STAMPFEL-FÉLE
MÁNYOS ZSEB-KÖNYVTÁR.

14.

Dr. Lévay Ede

A sik trigonometriája

PÉLDATÁRRAL

Ára 30 Kr. = 60 fill.

POZSONY - BUDAPEST
KIADJA
STAMPFEL K.

Legközelebb pedig — szintén időhöz nem kötötten — következő kötetek megjelenése van tervbe véve:

Aesthetika
Alkotmánytan
Állattan
Arithmetika és Algebra
Áruisme
Astronomia
Ásványtan
Az ember őstörténete
Bogárgyűjtő
Chémia (szerves)
Chémia (szervetlen)
Egyetemes irodalomtörténet
Egyházjog (Prot.)
Egyháztörténet
Építészeti stilisme
Észjog
Ethika
Fogalmazványok
Földtan
Geológia
Görög irod. tört.
Görög régiségek
Gyorsirás
Kereskedelem-isme
Kereskedelem története
Kereskedelmi földrajz
Lélektan
Lepkegyűjtő
Logarithmustáblák
Logika
Magyar helyesirás
Magyar közigazgatási jog
Magyar közjog
Magyar magánjog
Magyarok története
Magyar poetika
Mértan
Művelődéstörténet
Mythológia
Német helyesirás
Német irodalomtörténet
Német nyelvtan
Nemzetgazdaságtan
Nemzetközi jog
Népisme
Növényhatározó
Növénytan
Oktatási módszertan
Olasz nyelvtan
Orosz nyelvtan
Paedagógia
Pénzügyi jog
Pénzügytan
Phyzikai repetitorium
Phyzikai földrajz
Planimetria
Politika
Rajzolás
Római irod. tört.
Rovargyűjtő
Statisztika
Stereometria
Természettan
Török nyelvtan
Világtörténet

Megrendelhető alulirt kiadónál, s bármely hazai könyvárusnál.

Pozsony—Budapest.

Stampfel Károly,
kiadó.

STAMPFEL-FÉLE

TUDOMÁNYOS ZSEB-KÖNYVTÁR.

14.

A SIK

TRIGONOMETRIÁJA

PÉLDATÁRRAL.

GYMNASIUMI ÉS REÁLISKOLAI TANULÓK SZÁMÁRA, TOVÁBBÁ MAGÁNHASZNÁLATRA

ÖSSZEÁLLITOTTA

DR. LÉVAY EDE

KIR. FŐGYMN. TANÁR.

18 ÁBRA — 730 FELADAT.

POZSONY. 1899. BUDAPEST.

STAMPFEL KÁROLY KIADÁSA.

TARTALOM.

Első rész.

Goniometria.

Második rész.

A háromszögek megfejtése.

Harmadik rész.

A trigonometria néhány alkalmazása.

Negyedik rész.

Példatár.

Eder István könyvnyomdája, Pozsonyban.

ELSŐ RÉSZ.

Goniometria.

1. §. A trigonometria tárgya.

A trigonometria tárgya a háromszögek megfejtése.

Valamely háromszöget megfejteni annyit tesz, mint annak elégséges számú adott alkotórészéből az ismeretlen alkotórészeket kiszámítani. A háromszögek megfejtésére általában három alkotórész ismerete szükséges, de egyszersmind elégséges is; feltéve, hogy azok között legalább egy oldal van.

A háromszögek oldalait adottaknak tekinthetjük, ha ismerjük a számokat, melyek az oldalak hosszúságát valamely elfogadott mértékegységben, pl. méterekben kifejezik.

A háromszögek szögeinek mértékei: a fokok, perczek és másodperczek. Ha a kör kerületét 360 egyenlő részre osztjuk, akkor az egy ilyen ívrészszel szemközt fekvő középponti szög adja az egyfokos szöget. Minden fok 60 perczből, minden percz 60 másodperczből áll. Ilyformán mondhatjuk, hogy valamely α szög értéke $25^{\circ}\ 57'\ 35''$. (25 fok, 57 percz, 35 másodpercz.)

Amint az elmondottakból megitélhetjük, a háromszög oldalai és szögei merőben különböző természetű mennyiségek. Azokat összehasonlitani, vagy köztük számbeli arányt megállapitani lehetetlen. Márpedig, ha a trigonometria feladatának meg akarunk felelni, akkor a háromszög oldalai és szögei között bizonyos összefüggést kell felismernünk, mert csak akkor várható, hogy adott alkotórészekből az ismeretleneket kiszámíthatjuk. E czélra figyelembe kell vennünk, hogy valamely háromszögben a szögek nagysága nem függ az oldalak hosszúságától, hanem csakis azoknak egymáshoz való arányától. A hasonló háromszögekben megegyeznek a megfelelő oldalak arányai, innen van, hogy azokban a szögek mind egyenlők. Másfelől, ha a derékszögű háromszöget tekintjük, azt látjuk, hogy abban az oldalak aránya már a hegyes szögek egyike által, s viszont a hegyes szögek nagysága már két oldal aránya — tehát egy nevezetlen szám — által teljesen meg van határozva. Ha pedig valamely adott szög egyik szárának egy pontjából a másik szárra merőlegest bocsátunk, oly derékszögű háromszöget nyerünk, melyben az adott szög bentfoglaltatik s melynél az oldalak aránya a szöget meghatározza. Azokat a nevezetlen számokat, melyekben a derékszögű háromszög két-két oldalának aránya nyer kifejezést s melyeknek nagysága a derékszögű háromszög egyik szögének nagyságától függ, *goniometriai* (szögmértani), *függvényeknek* nevezzük. Minden szöghöz hat goniometriai függvény tartozik, ezek: a *sinus*, *cosinus*, *tangens*, *cotangens*, *secans*, és *cosecans*.

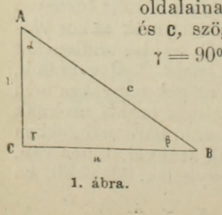
A derékszögű háromszögek oldalai és szögei közt megismert kapcsolat alapján a trigonometriai képletekben és számitásokban a szögeket sohasèm fejezzük ki fokokban, hanem goniometriai függvényeiket képviselő oly egyenes vonalak által helyettesítjük, melyeknek mértékszámai a derékszögű háromszög egységül választott átfogójára vannak vonatkoztatva s melyeknek ismerete mellett képesek vagyunk a hozzájuk tartozó szögek nagyságát kiszámitani s viszont a szögekből az azoknak megfelelő ily vonalak értékét meghatározni. Ezeket a vonalakat *goniometriai vonalaknak* hívjuk.

A következőkben a goniometriai függvények sajátságaival és a goniometriai vonalak szerkesztésének kérdésével fogunk foglalkozni.

2. §. A goniometriai függvényekről általában.

Legyenek az **ABC** derékszögű háromszög (1. ábra) oldalainak mértékszámai rendre: **a**, **b** és **c**, szögei pedig: α, β és γ; akkor:

$$\gamma = 90^0\,;\ \beta = 90^0 - \alpha\,;\ \alpha = 90^0 - \beta.$$



1. ábra.

Az olyan szögeket, mint α és β, melyek együttvéve 90^0-ot adnak, *pótlószögeknek* hívjuk.

a) A derékszögű háromszög valamely hegyes szögének sinusa alatt a szöggel átellenes befogónak az átfogóhoz való arányát értjük; így:

$$\sin.\ \alpha = \frac{a}{c};\ \sin.\ (90^0 - \alpha) = \frac{b}{c}.$$

Ezen egyenletekből:

$$a = c\ .\ \sin.\ \alpha;\ b = c\ .\ \sin.\ (90 - \alpha) \qquad 1)$$

Ezek szerint: a derékszögű háromszög bármely befogóját megkapjuk, ha az átfogót a keresett befogóval szemben fekvő szög sinusával megszorozzuk.

b) A derékszögű háromszög valamely hegyes szögének cosinusa alatt a szög mellett fekvő befogónak az átfogóhoz való arányát értjük; így:

$$\cos.\ \alpha = \frac{b}{c};\ \cos.\ (90^0 - \alpha) = \frac{a}{c}.$$

Ezen egyenletekből:

$$b = c\ .\ \cos.\ \alpha;\ a = c\ .\ \cos.\ (90^0 - \alpha) \qquad 2)$$

Ezek szerint: a derékszögű háromszög bármely befogóját megkapjuk, ha az átfogót a keresett befogó mellett fekvő szög cosinusával megszorozzuk.

Az 1) és 2) alatt foglalt egyenletekből kitetszőleg:

$$\sin.\ \alpha = \cos.\ (90^0 - \alpha);\ \cos.\ \alpha = \sin.\ (90^0 - \alpha);$$

azaz: a derékszögű háromszög egyik hegyes szögének sinusa a pótlószög cosinusával egyenlő.

c) A derékszögű háromszög valamely hegyes szögének tangense alatt a szöggel szemben fekvő befogónak a másik befogóhoz való arányát értjük; így:

$$\mathrm{tg.}\ \alpha = \frac{a}{b};\quad \mathrm{tg.}\ (90^0 - \alpha) = \frac{b}{a}.$$

Ezen egyenletekből:

$$a = b\ .\ \mathrm{tg.}\ \alpha;\ b = a\ .\ \mathrm{tg.}\ (90^0 - \alpha) \qquad 3)$$

Ezek szerint: a derékszögű háromszög bármely befogóját megkapjuk, ha a másik befogót a keresettel szemben fekvő szög tangensével megszorozzuk.

d) A derékszögű háromszög valamely hegyes szögének cotangense alatt a szög mellett fekvő befogónak a másik befogóhoz való arányát értjük; így:

$$\text{cotg.}\,\alpha = \frac{b}{a}\,; \qquad \text{cotg.}\,(90^0 - \alpha) = \frac{a}{b}.$$

Ezen egyenletekből:

$$b = a\,.\,\text{cotg.}\,\alpha\,; \quad a = b\,.\,\text{cotg.}\,(90^0 - \alpha) \qquad 4)$$

Ezek szerint: a derékszögű háromszög bármely befogóját megkapjuk, ha a másik befogót a keresett mellett fekvő szög cotangensével megszorozzuk.

A 3) és 4) alatt foglalt egyenletekből, továbbá a tangens és cotangens definitiójából az következik, hogy: valamely szög tangense pótlószögének cotangensével; továbbá, hogy valamely szög tangense cotangensének reciprok értékével egyenlő; azaz:

$$\text{tg.}\,\alpha = \text{cotg.}\,(90^0 - \alpha); \quad \text{cotg.}\,\alpha = \text{tg.}\,(90^0 - \alpha);$$

$$\text{tg.}\,\alpha = \frac{1}{\text{cotg.}\,\alpha}\,; \quad \text{cotg.}\,\alpha = \frac{1}{\text{tg.}\,\alpha}.$$

e) A derékszögű háromszög valamely hegyes szögének cosinusából alkotott reciprok értéket az illető szög secansának, sinusából alkotott reciprok értéket cosecansának nevezzük; így:

$$\text{sec.}\,\alpha = \frac{c}{b}\,; \quad \text{sec.}\,(90^0 = \alpha) = \frac{c}{a}\,;$$

$$\text{cosec.}\,\alpha = \frac{c}{a}\,; \quad \text{cosec.}\,(90^0 - \alpha) = \frac{c}{b}.$$

Ezen egyenletekből, nemkülönben a secans és cosecans definitiójából következik, hogy:

$$c = b\,.\,\text{sec.}\,\alpha\,; \quad c = a\,.\,\text{sec.}\,(90^0 - \alpha)\,;$$
$$c = a\,.\,\text{cosec.}\,\alpha\,; \quad c = b\,.\,\text{cosec.}\,(90^0 - \alpha)\,; \qquad 5)$$

továbbá:

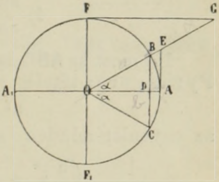
$$\text{sec.}\,\alpha = \frac{1}{\cos.\,\alpha}\,; \quad \text{cosec.}\,\alpha = \frac{1}{\sin.\,\alpha}\,; \quad \sin.\,\alpha = \frac{1}{\text{cosec.}\,\alpha}\,;$$

$$\cos.\,\alpha = \frac{1}{\text{sec.}\,\alpha} \qquad 6)$$

Ezek szerint: a derékszögű háromszög átfogóját nyerjük, ha az egyik befogót az utóbbi mellett fekvő szög secansával, vagy a pótlószög cosecansával megszorozzuk; továbbá: a hegyes szög secansa a pótlószög cosecansával egyenlő.

3. §. A goniometriai vonalak szerkesztése.

Ha az **AOB** $= \alpha$ szög **O** szögpontjából (2. ábra) **AO** sugárral kört irunk le és **B** pontból a **BD** $\perp$ **AO** vonalat, **A** pontra pedig az **AE** $\perp$ **AO** vonalat szerkesztjük, akkor a **BDO** és **AEO** derékszögű háromszögekből:



2. ábra.

$$\sin.\,\alpha = \frac{BD}{BO};\ \cos.\,\alpha = \frac{DO}{BO};$$

$$\mathrm{tg.}\,\alpha = \frac{AE}{AO};\ \sec.\,\alpha = \frac{EO}{AO}.$$

Ha most **O** pontban az **OF** $\perp$ **AO** és **F** pontban az **FG** $\perp$ **OF** egyeneseket szerkesztjük és tekintetbe veszszük, hogy α és **FGO** $\sphericalangle$ váltószögek s mint ilyenek egyenlők, akkor az **FGO** derékszögű háromszögből:

$$\mathrm{cotg.}\,\alpha = \frac{GF}{FO};\quad \mathrm{cosec.}\,\alpha = \frac{GO}{FO}.$$

Mivel a derékszögü háromszögben az oldalak arányát α szög teljesen meghatározza (1. §.), úgy hogy azok változatlanok maradnak, akármilyen nagynak veszszük is fel a kör sugarát; ennélfogva jogunkban áll a sugarat az itt szereplő vonalak egységéül választani s akkor feltéve, hogy **AO** $=$ **BO** $=$ **FO** $= 1$, lesz:

$$\sin.\,\alpha = BD;\ \cos.\,\alpha = DO;\ \mathrm{tg.}\,\alpha = AE;\ \sec.\,\alpha = OE;$$
$$\mathrm{cotg.}\,\alpha = FG;\ \mathrm{cosec.}\,\alpha = GO.$$

Ezen esetben természetesen a **BD**, **DO**, **AE**, **OE**, **FG** és **GO** goniometriai vonalak nevezetlen számokat, azaz: a sugárra, mint egységre vonatkoztatott mértékszámokat jelentenek.

Az elmondottakból tehát következik, hogy az egység-sugarú körre vonatkoztatott goniometriai függvények a megfelelő goniometriai vonalak mértékszámai gyanánt tekinthetők.

4. §. Ugyanazon szög függvényeinek kapcsolata.

Az ugyanazon α szög függvényei között már a 2. §-ban megállapítottunk bizonyos összefüggéseket; így találtuk, hogy:

$$1)\ \text{tg.}\,\alpha = \frac{1}{\text{cotg.}\,\alpha};\quad 2)\ \text{sec.}\,\alpha = \frac{1}{\cos.\,\alpha};\quad 3)\ \text{cosec.}\,\alpha = \frac{1}{\sin.\,\alpha}.$$

Mivel ugyanazon §. szerint:

$$\sin.\ \alpha = \frac{a}{c};\quad \cos.\ \alpha = \frac{b}{c};\quad \text{tg.}\ \alpha = \frac{a}{b};$$

a két első egyenlet osztásából lesz:

$$4)\ \frac{\sin.\ \alpha}{\cos.\ \alpha} = \text{tg.}\ \alpha.$$

Ha most az **ABC** derékszögű háromszögre (1. ábra) Pythagoras-tételét alkalmazzuk, lesz:

$$a^2 + b^2 = c^2;$$

az egyenlet minden tagját c^2-tel osztva:

$$\left(\frac{a}{c}\right)^2 + \left(\frac{b}{c}\right)^2 = 1;\ \text{azaz:}$$

$$5)\ \sin.^2\ \alpha + \cos^2.\ \alpha = 1.$$

Végre a Pythagoras-tételét kifejező egyenletet előbb a^2-tel, majd b^2-tel osztva, lesz:

$$1 + \left(\frac{b}{a}\right)^2 = \left(\frac{c}{a}\right)^2;\quad \left(\frac{a}{b}\right)^2 + 1 = \left(\frac{c}{b}\right)^2;\ \text{azaz:}$$

$$6)\ 1 + \text{cotg.}^2\,\alpha = \text{cosec.}^2\,\alpha;\quad 7)\ \text{tg.}^2\,\alpha + 1 = \text{sec.}^2\,\alpha.$$

A goniometria ezen hét alapegyenletének alkalmazásával képesek vagyunk valamely szögnek egy ismert függvényéből valamennyi többit meghatározni. Igy pl. ha ismerjük az α szög sinusát, akkor:

$$\sin.^2\,\alpha + \cos.^2\,\alpha = 1;\quad \cos.^2\,\alpha = 1 - \sin.^2\,a;$$

$$\cos.\,\alpha = \pm\sqrt{1 - \sin.^2\,\alpha}.$$

$$\text{tg.}\,\alpha = \frac{\sin.\,\alpha}{\cos.\,\alpha} = \pm\frac{\sin.\ \alpha}{\sqrt{1-\sin.^2\alpha}};\quad \text{cotg.}\,\alpha = \frac{1}{\text{tg.}\,\alpha} = \pm\frac{\sqrt{1-\sin.^2\alpha}}{\sin.\ \alpha}$$

$$\text{sec.}\,\alpha = \frac{1}{\cos.\,\alpha} = \pm\frac{1}{\sqrt{1 - \sin^2\alpha}};\quad \text{cosec.}\,\alpha = \frac{1}{\sin.\,\alpha}.$$

Ha α szög cosinusát ismerjük, lesz:

$$\sin.^2\alpha + \cos.^2\alpha = 1\,;\ \sin.\alpha = \pm\sqrt{1-\cos.^2\alpha}\,;$$

$$\mathrm{tg}.\,\alpha = \frac{\sin.\alpha}{\cos.\alpha} = \pm\frac{\sqrt{1-\cos.^2\alpha}}{\cos.\alpha}\,;$$

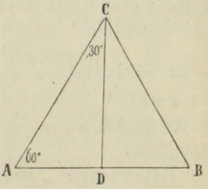
$$\mathrm{cotg}.\,\alpha = \frac{1}{\mathrm{tg}.\,\alpha} = \pm\frac{\cos.\alpha}{\sqrt{1-\cos^2\alpha}}\,;$$

$$\sec.\alpha = \frac{1}{\cos.\alpha}\,;\ \mathrm{cosec}.\,\alpha = \frac{1}{\sin.\alpha} = \pm\frac{1}{\sqrt{1-\cos.^2\alpha}}.$$

Hasonló eljárással nyerhetjük a tangens, cotangens, secans és cosecans ismerete esetén a többi függvényt.

5. §. Néhány szerkeszthető szög függvényeinek meghatározása.

a) Ha az **ABC** egyenlőoldalú háromszöget (3. ábra) szerkesztjük és annak **C** szögpontjából a **CD** $\perp$ **AB** egyenest húzzuk, akkor $ACD = BCD = 30^0$; feltéve még, hogy: $AB = BC = AC = 1$, lesz:



3. ábra.

$$\sin.30^0 = \cos.60^0 = \frac{AD}{AC} = \frac{1}{2}\,;$$

$$\cos.30^0 = \sin.60^0 = \frac{CD}{AC} = \frac{\sqrt{AC^2 - AD^2}}{AC} = \sqrt{1-\frac{1}{4}} = \frac{1}{2}\sqrt{3}\,;$$

a 7-ik alapegyenlet szerint:

$$1 + \mathrm{tg}.^2\,30^0 = \sec.^2\,30^0 = \frac{1}{\cos.^2\,30^0}\,;$$

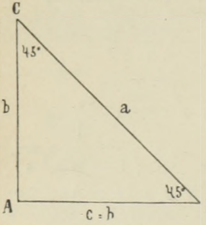
$$\mathrm{tg}.^2\,30^0 = \frac{1}{\cos.^2\,30^0} - 1 = \frac{1}{\left(\frac{1}{2}\sqrt{3}\right)^2} - 1 = \frac{1}{3};$$

$$\mathrm{tg}.\,30^0 = \mathrm{cotg}.\,60^0 = \frac{1}{3}\cdot\sqrt{3}\,;$$

$$\mathrm{cotg}.\,30^0 = \mathrm{tg}.\,60^0 = \sqrt{3}\,;\ \sec.30^0 = \mathrm{cosec}.60^0 = \frac{2}{3}\cdot\sqrt{3}\,;$$

$$\mathrm{cosec}.\,30^0 = \sec.\,60^0 = 2.$$

b) Ha az **ABC** (4. ábra) egyenlőszárú derékszögű háromszöget veszszük szemügyre, azt találjuk,



4. ábra.

hogy annak mindenik hegyes szöge 45°; a befogók egyenlők és ha az átfogót egynek veszszük, akkor Pythagoras-tétele szerint:

$$a = \sqrt{2b^2} = b\sqrt{2};$$

és:

$$\sin. 45^0 = \cos. 45^0 =$$

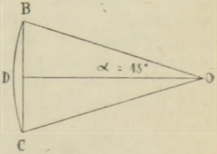
$$= \frac{b}{b\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1}{2} . \sqrt{2};$$

$$\text{tg}. 45^0 = \text{cotg}. 45^0 = 1; \quad \sec. 45^0 = \text{cosec}. 45^0 = \sqrt{2}.$$

c) Ha **BC** (5. ábra) az egység-sugárú körbe rajzolt szabályos tízszög egy oldala; akkor, amint a planimetriából tudjuk:

$$BC = 2 . BD = \frac{\sqrt{5} - 1}{2},$$

és $\alpha = 18^0$.



5. ábra.

Az **OBD** derékszögű háromszögben:

$$\overline{OD}^2 = \overline{OB}^2 - \overline{BD}^2 =$$

$$= 1 - \frac{(\sqrt{5}-1)^2}{16} = \frac{10+2\sqrt{5}}{16};$$

$$OD = \frac{1}{4}\sqrt{10+2\sqrt{5}};$$

ilyformán:

$$\sin. 18^0 = \cos. 72^0 = \frac{BD}{OB} = \frac{\sqrt{5}-1}{4};$$

$$\cos. 18^0 = \sin. 72^0 = \frac{OD}{OB} = \frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4};$$

$$\text{tg}. 18^0 = \text{cotg}. 72^0 = \frac{BD}{OD} = \frac{\sqrt{5}-1}{\sqrt{10+2\sqrt{5}}};$$

$$\text{cotg}. 18^0 = \text{tg}. 72^0 = \frac{OD}{BD} = \frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{\sqrt{5}-1};$$

$$\sec. 18^0 = \operatorname{cosec}. 72^0 = \frac{4}{\sqrt{10+2\sqrt{5}}};$$

$$\operatorname{cosec}. 18^0 = \sec. 72^0 = \frac{4}{\sqrt{5}-1} = \sqrt{5}+1.$$

6. §. A goniometriai függvények előjele és nagysága.

Eddigi tárgyalásainkban csakis a hegyes szögek függvényeiről szólottunk; kisértsük most meg a függvények általánositását. Ha az egység-sugarú körben (2. ábra) **BO** sugár az óramutató járásával ellenkező irányban mozog, **AO** pedig változatlan marad, akkor a teljes fordulat után **AO** és **BO** 0° és 360° között az összes lehetséges szögeket bezárják.

A sinust — mint tudjuk — a **B** pontból **AO**-ra bocsátott merőleges, a cosinust ezen merőleges talppontjának az **O** szögponttól mért távola, a tangenst az **A** ponttól **BO** meghosszabbitásáig húzott egyenes, a secanst ezen (E) metszési pontnak az **O** szögpontig mért távola, majd ha **O** szögponthan **AO**-ra merőleges sugarat s ennek **F** pontjában **OF**-re merőlegest emelünk, akkor a cotangenst ezen merőlegesnek **BO** meghosszabbitásáig terjedő része, s a cosecanst ezen utóbbi (G) metszési pontnak **O**-ig vett távolsága állitja elő.

