

WOLFGANGI BOLYAI DE BOLYA
TENTAMEN.

EDITIO SECUNDA.

TOMUS II

a

BOLYAI, Tentamen. II.

MAGYAR AKADEMIAI KÖNYVTÁRA
KÖNYV

MAGY. AKADEMIA
KÖNYVTARA

WOLFGANGI BOLYAI DE BOLYA

TENTAMEN

IUVENTUTEM STUDIOSAM IN ELEMENTA MATHESEOS PURÆ ELEMENTARIS
AC SUBLIMIORIS METHODO INTUITIVA EVIDENTIAQUE HUIC PROPRIA
INTRODUCENDI, CUM APPENDICE TRIPLICI.

EDITIO SECUNDA.

TOMUS II.

ELEMENTA GEOMETRIÆ ET APPENDICES.

MANDATO ACADEMIÆ SCIENTIARUM HUNGARICÆ SUIS ADNOTATIONIBUS ADIECTIS
EDIDERUNT

JOSEPHUS KÜRSCHÁK, MAURITIUS RÉTHY,
BÉLA TÓTÖSSY DE ZEPETHNEK

ACADEMIÆ SCIENTIARUM HUNGARICÆ SODALES.

PARS PRIMA. TEXTUS.

BUDAPESTINI.

SUMPTIBUS ACADEMIÆ SCIENTIARUM HUNGARICÆ.
MCMIV.

105570

HUNGARIAN LIBRARY

MAGY AKADEMIA
KÖNYVTARA



PRAEFATIO EDITORUM.

Cum infra scripti, quibus renuntiante JULIO KÖNIG, Academia Scientiarum Hungarica Tomum II. Tentaminis edendum mandavit, eum in publicum prodimus, facere non possumus, quin mærentes in memoriam revocemus luctum, quo Academia nostra anno post editum Tomum I. mortuo HENRICO FINÁLY DE KEND, eruditissimo doctissimoque viro et sodali, afflita est. Amissi viri, peritissimi Latinitatis classicæ antistitis, cuius opera etiam conatus nostri prospere promovebantur, vicem supplere filius defuncti, GABRIEL FINÁLY DE KEND summo studio enitus est. Quod grato animo accepimus.

Omnibus, quæ ad arithmeticam spectant, in Tomo I. editis, in secundo continentur ea, quæ ad geometriam pertinent, ita etiam «Appendix» IOANNIS BOLYAI. Huic Tomo inseruimus etiam paginam «Recensio per auctorem ipsum facta» inscriptam, de qua in Præfatione Editionis II. Tomi I. mentio facta est. Paginas ad Tomum I. Editionis I. alligatas,

quæ inscribuntur «Egy kis toldalék a deák I. kötethez» («Additamenta quædam ad Tomum I. Latinum» — hoc est non ad opus Hungaricum ARITHMETICA ELEJE = Initia Arithmeticæ, quod anno 1830 editum est) huic quoque Tomo subiecimus. Quia autem res, quæ in iis tractantur, potissimum linguæ Hungaricæ peritorum legere interest, integras eas in Latinum convertere alienum putavimus, argumenta tamen in Adnotationibus huius Tomi breviter exposuimus.

Rationes, in edendo Tomo I. constitutas, in secundo edendo sine ulla mutatione conservavimus. Signa insolita in hoc Tomo neque ipse WOLFGANGUS BOLYAI adhibuit, sed signa diversarum æqualitatum et diversorum parallelismorum re ipsa adhibenda fuerunt: quæ, ut prorsus signa omnia auctorum retinuimus, excepto signo perpendicularitatis Bolyaiano \perp , in cuius locum signo solito \perp usi sumus.

At figuræ haud leviter immutatæ sunt. Ex figuris stereometricis WOLF-

GANGI BOLYAI charta plicata compositis eas solum retinuimus, quæ ad «Conspectum generalem geometriæ» pertinent: his enim ad discendum utiliter illustrantur, quæ iis illustranda sunt. Pro ceteris figuris charta formatis figuræ quæ dicuntur axonometricas adhiberi, cum intuentibus ad perspiciendum, tum præcipue typographis ad persequendum melius putavimus. Nonnullas etiam ex reliquis figuris correxiimus. Sed naturam figurarum ad geometriam absolutam pertinentium sine ulla mutatione retinendam esse censuimus. Quod nonnullas figuræ, exempli gratia 14-tam Appendicis, ex integro composuimus sectione conica absoluta Cayleyana adhibita, earum naturam minime adulteratam esse putavimus, quia hoc modo imago rectæ lineæ æque recta est ac in figuris Bolyaianis.

De mutationibus, quæ in contextu operis evitari non potuerunt, ratio redditur in adnotationibus, quo etiam animadversiones nonnullas ad rem spectantes reieciimus.

Opere tandem perfuncti libenti animo commemorare debemus munificientiam Academiæ Scientiarum Hungaricæ, quod ad diem natalem centesimum IOANNIS BOIXAI concelebrandum Appendicem eius æternitate dignam in usum eorum, qui se studiis literarum dedidere, separatim ediderat.

Cum diligentissime enisi essemus, ut opus quam emendatissimum prodiret, menda typographica, quæ in contextu nihilominus invenientur, nobis lector benevolus ignoscet.

Budapestini 1904

Kürschák, Réthy, Tötössy.

HOC TOMO CONTINENTUR:

	Pag.
Præfatio Editorum	V
Signa a Wolfgango Bolyai inventa	X
Arbor Arithmeticae Geometriæque	XI
Index rerum in tomo primo ed. I. contentarum	XXI
Index rerum in tomo secundo ed. I. contentarum	XLIII
Simulacrum tituli editioni primæ præfixi	LV
Præfatio ipsius Auctoris	LVII
Subdivisiones geometriæ	LIX
Sectio I. Conspectus Geometriæ generalis	I
Sectio II. Planimetriæ pars prima	57
Sectio III. Planimetriæ pars secunda	148
Sectio IV. Reditus e plano in abyssum spatii	219
Appendix triplex	308
I. De perspectiva	308
II. De gnomonica	314
III. De chronologia	326
Recensio per auctorem ipsum facta	357
Simulacrum tituli editioni primæ Appendicis præfixi	359
Ioannis Bolyai Appendix scientiam spatii absolute veram exhibens	361
Wolfgangi Bolyai Additamentum ad Appendicem	395
Egy kis toldalék a' déák első kötetéhez	401
Megigért jelentés	416
Adnotationes Editorum	417
Errata	439

b

SIGNA

A BOLYAI INVENTA, QUAE IN TOMO PRIMO NON REPERIUNTUR
IPSIS AUCTORIS VERBIS EXPLICATA.

\overline{ab} denotatur linea ab utrinque infinita.

\tilde{ab} " ex a incipiendo infinita in plaga illa, in qua b est.

\bar{ab} " e b incipiendo in plaga illa, in qua a est, infinita.

\widetilde{P} " P (ex. gr. planum) totum infinitum (iuxta definitionem pag. 8).

ARBOR
ARITHMETICAE GEOMETRIAECQUE
corradicata coronisque confluentibus.

E repræsentationibus externis internisque, via abstractionis pervenit ad loca primaria omnium, quæ in mundo externo sunt, et quæ in externo internoque fiunt: SPATIUM et TEMPUS; quæ partim seorsim, partim coniunctim considerantur: abstrahendo nimirum e mundo externo corpus omne, e loco, quem occupare videtur, et querendo quid reliquum, quidve ultra sit, oritur *intuitus spatii puri*, atque ex eodem in diversis locis, vel diversis in eodem loco, aut diversis repræsentationibus in eodem repræsentante, nascitur *intuitus temporis*. (Tom. II. pag. 2.)

Ex *A* et tali Non *A* quod ex *A* est, fit conceptus *partis*; et *continui*, si quid partes commune habeant. *A* comparando cum *B* oritur *aequalitas (absoluta et respectiva)*. Ex æqualitate et parte *quantitas (absoluta et respectiva)*. (Tom. I. pagg. 22—25.)

Quantitas cum quantitate parit homogeneitatem et maioritatem minoritatemque. Et hinc reflectendo ad tempus atque spatiū (quum in priore quantitatis maioris excessus illico pateat, in spatio vero sæpe aliter se res habeat), de omnibus *quantitatibus ad formam simplicem prioris reducendis cogitatur*. (Tom. I. pag. 27.)

Atque talis *quantitas*, nempe ad *formam TEMPORIS reducta*, OBIECTUM ARITHMETICAE est. (Tom. I. pag. 27.)

I. *Quantitas cum qualitate* (nempe *certa determinatione*) parit positivum et negativum (mox imaginaria quoque). (pagg. 28, 121.)

II. Quantitatum *P* et *Q* certa cum determinatione positarum *resultatum certa sub conditione acceptum* parit *summam S*; et ex *S* et *P* quærendo *socium ipsius P*, oritur *differentia ipsius P ab S*. (pag. 30—31.)

III. *Differentia eadem ipsius S ab S'*, atque porro *ipsius S' ab S'' et ita porro, parit S, S', S'', S'''... seriem arithmeticam*. (pag. 32. et 152.)

Atque si series eiusmodi *U* a \circ incipiat, et differentia cuiusvis termini a sequente sit $=u$, oritur *numerus quoad u*; et serie tali *V* item a \circ incipiente, cuius termini cuiusvis a sequente diffe-

His præmissis SPATIUM *purum* OBIECTUM GEOMETRIÆ est, applicatis, ubi necesse est, veritatibus in Arithmetica deductis: ut arbor utraque fraterna corradicata, altera alteri opem ferente, coronis inter lucidas Spatiis Temporisque connubii æterni orbitas in abyssō cœlorum confluat. (Tom. II. pag. 1.)

I. E *spatio puro*: nascitur prius *superficies, linea, punctum, forma, et sectio*. (pag. 2.)

II. *Reditu in mundum externum*, cum reflexione ad corpus idem in diversis locis: oritur *Axioma congruentiae*, et *constructio mobilis geometrici, motusque geometricus* (coniunctio, in idea non in concreto, spatii et temporis). (pag. 3.)

III. *Reditus in spatiū purū cum mobili geometrico. Motus sine quiete* (*Operatio motus prima*); *Motus cum quiete; cum quiete unius puncti* (*Operatio motus secunda*); *cum quiete duorum pnnctorum* (*Operatio motus teritia*). (pagg. 5, 6, 7.)

rentia = v sit, si o ipsius V cum o ipsius U simul ponatur, ac quilibet terminus sive in U sive in V sequens simul ponatur cum eo, qui in altera sequitur: oritur *nomen numericum* idem terminorum simultaneorum, in U *quoad u*, in V *quoad v*. (pag. 32.)

IV. *Quæstiones* hinc variæ exortæ: ex. gr. præter alias, num B numerus sit *quoad A*? si non; num tale u detur, *quoad* quod tam A quam B numeri sint? et si detur, cuiusnam nominis numerus sit A , et cuius sit B ? Hinc *mensuratio* ipsius B per A , ubi A *mensura*, et B *mensum* ipsius A dicitur; atque hic oritur etiam idea *incommensurabilitatis* (ad-hucdum subiective tantum possibilis); atque hinc u semper minus cogitando, *limitis* idea. Venientibus talibus a et b autem, ut ad quæstionem, qualenam mensum sit b ipsius a , eadem responsio sit, quam ad eam, qualenam mensum sit B ipsius A ; oritur *proprio*. Tum mensurando *quoad A* non solum B sed C quoque, oritur *fractio*; atque hinc passus fit omnes quantitates homogeneas *quoad* idem A mensurare; A *unitatem* appellando;

IV. Spatii filia primogenita *punctum* est, dein *sphaera* quasi media inter duo extrema (inextensem et quaquaversum infinitum). Sphæræ per operationem tertiam filia circulus est; et ex his, adhibitis reliquis operationibus quoque, generatur *recta*, atque e recta et circulo *planum*. (pagg. 8, 13, 26)

qua minus *fractio vera* dicitur,
et numerus quoad *A integer* au-
dit. (pagg. 33—37, 41.)

V. Hinc reflectendo ad IV, si ibi-
dem *A* unitas sit, quærere *b* ex
a et *B*, dicitur *multiplicare a*
per *B*, et *b factum quoad uniu-*
tatem A e factoribus a et B au-
dit. (pag. 40.)

Hinc ex *b* tanquam facto sup-
posito, et uno e factoribus *a* et
B, quærere factorem socium eius,
dicitur *dividere b* per illum, cu-
ius socius quæritur, et hic *quotus*
audit. (pag. 41.)

Atque prouti unitas (in IV.) \oplus
vel \ominus accipitur; oriuntur *realia*
quoad $+1$, et *realia* quoad -1 .
(pag. 42.)

V. *Rectis ex eodem punto p ad*
omnia puncta cuiuspiam F,

1. *Omnibus per idem* (sive 1
sive aliud, dummodo non o sit)
multiplicatis: complexus extre-
mitatum parit similitudinem, et
homologa; atque contrarie ae-
qualia, et conceptum generalem
aequalitatis geometricae. (pagg.
10 §.)

2. *Rectarum dictarum ipsarum*
autem *complexus* fit (sensu gene-
rali) *pyramis*; et forma ad *p* api-
cata parit conceptum *anguli* ge-
neralem. (pagg. 10, 15.)

3. *Hinc forma excluso angulo*
fit *fluens*; et hæc *exclusis recta*
planoque fit *curva, admissis vero*
recta *planoque* parit conceptum
generalem *tangentis, et perpendicularitatis.* (pagg. 16, 17.)

4. *Remoto (in V) p in infinitum,*
oritur *angulus o, vel prima non*
sectio; et e *rectarum dictarum,*
si finitæ et æquales reddantur,
complexu fit *prisma* (sensu gene-
rali, et tum adhuc generaliore).
Et si *F* recta sit, et rectæ dictæ
æquales ad angulum æqualem po-
nuntur in *plano*; exinde oritur

parallelismi conceptus generalis.
(pagg. 17—20.)

VI. Si factores aequales esse contigerit, multiplicatio cum divisione parit potentiam, radicem, logarithmum, (*elementares*). (pag. 50.)

Atque quantitas item cum certa determinatione (uti in I.), realitate eius, multiplicationi quoad —1 innixa, parit *imaginarium*, et conceptum multiplicationis latiorem. (pag. 121.)

Imo potentia logarithmusque (*elementares*) per binomii elevationem ad tales series deducunt, quæ conceptum potentiae logarithmi altiore pariunt, ubi et *imaginaria in exponentem* ascendunt. (pagg. 192—193.)

VI. *Motus geometricus simplex*, id est ut in quovis tempore una tantum trium operationum (in III dictarum), et quævis numero certo, etsi non eodem, eveniat: recta planoque heic iam ex IV suppositis. (pagg. 20, 21.)

Cum duabus prioribus operationibus, et semper certo præterea rectarum numero adhibito, descendendo in planum (omnibus eo restrictis) fit *Planimetria*: ubi prius de lineis (neglecta area), earumque sectione (o aut aliqua); tum de areis agitur. *Constructionis geometricae sensu stricto ambitus*.

Admissa operatione tertia quoque, nec restringendo ad planum, redeundo in spatum universum fit *Solidometria*, constructione geometrica sensu lato accepta. (pag. 22.)

Notandum autem, in motu dicto simplici operationem quamvis seorsim peragi, nec ulla alia lege restringi, nisi quod mobile e dato loco in datum perveniat. Unde duæ priores operationes, sola restrictione ad planum accedente, reducuntur: Primo ad *motum*

puncti a rectam ab secum ferentis, usquequo a in p perveniat. Secundo ad rectae ab motum circa a in *plano*, donec in certam rectam datam, cuius una extremitas a est, perveniat.

VII. Ex omnibus his quasi in oce-
anum confluentibus, oritur, per
quarumvis quantitatatum quibusvis
operationibus affectarum quale-
vis compositionem, conceptus ita
dictæ FUNCTIONIS. Ubi item
(ut in IV) variæ oriuntur quæsti-
ones: e quibus CORONA arboris
Arithmeticae exsurgit. (pag. 204.)
Nempe

21) *Pro certa functionis condi-
tione (qualitateve), certa functio-
nem constituentia quæ, quanta,
qualiave sint, quærere.*

VII. MOTUS GEOMETRICUS
COMPOSITUS: nempe ubi plu-
res operationes (trium dictarum
primitivarum coniunguntur) in
eodem tempore; lege quoque, qua
durante motu viæ simultaneæ per
singulas operationes factæ a se
invicem dependeant, data; e quo
CORONA arboris Geometriae ex-
crescit. Suntque hæ operationes
coniunctæ. (pagg. 22 23)

21) *Aut numero finito; et qui-
dem:*

1. Aut duæ tantum; ex. gr. si
recta ab in *plano P* circa a mota,
interea punctum p ita moveatur
in \bar{ab} , ut via y eius sit $=f(u)$
(denotante u viam puncti b); et
quæratur via puncti p. (pag. 23.)

Aut \bar{ab} quiescat, et p in \bar{ab}
motum perpendicularē B ad
ab secum ferat, atque interea ita
moveatur punctum p' in B, ut
via y eius sit $=F(x)$ (denotante
x viam puncti p); et quæratur
via puncti p'. Prodeunt hoc modo
talia quoque, quorum etsi non

omne, quodvis punctum tamen (nempe pro dato quovis x simultaneum y) geometrice (sensu stricto) construi potest.

2. Aut tribus coniunctis: ex. gr. si punctum p describat in plani P recta \bar{ab} viam x , secum ferendo planum ϕ perpendicularare ad P e recta B perpendiculari ad ab , atque interea p' in B motum rectam C ex p ad B perpendiculararem, in ϕ secum ferat; et punctum p'' in C viam z describat; sitque puncti p in B via $y = a(x)$, et $z = b(y)$; et quæratur via puncti p'' in spatio.

Aut planum P circa rectam fixam A plani P moveatur, via certi eius puncti u dicta; atque interea p describat in A viam x , secum ferens in P perpendicularrem B ad A , atque simul describat p' in B viam y ; sitque $x = k(u)$, et $y = h(x)$; et quæratur via puncti p' . (pag. 23).

Ita plures quoque operationes (numero certo) coniungi possunt.

3) Aut innumerabiles eiusmodi operationes coniunguntur: ex. gr. si recta A in plano P sit, et recta B perpendicularare ad A , atque planum Q secet planum P in B , et rectam A in b ; ac mo-

B) Pro certa certorum functionem constituentium conditione (qualitateve) quæri qualitas functionis valoresque possunt; (imo etiam simul certa functionis conditio poni potest).

Ex. gr. Ex 2) Si conditio ea sit, ut functionis valor o sit: quæri *valor variabilium* potest (*problema aequationum*), aut *valor coefficientium*; potest etiam conditio esse, ut functionis valor *maximus* vel *minimus* sit, et pro hoc variabilis quæri. (pagg. 205, 345, 372.)

Ita aliæ conditiones esse possunt; imo variabilis vicem genus certarum functionum subire potest, (ut in *calculo variationum dicto*). (pagg. 206, 360.)

Potest vero conditio ea quoque esse, ut quantitates certæ, quarum genus dicatur x , nulla alia operatione affectæ, nonnisi sub certa conditione ordinentur: et resultata quærantur. (*Analysis combinatoria*). (pagg. 159, 205, 556.)

In 3) quoque variæ conditio-
nes esse possunt: ex. gr. ut variabili nonnisi integer substitua-
tur; imo ut etiam functio certa
qualitate gaudeat (ut in *theoria numerorum*) (pag. 206), ubi tamen
sive functionem constituentia, sive
functionis qualitas quantitasve
quæri possunt.

Si ipsi x substituatur $x + i$,
oritur *Problema Taylorianum*.
(pag. 208, 321.)

veatur b in A , planum Q secum ferens; atque interea certa lege, a via puncti b dependente, mo-
veantur certa puncta generaliter p dicta (innumerabilia quoque, prouti per legem determinantur) in perpendicularibus ad rectam B in Q erectis: et quæratur complexus ipsorum p in omnibus temporis punctis expertibus usque ad motus finem. (pagg. 24, 25.)

Si vero ipsi x substituatur mx (pro x denotante $\frac{x}{n}$), atque ipsi m substituantur integri ab 1 incipiendo; et valores functionis exorti post se invicem ponantur: oriuntur *series* (ipso x imo ipso n quoque sive 1 sive aliud denotante); estque pro certo valore ipsius x (ex. gr. $x = 1$), aut n quoque constans, et ipsi m numeri omnes ab 1 incipiendo etiam ultra n substituuntur; aut n (quamvis semper finitum determinatum, sed post quamvis seriem productam novum valorem accipiens) $\sim \infty$, atque ipsi m semper numeri ab 1 usque ad n substituuntur. (pagg. 208 ff., 472).

Si in casu posteriore terminus quilibet cum sequente comparetur: prodit *series incrementorum*; et si duarum functionum F et f eiusdem x , unius F valor notus sit; atque termini generales T et t , serierum incrementorum ex utraque functione deductarum æquipolleant (id est $\frac{t}{T} \sim 1$, si $n \sim \infty$): prodit et alterius functionis f valor. Reperire t (in forma simplicissima) docet *calculus differentialis*, et ex t functionem f quærerit *calculus integralis*. (pagg. 209, ff., 301 ff., 371.)

C) Denique quælibet horum sub qualibet conditione componi: et sub aliqua conditione resultatum, aut pro resultato illa, per quæ id fieri queat, quæri possunt. Et de n -tupla via sub eodem tempore, conceptum n -tuplæ caussæ formando; oritur *Mechanica pura*.

INDEX

RERUM IN TOMO PRIMO ED. I. CONTENTARUM.

	Ed. II.
Tom.	pag.
I	27
II	1
	I 27—51
	I 51—203
	I 204—478
	II 1—56

Conspectus arboris utriusque breviter est sequens:

Fundus communis exponitur usque ad (pag. 22) quo etiam (pag. 442) pertinet.

I. RADICEM *arboris Arithmeticæ* constituit conceptum primariorum genesis, prouti quilibet e prioribus orti se invicem excipiunt (pag. 22 usque pag. 43, §. 35).

TRUNCUM constituunt *primaria*, quæ e conceptibus dictis per axioma sequuntur: utpote resultata operationum, quot, qualiae sint, si cum commensurabilibus, incommensurabilibus, cum fractionibus, potentiis, logarithmisque suscipiantur; quo etiam operatio elevationis (ex. gr. binomii) pertinet; unde *potentiae logarithmique sublimioris* conceptus oriatur. Continentur hæc in (§. 35, a pag. 43 usque pag. 178).

CORONAM *arboris* constituunt quæstiones, quæ e conceptu FUNCTIONIS, ex omnibus præcedentibus confluentibus, prodeunte oriuntur (a pag. 178 usque 442).

II. Ita RADICEM *Geometriae* efficiunt: specialior spatii intuitus, et conceptum primariorum genesis, atque *sphaerae*, *rectae*, *planique generatio*; horumque combinationes primariæ (a pag. 442 usque ad finem tomij).

TRUNCUM faciunt e *motu simplici* oriunda: *Planimetria* et *Solidometria*.

CORONAM efficit MOTUS COMPOSITUS.

III. Demum (coronis iam antea confluentibus) actione spatii cum tempore unione, de *n*-tupla via sub eodem tempore *n*-tuplæ caussæ conceptum formando: oritur *Mechanica pura*.

Notandum autem est:

1. quod dum tale aliquod, quod in omni tempore est, dicitur *possibile*; ex. gr. dum dicitur quartam proportionalem, aut potentiam expo-

Ed. II.

Tom. pag.

nentis q , aut formam aliquam in spatio, *possibilita* esse: ea *reipsa dari* intelligendum sit. Aliud est, si de eventu, qui in aliquo tantum tempore est, dicatur: e complexu enim omnium, quæ sunt, unicum in quovis temporis punto experie resultatum est. At si ex a, b, \dots re ipsa existentibus, (certo modo tali suppositis, ut abstrahendo a reliquis, nulla contradictio sit), eveniat B ; tum B *respective* quoad a, b, \dots *possibile* dici potest; etsi e complexu omnium, quæ sunt (ita uti sunt), nunquam prodeat. *Absolute possibile*, id est si a, b, \dots complexum omnium quæ sunt, eo modo quo sunt, denotet; *re ipsa etiam fit aliquando*.

2. Dum (pag. 62) *possibilitas mensurationis* per A ipsius B asseritur: demonstratur quidem (*ibidem*) dari talia u, u', \dots et $n, n', \dots, m, m', \dots$; ut pro $\frac{A}{n} = u$, $\frac{A}{n'} = u'$ &c, et $n' = 2n$, $n'' = 2n'$ & (nempe $u' = \frac{u}{2}$, $u'' = \frac{u'}{2}$ &c); in casu commensurabilitatis (substituendo ipsi n integros ab i se invicem excipientes) prodeat aliquando tale n , ut $A = nu$, $B = mu$ sit; secus autem pro dictis n, n', \dots sit $A = nu$, $B = mu + \omega$ ($\omega < u$), et $A = n'u$, $B = m'u + \omega'$ ($\omega' < u'$) & . . . ; at si re ipsa exhibenda u, u', \dots et numeranda in B fuerint; supponi divisio ipsius A per quemvis integrum n debet; quod, si A quantitas ad rectam reducta sit, Geometria sine tentatione præstat, uti et quartam proportionalem exacte exhibit, postea quam Arithmetica pro quantitatibus, etsi non nisi in concreto expositæ essent, dari hæc demonstret, quamvis non semper exhibere valeat. Aliud est, si quantitates iam mensuratæ supponantur, atque ita expressæ proponantur: et aliud, si non nisi in concreto datis lineis, ex gr. linea b per lineam a dividenda esset (pag. 33), et quæratur B *tale mensum unitatis*, quale mensum b ipsius a est; aut b dividendum per lineam B esset, quærendo a , nempe cuius tale mensum est b , quam B est datae unitatis; Arithmetica dari in hoc quoque casu resultatum probat, sed illud non nisi peracta antea mensuratione exhibere potest, exacte in casu commensurabilitatis, secus vero cum errore dato quovis minore.

I 71

I 40

SPECIALITER vero continentur in tomo primo sequentia.

IN INTRODUCTIONE.

1. *Prospectus cognitionum humanarum. Propositio*, eiusque *formae, definitio, theorema, axioma, demonstratio, vocabula et veritates ultimae, scientia, sistema*.

	Ed. II. Tom. pag.
<i>Historia, philosophia, mathesis, physica</i> (externa, interna), <i>psychologia</i> (pura, empyrica), <i>aesthetica, scientia moralis</i> (pura, applicata), <i>Officium, ius, iura, Theologia</i> (a pag. 1 usque 6).	
<i>Axiomata</i> (pagg. 6 et 7, ubi ex IV datur modus apagogice concludendi). <i>Logica</i> ad mathesim requisita: nempe præter prius dicta, <i>genus, species, subdivisionesque</i> (pagg. 8 et 9); aliquod fundamentale (pag. 10, §. C); tum propositiones, <i>quae ex una sequuntur</i> (pag. 11, 1-mo); dein <i>conceptus aequivalentes</i> quid et quando sint (pag. 11, 2-do); atque (pagg. 12, 13) <i>e duabus propositionibus quando et qualis fiat conclusio?</i> (relatis omnibus casibus possibilibus, et (pagg. 14, 15) per axiomata demonstratis); <i>sorites</i> (pag. 15); <i>conclusio de n ad n+1</i> (pag. 16, §. F), <i>fundamentum limitis</i> (pag. 15, §. E).	I 5—10 11—12 13—14, 14 15, 1. 16, 2.; 16—18 18—20 20, 21 20

IN CONSPPECTU ARITHMETICAE GENERALE.

I. RADIX e fundamento communi.

Complexus, pars, totum, pars indivellibilis, nempe si complexus omnis eius, quod præterea est, in concreto sisti nequeat, nisi ea quoque adsit; *portio* (pag. 17).

22

* *Indivellibile partis, indivellibile totius est. Pars partis indivellibilis, indivellibile totius est. Portio portionis, portio totius est. Si p portio ipsius T sit: et reliquum ipsius T portio ipsius T est.* (pagg. 18, 19).

23, 24

Nihilum mathematicum, et expers, punctum temporis, continuum (pag. 19)

24

Aequalitas (absoluta, respectiva); quantitas (absoluta, respectiva) aequalitas respectiva *quoad contentum* (pagg. 20, 21).

25, 26

Quantitas cum quantitate: unde maius, minus, demissio; hinc reductio ad formam temporis (pag. 21). *Notio Arithmeticæ* (pag. 22). Hinc

26—28

Quantitas cum qualitate parit \mp , \vdash , et $+$, $-$ (pag. 22—24). Hinc

28—30

Additio (quantitas complexa); ex additione subtractio (pag. 25). Hinc

31

Series arithmeticæ, numerus; variae quaestiones (pag. 27, 28). Hinc

33, 34

Mensuratio, incommensurabilitas (pag. 28) *limes; quantitas variabilis* (pag. 29). Hinc

34

Fractio (pag. 29), tum *Unitas* (pag. 30). *Annotatio de multiplicatione linearum* (ibidem), *fractio vera, numerus integer; distinctio inter*

35

$>$ et \triangleright , et quædam hoc concernentia (pag. 31). Ex his

36

Multiplicationis, ex hac divisionis conceptus (pag. 33), (extensus

37

pag. 106).

38

Et proportionis geometricæ conceptus (pag. 34, aut pag. 65).

40—41

123

41, 75

	Ed. II.
	Tom. pag.
In multiplicatione signa \oplus , \ominus , pariter in proportione (pag. 34).	I 42
Signa \oplus , \ominus in multiplicatione et divisione (pag. 35).	43
Specialia multiplicationis schemata (pag. 36, . . .); ubi (pagg. 37 et 38)	43 & 45—46
de $\frac{0}{0}$ et $\frac{1}{\infty}$ prævia annotatio est.	
<i>An semper detur factum, quotus?</i> et aliæ quæstiones (pag. 39).	46—47
Quid si factores permutentur prius homogenei, tum heterogenei; conceptus celeritatis, et expositio conceptus quantitatum analogarum (pagg. 39, . . ., 41).	47—49
Duo divisionis schemata (pag. 42).	49
Per plures factores æquales, <i>multiplicationis</i> cum <i>divisione, filiae: potentia, radix, logarithmus</i> (sensu elementari) (pagg. 42, 43).	50, 51
II. TRUNCUM <i>arboris</i> constituit §. 35, pag. 43 incipiens, usque ad pag. 178, §. 36.	51 203
E resultatis æqualibus ad eorum æqualitatem, unde prodierunt, non concluditur (pag. 43).	51
<i>Reductio</i> quantitatum ad formam <i>temporis, rectaeve</i> ; (imo quarundem ad circulum). * <i>Quantitas finita (absolute, respective)</i> (pag. 44).	52
<i>Constat, continetur</i> (pag. 45).	52
* Addita, etsi \oplus , \ominus adfuerint quoconque ordine, <i>summam eandem praebent</i> (ibidem usque ad pag. 47).	53, 54
Datur <i>limes</i> (ibidem VI).	55
* Tempus quodvis continuum <i>gaudet dimidio</i> (pag. 48) et si dimidii semper dimidium accipiatur, dabili quovis tempore minus prodit (pag. 49).	55 56
* Si u multiplicetur per factum e factoribus numero n , quorum quisvis $=2$: factum numerus quoad u erit (pag. 49. IX).	57
* Temporis continui Q , quod inter 2 puncta est, <i>quaevi portio certo numero accepta, superat ipsum Q</i> (pag. 50).	57
* Tempus tale (ut prius) <i>per quemvis integrum dividi potest</i> (pag. 50); omniaque dicta ad rectam applicari possunt (pag. 51).	58 59
Pro n integro, et α, β positivis, est $n(\alpha+\beta)=na+n\beta$ (pag. 51).	59
Ita $\frac{\alpha+\beta}{n}=\frac{\alpha}{n}+\frac{\beta}{n}$; applicatio ad $\alpha-\beta$ (pag. 52).	59, 60
* Si e tempore T (vel recta) possit u numero n accipi, ita ut $\omega=0$ vel $<u$ supersit: ex eodem $T(n+1)u$ accipi nequeunt (pag. 52).	60
* <i>Quaevi quantitas ad unicum reduci potest</i> (pag. 53).	60
* Si $A=B$, est etiam $A'=B'$, id est $A' \doteq B'$ (per A', B' reducta A et B intelligendo); et conversa (pag. 53)	61

	Ed II. Tom. pag.
* Si A constet ex a, b, \dots : est $A' = a' + b' + \dots$ (etsi interminata sit reductio) (pagg. 54, 55).	I 62, 63
<i>Resultatum additionis subtractionisque</i> quantitatum reductarum, <i>unicum</i> . Imo etsi $C = Q$ et $a = c$ uti sunt considerentur, undevis dematur a ex C et c ex Q : residua erunt $=$ -lia (pag. 55).	63
* Quantitatibus item ita ut sunt, sine reductione consideratis, et $=$ -litate terminata intellecta:	
1. Si $A = B = C$: est etiam $A = C$, (pag. 56).	64
2. Si $P \neq Q$, et $p \neq q$; ac p (portio ipsius P) ex P , et q (portio ipsius Q) ex Q , <i>undevis dematur</i> : erunt illa, quae ex P et Q remanent, æqualitate terminata <i>aequalia</i> (pagg. 57 usque 59).	64—67
Ut <i>resultatum multiplicationis divisionisque</i> <i>unicum</i> esse probetur: prius de <i>fractionibus</i> (mensuratione supposita expressis); et prius pro casu commensurabilitatis (a pag. 59 usque 62): nempe	67—70
1. <i>fractio, forma quoti exprimi potest</i> (pag. 59).	67
2. Si per <i>integrum multiplicetur numerator</i> , valor toties augetur, si <i>denominator</i> , valor toties minuitur; si uterque (<i>per eundem</i>) multiplicetur, valor manet.	
3. Regula hinc <i>ad denominatorem eundem reducendi</i> (vide etiam pag. 396); (nota, unde <i>quae fractionum sit maior</i> dignosci queat).	429
4. <i>Multiplicatio fractionum</i> ; unde <i>fractio fractionis</i> , et modus quo fractio, unius rei in fractionem rei alius mutari queat.	
5. <i>Divisio fractionum</i> .	
6. Fractio et pro casu terminorum non integrorum quotus est.	
7. <i>Reductio ad datum numeratorem vel denominatorem</i> .	
8. Etsi per fractionem eandem multiplicentur termini fractionis, valor idem manet.	
<i>Possibilitas mensurationis</i> (pag. 62, XXI).	71
<i>Datur quarta proportionalis</i> (pag. 64, XXII).	72
<i>Proportionis alia definitio</i> (pag. 65). <i>In proportione duo priora, et duo posteriora sunt simul commensurabilia vel simul incommensurabilia</i> (pag. 66).	75
<i>Proportionalis quarta unica est</i> (pag. 66).	75
<i>Definitio proportionis Euclidea</i> , eiusque <i>cum dictis aequivalentia</i> (pag. 11 et pag. 67).	16
<i>Quaedam de limitibus prævie necessaria</i> (a pag. 68 usque 70).	77
1. Si $\omega \sim o$: et $k\omega \sim o$; imo e quotvis factoribus, quorum aliquis $\sim o$, factum $\sim o$. <i>Quantitas omni dabili minor non existit</i> (pag. 69).	79—82
2. Si $\omega, \lambda \sim o$: et $\omega \pm \lambda \sim o$ (nisi $\omega \pm \lambda = o$ sit).	80
	<i>d</i>

Ed. II.

Tom. pag.

3. Si $x \sim a$, et $y \sim b$: tum $x \pm y \sim a \pm b$; et summa quotvis quantitatum ad limitem *tendentium tendit ad summam limitum*.

4. Si $x - y \sim 0$, et $x \sim a$, $y \sim b$: tunc $a = b$.

5. Si $p > x > q$, et $p - q \sim 0$: tum etiam $p - x \sim 0$, et $x - q \sim 0$.

6. Si $n \sim \infty$: tum $\frac{n+1}{n} \sim 1$. Ita

$$7. \frac{n}{n+1} \sim 1.$$

8. Si a constans sit, et $s \sim \infty$, atque $\frac{r+1}{s} a > x > \frac{ra}{s}$: tum $x - \frac{ra}{s} \sim 0$.

De *resultato multiplicationis* (*atque certo sensu divisionis*) *unico* (a pag. 70 usque 75).

I 82—87

9. *Ordo factorum* (*etsi omnes incommensurabiles fuerint, utcunque discripta factorum imagine*) *non mutat factum*.

10. Factor b cum nullo factor $a+c$ (*pro c non o*) factum illi, quod cum a efficit, aequale producit.

11. Si $x \sim a$, et $y \sim b$: tum $xy \sim ab$; et *limes facti e quotvis eiusmodi factoribus est factum limitum*.

12. A divisum per B dat quotum unicum q ; et $\frac{A}{q} = B$, atque $A = Bq$, et $\frac{A}{B} = A$, item $\frac{A}{q} = A \frac{1}{q}$.

13. Si $mu = vel \sim B$, et $nu = A$, atque $mv = vel \sim D$, et $nv = C$: tum $A:B = C:D$, adeoque *proprietate ita designari potest*. Atque si $B:A = Q$ sit: B per AQ , et D per CQ exprimi poterit. *Conversim quoque*, si $A:B = C:D$, aut $B = AQ$ et $D = CQ$: *proprietate est* (pagg. 75, 76).

87

14. Si $x \sim a$, $y \sim b$, et nec y nec $b = 0$: tum quodvis ipsorum $\frac{x}{y}$, $\frac{x}{b}$, $\frac{a}{y} \sim \frac{a}{b}$ (pag. 77).

89

* In præc. o e valoribus divisoris excludebatur: quid si divisor ~ 0 ? (pag. 79).

91

* *Quid si tam dividendus quam divisor ~ 0 ?* quædam de quoto simul variatorum prævie (a pag. 80 usque 82).

92—94

1. Si $\frac{u}{u'} \sim 1$: tum pro utvis magno N datur $u - u' \leq \frac{u'}{N}$.

2. Si $\frac{u}{u'} \sim 1$: tum etiam $\frac{u'}{u} \sim 1$.

3. Si w' pro dato quovis N potest $\leq \frac{u}{N}$ fieri, ac $\frac{u}{u'} \sim 1$: tunc etiam $\frac{u+w'}{u'} \sim 1$.

	Ed. II. Tom. pag.
4. Imo etiam $\frac{u'}{u+\omega'} \sim 1$, et $\frac{u'+\lambda}{u+\omega'} \sim 1$, si $\lambda < \frac{u'}{N}$ fieri potest.	
5. Si $\frac{u}{u'} \sim 1$, ac $\frac{v}{v'} \sim 1$: etiam $\frac{u+v}{u'+v'} \sim 1$.	
6. Si $\frac{u}{u'} \sim 1$, ac $\frac{v}{v'} \sim 1$: etiam $\frac{uv}{u'v'} \sim 1$.	
7. Si $\frac{u}{u'} \sim 1$, ac $\frac{u'}{v} \sim 1$: etiam $\frac{u}{v} \sim 1$.	
Quotus formæ $\frac{a\beta\gamma\ldots}{abc\ldots}$ utcunque discerpi valore incolumi potest (pagg. 82, 83).	
<i>De potentis et operationibus earum primariis</i> (a pag. 84 usque 94); additis (pagg. 105 . . . 107, et 128, 129).	I 94—96 96—109 121—124, 147—149
Quod <i>potentia possibilis</i> sit, sive <i>commensurabilis</i> sit <i>exponens q</i> sive <i>non</i> , et sive \neq sive \rightarrow fuerit:	
1. Si <i>q</i> integer \neq et > 1 sit.	
2. Si <i>q</i> = 1.	
3. Si <i>q</i> = 0.	
4. Si <i>q</i> integer \rightarrow ; deinde <i>non integer</i> , prius \neq , tum \rightarrow , sed <i>quantitas commensurabilis</i> fuerit (pagg. 84, 85).	96—98
5. Sed queritur (ad præc.) <i>num detur</i> tale <i>A</i> , ut $aa = AAA$? (pag. 85).	98
6. <i>Maius ad idem elevatum, et idem ad maius elevatum fit maius</i> (pagg. 86, 87); et pro <i>exponentis valore eodem, potentia eadem est</i> ; unde <i>potentiae ad exponentes denominatoris communis reduci possunt</i> (pag. 87).	99, 100 100 101 101, 102
7. Si <i>q</i> <i>incommensurabilis</i> , et prius tam <i>q</i> quam <i>a</i> \neq fuerit (pag. 87). Casus, si <i>a</i> = 1; si <i>a</i> < 1 (pag. 88). Si <i>q</i> \rightarrow fuerit (pagg. 88 et 89); unde <i>potentia e divisore in dividendum ponit, exponente in oppositum mutato po-</i> <i>test</i> (pag. 89).	102
8. Quodvis <i>N</i> sive $>$ sive < 1 fuerit: $\sqrt[m]{N} \sim 1$, si $m \sim \infty$ (pag. 89).	102
9. $a^q \cdot a^0 = a^{q+0}$ (pag. 89). Et $a^q : a^0 = a^{q-0}$ (pag. 90).	103, 104
10. Si $a^n = B^m$: non solum $a^{\frac{n}{m}} = B$, sed etiam $B^{\frac{m}{n}} = a = B^{\frac{1}{q}}$ (pro $q = \frac{n}{m}$). Et si $\frac{n}{m} \sim q$, et $a^q = B$, est etiam $B^{\frac{1}{q}} = a$, atque si $B^{\frac{1}{q}} = a$, est etiam $a^q = B$; et sive $\sqrt[q]{B}$, sive $B^{\frac{1}{q}}$ scribatur, perinde est (pag. 90).	104, 105
11. $(\sqrt[m]{B})^n = \sqrt[m]{B^n}$; et	105
12. $\left(\frac{b}{c}\right)^q = \frac{b^q}{c^q}$ (pag. 91).	106, 107
13. $(a^q)^p = a^{pq}$ (pagg. 91 et 92).	<i>d*</i>

	Ed. II.
	Tom. pag.
Hinc $\sqrt[k]{a^q} = a^{\frac{q}{k}}$ (pag. 92).	I 107
14. Si $a < 1$, aut exponens uterque (aut unus tantum) — fuerit; (pagg. 92 et 93).	107, 108
Si $\frac{a}{\beta} = q$, et $a^\alpha = b^\beta$: est $a^q = b$; et si $a^{\frac{\alpha}{\beta}} = b$, est $a^\alpha = b^\beta$ (pag. 93).	107, 108
15. $(abc\dots)^q = a^q \cdot b^q \cdot c^q$. Et $\sqrt[k]{abc\dots} = \sqrt[k]{a} \cdot \sqrt[k]{b} \cdot \sqrt[k]{c} \dots$	
16. Si $\frac{n}{m} - q$, consideratur potentia pro a positivo et negativo, prouti m par aut impar accipitur. Origo imaginarii (pag. 94).	108, 109
<i>De compendiis operationum per logarithmos</i> (pagg. 95, 96).	109—111
<i>De expressionis valore, mutata unitate, et de expressionibus quoad diversas unitates factis, ad eandem reducendis; (quum omnia dicta hucusque certae determinatae unitati positivae innixa sint)</i> (pagg. 96 usque 105).	111—121
<i>Exempla aequationis sectionum conicarum</i> (pagg. 101 usque 103); ubi <i>nomena primaria sectiones conicas concernentia</i> (pagg. 101, 102) definiuntur. Quantitas <i>concreta</i> et <i>abstracta</i> (pag. 97).	116—118 116, 117 111
<i>De imaginariis, atque (his admissis) calculo radicalium</i> , (a pag. 105 usque 118: cui addendum pagg. 128, 129, 9. 10. 11. et 12.).	121—136 147—149
Hucusque Unitas positiva ponebatur: sed prouti superius quantitas cum quantitate (nempe certa cum determinatione) produxit positivum et negativum; ita si quantitatem a , ut radicem e quovis B spectare libeat: oriuntur <i>pure imaginaria</i> , quorum realitas multiplicationi quoad —1 innixa est (pag. 105).	121
<i>Regulae admissis imaginariis, atque conceptus multiplicationis extensus</i> (pag. 106).	122—123
<i>Expressionum aequalitas varia</i> (pag. 107).	123—124
Porro significatio signi $\sqrt[n]{}$; tum	
1. $\sqrt{-4} = \sqrt[4]{-1}$; atque $\sqrt{a} \sqrt{b} = \sqrt{ab}$ (pag. 108).	124
2. Radix pure imaginaria exprimitur (pro P positivo) per	
$\sqrt[2n]{-P} = \sqrt[2n]{P} \sqrt[2n]{-1};$	
atque $\sqrt[2n]{-1}$ (pro a, b , realibus quoad +1) potest per $a+b\sqrt{-1}$ exprimi (a pag. 108 usque 110, prima tantum Trigonometriæ elementa requirens). Nempe pag. 109 radices n -ti gradus tam ipsius +1 quam ipsius —1 exhibentur omnes, numero n . Et (pag. 110) exemplis illustratur.	125—127 125, 126 126, 127
Hinc (item pag. 110) si $\sqrt[m]{P}$ sit p , erit $\sqrt[m]{-P} = p(a+b\sqrt{-1})$;	126, 127
$\sqrt[m]{-P} \cdot \sqrt[m]{Q} = \sqrt[m]{-PQ}$ (pagg. 111, 112).	128, 129
$\sqrt[n]{A} \sqrt[n]{B} \sqrt[n]{C} \dots = \sqrt[n]{ABC}$ (etsi imaginaria adfuerint).	
At si id tantum constet, quod $z = \sqrt[m]{P}$, et $y = \sqrt[m]{Q}$; ex eo $yz = \sqrt[m]{PQ}$ tantum sequitur.	

Ed. II.

Tom. pag.

3. Si $\sqrt[m]{a} = x$: est $x =$ sed non $= \sqrt[mn]{a^n}$ atque si $x = \sqrt[m]{a}$, est
 $x = \sqrt[n]{\sqrt[m]{a^n}} = \sqrt[mn]{a^n}$; et hinc $\sqrt[2^5]{-1} = \sqrt[5]{\sqrt[2]{-1}} = \sqrt[5]{-1}$, atque $(-1)^{\frac{1}{2}} =$
 sed non $= (-1)^{\frac{2}{4}}$ (pagg. 112, 113).

* *De elevatione imaginariorum* (a pag. 113 usque 118).

4. Quæstio ad $\sqrt[2n]{-1}$ reddit. Est vero $2n$, aut potentia ipsius 2 integra, aut factum e tali, et numero impari; $\sqrt[2^p]{-1}$ nonnisi ad $m2^p$ elevatum (pro m integro) dat reale, et quidem $+1$ pro m pari, et -1 pro m impari (pag. 113).

5. Etiam si $p < q < r < \dots$ potentiae integræ ipsius 2 fuerint:

$$\sqrt[2^p]{-1} \sqrt[2^q]{-1} \sqrt[2^r]{-1} \dots$$

nullum reale dat (pag. 114).

6. Radices exponentis 2^n ipsius -1 , eadem sed via a pag. 108 diversa, item sub formam $a+b\sqrt{-1}$ venientes, exhibentur (pagg. 115, ..., 118).

7. *Pure imaginaria a realibus nonnisi determinatione* (uti \pm et \mp) differunt; nec scientia, quae præcisione evidentiaque gloriatur, meritis imaginibus nullo originali gaudentibus contenta esse potest (pag. 118). *Et aequæ visibiles sunt, etsi imaginarium in exponentem ascendat* (pag. 168). *Exemplum, quo in Geometria visibilia fiunt imaginaria, exhibetur* (pag. 177, 7.).

De regulis additionis, subtractionis, multiplicationis, divisionisque quantitatum complexarum (etsi imaginaria adfuerint) (a pag. 118 usque 130).

[1.—3.] *Regula additionis* traditur (pag. 118.) Quod hoc pacto summa quæsita prodeat, demonstratur prius de realibus (pag. 119,) tum etsi imaginaria adfuerint (pagg. 120, 121.)

[4.] *Subtractio demonstratur* pag. 122. Quod oppositum subtrahendi ita dicto minuendo addendum sit, demonstratum est (pag. 26).

[5.] *Multiplicatio demonstratur* (pagg. 122 ... 126).

[6.] *Divisio demonstratur* (pag. 126).

Exempla quaedam.

$$7. \quad (a+b)(a+b) \text{ et } (a-b)(a-b); \text{ dein} \\ (a+\beta)(a-\beta)=a^2-\beta^2; \quad (\sqrt{a}+\sqrt{b})(\sqrt{a}-\sqrt{b})=a-b; \\ [(a+b)^2-c^2][c^2-(a-b)^2]= \\ =(a+b+c)(a+b-c)(a+c-b)(b+c-a)$$

(pag. 127). Et ibidem

8. demonstratur summam qualiumvis realium et pure imaginariorum, per qualemvis eiusmodi summam divisam, dare quotum.

Ed. II.

Tom. pag.

I 130

130—136

130, 131

131, 132

125

132—135

135, 136

193

202

136—150

136

136—138

138—140

140

31

140—146

146

146, 147

	Ed. II. Tom. pag.
9. $\left(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{-3}}{2}\right)^3$, seu $\left[-\frac{1}{2} + \frac{1}{2}a\right]^3$ (pag. 128), ubi a radicem ex -3 denotat sensu (pag. 108).	I 147—148 124
10. Si $a \sqrt[pq]{P^n} + \frac{1}{b \sqrt[q]{Q^m}}$ multiplicandum sit per $b \sqrt[q]{Q^m} - \frac{1}{a \sqrt[p]{P^n}}$: erit factum	$ab \sqrt[pq]{P^{nq} Q^{mp}} - \frac{1}{ab \sqrt[pq]{P^{nq} Q^{mp}}} = \\ = ab \sqrt[pq]{P^{nq} Q^{mp}} - (ab)^{-1} P^{-nq}_{pq} \cdot Q^{-mq}_{pq};$
(pag. 128). Unde etiam regula liquet: nempe	148
$a \sqrt[p]{P^n} \cdot b \sqrt[q]{Q^m} = ab \sqrt[pq]{P^{nq} Q^{mp}}.$	
11. Modus factorem signo ν^- præpositum introducendi, aut illum, qui signo subest, educendi (pag. 129).	149
12. $A \sqrt[p]{P^n} : B \sqrt[q]{Q^m} = \frac{A}{B} \sqrt[\textcircled{p}\textcircled{q}]{\frac{P^{nq}}{Q^{mp}}}$ (ibidem).	
13. Divisio ipsius $x^n - 1$ per $x - 1$, et	
14. ipsius 1 per $1 - x$. Et	
15. hinc <i>summa seriei geometricae</i> , et casus, ubi formula summæ fit $\frac{0}{0}$; tum limes summæ, si exponentis < 1 sit, nec non complementum quoti in exemplo posteriore (pagg. 131 et 132).	151, 152
16. <i>Seriei Arithmeticae terminus generalis et summa</i> . Ex. gr. numerorum imparium summa usque ad n -tum inclusive, est n^2 (pag. 132).	152, 153
[17. Series Arithmetica ordinis m -ti (pag. 133).]	153, 154
18. Si $(a+b)$ per se multiplicatum item per $a+b$ multiplicetur, atque hoc continuetur, donec $(a+b)^n$ fiat: quæritur productum (pag. 134).	154
<i>Transformatio ipsius</i> $(a+b)^n$ in $\left(1 + \frac{b}{a}\right)^n a^n$. Et simili modo tollitur quivis factor e quovis termino binomii ad exponentem elevati (pag. 134).	155
<i>Demonstratio binomii pro n integro positivo</i> (pagg. 135...137).* <i>Alia demonstratio</i> (qua etiam <i>numeris combinationum</i> exhibetur) (pagg. 137...140).	156—158
<i>Demonstratio formulae binomialis pro exponente qualibet</i> (adhucum excluso <i>imaginario</i>), (a pag. 141 usque 150). Prius [1.—2.] lex, qua terminorum signa pro $+x$ et $-x$ cum $+e$ et $-e$ combinatis prodeunt, exponitur; tum [3.—5.] <i>exponente coefficientis</i> ab <i>exponente seriei</i> distincto, demonstratur seriem eiusmodi, pro $x < 1$, ad limitem tendere, atque limitem esse $(1+x)^e$.	158—161
6. Si $x > 1$, tum $(1+x)^e$ ita exprimi nequit (pagg. 151 et 152). Pro $x = \pm 1$ videatur (pagg. 303 et 304).	172—174 333, 335

	Ed. II. Tom. pag.
7. Aliquid de seriebus infinitis, quarum incrementa terminorum tendunt ad 0, cum exemplis quibusdam (pagg. 152, 153).	
8. Si $\frac{n}{m} \rightarrow q$: de $(a+b)^q$ quoque valet formula binomialis.	I 175—177 178—181
9. Etsi binomium imaginarium contineat, valet (pag. 156).	181
10. Si exponentis binomii vera fractio $\frac{n}{n+\nu}$ sit, formula coefficientis μ -ti (pag. 157).	181
De logarithmi expressione per seriem, et potentiae logarithmique conceptu sublimiore, atque quantitatis imaginariæ ascensu in exponentem (a pag. 157 usque 178).	182—203
* Si in $(1+x)^n$ ponatur $x = \frac{1}{m}$, atque $n \rightarrow \infty$: tum $\left(\frac{m}{m+1}\right) \rightarrow 0$. At	
1. si etiam $m \rightarrow \infty$, et ab n certo modo dependeat; ex. gr. sit $m=n$; tum $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ gaudet certo limite, in posterum e dicto, basi logarithmorum, qui <i>naturales</i> vocantur. Etsi $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ ad q elevetur, series, quæ prodit, $\rightarrow e^q$ (pagg. 158, 159).	183
2. Etiam e quantitate reperitur logarithmus (pagg. 159..., 162).	183—187
3. <i>Modulus systematis</i> logarithmici reperitur (pag. 162).	187
Si vero duae bases fuerint B et C , et $\log. N$ quoad B sit b , ac $\log. N$ quoad C sit c ; est $\frac{b}{c} = \frac{\log. C}{\log. B}$.	
Log. 0 = $-\infty$ (pag. 163).	188
* Porro in serie ipsum e^{cb} (per præc.) exprimenter substituatur $\alpha + \beta$ aut $\alpha - \beta$, aut $\alpha\beta$, vel $\frac{\alpha}{\beta}$, prius pro α , β realibus (pag. 163); tum etsi imaginaria contineant (pagg. 164...167): animadvertisit, has series analogis subesse operationibus, ac si exponentes ipsius e reales essent; generaturque <i>conceptus potentiae logarithmique (sensu sublimiore)</i> (pagg. 167, 168).	188, 189 189—192 192, 193
<i>Logarithmus realis</i> hoc sensu quantitati negativae haud competit (pag. 169), sed elementaris competit (pag. 170).	194, 195
Datur pro quibusvis realibus A , B tale x , ut $x = \log. (A+B\sqrt{-1})$ (pagg. 170...173).	195—198
Ubi etiam series sinum et cosinum arcus n-tupli exprimens exhibetur. Et si $K(\cos. a + \sqrt{-1} \cdot \sin. a) = A+B\sqrt{-1} = e^{k+a\sqrt{-1}}$ (pro A , B , K , k , et a realibus): tum $K^2 = A^2 + B^2$ (pagg. 172 et 173).	197, 198 198 199
<i>Logarithmi imaginarii</i> quantitatis negativae innumerabiles (pag. 173).	
Pro quovis K positivo datur tale k , ut $e^k = K$ (pag. 174).	

Ed. II.
Tom. pag.

Exempla.

1. Logarithmi ipsius 1 innumerabiles, inter quos solum zero est realis.

2. $e^{\pi\sqrt{-1}} = -1$, et $\pi\sqrt{-1}$ est unus logarithmorum naturalium ipsius -1 .

3. Valor ipsius $e^{\sqrt{-1}}$.

4. $\sqrt{-1} = e^{a\sqrt{-1}}$, et $a\sqrt{-1} = \log. \text{nat. } \sqrt{-1}$.

5. Valor ipsius $(\sqrt{-1})^{\sqrt{-1}}$ (pag. 176).

6. Quid per cos. $a = \frac{e^{a\sqrt{-1}} + e^{-a\sqrt{-1}}}{2}$, et sin. $a = \frac{e^{a\sqrt{-1}} - e^{-a\sqrt{-1}}}{2\sqrt{-1}}$
intelligatur (pagg. 176, 177, 456).

* 7. *Applicatio certa imaginariorum ad Geometriam* (pag. 177).

8. Log. $(-2) - \log. (-3)$ certo sensu $= \log. \frac{-2}{-3} = \log. \frac{2}{3}$
(ibidem).

III. CORONA arboris *Arithmeticae* incipit a §. 36, pag. 178, et de-
sinit pag. 442.

Functio, variabilis, constans (pag. 178). Rami, in quos corona divi-
ditur (pagg. 179, 180).

Dein

1. *Functionis divisio* (pagg. 180, 181) *in algebraicam, transcendentem,*
absolutam;

2. *designatio functionum* (pagg. 181...183),

3. Si in $A(x)$ substituatur $x+i$, et queratur valor functionis
 $A(x+i)$ (*Probl. Taylorianum*); et porro comparetur augmentum functionis cum aumento simultaneo ipsius x ; pervenitur ad *rationem ultimam augmentorum evanescientium iuxta NEWTONUM*, nempe si

$$\frac{A(x+i) - A(x)}{i} \sim A'(x),$$

dum $i \sim 0$ (adeoque priusquam $=0$ fieret). Insignis limes iste est, e
quo et calculus differentialis deduci potest (pag. 183). Sed

4. Evidentius simpliciusque fit, si (pag. 184) ipsi x substituatur
prius 0, dein \dot{x} , id est $\frac{x}{n}$, tum $2\dot{x}$, $3\dot{x}$ &c, atque valoribus prodeuntibus
post se invicem positis, quilibet cum sequente comparetur (quoad incre-
mentum); et incrementa ista novam seriem forment: seriei huius summa
in aperto erit; atque si

5. Alia series occurrat, e qua eodem modo pro iisdem x et n de-

204—478

204

205, 206

206

207, 208

208

Ed. II.
Tom. pag.

ductæ simili modo seriei, termini t et T eidem $m\dot{x}$ (pro quovis eodem m) respondentes, aut sint æquales, aut $\frac{t}{T} < 1$, pro $n \rightarrow \infty$: facile patet, summam utriusque esse æqualem, et si unius functionum valor notus sit, et valorem alterius innoscere (pagg. 184...186).

I 209—212

6. Etsi serierum e duabus functionibus derivatarum termini, certæ parti ipsius x (sed quæ $\neq 0$) respondentes non aequipollent (pagg. 187—188, et 269): valet in præc. dictum.

213,
214, 301

7. Datur pro utvis magno N integer n idem pro omnibus m , ut $u(m\dot{x}) - a(m\dot{x}) < \frac{a(m\dot{x})}{N}$ (pagg. 188, 189).

214, 215

8, [9.] *Integrale, differentiale* (pagg. 189 et 269). *Limes integralis, differentiale verum seu elementum, functio summatrix, differentiale strictius, vel strictum*, per δ præpositum denotatum, ut *coeff. differentialis seu derivata per δ* (pagg. 190, 191).

215, 301

10. Si functio absoluta, cuius valor quæritur, non in concreto, sed nonnisi per functionis limitem detur: hunc dari demonstrandum est (ut fit pag. 230); utcunque sit, sæpe differentiale functionis $A(x)$ quæritur, per duas functiones tales $U_1(x)$ et $U_2(x)$ ut

216, 217

$$U_1(m\dot{x}) - U_1((m-1)\dot{x}) < A(m\dot{x}) - A((m-1)\dot{x}) < U_2(m\dot{x}) - U_2((m-1)\dot{x}),$$

et

$$\frac{U_1(m\dot{x}) - U_1((m-1)\dot{x})}{U_2(m\dot{x}) - U_2((m-1)\dot{x})} < 1;$$

si iam

$$\frac{U(m\dot{x}) - U((m-1)\dot{x})}{B(m\dot{x}) - B((m-1)\dot{x})}$$

quoque < 1 , et simul

$$\frac{u(m\dot{x})}{U(m\dot{x}) - U((m-1)\dot{x})} < 1,$$

atque $u(m\dot{x})$ gaudeat forma differentialis stricti: habebitur differentiale ipsorum $A(x)$ et $B(x)$ commune (pag. 191).

217, 218

11. Differentialia aequipollentia functionibus æqualibus, et functiones æquales differentialibus aequipollentibus gaudent. Idem de derivatis; atque nec integralia differentialium aequipollentium præter constantem differre possunt (pagg. 191, 192).

218, 219

* 12. Variabiles plures x, y, z, \dots ; et pro variabili absoluta x denotiones $y(m\dot{x}), z(m\dot{x}), \dot{y}, \dot{z}$ (pagg. 192, 193); differentiale, derivata functionis plurium variabilium (pag. 194).

219, 220

13. Differentialia et derivatae quoad variables diversas accepta (pag. 194).

220, 221

221

c

Ed. II.
Tom. pag.

14. *Differentiale purum, derivata pura*; $\int z a(z)$ seu $\int a(z)$ (quoad z) est functio illa primitiva, cuius derivata quoad z est $=a(z)$ &. (pagg. 194, 195). I 221, 222
- 15, [16.] *Differentiale et derivata partialis. Derivata n-ta, differentiale n-tum* (pag. 195). 222
17. Quotvis fuerint variables u, v , ab eadem absoluta x (saltem simultanea positione) dependentes, quarum differentialia sint $b(x), c(x)$: quoad quasvis variabilium u, v, \dots accipientur differentialia $b_1(x)$ ipsius $u, c_1(x)$ ipsius v , & seriei incrementorum summa eadem prodit. Ita $b(x), c(x)$ et $b_1(x), c_1(x)$, pro terminis generalibus accepta summam eandem dant; pariter $b(x) + c(x)$, et $b_1(x) + c_1(x)$. Unde etiam differentiale seriei convergentis $B(x) + C(x) + \dots$ est summa differentialium functionum singularium. Derivataque summae seriei quoad eandem variablem accepta est summa derivatarum singularium, item quoad eandem variablem acceptarum (pagg. 195, 196). 222—224
- In quovis termino generali seriei incrementorum dictæ, cuvis quantitatibus substitui ei æquipollens potest, si nonnisi summa spectetur. Atque hinc pro reperiendo integrali, licebit differentiali aliud æquipollens differentiale purum, quod integrari queat, substitui. Idem de derivata (pag. 197). 224
18. *Exempla* faciliora pro Tyronibus (primis elementis imbutis) *applicationis theoriae ad Geometriam et Mechanicam* (a pag. 197 usque 242); ubi §. 37 pro exemplis supposita demonstrantur, et quædam inde dèducuntur, imo *quoad curvas etiam primaria* exponuntur. 224—273
- [VI.] 1. (usque 5). Supponuntur (§. 37) demonstrata, exponunturque certarum functionum absolutarum simpliciorum differentialia derivatae, adeoque et horum integralia (præter constantem) (pag. 198). 225, 226
5. Si due series incrementorum (eiusmodi ut dictum est) fuerint, et unius summa A , terminus generalis $a(mx)$, alterius summa B , terminus generalis $b(mx)$ fuerit; atque $\frac{b(mx)}{a(mx)} - \beta$: tum $A = \frac{B}{\beta}$ (pag. 198). 226, 227
6. Ex $d \log. u \stackrel{u}{=} \frac{\dot{u}}{u}$, est $u d \log. u \stackrel{u}{=} \dot{u} \stackrel{u}{=} d u$; per quod functio, etsi variabilis in exponente sit, differentiari potest; atque hinc $\int a^{ax} = \frac{a^{ax}}{a \log. a}$. f)
7. pag. 199. Si *derivata* fuerit summa terminorum numero certo, ad exponentem positivum *integrum*, adeoque potentia hæc constet e certo numero terminorum, qui singuli integrari possint: erit summa integralium terminis singulis respondentium, integrale derivatae datae. Si vero derivata fuerit series convergens infinita formæ $Ax^a + Bx^b + \dots$ exponente ab aliquo incipiendo unitatem superante et semper crescente: g)
227—228

Ed. II.

Tom. pag.

summa integralium terminorum singulorum, integrale totius derivatæ, et pariter series convergens erit.

Literæ puncto insignitæ, eadem sine puncto signo ∂ præposito, imo et quodvis aliud, quoad quamvis variabilium expressum, ei æquipollens, substitui potest; quo pacto derivatæ sæpe *purae (salvo integrali)* reddi possunt (pag. 200), nempe si $z = v\partial u$, est $\int p$ (quoad z) = $\int p v$ (quoad u).

