A
LEGKISEBB NÉGYZETEK ELMÉLETE

ÉS BEVEZETÉSÜL

A VALÓSZINÜSÉGI HÁNYLAT

ELEMEI.

ÍRTA

VÉSZ JÁNOS ARMIN

MÉRNÖK, A M. K. JÓZSEF MŰEGYETEMNÉL A FELSÖBB MENNYISÉGTAN TANÁRA,
A M. TUDOMÁNYOS AKADEMIA RENDES TAGJA.

KIADTA

A M. TUDOMÁNYOS AKADEMIA.

PEST,
EGGENBERGER FERDINÁND M. AKAD. KÖNYVÁRUSNÁL
1869.

A

LEGKISEBB NÉGYZETEK ELMÉLETE

ÉS BEVEZETÉSÜL

A VALÓSZINÜSÉGI HÁNYLAT

ELEMEI.

ÍRTA

VÉSZ JÁNOS ARMIN

MÉRNÖK, A M. K. JÓZSEF MŰEGYETEMNÉL A FELSŐBB MENNYISÉGTAN TANÁRA,
A M. TUDOMÁNYOS AKADEMIA RENDES TAGJA.

KIADTA

A M. TUDOMÁNYOS AKADEMIA.

PEST,

EGGENBERGER FERDINÁND M. AKAD. KÖNYVÁRUSNÁL

1869.

Pest, 1869. Nyomatott az „Athenaeum“ könyvnyomdájában.

ELŐSZÓ.

Tárgya jelen munkámnak a legkisebb négyzetek elmélete, mint a felsőbb mennyiségtan azon ága, mely eddig hazai litteraturánkban képviselve éppen nem volt.

Az elmélethez bevezetésül a valószinüségi hánylat elemeit kelle csatolnom, minthogy ez rendszeresen előadva még szinte nem létezik. Maga az elmélet három részre oszlik : az *elsőben* tárgyaltatik az észleleti hiba, és kifejtetnek azon törvények, melyeknek ezen hibák előfordulhatásai alá vannak vetve ; a *második részben* a különböző kisérleti függvények állandói legvalószinübb értékei határoztatnak meg ; végre a *harmadik* és utolsó részben az eljárás pontosságának megbírálása adatik.

Remélem, hogy e munka addig is, mig az jelesebb által pótoltatik, az eddig sajnosan érzett hiányt betölteni képes leend.

BEVEZETÉS.

I. Valószinűségi hánylat.

1. Minden esemény csakis szoros természettani törvények folytán jöhetett létre. Minden ily esemény létrehozatalára számtalan a végtelenbe nyúló okok működtek közre, de úgy, hogy ezen meglevő okoknál fogva azon eredménynek létre jönni kellett, és ugyanazon eredmény fogna ismét létre jönni, valahányszor ugyanazon okok, ugyanazon körülmények között működnének egybe. A szellő által felkapott pehely útjának, vagy az orkán által feldúlt tenger felületének görbületei biztos törvények szerint állanak elő, — a szerencse urnájából százezrek közül kihúzott szám, tökéletesen azonos körülmények között — ismét kihúzatnék.

Az események okai gyakran ismeretesek, és ily esetben a létrejövetelről előre is biztosak vagyunk. Az ily előre biztos események száma annál nagyobb leend, minél inkább lesznek kifejlődve a természettudományok elvei, vagyis minél inkább lesznek ismeretesek az eseményekre ható okok.

Legtöbb esetben azonban az események okait vagy csak részben, vagy éppen nem is ismerjük. Sőt miután, mint már érintetett, ez okok gyakran a végtelenbe nyúlnak, a véges korlátok közé szorított emberi ész azokat számításba vehetni soha se lehet képes.

Az oly eseményeket azután, melyeknek okait számítás alá venni vagy éppen nem lehet, vagy legalább a tudomány jelen állásánál nem lehet, — esetlegeseknek nevezzük. A miből természetesen önként következik, hogy számtalan oly esemény van, melyek létrejöttét ma biztosoknak tartjuk, holott a tudományok kevésbé kifejlett korában azok még esetlegeseknek tartattak, úgy szintén, hogy a ma esetlegesnek tartott események egy része később talán biztosan előre mondható lehet.

2. Gyakran ösmeretesek azon okok, melyek több hasonnemü eredményt képesek létre hozni, a nélkül azonban, hogy azon okokat ösmernénk, melyek ezen eredmények egyikének előhozására szükségesek. Így például, ha egy sokoldalu hasábot tetszőleges kezdetbeli sebességgel gördítünk egy síkon, akkor a hasáb többszörös gördülése után egyik lapján nyugvásba jövend, a nélkül, hogy ezen lapot előre meghatározni képesek lennénk, miután ez már oly okoktól függ, melyeket meghatározni nem vagyunk képesek.

Ez esetben tehát ki tudjuk jelölni azon események számát, melyek közül az egyiknek létrejönni kell.

3. Ha egy esemény létrehozatalára több ok hat kedvezően, mint annak létre nem hozatalára, akkor az ily esemény a közönséges életben valószinünek mondatik; mely fogalomtól azonban a mennyiségtani valószinüség eltér. Mennyiségtanilag ugyanis minden esemény, melynek létre jötte nem lehetetlen, valószinüséggel is bír, csak hogy a valószinüség is annál kisebb, mentől kevesebb okok léteznek annak létrehozatalára.

Ennélfogva mennyiségtani valószinüség alatt értjük azon viszonyt, melyben az egy esemény létrehozatalára kedvező okok állanak az okok összegéhez. Mely fogalom mellőzhetlen feltétele azonban, hogy valamennyi eset egyenlően lehetséges legyen.

4. Ha A és B két oly esemény, melyek egyikének okvetlen létre jönni kell, és az A esemény létrejöttére m eset hat kedvezően, összesen pedig csakis $m+n$ eset létezik, akkor az A esemény valószinüségét w'-el jelölvén lesz:

$$w' = \frac{m}{m+n},$$

a B esemény valószinüsége pedig:

$$w'' = \frac{n}{m+n},$$

ennek folytán tehát a mennyiségtani valószinüség mindig valódi tört, melynek határait a 0 és az 1 képezik. A határok által a bizonyosság fejeztetik ki, az első esetben, hogy az esemény létre nem jöhet, a másodikban, hogy az létre jön.

5. Feltételeztetett, hogy az A és B esemény egyikének létre jönni kell; miért is a két esemény valószinüségének összege

$$\frac{m}{m+n}+\frac{n}{m+n}=1,$$

egyenlő az egységgel, a mi éppen azt mondja ki, hogy az egyik eseménynek létrejönni kell. Éppen így, ha az egyik esemény valószinüsége w' már ösmeretes, akkor az ellentett valószinüséget, vagyis azon valószinüséget, hogy az esemény nem jön létre, megnyerjük, ha a talált valószinüséget a bizonyosságból levonjuk, vagyis azt az egységre kiegészitjük, tehát:

$$w''=1-w'=1-\frac{m}{m+n}=\frac{n}{m+n}.$$

Így például ha két koczkával (rendes hatlappal, melynek lapjaira rendre 1, 2, ... 6 pont van bevésve) egy dobást teszünk, és a felső laponi pontokat egybeolvassuk, akkor öszszesen 36 eset fordulhat elő, minthogy az egyik koczka mindegyik lapjával a másik koczka valamennyi lapja fordulhat felfelé. Ha tehát azon valószinüséget keressük, hogy valaki 7-et fog dobni, akkor az összes 36 esethez viszonyítom azon eseteket, melyek a 7-re kedvezők, ezek pedig 1,6; 2,5; 3,4; 4,3; 5,2 és 6,1; összesen hat eset, tehát a kivánt valószinüség $\frac{6}{36}$ vagy $\frac{1}{6}$. Éppen így a valószinüség 11-et dobni $=\frac{2}{36}=\frac{1}{18}$.

A valószinüség, hogy valaki nem fog 11-et dobni $=\frac{17}{18}$.

Az előbbi valószinüség $\frac{1}{18}$ azt mondja, hogy 18 dobás között várható egyszer a 11 szám dobása. A miből azonban korántsem következik, hogy valóban csakis 18 dobás között eshetik egyszer a kivánt szám, és csakis egyszer; eshetik az valósággal egyszer vagy többször, söt lehetőleg mind a 18-szor, vagy talán egyszer sem. Sőt még azt se lehet állítani, hogy a dobások tetemes számánál a valóban dobott 11 szám a dobások számához úgy fog viszonylani, mint 1 : 18, vagy hogy ezen viszonyt annyival inkább fogja megközelíteni, minél több dobások történtek. Csak annyit lehet legfeljebb állítani, a dobott szám a dobások számához ezen viszonyhoz közel fog lenni. Szoros értelme csak is az, hogy 18 eset közül a kivánt eseményre csak is egy kedvező, miért is, mielőtt a dobás megtörtént volna, csak is 18 dobás között várhatom egyszer okszerüen a kivánt eseményt.

Így továbbá a kis számsorsjátékoknál (lotteria) 90 szám van alkalmazásban, következőleg létezik 90 egyes szám (Extratto); $\frac{90.89}{1.2} = 4005$ kettes, (ambo); és $\frac{90.89.88}{1.2.3} = 117480$ hármas, (terno). Kihúzatik pedig minden egyes számnál 5 szám, ezek között van 5 egyes, $\frac{5.4}{1.2} = 10$ kettes, és $\frac{5.4.3}{1.2.3} = 10$ hármas; ennélfogva annak valószinüsége, hogy valaki egy bizonyos számot eltalál, $= \frac{5}{90} = \frac{1}{18}$; hogy valaki két számot eltalál, $= \frac{10}{4005}$, végre hogy valaki egy hármast talál el, $= \frac{10}{117480} = \frac{1}{11748}$.

6. Ha több eredmény lehetséges, s azok valószinüsége $w', w'', w'''\ldots$; ha továbbá az egyes eseményekre kedvező esetek száma $a, b, c\ldots$; az összes esetek száma pedig s, akkor a valószinüségek

$$w' = \frac{a}{s},\ w'' = \frac{b}{s},\ w'' = \frac{c}{s};\ldots$$

ez esetben azután az a kérdés merülhet fel, hogy mennyi a valószinüsége annak, hogy inkább az első eredmény jön létre, mint a második; a többi eredményeket tekintetbe se véve. Az ily valószinüség **viszonylagos valószinüség**nek mondatik. Ennek meghatározására csak is azon eseteket kell tekintetbe venni, melyekben a kérdéses két eredmény előfordulhat, miért is a viszonylagos valószinüségeket W' és W''-vel jelölvén, lesz:

$$W' = \frac{a}{a+b} = \frac{\frac{a}{s}}{\frac{a+b}{s}} = \frac{w''}{w'+w''} \text{ és}$$

$$W'' = \frac{b}{a+b} = \frac{\frac{b}{s}}{\frac{a+b}{s}} = \frac{w''}{w'+w''},$$

vagyis egy eredmény viszonylagos valószinüségét megnyerjük, ha annak általános valószinüségét elosztjuk az általános valószinüségek összegével. Így az általános valószinüség, hogy két koczkával 5-öt dobunk $= \frac{4}{36}$, hogy 7-et dobunk $= \frac{6}{36}$; tehát hogy inkább dobunk 5-öt, mint 7-et: $\frac{\frac{4}{36}}{\frac{4}{36}+\frac{6}{36}} = \frac{4}{10}$; hogy inkább dobunk 7-et, mint 5-öt: $\frac{\frac{6}{36}}{\frac{4}{36}+\frac{6}{36}} = \frac{6}{10}$; a két nyert valószinüség összege $= 1$, mint lenni kell, mert bizonyos, hogy vagy az 5, vagy a 7 esik inkább.

7. Ha csak is egy esemény létre jötte, vagy létre nem jötte forog kérdésben, akkor az illető valószinüség e g y s z e r ü n e k mondatik; holott ha két vagy több esemény együtt, vagy egymásutáni létezéséről van szó, akkor a valószinüség ö s s z e t e t t.

Az összetett valószinüségre nézve pedig két fő esetet kell megkülönböztetnünk; ugyanis két vagy több esemény egymást tökéletesen kizárhatja, úgy, hogy ha az egyik létre jön, akkor a többi létre nem jöhet; vagy a feltételek mindegyikének teljesülni kell a kivánt kedvező eset elérésére. Az első esetben a valószinüséget e g y m á s t k i z á r ó e s e m é n y e k valószinüségének, a másodikban ö s s z e t e t t e r e d m é n y e k valószinüségének fogjuk nevezni.

A különbség a két valószinüség között egy alkalmazásból legvilágosabban kiderül.

Ha az a kérdés, mi a valószinüsége annak, hogy két koczkával 8-nál magasabb számot dobunk, akkor a kérdés az első nemü valószinüségre vonatkozik, miután dobhatok vagy 9-et, vagy 10-et, vagy 11-et, vagy 12-öt, s mind ezen egymást kizáró esetek, a kivánt eredményre nézve kedvezők.

A 9 dobásra az összes 36 eset közül kedvező 4,
„ 10 „ „ „ „ „ „ „ 3,
„ 11 „ „ „ „ „ „ „ 2,
„ 12 „ „ „ „ „ „ „ 1,

és igy a kedvező esetek száma 10, tehát a kivánt valószinüség

$$w = \frac{4}{36} + \frac{3}{36} + \frac{2}{36} + \frac{1}{36} = \frac{10}{36},$$

mely példából egyszersmind önként következik azon szabály, miszerint az egymást kizáró eseményeknél az összetett valószinüség egyenlő az általános valószinüségek összegével.

Ellenben ha az volna a kérdés, mi a valószinüsége annak, hogy két koczkával dobva, mindegyikén a hármas lesz a felső lapon, akkor az által, hogy az első koczkán valóban a 3 dobatott, ki nincs zárva, hogy a másodikán is ugyanaz ne dobassék, sőt a kivánt eredményre megis kivántatik, hogy ezen feltételnek is elégtétessék; — ez esetben tehát a második nemü valószinüség áll elő.

Annak valószinüsége, hogy az első koczkával a 3 dobassék $= \frac{1}{6}$, miután 6 eset közül csak egy kedvező, — de ezen hármassal együtt a második koczkán még mind a 6 lap fordulhat felfelé, hogy tehát éppen a kivánt 3 fog dobatni, annak a valószinüsége külön ismét $\frac{1}{6}$ lévén, a kivánt valószinüség, hogy mind a két koczkával a 3 dobassék, csak egy hatodnak hatoda, vagyis $\frac{1}{36}$ leend; vagyis

$$w = \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{36}.$$

Vagyis az összetett eseményeknél a valószinüség egyenlő az egyes esetek valószinüségének szorzatával.

Ezen esetnél azután tökéletesen ugyanaz marad a valószinüség, akár az egyes események egyszerre, vagy egymás után jönnek létre. Így a fennebbi kérdést ily alakba is lehet önteni; minő valószinüséggel bír, hogy egy koczkával kétszer egymásután ugyanazon szám fog dobatni.