Altalánosan elfogadott elv, hogy a hegyes szögek összes függvényeit positiv előjelüeknek tekintjük. Ha tehát a hegyes szögtől eltérő valamely szögnek bizonyos függvénye ellenkező helyzetű, mint a hegyes szögé, azt negativ előjelünek kell vennünk. Ennélfogva a sinus és tangens positiv, ha az **AA'** fölött van, negativ, ha **AA'** alatt találjuk; a cosinus és cotangens positiv, ha **FF'**-től jobbra, negativ, ha attól balra esik; a secans és cosecans positiv, ha **BO** szögszár előre haladó, negativ, ha hátrafelé irányuló meghosszabbitása révén származik.

A függvények nagyságára nézve azt látjuk, hogy amint a szög 0°-tól 90° felé növekszik, a sinusa, tangense és secansa is nő, ellenben a többi függvénye kisebbedik; a második körnegyedben a cotangens, secans és cosecans absolut értékre nézve növekszik, a többi függvény kisebbedik; a harmadik körnegyedben absolut értékre nézve nő a sinus, tangens és secans, a többi függvény kisebbedik; végre a negyedik körnegyedben nő a cosinus, cotangens és cosecans, ellenben a többi függvény kisebbedik.

Ha az elmondottakat figyelembe veszszük és az egyes szögek függvényeinek nagysága mellett azok előjelét is megállapitjuk, akkor a határértékekre nézve azt találjuk, hogy:

$\sin. 0^0 = 0$;	$\sin. 90^0 = 1$;	$\sin. 180^0 = 0$;
$\cos. 0^0 = 1$;	$\cos. 90^0 = 0$;	$\cos. 180^0 = -1$;
$\mathrm{tg}. 0^0 = 0$;	$\mathrm{tg}. 90^0 = \pm\infty$;	$\mathrm{tg}. 180^0 = 0$;
$\mathrm{cotg}. 0^0 = \infty$;	$\mathrm{cotg}. 90^0 = 0$;	$\mathrm{cotg}. 180^0 = \mp\infty$;
$\sec. 0^0 = 1$;	$\sec. 90^0 = \pm\infty$;	$\sec. 180^0 = -1$;
$\mathrm{cosec}. 0^0 = \infty$;	$\mathrm{cosec}. 90^0 = 1$;	$\mathrm{cosec}. 180^0 = \pm\infty$;

$\sin. 270^0 = -1$;	$\sin. 360^0 = 0$.
$\cos. 270^0 = 0$;	$\cos. 360^0 = 1$.
$\mathrm{tg}. 270^0 = \pm\infty$;	$\mathrm{tg}. 360^0 = 0$.
$\mathrm{cotg}. 270^0 = 0$;	$\mathrm{cotg}. 360^0 = \mp\infty$.
$\sec. 270^0 = \mp\infty$;	$\sec. 360^0 = 1$.
$\mathrm{cosec}. 270^0 = -1$;	$\mathrm{cosec}. 360^0 = \mp\infty$.

Általában a tompa szögek függvényei közül a sinus és cosecans positiv, a többi függvény negativ; a harmadik körnegyedben a tangens és cotangens positiv, a többi negativ; a negyedik körnegyedben a cosinus és secans positiv, a többi függvény negativ előjelü.

Ha a BO szögszár a teljes körülforgás után még tovább folytatja útját, akkor a 360^0-nál nagyobb szögek állanak elő s ezekre nézve:

$\sin. (n. 360^0 + \alpha) = \sin. \alpha$; $\cos. (n. 360^0 + \alpha) = \cos. \alpha$;
$\mathrm{tg}. (n. 360^0 + \alpha) = \mathrm{tg}. \alpha$; $\mathrm{cotg}. (n. 360^0 + \alpha) = \mathrm{cotg}. \alpha$;
$\sec. (n. 360^0 + \alpha) = \sec. \alpha$; $\mathrm{cosec}. (n. 360^0 + \alpha) = \mathrm{cosec}. \alpha$.

7. §. A positiv és negativ szögek függvényeinek kapcsolata.

Tudjuk, hogy a BO szögszárnak (2. ábra) az óramutató járásával ellenkező irányú forgásából származó szögek positivok, az óramutató járásával megegyező irányú forgásából származó szögek negativok.

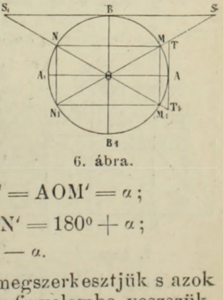
Ha tehát az $AOB = \alpha$ szöggel egyenlő $AOC = -\alpha$ szöget szerkesztjük, akkor közvetlen megszemlélés után láthatjuk, hogy absolut értékre nézve az α és $-\alpha$ szög valamennyi függvénye megegyezik, sőt a cosinusnak és secansnak még az előjele is mindkét szögre nézve ugyanaz, a többi függvény azonban előjelre nézve különbözik; ilyformán:

$$\sin.(-\alpha) = -\sin.\alpha; \quad \cos.(-\alpha) = \cos.\alpha;$$
$$\mathrm{tg}.(-\alpha) = -\mathrm{tg}.\alpha; \quad \mathrm{cotg}.(-\alpha) = -\mathrm{cotg}.\alpha;$$
$$\sec.(-\alpha) = \sec.\alpha; \quad \mathrm{cosec}.(-\alpha) = -\mathrm{cosec}.\alpha.$$

8. §. A hegyes és nagyobb szögek függvényeinek kapcsolata.

A 4. §-ban már megállapítottuk a hegyes szögek függvényei közt jelentkező kapcsolatot; kisértsük most meg, nem volna-e lehetséges összefüggéseket felismerni a hegyes és az annál nagyobb szögek függvényei között is?

A 6. §-ban összeállított táblázatból kitetszőleg a goniometriai függvények előjeleiktől eltekintve, már az első körnegyedben felveszik legnagyobb, vagy legkisebb értékeiket. Ilyformán a 90^o-nál nagyobb szögek függvényeit mindenkor helyettesithetjük az első körnegyedbe eső szögek függvényeivel, mert ha a határértékek már ott feltalálhatók, akkor a közbeeső értékeknek is ott kell lenniök.



6. ábra.

Ha **O** középpontból (6. áb.) **AO** = 1 sugárral kört irunk le s az **AOM** = α szög **OM** szárának **M** pontjából az **MNN'M'** derékszögű négyszöget szerkesztjük s annak átlóit meghúzzuk, akkor:

$$MOA = NOA' = A'ON' = AOM' = \alpha;$$

tehát: $AON = 180^o - \alpha; \quad AON' = 180^o + \alpha;$

$$AOM' = 360^o - \alpha.$$

Ha e szögek függvényeit megszerkesztjük s azok nagysága mellett előjeleiket és figyelembe veszszük, akkor:

$$\sin.(180^o - \alpha) = \sin.\alpha; \quad \sin.(180^o + \alpha) = -\sin.\alpha;$$
$$\cos.(180^o - \alpha) = -\cos.\alpha; \quad \cos.(180^o + \alpha) = -\cos.\alpha;$$
$$\mathrm{tg}.(180^o - \alpha) = -\mathrm{tg}.\alpha; \quad \mathrm{tg}.(180^o + \alpha) = \mathrm{tg}.\alpha;$$
$$\mathrm{cotg}.(180^o - \alpha) = -\mathrm{cotg}.\alpha; \quad \mathrm{cotg}.(180^o + \alpha) = \mathrm{cotg}.\alpha;$$

$$\sin.(360^o - \alpha) = -\sin.\alpha; \quad \cos.(360^o - \alpha) = \cos.\alpha;$$
$$\mathrm{tg}.(360^o - \alpha) = -\mathrm{tg}.\alpha; \quad \mathrm{cotg}.(360^o - \alpha) = -\mathrm{cotg}.\alpha.$$

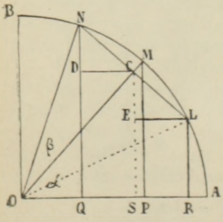
Általában :

$$\sin.(2n\,.\,2R \pm \alpha) = \pm \sin.\alpha\,;$$
$$\cos.(2n\,.\,2R \pm \alpha) = \cos.\alpha\,;$$
$$\text{tg}.(2n\,.\,2R \pm \alpha) = \pm\, \text{tg}.\alpha\,;$$
$$\text{cotg}.(2n\,.\,2R \pm \alpha) = \pm\, \text{cotg}.\alpha\,;$$

$$\sin.[(2n+1)\,.\,2R \pm \alpha] = \pm \sin.\alpha\,;$$
$$\cos.[(2n+1)\,.\,2R \pm \alpha] = -\cos.\alpha\,;$$
$$\text{tg}.[(2n+1)\,.\,2R \pm \alpha] = \pm\, \text{tg}.\alpha\,;$$
$$\text{cotg}.[(2n+1)\,.\,2R \pm \alpha] = \pm\, \text{cotg}.\alpha.$$

Ha most csakis a sík trigonometriájában még szereplő tompa-szögeket veszszük figyelembe és megemlítjük, hogy az olyan szögeket, melyek együttvéve éppen 180°-ot adnak, kiegészítő-szögeknek hívjuk, akkor kimondhatjuk, hogy: a kiegészítő szögek függvényei absolut értékre nézve egyenlők, a sinusok még jelre nézve is azonosak, ellenben a cosinusok, tangensek és cotangensek előjelre nézve különböznek.

9. §. Két szög összegének és különbségének függvényei.



7. ábra.

Legyen (7. ábra) AOM $\sphericalangle = \alpha$, MON $\sphericalangle = \beta$; MN ív = ML ív; akkor: AON $\sphericalangle = \alpha + \beta$; AOL $\sphericalangle = \alpha - \beta$; CN = sin. β; CO = cos. β; NQ = sin. $(\alpha + \beta)$; OQ = cos. $(\alpha + \beta)$; LR = sin. $(\alpha - \beta)$; OR = cos. $(\alpha - \beta)$.

Legyen továbbá: CS $\perp$ AO; CD $\parallel$ LE $\parallel$ AO; akkor: LCE $\triangle \cong$ CDN $\triangle$ és:

$$\sin.(\alpha + \beta) = NQ = DQ + DN = CS + DN\,;$$
$$\cos.(\alpha + \beta) = OQ = OS - QS = OS - CD\,;$$
$$\sin.(\alpha - \beta) = LR = CS - CE = CS - DN\,;$$
$$\cos\,(\alpha - \beta) = OR = OS + LE = OS + CD.$$

Mivel **MPO** $\triangle \sim$ **COS** $\triangle$-höz és **MPO** $\triangle$ **CDN** $\triangle$-höz, ennélfogva :

$$CS : MP = OC : OM;\ \text{azaz:}\ \frac{CS}{\sin.\alpha} = \frac{\cos.\beta}{1}\,;$$

$$OS : OP = OC : OM; \text{ azaz: } \frac{OS}{\cos.\alpha} = \frac{\cos.\beta}{1};$$

$$DN : OP = CN : OM; \text{ azaz: } \frac{DN}{\cos.\alpha} = \frac{\sin.\beta}{1};$$

$$CD : MP = CN : OM; \text{ azaz: } \frac{CD}{\sin.\alpha} = \frac{\sin.\beta}{1}.$$

Ezen egyenletekből:

$CS = \sin.\alpha.\cos.\beta$; $OS = \cos.\alpha.\cos.\beta$; $DN = \cos\alpha.\sin.\beta$; $CD = \sin.\alpha.\sin.\beta$; és:

$$\sin.(\alpha + \beta) = \sin.\alpha.\cos.\beta + \cos.\alpha.\sin.\beta;$$
$$\cos.(\alpha + \beta) = \cos.\alpha.\cos.\beta - \sin.\alpha.\sin.\beta;$$
$$\sin.(\alpha - \beta) = \sin.\alpha.\cos.\beta - \cos.\alpha.\sin.\beta;$$
$$\cos.(\alpha - \beta) = \cos.\alpha.\cos.\beta + \sin.\alpha.\sin.\beta.$$

Mivel: $\operatorname{tg}.(\alpha + \beta) = \frac{\sin.(\alpha + \beta)}{\cos.(\alpha + \beta)}$, ennélfogva:

$$\operatorname{tg}.(\alpha + \beta) = \frac{\sin.\alpha.\cos.\beta + \cos.\alpha.\sin.\beta}{\cos.\alpha.\cos.\beta - \sin.\alpha.\sin.\beta}.$$

Ha most az utolsó tört számlálóját és nevezőjét a cos. α. cos. β szorzattal osztjuk; lesz:

$$\operatorname{tg}.(\alpha + \beta) = \frac{\operatorname{tg}.\alpha + \operatorname{tg}.\beta}{1 - \operatorname{tg}.\alpha.\operatorname{tg}.\beta}.$$

Hasonló eljárás szerint:

$$\operatorname{tg}.(\alpha - \beta) = \frac{\sin.(\alpha - \beta)}{\cos.(\alpha - \beta)} = \frac{\sin.\alpha.\cos.\beta - \cos.\alpha.\sin.\beta}{\cos.\alpha.\cos.\beta + \sin.\alpha.\sin.\beta}$$

Ha az egyenlet jobb oldalának számlálóját és nevezőjét cos. α . cos. β-val osztjuk, lesz:

$$\operatorname{tg}.(\alpha - \beta) = \frac{\operatorname{tg}.\alpha - \operatorname{tg}.\beta}{1 + \operatorname{tg}.\alpha.\operatorname{tg}.\beta}.$$

Ugyanily módon:

$$\operatorname{cotg}.(\alpha + \beta) = \frac{\operatorname{cotg}.\alpha.\operatorname{cotg}.\beta - 1}{\operatorname{cotg}.\beta + \operatorname{cotg}.\alpha};$$

$$\operatorname{cotg}.(\alpha - \beta) = \frac{\operatorname{cotg}.\alpha.\operatorname{cotg}.\beta - 1}{\operatorname{cotg}.\beta - \operatorname{cotg}.\alpha}.$$

10. §. A kétszeres és félszögek függvényei.

Ha a sin. 2α, cos. 2α, tg. 2α, cotg. 2α értékeket α függvényeiben kell kifejeznünk, a következőképen járunk el.

Tudjuk, hogy:

$$\sin.(\alpha+\beta)=\sin.\alpha.\cos.\beta+\cos.\alpha.\sin.\beta;$$

ha most: $\alpha=\beta$, akkor az előbbi képlet így alakul:

$$\sin.2\alpha=2.\sin.\alpha.\cos.\alpha.$$

Ugyanily helyettesítéssel a $\cos.(\alpha+\beta)$, $\operatorname{tg}.(\alpha+\beta)$ $\operatorname{cotg}.(\alpha+\beta)$ értékeit kifejező képletekből lesz:

$$\cos.2\alpha=\cos.^2\alpha-\sin.^2\alpha;$$

$$\operatorname{tg}.2\alpha=\frac{2\operatorname{tg}.\alpha}{1-\operatorname{tg}.^2\alpha};\quad \operatorname{cotg}.2\alpha=\frac{\operatorname{cotg}.^2\alpha-1}{2\operatorname{cotg}.\alpha}.$$

Ha most cos. 2α képletébe α helyett $\frac{\alpha}{2}$-t irunk, lesz:

$$\cos.\alpha=\cos.^2\frac{\alpha}{2}-\sin.^2\frac{\alpha}{2};$$

az első alapegyenlet szerint pedig:

$$1=\cos.^2\frac{\alpha}{2}+\sin.^2\frac{\alpha}{2};$$

e két egyenlet összeadásából és kivonásából:

$$1+\cos.\alpha=2.\cos.^2\frac{\alpha}{2};\quad 1-\cos\alpha=2.\sin.^2\frac{\alpha}{2};$$

ezekből:

$$\sin.\frac{\alpha}{2}=\sqrt{\frac{1-\cos.\alpha}{2}};\quad \cos\frac{\alpha}{2}=\sqrt{\frac{1+\cos.\alpha}{2}};$$

$$\operatorname{tg}.\frac{\alpha}{2}=\frac{\sin.\frac{\alpha}{2}}{\cos.\frac{\alpha}{2}}=\sqrt{\frac{1-\cos.\alpha}{1+\cos.\alpha}};\quad \operatorname{cotg}.\frac{\alpha}{2}=\frac{\cos.\frac{\alpha}{2}}{\sin.\frac{\alpha}{2}}=$$

$$=\sqrt{\frac{1+\cos.\alpha}{1-\cos.\alpha}}.$$

11. §. A függvények összegének és különbségének szorzattá változtatása.

Összegeknek és különbségeknek szorzatokká való változtatását vagy az eddig megismert képleteknek alkalmazásával vagy segédszögek bevezetésével végezzük.

a) A 9. §-ban talált egyenletek összeadásából és kivonásából lesz:

$$\sin.(\alpha+\beta)+\sin.(\alpha-\beta)=2.\sin.\alpha.\cos.\beta;$$
$$\sin.(\alpha+\beta)-\sin.(\alpha-\beta)=2.\cos.\alpha.\sin.\beta;$$
$$\cos.(\alpha+\beta)+\cos.(\alpha-\beta)=2.\cos.\alpha.\cos.\beta;$$
$$\cos.(\alpha+\beta)-\cos.(\alpha-\beta)=-2.\sin.\alpha.\sin.\beta.$$

Legyen: $\alpha+\beta=m$; $\alpha-\beta=n$; akkor: $\alpha=\frac{m+n}{2}$; $\beta=\frac{m-n}{2}$, a fenti képletek pedig így alakúlnak:

$$\sin.m+\sin.n=2.\sin.\frac{m+n}{2}.\cos.\frac{m-n}{2};$$
$$\sin.m-\sin.n=2.\cos.\frac{m+n}{2}.\sin.\frac{m-n}{2};$$
$$\cos.m+\cos.n=2.\cos.\frac{m+n}{2}.\cos.\frac{m-n}{2};$$
$$\cos.m-\cos.n=-2.\sin.\frac{m+n}{2}.\sin.\frac{m-n}{2};$$

Továbbá:

$$tg.\alpha\pm tg.\beta=\frac{\sin.\alpha}{\cos.\alpha}\pm\frac{\sin.\beta}{\cos.\beta}=\frac{\sin.\alpha\cos.\beta\pm\cos.\alpha\sin.\beta}{\cos.\alpha.\cos.\beta}=$$
$$=\frac{\sin.(\alpha\pm\beta).}{\cos.\alpha.\cos.\beta}.$$

Végre:

$$\text{cotg}.\alpha\pm\text{cotg}.\beta=\frac{\cos.\alpha}{\sin.\alpha}\pm\frac{\cos.\beta}{\sin.\beta}=$$
$$\frac{\cos.\alpha.\sin\beta\pm\sin.\alpha.\cos.\beta.}{\sin.\alpha.\cos.\beta.}=\frac{\sin.(\beta\pm\alpha)}{\sin.\alpha.\sin.\beta}.$$

b) Általánosabb módszert nyújt az összegeknek és különbségeknek szorzatokká változtatására a segédszögek bevezetése. Legyen pl. az **a** + **b** összeg szorzattá alakitandó.

$$a+b=a\left(1+\frac{b}{a}\right).$$

Mivel a tangens oly függvény (6. §.), mely $+\infty$-től $-\infty$-ig minden értéket felvehet, ennélfogva mindenesetre létezik oly φ szög, melyre nézve:

$$tg.^2\varphi=\frac{b}{a};$$

akkor:

$$a+b=a\left(1+\frac{b}{a}\right)=a.(1+tg.^2\varphi)=a.\sec^2\varphi=a.\frac{1}{\cos.^2\varphi}.$$

Vagy hasonló módon:

$$a - b = a\left(1 - \frac{b}{a}\right); \quad \text{legyen: } \frac{b}{a} = \sin.^2 \varphi;$$

akkor: $a - b = a \,.\, (1 - \sin.^2 \varphi) = a \,.\, \cos.^2 \varphi$.

Más esetben pl.:

$$a = \sqrt{b^2 + c^2}; \quad a^2 = b^2 + c^2 = b^2\left(1 + \frac{c^2}{b^2}\right);$$

$$\frac{c}{b} = \operatorname{tg}. \varphi;$$

$$a^2 = b^2(1 + \operatorname{tg}.^2 \varphi) = b^2 . \sec.^2 \varphi; \quad a = b . \sec. \varphi = b . \frac{1}{\cos. \varphi}.$$

Végül szorzattá alakitandó még:

$m \,.\, \sin.\, \alpha + n \,.\, \cos.\, \alpha$ érték;

$$m . \sin. \alpha + n . \cos. \alpha = m . \left(\sin. \alpha + \frac{n}{m} . \cos. \alpha\right).$$

$$\text{Ha: } \operatorname{tg}. \varphi = \frac{\sin. \varphi}{\cos. \varphi} = \frac{n}{m}; \text{ akkor:}$$

$$m . \sin. \alpha + n . \cos. \alpha = m . \left(\sin. \alpha + \frac{\sin. \varphi}{\cos. \varphi} . \cos. \alpha\right) =$$

$$= m . \frac{\sin. \alpha \cos. \varphi + \cos. \alpha \sin. \varphi}{\cos. \varphi} = \frac{m . \sin. (\alpha + \varphi)}{\cos. \varphi}.$$

12. §. A goniometriai függvények kiszámitása.

Mielőtt a goniometriai függvények kiszámitásához fognánk, az eddig tanultak alapján a következőket kell emlékezetünkbe visszaidéznünk: a) bármely szög függvényeit a hegyes szögek függvényeivel fejezhetjük ki; b) valamely szög egyetlen függvényének ismerete elég arra, hogy valamennyi többi függvényét meghatározhassuk; c) teljesen elég a 45^0-ig terjedő szögek függvényeit kiszámitanunk, mert a $45^0 + \alpha$ szög függvényeit a pótló $45^0 - \alpha$ szög függvényeiben fejezhetjük ki, csakis azt kell figyelembe vennünk, hogy minden szög sinusa a pótlószög cosinusával, cosinusa ennek sinusával stb. egyenlő.

Ha ezekután meggondoljuk, hogy az egység sugarú körben foglalt α szög ive nagyobb, mint sinusa, de kisebb, mint a szög tangense, akkor:

$$\sin. \alpha < \text{arcus } \alpha \text{ és arc. } \alpha < \operatorname{tg}. \alpha;$$

$$\text{arc.}\,\alpha < \frac{\sin.\,\alpha}{\cos.\,\alpha}\,; \quad \text{arc.}\,\alpha \cos.\,\alpha < \sin.\,\alpha\,;$$

$$\text{arc.}\,\alpha\,.\,\sqrt{1 - \sin.^2\alpha} < \sin.\,\alpha.$$

Az utóbbi egyenlőtlenség még inkább érvényes marad, ha sin.$^2\,\alpha$ helyett a nála nagyobb arc.$^2\,\alpha$-t teszszük; akkor:

$$\text{arc.}\,\alpha\sqrt{1 - \text{arc}^2\,\alpha} < \sin.\,\alpha.$$

A gyökjel alatt foglalt mennyiség, ha a szög 45^0-nál kisebb, nem éri el az egységet, hanem annál kisebb lesz, de akkor:

$$1 - \text{arc.}^2\,\alpha < \sqrt{1 - \text{arc.}^2\,\alpha},$$

tehát még inkább igaz a következő egyenlőtlenség:

$$\text{arc.}\,\alpha\,(1 - \text{arc.}^2\,\alpha) < \sin.\,\alpha$$

és:

$$\text{arc}\,\alpha - \sin\alpha < \text{arc.}^3\,\alpha.$$

Ezen egyenlőtlenség azt fejezi ki, hogy a 45^0-nál kisebb szög íve és sinusa közt létező különbség kisebb az ív harmadik hatványánál.

Ámde az egység sugarú körben az egy másodpercznek megfelelő arcus: 0·0002908882; ennek a számnak harmadik hatványa elhanyagolható kis tört, úgy hogy az 1 másodpercznyi szög ívét és sinusát egyenlőnek vehetjük; a hiba, amit ezen felvétel által elkövetünk kisebb, mint $1:10^{10}$

Ilyformán: sin. 1'' = 0·0002908882.

Ha ismerjük az egy másodpercznyi szög sinusát, akkor a 4. §. szerint annak valamennyi függvényét kiszámíthatjuk, ezekből pedig a kétszeres szögek, majd a két szög összegének függvényeit kifejező képletek alkalmazásával képesek vagyunk valamennyi szög függvényét kiszámitani.

