„Kétkezi matematikatörténet” az angol nyelvű irodalomban létező Hands-on History nyomán

dr. Munkácsy Katalin PhD
ELTE TTK Matematikai Intézet
katalin.munkacsy@gmail.com

DOI 10.23716/TT0.21.2017.13

Absztrakt:

Az Ankétok hagyományai szerint, a tudománytörténet és a technikatörténet kapcsolatának egy lehetséges formáját szeretném megmutatni.
Fontosnak tartom, hogy a matematikatörténetet minél változatosabban mutassuk be a fiataloknak. Az elméleti jellegű és az anekdotikus megközelítés mellett a szemléletességre is nagy figyelmet fordítunk. A történeti tényeken túl (kronológia, matematikusok, művek, felfedezések) egy-egy korszak hangulatát, gondolkodási stílusát is megpróbáljuk érzékeltetni. E módszer előzményei:

- a szemléletességre és a tárgyi tevékenységre irányuló matematika-didaktikai kutatások
- az angol nyelvű pedagógiai irodalomban olvasható „hands-on” módszer
- matematikatörténet-tanítási tapasztalataim
- Példákkal szeretném illusztrálni módszerünket.
- Kultúrtörténeti érdekességek matematikai vonatkozással
- labirintusok,
- szigorúbban matematikatörténi vonatkozások
- szabályos testek a geometriában és a mindennapi életben
- csillagászat, hordozható napóra, a Naprendszer ábrázolása
- logarléc modelljének elkészítése
- hiperbolikus geometria,
- kódolás, egy jellel kódolás

A „kétkezi matematikatörténet” alkalmasnak bizonyult a kultúrtörténet néhány elemének beemelésére az oktatási folyamatba és egyes nehezen érthető matematikai fogalmat is közelebb hozott a diákokhoz.

Kulcsszavak: matematikatörténet, matematika tanítás, tanárképzés, kézművesség
Keywords: history of mathematics, mathematics teaching, teacher training, hands-on activity

---

A matematikatörténet népszerűsítésének kialakulóban lévő irányzata új, egységes szemléletbe foglal korábban is meglévő jelenségeket. A matematikatörténeti vonakozású kézműveskedés kibővíti azokat a lehetőségeket, amelyeket a konkrét tárgyakkal végzett tevékenységek eddig is nyújtottak a matematikatanítás számára. Ebben az esetben valóban létező, használt eszközökkel és módszerekkel ismerkednek meg a diákok, és ez a többi tanított matematikai összefüggés fontosságára és érvényességére is felhívhatja a figyelmüket. Módszerünket az angol terminológia nyomán történetileg motivált fizikai objektumok alkalmazását is felhasználó tanításnak nevezhetjük, "teaching mathematics using historically-motivated physical objects". [SHELL-GELLASH, 2007]

Ebben az írásban magukra a történeti ismeretekre csak érintőlegesen utalok, célom a manipulációs lehetőségek bemutatása. Ezeknek az információknak a forrásai a közismert matematikatörténeti tankönyvek, ismeretterjesztő művek. A kézműveskedéssel kapcsolatban felhasználom a *Mathematics in the Making* nemzetközi projekt tapasztalatait is, valamint annak a programnak a keretében használt ábrákat is.

Ebben az írásomban, néhány az ELTE matematika tanárszakos hallgatói számára tartott speciálkollégium, illetve reguláris óra keretében elkészített modellt fogok bemutatni.

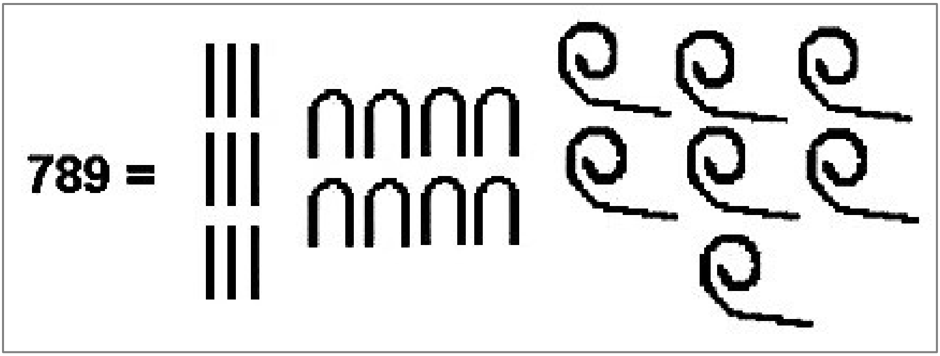
A hallgatók érdeklődését követve a kézműveskedés értelmezését kissé kibővítettem, a kézbe vehető modelleken túl foglalkoztunk a nálunk megszokottól eltérő, egyszerű kiszámolási algoritmusokkal is. Kihasználtuk a számítógépek kínálta lehetőséget is a hiperbolikus geometriával való ismerkedésre.

