GALILEI FÜZETEK

DIENES PÁL

VALÓSÁG ÉS MATEMATIKA

11-14. SZ. 5. EZER. ÁRA 60 FILL.

HALADÁS KÖNYVKIADÓ VÁLLALAT KIADÁSA

VALÓSÁG ÉS MATEMATIKA

2

BETEKINTÉS A MENNYISÉGTAN FOGALOMRENDSZERÉBE

IRTA

DR DIENES PÁL

EGYETEMI MAGÁNTANÁR

BUDAPEST, 1914

A HALADÁS KÖNYVKIADÓ-VÁLLALAT KIADÁSA

Előszó.

Ez a füzet nem azoknak van szánva, akik a felsőbb matematika számolóeszközeinek használatába akarják begyakorolni magukat, erre már vannak jól megirt füzetek és könyvek magyar nyelven is, hanem azoknak, akik az emberi tudás e legprecizebb, legkidolgozottabb és egyszersmind legemberibb ágának fogalmi alkatára és problémáira kiváncsiak. Magukat az alapvető fogalmakat szedjük itt majd széjjel avégett, hogy összerakásukat, egymásbaszövődésüket és valóséggyökereiket lehető élesen kipécézhessük. E célnak megfelelőleg nincs is e füzetben semmiféle műveletszabály, sem kiszámitásra váró feladat, tehát az olvasótól nem kiván semmiféle számolásbeli készséget, sőt előleges matematikai ismereteket sem. Csak a tizes számrendszerben felirt számok kezelésmódját tételezi fel ismeretesnek, ezenfelül csupán igen komoly és egyetlen részletet ki nem felejtő, feszült figyelmet kiván. Aki ezt a tárgyhoz pontosan illeszkedő figyelmet rászánja erre az olvasmányra (ideértve az összevontabb helyeken mondottaknak számbeli kiirását vagy lerajzolását is), azt e füzetke végigvezeti a közönséges egész számoktól indulva a matematika legfontosabb útjain és egy-két legkönnyebben megközelithető kilátónál, nyilt problémánál, még bejáratlan területekre is bepillantást nyujt munkája fejében. De dolgoznia kell: oly, óriási, századok megfeszitett munkájából fakadó szellemi kincset, mint a matematika, kényelmesen, futtában való olvasással még távolról és nagy vonásokban sem lehet megpillantani.

Budapest, 1913 október hó.

Dienes Pál.

TARTALOM

I. Fejezet.

Egész és törtszám.

A mennyiségtan kivételes helyzete.

A mennyiségtan helyzete a tudományok között egészen sajátságos. Megállapitott igazságai annyira biztosak, hogy bennök még a bölcselkedők sem igen szoktak kételkedni. Szeretnők tehát a pontos természettudományok közé sorolni, annál is inkább, minthogy ezek, különösen a csillagászat, természettan, vegytan stb. lépten-nyomon felhasználják eredményeit és módszereit. Semmi esetre sem vagyunk hajlandók a pontossággal éppen nem dicsekedő történeti vagy szellemi tudományok közzé iktatni. Egy különös körülménynél fogva azonban mégsem tudjuk fentartás nélkül egy kalap alá szorítani pl. a természettannal. Ugy látszik ugyanis, hogy a mennyiségtan nem szól a természetről, a tárgyak valóságos eseményeiről, amiknek törvényszerűségeit meg éppen a természettudományok kutatják. Hogy a másodfokú egyenletnek hogyan keresem ki a gyökeit, az közvetlen vonatkozásban nem áll semmiféle tényleges természeti tüneménynyel. Innen van az az elterjedt hiedelem, hogy a mennyiségtan inkább légvár, mint erőditmény s éppen megfoghatatlansága az ereje. A természettanhoz képest mintha semmit se markolna.

Ennek a bizonytalanságnak, amit különben majd mindenki érezhetett középiskolai pályafutása alatt, az okai nem egészen hiúak. Hiszen a tantervbe bevett algebrarészlet annyira nem jellemzi azt az óriási szellemi tőkét, mit matematika név alá a legerősebb gondolkodó fők összehordtak. Még az alapvető fogalmak megismerését sem teszi lehetségessé. Megkíséreljük ebben a kis füzetben lehetőleg közvetlen úton-módon, fő-fogalmainak boncolásával vázolni azt a gondolatrend-szert, minek kiépitéséhez legelőbb fogott hozzá az ember esze s el is ért már benne valami maradandót, értjük a mennyiség tudományát, mit mint minden logikai egészet csodálatosképen nem részeiből összerakva, hanem ellenkezőleg, folyton az egészet vázolva s a vázlatot folyton fejlesztve lehet csak igaz ismerősünkké tennünk. Közben igyekszünk majd mindenütt rámutatni tudományunk valóságelemeire, még pedig nem csupán a kiinduló helyeknél, hanem a szerkezeti sajátosságokban is. Igy majd némileg megérezhetjük, hogy a mennyiség *abc*-jéből készült bonyolult jelrendszerünk a legtökéletesebb valóságnyelv. Az eseménygördülések tényleges meghatározásánál nincs ugyan szava, belső megismerésük azonban általa válik lehetségessé. A fizikai okhálózatból kiesik, de a szálak bogozódását csakis vele követhetjük.

A tárgyak a világban egymás által és mégis külön vannak.

Első dolgunk röviden vázolni a tárgyi világnak azt az arculatját, amit éppen a mennyiség fogalma igyekszik visszatükrözni. A természettudományoknak a maguk összességében nincsen talán mélyebbre szántó általános eredménye, mint az, hogy a tárgyak minden tulajdonságát a többi tárgy határozza meg. Igy például a kő súlya nem valami ráragadt, őt jellemző minőség, mert a holdon vagy a napban egészen megváltozna s ha a ködarab egyedül lenne, súlyáról semmikép se beszélhetnénk. Még világosabban látszik ez a szineknél és hangoknál. Hogy a fotelem sötétvörös, az csak jelezni kiván egész sor változást: napfényben világos, árnyékba eső része sötét, néhol egész fehér, másutt rózsaszin vagy feketés, amilyenné válik az egész félhomályban. Világitó test kell tehát, meg még sok más külső feltétel teljesülése ahhoz, hogy a tárgynak meglegyen valaminő színessége. Es ugyanigy áll a dolog a tárgyak bensőbb eseményeinél is. Például az erőkifejtésnek értelme sincs szembenálló, tehát külső meghatározó nélkül. (Gondoljunk *Newton* harmadik törvényére, miszerint a hatás mindig ugyanakkora ellenhatással jár együtt.) Már pedig erőhatásnak képzeljük az összes mozgás, hő, elektromágneses, sőt vegyi és szervezeti történéseket is. *Faraday*, a legnagyobb kisérletező a fizikusok között, megmondta már, hogy igazában minden atóm mindenütt van, ahol hat s igy betölti a világot. Elhatárolásuk tapintás útján önkényes, mert igy csak egy hatást tekintünk a sok közzül, amit a test kifejt. *Az egyes tárgy mibenléte tehát a környező világ erőhatásainak rajta történt összeverődése.* Ő maga is belejátszik mivoltjának meghatározásába, de csak olyformán, hogy felel a rátörő hatásokra, még pedig sokszor nagyon különböző erőket egyesitő egységes magatartással, minéműséggel. Épp ebben és csakis ebben mutatja meg, hogy milyen. Az eleven test, ebből a szempontból kiindulva, abban különbözik a nem élő tárgytól, hogy kezdeményezni is tud, célja, szempontja van, mi miatt az eredmény számára többé nem közömbös. Nem akar minden áron érvényesülni az eredőben mint alkotó rész. Ha az alakulás nem kedve szerint folyik, gátolni törekszik az egész esemény létrejöttét: nem cselekszik.

Az egyes tárgyak nem külön valóságok tehát. Mint valók, levők egymásba kapcsoltak, egymást meghatározók. A természetkutató előtt a világ szövevényes egymásrahatás, erőhálózat, hol az egyes a sok által, némileg azonban azzal szemben jut csak létezéshez, megjelenéshez.

Ez azonban nem azt mondja, hogy az egyes tárgy semilyen módon sincs külön. Azért, hogy ő egymaga egyáltalán nem lehet, mégis, mikor a többi segitségével van, külön egyén is, a maga sajátos felelésmódjával a többi tárgyból eredő hatásokra, a maga hatáskörével a körötte alakuló folyamatokra. Hiszen maga az erő is ilyen elemi egyén s igy, ha egyének nem lennének, a világ — legalább is mint fizikai megjelenés, mint tünemény — nem lenne.

Egész szám.

Egész szám és valóság.

Az egyén és a minden e különös kapcsolatát itt nem boncoljuk tovább, mert a számfogalom jelentése leginkább abból az előbb emlitett tényből ered, hogy sok hatás válhatik eggyé s hogy egyetlen felelő hatás számtalan alkotó megindulás összeolvasztása. Összefogni, egyesiteni többet s érezni, hogy az egységes összefogásban a részek tovább is fenmaradnak, ez az egész szám. Hét tárgy például, mint csomó, egy, aminek mint ily hetes csomónak külön sajátságai vannak. A csomóssága, számossága egyéni, egyetlenegy. Másrészt éppen azért hét s nem egy, mert csomó, mert tagokból, részekből áll. Egy és mégse egy — mint minden valósággal levő a világon. A szám nem fejti meg ezt a tényleg mindenütt jelenlevő rejtvényszerüséget, csak jelzi gondolatunknak, szimbolizálja azt egyetlen jelrendszerrel s épp ebből vesszük észre, hogy ugyanez a különösség fordul elő számtalan esetben. Igy válik ismerősünkké, megértetté, ami eszünknek előbb talán furcsa volt. *Az egész szám tehát elsősorban a dolgok összenőtt s mégis külön életének jelképes gondolata.* A szám igy a legáltalánosabb forma, amiben a tényleges valóságot gondolnunk kell. Ugyanis magát a puszta levést, ténylegességet sem lehet végiggondolni sokszerüség és egybetartozás, egység nélkül, de még ha lehetne is, a már ténylegesen jelentkező valóság — mint saját énünk eseményei vagy a fizikai világ bármely folyamata — okvetlen „több és mégis egy“ tagozódású. *Az egész számok a „több és mégis egy“, „egy és mégis több“ általános világtagozódást jelzik.* Ezért alkalmazható — legalább elvben — a tényleges világ minden tüneményére a szám fogalma. Mindenben, mit egy pillanatra egynek gondolunk, lehet többet felfedezni; ezeket hivjuk részeknek. Másrészt bármelyik csoportja a tüneményeknek mutathat együvétartozást, egységet. A világ azonban még sem puszta számbeliség. Például a lelki tüneményekben kifejezésre jut olyasvalami is, amire a szám éppenséggel nem illik: a választás, eldöntés folyamatába rejtőző határozatlanság, a „nem kész“, a „még sokfélévé válható“, az élő-ható lehetőség. Ezért hangsulyoztuk fentebb, hogy a szám a ténylegesre, a már adottra, készre vonatkozik s nem magára a valamivé válásra.

Az egész szám mint jelrendszer.

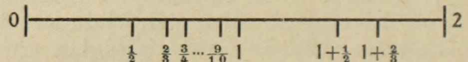
Ezek a meggondolások, mik a számfogalom valósággyökerére igyekeztek rámutatni, nem mondhattak még semmit az egész számnak, mint jelrendszernek sajátságairól. Pedig csak ott kezdődik a matematika — még az elemi iskoláé is —, mikor a valóságra rá se hederitve, magának a jelrendszernek önmagából fakadó rejtvényeit kezdjük fejtegetni. Ilyen már a szorzótábla (egyszeregy) összeállítása is. Egyáltalában nem hivatkozunk itt semmi külső valóságra, hanem azzal, hogy bármeddig el tudunk szaladni a jelrendszerben (t. i. az egész számok sorában), megállapítjuk előbb az összeadás szabályait, majd ezekből a szabályokból a szorzáséit. Ezért érezzük sokszor, hogy mihelyt matematizálni kezdünk, kicsúszik a talaj a lábunk alól. Pedig egyszerüen nem gondolunk a talajra, mert szükségtelen. Ebből a szempontból megítélve, a nyelvtudományhoz is szokták hasonlítani a mennyiségtant. A nyelv is jelhalmaz és a nyelvtudomány eme jelhalmaz sajátosságaival foglalkozik. Van tehát némi hasonlatosság, de ez nagyon sántit. Két okból. Először is a nyelvet alkotó jelek, a szavak nem alkotnak igazi *rendszer*-t. Az egyes tárgyak, események, érzések külön-külön sugalltak az embernek valamilyen hangot, jelet, mit hogy úgy mondjuk erőszakosan, önkényesen kapcsolt külső megfelelőjéhez. Mutatja ezt a nyelvek sokfélesége is. Ami rend van benne, azt később hozta létre az utánzás (minden igét önkéntelenül egyformán ragozunk), az egyszerűsités és takarékosság. Az egész szám ellenben maga a megtestesült *rend* már kezdeteiben is. Másrészt a mód, ahogyan a szavak összefüggenek a valósággal, nem jelent ki semmi fontosat magáról a valóságról, mig a mennyiségjelek annak legáltalánosabb s egyik legmélyebb tulajdonságát szemléltetik. Ezért oly mérhetetlenül hatalmas eszköz a matematika a természetkutató kezében, mig a nyelv megmarad leiró szerszám szerepénél. Viszont ugyanezért a határozatlanságért van a nyelvnek művészete is — az irodalom — mig a mennyiségjeleknek éppen szigorú rendszerűségük miatt csak tudományuk lehet.

A matematika problémáinak főforrása a végtelenség gondolata.

Az egész számnak mint jelrendszernek önmagából előálló rejtvényei között legrejtélyesebb a végtelenségé. Éppen a rendszer szerkezeténél fogva — ami, ismételjük, a továbbszámlálásból áll — a jelsereg kimerithetetlen. Az utolsónak mondott jel után a képezési törvény szerint még mondok egyet, ami még nem lehetett az utolsó előtt, tudniillik eggyel tovább számlálok. A továbbszámlálás tehát, ha akarjuk, ha nem, egy csapásra minden tagot megad és ténylegesen egyszerre előállitani mégse tudjuk őket. Ugyanis nem lehet a rendszert úgy kibontani egyes tagjaira, hogy azok mind a maguk teljes egyéni mivoltjában egyszerre megjelenjenek, mert akárhányat alkottam is, mindig marad még alkotni való s azért az egyes tagok mégis a legszigorubb teljességgel meg vannak határozva, egymástól elkülönítve. *Mindeniket ismerem, mégsem állithatom elő valamennyit. Ez a matematika legcsodálatosabb ténye.* Csaknem minden feladatába befurakodik s mindenütt ez képezi a kérdés bibéjét. Az egész úgynevezett felsőbb mennyiségtant az jellemzi legjobban, hogy szántszándékkal nekimegy ennek a csodának és megpróbálja, ha nem is megérteni, legalább kezelni. A fentebb mondottakból nyilvánvaló, hogy ez a kényelmetlen tényállás, ami annyi fejtörést okozott már a legokosabb embereknek, nem onnan ered, mintha a jelrendszer — mit ezután számnak fogunk emlegetni — nem sikerült volna. Hiszen egyszerüen kifejezi jelekben, a rendszer és a tagok szembeállitásával a világ együvétartozásának és az egyén külön mivoltának ellentétét. Mutatja ezt különben utólagosan a felsőbb mennyiségtan mélységes sikere is a természeti tünemények pontos megfogásában. Szerkezeti hiba bajosan járhatna ilyen eredményességgel. Látjuk tehát, hogy nemcsak kiindulásában, hanem feladatai, kérdései alakulásában is menynyire valóság-nyomon halad a matematika.

A végesentuli rendszámok.

