STAMPFEL-FÉLE
…ÁNYOS ZSEB-KÖNYVTÁR.
23.

Dr. Lévay Ede

Planimetria

Ára 30 Kr. - 60 fill.

POZSONY - BUDAPEST
KIADJA
STAMPFEL K.

STAMPFEL-FÉLE

TUDOMÁNYOS ZSEB-KÖNYVTÁR.

23.

PLANIMETRIA

PÉLDATÁRRAL.

ÖSSZEÁLLITOTTA:

DR. LÉVAY EDE

KIR. FŐGYMN. TANÁR.

70 ÁBRA — 380 FELADAT.

POZSONY. 1899. BUDAPEST.

STAMPFEL KÁROLY KIADÁSA.

A „TUDOMÁNYOS ZSEBKÖNYVTÁR"-BAN

ugyanazon szerzőtől megjelent:

Arithmetikai és algebrai példatár.
A sík trigonometriája.
Planimetria.

Legközelebb pedig meg fognak jelenni:

Számtan.
Algebra.
Stereometriai és sphaerikai trigonometria.
Physikai repetitorium:
1. Mechanika és akustika.
2. Optika és hőtan.
3. Elektromosság és mágnesség.

*Egy füzet ára 30 kr. = **60** fillér.*

Eder István könyvnyomdája Pozsonyban.

ELSŐ RÉSZ

A vonal és a szög.

1. §. Geometriai alapfogalmak.

A geometria feladata a *térmennyiségek* alakjára, nagyságára és egymáshoz képest elfoglalt helyzetére vonatkozó igazságoknak és törvényszerűségeknek megállapitása és megismertetése.

Térmennyiségek: a testek, a lapok vagy *felületek, a vonalak* és *a pontok.*

Test mindaz, ami a végtelen térnek bizonyos, minden oldalról határolt részét betölti. A természetben csakis *physikai,* vagyis oly testek fordulnak elő, melyek a kiterjedésen kivül még más tulajdonságokkal is, így pl. színnel, keménységgel, súlylyal stb. bírnak. Ha a testnek a kiterjedésen kivül minden más tulajdonságától eltekintünk, a *mathematikai test* képzetét nyerjük. A geometria csakis a mathematikai testekre vonatkozó szabályokat és törvényeket tárgyalja; más szóval a testekkel csakis annyiban foglalkozik, a mennyiben azok a tért betöltik.

Minden test három irányban bír kiterjedéssel; és pedig: *hosszúsággal, szélességgel* és *magassággal* (vastagsággal vagy mélységgel).

A testek határait, melyek által a külső végtelen tértől el vannak különítve, *lapoknak,* vagy *felületeknek* nevezzük; ezeknek kétféle kiterjedésük van: *hosszaságuk* és *szélességük.*

A lapok határai a *vonalok,* melyek már csakis *hosszúsággal* bírnak.

A vonalak határai a kiterjedés nélküli *pontok.*

Ezek szerint a test három-, a lap két-, a vonal pedig csak egy-dimenziós térmennyiség.

A térmennyiségeket még mozgás által is származtathatjuk.

Ha a *pont* eredeti helyzetét elhagyja és mozgásában nyomokat hagy maga után, a *vonalat* nyerjük. Ha a *vonal* kiterjedési irányától eltérő valamely más irányban mozog, *lapot* ír le; ha a lap kiterjedési irányaitól eltérő valamely más irányban mozog, a keletkező térmennyiség *test* lesz.

A térmennyiségek bizonyos rendszerét *idomoknak* nevezzük. A nagyságra nézve megegyező idomokat *egyenlőknek* (=); az alakra nézve megegyezőket *hasonlóknak* ($\sim$); végre azokat, melyek egyenlő alakkal és nagysággal bírnak, *egybevágóknak* ($\cong$) mondjuk.

A geometria szolgálatában fontos szerep jut a *meghatározásoknak* (definitió), az *alaptételeknek,* vagy *axiómáknak,* a *tantételeknek* és a *feladatoknak.*

A *meghatározások* a térmennyiségek lényeges jegyeit sorolják fel s ezáltal alapot nyújtanak a további fejtegetésekhez; az *alaptételek,* vagy *axiómák* maguktól értetődő oly igazságok, melyeket sem bizonyítani, sem pedig valamely oldalról megtámadni nem lehet; a *tantételek* a még bebizonyitásra szoruló igazságok, melyekből önként kifejthetők az úgynevezett *következményes-,* vagyis oly *tételek,* melyek a tantételekből minden további bizonyítás nélkül folynak; végre a *feladatok* bizonyos szerkesztéseket, vagy számításokat tűznek ki, melyeket az axiómák és tantételek segítségével lehet megoldani.

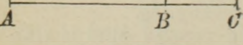
2. §. A vonalok, lapok és testek felosztása.

a) Az összes vonalok között legegyszerűbb az *egyenes vonal,* mely mint alapképzet közelebbről nem határozható meg, mert azt valamely egyszerűbb s így könnyebben felfogható képzettel nem helyettesíthetjük. Fogalmat nyújthat az egyenes vonalról a súlyos ólom-golyó által kifeszített zsineg. — Az egyenes képzetéből következik, hogy:

1. *Két pont teljesen meghatároz egy egyenest;* más szóval: *két ponton át csakis egy egyenes vonal húzható;*
2. *Két pont között az egyenes vonal a legrövidebb út;*
3. *Két egyenes csakis egy pontban találkozhatik.*

A két egyenes közös pontját *metszési-pontnak* hívjuk.

Az AB egyenes (1. ábra) kétféleképen keletkezhetik; és pedig: vagy A-ból indúl el a pont B felé és úgy írja le az egyenest, vagy megfordítva B-ből indúl ki A felé. E két irány ellentétes, ha tehát az AB irányt *positivnak* veszszük fel, akkor BA *negativ* lesz; azaz:



1. ábra.

$$AB = -BA;\ BA = -AB.$$

Hogy melyik irány legyen positiv, az teljesen a mi tetszésünktől függ, de a már egyszer positivnak vett iránynyal ellentétes minden más irány negativnak tekintendő. Legtöbbször az irányt figyelmen kivül hagyva csakis az egyenes nagyságát veszszük számitásba.

Az olyan egyenest, mely egy oldalról sincs határolva, *sugárnak,* az egyik oldalán határolt egyenest *félsugárnak,* a mindkét oldalán határolt egyenest *távolságnak,* a határokat jelző pontokat *vég-pontoknak* nevezzük.

Két egyenes egyenlő, ha egymásra fektetve fedi egymást.

Ha az *AB* egyenest (1. ábra) *C*-ig meghosszabítjuk, akkor:

$$AC = AB + BC\,;\ AB = AC - BC.$$

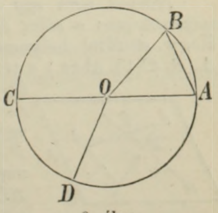
Ha oly *AX* egyenest állítunk elő, mely 2-, 3-, 4-, . . . *n*-szer akkora, mint *AB,* akkor:

$$AX = n.\,AB\,;\ AB = AX : n.$$

Amint a most elmondottakból kitűnik, az egyenes vonalokkal éppen úgy végezhetjük az *összeadás, kivonás, szorzás* és *osztás* műveleteit, mint a számokkal.

Ha valamely vonal több, különböző irányú egyenesből van összetéve, *tört-vonalnak;* az olyan vonalat, mely irányát folytonosan változtatja, *görbe-vonalnak,* az egyenes és görbe vonalból alkotott vonalat *vegyes-vonalnak* nevezzük.

Ha *AO* egyenes (2. ábra.) *O* pontja körül addig forog, míg ismét eredeti helyzetébe visszaérkezik, akkor az *A* végpont által leírt utat *kör-vonalnak,* vagy egyszerűen *körnek* nevezzük. A körnek minden pontja egyenlő távolságban van az *O* ponttól. Az oly egyenes, vagy görbe vonalat, melynek minden pontja ugyanazon tulajdonsággal bír, az illető pontok *geometriai helyének* mondjuk. — *A kör ennélfogva geometriai helye azon pontoknak, melyek egy állandó ponttól egyenlő távolságban vannak.* Az állandó pontot a kör *középpontjának,* vagy centrumának, a közös tulajdonsággal bíró pontok helyét *a kör kerületének* (peripheria), a kerület bármely pontjának a



2. ábra.

centrumtól mért távolságát a kör *sugarának* (radius), a sugár kétszeresét, mint AC, a kör *átmérőjének* (diaméter), a kör kerület tetszőleges részét (félkör, negyedkör) *körívnek* (arcus), a kör kerület két tetszőleges pontját összekapcsoló egyenest a kör *húrjának* (chorda), az oly egyenest pedig, melynek a körrel csak egy közös pontja van *érintőnek* (tangens) hívjuk. A körlap AB ív és AO, meg BO sugarak közt fekvő részét *körczikknek* (sector), az AB húr és AB ív közt fekvő részét *körszeletnek* (segmentum) nevezzük.

Az eddig elmondottakból következik, hogy:

1. *A kör sugarai, vagy átmérői egymásközt mind egyenlők;*

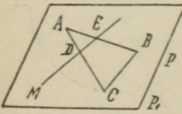
2. *Az egyenlő sugarú körök egyenlők és egybevágók.*

Hogy a vonalak nagyságát összehasonlíthassuk, mértékre van szükségünk. Az egyenesek mérésére egységül a *méter;* annak valamely többszöröse, vagy része (km., dm., cm., mm.) szolgál. Azt a számot, mely megmutatja, hogy a mértékegység hányszor vihető fel az egyenesre, az illető vonal *hosszúságának* mondjuk.

A körív mérésére a *fok, percz* és *másodpercz* szolgál. A kör teljes kerülete 360 fokból, egy fok 60 perczből, egy percz 60 másodperczből áll.

b) A *lapok* között legegyszerűbb s így, mint alapképzet közelebbről meg nem határozható a *sík.* A csiszolt tükörüveg, vagy egy ív papir nyújthat a síkról fogalmat. A sík képzetéből következik, hogy *oly egyenes vonal, melynek két közös pontja van a síkkal, teljesen a síkban fekszik.*

Három nem egy egyenesben fekvő pont teljesen meghatározza a síkot és csakis egy síkot határoz meg. Hogy e tétel helyességét bebizonyíthassuk, legyen A, B, C (3. ábra.) a tér három pontja. A és B ponton át átvezethetünk egy egyenest és pedig csakis egyetlen-egy egyenes vonalat. Képzeljünk oly P síkot, mely az A és B pontokat magában foglalja, akkor az egész AB egyenes is bentfekszik a P síkban; a sík ezen AB egyenes, mint tengely körül körülforgatható és ezen forgás közben oly helyzetbe hozható, hogy a C ponton is áthalad. Ez alkalommal az AB, AC és BC egyenesek mindenike egész hosszában bent fog feküdni a P síkban. —



3. ábra.

Tegyük fel, hogy létezik oly P_1 második sík is, mely az adott három pontot tartalmazza és legyen M ezen sík egy pontja. Vezessünk át M ponton oly egyenest, mely a P_1 síkban fekszik és az AC és AB egyenest D, illetőleg E pontban metszi. D és E akkor a P síknak is pontjai lesznek, tehát ebből folyólag DE egyenes egészen bentfekszik a P síkban, amiből viszont az következik, hogy M is pontja a P síknak. Ha azonban a tetszőlegesen felvett M közös pontja a két síknak, akkor ez minden más pontra is, mely valamelyik síkban fekszik, beigazolható s ilyformán a P és P_1 két sík összeesik; tehát az *A, B, C három pont csakis egyetlen egy síkot határoz meg.*

A három nem egy egyenesben fekvő ponton kivül egy egyenes és valamely rajta kivül fekvő pont, vagy két egymást metsző egyenes szintén meghatározza a síkot.

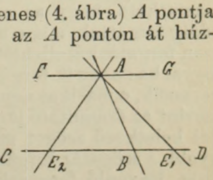
Az olyan *lapot,* melynek bármily közel fekvő négy pontja nem fekszik ugyanazon a síkon, *görbe felületnek* nevezzük.

c) Azok a testek, melyeket csakis síklapok határolnak, *szögletesek;* az olyanok pedig, melyeknek csakis görbe-felületek, vagy részben síklapok, részben pedig görbefelületek a határai, *gömbölyű testek.*

A geometriának azt a részét, mely csakis olyan idomokkal foglalkozik, melyeknek alkotó-részei ugyanazon síkon feküsznek, *planimetriának;* azt a részét pedig, mely a különböző síkokban fekvő részeket tartalmazó idomokról adja meg a kellő ismereteket, *stereometriának* nevezzük.

3. §. Két egyenes helyzete a síkban.

Tegyük fel, hogy AB egyenes (4. ábra) A pontja körül forog s forgása közben az A ponton át húzható összes egyenesek helyzetét végigjárja; legyen továbbá CD egy másik oly egyenes, melynek AB-vel B közös pontja van. Akkor ez a közös pont AB forgása közben befutja E_1 felé CD összes pontjait, majd átugrik a másik oldalra és E_2 irányában jut el CD pontjainak helyzetébe, mígnem a teljes körülforgás után AB ismét eredeti helyére



4. ábra.

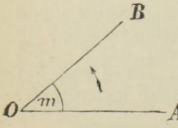
kerül. AB ilyformán elfoglalt állásai között létezik egy, — FG — a mikor AB és CD nem bírnak közös ponttal; azon állás ez, mikor a B változó pont a BD irányból a BC irányba csap át. Ebben az állásban azt mondjuk, hogy AB egyenes *párhuzamos CD*-vel s ezt úgy jelöljük: $AB \parallel CD$.

Két egyenes — ennélfogva — *párhuzamos, ha azok bármeddig hosszabbítjuk is, közös ponttal nem birnak.* Az ugyanazon síkban fekvő két egyenes tehát a következő helyzetekben lehet egymáshoz: 1. *a két egyenesnek egyetlen egy közös pontja sincs,* azaz a két egyenes párhuzamos egymással; 2. *a két egyenesnek van egy közös pontja,* más szóval, a két egyenes metszi egymást; végre 3. *a két egyenes két közös ponttal bir,* azaz fedi egymást.

Valamely egyeneshez egy rajta kívül fekvő ponton át csakis egyetlen egy párhuzamos húzható. — Ha két egyenes ugyanazon harmadikkal párhuzamos, akkor azok egymásközt is párhuzamosak.

4. §. A szög fogalma és származása.

Ha az AO és BO egyenesek közös O ponttal bírnak (5. ábra.) akkor az O pont körül végezhető azon fordulat nagyságát, mely megkivántatnék, hogy egyik egyenes a másik helyzetébe eljusson, *szögnek* nevezzük. A szög jele $O\sphericalangle$, vagy $m\sphericalangle$, vagy $AOB\sphericalangle$.



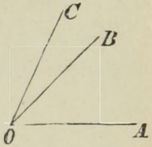
5. ábra.

A szöget alkotó két egyenest *szögszáraknak,* az O pontot *szögpontnak,* vagy a szög *csúcspontjának* hívjuk.

A szög az elmondottakból kitetszőleg akként származtatható, hogy az egyik szárat eredeti helyzetéből addig forgatjuk, mig a másik szár helyzetébe jut. Mivel ezen forgatás két ellentétes irányban történhetik, ennélfogva, ha az egyik forgásból származó szöget *positivnak* veszszük, a másikat *negativnak* kell tekintenünk. Rendszerint az óramutató járásával ellenkező irányú forgásból keletkező szöget mondjuk positivnak. Minél nagyobb a szögszár forgása, annál nagyobb a származott szög. Egyenlő forgásokból egyenlő nagyságú szögek keletkeznek. A szög nagyságára a szögszárak hosszúsága nem bír befolyással. Az olyan szögek, melyeknek száraik fedik egymást, *egyenlők* és egyuttal *egybevágók.*

Ha a mozgó AO sugár (6. ábra.) még BO-n túl CO helyzetig forog, akkor:

$$AOC \sphericalangle = AOB \sphericalangle + BOC \sphericalangle;$$
$$AOB \sphericalangle = AOC \sphericalangle - BOC \sphericalangle.$$

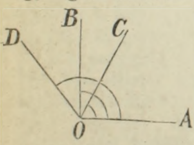


6. ábra.

Ha a szögszár 2-szer, 3-szor .... n-szer akkora forgást végez, mint a mennyi a BO helyzetig való jutáshoz szükséges volt, akkor a származó szög AOB-nek kétszerese, háromszorosa, n-szerese; vagy AOB a származott szögnek fele, harmada, n-ed része. Ebből világos, hogy a szögekkel éppen úgy végezhetjük az *összeadás, kivonás, szorzás* és *osztás* műveleteit, mint a számokkal.

5. §. A szögek nemei és mérése.

Az olyan szögeket, melyek a mozgó szögszárnak egy egész körülforgásából származnak, *teljes szögeknek*, ha pedig az a teljes körülforgásnak csakis negyedrészét futja meg, a származó AOB szöget (7. ábra.) *derékszögnek* nevezzük. A derékszögek jele R s azok mind egyenlők egymással.

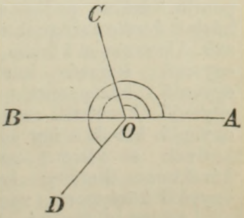


7. ábra.

Két egyenesről, melyek az AO és BO vonalakhoz hasonlóan derékszög alatt metszik egymást, azt mondjuk, hogy egymásra *merőlegesek*. Ezt úgy jelöljük, hogy: $AO \perp BO$.

A derékszögnél kisebb szögeket, mint $AOC \sphericalangle$, *hegyes* szögeknek, a derékszögnél nagyobb, de két derékszögnél kisebbeket pedig, mint $AOD \sphericalangle$, *tompa* szögeknek, a hegyes és tompa szögeket közös névvel *ferde* szögeknek hívjuk.

Két oly szöget, — mint AOC és BOC — melyek együttvéve egy derékszöget adnak, *pótlószögnek* mondunk.

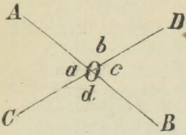


8. ábra.

A félkörülforgást végző szögszár AOB *egyenes* szöget írja le (8. ábra). Az egyenes szögnél kisebb szögeket *vájt* szögeknek, a nagyobbakat *domború* szögeknek nevezzük.

Ha két szög együttvéve két derékszöget, tehát egy egyenes szöget alkot, akkor azokat *kiegészítő-szögeknek* hívjuk.

Ha az AOC szög AO szárát O ponton túl B-ig meghosszabbítjuk, a származó BOC szög AOC-nek *mellékszöge.* Két mellékszög együttvéve egyenes szöget, azaz két derékszöget alkot.



9. ábra.

Ha az AOC szög (9. ábra) mindkét szárát O szögponton túl meghosszabbítjuk, úgy BOD szöget, az előbbi *csúcsszögét* nyerjük. Hasonlóképen csúcsszögek AOB és BOC is.

Két csúcsszög egyenlő egymással. Hogy e tétel helyességét beigazolhassuk, vegyük figyelembe, hogy a mellékszögekről ismert alaptétel szerint:

$$a + b = 2R;$$
$$b + c = 2R;$$

miből: $a + b = b + c$

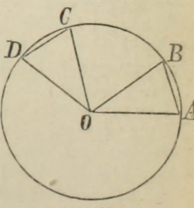
és: $a = c.$

Hasonlóképen:

$$b + c = 2R;$$
$$c + d = 2R;$$
$$b + c = c + d$$

és: $b = d.$

Az olyan AOB szöget (10. ábra), melynek szögpontja valamely kör centruma, szárai pedig a kör sugarai *középponti* szögnek, az olyat pedig, melynek szögpontja a kör kerületének egy pontja, szárai pedig a kör húrjai, *kerületi* szögnek nevezzük. Ugyanazon körben, vagy egyenlő sugarú körökben egyenlő középponti, vagy egyenlő kerületi szögekhez egyenlő húrok s így egyenlő körívek s viszont egyenlő húrokhoz, illetőleg ívekhez egyenlő középponti, vagy kerületi szögek tartoznak.



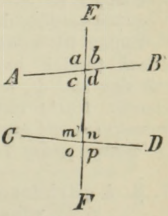
10. ábra.

Amint a távolságok mértékei csak távolságok lehetnek, éppen úgy a szögeket is csak szögekkel mérhetjük. Ha a kör kerületét 360 egyenlő részre osztjuk s az osztó-pontokat a kör centrumával összekötjük, 360 egyenlő nagyságú középponti szöget nyerünk, melyek mindenike *egy fokos szög.* Minden fok 60 *perczből,* minden percz 60 *másodperczből* áll. Ha ezeknél még kisebb szögeket akarunk kifejezni, akkor a másodpercz tized, század, ezred stb. részét veszszük számitásba. Ilyformán mondhatjuk, hogy valamely szög, pl. $\alpha = 32^{0}\ 18'\ 26{\cdot}5''$ (32 fok, 18 percz, 26·5 másodpercz.)

Az elmondattokból következik, hogy az egyenes szög 180, a derékszög pedig 90 fokkal egyenlő.

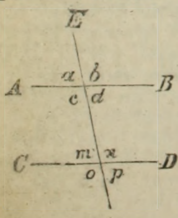
6. §. Három egyenes helyzete a síkban.

Ha az *AB* és *CD* egyenest (11. ábra.) a harmadik *EF transversálissal* átszeljük, a két metszési pont körül összesen nyolcz szög keletkezik.



11. ábra.

A *c, d, m* és *n* szögeket, melyek a két átmetszett egyenes között feküsznek, *belső;* az *a, b, o* és *p* szögeket pedig, melyek a két átmetszett egyenesen kívül feküsznek, *külső* szögeknek nevezzük. Egy-egy belső és egy-egy külső szög, melyek a transversális ugyanazon oldalán találhatók, de a melyek különböző szögponttal bírnak, *megfelelő szögeket* alkotnak; ilyenek: *a* és *m, c* és *o, b* és *n, d* és *p.* Két belső, vagy két külső szöget, melyek különböző szögponttal bírva a transversális különböző oldalain feküsznek, *váltószögeknek* hívunk; ilyenek: *a* és *p, b* és *o, c* és *n, d* és *m.* A transversális ugyanazon oldalán fekvő, de különböző szögponttal bíró két belső vagy két külső szög *társszög;* ilyenek: *a* és *o, b* és *p, c* és *m, d* és *n.*



12. ábra.