Eadem pag. 200 [VII.], derivata areæ in plano, derivata *lineæ in plano, soliditatis per revolutionem lineæ* dictæ generatæ, referuntur. Derivata lineæ in genere est (pag. 268).

Pag. 201. *Derivata distantiae centri gravitatis* a certo plano quoad abscissam x ; atque pag. eadem, et 216... (etiam pag. 226) referuntur differentialia motum rectilineum concorrentia, denotationibus pag. 193 adhibitis.

Pag. 203. VIII. 1. $\int v$ sive $\int 1$ (quoad v) = v .

2. Casus differentialis negativi, atque ubi valor ipsius $A(x)$ plane pro $x=0$ quæritur.

3. De casu, ubi $A(0)=\infty$.

4. De casu, ubi differentiale (nempe terminus seriei generalis) pro $x=a$, id est terminus seriei μ -tus, 0 vel ∞ fit (puncta discreta inferioria pagg. 269, ...).

Pag. 205. IX. 1. Si ordinata $y=ax^p$; area = $\int y$ (quoad x) = $\frac{ax^{p+1}}{p+1}$ (nisi $p=-1$).

2. Area inter hyperbolam æquilateram et q (pag. 103), atque ordinatam y et asymptotam. Soliditas per revolutionem circa asymptotam orta = π . Exemplum pro diversis functionibus summatricibus eidem differentiali respondentibus, quæ tamen cum constantibus concorrentibus eadem integralia præbent (pagg. 205 et 206).

* Pag. 207 usque 209. Areæ dictæ hyperbolicæ sunt logarithmi naturales abscissarum e centro acceptarum: ubi (pag. 207, 4) demonstratur, derivatam (quoad z) ipsius log. nat. z esse $\frac{1}{z}$, (imo pag. 210, etsi z non ipsa variabilis absoluta, sed qualisvis eius functio fuerit). Modus constantem in simili casu quærendi. De logarithmis abscissarum negativarum (pagg. 209 et 210).

Pag. 211, 5. Soliditas paraboloidis, ellipsoidis, hyperboloidis.

6. Si u et v derivatæ quoad eandem variabilem sint, et $\frac{u}{v} = k$, est $\int u = k \int v$. Applicatio.

Pag. 212. 7. E derivata arcus circuli quoad tangentem (pag. 309 ducta) series Leibnitiana peripheriam exprimens (vide etiam pag. 303).

Ed. II.

Tom. pag.

I 228, 229

229

300

229

230, 247, 258

220

232, a)

b)

c)

d)

301, ...

235, a)

b) 118

235—237

237—239

238, d)

241

240, 241

242, e)

f)

243, g), 338

334

e*

	Ed. II.
	Tom. pag.
Pag. 213. [8.] Longitudo arcus circuli per integrationem formulæ (pag. 200).	I 244 <i>h</i>) 229
Pag. 214. [9.] <i>Catenaria</i> , eiusque rectificatio.	245 <i>i</i>)
Pag. 214. Exemplum integrationis derivatæ superficiei per revolutionem lineæ circa axem ortæ.	246 <i>k</i>)
[X.] <i>Exempla Mechanica</i> (a pag. 215 usque 242).	246—273
Pagg. 215 et 216. <i>Conceptus vis momentaneae et constanter agentis</i> .	246, 247
Pagg. 217 usque 219. Demonstrantur differentialia (pag. 201).	248—250, 230
Pagg. 219, . . . , 223. Exclusa prius medii resistentia, et vis w prius abs tum a t dependens. <i>Motus difformiter acceleratus</i> ex. gr. per gravitatem.	250—255
Pag. 221. Formula præc. velocitatem etiam ultra centrum exhibet.	252, 253
Pag. 222. Altitudo competens celeritati minimæ, qua globus de superficie terræ verticaliter explodendus esset, ut nunquam redeat, radio terræ æquatur.	254
Pagg. 222 et 223. Si vis w functio temporis fuerit.	254, 255
Pagg. 223 usque 229. Si vis w functio velocitatis v fuerit. <i>Prisma resistentiae, exponens resistentiae</i> . Tempus, celeritas, spatium in medio uniformiter denso. Applicatio ad corpora labentia.	256—260
Pagg. 229 usque 234. [XI.] <i>Conceptus centri gravitatis geometrici</i> . Functionemque (ut dictum pag. 191 est) per limitem datam valore absoluto gaudere, et eius differentiale (pag. 201) esse demonstratur.	261—266 217 229
Pagg. 234 usque 237. <i>Exempla</i> : centrum grav. segmenti parabolæ, paraboloidis, sphaerae, arcus circuli, segmenti circuli, superficiei sphaericæ pro certa abscissa.	266—268
Pag. 237. <i>Superficies per revolutionem circa axem generata = lineae, cuius revolutione generata est, per distantiam centri grav. ab axe et per 2π multiplicatae. Soliditas = areae, per peripheriam centro grav. areae descriptam multiplicatae.</i>	268, 269
* Pagg. 238 usque 241. [XII.] <i>Centrum oscillationis, et centrum percussionis</i> .	269—273
Pagg. 242 usque 268. [§ 37. I—IV.] Demonstrantur formulae differentiales (pag. 197 suppositæ, præter ea, quæ pagg. 207, . . . 217, . . . 229, . . . demonstrantur).	274—300 225, 238, 248, 261
I. Si $u=A(x)$, est $d(u^k)$ quoad $u=ku^{k-1}u$, &c. Datur vero pro quo-vis N tale n idem pro omnibus, ut requiritur (pagg. 244, . . .).	276, . . .
II. $d(uv)=udv+vdu$, pro $u=A(x)$ et $v=B(x)$; $d\left(\frac{u}{v}\right)$ autem = $\frac{vdu-udv}{v^2}$ &c.	281, 282

	Ed. II. Tom. pag.
III. Si arcus x circuli sit variabilis absoluta: <i>differentialia sinus, cosinus, tangentis</i> (pagg. 250 usque 253; quoad sinum versum vide pag. 327).	I 282—286 357 286 286, 287
<i>Derivata functionis trigonometricae unius quoad aliam</i> (pag. 253), Ibidem et pag. 254 differentiale arcus quoad functiones trigonometricas deducitur.	287—292
IV. Pagg. 254 usque 260. Si pro abscissa x , arcus ipsi x respondens s , et chorda c sit: fit $\frac{s}{c} \sim 1$, si $n \sim \infty$. <i>Curva (concava, convexa), tangens, subtangens, normalis, subnormalis. Curva gaudet tangente in quovis punto;</i> tangens cum ordinata non coincidens secat ordinatas omnes &c.	292—296
Pagg. 260 usque 264. <i>Limes summae chordarum (qui per longitudinem arcus intelligitur), utcunque sumantur chordae, idem est. Differentiale et derivata arcus.</i>	296, 297 298 300
Pag. 264. <i>Differentiale areae, et pag. 265 differentiale soliditatis per revolutionem generatorum, item differentiale superficie talis pro curva concava, et (pag. 266) pro convexa &c.</i>	301, 235
Pag. 268. <i>Lineae cuiusvis (etsi non in planum cadat) differentiale et derivata.</i>	301—315
Pag. 269. [V.] Dum expressio differentialis pro certo $m\dot{x}$ (pag. 205) fit \circ aut ∞ vel $\frac{\circ}{\circ}$: <i>puncta certa discreta, singularia ob certas qualitates dicta.</i>	315—318 318 319
Pag. 272 usque 283. [VI.] Exemplis hæc illustrantur. <i>Expressio tangentis, subtangentis, normalis, subnormalis, punctum flexus, cuspis primi, secundi generis, punctum multiplum, isolatum. Asymptota</i> (pagg. 283 usque 286).	321 323—326 341
Pag. 286. VII. De $\frac{\circ}{\circ}$ et $\frac{\infty}{\infty}$.	326—341 326, 327
Pag. 288. [VIII.] <i>De ordinatis ex uno punto tanquam centro (vel polo) euntibus: spiralis Archimedea et logarithmica</i> (abscissa u in peripheria accepta).	330
Pag. 289. [IX.] <i>Theorema Taylorianum</i> : 1. de casu, quo ope theorematis binomialis demonstrari potest, 2. generaliter iuxta <i>Lagrange</i> (a pag. 291 usque 294); additis <i>complementi</i> finibus, intra quos contineri debet, <i>apud quemlibet terminum subsistere libuerit</i> . Prius pro una variabili (pag. 311 pro pluribus).	
Pagg. 294 usque 311 applicationes variæ: <i>Complementum generale formulae binomialis</i> (pag. 295). Ibidem 4. de <i>facto e factoribus, quorum numerus $\sim \infty$</i> (ut in formula binomiali).	
5. <i>Applicatio ad $(1+x)^e$, pro $x = \pm 1$ et exponente negativo et > 1 (pag. 299).</i>	

	Ed. II.
	Tom. pag.
6. <i>Formulae ipsius $(1+x)^e$ pro $e < 1$, complementum ~ 0 (301).</i>	I 332
7. (pag. 302) si e fuerit negativum et > 1 , <i>complementum $\sim \infty$; at ~ 0 semper, excepto si e negativum et non < 1 sit</i> (pag. 303); nimirum	332 333
8. si $e = -1$, series nullius valoris est.	
9. Hinc (ex pag. 212) <i>illustratio seriei Leibnitianae ex $(1+z)^{-1}$ pro $z = 1$ deductæ.</i>	244
10. Pro $(1-x)^e$ valet (pag. 304 usque 307). Pag. 307 animadvertisit, $(1-x)^{-m}$ exhibere seriem arithmeticam ordinis $(m-1)$ -ti (pag. 133).	335—337 153
11. Adhuc unum exemplum pro facto e factoribus innumerabilibus.	
12. <i>Demonstratio criterii convergentiae Olivieriani.</i>	
14. pagg. 311 usque 314. <i>Taylorianum ad plures variabiles applicatum.</i>	341—344
Pag. 315. X. <i>Applicatio Tayloriani ad maximum minimumve. Exempla</i> (pagg. 316 usque 318).	345 346—348 348—360
Pag. 319. XI. usque 329. <i>Applicatio Tayloriani ad radium curvaturae; e quo conceptus evolutae evolventisque nascitur. Linea l lineam L tactus ordine μ-to tangere quando dicitur?</i> (pag. 319). <i>Applicatio ad rectam, circulum &c. Radius osculi; exempla</i> (pagg. 325 usque 327) <i>radii osculi, sectionis conicae, cycloidis. Evoluta cycloidis cycloidi evolventi aequalis est</i> (pag. 328). <i>Cur filum in tangente cycloidis tensum Hugenius applicavit</i> (pag. 329).	348 355—357 359 360
Pag. 329. XII. usque 342. <i>Principia et applicatio calculi variationum. Theoria dupli modo</i> (pagg. 330 usque 333, et 340). <i>Exempla: longitudo minima datam aream claudens</i> (pag. 333); <i>Brachystochrona</i> (pag. 337).	360—371 361—363, 369 363, 366
Pag. 342. §. 38. <i>Ramorum coronæ arboris unum constituunt aequationes</i> (determinatae, indeterminatae). <i>Radix aequationis unde dicitur?</i> (pag. 342). <i>Non quaevis petitio satisfacere debet</i> (pag. 343). <i>Ordinatio aequationis, et reductio ad formam rationalem</i> (pagg. 344—345). <i>Resolutio generalis aequationis ordinatae, gradus primi, secundi, tertii, quarti,</i> (pagg. 346 usque 350).	372 372, 374 374—376 377—383
Pag. 351. <i>Quomodo resolutio aequationis $x^7 - 1 = 0$ cum constructione geometrica polygoni regularis 17 laterum cohaereat?</i>	384
<i>Exempla</i> (pagg. 351 usque 359), plerumque scitu necessaria.	384—392
Exemplum etiam <i>pro coniunctione impossibili</i> (pag. 357).	391
Pag. 359. §. 39. <i>Transformationes aequationum.</i>	393
Pagg. 361 usque 363. <i>Si aequatio n gradus una radice</i> (etsi imaginaria) <i>gaudeat: radicibus numero n (nec pluribus) gaudet. Idem modo communi</i> (pag. 363).	395—397
Pagg. 364 et 365. <i>E præcedente lex coefficientium in aequatione.</i>	398—400

	Ed. II. Tom. pag.
Pag. 366. <i>Si radix aequationis</i> (ordinatae et ad coefficientes integros reductæ) <i>commensurabilis sit: numerus integer est;</i> unde <i>modus inquirendi, num radix talis detur, et quae sit.</i>	I 400
Pagg. 367 usque 373. <i>Si radices omnes reales sint: tot signorum mutationes sunt, quot radices positivae, et tot successiones signorum aequalium, quot negativae.</i>	401—407
Pagg. 374 usque 379. <i>Modus radices aequationum altiorum reales, (si dentur), etsi incommensurabiles sint, per approximationem quaerendi (methodo Newtoniana aut Lagrangeiana).</i>	407—412
Pagg. 379 usque 381. <i>Si plures fuerint incognitae, et totidem aequationes gradus primi.</i>	413, 415
Pagg. 381 usque 392. <i>Demonstratio regulæ ingeniosæ a Bezout ab inductione datae.</i>	415—424
Pag. 392 et pagg. 416 usque 421. <i>Aequatio indeterminata gradus primi, per fractiones continuas.</i>	424, ... 451—457
Si A et A' inter se primi fuerint: tum $\frac{A}{A'}$ minimis terminis exprimitur; atque si $\frac{A}{A'} = \frac{a}{a'}$ et $Ak=a$: tum et $A'k=a'$ et k integer est (pag. 393). Si $N=ab\dots$, et a, b, \dots singuli per se primi sint: tum N alia factorum imagine exprimi nequit (pag. 394). Hinc si primorum a, b quilibet seorsim metitur numerum N : eundem N et productum e quibuslibet corundem primorum metitur; et conversim integrum N integer P nonnisi ita metitur, si P factoribus primis ita exprimi queat, ut imaginis, qua N factoribus primis exprimitur, partem constituat (pag. 395). Quivis numerus primus sub formam $6n\pm 1$ venit, sed non quivis numerus huius formæ primus est. E dictis divisor communis maximus quotvis integrorum; necnon minimus eorum, quem datorum quivis metitur; posterius ad denominatorem communem minimum quaerendum applicatur (pag. 396); prius alia methodo etiam fieri potest (pag. 397).	426 426, 427 427, 428
Pag. 398. <i>Fractio continua vulgaris. Approximantium expressio. Differentiae approximantis cuiusvis a sequente</i> (pag. 400).	429, 430 431 432
Pagg. 401 usque 404. <i>Differentiae approximantium a primitiva semper decrescent, et quævis approximans terminis minimis expressa est &c.</i>	434—437
Pagg. 405 usque 407. <i>Fractio continua formæ generalioris; atque huius evolutio in seriem. Series Brounkeri cum Leibnitiana conveniens.</i>	438—442
Pagg. 408 usque 411. <i>Applicatio fractionum continuarum ad resolutionem aequationis quadraticæ. Regula fractionem approximantem quamvis pro valore radicis quantovis proprius exprimendi. Exempla (pagg. 411 et 412).</i>	442—446 446, 447

	Ed. II.
	Tom. pag.
Pagg. 412 usque 414. <i>Resolutio aequationis quadraticeae per</i> $x = \sqrt{a + \sqrt{a + \sqrt{a + \dots}}}$	I 447—449
Pag. 414. $\sqrt[m]{a \sqrt[m]{a \sqrt[m]{a \dots}}} - a^{\frac{1}{m-1}}$	449—450
Pagg. 416 usque 421. <i>Resolutio aequationis indeterminatae per priora: additis aliquot exemplis, inter quæ est, quod si peripheria per quemvis primorum a, b, \dots dividi (constructione geometrica) possit: etiam per factum e quibusvis eorum dividi potest, si nullus eorum, praeter 2, pluries quam semel occurrat.</i>	451—457
<i>Si numerus gradus aequationis impar fuerit, aut pro numero gradus pari terminus ultimus negativus fuerit: aequatio radice saltem una reali gaudet</i> (pagg. 422 usque 424).	457—460
Pagg. 425 usque 436. <i>Demonstratio GAUSSiana, dari radicem aequationis.</i>	I 461—472
Pagg. 437 usque 441. <i>Primaria de seriebus; de coefficientibus pro functionis valore = 0, et modus functionem fractam in alias formae requisitae discerpendi.</i>	472—478
GENERALIS CONSPPECTUS GEOMETRIAE a pag. 442 ad finem tomi primi.	II 1—56
<i>Spatii conceptus</i> e mundo externo per abstractionem (pag. 442): <i>punctum spatiale, punctum temporis</i> (pag. 19). <i>Ubivis</i> in spatio datur <i>punctum spatiale</i> , et <i>omnia puncta spatialia sunt aequalia. Superficies, linea, forma, sectio</i> (pag. 443).	I 1 I 24 II 2
Pag. 444. <i>Reditus in mundum externum, corpus idem considerando in diversis locis: constructio mobilis geometrici; atque cum hoc reditus in spatium purum; axioma congruentiae. Motus geometricus.</i>	3
Pagg. 445 et 446. <i>Conceptus motum geometricum resipientes. Variae tum quaestiones: atque hinc</i> (a pag. 446 usque 448) <i>tres operationes primitivæ.</i>	4, 5 5—7
Pag. 448. Nova quæstione exorta, fit <i>conceptus</i> per « <i>A unicum ipsius B</i> » denotatus; exemplis illustratur.	7
Pag. 449. Passu ad omne oritur <i>conceptus rectae, planique; additis analogis quibusdam definitionibus.</i>	8
Pag. 451. <i>Suppositis prius recta planoque: e pluribus rectis ex eodem puncto, oritur pyramis</i> (sensu lato); et <i>accidente multiplicatione, conceptus similium et homologorum. Ibidem voces plaga, regio, internum explicantur.</i>	10
Pag. 452. <i>Aliae definitiones similium. E prima definitione contrarie aequalia, geometrice aequalia; Exempla</i> (a pag. 452 usque 455).	10—11 11—13
Pagg. 455 usque 457. <i>E, pluribus rectis punctum idem p commune habentibus, via unius circa p donec redeat; aut in plano facta, aut non:</i>	13—16

Ed. II.
Tom. pag

si prius, oritur *circulus*, et conceptus concernentes (*definitiones functionum trigon.*). E posteriore oritur *forma apicata*, et hinc conceptus generalis *anguli*, qui certo respectu quantitas fit.

Pagg. 458 et 459. Forma sine angulo dicitur *fluens*, et si hæc etiam *quantitas* (nempe absoluta) sit, dicitur *uniformis*. *Fluens* sine recta planove, dictus *curva*. Fluens cum recta planove parit *tangentem*, et hæc *perpendicularitatem*.

Pagg. 459 usque 462. *Rectarum pyramidem generantium puncto communis remoto in ∞*, oritur *prisma* (sensu lato). Atque hinc *aequifluens*, *lineae primario aequisitae*, et *conceptus generalis parallelismi* (*directi* et *inversi*).

Pag. 462. *Descensus in planum: figura*; rectilineæ species quædam, quo pertinet (pag. 9). Quid per *geometrica constructione perficere*, intelligatur (pag. 463) sensu tacito Euclidis.

Pag. 463. *Constructio geometrica, sensu stricto et lato*: nempe inferius demonstrando, inter quævis duo puncta esse rectam, si quid, sine coniunctione operationum primitivarum, certo numero duarum priorum (omnibus ad planum restrictis) perficiatur, *geometrice (sensu stricto) construi* dicitur; si vero non restringatur ad planum (*admissa operatione tertia quoque*), *geometrice (sensu lato) construi* dicitur (pag. 464).

Pag. 464. In plano quæ tractantur? (Annotatio de trigonometria sphærica, pag. 465).

Pag. 465. Reditu in abyssum spatii, quæ tractantur prius?

Ibidem §. 12 usque 468. *Coniunctio operationum*.

Pag. 468. Formæ quomodo fiunt quantitates *respectivæ* et *reductæ*. Ibidem usque 476. *Generatio certae lineae*, quam rectam esse (pag. 478) *demonstratur*.

Pagg. 476 usque 479. *Inter quævis duo puncta spatii datur linea eiusmodi; exit continuata e quavis sphaera; congruentibus 2 punctis necessario congruunt (et continuatae); neque a punto ad punctum una recta plures dantur. Est quoque recta quantitas absoluta, et potest in se porro moveri.*

Pagg. 479 usque 482. *Plani generatio*. Si recta duo puncta in *plano habeat, tota incidit. Per quævis tria puncta datur planum, nec plura dantur* (si tria illa puncta non in recta sint). *Planum per quamvis rectam in ea situm in duas plagas aequales dividitur*.

Pag. 482. *Formæ angulares duarum rectarum congruunt, si arcus e verticibus radiis aequalibus descripti aequales sint; et summa angulorum e punto rectæ (in eadem plani plaga) est dimidiæ peripheriae (id est duobus rectis) aequalis; et conversim, duæ rectæ sunt in eadem, si*

f

Ed. II.

Tom. pag.

summa angulorum e punto utriusque communi in eadem plani plaga sit
 $= 2$ rectis; sunt quoque hinc omnes formae anguli recti æquales. De-
scripto (apice angulorum pro centro accepto) circulo, in omnibus dictis,
nisi ita esset, pars $=$ toti fieret.

Pag. 482. *Planum est quantitas* (nempe absoluta).

II 38

Ibidem usque 486. *Sectiones rectarum planorumque inter se, atque planorum cum sphaera.* Recta cum recta (aut plano) nonnisi punctum, planum vero cum plano aut nihil, aut rectam commune habet. Recta per planum transit in spatii plagam alteram. Si planum P cum plano Q punctum commune habeat: sectio recta est; transitque P per Q in plagam alteram. *Ad rectam planum datur e quovis punto eorum ad ea perpendicularis; et e quovis punto etiam extra illa datur ad ea perpendicularis.* Si recta ad duas plani rectas perpendicularis fuerit, erit ad omnes in eodem plano per punctum sectionis ductas, adeoque ad planum ipsum perpendicularis (pag. 483).

39

Planum ρ est perpendicularare ad planum P , si perpendicularis ad P in ρ cadat (pag. 484). Anguli verticales tam rectarum, quam planorum æquales sunt (ibidem); idem tamen et modo communi evidens est, si formarum angularium æqualitas pro arcibus æqualibus demonstretur (482).

40

Pag. 485. *Circulus maximus in sphaera; angulus circolorum maximorum fit quantitas respectiva. Arcus circolorum maximorum, ad arcum ab circuli maximi perpendicularares, in extremitate quadrantum (polo dicta) concurrunt.*

38

Si plana P et Q se invicem ad angulum rectum secent in recta ab : e quovis punto p ipsius P ad ab demissa perpendicularis, est perpendicularis ad Q ; atque e quovis punto ipsius ab erecta ad Q perpendicularis, in P cadit.

41

Pag. 486. *Si duo plana P et ρ se invicem secantia, sint ad tertium Q perpendiculararia: sectio priorum est perpendicularis ad Q .*

42

Angulus rectae cum plano fit quantitas respectiva (pag. 480); atque est minimus omnium (nisi rectus sit), quos recta eadem cum recta quacunque plani per punctum sectionis ducta facit.

Ibidem usque ad finem, de *planis rectisque se invicem non secantibus. Axioma Euclideanum tria complectitur*, quorum quodvis sufficit (pagg. 487 et 488).

43—44

Pagg. 488 usque 490. *Brevis disquisitio de theoria parallelarum: et Appendix idea.*

44—46

Pag. 490 usque ad finem *tentamina eam demonstrandi olim facta.*

46—56

APPENDIX, Geometriam ab ea independentem absolutam exhibens.

359—394

INDEX

RERUM IN TOMO SECUNDO ED. I. CONTENTARUM.

	Ed. II.	
	Tom.	pag
<i>Explicatio signorum.</i> Modus subdivisionis in genere; et in specie quoad Elementa Geometriæ usque ad pag. 8.	II	LIX—LXII
<i>Sectio nulla</i> duarum rectarum, aut duorum circulorum, et circuli atque rectæ (pagg. 9, 11, 19, 232).	57, 59 66, 275	
<i>Anguli duarum rectarum quantitas, et aequalium congruentia</i> (pag. 9). Summa angulorum, ad eundem apicem in plano, omnium, aut super recta; anguli verticales (pag. 10).	57 58	
<i>Tres rectae:</i> Angulus externus maior est quovis internorum oppositorum, et si duæ rectæ secent se invicem, summa duorum internorum est $< 2R$ (pag. 11).	58, 59	
Perpendicularis acuto angulo obiecta cadit. Origo et species <i>trianguli</i> , atque æqualitatis duorum conditiones generales (pagg. 12, 13), et translatio anguli (ibidem).	60, 61	
Constructio triangulorum geometrica (pagg. 14, 15, 17).	61—63, 65	
Trianguli crura æqualia ponunt angulorum ad basim æqualitatem, et horum æqualitas ponit crurum æqualitatem. In triangulo rectangulo hypotenusa $>$ catheto, et hypotenuse crescunt (pag. 16). Hinc æqualitas triangulorum rectangulorum, per catheti hypotenuseque æqualitatem; et hinc summa duorum laterum trianguli cuiusvis tertio maior (pag. 17).	64	
In triangulo rectilineo dependentia laterum angulorumque oppositorum mutua (pagg. 18, 28 et 74).	64, 65 66, 76, 124	
Si 4 rectarum nullum par fuerit parallelum, oritur <i>trapezoides</i> : si duo paria sint parallela, parallelogrammum; quod per rectam quamvis, per sectionem diagonalium ductam, bifariam dividitur, simul cum recta ipsa. Constructio <i>rectanguli, rhomboidis, rhombi, quadrati</i> . Angulus hinc in semicirculo est rectus (pag. 20).	68	
Si unum par parallelum per alterum non parallelum setetur: præter <i>trapezium</i> oritur similitudo triangulorum; <i>similitudinis</i> triangulorum <i>conditiones</i> , et cetera similitudinem eorum concernentia (pagg. 21 usque ad 26). Ex. gr. quomodo milliare pollici exprimi queat.	68—74	
	<i>f*</i>	

	Ed. II.
	Tom. pag.
<i>Proportionalis media</i> (pag. 27) ; et conversim rectam, quæ hypothenu sam ita dividit, ad hanc perpendicularem esse patet. <i>Theorema Pythagoricum</i> (ibidem). E lateribus dignoscere angulum, num obtusus vel acutus aut rectus sit ; et <i>conversa Pythagorici</i> . Multiplicatio lineæ per lineam, et divisio (pagg. 28 et 50 . . .). Similia plurimum laterum (pagg. 29, . . .).	77, 99, 78
<i>Rectae cum circulo sectio minima punctum, maxima duorum punctorum est. Chordae arcusque meditullia et centrum sunt in perpendiculari e centro ad chordam.</i> Hinc <i>arcus cuiusvis</i> , uti circuli per data tria puncta non in recta sita, <i>centrum</i> reperitur. Chorda intra circulum cadit. <i>Recta ad radium perpendicularis est tangens, et tangens est ad radium perpendicularis</i> , nec ulla recta inter tangentem et arcum datur (pagg. 31, 33). <i>Recta circulum in 3 punctis secare nequit.</i> Quomodo tangens ex p duca tur e Fig. 42* patet (per pag. 20).	80, 81
<i>Plures rectae secantes circulum</i> : prius duæ. <i>Anguli tangentis cum chorda quantitas</i> (pagg. 33). <i>Angulus ad peripheriam</i> : angulus in semi circulo ; ubi ex eadem Fig. 45. conversa patet, nempe angulus interior est $>$ exterior $< R$, itaque si rectus fuerit, in semicirculo est. Chordæ parallelæ absecant arcus æquales. Chordæ ex eodem peripheriæ punto, a diametro porro decrescant, et arcui maiori maior chorda, maiori que chordæ maior arcus respondet.	Fig. 79*, 68 82 Fig. 82
<i>Duarum rectarum, se invicem intra peripheriam secantium, facta segmentorum sunt æqualia ; quantitas anguli.</i> Plures rectæ ex eodem punto intra peripheriam (pagg. 34, 35) ab imo crescunt a diametro usque ad eandem.	83, 84
<i>Duarum rectarum e punto extra peripheriam</i> anguli quantitas. Plures e punto extra peripheriam a diametro decrescant, partes exteriore s crescunt, usque ad tangentem (pag. 35).	84, 85
Hinc si anguli unius crura cruribus alterius æqualia fuerint: lateri subtendenti maiori opponitur angulus maior ; patet vertice in centrum posito, et uno latere unius cum latere alterius coincidente.	
<i>Rectilineorum inscriptio circulo et circumscrip tio</i> (pagg. 36, 37). <i>Polygonum reg.</i> e circulo, et conversim <i>apices polygoni reg. in peripheriam cadunt</i> . Latus hexagoni. <i>Angulus polygoni</i> , et productis lateribus summa omnium externorum (pag. 38).	85—87
<i>Duo circuli se invicem in tribus punctis non secant</i> ; possunt tangere se invicem, extus, intus ; et <i>centra cum tactus punto in recta sunt</i> (pag. 39).	88
<i>Formae per sectiones trium</i> (tum plurimum) <i>circularum triangula ex arcibus, eius species, angularum quantitas ; aequalitas triangulorum eiusmodi</i> (pagg. 40 usque ad 46, et 65, 66).	90—95, 114, 115

Sectiones sine angulo: lineæ sine angulo e rectis et arcubus circulibus, aut solum ex arcubus. *Figurae* e rectis et arcubus, aut tantum ex arcubus: tres eiusmodi lineae talem haud præbent; ex una recta et duobus arcubus, ita e tribus arcubus, nec non e duobus rectis et uno arcu fieri potest cum uno angulo; at quatuor arcus, ita duae rectae et duo arcus figuram sine angulo præbent. E tribus rectis et uno arcu talis non datur (pagg. 46 usque 49).

DE AREIS. Quo sensu aequatur rectangulum facto laterum? (pag. 50). *Parallelogramma* aequa alta et basium aequalium sunt aequ. term. aequalia. De triangulis idem (pag. 53). Hinc parallelogrammum = facto e basi in altitudinem, et triangulus est huius dimidium. *Altitudo trianguli e lateribus* (pag. 54). *Trapezii, quadrilateri cuiusvis, figure rectilineae area.* *Circuli area* (pagg. 56 usque 59) *Annulus* (pag. 60).

Transmutatio figurarum quoad areas, et reductio ad rectam (Tom. I. pag. 22). *Complementa parallelogramorum, quae ad diagonalem sunt, aequ. term. aequalia sunt.* *Quadratum hypot. exstruitur e quadratis cathetorum.* Quotvis quadrata in unum commutantur. *Area data in figuram certae speciei transmutatur* (pagg. 60 usque 63).

Comparatio similium quoad areas. *Areae triangulorum sunt uti facta laterum angulum aequalem intercipientium.* *Areae triangulorum similium sunt uti quadrata linearum homologarum.* Idem de quibusvis figuris. Hinc *hypotenusae superscripta figura = summae similium cathetis superscriptarum.* Lunula Hypocratis (pagg. 63, usque 65).

Additio, subtractio, divisio figurarum (sub certa conditione). Ex. gr. ut divisio e certo puncto fiat, aut recta partem ratione data exhibens certæ parallela sit (pagg. 67, 68).

Summa circulorum triangulo aequilatero impositorum et summae limes. Idem de quadrilatero rectangulo (pagg. 69 usque 72).

Quorundam constructio geom. (quorum antea nonnisi possibilitas innotuit). *Rectam extrema et media ratione secare:* hinc *decagonum.* *Peripheriae divisio* (pag. 73).

Trigonometria plana (pag. 74). *Functiones trigonometricae.* *Cosinus ex sinu* (et conversim). *Pro quadrante positivo q, $\pm 4mq \pm a$ et $\pm a$ sinu cosinuque eodem gaudent;* et a et $-a$ cosinum eundem habent, sed sinus oppositi sunt. Si γ complementum ipsius a sit, tum $\sin. \gamma = \cos. a$; si vero $a + \beta = 2q$, tum a et β sinu eodem gaudent, sed $\cos. a = -\cos. \beta$ (pagg. 75 usque 77).

Functionum trigonometricarum mutationes, crescente arcu a o (pagg. 77 usque 79). E signo functionis trig. conclusio ad arcum. *Exhibitio tan-*

Ed. II.
Tom. pag.

II 95—98

99

101

102

104—107, 108

I 27

II 108—111

111—114

116—118

119—122

123, 124

124

125—127

127—129

	Ed. II. Tom. pag.
<i>gentis secantisque geometrica</i> (quoad sinum, cosinum, et sin. vers. e definitione patet. Tom. I. pag. 456).	
<i>Si radius mutetur ex 1 in r</i> , functiones trig. per <i>r</i> multiplicantur (pag. 80).	II 14
<i>Sin. (α ± β)</i> (quantumvis fuerit sive α sive β , et sive positivum sive negativum), et <i>cos. (α ± β)</i> quomodo per sinus et cosinus arcuum α et β exprimitur (pagg. 81 usque 85).	130
<i>Expressio sinus arcus $\frac{c}{2}$ per sinum arcus c et cos. $\frac{c}{2}$ per cos. c. Si- nus et cosinus arcus multipli</i> (pag. 85).	130—135
<i>Dependentia laterum angulorumque trianguli rectilinei mutua</i> (pag. 86).	135, 136
<i>E duobus lateribus et angulo intercepto reliqui anguli</i> (unde totum triangulum innotescit per præc.), imo immediate latus tertium. <i>E tribus lateri- bus anguli</i> (pagg. 87, 88). <i>Trianguli rectanguli resolutio specialior</i> : e duobus lateribus tertium; e cathetus et angulo alterutri opposito, quæcunque bina dentur, tertium innotescit; demum e hypotenusa, catheto et angulo huic opposito, quæcunque bina dentur, tertium reperitur (pag. 88).	136
<i>Expressionum pro radio 1 reductio ad radium r</i> (pagg. 89 usque 92).	137, 138
<i>Formularum quarundam transmutatio, applicationi logarithmicæ magis idonea</i> (pagg. 92, 93).	139
<i>E latere cum angulis adiacentibus area</i> . E duobus lateribus et angulo intercepto area. Data summa duorum laterum cum basi altitudineque, anguli reperiuntur (pagg. 93, 94).	140—143
<i>E numero laterum polygoni et radio latus, aut e quibusvis binis tertium</i> (pag. 95).	143, 144
<i>Quomodo sinus computati sint</i> (pagg. 95, 96).	144—146
	146, 147
	147

MOTUS COMPOSITUS.

<i>Linearum ordines 1, 2, ...; aequationes earum</i> (pagg. 97, ...); <i>aequa- tio lineae secundi ordinis; tres eius species, formaeque ex aequatione</i> (pagg. 101 usque 105). Ibidem <i>valores imaginarii</i> considerantur.	148
<i>Axis maior</i> in ellipsi et hyperbola (rectius <i>primarius</i>). <i>Directrix</i> .	152—156
<i>Alia definitio linearum harum</i> (quas pag. 222 conicas esse patet) (pagg. 105 ... 107). <i>Axis minor</i> rectius secundus dicitur.	265
<i>Sectiones coni insignes in cœlis et terra partes agunt</i> (pagg. 107 usque 110). <i>Lampas, fornax</i> .	156—158
	158—160

	Ed. II.
	Tom. pag
<i>Comparatio sectionum conicarum</i> inter se (pagg. 110 usque 115).	II 160—165
Asymptotus hyperbolæ (ibidem).	
<i>Mutatio initii abscissarum, ellipseos hyperbolaeque in centrum</i> (pag. 115).	165, 166
<i>Distantia focalis</i> in sectionibus conicis (pagg. 115 usque 119).	166—170
<i>Radii vectores</i> in iis (pagg. 119 usque 122).	170—173
Ex his <i>constructio</i> punctorum <i>geometrica</i> (pagg. 122 usque 126): <i>constructiones mechanicae</i> (pagg. 126 usque 128).	173—177 177—179
<i>Tangens</i> per quodvis sectionis conicæ punctum; item e quovis puncto extus cadente (præter centrum hyperbolæ); atque hinc <i>subtan-</i> <i>gens, normalis, subnormalis</i> (pagg. 128 usque 134).	179—185
<i>Diametri sectionum conicarum. Centrum lineae, diameter</i> (sensu stricto). <i>Axis parabolæ est quaevis recta axi parallela, atque quaevis</i> <i>recta per centrum ellipsoes et hyperbolæ</i> (præter asymptotos) <i>diameter</i> <i>est</i> ; nec ulla alia diameter, nec pro iisdem chordis parallelis alia est (pagg. 134 usque 152).	185—203
<i>Num linea quaedam centro gaudeat?</i> (pagg. 152 . . .). Linea secundi ordinis sectio conica est (pagg. 154 . . . 222 . . .). Ad verticem, etiam si punctum sit, per $y^2 = cx^2$ datur.	203 205, 265
<i>Constructio certarum æquationum per linearum intersectionem</i> (pagg. 157 usque 160).	208—211
Lineæ quarum non omnia, sed inter quævis duo quovis, geometricè construi possunt (pagg. 161 usque 163).	211—213
<i>De lineis cuiusvis ordinis scitu magis necessaria. Numerus termino-</i> rum æquationum earum. Mutato abscissarum initio, mutata abscissarum linea, mutatoque angulo coordinatarum, transformatio æquationis. <i>Ordo</i> <i>lineae idem manet.</i> Linea n -ti ordinis a recta in non pluribus quam n punctis secari potest. Linea n -ti ordinis per $[(n+1)(n+2):2] - 1$ puncta determinatur. Linea ordinis m , lineam ordinis n , in non pluribus quam nm punctis secare potest (pagg. 163 usque 169).	213—218

REDITUS E PLANO IN SPATIUM.

Sectio rectæ cum plāno, plāni cum plāno; transitus tam rectæ quam
plani in alteram plāgam. *Plana parallela.* Recta ad duas rectas plani
perpendicularis ad hoc perpendicularis est; daturque perpendicularis
(eaque unica) ad planum e quovis puncto eius, imo e quovis puncto
extra planum. Recta ad planorum parallelorum P et Q aliquod perpen-
dicularis, est ad alterum quoque perpendicularis; et quævis duæ tales

Ed. II.
Tom. pag

rectæ inter P et Q sunt æquales et parallelæ; atque hinc quævis duæ rectæ eidem tertiae parallelæ sunt inter se parallelæ (pagg. 170, 171). II 219—221

Angulus duorum planorum. Datur e quovis puncto plani P planum perpendicularare ad P .

Quodvis planum Q , in quod perpendicularis ad planum P cadit, est perpendicularare ad P ; et si sectio planorum P et Q sit ab , perpendicularis ad P e quovis puncto rectæ ab in Q cadit; item quævis perpendicularis ad ab in Q cadens, est perpendicularis ad P .

Si plana Q et q ad P perpendiculararia secent se invicem: sectio planorum Q et q erit recta ad P perpendiculararis.

Anguli verticales planorum quoque æquales sunt (pag. 172).

222

Angulus solidus: numerus laterum minimus est 3; et summa quorumvis binorum est $>$ tertio (quod etiam ad trianguli sphærici latera applicatur). Determinatur per tria latera, et hinc pariter triangulum sphæricum (pagg. 172 usque 175).

222—224

Planum R plana parallela P, Q secans angulos alternos et exterrnum interno oppositum æquales atque summam duorum internorum duobus rectis æqualem facit.

Sectiones planorum R, S (se mutuo secantium), cum planis parallelis P, Q factæ, non solum sibi invicem parallelæ sunt, sed etiam angulos æquales faciunt (pag. 175).

225

Cum planis parallelis P, Q non solum tertium secans, sed et recta cum alterutro ipsorum P, Q aliquid commune habens, in neutrum incidens, angulos alternos æquales, pariterque exterrnum interno opposito æqualem, et summam duorum internorum duobus rectis æqualem facit.

Anguli, quos rectæ parallelæ cum plano P faciunt, sunt æquales; et rectæ e punctis sectionum, ad puncta plani P illa, in quæ perpendicularares e rectis dictis parallelis ad P demissæ cadunt, sunt parallelæ.

Si in plano Q sit $\mathfrak{A}\mathfrak{B} \parallel \mathfrak{A}'\mathfrak{B}'$, et $\mathfrak{A}\mathfrak{C} \parallel \mathfrak{A}'\mathfrak{C}'$, atque supra Q sint talia puncta a et a' , ut $\mathfrak{A}a$ cum $\mathfrak{A}\mathfrak{B}$, ita $\mathfrak{A}'a'$ cum $\mathfrak{A}'\mathfrak{B}'$ faciant angulum v , et $\mathfrak{A}a$ cum $\mathfrak{A}\mathfrak{C}$ ita $\mathfrak{A}'a'$ cum $\mathfrak{A}'\mathfrak{C}'$ faciant angulum q : erit $\mathfrak{A}a \parallel \mathfrak{A}'a'$.

Si plana parallela P et Q per rectas parallelas $pq, p'q'$ secentur, et p, p' in P , atque q, q' in Q fuerint: erit $pq = p'q'$.

Si plana parallela P, Q per planum R secentur, et sectio planorum P, R sit π , planorum Q, R sit φ ; quocunque planum ρ ponatur per ρ ad Q parallele: sectio planorum ρ, R eadem cum π erit (pagg. 176 usque 179).

226—228

Constructio prismatis rectilinei. Prismatis conceptus generalior. Rec-

Ed. II.
Tom. pag.

tilinei latera parallelogramma totidem, quot latera baseos; fiuntque duæ bases æquales et parallelæ.

Prisma per quodvis planum basi parallelum in duo prismata basium æqualium dividitur.

Puncta basium sibi invicem *respondentia*; si *b* portio baseos fuerit, complexus rectarum ex omnibus ipsius *b* punctis ad iis e basi altera *respondentia*, prisma, et pars prioris est. Et prismata figuris *F* et *f* absolute æqualibus et directe parallelis (Tom. I. pag. 462) iuxta rectam II 19 eandem Δ a exstructa congruere possunt.

At dantur prismata, quorum retia absolute æqualia sunt, ipsa tamen congruere nequeunt, nisi alterutrius rete invertatur; generatur vero et inverso reti corpus æquale (pagg. 179 usque 185).

Hinc prisma baseos triangularis æquatur parallelepipedo; et ita solum dispescitur etiam parallelepipedum obliquum in duo prismata triangularia æqualia (pag. 186).

Parallelepipedæ super basi eadem, inter plana parallela eadem sunt *aequ. term. æqualia* (pagg. 186 . . .).

Hinc qualevis parallelepipedum in rectum transmutatur; et soliditas est facto e basi in altitudinem æqualis (pagg. 189 . . .).

Prismatis soliditas (pag. 191).

Pyramidis conceptus. Si triangularis per planum basi parallelum secetur, sectio erit triangulum simile basi (pag. 192).

Pyramidis rectilineæ soliditas. At *pyramideum triangularem æqualitate term. ad prisma reduci posse vel non posse*, adhucdum haud liquet (pagg. 192 usque 195).

Superficies pyramidis. *Rete pyramidis triangularis:* data perpendicularis ex apice, quantitate situque, atque basi, quæruntur latera; aut datis basi ΔBC et latere linearī Δp (pro apice p), cum angulo solido ad Δ , altitudo et latera quæruntur.

Superficies prismatis: quæstiones prioribus analogæ (pagg. 197, . . .).

Motus figurarum circa axem.

Cylinder rectus: huius *soliditas, superficies (rete)*.

Conus rectus: *soliditas, superficies, rete.* E dato angulo ad apicem, arcum sectoris (perimetrum baseos præbentis), et ex hoc illum reperire (pagg. 198 usque 203). Retia cylindri et coni obliqui (pagg. 203 usque 206).

Corporum similium soliditates uti cubi linearum homologarum (pagg. 206, . . .).

Revolutio semicirculi circa diametrum: sphaerae soliditas, superficies (pagg. 207 usque 211).

	Ed. II.
	Tom. pag.
Rete sphærae (pagg. 211 usque 213).	II 255, 256
Multiplicatio linearum practica (pagg. 213 usque 216).	256—259
Prismata sunt, uti facta e basi in altitudinem; in æqualibus sunt altitudines inverse uti bases &c. Idem de pyramide (pag. 216).	259
Transmutatur corpus in aliud (pag. 217).	259
<i>Sectiones plani cum cono, cylindro, sphaera.</i>	
<i>Soliditas (superficiesque) cylindri recti truncati; coni truncati. Pyramidis truncatae soliditas.</i> Si basis figura reg. et pyramis recta fuerit, superficies; prismatis autem qualisvis superficies (pagg. 217 usque 220).	260—263
De doliorum dimensione (pag. 220).	263
<i>Superficies zonae cuiusvis in sphaera</i> (pagg. 220 usque 222).	263—265
<i>Quaevis lineæ secundi ordinis sectio coni est</i> (pagg. 222 usque 227).	265—269
<i>Si et conus verticalis secat per planum, sectio et in eo, priori aequalis erit</i> (pagg. 227).	269, 270
<i>Quilibet conus obliquus circulo insistens, e cono recto ellipsi insistente absecari potest. Pariter cylinder obliquus. Coni cylindrique circulo oblique inconsistentium, sectiones per planum factae</i> (pagg. 227 usque 231).	270—274
<i>Sphaerae sectio cum plano aut punctum, aut circulus est; et perpendicularares e centris duorum eiusmodi circulorum se invicem in centro sphaerae secant</i> (231, . . .).	274, 275
Sphæræ cum sphæra sectio (pag. 232).	275
Planum per centrum circulum maximum præbet. <i>Quilibet duo circuli maximi in duobus punctis secant, bisecantque se invicem.</i>	
<i>Duo circuli maximi ad tertium c perpendicularares in fine quadratum communi (polo dicto) secant se invicem; et extremitas quadrantis ad c perpendiculararis, polus ipsius c est.</i>	
<i>Si p_a, p_b quadrantes fuerint, anguli ap_b quantitas arcus ab est. Et si q tam ab a quam a b quadrante distet: p_b polus circuli max. per ab ducti est.</i>	
<i>E quovis punto superficie sphaerae datur ad quemvis circulum max. perpendiculararis</i> (pagg. 233 usque 234).	276, 277
Triangula varia in sphæra, et strictius triangulum sphær. Summæ laterum huius trianguli limites sunt 0 et 4R, summæ angulorum limites autem sunt 2R et 6R.	
<i>Tres circuli maximi dividunt sphaeram in octo triangula</i> (pagg. 234 usque 239).	277—281
<i>Corpora regularia: apices corporis regularis in superficiem sphaerae cadunt. Angulus u laterum planorum corporis regularis reperitur; atque ex hoc et latere lineari, radius sphæræ circumscriptæ. Soliditas corporum regularium</i> (pagg. 239 usque 245).	281—287

Ed. II.
Tom. pag.

Corpora regularia sensu latiore, ordinis primi, secundi &c, nempe divisio superficie sphæræ (adeoque spatii e centro) in partes absolute æquales, aut tantum æquales, aut in partes numero n et partes numero m æquales & (pagg. 245 usque 248). II 288—290

Trigonometria sphærica.

Triangulum sphæricum determinantia; et formulæ primariæ e dependentia laterum et angulorum iis oppositorum mutua promanantes: e quibus etiam ceteri quæsitorum casus sequuntur.

Dependentia dicta (tanquam *fundamentum*) (pagg. 248 usque 250). 290—292

Trianguli rectanguli resolutio ad casus speciales (pagg. 251 usque 254). 293—296

Cuiusvis trianguli resolutio e duobus lateribus cum angulo intercepto. E tribus lateribus anguli, e tribus angulis latera (pagg. 254 usque 256).

Trianguli sphæri area (pag. 256). 296—300

Exempla formularum antea dictarum usui logarithmico adaptarum (pagg. 257 et 258). 300, 301

301, 302

Applicationes quaedam Trigonometriae sphæricaæ. Conceptus quidam primarii. Longitudo diei e declinatione solis et poli altitudine; Gnomonica ad unum problema reductum. Constructio horologii in quovis plano, cui axis terræ non est parallelus (pagg. 259 usque 264). 303—307

APPENDIX [TRIPLEX].

PRIMÆ LINEÆ PERSPECTIVÆ, GNOMONICÆ ET CHRONOLOGIÆ.

In *PERSPECTIVA*, e dato *oculi tabulaeque et obiecti* situ quæritur *imago*; et pariter e *triū horum duobus quibusvis tertium quaeri potest*. Quomodo et *Gnomonica huc reductur* (pag. 265).

308

Casus simplicissimus: tabula plana, horizontalis aut verticalis; remoto oculo in ∞ , tres Perspectivæ species, imaginumque in iis consideratio (pagg. 266 et 267).

309, 310

Distantia oculi, obiecti, planum fundamentale, punctum oculi, obiecti, altitudo obiecti, linea oculi, linea punctorum, linea distantiarum, linea altitudinis. Imaginis in tabula determinatio (pagg. 268 usque 270).

310—313

Situs oculi ex obiecto et imagine; nec non ex oculo et imagine obiectum (pagg. 270 et 271).

313, 314

g*

	Ed. II.
	Tom. pag.
ELEM. GNOMONICAE. Species horologiorum solarium (pag. 272).	II 314
Constructio horologii in plano quovis, cui axis terrae parallelus est, (pagg. 273 usque 277); (in plano alio dictum pag. 262 est).	315—318, 306
<i>Indicem</i> axi terrae parallelum esse oportet (pag. 277); hic autem non ipse solum, sed et punctum quodvis eius index esse potest. Sectionem conicam per viam umbræ puncti huius, pro data solis declinatione, construere (pagg. 278 usque 280). Analemma signiferum (pagg. 280).	318
<i>Sol verus, sol factus</i> sive medius: imaginum eorundem ad æquatorem reductarum congruentia; <i>tempus solare verum, medium, sidereum</i> (pag. 281).	319, 320
Applicatio dictorum ad horologia specialia: <i>meridionale</i> (et pro casu si declinet); <i>horizontale declinans</i> ; imo <i>reclinans</i> utrumque (pagg. 282 et 283).	321
<i>Horizontalis</i> (usui maxime idonei) constructio vulgaris intuitiva (pag. 284).	321—323
Aequinoctiale, horizontale, <i>universalia. Lunare</i> (pag. 285). Annuli portatiles (pag. 286). Methodus practica (pag. 287).	323, 324 324 325, 326
CHRONOLOGIA. Alveus rotundus fluentis temporis: punctum in eo fixum (ex. gr. dum Nicæa prima Januarii anno C. 325 incipit). <i>Locus absolutus, relativus</i> in circulo dicto; nempe (pag. 288) $nP+s$ et s differunt, quamvis simul terminentur.	326
Anni, menses, septimanæ; huius dierum nomina ethnica, christiana.	
<i>Festa fixa, mobilia</i> a Paschate dependent. Literæ dierum anni, litera dominicalis anni.	
Regula principalis subdivisionis temporis in vita civili.	
<i>Fundamentum suppurationis Paschatis</i> (pagg. 288 usque 291).	326—329
<i>Annus Romuleus, Numaeus, Julianus, Gregorianus</i> (pagg. 292 et 293).	329—331
<i>Aequatio Solis</i> dicta; formula eius, qua <i>stilus vetus ad novum reducitur</i> (pag. 294).	331
Literam diei m -tæ mensis cuiusvis (et quis septimanæ dies anno certo fuerit), reperire.	
<i>Litera dominicalis</i> anno communi una, bissextili duabus recedit. <i>Lit. Dom. Julianæ</i> mutata per <i>Gregorium</i> est.	
<i>Cyclus solis Julianus</i> est 28 annorum, <i>Gregorianus</i> 8 seculorum (pagg. 295 usque 298).	332—335
<i>Literæ dom. Julianæ</i> formula pro anno n -to (p. 299).	335
Gregorianæ formula (pag. 300).	337
Regula (in Paschatis suppuratione) determinandi <i>plenilunium, Iuli-</i>	

	Ed. II.
	Tom. pag.
<i>anum prius, tum Gregorianum. Cyclus lunaris, numerus aureus, epactae.</i>	
Iulianarum computatio; formulae numeri aurei, epactae I. (pagg. 301 usque 307).	II 338—343
<i>Epactae Iulianae per Gregoriam correctae; formula aequationis lunae ita dictæ; formula epactae Gregorianae</i> (pagg. 307 usque 311).	343—346
<i>Formula Paschatis Iuliani</i> (ut functio numeri n) (pag. 311).	346
<i>Formula Paschatis Gregoriani generalis</i> ; et applicata ad seculum. Exempla (pagg. 313 usque 315).	348—351
<i>Cyclus Paschatum Gregorianorum</i> 57000.	
<i>Cyclus Paschatum Iulianorum</i> est 28.19.	
<i>Cyclus Paschatis utrinusque.</i>	
Paschata post quod seculum coincidere nequeunt? et quando per totum seculum coincident? (pagg. 318 usque 322).	353—356

ADDITAMENTA.

Tom. I. concernentia.

<i>Quaedam e theoria combinationum.</i>	
<i>Numerus omnium combinationum ex n rebus.</i>	
<i>Variatio, permutatio</i> ; illius leges variae (pag. 323).	I 556
Permutationum constructio per numeros (pag. 324).	557
Constructio et numerus m -ionum ex n rebus, <i>admissa permutatione et variatione</i> , ita ut eadem litera numero quovis ipsum m haud superante occurere possit. Applicatio ad <i>voces</i> et <i>syllogismos</i> (pagg. 324 usque 326).	558, 559
Numerus m -borum <i>sine permutatione</i> , sed <i>admissa variatione lege certa per exponentes variationis</i> (ita dictos). (pag. 327).	560
Quot factores factum per factores primos expressum habet? (pag. 328).	560, 561
<i>Constructio combinationum</i> (pag. 329).	561, 562
<i>Combinationes</i> ex n rebus, <i>admissa variatione sine permutatione</i> ; item pro $n = 2$, quod (pag. 98) citatur; (pagg. 330 usque 334). <i>Serier arithmeticae ordinis m-ti</i> , (seriei 1, 2, 3, ... superstructæ) <i>terminus n-tus</i> I (pagg. 334 usque 336).	II 149 562—567 567, 568
APPLICATIONES quædam logarithmorum.	
Problemata vulgaria (pagg. 336 usque 338).	512—516
<i>Logarithmo in tabula haud extanti numerus, numeroque logarithmus conveniens, quomodo et quo fundamento reperitur?</i> (pagg. 339 usque 341).	516—519
Log. quoad basim 10 nonnisi numeri 1 cum certo cifrarum numero, commensurabilis est.	

	Ed. II.
Tom.	pag.
OPERATIONES <i>decadicae</i> : quatuor species, in genere (pag. 343).	
<i>Additio</i> in specie (pagg. 344 usque 346). <i>Subtractio</i> (ita etiam ut semper minor nota e maiore dematur) (pagg. 347 usque 349).	II 496
<i>Multiplicatio</i> (alia methodo quoque) (pagg. 349 et 350). <i>Divisio</i> (pag. 350). <i>Compendium, si divisor cifris terminetur</i> (pag. 351); <i>si nume-</i> <i>rus minor tam dividendum quam divisorem metiatur</i> ; notæ quibus dignosci queat, num 2, 3, 5, 9, 11 numerum aliquem metiatur (pagg. 351 et 352).	497—499 500—502 502, 503 503, 504
<i>Approximatio quoti, per notas decimales</i> , et <i>reductio fractionis com-</i> <i>munis ad decimalem</i> (pag. 352).	504, 505
<i>Proba novenariorum</i> in singulis (pag. 352). <i>Operationes dyadicae</i> (pag. 353).	506 506 506
<i>Extractio radicis m gradus</i> ; et <i>approximatio per notas decimales</i> (pagg. 353—356).	507—511

T E N T A M E N

JUVENTUTEM STUDIOSAM

IN ELEMENTA MATHESEOS PURAE, ELEMENTARIS
AC SUBLIMIORIS, METHODO INTUITIVA, EVI-
DENTIAQUE HUIC PROPRIA, INTRODUCENDI.

CUM APPENDICE TRIPLICI.

Auctore Professore Matheseos et Physices Chemiaeque
Publ. Ordinario.

T o m u s S e c u n d u s .

Maros Vásárhelyini. 1833.
Typis Collegii Reformatorum per JOSEPHUM.
et SIMEONEM KALI de felső Vist.

Imprimatur.

**M. Vásárhelyini Die
12 Octobris 1829.**

**Paulus Horváth m.p.
Abbas , Parochus et Censor
Librorum.**

LECTORI SALUTEM!

Quum tam prior tomus quum hic, vita variis distracta, sine otio, et inter difficultates impressionis insuperabiles (quapropter nec antea rem aggredi animus fuit) editus, erroribus scateat: neque opus, spe quoque exstincta, vel expensas unquam refusum iri, ut par erat, extendi potuerit: defectus saltem (in quantum fieri potuit) suppleturus; non solum errata tomī primi, quos postea animadverti, sed et conceptus quosdam in tomō primo traditos, pro Tyronibus meis dilucidandos, et eosdem quidem sed simplicius præcisiusque exprimendos esse docendo expertus, id ad finem tomī huius adieci.* Quo præter alia quædam, et proportionis potentiaeque generalior conceptus, atque imaginaria etiamsi in exponentem ascendant, pertinent.

Quum autem meris imaginibus nonnisi proprio nutu sensum dare tentaverim: verebar, ne derisui forem; donec *summi Viri Göttingae* (mea laude longe maioris) *primae lineae imaginariorum* (in *Gött. Gel. Anz.*), simul cum querela de eorum pertractatione, iam olim edita, mihi innotuisent. Magno hoc mihi solatio fuit; et nonnisi eousque, donec theoria illa prodierit, meam (quæ iam qualem concipere poteram impressa erat) pro discipulis meis dilucidare debui: si vero illa prodierit; persuasus eam operibus ceteris, quæ solidum penetransque (et fere infallibile) ingenium, sigillo veri simplici distinguunt, parem fore; contentus ero idem saltem cum tanto genio voluisse.

Denique etiamsi opus hoc utcunque imperfectum fuerit: fore tales Lectores Benevolos spero, qui ut Magnus *Leibnitzius*, se in quovis libro

* In hac Editione vide Sectionem quartam Tomi I.

aliquid reperire confessus est, nec in hoc omne reiicient: et quum hoc solum, nec alibi quidquam arrogaverim, neque pollicitus magna sim: benignam errorum emendationem veniamque exoro; eo magis, quod fera mortale cor fata fregerint.

Verum quis adeo demens sit, ut ante extremum halitum, beatum se dicere ausit? Omnis fortuna humana, ut bulla inanis, dum variis spei iridibus ridet, in luridam guttam collabitur. Serius ociosus quisque in sua cruce exspirat: quae tamen arbor vitae fit; dum immeritorum vulnerum rubore ad noctis terrestris oras, aurora brevibus lacrymis æterno soli residentibus oritur.

ELEMENTA GEOMETRIAE.

SUBDIVISIONES GEOMETRIAE.

Capitum aliarumve subdivisionum, imagines e numeris sive e literis modo sequente compositæ (quibus et plantæ aliaque exprimi possent) *vicem subire queunt*: ex. gr. *dgb* vel *472* denotet secundam in prima subdivisione illius, quæ septima est in prima subdivisione quartæ in omnium prima subdivisione; nempe plura in eodem subdivisionis gradu per primam, secundam & distingui possunt; et numerus primus ad lœvam denotat numerum subdivisionis, quota sit in gradu primo, et quivis numerus *n* (si > 9 fuerit, parenthesi clausus) denotet *n*-tam in gradu primo subdivisionis numeri ad lœvam præcedentis. Possunt quidem eiusmodi subdivisiones vocabulis exprimi; ex. gr. usque ad sextum subdivisionis gradum, *liber, pars, caput, sectio, articulus, paragraphus* inservire possunt; possuntque ubique plura concernentia numeris Romanis Arabicisque aliisve signis adiungi. Atque si necessaria adhuc defuerint, ubi imago quæpiam numerica superius dicta advenit; liceat simulac requisita cursus advexerit, filum titulo *supplementi numeri* dicti interrumpere postmodum continuandum.

Imaginibus eiusmodi numericis sequentibus exprimentur *Geometriæ subdivisiones*.

1. *E primario SPATHI intuitu* superficies, linea, punctum, forma sphæra, tres primitivi motus simplices; recta, planum, circulus; aliisque ex his oriundi conceptus, veritatesque primarie fundamentales: (pagg. 1—56. contenta). Sphæræ limes certo sensu planum est.
2. DESCENSUS IN PLANUM; *planimetria*.
21. *Numero rectarum, duarumque* primitivarum motus *operationum finito*: constructio geometrica sensu stricto.

- 211. Formæ, per sectionem aliquam aut nullam, resultatorum constructionis dictæ magis obviorum, oriundæ.
- 2111. *Non considerata area.*
- 21111. *Sectio nulla formarum dictarum.*
- 211111. Duarum rectarum; ·211112 plurium; ·211113 rectæ et circuli, ·211114 duorum circulorum.
- 211112. *Sectio aliqua formarum dictarum.*
- 2111121. *Sectio cum angulo.*
- 21111211. *Non nisi rectarum* aut e rectis compositorum.
- 211112111. *Duarum rectarum:* angulus rectus, obtusus, acutus.
- 211112112. *Trium rectarum:* quarum aut
- 2111121121. Non nisi unum par est, se mutuo (continuatione suffiente) non secantium, aut
- 2111121122. Nullum tale par est: unde *trianguli* rectilinei species variæ.
- 21111211221. Triangulorum rectilineorum *aequalitatis conditiones*, ac certæ proprietates primarie.
- 21111211222. Laterum angulorumque oppositorum dependentia mutua: unde in supplemento numeri huius, e datis triangulum rectilineum determinantibus, sive angulum quemvis, sive latus quodvis ignotum ope calculi reperire docet *Trigonometria plana.*
- 211112113. *Quatuor rectarum:* quarum aut
- 2111121131. Nullum par est, se invicem (continuatione suffiente) non secantium; aut
- 2111121132. Datur par se mutuo non secantium; atque tum aut
- 21111211321. Alterum par quoque tale est, adeoque quum sectio detur, hoc par ab altero pari secatur, oriturque *parallelogrammum*; aut
- 21111211322. Non nisi unum par tale est, adeoque hoc ab altero pari secatur; fundamentum similitudinis triangulorum, eiusque conditiones; et multiplicatio divisioque ac radicis extractio.
- 211112114. *Plurium rectarum* numero quovis; unde
- 2111121141. Linea simplex e rectis composita; quæ parit
- 21111211411. Cum linea alia per duarum rectarum parallelismum composita, *parallelismum generalem.*
- 21111211412. Figuras rectilineas.
- 2111121142. Rectæ ex eodem punto ad apices angulorum omnes lineæ rectilineæ; unde
- 21111211421. Figuræ rectilineæ subdivisio in triangula.
- 21111211422. Cuiusvis rectæ, ex eodem punto communi dimidium, vel duas tertias & accipiendo, oritur *similitudinis conceptus generalis.*
- 21111212. Rectæ cum circulis.
- 211112121. Rectæ cum circulo sectio *minima* punctum est, *maxima* e duobus punctis constat.
- 211112122. Plures rectæ circulum secantes.