Az egész számok általános vizsgálatát *Cantor*, német matematikus, üzte legmeszszebb s jutott igy el a legkülönösebb eredményekhez, mikor megállapitotta a végesentúli (transfinit) egész számok fogalmát. Ime az okoskodása. Az egész szám azt jelenti, hogy valahonnan kiindulva megteszek egy ujabb jelt éppen utána jövő egész számnak s ezt csinálom vég nélkül. Képzeljük most már el, hogy az első nekifogással ily módon megvan már egytől kezdve valamennyi egész szám: száz, ezer, millió, billió stb. A másik nekifogáskor ugyanaz a képezési elv — hogy tudniillik előveszek egy ujabb jelt s azt nagyobbnak teszem meg valamennyi előzőnél — oly ω (mondd: *ómega)* betüvel jelölt számot fog adni, mi egyrészt az egész számok előre elfogadott képezési elve szerint készült, másrészt a meghatározása szerint túl van valamennyi közönséges, azaz véges nagyságú egész számon. Ez az első végesentúli egész szám. Ujabb nekifogás megadja $\omega+1$, $\omega+2$, . . . stb. végtelen sorozatot csupa végesentúli egész számokból és igy tovább. Egyszerü téri ábrázolás mutatja, hogy ez a tréfásnak feltünhető gondolatjáték mennyi valóságot tud kifejezni a világnak arról az arculatjáról, tudniillik a részek egymásra vonatkozásáról, a rendről, mit a matematika van hivatva szemléltetni. Vegyünk elő egy két centi hosszú egyenes vonalat s vegyük szemügyre rajta azokat a pontokat, amelyek a 0-tól számitva



1. ábra.

$0, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \ldots, \frac{n-1}{n}, \ldots$ stb. távolságra esnek. Csatoljuk még ezekhez a 0-tól 1, $1+\frac{1}{2}$, $1+\frac{2}{3}$ stb. távolra esőket és próbáljuk meg ezeket legtermészetesebb rendben, nagyságuk szerint felsorolni. Első lesz a 0, 2-ik az $\frac{1}{2}$, 3-ik a $\frac{2}{3}$, stb.; n-edik az $\frac{n-1}{n}$, hol n valamelyik, különben bármelyik, egész szám helyett áll (n a numerus szó kezdőbetüjére emlékeztet). Annyit mond ez, hogy a vizsgált pont annyiadik a sorrendben, amekkora egész szám a nevezője. Hányadik most már az 1? Túl van valamennyin, nagyobb mindegyik egész-számúadiknál. A vizsgált ponthalmazban az 1, nagyságrend szerint az ∞-adik. Az $1+\frac{1}{2}$ az $\infty+1$-edik, és igy tovább. Az ∞ jel nyilt vagy rejtett használata nélkül nem is lehetne a megadott pontok (illetve távolságok) nagyságrendjét szemléltetni.

Törtszám.

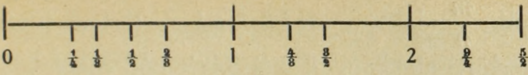
Törtszám és valóság.

Az egész számok csupa egészekből rakódnak össze, bennök még nem jut eléggé kifejezésre az a tény, hogy maga az egységül vett sem különb a belőle összerakottaknál, azaz hogy ő is részekből állónak tekinthető. Ezt szemléltetik részletesen a törtszámok: $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{2}{3}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{3}{4}$, ... általában $\frac{m}{n}$ hol m is, n is bármelyik egész szám lehet. A nevező megnevezi a felosztásmódot, hogy például 4 felé osztandó, a számláló megmutatja, hogy az igy képzett részekből hányat kell összeszámlálnunk. Az m egyelőre kisebb, mint az n, jelekben, $m < n$, vagy egyenlők s ekkor az értelmezés szerint ujra az egységet magát kapjuk, mert a gondolt felosztás után ismét összeszedjük valamennyi részt. A törtszámoknak, mint mennyiségtani lényeknek (ez alatt magát a jelrendszert értjük valóság-vonatkozás nélkül) megoldásra váró feladatai pedig onnan erednek, hogy minden egész szám egység is lévén, arra is alkalmazandó az $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{2}{3}$, $\frac{1}{4}$, . . . stb. felosztásmód s igy megvizsgálandóvá válik, mi is történik akkor, ha az egész számot a maga teljes értelmében gondolom el, tudniillik egyidőben mint egységet és mint többséget veszem szemügyre. Hogyan kell például kifejeznem a nyolc felezését, ha nemcsak arra akarok gondolni, hogy a nyolc valami és ennek felét jelzem (ekkor megmaradnék a nyolc fele, mondjuk $\frac{8}{2}$ kifejezésnél), hanem arra is, hogy az a valami, amire gondolok, nyolc egységből áll? Ekkor juthatok csak el ahhoz az eredményhez, hogy a nyolc fele éppen 4, jelekben $\frac{8}{2}=4$. Ez az egyenlet nem hiú tehát, azaz nem azt mondja, hogy $A=A$, hanem érdekes összefüggést fejez ki két lehetséges felosztás között.

Bármelyik felosztás után továbbá az eredményt ujra egységnek is kell gondolnom, mert valaminő felosztással nyert részekből — tehát ha akarom, egységekből — valahányat összefoglaltam s igy ugyanazt műveltem, mint mikor egész számot képeztem, tehát folytathatom rajta a felosztást. Bonyolult feladatok ezek az elemi iskolásoknak, amiket nem is ők oldanak meg, hanem a törtszámokra megállapitott négy alapművelet: összeadás, kivonás, szorzás, osztás intéz el rövidesen, gépiesen és végérvényesen. Itt kezd bonyolódni a mennyiségtan gépezete s viszont itt tűnik ki legegyszerübben hatalma is. Mennyivel egyszerübb és biztosabb a jelek kezelése — pár, kivételt nem ismerő rövid szabály — mint maguknak az egymásra halmozott felosztásoknak elgondolása. *S mivel az igy alkotott jelrendszer éppen szerkezetével sem többet, sem kevesebbet nem jelez, mint a valóság egyik alapformáját, az egység-többség egyidejű megvalósulását, a szerkezeti sajátosságok is egytől-egyig valóság jelentésűek lesznek.* Nem kell félnünk, hogy vissza nem néző, önmagukból meritő mennyiségtani feladatok tovafüzése elterelhet bennünket a valótól. Nem, mert annak egyik igazi megjelenésmódja lüktet tovább bonyolult gondolatjárásainkban.

A törtszámok az egyenesen.

A törtszámokat ráképzelhetjük az egyenes vonalra. Kezdőpontot veszünk fel az egyenesen (0) s onnan jobbra felmérjük az 1-et (például a centimétert választva egységnek), a 2,



2. ábra.

3, . . . egész számokat, majd közibük az $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{2}{3}$, . . . valamennyi törtet. Igy minden egész és törtszámnak lesz helye s jelzik helyük távolságát a kezdőponttól. *Az egyenest sürün ellepik,* mert adott tizedestörthöz mindig van tőle csakis nagyon távoli tizedesjegyben s igy akármilyen kevéssé különböző másik szám.

Negativ szám.

Valamint a törtszámok a lehetséges felosztások jelhalmaza, éppúgy a negativ számok a lehetséges kivonásoknak összeadástól független jelzései. A -12 jel annyit mond, hogy, ha majd lehet és kell, 12-vel kevesbitünk; jelez tehát például 12 kor. adósságot. A $-12+8$ jel szerint már csak 4 marad levonandó, tehát $-12+8=4$. Használati szabályai közül csak azt emlitjük meg, hogyha a levonandó maga is negativ szám, akkor levonása abban áll, hogy pozitivvá lesz. Például -8 előfordulhat $-(10-2)$ alakban, vagyis úgy, hogy előbb $+10$-et, azután -2-t kell levonni. Ha pl. az első tag egyelőre ismeretlen, x, s csak később derül ki, hogy épen $10 : -(x-2)$. A $+10$ levonva -10, a -2 levonva $+2$ lesz, mert a levonandó nyolcat úgy foghatom fel, hogy előbb veszek levonandó 10-et (-10), most azonban sokat vontam le s igy a kettőt hozzáadandóúl, azaz + jellel kell már vennem; tehát $-(10-2)=-10+2=-8$. Innen van az a szabály, hogy negativ szám szorozva negativ számmal pozitivot ad. Természetesen törtszám is lehet levonandó s igy vannak negativ törtszámok is. A negativ számokat az egyenesen a kezdőponttól balra képzeljük.

Végtelen tizedestört.

Nézzük meg még, hol bujkál itt a végtelen s micsoda uj feladatokra hivja ki a dacos észt. A törtszámokat kétféleképp is jelöljük: $\frac{m}{n}$ alakban, ezt közönséges törtnek hivjuk, és tizedestört alakban. E két jelzésmód megfeleltetésénél lép fel legelőször a végtelen. Egyelőre nagyon szerény formában, csakis a jelek felirásában. Ugyanis a $\frac{8}{5}$ alakból ugy megyünk át tizedestört alakba, hogy a 8-at osztjuk szabály szerint 5-tel: $\frac{8}{5}=8:5=1{\cdot}6$. Ha ugyanezt megtesszük például $\frac{1}{9}$-del, akkor egészül 0-t kapunk, tizedesül pedig folyton egyet: $\frac{1}{9}=0{\cdot}1111\ldots$, ugyanigy $\frac{1}{3}=0{\cdot}3333\ldots$, stb. Némelyik közönséges törtnek tizedestört alakja végtelen sok számjegyből áll, végtelen hosszú tizedestörtet alkot. Megjegyzendő, hogy minden végtelensége dacára az ilyen tizedestörtet fenékig ismerjük, hajszálnyi határozatlanság vagy titokzatosság sincs benne.

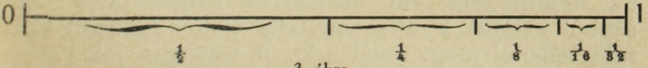
Tetszésszerinti megközelités.

A végtelen tizedestört tovább vezet a tetszésszerinti megközelités fogalmához. Bárhol szakitom is meg a $0{\cdot}1111\ldots$ számjelben az egyesek irását, az igy nyert véges tizedestört nem lesz éppen $\frac{1}{9}$, azonban nem is fog attól nagyon különbözni, mert az 1 : 9 osztás keresztülvitelekor példáúl a hatodik 1-es felirása után a maradék, ami ezután kerülne ujabb kilencedelésre, csak $\frac{1}{1000000}$. Ha tehát olyasmi felosztásáról van szó (1 koronáról), aminek a milliomodrészét már úgy sem tudom megvalósitani, akkor mondhatom, hogy megközelitőleg (itt 6 tizedes pontosságig) $\frac{1}{9}=0{\cdot}111111$. Ami ebben a matematikusnak érdekes, az az, hogy ez a megközelités teljesen tetszésszerinti pontosságig vihető, és mindegyik esetben már előre egész pontosan tudom, mekkora hibát követek el. Magát ezt a folyton fokozódó megközelitést megint keresztül-kasúl tökéletes szigorúsággal ismerem, bár ez is végtelenbe menő felsorolást igényel, mint az egész számok sora.

Mivel pedig a végtelen tizedestörtet magát egészen úgy sem tudom felirni, legegyszerűbben úgy fejezhetem ki az $\frac{1}{9}=0{\cdot}1111$.... egyenlet tartalmát, ha azt mondom, hogy az $\frac{1}{9}$-et vég nélkül megközeliti a 0·1, 0·11, 0·111, 0·1111,.... (I) véges tizedestörtekből álló számhalmaz. Az osztás, amellyel a 0·1111.... alakhoz jutunk, közvetlenül szintén csak ezt a megközelitést adja.

A tetszésszerinti megközelités téri képe.

Szögezzük le jól a most tapasztaltakat. Folyton nagyobb és nagyobb véges tizedestörtek végnélküli sorozata határozott szám (a példánkban $\frac{1}{9}$) felé tart s a sorozat tagjainak nagyobbodás módja pontosan meghatározza ezt a számot és csakis ezt. Rögzitsük meg a tetszésszerinti megközelités tisztán mennyiségi fogalmát téri képben. Vegyünk elő 1 cm hosszú egyenest és felezzük meg. Az igy keletkező két félcenti darabból tartsuk meg a baloldalit, a jobboldalit pedig felezzük meg ujra s a negyedcenti hosszu balfelét adjuk hozzá



3. ábra.

az előbb megtartott félcentis darabhoz. A hátramaradó negyedcentivel (amelyik $\frac{3}{4}$-től 1-ig terjed) járjunk el ugyanigy és igy tovább. Megkapjuk igy a

$$\tfrac{1}{2},\quad \tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{4},\quad \tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{4}+\tfrac{1}{8},\quad \tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{4}+\tfrac{1}{8}+\tfrac{1}{16},\ .....$$

számsorozatot, mit nagyon könnyen átirhatunk véges tizedestört alakba, mert a nevezők mind 2 hatványai: 0·5, 0·75, 0·875, 0·9375,......

A téri szemléletből világos, hogy ezek a számok folyton nagyobbodva éppen az 1-et közelitik meg. Az (I) sorozat is éppen igy szemléltethető, csak ott nem felezni kell az 1 cm hosszat, hanem tizfelé osztani s csak egy részt tartani meg, igy kapjuk 0·1 tagot;

majd az $\frac{1}{10}$ hosszú darabkát osztjuk ismét tiz részre s tartunk meg belőle egyet és igy tovább.

A végnélküli oszthatóság gondolata.

A végtelen tehát itt mint határtalan oszthatóság jelentkezik. A jelenségeknek az a sokat emlegetett tulajdonsága, hogy egységességükben is sokszorosak nem függ a téri kiterjedés nagyságától, sem semmiféle más nagyságtól. Komolyan véve, atóm vagy elektrón, mi — ha nem is térben —, de hatásaiban, tulajdonságaiban ne lenne bonyolult, tisztára képtelenség. Hiszen erőkifejtésére (például súlyára), szinére stb., mindenére mások is befolynak s igy részenként is változhat. Különben a csupasz *egy* elgondolása egy irányba esik a mozdulatlanság, hatástalanság, a nem levő, a semmi elgondolásával. Látjuk, hogy a matematika mennyire a valóságba igyekszik belelátni. *Az „egy és mégis több“ a világ általános megjelenésformája s igy bármire is alkalmazandó.* A mindenütt érvényesülő többesség, az akármeddig vitt szétosztás gondolata a valóságból sarjadt s a mennyiség tudományában kikerülhetetlenül megvizsgálandó. A törtszám jelentősége a matematika fejlődésére éppen az, hogy a vég nélkül folytatható felosztás valóságsugallta gondolatát teljes tisztaságában tárja elénk. Ezt a mélységes gondolatot végig kell gondolnunk, ki kell bontanunk, hogy eszünk besurranhasson legtitkosabb redőibe is. *Ez a nagy elgondolás a matematika.*

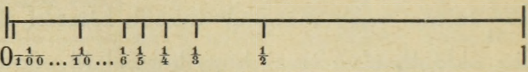
Végtelen számhalmazok. Határérték.

Képezési törvény.

Feladatunk most már világosan áll előttünk. A következőkben a megoldó gondolatsor — ez a matematika — tagozódásának főbb vonalain siklunk végig. Elsősorban is ahhoz kell hozzászoknunk, hogy végtelen sok számból álló halmazt is kimeritő pontossággal meg tudunk adni. Igy például az (1) sorozatot vagy pedig az $\frac{1}{n}$ (n egész szám) alakú valódi törtek halmazát. Az épp most jelzett $\frac{1}{n}$ forma, vagy mondjuk inkább *képezési törvény* tényleg eldönthetővé teszi, hogy bármelyik adott törtszám benne van-e a halmazban vagy sem, másrészt annyi tagot és azt a tagot képezhetjük vele, amenynyit s amelyiket csak akarjuk. A képezési törvényt gépnek tekinthetjük, a halmaz tagjai ekkor ennek termékei lesznek. *Azzal tartom össze a végtelen sok számot, hogy tudom hogyan kell képeznem bármelyiket, mindegyiket.* Ilyen képezési törvény például: $\frac{n-1}{n}$ (n sorban $= 1$, $= 2$, $= 3$, . . . stb.); ennek első tagjai: $0, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \ldots$ Vagy pedig: $\frac{3n+1}{n}$ ($n = 1, 2, 3, \ldots \infty$); ennek kezdő tagjai: $4, \frac{7}{2}, \frac{10}{3}, \frac{13}{4}, \ldots$ Könnyebben áttekinthető ez a halmaz, ha képezési törvényét $3+\frac{1}{n}$ alakba írom. Nem érdektelen még az $\frac{n \pm 1}{n}$ halmaz sem, hol a $\pm$ azt jelenti, hogy mikor n helyébe valamelyik egész számot írom, mindig két tagot kapok $\frac{n+1}{n}$ és $\frac{n-1}{n}$ tagokat. Tekinthető $\frac{n+1}{n}$ és $\frac{n-1}{n}$ halmazok egyesítésének is.

