

# MUNKÁCSY KATALIN

## *A Bolyai geometria recepciója az Osztrák-Magyar Monarchia területén*

A matematika a 20. század első felében gyökeres változáson ment keresztül: Gödel matematikai eszközökkel bizonyította be, hogy a matematika sohasem lehet kész, befejezett tudomány. Ez a látszólagos bizonytalanság sok embert zavarba hozott, elsősorban a matematika iránt érdeklődő laikusokat. A matematika ma elfogadott fogalmához Bolyai János eredményein keresztül vezetett az út. Az általa a 19. században kidolgozott hiperbolikus geometria volt az első új elmélet, amely a hagyományos, euklideszi geometriával együtt létezett. A két geometriában egymással ellentétes állítások vannak, mégis mindkettő helyes matematikailag. A hiperbolikus geometria mind a gyakorlati alkalmazást, mind a matematika megalapozását illetően igen jelentős. Rövid írásomban néhány példát mutatok arra, ahogyan a Monarchia egyetemlein megjelent a Bolyai geometria.

A hiperbolikus, vagyis a Bolyai-Lobacsevszkij geometria felfedezése igen nagy jelentőségű volt a matematika történetében. A felfedezésről, annak különös történetéről, a matematikai mondanivalóról ma már sokat olvashatunk magyarul is. Most egy angol nyelvű tanulmányra utalok, amely a világ leghíresebb matematikatörténeti honlapján olvasható.[1]

A probléma Magyarországon a "levegőben" van, a párhuzamosok kérdése része a közbeszédnek, erre utal, hogy az egyik bulvárlapnak rovata volt a párhuzamos életrajzokról. Olyan híres embereket mutattak be, akiknek az élete egy ponton összefonódott, találkozott. Ma gimnazisták gyakran felteszik a kérdést, hogy akkor találkoznak, vagy nem, a párhuzamosok. A korrekt matematikai válasz: attól függ, melyik rendszerben nézzük. E válasz megértését segítik azok az információk, amelyek a hiperbolikus geometria, vagyis BOLYAI JÁNOS eleművének Monarchia-beli elterjedését mutatják meg.

A 19. században merült fel az a kérdés, hogy egy vagy több geometria létezik-e. BELTRAMI szerint csak egy geometria van, és Bolyai, valamint LOBACSEVSZKIJ nem új geometriát fedezett fel, hanem egy matematikai részterülettel, az állandó negatív görbületű felületekkel foglalkozott. Bolyai János határozottan állította, hogy egy új világot fedezett fel, és erre utal GAUSS magatartása is, aki a hozzá beérkezett Bolyai és Lobacsevszkij műveket igyekezett elzárni a szakmai közvélemény elől, annyira újnak és egyben veszélyesnek is ítélte ezeket a gondolatokat. A sors érdekes játéka, hogy Gauss halála után, az ő hagyatékának rendezése közben került elő Bolyai János Gausshoz elküldött műve, ennek alapján készültek el az első fordítások Amerikában, Franciaországban. A Monarchia területén FRISCHAUF, a grazi egyetem professzora volt az első, aki előadást tartott a hiperbolikus geometriáról az 1871-72-es tanévben. Előadása könyvben is megjelent *Absolute Geometrie nach Bolyai címmel, 1872-ben Lipcsében. Érdekesség, hogy e könyv néhány évvel későbbi kiadása 2010-ben reprint kiadásban ismét megjelent a NABU német kiadónál.*

A Bolyai kézirat hányatott sorsáról ma már egyre többet tudunk, a gazdag irodalomból most csak KISS ELEMÉR könyvét említem meg. (*Kiss Elemér, Matematikai kincsek Bolyai János kéziratok hagyatékából, Akadémiai Kiadó és Typotex Kiadó., Budapest, 1999.*) A nagy mű első kézirat

nagyrészt elvesztek. Az első nyomtatott kiadás BOLYAI FARKAS *Tentamen* címen ismert könyvének *Appendix*-eként jelent meg, de ezek a kötetek – ma úgy mondanánk – nem kerültek könyvesbolti forgalomba, nem vásárolták a könyvtárak. Előfizetőkhez jutottak, illetve a marosvásárhelyi kollégium őrizte azokat felbontatlanul. Egy példány sorsát azonban követni tudjuk

