LEIRATI MÉRTAN.

I. RÉSZ.

A VETÜLETTAN.

IRTA

VÉSZ JÁNOS ÁRMIN

mérnök, a kir. József műegyetemnél a felsőbb mennyiségtan és a leirati mértan ny. r. tanára, a magyar és a palermói tudományos Akademia levelező, és a k. természettudományi társulat választmányi tagja.

KIADTA A MAGYAR TUDOMÁNYOS AKADEMIA.

I. FÉL.

23 kőmetszetű táblával.

PEST,

EGGENBERGER FERDINAND,

MAGY. AKAD. KÖNYVKERESKEDŐNÉL.

1865.

Képsík = fekvetületi sík, feklap FVS
vetítősík = függ " " függlap F'VS

Nyomatott Emich Gusztáv, magy. akad. nyomdásznál, Pesten, 1865.

Előszó.

A tudomány gyors léptekkel haladván előre, nekünk valóban megfeszített erővel kell törekednünk, és kétszeres munkásságot kifejtenünk, midőn azt nemcsak haladásában szorgos szemmel kisérjük, hanem még azonfelül az oly súlyosan érzett hiányokat is igyekszünk betölteni.

A magyar tudományos Akademia hazafias buzgalma azonban biztos reményt nyujt arra, hogy rövid idő alatt mind a két feladatnak elégtétetni fog; mert midőn egyrészt évkönyvében és értesítőjében a tudomány újabb vívmányaival foglalkozva megmutatja, hogy nem csak a tudomány színvonalán áll, de azt magasabbra emelni is törekszik, — másrészt már eddig is a tudomány legtöbb ágaiban birunk használható kézi könyveket; és épen a még hiányzók egyikének pótlása e munka rendeltetése.

Bár sikerülne, hogy e czélt elérve munkám a haszonvehetőség azon fokát érje el, melyet számára megnyerni erős akaratom, és buzgó igyekezetem volt.

*

A leirati mértan egész terjedelmét a következő részek képezik :

a) a szorosabb értelemben vett leirati mértan, vagyis a vetülettan, mely a térmennyiségeket úgy tanítja előállítani a rajztéren, mintha azokat a szem végtelen nagy távolból tekintené;

b) a leirati mértannak alkalmazása az árnyéktanra;

c) a mértani távlattan, mely a térmenynyiségeket úgy állítja elő, a mint azokat a véges távolban levő szem látja; és végre

d) a leirati mértan alkalmazása a kőmetszetekre; mely részek mindegyike azonban, a többitől függetlenül, külön-külön egy önálló munkát képez.

A jelen munka a vetülettan első felét képezi, mely az egyenes vonalakkal, síkokkal, és az általuk bezárt testekkel foglalkozik; ezt fogja rövid idő múlva követni a második fél, melynek tartalma a görbe vonalak, és a görbe felületek; melylyel egyszersmind a vetülettan be is lesz fejezve.

A mi a vetülettan ezen első felét illeti, abban különös figyelem fordíttatott arra, hogy a nehezebb és összetettebb feladatokat a könnyebbek, és egyszerűbbek előzzék meg; úgy szintén, a mennyire lehetséges volt, a rajzokban a segédvonalak is kihúzattak, hogy azok segítségével a megoldott feladatokat, — a leirati mértanban már kissé gyakorlott, – az ábrák egyszerű megtekintése által is megérthesse a nélkül, hogy a különben elég rövid, és világos szöveget utánolvasni kénytelen volna; kivánván ez által is, a mennyire lehet, ezen tudomány tanulmányozását kellemessé tenni, mert csak így reménylem, hogy e nálunk még oly keveset ismert tudomány valahára gyökeret verve, az óhajtott gyümölcsöt is meghozza.

A leirati mértan ugyanis azonkivül, hogy már magába véve egy szorosan vett tudomány, és több másoknak nélkülözhetlen előlépcsője, egyszersmind a legjobb eszköz is a tanuló képzelő tehetsége bővebb kiképzésére; mely czél elérésére nem eléggé ajánlható épen a vonalak és síkokra vonatkozó feladatok, változtatott adatok melletti többszörös ismétlése, mi által a tanuló a dolog lényegébe hasonlíthatlanul jobban behat, mint az egyszerű utánrajzolás által.

Igen ajánlható továbbá, hogy a kezdő eleinte csak igen lassan haladván előre igyekezzék a pontok és egyenesek legegyszerűbb vetületeit képzelődése elé idézni úgy, mint azok a természetben állanak, nem mint azokat a papiron rajzolva látja maga előtt. Az így eleinte netalán hátráltatott előmenetelt bőven pótolja azután a későbbi gyorsabb haladás.

Igyekeztem minden alapműtételt szorosan indokolni, minden tételt a lehető legegyszerűbben ugyan, de szigorúan bebizonyitani, a nélkül azonban, hogy mélyebb mennyiségtani ismereteket tételeznék fel. A mennyiségtan ismeretét egészen mellőzni nem lehetséges, de szükségtelen is, miután azok, kik a leirati mértant, mint a géptan és az épitészet előtudományát tanulmányozzák, már úgy is birnak rendesen annyi mennyiségtani ismerettel, a mennyi jelen munkám minden nehézség nélküli megértésére szükséges.

Ezeket megemlítvén munkámat a közönség kedvező részvétébe bátorkodom ajánlani; mert csakis a szíves fogadtatásból reménylek új erőt és kitartást meríthetni a kitűzött nagy feladat bevégzésére, melynél nem csak a tudományt kelle nálunk meghonosítani, hanem annak egész sajátságos nyelvét mintegy újjá teremteni.

A Szerző.

A VETÜLETTAN.

I. FÉL.

AZ EGYENES VONALOK, SÌKOK, ÉS AZ ÁLTALOK BEZÁRT TESTEK.

TARTALOM.

I. Szakasz: Pontok, egyenesek és síkok.

II. Szakasz: A háromél leirati feloldása.

III. Szakasz : A síkok által bezárt testekről.

I. Szakasz.

Pontok, egyenesek, és síkok.

1. §.

A vetületi síkok.

A lei~~rati~~ró mértan a térmennyiségeket tanítja úgy rajzolni egy sík lapra, hogy a nyert képből ne csak azoknak alakja lehessen tisztán megismerhető, hanem hogy az előforduló méreteket is könnyen meg lehessen határozni.

A térmennyiségek legegyszerübb előallitási módszere két egymásra merőleges síkot tételez fel, a melyeket *vetületi síkoknak* szokás nevezni. Irányra nézve ezen síkok egyikét képzelhetjük fekmentesnek, a másikát függőlegesnek, és a szerint lehet megnevezésök is, az előbbi: *fekvetületi sík*, emez pedig: *függvetületi sík*; a mely megnevezések helyett azonban gyakran e következő egyszerübbeket fogjuk használni: *feklap*, *függlap*. — A két vetületi sík közös metszési vonalát *vetületi tengelynek*, vagy *alapmetszetnek* nevezendjük.

Rövidség okáért a fekvetületi sík helyett gyakran: *FVS*, a függvetületi sík helyett: *F′VS*, a vetületi tengely helyett pedig, csak *VT* fog előfordulni.

Az emlitett vetületi síkok a tért négy részre osztják. Azon rész, mely a *FVS*-on felől, és a *F′VS*-on elől van, *első negyednek*, azon rész, mely a *FVS*-on felől van ugyan, de a *F′VS* hátulsó oldalán, *második negyednek*; a második negyed alatti rész: *harmadik negyednek*, végre az első negyed alatti rész, mely tehát a *FVS* alá, és a *F′VS* elébe esik, *negyedik negyed*-nek fog neveztetni.

Hogy már most a vetületi síkokat a rajzpapirra előállithassuk, képzeljük magunknak a fekvetületi síkot mozdulatlannak, a függvetületi síkot pedig az alapmetszet körül addig forgatva, míg az előbbivel egybe nem esik. A rajzlapon most már csak egy egyenes vonal lesz látható, mely az alapmetszetet ábrázolja; az e vonal feletti részen képzelendő a *F' VS*-nak felső, és egyszersmind a *FVS*-nak hátulsó része, a *VT* alatt pedig lesz a *FVS*-nak elöli, és a *F' VS*-nak alsó része.

2. §.

A pont vetületei.

1. Legyen *M* (1. ábra) egy első negyedbeli pont. Bocsássunk belőle egy merőlegest a *FVS*-ra, akkor azon *m* pont, a melyben ezen merőleges a feklapot éri, *M* pont *fekvetülete,* maga az *Mm* merőleges pedig ugyan azon pont *fekvetítő vonala* leend. — Épen igy lesz azon *m'* pont, melyben az *M* ponton keresztül a *F' VS*-ra bocsátott merőleges ez utóbbi síkot éri, az *M* pont *függvetülete,* az *Mm'* merőleges pedig a *függvetítő* vonala.

Ha az *Mm*, és *Mm'* vetítő vonalakon keresztül egy síkot képzelünk fektetve, mely a vetületi tengelyt *m''*-ben metszi át, akkor térmértani elvek szerint ezek sík a *VT* re merőleges; ugy szinte az ezen sík, és a vetületi lapok metszése által eredt *mm''*, és *m'm''* vonalak is merőlegesek az alapmetszetre.

Az *Mm*, vagy a vele egyenlő *m'm''* fekvetítő vonal tehát nem egyéb, mint az adott *M* pont magassága a *FVS* felett, a függvetítő *mm''* pedig az adott *M* pont távolát jelenti a *F' VS*-tól.

Képzeljük most már a *F' VS*-ot a *VT* körül addig forgatva, mig az a *FVS*-kal egyesül, akkor ezen forgatás alatt az *m''m*, és *m''m'* vetítő vonalak folytonosan merőlegesek maradnak a *VT*-re, és a két sík egyesülése után egy egyenesbe esnek össze.

A 2-ik ábrában azon eset van előállítva, hol a vetületi síkok már egyesültek, *VT* az alapmetszet, (*m*, *m'*) pedig a térbeni *M* pont vetületei; *m''m* az emlitett *M* pont távolát je-

21. §.

Feladat. Egy adott ponton keresztül vezettessék egy sík merőlegesen egy szintén adott vonalra.

Feloldás. A 26-ik ábrában (a, a') az adott pont, (b, b') az adott egyenes. Fektessünk az (a, a') ponton keresztül egy oly fekmentes vonalat, mely a keresett síkban fekszik; ezen vonal függnyomán keresztül azután csak merőlegest kell vonni a vonal függvetületére, hogy az illető szeldést megkapjuk. — Az említett vonalat pedig könnyű azon megjegyzés folytán szerkeszteni, hogy fekvetülete párhuzamos a keresett fekszeldéhez, és azért merőleges az adott (b, b') vonalra; függvetülete pedig párhuzamos a VT-lyel.

Az (a) ponton keresztül vonatik tehát először (ac) merőlegesen (b)-re, (a') ponton keresztül pedig $(a'\ c')$ párhuzamosan a VT-lyel, a nyert (c')nyomon keresztül vonatik SF' merőlegesen, (b')-re, S ponton keresztül pedig SF mérőlegesen (b)-re; lesznek FS, és $F'S$ a keresett sík szeldéi. — Ha az S pont igen távolra esnék, akkor az (a, a') ponton keresztül még egy vonal vezettetik, mely szinte a keresett síkban fekszik, és a mely a $F'\,VS$-kal párhuzamos.

Az eljárás azonos marad az előbbivel még akkor is, ha az adott pont magában az adott vonalban feküdnék.

22. §.

Párhuzamos síkok.

Párhuzamos síkok szeldéi szinte párhuzamosok. Mert ha az adott két párhuzamos sík a FVS-kal metszetik, akkor a metszési vonalak szinte párhuzamosak; de ezen metszési vonalak képezik épen a síkok fekszeldéjit, azért ezen fekszeldék szinte párhuzamosak. Ugyanez áll a függszeldékről is.

23. §.

Egymásra merőleges síkok.

Egy sík akkor merőleges egy másik adott síkra, ha az egy vonalon megy keresztül, mely az adott síkra merőleges. Természetes, hogy ez által a sík állása még tökéletesen meghatározva nincsen. — Igy ha a ~~24~~ 7-ik ábrában FSF' az adott sík, a melyre egy merőleges sík szerkesztendő, akkor először huzatik egy merőleges vonal (Ab, $a'B'$) a síkra, és meghatároztatnak ennek A, és B' nyomai, a melyek a tengelynek egy tetszőleges C pontjával összekötve, fogják a kivánt merőleges síkot (ACB') meghatározni.

24. §.

Két sík átmetszése.

Két sík metszési vonala mindég egyenes; ennek pedig meghatározására elegendő, ha két pontjának helyzete ismeretes.

A szeldék átmetszési pontjai egyszersmind az adott síkok közös pontjai; miért is a keresett metszővonal meghatározására csak ezen pontok vetületeit leend szükség összekötni.

Igy ha a 28-dik ábrában FSF' és $F_1S_1F_1'$ a két adott sík, akkor a fekszeldék egymást A-ban metszvén, lesznek (A, a') ezen metszési pont vetületei, épen igy (b, B') a függszeldék metszési pontjának vetületei; ha tehát e két pont fekvetületeit, ugy szinte függvetületeit összekötjük, lesznek (Ab, $a'B'$) a keresett átmetszési vonal vetületei.

25. §.

Ha az adott síkok egyike párhuzamos a FVS-kal, akkor a metszési vonal meghatározására csak egy pont szolgálhat, ugyanis a függszeldék átmetszése (b, B') a 29-ik ábrában; minthogy az $F_1'S_1$ síknak fekszeldéje nincsen. De ez esetben a keresett metszési vonal a FVS-kal párhuzamos, minthogy az egy oly síkban fekszik, mely maga párhuzamos a FVS-kal, s minthogy azonfelől a metszési vonalnak az FSF'' síkban is kell feküdnie, azért az ezen síknak (b, B') pontján keresztül vezetett alkotója leend, melynek tehát fekvetülete (bc) párhuzamos az FS szeldével, függvetülete ($B'c'$) pedig beleesik az adott $F_1'S_1$ szeldébe.

26. §.

Ha az adott szeldék az egyik vetületi síkban egymást a rajztéren kivül metszenék, mint a 30-ik ábrában az $F'S$, és lesz AB azon sík fekszeldéje, mely a párhuzamos vonalokon tétetett keresztül. Ha ezen síkot lefordítjuk a feklapba az AB szeldéje körül, akkor az A és B pontok, mint a forgási tengely pontjai változatlanul megmaradván, a (B, b') vonal egy tetszőleges (c, c') pontja C-be fog jutni, ugy, hogy az egyik párhuzamos helyzete a lefordítás után lesz BC; a másik ehhez párhuzamossn volna az A ponton keresztül vezetendő. A vonalak távolára azonban elegendő, ha csak A-ból vonatik merőleges BC-re, lesz AD a keresett párhuzamosak távola.

43. §.

Két nem párhuzamos vonal távola.

Két vonal távola alatt értjük azon egyenest, mely mind a két adottra merőlegesen áll.

Ezen távol meghatározására nézve legyen az 51-dik ábrában A, és B a két adott vonal. Vezessünk az egyik A vonalon keresztül egy oly FF' síkot, mely a másik adott B vonallal párhuzamos, (mi úgy történik, hogy az A-ba felvett tetszőleges r ponton keresztül vezettetik egy párhuzamos vonal B-vel, azután a két egymást metsző vonalon keresztül tétetik a sík); azután a B vonal egy tetszőleges m pontján keresztül egy merőleges bocsájtatik az FF' síkra, ennek metszési n pontján keresztül pedig szinte egy (np) párhuzamos B-vel, lesz ez a B vonal vetülete az FF' síkon, a melynek tehát az A vonalat metszeni kell. Ha most a metsző p pontban emeltetik ismét egy merőleges pq az FF' síkra, akkor ez a B vonalat q pontban metszendi, s könnyü belátni, hogy pq mint az adott két vonalra merőleges, egyszersmind az adott vonalak keresett távola leend.

Ha csupán ezen távol nagysága kivántatnék, akkor az np, és a pq vonalak szerkesztése felesleges, mert $mn=pq$.

44. §.

Hogy tehát az előbbi czikkben előadottak szerint két adott vonal távolát feltalálhassuk, legyenek az 52-ik ábrában (A, a') és (b, b') az adott vonalak, akkor határozva nincsen. — Igy ha a ~~24~~7-ik ábrában FSF' az adott sík, a melyre egy merőleges sík szerkesztendő, akkor először huzatik egy merőleges vonal (Ab, $a'B'$) a síkra, és meghatároztatnak ennek A, és B' nyomai, a melyek a tengelynek egy tetszőleges C pontjával összekötve, fogják a kivánt merőleges síkot (ACB') meghatározni.

24. §.

Két sík átmetszése.

Két sík metszési vonala mindég egyenes; ennek pedig meghatározására elegendő, ha két pontjának helyzete ismeretes.

A sze[...]í-
kok közös [...]á-
rozására c[...]e-
kötni.

19-30 oldalak hiányoznak!

Igy l[...]ott
sík, akkor [...](A,
a') ezen n[...]ék
metszési pontjának vetületei, [...]eit,
ugy szinte függvetületeit összekötjük, lesznek (Ab, $a'B'$) a keresett átmetszési vonal vetületei.

25. §.

Ha az adott síkok egyike párhuzamos a FVS-kal, akkor a metszési vonal meghatározására csak egy pont szolgálhat, ugyanis a függszeldék átmetszése (b, B') a 29-ik ábrában; minthogy az $F_1'S_1$ síknak fekszeldéje nincsen. De ez esetben a keresett metszési vonal a FVS-kal párhuzamos, minthogy az egy oly síkban fekszik, mely maga párhuzamos a FVS-kal, s minthogy azonfelől a metszési vonalnak az FSF'' síkban is kell feküdnie, azért az ezen síknak (b, B') pontján keresztül vezetett alkotója leend, melynek tehát fekvetülete (bc) párhuzamos FS szeldével, függvetülete ($B'c'$) pedig beleesik az adott $F_1'S_1$ szeldébe.

26. §.

Ha az adott szeldék az egyik vetületi síkban egymást a rajztéren kivül metszenék, mint a 30-ik ábrában az $F'S$, és lesz AB azon sík fekszeldéje, mely a párhuzamos vonalokon tétetett keresztül. Ha ezen síkot lefordítjuk a feklapba az AB szeldéje körül, akkor az A és B pontok, mint a forgási tengely pontjai változatlanul megmaradván, a (B, b') vonal egy tetszőleges (c, c') pontja C-be fog jutni, ugy, hogy az egyik párhuzamos helyzete a lefordítás után lesz BC'; a másik ehhez párhuzamossn volna az A ponton keresztül vezetendő. A vonalak távolára azonban elegendő, ha csak A-ból vonatik merőleges BC-re, lesz AD a keresett párhuzamosak távola.

43. §.

Két nem párhuzamos vonal távola.

Két vonal távola alatt értjük azon egyenest, mely mind a két adottra merőlegesen áll.

Ezen távol meghatározására nézve legyen az 51-dik ábrában A, és B a két adott vonal. Vezessünk az egyik A vonalon keresztül egy oly FF' síkot, mely a másik adott B vonallal párhuzamos, (mi úgy történik, hogy az A-ba felvett tetszőleges r ponton keresztül vezettetik egy párhuzamos vonal B-vel, azután a két egymást metsző vonalon keresztül tétetik a sík); azután a B vonal egy tetszőleges m pontján keresztül egy merőleges bocsájtatik az FF' síkra, ennek metszési n pontján keresztül pedig szinte egy (np) párhuzamos B-vel, lesz ez a B vonal vetülete az FF' síkon, a melynek tehát az A vonalat metszeni kell. Ha most a metsző p pontban emeltetik ismét egy merőleges pq az FF' síkra, akkor ez a B vonalat q pontban metszendi, s könnyü belátni, hogy pq mint az adott két vonalra merőleges, egyszersmind az adott vonalak keresett távola leend.

Ha csupán ezen távol nagysága kivántatnék, akkor az np, és a pq vonalak szerkesztése felesleges, mert $mn=pq$.

44. §.

Hogy tehát az előbbi czikkben előadottak szerint két adott vonal távolát feltalálhassuk, legyenek az 52-ik ábrában (A, a') és (b, b') az adott vonalak, akkor

1-ször. Az (A, a') vonal egy tetszőleges (r, r') pontján egy párhuzamos vonatik (b, b')-hez;

2-szor ezen párhuzamoson és az (A, a') vonalon keresztül vezettetik az FSF' sík, mely tehát ekkép a (b, b') vonallal párhuzamos lesz,

3-szor a (b, b') vonal egy tetszőleges (m, m') pontján keresztül bocsájtatik egy merőleges $(mn, m'n')$ az FSF' sikra,

4-szer megkerestetik ezen merőleges átmenete (n, n') az FSF' síkon,

5-ször az igy nyert (n, n') ponton keresztül vonatik egy párhuzamos a (b, b') vonallal, mely az (A, a') vonalat (p, p')-ben fogja metszeni,

6 szor a (p,p') pontban merőleges emeltetik az FSF' síkra, mely a (b, b') vonalat (q, q') pontban fogja átmetszeni, és lesznek pq, és $p'q'$ a keresett távol vetületei, végre

7-szer megkerestetik a $(pq, p'q')$ vonalnak valódi hossza.

45. §.

Ugyanezen feladat egy másik oldására jutunk a vetületi lapok elmozdítása, vagy az adott vonalak forgatása által. *) Ugyanis, ha az 53-ik ábrában az adott vonalak egyike (A, a') a FVS-ra merőlegesen áll, akkor az ily vonalak távola $(An, m'n')$ a feklappal párhuzamos lévén, annak valódi hossza az An fekvetületével lesz egyenlő. Azonfelől a valódi távol An fekvetülete a B vonal fekvetületére szinte merőleges, minthogy An merőleges a B vonal fekvetítő síkjára.

Hogy már most tetszőleges adatoknál az egyik vonal a FVS-ra merőleges legyen, szükséges lesz vagy a vetületi síkokat czélszerűen megváltoztatni, vagy pedig az adott vonalakat, megtartván azok egymás iránti helyzetöket, addig forgatni, mig az egyik a FVS-ra merőleges nem lesz.

46. §.

Két vonal távolának meghatározása a vetületi síkok átváltoztatása által.

Legyen az 54-ik ábrában (a, a') és (b, b') a két adott

*) Olivier, Cours de géometrie déscriptive.

vonal, melyek egyszerűség okáért csak egy betüvel vannak jelölve. Hogy már ezen vonalak egyike, például az (a, a') a FVS-ra merőleges legyen, szükséges lesz a FVS-ot úgy mozdítani el, hogy az, az (a, a') vonalra merőleges legyen; hogy pedig a FVS ezen elmozdítás daczára is a $F'VS$-ra merőleges maradjon, azért előbb szükséges lesz a $F'VS$-ot ugy mozdítani el, hogy az, az (a, a') vonallal párhuzamos legyen.

Ha egy vonal párhuzamos a függlappal, akkor annak fekvetülete párhuzamos a vetületi tengelylyel, miért is először a függlapot úgy kell elmozdítani, hogy az új vetületi tengely párhuzamos legyen az (a, a') vonal fekvetületével, (vagy a mi egyszerűbb, vegyük fel az új $V'T'$ vetületi tengelyt magában az (a) fekvetületben); mi által az adott vonalak fekvetületei változatlanul megmaradnak, az új függvetületeket pedig az által fogjuk megnyerni, ha mindegyik vonalban két pontot választunk, azokat az új vetületi sikra vetítjük, és a magasságaiakat, melyek szinte nem változnak, a régi rendszerből egyszerűen átvisszük. Igy az (a, a') vonalban felvétettek az (A, a') és a (Q, q') pontok, melyeknek új vetületei (A) és (Q, Q'); a (b, b') vonalban pedig felvétettek a (B, b') és a (Q, r') pontok, melyek új vetületei: (B, B') és (Q, R'); úgy hogy ezen első átváltoztatás után az adott vonalak vetületei lesznek: (AQ, AQ') és $(BQ, B'R')$.

Továbbá, ha egy vonal merőlegesen áll a feklapra, akkor annak függvetülete merőleges a vetületi tengelyre; miért is a feklapot most másodszor úgy kell átváltoztatni, hogy az új vetületi tengely az (AQ, AQ') vonal fekvetületére merőleges legyen. Ezen tengely $(V''T'')$ ismét legegyszerűbben magán az A ponton vitetik keresztül merőlegesen AQ-ra; az előbb talált függvetületek ezen átváltoztatásnál megmaradnak, és csak az illető fekvetületeket kell felkeresni. Az egész (A) vonal fekvetülete az A pontra esik, minthogy a vonal maga a feklapra merőleges, a másik (B) vonalban pedig ismét két pontot kell felvenni, és ezeket vetíteni, megtartván a vetületek távolat a $V'T'$ vetületi tengelytől. Igy e vonalban felvétettek a (Q, R') és a (B, B') pontok, melyek új vetülete $(\mathfrak{R}, R')$ és $(\mathfrak{B}, B')$, úgy hogy a két vonal vetületei a második átváltoztatás után lesznek: (A, AQ') és $(\mathfrak{B}\mathfrak{R}, B'R')$.

A két vonal távolának meghatározására most már csak A-ból kell egy merőlegest huzni $\mathfrak{B}\mathfrak{N}$-re, lesz $A\mathfrak{N}$ a keresett távol valódi hossza.

Ha még ezen távolnak vetületeit is meg kellene határozni az eredetileg adott vetületeken, akkor előbb a nyert $A\mathfrak{N}$ vonalat vetítjük merőlegesen a $V''T''$ tengelyre, megjegyezvén, hogy a távol a feklappal párhuzamos lévén, annak függvetülete is párhuzamos a $V''T''$-lyel; a távol vetületei tehát a $V''T''$ tengelyre nézve: $(A\mathfrak{N}, M'N')$; most másodszor az M' és N' pontokat vetítjük merőlegesen a $V'T'$ tengelyre, hol most a távol vetületei: $(mn, M'N')$; végre harmadszor vetítvén az m, és n pontokat az eredeti tengelyre, lesznek $(mn, m'n')$ a távol kivánt vetületei az adott vonalokon.

Probául szolgálhat, hogy az $(mn, m'n')$ vonal valódi hosszának $A\mathfrak{N}$-nel egyenlőnek kell lenni.

47. §.

Két vonal távolának meghatározása a vonalak forgatása által.

Ha ismét az 55-ik ábrában (a, a') és (b, b') a két adott vonal, melyek távola kerestetik, akkor azokat mind addig kell forgatnunk, míg az egyik, például (a, a') a feklapra merőleges nem lesz; hogy pedig ezen forgatásnál a forgási tengely a függlapra merőleges legyen, (mert csak ez esetben fognak az egyes pontok a függlapban köröket leirni) szükséges lesz előbb a vonalakat úgy forgatni, hogy az (a, a') a függlappal párhuzamos legyen.

Felvétetik tehát először egy a feklapra merőleges forgási tengely, legegyszerűbben a fekvetületek közös (o) pontjában, ezen tengely az (a, a') vonalat (o')-ben, a (b, b') vonalat pedig o''-ben fogja átmetszeni, mely pontok tehát a forgás alatt változatlanul megmaradnak. Minthogy pedig az (a, a') vonalnak a függlappal kell párhuzamosnak lenni, azért annak fekvetülete oR párhuzamos lesz a VT-lyel. Ezen átfordítás alkalmával az (a, a') vonal egy tetszőleges (r, r') pontja egy körivet ir le, melynek fekvetülete az rR körív valódi nagyságában, függvetülete pedig a VT-lyel párhuzamos $r'R'$ vonal. Hogy pedig a vonalak viszonyos helyzete megmaradjon, szükség lesz, hogy a (b, b') vonal szintoly szög alatt forduljon el, mint az (a, a') vonal. E végre felvétetik b-ben egy (p, p') pont, ugy hogy op legyen $= or$, a pP köriv pedig $= rR$. A pP köriv függvetülete $p'P'$ szinte párhuzamos lesz a VT-lyel. Az első elfordítás után tehát az (a, a') és (b, b') vonalak vetületei lesznek: $(oR, o'R')$ és $(oP, o''P')$.

Most felvétetik másodszor egy oly forgási tengely, mely a függvetületi lapra merőlegesen áll, legegyszerűbben ismét azon $\mathfrak{A}'$ pontban, a melyben az $(oR, o'R')$ és $(oP, o''P')$ vonalak függvetületei egymást átmetszik; ezen tengely az $(oR, o'R')$ vonalat $(\mathfrak{A}, \mathfrak{A}')$, az $(oP, o''P')$ vonalat pedig $(\mathfrak{A}_1, \mathfrak{A}')$-ben fogja átmetszeni; ezen pontok tehát a forgás alatt változatlanul megmaradnak. Minthogy továbbá az $(oR, o'R')$ vonalnak a feklapra merőlegesnek kell lenni, azért függvetülete merőleges lesz a VT-re, fekvetülete pedig lesz az $\mathfrak{A}$ pont maga. A forgás alatt a vonalak egyes pontjai oly köröket irnak le, melyek síkjai a függlappal párhuzamosak, s melyek vetületei tehát a függlapban valódi nagyságokban fognak láthatók lenni, fekvetületei pedig a VT-lyel párhuzamos egyenesek lesznek. Ha tehát az $o'R'$ vetületben felvétetik egy tetszőleges T' pont, ez a forgás után $\mathfrak{T}'$-be fog jutni; hogy pedig a vonalak viszonyos helyzete megmaradjon, azért az $O''P'$ vetületben szinte felvétetik egy Q' pont, úgy hogy $\mathfrak{A}'T' = \mathfrak{A}'Q'$; a mely pont tehát azon $Q'\mathfrak{Q}'$ körivet fogja leirni, mely a $T'\mathfrak{T}'$ körívvel egyenlő; s melynek fekvetülete a VT-lyel párhuzamos $Q\mathfrak{Q}$ egyenes. A második elfordítás után tehát az adott vonalak vetületei lesznek: $(\mathfrak{A}, \mathfrak{A}'\mathfrak{T}')$ és $(\mathfrak{A}_1\mathfrak{Q}, \mathfrak{A}'\mathfrak{Q}')$.

Most tehát már csak $\mathfrak{A}$-ból kell az $\mathfrak{A}_1\mathfrak{Q}$-ra egy merőlegest bocsájtani, lesz $\mathfrak{A}\mathfrak{N}$ az adott vonalak távolának valódi hossza.

Ha még ezen távolnak vetületei kivántatnának az adott vonalakon, akkor a vonalakat, a rajtok már megjegyzett hosszal együtt vissza kell fordítani az eredeti állásokba. Ugyanis az $\mathfrak{A}\mathfrak{N}$ hossznak megfelelő függvetület a vetületi tengelylyel párhuzamos $\mathfrak{N}'\mathfrak{M}'$. Ha tehát az $\mathfrak{M}'$ és $\mathfrak{N}'$ pontok az $\mathfrak{A}'$ körül vissza fordítatnak az illető vonalak függvetületeire, lesz ezek helyzete M' és N', mely pontokat vetítve megnyerjük az M és N fekvetületeket. Az első visszafordításnál tehát a távol vetületei $(MN, M'N')$. Most másodszor az M és N pontokat kell az O pont körül visszafordítani az illető vonalak fekvetületeire mi által meg lesznek határozva az m, és az n pontok, melyek végre vetítve megadják az m' és n' pontokat, úgy, hogy a távol keresett vetületei lesznek $(mn, m'n')$.

48. §.

Vegyes feladatok.

Adva van a FVS-ban egy háromszög, melyet az egyik oldala körül addig kell forgatni, míg az ellentett szögének fekvetülete derékszöggé válik, kerestetnek a háromszög ezen állásának vetületei.

Feloldás. Ha az adott ABC háromszög az 56-ik ábrában az AB oldala körül forgattatik, akkor a C pont fekvetülete az AB forgási tengelyre merőleges Cc-ben fog mozogni, minthogy pedig az eredő háromszögnek c-nél derékszögűnek kell lenni, azért c-nek azon félkör kerületében is kell feküdni, a melynek átmerője az AB oldal; mi által tehát az AcB fekvetület megvan határozva. — A függvetületet illetőleg az A és B pontok a tengelyre vetítetnek, minthogy AB a feklapban változatlanul megmaradt, a mi pedig a C pont c vetülete feletti magasságát illeti, ezt az által nyerjük meg, ha azon körivet, melyet a C pont forgása alatt leir, előbb a feklapba lefordítjuk, az így talált cC' magasságot azután a c vetületére a tengelytől kezdve felvisszük c'-ig; összekötvén végre c'-et a' és b'-el, lesz $a'b'c'$ a háromszög függvetülete.

49. §.

Kerestetik azon kör középpontja, mely három adott ponton megy keresztül.

Feloldás. Legyenek az 57-ik ábrában (a, a'), (b, b') és (c, c') az adott pontok, akkor ezeken keresztül vezettetik az FSF' sík, a melyet azután a benne fekvő pontokkal együtt a FVS-ba kell lefordítani, mi által az adott pontok valódi helyzete A, B, és C megnyeretik, hol már a kivánt mértani szerkezet végbevitele után megtaláltatik a keresett O pont, de szinte a feklapba befordítva. Ha tehát a síkot ismét az előbbi helyzetébe visszafordítjuk, meg lesznek határozva a keresett középpont (o, o') vetületei. Az eljárás pontosságáról az által lehet meggyőződnünk, ha megkeressük az $(oa, o'a')$, $(ob, o'b')$ és az $(oc, o'c')$ vonalak valódi hosszát, melyeknek mint ugyanazon kör sugarainak egyenlőknek kell lenni.

50. §.

1. Szerkesztendő azon egyenoldalú háromszög, a melynek síkja, és az egyik oldalának fekvetülete meg van adva.

Feloldás. Az 58-dik ábrában FSF' az adott sík, és (ab) a benne fekvő egyenoldalú háromszög fekvetülete; a melynek mindenekelőtt az $(a'b')$ függvetülete fog meghatároztatni. Most már az adott síkot le kell fordítani az egyik vetületi lapba, például mint az ábrában történt, a függlapba, hol az $(ab, a'b')$ vonal helyzete AB leend; megkerestetik itt mértanilag a harmadik C pont, mely a sík visszafordítása által a (c, c') vetületeket fogja meghatározni.

2. Egy síkon meg van adva egy rendes ötszög középpontja, és egyik sarkpontja, kerestetnek az ötszög vetületei.

A feloldás ez esetben egészen azonos az előbbi feladattal.

51. §.

A síknak egy adott pontján keresztül kerestetik a legnagyobb esési vonal.

A sík legnagyobb esési vonala a legrövidebb vonal, melyet a síkon az adott pontból a feklaphoz lehet húzni. Minthogy pedig az adott sík felszeldéje nem egyéb, mint a sík- és a feklap közös vonala, azért a legnagyobb esési vonal lesz azon legrövidebb vonal, melyet az adott pontból a fekszeldéhez lehet vonni. De egy pontból egy vonalhoz a merőleges a legrövidebb, azért a jelen feladat oldására csak az adott pontból kell a fekszeldére merőlegest vonni. — Ha tehát az 59-ik ábrában FSF' az adott sík, és (a, a') a benne fekvő pont, akkor $(ab, a'b')$ lesz a legnagyobb esési vonal.

Ha fordítva meg van adva egy síknak legnagyobb esési vonala, akkor a sík szeldéjét is meg lehet határozni, e végre ugyanis a szeldéket az adott vonal illető nyomain fogjuk keresztül vezetni, a fekszeldét pedig azon felül a vonal fekvetületére merőlegesen.

52. §.

Egy adott vonalon keresztül vezetendő egy sík, mely a feklaphoz adott hajlással birjon.

Feloldás. Ha a 60-ik ábrában (Ab, $a'B'$) az adott vonal, akkor a keresett sík szeldéjének e vonal nyomain kell keresztül menni, és igy még csak egy pontra van szükség, a melyen az egyik szeldét keresztül kell vezetni, és a mely azon feltételből lesz meghatározandó, hogy a sík fekhajlása meg van adva.

Képzeljünk az adott (Ab, $a'B'$) vonal egy tetszőleges (b, B') pontjából a keresett sík fekszeldéjére egy merőlegest bocsájtva, akkor ez, mint a sík legnagyobb esési vonala, ugyanazon fekhajlási szöggel bir, mint maga a sík. Képzeljük továbbá ezen merőlegest a (b, B') pont fekvetítő $B'b$ vonala körül addig forgatva, míg az a függlappal párhuzamos nem lesz, vagy mint az ábrában, míg az a függlapba magába bele nem esik, akkor ezen merőleges fekhajlási szöge α, a valódi nagyságában fog megjelenni, és azért a $B'd$ merőlegest ezen állásában szerkeszteni lehet; és így annak bd fekvetülete nagyságra nézve szinte meg van határozva. Ha most ezen merőlegest ismét visszafordítjuk, akkor a (b, B') pont marad, a (d) lábpont pedig (bd) sugárral egy körívet fog leirni. Minthogy pedig a szóban levő merőleges fekvetülete a fekszeldére merőleges, a fekszelde pedig azonfelől az A feknyomon megy keresztül, azért csak az A ponton kell a (dg) körívhez egy érintőt vonni, lesz ez a keresett sík fekszeldéje. — S könnyü egyszersmind belátni, hogy ezen feladat két feloldással bir, minthogy a körön kivüli pontból ehhez két érintő lehetséges. Ha az adott α szög addig kisebbítetik, mig $bd=bA$, vagyis ha az A feknyom a kör kerületére esik, akkor csak egy feloldás lehetséges, a mely eset akkor áll elő, ha a síknak megadott hajlási szöge épen annyi, mint az adott vonal fekhajlási szöge.

Ha pedig az adott szög a vonal fekhajlási szögénél kisebb volna, akkor a vonal A feknyoma a kör kerületén belől esik, és a feladat megoldása lehetetlenné válik.

53. §.

Adva van egy a fekvetületi síkkal párhuzamos kör $ABCD$, a 61-ik ábrában, melyet az adott (BA, $b'a'$) átmérője körül kell egy adott α szög alatt meghajtani.

Feloldás. Az (A, a') és (B, b') pontok, mint a forgási tengely pontjai mozdulatlanul megmaradnak, míg a kör többi pontjai AB-re merőleges köriveket fognak leirni, melyek megfelelő szöge α. Legmagasabbra fog emelkedni az AB-re merőleges oC sugár C végpontja, a mely azután az eredő kerülék kisebb tengelyének végpontját fogja képezni. Hogy a C pont állását meghatározzuk, fektessük le azon ívet, melyet a C pont forgása alatt leir, egy a feklaphoz párhuzamos síkba, hol a forgási α szög valódi nagyságában áll elő; akkor a C pont C_1-be jut, ha $CoC_1 = \alpha$; ha tehát C_1-et Co-ra vetítjük, meglesz a C pont fekvetülete c-ben, és ha ezt a pontot a függlapra vetítjük, és a C pont cC_1 magasságát a forgási tengely síkja felett felvisszük, megnyerjük a C pont c' függvetületét is. A kör D pontja épen annyira fog sülyedni, mint a mennyire C emelkedett, miért is annak fekvetületét megnyerjük, ha $od = oc$; a függvetületét pedig, ha a d pont vetítő vonalára az ($a'b'$) tengelytől lefelé visszük a C pont cC_1 magasságát. A körnek fekvetülete tehát egy oly kerülék lesz, melynek nagyobb tengelye AB, kisebb tengelye pedig a most meghatározott cd vonal. Ezen tengelyek függvetületei $a'b'$ és $c'd'$; melyek a függvetületben eredő kerüléknek két társ átmérőjét képezik. — Különben a mint a C pont vetületeit feltaláltuk (c, c')-ben, épen úgy a kör bármely más pontjának vetületeit is meg lehet határozni mind a két vetületben; ámbár a kerülék főtengelyeinek ismerete a kerülék pontos meghatározására elégséges.

Hátra van tehát még a függvetületbeni kerülék derékszögü átmérőinek meghatározása; a melyekhez e következő elmélkedés folytán jutunk. Fektessünk az adott (AB, $a'b'$) és a már meghatározott (cd, $c'd'$) vonalokon keresztül egy FSF' síkot, mely tehát a körnek síkja leend, ha az már az α szög alatt meg van hajtva; és valamint a fekkerüléknek nagyobb AB átméröje ezen sík fekszeldéjével párhuzamos, szintúgy a függkerülék nagyobb tengelyének a függszeldével kell párhuzamosnak lenni, mert a feladatot most úgy lehet tekinteni, mintha a kör a függlappal volna párhuzamos, és egy bizonyos tengely körül addig volna fordítandó, mig az FSF' síkba esik, a mely fordításnál tehát a függszeldével párhuzamos körátmérö változatlan marad. Hogy tehát a függkerülék nagyobb tengelyét megnyerjük, csak az o' ponton keresztül kell az SF'-el párhuzamost húzni, és erre o'-töl kezdve mind a két oldalra a körsugarat feltenni p' és q'-ig, lesz $p'q'$ a nagyobb tengely; és ha erre szinte az o' középponton keresztül egy merőleges vonatik, lesz ez a kisebb tengely iránya. — Hogy még ennek nagyságát meghatározhassuk, képzeljünk a (o, o') ponton keresztül az SF' re egy merőleges síkot vezetve, és ezt az $F'o'$ szeldéje körül a függlapba fordítva, lesz O' az (o, o') középpont helyzete a lefordítás után, ha $o'O' = oo''$. Minthogy pedig a metszés a kör középpontján vitetett végre, azért csak a metszési $F'G'$ vonalra O'-böl a körsugár mind a két oldalra felviendő G' és H'-ig, a mely pontok azután a visszafordításkor a h' és g' kisebb tengely végpontjait fogják meghatározni.

54. §.

Egy adott vonalon keresztül vezetendő egy sík, mely egy adott síkra merőleges.

Feloldás. Az adott vonal egy tetszőleges pontjából bocsájtassék egy merőleges az adott síkra, azután vezettessék ezen, és az adott vonalon keresztül egy sík, mely már az adott síkra merőleges lesz, minthogy az egy oly vonalon megy keresztül, mely a síkra merőleges.

Ha az adott sík, mint a 62-ik ábrában, a VT-lyel párhuzamos, akkor azon merőleges vetületei, mely az adott $(aB, A'b')$ vonal egy tetszőleges (c, c') pontjából bocsájtatik a síkra, magok is merőlegesek a vetületi tengelyre, hogy tehát ezen merőleges nyomait fellelhessük, czélszerü lesz azon keresztül egy a VT-re merőleges $F_1S_1F_1'$ síkot vezetni, és azt az F_1S_1 szeldéje körül a feklapba fordítani, lesz F_1F_1'' a lefordított metszési vonal, C a leforditott (c, c') pont; ha tehát CH merőleges $F_1 F_1''$-re, akkor CH azon merőleges leforditása, mely a felvett (c, c') ponton keresztül vonatott az $FSSF'$ síkra; H tehát a feknyom, a V' függnyom pedig a visszaforditáskor V-be fog jutni. Minthogy végre az adott vonal nyomai B és A', azért ezen pontok összekötve a merőleges talált H, és V nyomaival megadják a keresett sík szeldéit.

55. §.

Két vonal derékszög alatt metszi egymást, az egyiknek mind a két, a másiknak pedig csak fekvetülete van megadva, kerestetik ennek a függvetülete.

Feloldás. A 63-ik ábrában $(ab, a'b')$ az egyik vonal, (bc) pedig a másik vonal fekvetülete. Minthogy ezen második vonal az elsőt átmetszi, azért b' egyszersmind a keresett vetülethez is fog tartozni; minthogy továbbá a második vonal az elsőre merőleges, azért az azon síkban fog feküdni, mely a (b, b') ponton keresztül merőlegesen vezettetik az $(ab, a'b')$ vonalra. Szerkesszük tehát ezen FSF' síkot, a melynek függszeldéjében fog azután feküdni a második vonalnak C' függnyoma, úgy hogy $C'b'$ lesz a keresett függvetület.

56. §.

Egy adott ponton keresztül vezettessék egy egyenes vonal, mely két adott egyenest átmetsz.

1-ső *Feloldás.* A 64-ik ábrában (a, a') az adott pont, $(Bc, b'C')$ és $(de, d'e')$ az adott egyenesek. Vezessünk az (a, a') ponton és a $(Bc, b'C')$ vonalon keresztül egy síkot FSF', keressük meg ezen síknak (m, m') átdöfését a második $(de, d'e')$ vonal által, és kössük össze ezen igy talált pontot az adott (a, a') ponttal, lesz $(am, a'm')$ a keresett vonal, mely az (a, a') ponton keresztül menve, mind a két vonalat átmetszi. Hogy az igy talált vonal csakugyan átmetszi a $(de, d'e')$ vonalat, magából érthető, mert épen ezen vonal (m, m') pontját kötöttük össze az (a, a') ponttal; de átmetszi az a $(Bc, b'C')$ vonalat is, mert ez az FSF' síkban fekszik, minthogy ezen keresztül vezettetett a sík, de ugyanazon síkban fekszik a talált $(am, a'm')$

vonal is, minthogy az a síkban fekvő két (a, a') és (m, m') ponton megy keresztül; de két ugyanazon síkban fekvő vonalnak egymást mindig metszeni kell. — Az eljárás pontosságát fogja bizonyitani, ha ezen metsző (n, n') pont vetitő vonalai egy egyenesbe esnek.

2-ik *Feloldás.* Az elv itt ugyanaz, mint az előbbi feloldásnál, csakhogy az FSF' siknak gyakran alkalmatlan szeldéi felkeresése mellőztetik az által, hogy az adott (a, a') ponton keresztül két tetszőleges, de az FSF' síkban fekvő $(ap, a'p')$ és $(aq, a'q')$ vonal huzatik az (a, a') ponton, és a $(bc, b'c')$ vonal két tetszőleges pontján keresztül, a 65-ik ábrában.

Hogy most az FSF' sík átdöfését a második $(de, d'e')$ vonal által meghatározhassuk, képzeljük e vonal fekvetitő síkját megvonva, és határozzuk meg ennek $(pq, p'q')$ metszését az FSF' síkkal, az által, hogy a metszési p, és q pontokat az illető vonalakra vetítjük. Az így talált metszesi vonal a $(de, d'e')$ vonal által az (m, m') pontban vágatik által, melyet tehát, ha az adott (a, a') ponttal összekötjük, megnyerjük ismét a kivánt $(am, a'm')$ vonalat, mely az adottakat az (n, n') és (m, m') pontokban metszi át.