Az elemi mennyiségtannak ezen kiszámitási módja igen hosszadalmas, éppen azért a függvények tényleges meghatározásánál az egyszerűbb felsőbbmennyiségtani módszereket alkalmazzák.

13. §. A goniometriai táblák.

A goniometriai függvények néhány kivételével irrationális számok. Ezek értékét tetszőleges pontosságig tizedes törtekkel fejezhetjük ki. Sok jegyből álló tizedes törtekkel kényelmetlen számtani műveleteket végezni, éppen azért a goniometriai táblákban nem a szögek függvényeit, hanem azoknak Briggs-féle logarithmusait szokták összeállitani.

Ezen logarithmustáblákat leginkább a következő feladatok megfejtésére használhatjuk fel.

1) Keressük fel valamely adott α szög függvényeinek logarithmusait. Pl. Mivel egyenlő log. sin. α, log. cos. α, log. tg. α, log. cotg. α, ha $\alpha = 32^0\, 18'\, 26''$?

a) log. sin. $32^0\ 18' = 9{\cdot}727828 - 10$ Diff. $1'' = 3{\cdot}33$
$+ 3{\cdot}33 \times 26 = 36{\cdot}58$ $\quad 37$
log. sin. $32^0\, 18'\, 26'' = 9{\cdot}727915 - 10.$

b) log. cos. $32^0\ 18' = 9{\cdot}926991 - 10$ Diff. $1' = 1{\cdot}33$
$- 1{\cdot}33 \times 26 = 34{\cdot}58$ $\quad -35$
log. cos. $32^0\, 18'\, 26'' = 9{\cdot}926956 - 10.$

c) log. tg. $32^0\ 18' = 9{\cdot}800836 - 10$ Diff. $1'' = 4{\cdot}74$
$+ 4{\cdot}74 \times 26 = 121{\cdot}16$ $\quad 121$
log. tg. $32^0\, 18'\, 26'' = 9{\cdot}800957 - 10.$

d) log. cotg. $32^0\ 18' = 10{\cdot}199164 - 10$
$- 4{\cdot}74 \times 26 = 121{\cdot}16$ $\quad -121$
log. cotg. $32^0\, 18'\, 26'' = 10{\cdot}199043 - 10.$

2. Keressük valamely goniometriai függvény adott logarithmusából a hozzátartozó szöget. Pl.:

a) log. sin. $x = 9{\cdot}727915 - 10$
$9{\cdot}727828 - 10 =$ log. sin. $32^0\, 18'$
$87 : 3{\cdot}33 = \qquad + 26''$
$x = 32^0\, 18'\, 26''$

b) log. cos. $x = 9{\cdot}791060 - 10$
$9.790954 - 10 =$ log. cos. $38^0\, 10'$
$106 : 2{\cdot}68 = \qquad - 40''$
$x = 38^0\, 9'\, 20''$

c) log. tg. $x = 9{\cdot}765124 - 10$
$9{\cdot}764933 - 10 =$ log. tg. $30^0\, 12'$
$191 : 4{\cdot}84 = \qquad + 37''$
$x = 30^0\, 12'\, 37''$

d) log. cotg. $x = 10{\cdot}196254 - 10$
$10\,196091 - 10 =$ log. cotg. $32^0\, 29'$
$163 : 4{\cdot}65 = \qquad - 35''$
$x = 32^0\, 29'\, 25''.$

3. Keressük valamely adott szög kijelölt függvényének nagyságát. Pl.:

a) $\sin. 32^\circ 18' 26'' = x$; $\log.\sin. 32^\circ 18' 26'' = 9{\cdot}727915 - 10 = 0{\cdot}727915 - 1$; $x = 0{\cdot}5344604$.

b) $\cos. 60^\circ = x$; $\log. \cos. 60^\circ = 9{\cdot}698970 - 10 = 0.668970 - 1$; $x = 0{\cdot}5$.

c) $\mathrm{tg}. 45^\circ = x$; $\log. \mathrm{tg}. 45^\circ = 10{\cdot}000000 - 10 = 0$; $x = 1$.

d) $\mathrm{cotg}. 36^\circ = x$; $\log. \mathrm{cotg}. 36^\circ = 10{\cdot}138739 - 10 = 0{\cdot}138739$; $x = 1{\cdot}4084$.

4. Keressük meg valamely adott goniometriai függvényből a hozzátartozó szöget. Pl.:

a) $\sin. x = 0{\cdot}5$; $\log.\sin. x = 0{\cdot}698970 - 1 = 9{\cdot}698970 - 10$; $x = 30^\circ$.

b) $\cos. x = 0{\cdot}75$; $\log \cos. x = 0{\cdot}875061 - 1 = 9{\cdot}875061 - 10$; $x = 41^\circ 24' 32{\cdot}2''$.

c) $\mathrm{tg}. x = 0{\cdot}45$; $\log.\mathrm{tg}. x = 0{\cdot}653213 - 1 = 9{\cdot}653213 - 10$; $x = 24^\circ 13' 40''$.

d) $\mathrm{cotg}\, x = 5{\cdot}6$; $\log.\mathrm{cotg}. x = 0{\cdot}748188 = 10{\cdot}748199 - 10$ $x = 10^\circ 7' 29''$.

14. §. A goniometriai egyenletek megfejtése.

Goniometriai egyenleteknek azokat hívjuk, melyekben valamely ismeretlen szögnek goniometriai függvényei fordulnak elő. A következőkben néhány ilyen egyenlet-alak megfejtésével fogunk foglalkozni.

1) $\sin. x \,.\, \cos. x = a$; $2\sin\, x \,.\, \cos. x = 2a$; $\sin. 2x = 2a$.

2) $\sin. (x + a) - \cos. x \,.\, \sin. a = \cos. a$;
$\sin. x \,.\, \cos. a + \cos. x \,.\, \sin. a - \cos x \,.\, \sin. a = \cos. a$;
$\sin. x \,.\, \cos. a = \cos. a$; $\sin\, x = 1$; $x = 90^\circ$.

3) $a \,.\, \sin. 2x = b \,.\, \cos. x$; $2a \,.\, \sin. x \,.\, \cos. x = b \,.\, \cos. x$

$$\sin\, x = \frac{b}{2a}$$

4) $\cos. x = \mathrm{tg}. x$; $\cos. x = \dfrac{\sin. x}{\cos. x}$; $\cos.^2 x = \sin. x$;

$1 - \sin^2 x = \sin\, x$; $\sin.^2 x + \sin. x = 1$;

$$x = -\frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} + 1} = -\frac{1}{2}\left(1 \mp \sqrt{5}\right).$$

5) $5\sin.^2 x - 15 . \cos.^2 x = 2{\cdot}5 \sin. x . \cos x$;

$5 \cos.^2 x$-el osztva, lesz : $\mathrm{tg}.^2 x - \frac{1}{2} \mathrm{tg}. x = 3$;

$$\mathrm{tg}. x = \frac{1}{4} \pm \sqrt{\frac{49}{16}} = \frac{1}{4} \pm \frac{7}{4}; \ \mathrm{tg}. x = 2.$$

6) $\frac{a}{\sin.^2 x} + \frac{b}{\sin. x . \cos. x} + \frac{a}{\cos.^2 x} = c$;

$a (\sin.^2 x + \cos^2 x) + b . \sin x . \cos. x =$
$= c . \sin.^2 x . \cos.^2 x$;

$c . (\sin. x . \cos. x)^2 - b . \sin. x . \cos. x - a = 0$;

$\sin.^2 2x - \frac{2b}{c} . \sin. 2x - \frac{2a}{c} = 0$;

$$\sin. 2x = \frac{b \pm \sqrt{b^2 + 2ac}}{c}.$$

7) $\cos. 2x = 4 . \sin. x$; $\cos. 2x = 1 - 2\sin.^2 x$;

$2 . \sin.^2 x + 4 \sin. x - 1 = 0$; $\sin. x = \frac{1}{2} (2 \pm \sqrt{6})$.

8) $a . \sin. x + b . \cos. x = c$; $\cos. x = \sqrt{1 - \sin.^2 x}$;

$c - a . \sin. x = b \sqrt{1 - \sin.^2 x}$;

$$\sin. x = \frac{ac \pm b \sqrt{a^2 + b^2 - c^2}}{a^2 + b^2};$$

másfelől :

$$\sin. x = \sqrt{1 - \cos.^2 x}; \ \cos. x = \frac{bc \pm a . \sqrt{a^2 + b^2 - c^2}}{a^2 + b^2}.$$

Reális értékekhez akkor jutunk, ha:

$$a^2 + b^2 > c^2.$$

9) $x + y = a$; $\sin. x + \sin. y = b$;

$$\sin x + \sin. y = 2 . \sin. \frac{x+y}{2} . \cos. \frac{x-y}{2} = b;$$

$$\cos. \frac{x-y}{2} = \frac{b}{2 . \sin. \frac{x+y}{2}} = \frac{b}{2 . \sin. \frac{a}{2}}.$$

$x - y$ kiszámitása után x és y értéke meghatározható.

10) $x + y = 75^0$; $\sin. x - \sin. y = 0{\cdot}207107$;

$$\sin. \frac{x-y}{2} = \frac{0{\cdot}207107}{2 . \cos. 37^0 30'}; \ x - y = 15^0$$

$$x = 45^0; \ y = 30^0.$$

11) $x + y = a$; $tg. x + tg. = b$;

$$tg. x + tg. y = \frac{sin. (x + y)}{cos. x . cos. y} = b;$$

$$sin. (x + y) = b . cos. x . cos. y;$$

$$sin. a = \frac{1}{2} b . [cos. (x + y) + cos. (x - y)];$$

$$cos. (x - y) = \frac{2 . sin. a}{b} - cos. a.$$

Hasonló módon juthatunk az eddig megismert képletek alapján eszközölt átalakítások révén más egyenlet-alakok megoldására is.

MÁSODIK RÉSZ.

A háromszögek megfejtése.

15. §. A derékszögű háromszögek megfejtése.

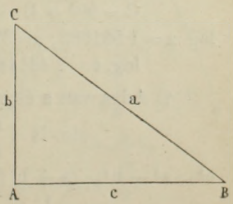
A derékszögű háromszögek megfejtésénél a következő tételek nyernek alkalmazást:

a) Minden derékszögű háromszögben az egyik befogó egyenlő az átfogónak és a befogóval szemben fekvő szög sinusának, vagy az átfogónak és a befogó mellett fekvő szög cosinusának szorzatával. Igy pl. az **ABC** derékszögű háromszögben (8. ábra), melynek oldalai **a**, **b**, **c**, szögei **A**, **B**, **C**:

1) $b = a . sin. B = a . cos. C$.

b) Minden derékszögű háromszögben az egyik befogó egyenlő a másik befogónak a keresettel szemben fekvő szög tangensével, vagy a szomszédos szög cotangensével való szorzatával:

2) $b = c . tg. B = c . cotg. C$



8. ábra.

c) Pythagoras tétele szerint minden derékszögű háromszögben az átfogó négyzete egyenlő a két befogó négyzetének összegével:

3) $a^2 = b^2 + c^2$.

A derékszögű háromszög megfejtésének szükséges, de egyszersmind elégséges feltétele, hogy az **a**, **b**, **c**, **B**, **C** öt alkotórészből kettőt ismerjünk. Mivel e két alkotórész között mindig kell egy oldalnak is lenni, ennélfogva a megoldandó feladatoknak a következő négy esete lehetséges. Megfejtendő a derékszögű háromszög, ha ismerjük:

α) az átfogót és az egyik hegyes szöget;

β) az egyik befogót és az egyik hegyes szöget;

γ) az átfogót és az egyik befogót;

δ) a két befogót.

Vegyük sorra e négy megfejtési esetet:

α) Adva van **a** oldal és **B** szög. Keresendő: **C**, **b**, **c** és a **t** terület.

$$C = 90^0 - B;\ b = a.\sin.B;\ c = a.\cos.B;$$

$$t = \frac{1}{2}bc = \frac{1}{2}a^2.\sin.B.\cos.C.$$

Pl. $a = 221$ m.; $B = 15^0\,27'\,18''$.

$C = 90^0 - B = 74^0\,32'\,42''$;

$\log. c = 2{\cdot}328397$; $c = 213$ m.; $b = 58{\cdot}92$ m.

$\log. t = 3{\cdot}797630$; $t = 6271{\cdot}785$ m^2.

β) Adva van **b** oldal és **B** szög. Keresendő: **C**, **a**, **c** és **t**.

$$C = 90^0 - B;\ a = \frac{b}{\sin.B};\ c = b.\mathrm{cotg}.B;\ t = \frac{1}{2}b^2.\mathrm{cotg}.B.$$

Pl. $b = 36$ m.; $B = 67^0\,22'\,28''$.

$C = 90^0 - B = 22^0\,37'\,32$;

$\log. a = 1{\cdot}591083$; $a = 39$ m.; $\log. c = 1\,176213$; $c = 15$ m.

$\log. t = 2{\cdot}431486$; $t = 270$ m^2.

γ) Adva van **a** és **b** oldal. Keresendő: **c**, **B**, **C** és **t**.

$$\sin.B = \frac{b}{a};\ C = 90^0 - B;$$

$$c^2 = a^2 - b^2 = (a+b)(a-b);\ c = \sqrt{(a+b)(a-b)};$$

$$t = \frac{1}{2}.b.\sqrt{(a+b)(a-b)}.$$

Pl. $a = 100$ m.; $b = 87{\cdot}64$ m.

$\log.\sin.B = 9\,942702 - 10$; $B = 61^0\,12'\,39''$;

$C = 90^0 - B = 28^0\,47'\,31''$;

$$\log. c = \frac{1}{2} (\log. 187{\cdot}64 + \log. 12{\cdot}36) = \frac{3{\cdot}355344}{2};$$
$$c = 47{\cdot}6 \text{ m.}; \ \log. t = 3{\cdot}319344; \ t = 2086{\cdot}14 \text{ m}^2.$$

δ) Adva van **b** és **c** oldal. Keresendő : **a**, **B**, **C** és **t**.

$$\text{tg.} B = \frac{b}{c}; \ C = 90^0 - B; \ a = \sqrt{b^2 + c^2} = \frac{b}{\sin. B}; \ t = \frac{1}{2} bc.$$

Pl. $b = 16{\cdot}5$ m.; $c = 28{\cdot}24$ m.

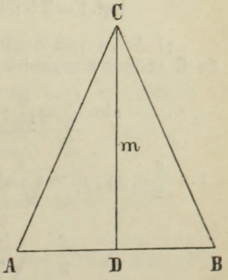
$\log. \text{tg.} B = 9{\cdot}765084 - 10$; $B = 30^0 12' 31''$;
$C = 90^0 - B = 59^0 47' 29''$; $\log. a = 1{\cdot}515787$;
$a = 32{\cdot}79$ m. $\log. t = 2{\cdot}368854$; $t = 233{\cdot}805$ m².

16. §. Az egyenlőszárú háromszögek megfejtése.

Az egyenlőszárú háromszöget az alappal átellenes szögpontból az alapboz induló magasság két egybevágó derékszögű háromszögre bontja. Az ilyen háromszögek megfejtése ennélfogva ugyanazon tételek segitségével végezhető, melyeket a derékszögű háromszögek megoldásánál alkalmaztunk.

Vegyük sorra az **ABC** egyenlőszárú háromszögre (9. ábra) vonatkozó következő megfejtési eseteket:

α) Adva van **b** szár és **C** szög. Keresendők az ismeretlen alkotórészek és a terület. A **C** szögpontból **CD** ⊥ **AB** egyenest húzva:



9. ábra.

$$ACD \sphericalangle = \frac{C}{2} \text{ és így:}$$

$$A = B = 90^0 - \frac{C}{2};$$

$$AD = \frac{c}{2} = b \cdot \sin. \frac{C}{2}; \ c = 2b \cdot \sin. \frac{C}{2}.$$

$$t = \frac{c}{2} \cdot m; \ m = b \cdot \cos. \frac{C}{2}; \quad t = b^2 \cdot \sin. \frac{C}{2} \cdot \cos. \frac{C}{2} =$$
$$= \frac{b^2}{2} \cdot \sin. C.$$

Pl. $c = 61{\cdot}2$ m; $C = 111^0\,35'\,20''$.

$$A = B = 90^0 - \frac{C}{2} = 34^0\,12'\,20'';$$

$\log b = 1{\cdot}568202$; $b = 37$ m.

$\log. t = 2{\cdot}803786$; $t = 636{\cdot}48$ m².

β) Adva van **c** alap és **C** szög; keresendők **a** = **b** szár, **A** = **B** szög és **t** terület.

$$A = B = 90^0 - \frac{C}{2};$$

$$\frac{c}{2} = b\,.\,\sin.\frac{C}{2}; \quad a = b = \frac{c}{2\,.\,\sin.\frac{C}{2}};$$

$$t = \frac{c}{2}\,.\,m; \quad m = \frac{c}{2}\,.\,\mathrm{cotg}\,\frac{C}{2}; \; t = \frac{c^2}{4}\,.\,\mathrm{cotg}.\frac{C}{2}.$$

Pl. $c = 57{\cdot}6$ m.; $C = 38^0\,40'\,16''$.

$$A = B = 90^0 - \frac{C}{2} = 70^0\,39'\,52'';$$

$\log. a = \log. b = 1{\cdot}939433$; $a = b = 86{\cdot}98$ m

$\log. t = 3{\cdot}383614$; $t = 2418$ m².

γ) Adva van **c** alap és **b** szár; keresendők **A** = **B** és **C** szögek; továbbá **t** terület.

$$\sin.\frac{C}{2} = \frac{c}{2b}; \quad A = B = 90^0 - \frac{C}{2};$$

$$t = \frac{c}{2}\,m; \; m = \sqrt{b^2 - \frac{c^2}{4}} = \sqrt{\left(b + \frac{c}{2}\right)\left(b - \frac{c}{2}\right)};$$

$$t = \frac{c}{2}\,.\,\sqrt{\left(b + \frac{c}{2}\right)\left(b - \frac{c}{2}\right)}.$$

Pl. $c = 504$ m.; $a = b = 277$ m.

$$\log\sin.\frac{C}{2} = 9{\cdot}958921 - 10; \quad \frac{C}{2} = 65^0\,28'\,13'';$$

$$C = 130^0\,56'\,26'';$$

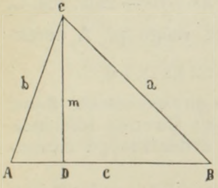
$$A = B = 90^0 - \frac{C}{2} = 24^0\,31'\,47'';$$

$\log. t = 4{\cdot}462103$; $t = 28890$ m².

17. §. A ferdeszögű háromszögek megfejtésére szolgáló tételek.

a) Bármely háromszögben az oldalak aránya akkora, mint az átellenes szögek sinusainak aránya. (Sinus-tétel.)

Ha az **ABC** háromszögben (10. ábra) meghúzzuk a **CD** = **m** magasságot, akkor:



10. ábra.

$$m = b.\sin. A = a.\sin. B;$$

innen:

$$a : b = \sin. A : \sin. B.$$

Ha az **AC**-hez tartozó magasságot szerkesztjük, hasonló eljárás szerint:

$$a : c = \sin. A : \sin. C;$$

ezekből:

$$a : b : c = \sin. A : \sin. B : \sin. C.$$

b) Bármely háromszögben két oldal összegének és különbségének aránya akkora, mint az oldalakkal átellenes két szög félösszegéhez és félkülönbségéhez tartozó tangensek aránya. (Tangens-tétel.)

Az előbbi pont szerint:

$$a : b = \sin. A : \sin. B;$$

ez helyes marad a következő alakban is:

$$(a + b) : (a - b) = (\sin. A + \sin. B) : (\sin. A - \sin. B) =$$

$$= 2.\sin.\frac{A+B}{2}\cos.\frac{A-B}{2} : 2.\cos.\frac{A+B}{2}.\sin.\frac{A-B}{2};$$

innen:

$$(a + b) : (a - b) = \text{tg}.\frac{A+B}{2} : \text{tg}.\frac{A-B}{2}.$$

c) Bármely háromszögben egy oldal négyzete annyi, mint a másik két oldal négyzetének összege, levonva abból az ugyanazon oldalakból és az általuk bezárt szög cosinusából alkotott kétszeres szorzatot. (Carnot-tétele.)

Az **ABC** háromszögben:

$$a^2 = m^2 + \overline{BD}^2;\quad m = b.\sin. A;\quad m^2 = b^2 \sin.^2 A;$$

$$a^2 = b^2.\sin.^2 A + \overline{BD}^2;\quad BD = c - AD;$$

$$AD = b.\cos. A;\quad \overline{BD}^2 = c^2 - 2bc.\cos. A + b^2 \cos.^2 A;$$

$$a^2 = b^2 . \sin.^2 A + b^2 . \cos.^2 A + c^2 - 2bc . \cos. A =$$
$$= b^2 . (\sin.^2 A + \cos.^2 A) + c^2 - 2bc . \cos. A ;$$
$$\sin.^2 A + \cos.^2 A = 1 ; \text{ tehát :}$$
$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc . \cos. A.$$

Hasonló módon :

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac . \cos. B ; \quad c^2 = a^2 + b^2 - 2ab . \cos. C.$$

Ha a háromszög valamelyik szöge pl. **A** derékszög, akkor :

$$\cos. 90^0 = 0 \quad \text{és :} \quad a^2 = b^2 + c^2.$$

Ez utóbbi egyenlet Pythagoras tételét fejezi ki, amely ilyformán nem más, mint Carnot tételének azon különös esete, mikor azt a derékszögű háromszögre alkalmazzuk.

d) A háromszög területe két oldalának és az azok által bezárt szög sinusának félszorzatával egyenlő.

Az **ABC** háromszögre nézve :

$$t = \frac{c}{2} . m ; \quad m = b . \sin. A ; \quad t = \frac{bc}{2} . \sin. A.$$

18. §. A ferdeszögű háromszögek megfejtése.

A ferdeszögű háromszög megfejtésére hat alkotórésze közül háromnak ismerete szükséges, de egyszersmind elégséges is; feltéve, hogy az adatok közt legalább egy oldal van.

Az ilyen háromszögekre nézve a következő főbb megfejtési esetek lehetségesek. Kiszámítandók a háromszög ismeretlen alkotórészei, ha adva van :

a) egy oldal és a rajta fekvő két szög;

b) két oldal és az általuk bezárt szög;

c) két oldal és a nagyobbikkal szemközt fekvő szög; végre

d) mind a három oldal.

Vegyük sorra ezen eseteket :

a) Adva van : **c, A** és **B**; keresendő : **a, b, C** és **t**. $C = 180^0 - (A + B)$;

$$c : b = \sin. C : \sin. B ; \quad b = \frac{c . \sin. B}{\sin. C} ;$$

$$a : c = \sin. A : \sin. C ; \quad a = \frac{c . \sin. A}{\sin. C} ;$$

$$t = \frac{c}{2} . m ; \quad m = a . \sin. B = \frac{c . \sin. A . \sin. B}{\sin. C};$$

$$t = \frac{c^2 . \sin. A . \sin B}{2 . \sin. C}.$$

Pl. $c = 331{\cdot}74$ m. ; $A = 63^0\,51'\,28''$; $B = 49^0 41' 35''$
$c = 180^0 - (A + B) = 66^0\,26'\,57''$;
log. $a = 2{\cdot}511700$; $a = 324{\cdot}86$ m. ;
log. $b = 2{\cdot}440859$; $b = 275{\cdot}97$ m. ;
log. $t = 46{\cdot}13759$; $t = 41092{\cdot}17$ m^2.

b) Adva van: **b**, **c** és **A**; keresendő: **a**, **B**, **C** és **t**.

$$B + C = 180^0 - A; \quad \frac{B + C}{2} = 90^0 - \frac{A}{2};$$

$$(b + c) : (b - c) = \text{tg.} \frac{B + C}{2} : \text{tg.} \frac{B - C}{2};$$

$$\text{tg.} \frac{B - C}{2} = \frac{b - c}{b + c} . \text{tg.} \frac{B + C}{2};$$

ebből $\frac{B - C}{2}$ nyerhető és ha:

$$\frac{B + C}{2} = P; \quad \frac{B - C}{2} = Q,$$

akkor:

$$B = P + Q; \quad C = P - Q.$$

Továbbá:

$$c : a = \sin. C : \sin. A ; \quad a = \frac{C . \sin. A}{\sin. C} = \frac{b . \sin. C}{\sin. B}$$

Az a oldalt még Carnot tételével is meg lehet határozni, csakhogy akkor a talált eredményt logarithmusi számitásra alkalmassá kell tenni, amit megfelelő segédszög bevezetése által érhetünk el. (11. §. b) pont.)

