A M. KIR. KONKOLY-ALAPITVÁNYU

ASTROPHYSIKAI OBSERVATORIUM

KISEBB KIADVÁNYAI.

2.

A REFRACTIO ÉS AZ EXTINCTIO ELMÉLETE.

TERKÁN LAJOS.

BUDAPEST.
1901.

A M. KIR. KONKOLY-ALAPITVÁNYU

ASTROPHYSIKAI OBSERVATORIUM

KISEBB KIADVÁNYAI.

2.

A REFRACTIO ÉS AZ EXTINCTIO ELMÉLETE.

TERKÁN LAJOS.

BUDAPEST.
1901.

A refractio és az extinctio elmélete.

A refractio eddigi elmélete a benne rejlő hypothetikus adatoknál fogva a gyakorlat szempontjából nem egészen kielégitő. Az astronomiának eme fontos segédeszközébe sok oly ok játszik bele, a melyek felderítése a tudománynak még eddig nem sikerült. A legnagyobb baj az, hogy nagy magasságokban épen nem ismerjük a levegő viselkedését. Az eddigi léghajózások eredményei még nem szolgáltatnak annyi anyagot, melyből törvényt lehetne származtatni a hőmérséklet sugármentén való eloszlásra. Az összes, refractio előállítására irányuló, törekvések feltevésekből indultak ki; ezek vagy önkényesek, vagy némileg a már szerzett tapasztalatok nyomán haladnak. Ezt tették Bessel, Laplace, Gyldén, Ivory, majd Oppolzer. Bessel exponentialis törvényt tételez fel és csak arra van tekintettel, hogy az astronomiai észlelések eredményeivel egyezésben maradjon. Mig Bessel exponentiális törvényébe egy önkényes állandót vezet be a tapasztalattal való egyezés czéljából, addig Laplace kettőt, de már a meteorológiai eredményeke is tekint. Ivory vonalas vonatkozást keres egy önkényes állandó alkalmas választásával a hőmérséklet és a sűrűség között. Oppolzer elsőrendő vonalas differential-egyenletet tételez fel a hőmérséklet és a sűrűség között:

$$\frac{dT}{ds} = \text{állandó}. \qquad (1)$$

Az (1) integraljában szerepel az atmosphära határán uralkodó hőmérséklet. Ezt a már ismeretes meteorológiai adatokból adja meg.

Eme feltevések bizonyos pontosságig a gyakorlat szempontjából elég alkalmasaknak bizonyultak a refractio elméletére. Bessel, Ivory, Laplace és Gyldén megelégedtek, ha 80⁰ zenithtávolságig 1″ ívmásodperczen belül maradtak, már 80⁰-nál is, de ezen túl több ívmásodperczczel eltértek a tapasztalattól. Oppolzer igényeivel már tovább megy. Elmélete már 82⁰-ig pontosan visszaadja a tapasztalatot. Csak 85⁰-on túl nőnek az eltérések 1″ ívmásodperczen felül. Oppolzer feltevése elég szerencsés is, mert a meteorológiai viszonyokat is elég jól feltünteti. De nem egészen szigorú elmélete, mert az atmosphära határán uralkodó hőmérsékletet mint állandót viszi tovább elméletében. Elméleti szempontból e határon uralkodó hőmérséklet vagy zérus lehet, vagy általánosságban azt kell gondolnunk, hogy minden egyes T_0 földfelületi hőmérséklethez tartozik egy bizonyos T_1 határi hőmérséklet, azonban az egyes T_0-okhoz tartozó T_1-ek nem esnek egymástól távol. Ez eléggé kidomborodik Oppolzer feltevéséből is, csakhogy az ily módon értelmezett határi hőmérséklet meghatározásához a meteorológia nem nyujt eléggé biztos adatot.

Nagy érdeme azonban Oppolzernek, hogy a refractio integraljának kiértékesítésénél szokásos Lagrange-féle sormegfordítást elhagyja, új módszert, helyettesítést használ és egy önkényes állandó alkalmas választásával a közepes refractiot rendkivül egyszerű alakban állitja elő:

$$R = c_1 e^{g^2} \int_g^\infty e^{-t^2} dt. \tag{2}$$

Ebben c_1 állandó, a g összefügg a zenithtávolsággal:

$$g = c_2 \cot z. \tag{3}$$

Továbbá érdeme Oppolzernek az is, hogy kimutatja, miért térnek el egymástól a régibb elméletek. Ennek oka a használt elhanyagolásokban rejlik.

A jelen elmélet Oppolzer felfogásától is eltér, mert nem egészen látszik helyesnek ez idő szerint a meteorológiai viszonyokból való kiindulás. Ha ismernők a felső légrétegek magaviseletét, a törekvés nagyon is helyes, sőt egyenesen kivánatos is volna. A jelen elmélet oly kisérleti refractio adatokra szorítkozik, a melyek ismerete eléggé hozzáférhető. Egy állandó lép be, melynek egy bizonyos értéke a levegőre egy bizonyos állapotot szab meg. Ezen állandó alkalmas választása mellett megkapjuk a kisérlet nyujtotta refractio adatokat. Továbbá kerül a jelen elmélet minden oly meteorológiai vonatkozást, a melyhez kétség fér. A tárgyalás három fejezetre oszlik. Az első sarkalatos elve abban áll, hogy a levegő kezdetleges állapotát adiabatikusnak fogjuk fel, a melyet később a Nap kisugárzása megváltoztatott. Ezen elvből kiindulva igyekszünk összefüggést keresni a hőmérséklet sugármentén való eloszlására. A tárgyalás eme része inkább elméleti jellegű, mint gyakorlati fontosságú. A tárgyalás második része röviden úgy jellemezhető, hogy a levegőt oly eszményi gázzal helyettesítjük, a melyben a refractio úgy megyen végbe mint a levegőben. Végre a harmadik fejezetben az extinctio elméletéről szólunk.

I. FEJEZET.

Legyen szabad a tárgyalás ez első részében a refractiora vonatkozó általános vizsgálatok eredményeit, mint ismeretes adatokat, felsorolnom.*)

Legyen a Föld közepes sugara r_0, egy tetszőleges levegőréteg távolsága a Föld középpontjától r, i e réteg határán fellépő törésszög, n a réteg absolut törésmutatója, z a csillag látszólagos zenithtávolsága, π a csillag parallaxisa, i_0 a csillagból kilépő fénysugár meg a csillag és a Föld középpontját összekötő egyenes által képezett szög. Ekkor a refractio:

$$R = \int_{n=1}^{n=n_0} \frac{dn}{n}\, tgi - (i_0 - \pi) \qquad (4)$$

alakban irható.

Ha a csillag horisontalis parallaxisa zérus, akkor

$$R = \int_{n=1}^{n=n_0} \frac{dn}{n}\, tgi. \qquad (5)$$

*) L. dr. W. Valentiner, »Handwörterbuch der Astronomie«

Az (5)-be i helyett behozzuk a csillag látszólagos zenithtávolságát az integratio könnyítése végett.