Elkülöníthető tag.

Vegyük most szorosabb vizsgálat alá az egyetlen, 0, tagból álló és a már említett $\frac{1}{n}$ halmazok egyesítéséből keletkező $\left(0, \frac{1}{n}\right)$ halmazt. Néhány tagját 4. ábránk téri képben is mutatja. Azt állítjuk, hogy a halmaz nem minden számának egyforma a szerepe. Vegyük elő ugyanis például az $\frac{1}{2}$-et. Láttuk ugyan, hogy a $\frac{1}{2}$-hez, mint minden törtszámhoz, akármilyen közel is van még törtszám, de *nem*



4. ábra.

a most vizsgált halmazból. Mert a $\frac{1}{2}$-től jobbra-balra menve, például: $\frac{1}{10}$-del ($\frac{1}{2}-\frac{1}{10}$-től $\frac{1}{2}+\frac{1}{10}$-ig), oly számközt jelölünk ki, melyben a $\frac{1}{2}$ egyedül van, pontosabban: melyben a vizsgált halmaznak már nincs másik száma. Az ilyen tagra azt mondjuk, hogy ez a halmaznak különálló, jobban mondva a többitől számközzel *elkülönithető* tagja. Láthatólag ilyen a vizsgált halmaz minden $\frac{1}{n}$ alakú tagja, azaz valamennyi az 0-t kivéve. Ugyanis $\frac{1}{n}$ okvetlen $\frac{1}{n+1}$ és $\frac{1}{n-1}$ között fekszik akármi is n, mert a halmaz tagjai fogyva következnek egymásra. Ha tehát n nagyon nagy (például 1000000), azaz $\frac{1}{n}$ nagyon kicsiny $\left(\frac{1}{1000000}\right)$ akkor a számköz is nagyon kicsiny, melyben az $\frac{1}{n}$ $\left(\frac{1}{1000000}\right)$ már magában van. Fontos azonban csak az, hogy elkülönithető a többi tagtól, *van* olyan számköz, melyben a halmaznak másik száma már nincsen.

El nem különithető tag.

Próbáljuk meg ugyanezt a 0-sal. Ha a 0-tól jobbra balra például $\frac{1}{1000000}$-dal megyünk, $\left(-\frac{1}{1000000}\right.$-tól a 0-on át $\left.\frac{1}{1000000}\right.$-ig tart igy a számköz$\left.\right)$ rögtön tudunk még mondani olyan tagot, amelyik belől esik ezen a számközön, például $\frac{1}{1000001}$ s általában valamennyi $\frac{1}{n}$ alakú tört, hol az n nagyobb, mint 1000000. Ha megmondják a számközt, amivel el akarják különiteni a 0-t a többi, $\frac{1}{n}$ alakú tagtól, magából a számköz széléből rögtön tudom, mily tagok esnek még okvetlenül a számköz belsejébe. Hiába igyekszem tehát a 0-t különválasztani bármilyen kicsiny számközzel, előre tudom, hogy ez a kisérlet csakis eredménytelen lehet. A 0 tehát halmazunknak valami különös tagja. Fontossága is világos, mert körülötte — pontosabban: bármily piciny számközben, amelyik a 0-t magába zárja — végtelen sok tagja van a halmaznak. Az ilyen tagot a többitől *el nem különithető* tagnak, a halmaz sűrűsödési helyének hivjuk. A $\left(0, \frac{1}{n}\right)$ halmaznak tehát valamennyi tagja elkülöníthető, kivéve az egyetlen 0-t, amelyik el nem különithető tag. Világos, hogy az $\frac{1}{n}$ halmazra nézve, bár formailag bele nem tartozik, a 0-nak épp oly fontossága, épp az a szerepe van, mint a $\left(0, \frac{1}{n}\right)$ halmazban. Ezért egyszerűség kedvéért azt is mondjuk, hogy a 0 az $\frac{1}{n}$ halmaznak el nem különithető tagja. Könnyen beláthatjuk, hogy az $\frac{n-1}{n} = 1 - \frac{1}{n}$ képezési törvénnyel megadott halmaznak is minden tagja elkülönithető, mert a tagok folyton nagyobbodnak s igy akármelyik az előtte levő és utána jövő között egyedül van. Sürüsödési helye pedig az 1, mit ha csatolunk a halmazunkhoz, az uj $\left(1, \frac{n-1}{n}\right)$ halmaznak lesz szintén egyetlen el nem különithető tagja, t. i. az 1. Az $\left(1, \frac{n \pm 1}{n}\right)$ halmaznak szintén az 1 az egyetlen el nem különithető tagja. A $\frac{3n+1}{n}$-nél ez a 3. Általában $c \pm \frac{1}{n}$ halmaznál a c (c-nek különben bármelyik egész vagy tört szám is választható).

Hány el nem különithető tag tartozhat egy halmazhoz?

Vannak azonban oly halmazok is, melyekben nem egy, hanem több el nem különithető tag is van. Például a $\left(0, \frac{1}{n}, 1, \frac{n-1}{n}\right)$ egyesitett halmazban kettő van: a 0 és az 1. Ugyanigy lehet olyformán összerakni a képezési törvényeket, hogy az ujonnan előálló halmazban bármekkora (de véges) számú el nem különithető tag legyen. Ezek kissé mesterkélt példáknak látszanak s igy adunk még egyet, amelyiknek ezt igazán nem lehet felróni. Nézzük a valódi törtek halmazát, valamennyit. *Ennek minden tagja ilyen el nem különithető tag.* Bármelyiket válasszuk ki ugyanis, nem lehet számközzel kirekeszteni, mert mint láttuk (7. lap) akármilyen közel hozzá még mindig van másik törtszám. Ha tehát például azt állitják, hogy $\frac{1}{2}$ az $\frac{1}{2} - \frac{1}{n}$-től $\frac{1}{2} + \frac{1}{n}$-ig terjedő számközben egyedül van, rögtön cáfolhatok, amennyiben az $\frac{1}{2} + \frac{1}{n+1}$ is törtszám és belől esik. (Oda esik, ha $m > n$, minden $\frac{1}{2} \pm \frac{1}{m}$ alaku törtszám, azaz végtelen sok.) Az $\frac{1}{2}$-det nem lehet tehát elkülöniteni s ugyanezen okból egyiket sem. Az el nem különithető tagok száma változhat tehát a 0-tól a végtelenig. Véges számú tagból álló halmazban például nem lehet egy ily rendkivüli, el nem különithető tag sem, mert az egyes tagok között kijelölhető legkisebb különbségük (távolságuk) s ezt véve számköz alkotónak jobbra-balra, bármelyik tagnál elérem, hogy a kijelölt számköz belsejében egyedül legyen.

Határérték. Limes.

A véges számból álló halmazokban nincs tehát el nem különithető tag. Ezekhez szerkezetileg legközelebb állanak az olyan végtelen sok számból álló halmazok (röviden: végtelen számhalmazok), melyekben *csak egy* el nem különithető tag van (a tag szót általánosabb értelemben véve, mely szerint a sürüsödési helyeket okvetlen tagoknak minősitjük). Az ily halmazok szerepe, hol a végtelen legegyszerübb formájában jelenik meg, döntő jelentőségű abban a hatalmas fejlődésben, mit a matematikai probléma-szövedék szálainak kifejtése elibénk tár. Ezért van az ily halmazoknak és el nem különithető tagjuknak külön, kényelmesen kezelhető szó- és irásjelek. Magát a halmazt szabályos sorozatnak, sürüsödési helyét pedig a szabályos sorozat *határértéké*-nek, *limes*-ének mondjuk. Nemzetközi irásjelekkel, például

$$\lim_{n=\infty} \frac{1}{n} = 0.$$

hol $\frac{1}{n}$ mint képezési törvény arra gondoltat, hogy itt végtelen számhalmazról van szó, melynek tagjai mind azok a törtek, melyeknek számlálója 1, nevezője pedig valamelyik egész szám. Az $n=\infty$ jelzés azt hangsúlyozza, hogy n helyébe be kell tenni valamennyi egész számot a végtelenig, hogy a halmazt egészen megkapjam. Ez a jelzés azért kell, mert sokszor több betü is van a képletben például x is, és ekkor meg kell mondanunk melyik betü helyére teendők be a számértékek, nehogy a felirás kétértelmü legyen. Végre a *lim* azt jelenti, hogy nem a halmazra akarunk gondolni, hanem annak egyetlen sürüsödési helyére. A (2) baloldalát tevő összetett kifejezés végeredményben *egyetlen számot* jelöl tehát, a 0-t, csakhogy ezt a számot végtelen halmaz határozza meg. Igy volt az (1)-ben is, hol a sorozat $\frac{1}{9}$-et adta meg.

Ugyanigy

$$\lim_{n=\infty} \frac{n-1}{n} = 1, \; \lim \frac{3n+1}{n} = 3, \; \lim \left(c \pm \frac{1}{n}\right) = c, \text{ stb.}$$

A határérték létkérdése.

Ha valamelyik számhalmazomról az derül ki, hogy nem egy, hanem több el nem különithető tagja is van, arról a halmazról azt fogjuk mondani, hogy nincs határértéke, tudniillik nincs *egyetlen egy* el nem különithető tagja, mert több van. Azért mondjuk így, mert az ily halmazokat éppen bonyolultságuknál fogva nem tudjuk semmire se használni s a „nincs határértéke" kitétellel mintegy kiselejtezzük a használható egyszerü halmazok közzül. Azt is lehet mondani, hogy a halmaz nem szabályos sorozat.

A legelemibb s egyszersmind a legmélyebbre nyúló kérdés most az, hogy van-e okvetlen minden végtelen számhalmaznak legalább egy el nem különithető tagja. Azt láttuk, hogy lehet több, sőt végtelen sok is. De hogy feltétlenül lennie kell legalább egynek, az nem bizonyos. Sőt meg is esik, hogy egy sincs, mint azt az egész számok halmaza tüstént megmutatja. Végtelen sok tagja van s mindegyik különálló. Szemébe nézünk ennek a kérdésnek s mélyén megpillantjuk majd — az irracionális számokat, a középiskolai matematizálás kisértetét.

II. Fejezet.

Irracionális szám és a végtelen problémái.

Irracionális szám.

A racionális számok helyeinek sürüsége az egyenesen.

Láttuk fentebb (15. oldal), hogy ha az egész és tört — egybevéve racionális — számokat felrajzoljuk az egyenes vonalra, oly ponthalmazt nyerünk kép gyanánt, melynek minden tagja sürüsödési hely. A racionális számok minden számközt végtelen sürün lepnek be. Ebből könnyen azt gondolhatnók, hogy ha valamelyik végtelen sok számból álló halmaz, mint például az $\frac{1}{n}$, a maga egészében véges hosszúságú számközbe esik bele (0—1 közbe a jelzett példában), akkor okvetlen lesz legalább egy tagja a halmaznak, amelyik mellett végtelen sok tag van, vagy ha ilyen tag nincs is, mint szorosan véve az $\frac{1}{n}$-ben sincs, mert a 0 nem ilyen alakú szám, akkor is van legalább egy, ha nem is belőle való, *racionális* szám, amelyik sürüsödési helye a halmaznak. Felezem ugyanis (vagy például 10 részre osztom) a véges hosszúságú számközt, amelyikből az egész halmaz való s úgy okoskodom, hogy valamelyik felébe (tizedrészébe) végtelen sok tag esik, mert ha mind a kettőbe (mind a tizbe) csak véges számú tagja esnék a halmaznak, akkor nem lenne neki végtelen sok tagja. Azt a felét a számköznek hová végtelen sok tag esik (ha mind a kettőbe, illetve mind a tizbe, akkor akármelyiket) ujból felezem (tizedelem) és igy tovább.

Ezzel az eljárással folyton kisebbedő s egymás belsejébe eső számközöket kapok, mik végül feltétlenül egyetlen ponttá zsugorodnak, mivel az n-edik lépéssel nyert számköz az eredetinek $\frac{1}{2^n}$ $\left(\text{illetve } \frac{1}{10^n}\right)$ része. Miután pedig — itt lesz hiba gondolatmenetünkben — az eredeti számközt végtelen sürün lepik el a racionális számok, azaz *mindenütt van egy*, ugy látszik a most nyert pont is egyik racionális szám helye. Ilyen módon be lenne bizonyitva egy nagyon fontos alaptétel, amely szerint véges számközbe eső végtelen halmaznak okvetlenül van legalább egy, még pedig egész vagy tört, sürüsödési helye. A hiba ebben az okoskodásban felette jellemző a mennyiségtani gondolatmenetekre s különösen viszonyukra a téri szemlélethez. Csupán abból, hogy az egész és törtszámok *képei az egyenesen* ilyen vagy olyan sürün fekszenek, véglegesen semmi mennyiségtani eredmény meg nem állapitható. Eszünkbe juttathat ez vagy az a geometriai tényállás mennyiségtani gondolatokat, *de azokat tisztára a mennyiségrendszer saját szerkezetéből kell végérvényesen meglátni.* Mig ez meg nem történt, csak több kevesebb mélységü hasonlattal van dolgunk.

Az irracionális szám nélkülözhetetlen volta.

Tanulságos az előző példa, mert tényleg tudunk megadni olyan törtszámhalmazt, amelyik nyilvánvalóan megcáfolja a látszólag — azaz geometriailag — bebizonyitott eredményt. Véges számközbe esik és még sincs olyan egész vagy törtszám, amelyik sürüsödési helye lenne. Ilyen a véges tizedestörteknek minden sorozata, amelyik csak nem szakaszos végtelen tizedestörtet állit elő. Irjuk fel például a 0 egész után tizedesjegyekül sorban az összes egész számokat. Igy kapjuk az

$$A = 0{\cdot}123\ldots 89101112\ldots 2021\ldots 99100101102\ldots$$

végtelen tizedestörtre emlékeztető alakot. Ebben nincs szakasz. Ez tehát nem lehet törtszám s igy egyelőre nem is szám. Az

(a) 0·1, 0·12, 0·123, . . ., 0·123 . . . 8, 0·123 . . . 89,
. . ., 0·123 . . . 89 . . . 20 . . . 9 9, . . stb.

véges tizedestörtekből, tehát törtszámokból álló sorozat; tagjai még hozzá folyton nagyobbodnak, másrészt mindannyian 0·1 és 0·2 számok közé, tehát véges számközbe esnek. És még sincs racionális sürüsödési helye, mivel ettől a sorban távol levő tagok mind kevésbé tartoznak különbözni, s igy a sürüsödési hely tizedesjegyeinek sorba össze kellene esni az (a)-ban egymásután fellépő tizedesjegyekkel, azaz végtelen tizedestörtnek kellene lennie szakasz nélkül; ilyen egész vagy törtszám azonban nincs s igy egyelőre semilyen sincs. *Az (a) halmaznak, bármennyire hasonlit is a szabályos sorozatokhoz, egyáltalán nincs sürüsödési helye.**

Geometriai ábrázolás.

