A MÚLT MAGYAR TUDÓSAI

FŐSZERKESZTŐ:
TOLNAI GÁBOR
TECHNIKAI SZERKESZTŐ:
SZALAI SÁNDORNÉ

SZÉNÁSSY BARNA

KŐNIG GYULA

AKADÉMIAI KIADÓ
BUDAPEST 1983

ISBN 963 05 3044 9 (az összkiadás száma)
ISBN 963 05 3049 X (a kötet száma)

Szénássy Barna

Prinred in Hungary

TARTALOM

Előszó 7
Kőnig Gyula életútja 10
Pedagógiai tevékenysége 45
Nem matematikai tárgyú írásai 67
Kőnig Gyula mint matematikus 82
Néhány előzetes megjegyzés 82
Szerepe a két Bolyai megismertetésében 87
Aritmetikai és számelméleti vizsgálatai 104
Kutatásai az analízis terén 109
Főbb algebrai eredményei 134
Munkássága a halmazelméletben és a matematikai logikában 142
Bibliográfia 168

ELŐSZÓ

A Magyar Tudományos Akadémia fennállásának 150. évfordulója alkalmával megjelent több könyvben és értekezésben kiemelten — helyenként bő terjedelemben — találkozunk Kőnig Gyula nevével. Ezek az írások Kőnignek főleg a hazai kulturális élet alakulásában betöltött fontos szerepét boncolgatják. Szűkebb szaktudománya, a matematika terén gyakran fölbukkan ma is a neve, igazolván, hogy néhány alapvető eredménye serkentőleg hatott a jelenkori kutatásokra, és szerves tartozékává vált a matematika tudományának. Az Akadémia életében egyesek külön „Kőnig-korszak"-ról beszélnek, mások a hazai matematika századforduló körüli föllendülésének megindítóját látják benne.

Mindegyik állításban sok az igazság: tudományos életünknek Kőnig valóban kiemelkedő személye volt, ezt bizonyára alá fogják támasztani a következő oldalak. Feladatomnak tekintem ugyanis, hogy minden vonatkozásban — legalább érintőlegesen — foglalkozzam életművével, bár alapvetően matematikai tevékenységét szeretném bemutatni. Sajnálatos, hogy éppen ezen a téren a legnehezebb a feladat: képletek és szemléltető ábrák nélkül egy matematikusról írni szinte lehetetlen. Az eredmények formulák nélküli közlése szükségképp hiányos: a matematikus számára szegényes, a nem matematikusoknak a sok szakkifejezés miatt alig követhető.

Eleve elnézést kérek a könyvecske olvasóitól az ezen okok következtében mutatkozó hiányok miatt.

Két rövid megjegyzés: az összeállításban fölhasználtam idetartozó írásaim egyes részeit; régies szövegek idézése esetén pedig némi módosítást hajtottam végre a mai helyesírásnak megfelelően.

Ezúton is köszönetet mondok Hajnal András akadémikusnak a gondos lektori munkáért.

KŐNIG GYULA ÉLETÚTJA

Kőnig Gyula 1849. december 16-án Győrött született. Édesapja — jómódú varrógép-nagykereskedő — biztosítani tudta a nyugodt családi légkört, a művelt környezetet és azt az anyagi hátteret, ami abban az időben előfeltétele volt a színvonalas továbbtanulásnak. 1859 és 1867 között a győri bencés gimnáziumnak volt — az iskola *Értesítő*inek tanúsága szerint — „feszült" figyelmű, „ernyedetlen" szorgalmú, „példás" erkölcsi magatartású tanulója, akinek a szinte egyhangúan „kitűnő" osztályzatai közé csupán egyszer került be a valamivel gyengébb „jeles" érdemjegy — és az éppen a mennyiségtanból.

Saját vallomása szerint nagyon sokat köszönhetett a gimnáziumnak: nemcsak a reáliákat kedveltették meg itt vele, hanem a humán tárgyakat is. A szépirodalomhoz különösképp vonzódott egész életén át, „éspedig nem a dilettáns terméketlen, érzelgős vagy teoretikus érdeklődésével, hanem az eleven lélek penetráló megértésével". „Az irodalmat, a magyart és külföldit, a régit és a modernet jobban ismerte és értette, mint akárhány irodalmi szakember." Éppen ilyen irányú képzettsége avatja minden írását — a matematikaiakat is — stiláris remekművekké, ez tette egyetemi előadásait még a gyengébb hallgatók számára is vonzóvá.

Érettségi vizsgálata után 1867-ben azzal a céllal ment a bécsi tudományegyetemre, hogy orvosi diplomát szerezzen — egy éven át szorgalommal hallgatta a medicina kollégiumait. De egyre inkább meggyőződött arról, hogy az orvosi pályán is nagy hasznot jelentenek a matematikai ismeretek. Tetézve tehát orvostanhallgatói elfoglaltságát, matematikai előadásokat is látogatott, kezdetben az orvosiakkal még egyenlő mértékben. Egész életén át vonzódott a polihisztorság iránt, e szónak azonban nem az akkor már hamisan csengő, félműveltséget álcázó értelmében.

Egy év leteltével Bécsből Berlinbe ment, ott töltötte az 1868/69. egyetemi tanév első szemeszterét. Érdeklődését itt már a filozófia is lekötötte, de különös szorgalommal hallgatta a három kiváló matematikus, Kummer (1810—1893), Kronecker (1823—1891) és Weierstrass (1815—1897) előadásait. E nevek alapján választ kapunk Kőnig matematikai érdeklődési köre kialakulásának a kérdésére, valamint a minden művében megmutatkozó „matematikai szigor" iránti igényességére. Vizsgálatainak számos területén fölismerhető „a Három Nagy” tudós hatása.

De a tanév második félévében ismét továbbment: Heidelberg, a szép Neckar-parti város meghitt légköre, az ottani egyetem magas színvonala vonzotta a tanulni vágyó ifjút. Múlt századbeli tudósaink közül sokan mélyítették ott tudásukat. Kőnig életében pedig Heidelberg különösen mély nyomokat hagyott. Idősebb korában szinte nosztalgikusan gondolt vissza az ott töltött időre, e város képviselte számára az „eszmék világát”. Nem is csodálkozhatunk ezen, hisz olyan tudósokkal került szellemi, sőt közelebbi személyi kapcsolatba, mint Helmholtz

(1821—1894), Kirchhoff (1824—1887) és Königsberger (1837—1921). Visszaemlékezései szerint Helmholtz biztatására kezdett hozzá egy — kísérletezést és elméleti tájékozottságot egyaránt igénylő — vizsgálathoz: az idegműködés sebességét, vagyis azt az időtartamot kutatta, ami az érzéki behatástól a tudatos cselekvésig szükséges, valamint, hogy ezt külső tényezők (pl. az alkohol) miként befolyásolják. Kutatásainak eredményeit a bécsi akadémia *Értesítő*-jében közölte.

Említett orvosi vizsgálatával párhuzamosan állította össze Königsberger bíztatására matematikai doktori értekezését. Ennek alapján

1870-ben a heidelbergi egyetemen „summa cum laude" fokozattal doktorrá avatták.

Külföldi tanulmányútja befejezéseként egy szemeszterre még visszatért Berlinbe, ahol ekkor már csaknem kizárólag matematikai előadásokat látogatott.

Négy évet kitevő külföldi tanulmányútját tehát alaposan kihasználta: széles látókörrel, és — főleg a matematikában — nemzetközileg is észrevett eredmények birtokában tért vissza hazájába. Itthon aztán nem is késett tudásának az elismerése: a budapesti tudományegyetem, matematikai eredményei alapján, 1871-ben magántanárai közé fogadta, és ezzel megnyílt a lehetősége annak, hogy ott (fizetés nélkül) magántanári előadásokat tartson. Ez a dátum akár határnak is tekinthető matematika szakos tanáraink képzésének a föllendítésében.

Ugyanis a múlt század hetvenes éveiben, midőn Petzval Ottó (1809—1883) vezette a „felsőbb mennyiségtan", és Kondor Gusztáv (1825—1897) az „elemi mennyiségtan" tanszékét a pesti tudományegyetemen, a matematika szakos tanárok képzése meglehetős színvonaltalan volt. Márpedig a kapitalizmus kibontakozásával párhuzamosan fölmerült az igény a jobb képzettségű tanárok és az önállóan búvárkodó, szaktudományukat fejlesztő tudósok iránt. A felsőbb hatóságok a tudósképzést a tudományegyetemre hárították, a tanárképzés föllendítése érdekében pedig 1870-ben két „középtanodai tanárképzőt" szerveztek; az egyik a tudományegyetem bölcsészkara mellett működött és a *gimnáziumi*, a másik a műegyetemen a *reáltanodai* tanárok képzését irányította. A gyakorlat három éve azonban azt igazolta, hogy ez a megosztottság felesleges, ezért 1873-ban a két képezdét egyesítették. Kőniget az egyesített képezde tanárává nevezték ki, azonban itt mindössze három hónapot működött. Ugyanis a műegyetemen a két meglevő matematikai tanszék (Vész János Ármin, 1826—1888; Hunyady Jenő, 1838—1889) mellé egy harmadikat szerveztek, és 1873. november 11-én ennek ideiglenes vezetésével Kőniget bízták meg. Egy évre rá, 1874. november 28-án megkapta ugyanide a nyilvános rendes egyetemi tanári kinevezést.

Rendkívül gyors karrier: a 25 éves professzor ettől kezdve vezető személye a tudomány- és a műegyetem életének, a tanár- és a mérnökképzésnek egyaránt. Valamivel lassúbb volt akadémiai előhaladása: levelező taggá ugyan már 1876-ban ajánlották, de többszöri mellőzés után csak 1880-ban választották be. Az Akadémia rendes tagja 1889-ben lett. A beválasztás halogatásának könnyű megtalálnunk az okát: az akadémiai tagsághoz ugyanis akkor még biztosabb belépő volt az életkor, mint a tudományos érdem. Amellett személyi intrikák is közrejátszottak Kőnig mellőzésében. Ugyanis a sikernek voltak buktatói is: a nagyon gyorsan alkotó tudósokra olykor jellemző tévedésektől ő sem volt mentes, a kapott kritikai megjegyzésekre pedig gyakorta fölényes, nem ritkán cinikus volt Kőnig Gyula válasza.

Itt kell megemlítenünk, hogy 1894-től az Akadémia III. osztályának titkára lett, 1910-ben pedig az Igazgató Tanácsba is beválasztották.

A műegyetemi katedra elnyerése után már alig lehet követnünk Kőnig Gyula rendkívül szerteágazó tevékenységét. Ő volt az egyik kezdeményezője a Műegyetemi Lapoknak és a folyóirat rövid hároméves (1876—1879) élete alatt a szerkesztő bizottság lelke. Az anyagi okok miatt beszüntetett kiadvány színvonalas matematikai és fizikai értekezései, valamint a benne megoldásra kitűzött különféle feladatok révén jelentős szülötte volt a hazai természettudományos folyóiratoknak.

Ugyancsak az egyetemek professzorai (Eötvös Loránd, Hunyady Jenő és Szily Kálmán) élén Kőnig Gyula volt a leglelkesebb apostola a matematikusokat tömörítő szervezeti élet megteremtésének. Az ő fáradozásaik eredményeként jött létre 1885-ben az akkor még alapszabályok nélkül, magánjellegű társulatként működő Mathematikai Társaság. Ennek a munkáját folytatta 1891. november 5-étől a Mathematikai és Physikai Társulat, a jelenlegi Bolyai János és Eötvös Loránd Társulat elődje. 1891 júniusában kikerült a nyomdából a Társulat nagy múltú és hosszú életű (1891—1943) folyóirata, a Mathematikai és Physikai Lapok, éppen Kőnig egyik írásával kezdve a benne közölt tanulmányok sorát. Egyébként a Társulat matematikai osztályának irányítását is Kőnig látta el haláláig.

Kőnig Gyula mind a Társulat, mind az Akadémia ülésein gyakorta szerepelt, hol saját eredményeit ismertette, hol fiatalabb kartársainak értekezéseit mutatta be.

Ismeretes, hogy külföldi kezdeményezések hatására a hetvenes évek elején már nálunk is többen szükségesnek látták a két Bolyai gazdag hagyatékának a feldolgozását, valamint azt, hogy eredményeiket itthon és külföldön szélesebb körök számára ismertessék. Ennek a munkának az elvégzésére 1871. október 16-án az Akadémia négytagú „Bolyai Bizottság"-ot szervezett, ennek matematikai szempontból a legnagyobb súlyú tagja Kőnig Gyula volt. Szakképzettsége alapján a munka érdemi megoldását voltaképpen csak tőle lehetett remélni. Sajnos, sok irányú elfoglaltsága miatt ezt a feladatot — főként az első időkben — nem végezte különösebb buzgalommal, amiért egyes külföldi matematikusok (főként a francia Hoüel) szemrehányásokkal is illették. A későbbi évek során azonban e téren is hasznos útbaigazításokat adott kartársainak — erről a későbbiekben is fogunk szólani.

Kőnig Gyula szava döntő volt a tudósok, főként az akadémikusok kiválasztásában. Ebben nem ismert semmi részrehajlást, csupán a rátermettséget és a tudományos érdemeket tekintette. Rados Gusztáv és Kürschák József több helyen írt arról, hogy milyen sokat köszönhetett Kőnignek, de Beke Manó, Fejér Lipót, Bauer Mihály és mások tudományos törekvéseit is támogatta. Jelesebb matematikusaink közül talán egyedül Geöcze Zoárd volt az, akinek kezdeti vizsgálataiban nem ismerte föl azonnal a későbbi kiemelkedő eredményeket, elhidegülésükben azonban bizonyosan szerepet játszott Geöcze lobbanékony természete is.

Tudományos és közéleti súlyára egy jellemző példa: a tízes évek elején nyugdíjazás folytán megüresedett a kolozsvári tudományegyetem egyik matematikai tanszéke. A kormányzat ekkor a katedra megszüntetésének gondolatával foglalkozott, az egyetem vezetősége pedig csupán egyetlen kiutat látott ennek a kivédésére (ez a Fejér Lipót hagyatékában levő több levélből is kitűnik), azt ti., ha Kőnig Gyula fiát, Dénest meghívják az állásra. Ez azonban nem történt meg, bizonyosan éppen az apa kívánságára. Ekkor került Riesz Frigyes Kolozsvárra.

Nagy fontosságot tulajdonított Kőnig Gyula a színvonalas folyóiratoknak, ezek létrejöttét minden esetben hathatósan támogatta. A Mathematikai és Természettudományi Értesítő (1882—1941) szerkesztői teendőit kezdettől fogva haláláig ő látta el, de szerepet játszott e folyóirat német nyelvű változatának, a Mathematische und Naturwissenschaftliche Berichte aus Ungarn megindításában is — ez németül biztosított publicitást a hazai eredményeknek.

Később részletezendő tudományos tevékenysége alapján többször is kiérdemelt magas akadémiai kitüntetést: a differenciálegyenletek elméletével foglalkozó hatalmas értekezéseit 1884-ben Bézsán-díjjal jutalmazták, *Analízis* c. műve 1890-ben, az algebrai mennyiségek elméletét tárgyaló hatalmas monográfiája pedig 1904-ben részesült akadémiai nagydíjban.