A refractio alaptörvénye értelmében:

$$n\ r\ sin\ i = n_0\ r_0\ sin\ z. \tag{6}$$

Ezért a refractio eleme:

$$dR = -\frac{r_0}{r}\,\frac{sin\ z\ n_0\ dn}{n\sqrt{n^2 - \frac{r_0^2}{r^2}\ sin^2 z\ n_0^2}} \tag{7}$$

alakú lesz.

A következőkben n helyett a sürüséget s-t hozzuk be független változónak, mert s-et ki tudjuk majd fejezni, mint a sugár r függvényét.

Ismeretes, hogy a levegő vagy bármely gáz törőerejét

$$n^2 - 1 = c.\ s \tag{8}$$

kifejezés jellemzi, melyben c állandó, s a gáz sűrűsége.

Ekkor

$$d\ R = -\frac{\alpha\ (1-\varepsilon)\ sin\ z\ \frac{ds}{s_0}}{\left[1 - 2\,\alpha\left(1 - \frac{s}{s_0}\right)\right]\sqrt{cos^2 z - 2\,\alpha\left(1 - \frac{s}{s_0}\right) + (2\varepsilon\ \varepsilon^2)\,sin^2 z}} \tag{9},$$

ha

$$\frac{r_0}{r} = 1 - \varepsilon;\ \frac{c\ s_0}{1 + c\ s_0} = \frac{n_0^2 - 1}{n_0^2} = 2\ \alpha \tag{10}$$

A (10)-ben

$$1 - 2\ \alpha\left(1 - \frac{s}{s_0}\right) = \left(\frac{n}{n_0}\right)^2. \tag{11}$$

A légkör határán $n = 1$, a Föld felületén $n_0 = \frac{3400}{3999}$, továbbá $1 - \frac{s}{s_0}$ kisebb az egységnél, azért gyakorlati szempontból bátran vehetni (11) baloldala helyett: $1 - \alpha$. Ezen közelítés a refractiora majdnem semmi befolyást gyakorol.

Ha most még

$$1 - \frac{s}{s_0} = w, \tag{12}$$

akkor

$$dR = \frac{\alpha}{1-\alpha} \frac{(1-\varepsilon)\ sin\ z\ dw}{\sqrt{cos^2 z - 2\alpha w + (2\varepsilon - \varepsilon^2)\ sin^2 z}}. \tag{13}$$

A refractio (13) alatti formulája még mindig nem használható kiértékesítésre, mert nem ismerjük w-nek ε, illetve a sugártól való függését. A $w = f(r)$ meghatározása áll tehát előttünk akár feltevés, akár tapasztalati uton. A feladatot megoldhatjuk az égi testek egyensulyát jellemző egyenlettel.

Az égi testek egyensúlyi állapota. Ha valamely gázgömb egy meghatározott pontjában a nyomás p, a sűrűség s, a hőmérséklet T, akkor e három jellemző között

$$\frac{d^2p}{dr^2} + \left\{ \frac{2}{r} - \frac{1}{s} \frac{ds}{r} \right\} \frac{dp}{dr} + 4\pi \frac{r_1^2 g_1\ s^2}{Mg} = o \tag{14}$$

differential-egyenlet áll fönn, bármily állapotú legyen is a gáz.*) Ebben az (1) indexű mennyiségek a gázgömb határára vonatkoznak, g_1 az itt uralkodó gyorsulás, g a Föld felületén a nehézségi gyorsulás, M az égi test tömege.

Ezen (14) egyenlet két független változót tartalmaz, akkor aknázható tehát csak ki, ha ismerjük az égi test, illetve a Föld légkörének állapotát.

Tegyük fel, hogy az égi testek kezdetleges állapotukban mindannyian teljes gázgömbök voltak a mindenségben eloszolva, s e gázgömböknek sem tengely körül való forgásuk, sem haladó mozgásuk nem volt, hanem teljesen nyugodtak a világürben. Ezen feltevés mellett az egyensúlyi állapot csak isentropikus lehetett.

A jelzett feltevés mellett csakis a sugár mentén működhetik erő. A sugár irányában ható erő pedig két

*) A math. és term. ért. XVIII. k. 1. füz. „Az égi testek spectruma" dr. Kövesligethy Radótól

összetevő külömbsége: a nehézségi és a felhajtó erő külömbsége. Ha tehát emelkedik a sugár irányában valamely részecske, az emelkedés csak addig történhetik, a mig e két erő egyensulyt nem létesit, azaz a mig e két erő külömbsége zérus nem lesz:

$$g\left(1 - \frac{s'}{s}\right) = o\,, \tag{15}$$

hol az emelkedő részecske sűrűségét s, a helyéből kiszoritott részecske sűrűségét s', a nehézségi gyorsulást g jelenti.

A (15)-ből következik, hogy $s = s'$, továbbá $p = p'$, mivel mindkét részecskére ugyanazon réteg nehezedik, végre $T = T'$ a Gay-Lussac Mariotte egyesitett törvény folytán.

Ha tehát valamely részecske a nyugalomban levő gázgömben felszáll, az emelkedés ugy megy végbe, hogy a részecske nyomása, hőmérséklete, sűrűsége mindenkor a környezet nyomásával, hőmérsékletével és sűrűségével egyenlő. A részecske lehül ugyan, de a kiadott meleg nem megy át a környezetbe, hanem épen ennek árán száll fel a részecske. Ha pedig hőcsere nem áll be, akkor a gázgömb isentropikus állapotban van.

Az isentropikus állapot egyenletei pedig:

$$p = p_0 \frac{T^{\frac{\varkappa}{\varkappa-1}}}{T_0^{\frac{\varkappa}{\varkappa-1}}}\;;\; s = s_0 \frac{T^{\frac{1}{\varkappa-1}}}{T_0^{\frac{1}{\varkappa-1}}}\,, \tag{16}$$

a hol $\varkappa = \dfrac{C_p}{C_v}$ a két fajhő viszonya.

A (16) folytán (14)-ből lesz:

$$\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{2}{x}\frac{dy}{dx} + q^2\, y^{n'} = o\,, \tag{17}$$

ha

$$\frac{T}{T_0} = y \text{ és } \frac{r}{r_1} = x \tag{18}$$

$$q^2 = \frac{4\pi\,(\varkappa-1)\;r_1^4 g_1 s_0^2}{\varkappa g\; M p_0} \text{ és } n' = \frac{1}{\varkappa-1}\,.$$

A (o) indexű mennyiségek, a gázgömb középpontjára, vagy ha magja van, mint Földünknek, akkor a mag, illetve a Föld felületére vonatkoznak.

A (17) integratiojával isentropikus állapotú levegőre a refractio problemája is megoldható volna.

Földünkön azonban a viszonyok máskép vannak. A Földnek van szilárd magja, a mely tengelye körül forog, e forgásban résztvesz a levegő is. Azután a levegőbe meleget sugároz a Nap egyéb fényforrások mellett, a melyek elhanyagolhatók; s viszont a levegő is sugároz ki meleget. A levegő tehát épen nem lehet isentropikus állapotban, s a tapasztalat igazolja is, hogy nincs. Számba kell tehát vennünk a Nap kisugárzását, ezután módosítanunk kell a $\varkappa$ értelmét, ezekkel a viszonyok tisztázva lesznek.