Végre:

$$t = \frac{c}{2} . m = \frac{bc}{2} . \sin. A.$$

Pl. $c = 135{\cdot}77$ m. ; $b = 168{\cdot}17$ m. ; $A = 52^0\,13'\,37''$

$$\text{log. tg.} \frac{B - C}{2} = 9{\cdot}337385 - 10; \quad \frac{B - C}{2} = 12^0\,45'\,22''$$

$B = 76^0\,38'\,33{\cdot}5''$; $C = 51^0\,7'\,49{\cdot}5''$.
log. $a = 2{\cdot}139374$; $a = 137{\cdot}83$ m. ;
log. $t = 3{\cdot}955394$; $t = 9023{\cdot}89$ m^2.

c) Adva van **b**, **c** és **B**; keresendő **A**, **C**, **a** és **t**.

$$b : c = \sin. B : \sin. C\,;\quad \sin. C = \frac{c\,.\,\sin.\,B}{b}\,;$$

Mivel:

$$\sin. C = \sin. (180^0 - C),$$

ennélfogva **C** részére két értéket kapunk, egy hegyes és egy tompa szöget.

Ha $b < c$, de $b > c\,.\,\sin. B$, akkor a feladat határozatlan marad, mert nem tudhatjuk, vajjon **C** hegyes, vagy tompa szöget jelent-e?

Ha $b = c\,.\,\sin. B$, akkor $\sin. C = 1$; $C = 90^0$.

Ha pedig $b > c$, akkor **C** csakis hegyes szöget jelenthet; a feladat tehát határozott.

A többi alkotórész lesz:

$$A = 180^0 - (B + C)\,;\quad a = \frac{c\,.\,\sin.\,A}{\sin.\,C}\,;$$

$$t = \frac{c}{2}\,.\,m. = \frac{bc}{2}\,.\,\sin. A.$$

Pl. $b = 135{\cdot}77$; $c = 68{\cdot}4$; $B = 77^0\,55'\,21{\cdot}5''$.
$\log. \sin. C = 9{\cdot}692358 - 10$; $C = 29^0\,30'\,51{\cdot}5''$;
$A = 180^0 - (B + C) = 72^0\,33'\,47''$;
$\log. a = 2{\cdot}122095$; $a = 132{\cdot}46$ m.
$\log. t = 4{\cdot}767350$; $t = 58257{\cdot}29$ m^2.

a) Adva van: **a**, **b**, **c**; keresendő: **A**, **B**, **C** és **t**.

Carnot tétele szerint:

$$\cos. A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}\,;\quad \cos. B = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac}\,;$$

$$\cos. C = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}\,;$$

másfelől:

$$2\,.\,\sin^2 \frac{A}{2} = 1 - \cos. A = \frac{2bc - b^2 - c^2 + a^2}{2bc} =$$

$$= \frac{a^2 - (b - c)^2}{2bc} = \frac{(a + b - c)\,(a + c - b)}{2bc}\,;$$

innen:

$$\sin. \frac{A}{2} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{(a + b - c)\,(a + c - b)}{2bc}}.$$

Ha :
$$a + b + c = 2s,$$
akkor : $a + b - c = 2(s - c)$; $a + c - b = 2(s - b)$

és :
$$\sin.\frac{A}{2} = \sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{bc}}.$$

Ha pedig figyelembe veszszük, hogy :

$2 . \cos.^2 \frac{A}{2} = 1 + \cos. A$, akkor hasonló eljárással:

$$\cos.\frac{A}{2} = \sqrt{\frac{s(s-a)}{bc}}.$$

Ha $\sin.\frac{A}{2}$ és $\cos.\frac{A}{2}$ talált értékeit egymásssal osztjuk, lesz:

$$\mathrm{tg}.\frac{A}{2} = \sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{s(s-a)}};$$

B és C-re nézve pedig :

$$\mathrm{tg}.\frac{B}{2} = \sqrt{\frac{(s-a)(s-c)}{s(s-b)}}; \quad \mathrm{tg}.\frac{C}{2} = \sqrt{\frac{(s-a)(s-b)}{s(s-c)}}.$$

$\sin.\frac{A}{2}$ és $\cos.\frac{A}{2}$ értékeit egymással szorozva, és figyelembe véve, hogy $\sin.\frac{A}{2} . \cos.\frac{A}{2} = \frac{1}{2}\sin. A$, lesz:

$$\sin. A = \frac{2}{bc} . \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}.$$

B és C-re nézve pedig :

$$\sin. B = \frac{2}{ac} . \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)};$$

$$\sin. C = \frac{2}{ab} . \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}.$$

Végre mivel :

$$t = \frac{bc}{2} . \sin. A,$$

azért :

$$t = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}.$$

Pl. $a = 375$ m. ; $b = 428$ m. ; $c = 321$ m.

$\log.\mathrm{tg}.\frac{A}{2} = 9{\cdot}743772 - 10$; $A = 58^0\ 0'\ 8''$;

$$\log.\mathrm{tg}.\frac{B}{2}=9\cdot888509-10;\ B=75^0\,27'\,0'';$$

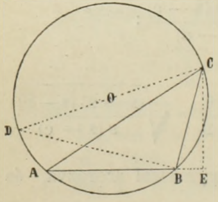
$$C=180^0-(A+B)=46^0\,32'\,52''.$$

$$\log.\,t=4\cdot765350;\ t=58257\cdot29\ m^2.$$

19. §. A háromszögbe és köréje irható kör sugara.

a) Ha az **ABC** háromszög (11. ábra) oldalainak felező pontjaiban az oldalakra merőleges egyeneseket emelünk, ezek oly **O** pontban jönnek össze, mely a háromszög valamennyi szögpontjától egyenlő távol van s igy a háromszög körül irható kör centrumának tekinthető.

Ha most **DC** = **2r** a kör átmérője és **CE** = **m** az **AB** oldalhoz tartozó magasság, akkor:



11. ábra.

$$BCD\,\triangle \sim ACE\,\triangle;$$

és: $CD : BC = AC : CE;$

vagy: $2r : a = b : m;$

innen: $r=\frac{ab}{2m}.$

Minthogy:

$$t=\frac{c\,.\,m}{2};\quad m=\frac{2t}{c};$$

ennélfogva: $r=\frac{abc}{4t}.$

2) Ha a háromszög valamennyi szögét felezzük, a szögfelező egyenesek oly **O** pontban jönnek össze, mely a háromszög minden oldalától egyenlő távol van s így a háromszögbe irható kör centrumáúl tekinthető.

A három szögfelező egyenes meghúzása folytán az eredeti háromszög oly három **ABO**, **ACO** és **BCO** kisebb háromszögre bomlik, melyek mindenikének magassága a beirt kör ρ sugara.

E kisebb háromszögek területeinek összege együttvéve a nagy háromszög területét adja, tehát:

$$t=\frac{a}{2}\cdot\rho+\frac{b}{2}\cdot\rho+\frac{c}{2}\cdot\rho=\rho\cdot\frac{a+b+c}{2};$$

innen:

$$\rho=\frac{2t}{a+b+c}.$$

HARMADIK RÉSZ.

A trigonometria néhány alkalmazása.

20. §. A szabályos sokszögekre és a körre vonatkozó feladatok megfejtése.

a) *A szabályos sokszögek területe.*

Ha a szabályos sokszög szögpontjait összekötjük a centrummal, annyi egyenlőszárú háromszöget nyerünk, a hány oldala van a sokszögnek. Mivel ezen háromszögek mind egybevágók, azért, ha egynek ki tudjuk számitani a területét, akkor a sokszögnek magának a területét is könnyen megkapjuk, mert csakis az egy háromszög területét kifejező értéket kell szorozni a szabályos sokszög oldalainak számával.

Ha most felteszszük, hogy a szabályos **n**-szög egy oldala a_n és figyelembe veszszük, hogy egy ilyen oldallal szemközt $\frac{360^0}{n}$ nagyságú szög fekszik, akkor egy egyenlőszárú háromszög területe a 16. §. β) pontja szerint:

$$\frac{a^2_n}{4} \,.\, \text{cotg.} \frac{360^0}{2n} = \frac{a^2_n}{4} \,.\, \text{cotg.} \frac{180^0}{n}.$$

A sokszög **T** területe pedig:

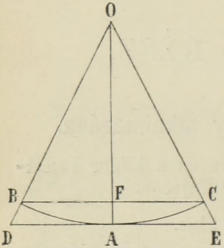
$$T = \frac{n \,.\, a^2_n}{4} \,.\, \text{cotg.} \frac{180^0}{n}.$$

Ha az **n** oldalú szabályos sokszög területe lenne ismeretes, akkor egy oldala az előbbi képletből:

$$a_n = 2 \,.\, \sqrt{\frac{T}{n} \,.\, \text{tg.} \frac{180^0}{n}}.$$

b) Fejezzük ki a szabályos **n** oldalú sokszög *oldalát, kerületét* és *területét,* ha ismeretes körének **r** sugara.

Ha **OA** $= r$ (12. ábra) a kör sugara és **BC** $= a_n$ az **n** oldalú szabályos húrsokszög egy oldala; akkor, ha $DE \perp OA$-ra, $DE = A_n$ az ugyanazon körhöz tartozó szabályos **n** oldalú érintősokszögnek lesz egy oldala és az **0** szög $= \frac{360^0}{n}$;



12. ábra.

$$BOF = COF = \frac{180^0}{n};$$

$$BF = \frac{a_n}{2} = r \,.\, \sin.\, \frac{180^0}{n};$$

$$AD = \frac{A_n}{2} = r \,.\, tg.\, \frac{180^0}{n}.$$

Ezekből:

$$a_n = 2r \,.\, \sin.\, \frac{180^0}{n}; \quad A_n = 2r \,.\, tg.\, \frac{180^0}{n}.$$

A húr- és érintősokszög k_n és K_n kerülete ilyformán:

$$k_n = 2nr \,.\, \sin.\, \frac{180^0}{n}; \quad K_n = 2nr \,.\, tg.\, \frac{180^0}{n}.$$

Mivel:

$$OF = r \,.\, \cos.\, \frac{180^0}{n};$$

ennélfogva a húrsokszög területe:

$$t_n = n \,.\, r \,.\, ^2 \sin.\, \frac{180^0}{n} \,.\, \cos.\, \frac{180^0}{n} = \frac{n}{2} \,.\, r^2 \sin.\, \frac{360^0}{n};$$

az érintő sokszög területe pedig:

$$T_n = n \,.\, r^2 \,.\, tg.\, \frac{180^0}{n}.$$

c) Keressük a szabályos **n** oldalú *sokszögbe, vagy köréje irható kör* ρ*, illetőleg r sugarát,* ha ismerjük a sokszög a_n oldalát, vagy t_n területét.

Az előbbi pont szerint:

$$a_n = 2r \,.\, \sin.\, \frac{180^0}{n}, \text{ vagy: } a_n = 2 \,.\, \rho \,.\, tg.\, \frac{180^0}{n}.$$

Ezekből:

$$r = \frac{a_n}{2 \,.\, \sin.\, \frac{180^0}{n}}; \quad \rho = \frac{A_n}{2} \,.\, cotg.\, \frac{180^0}{n}.$$

Mivel továbbá:

$$t_n = \frac{nr^2}{2} \,.\, \sin. \frac{360^0}{n}, \text{ vagy: } t_n = n \,.\, \rho^2 \,.\, \mathrm{tg}. \frac{180^0}{n};$$

ennélfogva:

$$r = \sqrt{\frac{2 \,.\, t_n}{n \,.\, \sin. \frac{360^0}{n}}}; \quad \rho = \sqrt{\frac{t_n}{n} \,.\, \mathrm{cotg}. \frac{180^0}{n}}.$$

d) Ha ismerjük a kör **r** sugarát és α irét, határozzuk meg *az ívhez tartozó AB húrt.*

Könnyű belátni, hogy ez a kérdés az a) pont alatt tárgyalt feladat menete szerint oldható meg s így:

$$AB = 2r \,.\, \sin. \frac{\alpha}{2}.$$

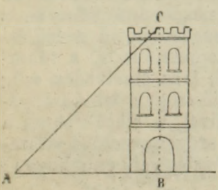
e) Ha ismerjük a kör **r** sugarát és α ivét, határozzuk meg B AC B *körsegmentum* (12. ábra) **t** *területét.*

$$t = OBAC - OBC; \; OBAC = r^2 \,.\, \pi \,.\, \frac{\alpha}{360^0};$$

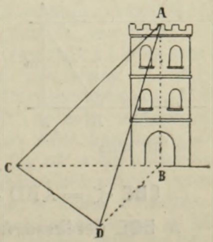
$$OBC = r^2 \,.\, \sin. \frac{\alpha}{2}; \quad t = r^2 \left(\frac{\alpha \,.\, \pi}{360^0} - \sin. \frac{\alpha}{2} \right).$$

21. §. Magasságok mérése.

a) Meghatározandó valamely tárgyuak pl. toronynak magassága, ha annak lábához hozzáférhetünk.



13. ábra.



14. ábra.

Mérjük meg **AB** (13. ábra) távolságot és határozzuk meg szögmérővel az **A** szöget, akkor a keresett magasság

$$BC = AB \,.\, \mathrm{tg}. \, A.$$

b) Meghatározandó valamely csúcsnak, vagy toronynak magassága, ha az **AB** függőleges (14. ábra) **B** talppontjához nem juthatunk hozzá.

Felmérjük a tetszőleges **a** = **CD** távolságot, továbbá szögmérővel meghatározzuk az **ACD**, **ADC**, **ACB** és **ADB** szögek nagyságát, akkor:

$$\mathrm{CAD} = 180^0 - (\mathrm{ACD} + \mathrm{ADC});$$

és: $$\mathrm{AC} : \mathrm{a} = \sin.\,\mathrm{ADC} : \sin : \mathrm{DAC};$$

$$\mathrm{AC} = \frac{\mathrm{a}\,.\,\sin.\,\mathrm{ADC}}{\sin.\,\mathrm{ADC}}; \text{ továbbá:}$$

$$\mathrm{AD} : \mathrm{a} = \sin.\,\mathrm{ACD} : \sin.\,\mathrm{DAC};\quad \mathrm{AD} = \frac{\mathrm{a}\,.\,\sin.\,\mathrm{ACD}}{\sin.\,\mathrm{DAC}};$$

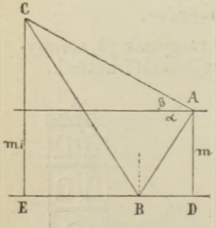
Az **ABD** és **ABC** derékszögű háromszögekből:

$$\mathrm{AB} = \mathrm{AC}\,.\,\sin.\,\mathrm{ACB} = \mathrm{AD}\,.\,\sin.\,\mathrm{ADB};$$

AC, illetőleg **AD** értékét helyettesítvén, lesz:

$$\mathrm{AB} = \frac{\mathrm{a}\,.\,\sin.\,\mathrm{ADC}\,.\,\sin.\,\mathrm{ACB}}{\sin.\,\mathrm{DAC}} = \frac{\mathrm{a}\,.\,\sin.\,\mathrm{ACD}\,.\,\sin.\,\mathrm{ADB}}{\sin.\,\mathrm{DAC}}.$$

c) Meghatározandó valamely felhő magassága, ha annak képét az alattunk fekvő tó tükrének bizonyos pontjában látjuk. — Legyen **C** a felhő helye, (15. ábra) **B** annak képe az **EBD** tó tükrében, **A** a parton levő megfigyelő állása; **AD** = **m**, a part magassága, **CE** = $\mathrm{m_1}$ a felhő magassága, α a hajlásszög (depressió-szög) a tükörkép felé; β az emelkedési szög (eleváczió-szög) a felhő irányában. Mivel a síktükröknél a beesési szög egyenlő a visszaverődés szögével, ennélfogva:



15. ábra.

$$\mathbf{CBE} \measuredangle = \mathrm{ABD} \measuredangle = \alpha;\ \mathrm{ACB} = \alpha - \beta.$$

A **BCE** derékszögű háromszögből:

$$\mathrm{m_1} = \mathrm{CE} = \mathrm{BC}\,.\,\sin.\,\alpha;$$

az **ABC** háromszögből:

$$\mathrm{BC} : \mathrm{AB} = \sin.\,(\alpha + \beta) : \sin.\,(\alpha - \beta);$$

$$\mathrm{BC} = \frac{\mathrm{AB}\,.\,\sin.\,(\alpha + \beta)}{\sin.\,(\alpha - \beta)};$$

végre az **ABD** derékszögű háromszögtől:

$$m = AB'.\sin.\alpha; \quad AB = \frac{m}{\sin.\alpha};$$

tehát:

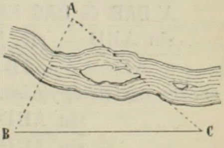
$$BC = \frac{m.\sin.(\alpha + \beta)}{\sin.\alpha \sin.(\alpha - \beta)};$$

és:

$$m_1 = \frac{m.\sin.(\alpha + \beta)}{\sin.(\alpha - \beta)}.$$

22. §. Két pont távolának meghatározása.

a) Határozzuk meg a **B** pont (16. ábra) távolát a látható, de meg nem közelithető **A** ponttól.



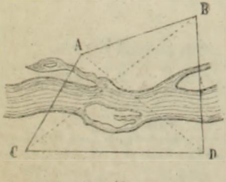
16. abra.

Felveszszük a **BC** = **a** megmérhető vonalat és szögmérővel meghatározzuk a **B** és **C** szögek nagyságát; akkor:

$$AB = \frac{a.\sin.C}{\sin.A};$$

$$A = 180^0 - (B + C).$$

b) Határozzuk meg két látható, de meg nem közelithető pont távolságát pl. **A** pont távolságát **B**-től (17. ábra), ha mi a folyó tulsó partján vagyunk.

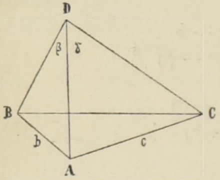


17. ábra.

Felveszszük a **CD** = **a** megmérhető távolságot és szögmérővel meghatározzuk az **ACD** és **ADC** szögek nagyságát, akkor az **ACD** háromszögből ismerni fogjuk a **CD** oldalt és a rajta fekvő két szöget; ezen adatokból a többi alkotórészt is kiszámithatjuk s igy az **AC** oldalt is. Most a **BCD** és **BDC** szögek megmérése folytán a **BCD** háromszögből a **BC** oldal ismeretéhez juthatunk. Minthogy továbbá az **ACB** szög közvetetlenül lemérhető, ennélfogva az **ABC** háromszögből ismeretes két oldal és az általuk bezárt szög, amiből az **AB** harmadik oldal kiszámitható.

23. §. Pothenot problémája.

Három **A**, **B** és **C** pont (18. ábra) kölcsönös helyzete ismeretes lévén, meghatározandó a **D** negyedik pont helyzete, melyből az **AB** és **AC** egyenesek β, illetőleg γ szög alatt látszanak. **D** pont bent fekszik az **A**, **B** és **C** pontok által meghatározott síkban, a **BAC** szög szárain belül.



18. ábra.

Tudjuk, hogy:

$$ABD + ACD + A + \beta + \gamma = 360^0;$$

innen:

$$\frac{1}{2}(ABD + ACD) = 180^0 - \frac{A + \beta + \gamma}{2}.$$

A **DAB** és **DAC** háromszögekből:

$$\frac{\sin. ABD}{AD} = \frac{\sin. \beta}{AB}; \quad \frac{\sin. ACD}{AD} = \frac{\sin. \gamma}{AC};$$

ezeket osztva egymással:

$$\frac{\sin. ABD}{\sin. ACD} = \frac{AC . \sin. \beta}{AB . \sin. \gamma}.$$

Az arányok tana szerint:

$$\frac{\sin. ABD - \sin. ACD}{\sin. ABD + \sin. ACD} = \frac{AC . \sin. \beta - AB . \sin. \gamma}{AC . \sin. \beta + AB . \sin. \gamma};$$

ha most a sinusok összegét és különbségét szorzatokká alakítjuk, akkor:

$$\frac{\mathrm{tg.} \frac{1}{2}(ABD - ACD)}{\mathrm{tg.} \frac{1}{2}(ABD + ACD)} = \frac{AC . \sin. \beta - AB . \sin. \gamma}{AC . \sin. \beta + AB . \sin. \gamma} =$$

$$= - \frac{AB . \sin. \gamma - AC . \sin. \beta}{AB . \sin. \gamma + AC . \sin \beta}.$$

Ha: $\frac{AC . \sin. \beta}{AB . \sin. \gamma} = \mathrm{tg.}\, \varphi$; akkor:

$$\mathrm{tg.} \frac{1}{2}(ABD - ACD) = \mathrm{tg.} (45^0 - \varphi) . \mathrm{tg.} \frac{A + \beta + \gamma}{2};$$

Ezen egyenletből $\frac{1}{2}$ **(ABD — ACD)** nyerhető s mivel $\frac{1}{2}$ **(ABD + ACD)** ismeretes, a szögek kiszámithatók.

A sinus tétel alapján pedig **AD**, **CD** és **BD** távolságokat is meghatározhatjuk

A feladat határozatlan, ha az **ABCD** négyszög húrnégyszög, mert akkor:

$$A + \beta + \gamma = 180^0;$$

tehát: $$\text{tg.} \frac{A + \beta + \gamma}{2} = \infty; \text{ másfelől akkor:}$$

$$BCA = \beta; \; CBA = \gamma; \quad \frac{AB}{\sin \beta} = \frac{AC}{\sin. \gamma};$$

$$AB . \sin. \gamma = AC . \sin. \beta;$$

és: $$\text{tg.} \varphi = \frac{AC . \sin. \beta}{AB . \sin. \gamma} = 1;$$

miből: $\varphi = 45^0$; $45^0 - \varphi = 0$; $\text{tg.} (45^0 - \varphi) = 0$.

Pothenot problemája szerkesztés utján is megoldható, ha az **AB** és **AC** egyenesek fölött oly köríveket szerkesztünk, melyek az ezen egyenesekre mért β illetőleg γ szögek szögpontjait tartalmazzák, akkor e körök metszési pontja lesz a keresett **D** pont

A feladat azonban szerkesztés utján sem oldható meg abban az esetben, ha:

$$A + \beta + \gamma = 180^0;$$

mert akkor a körök összeesnek.

24. §. A trigonometriában használatos főbb képletek gyüjteménye.

a) Goniometriai képletek.