57. §.

Egy adott ponton keresztül vezettessék egy vonal, mely két adott síkkal párhuzamos.

Feloldás. Szerkesszük a két adott sík metszési vonalát, és huzzunk ehhez az adott ponton keresztül egy párhuzamost.

58. §.

Egy adott ponton keresztül vezettessék egy vonal, mely egy adott vonalt átmetsz, és egy adott síkhoz párhuzamos.

1-ső *Feloldás.* Vezessünk a 66-ik ábrában az adott (a, a') ponton keresztül egy $F_1 S_1 F_1'$ síkot, mely az adott FSF' síkkal párhuzamos; határozzuk meg azután ezen sík (m, m') átdöfési pontját az adott $(bc, b'c')$ vonal által, végre kössük össze ezen átdöfési pontot az adott (a, a') ponttal, lesz $(am, a'm')$ a keresett vonal, mely az (a, a') ponton keresztül megy, az adott $(bc, b'c')$ vonalat az (m, m') pontban átmetszi, és az adott FSF'

síkkal párhuzamos, minthogy egy oly síkban fekszik, mely maga is párhuzamos az adott síkkal. Az eljárás pontosságát fogja bizonyítani, ha az adott síkban lehet egy oly vonalat húzni, mely a találttal párhuzamos.

2-ik *Feloldás.* Az $F_1S_1F_1'$ sík szeldéi szerkesztése helyett a 67-ik ábrában ismét egyszerűbben az adott (a, a') ponton keresztül két egyenes huzatik, melyek a meghatározandó síkban feküsznek. E vonalakul legegyszerűbben vétetnek az $(ab, a'b')$, mely az adott sík fekszeldéjével, és $(ac, a'c')$, mely annak függszeldéjével párhuzamos. Hogy most ismét az adott $(de, d'e')$ vonal átdöfését meghatározhassuk azon síkkal, mely az $(ab, a'b')$ és az $(ac, a'c')$ vonalak által vezethető, képzeljük meghuzva a $(de, d'e')$ vonal fekvetítő síkját, ennek azután, és az említett síknak $(bc, b'c')$ metszését a b, és c pontok egyszerű vetítése által lehet megnyerni. Ezen metszési vonal ad adott $(de, d'e')$ vonallal az (m, m') pontban találkozik; a melyet (a, a') ponttal összekötvén, megnyerjük a kivánt $(am, a'm')$ vonalat.

A feladat azonban sokkal egyszerűbbé válik, ha az adott sík az egyik vetületi síkkal összeesőnek vétetik fel, mert ez esetben a keresett vonal egyik vetülete az alapmetszettel lesz párhuzamos, és így közvetlen meghuzható.

59. §.

Egy adott síkon kerestessék fel azon pont, mely három a térben adott ponttól egyenlő távolban van.

Feloldás. Kössük össze az adott három pontot egy háromszöggé, keressük meg (a 49-ik czikk szerint) azon kör középpontját, mely e háromszög körül vezethető, és bocsássunk ezen középpontból egy merőlegest az adott síkra, akkor ezen merőleges és a sík metszési pontja lesz azon pont, mely a kivánt feladatnak eleget tesz.

60. §.

Vezettessék egy síkhoz, adott távolban egy párhuzamos sík.

Feloldás. A 68-ik ábrában FSF' az adott sík, és $\mathfrak{FSF}'$ egy oly sík, mely az adottnak fekszeldéjére merőleges. Forditsuk ezen két sík $F'h$ metszési vonalát az $\mathfrak{S}\mathfrak{F}'$ szelde körül a függvetületi lapba, és emeljünk erre egy tetszőleges p pontban merőlegest, a melyre p-től kezdve mind a két oldalra felvisszük az adott $pm = pn$ távolt. Az m, és n pontokon az $F'h$ metszési vonalhoz vont párhuzamosok lesznek a keresett síkok metszései az $\mathfrak{F}\mathfrak{S}\mathfrak{F}'$ síkkal; ha tehát ezen metszési vonalak az $\mathfrak{F}'\mathfrak{S}$ szelde körül ismét visszaforditatnak, akkor F_{I} és F_{II} ugy szinte F_{I}' és F_{II}' az illető szeldék pontjai, és ha azokon keresztül az adott sík szeldéjivel párhuzamosokat vonunk, ezek a kivánt síkok szeldéjit fogják megadni, és azok a vetületi tengely S_{I} és S_{II} pontjaiban fognak egyesülni.

61. §.

Vezettessék egy adott egyeneshez, adott távolban, egy oly párhuzamos, melynek fekvetülete szinte megvan adva.

1-ső *Feloldás.* A 69-dik ábrában $(ab, a'b')$ az adott vonal, és cd a vele párhuzamos vonal fekvetülete, melynek függvetülete kerestetik. Vezessünk az adott vonal egy tetszőleges (g, g') pontján keresztül egy merőleges FSF' síkot, és képzeljünk ebben a síkban a (g, g') középpontból az adott távollal, mint sugárral egy körívet leirva, akkor ez a keresett párhuzamost metszeni fogja. Fordítsuk azért az FSF' síkot az FS szeldéje körül a feklapba, és a lefektetett G pontból mint középpontból irjuk le valóban az adott távollal az említett kört, mely a keresett vonal adott fekvetületét K pontban metszi, mely tehát a keresett vonal és az FSF' sík átdöfési pontjának lefektetése. Ha tehát a síkot ismét visszafordítjuk, akkor ezen átdöfési pont vetületei lesznek (k, k'), a mely utóbbin át tehát csak a $c'k'$ párhuzamosan lesz $a'b'$-el vonandó, a keresett függvetület meghatározására. — A körnek és az adott fekvetületnek második H metszése visszafordítás által még egy (h, h') pontot fog meghatározni, a melyen keresztül vezetett $h'd''$ párhuzamos a feladatnak egy második oldását fogja megadni.

2-ik *Feloldás.* Ha a vetületi síkokat úgy mozdítjuk el, hogy az adott vonal a fekvetületi lapra merőlegesen álljon, akkor a keresett vonal szinte merőleges lesz a feklapra, és az adott távol a valódi nagyságban lesz szemlélhető. A 70-dik ábrában először a $F'VS$ mozdittatott úgy el, hogy az új alapmetszet $V'T'$ a keresett vonal adott cd fekvetületével összeessék; mi által az adott vonal új függvetülete lesz $\alpha'\beta'$, a keresett vonal függvetülete pedig valahol az új $F'VS$-ban, annak feknyoma tehát a $V'T'$-ben lesz. — Ha most másodszor a FVS mozdíttatik úgy el, hogy az új alapmetszet $V''T''$ az $\alpha'\beta'$ vetületre legyen merőleges, akkor az adott vonal fekvetülete az $\mathfrak{A}$ pontba egyesül, a keresett vonal fekvetülete szinte csak egy pont lesz valahol a $V''T''$ tengelyben.

Ha tehát az adott távollal mint sugárral leirjuk a $\mathfrak{A}$ középpontból a kört, akkor ez a $V''T''$ tengelyt a $\mathfrak{K}$ és $\mathfrak{H}$ pontokban metszi át, mely pontok tehát a keresett vonalak fekvetületei; függvetületei lesznek az ezen ponton keresztül $\alpha'\beta'$-el vezetett párhuzamosok. Ha tehát a vetületi síkokat az eredeti állásokba visszahelyezzük, akkor megkapjuk a (h, h') és (k, k') pontokat, mint a keresett vonalak feknyomait; az ezen ponton $a'b'$-el párhuzamosan vont $h'd'$ és $k'd''$ vonalak pedig a keresett függvetületeket fogják megadni.

62. §.

Kerestetnek azon pont vetületei, mely négy a térben adott ponttól egyenlő távolban van.

Feloldás. Kössük össze az adott pontokat egymás között, felezzük az összeköttetési vonalakat, és vezessünk ezen felező pontokon keresztül oly síkokat, melyek az összeköttetési vonalakra merőlegesen állanak. Ezen síkok közös metszési pontja lesz a keresett pont. — A 71-ik ábrában (a, a'), (b, b'), (c, c') és (d, d') az adott pontok; $(DC, D'C')$ azon sík, mely a $(dc, d'c')$ vonal felező pontján keresztül van ugyanezen vonalra merőlegesen vezetve, az $(AD, A'D')$ sík merőleges az $(ad, a'd')$ összeköttetési vonalra, és ennek középpontján megy keresztül, végre a $(BC, B'C')$ sík a $(bc, b'c')$ vonalra merőleges ennek felező pontjában. — Továbbá a $(dc.ad, d'c'.a'd')$ vonal a $(DC, D'C')$ és az $(AD, A'D')$ síkok metszési vonala, úgy szinte a $(bc.ad, b'c'.a'd')$ vonal a $(BC, B'C')$ és az $(AD, A'D')$ síkok metszési vonalát állítja elé; ezen utóbbi két vonal (o, o') közös metszési pontja tehát, mint a felező síkok közös pontja, lesz azon pont, mely a négy adott ponttól egyenlő távolban van. — A feloldás pontosságáról meg lehet győződnünk, ha az $(oa, o'a')$, $(ob, o'b')$, $(oc, o'c')$, és az $(od, o'd')$ vonalakat meghuzzuk, és azoknak valódi hosszait meghatározzuk, a melyek pontos munkálatnál mind egyenlők lesznek.

63. §.

Van adva egy egyenes vonal és egy sík, kerestetik azon sík, mely az egyenesen keresztül menve, a síkkal egy adott hajlási szöget képezzen.

Feloldás. Ezen feladatnál három esetet kell megkülönböztetnünk, ugyanis: 1-ször Ha az adott vonal magában az adott síkban fekszik; mely esetben tehát az adott egyenes egyszersmind metsző vonala az adott és a keresett síknak. Ezen feladat nem egyéb, mint a 36. §. 2. pontjában adott feladatnak megforditása. Ugyanis a 44-ik ábrában FSF' az adott sík, $(Ab, a'B')$ a benne fekvő egyenes, a melynek egy tetszőleges (p, p') pontján keresztül vezettetik egy a metszési vonalra merőleges sík, melynek fekszeldéje DG. Ha ezen sík a feklapba befordíttatik, akkor a (p, p') pont helyzete lesz P-ben, a segéd sík, és az adott sík metszése pedig DP-ben. Most tehát csak a DP oldal mellé szerkesztetik az adott hajlási szög DPE, melynek PE szára addig hosszítatik, míg az a segéd sík szeldéjét E-ben nem éri, lesz E a keresett sík fekszeldéjének egy pontja, mely már a sík tökéletes meghatározására elegendő, minthogy a keresett szeldéknek az $(Ab, a'B')$ vonal nyomain kell keresztül menni.

Megjegyzendő, hogy ezen feladatnak két oldása lehetséges, a mint ugyanis az adott DPE szög a PD vonal egyik, vagy a másik oldalára szerkeztetik.

Legyen 2-szor az adott egyenes az adott síkkal párhuzamos. Ha a 72-ik ábrában FF' az adott sík, és AB az adott egyenes, akkor ezen utóbbinak egy tetszőleges B pontján keresztül vezessünk egy MN síkot merőlegesen AB-re, leend ez a hajlási szög síkja. Keressük meg azután a két sík CN metszési vonalát, és huzzuk meg az MN sikban a B ponton keresztül azon BC vonalat, mely a metszési vonallal az adott α hajlási szöget képezi; akkor BC a keresett sík egy vonala leend. Meg lehet még jegyezni, hogy a C ponton keresztül az AB-hez vont párhuzamos lesz az adott és a keresett sík átmetszése, miért is ezen párhuzamos szinte a keresett sík vonala leend. A 73-ik ábrában *FSF'* az adott sík, (*Ab*, *a'b'*) pedig az adott egyenes, mely az *FSF'* síkkal parhuzamosan vétetett fel. Ezen egyenes egy tetszőleges (*b*, *b'*) pontján van keresztül vezetve az $F_1S_1F_1'$ sík merőlegesen (*Ab*, *a'b'*)-re; (*gD*, *G'd'*) pedig a két sík metszési vonala. Hogy tehát most a kellő szerkezetet végbe lehessen vinni, szükség volt az $F_1S_1F_1'$ síkot az S_1F_1 szeldéje körül a feklapba leforditani, mely műtétel után a (*b*, *b'*) pont *B*-be, a metszési vonal pedig *DG*-be jutott. *B*-ből tehát most meghuzatott a *BC* vonal, mely *GD*-vel az adott $GCB = \alpha$ hajlási szöget képezi. *BC* tehát az előbb említettek szerint a keresett sík vonala leend, ha tehát azt addig hosszítjuk, míg a forgási tengelyt *E*-ben nem metszi, lesz *E* a keresett szeldének egy pontja, a melyen és az *A* ponton van keresztül vezetve az $F_{II}S_{II}$ fekszelde. A *C* pont fekvetülete visszafordítva *c* pontba fog jutni, a melyen tehát keresztül vezetve a *Cch* párhuzamost *Ab*-vel, lesz ez a metszési vonal fekvetülete, a *h* pont *H'* függvetülete pedig az adott és a keresett sík függszeldéjinek közös pontja.

Megjegyzendő, hogy a feladatnak két oldása lehetséges, minthogy *B*-ből két oly vonalat lehet huzni, mely a *CG* metszési vonalat az adott $BCG = \alpha$ szög alatt metszi.

Végre 3-szor, ha az adott vonal az adott síkot átmetszi. — A feladat ez esetben azonos azzal, mely az 52-ik czikkben fejtetett meg, azon különbséggel mindazonáltal, hogy az ottani fekvetületi sík helyett most egy tetszőleges sík van megadva. A feloldás azonban itt is ugyanaz marad, csak hogy a szükséges szög és kör szerkesztése miatt az adott sík a feklapba fordíttatik be. Ha ugyanis a 74-ik ábrában *FF'* az adott sík, *AB* az adott egyenes, mely a síkot *A* pontban éri, akkor ezen egyenes egy tetszőleges *B* pontjából vonatik a *BC* merőlegesen a síkra, míg azt *C* pontban át nem döfi; most már az *FF'* síkban vonatik a *C* ponton keresztül egy tetszőleges *CD* vonal, a melyhez *B*-ből vezettetik azon *BD* vonal, mely *CD*-vel az adott $CDB = \alpha$ szöget képezze, *C*-ből azután mint középpontból iratik le *CD* sugárral egy kör, a melyhez *A*-ból vezettetik az *AE* érintő, lesz ez az adott és a keresett síknak közös metszési vonala. Meg lehet itt még jegyezni, hogy a *DE* vonal szinte a keresett sík vonala lesz, annak nyomai tehát szinte a keresett sík szeldéjiben fognak feküdni.

A 75-ik ábrában FSF' az adott sík, $(bH, B'h')$ az adott egyenes, mely a síkot az (a, a') pontban metszi át, ezen egyenes egy tetszőleges (b, B') pontjából vonatott a síkra merőlegesen a $(bc, B'c')$ vonal, és meghatároztatott ennek (c, c') átdöfési pontja. Azután az adott sík az FS fekszeldéje körül a feklapba fordíttatott le, mely alkalommal az (a, a') pont A-ba, a (c, c') pont pedig C-be jutott, mely utóbbi pont a szerkesztendő kör középpontja leend. Hogy ezen kör sugarát megnyerjük, szükség lesz szerkeszteni azon BCD derékszögű háromszöget, melynél a D-néli hegyes szög az adott α hajlási szög, az ellentett BC befogó pedig a $(bc, B'c')$ távol valódi hossza; a másik CD befogó lesz a keresett sugár, a melylyel tehát egy körív iratik le, és ehhez A-ból vonatik az AE érintő, mely már az adott és a keresett sík metszési vonala leend, a feklapba befordítva; miért is, ha ezen érintőt addig hosszítjuk, míg az a forgási FS szeldét K-ban nem metszi, lesz K a keresett sík fekszeldéjének egy pontja; mely által már az $F_1S_1F_1'$ sík tökéletesen meg van határozva. — Ha az adatok nem elég kényelmesek, czélszerű az adott sík függszeldéjét is lefordítani, és azt addig hosszítani, míg a lefektetett AE metszési vonalat M-ben nem vágja, ezen pont azután visszafordítva, megadja az adott és a keresett síkok függszeldéjinek közös pontját.

Megjegyzendő, hogy ezen feladat szinte két oldással bír, mert az A pontból a körhöz két érintőt lehet vonni.

64. §.

Adva van három pont: A, B, és C, kerestetik azok síkjában egy negyedik oly tulajdonságú pont: M, hogy az összekötve a három adott ponttal, az eredt AMB, és BMC szögek az adott α, és β szögekkel legyenek egyenlők.

Feloldás. Legyenek a 76-ik ábrában (a, a'), (b, b') és (c, c') az adott pontok, akkor összekötvén (b, b')-et (a, a') és (c, c')-el lesz DE azon sík fekszeldéje, mely az adott pontokon keresztül vezethető. Ha ezen síkot a talált fekszeldéje körül a feklapba lefordítjuk, akkor az adott pontok helyzete leend

A, B, és C-ben. Ha most az AB vonal egy merőleges által feleztetik, és B-nél az adott α szögnek 90 fokrai pótléka szerkesztetik, míg annak szára a felező merőlegest p-ben nem metszi, akkor a p középpontból pB sugárral leirt kör mindegyik pontja A és B-vel összekötve az α szöget fogja képezni. — Ugy szinte, ha a BC vonal feleztetik egy merőleges által, és C-nél szerkesztetik az adott β szögnek 90 fokrai pótléka, míg ennek szára a merőlegest q-ban nem metszi, akkor a q középpontból qC sugárral leirt kör minden pontja összekötve a B és a C pontokkal, az adott β szöget fogja képezni; azon M pont tehát, hol ezen két kör egymást átmetszi, leend a keresett negyedik pont a feklapba lefordítva. Ha tehát a pontok síkja ismét a DE fekszeldéje körül az eredeti állásába visszafordítatik, lesznek m, és m' a kérdéses pont vetületei. — Ezen feladatnak még egy más oldás is megfelel, mely az ábrában az N pont által van képviselve, s melyet úgy nyerünk meg, ha az α, és a β 90 fokrai pótlékait az illető vonalak másik oldalára szerkesztjük. Különben az adott pontok helyzetéhez, és az adott szögek nagyságához képest a feladat megoldásának száma is különböző; a mely is a legkedvezőbb esetben négyre terjedhet.

65. §.

Adva van egy derékszögű BAC háromszögnek fekvetülete bac, a 77-ik ábrában, mely szinte derékszögű; kerestetik a forgási tengely, és a hajlási szög, ha a BAC háromszög szögei ismeretesek.

Feloldás. Hogy egy derékszög ismét derékszögű vetületet adjon, azt csak is az egyik szára körül lehet forgatni, vagy egy tengely körül, mely az egyik szárral párhuzamos. A jelen esetben tehát szinte a két befogó ab, vagy ac egyike lehet csak a forgási tengely, vagy egy oly egyenes, mely ezek valamelyikével párhuzamos. — Tegyük fel, hogy ab a forgási tengely, akkor ez egyszersmind a valódi BAC háromszög AB oldalával is egyenlő; fordítsuk le tehát a BAC háromszöget az AB oldala körül a feklapba, akkor a derékszögek miatt az AC szár ac-re fog esni, talán C_1-ig, mely pont a és c közt fekszik, ha a B szög kisebb, mint a b szög, vagy C_2-ig, mely pont az ac meghosszításán fekszik, ha a B szög nagyobb a b szögnél. Minthogy pedig a valódi háromszögnek nagyobbnak kell lenni, mint a vetületnek, az ab befogót csakis akkor lehet forgási tengelynek venni, ha az adott B szög nagyobb b-nél. Ellenben, ha az adott B szög kisebb volna b-nél, akkor bizonyosan C nagyobb c-nél, ez esetben tehát az ac befogó volna a forgási tengely, mely körül tehát a BAC háromszöget lefektetve, az AB oldal ab-re fog esni, és a B pont az ab vonal meghosszabbítására eshet csak, például B_1-ig.

Ezekből eléggé világos, hogy, ha egy derékszögű háromszög az egyik befogója körül forog, akkor az ezen befogó melletti hegyes szög vetülete folytonosan kisebbedik, míg az ellenes hegyes szög növekedik. Minthogy pedig a szög valódi nagysága meg van adva, a hegyes szögek egyszerű összehasonlításából már könnyű megbirálni, hogy a két befogó közül melyik a forgási tengely. A melyik vetületi szög ugyanis nagyobb a megfelelő valódi nagyságnál, az ezen szöggel átellenes befogó a forgási tengely.

Az említett elmélkedés folytán tehát nemcsak a forgási tengelyt lehet felismerni, de egyszersmind a BAC háromszög valódi nagyságát is, melyek után tehát a hajlási szög meghatározása az előbbiek folytán igen egyszerűen eszközölhető.

66. §.

Kerestetik egy ABC háromszögnek függvetülete, ha adva van mind a három szög, és a fekvetület.

Feloldás. Legyen 78-dik ábrában ABC a keresett háromszög, abc annak adott fekvetülete, s minthogy az ABC háromszög oldalai ismeretlenek, de ismertek annak szögei, legyen $\alpha\beta\gamma$ egy oly háromszög, mely az adottal hasonló, és hol az $\alpha\gamma$ oldal egészen tetszőlegesen vétetett fel.

Ha már most az ABC háromszögben az AC oldalon lemetszetik egy tetszőleges AD rész, melynek vetülete ad, akkor az ABD háromszög vetülete lesz abd; — ha továbbá az $\alpha\gamma$ oldalon szinte úgy metszetik le egy $\alpha\delta$ rész, hogy: $\alpha\delta : AD = \alpha\gamma : AC$, vagy a mi ugyanaz, hogy: $\alpha\delta : ad = \alpha\gamma : ac$; akkor az ABD és $\alpha\beta\delta$ háromszögek hasonlók, minthogy az α szög egyenlő az

A szöggel, és a befogó oldalak aránylagosak; következik tehát, hogy az ABD szög is egyenlő az $\alpha\beta\delta$ szöggel. Hasonló okoknál fogva, ha az AC meghosszabbításán vétetik fel egy tetszőleges E pont, mely azután B-vel összeköttetik, akkor a BCE háromszög vetülete bce, és CBE szög egyenlő a $\gamma\beta\varepsilon$ szöggel, ha ε ugy választatott, hogy:

$$\gamma\varepsilon : \alpha\gamma = CE : AC = ce : ac$$

Ezeket előre bocsájtván, már könnyű belátni, hogy azon sik meghatározásánál, melyben a keresett ABC háromszög fekszik, ezen háromszöget pótolhatja a DBE háromszög, melynek vetülete dbe, és a melynek valódi szögei a $\delta\beta\varepsilon$ háromszög által vannak meghatározva.

Ha tehát a D és E pontokat ugy választjuk, hogy az által először a nyert $DBE = \delta\beta\varepsilon$ szög derékszöggé váljék, de másodszor, hogy ezen szögnek dbe vetülete szinte derékszög legyen, akkor a feladatunkat visszavezettük az előbbi feladat feloldására. Hátra van tehát még csak megmutatni, hogy mikép]) kell a d, és e pontokat úgy megválasztani, hogy az által ne csak a dbe szög, de a $\delta\beta\varepsilon$ szög is derékszegűvé legyen.

Minthogy az $\alpha\gamma$ oldal egészen tetszőleges, czélszerű lesz azt az ac-vel egyenlőnek venni, mi által azután a lemetszett vagy hozzácsatolt $\alpha\delta$ és $\gamma\varepsilon$ részek az ad és ce részekkel szinte egyenlők leendenek, minthogy továbbá a dbe, és a $\delta\beta\varepsilon$ szögek derékszögek, azért azok csúcsai oly körökben fognak feküdni, melyek átmérői az ae illetőleg $\alpha\varepsilon$ vonalokra esnek. Ha tehát az $\alpha\gamma\beta$ háromszöget úgy rajzoljuk, hogy annak $\alpha\gamma$ oldala az adott abc háromszög ac oldalára essék, mint a 79-dik ábrában, akkor a d és e pontok azon kör átmérőjének végpontjait fogják képezni, mely a (b) és (β) pontokon keresztül megy, és a melynek középpontja az ac vonalban fekszik; miért is ezen kör meghatározására csak is a $b\beta$ távolt kell merőleges által felezni; ezen merőleges és az ac vonal közös o pontja lesz a keresett kör középpontja; és $ob = o\beta$ a sugár; a leirt kör az ac vonalat a keresett d és e pontokban metszi át; úgy hogy az adott abc háromszög helyett veendő a dbe derékszögű háromszög, melynek megfelelő valódi DBE derékszögű háromszög szögei a $d\beta e$ háromszög szögeivel egyenlők.

A jelen ábrában tehát, hivatkozva az előbbi feladat feloldására, minthogy a βde szög kisebb a megfelelő bde szögnél, azért ezen utóbbi szög átellenes befogója be lesz a forgási tengely, hogy pedig a dbe háromszög valódi nagyságát megtaláljuk csak a be befogó mellé rajzoljuk a valódi βed szöget, a mi legegyszerübben az által vitetik végbe, hogy a $b\beta$ ívet d-től kezdve reávisszük a körre folytatólag g-ig, minthogy a βed szög mérete a fél $\beta d = bg$ ív. — Ha tehát g pont e-vel összeköttetik, és az eg egyenes addig hosszítatik, míg a bd merőlegest D-ben nem metszi, lesz bDe a bde vetülethez tartozó valódi hossz, és ennélfogva ω a hajlási szög.

A nyert be forgási tengely, úgy szintén az ω hajlási szög már most egyaránt érvényesek a dbe, mint az adott abc háromszögre is.

Az említett mód szerint mindig meghatározható a szükségelt kör o középpontja, kivéve azon egy esetet, hol a b és β pontok összeköttetési vonala az ac oldalra merőleges; de ez esetben minden további szerkesztés nélkül könnyű belátni, hogy ac maga a forgási tengely.

67. §.

Adva van három egymással párhuzamos egyenes vonal kerestetik egy negyedik, mely az adottaktól egyenlő távolban van.

Feloldás. Vezessünk egy síkot merőlegesen az adott egyenesekre, s keressük meg az átdöfési pontokat; — határozzuk meg továbbá a 49-ik czikk szerint azon kör középpontját, mely a három átdöfési ponton megy keresztül; végre a talált középponton keresztül vezessünk az egyenesekkel párhuzamost.

68. §.

Adva van három egymást ugyanazon pontban metsző egyenes vonal, kerestetik egy negyedik, megy az adottakkal egyenlő szögeket képezzen.

I. *Feloldás.* Legyenek a 80-ik ábrában SA, SB, és SC az adott egyenesek, a melyeken az S közös csúcstól kezdve az egyenlő $SA = SB = SC$ részek vannak lemetszve. Határozzuk meg azon kör középpontját, mely az A, B, és C pontokon megy keresztül, és kössük össze a nyert kör O középpontját a közös S csúcscsal, akkor az ASO, BSO és CSO háromszögek azonossága következtében az ASO, BSO, és CSO szögek is egyenlők lesznek. A kivitel a 81-ik ábrában van eszközölve, hol $(sa, s'a')$, $(sb, s'b')$ és $(sc, s'c')$ az adott egyenesek, ezeknek először is meghatároztatott a valódi hosszuk az által, hogy ugyanazon fekhajlás mellett addig forgattattak az S pont körül, míg a függlappal párhuzamosok nem lettek $(s\delta, s\delta')$, $(s\delta, s\delta'')$ és $(s\delta, s\delta''')$, most levágattak az egyenlő $s'A'$, $s'B'$, és $s'\delta'''$ részek, és visszaforgatás utján meghatároztattak az (a, a'), (b, b') és a (c, c') pontok.

Most az $(abc, a'b'c')$ háromszög síkja a meghatározott fekszeldéje körül a feklapba fordítatott le, és mértanilag szerkesztetett a valódi nagyságú ABc háromszög O középpontja, (lásd a 49-ik §.), melynek vetületei a visszafordítás után (o, o')-be jutnak; mely pontot az (s, s')-el összekötvén, lesznek $(so, s'o')$ a keresett vonal vetületei, melyek ugyanis az adottakkal egyenlő szögeket képeznek.

II. *Feloldás.* Minthogy a 80-dik ábrában O az ABC háromszög körül irt kör középpontja, azért az AC vonal D felezőpontjának O-vali összeköttetése AC-re merőleges, minthogy továbbá az ASD és CSD háromszögek azonossága folytán SD szinte merőleges AC-re, azért az SD és DO egyeneseken keresztül vezetett SDO sík szinte merőleges lesz AC-re, vagy fordítva, az S ponton keresztül AC-re merőlegesen vezetett sík az SO vonalon megy keresztül. Ugyanez áll az S ponton keresztül merő, és AB-re, vagy BC-re merőlegesen álló síkokról is. Miért is, ha a 82-ik ábrában már meg vannak határozva a közös (s, s') ponttól egyenlő távolságba eső (a, a'), (b, b') és (c, c') pontok, akkor csak az (s, s') ponton vezettetnek keresztül az $F'SF$ és $F_1{}'S_1F_1$ síkok, melyek illetőleg az $(ac, a'c')$ és $(bc, b'c')$ vonalokra merőlegesen állanak, ezen két sík közös metszési vonala leend azután a keresett egyenes.

Meg lehet itt még jegyezni, hogy ezen feladatot általánosabban így is lehet fogalmazni: Adva van három tetszőleges egyenes vonal, és egy pont; vezettessék e ponton keresztül egy negyedik egyenes vonal, mely az adottakhoz egyenlő szögek alatt hajlik.

Ez esetben ugyanis előbb az adott ponton kell keresztül vezetni a három adott egyenest, és azután az előbbiek folytán a keresett egyenest meghatározni; minthogy az egyenes párhuzamos elmozditása által, annak iránya nem változik meg.

69. §.

Adva van két egymást metsző egyenes vonal, kerestetik egy harmadik, mely szinte a metszési ponton keresztül menve, a két adott egyenessel, és a fekvetületi lappal egyenlő szögeket képezzen.

Ezen feladat megoldására egy tömörmértani tételre van szükségünk, melyet mint még valószinüleg ismeretlent, következőkben röviden közlök; s melyet szavakba foglalva így adhatunk elő: Ha az $ACBD$ kerülék (83-ik ábra) f gyupontjában egy merőleges emeltetik a kerülék sikjára, és erre felvitetik a kerülék kisebb féltengelye F-ig, úgy hogy $Ff = OD$; és az F pont egy oly kúp csúcsának vétetik, melynek irányvonala az adott kerülék; akkor ezen kúp bármelyik alkotója FM huzatik is meg, azon szögek, melyeket ezen alkotó a tengelylyel, és a kúp magasságával képez, együttvéve mindig egy derékszöget képeznek, vagyis minden tetszőleges alkotónál $\beta + \alpha = 90^0$.

E tétel bebizonyitására kössük össze a felvett M pontot a gyuponttal, és a kerülék O középpontjával, úgy szinte M-ből huzzunk a nagyobb tengelyre egy Mm merőlegest, és nevezzük az Om metszéket x-nek, az Mm rendezőt pedig y-nak, akkor: az elemző síkmértan ismert tételei szerint

$$Mf = a - \varepsilon x \;.\;.\;.\; ^1)$$

ha (a) a kerülék nagyobb féltengelye, ε pedig a külpontossági tényező. Továbbá az MfF derékszögü háromszögből, melyben $Ff = b =$ a kerülék kisebb féltengelyével, következik:

$$MF = \sqrt{b^2 + (a - \varepsilon x)^2} \;.\;.\;.\; ^2)$$

az OmM háromszögből pedig:

$$OM = \sqrt{x^2 + y^2}$$

vagy minthogy a kerülék egyenletéből $y^2 = b^2 - \frac{b^2 x^2}{a^2}$, azért

$$OM = \sqrt{b^2 + \varepsilon^2 x^2} \;.\;.\;.\; ^3)$$

tekintetbe véve ugyanis, hogy a külpontosság

$$a\varepsilon = \sqrt{a^2 - b^2}$$

Ezeket előre bocsájtva az OFM háromszögből a Carnot tétele szerint következik, (tekintetbe véve még, hogy $OF = a$), hogy

$$\cos\beta = \frac{OF^2 + FM^2 - OM^2}{2.\,OF.\,FM}$$

$$= \frac{a^2 + b^2 + (a - \varepsilon x)^2 - b^2 - \varepsilon^2 x^2}{2a\sqrt{b^2 + (a - \varepsilon x)^2}}$$

$$= \frac{a - \varepsilon x}{\sqrt{b^2 + (a - \varepsilon x)^2}} \quad \ldots\,4)$$

az MfF háromszögből pedig:

$$\sin\alpha = \frac{Mf}{MF} = \frac{a - \varepsilon x}{\sqrt{b^2 + (a - \varepsilon x)^2}} \quad \ldots\,5)$$

A nyert 4) és 5) egyenletek összehasonlításából következik, hogy: $\cos\beta = \sin\alpha$

innét pedig, hogy; $\beta + \alpha = 90^0$, mely egyenlet által fentebbi tételünk be van bizonyítva.

E tételből fordítva most már következik az is, hogy mind azon egyenesek lábpontjai, melyek az F ponton úgy vezettetnek keresztül, hogy az eredő α és β szögek összege 90 fokot adjon, mind ezen egyenesek lábpontjai egy oly kerülékbe esnek, melynek középpontja az FO tengely lábpontja, melynek nagyobb féltengelye maga az FO egyenes, kisebb tengelye pedig az F pont vetítő Ff vonala, a melynél tehát az F pont f vetülete a gyupont.

Minthogy továbbá az MfF háromszög derékszögű, azért az FM egyenes fekhajlási γ szöge az α-val együtt szinte 90 fokot képezvén, álland szinte hogy $\beta = \gamma$; vagyis, hogy a szóban levő kúpnál minden tetszőleges alkotó a kúptengelylyel, és a feklappal egyenlő szögeket képez.

Visszatérve ezek után a feladatunkra (e czikk elején) legyenek a 84-ik ábrában (ac, $a'c'$), és (bc, $b'c'$) az adott, és egymást (c, c') pontban metsző vonalak; akkor tekintsük ac-t egy oly kerülék külpontosságának, melynek nagyobb féltengelye az (ac, $a'c'$) vonal valódi hossza aC, melyet az (acb, $a'c'b'$) háromszögnek a feklapbai lefordítása által nyertünk.

Ha ac fekvetületre az a pontban emelünk merőlegest, a melyre a-tól kezdve mindegyik oldalra feltesszük a (c, c') pont fekvetítő pc' vonalát, megnyerjük a kerülék kisebb tengelyeit; ha pedig az ac meghosszabbítására szinte a-tól kezdve felvisszük az aC távolt C_1-ig, leend aC_1 a kerülék nagyobb féltengelye; és a szerkesztett EC_1DC_1 kerülék bármelyik pontja összekötve a (c, c') ponttal oly vonalat fog adni, melynek fekhajlási szöge egyenlő azon szöggel, melyet e vonal az $(ac, a'c')$ vonallal képez.

Úgy szinte ha egy másik GC_2H kerülék szerkesztetik, melynek bc a külpontossága, a nagyobb tengelye pedig a $(bc, b'c')$ vonal valódi hossza, akkor ezen kerülék bármelyik pontja összekötve a (c, c') ponttal egy oly egyenest ád, melynek szöge a $(bc, b'c')$ vonallal épen akkora lesz, mint a felvett vonal fekhajlási szöge.

Ha tehát a két kerülék közös m, és n pontjai köttetnek össze a (c, c') ponttal, akkor a nyert $(nc, n'c')$ és $(mc, m'c')$ egyenesek oly tulajdonnal birnak, hogy mind a két adott vonalhoz, és azonfelől a feklaphoz is egyenlő szög alatt fognak hajolni, s így e két vonal az adott feladatnak oldásait adják meg.

Megjegyzendő azonban, hogy e két kerülék egyikét egészen mellőzni lehet. Ha ugyanis meghuzzuk az adott két vonal felező (Cd) vonalát, és ezen a vonalon teszünk keresztül egy oly síkot, mely az adott vonalak síkjára merőleges, akkor bizonyos, hogy mind azon vonalak, melyek az adott egyenesekkel egyenlő szöget képeznek, csak is ebben a síkban fekhetnek, azok lábpontjai tehát, ezen sík fekszeldéjébe fognak esni. Ha tehát például a (c, c') ponton keresztül vezetünk az ABC háromszög síkjára egy $(ck, c'k')$ merőlegest, és ezen, és a felező $(cd, c'd')$ vonalon egy síkot vezetünk keresztül, akkor ezen sík kd fekszeldéjének szinte az m, és n pontokon kell keresztül menni; miért is ez egyenes fogja az egyik kerüléket pótolhatni.

Minthogy továbbá ez utóbbi megjegyzés szerint csak egy egyenes és egy kerülék átdöfési pontjai kerestetnek, azért a másik kerülék is az egyszerűbb kör által lesz pótolandó; e czélra nézve csak a GC_2H kerüléket a GH kisebb tengelye körül (a metsző vonallal együtt) addig képzeljük forgatva, míg a kerülék körbe vetítetik, meghatározzuk most a metszési *M* és *N* pontokat, és azokat visszafordítás által a vonal előbbi állásán határozzuk meg.

E feladat tiszta megoldása tehát a kerülékek nélkülözésével a 85-ik ábrában ismételtetett.

Végre könnyű belátni, hogy ezen feladatnak legátalánosabb alakbani fogalmazása e következö lehet: Van adva két tetszöleges egyenes vonal *A* és *B*, azonfelől egy pont *C*, és egy sík *M*. Kivántatik, hogy a *C* ponton egy oly egyenest vezessünk keresztül, melynek az *A* és *B* vonalakhoz, úgy szinte az *M* síkhoz ugyanazon hajlása legyen.

II. Szakasz.

A háromél leirati feloldása.

1. §.

Ha két nem egyenközü sík egy harmadik által metszetik, akkor mind a három sík egy közös pontban fog egyesülni; mert minthogy a harmadik (*c*) sík, a másik két (*a*) és (*b*) síkot metszi, metszeni fogja ezen utóbbiak közös vonalát is; ámde e közös vonal a metsző (*c*) síkot csak egy pontban döfheti át, így hát a (*c*) síknak a másik kettővel is csak egy közös pontja lehet.

A három sík ezen közös pontja vagy végtelen, vagy véges távolba eshetik. Az első esetben a három sík hasábot képzend, az utóbbiban pedig a tér egy oldalról bekeríttetik, és ered egy tömörszög, a háromél.

Minden háromélnek hat lényeges része van, melyek közül azon három szöget, melyet a három él képez, *oldalnak*, azon szöget pedig, melyet két lap képez egymással, egyszerűen *szögnek* fogjuk nevezni.

2. §.

Mielött a háromél leirati feloldásával foglalkoznánk, szükséges leend az e tárgyra vonatkozó leglényegesebb tantételeket elöre bocsátani.

1. Két oldal összege nagyobb minden háromélben a harmadik oldalnál. Mert ha az adott oldalak egy síkba egyenítve rajzoltatnak egymásmellé (86. ábra), és (a) oldal nagyobb volna, mint (b) és (c) összege, akkor ez utóbbi oldalak síkjai SN, és SP élek körül forgatva egymást nem metszhetnék, és így háromélt nem képezhetnének.

2. Mentöl nagyobbak az egyes oldalak, annál tompább leend a tömörszög, míg végre, ha az oldalak összege 360 fokot képez, a tömörszög síkká válik, a miből következik, hogy az oldalak összege 0 és 360 fok határok közé van szorítva.

3. Ha a tér bármely pontjából, például Q-ból (87. ábra) merőlegeseket bocsájtunk a háromél három síkjára, akkor ezen három merőleges QA', QB' és QC' egy új háromélt képzend, mely az előbbi *egészítőjének* neveztetik, és azon megjegyzendő tulajdonsággal bir, hogy oldalai az adott szögeit, szögei pedig az adott háromél oldalait 180 fokra egészítik ki. — E fontos tétel bebizonyítására képzeljünk QA' és QB' merőlegeseken keresztül egy síkot, mely sík tehát merőlegesen álland az (a) és (b) oldalak lapjaira, és azért merőlegesen ezek metsző PC vonalára is. Ha tehát az átdöfési C pont A' és B'-el összeköttetik, $B'CA'$ szög lesz az (a) és (b) oldalak hajlási szöge. De $CB'QA'$ négyszögben az A' és B'-néli szögek épszögek, tehát c' és C szögek összege 180 fok. — Ugyan ez áll a másik két oldalról is; úgy, hogy általában, ha valamely háromél három oldala (a), (b) és (c), három szöge pedig A, B, és C-vel jelöltetik, álland:

$a + A' = 180^0$; $b + B' = 180^0$; $c + C' = 180^0$ és fordítva
$A + a' = 180^0$; $B + b' = 180^0$; $C + c' = 180^0$.

4. Minden háromél három szöge együttvéve nagyobb 180^0-nál, mert az egészítő háromélnél állani kell (a 2. pont szerint)

$$a' + b' + c' < 360^0$$

és helyettesítve a 3. pont egyenleteit:

$$(180-A)+(180-B)+(180-C)<360^0 \text{ vagy}$$
$$A+B+C>180^0$$

5. Ha valamely háromélben két oldal egyenlő, akkor az ellentett szögek szinte egyenlők. Mert legyenek (88-ik ábra) (b) és (c) oldalak egyenlők, és bocsássunk (a) oldalra az ellentett él bármely Q pontjából egy Qq merőlegest, továbbá szinte Q-ból QB és QC merőlegeseket SB, és SC élekre, és kössük össze B-t és C-t (q) ponttal, lesz QBq szög a (c) és (a) oldalak hajlási szöge, úgy szinte QCq szög a (b) és (a) oldalaké. — De SQB és SQC háromszögek azonosak, mert $b=c$ feltétel szerint, SQ közös, és $SQB=SQC=90^0$, innét $QB=QC$; — továbbá QqB azonos QqC-vel, mert $QB=QC$, mint azt imént bebizonyitók, Qq közös, $QqB=AqC=90^0$, és innét B szög $=C$ szöggel.

Innét továbbá következik; hogy 1. SQ-nak (a) síkrai vetülete (a) oldalt felezi; 2. hogy azon háromélben, melyben mind a három oldal egyenlő, egyszersmind mind a három szög is egyenlő.

3. §.

Legyen már most egy háromél vetületei által adva, keressük annak oldalait, és szögeit.

A 89-ik ábrában a fekvetületilap az adott háromél (a) oldalával azonos; ezen fölvétel következtében (a) oldal megtartja valódi nagyságát, SB és SC élek a fekvetületilapba esnek, a harmadik él vetületei pedig (sp, $s'p'$) vonalak által vannak megadva.

Hogy már (c) oldal valódi nagyságát és (a)-vali hajlási szögét föl lehessen találni, szükséges leend ugyan ezen (c) oldal lapját SB fekszeldéje körül mind addig forgatni, míg a feklappal magával össze nem esik. Ezen forgás alkalmával (c) lap bármelyik pontja, például (p, p') az SB forgási tengelyre merőleges körívet irand le, melynek középpontja B; és melynek sugara BP'', azon derékszögü háromszögnek átfogója, melynek egyik befogója Bp nem egyéb, mint a P pont fekvetületének távola a forgási tengelytől, a másik befogója pP'' a P pont függélyes magassága; mert BpP'' épháromszög tulajdonkép a feklapra merőleges és csak a szerkezet végbevihetése okáért van Bp befogója körül a feklapba befordítva; a miből egyszersmind kitünik, hogy $P''Bp$ szög a (c) lap keresett hajlási szöge; BSP szög pedig a (c) oldal maga. Ugyanezen eljárást kell ismételnünk a (b) oldal, és hajlási szöge feltalálhatására.

Most már nincs egyéb hátra, mint az (a) oldallal ellentett A szög feltalálása. — E czélra vegyük tekintetbe, hogy A szög a (b) és (c) oldalak hajlási szöge, melyet tehát úgy fogunk megnyerni, ha a közös metszési $(sp, s'p')$ vonalra egy merőleges síkot teszünk, például (p, p') ponton keresztül; e sík a (b), (c) és (a) lapot egy háromszögben metszi, melynek csúcsa (p, p') pont, alapja pedig a feklapban Sp vetületre merőleges leend, az A szöget befogó szárak mindegyike pedig merőleges az (Sp, Sp') metsző vonalra. Ha tehát a lefektetett (c) lap P pontjában emelünk egy Pn merőlegest, SP-re, úgy szinte (b) lap P pontjában egy $P'm$ merőlegest a lefektetett $(Sp, S'p')$ vonalra, SP'-re, leend mn a keresett háromszög alapja; Pn és Pm pedig az A szöget befogó szárak, mely adatok már most az nAm háromszög képzésére elégségesek.

Ezen eljárásból már most könnyen következik:

1. Hogy pP'' és pP''' egyenlők, mert mind a két vonal a (p, p') magassága a feklap felett.

2. Hogy PA és $P'A$ íveknek Sp vonal ugyanazon pontjában kell találkozniok, mert A nem egyéb mint az mn körül a feklapba lefordított (p, p') pont, melynek tehát a forgási mn tengelyre egy merőleges körívet kell leirni; de

3. mn vonalnak Sp-re merőlegesnek kell lenni, mert mn az nAm háromszög síkjának szeldéje, mely sík az (Sp, Sp')-re merőlegesnek vétetett fel.

4. SP és SP' vonalak egyenlők, mert mind kettő (Sp, Sp') vonalnak egyszerű lefordítása a feklapba, és így egyszersmind $(Sp, S'p')$ vonalnak valódi hosszai; végre

5. S, B, p, és C pontok egy kör kerületében fekszenek (mert $SBpC$ négyszögben a két ellentett B és C szögek összege 180^0), mely kör átmérője Sp vonal, azért, mert a B és C szögek derékszögek.

4. §.

