STAMPFEL-FÉLE
ÁNYOS ZSEB-KÖNYVTÁR.
35.

Dr. Lévay Ede

SZÁMTAN

Ára 30 Kr. = 60 fill.

POZSONY - BUDAPEST
KIADJA
STAMPFEL K.

STAMPFEL-FÉLE

TUDOMÁNYOS ZSEB-KÖNYVTÁR.

35.

SZÁMTAN.

IRTA

DR. LÉVAY EDE

KIR. FŐGYMN. TANÁR.

POZSONY. 1899. BUDAPEST.

STAMPFEL KÁROLY KIADÁSA.

Eder István könyvnyomdája, Pozsonyban.

ELSŐ RÉSZ.

Számolás egész számokkal és tizedes törtekkel.

1. §. Alapfogalmak.

Szám akkor keletkezik, ha különálló, de legalább is egy közös sajátság alapján ugyanazon névvel felruházható dolgokat összefoglalunk. Igy a hadsereg bizonyos számú katonából, az év bizonyos számú napból, a könyvtár bizonyos számú könyvből áll, a hosszúságot bizonyos számú méter, a koronát bizonyos számú fillér alkotja stb.

A különálló dolgok mindegyike, melyek összefoglalásából a számot nyerjük, egy-egy *egységet* képvisel. Igy pl. egy katona, egy könyv, egy nap, egy méter, egy fillér stb.

Hogy a dolgok valamely csoportja, azaz valamely *mennyiség* hány egységet tartalmaz, azt vagy *számlálás*, vagy *mérés* útján tudjuk meg. A könyvek számát a könyvtárban számlálás, az utczának méterekben kifejezett hosszúságát mérés segítségével lehet meghatározni.

A közös sajátsággal biró tárgyakat, vagy jelenségeket *egynemüek*nek, ha még közös névvel is bírnak, *egynevüek*nek hívjuk. Igy három korona, öt korona egynemű, öt nap, hét óra különnevű-egynemű mennyiségek, mert ez utóbbiak kellő átalakítás után egy nevezetre hozhatók. Az olyan mennyiségek, mint két katona, három nap, hét korona, *különneműek*, mert azokat semmiféle módon sem lehet egy nevezetre hozni.

Ha a szám mellett még azt is megjelöljük, hogy milyen tárgyra vonatkozik, a *megnevezett szám*ot nyerjük. Ilyenek: négy ember, öt év, nyolcz madár. Hogyha azonban a számot a tárgy megnevezése nélkül mondjuk ki, *elvont szám*hoz jutunk. Ilyenek: öt, hét, kilencz stb.

Az elvont egység a legegyszerűbb számot az *egy*et adja.

Ha *egy*hez még egy egységet sorolok, származik a *kettő,* ehhez még egy egységet adva a *hármat* és így tovább a *négyet,* az *ötöt* stb. nyerjük. A számoknak ily módon való képzését a végtelenségig folytathatjuk, mert minden utoljára alkotott számhoz adhatunk még egy egységet s akkor új, az előbbitől egy egységgel különböző számhoz jutunk. Ilyformán a most megismert eljárás szerint nyerhető úgynevezett *természetes számsor* végtelen.

Az ugyanannyi egységből alkotott számokat *egyenlők*nek mondjuk, így három = (egyenlő) három. Ha valamely szám több egységet tartalmaz, mint egy másik, *nagyobb* ennél, az utóbbi pedig *kisebb* az elsőnél. Igy öt > (nagyobb, mint) három; három < (kisebb, mint) öt

Minden egység egyenlő részekre osztható, vagy egyenlő részekre oszthatónak gondolható. Az olyan számokat, melyek az egységnek egy vagy több egyenlő részét fejezik ki, az eddig megismert *egész számok*kal ellentétben *tört-számok*nak hívjuk. Az alma fele, a korona század része tört-számok.

Hogy a számokat a beszédben megkülönböztethessük, nevekkel kellett azokat ellátni. Igy jöttek létre a *számnevek.*

Hogy a számok az irásban is feltüntethetők legyenek, bizonyos jelek megállapitására volt szükség. Igy keletkeztek a *számjegyek.*

Ha minden számot külön névvel és jellel láttak volna el, a számsor végtelensége folytán végtelen sok számnév és számjegy keletkezett volna, ezekkel a korlátolt emberi ész képtelen lenne elbánni; éppen azért oly szabályokat kellett alkotni, melyek képessé teszik az embert arra, hogy aránylag kevés névvel és jellel valamennyi számot kifejezheti. Az ily szabályok szerint elrendezett számok alkotják a *számrendszert.* Számrendszer többféle lehet, de valamennyi között legtökéletesebb az, melyet mi is használunk; ennek *tíz* az alapszáma s éppen azért *tízes-számrendszernek* hívják.

2. §. A tízes számrendszer.

A számok kimondására a tízes számrendszerben a következő számnevek szolgálnak: egy, kettő, három, négy, öt, hat, hét, nyolcz, kilencz, tíz, húsz, száz, ezer, millió stb. A többi közbeeső számnév ezekből van összetéve. Igy: tizenöt, huszonkettő, negyvenhárom stb.

A számok kiírására kilencz egymástól különböző és egy helypótló jel szolgál; ezek: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9. E jelek az indusoktól származnak, kiktől mi az arabok útján vettük át s azért azokat *arabs számok*nak nevezzük.

A számok elrendezése a tízes számrendszerben a következő módon történik Az *egy* az *alapegység*, melyet *elsőrendű egység*nek tekintünk; *tíz* ilyen elsőrendű egység összefoglalása a *másodrendű egység*hez, az egy *tízes*-hez vezet, tíz tízes a *harmadrendű egységet* az egy *százast* adja, tíz százas a *negyedrendű egységet* az *ezrest,* tíz ezres összefoglalása az *ötödrendű egységet* az egy *tizezrest* szolgáltatja és így tovább eljutunk a *hatodrendű egység*hez a *százezres*hez, a *hetedrendű*höz, a *millió*hoz stb.

Három-három rend összefoglalása révén az egységek első, második, harmadik stb. *osztályait* nyerjük. Igy pl. az egyesek, tízesek és százasok összefoglalása adja az egységek első osztályát, az ezresek, tízezresek és százezresek összefoglalása az egységek második osztályát; a milliók, a tíz- és százmilliók összefoglalása adja az egységek harmadik osztályát; tízszer százmillió a *milliárd,* mely a tíz és száz milliárddal összefoglalva az egységek negyedik osztályához vezet és így tovább. Milliószor millió a *billió,* a tíz, száz, ezer, tízezer, százezer-billiósok rendjén áthaladva eljutunk a *trillió*hoz, ismét hat renddel, azaz két osztálylyal tovább menve nyerjük a *quadrilliót* és hasonló módon a *quintilliót, sextilliót, septilliót, oktilliót* stb.

A tizes számrendszerbeli számok kimondása akképen történik, hogy kijelentjük, hány egyes, tízes, százas, ezres stb. van a szóban forgó számban. A kimondást mindig a legmagasabb rendű egységeknél kezdjük s az egyeseknél végezzük. Ha valamely rendű egységből egy sincs a számban, azt említetlenül hagyjuk; így pl. ha a számot három egyes, négy tízes, öt ezres és hat tízezres alkotja, azt így mondjuk ki: hatvanötezer negyvenhárom.

A tízes számrendszerbeli számok kiírása pedig akképen történik, hogy jobbra leírjuk az egyeseket, ettől balra a tizeseket, ettől balra a százasokat és a többi. Ha valamely rendű egység nincs meg a számban, annak helyére a helypótló jel, a *zérus* jön; így pl. ha ezt a számot kellene felírnunk 36 ezer 5 száz 17, lesz: 36517, vagy tízezer huszonöt, lesz: 10025. Hétszázhetvenhét: 777.

Amint az elmondottakból kitűnik, a számjegy értéke a tízes számrendszerben nem csupán annak alakjától, hanem attól a helytől is függ, a melyre a felírásnál kerül. A számjegyeknek tehát kétféle és pedig *alaki* és *helyi* értékük van. Igy 777-ben a jegyek alakra nézve mind egyenlők egymással, mégis a jobbról álló 7-es a legkisebb értékű, mert az csak egyeseket, a középső már tízszer nagyobb értékű, mert tízeseket, a baloldali 7-es ismét tízszer nagyobb értékű a középsőnél, mert az már százasokat jelent.

Ha igen sok számjegyből álló számot kell kimondanunk, az áttekintés megkönnyítése czéljából az egyesektől kiindulva hármas osztályokra bontjuk azt fel, így pl.: 17,283.636.518,728,842, kimondva: 17283 billió, 636518 millió, 723 ezer, 842.

Láthatjuk, hogy a tízes számrendszerben balról jobb felé haladva minden számjegy egységeinek tízszer kisebb az értéke, mint az előtte való számjegy egységeinek. Ha a számsort az egyeseken túl is ugyanezen szabály szerint folytatjuk, az ott felírt számok rendre az egységnek tized, század, ezred stb. részeit fogják feltüntetni. Hogy ezeket a számokat az egészektől elkülönítsük, az egyesek és a tizedrészek közé egy pontot teszünk, ez az úgynevezett *tizedes-pont*. Az olyan számot, melyben tized, század, ezred stb. részek fordulnak elő, *tizedes szám*nak, vagy *tizedes tört*nek mondjuk. Igy pl. 25·818 (huszonöt egész nyolczszáztizennyolcz ezredrész), vagy 0·7056 (zéró egész, 7056 tízezredrész), vagy 0·01256 (0 egész, 1256 százezredrész) tizedes törtek.

A számokból bizonyos műveletek segítségével új számokat alkotunk. Azt a tudományt, mely ezen műveletekre s azoknak a közéletben és tudományban miként való felhasználására oktat, *számtan*nak, vagy *arithmetiká*nak nevezzük.

3. §. A római számjegyek.

A római számjegyekkel való írás sokkal kényelmetlenebb, mint az arabs számjegyekkel. Meg kell azonban ezen jegyekkel is ismerkednünk, mert sok esetben, így pl. az emlékművek felállítási évszámának megjelölésénél, az órák lapjain, könyvfejezetek megjelölésére stb. még mai napig is használatosak.

A római számjegyek a következők:

I,	V,	X,	L,	C,	D,	M.
egy,	öt,	tíz,	ötven,	száz,	ötszáz,	ezer.

A számok felírása ezekkel a jegyekkel a következő szabályok alapján eszközölhető:

1) Több hasonló számjegy egymás mellé, vagy kisebb számjegy a nagyobb után írva összeadandó gyanánt veendő, így:

II,	III,	XX,	XXX,	CCC stb.
kettő,	három,	húsz,	harmincz,	háromszáz.

XIII,	LVI,	CLXXXIII,	MDCCCLXXVI stb.
13,	56,	183,	1876.

2) Kisebb számjegy a nagyobb elé írva azt jelenti, hogy annak egységei levonandók a nagyobbik számból, így:

IV,	IX,	XL,	XC	stb.
4	9	40	90	

3) A számjegy fölé húzott vízszintes egyenesek az ezreseket jelentik, így:

$\overline{\text{VII}}$,	$\overline{\text{IX}}$,	$\overline{\text{XV}}$	stb.
7000	9000	15000	

4) A százezresek feltüntetésére az illető számot még két függélyes vonal közé foglalták, így:

$|\overline{\text{IV}}| = 400000$, $|\overline{\text{X}}| = 1000000$ stb.

4. §. Egész számok és tizedes törtek összeadása.

Összeadást (additio) akkor végzünk, ha egy adott szám egységeihez más adott szám, vagy számok egységeit hozzászámláljuk.

Ennélfogva: *az összeadásnál oly számot keresünk, mely annyi egységet tartalmaz, mint két, vagy több adott szám együttvéve.*

Az összeadás *eredménye* gyanánt nyert számot *összeg*nek (summa), az adott számokat pedig *összeadandók*nak (summandus) hívjuk. Az összeadás jele az összeadandók közé írt álló kereszt +, melyet a beszédben „plus“, vagy „több“, vagy „és“, vagy végre „meg“ szóval fejezünk ki. Igy:

$5 + 3 + 6 =$ öt plus három plus hat $=$ öt meg három, meg hat stb.

Összeadni csakis ugyanazon egységre vonatkozó egynemű számokat lehet. Az összeg ilyformán szintén olyan nemű mennyiség lesz, mint az összeadandók. *Az összeg értéke nem változik, ha az összeadandók sorrendjét megváltoztatjuk.*

Ha az összeadást fejben kell végeznünk, akkor az egyik számhoz hozzáadjuk először a másik szám legmagasabb rendű egységeit, majd sorban a többi alacsonyabb rendűt, végül pedig az egyeseket. Több összeadandó esetében a most megismert módon járunk el a két első szám összegével és a harmadik számmal, majd a három első szám összegével és a negyedik számmal és így tovább.

Az írásban végzendő összeadásnál az összeadandó-részeket kétféleképen írhatjuk fel és pedig vagy vízszintes sorba az összeadási jellel elkülönítve egymás mellé, vagy pedig függőleges sorba, egyik összeadandót a másik alá. Utóbbi esetben az összeadás jelét elhagyjuk. Mindkét esetben következő módon végezzük az összeadást. A műveletet az egyeseknél kezdjük el s mikor valamennyi egyest összeadtuk, az eredményül nyert számból csakis az egyeseket írjuk fel, a tízeseket pedig az összeadandók tízeseihez számláljuk; a tízesek összeszámlálásából nyert eredménynek ismét csak a tízeseit írjuk fel az összegnek már megtalált egyesei elé, a fenmaradó százasokat pedig az összeadandók százasaival számláljuk össze és így tovább, mígnem az összeadandók legmagasabb egységeihez is eljutunk s az ezek összeadásából nyert számot, mint az összeg legmagasabb egységeit írjuk fel.

Az összeadandóknak függőleges sorban való felírásánál arra kell ügyelnünk, hogy az összeadandók egyenlő-rendű egységei pontosan egymás alá kerüljenek, tehát az egyesek az egyesek alá, a tízesek a tízesek alá stb.

Lássuk miképen végezhetjük az összeadást a megismert módon adott esetben. Legyenek az összeadandók:

$$382 + 756 + 87 + 938 = 2163.$$

Az egyesek száma az összeadandókban 23, ez áll 3 egyesből, melyet az egyenlőségi jel után az eredmény jobb oldalára írunk és két tízesből, melyeket az összeadandók tízeseihez adunk; ilyformán 26 tízest nyerünk, azaz 6 tízest, amit az eredményben az egyesektől balra felírunk és a fentmaradó 2 százast az összeadandók százasaihoz számláljuk, akkor kijön 21 százas s azt az eredmény legmagasabb egységei gyanánt közvetetlenül az egyenlőségi jel után írjuk. Az összeg tehát: 2163.

Vagy legyenek az egymás aláírt összeadandók:

$$\begin{array}{r} 4825 \\ 372 \\ 98 \\ 1387 \\ 298 \\ \hline 6980 \end{array}$$

akkor az összeszámlálást az előbb követett eljárás szerint az egyeseknél megkezdve összegül 6980 jön ki.

A most felvett összeadandóknak más sorrendben való felírása s az összeadás ismételt elvégzése meggyőzhet bennünket arról, hogy az összeg nagyságát az összeadandók sorrendje nem befolyásolja.

Az összeadás szabályai akkor is érvényesek, ha az összeadandók tizedes törtek, csakis arra kell ügyelni, hogy a felírásnál egynemű egységek kerüljenek egymás alá. Igy pl.

$$\begin{array}{r@{\cdot}l} 36 & 825 \\ 872 & 5 \\ 5 & 07 \\ 19 & 0056 \\ \hline 933 & 4006 \end{array}$$

A tizedrészek összeadása után az összegben is ki kell tenni a tizedes pontot.

Mivel összeadni csakis egy nevezetű számokat lehet, ennélfogva a megnevezett számok összege után megjelölendő a dolog is (kg., korona, méter stb.), a mire az összeg vonatkozik.

5. §. Egész számok és tizedes törtek kivonása.

Kivonást (subtractio) akkor végzünk, ha azt akarjuk megtudni, hány egységet kell valamely adott számhoz sorolni, hogy annyi egységet foglaljon magában, mint egy másik adott szám. Igy pl. hány koronát kell 4 koronához adni, hogy 7 korona legyen? Ezt a számítást kétféleképen végezhetem; és pedig: vagy azt kérdezem, hogy hány egységet kell 4-hez adnom, hogy összegül 7-et nyerjek, vagy pedig, hány egységet kell 7-ből leszámítanom, hogy 4 jőjjön ki? Az eredmény mindkét esetben 3 lesz. Itt tehát 7 mint összeg, 4 mint annak ismert, 3 pedig mint keresett összeadandója szerepel.

Ennélfogva: *a kivonásnál adott összegből és annak egyik összeadandójából a másik összeadandót keressük.* A kivonás tehát az összeadásnak megfordított művelete.

Az adott összeget *kisebbítendő*nek (minuendus), az ismert összeadandót *kivonandó*nak (subtrahendus), végre a keresett összeadandót *különbség*nek (differentia), vagy *maradék*nak nevezzük. A kivonás jele a kisebbítendő és kivonandó közé írt vízszintes vonal, melyet a beszédben *„minus“*, vagy *„kevesebb“* szóval mondunk ki. Az eddig elmondottakból következik, hogy:

kisebbítendő — kivonandó = maradék,
és: kivonandó + maradék = kisebbítendő.

Ezen utóbb kifejezett tétel a kivonás *próbájául* szolgál, s ha ezt a felvett példára alkalmazzuk, lesz:

$$4 + 3 = 7.$$

A kivonást tehát akkor végeztük el helyesen, ha a maradék és kivonandó összege a kisebbítendővel egyenlő.

Kivonni csakis egynemű mennyiségeket lehet. Amilyen nemű a kisebbítendő és kivonandó, ugyanolyan lesz a maradék is. — A maradék értéke nem változik, ha a kisebbítendőt és kivonandót ugyanannyi egységgel növeljük, vagy csökkentjük. Ha felvett példánkban úgy a kisebbítendőt, mint a kivonandót egyidejűleg 5 egységgel növeljük, vagy 2 egységgel csökkentjük, maradékul akkor is 3-at nyerünk, mert:

$$12 - 9 = 3 \quad \text{és} \quad 5 - 2 = 3.$$

Ha a kivonást fejben kell elvégeznünk, akkor a leszámlálást a kivonandó legmagasabb rendű egységeivel kezdjük s úgy haladunk az alacsonyabbak felé. Igy: ha 568-ból 422-től kellene fejben levonni, akkor 568-ból 400-at levonva, a maradék 168; ebből 20-at leszámítva a maradék 148, végre a két egyest is elvéve, végeredményűl kijön: 146.

Ha a kivonást írásban kell végeznünk, akkor a kivonandót a kivonás jelével elválasztva a kisebbítendő mellé (vízszintes sorba), vagy pedig a kisebbítendő alá írjuk és pedig utóbbi esetben szigorúan ügyelve arra, hogy az egyenlő-rendű egységek egymás alá kerüljenek. A felírás megtörténte után a kivonást a legalsóbb rendű egységeknél kezdjük, olyformán, hogy a kivonandó egységeit rendre leszámláljuk a kisebbítendő egységeiből. Ha a kivonandó valamely számjegye nagyobb, mint a kisebbítendő megfelelő számjegye akkor a kisebbítendő ezen egységeit 10 megfelelő rendű egységgel nagyobbítjuk s úgy végezzük a leszámlálást; persze, hogy az eredmény helyes maradjon a következő rendű egységek leszámlálásánál a kivonandót egy ily egységgel megpótoljuk, a mi által éppen kiegyenlítjük azt, hogy a kisebbítendőt 10 egygyel alacsonyabb rendű egységgel megszaporítottuk.

Legyen pl. 938-ből 255 kivonandó, akkor:

$$938 - 255 = 683; \qquad \begin{array}{r} 938 \\ -255 \\ \hline 683 \end{array}$$

azaz a kivonandó 5 egyesét a kisebbítendő 8 egyeséből leszámlálva marad 3 egyes; a kivonandó 5 tizesét nem vehetjük el a kisebbítendő 3 tizeséből, azért ezt 10 tízessel szaporítjuk, lesz 5 tizest leszámlálva 13 tizesből a maradék 8 tízes; most, hogy a különbség ne változzék mivel a kisebbítendő tizeseihez tízet, azaz egy százast adtunk, ugyanazt teszszük a kivonandóval is, miáltal ott lesz 3 százas, a mit a kisebbítendő 9 százasából elvéve, maradékúl 6 százast nyerünk.