- '211121221. Se invicem quoque secantes.
- '2111212211. In eodem punto; '21112122111 in peripheria, '21112122112 intra peripheriam, '21112122113 extra eam.
- '2111212212. Rectæ se mutuo non in eodem punto secantes, sed lineam simplicem redeuentem formantes.
- '21112122121. Si quævis earum, uti est ab initio ad finem usque, chorda sit: subdivisiones iuxta numerum earum sunt; horumque subdivisiones novæ sunt, prout rectæ æquales aut inæquales fuerint.
- '21112122122. Si quævis rectarum tangens sit: subdivisiones sunt eadem, quæ numeri præcedentis.
- '211121222. Rectæ circulum secantes, nec productæ secantes se invicem.
- '2111213. Circuli se invicem secantes: minima sectio unum punctum est, maxima e duobus punctis constat.
- '211122. *Sectio sine angulo*: cuius subdivisiones sunt lineæ e rectis et arcibus, aut nonnisi ex arcibus, vel ex arcibus et rectis compositæ.
- '2112. *Areae figurarum generatarum*: quæ subdividuntur in rectilineas, circulum, figuræ ex arcibus, aut ex arcibus et rectis compositas.
- '212. Formæ, quarum in prima subdivisione non nisi possilitas innotescere saltem in quæstionem venire potuit, num geometricè construi possint, quæritur.
- '22. *Rectae operationesve* duea primitivæ priores *innumeræ*; *motus compositus duplex*, applicata *Arithmetica*.
- '222. Ea, quorum non omnia sed quodvis punctum construi geometricè sensu stricto potest.
- '223. Ea quorum nec quodvis punctum geometricè construi potest.
- '3. *REDITUS E PLANO IN ABYSSUM SPATII.*
- '31. *Numero rectarum operationumque trium* primitivarum *finito* (*constructio geometricæ sensu lato*); nimirum duabus accedit tertia, nempe *motus circa axem*.
- '311. Motus circa axem linearum planorumque, absque figurarum respectu.
- '3111. *Linearum motus circa axem*, figuræ haud efficientium.
- '31111. Rectilineorum figuræ haud constituentium motus circa axem.
- '311111. *Unus motus circa axem*.
- '3111111. Complexus duarum rectarum se mutuo in plano *P* secantium motus circa unam earundem: parit si angulus rectus fuerit, *planum*, secus autem *conos verticales*.
- '3111112. E punctis *b*, *c*, ... rectæ *A* in plano *P* sint perpendicularares *B*, *C*, ..., moveaturque schema circa *A*; viæ rectarum *B*, *C*, ... erunt *plana parallela*.
- '3111112. *Plures motus circa axem*; sint in plano *P* ad rectas *A*, *B* se mutuo in p secantes, rectæ *α*, *β*, ex p perpendicularares; vertaturque *α* circa *A*,

et β circa B ; via prioris secare viam posterioris debet, atque ibidem est perpendicularis ad P .

3112. *Motus planorum circa axem.*

31121. *Motus unus*: planum, circa rectam quamvis in eo sitam motum, producit angulum duorum planorum.

31122. *Plures motus plani circa axem.*

311221. Cuiusvis motus axi punctum idem p commune: nempe intelligantur omnia in eadem spatiis e plano P plaga (ex. gr. superiore), sitque motus plani cuiusvis angulus $<2R$, denotante R rectum; moveaturque sub hac conditione planum P circa rectam p in eo sitam; atque e quovis loco unde libuerit, moveatur item circa aliquam rectam ipsiusdem per p euntem, continuando donec libuerit; orietur *angulus solidus rectilineus*. Poterit ea quoque determinatio accedere, ut P semper versus faciem illam moveatur, quae inferior erat.

311222. Plures motus circa axem, absque puncto axium communi;

3112221. Nonnisi planorum.

31122211. Moto planorum (in 311112) parallelorum P, Q , uno circa quamvis rectam in eo sitam, donec ad alterum perveniat: novo hoc plani loco, R dicto, *anguli* ab R cum P et Q facti *alterni* comparantur.

31122212. Moto R circa rectam quamvis α per P et Q euntem; novo plani loco, S dicto, quæruntur sectiones cum P et Q formæ ex R et S constantis.

31122213. Moto S quoque circa quamvis rectam β per P et Q euntem: novo plani loco T dicto, quæruntur sectiones cum P et Q formæ ex R, S, T compositæ; tam pro casu si $\alpha \parallel \beta$, quam si non.

3112222. Planorum cum rectis.

31122221. Rectæ, quæ e quovis plani P punto est ad quodvis punctum plani Q ad P paralleli, anguli alterni &, quos cum P et Q facit, comparantur.

31122222. Si in plano P fuerit figura rectilinea ABC..., et quodvis punctum a fuerit supra planum (omnibus supra planum acceptis); vertatur P circa AB donec recta Ba incidat, fiatque Bb || et = Ba, et tum vertatur planum item prius P circa BC donec recta Bb incidat, fiatque Cc || et = Bb: atque hoc continuetur usque ad ultimum latus; ac demum moveatur planum abAB circa ab, donec c incidat: nascetur parallelepipedum, si ABCD parallelogrammum fuerit, in genere vero prisma rectilineum.

31122223. Si (in præcedentibus) e cuiusvis anguli vertice ad quodvis punctum a ibidem dictum recta cogitetur; vertaturque planum P circa latus quodvis, donec a incidat: nascitur pyramis rectilinea.

312. *Motus figurarum circa axem.*

31121. Quadrilateri rectanguli revolutio circa latus parit cylindrum rectangularem.

- 3122. Trianguli rectanguli revolutio circa cathetum parit *conum rectangularem*.
- 3123. Revolutio semicirculi circa diametrum parit *sphaeram*.
- 3124. Sectionum coni cum plano statim sequentium revolutiones pariunt *paraboloidem, ellipsoidem* et *hyperboloidem*.
- 3125. Motus plani circa axem, punctum aliquod formæ cuiuspiam earum quæ prodierunt, complectentem.
- 3131. Si coni verticales fuerint, oriuntur *sectiones conicae*.
- 3132. Forma secta etiam Cylinder aut
- 3133. Pyramis vel
- 3134. Prisma esse potest.
- 3135. Si forma hæc *sphaera* fuerit, et
- 31351. Plana per centrum eant: oritur in superficie sphæræ *triangulum sphæricum*; quæ e datis sufficientibus computare docet *Trigonometria sphærica*.
- 31352. Si planum quodvis tangat sphærā, aut aliter secet, atque plana omnia simul efficiant superficiem simplicem portionem spatii claudentem: inter hæc oriuntur etiam corpora aut *perfecte* aut *certo respectu regularia*.
- 32. Formæ quæ rectarum operationumque primitivarum numero certo generari nequeunt: ex. gr. si figuræ, quæ ita generari nequit, omnibus punctis rectæ ad idem punctum, vel ad eandem rectam parallelæ, cogitentur; et tanto magis si sectio formæ cuiuspiam cum complexu rectarum dictarum queratur, quod etiam *Perspectivæ* problema est, si figuræ vicem qualisvis forma subeat. Verbo omnes formæ, quæ motu e tribus aut pluribus composito, sive modo in arbore exposito per tres rectas perpendicularares, sive motu in quavis forma certa lege facto, generantur, una cum omnibus iis, quæ e compositione horum oriuntur, huc pertinent.

ELEMENTA GEOMETRIAE.

SECTIO I.

CONSPECTUS GEOMETRIAE GENERALIS.

E mundo externo, abstrahendo pervenitur ad conceptum *spatii puri*: nempe corpus experientia externa omnino simul cum loco eius datum cogitatione tollendo, manet locus, quem occupasse videtur, finisque intra quos erat; atque tum quærendo quid ultra fines illos sit, tollendo totum mundum experientia datum, et semper porro quærendo pervenitur ad noctem sanctam, quæ myriadibus lucernarum accensis Maiestatis Summæ præsentiam annunciat. In hac volvuntur innumeri orbes, expansis erga se invicem fraternis brachiis, et suspiriis undique tam gratorum, quam afflitorum pectorum, Patrem communem quærentibus — in hac fert mater tellus sub florido sinu dormientes gnatos ad auroram æternitatis — et in hac servatur omnis materia, nascunturque e germinibus mundi, vi mirifica vitali producti, crescunt, vivuntque, motum avitum nisi alio pellantur sequentes; atque intereunt, ut meteora fragoribus tempestatum in oceanum recidentes, novis initium daturi. At interno Geometræ oculo intuente, omnis quæ appetet mundi discordia, cuius magnum problema in concordiam resolvere mortis *aequatio* est, bellumque omnium quod videtur in omnes, cum stridore omni clamoreque orbium disparer, — ac iactatum e minacibus procellarum fluctibus, pacatus excipit noctis tranquillæ portus, luce Veritatis alma collistratus.

§. I.

Primus intuitus ostendit sequentia: spatium est *quantitas*, est *continuum*, *infinitum* *quaquaversum*, *aeternum*, *praesentibus semper partibus omnibus*, præterea *unum solum* est, et *immutable*, tam in se quam quoad quamvis partem, nisi quod alia in eo permutare partes eius nempe loca possint. Tempus quoque *quantitas*, *continuum* et *unum solum*, atque *infinitum*, sed nonnisi *utrinque* e quavis parte, quæ nonnisi *expers* adest, atque semper *alia* atque *alia* venit.

§. 2.

Intuitus ostendit porro sequentia: Spatii portionis cuiusvis finis tale continuum est, cuius dantur eiusmodi duo portiones, ut id, quod utriusque finibus commune est, continuum sit, et quidem tale, ut huius item dentur eiusmodi duo portiones, quarum finibus commune expers est.

Hinc

1. Pars eiusmodi expers spatii vocatur *punctum spatiale*, distinctum omnino a *puncto temporis*.

In quavis spatii parte dari punctum, et omnia spatii puncta æqualia esse item intuitu patet.

2. E continui prius orti portione et tum e continui posterius orti portione construuntur conceptus sequentes, combinatis eiusmodi portionibus:

I. Si continuum ex *A, B, ..., F* constet, et quodvis horum portio finis alicuius portionis spatii sit, dicitur *superficies*.

II. Si vero continuum ex *a, b, ..., k* constet, et quodvis horum portio finis alicuius superficie sit, dicitur *linea*.

III. Atque si continuum ex *α, β, ..., λ* constet, et horum quodvis aut superficies aut linea sit, dicitur *forma* sensu proprio.

IV. Si vero continua qualiavis *P* et *Q* fuerint e spatio, atque aliquid commune habuerint, tum si *I* complexus omnis eius, quod utriusque commune est, pars utriusque indivellibilis sit (Tom. I. pag. 23), dicitur *I sectio ipsorum P et Q se mutuo secantium*.

3. Interim superficies etiam eiusmodi continua pars indivellibilis spatii dici potest, cuius nulla portio linea est. Imo statim definito stabilitoque motu geometrico, linea etiam via puncti dici potest, et lineæ via quoque superficies est, sed non quævis superficies via lineæ est.

§. 3.

Redeundo e spatio in mundum externum unde segregatum erat, corpus idem in alio quoque loco videnti quæstio succurrit, *num loca eiusdem diversa æqualia sint?* Intuitus ostendit æqualia esse.

I. Hinc quum in quavis spatii portione cogitari corpus queat, *construitur* sine ulla virium consideratione pro quavis portione spatii *mobile* tale, quod cum ea coincidens ab ea diversum cogitatione quaquaversum libuerit in spatio ferri queat, nihil aliud e corporis externi qualitate retinens, nisi quod idem sub eodem tempore diversa loca occupare nequeat.

II. Cum ita constructo mobili iterum redditur in spatiū, formaturque *axioma congruentiae*. Nempe si posito mobili tali, idem diversis temporibus posset cum *A* et *B* coincidere, tum $A \doteq B$ esse intuitus ostendit.

At non cum quibusvis *A* et *B* *geometrice æqualibus* (de quo inferius) mobile idem coincidere potest: Ex. gr. si *A* et *B* cochleæ una ad dextram altera ad lævam, etsi alioquin æquales, sint; et innumeros casus tales dari patebit. At per Tom. I. pag. 12. Ax. V. certa cum determinazione talia *A* et *a* generabuntur, ut mobile idem diversis temporibus cum *a* et *B* coincidere queat.

Quando quidvis *P* moveri dicetur, semper tale mobile continuum intelligi debet, in quod incidit totum *P*, etiamsi complexus punctorum sit.

Si vero scribatur

$$A * B * C * \dots \doteq a * b * c * \dots,$$

intelligatur mobile in quod cadunt *A*, *B*, *C*, ... ita poni posse, ut *A* cum *a*, *B* cum *b*, *C* cum *c*, ... simul coincident.

Vivit magis, facilior evidentiorque fit Geometria motu dicto admisso, usique eo sunt *Archimedes Graecus et Britannus*; atque simulac triangulum unum superimponitur alteri, uti in Euclide, idem ubique admittendum sensu dicto est; reipsa enim spatii pars nulla locum sed rem eam tantum, quam sub certo temporis puncto capit, mutare potest. Prolixius tamen eadem sine motu quoque tradi possunt.

§. 4.

Interim post dicta ultro subvenit in determinationem conceptuum motum respicientium inquirere.

1. *Locus* ipsius A dicitur in spatio complexus omnis eius, cum quo aliquid ex A sub eodem punto temporis coincidit.
2. Quod sub quovis punto temporis T est, dicitur *semper esse sub T*.
3. Prodeunte quasi formula, quod M habeat locum L sub T , aut sub T locus L est *ipsius M*, succurrit quærere, quidnam sit, si per omnes combinationes transeundo substituatur ipsi M aliquid ex M , omne ex M , non omne ex M , nullum ex M , aut aliquid exclusive; ipsi T vero substituatur aliqua puncta temporis, omnia, nulla vel aliqua exclusive; atque ipsi L substituatur *idem, non idem*. Item quævis horum variis determinationibus afficiantur, atque casus constructi vario modo combinentur; at brevitatis gratia quædam tantum magis necessaria referenda sunt; notando ad sensum combinationum attendendum esse. Ex. gr. omni locus non *idem*, et non omni locus *idem*, haud æquivalent; nempe prius denotare potest, quod omni sit non *idem* locus, id est nulli sit locus *idem*.
4. *Omni ex M*, id est omni quod ex M est, *locus idem* in spatio semper sub tempore continuo T , *quies ipsius M sub T* dicitur.
5. *Alicuius ex M locus non idem* sub aliquibus punctis ipsius T , est *motus ipsius M*.
6. Motus sub quavis portione ipsius T eveniens, est *motus sub T*.
7. *Alicuius autem exclusive locus idem semper*, est vel *motus in loco*, ex. gr. sphæræ, si aliquod illud ipsum M sit, vel *compositio qui-*

etis et motus, nempe si aliquid quiescat moto M ; imo sphæra in loco sui moveri potest, quiescente centro tantum vel etiam diametro.

8. Si quid Q ex M moto hoc quiescat, dicitur M circa Q moveri.

9. Porro aliqua puncta ipsius T possunt certo modo determinata duo puncta quoque denotare.

a) Omni ex M locus idem duntaxat sub primo et ultimo puncto temporis alicuius, est *reditus perfectus*.

b) Ipsi M locus non idem sub certis punctis a et b ipsius T , parit conceptum sequentem: Si locus non idem sit, aut habet prior cum posteriore commune aut non; si nec quidquam aut utriusque indivellibile sit commune, dicitur M totaliter emotum.

c) Si pro quovis punto a ipsius T sit talis pars continua eius ipsum a complectens, ut sub nullis duobus punctis huius sit locus idem ipsius M , aut portionis ullius eius, tum M porro moveri dicitur.

§. 5.

Prima operatio motus intuitiva.

Variæ hinc exoriuntur quæstiones:

I. Potestne punctum p undevis moveri usquequo in quodvis datum spatii punctum M perveniat, et quidem ita, ut quidvis in quod cadit secum ferat? et p qualem viam describit?

Intuitus ostendit p, quidvis in quod cadit secum ferendo, via quaunque p cum M connectente, (imo innumerabilibus viis) moveri posse usque in M , et viam quamvis eius esse lineam.

Et hæc est *prima operatio motus intuitiva*.

Linea si e nullo eius punto duabus plures puncti viæ in ea dentur, dicitur *simplex*; et *superficies*, cuius nullarum trium portionum quarumvis binarum sectio eadem linea simplex datur, dicitur *simplex*.

Linea simplex dicitur *in se rediens*, si punctum in ea motum in locum primum ita redire queat, ut antea in nullo loco iam habitu fuerit.

Operatio secunda motus intuitiva.

II. Quæstio fit: num moto mobili aliquid ex eo quiescere possit? Num possit unum punctum quiescere, et duntaxat unum? num duo aut plura? et tum complexus omnis sub motu quiescentis qualisnam sit? qualis esse nequeat?

Quoad primum intuitus ostendit quodvis M , in quod p cadit, innumerabilibus viis posse circa p moveri, ita etiam, ut quodvis punctum a in M cadens (a p diversum) redeat.

Hinc passus ad omne parit superficiem sphæræ, nempe complexum omnis eiusmodi puncti b , ut $p * a \doteq p * b$.

Intuitus ostendit :

1. Complexum hunc esse superficiem, per quam spatium in duas portiones dispescitur, unam cum punto p interno undique clausam, et alteram circumcirca in infinitum exclusam, ipsam vero esse finem utriusque communem.

2. Nullum punctum posse ex una portione in aliam venire, nisi per finem communem transeat: quod deinde *extenditur ad quasvis duas portiones continui alicuius finem communem habentibus, si punctum in eodem continuo moveri oporteat.*

Potest sphæra dicta dici *sphaera puncti a, centro p*; atque puncta superficiei a centro *aequaliter distantia* dici possunt, distantia puncti p ab a per $a * p$ expressa (sensu pag. 3.)

Complexum punctorum omnium a centro *æqualiter distantium* superficiem esse, si non ipsum pro axiomate adsumatur, probari quoque potest: nempe si quid portionis spatii complectatur, id circumcirca adesse debet, et quidem sine ulla prominentia, quum id item ubique circumcirca fieri deberet; itaque duæ superficies essent exterior interiorque, centrum undique punctis omnibus *æquidistantibus* claudentes; quas diversas esse non posse item intuitu patet.

Operatio tertia motus intuitiva.

III. Sed sphæram consideranti ostendit porro intuitus, quod si puncta a, b, p in M cadant, atque ipsius b via detur circumcirca quoad $a * p$ æqualiter determinata: tum M ita moveri circa $a * p$ potest, ut viam dictam describat.

IV. At vero quæstio oritur:

1. Quomodo punctum eiusmodi b ostendi possit, cuius circumcirca $a * p$ via detur?

2. Num id quoque fieri possit, ut pro b nonnisi unum tale δ detur ut $a * p * b \doteq a * p * \delta$? et

3. Quidsi id quoque fieri possit, ut nullum tale δ detur, ut $a * p * b \doteq a * p * \delta$?

Atque hinc ipsi $a * p$ quidvis A substituendo, conceptus sequens oritur. Si non detur tale C diversum a B , ut $A * B \doteq A * C$, et quidem ut quovis puncto ipsius A in loco primo manente, C in locum non eundem cum B cadat, dicitur B *unicum ipsius A*. Si vero nec ullum punctum ipsius B aliorum cadere queat, dicitur B *ipsius A prorsus unicum*.

Facile animadvertisit A secum coincidere posse, etsi puncta non omnia loco priore maneant; ex. gr. si pro p centro sphæræ et a puncto superficie, denotetur $a * p$ per A , erit etiamsi p in a et a in p cadat, sphæra duplex unica ipsius A ; et nomen speciale huic casui quoque dari potest.

Interim quæstio etiam oritur, num $a * p \doteq p * a$? Intuitu ita esse patet.

Exempla.

Si a, b, c vertices trianguli sint, quidvis e spatio ipsius $a * b * c$ prorsus unicum est; superficies quæ revolutione lineæ cuiusdam circa duo puncta fit, horum unica, sed non prorsus unica est.

Si vero $ab = ac$, tum poterit $a * b * c$ secum etiam ita coincidere, ut a in se, b in c et c in b cadant, et si plani in quo triangulum est, una plaga α altera β dicatur, facies trianguli quæ ipsi α obversa erat, ipsi β obvertetur, et ipsi α quæ ipsi β obvertebatur; atque si punctum p in

plagam α cadat, et triangulum circa perpendiculararem ex a ad bc simul cum α verti concipiatur, dum α in β cadet, p quoque in β erit, et si in p' cadat, erit $a * b * c * p \doteq a * c * b * p'$. Idem patet etsi p in planum idem extra perpendiculararem dictam cadat; atque in omni casu unum adhuc dabitur punctum p' tale ut dictum est, nisi p in perpendiculararem dictam cadat: tum vero erit etiam $a * b * c * p \doteq a * c * b * p$.

§. 6.

Hinc passus ad omne fit: nempe complexum omnis puncti quod unicum punctorum a, b est, nempe rectam; quod item latius extensum, parit conceptum sequentem.

Illud e spatio, quod quorumvis duorum punctorum sui quodvis unicum punctum spatiale complectitur: dicitur *recta* si *linea* sit, *planum* si *superficies* sit; patebitque esse *spatium* quaquaversum infinitum, si *portionem spatii* complectatur; imo et recta planumque per hanc definitiōnem infinita exhibentur; at vero num dentur talia, quæstio fit. Inferius ostendetur, rectam per quævis duo puncta, planum per quævis tria puncta dari.

Cum definitio ista simul affinitatem plani cum recta exprimat, plures exactas quidem supprimere licet; aliqua tamen huius generis adferre fas est.

Forma certorum duorum punctorum unica, cuius pro omnibus punctis datur tale idem punctum p , ut pro quibusvis duobus punctis a et b formæ dictæ sit $p * a \doteq p * b$, est si linea sit *circulus*, si superficies sit *sphaera*.

Linea simplex certorum duorum punctorum unica est, si rediens sit, *circulus*, si non, *recta*.

Forma alicuius puncti unica est *sphaera*.

Elegans est plani definitio, quam Ioannes Bolyai Auctor Appendicis dedit, complexum omnis eiusmodi puncti p , ut pro certis duobus punctis a et b , iisdem pro omnibus p , sit $p * a \doteq p * b$, dicendo *planum*, sectionem duorum planorum vero *rectam*.

§. 7.

Prodeunte plano, in quod cadit a quovis puncto ad quodvis eiusdem ducta recta, campus simplicior clariorque aperitur, circumcirca expansus in infinitum, spatium in duo dimidia æqualia dividens, quamvis (ut inferius ostendetur) congruere manentibus omnibus dividentis punctis in suis locis nequeant. Huc idcirco mens e spatio quaquaversum infinito descensura, antea tamen in rectæ planique combinationes generaliter disquirit.

Quævis *A* et *B*, quorum quodvis aut rectam aut planum denotet, aut secant se, aut non: quæritur, num possint secare, et possint non secare? et si possint, quando id fiat? et sectio qualis sit?

Demonstrabitur pro dato quovis piano *P* et puncto *p* dari tam planum quam rectam ipsum *p* complectentia, ipsum *P* non secantia, etsi singula simul infinita accipientur; ita pro data recta *A* et quovis puncto *p* dari rectam *B* patebit ipsum *p* complectentem, quæ ipsam *A* non secet, etsi utraque infinita concipiatur; et quidem tam in illo plano, in quo *A* et *p* sunt, quam extra illud. Patebit porro per idem punctum innumera plana dari, et quorumvis planorum *P* et *Q* infinitorum punctum commune habentium sectionem rectam utrinque infinitam esse; ita per quodvis punctum rectas innumeratas dari, et quarumvis duarum rectarum aliquid commune habentium sectionem unum punctum esse.

At quæstio subvenit, num per *p* unum solum aut plura quoque plana diversa dentur planum *P* non secantia? Si nonnisi unum sit, tum et sectio plani illius solius *P'* atque plani *P*, per planum tertium *Q* (per rectam ex aliquo punto ipsius *P* ad aliquod ipsius *P'* ductam positum) facta, eiusmodi par rectarum producet, quæ in planum *Q* cadentes se invicem non secant, sed quævis alia per punctum *p* in eodem plano *Q* posita secat rectam ipsis *P* et *Q* communem; nam si non secaret, facile demonstratur et planum per rectam illam ex *p* positum dari, quod planum *P* non secaret. Atque tum Axioma XI. Euclidis constaret: sed de hoc plura inferius.

§. 8.

Hic prius plures rectas ex eodem puncto eentes combinando oritur conceptus sequens.

I. Si rectæ e puncto eodem p exeentes in forma quadam f (sive pars plani sit sive non) desinant: complexus rectarum omnium, quæ a p ad puncta formæ f sunt, dicitur *pyramis* sensu lato *basi f insistens*; quo etiam triangulum pertinet, si forma f recta sit.

Hinc porro, rectarum istarum quidem cuiusvis sua magnitudo determinata est: at rectis his quasi ex p acceptis, et complexu extremitatum earum pro obiecto considerationis posito, facile succurrit quærere, quid si omnes ex. gr. bis vel ter & longiores breviores essent? verbo ut quævis fiat $\frac{n}{m}$ -ta prioris? Atque hinc oritur conceptus sequens: notando quod per *plagam* k ipsius A intelligatur illa portio α continui A portionibus α et β constantis, in qua k est, posset si de α , excluso c quod ipsi α , β commune est, sermo sit, *regio* k ex c dici. Per *internum* continui vero intelligitur id quod ex eo est, nihil cum fine illius commune habens.

I. Si quidvis Q fuerit e spatio, cuius punctum quodvis generaliter Q dicatur, et sit pro omnibus Q idem punctum p et eadem quantitas β , atque accipiatur in omni quavis recta, a p per aliquod Q eunte, recta pq = $\beta \cdot pQ$, omni quovis q in ea rectæ pQ plaga in qua Q est accepto; tum complexus P omnis q dicitur *simile* ipsi Q; atque complexus quorumvis q complexui ipsorum Q illi q respondentium *homologum* audit. Hoc sensu igitur dari quoque similia patet.

Possunt etiam P et Q *similia* dici, si cuivis puncto cuiusvis ipsum P et Q respondeat certum alterius punctum, et cuivis alii aliud, atque detur quantitas β eadem pro omnibus talis, ut quævis puncta A, B fuerint ipsius P, iisque respondeant a, b ex Q, sit AB = $\beta \cdot ab$. Dari talia, si Axioma XI. Euclidis constiterit, per triangula ad p verticalia patet.

Aut: si quævis tria puncta A, B, C accipientur in P, iisque ut

dictum est respondeant a, b, c ex Q , atque anguli (de quibus inferius) $\mathfrak{ABC} = abc$, $\mathfrak{BAC} = bac$, et $\mathfrak{BCA} = bca$; tum pariter P et Q similia dici possunt, posito Axiomate XI. Euclidis.

Elegans est conceptus *similium*, quem Ioannes Bolyai *Appendicis Auctor* dedit. Si e punto eodem quounque p concipientur rectæ ad omne punctum ipsius Q : complexum extimarum omnium ex omnibus illis rectis, quæ a p ad punctum aliquod ipsius Q sunt, in infinitum productarum, *formam relativam* ipsius Q appellando, *similia* dixit P et Q , si cuivis formæ relativæ ipsius P detur forma aliqua relativa ipsius Q æqualis.

Quodvis autem horum per quodvis eorundem poni demonstrari potest, si Axioma XI. Euclidis constiterit.

2. Sed e prima definitione facile quæstio oritur: quid si omnia q in altera plaga (non ubi respondens Q est) accipientur? Hoc pacto quoque formas certo respectu similes prodire patet, si conceptum ita extendere libuerit; at etiam pro $\beta=1$ formæ tales verticales prodeunt, quæ aliquin certo respectu statim dicendo æquales, nunquam tamen congruere queunt, atque etiam compræsentes discerni præter locum quoque possunt. Ex. gr. Sit Q manus dextra; generabitur in plaga altera post p forma manu sinistræ congruens; si nimirum forma generata ita invertatur, ut quod supra erat infrorsum, et quod infra erat sursum veniat, prodibit imago quasi in speculo S per p posito facta, versione dicta circa perpendiculararem ex p ad speculum S usque ad duos rectos facta. Inteligitur autem hic per imaginem ipsius Q complexus punctorum omnium, quæ perpendicularares ex omnibus punctis ipsius Q ad planum S missas, in altera spatii plaga æqualiter continuatas terminant. Facile patet, versione dicta perpendicularares e punctis respondentibus quibusvis \mathfrak{A} et a ad S missas antea æquales, nunc in punto eodem ipsius S terminari. Sit nempe (Fig. I.) in plano speculi recta ad planum tabulæ perpendicularis ex p , sitque ipsius \mathfrak{DABC} punctum D supra tabulam, \mathfrak{ABC} in plano tabulæ, fiantque $ap = \mathfrak{Ap}$, $bp = \mathfrak{Bp}$, $cp = \mathfrak{Cp}$, et $dp = \mathfrak{Dp}$: erit manifesto d infra tabulam, et propter triangula verticalia æqualia erunt perpendicularares e literis nominis eiusdem ad planum speculi missæ æqua-

les: atque si schema literarum minorum circa \wp perpendicularem ad \wp per duorum rectorum intervallum vertatur, cadet m in M S , et d quoque supra tabulam e regione ipsi D erit.

Rem adhuc illustrat, si duarum cochlearum alioquin æqualium, una dextrorum altera sinistrorum torta sit, atque illa ad latus speculi, hæc coram teneatur; sinistræ imago erit cochlea dextra, quæ illi quæ ad latus tenetur, congruere poterit; ita imago manus dextræ manui sinistræ congruere poterit; sed manicæ manui dextræ congruentis superficies interior extrorum vertenda est, ut sinistræ congruat.

3. Unde etiam conceptus sequens oritur. Si A non omnia puncta in eodem plano habeat, neque complexus sit eiusmodi partium a et b , ut a et imago ipsius b compræsentes nonnisi per locum discerni queant: tum A et quodvis tale B , ut B et imago ipsius A compræsentes nonnisi per locum discerni queant, dicuntur *formæ contrarie æquales*. Nempe hæ sunt, quæ congruere nequeunt; quamvis per perpendicularares ex eiusdem plani iisdem punctis in utraque plaga æquales, resultata (per Ax. V. pag. 12, Tom. I.) operationum æqualium sint, præterquam quod unum in una, alterum in altera plaga generetur.

4. Unde item novus conceptus nascitur: nempe *geometrice æqualia* dici possunt A et B , si aliquod C possit cuivis aut ipsi aut imagini eius congruere.

5. Notandum autem est, et ad facies, quibus congruilibilia congruere queunt, attendendum esse. Ex. gr. trianguli non æquicruri imago cum ipso nonnisi faciebus e regione stantibus, aut faciebus aversis tegentibus se invicem congruere possunt. Dicantur ob conceptum faciliorem facies obversæ eiusdem coloris ex. gr. albi, aversæ nigri; facies alba albam, aut nigra nigram tegat necesse est, ut congruant: si vero parallelogrammi una facies alba altera nigra sit, tum triangula per diagonalem facta generaliter nonnisi ita congruunt, ut facies alba trianguli unius nigram alterius tegat. Circuli vero aut trianguli æquicruri imago, circa rectam bifariam dividentem ad duorum rectorum intervallum mota, nigram faciem albæ obvertens quoque congruere poterit.

Sed prius dicta illustrantur adhuc per sequentia. Si e trianguli punto

quovis fiant ad planum trianguli perpendicularares in utraque plaga æquales: tum formæ ipsius F dantur partes tales ut supra dictum est, nempe forma e triangulo et perpendiculari quæ in una plaga est constans, item forma ex eodem triangulo et perpendiculari altera constans tales sunt, ut complexus earum F sit, et una imagini alterius absolute æqualis sit; atque F cum imagine sua congruere quoque potest.

At si in una tantum plaga sit perpendicularis, nisi e perpendiculari triangulum æquicurum bifarium dividente erecta sit, hæc forma talibus duabus partibus ut dictum est, non gaudet; neque potest cum imagine sua congruere.

Sit item (Fig. 2.) ianua ABCD ; ad U , V sint cardines, EFGH sit sera prominens, quæ cum prominentia ipsius E ianuam claudit; sit imago huius $abcd$, et facies e regione stantes sint albæ, manifesto sera et imago eius prominens erga se invicem porrecta sunt, atque faciebus albis et AB ac ab congruentibus, sera et imago eius in plagas contrarias cadent; sed si ad FE et GH (supra et infra) omnia æqualia essent, adeoque darentur duæ partes ut dictum est: tum verso ipso $abcd$ circa if usque ad duos rectos, ut facies nigra imaginis faciei albæ obiecti obvertatur, prodibit dcba , cuius (simul cum sera, iuxta schema) facies nigra congruit albæ faciei ipsius ABCD . At si ad E sit aliquid ut supra, quod ad H non est, congruentia impossibilis est.

Cuiusvis animalis forma externa, in qua montrositas nulla est, ita a natura comparata est, ut gaudeat duabus eiusmodi partibus, ut supra dictum est; imo talibus ut una imago alterius esse possit, quasi ex uno plano in utraque plaga modo supra dicto æqualiter generata, geometricè sensu dicto æqualia essent.

Notandum autem est, inter omnes superficies solum planum esse, cuius quælibet facies alteri obversa hanc tegere queat; atque in sistente Euclideo planum solum cum sphæra in eo convenire, quod utrumque circa quodvis sui punctum in se moveri queat (inferius, '31351, §. 8) et solum discrimen esse, quod sphæræ quodvis punctum ab eodem certo æquidistet.

II. Rectis porro pluribus, imo innumerabilibus, punctum p commune

habentibus, in sectione præcedente ob oculos habitis, facile cogitatur rectam pP circa p moveri, et formam viæ eius considerare: inter vias eius possibles occurit etiam via rectæ pP circa p porro ita motæ ut redeat. Via talis aut erit in plano eodem tota, aut non.

1. Si prius: tum via cuiusvis puncti præter p vocatur *circulus*, et pars quævis continua eius, perimetrum intelligendo, dicitur *arcus*, recta vero quæ a p usque ad punctum est, de cuius via sermo est, *radius*, p *centrum*, et recta ab uno perimetri puncto ad aliud *chorda*, et si hæc per centrum eat *diameter*, pars plani inter arcum et chordam eius comprehensa *segmentum*, illa vero quæ inter arcum et radios per extremitates arcus ductos est, *sector* dicuntur.

Si vero (Fig. 3.) punctum ab a incipiendo in peripheria semper porro moveatur usque ad quodvis punctum f, et via v eius accipiatur positiva, si via supra *diametrum* ab (quæ *primaria* dicatur) incipiat, et negativa, si via infra ab incipiat; atque partes diametri dictæ e centro versus a positive versus b negative, et perpendiculares ad ab supra ab positive infra ab negative accipientur: dicitur distantia fm puncti f ab ab (id est perpendicularis ex f ad diametrum primarium) *sinus viae dictae v* ab a usque ad f, sive positive sive negative facta fuerit via, imo etsi punctum dictum semper porro motum quotiesvis iterum in a pervenerit, dummodo demum in f subsistat. Distantia cm centri vero a sinu vocatur *cosinus ipsius v*, distantia am initii a autem ab eodem sinu *sinusversus ipsius v* audit; $\frac{\sin. v}{\cos. v}$ autem pro radio = 1 dicitur *tangens ipsius v*, et $\frac{1}{\cos. v}$ *secans* audit. *Complementum* ipsius v dicitur talis arcus α , ut $\alpha+v=$ quadranti q, si ex. gr. v = 3q, erit $\alpha=-2q$. Insignitur autem sin. α , tang. α , sin. vers. α , sec. α nomine eodem relato ad v, nonnisi syllaba co præposita, nempe dicitur *cosinus v*, *cotangens v*, *cosinus versus v* &c, quasi diceretur *complementi sinus* &c; ut facile patebit et cosinus definitionem priorem cum hac convenire, uti et sinum versum dici potuisse 1 - cos.; atque suo loco omnes has *functiones trigonometricas* dictas geometrice exhiberi. Nomen sinus inde exortum est, quod semissis chordæ arcus dupli per s. ins. (idest *semassis inscriptae*) scribebatur.

2. Si non sit via rectæ prius dicta in eodem plano: tum facile cogi-

tatur, rectam motam saltem in plaga a plano certo per p posito eadem semper manere, donec porro mota redeat; dicatur via eiusmodi \vee forma ad p apicata, quum forma eiusmodi manifesto singularitate aliqua ad p gaudeat, quod vulgo sub nomine *apicis* venit.

3. Tum facile succurrit lineam aliquam simplicem considerare, cuius nonnisi punctum unum, et quidem internum, in \vee et plane in p cadit, omnia alia puncta vero in plagam spatii ex \vee ab ea in qua planum est diversam cadant; et lineam illam in superficie aliqua, et demum in plano sitam considerare, et hinc conceptum sequentem generaliorem construere.

4. Si k aut punctum internum lineae talis l, quae portio formae F est, aut linea talis sit, cuius punctum quodvis internum p, internum etiam est lineae alicuius L in plano sitae, et simul non in illo plano sitae portioni alicui formae F communis; atque in casu priore linea l puncto k in p cadente, in posteriore vero linea L puncto p in p cadente, in plagam respectu formae alicuius ad p apicatae interiorem cadat: tum dicitur F ad k angulum habere, nempe forma illa, qua F ex k incipit, *angulus* vocatur.

Facile videtur, angulos esse posse in lineis, in superficiebus, necnon in continuo e linea et superficie composito.

5. Quæstio autem fit: num recta A e punto interno i rectæ B ducta angulos faciat? et quot angulos efficiat recta A continuata per i? num aliqui eorum sint æquales, et qui sint ii? Facile patebit verticales dictos esse semper æquales; si vero singuli quatuor qui efficientur sint inter se æquales, aut recta A per i non continuata efficiat duos angulos æquales, vocatur quilibet eorum *rectus*. Fit vero *angulus* per duas rectas factus, *rectilineus* dictus, *quantitas respectiva* (Tom. I. pag. 25) divisione arcus, ex anguli apice tanquam centro, radio quovis ab una duarum rectarum usque ad alteram ducti, per peripheriam totam radii eiusdem; si quoti hi sint pro duobus angulis æquales, et formas angulares congruentes incipere demonstrabitur; si vero quotus q sit pro angulo α , et Q pro angulo β , atque $q = \mu Q$, tum α dicitur angulus μ -tus anguli β (Tom. I. pag. 48). Duorum planorum angulus autem fit plus anguli β (Tom. I. pag. 48).

quantitas respectiva, arcu illo per suam peripheriam diviso, qui uno eorum circa sectionem usque in alterum moto per quodvis punctum describitur; eundem quotum prodire patebit.

Angulus rectæ ab cum piano vero fit quantitas respectiva dividendo arcum illum per suam peripheriam, quo in superficie sphæræ centri a, in quo sectio est, et radii ab, ex b usque ad planum, cum radio ab nullus minor datur. Denotatur angulus per \wedge .

6. Passus hinc est cogitare, quid si forma aliqua ad nullum sui punctum angulo gaudeat? dicatur *forma eiusmodi fluens*; quæ item facile cum quantitate combinatur; oriturque conceptus formæ, quæ et fluens et quantitas est; et dici *forma eiusmodi uniformis* potest. Ex. gr. recta, circulus, helix, planum, superficies sphæræ, cylindri.

7. Ita facile conceptus formæ fluentis etiam cum exclusione rectæ planique componitur: oriturque forma fluens, cuius nulla portio recta aut planum est, et dicitur *forma eiusmodi curva*.

8. Porro ad compositionem *curvae* cum recta planove itur, quærendo num continuum e forma curva et recta planove forma fluens esse queat? oriturque conceptus *tangentis*.

Nempe *formam curvam F in punto p tangere* dicitur tam una recta eiusmodi, quam complexus omnium talium rectarum, ut cuiusvis earum detur tale punctum internum p in F cadens, ut aliqua portio ex p incipiens cum linea aliqua in F sita ex p incipiente forma fluens sit. Complexus omnium talium rectarum, sive una tantum sive plures sint, dicitur *tangens totalis*.

Ex. gr. Sphæram potest tangere recta, sed tangens totalis planum est, uti circuli recta.

Hinc facile in discrimen tangentium totalium in diversis formæ eiusdem F punctis quæritur: atque si tale k detur in F, ut tangentium totalium, quæ ad omnia puncta ipsius k sunt, complexus ipsa tangens totalis ad p sit, tum tangens eadem dicitur formam F non in p solum, sed etiam in k tangere. Ex. gr. planum idem tangere cylindrum in recta et quovis punto huius potest.

Imo hinc extenditur conceptus, dicendo etiam *formas fluentes quas-*

vis F et f tangere se invicem in k , si in quovis puncto ipsius k tangentे totali tam F quam f eadem gaudeant.

Hinc etiam oriuntur conceptus supra (Tom. I. pag. 290) dicti.

9. Porro conceptus tangentis totalis facile cum conceptu anguli recti paulo antea dicti combinatur, oriturque *conceptus generalis perpendicularitatis*.

Nempe si T tangens totalis formæ F in puncto p sit, atque recta r in p terminata, cum quavis recta in T sita ac in p terminata, angulum rectum faciat: dicitur r etiam utvis continuata tam ad T quam ad F in vel ex p perpendicularis, si recta eiusmodi utrinque infinita, in quam talis r cadit, sola tantum sit etiam pro tali superficie formam F complecente, cuius tangens totalis ad p planum est. Denotatur autem perpendicularis A ad B per $A \perp B$.

Extenditur idem generalius quoque ad k , sive punctum sive linea sit: nempe si e quovis puncto ipsius k detur eiusmodi perpendicularis ut dictum est, complexus omnium eiusmodi perpendicularium ad F ex omnibus punctis ipsius k , dicitur *perpendicularis ad F in vel ex k.*

III. Demum rectis ex eodem punto p ad omnia puncta formæ cuiuspiam f consideratis, facile succurrit unius earum plagam in qua p est continuare in infinitum, atque punctum p semper porro mouere, apice pyramidis abeunte in infinitum; atque tum quererere, num angulus ad apicem rectæ alicuius decrescat? et si decrescant omnes, num omnes tendant ad o ? Patebit ita esse, darique pro quavis rectarum dictarum rectam in qua, recta cuius una extremitas p altera q in f est circa q per rectam dictam porro mota, hanc prima vice deserat; imo omnes eas rectas punctum p commune habentes eo modo rectam eandem omnes simul prima vice deserere posse, fierique omnes simul infinitas.

1. Tum ultro venit omnes finitas magnitudinis eiusdem reddere, et complexui earum nomen dare. Dici potest hoc *prisma* sensu generali. Complexu extremitatum, in quibus rectæ æquales initium in f habentes terminantur, F dicto: patet cuivis puncto cuiusvis ipsorum F et f alterius certum punctum, nempe extremitatem rectæ alteram, respondere; et cuivis alii aliud.

Ex. gr. Si forma f recta r sit, orietur figura in plano sita (ut infra patebit) duabus rectis extimis, recta r , et complexu c punctorum, in quibus terminantur rectæ ex omnibus punctis ipsius r rectam dictam eandem prima vice non secantes, clausa: at quæritur, c qualenam sit? et anguli, quos rectæ dictæ æquales cum r versus eandem plagam faciunt, sintne æquales?

Unde item passus est cogitare, quid si æquales essent? et patet, quod si recta r moveatur in se rectam extimam in eodem plano secum ferendo, donec initium ipsius r in finem perveniat, extremitatis rectæ extimæ via gaudebit qualitate, quæ de F dicta est, præterquam quod non constet rectas dictas omnes se invicem modo priore prima vice non secantes esse. Atque hinc conceptus sequens oritur: si formarum F et f cuiusvis, puncto cuivis respondeat certum punctum alterius, et cuivis alii respondeat aliud, atque rectæ inter puncta correspondentia æquales, et quævis binæ in eodem plano sint, neque etsi infinitæ sint secent se invicem: dicitur complexus rectarum illarum omnium *prisma* generalius.

2. Interim via extremitatis lineæ extimæ plane dictæ novum conceptum parit: nempe pro angulo quem ea cum r facit, facile rectus ponitur; et manifesto si (Fig. 4.) $\delta c \perp ab$, et $ac = cb$, sive ad dextram sive ad lævam moveatur δcab , recta ab in se et δc in eodem plano manente, ob generationes utrinque et undevis æquales (Tom. I. pag. 12. V) describet δ lineam uniformem, angulos utrinque et ubique æquales cum δc facientem; (angulum esse infra patebit). Dicatur via hæc ipsius δ , sive continuata sit in infinitum, sive pars quævis continua eius accipiatur, *aequifluens* ipsius ab ad distantiam cd . Est vero linea hæc recta, si Axioma XI. Euclidis constet, et constat hoc, si illa recta sit; de quo infra.

3. Hinc facile cogitatur rectam ab alicubi terminari, ibique aliam incipere, sive in eodem plano priore, sive in alio; et ubi hæc terminatur, item aliam incipere, atque cuique harum *aequifluentem* ad distantiam eandem cd dare, continuando idem donec libuerit. Denotentur rectæ dictæ per literas maiores, et earum *aequifuentes* per minores nominis

eiusdem; nempe sit linea $\overline{ABCD} \dots$ e rectis \overline{AB} , \overline{BC} , \overline{CD} , ... composita, et ab , bc sint rectarum \overline{AB} , \overline{BC} æquifluentes in b secantes se invicem \S .

Quæstio oritur num B et b in plagam plani \overline{ABab} respectu rectæ \overline{Ab} eandem cadant? atque si generaliter ponatur, quod si quævis litera magna H et parva h fuerit, \overline{HJ} et \overline{Ji} in plagam plani \overline{HJhi} respectu rectæ \overline{Hh} eandem cadant; dicuntur linea $\overline{ABCD} \dots$ e rectis composita, et linea $abcd \dots$, *lineae primario aequesitae*.

4. Unde iterum generalior conceptus oritur: nempe quæcunque lineæ simplices L et l dicuntur *generaliter aequesitae*, si pro utvis parva recta k dentur lineæ L' et l' primario aequesitæ tales, ut cuiusvis ipsarum L et L' punctum quodvis aut in alteram cadat, aut detur ab illo ad aliquod punctum lineæ alterius recta $< k$; ita cuiusvis linearum l et l' punctum quodvis aut in alteram cadat, aut detur ab illo ad punctum aliquod lineæ alterius recta $< k$.

5. Atque hinc demum oritur generalis conceptus *parallelismi* formarum F et f ; si e cuiusvis formarum F et f ex. gr. ipsius F quovis punto P ductis in F quibusvis et quotvis lineis simplicibus nihil præter P commune habentibus, e certo punto p ipsius f iis aequesitæ reperiantur eodem ordine se invicem excipientes, nihil præter p commune habentes.

Aut brevius: si cuivis lineæ simplici in quamvis ipsorum F et f cadieni detur aequesita in altero, dicuntur F et f *parallelæ*.

Sensu latissimo dicitur etiam quævis pars continua ipsius f *parallelæ* ipsi F , si f et F parallelæ fuerint. Denotatur parallelismus ipsorum F et f per $F \parallel f$.

Num vero recta alteram primo non secans (pag. 17) huic parallelæ sit, aut num detur recta rectæ parallelæ, a decisione Axiomatis Euclidei undecimi pendet; de quo inferius.

Notandum autem etiam alium parallelismum distingui posse: si nempe in definitione aequesitorum, pro quævis litera magna H et parva h , recta \overline{HJ} et eius aequifluens in diversas plani dicti plagas cadant, quo in casu lineæ $\overline{ABCD} \dots$ et $abcd \dots$ *inverse aequesitæ*, atque inde

parallelae inversae dici possunt, prioribus *directis* dictis; et tum conceptus *aequesitorum* quam *parallelorum* extendi generalius potest, si *aequesita* dicantur, dum quævis $\text{H}\mathfrak{J}$ et hi aut simul in eandem plagam plani dicti aut quævis simul in diversas eiusdem plagas cadant.

(Fig. 5.) exhibet exemplum simplicissimum, unde conceptus nascitur pro linea $\text{ABCD} \dots$ in plano sita, ita (Fig. 6.) parallelismi inversi; patet etiam formas parallelas tales dari, quæ se invicem secant.

§. 9.

Post hæc, cum disquisitiones istæ, quæ mentem in planum descendenterem retinebant, ipsæ indigitent plura adhuc subsidia desiderari, ut penitus intelligantur: ea in simplicioribus quærrens descendit in planum. Ubi

1. Obviam venit, puncti vias in campo infinito innumerabiles dari, occurritque præter rectam aliaque, etiam linea simplex in se rediens; quæ in quacunque superficie simplici fuerit, *figura* dicitur; et in plano quoque curva varii generis, quo pertinet etiam circulus per operationem motus intuitivam secundam via ad planum restricta, aut mere e rectis composita aut mixta esse potest. Si e tribus rectis componatur, *triangulum*, si e quatuor rectis constet in plano, *quadrilaterum* audit; ita si ex n rectis composita sit, n latera *figura rectilinea plana* dicitur; si vero latera æqualia sint, *aequilatera*, si anguli æquales *aequiangula*; si et latera et anguli æqualia sint, *regularis* dicitur, et figura quatuor laterum dicitur *quadratum*, si plura fuerint latera, *polygonum regulare* tot laterum dicitur quot latera habet.

2. At vero etsi constaret inter quævis duo puncta dari rectam, eamque totam in idem planum cadere, atque e quovis puncto plani radio quovis dari circulum in planum idem cadentem totum; quæ tamen et ipsa adhuc inferius demonstranda erunt: quæstio ultro suboritur, num dentur in præcedentibus dicta? et num rectarum circulorumque certo numero ea adesse demonstrari queat?

Id quod certo rectarum circulorumque numero determinatur, dicitur *geometrice construi posse*.

Per *geometrica constructione perficere aliquid*, quod in ita dicto *problemate enunciatur*, intelligi solet: id numerabilibus eiusmodi operationibus peragere, quarum quævis est rectam ducere aut circulum describere; quod omnino tam rectam ducendo, quam circulum describendo, motum sapit, in ipso Euclide quoque; quamvis exemplar constructionis geometricæ exhibeat, absque eo, ut eam ullibi definiat (ut linguam vivam bene loquentes regulas Grammaticæ subtacent); at tanto magis commentator eius statim apud secundam propositionem (ubi puncto p et recta r positione datis, recta in eodem plano ex p ipsi r æqualis determinanda est) constructionis geometricæ ideam dare debet, ut genius Euclidis percipiatur. Requiritur nempe ad hoc perficiendum numerus 7. Omnibus immotis fit hoc, et quamvis facile possit extremitas ipsius r ipsam r in plano secum ferendo (per operationem motus primam intuitivam ad planum restrictam) usque in p moveri, aliquid valde pulchri habet propter fidelem ideæ constructionis geometricæ, quam sibi Euclides proposuit, executionem.

Interim in numerum finitum dictum admitti etiam dicta operatio motus prima potest; ut si quid suppositis rectis, quas inter quævis duo puncta adesse demonstrabitur inferius, fiat numero finito operationum, quarum quævis aut prima aut secunda operatio motus intuitiva est, via et generatis ad planum restrictis, nec plures operationes coniungantur, id est in *M* moto interea aliud quid haud moveatur: id *geometricæ construi* dicatur, et quidem *sensu stricto*; si vero non restringatur ad planum, admissa operatione tertia quoque, *constructio geometrica sensu lato* dicatur.

3. Quamquam autem et veritates æqua dignitate polleant (ut in natura sol, orbium dies, et noctilucæ exigua luminis in vasta nocte sphæra, eadem sapientia infinita radiant): *Geometria* quæ *elementaris* dicitur, *sensu lato* in iis, quæ sensu lato geometricæ construi possunt, et *sensu stricto* in iis, quæ sensu stricto geometricæ construi possunt, terminari potest iis, quæ non nisi operationibus coniunctis fieri possunt, ditioni, quæ *Geometria sublimior* dici solet, assignatis; uti inferius pluribus exemplis ostendetur.

§. 10.

Post descensum e spatio quaquaversum infinito in campum circumcirca in plano infinitum apertum : disquiritur ibidem in qualitates formarum, prius quarum omnia puncta, tum earum quarum non omnia quidem sed quodvis geometrice sensu stricto construi possunt, et demum illarum, quarum quodvis punctum ope formarum priorum construi potest. Considerantur autem prius omnimodæ combinationes rectarum et circulorum, prouti arbor inferius ostendet. Denique applicata Arithmetica e datis quantitates ignotæ quæruntur, quo etiam *Trigonometria plana* pertinet, docens e quibusvis triangulum rectilineum determinantibus quantitates per idem triangulum determinatas ope calculi computare.

Datur quidem (in paragrapho sequente) etiam *Trigonometria sphærica* : nempe triangula quæ in superficie sphæræ per tria plana per centrum posita generantur, suo loco etiam computantur. Estque planum quasi limes geometricus, cuius idea facile determinatur, superficie sphæræ, centro remoto in infinitum, posita Axiomatis XI. Euclidis veritate ; secus autem alia quædam superficies uniformis circumcirca infinita est limes geometricus dictus, in qua Axioma XI. Euclidis, simul cum tota Planimetria Euclidea, demonstratur in Appendice ; Trigonometria sphærica autem a veritate Axiomatis XI. Euclidis independenter absolute vera stabilita ibidem est.

§. 11.

Dein reditur in abyssum spatii, unde in planum descensum erat : atque ibi formarum omnium quæ in plano prodierunt, combinationes iuxta arborem exponendam omnimodæ considerantur, construunturque ea, quæ sensu lato geometrice construi possunt, atque applicata Arithmetica computantur.

§. 12.

Denique coniunctio operationum, cuius superius mentio facta est, sequitur coronam arboris constituens ; omniaque spatii puncta, et quo-

rumvis complexus hoc pacto ad unum aliquod certum spatii punctum fixum revocantur.

Ex. gr.

1. Moveatur recta A circa punctum suum aliquod a in plano P semper porro, ita ut punctum b ipsius A percurrat peripheriam radii ab toties quoties libuerit; dicaturque nomine generali u longitudine viæ puncti b : interea autem moveatur punctum aliquod c e certo puncto ipsius A in ipsa eadem recta mota A certa lege, ut nempe y dicta via puncti c in A , sit $y = f(u)$; quæritur dato $f(u)$ via ipsius c in plano?

2. Ita si recta p moveatur in recta eadem continuata, circulum centri p radii p secum ferendo in eodem plano, ita ut interea punctum certum peripheriae in ipsa peripheria certa lege moveatur, ut sit nimirum via eius $= F(x)$ pro x denotante viam puncti p in recta dicta. Ex. gr. si $F(x) = x$, describi cyclois (ut Tom. I. pag. 356) poterit, si punctum motum b fuerit.

3. Ita potest p , centrum circuli C , in peripheria circuli alicius moveri, circulum C circa centrum interea certa lege motum in eodem plano secum ferendo; et via puncti certi peripheriae ipsius C quæri. Imo etiam circulus, in cuius peripheria p est, interea lege certa moveri potest.

4. Aut si planum P circa rectam certam A in P cadentem moveatur semper porro: viæ, quam certum aliquod punctum p ipsius P describit, longitudine generaliter u dicta; et moveatur interea certa lege punctum b ipsius A in A , perpendiculari B ad A in P secum ferens, distantia ipsius b a certo punto determinato a in A (eodem pro omnibus b) generaliter x dicta; atque moveatur interea punctum c ipsius B certa lege in B , recta cb (quocunque perveniat c) generaliter y dicta; nempe ut sit

$$x = a(u) \quad \text{et} \quad y = b(x);$$

quæritur via puncti c in spatio?

Manifesto per u , x , y quodvis spatii punctum p determinari potest: demissa enim ex p ad A perpendiculari, hæc erit y aut in a aut in plagam

inde aliquam cadens, et verso circa A plano P donec ad p perveniat, eousque p certam viam u describere potest.

5. Ita si certum punctum a rectæ A in P immobile cadentis fixum sit; atque e certo punto b ipsius A sit B perpendicularis ad A in eodem plano P , et e certo punto c ipsius B sit C perpendicularis ad planum P ; atque dum punctum b movetur porro in A , perpendicularrem B ad A in plano P secum ferens, interea moveatur certa lege punctum c in B , rectam C ad planum P semper perpendicularem secum ferens; atque interea in hac ipsa C quoque moveatur punctum δ lege certa: quæritur pro datis huius compositionis motus (non virium) legibus, via puncti δ in spatio? Si ex. gr. ab generaliter x , bc generaliter y , et cd generaliter z dicantur, atque x , y , z semper ut coordinatas simultaneas intelligendo y sit $=\alpha(x)$, et $z=\beta(y)$; manifesto quodvis spatii punctum p per x , y , z determinatur; nempe ex p ad P missa perpendicularis z dici potest, et e punto illo ipsius P , in quod perpendicularis dicta cadit, ad A missa perpendicularis y , et recta inde usque ad a dici x potest. Possuntque præterea tam x quam y et z et positive et negative accipi; nempe x ab a inciendo in una plaga rectæ A positive, in altera negative, ita ordinatæ y ex A inciendo in una plani P plaga positive et negative in altera, atque ordinatæ z ad planum P perpendiculares e P inciendo in una spatii plaga positive et negative in altera accipi possunt. Nimirum ex tomo I. pag. 28 determinationes, quibus rectæ in recta aliqua (pro certo punto eius fixo, atque certa conditione C accipendi resultati) positivæ a negativis distinguuntur, patent: ita perpendiculares ad rectam A fiunt positivæ aliæ, aliæ negativæ, si pro extremo ibidem dicto rectæ cuiusvis ad A perpendicularis, accipiatur parallela per id ad A in P ducta, atque in hanc ponatur initium priorem excipientis; et pro resultato accipiatur distantia ab A extremi rectæ ad A perpendicularis postremo positæ. Ita perpendiculares ad P aliæ positivæ aliæ negativæ fiunt, si per cuiusvis extremum ad P superficies parallela (pag. 19) ducatur, in qua recta priorem exciens incipiat, et pro resultato distantia a P extremi rectæ ad P perpendicularis postremo positæ accipiatur.

6. Potest etiam punctum b in recta A motum planum aliquod Q ad A perpendicularare secum ferre, ita ut interea in Q motus sequens concipiatur; sit s sectio plani Q cum certo plano fixo P , in quod recta A cadit, et moveantur certa puncta in certis perpendicularibus ad s in Q cadentibus, prout omnia per x , nempe distantiam a puncto fixo a ipsis A puncti b in recta A moti, lege certa determinantur: atque data hac lege, complexus locorum, in quibus puncta in perpendicularibus dictis mota ab initio motus sub punctis temporis expertibus omnibus sunt, qualisnam sit, quæri potest. Patet hoc pacto non lineam tantum, sed superficiem quoque prodire, quum hæc complexus sectionum plani moti Q cum ea esse queat.

Imo possunt motus plures quoque vario modo componi, atque campus disquisitionum protendi.

§. 13.

Notandum autem est, formas omnes, qualesvis prodierint lineæ aut superficies, dum arithmeticè considerantur, in quantitates respectivas et quidem ad formam temporis reductas (Tom. I. pag 27) mutandas esse modo sequente.

Pro quavis linea simplici L , cuius nulla pars recta est, intelligatur recta r ; si quavis linea simplici e rectis composita, cuius extrema in extrema ipsius L , et puncta quævis ad quæ angulum habet, in L cadunt, l dicta: quævis l sit $< r$, sed pro quovis ω detur tale l , ut $r - l < \omega$ sit.

Ita pro quavis superficie simplici S , cuius nulla pars planum est, intelligatur illud rectangulum (Tom. I. pag. 288), quod limes talis superficie simplicis e planis rectilineis, ex. gr. triangulis, compositæ est, apicem cuiusvis anguli in S habentis: ut superficie eiusmodi ut dictum est, limes alius eo maior non detur.

Hoc pacto omnes lineæ ad formam rectæ, ita omnes superficies ad formam rectanguli altitudinis eiusdem reductæ (Tom. I. pag. 27) comparari arithmeticè poterunt.

§. 14.

Recta cum omnibus eius proprietatibus primariis simul cum plano axiomatice supponi solent; at quæritur, num ea pro axiomatibus adsumi possint? Conceptus temporis quidem ad spatium translatus rectam perperisse videri potest; attamen tropicam istam rei tam diversæ translationem, externam adiuuisse experientiam indigitant tam definitiones, qualis Platonis est a lumine petita, *rectam* dicentis lineam cuius punctum primum reliqua obumbrat, quam quæ a punto e certo loco alium pertinente est, observato tempore fatigioque minimo: nihil tamen magis ad rectam perduxit, quam reflexio ad omne id, quod e corpore quiescentibus duobus punctis eiusdem moto quiescit. Si quid pro axiome adsumi nequeat, illud e quo deduci potest, id implicite continere debet. Adsunmere itaque ea, ut fieri solet, aut sequente modo deducere, ius fasque cuique est. Spatii quaquaversum infiniti filia primogenita est *punctum*, dein *sphaera*, media quasi inter duo extrema. Sphæræ autem linea primogenita *circulus* est, dein *recta*; atque demum *circulus* cum *recta* parit *planum*.

1. Pro fundamento lineæ uniformis simplicis in se redeuntis, quam circulum esse patebit, positum est (pag. 7); pro rectæ construendæ fundamento ponitur sequens. Si *M* portio spatii circa duo sui puncta revolvatur (pag. 7): idem *M* circa eadem duo puncta undevis æqualiter moveri, atque uno solo quoad viam cuiusvis sui puncti modo revolvi potest.

2. Hinc quiescentibus punctis *a*, *b*, omnia talia puncta ipsius *M*, quorum quodvis circa *a***b* moveri (iuxta pag. 7) potest, movebuntur etiam simul circa *a***b*, si quod eorum moveatur: et quidem omnia viis iisdem movebuntur porro usque ad redditum, quas singula percurrenter.

Atque hinc etiam nullum punctum ipsius *M* ex ullo loco p' duabus viis, una qua ex p' moveri incipit, altera qua redit, plures habet, quibus motum circa *a***b* incipere potest. Nam sint ex eodem punto tres rami *α*, *β*, *γ*, in quorum quovis punctum ex p' moveri quiescente *a***b* possit, moveaturque in uno casu punctum ex p' in ramo *α* incipiendo et per *β*

redeundo: ramus γ tum haud potuit percurri, nam incipiendo per α aut redeundo per β , punctum idem simul lineam qua ramus γ ex p incipit describere nequit; nec antea percurri γ potuit, nam tum punctum porro motum iam antea rediisset. Cogitetur iam schema totum ita poni, ut punctum quod antea in p erat, extra lineam simplicem redeuntem priorem in γ cadat, simul a in a et b in b cadentibus: manifesto motus idem circa $a * b$ locum haberet (per 1), sed idem punctum annulum a priore diversum describeret (contra 1).

3. Sit iam (Fig. 7.) sphæra S centro C cum punto c , dicaturque superficies eius S' , et fiat sphæra s e centro c cum punto C , huius superficie s' dicta: facile patet, nec totam sphærā s in S , nec totam S in s cadere; nam si ex. gr. tota S in s caderet, centrum C in superficie s' nudum haud inclusum maneret. Habet igitur tam s' aliquid extra S , quam S' aliquid extra s . Hinc autem necessario ipsis S' et s' aliquid commune est; nam punctum e quovis punto eius quod ex s extra S cadit, usque in C veniens per S' transire debet (pag. 6). Ita si punctum e quovis punto ipsius S' extra s cadente in ipso S' usque in c veniat, nisi c circumcirca in S' ininterupte cingatur, punctum dictum e loco extra sphærā s ad centrum eius absque transitu per s' venire posset.

Exit igitur s' ex S' circumcirca c , idque manifesto generatione circumcirca æquali: adeo ut (pag. 7) quodvis exitus punctum p , sphæra S circa $c * C$ mota, viam simplicem in se redeuntem uniformem describere possit.

Idem de quavis sphæra centri eiusdem c tali, quæ priori interior est, patet; etsi cogitentur sphæræ omnes interiores usque ad centrum commune c , et annuli in S' se invicem semper interius usque ad c eundo excipient. Dicantur eiusmodi lineæ uniformes simplices in se redeentes, quos circulos esse nondum constat, *annuli*, et nomen eorum generale sit A .

Imo idem de quavis sphæra centri eiusdem c cum punto quovis i intra superficiem S' cadente facta patet. Nam tum superficies S' tota in sphærā novam cadere nequit; namque i intra S' cadens in superficie sphæræ novæ esse non posset. Unde reliqua fluunt.

4. Atque hinc manifesto punctum e cuiusvis A punto quovis δ intra annulum eundem A usque in c in superficie S' ita moveri cogitari potest, ut semper in superficiem sphæricam centri c interiorem veniat, et in nulla uno plura puncta habeat, atque mota sphæra circa $c * \mathbb{C}$, annulis descriptis linea dicta l circa c in S' porro moveatur, donec redeat. Nempe punctum dictum in quovis loco ubi sphæra centri c , sive ipsa s sive interior, ex S' exit, annulo circa $c * \mathbb{C}$ gaudet per præcedentia; adeoque omnia quoque simul moveri quiescente $c * \mathbb{C}$ possunt.

5. Atque hinc, propter generationem superficie sphæricæ circumcirca æqualem, e quovis punto f ipsius S' datur linea l' priori l æqualis; atque l' circa f in S' moveri potest donec redeat, annulos concentricos prioribus æquales describendo.

Imo quum de sphæris S et s demonstrata de quavis alia quoque valeant: pro cuiusvis sphæræ superficie datur linea, quæ circa quodvis punctum superficie dictæ in ea moveri potest, donec redeat, annulos concentricos undevis æqualiter describendo.