A Nap állapotára tegyük föl, hogy isentropikus, ebből származó hibát más mennyiségekre hárítjuk.

A Nap, mint isentropikus test a következő hőmennyiséget sugározta ki:

$$Q = -\int_{\infty}^{r} \frac{r_0^2\, M^2}{E\,(6-5\varkappa')}\, \frac{1}{r^2}\, dr = \frac{r_0^2\, M^2}{E\,(6-5\varkappa')} \cdot \frac{1}{r}, \text{*)} \quad (19)$$

a mely kifejezés az isentropikus állapot külömböző eseteiben, azaz $\varkappa'$ külömböző értékei mellett, kiértékesíthető. Benne M a Nap tömege, r a sugara, E a Föld tömege, r_0 a Föld sugara.

Ezen Q melegmennyiség nem maradt egészen a levegőben, hanem ennek λ-szorosa sugárzás folytán eltünt. Ezen λ mindenesetre az idő t függvénye, és pedig a folyó idő vonalas függvénye, mivel rohamos változásról itt nem lehet szó.

Igy tehát a dt időelem alatt felvett melegmennyiség:

$$d\,(Q - \lambda\,(t)\,Q) = d\,\{\mu\,(t)\,Q\}, \quad (20)$$

a hol

$$\mu\,(t) = \alpha + \beta\,t. \quad (21)$$

---

*) Wied. Ann.-ban is megtalálható külömben ettől egész függetlenül dr. Kövesligethy Radó „Astrophysika“ czimű (1899) előadásai alapján magam vezettem le.

A (19)-re alkalmazható a hőelmélet első főtétele:

$$d \{ \mu (t) Q \} = C_v \, dT - \frac{1}{s^2} p \, ds. \tag{22}$$

A (2?) integratioja csak úgy volna lehetséges, ha ismernők p-nek s-től való függését. Feltevésünk szerint a levegő kezdetleges állapota is isentropikus volt, erre az esetre ismeretes p és s összefüggése. Ezen összefüggést érvényesnek tekinthetjük most is, csakhogy $\varkappa$ alatt nem szabad értenünk a levegő két fajhőjének viszonyát, hanem egy, a levegő állapotával nagyon is összefüggő mennyiséget, a mely az időben változik. Minthogy $\varkappa$-nak sincsenek az idő folyamában rohamos változásai, azért ezen $\varkappa$ is az idő linearis függvényének értelmezhető, azaz:

$$\varkappa = \gamma + \delta \, t. \tag{23}$$

Ily értelemben

$$ds = \frac{\partial s}{\partial p} dp + \frac{\partial s}{\partial \varkappa} d\varkappa \tag{24}$$

képzése után tisztán quadraturaval állítható elő (22) integralja. Az integral valamely

$$\Phi \, (p, T, \varkappa, \varkappa', c) = 0 \tag{25}$$

alakú kifejezés lesz, melyben p a levegő nyomása egy tetszőleges helyen, T ugyanitt a levegő hőmérséklete, $\varkappa$ a levegőre vonatkozó (23) alatti kifejezés, $\varkappa'$ a Napra vonatkozó állandó, t a folyó idő, c az integratio állandója.

A felmerülő γ, δ, c, $\varkappa'$, sőt még t is, mely a jelenre érvényes, kisérleti adatokból meghatározhatók. Nevezetesen a levegőben külömböző helyeken p, T lemérhetők, ily módon (25)-re egész sor adat gyüjthető össze. Nyerünk ezekkel egy egyenletrendszert, melyből a kérdéses mennyiségek kiadódnak. Az egyenletrendszer megoldása épen nem a legkönnyebb feladat, de elvileg lehetséges. Az állandók kellő meghatározása eléggé kiküszöböli a Nap állapotára vonatkozó bizonytalanságot és a belőle származó hibát.

Ha $\varkappa$ értelmét az említett módon adjuk meg, akkor az állapoti egyenlet:

$$\frac{d^2T}{dr^2} + A\frac{d^2t}{dr^2} + B\left(\frac{dT}{dr}\right)^2 + C\left(\frac{dt}{dr}\right)^2 + D\frac{dT}{dr}\cdot\frac{dt}{dr} + E\frac{dT}{dr} +$$

$$+ T\frac{dt}{dr} + G = 0 \qquad (26)$$

lesz, melyben A, B, C, D, E, F, G mennyiségek p, T, t függvényei.

Ha (26)-hoz (22)-et csatoljuk, akkor egy simultan differentiál-egyenletrendszerrel állunk szemben. Két függvényt kell tehát meghatároznunk:

$$\left.\begin{aligned} T &= \varphi\,(r\ t) \\ t &= \psi\,(r,\ T). \end{aligned}\right\} \qquad (27)$$

Ha e függvényeket sikerül meghatározni, akkor a refractio problemája is elintézettnek vehető formailag, mert a sűrűség is kiadódik az integralok folytán mint a sugár függvénye.

A tárgyalás e része igen nagy nehézségeket támaszt, azért elhagyjuk folytatását és gyakorlati szempontból más módhoz fordulunk.

A tárgyalás második része fölötte nagy gyakorlati nehézségeket nem támaszt és eléggé kidomborítja a tárgyalás első részének elvi jelentőségét is.

II. FEJEZET.

A z i s e n t r o p i k u s á l l a p o t i e g y e n l e t i n t e g r a t i o j a é s a r e f r a c t i o f o r m u l á j á n a k m e g á l l a p í t á s a. A vizsgálat e második részében kiindulunk az isentropikus állapotot jellemző egyenletekből, csakhogy $\varkappa$-nak nem tulajdonitjuk ama számértéket, melyet a levegő számára legpontosabban R ö n t g e n határozott meg, hanem tetszőleges számértéknek tekintjük. Kimutatjuk, hogy a (17) alatti n'-nek mindig van oly értéke, a mely által jellemzett állapot teljesen visszaadja észlelések szolgáltatta refractiot Ezen n' mellett egyenleteink:

$$p = p_0\, y^{n'+1}$$
$$s = s_0\, y^{n'} \tag{28}$$

alakban irhatók.

A (13) integrálására meg kell határoznunk $y = f(r)$ függvényt, azaz (17) integralját.

Legyen

$$x = \frac{\xi}{q} \text{ és } u = \frac{1}{\xi} - \frac{1}{\xi_0}, \tag{29}$$

ekkor (17) átmegy

$$\frac{d^2y}{du^2}\left(u + \frac{1}{\xi_0}\right)^4 + y^{n'} = o \tag{30}$$

egyszerübb alakba.