A kivonás szabályai akkor is érvényesek, ha a részek tizedes törtek, csakis arra kell ügyelni, hogy a felírásnál egyenlő-rendű mennyiségek kerüljenek egymás alá. Ha a kisebbítendőben kevesebb tizedes van, mint a kivonandóban, akkor a hiányzó helyeket zérussal pótolva gondoljuk. A tizedrészek kivonása után a maradékban is ki kell tenni a tizedes pontot. Pl.:

$$1)\ \begin{array}{r} 516{\cdot}728 \\ -299{\cdot}989 \\ \hline 216{\cdot}739 \end{array} \qquad 2)\ \begin{array}{r} 59{\cdot}8 \\ -37{\cdot}956 \\ \hline 21{\cdot}844 \end{array}$$

Mivel kivonni csakis egyenlő nevezetű számokat lehet, ennélfogva a megnevezett számok különbsége után megjelölendő a dolog is (kg., m., korona stb.) amire az vonatkozik.

6. §. Egész számok és tizedes törtek szorzása.

Szorzást (multiplicatio) akkor végzünk, ha egyenlő összeadandók összegét kell előállítanunk. — Azt a számot, melyet ismételten összeadandó gyanánt kell vennünk *szorzandó*nak (multiplicandus), azt a számot pedig, mely megmutatja, hogy az előbbit hányszor kell összeadandóúl tekinteni *szorzó*nak (multiplicator), végre az egyenlő részek összegét *szorzat*nak (productum) nevezzük.

Ennélfogva: *a szorzás oly számtani művelet, a melynél a szorzandót annyiszor veszszük összeadandó gyanánt, a hányszor azt a szorzó mutatja.*

A szorzás jele a szorzó és szorzandó közé írt dűlt kereszt $\times$, vagy pont, melyet a beszédben *„szorozva"* szóval mondunk ki. Igy pl.:

$6 \times 3 = 6 \,.\, 3 =$ hat szorozva hárommal $=$ 3-szor 6.

A szorzás értelmezése szerint pedig:

$$6 \times 3 = 6 + 6 + 6 = 18,$$

vagy mivel az egynemű számok gyakran előforduló szorzatait már előre meg kell tanulnunk (egyszeregy), ennélfogva a fent kijelentett ismételt összeadásról a szorzásra térve át azt mondjuk, hogy: 3 szor 6 $=$ 18.

Kettőnél több szorzó esetében úgy végezzük a műveletet, hogy először a két első szám szorzatát képezzük, ezt megszorozzuk a harmadik számmal, majd a nyert eredményt a negyedikkel és így tovább. Pl.:

$$5 \times 8 \times 3 \times 4 = 40 \times 3 \times 4 = 120 \times 4 = 480.$$

A szorzási művelet meghatározásából kitetszőleg *a szorzandó éppen úgy lehet megnevezett, mint elvont szám,* ellenben *a szorzó,* a mely csupán azt mutatja, hányszor kell a szorzandót összeadandó gyanánt venni, *csakis elvont szám lehet.* — *A szorzat neme megegyezik a szorzandóéval.* — Ha egyszer már tudjuk, hogy a szorzatnak milyen nemű számnak kell lenni, akkor a szorzót és szorzandót — anélkül, hogy ezáltal a szorzat értéke megváltoznék — felcserélhetjük egymással; ekkor tehát semmi különbség sincs már a kettő között, úgy hogy azokat közös néven *tényezők*nek (factor) is nevezhetjük.

Bármely szám 1-gyel szorozva magát a számot adja, mert azt akkor csak egyszer kell összeadandóúl venni. Pl.:

$$256 \times 1 = 256.$$

Valamely számot 10-, 100-, 1000, . . . stb.-vel szorozni annyit jelent, mint minden egyes számjegyének helyértékét 1-, 2-, 3-, . . . stb. renddel emelni. Ezt azáltal érjük el, ha a szám végére 1, 2, 3 . . . stb. zérust függesztünk.

Ennélfogva: *valamely egész számot 10-, 100-, 1000-, . . stb.-vel úgy szorzunk, hogy a szám végére annyi zérust írunk, a hány a szorzóban van.* Pl.:

$$518 \times 1000 = 518000.$$

Többjegyű számot egyjegyűvel úgy szorzunk, hogy a szorzandó minden jegyét megszorozzuk a szorzóval és az egyes szorzatokat, ha egyjegyűek a szorzatban a maguk helyére felírjuk, ha pedig többjegyűek, akkor csakis az utolsó számjegyet írjuk fel, a fentmaradót a következő részlet-szorzathoz adjuk. Pl.:

$$\begin{array}{l} 583 \times 7 \\ \hline 4081 \end{array}$$

7-szer 3 = 21, az egyet felírjuk, a 2 tizest tovább viszszük; 7-szer 8 tizes = 56 tizes, a fentmaradt 2-vel 58 tizes, a 8 tizest felírjuk, az 5 százast továbbviszszük; 7-szer 5 százas 35 százas, a fentmaradt 5-tel 40 százas, ezt a szorzat eddig megtalált jegyei elé írjuk. Az eredmény: 4081.

Többjegyű számot másik többjegyűvel úgy szorzunk, hogy a szorzandót az előbb ismertetett szabály szerint megszorozzuk a szorzó minden számjegyével. Ha e műveletet a szorzó legalacsonyabb-rendű egységével kezdjük, akkor az egyes szorzatokat egy-egy számjegygyel balra írjuk az előbb nyert szorzat-sor alá, ha pedig a műveletet a legmagasabb rendű egységnél kezdjük, akkor az utóbb nyert szorzatok egy-egy jegygyel jobbra kerülnek az előbbi sor alá; a szorzás bevégzése után a részlet-szorzatokat összeadjuk. Pl.:

1) 3258 × 237
22806
9774
6516
772146

2) 8156 × 546
40780
32624
48936
4453176

Ha a szorzóban valamely helyen zérus áll, azzal nem szorzunk, hanem a következő szorzatot két helylyel írjuk balra, vagy jobbra, amint a műveletet a legalacsonyabb, vagy legmagasabb egységgel kezdtük. Ha a szorzó végén vannak zérusok, akkor a szorzást a jelentős számjegyekkel elvégezvén a szorzathoz annyi zérust függesztünk, a mennyi a szorzó végén áll. Pl.:

1) 5618 × 206
11236
33608
1157208

2) 1234 × 2500
2468
6370
3105000

Ha tizedes törtet 10-, 100-, 1000-, . . . stb.-vel kell szorozni, akkor minden számjegy értéke 1, 2, 3 . . . stb.-renddel emelendő, amit a tizedes pontnak ugyanannyi jegygyel való jobbra tétele által érünk el; ennélfogva: *tizedes törtet 10-, 100-, 1000-, stb.-vel úgy szorzunk, hogy a szorzandóban a tizedes pontot annyi helylyel viszszük jobbra, a hány zérus van a szorzóban.* Pl. 56·1825 × 1000 = 56182·5.

A szorzás természetéből folyólag a szorzatban mindig annyi tizedest kapunk, a mennyi a két tényezőben együttvéve van; ennélfogva: *tizedes törtet tizedes törttel az egész számoknál követett szabály szerint szorzunk, csakhogy a szorzatból annyi tizedest vágunk el, amennyi a szorzandóban és szorzóban együttvéve található.* Pl.:

1) 507·84 × 2·48
101578
203156
406312
1259·5672

2) 3·56 × 0·036
1068
2136
0·12816

Ha egyenlő tényezők szorzatát kell képeznünk, azt röviden úgy jelöljük, hogy a tényezőt egyszer leírjuk és melléje jobbról felül kisebb jegygyel azt a számot függesztjük, a mely megmutatja hányszor veendő a szám tényezőül pl.: $3^4 = 3 \times 3 \times 3 \times 3$.

Egyenlő tényezők szorzatát *hatvány*nak, a tényezők számát jelző jegyet *hatványkitevő*nek (exponens), a többször előforduló tényezőt *alap*nak, vagy *gyök*nek nevezzük. A hatványmennyiségeket a beszédben a következő módon említjük: 5^4 (5 a negyediken, vagy negyedik hatványon).

Valamely számot 2., 3., 4., 5. . . . stb. hatványra emelni annyi, mint azt 2, 3, 4, 5 . . . stb.-szer önnönmagával megszorozni.

A második hatványt még *négyzet*nek, a harmadikat pedig *köb*nek (cubus) is hívják, ez elnevezések onnan erednek, hogy a négyzetalakú idom területét egyik oldalának önnönmagával való szorzásából, a koczka köbtartalmát pedig egyik élének háromszor tényezőűl való vételéből nyerjük. Pl. A négyzet területét, melynek egyik oldala 4 m. a $4^2 = 4 \times 4 = 16$ m.^{2} szorzat, az ugyanakkora élekkel bíró koczka köbtartalmát (térfogatát) pedig a $4^3 = 4 \times 4 \times 4 = 64$ m.^{3} szorzat adja.

7. §. Egész számok és tizedes törtek osztása.

Osztást (divisio) akkor végzünk, ha azt akarjuk megtudni, hányszor lehet valamely adott számot egy másik adott számból kivonni. Ez a művelet tehát a szorzás megfordítottja, mert itt adva van a szorzat és az egyik tényező s ezekből keressük a másik tényezőt.

Ennélfogva: *az osztásnál adott szorzatból és annak egyik tényezőjéből a másik tényezőt keressük.* Az adott szorzatot *osztandó*nak (dividendus), az adott tényezőt *osztó*nak (divisor), a keresett tényezőt pedig *hányados*nak (quotiens) nevezzük. Az osztás jele az osztandó és osztó közé írt kettős pont, melyet a beszédben „*osztandó*" szóval mondunk ki. Pl. 105 : 15 = (105 osztandó 15-tel) = 7, mert 15 öt 7-szer vehetjük el 105-ből. 105 ezen példában az osztandó, 15 az osztó, 7 a hányados.

Az osztás értelmezéséből kitetszőleg osztó $\times$ hányados = osztandó. Ezt a tételt az osztási művelet *próbájául* használhatjuk fel. *Az osztást jól végeztük, ha az osztó és hányados az osztandót adja szorzatúl.*

Az osztást nem végezhetjük mindig oly sikerrel, mint az előbb felvett példában. Legyen például: 32 : 9. 9-et 3-szor elvehetjük 32-ből, de többször már nem, daczára annak, hogy $3 \times 9 = 27$ s így bizonyos számú egysége az osztandónak még rendelkezésünkre áll. Ilyenkor a nyert hányadost *nem teljes*nek, a fenmaradó egységeket *osztási maradék*nak hívjuk. Pl. $32 : 9 = 3$ (a nem teljes hányados) marad 5 (ez az osztási maradék). Ilyenkor: osztandó = osztó $\times$ hányados + osztási maradék.

Az osztás eredménye (a hányados) nem változik, ha az osztandót és az osztót ugyanazon számmal szorozzuk, vagy osztjuk. Pl.:

$$12 : 4 = 60 : 20 = 6 : 2 = 3 : 1 = 3.$$

Bármely szám az egységgel osztva önmagát és önmagával osztva az egységet adja hányadosúl.

Valamely számot 10-, 100-, 1000-, . . . stb.-vel osztani annyit jelent, mint minden egyes számjegyének helyértékét 1, 2, 3, . . . stb. renddel lejebb szállítani. Ennélfogva: *egész számot 10-, 100-, 1000-, . . . stb.-vel úgy osztunk, hogy az osztandóban annyi tizedes jegyet vágunk el, a hány zérus van az osztóban.* Pl.

$$3685 : 100 = 36{\cdot}85\,; \quad 560000 : 1000 = 560.$$

Többjegyű számot egyjegyűvel úgy osztunk, hogy megkeressük hányszor van meg az osztó az osztandó legmagasabb rendű számjegyében, vagy ha ennél nagyobb, a két legmagasabb rendűben; ezáltal nyerjük a hányados legmagasabb, az így vett osztandóval egyenlő rendű számjegyét; az esetleges maradékot hozzáadjuk az osztandó következő rendjéhez és a műveletet egészen addig folytatjuk, mig az egyesekhez, vagy ha az osztandó tizedes tört lenne, egészen ennek legutolsó rendjéhez érkezünk. Megjegyzendő, hogy tizedes tört-osztandó esetében a művelettel a tizedes ponthoz érkezvén a hányadosban is kiteszszük a tizedes pontot.

Ha az osztás nem vezet teljes hányadosra, a maradékot kisebb számmal a hányados mellé egy vízszintes vonal felé, az osztót pedig a vízszintes vonal alá írjuk. Ha az osztandó tizedes tört, akkor a műveletet tovább folytathatjuk, csakis az osztandót kell az alacsonyabb rendet jelző zérusokkal pótolni.

$$\text{Pl. } 3685 : 2 = 1842\,\frac{1}{2}\,; \quad 73{\cdot}518 : 8 = 9{\cdot}18985.$$

Többjegyű számot másik többjegyűvel úgy osztunk, hogy az osztandóból balról számítva annyi számjegyet *veszünk első osztandóul, a hány az osztóban van, vagy egygyel többet, ha az osztó nagyobb, mint a vele egyenlő jegygyel biró osztandó; így megkapjuk az elvégzett osztás után a hányados első számjegyét, ezzel megszorozzuk az osztót s a nyert szorzatot az első osztandóból levonjuk; a maradékhoz azután leírjuk az osztandó következő számjegyét s ezt a csoportot osztjuk a változatlan osztóval. Ha az utolsó számjegyet is levettük s a műveletet ezzel is elvégeztük, akkor nem teljes hányados esetén a maradékot oly módon írjuk a hányados mellé, amint azt az egyjegyű osztó esetében tettük.* Az eljárást a következő példa fogja közelebbről megvilágítani:

$$\begin{array}{l} 15022 : 29 = 518 \\ \underline{145} \\ \quad 52 \\ \quad \underline{29} \\ \quad 232 \\ \quad \underline{232} \\ \quad\quad 0 \end{array}$$

29 a 150-ben 5-ször, $5 \times 29 = 145$, marad 5, hozzá véve a következő számjegyet a 2-tőt, lesz 29 az 52-ben 1-szer, marad 23, a még fentlévő 2-tőt a maradékhoz írva, 29 a 232-ben meg van 8-szor, a maradék zérus.

Kellő gyakorlat után fölösleges az osztónak a hányados egyes jegyeivel való szorzatát leírni, a levonást akkor fejben végezzük s csakis a maradékot jegyezzük fel.

Ha az osztó tizedes tört, akkor azt egész számmá kell változtatni, ezt azáltal érjük el, hogy az osztót, és hogy a hányados értéke ne változzék, az osztandót is megszorozzuk 10-, 100-, 1000-, stb.-vel aszerint, a hány tizedes van az osztóban és ha már az osztó egész szám, akkor az osztást az eddig tanultak alapján végezzük. Pl.:

$$\begin{array}{l} 177{\cdot}2505 : 56{\cdot}27 = 17725{\cdot}05 : 5627 = 3{\cdot}15 \\ \qquad\qquad\qquad\qquad 8440 \\ \qquad\qquad\qquad\qquad 28135 \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\quad 0 \end{array}$$

Ha az osztandó és az osztó egyenlő nevezettel bíró számok, akkor a hányados nevezetlen szám, ha pedig az osztandó megnevezett szám, az osztó pedig elvont szám, akkor a hányados ugyanolyan nevezettel fog bírni, mint az osztandó. Két nevezetlen szám hányadosa is az lesz.

8. §. A méter-rendszer.

A francziák az összes mértéknemekre nézve egyöntetű, a hosszúság-egységre visszavezethető és földünk nagyságával összefüggő mértéket óhajtván teremteni, földünkön fokméréseket végeztettek (Delambre, Méchain), melyek eredményeiből kiszámították a meridián negyedének hosszát s ennek 10 milliomod, tehát az egész meridián 40 milliomod részét vették fel hosszúság-egységül. Ez a *méter*. Az ebből levezetett mértékek rendre tízszeresei, vagy tizedrészei a megelőzőknek. A görögből vett nevek a főegység elé téve a nagyobb, a latinból vett s a főegység elé helyezett nevek a kisebb egységek megjelölésére használtatnak. Igy a

deca (D), hecto (H), kilo (K), myria (M)

szók a főegység neve elé téve az annál 10, 100, 1000, 10000 szer nagyobb egységeket, a

deci (d), centi (c), milli (m)

szavak a főegység neve elé téve annak 0·1, 0·01, 0·001 részeit jelentik.

Hosszúságmértékek.		méter	*Területmértékek.*		
Myriaméter	=	10000	A	négyzet	myriaméter.
Kilométer	=	1000	A	„	kilométer.
Hectométer	=	100	A	„	hectométer.
Decaméter	=	10	A	„	decaméter.
Méter	=	1	A	„	méter.
Deciméter	=	0·1	A	„	deciméter.
Centiméter	=	0·01	A	„	centiméter.
Milliméter	=	0·001	A	„	milliméter.

Földterületek mérésénél: 100 m.^{2} = 1 ár; 100 ár = 1 hectár (ha) = 10000 m.^{2}

A terület-mértékeknél a négyzetméterből kiindulva minden magasabb egység 100-szorosa az alatta álló alacsonyabbnak s az alacsonyabb egységek századrészei az azokat megelőző magasabb egységeknek. Igy pl. a négyzet decaméter = 100 m.^{2};

a négyzet hectométer = 100 négyzet decaméter stb.; a négyzet deciméter = 0·01 m.², a (cm)² = 0·01 dm.² stb.

Köbmértékek. Köbmérték éppen annyi van, mint hosszúságmérték. A köbmértékek a hosszúságmértékek köbei, a miből következik, hogy minden köbmérték ezerszer kisebb, mint a megelőző magasabb egység és ezerszer nagyobb, mint az utána következő alacsonyabb egység. Igy: 1 m.³ = 1000 dm.³; 1 dm.³ = 1000 cm.³; 1 cm.³ = 1000 mm.³ stb.

Ürmértékek. Ezek egységéül a *liter* (l.) szolgál, melynek ürtartalma oly koczkáéval egyenlő, melynek minden éle 1 dm. 1 l. = 10 deciliter; 1 dl. = 10 centiliter; 100 l. = 1 hectoliter.

Súlymértékek. Ezek egységeül a *gramm* (g.) szolgál, mely egy cm.³ 4° *Celsius* hőmérséklettel biró destilált víz súlyával egyenlő. Destilált vizet azért veszünk e czélra, hogy tiszta legyen, 4° C hőmérséklettel pedig azért kell annak birnia, mert ezen hőfoknál éri el a víz legnagyobb sűrűségét.

1 g. = 10 decigramm = 100 centigramm = 1000 milligramm.
10 g. = 1 decagramm; 10 dg. = 1 hectogramm;
10 hg. = 1 kilogramm = 1000 g.
100 kg. = 1 métermázsa (q); 1000 kg. = 1 tonna.

A méterrendszer általános alkalmazása Francziaországban 1837. évi július hó 4-ike óta, hazánkban pedig 1876. évi január hó 1-je óta kötelező.

9. §. Pénzrendszerünk.

1858. november 1-től 1892. augusztus 11-éig az ezüstérték volt nálunk elfogadva. 1000 g. finom ezüstből 90 darab osztrák értékű forintot vertek. A pénzverésre 0·900 finomságú ötvényt használtak. 1892. augusztus 11-ike óta az *aranyérték* váltja fel az előbbit. Ennek egysége a *korona,* mely 100 fillérből áll. Két korona egy o. é. forinttal ér fel. Az új érték szerint négyféle érczpénzt vernek. És pedig: *aranyból* 20 és 10 koronás darabokat; *ezüstből:* egy koronásokat; *nikelből:* 20 és 10 filléreseket; *bronzból:* 2 és 1 filléreseket.

Az aranypénzek verésére oly ötvény szolgál, melynek finomsága 0·900; azaz, melyben 9 rész aranyhoz 1 rész réz járul. Egy kg. ilyen ötvényből

147·6 húsz- és 295·2 tíz-koronás aranyérmet vernek; tehát egy kg. finom aranyból 164 drb. 20- és 328 drb. 10-koronásat.

Ezüstből egy koronás érmek készülnek. Az e czélra felhasznált ötvény 0·835 finomságú s annak egy kg.-jából 200 darab 1 koronás érmet vernek.

A nikel-váltópénzek tiszta nikelből készülnek és pedig egy kg.-ból 250 drb. 20- és 333 drb. 10-filléres.

A bronz-váltópénzek verésére oly ötvény szolgál, mely 95 rész rezet, 4 rész ónt és 1 rész horganyt tartalmaz. Az így előállított ötvény 1 kg.-jából 300 drb. 2- és 600 drb. 1-fillérest vernek.

10. §. Az időszámításról.

Az idő mérésére az *év*, a *hónap*, a *nap*, az *óra*, a *percz* és a *másodpercz* szolgál.

Az *év* azon időtartam, mely alatt a föld a napot egyszer körülkeringi; a *nap* azon idő, mely alatt a föld egyszer tengelye körül megfordul. A napot 24 órára, az órát 60 perczre, a perczet 60 másodperczre osztják. Az év 365 nap 5 óra 48 első és 48 másodperczből áll. A polgári számítás szerint az évet 365 napból állónak veszik, az így elhanyagolt időt minden 4-ik évben számítják fel oly módon, hogy ezen u. n. szökőéveket 366 napból állóknak tekintik. Ekkor azonban oly többlet jön be a számításba, a mely minden 400 évben 3 napot teszen ki. Azért e hiba elenyésztetésére a százas évek közül csakis azokat tekintik szökőéveknek, a melyeknél a százasok száma 4-gyel osztható. Ez a *Gergely*-féle naptár. Hét nap egy *hetet* alkot. Az évet még 12 hónapra is beosztják, ezek: *január* (31 nap), *február* (28, szökőévben 29 nap), *márczius* (31 n.), *április* (30 n.), *május* (31 n.), *június* (30 n.), *július* (31 n.), *augusztus* (31 n.), *szeptember* (30 n.), *október* (31 n.), *november* (30 n.), *deczember* (31 n.).