Nehéz, de kiegyensúlyozott életében tudományos kutatásain kívül talán a legnagyobb munkát a műegyetemen fejtette ki. Mintegy három évtizeden át oktatta a mérnököket, a hallgatók az ő személyében láthatták a lelkiismeretesség példáját, de megismerték — miként az egyik nekrológ írja — „eszét, ... metsző élű ítéletét, elmés, de gyakran bántó gúnyját, kérlelhetetlen szigorúságát, amelyet tudományos lelkiismerete tett folyton éberré".

Kivette részét a műegyetem irányító tevékenységéből is. Az 1887/88. tanévtől három éven át a Mérnök- és Építészeti Szakosztály dékánja volt, ezt követőleg ugyancsak három éven át ellátta a rektori teendőket. Mindig hasznos, gyakorlati javaslataival sokat tett az intézmény fejlesztése érdekében. 1882-ben a műegyetem a szerény Csillag utcai otthonból átköltözött ugyan a Múzeum körúti tágasabb épületbe, de csakhamar ez is szűknek bizonyult. Ezért vetette föl és szorgalmazta Kőnig a „Műegyetemi Város" létesítését. 1902-ben meg is kezdődött a lágymányosi építkezés, de az épülettömb ünnepélyes átadására csak 1909-ben került sor. Ekkor már Kőnig, más munkaköre miatt, nem élvezhette ugyan munkájának gyümölcsét, de az eredményt, mint élete „egyik legbecsesebb" sikerét idézte.

Tevékeny életének derűs órái közé tartoztak azok, amiket Vámház körút 5. sz. (ma: Tolbuchin körút 5. sz.) alatti, szépen berendezett otthonában felesége és két fia társaságában töltött. Művelt hitvese, a budapesti társasági élet egyik kedvence, Oppenheim Eliz (1862—1916) nemcsak a családi otthon melegét tudta biztosítani, hanem — mindig háttérben maradó — szellemi segítőtársa is volt férjének. Két fiának sikeres előrehaladása még csak fokozta a család harmonikus légkörét.

Néhány szó két gyermekük életének szomorú alakulásáról. Kőnig György (1883. június 27—1944. április 30.) jogi doktorátust szerzett, és a kultuszminisztériumban működött mint c. miniszteri tanácsos. Élete delén azonban elvesztette szemevilágát és ezért kénytelen volt nyugállományba vonulni. Számos kisebb-nagyobb irodalmi tanulmánya és fordítása látott napvilágot. Kőnig Dénes (1884. szeptember 21—1944. október 16.) matematikus lett, a műegyetem rendkívüli és a tudományegyetem magántanára volt. A gráfelmélet egyik világhírű művelője, ilyen tárgyú, először 1936-ban megjelent munkáját újabban is kiadták az Amerikai Egyesült Államokban. Ezen kívül több jelentős halmazelméleti eredmény őrzi a nevét.

A faji megkülönböztetés, az előre megérzett üldözés és megaláztatás elől 1944-ben mindketten önként menekültek a halálba.

★

Hosszú egyetemi beosztása után 1905-ben lényegesen változott Kőnig Gyula élete. Akadémiai elfoglaltsága, tudományos és oktató munkája (olykor heti 8—10 óra előadást is tartott) annyira szétforgácsolta munkaerejét, hogy célszerűnek látta a professzori teendők alóli nyugdíjaztatásának kérését, fönntartva magának a jogot, hogy mint címzetes rendes tanár a maga választotta tárgykörből továbbra is tartson előadásokat. Távozása kétségtelenül nagy veszteséget jelentett a műegyetem számára, ugyanakkor nagy nyereséget a Franklin Kiadó életében.

Kőnig szavaival élve ez utóbbi munkája „a nemzeti művelődés szolgálata” volt.

A következőkben egy nem matematikusoktól származó, tehát szakmai elfogultsággal nem vádolható kis összefoglalásra, Révay József és Schöpflin Aladár művére támaszkodom.

A hazai könyvkiadásban a Franklin Társulat hosszú időn át jelentős szerepet játszott. A kiadó 1717-ben Pozsonyban kezdte meg működését, a fővárosba történt átköltözése után a múlt században olyan családnevek fémjelzik munkáját, mint a

Landerer- és a Wiegand-dinasztia. A kapitalizmus diktálta tempó 1873-ban megkövetelte, hogy az addig szerényebb keretek között működő üzem részvénytársasággá alakuljon, ekkor vette fel az egykori nyomdásznak, az Egyesült Államok kiváló fiának, Benjamin Franklinnak a nevét. Mint részvénytársaság hamarosan komoly nagyüzemmé fejlődött, ügyes igazgatói a jelentős kiadványok egész sorát (Vörösmarty, Garay, Tompa, Vas Gereben és mások műveit) adták az olvasók kezébe.

Kőnig Gyula két évtizeden át tevékenykedett a Franklin Társulatban: mint nagy tekintélyű, világszerte ismert tudóst választották be

1894-ben a társulat igazgatóságának tagjai sorába. Az ilyesfajta megtiszteltetés abban a korban sokak számára csupán munka nélküli állást jelentett, busás tiszteletdíjjal. Kőnig azonban sohasem tekintette megbízatását ilyennek: határozott hozzászólásai, nagyon is hasznos, gyakorlati javaslatai csakhamar az igazgatóság legszámottevőbb tagjává avatták. „... éleslátásával, energiájával és szervezőképességével hamarosan döntő tényezővé vált a Társulat életében."

A századforduló körüli években három személy játszott vezető szerepet a kiadó életében: Benkő Gyula, a széles látókörű igazgató, Gyulai Pál, az irodalmi ügyek szakavatott irányítója és Kőnig Gyula, a szervezési teendők fáradhatatlan munkása. Matematikusnál szinte szokatlan üzleti érzékkel ő ismerte fel, hogy a Franklin csak akkor válhat a hazai könyvkiadás egyik monopolisztikus hatalmává, ha összeolvad a nagy konkurrens céggel, a Wodianer Kiadóval. Az ennek érdekében folytatott bonyolult üzleti tárgyalásokat legfelsőbb szinten Kőnig vezette, neki tulajdonítható az a siker, hogy a Franklin Kiadónak 1904-ben sikerült megvásárolnia a Wodianert, minden berendezésével, kiadványaival és folyamatban levő szerződéseivel együtt.

E sikeres tevékenység után ajánlották föl Kőnignek 1904-ben a vezérigazgatói állást. Mint ilyen, egész haláláig csaknem diktátori hatalommal intézte a Franklin Társulat ügyeit. Egyénisége túlságosan is erős volt ahhoz, hogy munkájába mások komolyabban beleszólhattak volna; szerencsére Kőnig mindig ügyesen össze tudta hangolni a Franklin Társulat anyagi érdekeit az ország szellemi életének fejlesztésével.

Nem kétséges, hogy Kőnig szép örökséget vett át elődeitől, de nagy érdeme, hogy ezt még gyarapítani is tudta. A Révay—Schöpflin-tanulmány leszögezi, hogy a Franklin Társulat Kőnig igazgatósága idején élte fénykorát. Sikerült országosan is népszerűvé tennie a Társulat kiadásában megjelenő folyóiratokat, főként a nemzeti liberális Budapesti Szemlét és a szórakoztatva tanító Vasárnapi Újságot. Igen gazdag azoknak a könyvsorozatoknak a listája is, amelyeket ő indított meg (néhány ilyen: Magyar Regényírók, Magyar Írók Aranytára, Magyar Nép Művészete, Országgyűlési Könyvtár, Ismeretterjesztő Könyvtár, Mikes Kelemen Törökországi Levelei stb.).

De „Kőnig Gyula érdemei nem annyira egyes kiadványok megjelentetésében csúcsosodnak, mint inkább az egész vállalat egyetemes és harmonikus fejlesztésében. Nagy elgondolásaival, széles látókörével, sajátos üzleti érzékével, kitűnő műveltségével sikerült a Társulat minden osztályát és minden üzemét egyetlen nagy cél egyöntetű szolgálatába állítani. Ez a nagy cél a magyar irodalom és tudományosság korszerű szolgálata és fejlesztése volt. Talán nem túlzás, ha azt mondjuk, hogy Kőnig Gyula terveinek szerves fölépítésével, szívós és töretlen szolgálatával, céltudatos, színvonalas és gyakran úttörő munkájával vezérigazgatóságának tíz esztendeje alatt csendben, láthatatlanul és szinte névtelenül többet tett a magyar kultúráért, mint a kultúra hivatalos és gyakran hangos őrei együttvéve".

Az egyetemi tanári munka alól való fölmentés tehát korántsem jelentett számára nyugalmat, annál kevésbé, mert a Franklin Társulaton kívül tudományos tevékenységét is töretlenül folytatta. A megterhelő élet kedvezőtlen hatása korán jelentkezett, szíve egyre többször intette pihenésre. 1913 januárjában még ellátogatott egyik kedvelt üdülőhelyére, Sankt Moritzba, hogy pihenten készüljön fel az Akadémiák Világszövetségének Szent-Pétervárott tartandó ülésére. Erre az utazásra azonban már nem került sor. 1913. április 7-én az Országos Kaszinóban, egy ártalmatlannak tűnő kártyacsata — ez volt egyik kikapcsolódása — során szíve felmondta a szolgálatot. A megdöbbent barátok a nyugalmat jelentő otthonba szállították, de sem ez, sem a gyors orvosi beavatkozás nem segített. 1913. április 8-án, a hajnali órákban Kőnig Gyula beteg szíve megállt.

Az ország közvéleményét megdöbbentette a szomorú hír. Talán nem is volt az akkori idők napilapjai és folyóiratai között olyan, amelyik hosszabb-rövidebb nekrológban ne idézte volna föl emlékét. És midőn április 10-én örök nyugalomra helyezték a Kerepesi Temetőben — egykori fényképek tanúsága szerint — ezrek kísérték utolsó útjára. Hitvese rá két évre hunyt el. Az 1/10 1—12. sz. gránittal fedett sírkő borítja kettejük földi maradványait.

*

A halál azonban véglegesen még nem zárta le a Kőnig Gyulával kapcsolatban említendő adatok sorát. Utolsó könyve, amelyen a végső simításokat már nem tudta elvégezni, befejezetlenül, posztumusz munkaként 1914-ben látott napvilágot. A műegyetem, amelynek előcsarnokát mellszobra díszíti, 1914. március 25-én áldozott emlékének, ezen Kürschák József a tanítványok és a kartársak nevében mondott beszédet. A Magyar Tudományos Akadémia 1915. január 25-én tartott emlékülést, ekkor Rados Gusztáv főleg mint embert és mint egyetemi oktatót méltatta. Emlékére két fia hamarosan alapítványt létesített, a kezdeményezést 1917 decemberében Eötvös Loránd még csak jelezte, de a következő év márciusában ugyancsak ő már ismertette az odaítélés feltételeit is. Eszerint az alapítvány kamataiból 1920-tól kezdődően, két évenként 1000 koronás díjjal és „Kőnig Gyula Érem"-mel jutalmazandó „a tiszta matematika terén végzett kutatásaiért" egy fiatal hazai matematikus. Az eredeti tervtől eltérően később, 1922-ben ítélték oda először a díjat. 1944-ig bezárólag azonban anyagi okok miatt 1930-

tól csak érem formájában. Olvasva a kitüntetett tudósok névsorát (13 matematikus), azt mondhatjuk, hogy a Kőnig-díjjal valóban arra méltókat jutalmaztak, és az mindig nagy megbecsülést jelentett azok számára, akik kiérdemelték.

Sajnos, a második világháború megszakította ezt a szép kezdeményezést. Matematikai életünk azonban azóta is gondot fordít arra, hogy egy-egy évforduló alkalmával könyvekben, tanulmányokban fölidézze Kőnig Gyula emlékét.

A múlt század hetvenes éveitől alig volt a magyar közoktatásügynek olyan területe, ahol Kőnig Gyula ne hallatta volna szavát.

Legelébb is az úgynevezett Trefort-féle tanterv előkészítésében végzett munkájáról szólok. Ez a sok tekintetben igen korszerű középiskolai terv 1879 és 1899 között volt érvényben, előkészítésének széles látókörű irányítója Kármán Mór (1843—1915), a kiváló pedagógus volt. (Az Amerikai Egyesült Államokban élt világhírű matematikus és fizikus, Kármán

Tódor édesapja.) Azonban a középiskolai matematikaoktatás céljának kijelölésében és a tanítandó anyag összeválogatásában a döntő szerepet Kőnig Gyula játszotta. Vezérgondolata ma is helytálló: szerinte a középiskolai matematikaoktatás elsődleges feladata nem annyira terjengős — és éppen ezért sokszor felszínes — anyagi ismeretek nyújtása, hanem a logikus gondolkodásra való nevelés. Ennek az elvnek a figyelembevételével fogalmazta meg maga Kőnig a Trefort-féle tervhez csatolt *Utasítás* matematikára vonatkozó fejezeteinek nagy részét. Szerinte a gimnázium két felső osztályában elengedhetetlen követelmény, hogy

„néhány alkalmas probléma mélyebb elméleti fejtegetésével" előkészítsen az egyetemen majdan sorra kerülő „tudományos tárgyalásmódra". A tantervben erre alkalmas problémaként szerepelt például a másodfokú egyenletek részletező elmélete, a véges és végtelen geometriai haladvány, a határozatlan egyenletek, valamint a kombinatorika néhány kérdése. Állandóan iránymutatónak kell továbbá tekintenünk a tárgyalt anyag gyakorlati alkalmazásait is: „. . . a matézis tanításától csak úgy várhat az iskola eredményt, ha élénk vonatkozását a tanulmányok többi ágához, különösen a természeti tudományokhoz a növendék folyton érzi, ha ugyanis a matematika gyakorlati alkalmazását nem furfangos, tetszetős ötleteken, hanem ... természetes adataiból vett példákon végzi."

A terv jó ideig befolyást gyakorolt a középiskolai matematikaoktatásra, számos gondolata még a jelen század első felében is éreztette hatását. Kétségtelen, hogy egyik és nem lebecsülendő tényezőjévé vált matematikai kultúránk századforduló táján bekövetkezett gyors emelkedésének.

Kőnig Gyula tevékenysége azonban nem merült ki az *Utasítás* megfelelő részeinek az összeállításában, hanem — bokros egyetemi és tudományos munkája ellenére

— maga vállalkozott a tervezet szellemét tükröző középiskolai matematikakönyvek írására is. A négy részből álló és a gimnáziumok IV—VIII. osztályainak matematikai anyagát módszeresen, szinte tudományos igényességgel tárgyaló sorozat — később Beke Manó átdolgozásában — még a jelen század elején is sokat forgatott vezérkönyve volt a középiskolai tanárságnak. Egyébként, mint a nemzetközi matematikai tanügyi bizottság magyarországi szekciójának elnöke is részt vett Kőnig a matematikaoktatás reformmunkálataiban.