Ha ugyanazon esemény többször kivántatnék ismételve, akkor ugyanazon elv szerint kell eljárnunk. Legyen egy esemény valószinüsége $w = \frac{a}{b}$, hol $b > a$, akkor annak valószinüsége, hogy ezen esemény kétszer egymásután fog bekövetkezni $w' = \frac{a}{b} \cdot \frac{a}{b} = \left(\frac{a}{b}\right)^2$ annak valószinüsége, hogy az 3-szor egymásután fog létre jönni $w'' = \left(\frac{a}{b}\right)^2 \frac{a}{b} = \left(\frac{a}{b}\right)^3$; általánosan, hogy ugyanazon eredmény n szer egymásután fog létre jönni:

$$W = w^n.$$

Így a valószinüsége annak, hogy a kis számsorsjátékban mind azon számot eltaláljuk, ugyanazon rendben, a melyben azok kihuzatnak:

$$w = \frac{1}{90} \cdot \frac{1}{89} \cdot \frac{1}{88} \cdot \frac{1}{87} \cdot \frac{1}{86}$$

ha a rendtől eltekintünk, akkor a valószinüség

$$w' = \frac{5}{90} \cdot \frac{4}{89} \cdot \frac{3}{88} \cdot \frac{2}{87} \cdot \frac{1}{86}.$$

8. A valószinüségi hánylatnak eddig kifejtett elvei elméletileg elegendők ugyan az ide vágó kérdések megoldására, azonban a valószinüségnek meghatározása egyes esetekben tetemes nehézséggel jár. A nehézség részint az összes esetek meghatározásában fekszik, részint pedig és főleg azon esetek meghatározásában, melyek a kivánt eseményre kedvezők.

A kedvező esetek meghatározásánál továbbá még igen fontos annak megbirálása, valjon az egyes esetek egyenlő lehetőségüek-e, vagy se? mert csak is az egyenlő lehetőségü esetek vehetők számitásba. Hogy menyire kell itt ovatosaknak lennünk, e következő példa fogja felvilágositani.

Mi a valószinüsége annak, hogy egy edényből, melyben egy fehér és egy fekete golyó van, két húzás között legalább egyszer kihúzzuk a fehér golyót?

Ezen esetben a feloldást ily módon lehetne eszközölni. Ha az első húzásnál kihúzatik a fehér golyó, akkor a feltételnek eléggé van téve, az esemény már létre jött. Ha pedig először a fekete húzatott ki, akkor második ízben kihúzathatik vagy a fehér, vagy a fekete. Így tehát összesen három eset van, melyek közül kettő kedvező, és így a kivánt valószinüség $\frac{2}{3}$ volna. Ezen elmélkedés azonban hamis, mert az említett három eset közül nem mindegyik bír egyenlő lehetőséggel. A dolog valósággal négy esettel bír, ugyanis 1) az első húzásnál húzathatik fehér, a másodiknál szinte fehér; 2) az első húzásnál fehér, a másodiknál fekete; 3) az elsőnél fekete, a másodiknál fehér, és 4) az elsőnél fekete, a másodiknál szinte fekete. És igy összesen 4 egyenlő lehetőségü eset lévén, melyek közül a kivánt eseményre három kedvező, s így a valószinüség $= \frac{3}{4}$.

E feladat azonban egyszerübben így is oldható: Hogy az első húzás eredménye fehér, annak valószinüsége $= \frac{1}{2}$. Hogy először nem húzatik fehér, annak valószinüsége szinte $= \frac{1}{2}$; és hogy másodszor fehér húzatik, azé ismét $= \frac{1}{2}$; tehát e két eset együtt létére $= \frac{1}{4}$. A kivánt valószinüség tehát $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$.

Vagy azt kérdezhetem, mi a valószinüsége annak, hogy sem az első sem a második húzásban sem jő ki a fehér golyó, akkor ezen összetett események valószinüsége $\frac{1}{2}.\frac{1}{2} = \frac{1}{4}$, tehát az ellenkező valószinüség, vagyis hogy az vagy az első vagy a másodiknál kijő $= 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$.

9. Annak megbírálására, valjon az egyes esetek egyenlő lehetőséggel birnak-e, vagy sem, szabályokat előírni nem lévén lehetséges, a következőkben több ide tartozó példákkal fogunk foglalkozni, melyek azután elegendő útmutatást fognak szolgáltatni arra, hogy miképen kellessék eljárni hasonnemü más esetekben.

10. Mi a valószinüsége annak, hogy 3 koczkával dobván, mind a három felső lap ugyanazon számot mutassa?

Két koczkával összesen 36 különböző dobás lehetséges, melyek mindegyike összeeshetik a harmadik koczka mindegyik lapjával, miért is az összes esetek száma $6.36 = 216$.

Ezek közül hatszor fordulhat elö azon eset, melyekben mind a három koczka egyenlő számot mutat, minek folytán a kivánt valószinüség $= \frac{6}{216} = \frac{1}{36}$.

Mi a valószinüsége annak, hogy három koczkával dobva, két egyenlő szám dobatik?

Két koczkával hatféleképen lehet két egyenlő számot dobni, s miután három koczka közül háromfélekép választhatok két koczkát, azért összesen 18-félekép eshetik két egyenlő szám; — mindegyik ily esethez jöhet a harmadik koczka mindegyik lapja, azt kivéve, melyet a másik kettő mutat, és így a kedvező esetek száma összesen $5.18 = 90$, az összes esetek száma ismét 216 lévén lesz a keresett valószinüség $\frac{90}{216} = \frac{5}{12}$.

Mi a valószinüsége annak, hogy három koczkával dobva három különböző számot dobunk?

Ez esetben a két és három egyenlő számok dobása ki lévén zárva, lesz a kivánt volószinüség

$$W = 1 - \frac{5}{12} - \frac{1}{36} = \frac{5}{9}.$$

Mi a valószinüsége annak, hogy három koczkával dobva, legalább két szám leend egyenlő?

A kivánt valószinüség lesz:

$$W = 1 - \frac{5}{9} \text{ vagy } = \frac{5}{12} + \frac{1}{.36} = \frac{4}{9}.$$

Mi a valószinüsége annak, hogy három koczkával dobva, három egymásra következő számot nyerünk?

A lehetséges dobások a következők: 1, 2, 3; 2, 3, 4; 3, 4, 5; 4, 5, 6; miután azonban mindegyike ezen dobásoknak hatféleképen fordulhat elő, ugymint:

1-ső koczka,	2-ik koczka,	3-ik koczka,
1	2	3
1	3	2
2	1	3
2	3	1
3	1	2
3	2	1

azért a kedvező esetek száma $4.6 = 24$, az összes esetek száma pedig 216; a kivánt valószinüség tehát:

$$W=\frac{24}{216}=\frac{1}{9}.$$

Két játszó közül A akkor nyer, ha három koczkával legalább 15-öt dob, B pedig akkor, ha három egymásra következő számot talál el; — mennyi az A és mennyi a B nyerési valószinüsége.

A 15 szám e következő esetekben dobható:

366	456	546 és	636	
	465	555	645	összesen
		564	654	10 eset,
			663	

a 16 szám dobásai:

466	556	646	összesen
	565	655	
		664	6 eset,

a 17 számra áll:

566	656	összesen
	665	3 eset,

végre a 18 szám egyszer dobható; az általános valószinüségek tehát a két játszóra nézve a következők, ugyanis A-ra nézve:

$$W=\frac{10}{216}+\frac{6}{216}+\frac{3}{216}+\frac{1}{216}=\frac{5}{54}.$$

B-re nézve pedig az elöbbi szerint $W'=\frac{1}{9}=\frac{6}{54}$, tehát a viszonylagos valószinüség:

A-ra nézve $\frac{5}{11}$, B-re pedig $\frac{6}{11}$.

11. Egy edényben van n golyó, mi a valószinüsége annak, hogy valaki tetszöleges számu golyót egyszerre kihúzván, a kihúzott golyók száma páros?

Miután a kihuzandó golyók száma egészen tetszöleges, tekintetbe kell venni valamennyi lehetö esetet.

És pedig ki lehet húzni 1 golyót n-szer,

„ „ „ „ „ 2 „ $\frac{n(n-1)}{2}$-szer,

„ „ „ „ „ 3 „ $\frac{n(n-1)(n-2)}{2.3}$-szor,

„ „ „ „ „ 4 „ $\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{2.3.4}$-szer, és így tovább. Ezen esetek közül a 2-ik, 4-ik, stb. a páros számra, az 1-ső, 3-ik stb. a páratlanra kedvezök.

De Newton képlete szerint:

$$(1+x)^n = 1 + nx + \frac{n(n-1)}{2}x^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{2.3}x^3 + \cdots$$

$$\text{és } (1-x)^n = 1 - nx + \frac{n(n-1)}{2}x^2 - \frac{n(n-1)(n-2)}{2.3}x^3 + \cdots$$

vagy ha mind a két egyenletben a változó x helyébe iratik az egység, lesz még:

$$2^n = 1 + n + \frac{n(n-1)}{2} + \frac{n(n-1)(n-2)}{2.3} + \cdots$$

$$\text{és } \quad 0 = 1 - n + \frac{n(n-1)}{2} - \frac{n(n-1)(n-2)}{2.3} + \cdots$$

mely egyenletek elseje a mi esetünkben nyilván az összes esetek számát állítja elő, egygyel növesztve.

Ha továbbá ezen utolsó két egyenlet 1 ször összeadatik, és 2-szor az alsó a felsőből levonatik, ered:

$$2^{n-1} - 1 = \frac{n(n-1)}{2} + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{2.3.4} + \cdots$$

$$\text{és } \quad 2^{n-1} = n + \frac{n(n-1)(n-2)}{2.3} + \cdots$$

melyek elseje a páros számra kedvező esetek összegét, a másika pedig a páratlan számra kedvező esetek összegét állítja elő.

Ezek folytán tehát a páros szám húzásának valószinüsége

$$w = \frac{2^{n-1} - 1}{2^n - 1},$$

a páratlané pedig:

$$w' = \frac{2^{n-1}}{2^n - 1},$$

a talált 2 valószinüség tehát nem egyenlő, a különbség:

$$w' - w = \frac{1}{2^n - 1},$$

mely különbség annyival csekélyebb, mennyivel több a golyók száma; igy ha a golyók száma 100-ig növesztetik, akkor a különbség már egyenlő az egységgel, osztva egy oly számmal, mely 31 jegygyel bir; holott a különbség annyival inkább érezhető, minél csekélyebb a golyók száma, úgy-hogy végre, ha az edényben csak egy golyó van, akkor $W=0$, és $W'=1$, és valóban, most már bizonyos, hogy csak is páratlan szám húzható.

A két valószinüség összege:

$$w+w'=\frac{2^{n-1}-1}{2^n-1}+\frac{2^{n-1}}{2^n-1}=1,$$

mindenkor a bizonyosságot adja, mint lenni kell.

12. Van egy edényben m golyó, egy másodikban n golyó, mi a valószinüség, hogy két egyén, egyszerre húzván a két edényből, egyenlő számú golyót fog kihúzni?

Miután az első edényből kihúzott mindegyik csoportozattal, a másik edényből kihúzott bármelyik csoportozat egybe eshetik, azért az összes esetek száma nyilván az összes csoportozatok szorzata leend.

Az első edényben a csoportok száma, ha a Newton-féle együtthatókra a rövidített kifejezéseket használjuk:

$$\binom{m}{1}+\binom{m}{2}+\binom{m}{3}+\cdots=2^m-1,$$

a második edény csoportozatainak összege pedig:

$$\binom{n}{1}+\binom{n}{2}+\binom{m}{3}+\cdots=2^n-1,$$

az összes esetek száma tehát: $(2^m-1)(2^n-1)$.

A csoportok egybetalálkozására kedvező esetek pedig:

$$\binom{m}{1}\binom{n}{1};\ \binom{m}{2}\binom{n}{2};\ \binom{m}{3}\binom{n}{3};\ \ldots$$

miért is a keresett valószinüség leend:

$$w=\frac{\binom{m}{1}\binom{n}{1}+\binom{m}{2}\binom{n}{2}+\binom{m}{3}\binom{n}{3}+\cdots}{(2^m-1)(2^n-1)}.$$

A jelen kifejezés számlálója azonban a következő elmélkedés folytán még rövidebben is előállítható. Jelen esetben ugyanis m úgy szinte n is csak igenleges egész szám lehet, a melynél még feltesszük, hogy $m>n$.

Használva a kéttagú mennyiség magasabb hatványának kifejtéset sor által a következő azonos egyenletben:

$$(1+x)^{m+n}=(1+x)^m(1+x)^n,$$

ered:

$$1+\binom{m+n}{1}x+\binom{m+n}{2}x^2+\binom{m+n}{3}x^3+\cdots+\binom{m+n}{n}x^n+\cdots$$
$$=\left[1+\binom{n}{1}x+\binom{n}{2}x^2+\cdots+\binom{n}{2}x^{n-2}+\binom{n}{1}x^{n-1}+x^n\right]\times$$
$$\times\left[1+\binom{m}{1}x+\binom{m}{2}x^2+\binom{m}{3}x^3+\cdots\right],$$

ha az egyenlet jobb oldalán a szorzatokat végrehajtva képzeljük, akkor a változó minden hatványának együtthatói a két oldalon egyenlők tartoznak lenni. Nekünk azonban csak is x^n együtthatójára van a jelen esetben szükségünk; s miután a jobb oldalon az első szorzóban az x^n együtthatója csak is az egység lehet, azért a keresett egész együtthatót megnyerjük, ha az első szorzó utolsó tagját a másik szorzó első tagjával, az első szorzó utolsó előtti tagját, a másik szorzó második tagjával, és így tovább szorozzuk, és a nyert szorzatokat egybeadjuk; — ennek folytán a kivánt együttható, mely az egyenlet baloldalán:

$$\binom{m+n}{n},$$

a jobb oldalon leend:

$$1+\binom{m}{1}\binom{n}{1}+\binom{m}{2}\binom{n}{2}+\binom{m}{3}\binom{n}{3}+\cdots$$

s miután e két kifejezés azonos, álland még:

$$\binom{m+n}{n}-1=\binom{m}{1}\binom{n}{1}+\binom{m}{2}\binom{n}{2}+\binom{m}{3}\binom{n}{3}+\cdots$$

mely egyenlet alkalmazása által a talált valószinüség még így is írható:

$$W=\frac{\binom{m+n}{n}-1}{(2^m-1)(2^n-1)}.$$

Ha mind a két edényben egyenlő számú golyó van, akkor a keresett valószinüség lesz:

$$W_1=\frac{\binom{2m}{m}-1}{(2^m-1)^2}.$$

Így példának okáért, ha két egyén egyszerre felmutatja az egyik kezének tetszőleges számú ujját, akkor annak valószinüsége, hogy mind a kettő ugyanannyi ujjat mutat fel, leend:

$$W_1 = \frac{\binom{10}{5} - 1}{(2^5-1)^2} = \frac{\frac{10.9.8.7.6}{1.2.3.4.5} - 1}{(31)^2},$$

vagy a számítást végrehajtva:

$$W_1 = \frac{252}{961} = 0{\cdot}26,$$

vagyis valamivel több mint $\frac{1}{4}$.

13. Van egy edényben m golyó, melyek $1, 2, 3 \ldots . m$ számmal vannak jelölve. Kihúzatik egymásután mind az m golyó, kérdés, mi a valószinüsége annak, hogy a húzás száma a kihúzott golyó számával legalább egyszer összeesik?