A keresztény időszámítás *Krisztus* születésével kezdődik. Ha későbbi időről van szó, meg kell jelölnünk, hány év, hó és nap telt el Kr. sz. óta a jelzett napig. Ez a három az illető keletet (datum) adja.

Az időszámításnál a következő feladatok merülhetnek fel: 1) kiszámítandó az esemény kezdetéből és tartamából annak vége; 2) a kezdetéből és végéből a tartama; 3) a végéből és tartamából a kezdete;

végül: 4) két hely földrajzi hosszúságából az illető helyek közt lévő időkülönbség, vagy megfordítva az időkülönbségből a két hely földrajzi hosszúságának különbsége.

Lássuk sorban ezen eseteket:

1) Valaki 1856. évi augusztus hó 17-én született és 41 évig, 2 hónapig és 9 napig élt, mikor halt meg?

Kr. születésétől az illető születéséig eltelt:

	1855	év	7	hónap	és	16	nap
az illető élettartama	41	„	2	„	„	9	„
az illető haláláig eltelt	1896	év	9	hónap	és	25	nap

tehát meghalt 1897. évi október hó 26-án.

2) Petőfi 1823. évi január hó 1-én született és meghalt 1849. évi július hó 31-én. Mennyi ideig élt?

Petőfi haláláig eltelt:

	1848	év	6	hónap	és	30	nap
születéséig:	1822	„	0	„	„	0	„
Petőfi élt:	26	évet	6	hónapot	és	30	napot.

3) Mikor született az, ki 1899. évi május hó 26-án 68 éves 5 hónapos és 19 napos korában meghalt?

Kr. sz.-től a halálozásig eltelt:

	1898	év,	4	hónap	és	25	nap
—	68	„	5	„	„	18	„
	1829	év,	11	hónap	és	7	nap.

Született 1830. évi deczember hó 8-án.

4) Földünk tengelye körül nyugatról kelet felé forog, ennélfogva a keleten fekvő tájakon hamarább kel föl a nap, mint a nyugatiakon. Budapesten előbb kezdődik a nappal, mint Párisban. Földünk minden pontja egy teljes körülforgás, vagyis 24 óra alatt 360°-ot ír le, ebből egy órára 15° jut. Egy fok leírására ilyformán az órának 15-öd része, azaz 4 percz szükséges. Ha tehát ismerjük két hely földrajzi hosszúságát, akkor könnyen ki lehet számítani a két hely közt létező időkülönbséget is, vagy könnyen megoldható a fordított feladat. Lássuk a megoldás menetét. Budapest keleti hosszúsága 36° 42′, Bécsé 34° 2′. Hány óra van Bécsben, mikor Budapesten délelőtti 11 órát számlálunk? A két hely földrajzi hosszúságának különbsége 2° 40′. Egy fokra jut 4, kettőre 8 percz, 40 perczre 160 másodpercz, azaz

2 percz 40 mpercz. Az időkülönbség tehát 10 percz 40 mp. és pedig Bécsben annyival kevesebb az idő, ott tehát az óra csak 10 órát 49 perczet és 20 mp.-et mutat (Itt a földrajzi hosszúság *Ferró*tól van számítva; a francziák *Páris*tól, az angolok *Greenwich*től számítják az első délkört.)

A Kr. sz. előtti idő kiszámításánál kétféleképen járhatunk el, mert ha pl. azt kell megtudnunk, mennyi idővel Kr. sz. előtt gyilkolták meg Julius Caesart, ha ez esemény Kr. sz. e. 44-ik év márczius 15-én történt, akkor így okoskodunk: ez eseménytől Kr. sz.-séig még hiányzott 43 év s mivel a 44 ik év szökőév volt, a 366 napból le kell vonni a január, február, márczius hónapokra eső 74 napot; 366 — 74 = 292, tehát a lefolyt idő 43 év 292 nap. De ugyanezt az eredményt kapjuk akkor is, ha azt mondjuk, hogy a 44 ik évből hátra volt még 9 hónap és 17 nap, tehát a két esemény közt lefolyt idő 43 év 9 hónap és 17 nap.

MÁSODIK RÉSZ.

A számok tulajdonságairól; számolás közönséges törtekkel.

11. §. A számok oszthatósága és törzstényezőkre bontása.

Ha valamely szám egy másikkal maradék nélkül elosztható, akkor az előbbi *többszöröse* az osztónak, az osztó pedig *mértéke* az adott számnak. Igy pl. $15 : 5 = 3$. A 15 többszöröse az 5-nek, ez pedig mértéke a 15-nek.

Azokat a számokat, melyek önmagukon kívül csakis 1-gyel oszthatók törzs-, vagy prim-számoknak nevezzük. Ilyenek: 3, 5, 7, 11, 23 stb.

Azokat a számokat pedig, melyek az egységen és önmagukon kívül még más számokkal is oszthatók, *összetett számoknak* hívjuk. Ilyenek: 18, 32, 54 stb. Az összetett szám minden tényezőjének többszöröse s viszont minden tényező egyszersmind mértéke az illető összetett számnak.

Néha szükséges az osztás elvégzése nélkül is megtudnunk, hogy valamely szám osztható-e 2, 3, 4, 5, 6, 8 stb.-vel. A következőkben *az oszthatóság ismertető-jeleivel* fogunk foglalkozni.

Kettővel minden szám osztható, melynél az egyesek helyén álló számjegy kettővel osztható; ezt könnyű belátnunk, mert 10, 100, 1000 stb. osztható 2-vel s így ezek többszörösei is oszthatók kettővel, így hát csakis az egyesek helyén álló számjegy dönt a 2-vel való oszthatóság tekintetében.

A kettővel osztható számokat *páros-*, a nem oszthatókat *páratlan számoknak* hívjuk.

Négygyel mindazan számok oszthatók, melyeknél az egyesek és tizesek helyén álló számok egybe-olvasva négygyel oszthatók. Csakis e két helyen álló számjegyek döntenek a 4 gyel való oszthatóság tekintetében, mert a 100, az 1000 stb. s így azok többszörösei is oszthatók 4-gyel. Pl. 8124 osztható négygyel, mert 24-ben a 4 maradék nélkül foglaltatik.

Nyolczczal mindazon számok oszthatók, melyeknél a három utolsó számjegy egybeolvasva nyolczczal osztható. Pl. 15248 osztható nyolczczal, mert 248-ban 8 maradék nélkül foglaltatik.

Öttel azon számok oszthatók, melyeknek végén zérus, vagy 5 áll. Pl. 25, 70, 205 stb.

Tízzel azon számok oszthatók, melyeknél az egyesek helyén zérus áll.

Hárommal azon számok oszthatók, melyeknél a számjegyek összege hárommal osztható. Hogy ezt a szabályt megérthessük, tekintetbe kell vennünk, hogy minden szám oly két összeadandóra bontható, melyek közül az egyik a 9-nek s így a 3 nak is többszöröse, a másik pedig a számjegyek összege. Pl.

$$5832 = 5000 + 800 + 30 + 2$$

$$\text{de: } \begin{aligned} 5000 &= 5 \times 999 + 5, \\ 800 &= 8 \times 99 + 8, \\ 30 &= 3 \times 9 + 3, \end{aligned}$$

$$\text{s így: } 5832 = 5 \times 999 + 8 \times 99 + 3 \times 9 + 5 + 8 + 3 + 2;$$

ámde 5×999, 8×99 és 3×9 osztható 3-mal, így hát az egész szám oszthatósága csakis attól függ, hogy az $5 + 8 + 3 + 2$ összeg, vagyis az adott szám számjegyeinek összege osztható-e 3-mal, vagy sem?

A mostani példában ez összeg = 18, 3-mal osztható s így maga a szám is osztható 3-mal. — Ebből a levezetésből a 9-czel való oszthatóságra nézve következik, hogy:

Kilenczczel azon számok oszthatók, melyeknél a számjegyek összege kilenczczel osztható.

Hattal azon páros számok oszthatók, melyeknél a számjegyek összege hárommal osztható. E szabály önmagában is világos, ha meggondoljuk, hogy: $6 = 2 \times 3$.

Valamely szám olyan osztóját, mely prím-szám, az illető szám törzstényezőjének nevezzük. Minden szám, mint törzstényezőinek szorzata állítható elő. Ez a számok felbontása törzstényezőkre s az eljárás menete a következő: a számot a legkisebb primszámmal, mely annak mértéke, osztjuk s ugyanezt a műveletet alkalmazzuk a hányadosra nézve is, majd a második hányadosra és így tovább egészen addig, míg az utolsó hányados maga is törzsszám lesz. Pl. Legyen törzstényezőkre bontandó 2310,

$$\begin{array}{r|l} 2310 & 2 \\ 1155 & 3 \\ 385 & 5 \\ 77 & 7 \\ 11 & \end{array} \qquad 2310 = 2 \times 3 \times 5 \times 7 \times 11.$$

12. §. A legnagyobb közös osztó kikeresése.

Azt a számot, mely két, vagy több adott számban maradék nélkül foglaltatik az illető számok közös mértékének, vagy közös osztójának nevezzük. Igy pl. 32, 48, 56 maradék nélkül osztható 2-vel; ennélfogva 2 közös mértéke a felvett három számnak; de közös mértéke azoknak 4 és 8 is. *Azt a legnagyobb számot, mely két, vagy több adott számban maradék nélkül foglaltatik, az illető számok legnagyobb közös osztójának nevezzük.* Igy 32, 48 és 56 legnagyobb közös osztója 8.

Az olyan számokat, melyeknek legnagyobb közös osztójuk az egység, relativ-, vagy viszonylagos-törzsszámoknak nevezzük. Ilyenek: 7, 9, 25, vagy 8, 15, 19.

Ha két vagy több szám egy és ugyanazon számmal osztható, akkor azok összege és különbsége is osztható az illető számmal. Pl. 36 és 12 osztható 6-tal és pedig: $36 : 6 = 6$; $12 : 6 = 2$; a két szám összege: $48 : 6 = 8$; a két szám különbsége $24 : 6 = 4$. (Milyen összefüggés van a nyert hányadosok közt?)

Ha az adott számokat a legnagyobb közös osztójukkal elosztjuk, akkor a nyert hányadosok relativ primszámok lesznek. Pl. 36 és 15 legnagyobb közös osztója 3, $36:3=12$ és $15:3=5$. 12 és 5 relativ primszámok.

Adott számok legnagyobb közös osztóját vagy a számoknak törzstényezőkre való felbontása, vagy az osztási módszer segítségével nyerjük.

I. *A legnagyobb közös osztó kikeresése törzstényezőkre bontással úgy történik, hogy az adott számokat felbontjuk törzstényezőikre és ezek közül a valamennyi adott számban közösen előfordulókat megszorozzuk egymással; az így nyert szorzat lesz a legnagyohb közös osztó.*

Pl. a) keressük 255 és 330 legnagyobb közös osztóját;

$$255=3\times5\times17$$
$$330=2\times3\times5\times11$$

közösen előforduló tényezők 3 és 5 s így a legnagyobb közös osztó $=3\times5=15$.

b) keressük 420, 168 és 1176 l. n. k. osztóját;

$$420=2\times2\times3\times5\times7\quad=2^2\times3\times5\times7$$
$$168=2\times2\times2\times3\times7\quad=2^3\times3\times7$$
$$1176=2\times2\times2\times3\times7\times7=2^3\times3\times7^2$$

közösen előforduló tényezők: 2^2, 3, 7 s így a legnagyobb közös osztó $=2\times2\times3\times7=84$.

Ez az eljárás igen kényelmetlen, ha az adott számok nagyok, éppen azért akkor az osztási módszert alkalmazzuk.

II. *A legnagyobb közös osztó kikeresése osztás segítségével úgy történik, hogy a nagyobbik számot elosztjuk a kisebbikkel, ha nem kapunk maradékot, akkor a kisebbik szám lesz a legnagyobb közös osztó, hogyha azonban maradékhoz jutunk, akkor az osztót a maradékkal elosztjuk, majd ha ismét maradékhoz jutunk, az első maradékot elosztjuk a második maradékkal és így tovább mindaddig, amíg zérus a maradék; ekkor az utolsó osztó lesz a két szám legnagyobb közös osztója.*

Pl. keressük 7425 és 4875 legnagyobb közös osztóját, lesz:

$$
\begin{array}{l}
7425 : 4875 = 1 \\
\underline{4875} \\
2550 \\
4875 : 2550 = 1 \\
2325 \\
2550 : 2325 = 1 \\
255 \\
2325 : 225 = 10 \\
75 \\
\underline{225 : 75 = 3} \\
0
\end{array}
$$

A két szám legnagyobb közös osztója: 75.

Ha kettőnél több szám legnagyobb közös osztóját kell keresnünk, akkor előbb meghatározzuk két számét a most megismert módszer szerint, azután keressük az így talált legnagyobb közös osztónak és a harmadik számnak legnagyobb közös mértékét és így tovább, a legutoljára talált legnagyobb közös osztó lesz az összes adott számok legnagyobb közös osztója.

13. §. A legkisebb közös többszörös kikeresése.

Az olyan számot, mely két vagy több adott számmal maradék nélkül osztható ezek *közös többszörösének* nevezzük. Igy pl. 48 közös többszöröse, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 24 és 48-nak. A 48-on kivül azonban 96, 144, 192, stb. szintén közös többszöröse a felsorolt számoknak. Ezek között 48 a legkisebb.

Azt a legkisebb számot, mely két vagy több adott számmal maradék nélkül osztható, az illető számok legkisebb közös többszörösének nevezzük.

Prim-, vagy relativ-primszámok legkisebb közös többszörösét úgy találjuk meg, hogy az adott számokat megszorozzuk egymással. Pl.: 5, 7, 9 l. k. k. többszöröse $5 \times 7 \times 9 = 315$.

A legkisebb közös többszörös kikeresése általában kétféleképen történhetik; és pedig: 1) *tényezőkre bontással,* vagy 2) *a legnagyobb közös osztó segítségével.*

I. Minthogy a legkisebb közös többszörösnek az adott számok tényezői, ennélfogva annak e számok törzstényezőit magában kell foglalnia. Az eljárás tehát a legkisebb közös többszörösnek törzstényezőkre bontással való meghatározásánál az lesz, hogy *az adott számokat felbontjuk törzstényezőikre, ezek közül a közösen előfordulókat leírjuk s hozzájuk csatoljuk a közösen elő nem forduló törzstényezőket is. Az igy felirt számok szorzata lesz a legkisebb közös többszörös.* Ha az adott számok között olyan is van, mely egy másikban maradék nélkül foglaltatik, azt egyszerűen áthúzzuk, mert az a legkisebb közös többszörös nagyságára nincs befolyással. Legyen pl. keresendő a következő számok legkisebb közös többszöröse:

8, 12, 16, 18, 24	2
8, 9, 12	2
4, 9, 6	2
2, 9, 3	3
2, 3,	

l. k. k. többszörös $= 2 \times 3 \times 3 \times 2 \times 2 \times 2 = 144.$

Vagy legyenek a számok, melyeknek legkisebb közös többszörösét keressük: 360, 504, 702. Törzstényezőkre bontván a számokat, lesz:

$$360 = 2^3 \times 3^2 \times 5$$
$$504 = 2^3 \times 3^2 \times 7$$
$$702 = 2 \times 3^3 \times 13$$

innen a l. k. k. t. $= 2^3 \times 3^3 \times 5 \times 7 \times 13 = 98280.$

II. Nagyobb számoknál kényelmetlen a törzstényezőkre való bontás s éppen azért, ha két ilyen szám legkisebb közös többszörösét kell nyernünk, akkor a következő eljárást követjük: *mindenekelőtt kiszámítjuk az adott két szám legnagyobb közös osztóját, majd elosztjuk evvel az egyik számot, a nyert hányadossal pedig megszorozzuk a másik számot. Az így nyert szorzat lesz a két szám legkisebb közös többszöröse.* Pl. keressük a következő számok legkisebb közös többszörösét: 3280 és 640. E számok legnagyobb közös osztója: 80, ez a 640-ben találtatik 8-szor; a legkisebb közös többszörös tehát:

$$3280 \times 8 = 26240.$$

14. §. A közönséges törtek osztályozása és átalakitása.

*Az olyan számokat, melyek az egyenlő részekre felosztott egységnek egy vagy több ilyen részét fejezik ki, törtszámok*nak, vagy röviden *törtek*nek *nevezzük.*

A tört számok megjelölését két számmal végezzük, ezek közül az egyik azt mutatja, hogy hány egyenlő részre van felosztva az egység, ez a *nevező;* a másik viszont arról nyújt felvilágosítást, hogy hány ilyen részt vettünk számításba, ez a *számláló.* A számlálót a *tört-vonal*nak nevezett vízszintes vonal fölé, a nevezőt pedig ezen vonal alá írjuk. Igy pl.:

$$\frac{2}{3} \text{ két-harmad}, \quad \frac{3}{5} \text{ három-ötöd stb.}$$

Az ilyen alakú törteket *közönséges tört*eknek nevezzük, megkülönböztetésül a tizedes törtektől, melyeknél a nevező csak 10, 100, 1000, stb. lehet. A törtek szoros kapcsolatban állanak az osztással, mert azokat úgy tekinthetjük, mint el nem végzett osztásokat, vagyis kijelölt hányadosokat, melyeknél a számláló az osztandó, a nevező pedig az osztó; így péld..:

$$7:8=\frac{7}{8}.$$

Az olyan törtet, melynek számlálója kisebb, mint a nevezője, *valódi-tört*nek, az olyat pedig, melynek számlálója nagyobb mint a nevezője, *ál-tört*nek nevezzük. Az egész és tört összetételéből keletkező számot *vegyes-szám*nak hívjuk. Igy pl.:

$$\frac{2}{7} \text{ valódi tört}, \quad \frac{15}{8} \text{ áltört}, \quad 7\frac{4}{9} \text{ vegyes szám.}$$

Ha az egyenlő részekre osztott egység részeiből éppen annyit veszünk számításba, a hány részre az egységet osztottuk, akkor e részek együttvéve ismét az egységet szolgáltatják. Igy pl.:

$$\frac{7}{7}=\frac{25}{25}=\frac{95}{95}=1.$$

Ezt tudva az áltörtek könnyen átalakithatók vegyes számokká, mert annyi egészet rejtenek azok magukban, a hányszor a nevező a számlálóban foglaltatik. Pl.:

$$\frac{29}{7}=4\frac{1}{7}, \quad \frac{157}{14}=11\frac{3}{14}.$$

Ha most viszont vegyes-számokat kellene áltörtekké alakítanunk, úgy járunk el, hogy *a tört nevezőjét megszorozzuk az egész számmal s ezen szorzathoz hozzáadjuk a számlálót, az így nyert összeg lesz az áltört számlálója, a vegyes számban foglalt tört nevezője pedig marad egyszersmind az áltört nevezője is.* Pl.:

$$3\frac{7}{5} = \frac{22}{5}; \quad 15\frac{9}{14} = \frac{219}{14}.$$

A vegyes számokkal tehát úgy végezhetünk minden műveletet, mint a közönséges törtekkel, csakis áltörtekké kell előbb azokat átalakítanunk.