Mit jelent ez téri szemléletben? Képzeljük el, hogy egy 10—12 centiméter hosszú vonalat nagyon pontosan meg akarunk

---

* Részletesen bizonyitva: tegyük fel, hogy a B sürüsödési hely egyik — mondjuk i-edik — tizedesjegye nagyobb, mint az ugyanannyiadik A-ban (kisebb nem lehet, mert ekkor két tag közé esne vagy éppen egyik tag lenne s igy külön állana). Az A-ban nem minden tizedesjegy 9-es az i-edik után sem, mert hiszen nem szakaszos tizedestörtet vizsgálunk. Legyen az i-edik után a legelső nem 9-es jegy a k-adik. Képezzük most B-ből a *nála kisebb* B_1 számot akképen, hogy az i-edik tizedest kisebbitsük meg eggyel s irjunk az i-ediktől a k-adikig mindenüvé 9-est. Mindegyik (a)-ból való szám kisebb, mint B_1, mert k-adik tizedesük kisebb B_1 k-adik tizedesénél, az ez előtti tizedesjegyeik pedig megegyeznek a B_1 megfelelő jegyével (legfeljebb az i-edikben különbözhetnek B_1-től, de ott is az utóbbi javára). B_1 és B közé egy sem esik, tehát (B-n túlra meg éppenséggel nem) a B igy tényleg el van tőlük különitve. *A sürüsödési hely tizedestört alakjának össze kellene esni az A alakkal.* Egész vagy törtszám azonban ilyen alakú — tudniillik végtelen és szakasznélküli tizedestört — nem lehet.

mérni s méterekben fejezzük ki magunkat. Először azt találjuk, hogy megvan tiz centiméter (0·1 méter); a hátramaradó rész is kiad még két centimétert, tehát a pálca kissé nagyobb, mint 0·12 méter. Igy folytatva kapjuk, hogy még 3 millimétert kiad, azután 4 tizedmillimétert, 5 századmillimétert, stb. Minthogy egész pontosan ugy sem mérhetjük meg, nincs semmi jogunk feltenni, hogy a végigvitt mérés ne adhatná meg az (a) sorozatot, hiszen akkor például $\frac{1}{3} = 0{\cdot}33333\ldots$ hosszaság se lehetne. Bármily sürün beboritották is az egész és törtszámok az egyenest, még mindig vannak tehát pontok rajta, amelyek nem kaptak számnevet. A geometriát sem elégiti ki az egész és törtszám. Az akárhogyan végezhető felosztás gondolatát nem lehet velük végiggondolni. Ehhez még nélkülözhetetlenül kellenek a nem szakaszos tizedestörtek is. Kötelessége tehát a mennyiség tudományának, hogy ezeket a jeleket — vagy ezekkel egyhatalmúakat — polgárjogositsa, azaz a velük való bánásmódot, a négy alapműveletet, rájuk meghatározza s hogy ilymódon minden határozatlanságtól menten s most már velejéig megismerhetően szimbolizálja a világ egység-többség megjelenés módját, mint a végtelen oszthatóság rejtvényének kibontását.

Az irracionális számok összeadása.

A nem szakaszos végtelen tizedestörtek összeadása, kivonása, szorzása, osztása visszamegy a véges tizedestörtek megfelelő műveleteire. Ugyanis minden végtelen tizedestört-alak felaprózva véges tizedestörtek sorozataként gondolható, mint fentebb a példánkban.

Legyen ilyformán

$$a_1,\ a_2,\ a_3, \ldots,\ a_n, \ldots \qquad (a)$$

és

$$b_1,\ b_2,\ b_3, \ldots,\ b_n, \ldots \qquad (b)$$

két, mondjuk A és B végtelen tizedestört sorozatos alakja. Legyenek pl. az A tizedesjegyei a páros egész számok, B jegyei a páratlanok. Akkor a két sorozat lesz

0,2, 0,24, 0,246, 0,2468, ... és 0·1, 0·13, 0·135, 0·1357 ...

Az A és B összege alatt az

$$a_1 + b_1,\ a_2 + b_2,\ a_3 + b_3, \ldots, a_n + b_n, \ldots \qquad (\text{ö})$$

számbeli példánkban: 0·3, 0·37, 0·381, 0·3825, szintén folyton nagyobbodó tagokból álló sorozat meghatározta végtelen tizedestörtet értjük. Arra kell itt jól rágondolnunk, hogy ha ily sorozat tagjai folyton nagyobbodnak, akkor okvetlenül meghatároznak egy és csak egy végtelen tizedestörtet, mert pl. ha az első tizedes legnagyobb értékét (ami legfeljebb 9 lehet) egyszer felvette, azontúl már minden utánajövő tagban ugyanaz marad. Pl. az összegben az első tagnál az első tizedes 3 s az is marad. Induljunk most meg ki abból a tagból, ahonnan kezdve ez már igy van s okoskodjunk a második tizedesre ugyanigy. Innen kezdve ez a második tizedes csak nőhet (egyforma is maradhat). Valahol tehát elkezdi felvenni legnagyobb értékét s azontúl ő se változik. Számpéldánk második tizedese az első tagban 0, a másodikban 7, a harmadikban 8-nál felvette legnagyobb értékét s ezentúl minden tagban megtartja. Igy folytatva látjuk, hogy *véges tizedestörtek növő sorozata* (hacsak egész részük nem nő végtelenbe) *mindig meghatároz egyetlen egy végtelen tizedestörtet.* Ugyanigy okoskodhatunk természetesen, ha a tagok folyton kisebbednek, feltéve, hogy egész részük nem fogy le minusz végtelenre.

Az irracionális számok szorzása.

Mivel

$$a_1 \times b_1,\ a_2 \times b_2,\ a_3 \times b_3, \ldots, a_n \times b_n, \ldots \qquad (\text{sz})$$

sorozat tagjai szintén folyton nagyobbodnak, mert hiszen a_2 nagyobb, mint a_1, meg b_2 is nagyobb, mint b_1, az $A \times B$ művelet eredményéül az *(sz)* sorozat által meghatározott végtelen tizedestörtet tekintjük. Ez a szorzás-szabály.

Az irracionális számok kivonása.

Nem egészen ilyen egyszerü a kivonás és osztás műveleteinek megállapitása, mert az előbbi eljárás nem vezet mindig növő sorozatra s igy egyelőre nem tudjuk, mit tekintsünk a művelet eredményének. Nézzük a kivonást. *A különbség-sorozat:*

$$a_1 - b_1,\ a_2 - b_2,\ a_3 - b_3, \ldots, a_n - b_n, \ldots \qquad (k)$$

tagjai mind egyforma előjelüek: vagy mind pozitivok, vagy mind negativok. Az elején azonban lehetnek 0 tagok. Az első nemzérus tag eldönti az előjelet. Ha pl. $a_1 > b_1$, akkor a_1 nagyobb mindegyik b-nél, mert az a tizedes, amelyik miatt b_1 kisebb a_1-nél, t. i. az első tizedes amiben különböznek, ugyancsak meglesz a többi b-ben is, a bennök ez után fellépő tizedesek pedig akárhányan vannak is, sohasem tesznek ki egészen egy előttük álló tizedesértéket. Ekkor azonban a többi a is mind nagyobb valamennyi b-nél, tehát a saját kivonandójánál is. Ha ellenben b_1 nagyobb, mint a_1, akkor meg a b-k nagyobbak valamennyi a-nál. Végül ha $a_1 = b_1$, akkor elővesszük az $a_2 - b_2$ tagot s erre gondoljuk végig az okoskodásunkat. Csak akkor eshetik meg, hogy mindegyik különbség nulla, ha az a-k és b-k sorozata éppen egyforma. Ekkor természetesen mind a ketten ugyanazt a végtelen tizedestörtet ábrázolják. A másik két eset adja az $A > B$ és $A < B$ viszonylatokat.

A *(k)* sorozat tagjai azonban nem okvetlenül nagyobbodnak állandóan, pl. ha A és B igy kezdődnek:

7, 7·7, 7·79, . . .
illetve 3, 3·9, 3·90, . . .

Ekkor ugyanis a (k) különbség-sorozat első tagjai: 4, 3·8, 3·89, ... Azonban *az uj tizedesjegy hatása nem terjedhet túl az első nem-nulla tizedesjegyen.* Emiatt elég messze menve a (k) sorozatban az egész jegy, első, második, stb. tizedesjegyek sorban állandókká válnak s a nagyobbodás-kisebbedés eltolódik mindig messzebb kieső tizedeshelyekre. A (k) sorozat szintén meghatároz tehát egyetlenegy végtelen tizedestörtet.

Ugyanigy áll a dolog az osztással; ennek pontos elgondolását helyszüke miatt az olvasóra bizzuk.

Az irracionális számok és a valóság.

A nem-szakaszos végtelen tizedestörtek a most megállapitott négy kezelési szabállyal ellátva az irracionális számok. Látjuk, mily természetesen folytatják és egészitik ki az egész és törtszámok osztályát. Sok közönséges törtszámnak is végtelen tizedestört az alakja, régi és uj számaink között fogalmi szempontból alig van tehát komoly különbség. A racionális és irracionális számok együtt alkotják a valós számok halmazát. Az egyenes minden pontjának van számneve, valamelyik valós szám s minden valós számnak van helye az egyenesen.

Uj számaink fontossága legelsőbben is abból érezhető meg, hogy minden felosztás, minden mérés (mint fentebb láttuk) folyton nagyobbodó véges tizedestörtek végtelen sorozatául fogható fel s másrészt minden ilyen sorozat megállapit egyetlenegy egész, tört vagy irracionális számot. Minden felosztásnak van tehát ezentúl jele, még pedig nem úgy, hogy minden egyes felosztáshoz tartoznék egy-egy önkényesen odabiggyesztett jelkép, hanem az összes lehetséges felosztások tényleges rendszere van szimbolizálva olyan jelrendszerrel, amelyik a valóság vizsgálat alá vett formáját kimeritően és semmit hozzá nem toldva, egyedül *szerkezeti sajátosságaival,* nem pedig puszta jeleivel szemlélteti.

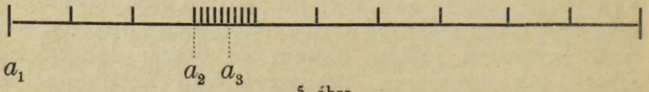
Megjegyzésre méltó, hogy az irracionális szám fogalmát teljesen a limes használata nélkül épitettük fel. Egyedül arra támaszkodtunk, hogy mikor az *(ö)*, *(sz)* és *(k)* sorozatokon végighaladunk mégpedig úgy, hogy minden tagban kizárólag valahányadik (például a 2-ik) tizedesjegyet vesszük szemügyre, bizonyos tagtól kezdve ez a tizedesjegy minden ezután jövő tagban ugyanaz lesz. Ilyenformán minden tizedeshelyre meghatározódik egy-egy tizedesjegy, mik együtt egyetlen végtelen tizedestörtet alkotnak.

A mennyiségtan két alaptétele.

Az irracionális számok döntő szerepe legszembeötlőbben a következő két tételben jut kifejezésre.

Első alaptétel.

I. Véges számközbe eső végtelen számhalmazhoz okvetlen tartozik legalább egy tőle számközzel el nem különithető szám. Ez lehet egész, tört vagy irracionális, lehet a halmaz tagja, de eshetik rajta kivül is, lényeges csak az, hogy egyáltalán ki lehet jelölni oly számot, amelyik környezetében a halmaznak végtelen sok tagja van. (Most már irracionális számok is lehetnek a halmaz tagjai.) Ez az egész felsőbb mennyiségtan egyik alaptétele. Igazságát könnyen beláthatjuk, ha ismételjük a fentebb (25. lap) boncolt hibás okoskodást, kikerülve természetesen a hibát.



5. ábra.

Feltételünk szerint az egész halmaz véges számközbe esik. Erről a számközről mindig feltehetjük tehát, hogy hosszúságát és határait véges tizedestörtek jelzik.

(Ha az eredeti nem ilyen, választok ennél kissé nagyobbat, ami már ilyen legyen.) Tiz részre osztom a számközt. Legalább az egyik tizedrészben végtelen sok tagja van a vizsgált halmaznak. Az egész számköz kisebbik (balsó) határát vegyük egy alkotandó sorozat első, a_1, tagjának, a végtelen sok tagot magában foglaló tizedszámköz kisebbik (balsó) határát pedig vegyük a sorozat második, a_2, tagjának. Folytassuk most ezt az eljárást a kiszemelt tizedszámközön, tudniillik osszuk tiz részre s vegyük sorozatunk harmadik, a_3, tagjának a most kapott tiz kis számköz közül annak a balsó határát, amelyikben megint végtelen sok tag van. És igy tovább. Ezzel az eljárással folyton nagyobbodó, esetleg nem változó véges tizdestörtek $a_1, a_2, a_3, \ldots a_n, \ldots$ sorozatát kapjuk. Azt állitjuk, hogy az a szám, mondjuk A, amit ez a sorozat megállapit, a halmaz sürüsödési helye. Próbáljuk meg ugyanis ezt az A-t a többitől számközzel különválasztani: legyen ε az a kis távolság, amelyet A-tól jobbra-balra lemérünk, remélve, hogy ebben a 2ε hosszuságu számközben A már egymaga lesz. Igen ám, de az $a_1, a_2, a_3, \ldots$ számok mind távolabbi tizedesben, tehát kevesebbel-kevesebbel különböznek A-tól s igy van olyan a_n (meg valamennyi utánajövő), amelyik A-tól kevesebbel különbözik, mint ε. A elkülönitése nem sikerülhet tehát s ezzel alaptételünk be is van bizonyitva. Hibát itt azért nem követtünk el, mert már előzetesen beláttuk, hogy minden növő sorozat határoz meg számot. Az, esetleg irracionális, A szám létezése minden kétségen kivül áll, mégpedig mennyiségtani okoskodások alapján.

A téri szemlélet elégtelensége a matematikai okoskodásban.

Láthatjuk itt, hogy a téri szemlélet — ami még közelebb látszik lenni a valósághoz, mint a matematika — hogyan csusztathat bennünket hibás gondolatmenetbe. Tényvolta ugyanis annyira leköti figyelmünket, eszünket, hogy nem tudunk egykönnyen *mindazokra* a lehetőségekre is gondolni, amik nem bontakoznak ki önmaguktól vagy már kevés érintésre az előttünk nyüzsgő valóságból. Mindig csak véges tizedestörtekben gondolkozunk. Nem jut mindjárt eszünkbe, hogy a méréssel nyert véges tizedestörtek sorozata épp ugy vezethet nem-szakaszos, mint szakaszos végtelen tizedestörthöz. Ezt átlátva azonban rögtön megérezzük, hogy az uj jelek behozatalára feltétlen szükségünk van. Enélkül nem tudjuk végiggondolni azt, aminek elgondolásához fogtunk: a vég nélkül ismétlődő részekből állás és egységgétömörülés gondolatát.

A határértékszámitás alaptétele.

Ime a második alaptétel:

II. Minden véges számközbe eső, folyton nagyobbodó végtelen számsorozatnak van határértéke, azaz *van egy és csak egy a sorozattól számközzel el nem különithető szám.*

Az irracionális számok összeadásánál (28. oldal) használt eljárással tüstént beláthatjuk, hogy akármilyen számok (véges vagy végtelen tizedestörtek) folyton nagyobbodó sorozata, hacsak egész részük nem nő végtelenbe, meghatároz egyetlen — A — tizedestörtet, azt t. i., amelynek egész része egyenlő a sorozat számaiban előjövő legnagyobb egésszel, első tizedese pedig a legnagyobb egésszel kezdődő tagok legnagyobb első tizedesével és igy tovább. Ez a szám nem különithető el halmazunk számaitól, az egyes tagok ugyanis mindig kisebb-kisebb tizedesben különböznek tőle s igy bármily kis környezetében még végtelen sok tag van. Viszont minden A-tól különböző, mondjuk B, szám el van különitve halmazunktól. Ha ugyanis B nagyobb A-nál, akkor $A \rightarrow B$ számköz tényleg elkülöniti B-t, mert halmazunk tagjai már A-nál is mind kisebbek. Ha meg B kisebb A-nál, akkor szorzatunkban elég messze menve találunk olyan tagot, hogy az utánajövők már mind nagyobbak mint B, mert az egyes tagok folyton kisebb-kisebb tizedesben különböznek A-tól s igy B-n is túl kell haladniok A közelébe. Ekkor azonban B a sorozat elején levő *véges számú* tag között van s ezek között maga van. Tehát tényleg A az *egyetlen* szám, ami sorozatunktól nincs elkülönitve.

Ez a tétel teszi lehetségessé a legtöbb határérték tényleges meghatározását. Ezzel pedig nagyon sokat mondtunk, mert a súlyos matematikai feladatok csaknem kivétel nélkül ebben a formában jelentkeznek: adott végtelen számhalmaznak van-e határértéke s ha van, melyik szám az. A kérdés súlyos volta igy legszembeötlőbben abban nyilvánúl, hogy nincs általános, minden esetre szóló eljárásunk még csak annak a megállapitására sem, hogy van-e valamely elibénk kerülő halmaznak határértéke, nemhogy magát a limes-számot ki tudnánk számitani a halmaz tagjaiból. Pedig sokszor egész feladat-sereg sorsa függ attól, van-e bizonyos halmaznak határértéke vagy nincs.

A végtelen függő kérdései.

A matematikai végtelenből fakadó nehézségek.