E feladat oldásánál először egy megjegyzést kell előre bocsájtanunk. Ugyanis a valószinüsége annak, hogy az egyes fog először kihúzatni $= \frac{1}{m}$; ha továbbá keressük, mi a valószinüsége annak, hogy a kettes fog a második húzásban megjelenni, akkor a kettesnek nem kell megjelenni az első húzásnál, és ennek va'ószinüsége $\frac{m-1}{m}$; azután ki kell húzatni a második húzásnál, ennek valószinűsége $\frac{1}{m-1}$, tehát az egész valószinüség, hogy a kettes a második húzásban jelenik meg $\frac{m-1}{m} \cdot \frac{1}{m-1} = \frac{1}{m}$. Éppen így, hogy a hármas a harmadik huzásnál fog kihuzatni, akkor az ne húzassék az első húzásnál, minek valószinüsége $\frac{m-1}{m}$, ne húzassék a másodiknál, minek valószinüsége $\frac{m-2}{m-1}$, végre húzassék a harmadiknál, minek valószinüsége $\frac{1}{m-2}$, tehát a valószinüsége annak, hogy a hármas éppen a harmadik helyen fog kihúzatni: $\frac{m-1}{m} \cdot \frac{m-2}{m-1} \cdot \frac{1}{m-2}$, vagyis ismét $= \frac{1}{m}$; általában tehát, hogy a p számmal jelölt golyó éppen a p-dik húzásnál fog megjelenni, annak valószinüsége $= \frac{1}{m}$.

Visszatérvén most fe!adatunkra, tegyük fel, hogy az edényben csak egy golyó van, akkor a valószinüség, hogy ez az első húzásnál kijövend $= 1$.

Ha az edényben két golyó van, akkor annak valószinüsége, hogy az egyes huzatik az első húzásnál $= \frac{1}{2}$, hogy a kettes jön ki a másodiknál, szinte $= \frac{1}{2}$, összesen tehát $= 1$, mely összegből azonban még levonandó azon eset, melyben az egyes az első, a kettes a második helyen húzatik, ennek pedig valószinüsége $= \frac{1}{2}$ tehát két golyóval a keresett valószinüség:

$$W_2 = 1 - \frac{1}{2} = 0 \cdot 5.$$

Ha az edényben három golyó van, akkor mindegyiknek valószinüsége, hogy a hely számával egybeesik $\frac{1}{3}$ lévén, az összes valószinüség $= 1$, mely összegből levonatnak azon esetek, melyben kettő az egyes esetek közül összeesik, vagyis hogy azonkivül, hogy már az egyes az első helyen húzatott, még kijöhet a kettes a második helyen, vagy a hármas a harmadik helyen, vagy végre a kettessel kijöhet a hármas. De ha már kijött az egyes, melynek valószinüsége $\frac{1}{3}$, hogy most másodszor jöjön a kettes, annak valószinüsége $= \frac{1}{2}$, tehát az összes valószinüség az egyes és kettesre $= \frac{1}{2.3}$; ilyen eset pedig lehet három, (három szám között három kettes lévén lehetséges) tehát a levonandó valószinüség $3 \cdot \frac{1}{2.3} = \frac{1}{2}$; de most már ismét sokat vontunk le, ugyanis azon esetekkel, melyben mind a három szám összeesik, mely eset csak egyszer fordulhat elő, s melynek valószinüsége $\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot 1$ ezt tehát ismét hozzáadva, leend a keresett egész valószinüség három golyóra nézve:

$$W_3 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2.3} = 0 \cdot 666666.$$

Négy golyónál ismét a valószinüség, hogy az illető helyen jelenjenek meg, mindegyiknek a valószinüsége $\frac{1}{4}$ lévén, ezek összege $= 1$, melyből azonban levonandó lesz két eset egybeesése. Hogy az e g y e s s e l kijő a kettes, ennek valószinüsége $\frac{1}{4} \cdot \frac{1}{3}$; ilyen kettős eset pedig a 4 golyó között van $\frac{4.3}{1.2}$, tehát a levonandó valószinüség lesz $\frac{1}{3.4} \cdot \frac{3.4}{1.2} \cdot = \frac{1}{2}$; de ezzel együtt levonattak egyszersmind a három szám összetalálkozási valószinüségek]is, mely valószinüség $= \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2}$, ilyen eset pedig 4 golyó között van $\frac{4.3.2}{1.2.3}$; tehát a pótolandó valószinüség $= \frac{1}{2.3.4} \cdot \frac{2.3.4}{1.2.3} = \frac{1}{2.3}$; de ebből végre még le lesz vonandó azon eset, melyben mind a 4 golyó a maga helyével esik egybe, mely eset 4 golyó közt egyszer fordul elő, s melynek valószinüsége $\frac{1}{2.3.4}$, így tehát a kivánt valószinüség 4 golyóra nézve leend:

$$W_4 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2.3} - \frac{1}{2.3.4} \cdot = 0{\cdot}625.$$

Általában [tehát m golyónál, minden egyes valószinüsége az illető helyeni megjelenésre $\frac{1}{m}$ lévén, ezek összege leend $= 1$, mely összegből levonandók a két eset egybeesései. Hogy az e l s ő húzásban az e g y e s, a m á s o d i k b a n pedig k e t t ő s jelenjen meg, annak valószinüsége $= \frac{1}{m} \cdot \frac{1}{m-1}$ ilyen kettős eset pedig m golyó között $\frac{m(m-1)}{1.2}$ lévén lehetséges, a levonandó valószinüség $\frac{1}{m(m-1)} \cdot \frac{m(m-1)}{1.2} = \frac{1}{2}$; ezen valószinüségből azonban megint levonandó a három eset öszszetalálkozása, melynek valószinüsége $\frac{1}{m} \cdot \frac{1}{m-1} \cdot \frac{1}{m-2}$, ilyen eset pedig van $\frac{m(m-1)(m-2)}{1.2.3}$, tehát a levonandó valószinüség:

$$\frac{1}{m(m-1)(m-2)} \cdot \frac{m(m-1)(m-2)}{1.2.3} = \frac{1}{2.3};$$

ezen utóbbi valószinüségből továbbá levonandó a 4 eset öszszetalálkozása, vagy:

$$\frac{m(m-1)(m-2)(m-3)}{1.2.3.4} \cdot \text{szer} \; \frac{1}{m(m-1)(m-2)(m-3)} = \frac{1}{2.3.4}$$

és így tovább, úgy hogy a keresett valószinüség m golyóra nézve leend:

$$W_m = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2.3} - \frac{1}{2.3.4} + \ldots \pm \frac{1}{2.3 \ldots m}.$$

Ezen talált valószinüségi kifejezés azon nevezetes törvényt fejezi ki, miként a valószinüségek a golyók szaporitásával felváltva nagyobbodnak, és kisebbednek, így ezen valószinüségek rendre 1, 2, 3, stb. golyóknál:

$$W_1 = 1$$
$$W_2 = 0{\cdot}5$$
$$W_3 = 0{\cdot}666666\ldots$$
$$W_4 = 0{\cdot}625$$
$$W_5 = 0{\cdot}633333\ldots$$
$$W_6 = 0{\cdot}631944\ldots$$
$$W_7 = 0{\cdot}6321428\ldots$$
$$W_8 = 0{\cdot}632118\ldots$$
$$\ldots\ldots\ldots$$

Végre ha feltesszük, hogy m igen nagy szám, akkor a valószinüség:

$$W_\infty = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2.3} - \frac{1}{2.3.4} + \ldots$$

miután pedig, ha e a természetes logarok alapszámát jelöli, ösmerten áll:

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{2.3} + \frac{x^4}{2.3.4} + \ldots$$

és tévén a változó x helyébe a nemleg egyet lesz még:

$$\frac{1}{e} = 1 - 1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{2.3} + \frac{1}{2.3.4} \ldots$$

és mind két oldalt az egységből levonva:

$$1 - \frac{1}{e} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2.3} - \frac{1}{2.3.4} + \ldots$$

tehát $W_\infty = 1 - \frac{1}{e}$, hol $e = 2{\cdot}71828\ldots$

miért is $W_\infty = 0{\cdot}63212\ldots$

mely értékhez tehát mint határhoz a kérdéses valószinüség annyival inkább közeledik, mennél nagyobb a golyók száma.

14. Egy edényben van m fehér és n fekete golyó, kihúzunk egyenkint r golyót, a nélkül, hogy a kihúzottat ismét vissza dobnánk, — mi a valószinüség, hogy mind az r kihúzott golyó fehér leend?

A valószinüsége annak, hogy az első kihúzott golyó fehér leend $=\frac{m}{m+n}$; ha ezen eredmény azután valóban létre jött, akkor maradván benne $m-1$ fehér és n fekete golyó, annak valószinüsége, hogy most fehér fog húzatni $=\frac{m-1}{m+n-1}$; ezen eredmény létrejötte után a valószinüség, hogy fehér fog húzatni a maradt $m-2$ fehér és n fekete golyó közül $=\frac{m-2}{m+n-2}$, s. i. t., az összetett valószinüség tehát, hogy egymásután r fehér golyó fog kihúzatni, leend:

$$W=\frac{m(m-1)(m-2)\cdots\cdots(m-r+1)}{(m+n)(m+n-1)\cdots\cdots(m+n-r+1)}.$$

Ha a kérdés ugy lett volna felállítva, ugyanazon feltételek mellett, hogy mi a valószinüsége, hogy r golyót egyszerre húzván ki, mind az r fehér legyen, akkor m fehér golyó közül következő r csoportozat képezhető:

$$\binom{m}{r}=\frac{m(m-1)(m-2)\cdots\cdots(m-r+1)}{1.2.3\cdots\cdots r},$$

az összes esetek száma pedig az $m+n$ golyókból képezhető r csoportozatok száma, vagyis:

$$\binom{m+n}{r}=\frac{(m+n)(m+n-1)\cdots\cdots(m+n-r+1)}{1.2.\cdots\cdots r},$$

és a kedvező esetek számát, elosztva valamennyi esetek számával, lesz a keresett valószinüség:

$$W=\frac{\binom{m}{r}}{\binom{m+n}{r}}=\frac{m(m-1)(m-2)\cdots\cdots(m-r+1)}{(m+n)(m+n-1)\cdots\cdots(m+n-r+1)}.$$

Összehasonlítva a két eredményt azon meggyőződésre jutunk, miszerint az egyenkinti vagy a csoportos kihuzásnál, különben egyenlő körülmények között, a valószinüségek egyenlők.

15. Van egy edényben m fehér, és n fekete golyó, kihúzunk egyenkint vagy egyszerre p golyót, és azokat meg nem nézve félre tesszük; — mi a valószinüsége annak, hogy most ujra kihuzva r golyót, mind az r fehér leend?

Az első huzás alkalmával a következő esetek fordulhatnak elő, ugyanis lehet

mind a p kihúzott golyó fehér és 0 fekete,
vagy $p-1$ „ „ „ „ 1 „
„ $p-2$ „ „ „ „ 2 „
. . . .
„ 1 „ „ „ $p-1$ „
vagy végre 0 „ „ „ p „

ezen elősorolt eseteknek valószinüségei rendre a következők:

$$\frac{\binom{m}{p}}{\binom{m+n}{p}};\quad \frac{\binom{m}{p-1}\binom{n}{1}}{\binom{m+n}{p}};\quad \frac{\binom{m}{p-2}\binom{n}{2}}{\binom{m+n}{p}};\ldots$$

$$\ldots\frac{\binom{m}{2}\binom{n}{p-2}}{\binom{m+n}{p}};\quad \frac{\binom{m}{1}\binom{n}{p-1}}{\binom{m+n}{p}};\quad \frac{\binom{n}{p}}{\binom{m+n}{p}},$$

ezen esetek mindegyikével most már kapcsolatba hozandó annak valószinüsége, hogy a maradt golyókból r fehér huzassék ki; ezen események valószinüsége pedig rendre:

$$\frac{\binom{m-p}{r}}{\binom{m+n-p}{r}};\quad \frac{\binom{m-p+1}{r}}{\binom{m+n-p}{r}};\quad \frac{\binom{m-p+2}{r}}{\binom{m+n-p}{r}};\ldots$$

$$\ldots\frac{\binom{m-1}{r}}{\binom{m+n-p}{r}};\quad \frac{\binom{m}{r}}{\binom{m+n-p}{r}};$$

ha tehát az összetett események e valószinüségeit szorzat által kapcsoljuk össze, azután az egyes szorzatokat összegezzük, leend a keresett valószinüség:

$$W=\frac{\binom{m}{p}\binom{m-p}{r}}{\binom{m+n}{p}\binom{m+n-p}{r}}+\frac{\binom{m}{p-1}\binom{n}{1}\binom{m-p+1}{r}}{\binom{m+n}{p}\binom{m+n-p}{r}}+$$

$$+\frac{\binom{m}{p-2}\binom{n}{2}\binom{m-p+2}{r}}{\binom{m+n}{p}\binom{m+n-p}{r}}+\cdots+\frac{\binom{m}{1}\binom{n}{p-1}\binom{m-1}{r}}{\binom{m+n}{p}\binom{m+n-p}{r}}+$$

$$+\frac{\binom{n}{p}\binom{m}{r}}{\binom{m+n}{p}\binom{m+n-p}{r}}.$$

A valószinüség ezen kifejezése azonban még igen egyszerüsíthető a következő észrevételek után, ugyanis:

$$\binom{m}{p}\binom{m-p}{r}=\frac{m(m-1)\cdots(m-r+1)(m-r)\cdots(m-p+1)}{1.\,2\,.\,.\,.\,r\,.\,(r+1)\,.\,.\,.\,p}\times$$

$$\times\frac{(m-p)(m-p-1)\cdots(m-p-r+1)}{1.\,2\,.\,.\,.\,r}$$

$$=\frac{m(m-1)\cdots(m-r+1)}{1.\,2\,.\,.\,.\,r}\times$$

$$\times\frac{(m-r)(m-r-1)\cdots(m-p+1)(m-p)(m-p-r+1)}{1.\,2\,.\,.\,.\,r(r+1)\,.\,.\,.\,p}$$

$$=\binom{m}{r}\binom{m-r}{p},$$

éppen így: $\binom{m}{p-1}\binom{m-p+1}{r}=\binom{m}{r}\binom{m-r}{p-1},$

$$\binom{m}{p-2}\binom{m-p+2}{r}=\binom{m}{r}\binom{m-r}{p-2},$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\binom{m}{1}\binom{m-1}{r}=\binom{m}{r}\binom{m-r}{1},$$

és $\binom{m+n}{p}\binom{m+n-p}{r}=\binom{m+n}{r}\binom{m+n-r}{p},$

mely értékeket helyettesítve, és a számlálóban a közös $\binom{m}{r}$ tényezőt szorzóul kivévén, lesz még:

$$W=\frac{\binom{m}{r}}{\binom{m+n}{r}\binom{m+n-r}{p}}\Big[\binom{m-r}{p}+\binom{m-r}{p-1}\binom{n}{1}+$$

$$+\binom{m-r}{p-2}\binom{n}{2}+\cdots+\binom{m-r}{1}\binom{n}{p-1}+\binom{n}{p}\Big].$$

A zárjel közti rész még szinte egyszerübben adható, tekintetbe véve, hogy:

$$(1+x)^a = 1+\binom{a}{1}x+\binom{a}{2}x^2+\binom{a}{3}x^3+\cdots$$

és
$$(1+x)^b = 1+\binom{b}{1}x+\binom{b}{2}x^2+\binom{b}{3}x^3+\cdots$$

melyekből azután:

$$\begin{aligned}(1+x)^{a+b} = 1+\binom{a}{1}x & +\binom{a}{2}x^2 +\binom{a}{3}x^3+\cdots \\ +\binom{b}{1}x & +\binom{a}{1}\binom{b}{1}x^2+\binom{a}{2}\binom{b}{1}x^3+\cdots \\ & +\binom{b}{2}x^2+\binom{a}{1}\binom{b}{2}x^3+\cdots \\ & +\binom{b}{3}x^3+\cdots\end{aligned}$$

de miután szintén jogosan áll:

$$(1+x)^{a+b} = 1+\binom{a+b}{1}x+\binom{a+b}{2}x^2+\binom{a+b}{3}x^3+\cdots$$

következik az összehasonlitásból, hogy

$$\binom{a+b}{1} = \binom{a}{1}+\binom{b}{1},$$

$$\binom{a+b}{2} = \binom{a}{2}+\binom{a}{1}\binom{b}{1}+\binom{b}{2},$$

$$\binom{a+b}{3} = \binom{a}{3}+\binom{a}{2}\binom{b}{1}+\binom{a}{1}\binom{b}{2}+\binom{b}{3},$$

és általánosan:

$$\binom{a+b}{p} = \binom{a}{p}+\binom{a}{p-1}\binom{b}{1}+\binom{a}{p-2}\binom{b}{2}+\cdots$$
$$\cdots+\binom{a}{1}\binom{b}{p-1}+\binom{b}{p},$$

ha tehát ezen általános kifejezésben a helyébe $m-r$, b helyébe pedig n iratik, lesz:

$$\binom{m+n-r}{p} = \binom{m-r}{p}+\binom{m-r}{p}\binom{n}{1}+\binom{m-r}{p-2}\binom{n}{2}+\cdots+\binom{n}{p},$$

és a nyert értéket a talált valószinüségi kifejezésben helyettesitvén, lesz abból:

$$W = \frac{\binom{m}{r}}{\binom{m+n}{r}\binom{m+n-r}{p}}\left[\begin{matrix}m+n-r \\ p\end{matrix}\right],$$

és végre az egyenlő tényezők elhagyásával:

$$W = \frac{\binom{m}{r}}{\binom{m+n}{r}}.$$

Miután a valószinüségnek ezen nevezetes értékéből p egészen kiesett, annak tehát a kérdéses valószinüség meghatározására befolyása nincsen, következik, hogy a valószinüség nem változik, bár hány golyó vétetik is először ki a keverékből, ha csak azok megtekintés nélkül tétetnek félre. És valóban ezen valószinüség ugyan az, melyet nyerünk, ha az edényből mindjárt először húzunk ki r golyót; a nélkül, hogy előbb annak valamelyik részét félretettük volna.