A törtek meghatározásából kitetszőleg: *olyan két tört közül, a melyek egyenlő nevezővel bírnak, az lesz nagyobb értékű, a melynek a számlálója nagyobb.* Pl.

$$\frac{2}{5} > \frac{1}{5}, \quad \frac{4}{7} > \frac{3}{7} \text{ stb.}$$

Ilyformán, ha valamely tört számlálóját kétszer, háromszor stb. nagyobbnak veszszük, akkor annak értéke is 2-szer, 3-szor stb. nagyobb lesz; azaz: *törtet egész számmal úgy szorzunk, hogy a számlálót megszorozzuk az egész számmal, a nevezőt pedig változatlanúl megtartjuk.*

Viszont, ha a tört számlálóját 2-szer, 3-szor stb. kisebbnek veszszük, akkor ugyanannyiszor kisebb lesz magának a törtnek is az értéke, azaz: *törtet egész számmal úgy osztunk, hogy a számlálót elosztjuk az egész számmal, a nevezőt pedig változatlanúl megtartjuk.*

Olyan két tört közül, melyeknek a számlálója egyenlő, az lesz nagyobb értékű, a melyiknek a nevezője kisebb. Ha a tört nevezőjét 2-szer, 3-szor stb. kisebbnek veszszük, akkor a tört értéke 2-szer, 3-szor stb. nagyobb lesz; ennélfogva: *törtet egész számmal úgy szorzunk, ha nevezőjét az egész számmal elosztjuk, számlálóját pedig változatlanúl megtartjuk.* Másfelől, ha valamely tört nevezőjét 2-szer, 3-szor stb. nagyobbá teszszük, ezáltal a tört értéke 2-szer, 3-szor stb. kisebb lesz; ennélfogva: *törtet egész számmal úgy osztunk, hogy a tört nevezőjét az egész számmal megszorozzuk, számlálóját pedig változatlanúl megtartjuk.*

Az eddig elmondottakból kitetszőleg: *a tört értéke nem változik, ha számlálóját és nevezőjét egyidejűleg ugyanazon számmal szorozzuk, vagy osztjuk.*

$$\frac{2}{3}=\frac{4}{6}=\frac{8}{12}=\frac{16}{24} \text{ stb.}; \quad \frac{10}{30}=\frac{5}{15}=\frac{1}{3}.$$

A törtszám akkor veszi fel legegyszerűbb alakját, ha számlálója és nevezője relativ primszámok. Azt a műveletet, melynek segítségével a törtet legegyszerűbb alakjára hozzuk, *rövidítés*nek nevezzük, ez abban áll, hogy a tört számlálóját és nevezőjét legnagyobb közös osztóikkal elosztjuk. Pl.:

$$\frac{75}{125}=\frac{3.25}{5.25}=\frac{3}{5}.$$

Ha két törtet össze kell hasonlítanunk oly czélból, hogy megállapítsuk, melyik nagyobb a másiknál, akkor közös nevezőre kell azokat hoznunk, mert tudjuk, hogy az egyenlő nevezővel bíró törteknél a számláló nagysága állapítja meg a tört nagyságát. Mivel a fentebb tanult szabály szerint a tört értéke nem változik, ha számlálóját és nevezőjét ugyanazon számmal szorozzuk, ennélfogva szorzás által úgy alakíthatjuk át az összehasonlítandó törteket, hogy azok egyenlő nevezővel bírjanak. Legyen pl. megállapítandó, hogy melyik tört nagyobb: $\frac{3}{4}$, vagy $\frac{4}{5}$? Ha az első tört számlálóját és nevezőjét 5-tel, a másodikét 4-gyel szorozzuk, lesz:

$$\frac{3}{4}=\frac{15}{20} \text{ és } \frac{4}{5}=\frac{16}{20};$$

most már a nevezők egyenlők s mivel a második tört számlálója nagyobb, mint az elsőé, ennélfogva:

$$\frac{4}{5}>\frac{3}{4}.$$

15. §. A négy alapművelet közönséges törtekkel.

I. Összeadás.

Minthogy a műveletek értelmezése a közönséges törtekre nézve is ugyanaz, ami az egész számokra és tizedes törtekre nézve volt, ennélfogva az összeadásra vonatkozólag állani fog, hogy csakis *ugyanazon egységre* vonatkozó egynemű mennyiségek adhatók össze. Az összeadandó részeknek tehát egyenlő nevezővel kell bírniok, mert csakis akkor vonatkoznak egyenlő egységekre (felekre, harmadokra, negyedekre stb.). *Egyenlő nevezővel bíró törteket úgy adunk össze, hogy a részek számlálóit összeadjuk, ez lesz az összeg számlálója, annak nevezője pedig akkora lesz, mint a részeké volt.* Pl.:

$$\frac{3}{16}+\frac{1}{16}+\frac{5}{16}+\frac{4}{16}=\frac{13}{16}.$$

Különböző nevezővel bíró törteket csakis akkor adhatunk össze, ha először azokat egyenlő nevezőre hozzuk. Ez úgy történik, hogy kikeressük az összeadandó törtek nevezőinek legkisebb közös többszörösét. Ez lesz a közös nevező. Azután minden törtet úgy alakítunk át, hogy nevezője a közös nevező legyen, amit elérünk, ha a régi nevezővel az újat elosztjuk s a kijövő hányadossal a számlálót megszorozzuk; az így nyert szorzat lesz az új számláló. Ha már egyszer a törtek egyenlő nevezővel bírnak, akkor az összeadást az előbb megismert szabály szerint eszközöljük. Pl.:

$$\frac{3}{8}+\frac{2}{5}+\frac{4}{9}+\frac{1}{3}+\frac{7}{15}+\frac{5}{16}=?$$

A közös nevező lesz:

$$\begin{array}{r|l} 8,\ 5,\ 9,\ 3,\ 15,\ 16 & 3 \\ 3,\quad 5\ \ 16 & \end{array} \qquad 3\times 3\times 5\times 16=720.$$

$$\frac{3}{8}=\frac{270}{720};\quad \frac{2}{5}=\frac{290}{720};\quad \frac{4}{9}=\frac{320}{723};\quad \frac{1}{3}=\frac{240}{720};$$

$$\frac{7}{15}=\frac{337}{720};\quad \frac{5}{16}=\frac{225}{720};$$

$$\frac{3}{8}+\frac{2}{5}+\frac{4}{9}+\frac{1}{5}+\frac{7}{15}+\frac{5}{16}=$$

$$=\frac{270+290+320+240+336+225}{720}=\frac{1681}{720}.$$

Vegyes számok összeadásánál kétféleképen járhatunk el, és pedig átváltoztatjuk előbb valamennyi összeadandót áltörtté s úgy végezzük a műveletet; vagy pedig végezzük külön-külön az egészek és a törtek összeadását s azután foglaljuk össze a két eredményt.

II. Kivonás.

Kivonni csakis *egyenlő nevezővel bíró* törteket lehet; ilyen *törteknél a kivonást úgy végezzük, hogy a kivonandó számlálóját levonjuk a kisebbítendő számlálójából, e különbség adja a maradék számlálóját, a maradék nevezőjéül pedig azt tartjuk meg, a mi a kivonandóé és kisebbítendőé volt.* Pl.:

$$\frac{5}{6}-\frac{3}{6}=\frac{5-3}{6}=\frac{2}{6}=\frac{1}{3}.$$

Különböző nevezővel bíró törteknél úgy végezzük a kivonást, hogy a kisebbítendőt és kivonandót előbb közös nevezőre hozzuk s akkor alkalmazzuk az imént ismertetett szabályt. Pl.:

$$\frac{4}{9}-\frac{2}{7}=\frac{28}{63}-\frac{18}{63}=\frac{10}{63}.$$

A vegyes számok kivonásánál kétféle eljárást követhetünk, éppen úgy mint az összeadásnál. Az ott elmondottak figyelembevétele mellett a kivonást mindkét módon, minden további magyarázat nélkül el tudjuk végezni.

III. Szorzás.

Már az előbbi §-ban megismerkedtünk azon eljárással, a mely szerint törtet egész számmal szorozhatunk. Ugy találtuk, hogy ezt kétféleképen végezhetjük, és pedig: vagy oly módon, hogy a számlálót megszorozzuk az egész számmal, a nevezőt pedig változatlanul megtartjuk; vagy a nevezőt osztjuk az egész számú szorzóval és a számlálót változatlanúl hagyjuk. Pl.:

$$\frac{15}{9}\times 3=\frac{45}{9}=\frac{15}{3}=5.$$

Mivel a tényezők felcserélése a szorzat nagyságát nem befolyásolja; ennélfogva a fent megemlített szabály egyszersmind azt is kifejezi: miképen kell eljárnunk, ha egész szám szorzandó törttel. *Törtet törttel úgy szorzunk, hogy a számlálók szorzatát elosztjuk a nevezők szorzatával.* Pl.:

$$\frac{5}{6} \times \frac{7}{9} = \frac{35}{54}.$$

Vegyes számok szorzásánál azokat előbb áltörtekké változtatjuk s úgy alkalmazzuk reájuk a most megismert szabályokat.

IV. Osztás.

A 14. §-ban már megismertük a szabályt, a mely szerint törtet egész számmal oszthatunk. Ugy találtuk, hogy ezt kétféleképen végezhetjük; és pedig, vagy oly módon, hogy a számlálót elosztjuk az egész számmal, a nevezőt változatlanúl megtartjuk; vagy pedig a számláló változatlanúl hagyása mellett a nevezőt megszorozzuk az egész számmal. Pl.:

$$\frac{15}{7} : 3 = \frac{5}{7} = \frac{15}{21}.$$

Egész számot törttel úgy osztunk, hogy azt az osztó megfordított (reciproc) értékével szorozzuk. Pl.:

$$5 : \frac{2}{3} = \frac{15}{2}.$$

Végre: *törtet törttel úgy osztunk, hogy az osztandót az osztó megfordított értékével szorozzuk.* Pl.:

$$\frac{3}{4} : \frac{4}{5} = \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{4} = \frac{15}{16}.$$

Az osztásban előforduló vegyes számokat előbb áltörtekké változtatjuk s úgy alkalmazzuk azokra a most megismert szabályokat.

16. §. A közönséges- és a tizedes-törtek egymásra való átalakítása.

I. Közönséges tört átalakítása tizedes törtté.

Ha meggondoljuk, hogy a közönséges tört nem más, mint kijelölt hányados, azaz kijelölt, de el nem végzett osztás, akkor az osztás tényleges végrehajtása nyilvánvalólag a közönséges törtnek tizedes-törtben kifejezett alakjára vezet. Pl.:

$$\frac{5}{8} = 5_0 : 8 = 0{\cdot}625 \quad \text{tehát:} \quad \frac{5}{8} = 0{\cdot}625$$
$$\begin{array}{l} 20 \\ \hline 40 \\ \hline 0 \end{array}$$

Az ilyen átalakításoknál három eset lehetséges, és pedig:

1) az osztás — mint a felvett példában — teljesen elvégezhető; az így nyert eredményt *véges tizedes-tört*nek nevezzük;

2) az osztás nem végezhető el, hanem oly eredményre vezet, melyben ugyanazon számok, vagy számcsoportok a végtelenségig ismétlődnek. Pl.:

$$\frac{7}{11} = 7 : 11 = 0{\cdot}636363\ldots \text{ vagy } \frac{2}{7} = 0{\cdot}285714285714\ldots$$

az ilyen tizedes-törteket *szakaszos* és pedig, mivel az ismétlődő számokat más számok nem előzik meg, *tiszta-szakaszos tizedes-törtek*nek nevezzük;

3) az osztás nem végezhető el, hanem oly eredményre vezet, melyben ugyanazon számok, vagy számcsoportok a végtelenségig ismétlődnek, ámde az ismétlődő számokat más — nem ismétlődő — számok is megelőzik. Pl.:

$$\frac{5}{6} = 0{\cdot}8333\ldots \text{ vagy: } \frac{47}{275} = 0{\cdot}170909\ldots$$

az ilyeneket *vegyes-szakaszos tizedes-törtek*nek nevezzük.

Véges tizedes-törtre az olyan közönséges tört vezet, melynek nevezője törzstényezőkül csakis a 2-t, vagy 5-öt tartalmazza. — Tiszta-szakaszos tizedes-törtre az olyan közönséges tört vezet, melynek nevezőjében a 2 és 5 mint törzstényező nem található; végre vegyes-szakaszos tizedes-törthöz jutunk, ha a közönséges tört nevezője a 2-n, vagy 5-ön kívűl még más törzstényezőket is tartalmaz.

A szakaszos tizedes-törteket úgy jelöljük, hogy a szakaszt csak egyszer írjuk le s annak első és utolsó számjegye fölé pontot teszünk. Pl.:

$$\frac{7}{11} = 0{\cdot}\dot{6}\dot{3}; \quad \frac{2}{7} = 0{\cdot}\dot{2}8571\dot{4}; \quad \frac{47}{275} = 0{\cdot}170\dot{9}$$

II. Tizedes-tört átalakítása közönséges törtté.

Véges tizedes tört átalakítása közönséges törtté úgy történik, hogy a tizedes-törtet felírjuk számlálónak, nevezőűl pedig 10-, 100-, 1000 . . . stb. kerűl a számláló alá, a szerint a hány jegyből áll a tizedes tört. Pl.:

$$0{\cdot}225 = \frac{225}{1000} = \frac{9}{40}; \text{ vagy } 3{\cdot}56 = 3\frac{56}{100} = 3\frac{14}{25}.$$

Lássuk mármost milyen közönséges tört bír valamely megadott tiszta-szakaszos tizedes-törttel egyenlő értékkel? Legyen közönséges törtté alakítandó: $0{\cdot}\dot{3}\dot{7}$. Szorozzuk meg e számot százzal s a százszoros értékből vonjuk le az egyszeres értéket, vagyis magát a számot, akkor lesz:

$$\begin{array}{r}
100 \times 0{\cdot}\dot{3}\dot{7} = 37{\cdot}3737\ldots \\
-1 \times 0{\cdot}37 = 0{\cdot}3737\ldots \\
\hline
99 \times 0{\cdot}\dot{3}\dot{7} = 37
\end{array}$$

és: $$0{\cdot}\dot{3}\dot{7} = \frac{37}{99}.$$

Azaz: *a tiszta-szakaszos tizedes-tört oly közönséges törttel egyenlő, melynek számlálója a szakasz, nevezője pedig annyi 9-es, a hány számjegyből áll a szakasz.*

Végre: *a vegyes-szakaszos tizedes-tört oly közönséges törttel egyenlő, melynek számlálóját úgy nyerjük, hogy a szakasz előtti számot és a szakaszt egybeolvasván, abból a szakaszt megelőző számot levonjuk, nevezőjéűl pedig annyi 9-est írunk, a hány számjegyből áll a szakasz s utána annyi zérust, a hány számjegy áll a szakasz előtt.* Pl.:

$$0{\cdot}17\dot{0}\dot{9} = \frac{1709 - 17}{9900} = \frac{1692}{9900} = \frac{36\,.\,47}{36\,.\,275} = \frac{47}{275}.$$

Hogy ez eredményt igazoljuk, szorozzuk meg az adott számot előbb 10000-rel, majd 100-zal s az utóbbi szorzatot vonjuk le az elsőből, akkor lesz:

$$\begin{array}{r}
10000 \times 0{\cdot}17\dot{0}\dot{9} = 1709{\cdot}0909\ldots \\
-100 \times 0{\cdot}17\dot{0}\dot{9} = -17{\cdot}0909\ldots \\
\hline
9900 \times 0{\cdot}17\dot{0}\dot{9} = 1692
\end{array}$$

honnan: $$0{\cdot}17\dot{0}\dot{9} = \frac{1692}{9900} = \frac{47}{275}.$$

HARMADIK RÉSZ.

Számolási előnyök és rövidítések.

17. §. Számolási előnyök.

A következőkben olyan egyszerűbb s így könnyen felfogható és alkalmazható számolási előnyökkel fogunk megismerkedni, melyek alkalmasak arra, hogy a műveletek helyes eredményeire rövidebb idő alatt reávezessenek bennünket, mint a mennyi a közönséges eljárás szerint e czél elérése szükséges.

1) Ha az összeadást fejben oly számokkal kell végeznünk, a melyek valamely kerekszámhoz közel állanak, akkor összeadjuk az illető kerekszámokat s az összegből levonnunk annyi egységet, a mennyi a részekből a kerek számokig hiányzott. Pl.:

$$197 + 98 = 200 + 100 - 5 = 295.$$

2) Ha a kivonást fejben kell végeznünk s a kivonandó valamely kerekszámhoz közel áll, akkor levonjuk az illető kerekszámot s a maradékhoz annyi egységet adunk, a hány hiányzik a kivonandóból a kerekszámig. Pl.:

$$571 - 198 = 571 - 200 + 2 = 373.$$

3) Ha a szorzás egyik tényezője közel áll valamely kerekszámhoz, akkor ez utóbbival szorzunk, és az így nyert szorzatból levonjuk a szorzandó annyiszorosát, a hány hiányzott a szorzóból a kerekszámig. Pl.:

$$578 \times 59 = 578 \times 60 - 578 = 34680 - 578 = 34102.$$

vagy:

$$752 \times 197 = 752 \times 200 - 752 \times 3 = 148144.$$

4) Ha a szorzó szélső számjegyeinek egyike az egység, akkor a szorzást azzal kezdjük, s így első rész-szorzatúl magát a szorzandót tartjuk meg, miáltal egy sor felirását megtakarítjuk. Pl.:

$$\begin{array}{r} 5618 \times 156 \\ 28090 \\ 33708 \\ \hline 876408. \end{array}$$

5) Ha a szorzó 11, 111, 1·1, 11·1, stb. akkor figyelembevéve, hogy a rész-szorzatok mindenike egyenlő a szorzandóval, csakis egy-egy jegygyel jobbra, vagy balra van eltolva; megtakaríthatjuk a részszorzatok felirását és a 11-gyel való szorzásnál a szorzat legalacsonyabb értékű jegyéül a szorzandó jobb oldalon álló számjegyét, eléje a két utolsó számjegy összegét írjuk fel s azután folyton egy jegygyel balra haladva amíg lehet kettenként foglaljuk össze a szorzandó számjegyeit, mignem az egész balról álló számjegyet, mint a szorzat legmagasabb jegyét írjuk fel. Ha a szorzó 111, akkor a szorzandó számjegyeinek összefoglalása hármanként történik. Ha a szorzóban tizedes pont van, azt csakis annyiban veszszük figyelembe, hogy a szorzás elvégzése után a szorzatból megfelelő számú tizedest vágunk el. Pl.:

$$\frac{5876 \times 11}{64636}; \quad 6,\ 6+7,\ 7+8\ (+1 \text{ maradék}), 8+5\ (+1 \text{ maradék}),\ 5\ (+1 \text{ maradék}).$$

vagy:

$$\frac{123421 \times 11{\cdot}1}{1369973{\cdot}1}, \quad 1,\ 1+2,\ 1+2+4,\ 2+4+3,\ 4+3+2,\ 3+2+1,\ 2+1,\ 1.$$

6) Ha a szorzó kétjegyű szám s két egyjegyű tényezőre bontható, akkor a szorzandót megszorozzuk az egyik tényezővel s az így nyert szorzatot a másik tényezővel, ezáltal már a kivánt eredményhez jutunk. Pl.:

$$258 \times 45 = (258 \times 5) \times 9 = 1290 \times 9 = = 11610.$$

7) Ha az egyik tényező 5, akkor a másikat 10-zel szorozzuk s a nyert szorzatot 2-vel osztjuk. Pl.:

$$518 \times 5 = 518 \times \frac{10}{2} = \frac{5180}{2} = 2590.$$

8) Ha az egyik tényező 25 (azaz 100 : 4), akkor a másik tényezőt szorozzuk 100-zal s az így nyert, kelleténél 4-szer nagyobb szorzatot 4-gyel elosztjuk. Pl.:

$$5872 \times 25 = 5872 \times \frac{100}{4} = 587200 : 4 = 146800.$$

9) Ha az egyik tényező 125 (azaz 1000 : 8), akkor a másik tényezőt szorozzuk 1000-rel s az így

nyert, kelleténél 8-szor nagyobb szorzatot 8-czal elosztjuk. Pl.:

$$348 \times 125 = 348000 : 8 = 43500.$$

10) Ha a szorzó minden számjegye 9-es, csakis a legalacsonyabb rendű nem az, akkor 100, 1000 stb.-re egészítjük ki a szorzót s az ezen nagyobbított szorzóval való szorzás után nyert eredményből levonjuk a szorzandó annyiszorosát, a hány a 100-ig, 1000-ig stb. való kiegészítésre szükséges volt. Ha pedig a szorzó minden számjegye 9-es, csakis a legmagasabb rendű nem, akkor azt 1-gyel nagyobbítjuk s az így kikerekített szorzóval nyert szorzatból levonjuk az 1-szeres szorzandót. Pl.:

a) $7518 \times 995 = 7518000 - 7518 \times 5 = 7480410.$

b) $8{\cdot}3518 \times 4999 = 8{\cdot}3518 \times (5000 - 1) = 41759 -$
$- 8{\cdot}3518 = 41740{\cdot}6482.$

11) Ha az osztó két tényezőre bontható, akkor az osztandót elosztom az egyik tényezővel s az így nyert hányadost a másik tényezővel. A második osztás a kivánt eredményre vezet. Pl.:

$$58752 : 72 = 58752 : 8 \times 9 = 7344 : 9 = 816.$$

12) Ha az osztó 25 (100 : 4), akkor az osztandót elosztjuk 100-zal s a nyert hányadost 4-gyel megszorozzuk. Pl.:

$$375 : 25 = 3{\cdot}75 \times 4 = 15.$$

13) Ha az osztó 5 (10 : 2), akkor az osztandót elosztjuk 10-zel s a nyert hányadost 2-vel megszorozzuk. Pl.:

$$8225 : 5 = 822{\cdot}5 \times 2 = 1645.$$

14) Ha az osztó 125 (1000 : 8), akkor az osztandót 1000-rel elosztjuk s a nyert hányadost 8-czal szorozzuk. Pl.:

$$6000 : 125 = 6 \times 8 = 48.$$

18. §. A korlátolt pontosságról.