6. Dari dimidia annuli eiusmodi ut dictum est, lineæ simplicis in se redeuntis, duo puncta communia habentia, uti cuiusvis partis continuæ eius duo dimidia punctum commune habentia dari patet sic. Concipiantur ex annuli punto quovis duo puncta moveri in eo porro usque ad redditum, temporibus quibusvis æqualibus vias æquales describendo, easque ex eodem punto diversas sed simul incipiendo: utrumque per alterum transire debet; atque ubi hoc fit, viæ utriusque æquales erunt; ita ex arcus cuiusvis extremitatibus æqualiter motis punctis, priusquam quodvis in alteram extremitatem perveniat, occurret puncto alteri, et ibi dimidium arcus erit (Tom. I. pag. 12. V. et Tom. II. pag. 6).

7. Accipiatur iam ex 4. (Fig. 7.) punctum quodvis f in primo annulo A (Fig. 8.) punctum c cingente pro centro; et linea prior $l = fc$, cuius una extremitas in c altera in f sit, moveatur circa f in S' donec redeat: manifesto pars viæ cuiusvis puncti ipsius l cadet ab annulo in unam ipsius S' plagam, altera in alteram; nam ut centrum f claudatur ab annulo per punctum quodvis σ descripto, necesse est punctum eius aliquod p extra segmentum ipsius S' illud, in quo c est, cadere; atque hinc via

usque in \circ per A transire debet, et quidem in duobus saltem punctis a f ad extremitates arcuum utrinque æqualium; nam annulus dictus cum annulo A unum solum punctum commune habere nequit; nam tum ex hoc punto usque ad f aut linea simplex esset, aut non; et in neutro casu esset annulus dictus linea simplex rediens. Erunt igitur annuli huius transitus per annulum A ipsi f proximi duo supra dicti.

Accipiantur porro quorumvis arcuum ab A in plagam non c (id est illam in quam non cadit c), meditullia (per 6); atque tum fiat idem centro in meditullium arcus illius posito, qui ab annulo (centro f per extremitatem lineæ fc in S' descripto) e duobus punctis ipsius A ipsi f proximis in plagam non c ipsius S' cadit; atque idem continuetur in infinitum; nempe casus idem redit semper, nisi quod centrum in primo A ubivis eligere liceat, postea vero in quovis novissimo A arcus extimi meditullium pro centro accipiatur, et idem repetatur in infinitum.

Complexus omnium eiusmodi meditulliorum continuum, imo linea simplex est, ut statim patebit. Insistit autem linea hæc primo annulo utrinque æqualiter; atque e quovis punto annuli eiusdem, lineæ eiusmodi per generationes æquales circumcirca et utrinque æqualiter determinatæ promanant. Unde etiam patet, quod si e quibusvis duobus punctis annuli primi promanantes eiusmodi lineæ secent se invicem, crura semet secantia, ob generationes utrinque æquales, æqualia erunt. Patet etiam partem quovis novo A generatam parti sequente A generatae, item ob generationes æquales, æqualem esse.

Complexum punctorum dictum continuum esse vel ita patet. Accipiatur complexus α punctorum innumerabilium, quæ per quodvis aliquod A , centro in eo posito, generantur usque ad arcum aliquem k inclusive, et inde complexus β punctorum item innumerabilium usque ad arcum extimum generatorum: puncta ipsius β in arcus post k se invicem continuo excipientes cadunt, qui simul sine k cogitari nequeunt, uti complexus priorum ipsum α constituentium; itaque et β gaudet puncto in arcu k , quod quum solum sit, tam ipsi α quam ipsi β commune est.

Sed præterea quoque e cuiusvis A arcus superioris meditullio pun-

ctum per omnes arcus concentricos superiores, id est supra præcedens A cadentes, usque in centrum moveri potest; et quidem ita ut per cuiusvis arcuum illorum punctum quodvis datum transeat: intuitu patet, idem simplicissime per meditullia arcuum fieri posse.

Est etiam linea simplex: nam e nullius arcus meditullio tertius ramus dari potest; quia is per arcus præcedentes aut sequentes ire deberet, in quorum quovis nonnisi unum punctum ramis duobus commune datur.

8. Dicantur L lineaë eiusmodi, quæ ex omnibus punctis annuli primi utrinque æqualiter insistentes, et semper porro utrinque æqualiter, atque omnes circumcirca quoque per generationes æquales æqualiter determinatae sunt.

Aut dantur duæ tales L , quæ punctum commune habeant, aut nullæ duæ dantur, quæ punctum commune habeant. Posterior fieri nequit: nam tum portio illa ipsius S' , quæ supra quodvis A usque ad arcum superiorem novi A est, imo totum A , innumerabilibus vicibus repetetur in ipso S' ; adeoque S' non esset quantitas finita (Tom. I. pag. 35), de quo plura inferius.

Nempe tum (per pag. 26) sphæra S' circa $c*\mathbb{C}$ mota, movetur tota L , omnibus punctis annulos se invicem excipientes describentibus. Quod annulus puncti cuiusvis in linea L ulterius generati ulterius situs sit, patet inde, quod si ab aliquo annulo sequentes aliquamdiu regredierentur, id aut statim post annulum centri alicuius A iuxta generationem dictam fieret, aut post meditullium arcus alicuius supra A generati; prius fieri nequit, nam tum punctum aliquod ipsius L ob generationes utrinque æquales intra, non extra præcedens A caderet; nec posterius fieri quit, tunc enim e centro prius dicto sphærica superficies exterior cum aliqua interiore aliquid commune haberet.

Atque per hoc adhuc simplicius patet superficiem sphæricam, si nullæ lineaë L secarent se invicem, quantitatem finitam non esse. Potest enim e centro cuiusvis A in S' describi talis annulus interior ipso A , qui (iuxta Fig. 9.) nec cum ibidem præcedente nec cum sequente quidquam commune habeat. Quod cum per generationes æquales semper porro locum habeat: annulus dictus innumerabilibus vicibus repetetur.

Si igitur superficies sphærica quantitas finita sit: necesse est duas lineas L se invicem secantes dari. At si duæ dentur, omnes se invicem in eodem puncto secabunt. Nam sit (Fig. 10.) ab arcus is primi annuli, e cuius extremitatibus promanantes lineæ L concurrunt; linea L e meditullio q arcus ab erecta quoque per p transibit: nam sit $bq = br$, adeoque $ab = qr$, et $br = rt$, adeoque $bt = ba$, (posito ab esse dimidio primi annuli minus, quum si ab dimidium annuli sit, res pariter facile pateat); lineæ L ex r et q, ita ex b et t erectæ concurrent, eruntque singulæ æquales propter generationes æquales. Hinc autem linea L ex t erecta necessario in p cadit; atque ut lineæ L ex r et q erectæ occurrere possint, aut prior vel posterior transibit per bp, aut prior per pt, vel L ex q erecta per ap transibit: quodvis horum fiet, si punctum transitus p sit; sed inter p et t, aut inter p et a transitus fieri nequit; nam si ex. gr. L ex r erecta inter p et t transiret, idem transitus punctum etiam ipsi bp commune esset; si vero L ex r per bp inter b et p transiret, punctum idem et lineæ ex q erectæ commune esset: et lineæ L ex r et q erectæ usque ad punctum concursus essent ipsa bp minores. Necessario igitur in eodem p concurrent.

Atque hinc colligitur, bisecando arcus in infinitum, atque circumcirca transferendo: ex omnibus annuli primi punctis omni dabili prioribus erectas lineas L omnes in eodem p concurrere.

Unde si sphæra S moveatur circa c* \mathbb{C} , puncto in annulo primo porro moto, simul cum toto linearum L e punctis bisectionum erectarum scheme: nullum tempus erit, quo punctum p viam describat; nam ab initio motus quodvis temporis punctum cogitetur, iam antea punctum in annulo motum per innumera puncta transiit, pro quibus schema linearum L dictum in p fuit.

Consequenter sphæra S circa c* \mathbb{C} ita moveri potest, ut p quiescat. Atque hinc (per pag. 26), si S circa c* \mathbb{C} moveatur, p quiescere debet.

Omnia dicta autem ad quemvis annulum superficie cuiusvis applicari manifestum est, si puncto quovis eius pro centro accepto, cum linea quadam interna annuli fiant annuli concentrici tales, quales e quovis sphæræ illius superficie puncto æqualiter dari dictum est.

9. Atque hinc superius (pag. 27) segmentis omnium s' in S cadentibus generaliter s'' dictis, cogitetur in omni s'' punctum illud, in quo lineæ L , ex annulo ipsi S' et illi s' communi, in illo s'' generatæ concurrent: complexus omnium eiusmodi punctorum simul cum c et \mathfrak{C} lineam simplicem esse ut supra (pag. 29) patet. Sed manifesto etiam sphæra S circa $c * \mathfrak{C}$ mota, cuiusvis s'' punctum quodvis præter punctum dictum in ea (pag. 7) movebitur; atque hinc omnia s'' (pag. 26) movebuntur, et tota linea dicta quiescat mota sphæra S circa $c * \mathfrak{C}$.

10. At vero in S quoque ex annulo egressus extimo antea generatum p quiescebat mota S circa $c * \mathfrak{C}$; atque si pro centro p eadem fiant, quæ ab altera parte centro c facta sunt, prodibit linea $c\mathfrak{C}p$ quiescens mota sphæra circa $c * \mathfrak{C}$.

Imo quævis alia duo puncta lineæ dictæ accipientur, motus dictus sphæræ S quiescentibus iis peragebatur: itaque (pag. 26) circa quævis duo puncta dicta motus idem est.

Sed nec ullum punctum sphæræ S extra lineam dictam cadens quiescit: nam illud aut intra segmenta extima ex c et p generata, aut inter illa cadit; atque tale circumcirca æqualiter determinatum gaudet annulo (per pag. 7). Si vero in aliquo motu circa duo puncta annulo gaudeat, circa eadem duo puncta (per pag. 26) semper eundem annulum describet.

11. Patet porro inter quævis duo spatii puncta dari lineam eiusmodi: nempe accipiatur unum pro centro, fiatque sphæra cum puncto altero; atque applicentur de sphæris S et s dicta. Atque hinc etiam patet recentam e quavis portione spatii finita egredi e quovis puncto eius, quem possit generari sphæra ex eo puncto, totam portionem includens.

12. At quæritur, num e centris sphærarum quarumvis inæqualium generatæ, centris coincidentibus, congruere possint usque ad superficiem sphæræ minoris? Omnino; nam (Fig. 11.) feratur minor in alteram centro in centrum \mathfrak{C} maioris posito; sitque linea KCK' in sphæra maiori hac circa $K * K'$ mota quiescens; transeat hæc per superficiem minoris in $c * c'$. Mota sphæra maiore circa $K * \mathfrak{C}$, omne præter lineam KK' movebitur, perageturque motus quiescentibus c , \mathfrak{C} ; itaque tum et sphæra

interior circa $c*\mathbb{C}$ movebitur; adeoque (per pag. 26) idem inter c et \mathbb{C} quiescat quod antea.

13. Hinc etiam linea talis continuari e quavis sphæra in aliam quamvis maiorem utrinque potest; neque intra ullius sphæræ superficiem detinetur.

14. Si porro cuiusvis lineæ eiusmodi unius extrema a , b et alterius a' , b' sint, atque a in a' et b in b' simul cadere queant; congruentibus extremis et lineæ ipsæ coincidunt.

Nam feratur ad \mathbb{C} linea ab simul cum sphæra illa, in qua generata est, sive in centrum eius cadat a aut b sive non, atque ponatur a in \mathbb{C} ; fiatque sphæra centro \mathbb{C} sphærā allatam includens, et eodem centro a fiat sphæra puncti b . Manifesto linea eiusmodi ut dictum est, quæ dicatur λ , in sphæra reliquas duas includente e centro \mathbb{C} generata, per superficiem sphæræ puncti b e centro eodem \mathbb{C} generatæ transit in aliquo punto f ; moveatur λ circa \mathbb{C} simul cum sphæra maiore, donec f in b cadat; atque tum moveatur sphæra eadem maior quiescentibus punctis b , a ; movebitur etiam sphæra allata inclusa, quiescentibus iisdem b , a ; adeoque inter b et a linea eadem quiescat, quæ motu solius sphæræ allatæ quiescentibus iisdem punctis quiesceret. Itaque linea allata ab coincidit cum linea sphæræ maioris inter a et b quiescente. Pariter adferri linea a' b' simul cum sphæra illa, in qua generata est, potest a' in \mathbb{C} posito: atque manifesto et a' b' eidem congruet, cui ab congruebat.

15. Hinc etiam patet lineam eiusmodi redire non posse: nam tum puncto uno, unde duo puncta diversis viis profecta porro moverentur, et altero, ubi prima vice sibi mutuo occurrerent, communibus, uterque ramus inter eadem duo puncta coincideret.

16. Sed linearum priorum (in 14) continuationes quoque, nempe continuatio e centro sphæræ allatæ et continuatio e centro \mathbb{C} , coincidunt. Nam si prioris punctum p extra lineam ex \mathbb{C} prodeuntem utrinque in infinitum continuatam caderet, sphæra puncti p e centro \mathbb{C} habeat punctum p' cum linea posteriore commune: fiatque sphæra tam sphærā hanc quam allatam includens; mota hac quiescentibus a , b , et p' quiescet, p autem movebitur; quod fieri non posset, si p in continuationem primam caderet; tunc enim quiescentibus a , b , et p quiesceret.

17. Denique *linea dicta* (per pag. 8) *recta est*. Nam (Fig. 12., 13.) quævis duo puncta q et r fuerint illius (utrinque continuatæ in infinitum), omnia spatii puncta eorundem unica complectetur. Etenim quodvis punctum lineæ dictæ ipsius $q * r$ unicum est, nec ullum aliud spatii punctum eiusdem $q * r$ unicum est.

Namque sit quodvis punctum p lineæ dictæ: nullum punctum f a p diversum tale datur, ut

$$q * r * p \doteq q * r * f.$$

Esset enim f aut in linea ipsa aut extra eam: neutrum fieri potest. Nam si f in lineam cadat, aut in aliquod ipsorum q et r caderet, aut inter ea, aut extra ea: atque etiam p pariter cadere potest.

Si p in r (aut q) cadat, patet nullum f a p (aut q) diversum dari: itaque tantum casus alii considerantur. Sit prius p inter q et r ; tum f aut etiam inter q et r in f' aut f'' , aut extus cadet, ex. gr. in f''' . Si in f' caderet, tum ut

$$q * r * p \doteq q * r * f'$$

sit,

$$qf' \doteq qp$$

esset (pars toti); pariter si f in f'' caderet, tum

$$qf'' \doteq qp$$

esset. Si vero f in f''' caderet, tum

$$qf''' \doteq qp$$

esset (pariter pars toti). Nempe per dicta e quovis puncto linea talis æqualiter incipiens æqualiter quoque continuatur.

Si vero p extra qr, ex. gr. in p' , cadat (Fig. 13.): tum f aut in f' aut in f'' aut in f''' aut in f'''' cadere deberet, quum manifesto in ipso- rum p' , q , r nullum cadere queat. In f' cadere nequit, quia tum

$$qp' \doteq qf'$$

esset; neque in f'' , quia tum

esset; nec in f''' cadit, quia

$$qp' \doteq qf''$$

$$rf''' \doteq rp'$$

(pars æqualis toti) esset; neque in f''' cadit, quia tum esset

$$rf''' \doteq rp' = rq + qp'$$

et

$$qp' \doteq qf''' = rq + rf''',$$

et hunc valorem substituendo ipsi qp' in æquatione priore, esset

$$rf''' = rq + rq + rf'''.$$

Sed neque extra lineam dictam datur tale f , ut

$$q * r * p \doteq q * r * f.$$

Nam fiat e centro sphæræ, in qua linea dicta generari cœpit, sphæra punctum f includens; quiescentibus r , q , p mota sphæra hac, movebitur f (pag. 32); si vero q in q et r in r cadentibus p in f cadet, p cum f circa $r * q$ moveri poterit, quod antea quievit (contra pag. 26).

Sed nec ullum spatii punctum f extra lineam dictam cadens ipsius $q * r$ unicum est; quum sphæra plane dicta circa $q * r$ mota, et illud moveatur, adeoque in alia æque posita puncta veniat.

Est igitur linea dicta plane complexus omnis puncti, quod quorumvis duorum punctorum eius unicum est.

Si non recta e rectis aut aliis lineis constet, facile patet non quorumvis duorum punctorum adesse quodvis punctum unicum.

18. *Recta etiam quantitas est.* Nam quævis partes continuæ eius accipiuntur; et ponatur una extremitas unius in unam alterius; fiantque sphæræ centro in eam posito cum extremitatibus alteris: prodibunt duæ partes in sphæræ interioris, nisi utraque eadem sit, superficie terminatæ, quarum extrema, adeoque et ipsæ, congruere possunt.

19. *Recta potest in se porro moveri.* Nam e quovis puncto p , per dicta, æqualiter continuatur in infinitum.

20. *Planum quoque hinc facile construitur modo sequente.* Patet generatione circumcirca æquali, per quodvis punctum circa duo puncta

usque ad redditum porro motum, describi lineam simplicem in se redeuntem talem, quæ et ipsa, ut recta et superficies sphærica erat, quantitas est, atque etiam e quovis puncto sive antrorum sive retrorsum æqualiter determinatur.

Accipiatur quævis talium annularum (Fig. 14.); sitque (per pag. 28) in punctis a , b bifariam divisus, et dimidiata ab sit in d bifariam divisa; atque sit rectæ ab meditullum in c : erit, ob generationes utrinque æquales, forma e rectis cd et ca composita formæ e rectis cd et cb compositæ æqualis, adeoque recta dc est perpendicularis ad ab in c (pag. 15); et quodvis rectæ cd punctum extra rectam ab utrinque infinitam cadit. Fiat sphæra e centro c totum schema includens, et moveatur circa $a * b$ sive rectam ab utrinque infinitam: quodvis punctum rectæ cd describet annulum, qui propter generationes utrinque æquales utraque facie sibi congruere potest, (quod de antea dictis nondum constat). Cogitetur iam recta cd in quovis loco suæ viæ continuata per d in infinitum; erit complexus omnium earum superficies circumcirca infinita et circumcirca et utrinque æqualiter generata, ut circa c in se moveri, facieque utraque sibi congruere queat, atque spatium in duas plagas æquales dividat.

Est autem superficies ista *planum*. Nam quævis duo puncta A et B sint eius, quodvis punctum C ipsius $A * B$ unicum in rectam AB utrinque in infinitum continuatam cadit. Recta AB vero necessario in superficiem dictam cadit: cogitetur enim in generatione huius, recta cd versus d infinita, ex A versus B usque in B per annulum plane dictum mota; nisi per AB transeat, aut cadet ab una aut ab altera parte; neutrum vero fieri potest; nam si quod fieret, et alterum fieri deberet. Et idem de continuata AB patet: accipiatur nempe sphæra e centro c radii maioris quam recta quævis, quæ a c ad AB est; exhibet ex hac sphæra utrinque tam recta AB quam cd versus d infinita; unde reliqua patent. Posset etiam brevius dici, quod si ex uno punto superficie ad aliud ducta recta in unam plagam caderet, in altera quoque esset, et inter duo puncta duæ rectæ fierent.

22. Unde etiam patet rectam AB etiam utrinque infinitam in planum cadere, si puncta A , B in eo sint.

23. Sed quæritur, num *per quævis tria puncta A, B, C, etsi non in recta sint, planum detur?* Omnino: nam $A*B$ (ex Fig. 15.) in planum dictum poni potest, A in c (Fig. 14.) posito, acceptaque ex c versus b recta rectæ AB æquali. Si iam C non in eo plano esset: fiat e centro c cum puncto C sphæra, sitque ex. gr. recta

$$cC = cb = ca;$$

manifesto sphæra radii cC e centro c , per planum in unum dimidium superius alterum inferius dividetur; atque mota sphæra circa ab , quodvis superficie sphæricæ punctum præter a et b , dimidium annulum superius et alterum inferius describet; atque ubi punctum C transit, habetur petitus.

24. Imo etiam per eadem tria puncta A, B, C non in recta sita nullum aliud planum poni potest. Nam in præcedentibus A in c et B in b positis atque C in planum ibidem generatum cadente, ponatur quodvis aliud planum (imo eiusdem plani pars alia) per $A*B*C$; nullum punctum p (Fig. 15.) unius extra aliud cadere poterit. Nam rectæ AB , BC et AC , extremitatibus earum in utrumque cadentibus, et ipsæ in utrumque cadent totæ. Sit iam p in uno eorum, cadet aut supra lineam compositam ex AC , CB et continuationibus rectæ AB ex A ad lævam et ex B ad dextram, aut infra eam. Si supra eam cadat, tum recta pq transit per lineam compositam dictam; si per continuationem alterutram rectæ AB iret, tum et transitus et q , adeoque et p , in AB infinitam caderet; si per AC vel CB eat, fiat id in f ; tum recta fq utriusque plano communis, et continuata punctum p complectens in utramque incidet. Si vero infra cadat in p' vel p'' , recta e quovis horum usque ad p , iam utriusque commune, transit per lineam compositam dictam ex una plaga in alteram; et item duo puncta, adeoque recta per ea, utriusque plano communia erunt.

25. Manifesto etiam (in Fig. 14.) dc ex c continuata in planum (pag. 36) primo generatum cadit; atque planum, ob generationes utrinque æquales, in duas plagas æquales dividit: atque quum quævis plani P recta in cd simul cum plano P ita poni possit, ut P cum plano primo

generato coincidat: planum quodvis per quamvis rectam in ea sitam in duas plagas, inter se omnes prioribus æquales, dividi patet. Imo evidens est, quovis plani punto in idem dictum c posito, et congruentibus planis, circulos quosvis radiorum æqualium æquales esse; atque etiam punctum in plano motum, ipsum planum in eodem plano secum ferre posse.

26. Ita formas duarum rectarum angulares congruere, si arcus e verticibus radiis æqualibus inter crura descripti æquales sint, circulo facto patet; necnon omnes rectorum angulorum formas æquales esse; ita ex uno punto rectæ in plano unam solum perpendicularem dari; et sumam angulorum in una plaga ad rectam circa punctum c positum esse $= 2R$; atque conversim duas rectas, c commune habentes, in una recta esse, si summa angulorum in una plaga sit $= 2R$, per R rectum intelligendo.

27. Patet etiam planum quantitatem esse: nam quæcunque duæ portiones eius accipiuntur, ponatur utriusque punctum aliquod internum in dictum c, ita ut portiones ipsæ in planum primo generatum incident: circuli, recta illa qua e c usque ad perimetrum nulla minor est pro radio accepta, congruent; et (Tom. I. pag. 25) locum habet.

§. 15.

1. *Si recta cum recta aut piano aliquid commune habeat, id non nisi punctum est:* nam si duo puncta communia sint, recta in alteram continuatam in infinitum, et pariter in planum incidit.

2. *Planum vero cum piano,* si utraque infinita concipientur, aut nihil commune, aut rectam infinitam communem habent: et tam recta quam planum, sive rectam sive planum secantia, transeunt in plagam alteram. Nam (Fig. 16.) secet recta ab rectam b φ ; nisi transeat in plani per ab φ determinati plagam alteram, necessario aliquorsum in bf cadet; cum qp enim nullum punctum præter b commune habet, quia tum tota incideret. Itaque abf recta esset; atque tam β quam $\alpha + \beta + \gamma$ dimidia peripheria radii bf esset.

Hinc ab per planum etiam transit, si b cum eo (nec quidquam aliud) commune habeat: si enim in eadem plaga maneat, manifesto pro quo-vis puncto q plani in b secti casus præcedens erit.

Hinc etiam si duo plana P et ρ punctum b commune habeant: fiat e quovis puncto a ipsius ρ tali, quod ipsi P commune non est, recta ab ; transbit ista per P per præcedentia; fiat tum semicirculus in plano ρ radio ba centro b ; transbit is per P ; atque recta per punctum hoc et punctum b tam in P quam in ρ incidet; nec ullum punctum præterea commune utriusque est, nam tum utraque coinciderent. Patet simul planum ρ quoque transire in alteram plagam.

3. *Ad rectam e quovis eius puncto perpendiculararem dari patet* (ex Fig. 14. pag. 36); uti etiam *e quovis plani punto dari rectam ad planum perpendiculararem*; quum quodvis planum, puncto quovis in c posito, primo ibidem generato congruere queat.

Sed quamvis e quovis puncto tam ad rectam quam ad planum dari perpendiculararem, inferius demonstretur: duas ex eodem punto perpendicularares ad eandem rectam, aut idem planum, diversas non dari facile patet; nam tum duæ illæ rectæ cum recta duo illa puncta in quæ perpendicularares caderent connectente, tale triangulum efficerent, cuius ad basim uterque angulus rectus esset. Hoc autem fieri nequit; quia si duæ rectæ in eodem plano ad eandem rectam in eadem plaga concurrerent, idem ob generationes utrinque æquales et in altera fieret; adeoque recta utraque propter duo puncta communia coincideret.

4. Interim *si recta ad dc et fc (Fig. 17.) duas plani rectas perpendicularis fuerit, erit ad omnes adeoque ad planum per fc d determinatum ipsum P perpendicularis*. Nam sit $cp \perp cf$, et $cq \perp cd$; moveatur fc circa fc porro donec redeat, ita dc circa dc ; via ipsius cp erit (per pag. 36) planum K complectens omnes perpendicularares, quæ ex c ad fc fieri possunt; ita via ipsius cq erit planum Q complectens omnes perpendicularares ex c ad dc . Datur autem ex c perpendicularis ad planum P ; atque ea tam ad fc quam ad dc est perpendicularis. Sed eiusmodi recta, quæ ad fc et dc simul perpendicularis sit, non nisi una datur, nempe sectio planorum K et Q ; adesse enim perpendicularis ex c ad fc in K ,

et perpendicularis ex c ad dc in Q debet; adeoque illa quæ tam ad fc quam ad dc perpendicularis est, tam in K quam in Q adesse, id est utriusque communis esse debet. Consequenter recta ad fc et dc simul perpendicularis, est ipsa ad P perpendicularis.

5. *Est etiam planum quodvis p, in quod perpendicularis ad P cadit, ad P perpendicularare.* Nempe angulus duorum planorum generatur modo sequente: sint (Fig. 18.) ad rectam ab perpendiculares æquales dc, fe in eodem plano P , atque $ac = be$; et moveatur plaga plani superior circa $a * b$ porro donec redeat; describent puncta d, f simultaneos arcus æquales circulorum radii æqualis, propter generationes omnino æquales. Ita si $gh \perp gb$, atque accipiatur $pg = eq$, erunt moto schemate circa $p * q$ viæ punctorum h et f simultaneæ æquales, ob generationes æquales: sed f eodem modo movetur, sive $a * b$ sive $p * q$ quiescant, quum omnia simul quiescere debeant. Consequenter omnium perpendicularium æqualium extremitates arcus simultaneos æquales describent. Est autem (pag. 15) quantitas anguli planorum via eiusmodi; quæ si quadrans sit, erit (pag. 17) planum ad P perpendicularare. Patet hinc quantitatem anguli planorum esse quantitati anguli perpendicularium e quovis punto sectionis eorum æqualem.

6. Oritur autem *anguli cuiusvis* tam duarum rectarum, quam duorum planorum, per transitum cuiusvis in alteram plagam *suus verticalis*: quos pro lineis rectis æquales esse vel ita patet. Sint anguli hi verticales u et v (Fig. 19.): si hi , moto β circa c donec extremitas arcum δ describat, non sint æquales, erit unus ex. gr. $u >$ altero v , nempe $\gamma > \delta$ pro radiis α et β æqualibus. Fiat $z = \delta$; erit per generationes æquales, si α moveatur (in eodem plano intelligendo) circa c , donec arcum $z = \delta$ describat; erit z quoque $<$ arcu quem extremitas ipsius β interea descripsit. Est vero manifesto arcus hic $< \delta$, propter transitum rectæ per rectas β, ϵ in plagam alteram. Consequenter esset z , quod $= \delta$ est, minor arcu ipso δ minore. Pariter patet, si $v > u$ esset; et pariter de altero verticalium pari.

Atque rectis productis, quorum angulus respectu quantitatis angulo planorum æqualis est: manifesto etiam anguli planorum verticales æquales sunt.

7. Plani per centrum sphæræ positi sectionem cum superficie sphæræ circulum radii radio sphæræ æqualis, *circulum maximum* dictum, esse (ex pag. 36) patet; quævis duo plana autem per centrum c posita se invicem in recta e centro eunte secare, cuius punctum p in superficiem sphæræ cadens circulis maximis e centro in utroque plano descriptis commune est; et patet rectam eandem, utriusque plani sectionem, continuatam alterum quoque eorundem circulorum punctum commune præbere.

8. Angulus vero circulorum maximorum sphæræ quantitas respectiva fit per arcum, quo quantitas anguli planorum, in quæ circuli illi cadunt, exprimitur. Si igitur (Fig. 20.) a puncto p supra tabulam sito in duobus circulis maximis quadrantes accipientur, pa in uno et pb in altero: circuli maximi arcus ab exprimet angulum eorum; nam pc sectio plani pca cum piano pcb est, et propter quadrantes pa, pb anguli pca, pcb recti sunt.

9. Hinc etiam *arcus circuli maximi ad arcum ab perpendicularares in extremitate quadrantum concurrent*, in ita dicto *polo circuli* cuius ab arcus est. Nam pc est ad ac et bc simul perpendicularis; adeoque ad totum planum abc perpendicularis est; itaque (pag. 40) et plana acp, bcp sunt ad planum abc perpendicularia, adeoque angulus quadrantis utriusque cum arcu ab rectus est. Consequenter arcus ex a et b ad ab perpendicularares in p concurrunt. Patet autem schemate circa pc moto arcum quemvis per a describi posse, et perpendiculararem circulum e quovis arcus ab punto unum solum generari.

10. *Si vero plana P et Q se invicem ad angulum rectum secent in recta ab: e quovis punto p ipsius P ad ab demissa perpendicularis est perpendicularis ad Q, atque e quovis punto ipsius ab erecta ad Q perpendicularis in P cadet.* Nam sit pb \perp ab; ducatur in piano Q ad ab perpendicularis bf; erit angulus pb f rectus, quia $P \perp Q$; adeoque pb ad duas plani Q rectas nempe ab et bf perpendicularis, consequenter etiam ad Q perpendicularis est.

Quæcunque perpendicularis autem fuerit ex a ad planum Q, illa in planum P cadit; nam si extus caderet, ex eodem punto a duæ essent,

quia per præcedentia perpendicularis ex a ad ab in P cadens est ad Q perpendicularis.

11. Denique si duo plana P et p secent se invicem, et utrumque perpendicularare sit ad planum Q , sectio priorum ad Q est perpendicularis. Nam si $P \perp Q$ et simul $p \perp Q$, sit A sectio planorum P et Q , et a sectio planorum p et Q ; secabunt A et a in Q cadentes se invicem; quia nisi secarent, nec plana ex A et a ad Q perpendicularia secare se invicem facile patet. Sit sectio rectarum A et a in a , perpendicularis ex a ad Q cadit per præcedentia tam in P quam in p , adeoque in sectionem solam planorum P et p , cui a commune est.

12. Quoad angulum quem recta ac facit cum plano P , in quo centro c sit descriptus circulus radio bc , supposito (sed inferius demonstrando) hypotenusam esse catheto maiorem, et rectis crescentibus e quovis puncto eodem extra peripheriam ad eam ductis, angulum ad centrum crescere: facile patet, nisi $ac \perp P$ sit, esse angulum acb minimum (pag. 16). Nempe sit b punctum, in quod perpendicularis ex a ad P cadit; erit cathetus $bc < \text{hypotenusa } ac$; tum radio bc descripto in P circulo, erit quivis angulus $dca > bca$; nam concipiatur a omnino supra planum dbc ; erit in triangulo rectilineo abd angulus ad b rectus, quia $ab \perp P$; atque hinc hypotenusa $ad > ab$. Concipiantur iam duo triangula nempe abc et adc , et ponatur c in c et a in a , atque vertatur triangulum utrumque (Fig. 21.) in eandem a recta ca plagam in P ; patetque per supposita, esse angulum $acb < acd$.

§. 16.

Sed dicendum etiam (pag. 9) de planis et rectis se invicem, etiamsi in infinitum producta sint, non secantibus est. Si (Fig. 22.) rectæ ac et bd ad rectam ab , sive in eodem plano sive non, perpendicularares fuerint, nullum punctum commune habent (pag. 39); pariter si $cabd$ circa ab usque ad redditum moveatur, plana per rectas ac et bd , etsi infinitæ concipiuntur, descripta nullum punctum commune habent; nam ibi aliqua recta ac et aliqua bd productæ secarent se invicem.

Patet etiam, quod si duo hæc plana per tertium secentur, rectæ illæ, in quibus hoc priora secant, in idem planum tertium cadant, nec se invicem secent; quia tum duo priora punctum illud, in quo hæc se invicem secarent, commune haberent.

I. At quæritur, num per punctum α solum planum prius detur, quod planum inferius nempe viam rectæ $b\delta$ antea dictam haud secet? Atque hæc quæstio eo redit, num per α sola recta $a\bar{c}$ detur in eodem plano rectam $b\delta$ non secans?

Aut solam rectam solumque planum in aliquo casu, aut innumera in omni casu dari patebit.

II. Moveatur $a\bar{b}$ (efficiens cum recta $b\delta$ angulum v , qui sit ex. gr. $= R$, denotante R rectum) circa α (Fig. 22.) per quadrantem usque in $a\bar{c}$; aliquamdiu secabit $a\bar{b}$ tam quadrantem quam rectam $b\delta$ semper porro, in $a\bar{c}$ perveniendo autem non secat; dari igitur punctum aliquod ultimum p quadrantis debet (per Tom. I. pag. 20), per quod recta ex α ducta talis est, ut quævis alia interior secet rectam $b\delta$; illa autem ipsam non secat, quia id in punto aliquo rectæ $b\delta$ esset, et recta $b\delta$ e recta secente in plagam superiorem transiens, innumera puncta haberet, in quibus a recta circa α ulterius mota secari posset; adeoque recta $a\bar{p}$ non esset ultima earum, intra quas quævis secat rectam $b\delta$. Itaque $a\bar{p}$ est primo non secans. Sed quæritur quantitas anguli u , nempe arcus $b\bar{p}$?

Axiomatis Euclidei undecimi sensus est, quod si ad *quantaevi rectae ab extrema*, in eandem plagam, rectæ $a\bar{c}$ et $b\delta$ ponantur, *quantavis fuerit summa angulorum internorum u et v duobus rectis minor*, et utvis *partita*: rectæ $a\bar{c}$ et $b\delta$ se mutuo secant.

Tria igitur hoc continet, quorum quodvis solum ad reliqua duo demonstranda ex asse sufficeret; nempe

1. si pro uno solo $a\bar{b}$ non sit $u < R$, pro quantovis $a\bar{b}$ summa duorum internorum u et v pro quibusvis rectis se invicem primo non secantibus erit $= 2R$.

2. Si constaret summam internorum u et v dictorum omni dabili minorem fieri non posse, etsi recta, ad cuius extrema in eandem plagam positi sunt, quovis dabili maior fiat, tum quoque certum esset in omni

casu esse $u+v=2R$. Si nempe pro angulo utvis parvo u (Fig. 23.) posset ap ita removeri, ut recta ex a ad angulum u posita primo non secans ipsius $b\delta$ sit, ultra $b\delta$ quoque ad distantiam $a'b$, ab æqualem, angulo u posito, erit rectarum ex a et a' se invicem (ut facile patet) primo non secantium angulus uterque $=u$, et summa internorum $=2u$, quod $\sim o$. Eritque (ut patebit) aut semper quodvis $u=R$, aut $u\sim o$, si $ab\sim\infty$.

3. Si constaret, quod si pro certis u et v e finibus certæ rectæ secent rectæ se invicem, etiam ad angulos $u+z$ et $v-z$ ad fines rectæ eiusdem positæ secent se invicem (nempe pro eadem internorum summa utvis partita): tum quoque facillime constarent omnia.

Vix concipi posset tantum Geometram tale axioma ponere potuisse: at in manuscriptis antiquis inter postulata positum repertum est. Nimirum tota Geometria Euclidis quasi una propositio considerari potest, si dicatur, *Posito A poni G*, (per *A* axioma XI, per *G* geometriam intelligendo). At plane hoc, quod poni debeat, atque et contrarium æque poni possit; nempe quum omnia reliqua axiomata, tam cum eo si (Fig. 22.) u rectus sit, quam cum eo si eo minor sit (imo quantusvis sit ab R inclusive usque ad o exclusive), æque subsstant: duo systemata oriuntur, prouti $u=$ vel $<R$ ponitur, utraque vera, unum sub conditione quod si $u=R$ sit, alterum positio $u < R$: quamvis contraria respectu eorum prodeant, quæ a quantitate dicta ipsius u dependent. Imo prouti quantitas ipsius $u < R$ pro certa recta ab supponitur, eo respectu innumerata systemata oriuntur; quæ tamen certo respectu consentiunt, et omnia sub systemate generali, quod suppositioni $u < R$ innititur, continentur; ex. gr. (Fig. 23.) summa internorum pro rectis se invicem primo non secantibus in omnibus $\sim o$, si distantia $\sim\infty$; ita summa angulorum trianguli rectilinei $\sim o$, dum latus quodvis $\sim\infty$ &.

Si igitur utrumque sistema elaboratum sit, etsi per reliqua axiomata indecimum maneat, quodnam reipsa locum habeat: dabitur Geometria eo sensu, quod non solum quodvis dictorum systematum suppositive, sed etiam inconditionate verum sit, duorum aliquod reipsa esse; ea tamen cum restrictione, quod etsi constaret sistema pro $u < R$ reipsa locum

habere, eorum quantitas, quæ plane a quantitate ipsius u recto minoris determinata dependent, eatenus indecisa maneret.

Aliud est, si res non a priori, sed quoad praxim consideretur; et (Fig. 22.) pro data ab , rectæ ac , donec adhuc secet rectam $b\delta$, angulus a posteriori mensuretur; nempe tum saltem a posteriori constabit u a recto, pro tantis lineis quas nobis tentare licet, haud multum differre. Sed quid si ab usque ad Sirium protenderetur, aut ulterius? Utcunque sit; tempus ab æterno connata spatii soror, ei auxilio venit; et quum motus corporum cœlestium calculis $u=R$ posito innixis convenient, pro omni mensurationum nostrarum sphæra in praxi eidem suppositioni tuto conquiescere monet.

III. Omnia systemata nobis, si præter axiomata reliqua nullum ponatur, subiective possibilia, id est e quibus unum tantum est, sed quodnam absolute verum sit, decidere haud valemus, generaliter comprehensio, *Appendicis Auctor* rem acumine singulari aggressus Geometriam pro omni casu absolute veram posuit; quamvis e magna mole tantum summe necessaria in Appendice huius tomi exhibuerit, multis, ut tetraëdri resolutione generali pluribusque aliis disquisitionibus elegantibus, brevitatis studio omissis.

Pro data quavis recta ab angulum u (Fig. 22.) geometrice construere docetur in Appendice dicta: de quantitate ipsius u tamen, quamvis in concreto quasi ante oculos stet, a priori decidi nihil potest, nisi quod non o et non $>R$ sit.

Ibidem porro in spatii scientia distinguuntur ea, quæ a quantitate dicta ipsius u non dependent; id est æque vera sunt, sive $u=R$, sive quævis alia quantitas eius inter o et R ponatur: atque Trigonometria sphærica, et quædam alia, ut talia, demonstrantur.

Illa vero quæ absolute a quantitate dicta ipsius u dependent, per eiusmodi functiones determinatas ipsius u exprimuntur, quæ pro quovis valore ipsius u , id est quicunque valor ipsius u reipsa fuerit, eo in expressione substituto ipsi u , quantitatem quæsitam exhibent. Si ex. gr. quantitas certa $x=f(u)$ in spatio absolute a quantitate ipsius u dependeat, et sit $f(u)$ talis expressio, quæ nonnisi ipsum u et quantitates da-

tas complectitur: concipiatur abscissa a o usque ad R crescens, omnes valores cogitabiles ipsius u (a o exclusive usque ad rectum inclusive) exhibens; et erigatur a fine cuiusvis abscissæ, ordinata $f(u)$ pro illo valore ipsius u , atque pro $u=R$ fiat ordinata valori illi æqualis, quem expressio pro $u=R$ capit.

Quum autem omnes istæ expressiones quantitatum, in toto spatio a quantitate ipsius u dependentium, cum reliquis axiomatibus æque subsistant, quicunque innumerabilium valorum dictorum substituantur ipsi u : ex iisdem axiomatibus quantitas ipsius u determinari nequit.

IV. Nihilominus tamen quæstio suboritur: quid si novum axioma detur, per quod determinetur u ? tentamina idcirco quæ olim feceram, breviter exponenda veniunt, ne saltem alius quis operam eandem perdat.

Distinxeram ea, e quibus Axioma undecimum Euclidis demonstrari, adeoque theoria parallelarum Euclidea stabiliri posset, in axiomata *situs*, in *quantitativa*, et *intervalli*, atque *similitudinis*.

I. Axiomata situs.

1. Summa duorum internorum, quas rectæ in plani eiusdem plaga eadem ad rectam positæ faciunt, utcunque hæc crescat, nequit continuo decrescendo omni dabili minor fieri, nisi eæ se invicem secent.

2. Si (Fig. 24.) a z non capitur y , neque a $z+v$ capitur $y+v$. Hæc est axiomatis Euclidei tertia pars, nempe eadem summa ad fines eiusdem rectæ aliter partita.

3. (Fig. 23.) Si C ante finem temporis t dabilem quamvis portionem spatii universi utvis infinitam (dummodo nullum punctum rectæ quæ post a ad dextram est incidat) complectatur, et ad finem temporis t fiat C ipsum spatium universum: id, quod e spatio præter C est, ante finem temporis t , semper illi C , quod tunc est, absolute æquale complecti nequit. Duo spatia hoc pacto quaquaversum infinita, nullo punto præter dimidiad rectam excluso, prodire videntur; nisi XI axioma Euclidis verum sit (ut infra videbitur).

II. Quantitativa.

1. Si A habeat dimidia absolute æqualia: innumerabilia dimidia a se invicem prorsus distincta, prioribus absolute æqualia habere nequit.
2. Nullum A habet partes innumerabiles a se invicem prorsus distinctas, quarum quævis ipsi A absolute æqualis sit.
3. Nullum A tale est, ut (pro $n = \infty$) $\frac{A}{n}$ queat ipsum A (uti est) continere, nonnisi $\frac{A}{n}$ deficiente.

III. Intervalli.

Si duarum linearum simplicium uniformium utrinque infinitarum, in plano se invicem secantium, apertura (id est angulus ad punctum sectionis) maneat utrinque constante quodam earundem linearum angulo semper maior ante temporis t finem: in puncto experte temporis ipsum t terminante una alteram transiliisse nequit.

IV. Similitudinis.

Sphæra nulla per ullam qualitatem, præter magnitudinem locumque ab ulla alia discerni potest.

Aut idem de *quibusvis duobus punctis in spatio* dici potest.

Quovis horum posito, XI axioma omnino cum rigore demonstratur: et aut aliquod horum vel alicui æquivalens adsumendum est, aut nulla alia Geometria absoluta datur, nisi quæ in *Appendice* stabilita est; et quæ in omnem casum absolute vera, magni imo eo maioris pretii est, quod nullum axiomatum propositorum simplicitate ceterorum Geometriæ axiomatum gaudeat. Si igitur nullum propositorum inter axiomata referatur, dabitur quidem Geometria, sed quantitas ipsius u semper indecisa manebit: fons purus veritatis in æternitate est, eoque nos per noctem sepulrorum in lucem allicit; quum mortalibus labiis inde haurire haud liceat.

Interim quantitativum aliquod axioma in Geometria adsumere ne-

cesse est: nempe quod sub iis axiomatibus, quibus relatio totius ad partes exprimi solet, latet (Tom. I. pag. 52). Et hoc est sequens:

Quaevis portio spatii undique terminata, tam ipsa quantitas finita est quam superficies eius, si quantitas sit. Inde sequitur etiam quantitates respectivas eiusmodi finitas esse.

Hoc quasi introitum aperire videtur alicui axiomatum quantitativorum: utcunque sit; quomodo ope cuiusvis dictorum demonstretur $u = R$ esse, breviter referre, paucis primariis ab hoc independentibus suppositis liceat.

a) Ex (Ax. 1, 2) facile sequeretur modo sequente: (Fig. 24.) si nempe $u + v < 2R$, ad punctum δ deinceps positis, residuum dicatur y ; ductaque e quovis punto f cruris anguli y recta ad c , angulus quem fc cum cd facit, dicatur z ; ponaturque ad c supra z angulus v . Manifesto y a z non capit, adeoque (per Ax.) neque $y + v$ capit a $z + v$. Consequenter pro internis u et $v + z$ sectio est; idque tanto fortius, si pro $v + z$ angulus minor v ponatur.

b) Quoad reliqua: consideretur (Fig. 25.) via extremitatis rectæ Aa perpendicularis ad AB in eodem plano; accipienturque inde ab a incipiendo sive ad dextram sive ad laevam partes huius viæ, quæ L dicuntur, se invicem excipientes ab , bc , cd & omnes inter se æquales; ducanturque rectæ ab , bc , cd &. Angulos omnes x propter generationes æquales patet æquales esse. At quum puncta a , b , c , d , . . . in recta esse neutiquam constet, quæritur num x rectus vel obtusus aut acutus sit?

1. Si x rectus esset: tum (Fig. 26.) punctum lineæ L e meditullio C ipsius AB generatum quoque in rectæ ab meditullum c cadit. Nam recta meditullia C , c connectens per generationes utrinque æquales tam ad C quam ad c angulos utrinque æquales adeoque rectos facit. Si iam punctum lineæ L per perpendiculararem ipsi α æqualem ex C erectam in p aut q caderet: in casu primo fieret $\alpha = b + k + h$, adeoque $\alpha > R$, quia $x = k + h = R$ erat; at idem $\alpha < R$ esset, quia $p = R$ externus interno α maior est, uti suo loco independenter demonstratur; in altero casu autem fieret $i = h$, adeoque $i < R$, quamvis externus i sit $> p = R$. Unde etiam $aA = Cc$ esset.

Atque eodem modo punctum lineæ L e meditullio rectæ \mathfrak{AC} pariter in meditullium rectæ ac caderet; atque hoc per dimidiationes cuiusvis dimidii in infinitum continuari patet. Tum vero nulla pars continua lineæ L ex a supra aut infra rectam ab cadere poterit; nam inter $a\mathfrak{A}$ et perpendicularē e punto quovis lineæ dictæ ex a incipientis (et omne punctum præter a extra rectam ab habentis) ad \mathfrak{AB} demissam innumera lineæ eiusdem puncta per dimidiationem dictam generata dantur in rectam ab cadentia. Essetque hoc pacto linea L eadem cum recta $abcd \dots$ (Fig. 25.); unde per inferiora omnia facile patent.

2. Si vero x acutus vel obtusus esset: tum $abcd \dots$ talis linea e rectis composita esset, cuius latera ab , bc , cd , \dots utrinque in infinitum essent æqualia, et anguli quoque lateris cuiusvis cum præcedente latere et sequente in eadem plaga æquales essent. Si $x < R$, tum angulus rectarum ab et bc inferior est $< 2R$; si $x > R$ esset, tum ubique superior esset $< 2R$; potest quidem demonstrari $x > R$ non esse; quia tum per diagonalem \mathfrak{AB} duo triangula fierent, quorum summa angulorum $> 4R$, adeoque triangulum daretur, cuius angulorum summa $> 2R$, (quia > 4 in duas partes dispesci ita nequit, ne aliqua > 2 sit); hoc autem fieri non posse, item independenter pluribus modis demonstrari potest. Sed sufficit nunc linea dicta $abcd \dots$, cuius per quemvis angulum duobus rectis minor intelligatur: dicatur hæc linea λ .

3. Manifesto vero lineæ λ nullum latus ex. gr. cd ad dextram continuatum, partem ipsius λ per perpendicularares ad \mathfrak{AB} a punto C ad lævam cadentes generatam, ita nec ullam perpendiculararium porro ad lævam cadentium secare potest: nam tam omnes perpendicularares dictæ, quam omnia quæ inter tales perpendicularares sunt, in plagam plani illam cadunt, quæ a \mathfrak{C} ad lævam est; itaque ut sectio dicta fiat, recta cd per rectam \mathfrak{Cc} alicubi præter c transire deberet, et tum cd in $c\mathfrak{C}$ caderet.

4. Ita perpendicularis quævis \mathfrak{Cc} per verticem anguli ipsius λ ex c ad \mathfrak{AB} missa, angulum ipsum omnino bisecans, nullum præter c punctum cum λ (aut cum L) commune habet: nam si quod punctum p ipsius λ adhuc cum \mathfrak{Cc} commune esset, hoc p in perpendiculararem e punto

rectæ \overline{AB} a C diverso erectam caderet; et si p etiam in Cc caderet, duæ rectæ ad eandem rectam perpendicularares concurrerent.

5. (Fig. 27.) Rectæ ab, ac, ad & ex eodem a ad extrema laterum lineæ λ ductæ vocentur Q , Q' , Q'' , ... et nomine generali dicantur Q ; atque sit Q angulum lineæ λ quæ ad a est bifariam secans, adeoque perpendicularis ad \overline{AB} per a: angulus abc est = bcd = cde &c; sed quæritur, quo cadat respectu alicuius Q latus sequens lineæ λ ? Primo statim bc infra ab cadit, quia (pag. 49) angulus duobus rectis minor accipitur; porro cd infra Q' cadit; secus enim aut in Q' aut supra Q' caderet. In Q' non cadit; quia id aut intra c, aut ultra c ex. gr. in f esset; et in casu posteriore angulus bcf $> 2R$ esset, in altero vero per cd secaretur pars ipsius λ ante generata (contra pag. 49). Idem fieret, si cd supra Q' caderet, fieri enim hoc inter Q' et cb deberet; nam si extra cb caderet, angulus $> 2R$ esset.

Demonstratione eadem semper ulterius applicata, patet quodvis latus sequens infra rectam ex a ad initium eius ductam cadere.

6. Hinc si Q circa a moveatur per bcd... usquequo in Aa perveniat: omnino semper in ulterius punctum lineæ λ veniet, adeoque eam secabit aliquamdiu, ipsum Aa vero nullum latus lineæ λ secabit (pag. 49); itaque ut supra (pag. 43) datur aliqua recta Q' lineam λ primo non secans, intra quam quodvis Q angulum utvis parvum z cum Q' efficiens secat lineam λ .

Sed tum etiam nullum latus lineæ λ (ex. gr. cd) ad dextram utvis continuatum secat rectam Q' ullibi (ex. gr. in i). Nam perpendicularis e quovis punto ulteriore (ad dextram) lateris cuiusvis utvis continuati quoque semper ulterius cadit: namque e a perpendiculari Dd ad dextram cadit; ita continuatio rectæ de per perpendiculararem eE transit ad dextram, et perpendicularis e quovis punto rectæ huius, quæ ab eE ad dextram cadit, pariter ad dextram cadit; uti etiam perpendicularis e quovis punto rectæ, quæ per novam perpendiculararem ad dextram transit.

Itaque si sectio i fieret: tota def... excepto punto d intra triangulum adi, adeoque inter perpendicularares aA et iD contineretur quodvis

punctum, et quævis perpendicularis generans ex eo ad $\mathfrak{A}\mathfrak{J}$ missa, et ultra \mathfrak{J} nulla perpendicularis generans daretur. Idem valet quocunque cadat i, atque etiam si $abcde\ldots$ versus $\mathfrak{A}\mathfrak{B}\mathfrak{C}$ convexa esset (quod ut dictum est, fieri non posse facile ostendi potest).

7. Manifesto autem hinc pro z utvis parvo, ex. gr. $z < \frac{q}{n}$ pro n integro utvis magno, crura alicuius anguli constantis q , producta in infinitum etiam, inter crura anguli z continentur. Atque hinc si q e vertice in n partes æquales dividatur, inter cuiusvis eiusmodi n -tæ partis crura quoque continebitur unum q cum cruribus infinitis, et omnes hi anguli q a se invicem prorsus distincti erunt, si in quovis $\frac{q}{n}$ ita accipiatur $z < \frac{q}{n}$, ut crura ipsius z e vertice anguli q intra crura anguli $\frac{q}{n}$ cadant.

Unde cum axiomate (II, 2) proposito, anguli u (pag. 43) quantitas $>$ aut $< R$ consistere nequit. Consequenter u rectus est.

8. Hinc (Fig. 28.) si (ex Fig. 25.) $a\mathfrak{A}=b\mathfrak{B}$, et anguli ad \mathfrak{A} , a , \mathfrak{B} , b recti sint, erunt anguli $\alpha+\gamma$ et $\alpha'+\gamma'$ ac β , β' (*alterni dicti*) æquales, uti *externus* ex. gr. β'' *interno opposito* β' æqualis, et quæcunque recta $a\mathfrak{B}$ secet ipsam $\mathfrak{A}\mathfrak{B}$ et \bar{ab} , summa internorum est duobus rectis æqualis. Nam triangula rectangula $\mathfrak{A}ab$ et $b\mathfrak{B}a$ propter hypotenusam communem et cathetum $a\mathfrak{A}$ catheto $b\mathfrak{B}$ æqualem sunt (per inferiora ab his independenter) æqualia; adeoque

$$\alpha=\alpha' \text{ et } \beta=\beta';$$

et hinc quia $\beta=\beta''$ nempe suo verticali, est etiam $\beta''=\beta'$. Atque hinc, quum

$$\beta''+\gamma+\alpha=2R,$$

erit etiam

$$\beta'+\gamma+\alpha=2R.$$

9. Hinc item quodvis triangulum fuerit, (Fig. 29.) per verticem tali linea ut in præcedentibus generata, erit

$$\gamma=\gamma', \text{ et } \beta=\beta';$$

adeoque

$$\alpha+\beta+\gamma=\alpha+\beta'+\gamma'=2R.$$

10. Atque hinc

$$\delta + \gamma = \beta + \alpha + \gamma = 2R;$$

et

$$\delta = \alpha + \beta;$$

nempe producto latere quovis trianguli, angulus externus est summæ internorum oppositorum æqualis.

11. Et hinc iam facile sequitur, quod si (Fig. 30.) summa internorum $< 2R$, tum rectæ secent se invicem. Nam si

$$u + p + \omega + q = 2R,$$

et \tilde{B} ipsam \tilde{A} primo non secans sit, erit tum recta e quovis puncto a ipsius \tilde{A} ad \tilde{B} ducta, angulus ad a trianguli $\tilde{A}a\tilde{B}$ (per 9) æqualis

$$2R - u - p = u + p + \omega + q - u - p = \omega + q,$$

essetque semper $> q$; quod falsum esse patet (ex Fig. 31.): nam si $\alpha' = \alpha$, ita $\beta' = \beta$, et ita porro cuivis novo lateri ex b ducto, e fine eius in \tilde{A} æquale accipiatur: orientur triangula æquicrura se in infinitum excipientia; in quibus

$$z = 2z', \quad z' = 2z'', \dots$$

itaque angulis $z, z', z'' \dots$ generaliter z dictis, $z \not\sim o$. Nempe trianguli æquicruri angulos ad basim esse æquales infra ab hoc independenter demonstrabitur.

12. Superius generatam L (per definitionem pag. 19) parallelam ad $\tilde{A}\tilde{B}$ esse patet; et iam hic posito axiomate dicto, manifesto recta $\tilde{a}\tilde{b}$ non secat rectam $\tilde{A}\tilde{B}$, quævis alia per a ducta autem, quum ab aliqua parte summa internorum $< 2R$ fiat, secat rectam $\tilde{A}\tilde{B}$; et manifeste datur eodem modo parallela ad rectam quamvis per punctum quodvis, eaque una sola est.

13. Atque hinc (Fig. 32.) si rectæ A, B secent se invicem in p , ubi cunque sit A' ad A parallela, etiam A' secatur a B . Sit enim ex p recta ad quodvis aliquod punctum q rectæ A' ; erit

itaque

$$z + v + u = 2R;$$

$$v + u < 2R;$$

consequenter B ultra p , et A' ultra q continuatæ concurrent.

14. Pariter patet, quocunque moveatur B sibi parallele (ex. gr. in B'), rectas A' et B' quoque secare se invicem, et angulos z et k in sectione prima esse angulis z et k sectionis posterioris æquales.

15. E superius dictis autem sequitur etiam inter crura anguli utvis parvi v continuata in infinitum, angulum quatuor rectis quantovis minorem, simul cum cruribus continuatis in infinitum, imponi posse, nisi $u = R$ sit (pag. 43).

Nempe inter crura anguli utvis parvi v (pag. 51) angulus certus $b = \frac{R}{n}$, pro R rectum et n integrum denotante, imponi potest, adeoque etsi $v = \frac{1}{2} b$ fuerit; fiat id ad distantiam d a vertice anguli $v = \frac{1}{2} b$. Atque hinc fiat (Fig. 33.) linea polygonalis $abcd\dots$, cuius latus quodvis $= d$, et angulus quivis (duobus rectis minorem intelligendo) sit

$$= 2R - \frac{1}{2} b.$$

Dicaturque α continuatio lateris ab efficiens angulum $\frac{1}{2} b$ cum bc , et fiat ex b recta bb' , ex c recta cc' , ex δ recta $\delta\delta'$ \mathcal{E} , singulæ angulum $\frac{1}{2} b$ cum lateribus e punctis b, c, δ, \dots incipientibus efficientes, ut inter crura cuiusvis $\frac{1}{2} b$ ad distantiam d sit $\frac{1}{2} b + \frac{1}{2} b = b$ positum; quævis litera græca autem fuerit ad initium lateris alicuius, efficiens cum eo in plaga dextra angulum aliquem ρ : recta ad finem lateris eius, cum continuatione eiusdem efficiens angulum externum $= \rho$, insigniatur litera græca sequente; ex. gr. β efficiet cum continuatione lateris bc angulum $\frac{1}{2} b$, ita γ efficiet cum continuatione lateris cd angulum $2 \cdot \frac{1}{2} b$, ita δ cum continuatione lateris de angulum $3 \cdot \frac{1}{2} b$ et ita porro, donec litera græca prodeat, quæ cum continuatione lateris præcedentis efficiat angulum $(4n - 1) \cdot \frac{1}{2} b$, adeoque cum latere sequente faciat angulum $4n \cdot \frac{1}{2} b = 2R$.

Manifesto $\tilde{\beta}$ in plano supra $\tilde{\alpha}$, et $\tilde{\gamma}$ supra $\tilde{\beta}$, ac $\tilde{\delta}$ supra $\tilde{\gamma}$ \mathcal{E} , ac quæ-

vis sequens supra omnes præcedentes cadit: imo si omnium rectarum literis græcis denotatarum tantum pars a linea $bcde\dots$ in plagam dextram cadens consideretur: quævis supra omnes præcedentes cadet; nec illa, quæ cum latere sequente $2R$ facit, adeoque in recta erit, secat ipsam α . Erit igitur tota hæc recta utrinque infinita inter crura ipsius $v = \frac{1}{2} b$; nempe $b\tilde{b}'$ est intra $a\tilde{a}'$, $c\tilde{c}'$ intra $b\tilde{b}'$, $d\tilde{d}'$ intra $c\tilde{c}'$.

Unde etiam (Fig. 34.) ad rectarum A , B angulum utvis parvum v efficientium, latus quodvis A potest talis perpendicularis poni, quæ utvis producta latus alterum B utvis productum secare nequeat. Sit enim C recta talis, quæ per præcedentia etiam utrinque infinita inter crura anguli v ab ea parte in infinitum producta maneat: demittaturque e quovis puncto p ipsius C perpendicularis pq ad A ; cadet hæc in plagam eandem cum C , quia si in alteram caderet, fieret triangulum cuius unus angulus rectus esset, alter autem obtusus, nempe ipsi v acuto deinceps positus; continuatio ipsius pq vero transit per C in alteram plagam, quæ pariter tota inter crura anguli v continetur.

Atque hinc (Fig. 35.) inter crura anguli $2v$ (quod $\sim o$ si $v \sim o$) non solum totam perpendiculararem $\tilde{c}\tilde{c}'$, sed $a'c = ac$ facta, etiam angulum $b'a'\tilde{f}'$ æqualem $4R - v$ simul cum cruribus infinitis imponi posse patet.

Si igitur ba circa a moveatur versus ac usquequo in ac perveniat, atque priusquam ab in ac perveniat, accipiatur semper tale a' , et tale $a'b'$ ad angulum ei quem ab in ac facit æqualem, ut $a'b'$ et $a\tilde{b}$ se invicem haud secent; atque cogitetur semper spatium quod, si schema circa $a\tilde{a}'$ revolveretur, maneret a via ipsius ab ad lævam, et id quod a via ipsius $a'b'$ ad dextram esset. Hoc pacto quævis spatii portio s nihil cum recta $a\tilde{a}'$ (saltem præter punctum a) commune habens, manifesto alicui spatio ad lævam generato includetur pro v minore, quam angulus quivis, quem recta ex a ad aliquod punctum ipsius s ducta cum $a\tilde{a}'$ facit; atque a' sufficienter remoto, ad angulum v alteri v æqualem, aderit alterum s quoque cum priore nihil commune habens. Unde applicatio Axiomatis propositi (I, 3) patet; non tamen duo spatia prodibunt, nam dum ab in ac pervenit, nascitur quidem totum spatium, sed a' in infinito disparens nullibi amplius in temporis punto experite ultimo reperitur; et

antea quidem quodvis punctum in spatium ad lœvam inclusum est, sed omne nunquam ante finem.

16. Ita facile demonstrantur sequentia :

1. Lineam uniformem L (pag. 50) nisi recta sit, extra lineam $abcd\dots$ fluere, cum hac (Fig. 27.) nonnisi puncta $abcd\dots$ communia habentem : atque hinc applicatio (Ax. III.) patet; nempe angulus quem continuatio inferior ipsorum Q cum L extus facit, infrorsum $\sim\alpha$, superius ad $2R'\sim\alpha$, (si per R' intelligatur angulus quem continuatio rectæ $a\mathfrak{U}$ cum L facit), et uterque est semper $>\alpha$; inferior crescit continuo, superior decrescit, et manifesto sunt anguli ad utramque continuationem cuiusvis Q æquales.

2. \mathfrak{W} circa \mathfrak{U} sursum motum illico secat lineam L , uti etiam quævis perpendicularis ad $a\mathfrak{U}$ inter α et \mathfrak{U} ; et statim post \mathfrak{U} , ad dextram lœvamque secat ipsum L ad angulos utrinque æquales, a limite dicto α decrescentes, et dato constante aliquamdiu semper maiores.

3. Manente α et remoto \mathfrak{U} in $a\mathfrak{U}$ semper porro deorsum in infinitum simul cum perpendiculari \mathfrak{W} , ac generatis super quavis \mathfrak{W} cum perpendiculari $a\mathfrak{U}$ lineis L , et angulo, quem recta ipsam L primo non secans cum $a\mathfrak{U}$ facit, generaliter u dicto, atque etiam quovis centro \mathfrak{U} radio $a\mathfrak{U}$ descriptis circulis: angulus $u\sim\circ$; alioquin recta pro certo angulo perpendiculararem utvis remotam secaret (contra pag. 54); porro lineæ L solum punctum α commune habebunt, et descendenter; circuli vero idem punctum α solum commune habebunt, sed ascenderent continuo, gaudebuntque limite geometrico certo eodem: quem existere, uti et superficiem per revolutionem huius lineæ circa $a\mathfrak{U}$, atque utramque formam uniformem esse constat; estque si XI Axioma Euclidis verum sit, linea dicta *recta*, et superficies *planum*; in omni tamen casu tam linea hæc, quam superficies, *sola* determinatur in *spatio*.

Describi vero linea dicta motu puncti continuo potest modo sequente. Sit prius (Fig. 36.) $u=R$, et moveatur ab circa α usque in ac ; simulac b in arcu α viam aliquam describet, illico dabitur aliquod c , unde erecta perpendicularis primo non secans rectæ ab est, et pro $ca'=ca$ erit $a'b'$ primo non secans ipsius ab . Puncto b in arcu α porro moto vero punctum c ab α incipiendo semper porro movetur: nam pro quovis puncto

interiore ipsius α datur c , et quidem semper ulterius; nec ullum punctum ultra quodvis c ab a incipiendo est, cui aliquod punctum ipsius α non respondeat, et cuivis ulteriori punto interius punctum ipsius α respondet. Nam si ab primo non secans ipsius $c\bar{p}$ sit, interius ducta recta secabit ipsam $c\bar{p}$, adeoque illa perpendicularis, quam non secat, ulterius esse debet; si vero aliquod c esset, cui non responderet punctum aliquod interius ipsius α , tum perpendicularis ex a esset primo non secans ipsius $c\bar{p}$: atque tum pro recta ac verum esset Axioma XI; et tum de omnibus facile demonstraretur. Potest igitur c ex a incipiendo ita moveri porro, ut mota ab circa a , adeoque mota b in α , donec u (prius $= R$) fiat $= o$, $c\bar{p}$ semper tale sit, ut ab primo non secans illius sit: atque hinc eadem ad a' applicando, poterit a' ex a ita porro moveri, ut ab et $a'b'$ quævis alterius primo non secans sit.