Ha ezt differentialjuk, akkor (30) folytán

$$y\,\frac{d^3y}{du^3}\,(u + a) + 4\,y\,\frac{d^2y}{du^2} - n'\,(u + a)\,\frac{dy}{du}\,\frac{d^2y}{du^2} = o \tag{31}$$

harmadrendű homogen differential-egyenlethez jutunk, melyben

$$a = \frac{1}{\xi_0}. \tag{32}$$

Az analysis feladata volna megállapitani, hogy (31) a függvények milyen osztályát jellemzi. Az ily fajta vizsgálatokat physikai meggondolások alapján elejtjük. A levegőben, mint gázgömbben, u minden egyes értékéhez tartozik y egy és csakis egy értéke, és u változásával kapcsolatos y folytonos változása. A (31)-nek oly integráljára van tehát szükségünk, a mely egyértékű, véges és folytonos. Ha van (31)-nek ily integralja, akkor ez u egész hatványai szerint haladó hatványsorba fejthető, azaz:

$$y = 1 + a_1\, u + a_2\, u^2 + \ldots, \tag{33}$$

mert $u = o$ a földi légkör esetében y regularis pontja s $(y)_{u=o} = 1$.

Ha (33) felhasználjuk (31)-be, akkor az együtthatókra a következő recursiv formulat nyerjük:

$$
\begin{aligned}
&+ (i+1)(i+2)(i+3)\, a_{i+3}\, a && + \; 4\,(i+1)(i+2)\, a_{i+2} \\
&+ i(i+1)(i+2)\, a_{i+2}(1+a_1 a) && + \; 4\, i\,(i+1)\, a_1\, a_{i+1} \\
&+ (i-1)\, i\,(i+1)\, a_{i+1}(a_1+a_2 a) && + \; 4\,(i-1)\, i\, a_2\, a_i \\
&+ && + \\
&\;\vdots && \;\vdots \\
&+ 1.2.3\, a_3 (a_{i-1} + a_i a) && + \; 4.1.2\, a_2\, a_i \\
&\qquad - n' \Big\{ [i a_i + (i+1)\, a_{i+1} a]\, 1.\, 2\, a_2 \\
&\qquad\quad + [(i-1)\, a_{i-1} + i\, a_i\, a] \\
&\qquad\quad + [(i-2)\, a_{i-2} + (i-1)\, a_{i-1}\, a] \\
&\qquad\quad + \\
&\qquad\quad\;\vdots \\
&\qquad\quad + a_1\, a\, (i+1)(i+2)\, a_{i+2} \Big\} = 0.
\end{aligned}
\tag{34}
$$

A (31) 3 integrációs állandót tartalmaz. Az egyik $a_0 = 1$, melyet $u = o$ $y = 1$ feltételekből már eleve felhasználtunk, a másik kettő a_1 és a_2. Ezek közül az egyik elesik. Ha a polynom tétel szerint képezzük y^n, majd (30)-ból is, akkor az azonosság folytán:

$$
a_2 = -\frac{1}{2a^4}. \tag{35}
$$

Csak a_1 marad tehát integraciós állandónak.

Most még el kell döntenünk, hogy (33) értelmezi-e y-t, azaz convergens-e.

Kimutatjuk, hogy a sor biztosan convergens, hacsak

$$
\begin{gathered}
|\, u \,| < \frac{1}{n\, a_1}, \text{ illetve } \frac{1}{a_1} \\
a_1 > 1 \text{ és } a > 1\,,
\end{gathered}
\tag{36}
$$

a mint $n' >$, illetve < 1.

Tegyük tehát fel, hogy $a_1 > 1$, $a > 1$ és a sor bármely együtthatója nagyobb, mint az előtte levő bármely kettő a_{i-k} és a_{i-l} szorzata s e mellett a tagok rendre nőnek, a (34) alatti összefüggés is érvényes rájuk. Ekkor a_4-től kezdve világos, hogy

$$|a_i| \leq |\alpha_0 a_1^{i-2}| + |\alpha_1 a_1^{i-3}| + \dots + |\alpha_{i-2}|, \tag{37}$$

a hol $\alpha_0, \alpha_1, \dots$ között a legnagyobb n', illetve n'^{i-2}, a mint $n' <$, illetve > 1. Ezt tekintve:

$$|a_i| \leq \left| n \frac{a_1^{i-1}-1}{a_1-1} \right| < n' \frac{a_1^{i-1}}{a_1-1} \quad \text{illetve} \quad < n'^{i-2} \frac{a_1^{i-1}}{a_1-1}. \tag{38}$$

Ha a jobb oldalon álló nagyobb számértéket használjuk (33)-ba, akkor (33) összetartási körének sugara:

$$P = \frac{1}{a_1}, \text{ illetve } \frac{1}{n' a_1}. \tag{39}$$

A (33) mint (32) integralja kedvezőbb tulajdonságú, annál biztosabban convergens.

Ha tehát (33) értelmezi y-t, miként használjuk fel a refractio problemájának megoldására? A (33)-ban parameterként fellépnek a_1, a, n', x_0 és T_1 az atmosphära határán uralkodó hőmérséklet. Ezek között négy összefüggést lehet felirni, egy parameter megmarad tehát önkényes állandónak. Ötödik parameternek czélszerü n'-et hagyni, melynek minden egyes értéke egy bizonyos physikai állapotot jellemez. Ha n'-nek adunk egy bizonyos értéket, akkor egy bizonyos physikai állapot esetében nyerhetni refractio adatokat. Úgy kell tehát választanunk n' értékét, hogy számitás által nyerjük a kisérlet nyujtotta refractio adatokat.

A parameterek között érvényes négy összefüggést a hydrodynamika alapegyenlete, q^2 definitioja és (28) egyenletek adják.

Képzeljük, hogy már van n'-re oly értékünk, mely czélunknak teljesen megfelel, más szóval találtunk oly gázt, melyben a refractio ugy létesül, mint a levegőben teljesen egyenlő földfelületi meteorológiai viszonyok mellett. Legyen r_1 a gázgömbben azon gömbhéj sugara, a melynél a fénytörése a valóságban megkezdődik. Legyen T_1 a hőmérséklet, p_1 a nyomás e gömbhéj felületén, akkor a hydrodynamika alapegyenlete folytán:

$$\int_{p_0}^{p_1} dp = \frac{g_0\, s_0\, r_0}{a} \int_{r_0}^{r_1} y^{n'} du, \tag{40}$$

azaz:

$$p_0\, y^{n'+1} - p_0 = \frac{g_0\, s_0\, r_0}{a} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{A_{i-1}}{i} \left(1 - \frac{1}{x_0}\right)^i \frac{1}{q^i}. \tag{41}$$

ha

$$y^{n'} = 1 + A_1\, u + A_2\, u^2 + \ldots. \tag{42}$$

A q^2 definitíojából:

$$q^2\, x_0^2 = \frac{1}{a^2} = \frac{4\, \pi\, r_0^4\, s_0^2}{(n' + 1)\, E\, p_0}. \tag{43}$$

Ha a hydrodynamika alapegyenletét

$$s\, dr = -\frac{dp}{g} \tag{44}$$

alakban irjuk és p, s (28) alatti kifejezésüket felhasználjuk, akkor az integratio

$$\frac{g_0\, r_0\, s_0}{p_0} (1 - x_0) = (n' + 1) \left(1 - \frac{T_1}{T_0}\right) \tag{45}$$

eredményhez vezet.

