzat, melynek eltolásával az egész síkot lefedhetjük.

Ebben az esetben az alakzat olyan szimmetriatulajdonságokkal rendelkezik (eltolás, forgatás, tükrözés), melyek egymásutánja alapján a síkban 17 féle elrendezés lehetséges. Másképp fogalmazva a sík kitöltésére összesen 17-féle, egymástól különböző módszer alkalmazható.

Létezik olyan lefedés is, amelynél az előbb definiált elemi cella nem létezik, azaz eltolási szimmetria nincs. Ilyen lefedéseket Penrose mutatott be később.

De térjünk vissza az előadás tárgyához, az előző csempézéshez. Ezt a kristálytanban is használják. (A tér kitöltése egyébként ilyen módszerrel 230 féle módon lehetséges, ezért maradjunk inkább a síkkristályoknál.) Bemutatom, táblázatba foglalva, ezt a 17 féle transzformációs lehetőséget. Hogy a dolog könnyebben érthető legyen, mellékelek ezután még egy ábrát is mindehhez:

| | **Transzformáció** | **Krisztallog-ráfiai jelölés** |
|---|---|---|
| 1. | két nem párhuzamos eltolás | p1 |
| 2. | két párhuzamos csúsztatva tükrözés | pg |
| 3. | két párhuzamos tükrözés (két tükrözés és egy eltolás) | pm |
| 4. | egy tükrözés és egy párhuzamos csúsztatva tükrözés | cm |
| 5. | 180°-os forgatások két irányban | p2 |
| 6. | egy tükrözés és egy csúsztatva tükrözés (tükrözés és 180°-os forgatás) | p2mg |
| 7. | két merőleges csúsztatva tükrözés (csúsztatva forgatás és 180°-os forgatás | p2gg |
| 8. | tükrözés egy téglalap négy oldalára | p2mm |
| 9. | merőleges tükrözések és merőleges csúsztatva tükrözések (két merőleges tükrözés és egy 180°-os forgatás) | c2mm |
| 10. | két 120°-os forgatás | p3 |
| 11. | tükrözések egy egyenlő oldalú háromszög oldalaira | p3m1 |
| 12. | egy tükrözés és egy 120°-os forgatás | p31m |
| 13. | egy 180°-os forgatás és egy 90°-os forgatás | p4 |
| 14. | egy tükrözés és két 180°-os elforgatás | p4gm |
| 15. | tükrözés egy 45°-45°-90°-os háromszög oldalaira | p4mm |
| 16. | egy 180°-os elforgatás és egy 120°-os elforgatás | p6 |
| 17. | tükrözések egy 30°-60°-90°-os háromszög oldalaira | p6mm |

Pólya ezt a 17 csoportot bizonyította. (Meg kell jegyezni, hogy előtte ezt már az orosz Fedorov 1891-ben meghatározta, de Pólya az eredményt nem ismerte.) Cikkében minderről ábrát is közölt.

Itt lép be a történetbe egy azóta világhírűvé vált holland művész, Escher, akit talán azokról a képeiről ismert leginkább, amelyeken általában lehetetlen építményeket ábrázolt.

Eschert spanyolországi utazása során lenyűgözte a régi mór művészek geometriai tudása, és az arabok absztrakt síkelemekkel operáló tevékenységét megkísérelte alakokkal bővíteni. Pólya cikkére a művész testvére (aki földrajzot adott elő az egyetemen) hívta fel figyelmét. Levelezni kezdtek. Escher a matematikai részt nem értette, de a rajzokból ráérzett a kristálycsoport egyes elemeinek a geometriai tulajdonságaira, a periodikusságra, a szimmetriára, és a maga művészi módján Pólya rajzait átformálta, madarakat, kutyákat stb. helyezett rá Pólya ábráira, majd a színezés bevezetésével tovább is fejlesztette az ábrázolást. Mindjárt megmutatom mindezt rajzban, grafikában, de előtte hadd idézzem magát Eschert:

*„E művek alapjául szolgáló eszmék nagyobbrészt arról a csodálatról és csodálkozásról tanúskodnak, mely engem a környező világ törvényszerűségei iránt elfog. Ha valaki valamin csodálkozik, egy csoda válik tudatossá benne. Amikor én érzéki módon, nyitottan állok szemben a rejtélyekkel, amelyek körülvesznek minket, és amikor megfigyeléseimet átgondolom, és elemzem, a matematika birodalmába jutok. Jóllehet semmiféle egzakt tudományos képzettségem és ismeretem nincs, mégis közelebb érzem magam a matematikusokhoz, mint tulajdonképpeni pályatársaimhoz.*

*Aki sima felületen szimmetriát kíván ábrázolni, annak három kristálytani alapelvet kell figyelembe vennie: az eltolást (transzláció), a tengelyforgást (rotáció) és a csúszó (csúsztatott) tükrözést. Aligha lehet megkísérelni e rövid áttekintésben a három alapelv kifejtését, mivel azonban a csúsztatott tükrözés három képemen is világosan felismerhető, ennek különös figyelmet kell szentelnem.*”[3]