Számírások, műveleti algoritmusok

Megismerkedni egy időben vagy térben távoli kultúra számolási eljárásaival kicsit olyan, mintha részeseivé válnak annak a másik életnek.. Mintha megkóstolnánk az ételeiket, felpróbálnánk ruháikat.

Egyitomi hieroglifák

Az egyiptomi számírás varázsát elsősorban az jelenti, hogy a hallgatók megtanulnak használni néhány hieroglifát. Sokan ahhoz is kedvet kapnak, hogy megismerjék az egyiptomi írást, azon belül az eltérő célokra használt eltérő rendszereket is. A matematikatörténet keretében természetesen a legegyszerűbb jeleket ismerjük csak meg.



1. ábra: egyiptomi számírás

A Sulinet-ről kimásolt ábrán jól láthatók a kisebb számjegyek, és az egyszerű ismétlődésen alapuló struktúra. Itt hiányzik az 1000 jele, a kicsit a tulipánra hasonlító lótuszvirág, amit a tanulók általában nagy műgonddal szoktak rajzolgatni.

Ezzel a jelöléssel igen nehéz dolgozni, minden művelet, az összeadáson kívül nagyon bonyolult. Ezért használták a kettőzés módszerét. A duplikáció az összeadáson alapul, bármely szorzás elvégezhető vele a pozitív egészek körében. A törtekkel való számolás külön művészet volt, nem csoda, ha a számolni tudás megbecsült szakma volt az ókori Egyiptomban.

A klasszikus római számok

Hasonlóképpen nem helyiértékes, tizes alapú rendszer a rómaiak számírása. Az ötös értékek kicsit érdekesebbé teszik a tiszta tizes alapú számírásnál. Másik különlegessége a négy, kilenc, negyven, stb. jelölése. Ez megbontja a szigorú additív rendszert, ezért érdemesebb a korábbi változatot megtanulni, ahol a négyet IIII jelölte, így sehol nem alkalmazták a kivonást. Ez a számírás a számmisztika megmutatását is lehetővé teszi, hiszen sok szóhoz a benne szereplő egyes betűk alapján számértéket rendelhetünk.

Érdemes megemlíteni a görög számírást is, ahol minden egyes betű számot jelentett, így minden szónak volt, természetes módon, számértéke. (A görögöknél a misztikus gondolkodás és a számelméleti ismeretek nagyon különös módon keveredtek. Az 5 a házasság jelképe volt, a páros számok a női, a páratlanok a férfi számok voltak, az 5 pedig a két legkisebb páros és páratlan szám összege. És az 1? Az 1 nem volt szám, az az egység volt, amiből a számok származnak. Így eleinte úgy írtak, hogy tekintsük az egységet vagy egy számot. Később megszünt ez a körülményeskedés, egyszerűen számról beszéltek, és természetesen ekkor is csak a pozitív egészekre gondoltak.)

Babilóniai számírás

A legrégibb helyiértékes számírás 60-as alapú volt. Babilóniában a számokat 1-től 59-ig nem helyiértékes módon, a 10-es és az 1 jelének megfelelő számú ismétlésével írták, és a 60 jele megegyezett az 1 jelevél. A hallgatók sokszor azt hiszik, hogy a számjegyek írásának furcsasága okozza ennek a rendszernek a megértését, valójában a helyiértékek mélyebb átgondolása igényli, azt a szellemi munkát, amelyet az ismerős 10-es számrendszerrel kapcsolatban szívesen megtakarítunk magunknak. Itt jól láthatjuk, a helyiértékes jelölés nehézségeit, és egyben előnyeit is. Ezt látta Archimedes, aki amikor számításokat végzett, nem a görög, hanem a babilóniai számírást alkalmazta. A jól használhatónak bizonyult számírás emlékét őrzi ma is az óra 60 percre bontása és szögmérésben használt 60-as váltószám.