Ha a háromél hat része közül három adva van, a másik három szerkesztés által mindig fellelhető. Minthogy pedig hat elemből huszszor lehet más három adatot választani, öszvesen húsz feladat volna megoldandó. De ezen feladatok csak e következő, egymástól különböző hatfélére oszlanak :

1. Ha adva van a három oldal.
2. Ha adva van a három szög.
3. Ha adva van két oldal, és a közbefoglalt szög ; mely adatokat háromszor lehet változtatni.
4. Ha adva van két szög, és a közbenfekvő oldal ; szinte három változtatással.
5. Ha adva van két szög, és az egyikkel ellentétes oldal, mely adatokat hatszor lehet egymás közt felcserélni ; és végre
6. Ha adva van két oldal, és az egyiknek ellentett szög ; szinte hat módositással.

5. §.

Első eset : Adva van a háromél három oldala, kerestetik a három szög.

Feloldás. Szerkeszszük a három adott szöget (90-ik ábra) a feklapba egymás mellé, válaszszunk azután a közös metsző SP vonalon egy tetszőleges P pontot ; — ha most a (c) oldal lapja SB él körül forgattatik, P pont SB-re egy merőleges kört irand le, melynek fekvetülete Pp. De minthogy P pont egyszersmind a (b) lapban is fekszik, vegyük $SP' = SP$, és forgassuk (b) lapot is SC éle körül, akkor P' pont szinte egy SC-re merőleges ívet irand le, melynek fekvetülete $P'p$. — Minthogy tehát P pont vetületének Pp és $P''p$ vonalakban kell feküdnie, ez nem lehet egyébütt, mint a közös (p) metszőpontban ; (s) pont pedig, mint a forgási tengelyek közös pontja helyéből nem mozdulván, leend — miután az illető síkok éleik körül addig forgattattak, míg egymást metszik — sp a (b) és (c) lapok metsző vonalának fekvetülete. — Hogy még P, vagy P' pont magasságát megkapjuk, szükséges leend a PBp ívet a feklapba befordítani, itt PP'' ív a (p) pontban emelt pP'' merőlegest P'' pontban metszi; és pP'' leend a P pont keresett magassága. Ugyanazon eredményre jutottunk volna, ha a PBp ív helyett a $P'Cp$ ívet fektettük volna a feklapba. Összehasonlítva már most a jelen esetet az általános feladattal, könnyű észrevenni, hogy pBP'' szög az (a) és (c) lapok hajlási szöge, úgy szinte pCP''' az (a) és (b) lapoké. Az (a) oldal ellentett szöge már a 3-ik §. szerint könnyen feltalálható.

6. §.

A 91-ik ábrában ugyanezen feladat van megoldva azon esetre, ha mind a három oldal tompa szög; — az eljárás azonos azzal, melyet az előbbi §-ban kifejténk, azon megjegyzéssel, hogy most a P és P' pontokbóli merőlegesek nem az élekre magokra, hanem azok visszhosszabbításaikra esnek, a miért is a nyert hajlási szögeket 180 fokra kell pótolni.

7. §.

Második eset: Adva van a háromél három szöge, kerestetik a három oldal.

I. *Feloldás.* Legyen A, B, és C az adott három szög, melyek összege 180^0-nál nagyobbnak föltételeztetik (2. §. 4-ik pont). Pótolván az adott szög mindegyikét 180 fokra, erednek az egészítő háromélnek három oldalai: a', b' és c' (2. §. 3-ik pont). Ezen három oldalból határozzuk meg (az 5-ik §. szerint) a három szögeket: A', B' és C'-et. — Az így nyert szögek mindegyikét pótoljuk ismét 180 fokra, megkapjuk az adott háromél keresett három oldalát: a, b és c-et.

II. *Feloldás* az egészítő háromél nélkülözésével. Használjuk a (c) oldal lapját (92-ik ábra) feklapnak, és az egyik szárára függélyes lapot függvetületi lapnak, akkor az egyik adott szög A a függlapban valódi nagyságában forduland elő, minthogy a függlap a (b) és (c) lapok közös metszésére, és így magokra az említett lapokra is merőlegesen áll. Most csak még az (a) oldal lapja lesz úgy előállítandó, hogy a feklappal az adott B szöget, a már szerkezett (b) lappal pedig az adott C szöget képezze.

Megjegyzendő itt még, hogy az (a) és (b) oldalak közös metszési vonalának függvetülete szükségkép a (b) oldallap függszeldéjébe fog esni, minthogy ez utóbbi lap a függlapra merőleges.

Vegyük tehát ezen metszési vonal bármely (p, p') pontját, és tekintsük úgy, mint egy kúp csúcsát, melynek alkotói a feklapot az adott B szög alatt metszik, akkor minden sík, mely ezen kúpot érinti, a feklappal szinte a B szöget fogja képezni. — Legyen továbbá (p, p') pont egy másik kúpnak csúcsa, melynek alkotói a (b) lappal az adott C szöget képzik, akkor minden sík, mely e kúpot érinti, a (b) lapot szinte a C szög alatt fogja metszeni. — Ha tehát egy oly síkot állítandunk elő, mely egyszerre mind a két kúpot érinti, azon sík egyszersmind a fek (c) lappal az adott B szöget, (b) lappal pedig az adott C szöget fogja képezni, és így feladatunknak eleget teend.

A 92-ik ábrában (p, p') a két kúp közös csúcsa, $(p, m'p')$ az egyiknek tengelye, és a fek (c) lapra függélyes, $(pn, p'n')$ a másik kúp tengelye, és ez a (b) lapra áll merőlegesen.

Hogy most e két kúphoz közös érintő lapot vezethessünk, a két kúpot egy tetszőleges, legczélszerűbben egy vizirányos MN lappal fogjuk átmetszeni; a metszés a (c) lapra merőleges kúpnál kör, a (b) lapra merőleges kúpnál pedig kerülék leend. Az e két görbéhez huzott közös érintő vonal a keresett érintő síkban fog feküdni; és minthogy ez egyenes egyszersmind vizirányos, azért a keresett sík fekszeldéjével leend egyenközű; de ezen SR fekszeldének egyúttal a (c) lapra merőleges kúp alapját is kell érintenie, azért csak ez alapkörhöz kell egy érintőt huzni, mely egyszersmind egyenközű legyen a kör és kerülék közös érintő vonalával, xy-al.

Jegyzet. Ha az említett kör és kerülék egymást nem metszik, hozzájok négy közös érintőt lehet vonni, különben csak kettőt. Azonban ebből nem következik, hogy a feladatnak több mint egy feloldása van, mert az ábrának figyelmes megtekintéséből tüstént kitünendik, hogy ezen külön feloldások a B és $180—B$, C és $180—C$ szögeknek felelnek meg; és pedig, ha a kör a kerüléket nem metszi, akkor következő négy feladat oldatik meg:

1. Ha az adott szögek ; A. B, és C
2. „ „ „ „ A, $180—B$, C

3. Ha az adott szögek A, B, és $180—C$

4. „ „ „ „ A, $180—B$, és $180—C$

Ha pedig a kör a kerüléket metszi, a feladatok ketteje lehetlenné válik, mert a szögek összege kisebb lesz 180 foknál.

III. *Feloldás.* Legyen a 93-ik ábrában xSy az egyik A szög, mely valódi nagyságában a feklapra van rajzolva, akkor ezen felvétel folytán a (b) és (c) oldalak közös metszése a feklapra merőleges, és vetülete S-ben öszpontosul. — Ezen merőlegesben lesz a háromél csúcsa; és képzelhetjük a háromélt magát addig lenyomva, míg ezen csúcs maga a feklapba esik, így tehát most S a háromél csúcsa, Sx pedig és Sy a (b) és illetőleg (c) oldalak síkjának fekszeldéi; és a feladatunk megfejtésére csak egy harmadik síkot kell felkeresnünk, mely az adott, és a feklapra merőleges Sx, és Sy síkokkal a szinte adott C, és illetőleg B hajlási szögeket képezze.

Emeljünk S pontban Sx-re egy merőlegest, Ss_{11}, és tekintsük azt egy oly körkúp tengelyének, melynek alkotói az Sx síkhoz az adott C szög alatt hajolnak, akkor bizonyosan mind azon síkok, melyeket az S ponton keresztül Sx hez C hajlási szög alatt vezethetünk, e körkúpot érinteni fogják.

Hasonlóan, ha Sy-ra emeljük S-ben az Ss_1 merőlegest akkor ez szinte egy oly körkúp tengelyének tekinthető, melynek alkotói a Sy síkhoz az adott B szög alatt hajolnak, és így fordítva, mind azon síkok, melyek az Sy síkkal B szöget képezve az S ponton mennek keresztül, e körkúpot érinteni fogják.

Azon sík tehát, mely az S ponton keresztül menve az Sx és Sy síkokhoz az adott C és B szögek alatt hajlik, az említett két körkúp közös érintője leend. Ezen érintő sík szerkesztésére nézve képzeljünk a két különböző nyilású kúpba két egyenlő gömböt beirva, melyek közül az egyik középpontja lehet a tetszőlegesen felvett s_{11} pont, sugara tehát $s_{11}u$; a másik gömb r középpontját pedig úgy választjuk, hogy a gömb rv sugara az előbbi $s_{11}u$-val legyen egyenlő, akkor ezen két gömb az érintő sík felkeresésére nézve a két kúpot egyelőre helyettesítheti.

Minthogy pedig a gömbök egyenlők, azért az érintési pontok összeköttetése, úgy szinte az érintő sík fekszeldéje is, a középpontok összeköttetésével lesz párhuzamos, s minthogy továbbá az érintő síknak a feklapban fekvő közös S csúcson kell keresztül menni, azért csak az S ponton keresztül kell az rs_{II} középponti vonalhoz az SF párhuzamost vonni, leend ez a keresett érintő sík fekszeldéje.

Ezen érintő sík végleges meghatározására nézve vegyük fel a vetületi tengelyt az egyik kúp Ss_{II} tengelyére merőlegesen, akkor az ehhez tartozó függlapon a lemetszett kör s_{II} középpontból leirva valódi nagyságában lesz látható, s a függszelde e kört q-ban érinteni fogja. — Úgy szinte, ha a másik kúp Ss_{I} tengelyére vétetik merőlegesen a vetületi tengely, akkor az s_{I} középpontból leirt kört érintő QF' egyenes lesz a függszelde.

Hogy végre a háromél keresett oldalait szerkeszthessük, képzeljük az egész háromélt ismét egy tetszőleges magasságra felemelkedve, úgy hogy például az S pont magassága legyen $s_{I}m$, akkor ez által az érintési p és q pontok szinte emelkedni fognak p' és q' pontokig, ha ugyanis $pp' = qq' = s_{I}m$. Az érintő sík szeldéi párhuzamosan fognak elmozdulni, nevezetesen a függszeldék a p' és q' pontokon fognak keresztül menni, az új fekszeldét pedig, mely az előbbivel szinte párhuzamos marad, úgy kapjuk meg, ha a függszeldéknek a vetületi tengelyekkeli metszéseit összekötjük. — Ezen új fekszelde az Sx és Sy szeldéket a D és E pontokban metszvén, lesz a háromél fekvetülete EDS, az S pont magassága pedig egyenlő $s_{I}m$-el.

Ha tehát a DSx síkot szeldéje körül a feklapba lefordítva képzeljük, akkor a háromél S csúcsa Sx-re merőlegesen S_{II}-be jut, (ha $SS_{II} = ms_{I}$), melyet a változatlan maradt D ponttal összekötve megadja a keresett b oldalt. — Hasonlóan az Sy síkot fektetve le a feklapba, és a háromél S_{I} csúcsát (hol $SS_{I} = ms_{I}$, és $SS_{I} \perp Sy$) E-vel összekötvén, megnyerjük a c oldalt.

Végre ha az ESD háromszöget fektetjük le ED körül a feklapba, megjegyezvén, hogy az ES valódi hossza $= ES_{I}$, úgy szinte a DS valódi hossza $= DS_{II}$, akkor az eredt $ES_{III}D$ $= a$ szög lesz a keresett harmadik oldal.

8. §.

Harmadik eset: Adva van a két oldal, (a) és (b) és a közbefoglalt C szög, kerestetik a harmadik (c) oldal, és a két hiányzó szög: A és B.

Feloldás. Szerkeszszük (90-ik ábra) az adott (a) és (b) oldalakat egymásmellé a feklapba, forgassuk azután (b) oldal lapját SC éle körül mindaddig, míg a feklappal az adott C szöget nem képzi. E czélra veszünk ismét SP' élen egy tetszőleges P' pontot, P'-ből bocsátjuk a $P'p$ merőlegest SC-re, C-nél szerkeszszük az adott C szöget, melynek CP''' szárát addig hosszabbítjuk, míg a C központból CP' sugárral leirt $P'P'''$ körív által nem metszetik, végre P'''-ből $P'''p$ merőlegest vonván pP'-re, leend (p) a P pont fekvetülete, pP''' pedig ugyanazon pont magassága; ha már most a talált (p)-ből merőlegest bocsátunk SB-re, és addig hosszabbítjuk, míg az S központból SP' sugárral leirt $P'P$ körív által nem metszetik P pontban, és P-t S-el összekötjük, leend BSP a keresett (c) oldal. — A többi részek már most az előbbiek szerint könnyen feltalálhatók.

Az eljárás helyessége az első, vagyis fő eset és a jelen eset egyszerű összehasonlításából könnyen kitünendik.

9. §.

Negyedik eset: Adva van két szög: A és B, és a köztük fekvő (c) oldal; kerestetik C szög és (a) és (b) oldalak.

I. *Feloldás.* Pótoljuk az adatokat 180 fokra, leend: $180-A=a'$, $180-B=b'$ a kiegészítő hároméi két oldala, $180-c=C'$ pedig a közbefoglalt szög. Szerkeszszük az előbbi §. szerint a hiányzó részeket, és pótoljuk a találtakat ismét 180 fokra, leend $180-A'=a$, és $180-B'=b$ a keresett két oldal, és $180-c'=C$ a harmadik szög.

II. *Feloldás* a kiegészítő hároméi nélkülözésével.

Vegyük az adott (c) oldal lapját (94-ik ábra) fekvetületi lapnak, függlapul pedig egy oly síkot, mely az SA élre merőleges, legyen ennek alapmetszete $\mathfrak{AM}$. Ezen függlapban A szög valódi nagyságában fog vetíttetni és azért A-nál szerkezhető. — Vegyünk másodszor függlapul egy oly síkot, mely a másik SB élre merőleges és melynek alapmetszete $\mathfrak{A}\mathfrak{M}'$; ezen síkban B szög fog valódi nagyságában előfordulni. Ha már most a BP' és AP'' vonalak az SB és SA éleken úgy mozdulnak, hogy a feklaphozi hajlásuk ne változzék, mindaddig, míg az ugyanazon magasságban lévő P' és P'' pontok P pontban nem találkoznak, leend P a közös metszésnek egy pontja; és (p) ennek fekvetülete. Kössük össze p-t S-el, leend Sp az (a) és (b) lapok metszésének fekvetülete, $P'm = P''n$ pedig a P pont magassága, és e szerint a jelen feladat az általános esetre (3-ik §.) van visszahozva.

10. §.

Ötödik eset. Adva van egy oldal (b), egy megfekvő C, és az ellentett B szög, kerestetik a harmadik szög, és a másik két oldal.

Feloldás. Vegyük (95 ik ábra) a keresett (a) oldal lapját fekvetületi lapnak, és szerkeszszük benne az adott b oldalt. Forgassuk azután ugyanezen oldalt SC éle körül mind addig, míg a feklappal az adott C szöget nem képzi (8-ik §.). Ez által felleljük P pont fekvetületét p-t, és magasságát pP'''-et; tekintsük most ezen P pontot mint egy kúp csúcsát, melynek alkotói a feklappal az adott B szöget képzik, úgy azon sík, mely e kúpot érinti, és egyszersmind S ponton keresztül megy, leend a (c) oldal lapja; minthogy ezen sík az (a) feklappal az adott B szöget fogja képezni. Az említett kúp alapja egy kör, melynek középpontja (p), sugara pedig azon derékszögű háromszög befogója, melynél az egyik befogó a kúp magassága: pP''', és az átfogójának (a kúp alkotójának) B hajlása ösmeretesek. Ha tehát e kör leiratik, és hozzá S-ből egy érintő huzatik, leend ez az (a) oldalszög szára. A többi részek már most az előbbiek szerint könnyen feltalálhatók.

Jegyzet. Minthogy S pontból a körhöz két érintőt lehet húzni, azért ezen feladatnak két feloldása lehetséges. Ha azonban S pont magába a körbe esnék, vagyis, ha a kör sugara ps-nél nagyobb lenne, a feloldás az adatokból lehetlenné válik.

11. §.

Hatodik eset. Adva van két oldal (a) és (b) és az egyik oldalnak ellentett szög B, kerestetik a harmadik oldal (c), és a másik két szög.

I. *Feloldás*. Pótoljuk az adatokat 180 fokra, lesz $180—B=b'$ az egészítő háromél egyik oldala, $180—b=B'$ az ellentett szög, $180—a=A'$ pedig egy megfekvő szög, melyekből az előbbi §. szerint C', a' és b' fellelhetők; ezen talált részeket ismét 180 fokra pótolván, leend $180—C'=c$ a keresett oldal, $180—a'=A$, és $180—b'=B$ pedig a keresett szögek.

II. *Feloldás*, a kiegészítő háromél nélkülözésével.

Vegyük (a) oldal lapját fekvetületi lapnak (96-ik ábra), és szerkeszszük benne az (a) és (b) szögeket egymás mellé, függlapul pedig vegyünk egy oly síkot, mely az (a) és (b) oldalak közös szárára, SC-re, merőleges, és melynek alapmetszete $P'T$. — Ha már most (c) oldal lapját ST fekszeldéje körül addig forgatjuk, míg a feklappal az adott B szöget nem képzi, (b) oldal lapját SC éle körül addig, míg az előbbi lapot nem metszi, az oldalak ez állásokban a kivánt háromélt fogják alkotni. (b) lap forgatása alkalmával SP' él valamely P' pontja egy ($P'p$, $P'P'''$) körívet fog leirni, CP' sugárral, és a hol e körív a már felállítva képzelt (c) lapot átdöfi, ott lesz a metszésnek egyik pontja. E pont meghatározása okáért még csak (c) oldallap függszeldéjének meghatározása leend szükséges, melyre nézve az adatok: a fekszelde, és a fekhajlási szög. Húzzuk tehát Bm'-et merőlegesen ST-re, $m'M'$-et merőlegesen Bm'-re, szerkeszszük B-nél az adott B szöget, melynek szára $M'm'$-et, M'-ben metszeni fogja; továbbá Mm'-et merőlegesen $P'T$-re, és $m'M=m'M'$, végre kössük az így talált M-et T-vel össze, lesz TM a (c) oldallap függszeldéje azon függvetületi lappal, melyben PP''' körív fekszik; és így a keresett átdöfési pont P''' lesz és (p) a fekvetülete; mely vetület által most a jelen feladat ismét vissza van víve az általános esetre (3-ik §.).

Jegyzet. Ezen feladatnak ismét két feloldása lehetséges, mert TV egyenes a körívet két pontban P''' és P''-ben metszi

— Ha pedig TV a köríven kül esik, s így a körívet nem metszi, a feloldás az adatokból lehetlenné válik.

12. §.

Feladatok.

Egy adott vonal feknyomán keresztül vezettessék a fekvetületi síkban egy vonal, mely az adott vonallal egy adott α szöget képezzen.

Feloldás. A 97-ik ábrában legyen AB az adott vonal, A annak feknyoma, és Ab a fekvetülete, legyen továbbá AC a keresett egyenes, akkor az AB, Ab, és az AC vonalak egy háromélt képeznek, a melyben adva van a $BAb=h$ oldal, mely az adott vonal fekhajlási szöge, azután adva van a $BAC=\alpha$ oldal, végre ösmeretes a BAb és bAC oldalak által képzett hajlási szög, mely is egyenlő 90 fokkal; ezen adatokból tehát meghatározható a harmadik bAC oldal, melynek AC szára lesz a keresett vonal. — A 98-ik ábrában (Ab, $a'b'$) az adott vonal, mely is a fekvetítő síkjának szeldéje körül a feklapba van AB-be lefordítva, mi által megnyerjük a $bAB=h$ fekhajlási szöget; a mely mellé szerkesztetett az adott $BAC_1=\alpha$ szög. Minthogy pedig a háromélben az α oldalnak ellentett szög derékszög, azért az α oldalnak AB él körüli forgása után az AC_1 élnek vetülete Ab-be fog esni; azért egy tetszőleges C_1 pontból merőleges vonatott AB-re, és ez addig hosszitatott, míg az Ab élt c-ben nem éri, c-ben emeltetett merőleges C_1c-re, a mely G-ből GC_1 sugárral C_{11}-ben átmetszetett; leend cC_{11} a C pont magassága c felett. Ha tehát a keresett harmadik oldal Ab körül lefordítatik, akkor csak c-ben kell merőlegest emelni Ab-re, és erre a cC_{11} magasságot átvinni C-ig, a mely pont A-val összekötve megadja a kivánt vonalat.

Minthogy a háromél elvei szerint AC_1-nek egyenlőnek kell lenni AC-vel, azért az eljárás egyszerüen ez lesz: Egy tetszőleges C_1 pontból vonatik merőleges AB-re, és meghoszszabbítatik c-ig, ebben a pontban emeltetik merőleges, mely A-ból AC_1 sugárral átmetszetik C-ben.

A feladatnak két oldása lehetséges, minthogy az egész feklapi szerkezetet az Ab fekvetület körül 180 fokkal képzelhetjük átfordítva.

13. §.

Adva van egy sík, és egy egyenes vonal, mely a síkot átmetszi; huzassék a metsző ponton keresztül a síkon egy vonal, mely az adott vonallal egy adott α szöget képezzen.

Feloldás. A jelen feladat az előbbivel azonos, csak hogy itt általánosabban a feklap helyett egy tetszőleges sík vétetett. A feloldás elve is tehát ugyanaz lesz, mint az előbbi feladatnál, csak hogy a szükséges szerkezet végbevitelére az adott sík a fekszeldéje körül a feklapba fog befordítatni. A 99-ik ábrában FSF' az adott sík, $(ab, a'b')$ az adott egyenes, (a, a') pedig az átdöfési pont. — A vonalnak egy tetszőleges (b, b') pontjából vonatott a síkra egy merőleges $(bc, b'c')$ és meghatároztatott ennek a síkkali (c, c') átdöfési pontja; azután a sík az FS szeldéje körül a feklapba fordíttatott le, mely alkalommal az (a, a') pont A-ba, a (c, c') pont C-be jutott, hol AC nem egyéb, mint az $(ab, a'b')$ vonalnak az FSF' síkrai vetülete; miért is C-ben emeltetett AB-re egy merőleges, a melyre a $(bc, b'c')$ merőleges valódi hossza felvitetett B-ig, lett $CAB=H$ szög a vonalnak a síkhozi hajlási szöge. Ezen szög mellé szerkesztetett az adott $BAD_1=\alpha$ szög, és az előbbi feladat eljárása szerint meghatároztatott a háromél harmadik β oldala, a melynek szárán egy tetszőleges D pont jelöltetett meg, mely a sík visszafordításánál (d, d')-be jut, úgy hogy $(ad, a'd')$ lesznek a keresett vonal vetületei.

A feladatnak szinte van még egy második oldása, melyet úgy nyerünk meg, ha a sík lefordítása után az egész feklapbani szerkezetet az AC vonal körül képzeljük 180 fokkal átfordítva.

14. §.

Adva van két sik, és egy pont; vezettessék a ponton keresztül egy harmadik sík, mely az előbbiekhez adott α, és β hajlással birjon.

Feloldás. Legyen a 100-ik ábrában FSF' az egyik, $F_1S_1F_1'$ pedig a másik sík, és képzeljük a keresett síkot szinte már meghuzva, mely is az adottakat a CD és CE vonalak szerint metszi át; akkor ezen metszési vonalak, és az adott síkok

CA metszési vonala egy háromélt képeznek, a melyben a CA éleni hajlási szög ösmeretes, mint az adott síkok hajlási szöge, a másik két hajlási szög pedig meg van adva; miért is a 7-ik §. szerint meghatározhatók az ACD és az ACE oldalak. — Képzeljük ezután az FSF' síkot az SF szeldéje körül a feklapba fordítva, vegyünk fel azután a lefordított AC élen egy tetszőleges C pontot, és szerkesszük a talált ACD szöget, a melynek CD szára a forgási szelde átvágásával meghatározza a keresett sík fekszeldéjének D pontját. Épen így határoztatik meg a keresett szeldének E pontja az $F_1S_1F_1'$ sík lefordítása által; mely két pont által a fekszelde meg lesz határozva. — A függszelde meghatározására nézve pedig szolgál a keresett síkban fekvő C pont. — Az így meghatározott síkhoz végre az adott ponton keresztül egy párhuzamos sík lesz vezetendő.

A 101-ik ábrában FSF' és $F_1S_1F_1'$ az adott síkok. Az előbbi sík az FS éle körül fordíttatott a feklapba, hol azután a közös AB él AB_1-be jutott; a másik sík az F_1S_1 szeldéje köröl fordíttatott le, és az AB él helyzete lett AB_{11}. Most a B_1m, és $B_{11}n$ merőlegesek által meghatároztatott a két sík hajlási szöge mBn. — A 102-ik ábrában MBN az adott síkok hajlási szögének 180 fokrai pótlása, úgy szinte 180 fokra pótoltattak az adott hajlási szögek, és azok az MBN szög mellé rajzoltattak. MBP_1 és NBP_{11}-be; a B-től egyenlő távolba vett P_1 és P_{11} pontok forgatása által meghatároztattak a $P_1'qp$, és $P_{11}'rp$ hajlási szögek, a melyek ismét 180 fokra pótolva átvitettek a 101-ik ábrába AB_1D, és $AB_{11}E$-be, mi által meg lett határozva a keresett sík DE fekszeldéje. — Minthogy pedig a tetszőleges C pont helyett a jelen esetben a (b, B') vétetett fel, mely magában a függvetületi síkban fekszik, azért a függszeldét csak a B' ponton kellett keresztül vezetni. — A sík irányra nézve ekkép meg lévén határozva, még csak ehhez az adott ponton keresztül kell egy párhuzamos síkot vezetni.

15 §.

Van adva a térben egy szög, és a szárainak fekhajlási szögei, kerestetik az adott szög fekvetülete. (Egy szöget a látkör síkjára hozni).

Feloldás. Legyen a 103-ik ábrában BAC az adott α szög, és képzeljünk annak A csucsából a feklapra egy merőlegest bocsájtva, míg ezt a-ban nem éri, akkor ered A-nál egy háromél, a melyben $BAC = \alpha$ oldal meg van adva, továbbá a BAa és a CAa oldalak nem egyebek, mint az adott β és γ fekhajlási szögek 90 fokrai pótlása; a mely adatokból tehát az 5-ik §. szerint könnyen meghatározható az α oldalnak ellentett hajlási szög, mely már a kivánt BaC vetületet fogja képezni.

16. §.

Van adva egy vonal, és ezen egy pont; vezettessék ezen ponton keresztül egy vonal, mely az előbbivel egy adott α szöget képezzen, és egy szinte adott fekvetülettel birjon.

Feloldás- Legyen a 103-ik ábrában BA az adott vonal, és A annak egy pontja, aC pedig a keresett vonal fekvetülete. Képzeljük a keresett AC vonalat már meghuzva, akkor ered A-nál egy háromél, a melyben adva van először a $BAC = \alpha$ oldal, másodszor a $BAa = 90 - \beta$ oldal, hol β az adott vonal fekhajlási szöge, és harmadszor a BaC szög; mint a BaA, és CaA oldalak hajlási szöge. Ezen adatokból tehát a 11-ik §. szerint feltalálható a hiányzó harmadik oldal aAC. Képzeljük most már az aAC háromszöget az aC oldala körül a feklapba lefordítva, akkor ezen háromszögben ösmeretes az aA befogó, és a már meghatározott aAC szög, miért is a háromszög szerkeszthető, és az átfogó AC lesz a keresett vonal, C pedig annak feknyoma.

17. §.

Adva van egy sík, és kivüle egy pont; vezettessék a ponton keresztül egy egyenes vonal, mely adott fekhajlás mellett a síkkal egy adott szöget képezzen.

Feloldás. Legyen a 104-ik ábrában FSF' az adott sík, A a kivüle adott pont, VS_1 a fekvetületi sík; bocsássunk A-ból az adott síkra egy merőlegest AB, és képzeljük szinte a kivánt AE egyenest már meghúzva, akkor ezen egyenes, a síkrai merőleges, és az A pont vetítő Aa vonala egy háromélt képeznek, melyben ismeretes 1-ször az aAB oldal, mely az aBA háromszögnek az aB oldala körüli lefektetése által megnyerhető, 2-szor ismeretes az EAB oldal, mely is a keresett vonal és a sík adott β hajlásának 90 fokrai pótléka, végre 3-szor ismeretes az $aAE=90-\alpha$ oldal, hol α a keresett vonalnak adott hajlási szöge. Ezen adatokból tehát az 5-ik §. szerint meghatározható a $90-\beta$ oldalnak ellentett hajlási szög BaE; a mely is az ismert fekvésü aB mellé szerkesztetik. Ha most az aAE háromszöget a talált aE vonal körül képzeljük a feklapba lefordítva, akkor az A pont A_1-be jut, hol aA_1 merőleges aE-re, és egyenlő aA-val, A_1-nél szerkesztetik a $90-\alpha$ szög, melynek A_1E szára által meghatároztatik a keresett vonalnak feknyoma E.

A 105-ik ábrában FSF' az adott sík, (a, a') kivüle egy pont; ebből vonatott az $(aB, a'b')$ merőlegesen a síkra, és meghatároztatott a B feknyoma, aB körül azután az aBA háromszög lefordított, mi által az (a, a') pont A-ba jutott; a nyert aAB szög mellé szerkesztettek a $90-\beta$, és a $90-\alpha$ szögek, hol α az adott fekhajlási szög, β pedig azon szög, melyet a keresett vonalnak képezni kell a síkkal, a mely tehát szinte meg van adva. Az 5-ik §. szerint most a lefordított AE_1 és AE_{11} élen felvétetik egy tetszőleges pont; e helyett itt legczélszerübben azon E_1 pont vétetik, melyet nyerünk, ha a Ba vonalat addig hosszítjuk, míg az, az aE_1 élt nem metszi. Ekkép tehát meg lesz határozva a $90-\beta$ oldalnak ellentett e_1aE hajlási szög, és ezen szerkesztés mellett egyszersmind E a keresett feknyom. Ugyanis E meghatározására most az EaA háromszöget kell aE körül lefektetni, miért is aA_1 merőleges aE-re, és egyenlő aA-val, A-nál pedig szerkesztendő a $90-\alpha$ szög; de az így nyert aA_1E háromszög azonos az aE_1A háromszöggel, mert mind a kettő derékszögü, azonfelől az aA befogó egyenlő aA_1-el, és az A-náli szögek $=90-\alpha$ szerkezet szerint, azért tehát az aE_1-nek is egyenlőnek kell lenni aE-vel. Ha tehát végre a meghatározott (E, e') pont az adott (a, a')-el összeköttetik, lesznek $(aE, a'e')$ a keresett vonal vetületei.

18. §.

Adva van egy pont, és két sík; vezettessék a ponton keresztül egy egyenes vonal, mely a síkokkal adott hajlási szögeket képez.

Feloldás. Ezen feladat az előbbi czikkben tárgyalttal azonos, azon különbséggel mindazonáltal, hogy itt a fekvetületi sík helyett általánosabban egy tetszőleges sík van megadva; a feloldás is tehát elvileg az előbbenivel egyenlő leend, csak hogy a szükséges szerkezetek végbevitelére az adott síkok egyike a feklapba lesz befordítandó.

A 106-ik ábrában FSF' és $F_1S_1F_1'$ az adott síkok; (a, a') pedig az adott pont, a melyből vonattak mind a két síkra az $(ab, a'b')$ és $(ac, a'c')$ merőlegesek, meghatároztattak azután ezen két vonal átdöfései az egyik FSF' síkkal, nevezetesen az $(ab, a'b')$ átdöfése (b, b')-ben, az $(ac, a'c')$ átdöfése pedig ugyanazon FSF' síkkal (c, c')-ben van. Most az FSF' sík az FS fekszeldéje körül a feklapba fordíttatott le, mely alkalommal a (b, b') pontja B-be, a (c, c') pontja pedig C-be jutott. Ezután a BCA háromszög fordíttatott le a feklapba a BC oldal körül, megjegyezvén, hogy BA-nak BC-re merőlegesnek kell lenni, és egyenlőnek az $(ab, a'b')$ merőleges valódi hosszával. Ekkép tehát ösmeretes a CAB szög, melyet a két merőleges egymással befoglal; e mellé szerkesztetik tehát az AC szárhoz a $90-\beta$ szög, hol β azon szög, mely alatt a keresett vonal fogja az $F_1S_1F_1'$ síkot metszeni, az AB szárhoz pedig szerkesztetik a $90-\alpha$ szög, hol α a keresett vonalnak hajlási szöge az FSF' síkhoz. Ezen három szögből, mint egy háromél oldalaiból szerkesztetik most már, az előbbi czikk észrevétele szerint a $90-\beta$ oldalnak ellentett e_1BE hajlási szög, hol azután egyszersmind E lesz a keresett vonalnak és az FSF' síknak átdöfési pontja a feklapba befordítva. Ha tehát a sík az FS szeldéje körül ismét az eredeti állásába visszafordíttatik, lesznek (e, e') az E pont vetületei, melyek azután az adott (a, a') ponttal összekötve megadják az $(ae, a'e')$ keresett vonalat.

Ezen feladatnak egy második oldását az által nyerjük meg, ha a talált e_1BE hajlási szöget a BC vonal másik oldalára szerkesztjük.

III. Szakasz.

A síkok által bezárt testekről.

1. §.

A hasáb.

Ha egy egyenes vonal magával párhuzamosan úgy mozog, hogy az egy adott sokszöget folytonosan átmetsz, ered egy test, melynek neve *hasáb*. Az alkotó egyenes vonal azon állásában, hol a sokszög csúcsain megy keresztül, élnek neveztetik; és ezen élek vetületei a hasáb meghatározására elegendők. A 107-ik ábrában ($abcde$, $a'b'c'd'e'$) az adott sokszög, (A_1a, $a_1'a'$) pedig az adott egyenes, melyhez azután a sokszög csúcsain keresztül párhuzamosak vonattak. — Az adott sokszögre nézve megjegyzendő, hogy ámbár annak egyik vetülete tetszőlegesen felvehető, a másik vetületben mindazonáltal csak három csúcspont vetülete lehet megadva, ha azt akarjuk, hogy a sokszög csúcsai egy síkban feküdjenek, minthogy három pont által a sík már meg van határozva; a hiányzó pontok tehát azon feltételből határozandók meg, hogy a csúcsok a már adott három pont síkjába feküdjenek. Erre nézve azonban a sík szeldéi meghatározása nem szükséges, ha az adott vetületben az átszegellők meghuzatnak. Igy ha a fekvetület $abcde$, a függvetületben pedig az $a'b'e'$ pontok volnának megadva, akkor a hiányzó c', és d' pontok meghatározására meghuzatik először e (be, $b'e'$) átló, továbbá a fekvetületben az ac, és ad átlók vetületei, és ezek metszése be-vel vetítetik $b'c'$-re, mi által az $a'c'$, és $a'd'$ vetületek iránya, és a d, és e pontok vetítése által magok a c', és d' pontok lesznek meghatározva.

Ha valamennyi élek feknyomait meghatározzuk, akkor ered az $A_1B_1C_1D_1E_1$ szokszög, mely a hasáb alapjának mondatik; és a hasábnak minden metszése oly *mn* síkok által, melyek a feklappal párhuzamosak, ezen sokszöggel lesz azonos. — Minthogy pedig ugyanazon hasáb ered, akár ezen alap, akár az adott sokszög vétetik irányvonalul, azért ha az iránysokszög különösen megadja nincsen, ez mindig magában a feklapban vétetik fel, és így az egyszersmind a hasáb alapját képezi.

Ha a hasáb élei a feklapra merőlegesen állanak, akkor a hasáb egyenesnek mondatik; ez esetben annak fekvetülete maga az adott sokszög, a függvetületben pedig az élek vetületei a *VT*-re merőlegesek. — Különben könnyű belátni, hogy a vetületi síkok czélszerü átváltoztatása által, minden hasáb egyenes hasábbá változtathatik által; a miről azonban alább bővebb alkalmunk leend szólani.

2. §.

Hogy a vetületekből a testek alakját mentől világosabban meg lehessen ösmerni, igen fontos azon vonalakat, melyek a test látható részén fekszenek, megkülönböztetni azoktól, a melyek a test által elfedetnek. Miért is ezen utóbbi vonalakat pontozva fogjuk kihúzni. Hogy pedig megtudjuk, mely vonalak láthatók, és melyek fedettek az egyes vetületekben, szolgáland a következő megjegyzés. Egy test fekvetülete annak *felülnézetét* állítja elő, a mit úgy lehet képzelni, mintha a test a feklap és vizsgáló szeme között feküdne, de úgy, hogy a látsugarak a feklapra merőlegesen álljanak. Innét tehát következik, hogy két egymás felett levő pont, vagy vonal közül az leend látható, a melyik a feklaptól távolabbra esik. De a feklap feletti távolságokat a függvetület adja meg, miért is a fekvetületben azon részek lesznek láthatók, melyek függvetületei a *VT*-től távolabbra esnek. Úgy szinte a test függvetülete annak *oldalnézetét* állítja elő, mintha a test a szem, és a függlap közé úgy volna helyezve, hogy a látsugarak a függlapra merőlegesek legyenek; miért is a függvetületben azon részek lesznek láthatók, melyek a függlaptól távolabbra esnek. Minthogy pedig a függlaptóli távolságok a fekvetületből veendők, azért a függvetületben látható részek a fekvetületben szinte a *VT*-től távolabbra esnek. — Ha tehát a

108-ik ábrában ($p_{\text{I}}q$, $p'q_{\text{I}}'$) és ($p_{\text{II}}q$, $p'q_{\text{II}}'$) két adott vonal, akkor annak megbirálására, valjon a fekvetületben melyik látható a vonalak közül, felvesszük azon q pontot, melyben a két vonal fekvetülete egymást átmetszi, és megkeressük a hozzá tartozó q_{I}' és q_{II}' függvetületeket. — S minthogy a vonalak felvétt állásánál q_{II}' a VT-től távolabbra esik, és az a ($p_{\text{II}}q$, $p'q_{\text{II}}'$) vonal pontja, azért ezen vonal fekvetülete lesz a látható. — Hogy továbbá megbírálhassuk, hogy melyik vonal lesz a függvetületben egészen kihuzandó, vegyük fel azon p' pontot, a melyben a függvetületek egymást átmetszik, és keressük meg a hozzátartozó p_{I} és p_{II} fekvetületeket. Ezek közül p_{I} távolabbra esvén a VT-től, a függvetületben $p'q_{\text{I}}'$ lesz a látható vonal.

Magából érthető azonban, hogy a test véghatárvonalai mindig láthatók, és azért mind a két vetületben a szélvonalak mindenkor kihuzandók.

Különben a látható és fedett vonalak megismerésére ezen most adott módszer csak kétes esetekben fog használtatni, minthogy úgy is a kissé gyakorlott szem első tekintetre meg fogja birálhatni, hogy mely részek vannak a test látható oldalán.

A mi nevezetesen a hasáb éleit illeti, itt e következő egyszerű szabály fog tekintetbe vétetni. A 107-ik ábrában $A_{\text{I}}B_{\text{I}}C_{\text{I}}D_{\text{I}}E_{\text{I}}$ a hasáb alapja; képzeljünk ennek csúcsaiból merőlegeseket vezetve a VT-re, melyek közül a szélsők a C_{I} és E_{I}-en mennek keresztül. Azon élek tehát, a melyek ezen szélmerőlegesek között a *tengely felé* esnek, (itt csak a D_{I} él), a *függvetületben* pontozandók, a többiek mint láthatók, egészen kihúzatnak. A fekvetületben pedig a két szélső *alkotó* között (D_{I} és A_{I}) azon élek, melyek a *hasáb felé* esnek, (itt csak az E_{I} él), pontozandók, a többiek, mint láthatók, egészen kihúzandók.

3. §.

Feladat. Adva van egy hasáb, és egy a felületén fekvő pontnak fekvetülete, kerestetik ennek függvetülete.

Feloldás. A 109-ik ábrában elő van állitva egy hasáb, melynek iránysokszöge (ABC, $a'b'c'$) és alkotója (Cd, $c'd'$);

a felületén fekvő pontnak fekvetülete legyen g-ben; akkor ezen ponton keresztül vezettetik egy alkotó fekvetülete gh_1 vagy gh_{11}, megkerestetnek az illető függvetületek $g_1'h_1'$ vagy $g_{11}'h_{11}'$, a melyre azután a g pont egyszerűen vetíttetik g_1' vagy g_{11}'-be. — Egy ily fekvetületnek tehát, mint látható két függvetület felel meg, a mint az adott pont a hasáb felső CB, vagy alsó CA oldalfelületén fekszik; ezek közül a függvetületben g_1' látható, a g_{11}' pedig az elfedett $c'b'$ oldalfelületen fekszik.

Fordítva, ha egy a hasábon fekvő pontnak függvetülete volna megadva, akkor szint ezen eljárás szerint a fekvetületben két pontra jutunk, a mint tudniillik a pont a hasáb elöli, vagy hátulsó részén fekszik.

4. §.

Feladat. Adva van egy hasáb, és egy egyenes vonal, mely rajta keresztül megy, kerestetnek az átmeneti pontok.

Feloldás. Ha az egyenes vonalon keresztül képzelünk egy tetszőleges síkot vezetve, akkor ez a hasábot metszeni fogja, ha az egyenes a hasábon megy keresztül, az átmeneti pontok tehát a sík és a hasáb metszési vonalában, és egyszersmind az adott egyenesben is fekszenek, azért csak ezen említett vonalak közős pontjait kell meghatározni. — Ha tehát a 110-ik ábrában ($A_1B_1C_1D_1$, $a_1'b_1'c_1'd_1'q'$) az adott hasáb (oP, $o'p'$) az adott egyenes, akkor képzeljük az egyenes vonalon keresztül téve annak fekvetítő síkját; ez a hasábot egy oly sokszögben fogja metszeni, melynek fekvetülete a vonal fekvetületével egybeesik, a függvetület meghatározására tehát csak az éleket metsző a, b, c, és d pontokat kell felvetíteni ($a'b'c'd'$)-be; ezen négyszöget az adott vonal m' és n'-ben metszi által, melyek vetítve megadják az m, és n fekvetületeket is; és így az (m, m') és (n, n') pontok lesznek a keresett átmeneti pontok. — Az (m, m') pont az A_1B_1 felületen fekszik, mely mind a két vetületben látható, azért a vonal (om, $o'm'$) része kihúzandó. A vonal (mn, $m'n'$) része a hasáb belsejében lévén, természetesen nem látható. Az (n, n') pont pedig a C_1D_1 felületen lévén, mely mind a két vetületben el van fedve, a vonal (n, n')-től része szinte nem látható, míg az a hasáb szélvonalain túl nem megy.

A fekvetítő sík helyett épen oly egyszerűen lehetett volna a függvetítő síkot is venni, mely esetben a metsző vonal függvetülete esett volna össze a vonal függvetületével, a fekvetületbe tehát azon pontokat kellett volna vetíteni, a melyekben a vonal függvetülete metszi az éleket.

Az adott vonalon keresztül azonban igen czélszerűen vezethető egy oly sík, mely a hasáb alkotó vonalával párhuzamos; minthogy ezen sík a hasábot az élekkel párhuzamos vonalak szerint metszi. Ezen sík fekszeldéjének meghatározására felvétetik az adott egyenesben egy tetszőleges (o, o') pont, melyen keresztül vonatik egy az alkotóval párhuzamos $(O_1 o, o_1' o')$ vonal; e két vonal O_1 és P feknyomait összekötve, lesz $O_1 P$ a keresett sík fekszeldéje, mely a hasáb alapját az M_1 és N_1 pontokban metszi át. Az ezen pontokon keresztül vezetett $(M_1 m, m_1' m')$ és $(N_1 n, n_1' n')$ alkotók tehát az átmeneti pontokon fognak keresztül menni.

5. §.

Feladat. Adva van egy hasáb, és egy sík, mely a hasábot átmetszi, kerestetik a metszési sokszög.

Feloldás. Keressük meg az adott hasáb minden éleinek átdöfését az adott síkkal, és a nyert pontokat kössük össze ugyanazon rendben, a melyben az élek következnek egymásra. A 111-ik ábrában $(A_1 B_1 C_1 D_1 q, a_1' b_1' c_1' d_1' q')$ az adott hasáb, FSF' a metsző sík; az átdöfési pontok meghatározására az élek függvetítő síkjai használtattak, melyek segítségével lett (a, a') az A_1 él, (b, b') a B_1 él, s. i. t. átdöfési pontja, melyek rendre összekötve megadták az $(abcd, a'b'c'd')$ metszési sokszög vetületeit. — Minthogy az adott sík az ábrában feszített sík, azért a két vetületben a lemetszett hasáb két különböző fele látható. — Hogy még a metszési sokszög valódi nagyságát feltaláljuk, csak az adott síkot kell az FS szeldéje körül a feklapba lefordítani, és a csúcsok helyzetét a lefordítás után meghatározni. Hogy pedig a szerkezet a hasáb rajzán túl essék, czélszerű előbb, mint az ábrában történt, az adott sík szeldéjét párhuzamosan elmozdítani, és csak azután a lefordítást szerkeszteni. $F_1 S_1$ a párhuzamosan elmozdított forgási tengely és $ABCD$ a metszési sokszög valódi alakja.

6. §.

Ha egy hasáb oldalfelületeit, úgy szinte annak alapjait is egy síkba képzeljük egymásmellé ugyanazon rendben helyezve, melyben azok a hasábon voltak, megkapjuk a hasáb *kifejtését*, vagy *halóját*.