Az előadást követő, később írásban is rögzített hozzászólásában Révész György matematika-fizika-informatika szakos tanár, a Magyar Pedagógiai Társaság Mozgalompedagógiai szakosztályának elnöke kifejtette: az, hogy Pólya György figyelme a heurisztika felé fordult, egyáltalán nem meglepő. Mondhatni, egyenes következménye filozófiai indíttatásának. Az örökmozgó és a bölcsek köve mellett a minden probléma megoldására alkalmazható egyetemes módszer, „a módszer” is évezredes álom. A 17. század közepén már-már úgy tűnhetett, sikerült megtalálni a megoldást. René Descartes, aki egyaránt otthonosan mozgott a matematika és a filozófia vidékein (akárcsak három évszázaddal később Pólya György vagy Bertrand Russell), Szabályok

[3] M. C. ESCHER: *Grafikák és rajzok*

a gondolkodás irányítására c. befejezetlen művében a következő eljárást dolgozta ki:

- Először: minden problémát vezessünk vissza matematikai problémára.
- Másodszor: minden matematikai problémát vezessünk vissza algebraira.
- Harmadszor: minden algebrai problémát vezessünk vissza egyenlet megoldásra.

Az egyenleteket pedig már meg tudjuk oldani, vagyis megtaláltuk az univerzális módszert. Ugye, milyen egyszerű? Sajnos, a módszer alkalmazása során többnyire már az első lépés – a probléma matematikai megfogalmazása – megoldhatatlan nehézségeket okoz. Descartes valószínűleg maga is felismerte ezt, talán ez is közrejátszott abban, hogy nem fejezte be könyvét. Mindazonáltal a matematizálás gondolata és módszere nagyon fontos szerepet játszott a következő évszázadok tudománytörténetében és metodológiájában. Descartes persze még nem tudhatta, hogy a magasabb fokú, ill. transzcendens egyenletek megoldása általában nem állítható elő zárt alakban, de a módszerrel korántsem ez a legsúlyosabb probléma.

Pólya mindenesetre tisztában volt a korlátokkal. „*A filozófia régi álma mindenféle feladatra alkalmazható, csalhatatlan szabályok felállítása; de ez az álom örökre álom marad*" – írja, majd a következő mondatban rögtön meg is fogalmazza a reális programot: „*Ésszerű heurisztika nem törekedhet tévedhetetlen szabályok felállítására; de igyekezhet tanulmányozni azokat az eljárásokat (gondolkozási műveleteket, gondolatmeneteket, lépéseket), amelyek rendszerint hasznosak a feladat megoldásában.*"[4] Művei e program végrehajtása, a gondolkodási műveletek tanulmányozása és rendszerezése során szerzett tapasztalatainak összegzése az alsó- és középfokú (*A gondolkodás iskolája*), valamint a közép- és felsőfokú (*A problémamegoldás iskolája*) matematikaoktatásra vonatkozóan.

Trencsényi László szerint Pólya pályája alapján úgy tűnik, hogy van egy olyan – csaknem tipikus - út az abszolút pedagógussá válásban, amikor a jelentőset, korszakalkotót létrehozó tudós, művész (Pólya, de Kodály, Szent-Györgyi, stb.) az alkotása társadalmi hatásával elégedetlen, s megérti, hogy a sorompó az iskola, az oktatás, s ezért (mondhatni „öncélból") fordulatot vesz munkássága, s a közvetítés, a pedagógia újjászervezése oldalára áll.

[4] PÓLYA György: *A gondolkodás iskolája,* Budapest: Gondolat, 1971. 57

*Felhasznált irodalom*

1) PÓLYA György 1971.: *A gondolkodás iskolája,* Budapest: Gondolat, 57

2) PÓLYA György: *A problémamegoldás iskolája*

3) dr. CZEIZEL Endre: *Matematikusok gének rejtélyek*

4) J J O'Connor, E F Robertson
http://www-groups.dcs.st-and.ac.uk/history/Biographies/Polya.html

5) dr. KÁNTOR Sándorné munkái Pólyáról (ppt, cikkek)

6) dr. GYARMATI Péter: *Bevezetés a gondolkodás iskolájába: A descartesi eszme és Pólya György*
http://freeweb.deltha.hu/gyarmati.dr.hu/lectures/descartes3.pdf

7) RUDAS Anna: KöMaL, 2012. szeptember

8) NAGYNÉ Szokol Ágnes–Nagy Mihály–Tari Judit: *GeoGebra: Szimmetrikus bolyongás 2*.

9) dr. JUHÁSZ István https://ado.hu/ado/szimmetriak-a-termeszetben-es-a-muveszetekben/

10) M. C. ESCHER: *Grafikák és rajzok*