STAMPFEL-FÉLE
[TUDOM]ÁNYOS ZSEB-KÖNYVTÁR.
46.

Math.

Kolbai Arnold

ÁBRÁZOLÁSTAN

I. FÜZET.

Ára 60 fill. = 30 kr.

POZSONY - BUDAPEST
KIADJA
STAMPFEL K.

STAMPFEL-FÉLE
TUDOMÁNYOS ZSEB-KÖNYVTÁR.

46.

ÁBRÁZOLÁSTAN.

A legelemibb alapfogalmaktól kezdve a rendszer népszerű tárgyalása, kapcsolatban a művészettel és iparral, a körképekkel, találmányokkal és műegyetemi tudományokkal; mind magánhasználatra, mind pedig a legujabb tantervek kapcsán, főreáliskolai, katonai-, polgári-, ipariskolai és műegyetemre készülő gimnáziumi tanulók számára.

ÍRTA

KOLBAÍ ARNOLD,

TANÁR

 — 14 RAJZLAP, 200 ÁBRA.

POZSONY. 1900. BUDAPEST.

STAMPFEL KÁROLY KIADÁSA.

TARTALOM.

Eder István könyvnyomdája, Pozsonyban.

ELŐSZÓ.

Találjon e kis füzet megírása és túlságosan hosszú címe mindenekelőtt némi igazolást a következőkben:

Az „ábrázolástan"-ra vannak kitünő szakmunkáink és igazán korszakalkotó tankönyveink Ezek egy része „Monge" immár 100 éves, elvont módszerét, különösen a mennyiségtani tudományok egy ágának javára, a tanítás tudományának ritka magaslatára emelte; másik része pedig különleges intézetek és az ipar szükségleteihez képest a maga nemében szintén bámulatos tökéletességet ért el.

Minthogy azonban e műveket kiváltképen iskolai használatra szánták, magánhasználatuk itt-ott nagyobb nehézségeket okoz.

Hogy mindeme kiváló munkák mellé most még e szerény könyvecske is sorakozik, ezt csak az a célja igazolhatja, hogy ama nehézségek legyőzésével főleg magánhasználatul és mennél szélesebb körben való népszerüsítésül kiván szolgálni.

E cél megvalósítását pedig lehetővé teszi egyfelől, anyagilag, a hazaszerte ismert nevű kiadó áldozatkészsége, másfelől meg oly külön, később még részletezendő, közvetetlen módszer, mely az ábrázolástannak Franciaországban is bevallott nehézségeit, tanár segítsége nélkül, de mennyiségtani megokolással, a legcsekélyebb mértékre törekszik leszállítani.

A szóban levő, nálunk is több ízben megvitatott nehézségek Monge hazájában szintén nemcsak a tanításnál merülnek fel, hanem látjuk a gyakorlati életben is. Példa rá egy nyilatkozat, melyet a francia Hauser megkockáztatott, hogy tudniillik Németország iparbeli nagyságát a tudományok, és különösen Monge rendszere jobb népszerüsítésének köszönheti.

Ily népszerüsítést óhajtanánk e kis könyvvel hazánkban megközelíteni, és ezért hívja fel rá terjedelmes címe mennél szélesebb körök figyelmét.

Szolgálatot vélünk azonban ezzel egyszersmind az iskolának is tenni, mert ha hazánk virágzó reménye, melynek e tudomány első megismerésében is, nem a nehéz elvonás, hanem „élet“ kell, ezáltal a nemzet anyagi és szellemi erejének egyik fő alapját már idejekorán veti meg, akkor azután a tanár az iskolában annál több időt fordíthat a részletekre.

Az előkészítő folyam szükséges voltára különben tanterveink és Szirtes I. tanár indítványa is utalnak.

Ezt az előkészítést és a teljes tájékozást szerezhetjük meg a következő lapokból; és ha mindnyáját komoly figyelmünkre méltatjuk, a bennök foglalt utasításokat pedig lelkiismeretesen követjük, akkor nemsokára oly világ tárul majd elénk, melyben élvezetes munkálkodással a címen jelzett irányok valamelyikében hazánk dicsőségére a legszebb haladást tehetjük.

Pozsony, 1899. december havában.

Kolbai A.

ELSŐ RÉSZ.

Derékszögű képek.

I. Egy kép.

Bevezetés.

a. Az első számu rajzlap felső sorában könnyen ráismerünk az úgynevezett „kúp“-ra. Ugyanaz a kúp ott szürke lap előtt ötféle helyzetben domborodik ki.[1] Ami a kúp elkészítését illeti, erre nézve az első sor „c“ ábrájában látható köralakú papirlapnak $^1/_3$-ad részét kivágjuk és tölcsérré görbítve oly teljes körlappal rekesztjük be, melynek *„d“* átmérője a nagy kör félátmérőjének vagy „küllőjének“ [2] kétharmada.

Ebből a „hálózat“-ból készült kúp körlapjának *O* középpontját gondoljuk mármost pl. vékony drót segítségével a kúpnak *A* „csúcsával“ összekapcsolva, akkor ez az *AO* „magasság“ minden következő ábrában, mint pl. a *„b“* és *„c“* ábrákban, melyekben a magasság még pontozott vonallal is fel van tüntetve, mind rövidebbnek látszik, mert a kúp mindinkább előre dül és így *A* csúcsa a megette levő laptól fokozatosan távolodik. *AO* magasság mind meredekebb lesz, míg végre *I 1.* ábrában már nem is látható. A felső sornak ez ábrája a kúpot úgy mutatja, mintha az köralakú alapjával rajzlapunkon feküdnék.

---

a [1] Ilyen, egyetlen lapból való kidomborodást müvészi módon tüntetnek fel T. Gherardini képei.

a [2] Radiusnak is nevezzük. Bármilyen más kúpot is készíthetünk, csak legyen, amint különben ismeretes, a nagyobb átmérőjü körív hossza akkora, mint a kis kör körülmérten. Az anyag lehetne esetleg erre a célra kapható színes enyvlemez (gélatine). Szükséges azonban legalább a rajzlapon látható, lehetőleg nagyobbitott hálózat szerinti kúp elkészitése.

A pont.

b. A kúp csúcsát, melynek, szigorúan véve, nincs is kiterjedése, pontnak nevezzük.

c. *A pont egy képben.* Vizsgáljuk meg most közelebbről, hogyan is rajzoltuk mi *I1.* ábránkat; hogyan mutatkozik az *A* pont ebben a képben?

Ez az ábra a kúpot és az *A* pontot sajátságosan mutatja. A kúpot ugyanis ebben a helyzetben oly módon nézve rajzoltuk, hogy *A* pontja az alapkör középpontját *O*-t teljesen födi, és így nemcsak a kúp magassága, hanem *O* sem látható ebben az ábrában.

Tehát csak *A* pontot látjuk ugyan, mindazonáltal *A* pont alatt oda gondolandó a kúp egész magasságának vonala, mely teljesen „egyenes"[1] mert tisztán pontnak látjuk.[2]

O a köralap középpontja a magasság „talppontja", és e magasság egyszersmind mértéke az *A* pont távolságának a körlaptól vagy rajzlapunktól.

A körlapnak teljesen „sík"-nak kell lennie és azért a rajzlapot is, melyben fekszik, síknak[3] fogjuk tekinteni és „képsík"-nak elnevezni. Ezen rajzoljuk képeinket.

A vonal egy képben.

d. Az egyenes vonalakon kivül ismerünk még számtalan görbe vonalat, mint pl. a körvonalat, stb.

A vonalak közől most azonban első sorban az egyenesekre van szükségünk, és pedig ezekből mindenekelőtt oly irányuakra, mint amilyen a kúp magassága az *I1.* ábrában, ez:

e. *A képsíkra merőleges egyenes.* Térjünk tehát vissza az *I1.* ábrában képzelhető *AO* egyenesre.

Ez *AO* egyenest a képsíkra „merőleges"-nek vagy derékszögünek mondjuk, mert az *O* talpponton átmenő minden átmérővel derékszöget képez.[4]

---

c [1] Dr. Lévay Ede. Planimetria.

c [2] Nézzünk meg pl. egy vékony tüt a tü irányában, úgy hogy egyik vége szemünk felé van fordítva, akkor a tü egész hosszát csak pontnak látjuk.

c [3] Síklap vagy sík, tudjuk, az a lap, melyen minden irányban egyenest húzhatunk.

c [4] Ezt mennyiségtanilag is átláthatjuk, mert a magasságon keresztül tett bármely sík a kúpból egyenlö és egybevágó egyenlö-

Derékszöget képez pl. az *1.* rajzlapon az *I 5.* ábrában *NO* egyenes az *XX* egyenessel és az első sorban a kör érintője a *„d“* átmérővel, továbbá minden rendesen körülvágott papirlap két-két széle.

f. *A képsíkkal egyenlőközű vagy párhuzamos egyenes.* Az első rajzlap *I 2.* ábrájában ugyanaz a kúp kétszer mutatkozik és így *A* és *B* pontoknak egyenlő távolságuk vagy „köz“-ük van a képsíktól számítva. Ha az *A* és *B* pontot egyenessel kötjük össze, melyet az ábrabeli kerek pálcán belül végtelenül vékonynak gondolunk, akkor azt a képsíkkal egyenlőközű[1] egyenesnek nevezzük.

g. *Derékszögű képek.* Ha az *I2.* ábra két kúpját *A*-t és *B*-t ismét közelebről szemügyre vesszük, akkor látjuk, hogy a kúpok tulajdonképen sajátságosan vannak rajzolva, a mennyiben nemcsak *A*-t, hanem *B*-t is épen úgy ábrázoltuk, mint *A*-t az *I 1.* ábrában az *I.* fejezet *Ic* bekezdése szerint.

Mi tulajdonképen akkor mind a két pontot külön-külön, a képsíkra merőleges vagy derékszögü irányban néztük; azért ily képet „derékszögü képnek“[1] mondunk.

---

száru háromszögeket metsz ki; ezeket pedig a magasság két-két derékszögüre bontja.

Ebből egyszersmind az is következik, ha valamely egyenes úgy metszi a síkot, hogy a benne fekvö és az egyenes talppontján áthaladó két egyenessel derékszögeket képez, akkor az egyenes merőleges a síkra és minden más, benne a talpponton keresztül menö egyenest derékszögben metsz. A síkra merőleges egyenest, ha a sík, pl. a mi képsíkunk, vizszintes: „függölegesnek“ mondjuk.

f [1] Így nevezzük a távolságok vagy közök egyenlöségénél fogva, hivjuk azonban párhuzamosnak, vagy parallelnek is.

g [1] A magyaros müszókat, melyek már 1822 és 1859-ben vették kezdetüket Beregszászi P. munkáiban, most mindinkább az idegenek szorítják ki és a „derékszögü“ helyett általánossá vált az „orthogonális“ kifejezés.

A derékszögü képek a derékszög pontos szerkesztésén alapulván, a derékszögü háromszög- és vonalzóval való bánásban gyakorlottaknak kell lennünk, azért kezdi meg legtöbb intézet már a szabadkézi rajz tanitását is szerkesztésekkel. E szerkesztések elsajátitására vannak „Rajzoló geométria“ cimen közkeletü kiváló tankönyveink. E kitünö tankönyvek egyik legújabbika a „Szuppan-Szirtes“-féle „Planimetriai alaktan.“ (A hírneves szerzök elseje korszakalkotó ábrázolástant is írt.) A „rajzoló geométriát“

Rajzaink ezentúl derékszögű képek [2] lesznek, azért az előbbi megállapodás a következőkre nézve „alaptétel"-ül fog szolgálni.

„Tétel"-re az azt kifejező „ábra" szerint is fogunk utalni, pl. az első alaptételre egyszerűen *„I1"* jelzéssel hivatkozni.

E végből azt röviden ismételjük is:

I1. alaptétel: *A derékszögű képekben a képsíkra merőleges egyeneseket mind külön-külön pontoknak rajzoljuk.*

Ha ezt pl. kérdés alakjában akarnók emlékezetünkbe vésni, ilynemű kérdésre felelnénk: Hogyan mutatkoznak derékszögű képben a képsíkra merőleges egyenesek?

Az előbbi kérdésnek rajz közben való ismételt feltevésével sikerülhetne már egy-egy gyakorlati tárgy derékszögű ábrázolása,[3] teljesen biztos és gyors eljárás elsajátítása érdekében azonban előbb még

---

azonban a szerzők rendesen több kötetben dolgozzák fel. Egy kötetben összefoglalva különösen gyakorlati szerkesztések tekintetében, kiválóan alkalmas Grünwald István „Geometriai szerkesztések" című munkája is.

[2] Úgy mint a derékszögű képben, azonban nem látnók az *A* és *B* pontokat *AB* egyenessel együtt, ha egyszerűen szabadkézi rajzban „természet után" rajzolnánk, amikor ugyanis mind a két kúpot, vagy bármilyen más tárgyat egy állandó pontból nézünk; de mivelhogy nem nézhetünk mindig úgyszólván csak félszemmel és rendesen szemünk sem maradhat egy helyben, azért egy és ugyanannak a tárgynak „természet után" felvett képei mind különbözők, míg derékszögű képei ugyanazok maradnak, ha pl. *I1.* szerint az *AB* egyenest akárhányszor is rajzoljuk. A tervezőre (művész, katona, építész, gépész, stb.) ez nélkülözhetetlen, mert a méretek arányai is ugyanazok lesznek.

[3] Valamint az *A* és *B* pontokat, úgy rajzolhatnók kúpok segítségével most már a térnek akárhány pontját is, ha minden kúphoz odajegyeznők egyszersmind a magasságot. Ezt látjuk a kis tér-„képek"-nél, vagy helyszínrajzoknál, melyeken a domb, a hegy stb. csúcsa mellé jegyzik magasságát.

Ily módon ábrázolhatnók kúpokkal a tér számtalan pontját és „épitenénk" csaknem szószerint a térben, mert nemcsak „képeket", hanem úgyszólván valóságos tárgyakat látnánk magunk előtt; hogy azonban még rövidebb módon ábrázolhassuk terveinket, még egy lépéssel tovább megyünk.

türelemmel folytatjuk megfigyeléseinket a következőkben is.

Az előbbi tételben megjegyzetteket kiegészítjük mindjárt a következő bekezdésben még egy újabb alaptétellel.

h. *Határolt egyenes vagy köz.* Ha most pl. az *I 2.* ábrának még méreteit is figyelembe vesszük, nem lesz nehéz meggyőződnünk, hogy *AB* épen akkorának mutatkozik derékszögű képben, mint amilyen hosszú a térben, mert akkora, mint az *A* és *B* pontok alatt levő talppontok távolsága.

E talppontok távolságát oly egyenes méri, mely épen *AB* alatt gondolandó és vele egyenlőközű.[1]

Az I 2. ábrával kapcsolatban állítsuk fel ezek után az alaptételt.

I 2. alaptétel: *Ha valamely egyenes vagy köz egyenlőközű a képsíkkal, akkor derékszögü képben valódi nagyságát látjuk.*

A lap egy képben.

i. Az első rajzlapon görbe és sík lapokat különböztethetünk meg. A síklappal már *Ic*-ben foglalkoztunk és minthogy az egyenesek közűl mindenekelőtt a képsíkra merőleges egyenes érdekelt, következzék most hasonlóképen:

k. *A képsíkra merőleges sík, vagy röviden a merőleges sík.* Ennek bemutatására valamely kúpot magasságán át kettévágtunk és a két félkör-lapjával egymáshoz illesztve, az *I 5.* ábra szerint mindezt a képsíkra helyeztük. A félkör síkját a képsíkra merőleges siknak nevezzük, mert a félkör középső C pontjában végződő és a képsíkra merőleges küllőn megy át.[2] E küllő egyszersmind két negyedkörre bontja fel a félkört. A merőleges sík *NO*-ban egyenesnek mutatkozik,

---

h [1] Ha a képsík vízszintes volna, akkor ezek az egymással egyenlőközü egyenesek is „vízszintesek" lennének. Ha különben valamely egyenes sem nem vízszintes, sem nem függöleges, akkor „ferde".

k [2] A szóban levő küllő, mint egy egyenlőszárú háromszög magassága, az *XX* alappal derékszöget képez, és minthogy egyszersmind a félkört két egyenlö negyedkör-lapra osztja, *NO* egyenessel szintén derékszöget képez, tehát a képsík két egyenesével derékszögeket zár be, vagyis *e* [4] szerint merőleges a képsíkra.

mert a *C*-ben végződő küllő *I 1.* szerint pontnak látszik, ha pedig valamely egész vagy félkör alaku lapot bármely küllője irányában nézünk, az egész lap egyenes vonalnak tünik fel.[3]

Ez az *NO* egyenes egyszersmind derékszöget képez a képsíkban fekvő *XX* egyenessel is.

Az előbbieket röviden összefoglalva, mondhatjuk ármost:

Valamely, a képsíkra merőleges egyenesen áthaladó síkot, a képsíkra merőleges síknak, vagy röviden merőleges síknak nevezünk.

A merőleges sík derékszögü képben egyenesnek mutatkozik.

Minderre még egy példát az *I 3.* ábra félkupja is mutat.

A test e g y képben.

l. Az első rajzlapon ábrázolt egyféle tárgyak, kivált ha mint „testeket“ tömöreknek vesszük, a térben bizonyos helyet foglalnak el. Ezek itt mind „kúpok“.

Később majd fokozatosan más testekkel is megismerkedünk.

m. *Kúpok.* A kúpot magát mint testet feladatképen még nem rajzoljuk meg, csupán csak magasságával és csúcsával foglalkozunk most is.

Az *I 6.* ábrában az *I 2.* ábra kétszer elkészitett kúpja más helyzetben kétszeres, és egy egyenest képező magassági vonallal összekötve, ismerhető fel; úgyszólván önmagát meghosszabbító kúpnak tekinthetnők.

A kétszeres magasság helyzete pontosan meg is állapítható. Az alapkörök tudniillik érintik a képsíkot, a két középpont tehát egyenlő távolságban van a képsiktól és így a kétszeres magasság egyenlőközű a képsíkkal; ha tehát végpontjai alatt *I 2.* ábrabeli kúpokat gondolunk, *I 2.* tétel szerint a magasság valódi nagyságában mutatkozik.

---

k [3] Minthogy tudniillik *k* [2] szerint a *C* pontban végződö küllö merölegcs a képsikra, az pontnak látszik *NO*-egyenesben, és épen igy vele együtt a félkör ivének minden más pontjából húzott meröleges is *NO*-ban mutatkozik.

n. *A kúpnak a képsíkra merőleges körlapjai.* Látjuk az *I 6.* ábrából, mint a derékszögü képek egy jellegző példájából egyúttal azt is, hogy a két kör, mely a magasságokra merőleges, egyszersmind a képsíkra is merőleges, mert mindenik körben található egy, a képsíkra merőleges átmérő. Ez az átmérő pedig *I1.* szerint pontnak mutatkozván, úgy mint *Ik*-ban, mind a két körlap egyenesben látható.[1]

II. Két kép. (Ellenkező képek.)

Bevezetés.

a. Amint *Ig* [3]-ban említettük, lehetséges a tér bármily tárgyát pontosan ábrázolnunk, csakhogy szükséges a magasságok vagy távolságok melléjegyzése is. Hogy azonban ezt a nehézkes eljárást egyszerűsítsük, a következőkben a tárgyakat olyan új oldalról fogjuk szemlélni, hogy ama melléjegyzés nélkül a magasságokat is közvetetlenül lássuk.

E végből térjünk előbb vissza az első rajzlap *I4.* ábrájára. Ott azt látjuk, hogy a képsíkot *YX* egyenes kivételével *YZZX* idom mentén kivágtuk és addig emeltük, hogy a képsík kivágott része épen a kúp alapjához illeszkedjék.

Ebben a helyzetben a felemelt rész merőleges lesz, mert tudjuk, hogy *In* értelmében a körlap merőleges a képsíkra.

A második rajzlap első ábrájában ismétlődik az előbb megbeszélt ábra a kúp feltüntetésével; a következő *I 8—I 11.* ábrákban azonban egy újabb testet látunk: a „gúlát."

Az *I 7.* ábrában tudniillik *P* pontban kettéválasztottuk a testmintát és *YX* egyenes körül kissé leforgattuk a felemelt képsíkrészt a ráillesztett kúppal együtt. Ennek a kúpnak köralapján most több pontot

---

n [1] Ezt közvetetlenül is tapasztalhatjuk, ha mindenik alapkört külön-külön akarjuk rajzolni, de lehet erről szabatosan meg is győződnünk, ha az egész testet a kétszeres magasságon át a képsíkra merőleges síkkal gondoljuk metszettnek. A sík a testet két, egymást meghosszabbító egyenlőszárú háromszögben metszi, melyeknél az alapvonalak végpontjai derékszögü négyszöggé köthetők össze. Ezek az alapvonalak merőlegesek a képsíkra, tehát a körlapok is.

látunk; és miután ezeket egymással és a *P* csúcscsal összekötöttük, amaz új test keletkezett.

Ugyancsak ez a „gúla“ a következő ábrákban is látható. Ezekben a kivágott *YZZX* idom mindinkább közeledik a képsík eredeti helyzetéhez és vele együtt a gúla alapja is; magassága pedig, úgy mint az *1.* rajzlapon a kúpé, mindinkább rövidül és végre *I11.*-ben az egész magasság derékszögű képében csak pontnak mutatkozik.

E helyzetében a gúla alapja azt is mutatja, hogy a körön 6 egyenlő részt vettünk volt fel.

A pont.

b. *Pontok a gúlának előbbi képéből való kiindulásnál.* Induljunk ki ezek után megfordítva a gúlának ez előbbi I 11. helyzetéből és kövessük erre nézve újabb gyakorlat céljából a következő eljárást: Válasszuk még egyszer ketté a *2.* rajzlap első ábrájában feltüntetett testmintát és forgassuk le most teljesen az *YZZX* kivágott idomot a kúppal együtt a *3.* rajzlap *I18.* ábrája szerint, és gondoljunk a *P* pont alatt, az *I1.* ábrához hasonlóan, ismét még egy *O* talppontot is, melyet a *P* pont elföd.

Osszuk fel azután az *I19.* ábrában a kúp alapkörét a küllő segítségével *6* egyenlő részre oly módon, hogy *AD* átmérő egyenlőközű legyen az *YX* egyenessel és kössük ismét össze az *ABCDEF* pontokat hatszöggé és egyszersmind a kúp csúcsával *P* vel is.

Itt a testet szintén a térben kell látnunk, amint azt különben az *I1.* ábránál már megszoktuk.

Hogy ebben még a közvetetlen szemlélet is támogasson, a gúlát mindenekelőtt az *1.* rajzlapon felismerhető hálózat szerint, mely a kúp hálózatával összefügg, elkészítjük egy szabályos hatszögből és 6 háromszögből.[1]

c. *A pont két képben.* A kész gúlát tehát az *I19.* ábra szerint tényleg képsíkunkra helyeztük és ebben a helyzetében a középső *I24. és I25.* ábrák alsó felében szabatosan lerajzoltuk. Ebben a képben a gúlát, úgyszólván felülről, oly helyzetben látjuk, mint a kúpot *I1.*-ben.

---

b.[1] Az egyiptomi gúlák kicsinyben pl. 4 egyenlőszárú háromszögből és egy szabályos négyszögből utánozhatók.

Ezekután a képsík *YZZX* részét *YX* egyenes körül felemeljük és megfigyeljük mily helyzetekben mutatkozik gúlánk.

Az *I 20*-dik ábra szerint a gúla emelkedőben van; *I 21*-ben már meglehetősen látható a magassága, míg végre az *I 22.* ábrában a gúla csúcsának ismét ugyanarra a helyre kellett jutnia, a hol a kúp csúcsa volt.

Ebben a helyzetében a felemelt képsík *IIa* szerint megint merőleges lett; a magasság pedig egyenlőközű lévén a képsíkkal, valódi nagyságában mutatkozik *Im* értelmében. *I 19.* ábrabeli első helyzetétől *O''P''* jelzéssel van megkülönböztetve.

De nemcsak a magasságot látjuk valódi nagyságában, hanem a *PD* egyenest is *P''D''*-ben, mert az *I 19.* ábrában meggyőződhetünk róla, hogy *D* épen akkora távolságban van *YX*-től, mint az elfödött *O* talppont, tehát *D* és *O* D'' és O''-ben *P*-vel együtt egyenlő távolságban vannak a képsíktól ebben az „új derékszögű képben."

Nemcsak *OP*, hanem *PD*, sőt *AO* és *DO* is valódi nagyságukban láthatók, és azonfelül az *A''P''D''* egyenlőszárú háromszögben *P''O''* derékszögben metszi az *YX* egyenesben látható *A''D''* átmérőt. A méreteknek eme valódi nagyságánál fogva, e kép az előbbi helyzetekkel összehasonlítva a legfontosabb, és ezért itt megállapodunk.

Ebben a képben a gúlát egészen másképen látjuk mint eredeti helyzetében. Ezt, az előbbiektől elütő, egészen új képet az eredeti „első"-től megkülönböztetve, „második"-nak fogjuk nevezni és benne minden pontot úgy jelzünk, mint előbb P''-t.

A „második" képben tehát a *P* pont *P''*-ben egészen más helyen mutatkozik, mint az „első"-ben. Minthogy azonban a kettő között határozott összefüggés van, mind a kettőt, az *I 24.* ábrában egyesítjük.

d. *A második kép fölkeresése az I 24. ábrában.* Az a kérdés mármost, hogyan keressük fel a második képet az elsőből mindjárt az egyesített ábrában?

Ezt is, úgy mint mindent, a derékszögű képekre vonatkozó megállapodásaink szerint szerkesztvén, kövessük előbb figyelemmel egy pont fölkeresését. Induljunk ki pl az *O* talppontból és a *P* csúcsból.

Ha testmintánkat több ízben *YX* körül fel s alá forgatjuk, könnyen észrevesszük, hogy az *O* talppont negyedkört ír le a térben és ennélfogva a második derékszögű képben O''-ben épen eredeti O helyzete fölé kerül.

Az *I 23.* ábrában csak O pontnak jelöltük meg eredeti helyzetét és azt a negyedkört, amelyet az O pont leírt, olyanféle két kúprésszel tettük érthetőbbé, mint amilyen az *1.* rajzlap *I 5.* ábrájának testmintája, melyet C pontján át még hosszában is kettévágva gondoltunk.

A gúlának második képben való fölkeresésénél az *I 24.* vagy az egyszerűsített *I 25.* ábra felső felében O tehát második képben, O''-ben épen az első kép középpontja fölé kerül, melyet ott egyébiránt a második képtől a P' jelzés által megkülönböztetett csúcs elföd.

O''-ban végül $O''P''$ *IIc* szerint derékszöget képezvén YX egyenessel: az egész $P'P''$ összekötés derékszöget mutat az YX egyenessel.

Ami pedig a képsíkban fekvő $ABCDEF$ pontokat illeti, azokra nézve ugyanaz lévén érvényes, mint az O talppontra, $A'A'' \ldots . D'D''$, $E'E''$ szintén derékszögeket mutatnak az YX egyenessel.