Atque iam moveatur (Fig. 37.) ab circa a versus $a\bar{q}l$ in eodem plano, donec u (prius $= R$) fiat $= o$, atque interea in ab moveatur punctum b' semper porro, ita ut b' in moto ab semper in loco dicto ipsi u responderete sit: erit via ipsius b' per motum hunc compositum *linea dicta*. Reliqua autem ultro patent; uti et ea quæ reliquorum axiomatum propositorum quovis posito, rem deciderent: nec operæ pretium est plura referre; quum res tota ex altiori contemplationis punto, in ima penetranti oculo tractetur in *Appendice*, a quovis fideli veritatis puræ alumno digna legi.

ELEMENTA GEOMETRIAE.

SECTIO II.

PLANIMETRIA PARS PRIMA.

·21111.

Sectio nulla est duarum rectarum, si recta ab uno punto unius ad aliquod punctum alterius ducta, summa internorum in plaga eadem sit duobus rectis æqualis.

Sectio nulla rectae et circuli est, si perpendicularis e centro ad rectam radio sit maior.

Sectio nulla duorum circulorum est, si recta a centro ad centrum summa radiorum maior sit.*

Sed de his heic ordinis gratia allatis, sub ·21112121 (pag. 58) et in *supplemento* post ·2111211222 (pag. 66) dicetur; atque nunc sequitur:

·2111211.

Si duæ rectæ punctum commune habeant, formam angularem oriri e *Conspectu Geometriae generali* facile patet. Dictum etiam ibidem est angulum esse quantitatem respectivam quoad arcum α circuli e puncto sectionis radio certo r (eodem pro omnibus) descripti inter crura comprehensum; scilicet si peripheria tota sit ϕ , anguli quantitas dicitur $\frac{\alpha}{\phi}$, ut nempe angulus rectus, ut quantitas, sit $= \frac{1}{4}$.

Patet vero pro duabus formis angularibus, quæ congruere queunt, arcum etiam congruentem describi, adeoque quotum eundem prodire.

* Quoad sectionem nullam aut quamvis duorum circulorum vide Fig. 240. (Ex Erratis Ed. I Tom. II, pag. 375).

Ita conversim si arcus $ab = pq$ (Fig. 38.) centro radioque eodem, formæ angulares acb , pcq congruent. Nempe si forma pcq superimponatur ipsi acb , ita ut c in se maneat, et p in a cadat, atque arcus in eandem plagam cadant: arcus pq ob generationes æquales simul cum arcu ab incipit continuaturque, nec prius aut serius desinere potest, quia tum pars æqualis toti esset, quum circulus linea simplex sit. Consequenter c in c , p in a et q in b cadentibus, et rectæ ac , bc cum pc , qc congruunt. Patet etiam pariter q in a poni potuisse, quum circuli generatio ad lævam dextramque prorsus æqualis sit.

Est etiam manifesto (Fig. 39.) omnium angulorum u, v, z, p, q , quotvis fuerint, summa $= 1$, nempe arcuum omnium summa est peripheria, quæ per se divisa quotum 1 dat. Ita quotvis u, v, z fuerint supra rectam ab , summa est $\frac{1}{2}$; pariter infra ab . Si e meditulliis dimidiarium peripheriarum supra et infra ab ad c rectæ ducantur, angulorum tam superius quam inferius æqualis summa prodibit; adeoque et quatuor rectorum summa est $= 1$, et duorum rectorum summa $= \frac{1}{2}$. Consequenter summa prior etiam quatuor rectis, et posterior duobus rectis æqualis dici potest.

Hinc anguli verticales sunt æquales; nempe (Fig. 40.) $u = v$ et $z = p$; nam $u + p = 2R = v + p$, et hinc $u = v$; ita $z + v = v + p$. Nempe (Fig. 41.) etiam recta dc per rectam ab in alteram plagam transit: nam in ab nullum aliud punctum præter c habet; itaque nisi transiret, in eandem plagam e qua venit redire deberet; tum vero esset tam $k + u + v$ quam $u = \frac{1}{2}$, adeoque pars peripheriae dimidiæ esset ipsi peripheriae dimidiæ æqualis.

•21112121.

De tribus rectis, quarum nonnisi unum par est se mutuo (continuatione sufficiente) non secantium.

§. I.

Si angulus externus u aequalis sit interno opposito v , sive alterni u, v fuerint aequales, sive $v + z = 2R$, quorum quodvis manifesto ponit reliqua duo: tum rectae ab et dc se invicem non secant (Fig. 42.).

Si enim \overline{DB} et \overline{db} secarent se mutuo, idem et in plaga altera fieret; nam formæ $\overline{dbD}\overline{B}$ et $\overline{D}\overline{d}\overline{a}$ congruunt recta $\overline{D}\overline{D}$ ita posita, ut δ formæ prioris in \overline{D} posterioris et \overline{D} prioris in δ posterioris cadat, atque vertatur forma prior, donec in plagam plani lœvam cadat; namque tum \overline{db} propter altermos α æquales in $\overline{D}\overline{A}$, et \overline{DB} in $\overline{d}\overline{a}$ cadet. Tunc vero punctum ipsis \overline{DB} et \overline{db} commune erit etiam ipsis $\overline{d}\overline{a}$ et $\overline{D}\overline{A}$ commune. Consequenter \overline{ab} et \overline{AB} duo puncta haberent communia.

Hinc si $\wedge \overline{ad} = \overline{BD}$ construatur (pag. 61), ab ipsis \overline{AB} per δ fiet *parallela*.

§. 2.

(Fig. 43.). Etsi externus minor, nempe $v = u > u'$ fiat: de ipsam \overline{AB} secare nequit. Nam per \overline{ab} prius transire deberet alicubi præter δ , atque item duo puncta haberent \overline{ab} et de communia.

§. 3.

Hinc si duae rectae \overline{db} et \overline{DB} secent se mutuo: oportet externum maiorem interno opposito v esse; nam si externus æqualis aut minor esset, nulla sectio daretur (per §. 1 et 2). Pariter patet (Fig. 44.) externi u verticalem eadem ratione esse altero β duorum internorum oppositorum maiorem; nempe si æquales essent, tum \overline{Ed} et \overline{AB} non secarent se invicem \mathcal{E} .

Itaque trianguli latere quovis *producto*, externus quovis internorum oppositorum est maior.

§. 4.

Unde etiam summa quorumvis duorum angulorum trianguli est $< 2R$.

Nam (Fig. 44.)

$$u + z = 2R;$$

sed

$$v < u,$$

consequenter

$$v + z < 2R.$$

Conversa huius, nempe quod rectæ se invicem secent, si summa duorum internorum duobus rectis minor fuerit, Axioma XI Euclidis est; de quo iam in sectione prima actum est, atque in sequentibus ubique supponetur.

§. 5.

Hinc perpendicularis acuto angulo obiecta cadit; secus enim triangulum fieret, cuius unus angulus rectus et alter obtusus esset. Atque hinc etiam patet ex eodem punto duas perpendiculares ad rectam eandem non dari; nam triangulum fieret cum angulis rectis duobus.

•211121122.

Si trium rectarum nullum par sit se mutuo (continuatione sufficiente) non secantium: oritur triangulum, quod si angulo recto gaudeat, *rectangulum*, si obtuso *obtusangulum*, secus *acutangulum* audit; et quodvis horum, si duobus lateribus æqualibus gaudeat, *aequicrurum*, atque triangulum cuius omnia latera æqualia sunt, *aequilaterum* audit. Trianguli rectilinei latera angulum rectum intercipientia *catheti*, latus angulo recto oppositum vero *hypotenusa* dicuntur. Quomodo geometrice construi queant, mox dicetur.

•2111211221.

§. I.

Aequalitatem duorum triangulorum, et quidem ita ut lateribus æqualibus anguli æquales, et angulis æqualibus latera æqualia respondeant, generaliter ponit quodvis sequentium:

i. *duo latera cum angulo intercepto,*

2. unum latus et duo anguli, si unus adiacens adiacenti, et alter aut adiacens adiacenti aut non adiacens non adiacenti aequalis sit,
 3. tria latera tribus aequalia.

Casus 1. (Fig. 45.). Si $\mathfrak{A}\mathfrak{C}=\alpha$, atque $\mathfrak{A}\mathfrak{B}=ab$ et simul $\wedge \mathfrak{C}\mathfrak{B}=cab$: superimponatur triangulum cab ipsi $\mathfrak{C}\mathfrak{B}$, ita ut a in \mathfrak{A} et b in \mathfrak{B} cadat, et vertatur in eandem plagam; α nec supra nec infra $\mathfrak{A}\mathfrak{C}$ cadet, quia anguli ad a et \mathfrak{A} sunt aequales; cadetque etiam c in \mathfrak{C} propter $\mathfrak{A}\mathfrak{C}=\alpha$. Consequenter etiam recta bc congruet cum $\mathfrak{B}\mathfrak{C}$, quum duo extrema congruant.

Casus 2. (Fig. 46.). Si $\mathfrak{A}\mathfrak{B}=ab$, atque anguli ad \mathfrak{A} , \mathfrak{B} angulis ad a, b aequales sint: superimponatur triangulum abc ipsi $\mathfrak{A}\mathfrak{B}\mathfrak{C}$, ita ut a in \mathfrak{A} et b in \mathfrak{B} cadat, vertaturque in eandem plagam; cadet $a\bar{c}$ in $\mathfrak{A}\bar{C}$ et $b\bar{c}$ in $\mathfrak{B}\bar{C}$ propter angulos dictos aequales. Consequenter c extra \mathfrak{C} cadere nequit, secus enim duæ rectæ duo puncta haberent communia.

Ita (Fig. 47.) si $\mathfrak{A}\mathfrak{B}=ab$, atque $\wedge u$ ad a = $\wedge u$ ad \mathfrak{A} , et $\wedge acb=\wedge \mathfrak{A}\mathfrak{C}\mathfrak{B}$; superimposito triangulo abc ipsi $\mathfrak{A}\mathfrak{B}\mathfrak{C}$, ita ut a in \mathfrak{A} , b in \mathfrak{B} , et $a\bar{c}$ in $\mathfrak{A}\bar{C}$ cadat; c nonnisi in \mathfrak{C} cadere potest; nam $r>z>t$ (pag. 59).

Casus 3. (Fig. 48.). Si $ab=\mathfrak{A}\mathfrak{B}$, $\alpha c=\mathfrak{A}\mathfrak{C}$, $bc=\mathfrak{B}\mathfrak{C}$: superimponatur triangulum abc ipsi $\mathfrak{A}\mathfrak{B}\mathfrak{C}$, ita ut a in \mathfrak{A} , et b in \mathfrak{B} cadat, vertaturque in eandem plagam; et describantur centro a radio αc et centro b radio bc circuli: nisi c in \mathfrak{C} cadat, aderunt circulorum dictorum in plaga superiori duo puncta communia; itaque manifesto iisdem peripheriis et inferius duo puncta communia parient sectionem peripheriarum duarum ad minimum quatuor punctorum; quod fieri nequit, quum maximam earum sectionem nonnisi duorum punctorum esse iuxta ordinem in 21112121 (pag. 81) demonstretur, quod hic quoque statim perlegere licet.

Hinc si (Fig. 38.) e q radio ba secetur arcus qp in p, fiet angulo qcp angulus bca aequalis.

§. 2.

Triangula dicta, nempe *aequicrurum*, *aequilaterum*, *rectangulum*, *obtusangulum*, *acutangulum* construi geometrice possunt; nempe:

1. Si (Fig. 49.) centro a et radio r dimidium rectæ ab excedente, ac

centro b item radio r fiant circuli, hi secabunt se alicubi; nam sit $ac = cb$, et $r = af = be = be'$; erit e punctum peripheriae centri b , et f punctum peripheriae centri a ; atque e punctum internum peripheriae centri a , quia $ae < af$; dum igitur centro b radio be scribitur circulus, punctum e ut in e' venire queat, e circulo priore egredi debet, nam e' extra illum cadit, quia $ae' > r$. Transitus iste autem in recta ab fieri nequit, quia partes ex a et b nonnisi in c æquales radii esse possunt. Si igitur d sit sectionis punctum, patet $ad = db = r$ esse.

Ita si $r = ab$ accipiatur, latera omnia manifesto æqualia sunt. Et si $r > ab$ accipiatur quoque, manifesto sectio fit, et triangulum *aequicrurum* in omni casu.

2. Rectangulum triangulum construi posse patet, si perpendicularis construatur. Hoc vero fit sive e punto c quopiam rectæ *erigendo*, sive e punto d extra eam *demittendo perpendicularem*.

Prius fit (Fig. 50.), si centro c radio quovis sit circulus, et $ca = cb$; atque radiis eidem r æqualibus (ut antea) centris a , b fiat circulorum sectio in d : erit enim triangulum $adc = bdc$, quia $ac = bc$, $dc = dc$ et $ad = db = r$; consequenter angulus $acd = bcd$.

Alterum vero fit (Fig. 51.), si ex d punto supra \overline{AB} fiat recta ad quodvis punctum p infra \overline{AB} situm, fiatque circulus centro d radio dp ; manifesto transibit p per rectam \overline{AB} tam ad laevam quam ad dextram eundo usque in p' pro $dp = dp'$. Fiat hoc in a et b ; fiatque centris a et b radio eodem r (ut antea) intersectio sive in e sive in f : recta per d et intersectionem erit perpendicularis ad \overline{AB} . Nam $ae = be$, $ad = bd$, $ed = ed$; itaque triangulum $ade = bde$, et quidem ita, ut d in se et e in se manentibus, triangulum ade verti possit, usquequo a in b cadat; tum vero et quodvis aliud punctum rectæ de adeoque et q loco suo priore manet; consequenter d in d , q in q , et a in b carentibus, anguli ad q manifesto æquales sunt. Pariter sunt triangula adf et bdf æqualia, et manentibus d et f (adeoque et q) superimponendo, d in d , q in q , et a in b cadere potest. Rectam de per ab transire inde patet, quod recta e figuræ cuiusvis punto interno utrinque egredi, duoque ad minimum puncta communia cum figura habere debeat. Etenim si centro f radio

quamvis rectarum, quæ a \mathfrak{f} ad punctum aliquod figuræ est, excedente circulus fiat, recta ex \mathfrak{f} dicta in aliquam diametrorum cadet, quæ utrinque e circulo exit; adeoque radius e punto figuræ interno \mathfrak{f} ad punctum extra figuram situm transit alicubi; pariter radius alter diametri eiusdem; in eodem figuræ punto vero radius uterque transire nequit, quia tum recta rediret. Itaque et recta e punto interno trianguli abd transit in duobus punctis; sed unum δ est, alterum vero nec in δa nec in δb esse potest, quia tum duæ rectæ duo puncta haberent communia.

Patet etiam per δf angulum adb , uti per ef rectam ab bisecari.

3. E quovis punto \mathfrak{f} (Fig. 52.) sit recta \mathfrak{fd} : triangulum \mathfrak{fad} obtusangulum est; nam $z > R$ (pag. 59).

Acutangulum autem præbet etiam æquilaterum, quum statim probetur etiam angulos esse æquales, adeoque quemvis recto minorem. Sed inferius etiam nota rectarum e quibus triangulum construi potest relata, mox etiam nota e quibus dignosci queat, num triangulum rectangulum, obtusangulum vel acutangulum sit, exponetur.

§. 3.

Trianguli æquicruri et rectanguli primariæ quædam proprietates referendæ veniunt.

1. *Trianguli aequicruri anguli ad basim sunt aequales, et si anguli ad basim fuerint aequales, crura sunt aequalia, ac recta e vertice ad meditullium baseos ad hanc perpendicularis est.*

Prius patet (Fig. 53.): nam si $ac = bc$, congruet triangulum bca triangulo acb ad lævam, propter $ac = bc$, $cb = ca$, atque tertium latus tertio æquale (pag. 61). Consequenter c in c , b in a , a in b cadente, u' congruet cum u .

Alterum quoque patet (Fig. 54.) triangulo bda ipsi acb ita superimposito, ut b in a et a in b cadat; cadet enim propter adiacentes æquales (pag. 61) δ in c , adeoque δb in ca . Sed eodem modo potest triangulum

adb ipsi acb superponi, ita ut a in a et b in b cadat; atque tum erit $ad = ac$. Consequenter $ac = bd = ad$.

Tertium quoque ex (Fig. 55.) patet; nam si $ad = db$, $ac = bc$, et $dc = dc$, est triangulum $adc = bdc$.

2. *In triangulo rectangulo hypotenusa ac est maior catheto; imo et hypotenusa quaevis ulterior est maior* (Fig. 56.).

Est enimvero c extra circulum centro a radio ab scriptum, ita d extra circulum centro a radio ac factum cadit. Nam si c non extus caderet, esset aut in peripheria puncti b , aut intra eam; prius fieri nequit, nam tum pro $bc' = bc$, et c' in peripheriam eandem caderet, in qua adhuc duo puncta nempe b , c sunt (contra pag. 81); sed neque intra peripheriam cadere c potest, nam tum (pag. 62) e circulo in duobus saltem locis egredetur, adeoque recta bc præter b adhuc haberet punctum commune, atque punctum rectæ bc ad eandem distantiam ad lœvam pariter in peripheria radii ab esset, et recta circulum item in pluribus quam duobus punctis secaret.

Pariter patet d extra circulum centro a radio ac factum cadere: quum secus rectæ bc præter punctum c adhuc aliquod punctum rectæ cd supra ac , et ad lœvam tertium ad distantiam a b eandem commune cum peripheria puncti c esset.

Hinc item triangulorum rectangulorum aequalitas per catheti hypotenusa que aequalitatem ponitur. Si enim cathetus ipsi ab et hypotenusa ipsi ac æquales fuerint, superimponendo patet ex a hypotenusa in c cadere; omnes aliæ enim maiores minoresve sunt.

§. 4.

Hinc summa laterum trianguli quorumvis duorum a et b est maior tertio.

Nam aut anguli ad latus tertium ambo acuti erunt, aut alteruter rectus vel obtusus est. Si ambo acuti fuerint (Fig. 57.), perpendicularis d ad latus tertium e vertice opposito inter a et b cadit; atque tum $a > c$ et $b > c'$ (per præcedentia); itaque $a + b > c + c'$.

Si vero (Fig. 58.) $a' \perp c$, tum b solum quoque est $>c+c'$; tanto fortius $a'+b>c+c'$.

Item pro z obtuso u acutus est, cui perpendicularis e vertice obiecta cadit; adeoque b solum etiam maius latere tertio c' est, quia $b>c+c'$; et tanto fortius est $a+b>c'$.

Unde manifesto *triangulum nonnisi e talibus rectis construi potest*, quarum binarum quarumvis summa tertia maior est: atque ex omnibus talibus a, b, c construi potest, si ex una extremitate ipsius a radio b , et ex altera extremitate radio c circuli fiant; fiet enim (iuxta pag. 62) intersectio, e qua ad extrema ipsius a ductis rectis, triangulum petitum factum erit.

Sed patet etiam (Fig. 59.) e punto trianguli interno rectis ad extrema baseos B ductis, *laterum extimorum summam esse summa internorum maiorem*.

Nam

$$a+d>b+c,$$

et

$$c+e>f;$$

adeoque

$$a+d+c+e>b+c+f;$$

unde

$$a+d+e>b+f.$$

At $U>u, V>v$; adeoque $U+V>u+v$.

§. 5.

Si hic (pag. 51) dictum legatur, erit in posterum semper summa omnium angulorum trianguli cuiusvis duobus rectis æqualis; atque producto latere quovis angulus externus summæ internorum oppositorum æqualis.

·2111211222.

Laterum angulorumque oppositorum dependentia mutua primario illa se offert, quod lateri maiori angulus maior, et angulo maiori latus maius opponatur.

Duorum laterum alterutrum aut recto vel obtuso opponitur, aut non. Quoad casum primum, si (Fig. 60.) latera sint hypotenusa a et catetus c : est $a > c$, estque angulus ipsi a oppositus rectus R , adeoque maior quovis alio. Si obtusus sit, uti z : est quovis reliquorum maior, atque etiam $b > a'$, et $b > c + c'$ adeoque $b > c'$.

Quoad casum secundum autem demittatur e sectione duorum illorum laterum perpendicularis p ad tertium; cadet hæc utriusque acuto u et v obiecta; sit $b > a$, cadet pro recta ad dextram ipsi c ad lævam æquali, b ulterius ad dextram; nam $a' = a$, et hypotenusarum ad dextram non nisi ultra a' cadens ea maior est. Itaque fit $u > v$, nempe externus maior interno; sed huic u æqualis est alter ad lævam; adeoque uti $b > a$, est etiam $u > v$.

Conversa quoque patet: nam qualiasi fuerint u et v , si $u > v$, necessario et $b > a$; quia secus esset aut $b = a$ aut $a > b$, atque in casu priore esset $u = v$, in posteriore $v > u$.

Quæstio hinc suboritur, num duplo lateri duplus angulus obiiciatur \mathfrak{S} : facile patet dependentiam non talem quidem esse; sed ultro subvenit quærere, qualiter tamen angulus latusque oppositum a se mutuo dependent; atque ista disquisitio originem *Trigonometriae* planæ dedit.

Supplementum numeri 21111.

Recta cum circulo nil commune habet, si perpendicularis e centro ad eam radio maior sit: nam quævis alia recta ad dictam e centro ducta est hypotenusa catheto maior (pag. 64).

Nec circulus cum circulo quidquam commune habet, si centrorum \mathfrak{C} , c distantia summam radiorum excedat: nam si punctum p commune esset, hoc aut in recta \mathfrak{Cc} , aut extra eam esset; prius fieri nequit, nam

$\Sigma c > \text{se ipso esset}$; nec posterius fieri potest, quia in triangulo $\Sigma p c$ $\Sigma p + p c > \Sigma c$ (contra hypothesim).

·21112113.

Sequuntur *quatuor rectae*: quarum si nullum par sit parallelum, quadrilaterum *trapezoides* dictum oritur.

Si duo paria parallela fuerint, quum sectio supposita sit, aliqua recta α paris unius secabit aliquam β paris alterius; atque tum parallela ad α quoque secabit tam ipsam β , quam eam quæ $\parallel \beta$ est; secus enim facile patet, rectam utrinque infinitam duarum rectarum se mutuo secantium utriusque parallelam esse, atque tum summam internorum in parallelismo dari minorem duobus rectis. Oritur autem hoc pacto *parallelogrammum*, cuius species referuntur (in Tomo I. pag. 14).

§. 1.

Quodvis parallelogrammum per diagonalem in duo triangula aequalia dispescitur.

Nam (Fig. 61.) diagonalis latus commune est, et propter alternos v , v et u , u æquales, anguli adiacentes in uno triangulo adiacentibus in altero æquales sunt.

§. 2.

Utcunque fuerint ductae æ, bd (Fig. 62.), si centro c radio ca absecentur ca, cd, ce, cb aequalia: abed est rectangulum.

Nam quodvis par triangulorum verticalium est æquale per angulum inter latera æqualia interceptum verticalem; hinc $ad \parallel be$, $ab \parallel de$, nam alterni sunt æquales; itaque $4u + 4v = 4R$, quia quadrilateri omnium angulorum summa est summa angulorum omnium triangulorum, in quæ per diagonalem dispescitur, nempe $= 2.2R$. Itaque $u + v = R$, et omnes anguli a , b , e , d sunt æquales. Si angulus $acd = R$ tum $v + v = R$, $v = \frac{1}{2}R = u$, hinc $ad = ab$, nam triangulum bad æquicrurum fit; est igitur $abed$ *quadratum*.

Patet autem, punctum a ubivis in dimidia peripheria radii ac fuerit, ductis rectis prioribus ace , ad δ , esse $u+v$ ad a item rectum; adeoque *angulus in semicirculo*, ut dici solet, nempe cuius vertex in peripheria est et crura per extremitates diametri eunt, *rectus est*.

Si vero acd rectus fuerit, atque $cd=cb$, et ca quoque $=ce$, sed ac non $=cd$, tum oritur *rhombus*; si acd non sit rectus, tum sub condizione dicta fiet *rhomboides*. Quadrati rhombique alia constructio e (Fig. 91a, b, c, d) patet.

§. 3.

Si ab || et = cd, etiam (Fig. 61.) ac || et = bd.

Nam triangulum $abc=dcb$, per duo latera cum angulo intercepto æqualia; itaque et alterni v et v sunt æquales, et $ac || et = bd$.

§. 4.

Intersectio c duarum diagonalium (Fig. 63.) quamvis rectam per c ductam bisecat.

Nam triangulum $fcd=gcb$; nam anguli ad d et b sunt alterni, ita ad f et g ; cd vero $=cb$, quia triangulum $dce=bca$. Est etiam manifesto $afgb=egfd$.

2111211322.

Si unum par parallelum per alterum non parallelum secetur, præter trapezium fiunt sequentia.

§. 1.

Sit (Fig. 64.) par parallelum c et C , par non parallelum A et B ; posteriores se invicem secabunt, et formabuntur duo triangula abc et ABC sibi invicem æquiangula; nam angulus unus communis est, et angulus ac externus interno angulo AC opponitur, ita angulus bc ipsi angulo BC . Sit pro n , m integris, $a=nu$ et $A=mu+\omega=0$ vel $< u$,

atque fiat a vertice incipiendo usque ad finem m -ti u , ab extremitate cuiusvis u , una parallela ad B et altera ad C . Facile patet ad a numero n , ad A numero m oriri hoc pacto triangula, quæ inter se æqualia sunt: nam unum latus u est in quovis, atque anguli adiacentes sunt æquales, nempe in quovis triangulo unus est internus externo oppositus, et alter externus interno oppositus. Patet quoque, quod si trianguli ad verticem latus ad dextram sit v et basis sit v' , esse $a = nu$, $b = nv$, $c = nv'$, et $A = mu$ pro $\omega = o$, atque $B = mv$, $C = mv'$, per parallelogrammorum ibidem exortorum latera opposita æqualia.

Quum vero

$$\omega < \frac{a}{n}, \lambda < \frac{b}{n} \quad \text{ac} \quad v' = \frac{c}{n};$$

crescenteque n in infinitum, manifesto $\omega \sim o$, $\lambda \sim o$, $v' \sim o$; sed etiam $\omega \sim o$, quia e fine ipsius ω ducta ad A parallela patet v' secari, adeoque $\omega < v'$. Consequenter typum proportionis applicari patet, essetque

$$A : a = B : b = C : c.$$

§. 2.

Hinc si in duobus triangulis duo anguli sint duobus angulis æquales, latera prouti æqualibus angulis opponuntur sunt proportionalia. Id est per æqualitatem angulorum ponitur laterum proportio, uti conversim per laterum proportionem ponitur aequiangulitas triangulorum. Sed ponitur præterea generaliter in triangulis laterum proportio simul cum angulorum illis oppositorum æqualitate, quod per similitudinem exprimi solet, per duo latera in iis duobus proportionalia cum angulo intercepto æquali; et pariter si latera unius sint a , b , c , et alterius A , B , C , ac singula utrinque in infinitum producta concipiuntur, atque sive $a \parallel A$, $b \parallel B$, $c \parallel C$, sive a ad A , b ad B , c ad C perpendicularia sint, erunt

$$\wedge ab = \wedge AB, \wedge ac = \wedge AC, \text{ et } \wedge bc = \wedge BC;$$

adeoque triangula similia. Quinque igitur hae conditiones similitudinis triangulorum, nempe quarum quævis sufficit, exponendæ veniunt.

I. Nam quoad *primum*, sit (Fig. 65.)

$$\wedge AB = \wedge ab, \wedge AC = \wedge ac;$$

tum etiam tertius æqualis tertio.

Sit $a < A$; nam si $a = A$, patet, secus autem alterutrum est minus altero. Ponatur a super A , et angulus ab super angulum AB , sit y in fine ipsius a parallelum ad C ; orietur $\triangle axy = \triangle abc$; nam angulus ad finem ipsius a erit externus interno angulo AC oppositus, qui est $= \wedge ac$ per *hypothesim*; adeoque latus a cum duobus adiacentibus angulis in utroque triangulo sunt æqualia.

Itaque cum trianguli axy latera sint proportionalia lateribus maioris trianguli, sunt etiam trianguli abc latera iisdem proportionalia.

II. *Altera similitudinis* triangulorum *conditio generalis*, nempe *conversa prioris* est, si

$$A : a = B : b = C : c.$$

Fiet enim, parallela ad C ex fine ipsius a ducta,

$$A : a = B : x = C : y;$$

adeoque

$$x = \frac{aB}{A}$$

uti b ; et

$$y = \frac{aC}{A}$$

uti c ; itaque $x = b$, et $y = c$, atque $\triangle axy = \triangle abc$; est ergo et hoc uti illud eidem triangulo ABC æquiangulum.

III. *Tertia conditio similitudinis generalis* est, si (Fig. 65.)

$$A : a = B : b, \text{ ac } \wedge AB = \wedge ab.$$

Ponatur nempe triangulum abc ita super ABC , ut a in A et angulus ab super angulum AB cadat, sitque $y \parallel C$; erit $A : a = B : x$.

Consequenter et hic ut in præcedentibus erit $x = b$; adeoque

$\triangle axy = \triangle abc$; et hoc quoque æquiangulum ipsi triangulo ABC , uti triangulo axy est.

Hinc autem *modus* oritur $\frac{n}{m}$ -tum rectae cuiusvis C geometrice *exhibendi*, adeoque C per $\frac{n}{m}$ geometrice *multiplicandi*, aut per $\frac{m}{n}$ *dividendi*. Sit ex. gr. (Fig. 64^{*}) $n=2$, $m=5$; ponatur ad initium ipsius C ad quemlibet angulum recta *indefinita*; item ab initio ipsius C ponantur in rectam dictam rectæ u qualesvis æquales se invicem excipientes numero m , atque inde, ubi desinunt, ponantur retrorsum numero n ; erit parallela ad C e fine n -tæ partis, usque ad rectam e fine m -tæ partis (antrorsum) per extremitatem alteram ipsius C ductam, recta quæsita. Ex. gr. si $A=mu$, et $a=nv$, erit et $C=mv$, et $c=nv$, adeoque c recta quæsita est. Patet autem parallelam pro $n > m$ infra C cadere, et pro $n=1$ esse $c=\frac{C}{m}$.

IV. *Quarta conditio generalis similitudinis triangulorum.* Sit (Fig. 67.) \mathfrak{Cc} ipsi C parallela; erunt anguli partim ob verticalitatem partim ob parallelismum illi, qui adscripti sunt; et erit in illo puncto sectionis rectarum commune germen quasi omnium triangulorum, quorum latus unum ipsi A , alterum ipsi B , tertium ipsi C parallelum est.

Nam \mathfrak{Cc} motu parallelo in quamvis rectam ipsi C parallelam pervenire potest, adeoque in c quoque; \mathfrak{Bb} in quamvis ipsi B parallelam, adeoque in b quoque; \mathfrak{Aa} in quamvis ipsi A parallelam, adeoque in a quoque. Si duæ rectæ sint duabus parallelæ, illarum angulus est æqualis angulo harum (pag. 53); itaque

$$\wedge ab = \wedge AB, \quad \wedge ac = \wedge AC, \quad \text{et} \quad \wedge bc = \wedge BC.$$

Sed A cum B facit angulum z et alterum deinceps $u+v$; A cum C facit u et alterum $v+z$; B cum C facit v et alterum $z+u$. Dicitur Z deinceps ipsius z , et V deinceps ipsius v , ac U deinceps ipsius u ; certum est in triangulo abc esse angulum ab aut $=z$ aut $=Z$, ita angulum ac esse aut u aut U , et angulum bc esse aut v aut V ; itaque sunt sex literæ, tres minusculæ tres maiusculæ nominis eiusdem

$$\begin{aligned} z, \quad Z &= u + v \\ v, \quad V &= z + u \\ u, \quad U &= z + v. \end{aligned}$$

In triangulo duo deinceps esse nequeunt, adeoque litera parva et magna simul non accipiuntur: erunt itaque combinationes sequentes, z, v, u ; Z, V, U ; z, v, U ; z, u, V ; v, u, Z ; Z, V, u ; Z, U, v ; V, U, z ; quarum præter primam et illas, in quibus una tantum maior litera est, quævis summam angulorum trium dat duobus rectis maiorem; nam in triangulo ABC est $u+v+z=2R$, et substituto valore cuiusvis literæ maioris ex. gr. $Z+V+u=u+v+z+u+u$ patet excedi $u+v+z$, adeoque duos rectos; sed si una tantum maior litera sit, ex. gr. $Z+u+v=u+v+u+v=2u+2v$, hoc potest esse $=2R$, si $u+v=R=z$, adeoque z et Z duo deinceps æquales.

Itaque in triangulo abc angulus ab nonnisi $=z$, angulus ac nonnisi $=u$, et angulus bc nonnisi $=v$ esse potest.

V. *Quinta conditio similitudinis* triangulorum sequitur. (Fig. 68.). Sit

$$ab=a, \quad bc=b, \quad ca=c.$$

Quum in triangulo dentur duo acuti, sit u ad b acutus; fiatque e lateris cb puncto \mathfrak{l} interno perpendicularis $\mathfrak{f}\mathfrak{h}$ ad ab , fiatque e punto huius interno \mathfrak{A} perpendicularis $\mathfrak{A}\mathfrak{l}$ ad ac , et $\mathfrak{A}\mathfrak{l} \perp cb$; atque productis $\mathfrak{A}\mathfrak{l}, \mathfrak{A}\mathfrak{l}, cb, \mathfrak{f}\mathfrak{h}$, moveatur perpendicularis $\mathfrak{A}\mathfrak{l}$ super bc . In triangulo $\mathfrak{f}\mathfrak{h}b$ est angulus $q < R$, gaudetque suo verticali q , adeoque propter summam internorum $< 2R$ fit triangulum $e\mathfrak{B}\mathfrak{k}$, in quo est $u'+q=R$, at in triangulo $\mathfrak{f}\mathfrak{h}b$ quoque est $q+u=R$; itaque $u'=u$.

Est porro $v'+x=2R$, sed in quadrilatero $Iah\mathfrak{A}$ est $v+x=2R$; adeoque $v'+x=v+x$, et hinc $v'=v$. Est igitur $v'+u' < 2R$, quia $v+u < 2R$ est. Consequenter fit triangulum $\mathfrak{A}\mathfrak{B}\mathfrak{C}$, et in hoc tertius angulus $z'=$ tertio nempe z in triangulo abc .

Consideratis autem trianguli $\mathfrak{A}\mathfrak{B}\mathfrak{C}$ et abc lateribus angulisque dictis, patet cuivis angulo unius ex. gr. a lateribus A, B facto esse illum alte-

rius trianguli æqualem, qui a talibus lateribus a, b efficitur, ut $a \perp A$, et $b \perp B$ sit pro $\mathfrak{A}\mathfrak{B}=A$, $\mathfrak{B}\mathfrak{C}=B$.

Applicetur iam præcedens: est (Fig. 69.) $\mathfrak{A}\mathfrak{r} \parallel \mathfrak{B}\mathfrak{C}$, quia e figura præcedente sunt $\mathfrak{A}\mathfrak{r}$ et $\mathfrak{C}\mathfrak{e}$ ad idem b perpendiculares; unde per angulos alternos verticalesque patet germen trianguli cuiusvis $a'b'c'$, cuius latus $a' \parallel A$, $b' \parallel B$, $c' \parallel C$, esse ad \mathfrak{A} , ut antea; adeoque omnia ibi dicta locum habere, quum quodvis A , quod perpendicular ad $a=ab$ est, parallelum ad $\mathfrak{A}\mathfrak{B}$ sit, et quodvis B , quod perpendicular ad $b=bc$ est, parallelum ad $\mathfrak{B}\mathfrak{C}$ sit, ac quodvis C , quod perpendicular ad $c=ca$ est, parallelum ad $\mathfrak{C}\mathfrak{A}$ sit.

§. 3.

Ex

$$A : a = B : b$$

autem (in §. I. pag. 69) sequitur etiam

$$a : A - a = b : B - b;$$

nempe segmenta crurum per rectam basi parallelam facta in proportione esse.

Conversa quoque huius valet: nempe si segmenta sint in proportione, recta secans parallela fit.

Nam (Fig. 66.) si

$$a' : a = b' : b,$$

nec tamen $c \parallel C$, fiat parallela alia k supra vel infra c , et sit pro k ex gr. segmentum x ; erit

$$a' : a = b' + \omega : x,$$

et hinc

$$x = \frac{a}{a'}(b' + \omega);$$

sed ex

$$a' : a = b' : b$$

est

$$b = \frac{a}{a'} \cdot b';$$

unde $x > b$, nempe pars $>$ toto. Pariter patet, si parallela infra c cadat. Estque manifesto (Fig. 70.) ubivis accipientur f , i, quum $\alpha : \alpha = \beta : \beta$ sit, in recta per c ad ab parallela.

§. 4.

(Fig. 66.). Si $A:a=C:c$, et una extremitas rectae c ad C parallelae sit in A ad extremitatem ipsius a : altera in B erit.

Nam parallela c producta secat rectam B ; fiat $c \pm \omega$ ex c ; erit $A:a=C:c \pm \omega$, atque hinc $c \pm \omega = \frac{aC}{A}$; sed etiam $c = \frac{aC}{A}$ (per $A:a=C:c$ suppositum). Est ergo $c \pm \omega = c$, adeoque $\omega = 0$.

§. 5.

Si $A:a=B:b$, est etiam $A:B=a:b$; adeoque si $A=nu$ atque $B=mu$ pro n, m integris: est etiam $a=nv$ et $b=mv$. Hinc si A contineat n milliaria, atque B contineat m milliaria: et a continet n millaria minuta, atque b continet m milliaria minuta, si nempe pars n -ta ipsius a dicatur *milliare minutum*.

Atque etiam si in triangulis ABC , abc , $A=n$ milliaribus, $B=m$ milliaribus, et $C=\mu$ milliaribus, atque $a=n$ pollicibus, $b=m$ pollicibus, $c=\mu$ pollicibus: patet esse

$$A:B=a:b, \text{ et } A:C=a:c;$$

adeoque

$$A:a=B:b, \text{ et } A:a=C:c;$$

consequenter tria latera tribus esse proportionalia; atque triangula ABC , abc esse similia.

Imo etiam si in triangulis ABC , abc fuerit

$$A:a=u:v,$$

(seu brevius unum latus uni proportionale, nempe uti u ad v), et angulus ipsi B oppositus æqualis erit angulo ipsi b opposito, atque angulus ipsi C oppositus æqualis angulo ipsi c opposito: tum etiam

$$B:b=u:v \text{ et } C:c=u:v.$$

Nam tum est

$$A:a=B:b=C:c,$$

adeoque quia

$$A:a=u:v,$$

est etiam

$$B:b=u:v=C:c.$$

§. 6.

Si (Fig. 71.) e vertice trianguli rectanguli demittatur ad hypotenusem perpendicularis, orientur duo triangula α , β toti triangulo, adeoque sibi invicem similia; atque hinc *perpendicularis dicta est proportionalis media inter segmenta hypotenusae*, atque *cathetus quivis est proportionalis media inter hypotenusam et segmentum adiacens*.

Namque in toto triangulo et in triangulo α est u angulus communis, et $R = v' + u'$, itaque tertius æqualis tertio, nempe $v' = v$; pariter in β et toto triangulo est v communis, atque $R = v' + u'$, adeoque et $u' = u$. In triangulis α , β et toto ergo sunt in quovis anguli R , u , v ; adeoque in quibusvis binis triangulis latera sunt, prouti angulis æqualibus opponuntur, proportionalia.

Nempe adsumantur prius anguli v , u in α , item v , u in β , tum v , R in α , et v , R in toto; fiet e priore

$$i:y=y:l,$$

atque e posteriore fit

$$i:K=K:h;$$

unde

$$y^2 = il \quad \text{et} \quad K^2 = ih,$$

consequenter

$$y = \sqrt{il} \quad \text{et} \quad K = \sqrt{ih}.$$

Si igitur ex. gr. i unitas rectarum ponatur, et iungatur l in directum; atque e meditullio ipsius $i+l$ radio $\frac{i+l}{2}$ semicirculus fiat, et e puncto rectarum i et l communi erigatur perpendicularis usque ad peripheriam: erit ductis inde ad diametri extremitates rectis angulus in semicirculo rectus (pag. 68), atque perpendicularis erecta radix quadrata ex l . Pariter patet, et si non $i=1$, sed radix e facto ex i et l extrahenda fuerit, eam $=y$ esse. Idem etiam per cathetum fieri posse patet.

Unde etiam quum

$$K^2 = hi,$$

et

$$k^2 = hl = h(h - i) = h^2 - hi,$$

fit addendo

$$K^2 + k^2 = h^2;$$

atque hinc $k^2 = h^2 - K^2$, et

$$k = \sqrt{h^2 - K^2};$$

adeoque *quaecunque bina e cathetis hypotenusaque data fuerint, tertium innotescit.*

De secundis potentiis adhuc tantum sermo est, de areis quadratorum inferius dicetur.

Si vero (Fig. 72.) u obtusus fuerit, demissa perpendiculari d , erit

$$h^2 = d^2 + (K+x)^2 = d^2 + K^2 + 2Kx + x^2;$$

sed $k^2 = d^2 + x^2$; adeoque

$$h^2 = k^2 + K^2 + 2Kx.$$

Atque si u acutus fuerit: tum aut et v acutus erit, aut v rectus vel obtusus erit; si v acutus sit (Fig. 73.), tum perpendicularis y intus cadet, fietque

$$y^2 = k^2 - x^2,$$

item

$$y^2 = h^2 - (K-x)^2,$$

atque hinc

$$k^2 = h^2 - K^2 + 2Kx,$$

adeoque

$$h^2 = k^2 + K^2 - 2Kx.$$

Si vero v obtusus esset: tum per præcedentia esset (Fig. 74.) $k^2 = h^2 + K^2 + 2Kz$, adeoque $h^2 = k^2 - K^2 - 2Kz$. Pro v recto fit $z=0$.

E quo manifestum est:

a) quod si $h^2 = k^2 + K^2$, *angulum ipsi h oppositum nec obtusum nec acutum, sed rectum esse.*

b) e lateribus dignosci, num triangulum rectangulum, acutangulum vel obtusangulum fuerit, et cuivis lateri qualis angulus opponatur.

c) (Fig. 73.). Ex $k^2 = h^2 - K^2 + 2Kx$ prodit

$$x = \frac{k^2 + K^2 - h^2}{2K},$$

ubi k et K intercipiunt angulum u , h vero ei opponitur, atque recta ab extremitate ipsius x ad apicem est perpendicularis ad K .

§. 7.

Sed etiam si $A=1$ fuerit, (Fig. 75.) eiusque extremitas cum extremitate factoris dati B , in alterum crus positi, recta iungatur; atque huic rectæ per finem factoris alterius quoque dati a , in crus ubi A est, ab apice positi, parallela fiat: erit b factum e factoribus B et a ; quia

$$A:a=B:b, \text{ seu } A:B=a:b.$$

Si vero facto dato b et alterutro factore B , huius socius quæratur: unitatis A et factoris dati B extremitatibus recta iunctis, ab extremitate ipsius b , ex apice ad crus in quo B est translati, huic rectæ parallelia fiat: erit recta in crure, in quo A est, ab apice usque ad parallelam factor socius, nempe *quotus* a ex b diviso per B .

Patet autem tam in multiplicatione quam in divisione angulum rectarum A, B arbitrarium esse.

Idem pluribus quoque modis fieri posse e dictis liquet.

·21112114.

Plures rectae numero quovis.

De *parallelismo generali* præter in pag. 19 dicta plura referre, uti et subdivisioni figuræ rectilineæ in triangula immorari brevitas necessaria vetat: quamvis non solum partem plani a figura quavis rectilinea, sed etiam a duabus figuris rectilineis, ex. gr. a duobus polygonis, clausam in triangula dispesci posse demonstrari debeat, possitque.

·2111211422.

Si quævis figura rectilinea $ABC\dots$ (Fig. 76.) fuerit in triangula subdivisa; atque e punto f extra eam sito, quamvis proprie ubivis in spatio

accipi queat, ad omnes angulorum apices rectæ cogitentur; et quavis harum per quantitatatem eandem α multiplicata, factum in eadem recta e puncto f incipiendo accipiatur; nempe $\alpha \cdot f\mathfrak{A} = fa$ in $f\mathfrak{A}$, $\alpha \cdot f\mathfrak{B} = fb$ in $f\mathfrak{B}$ &c; atque fiant rectæ ab , $bc \dots$; imo si a litera magna ad aliam fuerit recta in $\mathfrak{ABC} \dots$, fiat et inter literas minores nominis eiusdem: erit $abc \dots$ figura ipsi $\mathfrak{ABC} \dots$ similis per definitionem (pag. 10), uti singula triangula sibi invicem respondentia; et simul latera duarum figurarum, uti se invicem excipiunt, in eadem proportione, angulique laterum correspondentium æquales erunt; imo quævis puncta P , Q fuerint, recta $pq = \alpha \cdot PQ$ erit.

Et conversim figura quævis $abc \dots$, cuius latera, uti se invicem excipiunt, proportionalia lateribus ipsius $\mathfrak{ABC} \dots$, angulique æquales eo ordine sunt, hoc pacto generari potest; imo si $ab = \alpha \cdot \mathfrak{AB}$, quævis figura, cuius latera modo dicto proportionalia angulique æquales sunt, dictæ abc congruit.

Nam

I. Etsi ad omnia puncta figuræ iuxta definitionem rectæ concipiuntur, idem prodibit. Quodvis punctum P enim concipiatur ex. gr. in recta \mathfrak{AB} , punctum illi homologum p prodibit in recta ab ; est enim tum

$$\alpha \cdot f\mathfrak{A} = fa, \alpha \cdot f\mathfrak{B} = fb, \alpha \cdot fp = fp;$$

itaque

$$f\mathfrak{A} : fa = 1 : \alpha = f\mathfrak{B} : fb = fp : fp;$$

sunt igitur crura fa , fb , fp ipsi $f\mathfrak{A}$, $f\mathfrak{B}$, fp proportionalia cum angulis interceptis communibus; est ergo et ab ipsi \mathfrak{AB} , ita ap ipsi \mathfrak{AP} proportionale; adeoque $ab \parallel \mathfrak{AB}$ et $ap \parallel \mathfrak{AP}$; per a autem ipsi \mathfrak{AB} unica parallela datur; itaque p punctum rectæ ab est.

II. Quodvis latus \mathfrak{AC} ipsi æ homologum in eadem proportione est uti \mathfrak{AB} ad ab : nam

$$f\mathfrak{C} : fe = 1 : \alpha = f\mathfrak{A} : fa;$$

est vero angulus inter crura $f\mathfrak{A}$, $f\mathfrak{C}$ cruribus fa , fe proportionalia communis; quapropter et \mathfrak{AC} ipsi æ proportionale est.

Sed anguli etiam homologi æquales sunt: nempe ex. gr. quivis anguli $\angle AED$ et aed considerentur, concipientur triangula ADE et aed ; est

$$AD : ad = AE : ae = DE : de;$$

itaque et anguli respondentes æquales (pag. 70), adeoque

$$\angle AED = aed,$$

atque si angulus convexus sit, et convexus convexo æqualis est. Pariter de angulis AWC et abc patet.

III. Sint etiam quibusvis punctis P et Q homologa p et q ; erit recta PQ ipsi pq homologa, eique proportionalis. Nam

$$fp : fp = fQ : fq = AW : ab,$$

atque quodvis punctum rectæ PQ fuerit, illi homologum, ut antea, in pq cadit.

IV. Quævis figura rectilinea $abc\dots$ fuerit talis, ut latera, uti se invicem excipiunt, proportionalia angulique æquales sint: illa modo dicto generari potest. Sit enim $ab = \alpha. AW$ & talem prodire patet. Et quævis alia $a' b' c'\dots$ fuerit, cuius latera ad latera literis maioribus denotata sint uti α ad 1, angulique inter crura proportionalia æquales: figuræ dictæ congruere potest. Nam posito $a' b'$ in ab , ita ut a' in a et b' in b cadat, vertendo in eandem plagam, propter angulos ad a' et a ac b' et b æquales et latera æqualia & . . . , manifesto congruent.

Patet vero superius α etiam negative accipi posse, ut omnia facta ultra f in altera plaga accipientur.

Scholion. Notandum autem est, hic iam ut theorema demonstrari posse elegantem *Wolfi* observationem, quam pro definitione rectæ haberi voluit: quod nempe omnium formarum sola recta utrinque finita sit, cui quævis pars continua similis sit; sed huic quoque brevitas necessaria supersedere iubet.

2111212.

Rectae cum circulo minima sectio punctum est, maxima e duobus punctis constat.

§. I.

(Fig. 77.). Sit ab recta inter duo puncta peripheriae, et m sit medium arcus ab, ac c sit centrum; superponatur forma ex arcu am et rectis ac, cm composita ipsi mc; patet rectae mc quodvis punctum in suo loco manere, et dictas formas congruere, adeoque ca super ob cadente, angulos ad o esse æquales, adeoque rectos.

Hinc perpendicularis e medio chordae per centrum transit, atque medium arcus medium chordae et centrum sunt in recta eadem ad chordam e centro perpendiculari.

§. 2.

(Fig. 78.). Modus hinc se offert, datis quibusvis tribus punctis a, b, d non in recta sitis, centrum c reperire, e quo radio ca scripti circuli peripheria per a, b, d eat. Nempe si ab, bd modo (pag. 63) bisecentur, perpendicularis e meditullio f rectæ ab perpendicularem e meditullio i rectæ bd secabit: nam recta fi cum quavis perpendicularium dictarum efficiet angulum $\angle R$, adeoque summa internorum est $\angle 2R$. Sit c sectio perpendicularium; erit

$$\begin{aligned} \triangle afc &= bfc, \text{ adeoque } ac = bc, \\ \text{ita} \quad \triangle bic &= dic, \text{ adeoque } bc = dc; \\ \text{consequenter} \quad ac &= bc = cd. \end{aligned}$$

Unde etiam pari modo arcus cuiusvis, quem in eo tria puncta quævis accipere liceat, neque in recta sint, centrum reperire licet. Nempe

§. 3.

Recta circulum in tribus punctis secare nequit. Nam tum duæ chordæ essent eiusdem rectæ partes, et centrum circuli esset in perpendiculari ex utriusque medio erecta; adeoque duæ perpendicularares de eadem recta searent se.

§. 4.

(Fig. 77.). Patet etiam chordam totam præter extrema intra circulum cadere. Nam pars arcus nequit intra cadere, pars extra; quia tum haberet recta \overline{ab} cum circulo adhuc punctum commune, ubi ex a motum in peripheria punctum ex una plaga in alteram transiret eundo usque ad b ; neque in eandem plagam cadere queunt duo arcus; nam tum esset $c\hat{f}=ca$ (contra pag. 64).

§. 5.

(Fig. 79.). *Sectio minima rectae cum circulo est punctum.* Nam si $b\hat{f}$ faciat cum radio bc rectum, b erit punctum contactus rectæ et circuli centro c scripti, nec ullum aliud punctum recta $b\hat{f}$ quamvis infinita in eodem circulo habet. Nam si haberet ad dextram, item ad lævam esset; itaque duobus punctis fieret sectio maior. Vocatur $b\hat{f}$ tangens.

Est vero etiam conversim tangens ad radium perpendicularis; nam nisi id sit, sit $b\hat{o}$ alia tangens, hæc faciet ab aliqua parte angulum acutum cum radio; perpendicularis co ex c ad $b\hat{o}$ acuto angulo obiecta cadit, adeoque hypotenusa bc semper decrescit usque ad o ; itaque quævis recta inter b et o ad c ducta est radio minor; adeoque bo intra peripheriam cadit, et quum continuata egrediatur, tangens non est.

Quamvis autem e quovis punto arcus $b\hat{o}$ possit ad tangentem $b\hat{f}$ demitti perpendicularis, nulla tamen recta ex b inter arcum $b\hat{o}$ et tangentem $b\hat{f}$ duci potest. Nam quævis recta $b\hat{o}$ ducatur inter bc et $b\hat{f}$, angulus rectus illico decrescit, et demonstratione præcedente applicata, patet punctum ex b in recta illa viam infra peripheriam incipere, ut per arcum obiectum transeat.

·21112122.

Plures rectae circulum secantes;

·211121221.

Se invicem quoque secantes;

·21112211.

In eodem puncto;

·21112122111.

*In peripheria.*I. Considerentur prius *duae tantum.*

§. I.

Si prius alterutra duarum *tangens* circuli sit: *est anguli v, quem tangens cum chorda facit, quantitas dimidio arcus a chorda subtensi aequalis.*

Nam (Fig. 80.) si chorda per centrum transit, tum *v* est rectus, et arcus tunc subtensi dimidium est quadrans. Alioquin autem fiat per centrum chorda parallelia; perpendicularis e medio chordæ datae per centrum transit: eritque *u+v* ad centrum = *R*; sed alterni *u* et *u* sunt æquales, atque *u+v* angulus tangentis cum radio est = *R*; itaque angulus *v* ad centrum = *v* illi, quem tangens cum chorda facit; prioris *v* quantitas = dimidio arcus subtensi; adeoque etiam posterioris *v* quantitas eadem est.

Idem patet de angulo deinceps *u+R*; nempe *v+u+R* est totius circuli dimidium; itaque subtracto *v*, et dimidio arcus a chorda subtensi, manebit *u+R* = arcus a chorda ab altera parte subtensi dimidio.

§. 2.

Hinc si *duae chordae a, b* se invicem in peripheriæ punto *f* secent (Fig. 81.), orietur *u* *angulus ad peripheriam*. Fiat tangens ad punctum *f*.

Est $u+v+z =$ totius peripheriae dimidio, $v+z =$ dimidiæ summæ arcum subtensorum; manet itaque pro u dimidium arcus illius cui insistit.

Et hinc patet (uti pag. 68) angulum v (Fig. 82.) *in semicirculo esse rectum*; et quadrilateri $abcd$ circulo inscripti angulos oppositos simul duos rectos efficere; nempe $p+q$, ita $v+x =$ dimidio peripheriae totius.

Sunt etiam arcus α , β per chordas parallelas absecti æquales propter alternos u et u , simul angulos ad peripheriam, æquales. Ita si tangens chordæ parallela fuerit, sunt alterni z et z æquales; quorum unius quantitas $\frac{\gamma}{2}$ est, alter autem (pag. 82) $= \frac{\delta}{2}$ est.

II. Si plures rectæ secuerint se invicem in eodem peripheriae punto (Fig. 83.): est

$$r+r > b+b';$$

id est diameter est chordarum maxima. Porro

$$a+b' > r \text{ et } r=a+a',$$

atque hinc

$$b' > a';$$

sed

$$a'+b > c;$$

itaque

$$b'+b > c.$$

Decrescente igitur arcu infra semicirculum, chorda quoque decrescit, ac maiori arcui chorda maior, maiorique chordae arcus maior respondeat.

•21112122112.

De sectione intra peripheriam in eodem punto.

I. *Prius duarum rectarum* (Fig. 84.).

1. *Quantitas anguli u aequalis est $\frac{1}{2}(\alpha+\beta)$.*

Nam ducta parallela, fit $u'=u$; est vero

$$u' = \frac{1}{2}(\alpha'+\beta), \text{ atque } \alpha=\alpha'.$$

Consequenter

$$u = \frac{1}{2}(\alpha + \beta).$$

2. Triangula ibidem verticalia sunt similia, quia anguli ad peripheriam iisdem arcubus insistunt. Hinc $a:b = b':a'$, atque

$$aa' = bb';$$

nempe *facta segmentorum sunt aequalia.*

II. *Si duabus rectis plures secuerint se invicem intra peripheriam* (Fig. 85.), *sitque sectio extra centrum c: rectarum inde usque ad peripheriam minima p, maxima s+r est; atque rectae dictae a p crescunt semper porro usque ad s+r.*

Nam

$$s+a > k+k' \text{ et } k+k' = s+p;$$

hinc

$$a > p.$$

Porro

$$b+k' > a;$$

sed

$$b'+k > r, \quad r = k+k';$$

hinc

$$b' > k';$$

itaque in $b+k' > a$ substituendo b' ipsi k' , fiet

$$b+b' > a.$$

Item

$$s+r > b+b'.$$

•21112122113.

De sectione extra peripheriam.

I. *Duarum rectarum* (Fig. 86.).

1. Est, parallela ducta, externus $u' = u$ interno opposito; adeoque etiam anguli quantitas eadem est, nempe $\frac{\beta-\alpha'}{2}$; sed $\alpha = \alpha'$ (pag. 83);

itaque

$$u = \frac{\beta - \alpha}{2}.$$

2. Est

$$A : B = b : a.$$

Nam $x + y = 2R$, sed $y + v$ quoque $= 2R$, nam sunt duo anguli ad peripheriam, ambo toti insistentes circulo: adeoque $x = v$; u vero est communis duobus triangulis; itaque proportione instituta patet esse etiam

$$Aa = Bb.$$

II. Si duabus plures secuerint se invicem (Fig. 87.): αg minima, αf maxima est; illa crescit usque ad tangentem ab , hæc decrescit eousque.

Nam

$$\begin{aligned} ac + ce &= af > ae; \\ cf + fe &> ce = cf + fd, \end{aligned}$$

hinc

$$fe > fd;$$

sed

$$df + fa > da,$$

itaque

$$ef + fa > da.$$

Idem pro tangente, si f' pro f et b pro d ponatur, applicari patet.

Demum

(pag. 65), sed

$$ah + hc < ai + ic$$

$$ic = hc;$$

itaque

$$ah < ai.$$

Ita

$$ag + gc < ah + hc,$$

adeoque

$$ag < ah.$$

2111212212.

In 2111212212 usque ad 211121222 (numerum posteriorem, ipsum iam pag. 82 relatum, excludendo) figuræ rectilineæ continentur, quarum

aut apices omnes in peripheria sunt, aut latera omnia eam tangunt. In casu priore *rectilineum circulo inscriptum*, *circulus autem rectilineo circumscriptus*; in posteriore autem *circulus rectilineo inscriptus*, et *rectilineum circulo circumscriptum* dicuntur.

De quovis rectilineo *P* itaque quatuor quæstiones oriuntur:

- 1) circa *P* circulum scribere,
- 2) circulo ipsi *P* æquiangulum inscribere,
- 3) ipsi *P* circulum inscribere,
- 4) circulo ipsi *P* æquiangulum circumscribere.

§. I.

Sit prius exemplo triangulum. Circa triangulum quodvis scribi circulus (pag. 80) potest; atque si radii per apices producantur, quivis circulus centri eiusdem in tribus punctis secabitur, quæ si rectis iungantur, orietur triangulum priori æquiangulum; sunt enim latera lateribus parallela, quia crura e centro sunt ut radius ad radium.

Si trianguli *abc* (Fig. 88.) anguli *u*, *v* bifariam divisi sint: patet summam internorum *u' + v'* sectionem parere, e qua ad latera missæ perpendiculares sunt æquales. Formantur enim triangula $\alpha = \alpha'$, $\beta = \beta'$ per latus unum commune, et angulos *u'* et *R* in α et α' , ac *v'* et *R* in β et β' . Si circulus centro *p* radio *pq* fiat: erit quodvis latus tangens; atque *triangulo dato circulus inscriptus*.

Si vero perpendiculares producantur: per puncta peripheriæ cuiusvis, cuius centrum *p* est, in quibus perpendiculares priores eam secant, tangentes ductæ efformabunt $\triangle ABC$ ipsi *abc* æquiangulum (pag. 71); atque hoc pacto *dato circulo triangulum dato triangulo æquiangulum circumscriptum erit*.

§. 2.

Si arcus α sit $= \frac{\rho}{n}$, denotante ρ peripheriam, n integrum; atque ducatur chorda cuiusvis arcus α , uti se invicem in ρ excipiunt: oritur *polygonum regulare n* laterum; erunt nempe latera chordæ arcuum

æqualium, et anguli quoque æquales, utpote quivis est angulus ad peripheriam arcui $\rho - 2\alpha$ insistens.

Sunt etiam manifesto æqualia quævis triangula per radios ad cuiusvis lateris extrema ductos generata, per tria latera tribus æqualia; suntque triangula eiusmodi tot, quot latera, et quum duo latera sint in quovis æqualia, quodvis æquicrurum est, et angulus quilibet ad basim est dimidio anguli polygoni æqualis.

§. 3.

Conversim quoque si figuræ rectilineæ abcde latera æqualia, angulique æquales fuerint: apices omnes in eadem peripheria sunt.

Nam (Fig. 89.) perpendicularares e meditulliis f , g laterum ab et bc secant se invicem, quia ad rectam fg summa internorum est $< 2R$; fiat in p . Erunt triangula afp et bfp æqualia, propter duo latera cum recto intercepto æqualia; adeoque in triangulo apb anguli u ad basim sunt æquales. Est quoque $\triangle pfb = pgb$, propter hypotenusam cathetusque æqualia (pag. 64); adeoque et angulus $pbg = u =$ dimidio anguli polygoni; $\triangle pbq$ vero $= pcq$, ita uti $\triangle afp = bfp$ erat. Erit igitur angulus $pcd = u$; deincepsque perpendiculari ph , est $\triangle pgc = pch$, per pc commune et angulos æquales; atque hinc

$$ch = cg = hd;$$

est igitur $\triangle pch = pdh$, per ph commune, $ch = hd$, et rectum interceptum. Quod continuando patet esse

$$ap = bp = cp = dp \text{ } \mathcal{S}.$$

§. 4.

Sunt etiam e præcedentibus perpendicularares pf , pg , . . . æquales; adeoque centro p radio pf circulus polygono inscriptus erit, uti prior circumscriptus.

Si vero ut supra de triangulo dictum est, tam perpendicularares quam

radii ad apices producantur: quivis circulus centri p fuerit, ubi a perpendicularibus secabitur peripheria, tangentibus ductis, polygonum regulare totidem laterum circumscriptum erit; et si radiorum sectiones iungantur, circulo inscriptum erit; nempe quævis duæ rectæ duabus parallelæ angulos æquales facient, omniaque circumcirca æqualiter generantur.

§. 5.

Si arcus lateris sexta pars peripheriae sit, chorda erit = radio, nam tum angulus ad centrum est $\frac{360^\circ}{6} = 60^\circ$, adeoque duo anguli ad basim trianguli æquicruri sunt $180^\circ - 60^\circ = 120^\circ$, adeoque unus $= 60^\circ$, et triangulum æquilaterum est.

§. 6.

$$\text{Angulus polygoni } n \text{ laterum aequalis est } \frac{(2n-4)R}{n}.$$

Nam e centro ductis ad apices angulorum rectis triangula numero n prodibunt, quorum omnium angulorum summa $= 2nR$; unde subtracta summa angulorum ad centrum, residuum est $(2n-4)R$, quod cum n anguli sint, dividi per n debet.

Patet etiam quemvis externum, latere in eandem plagam respectu antecedentis producto, esse eidem q æqualem. Itaque quum hoc pacto q numero n prodeat, et quodvis q sit $= 2R -$ angulo polygoni

$$= 2R - \frac{(2n-4)R}{n},$$

erit

$$nq = 2nR - \frac{n(2n-4)R}{n} = 2nR - 2nR + 4R = 4R.$$

•211121222.

De rectis circulum secantibus parallelis dictum (pag. 83) est.

•2111213.

De circulis se invicem secantibus.

I. 1. *Prius de sectione duorum circulorum: sectio minima est punc-*

tum, maxima duo punctorum est. Duos circulos in tribus punctis secare se invicem non posse vel inde patet, quod tum duæ chordæ essent utriusque circulo communes, e quarum mediis erectæ perpendicularares centrum utriusque idem determinarent; adeoque aut toti coinciderent, aut nullum punctum haberent peripheriæ utriusque commune.