A közéletben nincs mindig szükség arra, hogy a számokat, pl. valamely város lakosainak számát vagy valamely ország területét, valamely folyó hosszát stb. a legutolsó számjegyig pontosan leirjuk, vagy kimondjuk. Elég néha az ezreseket, vagy százasokat megtartanunk, a többi alacsonyabb rendű számjegyet elhanyagolhatjuk. Ilyenkor arra kell törekednünk, hogy a megtartott számjegyeket úgy javítsuk ki, hogy azok a lehetőségig pontosak legyenek. Igy pl. ha Szeged lakóinak számáról van szó, elég azt mondanom, hogy az 87 ezer, holott a pontos szám (1890. évi népszámlálás) 87210. Ha Szabadka lakóiról van szó, akkor a pontos adat 72683, a beszédben 73 ezret fogok mondani, mert ha 72 ezret mondanék, nagyobb hibát követnék el, mint így. Az utóbbi példánál *igazitást* vettünk, azaz *a még megtartott legalacsonyabb rendű egységeket egygyel szaporítottuk s ezt teszszük mindannyiszor, a hányszor az elhanyagolt részek legmagasabb számjegye 5, vagy 5-nél nagyobb szám.* Pl.: Ha 1587·57 km. csakis a százasokig lenne kimondandó, 1600-nak fogjuk mondani, mert a hiba amit igy elkövetünk jóval kisebb, mintha 1500 km.-t mondtunk volna.

19. §. Rövidített összeadás és kivonás.

Gyakran az összeadás és kivonás eredményeit csakis bizonyos számjegyig akarjuk pontosan előállítani; olyankor az adott számok jegyeiből elég annyit megtartanunk, a mennyit az eredményben kivánunk, az elhanyagolt számjegyekből azonban igazítást veszünk. Pl.: végezzük 2 tizedesig a következő számok összeadását:

$$5{\cdot}3875 + 2{\cdot}7893 + 8{\cdot}52349 = ?$$

a) Igazítással:	5·39	b) 5·3875
	2·79	2·7893
	8·52	8·52349
	16.70	16.70

Vehetjük az igazítást az által is, hogy a számokat változatlanúl hagyván, az ezredrészeknél kezdjük az összeadást, de azok összegét csakis igazításra használjuk fel. Igy a jelen példában b) alatt $3 + 9 + 7$ ezred $= 19$ ezred, amit igazítással 2 századrésznek vehetünk s úgy adjuk az összeadandók századrészeihez.

Igen sok összeadandó esetében a későbbi sorok is felhasználandók igazítás vételére.

Kivonásnál külön-külön rövidítjük és kiigazítjuk a kisebbítendőt és kivonandót s azután a kivonást egész közönségesen elvégezzük. Pl.:

58·369754 — 55·592378 = ? . . . 3 tizedesig.

Igazítással:

	58·370
	— 55·592
	2·778

20. §. A rövidített szorzás.

Legyen megoldandó a következő feladat: Hány négyzetméter azon telek területe, melyről tudjuk, hogy 156·3518 négyzetöl? Egy négyzetöl = 3·5966 m.² Nyilvánvaló, hogy ezt a feladatot szorzással oldhatjuk meg:

156·3518 × 3·5966	
46905	54
7817	590
1407	1762
93	81108
9	381108
562·53	498388 m.²

A szorzat nyolcz tizedest tartalmaz, holott a megoldást már akkor is pontosnak tarthatjuk, ha a négyzet-deciméterek számát azaz a 2 tizedes-jegyig vett eredményt ismerjük. A szorzatnak a függélyestől jobbra eső része tehát teljesen fölösleges.

Azt az eljárást, melylyel a szorzást bizonyos korlátolt pontossággal, bizonyos előre megszabott számjegyig végezhetjük, *rövidített szorzás*nak nevezzük. Az eljárás menetének megállapítására a következő meggondolás vezet bennünket: visszatérve az adott példára, ha a számítást 2 tizedesre kivánom végezni, akkor a szorzó legmagasabb rendű számjegyével, az egyesekkel csakis a szorzandó századrészeit kell még szoroznom, a kisebb törteket már nem, mert azokra a szorzatban nincs szükségem. Ha a szorzóban még tizesek is lennének, azokat már a szorzandó ezredrészeivel is kellene szoroznom, mert ezek szorzata századrészekre vezet, a mikre pedig szükségem van a szorzatban, hasonló okból kellene szoroznom a szorzó százasait a szorzandó tizedrészeivel stb. Másképen áll a dolog a szorzóban foglalt tizedes törtekkel. Ha a szorzó tizedrészeivel a szorzandó századrészeit szorzom, akkor ezredrészekhez jutok, ezekre a szorzatban nincs szükségem, ennélfogva elég a tizedrészekkel csakis a szorzandó tizedrészeit s az annál nagyobb számokat szorozni. Hasonló okból kell a szorzó századrészeivel csakis a szorzandó egyeseit és magasabbrendű jegyeit szorozni és a többi. — Ezeket tudva, mármost csakis alkalmas módot kell még a szorzó és szorzandó felírására találnunk. Ilyennek kinálkozik az, hogy a szorzó minden jegyét a szorzandó azon jegye alá írjuk, a melyet még meg kell azzal szoroznunk s aztán a szorzást az egyes számjegyekkel a felette álló számnál, illetőleg az igazítás megtétele czéljából a tőle jobbra álló számnál kezdjük. Igy a fenti példa esetén:

$$\begin{array}{r} 156{\cdot}3518 \\ 66953 \\ \hline 48905 \\ 7818 \\ 1407 \\ 94 \\ 9 \\ \hline 562{\cdot}33 \end{array}$$

A jobb oldalon álló 3-assal kezdem a szorzást: $3 \times 1 = 3$, igazítás nincs, $3 \times 5 = 15$, az 5-öt leírom, marad egy, $3 \times 3 = 9$, meg egy az 10, stb. így kapom az első részlet-szorzatot. Mikor ez meg van, a szorzó 3-asát elvágom és kezdem a szorzást az ötössel: $5 \times 5 = 25$, az igazítás 3, $5 \times 3 = 15$ meg 3 az 18, a 8-czat az első részlet-szorzat alá írom, marad 1, $5 \times 6 = 30$, meg egy 31, az 1-et leírom stb. A művelet további menete ezek alapján könnyen követhető.

A rövidített szorzásnál tehát az eljárás a következő: *A szorzó egyeseit a szorzandó olyan rendű egységei alá irjuk, mint a milyenekig a korlátolt pontosságú szorzást végezni akarjuk, ettől jobbra az egészeket, balra pedig a tizedeseket megfordított sorrendben felirjuk s a szorzó minden egyes jegyével a szorzandó fölötte álló számjegyénél megkezdjük a szorzást és haladunk balfelé az összes számjegyeket megszorozva. A jobb oldalon lévők közül csakis az elsőt szorozzuk meg igazítás végett. Az így nyert részletszorzatok összege adja a kivánt korlátolt pontosságú eredményt.* Legyen még egy példa e szabály megvilágítására:

$$518{\cdot}9128 \times 257{\cdot}415 = ?\ 1 \text{ tizedesig.}$$

518 9128
514752
1037826
259456
36324
2076
52
26
133576·0

A szorzó egyeseit a 7 fejezi ki, ezt tehát a szorzandó első tizedese, a 9-es alá kell írni, tőle jobbra az egészeket, balra a tizedeseket megfordított sorrendben. A szorzás további menete most már a szabály szerint könnyen megérthető.

A rövidített szorzást leginkább régibb mértékeknek újakra való átszámításánál, vagy pénzek átszámításánál használják fel. Azokat a számokat, melyek segítségével az átszámítást végezhetjük, azaz a melyek a kétféle mérték egységeinek összefüggését fejezik ki, *váltószámok*nak nevezzük. Ilyenek pl.: 1 mfd. = 7·58594 km.; 1 öl = 1·89648 m.; 1 négyzet mfd. = 57·5464 km.^{2}; 1 négyzetöl = 3·59665 m.^{2}; 1 kat. hold = 0·58546 ha.; 1 mérő = 9.64187 hl.; 1 akó = 0·56589 hl.; 1 yard = 0·914 m. stb.

21. §. A rövidített osztás.

Legyen 245·3856 osztandó 18·57932-vel, két tizedes jegynyi pontossággal.

Mivel itt a hányadosban a *század*-részek fogják a legalacsonyabb-rendű egységeket alkotni, ennélfogva az osztandóból elhagyhatjuk mindazokat a számokat, a melyek osztása századrészeknél kisebb számokra vezet. Ha az osztandó tizedrészeit az osztó tizedrészeivel osztjuk, századrészeket nyerünk, ellenben a századrészeknek a tizedrészekkel való osztása már ezredrészekre vezet; ennélfogva az osztandót oly módon lehet megrövidítenünk, hogy annak századrészeit s minden innen számított kisebb értékű számjegyét elhagyjuk, miáltal a tizedrészekben kifejezett s igazítással ellátott osztandó lesz: 2454. Hogy mármost a megfelelő megrövidített osztót nyerhessük, tudnunk kell, milyen értékkel fog a hányados legmagasabb-rendű egysége bírni? A felvett példában az osztó legalább tízszer meg van az osztandóban, de százszor már nincs meg, ennélfogva *tizes* lesz a hányados legmagasabb egysége. Az egészek osztása tehát két számjegyre vezet, azonkívül két tizedest is kivánunk, így a hányados 4 számjegyből fog állani. Mivel az osztandó tizedrészekben van kifejezve, azért az osztóból csakis azok a számjegyek tartandók meg melyek a hányados tizeseivel szorozva még tizedrészekre vezetnek, ezek a századrészek lesznek; a megrövidített osztó tehát: 1857 század.

Az osztást most már a következőképen végezzük:

2454 tized :	1857	század = 1 tizes 3 egyes 2 tized	
596 tized :	185	tized	[1 század = 13·21
39 tized :	18	egyes	
2 tized :	1	tizes	
0			

Amint látjuk, az osztás menete eltér a közönségestől annyiban, hogy a maradékhoz nem írunk zérust, hanem a helyett az osztóból vágunk el mindig egy-egy számjegyet; az elhanyagolt részekből azonban igazítást veszünk. Igy jött az első osztásnál 1, a másodiknál 2, a harmadiknál 1 és a negyediknél 1, mint igazítás a számításba.

Az osztó, amint látjuk annyi számjegyből áll, a mennyiből a hányados, az osztandó pedig annyiból, hogy benne az osztó legalább egyszer foglaltassék. Annak meghatározása, hogy a hányados hány számjegyből fog állani, a következő módon történik: a) ha az osztó kisebb az osztandónál, akkor látjuk, hogy az egészek osztása hány számjegyre vezet, azonkivül a kivánt tizedesek száma adva van, így e két szám összege adja a hányados számjegyeinek a számát; b) ha az osztó nagyobb szám mint az osztandó, akkor azt nézzük, hogy az osztó tized-, század-, vagy ezred-része megvan-e az osztandóban, ilyformán megtudjuk, hogy az egészek osztása folytán a hányadosban hány tizedes lesz, másfelől a hányadosban foglalt összes tizedesek száma előre adva van, e két szám különbsége fogja tehát megmutatni, hogy a hányadosnak hány számjegyét kell meghatároznunk.

A rövidített osztásnál követendő eljárás tehát a következő: *Mindenekelőtt meghatározzuk, hogy hány számjegyből fog állani a hányados; a hány számjegyből a hányados áll, ugyanannyi legmagasabb értékű számjegyet tartunk meg az osztóból, az osztandóból pedig annyit, a mennyiben a megrövidített osztó legalább egyszer található. Azután az osztást rendesen végezzük, csakis annyiban térünk el, hogy a maradék-*

hoz nem függesztjük az osztandó következő számjegyét (vagy nem írunk mellé zérust), hanem mindig az osztóból hagyunk el egy-egy számjegyet, ámde a hányados új számjegyével megszorozzuk az osztó legutoljára elhagyott számjegyét s e szorzatot igazításra használjuk fel. Szolgáljon a szabály megvilágítására még a következő példa: Hány rubel 2968 korona, ha 1 rubel = 3·80952 korona? A számítás 2 tizedesig végzendő. Lesz:

$$2968 : 3{\cdot}80952 = ?$$

Az egészek osztása 3 számjegyre vezet, azonkívül még 2 tizedest is kivánunk, ilyformán a hányados, tehát a megrövidített osztó is 5 számjegyből fog állani. Lesz:

$$\begin{array}{r@{\,:\,}l}
296800 & 38095 = 779{\cdot}13 \text{ rubel.} \\
30144 & 3809 \\
3477 & 380^{\llcorner} \\
49 & 38^{\llcorner} \\
11 & 3^{\llcorner} \\
0 &
\end{array}$$

A rövidített osztás ugyanolyan feladatok megoldására szolgál, mint a milyenekre a rövidített szorzás.

NEGYEDIK RÉSZ.

Különböző nemű mennyiségek vonatkozása egymásra. A hármasszabály és a százalékszámítás.

22. §. Arányos mennyiségek.

A gyakorlati életben igen sokszor előfordul, hogy valamely mennyiség értékének változása egy más különnemű mennyiség értékének változásától függ. Igy függ a szövet ára annak hosszúságától, a munkabér a munkára fordított napok számától, a pénzkamat az elhelyezett tőke nagyságától és a többi.

Az ilyen egymással összefüggésben álló mennyiségeket *arányos mennyiségek*nek nevezzük.

Két mennyiség egyenes arányban áll egymással, ha köztük olyan az összefüggés, hogy az egyik értékének 2-szeres, 3-szoros, 4-szeres stb. növekedésével a másik *értéke is 2-szer, 3-szor, 4-szer stb. nagyobb lesz, vagy az előbbi értékének néhányszoros csökkenése, a másik értékének ugyanannyiszoros csökkenését vonja maga után.* A szövet ára és annak hosszúsága; a kamat és a tőke nagysága; az idő és a megtett út; a munkások száma és a munkabér és a többi *egyenes arányban* állanak egymással.

Két mennyiség fordított arányban áll egymással, ha köztük olyan az összefüggés, hogy az egyik értékének 2-szeres, 3-szoros, 4-szeres stb. növekédésével a másik értéke 2-szer, 3-szor, 4-szer . . . stb. kisebb lesz, vagy az előbbi értékének néhányszoros csökkenése a másik értékének uggyannyiszoros növekedését vonja maga után. A munkások száma és az ugyanazon munka elvégzésére fordítandó munkanapok száma; a sebesség és az út megtételére szükséges idő; ugyanazon terület mellett a derékszögű-négyszög alapja és magassága és a többi *fordított arányban* állanak egymással.

Az arányos mennyiségekre vonatkozó és a közéletben előforduló feladatok száma igen nagy s azok megoldására egyforma eljárási módot fogunk megismerni a következőkben.

23. §. Az egyszerű hármas-szabály.

Egyszerű hármas-szabálynak az arányos mennyiségekre vonatkozó és a következő módon fogalmazható feladatokat nevezzük. Bizonyos A mennyiség arányos egy másik B mennyiséggel, úgy az egyikre, mint a másikra nézve ismerünk egy-egy megfelelő értéket; most azt a kérdést vetjük fel, miképen változik meg A értéke, ha B egy másik — szintén adott — értéket vesz fel?

Az ilyen fajta feladatok megoldásánál mindenekelőtt azt kérdezzük meg, hogy milyen változás áll be az A mennyiségre nézve, ha B mennyiséget az egységre vezetjük vissza? Ha egyszer azt tudom, hogy az egységre visszavezetett B mellett A milyen értéket vesz fel, akkor könnyen megtalálom az arányosság alapján, hogy B akármilyen értékének mekkora nagyságú A felel meg. Maga az eljárás legjobban a következő példán érthető meg: *Mennyibe kerül 16 kg. kávé, ha 3 kg. ára 13·2 korona?* A feladatot még így is felírhatom:

Ha 3 kg. kávé ára 13·2 kor., akkor
16 „ „ „ x „

Mivel a feladatot két sorba írhattuk, melyek közül az első a kétféle mennyiség összefüggését, a második a kérdést tartalmazza, az ilyen feladatok megoldására szolgáló módot *kettős tétel*nek és a felső sort *föltétel*nek, az alsót pedig *kérdőtétel*nek is nevezzük. Vagy mivel itt 3 ismert mennyiségből kell az ismeretlent meghatároznunk, azért az eljárást *hármasszabály*nak is hívjuk. — A szóban forgó feladat föltételéből meg tudom határozni, hogy mennyibe kerül 1 kg. kávé, mert ha 3 kg. 13·2 koronába kerül, akkor 1 kg. kevesebbe fog kerülni; és pedig mivel 1 kg. harmadrésze a 3 kg.-nak, ennélfogva 3-szor fog kevesebbe kerülni; tehát:

$$1 \text{ kg. kávé ára: } \frac{13{\cdot}2}{3}.$$

De a feladat szerint nekünk azt kell megtudnunk, hogy 16 kg. kávé mennyibe kerül; ezt meg fogjuk tudni az egységből. Ha 1 kg. $\frac{13{\cdot}2}{3}$ koronába kerül, akkor 16 kg. többe és pedig 16-szor annyiba fog kerülni, mint 1 kg.:

$$16 \text{ kg. kávé ára: } 16 \times \frac{13{\cdot}2}{3};$$

azaz:

$$x = \frac{16 \times 13{\cdot}2}{3} = 16 \times 4{\cdot}4 = 70{\cdot}4 \text{ kr.}$$

Lássunk még egy néhány példát az ilyenféle feladatok megoldására:

Ha 72 l. bor 84 kor.-ba kerül, mennyi bort kapunk 28 kor.-ért?

72 l.	ára	84 kor.	
x „	„	28 „	
$\frac{72}{84}$ l.	ára	1 kor.	
$\frac{72 \times 28}{84}$		28 „	

Ha 84 kor.-ért 72 litert kapunk, akkor 1 k.-ért 84-szer kevesebbet, és 28 k.-ért 28-szor annyit, mint 1 kor.-ért, úgy, hogy:

$$x = \frac{72 \times 28}{84} = \frac{72}{3} = 24 \text{ l.}$$

Bizonyos mennyiségű eleség 8 munkásnak 24 napig elég; meddig fog ez eleség tartani, ha a munkások száma 4-gyel szaporodik?

8 munkásnak 24 napig,
12 „ x „

1 munkásnak 24×8 napig

12 „ $x = \frac{24 \times 8}{12} = 16$ napig.

Ha 8 munkásnak 24 napig tart, akkor 1 munkásnak 8-szor több, azaz 24×8 napig fog az eleség tartani, 12 munkásnak pedig 12-szer kevesebb napig, mint egy munkásnak.

Valamely kád 5 csövön át $3\frac{1}{2}$ óra alatt telik meg vízzel; mennyi idő alatt telik meg 2 csövön át?

5 csövön át $3\frac{1}{2}$ óra alatt
2 „ „ x „ „

1 csövön át $3\frac{1}{2} \times 5$ óra alatt

2 csövön át $x = \frac{3\frac{1}{2} \times 5}{2} = \frac{35}{4} = 8\frac{3}{4}$ óra alatt.

Tehát *az egyszerű hármas-szabályra vonatkozó feladatok megoldása úgy történik, hogy a feltételből következtetünk a kérdőtételben adott mennyiség egységére, azután pedig az egységből következtetünk a kérdőtételben adott mennyiség többségére.*

Az eljárást, amint azt a kidolgozott példákban tettük, egyszerüsítjük oly módon, hogy a következtetések után végzendő műveleteket nem hajtjuk végre, csak kijelentjük, s csakis mikor az ismeretlen értéke törtalakban már teljesen elő van állítva, akkor — az esetleg lehetséges rövidítés megtétele után — osztjuk a számlálót a nevezővel.

24. §. Az összetett hármasszabály.

Összetett hármasszabálynak az arányos mennyiségekre vonatkozó és a következőképen fogalmazható feladatokat nevezzük: Bizonyos *A* mennyiség arányos több más *B*, *C*, *D*, mennyiséggel. Mindeniknek adva van egy-egy megfelelő értéke, és most azt a kérdést vetjük fel, miképen változik meg az A értéke, ha a többi megváltozik és adott új értéket vesz fel?

Az ilyen feladatok megoldásánál a B, C, D, mennyiségek értékeit nem egyszerre, hanem egymás után változtatjuk meg. Ily módon mindannyiszor egy-egy egyszerű hármasszabály megoldása vár reánk. — Az eljárást a következő példák fogják bővebben megvilágítani.

Bizonyos számú munkás 6 nap alatt, naponként 9 órát dolgozva 18 méter hosszú árkot képes felásni, kérdés, hány napra van szüksége ugyanannyi munkásnak, hogy naponként 12 órát dolgozván, 32 méter hosszú árkot ássanak? A feladatot még így is felírhatom:

	nap alatt		órát			
Ha	6	naponként	9	dolg.	18 m.	árkot ásnak,
kérdés	x ásnak	„	12	„	32 „	„ ?