Ha két egyenesnek egy harmadikkal való metszésénél két megfelelő szög egyenlő, akkor bebizonyítható, hogy: 1. a többi két-két megfelelőszög, továbbá 2. két-két váltószög szintén egyenlő egymással és 3. két-két társszög 180^{0}*-ra egészíti ki egymást.* Igy pl. ha felteszszük, hogy $a = m$ (12. ábra.) akkor:

$$a + b = 2\,R,\quad m + n = 2\,R;$$

tehát:

$a + b = m + n$; és mert: $a = m$, $b = n$.

Hasonló eljárás szerint kimutatható, hogy: $c = o$; és mert: $a = d$, $m = p$, $a = m$, azért: $d = p$.

A váltószög-párok egyenlőségének beigazolására vegyük figyelembe, hogy:

$a = m$; $a = d$; tehát: $d = m$;
$a = m$; $m = p$; „ $a = p$;
$b = n$; $n = o$; „ $b = o$;
$c = o$; $o = n$; „ $c = n$;

Végül bebizonyítandó még, hogy a társ-szögek összege 180^0, azaz $2\,R$. Ez a következő módon történik:

$a + b = 2\,R$; de: $b = o$, mint váltószögek, tehát: $a + o = 2\,R$;

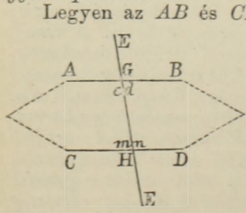
$c + d = 2\,R$; de: $d = m$, tehát: $c + m = 2\,R$. stb.

Éppen ily könnyűséggel mutathatjuk meg a következő tételek helyességét is: *Ha egy egyenes más kettőt úgy szel át, hogy két váltószög egyenlő, vagy két társ-szög 180^0; akkor: két-két megfelelő- és két-két váltószög egyenlő egymással, az összetartozó két-két társszög összege pedig 180^0.*

7. §. A párhuzamos és merőleges egyenesekre vonatkozó tantételek.

Ha két egyenest a transversálissal úgy metszünk, hogy vagy két váltó-, vagy két megfelelő-szög egyenlő, vagy végre két társszög összege: 2 R; akkor: a két egyenes párhuzamos.

Legyen az AB és CD egyeneseknek (13. ábra)

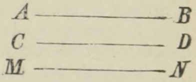


13. ábra.

EF-el való metszéséből származott szögek közül $c = n$; akkor a $BGHD$ sík úgy fektethető az $AGHC$ síkra, hogy GH egyenes HG-re, BG egyenes CH-ra, DH pedig AG-re essék. Ha az átfektetés után AB és CD az EF transversális egyik oldalán közös ponttal bírnának, akkor a másik oldalon is kellene közös pontjuknak lenni, ámde akkor AB és CD, mint két közös ponttal bíró két egyenes fedné egymást (3. §.); mivel pedig ez az eset most nem forog fent, ennélfogva AB és CD egyik oldalon sem bírhatnak közös ponttal, tehát: *párhuzamosak.*

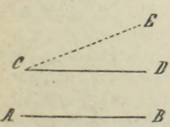
Bebizonyítható a tétel megfordítottja is, mely így hangzik: *Ha két párhuzamost egy transversálissal átmetszünk, akkor a származó két-két váltó- és két-két megfelelő szög egyenlő; két-két társ-szög összege pedig 180°.*

Ha két egyenes ugyanazon harmadikkal párhuzamos, akkor azok egymásközt is párhuzamosak. Igy pl. ha: $AB \parallel MN$ (14. ábra) és $CD \parallel MN$, akkor: $AB \parallel CD$.

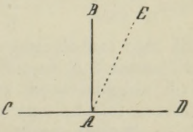


14. ábra.

Valamely C ponton (15. ábra) *keresztül AB egyeneshez csakis egy — CD — párhuzamos húzható.* Hogy e tétel helyességét bebizonyíthassuk, tegyük fel, hogy nem csupán CD, hanem CE is párhuzamos AB-hez. Ez a feltevés azonban nem állhat meg, mert ha CE szintén párhuzamos lenne AB-



15. ábra.



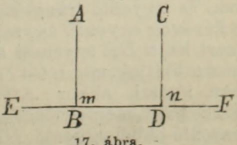
16. ábra.

vel, akkor az előbbi alaptétel szerint CE-nek CD-vel is párhuzamosnak kellene lennie, de akkor nem bírhatnának közös C ponttal. — CE kellő meghosszabbítás után AB-t is metszi.

Valamely egyenes egy adott pontjában az egyenesre csakis egy merőleges emelhető. Legyen A (16. ábra.) egy, a CD egyenesen fekvő pont. Ha az A pontból kiinduló egyenesek közül nem csupán az AB, hanem pl. AE is merőleges lenne CD-re, úgy a $DAE \sphericalangle$ akkora lenne, mint $DAB \sphericalangle$ (5. §.), ami nyilvánvalólag lehetetlenség, mert DAB derékszög, DAE pedig kisebb DAB-nél, tehát okvetetlenül hegyes szögnek kell lennie.

Ha két egyenes ugyanazon harmadikra merőleges, akkor azok egymásközt párhuzamosak.

Legyen $AB \perp EF$ és $CD \perp EF$ (17. ábra.) akkor:



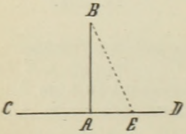
17. ábra.

$AB \parallel CD$, mert az első feltételből folyólag: $m = R$; a másodikból: $n = R$; ennélfogva: $m = n$. De m és n megfelelő szögek, már pedig ha két megfelelőszög egyenlő, akkor a két átmetszett egyenes párhuzamos.

Hasonló módon igazolható a megfordított tétel is, mely szerint: *Ha két párhuzamos egyenes közül az egyik merőleges egy harmadikra, akkor ugyanarra a másik is merőleges lesz.*

Valamely egyenesre egy rajta kívül adott pontból csakis egyetlen-egy merőlegest állíthatunk.

Tegyük fel, hogy CD egyenesre (18. ábra.) nem csupán AB, hanem BE is merőleges; ez a felvétel lehetetlen, mert akkor, az előbbi tétel szerint, AB és BE párhuzamosak tartoznak lenni, ami kizárja azt, hogy B közös ponttal bírhassanak.



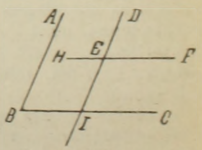
18. ábra.

Jegyzet. *Euklides* (Kr. e. 285. körül) 11. axiómája szerint: Két egyenes, melyet egy harmadik úgy szel át, hogy a két belső társ-szög összege kisebb, mint $2R$, kellőleg meghosszabítva metszi egymást. Ujabb kisérletek, különösen a *Kleintől* eredők, kétségtelenné tették, hogy ezt a tételt nem lehet bebizonyítani. — *Steiner* szerint: párhuzamos egyenesek azok, melyek mindenike valamely „végtelen távolban fekvő pont“ felé van irányítva. — A „végtelen távol fekvő pont“-ról legelőbb *Desargues* (1630) és később (1687) *Newton* beszél.

8. §. Szögek párhuzamos szárakkal.

Oly két szög, melyeknek száraik párhuzamosak, vagy egyenlő egymással, vagy 180°-ra *egészíti ki egymást.*

Hogy e tételt bebizonyíthassuk vegyük fel az ABC és DEF szögeket (19. ábra), melyeknek száraik párhuzamosak és egyenlő irányuak. Ez a két szőg egyenlő egymással, mert ha a DE egyenest addig hosszabbítjuk, míg BC-t I pontban metszi, akkor ABC és DIC mint megfelelőszögek egyenlők egymással, de hasonló okból egyenlő DIC és DEF is, amiből követ-



19. ábra.

kezik — két szög egyenlő lévén ugyanazon harmadikkal — hogy $ABC \sphericalangle = DEF \sphericalangle$.

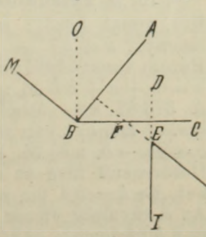
De tekintsük a legáltalánosabb esetet. Legyen ABC az egyik szög és legyen E azon másik szög szögpontja, melynek szárai AB és BC szögszárakkal párhuzamosak. E ponton át úgy AB, mint BC egyeneshez csakis egy párhuzamos szerkeszthető (7. §.) és pedig AB-hez DI, BC-hez HF; ennélfogva az $ABC \sphericalangle$-gel összehasonlítandó szög csakis azon négy egyike lehet, mely DI és HF metszéséből E szögpont körül keletkezik. Ezen négy szög közül kettő hegyes szög, a másik kettő pedig tompa szög; továbbá a két hegyes szög és a két tompa szög mint csúcsszög egyenlő egymással. De DEF-re nézve már bebizonyitottuk, hogy egyenlő ABC-vel, tehát ez $HEI \sphericalangle$-re nézve is áll. Végül DEF és FEI mint mellékszögek 180^o-ra egészítik ki egymást; azaz: $DEF + HFI = 180^o$; mivel DEF helyett a vele egyenlő ABC szöget írhatom; ennélfogva: $ABC + HEI = 180^o$; hasonlóképen: $ABC + FEI = 180^o$.

Ilyformán: a párhuzamos szárakkal bíró szögek közül azok, melyeknél mindkét szár megegyező, vagy mindkettő ellenkező irányban halad, egyenlők egymással; azok pedig, melyeknél a szögszárak egyik párja megegyező, de a másik ellenkező irányt követ, 180^o-ra egészítik ki egymást.

9. §. Szögek merőleges szárakkal.

Oly két szög, melyeknek száraik egymásra merőlegesek, vagy egyenlő, vagy 180^o-ra *egészíti ki egymást.*

Hogy e tételt bebizonyíthassuk, vegyük fel ABC szöget (20. ábra.), melynek AB és BC száraira az E szögponttal bíró szög szárai merőlegesek. Az E pontból AB-re csakis egy — az FH — egyenes húzható merőlegesen, hasonlóképen BC-re csakis DI (7. §.) ennélfogva az E szögponttal biró szög szárai a megadott feltétel mellett csakis FH és DI lehetnek. Ezen egyenesek azonban E szögpont körül négy szöget zárnak be, melyek



20. ábra.

közül kettő-kettő, mint csúcs-szög egyenlő és kettő az ABC adott szöggel egyenlő fajta, azaz: hegyesszög; a másik kettő ellenkező fajta, azaz: tompaszög. Ha a DI-vel párhuzamos BO, továbbá az FH-val párhuzamos BM egyeneseket szerkesztjük, akkor $MBO \sphericalangle = DEF \sphericalangle$, mint párhuzamos és egyenlőirányú szögszárakkal bíró szögek; ámde:

$$CBO \sphericalangle = ABM \sphericalangle, \text{ mint derékszögek;}$$

és így:

$$CBO \sphericalangle - ABO \sphericalangle = ABM \sphericalangle - ABO \sphericalangle;$$

azaz:

$$ABC \sphericalangle = MBO;$$

vagy végül:

$$ABC \sphericalangle = DEF \sphericalangle = HEI \sphericalangle \ldots\ldots\ 1)$$

Másfelől: $FEI \sphericalangle$ és $DEF \sphericalangle$ kiegészítő-szögek, tehát:

$$DEF \sphericalangle + FEI \sphericalangle = 180^0;$$

vagy az 1) alatt foglalt egyenlet figyelembe vételével:

$$ABC \sphericalangle + FEI \sphericalangle = 180^0 \text{ és } ABC \sphericalangle + DEH \sphericalangle = 180^0 \ldots\ldots\ 2)$$

Az 1) és 2) alatt foglalt egyenletekből kitetszőleg: oly két szög, melyeknek száraik merőlegesek egymásra, egyenlő egymással, ha a két szög egyenlő fajta, azaz: mind a kettő hegyes-, vagy mind a kettő tompaszög és 180^0-ra egészíti ki egymást, ha a két szög különböző fajta, azaz: az egyik hegyes-, a másik pedig tompa-szög.

10. §. Feladatok az első részhez.

1. Két vonal közül: $a = 3{\cdot}75$ m., $b = 5{\cdot}375$ m., mennyi: $a + b$?
2. Három vonal közül: $c = 52{\cdot}3$ m., $b = c + 6{\cdot}45$ m., $a = b + c + 3{\cdot}6$ m.; mennyi: $a + b + c$?
3. A 316·87 km. útból már megtettünk 213·705 km.-t; mennyi van még hátra?
4. $c = 2a - b$, $a = 2b$, $b = 3{\cdot}75$ m.; mennyi c?
5. Határozzuk meg az $a = 4\,b - 2\,c$ kifejezés értékét, ha $b = 8{\cdot}4$ m; $c = 12{\cdot}75$ m.
6. Az a távolság ötször akkora, mint a b távolság és a b háromszor akkora, mint $c = 2{\cdot}056$ m; mily nagy a és b?
7. Szerkeszszük meg az $a = 32$ cm. $^3/_4$-dének megfelelő egyenest.

8. Szerkeszszük meg az adott a vonal $^{5}/_{6}$-dát, $^{9}/_{10}$-dét.
9. $a = 3$ m.; $b = 5$ m.; mennyi c, ha annak értékét a $c = 5a + 3b$ egyenlet szabja meg?
10. Adva van $a > b$ két távolság; szerkesztendő: $4a - 2b$.
11. Megszerkesztendő az $y = 3a - \frac{b}{6}$ egyenes, ha $a = 5$ b.
12. Megszerkesztendő az $x = \frac{1}{8}a$ egyenes.
13. Hány másodpercz az $\alpha = 3^{0}\,27'\,10''$ szög?
14. $\alpha = 37^{0}\,28'\,16''$; mennyi az $x = 2R - 3\alpha$?
15. Hány fok, percz és másodpercz $1827''$?
16. $\alpha = 57^{0}\,37'\,18''$; $\beta = 48^{0}\,10^{0}\,26''$; mennyi $\alpha + \beta$; $\alpha - \beta$; $\frac{\alpha + \beta}{2}$; $\frac{\alpha - \beta}{2}$?
17. Mennyivel nagyobb 270^{0}, mint $\alpha = 69^{0}\,42'\,56''$ és $\beta = 75^{0}\,36'\,35''$ szögek összege; mennyivel több azok $2R$-rel növesztett különbségénél?
18. $2R$ felbontandó 2, 3, 4, 8, 16 egyenlő részre.
19. Mennyi α, ha $2R + \alpha = 3R - \alpha$?
20. Mennyi 2α, 3α, 5α, $\frac{\alpha}{4}$, $\frac{\alpha}{8}$, $9\alpha - 2R$, ha: $\frac{\alpha}{8} = 15^{0}\,20'\,18''$?
21. Mily nagy a $18^{0}\,26'\,14''$-nyi szög mellékszöge?
22. Két egymást metsző egyenes esetében a származott egyik szög: $\alpha = 38^{0}\,28'\,18''$. Mily nagy a többi szög?
23. $\alpha + \beta = 72^{0}\,38'\,18''$; $\alpha - \beta = 24^{0}\,18'\,58''$; mennyi α és β?
24. $\alpha = 18^{0}\,10'$; $\beta = 26^{0}\,18'$; mennyi $5\alpha - 3\beta$?
25. Bizonyítsuk be, hogy a mellék-szögeket felező egyenesek egymásra merőlegesek.
26. Mily nagy szöget zár be a két óramutató 4 órakor, 7 órakor, 9 órakor?
27. Mily szöget ír le az óra kis mutatója 1 óra 30 percz alatt; mily nagyot a nagy mutató 45' alatt?
28. Bizonyítsuk be, hogy valamely szög felezője annak csúcsszögét is felezi.
29. Bizonyítsuk be, hogy három egymást egy pontban metsző egyenesnél a nem szomszédos bármely három szög összege 180^{0}.
30. Két mellékszög közül az egyik kétszerese a másiknak; mily nagyok a szögek?

31. Ha két párhuzamos egyenest ugyanazon harmadikkal átszelünk, az egyik származott szög 57° 38′ 16″. Mily nagy a többi ?
32. Bizonyítsuk be, hogy a párhuzamos szárakkal bíró szögek felezői vagy párhuzamosak, vagy pedig egymásra merőlegesek.
33. Bizonyítsuk be ugyanazt a merőleges szárakkal biró szögek felező egyeneseire nézve.
34. Bizonyítsuk be, hogy azon esetben, ha két párhuzamos egyenest egy harmadikkal átszelünk, akkor a társ-szögek felező egyenesei derékszög alatt metszik egymást.
35. Bebizonyítandó, hogy ugyanakkor a váltó- és megfelelő szögek felező-egyenesei egymással párhuzamosak.

MÁSODIK RÉSZ.

A síkidomok alkotórészeinek összefüggése. Egybevágó síkidomok.

11. §. A sokszögekről általában.

A sík minden oldalról határolt részét *síkidomnak* nevezzük. Megkülönböztetünk egyenes-, görbe- és vegyes vonalú síkidomokat a szerint, amint a határvonalak csak egyenes-, vagy csak görbe-, vagy egyenes- és görbevonalak.

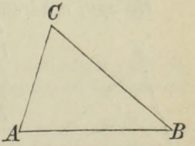
Az egyenesvonalú síkidom határvonalait *oldalaknak* hívjuk. Az oldalak összege a síkidom *kerületét* adja. Két egyenes nem alkothat idomot; az idom bezárására legalább is három egyenes szükséges. A háromoldalú síkidom akkor áll elő, ha három nem egy egyenesben fekvő pontot páronként egyenes-vonalakkal összekötünk. Az így keletkező idom: *háromszög.* Hasonló módon állítható elő a *négyszög, ötszög* és a többi. A négynél több oldallal bíró idomot *sokszögnek,* a sokszög oldalainak találkozási pontjait *szögpontoknak* nevezzük. Két-két szomszédos oldal a sokszög egy-egy *belső-szögét* zárja be. Minden sokszögnek annyi szögpontja és belső-szöge van, a hány oldala. Bármely oldal meghosszabbítása a szomszédos oldallal a sokszögnek egy *külső-szögét* alkotja. Minden külső-szög a mellette fekvő belsővel együttesen 180°-ot ad.

Azon egyenes-vonalakat, melyek két-két átellenes szögpontot kötnek össze, *átlóknak* hívjuk. A sokszög egy-egy szögpontjából hárommal kevesebb átlót húzhatunk, mint a mennyi az oldalak száma. Az n oldalú sokszögnél tehát n—3-at. Mivel n szögpont van, ennélfogva az összes átlók száma $n\ (n-3)$ lenne, ha figyelembe nem kellene vennünk, hogy ily módon minden átló kétszer kerül számitásba; éppen azért az összes különböző átlók száma az n oldalú sokszögben csakis: $\frac{n\,(n-3)}{2}$.

Az olyan egyenesvonalú síkidomokat, melyek egyenlő oldalakkal, vagy egyenlő szögekkel bírnak, *egyenlő-oldalu* illetőleg *egyenlő-szögüeknek,* azokat pedig, melyekben az oldalak és szögek egyidejüleg egyenlők, *szabályos-sokszögeknek* nevezzük.

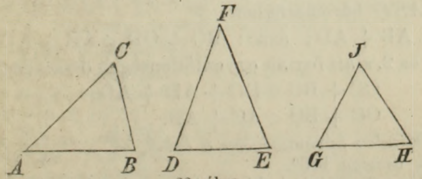
12. §. A háromszög alkotórészei.

Minden háromszögnek hat alkotórésze van: három oldala és három szöge. Igy az ABC háromszög (21. ábra) részei: $AB = c$, $BC = a$, $AC = b$ oldalak és $A\sphericalangle$, $B\sphericalangle$, $C\sphericalangle$ szögek.



21. ábra.

Az olyan háromszöget, melyben mind a három oldal különböző hosszúságú, *egyenlőtlen-oldalúnak,* az olyat, melyben két oldal egyenlő hosszú, *egyenlő-szárúnak,* azt pedig, melyben mind a három oldal egyenlő egymással, *egyenlő-oldalúnak* nevezzük. Igy ABC (22. ábra) egyenlőtlenoldalú, DEF egyenlőszárú, HGJ egyenlőoldalú háromszög.



22. ábra.

Ha felteszszük, hogy a háromszög egyik, pl. AB oldala a vízszintes síkon fekszik, akkor azt az oldalt a háromszög *alapjának,* az alappal átellenes C szögpontból az alapra szerkesztett merőlegest a háromszög *magasságának* hívjuk. Az egyik szögpontnak az átellenes oldal felezőpontjával való összekötése által nyert egyenes: a *középvonal;* a szögpontból kiinduló oly egyenes, mely a háromszög belső szögét felezi: a *szögfelező.* Minden háromszögben három magasság, három középvonal és három szögfelező van.

Minden háromszögben egy oldal kisebb, mint a másik két oldal összege, de nagyobb, mint azok különbsége.

E tétel első része önmagában világos, tudva, hogy két pont között az egyenes a legrövidebb út. Hogy azonban a tétel második részét is igazolhassuk, legyen: $AB > AC$ (21. ábra); mivel:

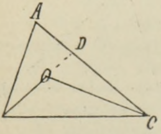
$$AB < AC + BC,$$

vonjuk ki AC-t az egyenlőtlenség mindkét oldalából, akkor;

$$AB - AC < BC, \text{ vagy: } BC > AB - AC.$$

A bizonyítás éppen így történhetik bármely oldalra nézve is.

Ha egy, a háromszög belsejében tetszőlegesen felvett O pontot (23. ábra) összekapcsolunk az egyik pl. BC oldal végpontjaival, akkor: $OB + OC$ összeg kisebb, mint a háromszög két oldalának, pl. AB és AC-nek összege.



23. ábra.