A kifejtés szerkesztésére nézve szükségünk van mindenek előtt a hasáb *derékmetszetére*, vagyis a hasábnak azon síkkali metszésére, mely az éleire merőlegesen áll. Az ezen metszés által nyert sokszög ugyanis a hasáb kifejtésénél egyenes vonallá válik, és az egyes oldalai az illető élek valódi távolságait adják meg. A 112. ábrában előállított ($A_1 B_1 C_1 D_1 E_1 q$, $a_1' b_1' c_1' d_1' e_1' q'$) hasáb kifejtésére először a függvetületi lap oly állásba hozatott, melynél a hasáb éleivel párhuzamos, az alapmetszet tehát $V'T'$-ben húzatott az élek fekvetületeivel párhuzamosan. A hasáb alapjának minden egyes pontja az új tengelyre vetítetett, ($a_{11}' b_{11}' c_{11}' d_{11}' e_{11}'$)-be, minthogy az alap magában a függlapban fekszik; az élek iránya pedig az új függvetületben az által határoztatott meg, hogy az egyik ($A_1 q$, $a_1' q'$) élnek ($q_1 q'$) pontja úgy vetítetett az új függlapba q''-be hogy annak tengely feletti magassága a régi és új függvetületben ugyanaz maradjon. — A függvetület ezen elhelyezése által azt nyertük, hogy először az élek az új függlapban a valódi nagyságokban fordulnak elő, és hogy másodszor a derékmetszet megnyerésére szükségelt sík az új függlapra merőlegesen álland. — Meghúzatott tehát továbbá a hasáb éleire merőleges FSF' sík, az által, hogy az $F'S$ függszeldéje merőlegesnek vétetett az él új függvetületére, fekszeldéje pedig merőlegesen az új tengelyre; azután pedig a derékmetszet valódi nagyságának megnyerésére esen sík az FS fekszeldéje körül a feklapba fordíttatott le, úgy hogy a keresett derékmetszet valódi alakjában $ABCDE$-ben nyeretett meg.

A kifejtés megnyerésére tehát vonatik egy egyenes vonal, aa, melyre a derékmetszeti sokszög egyes oldalai rendre felrakatnak, $ab = AB$, $bc = BC$, s. i. t.; az így nyert a, b, c, stb. pontokon keresztül aa-ra merőleges vonalakra pedig a függvetületből vett élek valódi hosszai vitetnek fel, úgy hogy, $a'a_{11}' = a\mathfrak{A}$, $b'b_{11}' = b\mathfrak{B}$, stb. Végre az így nyert pontok rendre összeköttetnek; a nyert $(\mathfrak{A}\mathfrak{A}_1\mathfrak{A}\mathfrak{A}_1)$ kerület lesz a hasáb oldalfelületének kifejtése, melyhez azután a két szélén még a fekvetületből vett alap valódi nagysága hozzárajzoltatik. — Könnyű itt észrevenni, hogy a nyert $\mathfrak{AB}$, $\mathfrak{BC}$, $\mathfrak{CD}$, stb. távolaknak, az alap A_1B_1, B_1C_1, C_1D_1 stb. oldalaival egyenlőknek kell lenni.

Ha a hasábon egy adott (m, m') pont volna a kifejtésben kijegyzendő, akkor ezen a ponton keresztül vonatik egy alkotó mM_1, melynek új függvetülete $m_{11}'m''$-ben lesz képviselve, úgy hogy m'' az (m, m') pontnak új függvetülete. Kijegyeztetik azután a kifejtésben az $\mathfrak{M}M$ alkotó (az által, hogy az $\mathfrak{CD}$ oldalra E-től felvitetik $\mathfrak{CM}=E_1M_1$ távol) és erre átvitetik végre a keresett M pont az által, hogy $\mathfrak{M}M=m_{11}'m''$.

7. §.

Ha a kifejtendő hasáb csak kevés oldalfelülettel bir, akkor czélszerűen fog alkalmaztatni a következő módszer. A 113-ik ábrában előállított $(A_1B_1C_1a, a_1'b_1'c_1'a')$ hasábnak $(A_1B_1ab, a_1'b_1'a'b')$ oldallapja az A_1B_1 szeldéje körül a feklapba képzeltetik lefordítva, mely alkalommal a (b, b') pont B'-be fog jutni; (ha bl merőleges az A_1B_1-re, és lB' egyenlő azon derékszögű háromszög átlójával, melynek egyik befogója bl, a másik befogója pedig a (b, b') pont magassága a fekvetület felett), ha tehát a talált B' pont a mozdulatlanul maradt B_1-el összeköttetik, lesz B_1B' a $(B_1b, b_1'b')$ élnek valódi hossza; minthogy továbbá a lefektetett lapban fekvő (A) él (B)-vel párhuzamos, és az A_1 pontja, mint a forgási tengely pontja, mozdulatlan marad, azért az A_1-ből B_1B'-re (vagy annak meghosszabbítására) bocsájtott A_1n merőleges lesz az (A) és (B) élek valódi távola. — Ezután képzeljük a $(B_1C_1bc, b_1'c_1'b'c')$ oldallapot lefektetve a B_1C_1 szeldéje körül, akkor a (b, b') pont B-be fog jutni, (ha b-ből merőleges vonatik B_1C_1-re, és ez a B_1 középpontból B_1B' sugárral átmetszetik) és a C_1-ből B_1B-re bocsájtott C_1r merőleges lesz a (B) éz (C) élek távola. Végre az A_1C_1 szelde körül lefordítatott az $(A_1C_1ac, a_1'c_1'a'c')$ oldallap, mely alkalommal az (a, a') pont A-ba jutott, és a C_1-ből A_1A-ra bocsájtott C_1s lesz az (A) és (C) élek távolának valódi hossza.

Meghúzatik most már egy tetszőleges 𝔄𝔄 egyenes vonal, és erre rendre átvitetnek a talált élek távolai, úgy hogy $\mathfrak{A}\mathfrak{B} = A_1 n$; $\mathfrak{B}\mathfrak{C} = C_1 r$; és $\mathfrak{C}\mathfrak{A} = C_1 s$; azután a nyert pontokon keresztül merőlegesek vonatnak 𝔄𝔄-ra. Az első merőleges egy tetszőleges A_1' pontjából mint középpontból vonatik $A_1 B_1$ sugárral egy körív, míg ez a második $\mathfrak{B}B_1'$ merőlegest B_1'-ben nem metszi; ezen pontból mint középpontból átmetszetik $B_1 C_1$ sugárral a jövő merőleges, C_1'-ben, a melyből végre $C_1 A_1$ sugárral metszetik át az utólsó merőleges. Végre az élek talált valódi hossza valamennyi merőlegesre átvitetik a talált pontokból, mi által lesz ($A_1'B_1'C_1'A_1'$, $ABCA$) a keresett kifejtés.

Megjegyzendő itt, hogy az A_1'-ből $A_1 B_1$ sugárral vont körív a $B_1'\mathfrak{B}$ merőlegest két pontban metszheti által, úgy szinte a B_1'-ből $B_1 C_1$ sugárral leirt körív a jövő merőlegest szinte két pontban és így tovább. A tévedések mellőzésére tehát észre kell vennünk, hogy az A_1-ből $B_1 B'$-re vont $A_1 n$ merőleges csak ennek meghosszabbítását találja, miért is a kifejtésnél szinte az $A_1 n$-nek csak $\mathfrak{B}B_1'$ él meghosszabbítását kell találni; ellenben a C_1-ből $B_1 B$-re vont merőleges ezt valóban metszí, miért is a kifejtésben is a C_1' pont úgy lesz megválasztandó, hogy a belőle $B_1'\mathfrak{B}$-re vont merőleges ezt még a kifejtésben találja s. i. t., végre az $A_1'A_1'$ végpontok összeköttetési vonalának 𝔄𝔄-val párhuzamosnak kell lenni.

Ha a hasábon egy (m, m') pont volna megadva, a melynek helyzete a kifejtésben is felkeresendő, akkor ezen ponton keresztül vezettetik egy alkotó ($M_1 m$, $m_1'm'$), mely szinte a hozzátartozó oldallap szeldéje körül a feklapba fordíttatik le (az által, hogy $M_1 M$ párhuzamosan húzatik $A_1 A$-hoz), és meghatároztatik rajta a lefektetett M pont (az által, hogy mM merőlegesen vonatik a forgási tengelyre), azután a kifejtésben A_1' től C_1' felé felvitetik az $A_1 M_1$ távol, a nyert M_1' ponton keresztül párhuzamos vonatik a hasáb alkotóihoz, a melyre végre M_1'-től felvitetik az $M_1 M$ távol.

8. §.

Feladat. Egy adott háromoldalú hasábot úgy metszeni egy sík által, hogy a metszési háromszög egyenoldalú legyen.

Feloldás. Legyen a 113-ik ábrában ($A_1 B_1 C_1 a$, $a_1'b_1'c_1'a'$)

az adott háromoldalú hasáb, akkor ennek mindenekelőtt meghatároztatik az előbbi czikk szerint az $A_1'A_1'AA$ kifejtése, azután húzatik egy tetszőleges $\mathfrak{A}\mathfrak{A}$ vonal merőlegesen az alkotókra, lesz $\mathfrak{A}$ a keresett egyenoldalú háromszögnek az (A) élhez tartozó csúcspontja. Meghatároztatik azután a (B) és (C) éleken a másik két P és Q pont úgy, hogy $\mathfrak{A}P=PQ=Q\mathfrak{A}$ legyen, a mi legegyszerűbben próba által történik épen oly könnyűséggel és pontossággal, mint például egy egyenes vonal három egyenlő részrei osztása. — Miután így a kifejtésben a kivánt háromszög meg van határozva, még csak az illető pontok a vetületekre visszavezetendők, a mi az által történik, hogy az $A_1'\mathfrak{A}$, $B_1'P$ és $C_1'Q$ távolok a kifejtésből az illető lefektetett élekre vitetnek által, melyek azután az élek visszafordítása alkalmával a keresett pontok vetületeit fogják meghatározni.

Ezen feladatnál, minden tetszőlegesen felvett ($\mathfrak{A}$) ponthoz, két feloldás lehetséges, a mint ugyanis az $\mathfrak{A}PQ\mathfrak{A}$ tört vonal az $\mathfrak{A}\mathfrak{A}$ vonal egyik, vagy másik oldalára szerkesztetik.

Megjegyzendő még, hogy ezen feladatnak egy szigorú mértani feloldása is van, a melyre egyszerűen az I. Szakasz 64 és 65-ik czikkeiben tárgyalt feladatok oldása által vezettettünk, ott ugyanis csak az $\alpha\beta\gamma$ háromszöget egyenoldalúnak kell venni.

Említést érdemel még, hogy a háromoldalú hasábból kimetszett egyenoldalú háromszög oldala x e következő képlet által fejezhető ki:

$$x=\sqrt{\frac{a^2+b^2+c^2+2\sqrt{a^2(a^2-b^2)+b^2(b^2-c^2)+c^2(c^2-a^2)}}{3}}$$

hol a, b, és c a hasáb derékmetszetének oldalait jelentik.

9. §.

Feladat. Kerestetnek azon hasábnak vetületei, melynek alapja, magassága, és két egymásra következő oldalfelületnek az alaphozi hajlási szöge van megadva.

Feloldás. Szerkesszük a 114-ik ábrában a hasáb adott alapját úgy a feklapba, hogy annak egyik oldala AB a vetületi tengelyre merőlegesen álljon; akkor az ezen oldalhoz tartozó oldalfelület síkja merőleges leend a függvetületi lapra, miért is annak adott (k) fekhajlási szöge szinte szerkeszthető leend. Képzeljünk most már a jövő BC oldal egy tetszőleges (E) pontjában egy merőleges síkot vezetve, és azt az EF fekszeldéje körül a feklapba lefordítva, akkor a BC oldalfelület (k') fekhajlási szöge szinte a valódi nagyságában leend látható; ezen szögnek EG szárát tehát addig kell meghosszabbítani, míg a (k') szög GF keble a hasáb adott magasságával nem lesz egyenlő. Ha most az EFG háromszöget az EF oldala körül ismét visszafordítjuk, míg FG a feklapra nem lesz merőleges, akkor a G pont függvetülete g'-be jut, ha $FG = f'g'$. Ha ezen háromszöget végre magával párhuzamosan úgy fogjuk elmozdítani, hogy annak E csúcspontja folytonosan a BC oldalon mozogjon, akkor a G csúcspont az AB oldal síkját h'-ben fogja átdöfni, mely pontnak egyszerű vetítése által meghatároztatik annak (h) fekvetülete is. Kössük össze tehát B-t h-val, húzzunk az alap többi csúcsaiból Bh-hoz párhuzamosakat, és vigyük azokra fel a Bh vetület nagyságát, lesznek $(ABCDh,\ a'b'c'd'h')$ a hasáb keresett vetületei.

10. §.

Két hasáb metszése.

Ha két hasábnak alkotói párhuzamosak, akkor két oly hasáb egymást vagy épen nem metszi, vagy ha igen, akkor a metszési vonalak szinte az alkotóval lesznek párhuzamosak. Ezen metszési vonalak feltalálására nézve metszük a két hasábot legegyszerübben a fekvetületi síkkal, vagy egy oly síkkal, mely ahhoz párhuzamos; azután csak a nyert sokszögek közös pontjain kell keresztül párhuzamosakat vonni az alkotóval.

Ha pedig a két hasáb alkotói nem párhuzamosak, akkor azok szinte vagy elmennek egymás mellett, vagy metszik egymást. A metszés ez esetben kétféle lehet, vagy ugyanis az egyik hasáb a másikon úgy megy keresztül, hogy annak minden éle keresztül hat a másik hasábon, és az ily metszés *átdöfés*nek, vagy *áthatás*nak neveztetik; vagy pedig az éleknek csak egy része megy a másik hasábon keresztül, a többi él pedig már a másik hasábon kivül megy el, a mely esetben csak *bemetszés*, vagy *bevágás* áll elö.

Az *áthatásnál* két külön vált metszési sokszöget nyerünk, egyet ugyanis a bemenetnél, a másikat a kijövetnél, holott a *bevágásnál* csak egy sokszög jön létre, minthogy a bemeneti és a kijöveti sokszög egygyé olvad. Ha ugyanis egy hasábot $(123, 1'2'3')$ a 115-dik ábrában, mely a másik $(Abcd, a'b'c'd')$ hasábot átdöfi, magával párhuzamosan képzeljük mozdulva, a (b, b') él felé, akkor az $(1, 1')$ él két átdöfési $(m, m_,)$ és (n, n') pontja folyvást közeledni fognak egymáshoz, míg azok a (b, b') élen nem egyesülnek, mely esetben az $(1, 1')$ és a (b, b') élek magok is metszik egymást; — ha pedig a hasáb még tovább is mozdíttatik, akkor az $(1, 1')$ él már szabad lesz, az többé a másik hasábon nem megy keresztül, de a helyett a kijöveti sokszög a bemenetivel egyesülve csak egy zárt sokszöget fog képezni.

11. §.

Két hasáb átdöfésének meghatározására legyen adva a 115-ik ábrában az $(Abcd, a'c'c'd')$ és az $(123, 1'2'3')$ hasáb, a melyek metszései a feklappal megadva nincsenek. Ez esetben legczélszerübben fogjuk minden egyes élnek átmenetét meghatározni a másik hasábon (a 4-ik §. szerint) és a nyert átdöfési pontokat kellően összekötni. Ugyanis vesszük először az $(1, 1')$ élt, fektetünk rajta keresztül egy fekvetítő síkot, mely is az $(Abcd, a'b'c'd')$ hasábot az $(\alpha\beta\gamma\delta, \alpha'\beta'\gamma'\delta')$ négyszög szerint fogja metszeni; minthogy pedig az átdöfésnek nem csak ezen négyszögben, hanem egyszersmind az $(1, 1')$ élben is kell feküdnie, azért az átmeneti pontok lesznek (m, m') és (n, n'); melyek közül a bemeneti (n, n') pont az $(Ab, a'b')$ hasáb oldalon fekszik, (minthogy az $1'$ a négyszög $\alpha'\beta'$ oldalát metszi) a kijöveti (m, m') pont pedig a $(bc, b'c')$ hasáb oldalán van, (minthogy $1'$ a négyszög $\beta'\gamma'$ oldalát metszi).

Hasonló eljárás utján határoztatnak meg a $(2, 2')$ és a $(3, 3')$ élek átmeneti pontjai is.

Minthogy az egymásra következö $(1, 1')$ és $(3, 3')$ élek mindegyike a másik hasáb ugyanazon $(Ab, a'b')$ oldalán megy be, az (n, n') és a (p, p') pontokon, azért ezeket egyszerüen össze lehet kötni a $(pn, p'n')$ vonal által. De a harmadik (2, 2′) él a hasáb $(Ad, a'd')$ oldalán menvén keresztül, a nyert (q, q') pontot se (n, n')-el se (p, p')-el összekötni nem szabad, minthogy mind a két összeköttetési vonal, az $(Ab, a'b')$ és az $(Ad, a'd')$ oldalak közös (A, a') élén megtöretik. — Azért most előbb meg kell határozni, hogy hol megy át az (A, a') él az (123, 1′2′3′) hasábon; mely meghatározás ismét úgy vitetik véghez, hogy az (A, a') élen keresztül vezettetik a fekvetítő sík, mely az (123, 1′2′3′) hasábot a (456, 4′5′6′) háromszög szerint metszi, melyet (a') az (r') és (s') pontokban találván, lesznek egyszerü vetítés által (r, r') és (s, s') a keresett átmeneti pontok; a melyek közül (r, r') az (12, 1′2′) oldalhoz tartozván, az $(nq, n'q')$ összeköttetési vonal törési pontját fogja megadni, úgy szinte az (s, s'), minthogy az a (23, 2′3′)-on fekszik, a $(pq, p'q')$ összeköttetési vonal törési pontját állítja elő. Az egész bemeneti sokszög tehát: $(nrqspn, n'r'q's'p'n')$. A kijövetnél a (2, 2′) és (3, 3′) élek vannak ugyanazon a $(dc, d'c')$ hasáb oldalán, miért is azok egyszerüen összeköttettek; holott a harmadik (1, 1′) él a $(bc, b'c')$ oldalon jövén ki, előbb meg kellett a közös (c, c') él átmenetét az (123, 1′2′3′) hasábon határozni.

A talált metszési sokszögek kihúzására nézve még megjegyzendő, hogy azok közül csak azon vonalak lesznek telt vonallal kihúzandók, a melyek *mind a két* hasáb látható oldalain feküsznek; így a fekvetületben a bemenetnél csak az (np) vonal húzatott ki telt vonallal, a többi vonalak pedig, melyek vagy csak az egyik, vagy mind a két hasáb fedett oldalán feküsznek, csak pontozva jelöltetnek ki. Ezek folytán tehát a függvetületi bemenetnél csak az $(r'q')$ és a $(q's')$ vonalak húzattak ki telt vonallal, a többiek pontoztattak.

12. §.

Ha adva van ismét két hasáb: $(ABCD, a'b'c'd')$ és (1234, 1′2′3′4′) a 116-ik ábrában, és megkeressük ez utóbbi hasáb minden egyes éleinek átmenetét a másik hasábon, tapasztalni fogjuk, hogy a (3, 3′) él már szabad, az ugyanis az $(ABCD, a'b'c'd')$ hasábon kivül megy el, ezen az élen tehát átdöfési pontok nem is létezhetnek, jeléül annak, hogy ez esetben nem áthatás, hanem csak bemetszés van, s ennek folytán metszési vonalul is csak egy zárt sokszöget fogunk nyerni. Az eljárás azonban itt is csak ugyanaz marad, mint az előbbi czikkben, csak a nyert átdöfési pontok összeköttetésére nézve kell némi megjegyzést tennünk. Ugyanis az (1, 1') és (2, 2') élek mindegyike a (*BC*, *b'c'*) oldallapba menvén be, az (*m*, *m'*) és (*l*, *l'*) pontok összeköthetők; továbbá a (4, 4') él a (*DC*, *d'c'*) oldallapba megy be, s minthogy az (1, 1') élre következik, azért az (*o*, *o'*) pont (*m*, *m'*)-el volna összekötendő; de az összeköttetési vonal a közbeeső (*C*, *c'*) élen megtörik (*n*, *n'*) pontban. Most már a (4, 4') élről a (3, 3')-re kellene átmenni, de ezen él szabad, azon tehát átdöfési pontok nincsenek, miért is a (4, 4') él bemenetét ugyanazon él kimenetével (*q*, *q'*)-el kell össeekötni, minthogy pedig az (*o*, *o'*) és a (*q*, *q'*) pontok két különböző síkon fekszenek, azért előbb a közös (*D*, *d'*) éli megtörést (*p*, *p'*)-t kelletett meghatározni.

A (4, 4') él kimenetétől (*q*, *q'*)-től kezdve most a metszési vonalon ismét az (1, 1') él felé fordulván vissza, megkeressük ennek (*s*, *s'*) kimenetét, mely is az (*AB*, *a'b'*) oldalon lévén, előbb az (*A*, *a'*) közös éli megtörés (*r*, *r'*) határoztatik meg. Azután következik a (2, 2') él kimenete (*u*, *u'*); mely pont az előbbi (*s*, *s'*)-el van összekötve, miután előbb az (*A*, *a'*) éli (*t*, *t'*) törés pont meg volt határozva. Végre a (2, 2') élről ismét a (3, 3')-re kellene átmenni, s minthogy ezen átdöfési pont nincsen, azért (2, 2') kimenete, ugyanazon él bemenetével (*l*, *l'*)-el köttetik össze, csakhogy előbb a közbeeső (*D*, *d'*) és a (*C*, *c'*) élek törési pontjai (*w*, *w'*) és (*v*, *v'*) határozandók meg.

A fekvetületben kihúzandók az *sr*, *rq*, és *qp* vonalak, úgy szinte a függvetületben az *u'w'*, *w'v'*, *q'p'*, és *p'o'* vonalak, minthogy ezek mind a két adott hasáb látható oldalain feküsznek; a metszési vonal többi része pontozandó.

13. §.

Ha azonban a két hasábnak a fekvetületi síkkal képzett metszéseik meg vannak adva, vagy azok könnyen meghatározhatók, akkor az átmetszési vonal meghatározására egy egyszerübb és pontosabb módszer is létezik. Ha ugyanis a két hasábot oly síkokkal metszük, melyek mind a két hasáb alkotóival párhuzamosak, akkor az ily síkok mind a két hasábot csak oly egyenes vonalak szerint metszhetik, a melyek magok is az illető alkotókkal párhuzamosak. Ha tehát egy ily sík az egyik hasáb élén vezettetik keresztül, akkor az a másik hasábot két alkotó szerint fogja metszeni, a hol tehát az említett él ezen alkotókat átmetszi, ott lesz ezen élnek bemenete, és kimenete.

Legyen a 117-ik ábrában ($ABCD$, $a'b'c'd'$) és (1234, 1'2'3'4') a két adott hasáb, melyek metszése kerestetik, akkor mindenek előtt egy tetszőlegesen felvett (o, o') ponton keresztül vezetünk két egyenest, melyek egyike (op, $o'p'$) az ($ABCD$, $a'b'c'd'$), — másika (oq, $o'q'$) pedig az (1234, 1'2'3'4') hasáb alkotóival párhuzamos, és megkeressük az ezen két egymást metsző egyenesen keresztül fektetett sík (pq) fekszeldéjét.

Az így nyert szeldéhez azután a két hasáb alapjainak minden csúcspontján keresztül párhuzamosak vonatnak. Minthogy az (1) és a (2) pontokon keresztül vont párhuzamosak az $ABCD$ alapot nem metszik, következik, hogy az (1, 1') és a (2, 2') élek a másik hásábba nem hatnak, hanem mellette szabadon mennek el. A jövő párhuzamos a (B) ponton vezettetett keresztül, és ez az (1234) alapot az (5) és (6) pontokban metszi át; ezen a pontokon keresztül tehát meghúzatnak az (1234, 1'2'3'4') hasáb alkotói, melyeket a (B, b') él a (7, 7') és (8, 8') pontokban metsz át, mely pontok már a keresett metszési vonalhoz tartoznak. Ugyan ezen az úton határoztatik meg minden egyes élnek a másik hasábbai bemenete és kijövete. Az egyes nyert pontok összeköttetésére nézve pedig ugyanazon elvek követendők, a melyek az előbbi §-ben előadattak, ugyanis ha két egymásra következő él ugyanazon az oldallapon hat keresztül, akkor az átdöfési pontok egyszerűen egybekötendők; ha pedig ezen átdöfési pontok két külön síkra esnek, akkor előbb a közös metszési élen, (vagy éleken) a törési pontok keresendők fel.

Ezen módszer használatánál két adott hasábnál előlegesen is meg lehet tudni, hogy csak bemetszés vagy pedig átmetszés áll-e elő. Ugyanis a felvett esetben a szélső B ponton keresztül vont párhuzamos bemegy az (1234) alapba, az (1, 1') és a (2, 2') élek tehát szabadok, a másik szélsö párhuzamos, mely mind a két alapot metszi a (4) ponton vezethető keresztül, így tehát az (*ABCD*, *a'b'c'd'*) hasáb (*C*, *c'*) és (*D*, *d'*) élei szintc szabadok, s ennek folytán tehát a jelen esetben csak bemetszésnek van helye.

Ha pedig az egyik alap két szélső pontján keresztül vezetett párhuzamosak mindegyike metszené a másik hasáb alapját, akkor tökéletes áthatásnak volna helye.

A 118-ik ábrában az (1234, 1'2'3'4') hasáb átmetszése nagyobb világosság kedvéért külön rajzoltatott le, miután a másik (*ABCD*, *a'b'c'd'*) hasáb elmozdíttatott.

Végre megjegyzendő még, hogy ezen módszer még akkor is alkalmazható, ha a hasábok alapjai a rajzlapra fel nem vehetők, ez esetben ugyanis előbb az adott hasábokat egy a fekvetületi lappal párhuzamos síkkal kell metszeni, és azután a nyert metszési vonalakat tekinteni alapul.

14. §.

Minthogy a 117-ik ábrában (*gl*) nem egyéb, mint az (*AD*) és (43) oldallapok átmetszése, ezen oldallapok pedig oly síkok, a melyek fekszeldéi épen az (*AD*) és illetőleg (43) vonalakkal egybeesnek, azért ezen síkok metszési vonalának is a szeldék átmetszési (*M*) pontján kell keresztül mennie; épen így a (*hk*) vonal, mint (*BC*) és (43) oldalak metsző vonala a fekszeldék közös (*N*) pontján megy keresztül, s. i. t., mely megjegyzésből ismét egy egyszerü előállitási módja következik a metszési vonalnak, azon esetben, ha a hasábok alapjai meg vannak adva.

15. §.

A gúla.

A gúlát az által képzelhetjük előállítva, ha egy egyenes vonal, folytonosan egy adott ponton keresztül menve, úgy mozog, hogy egyszersmind egy szintc adott sokszöget átmessen. Az adott pont leend a gúla csúcsa, vagy orma; a mozgó egyenes minden tetszőleges állásában *alkotó*-nak, azon különös esetben pedig, hol az az adott sokszög csúcsain megy keresztül, *él*-nek, maga az adott sokszög pedig irányvonalnak neveztetik.

A 119-ik ábrában (o, o') az adott pont, a melyen az egyes alkotóknak keresztül kell menni, és $(abcde, a'b'c'd'e')$ az irányvonalul szolgáló sokszög. — Ezen sokszögre nézve megjegyzendő, hogy az ugyan lehet egészen tetszőleges is, és ez esetben valamennyi csúcsa tetszőlegesen vétethetik fel, de közönségesen sík sokszög, vagyis olyan, a melynek minden pontja ugyanazon síkban fekszik; és ez esetben csak három csúcspont vétethetik tetszőlegesen fel, és a többi csúcsnak egyik vetülete; — az ezen pontokhoz tartozó második vetület pedig azon feltételből határozandó meg, hogy azok a három tetszőlegesen felvett pont síkjában feküdjenek. Az ide tartozó szerkezet legegyszerűbben az átlók meghúzása által eszközölhető.

Ha az egyes éleknek feknyomai meghatároztatnak, akkor ezek kellő rendben összekötve egy új sokszöget fognak képezni, mely a gúla alapjának neveztetik; és a mely igen czélszerűen vétetik az irányvonal helyett az egyes alkotók meghatározására.

Ha az O csúcsnak (o) fekvetülete az alap sokszögbe esik, mint a 119-ik ábrában, akkor a fekvetületben minden él, úgy szinte minden a gúlán húzott vonal látható leend. Ha pedig a csúcs (o) fekvetülete az alap sokszögén kivül fekszik mint a 120-ik ábrában, akkor azon élek, melyek a két szélső Co, és Eo élek között a csúcs felé esnek, el vannak fedve, a többiek láthatók, úgy szinte az alapnak is csak azon része van elfedve, mely az említett szélsö Co, és Eo élek között a csúcs felé eső oldalon fekszik, mint az ábrában CD, és ED, a többi oldal látható. A függvetületben pedig mindegyik esetben a látható részek meghatározására az alap két szélső vetítő vonala AA' és DD' szolgál irányadóul; ugyanis azon élek, a melyek ezen vonalak között a vetületi tengely felé eső részen fekszenek, a függvetületben el vannak fedve, mint $B'o'$, és $C'o'$; — azon élek pedig, melyek az említett szélvetítő vonalak között a vetületi tengelytől elfordult részen fekszenek, a függvetületben mint láthatók, telt vonal által jegyeztetnek, mint $E'o'$ a 119 és 120-ik ábrákban. Ha azonban az élek a függvetületben a csúcson túl hosszítatnak meg, akkor ezen részen épen azon élek vetületei lesznek láthatók, melyek az alsó részen fedve valának, holott az alant látható élek, fent el lesznek takarva. Magából érthető azonban, hogy a kerethez tartozó vonalak minden vetületben láthatók.

16. §.

Feladat. Adva van egy gúlán fekvő pontnak fekvetülete, kerestetik annak függvetülete.

Legyen a 120-ik ábrában ($ABCDE$, $A'B'C'D'E'$) az adott gúlának iránysokszöge, (o, o') pedig a csúcsa, (m) a felületén fekvő M pontnak fekvetülete, akkor a függvetület meghatározására vezessünk az M ponton keresztül egy gúla alkotót, a melynek fekvetülete az (m) ponton menvén keresztül, lesz oR; függvetülete pedig $o'R'$, a melyre azután csak az adott m pontot vetíteni kell, és lesz m' a keresett függvetület. Az (oR, $o'R'$) alkotó helyett lehetett volna az M ponton keresztül egy bármely más tetszőleges PQ egyenest is vezetni, a melynek fekvetülete tehát, egy az adott (m) ponton keresztül menő tetszőleges pq vonal; ezen vonal az A, és B éleket a p, és q pontokban metszi, mely pontok vetítése által meg lesz határozva a PQ vonal függvetülete is ($p'q'$)-ben; a melyre tehát ismét csak az adott m pontot lesz szükség felvetíteni.

Az eljárás az előadottal azonos marad akkor is, ha fordítva a gúlán fekvő M pontnak függvetülete volna megadva, csakhogy akkor az alkotónak először a függvetülete vonatik meg, és ebből határoztatik meg a hozzá tartozó fekvetület.

17. §.

Feladat. Megkeresendő egy egyenes vonal átmenete egy gúlán. Legyen a 121-ik ábrában ($ABCDEo$, $A'B'C'D'E'o'$) az adott gúla, (a, a') a rajta keresztül menő egyenes vonal, akkor az átdöfési pontok meghatározására nézve az egyenesen keresztül vezettetik egy tetszőleges sík, mely a gúlát általánosan egy sokszög szerint fogja metszeni, és a keresett átdöfési pontok okvetlen ezen sokszög kerületén fognak feküdni, minthogy pedig azok az adott egyenesnek szinte pontjai, azért csak ezen sokszögnek, és az adott egyenesnek metszési pontjai lesznek meghatározandók.

Minthogy az egyenesen keresztül egy tetszőleges síkot lehet tenni, azért ezen síkot úgy fogjuk választani, hogy a nyert metszés szerkezete a lehető legegyszerűbb legyen; miért is 1-ször az egyenesen keresztül vezethető egy vetítő sík, például a függvetítő sík, minthogy ennek metszése a gúlával a függlapban a vetítő sík szeldéjébe, vagy is az adott egyenes függvetületébe esik, és így a másik hozzátartozó fekvetület egyszerűen az átmetszési pontoknak az illető élekrei vetítése által állítható elő; — ezen eljárás szerint találtatott az $(abcde)$ sokszög; és ennek (p, p') és (q, q') metszései az adott vonallal a keresett átmeneti pontokat fogják megadni.

Vagy 2-szor az adott egyenesen keresztül egy oly sík vezettetik, mely egyszersmind a gúla csúcsán is keresztül megy; az ily sík ugyanis a gúlát csak alkotók szerint metszhetvén, a metszés előállítása eléggé egyszerű. Az említett sík megnyerésére kössük össze az adott egyenes egy tetszőleges (r, r') pontját a gúla csúcsával, és keressük meg a nyert $(or, o'r')$ segéd vonal (F, f') feknyomát, melyet az adott egyenes feknyomával összekötve, megnyerjük FG-ben a keresett sík fekszeldéjét; — ez a gúla alapját H és K pontokban metszi át, miért is $(Ho, h'o')$ és $(Ko, k'o')$ azon alkotók, a melyek szerint a gúla a felvett sík által metszetik; ezen alkotókon fognak tehát a keresett átdöfési pontok feküdni.

18. §.

Feladat. Kerestetik egy gúlának egy tetszőleges síkkali átmetszése. A 122-ik ábrában $(ABCDEo, A'B'C'D'E'o')$ az adott gúla, és FSF' a metsző sík, melynek metszését legegyszerűbben úgy lehet meghatározni, ha megkeressük a gúla minden egyes éleinek átmenetét a síkon, és a nyert pontokat a kellő rendben összekötjük. Igy például az $(Ao, A'o')$ él átdöfési pontjának meghatározására, ezen élen keresztül vezettetett a fekvetítő síkja (ogG'), meghatároztatott ennek az adott síkkali metszése $(G'h')$ s végre ezen vonalnak és $A'o'$ élnek metszésében a keresett átdöfési pont (a, a'). Ugyanezen az uton meg lehet határozni a többi élek átdöfési pontjait is; a melyek összeköttetése azután megadja a metszési sokszög ($abcde$, $a'b'c'd'e'$) vetületeit.

Ha azonban a vetítő síkok szeldéji az adott sík szeldéjit igen távol metszenék által, vagy ha talán a metszések a rajztérről egészen kiesnének, akkor igen czélszerűen alkalmazható e következő módszer. — A függvetületi síkot helyéből elmozdítva, azt oly állásba hoztuk, hogy a vetületi tengely (V_1 T_1) az adott sík szeldéjére merőlegesen álljon, mi által azután a metsző sík maga is merőleges lesz az új függlapra, és így a metszési sokszög ebben egy egyenes vonalban fog látszani, minthogy az egészen a metsző sík függszeldéjébe esik. Ha tehát V_1 T_1 merőlegesen meghúzatott SF-re, akkor a gúla alapja erre a tengelyre vetítetik ($A_1'B_1'C_1'D_1'E_1$); úgy szinte a gúla csúcsa is, csakhogy ezen vetítő vonalra a gúla magassága a régi függlapból vitetik át o_1'-ig; ezen pont összekötve a már vetített alappal, megadja a gúla vetületét az új függvetületi lapra.

Azonfelől szükség még meghatározni az új függszeldét, a mi az által történik, hogy a régi függszelde egy tetszőleges (gG') pontját az új tengelyre merőlegesen vetítjük, és reá a tengelytől kezdve a régi magasságát felvisszük, úgy hogy $(f_1F_1') = (gG')$; az így nyert F_1' pontot, mint az új függszelde egy pontját összekötjük azon F ponttal, melyben a fekszelde az új tengelyt metszi, leend FF_1' az új függszelde, mely is a gúla éleit az $a_1'b_1'c_1'd_1'e_1'$ pontokban metszvén, csak ezen pontok lesznek az illető élekre először a feklapba, azután ismét a régi függlapba vetítendők.

Hogy a nyert metszési sokszög vetületeiből annak valódi nagyságát is meghatározhassuk, czélszerű lesz a metsző síkot, annak SF fekszeldéje körül a feklapba befordítani. Ezen fordítás alkalmával az egyes csúcspontok köríveket fognak leirni, melyek a feklapon a forgási szeldére merőleges vonalakban, az új függlapban pedig valódi nagyságokban fognak vetítetni; ha tehát az F középpontból az Fa_1', Fb_1' sat. sugarakkal párhuzamos körívek iratnak le, mig ezek az új $V_1 T_1$ tengelyt nem metszik, akkor a nyert pontok vetítése, úgy szinte az (a, b, c, d, e) pontokból az SF-re vont merőlegesek meghúzása által, meg lesz határozva a metszési sokszög kivánt valódi nagysága $A_{11}B_{11}C_{11}D_{11}E_{11}$.

19. §.

Feladat. Van adva egy gúla, kerestetik a hálója.

A gúla hálójának meghatározásánál tekintetbe kell vennünk, hogy a gúla alapja egy tetszőleges sokszög lehet, az oldalfelületét pedig annyi háromszög képezi, a mennyi oldallal bir az alap, azonfelől két egymásmelletti háromszög egy közös oldallal birván, a háló kifejtésnél is ezen oldalak egyenlők lesznek. Ennélfogva tehát e két eljárás követhető.

1-ször. A 123-ik ábrában a gúla $ABCD$ alapja a feklapban úgy is valódi nagyságában fordul elő, azért ez meghagyatik; az oldalfelületet képző háromszögek pedig az illető alapvonalak körül a feklapba fordíttatnak le; ezen alkalommal az (o, o') csúcs egy körívet fog leirni, melynek fekvetülete egy a forgási tengelyre merőleges egyenes vonal. Ha tehát az (AEo, $A'E'o'$) háromszöget akarjuk lefordítani, akkor annak AE oldala marad, az (o) csúcs fekvetületből pedig AE-re vonatik az oO_1 merőleges; az (o, o') pont forgási középpontja (h), a forgási sugár (hO_1) pedig átlója azon derékszögű háromszögnek, melynek egyik befogója (ho) a fekvetület távola a forgási tengelytől, másik befogója (po') pedig az (o, o') pont magassága a feklap felett. — A mellette fekvő (DEo, $D'E'o$) háromszög lefordítására nézve csak ismét o-ból merőleges vonatik DE-re, a mely is E középpontból EO_1 sugárral metszetik O_{11}, lesz ezen pont a lefektetett háromszög csúcsa, minthogy az (Eo, $E'o'$) él közös, tehát szinte $EO_1 = EO_{11}$.

Célszerűbb azonban 2-szor e következő eljárás. Megkerestetik minden egyes élnek valódi hossza, s azután az illető háromszögeket azok három ismert oldalaiból úgy szerkesztjük egymás mellé, hogy valamennyinek csúcsa ugyanazon egy pontba essék. E szerint a 124-ik ábrában a csúcs (o) fekvetületén keresztül vonatott egy párhuzamos a vetületi tengelylyel, és az egyes élek az (o) pont körül ezen párhuzamosba fordíttattak be, és végpontjaik vetítése által a függlapban meghatároztattak az élek valódi hosszai: $A_1'o'$, $B_1'o'$, sat. Ezután a 125-ik ábrában meghúzatott tetszőlegesen az OA vonal, a melyre O-tól kezdve felvitetett az $A_1'o'$ valódi hossza A-ig, A-ból az alapból nyert AB sugárral egy körív iratott le, a mely O-ból az $o'B_1'$ sugárral metszetett B-ben; B-ből ismét az alap BC sugárral iratott le egy körív, mely O-ból $o'C_1'$ sugárral átmetszetett C-ben, és e műtétel addig folytattatott, míg valamennyi háromszög egymás mellé szerkesztve nem volt; végre az alapot képviselő $ABCDEA$ tört vonal egyik tetszőleges oldala mellé szerkesztetett az alap sokszög.

Ha még azonfelül a gúlán adott pontok vagy vonalak fordulnak elő, melyek a hálón szinte megjegyzendők, akkor ezen pontok csak az illető élek valódi nagyságára viendők által, a tengelyhez húzott párhuzamosok által, és innét a kifejtésre átteendők. Igy a 124-ik ábrában az ($abcde, a'b'c'd'e'$) metszés csúcspontjai átvitettek a valódi hosszakra $a_1b_1c_1d_1e_1$-ben, innét pedig a hálóra tétettek által, úgy hogy $aO=a_1o'$; $bO=b_1o'$; stb.

20. §.

Feladat. Meg van adva egy gúlának az alapja, az oldalt képző háromszögek egyike, és egy másodiknak az alaphozi hajlási szöge, kerestetnek a gúlának vetületei.

A 126-ik ábrában $ABCDE$ az adott alap, AO_1E az egyik háromszög, mely az illető AE oldal mellé elölegesen a feklapba van befordítva; azonfelül még legyen megadva a BC oldalhoz tartozó háromszög fekhajlása (α). — Ha az AEO_1 háromszöget az AE alapja körül addig képzeljük forgatva, míg az O_1 csúcsa a BC háromszög síkját át nem döfi, akkor ezen átdöfési pont fogja képezni a keresett gúla csúcsát. De ezen forgatásnál az O_1 csúcs egy oly körívet fog leirni, O_1r sugárral, melynek síkja a forgási AE tengelyre merőleges, melynek fekvetülete tehát az AE-re merőleges O_1rf egyenes leend; a gúla csúcsának fekvetülete tehát szinte ezen egyenesben fog valahol feküdni. Minthogy pedig ezen körnek a BC oldal síkját kell átmetszeni, azért előbb szerkeszszük ezen síkot, — a melynek fekszeldéje maga a BC oldal, — az adott (α) hajlási szög alatt. Minthogy továbbá a keresett csúcsnak a most szerkesztett síkban, de egyszersmind a feklapra merőleges kör síkjában is kell feküdnie, azért az csak e két sík közös metszési vonalában lehet; — ezen metszési vonal vetületei (Mf, $m'F'$). Nincs tehát még egyéb hátra, mint a kör, és az (Mf, $m'F'$) vonalak átmetszésének meghatározása, a mely pont ugyanis a keresett gúla csúcsát fogja képezni.

Minthogy pedig mind a két említett vonal az O_1fF' síkban fekszik, azért czélszerű lesz ezen síkot az O_1f szeldéje körül a feklapba befordítani, akkor a kör valódi nagyságában fog előállani, a mely ugyanis rO_1 sugárral iratik le az (r) középpontból, az (Mf, $m'F'$) egyenes pedig a lefordítás után Mp_1'-be fog jutni; és így a két vonal keresett metszése leend O_{11}-ben; mely pont egyszerű visszavetítése által megnyerjük a gúla csúcsának (o,o') vetületeit. Ezen pontot tehát csak az alap minden csúcsával kell még összekötni, hogy magokat a gúla vetületeit megnyerhessük.

21. §.

Feladat. Meg van adva egy gúlának az alapja, magassága, és két egymásra következő oldalháromszög fekhajlási szöge, kerestetnek a gúlának vetületei.

Legyen a 127-ik ábrában $ABCD$ az adott alap, (α) és (β) szögek pedig az AD és DC oldalakhoz tartozó hajlási szögek, (m) a magasság. — Képzeljünk az adott magasságban egy a feklappal párhuzamos síkot fektetve, akkor ez az AD oldal síkját egy alkotó szerint fogja metszeni, melynek fekvetülete az AD szeldével lesz párhuzamos, úgy szinte metszeni fogja a DC oldal síkját ezen sík alkotója szerint, melynek tehát fekvetülete a DC szeldéhez leend párhuzamos. Ezen két alkotó közös metszési pontja lesz a keresett gúlának csúcsa. A szerkesztés a II. Szakasz 9-ik §. (94. ábra) elve szerint vitetett végbe. Ugyanis az AD egy tetszőleges A pontjában vétetett reá merőlegesen egy új függlap, melyben az AD oldalsík hajlási szöge (α) valódi nagyságában látható, ezen szög A_1P_1 oldalán azután megkerestetett azon P_1 pont, melynek magassága a feklap felett $A_1'p_1 = m$. A P_1 ponton keresztül vezetett AD-hez párhuzamos vonal P_1o lesz az egyik alkotó. Ugyanezen az úton találtatik a (β) szög szerkesztése által a másik DC-vel párhuzamos alkotó $P_{11}o$. — Ezen két alkotó fekvetületei egymást az (o) pontban metszvén át, lesz ezen pont egyszersmind a gúla csúcsának fekvetülete; függvetületének meghatározására pedig csak a vetítő vonalra a tengelytől kezdve felvitetik a gulának adott (m) magassága. Ha még végre a gúla alapjának egyes csúcsai a talált (o, o') csúcscsal összeköttetnek, ered a gúlának két vetülete.

22. §.

Két gúla átmetszése.

Két oly gúla, melynek csúcsa közös, egymást vagy épen nem metszi, vagy ha igen, akkor a metszés csak alkotók irányában lehetséges; — és a metsző alkotók feltalálására ez esetben csak a két gúlát egy oly síkkal kell metszeni, mely a feklappal párhuzamos, és a nyert metszések közös pontjait a csúcscsal összekötni.

Ha a csúcs nem közös, akkor egy tökéletes átmenetnél különvált két sokszöget nyerünk, az egyikét a bemenetnél, a másikát a kijövetnél; — ezen két sokszög egygyé olvad, ha az egyik gúla a másikon nem megy úgy keresztül, hogy annak valamennyi éle átdöfje a másik gúlát, hanem egy vagy több él szabad marad, mely esetben a nyert metszés bevágásnak mondatik.

23. §.