Megemlítendő, hogy Kürschák Józseffel és Rados Gusztávval

Kőnig Gyula is egyik kezdeményezője és szervezője volt az 1894-ben indított hazai középiskolai matematikai tanulóversenynek — a mai Kürschák-verseny elődjének.

A középfokú oktatás még egy másik ága köszönhet sokat Kőnig Gyulának: a kereskedelmi szakoktatás. Munkájának jelentőségét csak akkor érthetjük meg, ha ismerjük az előzményeket is.

A múlt század kilencvenes éveiben hazánk már meglehetős gazdag olyan iskolahálózattal rendelkezett, amely a kereskedelmi életre készítette föl a tanuló ifjúságot. A fejlődés során nálunk négyféle középfokú kereskedelmi iskola alakult ki, ezek nemcsak tantervben és anyagban különböztek egymástól, hanem az alkalmazott tanerők képesítésében, így azok jövedelmében is. Az eltérések egyrészt a végzős tanulók továbbtanulása szempontjából okoztak nehézséget, másrészt fölidézték az oktatók állandó egymás közti villongását. Fölismerve a helyzet áldatlan voltát, Wlassich Gyula kultuszminiszter 1895-ben felkérte Kőnig Gyulát, hogy kormánybiztosi minőségben vegye kezébe az ügyet, és egységesítse a kereskedelmi szakoktatást. Kőnig rendkívüli eréllyel, de ugyanakkor sok tapintattal végezte feladatát. A tanári képzettség egységesítése céljából bizonyos kiegészítő vizsgák letételét rendelte el, és szinte személy szerint buzdította, bátorította az érintetteket azok vállalására. Ugyanakkor a kereskedelmi iskolákat közös tantervvel látta el, és kivonva más alárendeltségek alól, egységesen az újonnan létesített Kereskedelmi Iskolai Főigazgatóság hatáskörébe utalta. Az általa kidolgozott szervezési forma mintegy húsz éven át csaknem változatlanul volt érvényben.

A legjelentősebb azonban, amit Kőnig Gyula pedagógusként végzett, a műegyetem falai között játszódott le. Fiatal ember volt midőn annak katedrájára került, és világhírű tudósként lépett arról le: a közben eltelt harminc év során minden gondolatával és cselekedetével benne élt a magyar műszaki oktatásban.

Mint egyetemi oktatót megismerhetjük azokból az emlékbeszédekből, amelyeket Kürschák József és Rados Gusztáv állított össze. Írásaikból szinte elénk lép a zömök, markáns arcú, inkább szigorú, mint pajtáskodó férfiú, akinek ajkáról előadás közben ömlöttek a tartalmi, stiláris, sőt retorikai szempontból is kifogástalan mondatok. A visszaemlékezések szerint nem volt könnyű előadó; matematikai fejtegetéseit a gyengébb hallgatók nehezen vagy alig tudták követni. De még az ilyeneket is megragadta az ékesszólás dinamikája, a nyelvezet választékos volta.

Több, szinte anekdotaszerű történet igazolja, hogy mennyire ellensége volt a protekcionizmusnak, meggyőződését nem adta fel semmiféle kívülről jövő befolyásolásnak. „Ha volt is benne némi részrehajlás, az is csak jóban mutatkozott: szerette, bíztatta, gyámolította azokat a technikusokat, akik a gimnáziumból kerültek a műegyetemre, és elsőéves korukban némely tekintetben gyengébbek és ingadozóbbak voltak a reálistáknál."

Később látni fogjuk, hogy tudományos kutatásaiban Kőnig Gyula nagyon is vonzódott az absztrakthoz, a matematika elvontabb fejezeteihez. Kérdés, hogy ez irányú adottságát mennyire tudta összeegyeztetni a műegyetem elsősorban mégis inkább gyakorlati igényeivel? Válaszként álljon itt néhány tőle származó idézet: „Egy a vér, mely az egzakt és a műszaki tudományok szervezetében kering, és ki a kettő között lüktető ereknek csak egyikét is aláköti, az tudatlan kézzel merényletet követ el kultúránk, még pedig elsősorban technikai kultúránk ellen." De felemelte szavát a szűk prakticizmus ellen is: „A technikus részleteknek, melyeket ma itt tanítanak, fele tíz év után már elavult lesz, és aki mást nem visz el innen, mint kész recepteket, bizonyára szánalmas szegényen távozik e műegyetemről''. Szinte axiomaként szögezte le a műszaki oktatás követelményeként, hogy „*a tudományos felfogás és gyakorlati érzék harmonikus fejlesztése az, amire törekedni kell.* Ez a harmónia nem jelent szigorúan megállapított, százalékra kiszámított arányt: a percentuális összetétel nagyon különböző lehet; de e harmónia jellemzi éppúgy az igazi tudóst, mint az igazi technikust.''

A műegyetemi ifjúság számára kezdetben az „algebrai analízis'' és a „magasabbfokú egyenletek elmélete'' elnevezésű előadásokat tartotta, később inkább az „analízis I. és II.'' kurzusát. Különös súlyt helyezett az analízis bevezető fogalmainak, a határértéknek, a folytonosságnak, a differenciálhatóságnak stb. egészen mélyreható, precíz kifejtésére. Tudunk arról, hogy például a valós számok Kőnig által tárgyalt bevezetése még olyan kiváló hallgatók számára is nehézséget okozott, mint Fejér Lipót és Riesz Frigyes. Miként Hunyady Jenő, Kőnig is tartott előadásokat a tudományegyetem tanárjelöltjei számára is (általában összevonva a műegyetemistákkal). Ezek közül nagy jelentőségűek voltak a szemináriumi gyakorlatok — ezeket előbb Hunyadyval, később Kürschákkal felváltva vezette. Az itt általa felvetett, főleg analízisbeli és számelméleti problémák több fiatal tehetség számára adtak vizsgálati témákat. Gyakorta hirdetett — mai kifejezéssel élve — speciálkollégiumokat. Ezek tárgya főleg saját vizsgálataiból, továbbá a matematika legújabb fejezeteiből került ki. Alapelvnek tekintette annak biztosítását, hogy a hallgatóság megismerhesse a matematika legújabb eredményeit.

Az elmondottak alapján már nem is meglepő egyetemi előadásainak sokfélesége: determinánsok és lineáris egyenletrendszerek, a lineáris transzformációk algebrája, algebrai egyenletek függvénytani szempontból, a Galois-féle elmélet, eliminációelmélet, az algebrai görbék elmélete, elemi számelmélet, az algebrai egész számok elmélete, az algebrai mennyiségek aritmetikai elmélete, komplex függvénytan és elliptikus függvények, valós változós függvények, a határozott integrálok, a Fourier-sorok és a gömbfüggvények, totális differenciálegyenlet-rendszerek és az elsőrendű parciális differenciálegyenletek elmélete, variációszámítás, valószínűségszámítás, halmazelmélet, politikai számtan, matematikatörténet.

Idézzük még Rados Gusztáv talán enyhén túlzó, mindazáltal találó mondatait: „És ha most kérdezzük, hogy Kőnig e sohasem lankadó professzori buzgóságának és odaadó lelkesedésének mi volt az eredménye, akkor válaszunkban örömmel állapíthatjuk meg, hogy az ő tanító, buzdító és lelkesítő munkájának köszönhetjük, ha hazánk ma a matematikusok olyan gárdájával dicsekedhetik, melynek tudományos termelését az egész világ ismeri, használja és nagyra becsüli; megállapíthatjuk továbbá azt is, hogy az utolsó évtizedek folyamán hazánkban semelyik tudományban akkora fellendülést nem tapasztalhattunk, mint éppen a matematika terén, és hogy ez a fellendülés még korántsem lévén befejezve, az arra a reményre jogosít, hogy bennünket még a közeljövőben az e téren vezető és irányító nemzetek sorába fog emelni. De még ezzel sem merült ki Kőnig Gyula professzori érdeme: mert nem csekély része volt neki abban is, hogy mérnökeink, akiknek évtizedeken át nagyra becsült és szeretett tanára volt, oly jól állják helyüket a világban, akikbe ő tanításával és példaadásával beléoltott valamit lelkesedésének hevéből, ítéletének józanságából, logikájának erejéből, előadásainak szigorú szabatosságából, a nagy munkabírásából és határtalan munkakedvéből."

Befejezésként még néhány szót arról, hogy mik voltak Kőnig elképzelései a hazai egyetemi oktatás korszerűsítéséről. Ilyen szempontból igen tanulságosak rektori beszédei, de egy vaskos elaborátumot is szentelt ennek a kérdésnek. E tanulmányát a szociálisan gondolkodó és érző embernek a hallgatóság iránt tanúsított mély együttérzése jellemzi: méltányosabb tandíjrendszer kidolgozását, az internátusi hálózat bővítését, a középiskola és az egyetem közötti szakadék fokozatos áthidalását követelte. De a professzori karhoz is volt szava. A tudományos, mély képzettséget pályájuk conditios ine qua non-jának tekintette, sőt megkövetelte szakmájuk önálló, eredményes művelését is. Ugyanakkor azonban nem feledkezett meg a tanárok jogos anyagi igényeiről sem: „... úgy nemzeteknél, mint egyéneknél a tudomány művelése a jólétnek bizonyos fokát, a kényelemnek bizonyos légkörét követeli, melyben a demokratának még egy havanna-szivar illatán sem szabad megbotránkoznia".

Rektori beszédeiből kitűnik, hogy állandóan szorgalmazta a mérnökképzés sokoldalúvá tételét, ennek érdekében a művészettörténeti és az irodalmi előadások bevezetését. Sőt, bizonyos jogi előadásoknak is fontosságot tulajdonított. Törekvéseit — amiket egy héttagú reformbizottság tagjaként iparkodott megvalósítani — Rados Gusztáv a következőként foglalta össze: „A gazdasági és jogi tudományok-nak a technikai oktatásban való nagy fontosságára már Kőnig mutatott rá a legnagyobb nyomatékkal. De a gazdasági oktatásban nem sablonos definícióktól vagy osztályozások kivonatától, holmi skolasztikus észgimnasztikától várt üdvös eredményt, mert ezekben az egzakt gondolkodáshoz szoktatott műegyetemi hallgatóság üres szalmacséplésnél egyebet nemigen lát. Eredményt inkább attól várt, hogy a tanulók szeme előtt felvonuljon az érlelődő eszméknek ama nagy küzdelme, amelyben a merev jogállam, ez a hatalmi szervezet, cselekvő kultúrállammá alakult és attól, hogy a technikus mindenekelőtt tisztán lássa majdani alkotásainak szociális szerepét, s hogy mély betekintést nyerjen a gazdasági erők játékába." Az ábrázoló geometria érdekében is fölemelte Kőnig Gyula a szavát. Az ő korában e tudomány kissé mostohább elbánásban részesült, mint a matematika többi ága. Csökkent az önálló vizsgálatok száma is, folyóirataink viszonylag kevés ilyen tárgyú értekezést közöltek. Kőnig főként azt szorgalmazta, hogy a Matematikai és Fizikai Lapok fordítson nagyobb gondot az ábrázoló geometriai tanulmányok közlésére. Véleménye szerint ezáltal e diszciplína „közelebb hozatnék a mateamatikához, mert eléggé sajátságos, hogy ezek kissé távoztak egymástól".

Összegezve a mondottakat: *Kőnig Gyula mind matematikai, mind általánosabb oktatásügyi kérdésekben élesen látó és modernül gondolkodó pedagógus volt.*

NEM MATEMATIKAI TÁRGYÚ ÍRÁSAI

A sokoldalú Kőnigtől nemcsak matematikai tárgyú közlemények maradtak hátra. Tolla olykor távoleső területekre is elkalandozott, rögzítve az európai gondolkodású tudós általános kulturális kérdésekben vallott nézeteit. Kétségtelen, hogy nevét nem ezek a följegyzések őrizték meg az utókor számára, de életművéhez ezek is hozzátartoznak, világnézetére vonatkozólag pedig igen beszédesek: kicsendül belőlük a múlt század végének nálunk eléggé divatos nemzeti liberalizmusa és a következetesen materialista természettudományos gondolkodás.

Néhány írásából látható pl., hogy már egész fiatal korában hatása alá került a materializmus német tanítómestereinek (Büchner, Moleschott, Vogt és mások). Többek között egy népszerűsítő geológiai tárgyú közleményében szót emel az ellen, hogy a Föld és az élet kialakulásának folyamatában valamiféle transzcendentális hatalmat szerepeltessünk, továbbá, hogy a természettudományok fölépítésében önkényes hipotézisek felvételének az útjára tévedjünk. Hatott rá a Haeckel-féle monizmus is: „Ezek s számtalan más hasonló adat csalhatatlanul bizonyítják, hogy azon ismeretlen valami, amit mi léleknek mondunk, az agynak és csak ennek segítségével kormányozza a testet, érez, gondolkodik, akar, szóval él."

Mélyen foglalkoztatta azoknak a fogalmaknak és eszméknek a kialakulása, amelyek az újabb kori fizika gerincét alkotják. Azt az utat kutatta, amelyet a természettudományos gondolkozás a „kétely ember"-étől (Bacon) a „képzelem ember"-ének (Kepler) munkásságán át az első „modern természettudós"-ig (Galilei) megtett.

Említett értekezései lényegében tudománytörténeti jellegűek. De annak igazolásaként, hogy e téren nem elégedett meg adatok szempont nélküli összegyűjtésével, idézzük őt magát:

„Korunk szellemi haladásában az ismert tények gyors és sokoldalú növekedését szokták jellemzőnek tartani: ez hat ránk legközvetlenebbül, ez emlékeztet minden lépten-nyomon az emberiség sürgő tevékenységére, ez az ami szemünkbe ötlik és megkap. De valamint az egyes tudományok terén az új adatoknak e számbeli növekedése ki nem elégítheti a tudóst, és az adatoknak a gyűjtése és rendezése mindinkább kívánatosabbá teszi a vezérlő eszmék kutatását és elemzését: úgy időnk tevékenységének általános megbírálásában is nemsokára tekintetünk túlemelkedik az összehordott anyaghalmazon, és észrevevén azt, hogy az összehordásban bizonyos eszmék az uralkodók, nemsokára fő érdekét ez eszmék körül csoportosítja. Szóval, a legfeltűnőbbet nem tartjuk többé a legelsőnek; a jellemző alapvonást máshol keressük, és keressük ezt a módszerek változásában."

„Szellemi fejlődésünknek nagy fejezetei — a tudományok, a művészetek története, a műveltség keletkezésének és terjedésének ama számos része, mely a fölsorolt fejezetek alá nem esik — megszűnnek csupa adattárak lenni; a külön érdekek, melyek a vizsgálat e terén annyira szétforgácsoltak, összeforrnak; és az átolvadásnak e folyamata egy új, és központi helyzeténél fogva, fölötte jelentékeny tudománnyal ajándékoz meg."