Mindezek alapján *I 25.*-ben már könnyen külön szerkesztés útján is fölkereshetjük a gúlát második képében.

e. *A tengely.* YX egyenest, mely körül forgatva felemeltük az $YZZX$ részt és amely egyenes körül a test mint valami tengely körül forog, röviden „tengely"-nek fogjuk nevezni.

Az *I 25.* ábrában egyszerűbb szerkesztés kedveért csak az YX tengelyt húztuk ki, de ezt is tulajdonképen úgy kell tekinteni, mintha az egész, különben tetszés szerint kivágott $YZZX$ részt látnók felemelve, csakhogy a felemelt képsík kunkorodó szélét teljesen kiegyenesítettnek vesszük. A két képet szintén egyesítő *I 24.* ábrában pl. a felemelt képsíknak csak bal oldala mutat görbülést; *I 25.*-ben teljesen sík.

f. *Elnevezés és jelölés.* A két képet tehát „első"- és „második"-nak nevezzük és minden pontot két képében, mint pl. P-t, P' és P'' jelzés által különböztetünk meg, ha azonban valamely térbeli pontról derékszögű képekben lesz szó, rendesen nem tesszük ki külön pl. $P'P''$-t, hanem csak egyszerűen P-pontról beszélünk és ezen már P' és P''-t is értjük.

g. *A képsík részeinek elnevezése.* Hogy a következőkben rövidebben fejezhessük ki magunkat, elnevezéseink kiegészítéséül még megjegyezzük, hogy a képsíknak $XZZX$ részét első képsíkrésznek vagy röviden „első képsík"-nak fogjuk nevezni, az YX tengely túlsó oldalán fekvő részt pedig, a második képnek megfelelően „második képsík"-nak.

h. *Átmenő vagy vetítő vonalak.* A *IId* bekezdés eredményeképen a két kép egymás között való összefüggésére nézve azt találtuk, hogy $O'O''$, $A'A''$-PP'' vonalak, melyek szerint átmentünk az első képből a másodikba, mind derékszögeket képeznek a tengellyel. Ugyanazt találnók a tér bármely pontjára nézve is, ha alatta *I19.* szerint gúlát gondolnánk. Az $O'O''$, $A'A''$-$P'P''$ stb. vonalakat „átmenő vonalak"-nak fogjuk nevezni, és egyszersmind ha arról lesz szó, hogy egyik képből a másikba „átmegyünk", akkor mindjárt meg is húzzuk az átmenő vonalakat.[1]

A vonal két képben.

i. *Az első képsíkra merőleges egyenes.* A gúla P pontjának ábrázolása *I24.* vagy *I25.*-ben egyszersmind az első képsíkra merőleges PO egyenest is mutatja; erről már *Ic*-ből tudjuk, hogy első képben pontnak látszik, *IIc*-ből pedig, hogy második képben derékszöget képez a tengellyel és valódi nagyságában mutatkozik. Ugyanezt mondhatjuk bármilyen, az első képsíkra merőleges egyenesről is, mert mindig oly gúlával gondolhatjuk körülvéve, a milyenből az *I19.* ábrában indúltunk ki.

---

h [1] Mindezeket az elnevezéseket és jelöléseket az egyes szerzök különbözöképen használják. Például: Dr. Fodor L. „elsö, második projectió" (p_1p_2). Gaal J. „elsö, második kép" (P_1P_2). Grünwald I. „alaprajz, elölnézet" $(P'P'')$. Hoppé L. „elsö, második kép" $(p'p'')$. Hornischek H. „elsö, második kép" (P_1P_2). Kiss E. J. „elsö, második projectió" $(P'P'')$. Dr. Klug L. „vizszintes, függélyes vetület" (P_1P_2). Kolbenheyer Gy. „alaprajz, elölnézet" (P_1P'). Krisz F. „vizszintes, függélyes vetület" $(p'p'')$. Szuppán V. „elsö, második kép" (P_1P_2). Az idegen elnevezések közül használatosak pl.: plan, élévation (angolban is), projection horizontale et verticale. Grundriss, Aufriss, stb.; a jelzések közül pedig a franciáknál rendesen (pp'); így használják Anger, Gugler, Schreiber, Stampfel és Warren is. Ezenkivül $(P'P)$ Delaistrenél $(p^h p^v)$ Oliviernél, (p'p) Peschkánál stb.

k. *A köz.* Az előbbiekben még egy újabb közzel is ismerkedtünk meg, mely most egyenlőközű a „második" képsíkkal; ilyen pl. *AP* vagy *PD*, (hozzáértendő, hogy „második képben"; ha pedig a határolt egyenes első képben egyenlőközű az első képsíkkal, akkor az röviden: „egyenlőközű az első képsíkkal").

A síkidom két képben.

Figyelemmel követtük a pontot két képben és ennek alapján a térbeli egyenest is; térjünk ezekután át egy síklapon fekvő idomra, mint amilyen pl. a gúla alapja, és vizsgáljuk meg azt, ha a térben vesszük fel.

l. *A hatszög hasábon.* Ennek megfigyelésére a 2. rajzlap *I 12.* hálózata szerint készítsünk a gúla hatszögével egybevágó alappal még egy újabb testet: a „hasábot".

Gondoljuk most az *I 13.* ábrában az *I 8.* ábrából a gúla alapját, de *YX* tengelytől kissé távolabb, felvéve és erre ráhelyezve az *I 14.* ábra szerint az elkészitett hasábot.

Ezt a hasábot a következő *I 15* és *I 16.* ábrák értelmében egészen úgy mint a hogyan az a gúlánál történt, az első képsíkkal együtt már visszaforgattuk.

A forgatás közben a hasáb álló élei, épen úgy mint előbb a gúla magassága, mindinkább rövidebbeknek mutatkoztak, és végre az *I 17.* ábrában *I 1.* szerint már csak pontoknak látszanak.

Ez lesz az az „első" kép, melyből, a gúlánál részletezett eljárás mintájára, ki fogunk indúlni, hogy a „második" képet megszerkeszthessük.

Tegyük azért a hasábot a negyedik rajzlap *I 28.* ábrájában az első képsíkra és rajzoljuk le derékszögű képben.

Az álló élek mindannyian derékszögű négyszögek oldalai lévén, merőlegesek [1] a képsíkra, és *I 1* szerint az *ABCDEF* pontok alatt álló élek egy-egy pontnak mutatkoznak, úgy hogy lerajzolásuknál a *II 1.* ábra alsó felében az *A'B'C'D'E'F'* hatszögben, amint már hozzászoktunk, első képben egész hasábot kell látnunk, melynek *ABCDEF* hatszöge egyenlőközű az első képsíkkal.

---

[1] Minden ilyen él két-két, a talppontján átmenő egyenessel derékszöget képez, tehát *I e* [4] szerint merőleges az első képsíkra.

Hogy azután a hasábot második képben is ábrázolhassuk, mindent úgy, mint az *I 20—I 22.* ábrákban, felemelünk.

A képsíkot tehát a hasáb körül YX kivételével $YZZX$ idom mentén kivágjuk és merőleges helyzetbe felemeljük. Az *I 29.* ábrában bemutatott fokozatos felemelés után $ABCDEF$ a mindjárt egyesítő *II 1.* ábrában $A''B''C''D''E''F''$-vel megkülönböztetve, az átmenő vonalak ismeretes tulajdonságánál fogva, épen $A'B'C'D'E'F'$ fölé került.

Ebben az egyesített képben *II i* szerint az első képsíkra merőleges és egyenlő távolságok vagy élek valódi nagyságukban mutatkozván, $A''B''C''D''E''F''$ egy egyenesbe esik.

Az egyesítő ábrát lehetőleg többszörösen nagyítva rajzoljuk meg, csakhogy, amint említettük, $YZZX$ idomot, amely nem okvetetlenül szükséges, és a felemelt képsík görbülését is, elhagyhatjuk.

m. *A szabályos négyszög a kockán.* Ha az előbbi hatszög helyett szabályos négyszögből indultunk volna ki, négyoldalú hasábot ábrázoltunk volna, és ha ennek magassága akkora mint a négyszög oldala akkor *II 2.*-ben „kocka" áll előttünk. A kockát egy élével az első képsíkra helyezve és az első képsík felemelését figyelemmel követve, a *II 3.* ábrában a kocka ábrázolásának épen ellenkező eredményét látjuk.

n. *A szabályos 8- és 16-szög hasábon.* A *II 2.* ábrában a szabályos négyszöget úgy vettük fel, hogy egy, a tengellyel egyenlőközü AB átmérőből indultunk ki. Ily módon szabályos nyolcszöget rajzolva, nyolcoldalu hasábot nyernénk két képben.

Vegyünk fel most szabályos 16-szöget, akkor a *II 4.* ábra, ha az előbbieket gondolatban ismételjük, puszta megtekintéséből is érthető. AB benne egyenlőközű ismét YX tengelylyel.

o. *A kör hengeren.* Az előbb említett AB átmérőből kiindulva, szabályos 16 szögből 32 szöget és ebből 64 szöget, stb. szerkesztve, mind több- és többoldalú hasábot nyerünk. Ezt az eljárást a végtelenig gondolhatjuk folytatva és akkor a *II 5.* ábrabeli „henger" származik.[1]

---

o [1] Az iparban úgy készíti a hengert pl. az asztalos, hogy a 6- vagy 8-oldalu hasábból az élek legyalulása által, 12-, 16-oldalut stb. készít.

p. *Ellenkező képek.* Ha most végig tekintünk az előbbi ábrák síkidomain és egyenesein, sajátságos összefüggést találunk a két kép között.

A *3.* rajzlap *I 25.* ábrájában pl. *APD* háromszög egyenlőközű a második képsíkkal és az első képben az átmenő vonalakkal derékszöget képező[1] egyenesben mutatkozik. Viszont a *II 1.* vagy a *II 5.* ábrákban a hatszög és a kör egyenlőközűek az első képsíkkal és ellenkezőleg a 2. képben látszanak az átmenő vonalakkal derékszögűeknek.

Ilyes összefüggést találhatnánk a képsíkra merőleges egyenesekre vonatkozólag is pl. a *II 2.* és a *II 3.* ábrákban.

A két kép között létező ez összefüggést pl. úgy fejezhetjük ki, hogy egyik kép a másiknak „ellenkezője,“ és ezáltal bizonyos megfigyeléseket rövidebben foglalhatunk össze. Igy a síkidomról röviden azt mondhatjuk: Ha valamely síkidom egyenlőközű az egyik képsíkkal, akkor az ellenkező képben derékszöget képez az átmenő vonalakkal.

A test két képben.

Az eddig előfordúlt ábrákból már számtalan testet tervezhetünk és állíthatunk össze; idején lesz, hogy mindezeket csoportosítsuk is.

r. *A hasáb, a henger, a gúla, a kúp és a gömb.* Az *I 28—II 4.* ábrák alapján végtelen sok hasábot alkothatunk. (Ezekhez tartozik a kocka is.) Mindez rávezetett a *II 5.* ábra körhengerére.

Épen így az *I 24, 25.* ábrákból kiindulva és *AD* átmérőnek a tengellyel való egyenlőközűségét szem előtt tartva, tervezhetünk és alkothatunk az I 26. ábrában 12, és ebből 24 stb., vagy 4 oldalból, 8, 16, 32 . . . oldalú gulákat; míg végül az *I 27.* ábrában „körkúp“ keletkezik és a második képben ismételve, az első rajzlap kúpjait még érthetőbbekké teszi.

A *III 3—III 5.* ábrák egy része szintén összefügg mindezekkel.

Viszont a már ismert körhenger révén ismét új testre térhetünk át.

---

p [1] A derékszög csak a képre szól, mert a térben pl. *AP* egyenest ferdének tudjuk, mely kiemelkedik a képsíkból.

A körhengeren a felső körrel egyenlőközű számtalan kört gondolhatunk. Ezek mind egyenlők egymással.

Ha pedig a „gömbön“ vagy golyón gondolunk ilyen az első képsíkkal egyenlőközű köröket,[1] azok mind különbözők és a *III 7.* ábra második képében egyeneseknek látszanak, első képben pedig a legnagyobbtól befelé a gömböt úgyszólván kidomborítják. Mindezt megfordítván, a *III 8.* ábrában a gömb könnyen felismerhető

s. *Feladatok.* 1. Készítsük el többszörösen nagyítva az eddig előfordult hasábok és gúlák hálózatát, szem előtt tartva *I 25.*-ből *AP* valódi nagyságát *A''P'*-ben.

2. Ábrázoljunk centiméteres lépték alapján 8-, 12- és 24-oldalu szabályos alapu gúlákat és hasábokat, kiindúlva abból, hogy a felosztandó kör átmérője, melynek végpontjaiban megkezdjük a felosztást, egyenlőközű a tengellyel, úgy mint az előbbi ábrák is mutatják; a gúlák és hasábok alapkörének küllője és a test magassága számokban meg vannak adva.

3. Fejtsük meg az előbbi feladatot oly alapkörökre vonatkozólag, melyeknek felosztását bármely pontjukban kezdjük meg és vegyük ennél tekintetbe a következő tételt:

t. *Tétel a látható és elfödött élek megállapítására.* Az eddig megismert testekkel és számokban kifejezett adatok alapján két képük fölkeresésével, bizonyos gyakorlati céloknak megfelelően már befejezetteknek tekinthetnők elemi ismereteinket, mert bármelyikét a kérdéses testeknek és ezzel reájok visszavezethető számtalan tárgyat, a megfelelő helyzetben, két képben le tudunk rajzolni; sőt a két kép alapján hálózatukat vagy testmintájukat a megbeszélendő tétel nélkül is elkészíthetjük. Ha azonban még a *3.* feladat szerint bármely helyzetökben is akarnók e testeket ábrázolni, akkor ismereteinket még a következőkkel kellene kiegészítenünk:

Ha valamely elkészített testmintát tetszésszerinti helyzetben megnézünk, akkor már figyelmünket arra is kell terelnünk, hogy a testeknek csak bizonyos oldallapjait és éleit láthatjuk, mert a többi élt maga

---

[1] Hogy ezek valóban körök, azt abból látjuk, hogy pontjaik a gömb középpontjával összekötve, körkúpot adnak, ha mindezt megfordítunk, a miből erre nézve kiindúltunk.

a test elfödi; a képekben azonban még ezeket az éleket is fel fogjuk tüntetni és pontozással megkülönböztetni, mintha a test pl. nem fából lenne, hanem áttetsző volna.

Lássunk azonban egy példát.

Vegyük mindjárt az *I 25.* ábrát szemügyre és vizsgáljuk meg, a gúlának mely éleit lehet látni és melyek az elfödöttek. Az első képben erre nézve kétségünk nincs; ebben az alapéleken kívül mind a hat oldalél is látható, de már a *2.* képben kérdés, hogy melyik oldalélét látjuk. Ha testmintánkat a *2.* képnek megfelelően szemünk elé helyezzük, azt látjuk, hogy a szélső éleken kívül, melyek az A'' és D''-ben látható pontokból emelkednek ki, még az E'' és F''-ben mutatkozó pontokból kiemelkedők is láthatók.

Hogyan állapítjuk mármost meg e pontokat, amelyek az AB átlón innen vannak? Ha a testmintát fokozatos forgásában, mint amilyet a *2 I 8—2 I 11.* ábrák tüntetnek fel, figyelemmel kisérjük és magunkat mindig az AD átlón innen gondoljuk, ha már a test az előbbi első képbe került is vissza: akkor ebben az E és F pontokat a *3 I 25.* ábrán úgy is állapíthatjuk meg, hogy derékszögben az AD átszögelő vagy YX tengely felé nézünk. Ezt végül még nyíllal is feltűntetjük.

A nyil irányában tehát YX tengely felé nézve, a *6* pont közűl E és F lesznek a láthatók, míg B és C a *2.* képben az elfödöttek közé tartozván, az ezekből kiemelkedő oldalélek hátul vannak, amelyek azonban mégsem pontozhatók itt, mert épen a kihúzottak mögé jutottak. Ugyanazt ismételjük pl. a *4 I 28.* vagy *4 II 4.* vagy megfordítva a *4 II 3.* ábrán, ahol a nyílak mindjárt útbaigazítanak és a következő tételre vezetnek:

A látható és elfödött élek megállapítására az előbbi, vagy ellenkező képben a tengely felé nézünk.

Ezt világossá különben csak többszörös gyakorlat teheti, amelyben eleinte testmintánkat is segítségül vesszük és róla, a kellő helyzetbe téve, mindent leolvasuuk.

Példákat látunk még a *4 III 4.* és *4 III 5.* ábrákban is.

Igy mármost ezzel a tétellel együtt összesen 5 tételben foglalhatjuk össze ismereteinket, melyek gyakorlati célok elérésére teljesen elégségesek. A két alaptételen kívül tehát a távolságok mérésére és a képsíkkal egyenlőközű idomra, volt két tételünk; az iménti tétel pedig ötté egészíti ki azokat.

Ezzel az 5 tétellel és a *IIr*-rel jelölt bekezdésbeli 5 testtel, egy nagyobb körű egész birtokában vagyunk, mely alsóbb foku tanintézetek befejezett anyagaképen számtalan feladat megfejtését foglalja magában.

Ha azonban magasabb célokat tűzünk ki magunknak, akkor a *IIs* bekezdésbeli feladatok önálló szaporitása és alapos begyakorlása után még egy további fokozattal is meg kell ismerkednünk. Ezt megelőzőleg következzenek végül még egyszer a szükséges tételek.

Tételek.

II1. *A távolságokat az ellenkező képben mérjük meg.*

II2. *Ha valamely egyenes vagy síkidom az egyik képsíkkal egyenlőközű, tehát valódi nagyságában tűnik fel, akkor az ellenkező képben az átmenő vonalakkal derékszöget mutat és egyenesnek látszik,*

ha pedig az egyik képsíkban fekszik, akkor ellenkező képében a tengelyen látható.

Megfordítva: Az átmenő vonalakkal derékszöget képező egyenes, ellenkező képben valódi nagyságában mutatkozik.

Arra a kérdésre pedig: Hogyan állapítjuk meg, mely élek láthatók és melyek az elfödettek? a következő tételben így válaszolhatunk:

III. *A látható és elfödött élek megállapítására az előbbi képben a tengely felé nézünk.*

III. *Három kép. (Előbbi képből harmadik új kép fölkeresése.)*

Bevezetés.

Megismerhetünk valamely testet a legtöbb esetben részletesen két képből is, előfordúlhat azonban, hogy a testet újabb oldaláról kell bemutatnunk, hogy pl. egyes lapjai vonalaknak mutatkozzanak. Értsük ezt meg jobban a következőkből.

A pont.

a. *A pont három képben.* Helyezzünk ismét a 4. rajzlap *II 6.* ábrájában hatoldalu gúlát a képsíkra, de távolabb a tengelytől, és rajzoljuk le a *III 2.* ábra alsó felében. Emeljük most a gúlát fel az első képsík segítségével *YX* tengely körül a *II 7.* és *II 8.* ábrák szerint, egészen úgy mint a *3 I 19—22.* ábrákban. A *II 8.* ábrabeli felemelés bevégeztével pedig rajzoljuk le ismét e második képet még a *III 2.* ábra felső felében is, *II i* tekintetbe vételével, mely szerint t. i. a gúla magassága valódi nagyságát mutatja.

Ennek megtörténte után egy egészen új lépést teszünk előre. A felemelt képsíkot a gúlával együtt eredeti helyükbe visszaforgatva, a *4 II 9.* ábra szerint az első képsíkrész határvonalát *YX* mentén is bevágjuk és azután mindent nem *YX* tengely körül, hanem most *XZ* egyenes körül emelünk fel.

4 II 10.-ben a gúla még emelkedőben van és további mozgásánál teljesen ugyanaz ismétlődik most *XZ*-re vonatkozólag, mint előbb *II 6—II 8.*-ban vagy akár az *I 19—I 22.* ábrákban az *YX* tengelyt illetőleg.[1]

Midőn e fokozatos felemelés után *II 11.*-ben a képsík szintén merőleges helyzetbe jutott egészen úgy mint *II i*-ben, a gúla magassága is ismét valódi nagyságában látszik.

b. *Előbbi képből 3. új kép fölkeresése.* Nem lesz most már nehéz az új kép és a régiek közötti méretbeli összefüggést is meghatározni, hogy egyszersmindenkorra megállapíthassuk, hogyan keressük fel tehát az új képet az előbbiből. Nyilvánvaló ugyanis, hogy a gúla magasságát, mely az új képben változatlanul jelenik meg, egyszerűen az előbbi, első képnek ellenkezőjéből, a másodikból, az új képbe „átmértük“ és így nyertük a P''' jelzéssel megkülönböztetett új képet.

Az alaphatszög pontjai pedig úgy mutatkoznak, mint azt az *I 25.* és *III 1.* ábrákban az átmenő vonalak eredményezik. Itt tehát ugyanazoknál az okoknál fogva az új *XZ* tengellyel derékszöget képező átmenő

---

a [1] Még könnyebben érthető ez, ha a rajzlapot oly helyzetbe elforgatva tartjuk magunk előtt, hogy most *XZ* egyenes legyen körülbelül vízszintes.

vonalakat húzunk; a P'-en át haladót az XZ tengelyen túl is meghosszabbítjuk és a tengelytől számítva átmérjük rá az előbbi első képnek ellenkezőjéből, a másodikból, a távolságot és P'''-at összekötjük az XZ tengelyben látszó többi ponttal. Végül mindent ismét az egyszerűsített *III2.* ábrában egyesítünk.

Épen úgy, mint a P pontot, vehetnénk fel más gúlákkal még akárhány pontot a térben; ezekre nézve szintén az előbbi összefüggés irányadó.

c. *Elnevezések.* Ez új 3. képre nézve tehát mindent részletesen ismételhetnénk, amit két kép összefüggését illetőleg megfigyeltünk; emez, a haladáshoz egyébiránt szükséges ismétlést azonban képzelő erőnk próbájaképen hely szüke miatt magánmunkálkodásunkra bízzuk, és itt csak az eredményt foglaljuk össze röviden a következőkben:

Az első és a harmadik kép között az átmenő vonalak derékszöget képeznek az XZ tengellyel. Az első kép a harmadikra nézve és viszont a *3.* az 1.-re nézve „ellenkező képek“.

A vonal három képben.

d. *Szemlélet.* Mindezek alapján a gula egyes pontjait a *3.* új képben tehát szabatosan fölkerestük, a gúla oldaléleinek kihúzásánál azonban ismét még a *III.* tételre van szükségünk, mert, ha a gúla elkészített testmintáját ebben az egészen új helyzetben megszemléljük, akkor megint azt látjuk, hogy a fölkeresett pontok közűl többen a gúla P csucsával összekötve oly éleket képeznek, melyeket a gúla teste elföd, és így ez éleket nem látjuk.

e. *Látható élek.* Ha mindazt ismételjük, ami a *III.* tételre vezetett rá, itt is azt találjuk, hogy a kérdéses élek megállapítására a nyíl irányában most az XZ tengely felé kell néznünk.

f. *A síkidom és test három képben.* A síkidomot három képben épen úgy követhetjük figyelemmel, mint ahogyan az 2 képben történt.

g. Bármelyik test ábrázolása sem okozhat nehézséget, akár két, akár három képben akarjuk feltüntetni.

h. *Oldalképek.* A gyakorlati tárgyaknál az iparban, a műegyetemi tudományokban stb. az előbbeni harmadik kép tengelye helyett, (mely kép XZ tengely megválasztása szerint nagyon változatos a mennyiben az *YZZX* idom tetszés szerinti volt) csak állandó irányu oly *XZ* tengelyt használunk, mely épen derékszögű az *XY* tengellyel.

Azért ily különleges céloknak megfelelően az előbbeni harmadik kép ismeretét teljesen elhagyhatjuk és helyette az egész III. fejezetben a *IIIa* bekezdéstől fogva eddig, — mindenütt a *4II9—4III2.* ábrákat az *5II9—5III2.* ábrákkal helyettesítve, — az *5III2.* ábrában a különleges elnevezéssel használatos „oldalképet" nyerjük.[1]

Az *5.* rajzlap ez ábrájában az oldaltengely egyszersmind az *AD* átmérővel is derékszöget képezvén, e harmadik oldalkép a második rendes képtől lényegesen különbözik.

Minthogy azonban a gyakorlati tárgyak ilyen harmadik képben szokatlan helyzetüek, azért ezt az oldalképet az *5III3.* ábrában természetesebb helyzetbe forgattuk.

Ez ábra szerint, nagyobbított arányokban mennél több hasonló példát kell kidolgoznunk, hogy túlságos takarékossággal kimért rajzainkat önálló gyakorlásunkra bőségesen kiegészítsük.

Erre nézve a következő feladatok szerint is választhatunk számtalan példát, sőt elő nem fordúltakat is, hogy rajtuk próbára tegyük haladásunkat.

Igy számtalan esettel megtoldva az eddigieket, a képekből a hálózatokat és magukat a testeket is elkészítjük, sőt megfelelő gyakorlat után ily képekben már tárgyakat is tervezhetünk, hogy e tervezések alapján azután a tárgyakat papirlemezből, vagy azt kitöltő gipszből, esetleg fából vagy más anyagból aránylag kicsinyben megalkossuk és öntudatossá tegyük azt, hogy eddigi ismereteink gyakorlati szempontból is egy újabb és már magasabb fokozatot képeznek, melyen, amint emlitettük, bizonyos céllal szemben elég volna a harmadik képekből csakis az oldalképeket ismernünk.

i. *Feladatok.* 1. Ábrázoljunk centiméteres lépték alapján 8-, 12- és 24-oldalu gúlákat oly módon, hogy az a küllő, melyből a beosztásnál kiindulunk, még egyenlőközü legyen a tengellyel és határozzuk meg harmadik képüket és hálózatukat.

---

h [1] Lásd *III a* [1].

2. A *4.* rajzlap *III 3.* ábrájából keressük fel a *4*-oldalu gúlát második és harmadik képben, továbbá hasonló módon felvett más gúlákat is, *XZ* tengely tetszésszerinti helyzetével.

3. Rajzoljuk meg az eddig előfordult testeket más helyzetükben is, és gyakoroljuk magunkat az oldalkép (vagy tetszés szerinti harmadiknak) fölkeresésében és a látható és elfödött élek megállapításában.

Tételek.

III 1. *A látható és elfödött élek megállapítására az előbbi képben a tengely felé nézünk.*

III 2. *Előbbi képből új képet úgy keresünk fel, hogy a távolságokat az előbbi képnek ellenkezőjéből átmérjük.*

IV. Nyompont és nyom.

Nyompont.

Az eddig előfordúlt elnevezéseket kiegészitjük egy újabb fogalom megjelölésével, midőn a testeken látható egyenes vonalakon egy különleges pontot választunk ki.

a. *Az egyenes nyompontja.* Így nevezzük el pl. a *4 III 1.* ábrabeli gúla egy-egy élének, *AB*-nek azt az *A* pontját, amelyben az egyenes él a képsíkot éri.

Valamely, az első képsíkon álló 3-, 4-, 5-, 6- . . . oldalú gúla oldaléleinek „nyompontjai" tehát az első képsíkban levő A, B, C, D, E, F . . . X pontok.