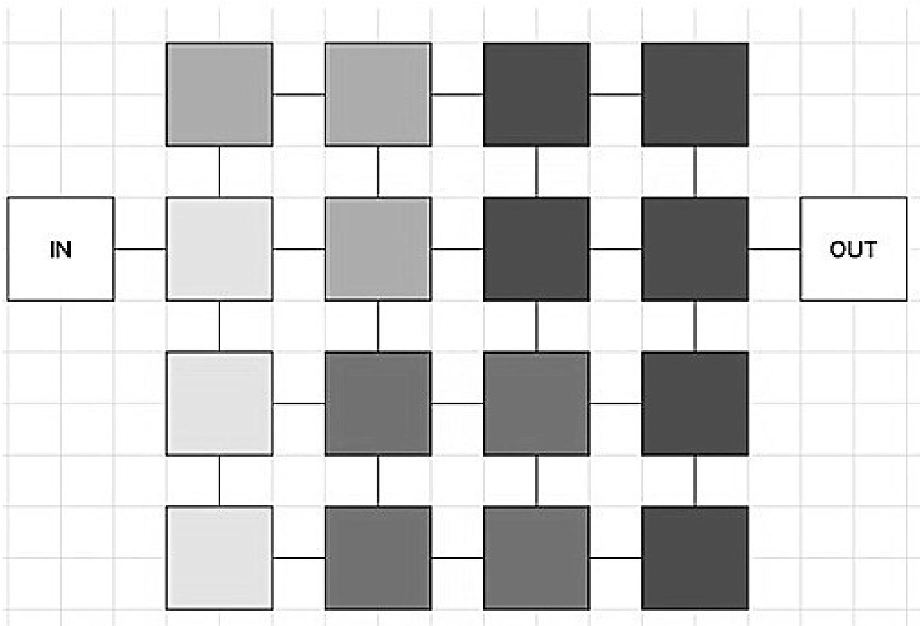
Indiai szorzás

A helyiértékes számírás előnyeit élményszerűen mutatja meg az indiai szorzás. [1] Ez az algoritmus lényegében megegyezik az általunk is használttal, de kivitelezésében még is van annyi érdekesség, ami leköti a diákok figyelmét. Itt egy animáció segítségével kipróbálható az eljárás.

[1] http://hirmagazin.sulinet.hu/hu/pedagogia/indiai-szorzas

Labirintusok

Ókori eredetűek a labirintusok, a hallgatók egy része örömmel gyűjti a művészettörténeti információkat a különböző épített és kertekben megvalósított útvesztőkről. A matematikai labirintusok az elveszettség élményét képesek visszaadni, akkor is, ha csak papíron vagy szobányi méretben próbálkozunk a megfelelő út megtalálásával. [UGHI, 2017]