Megvan a teljes felszerelésünk arra, hogy követhessük a matematika nagy probléma-hálózatának legfinomabb szálait is. De mielőtt ennek nekilátnánk, rámutatunk szerszámunknak, a számfogalomnak, néhány éppen vizsgálat alatt levő pontjára, ahol a végtelen, amit már markunkban éreztünk, abból ismét kisiklani látszik. A jelzés most már nem lehet elégtelen, hiszen az összes lehető eseteknek van neve. A végtelennel való bánás nehézsége most logikai képtelenség formájában üti fel fejét. Előre hangsúlyozzuk, hogy ez nem az előző meggondolások csődje lesz, azok nem is akarták megoldani a végtelen kérdését, egyelőre csak a jelrendszer szerkezeti sajátságaiba bujtatták, hogy ott — már amennyire az emberi ész megteheti — végiggondolható legyen. Minden ujabb nehézség ujabb oldaláról mutatja be az üldözött ismeretlent s igy ha nem is simitjuk el véglegesen a nehézséget, de küzködve vele szétboncoljuk és beléje látunk, igazán tettünk lépést előre, tanultunk valamit a való világ tényleges megjelenés-formájáról. Az meg csak nem búsithat, hogy fenékig ki nem meritjük soha a tanulni valót, bármennyire megszoritsuk is körét. Elég, hogy az, amit tudunk, valóságos tudás és ezt folyton gyarapithatjuk, mélyithetjük.

A racionális számok megszámozhatók.

A végtelen eddig csak két alakban jött elénk. Legvilágosabban, mert megszoktuk, az egész számmal volt szemlélhető. Az egész szám képezésmódja olyan, hogy sorának nem lehet vége. Ha megpróbálunk egy utolsó egész számot gondolni, nem térhetünk ki az elől, hogy, mint minden számhoz, ugy ehhez is, meg ne alkothassuk a rákövetkezőt. A továbbszámlálás lehetséges volta nem függ a már megalkotott számok tömegétől, nagyságától; mindentől függetlenül bármelyik számtól kezdve végezhető. Szóról-szóra ugyanez volt az eset, mikor két szám osztásakor a végtelen tizedestörthöz jutottunk. Minden egyes osztás adott egy-egy — mind több tizedesjegyü — számot s a továbbosztás lehetősége nem függhetett a maradék nagyságától. Az igy keletkező véges tizedestörteket megszámozva kaptuk. Volt első, második, stb. És, durván szólva, annyi törtszám jött ki, ahány egész szám van, mert mindegyik egész számra mint sorszámra egy és csak egy jutott e törtszámok közül. S tényleg *az összes törtek együtt,* akár az egész számok törtalakját is beleértve, *megszámozhatók,* adhatok valamennyinek más meg más sorszámot s az igy készült sorban valóban benne lesznek mind. A mellékelt táblával ezt tüstént megtehetem. Legyen az első 1, a második és harmadik 2, illetve $\frac{1}{2}$, a harmadik, negyedik és ötödik pedig 3, $\frac{2}{2}$, $\frac{1}{3}$; a hatodik, hetedik, nyolcadik, kilencedik a 4, $\frac{3}{2}$, $\frac{2}{3}$, $\frac{1}{4}$; stb. Igy minden racionális szám meglesz a sorozatban

1	2	3	4	.....
$\frac{1}{2}$	$\frac{2}{2}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{4}{2}$	.....
$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{3}{3}$	$\frac{4}{3}$	.....
$\frac{1}{4}$	$\frac{2}{4}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{4}{4}$	.....
⋮	⋮	⋮	⋮	

6. ábra.

Van-e többféle végtelen?

Egész másképp állt elénk a végtelen, mikor az irracionális számokat alkottuk. Akkor ugyanis azt gondoltuk el, hogy mind pontosabb és pontosabb mérés (felosztás) folyton nagyobbodó véges tizedestörteknek *bárminő* sorozatához vezethet. Ezért kellett valamennyi ilyen sorozathoz jelt rendelni s éppen ezek lettek megfelelő utasitással az ugynevezett irracionális számok. Ez a „bárminő" nem azt mondja egyszerüen, hogy valami egyvonalú haladásban nincs megállás, nincs vég, hanem azt, hogy végtelen sok számból, tudniillik a véges tizedestörtekből, bárminő módon képezzünk végtelen sorozatokat azzal a kikötéssel, hogy a tagok nagyobbodjanak. Végtelen sok tag kombinációiról van itt szó, ez pedig nem egy, hanem végtelen sokirányú haladásnak látszik, mihelyt hozzáfogunk valamikép a megvalósitásához. Mégis sokáig — egész a XIX. század második feléig — azt gondolták a matematikusok, hogy lényeges különbség nincs, nem lehet, két végtelen között, mind a kettő egyszerüen minden véges számot túlhaladó számosságot jelöl. Már pedig lehet-e komoly különbséget tenni végtelen és végtelen között? *Cantor* megmutatta, hogy lehet. Bebizonyitotta, hogy az irracionális számok jelei számosságuk miatt nem számozhatók meg többé olyformán, hogy valamennyinek jusson külön egész szám. Ime az okoskodása.

Megszámozható halmazok egyesitése.

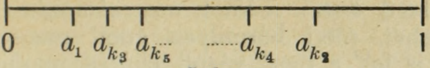
Előbb egy kis megjegyzés, hogy egyszerübbé tegyük a gondolatmenet fontos részét. *Ha két halmaz különkülön megszámozható, akkor egyesitett halmazuk is az.* Cserélgetve veszek ugyanis egyet az elsőből, egyet a másodikból s igy rakom sorba. Ekkor tényleg egyszámozásu sort kapok s ebben mind a két halmaz egészen benne van. Ebből kifolyólag nem az irracionális, hanem az összes számokat állitjuk szembe a megszámozó egész számokkal. Mert ha az összes számok, tudniillik a racionálisak és irracionálisak együtt, meg nem számozhatók, a racionálisak pedig (mint láttuk) igen, akkor — mivel az előbbi megjegyzés szerint mind a kettő nem lehet megszámozható anélkül, hogy egyesitett halmazuk is az ne lenne — az irracionális rész lesz meg nem számozható. Sőt ha nem is vesszük valamennyi számot, csak a 0 és 1 között levőket, már ezekre ki fog derülni, hogy túlsokan vannak ahhoz, hogy megszámlálhatók lennének.

Cantor tétele a valós számok számosságáról.

Gondoljuk el, hogy az *összes* számok 0 és 1 között, ez utóbbiakat is beleértve, meg vannak számozva. Azt mondaná ez, hogy van olyan

$$a_1,\ a_2,\ a_3,\ a_4,\ \ldots\ldots,\ a_n,\ \ldots\ldots \qquad (a)$$

sorozat, amelyikben minden tekintetbe jövő szám megvan valahol, van mindegyiknek határozott sorszáma. Ki fogunk jelölni a sorozat tagjai közül folyton nagyobbodókat s ezek határértékéről látjuk majd be, hogy



7. ábra.

okvetlen hiányzik a sorból. Az első kiszemelt tag a_1; az a_2 lehet kisebb nála (a vonalon balra tőle) vagy nagyobb (jobbra). Az utóbbi esetben ő lesz a második tag, az előbbi esetben pedig tovább megyünk a sorban, mindaddig, mig rá nem találunk az elsőre, amelyik már a_1-nél nagyobb. Ez lesz a második tag. Mondjuk, hogy sorszáma (indexe) k_2 volt (a_{k_2}). Harmadik tagúl azt választjuk, amelyik legelsőnek esik az a_1 és a_{k_2} közzé. Mondjuk, hogy ez a sorban k_3-ik volt. Negyedik lesz a legelső az a_{k_3} és a_{k_2} között és igy tovább. Igy kapjuk az a_1, a_{k_3}, a_{k_5}, a_{k_7} ..... növő sorozatot azzal a tulajdonsággal, hogy mindegyik tagtól jobbra van egy kis számköz ($a_1 \to a_{k_2}$, $a_{k_3} \to a_{k_4}$, $a_{k_5} \to a_{k_6}$ .... stb.), amelybe a sorozat elejéről egészen a szemügyre vett tagig nem kerül szám. Mindegyik ilyen számköz (az egyenesen szemlélve) az összes előbbiek belsejében van s igy az uj sorozat határértéke, A, valamennyibe beleesik. Vegyük elő az *(a)* sorozat akármelyik tagját, mondjuk az i-ediket és nézzük az uj sorozat egyik messze fekvő tagját, amelyiknek szorszáma, k_i, amazénál nagyobb ($k_i > i$). Bizonyos, hogy az egyenesen a_i nem fekszik a_{k_i} és $a_{k_{+i_1}}$ között. Ugyanis az a_i az *(a)* sorozatban a_{k_i} előtt van s a számközök szerkesztése szerint az a_{k_i}-hez tartozó $a_{k_i} \to a_{k_{i+1}}$ számközbe nem esik k_i-nél kisebb sorszámú tag egy sem. A a_i nem lehet tehát az uj sorozat határértéke, mert hiszen az éppen a_{k_i} és $a_{k_{i+1}}$ között van. Az *(a)* sorozat egyik tagja se lehet tehát e határérték, mert mindegyikre, épp úgy okoskodhatunk, mint a_i-re. Az A tényleg hiányzik tehát *(a)* sorozatból. Kisérletünk a 0 és

1 között levő *összes* számok megszámozására csakis meddő lehet, mert bármilyen adott megszámozást tételezve is fel, a most vázolt eljárás mindig mutat a 0 és 1 között oly számot, mely nem lehetett a megszámozottak között. *A valós és egész számok nem hozhatók „egy-egy" viszonylatba, nem feleltethetők meg egymásnak tökéletesen.* Az irracionális számok végtelensége nem mérhető össze az egész számokéval. *A véges halmazok számosságán kivül van még ezek szerint legalább kétféle végtelen-számosság.* Vajjon van-e még többféle is?

A végtelen számosság problémája.

Lehet-e oly számhalmazt kijelölni, amelyik már ne lenne megszámozható és azért közte és az *összes* számok között mégse lehetne tökéletes „egy-egy" megfelelés? Valamennyi számnak együttesen, téri szemlélet alapján, *continuum* a neve. (Folytonosságot, szakadástalanságot jelent.) Kérdésünket tehát igy is fogalmazhatjuk: *az egész számoké után vajjon a continuumé-e az első számosság vagy van-e még más számosság is e kettőé között?* Ez a hires *continuum-probléma.* Még ma is megoldásra vár.

Végesentúli rendszámok: Burali-Forti antinómiája.

Egész más természetü a nehézség a végtelen egész számok kérdésében. Képzeljük el, hogy a már (11. old.) jelzett módon első nekifogásra — a művelet korlátozhatatlanságát véve észbe — rágondolunk valamennyi egész számra. Képezésük határozottsága folytán kész rendet, lezárt halmazt alkotnak, amit most már a maga egészében is szemügyre vehetünk. Vegyük tehát s jelentsük ki, hogy: amint minden közönséges szám után szabad volt, tehát kellett, az éppen rákövetkezőt hozzáfüznünk, épp úgy most is szabad, tehát kötelességünk, a legelső náluk nagyobbat utánuk tenni. Ez az ω, a legelső végtelen egész szám. Ez után jön $\omega + 1$, $\omega + 2$ . . . . és igy tovább egész

$\omega + \omega$-ig, amit most röviden $\omega.2$-vel jelzek; még tovább menve megkapom $\omega.3$, $\omega.4$, ... $\omega.\omega$-t, ez az ω^2 jelet kapja; majd ω^2, ω^3, ω^4 . . . . adja ω^ω, ez tovább ω^{ω^ω}, $\omega^{\omega^{\cdot^{\cdot^{\cdot^\omega}}}}$ jeleket, stb. Ha kifogytam az ω-ból, gondolhatok természetesen más jelre is (például egy picit nagyobbra rajzolt ω-ra). Az igy alakult sorozatban nem érdektelen, hogy minden tagnak van közvetlen követője, de *nincs mindegyiknek* (ω-nak sincs) *közvetlen megelőzője*. Gondoljuk el, hogy az *akármeddig* vitt s igy a teljes sorozatot nézzük, azaz *valamennyi rákövetkezést* vegyünk most már szimbolizáltnak. A rákövetkezés szemléletéből ilymódon fakadó összes lehetséges szimbolizáló aktusok halmazát W-nek hivjuk. Hire nagyon rossz. Képezése eléggé hasonlit ugyan a közönséges egész számok halmazba fogásához, de a különbség is nagy ám a két eset között. Az egész számok a legelső nekilendülés eredményei s igy folytathatók, a W azonban éppen értelmezése szerint már nem folytatható, mert bele akarjuk gondolni az összes lehetséges folytatásokat. Másrészt azonban — s ez a bökkenő — ha van, jobban mondva megvan, kész ez a W, akkor legalább gondolatban, ismét lehet, tehát kell, az összes jelnél, ami csak benne van, nagyobbnak minősitendő jelet képezni. Eszerint tehát ez az uj jel nem lesz benne a W-ben. A W saját értelmezése szerint pedig minden folytatás benne van már, tehát ez az ujnak gondolt is. Benne is van, nincs is. Ez a *Burali-Forti antinómiája. A W-t nem lehet elkészültnek, teljesen meghatározott valaminek venni.* Nemcsak hogy valamennyi tagját nem lehet ténylegesen elkésziteni, hiszen az egész számokat se lehet mind. Hanem már akkor képtelenséghez jutunk, mikor *legalább fogalmilag* az összes tagokat elkészültnek akarjuk venni, össze akarjuk fogni határozott halmazba, lezárt összességbe. Ilyformán ez a halmaz ésszel átgondolhatatlan, kivül esik nemcsak a matematikán, de még a logikán is. Kénytelenek vagyunk még fogalmát is félbenlevőnek, most alakulónak venni, mintha nem tudna egészen megszületni, határozott formát felvenni, hanem folyton *in statu nascendi* lenne. Mikor a matematika legmélyebbre hatol a világ megjelenés-formájának titkaiba, találkozik az alakulás, valamivéválás határozatlanságával. S a gondolatiság legbelsejében tanyát ütő határozatlanság — a se-nem-ilyen, se-nem-olyan — ésszel, matematikával teljességgel megfoghatatlan. A matematika nem meritheti ki a valóságosat, mert az nem pusztán jelen van, nemcsak ténylegesen valaminő — *ennek* az általános formáját taglalja a mennyiség tudománya —, hanem vajúdó történés, határozatlanság, lehetőségek ütköző valósulása (dinamizmus); éppen ez az utóbbi szüli a ténylegeset, természetes tehát, hogy e ténylegesnek elgondolása önmagában be nem fejezhető, le nem zárható.

A matematikai valóságleirás korlátozása.

III. Fejezet.

Függvény. Differenciálhányados.

A függvény fogalma.

Egyetlen szám elszigetelve nem érte mezhető.

Számnak hivott jelszerkezetünk avégett készült, hogy benne végiggondolhassuk a világ általános egység-többség megjelenésformáját. Eddigelé annyira jutottunk, hogy megalkottuk magát a jelrendszert és közben rámutattunk főbb sajátosságaira, valóság-forrásaira, valamint korlátaira is. Most az a kérdés, mit tudunk vele elérni. Fizikai alkalmazásainak méretei óriásiak, egész művelődésünket át meg át ható változásokat okoztak éppen azért, mert általa a valóság megjelenésmódját hüen és teljesen visszaadó szerszám került végre az emberek kezébe Itt csak arra mutatunk rá, miféle önmagában rejlő tulajdonságok teszik ily hatalmassá gépezetünket és hogy miképen kell ezt — előnyei kihasználása végett — továbbfejleszteni, bonyolitani.