Hasonló jelenséget mutat a gúlának valamely háromszöge ott, ahol az az első képsíkot metszi, ez a síkidom, vagy sík „nyoma".[1]

b. *A nyompont fölkeresése.* Nyompontokkal az eddig ábrázolt testeknél igen gyakran találkozunk, de vannak esetek amelyekben a nyompontot fel kell előbb keresnünk.

Az *5.* rajzlap *V 14.* ábrájában pl. a két gúla csúcsát összekötő egyenesre nézve az ábra közvetlen szemlélete rávezet, hogy hol metszi az egyenes az első

---

a [1] Nyomokat idéz elö pl. a szekér nedves talajon. A sík nyomában minden, a síkban fekvö egyenes nyompontja foglalható össze.

képsíkot; úgy hogy ebből, épen úgy mint a *4 III 1.* ábrából, azt látjuk, hogy pl. *AB* egyenes *A* nyompontját oly módon keressük fel, hogy az egyenesnek és a tengelynek az ellenkező második képben mutatkozó látszólagos metszőpontjából átmegyünk az első, előbbi képbe.

Nyom.

c. *A sík nyomának meghatározása.* Ha azután oly feladatokról volna szó, hogy pl. az *5.* rajzlap *IV 2.* ábrájában látható gúla síkjait egészen az első képsíkig meghosszabbítsuk, akkor csak az előbbi feladatot ismételten kellene megoldani, a talált nyompontokat összekötni, és a tengelyen innen maradni, hogy a nyomot a második képpel össze ne zavarjuk. A *IV 2.* példában látjuk még, hogy ott a nyomok egy nagyobb gúlává hosszabbítják meg az eredetit, melynek alapja az első képsík előtt áll.

Feladatok. A IV 2. ábrához hasonlóan keressük meg több példában az 5- és 6-oldalú gúlák síkjainak nyomait, ha a gúlák alapja az első képsík előtt áll.

Tételek.

IV 1. *A nyompont fölkeresésénél, az egyenesnek és a tengelynek az ellenkező képben mutatkozó látszólagos metszőpontjából átmegyünk az előbbi képbe.*

IV 2. *Valamely sík vagy síkidom nyomát meghatározzuk, ha egyeneseinek nyompontjait a tengelyen innen maradva, összekötjük.*

V. Tengelyek.

Új, derékszögű tengely.

a. *A síkidom olyan új képben, melyben egyenesnek mutatkozik.* Amivel a III. fejezet bevezetésében foglalkoztunk, azt most a *8.* rajzlap *XI 2.* ábrájában valóban meg is tettük, a mennyiben egy négyoldalú gúlát oly *3.* új képben kerestünk fel, amelyben két háromszög lapja egyenesnek mutatkozik. Hogy ez bekövetkezzék, az *XZ* tengelyt úgy kellett választanunk, hogy derékszöget képezzen a gúla háromszöglapjának nyomával; ez a nyom akkor harmadik képben pontnak látszik, és vele együtt, úgy mint

Ik- és *In*-ben, az egész háromszög egyenesben mutatkozik. Minderre önként rájövünk, amikor egyszerűen a gúlát e harmadik képben fölkeressük.

Ily példát egyébiránt már az *5 III 2.* ábrában is láttunk.

Derékszögű tengelyre nézve fölkeresett kép segítségével pl. a gúla bármely oldalháromszögének magasságát, mint *XI 2.*-ben *BD*-t, meghatározhatjuk, mert ennek első képéből látjuk, hogy *D* harmadik képben épen akkora távolságban lesz a képsíktól, mint a gúla valódi nagyságában mutatkozó *BO* magasságának *O* talppontja.

Eltolt tengely.

b. *A tengely eltolása.* Az *V 3.* ábrában a *IV 2.* ábra még egyszer szerepel. Ez tulajdonképen ismét a megelőző *4 III 4.* ábrabeli gúla, csakhogy alapja az *1.* képsík előtt bizonyos távolságban van.

V 3.-ban is ugyanazt látjuk, a térben lebegve. Ha mármost a tengelyt eltoljuk, hogy az *V 4.* ábra származzék, a gúla alakja és nagysága semmiben sem változik; csakhogy ha azt vizsgáljuk, hogyan is gondolnók ezt az *V 4.* ábrát keletkezettnek, az előbbiekhez képest csak arra a különbségre kellene ügyelnünk, hogy ebben az *V 4.* ábrában a gúla rajta fekszik az első képsíkon. A gúla alakja és nagyságára nézve minden ugyanaz maradt, csak helyzete változott, amidőn a tengelyt úgy toltuk el, hogy derékszögben maradt az átmenő vonalakkal.

c. *A képek eltolása és a tengely elhagyása.* Nem változik e test kiterjedésében akkor sem, ha *5 V 5.*-ben magát a második képet toljuk el az átmenő vonalak irányában, vagy akár *V 6.*-ban az elsőt, esetleg mind a kettőt. Mindezekről mennél több példában választott különböző testekre nézve kell meggyőződnünk. Ha azután több példával is próbálkoztunk meg, a végén az tűnik ki, hogy a test alakja- és nagyságára a tengely helye nem lévén befolyással, *a tengelyt akár el is hagyhatjuk,* csak az átmenő vonalak irányát ismerjük.[1]

c [1] Ipartárgyak ábrázolásánál ezek is elmaradnak, de irányukat ismerjük.

A tengely elhagyásával nem tettünk különben egyebet, mint, hogy a felemelt első képsíkot, a miután *segítségével* a második képbe átmentünk volt, ismét visszahelyeztük és így rajzlapunkon semmi változás sem mutatkozik, a tengely pedig elmosódott. Az 5 *V 6.* és *5 V 7.* ábrákban e szerint, ha tengely többé nincs is ott, a testet mégis egészen jól felismerhetjük.[1]

d. *Eltolt tengely utólagos felvétele.* Ha azután egy eltolt tengelyt ujolag felveszünk, akkor azzal a változatlanul maradt test a képsíkboz ismét határozott távolságba került; így toltunk el képeket és hagytuk el *4 II 3.* ábrából *5 V 7.*-ben a tengelyt, és felvettünk azután tetszésszerinti új eltolt tengelyt *5 V 8.*-ban.[2]

e. *A térnegyedek.* Ha így mindent ismét határozott tengelyre vonatkoztatunk, akkor végül még egy újabb megfigyelést is kell tennünk.

Eddig a tárgyakat mindig az első képsík előtt vettük fel. Gondolhatunk azonban pontokat, idomokat és testeket a képsík mögött is, és ezzel a megfigyeléssel a tért már kettéválasztottuk; ha pedig az első képsíkot felemeljük, még a „második" mögötti részre is kiterjeszthetjük figyelmünket és ez így végül négy térnegyedre vezet rá. Feloszthatjuk a tért még több részre is, sőt egy újabb tengellyel az előbbieket ismételve, a tér 8, illetőleg 16 stb. stb. részre oszlik.

Mindez azonban gyakorlatilag nem érdekel minket, mert a tengely eltolása által mindig könnyen áttekinthetővé tehetünk mindent.

f. *Gyakorlati tervezéseknél* a két vagy több képet eltolva gondoljuk, annyira, hogy egészen külön is

---

c [1] Ilyenkor már a két képsík megkülönböztetésének sincs többé értelme. Egyebekben sem okvetetlenül szükséges e megkülönböztetés, hisz mégis csak „egyetlenegy" rajzlapon dolgozunk. A megkülönböztetést azonban a már 100 éves, a tankönyvekben meggyökeredzett szokás kedveért fentartjuk; még akkor is, ha tengely nincs, az elsö, illetőleg *2.* kép mögötti részt, elsö, illetőleg *2.* képsíknak mondjuk.

d [2] A gyakorlati tárgyaknál a tengelyt rendesen el szokták hagyni, mint ahogyan erről lépten-nyomon meggyözödhetünk; ha pedig valamely különlegesebb tekintetben akarjuk megfigyelni a tárgyat, végül egy eltolt tengelyt a legalkalmasabb módon ismét úgy veszünk fel, hogy derékszögben maradjon az átmenő vonalakkal.

választhatjuk, úgy, hogy a tervező épitész, gépész stb. a házak, gépek terveit, összetartozó képeit, egészen külön lapokon ábrázolja; de azért az egyik képet a másikból mindig a képsík felemelése segítségével, forgatás által keletkezettnek gondolhatjuk, hisz a háznak, gépnek annyira kisebbitett képmásáról van szó, hogy az annak megfelelő kis testminta forgatása nem tetszhetik természetellenesnek.

Ha azután, amint említettük, valami különleges szerkesztésre van szükségünk, alkalmas eltolt tengelyt vévén fel, a szerkesztés befejeztével azt ismét elhagyjuk. A különálló rajzlapokat úgy tekinthetjük, mintha rajzlapunkat több részre vágtuk volna fel.

Feladatok. 1. Keressük fel a *4 III 5.* ábrabeli gúlát oly harmadik képben, melyre nézve a felvett új derékszögü tengely *AD* átmérővel képez derékszöget. 2. Tegyük ugyanazt a *4 II 1.* hasábbal. 3. Keressük fel a *4 II 2*-t oly harmadik képben, hogy az alapéllel derékszögü új tengelyt választunk.

Tételek.

V 1. *A sík- vagy síkidomra vonatkozó „új" derékszögü tengely egyenesre vezet.*

V 2. *A tengelyt és a képeket eltolhatjuk, a tengelyt elhagyhatjuk és tetszés szerint eltoltan ismét fölvehetjük.*[1]

MASODIK RÉSZ.

Más képek.

VI. Más derékszögű képek.

Bevezetés.

a. A tengely elhagyásával betetőztük úgyszólván a derékszögű képekre vonatkozó gyakorlati ismereteinket és velük általában beérhetnők már, mert a szemünk elé kerülő különféle derékszögű tervrajzok és ábrák megértésénél, akár csak valami írás volna előttünk, akadályba többé nem ütközünk.

V 2 [1] Röviden igy fogjuk ezentúl kifejezni: Vegyünk fel tengelyt.

Ha azonban kezünkbe vesszük a modern teknikai írás számtalan termékét, a civil és katonai tervrajzokat, mindenféle tengerészeti, gyáripari, kémiai természettani ábrát, az árjegyzékeket stb. stb., melyeket, ha mind szöveggel akarnánk megértetni, többszörös körülírás sem vezetne oly gyorsan célra, mint ez ábrák: akkor akadunk közöttük néha olyanokra is, melyek az eddig ismert képektől elütnek. Mindannyit azonban mindig a legfontosabbaktól, a derékszögüektől származtathatjuk le. Ilyenek pl. mindjárt a természet után felvett képek (fényképek), melyeket már Ig^2-ben említettünk és amelyekre később rátérünk még. Vannak azután ezeken kivül egyebek is, mik ritkábban fordúlnak ugyan elő, de hogy ismereteink teljesek legyenek, „más képekkel" is kiegészítjük még az eddigieket.

b. *Különleges derékszögű képek.* Az említett képek között vannak kiváltképen olyanok, amelyek közvetetlenül „derékszögüek", és ezeket fogjuk mindenekelőtt részletezni.

1. Egyenlőméretű képek. (Izométria.)

c. Ezek nem egyebek, mint a kockának egy sajátságos oldalképéből származtatott ábrák.

A kockának e kérdéses oldalképe a *4 II 3.* vagy az *5 V 10.* ábrából vezethető le.

Ezekben az ábrákban a kocka egyik élével az első képsíkon fekszik. Ha ez első képben egy, a kocka *AB* átlójára nézve új derékszögü *XZ* tengelyt választunk, akkor a kocka harmadik képe a keresett egyenlőméretű kép. Az új kép azonban egy sajátságos új „második" kép is lehetne, ha *5 V 9.* szerint az *5 V 10.* ábra első képét még egyszer más helyzetben lemásolnók. Ebből a helyzetéből, melyben élével még mindig az első képsíkon fekszik, a második kép könnyen meghatározható, minthogy az első képsíktól számított távolságok ugyanazok maradnak. Ha már most *A'B'* átló derékszöget képezne az *XY* tengellyel akkor a második kép szintén az egyenlőméretűt mutatná. Hogyan keressük fel ezek után az egyenlőméretű oldalképet? Ezt *III 2.* szerint meghatározva és *III 1.* szerint kihúzva, meglepő eredményre jutunk.

Minthogy az *A* és *B* pontok átmért távolságai egyenlők, a kocka átszögelője tehát *A'''B'''*-ben egy pontban mutatkozik; a többi pont a magánszorgalomra bízott megfigyelés eredményeképen oly különös módon sorakozik, hogy a harmadik kép szabályos hatszöget mutat. E meglepő eredményt már a legrégibb időben is ismerték, amint azt az egymás mellé helyezett kockákból összeállított kirakott munkák bizonyítják.

Ebben az egyenlőméretű oldalképben a kocka élei egyenlőknek mutatkoznak ugyan, de kisebbeknek mint a valóságban; azért, ha az egész sajátszerű képet *5 V 11.*-ben úgy nagyítjuk, hogy az élek valódi hosszát lássuk, (melyet *5 V 10.*-ben mérhetünk meg), akkor oly becses képet kapunk, melyen a térbeli három főirányu méret képben is teljesen ugyanaz.

d. Hogy ilyszerű képek becses voltát legalább egy kis példában feltüntessük, *5 V 11.*-et *7 VI 1.*-ben a nyíl irányában nagyobb méretekben lemásoltuk, és az élek irányát szem előtt tartva a *6 V 23.* alapzatra alkalmaztuk, amelyből a méreteket egész egyszerűen valódi nagyságukban átvittük.

Igy tervezhetnénk mindjárt egyetlen-egy képben közvetetlenül, és aki tervünk szerint a tárgyat valóságban megalkotja, az a méreteket mind, esetleg arányosan nagyítva, szintén közvetetlenül, akár egy mellékelt lépték szerint, leméri.

2. Általános derékszögü képek.

e. *Építészeti tervrajzok.* Az építészeti tervezéseknél rendesen első, második és oldalképeket használunk, csakhogy ezek jobbára egyszersmind metszetek is, hogy az épület egyes részeibe jobb betekintést nyújtsanak. Az „alaprajznál" pl. az épületet a talaj szinétől ablak magasságnyira úgy gondoljuk elmetszettnek, mintha az csak addig épült volna még, és ezen a fokon kicsinyítve elkészítettük első képét pl. a *6 V 23.* ábra alsó felében. Második képben ez gyakorlatilag nem szerepel; második képben az egész épületet mint „homlokzatot" ábrázoljuk. Az épitész készít továbbá hosszmetszeteket, oldalképben keresztmetszeteket, pince, emeletek alaprajzát, födélszéket feltüntető terveket stb.

f. *Helyszínrajzok stb.* Ha épületek, gyártelepek környékét, vagy egész vidékeket *Ig* [3] szerint felmérünk, akkor első képben ábrázolunk, sőt vannak tér-„képek" is derékszögü egy képben (orthographia). És van még számtalan eset, ahol a derékszögü ábrázolást egész általánosságban alkalmazzuk.

VII. Különleges ferdeszögü képek mint árnyékok.

Bevezetés.

a. Az eddigiekhez hasonló, és tőlük lényegileg mégis különböző képeket szintén minduntalan látunk, de tudatosan csak akkor használhatjuk, ha tekintetbe vesszük, hogy ezeknek szerkesztésére a tárgyak árnyékai vezetnek rá.

b. *Árnyékképek.* Az árnyékok szerkesztése egészen külön nagy terjedelmü tudomány, de nem lesz lehehetlen vele e kis munka keretén belül is annyira megismerkednünk, hogy eredménnyel gyakorolhassuk.

Tekintsük meg erre nézve még egyszer az 5 *V 14.* ábrát. Ott a két gúla csúcsát egyenessel kötöttük össze és annak nyompontját kerestük volt fel. Gondoljuk ezután, hogy a négyoldalu gúla csúcsa világító pont, akkor a nyompont a gúla csúcsának árnyéka [1] az első képsikon.

Ezt az *5 V 15.* ábrában mindjárt változatosságból megfordítva, kockára látjuk alkalmazva.

c. *Egy pontból megvilágított tárgyak árnyéka.* A megelőző ábra révén ezentúl már akárhány árnyékot szerkeszthetünk, mert ez mind nem egyéb, mint a nyompont ismételt fölkeresése.

d. *Napvilágította tárgyak árnyéka.* Gondoljuk ezekután *5 V 15.*-ben a gyertya fénysugárzó pontját a nyil irányában mind nagyobb és nagyobb távolban, akkor a fénysugarak mindinkább egyenlőközüek lesznek; míg végül, ha a gyertyát végtelen nagy távolságban gondoljuk, a fénysugarak mind egyenlőközüekké válnak. Ilyeneknek vesszük a nap sugarait is.

e. *Napvilágította kockák árnyékára* példákat az *5 V 16.* és *5 V 17.* ábrák mutatnak, ahol a napsugarak különleges irányúak; általánosabb irányú napsugarakra pedig, a *6 V 21.* és *6 V 24.* ábrák. Ez utóbbi ábrákban meg a kocka különleges helyzetü.

6 V 24.-ben a kocka haszonló helyzetű az *5 V 8.* ábráéhoz, míg a *6 V 21.* ábrabeli helyzetet az *5 V 9.*-beli második kép eltolásával vettük fel.

---

b [1] Ezt megmutathatjuk, ha testmintánkat a rajzlapra helyezzük és a négyoldalu gúlát gyertyával pótoljuk.

f. *Különféle testek vetett árnyékát* a *6 V 18.* a *6 V 19.*, a *6 V 20.* és a *6 V 23.* ábrák mutatják be.

Mindez ábrák magyarázatát a képzelő erőt gyakorló önmunkásságunkra bízzuk.

1. Egyenlőközü távlat kis tárgyakra.

g. *Ferdeszögű világítás.* Az előbbi példák egyikében sem fordult elő olyan eset, hogy a nap sugarai egyszerűbben, merőlegesen, vagy derékszögben érték volna a képsíkot; mindannyian „ferdeszöget“ képeztek a képsíkkal.

h. *Egyenlőközü távlat kis tárgyakra, mint ferde világítás eredménye.* Ha ama példákból az *5 V 16.*-ot közelebbről szemügyre vesszük és a vetett árnyékot úgy húzzuk ki, mintha a nap oldaláról néznénk a kockára, akkor az árnyék éleit láthatóan és elfödötten tüntetvén fel, csaknem természetes benyomást tevő képet kapunk. Ezt fogjuk „egyenlőközü távlat“[1]-nak hívni.

A kérdéses ábrát még a nyíl irányában nagyítva, *7 VII 1.*-ben lemásoltuk. Látjuk, hogy benne a kocka két irányú mérete valódi nagyságában mutatkozik, a harmadik pedig attól függ, hogy miképen vettük fel a napsugarak irányát.

A kocka álló élei ugyanakkora árnyékot vethetnek, mint amilyenek a valóságban, de akkor a kocka képe, nagyon eltorzúl.

(Ezt is lehet izométriának nevezni.)

Meredekebb világítás mellett pedig vethetnek $^1/_2$-szer, $^1/_3$-szor stb. kisebb árnyékot.

Bármilyen legyen egyébiránt a világítás iránya, nagyobb méretű képek nem mutatkoznak természeteseknek, azért ily fajta képeket csak kisebb tárgyak ábrázolásánál használunk. Ilyen ábrákat látunk a mennyiségtani, ásványtani és egyéb tudományos könyvekben. Kisebb ipartárgyakra kiválóan alkalmas az egyenlőközű távlat, amint *VII 1.*-ben látjuk.

2. Katonai távlat.

i. Nagy kiterjedésű tárgyaknál, mint amilyenek

---

h [1] Más nevei: parallel projectió, klinogálís projectió, parallel perspectiva, perspective cavalière stb. és alig fordul elö a világirodalomban mint axonometria.

a helyszínrajzok, katonai [1] erődítések, stb. (ritkán ugyan) oly távlatot használnak, mely szintén eltorzítja a tárgyakat, de ha a művészi benyomást mellékesnek kell tekinteni, gyors eljárásnál kiválóan „célszerünek“ mondható.

Az *5 V 17.* ábra ugyanoly kiindulással, mint a megelőző távlatnál, a „katonai távlat“-ra vezet rá.

5 V 17.-ben a napsugarak oly irányuak, hogy a kockának az első képsíkra merőleges éleit, az árnyék valódi nagyságukban mutatja. Ezt az árnyékképet is a nyíl szerint *7 VII 2.*-ben lemásolva, mindjárt az előbbi alapzatot terveztük szerinte.

VIII. Általános ferdeszögű képek.

1. Tengelyméretű képek. (Ferde akszonométria.)

a. *6 V 21.*-ben a kocka *5 V 9.* szerint általánosabb helyzetű mint eddig. Árnyékában az egy pontban találkozó élek többé nem mutatkoznak egyenlőknek. Ha ez árnyékot *6 V 22.*-ben ismét képre használjuk fel, ez csak abban az esetben lenne gyakorlatilag is hasznavehető, ha a kockát oly helyzetben vennők fel, hogy árnyékában pl. két irány egyenlőnek, a harmadik pedig épen $^1/_2$ vagy $^1/_3$-ad-résznyinek mutatkozzék. Ezzel később részletesen foglalkozván, most csak az eredményt mutatjuk be a *7 VIII 1.* ábrában és e szerint mindjárt alapzatunkat is elkészítjük. Ezt úgy is szemléltethetjük, ha drótból készült kockát a nap világosságának teszünk ki és vetett árnyékát megfigyeljük. Minthogy ily képeket a természettudományokban, különösen az ásványtan jegeceinél bőven alkalmazunk, [2] azért, a kockánál is megkülönböztethető három irányu méretnek, mint három főtengelynek megfelelően, képeinket „tengelyméretű“-eknek (akszonométria) nevezzük, mert a 3 főtengely irányában mérjük meg a valódi vagy arányos méreteket. Lehetne „kétméretű“, ha kettő egyenlő, háromméretű, ha a méretek különbözők, és itt is származhatik egyenlőméret. (Dimetria, trimetria,

[1] A katonai távlatot (perspective militaire) néha madártávlatnak is nevezik.

[2] Egyszerübb esetekben azonban beérjük az egyenlőközű távlattal.

isometria) Ezek közűl, ha a szerző ajánlotta *7 VIII 1.* ábrabeli tengelyméretet használjuk, kis és nagy tárgyakra egyaránt szép képeket létesíthetünk.

b. *Derékszögű tengelyméret.* (Ortogonális akszonométria.) Erre a derékszögű képek fölkeresésénél önkéntelenül is rájövünk. Ritkán alkalmazzuk a méretek különbözősége miatt; csak ha a 3 méret egyenlőnek mutatkozik, akkor használjuk a már ismeretes „egyenlőméret"-ben (izométria). Derékszögű tengelyméretet végtelen sokat készíthetünk, különösen csinosabb fajtájából, ahol két méret nem egyenlő, ha úgy, mint *5 V 12.*-ben, olyan kockából indulunk ki, mely első képben jobban hajlik az egyik, mint a másik oldal felé. Ha ennek egy tetszésszerinti harmadik képét keressük fel *5 V 13.*-ban: kész a derékszögű tengelyméret.

2. A saját árnyék megállapítása tengelyméret szerint.

c. A nagy birodalmu árnyéktannal a magunk erejéből is megbírkózhatunk, ha mármost a vetett árnyékon kivül azt is vizsgáljuk, mely részei a testnek vannak saját árnyékban és melyek vannak jobban vagy kevésbbé megvilágítva: akkor el tudjuk majd késziteni az egész egyesített képet.

Mindez pedig igen egyszerű megfigyelésen alapszik.

Ha pl. *6 V 21.*-ben azt kérdezzük: a kocka mely lapjai vannak saját árnyékukban? erre igen könnyen válaszolhatunk, ha vetett árnyékát *6 V 22.*-ben mint tengelyméretű képet, a nap felől nézzük és a képet aszerint kihúzzuk. Amely lapok ugyanis *6 V 22.*-ben mint a nap oldaláról nézve, láthatóknak vannak feltüntetve, azok a kockán meg vannak világítva, viszont, amelyek mint elfödöttek (III 1) szerepelnek, azok bizonyosan saját árnyékban vannak. Sőt még azt is következtethetjük e tengelyméretből, hogy az a lap, mely az árnyékban aránylag nagyobb felszint mutat, az megközelítőleg nagyobb világosságban is részesül, míg ha pl. valamely lap mind keskenyebb és keskenyebb árnyékot vet, az sötétebb; úgy, hogy ha végül az árnyék egyenessé szorul össze, a megfelelő lap teljesen sötét marad.

A megelőző elmélkedések elégségesek arra, hogy úgy, amint azt ábráink mutatják, mi is már öntudatosan árnyékolhatnók vagy inkább kiszinezhetnők rajzainkat, (mert a csikozó árnyékolás kizárólag alkalmazva szemrontó lehet).

Két képben a másodikat az első szerint árnyékoljuk. Amilyen sötétnek vesszük a tárgy valamely lapját első képben, épen olyannak vesszük azt második képben; ha azonban több képről, esetleg nehezebb meghatározásról volna szó, a dolgot egyszerűen megfelelő megvilágított testminta szerint, vagy pontosan a *10.* rajzlap értelmében rendeznők be, amiről annak idejében a 10. rajzlapnál szó lesz majd.

A képsikot és a rá vetett árnyékot a testtől és saját árnyékától más színnel is különböztetjük meg és ha a különböző testeket szintén többféleképen kiszínezzük, meglepő hatást érhetünk el. Még bámulatosabb e hatás, és a könnyenértésre rendkivül nagy befolyással van az, nagy fekete táblákon. Ilyeneknél színes krétával a szerző már évekkel ezelőtt, szép eredményt ért el. Rajzainkat mindazonáltal egyelőre csak tisztán kihúzva, csupán csak a látható és elfödött élek által kidomborítva, készítjük el. Gyakorlati rajzoknál árnyékolásra amúgy sincs idő. A mellékelt rajzlapokat pusztán a könnyebb megérthetés végett árnyékoltuk és ezek alapján az árnyékra inkább csak elméletileg, a különféle „más képek“ megértéséhez volt szükségünk.

d. *Összefoglalás. Egyenlőközü képek.* Mindama képek tehát, melyek eddig előfordultak, kivétel nélkül napkeletkeztette árnyékokból vezethetők le; még a derékszögű képeket is úgy magyarázhatnók, hogy a napfényt a képsíkra merőlegesnek gondolván, a vetett árnyékokat részletezve és mint képeket kidomborítva, tényleg látott testeknek vesszük. A nap sugarait ilyen magyarázatnál vetítő (projiciáló) sugaraknak, és a képeket, projekczióknak nevezik. De ezt a felfogást csak később fogjuk érvényesíteni, mikor már teljesen megerősödtünk a szemléletben. Akár merőlegesek azonban a fénysugarak, akár ferdék, az ábrázolást egymással egyenlőközű sugarak létesitik, azért mindama képek:

„egyenlőközüen“ ábrázolt képek.

IX. Egy középpontból való ábrázolás.

1. Középponti távlat.

a. Ez ama távlat, melyről már a második rész bevezetésében volt szó, és melynek ábrái a legtermészetesebb képet keltik fel bennünk.