2. Si circuli unum tantum punctum habeant commune, dicuntur *tangere* se invicem, et quidem is *intus tangere*, qui præter punctum tactus totus intra alterum est, et circulus alterum tangens, qui non intra hunc cadit, *extus tangere* dicitur; adeoque duo circuli possunt se invicem *extus* aut *intus tangere*: nempe

Centris \mathfrak{C} , c , c' in perpendiculari ad ab (Fig. 90.) acceptis, radiorum extremitate altera a scriptos circulos se ita tangere patet: quia si præter punctum a adhuc haberent commune, ex. gr. ad lævam respectu \mathfrak{Cc} , id etiam ad dextram fieret; adeoque duo circuli duobus punctis plura haberent communia.

3. *Sunt vero centra circulorum se contingentium et punctum tactus in recta eadem.*

Nam si circulus ab altero intus tangatur: eadem in puncto a utriusque tangens erit. Nam sit ab tangens interioris; nisi eadem esset etiam exterioris, sit ap ; hæc secabit interiorem tum etiam exteriorum: itaque tangens huius esse nequit. Si vero ab tangens communis est, tum perpendicularis ex a per c et c' transiens unica est.

Si duo circuli se invicem extus tangant (Fig. 90.), tum nisi a , \mathfrak{C} , c in recta sint, sit $cd\mathfrak{C}$ recta: erit $\mathfrak{Ca} + ca > cd\mathfrak{C}$; nempe summa duorum radiorum addita aliqua recta esset summa duorum radiorum minor. Unde patet, a duobus ad tres, inde ad quatuor & progrediendo, omnium quotquot fuerint, se invicem in eodem punto (sive extus sive intus) contingentes: centra cum puncto tactus in recta eadem esse.

4. Forma per sectionem minimam generata est duplex, prouti intus aut extus se tangunt: sed (Fig. 91.) forma per maximam sectionem generata constat e duabus lunulis et intermedia fenestra, ad quarum communem chordam e meditullio huius erecta perpendicularis per centra amborum circulorum transit.

Aequalitatem per unum angulum in qualibet duorum circulorum sectione determinatam esse patet. Nam tunc ex utroque congruit portio, et tria puncta determinant circulum.

II. *Si circulus A duos circulos B et C secet: aut tanget utrumque, aut unum B solum tanget, aut neutrum.*

In casu primo (Fig. 92., 93., 94., . . .) aut intus aut extus cadet uterque ab *A* tactus; aut unus extus alter intus. In quolibet horum casuum aut habebunt hi duo aliquid commune, aut non: si ita, id aut punctum erit, aut duo; si punctum solum fuerit, hoc aut in *A* cadet, quo pacto sectio omnibus commune punctum erit, aut non in *A* cadet. Si *B* extus, *C* intus cadat, tum casus unus tantum est, ut *C* et *B* aliquid commune habeant, nempe sectio unius puncti. In casu secundo ubi *A* nonnisi ipsum *B* tangit, habet tamen cum *C* aliquid commune, secabit ipsum *C* in duobus punctis; tum vero *B* et *C* aut habebunt aliquid commune, aut non; si ita, erit id aut punctum, aut duo.

In casu tertio *A* neutrum ipsorum *B*, *C* tangens habere cum quovis ipsorum *B* et *C* communia duo puncta debet; et *B* et *C* aut habebunt aliquid commune aut non; si ita, id erit aut unum aut duo puncta; et hæc aut ambo erunt eadem cum iis, quæ *A* cum *B* et *C* habet communia, aut unum tantum, aut neutrum.

Facile patet omnes hos casus, quorum aliquot conincidunt, per vestigando, sectionem esse minimam 1 puncti, 6 punctorum maximam, et dari sectiones 1, 2, 3, 4, 5, 6 punctorum, atque formas varias, et angulos infra in duas species distinguendos generari.

Ob facilitatem immorari cum necesse non sit, exempli caussa casum unum casus primi attulisse sufficiat; nempe casum sectionis trium punctorum, in quo quilibet bini ipsorum *A*, *B*, *C* tangent se invicem, at non in eodem punto.

Fieri hoc nonnisi *B* et *C* utroque extus aut utroque intus *A* cadente patet.

§. I.

Si C et B extus cadant (Fig. 93.), sit a radius ipsius A , et in continuatione eius accipiatur punctum illud, ubi (quantavis fuerint b, c) rectæ $a+b$ et $b+c$ circa extrema rectæ $a+c$ motæ occurront; quod fieri patet, cum quorumvis duorum laterum summa excedat tertium.

Tum si e tribus verticibus trianguli tanquam centris circuli siant radiis a, b, c , nempe radiis circulorum A, B, C : patet e quantislibet a, b, c triangulum tale generari, quale oritur in schemate e tribus arcibus, cuius vertices sunt puncta tactus externi.

§. 2.

Si B et C intus cadant (Fig. 94.), sit a centrum ipsius A , et b centrum ipsius B , et c centrum ipsius C . Sit r radius ipsius C , ac radius ipsius A sit $r+u$; et radius ipsius B sit β ; pro quovis β , dummodo $<u$ sit, reperietur b ibi, ubi $r+\beta$ circa c , et $u+r-\beta$ circa a mota occurrent.

Si occurrant, res patet. Nam tum

$$bi = \beta,$$

quia

$$ai = r+u \text{ et } ba = u+r-\beta;$$

itaque i est punctum tactus ipsorum B et A , quia i in recta per ambo- rum centra est; ita recta $\beta+r$ ex b ad c transit per c et tactum ipso- rum B et C .

Datur vero b pro quolibet β quod $<u$.

Nam tum latera $\beta+r$ et u ac $u+r-\beta$ talia sunt, ut quorumlibet binorum summa tertio maior sit; de reliquis patet pro quovis β ; at postremorum summa priore tunc tantum est maior, si $\beta < u$ sit. Nam summa hæc est $2u+r-\beta$, quod debet esse $>\beta+r$; subtracto utrinque r , manet $2u-\beta > \beta$; adeoque pro $\beta=u\pm\omega$, est

$$2u - (u\pm\omega) = 2u - \beta = u\mp\omega;$$

et manifesto $u\mp\omega$ est $<u\pm\omega$, et $u\pm\omega > u\mp\omega$.

§. 3.

(Fig. 95.). Sit quantusvis angulus $\hat{b}ac$, et $\hat{ba} = \hat{ac}$; et sit chordæ bc meditullium δ , fiantque centro b radio $bd = bg$, centro c radio cd , et centro a radio $ag = ah$ circuli; fiet triangulum $gh\delta$, ubi arcus gd , utvis mutetur angulus a , manet $= \hat{dh}$; nimirum in triangulo æquicruro abc sunt ad basim.

Porro arcus $gd \sim R$, si $\wedge a \sim o$; et $gd \sim o$, si $\wedge a \sim 2R$; arcus Ed vero $\sim R$ in casu primo, et in altero $\sim 2R$. Radius ga autem in casu primo $\sim ba$, b ipsi f quam proxime eunte; in altero vero $ga \sim o$, b ipsi f , et δ ipsi a quam proxime euntibus.

§. 4.

Plurium circulorum sectionibus prætermisis unum tantum attigisse sufficiat (Fig. 96.).

Si bc sit latus figuræ regularis, cuius vertices sunt in peripheria radii ab : patet per dicta generari e verticibus tanquam centris, dimidio latere pro radio accepto, circulos æquales coronam claudentes, quorum quivis quemlibet inter quos est tangit, uti in schemate.

De formis etiam in casibus dictis notasse sufficiat:

1. Figuras ibidem oriri, quæ duobus lateribus concavis, aut duobus lateribus convexis spatium claudunt.

2. Oriri triangula *circularia*, de quibus statim dicetur.

3. *Angulum*, sub quo occurrere arcus arcui potest, in duas species distingui posse: nempe in *convexum*, scilicet cuius crura possunt circa verticem in talem situm moveri, ut recta quædam per verticem ducta sit chorda utriusque, arcubus in diversas plagas cadentibus: alioquin angulus *concavus* vocetur. Ex. gr. (Fig. 95.) \hat{dgh} , et (Fig. 97.) \hat{gah} convexi sunt, \hat{gaf} concavus est.

4. Triangulum eiusmodi combinari posse e tribus convexis angulis, e 2 concavis et 1 convexo; at non posse e 3 concavis, aut ex 1 concavo et 2 convexis, patet.

§. 5.

Quantitas anguli esse eadem potest, quæ anguli est, quem tangentes crurum ad verticem faciunt; at illa tangentis dimidieta intelligatur, cum qua arcus non formam fluentem facit (pag. 16). Hoc pacto $u=o=v$, (Fig. 92.), et (Fig. 95.) trianguli $g\delta h$ angulorum summa $=o$; at (Fig. 98.) trianguli $adbfc\alpha$ summa angulorum $=12R$; maior summa trium angulorum esse nequit.

Nempe (Fig. 99.) sit abc triangulum æquilaterum, et q, r, s meditullia laterum, angulique u æquales, atque e punctis a, b, c erectis ad crura ipsorum u perpendicularibus, intersectiones p, w, i fiant centra radii pa, ib, wc æqualibus: patet angulum $\delta\alpha e$ convexum accipi, et dabili quovis minus sumi posse.

Datur triangulum, cuius angulorum summa dabili quovis minor esse potest.

Sint nempe (Fig. 97.) duo arcus $a\delta\delta$ et $a\delta\delta$ ad angulos convexos a et δ se invicem secantes, (et angulus concavus dato quovis minor fieri potest); et sint tangentes in a rectæ ab et af ; moveatur arcus $a\delta\delta$ circa a per arcum $a\delta\delta$, tangentem suam ab secum ferens; poterit ab ire quam proxime ipsi af ; itaque angulus ad a fiet omni dabili minor; sed is solus erit summa trium angulorum trianguli, qui e meditullio o chordæ aE radio og ad chordam perpendiculari scripto semicirculo ghm clauditur.

Interim haud sufficit quantitas duorum angulorum dicta ad angulorum æqualitatem geometricam: necesse est et anguli species easdem, radiosque unius radiis alterius æquales esse; poterit autem inferius, ubi de areis tractabitur, angulus quivis eiusmodi etiam per areas certo modo determinatas exprimi.

§. 6.

Aequalitas triangulorum circularium determinatur modo sequente:

i. *Duo latera cum angulo intercepto non sufficiunt; nam latus tertium esse potest radiorum variorum.*

2. At tria latera sufficiunt, nisi sit aliquod convexum et illi respondens concavum.

3. Ita duo anguli et unum latus adiacens.

4. Imo tres anguli quoque ponunt triangulorum horum aequalitatem, sed duo non.

Cum casus reliqui sint faciliores, ultimum tantum referre libet.

At sequens prius demonstrandum est (Fig. 100.). Peripheria centri α radii $\rho\alpha$ dicatur a , peripheria centri β radii $\rho\beta$ vero A , peripheria radii $\rho\gamma$ autem dicatur H .

Utcunque secet a ipsum H ad angulum z, omne punctum peripheriae A tale est, ut circulus ex eo tanquam centro scriptus cum radio ap, plane ad angulum z secet ipsum H; nullum vero extra peripheriam A tale punctum q datur, ut arcus radii ap peripheriam H ad angulum z secet.

Prius (Tom. I. pag. 12. V.) patet; sed nec ullum tale punctum q est.

Nam sive intra A sive extra sit, recta \overline{qh} transit per A ; fiat in c , et sit q extra A ; radius pro centro utroque c et q sit $=ap$, terminabitur uterque in hq in duobus diversis punctis m et r .

Fiant centro c radio cm et centro q radio qr circuli; neuter horum potest tangere ipsum H , quia si unus tanget (extus aut intus), ex. gr. extus, et alter extus tangeret, si ex q et c descripti circuli circulum H ad angulum ipsi z æqualem searent; tum vero quia tactus punctum in hq esse debet, radii inæquales fierent æquales.

Itaque secaret ipsum H uterque in duobus punctis, unus in $f\ell$, alter in vi ; et quidem ita ut si f ultra v cadat, et l plane ita ultra i cadere, et si f in v cadit, l in i cadere debeat.

Neutrum vero fieri potest. Nam quum hoc pacto esset angulus $mfo = rvo$, et per angulum unum ponatur æqualitas figuræ e duobus arcibus compositæ (pag. 90), esset $fmonf = vrov$; adeoque f et l non possunt non in v et i cadere: at neque in v et i possunt, quia tum m cum r coincideret, quia per angulum $f = v$ non posset m e peripheria vi egredi.

Si q intus A cadat demonstratio eadem est. Itaque assertum patet.

Liquet hinc quamvis triangulorum circularium speciem per tres angulos determinari, ponique æqualitatem per tres angulos æquales (Fig. 101.).

Nam sit unus arcus trianguli circularis e peripheria H cuius centrum h , alter e peripheria I cuius centrum i , tertius ex K cuius centrum q est; adeoque sit triangulum abc .

Tum manente angulo c , omne centrum, e quo angulus $=\alpha$ cum H produci potest, est in peripheria A , et omne centrum, e quo cum I angulus $=b$ produci potest, est in peripheria B per præcedentia; describitur vero arcus ab latus angulo c oppositum, ex uno centro; adeoque centrum hoc adsumi debet, ubi A et B se invicem secant; adeoque ad summum duo puncta esse possunt uti p et q , nimirum plura puncta A et B communia habere nequeunt, unde angulus $=\alpha$ cum H , et angulus $=b$ cum I produci possit; scilicet $z=\alpha$, et $v=b$.

At z patet (cadentibus p et q in diversas plagas) vertere convexam partem ipsi c , si α concavam ostendit, ita ut z semper aliter sit versus c versus quam α .

Itaque unicum adhuc triangulum construi potest, ut $c=\mathfrak{k}$ sit, $b=v$, et $z=\alpha$; hæc vero sunt æqualia. Ita $\triangle acn=zkm$; sed z est concavus, et illius deinceps positus est convexus, ita in altero triangulo. Nempe triangulo $zv\mathfrak{k}$ considerato, si $z=\alpha$ angulus concavus sit, angulus deinceps positus dicti anguli convexus est.

·211122.

De sectione sine angulo, quae itaque formam fluentem parit.

I. *Recta cum recta*: si circa punctum sectionis moveantur, donec fiat angulus $=2R$, id est nullus angulus sit, forma fluens evadet.

Recta cum circulo:

1. Cum uno; tangens dimidia cum dimidia altera peripheria forma fluens est. Ex. gr. $\mathfrak{d}\mathfrak{a}\mathfrak{k}$ (Fig. 102.).

2. *Cum duobus circulis* dupliciter fieri potest; scilicet tangente recta on duos circulos in duobus sui extremis, aut in eadem plaga aut in diversa; uti est ponr et ponm.

3. *Cum tribus circulis fieri nequit*; quia si ad finem rectæ ponatur tertius: is cum priore circulo faciet angulum, si ita ponatur, ut cum recta non faciat; in puncto medio quovis vero angulum fieri claram est.

II. *Circulus cum circulo*:

1. *Cum uno*; nempe duo arcus qualiumvis radiorum eadem tangente gaudentes, in plagas respectu rectæ centrorum diversas, et aut in eandem respectu tangentis plagam aut diversas cadentes, sine angulo secant se invicem: talis forma fluens est *Ifs.* (Fig. 103.).

2. *Circulus cum duobus circulis*: si arcus cuiuspiam ambo extrema modo plane dicto cum aliquo arcu iungantur, uti *abcd* aut *fmnw* aut *fml*. (Fig. 104.).

§. 1.

Formæ fluentes sunt quasi rivi, quibus naturæ viventis vena fluit, rarius iter frangens, ut in dulciorum cursum refluat, demum in mortis regni angulatis terminis hærens.

Lineamenta quævis describi quam proxime possent, ad cuiusvis arcus finem, certi radii arcu certæ quantitatis in eandem aut alteram respectu tangentis plagam posito.

§. 2.

Figuram duo arcus non eiusdem circuli, sine duobus angulis claudere nequeunt. Tres arcus requirunt ad minimum unum angulum; quatuor possunt sine angulo figuram claudere.

Prius manifestum est. Alterum quoque (pro Fig. 105.) patet. Nam sint tres illi arcus *A*, *B*, *C*, centra *a*, *b*, *c*; punctum tactus ipsorum *A* et *B* sit *A*, punctum tactus ipsorum *B* et *C* sit *D*, et punctum tactus ipsorum *A* et *C* sit *p*; patet *p*, *a*, *c* in recta, atque etiam *D*, *b*, *c* in recta esse debere, itaque *c* eo cadere oportere, ubi rectæ *pa* et *Db* se intersecant: nam *p* et *D* in arcu ex uno centro *c* scripto esse oportet; ibi vero ore-
retur triangulum *abc*, essetque radius *cp* = *cd*; porro quia

$$\begin{aligned}
 \text{atque} & \quad bd = ab + ac = ab + ap, \\
 \text{esset} & \quad ac + ap = cd = cb + bd, \\
 \text{atque hinc esset} & \quad ac + ap = cb + ap + ab; \\
 & \quad ac = cb + ab;
 \end{aligned}$$

quamvis duo trianguli latera nequeant æqualia esse tertio.

Idem facile patet pro casu, si trium arcum aliquis contrarie flexus sit.

§. 3.

At nec e tribus lineis, quarum quælibet recta aut circulus est, figura sine angulo claudi potest. Nam si quævis sit recta, aut duæ rectæ et unus arcus, patet.

Si vero una sit recta et aliæ duæ arcus sint, patet modo sequente. (Fig. 106.)

Sit $v\omega$ tangens arcus mq ; tum ut tertia linea figuram claudens arcus sit, necesse est dari tale p , ut pv ad $v\omega$ perpendicularis sit $= pq$, rectæ per arcus mq centrum c ductæ, quia tunc tantum petitum præstari per arcum $a q$ usque ad v centro p radio pv scriptum posset.

At

$$\begin{aligned}
 \text{nam} & \quad vp < pq; \\
 \text{porro} & \quad mc = vo = cq, \\
 \text{ergo} & \quad po < pc, \\
 & \quad vo + po < pc + cq.
 \end{aligned}$$

§. 4.

Fieri posse cum uno angulo figuram e tribus arcubus patet: si (Fig. 107.) centrum f arcus deb in recta per eius extremum a et centrum c ipsius afd ducta accipiatur, et centro i radio $di = bi$ semicirculus describatur: generabitur hoc pacto figura $afdgbea$, nonnisi ad b angulo gaudens.

Ita ex una recta et duobus arcubus datur figura cum uno angulo (Fig. 108.).

Nam arcus $m\circ$, cuius tangens est $m\mathfrak{m}$, centrum in c habet; itaque facile patet in oc producta posse centrum f arcus on accipi, et ad n angulum generari.

E duobus rectis et uno arcu quoque datur figura cum uno angulo. Nempe si $abcd$ quadratum sit (Fig. 108.*), et centro a radio ab fiat arcus bec .

§. 5.

Figuram quatuor arcus possunt sine ullo angulo claudere; et 4 est minimus numerus, cum e paucioribus fieri non posse dictum sit.

Nimirum ab extremitatibus a et b arcus ajb (Fig. 109.) ducantur rectæ per eius centrum C ; et acceptis ca ex a et bf ex b æqualibus, scribantur radiis ca et fb centris c et f arcus æquales be et af , ducanturque rectæ fe , cf ; et fiat ex intersectione f' radio $f'e$ arcus ef . Figuram $\$befa$ quæsitam esse e præmissis facile patet. Talem etiam esse $AlddeBfghA$ patet (Figg. 110. et 111.), centris in apicibus quadrilateri æquilateri $ifcl$ acceptis, radiisque $ih=ib=ce=cf$ e centris i , c , et radiis $f'h=f'f=fb=fe$ e centris f' , f . Facile ex inspectione patet id quoque, quod si $u \sim R$, limes ipsius hAb et eBf semicirculus, et limes ipsius bde ita ipsius hgf rectæ sint, quamvis ipsa (Fig. 112.) nunquam attingatur. Si vero $u \sim o$, tum $bAh \sim o$ (in Fig. 110.), in Fig. 111. autem bAh peripheriæ toti quam proxima venit, et h' semper minus distantia puncti f' ab ic esse debet, ih vero $\sim \frac{1}{2} ic$.

Potest e duabus rectis et duobus arcubus quoque figura sine angulo fieri; talem esse patet $defgab$ (Fig. 112.); ita ex una recta et tribus arcubus, qualis est (Fig. 113.) $demba$: ubi arcuum ad , em centra i , c sunt, et arcus abm centrum f est, ac remoto f in perpendiculari bf dato quovis ulterius, limes (Fig. 112.) erit.

E tribus rectis et uno arcu figura talis fieri nequit.

Quum omnia hæc aliaque huius generis e præmissis facile perspiciantur; brevitatique consulendum sit: pauca hæc, quo ordo ipse induxit,

attulisse, nec plura adferre concessum sit. Aliquid tamen adhuc addetur inferius.

2112.

De areis figurarum planarum rectilinearum circulariumque.

I. *De facto e rectis*; hinc *area rectanguli*, *area parallelogrammi* cuiusvis, *area trianguli*, *area quadrilateri* cuius dantur duo latera parallela, *area quadrilateri cuiusvis*, *area cuiusvis rectilinei*, per summationem triangulorum aut trapeziorum, e quibus constat; ita *area polygoni regularis*; hinc *area circuli*.

II. *Transmutatio arearum et reductio ad formam rectae* (Tom. I. pag. 27), nempe ad rectangulum datae altitudinis; et *mutatio plurium quadratorum in unum*.

III. *Comparatio arearum* figurarum similium aliarumque. Inde lunula Hippocratis et id genus alia.

IV. *Additio, subtractio, divisio* figurarum sub certis conditionibus.

V. Si alicui figuræ aliæ sub certa conditione imponantur, imositarum summa limesque huius quæritur.

I.

§. I.

Factum e quotvis rectis, recta est (pag. 77); *at si rectarum unitas sit* α ; *et pro planorum unitate accipiatur tale quadratum, cuius latus* α *est; ita pro unitate omnium spatii portionum sit cubus, cuius latus* α ; *tum si* l, l', l'' *rectae sint: 1. recta* $l.l'$ *mensurata per unitatem* α *plane eos numeros dat, quos area rectanguli ex* l *et* l' *compositi mensurata per arearum unitatem, nempe quadratum* α ; ita ut si ex. gr. recta $l.l'$, *nempe factum lineare, sit* $\frac{n}{m}$ -*tum ipsius* α , *et area rectanguli dicti sit* $\frac{n}{m}$ -*ta quadrati* α . 2. *Ita factum* $l.l'.l''$ *si* $\frac{n'}{m'}$ -*tum ipsius* α *sit, etiam parallelepipedum* (de quo infra) *ex* l, l' *et* l'' *est* $\frac{n'}{m'}$ -*tum unitatis solidorum, nempe cubi cuius latus* α *est.*

Nam heic tantum de areis loquendo (Fig. 114.) sit l unitatis $\frac{p}{q}$ -ta, l' vero $\frac{r}{s}$ -ta; est

$$l.l' = \frac{pr}{qs} = \frac{ps}{qs} \cdot \frac{qr}{qs} = \frac{psqr}{qsqs}.$$

Dividatur $\alpha = 1$ in qs partes æquales, continebit l partes eiusmodi numero ps , l' vero numero rq , (patet $\frac{p}{q}$ et $\frac{r}{s}$ ad eandem denominationem reductis). Ductis vero parallelis e fine cuiusvis $\frac{\alpha}{qs}$, orientur in strato inferiore quadrata, quorum cuiusvis latus est $\frac{\alpha}{qs}$, numero rq ; et quum l strata eiusmodi numero ps producat, erunt eiusmodi omnia quadrata numero $psrq$; itaque totum rectangulum ex l et l' , erit $\frac{psrq}{qsqs}$ -tum quadrati α ; namque stratum inferius continet eiusmodi quadrata numero qs , et cum strata quoque numero qs dentur, constat quadratum α ex eiusmodi quadratis numero $qsqs$.

Patet itaque, uti factum lineare superius $\frac{psqr}{qsqs}$ -tum unitatis linearis est, ita rectangulum, ex eiusmodi factoribus compositum, esse $\frac{psqr}{qsqs}$ -tum unitatis arearum.

Si vero L et l sint incommensurabiles, tum id ex l , quod $< \frac{\alpha}{qs}$ est et remanet, sit λ , et id ex L , quod $< \frac{\alpha}{qs}$ remanet, sit ω ; utrumque $\sim o$, quia qs omni dabili maius accipere licet.

Sit rectangulum ex L et l æquale P , atque rectangulum ex L' et l' æquale P' ; erit $P - P' =$ rectangulo ex L et λ , et rectangulo ex l' et ω ; λ et ω aut sunt æqualia, aut alterutrum est maius altero, sit $\lambda > \omega$; erit $P - P' <$ rectangulo ex $(L + l)$ et λ ; sed hoc quoque $\sim o$; quia basis $L + l$ manet, et λ omni dabili minus fieri potest; adeoque non datur tam parva assignabilis recta k , ut quadrato eius non fiat rectangulum dictum minus; nam dividatur $L + l$ in tot partes n , ut una sit $< k$, deinde fiat λ tam parvum, ut sit $< \frac{k}{n}$, et si superstruantur rectangula p sibi invicem, $n\lambda$ non adæquet altitudinem k ; patet oriri rectangulum, cuius tam basis quam altitudo est $< k$; adeoque $P - P'$ esse dato quadrato ipsius k minus; potest vero cuivis assignabili figuræ circulus, et huic quadratum includi; itaque P' quod $= L'.l'$ (id est $L'.l'$ -to quadrati unitatis), nulla assignabili quantitate differt a P , et tendit ad limitem P ; sed $L' \sim L$ et $l' \sim l$, adeoque (Tom. I. pag. 85) $L'.l' \sim L.l$, et cum $L'l' = P'$, P ab $L.l$ nulla assignabili quantitate differt.

Hinc rectanguli, cuius basis L altitudo l , area $= L.l$.

§. 2.

Parallelogramma (et triangula), basibus aequalibus et altitudinibus aequalibus gaudentia, sunt aequalitate quoad portiones terminata aequalia; per altitudinem intelligendo in parallelogrammo distantiam baseos a latere opposito parallelo, in triangulo autem perpendicularis e vertice ad basim.

Vide Tom. I. pag. 66. Fig. 17. c. ubi trianguli *A* latus laevum ad latera parallelogrammi *a'e'B* (nempe *Ee'*, *Ba'*), et latus dextrum ad parallelogrammi *EBa* latera *Ee*, *Ba* translata sunt, donec aut nihil aut aliquid supersit: atque rectas, in quovis parallelogrammorum dictorum fines quotarumvis partium connectentes, basi parallelas esse, imo in utroque rectas tales, uti parallelas per *g* et *h*, in eadem recta esse patet; nempe ad quotaevis partis finem subsistere libeat, ex. gr. ad *g* et *h*; triangulum *DEC* desinens ad partium primarum fines erit triangulo *ghE* simile, ob angulum interceptum communem et latera intercipientia proportionalia; adeoque latus tertium tertio parallelum est. Et manifesto si supra *g* residuum manet, idem supra *h* fieri debet; secus enim parallelas *a* infra *e'a'* caderet, si adhuc una pars daretur supra *h*, et supra *e'a'* caderet, si in *h* adeoque in *e'* ultima pars terminaretur.

Est demum hinc

$$\triangle F = f' + f,$$

per unum latus tanquam distantiam parallelarum eandem, et angulos externos internos oppositos; atque etiam trapezia *E'+E*, et *e+e'* aequalia esse patet.

In casu (Fig. 115.) autem est manifesto *A=C*, et *B=B*.

§. 3.

Quum igitur parallelogrammum quodvis, triangulo baseos aequalis et altitudinis aequalis, sit aequale: erit parallelogrammum quodvis aequale facto ex altitudine in basim; triangulum autem utpote dimidium paralle-

logrammi, baseos æqualis et altitudinis æqualis, est manifesto æquale basi per altitudinem dimidiam multiplicatæ.

§. 4.

Quævis autem figuræ F et f fuerint inter duas parallelas ρ et q : si pro quacunque recta utrinque infinita inter ρ et q ipsis parallela, eo quod hæc cum F commune habet C dicto, et eo quod eadem cum f commune habet c dicto, pro quibuslibet C , c simultaneis sit $C = \alpha c$; (e Tom. I. pag. 210 §) liquet esse $F = \alpha f$, areas intelligendo, etsi æqualitas interminata esset.

§. 5.

Hinc si unius parallelogrammi basis b altitudo a sit, alterius basis B altitudo A sit: erit area prioris $= ab$, et area posterioris $= AB$; itaque, si $ab = AB$, est $a : A = B : b$, nempe altitudines parallelogrammorum areæ æqualis sunt in ratione inversa basium. Quum vero triangula sint dimidia parallelogramorum altitudinis baseosque æqualis, idem de triangulis areæ æqualis valet. Si vero $a = A$, areæ sunt uti bases.

§. 6.

(Fig. 73.*). *Altitudo y trianguli solis lateribus datis innotescit: nempe*

$$y = \sqrt{a^2 - x^2};$$

sed erat (pag. 76)

$$x = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2b};$$

atque hinc

$$a^2 - x^2 = \frac{2a^2c^2 + 2b^2c^2 + 2a^2b^2 - a^4 - b^4 - c^4}{4b^2};$$

et hoc (ex Tom. I. pag. 146)

$$= \frac{(a+b+c)(a+b-c)(c+a-b)(c-a+b)}{4b^2};$$

e quo radix quadrata per $\frac{1}{2} b$ multiplicata fit

$$\frac{1}{4} \sqrt{(a+b+c)(a+b-c)(c+a-b)(c-a+b)}$$

= areae trianguli e solis lateribus computatæ.

§. 7.

Trapezium (Fig. 116.) constat e parallelogrammo ex b et a , et triangulis $b'a$, $B'a$; estque

$$= ba + \frac{b'a+B'a}{2} = \frac{2ba+b'a+B'a}{2} = a \cdot \frac{b+b'+B'}{2} = a \cdot \frac{b+B}{2}.$$

Notandum b esse $< B$. Hinc si e medio ipsius l sit $\beta \parallel B$, patet esse

$$b'' = \frac{1}{2} b' \text{ et } B'' = \frac{1}{2} B',$$

adeoque

$$b + \frac{b'+B'}{2} = \beta$$

esse per α multiplicandum. Et idem generaliter de quadrilatero patet, si duobus lateribus parallelis gaudeat.

§. 8.

Quadrilateri cuiusvis abcd area est aequalis duplo parallelogrammi $a'b'c'd'$, quod oritur (Fig. 117.) *latus quodvis bisecando.*

Nam

$$aa' = \frac{1}{2} ab, ad' = \frac{1}{2} ad,$$

atque in triangulis $aa'd'$ et abd angulus a communis est, hinc $a'd' \parallel bd$; ita $b'c' \parallel bd$, adeoque $a'd' \parallel b'c'$, atque ita $a'b' \parallel d'c'$. Sunt vero triangula similia, uti secundæ potentiae laterum homologorum (vide pag. 111); itaque

$$\triangle aa'd' = \frac{1}{4} abd, \text{ et } \triangle b'cc' = \frac{1}{4} bcd;$$

adeoque triangulorum $aa'd'$ et $b'cc'$ summa $= \frac{1}{4} abcd$. Sed eodem modo est triangulorum $a'bb'$ et $d'dc'$ summa $= \frac{1}{4} abcd$. Consequenter triangulorum $aa'd'$, $a'bb'$, $b'cc'$, $c'dd'$ summa $= \frac{1}{2} abcd$, et

$$a'b'c'd' = \frac{1}{2} abcd;$$

atque $a'b'c'd'$ parallelogrammum est.

§. 9.

Si vero quadrilaterum (Fig. 118.) in duo triangula dispescatur, et basis communis sit B , altitudoque unius sit A , alterius a ; erit area

$$= \frac{BA}{2} + \frac{Ba}{2} = B \frac{A+a}{2}.$$

§. 10.

Porro area cuiusvis figurae rectilineae reperitur per summam arearum omnium triangulorum, e quibus illa constat; et polygonum regulare n laterum e totidem triangulis æqualibus constat, quorum quodvis æquale est lateri multiplicato per dimidium perpendicularis e centro ad illud demissæ; patetque factum hoc pro tota polygoni area n -ies sumendum esse. Adeoque si summa laterum ϕ et altitudo r' fuerit, erit area $= \frac{\phi r'}{2}$.

§. 11.

Sit ϕ summa laterum polygoni interni, areaque eius sit a , area circuli sit C , et summa rectangulorum circumcirca (Fig. 119.) sit $\lambda = z\phi$; est

$$a + \lambda = \frac{r'\phi}{2} + z\phi;$$

eritque

$$a + \lambda > C > a.$$

Duplicato semper n numero laterum polygoni, $\lambda - o$, nempe

$z = r - r' \sim o$, atque ρ limite gaudet: prius inde patet, quod e radio potest quam proxime ad punctum contactus eundo perpendicularis usque ad arcum erigi, quo arcu datur minor talis, qui in peripheria $n \cdot 2^m$ -ies contineatur; sed etiam ρ habet limitem; semper enim crescit, sed r' quoque crescit, atque etsi r' non cresceret, si ρ in quantumvis magnum excrescere posset, a supra C cresceret. Sit limes P ipsius ρ ; tum

$$\frac{\rho r'}{2} \sim \frac{Pr}{2},$$

quia $\rho \sim P$, et $r' \sim r$ (Tom. I. pag. 85).

At vero tum etiam $C = \frac{Pr}{2}$. Nam $a + \lambda$ erat $> C > a$, et $(a + \lambda) - a \sim o$; itaque $C - a \sim o$, id est

$$C - \frac{\rho r'}{2} \sim o.$$

Consequenter

$$\frac{\rho r'}{2} \sim C \text{ et } \frac{\rho r'}{2} \sim \frac{Pr}{2},$$

adeoque

$$C = \frac{Pr}{2};$$

estque area circuli areae trianguli, cuius basis P et radius r est, aequalis.

Sit $a = \frac{xr}{2}$, quod $\frac{\rho r'}{2}$ erat; nempe si latus l polygoni prioris n laterum datum sit, (ex. gr. latus hexagoni æquatur radio); r' prodibit

$$= \sqrt{r^2 - \frac{1}{4} l^2},$$

quo subtracto ex r , manebit z , cathetus trianguli rectanguli, cuius alter cathetus $= \frac{1}{2} l$ est; e quibus prodit hypotenusa, nempe latus polygoni $2n$ laterum; quod continuari posse donec libuerit, manifestum est; uti et x crescere crescente a , quum r constans maneat.

Sitque $a + \lambda = \frac{\rho' r}{2}$; et hoc est

$$> C = \frac{Pr}{2} > \frac{xr}{2};$$

adeoque

$$p' > P > x;$$

si igitur computando (pro $\omega < 1$ et $k < 1$, atque integris μ, ν) prodierit

$$p' = \frac{\nu + \omega}{\mu} r \quad \text{et} \quad x = \frac{\nu + k}{\mu} r,$$

constabit P certo continere ν eiusmodi partes, quales radius r numero μ continet, sed numero $\nu + 1$ non continere. Ex. gr. pro diametro 1 fit

$$3, 15 > p' > 3, 14,$$

pariter

$$3, 15 > x > 3, 14;$$

adeoque P constat pro diametro 1, usque ad secundam notam decimalem inclusive rite prodiisse. Valor verus ipsius P pro diametro 1 dicitur π .

Computatum est π in prope 300 notis decimalibus, ita ut ubique abrumpatur, π parte ad lævam maior est, sed minor fit, si nota ultima ad dextram uno augeatur.

Si quis igitur talem ipsius π valorem se reperisse iactaverit, qui in fractionem decimalem conversus in aliqua a dictis nota aberrat, oleum operamque perdidit. Si aream proposuerit, ea per $\frac{1}{4}$ nempe dimidium radium divisa dabit factorem alterum cum fractione dicta decimali conferendum.

Ope fractionum continuarum fractionibus approximantibus valor ipsius π alternatim maior minorque terminis minimis exprimitur: talis expressio est $\frac{22}{7}$, quam Archimedes reperit a hexagono inciendo, duplicandoque laterum numerum usque 96; estque $\frac{22}{7} > \pi$ quidem, sed ad vulgarem praxim sufficit.

$$\begin{array}{ccccccccc} 3 & & 22 & & 333 & & 355 & \dots \\ 1 & & 7 & & 106 & & 113 & \end{array}$$

sunt hæ approximantes, quarum prima $< \pi$, secunda $> \pi$, tertia $< \pi$, quarta $> \pi$ & ultima tamen tam exacta est, ut in æquatoris peripheria quoque parum aberret.

§. 12.

Paucis exceptis, qui desperatam hanc caussam aggredi ausi sunt, nec id quod quærerent, satis intellexerunt; multique similes his mirantur mathematicos rem tam absurdam desiderare, nempe circulum quadratum; aut per polygona circulum consequi velle, cum nulla pars peripheriae sit recta. Natura curvæ plane in eo consistit, ut nulla pars eius recta sit, plura spatia curvilinea tamen exacte quadrata sunt; nec quidquam aliud in problemate quadrationis circuli quæritur, nisi constructione geometrica sensu stricto (saltem sensu lato) exhibendum punctum illud, in quo *P* (pag. 105) terminari (Tom. I. pag. 20) tanquam limes ipsius ρ debet; atque punctum istud, uti inde et circulo cuivis quadratum æqualitate saltem interminata æquale, (pagg. 105, 109) certo datur: nemo vero adhucdum demonstravit huius impossibilitatem possibilitatemve; uti diametrum cum peripheria esse commensurabilem incommensurabilemve, aut circulum ulli quadrato esse æqualitate terminata æqualem. Quævis interim expressio terminorum numero finito, quo simplicior, eo magis laudanda erit. Series aliæque expressiones infinitæ dato quovis proprius euntes permultæ sunt (uti Tom. I. pag. 442).

§. 13.

Si unius circuli sit diameter =₁ alteriusque diameter =₂*r*, atque construatur ex. gr. hexagonum in utroque, semperque simul duplicentur laterum numeri in utroque: erunt manifesto semper triangula per rectas e centris ad laterum extremitates ductas generata, in utroque similia, atque polygonum circulo diametri ₁ inscriptum, erit ad polygonum circulo diametri ₂*r* inscriptum, uti radius ad radium. Hinc etiam limes polygoni prioris ad limitem posterioris ita erit, uti $\frac{1}{2} : r$ seu $1 : 2r$. Quum igitur pro diametro ₁ sit peripheria π , erit pro diametro ₂*r* peripheria $2r\pi$. Eritque area

$$= 2r\pi \cdot \frac{r}{2} = r^2\pi;$$

unde iterum ex area α reperitur radius; nempe si $\alpha=r^2\pi$, est $r=\sqrt{\frac{\alpha}{\pi}}$.
Si vero peripheria P data sit, reperietur ex $P=2r\pi$ radius $r=\frac{P}{2\pi}$.

§. 14.

Annulus A quoque (Fig. 120.) hinc facile prodit e maioris circuli radio R et minoris radio r ; nempe

$$A=R^2\pi-r^2\pi=(R^2-r^2)\pi.$$

Ita sector prodit pro arcu β in circulo radii r ; nempe sectoris area erit ad totius circuli aream, uti arcus ad peripheriam, seu β ad $2r\pi$. Data chorda radioque etiam segmentum innotescit, si sectoris area nota fuerit, subtracto triangulo a chorda et duobus radiis facto, e sectore; nimirum area trianguli e tribus lateribus prodit (pag. 103).

II.

Transmutatio figurarum quoad areas; et hinc reductio earum ad formam rectae (Tom. I. pag. 27).

§. I.

(Fig. 121.). *Si $a \cdot A = b \cdot B$, et angulus $aA =$ angulo bB : tum parallelogramnum ex a et A parallelogrammo ex b et B quoad contentum aequalitate terminata aequale est.*

Nam si e fine M ipsius B , (quod in parallelogrammi $GCEF$ lateris EC prolongationem ponatur), $MJ \parallel$ et $=GC$ fiat, JC secabit ipsam FE , quia $MJ \parallel FE$; pariter ducta per D parallela ad EM secat ipsam MC . Oriuntur autem hoc pacto triangula CHD et JMC similia propter $HD \parallel B$, $MJ \parallel HC$; itaque prodit tale x , ut sit $a:x=B:A$, adeoque $aA=xB$; atque hinc manifesto $x=b$, quum per hypothesis sit $aA=bB$.

Est etiam GJ in recta eadem cum Gf , atque ipsi ME parallela est; nam $Gf \parallel ME$, atque $MJ \parallel$ et $=GC$.

Estque MCHK parallelogrammum ex b et B cum angulo $bB=z$, uti GCEf ex a et A cum angulo $aA=z$. Hæc duo parallelogramma autem æqualitate terminata esse æqualia patet: si ad latera posterioris ipsi A æqualia transferatur b , donec fieri potest, et ad latera prioris ipsi B æqualia transferatur a , donec fieri potest; nam parallelogramma orta sunt æqualia, uti $1=1$, ita si plura quotquot essent: porro $\triangle k=\triangle k$; si a in B exacte certo numero adesset, patet tum β non remanere, neque α adesse, et A etiam certo numero continere b , quia $a:B=b:A$, atque tum pro k quoque parallelogrammum reliquis æquale adesset. At si adsint α et β , tunc si in latere ipsi B opposito inferiore, ex ultimo a dematur β , et sit ab extremitate eius parallela ad A ; erit hæc $=\alpha$, et tertium latus $=\gamma$; ita si ex ultimo b in Ef dematur α , et fiat ab extremitate eius parallela ad B ; erit hæc $=\beta$, et triangula $\alpha\beta\gamma$ omnia erunt æqualia, per unum latus in quibusvis duobus æquale, et angulos per latera parallela æquales.

Hinc etiam quinquelaterum $\beta s a a b =$ alteri $\beta s a a b$; nam latera et anguli ordine quo semet excipiunt sunt æqualia; nam s remanet utrinque e diagonalibus æqualibus subtracto γ ; patet etiam ex $\alpha+\beta$ demto β remanere α , uti ex $b+\alpha$ demto α remanere b . Itaque parallelogrammum $Aa =$ parallelogrammo Bb æqualitate terminata est.

§. 2.

Hinc patet, quod cum cuique parallelogrammo detur aliud æquale angulo z gaudens, nempe inter parallelas easdem rectis ad angulum z ductis ab extremitatibus baseos parallelis: dari hoc modo cuivis parallelogrammo aliud ad datum latus et angulum æquale; ita cuivis triangulo, quia hoc parallelogrammo altitudinis æqualis baseos dimidiæ $=$ est.

Ita etiam plura quotvis parallelogramma summi possunt, omnia ad angulum z et latus datum reducendo; adeo ut, quum z etiam rectus esse possit, quævis area, quæ ad summam triangulorum reduci potest, in rectangulum eiusdem altitudinis summi, adeoque ad formam rectæ reduci queat. (Tom. I. pag. 27).

§. 3.

Si in præcedentibus $aA = B^2$, (uti pag. 75), prodit $b = B$; atque quadratum ipsi b superstructum rectangulo ex a et A æqualitate terminata = erit.

Hinc si (Fig. 122.) α, β catheti fuerint, et demissa e vertice anguli recti ad hypotenusam γ perpendiculari, quadratum hypotenusæ in rectangula p et q dividatur: erit (pag. 75) $\alpha^2 = a\gamma$, et $\beta^2 = b\gamma$. Consequenter e quadrato ipsius α exstrui modo in §. 1 relato poterit rectangulum p , uti rectangulum q e quadrato β ; adeoque *quadratum hypotenusæ exstruetur e quadratis cathetorum*.

Unde *duo quadrata in unum commutari possunt*, si priorum latera ad angulum rectum iungantur, et ducatur hypotenusam: huius quadratum enim summa priorum erit. Pari modo tertium quadratum, et tum quartum et ita porro in unum mutantur.

§. 4.

Si vero figuræ cuiusdam area a in figuram certæ speciei per x determinatam mutanda sit, sitque hæc $= f(x)$, tum x ex $a = f(x)$ eruitur. Ex. gr. si $f(x)$ circulum, cuius radius x est, denotet: erit

$$f(x) = x^2\pi = a,$$

et hinc

$$x = \sqrt{\frac{a}{\pi}}.$$

Ita si $f(x)$ hexagonum circulo radii x inscriptum denotet: erit area eius perimetro per perpendicularis y e centro ad latus missæ dimidium multiplicatæ æqualis, adeoque

$$6x \cdot \frac{y}{2} = 6x \cdot \frac{x\sqrt{3}}{4} = \frac{3}{2}x^2\sqrt{3};$$

nam latus hexagoni æquatur radio, et

$$y = \sqrt{x^2 - \frac{1}{4}x^2} = \sqrt{\frac{3}{4}x^2} = \frac{x}{2}\sqrt{3}.$$

Unde aream dictam hexagoni, pro radio x , ipsi α æqualem ponendo, prodit x .

Ita si $f(x)$ annulum circa circulum radii r per circulum radii x factum denotet, erit

$$f(x) = (x^2 - r^2)\pi = \alpha;$$

unde

$$x = \sqrt{\frac{\alpha}{\pi} + r^2}.$$

E quibus ad alia applicatio patet.

III.

Comparatio figurarum similium quoad areas.

§. I.

Si in duobus triangulis latera a, b et latera A, B angulos aequales intercipiant, uti (Fig. 123.)

$$\wedge ab = \wedge AB = v,$$

area trianguli abc est ad aream trianguli ABC uti ab ad AB.

Nam sint pro basibus b et B altitudines p et P ; erunt triangula apq et APQ similia, itaque pro $a = np$ erit $A = nP$. Est autem

$$\triangle abc = \frac{pb}{2} \quad \text{et} \quad \triangle ABC = \frac{PB}{2},$$

atque

$$\frac{pb}{2} : \frac{PB}{2} = npb : nPB = ab : AB.$$

Idem de parallelogrammis patet, quum quævis parallelogramma uno angulo æquali gaudentia eiusmodi triangulorum dupla sint.

§. 2.

Sunt porro areae triangulorum similium cbh et CBH (Fig. 124.), uti quadrata linearum homologarum.

Sint enim latera quævis homologa b et B pro basibus accepta, sintque altitudines a et A : erunt propter angulos v et R triangula cqa et CQA similia; itaque si per hypothesim sit

$$\begin{array}{ll} B:b = C:c & \text{et } B=nb, \\ \text{adeoque} & \\ & C=nc; \\ \text{erit etiam} & \\ & A=na, \\ \text{propter} & \\ & C:c = A:a. \end{array}$$

Est vero area trianguli cbh

$$= \frac{ab}{2}$$

et area trianguli CBH

$$= \frac{AB}{2} = \frac{nab}{2}.$$

Consequenter

$$\begin{aligned} \triangle cbh : \triangle CBH &= \frac{ab}{2} : \frac{AB}{2} = ab : AB = ab : nab = \\ &= 1 : n^2 = b^2 : n^2 b^2 = b^2 : B^2. \end{aligned}$$

§. 3.

Hinc etiam *quarumvis figurarum rectilinearum similium areae sunt in ratione duplicata linearum homologarum.*

Nam sit unius figuræ latus quodvis ad latus illi ex altera figura homologum, uti 1 ad n : erit area trianguli cuiusvis ad homologum, uti 1 ad n^2 , adeoque et summa triangulorum figuræ prioris ad summam triangulorum figuræ alterius ita erit, uti 1 ad n^2 , areaque ad arēam uti a^2 ad A^2 , si a latus prioris, et latus posterioris ipsi a homologum $A=na$ sit.

§. 4.

Unde etiam patet *areas circulorum esse uti quadrata diametrorum.*

Nam si diameter unius sit d , alterius D , inscriptis polygonis utriusque

totidem laterum, erit area polygoni prioris ad aream posterioris, (quum manifesto sint polygona per triangula e centro propter angulos æquales similia), uti radiorum quadrata, nempe uti $\frac{d^2}{4}$ ad $\frac{D^2}{4}$, seu uti d^2 ad D^2 . Erit vero ratio eadem semper, etsi numerus laterum simul duplicetur in infinitum, quo pacto id, quod in uno alterove supererit, $\sim o$. Dicatur area polygoni prioris p , et posterioris P , area circuli prioris autem sit c , posterioris sit C , sitque $c = p + \omega$ et $C = P + \lambda$; erit

$$p : P = d^2 : D^2,$$

adeoque et

$$\frac{p + \omega}{P + \lambda} = \frac{d^2}{D^2},$$

quia $\omega \sim o$, et $\lambda \sim o$ (Tom. I. pag. 89).*

Idem ad alias figuras quoque extendi potest.

§. 5.

Hinc si (Fig. 125.) lateribus a, b, c trianguli rectanguli figuræ similes A, B, C superstruantur: erit C , hypotenusa c superstructa, summae cathetus superstructarum aequalis; nempe

$$C = A + B;$$

posito a, b, c latera figurarum A, B, C homologa esse.

Namque tum

$$A : B = a^2 : b^2, \quad \text{atque hinc } A : a^2 = B : b^2;$$

itaque si

$$A = na^2,$$

erit

$$B = nb^2.$$

Porro

$$A : C = a^2 : c^2, \quad \text{et hinc } A : a^2 = C : c^2,$$

adeoque

$$C = nc^2.$$

* §. 4. brevius sequitur ex pag. 107 §. 13. Erit enim pro diametris D et d area prioris $= D^2\pi : 4$, posteriorisque erit $d^2\pi : 4$. (Errata Ed. I. Tom. II. pag. 386).

Sed

$$c^2 = a^2 + b^2.$$

Consequenter

$$nc^2 = na^2 + nb^2,$$

seu

$$C = A + B.$$

§. 6.

Hinc (Fig. 126.) lunula Hippocratis æquatur triangulo rectilineo; nempe $\alpha' = t$, si $a = b$; atque $\alpha' + \beta' = t + t'$.

Nam

$$\alpha + t + t' + \beta = \alpha + \alpha' + \beta + \beta',$$

nempe summa dimidiorum circulorum super cathetis a , b tanquam diametris constructorum est semicirculo diametri c æqualis. Subducto igitur utrinque $\alpha + \beta$, manet

$$\alpha' + \beta' = t + t';$$

si vero $a = b$, est $\alpha' = \beta'$ et $t = t'$.

Quomodo Hippocrates ope suæ lunulæ quadraturam circuli tentaverit, referre haud operæ pretium est.

§. 7.

(Fig. 127.). Superius (pag. 93) mentio facta erat quantitatis anguli arcuum circularium per areas exprimendæ: si circuli A et B se invicem extus aut intus contingant, et $B < A$, saltem non $> A$ fuerit, atque B cum tangente angulum u , A vero angulum v faciat; quantitas anguli circuli A cum B exprimi per $U + V$ potest, si U aream denotet, quæ est inter dimidiæ peripheriam ipsius B et quadrantem peripheriæ centro c diametro ipsius B tanquam radio descriptæ; atque ita V aream inter dimidiæ peripheriam ipsius A et quadrantem peripheriæ centro c diametro ipsius A tanquam radio descriptæ denotet; atque si U et V in diversas respectu tangentis plagas cadant, U positive, si vero in eandem plagam cadant, negative addatur positivo V . Quoad congruentiam tamen

geometricam, et seorsim angulorum æqualitas requiritur: idem etiam, si operæ pretium esset, ad angulos (pag. 93) circulares alios quoque applicari posset, qui ex angulo tangentium, et angulis arcuum cum suis tangentibus componuntur.

Pauca adhuc notasse sufficiat.

1. Si (Fig. 127.) circuli A diameter = 1 sit: erit area eius $\frac{\pi}{4}$ (pag. 107), area circuli vero, cuius radius est diametro ipsius A æqualis, est $= \pi$; area igitur quadrantis circuli posterioris est $= \frac{\pi}{4}$, et area dimidii A est $= \frac{\pi}{8}$, quod si ex $\frac{\pi}{4}$ subtrahatur, manet

$$V = \frac{2\pi}{8} - \frac{\pi}{8} = \frac{\pi}{8}.$$

Est itaque V = dimidio A , atque quadrantem cpqh dimidia peripheria cih ut diagonalis bifariam dividit.

2. Si vero diameter ipsius B sit d : erit

$$B = \frac{d^2}{4} \pi,$$

adeoque

$$\frac{1}{2} B = \frac{d^2 \pi}{8},$$

et quadrantis radio ac descripti area

$$= \frac{d^2 \pi}{4},$$

adeoque

$$U = \frac{d^2 \pi}{8}.$$

Unde

$$U + V = \frac{\pi}{8} (d^2 + 1),$$

atque si $A = B$, area trianguli $\omega = \frac{\pi}{4} = A$.

Plura huius generis Tyrones ipsi reperire possunt.

IV.

Additio, subtractio, divisioque figurarum sub certis conditionibus.

§. I.

Si (Fig. 128.) *fiat* (pag. 71)

$$\alpha : \beta = n : m,$$

atque e vertice trianguli AB ducatur recta ad finem ipsius α , triangulum in ratione eadem divisum erit; nam altitudo utriusque est eadem, adeoque areæ sunt uti bases (pag. 102).

§. 2.

Quodvis punctum p in A sit, area trianguli ax est ad aream trianguli AB , uti $a \cdot x$ ad $A \cdot B$ (pag. 111); itaque area prior erit ad posteriorem, uti n ad m , si fuerit

$$a \cdot x : A \cdot B = n : m,$$

adeoque

$$x = \frac{n \cdot A \cdot B}{m a};$$

et tum triangulum AB per punctum datum p in dicta ratione divisum erit.

§. 3.

Area figurarum similium sunt uti quadrata linearum homologarum. Hinc (Fig. 129.) si $b \parallel B$, est

$$A^2 : x^2 = \triangle AB : \triangle xb,$$

adeoque si

$$A^2 : x^2 = n : m;$$

erit

$$\triangle AB : \triangle xb = n : m,$$

et per parallelam hoc pacto triangulum in dicta ratione dividetur.

§. 4.

Si vero (Fig. eadem) fuerit trapezium Bb , e quo data area ipsi t æqualis sit subtrahenda, per $z \parallel B$ (inferius aut superius) absecta: concipiatur lateribus trapezii non parallelis productis expleri triangulum; erit

$$a+x : x = B : b;$$

adeoque

$$x = \frac{ab}{B-b},$$

et

$$A = a+x = \frac{aB}{B-b},$$

atque α nempe area trianguli, quod supra b est, erit

$$= \frac{\rho b^2}{2(B-b)};$$

nam

$$a : \rho = x : q,$$

et hinc

$$q = \frac{\rho x}{a} = \frac{\rho b}{B-b},$$

adeoque

$$\alpha = \frac{1}{2} b \cdot \frac{\rho b}{B-b}.$$

Si iam t sit subtrahendum, et sit

$$\alpha + t : \alpha + t + t' = m : n;$$

erit

$$A^2 : (x+y)^2 = n : m;$$

adeoque

$$mA^2 = nx^2 + ny^2 + 2nxy;$$

et

$$y^2 + 2xy + x^2 - \frac{mA^2}{n} = 0;$$

unde cum x iam cognitum sit, prodit y . Patet quoque, si inferius sit t subtrahendum, etiam tum datum esse t , et tantum y esse reperiendum.

Si trapezium t' trapezio t addi debeat, reperto x datum erit $x+y$,

fietque

$$(x+y)^2 : A^2 = \alpha + t : \alpha + t + t' ;$$

unde etiam A reperietur.

§. 5.

Hinc quævis figura rectilinea per lineas parallelas in data ratione dividi poterit. Nam si triangulum aut trapezium nimis magnum fuerit, potest ex eo trapezium subtrahi; si nimis parvum, e sequente trapezio subtrahi debet, addique parti priori, quod ita ad finem usque continuare licet.

§. 6.

Possunt etiam areæ per triangula addita, et ita posita, ut etsi lineæ dividentes parallelæ non sint, nec tamen ab una parte nimis lata, ab altera nimis angusta portio sit, quod tamen magis praxim spectat, in ratione data dividi: nempe portio exhibenda in duas partes α et α' (Fig. 130.) dividi potest; eritque

$$\alpha' = x \frac{b}{2} \quad \text{et} \quad x = \frac{2\alpha'}{b};$$

itaque e fine perpendicularis x ducta ad b parallela, triangulum α' efficiet cum α formam quæsitam; quod item continuare licet, ut prodeat portio altera $\beta + \beta'$ \mathfrak{S} .

Scholion: Omnia hæc vero etiam geometrice perfici possunt, cum nonnisi additionem linearum, subtractionem, multiplicationem, divisionemve earundem, ad sumnum extractionem radicis quadratæ requirant. In praxi tamen, ne error multiplicibus constructionibus multiplicetur, satius est calculo repertas lineas ope scalæ accipere: quamvis omnia geometrice possint in rectangulum summari, et hoc in data ratione dividi, atque portioni cuivis e figura data æqualis exhiberi. Ex. gr. sit rectanguli illius altitudo α , potest α in rectangulum altitudinis α transmutari, et si e portione exhibenda remaneat rectangulum α' , hoc potest in triangulum baseos b transmutari \mathfrak{S} ; quibus amplius inhærere supervacuum est.

V.

Exempla quaedam ad certarum figurarum, cuiquam figurae sub certa conditione impositarum, summam, huiusque limitem.

§. I.

Sit triangulum æquilaterum (Fig. 131.) circulo radii r inscriptum, sitque e lateris ab meditullium; est tum $ad=ac=r$ latus hexagoni; et ce est perpendicularis ad ab , ac triangula ace at aed sunt æqualia, quia $ac=ad$, et $ae=ae$; hinc

$$ce = \frac{1}{2}r,$$

estque radius circuli inscripti; nam si h sit alterius lateris meditullium, triangula cah et $cæ$ sunt æqualia, quia $ah=ae$, et $ca=ca$, angulus ad h meditullium chordæ vero est rectus. Hinc cf etiam

$$= \frac{1}{2}r = fg,$$

et

$$ge = \frac{3r}{2};$$

ae vero

$$= \sqrt{r^2 - \frac{r^2}{4}} = \frac{1}{2}r\sqrt{3};$$

et

$$ab = r\sqrt{3}.$$

Area A trianguli agb est latus trianguli multiplicatum per dimidiam altitudinem; itaque est

$$= \frac{3r}{4} \cdot r\sqrt{3};$$

area A' circuli inscripti autem est

$$\left(\frac{1}{2}r\right)^2\pi = \frac{r^2\pi}{4};$$

et si trianguli æquilateri latus sit n -ies minus, est area α circuli huic

triangulo inscripti

$$\frac{r^2\pi}{4n^2};$$

quia radius quoque per similitudinem est n -ies minor, nempe $\frac{r}{2n}$.

§. 2.

Si vero (Fig. 132.) trianguli æquilateri latera omnia per n dividantur et agantur e quovis divisionis puncto lateris cuiusvis ad duo reliqua latera parallelæ, atque inscribatur cuivis minorum triangulorum æquilaterorum hoc pacto ortorum circulus, imo etiam ponatur eiusmodi circulus quocunque, ubi is in triangulo æquilatero iuxta Figuram eandem locum habere potest; dicatur summa arearum omnium horum circulorum A'' .

Patet heic triangula æquilatera oriri in strato inferiore numero $n + n - 1 = 2n - 1$, qui est numerus n -tus impar; ita in strato sequente est triangulorum numerus $(n - 1)$ -tus impar, et ita porro; ut summa omnium sit n^2 . Itaque etiam numerus circulorum inscriptorum est n^2 . Sed si per vertices horum triangulorum ducantur rectæ, nempe quorum bases aut coincidunt, aut sunt parallelæ: erunt hæ ad bases perpendicularares, et centrum circuli inscripti est in intersectione talium perpendicularium; remanet vero ultra peripheriam circuli inscripti, usque ad verticem recta æqualis radio inscripti; itaque eodem radio potest circulus centro in vertice sex triangulorum communi sumto describi, sex circulos triangulis inscriptos tangens; inscriptus circulus vero ad summum a tribus inscriptis, sed potest ab uno quoque aut duobus tangi; tangere se hos circulos patet, quum centra cum puncto communi in rectam cadant.

Hinc novorum circulorum centris stellulatis gaudentium a sex circulis tactorum numerus inter duo strata inferiora est $n - 2$; tum $n - 3$, dein $n - 4 \dots$ usque ad 1.

Itaque, ut A'' prodeat, circulis prioribus, qui numero n^2 erant, additis novis, fiet

$$\begin{aligned}
 A'' &= \frac{r^2\pi}{4n^2} (n^2 + n - 2 + n - 3 + \dots + 1) \\
 &= \frac{r^2\pi}{4n^2} \left(n^2 + \frac{(n-1)(n-2)}{2} \right) \\
 &= \frac{r^2\pi}{4} + \frac{r^2\pi}{2 \cdot 4} + \frac{r^2\pi}{4n^2} - \frac{3r^2\pi}{2 \cdot 4n} \\
 &= \frac{3r^2\pi}{2 \cdot 4} + \frac{r^2\pi}{4n^2} - \frac{3r^2\pi}{2 \cdot 4n}.
 \end{aligned}$$

Quæratur valor summæ duorum posteriorum, (cum terminus primus sit pro quovis n idem), num crescat crescente n , aut decrescat. Est

$$\frac{r^2\pi}{4n^2} - \frac{3r^2\pi}{2 \cdot 4n} = \frac{2r^2\pi - 3r^2\pi n}{2 \cdot 4n^2} = \frac{r^2\pi}{2 \cdot 4} \cdot \frac{(2-3n)}{n^2},$$

e quo, si $n+1$ substituatur ipsi n , fiet

$$\frac{r^2\pi}{2 \cdot 4} \cdot \frac{[2-3(n+1)]}{(n+1)^2};$$

et tantum

$$\frac{2-3n}{n^2} \quad \text{et} \quad \frac{2-3(n+1)}{(n+1)^2}$$

consideranda veniunt; reducta ad denominationem eandem, erunt

$$\frac{2+n-4n^2-3n^3}{n^2(n+1)^2} \quad \text{et} \quad \frac{-n^2-3n^3}{n^2(n+1)^2},$$

ubi in priore plus negativi est; nam $2+n-3n^2$ non nisi pro $n=1$ est $=0$, pro maiore n vero fit negativum; $-n^2-3n^3$ autem quod manet, est idem negativum quam $-n^2-3n^3$. Crescente igitur n in infinitum, decrescit quidem $A-A''$, nempe summa vacuitatum a circulis in triangulo relictarum: at datur limes ad quem tendit ista differentia, ita ut aliquanta pars trianguli hoc modo expleri haud unquam queat.

Est nempe

$$A-A''=\frac{3r^2}{4} \cdot \sqrt{3} - \left(\frac{3r^2\pi}{2 \cdot 4} + \frac{r^2\pi}{4n^2} - \frac{3r^2\pi}{2 \cdot 4n} \right),$$

quod $\sim \frac{3r^2}{2 \cdot 4} \cdot (2\sqrt{3}-\pi)$; quia summa posteriorum fit crescente n in

infinitum omni dabili minor; adeoque si summa vacuitatum dicatur v' , et limes huius sit v ; decrescit v' infra $\frac{A}{10}$, sed non decrescit usque $\frac{A}{11}$; nam $\frac{A}{v}$ est

$$= \frac{2 \cdot 3r^2 \sqrt{3}}{2 \cdot 4} : \frac{3r^2(2\sqrt{3} - \pi)}{2 \cdot 4} = \frac{2\sqrt{3}}{2\sqrt{3} - \pi};$$

est autem $\sqrt{3} = 1,732 \dots$; adeoque $2\sqrt{3} = 3,46 \dots$; π vero pro diametro 1 est $= 3,141 \dots$; itaque $2\sqrt{3} - \pi$ est $0,32 \dots$ quod per 11 multiplicatum est $3,52 \dots$, adeoque excedit $3,46 \dots$, sed decies acceptum infra hoc manet.

§. 3.

Si pro n, m integris rectanguli basis sit $= mu$, altitudo $= nu$; atque ducantur e fine cuiusvis u in basi ad altitudinem, in altitudine ad basim parallelæ: oriuntur quadrata lateris u numero nm , et totidem circuli radii $\frac{u}{2}$, si cuivis quadrato circuli inscribantur; eritque cuiusvis circuli area $= \frac{u^2\pi}{4}$, adeoque summa erit omnium $= nm \frac{u^2\pi}{4}$.