Két tetszőleges gúla átmetszésének meghatározására a következő módszereket lehet használni:

Legyen a 128-ik ábrában ($ABCDEo$, $A'B'C'D'E'o'$) az egyik, (12345, 1'2'3'4'5') pedig a másik gúla. Messük e két gúlát oly síkokkal, melyek mind a kettőt csak alkotók szerint metszik, akkor minden ilyen metszéshez tartozó alkotók közös pontjai egyszersmind a keresett metszési sokszöghez is fognak tartozni. — De azon sík, mely a gúlát alkotó szerint metszi, a csúcson megy keresztül, hogy tehát a segéd síkok mind a két gúlát alkotók szerint metszhessék, szükség, hogy azok mind a két gúla csúcsán keresztül menjenek, vagyis a segéd síkok azon egyenes vonalon vezetendők keresztül, mely a gulák csúcsait összeköti, a segéd síkok fekszeldéi tehát a csúcsokat összekötő ($o5$, $o'5'$) egyenes G fekátdöfési pontján fognak keresztül menni.

Ha az így talált G pontot összekötjük az (135, 1'3'5) gúla alapjának legszélsőbb (2) pontjával, akkor ezen szelde a másik gúla alapján kivül marad, jeléül annak, hogy a (25, 2'5') a másik gúlán nem megy keresztül, ezen él tehát szabad. Úgy szinte, ha a másik felén a D pontot kötjük össze G-vel, akkor a nyert szelde szinte nem metszi az (1234) gúla alapot, következőleg a (Do, $D'o'$) él szinte szabad. A jelen esetben tehát nem tökéletes átmenet, hanem csak bevágás áll elő.

A bemetszés meghatározását meg lehet (B) pontnál kezdeni. Ha ugyanis ezen pontot összekötjük (G)-vel, akkor a nyert szelde a számmal jelölt gúla alapját átmetszi az (α) és (β) pontokban; a segéd sík tehát ezen gúlát az ($\alpha 5$), és ($\beta 5$) alkotók szerint, a másik gúlát pedig a (Bo) él folytán metszi, ezen alkotók közös (a) és (b) pontjai tehát a keresett metszési sokszög csúcspontjai. A legközelebbi segédsík az (1) csúcson fog keresztül vezettetni, mely a másik gúla alapját (γ) és (δ) pontokban metszi, az ezen segéd síkban fekvő alkotók tehát egyrészről (15), a másik részről pedig (γo) (δo), ezek közös metszése adja a (c) és (d) csúcspontokat; melyeket (a)-val tüstént össze lehet kötni. — Az ($1G$) szelde ugyan a (23) alapot szinte átmetszi, de a metszés gúla alap csúcsra nem találván, ezen pont tekintetbe nem vétetik, az így nyert pontok ugyanis a metszési sokszög oldalaira, nem pedig csúcsponjaira fognának esni. A következő segéd szelde az (A) ponton fogna keresztül vezettetni, és ez által meg lesznek határozva az (Ao) élnek átdöfési pontjai, melynek egyike (b)-vel, a másika (c)-vel fog összeköttetni, és ezen műtétel ezen az uton mindaddig folytattatik, míg valamennyi csúcspont meghatározva nincsen, vagyis míg a metszési sokszög tökéletesen bezárodva nincsen.

Ezen sokszög függvetületét a már megtalált fekvetületből egyszerűen az által fogjuk megnyerni, ha az egyes csúcspontokat, melyek mindig egyik, vagy másik gúla élein fekszenek, az illető élekre vetitjük, és a nyert pontokat ugyanazon rendben kötjük össze, mint a fekvetületben.

Végre a kihúzásra nézve csak azon általános szabályt kell szem előtt tartanunk, hogy a nyert sokszög csak azon oldalai lehetnek láthatók az egyes vetületekben, melyek *mind a két* gúla látható oldalháromszögein fekszenek; csak ezen oldalakat kell tehát telt vonal által jelölni, a többiek vagy pontozandók, vagy igen vékony vonalak által jelölendők.

24. §.

Gyakran történik azonban, hogy az adott két gúla magasságai között csak csekély különbség vagyon, ez esetben tehát a csúcsok összeköttetési vonala is a feklaphoz csak kevés hajlással bir, és így a fekátdöfési pont igen messzire, vagy talán a rajzlapból egészen ki is esik, hol tehát az előbbi módszert használni nem lehet; miért is e következő mód fog czélszerüen alkalmaztatni.

Legyenek a 129-ik ábrában ($ABCDo$, $A'B'C'D'o'$) és (1234, 1'2'3'4') az adott gúlák. Meghatározzuk először is az (124) és a (BCo) háromszögek átmetszését az által, hogy megkeressük az (14) él átmenetét a (BCo) háromszögön. Ha e végre az (14, 1'4') élen képzelünk keresztül vezetve egy függvetítő sikot, ez a $B'C'o'$ háromszöget az m' és n' pontokban metszi, ezen pontok vetülete által nyeretik az (mn) vonal, és ennek metszése (14)-el ezen élnek (a) átmenetét határozza meg a (BCo) háromszögön.

Ekkép meg van határozva a metszésnek egyik pontja (a). Egy második pontot kapunk, ha az illető háromszögek (12) és (CB) szeldéjit meghosszabbítjuk, míg egymást (P)-ben nem metszik. Az így nyert (P) pontot összekötjük (a)-val, de az összeköttetési vonal csak azon (ab) részét fogjuk kihúzni, mely mind a két háromszögben közös.

Ha most (a)-tól (b) felé indulunk a metszési vonal felkeresésében, tüstént észrevesszük, hogy a (CBo) háromszögből kifogytunk, holott még az (125)-ben az (ab) vonalat tovább is lehetett volna húzni, azért meghagyjuk az (124) háromszöget, és a (CBo) háromszög helyett vesszük a reá következő (BAo) háromszöget; úgy hogy jelenleg kerestetik az (124) és a (BAo) háromszögek metszése, és ezen metszésnek egy pontja (b) már ismeretes; miért is csak ismét az illető háromszögek szeldéjit kell azok (Q) átmetszésökig meghosszabbítani, és a (Qb) vonalnak azon (bc) részét kihúzni, mely a szóban levő háromszögekben közös. — Most az (124) háromszög fogyott el az (14) élnél, miért is helyette a jövő (134) háromszög metszése kerestetik (BAo)-val, — meghosszabbítva a szeldéket, ezek egymást R-ben metszik, ezen pontot összekötve (c)-vel, az összeköttetési vonalat (Ao) élig lehet meghúzni. Ezen eljárás ezen az uton addig folytattatik, míg az egész metszési sokszög, vagy tökéletes áthatásnál, míg a metszési sokszögek, egészen be nem záródnak.

Ha ezen eljárásnál két oly háromszögre jutunk, például (134) és (ADo), melyek szeldéi egymást felette nagy távolságban metszik át, akkor a hiányzó pont meghatározására a kezdetben említett mód ismétlendő, vagyis a jelen példában felkeresendő a (34) él átmenete az (ADo) háromszögön, az által, hogy az említett élen egy függvetítő sík vezettetik keresztül.

Végre a függvetület, és a látható részek meghatározására az előbbi czikk végén adott eljárás követendő.

25. §.

Ha egy gúlának egy hasábbali átmetszése kerestetik, akkor legczélszerübben ismét oly segédsíkok fognak felvétetni, melyek mind a két testet alkotók szerint metszik. Az ily síkok általánosan mind a két testet két-két alkotó szerint metszik, a melyek közös pontjai egyszersmind a metszési sokszög pontjai lesznek; minthogy azonban a keresett sokszög oldalai egyenes vonalak, azért a segédsíkok csak az adott két test élein fognak keresztül vezettetni.

Hogy pedig ezen segédsíkok a gúlát csak alkotók szerint messék által, szükség, hogy azok a gúla csúcsán menjenek keresztül, hogy a hasábot szinte alkotók szerint messék, szükséges, hogy egy oly egyenesen menjenek keresztül, mely az alkotókkal párhuzamos; — miért is az adott gúla csúcsán keresztül vezettetik egy az alkotókkal párhuzamos vonal, megkerestetik ennek fek-átdöfési pontja, és a segédsíkok fekszeldéi mind ezen az így meghatározott ponton vezetendők keresztül. — A többi ide tartozó szerkesztés azonos azon eljárással, mely a 22-ik czikkben (128-ik ábra) adatott elö.

26. §.

Ha azonban egyik vagy másik testnek a feklappali metszése igen távolra esnék, mint például a 130-ik ábrában, hol (*ABCDo*, *A'B'C'D'o'*) az adott gúla, (12345, 1'2'3'4'5') az adott hasáb, akkor megkerestetik a gúla minden élének átmenete a hasábon, és a nyert pontok a kellő rendben egymással összeköttetnek. Az élek átdöfési pontjainak meghatározására legegyszerübben az élek vetítő síkjai használtatnak. Így az említett ábrában meghatároztatott először is az (*Ao*, *A'o'*) él átmenete a hasábon az által, hogy ezen az élen képzeltetett keresztül vezetve a függvetítő sík, mely is a hasábot az (I. II. III IV) négyszög szerint metszi át; azon (*m*) és (*n*) pontok tehát, hol ezen négyszöget az (*Ao*) él átmetszi, már az átmeneti pontok lesznek; s könnyen látható egyuttal, hogy az (*m*) pont a (34) oldal síkjában, az (*n*) pont pedig az (12) oldal síkjában fog feküdni. — Úgy szinte meghatároztatott a (4, 4') hasáb élnek átmenete a gúlán az által, hogy ismét ezen az élen keresztül vezettetett a függvetítő sík, mely is a gúlát az (*abcd*) négyszög szerint metszette, ezen négyszögnek tehát, és a (4) élnek közös (*p*) és (*q*) pontjai szinte a metszési sokszöghöz fognak tartozni, melyek közül a (*p*) pont (*m*)-el tüstént összeköthető, minthogy mind a két pont ugyanazon a síkon (a 34 él síkján) fekszik. Ezután a hasáb (1, 1') élének metszete kerestetett fel a gúlával, és miután találtatott, hogy ezen él épen a gúla (*Do*, *D'o'*) élén megy keresztül, a talált élek metszési pontja összeköttetett (*p*)-vel, úgy szinte (*n*)-nel, minthogy az előbbi összeköttetési vonal egészen az (14) él síkján, az utóbbi pedig az (12) él síkján fekszik. Az eljárás azután ezen az úton mind addig folytattatik, míg a metszési sokszög, vagy tökéletes átmenetnél a metszési sokszögek, egészen bezárva nincsenek.

A metszési vonalnak ismét csak azon részei lesznek telt vonal által kihúzandók, melyek mind a két test látható oldallapjain fekszenek.

27. §.

A rendes testek.

Rendes testeknek neveztetnek azok, melyek felülete csupa egynemü rendes sokszögekből áll. Ezen sokszögek csúcsai egyesülvén az eredő test csúcsait fogják képezni; úgy szinte két sokszög közös oldala leend az eredő test éle.

Minthogy pedig egy tömörszög képzésére legalább három síknak kell egy pontban egyesülni, a legkevesebb oldalú sokszög pedig az egyenoldalú háromszög, azért az első rendes test ered, ha egy tömörszög képzésre három egyenoldalú háromszög csúcsa egyesül. Ezen test áll négy egyenoldalú háromszögből, van négy csúcsa, és hat éle. A test neve *rendes négylap*.

Egy tömörszög képzésére egyesülhet azonban négy egyenoldalú háromszög csúcsa is. Ez esetben az eredő test nyolcz háromszögből áll, van 6 csúcsa és 12 éle. Ezen test *rendes nyolczlapnak* neveztetik.

Ha a tömörszög képzésére 5 egyenoldalú háromszög egyesül, akkor az eredő test képzésére 20 háromszögre van szükség, melyek 12 csúcsot, és 30 élet alkotnak. E testet *rendes húszlapnak* nevezzük.

Ha még tovább akarnók szaporitani az egyenoldalú háromszögek számát, akkor most a tömörszög képzésére már 6 háromszög csúcsának kellene egyesülni. De az egyenoldalú háromszög mindegyik szöge 60 fokot képez, ez tehát 6-szorozva adna 360 fokot; és így az egymásmellé illesztett 6 háromszög csúcsai már többé nem képeznének tömörszöget, minthogy azok mind egy síkba fognának esni. Annyival kevésbbé lehetséges a test képzése, ha a háromszögek száma még nagyíttatik. — Rendes háromszögekből tehát csak az említett három test lehetséges.

Ha továbbá egy rendes test csupa rendes négyszögekből alakúl, és egy tömörszög képzésére 3 négyszögcsúcs egyesül, akkor a nyert test *rendes hatlap*-nak, vagy *köb*-nek neveztetik, áll 6 rendes négyszögből, van 8 csúcsa, és 12 éle. — Ha négy négyszögcsúcsot kellene ismét egy tömörszög alakítására összeállitani, akkor a szögek összege ismét 4. 90=360 fok lévén, tömörszög nem áll elő, és a test képzése lehetetlen.

Végre, ha rendes ötszögekből kivánunk testet képezni, és egy tömörszög képzésére három rendes ötszög csúcsát egyesítjük, akkor az eredő test, mely ez esetben rendes *tizenkétlap* nevet visel, áll 12 rendes ötszögből, bir 20 csúcscsal, és 30 éllel. — Egy rendes ötszög csúcsa 108 fokkal birván, a tömörszög képzésére háromnál több nem alkalmazható. — Úgy szinte csupa rendes hatszögekből testet alakítani is lehetetlen, minthogy a hatszögben mindegyik szög már 120 fokot tészen, és így három közülök $3.120 = 360^0$; a szögek tehát mind egy síkba fognának esni. Ha pedig még több oldalú rendes sokszögek vétetnek, akkor a három egy csúcsba egyesülő szögek összege 360 foknál még több lévén, tömörszöget annyival kevésbé képezhetnek.

Összesen tehát csak öt rendes test létezhet.

28. §.

Meg lehet itt még jegyezni, hogy a rendes testek képzésére szükségelt sokszögek minőségéből, és számából könnyen fel lehet találni az élek és a csúcsok számát is. Tegyük fel ugyanis, hogy a test képeztetik csupa n szögekből, és van szükség azokból m-re, azonfelül egy csúcs képzésére p szög egyesül, akkor rendelkezésünkre áll összesen m-szer n szög, tehát $m.n$ szög, ezekből egy csúcs képzésére megkivántatik p szög, tehát a csúcsok száma leend:

$$Cs = \frac{m.n}{p}$$

továbbá minden n szögnek n oldala is van, tehát összesen lesz m-szer n, vagy is $m.n$ oldalunk, melyekből egy él képzésére mindig 2 egyesül, az élek száma e szerint:

$$\text{Él} = \frac{m.n}{2}$$

Így a rendes négylapnál $C = \frac{3.4}{3} = 4$; és $É = \frac{3.4}{2} = 6$

„ nyolczlapnál $C = \frac{3.8}{4} = 6$ és $É = \frac{3.8}{2} = 12$

„ húszlapnál $C = \frac{3.20}{5} = 12$ és $É = \frac{3.20}{2} = 30$

a rendes hatlapnál $C = \frac{4.6}{3} = 8$ és $\acute{E} = \frac{4.6}{2} = 12$

" tizenkétlap. $C = \frac{5.12}{3} = 20$ és $\acute{E} = \frac{5.12}{2} = 30.$

29. §.

A rendes négylap.

A rendes négylap vetületeinek előállítására nézve legczélszerűbbnek látszik, a testet egyik lapjára fektetni; ez esetben ugyanis az nem egyéb, mint egy három oldalú gúla, melynek alapja az oldal háromszögekkel egyenlő. Ha tehát ezen gúla alapját valódi nagyságában a feklapra rajzoljuk, *ABC* a 131-ik ábrában, akkor az *AB*, *BC*, és *CA* oldalakhoz tartozó háromszögek, szinte a feklapba befordítva, a már felrajzolt *ABC* háromszögre fognak esni, és azt tökéletesen fedik. Ha tehát az *AC* oldalhoz tartozó háromszöget vesszük tekintetbe, és ezt a feklapból a kellő állásába visszafordítjuk, akkor a *B*-ben létező négylap csúcsa egy az *AC*-re merőleges körívet fog leirni, melynek fekvetülete *Br*, és a csúcs vetületének ezen vonalon kell feküdni; épen így, ha a *BC* oldalhoz tartozó háromszöget fordítjuk a *BC* tengely körül, akkor a négylap csúcsa, mely ez esetben *A*-ban volt, szinte egy körívet fog leirni, melynek fekvetülete *As*. A négylap csúcsának fekvetülete e szerint tehát csak a *Br*, és az *As* vonalak közös (*d*) átmetszésében lehet; és ha még a talált (*d*) pontot, mely nem egyéb, mint az alap háromszög középpontja, a három csúcscsal összekötjük meglesz a rendes négylap fekvetülete; függvetületének meghatározására pedig csak a (*d*, *d'*) csúcs magasságát kell felkeresnünk, minthogy az *ABC* alap a fekvetületi síkon lévén, annak függvetülete a tengelybe esik. A (*d'*) magasságának meghatározására pedig csak az (*r*) középpontból, (*rB*) sugárnál leirt kört kell a feklapba lefektetni az (*rB*) átmérője körül, akkor a *d*-ből *rB*-re emelt *dD* a gúla keresett magasságát fogja megadni, mely tehát a csúcs vetítő vonalára a tengelytől kezdve egyszerűen felvihető.

Meg lehet itt még jegyezni, hogy a *Brd* szög azon szög, mely alatt az *ACD* síkja hajlik az alaphoz; minthogy pedig a háromszögtan elvei szerint $ro = \frac{1}{3} rB$, továbbá minthogy $rB = rD$, azért

$$cos\ BrD = \frac{rd}{rD} = \frac{\frac{1}{3} rD}{rD} = \frac{1}{3}$$

de a rendes négylapnál bármely két háromszög egymáshozi hajlása egyenlő, azért egyszerűen mondhatjuk, hogy a rendes négylapnál a hajlási szögek pótkeble egyenlő egy harmaddal.

Maga a kiszámított hajlási szög $= 70^0\ 31'\ 43{\cdot}6''$.

30. §.

A rendes négylap minden egyes éle a többi éleket 60 fok alatt metszi át, egyet kivéve, melyet épen nem metsz, és a melyhezi hajlási szöge 90^0-nyi. Ha két ily ellentett élek középpontjait egyenesek által összekötve képzeljük, nyerünk három egymásra merőleges tengelyt. Ha tehát a rendes négylapot oly állásba hozzuk, hogy ezen tengelyek egyike a feklapra, másika pedig a függlapra legyen merőleges, (mely esetben a harmadik tengely a vetületi tengelylyel leend párhuzamos) akkor annak mind a két vetülete (a 132-ik ábrában) rendes négyszögek által lesz előállítva, melyek négy oldala és két átlója képviselik a test 6 élét. A feklapra merőleges tengely (1, 1'1'); a függlapra merőleges tengely (22, 2'); végre a vetületi tengelylyel párhuzamos harmadik tengely (34, 3'4') által van megadva.

A rendes négylap legegyszerűbb vetületére azonban úgy jutunk, ha annak egyik élét a feklapra merőlegesen, az ellentett élét pedig a függlapra vesszük merőlegesen. Az ide tartozó vetületek a 133-ik ábrában vannak előállítva; a feklapban *cd*, a függlapban pedig *a'b'* oldalak vannak valódi nagyságokban, és az ezen oldalaknak ellentett (*c ab d*) = (*b' c'd' a'*) szögek a hajlási szög valódi nagyságát adják meg; végre az ezen szögeket befogó oldalak azon egyenoldalú háromszög *magasságával* egyenlők, melynek oldalait a rendes négylap élei képzik.

A 131-ik, 132-ik, és 133-ik ábrában előállított négylapokhoz tartozó háló, vagy kifejtés a 134-ik, vagy a 135-ik ábrában van rajzolva helygazdálkodás tekintetéből félnagyságban.

31. §.

Ha egy adott rendes négylapon, egy másik vele tökéletesen egyenlő négylapot ugy képzelünk keresztül vezetve, hogy a két négylap élei egymást merőlegesen felezzék, akkor egy igen sajátságos csillagforma ikertest áll elő, melynek legegyszerűbb vetületei a 136-ik ábrában vannak előállítva; (*abcd, a'b'c'd'*) az egyik négylap, (*ghef, g'h'e'f'*) pedig a másik vele ellentett. Az 12, 23, 34, 41, 15, 25, 16, stb. vonalak a két test átmetszési vonalait állítják elő; ezen élek a test homorú hajlási szögeihez tartoznak, szám szerint van tizenkettő, melyek közül négy négy egymásra következő egy rendes négyszöget, és együttvéve valamennyi egy rendes nyolczlapot képez, s ennek folytán a testet úgy is képzelhetjük előállítva, ha egy rendes nyolczlap minden lapjára egy oly rendes négylap ragasztatik, melynek bezáró háromszögei a nyolczlapéival azonosak.

Könnyebb szem elé idézés miatt ezen test, egy később előadandó módszer szerint a 139-ik ábrában kettőzött léptek alkalmazása mellett a hárommméretű Mohsféle vetületbe helyeztetett.

140-ik ábrában van kifejtve az egész test hálója félnagyságban, azon megjegyzéssel mindazonáltal, hogy a vastagabban kihúzott és számokkal ellátott vonalak képezik a két négylap átmetszési vonalait, és így az egész testnek, (azt egynek tekintve) a beeső éleit; ha tehát ezen testet valóban elakarjuk papirpépből, vagy lemezekből késziteni, akkor a kimetszett hálónak ezen számokkal jegyzett élei ellenkező oldalra hajtandók össze, mint a vékonyabb vonalak, ez által azután az ugyanazon számmal jegyzett élek, mint (1, 1), (2, 2) sat. egymásra illeszthetők, és összeragaszthatók.

A 137-ik ábrában a vetületek azon esetre állítattak elő, ha a négylap egyik lapja (*a b c*) mint a 131 ik ábrában a feklappal párhuzamos; a 138-ik ábrában pedig azon eset van tekintetbe véve, ha a négylap két tengelye (mint a 132-ik ábrában) a fek és illetőleg a függlapra merőleges, a harmadik tengely pedig az alapmetszettel párhuzamos.

32. §.

A rendes nyolczlap.

Ha a 131-ik ábrában előállított rendes négylap egyik például (Ad, $A'd'$) oldalát elfelezzük, és a felező ponton keresztül egy síkot vezetünk az ABC alaphoz párhuzamosan, akkor ezen sík a négylapból egy részt lemetsz, mely szinte rendes négylap, és a melynek élei az eredeti négylap éleinek felével egyenlők; az eredeti négylap (o, o') csúcsa elesik, és helyette lesz egy rendes háromszög. Ha pedig ezen műtétel a négylap mind a négy csúcsánál ismételtetik, s így tehát az eredeti négylapból négy kisebb négylap lemetszetett, akkor a még megmaradt rész lesz a rendes nyolczlap.

A rendes nyolczlap áll nyolcz egyenoldalú háromszögből, és mindegyik tömörszögnek képzésére négy háromszög csúcsa egyesül; ha tehát a nyolczlapot, mint a 141-ik ábrában az egyik csúcsára állítjuk, akkor a legalsó (a, a') pontból négy él fog felfelé menni, melyek végpontjai, minthogy az élek egyenlők, és egyenlő fekhajlással birnak, egy a feklappal párhuzamos síkban fognak feküdni, és minthogy az élek által befogott szögek szinte egyenlők, azért ezen végpontok egy rendes négyszöget fognak képezni (b c d e). Ezen négyszög, melynek minden oldala szinte a rendes nyolczlap élét képezi, az egész testet két egyenlő részre osztja, miért is a nyolczlap nem egyéb, mint két alapjaival összeillesztett négyoldalú gúla.

Négy ilyen rendes négyszöget lehet a nyolczlapon körülvezetni, a melyek síkjai egymásra merőlegesen állanak; s melynek mindegyike a másik kettő két ellentett csúcsán megy keresztül; ezen négyszögek átlói képezik a test három egymásra merőleges tengelyét, és ha a test csúcsán áll, annak magasságát; miért is a függvetület meghatározására csak is ezen átlót kell a csúcs vetítő vonalára felvinni; magából értetődvén, hogy a $bcde$ négyszög függvetülete szinte ezen átló félmagasságába esik.

33. §.

A $(bcde)$ négyszög állása a függlaphoz az adott vetítésnél egészen tetszőleges volt; ha azonban ezen négyszög úgy állítatik, hogy annak egyik oldala a függlaphoz is párhuzamos legyen, mint a 142-ik ábrában, akkor a függvetület igen megegyszerűl, minthogy a (bae), (bfe), (cad), (cfd) háromszögek síkjai a függlapra merőlegesek lévén, ezen háromszögek vetületei egyenes vonalak; azonfelől az ead, és efd háromszögek, a hátul levő (bac), és (bfc) háromszögeket épen fedik. A függlapban tehát egy ferdény áll elő, melynek kisebb átmérője a nyolczlap élével, nagyobb átmérője a nyolczlap átlójával, oldalai pedig azon egyenoldalú háromszög magasságaival egyenlők, a melynek oldalait a nyolczlap élei képezik.

Ezen vetületből azonban nemcsak a nyolczlap említett méreteit lehet valódi nagyságokban szemlélni, hanem egyuttal azon szöget is, a mely alatt két háromszög síkja egymáshoz hajlik, vagy is a nyolczlap hajlási szögét is, úgy szintén annak számokba kifejtett értékét meghatározni.

Ezen hajlási szög valódi nagysága ugyanis a függlapban az $(f'\,b'e'\,a')$ szög által képviseltetik, mely t. i. a függlapra merőlegesen álló $(bfe,)$ és (bae) háromszögek hajlásához tartozik. Ezen hajlási szöget a $(b'e'\,c'd')$ egyenes két egyenlő részre osztja, miért is:

$$cos\,(f'\,b'e'\,m) = \frac{b'e'\,m}{f'\,b'e'}$$

de ha egy egyenoldalú háromszög oldalát (s)-el jelöljük, akkor annak magassága $\frac{s}{2}\sqrt{3}$, az előbbi képletben tehát: $b'e'\,m = \frac{s}{2}$, és $f'\,b'e' = \frac{s}{2}\sqrt{3}$, és ha még az $(f'\,b'e'\,m)$ szög (α)-val jelöltetik, ered:

$$cos\alpha = \frac{\frac{1}{2}s}{\frac{1}{2}s\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

minthogy pedig $cos2\alpha = cos^2\alpha - sin^2\alpha = 2\,cos^2\alpha - 1$, lesz az érték helyettesítése által:

$$cos2\alpha = 2.\,\frac{1}{3} - 1 = -\,\frac{1}{3}$$

vagy is a rendes nyolczlap hajlási szögének pótkeble nemleg egy harmaddal egyenlő.

A rendes négylap hajlási szöge pótkeblére nézve találtatott igenleg egy harmad; miből tehát következik, hogy ezen két test hajlási szögei együttvéve épen 180 fokot képeznek. A rendes nyolczlap hajlási szöge e szerint fokokban kifejezve lesz $2\alpha = 109^0\ 28'\ 16{\cdot}_4''$.

A mi pedig az éleket illeti, ezek közül bármelyik, például a (bf) él közvetlen átmetszi az (fc), (fe), (bc), és (be) éleket, és ezekkel 60 fokot képez, szinte átmetszi az (fd), és a (ba) éleket, és ezekkel 90^0 képez; — továbbá az (ea), (ca), (ed), és (cd) éleket nem metszi ugyan, de ezekhezi hajlása szinte 60^0; végre az ellentett ad éllel párhuzamos, ehhezi hajlása tehát egyenlő a semmivel.

34. §.

Ha a $(bcde)$ négyszögnek oly állást adunk, hogy annak egyik átlója a függlapra merőleges legyen, mint a 143-dik ábrában, akkor mind a két vetület azonossá idomul. — Úgy szinte azonos vetületeket nyerünk akkor is, ha mint a 144-ik ábrában a nyolczlapot úgy állítjuk az egyik (be) élére, hogy ez a függlapra, a megfekvő négyszög oldala (ed) pedig a feklapra legyen merőleges; ezen esetben mind a két vetület azon ferdénynyel azonos, mely a 142-ik ábra függvetületét képzi.

Végre a 145-ik ábrában a nyolczlap egyik (cdf) lapjára van fektetve. Ez esetben az ellentett (bae) háromszög az előbbivel csúcsellenes lévén a fekvetület egy rendes hatszöget képez; a függvetületben pedig a felső (bae) lap magasságának meghatározására képzeljük a (cda) háromszöget a (cdf) alapra a közös (cd) él körül ráfektetve, és ismét előbbi helyébe visszafordítva, akkor a (cda) háromszög (a) csúcsa, mely a lefordításnál (f)-re esett, a visszafordításnál egy körívet fog leirni (rf) sugárral mindaddig, míg az (a) pontból az (af)-re emelt merőleges által (A)-ban nem metszetik, és leend (aA) az (a) pont keresett magassága.

A 141-ik egész 145-ik ábrákban előállított nyolczlap mind egyenlő nagyságúaknak vétettek, és a hozzátartozó háló a 146-ik és 147-ik ábrában fejtetett ki fél valódi nagyságban.

35. §.

A rendes húszlap.

A rendes húszlap húsz egyenoldalú háromszög által akként van bezárva, hogy minden tömörszög képzésére 5 háromszög csúcs egyesűljön. Ennél fogva ezen test legegyszerűbben úgy fog előállítathatni, ha azt mint a 148-ik ábrában úgy állítjuk egyik csúcsára, hogy az azon keresztül menő átló a feklapra merőlegesen álljon. Ez esetben az alsó (1, 1′) csúcsból öt él vezet felfelé, melyek végpontjai mind egy a feklappal párhuzamos síkban fekszenek, minthogy az élek egyenlők, és egyenlő fekhajlással birnak; minthogy továbbá a köztök befoglalt szögek is egyenlők, azért ezen végpontok egy rendes ötszöget képeznek, melynek fekvetülete a valódi nagyságban (2, 3, 4, 5, 6). De a felső csúcsból lefelé épen úgy fog öt él vezetni, ezek végpontjai szinte egy rendes ötszöget fognak képezni, mely azonban az előbb talált ötszöggel csúcsellenes; — ennek fekvetülete tehát, ismét valódi nagyságában (7, 8, 9, 10, 11); és most már csak a felső ötszög minden oldalát kell az ellentett alsó ötszög csúcsával egybekötni, mi által már szinte az alsó ötszög oldalai is össze lesznek kötve a felső ötszög ellentett csúcsaival, és az összeköttetési vonalak a feklapban a (2, 8, 3, 9, 4, 10, 5, 11, 6, 7) rendes tizszöget képezik.

A függvetület meghatározására képzeljük a (10, 11, 12) háromszöget a fekmentes (10, 11) éle körül addig forgatva, míg a feklappal nem lesz párhuzamos; — ezen állásában a fekvetülete lesz (10, a, 11). Ha most ezen háromszöget ismét visszafordítjuk előbbi állásába, akkor az (a) csúcs egy körívet fog leirni (ra) sugárral, míg ez a (12) csúcsban (ar)-re emelt merőleges által nem metszetik (a_1)-ben, és (12 a_1) lesz a csúcsnak magassága a felső (7, 8, 9, 10, 11) ötszög felett. Ugyanezen távolban van az alsó (1) csúcs az alsó (2, 3, 4, 5, 6) ötszög alatt. A két ötszög távolának meghatározására pedig ugyanezen elv szerint a (10, 11, 5) háromszög fordítatik ismét a fekmentes (10, 11) oldal körül, míg az a (10, a, 11) állással esik egybe; akkor a visszafordítás alkalmával az (a) csúcs egy körívet ir le (ra) sugárral, míg ez az (5)-ben $(a5)$-re emelt merőleges által nem metszetik (a_{11})-ben, leend $(5a_{11})$ a két ötszög keresett távola. E szerint tehát az egyes pontok magasságai meg lévén határozva, könnyü leend már a fekvetület segitségével a függvetületet is előállítani, kellő tekintettel lévén egyszersmind a látható és a fedett részekre is.

36. §.

Az előadott szerkesztés folytán meg lehet határozni azon szöget is, mely alatt a rendes húszlap két háromszöge egymáshoz hajlik. Ugyanis a 148-ik ábrában a $(10a11)$ háromszög fekmentes állásából addig forgattatott a (10, 11) él körül, míg az (a) csúcs (a_1)-be nem jutott; miért is az (a_1ra) szög, melyet rövidség okáért (α)-nak nevezünk, nem egyéb, mint a (10 11 12) háromszögnek hajlása a feklaphoz. Hasonlóan ugyanazon $(10\ a\ 11)$ háromszög a (10, 11) éle körül lefelé is fordítatott, míg az (a) csúcsa (a_{11})-be nem érkezett, ez esetben tehát az $(a\ r\ a_{11})$ vagy is a (β) szög lesz a (10 5 11) háromszögnek hajlási szöge a feklaphoz; és minthogy az (a) csúcs a (10, 11) él körül előbb felfelé, most pedig lefelé fordítatott, azért a nyert két szög összege, $(\alpha+\beta)$ lesz a (10, 11, 12) és a (10, 11, 5) háromszögek hajlási szöge.

Hogy pedig ezen hajlási szög legegyszerűbb szerkesztésére a kellő útmutatást megnyerjük, czélszerü lesz azt a háromszögtani függvényei által kifejezni. E végre pedig, ha a húszlap (10, 11) élét az egységnek vesszük, akkor (ra) mint az egyenoldalú háromszög magassága $= \frac{1}{2}\sqrt{3}$; az $(r, 12)$ pedig egy rendes ötszög középpontjának távola annak oldalától, minthogy pedig a rendes ötszög mindegyik szöge 108 foknyi, azért a $(12, 10, r)$ szög $= 54^0$ és így

$$12, r = \tfrac{1}{2}\, tang\, 54^0 = \tfrac{1}{2}\, cott\ 36^0$$

$$\text{de } cos\alpha = \frac{12,\ r}{ra_1} = \frac{12,\ r}{ra} = \frac{\frac{1}{2}\ cott\, 36^0}{\frac{1}{2}\sqrt{3}} = \frac{cott\ \ 36^0}{\sqrt{3}}$$

Minthogy továbbá az (5, 10, 11) szög fele a (10, 12, 5) szögnek, ez pedig 36 foknyi, azért amannak 18 foknyinak kell lenni; és így $(r5) = \frac{1}{2}\ tang\ 18^0$ és ennélfogva

$$cos\beta = \frac{r, 5}{ra_{11}} = \frac{r, 5}{ra} = \frac{\frac{1}{2}\, tang\ 18^0}{\frac{1}{2}\sqrt{3}} = \frac{tang\ 18^0}{\sqrt{3}}$$

de az elemi mennyiségtanból ismeretes, hogy

$sin\, 18 = \frac{1}{2}\, chord.\, 36^0$, a 36^0 húrja pedig $= \dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$, azért:

$$sin\, 18^0 = \frac{\sqrt{5}-1}{4} \text{ és } cos\, 18^0 = \frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4}$$

ezekből pedig:

$$sin\, 36^0 = \frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{4} \text{ és } cos\, 36^0 = \frac{\sqrt{5}+1}{4}$$

mely értékeket, ha az α, és β szögek pótkebleire talált egyenletekben helyettesítjük, ered:

$$cos\alpha = \frac{\sqrt{5}+1}{\sqrt{3}\sqrt{10-2\sqrt{5}}} \text{ és } cos\beta = \frac{\sqrt{5}-1}{\sqrt{3}\sqrt{10+2\sqrt{5}}}$$

ezekből pedig:

$$sin\alpha = \frac{2}{\sqrt{3}} \cdot \frac{\sqrt{5}-1}{\sqrt{10-2\sqrt{5}}} \text{ és } sin\beta = \frac{2}{\sqrt{3}} \cdot \frac{\sqrt{5}+1}{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}$$

az α, és β szögek összegére tehát állani fog:

$$sin\,(\alpha+\beta) = sin\alpha.\, cos\beta + cos\alpha.\, sin\beta$$

$$= -\frac{2}{3} \cdot \frac{6-2\sqrt{5}}{\sqrt{100-20}} + \frac{2}{3} \cdot \frac{6+2\sqrt{5}}{\sqrt{100-20}}$$

$$= -\frac{1}{3} \cdot \frac{3-\sqrt{5}}{\sqrt{5}} + \frac{1}{3} \cdot \frac{3+\sqrt{5}}{\sqrt{5}}$$

$$= \frac{2}{3}$$

A rendes húszlap keresett hajlási szöge tehát oly tompa szög, melynek keble két harmaddal egyenlö, mely lehozatal után tehát a hajlási szöget magát szerkesztés által is igen könnyen elö lehet állítani; fokokban kifejezett értéke pedig: $138^0\, 11'\, 22.9''$.

Meg lehet itt még jegyezni, hogy:

$$tang\; \alpha = 3-\sqrt{5}, \text{ és } tang\; \beta = -3-\sqrt{5}$$

s ennélfogva $\alpha = 37^0\, 22'\, 38.5''$ és $\beta = 100^0\, 48'\, 44.4''$ összesen pedig $\alpha + \beta = 138^0\, 11'\, 22.9''$ mint előbb.

Hogy végre az élek egymáshozi hajlásokat megtudhassuk, vegyük tekintetbe például a (10, 12) élt, és tüstént észrevesszük, hogy ez a (9, 12) (11, 12) (9, 10) és (11, 10) éleket

60^0 alatt, a (8, 12) (7, 12) (4, 10) és (5, 10) éleket pedig 180^0 alatt metszi át magán a húszlapon, a (3, 8) (3, 4) (6, 7) és (5, 6) éleket pedig csak a meghoszabbításban metszené át 36^0 alatt. A többi éleket már át nem metszi, még akkor sem, ha azok tetszőlegesen meghosszabbítatnak, de azért azokhoz bizonyos hajlással bir, és pedig a (4, 5), (7, 8), (3, 9) és (6, 11) élekre merőleges, az ellentett (1, 2)-vel pedig párhuzamos; a (8, 9), (4, 9), (7, 11) és (5, 11) élekhez 36^0 alatt hajol, a (2, 7), (2, 8), (1, 4), és (1, 5) élekhez pedig 108^0 alatt; végre a (2, 6). (1, 6), (2, 3), és (1, 3) élekhezi hajlási szöge ismét 60 fokot tészen.

Mindegyik él tehát párhuzamos az ellentett éllel, azonfelől a többi élekhezi hajlása e következő: 4 élhez hajlik 90^0, 8 élhez 36^0, 8 élhez 60^0, és ismét 8 élhez 108^0 alatt.

37. §.

A rendes húszlapnak azon vetületénél, mely a 148-ik ábrában állítatott elő, a (7, 8, 9, 10, 11) ötszög állása egészen tetszőlegesen vétetett fel; ha azonban ezen ötszöget úgy állítjuk, hogy annak egyik éle, például a 149-ik ábrában a (7, 8) él a vetületi tengelyre legyen merőleges, akkor ezen elfordítás által ugyan a fekvetület változni nem fog, de a függvetület sokkal egyszerűbb leend, minthogy ez esetben az elfedett részek épen a látható részek mögé esnek, és azonfelől az (1, 4, 5) (4, 5, 10), (2, 7, 8), és (7, 8, 12), háromszögek függvetületei egyenes vonalak, minthogy azok síkjai a függlapra merőlegesek; (1, 2), (10, 12), (3, 9) és (6, 11) élek függvetületei egyszersmind az élek valódi nagyságát adják meg, minthogy azok a függlappal párhuzamosok. Továbbá a függvetületet határzó (2′, 7′8′), (7′8′, 12′), (1′, 4′5′) és (4′5′, 10′) vonalak azon egyenoldalú háromszögek magasságaival egyenlők, melynek oldalait a húszlap élei képezik. Végre a (2′, 7′8′, 12′) és az (1′, 4′5′, 10′) szögek a rendes húszlap hajlási szögének valódi nagyságát adják meg.

A hajlási szög háromszögtani függvényét ezen vetületből szinte egyszerűbben és kényelmesebben lehet feltalálni mint az előbbi §-ben történt. Ugyanis, ha (1′)-et (10′)-el összekötjük, akkor (1′ 10′) azon (1 5 10 9 3, 1′ 5′ 10′ 9′ 3′) rendes ötszög átlójának valódi nagysága, melynek oldalait a húszlap élei képezik, és ennélfogva, ha ismét a húszlap élét veszszük fel egységnek, lesz:

$$1' \, 10' = \frac{\sqrt{5}+1}{2}$$

Továbbá, ha az (1′ 4′5′ 10′) hajlási szög csúcsát az ellentett hajlási szög csúcsával összekötjük, akkor az összeköttetési vonal az (1′ 10′) átlót (a)-ban merőlegesen fogja felezni, és ha még rövidség okáért a fél hajlási szöget (α)-val jelöljük, leend:

$$sin\alpha = \frac{10' \, a'}{10' \, 5'} = \frac{\frac{1}{4}(\sqrt{5}+1)}{\frac{1}{2}\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{5}+1}{2\sqrt{3}}$$

minthogy (10′ 5′) az élekből készült egyenoldalú háromszög magassága valódi nagyságában. — Innét pedig tüstént következik

$$cos\alpha = \frac{\sqrt{5}-1}{2\sqrt{3}}$$

$$\text{de } sin\, 2\alpha = 2\, sin\alpha\, cos\alpha$$

tehát az értékek helyettesítése után ered a hajlási szög részére:

$$sin\, 2\alpha = 2. \frac{\sqrt{5}+1}{2\sqrt{3}} . \frac{\sqrt{5}-1}{2\sqrt{3}} = \frac{2}{3}$$

mint ez az előbbi czikkben szinte találtatott.

38. §.

Láttuk a 36-ik §-ben, miként bármelyik húszlap éle párhuzamos az ellentett éllel, és hogy azonfelől még négy élhez 90 fok alatt hajlik. Ha ezen hat él középpontjait egymással összekötjük, akkor az összeköttetési vonalak, melyek egymást a test középpontjában merőlegesen felezik, a húszlap három főtengelyét képezik. Ha tehát a testet úgy állítjuk, hogy ezen tengelyek egyike a feklapra, másika pedig a függlapra legyen merőleges, mi által azután a harmadik tengely az alapmetszettel lesz párhuzamos, akkor azon nevezetes vetületekre jutunk, melyek a 150-ik ábrában vannak előállítva. A fek, és függvetület azonos ábrák, csakhogy 90 fokkal vannak egymástól elfordulva, és mind a két vetület megegyez azzal, mely a 149-

diki ábra függvetületét képezi. Ezen vetületek előállítása azonban az előbbiek segítsége nélkül is igen egyszerűen eszközölhető, tudván már azt, hogy a hajlási szög, mely valódi nagyságában lesz szerkesztendő, egyenlő azon tompa szöggel, melynek keble két harmad.

Végre szinte különös figyelmet érdemelnek a húszlap azon vetületei, a melyeket nyerünk, ha a testet, mint ez a 151-dik ábrában történt, az egyik lapjára fektetjük. A fekvetületben az (1, 3, 4) és a (7, 11, 12) háromszögek valódi nagyságokban láthatók, de csúcsellenesen; az alsó háromszög minden csucsából felfelé, a felső háromszög minden csúcsából lefelé megy egy él, melyek vetületei az előbbi háromszögek magaságainak meghosszabbítását képezik; — ezen élek végpontjai egy rendes hatszög csúcsait fogják képezni, melynél két-két ellentett oldal távola egyenlő azon rendes ötszög átlójával, a melynek oldalait a húszlap élei képezik. Ezen adatok után már a fekvetület szerkesztése minden nehézség nélkül eszközölhető. — A függvetületben először is az alsó háromszög csúcsai vitetnek az alapmetszetre; az alsó háromszög (1, 4) oldalához van kapcsolva az (1, 4, 5) háromszög, — és hogy az (5) csúcs magasságát megnyerjük, képzeljük azt az (1, 4) él körül a feklapba befordítva, akkor az (5) csúcs a (3)-ra fog esni; a visszaforditáskor azonban az (r 3) sugárral fog egy körívet lerni, míg az, az (5)-ben (r 5)-re emelt merőleges által (A)-ban nem metszetik; lesz ($5A$) az (5) csúcsnak magassága, mely tehát az illető vetítő vonalra felvitetik. Szinte ezen magasságban fekszik a (2) és a (9) csúcs is.

Hogy továbbá az (1, 6) él (6) végpontjának magasságát is megnyerjük, csak tekintetbe kell venni, hogy az (1, 6) vetülethez tartozó valódi hossz egyenlő az alapháromszög oldalával; ha tehát (6)-ban (1, 6)-ra egy merőlegest emelünk, és azt az (1) középpontból az (1, 4) sugárral (B)-ben metszük, leend (6 B) a (6) pontnak kivánt magassága, mely tehát a (6), (8), és (10) pontok vetületeire a tengelytől kezdve felvitetik. Végre a felső háromszög a most nyert pontok felett épen oly magasságban fekszik, mint a (2), (5) és (9) pontok fekszenek az alsó háromszög felett, miért is a már talált (5 A) és (1, B) magasságok összege fogja képezni a függvetület összes magasságát, mely is a (7), (11) és (12) pontokhoz fog tartozni.

Az ekkép meghatározott pontok végre, kellő tekintettel a látható és a fedett részekre, azon rendben köttetnek össze, melyet a fekvetület kimutat.

A 152-ik ábrában van kifejtve azon rendes húszlap hálója, mely a 148—151-ik ábrákhoz tartozik, csakhogy hely gazdálkodás tekintetéből az élek valódi hosszának csak két harmada vétetett. Ha a testet magát el akarjuk késziteni, akkor ezen hálót tetszőlegesen nagyított léptek szerint fogjuk egy papirlemezre rajzolni, és azt annak kerülete szerint pontosan kivágni, — a rajzközti vonalakat pedig csak félig bevágni, mi által a lemez a másik oldalra önként áthajlik; végre az összeillő éleket enyves papirral szorosan összevonjuk.

39. §.