Igy ha $m = 10$, $n = 6$, p tetszöleges, r pedig 4, akkor:

$$W = \frac{\binom{10}{4}}{\binom{16}{4}} = \frac{10.\ 9.\ 8.\ 7}{16.\ 15.\ 14.\ 13} = \frac{3}{26}.$$

16. Egy edényben van öt golyó, kettő közülök fehér három fekete, két egyén A, és B felváltva húznak az edényből, A-nak lévén az első huzása, és a nyerő az, ki előbb húz ki egy fehér golyót, a mivel egyszersmind a játék megszünik. Az a kérdés, mi előnyösebb az első A huzóra nézve, ha minden kihúzott golyó az edénybe visszadobatik, mielőtt a másik húz, vagy ha a kihúzott golyók többé vissza nem helyeztetnek.

Vegyük tekintetbe először azon esetet, a midőn a golyók nem helyeztetnek vissza. Itt mindössze legfeljebb négy huzás történhetik. Ezek közül A-nak valószinüsége, hogy mindjárt ez első huzásnál fehéret talál $= \frac{2}{5}$, azonfelül még A-ra kedvező a 3-ik huzás, ha az első kettőben fekete húzatott A-nak tehát egész valószinüsége:

$$W_a = \frac{2}{5} + \frac{3}{5} \cdot \frac{2}{4} \cdot \frac{2}{3} = \frac{3}{5} = 0{\cdot}6,$$

B húzhat másodszor, és negyedszer, a második húzás reá kedvező, ha először fekete, másodszor fehér jön ki, a negyedik húzásnál okvetlen nyer, ha a három előbbi húzásnál fekete húzatott ki; valószinüsége tehát:

$$W_b = \frac{3}{5} \cdot \frac{2}{4} + \frac{3}{5} \cdot \frac{2}{4} \cdot \frac{1}{3} \cdot 1 = \frac{2}{5} = 0{\cdot}4 .$$

Ha pedig azon esetet vesszük tekintetbe, hol a kihúzott fekete golyók ismét visszadobatnak, itt a huzások száma határozatlan. A fekete golyó huzásának valószinüsége minden huzásnál $\frac{3}{5}$, a fehéré mindig $\frac{2}{5}$, A-ra kedvezők lehetnek az 1-ső, 3-ik, 5-ik..., B-re pedig a 2-ik, 4-ik... huzások, ha az előbbi huzásokban mindig fekete húzatott. Hogy pedig az első, második, stb. huzásokban csak is fekete golyó huzatik, annak valószinüsége $\frac{3}{5}$, $\left(\frac{3}{5}\right)^2$, $\left(\frac{3}{5}\right)^3 \cdots$, s mindegyike e valószinüségeknek szoroztatik a fehér huzási valószinüséggel, vagyis $\frac{2}{5}$-el, ennélfogva az illető valószinüségek:

$$\begin{aligned} W_a &= \frac{2}{5} + \frac{2}{5}\left(\frac{3}{5}\right)^2 + \frac{2}{5}\left(\frac{3}{5}\right)^4 + \cdots \\ &= \frac{2}{5}\left[1 + \left(\frac{3}{5}\right)^2 + \left(\frac{3}{5}\right)^4 + \cdots\right] \\ &= \frac{2}{5} \cdot \left[\frac{1}{1 - \left(\frac{3}{5}\right)^2}\right] = \frac{2}{5} \cdot \frac{25}{16} = \frac{5}{8} = 0{\cdot}625 , \end{aligned}$$

és

$$\begin{aligned} W_b &= \frac{2}{5} \cdot \frac{3}{5} + \frac{2}{5}\left(\frac{3}{5}\right)^3 + \frac{2}{5} \cdot \left(\frac{3}{5}\right)^5 + \cdots \\ &= \frac{2}{5}\left[\frac{3}{5} + \left(\frac{3}{5}\right)^3 + \left(\frac{3}{5}\right)^5 + \cdots\right] \\ &= \frac{2}{5}\left[\frac{3}{1 - \left(\frac{3}{5}\right)^2}\right] = \frac{2}{5} \cdot \frac{15}{16} = \frac{3}{8} = 0{\cdot}375 , \end{aligned}$$

a valószinüségek összege egyenlő az egységgel, mint lenni kell.

Ezen utóbbi eset tehát az első húzóra A-ra nézve kedvezőbb, az első eset pedig B-re az utánhuzóra előnyösebb. Természetes azonban, hogy mind a két módozatnál az előbbhuzó a másik felett tetemes előnyben van.

17. Van egy edényben három golyó, melyekről csak azt tudjuk, hogy azok fehérek vagy feketék lehetnek. Húztunk négyszer, minden húzás után a golyót visszadobván, — s találtuk, hogy a húzott golyók között volt három fehér, és

egy fekete. Kérdés, ha most ötödször húzunk, mi a valószinüsége annak, hogy fehéret húzunk?

Az edénybe csakis 2 fehér golyó és 1 fekete
vagy 1 „ „ „ 2 „ lehet,
az első esetben annak valószinüsége, hogy 3 fehér és egy fekete huzatik ki négy huzásban, miután a huzás rendje kijelölve nincsen $= 4 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^3 \cdot \frac{1}{3}$, a másik esetben ugyanazon esemény valószinüsége $= 4 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^3 \cdot \frac{2}{3}$, ezen valószinüségek öszszege $\frac{40}{81}$, melyekből az elsőre jut $\frac{32}{81}$, a másodikra $\frac{8}{81}$, az első feltétel valószinüsége tehát $\frac{32}{40}$, a másodiké $\frac{8}{40}$.

Ha tehát most ujra húzunk, akkor az első feltétel mellett a fehér húzásnak valószinüsége $\frac{32}{40} \cdot \frac{2}{3}$, a második feltétel mellett pedig $\frac{8}{40} \cdot \frac{1}{3}$ a keresett valószinüség tehát:

$$W = \frac{32}{40} \cdot \frac{2}{3} + \frac{8}{40} \cdot \frac{1}{3} = \frac{3}{5},$$

éppen így a fekete huzásnak valószinüsége:

$$W_1 = \frac{32}{40} \cdot \frac{1}{3} + \frac{8}{40} \cdot \frac{2}{3} = \frac{2}{5}.$$

Könnyü egyszersmind belátni, miként kellessék ezen felvett külön esetet bármely egyébb hasonnemü esetre alkalmazni, ha a golyók, vagy a huzások száma tetszőlegesen változtattatik.

18. Egy edényből, mely m fehér, és n fekete golyót tartalmaz, a golyók egyenkint húzatnak ki, s minden húzás után a golyó az edénybe visszahelyeztetik, — mi a valószinüsége annak, hogy p huzásban legalább egyszer fehér golyót húzunk.

A fehér huzásának egyszerü valószinüsége $\frac{m}{m+n}$, és bizonyos, hogy ezen valószinüség növekedni fog, ha nem csak egy, hanem p huzás áll rendelkezésemre. A kisérletek ismétlése által tehát a valószinüség bizonyára növeszthető, azonban az eszmék tisztázására mégis szükséges lesz egy észrevételt tenni. Ha valamely esemény egyszerü valószinüsége $= w$, s nekünk p kisérlet áll rendelkezésünkre, akkor a valószinüség is annál nagyobb lesz, mentől nagyobb p. De ez csak is a huzások megkezdése előtt áll. Ha a jelen feladatban már kétszer húztunk, és fehéret nem találtunk, akkor a harmadik huzásnál a valószinüség ismét csak $\frac{m}{m+n}$ leend, — tehát az előbbi huzásoknak a következőkre éppen semmi befolyása sincsen.

S ezen körülmény tekintetbe nem vétele az, mi nevezetesen a kis sorsjátékoknál annyi kártékony csalódásra, sőt ámitásokra nyujt alkalmat. Innét van, hogy számtalan, a valószinüségi hánylat elvein alapuló számítások tétetnek azon számok meghatározására, melyek a jövő huzásnál fognak megjelenni. Innét van, hogy a játszók főleg azon számokat keresik fel, melyek már több huzásban meg nem jelentek, s ezek megjelenésének nagyobb valószinüséget tulajdonítanak. Holott minden húzás előtt a megjelenő számoknak valószinüsége mindig ugyanaz, akár jöttek ki azok az előbbi huzásnál, akár nem. Általában minden huzásnál a dolog éppen ugy tekintendő, mintha csakis első húzás volna, — miután valamennyi előbbi huzásoknak a következőkre a legkisebb befolyásuk sincsen.

Ezek után visszatérve a kérdésben levő feladatunkhoz, valószinüsége annak, hogy a fehér golyó mindjárt az első huzásnál meg fog jelenni, $w_1 = \frac{m}{m+n}\cdot$ Miután azonban több húzás áll rendelkezésünkre, ezen valószinüséghez még hozzáadandó annak a valószinüsége, hogy a fehér az első helyen nem, de a másodikon igenis meg fog jelenni, ezen valószinüség pedig $\left(1-\frac{m}{m+n}\right)\frac{m}{m+n}$, az összeg tehát leend:

$$\begin{aligned} W_2 &= \frac{m}{m+n}+\frac{m}{m+n}\left(1-\frac{m}{m+n}\right)\\ &= 1-1+\frac{m}{m+n}+\frac{m}{m+n}\left(1-\frac{m}{m+n}\right)\\ &= 1-\left(1-\frac{m}{m+n}\right)\left(1-\frac{m}{m+n}\right)\\ &= 1-\left(1-\frac{m}{m+n}\right)^2\cdot \end{aligned}$$

Ha azonban a második húzásnál se sikerülne fehéret húzni, rendelkezésünkre áll még a 3-ik húzás is; melynél a valószinüség tehát, hogy se az első, se a második húzásnál ne jelenjen meg a fehér, de igen is a harmadiknál; mely eset valószinüsége $\left(1-\frac{m}{m+n}\right)^2 \cdot \frac{m}{m+n}$, s hozzáadva a már talált W_2 valószinüséghez, lesz:

$$W_3 = 1 - \left(1-\frac{m}{m+n}\right)^2 + \left(1-\frac{m}{m+n}\right)^2 \frac{m}{m+n}$$

$$= 1 - \left(1-\frac{m}{m+n}\right)^2 \left(1-\frac{m}{m+n}\right)$$

$$= 1 - \left(1-\frac{m}{m+n}\right)^3,$$

ezen elmélkedést ekkép tovább folytatva, könnyen jutunk azon eredményre, hogy p húzás állván rendelkezésünkre, annak valószinüsége, hogy legalább egyszer a fehéret kihúzzuk:

$$W = 1 - \left(1-\frac{m}{m+n}\right)^p.$$

Így például annak valószinüsége, hogy 2 koczkával kilenczet dobunk $= \frac{4}{36} = \frac{1}{9}$, annak valószinüsége pedig, hogy 3 dobás közt dobunk legalább egyszer kilenczet:

$$W = 1 - \left(1-\frac{1}{9}\right)^3 = 1 - \left(\frac{8}{9}\right)^3$$

$$= \frac{217}{729}.$$

Fordítva a talált általános képletet használni lehet annak meghatározására, hogy hány dobás szükségeltetik arra, hogy egy egyszerü valószinüség valamely adott nagyságra emeltessék. Ez esetben ugyanis csak W adottnak, p pedig ismeretlennek tekintetik, és az egyenlet p szerinti oldásából ered:

$$p = \frac{log(1-W)}{log\left(1-\frac{m}{m+n}\right)}.$$

Így ha az előbbi példában azt kivánnám tudni, hányszor kellessék dobni, hogy a kilencz dobásnak valószinüsége legyen $= \frac{1}{2}$, vagy más szóval, hány dobásnál éppen olyan valószinű, hogy a kilenczes dobatik, mint nem; — akkor $W=\frac{1}{2}$, és $\frac{m}{m+n}=\frac{1}{9}$, tehát:

$$p=\frac{log\frac{1}{2}}{log\frac{8}{9}}=\frac{log2}{log9-log8}=5\cdot885,$$

tehát öt dobásnál a valószinüség még $\frac{1}{2}$-nél kevesebb, de 6 dobásnál már több.

Játék és Fogadás.

19. Ha egy edényben csak két golyó van, egy fehér és egy fekete, akkor a húzás alkalmával az egyik vagy a másik inkábbi megjelenésére semmi ok sem forogván fen, bizonyosan egyenlő előnyben leend az, ki a fehér megjelenésére fogad azzal, ki a feketére fogad. Ha azonban 2 fehér golyóval csak egy fekete van az edényben, akkor könnyü belátni, hogy a fehérre fogadónak most két annyi előnye van, mint a másiknak; — miután reá két eset kedvező három közül, holott a másikra csak egy. Hogy tehát az előny kiegyenlitessék, szükséges lesz a feketére játszó kisebb valószinüségét a reméllett nyeremény nagyításával pótolni.

A nyeremény nagyságának meghatározására legyen egy edényben 5 golyó rendre 1. 2. . . . 5 számokkal jelölve. Öt játszó közül mindegyik választ magának egy számot, melyért mindegyik a közös pénztárba egy forintot fizet, miután bármelyik szám megjelenése egyenlő valószinüséggel bir.

A nyerési valószinűség tehát a felvett esetben $\frac{1}{5}$, a nyeremény 5 forint; a betétel 1 forint.

A dolog változást nem szenved, ha a játék megkezdése előtt, az egyik egy másikának jogát általveszi az által, hogy neki a betétet megtériti. Ennek nyerési valószinüsége már $\frac{2}{5}$, a nyeremény ismét 5, de a betét 2 forint. Éppen így ha valaki négy sorsjegyet vásárol össze, akkor a nyerési valószinüsége $\frac{4}{5}$, de betétee lis 4.