A középponti távlat képeiről később kimerítőbben lévén szó, itt csak annyit említünk, hogy azokat úgy is szerkeszthetjük, ha valamely tárgy elé megszáradt arab gummi oldattal bevont üveglapot helyezünk és erre a tárgyat egy pontból mozdúlatlanul tekintve, úgy amint az üvegen keresztül látjuk akképen ábrázoljuk, hogy egyszerűen minden látható vonalát krétával utána húzzuk.

Ha a tárgy pl. egy olyan kocka, mely egyik lapjával egyenlőközű az üveglappal, akkor az utánahúzás a *7 IX 1.* képet eredményezi, és ebben azt látjuk, amit az útcán a házak egyenlőközű vonalaira nézve is tapasztalunk, hogy az egyenlőközű egyenesek úgy mutatkoznak, mintha egy pontban, „az iránypontban" jönnének össze.

A négyzet átlója segítségével a kocka alapját kisebb négyzetekre osztva, benne könnyű bármily tárgyat, úgy amint a mi alapzatunkat, ábrázolni.[1]

b. Levezethetnők e távlati képeket is *5 V 15.*-ből ismét, mint árnyképeket.

2. Körképek.

c. Ha a megelőző kép keletkezésénél nem sík üveglapot, hanem üveghengert (4 II 5) használtunk volna, oly képekkel foglalkozhatnánk, mint amilyenek pl. a budapesti körképek. Ebben az esetben a szemlélő természetesen a hengeren belül áll, melyet a tárgyak főbbjeivel együtt a művész tulajdonképen előbb kisebbített mértékben derékszögű képben tervez. Ezzel és más találmányokkal egy következő füzetben foglalkozunk részletesen.

---

a [1] Erre könnyen érthető utasítást ad egy, még a mienknél is olcsóbb füzet: „Kolbenheyer Gyula: Gyakorlati módszer távlati képek szerkesztésére. Kilián F. Budapest," melynek révén a legnehezebb építészeti rajzok, söt müvészi képek is készíthetök, mint amilyeneket festettek: Bugiardini, Canale Canaletto, Delen, Neefs stb.

X. Mindenféle más kép.

Bevezetés.

Előfordúl az előbbieken kívül itt-ott még meg nem beszélt kép is, de ezeket már az eddigiek alapján könnyű megmagyarázni. Használják a különféle képeket néha vegyesen is és azokat külön-külön szintén felismerhetjük majd. Ezekből egy példát a következő pontban felveszünk.

1. Vegyes kép.

a. Ilyet *7 X 1.*-ben látunk. Ez *6 V 24.*-ből úgy származik, hogy az árnyékot mint egyenlőközű távlatot *6 V 25.*-ben lemásoljuk, és vele együtt szerepeltetjük, azután még a derékszögű képet is, amelyből származott. Végül ilyet, de 1 : $^1/_2$ aránnyal a nyíl irányában a 7. rajzlapon megfordítva *7 X 1.*-ben látunk, és szerinte egy gyakorlati tárgy képét is.

E vegyes képben, melyet a szerző ajánl, az alsóból megmérhetjük az úgynevezett vízszintes vonalakat, a felsőben pedig a magasságokat ugyancsak valódi nagyságukban.

2. Mindenféle különleges kép.

b. A bevezetésben említett egy-egy különleges esetre befejezésül még visszatérünk, megemlítvén, hogy pl. *IX 1.* alatti képek a gyakorlatban is sok változatban fordulnak elő, a szerint a mint a képsíknak vett üveglap és a szem helyzete változik. Ha a képsíkot fejünk felett gondoljuk, „mennyezeti képeket“ nyerünk. Ha igen nagy magasságból veszük fel a képeket „madártávlatot“, ha szemünk a talajhoz túlságosan közel van „békatávlatot“ készitünk, stb. Mindez a fényképezéssel is hozható összefüggésbe.

A *IX 2.* alatti körképet meg lehetne pl. henger helyett kúpon vagy gömbön [1] ábrázolni. Ezt a földrajzi térképeknél használjuk.

De nemcsak lapokon származhatnak képek, ami a festő birodalma, hanem a szobrászatba vágó tér-

---

b [1] Igy ábrázolja a természet szemünk golyóján a kívülünk levö képeket, amiröl meggyözödést szerezhetünk egy frissen levakart ökörszemen.

beli képekről is lehetne szó, de mindezek részletezését, amint előbb is említettük, egy későbbi füzetre halasztjuk.

Végül még csak azt jegyezzük meg, hogy bármily képet is szemlélünk, képzelő erőnknek mindig magát a tárgyat kell benne látnia.

Azért a derékszögü képeket sem tekintettük *VIII d* szerint egyenlőközü képeknek, nehogy a kezdő a testeket lapos árnyékképeknek nézze, amitől most többé félni nem lehet.

A tervezésnek, feltalálásnak ugyanis első kelléke, hogy az említett képeket mind, és különösen a derékszögüeket úgy lássuk, mintha a tárgyakat valóban szinte kezünkkel érinthetnők. Hogy ehhez idejekorán hozzászokjunk és térbeli képzelő erőnket fejlesszük, nem használtunk a derékszögüekhez magyarázó „más képeket" sem, mint amilyeneket hasonló tárgyú munkákban láthatunk. Ezeket különben most annál jobban megérthetjük, mert minden arra működött közre, hogy térbeli szemléletünk teljes erejét kifejthesse.

Ez a képzelő erő a 7. rajzlap képeit, melyek rendesen csak egyetlen-egyszer tengely nélkül ábrázolják a tárgyat, nyilván úgy látja, mintha a tárgy inkább képsíkunk mögött. és mintha maga a képsík üveg vagy pusztán levegő volna; erre egyébiránt a IX. fejezet egyenesen rá is utal, és amint azt a festőművészetben már zsenge korunktól fogva önkéntelenül is természetesnek találtuk.

Most azonban, az előttünk megnyílt új ismeretek áttekintése után, ismét vissza kell térnünk az egyszerű derékszögű képeknél megszokott, nem annyira természetes módra, mely szerint a testeket egy kissé rajzlapunk előtt gondoljuk. Ezek az eltolt tengely ismétes felvételével úgyszólván kezünk ügyébe kerülnek, úgy, hogy tetszésünk szerint forgathatjuk, távolságokat határozhatunk meg rajtuk, metszhetjük, szögeiket fölkereshetjük, stb.

Hogy a testeket képsíkunk előtt, de elég közel hozzá, a térben lássuk, ehhez tehát mindjárt a legelső lépéstől kezdve hozzászoktunk, mert erre még a művészetben is találunk elég példát. Többi közt, amint mindjárt kis munkánk legelső lapján említettük a régibb művészeknél szintén találkozunk ily felfogással. Azok egyikének, Gherardininak[1] képein önkéntelenül a képsik előtt látjuk az alakokat.

Ezt a felfogást még akkor is meg kell tartanunk, ha a derékszögű képekben a tengelyt elhagyjuk; akkor is lássuk a tárgyat inkább a képsík előtt, jóllehet bizonytalan távolságban tőle; a képsík mögé való elhelyezés inkább felkelti már a rövidülés, kisebbedés fogalmát.

Ha azután az eltolt tengely ismét fellép, vagy röviden mondva „tengelyt veszünk fel", azzal meg is adtuk mindjárt a tárgynak határozott helyét képsíkunk előtt, és rendszerint oly helyzetbe hoztuk tárgyunkat a felvett tengely által, hogy az az első képsíkon rajta fekszik. Ily helyzetben azután a tárggyal, a mint érintettük, könnyen elbánunk; magunk előtt látva magát a tárgyat, egyes részeit forgatjuk, mérjük stb. és ezzel tervezési és mennyiségtani feladatokat oldunk meg.

A második részben egyelőre ily feladatokat nem fejtünk meg, hanem visszatérünk az első rész nehezebb feladataira és azokat a harmadik részben, most már rövidebb tárgyalással következőképen fogjuk csoportosítani:

HARMADIK RÉSZ.

A térelemek és testek ábrázolása. Viszonylagos helyzeteikre vonatkozó feladatok általánosságban.

Bevezetés.

a. Az eddig előfordúlt testek és tárgyak alkotó részeikre felbontva, a térelmekre vezetnek rá. Ezekkel azonban testek nélkül, amelyektől különben függetlenül nem is fordúlhatnának elő, elvontabb feladatokban egyelőre csak ritkán foglalkozunk.

A legközelebbi feladatokban többnyire inkább csak testeken szemléltetjük az eredményeket.

---

b [1] Tom. Gherardini [1715—1797.] az említett képeket jobbára 1777. körül festette.

b. *A pont.* Ha e térelemet teljesen elvontan is akarnók ábrázolni, az az előbbiek után, nem járna többé nehézséggel. A 8. rajzlap második sorában a *8 XIII 3.* ábrából pl. könnyen megérthetjük, hogy az a térben egy pontot ábrázol, mely alól a testet elvettük, még pedig ebben az esetben a *8 XII 2.* ábrabeli hatoldalu gúlát, úgy hogy csak *P* csúcsa maradt meg. E magánosan álló *P* pontot *P'*-ben szintén a térben kell látnunk, az első képsíktól *2* centiméternyi távolságban.

c. *Az egyenes.* Ily elvont ábrázolásban látjuk a *8 XIII 4.* ábrában azt a *BC* egyenest, mely a *8 XII 2.* gúla éle volt és most egészen más helyen, a gúlától függetlenül jelenik meg. Mindazonáltal ezt is a térben kell látnunk, és erre nézve tudjuk, hogy *B* pontot első képhen *2·5* cm-nyire, *C*-t pedig *2* cm-nyire kell képzelnünk az első képsíktól. Szükséges hasonló elvont példát még többet is felvenni.

Ezek után az elemeknek még elvontabb ábrázolására térünk át.

Az utolsó sor *8 XV 3.* ábrájában ismét a *P* ponttal összefüggésben volt *8 XII 2.* ábrabeli hatoldalú gúlát eltüntettük, úgy hogy csak a *P* csúcs lebeg a levegőben. Vele együtt az előbbi egyenest is látjuk a *8 XIII 4.* ábrából. Ez tehát a *8 XII 2.* gúla jobb oldali éle, mely *B* csúcson halad át, de amelyet most e gúla nélkül ábrázoltunk.

Mindkét elem, a *P* pont és a *B* ponton áthaladó egyenes, így elvontan és tengely nélkül ábrázolva csaknem érthetetlen, mert helyzetük a térben még nem bizonyos. Egymáshoz való viszonylagos fekvésük és egymástól való tavolságuk azonban határozott, mert ha most bárhol az átmenő vonalakkal derékszögű eltolt tengelyt veszünk fel és a *B*-n áthaladó egyenesen még egy pontot választunk, akkor mind e három pont első távolságát az első képsíktól megmérhetjük és így e három pontot az eddigiek szerint a térben magunk előtt láthatjuk, sőt egy pont távolságát a többi kettőnek egyenesétől is megállapíthatjuk. Ezt a feladatot nemsokára külön meg fogjuk fejteni. Az eredmények mindig ugyanazok lesznek, akárhol veszünk fel más eltolt tengelyt.

d. *A sík.* A *8 XIII 1.* ábrabeli gúlából csak a *CXY* háromszöget tartván meg, sőt ennek is csak két legfontosabb egyenesét, *CX* és *CY*t, ezekkel a *8 XV 5.* ábrában teljesen elvont módon síkot ábrázoltunk, és minthogy *CX* és *CY* egyenesekről amúgyis tudjuk, hogy az ellenkező képekben derékszöget mutatnak az átmenő vonalakkal, a sík ábrázolását *8 XV 6.*-ban még inkább egyszerűsíthetjük. A *8 XV 7.* ábrában pedig az *V 2.* tétel szerint az egyik képet a másikhoz hozzátolva, oly ábrázolását kapjuk e síknak, mint amilyennel más könyvekben találkozhatunk.

XI. Forgatások.

1. A pont leforgatása a képsíkba.

Ha a *8 XI 1.* ábrabeli gúlát pl. papirból akarjuk elkészíteni, az oldalháromszögek valódi nagyságát kell meghatároznunk.

E célból pl. az *ABX* háromszöget az *AX* nyom körül az első képsíkba leforgatjuk és akkor ott a háromszöget valódi nagyságában látjuk meg.

Nyilvánvaló, hogy a háromszög *B* csúcsa forgatás közben körívet ír le. Ez a körív, úgy mint az *1 I 5.* ábrában a *C* ponton átmenő félkör, szintén egyenesnek mutatkozik, mely derékszöget képez a *8 XI 1.* ábrában az *AX* nyommal. Ezt a forgást a *2.* képben, ahol az egész háromszög egyenesnek látszik, közvetetlenül szemlélhetjük, és látjuk, hogyan került *ABX* háromszög leforgatás után $A''X''B_0''$-ben a felemelt első képsíkba.

Ebből, ha a felemelt első képsíkot ismét letéve gondoljuk, B_0 leforgatott pont helyzete kétségtelen. Ha azután a gúla a *8 XI 2.* ábrában általánosabb helyzetű, akkor teljesen úgy, mint az előbb, de a harmadik kép segítségével, nem lesz nehéz az egészet részletesebb magyarázat nélkül is megérteni.

Mindezekből látjuk, hogy *B* pont forgásánál a főbb fokozatok: 1) a nyommal derékszöget képező körív, mely egyenesnek mutatkozik, 2) az *o* középpont, 3) a forgás küllője *oBo,* mint átfogója oly derékszögű háromszögnek, melynek befogóit $B'''O'''o'''$ szerint két ellenkező képben mérhetjük meg. Igy pl. $O''o''$ befogót első képben az *O* talppont távolsága adja meg *o* középponttól.

2. A háromszög leforgatása a képsíkba.

Vegyünk fel a 8 *XI 2.* ábra gúlájának *BX* élén egy *C* pontot és határozzuk meg *ABC* háromszög valódi nagyságát. Ez egészen úgy történik, mint az előbbi feladatban. A *III.* fejezet alapján a gúlát és rajta a háromszöget megfelelő harmadik képben fölkeressük és a további eljárást már az ábrából is leolvasva, a *B* pontról mondottakat *C*-re is alkalmazzuk.

Feladatok. 1. Vegyünk fel több pontot és egyenest, amelyekre nézve az első képsíktól való távolságok méretekben meg vannak adva.

2. Határozzuk meg egy oly, teljesen elvont ábrázolásban fölvett háromszög valódi nagyságát, mint amilyet a 8 *XI 3.* ábrában látunk.

Vegyünk fel erre nézve A'' mögött egy eltolt tengelyt, mely látszólag A''-n megy keresztül, de amely tulajdonképen A''-ben az A ponton átmenő felemelt első képsíknak tekinthető. Hosszabbítsuk meg $B''C''$-t második képben e felemelt képsíkig, akkor az *IV 1.* szerint a nyompontra és $A'X'$ nyomra vezet, mely körül a háromszöget *XI 2.* szerint leforgatjuk. Próbálkozzunk meg többféle háromszöggel is.

Tételek.

XI 1. *A pontnak a képsíkba való leforgatásánál szem előtt kell tartanunk: 1) a nyommal derékszöget képező körívet, 2) a középpontot, 3) a forgás küllőjét, azaz átfogóját oly derékszögű háromszögnek, melynek befogóit két ellenkező képben mérhetjük meg.*

XI 2. *A háromszög valódi nagyságának meghatározására eltolt tengelyt veszünk fel és a háromszöget a tengelyen innen fölkeresett nyom körül leforgatjuk.*

XII. Közök vagy távolságok.

A távolságok.

a. *Első távolság.* A 8 *XI 4.* ábrában *P* pont távolságát az *1.* képsíktól *II 1.* szerint az ellenkező *2.* képben mérhetjük meg. Meg fogjuk azonban most már a *2.* képsiktól számított távolságát is mérni és azért megkülönböztetés kedveért az előbbit ezentúl „első“ távolságnak nevezzük.

b. *Második távolság.* E távolságot a *8 XI 4.* ábrából magyarázat nélkül is leolvasván, azt találjuk, hogy a *II 1.* tétel erre nézve is érvényben marad. Mindkét távolságot könnyen látható módon feltünteti a *3 I 27.* ábra is. Ebben *P* pont *2.* távolsága akkora lévén, mint az *O* talppontė, szintén közvetetlenül megmérhető az ellenkező első képben.

Igy gondolhatunk a tér bármilyen pontja alatt ilyen kúpot és a pont mindkét távolságát azonnal felismerjük.

c. *Harmadik távolság a második képből való új kép fölkeresésénél.* A távolságok fogalmánál egyszersmind gyakorlati ismereteinket is egy teljesen új eljárással gyarapitjuk, amidőn most a „második“ képből kiindulva, új képet keresünk fel.

III-ban az első távolságok alapján az első kép szolgált kiindulásul; most hogy a *2.* távolságokat is ismerjük, a *2.* képből kiindulva a *8 XI 4.* ábrában a *2.* képsíkon választunk egy *YZ* tengelyt és egészen úgy mint *III a*-ban, *YZ* tengelyre vonatkozólag keresünk fel új *3.* képet. Ezt behatóbban megmagyarázni, fölösleges volna; beszéljen e helyett maga az ábra.

Ebben tehát a hasáb ismét új képbe került és rajta a *P* pont új *3.* képben mutatkozik. Ezt szintén egyszerűen csak harmadik képnek nevezzük, mert az *YZ* tengely eléggé megkülönbözteti a régibb *XZ* tengelyre vonatkoztatott *3.* képtől.

Az a kérdés mármost, mekkora távolságban van az *YZ* tengelyre vonatkoztatott *3.* képben a *P* pont a képsíktól?

Erre sem késhetik soká válaszunk, ha a *8 XI 4.* ábrát jól szemügyre vesszük. Világos belőle, hogy *P* harmadik képben akkora távolban van a képsíktól, mint a *P* pont *2.* távolságának talppontja, *O* *YZ*-től. És ezzel ismét csak változatlannak bizonyúl a *II 1.* tétel; ha pedig az egész négyszöget követjük figyelemmel, akkor az meg a *II 2.* tételt erősiti meg a *3.* képre vonatkozólag is.

Végül, ha vizsgáljuk, hogyan is kerestük fel e legújabb *3.* képet, ismét csak rá kell jönnünk a *III 2.* tételre, és ezzel mind nyilvánvalóbbá lesz, hogy e tudományt jellemző tételek alól kivétel nincs.

Igy tehát eljutottunk a „harmadik“ távolsághoz és egy egészen új harmadik képhez.

d. *Oldalkép.* Ilyen az *5 III 3.* oldalkép is, melyet most közvetlenül a *2.* képből kereshetünk fel, ha *XZ* tengelyt fölfelé meghosszabbítva *YZ*-vel jeleljük.

e. *Negyedik, ötödik stb. kép a 2. képből való kiindulással.* Ha az előbb annyira jutottunk, akár mindjárt tovább is folytathatnók ez eljárást és felkereshetnénk a harmadik képből *4*-et, ebből *5*-et stb. Ha mindezt a *8 XI 4.* ábra hasábján akarnók bemutatni, akkor a papirból elkészített hasábot pl. tűvel e harmadik képében, vagy helyzetében, a képsíkhoz erősitenők, hogy a kivágás után az egy még újabb YZ_{IV} tengely körül felemelve, egy „negyedik“ képre és ezzel a *III 2.* tétel ujabb igazolására vezessen rá. E *4.* kép fölkeresésénél a *3.* távolságok mutatkoznak, ezeket pedig az ellenkező *2.* képből mérhetjük át.

Igy a *III 1.* és *III 2.* tételek szem előtt tartásával számtalan újabb képet kereshetnénk fel és ezeket, úgy mint a *10.* rajzlapon olykép jelölhetnők, hogy a következő *IV, V, VI* stb. római számokat egyszerüsitjük.

f. *Negyedik, ötödik, stb. kép az **1.** képből való kiindulással.* Kiindúlhatunk ezekután ismét az *1.* képből és rájövünk magunk is, hogyan keresünk fel az *XZ* tengelyre vonatkoztatott *3.* képből, XZ_{IV} XZ_{V} -tel jelölt tengelyekre vonatkozó képeket.

g. *Első kép a 2. képből való kiindulással.* A *2.* képből is indulhattunk volna ki *8 XI 4.* ábrában, vagy akár mindjárt az elején a *4 II 3.* ábrában, hogy viszont az *1.* képet keressük fel megfordított módon és ilyen úton vezessük le összes tételeinket.[1]

Ebből tehát a *3.* képet fölkeresve, további újabb képeket határozhatnánk meg. Az alkalmazásban azonban a *3* képen túl ritkán megyünk; sőt, ha a tárgyakat a be nem avatott szem számára is érthetőkké

---

g [1] E megforditott eljárásnál ismét jó szolgálatot tehetne a *III a* [1] jegyzethez hasonló könnyités, hogy tudniillik rajzlapunkat egyszerüen megforditjuk és így most a 2. kép, amelyből kiindulunk, lesz a rajzlap szokásos helyén, az *XY* tengelyen innen; mintha csak, a jelzést nem tekintve, a 2. kép volna az az *1.* kép, melyből eddig mindig kiindultunk.

Ha így a rajzlapot megfordítjuk, a feladatok megfejtése egészen új alakot mutat.

akarjuk kidomborítani, csakis az *1.* és *2.* képeket tartjuk meg és hozzájuk a *VI—X.* képekből szerkesztünk még egyet. Ezt tettük példaképen a *9.* rajzlapon a két egymásba illesztett hasábnál.

h. *A különböző képek.* Hogy, úgy mint az előbb említett két hasábnál is, a *VI—X.* képek melyikét válasszuk, az a tárgyak méreteitől, helyzetétől és természetétől függ, és erre a *7.* rajzlap egyszerű megtekintése vezet rá. E *7.* rajzlap csaknem minden képet együttesen mutat be; mutatja mennyire különböző benyomást tesz ugyanaz a tárgy más meg más képben; mutatja a képnek alkalmas voltát a méretek megitélésére, és művészi szempontból való használhatóságát is feltünteti.

Minthogy pedig manap a legelemibb könyveken kezdve, lépten-nyomon találkozunk oly képekkel, melyeket csak úgy érthetünk meg öntudatosan, ha keletkezésüket ismerjük és rajtuk a méreteket is meg tudjuk itélni: alig képzelhető, a természettudományoknak, a művészet — és teknikának mai, a klasszikus kortól annyira elütő fokán művelt ember az ábrázolástan ismerete nélkül.

A *7.* rajzlap e képeiben a méreteket a képsíktól függetlenül tudjuk már megitélni; de az *1. 2.* és *3.* képben való ábrázolásnál is teljesen elég 1—2 távolság ismerete.

E távolságok megbeszélése után, melyeket külön meghatároznunk nem is kellett, mert a képekben közvetetlenül mutatkoznak, áttérünk most olyan távolságokra, melyeket külön feladatokban kell meghatároznunk. Ilyenek pl. két pontnak egymástól, pontnak síktól, vagy pontnak egyenestől való távolsága. Mindezeket, megkülönböztetésül az előbbiektől, „közök"-nek fogjuk nevezni.

1. **Két pont köze.**

1. Az előbbi fejezetben a háromszög valódi nagyságát határoztuk meg, és ezzel egyszersmind egy-egy határolt oldal valódi hosszát, vagyis, amint neveztük, egy „közt."

A határolt egyenes vagy köz e valódi nagysága egyúttal két pont távolsága vagy köze is.

Ily közt most egész általánosságban fogunk fölkeresni.

Erre nézve mindenekelőtt vissza kell emlékeznünk az első részbeli hasonló esetekre.

A *3 I 25.* ábra gúláján *AP* valódi nagyságát *A"P"*-ben közvetetlenül látjuk.

Igy mutatkozik a gúla megfelelő helyzetében az él valódi nagysága több ábrában is, esetleg a harmadik képben; és e valódi nagyságra mindig azt találjuk, hogy ez átfogója oly derékszögű háromszögnek, melynek egyik befogója az első képben az *O* talppont távolsága az él nyompontjától, másik befogója pedig az ellenkező képben megmérhető magasság.

Ismételjük ezt mindjárt ugyancsak a *3 I 25.* ábrában arra a kúpra is, amelybe gúlánk tulajdonképen be van rajzolva.

Általánositsuk végül e valódi nagyság meghatározását a *8 XII 1.* ábrában látható kúpon a tengelynek *V 2.* szerinti elhagyásával.

Ennek a kúpnak számtalan oldala vagy „alkotó"-ja, mint amilyen *AB*, a térben egészen általános helyzetű.

Ily alkotó valódi nagysága $A_0''B''$-ben mutatkozik, mert épen úgy, mint a *3 I 25.* ábrában a *2.* képsíkkal egyenlőközű.

Itt is tehát $A_0''B''$, átfogója oly derékszögű háromszögnek, melynek egyik befogója az első képben, mint az alapkör *AO* küllője mérhető meg, másik befogója pedig az ellenkező képben látható.

k. *Új derékszögű tengely választása.* A köz valódi nagyságát ugyanezzel az eredménnyel más úton is állapíthatnók meg, ha az egyik képben olyan új tengelyt választanánk, hogy erre nézve a köz ebben a képben azt a helyzetet mutassa, aminő *3 I 25.* ábra első képében az *AP* közé az *XY* tengellyel szemben.

Már pedig, ha az átmenő vonalak az egyik képben, mint pl. *AP* közzel, derékszöget mutatnak, akkor azok oly képre vezetnek rá, melyben ilyen *AP* köz valódi nagyságában látható.

Ez különben nem egyéb, mint a *II 2.* tétel megfordítottjának ismétlése.

2. A síkra merőleges egyenes.

Ha valamely pontnak egy síktól való távolságát vagy közét keressük, akkor a pontból mindenekelőtt a síkra merőleges egyenest kell húznunk, mert ez lesz a legrövidebb köz.[1] Ily közt látunk a következő ábrában.

8 XII 2.-ben a *P* csúcs közét keressük az *ABX* háromszög síkjától.

Ezt közvetetlenül látjuk egy *V 1.* szerint fölkeresett *3.* képben *P'''D'''*-ban. Összefüggésbe hozzuk még az *1 14.* ábrabeli kúp magasságával is.

A kúp magassága a *3 1 27.* ábra szerint merőleges a felemelt első képsíkra és egyenlőközű a *2.* képsíkkal, továbbá még derékszöget is mutat az egyenesnek látszó felemelt képsíkkal.

l. Ha mármost a *8 XII 2.* ábrában *P'''D'''* mint magasság körül ily kúpot gondolunk, az is derékszöget mutat az *A'''B'''*-ban egyenesnek látszó síkkal és harmadik képben egyenlőközü a képsíkkal.

Mint egyenlőközü azonban, az ellenkező első képben derékszöget mutat az átmenő vonalakkal, tehát *A'X'* nyommal is.

Ily egyeneseket, melyek *3.* képben egyenlőközüek a képsíkkal, behatóan követhetünk figyelemmel, ha a *8 XI 5.* ábrát kidolgozzuk.

P'''D''' egyszersmind a köz valódi nagyságát is mutatja.

3. Egyenesre merőleges egyenes.

m. *Feladat.* Valamely gyakorlati tárgy, pl. gép két képéből vagy tervéből egy határozott pontjának és valamely egyenesének közét kell meghatároznunk.