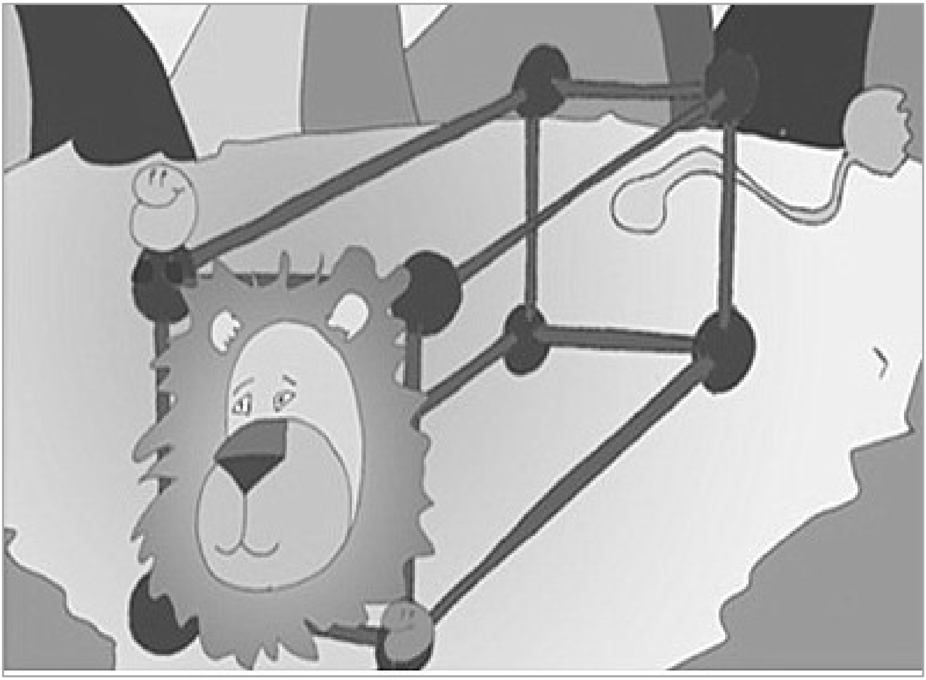


2. ábra: Matematikai labirintus

A szabály: hármat lépünk egy színen, majd színt váltunk. (Nem előírás, de valójában hosszú bolyongás és az összes szín érintése révén oldható csak meg a feladat.) Úgy kell eljutnunk a célhoz, hogy közben átmenetileg távolodnunk kell tőle. Ez az egyszerű, lábbal is megoldható feladat szinte a problémamegoldás egész folyamatát érzékelteti.

Poliéderek

A poliéderek is végiskísérik az emberiség történetét. Olyan egyszerű tárgy, mint az építési tégla is rengeteg kultúrtöténeti vonatkozással bír. A téglatestek „prototípusa" sokféle játékos feladat megoldására kínál alkalmat.



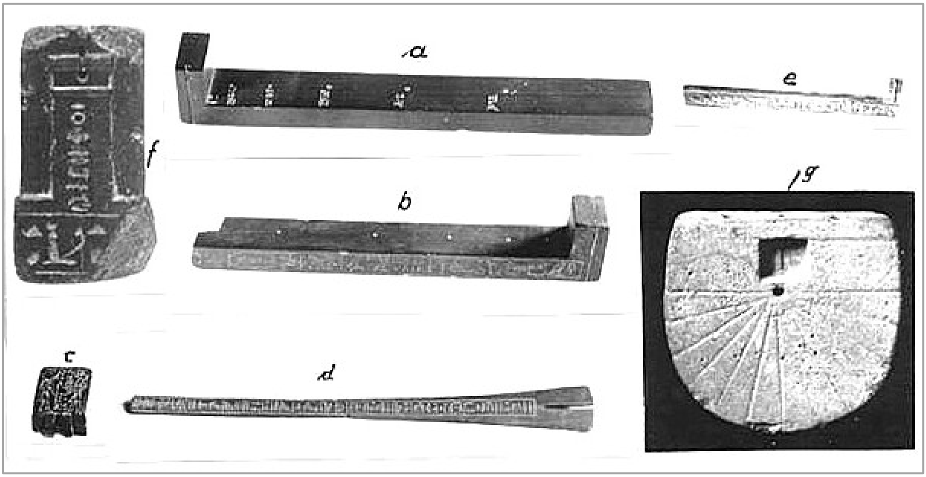
3. ábra: Téglatest

Schlosser Ákossal és Bontovics Ignáccal terveztük meg és valósítottuk meg az oroszlános szoftvert, ami a kisgyerekek térbeli tájékozódását segíti. A neten elérhető,[2] ahonnan futtatható *exe* formátumban, illeve egy *zip* file-ba csomagolva letölthető. Nagyobbaknak a poliéderekkel való ismerkedésre a drágaköveket és az építészetet javaslom. Fontosnak tartom, hogy a „mértani test" kifejezést hallva a diákok ne a matematikai szertárak szabályos testjeire, hanem a környezetükben található érdekes alakzatokra gondoljanak.

[2] http://bontovics.extra.hu

Napóra

Egy újabb óegyiptomi tárgy, aminek valóban érdemes elkészíteni a modelljét.



4. ábra: Különböző napórák

Az a) és b) jelű tárgyak hordozható napórák. Egy vonalzó méretű kartonlapból könnyen meghajlíthatók. Érdekessé a kalibrálás válik. A napóra rövidebb, függőlegesen álló felét kell a Nap felé fordítani, úgy, hogy árnyéka teljes egészében a vízszintes részére essen.

Az elkészítés során az árnyék hosszát jelöljük be és mellé írjuk a pillanatnyi pontos időt. A leolvasáskor is megfelelően be kell állítani modellünket. A csillagászati jelenségek megfigyelésére irányíthatjuk a diákok figyelmét ezzel az egyszerű eszközzel.