Általában tehát ugyanazon nyereménynél a betételek a nyerési valószinüségekkel egyenlő viszonyban növekednek.

Vagyis ha a nyereséget N-el, a betételt b-vel, a valószinüségét w-vel jelöljük, álland a következő egyenlet:

$$w . N = b.$$

hol az N nyereség alatt rendesen a betételek összege értetik.

Ezen egyszerü szabály már elégséges arra, hogy a különböző sorsjátékokban, és jogos fogadásokban előfordulható kérdésekre megfelelhessünk, alapul véve fel, hogy minden játszó vagy fogadó betételéről lemond, és a helyett a nyeremény reményében részesül, mely utóbbi a valószinüséggel aránylagos. A játék után azután e remény vagy bizonyossággá válik, a nyereménybeni részesülés által, vagy meghiusul.

20. Ha a nyeremény nem egy egyszerü esemény valószinüségéhez van kötve, hanem az több egymásra következő események létrejöttétöl tétetik függővé, akkor a játék megkezdése előtt ugyan szintúgy az összetett valószinüség szorozva a nyereménynyel adja meg a reményt, vagy a betétel nagyságát, de ezen remény a játék folyta alatt, az illető események létre jötte vagy létre nem jötte által változni fog, mely körülményre kivált akkor kell figyelemmel lenni, ha a játék megszakasztatván, a betételek ismét szétosztandók volnának.

Igy például ha A és B egy oly játékra, melynél mindkettőre a nyerési valószinüség $= \frac{1}{2}$ azon feltétellel tettek be mindegyikök 1 forintot, hogy a betét azé leend, ki előbb 3 játszmát fog nyerni. — A már nyert két játszmát, B pedig csak egyet, midőn a játék félbeszakad, és a betételek ismét szétosztandók. Kérdés mennyit kap mindegyik?

Ha A a jövő játszmát megnyerte volna, akkor az övé lett volna a 2 forint nyereség is, ebbeli reménye tehát $= \frac{1}{2} \cdot 2 = 1$; ha azonban a következő játszmát elveszti, azért még lehet reménye a betételre, az által, hogy az ötödik játékot fogja megnyerni; ezen remény tehát $= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot 2 = \frac{1}{2}$; A-nak összes reménye tehát $= 1{\cdot}5$. Hogy B nyerje meg a betétet, annak két játszmát egymásután kell nyerni, minek valószinüsége $= \frac{1}{4}$; reménye tehát $= \frac{1}{4} \cdot 2 = 0{\cdot}5$. A és B reménye együttvéve $1{\cdot}5 + 0{\cdot}5 = 2$, egyenlő az összes nyereménynyel mint lenni kell.

21. Fordítva, ha ismeretes a nyeremény, úgy szinte a nyerési valószinüség, könnyen meghatározható a betét, vagy a remény értéke is, miután

$$b = w.\ N.$$

Ha például valaki ki jelenleg 30 éves, életét akkép kivánná négy évre biztosítani, hogy ha ezen idő előtt elhalna, a biztosító-társaság örököseinek 1000 frtot fizessen, kérdés mily összeget kell neki a biztositó-társulatnál betenni?

Alapul véve Fényes halandósági táblázatát, 436 30 éves egyén közül 431 éri el a 31-ik korévet, 426 a 32-iket, 421 a 33-ikat, és 416 a 34-iket. Ennélfogva annak valószinüsége, hogy az illető 30 éves az 1-ső év folytán elhal $= \frac{5}{436}$, hogy a 2-ik, 3-ik vagy 4-ik év folytán hal el, szinte mindegyre $\frac{5}{436}$, minthogy a felvett táblázat szerint mind a négy év folytán 5 egyén hal el évenkint. Ezen valószinüségek mellett azután megnyerheti az 1000 forintot, melyet azonban a biztositó bank nem most fizeti, hanem a netaláni halál bekövetkezte után; miért is még a nyerendő összeget le kell számitolni az illető évek sorára, és így a betét volna, ha 5%-kot veszünk számításba:

$$b = \frac{5}{436} \cdot \frac{1000}{1{\cdot}05} + \frac{5}{436} \cdot \frac{1000}{(1{\cdot}05)^2} + \frac{5}{436} \cdot \frac{1000}{(1{\cdot}05)^3} + \frac{5}{436} \cdot \frac{1000}{(1{\cdot}05)^4},$$

$$= \frac{5000}{436}\left[\frac{1}{1{\cdot}05} + \frac{1}{(1{\cdot}05)^2} + \frac{1}{(1{\cdot}05)^3} + \frac{1}{(1{\cdot}05)^4}\right]$$

$$= \frac{5000}{436}\left[\frac{1 - \frac{1}{(1{\cdot}05)^4}}{0{\cdot}05}\right] = 40{\cdot}66.$$

Az illető biztosítási díja tehát 40·66 forint volna. Ezen díj természetesen csupán tiszta díj, vagyis olyan, melybe a biztosítási intézet költségei számításba véve nincsenek, miért is gyakorlatban az ily módon kiszámított díjak még bizonyos százalékokkal szoktak emeltetni.

22. A nyeremény és nyerési valószinüség szorzata a mennyiségtani reménynyel vagyis a betéttel semmiféle nyilvános játékban sem egyenlő, először azért, mert a banktartóknak bizonyos kiadásokra, helyiségek bérlésére, egyének fizetésére stb. van szükségök, másodszor mivel azok azonfelől biztos és gyakran tetemes nyereségben kivánnak részesülni. Természetes, hogy a nevezett költségeket, úgy szinte az említett nyereséget is a játszó közönség fizeti, mely annyival inkább van hátrányban, mennél kisebb a betét valódi értéke a mathematikailag meghatározotthoz képest.

Így például határozzuk meg, mennyit ér a kis sorsjátékba (lotteria) betett egy forint a játék szokásosabb módozatai szerint.

1-ör: Az extratto. Valaki kijelöl egy számot, és ha az a jövő húzásnál kihúzatik, kap az illető 14 forintot. — Miután minden húzásnál 90 közül 5 szám húzatik, azért a kijelölt szám húzásának valószinüsége $= \frac{5}{90} = \frac{1}{18}$, tehát a remény értéke:

$$b = 14 \cdot \frac{1}{18} = \frac{7}{9} = 0{\cdot}777,$$

tehát a banktartó nyeresége, valamivel több mint 22%.

2-or: A nominato. Valaki kijelöl egy számot, és egyszersmind a húzás számát is, a melyen a kijelölt számnak meg kell jelenni. — Itt a valószinüség $\frac{1}{90}$, a fizetett összeg 67 forint, tehát

$$b = 67 \cdot \frac{1}{90} = \frac{67}{90} = 0{\cdot}744,$$

tehát a banktartó nyeresége több mint $25\frac{1}{2}$%.

3-or: Az ambo solo. Valaki kijelöl 2 számot, s ha mindakettő kijön kap 240 forintot. Ambo létezik összesen $\frac{90.89}{1.2}$, de 5 szám húzatván ki, ezek között van $\frac{5.4}{1.2}$ ambo, tehát a a remény értéke:

$$b = \frac{5.4.}{90.89} \cdot 240 = \frac{160}{267} = 0{\cdot}599$$

tehát a banktartó nyeresége 40%.

4-er: A legszokottabb játszási módozat, kivált a szegényebb sorsuaknál az úgynevezett amboterno; melynél valaki 3 számot jelöl ki, s melynél a betett összeg egy része, szokás szerint 5 kr. az ambóra fordíttatik, a többi pedig a ternóra, mely azután 4800-szorosan fizettetik vissza.

Az ambo valószinüsége $\frac{5.\ 4}{90.\ 89}$; minthogy pedig a megtett három szám között 3 ambo van, az ambora szánt 5 kr. is 3 részre oszlik, és így egy ambóra jut $\frac{5}{3}$, mely azután 240-szeresen fizettetik vissza, miért is ha valaki 3 szám közül kettőt eltalál, kap $\frac{5}{3} \cdot 240$ kr. $=$ 4 frtot.

Miután továbbá a kihúzott 5 szám között $\frac{5.\ 4.\ 3}{1.\ 2.\ 3}$ ternó is van, ennek valószinüsége $\frac{5.\ 4.\ 3}{90.\ 89.\ 88} = \frac{1}{11748}$, a visszafizetés 4800-szoros lévén, a betett 95 krért fog kapni 4560 frtot, s miután végre az eltalált 3 szám között szinte 3 ambót is eltalált, ehhez járul még 12 forint, úgy hogy ez esetben fizettetik 4572 frt. A remény értéke tehát:

$$
\begin{aligned}
b &= 3 \cdot \frac{5.\ 4}{90.\ 89} \cdot 4 + \frac{5.\ 4.\ 3}{90.\ 89.\ 88} \cdot 4572 \\
&= 0{\cdot}0299 + 0{\cdot}3901 \\
&= 0{\cdot}42
\end{aligned}
$$

a banktartó nyeresége tehát 58%.

5-ször: A ternosecco. Valaki megjelöl 3 számot, melyeket ha eltalálja, a betételt 4800-szorosan kapja vissza. A valószinüség ez esetben $\frac{1}{11748}$ lévén, lesz a betét értéke:

$$
b = \frac{4800}{11748} = 0{\cdot}409
$$

tehát a banktartó nyeresége 59%.

6-szor: Ezen módozatokon kivül szokás még 4 számot megtenni. Miután azonban a magyarországi és osztrák kis sorsjátékokban quaterno nem fizettetik, a négy szám tevése úgy tekintetik, mintha az illető négy ternót tett volna. A betett 1 frtból leszámíttatik 10 kr. az ambókra, melyet ha eltalál, kap 4 frtot, minden ternóért pedig a betét 4800-szeresét.

E szerint a betét értéke három részből áll, — ugyanis vagy eltalál 2 számot, melynek valószinüsége, miután 4 szám között 6 ambó van, $= 6 \cdot \frac{2}{801} \cdot$ és ez esetben kap 4 forintot, vagy eltalál 3 számot, melynek valószinüsége, miután 4 szám között van 4 ternó $= 4 \cdot \frac{1}{11748}$, és ez esetben kap $\frac{0{\cdot}90}{4} \cdot 4800 + 3.4 = 1092$ forintot, végre ha eltalálja mind a négy számot, melynek valószinüsége $\frac{5.4.3.2}{90.89.88.87} = \frac{1}{511038}$, akkor kap 4 ternót $= 4 \cdot \frac{0{\cdot}90}{4} \cdot 4800$; és 6 ambot, 6.4 forintot, összesen 4344 forintot; a betét értéke tehát:

$$b = 6 \cdot \frac{2}{801} \cdot 4 + 4 \cdot \frac{1}{11748} \cdot 1092 + \frac{1}{511038} \cdot 4344$$
$$= 0{\cdot}06 + 0{\cdot}372 + 0{\cdot}008 = 0{\cdot}44$$

a banktartó nyeresége tehát 56%.

Végre 7-szer valaki tesz 5 számot amboternó. Ez esetben a betétből 17 kr. szokott számíttatni az ambókra, a többi a ternókra. Quaterno vagy Quinterno nem dijaztatik külön. Az értékmeghatározás itt a következő : a megtett 5 szám között van 10 ambo, egyre jut tehát 1.7 kr. visszafizetés 240-szer, tehát az ambóért fog kapni 4.08 frtot, — további 5 szám között van szintén 10 terno, egyre jut 8·3 kr., visszafizetés 4800-szoros, tehát a ternóért fizettetik 398.40 frt.

Ha tehát az illető eltalál 2 számot, minek valószinüsége $10 \cdot \frac{2}{801}$, akkor kap 4·08 forintot, ha eltalál 3 számot, minek valószinüsége $10 \cdot \frac{1}{11748}$, akkor kap 398.40 frtot a ternóért, és 12.24 a 3 amboért, ha eltalál 4 számot, minek valószinüsége: $5.\frac{1}{511038}$, akkor kap 1593.60 frtot a 4 ternoért, és 24.48 frtot a 6 amboért, végre ha eltalálja mind az 5 számot, minek valószinüsége $\frac{1}{43,949.268}$, akkor kap 3984 frtot a 10 ternóért, és 40·80 forintot a 10 amboért, e szerint tehát a remény értéke:

$$b = \frac{20}{801} \cdot 4{\cdot}08 + \frac{10}{11748} \cdot 410.64 + \frac{5}{511038} \cdot 1618{\cdot}08 +$$
$$+ \frac{1}{43,949.268} \cdot 4024{\cdot}80$$
$$= 0{\cdot}102 + 0{\cdot}35 + 0{\cdot}016 + 0{\cdot}000$$
$$= 0{\cdot}468,$$

tehát a banktartó nyeresége 53%.

23. Az előbbi pontban talált eredmények eléggé mutatják, mennyire van hátrányban a kis sorsjátékban játszó közönség, mi annál sajnosabb, hogy a betételek tetszőleges csekély összegre leszállítása által főleg a szegényebb sorsuak vesznek abban részt, kiknél azután a kilátásba helyezett nagyobb összeg reménye által, a munka nélküli meggazdagodás hajlama sajnos módon növeltetik.

A közép osztály a kis sorsjátéknak hátrányait és káros voltát kezdi belátni, és ennek folytán úgy látszik a részvét ez osztályban lankad, de e helyett egy új játékmód, az úgynevezett igérvények (promessen) játéka kezd annál nagyobb mérvben terjedni. Czélszerü lesz tehát megvizsgálni, mennyi előnyt nyujt ezen új játékmód a játszó közönségnek.

A dolog lényege röviden a következőkből áll. Az állam, vagy valamelyik nagyobb birtokos kölcsönt vesz fel a közönségtől, melynek kisebb összegekről szóló kötelezvényeket ád a kölcsön vett összeg erejéig, melyeket azután bizonyos előre meghatározott évek folytán visszavált.

Hogy mely kötelezvények váltassanak évenkint be, az a sorsra bízatik.

Azonfelül a kölcsöntvevő ismerve a közönség játéki hajlamát, a kölcsönért kevesebb, vagy éppen semmi kamatot se fizet, hanem a helyett némely szinte a sors által meghatározandó kötvényeket tetemes nyereségekkel köt össze.

Ennek folytán tehát évenkint, néha egy évben többször is sorsjáték rendeztetik el, a melyben bizonyos számu kötelezvények kihúzatnak, azok egy része nyereménynyel, a többi az eredeti összeggel váltatik vissza.

Az igérvények eszméje pedig abban rejlik, hogy egy kötelezvény tulajdonos valamely következő egy húzásra a nyeremény jogáról lemond, azt egy bizonyos összegért másra ruházván át, vagyis a nyereségi reményét egy húzásra eladja.

A kérdés tehát, a különböző ilyen sorsolásoknál, menynyit ér az illető igérvény?

Ezek meghatározására csak nehányat a szokottabb értékpapirok közül fogunk vizsgálat alá venni.

1-ször: Az 1868-ik julius 1-én tartott osztrák hitelintézeti sorsjegyek 41-dik húzása. A 42 millióból álló kölcsön 420.000 egyszáz forintos részvényjegyekre vétetett fel. A részvény kamatot nem hoz.

Az előbbi 40 húzás alkalmával már összesen kihúzatott 72.000 részvény, ez alkalommal tehát még a részvényesek száma 348.000.