A (33) $x = 1$ esetre

$$\frac{T_1}{T_0} = \sum_{i=0}^{\infty} a_i \left(1 - \frac{1}{x_0}\right)^i \frac{1}{q^i}. \tag{46}$$

A (41), (43), (45), (46) megoldják a feladatot. Mert ezen egyenletek a feltételezett n' értéke mellett a Föld felületén lévő különböző viszonyok mellett a parameterek számára kiértékesíthetők. Végezzük a kiértékesítést a közepes refractiora. A közepes refractio, azon refractio, melyet akkor nyerünk egy bizonyos zenithtávolságnál, a mikor a Föld felületén a hőmérséklet $10^0 C$ és a barométerállás 751.83 *mm*.

A számításra szükséges mennyiségek:

A Föld közepes sugara: 6370636 *méter*.

(Clarke és Bessel adataiból vett közép).

A Föld felületén uralkodó gyorsulás: 9.806 $m\ sec^{-2}$.

A levegő sűrűsége a Föld felületén $10^0 C$-nál: $\frac{1}{801.887}\frac{kg}{dm^3}$.

A higany sűrűsége $10^0 C$-nál: $13{,}5716\ \frac{kg}{dm^3}$.

Ezen értékekre egyenleteink:

$$\frac{T_1}{T_0} = \sum_{i=0}^{\infty} a_i \left(1 - \frac{1}{x_0}\right)^i \frac{1}{q^i}$$

$$0.00128455\, a\left(y^{n'+1} - 1\right) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{A_{i-1}}{i} \left(1 - \frac{1}{x_0}\right)^i \frac{1}{q^i} \tag{47}$$

$$n'+1 = 0.526743\, a^2$$

$$1 - x_0 = (n'+1)\left(1 - \frac{T_1}{T_0}\right) 0.00128455.$$

Ha $n' = 0.995698$ akkor a kisérleti refractio adatokat pontosan adja a számítás. Ezen $n' = 0.995698$ mellett

$$\begin{aligned} lg\ a &= 0.289246 \\ lg\ a_1 &= 2.301978 \\ lg\ (1 - x_0) &= 7.389501 \\ lg\ \left(1 - \frac{T_1}{T_0}\right) &= 9.988827 \end{aligned} \tag{48}$$

adatok lehetőleg pontosan kielégítik a (47) egyenletrendszert. A parameterek e meghatározása könnyű, mert a sorok igen gyorsan convergálnak. Az állandók első meghatározásánál czélszerű $T_1 = 0$ értékből kiindulni, azután tovább közelíteni.

Ha (33)-at felhasználjuk (13)-ba és ebbe $cos^2 z$ helyett $sin^2 z$ vezetünk be, akkor dR mindenesetre u egész hatványai szerint haladó hatványsor differentiálja lesz, azaz:

$$dR = (\alpha_0 \sin z + \alpha_1 \sin^2 z\, u + \alpha_2 \sin^3 z\, u^2 + \ldots)\, du. \quad (49$$

Az integratio végzése után:

$$R = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\alpha_{i-1}}{i} \sin^i z \left(1 - \frac{1}{x_0}\right)^i \frac{1}{q^i}. \qquad (50)$$

Ebben $\alpha_0, \alpha_1, \ldots$ együtthatók meghatározására képeznünk kell $1 - 2\,\alpha w - (1 - \varepsilon)^2 \sin^2 z$ kifejezést, dR és dw négyzetét, ekkor α_0 és α_1-re:

$$\begin{aligned} b' A_1^2 &= \alpha_0^2 \cos^2 z \\ b^2 \left\{ 2.\, 2 A_1 \cdot A_2 + \frac{2}{r_1} r_0\, q\, A_1^2 \right\} &= 2\, \alpha_0 \alpha_1 \cos^2 z \sin z + \left(2 \alpha A_1 - \frac{2 r_0 q}{r_1} \sin^2 z\right) \alpha_0^2. \end{aligned} \qquad (51)$$

egyenleteket nyerjük, e két coefficiens kiszámitása gyakorlati szempontból elegendő, mert 75^0 zenithtávolig megadják a pontos refractiót. Általánosságban $\alpha - k$ összefüggése:

$$\begin{aligned} & b^2 \left\{ 2.\, 1\, i\, A_1 \cdot A_i + 2.\, 2\, (i-1)\, A_2 A_{i-1} + \ldots + 2 k (i - k + 1)\, A_k A_{i-k+1} + \ldots \right\} \\ & + \left\{ 2 \cdot 1\, (i-1)\, A_1 \cdot A_{i-1} + 2.\, 2\, (i-2)\, A_2 A_{i-2} + \ldots + 2 k (i-k)\, A_k A_{ik} + . \right\} \frac{2}{a} \\ & + \left\{ 2\, 1\, (i-2) A_1 \cdot A_{i-2} + 2.2\, (i-3)\, A_2 . A_{i-3} + \ldots + 2k\, (i-k-1)\, A_k A_{i-k-1} + \ldots \right\} \frac{1}{a^2} = \\ & = \left\{ 2.\, \alpha_0\, \alpha_{i-1} + 2\, \alpha_1\, \alpha_{i\,2} + \ldots + 2\, \alpha_k \alpha_{i-k+1} + \ldots \right\} \sin^{i-1} z \cos^2 z \\ & + \alpha_0^2\; 2\, \alpha\, A_{i-1} \\ & + 2\, \alpha_0\, \alpha_1\; 2\, \alpha\, A_{i-2} \sin z \\ & + (2\, \alpha_0\, \alpha_1 + \alpha_1^2)\; 2\, \alpha\, A_{i-3} \sin^2 z \end{aligned}$$

$$\vdots$$

$$+ \left(2\,\alpha_0\,\alpha_{l-1} + 2\,\alpha_1\,\alpha_{l-2} + \ldots\right) 2\,\alpha\,A_{i-l-1}\,\sin^{l} z \qquad (52)$$

$$\vdots$$

$$+ \left(2\,\alpha\,A_2 - \frac{\sin^2 z}{a^2}\right)\left(2\,\alpha_0\,\alpha_{i-3} + 2\,\alpha_1\,\alpha_{i-4} + \ldots\right) \sin^{i-3} z$$

$$+ \left(2\,\alpha\,A_1 - \frac{2}{a}\sin^2 z\right)\left(2\,\alpha_0\,\alpha_{i-2} + 2\,\alpha_1\,\alpha_{i-3} + \ldots\right) \sin^{i-2} z$$

recursiv formulával fejezhető ki, az l-nek értékei 1, 2, ... $i\text{-}l = 4$-ig,
a hol

$$b^2 = \left(\frac{\alpha}{1-\alpha}\right)^2 \qquad (53)$$

$$\varepsilon = -\frac{r_0}{r_1} \text{ u.}$$

Ha $A_k = A_{i-k+l}$ és $\alpha_l = \alpha_{i-l}$, akkor e tagba $^1/_2$ factor teendő.