Dividatur quodvis u in partes numero μ ; ductis ut prius parallelis, orientur quadrata lateris $\frac{u}{\mu}$ numero $nm\mu^2$, et totidem circuli his inscripti, quorum cuiusvis radius $= \frac{u}{2\mu}$, adeoque $= \frac{u^2\pi}{4\mu^2}$, eritque summa omnium

$$= nm\mu^2 \cdot \frac{u^2\pi}{4\mu^2} = \frac{nmu^2\pi}{4},$$

ut prius. Manet igitur summa vacuitatum semper eadem, nempe

$$nmu^2 - \frac{nmu^2\pi}{4} = \frac{nmu^2(4 - \pi)}{4}.$$

Quæstionibus tamen huius generis pluribus vacare non licet.

212.

De quorundam, quorum e prioribus possiblitas innotuit, constructione geometrica.

§. I.

Recta a extrema et media ratione secatur, ut olim dicebatur; si construatur triangulum rectangulum, cuius alter cathetus est $\frac{1}{2}a$: erit (Fig. 133.) x id quod quæritur; nempe

$$a : x = x : a - x.$$

Nam (pag. 76)

$$\left(\frac{1}{2}a + x\right)^2 = \frac{1}{4}a^2 + ax + x^2 = \frac{1}{4}a^2 + a^2.$$

Hinc

$$a^2 - ax = x^2 = a(a - x);$$

unde

$$a : x = x : a - x.$$

§. 2.

Hinc construitur decagonum in circulo radii r: nempe si r modo præcedente secetur, erit x latus decagoni (Fig. 134.).

Nam $r : x = x : r - x$; itaque triangula acb et dab sunt similia; quia angulus u est communis, et latera intercipientia r et x, atque x et $r - x$ sunt proportionalia; itaque anguli lateribus proportionalibus oppositi sunt æquales.

Nempe lateribus

$$r = bc, \quad x = ab, \quad x = ab, \quad r - x = db$$

opponuntur

$$y + v, \quad z, \quad p, \quad v,$$

adeoque

$$y + v = p \quad \text{et} \quad z = v;$$

sed $y + v = u$, quia $r = ac$, adeoque $p = u$, hinc $k = x$, et inde $z = y = v$;

adeoque

$$y + v = 2z \quad \text{et} \quad z + y + v + u = 5z = 2R,$$

et

$$z = \frac{2R}{5} = \frac{4R}{10}.$$

Patet e decagono pentagonum quoque datum esse.

Peripheriae divisio per constructionem geometricam sensu stricto in 2, 3, 5, 3.5, atque 2^u, 3.2^u et 3.5.2^u pro μ integro iam Euclidis temporibus nota fuit; omnesque Geometræ tanquam certum pronunciaverant per nullum alium integrum id fieri posse: quid summus recentioris ævi Geometra hac in re quoque præstiterit, vide Tom. I. pag. 384; de quo tamen amplius dicere locus heic non est; et pluribus aliis quoque brevitas necessaria supersedere iubet.

Supplementum numeri 2111211222;

in quo

Origo ideaque Trigonometriae

exponitur: in triangulo angulorum laterumque illis oppositorum mutuam a se invicem dependentiam, atque huius ope modum e datis ignota computandi quærere, ea quoque necessitas impulit, quod pro magnis distantiis quæsita constructio exhibere nequeat.

§. I.

Hic prius omnino de triangulis rectilineis in plano agetur; de sphæricis suo loco dicetur: nempe *sphaera*, eiusque (crescente radio in infinitum) limes geometricus, qui sub conditione pag. 55 exposita *planum* est, certo sensu infinite differentia, alio conveniunt, et in utroque e quovis puncto quaquaversum omnia æqualiter determinantur; atque in utroque lineæ figuræque considerandæ sunt, imo veritates unius plures certa mutatione et alteri conveniunt. Ex. gr. *fundamentale utriusque Trigonometriae tam planae quam sphaericae est, dependentia angu-*

lorum laterumque oppositorum mutua: in plana sunt sinus angulorum, uti latera opposita, in sphaerica uti sinus laterum oppositorum, nempe ibi et latera trianguli sunt arcus sinu gaudentes. Quid sinus, cosinusque, et aliæ lineæ auxiliares, nempe sinus versus, tangens, secans, cosinus versus, cotangens, cosecans, significant, dictum (pag. 14) est; quorum tamen proprie omnia reliqua e sinu promanare e loco citato liquet, quum cosinus e sinu prodeat per theorema Pythagoricum (Fig. 135.) e triangulo rectangulo, cuius hypotenusa radius et unus cathetus sinus anguli u , alter vero cosinus est; nempe

$$\cos^2 u = r^2 - \sin^2 u,$$

unde

$$\cos u = \sqrt{r^2 - \sin^2 u};$$

quod pro radio 1 fit

$$= \sqrt{1 - \sin^2 u}.$$

Atque hinc omnes reliquas functiones trigonometricas, loco citato nominatas, per sinum solum exprimi pro radio 1 posse manifestum est; at saepius expressio brevior clariorque et concinnior per nomina functionum trigonometricarum reliqua fit.

§. 2.

Sed priusquam dependentiae angulorum et laterum mutua demonstratur, quod nempe sinus sint uti latera opposita, atque inde omnes trianguli rectilinei resolutiones deducerentur: dependentia sinus ipsius cosinusque et reliquarum functionum trigonometricarum ab *angulo seu arcu anguli quantitatem* exprimentis consideratur; sinus nempe uti reliquæ functiones trigonometricæ tam angulo quam arcui illius quantitatem exprimenti æque tribuuntur.

I. Pro integro m positivo, et q quadrantem positivum denotante, quantusvis sit arcus α , sive \oplus sive \ominus ; \mp vel $\pm 4mq \pm \alpha$ et $\pm \alpha$ sinu eodem gaudent; id est si arcus $\pm \alpha$ ita mutetur, ut ei addatur sive $4mq$ sive $-4mq$, nec sinus nec cosinus mutatur: nempe quotiescumque de-

curratur peripheria sive positive sive negative arcus $\pm\alpha$ ibi terminatur, ubi \pm vel $\mp 4mq \pm \alpha$. Ita si $\alpha + \gamma = \pm 4mq$ fuerit, α et $-\gamma$ sinu cosinuque iisdem gaudent: nam $-\gamma = \mp 4mq + \alpha$.

II. Si α mutetur in $-\alpha$, sin. α et sin. $(-\alpha)$ sunt oppositi, alioquin æquales; cos. α et cos. $(-\alpha)$ autem est idem. Nam aliquod ipsorum α et $-\alpha$ terminabitur supra diametrum primariam, nisi plane in ipsa terminetur, et tum alterum infra terminabitur; atque tum manifesto extremitates arcuum α et $-\alpha$ a principio *, æqualibus arcubus distabunt, chordaque extremitates has connectens per diametrum primariam perpendiculariter bisecabitur: unde reliqua patent; quum distantia extremitatis unius sit positiva, altera negativa, alioquin æquales; distantia centri vero sit eadem. Si vero in diametro terminetur, fiet id aut in principio aut in fine: si prius, tum sinus est $o = \pm o$, cosinus vero $= 1$, pro radio 1 ; si posterius, sinus item $= o = \pm o$; cosinus autem $= -1$, nempe distantia centri est -1 (pag. 14).

III. Si α mutetur in tale γ , ut sit

$$\alpha + \gamma = q;$$

adeoque γ complementum ad q ipsius α sit, tum

$$\sin. \gamma = \cos. \alpha \quad \text{et} \quad \sin. \alpha = \cos. \gamma.$$

Si vero

$$\alpha + \beta = 2q,$$

tunc

$$\sin. \alpha = \sin. \beta, \quad \text{et} \quad \cos. \alpha = -\cos. \beta.$$

Nempe si tabula sequens, valores ipsius α , complementaque ipsius ad q , tum complementa ipsius α ad $2q$, et demum complementorum istorum ad $2q$ complementa ad q exhibens, percurratur, facile patet: sit k arcus positivus $< q$, aut sit o .

Valores ipsius α	Compl. ad q	Compl. ad $2q$	Compl. complementorum ad $2q$
k	$q - k$	$2q - k$	$- q + k$
$q + k$	$-k$	$q - k$	$+k$
$2q + k$	$-q - k$	$-k$	$q + k$
$3q + k$	$-2q - k$	$-q - k$	$2q + k$
$-k$	$q + k$	$2q + k$	$-q - k$
$-q - k$	$2q + k$	$3q + k$	$-2q - k$
$-2q - k$	$3q + k$	$4q + k$	$-3q - k$
$-3q - k$	$4q + k$	$5q + k$	$-4q - k$
\circ	q	$2q$	$-q$

E quo casibus singulis percursis patet, quum in columna prima quotiesvis $4q$ addi valoribus positivis, et quotiesvis $-4q$ addi valoribus negativis possit, atque eatenus reliquæ columnæ mutari salva re (per I) possint.

IV. Si α a \circ crescat positive usque ad q , sinus a \circ crescet usque ad radium r , qui *sinus totus vel maximus* audit, quum nullus eo maior sit; crescente vero arcu porro ultra q decrescit, usque \circ pro arcu $= 2q$; crescenteque porro arcu ultra $2q$, crescit sinus negative a \circ infra diametrum, donec pro arcu $3q$ fiat $-r$; et ultra $3q$ crescentis arcus sinus decrescit negative usquequo $=\circ$ fiat pro arcu $=4q$.

Cosinus autem arcus \circ aut $\pm 4mq$ est $=r$, nempe $\cos. \circ = \sin. q$; quia $q + \circ = q$, et $\sin. q$ pro radio r est r ; et postea decrescit usquequo $\cos. q = \circ$ fiat, decrescente nempe crescentis arcus complemento; at ultra q crescentis arcus cosinus, eousque ab r ad \circ decrescens, abinde negative crescit, donec pro arcu $2q$ fiat $=-r$; atque dein porro crescente arcu $2q$, item negative decrescit cosinus usquequo pro $3q$ fiat $=\circ$, et abinde denuo crescit positive usquequo pro $4q$ fiat $=r$.

Sinus versus ipsius α vero, omnia hic pro radio r intelligendo, ex primi per $r - \cos. \alpha$ potest: nam si sinus inter principium * arcus atque centrum c cadat, tum $\cos. \alpha$ est positivus, et manifesto $\sin. \text{vers. } \alpha$ est $=r - \cos. \alpha$; atque si sinus ultra centrum cadat, tum ut distantia principii

* a sinu prodeat, radio recta illa, quæ ultra centrum usque ad sinum est, positive addenda est; quod per $r - \cos. \alpha$ exprimitur, quia plane rectæ illius addendæ oppositum est = $\cos. \alpha$. Patet vero sinum versum crescere a 0 usquequo pro arcu $2q$ fiat = diametro, et dein decrescere donec pro $4q$ fiat item = 0.

Tangens ipsius α autem dicitur $\frac{\sin. \alpha}{\cos. \alpha}$ pro radio 1, aut pro radio r generaliter $\frac{r \sin. \alpha}{\cos. \alpha}$; crescitque a 0 positive, usquequo pro q fiat ∞ ; deinde decrescit negative usque ad 0 pro arcu = $2q$; et tum item positive crescit, donec pro $3q$ fiat ∞ , atque demum negative decrescit, donec pro $4q$ fiat = 0. Nempe pro arcu crescente a 0 usque q , tam sinus quam cosinus positivus est, crescitque sinus a 0 usque ad radium, cosinus autem a radio decrescit usque 0; abinde usque ad $2q$ sinus manet positivus, sed divisor negativus est, adeoque quotus fit negativus, atque dividendus a radio usque ad 0 decrescit, divisor autem a 0 crescit negative usque ad radium; postea vero usque ad $3q$ tam sinus quam cosinus negativus est, adeoque quotus fit positivus; crescit vero sinus a 0 usque ad radium positive, cosinus autem item positive decrescit usque ad 0; et tum sinus decrescit usque ad 0 positive, cosinus autem crescit negative, usque ad radium; postea vero sinus crescit negative, et cosinus decrescit negative; atque demum usque ad $4q$ sinus decrescit negative usque ad 0, cosinus autem positive crescit a 0 usque ad radium.

Secans ipsius α dicitur $\frac{1}{\cos. \alpha}$ pro radio 1, generaliter pro radio r (et cosinu α pro radio 1 accepto) autem $\frac{r}{\cos. \alpha}$ secans ipsius α pro radio r dicitur; crescitque crescente arcu a 0 usque ad q , positive a radio in ∞ , et inde usque ad $2q$ decrescit ex ∞ -to negative, donec pro $2q$ fiat = radio; et tum item crescit negative, donec pro $3q$ item fiat = ∞ , atque abinde decrescit positive, donec pro $4q$ item fiat = radio. Nempe (ut statim patebit) pro radio r cosinus ipsius α fiet $r \cos. \alpha$, ($\sin. \alpha, \cos. \alpha \text{ & semper, nisi aliud monitum fuerit, pro radio 1 intelligendo}$): adeoque secans pro radio r fiet $\frac{r^2}{r \cos. \alpha} = \frac{r}{\cos. \alpha}$; fietque hoc pacto secans in primo et ultimo quadrante \pm propter cosinum positivum, et \mp in

secundo et tertio, propter cosinum negativum; quamvis tangens per singulos quadrantes signum mutet, atque eadem linea secans geometrice statim exhibenda fiat pro quadrante ultimo positiva, et negativa pro secundo.

Cosinus versus, cotangens, cosecans quomodo crescente arcu a \circ usque ad $4q$ mutantur, quum pari modo facile pateat, præterire licet. Sufficiat heic prius commemorare, quomodo e signo functionis trigonometricæ ad arcum eius concludatur, tum tangentem, secantemque geometrice exhibere.

Quod prius attinet: manifesto sinu positivo (et non \circ) nonnisi arcus $4mq + \beta$, aut $-4mq - 2q - \beta$ respondere, pro β positivo et $< 2q$, potest; ita sinus positivus radio minor respondet tam angulo acuto, quam obtuso eum ad duos rectos complenti; atque ex aliis datis eruendum est, utrinam appertineat. Cosinus negativus et non $= \circ$ angulo obtuso respondet, positivus acuto; cosinus $= \circ$, uti sinus $=$ radio, angulum rectum indicat: arcus autem cosinui negativo et non \circ , respondet quivis sub formulam $4mq + q + \beta$, aut $-4mq - q - \beta$, pro β positivo et $< 2q$. Reliquis, quum pari modo e dictis facile pateant, immorari supervacuum est.

Quoad alterum videatur (Fig. 135.): sinus arcus αd est δi , et tangens est αe , secans αc , sinus versus αi , arcus αg item arcus $\alpha dfbg$ tangens est αh , secans αb ; atque per similitudinem triangulorum δci et αca atque αgi et αhc proportiones sequentes valent, si α dicatur arcus αd et r radius αc ; nempe

$$\alpha c : \alpha d = \alpha c : \alpha e,$$

id est (heic cosinu, sinu et tangente pro radio præsentि r acceptis)

$$\cos. \alpha : \sin. \alpha = r : \tan. \alpha;$$

ita

$$\alpha c : \alpha d = \alpha c : \alpha c,$$

seu

$$\cos. \alpha : r = r : \sec. \alpha,$$

adeoque

$$\sec. \alpha = \frac{r^2}{\cos. \alpha},$$

si $\cos. \alpha$ pro radio r accipiatur. Pariter infra diametrum, et de reliquis, uti de functionibus trigonometricis complementorum omnia facile patent.

V. Si vero radius mutetur, ex. gr. ex 1 in r , functiones trigonometricæ omnes, quæ pro radio 1 cuiquam arcui competit, per r multiplicari debent, ut eidem arcui pro radio 1 valeant; uti illæ, quæ pro radio r valent, per r dividendæ sunt ut pro radio 1 valeant. Nam sinus arcuum totidem graduum, atque pariter etiam cosinus ita sunt, uti radii, unde reliqua ultro sequuntur: nempe (Fig. 136.)

$$ei : bd = ec : bc,$$

quia ei et bd sunt ad ac perpendiculares; ita

$$ic : dc = ec : bc;$$

nempe sinus ad sinum, et cosinus ad cosinum, uti radius ad radium.

Atque hinc, si ponatur $ec = 1$ et $bc = r$, *sinus* pro radio 1 per r multiplicari debet, ut sinus pro radio r prodeat, et pariter *cosinus* pro radio 1 per r multiplicatus dabit cosinum pro radio r . *Sinus versus* autem erat differentia cosinus a radio, adeoque pro radio r est $r - r \cos. \alpha$, pro radio 1 vero est $1 - \cos. \alpha$, adeoque posterior per r multiplicari debet ut prior prodeat. *Tangens* pro radio r est $\frac{r \sin. \alpha}{\cos. \alpha}$, pro radio 1 vero est $\frac{\sin. \alpha}{\cos. \alpha}$, adeoque posterior per r multiplicatus producit priorem. *Secans* pariter pro radio r est $\frac{r}{\cos. \alpha}$, pro radio 1 autem est $\frac{1}{\cos. \alpha}$, et pariter posterius per r multiplicandum est, ut prius prodeat. Unde etiam ad functiones complementorum reliquas conclusio ultro patet.

Notandum autem est, e similitudine triangulorum dictorum, $\frac{\sin. \alpha}{\cos. \alpha}$, etsi $\sin. \alpha$, $\cos. \alpha$ non pro radio 1, ut dictum est, sed pro radio quovis r intelligantur, semper tangentem pro radio 1 esse.

VI. Si vero α in $\alpha \pm \beta$, adeoque $\sin. \alpha$ in $\sin.(\alpha \pm \beta)$, et $\cos. \alpha$ in $\cos.(\alpha \pm \beta)$ mutetur, fiet

et

$$\begin{aligned}\sin. (\alpha \pm \beta) &= \sin. \alpha \cos. \beta \pm \cos. \alpha \sin. \beta, \\ \cos. (\alpha \pm \beta) &= \cos. \alpha \cos. \beta \mp \sin. \alpha \sin. \beta;\end{aligned}$$

quantumcunque arcum, et sive positivum sive negativum, denotent sive α sive β .

Ad hoc perspiciendum denotent α et b arcus quadrante q minores positivos; manifesto α pro n, m integris positivis poterit per $mq + a$ aut $-mq - a$, ita β per $nq + b$ aut $-nq - b$ exprimi; atque hinc orientur quatuor combinationes pro $\alpha + \beta$ et totidem pro $\alpha - \beta$, nempe quodvis posteriorum duorum cuivis duorum priorum addi, aut ex eo subtrahi potest.

Dicatur A terminus in α , qui certo quadrantum numero additur, et dicatur B terminus in β , qui quadrantum numero additur; atque omittatur tam ex α quam ex β , et tam ex $\alpha + \beta$ quam ex $\alpha - \beta$, quotiesvis adfuerit $\pm 4q$, cum quoad sinum cosinumve nil mutet; manifesto $\alpha + \beta$ sub formam $\pm \mu q + (A + B)$, et $\alpha - \beta$ sub formam $\pm \mu q + (A - B)$ veniet, ubi μ nonnisi 0 aut 1 vel 2 aut 3 erit. Ex. gr. sit

$$\alpha = -7q - a = -7q + A,$$

nempe tum est $A = -a$, sitque

$$\beta = -10q - b = -10q + B;$$

pro α ponи potest $-3q + A$, et $-2q + B$ pro β , atque $-1q + (A + B)$ pro $\alpha + \beta = -17q - a - b$, et $3q + (A - B)$ sive $-1q + (A - B)$ pro $\alpha - \beta$; nempe sive ex $-7q$ subtrahatur $-10q$, sive e $-3q$ subtrahatur $-2q$, sinu cosinuque $-q$ et $3q$ eodem gaudent, quum propter $q + 3q = 4q$ extremitas arcuum eadem sit. Sit nimirum in α quadrantum numerus $4p + p'$, et in β sit $4k + k'$, sive positivum sive negativum denotet sive p sive k , at p' , k' ipso 4 minora sint; dabit $4p + p' + 4k + k'$ sinum cosinumque eundem, quem $p' + k'$, ita sinum cosinumque eundem dabit $4p + p' - (4k + k') = 4p - 4k + p' - k'$, quam $p' - k'$ (per pag. 125).

Patet porro $A + B$ et $A - B$ semper ipso $2q$ minora esse; nempe etsi A et B aut A et $-B$ simul positiva aut simul negativa sint, non-

nisi $a+b$ vel $-a-b$ (pro $a < q$ et $b < q$) prodire potest, in alio casu semper $< q$ prodit.

Sit ipsum $A, B, (A+B), (A-B)$ nomen generale C , ita ut quodvis dictorum, ipsi C in quavis linea horizontali tabellæ sequentis, ubique simul substituere liceat: fiet

<i>Arcuum</i>	<i>sinus</i>	<i>cosinus</i>
$\pm 1q + C$	$\pm \cos. C$	$\mp \sin. C$
$\pm 2q + C$	$-\sin. C$	$-\cos. C$
$\pm 3q + C$	$\mp \cos. C$	$\pm \sin. C$
$0q + C$	$\sin. C$	$\cos. C$

Percurrendo casus singulos, circulumque considerando, veritas tabellæ patebit: quæ pro quavis combinationum superius dictarum sinum cosinumque tam ipsius α per sinum cosinumve ipsius A , quam sinum cosinumve ipsius β exhibebit per sinum cosinumve ipsius B ; et pariter ipsorum $\alpha+\beta$ et $\alpha-\beta$ sinum cosinumve exhibebit, prioris per sinum cosinumve ipsius $A+B$, posterioris per sinum cosinumve ipsius $A-B$.

Quum vero statim demonstretur esse

$$\begin{aligned} \sin.(A \pm B) &= \sin. A \cos. B \pm \cos. A \sin. B, \\ \text{et} \quad \cos.(A \pm B) &= \cos. A \cos. B \mp \sin. A \sin. B; \end{aligned}$$

et si omnes combinationes superius dictæ inductione completa percensantur: atque sinu cosinuque ipsorum $\alpha, \beta, (\alpha+\beta), (\alpha-\beta)$ e tabella dicta acceptis, reperiatur semper

$$\begin{aligned} \sin.(\alpha \pm \beta) &= \sin. \alpha \cos. \beta \pm \cos. \alpha \sin. \beta, \\ \text{et} \quad \cos.(\alpha \pm \beta) &= \cos. \alpha \cos. \beta \mp \sin. \alpha \sin. \beta: \end{aligned}$$

patebit omnino formulæ veritas generaliter. Possent quidem casus plures etiam colligi, ne singuli plane percensendi sint; sed prolixioris operæ pretium non esset.

Exemplo illustrare dicta necesse est. Sit

$$\begin{aligned}\alpha &= -3q - a = -3q + A, \\ \beta &= -2q - b = -2q + B; \\ \sin.(\alpha + \beta) &= \sin.(-1q - a - b) = \sin.(-1q + (A + B)),\end{aligned}$$

quod e tabella est

$$= -\cos.(A + B) = -\cos.A \cos.B + \sin.A \sin.B$$

per formulam de $A + B$ statim demonstrandam; sed hoc est

$$= \sin.\alpha \cos.\beta + \cos.\alpha \sin.\beta;$$

nam e tabella est

$$\begin{aligned}\sin.\alpha &= \sin.(-3q + A) = \cos.A, \\ \cos.\beta &= \cos.(-2q + B) = -\cos.B; \\ \cos.\alpha &= -\sin.A, \quad \sin.\beta = -\sin.B;\end{aligned}$$

substituendo fit

$$\sin.\alpha \cos.\beta + \cos.\alpha \sin.\beta = -\cos.A \cos.B + \sin.A \sin.B.$$

Quum omnia reliqua eodem modo prodeant, nonnisi *de A et B demonstranda formula est*; quod fit modo sequente. Valores ipsius A sunt $+a$ vel $-a$, ita valores ipsius B sunt $+b$ vel $-b$; adeoque quemlibet valorum ipsius A cum quovis valorum ipsius B combinando, fient casus sequentes: $a+b$, $a-b$, $-a+b$, $-a-b$; $a+(-b)$, $-a+(-b)$; ubi ut supra tam a quam b positivum et $< q$ est. Consideretur prius $\sin.(a+b)$, et $\sin.(a-b)$, atque $\cos.(a+b)$ et $\cos.(a-b)$. In (Fig. 137.) $a+b$ sive $< q$ sive $= q$, sive $> q$ fuerit, semper infra $2q$ manet; at vero erit a aut $= b$, aut $< b$, aut $> b$. Sit prius a non $< b$, adeoque $a=b$ vel $a>b$. Transferatur b ex fine ipsius a retrorsum, atque ducta chorda a fine novi b ad finem prioris, ducatur radius e centro c ad finem ipsius a ; bisecabit hic manifesto chordam dictam perpendiculariter. Demittantur e finibus arcuum a , $a+b$ et $a-b$, (nisi $a-b=0$ fuerit), perpendiculares ad diametrum, ut prodeant $l\delta=\sin.a$, $m\epsilon=\sin.(a+b)$, $n\zeta=\sin.(a-b)$; fiantque e chordæ meditullio perpendicularares I et h . Facile patet triangula dimidiis chordæ insistentia æqualia, et $p=h$ ac $k=i$ esse; atque hinc esse

$$\sin.(a \pm b) = I \pm i,$$

et

$$\cos.(\alpha \pm b) = H \mp h.$$

Valores ipsorum I, i, H, h vero reperiuntur e proportionibus sequentibus pro radio i

$$I : \sin. \alpha = \cos. b : I$$

$$I : \cos. \alpha = \sin. b : i$$

$$I : \cos. \alpha = \cos. b : H$$

$$I : \sin. \alpha = \sin. b : h.$$

Nam patet triangulum cuius latus unum est radius $cd=1$, alterum $ld=\sin. \alpha$, tertium $cl=\cos. \alpha$, esse simile triangulo, cuius latera sunt $cq=\cos. b, I$ et H ; ita triangulum prius esse simile triangulo, cuius latera $ge=\sin. b, h, i$, (per pagg. 71, 72).

Hinc valoribus ipsorum I, i, H, h substitutis, est

$$\sin.(\alpha \pm b) = \sin. \alpha \cos. b \pm \cos. \alpha \sin. b,$$

et

$$\cos.(\alpha \pm b) = \cos. \alpha \cos. b \mp \sin. \alpha \sin. b.$$

Corollaria.

I. Atque hinc etiamsi $a < b$ sit, valet formula. Nam si tum scribatur $b \pm a$, formula valet per præcedentia; sed $\sin.(b+a) = \sin.(a+b)$ et reipsa et iuxta formulam; pariter $\cos.(b+a) = \cos.(a+b)$ et reipsa et iuxta formulam; $\sin.(b-a)$ autem est

sed

$$= \sin.(-(a-b)) = -\sin.(a-b),$$

$$\sin.(b-a) = \sin. b \cos. a - \cos. b \sin. a,$$

cuius oppositum est

$$\sin. a \cos. b - \cos. a \sin. b,$$

quod igitur est $= \sin.(a-b)$ pro casu etiam, si $a < b$ fuerit, et quidem formulæ convenienter.

Pariter

$$\cos.(a-b) = \cos.(-(b-a)) = \cos.(b-a) = \cos. b \cos. a + \sin. b \sin. a,$$

plane ita ut dum $a > b$ erat.

Ita

$$\begin{aligned}\sin.(-\alpha + b) &= \sin. -(\alpha - b) = -\sin.(\alpha - b) \\ &= -(\sin. \alpha \cos. b - \cos. \alpha \sin. b) \\ &= \sin.(-\alpha) \cos. b + \cos.(-\alpha) \sin. b.\end{aligned}$$

Pariter

$$\begin{aligned}\sin.(-\alpha - b) &= \sin. -(\alpha + b) = -\sin.(\alpha + b) \\ &= -(\sin. \alpha \cos. b + \cos. \alpha \sin. b) \\ &= \sin.(-\alpha) \cos. b - \cos.(-\alpha) \sin. b \\ &= \sin.(-\alpha) \cos.(-b) + \cos.(-\alpha) \sin.(-b).\end{aligned}$$

2. Hinc si $b = \alpha$ ponatur,

$$\sin. 2\alpha = 2 \sin. \alpha \cos. \alpha,$$

qui erit sinus arcus dupli.

Porro

$$\cos. 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha,$$

et substituendo ipsi $\sin^2 \alpha$ valorem $1 - \cos^2 \alpha$, fit

$$\cos. 2\alpha = 2 \cos^2 \alpha - 1;$$

seu si 2α vocetur c , est

$$\cos. c = 2 \cos^2 \frac{c}{2} - 1,$$

et substituendo ipsi \cos^2 valorem $1 - \sin^2$, est

$$1 - 2 \sin^2 \frac{c}{2} = \cos. c;$$

hinc

$$\sin. \frac{1}{2} c = \sqrt{\frac{1 - \cos. c}{2}}$$

et

$$\cos. \frac{1}{2} c = \sqrt{\frac{1 + \cos. c}{2}}.$$

3. Sit hinc porro $\sin. \alpha = p$ et $\cos. \alpha = k$, eleveturque per theorema binomiale $(k+p)$ ad n ; uti prodeunt termini, summa terminorum, quorum numerus loci par est, exprimit $\sin. n\alpha$; terminorum imparium vero summa est $\cos. n\alpha$; si in utraque expressione signum termini primi ponatur $+$,

et sequentis —, semperque mutetur alternando. Nam si verum est de n , verum de $n+1$ quoque est. Atqui e formulis facile prodit, verum de $n=2, 3, 4 \dots$ esse . . .; itaque verum de quovis numero erit. Maior probatur sic. (Tom. I. pag. 157).

Sit

$$\sin. na = I k^{n-1} p - III k^{n-3} p^3 + V k^{n-5} p^5 + \dots$$

$$\cos. na = k^n - II k^{n-2} p^2 + IV k^{n-4} p^4 - \dots$$

$$\begin{aligned}\sin.(na+a) &= \sin. na \cdot \cos. a + \cos. na \sin. a = \\ &= k(Ik^{n-1}p - IIIk^{n-3}p^3 + \dots) + p(k^n - IIk^{n-2}p^2 + \dots) = \\ &= (Ik^n p - IIIk^{n-2}p^3 + \dots) + (k^n p - IIk^{n-2}p^3 + \dots) = \\ &= (I+1)k^n p - (II+III)k^{n-2}p^3 + \dots;\end{aligned}$$

quod præter signa in $(k+p)^{n+1}$ æquale est summæ terminorum numero locorum pari gaudentium.

Pariter de $\cos.(na+a)$ liquet.

VII. Sequitur iam laterum angulorumque illis oppositorum in triangulo rectilineo mutua dependentia, quod nempe *latera sint uti sinus angulorum illis oppositorum*; e quo resolutiones trianguli omnes ultro sequuntur; hoc autem facile patet, si circa triangulum ABC (Fig. 138.) circulus scribatur (per pag. 80); erunt nempe A, B, C chordæ, et a, b, c anguli ad peripheriam, quorum quantitates exprimentur per arcus a', b', c' , nempe dimidia arcuum, quibus insistunt, per radios e centro per meditullia chordarum ductos divisorum; adeoque est

$$\frac{I}{2} A = \sin. a' = \sin. a,$$

et

$$\frac{I}{2} B = \sin. b' = \sin. b,$$

ac

$$\frac{I}{2} C = \sin. c' = \sin. c.$$

Unde quia

$$\frac{I}{2} A : \frac{I}{2} B = A : B,$$

est

ita $A : B = \sin. a : \sin. b ;$
 atque $A : C = \sin. a : \sin. c,$
 $B : C = \sin. b : \sin. c.$

Ex hac proportione fundamentali autem reperiuntur e duobus lateribus et angulo alicui eorum opposito latus tertium, et anguli reliqui; ita e duobus angulis et latere uni eorum opposito latera reliqua; nec non e duobus lateribus et angulo intercepto latus tertium et anguli reliqui, et pariter e tribus lateribus angulus cuivis eorum oppositus.

1. E fundamentali propositione, nempe

sequitur $A : B = \sin. a : \sin. b,$
 $A \sin. b = B \sin. a ;$

unde ex æquatione inter quatuor has quantitates, quæcunque tres earum datae fuerint, prodit quarta; nempe

$$A = \frac{B \sin. a}{\sin. b}, \quad \sin. a = \frac{A \sin. b}{B}.$$

2. Ex A , B et c , (Fig. 139.) reperitur a modo sequente: sit

$$\frac{a+b}{2} = s; \quad \frac{a-b}{2} = d;$$

hinc (per Tom. I. pag. 414)

$$a = s + d, \quad b = s - d;$$

atque tantum d reperiatur, nempe *semidifferentia*, a illico datur, nam *semisumma* per subtractionem ipsius c ex 180° prodit.

Est vero

$$A : B = \sin. a : \sin. b = \sin. (s+d) : \sin. (s-d) \\ = \sin. s \cos. d + \cos. s \sin. d : \sin. s \cos. d - \cos. s \sin. d;$$

et dividendo terminum proportionis tertium et quartum per $\cos. s \cos. d$, atque substituendo valori $\frac{\sin.}{\cos.}$ tangentem, erit

hinc $A : B = \tan s + \tan d : \tan s - \tan d;$
 adeoque $A \tan s - A \tan d = B \tan s + B \tan d,$

$$(A - B) \tan s = (A + B) \tan d;$$

unde tangens semidifferentiæ, adeoque e tabulis ipsa semidifferentia, nempe arcus tangentis semidifferentiæ respondens, prodit.

Scholion. Sed tang. α etiam immediate reperitur: nempe

adeoque $b = 180^\circ - (\alpha + c),$
 atque hinc $\sin b = \sin(c + \alpha);$
 hinc $B : A = \sin(c + \alpha) : \sin \alpha = \left(\frac{\sin c \cos \alpha}{\cos c} + \frac{\cos c \sin \alpha}{\cos c} \right) : \frac{\sin \alpha}{\cos c}$

$$= (\sin c + \cos c \tan \alpha) : \tan \alpha;$$

 unde $B \tan \alpha = A \cos c \cdot \tan \alpha + A \sin c;$

$$\tan \alpha = \frac{A \sin c}{B - A \cos c}.$$

Unde per fundamentale etiam latus tertium innotescit.

3. (Fig. 140.). E tribus lateribus prodeunt anguli: (pag. 76) dictum est

porro $x = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab};$
 hinc $x : a = \cos c' : 1;$

$$x = a \cos c' = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab};$$

 unde $\cos c' = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab};$

adeoque angulus c' ex lateribus reperitur.

Scholion. Hinc etiam e duobus lateribus et angulo intercepto prodit latus tertium

$$c = \sqrt{a^2 + b^2 - 2ab \cdot \cos c'}.$$

Imo quia

$$c : a = \sin. c' : \sin. \alpha',$$

est etiam

$$\sin. \alpha' = \frac{a \sin. c'}{\sqrt{a^2 + b^2 - 2ab \cos. c'}}.$$

4. Quamvis omnia dicta de omnibus, adeoque et de rectangulis triangulis valeant, quædam tamen de his specialiter notanda sunt, quum si quævis duo præter angulum rectum data fuerint, reliqua innotescant.

1*. Si aut duo catheti, aut unus cathetus et hypotenusa data fuerint: e duobus cathetis hypotenusa, atque e hypotenusa et uno catheto alter prodit, per Theorema Pythagoricum (pag. 76).

2*. (Fig. 141.)

$$B : A = \sin. b : \sin. \alpha;$$

et quia b complementum ipsius α est, fit

$$\sin. b = \cos. \alpha;$$

itaque

$$B : A = \cos. \alpha : \sin. \alpha,$$

atque hinc

$$B : A = \frac{\cos. \alpha}{\sin. \alpha} : \frac{\sin. \alpha}{\cos. \alpha},$$

seu

$$B : A = 1 : \tan. \alpha$$

nempe quoad radium 1. Consequenter

$$B \tan. \alpha = A;$$

unde quæcumque duo data fuerint e cathetis et angulo alicui eorum opposito, tertium innotescit.

3*.

$$H : A = 1 : \sin. \alpha,$$

omnino pro radio 1 intelligendo; unde

$$H \sin. \alpha = A = H \cos. b,$$

(quia $\sin. \alpha = \cos. b$); atque et hic tria sunt, hypotenusa, cathetus et angulus ei oppositus; e quorum quibusvis duobus prodit tertium.

Scholion 1. Omnia hæc autem ope logarithmorum (per Tom. I. pag. 109) facilius absolvvi possunt. Ex. gr. (ex 2*) est

$$\text{tang. } \alpha = \frac{A}{B},$$

adeoque

$$\log. \text{tang. } \alpha = \log. A - \log. B.$$

At notandum est hoc pro radio 1 esse, et pro radio r esse

$$\text{tang. } \alpha = \frac{rA}{B},$$

adeoque

$$\log. \text{tang. } \alpha = \log. r + \log. A - \log. B = 10 + \log. A - \log. B,$$

si pro r radius tabularis (nempe 1 cum 10 cifris) accipiatur.

Scholion 2. Quævis expressio E fuerit, in qua functiones trigonometricæ pro radio 1 (non pro radio tabulari r) acceptæ sunt, atque sit $E = Q$, denotante Q sive functionem aliquam trigonometricam item pro radio 1, sive latus, aut quidvis aliud; omnia modo sequente ita mutari poterunt, ut quævis functio trigonometrica pro radio tabulari r accipi tractarique possit. Sit prius casus simplicior, dum in nullo ipsius E termino dividendus aut divisor quantitas complexa est, nec functio trigonometrica signo radicali subest. *Distinguatur quævis functio trigonometrica pro radio 1 ab eadem per r multiplicata per id*, quod prior litera minuscula, posterior maiore incipiat, ita ut $\cos. \alpha$ sit *pro radio 1*, $\cos. \alpha$ vero sit $= r \cos. \alpha$, adeoque *cosinus tabularis* ipsius α .

In quovis termino ipsius E quælibet functio trigonometrica multiplicetur per illam potentiam ipsius r , ad quam ipsa ibidem elevata est, ex. gr. e $\cos^2 \alpha$ fiat $r^2 \cos^2 \alpha = \text{Cos}^2 \alpha$; et quicunque terminus hoc pacto per r^{-m} esset multiplicatus pro m positivo et non 0, is per r^m multiplicetur; atque si tum in nullo ipsius E termino r^n ut factor accesserit pro n positivo et non 0, tota expressio multiplicetur per r , ut fiat eius valor $= rQ$. Si vero in termino ipsius E aliquo r^μ prodierit pro μ positivo et non 0, nec in ullo termino fuerit exponens ipsius r maior: quilibet terminus, in quo r^ν est, pro ν sive 0 sive positivo et non 0, multiplicetur per $r^{\mu-\nu}$; ut fiat expressio $= r^\mu Q$.

Atque tum exprimantur functiones trigonometricæ ubique quoad r ; ex. gr. ubi $r^3 \cos^3 \alpha$ est, scribatur $\text{Cos}^3 \alpha$.

Si igitur Q functionem trigonometricam pro radio r denotet, erit in casu priore rQ functio eiusdem nominis pro radio r ; in posteriore autem $r^{\mu} Q$ per $r^{\mu-1}$ divisum dabit functionem pro radio r . Si vero tantum ipsum Q quæratur, in casu primo rQ per r , in posteriore $r^{\mu} Q$ per r^{μ} dividendum erit.

Nempe si e termino quopiam $\frac{\gamma}{\delta}$ per operationem primam fiat

$$\frac{r^k \gamma}{r^p \delta} = r^{k-p} \cdot \frac{\gamma}{\delta},$$

erit $k-p$ aut = 0, aut positivum aut negativum; si $k-p=0$, tum

$$r^{k-p} \cdot \frac{\gamma}{\delta} = \frac{\gamma}{\delta};$$

si positivum fuerit $k-p$, erit hæc aut summa potentia ipsius r exponentis μ in terminis omnibus ita tractatis, aut si $k-p$ dicatur ν , termino per $r^{\mu-\nu}$ multiplicato, prior per r^{μ} multiplicabitur. Unde reliqua facile patent.

Exempla.

Sit

$$a + \frac{b \sin^2 \alpha}{c \cos^2 \beta} = Q;$$

fiet post operationem primam

$$a + \frac{br^2 \sin^2 \alpha}{cr^2 \cos^2 \beta},$$

atque hinc

$$ra + \frac{rb \sin^2 \alpha}{c \cos^2 \beta} = rQ.$$

Sit porro

$$a + \frac{b \sin^2 \alpha}{c \cos^2 \beta} - g \tan u = Q;$$

fiet post operationem primam

$$a + \frac{br^2 \sin^2 \alpha}{cr^3 \cos^2 \beta} - gr \tan u,$$

dein per operationem secundam fiet

$$a + r^{2-3} \cdot r^{3-2} \cdot \frac{b \sin^2 \alpha}{c \cos^3 \beta} - gr \tan u = a + \frac{b \sin^2 \alpha}{c \cos^3 \beta} - gr \tan u,$$

quod simul est

$$= a + \frac{rb \sin^2 \alpha}{c \cos^3 \beta} - g \tan u.$$

Atque hinc per operationem tertiam, quum in $gr \tan u$ sit $\mu=1$ et ν ubique sit 0, ubique r^ν per $r^{\mu-\nu}$ multiplicando, ex

$$ar^0 + \frac{r^0 b \sin^2 \alpha}{c \cos^3 \beta} - gr \tan u$$

fiet

$$ar + \frac{rb \sin^2 \alpha}{c \cos^3 \beta} - gr \tan u = ar + \frac{r^2 b \sin^2 \alpha}{c \cos^3 \beta} - g \tan u = rQ.$$

Idem ad eum casum etiam facile applicatur, ubi sive numerator N sive denominator D , sive uterque quantitas complexa fuerit: nempe tam cum numeratore quam denominatore peractis seorsim prius quæ dicta sunt, si ex N fiat $r^k N$, et $r^p \cdot D$ ex D , eodem modo erit $\frac{N}{D} \cdot r^{k-p}$ per r^{p-k} multiplicandum ut supra, et singulis terminis ita tractatis, reliqua ita ut antea peraguntur.

Ex. gr. Sit

$$\frac{a + b \sin^2 \alpha}{d + c \cos \beta} + \tan \gamma = Q;$$

ex $a + b \sin^2 \alpha$ fiet $ar^2 + br^2 \sin^2 \alpha$, $d + c \cos \beta$ autem fiet $dr + cr \cos \beta$, adeoque ex

$$\frac{a + b \sin^2 \alpha}{d + c \cos \beta} \text{ fiet } \frac{r^2(a + b \sin^2 \alpha)}{r(d + c \cos \beta)};$$

et

$$r \cdot \frac{a + b \sin^2 \alpha}{d + c \cos \beta} + r \tan \gamma = rQ.$$

atque idem simul

$$= \frac{ar^2 + b \sin^2 \alpha}{dr + c \cos \beta} + \tan \gamma = rQ.$$

Quid faciendum sit, si quid in expressione signo radicali subfuerit, exemplum sequens ostendere potest. Sit

$$a + b \sqrt[3]{c - \cos^2 \alpha} = Q;$$

si modo dicto tractetur id, quod signo radicali subest, fiet $r^2 c - r^2 \cos^2 \alpha$,
quod sit $= A$; erit

$$\sqrt[3]{rA} = \sqrt[3]{r^3 c - r^3 \cos^2 \alpha} = r \sqrt[3]{c - \cos^2 \alpha}$$

atque

$$ra + rb \sqrt[3]{c - \cos^2 \alpha} = rQ,$$

et idem

$$ra + b \sqrt[3]{r^3 c - r \cos^2 \alpha} = rQ.$$

Scholion 3. Pro tribus lateribus anguli prodeunt adhuc alia formula,
calculo logarithmico aptiore.

Erat (pag. 135)

$$\cos. c' = 1 - 2 \left(\sin. \frac{c'}{2} \right)^2$$

item

$$\cos. c' = 2 \left(\cos. \frac{c'}{2} \right)^2 - 1.$$

Eratque (pag. 138)

$$\cos. c' = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}$$

atque hinc

$$\frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab} = 1 - 2 \left(\sin. \frac{c'}{2} \right)^2,$$

et

$$\begin{aligned} \left(\sin. \frac{c'}{2} \right)^2 &= \frac{c^2 - a^2 + 2ab - b^2}{4ab} = \frac{c^2 - (a-b)^2}{4ab} = \\ &= \frac{1}{ab} \frac{c+a-b}{2} \frac{c-a+b}{2} \\ &= \frac{1}{ab} \left(\frac{c+a+b}{2} - b \right) \left(\frac{c+a+b}{2} - a \right); \end{aligned}$$

et si ponatur

$$P = \frac{a+b+c}{2},$$

est

$$\left(\sin. \frac{c'}{2} \right)^2 = \frac{1}{ab} (P-a)(P-b).$$

Hinc

$$\log. \sin. \frac{1}{2} c' = \frac{\log. (P-a) + \log. (P-b) - \log. a - \log. b}{2}.$$

Item

$$\frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab} = 2 \left(\cos. \frac{c'}{2} \right)^2 - 1;$$

ergo

$$\frac{a^2 + b^2 - c^2 + 2ab}{4ab} = \left(\cos. \frac{c'}{2} \right)^2;$$

et

$$\frac{(a+b)^2 - c^2}{2 \cdot 2ab} = \left(\cos. \frac{c'}{2} \right)^2 = \frac{a+b+c}{2} \frac{a+b-c}{2} \frac{1}{ab} = \frac{1}{ab} P(P-c).$$

Scholion 4. E latere b cum angulis adiacentibus a' , c' (Fig. 142.) reperitur area sic: est

$$x:y = 1:\cot. c';$$

hinc

$$y = x \cot. c', \quad b - y = x \cot. a';$$

adeoque

$$b = x \cot. c' + x \cot. a';$$

atque

$$x = \frac{b}{\cot. c' + \cot. a'};$$

et area

$$= \frac{b^2}{2(\cot. a' + \cot. c')}.$$

Scholion 5. (Fig. 142.). E duobus lateribus a , b et intercepto c' reperitur area sic:

$$a:x = 1:\sin. c';$$

hinc

$$x = a \sin. c';$$

et area

$$= \frac{1}{2} ab \sin. c'.$$

Scholion 6. (Fig. 143.). Data summa a duorum laterum x et y , atque altitudine b et basi c , reperitur angulus A sic:

$$x:b = 1:\sin. A;$$

hinc

$$x = \frac{b}{\sin. A},$$

et

$$y = a - x = a - \frac{b}{\sin. A}.$$

Porro

$$z : b = 1 : \tan A;$$

hinc

$$z = \frac{b}{\tan A} = b \cot A;$$

atque

$$b^2 = y^2 - (c - z)^2;$$

et substitutione facta, est

$$b^2 = a^2 - \frac{2ab}{\sin A} + \frac{b^2}{\sin^2 A} - c^2 + 2cb \cot A - b^2 \cot^2 A;$$

atque substituendo valorem cotangentis, et terminis omnibus membris dextri ad denominatorem $\sin^2 A$ reductis, fiet

$$\frac{a^2 \sin^2 A + b^2 - 2ab \sin A - c^2 \sin^2 A - b^2 \cos^2 A + 2cb \sin A \cos A}{\sin^2 A} = b^2;$$

et multiplicando utrinque per $\sin^2 A$, erit membro dextro subtracto,

$$0 = a^2 \sin^2 A - 2ab \sin A - c^2 \sin^2 A + 2cb \sin A \cos A;$$

nam

$$b^2 - (b^2 \cos^2 A + b^2 \sin^2 A) = 0,$$

quia

$$\sin^2 + \cos^2 = 1;$$

hinc utrinque per $\sin A$ dividendo, est

$$a^2 \sin A - 2ab - c^2 \sin A + 2cb \cos A = 0;$$

et hinc $2ab$ addendo, ac per $2cb$ utrinque dividendo, erit

$$\frac{a^2 - c^2}{2cb} \sin A + \cos A = \frac{a}{c};$$

e quo, quum $\cos A$ per $\sin A$ exprimi queat, A reperitur.

Scholion 7. Occasio tamen per hoc se offert artem sequentem in casibus similibus expedientem ostendendi. Ponatur

$$\frac{a^2 - c^2}{2cb} = \tan q;$$

scilicet quæratur in rubrica tangentium quantitas $\frac{a^2 - c^2}{2cb}$, cui respondens arcus sit q ; erit

$$\begin{aligned}\frac{a}{c} &= \frac{\sin. q \sin. A}{\cos. q} + \cos. A = \frac{\sin. q \sin. A + \cos. q \cos. A}{\cos. q} \\ &= \frac{\cos. (A - q)}{\cos. q};\end{aligned}$$

hinc

$$\frac{a}{c} \cos. q = \cos. (A - q),$$

et A est arcus ipsi $\frac{a}{c} \cos. q$ tanquam cosinui respondens addito arcu q ; nempe arcus q quæratur cosinus, et multiplicetur per $\frac{a}{c}$, ac quæratur in rubrica cosinuum arcus huic tanquam cosinui respondens, arcus is erit $= A - q$; itaque, ut A prodeat, ei addatur q .

Scholion 8. (Fig. 144.). Sit polygoni laterum numerus n , basis b , radius a , altitudo c : est

$$a : \frac{I}{2} b = 1 : \sin. \frac{I}{2} v;$$

hinc

$$\frac{I}{2} b = a \sin. \frac{I}{2} v,$$

et perimeter

$$= 2na \sin. \frac{I}{2} v;$$

porro

$$c : \frac{I}{2} b = 1 : \tan. \frac{I}{2} v,$$

hinc

$$c = \frac{b}{2 \tan. \frac{I}{2} v};$$

adeoque area

$$A = nb \cdot \frac{c}{2} = nb \cdot \frac{b}{4 \tan. \frac{I}{2} v} = \frac{nb^2}{4 \tan. \frac{I}{2} v}$$

et simul

$$= \frac{bn a \sin. \frac{I}{2} v}{2 \tan. \frac{I}{2} v};$$

hinc ex A et n etiam, quia tum datur v , reperitur b .

Est c etiam

$$= a \cos. \frac{I}{2} v,$$

et

$$\frac{I}{2} bc = \frac{I}{2} b \cdot a \cos. \frac{I}{2} v$$

adeoque

$$= a \sin. \frac{I}{2} v \cdot a \cos. \frac{I}{2} v = a^2 \sin. \frac{I}{2} v \cos. \frac{I}{2} v.$$

VIII. Sinus autem computati sunt, dum methodus facilior adhuc ignota esset, modo sequente:

1. Aliquot sinus noti erant, nempe sinus 30° , sinus 18° , sin. 45° : quum latus hexagoni sit = radio, adeoque $\frac{I}{2} r = \sin. 30^\circ$, ita latus decagoni et quadrati circulo inscripti data fuerunt.

2. E sinibus duorum arcuum a et b sin. ($a \pm b$), et hinc arcus dimidii duplique sinus reperiebatur (pagg. 134 §).

3. Hinc etiam ad sinum arcus non quidem unius minutii sed eo minoris deventum est, in arcibus exiguis vero minutum haud excedentibus animadvertebant, quod demonstrari potest debetque, sinus esse uti arcus; scilicet pro denominatore, qui sumitur = 1 cum 10 cifris, error una eiusmodi parte minor est. Imo etiamsi (Fig. 145.) arcus α incrementum unius minutii dicatur α' et item eiusdem α incrementum $\alpha < \alpha'$ sit; incrementa sinuum, nempe i' et i , sunt ut incrementa arcuum, quasi esset in triangulis similibus $i:i' = a:a'$, arcibus tam exiguis a chordis eorundem pro tanto denominatore sensu dicto haud differentibus.

4. Tum reperto sin. i' per formulam sinus $(a+b)$ poterat sinus cuiusvis arcus ($A+i'$) reperiri, si sin. A datus erat; ita per formulas sin. $(a+b)$ et sin. $(a-b)$ omnimode applicatas computati sunt omnes; et una via reperti inserviebant certitudini calculi comprobandæ, si valoribus alia via prodeuntibus æquales reperiebantur.

5. De his tamen, uti et de applicatione calculi per logarithmos allegati (Tom. I. pag. 109), necnon de constructione tabularum logarithmcarum, tabularumque trigonometricarum speciali, additum est aliquid in Tom. I. pagg. 512—520, 569—581.

ELEMENTA GEOMETRIAE.

SECTIO III.

PLANIMETRIA PARS SECUNDA.

•22.

Sequitur MOTUS GEOMETRICUS COMPOSITUS: nempe duæ priores operationes primitivæ (uti pag. 23 atque in Arbore dictum est) coniunguntur. Tractatur autem prius casus simplicior: nempe punctum e rectæ A certo punto determinato * moveatur in A semper porro versus dextram, et alterum ex eodem punto * ad lœvam in infinitum, dicaturque *abscissa* (literarum postremarum aliqua ex. gr. x designata generaliter) via quævis puncti sive ad dextram sive ad lœvam, eo cum discrimine, ut viæ ex. gr. ad dextram positivæ accipientur, et negativæ ad lœvam; atque simul punctum motum rectam B , quounque angulo secuerit hæc rectam A in *, secum ferat, ita ut pars ima eius sit punctum motum, et ipsa ad dextram angulum semper priori æqualem faciat, ac si angulus BA moveretur in plano, ita ut A semper in \bar{A} moveatur porro; et simul punctum p moveatur in B e certo loco certa lege generali, per quam puncti p in B moti locus ad finem cuiusvis x determinetur; atque dicatur pro quovis x recta, quæ a fine ipsius x in B usque ad locum dictum puncti p est, *ordinata ipsius x*; denotenturque *ordinatae* generaliter item per literarum postremarum aliquam, ex. gr. y ; abscissa autem quævis eiusque ordinata *coordinatae* nominentur, et quidem *rectangulares*, si angulus AB rectus sit. Prætereaque si lex dicta sit $f(x)=y$, valores ipsius $f(x)$ omnes, si qui positivi fuerint, in plaga superiore, et negativi (si fuerint) in inferiore accipientur; valor o autem

ipsius $f(x)$, si esset pro certo valore 0 aut alio ipsius x , omnino in fine illius x accipiatur, quum ibidem $y = 0$ sit. Dicitur punctum * *principium abscissarum*, et \bar{A} *linea abscissarum vel axis*.

221.

De iis, quorum quodvis punctum geometrice sensu stricto construi potest.

Scholion. Si $\alpha(x, y) = \beta(x, y)$ adeoque $\alpha(x, y) - \beta(x, y) = 0$ fuerit, atque $\alpha(x, y) - \beta(x, y)$ nullo termino gaudeat, qui non sub formam $ax^p y^q$ cadat, a quantitatem constantem sive 0 sive aliam, ipsorum p, q autem quovis sive 0 sive alium exponentem integrum positivum denotantibus: dicitur complexus omnium extremitatum ipsorum y per æquationem dictam determinatarum *linea ordinis m*-ti, si $p+q$ in aliquo termino, in quo factor constans haud = 0 est, sit = m , neque in ullo sit maior. Interim etiamsi p, q incommensurabilia fuerint, complexus dictus considerari potest.

Si omnes termini adfuerint, qui salvo ordinis numero m adesse possunt: *aequatio plena ordinis m* audit. Ex. gr. pro literis alphabeti prioribus constantes, inter quas etiam 0 esse potest, denotantibus, *æquatio ordinis 1* est:

$$a + bx + cy = 0,$$

ordinis 2 est:

$$a + bx + cy + dx^2 + ey^2 + fxy = 0,$$

ordinis 3 est:

$$a + bx + cy + dx^2 + ey^2 + fxy + gx^3 + hx^2y + ixy^2 + ky^3 = 0.$$

In genere autem æquationem *plenam* ordinis n -ti e terminis numero $\frac{(n+1)(n+2)}{2}$ constare e theoria combinationum facile patet.

221.

Sed hic prius nonnisi de *lineis ordinis secundi* agetur, quæ omnes (Tom. I. pag. 116) pro coordinatis rectangulis sub formam

$$y^2 = x - \frac{x^2}{\pm a},$$

id est

$$y = \sqrt{x - \frac{x^2}{\pm a}}$$

venire possunt; omnesque, ut infra patebit, sunt plani cum cono factæ sectiones; uti conversim omnes plani sectiones cum cono sub formam dictam cadunt; atque etiam manifestum est,

$$y = \sqrt{x - \frac{x^2}{\pm a}}$$

pro quovis dato x geometrice (sensu stricto) construi posse; quum data vel posita unitate prodeat x^2 , pariter $\frac{x^2}{\pm a}$ (pag. 77), et subtracto hoc ex x , radix quadrata e residuo (pag. 75) extrahi pro unitate priore queat.

Primariis autem, quæ sectiones conicas sive lineas secundi ordinis concernunt, traditis, quædam magis necessaria e theoria linearum cuiusvis ordinis generali referentur.

Scholion 1. NEWTON lineas secundi ordinis, adeoque sectiones conicas lineas ordinis primi dixit, rectam, quæ ordinis primi est, quasi ordinis octo et lineas sequentis ordinis curvas primi ordinis considerando: at prout libuerit, ita accipi posse manifestum est. Quod vero recta quævis pro data abscissarum linea, principioque abscissarum positio, sub formam

$$a + bx + cy = 0$$

veniat, hinc pateat.

Erit recta exprimenda $C\mathcal{D}$ (Fig. 146.) respectu lineæ abscissarum AB et principio * abscissarum aut $\parallel AB$, aut secabit hanc alicubi ex gr. in c. Ex æquatione primi ordinis

$$a + bx + cy = 0$$

sequitur

$$y = -\frac{a}{c} - \frac{b}{c} x,$$

quod venit (pro p, q constantibus) sub formam

$$y = p + qx.$$

Si $\text{CD} \parallel \text{AV}$, tum ponatur $b = o$ in

$$\alpha + bx + cy = o,$$

et fiet $-\frac{bx}{c}$ æquale o in $\frac{-\alpha}{c} - \frac{bx}{c} = y$, adeoque

$$\frac{-\alpha}{c} = y,$$

ubi $\frac{-\alpha}{c} = p$ poni potest.

Si vero CD secet lineam abscissarum in c , demissis perpendicularibus β, y, y' , per triangulorum similitudinem erit

$$\alpha + \gamma : \beta = \gamma + x : y,$$

adeoque

$$y = \frac{(\gamma+x)\beta}{\alpha+\gamma} = \frac{\gamma\beta}{\alpha+\gamma} + \frac{x\beta}{\alpha+\gamma},$$

quod sub formam $y = p + qx$ venit, si $\frac{\gamma\beta}{\alpha+\gamma}$ quantitas omnino constans p dicatur, ita $\frac{\beta}{\alpha+\gamma}$ per q denotetur. Pariter pro x' (nempe negativo x) est

$$\alpha + \gamma : \beta = x' + \gamma : y';$$

atque hinc

$$y' = \beta \frac{x' + \gamma}{\alpha + \gamma} = \frac{\beta\gamma}{\alpha + \gamma} + \frac{\beta x'}{\alpha + \gamma};$$

nempe si x' ad lævam negative accipiatur, erit k negativum et $= -x' + \gamma$, atque ita prodibit

$$-y' = \frac{\beta\gamma}{\alpha + \gamma} + \frac{\beta(-x')}{\alpha + \gamma};$$

et hic quoque

$$\frac{\beta\gamma}{\alpha + \gamma} = p \quad \text{et} \quad \frac{\beta}{\alpha + \gamma} = q$$

est, ut prius erat.

Pariter (Fig. 147.), ubi

$$\alpha - \gamma : \beta = x - \gamma : y,$$

ita si plane in * fiet sectio, patet.

Scholion 2. Lineæ secundi ordinis autem tractabuntur ordine sequente; tres sunt, nempe *parabola*, *ellipsis* et *hyperbola* (Tom. I, pagg. 116 &c, ubi et primaria eas concernentia definita sunt).

I. Prius formæ ipsæ, quatenus e lege fluunt, atque *axes* in singulis, et simul *aliquid* de *insignibus*, quas *sectiones conicae* in coelis et terris *partes* agunt.

II. Linearum harum, tam speciei eiusdem quoad parametros diversas, quam diversæ speciei, comparatio.

III. Mutatio initii abscissarum pro ellipsi et hyperbola in centrum.

IV. *Focus* nempe distantia eius a vertice, ita *excentricitas*, id est distantia foci a centro, in singulis.

V. *Radii vectoris* quantitas pro singulis tribus.

VI. Atque hinc *modus* singulas *construendi*: prius quodvis punctum, *quamvis omne nunquam*, geometricè sensu stricto, tum *mechanice motu continuo*.

VII. *Tangens subtangensque, normalis subnormalisque* in singulis, nempe *pro data quavis abscissa*.

VIII. Hinc *applicationum quarundam explicatio*.

IX. *Diametri* omnes nempe lineæ, quæ omnes chordas certæ eidem rectæ parallelas bisecant, in singulis: ubi notandum, proprie sic dicta diametro nonnisi lineam secundi ordinis gaudere.

X. *Intersectiones linearum secundi ordinis*, atque inde resolutio certarum æquationum.

XI. Areæ per lineas istas et coordinatas clausæ, et longitudo arcuum.

I.

Determinantur modo sequente *formae linearum*, quarum pro coordinatis rectangulis (abscissa x et ordinata y) æquatio est

$$y = \sqrt{x - \frac{x^2}{\pm a}},$$

ubi (iuxta Tom. I. pag. 116) unitas ad extractionem radicis requisita *parameter* dicitur; nempe $x^2 : a$ manet idem; pro quo enim hic linea accipitur, et sive ex. gr. pro $x : a = 2 : 3$ fit $x^2 : a = 2x : 3$; sive, si $x^2 = a$ pro $u = 1$, fiet $x^2 = na$ pro $(u : n) = 1$; adeoque si ex. gr. $\alpha : a = 2$, erit $na : a = 2n$, et prius quoad $u = 1$, posterius quoad $(u : n) = 1$ accipienda.

Sit $x = ka$ pro a constante positivo, k vero aut $= 0$ aut positivo aut negativo, atque aut < 1 aut $= 1$ aut > 1 .

1. Pro $a = \infty$ fiet $x - \frac{x^2}{\pm a} = x$ pro quovis finito x ; nam $\frac{x^2}{\pm a} \rightarrow 0$ pro quovis finito x , si $a \rightarrow \infty$; itaque (Tom. I. pag. 46) $\frac{x^2}{\pm a}$ pro quovis finito x , si $a = \infty$, fit $= 0$. Tum vero $y = \sqrt{x}$ dat *parabolam*, ob rationem paulo inferius tradendam ita dictam; cuius formæ ductus ex æquatione ipsa modo sequente intelligitur.

Sit k positivum aut negativum, ab ipso 0 incipiendo crescens in ∞ , et sit $x = ka$, atque sit prius x positivum, adeoque $+x$; erit pro $k = 0$ etiam $x = ka = 0$, adeoque et $y = \sqrt{x} = 0$. Si k positive crescat inde a 0 in ∞ ,

$$y = \sqrt{x} = \sqrt{ka}$$

crescat inde a 0 in ∞ , semperque duos valores habebit oppositos, alioquin æquales. Si k negative crescat inde a 0 in ∞ , ordinatæ omnes imaginariæ erunt, quia tum $x = ka$ negativum, adeoque $y = \sqrt{x}$ radix quadrata e negativo erit.

2. Pro a finito et positivo

$$y = \sqrt{x - \frac{x^2}{a}}$$

dat *ellipsim*; et quidem ordinatam 0 pro $k = 0$ adeoque $ka - \frac{k^2 a^2}{a} = 0$, pariter $y = 0$ pro $k = 1$ adeoque $x = a$, quia tum

$$ka - \frac{k^2 a^2}{a} = ka - k^2 a$$

fit $= a - a$. Si vero k positive crescat inde a 0 usque ad 1 , erit $k < 1$, adeoque $k > k^2$, consequenter $ka - k^2 a$ semper positivum erit, crescetque

$$y = \sqrt{(k - k^2)a}$$

inde a 0 , donec $k - k^2$ maximum fiat, (quod fit pro $k = \frac{1}{2}$ adeoque $x = \frac{1}{2}a$), et abinde decrescit usque ad 0 ; prodibuntque semper duæ ordinatæ oppositæ, alioquin æquales.

Si vero k positivum et > 1 fuerit, fiet semper $k^2 > k$, adeoque $(k - k^2)a$ erit negativum, atque ordinata, nempe radix e negativo, ima-

ginaria fiet. Pariter pro k negativo; nam k^2 semper positivum est, adeoque $(k - k^2)a$ negativum erit.