A jelen húzásnál kihúzatik 1400 részvény, melyért összesen fizettetik	570.050 frt.
a melyből először is levonatván a tőke eredeti értéke	140.000 „
marad nyereményül	430.050 frt.
ebből levonatik 20% nyereményi adó . . .	86.010 „
	344.040 frt.
S miután a fizetés nem tüstént, hanem csak fél év mulva történik, azért ½ évre a kamatot leszámítva	10.321 „
	333.719 frt.

Ezen nyeremény szorozva a valószinüséggel $\frac{1}{348000}$ adja meg a remény értékét, mely tehát

$$b = \frac{333719}{348000} = 0{\cdot}91$$

a remény értéke tehát 91 kr., vagy még az illető bélyegeket és bankárok százalékát tekintetbe véve alig 90 kr., és ezen igérvények a húzás előtt 4 frttal árultattak, s még 50 kr. az igérvény bélyegére, és így a betét minden e g y forintjának értéke:

$$\frac{90.100}{450} = 20 \text{ kr.}$$

A játszó vesztesége tehát 80%.

2-szor. Az 1860-iki államsorsjegyek 17-ik húzása 1868. aug. 1-én. Az egész kölcsön 200 millio, mely is 400.000 kötelezvényre osztatott el, mindegyike 500 frttal.

Az előbbi húzásoknál már 16400 kötelezvény kisorsoltatott, a jelen húzásnál 1200 kötelezvény kerül sorsolás alá. A jelen húzásnáli részvevők száma 383.600.

A visszafizetendő egész összeg a jelen húzásnál	1,190.000 frt.
melyből levonván a kölcsön eredeti értékét 1200 $\times$ 500	600.000 „
	590.000 frt.
levonatván továbbá 20% nyereményi adó . .	118.000 „
marad nyereményül	472.000 frt.
S miután a fizetések csak fél év múlva történnek, levonva 3%-ot	14.160 „
a tiszta nyeremény	457.840 frt.

A nyerési valószinüség $= \frac{1}{383.600}$, tehát a remény értéke:

$$b = \frac{457840}{383600} = 1.19.$$

Ezen húzás igérvényei a húzás előtt 7.50 frt és 50 kr. bélyegért árultattak, miért a betét minden forintjának értéke: $\frac{119.100}{800} = 0{\cdot}148$, vagyis közel 15 kr., a játszó vesztesége tehát 85%.

3-szor. Budaváros kölcsönének 15-ik húzása 1868. jun. 15-én. A 2 millio kölcsön 50.000 sorsjegyre van szétosztva, melyek közül az előbbi húzásoknál már 3800 darab kihúzatván, a jelen húzás részesei 46.200.

A visszafizetés összes értéke	68.300 frt.
melyből a jelen húzásnál kisorsolt 600 darab sorsjegy értéke a 40 frt.	24.000 „
levonatván, marad	44.300 frt.
a félév mulva történő fizetés miatt 3%-ot, úgy szinte 7% adót levonván	4430 „
marad mint tiszta nyeremény	39.870 frt.

a betét értéke tehát $b = \frac{39870}{46200} = 0{\cdot}86.$

Az illető igérvények 2. 50 frt. és 50 kr. bélyegárért árultatván, a betét minden forintjának értéke:

$$\frac{0{\cdot}86.100}{300} = 0{\cdot}286,$$

vagyis közel 29 kr., és a játszó vesztesége 71%.

Ezen felhozott példák, melyeknél korántsem válogattuk ki a legroszabbakat, elegendők lesznek azon meggyőződés szerzésére, hogy a jelenleg oly divatossá vált igérvényekkeli játéknál a közönség még sokkal nagyobb hátrányban van, mint a kis sorsjátékoknál.

24. Az eddigiekben a remény értékét tisztán mennyiségtani szempontból határoztuk meg, miért is a nyereménynek a valószinüséggeli szorzatát mennyiségtani várandóságnak nevezhetjük. Különbözik ettől az egyéni várandóság, melynek lényege a következő figyelmeztetésből tüstént világos leend. Tegyük fel hogy egy bizonyos S összegnek w valószinüség melletti nyerésére, A és B-nek b betétet kell fizetni. A azonban oly gazdag, hogy az S nyeremény legfeljebb feleslegét nagyítaná, B pedig oly szegény, hogy a b betét elvesztése is csak a nélkülözhetlen rovására történhetnék. Könnyü belátni ezen feltételek mellett, hogy ugyanazon S összeg megnyerésére B-nek nem szabad oly nagy összeget koczkáztatni, mint A-nak.

Ugyanazon S összegnek tehát, ugyanazon w valószínüség melletti megnyerésére, pusztán egyéni körülmények és viszonyok miatt, két különböző egyénnél különböző lehet, miért is ezen betét értékét, mely az egyes egyének anyagi körülményeivel van kapcsolatban, egyéni várandóságnak nevezzük.

Miután azonban az egyén gazdagságát nem csupán a tulajdonában levő nagyobb vagy kisebb pénzösszeg, vagy az ezzel egyenértékü birtok képezi, sőt eléggé ismeretes, hogy ugyanazon pénzösszeg két különböző egyén tulajdonában igen is különböző jövedelmet képes eredményezni, sőt hogy az éppen semmi birtokkal sem biró egyén sok esetben, csupán egyéni tehetségében sokkal nagyobb jövedelmi forrással bír, mint a vagyonát értékesíteni nem képes birtok-tulajdonos azért az egyéni várandóság pontos mathematikai meghatározása is lehetetlen.

Jogosan feltehetjük azonban, hogy minden embernek ki megélni képes, bizonyos vagyona van, legyen az bár a közönséges értelemben a legszegényebb is. Így a dúsgazdag birtokában, a tudós tudományában, a müvész müvészetében, a koldus testi gyarlóságában, az adósságokkal halmozott leleményességében, melylyel új adósságokat képes csinálni, birja azon vagyont, melynek segítségével kisebb vagy nagyobb kényelemmel képes megélni.

Ezek következtében Bernoulli Dániel 1747-ben a következő feltételt állította fel: „Egy végtelen kis összegnek egyéni értéke, egyenes viszonyban van annak absolut értékével, és fordított viszonyban az illető egyén egész vagyonával.“

Ha tehát valamely összegnek egyéni értékét x-el, ugyanannak absolut értékét y-nal jelöljük, akkor áll a következő egyenlet:

$$dy = \frac{mdx}{x},$$

melyben m egy közelebbről meg nem határozható állandó. Egészelés által ered:

$$y = mlx + C,$$

hol az egészlet állandóját szinte meghatározni nem lehet, mert arra nézve már szükség lenne legalább egy bizonyos x-re nézve annak egyéni értékét ismerni, de erről a mondottak szerint csak annyit állíthatunk, hogy az semmi, vagy nemleges nem lehet.

Daczára annak, hogy a fentebbi képletben előforduló állandókat közelebbről meg nem határozhatjuk, — az elvet mégis az előforduló egyes esetekben, az egyéni remény meghatározására igen czélszerüen fogjuk használhatni.

Legyen egy egyénnek absolut vagyona A, és kilátása azt x_1 értékkel növeszthetni, vagyis x_1 forintot nyerni, minek valószinüsége w_1 vagy ellenkezőleg x_2-vel csökkenteni, vagyis az x_2 betétet elveszteni, minek valószinüsége w_2; hol ez esetek közül az egyik bizonyosan bekövetkezik, hol tehát $w_1 + w_2 = 1$.

A vállalat, vagy játék után az egyénnek absolut vagyona vagy $A - x_2 + x_1$ vagy $A - x_2$ lévén, annak egyéni vagyona lesz tehát:

$$\text{vagy } ml(A - x_2 + x_1) + C, \text{ vagy } ml(A - x_2) + C,$$

ha tehát ezen értékeket még az illető valószinüségekkel szorozzuk, lesz az illető egyéni vagyona:

$$y = w_1\,[ml(A - x_2 + x_1) + C] + w_2\,[ml(A - x_2) + C]$$
$$= m\,[w_1 l(A - x_2 + x_1) + w_2 l(A - x_2)] + C,$$

mely kifejezést Bernoulli Dániel m e n s u r a s o r t i s-nek Laplace f o r t u n e m o r a l e-nek nevez. Nevezzük az ezen egyéni vagyonnak megfelelő absolut vagyont A_1-nek, akkor áll szintén:

$$y = mlA_1 + C$$

és a két érték összehasonlításából

$$lA_1 = w_1 l(A - x_2 + x_1) + w_2\, l(A - x_2)$$

vagy $$A_1 = (A - x_2 + x_1)^{w1} \cdot (A - x_2)^{w2}.$$

Ha végre ezen várt A_1 vagyonból levonjuk az eredeti A vagyont, megkapjuk az $A_1 - A$ különbségben az egyéni reményt (esperance morale) mely tehát

$$A_1 - A = (A - x_2 + x_1)^{w1}(A - x_2)^{w2} - A$$

vagy $$= A\left[\left(1 + \frac{x_1 - x_2}{A}\right)^{w1}\left(1 - \frac{x_2}{A}\right)^{w2} - 1\right]$$

mely kifejezés ha igenleges, nyereményre, ha nemleges, veszteségre mutat.

Így ha valakinek 100 frt vagyona van, és 10 frt betétellel $\frac{1}{3}$ valószinüséggel nyerhet 30 frtot, tehát $\frac{2}{3}$ valószinüséggel veszthet 10 frtot, akkor:

$$A_1 - A = (120)^{\frac{1}{3}}(90)^{\frac{2}{3}} - 100$$
$$= \sqrt[3]{120 \cdot 8100} - 100$$
$$= -0{\cdot}942$$

tehát még a vállalat előtt 94 kr. veszteség. Holott ha ugyanazon feltételek mellett a nyerési valószinüség volna $^2/_3$, a vesztesége $^1/_3$, akkor

$$A_1 - A = (120)^{\frac{2}{3}}\, 90^{\frac{1}{3}} - 100$$
$$= + 9{\cdot}03$$

Így ha valaki 500 frt vagyonnal bír, és a kis sorsjátékban 1 frtot tesz ambosolóra, hol tehát a valószinüség 240 forintot nyerni $= \frac{2}{801}$, akkor annak egyéni reménye

$$= (739)^{\frac{1}{801}}(499)^{\frac{799}{801}} - 500$$
$$= 499.49 - 500$$
$$= -0{\cdot}51.$$

Vagyis játék előtti vesztesége 51%, holott ugyanezen esetben tisztán mennyiségtanilag véve találtunk mint veszteséget 40%-kot.

25. Találtuk az egyéni reményre nézve

$$A\left[\left(1+\frac{x_1-x_2}{A}\right)^{w1}\left(1-\frac{x_2}{A}\right)^{w2}-1\right]$$

azonfelül a j o g o s játékoknál a betét $x_2=w_1x_1$, a miből továbbá következik, miután $w_2=1-w_1$, hogy $w_1(x_1-x_2)=x_2w_2$, ha tehát ezen értékek segítségével a fenebbi kifejezésből x_1-et kiküszöböljük, lesz még az egyéni remény:

$$=A\left[\left(1+\frac{w_2}{w_1}\frac{x_2}{A}\right)^{w1}\left(1-\frac{x_2}{A}\right)^{w2}-1\right]$$

és ha most a kijelentett műtételeket Newton kéttagu mintája segítségével valóban véghez viszszük, ered:

$$=A\left[-\frac{w_2}{2}\left(1+\frac{w_2}{w_1}\right)\left(\frac{x_2}{A}\right)^2-\frac{w_2}{3}\left(1-\left(\frac{w_2}{w_1}\right)^2\right)\left(\frac{x_2}{A}\right)^3-\right.$$
$$\left.-\frac{w_2}{4}\left(1+\left(\frac{w_2}{w_1}\right)^3\right)\left(\frac{x_2}{A}\right)^4\ldots\right]$$

A jelen kifejtésben méltán feltehető, hogy x_2 vagyis a betét kissebb mint A, tehát kissebb, mint az illető vagyona, minthogy valami vállalatra, vagy játékra senki se fog többet tenni egész vagyonánál; $\frac{x_2}{A}$-val tehát valódi tört, ha még azonfelöl $\frac{x_2w_2}{w_1A}$ szinte valódi tört, a mi csak úgy lehet, ha

$$x_2w_2 < w_1A$$

vagy $w_1(x_1-x_2) < w_1A$

és $x_1-x_2 < A$

vagyis ha a tiszta nyeremény nem nagyobb a vállalkozó vagyonánál, — ez esetben a sor összvergődő, és azonfelül mindegyik tagja nemleges lévén, az összeg, vagyis az egyéni remény is nemleges.

Ha pedig $x_2w_2 > w_1A$, vagyis ha a tiszta nyeremény nagyobb az illető egész vagyonánál, a mi természetesen jogos játéknál csak is akkor lehet, ha a nyerési valószinüség w_1 igen kicsiny, akkor a sor szétvergődő, azt továbbá alkalmazni nem lehet ugyan, de az összeg még ez esetben is nemleges.

Ezekből tehát következik, 1-ször: hogy minden még oly igazságos játék is káros, és az egyéni remény kisebbítésével van összekötve. 2-szor: hogy ezen kár annál nagyobb, minél kisebb az illető anyagi vagyona. 3-szor: a kár annál nagyobb, minéll nagyobb összegek jönnek koczkázat alá. Végre 4-szer: a mi igen fontos, hogy a káros befolyás annyival inkább növekedik, minél kisebb a nyerési valószinüség. És éppen ezen neme a játékoknak gyakoroltatik leginkább (kis sorsjáték, igérvények stb.), minthogy az illetők a kilátásba helyzett nagyobb összegek elnyerése által csábíttatnak a játékra.

Meg lehet itt még jegyezni azon különös körülményt, ha a jogos játéknál a nyerési és vesztési valószinüség $=\frac{1}{2}$; ez esetben ugyanis az egyéni remény a következő alakban áll elő:

$$=A\left[\left(1+\frac{x_2}{A}\right)^{\frac{1}{2}}\left(1-\frac{x_2}{A}\right)^{\frac{1}{2}}-1\right]$$

$$=A\left[\left(1-\left(\frac{x_2}{A}\right)^2\right)^{\frac{1}{2}}-1\right]$$

$$=-A\left[1-\sqrt{1-\frac{x_2{}^2}{A^2}}\right]$$

ha tehát valaki az ily játéknál fél vagyonát koczkáztatná, akkor $\frac{x_2}{A}=\frac{1}{2}$, tehát egyéni reménye

$$=-A\left(1-\frac{1}{2}\sqrt{3}\right)=-0\cdot134\,A$$

vagyis minden 1000 forint vagyonánál már előre is 134 frt veszteség. Ha pedig valaki az egész vagyonát koczkáztatja, akkor $x_2=A$, és egyéni reménye $=-A$, vagyis még játék előtt veszettnek tekintheti egész vagyonát.

26. Ide tartozik még az úgynevezett Pétervári feladat, mely tulajdonképen az egyéni vagyon és egyéni remény eszméjének alapjául szolgált (1713). A feladat lényege a következő.

A játszik B ellen egy oly játékot, melyben a nyerési valószinüsége $\frac{1}{2}$; és nyer 2 frtot, ha mindjárt az első játéknál nyer; 4 forintot, ha a második játéknál nyer; 8 forintot, ha harmadszor nyer, és így tovább 2^n forintot, ha az n-edik játéknál nyer. — Kérdés, hogy a játék jogos legyen, mennyit kell A-nak a játék előtt betenni?