A számokat rendesen olyan sorozatnak képzelik, ahol az egyes tagok, a számok, egymástól egész különálló darabok. Nem mondjuk, hogy ebben semmi igazság sincs. Próbáljunk meg mégis például a 8 *jelentésére,* ne pedig papirra festett rajzára vagy hangjeleire gondolni. Nagyságát okvetlen eszembe kell hoznom. Ez azonban azt jelenti, hogy *tudom, melyik számnál nagyobb, melyiknél kisebb, azaz ismerem helyét a teljes végtelen sorozatban.* Többi számtani tulajdonságai is — ami mind a vele való bánásmódban, a vele végrehajtott alapműveletekben nyilvánúl — ugyancsak megköveteli, hogy társaival vonatkozásba hozzuk. A 8 egymagában különös figuránál egyéb nem lehetne. *Egyetlen egész szám jelentése magába zárja az összes egész számokét. Csak együtt gondolhatók.* Nagyon fontos megjegyeznünk itt, hogy az egész számok pompásan végiggondolhatók törtek nélkül. Az egész számokat kénytelenek vagyunk folyton együtt gondolni, a törtszámokat meg csak az egészek *után,* azok segitségével gondolhatjuk. A számok halmazbaverődése nem önkényes tehát, ellenkezőleg, kikerülhetetlen kényszerüség. A mennyiségtan nem tisztán tőlünk függő megállapodások hosszú sora hát, mint sokan, még matematikusok is, képzelik. Logikai tagozódását semmikép meg nem másithatjuk. Csak az elnevezés önkényes és ennek bonyolitásai.

Kölcsönös meghatározódás a valóságban.

Az egész számok — a többiek is — együttesen, kölcsönösen határozzák meg egymást. (Vesd össze az 11-ik lapon csodálatosnak jelzett ténnyel.) A tárgyi világban is, előbb már fejtegettük, az egyén minéműségét az összes többi hozza létre s viszont ez az egyén befoly az összes többi egyén mivoltjának, legtágabb értelemben vett „megjelenés"-ének meghatározásába. Mikor végiggondoljuk a számok logikai összebogozottságát, kölcsönös meghatározódásukat, akkor igazában a tárgyak összeszövődésének, kölcsönös meghatározódásuknak összes lehető formáin megyünk végig. *A mennyiség tudománya a kölcsönös meghatározódás formáinak tudománya.*

A függvény fogalma.

Amint azonban a fizikai világban ezeknek csak egyszerübb alakjaival találkozunk, azonképen a matematika is — már csak azért is, hogy dolgát könnyebbé tegye — a legegyszerübb eseteket veszi előbb szemügyre.

Például. Az egész számok egymás-meghatározása szemlélhető mint a haladás, az egymásra következés legkevésbbé kibontott szimbolizálása. A folyton tartó kiindulás és megérkezés elvezet előbb az 1-től a 2-höz, majd a 2-től a 3-hoz és igy tovább. Itt tehát minden egyes számhoz egyetlen másik rendelődik — az utánajövő. Hogy könnyebben átgondolhassuk az efajta meghatározódásokat, három tagra szakitjuk szét: két számhalmazra — a függetlenül megadhatónak tekintett számokéra és az ezekhez rendeltekére — továbbá a kettőt összekötő, az egymáshoz rendelést, azaz a meghatározást ténylegesen végbevivő műveletre (funkcióra). Ha x valamelyik egész szám, akkor $x+1$ a hozzárendelt szám s az eggyel való megnövelés a művelet, mi átvezet x-től a hozzátartozó számhoz. A két számhalmazra azt mondjuk, hogy egyik *függ* a másiktól, egyik *függvénye* a másiknak.

Igen egyszerü példa még a hatványozás (négyzetre emelés) művelete. Legyen az első halmaz az összes valós számok s rendeljük mindegyikhez önmagának második hatványát (szorozzuk önmagával). Az igy kijövő számok alkotják a másik halmazt. Ha x az elsőből való szám, akkor hozzá x^2 tartozik, például 4 hez 16, a 11-hez 121, stb. Sokszor — különösen ha nem egyes függvényről van szó, hanem a függvények általános tulajdonságairól — a második halmaz számait együttesen y betüvel jelezzük. Az $x^2=y$ egyenlet tehát azt mondja, hogy van két számhalmazunk (x és y) és úgy jutunk el az első halmaz akármelyik számától a másik halmazban neki megfelelő számhoz, hogy az elsőt négyzetre emeljük. Kijelöl tehát egy műveletet, ami megfelelteti egymásnak a két halmazt. Általában $y=f(x)$ jelet használjuk, hol f csak annyit jelent, hogy két számhalmaz között közvetitő műveletre (funkcióra) gondoljunk. Ha részletezni kivánjuk, hogy milyen műveletre, matematikai jelekben vagy a közönséges nyelv szavaival kell ehhez még hozzáfüznünk a gondolandókat.

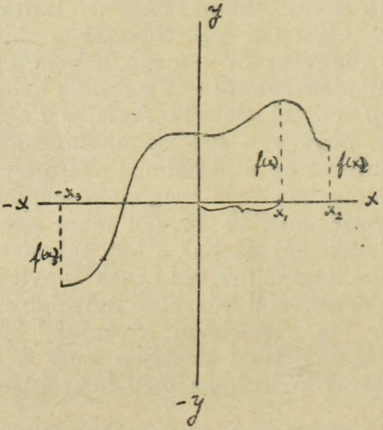
Fizikai példa a függvényre.

A függvény szerepét a természetleirásban legegyszerübben példázza a leejtett kő mozgása. Az első másodpercben megtesz mondjuk a métert. Az első és második másodpercben nem kétannyit, hanem $4a$ méter utat tesz meg. A harmadik másodperc végéig összesen megtesz $9a$-t és igy tovább. Ha a másodpercek számát t (tempus) betüvel, a megtett méterek számát pedig s (spatium) betüvel jelöljük, törvényszerüségünk $s=at^2$ alakot kap. Itt az egyik számhalmaz a másodpercek száma, a másik meg a megtett métereké, *a kettőt egyesitő művelet* pedig —

példánkban a másodpercek száma szorozva önmagával és egy fix számmal — *a természettörvény.*

A függvény térbeli ábrázolása.

A függvénynek a sikban görbe felel meg. Gondoljuk rá ugyanis az x illetve az y értékeket két egymásra merőleges egyenesre. Mérjük fel minden x-hez a hozzá tartozó $f(x)=y$-t, mégpedig felfelé ha ez pozitiv, lefelé ha negativ. Az igy szerkesztett y magasságok végpontjai görbét



8. ábra.

alkotnak s ez a függvény geometriai képe. Világos másrészt, hogy matematikus szemmel nézve minden görbe függvény. Mert hiszen a rajz hozzárendeli minden x-hez a görbe magasságát abban a pontban. (8. ábra.)

Algebra és komplex szám.

Gyökvonás.

Forditsuk meg a hatványozás műveletét. *Az y is meghatározza az x-et.* Azaz, ha megmondják a leeső test megtett útját, meg tudom mondani mennyi idő kellett ehhez. Ha például $y=25$, akkor olyan keresendő ki az x-ek közül, hogy $x^2=25$ legyen. Ilyen szám van kettő: az 5 és a -5. Fizikai eseteknél mindig el tudom dönteni melyiket kerestem a kettő közül, a matematikus pedig folyton az összes lehetőségre ügyel s igy egyszerűen tanulmányozás alá veszi a meghatározódásnak azt a módját is, mikor egy művelet (itt a hatványozás eredményéből visszamenni az alapszámra: *gyökvonás)* több számhoz is vezet.

Elég nehéznek látszik megoldani $x^2=24$ egyenletet. Ha valamelyik pozitiv x kielégiti, akkor ugyanez az x, negativ előjellel véve, szintén eleget tesz neki, elég tehát pozitiv megoldó számot keresni. Valahol 4 és 5 között van, azaz tizedestört alakja 4 egésszel kezdődik. Füzzünk most a 4 egészhez tizedrészeket s számitsuk ki az igy kapott 9 szám (4·1, 4·2, 4·3, 4·4, 4·5, 4·6, 4·7, 4·8, 4·9) négyzetét. Látjuk igy, hogy $4{\cdot}8^2<24$, $4{\cdot}9^2>24$. Keresett számunk első tizedese 8. Igy tovább haladva kapjuk 4, 4·8, 4·89, ... növő sorozatot; ez, a sorba kijövő tizedesekkel, meghatároz egy, *A*, végtelen tizedestörtet. Az *A* irracionális szám szorzata önmagával éppen 24: ugyanis 4.4, 4·8.4·8, 4·89. 4·89 ...... sorozat határértéke — s értelme szerint ez az irracionális számunk négyzete — tényleg 24, mert a szerkesztéséből kifolyólag mindig csak távolabbi tizedesben különbözik tőle. Matematikus nyelven: 24 második gyöke *A*. Ha tehát az x és y halmazokba irracionális számokat is beleértünk — ezt pedig a fentiek szerint meg kell tennünk —, az y tényleg határoz meg x-et (példánkban pontosan kettőt).

Pozitiv számok négyzete, de negativoké is, csak pozitiv lehet; negativ y-unk tehát nincs. Köztük van azonban minden pozitiv szám. Ha tehát — mint a fizikai példánkban (45. lap) — csak pozitiv x-eket (ott t-ket) nézünk, akkor az y-ok halmaza épp azokból a számokból áll, mint az x-eké (tudniillik az összes pozitiv számokból). Az $y=2x$ függvényben is az összes pozitiv x-ekhez az összes pozitiv számok jönnek ki y-úl. A függvényértékek összessége nem jellemzi tehát, nem határozza meg a függvényt: *a közvetitőművelet alkotja a függvényt, nem a függvényértékek halmaza.*

Az algebra feladata.

Véges számú különböző hatványfüggvény összeadásából áll elő a legegyszerübb függvénycsalád:

$$a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \ldots + a_n x^n,$$

mit többtagúaknak, *polinómok*nak (algebrai egész függvényeknek) hivunk. Az a_0, a_1, a_2, stb. fix számok: *együtthatók* (coefficiensek). Ezeket kell számbelileg megadni, úgy jutunk el a függvénycsalád valamelyik tagjához. *Az algebra ennek a függvénycsaládnak a tanulmányozása.*

Ha megadják az x-et, könnyen ki tudjuk számitani a hozzátartozó függvényértéket: behelyettesitjük, szorzunk s összeadunk. Egyik főfeladata az algebrának, megfelelni a forditott kérdésre. Milyen x-nél (vagy x-eknél) lesz a függvény adott (c) értékű? Keresendők az $a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \ldots + a_n x^n = c$, azaz $a_0 - c + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \ldots + a_n x^n = 0$ egyenlet gyökei. Negyedfokú egyenletnél gyökvonással (a hatványozás forditottjával) mindig elintézhetjük a dolgot, hanem ha 4-nél nagyobb hatványok is vannak, $(n>4)$, általában nemcsak hogy nem tudunk, de nem is lehet vele célt érni (*Abel* tétele). Némelyik egyenletnél igen s az ilyen egyenlet kijelölése az algebra egyik érdekes feladata.

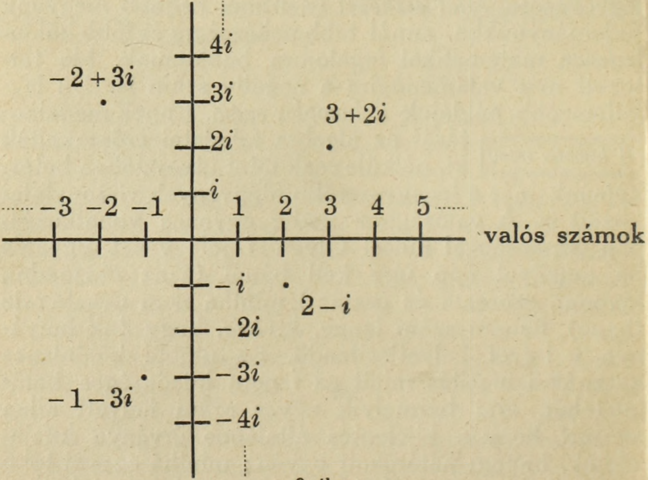
A mennyiségtani problémák önálló alakulása.

Ebből a pár megjegyzésből is érezhető már, mennyire sajátmagából szövődik itt tovább a matematika kérdéshálózata. Felesleges többé a valóságra visszamenni. A tőle kapott feladat, eszünk járásának megfelelően, szertebomlott s ugyancsak erőlködnünk kell, hogy az egyes szálak menetét és kapcsolataikat követhessük. Emiatt könnyen csak erre az észmunkára gondolunk, szinte azt hisszük, az egész feladat csak bontókötő észtorna, szellemes játék. S tényleg ennek a szétszedő és összerakó tevékenységnek vannak saját nehézségei s igy, azok legyőzésére, *saját eszközei* is. Minél beljebb megyünk tudományunkba, annál több nehézségre és több különlegesen matematikai fogalomra bukkanunk. Ide tartozott már valamennyire a negativ szám is. De legjellemzőbb példájuk a *komplex szám*. Ennek megalkotását az algebra feladatai erőszakolták ki, nélküle csak mint utvesztőben botorkálnánk már a legegyszerübb függvények viszonylatai között is. A valósághoz pedig egyenes vonatkozásban éppenséggel nincs. Olyan i jelt vezet ugyanis be, amellyel épp ugy kell bánni (azaz összeadni, kivonni, szorozni és osztani), mintha nem puszta rajz (hang), hanem szám lenne, kivéve, hogy 2-ik hatványa -1-gyel helyettesitendő. Ez utóbbi különleges használati utasitás miatt az i nem közönséges betüjel tehát, ami bármelyik egyes szám helyett állna avégett, hogy a kijelentés általános érvénye kifejeződjék, hanem határozott egyén; mintha eggyel több jelünk lenne. Az adott szabály szerint a többihez keverve mindig $a+bi$ alakhoz jutunk, hol a és b valós számok, mert i magasabb hatványai is ($i^2=-1$ s igy $i^3=i^2.i=-i$, $i^4=1$, stb. képletek folytán) vagy közönséges valós számot vagy valahányszor i-t adnak. Az ilyen „i-vel kevert" jelek között a régiek is ott vannak, amikor tudniillik az i szorzója 0. A megállapodás szerint $a+0i$-t nemcsak, hogy a-nak irhatom, de még hozzá — miután a különleges $i^2=-1$

A komplex szám.

szabály nem szerepelhet — az $a+0i$ jelhalmaz kezelési módja összeesik a valós számok kezelési módjával. Ezért tekinthetem az uj, $a+bi$, jeleket a valós számok kibővitésének, általánositásának. Ezek a *komplex számok.*

A sikon ábrázolhatjuk őket. Egyik egyenesre rágondoljuk az a (azaz $a+0.i$) valós számokat. Az $a+bi$ helye az a felett van b magasságban. Lásd 9. ábrán.



9. ábra.

A komplex szám fontossága.

Az $x^2=-4$ egyenletnek nincs valós gyöke, mert valós szám második hatványa nem lehet negativ. A $2i$ és a $-2i$ azonban eleget tesznek neki. Általában $a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3+\ldots+a_nx^n=0$ n-ed fokú egyenletnek mindig n gyöke van, ha a komplexeket is hozzávesszük (a többszörösöket megfelelően többször véve). Ez az *algebra alaptétele.* Sok más ilyen egyszerü és általános tételre jutunk rá a komplex szám révén. Ő teszi lehetővé számunkra a betekintést a polinómok szerkezetébe. Főereje azonban abban rejlik, hogy a legbonyolultabb függvények vizsgálatában is segitségünkre van. A geometriában is szerephez jutott, sőt néhol a fizikai elméletekben sem nélkülözhető.

Komplex számok halmazának határértéke.

Jegyezzük meg még róla, hogyan értelmezzük határértékét. Akkor mondjuk, hogy a

$$a_1 + b_1 i,\ a_2 + b_2 i,\ a_3 + b_3 i, \ldots, a_n + b_n i, \ldots$$

sorozatnak van limes-e, ha külön az a-k és külön a b-k halmazának van. És pedig ha $\lim\limits_{n=\infty} a_n = a$ és $\lim\limits_{n=\infty} b_n = b$ azt mondjuk, hogy komplex számhalmazunk limes-e: $a + bi$, jelekben: $\lim\limits_{n=\infty}(a_n + b_n i) = a + bi$

Kezelési törvények.