1) $\text{tg.} \alpha = \dfrac{1}{\text{cotg.} \alpha}$; 2) $\sec. \alpha = \dfrac{1}{\cos. \alpha}$;

3) $\text{cosec.} \alpha = \dfrac{1}{\sin. \alpha}$; 4) $\text{tg.} \alpha = \dfrac{\sin. \alpha}{\cos. \alpha}$;

5) $\sin.^2 \alpha + \cos.^2 \alpha = 1$; 6) $1 + \text{cotg.}^2 \alpha = \text{cosec.}^2 \alpha$;

7) $\text{tg.}^2 \alpha + 1 = \sec.^2 \alpha$; 8) $\sin. 30^0 = \cos. 60^0 = \dfrac{1}{2}$;

9) $\cos. 30^0 = \sin. 60^0 = \dfrac{1}{2} \sqrt{3}$;

10) $\text{tg.} 30^0 = \text{cotg.} 60^0 = \dfrac{1}{3} \sqrt{3}$;

11) $\text{cotg.} 30^0 = \text{tg} 60^0 = \sqrt{3}$;

12) $\sec. 30^0 = \operatorname{cosec} 60^0 = \frac{2}{3}\sqrt{3}$;

13) $\operatorname{cosec}. 30^0 = \sec. 60^0 = 2$;

14) $\sin. 45^0 = \cos 45^0 = \frac{1}{2}\sqrt{2}$;

15) $\operatorname{tg}. 45^0 = \operatorname{cotg}. 45^0 = 1$;

16) $\sec. 45^0 = \operatorname{cosec}. 45^0 = \sqrt{2}$;

17) $\sin. (-\alpha) = -\sin. \alpha$; 18) $\cos. (-\alpha) = \cos. \alpha$;

19) $\operatorname{tg} (-\alpha) = -\operatorname{tg} \alpha$; 20) $\operatorname{cotg}. (-\alpha) = -\operatorname{cotg}. \alpha$;

21) $\sec. (-\alpha) = \sec. \alpha$; 22) $\operatorname{cosec}. (-\alpha) = -\operatorname{cosec} \alpha$;

23) $\sin. (\alpha \pm \beta) = \sin. \alpha . \cos. \beta \pm \cos. \alpha . \sin. \beta$;

24) $\cos. (\alpha \pm \beta) = \cos. \alpha . \cos. \beta \mp \sin. \alpha . \sin. \beta$;

25) $\operatorname{tg}. (\alpha \pm \beta) = \frac{\operatorname{tg} \alpha \pm \operatorname{tg} \beta}{1 \mp \operatorname{tg}. \alpha . \operatorname{tg}. \beta}$;

26) $\operatorname{cotg}. (\alpha \pm \beta) = \frac{\operatorname{cotg}. \alpha . \operatorname{cotg}. \beta - 1}{\operatorname{cotg}. \beta \pm \operatorname{cotg}. \alpha}$;

27) $\sin. 2\alpha = 2\sin. \alpha \cos. \alpha$; 28) $\cos. 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha$;

29) $\operatorname{tg}. 2\alpha = \frac{2\operatorname{tg}. \alpha}{1 - \operatorname{tg}.^2 \alpha}$; 30) $\operatorname{cotg}. 2\alpha = \frac{\operatorname{cotg}^2 \alpha - 1}{2\operatorname{cotg}. \alpha}$;

31) $\sin. \frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{1 - \cos. \alpha}{2}}$; 32) $\cos. \frac{\alpha}{2} \sqrt{\frac{1 + \cos. \alpha}{2}}$;

33) $\operatorname{tg}. \frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{1 - \cos. \alpha}{1 + \cos. \alpha}}$; 34) $\operatorname{cotg}. \frac{\alpha}{2} \sqrt{\frac{1 + \cos. \alpha}{1 - \cos. \alpha}}$;

35) $\sin. m + \sin. n = 2 \sin. \frac{m+n}{2} . \cos. \frac{m-n}{2}$;

36) $\sin. m - \sin. n = 2 . \cos. \frac{m+n}{2} . \sin. \frac{m-n}{2}$;

37) $\cos. m + \cos. n = 2 . \cos. \frac{m+n}{2} . \cos. \frac{m-n}{2}$;

38) $\cos. m - \cos n = -2 . \sin. \frac{m+n}{2} . \sin. \frac{m-n}{2}$;

39) $\operatorname{tg}. m \pm \operatorname{tg} n = \frac{\sin. (m \pm n)}{\cos. m . \cos. n}$;

40) $\operatorname{cotg}. m \pm \operatorname{cotg}. n = \frac{\sin. (n \pm m)}{\sin. m . \sin. n}$.

b) *A háromszögek megfejtésére szolgáló képletek.*

A derékszögű háromszögben:

41) $b = a . \sin. B = a . \cos C$;

42) $b = c . \mathrm{tg}. B = c . \mathrm{cotg}. C$;

43) $a^2 = b^2 + c^2$.

A ferdeszögű háromszögben:

44) $a : b : c = \sin. A : \sin. B : \sin. C$; vagy : $\frac{a}{\sin. A} = \frac{b}{\sin. B} = \frac{c}{\sin. C}$;

45) $\frac{a+b}{a-b} = \frac{\mathrm{tg}. \frac{1}{2}(A+B)}{\mathrm{tg}. \frac{1}{2}(A-B)}$; 46) $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc . \cos. A$; 47) $b^2 = a^2 + c^2 - 2ac . \cos. B$; 48) $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab . \cos. C$;

49) $t = \frac{cm}{2} = \frac{bc}{2} . \sin. A$; 50) ha : $a + b + c = 2s$;

akkor: $t = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$;

51) $\sin. \frac{A}{2} = \sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{bc}}$; 52) $\cos. \frac{A}{2} = \sqrt{\frac{s . (s-a)}{bc}}$;

53) $\mathrm{tg}. \frac{A}{2} = \sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{s(s-a)}}$; 54) $\sin. \frac{B}{2} \sqrt{\frac{(s-a)(s-c)}{ac}}$;

55) $\cos. \frac{B}{2} = \sqrt{\frac{s(s-b)}{ac}}$; 56) $\mathrm{tg}. \frac{B}{2} \sqrt{\frac{(s-a)(s-c)}{s(s-b)}}$;

57) $\sin. \frac{C}{2} = \sqrt{\frac{(s-a)(s-b)}{ab}}$; 58) $\cos \frac{C}{2} \sqrt{\frac{s(s-c)}{ab}}$;

59) $\mathrm{tg}. \frac{C}{2} = \sqrt{\frac{(s-a)(s-b)}{s(s-c)}}$;

60) $\sin. A = \frac{2}{bc} \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$;

61) $\sin. B = \frac{2}{ac} \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$;

62) $\sin. C = \frac{2}{ab} \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$; 63) $r = \frac{abc}{4t}$;

64) $\rho = \frac{2t}{a+b+c} = \frac{2t}{2s} = \sqrt{\frac{(s-a)(s-b)(s-c)}{s}}$.

c) *A szabályos sokszögek megfejtésére.*

65) $T_n = \frac{n \cdot a^2_n}{4} \cdot \text{cotg.} \frac{180^0}{n}$;

66) $a_n = 2 \cdot \sqrt{\frac{T_n}{n} \cdot \text{tg.} \frac{180^0}{n}}$;

67) $r = \frac{a_n}{2 \ \sin. \frac{180^0}{n}}$; 68) $\rho = \frac{a_n}{2} \cdot \text{cotg.} \frac{180^0}{n}$;

69) $a_n = 2r \cdot \sin. \frac{180^0}{n}$; 70) $A_n = 2r \cdot \text{tg.} \frac{180^0}{n}$.

NEGYEDIK RÉSZ.

Példatár.

25. §. Feladatok a goniometriához.

1) Valamely derékszögű háromszög egyik befogója 3 m., a másik 4 m ; mily nagyok a hegyes szögek függvényei?
2) Valamely derékszögű háromszög egyik befogója 9 m., átfogója 41 m.; mily nagyok a hegyes szögek függvényei?
3) Valamely derékszögű háromszög átfogója 5 m., egyik befogója 3 m.; mily nagy oly másik derékszögű háromszög átfogója, melynek hegyes szögei az előbbivel egyenlők s az adottnak megfelelő befogója 4·5 m.?

Mily nagyok az α szög függvényei, ha a háromszög oldalainak mértékszámai:

4) 8 m., 15 m., 17 m.; 5) 1·2 m., 3·91 m., 4·99 m;

6) 80 m., $\frac{782}{3}$ m., $\frac{817}{3}$ m.; 7) $2mn, m^2 - n^2, m^2 + n^2$;

8) m, n, r; 9) 1 m., 6·21 m., 6·29 m.;

10) 196 m., 315 m., 371 m.?

11) A derékszögű háromszög egyik befogója 15 m., átfogója 26 m.; mily nagyok a hegyes szögek függvényei?

12) Mily nagyok oly derékszögű háromszög hegyes szögeinek goniometriai függvényei, melyben az egyik befogó $^{2}/_{3}$-ad része az átfogónak?
13) Mily nagyok akkor, ha az egyik befogó kétszerese a másiknak?
14) A derékszögű háromszögben a két befogó összege $^{5}/_{4}$-szerese az átfogónak; mily nagyok a hegyes szögek függvényei?
15) Valamely derékszögű háromszög területe 12 m^2, egyik szögének tangense 1·5; mily nagyok a befogók?
16) Mily nagy az átfogó, ha sin. $\alpha = 0{\cdot}6$; az α szöggel szemben fekvő befogó pedig 20·5 m.?

Szerkesztendő:

17) sin. $\alpha = 0{\cdot}8$; 18) cos. $\alpha = \frac{5}{6}$; 19) tg. $\alpha = 3$;
20) cotg. $\alpha = 5$; 21) sin. $\alpha = 0{\cdot}6$; 22) cos. $\alpha = 0{\cdot}7$;
23) tg. $\alpha = 2$; 24) cotg. $\alpha = \frac{2}{3}$?

Mily nagyok α többi függvényei, ha:

25) sin. $\alpha = 0{\cdot}75$; 26) sin. $\alpha = 0{\cdot}5314$; 27) sin. $\alpha = \frac{2}{3}$;
28) cos. $\alpha = a$; 29) tg. $\alpha = \frac{3}{4}$; 30) sin. $\alpha = \frac{2m}{1+m^2}$;
31) cotg. $\alpha = \sqrt{\frac{1}{3}}$; 32) sec. $\alpha = 2$; 33) tg. $15^0 = 2 - \sqrt{3}$;
34) cotg. $\alpha = \sqrt{3}$; 35) sin. $\alpha = 0{\cdot}85$; 36) tg. $\alpha = 2{\cdot}4$;
37) cotg. $\alpha = 0{\cdot}8$; 38) sec. $\alpha = 1{\cdot}25$; 39) tg. $\alpha = 1\frac{1}{3}$;
40) cotg. $\alpha = \frac{5}{7}$; 41) sin. α . cos. $\alpha = 0{\cdot}3$;
42) sin. α = cos. 2 α; 43) sin. $34^0\ 45' = 0{\cdot}57$;
44) cos. $120^0 = -\frac{1}{2}$; 45) sin. $54^0 = \frac{1}{4}\sqrt{6+2\sqrt{5}}$;
46) cos. α = sin. 2 α; 47) cotg. $22^0\ 30' = \sqrt{2}+1$;
48) sin. $\alpha = \frac{1}{2}$. tg. α; 49) cos. $\alpha = 0{\cdot}28$;
50) cotg. $\alpha = 0{\cdot}5$; 51) cos. $\alpha = 2 - 3$. cos.$^2\alpha$;
52) sin. a = $-0{\cdot}352$; 53) cos. $\alpha = -0{\cdot}2$;
54) tg. $\alpha = -4{\cdot}1066$; 55) cotg. $\alpha = -\sqrt{3}$;
56) cos. $72^0 = \frac{1}{4}(\sqrt{5}-1)$; 57) cosec. $\alpha = 1{\cdot}125$;
) cosec. $\alpha = \frac{13}{7}$?

Mily nagy az α szög, ha:

59) az átfogó 3·5 m.; $\cos.\ \alpha = 0{\cdot}44$;

60) $\operatorname{tg}.\alpha = \frac{1}{2}\operatorname{cotg}.\alpha$; 61) $\cos.\ \alpha = \sin.\left(45^0 + \frac{\alpha}{2}\right)$;

62) $\operatorname{cotg}.\alpha = \operatorname{tg}.(45^0 + \alpha)$; 63) $\sin.\ \alpha = \cos.\ 4\alpha$;

64) $\operatorname{cotg}.\ \alpha = \operatorname{tg}.\ 8\alpha$; 65) $\sin.\ 3\alpha = \cos\ 2\alpha$;

66) $\cos.\ \alpha = 0{\cdot}7$; 67) $\operatorname{tg}.\ \alpha = 0{\cdot}8$;

68) $\sec.\ \alpha = 2{\cdot}5$; 69) $\sec.\ \alpha = 1{\cdot}8$;

70) $\sec.\ \alpha = -\sqrt{3}$; 71) $\operatorname{cosec}.\ \alpha = -\frac{1}{2}\sqrt{5}$;

72) $\sin.\ \alpha = \frac{1}{2}\sqrt{2}$; 73) $\operatorname{cosec}.\ \alpha = 4\sin.\ \alpha$;

74) $\sin.\ \alpha + \cos.\ 2\alpha = 0$;

75) $\sin.\ \frac{\alpha}{2} + \cos.\ \alpha = 0$; 76) $\operatorname{tg}(-\alpha) + \operatorname{cotg}.2\alpha = 0$;

77) $\sin.(-\alpha) + \operatorname{cosec}.(-2\alpha) = 0$;

78) $\operatorname{cotg}.\ \frac{\alpha}{2} = \operatorname{tg}.\ \alpha$?

---

79) $\operatorname{tg}.15^0 = 2 - \sqrt{3}$; mily nagyok a 75°-os szög függvényei?

80) $\sin.18^0 = \frac{1}{4}(\sqrt{5} - 1)$; $\cos.18^0 = \frac{1}{4}\sqrt{10 + 2\sqrt{5}}$; mily nagyok a 36°-os szög függvényei?

81) $\cos.\ 36^0 = \frac{1}{4}\sqrt{6 + 2\sqrt{5}}$; mlly nagyok a 144°-os szög függvényei?

82) $\sin.\ 75^0 = \frac{1}{4}\sqrt{2}(\sqrt{3} + 1)$; mily nagyok a 105°-os szög függvényei?

83) Ismerve a 18°-os szög sinusát, számítsuk ki a 72°-os szög függvényeit.

84) Mily nagyok a 162°-os szög függvényei?

Mily nagy:

85) $\sin.120^0$; 86) $\cos.15^0$; 87) $\sin.\ 6^0$;

88) $\sin.3^0$; 89) $\sin.22^0\,30'$; 90) $\cos.22^0\,30'$;

91) $\operatorname{tg}.7^0\,30'$; 92) $\operatorname{tg}.3^0\,45'$?

Kiszámitandó :

93) $\sin.(\alpha \pm \beta)$;

94) $\cos.(\alpha \pm \beta)$, ha : $\sin.\alpha = \frac{1}{2}$; $\cos.\alpha = \frac{1}{2}\sqrt{3}$; $\sin.\beta = 1$; $\cos.\beta = 0$.

95) $\mathrm{tg}.(\alpha \pm \beta)$;

96) $\mathrm{cotg}.(\alpha \pm \beta)$, ha: $\mathrm{tg}.\alpha = \frac{1}{7}$; $\mathrm{cotg}.\alpha = \frac{1}{3}$.

97) $\sec.(\alpha \pm \beta)$; 98) $\mathrm{cosec}.(\alpha \pm \beta)$.

99) $\sin.\alpha = \frac{5}{13}$; $\cos.\beta = 0{\cdot}8$; mennyi: $\sin.(\alpha \pm \beta)$; $\cos.(\alpha \pm \beta)$?

100) $\mathrm{tg}.\alpha = 1{\cdot}5$; $\mathrm{tg}.\beta = 0{\cdot}54$; mennyi $\mathrm{tg}.(\alpha \pm \beta)$?

101) Mennyi α, ha: $\mathrm{tg}.(45^0 + \alpha) = 2 + \sqrt{3}$?

102) Mennyi α, ha: $\mathrm{tg}.(45^0 + \alpha) = 3\,.\,\mathrm{tg}.(45^0 - \alpha)$?

103) Mennyi α, ha: $\mathrm{tg}.(45^0 - \alpha) + \mathrm{cotg}.(45^0 - \alpha) = 4$?

Meghatározandók α függvényei, ha:

104) $\mathrm{tg}.(45^0 - \alpha) = -3$;

105) $2\mathrm{tg}.\alpha + 3\mathrm{tg}.(45^0 - \alpha) = 10 - \sqrt{3}$.

Az összeg képlettel kiszámitandók:

106) $\sin.42^0$; $(42 = 45 - 3)$; 107) $\cos.33^0$; $\left(33 = \frac{30+3}{18+15}\right)$

108) $\sin.165^0$;

109) $\sin.75^0$; $\cos 75^0$; 110) $\sin.120^0$;

111) $\sin.135^0$, $\cos.135^0$, $\mathrm{tg}.135^0$;

112) $\cos.15^0$, $(15 = 45 - 30)$;

113) $\sin.6^0$; $(6 = 36 - 30)$;

114) $\sin.48^0$; $\cos.48^0$; 115) $\sin.78^0$; $\cos.78^0$;

116) ha: $\sin.\alpha = 0{\cdot}8$; $\cos.\beta = \frac{12}{13}$; mennyi: $\mathrm{tg}.(\alpha \pm \beta)$ és $\mathrm{cotg}.(\alpha \pm \beta)$?

Kiszámitandó:

117) $\sin.45^0 + \sin.24^0$; 118) $\cos.54^0 + \cos.24^0$;

119) $\sec\,\alpha \pm \sec\,\beta$; 120) $\sec.\alpha + \mathrm{cosec}.\beta$;

121) $\mathrm{cosec}.\alpha \pm \mathrm{cosec}.\beta$; 122) $\frac{\sin.54^0 + \sin.31^0}{\cos.31^0 - \cos.54^0}$;

123) $\sin. 58^0 49' 52'' - \cos. 64^0 19' 20''$;

124) $\operatorname{tg}. 54^0 19' 43'' - \operatorname{cotg}. 40^0 19' 57''$;

125) $\sin. 38^0 15' 34'' + \sin. 73^0 29' 48''$;

Egyszerűsitendők a következő kifejezések:

126) $a . \cos. (90^0 - \alpha) + b . \cos. (90^0 + \alpha)$;

127) $(a + b) \operatorname{cotg}. (90^0 + \alpha) + (a - b) \operatorname{tg}. (90^0 - \alpha)$;

128) $\sin. (90^0 + \alpha) . \cos. (180^0 - \beta) + \cos. (90^0 + \alpha) . \sin. (180^0 - \beta)$;

129) $\cos. (180^0 + \alpha) . \cos. (270^0 - \beta) - \sin. (180^0 + \alpha) . \sin. (270^0 - \beta)$;

130) $\operatorname{tg}. \alpha + \operatorname{tg}. (-\beta) - \operatorname{tg}. (180^0 + \beta)$;

131) $\dfrac{\operatorname{tg}. (180^0 + \alpha) . \sin. (90^0 + \alpha) . \operatorname{cotg}. \alpha}{\sin. (90^0 - \alpha) . \operatorname{cotg}. (270^0 + \alpha) . \operatorname{tg}. (180^0 - \alpha}$;

132) $\dfrac{\operatorname{tg}. (90^0 + \alpha) . \cos (270^0 - \alpha) . \cos. (-\alpha)}{\operatorname{cotg}. (180^0 + \alpha) . \sin. (270^0 + \alpha)}$.

133) $\cos. 2\alpha = -\sqrt{\frac{1}{2}}$; mennyi: $\operatorname{tg}. \alpha$;

134) $\operatorname{cotg}. \frac{\alpha}{2} = \frac{a}{b}$; mily nagy: $\cos \alpha$?

135) $\operatorname{cotg}. \alpha = \sqrt{7}$; mennyi: $\sin. 2\alpha$, $\cos. 2\alpha$, $\operatorname{tg}. 2\alpha$?

136) $\operatorname{tg}. 135^0 = -1$; mennyi: $\sin. 67^0 30'$, $\cos. 67^0 30'$, $\operatorname{tg}. 67^0 30'$, $\operatorname{cotg}. 67^0 30'$?

137) $\cos \alpha = 0{\cdot}8$; mennyi: $\sin. \frac{\alpha}{2}$, $\cos. \frac{\alpha}{2}$, $\operatorname{tg}. \frac{\alpha}{2}$, $\operatorname{cotg}. \frac{\alpha}{2}$?

138) Mennyi $\frac{\alpha}{2}$ sinusa és cosinusa, ha a 3-ik negyedben fekvő α szög sinusa $120 : 169$?

139) Mennyi $\sin. \frac{\alpha}{2}$ és $\cos. \frac{\alpha}{2}$, ha a 4-ik negyedben fekvő α szög sinusa: $-\frac{24}{25}$?

140) $\sin. \alpha = \frac{1}{3}$; mennyi: $\cos. \frac{\alpha}{2}$?

141) $\operatorname{tg}. \alpha = \frac{3}{4}$; mennyi: $\sin. \frac{\alpha}{2}$?

142) $\operatorname{tg}. 2\alpha = \sqrt{3}$; mennyi $\operatorname{tg}. 3\alpha$?

Fejezzük ki sin. 2α függvényeiben a következőket:

143) $\sin.\alpha + \cos.\alpha$; 144) $\frac{1}{\sin.\alpha} + \frac{1}{\cos.}$;

145) $\frac{1}{\sin.^2\alpha} + \frac{1}{\cos.^2\alpha}$.

Hány érték felel meg α-nak a két első körnegyedben, ha:

146) $\sin.\alpha = \frac{5}{7}$; 147) $\cos.\alpha = \frac{1}{3}$;

148) $\cos.\alpha = -\frac{4}{5}$; 149) $\operatorname{tg}.\alpha = \frac{2}{3}$;

150) $\operatorname{cotg}.\alpha = -7$?

Fejezzük ki hegyes szögek függvényeivel a következőket:

151) $\sin. 156^0 27' 18''$; 152) $\cos. 122^0 18' 12''$;
153) $\operatorname{tg}. 135^0 24' 8''$; 154) $\sec. 156^0 22' 48''$;
155) $\sec. 200^0$ 156) $\sin. 618^0 2' 18''$;
157) $\cos. 487^0 18' 20''$; 158) $\operatorname{tg}. 682^0 13' 12''$;
159) $\operatorname{cotg}. 762^0 23'$; 160) $\sin. 1218^0 17'$;
161) $\cos. 2832^0 16'$; 162) $\operatorname{tg}. 3682^0 19'$;
163) $\operatorname{cotg}. 2565^0 16' 18''$; 164) $\sin. 327^0 56' 48''$;
165) $\cos. 512^0 42'$; 166) $\operatorname{tg}. 384^0 17' 28''$;
167) $\operatorname{cotg}. 652^0 32' 42''$; 168) $\sin. 456^0 38' 36''$;
169) $\cos. 445^0 31' 42''$; 170) $\operatorname{tg}. 472^0 16' 18''$;
171) $\operatorname{cotg}. 718^0 17' 20{,}5''$; 172) $\sin. (248^0 \pm \alpha)$;
173) $\cos. (318^0 \pm \alpha)$; 174) $\operatorname{tg}. (124^0 \pm \alpha)$;
175) $\operatorname{cotg}. (282^0 \pm \alpha)$.

Fejezzük ki positiv hegyes szögek függvényeivel a következőket:

176) $\sin. (-32^0 28')$; $\sin. (-238^0 16')$; $\sin. (-495^0 37')$; $\sin. (-518^0 27' 18'')$;

177) $\cos. (-65^0 8' 32'')$; $\cos. (-128^0 32' 26'')$; $\cos. (-243^0 5')$; $\cos. (-325^0)$; $\cos. (-1585^0 7')$;

178) $\operatorname{tg}. (-20^0)$; $\operatorname{tg}. (-132^0 56')$; $\operatorname{tg}. (-218^0 9')$; $\operatorname{tg}. (-357^0 51' 8'')$; $\operatorname{tg}. (-872^0 16')$;

179) $\operatorname{cotg}. (-56^0 48' 32'')$; $\operatorname{cotg}. (-195^0 37' 35'')$; $\operatorname{cotg}. (-298^0 42' 7'')$; $\operatorname{cotg}. (-1000^0)$.

Mivel egyenlő:

180) $\frac{1 - \operatorname{tg}.\alpha}{\sin.\alpha \,.\, \cos.\alpha}$, ha: $\alpha = 45^0$;

181) $\frac{1-\cos 2\alpha}{tg^2\alpha}$, ha: $\alpha = 90^0$;

182) $\frac{2-\sec.\alpha}{\frac{1}{2}-\sin.\frac{\alpha}{2}}$, ha: $\alpha = 60^0$

183) $\frac{1-\cos.\alpha}{\sin.^2\alpha}$, ha: $\alpha = 0^0$;

184) $\frac{\text{cotg}.\alpha}{1+\cos.2\alpha}$, ha: $\alpha = 90^0$;

185) $\frac{1-tg.\alpha}{\cos.\alpha}$, ha: $\alpha = 45^0$;

186) $\frac{\sec.\alpha-\cos.\alpha}{\sin.\alpha}$, ha: $\alpha = 0^0$;

187) $\frac{\text{cosec}\ \alpha-\sin.\alpha}{\cos.\alpha}$, ha: $\alpha = 90^0$.