Megfejtés. E célból, hogy a rajz többi része ne zavarjon, gondoljuk pusztán a pontot és a kérdéses egyenest a két képből másoló papirra áttéve és az elvont *8 XII 3.* ábrában tetszésszerint „összetolva“.

Ott látjuk tehát a pontot pl. *A*-ban, vagyis *A'A''*-ben és az egyenest *BC*-ben.

Hogyan keressük fel ezután közüket? Erre nézve *A''* mögött tengelyt veszünk fel, akkor ezzel e két elem térbeli helyzetét megállapítottuk. *A* pont az első képsíkon fekszik, *B* és *C* pontok *1.* távolságát ismerjük.

---

1 [1] A sík minden más pontja felé húzott egyenes, mint derékszögü háromszög átfogója, hosszabb az előbbinél.

Keressük most fel BC egyenes X nyompontját és kössük össze az A ponttal. Ez az ABX háromszög nyoma lesz és nem egyéb, mint a *IV 1.* és *IV 2.* tételek alkalmazásának eredménye.

Ha mindezek után végül a *XII.* tétel segítségével a B pontot AX nyom körül leforgatjuk, akkor $A'D_0$-ban megtaláltuk a keresett közt.

A forgás küllőjét, a derékszögü háromszög átfogóját az *1.* és *2.* képben megmérhető két befogóból bárhol körzőbe vehetjük; egyáltalában az egész szerkesztést egy pillanat alatt végezhetjük, kivált, ha az egyenesen nem a B pontot választjuk, hanem még egyszerűbben oly pontot, mely pl. az $A'A''$ átmenő vonalon van.

Az egész megfejtés még könnyebben érthető, ha az ABX háromszöget gúlává egészítjük ki és oly módon tesszük felfoghatóbbá, mint a *8 XI 2.* ábrában.

Ugyanily ábrára lehetne bármily elvont feladatot is visszavezetni.

Olyan feladatot, mint az előbbi, számtalant fejthetnénk meg másolás nélkül is közvetetlenül a tervrajzokon, mert tengelyhez kötve nem lévén, minden esetben külön-külön tetszés szerint fölvehetjük a legalkalmasabbat.

Ezt a következőkben ajánlatos mennél több esetben megkisérleni, hogy a tankönyvekben annyira kizárólagos tengelytől mindinkább függetlenekké tegyük magunkat és a magasabb, pl. műegyetemi tervezések meg ne lepjenek bennünket.[1]

Tételek.

XII 1. *Két pont köze nem egyéb, mint átfogója oly derékszögü háromszögnek, melynek befogói két ellenkező képben mérhetők meg.*

XII 2. *Derékszögü képben a síkra merőleges egyenes derékszöget mutat a megfelelő nyommal.*

---

[1] Ne essünk mi is abba a hibába, melyet Mannheim A. francia müegyetemi tanár szemére vet az ifjúságnak, hogy a tengelyhez ragaszkedó elemi, túlságos részletek útvesztöjébe kerülve, a mérnök, az épitész stb. tervezéseivel való összefüggést teljesen elveszíti.

XIII. Metszések.

1. Egymást metsző síkok.

a. *Az első képsíkkal egyenlőközü síkok.* A vonalaknál *If*-ben a képsíkkal egyenlőközü egyenesről volt szó; ennek megfelelően most a képsíkkal egyenlőközü síkra térünk át.

A képsíkkal egyenlőközü egyenes minden pontja a képsíktól egyenlő távolságban lévén, bármennyire meghosszabbítva sem metszi a rajzlapot.[1] Épen így van az a síknál is.

Ez akkor egyenlőközü pl. az első képsíkkal, ha mindkettő bármennyire meghosszabbítva sem metszi egymást.

Messük ilyen síkokkal a *8 XIII 1.* ábrában a négyoldalú gúlát, akkor a négyszögek oldalai, melyeket e síkok a gúlából kimetszenek, szintén nem metszhetik sem az első képsíkot, sem a benne levő nyomokat, és azért mind az első képsíkkal, mind pedig a megfelelő nyomokkal egyenlőközüek. E metszővonalak minden pontja egyszersmind egyenlő távolságban lévén az *1.* képsíktól,[1] második képben a négyszögek a felemelt első képsíkkal, tehát a tengellyel egyenlőközüen mutatkoznak.

2. Egyenes és sík metszése.

Ilyen példát már a *8 XII 2.* ábrában láttunk, amelyben a *3.* kép segítségével meghatároztuk a merőlegesnek *D* metszőpontját a háromszög síkjával. Ezt azonban a *3.* kép nélkül is felkereshetjük, ha a merőleges egyenesen át síkot, pl. az *1.* képsíkra merőlegeset teszünk. Ahol ez a sík a háromszöget metszi,

---

a [1] *Ih*-ban az *AB* határolt egyenes egyenlöközü lévén a talppontok összekötésével, a két egyenes bármennyire meghosszabbítva, sohasem találkozik, mert az *A, B* és a talppontok képezte négyszög az egyenes minden további pontjára vonatkozólag a derékszögekkel együtt ismétlödvén, mindig ugyanazt a távolságot eredményezi, úgy, hogy a meghosszabbított *AB* egyenes nem metszheti a talppontok egyenesét tehát a képsíkot sem. Mindazonáltal az egyenlöközüséget sajátságos metszésnek is tekinthetjük, ha oly két egyenesböl indulunk ki, melyek egymást mind távolabb és távolabb metszve, egyenlöközüekké akkor lesznek, ha a végtelenben találkoznak. Ú. m. *VII d*-ben.

azon az egyenesen kell lennie azután a keresett *D* pontnak.

A sík első képben a gúla oldalháromszögét *X* és *C* pontokban metszi, ezeket a *2*. képben fölkeressük és $X''C''$-n megkapjuk D''-ben a metszőpontot. Ez egyszersmind ellenőrzése annak is, vajjon a *3*. képből pontosan átmértük-e a *D* pont első távolságát.

Az előbbi példát általánosabb helyzetű egyenessel is megoldottuk, amint azt a *8 XIII 2*. ábrából leolvashatjuk.

Feladat. Keressük fel az elvont *8 XIII 5*. ábrában az adott egyenesnek metszőpontját az *ABC* háromszöggel.

Megfejtés. Tegyünk az egyenesen át az első képsíkra merőleges síkot. (Vc [1], 28. old.)

Ez a *BC* oldalt *I* pontban, az *AC* oldalt pedig *II*-ben metszi. Az *I, II* metszővonalon megtaláltuk ismét a keresett *D* metszőpontot.

Megjegyzendő, hogy itt az *ABC* tulajdonképen nem elvont sík, hanem nagyon vékony test, mint amilyen valamely papirlap; a szemléltetett egyenes pedig a pálcán belül gondolandó.

Tételek.

XIII 1. Egyenlőközü síkok valamely síkot egyenlőközü egyenesekben metszenek.

XIII 2. Egyenes és sík metszőpontját meghatározhatjuk, ha az egyenesen át segédsíkot teszünk.

XIV. Síkok- és szögekre vonatkozó feladatok.

Bevezetés.

a. Szögök valódi nagyságának ismerete nélkül hiába terveznénk, mert nem tudnók végül a tervezett alakzatot természetes vagy arányos nagyságában meg is alkotni. Tudjuk azonban a mennyiségtani tudományokból, hogy nemcsak vonalak nagyságával, hanem szögek mérésével is dolgozunk; azért a szögek nagyságának meghatározására vonatkozó néhány példát is fel kell említenünk. Minthogy pedig a szög szárai síkot képeznek, ez egyszersmind síkot fölkereső feladatokra is vezet rá.

E feladatokra nézve azonban megjegyzendő, hogy közvetetlenül szükségünk nem lévén rájuk, ki is hagyhatjuk.

Két egyenes szögét külön feladatban említenünk sem kellene, mert a *8 XI 2.* ábrában a háromszög valódi nagyságával egyszersmind két egyenesének szögét is meghatároztuk. Ebben egyszersmind, ahogy az előbb szó volt róla, két egyenesen át síkot is tettünk, *XII 3 m*-ben pedig ponton és egyenesen át, és mindkettőben nyomot kerestünk fel.

1. Az egyenes és a sík hajlásszöge.

Ha bárhol körkúpot veszünk fel, melynek magassága egyenlőközü a képsíkkal, akkor tudjuk, hogy alapja merőleges rajzlapunkra. Az is ismeretes előttünk, hogy úgy, mint a *8 XII 1.* ábrában, minden oldala vagy alkotója a szélső $A_0''B''$-ben látható valódi nagyságában.

A *8 XIV 1.* ábrában egyszersmind minden alkotó az alapsíkkal, mely a képsíkra merőleges, ugyanazt a szöget zárja be. Ez az egyenes alkotónak hajlásszöge a síkkal, és egyszersmind annak a β szögnek pótlószöge,[1] melyet az alapsíkra húzott *PO* merőleges *AP* egyenessel az *APO* derékszögü háromszögben képez.

E hajlásszöget tetszésszerinti feladatban nem volna nehéz a harmadik képben húzott merőleges segítségével fölkeresni.

2. Két sík hajlásszöge.

Ez a *8 XIV 2.* ábra első képében látható; α itt az *AD* élre merőleges síkban, az első képsíkban fekszik.[2]

---

1 [1] Ez az α, mely a *BAP* háromszögnek is szöge, a legkisebb szög, melyet pl. az *AP* egyenes az *A* ponton átmenö és az alapsíkban fekvö bármely egyenessel képez, mert *AP*-n át tett minden más sík a kúpból keskenyebb egyenlöszárú háromszöget vág ki, melyben az alapvonal mindig kisebb, mint az *AB* átmérö. Mindeme egyenlöszárú háromszögekben tehát a *P* csúcsnál fekvö szög kisebb mint 2β, a megfelelö pótlószögek meg nagyobbak, mint α.

2 [2] Valamint az elöbbi esetben a hajlásszög a legkisebb szög volt, úgy most a legnagyobb, mert ha *A* ponton kívül akár-

A hasáb két oldalsíkjának ezt a hajlásszögét úgy is határozhatjuk meg, ha valamely pontból, pl. O-ból merőleges egyeneseket húzunk reájok és a származott β szögnek kiegészitő szögét vesszük.

Tételek.

XIV 1. *Az egyenes és a sík hajlásszögét meghatározzuk, ha az egyenesen választott valamely pontból a síkra merőlegest húzunk és annak a háromszögnek, melyet a választott pont és a két egyenesnek metszőpontja a síkkal képez, valódi nagyságát keressük,*[1] *vagy pedig az egyenes és a merőleges pótlószögét vesszük.*

XIV 2. *Két sík hajlásszögét háromféle módon határozzuk meg:*

1) Ha a keresett szöget a két sík metszővonalára merőleges síkkal vágjuk ki, 2) egy kivül fekvő pontból mindkét síkra merőlegest húzva, a származott szögnek kiegészítő szögét megszerkesztjük, 3) oly képet keresünk, melyben a két sík metszővonala pontnak mutatkozik.

XV a. Egyes testek ábrázolása feladatokkal kapcsolatban.

Bevezetés.

Egyik főcélunk az lévén, hogy testeket, tárgyakat tervezni, és alakzatokon műveleteket végezni tudjunk, jelen fejezetben a testekkel fogunk foglalkozni, és ezt annál könnyebben tehetjük, mert *II r* értelmében ezeknek nagy részével megismerkedtünk.

Ha ama csoportokat azután még újabbakkal is kiegészítjük, oly áttekintést nyerünk, mellyel a gyakorlati alkalmazásnál eddigi ismereteinket felhasználva, nagyobb nehézségeket is legyőzhetünk.

---

hol D pontot veszünk fel, akkor ugyanazzal a BC alappal biró egyenlöszáru háromszögeknek D csúcsnál fekvö szöge kisebb, mint α. A BD és DC szárak tudniillik, mint derékszögü háromszögek átfogói, nagyobbak mint $AB = AC$.

XIV 1 [1] XI 2 szerint, vagy XII 1 értelmében meghatározott oldalakból a háromszög megszerkesztésével.

E gyakorlati alkalmazásban, a már ismert, vagy az ezután következő testek képeinek fölkeresésénél, egy különös eset fordúlhat elő, melyről az eddigiekben részletesen szó nem volt, de a mellyel mint emlékezetünkbe vésendő utolsó tétellel az előbbiek sorozatát be kell még fejeznünk.

Eddig új tengely választásával elérhettük pl. azt, hogy a test egyes síkjai egyeneseknek mutatkozzanak; szükségünk van azonban erre egyidejűleg több síkra nézve is, hogy pl. a gúla 2 síkja egyszerre mutatkozván egyenesnek, mindjárt a hajlásszöget is feltüntesse, vagy mint a legutolsó feladatban, a hasáb minden oldallapja egyenesnek lássék, hogy a hajlásszögeket mind közvetetlenül megmérhessük.

A pontra vezető tengely. Két síknak hajlásszöge vagy a „lapszög", amint láttuk, akkor mutatkozik tehát közvetetlenül, ha a két sík metszővonalát pontnak látjuk; azért a testek és síkok általános helyzetéből oly képet kell fölkeresnünk, melyben ama egyenes pontnak mutatkozik. Minthogy ezzel más nehéz feladatokat is gyorsan és egyszerűen fejthetünk meg, ennél egy kissé megállapodunk.

Az *5 V 10.* ábrában és *XII k*-ban pl. már találkoztunk ily egyenessel, amidőn az *AB* átlóból a harmadik képben pont lett. Ha tehát *XII g* szerint az *AB* egyenes eredeti helyzetéből kiindulunk, hogyan lesz ebből végül pont?

Látjuk, hogy ennek feltételei: 1) az eredeti képből $A''B''$-vel derékszöget mutató átmenő vonalakkal nyert, oly következő (itt 1.) kép, melyben az egyenes valódi nagyságában egyenlőközü lett a képsíkkal, 2) pedig oly *XZ* derékszögü tengely választása, mely $A'''B'''$-ban pontra vezet. Ezt, mint említettük tételbe is fogjuk még foglalni és vele együtt ma̋rmost mindama előzményeket ismerjük, melyekre a testek ábrázolásánál és az azokkal kapcsolatos feladatoknál szükségünk van.

A *XI—XIV.* szakaszok alapján a testekre vonatkozólag számtalan oly feladatot oldhatunk meg, melyeknek eredménye a mennyiségtanban csak nehéz számítással kereshető fel, sőt néha szóba sem kerülhet. Vegyük pl. a közöket. Előttünk van a test, és ábrázolástan nélkül még sem tudjuk egyes pontjainak távolságát síklapjaitól, egyes éleinek síkokkal képezett szögét stb. megmérni. Az ábrázolástannal pedig mind e nehézségeket nemcsak könnyedén legyőzhetjük és a mennyiségtani feladatok eredményét is ellenőrízhetjük, hanem az alakzatok pontos testmintáit is el tudjuk készíteni.

Bonyolódott terveken, akár csak a valóságban, építünk, lebontunk, újra építünk, metszéseket végzünk stb. végül pedig az ábrázolt alakzat azután testet is ölt.

A testek ábrázolását és ama feladatokat minden egyes testnél rendre vehetnők, a kimért hely tekintetbe vételével azonban csak néhány példára szorítkozunk; mindazonáltal az egyes osztályozott testeknél esetleg több szám átugrásával, de mégis a következő, még a III. rész eddigi fejezeteiből átvett *pontok sorrendjét* fogjuk szem előtt tartani.

1. Ábrázolás.

A következőkben új csoportokkal kiegészített és osztályozott testek ábrázolása az I. és II. rész szerinti egyes esetek alkalmazásával úgyszólván külön feladatot képez, a mennyiben a testeken meghatározható különleges pontok és legegyszerűbb vonalak szerint sokféleképen választhatjuk meg azt a helyzetet, amelyből kiindulunk. Mindezt azonban maga a test vagy tárgy természete könnyíti meg.

A testeket, jellegző csoportok szerint osztályozva, előbb külön kell ábrázolnunk, hogy a bonyolódottabb gyakorlati eseteket azokra visszavezethessük. A bonyolódottabb tervezések azután nehézségeket többé nem okoznak, mert ezek a diszítő és egyéb részletek elhagyásával a külön-külön osztályozott testekre, egybevetésükre vagy csoportosításukra vezethetők vissza.

2. Forgatás.

XI-ben pontot és síkidomot csak a képsíkba forgattunk le, feladatunk lehetne azonban az is, hogy ponttal, síkidommal és testtel a térben tetszésszerinti adatok szerint végeztessünk forgást. Erre példát a *10.* rajzlapon már maguk a képek is mutatnak.

A *10.* rajzlapon több képet látván együtt, e forgás szembetünő. Ez különben érdekes példa egyszersmind arra is, hogyan kerülhet a gúla útjában olyan helyzetbe, hogy épen megfordítva mutatkozzék.

A testek, és rajtuk a térelemek forgatását azonban más úton is végezhetjük, pl. adott, és a képsíkra merőleges tengely körül azzal a megkötéssel, hogy minden pont a körnek csak határozott nagyságu ívét írja le.

Mindkét természetü forgatás alapján készült pl. a rajzlapok első fele. Az utóbbi, feltételekhez kötött forgatásra részletes példát látunk még a *8 XV 1.* ábrabeli kockában.

Ezt *TX,* az első képsíkra merőleges tengely körül olyképen kellett forgatnunk, hogy minden pontja előre meghatározott körívet írjon le.

A XI. fejezet magyarázatait önmunkásságunkkal kiegészítve, könnyen rájövünk ismét arra, hogy minden pont a forgástengelyére merőleges, tehát az *1.* képsíkkal egyenlőközü körben mozog és *II 2* szerint mutatkozik. Egyébiránt beszéljen most már maga az ábra és kövessék ezt más testeken is begyakorlandó példák.

3. Közök meghatározása.

A *8 XII 2—3.* ábrákhoz hasonlóan számtalan feladatot tűzhetünk ki magunknak, és amint szó volt róla, magán a testen kereshetjük egyes térelemeinek egymástól való távolságát.

4. Metszés síkkal.

Az erre vonatkozó részletes eljárásra maga az ábrázolás vezet rá, ha úgy, mint pl. a *8 XIII 1.* vagy *8 XV 8.* ábrákban a síkot olyképen vesszük, vagy *V 1* szerint oly képét keressük fel, hogy az egyenesnek mutatkozzék. Vannak esetek, amelyekben a *XIII 1* tételre is van szükségünk.

5. Metszés egyenessel.

A *XIII 2.* tétel a testekre vonatkozólag is érvényes, csakhogy az egyenesen áthelyezett segédsík a testből esetleg nem egyenest, hanem görbét metsz ki.

6. Áthatások.

Metszette a síkot a sík, a síkot az egyenes, és metszhet végül testet más, ugyancsak test is. Erre példa a *9.* rajzlap 2 hasábja. Ily egyszerü helyzetre vezethetjük vissza legtöbbször a feladatokat, hogy tudniillik az egyik test, ha hasáb, vagy henger, egyszerü idomnak mutatkozzék. Alkalmazni fogjuk ezenkivül a segédsíkokkal való metszést is.

7. Kifejtések.

A tervezett testet végül, hogy a valóságban a terv alapján elkészítsük, kifejtjük, vagyis hálózatát határozzuk meg úgy, amint azt több ízben már meg is tettük. A gömbnek és még több következő testnek mintáját azonban kifejtés útján meg nem alkothatjuk és a kifejtést csak esetről-esetre kieszelt gyakorlati eljárással pótolhatjuk.[1]

8. Szögek meghatározása.

Ezekre példát a *10.* rajzlapon kívül ebben a részben nem dolgoztunk ugyan ki, mindazonáltal magánszorgalmunknak már most is sikerülhet e különben ritkán előforduló feladatok részletes megfejtése.

9. Érintő síkok.

A síkok- és szögekre vonatkozó feladatok közűl kiválóan fontosak az úgynevezett „érintő síkok"-ra vezetők. Ezeket e részben szintén nem tárgyalhatjuk, de legalább fogalmat kell róluk szereznünk egy görbe lapu test, a kúp, vagy pl. a gömb szemléletével.

Valamint az *1.* rajzlapbeli körhöz, úgy húztunk eddig csak a papir síkjában rajzolt görbe vonalakhoz érintőket; megfejthetünk azonban érintési feladatot a térben is, pl. a gömb valamely adott pontjában úgy fektetünk érintő síkot, hogy abban a pontban a gömb küllőjére merőleges síkot teszünk.[2]

---

[1] Ezeket pl számos, mindinkább nagyobbodó síkmetszetből, tegyük fel körökből állítjuk elö; ez idomokat kártyapapirból elkészítve és vastagságának megfelelő, feléig benyúló bevágásokkal ellátva, megforditott helyzetben egymást keresztezve illesztjük össze.

[2] „Érintö" sik azért, mert minden más pontja a gömbön kivül van; az érintöponton kivül ugyanis a sik minden más pontja egy derékszögü háromszög átfogójának távolságában van a gömb középpontjától.

E célból valamely képből kiindúlva, a küllővel derékszöget mutató átmenő vonalakkal új *3.* képet keresünk fel. Ebben *XII 1 k* és *II 2.* szerint a küllő egyenlőközü lesz a képsikkal és így a merőleges érintő sík egyenesnek mutatkozván, könnyen megszerkeszthető. *(9.* rajzlap *6.* ábrája.)

10. Árnyék.

Nehezebb árnyékszerkesztéseknél a *VIII 2 c* alatt elmondottakon kivül, az előbb említett érintési feladatokra van szükségünk, de gyakorlati tárgyaknál beérhetjük eddigi ismereteinkkel is.

A szóba kerűlt *10.* rajzlappal kapcsolatban, melyet most már *XII e* szerint meg tudunk szerkeszteni, a tanultakhoz még a következők is járulhatnak.

Mindenekelőtt a *10.* rajzlapot nemcsak ábrázolás szempontjából vesszük szemügyre, mint a *XII e* szakasz 2. bekezdésében, hanem a saját és vetett árnyék tekintetében is vizsgáljuk.

A *VIII 2 c* szakasz utolsóelőtti bekezdésében szó volt több kép árnyékolásáról.

Ha több képet egyszerre akarunk árnyékolni, már nem alkalmazhatjuk ama bekezdésbeli eljárást, amelyre hivatkoztunk, mert akkor a *3. 4.* kép úgy volna árnyékolva, mintha a nap ugyanazt a rajzlapot két, épen ellenkező irányból világítaná meg,[1] hisz maga a *10.* rajzlap mutatja, hogyan válhatik egy irány, mint pl. a gúla magassága, épen ellenkezővé.

Hogy tehát a képek természetellenes benyomást ne tegyenek, az egész rajzlapot, mint pl. a *10.*-et úgy tekintjük, mintha egy kép volna és a megvilágitást is csak egyetlen képben egy irányból vesszük.

Mindehhez hozzávesszük még azt is, hogy a *10.* rajzlapon a tengelyeket úgy toljuk el, hogy a gúla minden egyes helyzetében hozzáérjen a képsikhoz.

Ha azután a világosság irányát képben felvettük, a vetett árnyék meghatározására a következő megfigyelést vesszük még tekintetbe. Egy, a kép-

[1] Ez 3 képnél rendesen még nem nagyon feltünő; vannak azonban tankönyvekben, már *100* év óta mindig ismétlődő árnyékszerkesztések, amelyekben a fennebbi viszásság már 3 képnél is szembeszökő.

síkra merőleges pálca vagy nagyobb, vagy ugyanakkora árnyékot vethet, mint a mekkora a hossza. Vethet *VIIh* szerint $^1/_2$-szer, $^1/_3$-szor stb. kisebb árnyékot is.

A *10.* rajzlapon minden pont távolságát ilyen árnyékvető pálcának véve, abból indúltunk pl. ki, hogy a távolságok árnyéka a távolságok talppontjaitól számítva, félakkora.

A távolságokat pedig *II 1.* szerint az eltolt tengellyel egy pillanatra megkülönböztetett ellenkező képben megmérjük, azután pedig ismét az egész *10.* rajzlapot egyetlenegy képnek tekintjük; a többit önszorgalmunkkal törekszünk kiegésziteni.

Hasonló módon árnyékoltuk *1.* és *2.* rajzlapunkat is.

Rendesen azonban legajánlatosabb a *XIIg* végén említett első és második, vagy a második és az oldalképet, és az első képsíkra vetett árnyékkal a megvilágítást is meghatározni, végül az egészet vetett árnyékostul egy esetleg nagyított *VI—X.* képben még jobban kidomborítani.

Tekintetbe vehetjük most még a visszaverődött fényt is, mely pl. a *10.* rajzlapon a saját árnyék egy részét ismét világosabbá teszi, amint erre nézve a többi rajzlapokon is találunk példákat. Ha a saját árnyékban levő lapok nagyobb terjedelmüek, akkor ismét nem szabad megfeledkeznünk arról sem, hogy a szemlélőtől távolabb eső és elhomályosodó részt világosabbnak tüntessük fel; a megvilágított lapoknak a szemtől távolabb eső részeit sötétebbeknek vesszük.

Mindezt azután pl. sötét alapu papiron fekete vagy színes, és a világos részeket sárgás-fehér krétával vagy festékkel kidolgozva, vagy egyenletesen befeketített papirból a világos részeket törlővel kivéve: a már említett hatást érhetjük el.

XVb. A szögletes testek és különösen a szabályos soklapok.

Bevezetés.

Az eddig megismert és külön csoportba sorolt hasábokon, gúlákon és a kockán kívül még számtalan szögletes testtel találkozunk. Eddig nem ábrázolt alakot mutat pl. a legtöbb ház teteje, a műtörténelemből ismert obeliszk, az ásványtan több kristálya, stb.

A szabályos soklapok.

Első sorban érdekelhetnek azonban azok a szögletes testek, melyeket úgy, mint a kockát, csupa szabályos idom határol; ezek a szabályos soklapok. Egyszerü szabályos soklapot, amilyen a kocka is, 5-öt nyerünk, ha szabályos 3-, 4- és 5-szögekből kisérlünk meg teljesen bezárt testeket előállítani. Négy szabályos háromszög körülzárja a „négylapot", 8, a „nyolczlapot", 20, a „húszlapot"; 6 négyzet a „hatlapot" és végül 12 szabályos ötszög a „tizenkétlapot".

XVc. A szögletes és görbe lapu testek 5-ös csoportja.

Bevezetés.

Ezt a csoportot már *IIr*-ből ismerjük, de most még a részletekkel is kell foglalkoznunk.

Erre nézve a testeket külön-külön rendre vesszük.

1. A hasáb.

a. Eddigelé rendesen csak olyan különleges hasábokról volt szó, melyeknek alapja szabályos sokszög, oldaléleik pedig merőlegesek az alapra. Ritkábban fordúlnak elő olyanok, melyeknek alapja pl. csillagidom vagy szabálytalan sokszög. E szabálytalanságot kiterjeszthetjük az élek irányára is, és gondolhatunk olyan hasábot, melynél az oldalélek nem merőlegesek a hasáb alapjára.

Mindezt meglátjuk mindjárt a következő példában.