Naprendszer

A Naprendszer modellezése sokkal több munkát igényel és többféle ismeretet is mozgósít. A Naprendszerről általában olyan képeket szoktak közölni, ahol a bolygók szinte egymásba érnek. Hogy is van ez valójában? Először nézzünk meg egy dombornyomású domborzati térképet. Képzeljünk el egy olyant, ami Magyarországot kelet-nyugati irányban körülbelül 50 cm-es térképen ábrázolja. Milyen magas lenne ezen a térképen a Kékestető? Könnyű utánaszámolni, hogy 1 mm körül lenne, ami természetesen használhatatlan térkép lenne. Ezért más méretarányokat használnak a vízszintes és a függőleges távolságokra. Így van ez a Naprendszer ábrázolása során is. Más a bolygók átmérője és más a keringési sugarak kicsinyítését szolgáló arány. Próbálkozzunk meg ugyanazt az arányt alkalmazni.

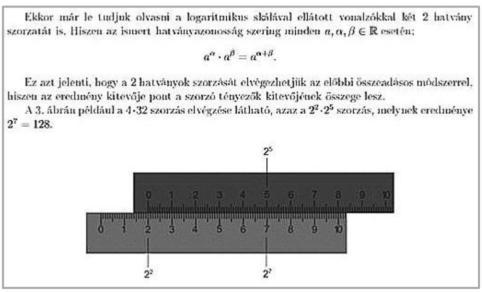
A Nap átmérője legyen 1 méter. A bolygók golyónyi és labdányi méretűek lesznek, a keringési sugarak pedig néhány 10 métertől néhány km-ig terjednek. Magyarországon Kecskeméten készült el egy szépen kivitelezett modell, de egyszerűbbeket a hallgatóim is készítettek. Ez a táblázat is a MiMa program keretében készült.

Planet	Diameter (Km)	Scaled diameter (mm)	Scaled perimeter (mm)	Orbital radius (Km)	Scaled orbital radius (m)
Sun	1 391 900	1000.0	3140,0		
Mercury	4 866	3.5	11.0	57 950 000	41.6
Venus	12 106	8.7	27.3	108 110 000	77.7
Earth	12 742	9.1	28.7	149 570 000	107.5
Mars	6 760	4.9	15.2	227 840 000	163.7
Jupiter	142 984	102.7	322.6	778 140 000	559.1
Saturn	116 438	83.7	262.7	1 427 000 000	1 025.2
Uranus	46 940	33.7	105.9	2 870 300 000	2 062.2
Neptune	45 432	32.6	102.5	4 499 900 000	3 232.9

5. ábra: Naprendszer modell

Logarléc

A logaritmust, a logarlécet, a logaritmus táblázatot ma már sehol sem használják semmilyen praktikus kiszámolási céllal, mégis érdemes megismertetni a diákokat a logarléccel. Hiszen a logaritmikus összefüggések nagyon fontosak a természettudományokban és a gazdasági életben. Segítik az összefüggések megértését, megjegyzését és alkalmazását a kézzel fogható tapasztalatok. Egy hallgató, Takács Anna készítette el a modell ábráját is. (6. ábra)



Ekkor már le tudjuk olvasni a logaritmikus skálával ellátott vonalzókkal két 2 hatvány szorzatát is. Hiszen az ismert hatványazonosság szerint minden $a, \alpha, \beta \in \mathbb{R}$ esetén:

$$a^{\alpha} \cdot a^{\beta} = a^{\alpha+\beta}.$$

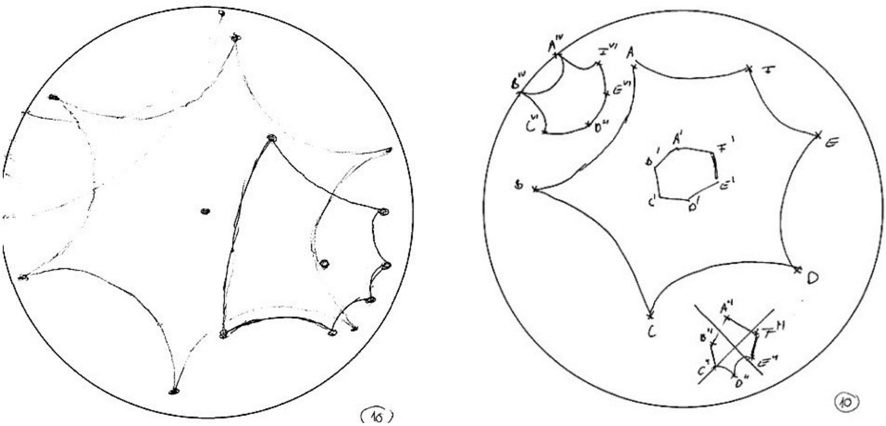
Ez azt jelenti, hogy a 2 hatványok szorzását elvégezhetjük az előbbi összeadásos módszerrel, hiszen az eredmény kitevője pont a szorzó tényezők kitevőjének összege lesz.