E két utóbbi idézet szerint tehát igen világosan látta Kőnig azt a pedagógiai értéket, amelyet az egyes tudományok irányító elveinek a története, röviden a *fogalomtörténet* képvisel mind a jelen, mind a jövő szempontjából. De programja nemcsak a szaktudománybeli fogalmak, hanem általánosabban: az emberi gondolkodás fejlődésének újraélését is előirányozza, mégpedig annak a modern elvnek megfelelően, hogy mivel egy a valóság, egy kell, hogy legyen annak visszatükröződése is. Egységes világkép, egységes műveltség lebegett tehát a szeme előtt. Itt már nem is tudománytörténetről, hanem *tudományfilozófiá*ról van szó, korunk alapvető fontosságúnak tekintett problémaköréről.

A századforduló tájának divatos jelszava volt a Dubois-féle „ignoramus et ignorabimus", a haladás szkeptikusainak e vezérszólama. Kőnig Gyula a nemzete jövőjéért és a tudomány fejlődéséért aggódó tudós módján fölemelte szavát az „ignorabimus" ellen: „... mint nem kicsinyes őserdők küldöttjei belenyúlnak a tudás és kultúra, a meggyőződés és lelkesedés lakta zöld virányiba a kétkedés és tagadás, a bizalmatlanság és kicsinylés jégáramai. Szkepticizmus és pesszimizmus a tudományos nevük; a tudomány és művelődés hálátlan gyermekei, de mégis gyermekei."

„*Az értelem szkepszisével, a kedély pesszimizmusával* szemben türelmesek vagyunk, mert lelki áramlataink ritmusában ők is rokon hangokra találnak; de az *értelem pesszimizmusa és a kedély szkepszise* művelődésünk anarchista ellenségei, melyekkel az egyénnek és a nemzetnek egyaránt kötelessége, hogy szembeszálljon. Ha egy-egy gyönge pillanatban, a lemondás pillanatában föl is merül az a kérdés, vajon kultúránknak, egész gondolatvilágunknak van-e örök értéke, vajon megtaláljuk-e gyümölcseiben az érte hozott vér és munkaáldozatok árát, a feleletnek *nem szabad* tagadónak lennie. Az már nem az egyeseknek, hanem a nemzeteknek létkérdése, hogy bízzunk a történeti fejlődés erejében."

Elszánt ellensége volt a külföld kultúráját majmoló látszatmagyarnak: „Az idegen ország földjét se nem lehet, se nem szabad idehoznunk; csak a magunkét művelhetjük — de szorgalmat és kitartást tanulhatunk bárhonnét."

Szaporíthatnánk az idézetek számát, de egy tényre még fölhívjuk a figyelmet: Kőnig nagyon jól látta, hogy a nálunk akkor még sokra becsült polihisztorság kora lejárt. Véget vetett ennek a tudományok gyors ütemű fejlődése és az ezzel együttjáró differenciálódás. „A tudomány mintha folyton szaporodó részleteivel darabokra mállanék." „Széles mederben foly a művelődés, és kényelmesen visz hajója, de áttekinteni többé nem bírjuk; abban amit ad, gazdaggá tehetné a szegényt, de annyi új kívánnivalót súg fülünkbe, hogy szegénnyé lesz a gazdag."

Az a Kőnig Gyula mondta ezt, aki — mint hátrébb látni fogjuk — maga is polihisztornak tekintendő, legalábbis a matematika terén.

Befejezésként idézzünk Sőtér István könyvéből, annak bemutatásaként, hogy miként látja egy irodalmár Kőnig Gyula életfilozófiáját:

,,Kőnig Gyula életpályájának . . . vannak olyan művelődésbölcseleti tanulságai, melyek nem csupán a szaktudományhoz szólnak, s melyekben a századforduló Magyarországának klasszikusan polgári életszemlélete szólal meg. A művelődés egységéről szóló írása, melyet az Akadémia egyik közgyűlésén olvasott fel, figyelemre méltó vélekedés a polgári tudomány és gondolkodás ekkoriban kibontakozó válságával szemben. A természettudományban is jelentkező agnosztikus szemlélet és a nihilizmushoz vezető szkepszis ellenében Kőnig Gyula még annál az egységes nemzeti művelődésnél keres menedéket, melyet a reformkor óhajtott s melyért sokat tettek az Akadémia korábbi nemzedékei... A kultúra értékében és a történeti fejlődés erejében Kőnig még töretlenül hisz. Ezért apellál a társadalom »kulturális kötelességérzetére« s annál is inkább hirdeti az egységes nemzeti művelődés szükségét, mivel a társadalmi és műveltségi atomizálódást nagyon is átérzi. (»A különböző hivatások képviselői meg nem értik egymást« és a művelődést »áttekinteni többé nem bírjuk.«) »Nincs magyar globus és nem is kell: de van magyar kultúra, és ha volna közöttünk kétkedő még, mégis szorosan hozzánk fűzi a törekvés, hogy ezt megteremtsük« — mintegy a korszak utolsó üzeneteként hangzik el a nemzeti és polgárosult művelődés szükségének ez a meghirdetése, melyet a megtett út öntudata is támogat: »amely társadalom egy századnál is rövidebb időben nyelvét újból tudta teremteni és be tudta fogadni a modern élet teljességét, annak van kultúrája, mégpedig — minden fogyatékosság ellenére is — nemzeti és önálló kultúrája«. Kőnig Gyulának ezek a gondolatai egy olyan korszak küszöbén hangzanak el, mely már érzéketlenné válik az igazi veszélyek iránt, és a kiutat, melyet Kőnig még olyan világosan látott, meg nem találja többé."

„Kőnig Gyula azon nagy tudósok közé tartozik, akik a maguk szakterületéről az általános művelődés problémáit képesek áttekinteni, és éppen mivel a maguk tudományában erősek, termékenyítőn szólhatnak hozzá az általános, a bölcseleti, a művelődési kérdésekhez is. Ez az egyetemességre törekvés, mely a természettudományosságból logikusan vezet át társadalomtudományi területre, az Akadémia legnagyobb tudósait jellemzi; őnáluk az egésznek, az általánosnak a keresése sohasem csitul el. A tudomány ilyen eszménye mellett tett hitet Kőnig is, heidelbergi éveire, s Helmholtzra emlékező egyik írásában: »Az általános, a döntő szempontok fölismerése még a tudomány részleteiből merített kérdésnél is, eleven érzék a különböző szakok kapcsolata iránt, philosophiai mélyrelátás a módszerek kiszemelésében és a kutatás különböző területeinek a költőre emlékeztető összefoglalása a kivitelben — íme a jellemző vonások, melyek annyi sok tudományra irányult munkásságának egységét biztosították.« E gondolat időszerűségét igazán csak akkor érzékelhetjük, ha figyelembe vesszük a tudományok mai, komplexitás, összetettség iránti hajlamát. A Helmholtzra vonatkoztatott eszmény felismerhetően magának Kőnig Gyulának eszménye is, — tehát olyan tudomány, melyhez a filozófiának, sőt a költészetnek is köze lehet."

KŐNIG GYULA MINT MATEMATIKUS

NÉHÁNY ELŐZETES MEGJEGYZÉS

Hogy Kőnig Gyulának a hazai és a nemzetközi matematika fejlődésében betöltött szerepét kellően értékelhessük, célszerű néhány adatot ismertetnem.

Az 1867-es kiegyezés — mint ismeretes — nem hozta meg a magyar nép várva várt függetlenségét, de a polgári fejlődés útján mégis jelentett haladást. Némileg konszolidálódott az ország gazdasági élete, ez pedig ösztönzőleg hatott a különféle tőkebefektetésekre, megnövekedett a vállalkozási kedv a kereskedelmi életben, emelkedett — mégpedig rohamosan — az iparban, kisebb mértékben a mezőgazdaságban alkalmazott gépek száma. Röviden szólva: meggyorsult a kapitalista rendszer kialakulása. Ez magával hozta a szellemi élet fejlődését is, mert a kapitalizmus nagyobb tudományos igényeket támasztott, mint az előző idők elmaradt feudális berendezkedése.

Ez a folyamat nem maradt hatás nélkül a matematikára sem. A megelőző évszázadokból az önálló matemaikai kutatások terén csupán Segner János Andrást (1704—1777), továbbá a két Bolyait említhetjük. Az események kedvezőtlen alakulása következtében azonban a Bolyaiak nem teremthették meg a matematikai kutatások hazai műhelyeit, alkotásaik évtizedekig észrevétlenek maradtak. Az ő idejükben működő egyetemi professzorok szerény tudása csak arra volt elégséges, hogy középszerű pedagógusokat és valamivel magasabb tudású „földmérőket" képezzenek, az önálló kutatások megteremtése azonban meghaladta erejüket.

Matematikai kultúránk tehát meglehetős felkészületlenül állt a kapitalizmus magasabb igényeivel szemben. Sokan átérezték a helyzet káros voltát, több tanulmányban és röpiratban szót is emeltek a javítás érdekében. E felismerések hatására egyesek — inkább az anyagilag tehetősebbek — itthoni tanulmányaik kiegészítése és elmélyítése céljából felkeresték a nevesebb külföldi egyetemeket, és visszatértük után tudásban gazdagodva iparkodtak a haza javára dolgozni. Közéjük tartozott a műegyetem neves matematika professzora, a geometria és az algebra nemzetközileg is elismert művelője, Hunyady Jenő, továbbá matematikusaink és fizikusaink közül mások is (Farkas Gyula, Réthy Mór, id. Szily Kálmán, Vályi Gyula, Eötvös Loránd stb.). És közéjük sorolandó Kőnig Gyula.

Az akkor hazánkban végzett matematikai vizsgálatok témakörének is legtöbb esetben meg tudjuk adni az eredetét: nagyobb részük a külföldön divatos vizsgálati területekhez kapcsolódott, de számosat a speciális hazai igények vetettek fel.

Kőnig Gyula matematikai témái inkább az előbbiekhez sorolandók, ezt a következő fejezetekből látni fogjuk. Ez azonban nem jelenti, hogy lenézte vagy mellőzte volna az itthoni gyakorlati igényeket. Erre is tudunk majd példát mutatni.

Az alábbiakban tárgykörök szerint iparkodom összefoglalni Kőnig Gyula matematikai eredményeit. A felsorolásnak sok minden áldozatul fog esni főként a formulák hiánya és e könyvecske megszabott terjedelme miatt. Ennek ellenére bizonyára kitűnik majd, hogy egyik legkiemelkedőbb matematikusunk volt, akinek nevéhez a jelentős fölfedezések egész sora, valamint a jeles matematikusok világszerte elismert generációjának nevelése fűződik.

SZEREPE A KÉT BOLYAI MEGISMERTETÉSÉBEN

Másutt már említettem, hogy 1871-ben Kőnig Gyulát a négytagú Bolyai Bizottságba választották. E bizottság feladata az volt, hogy a Marosvásárhelyről Pestre szállított gazdag Bolyai-hagyatékot rendezze, és az arra érdemesnek ítélt részek kiadását előkészítse. Ebben az aprólékos, szinte levéltári munkában érdemlegesen Kőnig nem vett részt, más irányú teendői akadályozták meg benne. Viszont jelentős volt a szerepe Bolyai Farkas *Tentamen*je, valamint Bolyai János *Appendix*e második kiadásának az előkészítésében. A *Tentamen* második kiadásának első kötetét Kőnig Gyula és Réthy Mór szerkesztette, és ez 1897-ben jelent meg. Kettőjük közül Kőnig játszotta a fontosabb szerepet: ő vette észre a munkában levő új tételek jelentőségét, de azt is, hogy melyek azok, amelyek további vizsgálatokat igényelnek, esetleg általánosíthatók is. Buzdítására kezdett Réthy Mór a

Bolyai Farkas által definiált „végszerű területegyenlőség" kérdéskörével behatóan foglalkozni, és az idetartozó — ma is folyó — vizsgálatok első jelentős értekezéseit is ő publikálta. Farkas Gyulát az ugyancsak Bolyai Farkastól származó iterációs gyökközelítő eljárás konvergencia-kérdéseinek tisztázására lelkesítette Kőnig, ilyen módon is több figyelemreméltó tanulmány született.

Ismeretes, hogy Bolyai János *Appendix*ének utolsó paragrafusai „abszolút-geometriai" szerkesztéseket tartalmaznak. Az ezekhez kapcsolódó egyik nyitott témára Kőnig Kürschák József figyelmét hívta föl. Így származott Kürschák egyik legtöbbet emlegetett szép eredménye. Ugyanis a Hilbert-féle axiómarendszer négy első axiómacsoportjára támaszkodó, ún. abszolút szerkesztésekben nincs szükség körvonal megvonására, ezekben a körző szerepe csupán távolságok átvitelére szorítkozik. Mármost Kürschák olyan szerkesztést talált, amelynek segítségével tetszőleges szakaszhossz átrakható az egyszer s mindenkorra megadott szakaszhossz átvitelére alkalmas — rögzített nyílású — egységátrakóval, az *etalon*nal.

Kezdeményező szerepe volt Kőnignek a Bolyai Díj létesítésében. Ezt a Magyar Tudományos Akadémia Bolyai János születésének centenáriuma alkalmával alapította azzal a kikötéssel, hogy a díj először 1905-ben adandó ki, ezt követőleg pedig minden ötödik évben „a bárhol és bármely nyelven megjelent legkiválóbb matematikai vizsgálatokért". A díj tízezer korona és hozzá 600 korona értékű aranyérem volt. Arról is határoztak, hogy az odaítélésről két magyar és két külföldi tagból álló bizottságnak kell döntenie.

A szép kezdeményezést csak két ízben lehetett valóra váltani: 1905-ben a bizottság (Kőnig, Rados, Darboux, F. Klein) Poincarét, 1910-ben (Kőnig, Rados, Mittag-Leffler, Poincaré) Hilbertet tüntette ki. Sajnos ennek — a Nobeldíjjal csaknem egyenértékű — kitüntetésnek az első világháború véget vetett.

*

Az említett néhány adat Kőnig mindennek a mélyébe látó kritikai érzékét igazolja, viszont egyik fiatalkori értekezéséből, amelynek tárgya a Bolyai-geometriához kapcsolódik, az újszerű iránti fogékonysága tűnik ki. Vizsgálatának ismertetése előtt néhány idetartozó geometriai tényt említek.

A Bolyai—Lobacsevszkij-geometria elfogadását sokáig a szemlélet számára szokatlan voltuk késleltette, valamint az a kérdés, hogy nem tartalmaznak-e belső ellentmondást. Egy, valamilyen axiómarendszerre épített tudományt akkor nevezünk ellentmondástalannak, ha axiómáira támaszkodva nem lehet egyidejűleg egy tételt és annak a tagadását is bebizonyítani. E kérdés eldöntésének a fontosságát geometriai fölfedezése során már Bolyai János észrevette, iparkodott is azt bizonyítani, azonban végleges megoldáshoz nem jutott.