8 XV 2. ben a legegyszerűbb adatokkal egy szabálytalan alapu *3*-oldalu hasábból indulunk ki. Erre az említett sorrendből síkkal való metszést, még pedig oly ferde metszést alkalmazunk, mely az első képsíkra merőleges.

Az így metszett hasábnak a sorrend *7.* pontja szerint elkészítendő hálózatához első sorban a metszőidomra lévén szükségünk, *XIIk* szerint oly harmadik képet keresünk fel, mint amilyet különösen *XII 2. l* szakaszban beszéltünk meg.

Ez a *3.* kép a metszőidom valódi nagyságával a hálózathoz szükséges adatokat kiegészíti. Mindazonáltal ez adatokat a *XII 1.* elvont ábra szerint, melyben a közt meghatároztuk, próbaképen jó lesz ellenőríznünk is.

b. Minden egyéb szerkesztést maga az ábra magyarázván, a ferdén metszett háromoldalu hasáb testmintáját el tudjuk késziteni. Ha azután *ABCD* szerint két ilyen testmintát egyesítünk, oly hasábot nyerünk, melyet könnyen érthető okokból ferdének hívunk, míg az eddig tervezetteket „egyeneseknek" mondjuk.

Ugyanígy kell még 4-, 5-, 6- stb.-oldalu ferde hasábokat is terveznünk és alkotnunk.

c. Ha viszont maga a ferde hasáb van adva, akkor az előbbi eljárás megfordítottjaképen az élekre merőleges metszés valódi alakját keressük fel, mert amint az ábra mutatja, a hálókifejtésnél derékszög derékszög mellé sorakozva, ez ad egyenes vonalat.

2. A gúla.

d. E testet hasonló módon vizsgálva, mint az előbb a hasábokat, megkülönböztethetünk szabályos egyenes gúlát, ha a magasság talppontja az alap középpontja, különben pedig, akár szabályos, akár szabálytalan alapu ferde gúlát.

e. A *8 XV 4.* ábrában egyenes csonka gúlát ábrázoltunk, *8 XV 8.*-ban pedig ferdén lemetszett csonka gúlát. A lemetszett kis gúla egyszersmind a ferde gúlák egy példáját mutatja. A második képsíkra merőleges metszés és az annak megfelelően választott *YZ* tengely magyarázatra nem szorúlnak.

3. A henger.

f. Valamint az egyenes hasábból *IIo* szerint az egyenes hengert keletkeztettük, épen úgy származik a ferde hasábból a ferde henger.

De az előbb a *8 XV 2.* ábrában követett útat is választhatjuk erre nézve. Messük a *9.* rajzlap *1.* ábrájában a körhengert síkkal és keressük meg ismét a metszőidom valódi nagyságát.

E célból a henger alapját több egyenlő részre osztjuk és az 1 I, 2 II, 3 III, stb. alkotók segítségével meghatározzuk a metszőidom I, II, III . . . pontjait, melyek úgynevezett „kerülék“-et (ellipszist) képeznek.

A sorrend értelmében készített hálózatot az ábrából is megértjük, ha hozzávesszük a következő *g* szakaszban elmondottakat.

Ez ábra egyszersmind a sorrend *9*. pontjára is mutat példát, a mennyiben az *1*. képsík a hengerre nézve „érintő sík“; más példa erre a *4*. ábra.

(*XV cb*-hez hasonlóan ily ferde henger is keletkezik.)

g. Viszont a ferde hengerből kiindúlva, ennek legfontosabb metszése ismét az oldalakra vagy alkotókra merőleges metszés,[1] mert számtalan alkotóját *XVcc* szerint vizsgálván, ez a metszés a kifejtésnél szintén egyenesnek mutatkozik. Meghatározására legcélszerűbb a kör átmérőjét 3-szor vennünk és hozzámérnünk még $^1/_7$ résznél parányival kisebb részt. Ezt azután ugyanannyi részre osztván, mint a kört, a kifejtést a legnagyobb pontossággal végezhetjük.

h. *A kerülék.* Ezt a körhenger metszése adta; mutatja azonban még a kör harmadik képe is, míg viszont a kerülék *2*. képe kört mutat.

Ez összefüggés alapján a kerülék számtalan tulajdonságát vezethetjük le.

Látjuk tehát, hogy a ferde henger alapja itt kerülék, lehetne azonban kör is; viszont lehetne az egyenes henger alapja kerülék.

Ha a henger magassága igen csekély, korong, — ha az egyenes körhenger magassága akkora, mint az alap átmérője, egyenlő oldalu henger keletkezik, stb.

Feladat. Milyen test az, melynek *1*. képe kör, a *2*. négyzet és a *3*. egyenlőszárú háromszög?

4. A kúp.

i. A gúlából származott a kúp. A *2*. ábrában az ismert kúpból egyszerű csonka kúp lett.

Az egyenes körkúp és a csonka kúp hálózatához ajánlatos kezdetben csak olyan kúpot választani, melynek alkotója az alapkör küllőjével egyszerű összefüggésben van. Ha pl. az alkotó *2*-szer, *3*-szor

---

[1] Lásd *XVcm* [1] megjegyzést.

nagyobb a kör küllőjénél, körülmérve, a kerület is 2-szer, 3-szor akkora, és belőle $1/_2$, $1/_3$ . . . rész mindjárt megadja a keresett hálózatot.

k. Ezt az egyszerűsítést alkalmaztuk a *3*. ábrában is és megkaptuk a kiterített köríven, egyszerüen egyenlő részekre való osztással, az alap megfelelő egyenlő részeit. Nem lesz nehéz beható tanulmányozás után a kifejtett ferde metszést is megérteni.

l. A ferde metszetben, ha számtalan sok pontját kapcsolatba hozzuk azzal a *2*—*2* ponttal, amelyek távolságában a görbe vonalu idom a leghosszabb és a legkeskenyebb, és összefüggésben vizsgáljuk még az előbbi hengermetszettel is: akkor e metszetben megint kerüléket kapunk.

m. A kúpot oly görbében is metszhetjük, mint amilyet a ferdén feldobott tárgy ír le; az *1*. rajzlap *11 6*. kúpját pedig egy még különlegesebb görbében vághatjuk el. Ilyen görbét a *7*. ábra *2*. képének görbe széle tüntet fel. A csonka kúp származhatik köralapu, kerülékalapu, egyenes és ferde kúpból. Ha az egyenes körkúp valamely képben egyenlőoldalu háromszög, akkor azt egyenlőoldalunak nevezzük.

Az egyenes és ferde henger és kúp alapja lehet különben bármilyen görbe vonal, pl. csigavonal, stb.[1] Érintő síkot mutat az *5*. ábra.

5. A gömb.

A *4 III 7*—*8*. ábrák alapján a gömbre vonatkozólag még számtalan feladattal foglalkozhatnánk; itt most csak azt jegyezzük meg, hogy a gömb úgy is keletkezhetik, ha valamely félkör *ED* egyenes körül, mint forgástengely körül forog.

XVd. A görbe lapu testek közűl a forgástestek, különösen a másodrendüek.

Bevezetés.

A görbe lapokat már *Ii*-ben említettük. Görbe

m [1] A hasáb és henger merőleges, legfontosabb metszése vagy profilja különösen gyakorlati tárgyaknál, pl. párkányoknál, rendesen mindjárt mint *3*. kép az *1*. vagy *2*.-ba úgy van berajzolva, mintha metszés után a képsikkal egyenlőközü helyzetbe forgattuk volna.

lapot látunk a hengeren, a kúpon és a gömbön. A következőkben újabb görbe lapokról is lesz szó.

A forgástestek.

a. Ugy, ahogyan a gömböt gondolhatjuk forgás által származottnak, úgy keletkezhetnek a körhenger, a körkúp és még végtelenül sok test is. Így keletkeznek a legkülönbféle alaku edények, az épületeket diszitő oszlopok, stb.

b. *A másodrendű forgástestek.* A gömbök, a körhengerek, körkúpok görbe lapjait másodrendűeknek vagy másodfokúaknak nevezzük, mert ha a sorrend *5.* pontja szerint metszésüket keressük, akkor az egyenes legfeljebb *2* pontban hatja át. Ugyanaz a szám szabja meg a *9.* pont szerint egy kivülök fekvő egyenesen áttehető érintő síkokat is.

Tojásalaku forgástest származnék pl. ha az *1.* ábrabeli kerüléket $I'''O'''$ körül forgatnók; ha pedig az a legkisebb átmérő körül forogna, lencsealaku testet kapnánk.[1]

A *XVcm* alatti kúpmetszetek elsejének forgatásával azt az üres görbe lapot nyerjük, melyet bizonyos csodaszerü kisérleteknél használunk fel, pl. hangfelfogásnál, vagy amelylyel akár jégbe vágva és üregével a nap felé tartva, a legnehezebben gyuladó tárgyakat is elégethetjük. (Homorú tükör.)

A 3 kúpmetszet közül, melyekhez a kör is tartozik, mint a kerülék bizonyos esete, *XVcm* másodikával kapcsolatban szintén egy egészen új görbe lapot készíthetünk, ha a hengert, a szerint amint keletkezett, úgy állítjuk elő, hogy két körvonalat számos egyenlő és egymással egyenlőközü szállal kötünk össze. Ha azután mindkét kört feszesen tartva, az egyiket egy kissé elforgatjuk, akkor *2.* képül a *7.* ábrabeli sajátságos alakot nyerjük és jobbról-balról egyszersmind az említett kúpmetszetet is látjuk, melyből végül még egy újabb görbe lapot is leszármaztathatnánk és az előbbieket ismét *5*-té kerekíthetnők ki.

---

b [1] Ilyen földünk ellipszoidalakja, amely azonban a gömbhöz nagyon közel áll.

XVe. Általános másodrendü és egyéb görbe lapu testek. Egybevetések, csoportok, áthatások és feladatok.

a. *Általános másodrendü görbe lapok.* A kerülékes hengereken és kúpokon kivül figyelemre méltó még 5 másodrendű görbe lap; ezekről a *XVdb*-beliekkel összefüggésben később még szó lesz.

b. *Más testek és feladatok.* A már ismert testeket [ezek között a XVb-belieket, továbbá olyanokat a milyenekkel pl. az esztergályos, asztalos, kőfaragó, gépész, műépitő, stb. foglalkozik], a gyakorlatból tetszésünk szerint gyarapíthatjuk és magunk erejéből is ábrázolhatunk pl. hasábból kiindulva pilléreket, a falból félig kiálló pilasztereket, hengerből kiindulva oszlopokat, csavartesteket, más műipari tárgyakat, vagy pl. oly görbe lapokat, amelyeken számtalan egyenes alkotót húzhatunk ugyan, de amiket ki nem fejthetünk; tervezhetünk egybevetéseket, csoportokat, a *9.* rajzlap mintájára nehezebb áthatásokat, kitűzhetünk magunknak elméleti feladatokat, stb.[1]

c. A testekre vonatkozó tervezéseket végül még *XVa 10* szerint VI—X-be is áttesszük.

XVe[1] A *XVa*-ban emlitett tétellel mind e feladatok megfejtése sokszor meglepö módon egyszerüsíthetö, azért ama tételt most még közelebbről is megvizsgáljuk. Tekintsük meg e célból a *8 XV1.* ábrát. Ebben a kocka *12*-vel jelölt élére vonatkozólag egy párhuzamos *XZ* tengelyt választottunk, mely azt eredményezte, hogy az él $1'''2'''$-ban a képsikkal egyenlöközüvé válván, valódi nagyságban tünik fel. Ugyanazt látjuk a *8 XV2.* ábrában, amelyben végül még egy, az $1'''2'''$-ban mutatkozó éllel mármost derékszöget képező tengelyt választottunk és fölkerestük, úgy mintha a hasáb ott sem volna, az *12* élt függetlenül 4. képben, $1''2_{''}$-ben mint pontot. Ha pedig *XZ*-t mindjárt egybeesöleg választjuk *(eet)*, a valódi háromszöget kapjuk meg egyszerübben.

Példa még a gúla magassága a *10.* rajzlapon $O^{v}P^{v}$—$O^{vi}P^{vi}$-ban és $A^{vii}P^{vii}$—$A^{viii}P^{viii}$-ban a gúla oldaléle; továbbá a *13.* rajzlap *17.* ábrájában a hasábon felvett *PR* egyenes.

Ilyen példákat a végtelenig szaporithatnánk. Most végül a nyert tapasztalatokat még a következö utolsó tétel alakjában emlékezetünkbe is véssük:

XV. tétel.

Derékszögü átmenő vonalak vagy egyenlőközü, esetleg egybeeső tengely, valódi nagyságra, párhuzamos vagy eet. és azután még derékszögű tengely pedig pontra vezetnek.

NEGYEDIK RÉSZ.[1]

Projekciók.[2]

a. A címbeli idegen szó fogalmával, amellyel a *VIIId* szakaszban már ismerkedtünk, ebben a részben tüzetesebben fogunk foglalkozni, hogy kibővítvén, ezzel az eddigi, gyakorlati alapon tárgyalt részeket,[3] melyekben lehetőleg kerültük az idegen hangzásu kifejezéseket, ezután „ábrázoló geometria“ címmel elvontabb munkákat is tanulmányozhassunk.[4]

b. E célból a *VIIId*-ben említett projiciáló sugarakat még inkább általánosítva, felveszünk a térben valamely tárgyat és ennek minden pontján át olyan projiciáló sugarakat húzunk,[1] melyek nem egyenlőközüek, hanem egy állandó középpontból *(c)*[1] indúlnak ki. Keressük mármost fel minden egyes projiciáló sugárnak nyompontját egy **sík**-on, melyet akár a tárgy és *c* között, akár kivülök választunk, akkor a nyompontok összességét szintén „projekciónak“[2] fogjuk nevezni, még pedig ez esetben „centrális projekciónak.“[3]

---

a[1] mint a *2.* rész kibövitése. **a**[2] Projections. **a**[3] A legújabb tantervek szerint e részek nem képezik ugyan a reáliskolák *V.* osztályának tárgyát; mindazonáltal a „mathematika“ „geometria“-i tananyagának „sztereometriai“ részében ama részek kapcsán aránylag gyorsabban kettös célt lehetne elérni. **a**[4] Föleg tudományos alapra fektetett kitünö középiskolai tankönyveink vannak Babiák N., Dr. Horti (Hornischek) H., Kiss E. J. középiskolai és Dr. Klug L. egyetemi tanároktól.

b[1] centre. **b**[2] Igy határoztuk meg az *5 V15.* ábrában a kocka felsö négyzetének „centrális projekcióját,“ amelyet ott elkülönítve mint vetett árnyékot srafftoztunk. **b**[3] Ha az egész kocka

c. Ha a projiciálás középpontját akkora távolságban vesszük fel, hogy a projiciáló sugarak, úgy mint *VIIId*-ben, ismét egyenlőközüekké lesznek, akkor az megfelel a *VIId* és *e*-beli jelenségnek. Ilyen projekció neve „klinogális projekció.“[1]

d. Ha végül a tárgy pontjaiból oly projiciáló sugarakat húzunk, melyek a „képsík“-ra merőlegesek, az esetben a nyom- vagy „talppont“-ok megfelelő összekapcsolása az „orthogonális projekció“-t eredményezi. (projection orthogonale). Ez tehát tényleg a képsíkban levő geométriai idom, melyet, ha *VIIId* szerint mint derékszögü képet árnyékolással kidomborítunk, benne képzelő erőnk magát a tárgyat is láthatja.[1] E *4*. rész *c* projekciója és *4d, VIIId*-nek megfelelően „parallel projekció“ néven is szerepel.

e. **Projektivitás. Reciprocitás.**[1] Ha a *4b—d*-beli projekciókkal a térbeli alakzatokkal való összefüggésükben és mindezeknek egymás közötti rokonságával, esetleg helyzetváltozásokkal kapcsolatban foglalkozunk, akkor ez az „Előszó“-ban említett mennyiségtani tudományok egy ágára: a projektiv vagy újabb geométriára vezet rá.[2—15]

árnyékát vagy centrális projectióját határozzuk meg és ezt azután úgy, mint *7 IX1*-ben, képnek tekintjük, akkor „perspektivának“ hivjuk. Ha a tárgyon nemcsak egyenesek, hanem görbék is fordulnak elö, azok projekcióban is görbék lehetnek.

Választhatunk azonban a sík (képsík) helyett hengeres, kúpos, gömb- vagy egyéb görbületü lapot is és akkor a projekció e görbe lapokon jelentkezik. Fogjuk továbbá látni, hogy nemcsak sík vagy görbe lapon, hanem magában a térben is keletkezhetnek projekciók. (Mindezeknél a projicáló sugarak lehetnek párhuzamos egyenesek söt görbék is).

c [1] „Incliner.“

d [1] Söt árnyékolás nélkül is, legfeljebb a *1111*. tétel szerint kihúzva, olyannak tekintheti, mintha üveg vagy drótból testutánzat volna. Vehetjük tehát térbeli alakzatnak is és nézhetjük ugyanazt pusztán geometriai projekciónak, a jelzésben esetleg pontokkal megkülönböztetve.

e [1] és dualitás. e [2] Helyzet geometriája. (Synthétikus g.) Dr. Klug L. A projektiv geometria elemei. (Ez alapon azután az ismeretes tudós több terjedelmes értekezése révén e tudomány legmagasabb szinvonalára emelkedhetünk.) Egy másik alapvető rendkivül becses munka pedig „A kinematikai geométria“ Dr. Hornischek (Horti) H.-töl, kinek sikerült az újabb geométriát még az iskolai rajzoló geométriával is érdekfeszitö módon kapcsolatba hozni. e[3] A térbeli idom és projekciója közötti összefüggést projektivitásnak nevezzük; ez meg kapcsolatban van a reciprocitás- és dualitással és vonatkozik térbeli testekre is. Ha pl., hogy egyszerü idomból induljunk ki, a képsikhoz ferdén álló háromszöget gondolunk, akkor projekciója olyan háromszög, mely a geométriából ismert rokonságok egyikéhez sem tartozik. Ez az új rokonság a projektivitás. A térbeli idom és bármely projekciója oly összefüggésben van, hogy a térbeli idom minden pontjának pont és minden egyenesének rendesen egyenes felel meg, akár oly helyzetben, hogy a megfelelö pontokat projiciáló sugarak kötik össze (amit perspektiv helyzetnek hivunk), akár másban. e[4] Pontnak tehát pont, egyenesnek egyenes felel meg. Egyuttal megforditott értelemben is vizsgálhatjuk az idomokat. Ha pl. egy felvett háromszöghöz vagy más idomhoz úgy határozunk meg megfelelö idomot, hogy minden fölvett pontnak ne pont, hanem egyenes (vagy bizonyos törvényü görbe) feleljen meg, akkor minden, két pont által választott egyenesnek pl. két megfelelö egyenes metszése által keletkezett pont felel meg. Ez a reciprocitás a sikban. e[5] Ennek egy nemét tényleg meg is szerkeszthetjük, ha a *12.* rajzlap *11.* ábrája értelmében egy állandó kört vagy más kúpmetszetet (esetleg más görbét) veszünk fel és egy választott *P* (polus) pontból érintöket húzva s az érintöpontokon át egyenest fektetve, e *P* pontnak megfelelö p (poláris) egyenest meghatározzuk. Igy szerkeszthetjük meg bármely választott idom minden pontjának megfelelö reciprok idomát. e[6] Ezt átvihetjük a térre is, ahol pontnak sik (vagy határozott görbe lap) felel meg. Ebben két pont összekötö egyenesének tehát pl. a megfelelö *2* sik metszésében ismét egyenes felel meg, pontok vagy egyenesek által választott siknak pedig viszont pont. (Miért?) Ezt is megszerkeszthetjük, ha az elöbbi kúpmetszet helyett esetleg másodrendü görbe lapot, mondjuk gömböt veszünk fel és valamely választott ponthoz úgy keresünk megfelelö sikot, hogy a pontból az állandó gömbhöz *XVa 9* kibövitéseül több érintö sikot szerkesztünk és az érintöpontokon át sikot fektetünk. Ha pl. a *13.* rajzlapon a *32.* ábrabeli kockához megfelelö reciprok testet keresnénk, legegyszerübben oly gömböt vennénk fel, mely a kockát belülröl érinti és akkor eredményül a *32.* ábrabeli nyolclapot nyernök; épen így jönnénk rá a *34.* ábrabeli *12*-lapból kiindúlva és minden ötszög középpontját a legközelebbiével összekötve, (Keppler és Poinsot ezeket átlók irányában is kötötték össze buzogányszerü testekké) a *35.* ábrabeli *20*-lapra, vagy megforditva. Ami a *4*-lapot illeti, az ismét csak *4*-lapot eredményezne, stb.

e[7] Ily módon más testek ismét újabb igazságokra vezetnek rá. Ez igazságok azután két egymásnak megfelelö, úgynevezett „duális“ csoportot képeznek. Az imént láttuk pl. hogy a síkban két pont egyenest, viszont két egyenes pontot, a térben *3* pont síkot és viszont 3 sík pontot határoz meg, stb. Ezekután azonban térszüke miatt visszatérünk ismét a projektivitásra. e[8] Induljunk ki újolag valamely egyszerü síkidomból, pl. az *5 V15.* ábrabeli kocka felsö négyzetének vetett árnyékából. Ez az eredeti idomhoz hasonló idom. Ha azonban a *12.* rajzlap felsö *12.* ábrájában egy térbeli négyszög nem egyenlöközü az elsö képsíkkal, akkor annak egy háromszöge és *c* középpontból vetett árnyéka, vagy centrális projekciója közt való projektiv rokonságot „kollineácio“-nak nevezzük. Ha mármost az 1. képet csak projekciónak vesszük, akkor a projekciók *A·B·C·*- és *ABC*-ben szintén kollineációt mutatnak, amelynél a három *AA·*, *BB·* és *CC·* egymásnak megfelelö pontpárok számtalan egymásnak megfelelö pont- és egyenespárt határoznak meg. Egy vagy különbözö két síkban fekvö idomra nézve a kollineáció az a rokonság, melynél *3—3* egymásnak megfelelö pontból (ABC—A·B·C·) kiindúlva a megfelelö pontok összekötése (kollineációsugarak) egy középponton *(c)* megy át; ha pedig a megfelelö egyeneseket meghosszabbítjuk, azok egy egyenesben, a kollineáció tengelyében (nyom) találkoznak, (vagy megfordítva) és ennek alapján az emlitett számtalan pont- és egyenespárt a derékszögü képtöl függetlenül is meghatározhatjuk. e[9] A *3—3* pont alapján, amelyekböl kiindultunk, ugyanis más, egymásnak megfelelö portpár szerkesztése, mint pl. *E·*-nek megfelelö *E* (vagy megforditva), *E·*-n át tett segédegyenessel, akár az *5 V15.* ábrából is, nagyon egyszerü eljárással levezethetö. (Mindezt számitással is pótolhatjuk, ha egy kollineációsugaron pl. *cDF—cD·F·* megfelelö pontokból kiindúlva *cDEF*-hez közvetetlenül, vagy egy kivül választott ponttal való összekötés által kiszámitjuk *cD·E·F·* sorozatban *E·* helyzetét, ha nincsenek is az ábrabeli perspektiv helyzetben). Kollineáció a *12* ábrában, egy pontból való árnyékmeghatározásnál látható, és minthogy a világító vagy projiciáló sugarak gúlát képeznek, könnyen értbetö, hogy bármely gúlának két, nem egyenlöközü síkmetszete kollineációt tüntet fel; pl. a *8 XV8* ábrában az *1 2 3* és az *I II III* háromszögek, akár a térben, akár projekcióban. Átvivén mindezt önkéntelenül is mindjárt a kúpra, a *9.* rajzlap *3.* ábrájában látjuk, hogy ott a kúp csúcsára vonatkozólag a rokonság szintén kollineáció. e[10] Ha ezen az úton tovább haladnánk és az *1.* rajzlap *16* kúpját metszenök különbözö irányban két síkkal, akkor az újabb geométria beláthatatlan terére lépnénk. Az a vizsgálódás, hogy ama kettös vagy önmagát meghosszabbító kúp egyik metszetének, mint körnek, megfelelhet kollineációban mint másik metszet, hol az ellipszis, hol a parabola, hol pedig a hyperbola, ez meg rávezetne a végtelen űr égitestjeinek bizonyos szempontból tekintett mozgására és más mathematikai és természettudományokkal való összefüggésre. Viszont a kúpmetszetekből leszármaztatható másodrendü görbe lapok rokonsága szintén térbeli kollineáció, amelyre még rátérünk. e [11] Ha továbbá a felső *12.* ábrában, csak a négyszöget tartván szem előtt, ezt nem egy pontból világitanók meg, hanem egyenlőközü sugarakkal keresnők meg klinogális projekcióját (VIId), akkor az előbbi gondolatmenetet követve, a származott rokonságot affinitásnak nevezzük. Ebben szintén 3—3 pontból kiindulva, akárhány új pontpárt kereshetünk fel és ezek összekötése mindig párhuzamos egymással; a megfelelő egyenesek pedig meghosszabbitva az affinitás tengelyében metszik egymást. Ennek önálló megkisérlése után e rokonságot a *12.* ábrában $A'B'C'$ és a leforgatott $A_0B_0C_0$ között felismerhetjük és ugyanígy a *8 XI2—3.* ábrákban, amelyekben az affinitás tengelye a nyom. Látjuk továbbá az affiinitást a 8 XV8. ábrában, söt a *9.* rajzlap *3.* ábrájában is az $1_0'2_0'3_0'$ kör és az $1'2'3'$ ellipszis, és a többi rajzlapon a képek és az árnyékok közt. Mindez viszont a hasábok és hengerek síkmetszésével függ össze. e [12] Végül, ha tisztán geometriai projekcióknak vesszük, amint bármily síkidom, pl. háromszög, két képben mutatkozik, akkor, minthogy a megfelelő pontok egymással egyenlőközü átmenö vonalakon vannak, a rokonságnak affinitásnak kell lennie és ha az affinitás tengelyét keressük, ez a *45.* ábrával kapcsolatos elemzésre vezet, stb. e[13] Ha pedig az affinitást a térre alkalmazzuk, akkor térbeli affinitás és kollineáció alapján *XVd, b*-ből levezethetjük *XVea* lapjait és a projektiv rokonságot még számtalan esetben alkalmazhatjuk és megszerkeszthetjük. e[14] Az alsó *12.* ábra mutatja pl. a térbeli kollineáció szerkesztését, a felső *12.* ábra alapján fölkeresett megfelelő pontpárok nyomán. Ezekre nézve tetszés szerint választott adatokból indulhatunk ki és meghatározhatjuk a kollineáció tengelye helyett a síkot, stb. e[15] Ha az adatokat a központnak nem egy oldalán választjuk, ha a középpont vagy egyéb részek a végtelenbe távoznak, akkor a (perspektiv helyzetü) kollineációból nemcsak affinitás származtatható le, hanem rendre az iskola geométriájának többi rokonsága is. Igy származik a centrális projektióból a klinogális és orthogonális, a *11.* rajzlap centrális projektiv kockájából *16* és *26* és végül *27, 2).* Mindezt egymással összefüggésben szemünk elé állitva, ismételjük a *12.* rajzlap főbb ábráit 11—15-ben.