Ily módon kis zenithtávolságok mellett

$$R = \text{állandó. } tg\ z \qquad (54)$$

összefüggés is pontosan visszaadja a tapasztalatot 30^0-on túl már a második tag is igénybe veendő, a második taggal 75^0-ig beérjük, ezután már a többi tagokat is számításba kell vennünk; 85^0-nál már öt tag kell. A számítást 30^0-nál kezdtem, eleinte 10^0-kint, majd 5^0- és 1^0-kint, végre a horizontalis refractiót számítottam és a közepes refractióra a következő adatokat nyertem:

z	Terkán	Bessel	Oppolzer	Terk.-Bessel	Opp.-Bessel
30°	33.″3	33.″3	33.″3	0.″0	0.″0
40°	48.″4	48.″4	48.″4	0.″0	0.″0
50°	1′ 8.″7	1′ 8.″7	1′ 8.″7	0.″0	0.″0
60°	1′39.″7	1′39.″7	1′39.″7	0.″0	0.″0
65°	2′ 3.″2	2′ 3.″2	2′ 3.″2	0.″0	0.″0
70°	2′37.″3	2′37.″3	2′37.″3	0.″0	0.″0
75°	3′31.″6	3′32.″1	3′32.″1	+0.″5	0.″0
80°	5′15.″1	5′16.″2	5′16.″2	+1.″1	0.″0
81°	5′48.″1	5′49.″3	5′49.″3	+1.″2	0.″0
82°	6′28.″4	6′29.″6	6′29.″6	+1.″2	0.″0
83°	7′18.″5	7′19.″7	7′19.″6	+1.″2	−0.″1
84°	8′22.″0	8′23.″3	8′23.″1	+1.″2	−0.″2
85°	9′45.″0	9′46.″5	9′46.″0	+1.″2	−0.″5
90°	34′54.″1	34′54.″1	34′54.″1	0.″0	0.″0

Az első oszlop a zenithtávolságot, a második a jelen értekezés eredményét, a harmadik a kisérleti középes refractiot „Tabulae Regiomontanae“ alapján, a negyedik Oppolzer elméletének eredményét, az ötödik és a hatodik a két elméletnek a tapasztalattól való eltérését tartalmazza.

E táblázat szerint elméletünk egészen jól visszaadja a tapasztalatot. A formula egész 90°-ig minden fennakadás nélkül használható. Ha $z=90^0$, akkor a refractio (13) kifejezéséből is kitünik, hogy belép $\frac{1}{u^{\frac{1}{2}}}$ tag is. A $z=90^0$-ra a formulát úgy kell kiértékesíteni hogy már eleve $sin z=1$, $cos z=0$ irunk, a mikor

$$dR=\left(\frac{\beta_{-1}}{u^{\frac{1}{2}}}+\beta_1 u^{\frac{1}{2}}+\beta_3 u^{\frac{3}{2}}\dots\right)du \tag{55}$$

kifejezés által lesz jellemezve. Mivel $u<0$, azért látszólag imaginárius viszonyok merülnek fel; ez eltünik, ha u helyett $-u$ hozunk be változónak, a mi az eredeti differential-egyenletet nem változtatja, az integráljában pedig csak annyiban lesz változás, hogy a_{2i+1} és A_{2i+1} helyett $-a_{2i+1}, -A_{2i+1}$ irandók.

Ily módon számitván $z = 90^0$-ra a refractiót kisebb értéket kapunk, mint a tapasztalat nyujt. De tekintetbe kell vennünk, hogy a horizontban már lényeges befolyást gyakorol az atmosphära magassága. 85^0-ig elegendő (48) alatt $1-x_0$ értékkel dolgozni. Ha a hőelmélet első tétele értelmében számítjuk az atmosphära valóságos magasságát, akkor nagyobb értéket kapunk, a két érték számtani közepe tüstént megadja a tapasztalat nyujtotta refractio adatot.

A számitást csak a közepes refractióra végeztem a parameterek számára; ez elegendő is, mert T, p tetszőleges hőmérséklet és nyomás mellett egyszerűen differentiálás által nyerjük a kivánt refractiot. Ha a közepes refractiot R-el jelöljük, akkor a kivánt meteorológiai viszonyokra érvényes refractio elsőrendű közelitésig:

$$R' = R + \frac{dR}{dq}\left(\frac{\partial q}{\partial T_0}(T - T_0) + \frac{\partial q}{\partial p_0}(p - p_0)\right) \tag{56}$$

kifejezés által lesz adva, melyben minden differentiál quotiens (48)-al kiértékesithető.

Ezek után szabad talán kiemelnem azon pontokat, a melyek ez elméletnek Oppolzeré fölött előnyt biztosítanak. Egy megjegyzét már tettem a légkör határán uralkodó hőmérsékletre, egy másik megjegyzésem ugyancsak e mennyiségre az, hogy ezen hőmérséklet elméletünkben egy bizonyos physikai állapot megszabása mellett kiszámítható, mig Oppolzernál nem. Továbbá nincs elméletünkben oly önkényes állandó, melynek physikai értelme nincs és mely értékének alkalmas választásával czélunkat elősegithetjük. Az n' megmarad ugyan tetszés szerinti állandónak, de bármely értéke egy bizonyos physikai állapotot jellemez, melyek mellett elméletileg érdekes volna a refractio számítása. Továbbá Oppolzer is megkapja a horizontban a refractiot, de ugy, hogy önkényesen (2)-ben c_1 értékét a $z = 90^0$ kisérleti adatból határozza meg. E mellett Oppolzer elméletében van némi ellenmondás is, melybe a meteorológiai adatok kedveért jutott. Nevezetesen Oppolzer is a Gay-Lussac-Mariotte törvényt érvényesnek veszi; ebből pedig az következik, hogy $T_1 = 0$, ha a sűrűség $s_1 = 0$ a határon. Ámde a határon $s_1 = 0$ veszi érvényesnek s hőmérsékleti törvénye $T_1 = -50^0 C$ ad; pedig a hydrodynamika és Gay-Lussac-Mariotte törvényekből folyik, hogy

$$\left(\frac{\frac{dp}{dr}}{\frac{ds}{dr}} \right) \neq \text{állandó} \tag{57}$$

általánosságban, hanem zérus a határon.

A refractio formulájában szereplő együtthatók (52) alatti összefüggéséből kitünik, hogy n' csak látszólag marad meg önkényes állandónak. Az (52) érvényes bármely z re, tehát $z = 0$ esetre is, ekkor α_0 és α_1 összefüggéséből:

$$n' = \frac{a_1^2\, a^4 - a_1\, a^3 + 1}{0{\cdot}999706\, a_1^2\, a^4}$$

egyenlethez jutunk n' számára. Ebből nyerhető n' egészen jól egyezik a részletezett meggondolás szolgáltatta n' értékével. Ennélfogva elméletünkben nincs egyetlen egy önkényes állandó sem. Ezen eredmény előre is sejthető volt. Hisz Oppolzer a légkör határán uralkodó hőmérséklet kivételével már oly állandókat vezet be, melyek mind számítás által nyerhetők adott meteorologiai viszonyok mellett. Fellép ugyan még egy állandó, ezt azonban nem a szükség kivánja, hanem csak fogás a refractio formulájának könnyü kiértékesitése céljából. Elméletünk pedig Oppolzeréval alapjában véve egyezik, hisz $n' \doteq 1$, azaz a sűrűség és hőmérséklet között levő kapcsolat csak egy állandóban külömbözik Oppolzer feltevésétől. A lényeges külömbség abban van, hogy Oppolzer már eleve feltételezi, hogy $n' = 1$, mig nálunk számítás adja meg, azaz a felfogás sokkal általánosabb elméletünkben.