Ha a rendes húszlap mindegyik lapjára egy vele egyenlő élű rendes négylap illesztetik, akkor egy igen különös csillagforma test ered, melynek vetületei a 153-ik ábrában szerkesztettek. Ezen vetületek megnyerésére először magát a rendes húszlapot kell valamely egyszerű állásába vetíteni. E czélra legalkalmasabbnak látszik azon helyzet, mely a 149-ik ábrában van előállítva. Itt a (7, 8, 12) háromszög függvetülete egyenes vonal, egyszersmind a háromszög magasságával egyenlő; ezen háromszög a reá illesztendő négylap alapját fogja képezni. De ha a négylap csúcsából az ellentett lapra merőlegest bocsájtunk, akkor ennek az alap középpontján kell keresztül menni, mely is a magasságnak két harmadára esik a csúcstól számítva; miért is csak a (7′ 8′, 12′) magasságot kell három egyenlő részre osztani, és a csúcstól számított két harmad távolban egy merőlegest emelni; ezen merőlegesben fog a négylap csúcsa feküdni. A négylap ezen állásánál azonfelől a függlapban a (12)-hez tartozó él valódi nagyságában lesz látható, miért is csak a (12′) középpontból a (7, 8) valódi hosszal, mint sugárral, az előbb említett merőleges átmetszetik; biztosság okáért még a (7′ 8′) középpontból, a (7′ 8′, 12′) magassággal mint sugárral szinte átmetszhetjük a merőlegest, a talált metszésnek ugyanis az előbbivel egybe kell esni pontos szerkesztés mellett.

Ekkép tehát meg lesz határozva az egyik csúcs [(19′) a 153-ik ábrában] és ezt tüstént vetítjük is a feklapra, az illető alapháromszög magasságának meghosszabbítására (19)-be. — Minthogy pedig a felső öt négylap ezen állásnál részarányosan van elosztva, azért a többi négy csúcsot egyszerűen úgy találjuk meg, ha az *o* középpontból az (*o*, 19) sugárral egy körívet húzunk meg, és azt az illető magasságok meghosszabbításai által bemetszük; a függlapban pedig a magasságok egyenlők lévén, csak a talált (19′)-en keresztül vonunk az alapmetszettel egy párhuzamost, és erre vetítjük a fekvetületben már talált csúcspontokat, ezen csúcsok végre az illető alapok végpontjaival összeköttetnek, megjegyezvén egyszersmind, hogy a függlapban a (20), és a (16) csúcsok, az előtte álló (18) és (17) csúcsok által tökéletesen el lesznek fedve.

Tökéletesen ugyanezen utat fogjuk követni a második négylap sor meghatározására, a melyek ugyanis a (2, 7, 8), (3, 8, 9), (4, 9, 10), (5, 10, 11) és a (6, 7, 11) háromszögekre illesztendők, kiindúlásul vévén a (2, 7, 8) háromszöget, mint a melynek függvetülete a (2′, 7′8′) egyenes vonal; ezt kell tehát ismét három részre osztani, a (2′)-től kezdve két harmadában reá merőlegest emelni, és azt a (2′) középpontból az él valódi hosszával bemetszeni.

A harmadik csúcssor meghatározására a tulsó oldalon lévő (4, 5, 10) háromszög vétetik kiindulásul, az alsó sornál pedig végre az (1, 4, 5) háromszög, megjegyezvén egyszersmind, hogy a 153-ik ábrában a (19′) és a vele ellentett (4′) csúcsokhoz tartozó magasságok egy egyenes vonalba fognak esni, mely egyuttal a test középpontján is keresztül megy; ugyanez áll a (13′) és a vele ellentett (10′) csúcsokhoz tartozó magasságokról is.

Ha ezen testet egy a középpontján keresztül a függlapra merőlegesen vezetett tengely körül addig forgatjuk, míg az (1′, 2′, 16′, 17′) egyenes az alapmetszetre nem merőleges, akkor ezen állásnál mind a két vetület azonos alakot vesz fel, csak egymástól 90 fokra elfordúlva; ezen állás ugyanis a 140-dik ábrában előállított húszlapnak fog megfelelni.

Végre hogy ezen nevezetes testet szinte előállíthassuk papirlemezekből, a 154-ik ábrában mellékeltük annak kifejtett hálóját egy negyed valódi nagyságban. Ezen ábra tehát a lemezre rajzolandó nagyított léptékben, és a határszél szerint kivágandó; az ábrában magában előforduló élekre nézve azonban megjegyzendő, hogy csak a vékonyabb vonalakkal kihúzottak metszetnek be a lemez egyik oldalán, a vastagabbak pedig a lemez másik oldalán, mi által azok az egyik oldalra, emezek pedig az ellenkezőre fognak hajolni, minthogy a test maga is kiálló, és bent fekvő élekkel bir; — ezek az alapul szolgáló rendes húszlap éleit képzik, míg amazok a reá illesztett rendes négylap éleihez tartoznak.

40. §.

A rendes hatlap.

A rendes hatlap hat rendes négyszög által képeztetik melyek összesen 24 csúcsot adnak; ezek közül egy tömörszög képzésére három egyesül, miért is a hatlap nyolcz csúcscsal bir. Mindegyik él a négy megfekvő élt 90^0 alatt metszi át, más négy élhez pedig szinte 90^0 alatt hajlik, a nélkül hogy azokat átmetszené, a többi három éllel pedig párhuzamos. A három egyenlő főtengelyeket úgy kapjuk meg, ha a két-két ellentett négyszög középpontjait összekötjük.

A hatlap vetülete igen egyszerü, ha azt egyik lapjára fektetjük, mint a 155-ik ábrában. Az egész fekvetület egy rendes négyszög, mely a felső és alsó alapot képviseli, a többi négy oldallap, minthogy azok a feklapra merőlegesek, csak vonalként állanak elő. A függvetületben az alap négy csúcsán merőlegesen álló élek valódi nagyságokban tünnek elő, a két alap pedig a függvetületben lesz egyenes vonallá.

Két oldallap hajlási szöge 90 foknyi.

Még egyszerübb lesz a vetület, ha a test úgy állítatik, hogy az egyik főtengely a feklapra, a másik pedig a függlapra álljon merőlegesen, mint a 156-ik ábrában, ez esetben ugyanis mind a két vetület rendes négyszöggé lesz. — Szinte két azonos vetületre jutunk akkor is, ha a hatlapot az egyik élére úgy fektetjük, hogy ez az alapmetszettel párhuzamos legyen, mint a 157-ik ábrában, ez esetben mind a két vetület oly egyenszög, melynek rövidebb oldala a hatlap éle, a hosszabb pedig az élekből készült rendes négyszög átlója.

Végre a 158-ik ábrában a hatlap azon állása vétetett tekintetbe, a melynél annak átlója a feklapra merőleges. Ezen állásnál az alsó (1, 1′) csúcsból három él indul felfelé, a felső (7, 7′) csúcsból pedig három él szögellenesen lefelé, ezen élek végpontjai tehát egybekötve egy rendes hatszöget képeznek, a melynél a két ellentett oldal távola egyenlő az élekből képzett rendes négyszög átlójával, miért is ha a négyszög oldala, vagyis a hatszög éle egyenlő az egységgel, akkor ezen hatszög oldala annyi mint $\sqrt{\frac{2}{3}}$. — A függvetületben először is az alsó (1) pont az alapmetszetre vetítetik, azután következnek az ugyanazon magasságban fekvő (2), (4), és (5) csúcsok, melyek ugyanis az alólról felfelé menő élek végpontjai által képeztetnek. Ezen pontok magasságainak meghatározására tekintetbe kell vennünk, hogy a (2, 5) átló fekmentes lévén, annak minden pontja egyenlő magasságban fekszik, és így csak az átlók felező (r) pontjának magasságát kell meghatároznunk, de az (1, r) vagy (6, r) a fél átló fekvetülete, az (r, 2) pedig annak valódi hossza, — ha tehét a (6) végpontban merőlegest emelünk (6, r)-re, és ezt (r) középpontból (r, 2) sugárral átmetszük (A)-ben, lesz (b A) a (2), (4), és (5) pontok magassága. De tüstént kiviláglik, hogy szinte ily magassággal kell birni ezen pontok felett a (3), (6), és a (8) pontoknak, úgy szinte ezek felett ismét a felső (7) csúcsnak is, minthogy az (r) pont az (1, 6) átló középpontján fekszik, tehát (1)-től (r)-ig csak annyira emelkedhet, mint (r)-től (6)-ig; a felső (7) csúcs pedig épen oly magasan lehet csak a (3), (6), (8) pontok felett, mint az alsó (1) csúcs a (2), (4), és (5) pontok alatt.

Ezen (6 A) magasság befogója lévén az (A r b) derékszögü háromszögnek, melynek átlója $rA = \frac{1}{2}\sqrt{2}$, feltévén, hogy a hatlap éle az egység, — a másik befogója (6 r) pedig $= \frac{1}{2}\sqrt{\frac{2}{3}}$, mint azt feljebb találtuk, lesz $6A = \sqrt{\frac{1}{2} - \frac{1}{6}} = \sqrt{\frac{1}{3}}$; és így ezen magasságot háromszor véve, ered az egész függvetület magassága, mely tehát annyi mint: $\sqrt{3}$; a 146-ik ábra magassága tehát egyenlő az egységgel, a 147-iké egyenlő ($\sqrt{2}$)-vel, a 158-ik ábra magassága pedig $\sqrt{3}$. A 147-ik ábra magasságát tehát megnyerjük, ha a 146-ik átlóját vesszük, a 148-ikát pedig, ha a 157-iknek vesszük az átlóját.

A 149-ik ábrában van kifejtve a hatlap hálója.

Meg lehet itt még jegyezni, hogy a rendes hatlapba beirható a rendes négylap, ha annak négy, élek által össze nem kapcsolt csúcsait egyenes vonalak által összekötjük, így például ha meghúzzuk az (1, 6), (1, 8), (6, 8), (1, 3), (3, 6) és a (3, 8) átlókat. — Ha pedig a hatlap mindegyik négyszögének középpontjait kötjük össze egymással, ered a rendes nyolczlap. Mind a két eset a 160-ik ábrában van előállítva.

41. §.

A rendes tizenkétlap.

A rendes tizenkétlap tizenkét rendes ötszög által képeztetik. Ezen ötszögek összesen 60 csúcscsal birnak, melyek közöl a tizenkétlap mindegyik tömörszögének képzésére három egyesül, miért is ezen tömörszögek összege $60 : 3 = 20$. — Vetületeinek előállítására legczélszerübb a testet úgy állítani, hogy az egyik ötszöge a feklapban feküdjék, (mint a 161-ik ábrában); ezen ötszög akkor, úgy szinte a vele ellentett csúcsellenes ötszög valódi nagyságokban rajzolandók. Továbbá az alsó (1, 2, 3, 4, 5) ötszög mindegyik oldalával kapcsolatban van egy másik ötszög, melyek az alsóhoz egy bizonyos szög alatt hajolnak. Hogy ezen következő öt ötszög vetületeit megnyerjük, vegyük tekintetbe először azt, mely az (1, 2) éllel van kapcsolatban, és fordítsuk azt épen ezen közös élen körül a feklapba, úgy hogy az az alap ötszöget tökéletesen elfedje; ha most ismét az (1, 2) él körül a kellő állásába visszafordítva gondoljuk, akkor az (5) csúcson fekvő (6)-os csúcs egy körívet fog leirni, melynek fekvetülete az (1, 2) forgási tengelyre merőleges (5, 6) egyenesbe esik, és bizonyos, hogy a (6) csúcsnak fekvetülete valahol ebben az egyenesben fog feküdni. — De a (6) csúcs azon ötszöghöz is tartozik, mely az (1, 5) alapoldallal van kapcsolatban; ha tehát ezen ötszöget képzeljük először az (1, 5) él körül az alapra és innét ismét a kellő állásába visszafordítva, akkor a (2) csúcson fekvő (6) csúcs egy körívet fog leirni, melynek fekvetülete az (1, 5) forgási tengelyre merőleges (2, 6) egyenes vonal; és a (6) csúcs vetületének okvetlen ezen egyenesben kell feküdnie; — miért is ezen vetület az (5, 6) és a (2, 6) közös (6) metszésében leend, mely pontnak azonfelül a (2, 1, 5) szöget felező (1, 6) vonalba kell esni; hol (1, 6) maga az (1) csúcsból felfelé menő élnek fekvetülete. — A többi felfelé menő élek végpontjainak vetületeit már könnyű lesz meghatározni; ugyanis e végre csak az alapötszög (*o*) középpontjából kell (*o*6) sugárral egy körívet leirni, és ezt a szögek felező vonalai által bemetszeni, ekkép meg lesznek határozva a (7), (8), (9) és (10) csúcspontok vetületei is. Minthogy továbbá a felső alap az abból lefelé menő élekkel együtt a most meghatározott alsó idommal tökéletesen azonos, csak csúcsellenesen elfordítva, azért ugyanazon (*o* 6) sugárral leirt kör a felső szögek felező vonalai által szinte bemetszendők, és a nyert pontok a felső alap csúcsaival összekötendők. — Végre minthogy az alólról felfelé menő élek végpotjai egyszersmind a lefelé menő ötszögek legmélyebb csúcsait képezik, azért csak a segédkör mind a tíz pontja egymással rendes tizszöggé összekötendő, és meglesz a tizenkétlap fekvetülete.

A függvetület meghatározására először is az alap ötszög vetítetik az alapmetszetre; azután megkeressük a felfelé menő élek (6), (7), (8), (9) és (10) végpontjainak magasságait a fekvetület felett, megemlékezvén, hogy a (6) pont, forgatása alkalmával az (*r*) középpontú, és (*r*, 2) sugárú körívet irta le mindaddig, míg az a (6) pontban (2, 6)-ra emelt merőleges által (*a*)-ban nem metszetett; ezen elmélkedés folytán tehát lesz (*a*, 6) a (6) pont keresett magassága. Ugyanezen magasságot úgy is megnyertük volna, ha az (1, 6), vagy a vele egyenlő (16, 11) fekvetület végpontjában egy merőlegest emelünk, és azt a (16, 17) valódi hoszszal a másik végpontból, mint középpontból átmetszük (*c*)-ben, lesz (11, *c*) szinte egyenlő a keresett magassággal, úgy hogy (*a*, 6)=(11, *c*). A talált magasságban tehát húzunk a függvetületben egy párhuzamost a vetületi tengelylyel, és arra vetítjük a (6'), (7'), (8'), (9'), és (10') pontokat, a melyeket mindjárt a hozzátartozó alap csúcspontokkal össze is kötjük. — A második magassági rétegben fekszenek az alólról felfelé menő ötszögek legmagasabb pontjai, a melyek fekvetületeit a (11), (12), (13), (14) és (15) pontok képezik. Ezen magasság meghatározására képzeljük ismét (1, 5, 10, 11, 6) ötszöget az (1, 5) éle körül az alapötszögre ráfordítva, akkor a (11) csúcs a (3)-ra fog esni. A visszafordítás alkalmával pedig a (11) csúcs egy oly körívet fog leirni, melynek középpontja (s)-ben van, és a melynek sugara ($s3$); ezen körív tehát addig hosszabbitatik, míg az a (11)-ben (3, 11)-re emelt merőleges által nem metszetik (b)-ben, lesz (b, 11) a keresett második magasság; — az említett pontok tehát azon párhuzamosra vetítendők, a mely a függvetületben a talált magasságban vonatott a vetületi tengelyhez. — Különben ha még az (1) pontot összekötve képzeljük az (o) középponttal, akkor a két (1, o, s) és (1, 11, s) háromszögek azonosságából tüstént következik, hogy $os = s\,11$; és így a keresett második magasság nem egyéb, mint a feklapbani tizszögön körülirt körnek sugara; holott az első magasság az alapötszög körül irt kör sugarával azonos; minthogy rövid számítás után találni fogjuk, hogy $o, 1 = c, 11$. — Végre a felső (16), (17), (18), (19), (20) ötszög pontjai a most talált pontok felett épen azon magasságban vannak, mint az első magasság pontjai az alsó alapötszög felett.

42. §.

A vetületek feltalálására most előadott szerkesztésből a rendes tizenkétlap két ötszögének egymáshozi hajlási is könynyen meghatározható. Ha ugyanis az alap, és az (1, 5, 10, 11, 6) ötszöget veszszük tekintetbe, akkor ezek hajlási szögét a közös élre merőleges (3, s) és (s, 11) magassági vonalak zárják be. Ha tehát a (3, s, 11) síkot a ($3s$) szeldéje körül a feklapba fordítjuk le, akkor az eredt (3, s, b) szög leend a keresett hajlási szög, melyet ha röviden (α)-nak nevezünk, lesz

$$cos\alpha = -\frac{s, 11}{s.b}. \quad \ldots . m)$$

De a (2, 17, 1) szög, mint a rendes tízszög szöge 144 foknyi, ebből levonatván a (18, 17, 16) rendes ötszög szöge, mely is 108^0; marad a (17, 18, 2) és a (16, 17, 1) szögek összege $= 36^0$, s minthogy ezen szögek egyenlők, lesz a (16, 17, 11) szög $= 18^0$. De a (3, 16, 17) szög, mint az ötszög fél-szöge annyi mint 54^0, azért (*s*, 11, 1) szög $= 54 - 18 = 36^0$.

Ha tehát az ötszög oldala egységül vétetik, akkor az (*s*, 11, 1) háromszögből

$$(s, 11) = \frac{1}{2} \cdot cott\ 36 = \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{5}+1}{\sqrt{10-2\sqrt{5}}} \ldots n)$$

Továbbá, ha az alap (1) és (3) csúcsait összekötjük, akkor az (1, 2, 3) egyenszárú háromszögben a (2, 1, 3) szög $= 36^0$, melyet az ötszög szögéből levonván, marad az (*s*, 1, 3) szög még $= 108 - 36 = 72^0$, tehát az (1, 3, *s*) derékszögű háromszögből

$$(s, b) = (s, 3) = \frac{1}{2} \cdot cott\ 18 = \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{\sqrt{5}-1} \ldots p)$$

és ha a talált *n*) és *p*) egyenletekből az értékeket az *m*) alatti egyenletbe helyettesítjük, ered a hajlási szög pótkeblére még:

$$cos\alpha = -\frac{\sqrt{5}+1}{\sqrt{10-2\sqrt{5}}} \cdot \frac{\sqrt{5}-1}{\sqrt{10+2\sqrt{5}}} = -\frac{4}{\sqrt{80}} = -\frac{1}{\sqrt{5}}$$

ezen értékből pedig: $sin\alpha = \sqrt{1 - cos^2\alpha} = \sqrt{1 - \frac{1}{5}} = \frac{2}{\sqrt{5}}$

és e két függvény egymássali osztása által:

$$tang\alpha = -2.$$

a rendes tizenkétlap hajlási szögének érintője tehát egyenlő a nemleg kettővel, vagyis az ábrában (*b*, 11) $=$ 2. (*s*, 11). Ezen szöget tehát igen egyszerűen lehet szerkeszteni az által, ha egy derékszögű háromszögben az egyik befogót kétszer olyan nagynak vesszük, mint a másikat, azután pedig a kisebb befogót meghosszabbítjuk.

A mi az élek egymáshozi hajlását illeti, vegyünk tekintetbe egy tetszőleges, például az (1, 2) élt, és tüstént észrevesszük, hogy ez az (1, 5), (1, 6), (2, 3) és (2, 7) éleket magán a tizenkétlapon 108^0 alatt, a (4, 3), (4, 5), (12, 7) és (12, 6) éleket pedig a meghosszabbításban metsz át 36^0 alatt; átmetszi azonfelül még a (10, 15), (8, 14), (18, 13) és (16, 11) élek meghosszabbítását is, de 60 fok alatt. A többi éleket nem metszi ugyan át, de azért azokhoz némi hajlással bir, nevezetesen a (10, 11), (8, 13), (4, 9) és (12, 17) élekhez 90^0 alatt hajlik, holott az ellentett (19, 20) élhez párhuzamos. Azonfelül az (5, 10), (3, 8), (7, 13) és (6, 11) élekhezi hajlása szinte 60 foknyi, a (16, 17), (17, 18), (9, 14), és (9, 15) élekhezi pedig 36 foknyi, — végre a (14, 19), (18, 19), (15, 20) és (16, 20) élekhez ismét 108° alatt hajlik.

Mindegyik éle tehát a rendes tizenkétlapnak párhuzamos az ellentett éllel, azonfelül a többi élekhezi hajlása e következő: 4 élhez hajlik 90° alatt, 8 élhez 36° alatt, 8 élhez 60° alatt, és ismét 8 élhez 108° alatt. És ha ezen eredményt összehasonlítjuk azzal, melyet a rendes húszlap részére találtunk, (a 36-ik §-ben) könnyen meggyőződünk, hogy e két eredmény egymással pontosan egyez.

43. §.

Az előbbi pontokban kifejtett vetületeknél az alapötszögnek oly állás adatott, hogy annak egyik oldala a vetületi tengelylyel legyen párhuzamos. A 162-ik ábrában azon állás van tekintetbe véve, a melynél az alapötszög egyik oldala a vetületi tengelyre merőleges. A test fekvetületének alakja ez által változást nem szenved, ugyanis az csak egy a feklapra merőleges tengelyen körül van 18 fokkal tovább fordítva; de a függvetület sokkal egyszerűbb alakot vesz fel, minthogy most az elői élek a hátulsó részen levőket épen elfedik.

Ezen függvetületben azonfelül a (13′, 2′3′, 5′) szög a tizenkétlap hajlási szögének valódi nagyságát, úgy szinte a (13′, 18′), (12′, 6′) és az (5′, 10′) vonalak az él valódi nagyságát adják meg, és ezek közül az első és utolsó még a hajlási szöget felező (2′3′, 16′20′) vonallal párhuzamos, a középső pedig ugyanezen vonalra merőleges. Továbbá, ha az (1′, 7′), (7′, 17′), (17′, 11′) és a (11′, 1′) vonalak meghúzatva képzeltetnek, ezek egy oly rendes négyszöget képeznek, a melynek oldala az alapötszög átlójával egyenlő; végre a (2′3′, 13′), (2′3′, 5′), (16′ 20′, 18′) és (16′ 20′, 10′) vonalak az alapötszög magasságainak valódi hosszával egyenlők.

44. §.

A 42-ik §. szerint a rendes tizenkétlap mindegyik éle párhuzamos az ellentett éllel, és azonfelül 4 más élhez 90°

alatt hajlik. Ha tehát ezen hat él közül mindenkor a két-két ellentett középpontjait egyenesek által összekötve képzeljük, megnyerjük a tizenkétlap három fő tengelyét.

A 163-ik ábra a tizenkétlap azon állásának vetületeit állítja elő, a melynél a főtengelyek egyike a feklapra, másika a függlapra merőleges, minek folytán azután a harmadik főtengely párhuzamos az alapmetszettel. Ez esetben mind a két vetület azonos alak, csak egymástól 90^0 alatt elfordúlva, azonfelül mindegyik vetület azonos a 162-ik ábrában előállított test függvetületével.

Ezen vetületnél az egyes vonalak, úgy szinte az előfordúló szögek között igen nevezetes viszonyok léteznek, a melyek közül nem leend felesleges itt a feltünőbbeket megemlíteni. Ugyanis ha a tizenkétlap egyik határzó ötszögének csúcsai a 166-ik ábrában rendre *A*, *B*, *C*, *D*, és *E*-vel jelöltetnek, továbbá annak oldala az egységnek vétetik, akkor az átló hossza $BD = 2.\ cos\ 36 = \frac{\sqrt{5}+1}{2}$; az ötszög egész magassága $CN = AC.\ cos\ 18 = \frac{\sqrt{5}+1}{2} \cdot \frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4}$, és rövid összevonás után még $CN = \frac{1}{2}\sqrt{5+2\sqrt{5}}$; a *B*, és *D* csúcsok magassága pedig az *AE* alap felett, vagyis

$MN = NP.\ cos\ 18 = \frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4}$; végre a körülirt kör sugara $AO = AN.\ cossec\ 36 = \frac{1}{2\ sin\ 36^0} = \frac{2}{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}$

$$= \sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{10}}.$$

Ezek segítségével a 163-ik ábra függvetületében a (13′, 2′3′, 5′) szög a tizenkétlap hajlási szöge, melyet α-nak nevezvén már találtatott, hogy $cos\alpha = -\frac{1}{\sqrt{5}}$, a 13′-néli szög pedig $(180 - \frac{1}{2}\alpha)$; a határzó vonalakat illetőleg pedig $2'7' = MN$, $2'13' = CN$, $13'\,18' = 1$. Azonfelül $8'14' = \frac{1}{2}\sqrt{3}$;

$14'16' = \frac{\sqrt{3}(\sqrt{5}+1)}{4}$; $7'1' = 7'19' = BD = \frac{\sqrt{5}+1}{2}$;

$5'18' = 2.(14'16') = \frac{\sqrt{3}(\sqrt{5}+1)}{2}$; $7'6' = CN = \frac{1}{2}\sqrt{5+2\sqrt{5}}$;

$9'10' = MN = \frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4}$; az egész magasság pedig

$2'16' = 13'5' = \frac{3+\sqrt{5}}{2}$. Azonfelül a $7'\ 12'\ 17'$ szög pótkeble: $cos\ (7'\ 12'\ 17') = -\frac{\sqrt{5}}{3}$, ezen szög tehát a rendes húszlap hajlási szögével egyenlő. Úgy szinte, ha a $(7'\ 12')$ és az $1'6'$ vonalak meghosszabbítatnak, akkor ezek a $16'$ pontban fognak egyesülni, és ha az általok befoglalt szög δ-nak neveztetik, akkor ezen szög pótkeble $cos\delta = \frac{\sqrt{5}}{3}$, miért is ezen szög a húszlap hajlási szögét 180 fokra pótolja.

45. §.

A 164-ik ábrában a rendes tizenkétlap azon állásában van vetitve, a midőn két ellentett csúcs összeköttetési vonala a feklapra merőleges. Ez esetben a feklapon fekvő (1) csúcsból három él (1, 2), (1, 5) és (1, 6) indúl felfelé egyenlő fekhajlással, miért is fekvetületük az (1) pont körül egyenlegesen lesznek elhelyezve, vagyis kettő-kettő 120 foknyi szög alatt hajlik egymáshoz. Ugyanez áll a felső (19) csúcsból lefelé indúló három élről, (19, 14), (19, 18) és 19, 20), csak hogy ezek vetületei az előbbiek által képzett szögeket felezik. Rajzoljuk most a bezáró ötszögek egyikét (19, *m*, *n*, *p*, *q*) valódi nagyságában részarányosan két él vetülete közé, vagyis úgy, hogy az ötszög (19, *r*) magassága a harmadik él vetülete meghosszabbítására essék; képzeljünk továbbá a (19) csúcson keresztül egy egyenes vonalat vezetve párhuzamosan a 18, 19 vagy az *mn* összeköttetési vonalhoz, és ezen egyenest forgási tengelyül használva, mely körül az ötszöget addig forgatjuk, míg az *m*, és *n* pontok a 18, illetőleg 20 pontokra esnek, akkor ezen forgatás által az ötszög másik két *p*, és *q* pontja szinte meg lesz határozva. A szerkesztési eljárás tehát e következő: (19) középpontból (19, *v*) sugárral leiratik a (*vt*) ív, míg ez a 18, 20 egyenest *t*-ben nem metszi; és meghúzzuk a (19 *t*) egyenest, míg ez a szinte 19 középpontból 19*r* sugárral vont körív által *s*-ben nem metszetik; az *s*-ből (19, *r*)-re, úgy szinte *p* és *q*-ból a forgási tengelyre vont merőlegesek metszései által nyeretnek a 17 és 16 pontok. A nyert pontok egyszerű körülvitele által meghatároztatnak a hasonfekvésü (15, 9), (8, 13), úgy szinte alulról a (11, 10), (4, 3) és a (7, 12) pontok is; ha még végre meghúzatnak a (16, 11), (10, 15) stb. összeköttetési vonalak, elő lesz állítva a test fekvetülete.

Meg lévén ekként határozva a tizenkétlap fekvetülete, és ismeretes lévén egyszersmind minden egyes részek valódi nagysága, a függvetület további meghatározása minden nehézség nélkül eszközölhető.

Meg lehet itt azonban jegyezni, hogy ezen vetületet sokkal egyszerűbben, és biztosabban elő lehet állítani, a 163-ik ábra függvetületét vévén alapul. Itt ugyanis a (18′, 5′) csúcsokat összekötvén, ezen átló a valódi nagyságában látszik, ez lesz tehát a keresett új függvetület egész magassága; azonfelül emelvén a (18′, 5′)-re 5′-ben egy merőlegest, és ezt tekintvén vetületi tengelynek, minden egyes csúcsok illető magasságait egyszerű vetítés által nyerjük meg; így például a (20′ *d*) magasság leend az új függvetületben a (7′, 8′, 12′, 14′, 16′ és 20′) pontok közös magassága és így tovább. Úgy szinte a fekvetületben, ha az egy pontban egyesülő három él irányra nézve már meghúzatott 120 foknyi egymástóli eltéréssel, akkor az illető élek vetületének nagysága szinte a 163-ból vehető által, erre nézve csak az (5′, 10) valódi hosszat kell az új tengelyre vetíteni, lesz (5′ 6) a keresett vetület hossza; úgy szinte a 164-ikben a (19, *r*) valódi hossznak megfelelő vetületét a 163-ból vesszük át, mely is = 5′*d*, és így tovább.

Végre a 165-ik ábrában van kifejtve a rendes tizenkétlap hálója, azonban a 161—164 ábrákhoz hasonlítva, helygazdálkodás tekintetéből csak felényi valódi nagyságban. Ha tehát a tizenkétlapot valóban elő kivánjuk állítani, akkor a jelen ábra tetszőleges nagyságban, a jelenhez hasonló alakban rajzolandó kartonra, melyből azután a rajz, határvonalai szerint, élesen kimetszetik, a közbefekvő élek pedig csak félig metszetnek be; azután a test a túloldalra könnyen áthajtatván az összeillő élek enyves papirral összehúzhatók.

46 §.

A tengelyméretű vetületek.

Az eddig előadottak folytán meglehetett arról győződni, hogy minden térmennyiség két vetülete által tökéletesen meg van határozva, elannyira, hogy ezen vetületekből nemcsak a testek alakjára lehet biztos következményt vonni, de azoknak minden egyes méreteit is meg lehet határozni. — Láttuk azonban egyszersmind, hogy a testek vetítése alkalmával két vagy több határzó vonal egymást elfedi, és ilyenkor néha még a gyakorlott szem is alig képes a nyert vetületekből a test valódi alakját maga elé idézni, annyival kevésbé, minthogy némelykor még ugyanazon vetületek, különböző megnevezés folytán különböző alakokat jelenthetnek. Így például a 156-ik ábrában vetített köbnek mind a két vetülete egy rendes négyszöget képez; ámde ugyanezen vetületeknek, ha a megjöleléstől eltekintünk, egy oly épszögü négyszög is eleget tesz, mely mind a két vetületi síkhoz 45^0 alatt hajlik, és a melynek kisebb oldala úgy viszonylik a nagyobbhoz, mint az egy a kettőből vont négyzet gyökhöz. Így hasonlóan a 138-ik és a 139-dik ábrában ugyanazon testnek vetületei vannak előállítva, s nehézség nélkül meg fogja engedni mindenki, hogy az utóbbi *egy* vetülete a test alakjának tisztább fogalmát nyujtja, mint a 138-ik ábrában adott két vetület; s ha még hozzátesszük, hogy az egyes vonalak méreteit ezen *egy* vetületből szintoly pontossággal le lehet venni, mint ama kettőből, könnyen kiviláglik az utóbbi előállítási módszer czélszerűsége.

47. §.

Az ilyféle vetületek szerkesztésénél az egész eljárás azon egyszerű megjegyzésen alapúl, hogy minden test, czélszerű forgatás által oly állásba hozathatik, a melynél az egyes vonalak egymást el nem fedvén, a vetületből a test alakját könnyű szem elé idézni.

Ezen forgatás végbevitelére először egy függélyes tengely vétetik fel a testen keresztül, vagy azonkivül, a mely tengely körül a test úgy mozdítatik, hogy annak minden pontja egy adott, vagy tetszőlegesen választott szögnek megfelelő körívet irjon le. De ezen egy fordítás a legtöbb esetben elegendő nem lesz, mert ez által a felvett tengelyre merőleges síkok irányokat nem változtatván meg, azok a forgatás után is a függvetületben csak egyenes vonalként tünnek fel; szükséges lesz tehát a testet még egy másik tengely körül is szinte egy adott, vagy tetszőlegesen felvett szög alatt forgatni; ezen tengely talán most a függlapra lehet merőleges.

Minthogy azonban az eredmény ugyanaz leend, akár egy adott testet forgatunk egy a feklapra merőleges tengely körül, akár pedig a feklapot meghagyva a függvetületi síkot fordítjuk el eredeti állásából szinte az adott szög alatt, azért a műtétel egyszerűsítése okáért, ezen utóbbi eljárás czélszerűbbnek mutatkozik.

48. §.

A követendő eljárás egy egyszerű példa által tüstént világos leend. A 167^a ábrában vannak előállítva egy mértföldmutató legegyszerűbb vetületei; áll az egész két lépcső alakú egyenközlapból, melyek pihenőkül szolgálhatnak, melyen nyugszik maga a mutató tábla. Először is a 167^b ábrában az egész test az $(ab, a'b')$ él körül, mely ugyanis a függlapra merőleges, egy tetszőleges $\underline{\alpha}$ szög alatt fordítatott el; mely fordítás alkalmával a függvetület alakját nem változtatja, miért is csak az előbbi függvetület egyszerűen ismételtetett, de a tengelyhez α szög hajtás alatt. A fekvetületben az egyes pontok tengelytőli távolsága szinte nem változván, az előbbi vetület pontjain keresztül csak a vetületi tengelylyel párhuzamosak vonatnak, melyen az illető pontok az új függvetületből egyszerű vetítés folytán könnyen meghatározhatók.

Ugyanezen eljárást lehet most ismételni a második elfordításra nézve; ha például felvétetik az új (b, b') ponton keresztül egy a feklapra merőleges tengely, mely körül a test egy bizonyos β szög alatt elfordítandó, akkor a fekvetület alakja nem változván, ez csak egyszerűen lemásolandó, de úgy, hogy a bc oldal a vetületi tengelylyel β szöget képezzen. A függvetületben az egyes pontok magasságai szinte nem változnak, miért is csak 167^b függvetülete egyes pontjain keresztül az

Ez utóbbi vetületek a test oldalnézetét, az előbbiek pedig az ugyanazon állásnak megfelelő felülnézetét fogják megadni. A felülnézet azonban csak igen ritkán szokott használtatni, az oldalnézet elégséges lévén arra, hogy az illető testről magunknak tiszta fogalmat szerezzünk.

51. §.

Ha a fordulási α és β szögek advák, akkor a tengelyek minél egyszerűbb szerkesztésére nézve szükséges leend azon x es y szögek meghatározása az adott α és β szögek függvényeiben, melyeket a tengelyek függvetületei, úgy szinte azon w és z szögek meghatározása, melyeket ugyanazon tengelyek fekvetületei képeznek az alapmetszettel.

Az 168-ik ábrában AB egységül vétetett fel, minek következtében:

$$Ah = Bg = ab'' = cos\alpha$$
$$Ag = Ch = ac'' = sin\alpha;$$
$$b'g' = ab'' \; sin\beta = cos\alpha \; sin\beta$$
$$c'h' = ac'' \; sin\beta = sin\alpha . \; sin\beta;$$

továbbá: $bg = ab'' \; cos\beta = cos\alpha . \; cos\beta$

és $ch = ac'' \; cos\beta = sin\alpha . \; cos\beta;$

$$\text{tehát: } tgx = \frac{b'g'}{A'g'} = \frac{cos\alpha . \; sin\beta}{sin\alpha} = sin\beta \; cotta \quad . \; . \; . \; . \quad 1$$
$$tgy = \frac{c'h'}{A'h'} = \frac{sin\alpha . \; sin\beta}{cos\alpha} = sin\beta \; tg\alpha \quad . \; . \; . \; . \quad 2$$
$$tgw = \frac{bg}{Ag} = \frac{cos\alpha . \; cos\beta .}{sin\alpha} = cos\beta . \; cotta \quad . \; . \; . \; . \quad 3$$
$$\text{és } tgz = \frac{ch}{Ah} = \frac{sin\alpha . \; cos\beta .}{cos\alpha} = cos\beta . \; tg\alpha \quad . \; . \; . \; . \quad 4$$

mely képletek által az x, y, w, és z szögek vannak meghatározva, az összrendezők tengelyeit tehát mind a két vetületben szerkeszteni lehet; de még tudni szükség, hogy mily arányban kell az illető tengelyekre felrakni a metszékeket és rendezőket; a valódi nagyságok helyett most ugyanis csak a vetületek veendők, a melyek, mint az ábra mutatja, minden tengelyen más-más rövidítésben fordúlnak elő, a miért is az ilyféle vetületek, hol α és β egészen tetszőleges, *háromméretű* vetületeknek neveztetnek.

Az ábrából ismét a függvetület részére:

a szélesség $A'b' = \sqrt{sin^2\alpha + cos^2\alpha \; sin^2\beta} = \sqrt{1 - cos^2\alpha \; cos^2\beta}$ 5

a hossz $A'c' = \sqrt{cos^2\alpha + sin^2\alpha \; sin^2\beta} = \sqrt{1 - sin^2\alpha \; cos^2\beta}$ 6

Végre a magasság $A'f' = cos\beta$ 7

ugyanis AB a szélességi, AC a hosszúsági, és AF a magassági tengelynek szokott neveztetni.

De $A'b'$ szélességet még máskép is ki lehet fejezni, ha t. i. benne β szög helyett az x szög függvénye hozatik számításba, mi által ered a sokkal egyszerübb, és az alantabb leirandó szerkesztésre alkalmasabb minta:

$A'b' = sin\alpha . \, sec x$ 8

hasonlóan $A'c'$ mintából β szöget kiküszöbölvén, s helyébe az y szög függvényét hozván bele, álland:

$A'c' = cos\alpha . \, sec y$ 9

Hasonló eljárás által találtatnak a fekvetületre nézve is e következő minták:

a szélesség $Ab = \sqrt{sin^2\alpha + cos^2\alpha \; cos^2\beta} = \sqrt{1 - cos^2\alpha \; sin^2\beta}$ 10

vagy $Ab = sin\alpha . \, sec w$ 11

a hossz $Ac = \sqrt{cos^2\alpha + sin^2\alpha \; cos^2\beta} = \sqrt{1 - sin^2\alpha \; sin^2\beta}$ 12

vagy $Ac = cos\alpha . \, sec z$ 13

végre a magasság $Af = sin\beta$ 14

a kifejtettek folytán tehát minden vetületre négy lépték szükségeltetik; az *első* hossza egy tetszöleges egység; a többi *három* hossza pedig a felvett egységhez képest a nyert 7, 8 és 9, vagy a 11, 13 és 14 alatti képletek szerint határozandó meg.

Használatkor a test vetületeinek méretei vagy az adott egyszerü vetületekből (mint alaprajz és kereszt-szelvény) vagy ha lehet a testről magáról is levétetnek, hosszaságaik az egység-léptéken megméretnek, s a többi lépték segitségével megkurtítva az illető tengelyekre felrakatnak; nevezetesen a hossz és szélesség az $A'b'$ és $A'c'$ (vagy Ab, Ac) tengelyekre, a magasság pedig az ezen két metszék által meghatározott rendezőre a függvetületre nézve felfelé, a fekvetület részére pedig lefelé.

Az ily úton nyert eredmények, mint már említve volt, hárommméretüeknek neveztetnek, mert mind a három tengelynek külön mérete vagyis külön léptéke lévén, a megkurtítás is mindegyik tengelyen különböző.

Jegyzet. Az elmélet kiegészítésére nézve szükségesnek véltük a képleteket a fekvetületre szintúgy, mint a függvetületre lehozni, de ismételve kell arra figyelmeztetnünk, hogy gyakorlatban az oldalnézet tökéletesen elégséges arra, hogy magunknak a kivánt térmennyiségről tiszta fogalmat szerezzünk, s ezen okból a későbbi alkalmazásoknál, úgy szinte a mellékelt rajzokban mindenütt csak ezen egy vetület vétetett tekintetbe.

52. §.

A tengely-rendszer azonban kétméretű is lehet, ha t. i. a hosszasági és szélességi léptékek egyenlők, a mi nyilván csak akkor létesülhet, ha az első, vagyis az elfordulási α szög 45 foknyinak vétetett fel; az 5- és 6-ik képletből ugyanis könynyen következik, hogy $A'b'$ és $A'c'$ csak akkor egyenlők, ha $\alpha = 45^0$. Helyettesítvén tehát α helyett 45 fokot a talált mintákba, erednek ezen egyszerűbbek :

$$tgx = tgy = sin\beta \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad 15$$

$$A'b' = A'c' = \sqrt{1 - \tfrac{1}{2}\, cos^2\beta} = \tfrac{1}{2}\sqrt{2}\; secx \quad \ldots\ldots\ldots \quad 16$$

a magasság marad $A'f' = cos\beta$ 17

mely mennyiségek már most, mint látjuk, csupán a hajlási β szög függvényei.

53. §.

De lehet végre a tengely-rendszer egyméretű is, ha ugyanis mind a három tengely csak egy lépték szerint kurtíttatik meg. Minthogy ezen rendszernél a hossz és szélesség ismét egyenlő, az elfordulási α szög szinte 45 foknyi leend, és csak az a kérdés támad, mennyire kell a testet meghajtani, hogy az egységnek megfelelő magasság épen annyira kurtúljon meg, mint a szélesség vagy a hossz; vagyis kerestetik β szög azon feltétel alatt, hogy

$$A'b' = A'c' = A'f'$$

De a 16-ik és a 17-ik képlet azonosításából következik:

$$\sqrt{1 - \tfrac{1}{2}\, cos^2\beta} = cos\beta$$

és innét : $cos\beta = \sqrt{\tfrac{2}{3}}$

mi által $tgx = tgy = \frac{1}{\sqrt{3}}$ vagy $sinx = siny = \frac{1}{2}$

és így $x = y = 30^0$

és $A'b' = A'c' = A'f' = \sqrt{\frac{2}{3}}$

Jegyzet. Az egyméretű vetületeknél tehát az elfordulási α szög mindig 45^0, a hajlási β szög pedig $= 35^0\ 15'\ 51._8''$.

54. §.

Meg kell még említenünk, hogy a két- és háromméretű vetületek részére lehozott minták némi módositást szenvednek a végre, hogy a szerkesztésnél könnyebben kezeltethessenek.

Gyakorlatban ugyanis a szögekkel, és azok függvényeiveli bánás igen alkalmatlan lévén, az elfordulási α szög nem fokokban szokott adatni, hanem inkább azon viszony által, melyben keble áll pótkebléhez, vagyis adatik e következő arány;

$$sin\alpha : cos\alpha = p : q$$

hol p és q két adott szám; ezen arányból azután könnyen következik:

$$sin\alpha = \frac{p}{\sqrt{p^2+q^2}};\ \text{és}\ cos\alpha = \frac{q}{\sqrt{p^2+q^2}}$$

mely értékek már csak a fent lehozott mintákban volnának helyettesítendők.

A hajlási β szög pedig úgy vétetik fel, hogy keble végszerű törtet képezzen; az ilyen szöget ugyanis legkönnyebb rajzban előállítani.

A p és q viszonyszámok, úgy szinte a β szög célszerű megválasztásától függ a nyert alakok célszerű állása is. Ha $p : q = 1 : 3$ és $sin\beta = \frac{1}{8}$, akkor az ezen adatok segítségével alakúlt vetületek *Mohs*-féle vetületeknek neveztetnek, minthogy ezen adatokat használta Mohs a jegecz-minták előállítására; minthogy azonban ezen adatok bármely térmennyiség előállítására is igen alkalmasak, azért azok a vetülettanban általánosan el vannak fogadva.

Ezen vetületeknél $cos\alpha = \frac{3}{\sqrt{10}}$ és $sin\alpha = \frac{1}{\sqrt{10}}$

S innét: $tgx = \frac{3}{8}$; $tgy = 2\frac{1}{4}$

az elfordulási α szög tehát $= 18^0\ 26'\ 5._8''$
az emelési β szög pedig $= 7^0\ 10'\ 50._7''$
a szélesség léptékének hossza $= \frac{1}{8}\sqrt{7 \cdot 3} = 0 \cdot 33773\ldots$
hossz „ „ $= \frac{1}{8}\sqrt{57 \cdot 7} = 0 \cdot 949506\ldots$
és a magasság „ „ $= \frac{1}{8}\sqrt{63} = 0 \cdot 99216\ldots$

Jegyzet. Minthogy a magasság léptékének hossza csak $\frac{1}{125}$-el kisebb az egység léptékénél, azért gyakorlatban, ha a rajzok nem nagy mértékben készitendők, ez utóbbi lépték egészen mellöztetik, s helyette szinte az egység léptéke használtatik.

55. §.

A mi azonban a léptékek szerkesztését illeti, ez az előbbeniek szerint legegyszerűbben következőkép vitetik végbe:

Az OP egyenesre, 169. ábra felrakunk O-tól kezdve tetszöleges nagyságú, de egyenlő 24 részt; az utolsó rész R végpontján emelt merőlegesre ismét 8 részt Q-ig, azután O-t Q-val összekötve, lesz OQ az egység hossza, QOR szög pedig $= \alpha$; minthogy $tang\ QOR = \frac{8}{24} = \frac{1}{3}$.

Az RQ merőlegesre, továbbá feltevén egy részt N-ig lesz ON a *hoszlépték* nagysága, mert $ON = OR.sec.NOR$; de $OR = cos\alpha$, mert OQ az egység, NOR szög pedig $= y$, mert $tang\ NOR = \frac{1}{24}$; helyettesítve az értékeket, lesz $ON = cos\alpha.$ $secy$; a mi a 9-ik képlettel egyez meg.

R-től O felé felrakván 3 részt L-ig, lesz QL a ***szélesség*** léptékének nagysága, mert $QL = QR\,sec.LQR$: de $QR = sin\alpha$, LQR szög pedig $= x$, mert $tang\ LQR = \frac{3}{8}$; és igy $QL = sin\alpha.$ $secx$; a mi a 8-ik képlettel egyez meg.

Végre R-től Q felé felrakván 3 részt K-ig, K ponton keresztül párhuzamost húzván OP-hez, míg az OR sugárral leirt RT körívet T-ben nem metszi, lesz TOR szög $= \beta$, minthogy keble $= \frac{3}{24} = \frac{1}{8}$; ezen szög OM pótkeble tehát az OQ egységre nézve lesz a 7-ik képlet szerint, a *magasság* léptékének hossza.