A nem euklideszi geometriák ellentmondástalanságának a vizsgálatában a *modellalkotás* bizonyult a legjárhatóbb útnak. Ennek lényegét — csaknem szó szerint átvéve Kárteszi Ferenc ötletes magyarázatát — a következőként írhatjuk le:

Jelölje pl. a hiperbolikus geometria axiómarendszerét a *H* betű. A *H* rendszer „pont"-ról, „egyenes"-ről, „sík"-ról, és ezeknek ama vonatkozásairól szól, amelyeket (Hilbert kifejezéseit használva) az „illeszkedik", „közte van", „egybevágó", „párhuzamos" és „folytonos" szavakkal fejezünk ki. Idézőjelben azért szerepelnek e szavak, hogy a nekik megfelelő (számunkra megszokottabb) euklideszi geometriai fogalmaktól megkülönböztessük. Tekintsük az euklideszi geometria bizonyos elemeit — nem feltétlenül pontjait vagy alapelemeit —, s nevezzünk egyeseket „pont"-oknak; bizonyos más fajta euklideszi elemeket „egyenesek"-nek, bizonyos harmadik fajtát „síkok"-nak. Tekintsünk továbbá ezek között az euklideszi fogalmak között értelmezett bizonyos vonatkozásokat (amelyek lehetnek az euklideszi ekből leszármaztatott, összetett vonatkozások is) „illeszkedés"-nek, „köztelevés"-nek, „egybevágóság"-nak, „párhuzamosság"-nak, „folytonosság"-nak.

Olyan eljárás ez, mint amikor a térképhez jelmagyarázatot adunk. (A köröcske: „város"; a pontozott vonal: „megyehatár" stb.) Ilyen módon az euklideszi geometriában mintegy térképet készítettünk a *H* axiómarendszer logikai szerkezetének az ábrázolására. Ezen a térképen a *H* axiómái valamilyen euklideszi állítás formájában visszatükröződnek. Az ilyen térképet nevezzük *modell*nek, és az alkalmas térképről azt mondjuk, hogy a modell megvalósítja a *H* axiómarendszert. Belátható, hogy valamely nem euklideszi geometria ellentmondástalanságának a kérdését modellalkotással vissza lehet vezetni az euklideszi geometria ellentmondás-mentességének a problémájára.

Meg kell említenem, hogy modellalkotás először magában a Bolyai—Lobacsevszkij-féle geometriában szerepelt, bár az ebben levő eljárás az előbb leírtnak mintegy a fordítottja: Bolyai János és Lobacsevszkij ugyanis a hiperbolikus térben határozott meg olyan felületet (paraszféra), amelyen az euklideszi síkgeometria megvalósul. 1868-ban Beltrami olasz matematikus az euklideszi térben definiált olyan felületdarabot (pszeudoszféra), amelyen a hiperbolikus síkgeometria valósul meg. A különféle geometriai modellek közül az egyik legismertebb a Cayley—Klein-féle, ezt 1871—72-ben tette közzé Felix Klein.

Ilyen előzmények után 1872-ben Kőnig Gyula egy eljáráste közölt arról, hogy miként lehetn) a konsta ns (pozitív vagy negatív görbületű terek sík-, illetve térbeli alakzatait az euklideszi térben szemléltetni. A nehézséget az okozza, hogy — Riemann és Helmholtz egy régebbi megjegyzése szerint — a „görbült" terek geometriai alakzatainak euklideszi szemléltetésében az is szükséges, hogy a „térgörbületet" figyelembe vegyük. Ez kétdimenziós nem euklideszi síkbeli alakzatoknál még megoldható azáltal, hogy a pont két koordinátájához harmadikként hozzávesszük az e pontbeli görbületet, és az így nyert rendezett értékhármast a háromdimenziós euklideszi tér egy pontjának tekintjük. A háromdimenziós nem euklideszi alakzatok szemléltetése azonban ilyen módon már nem megy, hisz ahhoz négydimenziós euklideszi tér lenne szükséges.

Kőnig Gyula elgondolása szerint azonban ez a nehézség is elhárítható — legalábbis elvileg —, ha kölcsönösen egyértelmű megfeleltetést létesítünk a görbült terek alakzatai és a háromdimenziós euklideszi tér alkalmasan választott *egyeneskomplexusai* között.

A leképezés lényege könnyebben érthető, ha azt előbb — Kőnig után — a zérus görbületű (euklideszi) térre alkalmazzuk. Vegyünk föl egy *alapsíkot*, továbbá egy ezen kívül levő, de vele párhuzamos *alapegyenest*. Jelöljünk ki az alapsíkon derékszögű koordináta-rendszert, az alapegyenesen pedig kezdőpontot. Ha az euklideszi tér P (x, y, z) pontjának azt az egyenest feleltetjük meg, amely a síkbeli koordináta-rendszer (x, y) pontját az alapegyenes z pontjával köti össze, akkor az euklideszi tér alakzatai egyeneskomplexusokba mennek át; megfelelő ábra segítségével meggyőződhetünk arról, hogy pl. az (x, y) síkon levő *egyenesek síkokba* mennek át, a *csavarvonaldarab* képe bizonyos *vonalfelület.* A leképezés bármilyen geometriai alakzat esetében végrehajtható, de a kép nem mindig tekinthető át. Mindenesetre az „illeszkedés”-nek, a „köztelevés”-nek stb. a leképezésben is van megfelelője; annak sincs elvi akadálya, hogy szögmérést vezessünk be, hiszen pl. szöget bezáró két egyenesnek a képen két egymást metsző vonalalakzat felel meg.

Kőnig szerint ezt az eljárást a nem euklideszi terek vonalkomplexusokba való leképezésére is alkalmazhatjuk, ha biztosítjuk, hogy a tér „görbültség"-ének a képen is legyen megfelelője. Ezt pedig úgy érhetjük el, hogy a fentebb említett „alapsík" és a vele párhuzamos „alapegyenes" helyett alapalakzatokként olyan *görbült felület*et és *görbét* veszünk fel, amelyek görbülete megegyezik a leképezendő nem euklideszi tér görbültségével. Egyébként teljesen az előbbi módon kell eljárnunk, vagyis: az „alapfelület"-en kijelölünk egy felületi koordinátarendszert, az „alapgörbé"-n kezdő pontot. A nem euklideszi tér $P(x, y, z)$ pontjának most egyenest feleltetünk meg, mégpedig azt, amely a felületi koordináta-rendszer (x, y) pontját összeköti az alapgörbe z pontjával. Így a nem euklideszi tér „pont"-jának, „egyenes"-ének és „sík"-jának a szemléltetésben rendre „egyenes", „vonalfelület" és bizonyos „egyenes-sereg", a nem euklideszi tér „görbültség"-ének az alapalakzatok „görbület"-e felel meg. Ha az alapfelületet és az alapgörbét olyan pontokban, amelyekben a felület érintősíkja és a görbéhez húzott érintő párhuzamos, az érintő síkkal és az érintővel helyettesítjük, akkor „kicsiben" az euklideszi tér leképezésére alkalmazott modellhez jutunk. Ez felelne meg annak a tételnek, hogy a görbült terek elegendő kicsiny térrészében az euklideszi geometria tételei érvényesek.

Kőnig értekezése nagyon vázlatos, ötletének részletekbe menő kifejtése, a térkép teljességének igazolása mindmáig nem történt meg. Érdeme mégsem hallgatható el: az elsők között ő is fölismerte a geometriai modellalkotás jelentőségét, ezért tanulmánya nem méltatlan a tudományos vizsgálatait éppen csak megkezdő fiatal matematikushoz. Elgondolása külföldön nem keltett figyelmet, bizonyára azért, mert csakhamar a Bolyai—Lobacsevszkij-geometria alaposabban kidolgozott modelljeit közölték. Ugyanakkor a hazai sajtó — még a napilapok is — több helyen foglalkoztak vele. Ma is említést érdemlő újszerűségének fölidézése Kalmár László különböző írásainak és egyetemi előadásainak az érdeme.

ARITMETIKAI ÉS SZÁMELMÉLETI VIZSGÁLATAI

Másutt már említettem, hogy a múlt század végéről és a jelen század elejéről a kortársaktól vagy tanítványoktól származó sok olyan értekezést ismerünk, amelyek tárgyát Kőnig Gyula egyetlen megjegyzése, egy elejtett mondata sugallta. Ez a megállapítás magára Kőnigre is vonatkoztatható olyan értelemben, hogy előadásai során sohasem kerülte ki vagy kendőzte el a felvetődő problémákat, ellenkezőleg: kereste azokat. Bármilyen lezártnak vélt témakörben is fedezett föl nyitott kérdéseket, és azokra a választ vagy valamelyik tanítványa, vagy ő maga adta meg. Különösen a fiatal Kőnigre jellemzőek az ily módon keletkezett rövidebb írások, később többnyire terjedelmes értekezésekben, vaskos monográfiákban mutatkozott meg átfogó tudása és alkotó ereje.

Így pl. a Műegyetemi Lapokban közölt, Kőnigtől származó — főleg számelméleti — feladatokra az ország távoli vidékein is fölfigyeltek, a megoldók között olyan neveket találunk, mint Hunyady Jenő, Scholtz Ágoston, Farkas Gyula, Vályi Gyula, Klug Lipót és mások. A számelmélet Kőnig Gyula előtt hazánkban teljesen mellőzött tudományág volt — eltérőleg a matematika több más területétől. A hátramaradt írásokból tudjuk, hogy a két Bolyai nagyra értékelte ugyan a matematika ,,királynőjét'', maguk azonban ezen a téren semmit sem alkottak.

Kőnig számelméleti eredményeit főleg az előadásairól visszamaradt, sokszorosított jegyzetek, valamint monográfiáinak egyes részei tartalmazzák. Ezekben tekintélyes fejezetek — még ha címük más tartalmat is sejtet — számelmélettel foglalkoznak.

A lineáris kongruencia-rendszer megoldhatóságának elméleti alapjait Gauss fektette le *Disquisitiones Arithmeticae* c. alapvető értekezésében. Gauss itt annak a kérdésnek a vizsgálatára szorítkozott, hogy miként lehet egy ilyen rendszert egyismeretlenes kongruenciára visszavezetni (ugyanaz a kérdés, mint az, hogy kompatibilis lineáris többismeretlenes egyenletrendszer miként vezethető vissza egyismeretlenűre). Kőniget nem elégítette ki a Gauss-féle tárgyalási mód, hanem a kongruencia-rendszer megoldhatóságának *általános* feltételeit kutatta, és e téren jelentős új eredményeket talált.

Ugyanezen tárgykörbe sorolandó egy speciális, az ismeretlent magasabb hatványon is tartalmazó kongruencia megoldhatóságára adott válasza. Erre vonatkozó eredménye — kiegészítve a Rados Gusztávtól származó vizsgálattal — ma Kőnig—Rados-tételként szerepel a szakirodalomban. E tételnek különféle számelméleti vizsgálatokban sokan vették hasznát. Újabban Rédei László és Turán Pál viszonylag könnyebben kezelhető formában fogalmazta át a megoldhatóság Kőnig—Rados-féle kritériumát.

KUTATÁSAI AZ ANALÍZIS TERÉN

Kőnig nemzetközileg legismertebb eredményei a halmazelméletbe és a matematikai logikába tartoznak, azonban — véleményem szerint — a hazai matematika századvégi föllendülésében nagyobb hatásúak voltak analízis tárgyú írásai. Ez egyaránt vonatkozik értekezéseire és ilyen tankönyveire. Pedig az analízisben nálunk Kőnig nem volt kezdeményező, az ilyen hagyományok még a geometriánál is régebbi időkig nyúlnak vissza. Segner János András és Kerekgedei Makó Pál XVIII. században írott könyvei, majd Bolyai Farkas *Tentamen*je, Győry Sándor kétkötetes analízise, Petzval József monográfiái, Vész János Ármin ugyancsak kétkötetes egyetemi tankönyve egyaránt figyelemreméltó alkotások.

Kőnig Gyula egy vonatkozásban azonban ezen a téren is úttörő volt nálunk, mégpedig abban, amit manapság „weierstrassi szigor"-nak szoktunk nevezni. Munkája nyomán hazánkban is meghonosodtak az analízis nagy precizitást kívánó módszerei. Még a viszonylag szerényebb *Bevezetés a felsőbb algebrába* c. könyvének egyik mondata szerint is az volt a célja, hogy „a mai tudományos kutatás színvonaláig" juttassa el az olvasót. Törekvése ebben a munkában különösen a végtelen sorok, a végtelen szorzatok és a lánctörtek valóban legújabb eredményeit is bemutató fejezeteiből tűnik ki.

E munkájánál azonban sokkal jelentősebb az 1887-ben megjelent *Analízis* c. könyve. Az egyik korabeli bírálat ezt írja: „Önálló felfogás és elrendezés mellett részletes és teljes áttekintést nyújt a . . . matematikai módszerek és eredmények mai állásáról . . ., egyszersmind megadja az eddig hiányzott alapot, melyből most már önálló matematikai kutatások és bírálatok indulhatnak ki a mathézis számos mezejébe."

E könyvében Kőnig valóban nem elégedett meg az analízis akkor szokásos anyagának a tárgyalásával, hanem gyakran közölt általa talált bizonyításokat, vagy beillesztette saját tudományos vizsgálatainak új eredményeit. Érdeklődő fiatal matematikusaink szinte bibliájuknak tekintették e művet, amelyből nem csak tárgyi ismereteket és matematikai pontosságot tanultak, hanem egyéni vizsgálataikhoz ötleteket is merítettek. Sajnálatos, hogy a két kötetre tervezett monográfiának csupán az első része jelent meg, és az is csak magyar nyelven, holott egyes külföldi matematikusok (pl. Engel és Stäckel) szorgalmazták német kiadását.

Az analízis szó azonban e könyv esetében tágabb értelemben veendő: a ma szokásos anyagon felül bőven tartalmaz valósfüggvénytani és analitikus számelméleti fejezeteket. Külön is figyelmet érdemel, hogy a halmazelmélet megszületését alig egy évtized múlva Kőnig már időszerűnek látta, hogy az akkor még sokat vitatott tudományág egyes részeit könyvébe felvegye. Ez a magyarázata annak, hogy a halmazelmélet több fogalmának magyar szakkifejezése (elem, számosság, megszámlálható halmaz stb.) Kőnigtől ered.

Módszerére jellemző a magas fokú absztrakció. Kőnig az analízist iparkodott minden geometriai eszköztől elkülöníteni, akárcsak egy fél évszázaddal előbb Bolyai Farkas. Könyvének egyik lábjegyzetében ezeket írja: „Az analízis rendszeres kifejtésében geometriai tárgyalásokat nem használhat, mert ezeknek utolsó alakjai — akár axiómáknak, akár föltevéseknek vegyük őket — mindenkor oly külső szemlélettel állnak kapcsolatban, melytől teljesen független minden számtani igazság. Ez természetesen nem zárja ki, hogy a számok absztrakt vonatkozásait geometriai viszonyokon érzékítsük, valamint azt sem, hogy az analízis geometriai (valamint egyéb természettudományi) *alkalmazásai* által a kifejtett módszereknek tudományos értékét és jelentőségét föltüntessük.''

Az alább következő Kőnig-féle tétel megértése nem igényel mélyebb matematikai fölkészültséget, Kürschák József által adott népszerű átfogalmazása pedig iskolapéldája annak, hogy miként lehet viszonylag elvont matematikai eredményt sokak számára érthetővé tenni.