Hogy e tételt bebizonyíthassuk, hosszabbítsuk meg BO egyenest addig, mig AC-t D pontban metszi. Az ODC háromszögben:

$$OC < OD + DC \ldots\ldots\ldots 1)$$

ABD háromszögben:

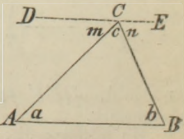
$$BD < AB + AD; \text{ azaz: } BO + OD < AB + AD; \quad 2)$$

az 1. és 2. alatt foglalt egyenlőtlenségek összeadásából:

$$OC + BO < DC + AD + AB;$$

$$OC + BO < AC + AB.$$

Minden háromszögben a belső szögek összege 180^0.



24. ábra.

Hogy e tételt bebizonyíthassuk, húzzuk az ABC háromszög (24. ábra) C szögpontján át a $DE \parallel AB$ egyenest akkor:

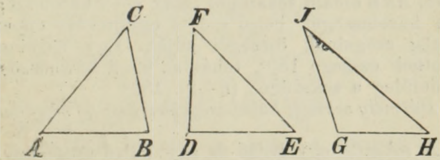
$$m + c + n = 180^0;$$

$m = a$ és $n = b$, mint váltószögek. Helyettesítve m és n értékét, lesz:

$$a + b + c = 180^o.$$

E tételből következik, hogy: 1. ismerve a háromszög két szögét, a harmadikat kiszámíthatjuk, mert csak az adott szögek összegét kell 180^o-ból kivonnunk; 2. ha két háromszögben két szög egyenlő, akkor egyenlő a harmadik is; 3. ha a háromszögben az egyik szög a másik kettő összegével egyenlő, akkor az derékszög; 4. a háromszög szögei között csakis egy lehet derékszög.

Az olyan háromszöget, melyben mind a három szög hegyes szög, *hegyes-szögű*-nek, az olyat, melyben



25. ábra.

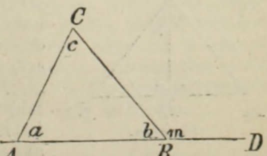
egy derékszög van, *derékszögűnek*, azt pedig, a melyben az egyik szög tompaszög, *tompaszögű-háromszög*-nek nevezzük.

Igy *ABC* (25. ábra.) hegyes-szögű-, *DEF* derékszögű-, *GHJ* tompaszögű háromszög — A derékszögű háromszögben a derékszöget bezáró két oldalt *befogók*-*nak*, a derékszöggel szemközt fekvő oldalt *átfogónak* hívjuk.

A háromszög bármely külső-szöge a vele szemben fekvő két belső-szög összegével egyenlő.

Legyen m (26. ábra) az ABC háromszög egyik külső szöge; akkor:

$$m + b = 180^o;$$
$$a + b + c = 180^o.$$



26. ábra.

Ha két mennyiség ugyanazon harmadikkal egyenlő, akkor egymással is egyenlő; ennélfogva:

$$m + b = a + b + c;$$

honnan: $m = a + c.$

Ebből következik, hogy: 1. bármely külső szög nagyobb az átellenében fekvő szögek egyikénél; 2. azon szög, melyet a háromszög belsejében választott valamely pontnak az egyik oldal végpontjaival való összekötése által nyerünk, nagyobb, mint a háromszögnek vele szemben fekvő szöge.

13. §. A sokszög szögei.

Az n oldalú sokszög belső-szögeinek összege (n—2). 180°. Hogy e tételt beigazolhassuk, figyelembe kell vennünk, hogy a sokszöget bármely szögpontjából — átlók segélyével — kettővel kevesebb háromszögre bonthatjuk fel, mint a mennyi a sokszög oldalainak száma. Az n oldalú sokszöget tehát $n—2$ háromszögre. Ezen háromszögek belső szögei együttvéve éppen a sokszög szögeinek összegét adják. Egy háromszög szögeinek összege 180°, tehát az $n—2$ háromszögé s egyidejüleg a sokszögé: (n—2). 180°.

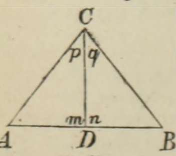
Bármely sokszög külső-szögeinek összege négy derékszög.

A sokszög egy belső és egy külső szöge együttvéve 2 R. Mivel az n oldalú sokszögnél n ilyen szögpár van; ennélfogva azok összege: 2 nR. Hogy csakis a külső-szögek összegét nyerjük, ebből a belső-szögeket ki kell vonni, akkor lesz:

$$2. \text{n R} — (\text{n}—2). 2 \text{R} = (\text{n}—\text{n} + 2). 2 \text{R} = 4 \text{R}.$$

14. §. A háromszög átellenes alkotórészeinek összefüggése.

Bármely háromszögben az egyenlő oldalakkal szemben fekvő szögek egyenlők. Tegyük fel, hogy az ABC háromszögben (27. ábra) $AC = BC$; akkor bebizonyítható, hogy: $A\sphericalangle = B\sphericalangle$. E czélból felezzük $C\sphericalangle$-et a CD szögfelezővel és képzeljük az ACD háromszöget BCD-re fektetve oly módon, hogy CD helyzete ezáltal ne változzék; akkor AC egyenes BC irányába kerül, mert $p\sphericalangle = q\sphericalangle$, de egyszersmind A pont össze fog esni B-vel, mert AC és BC egyenlők; ámde akkor az AD egyenes éppen fedni fogja BD-t, mert B és D pontok között csakis egy egyenes húzható.

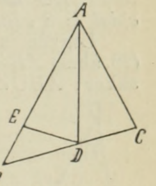


27. ábra.

Ilyformán $A\sphericalangle$ fedni fogja $B\sphericalangle$-et s így vele egyenlő. De ugyanakkor $m\sphericalangle$ fedni fogja $n\sphericalangle$-et, a kettő tehát egyenlő és mindegyik derékszög.

E tételből az következik, hogy: 1. az egyenlőszárú háromszögben az alapon fekvő két szög egyenlő; 2. az egyenlő-oldalú háromszög szögei egyenlők s egynek-egynek értéke 60^0.

Bármely háromszögben nagyobb oldallal nagyobb szög fekszik átellenben. Legyen az ABC háromszögben (28. ábra) $AB > AC$; akkor bebizonyítható, hogy: $C\sphericalangle > B\sphericalangle$. E czélból felezzük a harmadik $A\sphericalangle$-et AD szögfelezővel és képzeljük ACD háromszöget ABD-re átfektetve oly módon, hogy AD helyzete ne változzék; akkor AC egyenes AB irányába és D az A és B pontok közé pl. E-be kerül. Ekkor $AED\sphericalangle$, mint külső-szög nagyobb, mint $B\sphericalangle$. Ámde AED szög $C\sphericalangle$-gel egyenlő; tehát; $C\sphericalangle > B\sphericalangle$.



28. ábra.

— E tételből következik, hogy a háromszög legnagyobb oldalával szemben fekvő szög a legnagyobb.

Bármely háromszögben az egyenlő szögekkel szemben fekvő oldalak szintén egyenlők. Legyen $A\sphericalangle = B\sphericalangle$ (27. ábra); akkor bebizonyítható, hogy: $BC = AC$; mert tegyük fel, hogy BC nem egyenlő, hanem nagyobb, mint AC, akkor az előbbi tétel szerint $A\sphericalangle$-nak nagyobbnak kell lennie $B\sphericalangle$-nél; ezt azonban a feltétel kizárja. Ha pedig BC-t kisebbnek állítjuk AC-nél, abból a feltétellel ellenkezőleg az következnék, hogy $B\sphericalangle > A\sphericalangle$. BC tehát sem nagyobb sem kisebb nem lehet, mint AC, tehát egyenlő azzal.

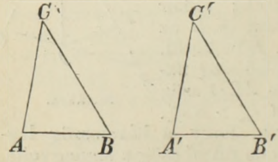
Hasonló eljárással igazolható a következő tétel helyessége: *Bármely háromszögben a nagyobb szöggel szemben fekvő oldal nagyobb a kisebb szöggel szemközt fekvőnél.* E tétel következményei, hogy: 1. a háromszögben a legnagyobb szöggel a legnagyobb oldal fekszik szemben s így 2. a derékszögű háromszög átfogója nagyobb, mint bármelyik befogója.

15. §. A háromszögek egybevágósága.

Két háromszög egybevágó (kongruens), ha egymásra fektetve tökéletesen fedi egymást. Ez akkor fog bekövetkezni, ha a két háromszög oldalai és szögei egyenlők és ugyanazon sorrendben következnek. Az alkotórészek egyenlősége, de különböző sorrendje esetén *symmetrikus* háromszögek állanak elő. Azon összefüggés következtébeu, mely a háromszögek oldalai és szögei között fennál, két háromszög hat alkotórésze közül három egymástól független alkotórésznek megegyezése elégséges az egybevágóság megállapításához. Ez alapon az egybevágóság négy fő esetét különböztetjük meg. Lássuk sorban ez eseteket.

I. *Két háromszög egybevágó, ha azokban egy-egy oldal és a rajtafekvő két-két szög egyenlő.*

Legyen az ABC és $A'B'C'$ háromszögekben (29. ábra) $AB = A'B'$, $A\sphericalangle = A'\sphericalangle$ és $B\sphericalangle = B'\sphericalangle$; akkor: $ABC\triangle \cong A'B'C'\triangle$. Fektessük $A'B'C'\triangle$-et $ABC\triangle$-re oly módon, hogy $A'B'$ oldal AB-re essék, akkor $A'\sphericalangle$ egyenlő lévén $A\sphericalangle$-gel $A'C'$ az AC irányát követi és C' pont bizonyos távolságban AC-n lesz található. Hasonló okból ugyancsak C' a BC-n is rajta lesz bizonyos távolságban. Mivel most már C'-nek egyidejűleg AC-n és BC-n kell lennie, ezen két egyenesnek pedig csak egy közös pontja van és pedig C; ennélfogva abba kell esnie a C'-nek is s ez esetben a két háromszög teljesen fedi egymást, tehát egybevágó.

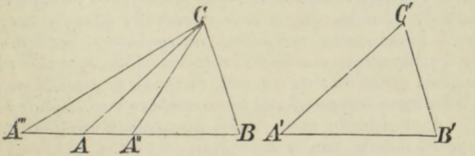


29. ábra.

II. *Két háromszög egybevágó, ha azokban két-két oldal és az általuk bezárt szög egyenlő.* Legyen a fenti két háromszögben: $AB = A'B'$, $AC = A'C'$ és $A\sphericalangle = A'\sphericalangle$; akkor: $ABC\triangle \cong A'B'C'\triangle$. Helyezzük a második háromszöget az elsőre olykép, hogy a két egyenlö szög, A és A' fedjék egymást; akkor AB és $A'B'$, továbbá AC és $A'C'$ egyenlősége folytán B' pont B-be, C' pont pedig C-be fog esni s így $B'C'$ szükségképen BC-re kerül, mert két pont csakis egy egyenest határoz meg. A két háromszög tehát ez esetben is egybevágó.

III. *Két háromszög egybevágó, ha azokban két-két oldal és a nagyobbikkal szemben fekvő szög egyenlő.* Legyen az ABC és $A'B'C'$ háromszögekben (30. ábra) $AC = A'C'$ és $BC = B'C'$, továbbá $AC > BC$, $A'C' > B'C'$ és $B\sphericalangle = B'\sphericalangle$ akkor: $ABC\triangle \cong A'B'C'\triangle$.

Fektessük a második háromszöget az elsőre oly módon, hogy $B' \sphericalangle$ a $B \sphericalangle$-re essék, akkor C' pont C-be, $A'B'$ oldal pedig AB irányába kerül. Azt állítjuk, hogy ezen esetben A' pontnak A pontba kell esnie; mert tegyük fel, hogy nem A-ba, hanem A'', vagy A''-ba kerül. Bebizonyítjuk, hogy ezen felvételek egyike sem állhat meg. Ha A' pont A''-be jutna, akkor: $A''BC\triangle \cong$ lenne $A'B'C'\triangle$-gel (a II. tétel alapján), de akkor $A''C$-nek egyenlőnek kellene lenni $A'C'$ és AC oldalakkal; ez azonban lehetetlen, mert



30. ábra.

az $AA''C\triangle$-ből az derül ki (14. §. 2. tétel), hogy $AC > A''C$. Éppen oly kevéssé kerülhet A' pont A'''-ba, mert akkor az $A'''BC$ és $A'B'C'$ $\triangle$-ek egybevágósága folytán $A'''C$-nek AC-vel kellene egyenlőnek lennie, ami szintén lehetetlen. A' pont tehát csakis A-ba juthat az átfektetésnél, minek következtében a két háromszög teljesen fedi egymást, tehát egybevágó.

IV. *Két háromszög egybevágó, ha azokban mind a három oldal páronként egyenlő.* Legyen ABC és $A'B'C'$ háromszögekben (29. ábra): $AB = A'B'$; $AC = A'C'$ és $BC = B'C'$, akkor: $ABC\triangle \cong A'B'C'\triangle$. Hogy ezt a tételt bebizonyíthassuk, elég azt kimutatni, hogy a két háromszög egyik megfelelő szögpárja pl. $A \sphericalangle$ és $A' \sphericalangle$ egyenlő egymással, mert akkor a két háromszögben két-két oldal és az általuk bezárt szög egyenlő s így a két háromszög egybevágósága a II. tétel alapján megállapítható lenne. Ámde ha $A \sphericalangle$ nem lenne $A' \sphericalangle$-gel egyenlő, akkor BC oldal is különböznék a $B'C'$ oldaltól (14. §. 3. tétel) ami ellenkeznék a feltétellel. Igy tehát a két háromszög egybevágósága ebben az esetben is meg van állapítva.

A most felsorolt és bebizonyított egybevágósági esetek alapján a következő tételeket lehet egyszerű módon igazolni:

1. *Az egyenlő-szárú háromszögben az alappal szemközt fekvő szög felező-egyenese kellőleg meghosszabbítva*

felezi az alapot s arra merőleges. Ezen tételből viszont az következik, hogy: a) azon egyenes, mely az alap felező-pontját az átellenes szögponttal összeköti, felezi az alappal szemben fekvő szöget s az alapra merőleges; vagy pedig: b) az alaphoz tartozó magasság felezi az alapot s a vele átellenes szöget.

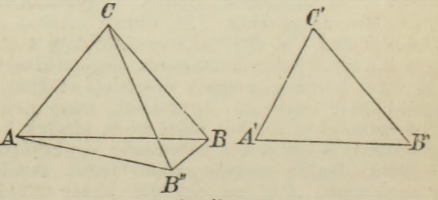
2. *Bármely háromszögben az oldalak felező-pontjaiban emelt merőlegesek egy oly pontban találkoznak, mely valamennyi szögponttól egyenlő távolságra fekszik.*

3. *Valamennyi egyenes között, melyeket valamely adott egyenes vonalhoz a rajta kivül fekvő pontból húzhatunk: a) a merőleges a legrövidebb; b) a ferde egyenesek közül azok, melyeknek az egyenessel való átmetszési pontjaik a merőleges talppontjától egyenlő távol vannak, egyenlők; az a vonal, melynek átmetszési pontja a merőleges talppontjától legmesszebbre van, legnagyobb.*

4. *Valamely szög felező-egyenesének minden pontja egyenlő messze van a száraktól.*

5. *A háromszög szögfelezői egy oly pontban metszik egymást, mely valamennyi oldaltól egyenlő távol van.*

6. *Az egyenlőoldalú háromszögek egybevágósága már egy oldal; az egyenlő-száruaké az alap és egy szög, vagy egy szár és egy szög, vagy az alap és egy szár; végre a derékszögű háromszögeké az átfogó és egy hegyes szög, vagy egy-egy befogó és egy hegyes szög, vagy a két befogó, vagy az átfogó és egyik befogó megegyezese alapján megállapítható.*



31. ábra.

16. §. Háromszögek két-két egyenlő oldallal.

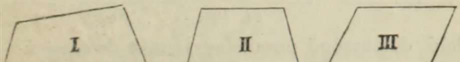
Ha két háromszögben két-két oldal egyenlő, de az ezen oldalpárok által bezárt szögek különbözők, akkor a két háromszög harmadik oldalai nem egyenlők egymással, hanem az lesz nagyobb, mely a nagyobbik szöggel átellenes.

Legyen ABC és $A'B'C'$ háromszögekben (31. ábra) $AC = A'C'$, $BC = B'C'$ és $C\sphericalangle > C'\sphericalangle$; akkor: $AB > A'B'$. Hogy ezt bebizonyíthassuk, másoljuk le C szögpontnál $C'\sphericalangle$-et oly módon, hogy $ACB''\sphericalangle = C\sphericalangle$ és legyen $B'C' = B''C$; akkor: $AB'C\triangle \cong A'B'C''\triangle$, amiből: $AB'' = A'B'$. Minthogy BC és $B'C'$ oldalok a feltétel szerint egyenlők; ennélfogva $CB''B$ és CBB'' szögek egyenlők, ebből: $CB''B\sphericalangle > B\sphericalangle$ s így $AB''B\sphericalangle > ABB''\sphericalangle$; ennélfogva: $AB > AB''$, vagy: $AB > A'B'$.

Ha két háromszögben két-két oldal egyenlő, de a harmadik oldalpár nem, akkor a nem egyenlő oldalakkal szemközt fekvő szögek közül az lesz a nagyobbik, a melyik a nagyobb oldallal átellenes. Legyen (31. ábra) $AC = A'C'$, $BC = B'C'$ és $AB > A'B'$; akkor $C\sphericalangle > C'\sphericalangle$, mert ha C szög egyenlő lenne $C'\sphericalangle$-gel, akkor állana, hogy $AB = A'B'$, ha pedig $C\sphericalangle$ kisebb lenne $C'\sphericalangle$-nél, akkor állana, hogy $AB < A'B'$. A feltétel mind a két eset lehetőségét kizárja, a mi arra vezet, hogy a két szögre nézve: $C\sphericalangle > C'\sphericalangle$ egyenlőtlenség érvényes.

17. §. A parallelogramma.

A négyszögek között *trapezoidokat, trapézeket* és *parallelogrammákat* különböztetünk meg (32. ábra). A *trapezoid* (I.) oly négyszög, melyben az átellenes



32. ábra.

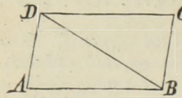
oldalak egyik párja sem párhuzamos egymással; a *trapéz* (II.) oly négyszög, melyben két átellenes oldal párhuzamos, a másik kettő nem; végre a *parallelogrammában* (III.) két-két átellenes oldal egymással párhuzamos.

Bármely négyszög belső-szögeinek összege 360°. (13. §.)

A 7. §. 2. tétele alapján *a parallelogramma két-két szomszédos szöge együttvéve 180°-kal egyenlő.*

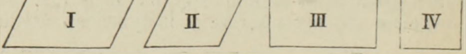
Minden parallelogrammában két-két átellenes szög egyenlő egymással; mert ugyanazon harmadik mind a kettőt 180°-ra egészíti ki. Ilyformán: 1. a parallelogramma egy szögének nagyságát ismerve a többit is meghatározhatjuk; 2. ha a parallelogramma egyik szöge derékszög, akkor a többi is az; 3. ha a parallelogramma egyik szöge ferdeszög, akkor a többi is az. Ez alapon *derékszögű* és *ferdeszögű parallelogrammákat* különböztetünk meg.

A parallelogrammát bármely átlója két egybevágó háromszögre bontja fel. Húzzuk meg az $ABCD$ parallelogramma (33. ábra) BD átlóját, akkor: $ABD\triangle \cong BCD\triangle$; mert: $BD = BD$; $ABD\measuredangle = BDC\measuredangle$ és $ADB\measuredangle = CBD\triangle$, mint váltószögek. Ilyformán: $AB = BC$ és $AB = DC$; azaz: *a parallelogramma átellenes oldalai egyenlők.* Másszóval: *a párhuzamosak közt fekvő párhuzamos egyenesek egyenlők egymással.*



33. ábra.

Az olyan parallelogrammákban, melyekben két szomszédos oldal egyenlő, valamennyi oldal egyenlő egymással, ezek az *egyenlő-oldalú* parallelogrammák; a melyekben pedig csakis az átellenes oldalok egyenlők, azok a *különböző-oldalúak.* A különböző oldalú ferde parallelogrammát (34. ábra, I.) *rhomboid*nak, az egyenlő oldalút (II.) *rhombus*nak, a különböző



34. ábra.

oldalú derékszögű parallelogrammát *derékszögű-négyszög*nek, vagy *oblongum*nak, az egyenlő oldalút pedig *négyzet*nek, vagy *quadratum*nak nevezzük.

Az eddig megismert tételek alapján könnyen igazolhatjuk a következőket:

a) Ha valamely négyszögben két-két átellenes oldal egyenlő, akkor az a négyszög: parallelogramma.

b) Ha valamely négyszögben két átellenes oldal egyenlő és párhuzamos, akkor a másik két oldal is ilyen s a szóban forgó négyszög: parallelogramma.

c) Minden parallelogrammában az átlók felezik egymást; s viszont: oly négyszög, melyben az átlók felezik egymást: parallelogramma.

d) A derékszögű négyszögek átlói egyenlők; s viszont az olyan parallelogrammák, melyekben az átlók egyenlők: derékszögűek.

e) Az egyenlőoldalú parallelogrammák átlói felezik egymást s egymásra merőlegesek; s viszont: az olyan parallelogrammák, melyekben az egymást felező átlók egymásra merőlegesek: egyenlőoldalúak.

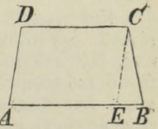
f) Két parallelogramma egybevágó, ha két-két szomszédos oldaluk s az azok által bezárt szögük egyenlő. Ilyformán: a rhombus meghatározására egy oldal és egy szög; a derékszögű négyszögére két szomszédos oldal; a négyzetére egyetlen oldal elégséges.

A parallelogramma *magassága* alatt az alapúl választott oldalnak a vele párhuzamostól mért távolát mérjük.

18. §. A trapéz.