Ha e játéknál A reményét, vagy a betét nagyságát tisztán mennyiségtanilag határozzuk meg, akkor az egyes valószinüségeket fogjuk az illető nyereményekkel szorozni, és a szorzatokat összeadni, ennek folytán tehát lesz A betéte:

$$b = \frac{1}{2}\cdot 2 + \frac{1}{4}\cdot 4 + \frac{1}{8}\cdot 8 + \cdots \frac{1}{2^n}\cdot 2^n + \cdots$$
$$= 1 + 1 + 1 + \cdots$$

ha tehát a játék n-szer lesz folytatható, akkor A betétele szinte n forint leend.

De ha n igen nagy, vagy éppen végtelen nagy, vagyis ha abban egyeznek meg, hogy A a játékot addig fogja folytatni, míg nyer, akkor n végtelennek lesz teendő, és így e játékra A-nak igen nagy vagy végtelen nagy összeget kellene betenni, holott bizonyosan ily játékra senki se fog nagyobb összegeket koczkáztatni, bár az illető nyeremény szerfelett nagy, ha a nyerés csak a játékok hosszu sora után következnék be.

Tekintve a dolgot az egyéni remény szempontjából, tegyük fel, hogy A-nak anyagi vagyona legyen q, és az a mit e játékra betehet legyen x, akkor a játék után lesz a vagyona

$$(q - x + 2) \text{ vagy } (q - x + 4), \text{ vagy } (q - x + 8) \cdots$$

az illető valószinüségek pedig $\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \cdots$ tehát az egyéni vagyona a játék után

$$y = m\left(\frac{1}{2}l(q-x+2) + \frac{1}{4}l(q-x+4) + \frac{1}{8}l(q-x+8) + \cdots\right.$$
$$\left. + \frac{1}{2^n}l(q-x+2^n) + \cdots\right) + C$$

játék előtt pedig volt egyéni vagyona

$$y = mlq + C$$

hogy tehát a játék igazságos legyen, A egyéni vagyonának változást szenvednie nem szabad, ennek folytán tehát a két érték összehasonlítása által ered:

$$q = (q - x + 2)^{\frac{1}{2}}(q - x + 4)^{\frac{1}{4}} \cdots (q - x + 2^n)^{\frac{1}{2^n}} \cdots$$

Ezen egyenletből ugyan x-et közvetlen meghatározni nem lehet, azonban közvetítve Laplace szerint a következőleg lehet eljárni.

Legyen $q - x = p$ és $\frac{1}{p} = \alpha$

akkor az előbbi egyenlet a következőbe megy át:

$$q = p^{\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\cdots}(1+2\alpha)^{\frac{1}{2}}(1+4\alpha)^{\frac{1}{4}}(1+8\alpha)^{\frac{1}{8}}\cdots(1+2^n\alpha)^{\frac{1}{2^n}}\cdots$$

vagy $$q\alpha = (1+2\alpha)^{\frac{1}{2}}(1+4\alpha)^{\frac{1}{4}}(1+8\alpha)^{\frac{1}{8}}\cdots(1+2^n\alpha)^{\frac{1}{2^n}}\cdots$$

de $$q\alpha = (p+x)\alpha = p\alpha + x\alpha = 1 + \alpha x$$

tehát $$x = \frac{1}{\alpha}\left[-1+(1+2\alpha)^{\frac{1}{2}}(1+4\alpha)^{\frac{1}{4}}\cdots(1+2^n\alpha)^{\frac{1}{2^n}}\cdots\right]$$

s miután a zárjel közti szorzók kitevője folyvást kisebbedik, azért ezen szorzók annyival inkább fognak közeledni az egységhez, minél nagyobb n, ha tehát egy tetszőleges α-át felveszünk, logarok segítségével x könnyen ki lesz számítható tetszőleges pontossággal. Miután pedig

$$\alpha = \frac{1}{p} = \frac{1}{q-x}$$

nem egyéb, mint visszás értéke azon értéknek, melynek még a betét után A vagyonában kell maradni, minden ily felvett maradékhoz kiszámítható, mennyivel volt az a betét előtt nagyobb, tehát ezen nagyobbított értékből, mint A-nak eredeti vagyonából mennyit volt szabad ezen játékra koczkáztatni.

Így ha azt akarjuk tudni, hogy mit szabad jogosan annak ezen játékra tenni, kinek vagyona a betét után még 1000 frt legyen, akkor ez esetben $q - x = p = 1000$, $\frac{1}{p} = \alpha = 0{\cdot}001$ és a számítás végbe víve leend $x = 10{\cdot}984$, vagyis kinek vagyona 1010·984 frt. az ezen játékra szánhat 10·98 forintot.

Laplace szerint ha $q - x = 100$, akkor $x = 7.89$, ha $q - x = 200$, akkor $x = 8.78$, szerintünk $q - x = 1000$-nél meg csak $x = 10{\cdot}97$, miből látható, hogy a vagyon tetemes nagyításánál is a betét csak igen keveset növekedik.

A legkisebb négyzetek elmélete.

Az észleleti hiba.

1. A természettudományok alapköve az észlelet, s minél pontosabb ez, annál nagyobb biztossággal lehet megnyugodni azon törvényekben, melyeket ezen észleletekből következtetünk.

Az észlelet tökélesedése a leghatalmasabb előmozditója a tudománynak, de viszont a tudomány haladása által tökélesül az észlelet.

Azonban az észleletnek egész tökélyre vitele, gyarlóságunk okozta korlátok által akadályozva van, érzékeink ugyanis korántsem tökélyesek, műszereink, melyeket használunk, bár azok az utóbbi időkben tetemes érzékenységgel látvák el, még korántsem érték el a tökély legfőbb fokát, górcsöveink, melyek ezerszeres nagyításban állítják elénkbe a természet eddig elrejtett titkait, csak azon meggyőződésre juttattak, hogy számtalan többnek birtokába jutni lehetetlen. Ehhez járulnak még az észlelet megszámíthatlan mellék körülményei, a világosság foka, a mérséklet változása, az észlelő kedélye, stb., stb.

Mindezekből világos, hogy bármely észlelet is egészen pontos soha se lehet, és valóban ha ugyanazon észleletet ugyanazon körülmények között is többször ismételjük, mindenkor tapasztalni fogjuk, hogy a nyert eredmények egymással nem tökéletesen egyeznek, hanem hogy azok egymástól kevesebb vagy nagyobb mértékben eltérnek.

A gyakorlott észlelő bizonyosan igyekezni fogja elhárítani mind azon okokat, melyek az észleletre hibás befolyással lehetnének, számításba fogja venni a használt műszereinek állandó hibáit, igyekezni fogja a mérséklet, légnyomás stb. befolyásait a mennyire lehet tekintetbe venni, — de mindemellett is az észlelet még sem lesz ment oly hibáktól, melyeket számításba venni éppen nem volt lehetséges, sőt melyek lételét nem is gyanítottuk.

2. Még ezelőtt csak egy századdal is, midőn észleleti műszereink és egyéb eszközeink hasonlítva azok jelen állásához, csak igen kevéssé voltak érzékenyek, az azok segít-

ségével nyert észleletek se birhattak a tökélynek azon fokával, mint jelenleg. Azon mellőzhetlen hibák nagysága miatt, melyeket a müszer tökéletlensége hozott, vagy hozhatott létre, az egyéb számtalan apró befolyásokat tekintetbe venni felesleges volt. Midőn azonban jelenleg az idő vagy szögmérő müszereink még egy másodperczнél nagyobb pontosságot nyujtanak, a mellékes befolyások is hasonlíthatlanul nagyobb fontossággal bírnak; szükség volt tehát egy számitási módról is gondoskodni, mely által ezen hibák befolyása a lehetőleg elháríttassék.

E végre minden létrejött észleleti hibát úgy fogunk tekinteni, mint betüszámtani összegét számtalan sok apró hibaelemeknek. Mind ezen elemeket végtelen kicsinyeknek, és egymásközött egyenlőknek tételezzük fel, melyek azonfelül éppen oly könnyen lehetnek igenlegesek, mint nemlegesek. Minél több ily elemi hiba fog müködni ugyanazon irányban, annál nagyobb leend a betüszámtani összeg is, tehát annál nagyobb a reménylett észleleti hiba is. A lehető legnagyobb észleleti hiba, melyet ezen általános kifejtésnél szintén végtelen nagynak tekinthetünk, akkor áll be, ha valamennyi elemi hiba ugyanazon irányban müködik.

Tegyük fel, hogy bármely hiba létrehozására összesen n elemi hiba müködik, hol n egy igen nagy szám, akkor a következő esetek fordulhatnak elő : lehet valamennyi elemi hiba nemleges, akkor a létrejött észleleti hiba lesz $=n\triangle x$, ha az egyes elemi hibát $\triangle x$-el jelöljük, de ennek lehetősége csak is $=1$; lehet továbbá $(n-1)$ elemi hiba nemleges, és 1 hiba igenleges, akkor az észleleti hiba $-(n-2)\triangle x$, melynek lehetősége, az előbbihez viszonyítva $=n$, miután az n elem közül mindegyik lehet igenleges, míg a többi nemleges; lehet azután $(n-2)$ elemi hiba nemleges, és kettő igenleges, ez esetben azután a létrejövendő hiba $-(n-4)\triangle x$, és annak viszonyos lehetősége $=\frac{n(n-1)}{2}$, miután n elem között $\frac{n(n-1)}{2}$ kettes létezik, és így tovább.

De fordítva is, ha valamennyi elemi hiba igenleges, akkor az észleleti hiba $n\triangle x$, és ennek lehetősége szinte $=1$, ugyszinte ha csak egy hiba nemleges, a többi igenleges, akkor az észlelet hibája $(n-2)\triangle x$, és a viszonlagos lehetősége $= n$, az $(n-4)\triangle x$ hibának viszonlagos lehetősége $= \frac{n(n-1)}{2}$, és így tovább; ha tehát egy tetszőleges x hibát veszünk fel, melynél r elemi hiba működött nemlegesen, és $(n-r)$ igenlegesen, akkor a hiba:

$$x = (n-2r)\triangle x \ldots 1)$$

annak viszonylagos lehetősége pedig:

$$y = \frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-r+1)}{1.\,2.\,3\cdots r,} \ldots 2)$$

ha pedig még e g y elemmel többet veszünk nemlegesen, akkor az eredő hiba:

$$x' = (n-2r-2)\triangle x = x - 2\triangle x,$$

és a viszonylagos lehetősége:

$$y' = \frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-r+1)(n-r)}{1.\,2.\,3\cdots r.\,(r+1)}$$

$$= y.\frac{n-r}{r+1}$$

az egymásra következő két hiba különbsége:

$$x - x' = 2\triangle x$$

éppen így az egymásra következő lehetőségek különbséget $2\triangle y$-al jelölvén lesz:

$$2\triangle y = y - y\frac{n-r}{r+1}$$

$$= y\left(\frac{2r+1-n}{r+1}\right)$$

$$= -y\frac{n-2r-1}{r+1}$$

és $n-2r$ helyett az 1) alatti egyenletből annak értékét helyettesítvén, még tovább:

$$\triangle y = -y.\frac{x-\triangle x}{2(r\triangle x + \triangle x)} \ldots 3)$$

A jelen kifejtésben n az elemi hibák száma, igen nagy, vagy végtelen nagy számnak tekintetvén, az egyes viszonylagos lehetőségek is végtelen nagy alakban fordulnak elő. De miután a lehetőségek éppen csak is viszonlagosak, azért véges kifejezések megnyerése tekintetéből képzelhetjük azok mindegyikét egy tetszőleges, szinte végtelen nagy, de állandó számmal elosztva.

Engedjük továbbá az egyes elemi hibát $\triangle x$-et kisebbedni egész az elenyészésig, mi által azután $\triangle y$ szinte végtelen kicsinynyé válik, és a fentebbi 3) alatti egyenlet a következőbe megy át:

$$dy = -\frac{xy}{2Qrdx} \cdots 4)$$

hol Q az említett végtelen nagy osztó; r a hiba létrejöttére felvett nemleges elemek száma, mely mint a 4) alatti egyenlet maga is mutatja, szinte végtelen nagynak veendő, minthogy ez által rdx véges, $Qrdx$ pedig végtelen nagy, melylyel osztva a véges xy szorzat, hányadosul a végtelen kis dy-t eredményezi. — Ha tehát még a számlálót és nevezőt dx-el szorozzuk, lesz

$$dy = -y \cdot \frac{2xdx}{4Qr.dx^2}$$

hol már most a nevező $4Q.rdx.dx$, mint a végtelen nagy, véges, és végtelen kis mennyiség szorzata véges, de közelebbről meg nem határozható igenleges állandó, melyet rövidség okáért $\frac{1}{h^2}$-el jelölvén, különbzéki egyenletünk a következőbe megy át:

$$dy = -y \cdot 2h^2xdx$$

vagy

$$\frac{dy}{y} = -h^2.2xdx$$

és egészelés által:

$$l\frac{C}{y} = -h^2x^2$$

és y szerint feloldva:

$$y = C \cdot e^{-h^2x^2} \cdots 5)$$

hol e a természetes logarok alapszámát, C pedig az egészlet állandóját jelenti, mely természetesen egészen tetszőleges marad, miután y a talált képletben csak is a tetszőlegesen felveendő x hibának viszonlagos lehetőségét állítja elő. Ha tehát y_0-nak nevezzük azon lehetőséget, mely az $x = 0$ hibának feleljen meg, akkor a tetszőleges x hibának lehetősége y_0-hoz viszonyítva a következő képlet által fog adatni:

$$y = y_0\, e^{-h^2x^2} \cdots 6).$$

3. Ha a talált egyenletnek mértani jelentőségét elemezzük, akkor az x hibát metszéknek, a megfelelő lehetőséget y-t, rendezőnek fogjuk tekinteni, és a következő eredményekre jutunk:

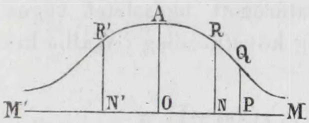
1-ször: x-nek bármely értékére y csakis igenleges lehet; semmivé pedig csak akkor, ha $x = \infty$.

2-szor: Az egyenlő nagyságú igenleges vagy nemleges x-nek ugyanazon y felel meg, vagyis ugyanazon nagyságu hiba éppen oly könnyen lehet igenleges mint nemleges.

3-szor: y_0 értéke tetszőleges, és ha ez 2, 3 ... n-szer nagyobbnak vétetik, az illető lehetőségök is 2, 3 ... n-szer nagyobbakká válnak, de az egymás közti viszony nem változik.

4-szer: mentől nagyobb h, annál sebesebben kisebbednek ugyanazon x értéknél a megfelelő y értékei, vagy mentől nagyobb h, annál inkább kisebbedik ugyanazon hibának lehetősége, vagy a mi mindegy: annál pontosabb az észlelet, miért is h az észleletek pontossági mérfokának neveztetik.

5-ször az egyenlethez tartozó görbe vonal alakját illetőleg, ha $M'M$ a metszéki tengely, O a kezdőpont, akkor $OA = y_0$ a tetszőlegesen felvett $x = 0$ hibának lehetősége, a melyhez van azután viszonyítva egy bármely $OP = x$ hibának lehetősége $PQ = y$. A vonal maga a metszéki tengely felett mind a két irányban a végtelenbe nyúlik, az X tengely maga lévén a vonalnak végérintője úgy az igenleges, mint a nemleges oldalon. A legmagasabb A pont közelében a vonal homoruságát fordítja az X tengely felé, a távolabbi pontoknál pedig domboruságát; az átmenetet a homoruságból a domboruságba képezik az R, R' pontok, melyeknél a görbület semmi. Az illető metszékek meghatározására csak a második különbzéki hányados lesz egyenlőnek teendő a semmivel, és a nyert egyenletből x meghatározandó, ugyanis:



$$\frac{d^2y}{dx^2} = -2h^2 y_0 e^{-h^2x^2}(1 - 2h^2x^2) = 0$$

és innét $h^2x^2 = \frac{1}{2}$, vagy $x = ON = \frac{1}{h\sqrt{2}}$ ezen értéknél azután $y = NR = \frac{y_0}{\sqrt{e}}$.