A megoldásnál a föltételből indulunk ki és azt iparkodunk megtudni, hogy hány napra van szükség 1 m. hosszú árok elkészítésére, napi 1 órai munka idő mellett? Ha 18 m. hosszú árkot napi 9 órai munka idő mellett 6 nap alatt készitenek el, akkor 1 m. hosszú árkot napi 9 órai munka idő mellett kevesebb és pedig 18-szor kevesebb nap alatt fognak elkészíteni; tehát:

1 m. elkészítésére 9 órai munkaidő mellett $\frac{6}{18}$ nap szükséges. Most ha 9 órai munka idő mellett 1 m. elkészítésére $\frac{6}{18}$ nap szükséges, akkor 1 órai napi munka idő mellett 9-szer annyi napra van szükség; tehát:

1 m. elkészítésére, napi 1 órai munkaidő mellett $\frac{6 \times 9}{18}$ nap szükséges.

A feladat szerint azonban nekünk azt kell megtudnunk, hogy 32 m. hosszú árkot napi 12 órai munkaidő mellett hány nap alatt lehet elvégezni? Ezt most már az egységekből könnyen megállapithatjuk, mert ha 1 m.-nek napi 1 órai munkaidő mellett való elvégzésére $\frac{6 \times 9}{18}$ nap szükséges, akkor

32 m.-nek napi 1 órai munkaidő mellett való elkészítése 32-szer annyi napot vesz igénybe; tehát:

32 m.-nek napi 1 órai munka mellett való elvégzésére $\frac{32 \times 6 \times 9}{18}$ nap szükséges. Ellenben, ha naponként nem 1, hanem 12 órát dolgoznak a munkások, akkor ugyanazon munkát 12-szer kevesebb nap alatt készítik el s így: 32 m.-nek napi 12 órai munkaidő mellett való elkészítésére:

$$x = \frac{32 \times 6 \times 9}{18 \times 12} \text{ nap szükséges.}$$

A lehetséges rövidítések megtétele után:

$$x = 8 \text{ nap.}$$

Ha 12 ekével 8 nap alatt, naponkint 8 órát dolgozva 48 hold földet szántanak fel, hány holdat fognak 10 nap alatt, naponként 12 órát dolgozva 8 ekével felszántani?

	nap alatt		órát	
12 ekével	8 naponk.	8 dolg.	48 holdat,	
8 „	10 „	12 „	x „	
1 „	1 „	1 „	$\frac{48}{12 \times 8 \times 8}$	holdat
8 „	10 „	12 „	$x = \frac{48 \times 8 \times 10 \times 12}{12 \times 8 \times 8}$	$= 60$ hldat

A számítás menete ennél a példánál a következő volt: A feltételből megállapítottuk, hogy 1 ekével 8 nap alatt naponként 8 órát dolgozva $\frac{48}{12}$ holdat szántottak fel; azután 1 ekével 1 nap alatt napi 8 óra mellett $\frac{48}{12 \times 8}$ holdat, végül 1 ekével 1 nap alatt naponként 1 órát dolgozva $\frac{48}{12 \times 8 \times 8}$ holdat végeztek. Az egységekből pedig a kérdőtételre iparkodtunk megfelelni olyformán, hogy legelőször megállapítottuk, hogy 8 ekével 1 nap alatt naponként 1 órát dolgozva $\frac{48 \times 8}{12 \times 8 \times 8}$ holdat; majd 8 ekével 10 nap alatt, naponként 1 órát dolgozva

$\frac{48 \times 8 \times 10}{12 \times 8 \times 8}$ holdat; végül 8 ekével 10 nap alatt, naponként 12 órát dolgozva $\frac{48 \times 8 \times 10 \times 12}{12 \times 8 \times 8} =$ 60 holdat szántottak fel.

Amint a kidolgozott példák eléggé mutatják, az összetett hármasszabály feladatait úgy oldjuk meg, hogy azokat több egyszerű hármasszabályra bontjuk.

25. §. Százalékszámítás.

Ha azt akarjuk megtudni, hogy két ország területe közül melyik van sűrűbben benépesítve, akkor kiszámítjuk, mennyi lakós jut mindegyiknél egy-egy négyzet kilométerre. Az a sürűbb népességű, a melyiknél a számítás nagyobb eredményre vezet.

Ha azt akarjuk megtudni, hogy két kereskedő közül melyik dolgozik nagyobb haszonnal, akkor kiszámítjuk mennyi jut a nyereségből mindegyiknél a befektetett tőke 100—100 koronájára. Az dolgozik nagyobb haszonnal, a melyiknél ez a számítás nagyobb eredményre vezet.

Azt a számolási eljárást, a hol a százat alapszámnak tekintjük, százalékszámitásnak nevezzük.

A száz után járó értéket százaléknak (perczent) nevezzük és $^0/_0$ *jellel tüntetjük fel.* Az a kereskedő, a ki az üzletébe befektetett minden 100 korona után 4 korona hasznot tud felmutatni, $4^0/_0$ (4 százalék) nyereséggel dolgozik.

A százalékszámítási feladadatoknál a 100 alapszámon kívül még három mennyiség szerepel és pedig: *a százalék,* továbbá az *összeg,* vagyis azon szám, a mely után a százalékok összegét kell nyernünk és végül a százalékok összege, azaz a *százalékszám.* Igy pl.: legyen meghatározandó, hogy mennyi hasznot mutat fel az a kereskedő, aki $4^0/_0$ haszonra dolgozván 500 koronát fektet be valamely üzletbe. Minthogy a $4^0/_0$ azt jelenti, hogy minden befektetett 100 korona után 4 korona a nyeresége; ennélfogva annyiszor 4 koronát fog nyerni, a hányszor 100 koronát helyezett el az üzletbe, tehát a felvett példában $5 \times 4 = 20$ koronát. — Ebben a példában 500 korona az *összeg,* $4^0/_0$ a *százalék,* 20 korona a *százalékszám.* Ha a most megismert három mennyiség közül kettő adva van, akkor a harmadikat meg tudjuk határozni. A számolási eljárást a következő példák tüntetik fel.

1) *A százalékszám kiszámítása:*

Mennyi adót fizet az, kinek háza 2825 koronát jövedelmez, ha az összes adó a jövedelem 32%-át emészti meg?

100 kor. után 32 kor.
2825 „ „ x „

$$1 \text{ „ „ } \frac{32}{100} \text{ „}$$

$$2825 \text{ „ „ } x = \frac{32 \times 2825}{100} = 904 \text{ kor.}$$

2) *A százalék kiszámítása:*

8256 kor. befektetésnél 412·8 kor. haszon mutatkozik. Hány % ez?

8256 koronánál 412·8 kor.
100 „ x „

$$1 \text{ „ } \frac{412 \cdot 8}{8256} \text{ „}$$

$$100 \text{ „ } x = \frac{412 \cdot 8 \times 100}{8256} = 5\%.$$

3) *Az összeg kiszámítása:*

Mennyi az árú vételára, ha az 5%-os nyereség 75·25 koronára rúg?

100 kor. után 5 korona,
x „ „ 75·25 „

$$\frac{100}{5} \qquad 1$$

$$x = \frac{100 \times 75 \cdot 25}{5} = 1505 \text{ k.} \quad 75 \cdot 25$$

A százalékszámítás a polgári életben igen gyakori alkalmazásra talál. A főbb esetek a következők:

I. A súlyokra vonatkozó számítások.

Az árúk rendesen becsomagolva jönnek forgalomba. Az árúnak és a csomagolásnak (láda, hordó, zsák stb.) együttes súlyát *bruttósúly*nak; csak az árú súlyát *netto*nak és csakis a csomagolás súlyát *tárá*nak nevezzük. A tára értéke legtöbbször %-ban van kifejezve. Lássunk néhány példát az ilyféle számításokra.

Egy láda czukor bruttósúlya 516 kg., a tára $9\frac{1}{2}$%; mennyi a netto?

Ha 100 kg.-nál 9·5 kg. a tára, akkor
516 „ x „

$$1 \text{ „ } \frac{9{\cdot}5}{100} \text{ „}$$

$$516 \text{ „ } x = \frac{9{\cdot}5 \times 516}{100} = 49{\cdot}02.$$

A netto = 516 — 49·02 = 466·98 kg.

Mennyi a brutto, ha a netto 1145·8 kg., a tára pedig 4·6%? Itt a feltételt abból veszszük, hogy minden 100 kg. bruttóban 95·4 kg. a netto; tehát:

Ha 95·4 kg. nettonak 100 kg. brutto felel meg,
akkor 1145·8 „ „ x „ „ „ „

$$1 \text{ „ „ } \frac{100}{95{\cdot}4} \text{ „}$$

$$1145{\cdot}8 \text{ „ „ } x = \frac{1145{\cdot}8 \times 100}{95{\cdot}4} = 1200\,\text{kg.}$$

Nem lesz nehéz ezek után akár melyikét a súlyokra vonatkozó mennyiségeknek a többi ismert értékéből meghatározni.

II. A kereskedelmi életben előforduló számítások.

a) *A nyereség, vagy veszteség kifejezése %-okban.*

Az árú vételára 738 kor., a nyereség 36·9 kor. Hány % a nyereség?

Ha 738 kor. mellett 36·9 kor. a nyereség, akkor
100 „ „ x „

$$1 \text{ „ „ } \frac{36{\cdot}9}{738} \text{ „}$$

$$100 \text{ „ „ } x = \frac{36{\cdot}9 \times 100}{738} = 5\%.$$

Egy kereskedő 6% nyereségre dolgozik. Mennyit nyer 328·6 kor. értékű eladásnál? Mivel 100 kor. vételárnál 6 korona a nyeresége, ennélfogva 106 kor. eladási árnál 6 korona; azaz:

Ha 106 kor. elad. árnál 6 kor. a nyereség, akkor
328·6 „ „ „ x „

1 „ „ „ $\frac{6}{106}$ „

328·5 „ „ $x = \frac{6 \times 328{\cdot}6}{106} = 18{\cdot}6$ kor.

b) *Az árengedmény (sconto) kiszámítása.* A kiskereskedőnek az árút hitelbe adja a nagykereskedő, ha az a hitelt nem óhajtja igénybe venni, akkor a készpénz-fizetés fejében bizonyos kedvezményt élvez; elengednek valamit az árból, ezt *sconto*nak nevezik és %-okban fejezik ki.

Mennyi a sconto, ha a készpénzfizetésért 5285 kor. értékű árúnál 2%-ot engednek?

100 kor.-nál 2 kor. az árengedmény,
kérdés 5285 „ x „ „ „

1 „ $\frac{2}{100}$

5285 „ $x = \frac{2 \times 5285}{100} = 105{\cdot}7$ kor.

c) *A rabatt kiszámítása. Rabatt* az olyan árengedmény, melyet szabott árú czikkeknél kap az eladó a gyárostól, vagy könyvkiadótól. A számitás menete ugyanaz, mint a cassa-scontó meghatározásánál.

Itt említjük még meg azokat a költségeket is, a melyekkel a nagyban való adás-vétel van egybekötve. Ilyenek: a *vám,* az *adó,* a *szállítás díja,* az *alkuszdíj,* a *bisztosítás díja,* a *bizománydíj* és a *jótállás díja* (delcredere). — *Vámot* az idegen területről szállított árúk után fizetnek. A vám aranypénzben fizetendő. Ha a fizetést ezüst-, vagy bankópénzben teljesítjük, akkor a 18%-os *arany-agiót* is felszámítják. Azaz 100 arany frt. helyett 118 frtot ezüstben, vagy bankjegyben. — *Szállítási díj*at az árúnak vasuton, vagy hajón stb. való továbbításáért fizetünk. — A *biztosítás díját* azért fizetik, hogy az árú értékét a szállítással járó tűz-, vagy más veszély esetén kárpótlás képen megkapják. — Ha a vásárt alkusz közvetítésével kötik meg, akkor *alkuszdíjat* (courtage) fizetnek a felek. — *Bizományi díjat* az eladással megbizott egyén élvez. Ha a bizományos hitelbe adja el az árút, de oly módon, hogy az adósért ő áll jót, akkor külön *jótállási díj* is jár neki.

Mivel az itt felsorolt díjak többnyire $^0/_0$-okban adatnak, azért a számítást a százalékszámítás fentebb megismert elvei szerint végezhetjük.

III. A százalékszámítás egyéb alkalmazásai.

Ha meg akarjuk tudni, hogy két város közül melyikben nagyobb a halandóság, ki kell számítanunk, hogy hány haláleset jut mindegyikben ugyanannyi számú — pl. 1000 — lakósra.

Ha meg akarjuk tudni, hogy valamely iskola melyik osztályában legkedvezőtlenebb a tanulók előmenetele, akkor mindegyik osztályban meg kell határoznunk a bukott tanulók $^0/_0$-át.

Az ország lakosainak vallás-, vagy nemzetiség szerint való elosztását $^0/_0$-okban szokás kifejezni.

Mindezen, és más ilyfajta számítások a százalékszámítás most megismert elvei szerint végezhetők.

26. §. **Arányok és aránylatok.**

Ha két egynemű számot oly czélból hasonlítunk össze, hogy megtudjuk mennyivel nagyobb az egyik, mint a másik, *számtani-arányt* nyerünk. Ha ellenben a két egynemű mennyiség összehasonlítása abból a czélból történik, hogy megtudjuk hányszor nagyobb az egyik, mint a másik, akkor a nyert számtani kifejezést *mértani-aránynak* nevezzük.

A számtani arányra *kivonással*, a mértanira *osztással* felelünk meg. Mi a következőkben csakis a mértani arányokkal foglalkozunk.

A mértani arány osztandóját *előtag*nak, osztóját *utó*tagnak, hányadosát pedig *kitevő*nek nevezzük. Ha két vonal közül az egyik 28, a másik 4 méter hosszú, akkor azok aránya:

$$28 : 4 = 7.$$

Itt 28 az előtag, 4 az utótag, 7 a kitevő.

Ha e három mennyiség közül kettő ismeretes, ellenben a 3-ik ismeretlen, akkor az ismeretlen tagot az osztás részei közt megismert összefüggés révén könnyen kiszámíthatjuk.

Az arány értéke (kitevője) nem változik, ha annak elő- és utótagját ugyanazon számmal szorozzuk, vagy osztjuk.

Ha két egyenlő kitevővel biró arányt az egyenlőség jelével kapcsolunk össze, *arányla*tot nyerünk. Igy pl.: $6 : 3 = 28 : 14$. Itt 6 és 14 *külső-*, 3 és 28 pedig *belső-tagok. Minden helyes mértani-aránylatban a belső-tagok szorzata egyenlő a külső-tagok szorzatával.*

Két egyenlő szorzat aránylatképen írható fel, ha az egyik szorzat tényezőit külső-, a másikéit belsőtagokúl irjuk. Pl.:

$$3 \times 8 = 4 \times 6; \quad 3 : 4 = 6 : 8.$$

A mértani aránylat helyes marad, ha: 1) a külső tagokat, vagy a belső tagokat önmaguk közt felcseréljük; 2) ha az egyenlőségi jel két oldalán álló arányokat egymás helyére irjuk; 3) ha a két belső tagot külsőkül, a két külső tagot belsőkül tekintjük; 4) ha egy külső- és egy belső-tagot ugyanazon számmal szorzunk (e szabály arra szolgál, hogy az aránylatból a törteket eltávolíthassuk); 5) ha egy külső- és egy belső-tagot ugyanazon számmal osztunk (e szabály arra szolgál, hogy az aránylat tagjait kisebb számokkal helyettesíthessük).

Ha az aránylat három tagját ismerjük, akkor az ismeretlen negyedik tagot az eddig tanúltak alapján könnyű szerrel meghatározhatjuk.

Legyen az ismeretlen az egyik külső tag pl.:

$$x : 8 = 5 : 20.$$

Itt a második arány kitevője $\frac{5}{20} = \frac{1}{4}$; ugyanaz lesz az elsőé is; tehát:

$$x : 8 = \frac{5}{20} = \frac{1}{4}.$$

Ámde az ismeretlen előtagot úgy nyerjük ha az utótagot szorozzuk a kitevővel; tehát:

$$x : 8 \times \frac{5}{20} = \frac{8 \times 5}{20} = 2.$$

Innen látjuk, hogy: *az ismeretlen külső-tagot úgy nyerjük, hogy a belső tagok szorzatát elosztjuk az ismeretes külső-taggal.*

Hasonló eljárás utján levezethetjük, hogy: *az ismeretlen belső tagot úgy nyerjük, hogy a külső tagok szorzatát elosztjuk az ismeretes belső taggal.*

$$3 : x = 8 : 24; \quad x = \frac{24 \times 3}{8} = 9.$$

27. §. Az aránylatok alkalmazása a hármasszabály és százalékszámítás feladatainak megfejtésére.

Az aránylatok igen jól felhasználhatók a hármasszabály és a százalékszámítás feladatainak megfejtésére. Legyen pl. megfejtendő a következő feladat.

Mennyibe kerül 18 kg. kávé, ha 5 kg. ára 22 korona?

Feltétel: 5 kg. kávé ára 22 kor.,
Kérdőtétel: 18 „ „ „ x „

$$x : 22 = 18 : 5\,;\ x = \frac{22 \times 18}{5} = 79{\cdot}2 \text{ kor.}$$

Az első arányt nyerjük, ha az ismeretlent arányba állítjuk a vele egynemű mennyiséggel, lesz x : 22; a másik arány felállítása czéljából tudnunk kell, milyen összefüggés van az itt szereplő mennyiségek között. Minél több a kávé, annál több koronába kerül. Itt a kétféle mennyiség egyenes arányban áll egymással, tehát az x értéke nagyobb lesz, mint 22; abból meg az következik, hogy az első arány fogyó (csökkenő) ilyennek kell lenni a másodiknak is, tehát ez: 18: 5. A két arány egyenlítése s az ismeretlen külső tag kiszámítása által a kérdésre kellő módon megfeleltünk. — Tehát egyenes arány esetén az x-szel ugyanazon vízszintes sorban álló tagot írjuk belső-tagnak, az ezzel egyneműt pedig külső tagnak. Fordított arány esetén a felírás is megfordítva történik.

Oldjuk meg még a következő feladatokat:

1) *Ha egy zsák liszt a 9-tagú családnak 42 napig tart, meddig tartana az a 6-tagú családnak?*

9 tagú családnak 42 napig
6 „ „ x „

$$x : 42 = 9 : 6\,;\ x = \frac{42 \times 9}{6} = 63 \text{ nap.}$$

Itt minél több tagból áll a család, annál kevesebb napig tart a liszt, az arány fordított, miből következik, hogy x nagyobb, mint 42 s így az első arány csökkenő. Ilyennek kell lenni a második aránynak is, azért az x-szel nem ugyanazon vízszintes sorban álló számot írtuk belsőtagnak, a másikat pedig külsőtagnak.

2) *Mennyi az 5%-os tára 725 kg. bruttónál?*

100 kg. bruttónál a tára 5 kg.
725 „ „ „ x „

$x : 5 = 725 : 100; \quad x = \frac{725 \times 5}{100} = 36\frac{1}{4}$ kg.

3) *Ha 8 munkás 6 nap alatt 144 koronát keres, mennyit keres 24 munkás 17 nap alatt?*

8 m. 6 nap alatt 144 koronát keres
24 „ 17 „ „ x „ „

$$x : 144 = \begin{matrix} 24 : 8 \\ 17 : 6 \end{matrix} \quad x = \frac{144 \times 24 \times 17}{6 \times 8} = 1224 \text{ kor.-t.}$$

Itt mindenekelőtt arányba állítottuk az ismeretlent a vele egyneművel (x : 144); azután megvizsgáltuk, milyen összefüggés van a munkások száma és a munkabér között. Minél több a munkás, annál több a munkabér, az arány egyenes, tehát a második arány: 24 : 8; végül megvizsgáltuk, milyen az összefüggés a munkanapok száma és a munkabér között. Minél több a munkanapok száma, annál több a munkabér, az arány egyenes s így 17 : 6. Az összetett aránylatban az ismeretlen külső-tagot úgy kapjuk meg, hogy a belsőtagok szorzatát elosztjuk az ismeretes külső-tagok szorzatával. Megjegyzendő, hogy a mennyiben lehetséges, az aránylatot rövidíthetjük, azaz szabad egy belső- és egy külső-tagját ugyanazon számmal osztanunk.

ÖTÖDIK RÉSZ.

Az összetett következtetések és aránylatok alkalmazásai.

28. §. Az egyszerű kamatszámítás.

A használatra kiadott pénzösszeget *tőkének*, a használat díját *kamatnak*, a 100 koronáért egy évre fizetett használati díjat *kamatlábnak* nevezzük. — A kamatszámításnál ilyformán négy mennyiség szerepel; és pedig: a *tőke,* a *kamat,* a *kamatláb* és az *idő.* Ha ezek közül hármat ismerünk, a negyediket meghatározhatjuk, még pedig vagy egységre hozatallal, vagy pedig összetett aránylatok segítségével.