Legyen adott a következő végtelen sorozat:

$$1, \ \cos x, \ \cos 2x, \ \cos 3x, \ \ldots$$

Középiskolai tanulmányainkból tudjuk, hogy a cosinus függvénynek milyen az előjele a különböző szögnegyedekben. Így belátható, hogy az előbbi sorozat elemei (x-től függően) szeszélyes módon + és — értékűek. Kérdés, hogy az előjelváltások (tehát amikor + után — következik vagy megfordítva) számából meg lehet-e határozni x-et?

A válasz igenlő: a sorozat mind több tagját véve tekintetbe, az előjelváltások számából határértékként kiadódik x értéke.

Természetesen Kőnig képletileg is közli az x-et előállító formulát.

A Kőnig által adott bizonyításnak Kürschák Józseftől származó szellemes, népszerű átfogalmazása:

„Képzeljünk el valamely egyenlő periódusokban ismétlődő természeti tüneményt, mondjuk egy időszakos forrást, mely egyenlő időközökben tör ki hatalmas sugarakban. Az időszak, mely múlva a kitörés ismétlődik, szorítkozzék néhány órára. Az időszak mérését nehezítse meg az a körülmény, hogy a forrás mellett képzelhetetlenül primitív élet folyik. Az időmérés mindennemű eszköze hiányozzék. A csillagok járásában se legyünk olyan járatosak, hogy a pásztorok módjára belőle leolvashatnók az időt. Egyetlen mértékül a nappal és az éjszaka megkülönböztetése szolgáljon. Ha a forrás nappal tör ki, véssünk egy fának a kérgébe + jelet, ha éjjel tör ki, akkor — jelet. Ezt folytassuk hónapokon át, a jeleket abban a rendben róva egymás mellé, ahogyan keletkeztek. Más följegyzést ne tegyünk. Tehát mit sem törődünk a rovások keltével. Nem számláljuk a napok folyását. Csak a + és — jeleket rovogatjuk. Kérdés: ezek a jelek elegendők-e arra, hogy belőlük hosszabb idő múlva pontosan meghatározhassuk a tünemény periódusát, azaz a két felszökés közötti időszakot?

A periódus ilyen meghatározása valóban lehetséges, mégpedig igen egyszerűen. Nyilván annyi kitörést észleltünk, ahány jelet róttunk a fa kérgébe. Továbbá azt is megmondhatjuk, hogy ezek a kitörések hány nappalra és hány éjszakára estek. Valahányszor + után — következik, mindannyiszor közben egy éjszaka borult reánk. Valahányszor — után + következik, új hajnal virradt. Ha feljegyzéseink 3000 szakaszra vonatkoznak és köztük 1000 jelváltást találunk, azaz, ha 500-szor történik átmenet a — jelekről + jelekre és 500-szor az ellenkező átmenet: akkor ez a napnak 500 keltét és 500 lenyugvását jelenti. Följegyzéseink tehát 500 napról valók. Csak arra nézve van kétségünk, hogy első és utolsó följegyzéseink mely órára esnek. De ez 500 naphoz képest nagyon csekély idő. Fölismerve, hogy a följegyzések 500 napra vonatkoznak és tudva, hogy ennek az időnek 3000 periódus felel meg, nyilván-való, hogy 24 órára éppen 6 szakasz esik. Egy periódus 4 óra.

Kőnignél a meghatározandó szám nem egy természeti tünemény periódusa, hanem bizonyos algebrai vizsgálatokban szereplő szög; a + és a — jelek, amelyeknek váltakozásából e számot meghatározza, nem nappalt és éjszakát jelentenek. De a gondolat lényege ugyanaz."

★

Kőnig analízis tárgyú értekezéseinek egy része didaktikai, így az is, amelyben módszert közöl, hogy miként lehet az integrálszámítás *második* középértéktételét az *elsőből* levezetni. E tanulmánya azonban több, mint amit a bevezetője ígér: benne ugyanis Kőnig megadja az integrál *Stieltjes*ről elnevezett definicióját. A bevezetésben az a kijelentés szerepel, hogy az integrálszámítás második középértéktétele eredeti módon vezethető le az elsőből, „ha a határozott integrál fogalmát új irányban általánosítjuk". Ezután következik az általánosítás, ez pedig a Stieltjes-integrál pontos értelmezése.

A határozott integrál különböző irányú általánosításai közül egyik legközvetlenebb, és a gyakorlatban is sűrűn alkalmazott a Stieltjes-féle. Ezt a fizikusok már a múlt század hetvenes éveiben alkalmazták, anélkül azonban, hogy eljárásuk elvi jelentőségét fölismerték volna. Stieltjesnek a pontos definiciót közlő értekezése 1894—95-ben jelent meg, Kőnig említett értekezése 1897-ben. Ami tehát a közzététel időpontját illeti, kétségtelenül Stieltjesé az elsőbbség. Egyetemi előadásainak jegyzetei azonban azt igazolják, hogy Kőnig már jóval előbb alkalmazta ezt az integrálfogalmat. Azt kell tehát mondanunk, hogy az integrál általánosításainak messze vezető folyamatában fontos, bár külföldön alig méltányolt láncszemet alkot Kőnig ez irányú tevékenysége.

Ennél az eredménynél szerencsésebb volt a sorsa Kőnig egy másik értekezésének, ez komoly nemzetközi visszhangot váltott ki. Itt Kőnig Gyula a bizonyos feltételeknek eleget tevő egyváltozós valós függvény tulajdonságait vizsgálta, és olyan tételeket talált, amelyeket ma a valós függvénytan keretébe szoktunk iktatni. Képletek közlése nélkül körülményes lenne megadnunk a vizsgált függvényre kirótt feltételeket. Röviden annyit mondhatunk, hogy az általa tárgyalt függvény némi rokonságot mutat Weierstrass azon példájával, amely a mindenütt folytonos, de egyetlen pontban sem differenciálható függvényt definiálja.

Hazai vonatkozásban főként azért jelentős Kőnig ezen értekezése, mert hatására kezdett valós-függványtani problémák iránt érdeklődni Geöcze Zoárd, kinek legelső eredménye egy mindenütt folytonos, de bármily kis intervallumban is végtelen ívhosszú függvényre adott példa. Ez a függvény — mint újabb számítások kiderítették — egyetlen pontban sem differenciálható. Távolabbi következménye pedig Geöczének a felszínszámítás körébe tartozó alapvető tevékenysége. Állításomat Geöcze hátramaradt — a háborúban sajnos veszendőbe ment — kézirataira alapozom.

*

A Kőnigről szóló visszaemlékezések azt mondják, hogy nem volt híve a matematikai eredmények erőszakos, mesterkélt alkalmazásának, „nem látta szívesen, ha gyakorlati férfiak bonyodalmas... tételeket alkalmaznak olyan eredmények levezetésére, melyek egyszerűbb mechanikai meggondolásokból világosabban tűnnek ki" (Kürschák). E megállapítás helytálló voltát számos szemelvénnyel igazolhatnám, de talán a legjellemzőbbek rá a differenciálegyenletekről írott terjedelmes értekezései. Ezek tárgya — első kiindulópontjukat tekintve — kifejezetten alkalmazott probléma (dinamikai kérdések, a nálunk többek által kutatott leghatásosabb szélkerék, illetve hajócsavar kérdése stb.), ez azonban magukból a tanulmányokból kevéssé vagy egyáltalán nem tűnik ki. Kőnig ugyanis a kutatásra ösztönző gyakorlati problémától gyorsan függetlenítette magát, és lehetőleg általános elmélet megteremtésére törekedett.

Mechanikai problémákban nagy szerepet játszik az ún. Hamilton—Jacobi-féle elsőrendű (az *n* számú helykoordináta, valamint az *idő* miatt $n + 1$ független változót tartalmazó) parciális differenciálegyenlet. Jacobi már Kőnig előtt igazolta, hogy ennek a megoldása ekvivalens egy belőle nyerhető $2n$ számú közönséges differenciálegyenletből álló rendszer megoldásával. Mármost Kőnig Gyula egyik értekezésében alapkérdésnek tekintette az így nyerhető közönséges differenciálegyenlet-rendszer megoldásának a problémáját, és több szempontból le is zárta az analízis e — gyakorlati szempontból igen lényeges — kérdéskörét. Értekezésének a nemzetközi irodalomban nagy visszhangja volt, eredményeinek tekintélyes része beépült a monográfiákba.

A differenciálegyenletek körében Kőnig által végzett vizsgálatok közül azonban a legjelentősebb az, amelyben a két független változót tartalmazó, másodrendű parciális differenciálegyenletek általános elméletét fejtette ki. Az egyenletek ezen osztályának elmélete Ampère alapvető, de könnyen egyáltalán nem követhető kutatásai, továbbá egyesek — Boole, Bour, Imschenetzky — módszeresebb közleményei után megakadt. 1870-ben Darboux a vizsgálatok egészen új irányát jelölte ki a kérdés olyan fölvetése révén, hogy az említett típusú differenciálegyenletek milyen feltételek teljesülése esetén vezethetők vissza közönséges differenciálegyenlet-rendszerekre. Erre a kérdésre talált Kőnig Gyula kritériumokat, miáltal az ilyen parciális differenciálegyenletek megoldásának kérdését elvileg el is intézte. Azért csupán elvileg, mert a nyerhető közönséges differenciálegyenletek tényleges megoldása újabb problémákat vethet fel.

Figyelemre méltó e kérdéskörnek a hazai háttere. Ismertetésével jellemző példát mutatok be arra, hogy kifejezetten gyakorlati problémák milyen rövid úton vezethetnek absztrakt matematikai vizsgálatokhoz. Martin Lajos (1827—1897), a kolozsvári egyetem matematikaprofesszora a múlt század hatvanas éveiben elemi matematikai eszközökkel, valamint kísérleti úton kutatta a leghatásosabb hajócsavar és az optimális szélkerék problémáját. Vizsgálatait a hazai folyók hajózhatóvá tétele és az öntözéses gazdálkodás szorgalmazása tette időszerűvé. A kutatásokba — már mélyebb matematikai eszközöket is felhasználva — csakhamar bekapcsolódott id. Szily Kálmán, Kruspér István és Réthy Mór. Fokozatosan felismerve azt, hogy a kérdés matematikai formulázása variációszámítási feladathoz vezet, Vályi Gyula jelentős doktori értekezésében már a variációs problémából nyert másodrendű parciális differenciálegyenlet megoldhatóságát kereste.

Ilyen előzmények után fordult Kőnig Gyula figyelme az ilyen típusú differenciálegyenletek *általános* elmélete felé. Az ő vizsgálatainak hatására Kürschák József is közölt néhány idetartozó jelentős tételt. A későbbi kutatók — Sonin, Bäcklund, Beudon, Hamburger és mások — részeredményeivel együtt monografikus feldolgozásban Goursat foglalta össze az idetartozó elméletet.

Nincs lehetőségem Kőnig analízis tárgyú értekezéseinek további részletezésére, egynek a lényegére azonban még rámutatok: ebben komplex-függvénytani vizsgálatokból kiindulva egy látszólag távol eső területtel talált kapcsolatot. D. Bernoulli 1728-ban egy gyökközelítő eljárást publikált magasabb fokú algebrai egyenletek abszolút értékre nézve legkisebb gyökének a meghatározására. Kőnig komplex-függvénytani tétele igen egyszerű indoklását adja a

Bernoulli-féle módszernek, és ezzel példát szolgáltat az analízis és az algebra távolesőnek tűnő területei összekapcsolására.

Befejezésként még egy rövid tudománytörténeti megjegyzés: a századforduló táján tevékenykedő tudósaink közül többen csaknem egyforma érdeklődéssel dolgoztak a *matematika* és az *elméleti fizika* területén. Egyesekről — Réthy Mór, id. Szily Kálmán, Farkas Gyula és mások — nehéz is eldöntenünk, hogy a matematikusok, vagy a fizikusok közé sorolandók-e. De néhány értekezésben még a hazai matematika olyan pregnáns képviselői, mint Vályi Gyula, Schlesinger Lajos, Fejér Lipót és

Beke Manó is tárgyaltak fizikai problémákat. Ez utóbbiak közé kell sorolnunk Kőnig Gyulát is. A mechanika ismert elveivel foglalkozó egyik értekezése módszerét tekintve a matematikai analízis körébe sorolandó. A tanulmány a mechanikai kényszermozgásokkal foglalkozik, de a megelőző idők tárgyalási módjainál általánosabban: a ható erőkre és a kényszerre vonatkozó jóval enyhébb megszorításokkal. Éppen a nagyfokú általánosság miatt érdekesek Kőnig eredményei. Itt csupán azt említem meg, hogy néhány új fogalom (sebességi viriál, gyorsulási viriál, energéma, gyorsulási energéma) értelmezésével sikerült a mechanika néhány variációs elvét tömörebben megfogalmaznia. De a tanulmányból vett következő idézet is érdekes — talán a relativitáselmélet szempontjából: „nincs kizárva annak lehetősége, hogy a tömegek bizonyos módon változnak az idővel, vagy még általánosabban, a rendszer mozgási állapotával. Épp ezért megjegyzem itt . . ., hogy a . . . tárgyalások a tömegekre vonatkozó ily általánosabb föltevésre is vonatkoznak."

FŐBB ALGEBRAI EREDMÉNYEI

E nagyon vázlatos ismertetést ismét Kőnig könyveivel kell kezdenem. Ezek ugyanis nagyobb hatást gyakoroltak matematikai kultúránk fejlődésére, mint egyes speciális algebrai kérdéseket tárgyaló értekezései.

Bevezetés a felsőbb algebrába c. — már említett — könyvének autoreferátumából veszem a következő sorokat: „. . . a címben említett munka mindenesetre jogosult kísérlet, melynek, ha már elismert minta nem volt választható, . . . csak előnyére szolgálhat, hogy speciális hazai oktatási viszonyainkra tekintettel volt. Nem lehet elhallgatni, hogy a föladat, melyet a munka szerzője meg akart oldani, elég nehéz volt; csak az algebrai operációk elmélete és az elsőfokú egyenletrendszerek ismerete van benne föltételezve . . ., de mindemellett a mai kutatás színvonaláig akarja eljuttatni az olvasót."

Kétségtelen, hogy ez a „kísérleti" munka igen sikerült. A második kötete is elkészült a könyvnek, ez azonban nem jelent meg. A hallgatóság számára ugyanis elegendőknek bizonyultak a Kőnig egyetemi előadásairól sokszorosítva kiadott jegyzetek.

Az algebrát ma két részre szoktuk osztani: *klasszikus* és *absztrakt* (modern) algebrára. Az előbbi területén már Kőnig előtt és vele egy időben jelentős kutatások folytak hazánkban. Elsősorban Hunyady Jenő és Scholtz Ágoston nevét kell kiemelnünk, akik a determinánsokban értek el nemzetközileg is elismert eredményeket. Farkas Gyulának külön is érdeme, hogy magyar nyelven kiadatta Baltzer német matematikus determinánsokról írott pompás kis könyvét.

Ezekkel magyarázható, hogy a determinánsok elmélete hazánkban igen fejlett volt, és nehéz is lenne név szerint fölsorolnunk mindazokat, akik hasznos és tetszetős determináns-tételekre bukkantak. Kőnig ezen a téren nem folytatott kutatásokat (eltekintve egy publikációjától, amelyben a determinánsok szorzási tételének egy új bizonyítását közölte), érdeme inkább az, hogy egyetemi előadásaiba beépítette kortársai újabb eredményeit, és ezáltal hozzájárult azok népszerűsítéséhez.