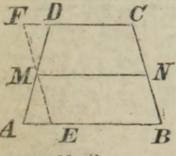
Az olyan trapézt, a melyben a két nem párhuzamos oldal egyenlő egymással *egyenlőszárú-*, vagy *symmetrikus-trapéz*nek, vagy *antiparallelogrammá*nak nevezzük.

Az egyenlőszárú trapézben a párhuzamos oldalakon fekvő két-két szög egyenlő egymással. E tétel bebizonyítására legyen az $ABCD$ trapézben (35. ábra). $AD \parallel BC$. Ha a $CE \parallel AD$ egyenest szerkesztjük, akkor: $CE = AD = BC$, tehát a $BCE\,\triangle$-ben $B\sphericalangle = E\sphericalangle$; ámde $E\sphericalangle = A\sphericalangle$; tehát: $A\sphericalangle = B\sphericalangle$. Mivel továbbá $A\sphericalangle + D\sphericalangle = 180^0$ és $B\sphericalangle + C\sphericalangle = 180^0$; ennélfogva: $A\sphericalangle + D\sphericalangle = B\sphericalangle + C\sphericalangle$ és: $D\sphericalangle = C\sphericalangle$.



35. ábra.

Az egyenlő-szárú trapézek átlói egyenlők. E tétel a háromszögek egybevágóságára vonatkozó II. tétel és a fentebb ismertetett tétel segélyével bizonyitható be.



36. ábra.

Az általános trapézben mind a négy oldal különböző nagyságú.

A trapéz egyik nem párhuzamos oldalát felező s az egyenlőközű oldalakkal párhuzamos egyenes felezi a másik nem párhuzamos oldalt is. Legyen az $ABCD$ trapézben (36. ábra) $AM = DM$ és $MN \parallel AB \parallel CD$; akkor: $BN = NC$. E tétel igazolására szerkeszszük M ponton át az $EF \parallel BC$ egyenest is hosszabítsuk meg CD oldalt F

pontig, akkor: $AEM\triangle \cong DFM\triangle$ (15. §. I.) s így $EM = MF$. Ámde EM és BN, továbbá MF és NC, mint párhuzamosak közt fekvő párhuzamosak egyenlők s igy: $BN = NC$. — MN vonalat *a trapéz középvonalának* nevezzük.

Indirekt uton könnyen beigazolható e tétel megfordítottja is, mely szerint *a trapéz két nem párhuzamos oldalának felező-egyenese az egyenlőközű oldalakkal párhuzamos.*

A trapéz középvonala a párhuzamos oldalak félösszegével egyenlő. Az előbbi ábrában: $MN = BE$ és $MN = CF$. Összeadva e két egyenletet: $2MN = BE + EF = AB - AE + CD + DF$. Ámde AE és DF egyenlők; ennélfogva: $2\,MN = AB + CD$; a honnan:

$$MN = \frac{AB + CD}{2}.$$

Az általános trapéz meghatározására négy, az egyenlőszárúéra pedig három egymástól független alkotórész ismerete szükséges.

19. §. A sokszögek egybevágósága.

Egybevágó sokszögek azok, melyeknek alkotórészeik egyenlők és ugyanazon sorrendben következnek. Két sokszög egybevágó, hogyha azokat a megfelelő szögpontokból kiinduló átlók páronként egybevágó háromszögekre bontják. Viszont: ha két sokszög egybevágó, akkor azokat a megfelelő szögpontokból kiinduló átlók páronként egybevágó háromszögekre bontják.

Minthogy az n oldalú sokszög az egy szögpontból kiinduló átlók segélyével $n—2$ háromszögre bontható és minthogy ezen háromszögek elsejének meghatározására 3, minden következőére pedig 2 alkotórész szükséges; ennélfogva az n oldalú sokszöget meghatározó egymástól független alkotórészek száma: $3 + 2(n—3) = 2n—3$. Ilyennek tekinthetünk a sokszögben $n—1$ egymást követő oldalt s az ezen oldalak által bezárt $n—2$ szöget.

20. §. Feladatok a második részhez.

1. Az egyenlőszárú háromszögben a nem egyenlő oldallal átellenes szög 54^{0} $26'$ $18''$. Mennyi a másik két szög?

2. A ferdeszögű háromszögben: $\alpha = \beta : 2$; $\gamma = 51^0$ $56' \; 14''$. Mennyi α és β?
3. Valamely háromszögben $\alpha = 64^0 \; 27' \; 16''$; mennyi a hiányzó két szög fél összege?
4. Valamely háromszögben az egyik szög a derékszögnek $^5/_6$-od része, a másik $32^0 \; 45'$; mennyi a harmadik szög?
5. Valamely háromszögben két szög félösszege 30^0 $17' \; 49''$; ugyanazok félkülönbsége $6^0 \; 34'$. Mily nagyok a háromszög szögei?
6. A háromszögben $A + B = 87^0 \; 23' \; 36''$. Mily nagy γ külső-szöge?
7. Az egyenlőszárú háromszögben az alappal szemben fekvő szög $72^0 \; 26' \; 18''$. Mily nagy a másik két szög?
8. Az egyenlőszárú háromszög alapján fekvő egyik szög $53^0 \; 16'$; mekkera a másik két szög?
9. Az egyenlőszárú háromszög egyik szárának meghosszabbítása folytán keletkező külső-szög 132^0 $16' \; 38''$. Mekkorák a háromszög szögei?
10. Az egyenlőszárú háromszögben az alappal szemben fekvő szög kétszer akkora, mint az alapon nyugvó egyik szög. Mily nagyok e háromszög szögei?
11. Mily nagyok a derékszögű háromszög hegyes szögei, ha az átfogónál fekvő külső-szög 56^0?
12. A háromszög szögeinek aránya: $1 : 3 : 5$; mekkorák e szögek?
13. A derékszögű háromszög egyik hegyes szöge 56^0 $12' \; 6''$; mennyi a másik?
14. Az egyenlőszárú háromszög kerülete 56 m.; egyik szára 18 m.; mekkora a többi oldal?
15. A háromszög egyik külső-szöge $118^0 \; 26'$, a vele szemben fekvő belső-szögek egyike $82^0 \; 33' \; 16''$. Mily nagyok a háromszög szögei?
16. Az egyenlőszárú háromszög alapjánál fekvő egyik szög α; mily nagy az átellenes szögpontnál szerkesztett külső-szög?
17. Valamely négyszögben két szög összege $118^0 \; 32'$; a másik két szög egyenlő; mekkorák ez utóbbi szögek?
18. A parallelogramma egyik külső-szöge $72^0 \; 29' \; 16''$; mekkorák a belső-szögek?
19. A trapéz egyik párhuzamos oldalán: $\alpha = 58^0 \; 17'$ $16''$; $\beta = 72^0 \; 18'$; mily nagy a másik két szög?

20. A négyszög szögeinek aránya: 1 : 2 : 4 : 5; mekkorák e szögek?

Mennyi egy szöge:

21. a szabályos hét-szögnek;
22. a szabályos tizenkét-szögnek;
23. a szabályos tizenöt-szögnek;
24. a szabályos húsz-szögnek;

Hány oldala van annak a szabályos sokszögnek, melynek egy szöge:

25. 120^0; 26. 144^0; 27. $147{\cdot}\dot{2}\dot{7}^0$;

28. $154\frac{2^0}{7}$; 29. $157\frac{1^0}{2}$; 30. $1\frac{5}{7}R$?

31. A derékszögű háromszög egyik hegyes szöge 8^0 $19'$ $40''$-el kevesebb, mint a másik $^7/_{10}$-ed része. Mekkora a két szög?
32. Mily nagyok a háromszög szögei, ha azok aránya: 2·5 : 3 : 4·2?
33. A négyszög szögei számtani haladványt képeznek, melynek különbsége 5^0 $47'$ $37''$. Mekkorák e szögek?
34. A hatszög egyik szöge 67^0 $49'$ $52''$; a többi számtani haladványt képez. Mily nagy mindenik szög?
35. Melyik az a szabályos sokszög, melyben a szögek összege 26 R?
36. Melyik az a szabályos sokszög, melyben egy szög $\frac{5}{3}R$?
37. Valamely négyszögben minden szög $1^0\,20'$-el nagyobb, mint az előtte fekvő. Mennyi az első szög?
38. Mily nagyok azon négyszög szögei, melyben három szög egyenlő, s mindenik háromszor akkora, mint a negyedik?
39. A háromszög szögei közül kettőnek különbsége annyi, mint a harmadik. Mekkora egy-egy szög?
40. Hány átlót húzhatunk a 8, 9, 13, 22, 25-szögben?

Bizonyítsuk be a következő tételek helyességét:

41. Az egyenlőszárú háromszögben két magasság egyenlő.
42. Az egyenlőszárú háromszögben az alap bármely pontjából az egyenlő oldalakra bocsátott merőlegesek összege állandó.

43. Az egyenlőszárú háromszög alapjának meghosszabbítása által nyert pontok bármelyikére nézve a szárak távolságainak különbsége állandó.
44. Az egyenlőszárú háromszög egyik szárának meghosszabbítása által nyert külső-szög felező-egyenese párhuzamos az alaphoz.
45. A derékszögű háromszögben a derékszög szögpontjából kiinduló középvonal az átfogó felével egyenlő.
46. Ha a derékszögű háromszög egyik hegyes szöge kétszer akkora, mint a másik, akkor az átfogó kétszerese a kisebbik befogónak.
47. A derékszögű háromszögben az átfogóhoz tartozó magasság és középvonal által bezárt szög a háromszög két hegyes szögének különbségével egyenlő.
48. Az egyenlőoldalú háromszög magasságai egyenlők.
49. Bármely háromszög középvonala kisebb, mint a két szomszédos oldal félösszege.
50. A három középvonal összege, nagyobb a háromszög félkerületénél, de kisebb, mint az egész kerület.
51. A háromszög bármely oldalának felezőpontjából egy másik oldalhoz húzott párhuzamos annyi, mint a párhuzamos oldal fele.
52. Az ABC háromszögben AB oldalt E-ig $AE = AB$-vel meghosszabbítván: $CE \perp BC$.
53. $ABC\triangle$-ben az A, B és C szögpontokon át párhuzamosakat húzva az átellenes oldalakhoz, oly háromszöget nyerünk, melynek oldalait az eredeti háromszög szögpontjai felezik.
54. Az így nyert háromszög négyszer nagyobb, mint az eredeti.
55. A háromszögek felezőpontjait páronként összekötve az adott háromszög négy egybevágó kisebb háromszögre bomlik.
56. Ha valamely háromszög egyik oldalának tetszőlegesen választott pontjából a másik két oldalhoz párhuzamost húzunk, a származó két kisebb háromszög kerületeinek összege az eredetiével egyenlő.
57. Ha egy háromszög egyik oldalához tartozó középvonalára a másik két oldal végpontjáiból merőlegeseket állitunk, ezek hossza egyenlő.
58. Bármely négyszögben a szomszédos oldalak felezőpontjait összekötve parallelogrammát nyerünk.

59. A négyszög átlóinak összege kisebb az oldalak összegénél, de nagyobb ez összeg felénél.
60. Az $ABCD$ parallelogramma oldalaira $AE = BF = CG = DH$ egyenlő darabokat mérve fel, az $EFGH$ idom szintén parallelogramma.
61. A rhombus oldalainak felező-pontjait összekötő egyenesek derékszögű-négyszöget alkotnak.
62. A derékszögű négyszög oldalainak felező-pontjait összekötő egyenesek rhombust zárnak be.
63. A rhombus átlóinak felező-pontjaiból az oldalakra szerkesztett merőlegesek talppontjai egy derékszögű-négyszög szögpontjai.
64. A különböző oldalú parallelogramma szögfelezői derékszögű-négyszöget zárnak be.
65. A háromszög B és C szögének felező-egyenesei $90^0 + \frac{A}{2}$ nagyságú szöget zárnak be.

Szerkeszszünk egyenlő-oldalú háromszöget:
66. a adott oldalból;
67. m adott magasságból.

Szerkeszszünk egyenlőszárú-háromszöget:
68. a adott alap és B adott szögből;
69. a alap és b szárból;
70. a alap és A szögből;
71. b szár és B szögből;
72. a alap és m_a magasságból;
73. m_a magasság és A szögből.

Szerkeszszünk derékszögű-háromszöget:
74. a átfogó és b befogóból;
75. a átfogó és B hegyes szögből;
76. b és c befogóból;
77. b befogó és B, vagy C hegyes szögből;
78. b befogó és m_a magasságból.

Szerkeszszünk háromszöget:
79. a, b, m_c alkotórészekből;
80. $a + b$, mc és B részekből;
81. $a + b + c$, A, B részekből;
82. $a + b$, A, C részekből;
83. $a + b$, c, A részekből;
84. $a + b$, c, $A—B$ részekből.

Szerkeszszünk négyzetet, ha adva van:
85. annak kerülete;
86. egyik átlója.

Szerkeszszünk derékszögű négyszöget, ha ismeretes:

87. két szomszédos oldal;
88. egy oldal és egy átló;
89. egy átló és a két átló által bezárt szög.
90. egy átló és az átló és hosszabb oldal által bezárt szög.

Szerkeszszünk rhombust, ha ismeretes:

91. egy oldal és egy szög;
92. egy oldal és egy átló;
93. a két átló;
94. az átlók egyike s az átló és oldal által bezárt szög.

Szerkeszszünk rhomboidot, ha ismeretes:

95. két oldal és az egyik átló;
96. egy oldal, egy átló és e kettő által bezárt szög;
97. a két átló és az azok által bezárt szög;
98. egy oldal, egy átló és a rhomboid egy szöge.

Szerkeszszünk egyenlőszárú trapézt, ha ismeretes:

99. egy párhuzamos és egy nem párhuzamos oldal és egy átló;
100. a két párhuzamos és egy nem párhuzamos oldal;
101. az egyik párhuzamos oldal, az egyik átló és a magasság;
102. az alap, a rajta fekvő egyik szög és a magasság;
103. az átlók egyike, az alap és átló, továbbá a két átló által bezárt szög.

Szerkeszszünk általános trapézt, ha adva van:

104. három egymásután következő oldal s az ezek közül vett kettő által bezárt szög;
105. az alap, az egyik nem párhuzamos oldal, a kettő által bezárt szög és egy átló;
106. három oldal és a magasság;
107. egyik párhuzamos oldal, a két átló és a magasság;
108. az alap, a vele szomszédos egyik oldal, az egyik átló és az alap és az adott átló által bezárt szög.

Négyszög szerkesztendő, ha adva van:

109. a, b oldal és A, B, C szög;
110. a, b, c oldal és A, C szög.

HARMADIK RÉSZ.

A síkidomok hasonlósága.

21. §. A távolságok mérése.

Ha két egyenes *hosszúságát* (2. §.) a és b számok fejezik ki, akkor a egyenest b-vel *megmérni* annyit jelent, mint megvizsgálni, hányszor vihető fel a második az elsőre. Az elvégzett mérés eredményét mathematikailag $a : b$, vagyis a-nak b-hez való *aránya* fejezi ki. Az arányt jelentő hányados nevezetlen szám.

A méréseknél három eset lehetséges; és pedig:

1. b maradék nélkül osztja a-t; ekkor a hányados egész szám;

2. b nem osztja ugyan maradék nélkül a-t, de létezik oly szám (közös mérték), mely mindkét számban maradék nélkül foglaltatik; ezen esetben $a : b$ törtszám; végre:

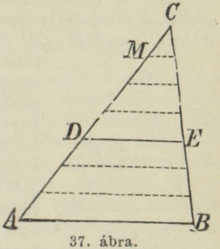
3. nemcsak hogy b nem osztja maradék nélkül a-t, de a két számnak még közös mértékük sincsen; ilyenkor a hányados irrationális szám. Példát nyújt erre az egyenlőszárú derékszögű háromszög, melyben az a átfogó és b befogó aránya: $a : b = \sqrt{2}$.

Ha két egyenes összehasonlításánál a hányados egész-, vagy törtszám, az egyeneseket *összemérhetőknek* (commensurábilis); ha pedig a hányados irrationális szám, az egyeneseket *összemérhetetleneknek* (incommensurábilis) nevezzük. Az irrationális számok természete folytán az incommensurábilis egyenesek arányát tizedes törtek segítségével tetszőleges pontosságig kifejezhetjük.

Két egyenlő aránynak az egyenlőség jelével való összekötése *aránylatra* vezet. Az olyan aránylatot, mint $a : b = b : c$, ahol a két belső-tag egyenlő, *folytonosnak*; a belső-tagot a két külső *geometriai középarányosának* mondjuk. Ilyformán b geometriai középarányos a és c között. Mivel az aránylatokban a belső és külső tagok szorzatai egyenlők; ennélfogva: $b^2 = ac$ és $b = \sqrt{ac}$.

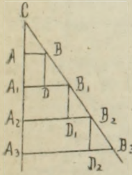
22. §. A sugárrendszer.

Két vagy több közös pontból kiinduló egyenes *sugárrendszert* alkot. A közös C pontot (37. ábra) a *sugárrendszer-középpontjá*nak; AC és BC egyeneseket *sugarak*nak, AB és DE egyeneseket *átszelők*nek, vagy *transversálisok*nak; a transversálisok és sugarak A és B, vagy D és E metszési pontjait *megfelelő-pontok*nak; a sugaraknak két transversális megfelelő-pontjai, vagy a középpont és egyik megfelelő pont között fekvő részét *(AD, BE, AC, CD, BC, CE) sugármetszetek*nek; végül a transversálisoknak a sugarak közé eső részét *(AB, DE)* a *transversálisok megfelelő-metszeteinek* nevezzük.



37. ábra.

Ha a sugárrendszer egyik sugarára egyenlő részeket mérünk fel, akkor az osztó-pontokon átvonuló párhuzamos egyenesek a többi sugarat egyenlő részekre osztják.



38. ábra.

E tétel bebizonyítására legyen C (38. ábra) a sugárrendszer középpontja és legyen $CA = AA_1 = A_1A_2$ és $AB \parallel A_1B_1 \parallel A_2B_2 \parallel B_3D_2$; végre: $BD \parallel B_1D_1 \parallel B_2D_2 \parallel A_2C$; akkor: $ABC \triangle \cong BB_1D \triangle \cong B_1B_2D_1 \triangle \cong B_2B_3D_2 \triangle$ (8. §., 17. § és 15. §. 1.); ámde e háromszögek egybevágóságából valamennyi alkotórészük egyenlősége következik, tehát: $CB = BB_1 = B_1B_2 = B_2B_3$. Ugyan ily módon igazolható a tétel több sugárra is.

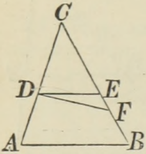
A párhuzamos transversálisok a sugarakat arányos metszetekre bontják. Legyen $AB \parallel DE$ (37. ábra.) akkor: $AD : DC = BE : EC$. E tétel bebizonyitására vegyük fel, hogy CM az AD ét DC közös mértéke, azaz: $AD = m.\ CM$ és $DC = n.\ CM$; akkor: 1. $AD : DC = m : n$. Ha M és a többi osztási ponton át AB, illetőleg DE transversálisokhoz párhuzamosakat húzzunk, akkor azok az előbbi tétel szerint BE és CE egyeneseket szintén m, illetőleg n egyenlő részre osztják, s így: 2. $BE : CE = m : n$; az 1. és 2. alatt foglalt egyenletekből: $AD : DC = BE : CE$; ami bebizonyítandó volt. A nyert aránylatból még a következő helyes aránylatok fejhetők ki:

$$(AD + DC) : AD = (BE + CE) : BE;$$
$$(AD + CD) : CD = (BE + CE) : CE;$$

ezekből:

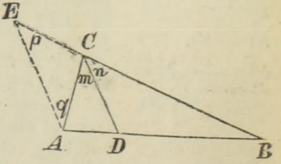
AC : AD = BC : BE; és: AC : CD = BC : CE.

Ha a transversálisok a sugárrendszer sugarait arányos metszetekre osztják, akkor párhuzamosak. Ha: $AD : CD = BE : CE$ (39. ábra), akkor: $AB \parallel DE$. E tétel bebizonyítására tegyük fel, hogy nem DE, hanem valamely DF párhuzamos AB-vel; akkor az előbb bebizonyított tétel szerint: $AD : CD = BF : CF$; ezt összevetve a feltételt kifejező aránylattal, lesz: $BF : CF = BE : CE$ s a belső tagok felcserélése révén: $BF : BE = CF : CE$, ez azonban lehetetlenséget fejez ki, mert egy kisebb mennyiségnek egy nagyobbhoz való arányát egyenlőnek mondja egy nagyobbnak a kisebbhez való arányával. Igy tehát DF nem, csakis DE lehet párhuzamos AB vel.



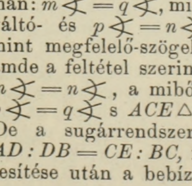
39. ábra.

A háromszög egyik szögének felező-egyenese az átellenes oldalt a szomszédos oldalakkal arányos metszetekre bontja. Ha CD felezi a C szöget (40. ábra), akkor: $AD : BD = AC : BC$. E tétel bebizonyítására legyen: $AE \parallel DC$ és hosszabbítsuk BC-t E pontig; ilyformán: $m\sphericalangle = q\sphericalangle$, mint váltó- és $p\sphericalangle = n\sphericalangle$, mint megfelelő-szögek; ámde a feltétel szerint: $m\sphericalangle = n\sphericalangle$, a miből: $p\sphericalangle = q\sphericalangle$ s $ACE\triangle$ egyenlőszárú, tehát: $AC = CE$. De a sugárrendszerre vonatkozó tételek szerint: $AD : DB = CE : BC$, miből CE nek AC-vel való helyettesítése után a bebízonyítandó tételt kapjuk.



40. ábra.

A sugárrendszer párhuzamos transversálisainak metszetei a sugarak megfelelő metszeteivel arányosak. Legyen a C középponttal bíró sugárrendszerben (41 ábra) $AB \parallel DE$; akkor: $AC : CD = BC : CE$; ha továbbá: $EF \parallel AC$, akkor a B középponttal bíró sugárrendszerben, figyelembe véve, hogy $AF = DE$



41. ábra.