Feltéve, hogy: $\alpha+\beta+\gamma = 180^0$, bebizonyítandó, hogy:

188) $\sin.\alpha+\sin.\beta+\sin.\gamma = 4.\cos.\frac{\alpha}{2}.\cos.\frac{\beta}{2}.\cos.\frac{\gamma}{2}$;

189) $\cos.\alpha+\cos.\beta+\cos.\gamma = 1+4.\sin.\frac{\alpha}{2}.\sin.\frac{\beta}{2}.\sin.\frac{\gamma}{2}$;

190) $\sin.^2\alpha+\sin.^2\beta+\sin.^2\gamma+2.\sin.\alpha.\sin.\beta.\sin\gamma = 1$;

191) $\cos^2\alpha+\cos.^2\beta+\cos.^2\gamma+2.\cos.\alpha.\cos.\beta.\cos.\gamma = 1$;

192) $tg.\alpha+tg.\beta+tg.\gamma = tg.\alpha.tg.\beta.tg.\gamma$;

193) $\text{cotg}.\alpha+\text{cotg}.\beta+\text{cotg}.\gamma = \text{cotg}.\alpha.\text{cotg}.\beta.\text{cotg}.\gamma$;

194) $tg.\alpha.tg.\beta+tg.\alpha.tg.\gamma+tg.\beta.tg.\gamma = 1$;

195) $\text{cotg}.\alpha.\text{cotg}.\beta+\text{cotg}.\alpha.\text{cotg}.\gamma+\text{cotg}.\beta.\text{cotg}.\gamma = 1$;

196) $\sin.2\alpha+\sin.2\beta+\sin.2\gamma = 4.\sin.\alpha.\sin.\beta.\sin.\gamma$;

197) $\cos.2\alpha+\cos.2\beta+\cos.2\gamma = -(1+4.\cos.\alpha.\cos.\beta.\cos.\gamma)$;

198) $\cos.\alpha.\sin.\beta.\sin.\gamma+\cos.\beta.\sin.\alpha.\sin.\gamma+\cos.\gamma.\sin.\alpha.\sin.\beta = 1+\cos.\alpha.\cos.\beta.\cos.\gamma$;

199) $\sin.^2\alpha+\sin.^2\beta-\sin.^2\gamma = 2.\sin.\alpha.\sin.\beta.\cos.\gamma$;

200) $\sin.\alpha+\sin.\beta-\sin.\gamma = 4.\sin.\frac{\alpha}{2}.\sin.\frac{\beta}{2}.\cos.\frac{\gamma}{2}$;

201) $\cos.^2\alpha+\cos.^2\beta-\cos.^2\gamma = 1-2.\sin.\alpha.\sin.\beta.\cos.\gamma$;

Ha A, B, C, D egy négyszög belső szögei, mennyi akkor:

202) $\sin(A+B+C)$; $\cos.(A+B+C)$;
203) $\text{tg.}(A+B+C)$; $\text{cotg.}(A+B+C)$?

Ha A, B, C, D, E egy ötszög belső szögei, mennyi akkor:

204) $\sin.(A+B+C)$; $\sin.(A+B+C+D)$;
205) $\cos.(A+B+C)$; $\cos.(A+B+C+D)$;
206) $\text{tg.}(A+B)$; $\text{tg.}(A+B+C)$; $\text{tg.}(A+B+C+D)$?

Bebizonyitandó a következő képletek helyessége:

os $2\alpha = (\cos.\alpha - \sin.\alpha).(\cos.\alpha + \sin.\alpha)$;

208) $\sin.2\alpha = (\sin.\alpha + \cos.\alpha)^2 - 1$;

209) $\sin.2\alpha = 1 - (\sin.\alpha - \cos.\alpha)^2$;

210) $\text{tg.}2\alpha = \dfrac{1}{1-\text{tg.}\alpha} + \dfrac{\text{tg.}\alpha}{1+\text{tg.}\alpha}$;

211) $\sin.2\alpha = 2.\text{tg.}\alpha.\cos.^2\alpha$;

212) $2.\sec.2\alpha = \text{tg.}(45^0+\alpha) + \text{tg.}(45^0-\alpha)$;

213) $\dfrac{(\sec.\alpha + \text{cosec.}\alpha)^2}{\sec.^2\alpha + \text{cosec.}^2\alpha} = 1 + 2.\sin.\alpha$;

214) $\dfrac{\sin.\alpha}{1-\sin.\alpha} = \text{tg.}\left(45^0 + \dfrac{\alpha}{2}\right).\text{tg.}\alpha$;

215) $\dfrac{\cos.\alpha}{1-\sin.\alpha} = \text{tg.}\left(45^0 + \dfrac{\alpha}{2}\right)$;

216) $\sin.(\alpha+\beta).\sin.(\alpha+\beta) = \sin.^2\alpha - \sin.^2\beta$;

217) $\text{tg.}2\alpha + \sec.2\alpha = \dfrac{\cos.\alpha + \sin.\alpha}{\cos\alpha - \sin.\alpha}$;

218) $2.\text{cotg.}\alpha = \text{cotg.}\dfrac{\alpha}{2} - \text{tg.}\dfrac{\alpha}{2}$;

219) $\text{cotg.}\alpha = \text{cotg.}2\alpha + \text{cosec.}2\alpha$;

220) $\text{tg.}\dfrac{\alpha}{2} = \text{cosec.}\alpha - \text{cotg.}\alpha$;

221) $\cos.(\alpha+\beta).\cos.(\alpha-\beta) = \cos.^2\alpha - \sin.^2\beta$;

222) $\sin.2\alpha = \dfrac{1-\text{tg.}^2(45^0-\alpha)}{1+\text{tg.}^2(45^0+\alpha)}$;

223) $2.\sin.^2\alpha.\sin.^2\beta + 2.\cos.^2\alpha.\cos.^2\beta = 1 + \cos.2\alpha.\cos.2\beta$;

224) $\text{tg.}^2\alpha - \text{tg.}^2\beta = \dfrac{4.\cos.(\alpha+\beta).\sin.(\alpha-\beta)}{[\cos.(\alpha+\beta) - \cos.(\alpha-\beta)]^2}$;

225) $\sin.\alpha . \cos.\alpha = \dfrac{\sin.\alpha + \cos.\alpha}{\sec.\alpha + \operatorname{cosec}.\alpha}$;

226) $\sin.(450^0 + \alpha) - \sin.(270^0 - \alpha) = \sin.(450^0 - \alpha) - \sin.(270^0 + \alpha)$;

227) $\cos.(90^0 + \alpha) . \cos.(180^0 - \alpha) + \sin.(90^0 + \alpha) . \sin.(180^0 + \alpha) = 0$;

228) $\dfrac{\operatorname{tg}.(180^0 - \alpha)}{\operatorname{tg}.(270^0 - \alpha)} = \dfrac{\operatorname{cotg}.(90^0 + \alpha)}{\operatorname{cotg}.(180^0 + \alpha)}$;

229) $\cos.(\alpha + \beta) = \dfrac{\sec.\alpha . \sec\beta}{1 - \operatorname{tg}.\alpha . \operatorname{tg}.\beta}$;

230) $\operatorname{tg}.(\alpha + \beta) . \operatorname{tg}.(\alpha - \beta) = \dfrac{\sin.^2\alpha - \sin^2\beta}{\cos.^2\alpha - \sin.^2\beta}$;

231) $\operatorname{tg}.(\alpha + \beta) = \dfrac{\sin.\alpha . \cos\alpha - \sin\beta . \cos.\beta}{\cos.^2\alpha - \sin.^2\beta}$;

232) $\operatorname{tg}.^2\alpha - \operatorname{tg}.^2\beta = \dfrac{\sin.(\alpha + \beta) . \sin.(\alpha - \beta)}{\cos.^2\alpha . \cos^2\beta}$;

233) $\dfrac{1 + \sin.\alpha}{1 - \sin.\alpha} = \dfrac{\operatorname{cosec}.\alpha + 1}{\operatorname{cosec}.\alpha - 1}$;

234) $(\sin.\alpha + \cos\alpha)^2 - (\sin\alpha - \cos\alpha)^2 = 2 . \sin.2\alpha$;

235) $\operatorname{cosec}.2\alpha = \dfrac{1}{2}\sec\alpha . \operatorname{cosec}.\alpha$;

236) $\cos.\alpha + \sin\alpha = \sqrt{2} . \sin.(45^0 + \alpha) = \sqrt{2} . \cos.(45^0 - \alpha)$;

237) $\cos.\alpha - \sin.\alpha = \sqrt{2} . \sin.(45^0 - \alpha) = \sqrt{2} . \cos.(45^0 + \alpha)$;

238) $\operatorname{tg}.\alpha + \sin.\alpha = 2 . \operatorname{tg}.\alpha \cos.^2\dfrac{\alpha}{2}$;

239) $\operatorname{tg}.\alpha - \sin.\alpha = 2 . \operatorname{tg}.\alpha . \sin.^2\dfrac{\alpha}{2}$;

240) $\operatorname{cotg}.\alpha + \operatorname{tg}.\alpha = 2 . \operatorname{cosec}.2\alpha$;

241) $\operatorname{cotg}.2\alpha - \operatorname{tg}.\alpha = 2 . \operatorname{cotg}.2\alpha$;

242) $2 . \sin.(a + \beta) . \sin.(\alpha - \beta) = \cos.2\beta - \cos.2\alpha$;

243) $2 . \cos.(\alpha + \beta) . \cos(\alpha - \beta) = \cos.2\alpha + \cos.2\beta$;

244) $2 . \sin.(\alpha + \beta) . \cos.(\alpha - \beta) = \sin.2\alpha + \sin.2\beta$;

245) $2 . \cos.(\alpha + \beta) . \sin.(\alpha - \beta) = \sin.2\alpha - \sin.2\beta$;

246) $\sin.3\alpha . \sin.\alpha = \sin.^2 2\alpha - \sin.^2\alpha$;

247) $\dfrac{\operatorname{tg}.2\alpha . \operatorname{tg}.\alpha}{\operatorname{tg}.2\alpha - \operatorname{tg}.\alpha} = \sin.2\alpha$;

248) $\dfrac{\operatorname{tg}.\alpha}{\operatorname{tg}.2\alpha - \operatorname{tg}.\alpha} = \sin.2\alpha$;

249) $2 . \sin.(45^0 - \alpha) . \cos.(45^0 + \alpha) = 1 - \sin.2\alpha$;

250) $2 . \sin.(45^0 + \alpha) . \cos.(45^0 - \alpha) = 1 + \sin 2\alpha$.

Változtassuk szorzatokká a következő kifejezéseket:

251) $\frac{a+b}{a-b}$; $\sqrt{a+b}+\sqrt{a-b}$; $\frac{a^2-1}{a^2+1}$; $\frac{a^2+b^2}{4.\sin.^2\alpha}$; $\sqrt{a^2+b^2-2ab.\cos C}$;

252) $\frac{a.\sin.\alpha-b.\sin.\beta}{\sin.\gamma}$; $\frac{a-b.\sin\alpha}{a+b.\sin.\alpha}$; $\sqrt{a^2.\sin.^2 A+b^2.\cos^2 A}$;

253) $1+\cos.\alpha$; $1-\cos.\alpha$; $\sqrt{\frac{1-\cos.\alpha}{1+\cos.\alpha}}$;
$1+\sin.\alpha$; $1-\sin.\alpha$; $\sqrt{\frac{1-\sin.\alpha}{1+\sin.\alpha}}$;

254) $1+\operatorname{tg}.\alpha$; $1-\operatorname{tg}.\alpha$; $\frac{1+\operatorname{tg}.\alpha}{1-\operatorname{tg}.\alpha}$; $\operatorname{tg}.\alpha+\sin.\alpha$; $\operatorname{tg}.\alpha-\sin.\alpha$;

255) $\operatorname{cotg}.\alpha+\operatorname{tg}\alpha$; $\operatorname{cotg}.\alpha-\operatorname{tg}.\alpha$; $\sec.\alpha+2.\sin.\alpha$; $\operatorname{tg}.\alpha+2.\sin.^2\alpha$;

256) $1+\sin.\alpha+\cos.\alpha$; $1+\sin.\alpha-\cos.\alpha$; $\cos.(\alpha+2\beta)-\sin.^2\beta$; $\sin.^2(\alpha+\beta)-\sin.^2\alpha$;

257) $3{\cdot}47.\cos.20^0\,35'\,17'-7{\cdot}81.\sin.20^0\,35'\,17''$;

258) $\cos.18^0.\cos.85^0-\sin.18^0.\sin.85^0.\cos.63^0$.

Keressük fel a következő goniometriai függvények logarithmusait:

259) $\log.\sin.17^0\,10'\,26''$; $\log.\cos.72^0\,56'\,48''$;
$\log.\operatorname{tg}.27^0\,16'\,32''$; $\log.\operatorname{cotg}.8^0\,32'\,20''$;

260) $\log.\sin.56^0\,18'\,16{\cdot}5''$; $\log.\cos.7^0\,28'\,32'$;
$\log.\operatorname{tg}.42^0\,56'\,10''$; $\log.\operatorname{cotg}.87^0\,20'\,5''$;

261) $\log.\sin.51^0\,38'\,33''$; $\log.\cos.23^0\,48'\,5''$;
$\log.\operatorname{tg}.9^0\,19'\,29''$; $\log.\operatorname{cotg}.50^0\,48'\,16''$;

262) $\log.\sin.0^0\,48'\,47''$; $\log.\cos.1^0\,2'\,11''$;
$\log.\operatorname{tg}.1^0\,17'\,48''$; $\log.\operatorname{cotg}.0^0\,20'\,30''$;

263) $\log.\sin.248^0\,18'\,30''$; $\log.\cos.146^0\,20'\,32'$;
$\log.\operatorname{tg}.184^0\,26'\,18'$; $\log.\operatorname{cotg}.218^0\,20'\,7''$;

264) $\log.\sin.472^0\,20'\,18''$; $\log.\cos.527^0\,18'\,6''$;
$\log.\operatorname{tg}.475^0\,20'\,6''$; $\log.\operatorname{cotg}.452^0\,57'\,58''$;

265) $\log.\sin.(-214^0\,8'\,4'')$; $\log.\cos.(-135^0\,16'\,24'')$;
$\log.\operatorname{tg}.(-127^0\,17'\,18'')$; $\log.\operatorname{cotg}.(-185^0\,10'\,6'')$;

266) $\log.\sin.(-456^0\,20'\,48'')$; $\log.\cos.(-518^0\,7'\,52'')$;
$\log.\operatorname{tg}.(-418^0\,14'\,12'')$; $\log.\operatorname{cotg}.(-472^0\,8'\,28'')$.

Mivel egyenlő x, ha:

267) $\log.\sin.x = 8{\cdot}74100 - 10$; $\log.\cos.x = 9{\cdot}98338 - 10$;
$\log.tg.x = 8{\cdot}47880 - 10$; $\log\ cotg\ x = 8{\cdot}68330 - 10$;

268) $\log.\sin.x = 9{\cdot}98654 - 10$; $\log.\cos.x = 8{\cdot}12544 - 10$;
$\log.tg.x = 9{\cdot}84839 - 10$; $\log.cotg.x = 9{\cdot}74870 - 10$;

269) $\log.\sin.x = 9{\cdot}34547 - 10$; $\log\cos.x = 9{\cdot}85479 - 10$;
$\log.tg.x = 0{\cdot}41200$; $\log.cotg.x = 0{\cdot}21671$;

270) $\log.\sin.x = 9{\cdot}78655 - 10$; $\log.\cos.x = 9{\cdot}71682 - 10$;
$\log.tg.x = 0{\cdot}75897$; $\log.cotg.x = 2{\cdot}32576$.

Számitsuk ki x értékét, ha:

271) $\sin.x = 0{\cdot}7$; $\sin.x = \frac{1}{2}\sqrt{2}$; $\sin.x = 0{\cdot}4$;

272) $\cos.x = -\frac{5}{9}$; $\cos.x = 0{\cdot}96$; $\cos.x = 0{\cdot}75$;

273) $tg\,x = 0{\cdot}87$; $tg.x = 1{\cdot}4$; $tg.x = -\frac{17}{9}$; $tg.x = 3$;

274) $cotg.x = \frac{2}{3}$; $cotg.x = 3{\cdot}5$; $cotg.x = 2{\cdot}75$;
$cotg.x = -\frac{3}{4}$;

275) $x = 18{\cdot}6\sin.27^0\,56'\,18''$;

276) $x = 8{\cdot}5 . \cos.48^0\,10'\,16''$;

277) $x = 187{\cdot}4 . tg.67^0 5'20''$; $x = 0{\cdot}8 . cotg.16^0 20'10''$;

278) $x = \dfrac{5{\cdot}6 . \sin.30^0\,25'\,12''}{\sin.56^0\,24'\,48''}$;

279) $x = \dfrac{22{\cdot}2\,tg\,58^0 16'14''}{tg.24^0\,31'\,36''}$; $tg.x = \dfrac{18{\cdot}5 . tg.27^0 28'\,32''}{5{\cdot}75}$;

280) $\sec.x = -\sqrt{3}$; $cosec.x = -\frac{1}{2}\sqrt{5}$.

Oldjuk meg a következő egyenleteket:

281) $cosec.\alpha = 4 . \sin.\alpha$; $\sin.x + \sqrt{3} . \cos.x = 1$;

282) $\cos^2 x = \frac{5}{12} . \sin\ x$;

283) $\sin.5x = \sin.7x$; $tg.3x = \sin.6x$;

284) $cotg.x . tg.2x = 2 + tg.x . cotg.2x$;

285) $cotg.\frac{x}{2} - tg.\frac{x}{2} = 2 . tg.\alpha$; $a . tg.x = b . \sin.x$;
$a . \sec.x = b . \sin.x$;

286) $a . tg.x = b . cosec.x$; $\cos.x = tg.2x$;
$8 . \sin.2x = 9 . cotg.x$;

287) $tg.x + \sec^2 x = 3$; $9 . \sin.x - 2 . \cos.x = 6$;

288) $\operatorname{cosec.}^2 \frac{x}{2} - \sec.^2 \frac{x}{2} = 2 . \sqrt{3} \operatorname{cosec.} x$;

289) $\frac{1}{2}\sqrt{3} . \sin. 2x = \cos. x$; $8 . \sin. x - \cos. x = 4$;
$\sin. x = \frac{1}{4} \cos. \frac{x}{2}$;

290) $\frac{1}{3}\cos. x + \frac{1}{4}\sin. x = \frac{1}{9}$; $3 . \operatorname{cotg.} x = 5 . \operatorname{cotg.} \frac{x}{2}$;
$\operatorname{tg.} x + 2 \operatorname{cotg} x = 4$;

291) $\operatorname{cotg.} x - \frac{1}{2}\operatorname{cotg.} x = 3$; $7 . \sin. x = 8 . \operatorname{cotg.} \frac{x}{2}$;
$\operatorname{tg.} x - \frac{1}{2}\operatorname{cotg.} x = 2$;

292) $3 . \operatorname{tg.} x = 11 . \operatorname{tg.} \frac{x}{2}$; $\sin. 2x - \sin. x = \frac{2}{9} . \operatorname{tg.} x$;

293) $5 . \sin. x = 8 . \sin. \frac{x}{2}$;

294) $\sin.^2 x - 2 \cos.^2 x = 2$;

295) $\frac{1}{\sin. x} + \frac{2}{\cos. 2} = 2$; 296) $\sec. x = \operatorname{tg.} 2x$;

297) $2 . \sin. x + 3 \cos. x = 1$;

298) $3 . \sin^2 x - 4 . \cos.^2 x = \frac{1}{2} . \sin. 2x$;

299) $\sin. x - \cos. x = \frac{1}{\sqrt{2}}$; 300) $a . \sin. x + b . \cos. x = c$;

301) $\sec x = 2 \cos. x + \sin. x$;

302) $\sin. 2x + \cos. 2x = \sqrt{2 . \sin. x}$;

303) $\sin.^2 (x + 15) - \sin.^2 (x - 15) = \frac{1}{4}$;

304) $\sin. 7x - \sin. x = \sin 3x$;

305) $\operatorname{tg.} x + \operatorname{tg.} 2x = \operatorname{tg.} 3x$; $\operatorname{tg.} x + \operatorname{tg.} y = a$;
$x + y = b$;

306) $x + y = 92^0$; $\sin. x - \sin. y = 0{\cdot}673554$;

307) $x + y = 105^0$; $\sin. x . \cos. y = 0{\cdot}6124$;

308) $x + y = 18^0$; $\cos. x : \cos. y = 5 : 8$;

309) $\sin. x + \sin. y = 1{\cdot}4783$; $\cos. x - \cos. y = 0{\cdot}1937$;

310) $\operatorname{tg.} (x + y) = \frac{4}{3}$; $\operatorname{tg.} x + \operatorname{tg} y = 1$;

311) $\operatorname{tg.} x + \operatorname{tg.} y = a$; $\operatorname{tg.} \frac{x}{2} + \operatorname{tg.} \frac{y}{2} = b$;

312) $\sin. (x - y) = \frac{1}{2}$; $\cos. (x + y) = \frac{1}{2}$;

313) $x . \sin. y = 0{\cdot}92646$; $x . \cos. y = 3{\cdot}2801$;

314) $\sin. x + \sin. y = \frac{1}{4}$; $\cos. x . \cos. y = \frac{3}{4}$;

315) $\cos.\left(\frac{2}{3}x + 45^0\right) = \cos.\left(\frac{x}{2} + 60\right)$;

316) $2 . \mathrm{tg.}^2 \alpha - 13 . \mathrm{cotg.}\, \alpha = 7{\cdot}3$;

317) $4 . \sec.\, \alpha - 9 . \cos.\, \alpha - 9 = 0$;

318) $7 . \sin.\, \alpha - 3 . \cos.\, \alpha + 2{\cdot}5 = 0$;

319) $\mathrm{tg.}\,(x + \alpha) + \mathrm{tg.}\,(x - \alpha) - 2\,\mathrm{cotg.}\, x = 0$;

320) $\sin.\, 2x + \sin.\, 3x = 2 . \sin.\, x$;

321) $35 . \sin.^2 x + 8 . \cos.^2 x - 19 . \sin.\, 2x = 0$;

322) $\sin.^2 x - 2 . \cos.^2 x + \frac{1}{2} \sin.\, 2x = 0$;

323) $2 . \sin.\,(45^0 - x) . \cos.\,(45^0 + x) = 1 - \sin.\, 2x$;

324) $\mathrm{cotg.}\, \alpha - \mathrm{tg.}\, \alpha = 2 . \mathrm{cotg.}\, 2\alpha$;

325) Két szög keresendő, melyek különbsége a, cosinusaik viszonya : $\frac{m}{n}$.

326) A derékszögű háromszögben az egyik hegyes szög sinusa úgy áll a másik tg.-éhez, mint 1 : 4-hez. Mily nagyok a szögek?

327) Mily nagyok a derékszögű háromszög hegyes szögei, ha azok tangenseinek viszonya $\frac{3}{4}$?

328) Mily nagyok akkor, ha a sinusok viszonya $\frac{1}{\sqrt{2}}$?

329) Mily nagyok az egyenlőszárú háromszög szögei, ha az alapon fekvő s az azzal átellenes szögek cosinusainak viszonya : $-\sqrt{3}$?

330) A ferdeszögű háromszög szögei keresendők; tudva, hogy azok cotangenseinek aránya 4 : 5 : 6.

26. §. Feladatok a háromszögek megfejtésére.