A 19. században Erdélyben a levelezésnek, az emlékiratoknak nagy jelentőségük volt, ez teszi lehetővé, hogy egyetlen kötet sorsát és hatását megismerhessük WESZELY TIBOR tanulmánya alapján [2]. VÁLYI GYULÁRÓL [Vályi Gyula (1855-1913)] írt életrajzából összerakosgatva az információkat, meglehetősen pontosan állnak előttünk a részletek.

RÉTHY MÓR írta emlékirataiban, hogy a Vályi családot meglátogatván az apa, VÁLYI KÁROLY megmutatta a Bolyai Farkastól kapott Tentament, amelyet a család szinte ereklyeként őrzött. Vályi Gyula, miután elvégezte Kolozsváron az egyetemet, ösztöndíjat kapott Berlinbe, az akkori matematikai élet egyik központjába. Itt nyilván találkozott a geometria új elméletével. Később Kolozsváron az egyetemen kurzust tartott a Bolyai geometriáról, az elsőt az 1891-92-es tanévben, majd utána évtizedeken keresztül újra megtartotta ezt a népszerű előadássorozatot. Erről is maradtak jegyzetek<sup>1</sup>. Véleményem szerint e két tényező, a családi hagyomány és a külföldi ösztöndíj együttesen tette lehetővé, hogy akkor és ott bekerüljön az egyetemi oktatás keretei közé a Bolyai-Lobacsevszkij geometria, egyszerre matematikatörténeti és matematikai ismeretként. A tanítványok közül megemlítem DÁVID LAJOST, aki később a debreceni egyetemen tanította SZÉNÁSSY BARNÁT, a magyar matematikatörténeti irodalom kiemelkedő személyiségét. A hiperbolikus geometriának beépülése a kolozsvári egyetemi tananyagba azért is különösen érdekes, mert a Monarchia területén más egyetemeken, a grázi kivételtől eltekintve sokkal későbből vannak csak adataink

Bécsben 1900-ig nem volt előadás a nem-euklideszi geometriáról, de annak eredményeit tanították a differenciálgeometria, a felületek geometriája, a projektív geometria és a gömbi geometria keretében. GUSTAV KOHN [3] tartott először előadást a Bolyai-Lobacsevszkij geometriáról 1905-ben, aki szintén Berlinben volt ösztöndíjas<sup>2</sup>.

Budapesti adatom jóval későbbi, KERÉKJÁRTÓ BÉLA *A geometria alapjai* című művében a Projektív geometria fejezetben tárgyalja a hiperbolikus geometriát [4].

Prágába a hiperbolikus geometria Lobacsevszkij művén keresztül jutott el, a prágai recepció cikkekben, tanulmányokban és könyvekben követhető<sup>3</sup>.

A belgrádi egyetemet 1905-ben alapították. 1946-ig nem voltak geometria előadások, akkor kezdődött meg a tárgy tanítása és kutatása is<sup>4</sup>.

Az eddigi munkám során ezeket az adatokat sikerült összegyűjteni a Monarchiában, a Bolyai-Lobacsevszkij geometria egyik szülőhazájában az elmélet befogadásáról. Az adatok alapján a matematikai kutatásokban a hiperbolikus geometria helyet kapott, az egyetemi oktatásban, a tanárképzésben és ennek következtében az iskolai oktatásban még mindig csak elszigetelt kísérletek folynak [6]. Bizakodásra adhat okot, hogy a Bolyai-Lobacsevszkij geometria számítógépes modellje<sup>5</sup> lehetővé teszi, hogy a tanulók a hiperbolikus geometria legfontosabb elemeit és egyben szemléletét a nehéz számítások és bizonyítások végigjárása nélkül is elsajátíthassák, és ezáltal a tudomány mai állásának megfelelő képük alakulhasson ki a matematikáról. Ez egyben azt is jelentheti, hogy Bolyai Jánosnak nemcsak életrajzát, hanem életművét is megismerhetik a magyar tanulók.