Ha már most a 169ª ábrában az OQ egyenesre átvitetik az egység, O középpontból ON ***hoszszal*** körív iratik le, melyet Q-ból QL ***szélességgel*** átmetszünk, ered az ONR háromszög, melyben $OQ = I$; $ON = hossz$; és $QN = szélesseg$; továbbá: az *OM magassággal* O-ból irt körivet, Q-ból szinte QL *szélességgel* metszvén, lesz OMQ háromszögben ismét $OQ=1$, OM = magasság és MQ = szélesség.

Húzzunk már most QM és QN vonalakhoz csekély távolságokban párhuzamosokat, ezek minden tetszőleges egységnek megfelelő *hosszat, szélességet* és *magasságot* fognak az illető léptékeken kijelölni.

56. §.

A kétméretű vetületeknél gyakorlatban β szög keblét $\frac{1}{6}$-nak szokás venni, mi által:

$$tang x = tang y = \tfrac{1}{6}$$

ezen vetületeknél tehát $\alpha=45^0$, β pedig $= 9^0\, 35'\, 38._6''$

$$A'b' = A'c' = \tfrac{1}{6}\sqrt{18{\cdot}8} = 0{\cdot}71686\ ..$$

$$A'f' = \tfrac{1}{6}\sqrt{35} = 0{\cdot}98601\ ..$$

A lépték szerkesztésére nézve felrakunk a 170-ik ábrában OP egyenesre O-tól kezdve hat egyenlő részt R-ig, az R-beni merőlegesre szinte 6 részt Q-ig, és legyen az összeköttetési OQ vonal az egység hossza, akkor $OR = \frac{1}{2}\sqrt{2}$.

Felrakunk továbbá RQ merőlegesre *egy* részt N-ig, lesz ON a *hossz* és *szélesség* léptékének nagysága, mert

$$ON = OR\ sec.\ NOR$$

de NOR szög $= y$, mert $tang\ NOR = \frac{1}{6}$, és azért

$$ON = \tfrac{1}{2}\sqrt{2}\ sec x.$$

a mi a 16-ik képlettel egyez meg.

Húzzunk most még N ponton keresztül párhuzamost OM-el, míg az OR sugárral leirt RT ívet T-ben nem metszi, lesz TOR szög$=\beta$, minthogy keble $= \frac{1}{6}$; ezen szögnek tehát OM pótkeble az OQ egységre nézve nem egyéb, mint a *magasság* léptékének hossza, a 17-ik képlet szerint.

Ha tehát a 170^a^ ábrában átvitetik OQ egyenesre az egység hossza Q-ig, O-ból *OM magasság* sugárral körív vonatik, melyet Q-ból *ON szélesség* sugárral N pontban metszünk, akkor OQN háromszögben az NQ-hoz vont párhuzamosak az egységnek megfelelő magasság, hossz és szélesség megrövidítéseit fogják kijelölni az illető léptékeken.

57. §.

Végre az egyméretü tengelyrendszer léptékének szerkesztésénél képeztetik (170-ik ábra) O-nál egy 45 és egy 30 foknyi ív, úgy hogy $QOR = 45^0$, $HOR = 30^0$, és ha még RQ merőleges OR-re, lesz $OR = I$; $OH =$ *hossz, szélesség*, és *magasság*, mert

$$ON = OR.\,sec.\,30^0 = \tfrac{1}{2}\sqrt{2}.\frac{2}{\sqrt{3}} = \sqrt{\tfrac{2}{3}}$$

mint lenni kell. (lásd 53. §.)

Szerkesztvén tehát a 170^b ábrában OQN háromszöget, melyben $OQ = I$; $ON =$ *hossz*; QN pedig tetszőleges, akkor a QN-hez vont párhuzamosak az egységnek megfelelő kurtított méreteket fogják meghatározni az ON vonalon.

Fontos azonban az egyméretü vetületeknél, hogy itt a lépték egészen mellőzhető, minthogy minden méret egyenlő arányban rövidül meg. A léptékkel, és lépték nélkül készült vetületek tehát egymástól csupán nagyságra nézve lehetnek különbözők; az előbbiek ugyanis úgy viszonylanak az utóbbiakhoz, mint $\sqrt{3} : \sqrt{2}$.

58. §.

Az előbbiekben kifejtett elvek alkalmazására szolgáljon, két egymáson nyugvó egyenes egyenközlap, négyzet alappal, melyeknek felül- és oldalnézete a 171-ik ábrában van előállítva. Az ezen test alaprajzában előforduló AC és BC oldalak, melyek egymásra merőlegesek, szolgálhatnak egyúttal az összrendezői tengelyekül.

Ezen testnek Mohs-féle vetülete a 171^a ábrában látható; itt ugyanis bc egyenes tetszőleges A pontjában meghúzatott az AI merőleges, azután A-tól balra felrakatott 8 egyenlő rész b-ig, a b-beni merőlegesre 3 oly rész B-ig; továbbá A-tól jobbra felvitetett 24 egyenlő rész, c-ig, és a c-beni merőlegesre egy ilyen rész C-ig; a meghúzott AB és AC vonalak által azután meg van határozva a tengelyek iránya.

Megméretett azután az AC hossz a 169^a lépték egység vonalán, és a hosszvonaloni megrövidítés AC vonalra átvitetett, az AB méret pedig a szélesség szerint rövidülve AB-re; az alap negyedik pontja már a megvont párhuzamosok által lesz meghatározva. Az így nyert alap négy sarkpontjában *Al*-hez vonatnak párhuzamosok, melyekre a megrövidített magasság vitetik fel, s. i. tovább.

171^b-ben ugyanazon testnek kétméretű vetülete szerkesztetett. Itt *A*-tól mindkét oldalra 6 egyenlő rész vitetett fel *b* és *c*-ig, az itt emelt merőlegesekre egy rész *B* és *C*-ig. A tengelyek iránya ily módon meg lévén határozva, a többi eljárás azonos az előbb leirottal.

Ugyanez áll a 171^c-ben szerkesztett egyméretű vetületről is, csakhogy itt az *AB* és *AC* tengelyek 30 foknyi hajlással bírnak.

Végre megjegyzendő, hogy ha a test alaprajzában alkalmas épszök elő nem fordúl, akkor az alapvetületén kivül vétetik fel az épszögű összrendezők tengelye.

59. §.

Hogy a Mohsféle vetületek alkalmazását kevéssé öszszetettebb testeknél is láthassuk, a 172-ik ábrában van előállítva egy emlékoszlop, melynek felöl és oldal nézete a 172^a vetületek által vannak megadva. Az eljárás az előbbeniekben előadottakkal tökéletesen azonos, és a szerkesztés minden további nehézség nélkül eszközölhető. A netalán előforduló görbe vonalakra nézve kell még csak azon megjegyzést mellékelnünk, hogy ezek tetszőleges számú pontok által szerkesztetnek, melyeknek vetületei meghatároztatván, azok egy folytonos görbe által köttetnek össze. Több példákat az alkalmazásra felhozni itt feleslegesnek véltük, annyival inkább, minthogy a jövő czikkben tárgyalandó Archimedesféle testek, ezen vetületek szerint előállítva úgy is elegendő és czélszerű gyakorlatúl szolgálnak.

60. §.

A részarányos (Archimedesféle) testek.

Rendes testeknek neveztettek azon testek, melyek csupa *egynemű* rendes sokszögek által zárattak be; ha azonban a testek felülete még mindig rendes sokszögek által képeztetik ugyan, de úgy, hogy az egyes csúcsok képzetére többféle rendes sokszög járulhat, akkor az eredt testek *részarányos testeknek* neveztetnek, feltéve, hogy mindegyik csúcs képzésénél ugyanazon összeállítási törvény használtatik.

Könnyü azonban belátni, hogy ilynemü testek legfeljebb háromféle sokszögekből képezhetők, mert ha csak négyféléket veszünk is fel, és feltesszük, hogy egy csúcs képzésére mindegyikből egy szög járul, és a felvett sokszögek oldalai száma a lehető legkisebbek, tehát ha egy csúcs képzésére járul egy háromszög, egy négyszög, egy ötszög és egy hatszög csúcsa, akkor a test csúcsa képzésére szolgáló négy síkszög összege: $60^0 + 90^0 + 108^0 + 120^0 = 378^0$; mely összeg a 360 fokot túlhaladván, a testnek bemélyedő, nem pedig kiálló csúcsát képezné; — minthogy pedig minden csúcs ugyanazon törvény szerint alakitandó, azért a test csupa bemélyedő csúcsokból állana, a mi lehetetlen.

De még két vagy háromféle sokszögekből se lehet minden tetszőleges csoportositásokban részarányos testeket előállitani. Ugyanis minden síkfelületek által bezárt test élei, csúcsai, felületei és síkszögei száma között bizonyos viszonyok léteznek, melyek törvényei egyenletek által kifejezhetők, és a test csak úgy lehetséges, ha az adott feltételek mellett ezen egyenletek ellenmondást nem tartalmaznak magokban. Ezen egyenletek legnagyobb részt Eulertől származnak,*) és a tömörmértanokban tárgyaltatni szoktak. Itt csak a következö négy legfontosabbat kivánjuk megemliteni; ha ugyanis a test síkszögei számát V-vel, azok összegét fokokban W-vel, a tömörcsúcsok összegét E-vel, az éleket K-val, és a felületek számát F-el jeleljük, álland:

$V = 2K \ldots 1)$ $E + F = K + 2 \ldots 2)$

$W = 4R\ (K - F) \ldots 3)$ és $W = 4R\ (E - 2) \ldots 4)$ hol R egy derékszöget jelent.

---

*) Elementa doctrinae solidorum; és Demonstratio nonnullarum insignium proprietatum, quibus solida, hedris planis inclusa sunt praedita. Nov. Comm. Petrop. T. IV.

61. §.

A kétféle rendes sokszögek által bezárt testek.

Egy részarányos test felülete képeztessék csupa rendes m szögekből és n szögekből. Az m szögek száma legyen M, az n szögeké N; azonfelől egy tömörcsúcs képzéséhez járuljon az m szögekből: μ, az n szögekből pedig ν; legyen azonfelől a csúcsok száma E, az éleké pedig K.

Minthogy minden csúcs képzéséhez az m szögekből μ járul, az m szögek összege pedig Mm, azért a csúcsok száma $E = \frac{Mm}{\mu}$; ... 1) de minden csúcsban ν $n$szög is előfordúl, az $n$szögek száma pedig Nn, azért áll szinte $E = \frac{Nn}{\nu}$ .... 2).

Továbbá az $m$szög mindegyik szöge: $\frac{2(m-2)R}{m}$, hol R egy derékszöget jelent; épen így az $n$szögek mindegyik szöge: $\frac{2(n-2)R}{n}$; és minthogy az előbbiek száma Mm, az utóbbiaké Nn, azért a síkszögek összege

$$W = 2R\left[\frac{(m-2)\,Mm}{m} + \frac{(n-2)\,Nn}{n}\right],$$

vagy Mm és Nn helyett 1) és 2) ből az értékeket helyettesítve

$$W = 2RE\left[\frac{\mu\,(m-2)}{m} + \frac{\nu\,(n-2)}{n}\right]$$

De az előbbi §. 4-ik egyenlete szerint $W = 4R\,(E-2)$ azért szinte $E\left[\frac{\mu\,(m-2)}{m} + \frac{\nu\,(n-2)}{n}\right] = 2\,(E-2)$

és innét $E = \frac{4mn}{2mn - \mu n\,(m-2) - \nu m\,(n-2)}$, vagy ha rövidség okáért $A = 2mn - \mu n\,(m-2) - \nu m\,(n-2)$ leend még

$E = \frac{4mn}{A}$ ... 3) és a talált értéket 1) és 2)-be helyettesítvén:

$M = \frac{4\mu n}{A}$ ... 4) $N = \frac{4\nu m}{A}$ ... 5); végre az előbbi §. 1) egyenlete szerint: $K = \frac{Mm + Nn}{2} = \frac{4mn}{A}\left(\frac{\mu+\nu}{2}\right)$ ... 6).

62. §.

Figyelembe véve az előbbi czikk egyenleteit, már könynyű leend meghatározni mind azon testeket, a melyek kétféle rendes sokszögek által zárhatók be.

Legyen ugyanis 1-ször $m = 3$, és $n = 4$, minthogy ezen értékeknél kisebbeket fel nem vehetnek; vagyis egy test csupa háromszögek és négyszögek által zárassék be, és pedig úgy, hogy minden csúcs képzéséhez járuljon egy háromszög és két négyszög, vagy is $\mu = 1$ és $\nu = 2$; ha ugyanis $\mu = 1$, akkor ν kettőnél kisebb nem lehet, minthogy a tömörszög képzésére legalább három síkszögnek kell egyesülni. Ezen adatokat az előbbi czikk egyenleteibe helyettesítve ered:

$$E = \frac{48}{8} = 6\,;\ M = \frac{16}{8} = 2\,;\ N = \frac{24}{8} = 3\,;\ \text{és}\ K = \frac{6.3.}{2} = 9.$$

Az ezen adatokhoz tartozó test egy hasáb, melynek keresztmetszete egy rendes háromszög, és melynek oldalfelülete négy azonos rendes négyszögből áll.

2-szor. Legyen ismét $m = 3$, $n = 4$, $\mu = 1$, de $\nu = 3$; akkor ered:

$$E = \frac{48}{2} = 24;\ M = \frac{16}{2} = 8;\ N = \frac{36}{2} = 18\,;\ \text{és}\ K = \frac{24.4}{2} = 48.$$

Az ide vonatkozó test, mely tehát 18 négyszögből, és 8 háromszögből képeztetik, a rendes hatszögből ered, ha annak mindegyik éle akként metszetik le, hogy a lemetszett rész szélessége a megmaradttal egyenlő legyen, vagy a mi mindegy, hogy a keresztmetszetek a test közepén keresztül rendes nyolczszögeket képezzenek. A rendes hatlap 12 élei helyébe jönnek ugyanannyi rendes négyszögek, melyekhez járul a még megmaradt hat rendes négyszög, összesen tehát 18 négyszög, a hatlap 8 csúcsa pedig az élek lemetszése által önkényt elesvén, helyettök ugyanannyi rendes háromszög áll elő.

A kezdő igen czélszerűen maga fogja ezen testeket papírpéplemezből előállítani, mi végre a 173[a] ábrában elő van állítva a test hálója. Ezen háló a papirpéplemezre tetszőleges nagyításban rajzoltatván, kerete szerint kimetszetik, a többi megmaradt vonalak pedig félig bemetszetnek, mi által a hálót könnyen át lehet a túloldalra hajlítani, hol azután az összeillő élek enyves papirral összehúzatnak.

A test legegyszerűbb vetületei a 173[b] ábrában vannak előállítva; — mind a két vetület ugyanazon alakot mutat; ugyanis egy rendes nyolczszöget, melynél két-két csúcs az oldallal párhuzamosan van összekötve. A látható részek a nem láthatókat éppen fedik, miért is minden vonal egészen ki van húzva. Végre a 173[c] ábrában van előállítva a test Mohs-féle vetülete, a melyből a test alakja már tisztán kivehető.

63. §.

Ha $m = 3$, és $n = 4$, vagyis ha a test csupa három és négyszögekből alakíttatik, ha azonfelöl $\mu = 1$, vagy is, ha a háromszögekből a csúcs képzéséhez csak egy járul, akkor ν a négyszögek száma egy csúcsnál háromnál nagyobb nem lehet, minthogy a szögek összege már is 360 foknyi, ha $\nu = 4$.

Legyen tehát $m = 3$, és $\mu = 2$; ha ez esetben n még mindig négy, akkor ν lehet vagy egy, vagy kettő. Ha ν ugyanis kettőnél nagyobb, a szögek összege mindegyik csúcsnál 360 foknál nagyobb lenne.

Azonban ha $m = 3$, $n = 4$, $\mu = 2$, és $\nu = 1$ akkor

$$A = 2\,mn - \mu n\,(m - 2) - \nu m\,(n - 2) = 10$$

$$\text{és } E = \frac{4\,mn}{A} = \frac{48}{10}$$

minthogy pedig a csúcsok száma tört nem lehet, azért ezen test is lehetetlen. Lesz tehát csak: $m = 3$, $n = 4$, $\mu = \nu = 2$; vagy is oly test, mely három és négyszögekből úgy alakitatik, hogy minden csúcs képzéséhez 2 három, és ugyanannyi négyszög járuljon. Ezen adatokból lesz $A = 4$; miért is

$$E = \frac{48}{4} = 12\,; M = \frac{32}{4} = 8\,; N = \frac{24}{4} = 6\,; \text{ és } K = 24.$$

Az ide tartozó test tehát 8 háromszögből és hat négyszögből képeztetik, bir tizenkét csúcscsal, és huszonnégy éllel. Hálója a 174[a] alatti ábrában van előállítva.

Ezen test a rendes hatlap megcsonkitása által ered és pedig akképen, ha a rendes hatlapnál az egy csúcsba egyesült élek felező pontjain keresztül vezetünk metsző síkokat; a hatlap nyolcz csúcsa helyébe áll a nyolcz egyenoldalú háromszög, a hatlap hat lapján pedig még fennmarad a hat négyszög, melyek azonban a hatlap eredeti négyszögeivel csúcsellenesek.

Ezen származtatás folytán tehát a test egyszerű vetületei igen könnyen előállithatók. A 174^b ábrában azon állás van tekintetbe véve, melynél a test egyik négyszöglapján nyugszik, melynek egyszersmind egyik átlója a vetületi tengelylyel párhuzamos, ezen állásnál ugyanis mind a két vetület ugyanazon alakot mutat, és egyszersmind a látható élek a nem láthatókat épen elfedik.

A 174^c ábrában ugyanezen test azon állásában van vetítve, midőn az egyik átlója a feklapra, egy másik pedig a függlapra áll merőlegesen. Az $(ab, a'b')$ átló a 174^b ábrából egyszerűen átvétetett, minthogy ennek valódi nagysága látható a függvetületben, az $(1, 2, 3, 4)$ négyszög pedig egy vonalba esik össze, mely a vetületi tengelyre merőleges, s mely egyszersmind az élek valódi hosszával bir. Ezen ábrában egyszersmind a bezáró felületek egymáshozi hajlási szöge is valódi nagyságában látható.

Végre a 174^d ábrában van előállítva ezen test Mohsféle vetülete azon állásban, hol az egyik négyszöglapján nyugszik; s melynek egyszerű vetületei a 174^b ábrával egyeznek.

64. §.

Legyen ismét $m = 3$, de μ szinte $= 3$, vagyis mindegyik csúcs képzéséhez járuljon három 60 foknyi szög, akkor ezek összege már 180 fok lévén, a másiknemű sokszög szögei közül még csak is egy járulhat, azaz $\nu = 1$, bár mily értéket vesz is fel n. Hadjuk tehát egyelőre n-et határozatlanúl, és helyettesítsük a 61. §. képleteibe a következő értékeket:

$$m = 3,\ n = n,\ \mu = 3,\ \text{és}\ \nu = 1$$

lesz $A = 6n - 3n - 3(n - 2) = 6$; és ennélfogva:

$$E = \frac{12n}{6} = 2n;\ M = \frac{12.n}{6} = 2n;\ N = \frac{12}{6} = 2;\ \text{és}\ K = 4n$$

és mint ezen képletekből könnyű észrevenni, a test minden n-re nézve lehetséges. Az ide tartozó testek tehát egy egész sorozatot képeznek, melyek mindegyikénél van két tetszőleges $n$szög, és $2n$ háromszög. A két n szög egymással párhuzamos, de csúcsellenes; azután mindegyik felső csúcs összekötve képzelendő az alsó ellentett oldal végpontjaival, úgy szinte mindegyik alsó csúcs összekötve a felső megfelelő oldal végpontjaival.

Ha a két $n$szöget ugyanazon körbe képzeljük beirva, akkor n nagyobbításával az oldalak kisebbednek; – minthogy pedig a két $n$szög összeköttetési vonalai az $n$szög oldalaival egyenlők, következik, hogy a két párhuzamos $n$szög mindinkább közeledik egymáshoz; s minthogy egyszersmind a két egymással közös él által összekötött háromszög hajlási szöge is folytonosan nagyobbodik, azért a test igyekszik henger alakot venni fel, melyet azonban csak akkor nyerhet el, midőn már az $n$szög oldalai végtelen kicsinyek; de ekkor a két, most már körré vált $n$szög is egybe esett.

Ha a két $n$szög helyett szinte két egyenoldalú háromszög vétetik, párhuzamos állásban, de csúcsellenesen, és az illető csúcsok az előbbi törvény szerint köttetnek össze, ered a rendes nyolczszög.

A 175-ik ábrában az ide tartozó legegyszerűbb test van vetítve, a melynél ugyanis $n=4$; s ennélfogva tehát két négyszög és nyolcz háromszögből áll. A fekvetületben a két négyszög valódi nagyságában rajzoltatott csúcsellenesen; a függlapban pedig a vetület magassága az által határoztatott meg, hogy előbb az $(abc, a'b'c')$ háromszög az (ab) oldala körül a feklapba fordíttatott be. Fordítás közben a (c) pont egy körívet ir le dC sugárral, mely szinte de körül a feklapba van fektetve, hol is a C_1 pont magassága c felett, vagyis C_1c leend a függvetületben a c' pont magassága a tengely felett. A 175[a] ábra a hálót képviseli.

65. §.

Ha a részarányos test mindegyik csúcsának képzéséhez négy 60 foknyi szög járul, akkor a négyszögek szögeiből legfeljebb még egy jöhet hozzájok, ez esetben tehát $m=3$, $n=4$, $\mu=4$, és $\nu=1$, miért is $A=24-16-6=2$, és ennélfogva:

$$E=\frac{48}{2}=24\,;\quad M=\frac{64}{2}=32\,;\quad N=\frac{12}{2}=6\,;\quad K=60.$$

az ide tartozó test áll 6 négyszögből, és 32 háromszögből, mely utóbbiak a négyszögeket koszorúként körülfogják, úgy hogy a négyszögek egymással érintkezésbe sehol sincsenek; ezen test szinte a rendes hatlap megcsonkítása által ered; a hat négyszög síkja ugyanis, melyek közül kettő-kettő egymással párhuzamos, elegendőkép meghosszabbítva, egy rendes hatlapot fog bezárni. A rendes hatlap éleit lemetsző síkok azonban az élekkel nem párhuzamosak, s azért az eredt testnél is a két ellentett négyszög oldalai egymással szinte nem párhuzamosak, de csúcsellenesen sincsenek egymástól elfordulva; s minthogy azonfelül a test hajlási szögei is csak harmadfokú egyenletek által adhatók, azért ezen test vetítése is több nehézséggel jár, és csak is a hajlási szögek közelítő mó doni szerkesztése által sikerül, — vagy pedig az által, hogy az egyes méretek mennyiségtanilag kiszámíttatnak, és azután egy pontos lépték segítségével felrakatnak. A méretekre vonatkozó ezen adatokat alább közölni fogjuk, előbb azonban igyekszünk e testet, azok nélkülözésével, pusztán leiratilag, előállítani.

Mindenekelőtt tehát a 176-ik ábrában van előállítva a részarányos 38-lap hálója, hely gazdálkodás tekintetéből kicsinyített léptekben. Látszik ebből, miként egyesül minden tömör csúcs képzésére egy négyszög, és négy háromszög csúcsa. Annak, ki e sajátságos testet bővebben kivánja tanulmányozni, okvetlen szükség lesz, hogy e hálót meglehetősen nagyítva, és nagy pontossággal papirpépre rajzolja, azt a kerülete szerint élesen kivágja, a hálóban magában előforduló éleket pedig félig bevágja, végre az összevágó éleket megragasztva a testet valóban előállítsa; minthogy a legszorgosabban készített rajzok sem képesek oly tiszta fogalmat nyujtani valamely testről, mint a jól készült minták.

Már ezen háló szorgos megtekintéséből könnyű észrevenni, hogy ilyen test *kettő* létezhet; az első ugyanis, melyet maga a jelen háló képvisel, s melyet *jobb*-nak nevezhetünk, és még egy második *bal*, mely úgy ered, ha a háló közepét a körül levő háromszögekkel együtt meghagyjuk, de az *a* négyszöget háromszögeivel együtt balra eltoljuk, míg annak éle a vonalazott háromszög élével összeesik; ugyanezt tévén természetesen a többi négyszögekkel is.

Megjegyezhetjük itt már előre is, hogy a hálóban vonalazott háromszögek síkjai a testen elegendőleg meghosszabbítva egy rendes nyolczlaphoz tartoznak, azok egymáshozi hajlási szögei tehát szinte a rendes nyolczlap hajlási szögeivel azonosak. — Ha azonban a *bal* testre megyünk át, akkor az *a* négyszög alatti háromszögek váltják fel a jelenleg vonalazottakat, és azok lesznek a rendes nyolczlap lapjai.

A mi már ezek után a 38-lap vetületét illeti, erre nézve mindenekelőtt a hajlási szögek lesznek meghatározandók. Ezen hajlási szögekre a következő észrevétel folytán jutunk. Képzeljük a 176-ik ábra alatti hálóból a testet már alakítva, és úgy állítva, hogy az egyik négyszög O csúcsa egyszersmind a test legmagasabb pontját képezze; és vétessék egyuttal az egyenlő élek hossza egységül; akkor az A, B, C, D és E pontok egy síkban fognak feküdni, és egy oly ötszög csúcsaivá válnak, melyben az egyik AE oldal egyenlő a négyszög átlójával, a többi oldalak pedig ugyanazon négyszög oldalával azonosak, azonfelül pedig a B, C és D-nél képzett szögek egymás közt egyenlők, végre mind az öt pont egy kör kerületén fekszik; mely adatok már elegendők a kérdéses ötszög legalább közelítő szerkesztésére.

Ugyanis a 177-ik ábrában szerkesztetik az $AO'E$ fél rendes négyszög, és az átló G középpontjában a GC merőleges; — az A és E végpontokból az AO' négyszög oldalával leiratnak a Bx és Dy körívek, azután felkerestetik a GC merőlegesen egy oly tulajdonságú O pont, hogy abból $OA = OE$ sugárral leirván egy körívet, és azt C középpontból a négyszög oldalával átmetszvén, a metszési pontok épen azon B és D pontokkal essenek egybe, melyekben az O pontból leirt kör a Bx és Dy iveket átmetszi; — vagy más szóval: kerestetik egy kör, melybe egy adott négyszög átlója AE egyszer, és ugyanazon négyszög oldala négyszer vihető be húrként.

Ha most a nyert ötszög csúcsait az O középponttal összekötjük, megnyerjük a test egyik csúcsa által képzett gúla fekvetületét, s minthogy az élek valódi hossza szinte ismeretes, azért az egyes lapok hajlási szöge is könnyen meg lesz határozható. Nevezetesen a $GO''C$ háromszögben, melynek GO'' oldala a fél négyszög átló, a másik CO'' oldala pedig a négyszög oldala, az O''-néli ε szög megadja azon szög valódi nagyságát, mely alatt a CO él hajlik a négyszög síkjához; úgy szinte a GHD háromszögben a H-náli δ szög a négyszög és háromszög közötti hajlási szöget adja meg, ha GH a négyszög oldalának felével, DH pedig azon egyenoldalú háromszög magasságával egyenlő, mely az élekből képeztetik; végre a BKD háromszögben a K-náli γ szög a két háromszög hajlási szögét adja, ha a befogó $BK = KD$ oldalak a háromszögek magasságai.

Ezek után már könnyű leend a 38-lap vetületeit is előállítani. E végre a 178-ik ábrában rajzoltatik egy rendes négyszög *aoe*, melynek oldala egyenlő a szerkesztendő test élével, s mely tehát egységül szolgál. A jelen ábrában a négyszög ugy van felvéve, hogy annak egyik átlója a vetületi tengelylyel legyen párhuzamos. Ezen négyszög oldalaihoz szerkesztetnek az *abo*, *ode* stb. háromszögek, melyek valódi nagysága az egységgel leirt egyenoldalú háromszög, s melyek δ szög alatt vannak a négyszög síkjához lefelé hajolva; miért a b pont meghatározására csak a háromszög lB magasságával kell l középpontból leirni a BB' ívet, úgy hogy a BlB' szög egyenlő legyen $180-\delta$-val; — azután meggosszabbítjuk a négyszög átlóit, és ezen hosszabbításokra felvisszük az élek vetületeit, ha azok ε szög alatt vannak lefelé hajolva; vagy is az e középpontból leiratik az éllel a CC' ív úgy, hogy a CeC' szög $180-\varepsilon$ legyen. A függvetületben a b' és d' pontok mélysége a vizirányos $a'o'e'$ alatt egyenlő bB'-el, a c', k' pontok mélysége pedig annyi mint kC'.

Szerkesztve lévén így a felső négyszög, az azt bezáró háromszögeivel együtt, következik a négy oldal négyszög szerkesztése. Szükség lesz itt azonban a következő észrevételt tenni. Az eddigi vetületek ugyanis érvényesek, akár a *jobb* akár a *bal* 38-lapot kivánjuk előállítni; ezentúl azonban a két test vetülete egymástól eltér. A különbség ugyanis abban áll, hogy most az oldal négyszöget a *cd*, vagy a vele hasonfekvő *dk* élhez illesztjük-e? A jelen ábrában a hálónak megfelelő jobb test lévén vetítve, a négyszög is a jobb oldalon levő *dk* oldalhoz illesztetett. Ezen négyszög a feklapra merőleges lévén, annak egész vetülete a *dk* vonallal esik össze. Az alsó két pontjának meghatározására képzeljük ezen négyszög síkját fekszeldéje körül a feklapba befektetve, akkor a négyszög valódi állása a $k''d''m''n''$ négyszöggel esik egybe, a melyet tehát csak a kd élre, és illetőleg annak meghosszabbítására kell visszavetíteni m-be, és n-be; a függvetületben az n' pont mélysége a vizirányos $a'o'e'$ alatt egyenlő nn''-el, az m' ponté pedig annyi mint mm''.

Minthogy pedig a test alsó része, eltekintve az elfordítástól, a felső részszel azonos, a nyert (m, m') és (n, n') pontok pedig már az alsó részhez tartoznak; azért a vetület többi része a méretek részarányos áttétele által könnyen kiegészíthető.

66. §.

Elő lévén e szerint állítva a 38-lap egyik állásának vetülete, ebből már a test bármely más állásban is egyszerű forgatás által könnyen vetíthető. Legnevezetesebb azon állás, mely a 179-ik ábrában van képviselve, melynél ugyanis mind a két vetület azonos idomot képez. Ha ugyanis az átellenes négyszögek középpontjait összekötjük, ered a 38-lapnak három fő tengelye, mely körül a test lapjai részarányosan vannak elhelyezve; a jelen állásban pedig egyike ezen tengelyeknek a feklapra, a másika pedig a függlapra áll merőlegesen. Ezen vetületek mindegyike megegyez a 178-ik ábra fekvetületével, a melynél már is az egyik tengely a feklapra merőleges; a testet tehát csak ezen tengelye körül még addig kell forgatni, míg egy másik tengelye a függlapra nem lesz merőleges, vagy a mi mindegy, míg a $kmdn$ négyszög síkja a vetületi tengelylyel nem párhuzamos. Ezen vetületek egyszersmind a test további tanulmányozására is legalkalmasabbak; miért is a test elméleti meghatározására szinte ezen vetületet használjuk a 180-ik ábrában, hol is csak a fekvetület van tekintetbe véve.

67. §.

Az egyes méretek mennyiségtani meghatározására nézve a 177-ik ábrában $AB = BC = CD = DE = 1$; AE pedig $= \sqrt{2}$. Nevezzük az egyenlő OAB, ABO, OBC, BCO, OCD, *CDO, ODE* és *DEO* szögeket α-val, az *OAG* és *OEG* szögeket pedig β-val, akkor

$$4\alpha+\beta=270\ \ldots 1)$$

az *ABC* egyenszárú háromszögből

$$AC=2\,sin\alpha\ \ldots 2)$$

miért is a *GAC* háromszögből

$$\frac{\frac{1}{2}\sqrt{2}}{2\,sin\alpha}=cos\,CAG=cos\,(\beta+2\alpha-90)=sin\,(2\alpha+\beta)\ \ldots 3)$$

és tekintetbe vévén az 1) alatti képletet:

$$1=2\sqrt{2}\,sin\alpha\,sin\,(270-2\alpha)=-2\sqrt{2}\,sin\alpha\,cos\,2\alpha\ \ldots 4)$$

és a kettős szög pótkeblét kifejtve, és rendezve:

$$sin^3\alpha-\tfrac{1}{2}\,sin\alpha-\frac{\sqrt{2}}{8}=0\ \ldots 5)$$

mely egyenletben tévén $sin\alpha=\frac{z\sqrt{2}}{4}$ ered:

$$z^3-4z-4=0\ \ldots 6)$$

ezen egyenletet feloldván, találtatik a z valós gyöke

$$z=2{\cdot}3829778\ \ldots$$

$$\text{és } sin\alpha=\frac{2{\cdot}\,3829778.\sqrt{2}}{4}$$

$$\text{tehát } \alpha=57^0\ 24'\ 22''$$

$$\text{és } \beta=270-4\alpha=40^0\ 22'\ 32''$$

A nyert α és β szögek segítségével már a többi adatok meghatározása eléggé egyszerű. Így a *GHD* háromszögből, melyben $GH=\frac{1}{2}$, és $DH=\frac{1}{2}\sqrt{3}$ lesz

$$DG=\sqrt{1-\tfrac{1}{2}\sqrt{3}\,cos\delta}$$

a *GED* háromszögből pedig:

$$DG=\sqrt{\tfrac{3}{2}-\sqrt{2}\,cos\,(\alpha+\beta)}$$

mely két érték összehasonlításából ered:

$$cos\delta=-\frac{1}{\sqrt{3}}+\tfrac{2}{3}\sqrt{6}\,cos\,(\alpha+\beta)=-0{\cdot}798355\ \ldots 7)$$

tehát a megfelelő szög

$$\delta=142^0\ 58'\ 23{\cdot}_8''$$

Jegyzés. A 7) alatti képlet szerint $cos\delta$ igen közel annyi mint $-\frac{4}{5}$; tehát $sin\delta=$ közel $\frac{3}{5}$; és $tg\delta=$ közel $-\frac{3}{4}$; ezen értékek szerkesztésre nézve igen kényelmesek, és azokat használva a δ szög ugyan kellőnél nagyobb, de a hiba csak $0^0\ 5'\ 36{\cdot}_5''$-et tévén, ezen hiba a leirati rajzoknál elenyésző.

Továbbá a BKD háromszögből, melynek BD oldala $= 2\, sin\alpha$, a $BK = KD$ oldala pedig az egyenoldalú háromszög magassága $\frac{1}{2}\sqrt{3}$, következik

$$sin\, \tfrac{1}{2}\gamma = \frac{2}{\sqrt{3}}\, sin\alpha$$

és innét: $\gamma = 153^0\ 14'\ 5\cdot_8''$

hol γ azon szöget jelenti, mely alatt két közös élű háromszög síkja hajlik egymáshoz.

Végre a $CO''G$ háromszögben CO'' egyenlő az egységgel, GO'' mint a négyszög fél átlója $= \frac{1}{2}\sqrt{2}$, a CG oldal pedig a CAG háromszögből

$$CG = \sqrt{4\, sin^2\alpha - \tfrac{1}{2}}$$

miért is a $CO''G = \varepsilon$ szög meghatározására álland:

$$2 - 4\, sin^2\alpha = \sqrt{2}.\ cos\varepsilon$$

vagy $cos\varepsilon = \sqrt{2}.\ cos2\alpha = 0{\cdot}5934687$

tehát $\varepsilon = 126^0\ 24'\ 12'_7''$

hol ε azon szöget jelenti, mely alatt a négyszög átlója irányában fekvő él hajlik a négyszög síkjához.

Meg lehet itt is jegyezni, hogy a leirati szerkesztéseknél, kivált kisebb mértékben a $cos\varepsilon$ pontos értéke helyett lehet az igen közel álló $cos\varepsilon = \frac{3}{5}$ értéket használni.

68. §.

Ha a részarányos harmincznyolczlap mindegyik csúcspontját összekötjük a körülirható gömb középpontjával, akkor az egész test csupa gúlákra oszlik, és pedig 6 olyanra, melyek alapja rendes négyszög, melyeknek alaphajlási szögeik $= 66^0\ 21'\ 20\cdot_9''$, magasságuk pedig $h_4 = 1{\cdot}142$; és 32 olyan gúlára, melyek alapja rendes háromszög, alaphajlási szögük $= 76^0\ 37'\ 2.\cdot_9''$, magasságuk pedig $h_3 = 1{\cdot}213$. — Mind a kétféle gúlaoldal élei egyenlők egymás között, és egyenlők a körülirt gömb sugarával, mely is $R = 1{\cdot}344$.

Ezen adatokból azután könnyen következik az egész test köbtartalma $K = 7{\cdot}886$ köbegység, és az egész oldalfelület $F = 19{\cdot}856$ négyszög egység.

Ezen adatokhoz sorozható még, (177 ábra), hogy a BOA szög valódi nagysága $= 60^0$; a COA valódi nagysága $= 2\alpha$

$= 114^0\ 48'\ 44''$; a DOA szög valódi nagysága $= 133^0\ 44'\ 26{\cdot}5''$; végre az EOA szög valódi nagysága $= 90^0$.

69. §.

A mi végre a vetületre vonatkozó adatokat illeti, ezek meghatározására szolgál a 180-ik ábra; mely is a 38-lap fekvetületét állítja elő, ha egyszersmind a négyszögek síkjait addig képzeljük meghosszítva, míg azok egymást egy rendes hatlapban metszik. $GCMN$ a körülirt hatlap felső és alsó négyszöge, *gcmn* a 38-lap felső, *dfqp* pedig az alsó négyszöge. Azon *acg* szög, mely alatt a 38-lap négyszögének oldala, a hatlap illető négyszögének oldalához hajlik

$$acg = 16^0\ 28'\ 3{\cdot}_5''$$

és minthogy az alsó négyszög a hatlap négyszöge oldalához szinte ezen szög alatt hajlik, de az ellenkező oldalra, azért azon szög mely alatt a felső és alsó négyszög egymástól irányra nézve eltér ezen szög kettőzete, vagyis $god = 32^0\ 56'\ 7''$.

Az elősoroltakon kivül még megemlitendő, hogy az *agh* és a vele hasonfekvésü háromszögek, a melyeknek ugyanis a négyszögekkel közös élök nincsen, egy oly rendes nyolczlaphoz tartoznak, a melynek tengelye a körülirt hatlap tengelyeivel összeesnek; vagyis az említett nyolcz háromszög síkjai elegendőleg meghosszabbítva egymást egy rendes nyolczlapban metszik. Az *agh* háromszög oldalai azonban a hozzátartozó nyolczlap háromszög oldalaival nem párhuzamosak, hanem azokhoz akként hajolnak, hogy az *ag* oldal meghosszítva a nyolczlap O csúcsára, a *gh* oldal meghosszabbítása a *k* csúcsba, a *ha* oldal meghosszitása pedig a nyolczlap *i* csúcsára találjon.

Ha azonban az *agr*, vagy a vele hasonfekvésü háromszögeket vesszük tekintetbe, de csak a 38-lap felső oldalán, akkor ezek szinte egy rendes nyolczlap felső feléhez tartoznak, melyeknek azonban a megfelelő alsó része egészen hiányzik, és ezen hiányzó rész akkor áll elő, ha a *jobb* testről átmegyünk a *bal*ra, ez esetben azután az előbb említett *ahg* féle háromszögből tünik el az alsó négy.

Az *ahg* háro mszögekhez tartozó rendes nyolczlap fekvetülete *k i s t o* által képviseltetik, míg az *agr* háromszögekhez tartozó nyolczlap fekvetülete *l u w v o*. E két nyolczlap O tengelye közös, de a ks tengely lw-be megy át, ha a jobb testről a balra megyünk át; az elfordulási kol szög épen akkora, mint a mely szög alatt hajlik a felső és alsó négyszög oldala egymáshoz, vagyis:

$$kol = 32^0\ 56'\ 7''.$$

Ezen nyolczlapok éle, ha a 38-lap éle vétetik egységűl

$$kt = 2{\cdot}972106$$

annak féltengelye pedig $ko = 2{\cdot}1016$

Ide tartozhatnak még azon adatok is, melyek a vetületre vonatkoznak. Ugyanis a vetület körül irt $GCMN$ négyszögbe egy rostozat van befektetve párhuzamosan az oldalakkal, és a test minden csúcsának vetülete csak is ezen rostozat átmetszéseire esik; ezek rostozat méretei:

$$\begin{aligned} ae &= 0{\cdot}521393 \\ ed &= 0{\cdot}283476 \\ db &= \underline{0{\cdot}337751} \\ & \ 1{\cdot}142620 \end{aligned}$$

tehát a körűlirt rendes hatlap oldala $GC = 2{\cdot}285240$.

70. §.

Tekintetbe vettük eddig mind azon testeket, melyeknél $m = 3$, és $n = 4$, vagyis, melyek csupa rendes három és négyszögekből alakíthatók. Az utolsó esetnél ugyanis, melyet tárgyaltunk, μ egyenlö volt 4-el, vagyis egy csúcs képzéséhez 4 háromszögcsúcs járúlt, és μ ennél nagyobb nem is lehet; mert ha $\mu = 5$, vagyis ha a test csúcsának képzésére 5 háromszögcsúcs fordíttatik, akkor ezek összege már maga 300 fokot tesz, ehhez tehát még egy négyszög csúcsot adván, a 360 fokot túlhaladja, és így a testet lehetlenné teszi.

Lássuk tehát még, melyek azon testek, a melyek rendes három, és ötszögekből készülhetnek. Ezeknél tehát $m = 3$ és $n = 5$; miért is a 61. §. szerint $A = 30 - 5\mu - 9\nu$; és $E = \frac{60}{A}$; minthogy pedig E-nek, vagyis a test csúcsai számának egész számnak kell lenni, minthogy továbbá az egy csúcsban összefutó szögek összegének 360 foknál kisebbnek kell lenni, könynyen következik, hogy három és ötszögekből mindössze csak is három különböző test alakítható, ugyanis

a) ha $\mu = 2$, és $\nu = 2$, akkor:

$$A = 2\,;\; E = 30\,;\; M = \frac{4\mu n}{A} = 20\,;\text{ és } N = \frac{4\nu m}{A} = 12$$

vagy is a test áll 12 ötszögből, és 20 háromszögből.

b) ha $\mu = 3$, és $\nu = 1$, akkor:

$$A = 6\,;\; E = 10\,;\; \mathrm{M} = \frac{4\mu n}{A} = 10\,,\text{ és } N = \frac{4\nu m}{A} = 2,$$

vagy is a test áll 2 ötszögből, és 10 háromszögből.

és c) ha $\mu = 4$, és $\nu = 1$, akkor:

$$A = 1\,;\; E = 60\,;\; M = \frac{4\mu n}{A} = 80\,;\text{ és } N = \frac{4\nu m}{A} = 12$$

vagy is a test áll 12 ötszögből, és 80 háromszögből.

Ezek közül azonban a középső a 64-ik §. alatti sorozathoz tartozván, itt kiesik, úgy hogy csak az első és utólsó lesz külön tárgyalandó.

71. §.

Az előbbi §. a) alatti pontjához tartozó test képeztetik 12 ötszögből és 20 háromszögből úgy, hogy minden csúcs képzéséhez két ötszög és két háromszög csúcs váltakozva járúl. Eredhez a test a rendes 12-lapból, ha annak csúcsai aképen vágatnak le, hogy a levágó sík az élek középpontján menjen keresztül, az által a tizenkétlap 20 csúcsa helyébe ugyanannyi rendes háromszög áll, a régi 12 ötszög helyett pedig új 12 ötszög áll elé, a melyek amazokból erednek, ha az oldalak középpontjait összekötjük. De eredhet másodszor a test a rendes húszlapból is, ha annak tizenkét csúcsa metszetik le, az élek középpontjain keresztül menő síkok által; akkor a tizenkét csúcs helyébe áll ugyanannyi rendes ötszög, a régi húsz háromszög helyébe pedig új húsz háromszög lép, melyek oldalai az eredetieknek épen fele.

Ezen test rokon a 63-ik §-ben előadottal, a mely is a rendes nyolczlapból, vagy a rendes hatlapból épen azon törvény szerint alakul, mint ez a rendes tizenkétlapból, vagy a rendes húszlapból.

A test hálója a 181-ik ábrában van előállítva kisebbített mértékben.

A mi a test vetületét illeti, az az említettek folytán igen egyszerüen előállitható az által, ha elöbb vetitjük a rendes tizenkétlapot, vagy a rendes húszlapot, azután minden egyes él vetületét felezzük, és a nyert felező pontokat a fentebbi törvény szerint kellöen összekötjük.

A 182-ik ábrában van vetitve ezen test oly állásában, hogy a függvetületben a látható részek a nem láthatókat épen elfedjék. — Ezen függvetület különös figyelmet érdemel azért, mert azt megtartván, és a fekvetületet addig fordítván el, míg a vetületi tengely az $a'b'$ tengelyre nem merőleges, előáll a test azon állása, a melynél mind a két vetület azonos alakot mutat, bár egymáshoz 90 fok alatt elfordúlva. A 183-ik ábrában a test a Mohsféle vetületbe van áttéve.

A test egyes méretei, úgy szinte a hajlási szögek meghatározását, mint hasznos gyakorlatot a szorgalmas kezdőre bizzuk, miután azok a rendes tizenkétlapból, vagy a rendes húszlapból elég egyszerüen következnek.

72. §.

A 70-dik czikkben tárgyalt c) alatti test tizenkét rendes ötszög és 80 rendes háromszög által képeztetik, mely utóbbiak az ötszögeket koszorúként körülfogják, úgy hogy az ötszögek egymással közvetlen sehol sem érintkeznek. Ezen test párját képezi annak, melyet a 65—69 §§-ben elég terjedelmesen tárgyaltunk; ezen test ugyanis épen azon tövény szerint ered a rendes tizenkétlapból, vagy a rendes húszlapból, mint amaz eredt a rendes hatlapból vagy a rendes nyolczlapból. — A rendes tizenkétlap szembeötlő, mint amott a rendes hatlap; a rendes húszlap oldalaira azonban csak elmélkedés által juthatni, mint amott a rendes nyolczlapéra.