Megfejtendő a derékszögű háromszög (8. ábra), ha ismeretes :

1) a = 627 m ; C = 23⁰ 30′ ;
2) a = 2280 m. ; C = 28⁰ 5′ ;
3) a = 72·15 m. ; B = 39⁰ 34′ 30″ ;
4) a = 57·54 m. ; B = 44⁰ 54′ 30″ ;
5) a = 0 665008 m. ; C = 6⁰ 17′ 15″ ;
6) a = 73 m. ; C = 21⁰ 8′ 12″ ;
7) a = 21·927 m. ; B = 38⁰ 21′ 30″ ;
8) a = 0·2831 m ; B = 44⁰ 44′ 44″ ;
9) a = 50·937 m. ; C = 43⁰ 48′ 1″ ;
10) a = 797·92 m. ; B = 66⁰ 36′ 24″ ;
11) c = 425·8 m. ; B = 53⁰ 23′ ;

12) $b = 5739$ m.; $B = 27^0\,38'$;
13) $b = 24\,055$ m.; $B = 12^0\,54'\,36''$;
14) $c = 170{\cdot}9$ m.; $B = 27^0\,26'\,5''$;
15) $c = 36$ m.; $C = 67^0\,22'\,28''$;
16) $b = 0{\cdot}1705$ m.; $C = 54^0\,14'\,21''$;
17) $c = 3$ m.; $B = 23^0\,49'\,30''$;
18) $c = 947$ m.; $B = 33^0\,33'\,3''$;
19) $b = 573{\cdot}9$ m.; $C = 27^0\,38'$;
20) $c = 389{\cdot}7$ m.; $C = 47^0\,22'$;
21) $a = 14{\cdot}3$ m.; $b = 11$ m.;
22) $a = 6$ m.; $b = 3{\cdot}4$ m.;
23) $a = 785{\cdot}3$ m.; $b = 525{\cdot}1$ m.;
24) $a = 100$ m.; $b = 17{\cdot}64$ m;
25) $a = 8\,757$ m.; $b = 6\,979$ m.;
26) $a = 1734$ m.; $b = 792$ m.;
27) $a = 210{\cdot}111$ m.; $c = 80{\cdot}782$ m;
28) $a = 9{\cdot}8978$ m.; $c = 1{\cdot}4263$ m.;
29) $a = 86{\cdot}53$ m; $b = 71{\cdot}78$ m.;
30) $a = 5850$ m.; $c = 4754$ m.;
31) $b = 526{\cdot}4$ m.; $c = 314{\cdot}5$ m.;
32) $b = 17{\cdot}8$ m.; $c = 37{\cdot}5$ m.;
33) $b = 5{\cdot}69$ m.; $c = 10{\cdot}562$ m.;
34) $b = 45$ m.; $c = 45$ m.;
35) $b = 206{\cdot}14$ m.; $c = 454{\cdot}43$ m.;
36) $b = 2{\cdot}0054$ m.; $c = 1{\cdot}2874$ m.;
37) $b = 342{\cdot}5$ m.; $c = 617{\cdot}4$ m.;
38) $b = 16{\cdot}5$ m.; $c = 28{\cdot}34$ m.;
39) $b = 62{\cdot}3$ m.; $c = 24{\cdot}6$ m.;
40) $b = 1895{\cdot}69$ m.; $c = 2384{\cdot}48$ m.
41) Megfejtendő a derékszögű háromszög, ha átfogója 13 m., az átfogóhoz tartozó magasság pedig 6 m.
42) A derékszögű háromszög befogóinak az átfogón való projectiói: $p = 32{\cdot}4$ m.; $p_1 = 57{\cdot}6$ m. Megfejtendő a háromszög.
43) Az egyik projectió: $p = 143$ m.; $B = 83^0\,16'\,1''$. Megfejtendő a háromszög.

Mivel egyenlők a derékszögű háromszög ismeretlen alkotórészei, ha:

44) befogója: $b = 100$ m.; területe: $t = 3750$ m.^{2};
45) kerülete: $k = 7640{\cdot}07$ m.; $B = 50^0\,46'\,45''$;
46) $k = 644$ m.; $t = 14490$ m.^{2};
47) $a = 85$ m.; $t = 546$ m.^{2};
48) $t = 8232{\cdot}886$ m.^{2}; $B = 36^0\,42'\,38''$;

49) $a = 164$ m.; $b - c = 124$ m.;
50) $b + c = 184$ m.; $B = 28^0 4' 20''$;
51) $b - c = 94$ m.; $B = 75^0 44' 59''$;
52) $a = 5849$ m.; $b : c = 8 : 5$;
53) $a = 596\ 842$ m.; $B - C = 14^0 19' 38{\cdot}2''$;
54) $b + c = 8941{\cdot}58$ m.; $B = 51^0 19' 43''$;
55) $a + b + c = 5960$ m.; $B = 60^0 19' 43{\cdot}2''$;
56) $t = 6936$ m.^{2}; $b + c = 238$ m.;
57) $a + b = 80$ m.; $B = 36^0 52' 12''$?

Megfejtendő a derékszögű háromszög, ha ismeretes:

58) a és bc;
59) a körülirt kör sugara **r** és B szög;
60) **r** és a beirt kör sugara: ρ;
61) $a + b = 34$ m., az átfogóhoz tartozó magasság: $m = 9{\cdot}23$ m.
62) A derékszögű négyszög átlója: **d** $= 325$ m.; az átló és egyik oldal által bezárt szög: $\alpha = 25^0 42'$. Mily nagyok az oldalak és a terület?
63) Megfejtendő a derékszögű négyszög, ha átlója: $d = 21{\cdot}623$ m.; az átlók által bezárt szög: $\varphi = 33^0 41' 24''$.
64) Megfejtendő a derékszögű négyszög, ha oldalai: $a = 4937$ m.; $b = 3874$ m.
65) Keressük a rhombus ismeretlen alkotórészeit, ha átlói: $d = 5{\cdot}82$ m.; $d_1 = 7{\cdot}98$ m.

Megfejtendő az egyenlőszárú háromszög (9. ábra), ha ismeretes:

66) $c = 61{\cdot}2$ m.; $C = 111^0 35' 20''$;
67) $c = 168$ m; $C = 153^0 24' 28''$;
68) $c = 4{\cdot}5656$ m.; $C = 77^0 31' 36''$;
69) $c = 5{\cdot}684$ m.; $C = 83^0 35' 40''$;
70) $c = 2{\cdot}3512$ m.; $C = 69^0 49' 26''$;
71) $c = 7{\cdot}71$ m; $C = 34^0 35' 36''$;
72) $c = 2856$ m.; $C = 72^0 28' 20''$;
73) $c = 0{\cdot}75$ m; $C = 38^0 24' 48''$;
74) $c = 80$ m.; $C = 154^0 38' 22''$;
75) $c = 512{\cdot}6$ m.; $C = 8^0 20' 40''$;
76) $b = 10$ m.; $C = 73^0 44' 22''$;
77) $b = 835$ m.; $C = 154^0 59' 22''$;
78) $b = 2{\cdot}0541$ m.; $C = 69^0 49' 26''$;
79) $b = 120$ m.; $C = 10^0 23' 19{\cdot}5''$;
80) $b = 1000$ m; $C = 100^0 50' 40''$;
81) $b = 516$ m.; $C = 70^0 50' 10''$;

82) $b = 2126$ m.; $C = 72^0 8' 12''$;
83) $b = 3{\cdot}5$ m.; $C = 81^0 41' 42''$;
84) $b = 5{\cdot}75$ m.; $C = 42^0 30' 30''$;
85) $b = 0{\cdot}875$ m.; $C = 9^0 19' 29''$;
86) $c = 5$ m.; $b = 2{\cdot}8$ m.;
87) $c = 7{\cdot}375$ m.; $b = 8{\cdot}125$ m.;
88) $c = 504$ m.; $b = 277$ m.;
89) $c = 91{\cdot}15$ m.; $b = 84{\cdot}75$ m.;
90) $c = 12$ m.; $b = 13$ m.;
91) $c = 0{\cdot}375$ m.; $b = 1{\cdot}225$ m.;
92) $c = 290$ m.; $b = 433$ m.;
93) $c = 3875$ m.; $b = 521{\cdot}6$ m.;
94) $c = 1{\cdot}2345$ m.; $b = 2{\cdot}67$ m.;
95) $c = 87{\cdot}4$ m.; $b = 95{\cdot}65$ m.

Megfejtendő az egyenlőszárú háromszög, ha:

96) alapja $c = 147$ m.; az alaphoz tartozó magasság $m = 90$ m.;
97) $t = 218{\cdot}4$ m.^{2}; $c = 23{\cdot}3$ m.;
98) $t = 159{\cdot}6$ m.^{2}; $m = 16{\cdot}8$ m.;
99) $c + b = 40{\cdot}06$ m.; $C = 136^0 27' 28''$;
100) $c - b = 47$ m.; $m = 33$ m.;
101) $c = 72$ m.; a b-re vont magasság: $m_1 = 43{\cdot}2$ m;
102) $m = 9$ m.; $A = 158^0 38' 20''$;
103) $t = 2260$ m.^{2}; $A = 82^0 13' 28''$;
104) $a + 2b = 36$ m.; $m = 12$ m.;
105) $a + 2b = 144$ m.; $B = 67^0 22' 49''$;
106) $a + m = 89$ m.; $A = 154^0 34' 20''$;
107) $a - m = 125$ m.; $t = 7500$ m.^{2};
108) $A = 28^0 30' 2''$; a szárhoz tartozó magasság: $m_1 = 62{\cdot}02$ m.
109) Milyen arányban osztja a hegyes szöget felező egyenes az egyenlőszárú derékszögű háromszög területét?
110) Mekkora a hold látszólagos átmérője, ha valóságos középátmérője 466 mfd. s a földtől vett középtávolsága 51800 mfd.?
111) A symmetrikus trapéz területe: $t = 3{\cdot}47715$ m.^{2}; a két párhuzamos oldal, $a = 5$ m.; $b = 3$ m. Mily nagyok a hiányzó alkotórészek?

Megfejtendő az egyenlőszárú háromszög, ha ismeretes:

112) A körülirt kör sugara: $r = 39{\cdot}144$ m.; $C = 37^0 50' 58''$;

113) $r = 56 \cdot 25$ m; $m = 72$ m.;
114) $b = 6 \cdot 71$ m.; $m = 6 \cdot 6$ m.;
115) $c = 7 \cdot 95$ m.; $m = 4 \cdot 2$ m.;
116) $m = 16 \cdot 8$ m.; $B = 81^0 12' 9 \cdot 3''$.
117) Mily nagy azon csillag átmérője, melynek látszólagos nagysága $31' 59 \cdot 4''$; a földtől való távola 20665840 mfd.?
118) Mily nagyok az egyenlőszárú háromszög szögei, ha alapjának és az alaphoz tartozó magasságnak összege a szár kétszeresével egyenlő?
119) Az egyenlőszárú háromszög beirt körének sugara kiszámitandó, ha ismeretes az alap és a szár.
120) Mennyi az egyenlőszárú háromszög területe, ha ismerjük az alapot és a beirt kör sugarát?

Megfejtendő a ferdeszögű háromszög (10. ábra), ha ismeretes:

121) $c = 12$ m., $A = 44^0 20'$, $B = 77^0 10'$;
122) $c = 713 \cdot 24$ m., $A = 92^0 7' 3''$, $B = 24^0 19' 4''$;
123) $a = 248 \cdot 6244$ m., $B = 54^0 34' 32''$, $C = 54^0 46' 26 \cdot 8''$;
124) $a = 2 \cdot 5$ m, $B = 98^0 63' 8'$, $C = 56^0 29' 8''$;
125) $b = 0 \cdot 3$ m., $A = 83^0 12' 6''$, $C = 15^0 9' 19''$;
126) $b = 1250$ m., $A = 65^0 48' 48'$, $C = 36^0 24' 26''$;
127) $c = 8 \cdot 75$ m, $A = 85^0 39' 20''$, $B = 37^0 26' 10''$;
128) $a = \frac{3}{4}$ m., $B = 92^0 4' 18''$, $C = 18^0 18' 18''$;
129) $a = 3759 \cdot 6847$ m., $b = 2946 \cdot 268$ m., $C = 44^0 37' 43 \cdot 3''$;
130) $a = 86$ m., $b = 92$ m., $C = 118^0 20' 40''$;
131) $b = 642 \cdot 5$ m., $c = 854 \cdot 1$ m., $A = 40^0 24' 48''$;
132) $b = 5897$ m., $c = 4831$ m., $A = 67^0 30' 27''$;
133) $a = 109 \cdot 7$ m., $c = 149$ m., $B = 47^0 30' 24''$;
134) $a = 3760$ m., $c = 4820$ m., $B = 51^0 6' 6''$;
135) $a = 203 \cdot 2$ m, $b = 215 \cdot 4$, $C = 56^0 6' 12''$;
136) $a = 320$ m., $b = 216$ m, $C = 134^0 10' 15''$;
137) $c = 518 \cdot 2$ m., $b = 316 \cdot 8$ m., $C = 82^0 20' 20''$;
138) $a = 0 \cdot 5$ m., $b = 0 \cdot 75$ m., $B = 62^0 38' 17''$;
139) $a = 4527$ m., $b = 3465$ m., $A = 66^0 6' 27''$;
140) $b = 5 \cdot 1269$ m., $c = 1 \cdot 4687$ m., $B = 62^0 9' 24''$;
141) $b = 229$ m., $c = 232$ m., $C = 15^0 11' 21 \cdot 4''$;
142) $b = 55 \cdot 14$ m., $c = 33 \cdot 09$ m., $B = 30^0 24'$;
143) $a = 13 \cdot 2$ m., $b = 15 \cdot 7$ m, $B = 57^0 13' 15 \cdot 7''$;
144) $a = 134 \cdot 16$ m., $b = 84 \cdot 54$ m., $A = 52^0 9' 11''$;
145) $a = 43$ m., $b = 50$ m., $c = 57$ m.;
146) $a = 62$ m, $b = 122$ m., $c = 182$ m.;

147) $a = 453 \cdot 2$ m., $b = 267 \cdot 3$ m., $c = 470 \cdot 4$ m.;
148) $a = 195$ m., $b = 257$ m., $c = 67 \cdot 993$ m.;
149) $a = 589 \cdot 7$ m., $b = 483 \cdot 1$ m., $c = 356 \cdot 2$ m.;
150) $a = 0 \cdot 099$ m., $b = 0 \cdot 101$ m., $c = 0 \cdot 158$ m.;
151) $a = 75$ m., $b = 92$ m., $c = 107$ m.;
152) $a = 5897 \cdot 27$ m., $b = 4631 \cdot 48$ m., $c = 3652 \cdot 49$ m.

Bebizonyitandó, hogy bármely háromszögben:

153) $a = b \cdot \cos. C + c \cdot \cos. B$; $b = a \cdot \cos. C + c \cdot \cos. A$; $c = a \cdot \cos. B + b \cdot \cos. A$;
154) $\sin.^2 A = \sin.^2 B + \sin.^2 C - 2 \cdot \sin. B \cdot \sin C \cdot \cos. A$.

Megfejtendő a háromszög, ha:

155) $t = 126$ m.², $a = 13$ m., $b = 20$ m.;
156) $t = 36$ m.², $b = 9$ m., $A = 126^0\, 52'\, 26''$;
157) $t = 36$ m.², $a = 9$ m., $m_b = 7 \cdot 2$ m.;
158) $t = 154$ m.², $A = 72^0\, 26'\, 10''$, $B = 42^0\, 30'\, 16''$;
159) $a + b = 2 \cdot 94$ m., $c = 2 \cdot 351$, $C = 93^0\, 41'\, 43''$;
160) $a - b = 6 \cdot 32$ m., $c = 7 \cdot 89$ m., $C = 96^0\, 43'\, 59''$;
161) $a + b = 19$ m., $c = 13$ m., $t = 24$ m.²;
162) $a - b = 13$ m., $t = 90$ m.², $C = 36^0\, 52'\, 12''$;
163) $a = 592$ m., $K = 1675 \cdot 5$ m., $t = 124336 \cdot 64$ m.²;
164) $a = 904$ m., $b = 625$ m., $m_a = 336_m$;
165) $a = 704$ m., $b = 302$ m., $B = 25^0\, 14'\, 13''$;
166) $a = 13 \cdot 45$ m., $b = 14 \cdot 56$ m., $c = 15 \cdot 67$ m.;
167) $a = 46 \cdot 78$ m., $b = 35 \cdot 9$ m., $c = 77$ m.;
168) $a + b - c = 0 \cdot 71$ m., $c = 0 \cdot 90$ m., $t = 0 \cdot 259874$ m.²;
169) $a = 533$ m., $m = 368$ m., $A = 76^0\, 18'\, 52''$;
170) $a + b = 793$ m., $c = 773$ m., $m_a = 195$ m.;
171) $r = 4 \cdot 131$ m., az a-hoz tartozó középvonal $= 6 \cdot 892$ m., $b = 7$ m.;
172) $t = 3846 \cdot 58$ m., $A = 58^0 29'\, 47''$, $B = 60^0 18'\, 34 \cdot 6''$;
173) $a + b + c = 5948 \cdot 8$ m., $A = 61^0\, 49'\, 47''$, $B = 66^0\, 18'\, 34''$;
174) $a = 8347$ m., $b + c = 11286$ m., $B = 79^0\, 18'\, 42''$;
175) $a = 31864$ m., $b - c = 12854$ m., $A = 69^0 41'\, 37''$;
176) $a = 90$ m., $B = 7^0\, 21'$, $C = 50^0\, 30'$;
177) $a = 14$ m., $B = 58^0\, 29'\, 23$, $C = 67^0\, 22'\, 48 \cdot 5''$;
178) $a = 408$ m., $B = 96^0\, 57'\, 20 \cdot 1''$, $C = 5^0\, 43'\, 29 \cdot 3''$.

Megfejtendő a háromszög, ha ismeretes:

179) Mind a három szög és egy magasság;
180) Két magasság és egy szög;
181) Két oldal és egy magasság;

182) A magasság, az alappal átellenes szög és ennek felezője;

183) A terület, a kerület és **A** szög

184) Bizonyitsuk be, hogy azon esetben, ha: $a^2 = b^2 + c^2 + bc$, akkor: $A = 120^0$.

185) A ferdeszögű háromszögben $r = 497\,087$ m; $a + b + c = 2537$ m.; $A = 47^0\,29'\,11{\cdot}3''$; mily nagyok az ismeretlen alkotórészek?

186) Bizonyitsuk be, hogy bármely háromszögben: $\cos.^2 A + \cos.^2 C + \cos.^2 C + 2.\cos.A.\cos.B.\cos C = 1$.

187) Határozzuk meg a négyszög átlóit és területét, ha adva van az **a**, **b**, **c**, **d** négy oldal

188) Határozzuk meg a rhomboid átlóit és területét, ha adva van két oldala: $a = 25$ m, $b = 17$ m. és az azok által bezárt szög: $C = 25^0\,3'\,27''$.

189) Ismeretes a rhomboid egy oldala: $a = 18$ m., egyik átlója: $d = 11$ m, továbbá az adott oldal és átló által bezárt szög: $\delta = 77^0\,45'\,12''$; keressük meg az ismeretlen részeket.

190) Adva van a rhomboid egy oldala: $a = 293{\cdot}22$ m., két átlója: $d = 326$ m., $d_1 = 378$ m. Keresendők az ismeretlen részek.

191) Keressük a symmetrikus trapéz területét, ha ismerjük a két párhuzamos oldalt és az egyik hegyes szöget.

192) A symmetrikus trapéz két szomszédos oldala: $a = 40{\cdot}5$ m., $b = 28{\cdot}92$ m., a közbezárt szög: $C = 37^0\,44'\,16''$. Mily nagy a terület?

193) Valamely trapézben a két párhuzamos oldal és két szög ismeretes. Kiszámitandók az ismeretlen oldalak és a terület ($a = 138$ m., $b = 92$ m., $\alpha = 30^0\,49'\,13''$, $\beta = 128^0\,39'\,35''$).

194) Mily nagy a trapezoid területe, ha átlói és az átlók által bezárt szöge ismeretesek? ($a = 17{\cdot}19$ m., $d_1 = 12{\cdot}451$ m., $\varphi = 168^0\,7'\,43''$).

195) A húrnégyszögből ismeretes három oldal és a körülirt kör sugara. Megfejtendő a négyszög. ($a = 56$ m., $b = 33$ m., $c = 16$ m., $r = 32{\cdot}5$ m.)

196) A húrnégyszög megfejtendő, ha ismerjük két oldalát és két átlóját. ($a = 14$ m., $b = 13$ m., $d_1 = 15$ m., $d_2 = 15{\cdot}6$ m.)

197) Megfejtendő a húrnégyszög, ha ismerünk belőle három oldalt és egy szöget. ($a = 41{\cdot}245$ m., $b = 45{\cdot}064$ m., $c = 22{\cdot}347$ m., $A = 88^0\,18'\,32''$.)

198) Határozzuk meg a húrnégyszög szögeit, ha oldalai: a = 435 m., b = 78 m., c = 325 m, d = 406 m.

199) Ismeretes a háromszög egy oldala és három szöge, határozzuk meg a három magasságot, az ezek talppontjait összekötő egyenesek által bezárt háromszög szögeit és területét.

200) Ismeretes a háromszög egy oldala és három szöge, határozzuk meg a szögfelező egyenesek hosszát.

27. §. Feladatok a trigonometria alkalmazására.

1) Mekkora a szabályos ötszög területe, beirt és körülirt körének sugara, ha egyik oldala a = 5 m?

2) Mekkora a szabályos nyolczszög területe, beirt és körülirt körének sugara, ha egy oldala a = 7·2 m?

3) A szabályos tizenhatszög területe: 753·18 m.² Mily nagy egy oldala, továbbá beirt és körülirt körének sugara?

4) A szabályos hétszög területe t = 43·253 m.² Mily nagy egy oldala; beirt és körülirt körének sugara?

5) A szabályos tizennégyszög körülirt körének sugara r = 17·976 m. Mily hosszú egy-egy oldal s mennyi e sokszög területe?

6) Mily nagy az 548·761 m. sugarú körbe irható szabályos harmincz-szög egy oldala és területe?

7) Mily nagy a 328·976 m sugarú körbe irható szabályos tizenkét-szög egy oldala és területe?

8) A szabályos tiz-szög területe 428·56 m.² Mily nagy egy oldala, beirt és körülirt körének sugara?

9) Mily nagy a szabályos tizennégy-szög területe és oldala, ha beirt körének sugara r = 0·237 m.?

10) A szabályos nyolczszögbe írt kör sugara 26 m. Mily nagy a körülirt kör sugara, az oldal és a terület?

11) Mily nagy a szabályos tizennyolcz-szög területe, ha kerülete 102·96 m.?

12) Mekkora oly kör sugara, melyben a 21 m hosszú húrhoz tartozó szög: $\alpha = 24^0\ 16'\ 39''$?

13) Mily nagy az 50 m. sugarú körben a $32^0\ 18'\ 22''$ nagyságú szöghöz tartozó húr hossza?

14) Mily nagy a húr hossza akkor, ha a kör sugara 2·8 m., a húrral szemközt fekvő szög $125^0\ 10'\ 12''$?

15) Mily nagy az 5 m. sugarú körben a 6 m. hosszú húrral szemben fekvő szög?

16) Mily nagy húrnak felel meg a 8 m. sugarú körben 7 m. hosszú ív?
17) Mily nagy a 12 m. sugarú körben a $45^0\ 45'\ 20''$ nagyságú középponti szöghöz tartozó körsegmentum területe?
18) A körsector területe 10 m.², sugara 10 m. Mily nagy a hozzátartozó húr?
19) Mekkora a 72 m. sugarú körben a 32 m. hosszú húrhoz tartozó körsegmentum területe?
20) Mily nagy azon kör sugara, melyben a 15 m. hosszú húrral $46^0\ 18'\ 36''$ nagyságú középponti szög fekszik szemben?

Oldjuk meg a derékszögű háromszöget, ha ismerjük:

21) A beirt és körülirt kör sugarát;
22) A beirt kör sugarát és egyik hegyes szöget;
23) Beirt körének sugarát és egyik hegyes szögének tangensét.
24) Mily nagy a szabályos ötvennégy-szög egy oldala, ha körülirt körének sugara 216·24 m.?
25) A szabályos kilencz- és tiz-szög kerülete egyenlő; mily nagy területeik aránya?

Megfejtendő a ferdeszögű háromszög, ha:

26) $r = 25$ m., $A = 50^0\ 12'\ 25''$, $B = 74^0\ 4'\ 40''$;
27) $r = 11{\cdot}573$ m., $a = 33\ 479$ m., $B = 58^0\ 39'\ 23''$;
28) $r = 21{\cdot}56$ m, $a + b = 569{\cdot}52$ m., $c = 47{\cdot}46$ m.;
29) $r = 0{\cdot}6345$ m., $a - b = 0{\cdot}196$ m., $A = 69^0\ 59'\ 13''$;
30) $r = 66$ m., $k = 770$ m., $a = 308$ m.