Kőnig Gyula algebrai írásainak a zöme inkább az absztrakt algebrába sorolandó, és azokból az évekből származik, amikor e tárgykörnek éppen csak kezdtek kialakulni a módszerei és tárgykörei. Eredményeit élete főművébe, az algebrai mennyiségek általános elméletéről írott hatalmas monográfiájába építette be. Az ebben levő anyag nehezen követhető voltára abból is következtethetünk, hogy a részletes recenzióhoz Kürschák József és Rados Gusztáv együttes munkájára volt szükség.

Ha szerényen fogalmazunk, akkor azt mondhatjuk, hogy e könyv Kronecker nagyon vázlatos *Festschrift*jének számos új eredménnyel bővített részletes kidolgozása. A *Festschrift*tel Kőnig mintegy két évtizeden át behatóan foglalkozott, a benne szereplő bizonyításokat egyszerűsítette, módosította, a tévedéseket korrigálta és az anyagba beszőtte Hilbert, Hensel és Emmy Noether akkor egészen új eredményeit, de a saját vizsgálatait is. Ez utóbbiak — mint az előszó jelzi — a 600 oldalas könyvnek több mint a felét teszik ki.

Tárgyát tekintve — mai terminológia szerint — a monográfia főleg *absztrakt algebra* és *algebrai* *számelmélet.* Absztrakt algebra még e szónak mai értelmében is: a rendkívül széles látókörű, és az elvont fogalomalkotásokhoz vonzódó matematikus világviszonylatban úttörőnek tekintendő munkája.

A könyv olvasásában a legnagyobb nehézséget a Kőnig alkotta új szakkifejezések értelmének a kiokoskodása okozza. Az egész könyv anyaga ugyanis az általa definiált két algebrai struktúrára, a *holoid* és az *orthoid* tartományra épül. Inkább csak a matematikusok számára említem meg, hogy e két tartomány két meglehetősen általános algebrai struktúrának a speciális faja: a holoid tartomány egységelemes nullkarakterisztikájú *integritástartomány*, az orthoid pedig nullkarakterisztikájú *test*. A könyv anyagának a megértéséhez tehát előbb össze kell állítanunk a Kőnig által használt kifejezések „szótárát". Szemléltetésként: „az olyan tartomány, amely az összeadás közönséges törvényét követi" = Abel-féle *csoport*; „az olyan tartomány, amely a szorzás közönséges törvényét követi" = egy speciális kommutatív *félcsoport* stb.

Kürschák József egyik írása szerint Kőnig azzal a tervvel is foglalkozott, hogy folytatásként egy másik könyvet is ír: olyat, amelyben az algebrai módszerek helyett végtelen (az analízisbe tartozó) műveletsorozatok szerepelnek. A tudomány nagy kárára e munka az első tervezgetésnél abbamaradt.

MUNKÁSSÁGA A HALMAZELMÉLETBEN ÉS A MATEMATIKAI LOGIKÁBAN

Befejezésként Kőnig Gyula halmazelméleti és logikai vizsgálatait tárgyalom, az előzőeknél kissé részletesebben: egyrészt, mert világviszonylatban ezek a legismertebb eredményei, másrészt, mivel néhány fogalom előrebocsátása után a lényeget a nem matematikusok is megérthetik.

A halmazelmélet megalapozását Georg Cantor német matematikus 1874-gyel kezdődően megjelent értekezéseitől szoktuk számítani. Az általa módszeresen megalapozott tudományág egyik jellegzetessége, hogy lehetőséget nyújt a különböző végtelenek nagyságrendi megkülönböztetésére. Ehhez az eszközt a véges halmazok szolgáltatják: két véges számú elemből álló halmaznak akkor van ugyanannyi eleme, ha kölcsönösen egyértelmű megfeleltetést tudunk a két halmaz elemei között létesíteni. Ugyanannyi lovas és ló van, ha minden lovas számára jut egy és csakis egy ló, és minden lovon ül egy és csakis egy lovas. Önként kínálkozik, hogy végtelen halmazok esetében is ezt a kölcsönösen egyértelmű hozzárendelést tekintsük kiindulópontnak. Ha ez a hozzárendelés két végtelen halmaz esetében megvalósítható, akkor azt mondjuk, hogy egyenlő *számosságúak*. Megemlítendő, hogy a szakirodalom a *számosság* szó szinonimáját, a *kardinális szám*ot is használja.

Az egyenlő számosságú halmazok *ekvivalens*ek. A legkisebb kardinális szám a természetes számok (= pozitív egész számok) számossága. Jelöljük a következőkben ennek számosságát az *a* betűvel, és nevezzük ezt a halmazt, valamint a vele ekvivalens halmazokat *megszámlálható*nak.

Az ekvivalencia definiciója szerint pl. „ugyanannyi" természetes szám van — többek között —, mint pozitív *páros* szám. Könnyű ugyanis a két halmaz között megvalósítanunk a kölcsönösen egyértelmű megfeleltetést: minden természetes számhoz a kétszeresét, és minden páros számhoz a felét rendeljük. De még meglepőbb eredmények is beláthatók. Így pl. az, hogy „ugyanannyi" racionális törtszám van, mint természetes szám. A két halmaz elemeinek kölcsönösen egyértelmű hozzárendelésére Cantor adott eljárást (az ún. diagonális módszert).

A *valós számok* halmaza azonban már nem ekvivalens a természetes számok halmazával, a két halmaz között nem létesíthető kölcsönösen egyértelmű megfeleltetés. A valós számokat és a vele ekvivalens halmazokat *kontinuum* számosságúaknak nevezzük. Ennek a számosságnak a jele legyen a *c* betű (megjegyzendő, hogy az *a* és *c* kardinális számokat a szakirodalom — Cantor nyomán — a megfelelő kis gót betűkkel szokta jelölni).

Könnyű igazolni, hogy az *a* kardinális szám kisebb, mint a *c*. Az is igazolható — végtelen halmazokra alkalmas módon bizonyos műveleteket (pl. összeadás, kivonás, szorzás stb.) értelmezve —, hogy bármilyen kardinális számnál van nagyobb: ilyen pl. egy végtelen halmaz összes részhalmazaiból álló ún. *hatványhalmaz*.

Az eddig mondottaknak meglepő következményei vannak. Ilyen pl. az, hogy az egységszakasznak ugyanannyi pontja van, mint az egységnyi oldalhosszúságú négyzetnek, vagy az egységnyi élhosszúságú kockának.

Az ilyesféle eredmények a Cantor-féle alapvetést követő első időkben bizonyos kétséget támasztottak a halmazelmélet kellő szigorúságú megalapozottsága és alkalmazhatósága tekintetében. *Kőnig Gyula egyike volt azon keveseknek, akik azonnal fölismerték az új tudományág jelentőségét, és maga is jelentős tételekkel járult hozzá további kiépítéséhez.*

Már Cantor megfogalmazta, de kifogástalanul csak Felix Bernstein bizonyította be (1898) a következő tételt:

Ha az A és B halmazok mindegyike ekvivalens a másik egy részhalmazával, akkor A és B ekvivalens.

Erre az *ekvivalencia-tétel*re Kőnig Gyula is közölt egy szép bizonyítást, ez szemléletileg is könnyen követhető azzal a topológiai átfogalmazással, amelyet régebben fia, Kőnig Dénes, újabban pedig Szász Pál közölt.

Ugyancsak rendkívül ötletes Kőnignek arra a Cantor-féle tételre adott bizonyítása, hogy a síknak ugyanannyi pontja van, mint az egyenesnek. Ez az állítás átfogalmazva azt jelenti, hogy a valós számokból ugyanannyi rendezett számpár képezhető, mint amennyi valós szám van. (Ugyanis a koordináta-rendszerben az egyenes pontjait valós számokkal, a sík pontjait rendezett valós számpárokkal adjuk meg.) E tétel bizonyítását az első időkben a végtelen lánctörtekre alapozták, Kőnig a könnyebben kezelhető tizedes törteket vette igénybe, egy szellemes ötlettel áthidalva az itt föllépő nehézséget.

Történelmi érdekesség kedvéért megemlítem, hogy bizonyítását Kőnig 1894-ben a Matematikai és Fizikai Társulat egyik ülésén mutatta be, de sehol sem tette közzé.

Szóbeli közlések révén azonban gondolatmenete csakhamar ismertté vált, és Schoenfliess fel is vette 1900-ban megjelent *Festschrift*jébe. A bizonyítás további népszerűsítéséhez nagyban hozzájárultak F. Klein, Fraenkel, Kürschák József, Kalmár László és mások írásai. Ma már számos tankönyvben és monográfiában, többnyire név említése nélkül, a Kőnig-féle bizonyítás szerepel.

Már Cantor fölvetette azt a kérdést, hogy van-e az a és a c közé eső kardinális szám? Más szóval: létezik-e olyan halmaz, amelynek számossága nagyobb, mint a megszámlálható halmazoké, de kisebb, mint a kontinuum számosságúaké. Ezt a mindmáig megoldatlan kérdést nevezzük *continuum-hipotézis*nek.

Kőnig Gyula tudományos pályafutásának talán legkiemelkedőbb állomása az 1904-ben Heidelbergben rendezett matematikai kongresszus volt: ifjúkorának e szinte eszményített színterét világra szóló eredménnyel, a kontinuum-hipotézisre adott válasszal óhajtotta köszönteni. Ott elhangzott előadása hozta számára a legnagyobb sikert, de később a legfájóbb csalódást is. Kürschák egyik visszaemlékezéséből tudjuk, hogy a nemzetközi találkozó résztvevőire mennyire a szenzáció erejével hatott Kőnig előadásának már a puszta bejelentése is: a szekcióüléseket fölfüggesztették, hogy mindenki meghallgathassa a referátumot.

Ez az előadás két külön részből állt: Kőnig Gyula előbb bemutatta az azóta róla elnevezett halmazelméleti egyenlőtlenséget, vázolta annak bizonyítását, majd erre támaszkodva a második részben levonta a kontinuum-hipotézisre vonatkozó (téves) következtetést.

Mint már említettem, a kardinális számokra is értelmezett az összeadás és a szorzás. E műveletek fölhasználásával mond ki egy fontos tételt a *Kőnig-féle egyenlőtlenség*: legyen a

$$d, e, f, \ldots, t \qquad \text{(I.)}$$

és a

$$D, E, F, \ldots, T \qquad \text{(II.)}$$

kardinális számok sorozata olyan, hogy az (I.)-ben levők mindegyike kisebb, mint a (II.)-ben levő megfelelőjük, akkor — Kőnig tétele szerint — az (I.)-ben levő kardinális számok *összege* kisebb, mint a (II.)-ben levők *szorzata.*

A Kőnig-féle egyenlőtlenség segítségével igen fontos következtetések vonhatók le. Többek között például az is, hogy a *c* kardinális szám nem állítható elő megszámlálhatóan végtelen sok (és még kevésbé véges sok) nála kisebb számosság összegeként.

Heidelbergi előadásának második részében Kőnig Gyula az általa talált egyenlőtlenségre, valamint Felix Bernstein német matematikus

1901-ben közölt egyik halmazelméleti eredményére támaszkodva olyan következtetést vont le, amely válasz lett volna a Cantor-féle kontinuum-hipotézisre. A konklúzió azonban hibás volt, de nem Kőnig tévedése folytán. Bernstein ugyanis pontatlan megfogalmazásban közölte tételét, nem határolta el pontosan annak érvényességi körét, Kőnig pedig olyan esetre alkalmazta, amelyre nem igaz.

Kőnig előadása éveken át foglalkoztatta az akkori matematikusok legnagyobbjait, míg észre nem vették a Bernstein-féle tétel pontatlan megfogalmazását. Kőniget tehát semmiféleképp nem vádolhatjuk meg a kellő gondosság hiányával: Bernstein a halmazelméletnek olyan szaktekintélye volt, akinek eredményeivel szemben addig kételyek sem merültek fel. Ez azonban semmit nem változtatott azon a csalódottságon, amely Kőnig Gyulát élete végéig kísérte.

*

Heidelberg után Kőnig Gyula matematikai téren keveset hallatott magáról. Ettől kezdve egyetlen törekvése, matematikai kutatásainak centrális problémája a matematikai logika, az aritmetika és a halmazelmélet szigorú fölépítése volt. A halmazelmélet szigorúbb megalapozását az is szükségessé tette, hogy ezekben az években egyesek ellentmondásokat — antinómiáknak nevezzük — találtak, amelyek kétségessé tették az alapok szilárd voltát. (Burali—Forti, 1897; Russell, 1903; Richard, 1903.)

Egy halmazelméleti antinómia Kőnig nevéhez is fűződik, a szakirodalom „a véges számú jellel nem definiálható valós számok" antinómiája címen szokta említeni. Ezt így fogalmazhatjuk meg:

Mivel csak véges számú írásjellel rendelkezünk, ezért — igazolhatólag — pl. magyar nyelven legföljebb *megszámlálhatóan* végtelen sok szöveg adható meg. Válasszuk ki e szövegek közül azokat, amelyek a (0, 1) intervallumba eső valós számokat definiálják, és írjuk le ezeket szigorú értelemben vett végtelen tizedes törtek formájában egymás alá. Így megszámlálhatóan végtelen sok valós számot tartalmazó *V* halmazt nyerünk. Mivel azonban az említett intervallumban kontinuum számosságú valós szám van, azért szükségképp lesznek olyanok, amelyek magyar szöveggel nem értelmezhetők, tehát *V*-ben nem szerepelnek. *V*-t alapul véve ilyen valós számhoz jutunk pl. (a már említett) Cantor-féle diagonális eljárás révén. A Cantor-féle eljárás azonban precízen leírható magyar nyelvű szöveggel — mi csak a rövidség kedvéért mellőztük ismertetését. Így máris kész az antinómia: vannak valós számok, amelyek magyar nyelvű szöveggel nem értelmezhetők és mégis értelmezhetők.

A halmazelméletben fölvetődött antinómiák a századforduló táján bizonyos válságot idéztek elő a matematikában. Kiküszöbölésén a jelen század második és harmadik évtizedeiben sokan fáradoztak. E törekvésekben két fő irányt szoktak megkülönböztetni:

1. Voltak olyanok, akik a halmazelméleti antinómiák hatására az egzakt tudományok egész logikai fundamentumát fölülvizsgálták (Russell, Weyl, Brouwer, Whitehead), miközben egyesek (főként

Weyl és Brouwer) elmélete a halmazelmélet, és általában a matematika számos gondolatának elvetéséhez vezetett.

2. Mások (Zermelo, Fraenkel, Schoenfliess, Neumann János, Bernays, Ackermann) a halmazelmélet olyan *axiomatikus* megalapozására törekedtek, hogy ebben ne lépjenek föl antinómiák.

A Cantor-féle *naív* halmazelmélettel szemben az *axiomatikus* fölépítés a húszas évek eredménye, az axiómák megfogalmazásában (főként Neumann János közvetítésével) szerepet játszottak Kőnig Gyula gondolatai is.