A 184-ik ábra a test hálójának felét állítja elő, a másik fele ezzel azonos lévén. Látjuk ebből, hogy minden csúcs képzéséhez 4 háromszög és egy ötszögcsúcs járul. A középen rajzolt ötszög mindegyik oldalához 3 háromszög rajzoltatott, melyek középsője az ötszöggel közös oldallal bír; a másik két háromszög egyikéhez illesztetik ismét az ötszög. Minthogy pedig épen szabadságunkban van ezen háromszögek bármelyikéhez illeszteni az ötszöget, következik, hogy két ily test létezik, ugyanis a *bal*, mely a jelen háló által képviseltetik, és a *jobb*, mely eredne, ha az ötszögeket a jobb felöli háromszögek fölé szerkesztenök, a melyek jelenleg a hálóban vonalazva vannak. Ezen háromszögek, melyeknek az ötszögekkel közös élök nincsen, a melyek három csúcsa *három* különböző ötszög csúcsaival egyesülnek, és a melyek száma az egész testen húsz, ezen háromszögek egy rendes húszlaphoz tartoznak, mely ered, ha ezen háromszögek síkjai egész a metszésig meghosszabbíttatnak.

73. §.

Hogy ezen test vetületeit képesek lehessünk előállitani, mindenek előtt a hajlási szögeket kell meghatároznunk. Erre nézve képzeljük a test azon csúcsát már megalakítva, mely a hálóban *abcde* által jelöltetett ki, akkor ered egy ötoldalú gúla, melynek csúcsát O fogja képezni, és a melynek alapja egy oly körbe irható ötszög, melynek négy oldalát egy rendes ötszög oldalai, az ötödik oldalát pedig ugyanezen ötszög átlója képezi; vagy is egy oly körbe irható ötszög, melynek négy oldala egyenlő az egységgel, az ötödik oldal pedig $= \frac{\sqrt{5}+1}{2}$. Ezen ötszög csak is kisérlet útján szerkeszthető azon elvek szerint, a melyeket a 65-ik czikkben (177 ábrában) követtünk. Ugyanis a 185-ik ábrában szerkesztetik az AOE rendes ötszög oly nagyságban, hogy annak oldala az egységgel legyen egyenlő. Feleztetik azután az AE átló a GC merőleges által, és a két A és E végpontokból leiratnak az egység sugárral a Bx és Dy ívek. Most már egy kisérlet által feltalálandó O középpontból OA sugárral egy oly kör iratik le, hogy a CB húr az AB-vel legyen egyenlő. Az így nyert ötszögnek O középpontját a csúcsokkal összekötve, megnyerjük a kérdéses ötoldalú gúla fekvetületét.

Ugyanezen ötszögből most már a test minden hajlási szögei is könnyen meghatározhatók; mert először is szerkesztetik a $GO''C$ háromszög, a melynek egyik oldalát képzi az ötszög GC magassága, a második CO'' oldal az egység, a harmadik GO'' oldal pedig annyi mint az ötszögből vett GQ; ezen háromszögnek azután O''-néli ε szöge, azon hajlási szöget adja, mely alatt a CO él hajlik az ötszög síkjához, hol még megjegyezhető, hogy az O pontban GC-re emelt merőlegesnek szinte az O'' csúcson kell keresztül menni, minthogy OO'' nem egyéb, mint a kérdéses gúla magassága.

Az ekkép meghatározott ε szög már maga elegendő a vetület előállítására, azonban czélszerű lesz még kimutatni, miképen lehet még a többi hajlási szögeket szinte meghatározni. E végre szerkesztetik a BKD egyenszárú háromszög, melynek egyik oldalát képzi az ötszög BD átlója, a másik két oldalát pedig az egyenoldalú háromszög magasága $= \frac{1}{2}\sqrt{3}$, ezen háromszög K-náli γ szöge azon szöget adja meg, mely alatt a test két közös éllel biró háromszöge hajlik egymáshoz. Végre szerkeszthető egy háromél, melynek egyik oldalát képzi az AED $= \alpha + \beta$ szög, a másikát a GEO valódi nagysága $= 36^0$, a harmadikát pedig a DOE szög valódi nagysága $= 60^0$; ezen háromélben azután az $\alpha + \beta$-nak ellentett δ szög képezni fogja az ötszög és háromszög közti hajlási szöget. A talált γ és δ szögek azonban a vetület meghatározásánál mellőzhetők.

74. §.

Az előbbi §-ben szerkesztésileg meghatározott adatok szinte az 185-ik ábra alatti ötszögből elméletileg is lehozhatók tudván, hogy az ötszög rövidebb oldalai az egységgel egyenlők, a hosszabb oldal pedig, egy rendes ötszög átlója, vagyis $\frac{\sqrt{5}+1}{2}$.

Ugyanis az EOD egyenszárú háromszögből, az E-néli szöget α-val jelölvén ered

$$1 = 2.\ OE.\cos\alpha$$

az OGE háromszögből pedig, jelölvén az E néli szöget β-val:

$$\sqrt{5} + 1 = 4.\ OE.\cos\beta$$

a két egyenlet összehasonlításából tehát:

$$\frac{\sqrt{5}+1}{2}.\ \cos\alpha = \cos\beta$$

azonfelül pedig $\quad 4\alpha + \beta = 270^0$

tehát $\quad \frac{\sqrt{5}+1}{2}.\ \cos\alpha = -\sin 4\alpha$

$$= -4\sin\alpha\cos\alpha\,(1-2\sin^2\alpha)$$

vagy $$sin^3\alpha - \tfrac{1}{2}\,sin\alpha - \frac{\sqrt{5}+1}{16} = 0$$

és tévén $sin\alpha = \frac{z}{4}$, lesz még

$$z^3 - 8z - 12{\cdot}944272 = 0$$

mely egyenletet feloldva, következik:

$$z = 3{\cdot}431123, \text{ és ebből } sin\alpha = 0{\cdot}85778$$

a megfelelő szögek tehát:

$$\alpha = 59^0\ 4'\ 5{\cdot}_8''$$
$$\text{és} \quad \beta = 33^0\ 47'\ 42.{}_6''$$

Ezen így nyert adatok segítségével a hajlási szögek most már könnyen kiszámíthatók; mert az ACG háromszögből

$$CG = \sqrt{4sin^2\alpha - \left(\frac{\sqrt{5}+1}{4}\right)^2}$$

a $CO''G$ háromszögből pedig, melyben

$$CO'' = 1 \text{ és } GO'' = GO = sin\,36 = \frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{4}$$

ered: $$CG = \sqrt{1 + \frac{10-2\sqrt{5}}{16} - \frac{2\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{4}\cdot cos\varepsilon}$$

tehát a két érték összehasonlításából:

$$2 - 4\,sin^2\alpha = \frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{2}\cdot cos\varepsilon$$

és innét $$cos\varepsilon = \frac{4\,cos2\alpha}{\sqrt{10-2\sqrt{5}}} = \frac{cos2\alpha}{sin\,36}$$

kiszámítván ezen képlet szerint ε értékét, leend:

$$\varepsilon = 143^0\ 21'\ 4{\cdot}_2''$$

A két háromszög közötti γ hajlási szög egyszerűen következik a BKD egyenszárú háromszögből, melyben

$$BK = DK = \tfrac{1}{2}\sqrt{3}, \text{ és } BD = 2\ sin\alpha$$

leend ugyanis $sin\alpha = \frac{1}{2}\sqrt{3}\ sin\ \frac{1}{2}\gamma$

és innét $$sin\ \tfrac{1}{2}\gamma = \frac{2\sqrt{3}}{3}\ sin\alpha$$

tehát $\frac{1}{2}\gamma = 82^0\ 5'\ 15'_1''$ és $\gamma = 164^0\ 10'\ 30'_2''$

Végre azon δ szög meghatározása, mely az ötszögek és háromszögek közötti hajlást képzi, az $ODGE$ háromélnek megfelelő gömbháromszögből ered, a melyben adva van mind a három oldal, ugyanis

$$\alpha+\beta = 92^0\ 47'\ 42'{}_6''$$

$$GEO = 36^0 \text{ és } DEO = 60^0$$

miért is δ az $\alpha+\beta$ oldalnak ellentett szöge lévén, lesz

$$\sin \tfrac{1}{2}\,\delta = \sqrt{\frac{\sin\,(s-b)\,\sin\,(s-c)}{\sin b \sin c}}$$

$$\text{hol } s = \frac{\alpha+\beta+36+60}{2} = 94^0\ 23'\ 51'{}_3''$$

ezen képlet kiszámítása után azután következik :

$$\delta = 152^0\ 55'\ 49''$$

75. §.

Ezek után már a részarányos 92-lap vetületeit könnyű lesz előállítani, és pedig először is azon legegyszerűbb állásában, melyben az egyik ötszög lapján nyugszik. Erre nézve ugyanis csak a 185-ik ábra alatti ötszöget kell az *AE* forgási tengely körül addig fordítani, míg az *AOE* háromszög az eredeti *AQE* állásába jön, mi által a rendes ötszög valódi nagyságában álland elő. Ezen forgás alkalmával azután a *B*, *C*, és *D* pontok a forgási *AE* tengelyre merőleges köríveket irnak le, melyeknek megfelelő középponti szögek a *CGO''* hajlási szöggel egyenlők. A forgatás után tehát a *B*, *C*, és *D* pontok állása a rendes ötszöghöz tökéletesen meg van határozva, mint ez a 186-ik ábrában látható; az ötszögön körül fekvő többi hason pontok pedig központi körök kerületén fekszenek egymástól egyenlő távolságokban. Ugyanezen forgásból átvehetők egyszersmind az illető pontok magasságai az ötszög sikja felett, melyek azután a függvetületbe felvihetők.

Most azután a *cd*, és a hasonfekvö élekhez illesztendő ismét a rendes ötszög; miután azonban *cd* állása már meg van határozva, azonfelül a hozzá illesztendö ötszög síkjának fekhajlási szöge szinte ismeretes, azért a jelen feladat azonos az I. Szakasz 52-ik §-ben tárgyalttal, ugyanis adva van egy egyenes vonal, azon keresztül vezetendö egy sík, mely a feklappal adott hajlással birjon. A mi ezen fekhajlási szöget illeti, arra nézve csak azt kell megjegyeznünk, hogy az ötszög síkja a test körül irható rendes tizenkétlap síkjával azonos, miért is csak ennek hajlási szögét kell tekintetbe venni. De a rendes tizenkétlap hajlási szögére nézve találtatott, hogy ennek pótkeble $= -\frac{1}{\sqrt{5}}$, vagy a mi szerkesztésre kényelmesebb, hogy annak érintője $= -2$; miután pedig a feklap a felső ötszög síkjával párhuzamos, azért a keresett, és *cd* vonalon keresztül menő sík a feklaphoz oly szög alatt fog hajolni, melynek érintője $= 2$. Az ide vonatkozó szerkezet a 187-ik ábrában külön van előállítva, mely is figyelembe véve az idézett czikk értelmét minden további magyarázat nélkül is elég érthető leend. Az ekkép nyert szerkezetből azután a 186-ik ábrába az ötszög fekvetülete egészen átvehető, a függvetületből pedig csak az illető pontok magasságai.

Az így nyert ötszögek középpontjai a körülirható rendes tizenkétlap ötszögei középpontjaival összeesvén, azok összeköttetése egy rendes ötszöget képzend. De a rendes tizenkétlap *alsó* ötszögeinél szinte egy ily ötszög áll elő, mely az előbbivel csúcsellenes. miért is az alsó ötszögek középpontjai most már a rajzba szinte bejegyezhetők, ezen középpontokból pedig a test részarányosságánál fogva az egész alsó ötszögek berajzolhatók a felsőkkel ellentétes irányban ugyan, különben azonosan. Melyek meglévén a test többi részeinek kiegészítése is egyszerű áttétel utján könnyen eszközölhető.

76. §.

Ha a *cdhgf* és a hasonfekvő ötszögek síkjai addig hoszszabbítanak, míg a felső ötszög síkját átmetszik, akkor a metszési vonalak egy rendes ötszöget képeznek, mely a körűlirható rendes tizenkétlap felső ötszöge; a melyből azután az egész tizenkétlap is könnyen szerkeszthető. Ha már most a rendes tizenkétlapot a benne fekvő 92-lappal együtt egy függélyes tengely körűl addig forgatjuk, míg azon helyzetbe jő, melyet a 162-ik ábrában állítottunk elő, a melyben ugyanis a tizenkétlap elöli síkjai a hátulsókat épen elfedik, akkor a függvetület a legegyszerűbbé válik. A 163-ik ábrában láttuk egyszersmind, hogy az előbbi függvetülettel mind a két vetület azonossá válik, ha a test úgy állítatik, hogy annak főtengelyei (jegecztani tengelyei) a vetületi síkokra merőlegesek legyenek; azért a 188-ik ábrában még czélszerűnek láttuk a 92-lapot ezen nevezetes állásában szinte előállítani.

Ezen vetületekre nézve meg lehet jegyezni, hogy megrajzoltatván a rendes tizenkétlap vetületének kerete, abba egy rostozat rajzoltatik bele, melynek távolai a 186-ik ábra függvetületéből vannak átvéve, és a melynek vonalai a hoszabb szélvonalakkal párhuzamosak, a melyek tehát egymást a tizenkétlap hajlási szögei alatt metszik, a 92-lap minden csúcsának vetületei azután ezen rostozat metszéseire esnek.

Egy második igen nevezetes körülmény pedig abban áll, hogy a tizenkétlap ötszögének meghúzva mind az öt átlóját, ezek a 92-lap ötszögéhez tartozó csúcsokon mennek keresztül.

77. §.

Következnek azon részarányos testek, melyek háromszög, és hatszögekből, vagy háromszög és hétszögekből és így tovább alakíthatók. Mind ezen testeket azonban már most egybe foglalhatjuk, előre bocsájtván a következő elméletet.

Ha egy részarányos test csúcsának alakításához csupán három szög járul, akkor ezek közül kettő egyenlő, a harmadik különböző tartozik lenni, miután feltétel szerint ezen testek kétféle rendes sokszögekből képeztetnek. *Ezen szögek közül azonban az, mely kétszer fordul elő, csak is páros oldalú sokszöghöz tartozhat.* Ha ugyanis a 189-ik ábrában kifejtve képzeljük ezen testek hálóit, akkor azon sokszög oldalai mellé, mely kétszer fordul elő, és mely *a* betűvel van jelölve, szerkesztendő rendre egy magával egyenlő *a*, és különböző *b*; mi csak úgy lehetséges, ha az *a* sokszögnek oldala páros, mint a 189^a-ban, mert különben egy oly csúcsra jutunk, mely már nem két *a* és egy *b* szögből, hanem három *a* szögből alakul, mint a 189^b-ben, mi a részarányos testek főfeltételével ellenkezik, mely szerint minden csúcs ugyanazon törvény szerint alakítandó. Következik tehát, hogy oly forma testek, melyeknél egy csúcs képzéséhez két egyenlő és egy harmadik különböző sokszög csúcsa járul, csak úgy lehetséges, ha az egyenlő szögek páros oldalú sokszöghöz tartoznak.

78. §.

Ha tehát egy test csupa háromszögekből, és azonfelől még $n$szögekből úgy képeztetik, hogy minden csúcs képzéséhez két háromszög járuljon, akkor az előbbi czikk értelme szerint az $n$szögekből egy szög nem járulhat, abból legalább is kettő kivántatván meg. De a két háromszög szögeinek öszszege 120 fok, ha tehát csak hatszögeket veszünk is még hozzájok,és ezekből is csak kettőt, akkor már a szögek összege az egész csúcsnál 360 fokot képez; mely összeg még nagyobb lesz, ha a hatszögek helyett több oldalú sokszögeket használunk. — Ezekből tehát következik, hogy minden még hátralevő lehetséges részarányos testnél, melyben háromszög fordul elő, a csúcs képzéséhez csakis egy háromszög járulhat, vagy három; az utóbbi eset azonban, mely minden tetszőleges $n$szögnél lehetséges, már a 64 §-ben tárgyaltatott, és így a még hátralevő esetekben, ha $m = 3$, akkor csak $\mu = 1$ lehetséges. Minthogy pedig ismét csak hatszögeket vévén tekintetbe, három csúcs összege már maga 360 fokot képez, következik továbbá, hogy a tömörszög képzéséhez az $n$szögekből csak kettő járulhat, vagy is minden (ötön felőli) tetszőleges n-szögnél $\nu = 2$. A hátralevő esetekben tehát

$$m = 3,\ \mu = 1,\ n \text{ még határozatlan, de } \nu = 2.$$

Ha tehát ezen adatok mellett figyelembe vesszük a 61. §. képleteit, akkor mindenek előtt

$$A = 6n - n - 6\,(n - 2)$$
$$= 12 - n$$

minthogy pedig A nemleges nem lehet, mert különben a test is nemleges számú csúcsokkal birna, következik, hogy n legfeljebb 11 lehet. Minthogy azonban n az előbbi czikk szerint páratlan szinte nem lehet, azért n-re nézve összesen csak háromféle értéket nyerünk, úgymind:

$a)$ $n = 6$ hol azután $A = 6$

$b)$ $n = 8$ „ „ $A = 4$

és $c)$ $n = 10$ „ „ $A = 2$

79. §.

A talált három test mindegyike, ugyanazon törvény szerint ered a rendes testekből, illetőleg a rendes négylapból, hatlapból, és a rendes tizenkétlapból, ha ezeknek csúcsai úgy metszetnek le síkok által, hogy a körülfogó rendes sokszögek kétszer oly sok oldalú sokszögekké váljanak, mint a mennyivel eredetileg birtak; így a rendes négylap háromszögeiből rendes hatszögek válnak, a négy csúcs helyébe pedig ugyanannyi háromszög fog állni; a rendes hatlap négyszögeiből lesznek nyolczszögek, a nyolcz csúcs helyébe pedig 8 háromszög áll; végre a rendes tizenkétlap ötszögeiből tízszögek válnak, és a húsz csúcsot a helyébe jövő húsz háromszög foglalja el. Ezen adatok tökéletes összhangzásban vannak a 61. §. képleteivel is; ugyanis e szerint

$$E = \frac{12n}{A}; \quad M = \frac{4n}{A}; \quad \text{és } N = \frac{24}{A}$$

tehát az a) testnél: $E = 12$, $M = 4$ és $N = 4$;
vagy is a test képeztetik 4 rendes hatszögből, és ugyanannyi rendes háromszögből. A testet az által nyerjük meg legegyszerűbben, ha a négylap mindegyik élét három egyenlő részre osztjuk, és az osztó pontokat kellően összekötjük. Vetületeinek meghatározására is csak a négylap vetületeiben kell az oldalakat három részre osztani.

A b) testnél, hol tehát $n = 8$, lesz:

$$E = 24, \; M = 8, \text{ és } N = 6$$

vagyis a test képeztetik hat rendes nyolczszögből és 8 rendes háromszögből. A test megnyerésére a hatlap élei szinte három részre osztatnak ugyan, de ezen részek már egymás között nem egyenlők, hanem a közép rész úgy áll a szélső bármelyikéhez, mint $\sqrt{2} : 1$. A vetület egy rendes négyszöget ábrázol, a melybe egy rendes nyolczlap van behelyezve.

Végre a c) testnél, mely tehát rendes tízszögekből és háromszögekből áll:

$$E = 60, \; M = 20, \text{ és } N = 12$$

vagyis áll 12 rendes tízszögből, és 20 rendes háromszögből. Előáll a test, ha a rendes tizenkétlap élei úgy osztatnak három részre, hogy a középső úgy álljon a szélsők bármelyikéhez, mint $1:\frac{\sqrt{5}-1}{2}$. Vetületének előállítása szinte igen egyszerű, miután a tízszögek egymáshozi hajlása a tizenkétlap hajlási szögével azonos.

80. §.

Ha ugyanazon származtatási törvényt, melyet az előbbi czikkben követtünk a rendes négylap, hatlap, és tizenkétlapnál, a mely szerint tehát a test csúcsai akkép metszendők le, hogy az eredeti sokszögekből két annyi oldalú sokszögek váljanak, a még hátralevő 2 rendes testre, ugyanis a rendes nyolczlapra, és a rendes húszlapra alkalmazzuk, a melyeknél tehát, minthogy háromszögekből képezvék, csak az élek 3 egyenlő részre osztandók; ered ismét 2 részarányos test. Lemetszvén ugyanis a rendes nyolczlap csúcsait az említett törvény szerint a 8 háromszögből ugyanannyi hatszög lesz, a 6 csúcs helyébe pedig hat rendes négyszög lép, ezen testnél tehát:

$$m=4,\ n=6,\ \mu=1,\ \nu=2$$
$$M=6,\ N=8;\ E=24.$$

Ha pedig a rendes húszlap csúcsait metszük le, akkor a húsz háromszög helyébe jön a húsz hatszög, a test tizenkét csúcsa helyett pedig ered ugyanannyi rendes ötszög, itt tehát:

$$m=5, n=6, \mu=1, \nu=2$$
$$M=12, N=20, \text{ és } E=60.$$

Miután mind ezen testek vetületei a rendes testekéből elég egyszerűen következnek, azért azok a táblákba fel se vétettek.

Ezekkel egyúttal végeztük mind azon testeket, melyek kétfelé rendes sokszögekből alakíthatók. Meg lehet azonban még itt említeni, hogy ide számítható még egy második csoportozat is, mely a 64. §-ben lehozattal hasonnemű. Az ide tartozó testek nem egyebek, mint egyenes hasábok, melyek alapjai tetszőleges rendes sokszögek, és melyek magassága egyenlő az alap sokszög oldalával. Ezen csoportozatnál tehát $m=4$, n tetszőleges, $\mu=2$, $\nu=1$, és ennek folytán a 61 §. szerint $A=8n-4n-4(n-2)=8$

tehát: $E=\frac{16n}{8}=2n$; $M=\frac{8n}{8}=n$; és $N=\frac{16}{8}=2$.

81. §.

A háromféle rendes sokszögek által bezárt testek.

Képeztessék egy részarányos test háromféle rendes sokszögekből, nevezetesen $m$szögekből, $n$szögekből és $p$szögekből, úgy, hogy a test minden csúcsának képzéséhez járuljon az $m$szögekből μ, az $n$szögekből ν, és a $p$szögekből π szög; legyen azonfelül a $m$szögek száma M, az $n$szögeké N, és a $p$szögeké P; a test csúcsainak száma legyen E, az éleké végre K.

Valamennyi $m$szögek összege a testen Mm, ezekből egy csúcs képzésére fordítatik μ szög, tehát a csúcsok száma $E = \frac{Mm}{\mu} \ldots 1)$; hasonlóan az $n$szögek Nn számából mindegyik csúcshoz ν szög veendő, tehát a csúcsok száma $E = \frac{Nn}{\nu} \ldots 2)$; a $p$szögeket pedig tekintetbe véve, lesz $E = \frac{Pp}{\pi} \ldots 3)$.

Azonfelül az $m$szögnek mindegyik szöge $\frac{2(m-2)}{m} R$, hol R egy derékszöget jelent, tehát valamennyi $m$szögek összege: $2RM(m-2)$; épen így valamennyi $n$szögek összege: $2RN(n-2$; a $p$szögeké pedig: $2RP(p-2)$; ha tehát az egész testeni szögek összegét W-vel jelöljük, lesz:

$$W = 2R\,[M(m-2) + N(n-2) + P(p-2)] \ldots 4)$$

vagy az 1), 2), és 3)-ból vett M, N és P értékeit helyettesitve:

$$W = 2RE\left[\frac{\mu(m-2)}{m} + \frac{\nu(n-2)}{n} + \frac{\pi(p-2)}{p}\right] \ldots\ldots 5)$$

de a 60 §. 4-ik egyenlete szerint: $W = 4R(E-2)$, miért is e két egyenlet összehasonlításából ered rövid összevonás után:

$$E = \frac{4mnp}{2mnp - \mu np(m-2) - \nu mp(n-2) - \pi mn(p-2)} \ldots 6)$$

vagy ha rövidség okáért

$$A = 2mnp - \mu np(m-2) - \nu mp(n-2) - \pi mn(p-2)$$

lesz még: $E = \frac{4mnp}{A} \ldots 7)$

E-nek ezen talált értékét az 1), 2) és 3) alatti képletekbe helyettesítve leend:

$$M = \frac{4\mu n p}{A} \ldots 8)$$

$$N = \frac{4\nu m p}{A} \ldots 9)$$

$$\text{és } P = \frac{4\pi m n}{A} \ldots 10).$$

82. §.

Ha egy test háromféle sokszögekből képezvék, akkor a legtöbb oldalú sokszög szöge mindegyik csúcsnál csak egyszer fordúlhat elö; ugyanis ezen szög ha legkisebb, 108 foknyi, ez pedig kétszer véve 216 fokot adna; ehhez azonban még hozzá járul legalább egy 90 foknyi, és egy 60 foknyi szög, mi által a szögek összege egy csúcsnál a 360 fokot túlhaladná, következik tehát, hogy π mindig $= 1$.

A legkevesebb oldalú, úgy szinte a középszámúból is egy csúcs képzéséhez legfeljebb kettő járulhat, minthogy különben a szögek összege ismét 360 foknál nagyobb volna, és ha az egyik féléből már kettő vétetett egy csúcs képzéséhez, akkor a másikból még csak egy jöhet hozzá, úgy hogy egy csúcs képzéséhez négy szögnél soha több nem jöhet.

Ha egy ilyféle testben háromszögek fordúlnak elő, akkor a 77-ik §. elmélkedése folytán az csak akkor állhat elő, ha a csúcs képzéséhez három szögnél több járul, minthogy pedig a legtöbb oldalú kétszer elő nem fordúlhat, azért csak is a középnemü lehet kétszeres, és ez is csak úgy, ha az csupán négyszög. Ha pedig egy háromszög, és két négyszög vétetik, akkor ezek szögeinek összege már 240 foknyi, miért is hozzá még legfeljebb egy ötszög szöge jöhet; ez esetben azután, minthogy itt

$$m = 3,\ n = 4,\ p = 5$$
$$\mu = 1,\ \nu = 2;\ \text{és } \pi = 1$$

leend $A = 4$, tehát $E = 60$; $M = 20$; $N = 30$; és $P = 12$; vagyis a kérdéses test áll húsz háromszögből; harmincz négyszögből, és tizenkét ötszögből. Ezen test a rendes tizenkétlapból ered, ha annak élei az oldalakkal párhuzamos síkok által metszetnek le, az által azután az eredeti ötszögek helyébe új ötszögek állanak, melyek oldalai amazokéval párhuzamosak; a lemetszett 30 él helyébe ugyanannyi rendes négyszög áll; a húsz tizenkétlap-csúcs helyébe pedig magától előáll a húsz rendes háromszög. Ezen származtatást szem előtt tartva, és tekintetbe véve, hogy az ötszögek egymáshozi hajlása a tizenkétlap hajlási szögével azonos, a test vetítése is igen egyszerű. Ugyanis a 190-ik ábrában rajzoltatott először az a alapötszög, a melyre a test fektetve képzelendő; ennek oldalaihoz illesztettek azután a b négyszögek, a tizenkétlap félhajlási szöge alatt, ezekhez ismét a c ötszögek, melyek hajlása az a ötszöghöz a tizenkétlap egész hajlási szöge. A többi rész a vetület rendes alakja mellett részarányilag könnyen kiegészíthető, a fekvetület egész kerete egy rendes tízszöget képezvén. A függvetület azon állásban van véve, a melynél a látható részek a hátulsókat épen elfedik. A 191-ik ábrában van előállítva a test hálójának fele.

83. §.

Miután oly részarányos test, mely háromféle sokszögekből van alakítva, és a melynél a háromszög szinte előfordul, az előbbi czikkben tárgyalton kivűl több nem létezhet, azért a legkevesebb oldalú sokszög már most a négyszög lehet; és azért a test csúcsának képzéséhez mindegyikféle sokszögből csak is egy járulhat. De minthogy így a testcsúcs képzésére csak 3 szög fordítatik, azért innét a 77-ik §. értelmében mind azok ki vannak zárva, a melyek páratlan oldalú sokszöghöz tartoznak. A négyszögekhez tehát csak hatszögek, nyolczszögek, stb. csatlakozhatnak. A középfélék azonban csak is hatszögek lehetnek, mert a négyszög, nyolcz, és tízszög szögeinek összege már 369 fokot tészen.

A legkevesebb oldalú sokszög tehát a négyszög lévén, a középoldalú a hatszög, ezekhez járulhat még először a nyolczszög, másodszor a tízszög. Több oldalú sokszög már ismét lehetetlen, minthogy a négyszög, hatszög és tizenkétszög szögei összege már 360 foknyi.

Ennélfogva tehát két test létezhet, ugyanis a) a melynél

$$m = 4, n = 6, p = 8, \mu = \nu = \pi = 1$$

ennél tehát: $A = 16$; $E = 48$.
és $M = 12$; $N = 8$; és $P = 6$.
és egy második *b*) a melynél:
$$m = 4;\ n = 6;\ p = 10,\ \mu = \nu = \pi = 1$$
ennél tehát: $A = 8$; $E = 120$.
és $M = 30$; $N = 20$; és $P = 12$.

84. §.

Az elöbbi czikkben lehozott testek elseje *a*) áll 6 nyolczszögböl, 8 hatszögböl, és 12 négyszögböl, és ered a rendes hatlapból, vagy a rendes nyolczlapból, ha azok élei és csúcsai levágatnak. A négyszögek mind a két testnél az élek helyébe jutnak, a hatszögek vannak a hatlap csúcsai, vagy a nyolczlap háromszögei helyett; a nyolczszögek pedig a hatlap négyszögei, vagy a nyolczlap csúcsai helyett. A 192-ik ábrában elöállított fekvetülete felette egyszerü. Elöször is meghúzatik a rendes nyolczlap *a*, a melyen a test nyugvónak tételeztetik fel; ennek ezután felváltva minden második oldalához függesztetnek a *b* négyszögek az alaphoz 45 foknyi hajlás alatt; a többi rész azután az ábra egyszerü megtekintése után könnyen kiegészíthetö. Az idézett ábrában a függvetület elhagyatott, minthogy ezen állásnál mind a két vetület azonos alakot mutat, melyben azonfelöl a látható részek az alatta levöket épen fedik. A 193-ik ábra a test Mohsféle vetületét állítja elö.

85. §.

Végre a harmadik és utolsó részarányos test, mely háromféle rendes sokszögekböl képezhetö, és mely a 83. §-ben *b*) alatt találtatott, áll 12 rendes tízszögböl, 20 hatszögböl, és 30 négyszögböl, és a rendes tizenkétlapból, vagy a húszlapból épen azon törvény szerint ered, mint az elöbb tárgyalt test a hatlap vagy a nyolczlapból. Itt szinte az élek helyébe állanak a négyszögek mind a két testben; a hatszögek jutnak a tizenkétlap csúcsai, vagy a húszlap háromszögei helyébe; a tízszögek pedig a tizenkétlap ötszögei, vagy a húszlap csúcsai helyébe. A 194-ik ábrában rajzoltatott elöször az *a* alaptízszög, a melyen a test nyugszik; ennek azután felváltva minden második oldalához függesztetik a rendes négyszög *b*, a tizenkétlap félhajlási szöge alatt; ezekhez ismét a rendes tízszög a tizenkétlap egész hajlási szöge alatt; a többi részek pedig az alak szabályszerüsége mellett könnyen kiegészíthetők. A függvetületben azon állás van választva, melyben a látható részek az alatta levőket épen fedik. Ha ezen vetület úgy állítatik, hogy a *de* tengely az alapmetszetre merőleges legyen, és meghatároztatik a hozzá tartozó fekvetület, akkor a test azon állásába van helyezve, a melyben mind a két vetület azonos alakot vesz fel. A 195-ik ábra a test Mohsféle vetületét állítja elő.

86. §.

A ferdények által bezárt testek.

Az előbbiekben tárgyalt részarányos testekhez számíthato még azon két nevezetes test is, melyek csupa azonos ferdények által alakíthatók, ha a csúcsok képzésére csupán hegyes, és csupán tompa szögek fordítatnak. A lényeges különbség azonban ezen testek és a részarányosok között abban áll, hogy ezen utóbbiak körül egy gömböt lehet leirni, mely valamennyi csúcson keresztül megy; a beleirt gömbök pedig csak is egynemű sokszögeket érintenek, és így annyi érintő gömb irható beléjök, a hányféle sokszögek fordítatnak azok képzéséhez; a ferdények által bezárt testeknél pedig épen ellenkezőleg csakis egy gömb irható beléjök, mely azután valamennyi ferdény síkját érinti, holott a körüle irt gömb csak is a hegyes, egy másik pedig csak is a tompa csúcsokon megy keresztül.

Ezen testek meghatározását illetőleg képzeljük a 197-ik ábrában három ferdény szögét úgy össze illesztve, hogy azok tompa csúcsai egy *D* pontba egyesüljenek, háromnál több tompa szög a csúcs képzésére fordítható nem lévén; akkor ezen ferdények *AC*, *CG*, és *GA* hosszabb átlóit összekötve képzelve, ezek a *D* csúcscsal egy háromoldalú egyenes gúlát képeznek, a melynek alapja az *ACG* egyenoldalú háromszög. Ezen gúlának *A* csúcsánál egy háromél képződik, melynek egyik oldala 60 foknyi, a másik két oldal pedig egyenlő a ferdény hegyes szögének felével; a mely háromélből kerestetik a 60 foknyi oldalnak ellentett hajlási szög, melyet *A*-val fogunk jelölni. Ha tehát a ferdény hegyes szögét α-nak nevezzük, állni fog:

$$CosA = \frac{cos60^0 - cos^2\frac{1}{2}\alpha}{sin^2\frac{1}{2}\alpha}$$

$$= \frac{1 - 2cos^2\frac{1}{2}\alpha}{2(1-cos^2\frac{1}{2}\alpha)} \ldots\ldots 1)$$

Minthogy továbbá feltétel szerint D-nél vannak a tompa szögek, azért G-nél két hegyes szög egyesül, a melyhez még hozzáfüggesztendő szinte hegyes szög, és pedig legalább még kettő. Ha tehát valóban két hegyes csatoltatik G-hez, akkor összekötvén a ferdények kisebb DF, FJ, JE, és ED átlóit, ezek a G csúcscsal egy négyoldalú egyenes gúlát képeznek, melynek alapja a $DFJE$ rendes négyszög. Ezen gúla alapjának E csúcsánál ismét egy háromél ered, melynek egyik oldala derékszög, a másik két oldala pedig egyenlő a ferdény féltompa szögével, a melyből a derékszögnek ellentett hajlási szög kerestetik. Miután a ferdény hegyes szögét α-nak neveztük, a tompa félszög leend $90 - \frac{1}{2}\alpha$, és miután a test hajlási szögei mind egyenlők, leend:

$$cosA = \frac{cos\,90^0 - cos^2(90-\frac{1}{2}\alpha)}{sin^2(90-\frac{1}{2}\alpha)}$$

$$= -\frac{1-cos^2\frac{1}{2}\alpha}{cos^2\frac{1}{2}\alpha} \ldots 2)$$

Az 1) és 2) alatti képletek összehasonlításából következik

$$(1-2\,cos^2\tfrac{1}{2}\alpha)\,cos^2\tfrac{1}{2}\alpha = -2\,(1-cos^2\tfrac{1}{2}\alpha)^2$$

vagy kifejtve, és $cos\frac{1}{2}\alpha$ szerint feloldva

$$cos\tfrac{1}{2}\alpha = \sqrt{\tfrac{2}{3}} \text{ vagy } tang\tfrac{1}{2}\alpha = \sqrt{\tfrac{1}{2}}$$

mely érték segítségével az 1) vagy 2)-ből lesz:

$$cosA = -\tfrac{1}{2}$$

tehát a test hajlási szöge $A=120^0$.

87. §.

A jelen testnél mindegyik hegyes csúcs képzéséhez négy hegyes szög járul; ha tehát ezen csúcsok összegét E_1-el jelöljük, akkor $4E_{\mathrm{I}}$ lesz a hegyes csúcsok összege. Továbbá minden E_{II} tompa csúcshoz 3 tompa szög kivántatik, tehát a tompa csúcsok összege $3E_{\mathrm{II}}$; minthogy pedig épen annyi a hegyes szög mint a tompa, következik, hogy

$$4E_{\mathrm{I}} = 3E_{\mathrm{II}}$$

ha pedig a test minden csúcsának összegét E-el jelöljük, könnyen következik, hogy a hegyesek ezen összegnek $\frac{3}{7}$ részét, a tompák pedig $\frac{4}{7}$ részét képezik, vagyis hogy

$$E_{\mathrm{I}} = \tfrac{3}{7}E, \text{ és } E_{\mathrm{II}} = \tfrac{4}{7}E$$

miután pedig minden hegyes E_{I} csúcshoz négy szög járul, az E_{II}-hez pedig három, lesz, ha V-el jelöljük a szögek számát :

$$V = 4.\tfrac{3}{7}E + 3.\tfrac{4}{7}E = \tfrac{24}{7}E$$

s minthogy azonfelül egy hegyes és egy tompa szög együtt mindig 180 fokot képez, lesz a fokok összege

$$W = \tfrac{12}{7}.2RE$$

hol R egy derékszöget jelent. De a 60 §. 4-ik képlete szerint minden síkok által bezárt testben

$$W = 4R\,(E-2)$$

tehát összehasonlítás által

$$\tfrac{6}{7}E = E-2 \text{ és innét } E = 14$$

vagyis a jelen test 14 csúcscsal bir, melyek közül $\frac{3}{7}$ vagy 6 jut a hegyesekre, és $\frac{4}{7}$ vagy 8 a tompákra. Minthogy pedig a hat hegyes csúcsban összesen 24 szög van, következik, hogy a hegyes szögek összege, tehát a tompáké is az egész testen 24, és így a bezáró ferdények száma 12; miért is ezen test *ferdény tize-kétlapnak* neveztetik.

88. §.

Ha a test úgy állitatik, hogy a hegyes csúcsokon keresztül menő átlók egyike a feklapra, másika a függlapra álljon merőlegesen, akkor vetületei a lehető legegyszerübbek. Ugyanis a 196-ik ábrában az a csúcsból lefelé menő élek egyenlő hajlással birván, azok vetületei egymást derékszög alatt metszik, és így az egész vetület egy rendes négyszöget képez, mely az oldalakhoz párhuzamosan négy egyenlö részre osztatott. Az egész négyszög oldala képezi a ferdények hoszszabb átlóját, a kisebb négyszögek bc átlója pedig a ferdény kisebb átlóját adja valódi nagyságban. A 197-ik ábrában a Mohs-féle vetület van előállítva.

89. §.

Ha a 86-ik §-ben követett eljárást ismételve a 199-ik ábrában három tompa ferdényszöget illesztünk össze D-nél, ered egy három oldalú gúla, melynek csúcsa D-ben van, és melynek alapját képzi a ferdény hosszabb átlóiból eredt egyenoldalú ACG háromszög, a melynél tehát találtatott a csúcsnáli hajlás szögekre nézve :

$$\cos A = \frac{1-2\cos^2\frac{1}{2}\alpha}{2\,(1-\cos^2\frac{1}{2}\alpha)} \quad . \; . \; . \; 1)$$

Jelen esetben azonban a G hegyes szögek mellé még három új hegyes szöget illesztünk, melynél azután többet nem is lehet; és ha most kötjük össze a ferdények kisebb EB, BF, FH, HK, HK és KE átlóit, ered egy öt oldalú gúla, melynek alapját képzi az $EDFHK$ rendes ötszög. Tekintetbe vévén azon háromélt, mely ezen gúla E alapsarkánál ered, és a melynek egyik oldala 108 foknyi, a másik kettő pedig egyenlő a ferdény tompa szögének felével, kereshetjük ismét a 108 foknyi oldalnak ellentett hajlási szöget, és találni fogjuk, hogy :

$$\cos A = \frac{\cos 108^0 - \cos^2(90-\frac{1}{2}\alpha)}{\sin^2(90-\frac{1}{2}\alpha)}$$

ha ugyanis ismét α-val jelöltetik a ferdény hegyes szöge; mely képletből még a 108 fok pótkeblét helyettesítve, lesz

$$\cos A = -\frac{\sqrt{5}-1+4\,(1-\cos^2\frac{1}{2}\alpha)}{4\cos^2\frac{1}{2}\alpha} \quad . \; . \; . \; 2)$$

és az 1) és 2) alatti képletek összehasonlításából :

$$-(\sqrt{5}+3-4\cos^2\tfrac{1}{2}\alpha)\,(1-\cos^2\tfrac{1}{2}\alpha) = 2\cos^2\tfrac{1}{2}\alpha\,(1-2\cos^2\tfrac{1}{2}\alpha)$$

mely egyenletet kifejtvén, és abból $\cos\frac{1}{2}\alpha$-át meghatározván, ered :

$$cos\tfrac{1}{2}\alpha = \sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{10}} \text{ vagy } tg\tfrac{1}{2}\alpha = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$$

Ezen talált α értéket az 1) vagy 2) alatti képletbe helyettesítve, találni fogjuk a hajlási A szög részére :

$$cosA = -\frac{\sqrt{5}+1}{4}$$

a miből következik, hogy ezen szög 144 foknyi, vagyis egyenlő a rendes tízszög szögével.

90. §.

Ha az ide tartozó test hegyes csúcsait E_1-el, a tompákat pedig E_{11}-el jelöljük, és tekintetbe vesszük, hogy mindegyik hegyes csúcsban öt hegyes szög van, mindegyik tompa csúcsban pedig három tompa szög, lesz a hegyes szögek összege $5E_1$; a tompáké pedig $3E_{11}$; s minthogy a hegyes szögek összege egyenlő a tompa szögek összegével, lesz :

$$5E_1 = 3E_{11}$$

ha pedig valamennyi csúcsok összegét E-el jelöljük, áll szinte, hogy

$$E = E_1 + E_{11}$$

mely két egyenletből következik, hogy a hegyes szögek öszszege az egész csúcsok összegének csak $^3/_8$-át teszik, míg a tompák ugyanannak $^5/_8$-ával egyenlők. Minthogy tehát $E_1 = \frac{3}{8}E$, és $5E_1$ hegyes szög van mindössze, azért a hegyes szögek összege $\frac{15}{8}E$, a tompáké természetesen épen annyi. Ezen szögek közül kettő-kettő összesen 180 fokot képez, azért az egész testeni szögek összege fokokban

$$W = \frac{15}{8}\,2R.E$$

mely egyenletet összekötve a 60-ik §. 4-dik képletével, ered

$$\frac{15}{8}\,2RE = 4R(E-2)$$

ebből pedig $E = 32$

vagyis a testnek mindössze 32 csúcsa van, mely összegnek $\frac{3}{8}$-a (vagy 12) esik a hegyes csúcsokra, és $\frac{5}{8}$-a (vagyis 20) a tompa csúcsokra.

Minthogy a jelen testnek 12 hegyes csúcsa van, és mindegyik ilyen csúcsban 5 hegyes szög, azért a hegyes szögek összege $5.12 = 60$; épen így van a testben 20 tompa csúcs, és mindegyikben 3 tompa szög, tehát a tompa szögek összege szinte $3.20 = 60$, mint lenni kell; valamennyi szögek összege tehát 120, és azért a ferdények száma ezen testnél 30; miért is az *ferdényharminczlapnak* neveztetik.

91. §.

A 198-ik ábrában vannak előállítva a ferdényharminczlap vetületei, azon állásban, midőn a hegyes csúcsokon keresztül menő átló a feklapra merőleges, mely állásában vetíteni legkönnyebb. Ugyanis az a csúcsból a fekvetületben meghúzatnak az ab, ac, ad, stb. vonalok egyenlő egymástóli távolban, tehát 72 foknyi nyilás alatt, és levágatnak belőlök oly nagy részek, hogy a $bc = cd =$ stb. távolságok az adott ferdény kisebb átlójával legyenek egyenlők; meghúzatnak a be párhuzamosan ac-hez, és ce párhuzamosan ab-hez, mi által az e, és a vele hasonfekvő pontok meg vannak határozva. Az ef távol egyszersmind a ferdény hosszabb átlójával egyenlő. Ugyanezen csillagalak azután még egyszer rajzoltatik az előbbivel csúcsellenesen, és még a csúcsokat egy rendes tízszög által összekötve, (melynek oldalai ugyanannyi a feklapra merőlegesen álló ferdényeket képviseltek), meg lesz az egész fekvetület határozva.

A függvetületben az egyes pontok magassága meghatározására nézve forgassuk a feklapban az $abec$ ferdényt a víz-irányos bc átlója körül addig, míg az egész ferdény a feklappal nem párhuzamos, hol azután oE a hosszabb átló fele $(=\frac{1}{2}ef)$ valódi nagyságában lesz látható, mely is visszafordítatván eredeti helyébe a b, c, d, stb. pontok közös eE, magasságát határozzák meg, az a' csúcs felett. Az e, f, stb. pontok épen kétszer oly nagy magasságban, a g pedig és a vele hasonfekvő pontok háromszor oly nagy magasságban fekszenek. Az e', f', g', stb. pontokban merőlegesek emeltetnek a vetületi tengelyre, a melyre a ferdény oldalának valódi nagysága cE felvitetnek. A felső távolságok az alsókkal egyenlők lévén, a többi rész könnyen kiegészíthető.

A jelen ábrában a függvetület úgy van választva, hogy a látható részek az alatta levőket épen elfedjék. Ha a függvetület addig forgattatik, míg a *bk* vonal az alapmetszetre merőleges lesz, a mely állásban ugyanis a test egyik ferdénylapján nyugszik, akkor mind a két vetület azonos alakot mutat. A 199-ik ábrában van előállítva ezen testnek Mohsféle vetülete, mely épen az utóbb említett állásnak felel meg. A 200-ik ábrában van végre előállítva a ferdényharminczlap hálója.