4. Valamely hibának valószinüségét megnyerjük, ha annak lehetőségét elosztjuk valamennyi lehetőségek összegével; — ha tehát a hiba-valószinüséget w-vel jelöljük, akkor leend:

$$w = \frac{y}{\Sigma(y)} \quad \cdots 7)$$

vagy ha ezen kifejezés számlálóját és nevezőjét $\triangle x$-el szorozzuk:

$$w = \frac{y\triangle x}{\Sigma(y\triangle x)}$$

és ha $\triangle x$-et a végtelenig kicsinyítjük:

$$w = \frac{ydx}{\int_{-\infty}^{\infty} ydx}$$

és y helyébe a 6) egyenletben talált értéket helyettesítve:

$$w = \frac{e^{-h^2x^2}dx}{\int_{-\infty}^{\infty} e^{-h^2x^2}\,dx} \ldots 8)$$

A nevezőben előforduló határozott egészletet véges alakban előállítani lehet, és pedig következőleg: Wallis kifejtése szerint:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi\, sin^{2m}\varphi = \frac{1.\,3.\,5\,\ldots.(2m-1)}{2.\,4.\,6\,\ldots\ldots 2m} \cdot \frac{\pi}{2}$$

és

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi\, sin^{2m+1}\,\varphi = \frac{2.\,4.\,6\,\ldots\ldots 2m}{3.\,5.\,7\,\ldots 2m+1}.$$

és e két egészlet szorzása által ered:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi\, sin^{2m}\,\varphi \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi\, sin^{2m+1}\,\varphi = \frac{1}{2m+1} \cdot \frac{\pi}{2} \ldots 9)$$

helyettesítsünk φ helyébe egy változót, mely azzal a következő egyenlet által álljon kapcsolatban:

$$sin\varphi = e^{-\frac{t^2}{2m+1}}$$

tehát

$$sin^{2m}\,\varphi = e^{-\frac{2mt^2}{2m+1}}$$

$$sin^{2m+1}\,\varphi = e^{-t^2}$$

és

$$d\varphi = -\frac{2tdt\, e^{-\frac{t2}{2m+1}}}{(2m+1)\sqrt{1-e^{-\frac{2t^2}{2m+1}}}}.$$

a felső határra nézve:

$$\varphi = \frac{\pi}{2},\ sin\varphi = e^{-\frac{t^2}{2m+1}} = 1, \text{ tehát } t = 0$$

az alsó határra:

$$\varphi = 0,\ sin\varphi = e^{-\frac{t^2}{2m+1}} = 0, \text{ tehát } t = \infty$$

helyettesítve mind ezen értékeket a 9) alatti egyenletbe, és egyszersmind mind a két szorzó határait felcserélve, lesz:

$$\int_0^{\infty}\frac{2tdt\,.\,e^{-t^2}}{(2m+1)\sqrt{1-e^{-\frac{2t^2}{2m+1}}}}\cdot\int_0^{\infty}\frac{2tdt\,.\,e^{-\frac{t^2}{2m+1}}e^{-t^2}}{(2m+1)\sqrt{1-e^{-\frac{2t^2}{2m+1}}}}=\frac{1}{2m+1}\cdot\frac{\pi}{2}$$

vagy rövidség okáért tevén $\frac{1}{2m+1}=q$, lesz még:

$$\int_0^{\infty}\frac{2qtdt.e^{-t^2}}{\sqrt{1-e^{-2qt^2}}}\cdot\int_0^{\infty}\frac{2qtdt\,e^{-t^2}.e^{-qt^2}}{\sqrt{1-e^{-2qt^2}}}=q\cdot\frac{\pi}{2}$$

vagy
$$\int_0^{\infty}\frac{2tdt\,e^{-t^2}}{\sqrt{\frac{1-e^{-2qt^2}}{q}}}\cdot\int_0^{\infty}\frac{2tdt\,e^{-(1+q)t^2}}{\sqrt{\frac{1-e^{-qt^2}}{q}}}=\frac{\pi}{2}\cdot\cdot\cdot\cdot 10)$$

ha most ezen kifejezésben q kisebbíttetik a végtelenig, vagy, a mi mindegy, m nagyíttatik a végtelenig, akkor az $\frac{1-e^{-2qt^2}}{q}=\frac{0}{0}$ értéke $=2t^2$ és ebből a gyök $=t\sqrt{2}$, a 10) alatti egyenletből lesz tehát:

$$\int_0^{\infty}\frac{2dt.\,e^{-t^2}}{\sqrt{2}}\int_0^{\infty}\frac{2dt.\,e^{-t^2}}{\sqrt{2}}=\frac{\pi}{2}$$

vagy
$$\left[\int_0^{\infty}dt.\,e^{-t^2}\right]^2=\frac{\pi}{4}$$

és végre
$$\int_0^{\infty}dt.\,e^{-t^2}=\frac{\sqrt{\pi}}{2}\cdot\cdot\cdot\cdot 11)$$

S miután e^{-t^2} függvény igenleges és nemleges t-re nézve ugyanazon értékkel bír, azért:

$$\int_{-\infty}^{\infty}dt\,e^{-t^2}=\sqrt{\pi}$$

ha pedig ebben az egyenletben a változó t helyébe iratik hx, tehát dt helyébe hdx, lesz még:

$$\int_{-\infty}^{\infty}dx\,e^{-h^2x^2}=\frac{\sqrt{\pi}}{h}$$

mely értéket a 8) alatti egyenletben helyettesítvén, leend egy tetszőleges x hiba valószinüsége:

$$w=\frac{h}{\sqrt{\pi}}\cdot e^{-h^2x^2}\,dx\cdot\cdot\cdot\cdot 12)$$

5. A hiba-valószinüségek mértani előállítására ismét a 3-ik pontban előállított görbe vonal szolgálhat, csak hogy most a tetszőleges OA rendező helyett $\frac{h}{\sqrt{\pi}}$ lesz felviendő. Ezen feltétel mellett azután az x hibának valószinüsége azon végtelen kis derékszög területe által adatik meg, melynek magassága az illető rendező, alapja pedig a végtelen kis dx menynyiség.

Hogy egy tetszőlegesen felvett hibának valószinüsége a 12) képlet szerint végtelen kicsiny, természetes, mert valóban csak igen csekély valószinüség van abban, hogy éppen az elkövetett hibát kijelölni képesek legyünk· De a kérdés nem is az szokott lenni, hogy egyik vagy másik hibának mennyi a valószinüsége, hanem inkább, hogy mi a valószinüsége annak, hogy az elkövetett hiba x-nél nem nagyobb.

Ennek meghatározására pedig 0-tól kezdve igenleg és nemleg x-ig az illető valószinüségeket összeadván, lesz a keresett valószinüség:

$$w_1 = \frac{h}{\sqrt{\pi}} \int_{-x}^{x} e^{-h^2x^2}\, dx$$

vagy

$$w_1 = \frac{2h}{\sqrt{\pi}} \int_{0}^{x} e^{-h^2x^2}\, dx \cdots 13)$$

Ha ezen utóbb talált képletben x a végtelenig növesztetik, akkor $w_1 = 1$ mint lenni kell, minthogy bizonyos, hogy végtelen nagy hibát az észleleteknél el nem követhetünk.

6. A 13) alatti képlet által nyert hiba-valószinüség határozott egészlet által adatik, melyet véges alakba kifejteni nem is lehet; de több mód létezik annak értékét sor által közelitőleg meghatározhatni. Legegyszerübb a következő:

Kifejtve az egészlet alatti $e^{-h^2x^2}$ függvény Maclaurin sora segítségével lesz:

$$w_1 = \frac{2h}{\sqrt{\pi}} \int_{0}^{x} dx \left[1 - h^2x^2 + \frac{h^4x^4}{2} - \frac{h^6x^6}{2.\,3} + \cdots\right]$$

és tagonként egészelve

$$w_1 = \frac{2hx}{\sqrt{\pi}} \left[1 - \frac{1}{3} \cdot h^2x^2 + \frac{1}{5} \cdot \frac{h^4x^4}{2} - \frac{1}{7} \frac{h^6x^6}{2.3} + \cdots\right]$$

ezen sor értékét már most minden tetszőleges hx értékre nézve könnyen meg lehet határozni. Miután azonban nekünk nem a hx, hanem csak az x hiba valószinüsége szükséges, azért előbb $h = 1$-nek teendő, mely esetben az illető valószinüségek közvetlen kiszámíthatók, — vagyis a fentebbi sor a keresett valószinüségeket csak a $h = 1$ pontossági lépteknek megfelelőleg adja meg. Ha azonban a pontossági lépték az egységtől különbözik, akkor az egységre talált valószinüségek most is érvényesek ugyan, de csak úgy, ha a hozzátartozó hibák h-val elosztatnak, mert ha a fentebbi sorba hx helyébe iratik t, akkor a nyert valószinüség w_1 jogos marad az $x = \frac{t}{h}$ értékre is.

Így ha a hibák volnának rendre:

0·0, 0·1, 0·2, 0·3, 0·4, 0·5, stb.

akkor az illető valószinüségek az egység pontossági léptékre nézve

0·0; 0·1125; 0·2227; 0·3286; 0·4187; 0·5205; stb., holott ha a pontossági léptek az egységtől különbözik, akkor ugyanezen valószinüségek a következő hibáknak felelnek meg:

$$0{\cdot}0;\ \frac{0{\cdot}1}{h};\ \frac{0{\cdot}2}{h};\ \frac{0{\cdot}3}{h};\ \frac{0{\cdot}4}{h};\ \frac{0{\cdot}5}{h},\ \text{stb.}$$

7. Nagy fontossággal bír a következőkre nézve azon hiba, a melynek valószinüsége éppen 0·5, vagyis azon hiba, melynél a valóban elkövetett éppen oly könnyen lehet nagyobb mint kisebb, s mely is azért valószinü hibának neveztetik. — Már a fentebbiekben láttuk, hogy 0·4 hibának valószinüsége = 0·4187, a 0·5 hibáé pedig = 0·5205, következik tehát, hogy a valószinü hiba 0·4, és 0·5 között fog lenni, és pedig 0·5-höz közelebb, és valóban a fent kifejtett sor segítségével pontos közbesítés által találtatik a valószinü hiba, melyet az egység pontossági léptékre nézve ϱ-val fogunk jelölni:

$$\varrho = 0{\cdot}476936 \ldots\ldots 14)$$

miért is egyéb pontossági léptékre nézve a valószinü hiba:

$$r = \frac{\varrho}{h} = \frac{0{\cdot}476936}{h} \ldots\ldots 15)$$

A jelen egyenletből továbbá következik, hogy $h = \frac{\varrho}{r}$, vagyis hogy a pontossági lépték a valószinü hibával visszás arányban áll. Mentől kisebb tehát a valószinü hiba, annál pontosabb az észlelet. Ezen egyenlet egyszersmind már egy közelítő utat is nyujt éppen a pontosság meghatározására, ha az észleleti hibák ösmerttek. Mert tegyük fel, hogy egy bizonyos észleleti hibák sorát bírjuk, akkor azokat nagyságuk szerint rendezve, kikeressük azt, a melynél éppen annyi van nagyobb, mint kisebb; ez leend (közelítőleg) a kérdésben forgó észlelet valószinü hibája; ha tehát ezzel elosztjuk ϱ-t, megkapjuk a pontossági lépteket is.

Úgy szinte könnyü leend most már azok hibák valószinüségét meghatározni, melyek a valószinü hibák bizonyos részét, vagy többszöröset képezik. Ha ugyanis a 13) alatti képletben hx helyébe iratik t, mi által lesz:

$$w_1 = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^t e^{-t^2} dt \cdots 16)$$

akkor ezen egyenlet minden tetszőlegesen felvett t hibának valószinüségét tüstént megadja az egység pontossági léptékre nézve. De miután:

$$hx = t\text{, és } hr = \varrho\text{, áll szinte}$$

$$\frac{t}{\varrho} = \frac{x}{r}\text{, vagy } x = \frac{t}{\varrho} \cdot r$$

ezen utóbbi egyenlet tehát az x hibát függetlenül a h pontossági léptéktől, mint a valószinü hiba bizonyos részét állítja elő.

Ha tehát a fentebbi 16) alatti egyenlet értékeit $\frac{t}{\varrho}$-ra nézve határozzuk meg, akkor a nyert valószinüség is a valószinü r hibának $\frac{t}{\varrho}$ részéhez fog tartozni.

Így ha azt kivánnánk tudni, hogy mi a valószinüsége annak, hogy az elkövetett hiba a valószinü hibának 0·1 részét túl nem fogja haladni, akkor $\frac{t}{\varrho} = 0{\cdot}1$, tehát $t = 0{\cdot}04769$ mely értékkel a 16) alatti kifejtésből lesz:

$$w_1 = 0{\cdot}0538 \ldots$$

mely valószinüsége annak, hogy a kérdésben levő hiba a valószinü hiba $\frac{1}{10}$ részénél kisebb, vagy más szóval, 10000 észlelet között 538 remélhető olyan, melynél a hiba, valamennyi hibák valószinü hibájánál kisebb.

Az Encke-féle „Berliner astronomisches Jahrbuch" 1834-re megjelent kötetében a 16) alatti egészlet értékei ki vannak számítva, és táblába összeszedve, hol $\frac{t}{\varrho}$ századról századra növekszik, e táblából a következő kivonatot közöljük:

$\frac{t}{\varrho}$	w_1	$\frac{t}{\varrho}$	w_1	$\frac{t}{\varrho}$	w_1
0·0	0·0000	0·6	0·31430	1·5	0·68833
0·1	0·05378	0·7	0·36317	2·0	0·82266
0·2	0·10731	0·8	0·41052	2·5	0·90825
0·3	0·16035	0·9	0·45618	3·0	0·95698
0·4	0·21268	1·0	0·50000	3·5	0·98176
0·5	0·26407			4·0	0·99302
				4·5	0·99760
				5·0	0·99926

Az állandók legvalószinübb értékei.

8. Ha a természettudományokban valamely tünemény törvényét pontos mathematikai képlet által kifejezni nem vagyunk képesek, akkor ezen törvényt rendesen a következő egyenlet által fejezzük ki:

$$Z = a + bz + cz^2 + dz^3 + \cdots$$

hol z egy tetszőlegesen választható változót, $a, b, c, \ldots$ pedig még csak meghatározandó állandókat jelent, vagy általánosabban, ha több a változó:

$$Z = au + bt + cv + \cdots \qquad \cdots 17)$$

hol $u, t, v \ldots$ a független változók, $a, b, c \ldots$ pedig állandók. Az átmenet ez utóbbi képletből az előbbibe egyszerűn az által történik, ha $u = 1$, $t = z$, $v = z^2 \ldots$

A mi pedig az előforduló állandók meghatározását illeti, erre nézve pontos észleletek tétetnek a tetszőlegesen felvett változók különböző értékeinél, — ha tehát annyi észlelet eszközöltetik, a mennyi az állandók száma, akkor a nyert egyenletekből ezeket közönséges algebrai műtételek által meg lehet határozni.

Miután azonban láttuk, hogy a legszorgosban kezelt észleletek is a mellőzhetlen hibák miatt, nem tőkéletesen ponto-