(17. §.) lesz: $AB:DE = BC:CE = AC:CD$; ezt még ily alakban is írhatjuk: $AB:BC:AC = DE:CE:CD$; ami a fent kimondott tételt igazolja.

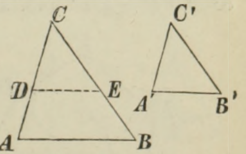
23. §. A háromszögek hasonlósága.

Hasonló idomoknak azokat nevezzük, melyek egyenlő oldalszám mellett egyenlő szögekkel bírnak és megfelelő oldalaik arányai megegyezők. A hasonló idomok alakja egyenlő s így az egybevágó idomok egyszersmind hasonlók is. Ha két idom ugyanazon harmadikkal hasonló, akkor azok egymással is hasonlók. Ha két egybevágó idom közül az egyik valamely harmadik idommal hasonló, akkor a másik is hasonló az utóbbihoz.

Ha valamely háromszögben az egyik oldalhoz párhuzamos egyenest húzunk, akkor a keletkező kisebb háromszög hasonló az eredetihez; mert a szögek mindkettőben egyenlők s az oldalak arányai szintén megegyezők. (21. §.)

Két háromszög hasonlóságát a következő főbb esetek alapján lehet megállapítani:

I. *Két háromszög hasonló, ha az egyik két szöge a másiknak két szögével egyenlő.* E tétel bebizonyítására legyen az ABC és $A'B'C'$ háromszögekben (42. ábra) A szög egyenlő A'-gyel és B szög egyenlő B'-szöggel. Ha $CD = C'A'$ és $DE \parallel AB$, akkor: $D\sphericalangle = A\sphericalangle = A'\sphericalangle$; és $DEC\triangle \cong A'B'C'\triangle$. Ámde: $ABC\triangle \sim DEC\triangle$ s így: $ABC\triangle \sim A'B'C'\triangle$.



42. ábra.

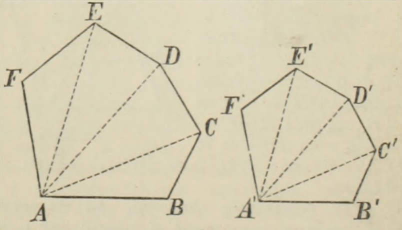
II. *Két háromszög hasonló, ha az egyik két oldalának aránya megegyező a másik két oldalának arányával s a szóban forgó oldalok által bezárt szögek egyenlők.* Legyen: $AC:A'C' = BC:B'C'$ és $C\sphericalangle = C'\sphericalangle$. Az előbbi esetben tett felvételek megtartása mellett: $AC:DC = BC:CE$; vagy: $AC:A'C' = BC:CE$; a feltételt figyelembe véve, lesz: $CE = B'C'$ és: $A'B'C'\triangle \cong DEC\triangle$; de mert: $ABC\triangle \sim DEC\triangle$, ennélfogva: $ABC\triangle \sim A'B'C'\triangle$.

III. *Két háromszög hasonló, ha az egyik két oldalának aránya megegyezik a másik két oldalának arányával és a szóban forgó oldalak közül a nagyobbikkal* *szemben fekvő szögek egyenlők.* Legyen az ABC és $A'B'C'$ háromszögekben: $BC > AC$ és $B'C' > A'C'$; továbbá: $AC : A'C' = BC : B'C'$; végre: $A\sphericalangle = A'\sphericalangle$. Az előbb tett felvételek megtartása mellett: $AC : CD = BC : CE$; a feltételül vett arány tekintetbe vételével: $CE = B'C'$ s így: $CDE\triangle \cong A'B'C'\triangle$. Ámde: $ABC\triangle \sim DEC\triangle$ s ebből folyólag: $ABC\triangle \sim A'B'C'\triangle$.

IV. *Két háromszög hasonló, ha az egyik három oldalának aránya a másik háromszög három oldalának arányával megegyező.* Legyen: $AB : A'B' = AC : A'C' = BC : B'C'$. Az I. tételnél eszközölt felvételek megtartása után: $AC : CD = BC : CE$, vagy: $AC : A'C' = BC : CE$; a föltétel tekintetbe vételével: $CE : B'C'$; továbbá: $AC : CD = AB : DE$; ebből s a föltételből pedig kiderül, hogy: $DE = A'B'$. De akkor: $A'B'C'\triangle \cong CDE\triangle$ és mert: $CDE\triangle \sim ABC\triangle$, ennélfogva: $ABC\triangle \sim A'B'C'\triangle$.

24. §. A sokszögek hasonlósága.

Két hasonló sokszöget megfelelő átlóik segítségével hasonló háromszögekre bonthatunk. Legyen $ABCDEF \sim A'B'C'D'E'F'$ (43. ábra) és bontsuk fel mindkét



43. ábra.

sokszöget az A illetőleg A' szögpontból kiinduló átlókkal háromszögekre, akkor: $ABC\triangle \sim A'B'C'\triangle$; $ACD\triangle \sim A'C'D'\triangle$ és a többi, mert a szögek s a megfelelő oldalak arányai a hasonlóság definitiója szerint megegyezők levén az ABC és $A'B'C'$ háromszögek hasonlóságait a II. eset alapján kimondhatjuk, ámde akkor $ACB\sphericalangle = A'C'B'\sphericalangle$ s így a $C\sphericalangle = C'\sphericalangle$-ből egyenlőket elvéve, egyenlő maradékokhoz jutunk, amiből: $ACD\sphericalangle = A'C'D'\sphericalangle$ és mert: $AC : A'C' =$

$AB : A'B' = CD : C'D'$; ennélfogva: $ACD\triangle \sim A'C'D'\triangle$. Hasonló eljárást követve a többi háromszögpárak hasonlóságait is megállapíthatjuk.

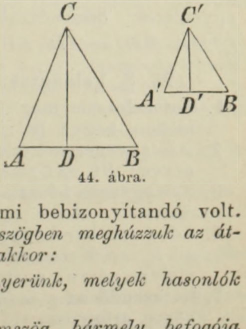
Ha két sokszöget a megfelelő átlók segítségével hasonló háromszögekre bonthatunk, a két sokszög hasonló.

Egyenlő oldalszámmal bíró két szabályos-sokszög hasonló egymással.

Hasonló sokszögek kerületeinek aránya egyenlő bármely két megfelelő oldaluk arányával. Ha $ABCDEF \sim A'B'C'D'E'F'$, akkor: $AB : BC : CD : DE : EF : FA = A'B' : B'C' : C'D' : D'E' : E'F' : F'A'$; ebből: $(AB + BC + CD + DE + EF + FA) : (A'B' + B'C' + C'D' + D'E' + E'F' + F'A') = AB : A'B'$; másként, ha k és k' a két sokszög kerületét jelenti: $k : k' = AB : A'B'$.

25. §. A hasonlósági tételek alkalmazása.

Két hasonló háromszög megfelelő magasságainak és alapjainak aránya egyenlő. Legyen $ABC\triangle \sim A'B'C'\triangle$ (44. ábra) és legyen CD az ABC és $C'D'$ az $A'B'C'$ háromszög magassága, akkor: $CD : C'D' = AB : A'B'$. E tétel bebizonyítására vegyük figyelembe, hogy: $ACD \triangle \sim A'C'D'\triangle$, mert bennük két szögpár egyenlő, ámde akkor: 1. $CD : C'D' = AC : A'C'$, a két adott háromszög hasonlóságából pedig: 2. $AB : A'B' = AC : A'C'$. Az 1. és 2. alatt foglalt egyenletekből: $CD : C'D' = AB : A'B'$, ami bebizonyítandó volt.



44. ábra.

Ha a derékszögű háromszögben meghúzzuk az átfogóhoz tartozó magasságot, akkor:

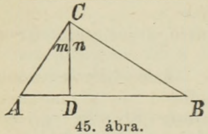
1. *két kis háromszöget nyerünk, melyek hasonlók az adotthoz és egymáshoz;*

2. *a derékszögű háromszög bármely befogója geometriai közép arányos az átfogó és az illető befogónak az átfogón való projectiója között;*

3. *a magasság geometriai középarányos az átfogó két szelete között.*

Lássuk sorban e tételek bizonyítását.

1. Legyen: ABC derékszögű háromszögnek (45. ábra) CD az átfogóhoz tartozó magassága, akkor:



45. ábra.

$ACD\triangle \sim ABC\triangle \sim BCD\triangle$. E három-szögek hasonlósága önkényt következik a szögek egyenlőségéből; ugyanis: ABC és ACD háromszögekben $A\sphericalangle$ közös, $C\sphericalangle$ és $ADC\sphericalangle$ mint derékszögek egyenlők, tehát: $B\sphericalangle = m\sphericalangle$, hasonlóképen és okból hasonló $ABC\triangle$ és $BCD\triangle$ is. Ezekből pedig a kis háromszögek hasonlósága következik.

2. $ACD\triangle \sim ABC\triangle$. Ennek folytán: $AD : AC = AC : AB$, miből: *a)* $\overline{AC}^2 = AB \,.\, AD$. — $BCD\triangle \sim ABC\triangle$ miből: BD : BC = BC : AB; innen: *b)* $\overline{BC}^2 = AB.\ BD$. Az *a)* és *b)* alatt foglalt egyenletek a második tételt fejezik ki.

3. $ACD\triangle \sim BCD\triangle$. Ennek folytán: $AD : CD = CD : BD$; $\overline{CD}^2 = AD \,.\, BD$. Ezen egyenlet a harmadik tétel igazolását fejezi ki.

Bármely derékszögű háromszögben az átfogó négyzete a két befogó négyzetének összegével egyenlő. (Pythagoras tétele.) A 2. pontban *a)* és *b)* alatt található egyenletek összeadásából: $\overline{AC}^2 + \overline{BC}^2 = AB \,.\, (AD + BD) = AB \,.\, AB$; azaz: $\overline{AC}^2 + \overline{BC}^2 = \overline{AB}^2$.

26. §. Feladatok a harmadik részhez.

1. Hosszabítsuk meg AB egyenest C pontig olymódon, hogy: $BC : AC = : 5 : 12$.
2. AB egyenesen keressünk olyan C pontot, melyre nézve: $BC : AC = 5 : 8$.
3. AB egyenes felosztandó előbb 7, majd 15 egyenlő részre.
4. Adva van három egyenes, melyek mérték számai: a, b, c. Keressünk oly x negyedik egyenest, melyre nézve: a : b = c : x.
5. Keresendő az a = 5, b = 7 egyenesek geometriai közép arányosa.
6. Mennyi a geometriai közép-arányos a és b között, ha: $a = 2{\cdot}8$; b = 4·2?
7. Az $ABC\triangle$ oldalainak mértékszámai: $a = 15{\cdot}6$ m., $b = 18{\cdot}2$ m.; $c = 20$ m., az $A'B'C'\triangle$-ben $a' = 3{\cdot}8$ m. Mennyi b' és c', ha: $ABC\triangle \sim A'B'C'\triangle$?

8. A falu tornyának árnyéka 56·8 m.; ugyanakkor a 2 m.-es rudé 3 m. Mily magas a torony?
9. Mekkora a derékszögű háromszög átfogójához tartozó magasság, ha az átfogó szeletei: 5·8 m. és 9·6 m.?
10. A derékszögű háromszög átfogójának hossza 56 m. Mily nagyok a befogók és a magasság, ha az egyik befogó projectiója az átfogón 8·2 m?
11. A derékszögű háromszög magassága, 7·5 m.; az egyik befogó projectiója az átfogón 8·6 m. Mekkorák a háromszög oldalai?
12. A befogók rendre 5·24 m. és 7·16 m. Mekkora az átfogó és a hozzátartozó magasság?
13. Az átfogó 82·75 m., az egyik befogó 18·24 m. Mily nagy a másik befogó és az átfogóhoz tartozó magasság?
14. Mennyi az egyenlő-oldalú háromszög magassága, ha egyik oldala 6 m.?
15. Az egyenlő oldalú háromszög magassága 8 m.; mennyi egy oldala?
16. Valamely háromszögben a b és c oldal felezőpontját összekötő egyenes 3·7 m. Mennyi a oldal?
17. Mily nagy a b és c oldalak felezőpontjait összekötő egyenes, ha $a = 4$ m.?
18. $ABC \triangle$ magasságaiból rajzoljunk háromszöget, milyen összefüggés van a két háromszög között?
19. Valamely háromszög oldalai: $a = 5·2$ m., $b = 4·3$ m., $c = 6·5$ m. Mily nagy szeletekre osztja a c szög felező-egyenese az átellenes oldalt?
20 Mennyi az egyenlőszárú háromszög magassága, ha alapja 8 m., egyik szára 15 m.?
21. Mennyi a négyzet átlója, ha egyik oldala 3·25 m.?
22. Mekkora a rhombus egy oldala, ha átlói 2·6 és 5·2 m. hosszúk?
23. Az oblongum átlóját keressük, ha a szomszédos oldalak hossza 3·8 és 7·5 m.
24. Az $ABC \triangle$ BC oldalával párhuzamos egyenes AC-t 2 : 3 arányban osztja; mily nagyok AB oldal szeletei, ha $AB = 5·25$ m.?
25. A derékszögű háromszög egyik befogója 4·5, magassága 3·6 m. Mekkora a két ismeretlen oldal?
26. Keressük a derékszögű háromszög ismeretlen oldalait, ha magassága 0·8 m.; az egyik befogó projectiója az átfogón 1·5 m.

27. *C* szög felezője az átellenes oldalt 5 : 7 arányban osztja. Mily nagy a másik két oldal, ha azok összege 288 m.?
28. A derékszögű háromszög befogói: 3 m. és 5 m. Keressük a három szögfelező hosszát.
29. A derékszögű háromszög befogói: 3 m. és 5 m. Keressük a szögfelezők-képezte oldalmetszetek hosszát.
30. Ugyanezen adatokból keressük meg a három középvonal hosszát.
31. Oldjuk meg a három utolsó feladatot, ha a 3·5 m. hosszú átfogó és a hozzátartozó 0.68 m. hosszú magasság van adva.
32. Valamely háromszög oldalai rendre: 3 m., 5 m., 6 m. Mily nagy szeletekre bontják a szögfelezők az átellenes oldalakat?
33. Ugyanezen adatok mellett mily nagyok a szögfelezők?
34. Mekkorák a magasságok által képezett oldalmetszetek?
35. Mekkorák a magasságok?
36. Mekkorák a középvonalak?

Bizonyítsuk be a következő tételek helyességét:

37. A háromszög bármely két oldala a hozzájuk tartozó magasságokkal fordítva arányos.
38. Valamely háromszög magasságainak metszése folytán minden magasság két szeletre bomlik. Ugyanazon magasságok szeleteinek szorzatai egyenlők egymással.
39. Két egyenes geometriai középarányosa kisebb, mint azok arithmetikai középarányosa.
40. A derékszögű háromszög egyik befogója geometriai közép arányos az átfogó és másik befogó összege és különbsége közt.
41. A szabályos ötszög két egymást metsző átlóját meghúzván, mindenik átlónál a hosszabb szelet geometriai középarányos az egész átló és a rövidebb szelet között s egyszersmind egyenlő a szabályos ötszög egy oldalával.
42. Mily hosszúak a szabályos ötszög két nem szomszédos oldalának a metszési pontig terjedő meghosszabbításai?

43. Két háromszög, melyeknek megfelelő oldalaik egymáshoz párhuzamosak, vagy egymásra merőlegesek, hasonló egymáshoz.
44. Két derékszögű háromszög, melyekben az egyik hegyes szög, vagy két egyenlőszárú háromszög, melyekben az alappal átellenes szög egyenlő nagy, egymáshoz hasonló.
45. Ha a derékszögű háromszög átfogójának végpontjaira emelt merőlegeseket addig hosszabbítjuk, amíg az átellenes befogókat metszik, akkor: az átfogó négyzete egyenlő a befogóknak meghosszabbításaikkal való szorzataik összegével; továbbá a befogók szorzata egyenlő meghosszabbításaik szorzatával.
46. Bármely négyszögben az oldalak felezőpontjait összekötve parallelogrammát nyerünk.
47. Az egyenlő-oldalú háromszög szögpontjain át párhuzamosokat húzva az átellenes oldalokhoz, oly egyenlő-oldalú háromszöget nyerünk, melynek oldalai kétszer akkorák, mint az adottéi.
48. A háromszögek középvonalai egy pontban jönnek össze (súlypont), mely minden középvonalnak a megfelelő oldaltól számítva a harmadrészébe esik.
49. Bármely parallelogrammában az átlók négyzetének összege az oldalak négyzeteinek összegével egyenlő.
50. Ha valamely háromszög magasságainak talppontjait összekötjük, az eredeti háromszög szögpontjai felé három kis háromszög keletkezik, melyek mindenike hasonló az eredetihez. Mutassuk ki, hogy az adott magasságok a talpponti háromszög szögfelezői.

Végezzük a következő szerkesztéseket:

51. Rajzoljunk adott háromszöghöz, adott magassággal biró hasonló háromszöget.
52. Szerkeszszünk egyenlőszárú háromszöget, ismerve annak magasságát s alapjának az egyik szárhoz való arányát.
53. Rajzoljunk derékszögű háromszöget, ismerve az átfogót és a két befogó arányát.
54. Szerkeszszünk háromszöget, ismerve a szögeket és a kerületet.
55. Háromszög szerkesztendő a három magasságból.

56. Háromszög szerkesztendő az alap és az oldalak arányának ismeretében.
57. Végezzük a szerkesztést, ha az alap és a három oldal aránya ismeretes.
58. Keressük adott szög szárai között azon pontok helyét, melyeknek a száraktól vett távolságaik aránya ismeretes.
59. *P* kerületű adott sokszöghöz, melynek egyik oldala *AB*, hasonló sokszög szerkesztendő.
60. Háromszöget szerkeszszünk, ismerve annak alapját, az alap mellett fekvő egyik szögét és a másik két oldal arányát.

NEGYEDIK RÉSZ.

A síkidomok területe.

27. §. A derékszögű négyszög területe.

A sík minden oldalról határolt részét *területnek* nevezzük. *A terület egysége oly négyzet, melynek oldalait a hosszúság egységei alkotják.* Mivel hosszúság-egységűl a méter, annak többszöröse, vagy része szolgál, ennélfogva területegység lehet: a négyzet-myriaméter, a négyzet-kilométer, a négyzet-hectométer, a négyzet-decaméter, a négyzet-méter, a négyzet-deciméter, a négyzet-centiméter és a négyzet-milliméter. Nagyobb területeket nagyobb, kisebb területeket kisebb egységekben fejezünk ki.

A területeknek olyképen való mérése, mint a a távolságoké, hogy t. i. az egységet annyiszor mérjük fel a meghatározandó területre a hányszor lehet: nehéz, sőt a legtöbb esetben kivihetetlen. Módját kell tehát ejtenünk, hogy a területek mérését oly egyenesek mérésére vezessük vissza, a melyektől a síkidomok területének nagysága függ.

Ezek az egyenesek általában a síkidomok *alapjai* és *magasságai*. A derékszögű négyszög két szomszédos oldala közül egyik az alap, másik a magasság. A ferdeszögű parallalegrammának bármely oldalát alapúl vehetjük, s akkor annak magasságát azon merőleges szolgáltatja, mely az alap és az átellenes oldal közti távolságot méri. A háromszög bármelyik oldala lehet alap s a magasság az alappal szemben fekvő szögpontnak merőleges távolsága az alaptól. A trapéz párhuzamos oldalai alapul s azon merőleges vonal, mely e két oldal távolságát méri, magasságúl szolgál.

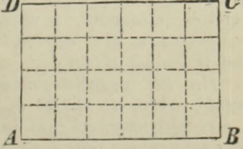
Az egyenlő területű idomokat *egyenlőknek* nevezzük. Az egybevágó idomok egyszersmint egyenlők is. A síkidomok egyenlősége azok alakjától független. Egy háromszög egyenlő lehet bármilyen fajta négyszöggel, vagy sokszöggel. Ilyformán az *egybevágó* idomoknak *alakra* és *nagyságra*; a *hasonlók*nak csak *alakra;* az *egyenlők*nek pedig csak *nagyságra* nézve kell megegyezniök.

Egyenlő nagysággal biró síkidomok oly két párhuzamos egyenes közé helyezhetők, melyeknek egymástól való távolságuk a közös magasság.

A síkidomok területeinek meghatározására legczélszerűbben a derékszögű négyszögből indulhatunk ki. *A derékszögű-négyszög területe alapjának és magasságának szorzatával egyenlő.* Másszóval: a derékszögű-négyszög területének meghatározására elég annak alapját és magasságát hosszúság-egységekben kifejezni, akkor ezen mértékszámok szorzata a derékszögű négyszögben foglalt egység-négyzetek számát adja.

Hogy e tétel helyességét igazoljuk, legyen $ABCD$ (46. ábra) a megmérendő derékszögű négyszög. Ha a hosszúság-egység AB alapra a-szor, AD magasságra b-szer vihető fel, akkor a területegységetaz alap irányában a-szor, a magasság irányában b-szer helyezhetjük el, tehát összesen: ab-szer. Ha a derékszögű négyszög területét t jelenti, akkor:

$$t = a \,.\, b.$$



46. ábra.

A négyzet területét nyerjük, ha alapjának mérték számát második hatványra emeljük.

Két derékszögűnégyzög területe úgy aránylik egymáshoz, mint magasságuk és alapjuk szorzatai. Ha t az a alappal és b magassággal, t_1 pedig az a_1 alappal és b_1 magassággal biró derékszögű négyszög területe, akkor:

$$t = a \,.\, b \text{ és } t_1 = a_1 \,.\, b_1\,;$$

innen:

$$t : t_1 = ab : a_1\, b_1 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad 1)$$

Egyenlő alappal biró derékszögű négyszögek területeinek aránya a különböző alapok arányával egyenlő. Legyen az 1. alatti aránylatban $b = b_1$; akkor:

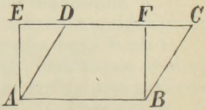
$$t : t_1 = a : a_1 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad 2)$$

Egyenlő alappal biró derékszögű négyszögek területeinek aránya a különböző magasságok arányával egyenlő. Ha az 1) alatt foglalt aránylatban $a = a_1$, akkor:

$$t : t_1 = b : b_1 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad 3)$$

28. §. A parallelogramma és a háromszög területe.