Projektivitás pl. a kocka és bizonyos négyoldalu hasáb, esetleg projekcióik rokonsága; reciprocitás, a kockáé és a *XVb*-beli nyolclapé.

g. Összegezés :

11. reciprocitás, *12.* kollineáció és affinitás, *13.* hasonlóság, *14.* egybevágás, *15.* szimmetria.[1]

h. **Orthogonális projekció részletezve.**[1] Habár *VIIId*-ben és a *4.* rész *d* szakaszában orthogonális projekciókkal ismételten találkoztunk, itt mégegyszer részletesen kifejtjük, hogy elméletileg véve, valamely tárgy orthogonális projektióját úgy keressük meg, ha minden pontjából a képsíkra merőleges projiciáló sugarakat húzunk és azoknak talppontjait határozzuk meg.[2]

Az orthogonális projekciót, amint hangsúlyoztuk, a teknikában rendesen nem vesszük a képsíkban fekvő síkidomnak, hanem benne a *X2.* szakasz *5.* és *6.* bekezdése értelmében magát a tárgyat a térben kell látnunk. Igy pl. az elemi geometriai szabályos hatszög vagy más idom, reánk magasabb szempontból nagyon különböző benyomást tehet. Ha a hatszög minden csúcsát a középponttal kötjük össze, láthatjuk benne a kocka *5 VI1.* ábrabeli egyenlőméretű képét, ebben meg a *12.* rajzlap 1. szögletében lépcsőt, melyet ugyanebben a rajzban a jobboldali szöglet ábrája szerint megfordítva is képzelhetünk (Psychophysika). Több kisebb kockára való bontás a *3.* és *4.* szöglet byzanci diszítményeit mutatja, stb. Ha átszögellőt húzunk, az a *12.* rajzlap bal szélén ábrázolt szabályos *8*-lapnak, a jobb szélén pedig úgynevezett antipyramisnak (prismatoïde) felel meg, és így tovább.

k. Képsíkokat *IIg* és a *28.* oldal c^1 jegyzete szerint csak az elméletibb munkákkal való kapcsolat kedveért különböztettünk meg.

A két képsíkot rendesen egymásra merőlegesen valamely testminta szemlélteti. Mi ezt a *13.* rajzlapon a *21.* derékszögü képben mindjárt közvetet-

---

g[1] amely ferde is lehet.

h[1] I—VI-tal kapcsolatban. **h**[2] A legújabb tantervek csak az orthogonális projekció önálló tárgyalását irják elö, és láttuk, hogy minden más kép és projekció tulajdonképen derékszögü képben szerkeszthetö meg és ebböl vezethetö le. Tárgyalható a többi projekció is önállóan és minden pl. a centrálisból is levezethetö. (Ennek feltétlenül szükséges volta azonban nagyrészt csak önámítás, mert egyszerüen a *4e*[10]-ben említett metszéssel helyettesíthetö.

lenül láthatjuk. Gondoljunk ott a felemelt *1.* képsík (vagy röviden, 1. képsík) alatt feketével bevont helyen a rajzlap mögött ürt és vegyünk fel a két képsík között valamely *PI* térbeli egyenest. Hogy most ennek orthogonális projekcióit meghatározzuk, húzzunk a *P* és *I* pontokból előbb merőlegeseket a *2.* képsík felé (vetítő sugár), jelöljük a talppontokat pl. $P^{\cdot\cdot}$- és $I^{\cdot\cdot}$-vel. Ezek *P* és *I* orthogonális projekciói. ($PP^{\cdot\cdot}$ a *2.* ┼ távolság vagy az ellenkező képben megmérhető ordinata.) Vonjunk azután merőlegeseket az *1.* képsík felé (1. vetítő egyenes). Ezeknek talppontjait ne jelöljük most *O*-val, hanem $P^{\cdot}$- és $I^{\cdot}$-tel és tegyük végül le a *1.* képsíkot a rajzlapba; ott azután a *30.* ábrában együtt látjuk a két projekciót, (Ezek a *22.* ábrában voltaképen már megvannak.)

Ha az előbbiek szerint az egyenes többi pontjainak is keressük projekcióit, projiciáló vagy vetítő sík keletkezik. (*1.* és *2.* vetítő sík.)

l. Mindezekkel az *12.* alaptételt és az egyenes arányos osztását tisztán geometriailag vizsgálhatjuk, ami pedig valamely köz felrakását illeti, ahhoz már az egyenes valódi nagyságára van szükségünk.

m. Ha a *45.* ábrában ferde síkot veszünk fel, az *1.* képsík letevése után *46.*-ban az összefüggés *8 XV7*-tel nyilvánvaló. Ily módon mindent, amivel *I*—*VI*-ban foglalkoztunk, le lehetne vezetni.

n. A derékszögü képeknél azonban rendesen mindent közvetetlenül a térben látunk és külön projekció nincs. Ha pedig projekciót különböztetünk meg, akkor meg a térbeli tárgy nincs többé ott.

A teknikában mindazonáltal egyes részletekre nézve pl. valamely épület képében a metszeten kivül eső gerincek külön projekcióját is alkalmazzuk. Alkalmazzuk továbbá a tisztán geométriai projekciót, amint látni fogjuk, a *VI*—*X*. képek szerkesztésére is.

A projekciót a képtől pl. pontokkal különböztethetjük meg, ez azonban mellékes, mert képzelő erőnktől függ csak, hogy pl. valamely tervet képnek vagy projekciónak tekintsünk-e.[1]

---

n[1] Használunk *lg*[3] szerint csak egy, mondjuk elsö, de méretes képet, vagy egy elsö projekciót és hozzá még egy ferde vagy az elsö képsíkkal adott távolságban párhuzamos segédmetszés elsö projekcióját, vagy a segédsík helyett egy állandó pont *(c)* és ezen áthelyezett egyenlöközü elemek rajzlapunkon

p. **Klinogális projekciók.**[1] A *4c* szakaszbeli meghatározás szerint ezek ismét voltaképen nem egyebek, mint a *VII.* és *VIII.* képek, melyeket egy kis kocka közvetetlen szemléletéből is megérthetünk. Ezeket mármost szintén nemcsak képeknek, hanem projekcióknak is tekintjük. *VIII* és *2*-nek szerkesztésével egy *5 V16* és *5 V17*-nél általánosabb helyzetü kocka alapján a 13. rajzlapon *16.* és *25.* ábráiban találkozunk ismét. *VIII*-be a *20.* ábrában a szabályos *8*-szögnek az *AO* átfogóból való szerkesztését, abba *28*-ban egy más testét, a *32.* ábrában pedig a szabályos *8*-lap képét látjuk. Igy rajzolhatnók, mindig a kockából kiindulva, elemi módon a testeket mind. Látjuk továbbá alkalmazását a müvészetben pompejii maiandrosnál a *12.* rajzlapon és a *11.* rajzlap sokszögszerkesztését árnyékképen. A *19.* ábra szerint a képsíkra merőleges élek mind meredekebbek lesznek, míg végül *27, 1)*-ben a *XI, 1)* kép keletkezik. A *6 V25.* ábrában *FI* a kocka élének $\frac{2}{3}$-ada, *7 XI*-ben $\frac{1}{2}$-e (mindkét kép egymáshoz tolva) *27, 1)*-ben $\frac{1}{2}$-e, a *11.* rajzlapon pedig $\frac{1}{3}$-a. Ha pedig *FI* semmivé rövidül, ismét *27, 2)* keletkezik.[2–4]

---

fölvett orthogonális projekcióit, (ami az elméleti, önálló centrális projekció). (4h².) Előfordul továbbá ritkán orthogonális projekció *2* egymásra nem merőleges képsíkon is.

p[1] A *VII—VIII.* képekkel kapcsolatban. **p**[2] *VIII1* tényleges keletkezését a *9.* rajzlap magyarázza, ahol a *9.* ábra egyszersmind a származott kocka vonalmenti *4*-szeres nagyitását, a *11.* és *13.* rajzlap pedig a 2-szerest mutatják. A *26.* ábra révén különben tetszés szerinti nagyságban is szerkesztjük a *11.* rajzlapon, amivel meg *2*-szeres vonalmenti nagyitásban függ össze a *7 VIII1.* ábra. **p**[3] E *VIII1*-féle képek élei $1 : 1 : \frac{1}{2}$ arányban mutatkozván, beléjök a *9.* és a *11.* rajzlapon a *XIIg* és *XVa10*-ben említett nagyitást (esetleg kisebbitést) könnyü eszközölni. Erre nézve pl. a 14. rajzlap *49.* ábrája *1.* képét geométriai projekciónak tekintve, a projekciót a *11.* rajzlapon a kocka alsó lapjába vagy bármily magasan fekvő lapba átméréssel vagy négyzetek segítségével belerajzoljuk és a talppontokból felfelé vagy lefelé a *2.* képben látható méreteket (kóták, cotes) átvisszük; mindezt esetleg nagyitással. **p**[4] Az árnyékok számtalan ily tengelyméretü képet nyujtanak és igy tetszés szerinti irányokkal és méretekkel vehetünk fel alapkockát; a *34.* és *35.* ábrákban azonban még a *26.* szerint szerkesztett alapnégyzetből indúltunk ki és csak a magasságot változtattuk meg.

r. **Centrális projekció síkon.** Ennek elméletével *4b*-ben foglalkozván, ezt még a *IX.* és *X.* fejezetekkel fogjuk kapcsolatba hozni. Valamint *VIII1*-nek, úgy most az eddigi ismeretek alapján *IX1*-nek is tényleges keletkezését ajánlatos a 11. rajzlapon tüzetesen megvizsgálni. Most csak annyit jegyzünk meg, hogy *1.* és *2.* képben oly helyzetü kockát vettünk fel, mely az *1.* képsík alatt fekszik, és *4b* szerint eljárva meghatároztuk a kocka centrális képét. (Metszés módszere.)[1]

Feladatul ezzel a kiindulással és csak a *VI–VIII*-képekben tüntessük azután fel pl. a *7.* rajzlap szerint a fakötéseket, a *11.* szerint téglakötést mutató falszögletet, esetleg a *11.* rajzlap homlokzatát és metszeteit, mert egyelöre óvatosaknak kell lennünk a kép megválasztásában. Igy a *9.* rajzlap soklapjai csak nagyon ritkán mutatkoznak tetszetöseknek valamely képben. A *34.* és *35.* ábrákban különben oly módon rajzoltuk azokat amaz újabb kockákba, hogy a *9.* rajzlapról leolvastuk, mily arányt mutat a soklap éle a körülírt kockáéval (amit aranymetszetnek nevezünk) és ezt pl. *8*-as beosztásával $8 : 5 = 5 : 3$ szerint megközelítjük. A *2.* képet a *112.* tételt megfordítva, $A'B'$-gyel derékszögü átmenö vonalak és $A''B'' = A_0B_0$ eredményezik. Szabályos *8*-szöget a *20.* és a *26.* ábrák szerint szerkesztünk.

r[1] Egyelöre beérhetjük azzal, ha ily kockát a *33.* ábrabeli, pl. *4*-szeres vonalmenti nagyitás szerint tudunk szerkeszteni, szem elött tartván, hogy *E* pont a betöltendö rajzterületnek bal vagy jobb oldali szélén akárhol lehet és hogy e terület oly négyzeten belül legyen, melynek oldala legfeljebb *10* akkora rész, mint amilyen a *33.* ábrában *EO*-n *5* van. *c* föpont *cO* vonalon a rajzterületen belül bárhol választható, kivüle pedig lehetöleg közel hozzá, hogy az átló segitségével meghatározott apró négyzetek legszélsöbbikében is *EF* rövidebbnek tünjék fel *EG*-nel, amint azt tapasztalásból is tudjuk. Szükség esetén utólag a fennebbi rajzterületen kivül még kevéssel kiterjeszthetjük négyzetes hálózatunkat és rajzunkat, ahogy azt a *11.* rajzlapon kicsinyben a *7.* rajzlapon való nagyitás számára tettük, de müvészeti szempontból biztosabb, ha azon belül maradunk. Ily négyzetes hálózatokra és kockákra nem nehéz azután még *4p*[3]-at is alkalmazni. Ennek megforditottjakép pedig *2* centrális projekcióból a *11.* rajzlapon látható összefüggés alapján viszont *V12f*-et szerkeszthetjük meg (Javary és Laussedat photogrammetriája újabban az angol-búr háborúban alkalmazva). Fényképeken és számtalan alkalmazáson kivül a festészeti müvek és sokszorositásuk, a szabadkézi, továbbá

s. **Centrális projekció görbe lapokon és a térben.** Ha az előbbieket művészeti és teknikai szempontból *IX2*-re alkalmazzuk, amidőn kisebbítve a henger átmérőjét körülbelül *38* m.-nek magasságát *15*-nek, *c* pontot pedig egy *14* m. átmérőjü hengeren belül vesszük, akkor a később részletezendő körképhez szükséges elég adattal ismerkedtünk meg.

Megemlítendő itt, hogy a körképet esetleg áttetszőséggel, színes ragyogó megvilágitással, vízterülettel egybekapcsolva, sőt mozgónak is tervezhetjük. Ha továbbá a mozgó fényképeket használjuk fel, kapcsolatban görbített emulziós gelatine-lapokkal és *X2, 2.* bekezdésével, akkor tág terünk nyílik újabb találmányokra. *4r* és *4s* érdekesen alkalmazható gúlák-, hengerek-, kúpok- és gömbökön való egyszerü és tükörképek szerkesztésénél is. (Dioramas, mareorama az 1900. világkiállitáson, cycloramas, anamorphoses.)

t. Térképeknél az egész világürre, égi testekre, földünkre, közlekedésre alkalmas légkörünkre, stb. a reciprocitás, *4h, 4r* és *4s* nyernek alkalmazást.[1—3]

---

a tervezéseket eredményképen kiegészitő rajzok, stb rendesen egy középpontból ábrázolt képek, mig az iparmüvészeti és teknikai rajzok legnagyobb része egyenlöközüen van ábrázolva. (36. oldal.)

t[1] A negyedik rajzlapon a geografiai fokhálózatok készítésére *4II17* és *4II18*-ban *4r*-et úgy alkalmaztuk, hogy *c*-t egy, a földgömböt (tulajdonkép *XVd b*[1]) utánzó kis gömb felszinén (stereographia) vagy középpontjában (centrikus projekció) vettük fel és a képsikot hol az egyik sarkvidéke alatt (poláris projekció) hol az egyenlitő síkjára merölegesen (aequatoriális projekció) hol pedig tetszés szerint, de mindig merölegesen a *c* és a föld középpontjának összeköttetésére (horizontális proj.). Amint végül a dél- és az egyenlöközü körök centrális projekeióit határoztuk meg, úgy lehet *X2, 2.* bekezdése szerint ílyen kis gömböt körülzáró hengeren (Mercator, Lambert), több vagy számtalan csonka kúpon (polykonikus, globuláris projekció) is térképet ábrázolni és ily térképet szintén, a nagyterjedelmü projiciáló sugarakat a föld felszinéhez közel csaknem párhuzamosaknak tekintvén, oly módon felfogni, mintha magasból a föld egy részét szemlélnök, mint a derékszögü képekben szerkesztett térképeknél (pol. aequ. hor. orthographia). Alkalmazzák továbbá a X. fejezet bekezdésében em-

u. Utójára rátérünk még *X2, 3.* bekezdésének előkészítésére is, ami *4e*[14]-en alapszik és a dombor-műveknél, relief, (basrelief, gemme) és kapcsolatban *4r*-rel a szinházi díszleteknél is érvényesül. Ezeket mind *c*-ből nézzük. (Az alsó *12.* ábra sajátságos testeit is *c*-ből tekintve, *4*-oldalu hasáboknak látnók.) *4e*[14] egészen új, a hazai szobrászat számára fentartott találmányokra vezethet rá. (Eddig leginkább csak *4g13.* és *4g14*-et használták fel.)

Feladatul végül könyveinkben, a kirakatokban, a városban stb. látható *4.* részbeli projekciók és képek megnevezése szolgálhat.

ÖTÖDIK RÉSZ.

Az ábrázoló geometria alapfeladatai részletezve.

a. **A pont, a határolt egyenes és a síkidomok ábrázolása két képsíkon egyszerűbb helyzeteikben.** Pontot ábrázoltunk már a *3 I27.* ábrában és a *3.* rész *b* szakasza értelmében a *4 I29.* ábra előtt. Ott most már könnyen felismerhetjük *A*, *B* és *C* pontok helyzetét az *1.* és *2.* képsík előtt *XIIa* és *b* alapján a *II1* tétel általánosításával. A *8XI4.* ábrában pl. *P* pont *2.* távolsága *1·5* cm. *R*-é *1* cm., a *13.* rajzlap *22.* ábrájában a *P* ponté *2* cm. amiről még egyszer is meggyőződhetünk, ha figyelemmel kisérjük, az *O* talppontot.

---

litett vegyes eljárást is, és számtalan térképhálózatot vegyes projekció alapján, még a projekció centruma mozgásával is egybevetve terveznek. t[2] Még a rajzmüvészetekben is pl. ugyanazon a festményen öntudatosan és öntudatlanul alkalmazva többféle kép, több centrum szerepel egyszerre, ami azzal függ össze, hogy a müvésznek a szemlélőnek tetszés szerint választott álláspontjával is kell számolnia. t[3] A projektivitás sajátságos eszthétikai törvényénél fogva, különben minden helyesen szerkesztett kép oldalról nézve is, idegenszerü, de nem kellemetlen benyomást tesz.

b. Határolt egyeneseket látunk ábrázolva a *4I28.* és *4II3.* ábrák között. (Most már a *II2.* tételben jó lesz az „egyenes“ helyett ismét a szabatosabb „határolt egyenes“ kifejezést használni.) Látunk ott az *1.* képsíkra merőleges (1. vetítő) egyenest stb.

c. Síkidomokat ábrázoltunk testeken és most már elvontan is a *4.* és a további rajzlapokon.

d. **A térelemek ábrázolása és viszonylagos helyzeteikre vonatkozó feladatok, megfelelő árnyékszerkesztésekkel.** A 3. rész *a* szakaszának elvont térelemeivel ez *5.* részben egészen függetlenül, testek nélkül is fogunk foglalkozni. Elvont egyenesekre különben már a *VII.* fejezet árnyékszerkesztéseinél volt szükségünk. Ily elvont egyeneseket határok nélkül egyszersmind külön jelzéssel, tudniillik kis betűvel fogunk megkülönböztetni.[1] Valamint ez egyeneseket nem határoljuk, épen úgy gondolhatjuk a síkidomokat is határtalanul meghosszabbítva és két egymást metsző határtalannak vett egyenes által ábrázolva, mint pl. *3d* szerint az egyenként feltüntetett térelemek közt *8XV6*-ban.

A tengelyre merőleges egyeneseket csak valamely tetszés szerinti *3.* vagy legjobban bal vagy jobb oldalképben itélhetjük meg úgy, mint pl. a *18.* ábrában.

e. Ha ezek után a *22.* ábrabeli *PI* egyenesre térünk át, akkor az a *22.* ábrában vizsgált *2.* képben *I* pontjával már *1* cm.-nyire közeledik a *2.* képsíkhoz, az *1.* képsíktól pedig még annyira távol van, hogy nyompontjának meghatározása nem lesz olyan egyszerü, mint az *5VI4.* ábrában. A *21.* ábrából látjuk tudniillik, hogy az egyenesnek előbb a *2.* képsíkon keresztül kell mennie és csak azután találja *X* nyompontban a felemelt *1.* képsíkot ott, ahol ezt már a rajzlap mögé meghosszabbítva kell gondolnunk.

---

d[1] Több egyenes egymáshoz viszonylagos helyzetben felismerhető *4II5* elött és *4III4* és *4III8* között. Még pedig *4II5* elött 2 egymást metszö egyenes, melyek egy *2.* vetítö síkot képezve egymást födik; *4III7* elött két egyenlöközü födö egyenes, (födö elemek lehetnek még az egyenes és a pont is) és *4III8* elött egymást elkerülö, egymásnak kitérö (keresztezö) vagy torz egyenesek, a *18.* ábrában pedig egymást födö profil egyenesek.

Ha ármost a felemelt *1.* képsíkot a testekkel együtt visszahelyezzük, akkor a *24.* ábrában az *1.* képben a *PI* egyenesen is fekvő *X'* nyompont meghatározása nyilvánvalóvá lett. (Hogyan forgott *X* pont?) E nyompontot azonkivül egy, a *31.* ábrában *XZ* tengelyekre fölkeresett *3.* képből is meghatározzuk.[1—11]

---

e[1] Vegyük most fel a *21.* ábrabeli *P1* egyenest oly gúlák csúcsán át, melyek a *2.* képsíkon vannak megerősítve és alkalmazzuk az egészre *XIIg*-t; akkor a *29.* ábra világosan feltüntet még egy nyompontot. Megkülönböztetünk ezek szerint első *X* és második *Y* nyompontokat, söt új *t*-nél még többet, (Z) stb. e[2] A *2.* nyompont szintén csak igazolja *IV1*-et. e[3] Ami pedig ennek alapján a *IV2.* tételt illeti, ez a síkkal viszonylagos helyzetü egyenesek közül a rajta fekvő föegyenesekre vezet rá. Ha ugyanis a *23.* ábrában pl. *ABC* háromszöget vesszük fel és *C* pontra nézve nemcsak a *XI2.* szakasz *2.* feladata szerint *IV2*-vel határozunk meg „nyomot," hanem *XIIg*[1] értelmében rajzlapunkat megfordítva ugyanazt ismételjük, már két fövonalat kaptunk meg. e[4] Ha végül *t*-t *V2* szerint nem létezőnek vesszük, akkor mindkét egyenes meghatározása tulajdonképen nem egyéb, mint a *II2.* tétel egyszerü alkalmazása. E két fövonalat egymástól való megkülönböztetésül első *(x)* és másodiknak *(y)* is fogjuk nevezni. Ezekkel és a képsíkkal párhuzamos, szintén fövonalaknak (nyomparalleleknek alkotóknak) nevezendö egyeneseket, pl. *B*-n esetleg *A*-n át a *23.* ábrán akárhányat nem lesz nehéz *XIII1* tekintetbe vételével fölkeresni és *V1* és *XII2*-vel kapcsolatba hozni. e[5] A fövonalakat tehát függetlenül *t*-töl voltaképen a megfordított *II2.* tétel szolgáltatja. Ezekre is azután végül *V1* alkalmazandó. e[6] Az *1.* és *3.* vagy *2.* és *3.* képek között szintén találhatunk fövonalakat *(z)* stb. e[7] Valamely *C* ponton áthaladó, két fövonal által a következö ábrában a sík legcélszerübben van meghatározva és ezzel a *3.* rész *d* pontjában elmondottak kellöképen meg is vannak okolva. e[8] Összetoltan ábrázolódik közvetetlenül a sík, ha az első *XY* tengelyre nézve *5c*[1] alapján a háromszög minden oldalának *2.* nyompontját fölkeressük. A *2.* nyompontok összekötése azután az elsö nyompontok összekötésével a tengelyben találkozik és ilyenkor e két fövonalat megfelelöen *2.* és *1.* nyomnak nevezzük. Ez eredményt, a mely tengelyhez van kötve, a *45.* ábra is mutatja. e[9] Ebben is azonban elhagyhatjuk azután a tengelyt. e[10] Bármely módon ábrázoljunk azonban síkot, jól be kell azon végül mindig gyakorolnunk, hogyan veszünk fel rajta pl. a *23.* ábrában *X* és *Y* segitségével egyenest és ezen

f. Forgatások : A sík vagy a sikidom leforgatásához a képsíkba *XI2* szerint elegendő *2* kép és egy pont, melyre nézve az átfogónak *XIIm 7.* bekezdése szerinti meghatározásánál különösen figyelembe veendő, hogy a befogók egyikét az átmenő vonalon mérjük meg és hogy mind a pontnál, mind pedig a háromszögnél a leforgatást harmadik kép meghatározása nélkül végezzük. A *3.* kép azonban tulajdonképen mégis a szerkesztésben foglaltatik, mert a mikor pl. a *8XI2.* ábra *C* pontját a *8XIII2* alatt látható ábrában a *3.* kép segítségével leforgatjuk, mindjárt *eet*-t választunk és akkor az közvetetlen forgatást eredményez. Amint említettük, erre nézve az átfogót ajánlatos külön, bárhol, szerkeszteni.[1]

g. De *3.* kép rendesen nélkülözhetetlen, ha megfordítva valamely idomot ferde síkba vagy adott szöggel föl kell emelnünk.[1]

h. Háromszög valódi nagyságát ezen a fokon ajánlatos gyakorlat kedveért még a XV. tétel alkalmazásával is ellenőrizni.[1]

---

vagy trapez idomot mutató fövonalon, pontot. **e**[11] Különböző síkok bemutatására a *8XV8.* ábrából például átvettük annak bal oldalán feltüntetett *I' III' II'* vetítö síkot, továbbá a *12.* rajzlap bal oldalán úgynevezett feszitett síkot is. A *14.* rajzlap más példákat és viszonylagos helyzeteket is tüntet fel. Ily példát számtalant lehetne még felsorolni.

f[1] A *8XI3.* ábrának a forgatás alkalmazására szolgáló példáját most *5e*[3] megfordító eljárásával ismételjük és ezzel egészen új ellenörzésre jövünk rá. Ujabb példákat látunk *8XII3*-ban, *8XV3—4* között és *8XV8*-ban. *V2* révén e leforgatások a képsíkkal párhuzamosan történteknek is tekinthetők.

g[1] Az előbbi példa és a *9.* rajzlap *3.* ábrája egyszersmind a legegyszerübb síkbaemelést mutatják, ha pedig más ferde helyzetröl van szó, akkor a *3.* kép segitségével a *8XI2.* ábra szerint ama megfordító eljárást nehézség nélkül önállóan is tanulmányozhatjuk.

h[1] Ha valamely *ABC* háromszög bármely oldalára alkalmazzuk a *XV.* tételt, a háromszög *A''B''C''*-ben egyenesnek fog mutatkozni ; *XV1.* felének ismétlésével pedig és egyszerüsítésekkel úgy mint pl. a *8XV3.* ábra elött vagy a *8XIV2—3.* ábrákban a háromszöget *A'B'C'*-ben valódi nagyságában kapjuk meg. Ezt ötször ismételve, *5e*[5] és utána *eet*-lyel még hat, *f*[1] és *XIV1*[1]-gyel együtt *15* gyakorlatot végezhetünk.

Más feladatok inkább már *XVa*-val függnek össze.

k. Közök vagy távolságok: Az ezekre vonatkozó példáknak minduntalan ismétlődő alapfeladata, két pont közének meghatározása lévén, a *8XII1.* és a *8XI2.* ábrák szerint valamely *AB* határolt egyenes *I2.* tétel szerint mutatkozó valódi nagyságának megmérését még egyszer begyakoroljuk.

Már az ábrák puszta szemlélete mutatja, hogy ugyanaz a köz *2* kúpon gondolható és most ez a feladat is kétféle, a *XII1.* tételt igazoló, egymást kölcsönösen ellenőrző megoldást nyer. Ugyanazt az átfogót kétféle derékszögü háromszögből szerkeszthetjük meg.