I. Számítsuk ki az ismeretlen kamatot.

Itt abból indulunk ki, hogy a kamat egyenes arányban áll a tőkével, a kamatlábbal és az idővel. Pl.: *Mennyi kamatot hajt 5860 korona 2 év alatt 5% mellett?*

Ha 100 korona 1 év alatt 5 koronát hoz,
5860 „ 2 „ „ x „

$$x : 5 = \begin{matrix} 2 : 1 \\ 5860 : 100 \end{matrix} \qquad x = 586 \text{ kor.}$$

Ha figyelembe veszszük, hogy milyen mennyiségek szerepelnek itt, mint belső- és külső-tagok, akkor *a kamat képletét* nyerjük:

$$\text{kamat} = \frac{\text{tőke} \times \% \times \text{idő (évek száma)}}{100}.$$

Ha az idő hónapokban van adva, akkor 1 év = 12 hónap, ha pedig az idő napokban van adva, akkor 1 év = 360 nap s a kamat képlete hónapokra és napokra:

$$\text{kamat} = \frac{\text{tőke} \times \% \times \text{hónapok száma}}{1200}$$

$$\text{kamat} = \frac{\text{tőke} \times \% \times \text{napok száma}}{36000}.$$

II. Számítsuk ki az ismeretlen tőkét.

Hány korona hajt 3 év alatt 6% mellett 1080 kor. kamatot?

Ha 100 kor. 1 év alatt 6 koronát hajt,
akkor x „ 3 „ „ 1080 „ „

$$x : 100 = \begin{matrix} 1080 : 6 \\ 1 : 3 \end{matrix} \qquad x = 6000 \text{ kor.}$$

Innen a tőke képletei évekre, hónapokra és napokra:

$$t_é = \frac{100 \times \text{kamat}}{\% \times \text{évek száma}}; \quad t_h = \frac{1200 \times \text{kamat}}{\% \times \text{hónapok száma}};$$

$$t_n = \frac{36000 \times \text{kamat}}{\% \times \text{napok száma}}.$$

III. Számítsuk ki az ismeretlen kamatlábat.

Hány % mellett hoz 2540 korona 4 év alatt 508 korona kamatot?

Ha 2540 kor. 4 év alatt 508 koronát hoz,
akkor 100 „ 1 „ „ x „ „

$$1 \text{ „ } 1 \text{ „ „ } \frac{508}{2540 \times 4}$$

$$100 \text{ „ } 1 \text{ „ } x = \frac{508 \times 100}{2540 \times 4} = 5\%.$$

Innen a képletek:

$$\%\text{évekre} = \frac{100 \times \text{kamat}}{\text{tőke} \times \text{évek sz.}}; \quad \%_h = \frac{1200 \times \text{kamat}}{\text{tőke} \times \text{hónap. sz.}};$$

$$\%_n = \frac{36000 \times \text{kamat}}{\text{tőke} \times \text{napok sz.}}.$$

IV. Számítsuk ki az ismeretlen kamatozási időt.

Hány év alatt hajt 5820 korona 5% mellett 873 korona kamatot?

Ha 100 korona 1 év alatt 5 koronát hoz,
akkor 5820 „ x „ „ 873 „ „

$$\begin{aligned} x : 1 &= 100 : 5820 \\ & 873 : 5 \end{aligned} \qquad x = 3 \text{ év.}$$

Innen az ismeretlen évek, hónapok és napok képletei:

$$é = \frac{100 \times k}{t \times \%}; \quad h = \frac{1200 \times k}{t \times \%}; \quad n = \frac{36000 \times k}{t \times \%}.$$

V. A tőke kiszámítása a felnövekedett tőkéből.

Hány koronát kell 2 évre 4%̣ mellett elhelyeznünk, hogy 6000 koronára növekedjék? Itt 6000 nemcsak az eredetileg elhelyezett tőkét, hanem annak 2 évre esedékes 4%-os kamatját is tartalmazza. A feladat könnyű szerrel megoldható, ha megállapítjuk, menynyire nő fel 100 korona 2 év alatt 4% mellett. Felnő 108-ra. A hányszor 108 a 6000-ben foglaltatik, annyiszor 100 koronát kellett eredetileg kamatozás céljából elhelyeznünk. 6000 : 108 = 55·5555 s így az eredeti tőke ennek 100-szorosa, azaz 5555·55 korona. Tehát a felnövekedett tőkéből az eredeti tőkét úgy határozzuk meg, hogy egy egyszerű hármasszabály segítségével megállapítjuk, mennyire nő fel 100 korona a szóban forgó idő alatt és kamatláb mellett. Az így talált értékkel elosztjuk az adott felnövekedett tőkét s a nyert hányadost 100-zal megszorozzuk. Ez a szorzat lesz az eredeti tőke.

29. §. Értékpapirok. Lerovat. Váltók.

a) *Az értékpapirokról.*

Az értékpapirok, vagy *állampapirok,* vagy pedig *részvények.*

1. Ha az állam bevételei nem fedezik a kiadásokat, a hiányt kölcsönpénzzel pótolják. Az így felvett kölcsönről kiállított adósleveleket *állampapirok*nak hívjuk. Ezek *névértéke* rendesen valamely kerekösszeg: 100 frt., 100 kor., 1000 frt., 1000 kor. stb. Az ily adóslevelek kamatait az állampénztár félévi utólagos részletekben a papirhoz csatolt szelvényívről levágott *szelvény* (coupon) ellenében fizeti meg. Az állampapirok adás-vevés tárgyai s azok értéke a szerint, amint az állam ügyei jól, vagy rosszúl folynak felemelkedik, vagy esik. E papirok *árfolyama* tehát változó. Az állam legtöbbször nem kötelezi magát a kölcsön visszafizetésére, csakis arra, hogy annak kamatait fedezi. Az államkölcsönök visszafizetése kisorsolás útján történik esetleg olymódon, hogy egyes papirok nagyobb nyereményben is részesíttetnek. (Nyeremény-kölcsönök.) A visszafizetési kötelezettséggel nem járó kölcsönök a *járadékok,* melyek a kamatoknak aranyban, vagy bankópénzben való esedékes-

sége szerint arany-, vagy papirjáradékok lehetnek. (Ujabban korona-járadék.)

2. Nagyobb vállalatok létesítésére egy-egy embernek nincsen mindig elegendő pénze. Ilyen czélokra úgynevezett *részvénytársaságok* alakulnak. Ezek *részvényeket* állítanak ki, melyek igazolják, hogy azok birtokosai a társaság tőkéjéhez a megjelölt összeggel hozzájárultak s az üzleti haszonból arányos *osztalékra* tartanak igényt. A részvénypapir *névértékén* kívül *árfolyammal* is bír, mely az osztalék nagysága, azaz a vállalat jó, vagy rossz üzleti eredménye szerint emelkedik, vagy sülyed.

Az értékpapirok napi árfolyamértékét a tőzsde által kibocsátott napi árfolyamjegyzékből ismerhetjük meg.

Most néhány példán az értékpapirokra vonatkozó számításokkal fogunk megismerkedni.

Hány frt.-ba kerül április 7-én 6000 frt. névértékű m. kir. államvasúti kötvény, ha az árfolyam 101·8? Az árfolyam azt mutatja, hogy annyiszor kell 101·8 frtot fizetnünk, a hányszor 100 frt. névértékű kötvényt óhajtunk vásárolni; a felvett példában 60-szor s így $101{\cdot}8 \times 60 = 6108$ frtot. Ámde ezen papir 4·5%-os kamatait január és julius 1-én fizetik; a kamatnak tehát január 1-től április 7-ig eső része az eladót illeti. Ezt a kamatot kell ilyformán még kiszámítanunk és az árfolyam szerint fizetendő értékhez adnunk; a kamat:

$$k = \frac{t \times \% \times n}{36000} = \frac{6000 \times 4{\cdot}5 \times 96}{36000} = 63 \text{ frt.}$$

Tehát a 6000 frt. névértékű kötvény ára az adott feltételek mellett: $6108 + 63 = 6171$ frt.

Ha a legközelebbi szelvény hiányoznék a szelvényívről, akkor az április 7-től julius 1-ig eső kamatot az eladó fizetné meg a vevőnek. Ily szelvény nélküli papirok a tőzsdén nem képezik vásár tárgyát.

Bizonyos részvénytársaság 240 korona névértékű részvényei után 21·6 korona osztalékot fizet. Hány % az?

Ha 240 korona után 21·6 koronát
akkor 100 „ „ x „

$$x : 21{\cdot}6 = 100 : 240; \; x = 9\%$$

Mennyiért veheti meg e papirt az, ki pénzét 5%₀ mellett kivánja kamatoztatni?

Ha 100 korona után 5 koronát kiván,
akkor x „ „ 21·6 „ „

$x : 100 = 21{\cdot}6 : 5;\ x = 432$ kor.

A hazai takarékpénztár részvényeinek árfolyama 7950 frt., az évi osztalék 450 frt.; hány $^0/_0$-a ez az árfolyamnak?

Ha 7950 frt. után 450 frt.,
akkor 100 „ „ x „

$$x : 450 = 100 : 7950;\ x = 5\frac{2}{3}\ {}^0/_0.$$

b) *A lerovat* (disconto).

Azt a pénzösszeget, melyet valamely később esedékes tőkének mai kifizetéséért levonnak, lerovatnak (disconto) *hívjuk.*

Az aki a később fizetendő tőkét ma akarja kiegyenlíteni, csakis annyit tartozik fizetni, amennyi a meghatározott időig esedékes kamatokkal nagyobbítva az egész összeggel egyenlő.

Mennyi a lerovat 3 év múlva esedékes 616 korona után $4^0/_0$ mellett? A 616 koronát mint a kamatokkal felnövekedett tőkét kell tekintenünk s akkor világos, hogy 3 év múlva esedékes 112 korona ma csakis 100 koronát ér; ennélfogva:

Ha 112 korona után 12 korona a lerovat,
akkor 616 „ „ x „ „ „

$$1 \quad „ \quad „ \quad \frac{12}{112} \quad „ \quad „ \quad „$$

$$616 \quad „ \quad x = \frac{616 \times 12}{112} = 66 \text{ korona.}$$

Ha a kérdést úgy fogalmaztuk volna, hogy *mennyit kapunk ma kézhez a 616 koronából, mely 3 év múlva esedékes, ha a lerovat $4^0/_0$,* akkor:

Ha 112 kor. helyett 100 koronát kapunk,
616 „ „ x „ „

$x : 100 = 616 : 112;\ x = 550$ korona.

c) *A váltó-leszámitolásról.*

A kereskedő hitelbe adja ugyan árúját a kiskereskedőnek, de cserébe oly okiratot (váltót) kap, amit könnyen pénzzé tehet. Ez az okirat, vagyis a *váltó* oly adósságlevél, melyben az *elfogadó* arra kötelezi magát, hogy a váltóra írt összeget, a váltón kitett napon (a lejárat napján) déli 12 óráig megfizeti.

Ha a váltó tulajdonosának a lejárat napja előtt van pénzre szüksége, akkor a váltót valamely bankban *leszámítoltatja* (escomptáltatja). A bank nem fizeti ki ekkor a váltón kitett teljes összeget, hanem abból a lejárati napig esedékes kamatokat levonja, mert hiszen a váltó csakis a lejárat napján fog annyit érni, mint a mennyi a *névértéke.*

Ennélfogva a váltó discontálásánál tulajdonképen kamat-számítást végzünk, mert nem kell egyebet tennünk, mint a leszámítolás napjától a lejárati napig számított időre, az alku szerint megállapított $^0/_0$ mellett eső kamatokat a váltó névértékéből levonni.

30. §. Kamatos kamatszámítás.

Ha valamely tőkének kamatjait évenként, vagy félévenként a tőkéhez csatoljuk úgy, hogy azon túl már a tőkével együtt a kamatok is kamatozzanak, akkor a tőke *kamatok kamatjára* van elhelyezve s az idetartozó számításokat *kamatos-kamatszámítás*nak hívjuk. A kamatos-kamatszámítás feladatai közül mi csak kettőt tűzünk ki megfejtés végett magunk elé; és pedig: 1) *Mennyire növekszik bizonyos tőke, bizonyos idő alatt, bizonyos perczent mellett kamatos-kamatokkal;* 2) *Mennyit kell kamatos-kamatokra elhelyeznünk, hogy bizonyos idő alatt, bizonyos perczent mellett adott nagyságú összegre növekedjék?*

Mennyire növekszik 5000 korona 8 év alatt $4^0/_0$ mellett kamatos-kamatokkal a) ha a kamatokat évenként csatoljuk a tőkéhez; b) ha félévi a kamatosítás?

Hogy e kérdésre megfelelhessünk, mindenekelőtt azt kell tudnunk, mennyire növekszik 1 korona 8 év alatt a $4^0/_0$-os kamatos-kamatokkal? Ha ezt tudom, akkor a tőkének e számmal való egyszerű szorzása révén megtudhatom akármilyen nagy összegnek a kamatos-kamatokkal felnövekedett értékét.

Azt a számot, a mely megmutatja, hogy mennyire növekszik fel 1 korona bizonyos idő alatt és adott $^0/_0$ mellett kamatos-kamatokkal, kamatfelszámító tényezőnek nevezzük. Ennek meghatározása a következő úton történik:

1 kor. 1 év alatt $4^0/_0$ mellett felnő 1·04 koronára; tehát a második év elején 1·04 korona a tőke, ez egy év alatt annyiszor 1·04 koronára nő, a hány korona a kamatozó tőke; tehát a második év végén lesz $1·04 \times 1·04 = (1·04)^2$ koronánk; ez lesz a harmadik év elején kamatozásra elhelyezett tőke, a melyből az év végéig annyiszor 1·04 koronánk lesz, a hány a tőkésített koronák száma, tehát $1·04 \times 1·04 \times 1·04 = (1·04)^3$ és a többi.

A kamatfelszámító tényezőt ennélfogva úgy nyerjük, hogy 1 koronának 1 év alatt a kamatjával felnövekedett értékét annyiadik hatványra emeljük (annyiszor szorozzuk önnönmagával), a mennyi az évek száma.

Ezen szorzatok már ki vannak különböző évekre és perczentekre számítva és táblázatba összegyüjtve (l. a *„Függelék“*-ben), honnan szükség esetén a kivánt kamatfelszámító-tényezőt könnyen kikereshetjük. Igy a 8 év és $4^0/_0$-nak megfelelő ily tényező: 1·36856 s így 5000 koronának a felnövekedett értéke:

a) $1·36856 \times 5000 = 6842·80$ korona.

Ha a kamatosítás félévi, akkor a perczentnek felét s az évek számának kétszeresét veszszük, a jelen esetben tehát a 16 év és $2^0/_0$-nak megfelelő tényezőt keressük ki a táblázatból; ez: 1·37278 s így a felnövekedett tőke félévi kamatosítás esetén:

b) $1·37278 \times 5000 = 6863·90$ korona.

II. Hány koronát kell $4^0/_0$ mellett 12 évre kamatok kamatjára elhelyeznünk, hogy 15000 koronára növekedjék a) egész, b) félévi kamatosítás mellett?

E feladatot úgy oldjuk meg, hogy az adott tőkét megszorozzuk a megfelelő *kamat-leszámító-tényezővel*, vagyis azon számmal, *a mely megmutatja, hogy hány fillér nő fel adott idő alatt és perczent mellett kamatok kamatjával egy koronára.*

A kamat-leszámító tényező reciprok-értéke az ugyanannyi évre és $^0/_0$-ra vonatkoztatott kamatfelszámító-tényezőnek. — A kamat-leszámító-tényezők

tényezők szintén táblázatba vannak összefoglalva. A 12 év 4%-nak megfelelő leszámító-tényező: 0·62459 s így a keresett eredeti tőke:

$$0{\cdot}62459 \times 15000 = 9368{\cdot}85 \text{ korona.}$$

Ha a kamatok félévenként csatoltatnak a tőkéhez, felényi kamatláb és kétszeres idő jön számításba. A mostani példánál a 24 év és 2%-nak megfelelő leszámitó tényező: 0·62172; s igy a keresett eredeti tőke:

$$0{\cdot}62172 \times 15000 = 9325{\cdot}80 \text{ korona.}$$

A próba meggyőzhet bennünket arról, hogy a tőke felnövekedés kamatos-kamatokkal sokkal gyorsabban történik, mint egyszerű kamatozás mellett.

31. §. Határidőszámítás.

Ha valakinek különböző időben esedékes tartozásai vannak, a melyeket azonban egyszerre óhajt a maga és a hitelező megkárosítása nélkül kiegyenlíteni, akkor a kivánt határidő kiszámítására szolgáló módot *középhatáridő-számításnak* hívjuk.

Ha valakinek többféle adóssága van, melyek után különböző % szerint felszámított kamatokat fizet és ő a maga és hitelezője megkárosítása nélkül egyféle % szerint óhajtja a kamatok megállapítását, akkor a kivánt % kiszámítására szolgáló eljárást a *középkamatláb kiszámításának* nevezzük.

I. *A középidő kiszámítása.* Valakinek 378 koronát 2 hó múlva, 555 koronát 3 hó múlva és 1067 koronát 5 hó múlva kellene fizetnie; mikor fizetheti összes tartozását egyszerre? A megoldásnál így okoskodunk:

		hó alatt			hó alatt
378 k.	annyit jövedelmez	2	mint 2 × 378 =	756 k.	1
555 „	„ „	3	„ 3 × 555 =	1665 „	1
1067 „	„ „	5	„ 5 × 1067 =	5335 „	1
2000 „	„ „	x	„	7756 „	1

Most a mi összes tartozásunknak, azaz 2000 koronának annyit kell jövedelmeznie az x középhatáridő alatt, mint 7756 koronának 1 hó alatt; tehát:

7756 kor. 1 hó alatt
2000 „ x „ „

$$x = 7{\cdot}756 : 2 = 3{\cdot}8 \text{ hó.}$$

II. *A középkamatláb kiszámítása.* 260 korona tartozásunk után 5%-ot, 180 korona tartozásunk után 4%-ot és végűl 150 k. után 3·5%-ot fizetünk. Milyen lenne a középkamatláb? A megoldás menete a következő:

	mellett				mellett;
260 k.	5%	annyit hajt, mint	$5 \times 260 =$	1300 k.	1%
180 „	4%	„ „ „	$4 \times 180 =$	720 „	1%
150 „	3·5%	„ „ „	$3{\cdot}5 \times 150 =$	525 „	1%
590 „	„	„ „ „		2545 „	1%

Az 590 koronányi összes tartozásunknak annyit kell jövedelmezni az x% középkamatláb mellett, mint 2545 koronának 1% mellett. Innen az egyszerű hármasszabály felállitása után:

$$x = 254{\cdot}5 : 59 = 4{\cdot}3\%.$$

Hasonló gondolatmenet szerint lehet valamely részlet törlesztési idejét, vagy megfelelő %-át kiszámitani, ha az adósság törlesztési idejét, vagy kamatlábját ismerjük.

1) *Ha 500 koronát 6 hó, 1000 koronát 11 hó múlva kellene megfizetnünk, mi pedig 400 koronát 3 hó, 700 koronát 7 hó múlva fizetünk meg; mikor fizethetjük a maradékot?*

	hó alatt				hó alatt
500 kor.	6	annyit hajt, mint	$6 \times 500 =$	3000 kor.	1
1000 „	11	„ „ „	$11 \times 1000 =$	11000 „	1
1500 „	x	„ „ „		14000 „	1

ámde a más határidőkben megfizetett

	hó alatt			hó alatt
400 kor.	3	annyit hajt, mint	1200 kor.	1
700 „	7	„ „ „	4900 „	1
1100 „	x	„ „ „	6100 „	1

tehát:

		havi			havi	
	1500 kor.	x	kamata =	14000 kor.	1	kamatjával
	1100 „	x	„ =	6100 „	1	„
innen	400 „	x	„ =	7900 „	1	„

Ha tehát: 7900 kor. 1 hó alatt hoz bizonyos kamatot,
kérdés: 400 „ x „ „ „ ugyanannyit?

$x : 1 = 7900 : 400$

$x = 79 : 4 = 19{\cdot}75$ hó alatt.

2) *Ha 5000 korona 10 hó múlva lenne fizetendő, de mi 1200 koronát azonnal, 2000 koronát pedig 7 hó múlva megfizetünk,* kérdés, meddig tarthatjuk meg a maradékot?

5000 kor. 10 havi kamatja annyi, mint 50000 kor. 1 havi kamatja; másfelől:

1200 kor.	0 havi kamatja	=	0	korona	1 havi	kamatjával,
2000 „	7 „	=	14000	„	1	„
3200 „	x „	=	14000	„	1	„

és ezekből:

1800 kor. x havi kamatja = 36000 kor. 1 havi kamatjával.

Ha tehát: 36000 kor. 1 hó alatt hoz bizonyos kamatot,
kérdés: 1800 „ x „ „ „ ugyanannyit?

$x = 36000 : 1800 = 20$ hó alatt.

3) *500 korona után 3·5%-ot, 800 korona után 5%-ot fizettünk. Hány %-ot kellett az 1000 kor. tartozás után fizetni, ha a középkamatláb 4·5%?*

Az összes tartozás: 2300 kor. 4·5% mellett annyit jövedelmez, mint x „ 1% „

$x = 10350$ kor.