Bármely parallelogramma területe oly derékszögű-négyszög területével egyenlő, melynek vele egyenlő alapja és magassága van. E tétel igazolására emeljünk AB-re merőlegeseket az $ABCD$ parallelogramma (47. ábra) A és B szögpontjaiban, akkor oly $AEFB$ derékszögű-négyszöget nyerünk, melynek alapja és magassága az adott parallelogrammáéval egyenlő, de egyenlő egyszersmind a két idom területe is, mert $ABCD$ parallelogramma össze van téve BCF háromszögből és $ADFB$ trapézből; $AEFB$ oblongum pedig AED háromszögből és $ADFB$ trapézből. A trapéz mindkettőben előfordul, a szereplő két háromszög pedig egybevágó s így egyenlő is, miáltal a kimondott tétel igazolást nyert.

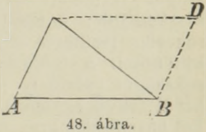


47. ábra.

Ha két parallelogramma alapja és magassága egyenlő, akkor területeik is egyenlők. A 26. §. szerint az egyenlő magassággal biró síkidomokat ugyanazon két párhuzamos egyenes közé helyezhetjük, ennélfogva tehetjük ezt a szóban forgó két parallelogrammával is; ámde akkor az előbbi tétel szerint mindenik parallalogramma vele egyenlő alappal és magassággal biró derékszügű négyszöggé alakítható. Nyerünk tehát két derékszögű négyszöget, melyeknek egyenlő alapjuk és magasságuk s így (26. §.) egyenlő területük is van; de ha e két idom egyenlő, akkor egyenlők lesznek az adott parallelogrammák is.

A parallelogramma területe alapjának és magasságának szorzatával egyenlő, mert a parallelogramma területe egyenlő az ugyanakkora alappal és magassággal biró derékszögű négyszög területével, már pedig ezt a most kifejezett tétel szerint nyerjük.

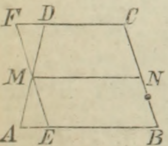
A háromszög területe alapjának és magasságának fél szorzatával egyenlő. Legyen az ABC háromszög (48. ábra) területe t, alapja $AB = a$; magassága m, akkor: $t = \frac{a \,.\, m}{2}$. E tétel bebizonyítására húzzuk: $CD \parallel AB$ és $BD \parallel AC$ egyeneseket, akkor a háromszöggel egyenlő alapú és magasságú $ABCD$ parallelogrammát nyerjük, melynek területe az előbbi pont szerint $a \,.\, m$ Ámde $ABCD$ két kongruens s így egyenlő területű háromszögből áll (17. §), melyek egyikének területe az egész parallelogramm területének felével egyenlő; így: $ABC = t = \frac{a \,.\, m}{2}$.



48. ábra.

29. §. A trapéz és a sokszög területe.

A trapéz területét megkapjuk, ha párhuzamos oldalalainak fél összegét (középvonalát, 18. §.) *magasságával megszorozzuk.* Legyen az $ABCD$ trapézben (49. ábra) $AM = DM$, továbbá $EF \parallel BC$ és végül $MN \parallel AB \parallel CF$. Az $ABCD$ trapéz $EBCDM$ ötszögből és AEM háromszögből van összetéve; viszont $BCFE$ parallelogramma részei ugyanazon ötszög és DFM háromszög; ámde: $AEM \triangle \cong DFM \triangle$, a miből következik, hogy az adott trapéz egyenlő területű a $BCFE$ parallelogrammával. De a parallelogramma területét s így a trapézét is megkapjuk, ha a parallelogramma $BE = MN = \frac{AB + CD}{2}$ alapját a trapézzel közös magasságával szorozzuk. Ilymódon a kimondott tétel igazolást nyert és $t = \frac{AB + DC}{2} \,.\, m.$



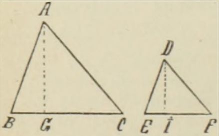
49. ábra.

Az elmondattakból következik, hogy a trapéz egyenlő területtel bír minden olyan paralellogrammával, melynek egyik oldala a trapéz középvonalával, magassága pedig a trapéz magasságával egyenlő.

A *sokszögek területének* meghatározásánál kétféle módon járhatunk el és pedig először úgy, hogy a sokszöget az egyik szögpontjából kiinduló átlók segítségével háromszögekre bontjuk, ezen háromszögek területeit a már megismert eljárás szerint kiszámítjuk; e területek összege nyílvánvalólag a sokszög területét adja; vagy másodszor — amint különösen a földmérésnél szokásos — felbontjuk a sokszöget valamely átlójához, vagy valamely rajta kívül fekvő egyeneshez induló merőleges egyenesekkel háromszögekre, parallelogrammákra és trapézekre s ezek területeinek összegét képezzük a sokszög területének nyerésére.

30. §. A hasonló idomok területeinek összefüggése.

A hasonló háromszögek területeinek aránya egyenlő bármely két megfelelő oldaluk négyzetének arányával.



50. ábra.

Ha $ABC\triangle \sim DEF\triangle$ (50. ábra) és AG illetőleg DI a két háromszög magassága, akkor:

$$ABC = \frac{1}{2} \,.\, BC \,.\, AG\,; \quad \text{és}$$

$$DEF = \frac{1}{2} \,.\, EF \,.\, DI\,;$$

honnan:

$$\frac{ABC}{DEF} = \frac{BC\,.\,AG}{EF\,.\,DI}.$$

Ámde a két háromszög hasonlóságából folyólag:

$$\frac{BC}{EF} = \frac{AB}{DE}; \quad \text{és:} \quad \frac{AG}{DI} = \frac{AB}{DE}.$$

Szorozván a két egyenletet, lesz:

$$\frac{BC\,.\,AG}{EF\,.\,DI} = \frac{\overline{AB}^2}{\overline{DE}^2} \quad \text{és:} \quad \frac{ABC}{DEF} = \frac{\overline{AB}^2}{\overline{DE}^2},$$

ami bebizonyítandó volt.

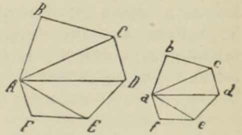
A hasonló sokszögek területeinek aránya egyenlő bármely két megfelelő oldaluk négyzetének arányával.

Legyen: $ABCDEF \sim abcdef$ (51. ábra). A most megismert tétel szerint:

$$\frac{ABC}{abc} = \frac{\overline{BC}^2}{\overline{bc}^2}; \quad \frac{ACD}{acd} = \frac{\overline{CD}^2}{\overline{cd}^2};$$

$$\frac{DAE}{dae} = \frac{\overline{DE}^2}{\overline{de}^2};$$

$$\frac{AEF}{aef} = \frac{\overline{EF}^2}{\overline{ef}^2};$$



51. ábra.

a két sokszög hasonlóságából pedig:

$$\frac{BC}{bc} = \frac{CD}{cd} = \frac{DE}{de} = \frac{EF}{ef};$$

$$\text{és:} \quad \frac{\overline{BC}^2}{\overline{bc}^2} = \frac{\overline{CD}^2}{\overline{cd}^2} = \frac{\overline{DE}^2}{\overline{de}^2} = \frac{\overline{EF}^2}{\overline{ef}^2};$$

és igy:

$$\frac{ABC}{abc} = \frac{ACD}{acd} = \frac{DAE}{dae} = \frac{AEF}{aef}.$$

Az aránylatok természete szerint pedig:

$$\frac{ABC + CAD + DAE + AFE}{abc + cae + dae + afe} = \frac{ABC}{abc} = \frac{\overline{BC}^2}{\overline{bc}^2};$$

azaz:

$$ABCDEF : abcdef = \overline{BC}^2 : \overline{bc}^2,$$

ami bebizonyítandó volt.

A most megismert tételek jól felhasználhatók *Pythagoras*-tételének levezetésére. Ha a 45. ábra hasonló-háromszögeire a most levezetett első tételt alkalmazzuk, lesz:

$$ACD : ABC = \overline{AC}^2 : \overline{AB}^2;$$

$$\text{és:} \quad BCD : ABC = \overline{BC}^2 : \overline{AB}^2;$$

innen:

$$\overline{AB}^2 . ACD = \overline{AB}^2 . ABC;$$

$$\overline{AB}^2 . BCD = \overline{BC}^2 . ABC$$

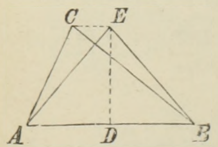
$$\text{összeadva:} \quad \overline{AB}^2 .(ACD + BCD) = ABC.(\overline{AC}^2 + \overline{BC}^2)$$

mivel: $$\mathrm{ACD} + \mathrm{BCD} = \mathrm{ABC};$$
ennélfogva *ABC*-vel rövidítvén, lesz:
$$\overline{AB}^2 = \overline{AC}^2 + \overline{BC}^2.$$

Az eddig tanultak alapján könnyű bebizonyítani, hogy a derékszögű-háromszög oldalaira emelt oly hasonló sokszögek területeire nézve, melyeknek megfelelő oldalai *AB, AC* és *BC* hosszúságúak: $t = t_1 + t_2$; feltéve hogy: t az átfogóra t_1 és t_2 pedig a két befogóra emelt sokszög területével egyenlő.

31. §. Terület átalakítások.

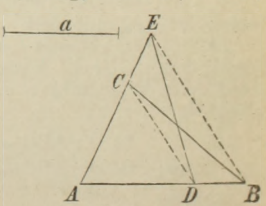
ABC háromszög (52. ábra) *egyenlő területű egyenlő-szárú háromszöggé alakítandó.* Megkeressük *AB* alap *D* felezőpontját, abban *AB*-re merőlegest állítunk s azt addig hosszabbítjuk, mig a *C* szögponton át *AB*-hez húzott párhuzamost *E* pontban metszi. *E* összekötve *A* és *B*-vel a kivánt háromszögre vezet, mert egyenlő alapja és magassága s így területe van az adottéval s egyszersmind egyenlő szárú is.



52. ábra.

ABC háromszög egyenlő területű oly háromszöggé alakítandó, melyben az adott BAE szög bentfoglaltatik. A szerkesztés menete kitűnik az 52. ábrából.

ABC háromszög egyenlő területű adott alappal biró háromszöggé alakítandó át. Legyen *ABC* (53. ábra) az adott háromszög és *a* az új alap. Az utóbbit felmérjük *AB*-re *D*-ig, *D*-t összekötjük *C*-vel és *B*-n át az *AC* meghosszabbításáig terjedő *BE* ∥ *CD* egyenest szerkesztjük, akkor *ADE* lesz a keresett háromszög, melynek az eredetivel való egyenlőségét az egyenlő *(CD)* alappal és magassággal biró *BCD* és *CDE* △-ek segélyével igazolhatjuk. — Ugyanezen ábra megtanít bennünket arra is, hogyan kell az *ADE* △-et

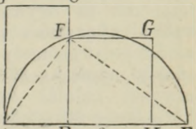


53. ábra.

egyenlő területű hosszabb (AB) alapú háromszöggé átalakítani.

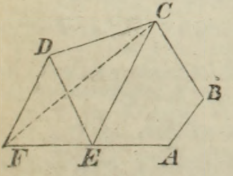
Végezzük még a következő szerkesztéseket: *Adott háromszög egyenlő területű derékszögű háromszöggé alakítandó. — Adott háromszög adott magassággal biró egyenlő területű háromszöggé alakítandó. — Adott háromszöget alakitsunk át egyenlő területű parallelogrammává vagy derékszögű négyszöggé és viszont, továbbá parallelogrammát derékszögű négyszöggé, vagy derékszögű négyszöget adott szöget tartalmazó parallelogrammává.*

A derékszögű négyszög egyenlő területű négyzetté alakítandó. Legyen $ABCD$ (54. ábra) az adott derékszögű négyszög; képezvén az $AB + BC = AE$ egyenest, arra félkört rajzolunk, mely BC-t F-ben metszi; F pont A és E-vel összekötve AFE derékszögű háromszögre vezet, melyben BF magasság geometriai középarányos AB és $BE = BC$ között, azaz: $BF^2 = AB \cdot BC$. Szavakban kifejezve, a BF fölé alakított négyzet egyenlő területű $ABCD$ oblongummal.



54. ábra.

ABCDE sokszög (55. ábra) *egygyel kevesebb oldalú, egyenlő területű sokszöggé alakítandó át.* CE átlót meghúzzuk és az AE meghosszabbítását F pontban metsző $DF \parallel CE$ egyenest szerkesztjük; ha C és F pontokkal összekötjük, a nyert $ABCF$ sokszög egygyel kevesebb oldalt tartalmaz, de oly nagy területű, mint az adott sokszög. A bizonyítás CDE és CEF háromszögek egyenlősége alapján történik.



55. ábra.

32. §. Alapműveletek területekkel.

Négyzet szerkesztendő, mely két adott négyzet összegével egyenlő. *Pythagoras*-tételét használjuk fel a szerkesztésre. Ha ugyanis a két adott négyzet oldalait egy felvett derékszög száraira felmérjük s az így nyert pontokat összekötjük, a keletkező derékszögű háromszög átfogója lesz a keresett négyzet oldala. — E szerkesztés ismételt alkalmazása utján a következő feladat megfejtéséhez jutunk: Négyzet alakítandó, mely több adott négyzet területének összegével egyenlő.

Keressük azon négyzet egy oldalát, mely két adott négyzet különbségével egyenlő. Oly derékszögű háromszöget szerkesztünk, melynek egyik befogója a a kisebbik adott négyzet egyik oldalával, az átfogója pedig a nagyobbik adott négyzet egyik oldalával egyenlő.

Négyzet szerkesztendő, mely kétszer, háromszor stb. nagyobb egy adott négyzetnél. A szerkesztés *Pythagoras* tételének az egyenlő-szárú derékszögű háromszögre való alkalmazása révén eszközölhető. Összefügg evvel az a feladat is, mely fél-akkora négyzet szerkesztését tűzi ki, mint az adott négyzet; mert akkor az adott négyzet oldalát kell az egyenlőszárú derékszögű háromszög átfogójául vennünk.

Adott háromszög egyik szögpontjából kiinduló egyenesekkel egyenlő részekre osztandó. A szögponttal átellenes oldalt annyi egyenlő részre bontjuk, a a hány részre a háromszög osztása végzendő s az osztó pontokat összekapcsoljuk a szögponttal.

33. §. Feladatok a negyedik részhez.

1. Számitsuk ki a négyzet területét, ha annak átlója 56 m.; 45 m.; 72 m.
2. Keressük a derékszögű háromszög területét, ha annak befogói: $b = 15$, $c = 18$ m.; $b = 0{\cdot}48$ m., $c = 2{\cdot}3$ m.; $b = 5\frac{3}{4}$ m., $c = 7\frac{1}{8}$ m.
3. Keressük a derékszögű háromszög területét, ha annak átfogója (a) és befogója (b) ismeretes; $a = 697$ m., $b = 528$ m.; $a = 21\frac{4}{9}$ m., $b = 18\frac{2}{3}$ m.
4. Keressük a derékszögű háromszög területét, ha annak befogója 181 m., az átfogójához tartozó magasság 19 m.
5. Mennyi a derékszögű háromszög területe, ha az átfogóhoz tartozó magasság azt 26 és 104 m. hosszú szeletekre bontja.

6. A derékszögű háromszög területe 92·4 m.^{2}, átfogója 21 m., mennyi a két befogó?
7. Adva van az egyenlő oldalú háromszög a oldala; mennyi a területe?
8. A négyzet átlójának és oldalának különbsége 2·4 m. Mennyi a négyzet területe?
9. Egy háromszög, egy parallelogramma és egy trapéz egyenlő: 45·24 m. alappal és 8·2 m. magassággal bír; a trapéz másik párhuzamos oldala 40·5 m. Mennyi mindenik területe?
10. Mily nagy a fenti példában előforduló idomokkal egyenlő területű négyzetek egy-egy oldala?
11. Mily hosszúnak kell a 64 növendék befogadására készülő 6·5 m. széles teremnek lenni, ha egy növendékre 0·75 m.^{2} területet számítunk.
12. Az egyenlő-oldalú háromszög oldalának és magasságának összege van adva; mennyi a területe?
13. A négyzet átlójának és oldalának összege 0·24 m.; mennyi a területe?
14. A trapéz párhuzamos oldalai: 17·32 m., 27·65 m., magassága 3·24 m.; mennyi a területe?
15. A trapéz párhuzamos oldalainak hossza: 612 m. és 417 m., egyik nem párhuzamos oldala 376 m., s az ezen oldal és az alap által bezárt szög 45^0. Mennyi a trapéz területe?
16. Mily nagy azon háromszög területe, melyet az egyenlőszárú trapéz egyenlő oldalainak megnyújtása által nyerünk; feltéve, hogy az egyenlő oldalak 6, a nem egyenlők 5·5 és 7. m. hosszúak?
17. Egy trapéz területe 18·81 m.^{2}, párhuzamos oldalai 5·5 és 4·4 m. hosszúak; mekkora a trapéz magassága?
18. A derékszögű háromszög befogóinak összege 2·36 m., területe 6·96 m.; mekkorák az oldalai?
19. Mennyi az egyenlőszárú trapéz területe, ha egyik párhuzamos oldala 5·2 m.; a nem párhuzamos oldal 5 m., a magasság 4·2 m.?
20. Két háromszög oldalainak aránya 5 : 7; az egyik területe 12 m.^{2}; mennyi a másik területe?
21. Mennyi a rhombus egy oldala, ha magassága 12·4 m.; területe 473·68 m.^{2}?
22. Adva van a trapéz területe (t), egyik párhuzamos oldala (a) és magassága (m); mekkora a másik párhuzamos oldala?

23. A trapéz két párhuzamos oldalából (a, b) és területéből (t) a magasság számítandó ki.
24. A trapéz területe egyenlő oly négyzet területével, melynek egy oldala 2·6 m., a trapéz párhuzamos oldalai: 1·6 m. és 2·2 m.; mekkora a magassága?
25. Mekkora azon trapéz területe, melynek középvonala 5 m., egyik nem párhuzamos oldala 3·8 m.; a középvonal és az adott oldal által bezárt szög 60°?

Bizonyítsuk be a következő tételeket:

26. Minden a parallelogramma átlóinak metszési pontjain átmenő egyenes felezi a parallelogramma területét.
27. A parallelogramma átlójának egyik pontján át párhuzamosokat húzva az oldalakhoz, a származó négy parallelogramma közül azok, melyeket az átló nem szel át, egyenlők.
28. Bármely négyszög oldalainak felező pontjai oly parallelogramma szögpontjai, melynek területe az adott négyszög felével egyenlő.
29. Ha valamely négyszögben az átlók egymásra merőlegesek s a négyszög oldalai rendre a, b, c, d; akkor: $a^2 + c^2 = b^2 + d^2$.
30. A parallelogramma átlóinak négyzetéből képezett összeg egyenlő az oldalak négyzeteinek összegével.
31. Az egyenlőoldalú háromszög belsejében választott pontból az oldalakra húzott merőlegesek összege a magassággal egyenlő.
32. A háromszög középvonalainak metszési-pontját a háromszög szögpontjaival összekötve három egyenlőterületű kis háromszöget nyerünk.
33. Ha két háromszögben egy egyenlő szög van, akkor a háromszögek területeinek aránya azon oldalak szorzatainak arányával egyenlő, melyek az egyenlő szöget bezárják.
34. A parallelogramma belsejében felvett pontot a négy szögponttal összekötve, oly négy háromszöget nyerünk, melyek közül két átellenes területének összege a másik kettőével egyenlő,
35. Az oly négyszög területe, melyben az átlók egymásra merőlegesek, az átlók fél-szorzatával egyenlő.
36. Ha a háromszög oldalai: a, b és c és: $a + b + c = 2s$, akkor a terület: $t = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$.

37. Mennyi ezen képlet alapján az a oldalú egyenlőoldalú háromszög területe?
38. A trapéz területe egyenlő az egyik nem párhuzamos oldalnak és azon távolságnak szorzatával, melyben az átellenes oldal felezőpontja ez oldaltól van.

Végezzük a következő szerkesztéseket:

39. Szerkeszszünk adott derékszögű négyszöggel, parallelogrammával, háromszöggel, vagy trapézzel egyenlő területű négyzetet.
40. Négyzet szerkesztendő, mely adott négyzet $^5/_6$ részével egyenlő.
41. Adott négyzettel egyenlő területű oblongumot alakítsunk, melynek alapja adva van.
42. Adott háromszög $^4/_9$ részével egyenlő területű, adott alappal bíró oblongumot szerkeszszünk.
43. Alakítsunk háromszöget a három magasságból.
44. Ismeretesek a háromszög szögei és kerülete. Szerkeszszük a háromszöget.
45. Egyenlőszárú-háromszög egyenlő kerületű oblongummá alakítandó.
46. Egyenlőtlen oldalú háromszög egyenlő területű, egyenlő-oldaluvá alakítandó.
47. Sokszög egyenlő területű háromszöggé alakítandó.
48. Oblongum alakítandó, ha annak területe és oldalainak aránya ismeretes.
49. Ugyanazon idom nyerendő, ha a terület mellett ismeretes az oldalak összege, vagy különbsége.
50. Háromszög szerkesztendő: ha ismerjük annak egy oldalát, a vele átellenes szöget és a területet?
51. Egyenlőtlenoldalú háromszög egyenlőszárúvá alakítandó oly módon, hogy az utóbbi nem egyenlő szöge akkora legyen, mint a háromszög egy szöge.
52. Négyzet szerkesztendő, melynek területét a következő kifejezés szabja meg: $\frac{3}{5} a^2 - \frac{2}{3} b^2 - \frac{4}{9} c^2 + 3 d^2$ (a, b, c, d adott egyenesek).
53. Adott háromszög területe egyik szögpontjából kiinduló egyenesekkel 3 : 5 : 7 arányban felosztandó.
54. Adott háromszög egyik oldalával párhuzamos egyenesekkel 4 egyenlő részre osztandó.