31) Mily nagy azon torony magassága, melynek csúcsa álláspontunkból $42^0\ 30'$ alatt látszik, alapjának távolsága pedig 38 9 m.?
32) Mily szög alatt esnek a nap sugarai, ha a 34·53 m. magas torony árnyéka 48 m. hosszú?
33) Mily hosszú az 50 m. magas torony árnyéka, mikor a nap sugarai $54^0\ 20'\ 16''$ szög alatt érik?
34) Mekkora szög alatt hajlik a 2120 m. hosszú út a vizszintes síkhoz, ha az 125 m. magas hegyre vezet?
35) Valamely hegyre vezető út emelkedése 5 2%₀, mily nagy az emelkedési szög?
36) Megmérendő oly csúcs magassága, melynek lábához nem juthatunk (14. ábra), ha $a = 57{\cdot}7$ m., $C = 58^0\ 23'$, $B = 67^0\ 45'$, $\delta = 38^0\ 38'$.

A torony csúcsa 291·996 m. távolból 13° 40' nagyságú szög alatt látszik; mennyi a magassága?

38) Mily nagy akkor, ha a távolság 86·63 m., a szög 22° 1'?

39) Mily nagy akkor, ha a távolság 28·122 m, a szög 49° 15'?

Mily nagy a napmagasság, mikor a 15·2431 m. magas torony árnyéka 47·62 m.?

41) Mily magasan áll a nap, mikor az ember árnyéka magasságának kétszerese?

42) Mily hosszú a 6·5 m. magas oszlop árnyéka, ha a napmagasság 51° 40'?

43) Meghatározandó **A** és **B** pont távola (16. ábra), ha **BC** = 144 m., B = 60° 6' 12', C = 43° 24'.

44) Mekkora e távolság, ha **BC** = 135 m., B = 82° 53' 10'', C = 42° 21' 20''?

45) Mekkora e távolság, ha BC = 250 m, B = 56° 40' 20''; C = 32° 46' 10'';

46) Meghatározandó **A** és **B** távola (17. ábra), ha **CD** = 260 m., ACD = 104° 25', BCD = 64° 25', ADC = 56° 15', BDC = 86° 26'.

47) Mily nagy e távolság, ha **CD** = 475 m., ACD = = 84° 22' 10'', BCD = 52° 8' 16'', ADC = 32° 24' 28'', BDC = 74° 18' 12''?

48) Mily nagy a hold valóságos átmérője, ha látszatos sugara 15' 31·69''; a földtől való középtávolsága 51805 fdr. mfd.?

49) Mily nagy a kör két párhuzamos húrja által bezárt terület, ha a kör sugara 48 m., a húrok távolságai a centrumtól 12 m. és 25 m.?

50) Meghatározandó a **C** felhő magassága (15. ábra), ha **m** = 3 m., α = 62° 20' 16'', β = 38° 27' 12''.

51) Mily nagy e távolság, ha **m** = 1·5 m., α = 45° 20', β = 52° 16' 8''?

52) Mily nagy akkor, ha **m** = 0·3 m, α = 80° 18' 32', β = 26° 5' 7''?

53) Kiszámitandó **D** pont távola **A**, **B** és **C**-től (18. ábra), ha **b** = 347 m., c = 865 m., A = 135° 30', β = 65° 42', γ = 44° 28'.

54) Ugyanezen feladat megfejtendő, feltéve, hogy **b** = 287 m., c = 256 m., β = 52° 8' 29'', γ = 55° 44' 18''.

55) Milyen eredményhez jutunk, ha **b** = 52 m' c = 48 m., β = 18° 30', γ = 24° 50'?

56) Legalább is mily magasnak kell lenni valamely hegynek, hogy 21 mfd.-nyi távolságról még látható legyen? A föld sugara 859·5 mfd.

57) Határozzuk meg a folyó szélességét, ha egyik partján AB = 42 m. hosszú vonalat mértünk le s az **A** pontra vont merőleges irányában a tulsó parton lévő **C** pontot **B**-ből $25^0\ 27'\ 47''$ szög alatt látjuk.

58) Mily széles a folyó akkor, ha AB = 75 m., ABC $\sphericalangle = 23^0\ 18'\ 16''$?

Oldjuk meg a következő egyenleteket:

59) $\text{cosec.}\ x = \text{cotg.}\ \alpha$;

60) $3\ .\ \text{cotg.}\ x + 2\ .\ \text{tg.}\ x = 5$;

61) $\dfrac{\sin.\ (27^0 + x)}{\sin.\ x} = 1{\cdot}2$;

62) $3\cos.^2 x + 2\sin.^2 x = 2{\cdot}75$;

63) $\cos.\ (x + y) = \sin.\ (x - y) = \dfrac{1}{2}$;

64) $5\ .\ \sin.^2 x - 2\cos^2 x - 3\ .\ \sin.\ x\ .\ \cos.\ x = 0$;

65) $x\ .\ \cos.\ y = -324{\cdot}6219$; $x\ .\ \sin.\ y = 510\ 5827$;

66) Mily nagy a $37^0\ 43'\ 28''$ nagyságú ivnek megfelelő húr oly körben, melynek sugara 542·35 m.?

67) Mily nagy azon kör sugara, melyben a $37^0\ 43'\ 28''$-nyi ív húrjának a centrumtól mért távola 1470 m.?

68) Mily nagy az előbbi példában meghatározott körsegmentum területe?

69) Mily nagy azon kör sugara, melyben a szabályos húr és érintő tizenöt-szög területének különbsége 288 m^2?

70) Mily nagy azon torony magassága, melynek árnyéka $32^0\ 15'$ napmagasságnál 108 m.?

71) Mutassuk meg, hogy az oly háromszög, melyben $\text{tg.}\ B : \text{tg.}\ C = \sin.^2 B : \sin.^2 C$, vagy derékszögű, vagy egyenlőszárú.

72) Mutassuk meg, hogy az oly háromszög, melyben $\sin.\ 2\,B = \dfrac{\sin.\ 4\,C}{4\ .\ \cos.^2 C - 2}$ derékszögű, vagy egyenlőszárú.

73) Az oly háromszög, melyben: $t = \dfrac{a^2}{4}$ és $1 + \text{tg.}\ (45^0 + B) = \dfrac{2\ .\ \cos.\ C}{\sin.\ C - \cos.\ C}$, vagy egyenlőszárú, vagy derékszögű.

74) Megfejtendő a háromszög, ha ismerjük két oldalának összegét, ugyanazok szorzatát és a háromszög területét.

75) Mily nagyok azon háromszög szögei, melyben a magasságok viszonya 2 : 3 : 4?

76) Három kivülről érintkező kör mindenikének sugara 1·75 m.; mily nagy a körök közé eső háromszögletű terület?

77) Megfejtendő a háromszög, ha az **a** és **b** oldalaknak a **c** oldalon való projectióik különbsége $p_a - p_b = 78$ m., $\alpha = 43^0\,36'\,10''$, $\beta = 11^0\,25'\,8''$.

78) Oldjuk meg a háromszöget, ha annak oldalaira nézve a következő egyenletek állanak fent: $\frac{a}{b} = \frac{5}{4}$; $b^2 + c^2 = 25$; $b^2 - c^2 = 7$.

79) Megfejtendő a háromszög, ha abból **a** oldal, az ehhez tartozó magasság és a **b**-hez tartozó középvonal ismeretes.

80) Valamely háromszögben a magasságok $m_1 = 20$ m., $m_2 = 24$ m., $m_3 = 30$ m. Megfejtendő a háromszög.

81) Egy folyó egyik partján 440 m.-t mértek le. E vonal **A** és **B** végpontjaiból a túlsó parton kijelölt **C** pontot $61^0\,51'\,34''$, illetőleg $22^0\,37'\,12''$ szög alatt látják. Mennyi a folyó szélessége?

82) Egy magános sziklacsúcs **A** pontból $43^0\,15'\,26''$-nyi szög alatt, a 63·5 m.-rel messzebb fekvő **B**-ből $32^0\,47'\,19''$-nyi szög alatt látszik. Mily magas e csúcs s mennyire fekszik **A**-tól?

83) A **C** és **D**-ben lévő két hajó távolát keressük. E czélból a parton lemérjük AB = 670 m. BAD = 40^0, BAC = 96^0, ABC = 44^0 és ABD = 113^0 mennyiségeket. Végezzük el a számitást.

84) Mily értékhez jutunk akkor, ha AB = 350 m., BAD = $24^0\,16'\,23''$, BAC = $39^0\,42'\,11''$, ABC = 20^0, ABD = $91^0\,56'\,24''$?

85) Mutassuk meg, hogy a szabályos **2n** szög területe mértani középarányos a húr és érintő szabályos **n** szög területei közt.

86) Fejtsük meg a háromszöget, ha abban a + c = = 319 cm., A = $67^0\,22'\,48''$, B = $53^0\,7'\,48''$.

87) Valamely kör területe 4213·8 m.² Mily nagy a $125^0\,20'\,15''$ nagyságú középponti szöghöz tartozó körsector területe?

88) A deltoid átlói 6 és $6\frac{1}{4}$ m, kerülete $17\frac{1}{2}$ m., mily nagyok az oldalak és szögek?

89) Megfejtendő a derékszögű háromszög, ha annak területe $121·5$ m.², egyik hegyes szöge $30^0 52' 10·7''$.

90) A háromszög oldalai $a = 5·6$ m., $b = 3·2$ m, a körülirt kör sugara $r = 4·3$ m. Megfejtendő a háromszög.

91) A háromszög egyik középvonala 5 dm., e vonal az oldalakkal 47^0 $16'$ és 25^0 $38'$ szögeket zár be. Mennyi a háromszög területe?

92) Egy torony keresztje 290 m. távolból α szög alatt látszik. E szög megkétszereződik, ha a toronyhoz 150 m.-rel közeledünk. Mily magas a torony?

93) Bizonyitsuk be, hogy bármely parallelogrammában az oldalak négyzeteinek összege egyenlő az átlók négyzeteinek összegével.

94) Megfejtendő a háromszög, ha területe 234 m², kerülete 108 m. és egyik szöge 130^0 $26'$ $59''$.

95) Valamely háromszögben $b = a + 1$, $c = a + 2$, $\cos A = \frac{2}{3}$. Kiszámitandó a, $\mathrm{tg}\frac{B}{2}$, $\mathrm{tg}\frac{c}{2}$.

96) Valamely háromszögben $a + b = 1045·7$ m., $ab = 271700$, $t = 18904$ m². Megfejtendő a háromszög.

97) Valamely háromszög oldalai a, $a + 1$, $a + 2$, a legkisebbik szög fele a legnagyobbnak. Fejtsük meg a háromszöget.

98) Megfejtendő a háromszög, ha ismeretes a oldal, A szög és $b^2 + c^2$.

99) Megfejtendő a háromszög, melyben $b = 1 + \sqrt{3}$, $c = 1$, $A = 30^0$.

100) Határozzuk meg a háromszög és beirt köre területének különbségét, ha: $a = 23$ m., $b = 28$ m., $c = 32$ m.

101) Valamely háromszögben két szög összege 105^0 $12'$ $14''$; ugyancsak különbsége 5^0 $14'$ $32''$; a háromszög területe 108132 m.². Kiszámitandó az oldalak hosszúsága.

102) Mily széles azon folyó, melynek szélességét a parttól 45 mnyire eső helyről 20^0 alatt látjuk?

103) Megfejtendő a háromszög, melyben $a + b = 22$ m, $C = 63^0$ $35'$ $40''$, $t = 53·74$ m.²

104) Hány oldalú azon szabályos sokszög, melynél $r = 2{\cdot}5$ m., $\rho = 2{\cdot}3777$ m.?

105) A derékszögű négyszögből ismeretes $a = 36$ m-, $b = 15$ m.; meghatározandó az átló és az oldal, továbbá a két átló által bezárt szög.

106) A derékszögű négyszög kerülete 350 m., alapja 100 m. Meghatározandó az átlók által bezárt szög.

107) Megfejtendő a derékszögű négyszög, ha alapja 84 m., átlója 85 m.

108) Megfejtendő a rhombus, melynek területe és kerülete ismeretes; és pedig: $t = 7776$ m.², $k = 500$ m

109) Mekkorák a rhombus-szögei, ha átlóinak aránya $\frac{3}{5}$?

110) A rhomboid alapja 10 m., egyik átlója 34 m., az oldal és átló által bezárt szög $27^0\ 15'\ 18''$ Mily nagyok az oldalak, a szögek és a terület?

111) Ismeretes a rhomboid két átlója, $d = 98$ m. és $d_1 = 124$ m. és az átlók által bezárt szög $C = 135^0\ 54'\ 12{\cdot}4''$. Mennyi a terület?

112) A symmetrikus trapézban $a = 1052$ m., $b = 532$ m., $c = 269$ m. Mennyi a negyedik oldal, mily nagyok a szögek és a terület?

113) A symmetrikus trapézban az alap 56 m., az egyik nem párhuzamos oldal 24 m., e két oldal által bezárt szög $49^0\ 30'\ 45''$. Megfejtendő a trapéz.

114) Keressük ki a symmetrikus trapéz ismeretlen alkotórészeit, ha két párhuzamos oldala 244 m. és 188 m., az alapon fekvő szög $81^0\ 49'\ 43{\cdot}6''$.

115) Ismeretes a két párhuzamos oldal és az átló. ($a = 484$ m, $c = 244$ m, $d = 365$ m.)

116) Ismeretes $b = 221$ m., $m = 171$ m, $t = 90288$ m².

Megfejtendő általánosságban a háromszög, ha ismeretes:

117) egy oldal, az ezzel átellenes szög és a másik két oldal összege;

118) egy oldal, az ezzel átellenes szög és a másik két oldal különbsége;

119) két oldal és a magasság;

120) a szögek és a körülirt kör sugara;

121) egy szög, a kerület és a körülírt kör sugara;

122) egy szög, egy oldal és a körülírt kör sugara;

123) $r, a, b+c$; 124) $r, a, b-c$;
125) t, k, A; 126) r, k, A;
127) ρ, k, A, 128) ρ, k, t;
129) $\rho, a, b+c$; 130) $\rho, a, b-c$.

131) Megfejtendő a derékszögű háromszög, melynek kerülete 60 m., befogóinak különbsége 5 m.

132) A trapéz-alakú 3600 m.² nagyságú telket egyik átlója egy egyenlőoldalú és egy ferdeszögű háromszögre bontja. A részek területeinek aránya $\frac{5}{4}$. Mekkorák az oldalak?

133) Egy háromszög oldalait a $\sqrt{x^2-540}+42=2x$ egyenlet gyökei adják. A nagyobb oldallal szemben fekvő szög $73^0\ 45'\ 20''$. Megfejtendő a háromszög.

134) A trapéz párhuzamos oldalainak hossza 12·35 m., 17·83 m., a nem párhuzamosaké 9 m., és 11·2 m. Mily nagyok a szögek és a terület?

135) A háromszög oldalai: 285·2 m., 198 m. és 226 m. Mily nagy a körülírt kör területe?

136) Kiszámítandók a derékszögű háromszög oldalai és szögei, ha ismeretes a két befogó összege és az átfogóhoz tartozó magasság?

137) A ferdeszögű háromszög oldalai: 8 m. 12 m. 15 m., számitsuk ki a beirt kör területét.

138) Mily magasan áll fölöttünk az a felhő, melyet 10 m. magas partról $56^0\ 10'$ eleváczió-szög alatt látunk, ha a felhő képét az alattunk lévő tó tükrében $36^0\ 10'$ depressió-szög alatt észlelhetjük?

139) A háromszögben két oldal aránya $\frac{8}{13}$, a velök szemben fekvő szögeké pedig $\frac{1}{2}$. Mily nagyok a szögek s milyen a 3-ik oldal aránya a 2 elsőhöz?

140) Valamely háromszögben $a+c=450$ m.; $A=56^0\ 18'\ 24''$, $B=47^0\ 8'\ 26''$ Megfejtendő a háromszög.

141) A háromszög oldalai: 24 m., 30 m., 36 m., mily nagy az ezen háromszöggel egyenlő területű szabályos ötszög egy oldala?

142) Mily nagy az 56 m.-es oldalakkal biró négyzettel egyenlő területű szabályos hétszög egy oldala?

143) Oldjuk meg a következő egyenletrendszert:

$$\text{cotg. } x + \text{tg. } x = 2; \quad \sin. x . \cos. y = \frac{1}{4}.$$

144) Két egyenlő 42 m. sugarú kör úgy metszi egymást, hogy centrálisuk 56 m. hosszú. Mennyi a két kör közös területe?

145) Valamely háromszögben: $A = 39^0\ 34'\ 30''$; $C = 80^0\ 25'\ 30'$, $t = 80{\cdot}362$ m.^{2} Mily nagyok az oldalak és a körülirt kör sugara?

146) Oldjuk meg a háromszöget, ha abban: $C = 82^0\ 40'\ 9{\cdot}2''$, $c = 75$ m., $b^2 - a^2 = 1400{\cdot}25$ m.^{2}

147) Mutassuk meg, hogy a ferdeszögű háromszögben $\sin. \frac{A}{2} . \sin. \frac{B}{2} . \sin. \frac{C}{2} < \frac{1}{4}$.

148) Mutassuk meg, hogy a ferdeszögű háromszögben

$$\sin. \frac{B - C}{2} = \frac{b - c}{a} . \cos. \frac{A}{2}.$$

149) Hasonlóképen: $\cos. \frac{B - C}{2} = \frac{b + c}{a} . \sin. \frac{A}{2}$.

Bizonyitsuk be, hogy bármely háromszögben:

150) $\frac{a^2}{\sin. C} = \frac{a^2 - b^2}{\sin. (A - B)}$;

151) $2ab = (a^2 + b^2) . \cos. C - c^2 . \cos. (A - B)$;

152) $\text{tg.} \left(\frac{A}{2} + C\right) = \frac{b + c}{b - c} . \text{tg.} \frac{A}{2}$;

153) $\sin. (A - B) = \frac{2t\,(a^2 - b^2)}{abc^2}$;

154) $4t = b^2 . \sin. 2\,C + c^2 . \sin. 2\,B$;

155) $t = s . \frac{b + c - a}{2} . \text{tg.} \frac{A}{2}$;

156) $\text{cotg. } A + \text{cotg. } B = \frac{c^2}{ab . \sin. C}$;

157) $\frac{a + b + c}{a + b - c} = \text{cotg.} \frac{A}{2} . \text{cotg.} \frac{B}{2}$.

Oldjuk meg a következő egyenleteket:

158) $x + y = 131^0$; $\sin. x + \sin. y = 1{\cdot}72588$;

159) $x - y = 4^0$; $\cos. x + \cos. y = 1{\cdot}69506$;

160) $x + y = a$; $\sin. x . \sin. y = b$;

161) $x + y = m$; $\sin. x . \cos. y = n$;

162) $x + y = 63^0$; $\sin x . \sin. y = 0{\cdot}2185$;

163) $x + y = p$; $\cos. x . \cos. y = q$;
164) $x - y = t$; $\mathrm{tg}. x - \mathrm{tg}. y = u$;
165) $\frac{x}{y} = h$; $\frac{\sin. x}{\cos. y} = k$;
166) $\frac{\mathrm{cotg}. x - \sec. x}{\mathrm{cotg}. x} = \frac{1}{16}$;
167) $\mathrm{cotg}\ x . \mathrm{tg}. 2x - \mathrm{tg}. x . \mathrm{cotg}\ 2x = 2$.

Oldjuk meg a háromszöget, ha ismeretes:

168) $a = 6$ m., **c** oldal projectiója az **a**-n 2·4 m., $C = 58^0\ 26'\ 10''$;
169) **b** és **c** projectiója **a**-n 7·8 m. és 9·1 m., $A = 25^0\ 8'\ 16''$;
170) $ab = 53040$; $a - b = 19$; $A = 128^0\ 9'\ 06''$;
171) $ab = 90$; $c = 17$ m., $r = 10{\cdot}625$ m.;
172) $a + b = 41$ m., $A - B = 30^0 29' 12''$, $r = 10{\cdot}833$ m.;
173) $a - b = 8$ m., $A + B = 151^0 55'\ 22''$; $r = 10{\cdot}625$ m.;
174) $a + b = 13$ m., az **a**-hoz és **b**-hez tartozó középvonalak 6·9 m. és 6·1 m.;
175) $a = 318$ m., $b = 181$ m., $A = 64^0\ 58'\ 38{\cdot}5''$;
176) $a = 8$ m, $b = 7{\cdot}6$ m., $r = 5{\cdot}65$ m.;
177) $a + b = 9$ m., $A = 45^0\ 50'\ 45''$, $B = 52^0\ 50'\ 10''$;
178) $a = 408$ m., $c = 401$ m., $t = 8160$ m.^{2};
179) $a = 74$ m., $b = 130$ m., $b = 32^0\ 40'\ 26''$.
180) Valamely kör sugara 15·6 m. Mily nagy abban a 9·8 m hosszú húrral szemben fekvő középponti szög?
181) Mily nagy a 25 m. sugarú körben az 51 m.-nyi ívvel szemben fekvő középponti szög?
182) Bizonyos 10 m. sugarú kör két átmérője $38^0\ 56'\ 18''$-nyi szög alatt metszi egymást. Mily nagy az átmérők végpontjait összekötő húrok által képezett négyszög területe?
183) Mennyi a négyszög területe akkor, ha a sugár 3·2 m és az átmérők által bezárt szög 60^0?
184) Milyen szög alatt metszi egymást a két átmérő, ha a kör sugara 5 m., az átmérők által meghatározott négyszög területe 16 m.^{2}?
185) Mily nagy e szög akkor, ha a sugár 18 m., a négyszög területe pedig 47 m.^{2}?
186) Mennyi a körbe irt szabályos kilenczszög területe, ha az érintő kör sugara $\rho = 3$ m.?
187) Mennyi a szabályos tizenkétszögé, ha $\rho = 7$ m.?

188) Mennyi a szabályos ötszög területe, ha körülirt körének sugara 6·5 m ?

189) A szabályos tizenötszög egy oldala 2 m. ; mennyi a beirt és körülirt körének területe közt mutatkozó különbség?

190) Egy trapéz területe 204 m.², parallel oldalainak különbsége 14 m., a nem parallel oldalaké 2 m., a szemközt lévő szögek különbsége $59^0 29' 23''$. Mily nagyok az oldalak?

191) A háromszög megfejtendő, melyben: $a + b = 216$ m., $C = 67^0 22' 56''$; $r = 65$ m.

192) Melyik szög az, melyre nézve: $\sin. x + \cos. x + \operatorname{tg}. x + \operatorname{cotg}. x + \sec. x + \operatorname{cosec}. x = 7$?

193) Mily nagy azon körsector területe, melynek sugara 7 m., középponti szöge $50^0 20' 40''$?

194) A rhombus területe 2125 m.², egyik szöge $128^0 26' 30''$. Mily nagy egy oldala?

195) A rhomboid területe 742·12 m.²; egyik szöge $28^0 31' 15''$, egyik oldala 15·4 m. Hány m. a másik oldala?

196) Mily nagy a körbeirt szabályos tizszög egy oldala ha a kör sugara $r = 7·125$ m.?

197) Mily nagy azon kör sugara, melyben a 120^0-nyi szöggel biró körsector területe 462 m.²?

198) Mennyi a 4·6 m. sugarú körbe irható szabályos nyolczszög egy oldala?

199) Mily nagyok a parallelogramma oldalai és szögei, ha átlóinak hossza 8 m. és 9·5 m., területe 320·5 m.²?

200) A, B, C egy vizszintes egyenes három pontja, D egy épület csúcspontja, α, β, γ az AD, BD és CD egyeneseknek a vizszintessel alkotott szögei; mily magas az épület, ha: $AB = 50$ m., $BC = 30$ m., $\alpha = 9^0 29' 41·5''$, $\beta = 15^0 14'$, $\gamma = 27^0 51'$?