A mennyiségtan fogalomrendszerét mélyen jellemzi az a tény, hogy nem lehet még tovább általánositani a számfogalmat anélkül, hogy e fogalom leglényegesebb sajátosságai el ne tünjenek. A komplex számokat a valósakból úgy képeztük, hogy vettünk két ($e = 1$ és i) egységet s megalkottuk a, b valós számokkal az $a \,.\, e + b \,.\, i$ alakzatokat azzal a kikötéssel, hogy harmadik egység már nincs, tehát $e \,.\, e$, $e \,.\, i$, valamint $i \,.\, i$ megint $a + bi$ alakúak ($e \,.\, e = 1$, $e \,.\, i = i$, $i \,.\, i = -1$). Legfőbb sajátosságuk, ami a velök való számolást lehetővé teszi az, hogyha A, B, C ilyen komplex számok, akkor

$A + B = B + A$, $A \,.\, B = B \,.\, A$ (kommutativ törvény).

$(A + B) + C = A + (B + C)$, $(A \,.\, B) \,.\, C = A \,.\, (B \,.\, C)$ (assiociativ törvény).

$A \,.\, (B + C) = A\,B + A\,C$ (distributiv törvény).

Azaz épp ugy kell velök számolni, mint az egész, tört vagy irracionális számokkal.

Többegységű komplex számok.

Arra lehetne gondolnunk, hogy tovább menve vegyünk elő n egységet $i_1, i_2, \ldots i_n$-et és képezzük

$$a_1 i_1 + a_2 i_2 + \ldots + a_n i_n$$

alakzatot, ahol az a–k általában komplex számok. Természetesen az i egységek szorzataira: $i_1 . i_1$, $i_1 . i_2$ stb. kifejezésekre, szabályt kell adnunk, miáltal ezek is $a_1 i_1 + a_2 i_2 + \ldots + a_n i_n$ alakba legyenek irhatók (különben $i_1 . i_1$, $i_1 . i_2$ stb. ujabb független egységeket alkotnának).

Bármilyenek legyenek is az egységszorzatokra kijelölt szabályok, ha uj, n egységű számainktól megköveteljük, hogy eleget tegyenek a három kezelési törvénynek, akkor nem jutunk uj számokhoz. Bebizonyitható ugyanis (*Hankel*-tétel), hogy ily körülmények között minden uj egységnek gondolt i egyenlő valamelyik közönséges komplex számmal. Csak úgy juthatunk uj egységekhez, ha feladjuk valamelyik kezelési szabályt.

Quaterniók és vektoranalizis.

Például, ha feladjuk $A . B = B . A$ szabályt, lehet négy egységű uj számokhoz jutni, a *Hamilton*-féle *quaterniók*-hoz és másokhoz nem (*Frobenius*-tétel). Ezekből a quaterniókból készült — *Grassmann* Ausdehnungslehre-je nyomán — a *vektoranalizis,* a fizika legmegfelelőbb nyelve. A matematika legelvontabb spekulációiból eredt a legkonkrétabb természettudománynak, a fizikának természetes kifejező eszköze.

Végtelen sor. Analitikai függvény.

Egyszerü függvényosztályok.

Eddigi függvényeink összeadás és szorzás, illetve hatványozás útján állottak elő. Ezek voltak a műveletek, melyeknek bizonyos egymásra halmozása vezetett át az x-ből az y-ba. A szereplő műveletek egyszerüsége és véges száma tette lehetővé, hogy az algebra csaknem ideális tökéletességgel végezhette el feladatát. Mihelyt az x és y-t bonyolultabb műveletek kötik össze, olyan nehézségekkel kerülünk szembe, amelyek miatt lehetetlen az algebráéhoz hasonló befejezettséget elérnünk. Kijutunk a problemák nyilt tengerére. Elkezdődik ez már a hatványozás megforditásánál. A hatványozásnál három szám szerepel: alap, (hatvány)-kitevő és a hatványozás eredménye, hatványmennyiség. Ha az alap és kitevő van adva, például 5^3, könnyü eljutni a harmadikhoz (a hatványmennyiséghez). Tudniillik hatványozok. Ha az eredmény van adva és a kitevő, már nehezebb a harmadik, az alap kiszámitása: gyököt kell vonnunk. Például 125 és 3-hoz az 5 tartozik, mert $5 . 5 . 5$ tényleg 125. Formulában: $125^{\frac{1}{3}}=5$. De 124 és 3, azaz $124^{\frac{1}{3}}$ esetében az eljárás már hosszadalmassá válik. A hatványozásnak ebből a megforditásából erednek $x^{\frac{1}{2}}$, $x^{\frac{1}{3}}$, $x^{\frac{2}{3}}$, stb. függvények, általában x^a, hol a valamelyik valós szám. Ezek a *gyökfüggvények*. $a^{\frac{2}{3}}$ értelme: a^2-ból 3-ik gyök vonandó, vagy $a^{\frac{1}{3}}$ (a harmadik gyöke) önmagával szorzandó. Ily módon törtszámu kitevőnek is van értelme, sőt végtelen sok ilyennek a határértékét véve, irracionálisnak is.

Utolsó lehetséges eset, hogy az eredmény van adva és az alap. Kérdés, mi a hatványkitevő (exponens), azaz mekkora hatványra kell emelni az alapot (hányszor kell önmagával szorozni), hogy kijöjjön az eredmény. Ez nagyon bonyolult már s igy alapúl kiválasztanak egy bizonyos számot, például a tizet s igy vetik fel a kérdést: minő hatványra kell emelni a 10-et, hogy kijöjjön a megadott szám? A kiadódó kitevő — ami rendesen nem nagy — az adott szám 10-alapú logaritmusa; 1000-é például 3, mert $10^x=1000$ egyenletnek megoldása $x=3$. A most felirt egyenlet bal oldala uj fajtájú, *exponenciális*, függvényt ad, a^x-et, hol az x-et sem hatványozni nem kell, sem pedig belőle gyököt vonni; ő csak kijelöli, hányszor kell szorzóúl venni az alapot s esetleg hányadik gyököt kell venni az igy kapott szorzatból. *Log.* x jelöli a sorra vett pozitiv (x) számokhoz tartozó kitevőket, logaritmusokat. Például: Log. 1000 = 3, Log. 100 = 2, Log. 10 = 1. Az x^a, a^x és *log.* x és az ezekből formált függvények alkotják a második nagy függvényosztályt, az „elemi" függvényekét, mik egyszerüségben mindjárt a polinómok után jönnek.

A végtelen sor. Láttuk, milyen nehéz megtalálni adott számhoz a logaritmust, sőt adott szám magasabb gyökeit is. Függvénytulajdonságaik tanulmányozása is azt követeli, hogy megpróbáljuk az átmenetet, például a számból a logaritmusához, lehetőleg összeadásra és szorzásra (hatványozásra), illetve ezek egymásra halmozására visszavezetni. Ekkor markoljuk meg igazán a függvényt, mert összealkotását nyomról-nyomra követhetjük. Erre szolgál a *végtelen sor,* a matematikai kutatás legfontosabb és legjellemzőbb eszköze. Láttuk (17. oldal), hogy bármelyik vonaldarab folytonos felezés és összeadással végtelen sok kisebb vonaldarab végösszegeként fogható fel. Pontosabban

$$a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + \ldots + a_n + \ldots$$

végtelen sok kijelölt összeadás-művelet eredményéül a

a_1, $a_1 + a_2$, $a_1 + a_2 + a_3$, $a_1 + a_2 + a_3 + a_4, \ldots$, $a_1 + a_2 + {}$ $+ \ldots + a_n, \ldots$ sorozat határértékét tekintjük. Ha tehát ennek nincs határértéke, akkor az előbbi sor végösszegének semmi értelme sincs, a sorral nem tudunk mit kezdeni: *divergensnek,* széttartónak mondjuk. Ha van, akkor ez a határérték a *konvergensnek,* összetartónak mondott sor összege. (*Sor* alatt ezentúl csakis ilyen végtelen összeadás-sorozatot fogunk érteni, hol tehát a tagok között + (vagy —) jel van. *Sorozat* marad egymásután következő, vesszővel elválasztott számok halmaza.)

Végtelen függvénysor. Ha akármilyen $f(x)$ függvénybe x helyére határozott számot, a-t teszek, $f(a)$ már egyetlen számot jelöl, azt tudniillik, amit a vizsgált függvény rendel a-hoz. A végtelen sok különböző függvényből álló

$$f_1(x)+f_2(x)+f_3(x)+f_4(x)+\ldots+f_n(x)+\ldots$$

sornak értelme tehát az, hogy minden egyes a számhoz, ha ugyan

$$f_1(a)+f_2(a)+f_3(a)+f_4(a)+\ldots+f_n(a)+\ldots$$

sor konvergens, rendel — végtelen sok összeadás végösszegeként — egyetlen számot: a most felirt sor összegét. Gyakran előfordul, hogy függvénysorunk egész számköz minden egyes számára konvergens. Ekkor a sor összege, ebben a számközben, függvényt alkot, az úgynevezett összegfüggvényt. Ilyenkor tehát a sor tagjai is függvények és a sor összege is függvény: mondjuk $F(x)$. Jelekben

$$F(x)=\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$$

A Σ az egymást követő összeadásokat jelzi (summa). Az alá-fölé irt jelek pedig azt, hogy 1-től végig kell futni az összes egész számokon. Például

$$\sum_{n=1}^{5} n\,x^n = x+2\,x^2+3\,x^3+4\,x^4+5\,x^5$$

Hatványsor. A legegyszerübb végtelen függvénysort úgy kapjuk, ha a polinómokat — azaz hatványösszegeket — folytatjuk a végtelenig:

$$a_0+a_1\,x+a_2\,x^2+a_3\,x^3+a_4\,x^4+\ldots+a_n\,x^n+\ldots \qquad (t)$$

Ezek ugyanis tisztára összeadás, szorzás meg még határérték-kiszámitás műveletekből vannak összerakva. Rendkivül fontosak ezek a *hatványsorok*, mert kiderült, hogy akármelyik ismert, de komplikált függvényt szedjük is elő, lehet olyan a-számokat, együtthatókat, megállapitani, hogy az ezekkel felirt (t) sor összege minden x-re — már ahol van összege, azaz amelyik x-nél a sor konvergens — egyenlő legyen az előszedett függvény éppen ahhoz az x-hez tartozó értékével. A hatványsor *előállitja* azt a függvényt. A nevezetes ebben az, hogy a konvergens végtelen sorban, mivel véges összegnek kell kijönni, elég messze elmenve az ezután jövő tagok összege már nagyon kicsiny s igy igazában — ha a sor végösszegét csak megközelitőleg akarjuk kiszámitani — elég a sor elejéről több-kevesebb tagot összeadni. Az előállitott függvény értékét bárhol csupán *véges számú* összeadással és szorzással oly pontosságig kiszámithatjuk, ahogy csak akarjuk. A függvény kezünkbe került. Egész pontos kiszámitásra gondolva úgy is fogalmazhatjuk sikerünket, hogy a négy alapművelethez csak a limes kitalálását kell még ötödik műveletként csatolnunk, ezzel pótolhatunk gyökvonást, logaritmuskiszámitást stb., általában minden műveletet, ami a négy elsőtől különbözik.

Taylor-sor.

A *logaritmus* esetében, mint sok más függvénynél is, kényelmesebb x helyett kissé általánosabban az $x-c$ hatványai szerint haladó

$$b_0+b_1(x-c)+b_2(x-c)^2+b_3(x-c)^3+\ldots+b_n(x-c)^n+\ldots \quad (T)$$

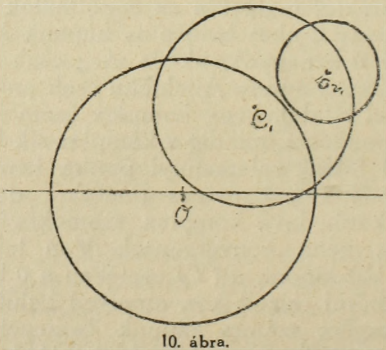
sort megalkotni, hol c adott szám. Bármeddig vigyem is az összeadást, itt is mindig polinómot kapok és bármilyen $x=a$ számra keresem a sor végösszegét, növő hatványokat kell szoroznom és összeadnom. Ez is hatványsor tehát. *Taylor-sornak* is hivjuk, mert ilyen általánosan *Taylor*, angol matematikus vezette be.

Arra is nélkülözhetetlenek, hogy komplex számokhoz is rendelhessünk függvény-értéket. Például ha a *logaritmust* előállitó sorban x helyébe komplex számot teszünk, a sor sok esetben konvergens lesz; ha negativ számot, akkor is. Igy lesz negativ és komplex számoknak is logaritmusa. S ez a folytatása a függvénynek nemcsak játék, mert enélkül nem birtak áttekintést nyerni még a gyökfüggvények legegyszerübb eseteire nézve sem. A végtelen sor és komplex szám együttes és rendszeres használata vetett véget a XVIII. század végtelen vitáinak s alapozta meg ezáltal a mai, fenékig átgondolható, precíz matematikát.

Konvergencia-kör. A legfontosabb, mondhatnánk életbevágó, kérdés a *Taylor*-sorra nézve az, hogy hol, melyik x-ekre konvergens. Ez természetesen az együtthatóktól függ. Ha az együtthatók kicsinyek, még elég nagy x-eket betéve is kapunk konvergens sort. Ha az a-k nagyok, akkor meg csak kis x-eket betéve lesz konvergens. Általában csak annyit mondhatunk (*Ábel* tétele), hogy komplex szám behelyettesitésére is gondolva, mindig a komplex sik valamelyik körén belül fekvő valamennyi pontra konvergensek, a rajta kivül fekvő összes pontokra divergensek. Magán a körön levő komplex számokra nagyrészt divergensek, néha konvergensek. Van tehát a (t) esetében a kezdőpont, a (T) esetében a c körül, mint középpont körül rajzolt kör, amelyen belül eső valamennyi komplex számra kapunk összeget, a kivül esőkre pedig egyikre sem. *Taylor-sorunk konvergencia-tartománya mindig köralakú.* A legtöbb függvénynek azonban nemcsak egyetlen kör belsejéből vett x-ekre van értéke. Ebből a szempontból nézve a *Taylor*-sor háromféle eshetőséget ad: megesik először, hogy x helyébe bármelyik komplex számot téve is, mindig konvergens; konvergencia tartománya az egész komplex sik, a függvényt minden x-re előállitja. Másodszor, hogy mindenütt divergens (kivéve $x=0$, illetve $x=c$ esetet, ahol csak konvergens lehet, mert egyetlen tagból, a_0-ból áll). Ekkor sorunk egyetlen x-hez rendel egyetlen függvényértéket s igy igazában nem ad függvényt, a sor semmire sem jó. Harmadszor, néhol konvergens, néhol nem.

Analitikai folytatás.

Ekkor a fentiek szerint van egy kör, amelyen belül e sor összege pontosan meghatároz egy függvényt. Legyen c_1 e körön belül eső pont. A most meghatározott függvényt — mint általában akármilyen függvényt — a (T) sor alakjában irom fel. (Az uj alak, azaz a b-k meghatározása igen bonyolult.) Konvergencia tartománya köralakú és *megesik, hogy az uj kör* (c_1 körül) *túlmegy az elsőn.* (10.



10. ábra.

ábra.) Uj sorunk az első kör belsejébe eső részében ugyanazt adja, mint ugyanott az első sor; ez jelenti azt, hogy ismét az első függvényt állitottuk elő másik sorral. Kivül azonban az első sor semmit sem adott, hisz ott divergens volt, az uj sor pedig ad s *ezáltal tovább folytatja a függvény meghatározását.* Ha össze-veszem valamennyi ilyen úgynevezett *analitikai folytatását* az előbb csak az első körben meghatározott függvényemnek, kapok eljárást, amivel a komplex sik jó részén (esetleg egy-két pont hiján az egész komplex síkon) fekvő komplex számokhoz tudok kiszámitani függvényértéket. *Ez az analitikai függvény.*

Függvény és formula.

Szétválik itt a matematikai formula és a függvény fogalma. Azelőtt úgy értelmezték ugyanis a függvényt, hogy meg kell adni egy bizonyos képletet, formulát — ilyenek a polinómok vagy például: $\sqrt{x+2}$, $\log(3x-1)$ — s azokra az x-ekre lesz értelme a függvénynek, amelyekre a képlet határozott számot ad. Ez nagyon természetesnek is hangzik: egy formula, egy függvény; egy függvény, egy formula. A *Taylorsornál* azonban *egy* formula, tudniillik az első *Taylorsor,* csak részben állitja elő a függvényt. Teljes előállitását általában *végtelen sok Taylorsor* meriti csak ki. Itten tehát *egy* függvény és *több* (sőt végtelen sok) formula van. Más a függvény és más annak matematikai, formulás előállitása. Felszabadúl a függvényfogalom. Igazában rendelhetek bárminő számot bármelyik x-hez, csak függvényt kapok. Más és sokszor igen nehéz kérdés, milyen formulával vagy formulasereggel juthatok el az x-től a hozzá rendelt számhoz. *Cantor* bebizonyitotta, hogy az így értett *függvények halmazát nem lehet a valós számokkal sem megszámolni,* ezeknél többen vannak, *számosságuk ujabb, 3-ik fokozatot ad.*

A függvénytan megteremtői.