*

Jelentős új eszmékkel, de kudarcokkal is szegélyezett út vezetett Kőnig Gyula minden bizonnyal legnehezebben követhető munkájához, a logika, az aritmetika és a halmazelmélet alapjairól írott művéhez. Mintegy tíz éven át töprengett az ebben foglalt rendszer megalkotásán, gondolatai a belső érés és a másoktól kapott kritikai megjegyzések alapján sokat módosultak, míg végső formájukban ki nem kristályosodtak. A könyv utolsó fejezetének írása közben hullott ki kezéből a toll. Így a matematika alapjaival kapcsolatos vizsgálódásainak e végrendelete posztumuszként látott napvilágot, anélkül, hogy a végső simításokat ő maga elvégezhette volna. Erre a nem könnyű munkára — a könyv előszava szerint — Kőnig Dénes vállalkozott, ő azonban lényegtelennek minősítette az általa eszközölt módosításokat. Egy megjegyzés szerint az előkészítés munkája során Kőnig Gyulának állandó beszélgető társa volt Kürschák József, egy korrektúrát pedig — a szerző kívánságának megfelelően — átnézett a kérdéskör alapos ismerője, Hausdorff is.

Magyar nyelven a könyvnek mindössze két — bár kétségtelenül alapvető — fejezete látott napvilágot a Magyar Filozófiai Társaság Közleményeiben.

Sajnálatos, hogy e munkának nem volt olyan átütő nemzetközi sikere, aminőt megérdemelt volna. A matematika alapjainak és filozófiai vonatkozásainak kérdéseivel azokban az években a nagy nemzetközi tekintélynek örvendő matematikusok egész sora foglalkozott, gondolataik szélesebb nemzetközi publicitásra tettek szert. Így Kőnig idetartozó eszméinek tekintélyes része más szerzők időállóbban, és talán érthetőbben fogalmazott közleményei által vált ismertté.

A könyv első fejezetei a filozófia körébe sorolandó gondolatokat tartalmaznak, ezek szigorúbban véve nem is tartoznak a matematikai logikához. Kellő előkészítés után azonban igen gondos tárgyalását találjuk a logikai műveleteknek, és a bizonyításelméletnek, magyar szerzőtől módszeres földolgozásban először. Okkal említi több helyen is Kalmár László, hogy hazánkban a matematika alapjaival foglalkozók vagy magának Kőnig Gyulának, vagy az ő közvetlen tanítványainak a tanítványai.

Gondos előkészítés után a monográfia bizonyára legjelentősebb fejezete az axiomatizált matematikai tárgykörök alapvető problémájának, az *abszolút ellentmondástalanság* eldöntésének „*értékelés-módszer*"-e.

Az ellentmondástalanság (konzisztencia) fontosságára — mint már említettem — először a Bolyai—Lobacsevszkij-féle geometria fölfedezése hívta föl a matematikusok figyelmét. Miután az új geometriának több modelljét is sikerült megteremteni az euklideszi geometriában, az utóbbinak pedig a valós számok aritmetikájában, a *relatív* ellentmondásmentesség kérdése a századfordulóig így alakult: a nem-euklideszi geometriák ellentmondástalanok, ha az euklideszi ilyen, ez utóbbi ugyancsak ellentmondásmentes, ha a valós számok aritmetikája konzisztens.

Idáig jutva jogosan vetette fel 1900-ban a párizsi nemzetközi matematikai kongresszuson David Hilbert az axiomatizált tudományok *abszolút* ellentmondástalanságának a kérdését; más szóval, olyan módszer kidolgozását szorgalmazta, amellyel az axiomatizált tudományt a konzisztencia szempontjából magában véve vizsgáljuk és nem modellizáljuk valamilyen más tárgykörben.

Négy évre rá a heidelbergi kongresszuson maga Hilbert vázolt föl erre egy módszert. Ennek az elvi jelentősége igen nagy volt, de az általa példaként közölt rendszerben olyanok voltak az axiómák és annyira szűk a megengedett matematikai bizonyításmódok köre, hogy azokra támaszkodva az aritmetikának is csupán egy kis töredéke lett volna fölépíthető.

A második lépést ezen a téren Kőnig Gyula tette meg, kidolgozva az „értékelés-módszer"-t.

Sajnos, ennek ismertetése sok matematikai-logikai előismeretet tételez fel. Csupán utalni tudok Kalmár László idetartozó fejtegetéseire, valamint a módszer alkalmazására bemutatott példáira. Az eljárás lényegét inkább csak érzékelteti Kőnig Dénes találó mondata. E szerint az értékelés-módszer azt teszi lehetővé, „. . . hogy a vizsgálatokat korlátoltabb szemléleti tartományba szorítsuk be, hol az ellentmondásnélküliség evidenciájára való hivatkozás teljesen, vagy legalábbis nagyobb mértékben elégít ki minket".

A problémát tehát Kőnig Gyulának sem sikerült végérvényesen megoldania. Ez természetes is az újabb idetartozó eredmények (Gödel, Church) ismeretében.

BIBLIOGRÁFIA*

KŐNIG GYULA FŐBB NEM MATEMATIKAI TÁRGYÚ ÍRÁSAI

Beiträge zur Theorie der elektrischen Nervenreizungen. Sitzungsberichte der Math.-Naturw. Classe der Kais. Ak. d. Wiss. Wien, 1870. 537–546.

Adatok a személyes észleleti hibák elméletéhez. Természettudományi Közlöny 1873. 457–463.

A természettudományok fölvirágzásáról a XVII-ik század elején. Természettudományi Közlöny 1873. 41–48.

Az általános mechanikai alapelveknek fejlődési története. Budapesti Szemle 1873. 321–342., 1874. 132–153.

Az egyetemi kérdések Magyarországon. Budapesti Szemle 1889. 290–302.

*Kőnig Gyula műveinek teljes bibliográfiáját róla írott könyvem tartalmazza. Akadémiai Kiadó, Bp., 1965. 133–137.

A művelődés egységéről. Akadémiai Értesítő 1892. 326–333.
Helmholtz és a jelenkori német tudományosság. Akadémiai Értesítő 1895. 356–361. Németül a Westöstliche Rundschauban és a Pester Lloydban. Bp., 1895.

KŐNIG GYULA MATEMATIKAI MŰVEI

Könyvek

Bevezetés a felsőbb algebrába. Bp., 1876.
Algebra a középtanodák felsőbb osztályai számára. 4 kötet. Bp., 1879., 1880., 1881., 1882.
Analízis. Bevezetés a mathematika rendszerébe. Bp., 1887.
Az algebrai mennyiségek általános elméletének alapvonalai. Bp., 1903. Ugyanez németül: Leipzig, 1903.
Neue Grundlagen der Logik, Arithmetik und Mengenlehre. Leipzig, 1914.

Értekezések

Az elliptikai függvények alkalmazásáról a magasabbfokú egyenletek elméletére. Ért. a Math. Tud. Köréből 1871. 8. szám.

A függvényeknek végtelen sorok által való kifejezéséről. MTA Értesítője 1871. 283–284.

Zur Theorie der Modulargleichungen der elliptischen Functionen. Heidelberg, 1871.

Über eine reale Abbildung der s. g. Nicht-Eucklidischen Geometrie. Gött. Nachrichten 1872. 157–164.

Über die Darstellung der Functionen durch unendliche Reihen. Math. Annalen 1872. 310–340.

Nouvelle démonstration du théorème de Taylor. Nouvelles Annales de Math. (2), 1874. 270–273.

Az n-edfokú algebrai egyenletek egy általános megfejtéséről. Műegyetemi Lapok 1876. 20–28.; 112–116.

Az egész számok osztóira vonatkozó tétel. Műegyetemi Lapok 1876. 186–187.

Ein allgemeiner Ausdruck für die ihrem absolu-

ten Betrage nach kleinste Wurzel der Gleichung n*-ten Grades*. Math. Annalen 1876. 530–540.

A több ismeretlent tartalmazó elsőfokú congruentia-rendszer általános elmélete. Műegyetemi Lapok 1877. 113–121.

A determinánsok szorzási tételének új levezetése. Műegyetemi Lapok 1877. 271–274.

A racionális függvények általános elméletéhez. Ért. a Math. Tud. Köréből 1879/80. 22. szám.

Über rationale Functionen von n *Elementen und die allgemeine Theorie der algebraischen Gleichungen*. Math. Annalen 1878. 212–230.

Ein Beweis des Multiplicationstheorems für. Determinanten. Math. Annalen 1879. 507–509.

Die Factorenzerlegung ganzer Functionen und damit zusammenhängende Eliminationsprobleme. Math. Annalen 1879. 161–173.

Über Reihenentwicklung nach Bessel'schen Functionen. Math. Annalen 1880. 85–86.

A Hamilton-féle rendszerek és az elsőrendű parcziális differenciálegyenletek általános

elmélete. Ért. a Math. Tud. Köréből 1881. 10. szám.

Über endliche Formensysteme in der Theorie der rationalen Functionen. Math. Annalen 1881. 69–77.

Zur Theorie der Resolventen. Math. Annalen 1881. 78–81.

Az algebrai egyenletek elméletéhez. Ért. a Math. Tud. Köréből 1882. 7. szám.

A hatványsorok egy tulajdonságáról. Math. Termtud. Ért. 1882/83. 60–62.

Az alternáló csoportról. Math. Termtud. Ért. 1882/83. 213–216.

Über eine Eigenschaft der Potenzreihen. Math. u. Naturw. Berichte aus Ungarn 1882/83. 73–75.

Über alternirende Gruppe. Math. u. Naturw. Berichte aus Ungarn 1882/83. 191–194.

Az egész függvények tényezőkre bontása, ha az együtthatók tetszőlegesek. Math. Termtud. Ért. 1883/84. 45–49.

Beiträge zur Theorie der algebraischen Gleichungen. Math. Annalen 1883. 424–433.

Über eine Eigenschaft der Potenzreihen. Math. Annalen 1884. 447–449.

Über die Bedingungen der Gültigkeit der Taylor'schen Reihe. Math. Annalen 1884. 450–452.

Über die Integration der Hamilton'schen Systeme und der partiellen Differentialgleichung erster Ordnung. Math. Annalen 1884. 504–519.

Über die Integration simultaner Systeme partieller Differentialgleichungen mit mehreren unbekannten Functionen. Math. Annalen 1884. 520–528.

Theorie der partiellen Differentialgleichungen zweiter Ordnung mit zwei unabhängigen Variabeln. Math. Annalen 1884. 465–536.

A másodrendű és két független változót tartalmazó parcziális differenciálegyenletek elmélete. Bp., 1885.

Über eine neue Interpretation der Fundamentalgleichungen der Dynamik. Math. u. Naturw. Berichte aus Ungarn 1886/87. 131–178.

A dinamika alapegyenleteinek jelentéséről. Ért. a Math. Tud. Köréből 1887. I. szám.

Über eine neue Interpretation der Fundamental-

gleichungen der Dynamik. Math. Annalen 1888. 1–42.

A symmetrikus függvények elméletéhez. Math. Termtud. Ért. 1889/90. 9–10.

Zur Theorie der symmetrischen Functionen. Math. u. Naturw. Berichte aus Ungarn 1889/90. 83–85.

Über stetige Functionen, die innerhalb jedes Intervalle extreme Werte besitzen. Monatshefte f. Math. u. Phys. 1890. 7–12.

Hunyady Jenő emlékezete. Akadémiai Értesítő 1891. 1–9.

A gammafüggvények elemi tárgyalása. Math.-Fiz. Lapok 1892. 5–16.

A reciprocitás tétele a négyzetes maradékok elméletében. Math. Termtud. Ért. 1895. 429–438.

A határozott integrálok elméletéhez. Math. Termtud. Ért. 1897. 380–384.

Das Reciprocitätsgesetz in der Theorie der quadratischen Reste. Acta Mathematica 1898. 181–192.

Zum Kontinuumproblem. Verh. des III. Internationalen Mathematiker-Kongresses in Heidelberg 1905. 144–147.

A halmazelmélet alapjai és a continuum problémája. Math. Termtud. Ért. 1905. 410–415.; 1906. 343–348.

Zum Kontinuum-Problem. Math. Annalen 1905. 177–180. Helyesbítés ehhez: uo. 462.

Über die Grundlagen der Mengenlehre und das Kontinuumproblem. Math. Annalen 1905. 156–160.; 1907. 217–221.

A halmazok elméletéhez. Math.-Fiz. Lapok 1906. 253–255.

Sur la théorie des ensembles. Comptes Rendus 1906. 110–112.

Sur les fondements de la théorie des ensembles et le problème du continu. Acta Mathematica 1906. 329–334.; 1908. 89–94.

Az igaz fogalmának formalizálása a synthetikus logikában. A Magyar Filozófiai Társaság Közleményei 1910. 98–106.

Az alaptények. A Magyar Filozófiai Társaság Közleményei 1913. 133–148.

A KŐNIG GYULÁVAL FOGLALKOZÓ IRODALOMBÓL

KÜRSCHÁK JÓZSEF–RADOS GUSZTÁV könyvismertetése Kőnig Gyula *Az algebrai mennyiségek általános elméletének alapvonalai* c. művéről. Mat. és Fiz. Lapok 1903. 282–302.

KŐNIG DÉNES: Kőnig Gyula utolsó művéről. Mat. és Fiz. Lapok 1914. 291–302.

KÜRSCHÁK JÓZSEF: Kőnig Gyula. A Magyar Mérnök- és Építész-Egylet Közlönye 1914. évf. 15. sz.

RADOS GUSZTÁV: Kőnig Gyula emlékezete. Az MTA Elhunyt Tagjai Fölött Tartott Emlékbeszédek. 1915. 3. füzet.

RÉVAY JÓZSEF–SCHÖPFLIN ALADÁR: Egy magyar könyvkiadó regénye. Bp., [É. n.]

KÜRSCHÁK JÓZSEF: Kőnig Gyula. Mat. és Fiz. Lapok 1933. 1–23.

KALMÁR LÁSZLÓ: A matematika alapjai. 2. k. 2. füzet. Bp., 1959. Különösen: 354–366. (Felsőoktatási Jegyzetellátó Vállalat)

Szénássy Barna: Kőnig Gyula 1849–1913. Bp., 1965.
Szénássy Barna: Kőnig Gyula. Műszaki Nagyjaink, 3. k. 203–239. Bp., 1967.
Szénássy Barna: Kőnig Gyula emlékezete. Magyar Tudomány 1975. 2. sz. 112–116.
Sőtér István: A sas és a serleg. Bp., 1975. Különösen: 95–97.
A Magyar Tudományos Akadémia másfél évszázada. Akadémiai Kiadó, Bp., 1975.

A kiadásért felelős az Akadémiai Kiadó
igazgatója
Felelős szerkesztő: Róbert Zsófia
Műszaki szerkesztő: Érdi Júlia
AK 1935 k 8385
Terjedelem: 5,5 (A/5)ív + 1 db melléklet
HU ISSN 0133–1884
83.10455 Akadémiai Nyomda, Budapest
Felelős vezető: Bernát György