A 3. ábrán például a $4 \cdot 32$ szorzás elvégzése látható, azaz a $2^2 \cdot 2^5$ szorzás, melynek eredménye $2^7 = 128$.

6. ábra: 2 hatványok szorzása logarléccel (Logarléc modell)

Hiperbolikus geometria

A hiperbolikus geometria ábrái szabadkézzel vagy a szokásos szerkesztési eljárásokkal nagyon nehézkesen készíthetők el, ez gátat szab az elmélet megismerésének is. Szilassi Lajos Bolyai.exe programja [SZILASSI, 2017] az elmélyült tanuláson túl, a játékos ismeretszerzést is lehetővé teszi. Középiskolás tanulók rövid, félórát el nem érő időtartamú ismerkedés után készítették ezeket a rajzokat a hiperbolikus sík különböző, szabályos hatszögeiről.[3]



7. és 8. ábra: Hiperbolikus geometria ábrái szabadkézzel

Egy jeggyel kódolás

A XX. század 30-as éveiben volt nagy elméleti jelentősége a szövegek egyetlen számmal történő kódolásának, azóta pedig a titkosítással kapcsolatban is hasonló meggondolások lépnek föl. Ezért tartom fontosnak, hogy az eljárás alapját, az egyértelmű prímfelbontáson alapuló algoritmus tapasztalati úton is megismerjék a hallgatók.

Legyen a titkosítandó szövegünk az a, b, c, d betűk tetszőleges számú felhasználásával írt három betűs üzenet. Természetesen itt kis számú, véges sok eset van, egyszerűen megsorszámozhatnánk mindegyiket, de most a kódolás modelljét szeretném megmutatni. Jelöljük a három helyet az első

[3] http://www.jgytf.u-szeged.hu/tanszek/matematika/Bolyai/

három prímmel, a négy betűt az első négy pozitív egésszel. Így pl. a bab betűcsoportot a $2^2 \times 3^1 \times 5^2$ szorzattal, vagyis a 300 számmal kódoljuk, visszafejteni pedig a szám prímtényezős felbontása révén lehet.

Tapasztalatok

A hallgatók a matematikatörténeti ismeretek, tudományfilozófiai elvek mellett örömmel foglalkoznak tárgyakkal, kézműveskedéssel, régen használt egyszerű algoritmusok megismerésével. Többen közülük tervezik, hogy saját tanítási gyakorlatukba is beépítenek hasonló foglalkozásokat.

Hands-on History of Mathematics in Teacher Training

Abstract:
According to the traditions of the Ankét, I would like to show the connection between the history of science and the history of technology.
I find it important to show the history of mathematics, as varied as possible, to young people. In addition to the theoretical and the anecdotal approach, we also pay attention to the intensity approach. In addition to the historical facts (chronology, mathematicians, their works) we also try to express the mood and thinking style of the certain historical periods. The paper summarizes the results of my work in the following fields

- Mathematics-Didactic Research
- The "hands-on" method in the English-language pedagogical literature
- My teaching experience on the history of mathematics
- Cultural history memory with mathematical aspects: labyrinths
- More rigorously mathematical aspects
- Regular 3D shapes
- Astronomy, portable sundials, solar system model
- Slide rule model
- Drawing on hyperbolic plane
- Encoding, encoding with one signal

"Hands-on Mathematics History" has proved to be suitable for incorporating some of the elements of cultural history into the

educational process and has brought some difficult mathematical concepts closer to the students.

Irodalom:

SHELL-GELLASH, A. (ed): *A Resource for Teaching Math*. Washington DC, AMM, 2007.

SZILASSI LAJOS: *Euklidész, Bolyai és a tér*. (Előadás) ELTE Matematikai Esték, 2016. április 16. http://www.jgytf.u-szeged.hu/tanszek/matematika/Bolyai/ (letötés időpontja: 2017. május 6.)

UGHI, E. (ed): *Guidelines for the implementation of the MiMa methodology*. [Vezérfonal a MiMa Módszertan Bevezetéséhez], http://www.mathematicsinthemaking.eu/ (letötés ideje: 2017. május 6.)