Ámde:

500 kor.	3·5% mellett	annyit hoz, mint	1750	kor.	1% mellett
800 „	5%	„ „ „	4000	„	1%
1300 „	x%	„ „ „	5750	„	1%

és mert: $10350 - 5750 = 4600$,

ennélfogva:

4600 kor. 1% mellett annyit hoz, mint
1000 „ x% „

$x = 4{\cdot}6\%$.

Tehát az 1000 korona tartozásnak megfelelő kamatláb 4·6%.

32. §. Arányos osztás.

Ha valamely számot adott számok arányában kell részekre bontanunk, akkor ezt az *arányos osztás*, vagy *társaság-szabály* segítségével teljesítjük. — A részek arányát megállapító számokat *arányszámok*nak hívjuk.

Kétféle arányos osztás van: *egyszerű* és *összetett*; a szerint, amint az arányszámoknak egy vagy több sora van adva.

Ha valamely üzleti hasznot a három üzlettárs között a befektetett összegek nagyságának arányában kell felbontani, azt az egyszerű társaság-szabály szerint végezzük; hogyha azonban az üzlettársak a mellett, hogy különböző nagyságú összegeket adtak össze, egyszersmind különböző időtartamra is hagyják az üzletben tőkéiket, akkor az üzleti haszon felosztását már csakis összetett társaság-szabály segítségével teljesíthetjük.

I. *Közös vállalatba A 500, B 800, C 950 koronát fektetett be, mennyit kap mindegyik az üzleten mutatkozó 225 korona nyereségből?*

Az arányszámok ezen feladatnál, 500, 800, 950. Ezek aránya nem változik meg, ha mindegyiket ugyanazon számmal elosztjuk, mert hiszen nem kell nekünk a betéteket éppen 1 koronásokban venni, a jelen példában egységűl az 50 koronát is vehetjük s akkor a megfelelő arányszámok lesznek:

$$\left.\begin{array}{l} A \text{ ad } 10\text{-szer } 50 \text{ koronát} \\ B \;\;\text{"}\;\; 16\text{-} \;\;\text{"}\;\;\;\text{"}\;\;\;\text{"} \\ C \;\;\text{"}\;\; 19\text{-} \;\;\text{"}\;\;\;\text{"}\;\;\;\text{"} \end{array}\right\} \begin{array}{c} \text{összesen adtak} \\ 45\text{-ször } 50 \text{ koronát.} \end{array}$$

Ha most meg akarjuk tudni, hogy mindegyik üzlettársra mennyi nyereség jut, akkor ki kell számítanunk, mennyi nyereség jut 1-szer 50 korona betétre, s ezt a betevőknek megfelelő arányszámokkal megszoroznunk. Az 50 koronára eső hasznot 225-nek 45-tel való osztásából nyerjük. Ebből kijön 5 korona s igy *A* része $5 \times 10 = 50$ kor; *B* része $5 \times 16 = 80$ kor., *C* része $5 \times 19 = 95$ kor.

II. Az összetett társaság-szabályhoz tartozó feladatok megoldásánál arra törekszünk, hogy azokat egyszerűekre vezessük vissza, azaz olyanokra, a melyeknél az arányszámoknak csakis egy sora van.

Hogy miképen végezzük ezt a visszavezetést, azt leginkább a példa fogja megmutatni.

Fuvarozási vállalathoz *A* ad 5 szekeret 4 napra, *B* 8 szekeret 6 napra, *C* 9 szekeret 10 napra; mennyit kap mindegyik a 632 korona fuvarbérből?

	nap alatt				nap alatt
5 szekér	4	annyit végez, mint	$4 \times 5 = 20$	szekér	1
8 „	6	„ „ „	$6 \times 8 = 48$	„	1
9 „	10	„ „ „	$10 \times 9 = 90$	„	1

A napokra vonatkozó arányszám-sor mindenütt 1, ennélfogva figyelmen kívül hagyható. Az egyszerű arányos osztás arányszámai a 2-vel való rövidítés után: 10, 24, 45. Ezek összege 79. Most: $632 : 79 = 8$, tehát *A* része $8 \times 10 = 80$ korona, *B* része $8 \times 24 = 192$ kor. és *C* része $8 \times 45 = 360$ korona.

33. §. Vegyítésszabály.

Gyakran különböző fajú mennyiségekből középfajút kell előállítanunk, azaz meg kell határoznunk, hogy a középfaj előállítására mily arányban kell a részek vegyítését (keverését, forrasztását stb.) végezni? Azon számokat, melyek megmutatják, hogy a vegyítésnek minő arányban kell történni a *vegyítés arányszámainak* nevezzük.

Legtöbbször a középfajból bizonyos meghatározott mennyiséget kell előállítani, ilyenkor a vegyítés arányszámait megismervén, az egyes fajtákból veendő mennyiséget arányos osztás segítségével számítjuk ki.

A vegyítésszabály feladatai csakis akkor határozottak, mikor két fajtából kell a középfajt előállítanunk. Ha a vegyítésnek több fajtából kell történni, akkor a feladatnak végtelen sok módon felelhetünk meg, más szóval a feladat ilyenkor határozatlan.

A vegyítés arányszámainak meghatározásánál azt kell tekintetbe vennünk, hogy mikor a jobb minőségű árút a középáron eladjuk, vesztünk; mikor pedig a rosszabb minőségű árút oly áron adjuk el, a milyen a középfajnak felel meg, akkor nyereségünk van. Eljárásunk tehát a vegyítésnél (keverésnél) akkor lesz helyes, ha az egyik fajtán való nyereségünk éppen annyi, mint a másik fajtán való veszteségünk.

Magát a gyakorlati meghatározást a következő példán fogjuk bővebben megérteni:

Hány litert kell venni a 96 és 64 filléres borból, hogy 5 hl. 72 filléres bort nyerjünk? Felírjuk a drágább és olcsóbb fajt egymás alá, a középfajt pedig jobbra a kettő közé s azután a középfajt kivonjuk a drágábbikból, ez adja az olcsóbb bor arányszámát, majd az olcsóbbikat kivonjuk a középfajból, ez adja a drágább bor arányszámát. Tehát:

96		8	1
	72		
64		24	3

a hányszor a drágábbikból 1 litert veszünk, annyiszor kell az olcsóbbikból 3 litert venni. És ez az eljárás helyes, mert ha a drágábbik borból 1 litert a középáron eladunk, 24 fillért veszítünk, ellenben az olcsóbbik bornak minden literén, amit a középáron eladunk 8, tehát 3 liternél 24 fillért nyerünk. A mondott arányban végzett keverésnél ilyformán a nyereség és veszteség egyenlő.

A feladat szerint nem 4, hanem 500 liter keverék állítandó elő. Itt már a számítást az egyszerű arányos osztás szerint folytatjuk:

$$500 : 4 = 125$$

a 96 filléresből $1 \times 125 = 125$ l.; a 64 filléresből $3 \times 125 = 375$ liter veendő.

Ha kettőnél többféle árút kellene keverni, azt számtalan sok módon tehetnők. Igy ha 60, 70 és 80 filléres borból 72 filléres lenne előállítandó, akkor előbb a 60-as és 70 esből tetszésszerinti keverés utján egy középfajtát állítunk elő, azután azt a középfajtát keverjük a 80-assal oly módon, hogy 72 filléres keveréket nyerjünk. Mivel az első keverést végtelen sokféleképen végezhetjük, azért az ilyen feladat *határozatlan.*

34. §. Az ötvényekre és pénzekre vonatkozó számítások.

Az arany- és ezüst-tárgyak, vagy pénzek nem állanak tiszta nemes fémből, hanem keménységük fokozása czéljából legtöbbször rézzel összeolvasztva kerülnek forgalomba. Az ily tárgyak értékét a bennük foglalt nemes-fém mennyisége szabja meg. Az arany- és ezüst-tárgyak súlyát *ötvénysúly*nak, a bennük foglalt nemes fém súlyát *színsúly*nak, a nem nemes fémét *pótsúly*nak hívjuk.

A színsúlyt csakis számítással lehet meghatározni, oly módon, hogy a *fémjelző-hivatal* bizonyos jelek segítségével feltünteti, hogy az illető tárgyban az ötvénysúlynak hányadrésze a színsúly. *Azt a számot, a mely megmutatja, hogy 1000 gramm ötvénysúlyban hány gramm a nemes fém, finomságnak nevezzük.* Tehát ha valamely tárgy finomsága 0·835, s annak súlya 2 kg. = 2000 gr., akkor abban a tárgyban 1670 gr. a nemes fém és 330 gr. a nem nemes fém. A finomság fokai a következők: 1) *Belföldi arany árúknál:* 1-es finomság 920 ezredrész, 2-es finomság 840 ezredrész, 3-as finomság 750 ezredrész és 4-es finomság 580 ezredrész; 2) *Belföldi ezüst árúknál:* 1-es finomság 950 ezredrész, 2-es finomság 900 ezredrész, 3-as finomság 800 ezredrész és 4-es finomság 750 ezredrész.

Az arany- és ezüst-tárgyak súlyára vonatkozó számításoknál a következő mennyiségek szerepelnek: az ötvénysúly, a szinsúly, a finomság és a pótsúly. Ha ezek közül kettőt ismerünk, a másik kettő egyszerű módon meghatározható.

Nálunk a nemes fémek adás-vevése a *fémbeváltó-hivatalokban* történik. Az ott benyujtott termékarany, illetőleg az ötvényben foglalt színarany kg.-ját 3280 koronába számítják; a számítás alapján nyert színezüstöt pedig tiszta (szemcsés) ezüst ellenében váltják be. Beváltás alkalmával a következő díjakat számítják fel: aranynál: $\frac{1}{2}\%$ pénzverési illetményt 1 kor. próbadíjat és ha az ötvény ezüstöt is tartalmaz, kg.-ként 4 korona olvasztás-díjat, ezüstnél: 1% pénzverési díjat, 60 fillér próbadíjat.

Az arany- és ezüstpénzek (érmek) súlyát *nyers, vagy teljes súly*nak, az azokban foglalt nemes fém súlyát *magsúly*nak nevezik. A pénzverési jogot az állam gyakorolja. Törvényes fizetési eszköz az oly pénz, melyet bárki, bármilyen fizetés fejében köteles elfogadni. Ahol az aranypénz a törvényes fizetési eszköz, ott *aranyvaluta* van, a hol az ezüstöt tekintik ilyennek, ott *ezüstvaluta* van, végre a hol mindakettőt, ott *a valuta kettős* (Francziaország).

Az érmek súlyviszonyaira vonatkozó számítások igen egyszerűek, legtöbbször valamely egyszerű hármasszabály megoldását feltételezik.

A külföldi, valamint a pénzül nem szolgáló belföldi érmek árfolyam-értékét a tőzsdei árfolyamjegyzék megfelelő rovatában naponként megtalálhatjuk.

35. §. A lánczszabály.

Vannak feladványok, különösen a bel- és külföldi pénzekkel és mértékekkel való számitásoknál, a melyeknél bizonyos közbeeső határozmányok nélkül a megoldás nem lehetséges; ezek a határozmányok azonban annyira bonyolodottá teszik az eljárást, hogy a megoldást csakis az egyszerű hármasszabálynak ismételt alkalmazásával végezhetjük. Ez azonban igen hosszadalmas, azért helyette bár gépies, de igen czélszerű eljárási mód, a *lánczszabály* alkalmazható.

Hány koronába kerül valamely árúból 30 q., ha $2\frac{1}{4}$ kg. ára 72 kr.? Itt közbeeső határozmányok gyanánt tudni kell, hogy 100 kr. = 1 frt; 1 frt = 2 kor., 100 kg. = 1 q.

A feladat igen egyszerűen oldható meg, ha az adatokat a következő lánczszerű kapcsolatba hozzuk:

x koronába kerül	30 q., ha
1 q.	100 kg. és
$2\frac{1}{4}$ kg.	72 kr.-ba kerül
100 kr.	1 frt.-tal
1 frt.	2 kor.-val egyenlő.

A vonal jobb- és baloldalán álló számokat rövidíthetjük s azután x értékét nyerjük, ha a jobb oldalon álló számok szorzatát a baloldalon állók szorzatával elosztjuk. Ily úton lesz: x = 1920 kor.

Az eljárás tehát a lánczszabálynál a következő: A függőleges vonal baloldalára felírjuk az ismeretlent, a jobboldalára pedig a vele egyenlő értékű mennyiséget. A második sorban a baloldalra azt a számot írjuk, a mely ugyanolyan-nemű mennyiségre vonatkozik, mint a milyennel az első sort végeztük, mellé a jobb oldalra pedig a vele egyenlő-értékű mennyiség kerül. Ezt a felírási módot addig folytatjuk, a míg a jobb oldalra az ismeretlennel egyenlő nemű mennyiség jut. Ekkor a lánc be van zárva s x értékét a már ismert módon kiszámítjuk.

Hány koronába kerül 23·75 q. búza, ha 1240 kg. ára 256 márka? (100 márka = $61\frac{3}{5}$ frt.; 1 frt = 2 kor.)

x kor.	23·75 q.
1 q.	100 kg.
1240 kg.	256 márka
100 m.	$61\frac{3}{5}$ frt.
1 frt.	2 kor.

x = 611·07 korona.

FÜGGELÉK.

Idegen államok mértékei és pénzei. Kamatos-kamat táblák.

Mértékek és súlyok.

Belgiumban, Francziaországban, Görögországban, Németországban, Olaszországban, Portugáliában, Spanyolországban és Svájczban törvényesen a méterrendszer van behozva.

Angolországban a méterrendszer mellett használatos hosszmérték a yard = 3 láb à 12 hüvelyk; 1 yard = 0·914 m. 1 mérföld = 1610 m. Súlymérték a kereskedelemben az angol mázsa = 4 quarter à 28 font à 16 unczia à 16 drachma. Nemes fémeknél és gyógyszereknél használják a troy fontot = 12 unczia à 20 penniweight à 24 grain. 1 troy font = 373·242 g. Ürmérték folyadékoknál az oxhoft = 63 gallon; 22 gallon = 100 l.; gabonaneműek mérésére szolgál a buschel = 36·348 l.

Oroszországban hosszmérték a láb (0·305 m.) à 12 hüvelyk à 12 vonal, az arschin (rőf) = 0·711 m., a saschen (öl) = 3 arschin; a werst (mérföld) = 200 saschen = 1066·78 m. Súlymérték 1 berkovecz = 10 pud à 40 font à 96 solotnik à 96 doli; 1 orosz font = 499·512 g. Ürmérték száraz tárgyaknál a csetvert = 209·907 l., folyadéknál a wedro = 12·3 l.:

Északamerikában a hosszmértékek és súlymértékek olyanok, mint Angolországban, ürmértéke gabonaneműekre a quarter = 8 winchester buschel = = 2·819 hl., folyadékokra a régi angol gallon = 3·8 l. bor és 4·6 l. sör számára.

Pénzek.

Angolországban 1 font (livre) sterling à 20 shilling à 12 penny. 1 sovereign = 1 font sterling = 24·817 korona. 1 kg. 916 $\frac{2}{3}$ ezredrészű aranyból vernek 125·1869 darabot.

Dánia, Svéd- és Norvégország pénzegysége az arany korona = 100 oere = 1·32 korona.

Északamerikában 1 dollár = 100 cent = 4·93 korona.

Francziaországban 1 frank = 100 centimes = = 0·95 korona. A frankkal egyenlő pénzegység van a következő államokban: Belgiumban; Svájczban 1 frc. = 100 rappen; Olaszországban 1 lira = 100 centesimi; Spanyolországban 1 peseta = 100 centimos; Görögországban 1 drachma = 100 lepta; Romániában 1 lei = 100 bani; Szerbiában 1 denar = 100 para.

Hollandiában 1 guilder (forint) = 100 cent = = 1·984 korona.

Németországban az arany (birodalmi) márka = = 100 pfenning = 0·494 arany forint = 1·17 korona.

Oroszországban 1 rubel = 100 kopeka = 3·24 korona.

Portugáliában 1 mitrei = 100 reis, 10 millreis = = 53·323 korona.

Törökországban 1 piaster = 40 para = 0·2168 korona.

Az itt felsorolt államok közül legnagyobb pénzkészlete van *Francziaországnak* és pedig márkákban kifejezve 3400 millió arany-, 1948 millió ezüst pénze; *Németországnak* 2500 millió arany, 860 millió ezüst pénze, *Angliának* 2320 millió arany, 460 millió ezüst pénze, az *Egyesült Államok*nak 2472 millió arany és 2500 millió ezüst pénze, (fedezet nélküli papirpénze 1664 millió márka), *Oroszországnak* 1920 millió arany, 192 millió ezüst, *Ausztria-Magyarországnak* 560 millió arany, 480 millió ezüst pénze. Legkevesebb *Görögországnak*, 2 millió arany, 6 millió ezüst pénze.

Kamatos-kamat táblák. **I. Táblázat.** (Kamatfelszámító tényezők.)

Év	2%	2½%	3%	4%	4½%	5%	5½%
1	1·02	1·025	1·03	1·04	1·045	1·05	1·055
2	1·0404	1·050625	1·0609	1·0816	1·092025	1·025	1·113025
3	1·061208	1·076891	1·092727	1·124864	1·141166	1·157625	1·174241
4	1·082432	1·103813	1·125509	1·169859	1·192519	1·215506	1·238825
5	1·104981	1·131408	1·159274	1·216653	1·246182	1·276282	1·306960
6	1·126126	1·159693	1·194052	1·265319	1·302260	1·340096	1·378843
7	1·148686	1·188686	1·229874	1·315932	1·360862	1·407100	1·454679
8	1·171659	1·218403	1·266770	1·368569	1·422101	1·477455	1·534687
9	1·195093	1·248863	1·304773	1·423312	1·486095	1·551328	1·619094
10	1·218994	1·280085	1·343916	1·480244	1·552969	1·628895	1·708144
11	1·243374	1·312087	1·384234	1·539454	1·622853	1·710339	1·802092
12	1·268242	1·344889	1·425761	1·601032	1·695881	1·795856	1·901207
13	1·293607	1·378511	1·468534	1·665074	1·772196	1·885649	2·005774
14	1·319479	1·412974	1·512590	1·731676	1·851945	1·979932	2·116091
15	1·345869	1·448298	1·557967	1·800944	1·935282	2·078928	2·232476
16	1·372786	1·484506	1·604706	1·872981	2·022370	2·182875	2·355263
17	1·400241	1·521618	1·652818	1·947900	2·113377	2·292018	2·484802
18	1·428246	1·559659	1·702433	2·025817	2·208479	2·406619	2·621466
19	1·456811	1·598650	1·753506	2·106849	2·307860	2·526950	2·765647
20	1·485947	1·638616	1·806111	2·191123	2·411714	2·653298	2·917759

II. Táblázat. (Kamatleszámító tényezők.)

Év	2%	2½%	3%	4%	4½%	5%	5½%
1	0·980392	0·975610	0·970874	0·961539	0·956938	0·952381	0·947867
2	0·961169	0·951814	0·942596	0·924556	0·915730	0·907030	0·898452
3	0·942322	0·928599	0·915142	0·888996	0·876297	0·863838	0·851614
4	0·923845	0·905951	0·888487	0·854804	0·838561	0·822703	0·807217
5	0·905731	0·883854	0·862609	0·821927	0·802451	0·783526	0·765134
6	0·887971	0·862297	0·837484	0·790315	0·767896	0·746215	0·725246
7	0·870560	0·841265	0·813092	0·759918	0·734829	0·710681	0·687437
8	0·853491	0·820747	0·789409	0·730690	0·703185	0·676839	0·651599
9	0·836755	0·800728	0·766417	5·702587	0·672904	0·644609	0·617629
10	0·820349	0·781199	0·744049	0·675564	0·643928	0·613913	0·585431
11	0·804263	0·762145	0·722421	0·649581	0·616199	0·584679	0·554911
12	0·788493	0·743556	0·701380	0·624597	0·589664	0·556837	0·525982
13	0·773033	0·725420	0·680951	0·600574	0·564272	0·530321	0·498561
14	0·757875	0·707727	0·661118	0·577475	0·539973	0·505068	0·472569
15	0·743015	0·690466	5·641862	0·555265	0·516720	0·481017	0·447933
16	0·728446	0·673625	0·623167	0·533908	0·494469	0·458112	0·424581
17	0·714162	0·657195	0·605016	0·513373	0·473176	0·436297	0·402447
18	0·700159	0·641166	0·587395	0·493628	0·452800	0·415521	0·381466
19	0·686431	0·625528	0·570286	0·474642	0·433302	0·395734	0·361579
20	0·672971	0·610271	0·553676	0·456387	0·414643	0·376890	0·432729

TARTALOM.

Első rész.

Számolás egész számokkal és tizedes törtekkel.

Második rész.

A számok tulajdonságairól; számolás közönséges törtekkel.

Harmadik rész.

Számolási előnyök és rövidítések.

Negyedik rész.

Különböző nemü mennyiségek vonatkozása egymásra. A hármasszabály és a százalékszámitás.

Ötödik rész.

Az összetett következtetések és aránylatok alkalmazása.