Egy másik eredménye ez elméletnek, hogy nem kapjuk meg ily módon a refractio adatokat, ha a levegőt isentropikus állapotúnak veszszük. Erről számítás által győződtem meg, az eredmény mindig lényegesen kisebb, mint a tapasztalat nyujtotta adat. Ebből kitetszik, hogy a tárgyalás első része gyakorlatilag bár teljesen jelentéktelen, de elvileg fontos.

A hőmérséklet csökkenése a sugár mentén. Nem lesz érdektelen feltüntetni a hőmérséklet fogyását a külömböző magasságokban, már csak azért sem, mert majd a táblázatból kitünik, hogy T_1-el jelzett hőmérsékletnek megvan a physikai értelme. Eredményeimet itt is összehasonlítom Oppolzerével.

Oppolzer a hőmérséklet számítására a következő formulákat adja:

$$t_0 = 20^0\ C\text{-}ra : t = 20^0 - 6.943\ \mathrm{h} + 0.193\ h^2$$
$$t_0 = 0^0\ C\text{-}ra : t = -5.702\ \mathrm{h} + 0.199\ h^2$$
$$t_0 = -20^0\ C\text{-}ra : t = -20^0 - 4.116\ h + 0.187\ h^2.$$

Itt t_0 a földfelületi hőmérséklet, h kilometereket jelent. E formulákból számítottam Oppolzer elméletéhez tartozó hőmérsékleti adatokat. Oppolzeré fordulópontokat mutat, elméletünk pedig tulságos nagy csökkenést, de felfelé a nyár—tél közötti ingadozás eltünik.

Magasság méterekben	TERKÁN			OPPOLZER		
	t_0=—20°C	t_0=0° C	t_0=+20°C	t_0=—20° C	t_0=0° C	t_0=+20° C
1000	—35°	—17°	2°	—24°	—6°	+13°
2000	—51	—33	—16	—27	—11	+ 7
3000	—67	—50	—34	—31	—15	+ 1
4000	—82	—67	—52	—33	—20	— 5
5000	—97	—84	—70	—36	—24	—10
6000	—113	—100	— 88	—38	—27	—15
7000	—128	—117	—106	—40	—30	—19
8000	—144	—134	—123	—41	—33	—23
9000	—159	—150	—141	—42	—35	—27
10000	—175	—167	—159	—42	—37	—30
11000	—190	—184	—177	—42	—38	—33
12000	—206	—200	—193	—42	—39	—35
13000	—221	—217	—211	—42	—40	—37
14000	—236	—234	—231	—41	—41	—39
15000	—252	—251	— 49	—40	—41	—41
16000	—267	—267	—267	—38	—40	—42
Atm. határán	—273	—273	—273	—55	—55	—55

III. FEJEZET.

Az extinctio elmélete. A tárgyalás e harmadik része nagyon rövidre fogható, mert ki lehet mutatni, hogy az extinctio csak egy állandó szorzóban külömbözik a refractiotól. E tényt Laplace is kimutatta, miként ezt G. Müller „Die Photometrie der Gestirne“ czimű munkájában is felhasználta 1897-ben. E tétel a refractio emez ujabb tárgyalása alapján is bizonyítható.

Egy bizonyos légréteg határán legyen J_z valamely csillag sugárzó energiája, akkor ds útelemből való kilépés után dJ_z eltünik és pedig a következő törvény szerint:

$$\frac{dJ_z}{J_z} = -\nu\, ds, \tag{58}$$

a hol ν az extinctio coefficiense s

$$\nu = k\,\rho, \tag{59}$$

azaz a sűrűséggel arányos, ha most ρ jelöli a sűrűséget.

Tekintvén, hogy $\rho = \rho_0\, y^{n'}$ és

$$ds = \frac{dr}{\cos i}, \tag{60}$$

azért

$$\frac{dJ_z}{J_z} = -k\,\rho_0\, y\, \frac{y^{n'-1}\, q\, dr}{q\, \cos i}. \tag{61}$$

Ha (61) és a refractio (5) formulajába r helyett u—t s i helyett z mennyiségeket vezetjük be:

$$\frac{dJ_z}{J_z} = k\,\rho_0\, y\, \frac{y^{n'-1}\, r_1\, du}{q\,(u+a)^2 \cos i} \tag{62}$$

$$dR = -\frac{c\, r_0\, n_0 \sin z\, n'\rho_0\, y^{n'-1} \{a_1 + 2\, a_2\, u + \ldots\}\, du}{2\, r\, n^3 \cos i}. \tag{63}$$

A (62) és (63) egybevetéséből:

$$\frac{dJ_z}{J_z} = -\frac{2\, r^3 q^2 n^3\, k\, r_1\, (u+a)^2}{c\, r_0\, n_0\, n' q^3 y^{n'-2} (u+a)^2 r_1^2 (a_1 + 2\, a_2\, u + \ldots)}\, \frac{dR}{\sin z}. \tag{64}$$

Ha a számlálót és nevezőt r_0^2-al szorozzuk és

$$n^2-1 = c \, \rho_0 \, y^{n} \tag{65}$$

veszszük, akkor

$$\frac{d J_z}{J_z} = - \frac{2 \, r_0^2 \, k}{c \, n_0 \, n \, q \, \sin z} \, \frac{d R}{\Phi(u)}. \tag{66}$$

Ha végre

$$\varkappa = \frac{\int\limits_{u=u_0}^{u=u_1} \frac{d R}{\Phi(u)}}{\int\limits_{u=u_0}^{u=u_1} d R}, \tag{67}$$

akkor

$$lg \, \frac{J_z}{J} = - K \, \frac{R}{\sin z}, \tag{68}$$

a hol

$$K = \frac{2 \, r_0^2 \, k}{c \, n_0 \, n' \, q} \, \varkappa \tag{69}$$

Vajjon minő értelmezést enged meg (68) alatti egyenlet. Benne J jelenti a fényforrás azon sugárzó energiaját, a mely a légkör határát érte. Ennélfogva $\frac{J}{J}$ azon viszonyszám, mely megadja, hogy az intensitás hányad része tünt el a levegőben. E viszonyszámot az extinctio nagyságnak nevezzük. A extinctio tehát csakis egy állandó szorzóban külömbözik a refractiótól. Ezen állandó szorzót photometriai úton meg lehet határozni.