## JEGYZETEK ÉS IRODALOM:

- O'Connor, J. J., Robertson, E. F.: Non-Euclidean geometry. [http://www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/history/HistTopics/Non-Euclidean\\_geometry.html](http://www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/history/HistTopics/Non-Euclidean_geometry.html).
- Weszely T.: 150 éve született Vályi Gyula. Természet Világa, 2005/1. <http://www.termeszetvilaga.hu/szamok/tv2005/tv0501/weszely.html>.

*Einhorn, Rudolf*: Vertreter der Mathematik und Geometrie an den Wiener Hochschulen 1900 - 1940. Dissertation an der Technischen Universität Wien; gedruckt (2 Bände). Verlag: Verband der wissenschaftlichen Gesellschaften Österreichs. 1985

*Kerékjártó Béla*: A geometria alapjai, Budapest, 1937, 1944.

Nemeuklideszi geometriák elemei. Tankönyvkiadó, 1989.

- <sup>1</sup> Csak két előadása volt, amely kevésbé változott. Egyik az elemi függvénytan, melyben egykori mesterét, Weierstrasst követte; ebbe volt beleszőve az elliptikus függvények elmélete is. Másik ilyen előadása Bolyai János *Appendixe*, melyben különösen kezdetben ragaszkodott e mestermű paragrafusaihoz sorrendben is, tartalomban is. A másik – matematikai kultúránk fejlődése szempontjából az előbbinél még jelentősebb – kollégiuma Bolyai János *Appendixéről* szólt. Ezt először az 1891/92. tanév második félévében tartotta, ettől kezdve csaknem változatlan formában négyévenként többször megismételte. Élvezetes, szép olvasmány az előadásról készült, megfakult, száz két lapos litografált jegyzet. Eszerint Vályi Gyula kollégiumának mintegy harmadát a történelmi előzmények ismertetésére fordította, majd az *Appendixet* kommentálta, a paragrafusok sorrendjében haladva előre. A bizonyításokat kiegészítette, a rendkívül tömör fogalmazást – magyarázó részek közbeiktatásával – feloldotta. Helyenként – az abszolút és hiperbolikus geometria összehasonlítása céljából – kölcsönzött Lobacsevszkij eredményeiből is – idézi Szénássy Barnát Weszely Tibor, i.m.
- <sup>2</sup> Köszönöm az információkat *Hellmuth Stachelnek és Christa Bindernek*.
- <sup>3</sup> *Weyr, Eduard*: Oslava stoleté ročnice dne narození N. I. Lobačevského cí. Kazaňskou universitou [The 100 anniversary of the birth of N. I. Lobachewsky organized by University in Kazan], Živa 6 (1896), 6–10.  
1899/1900 Vilém Hauner's dissertation: Neeuklidovská geometrie Nikoláje Ivánoviče Lobačevského [Non-Euclidean geometry of N. I. Lobachewsky]  
*Hauner, Vilém*: Geometrie neeuclidovská a její poměr k teorii poznání [Non-Euclidean geometry and its relation to the theory of recognition], Česká Mysl, vol. IV  
*Hauner, Vilém*: Geometrie neeuclidovská: Theorie Riemannova [Non-Euclidean geometry: Riemann's theory], Česká Mysl, vol. IX  
*Hlavaty, Václav*: Úvod do neeuclidovské geometrie [Introduction to non-Euclidean geometry], Praha, 1926.  
Köszönöm az információkat Martina Bechvarovának.
- <sup>4</sup> Köszönöm az információkat Mileva Pranovic-nak.
- <sup>5</sup> Magyar szoftver: *Szilassi Lajos*: A Bolyai geometria Poincaré-féle modellje (Számítógépi program),