55. Adott trapéz területe 3 : 5 : 7 arányban felosztandó.
56. Adott trapéz alapjaival párhuzamos egyenesekkel 5 egyenlő részre osztandó.
57. Négyszög egyik szögpontjából kiinduló egyenessel két egyenlő részre osztandó.
58. Négyszög egyik oldalán adott pontból kiinduló egyenessel két egyenlő részre osztandó.
59. Adott háromszög belsejében keressünk oly pontot, mely a szögpontokkal összekötve a háromszöget három egyenlő részre bontja.
60. A háromszög kerületén adott két pontból kiinduló két egyenessel a háromszög három egyenlő területre bontandó.
61. A háromszög egyik oldalára merőleges egyenesekkel három egyenlő részre bontandó.
62. Parallelogramma *a* oldalú rhombussá alakítandó.
63. Parallelogramma *A* szögpontjából 4 egyenlő részre osztandó.
64. Háromszor akkora háromszög alakítandó, mint *ABC* adott háromszög.
65. Háromszög belsejében adott pontból 4 egyenlő részre bontandó.
66. Egy sokszög egyik szögpontjából kiinduló tört vonal által felezendő.

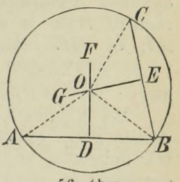
ÖTÖDIK RÉSZ.

A kör.

34. §. A kör és az egyenes.

A középpont és sugár teljesen meghatározza a kör helyzetét, alakját és nagyságát. Egy adott ponton át végtelen sok kör szerkeszthető. Ilyformán egy pont nem elég a kör meghatározására. Épen oly kevéssé határozza meg a kört két adott pont is, mert ha a két adott pontot összekötjük és az összekötő egyenesre felezőpontjában merőlegest állítunk ez geometriai helye lesz ama végtelen nagyszámú kör centrumainak, melyek az adott pontokon áthaladnak.

Három nem egy egyenesben fekvő pont teljesen meghatározza a kört; más szóval: három ily ponton át csakis egyetlen egy kör fektethető. Legyen A, B, C (56. ábra) három nem egyenesben fekvő pont; kössük össze A és B, majd B és C pontokat s az AB és BC egyenesek felező pontjaira emeljük DO, illetőleg EO merőlegeseket, akkor DO geometriai helye az A és B, EO pedig a B és C pontokon áthaladó körök centrumainak a kettő O metszési pontja tehát oly kört határoz meg, melynek kerületén egyidejüleg A és B, továbbá B és C is rajta-fekszenek. Mivel DO és EO egyenesek csakis egy közös ponttal bírhatnak (2. §.) ennélfogva csakis egyetlen oly kör létezik, mely egyidejüleg mind a három adott ponton áthalad



56. ábra.

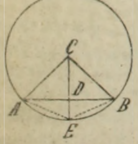
Ha valamely egyenesnek a kör centrumához képest elfoglalt helyzeteit vizsgáljuk, három lehetséges esetre bukkanunk; és pedig:

1. A körnek és az egyenesnek nincs közös pontja, ha az egyenes távolsága a centrumtól a sugárnál nagyobb;

2. A körnek és az egyenesnek van egyetlen-egy közös pontja, ha az egyenes távolsága a centrumtól a sugárral egyenlő;

3. Az egyenes két pontban metszi a kört, ha a centrumtól mért távolsága a sugárnál kisebb. Az ilyen egyenest a kör *szelőjének* (secans), annak a kör kerület két pontja közé eső részét húrnak nevezzük (2. §.).

A kör azon sugara, mely egy középponti szöget felez, felezi az ahhoz tartozó húrt és ívet is és a húrra merőlegesen áll. Legyen $ACE \sphericalangle = BCE \sphericalangle$ (57. ábra), akkor: $ADC \triangle \cong BDC \triangle$, mert e feltételen kivül: $AC = BC = r$; $CD = CD$. Ebből: $AD = BD$, $ADC \sphericalangle = BDC \sphericalangle$, ami csak úgy lehetséges, ha mindakettő derékszög. Ha a szóban forgó ADC, vagy BDC derékszögű háromszögre *Pythagoras* tételét alkalmazzuk, kimutathatjuk, hogy: Ugyanazon körben, vagy egyenlő sugarú körökben minél kisebb valamely húr



57. ábra.

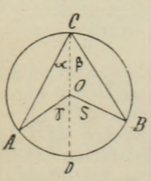
távolsága a centrumtól, annál nagyobb a húr hossza s így annál nagyobb a hozzá tartozó ív is és viszont; egyenlő távolságban fekvő húrok s így a hozzájuk tartozó ívek is egyenlők. Ha e tétel utolsó részét AE és BE ívekre alkalmazzuk, akkor tekintetbe véve, hogy AE húr egyenlő BE-vel, következik, hogy: $\widehat{AE} = \widehat{BE}$.

Ha a környek és egyenesnek csupán egy közös pontja van, akkor az egyenes távolsága a centrumtól éppen a sugárral egyenlő. Mivel azonban az egyenes és pont távolát a pontból az egyenesre húzott merőlegea méri, ennélfogva *az érintési ponthoz tartozó sugár merőleges az érintőre.*

35. §. A kör és a szög.

Ugyanazon körben, vagy egyenlő sugarú körökben az ivek és a hozzájuk tartozó középponti szögek aránya egyenlő. Ha az O centrummal biró körben megrajzoljuk az AB és CD ívekhez tartozó középponti szögeket és felteszszük, hogy a két ív közös mértéke AB-re p-szer, CD-re q-szor megy fel, akkor $\widehat{AB} : \widehat{CD} = p : q$. Ha most az ívek osztási pontjait a kör centrumával összekötjük, mivel egyenlő ívekkel egyenlő középponti szögek fekszenek szemben (5. §.) ennélfogva: $AOB \sphericalangle : COD \sphericalangle = p : q$ s így: $\widehat{AB} : \widehat{CD} = AOB \sphericalangle : COD \sphericalangle$.

Minden kerületi-szög félakkora, mint az ugyanazon íven nyugvó középponti-szög. Legyen ACB egy ily kerületi szög (58. ábra) és AOB az ugyancsak AB íven nyugvó középponti szög. Ha meghúzzuk a CD átmérőt és figyelembe veszszük, hogy az AOC és BOC egyenlőszárú háromszögnek γ és δ a külső szögei, akkor (12. §):



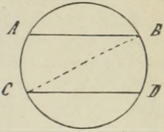
58. ábra.

$$\gamma = 2\,\alpha; \text{ és } \delta = 2\,\beta.$$

E két egyenlet össszeadásából: $\gamma + \delta = 2\,(\alpha + \beta)$, vagy: $AOB \sphericalangle = 2 \,.\, ACB \sphericalangle$.

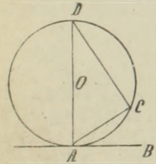
Minthogy az AOB ívhez tartozó összes kerületi szögekhez csakis az egyetlen AOB központi-szög tartozik, ennélfogva: *az ugyanazon íven nyugvó kerületi szögek egyenlők egymással.* A félkörhöz tartozó kerületi szög nagysága 90^0. (*Thales*-tétele).

Párhuzamos húrok közt fekvő ívek egyenlők. Legyen: $AB \parallel CD$ (59. ábra), akkor: $\overset{\frown}{AC} = \overset{\frown}{BD}$, mert BC egyenest húzva, B kerületi szög egyenlő C kerületi szöggel mint váltószögek; ámde egyenlő kerületi szögekhez egyenlő ívek tartoznak; s így a kimondott tétel igazolást nyert.



59. ábra.

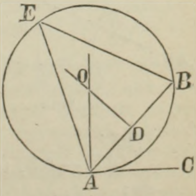
A kör érintője egyik az érintési ponthoz vont húrral *érintői szöget* zár be. *Az érintői szög akkora, mint az ugyanazon ívhez tartozó kerületi szög.* Ha AB az O sugarú kör egyik érintője (60. ábra) és AC ugyanannak egyik húrja, akkor BAC egy ily érintői-szög, mely az AB ívhez tartozó valamennyi kerületi szöggel egyenlő. Egyszerűség kedvéért vegyük fel a kerületi szögek közül azt, melynek egyik szára a kör AD átmérője, másik szára a DC húr. Mivel: $C \sphericalangle = 90^0$; ennélfogva: $DAC \sphericalangle + ADC \sphericalangle = 90^0$. Ámde $DA \perp AB$ (34. §.) ennélfogva: $BAC \sphericalangle + DAC \sphericalangle = 90^0$ s így: $DAC \sphericalangle + ADC \sphericalangle = BAC \sphericalangle + DAC \sphericalangle$; azaz: $BAC \sphericalangle = ADC \sphericalangle$, ami bebizonyítandó volt.



60. ábra.

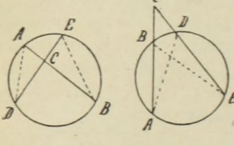
Adott külső pontból a körhöz húzott két érintő egyenlő hosszú.

Feladat. *AB távolság mint húr fölött* (61. ábra) *oly kör szerkesztendő, melyben minden az adott húrhoz tartozó kerületi szög adott BAC szöggel egyenlő.* Az adott szöget lemérjük AB egyik pl. A végpontjára, az AC szögszárra A pontban és AB húrra D felező-pontjában merőlegeseket állítunk, ezek O metszési pontja lesz a kivánt kör centruma.



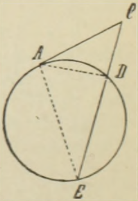
61. ábra.

Ha két húr a kör belsejében, vagy a körön kívül metszi egymást, akkor azoknak a metszési ponttól a körig mért részeiből alkotott szorzataik egyenlők egymással. Legyen pl. AB és DE közös C ponttal biró két húr (62. ábra), akkor: $AC \cdot BC = CD \cdot CE$. E tétel bebizonyítására kössük össze A és D, továbbá B és E pontokat. A szögek egyenlősége folytán $ACD \triangle \sim BCE \triangle$ s így: $AC : CD = CE : BC$. Ebből a belsőtagok és külsőtagok szorzatainak egyenlítése után a bebizonyítandó tételhez jutunk.



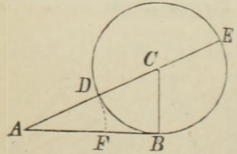
62. ábra.

A körön kívül fekvő pontból érintőt és szelőt húzva a körhöz azt találjuk, hogy az érintő geometriai középarányos az egész szelő és annak a körön kívül fekvő szelete között. Legyen AC a kör érintője (63. ábra) és CE annak szelője, akkor: $\overline{AC}^2 = CD \cdot CE$. E tétel bebizonyítására kössük össze A pontot D és E pontokkal, akkor a szögek egyenlősége folytán: $ACE \triangle \sim ACD \triangle$ s így: $AE : AC = AC : CD$; innen a belső és külső tagok szorzatainak egyenlítése után a bebizonyítandó tételhez jutunk.



63. ábra

Feladat. *Adott AB egyenes* (64. ábra) *folytonos arány szerint két részre osztandó.* (Arany osztás, sectio aurea, divina). AB egyik pl. B végpontjában merőlegest emelünk, s arra $BO = \frac{AB}{2}$ távolságot felmérjük; majd BO sugárral közt írunk le és meghúzzuk az AE szelőt; akkor:



64. ábra.

$$AE : AB = AB : AD;$$

vagy:

$$(AE - AB) : AB = (AB - AD) : AD;$$

de:

$$AE - AB = AD = AF; \quad AB - AD = BF; \quad AD = AF;$$

tehát:

$$AF : AB = BF : AF;$$

innen:

$$\overline{AF}^2 = AB \cdot BF.$$

36. §. Két kör kölcsönös helyzete.

Közös középponttal biró két kört *concentrikus*-nak, különböző középponttal biró két kört *excentrikus*-nak mondunk. Azt az egyenes vonalat, mely az excentrikus körök centrumait összeköti, *centralis*-nak hívjuk. Két kör kölcsönös helyzetét a centralisnak és a sugaraknak nagysága szabja meg.

Ha két kör centralisa nagyobb azok sugarainak összegénél akkor a őörök egymáson kívül feküsznek és így közös ponttal nem bírnak.

Ha két kör centralisa azok sugarainak összegével egyenlő, akkor azoknak van egy és pedig csakis egyetlen-egy közös pontja; mert az egyik kör akármely más pontjára nézve beigazolható, hogy annak a másik kör centrumától mért távolsága ez utóbbi sugaránál, nagyobb s így a pont a körön kívül fekszik. Ez a két kör egymásnak *külső érintő-köre.* A két kör centrálisa ebben az esetben az érintési ponton halad át s az utóbbihoz tartozó érintő merőleges a centrálisra s egyidejüleg érintője mind a két körnek.

Ha két kör centrálisa kisebb azok sugarainak összegénél, de nagyobb a sugarak különbségénél, akkor a két kör két pontban metszi egymást s a két kör közös húrja merőleges a centrálisra.

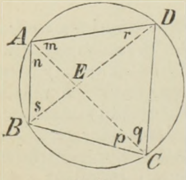
Ha két kör centrálisa egyenlő azok sugarainak különbségével, akkor a két körnek egyetlen-egy közös pontja van. A körök ebben az esetben *belülről érintkeznek.*

Ha két kör centrálisa kisebb azok sugarainak különbségénél, akkor a két kör közös ponttal nem bír, hanem a kisebbik kör egészen a nagyobb kerületén belül fekszik.

Ha két excentrikus körben egy-egy sugarat húzunk és pedig egymáshoz párhuzamosan, akkor a sugaraknak a körök kerületén fekvő pontjait összekötő egyenes a centrálist mindig ugyanazon pontban metszi, bármilyen legyen is a sugarak iránya. Ezt a metszési pontot a két kör *hasonlósági pontjá*nak hívjuk. Hasonlósági pontja két körnek kettő van, egy külső és egy belső. Az elsőt egyenlő irányú, a másodikat különböző irányú párhuzamos sugarak végpontjainak összekötése által nyerjük. Két kör közös külső érintői a külső-, közös belső érintői a belső hasonlósági pontban metszik a centrálist.

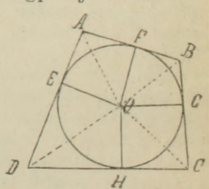
37. §. A húr- és érintőnégyszög.

Az olyan idomokat, melyeknek oldalai valamely körnek húrjai, *húrsokszögek*nek, azokat pedig, melyeknek oldalai a körnek érintői, *érintő-sokszögek*nek hívjuk. Mivel a háromszögekben mindig találunk oly pontot, mely mind a három szögponttól, vagy mind a három oldaltól egyenlő távol van; ennélfogva minden háromszög húr-, vagy érintő-háromszögnek tekinthető. Lássuk így áll-e a dolog a négyszögekre nézve is? Legyen $ABCD$ (65. ábra) egy húrnégyszög, húzzuk meg annak átlóit s vizsgáljuk meg a szögek közt mutatkozó összefüggést. p és r, valamint q és s szögek, mint ugyanazon köríven nyugvó kerületi szögek egyenlők egymással; ámde ABD $\triangle$-ben: $m + n + r + s = 180^0$; vagy r és s helyett az azokkal egyenlő p és q szögeket irva és figyelembe véve, hogy $m + n = A\sphericalangle$; $p + q = C\sphericalangle$, lesz: $A + C = 180^0$. Másfelől mivel minden négyszög szögeinek összege 360^0, lesz még: $B + D = 180^0$. Ilyformán: *a húrnégyszög átellenes szögeinek összege 180^0.* Valamely négyszög köré csakis akkor lehet kört írni, ha a szögek a most megállapított feltételnek megfelelnek.



65. ábra.

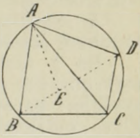
Ha $ABCD$ (66. ábra) érintő négyszög, akkor az érintési pontokat és a négyszög szögpontjait a kör centrumával összekötve, a keletkező szomszédos háromszögek egybevágósága folytán: $AE = AF$, $BG = BF$, $CG = CH$, $DE = DH$. Ezen egyenletek összeadásából: $AD + BC = AB + CD$, azaz: *minden érintő négyszögben két átellenes oldal összege egyenlő a másik két átellenes oldal összegével.* Valamely négyszögbe csak akkor írhatunk kört, ha ennek a feltételnek megfelel.



66. ábaa.

Minden háromszögben az átlók szorzata egyenlő az átellenes oldalak szorzatainak összegével (Ptolemaeus tétele). Ha az $ABCD$ húrnégyszögben

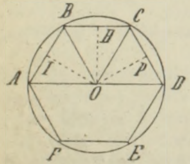
(67. ábra) $BAE \sphericalangle = DAC \sphericalangle$, akkor: $ABE\triangle \sim DAC\triangle$. miből: $AB : BE = AC : DC$ és: $AB . DC = AC . BE$; az AED és $ABC\triangle$-ek hasonlóságából pedig: $BC . AD = AC . DE$. Összeadva ez eredményeket lesz: $AB . DC + BC . AD = AC . (BE + DE) = AC . BD$, ami bebizonyítandó volt.



67. ábra.

38. §. A szabályos sokszögekről.

Minden szabályos sokszög húr- és érintősokszögűl tekinthető. Legyen $ABCDEF$ szabályos sokszög adva (68. ábra), akkor annak A, B és C három szögpontján át kört vezethetünk, melyről azt állítjuk, hogy a többi szögponton is áthalad. E körülmény beigazolására húzzuk meg az OD egyenest és forgassuk át OH, mint tengely körül $OHCD$ négyszöget $ABHO$-ra. Az átforgatás után e két négyszög teljesen fedni fogja egymást, mert: $BH = CH$; $BHO \sphericalangle = CHO \sphericalangle = R$; $HO = HO$; $B \sphericalangle = C \sphericalangle$ és $AB = CD$; ámde akkor: $AO = DO$, azaz az AO sugarú kör a a negyedik D szögponton s hasonló eljárás ismételt alkalmazásával bebizonyíthatólag a szabályos sokszög valamennyi szögpontján áthalad, miáltal kimutattuk, hogy bármely szabályos sokszög húrsokszögül tekinthető. — Hogyha azonban $ABCDEF$ húrsokszög, akkor annak oldalai az O centrummal és AO sugárral biró kör *egyenlő húrjai;* egyenlő húrok pedig egyenlő távolságban vannak a centrumtól; tehát a szóban forgó szabályos sokszög minden oldalának távolsága egyenlő a centrumtól s így a sokszög valamennyi oldala az ezen távolság mint sugár által meghatározott kör érintője; ebből folyólag minden szabályos sokszöget érintő-sokszögül tekinthetünk. A beirt és körülírt kör concentrikus.



68. ábra.

Ha valamely n oldalú szabályos sokszög szögpontjait összekötjük a körülírt kör centrumával, ezáltal az O körül lévő 360^o-nyi középponti szöget n egyenlő részre osztjuk s így a szabályos sokszög minden oldalával $\frac{360^0}{n}$ nagyságú középponti-szög fekszik szemben.

A szabályos sokszög centrumát és szögpontját összekötő sugár felezi a sokszög belső-szögét.

Ha a szabályos n-szög szögpontjait összekötjük a körülírt-kör centrumával, n egybevágó háromszöget nyerünk; ha most a_n a sokszög egy-egy oldala ρ az egyes oldaloknak a centrumtól mért távolsága, (a sokszögbe írt kör sugara), akkor a sokszög területe:

$$t_n = \frac{n \cdot a_n \cdot \rho}{2}.$$

Ha két szabályos sokszög egyenlő oldalszámmal bír, akkor azok kerületeinek aránya beírt-, vagy körülírt köreik sugarainak arányával egyenlő. E tétel a fent elmondottak alapján és a 25. §.-ban foglalt első tétel segitségével könnyen bebizonyitható. — Ebből következik, hogy: *két egyenlő oldalszámmal bíró szabályos sokszög hasonló egymáshoz.*

A szabályos sokszögeknek és köröknek megismert összefüggése folytán szabályos sokszöget úgy szerkeszthetünk, ha a kör kerületét annyi egyenlő részre osztjuk fel, a hány oldalú szabályos sokszöget kivánunk előállítani. Ez a felosztás csakis akkor sikerül, ha a szabályos sokszög egyik oldalával szemben fekvő középponti-szöget planimetriailag szerkeszteni tudjuk. Lehetséges a szerkesztés akkor, ha a sokszög oldalainak száma; 2^n, vagy $3 \cdot 2^n$, vagy $5 \cdot 2^n$, vagy $15 \cdot 2^n$. Lássuk sorban ezen eseteket.

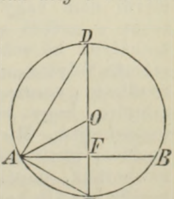
Ha 2^n oldalú szabályos sokszöget akarunk nyerni, akkor figyelembe kell vennünk, hogy az átmérő a kör kerületét két egyenlő részre, két egymásra merőleges átmérő pedig $4 = 2^2$ egyenlő részre osztja A negyedkörök felezése után $8 = 2^3$ egyenlő részre lesz a kör kerülete felosztva és így tovább.

Minthogy a szabályos hatszögnél az egyik oldallal átellenes középponti-szög $\frac{360^0}{6} = 60^0$ és a szabályos hatszög egy-egy belső-szöge 120^0 s ezeket az utóbbi szögeket a szögpontokhoz induló sugarak felezik; ennélfogva a szabályos hatszöget e sugarak hat egyenlő-oldalú háromszögre bontják s így a jelzett sokszög minden oldala a sugárral egyenlő. Ha tehát a sugarat a kör kerületére hatszor felviszem a $3 \cdot 2 = 6$ oldalú szabályos sokszöget nyerem; ha pedig ennek egy-egy oldalhoz tartozó íveit felezem, nyerem a $12 = 3 \cdot 2^2$ oldalú sokszög egy-egy oldalához tartozó ívet. Hasonló eljárással szerkesztjük a $24 = 3 \cdot 2^3$, $48 = 3 \cdot 2^4$ stb. szabályos sokszögek oldalaihoz tartozó íveket.