Az extinctionak igen nagy fontossága van az Ég photometriajában. Ha két csillag magnitudója és intensitása m_1, J, illetve m_2, J_2 akkor

$$lg \, \frac{J_1}{J_2} = - 0.4 \, (m_1 - m_2). \tag{70}$$

Itt J_1, J_2 a légkör határára érő sugárzó energiát jelentik. Ily értelemben a (68) is rendnagyságot jelent, azon rendnagyságot, melylyel fényesebb a csillag valóságban, mint a levegőn át bizonyos z zenith távolság mellett. Ha tehát valamely csillag rendnagyságát pontosan akarjuk meghatározni, akkor az extinctiót is számításba kell vennünk.

FÜGGELÉK.

A refractio formulájában szereplő együtthatók táblázata. A jelzett együtthatókat csak 85^0-ig számítottam, mert ezen túl a tagok elég nagyok, a számítás rendkivül hosszadalmas, s gyakorlati szempontból 85^0 zenithtávolságig elegendő is. Egyébk nt $n = 1$ értéket elfogadva az egész Oppolzer-féle elmélet szóról-szóra alkalmazható, úgy hogy 85^0 fokon túl Oppolzer eredményeit fogadhatjuk el, 85^0-ig azonban minden önkényes adattól menten nyerjük a refractio-adatokat, sőt még $z = 90^0$-nál is elég könnyü szerrel.

z	$lg\alpha_0$	$lg\alpha_1$	$lg\alpha_2$	$lg\alpha_3$
4°	8.76964n	—	—	—
8	8.77282n	—	—	—
10	8.77523n	—	—	—
12	8.77817n	—	—	—
14	8.78167n	—	—	—
16	8.78573n	—	—	—
18	8.79037n	—	—	—
20	8.79559n	—	—	—
21	8.79842n	—	—	—
22	8.80141n	—	—	—
23	8.80455n	—	—	—
24	8.80785n	—	—	—
25	8.81130n	—	—	
26	8.81492n	—	—	—
27	8.81870n	—	—	—
28	8.82264n	—	—	—
29	8.82676n	—	—	—
30	8.83105n	8.91201n	—	—
31	8.83551n	8.91260n	—	—

z	$lg\alpha_0$	$lg\alpha_1$	$lg\alpha_2$	$lg\alpha_3$
32°	8.84016*n*	8.91423*n*	—	—
33	8.84499*n*	8.91688*n*		—
34	8.85000*n*	8.92055*n*	—	—
35	8.85521*n*	8.92521*n*	—	—
36	8.86062*n*	8.93088*n*	—	—
37	8.86623*n*	8.93753*n*	—	—
38	8.87204*n*	8 94517*n*	—	—
39	8.87807*n*	8.95379*n*	—	—
40	8.88432*n*	8.96342*n*	—	—
41	8.89080*n*	8.97404*n*	—	—
42	8.89750*n*	8.98666*n*	—	
43	8.90445*n*	8.99830*n*	—	—
44	8.91164*n*	9.01154*n*	—	—
45	8.91909*n*	9.02666*n*	—	—
46	8.92681*n*	9.04243*n*	-	—
47	8.93479*n*	9.05927*n*	—	—
48	8.94307*n*	9.07721*n*		—
49	8.95163*n*	9.09628*n*	—	—
50	8 96051*n*	9.11651*n*	—	—
51	8.96970*n*	9.13792*n*	—	—
52	8.97923*n*	9.16054*n*	—	—
53	8.98911*n*	9.18443*n*	—	—
54	8.99936*n*	9.20911*n*	-	—
55	9.00999*n*	9.23617*n*	—	—
56	9.02101*n*	9.26412*n*	—	—
57	9.03247*n*	9.29353*n*	—	—
58	9.04437*n*	9.32446*n*	—	—
59	9.05674*n*	9.35000*n*	—	—
60	9.06961*n*	9.39119*n*	—	—
61	9.08301*n*	9.42716*n*	—	—
62	9.09697*n*	9.46498*n*	—	—
63	9.11153*n*	9.50479*n*	—	—
64	9.12673*n*	9.54669*n*	-	—
65	9.14263*n*	9.59081*n*	—	—
66	9.15926*n*	9.63731*n*	—	—
67	9.17670*n*	9.68637*n*	—	—
68	9 19500*n*	9.73821*n*	—	—

z	$lg\alpha_0$	$lg\alpha_1$	$lg\alpha_2$	$lg\alpha_3$
69°	9.21425*n*	9.79300*n*	—	—
70	9.23451*n*	9.85104*n*	1.31503*n*	—
71	9.25592*n*	9.91263*n*	—	—
72	9.27859*n*	9.97812*n*	—	—
73	9.30264*n*	0.04791*n*	—	—
74	1.32824*n*	0.12249*n*	—	—
75	9.35558*n*	0.19246*n*	—	—
76	9.38490*n*	0.28849*n*	—	—
77	9.41649*n*	0.38147*n*	—	—
78	9.45070*n*	0.48245*n*	—	—
79	9.48798*n*	0.59268*n*	—	—
80	9.52891*n*	0.71417*n*	2.16598*n*	—
81	9.57424*n*	0.84895*n*	2.46875*n*	3.49482*n*
82	9 62502*n*	1.00015*n*	2.58686*n*	3.96494*n*
83	9.68268*n*	1.17218*n*	2.93760*n*	4.56227*n*
84	9.74934*n*	1.37128*n*	3.20007*n*	4.99893*n*
85	9.82828*n*	1.60740*n*	3.62521*n*	5.58720*n*

Nem lehetetlen, hogy a 70°-on túl fellépő eltérésnek mélyebb oka talán a Bessel-féle adatok hibájában rejlik, vagy a Föld közepes sugarában, minthogy elméletünk minden önkényes mennyiségtől ment.

A midőn értekezésem befejezem, nem mulaszthatom el kiemelni, hogy a jelen elmélet csak kisérlet akar lenni a jelzett egyszerű physikai állapot mellett refractio tábla készítésére, nem pedig hatályon kivül való helyezése a régi, classikus, nagy szabású elméleteknek.

Nagy hálával tartozom dr. Konkoly-Thege Miklós min. tanácsos, kir. igazgató úrnak, a ki jelen értekezésemet az intézeti kiadványok közé felvenni s így a nyomtatás költségeiben anyagilag támogatni méltóztatott.

Végül nem mulaszthatom el, hogy őszinte köszönetet ne mondjak dr. Kövesligethy Radó egy. tanár úrnak, ki az impulsust adta e tétel kidolgozására s a

kinek nagy becsü előadásaiból igen sok üdvös gondolatot merítettem, továbbá dr. b. Harkányi Béla úrnak, ki szives volt a refractióra vonatkozó ujabb vizsgálatokra figyelmeztetni és több igen hasznos utbaigazítást adni.

Forrásokul szolgáltak: A math. és term. ért. XVIII. k. 1. füzete: „Az égi testek spectruma" Dr. Kövesligethy Radótól; e szerző „Astrophysika" czimű előadása 1899-ből; Dr. G. Müller „Die Photometrie der Gestirne"; Dr. W. Valentiner „Handwörterbuch der Astronomie"; Brünnow „Lehrbuch der sphärischen Astronomie".

Ó-Gyallán, 1901. május havában.

BUDAPEST, 1901.
Nyomatott Heisler J. kő- és könyvnyomdájában.
II. Várkert-rakpart 1.