E szerkesztésnél is különös figyelmet kiván (úgy, mint *5f*-ben), hogy a befogók egyike az átmenő vonalon ugyancsak egy más derékszögü háromszögnek is befogója. Mindkét befogóból bárhol, pl. a *8.* rajzlap *1.* és *3.* szögletében, meghatározhatjuk az átfogót. (Igy határozzuk meg az átfogót pl. *4p*-ben is a szabályos *8*-szög szerkesztésénél).

A határolt egyenes valódi nagyságát, amint *XIIk*-ban láttuk, úgy is állapíthatjuk meg, hogy a *8XI5.* ábra és utána ennek *5h*[1] szerinti egyszerűsítése értelmében a *XV.* tétel első felét alkalmazzuk. Amint azután az egyszerüsített ábra *eet*-lyel feltünteti, voltaképen az egyenest vetítő síkjával forgattuk le a képsíkba; a kúpoknál pedig vele egyenlőközüvé.

l. A *XII2.* szakaszban valamely pontnak egy síktól való távolságát kerestük. E feladatot is most ama megfordító eljárással ismételten megfejtjük, a midőn *ABE* háromszögre az *50.* ábrában *5e*[5]-öt alkalmazzuk. Végeredményképen a *XII2.* tételt azzal az általánosítással kell még kiegészítenünk, hogy a síkra vagy síkidomra merőleges egyenes *2.* képben szintén derékszöget mutat a *2.* fővonallal, illetőleg *2.* nyommal. Ezt kiterjeszthetnők a 3. 4. . . . . stb. képre is. Az előbbi megfordító eljárást alkalmazhatjuk még a további *XII3.* szakaszban és a *8XI3.* ábrabeli ellenőrzés mintájára *8XII3.* és *8XV4*-ben. De megfejthetjük ugyane példát a *XV.* tétellel, sőt a ponton át az adott egyenesre merőleges síkkal is.

l. Feladatokat megoldhatunk még több egyenesre és több síkra.[1—2]

m. Metszések: Ha két sík nem különlegesen egyenlőközü helyzetü, mint *XIII1*-ben, akkor mint pl. a *37.* és *39.* ábrákban metszővonalat képeznek. Metszéseket, esetleg tengelyre vonatkoztatva, még a *37* alatti, a *48.* és *50.* ábrák mutatnak.

n. Egyenes metszését a síkkal egyszersmind megfordító eljárással a *8XIII5.* ábra alapján a *48.* ábra tünteti fel. Ezt alkalmazhatjuk ismételve két sík metszésére is.

p. Testek metszésénél kiemelendők a *11.* rajzlapon feltüntetett, pl. a párkányzat irányára merőleges „profil"-metszések. Ezek nem egyebek, mint oldalképek, melyeket metszésként sraffolunk.

r. Feladatok megfejtésénél különleges esetekben *XIII1* értelmében a képsíkokkal egyenlőközü, vagy egyéb segédsíkokkal való metszést vagy a *XIII2.* tételt alkalmazzuk ismételten.

s. Síkok- és szögekre vonatkozó példákat a XIV. fejezeten kivül a *8XI3.*, a *8XII3.* a *23.* ábrákban és a *12.* rajzlapon látunk.[1—16]

---

l[1] Pl. *2* egyenlöközü egyenes egymástól való távolságának meghatározása nem egyéb mint az elöbbi feladat. **l**[2] Két elkerülö egyenes távolságára nézve a *40.* ábrában az egyik egyenesre a *XV.* tételt alkalmazzuk és vele együtt a másik egyenest is *3.* és *4.* képben keressük fel, és ez utolsó képben megmérjük e távolságot. (Miért?) *cet*-lyel az eredményt rendkivül gyorsan állapithatjuk meg. Feladat: Határozzuk meg valamely sikon *5e*[10] szerint felvett egyenessel párhuzamosan adott egyenesnek a siktól, és két egymással egyenlöközü siknak egymástól való távolságát *V1.* alapján.

s[1] Az egyszerübb feladatok közé tartozik pl. ha sikot *3* ponton át kell tennünk. Ezt a példát is a *XIV.* „Bevezetés" utolsó bekezdésének *XII3, m* feladatára vezetjük vissza. **s**[2] Ha bizonyos feltételekhez kötve kell ponton vagy egyenesen át sikot tenni, akkor *5e*[10] megforditása irányadó. **s**[3] *XIV1*-et most tényleg megfejtendök, azt mindjárt a *12.* rajzlap bal oldalán egy ötoldalu gúlára alkalmaztuk. Ezzel egyszersmind egyenesen át síkra meröleges sikot tettünk. **s**[4] *XIV1*-nek különleges esete, az egyenesnek valamelyik képsikkai képezett szöge (képsikszöge). E szögeket *5k*-val együtt kapjuk meg. **s**[5] Hogy pedig e képsikszögeket össze ne zavarjuk, *5k*-t az idomban a *XV.* tétel elsö fele szerint hatá-

t. Testszögek élei- és síkjainak szögeit az előbbi feladatok foglalják magukban [1]

u. Feladatokat megfejthetünk azután *4* és többoldalu gulákra és más szögletes testekre.

v. Világítási fokozatok szintén az előbbiekkel függnek össze, pl. a világító sugárnak síkkal (esetleg érintő síkkal) képezett hajlásszögével.[1—6]

---

rozzuk meg. **s**[6] A *36*. ábrában α és β összefüggéséből kitalálhatjuk, hogy megfordítva a képsíkszögek lehetnek adva. **s**[7] *XZ* nél *3*. *4*. stb. képsíkszögek is jöhetnek létre. **s**[8] *XIV2, 1)* kidolgozását mutatja a *12*. rajzlap jobb oldali *5*-oldalu gulája. Meglepöen egyszerübb a szerkesztés, *cct*-lyel. **s**[9] Mindezt a *2*. kép segítségével is tehetjük, ha *5l*-t és *5c*[10] megfordítását alkalmazzuk. **s**[10] *XIV2, 2)* ugyanazt az eredményt adja. Itt a *XIV2*. szakaszbeli *0* pontot α szög síkjában vévén fel, a keletkezett β síkja is merőleges *AD* élre. **s**[11] *XII2, 3)*-ra példát P^{IX}-nél a *10*. rajzlap szolgáltat. Igy határozhatjuk meg a hasáb lapszögeit mind egyszerre. **s**[12] *XIV2*-nek megint különleges esete, ha a *12*. rajzlap bal felén a síknak képsík szögeit vizsgáljuk. *cct* az elvont ábrában a nyommerőlegessel vagy lejtővel (esés vonala) az *1*. és *2*. képsíkszög leggyorsabb meghatározására vezet rá. **s**[13] Az előbbieket mind újabb és újabb feladatokra is lehet azután alkalmazni, pl. *2* egyenes szögét azt felező egyenessel kapcsolatba hozni, adott egyeneshez adott szöggel egyenest szerkeszteni, *s*[12] megfordításául síkot a nyomból és képsíkszögből meghatározni, stb. **s**[14] Más, szögekkel vegyes nehezebb példák *SXII1*. és *SX12*. ábrabeli hajláskúpokra és hajláskörökre, söt érintö síkok szerkesztésére, a geometriai helyre, stb. vezetnek rá.

t[1] Ama feladatokkal egyszersmind az ötoldalu és akár hány oldalu testszöget meghatároztuk lapszögeivel és a forgatással megállapított élszögeivel, továbbá a gömbháromszöggel kapcsolatos háromélt (triéder) is. *5s*[10] alkalmazása a háromélre meg rávezet a poláris triéderre.

v[1] Az árnyékolással való kidomborítást egyelőre elég csak hozzávetőleg megközelíteni, úgy amint azt rajzlapjainkon tettük, hisz úgysem lehet mindazokat a mellékkörülményeket tekintetbe venni, amelyek a müvész, a tudós legpontosabb meghatározásait is megváltoztathatják; ha pl. a test nem egy helyből kapja a fényt, körülötte mindenféle fényvisszaverő test zavarja a rendes megvilágítást, stb.; viszont pedig a nagyon is határozott vetett árnyékok, kivált bizonyos távolságból, a szemlélöt néha csak zavarják. Mindezeknél fogva túlságosan sok időt nem fordítunk a megvilágítási viszonyok elméleti meghatározására, hanem a mü-

x. **Felező síkok.** *XY* tengelynél *Ve*-ben szó volt a *4* térnegyed- vagy térrészről. Most azt, amit akkor csak jeleztünk, kiegészítjük még azzal, hogy egy tengelyre vonatkozólag is feloszthatjuk a tért *8* részre, ha a *4* térrészt a tengelyen átmenő síkokkal megfelezzük.[1—16]

---

vészeti stilizálás elvonó eljárá ához hasonlóan a megvilágítást szigorúan utánzó fényképeket, észbeli, egyéni felfogással pótolva, a természetes ábrázolást hol egyszerüsitjük, hol pedig tökéletesitjük. Ehhez azonban okvetetlenül szükséges *VIII2.* értelmében megelözöleg több példa kidolgozása, amelyekben az árnyékot nemcsak *VIII1* nek, hanem esetleg másféle képnek tekintjük. **v**[2] Ily példákban az ipar és teknika rajzainál a világosság sugarait ritkábban vesszük egy pontból kiindulva, vagy úgy, mint a *49.* ábrában is, hanem rendesen **v**[3] oly különleges helyzetben, mint amilyet a *38.* ábra mutat be. Ez irány mellett a vetett árnyékból mindjárt az élek távolságát lehet megitélni, a párkányoknál pedig az egymásra vetett árnyékok igen egyszerüek lesznek. **v**[4] Különben általános helyzetü testek egymásra vetett árnyékát a *9.* rajzlap *8.* ábrájából úgy határozhatjuk meg, hogy a testek mindnyájának vetett árnyékát megkeresve, az egymást metszö vetett árnyékokból visszafelé húzunk világító sugarakat. **v**[5] Feladatokat síkidomokra és egyeneseknek vett vékony pálcákra is dolgozhatunk ki. **v**[6] Továbbá lényeges még, hogy bizonyos görbe lapok fénypontokat, mások meg fényéleket tüntetnek fel; (melyek ?) végül a körbe írt szabályos háromszög csúcsaiból, a sárga- piros- és kékböl kiinduló szinkör a közöttük vegyitésböl származó kiegészitö szinekkel, stb.

x[1] Ugyanazt ismételhetnök egy, az elöbbivel derékszöget képezö újabb tengelyre nézve is. **x**[2] Induljunk ki a *41.* ábra *2.* képéböl, gondoljuk mindig ürnek, amit az ábrákban feketével bevonva látunk és különböztessük meg felvett egyenes segitségével következöképen a térnegyedeket. A *41.* ábrában *2.* képben, a *42.* ábrából világosan meghatározható *P1* egyenes *I* pontja az úgynevezett *I.* térnegyedben van. Ha *P1*-t a *2* képsíkon túl meghosszabbitjuk, annak *II.* pontja a *2.* térnegyedben fekszik, melyet a második képsík s a meghosszabbitottnak gondolt és felemelt helyzetben levö *1.* képsík határolnak. Az egyenes egy további *III.* pontját a *3.* térnegyedben, a két meghosszabbitott képsík között vettük fel; *4.* térnegyed pedig az, amelybe az ötoldalu gúla élét látjuk lefelé meghosszabbitva **x**[3] Ha a fölemelt *1.* képsíkot *4k* szerint ismét letesszük (a *2.* képsikot pl. valami vékony puha rétegnek gondolván), az egyenes különbözö esetbeli darab-

y. **A tengelyre merőleges harmadik képsík.** *4k* szerint felvévén az *1.* képsík helyett a *2.* képsíkra és az *XY* tengelyre merőleges *3.* képsíkot, (vagy akár megfordítva a *XIIg* szerint fölemelt *2.* képsík

---

jai- és pontjainak összefüggését az *1.* és *2.* képben, a *43.* és *44.* ábrákban tanulmányozhatjuk és figyelemmel követhetjük az *1.* és *2.* távolságokat és e távolságok algebrai értelmezését is. x[4] A tengely innensö oldalán a *—1* azt jelenti, hogy az ezen az oldalon talált *1.* távolságok, melyeket rendesen a tulsó oldalon mértünk meg eddig, (a *—1*-gyel jelölt innensö oldalon) — jelüek; a túlsó oldalon pedig hasonló áll a *2.* távolságokról. x[5] Nem nehéz ugyanazokat a negyedeket *4k* szerint *1.* képben is fölkeresni. x[6] *1—4.* eset elöfordul természetesen *XZ, YZ* stb. tengelyeknél is. A *41.* ábránál még megjegyezzük, hogy x[7] az egyik felezö sík (plan de symétrie) az *1.* és *3.* negyedet felezi; a másik felezö sík pedig (plan de coïncidence) a *2.* és a *4.* negyedet. x[8] Ezekben, továbbá a projekciók síkjaiban és a *8* nyolcadban felvehetö pontok közül a *44.* ábra szerint bármily tengelyre nézve is azonnal rá kell ismernünk, vajjon *1. 2 3.* vagy *4.* esetbeli pontról van-e szó. Azért jegyezzük meg a *44.* ábrából, x[9] hogy pl. *2.* esetbeli pont mindkét képben a tengelynek túlsó, vagyis azon az oldalán mutatkozik, melyet a betürendben tovább álló *Y* vagy *Z* betüvel emeltünk ki, továbbá a *42.* ábra alapján még azt, hogy x[10] **második** esetbeli pont a **nagyobb** jelzésü képben **nem** látható, épen így a **negyedik** esetbeli a kisebb jelzésüben nem (az ellenkezö képben azonban láthatók). x[11] Az elöbbiekben megfigyelt sajátságokat azután a *II12.* tétel alkalmazásánál tekintetbe kell vennünk. Ennél azonban alkalom adtán egyszerüen *V2*-öt vesszük segítségül. x[12] Hogyan vettük fel a *46.* és *47.* ábrabeli síkokat? x[13] A különbözö helyzetü síkokat a felezö síkokkal kiegészítvén, végül még a *45* ábrában egy tetszés szerinti síknak az *1.* és *2.* felezö síkkal való metszését határoztuk meg. Erre nézve felvettünk a síkon egyenest és rajta szimmetrikus áttevéssel vagy többféle módon oly *S* pontot, melynek két távolsága egyenlö egymással és így az az *1.* felezö síkban fekszik, a metszövonal tehát *AS.* x[14] Ha pedig a felvett egyenest a *2.* képben annyira meghosszabbítjuk, hogy látszólag födés (coïncidence) áll be, akkor meg *C 2.* negyedbeli pontnak egyenlö a *2* távolsága és a mindkét képben egy helyen mutatkozó *AC* metszövonalat kapjuk meg. Ez *4e*[12] szerint egyszersmind *B' C' X'* és *B'' C'' X''* projekciói affinitásának tengelye. x[15] Mindezt különleges helyzetü pl. profil egyeneseknél és megfelelö síkoknál oldalkép segítségével ismételhetnök. x[16] Testre alkalmazva, vegyünk helyett) és a *3*. projekció meghatározása után mindent ismét képnek tekintvén, az *51II3*. és *18*. ábrákban nyert eredményhez ezen az úton is juthattunk volna.[1–4]

Gyakorlatokat is végezhetnénk egyenesekre és pontokra vonatkozólag adott *3* távolságuk méretei, esetleg jelei szerint, úgy ahogy pl. a *18*. ábra *C* pontjára nézve tudjuk, hogy *1*. távolsága $+\frac{1}{2}$ cm., *2*. távolsága $+1$ cm. és a *3*. távolsága (vagy *XIIc* kiegészítéseül, a *3*. képsíktól való távolsága) $+1\frac{1}{2}$ cm.[2]

z. **A kör projekciója a legegyszerűbb helyzetekben.** Derékszögü képben mindjárt az első rajzlapon látjuk a kört. Ezen a kúp alapja különböző helyzetében hol keskenyebb, hol pedig szélesebb ellipszisnek mutatkozik. Legegyszerűbb helyzetben legkönnyebb megrajzolni, amikor a képsíkban vagy vele egyenlőközűen fekszik. Példák a *4II6*. a *8XI2*., a *4III7—8*., a *6V20*. és a *8XII1*. ábrák.

Az *1*. rajzlapon látható képben a ferde helyzetü kört úgy keressük fel, hogy a kört négyzettel veszszük körül, melynek *2* oldala egyenlőközü a képsíkkal és akkor a képben mutatkozó derékszögü négyszögbe a kerüléknek látszó kört könnyü berajzolni. Erre alkalmas a *20*. ábrában feltüntetett szabályos nyolcszög szerkesztése, melyet a *26*. ábra szerint akkor is használhatunk, ha valamely újabb képben a kör köré írt négyszetet nem derékszögü, hanem ferdeszögü négyszögnek találtuk. Ha pedig az ellipszist körzővel akarjuk kihúzni, akkor ajánlatos a *9*. rajzlap *1*. ábrájabeli szerkesztés.[1—10]

---

fel pl. a *9*. rajzlap *4*. ábrájához hasonlóan ferde hasábot, gúlát vagy kúpot. Az élek meg alkotók ilyen *C* pontjai meglepö eredményre vezetnek.

y[1] Csakhogy *XIIc—d*-ben *Vc*[1] szerint külön képsík megkülönböztetésére nem volt szükség. **y**[2] Megfordítva pedig, adott *3* távolság szerint pontok és egyenesek fölkeresése. **y**[3] Gyakorlati rajzoknál bal- és jobb-profilképekre végzünk árnyékszerkesztéseket is. **y**[4] Ami pedig az elméleti, pl. a sík meghatározására vezetö példákat illeti, ezeket bármily *3*. képben úgy keressük fel, hogy valamely fövonalán vagy más egyenesén fölvett pontot veszünk segitségül.

z[1] Hogy a kör derékszögü képben valóban ellipszisnek mutatkozik, azt a projektivitásból közvetetlenül következtethetjük. Az orthogonális projiciáló sugarak másodrendü hengert képének, az említett négyzet pedig *4* vetítö síkot eredményez, melyek a hengert érintik. A hengernek és a síkoknak a képsíkkal való metszése ama görbét és az azt érintö derékszögü négyszöget adják. A *9.* rajzlap *1.* ábrájában pedig a kör szerkesztése projekcióban az ellipszis szerkesztését szolgáltatja. z^2 Ha az ellipszist bármelyik képben is körzövel akarjuk kihúzni, akkor a *23.* ábra szerint adott síkra a kibövített *VI.* tételt alkalmazva, ezt mindenik új képnél ismételjük. z^3 Ha az utóbbi feladatot kidolgozzuk, akkor voltaképen kört adott síkba felemelünk. z^4 Síkbaemelést látunk még a *9.* rajzlap *3.* ábrájában. z^5 Ami pedig a kör vetett árnyékát illeti, azt a köréje irt négyzet árnyéka és a beléje szerkesztett nyolcszög adják meg. z^6 Befejezésül ajánlatos még megfigyelni, hogy pl. a *3.* ábrabeli csonka kúp *1.* képben hálózat nélkül úgy is fogható fel, mintha *XI, 1)* egyenlőközü távlatában volna ábrázolva, de akkor ez már ferdén metszett, ugyancsak ferde test. Megfordítva pedig hálózat nélkül a *27, 1)* ábra lehetne ferde hasáb derékszögü képben. z^7 Valamint mindez pl. ismét a mathematika sztereometriai részével van kapcsolatban, oly módon megfigyelhetünk kapcsolatot középiskolai ismereteink szempontjából a többi tantárgyra vonatkozólag is; a mennyiségtan- és szabadkézi rajzoláson kívül pl. a történelem müvtörténeti részével, a földrajzzal a térképek és a természetrajzzal a növénytannak a stilizálásnál is szereplö alakjai révén; a kémia- és ásványtannal az eszközök, a gyárak és ismét a szabadkézi rajzolásban értékesíthetö müipari gyártmányok, továbbá a kristályrendszerek kapcsán. Felismerhetö az összefüggés a természettannal, ennek eszközeivel, a fénytannal, söt még a „philosophiai propaedeutika psycho-physikájával" (4h) is. z^8 Hasonló okokból tekinthetö az ábrázolástan gimnaziális müveltségünk szükségképen kiegészítö részeül. z^9 E kapcsolatokból és megfigyelésekböl azután további következtetéseket vonhatunk a képeknek *VIa* alatt említett a müvészet- és teknikában való értékére, megbízhatóságára, használhatóságára, kis és nagy tárgyaknál célszerü megválasztásukra, egymással való összefüggésükre, stb. z^{10} Mindehhez befejezésül ajánlatos, hogy a körülöttünk látható képeknek, teknikai és ipartárgyaknak, söt mennyiségtani és más tudományok vizsgálatainak egyféle képbe, pl. derékszögübe való áttevésével a hazai müvészet és tudomány érdekében ismereteinket lehetöleg tovább fejlesszük.

Összefoglaló ismétlés.

Alaptételek. *I1.* A derékszögü (∟) képekben a képsíkra merőleges (⊥) egyeneseket pontoknak rajzoljuk. (Ig) *I2.* Ha valamely határolt e. egyenlőközü (||) a k. s. akkor ∟ k.-ben valódi nagyságát látjuk. (Ih) *3.* ⊥ vetítő e. (4k.) Vetítő sík és födő e. (4k . 5d^1) **E**llenkező k. ek. *II1.* A táv. az ell. k.-ben mérj. *II2.* Ha v. hat. e. vagy síkid. az egyik k. s.-kal ||, tehát val. n.-ban tünik f., akkor az ell. k.-ben az átm. v.-kal ∟ és e.-nek átsz., ha pedig k. s.-ban feksz , akkor ell. k -ben a t.-en látható. Megf. : Az átm. vonalakkal ∟ e. ell. k.-ben valódi n.-ban mut. pl. mint fővonal. *3.* Pontok (a) e. (5b, 5d^1) s. és s. id. (5e, 5e$^{7-9}$). **E**lőbbi k.-ből új k. fölk. *III1.* A láth. és elf. v. megáll. az el. k.-ben a t. felé nézünk. (IIt) *III2.* El. k.-ből új k. úgy ker. f., hogy a táv. az el. k.-nek ell.-jéből átmérj. (III és 5x^{11}) *3.* Oldalképek jobb vagy bal felől. **N**yompont és nyom. *IV1.* A nyp. fölk.-nél az e.-nek és a t.-nek az ell. k.-ben mutatk. látsz. mp -jából átm. az el. k.-be. (5e) *IV2.* S. vagy s. id. ny. megh., ha e. nyp.-jait a t-en innen maradva összek. (IVc és 5e$^{3-9}$) *3.* Fővonalak megh. II2. megf. szerint. (Nyomparallel, alkotó) (5e^5) Nyom ⊥ vagy lejtő (5s^{12}). Egyenes és p. a s.-on. Trapez (5e^{10}). **T**engelyek *V1.* A s. vagy s. id. ny.-ával vagy fővonalával ∟-ben *választott* új t. e.-re vezet *V2.* A t. és a k.-eket eltolh. a t. elhagyh. és ism. fölvehetjük. *3.* A *m*ásodik esetbeli pont a *n*agyobb jelzé ü k.-ben *n*em látható; épen így a *n*egyedik esetbeli a kisebb jelz.-ben nem, (de az ell. k.-ben láthatók.) Felező s. stb. (5x).

VI. Izometria vagy = m. k. *2.* Tervrajzok. Al. r. Homl. stb. (*II.* rajzlap) *3.* A már nagyobb helyszinr. és a még n. térk (VIf és 4t). *VII.* Parallel persp. vagy || távlat (4p) *2.* Katonai távl. *3.* Alkalmazások. *VIII.* Akszonometria vagy t. mér. k. (4p) *2.* A saját á. megáll., ha a vetett á. képnek tek. (5v^1) *3.* Megvil. (VIIIc, XVa10 és 5v). Fényp. Egym.-ra v. á. Szinek. (5v) *IX.* Persp. vagy középponti távl. (4b^3 és 4r) *2.* Körképek. (4s) *3.* Projekciók. Projekt. Rec. (4a—g) *X.* Relief és vegyes k. (4s—u és 4p) *2.* A szobrászati k.-eken kivül (4u) a képzőművészetben az iparművészet, a műépítés, a festészet és más szükségletek képeit kiegészítő egyéb ábrázolás, pl. ∟ t. mér. stb. (VIIIb, X) *3.* A VI—X. k.-ek szerk. A szab. *8*-szög VI—X-ben. (Átfogó külön szögl.-ben) Az ellipszis és a többi kúpmetszet (49. ábra).

Forgatások. *XI1.* A p. forg. *1)* a ny.-mal ∟ körív, *2)* o. *3)* átf. oly ∟ háromszögnek, melynek bef. két ell. k.-ben mérj.; e bef. egy két az átm. v.-on (5f—g) *XI2.* A hszög val. n.-nak megh.-ra t. vesz. és a ny. körül lef. (5h) vagy XII1 stb. (5h[1]) *3.* Síkbaemelések. (5g és 5z[3]). **Közök** *XII1.* Hat. e. val. n. átf. oly ∟ hszögnek, melyn. bef. két ell. k.-ben mérj. ; e bef. egyike az átm. v.-on ugyancsak ∟ hszög bef. (Kétszer, külön szögletben (5k) *XII2.* ∟ k.-ben a s.-ra vagy s. id.-ra ⊥ e. ∟ mutat a megf ny.-mal vagy fővonallal (5l) *3.* Más feladatok (4l, 5l[1]). **Metszések.** *XIII1.* || s.-ok s.-ot || e.-ben m. *XIII2.* e. és s. s. id. vagy test mp.-ját megh., ha az e.-n át segédsíkot teszünk. (5n) *3.* Más példák. (5m, p, r). **Síkok és szögek.** *XIV1.* Az e. és a s. szögét megh., ha az e. v. p.-ból a s.-ra ⊥ és a ∟ hszög val. n. vagy pótl. sz. ker. (5s[3-7]) *XIV2.* 2 s. sz. e. *1)* a mv.-ra ⊥ s. *2)* 2 ⊥ e. kieg. sz.-e *3)* XV (5s[8-12]) *3.* Nehezebb gyakorlatok. **Tengelyek és testek.** *XV.* ∟ átm. v. vagy || t. esetleg *ect.* valódi n-ra, || vagy *ect.* és ⊥ t. p -ra vezetnek. *2.* Test VI—X-be való áttevése. (XIIg—h, XVa10, XVec és 4p[3]) *3.* XVa1—10, b1—5, c1—5, d1—5, e1—10.

Jegyzet:

A helyesírásra vonatkozólag irányadó volt a Budapesti Hirlap *19.* évfolyamának 299. számában jelzett és legközelebb megjelenő legújabb szabályzat. A rajzlapokat illetőleg pedig a rajzolók mentségére nem hallgatható végül el, hogy sokszorositásuk nem mondható sikerültnek, mert az átvívő fényképezésnél és javitásnál törlődések csúsztak be, söt a vonalaknak a szép sokszorositást megkönnyitő szétszaggatása (recézés) több helyt el lett hanyagolva, amiről pl. a *6.* és *7.* rajzlapnál nagyító lencsével könnyen meggyőződhetünk.