Az analitikai függvények elmélete, azaz általános tulajdonságaik megállapitása és egyes csoportjaik tüzetes tanulmányozása foglalkoztatta leginkább a matematikusokat a XIX. század folyamán. Ez az elmélet a legsajátságosabb és leghatalmasabb alkotása a mai matematikának. Oly problémasereggé nyilott széjjel, amin még manapság is nagyban dolgoznak a legerősebb matematikusok. Megalapitója a francia *Cauchy* (mint az algebráé *Gauss*), főkiépitői pedig: *Abel*, *Riemann*, *Weierstrass*, *Poincaré*, *E. Picard*, *Hadamard* stb.

Derivált függvény. Primitiv függvény.

A differenciál hányados.

Minden függvényvizsgálat fő szerszáma a *differenciál-hányados* fogalma. Az x-et változtatva a függvény értéke is változik. Milyen arányban változik a függvény az x-hez képest? Az a és $a+h$ között a függvény $f(a+h)-f(a)$-val változik meg (az uj értékből levontuk a régit). Megnézzük hány x-változás (h) kerül ki a függvényváltozásból, azaz képezzük

$$\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

hányadost. Más h-t véve azonban, más lesz számláló is, nevező is, s igy általában hányadosuk is. Pontos mértéket a függvény változására az a pont körül csak úgy adhatok, ha mindig kisebb h-t veszek s megkeresem az igy kapott végtelen sok (átlag) mérték határértékét. Alkossuk tehát meg

$$\frac{f(a+h_1)-f(a)}{h_1}, \quad \frac{f(a+h_2)-f(a)}{h_2},$$

$$\frac{f(a+h_3)-f(a)}{h_3}, \ldots, \frac{f(a+h_n)-f(a)}{h_n}, \ldots$$

sorozatot. Ha abból az úgyis elengedhetetlen feltételből, hogy $\lim\limits_{n=\infty} h_n = 0$ már következik, hogy a sorozatnak van határértéke, A, ezt a határértéket a vizsgált függvény *differenciál-hányadosának* mondjuk az a helyen. Ha megesik, hogy sorozatunknak nincs határértéke, habár $\lim\limits_{n=\infty} h_n = 0$, akkor azt mondjuk, hogy függvényünknek az a helyen nincs differenciál-hányadosa. Differenciál-hányados = differencia-hányadosok limes-e. Innen a neve. Jele a differencia (különbség, változás) szó kezdőbetűjéből ered olymódon, hogy deltával ($\triangle$) jelöljük a véges változásokat, például: $f(a+h)-f(a)=\triangle f$, $h=\triangle x$ és d-vel a differenciák hányadosainak limes-ét.

$$\lim_{n=\infty} \frac{\triangle f}{\triangle x}=\frac{df}{dx}$$

Például: ha a differenciálandó függvény x^2, keresendő $\frac{(a+h_n)^2-a^2}{h_n}=\frac{a^2+2ah_n+h_n^2-a^2}{h_n}=2a+h_n$ limes-e mikor h_n a 0 felé tart, azaz x^2 differenciáldányadosa az a helyen $2a$.

Derivált függvény.

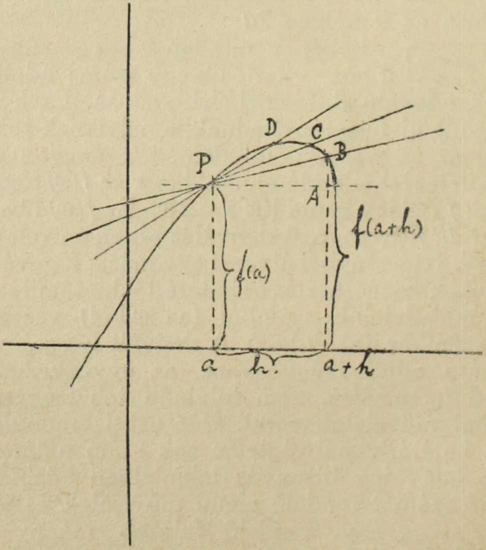
Ilyképen minden x-hez — úgy, mint a-hoz — tartozik egy szám: adott függvényünk odavaló differenciálhányadosa. Ezek a számok együtt uj függvényt adnak, amelyiknek sok köze van ugyan az elsőhöz, mindamellett nagyon más is lehet. Kifejezést adandó annak, hogy az $f(x)$ függvényből ered, $f'(x)$ jelt kapja $[(x^2)'=2x]$. Ez $f(x)$ függvénynek *derivált függvénye.* A deriválás olyan művelet tehát, ami egyik függvényből átvezet egy másik függvényhez, még pedig kivonás, osztás és határértékkiszámitás útján. Eddigi műveleteink számból (az x-ből) vezettek át másik számhoz (az y-hoz). A derivált függvény meghatározása adott függvényhez, az úgynevezett deriválás, differenciálás, nem folytatja tehát egyszerűen az eddigi műveletek sorát. Bár azt is mondhatnók, hogy a határértéknél végtelen sok szám határoz meg egyet s hogy igy bizonyos tekintetben közbül áll a számhoz számot rendelő elemi műveletek és a függvényhez függvényt rendelő felsőbb mennyiségtani műveletek között.

Primitiv függvény.

A derivált függvény meghatározásának forditottja *a primitiv függvény felkeresése*, azé a függvényé, amelynek éppen az adott függvény a deriváltja. Például $2x$ függvény primitiv függvénye x^2. Legyen ez a primitiv függvény $F(x)$, ekkor $F'(x)$ nem egyéb, mint az adott $f(x)$ függvény: $F'(x) = f(x)$. Magának az $f(x)$ függvénynek a deriváltja $f'(x)$, a $F(x)$-nek már *második* deriváltja.

A differenciál-hányados geometriai jelentése.

A derivált és primitiv függvény geometriai jelentése nagyon nevezetes. Rajzoljuk le $f(x)$-et. A 11. ábrán $f(a+h) - f(a)$ az AB távolság. Az x változása AP-vel egyenlő, tehát



11. ábra.

$$\frac{f(a+h)-f(a)}{h}=\frac{AB}{AP}\ (=tg\alpha)$$

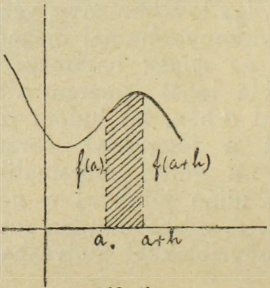
Ez a viszonyszám meghatározza a P és B pontokon átmenő szelőt. Ugyanis, ha megadják e viszony nagyságát, például a $\frac{2}{3}$-ot, akkor rajzolok egy derékszöget, mint A-nál van, alapjára felmérek 3 akármilyen egységet, a merőleges szárra 2-t. A kapott pontokat összekötő egyenes párhuzamos lesz a vizsgált szelővel. Ha tehát P ponton át a nyert egyeneshez párhúzamost húzok, megkapom a szelőt. Válasszunk most kisebb h-t, ehhez másik szelő tartozik másik viszonyszámmal. Igy továbbmenve, végtelen sok szelőt kapok egy-egy viszonyszámmal megadva. A viszonyszámok limes-e az *érintőt* határozza meg, a szelők határhelyzetét. Ha tehát ismerem a függvény differenciálhányadosát a-ban, fel tudom rajzolni e pontban az érintőt a függvényt ábrázoló görbéhez. Lényeges, hogy a görbe matematikai formájából tisztán számitás útján jutok el a görbe geometriai tulajdonságaihoz. A görbe minden szemléleti sajátossága számtani műveletekkel kiolvasható matematikai formulájából.

Az integrál geometriai jelentése.

A primitiv vagy *integrál* függvény legközvetlenebb geometriai alkalmazása a következő: Valamelyik egyszersmindenkorra megadott függvényértéktől, illetve magasságvonaltól kezdődőleg a görbe és az x tengely között mindegyik függvényérték lezár bizonyos nagyságú területet. (A terület mérőszámát görbe határok esetében a beleirt négyszögek területösszegege határozza meg, ha a négyszögelést mindig kisebb oldalakkal végezzük s a határra megyünk.) Más x-et véve, más területet kapunk. A terület tehát x függvénye: $T(x)$. Határozzuk meg derivált függvényét. $T(a+h)-T(a)$

nem egyéb, mint az a és $a+h$ közzé eső bevonalkázott terület (12. ábra); ez pedig nagyon kevéssel, a fenti, háromszöghöz hasonló területtel, különbözik $h.f(a)$-tól. A különbség köztük kisebb mint h szorozva az a és $a+h$ közé eső függvényértékek legnagyobb különbségével.

Mikor tehát a $T(a+h) - T(a)$ különbséget osztjuk h-val, hogy megkapjuk a differenciálhányadost, $f(a)$-tól nagyon kicsit különböző hányadost kapunk. Mikor pedig h-t kisebb kisebbnek vesszük, hányadosunk $f(a)$ felé közeledik s igy tényleg, $T(x)$ differenciálhányadosa a-nál éppen a görbe magasságával, $f(a)$-val egyenlő.



12. ábra.

S ugyanigy valamennyi x pontban: $T'(x) = f(x)$. Ha tehát adott görbe formulájához megkeresem a primitiv függvényt, fontos geometriai kérdést is intézek el, tudniillik meg tudom mondani, hogy bármelyik x-ig menve, mekkora terület van a görbe és az x tengely között. Egy csapásra elvégeztem végtelen sok területszámitást.

Differenciál- és integrálegyenlet.

Függvény-egyenlet

A felsőbb mennyiségtan egyik fő jellemzője, amint láttuk, hogy a „számhoz szám" viszony helyett a „függvényhez függvény" kapcsolatot vizsgálja. Például a deriválás művelete minden függvényhez rendel másik függvényt olyformán, mint a hatványozás (x^2) minden számhoz rendelt másik számot. Az integrálás szintén. „Függvényhez függvényt" rendelő művelet van sok. Például $f(x).f(x)$ szorzás. Fontosságuk rendkivüli, mert a természet ily függvénykapcsolatok hálózata. A nagy, átfogó természettörvények pedig feltételeket szabnak ki arra nézve, hogy a vizsgált jelenségkörben miféle függvénykapcsolatok lehetségesek és mik nem.

A matematika megvizsgálja tehát elvben az összes lehető megszoritásokat, amit csak függvényre ki lehet gondolni. Például: van-e olyan függvény, esetleg több is, amelyik minden a és minden b értékre eleget tesz $f(a+b)=f(a)+f(b)$ *függvényegyenletnek*? (Azért *minden a és minden b* értékre, mert maga a *függvény* köteles eleget tenni a feltételeknek.) A $c.x$ függvények mind ilyenek, hol c akármelyik szám s más ilyen nincs is. Másik példa: $f(a.b)=f(a)+f(b)$ egyenlet, aminek megoldása a *log* x, mert szorzat, $a.b$, logaritmusa tényleg a tényezők logaritmusainak összege. Bonyolultabb függvényegyenlet

$$a_0(x)+a_1(x)f(x)+a_2(x)[f(x)]^2+a_3(x)[f(x)]^3$$
$$+.....+a_n(x)[f(x)]^n=0$$

ahol $a_0(x), a_1(x), \ldots, a_n(x)$ megadott függvényegyütthatók, $f(x)$ pedig az ismeretlen függvény helyett áll, ami majd eleget tesz az egyenletnek *bármilyen* x-nél. Az irás megkönnyitése végett itt már célszerü az ugyis ismeretlen függvényt jelző $f(x)$ jel helyett y-t irni. Az ilyfajtáju egyenletet kielégitő függvények képezik az *algebrai függvények* csoportját. Elméletük

— mi nem tévesztendő össze az algebrával — jól ki van épitve.

Differenciál- és integrálegyenletek.

Legfontosabbak azonban azok a függvényegyenletek (*differenciál-* és *integrálegyenletek*), hol a keresett függvény deriváltja, esetleg integrálja is benn van. Például olyan $f(x)$ függvény keresendő, hogy minden x-re $xy'=2y$ legyen. Ilyen például x^2, általában $c.x^2$, hol c valamelyik valós vagy komplex szám. Az x^2 függvény eleget tesz még $yy''=xy'$ egyenletnek is. Ha se y, se előforduló deriváltjai nincsenek hatványra emelve (azaz első hatványon vannak) se egymást nem szorozzák, a differenciálegyenlet lineáris. Első példánk ilyen, a második nem. Az y és deriváltjai mellett levő függvényegyütthatók x-nek tetszőleges adott függvényei.

Láttuk, egyetlen függvény- (differenciál-) egyenletnek végtelen sok függvény tehet eleget. Minden ilyen egyenlet kikerekit a függvények közül egy családot. A főkérdés következtetni az adott függvényegyütthatók tulajdonságaiból és az egyenlet formájából a neki eleget tevő függvények tulajdonságaira. Egy-egy ilyen kérdés nagyon preciz, nem mozog általánosságban, innen van, hogy a függvénytanulmányozás ez irányban érte el legteljesebb sikereit. Itt a problémahálózat továbbszövését nem kizárólag matematikai egymásrakövetkezések határozzák meg, a fizikai elméletek szükségleteit kell első sorban kielégitenünk. A XIX. században indult csak meg a teljes elmélet kiképzése, de még végtelen messze járunk a befejezettségtől. Az integrálegyenleteket meg csak manapság kezdik rendszeres vizsgálat alá fogni, sok tekintetben megint fizikai szempontok szerint indulva.

Ajánlható kézikönyvek.

I. Középiskolai anyag:

Beke, *Algebra,* 7. kiadás, a differenciál- és integrálszámitás elemeit adó függelékkel (legjobb középiskolai tankönyvünk, magántanulásra is ajánlható.)

Németül például a *Grundlehren der Mathematik;* ennek megjelent eddig két kötete: **Färber,** *Arithmetik* és **Thieme,** *Geometrie.*

Franciáúl: **Borel,** *Cours de mathématiques* (németre is le van forditva), **Tannery** (németül is) és **Hadamard** tankönyvei.

II. Átmenetül a felsőbb mennyiségtanhoz:

König, *Bevezetés a felsőbb algebrába.*

Beke, *Bevezetés a differenciál és integrál számitásba.* 3 korona.

Rácz—Mikola, *Az infinitezimális számitás elemei a középiskolában.* 2 korona.

Lévay, *A differenciál és integrálszámitás elemei példákkal középiskolai használatra.* 60 fillér.

III. Felsőbb mennyiségtan:

König, *Analizis* (csak első kötete jelent meg.)

Beke, *Differenciál és integrál számitás* (legjobb és legteljesebb egyetemi tankönyvünk) I—II. 20 korona.

Serret—Scheffers, *Differencial und Integralrechnung* I—III. (Nálunk is legelterjedtebb tankönyv a németnyelvüek között. Franciából van forditva s kibővitve.)

Tannery, *Leçons d'algebre et d'analyse* I—II. (Legjobban ajánlható bevezetésül. A középiskolai és egyetemi tananyagot hidalja át.)

Goursat, *Cours de mathématiques* 2^e édition I—III. (Pontos és rendszeres áttekintése a diff. és int. számításnak beleértve geometriai alkalmazásait is, valamint a diff. egyenletek elméletét.)

Picard, *Traité d'analyse* I—III. (Válogatott fejezetekben, problémakörök szerint tárgyalja a matematikát, bevezetésül az elméleti fizika egész komoly átértéséhez. Szellemes, érdekes könyv, legszebb valamennyi összefoglaló munka között.)

A „Galilei Füzetek"-et dr. Lóránd Jenő szerkeszti.
Szerkesztőség: I. ker., Kende-utca 12, II. emelet 10.

Világosság könyvnyomda rt.
Budapest, VIII, Conti-utca 4.