Ha az r sugarú kör kerülete $5 \cdot 2^n$ egyenlő részre lenne felosztandó, a következő eljárást követjük. A sugarat az *arany-osztással* (35. §.) folytonos arány szerint osztjuk s akkor a nyert nagyobb szeletet éppen tizszer mérhetjük fel a kör kerületére. Az $5 = 5 \cdot 2^0$, $20 = 5 \cdot 2^2$, $40 = 5 \cdot 2^3$ stb. szabályos sokszögeknek megfelelő ívek azután már könnyen nyerhetők.

Végül ha a kör kerületét 15 egyenlő részre kell osztanunk, akkor oly szabályos sokszöget kivánunk nyerni, melynek oldalaival $\frac{360^0}{15} = \frac{360^0}{6} - \frac{360^0}{10}$ nagyságú középponti-szögek vannak szemben. A jobb oldalon szereplő szögeket az eddigiek alapján már tudjuk szerkeszteni s akkor egyszersmind szerkeszthetjük a $15 \cdot 2^n$ oldallal biró szabályos sokszög egy-egy oldalának megfelelő íveket is.

A körbeírt szabályos n-szög egyik a_n oldalából és a körülirt kör r sugarából határozzuk meg a körbeirt szabályos $2n$-szög egyik a_{2n} oldalát.



69. ábra.

Legyen $AB = a_n$ (69. ábra) a körbeirt szabályos n-szög egyik oldala, akkor az $OE \perp AB$ sugár felezi AB ívet s így $AE = a_{2n}$ a beirt szabályos $2n$-szög keresett oldala. De $\overline{AE}^2 = \overline{AF}^2 + \overline{EF}^2$ és:

$$AF = \frac{a_n}{2}, \quad EF = r - OF;$$

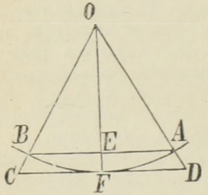
$$OF = \sqrt{r^2 - \frac{a_n^2}{4}}; \text{ ezekből:}$$

$$AE^2 = a_{2n}^2 = \frac{a_n^2}{4} + \left(r - \sqrt{r^2 - \frac{a_n^2}{4}}\right)^2 = \frac{a_n^2}{4}$$

$$+ r^2 - 2r\sqrt{r^2 - \frac{a_n^2}{4}} + r^2 - \frac{a_n^2}{4} = 2r^2 - 2r$$

$$\sqrt{r^2 - \frac{a_n^2}{4}}; \text{ végül: } a_{2n} = \sqrt{2r^2 - 2r\sqrt{r^2 - \frac{a_n^2}{4}}}.$$

A körülírt kör r sugarából és a körbeírt szabályos n-szög egyik a_n oldalából kiszámítandó a körülírt-, vagy érintő szabályos n-szög An oldala. Legyen $AB = a_n$ a beírt szabályos n-szög egyik oldala (70. ábra), akkor: $OF \perp AB$ a kör sugara, melynek F pontjában $CD \perp OF$ érintőt húzva $CD = An$ lesz a keresett oldal. Mivel $CD \parallel AB$, azért: $ABO\triangle \sim CDO\triangle$ s így: $CD : AB = OF : EO$; vagyis:



70. ábra.

$$An : a_n = r : \sqrt{r^2 - \frac{a_n^2}{4}};$$

innen: $$An = \frac{a_n \cdot r}{\sqrt{r^2 - \frac{a_n^2}{4}}}.$$

39. §. Körmérés.

Egyenes vonalat, bármilyen rövid legyen is az, görbe vonalra ráinérni lehetetlen. Ennélfogva a kör kerületét egyenes vonalú egységgel közvetlenül megmérni nem vagyunk képesek. Indirekt módon kell tehát e czélból eljárnunk, a következőleg. Ha egy szabályos húrsokszöget rajzolunk és annak oldalszámát folytonosan megkettőzzük, akkor a sokszög kerülete gyorsan közeledik a kör kerületéhez, úgy annyira, hogy bizonyos határnál a kettőt egynek tekinthetjük. Mivel most már a szabályos sokszög kerülete tört-vonal, melyet egyenes-vonalú egységgel mérhetünk, ennélfogva ennek mértékszámával fejezhetjük ki a kör kerületét — Másfelől az érintő-sokszög oldalszámainak megkettőzése révén oly határhoz közeledünk a sokszög folyton kisebbedő kerületével, mely a kör kerületét helyettesítheti — Kimondhatjuk ezek alapján, *hogy a kör kerülete úgy tekinthető, mint azon közös határérték, mely felé a folyton növekedő oldalszámmal biró beírt- és körülírt szabályos sokszögek kerületei közelednek*

A görbevonallal határolt idom területét nem hasonlíthatjuk össze közvetlenül az egységül választott négyzet területével. A kör területének mérése tehát csakis közvetett módon eszközölhető. Ha megint figyelembe veszszük, hogy a beírt sokszög területe oldalszámának folytonos megkettőzése által folyton növekedve, a körülírt szabályos-sokszögé pedig hasonló eljárás szerint folyton kisebbedve mindinkább megközelíti a kör területét, akkor kimondhatjuk, hogy: *a kör területe úgy tekinthető, mint azon közös határérték, mely felé a folyton növekedő oldalszámmal biró beírt- és körülírt szabályos sokszögek területei közelednek.*

Mivel a körök hasonló idomok, azért kerületeik aránya két egyenesnek, az átmérőknek arányával egyenlő (25. és 38. §.) Két körre nézve tehát, melyeknek kerületeik: P és P_1; sugaraik r és r_1; lesz: $P : 2r = P_1 : 2r_1$. Ez az arány tehát minden körre nézve állandó szám s ha azt a görög π betűvel (peripheria) jelöljük, akkor:

$$\frac{P}{2r} = \pi, \text{ a honnan: } P = 2r \cdot \pi.$$

A kör kerületének meghatározását ily módon a π értékének meghatározására vezettük vissza.

Mivel másfelől a kör végtelen sok oldallal biró szabályos sokszögül tekinthető, ennélfogva annak területét úgy kapjuk meg, ha kerületét sugarának felével szorozzuk: azaz:

$$t = P \times \frac{r}{2} = 2\,r \cdot \pi \cdot \frac{r}{2} = r^2 \cdot \pi.$$

A kör területének meghatározását ilyformán szintén π értékének meghatározására vezettük vissza.

Hogy π megközelítő értékét nyerhessük induljunk ki az egységsugarú körbe és köréje rajzolt szabályos hatszögből s ha a beírt hatszög kerületét k_6, a körülirtét K_6 jelenti és ha alkalmazzuk a 38. §-ban talált képleteket a beírt és körülírt szabályos 12, 24, 48, 96, 192, 384-szög kerületének meghatározására, a következő értékekhez jutunk:

$K_6 = 6{\cdot}00000$,	$K_6 = 6{\cdot}92820$,
$K_{12} = 6{\cdot}21163$,	$K_{12} = 6{\cdot}43078$,
$K_{24} = 6{\cdot}26526$,	$K_{24} = 6{\cdot}31932$,
$K_{48} = 6{\cdot}27870$,	$K_{48} = 6{\cdot}29218$,
$K_{96} = 6{\cdot}28206$,	$K_{96} = 6{\cdot}28542$,
$K_{192} = 6{\cdot}28291$,	$K_{192} = 6{\cdot}28375$,
$K_{384} = 6{\cdot}28311$,	$K_{384} = 6{\cdot}28333$.

E táblázat mutatja, hogy a beírt és körülírt sokszögek kerületei mindinkább közelednek egymáshoz s így a kör kerületéhez is. Ha megközelitéssel k_{384}-et veszszük egyenlőnek a kör kerületével akkor:

$$P = 2\,r\,\pi = 6{\cdot}28311.$$

Mivel $r = 1$, lesz:

$$2\,\pi = 6{\cdot}28311 \text{ és } \pi = 3{\cdot}1415\ldots$$

Jegyzet. Az egyiptomi *Ahmes*-féle papyruson (Kr. e. 1700—2000) $\pi = (16 : 9)^2 = 3{\cdot}1604$. *Archimedes* szerint $\pi = 3\frac{1}{7} = \frac{22}{7}$. A Kr. utáni 16. században *Vieta* 10 tizedesig, *Ludolf van Ceulen,* kinek tiszteletére π-t *Ludolf*-féle számnak is nevezik, 35 tizedesig számította ki π értékét Később felsőbb-mennyiségtani uton *Vega* 140, *Dahse* 200, *Richter* pedig 500 tizedesig végezte a meghatározást. π irrationális szám, melynek 7 tizedesig pontos értéke a következő: $\pi = 3{\cdot}1415927$.

Ha valamely körív hosszát akarjuk meghatározni, figyelembe kell vennünk, hogy a kör egész kerülete ugy aránylik a körívhez, mint az egész kerülethez tartozó 360°-nyi középponti szög az ívvel szembe fekvő α középponti szöghöz; tehát ha i jelenti az ívhosszat, lesz:

$$2\,r\,\pi : i = 360^\circ : \alpha, \text{ honnan: } i = 2\,r\,\pi.\frac{\alpha}{360^\circ} = r.\pi.\frac{\alpha}{180^\circ}.$$

A körsector t területét, ha r a kör sugara, i a körsectorhoz tartozó ív és α az ívvel átellenes középponti szög, a következő aránylatból nyerem:

$$t : r^2\pi = i : 2\,r\,\pi;\; t = \frac{i\,.\,r}{2} = r^2\pi.\frac{\alpha}{360^\circ}.$$

A körgyűrű területének kiszámítására a nagyobb kör területéből ki kell vonni a kisebbikét.

Végül a körsegmentum területét megkapjuk, ha a megfelelő körsector területéből kivonjuk a körsegmentum húrjához tartozó egyenlőszárú háromszög területét.

40. §. Feladatok az ötödik részhez.

1. A kör középponti szöge 56° 27′ 18″; 38° 16′; 118° 8′ 10″; mily nagy az ugyanazon íven nyugvó kerületi szög?
2. A kör kerületi szöge 8° 10′; 72° 56′ 9″; 3·8 R; mily nagy az ugyanazon íven nyugvó középponti szög.

3. Mily nagy a 3·2 m. sugarú körben a 2·7 m. hosszú húrnak a centrumtól mért távolsága?
4. Mily hosszú a 6 m. sugarú körben a centrumtól 5·2 m. távolságban fekvő húr hossza?
5. Mily nagy a kör sugara, ha a 3 m. hosszú húr távolsága a centrumtól 1 m.?
6. Két excentrikus kör centrálisa 6·2 m.; az egyik kör sugara 1·5, a másiké 0·7 m.; mily messze vannak a hasonlósági pontok a centrumtól?
7. Mekkora a szabályos húr- és érintő- négy- és nyolczszög egy-egy oldala a 3. m. sugarú körben?
8. Mily nagy a 4 m. sugarú körben a szabályos tízszög egy oldala? $[r : a_{10} = a_{10} : (r - a_{10})]$.
9. Az 5 m. sugarú körben a szabályos n-szög egy oldala 3·4 m.; mily nagy ugyanazon körben a szabályos $2n$-szög egy-egy oldala?
10. Mily nagy a 0·624 m. sugarú körbe írt négyzet egy oldala?
11. Számítsuk ki az egység-sugarú körbe írt szabályos 3, 4, 5, 6, 8, 10, 10, 20-szög egy oldalát.
12. Számítsuk ki ugyanazon körre a körülírt idomok egy-egy oldalát.
13. Számítsuk ki a 11. példában megjelölt idomok beírt köreinek sugarait.
14. Három egyenlőoldalú-háromszög oldalai 3, 5 és 12 m.; oly egyenlő oldalú háromszög szerkesztendő, melynek területe az adottak összegével egyenlő.
15. Mennyi a 3·2 m. sugarú körbe és köréje írt szabályos 3, 6, 8 és 12-szög területe?
16. A szabályos hatszög területe 8·4 m.²; mennyi az ugyanazon körbe írt négyzet és körülírt háromszög területe?
17. Mennyi a húr nyolcz- és tizenkétszög területe, ha a beírt négyzeté 126 m.²?
18. Mekkora az 515·29 m.² területű szabályos hatszög egy oldala?
19. A 2·2 m. sugarú körben mily nagy a szabályos nyolczszög területe?
20. A szabályos nyolczszög területe 1200 m.²; mennyi a beírt és körülírt kör sugara?
21. Az egyenlő-oldalú hráomszög egy oldala 5·1 m.; mily nagy az egyenlő területű szabályos hat- és nyolcz-szög egy oldala?

22. Mennyi a szabályos nyolczszög egy oldala, ha területe 10.042 $m.^2$?
23. Mily nagy a 2 m.; 4·5 m.; 7·2 m. sugarú kör kerülete?
24. Mily nagy a kör kerülete, ha átmérője: 8·4, 14·3, 9·6, 0·36 m.?
25. Mily nagy a 6·2 m. sugarú kör kerülete és területe?
26. Mily nagy a 8·2, 0·75 m. sugarú kör területe?
27. Mily nagy a kör területe, ha átmérője: 5·2, 0·018 m.?
28. Mily nagy a 18·72 m. kerületű kör területe?
29. Mennyi a kör sugara, ha területe 8·4 m^2?
30. Mennyi a kör sugara, ha területe 2·75; 56·8 $m.^2$?
31. Valamely kocsi kereke a $8\frac{1}{2}$ km. úton 3118 fordulatot tesz; mily nagy a kerék küllője?
32. A kör kerülete 38-m.-rel nagyobb, mint átmérője. Mekkora mindenik?
33. Adott kör területét concentrikus körrel oszszuk fel két egyenlő részre.
34. Végezzük ez osztást 3 : 5 arányban.
35. A beírt négyzet területe 6400 m^2; mennyi a beírt és körülírt köré?
36. Mennyi a 6 m. oldalú szabályos háromszögbe és köréje irható kör területe?
37. A kör és a beírt szabályos háromszög együttes területe 824 $m.^2$; mennyi a kör sugara?
38. Mennyi két kör közös részének területe és kerülete, ha mindenik centruma a másik kerületén van és sugaruk 3·6 m.?
39. Mennyi, ha a sugár 5 m.?
40. Mennyi ha $r = 0·3$ m.?
41. Mily nagy az egység-sugarú körben az 1'' szöghez tartozó ív hossza?
42. Kör szerkesztendő, melynek területe két adott kör területének összegével, vagy különbségével egyenlő.
43. Mily nagy a körgyűrű területe, ha a belső kör sugara 4·3. a külsőé 4·8 m.?
44. Mekkora a kör sugara, ha az ív húrja 12·64, a felényi ívé 9·49 cm.?
45. Mily nagy az $\frac{1}{2}$ m. sugárú körben a 32°-os középponti szöggel szemben fekvő ív?

46. Mily nagy az ív, ha a sugár 1·2 m., a középponti szög 72^0?
47. A 8·2 m. sugarú körben számítsuk ki a 4·5 m. hosszú ívhez tartozó középponti szöget.
48. Mily nagy e szög, ha a sugár 7·2, az ív 23·46 m.?
49. Mily nagy a sugárral egyenlő ívhez tartozó középponti szög?
50. A sugár négyzete a körsectorral egyenlő. Mekkora az ehhez tartozó középponti szög?
51. Azon kör sugara keresendő, melyben a 7^0 40′ centrális szöghöz tartozó ív 0·1578 m.
52. Mily nagy a 8 m. sugarú kör 38^0-os középponti szöggel bíró sectorának területe?
53. Mily nagy akkor, ha a sugár 3·4 m., a középponti szög 56^0 38′?
54. Mily nagy a 86·72 m^2 területű körben a 72^0-os középponti szöghöz tartozó ív hossza?
55. Mily nagy azon kör sugara, melynek területe az 1·5 és 1·2 m. sugarú körök területének összegével egyenlő?
56. Mily nagy a kettő különbségével egyenlő területű kör sugara?
57. Mily széles a 3 m. sugarú belső körnél négyszer nagyobb területű körgyűrű!
58. Mily nagy a 6 m. sugarú körben az 5·6 m. hosszú ívhez tartozó sector területe?
59. Mekkora a körsector területe, ha a sugár 2·8 m., a középponti szög 82^0?
60. Mekkora, ha a sugár 0·6 m., a középponti szög 36^0 8′ 16″?
61. Mekkora a szabályos ötszög egy oldala által meghatározott körsector területe az egységsugarú körben?
62. Mekkora a szabályos 4, 6, 8-szög egy-egy oldalához tartozó körsegmentum területe az egységsugarú körben?
63. Adott 0·572 m. sugarú körben mekkors a 60^0 középponti szöghöz tartozó körsegmentum területe?
64. Kör szerkesztendő, mely egyenlő területű az egység-sugarú és 32^0 24′-nyi ívvel bíró körsectorral.
65. Mennyi a kör sugara, ha a 36^0 12′-nyi középponti-szöggel biró sector területe 1200 m^2?
66. Mily nagy a kör területe, ha a 150^0 58′ 20″ középponti szög íve 150 m.?

67. Három 5·6 m. sugarú kör kölcsönösen érinti egymást; mennyi az általuk bezárt közös rész kerülete és területe?
68. Mennyi akkor, ha a sugár 2·25 m?
69. Mennyi a körbeírt 5 m. oldalú szabályos háromszög egy oldala által meghatározott körsegmentum területe?
70. A negyedkörbe írt kör sugara 36 m. Mennyivel nagyobb a negyedkör területe, mint a köré?
71. Mi azon körök centrumainak geometriai helye, melyek két adott concentrikus kört érintenek?
72. Mi azoké, melyek két adott egyenest érintenek?
73. 18^0-os szög szerkesztendő.
74. Adott centrumból kör szerkesztendő, mely adott kört érint.
75. Két adott ponton átmenő kör szerkesztendő. (Hány lehetséges?)
76. Adott ponton átmenő s adott kőrt érintő kört szerkeszszünk,
77. Szerkeszszünk adott egyenest és kört érintő kört.
78. Szerkeszszünk kört, mely két adott kört érint.
79. Szerkeszszünk adott ponton átmenő s adott kört egyenest kijelölt pontban érintő kört.
80. Szerkeszszünk két adott pontban átmenő adott egyenest érintő kört.
81. Három adott egyenest érintő kör szerkesztendő.
82. Adott szabályos sokszög területével egyenlő négyzetet rajzoljunk.
83. Rajzoljunk egyenlő-oldalú háromszöget, melynek területe több adott szabályos háromszög összegével egyenlő.
84. Egyenlő-oldalú háromszög szerkesztendő, melynek területe akkora, mint valamely adott szabályos 6-szögé.
85. Végezzük e szerkesztést, ha a szabályos sokszög nyolcz oldalú.
86. Rajzoljunk adott egyenlő-oldalú háromszög területével biró szabályos hatszöget.
87. Ugyanazon szerkesztés, ha az adott idom szabályos 12-szög.
88. Bebizonyítandó, hogy a háromszög köré írt kör sugara $r = \frac{abc}{4t}$; a hol *a, b, c* a háromszög oldalait, *t* a területét jelenti.

89. Bizonyítsuk be, hogy a háromszögbe írt kör sugara: $\rho = \frac{2t}{a + b + c}$.

90. Alkalmazzuk e két képletet, ha $a = 13$, $b = 14$ $c = 15$. (*Heron*-feladata.)

91. Milyen alakot vesznek fel e képletek az egyenlőoldalú háromszögre nézve?

92. Igazoljuk, hogy minden páros oldalszámmal biró szabályos sokszögben az átellenes oldalak párhuzamosak.

93. Bizonyítsuk be, hogy két egymást metsző húr a körben oly szögeket zár be, melyeket a két átellenes ív fél-összegével mérünk.

94. Állítsuk fel a megfelelő tételt, ha a húrok a körön kivül metszik egymást.

95. Bebizonyítandó, hogy bármely négyszög szögfelezői húr-négyszöget zárnak be.

96. A négyszög átlói azt négy háromszögre bontják; ezek körülírt köreinek centrumai egy parallelogramma szögpontjai.

97. A beirt szabályos $2n$-szög kerülete geometriai középarányos a beírt n-szög és körülírt $2n$-szög kerületei között.

98. Ugyanannak területe geometriai középarányos a beirt és körülirt szabályos n-szögek területei között.

99. Ha két egyenlő sugarú kör metszi egymást, akkor egyenlő íveket szelnek le egymásból.

100. A szabályos n-szög belsejében fekvő valamely p pontra nézve bebizonyítandó, hogy annak az oldalaktól mért távolságai együttvéve a beírt kör sugarainak n-szeresét adják.

101. A szabályos hatszög átlói kölcsönösen 1: 2 arányban szelik egymást.

102. A beirt szabályos hatszög területe kétszerese a beirt szabályos háromszögének.

103. Ugyanaz háromnegyede az érintő hatszög területének.

104. Fele a körülírt szabályos háromszög területének.

105. A beírt szabályos tizenkétszög háromszorosa a körsugár négyzetének.

106. Szabályos háromszög úgy csonkítandó le, hogy szabályos hatszög maradjon vissza.

107. Szerkeszszünk adott sokszöghöz hasonló oly sokszöget, melynek területe az előbbinek 4 hetede.

108. Végezzük ezt a szerkesztést, ha az új sokszögnek valamely adott szabályos sokszög területével kell egyenlőnek lennie.
109. Szerkeszszünk szabályos hatszöget, melynek területe, valamely adott sokszög területének $^3/_7$ része.
110. Adott szabályos nyolczszög területével egyenlő szabályos hatszög szerkesztendő.

TARTALOM.

Első rész.

A vonal és a szög.

Második rész.

A síkidomok alkotórészeinek összefüggése. Egybevágó síkidomok.

Harmadik rész.

A síkidomok hasonlósága.

Negyedik rész.

A síkidomok területe.

Ötödik rész.

A kör.

Folytatás a túloldalon.