Sunt etiam a meditullio ipsius a , adeoque centro, ad eandem distanciam u ad dextram lævamque ordinatae æquales: nam pro

$$x = \frac{I}{2}a - u,$$

fit

$$x - \frac{x^2}{a} = \frac{I}{2}a - u - \frac{\frac{I}{4}a^2 - au + u^2}{a} = \frac{a}{4} - \frac{u^2}{a},$$

et idem prodit pro

$$x = \frac{I}{2}a + u.$$

Quod autem $y =$ quantovis parvo ω prodire queat, sic patet: ex

$$\omega = \sqrt{ka - k^2a}$$

fit quadrando, æquatio quadratica

$$k^2 - k + \frac{\omega^2}{a} = 0,$$

et

$$k = \frac{I}{2} \pm \sqrt{\frac{I}{4} - \frac{\omega^2}{a}},$$

ubi quia tum k positivum $<_1$ esse debet, oportet $\frac{I}{4} > \frac{\omega^2}{a}$ esse, ut radix realis addatur ipsi $\frac{I}{2}$, aut ex $\frac{I}{2}$ subtrahatur; fiet autem pro ω utvis parvo et quantovis, dummodo $\frac{\omega^2}{a} < \frac{I}{4}$ sit; patetque pro eodem ω duos ipsius k valores prodire, prout radix positiva vel negativa accipitur; et quidem $k \sim 0$ vel 1 , dum $\frac{\omega^2}{a} \sim 0$, atque

$$\sqrt{\frac{I}{4} - \frac{\omega^2}{a}} \sim \sqrt{\frac{I}{4}} = \pm \frac{I}{2},$$

adeoque

$$\frac{I}{2} \sim \sqrt{\frac{I}{4} - \frac{\omega^2}{a}} = k \sim 0;$$

ita

$$\frac{I}{2} \mp \sqrt{\frac{I}{4} - \frac{\omega^2}{a}} = k \sim 1.$$

Patet etiam ordinatas a centro ad dextram lævamque decrescere usque ad o : erat enim pro distantia u a centro

$$y = \sqrt{\frac{a}{4} - \frac{u^2}};$$

quod si u crescat, adeoque distantia a *vertice*, nempe ubi $x=0$, decrecat, manifesto decrescit.

3. Pro $-a$, item finito, dat

$$y = \sqrt{x - \frac{x^2}{-a}} = \sqrt{x + \frac{x^2}{a}}$$

hyperbolam; fitque $y=0$ pro $x=0$; at pro x positive crescente in infinitum gaudet y semper duobus valoribus oppositis, alioquin æqualibus, crescentibus in infinitum. Si vero x negativum sit $=ka$ pro a positivo et k negativo, fiet y imaginarium, donec $k=-1$ evadat; nam tum

$$x + \frac{x^2}{a} = ka + \frac{k^2a^2}{a} = a(k+k^2),$$

atque k negativum et <1 , adeoque $k>k^2$ est, itaque $k+k^2$ negativum adeoque radix e negativo imaginaria est. Pro $k=-1$ autem, fit negativum $x=-a$, atque

$$y = \sqrt{a-a} = 0;$$

at pro k negativo et >1 fiet $k^2>k$, itaque $k+k^2$ erit positivum, adeoque valores ipsius y erunt item bini oppositi quidem, sed alioquin æquales, crescente x cum k in infinitum, crescentes in infinitum. Itaque exorietur linea quatuor brachiorum e duobus verticibus, recta a (quæ respectu verticis primarii negativa est) distantibus, in infinitum extensorum.

Suntque duæ partes hyperbolæ, interruptæ quidem, æquales; quia ordinatas ab utroque vertice dicto æquidistantes æquales esse patet, si e meditullio rectæ $x=-a$, nempe centro axeos *hyperbolæ*, omnino negativi, consideretur quantitas ordinatarum ad distantiam u tam ad dextram quam ad lævam: est nempe ad dextram

$$x = u - \frac{a}{2},$$

itaque

$$x + \frac{x^2}{a} = u - \frac{a}{2} + \frac{u^2 - au + \frac{a^2}{4}}{a} = \frac{u^2}{a} - \frac{a}{4};$$

atque idem ad lævam prodit ad distantiam u ; nempe ibi x negativum
inde a vertice *primario* est $= -\frac{1}{2}a - u$, itaque

$$x + \frac{x^2}{a} = -\frac{a}{2} - u + \frac{\frac{a^2}{4} + au + u^2}{a} = \frac{u^2}{a} - \frac{a}{4}.$$

4. Si vero (iuxta Tom. I. pag. 121) valores imaginarii accipientur, quum hi æquo realitatis iure quoad $-i$ gaudeant, uti aliæ quoad $+i$: æquatio parabolæ plane talem parabolam, æquatio ellipseos ellipsim quoad $+i$ quidem exhibebit, et simul hyperbolam quoad $-i$ realem; et æquatio hyperbolæ simul ellipsim; æquatio hyperbolæ æquilateræ autem, ubi nempe $a=1$, *valoribus* ordinatæ *imaginariis* exhibebit *circulum*, uti *circuli* æquatio hyperbolam æquilateram; attamen quoad $+i$, $-i$ realia diversis coloribus aut alio quopiam modo distinguere necesse est (ut Tom. I. pag. 202 dictum est).

5. *Axis maior* est $x=\pm a$; in parabola est ∞ , in ellipsi autem est $x=\mp a$; in hyperbola vero $x=\mp a$; *centro* igitur *parabola nullo gaudet*, nempe rectæ a vertice in infinitum abeuntis non datur punctum, eam in duas partes æquales dividens; in ellipsi et hyperbola vero datur meditullium; si et $a=1=$ parametro, ellipsis fit circulus diametri 1, et *hyperbola* dicitur *aequilateralis*. Parabola autem dici potest tam *ellipsis* quam *hyperbola* axi maiore infinito; nempe si $a>\infty$, expressio $\sim \sqrt{x}$.

Axis minor est duplum ordinatæ, quæ est e meditullio axeos maioris: in *parabola* igitur nullus axis minor est. In *ellipsi* vero est

$$2\sqrt{x - \frac{x^2}{a}} \quad \text{pro} \quad x = \frac{a}{2};$$

adeoque est

$$= 2\sqrt{\frac{a}{2} - \frac{a^2}{4a}} = 2\sqrt{\frac{2a^2 - a^2}{4a}} = 2\sqrt{\frac{a}{4}} = \sqrt{a}.$$

In hyperbola autem est

$$2\sqrt{x + \frac{x^2}{a}} \text{ pro } x = -\frac{a}{2},$$

nempe

$$2\sqrt{-\frac{a}{2} + \frac{a^2}{4a}} = \sqrt{-a};$$

itaque axis minor hyperbolae est imaginarius. In circulo axis minor = axi maiori = 1, nempe $\sqrt{1} = 1$; in hyperbola æquilatera est axis minor $= \sqrt{-1}$.

6. Nomina *parabola*, *ellipsis* et *hyperbola* autem inde exorta sunt, quod, si pro parametro singulis eadem vertex communis, lineaque abscissarum eadem fuerit, et ad dextram sit focus f parabolæ, atque distantia ipsius f a vertice ad lœvam transferatur in linea abscissarum, et e fine huius erigatur perpendicularis D , a veteribus *directrix* dicta: cuiusvis puncti b' parabolæ distantiae ab f et D aequales erunt, cuiusvis puncti ellipsoes autem distantia ab f minor est quam a D , et cuiusvis puncti hyperbolæ distantia ab f maior quam a D est. Nempe (Fig. 148.) sit $b'd$ ordinata parabolæ; erit pro eodem x et parametro eadem, ordinata ellipsoes minor

$$= \sqrt{x - \frac{x^2}{a}} = bd,$$

et ordinata hyperbolæ fiet maior

$$= \sqrt{x + \frac{x^2}{a}} = b'd;$$

estque

$$bd = bc = b'c' = b''c'';$$

sed

$$fb < fb' < fb''.$$

7. Potuissent quidem lineæ dictæ etiam sic definiri: si a et b aut

puncta denotent, sive diversa sive in unum coincidentia, aut si non utrumque punctum denotet, duntaxat a sit punctum et b rectam denotet; fueritque in plano talis linea L , cuius si puncti cuiuslibet p distantia ab a dicatur a' , et distantia a b dicatur b' : aut quodvis $a'+b'$ aut quodvis $a'-b'$ eidem constanti c , quæ etiam $=0$ esse potest, æqualis sit: erit L *parabola, recta, ellipsis* aut *circulus*, vel *hyperbola*, uti inferius patet; quo pacto et parabola, recta, circulus, hyperbolaque eodem pertinent; nempe in singulis est $a'-b'=c$, in circulo et ellipsi autem est $a'+b'=c$. Recta excludi, aut cuiusvis certa revolutione circa axem generata includi possunt; et distinctio specialior facilis est.

Scholion. Sectiones conicæ insignes in cœlis et terra partes agunt: corpora cœlestia cursum earum sequuntur; nempe (Fig. 149.) quum attractio universalis sit in ratione composita ex inversa duplicata distantiarum et directa massarum trahentium: si in c ponatur vis attractiva, et concipiatur corpus ex a vi illa attractiva ipsius c , quæ ad a est, constanter eadem manente, motu uniformiter accelerato usque ad c decidere, fiatque ad c velocitas finalis v ; atque iam relictæ vi centripeta uti est, si corpus in a vi momentanea velocitatis ab proiiciatur: describetur, si $ab=v$, *parabola*, si $ab < v$, tum *ellipsis*, et *hyperbola*, si $ab > v$. Est autem c focus sectionis conicæ, quem corpus projectum ad idemque punctum retractum prius crescente celeritate petit, postea senior semper fit usque quo revertitur, in parabola hyperbolaque nunquam reversum, in aliorum solium abyssum mergitur. Similem cursum plurimæ summam illusionem producentes vires attractivæ terrestres tenent.

Projectorum ad terram via ad sensum parabola est, si directio projectionis verticalis non sit.

Focus quoque locus insignis est; nam præter iam dicta, in parabola radii omnes lucis, caloris, soni, e foco ad parabolam vel paraboloidem (de qua statim) cadentes, axi parallelī, et hi in focum reflectuntur; nam angulus, quem radius vector cum tangente facit, est æqualis ibidem illi, cuius verticalis est is, quem recta axi parallela item cum tangente eadem ad idem punctum facit. Hinc si *fornix domus paraboloidis* esset, lampas in *foco* ardens, (cuius fumus *ope canaliculi superius facti in caminum eve-*

heretur), lumine deiecto domum totam illuminaret, quamvis decrescente versus marginem lucis gradu, quod tamen in domo quavis etiam ope coni truncati aliquatenus obtineri potest; ut et aëris rivus facile regatur, et vaporibus noxiis evectis, lumen almum clarissimumque pluribus studentibus inserviat. Notandum autem est:

1. Lychnii oleique quantitatem qualitatemque debitam requiri.
2. Conum ex alba subtili papyro *velin* dicta conficiendum esse; ne nimis opaca umbram proiiciat; duo enim quoad lucem vitanda sunt oculorum aciem servaturo; *gradus nimius* lucis sive in excessu sive in defectu, et *gradus nimis differentes* sive simul sive subito post se invicem.
3. In aliquo canaliculi loco diametrum eius vicissitudinibus temperatus attemperare et facile et necesse est; rivus aëris enim adeo varius est, ut *fornacibus pro hieme exstructis, infirmiores vere autumnaque* (calorem quidem leniorem extrinsecus depositos), *aut algere cogantur, aut oculis pulmonibusque laborent*. Sit igitur, etsi non huius loci sit, *fornacem* qua utor *trium mutationum* sudare, qua ad nutum quasi fumus diversas longiores brevioresve vias capit, quarum omnino posteriores veri autumnaque convenient.
4. Potest etiam cono truncato minori tubus item papyraceus agglutinari, et simul cum candelabro portatilis fieri, idemque et ad unam candalam sebaceam applicari; dummodo candelabrum quam minimum umbræ proiiciat, lumenque eandem retineat altitudinem; quod facile obtinetur, quum hoc ipsum in tali scribatur lumine. Tubus lampadum *Argando* debetur.

Redeundo ad paraboloidem: lucerna noctu in focum eius posita, riteque obversa index horaque remota cerni possunt.

Vicissim radii e sole axi paralleli venientes urunt in foco: sed quo remotior focus, eo maior locus ustionis erit, et eo latiore paraboloidem esse oportet.

Ita remotum susurrum auris in foco maioris paraboloidis percipiet; et vox e foco pronunciata remotius exaudietur; ita si duæ paraboloides sint e regione ad axem eundem positæ, ex unius foco missa vox lenis, nullibi in medio, sed in foco alterius quamvis remoto auditur: quod

etiam loquentibus, qui, priusquam ad focum per secula remotum per-
ventum fuerit, a nemine intelliguntur, evenit.

Fornaces quoque exstrui possunt, ut ignis in foco paraboloidis ardeat;
eritque in foco alterius paraboloidis e regione positæ insignis sine igne
calor; latiusque in hypocausto diffundetur.

Ita radii omnes e foco uno ellipseos in alterum reflectuntur; radii
illi vero, qui quacunque causa ita venientes, ut (Fig. 150.) in dimidiæ
hyperbolæ foco \mathfrak{f} convenient, a hyperboloidis H facie interiore excepti,
in huius foco \mathfrak{f} convenient; et vicissim si hinc nempe ex \mathfrak{f} procedant,
ita reflectuntur, ut retrorsum continuati in \mathfrak{f} secarent se invicem, adeo-
que disperguntur \mathfrak{S} .

II.

*Comparatio sectionum conicarum, prius speciei eiusdem quoad pa-
rametros diversas, tum earum inter se pro parametro eadem.*

1. Sit $y = \sqrt{x \pm \frac{x^2}{a}} = r$ pro $u=1$, atque pro $U=1=k u$ (deno-
tante k quantitatem abstractam invariabilem Tom. I. pag. 111) sit $= R$;
erit (Tom. I. pag. 114)

$$R = r \cdot k^{\frac{1}{2}} \quad \text{et} \quad r = R k^{-\frac{1}{2}}.$$

Itaque

$$R : r = \sqrt{k} : 1,$$

id est ordinatæ pro abscissa quavis eadem erunt uti radices quadratae
parametrorum quoad unitatem eandem acceptæ.

2. Si duæ abscissæ X et x , atque ordinatæ earum Y et y conside-
rentur, erit $Y^2 = X$ in parabola, et $y^2 = x$; itaque y est *proportionalis
media inter* 1 (nempe *parametrum*) *et abscissam*; atque

$$Y^2 : y^2 = X : x,$$

nempe *quadrata ordinatarum sunt uti abscissae*.

Ita pro *ellipsi* et *hyperbola*

$$Y^2 = X \mp \frac{X^2}{a} = \frac{aX \mp X^2}{a} = \frac{X(a \mp X)}{a};$$

et pariter

$$y^2 = \frac{x(a \mp x)}{a}$$

itaque

$$Y^2 : y^2 = X(a \mp X) : x(a \mp x).$$

3. Si e puncto quopiam eodem p per omnia puncta sive parabolæ sive ellipseos sive hyperbolæ rectis conceptis, generetur (iuxta pag. 10) simile, pro quavis recta, quæ a p ad punctum lineæ quodpiam f est, accipiendo $k.pf$, denotante k quantitatem ut in 1.: recta inter quævis duo puncta lineæ novæ k -ies tanta erit, quam recta inter puncta lineæ prioris illis homologa (pag. 79); adeoque si abscissa quævis prioris x dicatur, et ordinata y , axis maior $\pm a$, parameter u , et $X, Y, \pm A, U$ abscissam, ordinatam, axem maiorem et parametrum prioribus homologa denotent: erit

$$X = kx, \quad Y = ky, \quad U = ku;$$

atque hinc e parabola, in qua $y^2 = x$ erat, prodit nova, in qua

$$[Y^2]_{u=1} = kX \quad \text{et} \quad Y = [\sqrt{X}]_{U=ku=1}.$$

Nam

$$[\sqrt{X}]_{u=1} = [\sqrt{kx}]_{u=1} = y\sqrt{k},$$

et

$$[\sqrt{X}]_{U=ku=1} = \sqrt{k} [\sqrt{X}]_{u=1} = ky = Y.$$

Et hinc non solum linea nova parabola est, sed quum ipsum k , adeoque parametrum U utvis accipere liceat, sunt *omnes parabolæ inter se similes*. Non idem de ellipsi hyperbolaque valet: nempe harum æquationes et altera constans a ingreditur; estque pro his, si similes fuerint, *parameter lineae* generatae ad parametrum primitivæ, uti axis maior generatae ad axem maiorem primitivæ, id est

$$u : U = a : A.$$

In *ellipsi* pro quovis Y est

$$[Y^2]_{U=ku=1} = X - \frac{X^2}{A}, \quad Y = \left[\sqrt{X - \frac{X^2}{A}} \right]_{U=ku=1}.$$

Nam

$$Y = ky, \quad y^2 = x - \frac{x^2}{a},$$

adeoque

$$[Y^2]_{u=1} = k^2x - \frac{k^2x^2}{a} = kX - \frac{X^2}{a} = kX - \frac{kX^2}{ka} = k\left(X - \frac{X^2}{A}\right),$$

et

$$[Y^2]_{U=ku=1} = X - \frac{X^2}{A}.$$

Ita si radix ex $X - \frac{X^2}{A}$ quoad $u=1$ dicatur r , et R dicatur radix quoad $ku=1$ accepta: erit ut ibidem

$$R = r \sqrt{k},$$

et quum radix ex $x - \frac{x^2}{a}$ quoad $u=1$ accepta y sit, est

$$r = y \sqrt{k},$$

nam

$$X - \frac{X^2}{A} = kx - \frac{k^2x^2}{ka} = k\left(x - \frac{x^2}{a}\right).$$

Est igitur

$$R = y \sqrt{k} \cdot \sqrt{k} = ky = Y.$$

Pariter de hyperbola patet.

4. Si inter se comparentur, præsertim *parabola* cum *hyperbola*, verba KEPLERI intelliguntur: *parabola* non ut *hyperbola* extendit brachia, sed quasi contrahit a complexu infiniti, semper plus quidem complectens, sed eo minus appetens; cum *hyperbola* quo plus actu inter brachia complectitur, hoc plus etiam appetat.

Considerentur prius incrementa ordinatarum pro incrementis abscissarum æqualibus: in *parabola* sunt incrementa ipsius y^2 æqualia, non ita in *ellipsi* et *hyperbola*; nempe sit abscissæ incrementum i , et ω incrementum ordinatæ, erit

$$(y + \omega)^2 - y^2 = x + i - x = i$$

pro quavis abscissa x . In *hyperbola* autem est

$$(y + \omega)^2 = x + i + \frac{(x + i)^2}{a} = \frac{ax + ai + x^2 + 2xi + i^2}{a},$$

e quo subtracto

$$y^2 = \frac{ax + x^2}{a},$$

manet

$$\frac{ai + 2xi + i^2}{a},$$

quod dum $x \rightarrow \infty$, manifesto $\sim \infty$.

Fiat iam (Fig. 151.) e vertice a hyperbolæ (qui sit simul parabolæ vertex) perpendicularis ipsi $\frac{\sqrt{a}}{2}$ æqualis; atque ducatur per extremitatem huius e centro c hyperbolæ recta: in hyperbola $z - y \rightarrow 0$, in parabola vero $\sim \infty$.

Nempe si distantia verticis a centro positive accipiatur, (quamvis axis maior $-a$ et axis minor hyperbolæ $\sqrt{-a}$ sit), erit

$$\frac{a}{2} : \frac{\sqrt{a}}{2} = \frac{a}{2} + x : z,$$

unde duos priores terminos per $\frac{\sqrt{a}}{2}$ dividendo est

$$\sqrt{a} : 1 = \frac{a}{2} + x : z,$$

atque

$$z = \frac{\frac{a}{2} + x}{\sqrt{a}};$$

est vero

$$y^2 = x + \frac{x^2}{a},$$

itaque $z^2 - y^2$ seu

$$(z+y)(z-y) = \frac{\frac{a^2}{4} + ax + x^2 - ax - x^2}{a} = \frac{a}{4};$$

consequenter

$$z - y = \frac{a}{4(z+y)};$$

quod manifesto nunquam fit 0, sed ~ 0 ; adeoque A asymptota est (Tom. I. pag. 315).

In parabola vero $z - y'$ (si y' ordinatam parabolæ denotet) maius quovis β , quod $> \frac{\sqrt{a}}{4}$ est, fieri potest. Nempe

$$z - y' = \frac{\frac{a}{2} + x}{\sqrt{a}} - \sqrt{x}$$

pro constantibus γ, δ ponit

$$= \gamma + \delta x - \sqrt{x} = \gamma + \delta \omega^2 - \omega$$

potest, quod $\rightarrow \infty$, si $\omega \rightarrow \infty$; nempe

$$\delta \omega^2 - \omega = \omega (\delta \omega - 1)$$

et

$$\frac{\delta \omega - 1}{\delta \omega} \rightarrow 1,$$

nam

$$\frac{\delta \omega - 1}{\delta \omega} - 1 = \frac{\delta \omega - 1 - \delta \omega}{\delta \omega} = - \frac{1}{\delta \omega} \rightarrow 0.$$

At præterea etiam positio

$$z - y' = \frac{\frac{a}{2} + x}{\sqrt{a}} - \sqrt{x} = \beta,$$

est

$$\frac{a}{2} + x - \sqrt{ax} = \beta \sqrt{a},$$

atque hinc

$$-\sqrt{ax} = \beta \sqrt{a} - \frac{a}{2} - x;$$

et quadrando fit

$$ax = \beta^2 a + \frac{a^2}{4} + x^2 - \beta a \sqrt{a} - 2\beta x \sqrt{a} + ax,$$

et hinc

$$0 = x^2 - 2\beta x \sqrt{a} + \frac{a^2}{4} + \beta^2 a - \beta a \sqrt{a},$$

atque hinc

$$x = \beta \sqrt{a} \pm \sqrt{\beta a \sqrt{a} - \frac{a^2}{4}},$$

ubi pro $\beta a \sqrt{a} > \frac{a^2}{4}$, idest pro $\beta > \frac{\sqrt{a}}{4}$ radix realis, et si $\beta > \sqrt{a}$, pro

parabola positivi duo valores ipsius x dantur. Ex. gr. Sit $\alpha = 1$, et sit etiam $\beta = 1$; erit

$$x = 1 \pm \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{2 \pm \sqrt{3}}{2},$$

et

$$z = \frac{1}{2} + x = \frac{3 \pm \sqrt{3}}{2},$$

$$y' = \sqrt{x} = \sqrt{\frac{2 \pm \sqrt{3}}{2}};$$

atque

$$z - y' = \frac{3 \pm \sqrt{3}}{2} - \sqrt{\frac{2 \pm \sqrt{3}}{2}} = 1$$

erit, quia

$$\left(\frac{1 \pm \sqrt{3}}{2} \right)^2 = \frac{1 + 3 \pm 2\sqrt{3}}{4} = \frac{2 \pm \sqrt{3}}{2}.$$

III.

Mutatio initii abscissarum in centrum ellipseos hyperbolæque, ut quædam expeditius tradantur.

Aequatio facile prodibit, substituendo ipsi x summam dimidii axis maioris et rectæ, quæ a centro usque ad finem ipsius x est; axis est $+a$ in ellipsi, $-a$ in hyperbola, posterius autem dicatur u . Singulis casibus percursis (Fig. 152.) patet esse $x = u + \frac{a}{2}$ in ellipsi, et $x = u - \frac{a}{2}$ in hyperbola; dummodo prouti x accipitur positive vel negative, ita et u accipiatur; ex. gr. si x ad dextram positive, et negative ad lævam accipiatur, et u e centro ad dextram positive, et negative ad lævam accipiatur.

Eritque hoc pacto *pro ellipsi*

$$\begin{aligned} y^2 &= x - \frac{x^2}{a} = u + \frac{a}{2} - \frac{\left(u + \frac{a}{2}\right)^2}{a} = \\ &= u + \frac{a}{2} - \frac{u^2}{a} - \frac{au}{a} - \frac{a^2}{4a} = \frac{a}{4} - \frac{u^2}{a}. \end{aligned}$$

Pro hyperbola vero est

$$\begin{aligned} y^2 &= x + \frac{x^2}{a} = u - \frac{a}{2} + \frac{\left(u - \frac{a}{2}\right)^2}{a} = \\ &= u - \frac{a}{2} + \frac{u^2}{a} - \frac{au}{a} + \frac{a^2}{4a} = \frac{u^2}{a} - \frac{a}{4}. \end{aligned}$$

IV.

Distantia focalis, id est distantia foci a vertice, nempe extremitatis illius abscissæ, cuius ordinatæ duplum = 1, prodiit, si pro y ponatur $\frac{1}{2}$, adeoque $\frac{1}{4}$ pro y^2 . Itaque in parabola ex $\frac{1}{4} = x$ patet distantiam focalem esse quartam partem parametri, et unitatem pro $y = \sqrt{x}$ esse quadruplam distantiae focalis: positis itaque vertice a et foco f quocunque libuerit, $y = \sqrt{x}$ (radice quoad $4af = 1$ accepta) determinabit parabolam, cuius parameter = $4af$; et vicissim pro data parametro $4af = 1$ dabit $y = \sqrt{x}$ parabolam, cuius distantia focalis af erit.

In ellipsi, si in

$$\frac{I}{4} = \frac{a}{4} - \frac{u^2}{a}$$

pro u ponatur distantia foci a centro, *eccentricitas* dicta, per E denotata: fiet

$$\frac{I}{4} + \frac{E^2}{a} = \frac{a}{4},$$

et

$$\frac{E^2}{a} = \frac{a - I}{4},$$

et hinc

$$E^2 = \frac{a^2 - a}{4},$$

atque

$$E = \frac{\sqrt{a^2 - a}}{2}.$$

In hyperbola distantia foci a centro, pariter *eccentricitas* dicta, designetur item per E ; erit

$$\frac{I}{4} = \frac{E^2}{a} - \frac{a}{4},$$

et hinc

$$\frac{E^2}{a} = \frac{1+a}{4},$$

adeoque

$$E^2 = \frac{a^2 + a}{4},$$

et

$$E = \sqrt{\frac{a^2 + a}{2}}.$$

Unde etiam tam in ellipsi quam in hyperbola *duas focus a centro æquidistantes esse patet, nempe pro $u = \pm E$ fit $y^2 = \frac{I}{4}$.*

Ex E et a distantia foci a vertice quoque prodit, $\frac{a}{2} - E$ in ellipsi, et $E - \frac{a}{2}$ in hyperbola.

Sed parameter etiam, nempe unitas ad extractionem radicis requi-sita, ut

$$y = \sqrt{x - \frac{x^2}{\pm a}}$$

prodeat, innotescit: nam *pro ellipsi erat*

$$\frac{I}{4} = \frac{a}{4} - \frac{E^2}{a},$$

adeoque

$$I = a - \frac{4E^2}{a} = \frac{a^2 - 4E^2}{a};$$

in *hyperbola* vero erat

$$\frac{I}{4} = \frac{E^2}{a} - \frac{a}{4}$$

adeoque

$$I = \frac{4E^2}{a} - a = \frac{4E^2 - a^2}{a}.$$

Atque manifesto a et E , aut a et unitatem, sive E et unitatem utcunque ponere licet, dummodo pro ellipsi $\frac{a}{2} > E$ et pro hyperbola $E > \frac{a}{2}$ sit; secus enim pro ellipsi $\frac{a^2 - 4E^2}{a}$ et pro hyperbola $\frac{4E^2 - a^2}{a}$

(nempe unitas) positiva non erit: ex. gr. si pro ellipsi poneretur $E > \frac{a}{2}$, erit $4E^2 > 4\left(\frac{a}{2}\right)^2$, adeoque $> a^2$.

Si a et unitas ponatur: prodit in ellipsi

$$E = \frac{\sqrt{a^2 - a}}{2}$$

radice quoad unitatem positam accepta. Ita si E et unitas posita fuerint, prodit a ; nam $4E^2 = a^2 - a$, et ex æquatione quadratica

$$a^2 - a - 4E^2 = 0,$$

fit

$$a = \frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} + 4E^2},$$

ubi signum superius accipi debet, nam

$$\sqrt{\frac{1}{4} + 4E^2} > \frac{1}{2}$$

est, nec aliud asseritur, nisi quod expressionis valor aliquis $= a$ sit (Tom. I. pag. 123).

In parabola, si (Fig. 153.) f in peripheria centri P radii Pf ipsi f omni dabili proprius veniat, unitas (pag. 166) ~ 0 ; adeoque

$$y = \sqrt{x - 0}$$

pro quovis dato x , et limes geometricus parabolæ recta fP est, donec libuerit per P continuata.

In ellipsi, si $E \sim 0$, tum

$$I = \frac{a^2 - 4E^2}{a} \sim a,$$

et ex

$$y = \sqrt{x - \frac{x^2}{a}},$$

pro $E = 0$ fit

$$y = \sqrt{x - x^2},$$

æquatio circuli pro diametro 1. Ita si ponatur

$$\frac{a^2 - 4E^2}{a} = \omega,$$

fiet $a^2 - 4E^2 = a^2$, et hinc $4E^2 = 0$, adeoque $E = 0$.

Est porro in ellipsi $E < \frac{a}{2}$, at si

$$\frac{a}{2} - E = \omega > 0,$$

tum

$$I = \frac{a^2 - 4E^2}{a} > 0;$$

nam

$$E = \frac{a}{2} - \omega,$$

et

$$4E^2 = 4\left(\frac{a^2}{4} - a\omega + \omega^2\right) = a^2 - 4a\omega + 4\omega^2,$$

quod $\sim a^2$. Si igitur aut manente E decrescat a , aut manente a crescat E , dummodo $\omega > 0$: fiet y tanquam radix quoad unitatem omni dabili minorem, pro quovis x (nempe quovis puncto ipsius a) dabili quovis minor, adeoque limes geometricus erit recta ipsa a ; nempe tum

$$\sqrt{x - \frac{x^2}{a}} > 0,$$

et limes 0 est pro quovis y .

In hyperbola est $E > \frac{a}{2}$, et si $E - \frac{a}{2} > 0$, sit

$$E = \frac{a}{2} + \omega;$$

erit

$$4E^2 = a^2 + 4a\omega + 4\omega^2,$$

quod $\sim a^2$, adeoque

$$I = \frac{4E^2 - a^2}{a} > 0.$$

Si igitur manente E crescat a , vel manente a decrescat E , dummodo $\omega > 0$: fiet y tanquam radix quoad $I > 0$ omni dabili minor, nempe

$$\sqrt{x + \frac{x^2}{a}} = o;$$

et limes geometricus recta erit in linea abscissarum ab \mathfrak{f} ad laevam et ab \mathfrak{f} ad dextram. (Fig. 152.)

Si vero ponatur

$$I = \frac{4E^2 - a^2}{a} = a,$$

erit

$$4E^2 - a^2 = a^2,$$

atque hinc

$$4E^2 = 2a^2,$$

et proposito a erit

$$E^2 = \frac{a^2}{2} = \frac{I}{2} \quad \text{et} \quad E = \frac{\sqrt{I}}{\sqrt{2}};$$

pro E positio autem erit

$$a^2 = 2E^2 = I.$$

Patet etiam $E^2 = \frac{a^2}{2} = \frac{I}{2}$ (pro $a = I$) dare

$$E > \frac{a}{2} = \frac{\sqrt{I}}{2}.$$

Notandum autem est: quod tam in ellipsi summa radiorum vectorum e duobus focus ad idem punctum ductorum, quam in *hyperbola* differentia minoris a maiore sit $= a$; etiam dum limes geometricus recta est, inter \mathfrak{f} et \mathfrak{f} in ellipsi, et in hyperbola recta infinita per \mathfrak{f} et \mathfrak{f} , excepta parte \mathfrak{ff} . De quo statim.

V.

Radii vectores.

In *parabola* (Fig. 154.) e triangulo rectangulo, cuius catheti sunt y et $\frac{I}{4} - x$ vel $x - \frac{I}{4}$, est radius vector r hypotenusa

$$\begin{aligned} &= \sqrt{y^2 + \left(\pm \frac{I}{4} \mp x\right)^2} = \sqrt{x + \frac{I}{16} - \frac{x}{2} + x^2} = \\ &= \sqrt{x^2 + \frac{x}{2} + \frac{I}{16}} = x + \frac{I}{4}; \end{aligned}$$

nempe si quarta pars parametri addatur abscissae, prodit radius vector in parabola.

In *ellipsi* et *hyperbola* (Fig. 152.) radii vectores R, r ad idem punctum p e duobus focus f, f' sunt hypotenusaæ triangulorum rectangulorum, quorum y ordinata puncti p cathetus communis, et alterutrius cathetus alter $E - u$ vel $u - E$, alterius $u + E$ est; patet hoc casibus percursis ordinata ipsius p sive intra focos, sive in aliquem, sive ad latus alterutrum ceciderit, dummodo E hic semper positive intelligatur, imo u quoque etsi negative situm fuerit, positive accipiatur; quod fieri potest, quum u præterea heic nonnisi in y^2 , et quidem in potentia secunda, adeoque positive occurrat.

Itaque alteruter ipsorum R et r , tam in ellipsi quam in hyperbola, est

$$\sqrt{y^2 + (u - E)^2},$$

nam $(u - E)^2 = (E - u)^2$; alter autem est

$$\sqrt{y^2 + (u + E)^2}.$$

Unde substituendo in ellipsi $\frac{a}{4} - \frac{u^2}{a}$ ipsi y^2 , et $\frac{a^2 - a}{4}$ ipsi E^2 , atque in hyperbola $\frac{u^2}{a} - \frac{a}{4}$ ipsi y^2 , et $\frac{a^2 + a}{4}$ ipsi E^2 , prodit uterque radius vector in utraque.

Nempe in *ellipsi*

$$\begin{aligned} r &= \sqrt{\frac{a}{4} - \frac{u^2}{a} + u^2 - 2uE + E^2} \\ &= \sqrt{\frac{a}{4} - \frac{u^2}{a} + u^2 - 2uE + \frac{a^2 - a}{4}} \\ &= \sqrt{\frac{a^2}{4} - \frac{u^2}{a} + u^2 - 2uE}, \end{aligned}$$

quod est

$$= \pm \frac{a}{2} \mp \frac{2uE}{a};$$

nam hoc per se multiplicatum fit

$$\begin{aligned}\frac{a^2}{4} + \frac{4u^2E^2}{a^2} - 2uE &= \frac{a^2}{4} + \frac{4u^2a^2}{4a^2} - \frac{4u^2a}{4a^2} - 2uE \\ &= \frac{a^2}{4} + u^2 - \frac{u^2}{a} - 2uE.\end{aligned}$$

Ita

$$R = \sqrt{\frac{a}{4} - \frac{u^2}{a} + u^2 + 2uE + E^2},$$

quod eodem modo prodit

$$= \pm \frac{a}{2} \pm \frac{2uE}{a};$$

ubi in utroque casu signum superius accipi debet; nam si inferius signum accipiatur pro ipso r , $-\frac{a}{2} + \frac{2uE}{a}$ negativum esset, quia $2E < a$, adeoque $\frac{2Eu}{a} < u$, u vero non $> \frac{a}{2}$ est. Pro R item signa superiora accipi debent, nempe

$$R = \frac{a}{2} + \frac{2uE}{a};$$

quia $-\frac{a}{2} + \frac{2uE}{a}$ pariter negativum est, radii vectores autem positive accipiuntur.

Est igitur

$$R + r = \frac{a}{2} + \frac{2uE}{a} + \frac{a}{2} - \frac{2uE}{a} = a.$$

Pro hyperbola pariter

$$R = \frac{a}{2} + \frac{2uE}{a},$$

et

$$r = \frac{2uE}{a} - \frac{a}{2},$$

atque

$$R - r = a;$$

nam ibi pro r signum inferius accipiendum est, nempe ex duabus radicibus, quum una certo valeat, reiecta quae non valet, altera retinenda; nimis $\frac{a}{2} - \frac{2uE}{a}$ esse nequit; quia tum in triangulo, cuius basis $2E$ est et reliqua latera R et r sunt, esset $R + r = a$, et summa duorum laterum esset tertio $2E$ minor, nam $2E$ in hyperbola est $> a$.

Corollarium. Hinc etiam in ellipsi radius vector ad extremitatem axeos minoris est $= \frac{a}{2}$, efficit enim cum altero radio vectore dimidium axis maioris, suntque hi radii vectores æquales, propter duo triangula rectangula, quorum axis minor cathetus communis, et alter cathetus E ad dextram lœvamque est.

Hinc ab extremitate axeos minoris, tanquam centro, radio ipsi $\frac{a}{2}$ æquali foci in axe maiore determinantur.

VI.

Ex his sequitur *constructio sectionum conicarum*: prius *constructio geometrica* sensu stricto *puncti cuiusvis (omnium nunquam)*; tum *constructio mechanica* motu continuo.

i. Nempe præterquam quod quodvis punctum lineæ per

$$y = \sqrt{x}$$

determinatæ a directrice et foco æqualiter distet; ac quodvis punctum p lineæ per

$$y = \sqrt{x - \frac{x^2}{a}}$$

determinatæ tale sit, ut $\mathfrak{f}p + \mathfrak{fp} = a$ sit; necnon quodvis punctum p lineæ per

$$y = \sqrt{x + \frac{x^2}{a}}$$

determinatæ tale sit, ut $\mathfrak{f}p - \mathfrak{fp} = a$ sit, \mathfrak{f} et \mathfrak{f} focus denotantibus, et foco, qui in eandem respectu perpendicularis e centro c ad axem positæ plагam cum p cadit, in hyperbola f dicto: nec ullum aliud punctum tale est. Nempe quodvis punctum q extra parabolam directrici proprius quam foco est, et quodvis intra parabolam a directrice remotius quam a foco est; et quodvis punctum q extra ellipsim tale est, ut $\mathfrak{fq} + \mathfrak{fq} > a$ sit, ac quodvis q' intra ellipsim tale est, ut $\mathfrak{fq}' + \mathfrak{fq}' < a$ sit; atque quodvis punctum q extra hyperbolam tale est, ut $\mathfrak{fq} - \mathfrak{fq} < a$ sit, et quodvis q'

intra hyperbolam tale est, ut $\mathfrak{f}q' - \mathfrak{f}q' > a$ sit, si q, q' cum \mathfrak{f} (ut supra de p dictum est) in eandem plagam cadant, si vero q in perpendiculararem e centro cadat, tum $\mathfrak{f}q - \mathfrak{f}q = 0$.

a) Nam *quoad parabolam* (Fig. 155.) sit qb perpendicularis ad axem; cadet b aut ab a ad dextram aut ad laevam; si prius, tum in perpendiculari illa aliquod punctum f parabolæ erit; atque manifesto distantia ipsius q a directrice est

$$bd = \mathfrak{f}f < qf.$$

Si vero q in q'' vel q''' fuerit, distantia ipsius q'' a directrice est

$$b''d < af < b''f < q''f;$$

ita si q in q''' cadat, distantia ipsius q''' a directrice est

$$b'''d < b'''f < q'''f.$$

Si vero q' intra parabolam fuerit, in perpendiculari $b'q'$ gaudet parabola punto f' , et distantia ipsius q' a directrice est

$$b'd = f'f > q'f.$$

b) *Quoad ellipsim* (Fig. 156.): si q extus cadat, est

$$R' + r' > R + r = a.$$

Si vero q' intus cadat, tum

$$R + r > R' + r',$$

adeoque

$$a > R' + r'.$$

c) *Quoad hyperbolam* (Fig. 157.): Si q extus sit, recta ex q ad f secat hyperbolam in p ; adeoque

$$\mathfrak{f}p - \mathfrak{f}p = a.$$

Fiant centris q, p , radiis qf, pf circuli; cadet peripheria radii qf extra alteram; adeoque

$$\mathfrak{f}f < \mathfrak{f}m < \mathfrak{f}n = a;$$

est vero

$$\mathfrak{f}^{\mathfrak{k}} = \mathfrak{f}q - \mathfrak{f}q,$$

quod igitur $< a$ est. Si vero q' intus cadat, gaudebit hyperbola in recta $\mathfrak{f}\mathfrak{q}'$ punto p ; describantur centris p, q' , radiis $p\mathfrak{f}, q'\mathfrak{f}$ circuli; cadet manifesto peripheria centri p infra alteram; eritque

$$\mathfrak{f}p - \mathfrak{f}p = \mathfrak{f}m = a < \mathfrak{f}g < \mathfrak{f}i;$$

est vero

$$\mathfrak{f}i = \mathfrak{f}q' - \mathfrak{f}q',$$

quod ergo $> a$ est.

2. Sed etiam quodvis punctum p a certa recta D et certo punto f æqualiter distans punctum parabolæ est, per directricem D et focum f determinatae; et quodvis tale punctum pro punctis $\mathfrak{f}, \mathfrak{f}$, ut sit $p\mathfrak{f} + p\mathfrak{f} = a$, nisi $p, \mathfrak{f}, \mathfrak{f}$ in recta sint, punctum ellipseos est per focos $\mathfrak{f}, \mathfrak{f}$ et axem maiorem a determinatae; atque quodvis tale punctum p pro punctis $\mathfrak{f}, \mathfrak{f}$, ut sit $\mathfrak{f}p - \mathfrak{f}p = a$, punctum hyperbolæ est, per focos $\mathfrak{f}, \mathfrak{f}$ et axem maiorem a determinatae.

Nam *quoad parabolam*: sint (Fig. 158.) $p'p, \mathfrak{f}\mathfrak{d}$ perpendiculares ad D , et $p\mathfrak{p}' = p\mathfrak{f}$; fiat $\mathfrak{f}a = ad$, atque parabola per æquationem $y = \sqrt{x}$ (radice *quoad* $4\mathfrak{f}a = 1 = 2\mathfrak{f}\mathfrak{d}$ accepta).

Quoad ellipsim hyperbolamque autem, datis punctis $\mathfrak{f}, \mathfrak{f}$ ut focus consideratis, ex a et $\frac{\mathfrak{f}\mathfrak{f}}{2} = E$ (per pag. 167) reperitur unitas, quoad quam pro abscissis u e meditullio ipsius $\mathfrak{f}\mathfrak{f}$ acceptis

$$y = \sqrt{\frac{a}{4} - \frac{u^2}{a}}$$

dabit *ellipsim*, et

$$y = \sqrt{\frac{u^2}{a} - \frac{a}{4}}$$

hyperbolam.

3. Ex his præter iam dicta constructiones sequentes intelliguntur. Sit (Fig. 158.) ad axem parabolæ ad distantiam $\frac{1}{4}$ ad lœvam a vertice α perpendicularis, *directrix* dicta; et erigatur e fine cuiusvis x ad axem perpendicularis P ; si ista perpendicularis centro in foco \mathfrak{f} , ad distantiam $\frac{1}{4}$ e vertice ad dextram accepto, radio $x + \frac{1}{4}$ (utpote distantia perpen-

dicularis P a directrice) secetur: erit p punctum sectionis punctum parabolæ, et omnia puncta ita generata eiusdem parabolæ erunt (per 1.). Patet (Fig. 153.), centro P radio Pf scripto circulo, tangentem in quovis puncto f talem directricem præbere, a qua P tantum quam ab f distet; sed si f ipsi f dabili quovis propius venit, perpendicularis ex f ad tangentem per f ductam, adeoque et unitas (nempe duplum perpendicularis dictæ) ∞ ; atque in tali parabola $y = \sqrt{x}$ (radice quoad dictam unitatem accepta) fiet pro quovis certo x dato quovis minor.

Ita pro ellipsi (Fig. 159.) sit $af = fb$, et moveatur punctum p ex f usque in f , dicaturque R recta ab a usque in p , et r dicatur recta a p usque in b ; erit $ap + pb = a$; atque arcus centro f radio R scriptus secabit arcum centro f radio r scriptum; ac punctum sectionis punctum ellipseos erit, et omnia ita generata eiusdem ellipseos erunt (pag. 174).

Pro hyperbola autem (Fig. 160.) si $fa = fb$ fuerit, et moveatur punctum p ex f ad lœvam, et p ad dextram ex f , utrumque in axe, temporibus æqualibus vias æquales describendo; dicaturque R recta ap , et r recta bp , puncta P , p simultanea intelligendo: erit

$$ap - bp = af - bf = a;$$

itaque arcus e centro f radio ap scriptus secabitur per arcum centro f radio bp factum; eritque punctum sectionis, ubi $r - R = a$, punctum hyperbolæ, et omnia ita generata eiusdem hyperbolæ erunt (pag. 174).

4. Ex (pag. 163) adhuc alia constructio geometrica quotvis punctorum hyperbolæ (Fig. 161.) ex uno sequitur.

Nempe inter asymptotas per punctum hyperbolæ utcunque ducatur recta erit $\alpha = \alpha''$; et quodvis punctum novum item novum præbet. Ratio est sequens.

$$\alpha : \beta = \alpha + \alpha' : \gamma'$$

$$\alpha' + \alpha'' : \beta' = \alpha'' : \gamma.$$

Hinc

$$\alpha\alpha' + \alpha\alpha'' : \alpha\alpha'' + \alpha'\alpha'' = \beta\beta' : \gamma\gamma';$$

sed (pag. 163)

$$\beta\beta' = \gamma\gamma' = \frac{a}{4},$$

ubi γ ipsius $z-y$ et γ' ipsius $z+y$ vicem subit; itaque

$$\alpha\alpha' + \alpha\alpha'' = \alpha\alpha'' + \alpha'\alpha'';$$

adeoque

$$\alpha\alpha' = \alpha'\alpha'';$$

et hinc

$$\alpha = \alpha''.$$

Imo (Fig. 162.) alia hinc constructio punctorum quorumvis hyperbolæ sequitur, abscissis in asymptota e centro sumtis, et ordinatis asymptotæ alteri parallelis, cui etiam q ex vertice parallela est, quod potentia hyperbolæ vocari solet.

Per triangula æquicrura et parallelas est

$$\mathfrak{B}\mathfrak{D} = \mathfrak{D}\mathfrak{C} \quad \text{et} \quad q = \frac{1}{2} \mathfrak{C}\mathfrak{E} = \frac{1}{2} \mathfrak{C}\mathfrak{B}.$$

Sit porro e vertice ipsius y parallela ab ad x ; erit

$$\beta : y = \frac{\sqrt{a}}{2} : q$$

et

$$\beta' : x' = \mathfrak{A}\mathfrak{B} : \mathfrak{A}\mathfrak{D} \quad \text{id est} \quad \beta' : x' = \frac{\sqrt{a}}{2} : q;$$

hinc (quia propter angulos $\not\sim$ æquales $x=ab=x'$) est

$$\beta\beta' : xy = \frac{a}{4} : q^2;$$

et quia $\beta\beta' = \frac{a}{4}$ (pag. 163), est

$$xy = q^2, \quad \text{atque} \quad y = \frac{q^2}{x};$$

adeoque si alia abscissa fuerit X eiusque ordinata sit Y , est

$$y : Y = X : x,$$

idest ordinatæ sunt inverse uti abscissæ.

5. *Ex his ingeniosae sectionum conicarum constructiones mechanicae.*

Parabola dimidia describetur: si (Fig. 163.) norma ABC feratur iuxta directricem, atque plumbago intra filum $\alpha f + \alpha l$ utramque partem ad extremitates f et l fixam tendens normæ durante motu semper appressa sit. Erit a vertex parabolæ, nam ab f et a directrice æqualiter distat; atque et postea tantum accedet distantia priori plumbaginis a directrice, quantum e latere normæ denudabitur, et tantum etiam ipsi αf accedet.

Quocunque fili punctum p fuerit ultra a , sit $pa = \lambda$; erit filum ex p usque f tensum $= \frac{1}{4} + \lambda$; eritque hæc eadem pars lateris normæ nuda; et quum radius vector ab f ad extremitatem ordinatæ cuivis x respondentis sit $\frac{1}{4} + x$: manifesto $x = \lambda$ inde a zero crescente, norma iuxta directricem promovetur. Pariter et alterum parabolæ dimidium describitur.

Ellipsis describitur (Fig. 164.). Sit filum recta ff longius, extremitibus in f , f fixum, et summæ rectarum αf et αl æquale, dicaturque summa ista α ; describetur *ellipsis* plumbagine prius in a posita, si dein ad omnia fili puncta p sequentia feratur, filumque e quovis loco ad puncta fixa f , f tendatur, uti $pf + pf = \alpha$ est. Quævis recta enim, quæ non $<\alpha f$ nec $>\alpha l$, omnino in filo accipi, atque filum ex illo puncto p ad puncta fixa f et f tensum, præbet $pf + pf = \alpha$; itaque punctum ellipseos est, et quodvis ellipseos punctum per dicta tale p est, nec ullum aliud datur.

Quoad *hyperbolam* sit filum (Fig. 165.) $\alpha a + \delta a = k + \gamma$, extremitate una in f fixum, et altera in punto δ regulæ df in f fixæ, et ponatur plumbago ad punctum a fili ex a ad puncta f et δ ita tensi, ut partes δa , αa regulæ adiaceant; atque tum moveatur regula circa f , et interea plumbago regulæ appressa filum e quovis eiusdem puncto ad puncta δ et f tendat: describet plumbago quadrantem hyperbolæ, in quantum regula omni dabili longior concipi potest; atque eadem constructione et quadrans inferior, et regula in f fixa, filique extremitate in f fixa, altera hyperbolæ pars quoque prodit. Est nempe distantia puncti a ab f differentia a distantia puncti f ab eodem a

$$\alpha f - \alpha f = \beta - \gamma,$$

quod sit α ; postea vero mota regula circa f , si plumbago sit in p , atque

δp sit $= k - \omega$, erit

$$\delta p = \gamma + \omega \text{ et } p\dot{\gamma} = \beta + \omega;$$

consequenter

$$\delta p - p\dot{\gamma} = \beta + \omega - \gamma - \omega = \beta - \gamma = a.$$

Itaque p punctum hyperbolæ erit. Datur autem pro quovis ω talis angulus regulæ circa f motæ, ut p prodeat: nam $\gamma + \omega$ datur, regulam filumque enim utvis magna accipere licet, adeoque e filo ipsi γ adhuc ω addi potest; tum vero regulæ pars k longitudine eadem (nempe ω) denudabitur, adeoque fiet $\delta p = \gamma + \omega$, δp vero $= \beta + \omega$; atque basis constans $\beta + \gamma$ et nova duo latera $\gamma + \omega$ et $\beta + \omega$ talia sunt, ut triangulum constituant, quum summa binorum quorumvis tertio maior sit. Facile etiam patet, crescente ω crescere angulum regulæ ad f .

VII.

Tangens, subtangens, normalisque et subnormalis in singulis.

Ad quodvis punctum p sectionis conicæ cuiusvis, quam ad quodvis eius punctum curvam esse demonstrari potest, (qualis est parabola, ellipsis, hyperbola et circulus), non autem sectionis plani per apicem euntis, tangens datur (Tom. I. pag. 290); eaque est recta bisecans angulum radiorum vectorum; notando, quod in parabola alter radius vector, quasi e foco in axe in infinitum abeunte ad p ductus, adeoque axi parallelus concipiatur, in ellipsi autem alteruter radiorum vectorum continuetur extra ellipsim ultra punctum eius, ad quod e focus uterque ducitur, atque angulus, quem continuatio ista cum altero radio vectore non continuato facit, bisectus tangentem in eo punto præbeat. Atque et parabola ut ellipsis foci in axe in infinitum remoti consideretur.

Si vero tangens ad sectionem conicam ex aliquo punto P mittenda sit, tum circulus centro P , radio usque ad focum proximum extenso, secetur ex altero foco radio a in ellipsi et hyperbola, in parabola vero directrix, tanquam arcus radii vectoris infiniti, secetur per arcum priorem, atque tum e foco priore ducta ad punctum sectionis recta biseetur: erit perpendicularis e punto bisectionis erecta *tangens quaesita*.

Quoad parabolam (Fig. 166.) sit tangens ad punctum p ducenda: radius vector pro foco f est fp , et alter axi parallelus est $\bar{p}p'$, ac $fp = pp'$. Si iam angulus $\bar{f}pp'$ bisecetur, fiatque $p'p\ell = \bar{f}p\ell = v$: erit $p\ell \perp fp'$, et $\bar{f}\ell = fp'$; ac quodvis punctum rectæ $\bar{p}\ell$ (ex. gr. q) a punctis p' et f æquidistat. Itaque qq' perpendicularis ad directricem est $\angle qp' = qf$, quo cunque cadat q : unde quodvis tale punctum q extra parabolam cadit; nam si in lineam ipsam caderet, tum $qq' = qf$ esset; si vero intus caderet, tum $qf < qq'$ esset (pag. 174).

Si vero (Fig. 167.) ex P punto extra parabolam sit tangens ad eammittenda: $\bar{p}p'$ perpendicularis ad directricem est $\angle P\bar{f}$, (pag. 174); itaque e centro P radio $P\bar{f}$ directrix certo secabitur in duobus punctis a et a' a perpendiculari $\bar{p}p'$ utrinque æqualiter distantibus; fiat recta $\bar{f}a$ (vel $\bar{f}a'$); recta per meditullium f huius et punctum datum P ducta tangens erit. Nam $\bar{P}a = P\bar{f}$, itaque $\bar{f}P$ est perpendicularis ad $\bar{f}a$; consequenter quodvis punctum ipsius $\bar{f}P$ a punctis a et f æqualiter distat; et si perpendicularis ex a ad directricem erecta secuerit alicubi in P rectam $\bar{f}P$, P punctum parabolæ erit, quia a directrice et foco æqualiter distabit. Secari autem rectam $\bar{f}P$ per perpendiculararem ad directricem ex a erectam necesse est: nam perpendicularis e punto f rectæ af erecta infinita quamvis rectam per punctum a rectæ af ductam infinitam, præter eam, quæ ad af perpendicularis est, secat, itaque et eam, quæ ex a ad aP' perpendicularis est, quia eadem ad af perpendicularis non est.

Fiet igitur sectio, et punctum illud parabolæ erit; reliqua vero extra parabolam cadent.

Si P plane in f cadat, tum ex f ad af perpendicularis erigitur, quod etiam de ellipsi et hyperbola notandum est: uti id, quod inter tangentem et lineam tactam nulla recta e punto tactus duci queat (per Tom. I. pag. 349), itaque ad nullum punctum angulo gaudeat (pagg. 15 §), adeoque curva sit.

Subtangens s est $= fg - fm$ (Fig. 166.); sed

$$fg = pp',$$

quia $\triangle ffg = \triangle fp'p$; nam $\bar{ff} = \bar{fp}'$ et propter $pp' \parallel \bar{f}d$ anguli alterni ad

p' et f et ad p et g sunt æquales. Consequenter (pag. 170)

$$fg = \text{radio vectori} = x + \frac{I}{4}.$$

Est autem

$$fm = \frac{I}{4} - x;$$

itaque

$$s = x + \frac{I}{4} - \left(\frac{I}{4} - x \right) = 2x.$$

Si ordinata pm ultra focum caderet: tum

$$fm = x - \frac{I}{4},$$

et

$$s = fg + fm = x + \frac{I}{4} + x - \frac{I}{4} = 2x.$$

Unde in parabola ad p tangens pg ducetur, si ad axem demittatur perpendicularis pm , et $ag = am = x$ fiat.

Normalis N, id est pn nempe perpendicularis ex p ad tangentem, si secuerit axem in n , dicitur mn seu ν *subnormalis*; pg autem pro *tangentis* quantitate accipitur; quod etiam cum quantitate tangentis arcus circularis trigonometrica convenire facile patet, si secans cd pro linea abscissarum e centro c accipiatur (Fig. 168.); et quidem quasi prius in f fuisset abscissarum origo, et inde ad centrum translata fuisset: erit extremitati arcus fa respondens ordinata $y = ab$, et subtangens puncto a respondens erit $b\delta$, atque tangens ad eadem, quæ sensu trigonometrico arcui $af = fa$ respondet; et facile patet, quod si f' pro f ponatur, y' fiat ab' , et subtangens $b'\delta'$, atque tangens ad' negativa, ut in trigonometria.

Est vero (Fig. 166.) triangulum pgn ad p rectangulum, atque $pm = y$ est perpendicularis ad gn ; unde

$$mn : y = y : s,$$

adeoque

$$\nu = \frac{y^2}{s} = \frac{x}{2x} = \frac{I}{2};$$

consequenter *subnormalis* in parabola est dimidiae *parametro* aequalis.

Ex iisdem triangulis rectangulis prodit tangens normalisque: ex. gr. *tangens* (ad punctum p et axem \overline{af}) nempe recta pg

$$= \sqrt{y^2 + s^2} = \sqrt{x + 4x^2} = \sqrt{4x\left(\frac{1}{4} + x\right)},$$

id est *tangens in parabola est radix quadrata e quadrupla abscissa per radium vectorem multiplicata.*

In ellipsi (Fig. 169.) erit fq ad punctum p *tangens*, si alteruter radiorum vectorum ex. gr. fp continuetur, atque fq angulum apf bisecet. Sit enim $pa = pf$, adeoque

$$af = a = pf + pf;$$

sitque f meditullium rectæ af ; erit recta pf angulum apf bisecans perpendicularis ad af ; adeoque quodvis punctum q ipsius pf a punctis a et f æqualiter distat. Hinc autem propter

$$aq = qf \quad \text{et} \quad aq + qf > af = a \\ \text{est}$$

$$fq + qf > a;$$

itaque quodvis q extra ellipsum est (pag. 174).

Si (Fig. 170.) e punto q sit tangens mittenda: sit arcus centro q radio qf (pro qf non $> qf$), et hic secetur in d per arcum centro f radio a , fiatque in f meditullium rectæ df ; erit \overline{qf} tangens, et punctum tactus erit, ubi df secat ipsam qf ; nam

$$pd = pf \quad \text{et} \quad pd + pf = a = pf + pf;$$

est igitur p punctum ellipseos (pag. 174); quodvis aliud punctum autem rectæ qf extra ellipsum cadit, ut antea. Sectionem fieri autem statim, ubi ad hyperbolam tangens mittetur, demonstrabitur.

Subnormalis (Fig. 169.) Pn reperitur ita: rectæ ff et normalis pn sunt ad tangentem fq perpendiculares; itaque trianguli faf crura fa , ff secantur per pn parallelam ad trianguli basim af ; atque hinc

$$\mathfrak{f}\mathfrak{f} : \mathfrak{f}\mathfrak{a} = \mathfrak{f}\mathfrak{n} : \mathfrak{f}\mathfrak{p}, \text{ id est } 2E : a = \mathfrak{f}\mathfrak{n} : R$$

denotante E eccentricitatem et R radium vectorem ex \mathfrak{f} . Erat (pag. 172)

$$R = \frac{a}{2} + \frac{2uE}{a},$$

atque

$$E^2 = \frac{a^2 - a}{4};$$

atque hinc

$$\mathfrak{f}\mathfrak{n} = \frac{2ER}{a} = E + \frac{4E^2u}{a^2} = E + u - \frac{u}{a}.$$

Est porro subnormalis

$$\mathfrak{p}\mathfrak{n} = \mathfrak{p}\mathfrak{f} - \mathfrak{f}\mathfrak{n} = E + u - \mathfrak{f}\mathfrak{n} = E + u - \left(E + u - \frac{u}{a} \right) = \frac{u}{a}.$$

Si ab altera parte sit ordinata $\mathfrak{p}\mathfrak{P}$ ultra centrum in plaga positiva, tum pro \mathfrak{f} ubique alter focus accipiatur.

Subtangens $\mathfrak{i}\mathfrak{P}$ autem hinc e triangulo $\mathfrak{i}\mathfrak{p}\mathfrak{n}$ ad \mathfrak{p} rectangulo et ordinata $\mathfrak{p}\mathfrak{P}$ perpendiculari ad $\mathfrak{i}\mathfrak{p}$ facile reperitur, quum si subnormalis v et subtangens s dicatur, sit

$$s : y = y : v,$$

adeoque

$$s = \frac{y^2}{v} = \left(\frac{a}{4} - \frac{u^2}{a} \right) : \frac{u}{a} = \frac{a^2}{4u} - u.$$

Unde etiam tangens normalisque facile prodeunt.

In hyperbola (Fig. 171.) recta $\widetilde{\mathfrak{p}\mathfrak{k}}$ angulum $\mathfrak{f}\mathfrak{p}\mathfrak{f}$ bisecans tangens ad \mathfrak{p} erit. Nam

$$\mathfrak{f}\mathfrak{p} - \mathfrak{f}\mathfrak{p} = \mathfrak{f}\mathfrak{p} - \mathfrak{p}\mathfrak{d} = \alpha$$

et pro $\wedge\delta\mathfrak{p}\mathfrak{k} = \mathfrak{f}\mathfrak{p}\mathfrak{k}$ est $\mathfrak{p}\mathfrak{k} \perp \delta\mathfrak{f}$, ac quodvis punctum q rectæ $\widetilde{\mathfrak{p}\mathfrak{k}}$ a punctis \mathfrak{d} et \mathfrak{f} æqualiter distat, atque manifesto $\mathfrak{f}q - \mathfrak{f}q < \alpha$ est: nam centro q radio $q\mathfrak{f} = q\mathfrak{d}$ scripto arcu $\mathfrak{f}\mathfrak{d}\mathfrak{e}$, erit

$$\mathfrak{f}\mathfrak{e} = \mathfrak{f}q - \mathfrak{f}q < \alpha;$$

quia si $\mathfrak{f}\mathfrak{e} =$ vel $> \alpha$ esset, tum in triangulo $\mathfrak{f}\mathfrak{d}\mathfrak{q}$ esset $\alpha + \delta\mathfrak{q} =$ vel $<$

latere tertio $\mathfrak{f}q$. Consequenter quodvis q extus cadit (pag. 174); nec ullum q ex. gr. q' in curvam venit, nam in triangulo $\mathfrak{f}q'd$ foret $\mathfrak{f}q' - q'd$ vel $q'd - \mathfrak{f}q' = a$, adeoque

$$a + q'd = \mathfrak{f}q' \text{ vel } a + \mathfrak{f}q' = q'd,$$

nempe $\mathfrak{f}d = a$.

Porro et hic crura trianguli \mathfrak{fpn} secantur per basi $p\mathfrak{n}$ parallelam \mathfrak{df} , quia $p\mathfrak{n}$, \mathfrak{ff} sunt perpendiculares ad \mathfrak{fq} ; unde ut antea prodit

$$s = (4u^2 - a^2) : 4u.$$

Si vero e puncto q extra hyperbolam (et centrum) cadente tangensmittenda sit: fiat (Fig. 172.) centro q radio $q\mathfrak{f}$ circulus, pro distantia ipsius q a foco f haud maiore quam ab altero \mathfrak{f} ; seceturque is in \mathfrak{d} per alterum centro f radio a factum; et sit \mathfrak{k} meditullium rectæ \mathfrak{df} , secetque \mathfrak{fd} ipsam $q\mathfrak{f}$ in p ; erit p punctum hyperbolæ, et $q\mathfrak{f}$ tangens ad p erit.

Enimvero sectiones dictæ tam pro ellipsi (pag. 182), quam pro hyperbola evenient: nempe circuli dicti secabunt se invicem in duobus punctis, atque \mathfrak{fd} et $q\mathfrak{f}$ secabunt se in ellipsi inter \mathfrak{d} et f , (Fig. 174.), in hyperbola aut in plaga eadem, in qua \mathfrak{d} est, ultra \mathfrak{d} fiet sectio p (Fig. 175.), aut in altera plaga (Fig. 175*).

Quoad primum: Si (Fig. 173.) circulus centro q radio $q\mathfrak{f}$ dicatur C , et centro f radio a scriptus c dicatur, ac recta \mathfrak{fq} continuetur, sintque g , i extremitates diametri circuli C : tum si $fi < a$ et $a < fg$, extremitas radii a e centro f in rectam ig intra C cadet, adeoque c ex C in duobus punctis egredietur.

In ellipsi vero est $\mathfrak{f}q - \mathfrak{f}q = if < a$, nam $if < ff$ (pag. 85), et $ff < a$; imo si \mathfrak{f} in h caderet quoque, est $if < hf$. Est porro $gf > a$, nam $gf = q\mathfrak{f} + qf$, quod in ellipsi pro q extus cadente est $> a$ (pag. 174). *In hyperbola* pro q extus cadente est $\mathfrak{f}q - \mathfrak{f}q < a$ (pag. 174), nempe $if < a$; atque in triangulo $\mathfrak{f}qf$ est $\mathfrak{f}q + qf > ff > a$, adeoque $gf > a$. Si vero q ab \mathfrak{f} et f æqualiter distet, sectionem unam superius, alteram inferius fieri patet.

Quoad alterum: In ellipsi (Fig. 174.) in triangulo $\mathfrak{fd}\mathfrak{f}$ est $a > ff$, adeoque $u < v$; si igitur ff circa \mathfrak{f} moveatur donec in $p\mathfrak{f}$ veniens an-

gulum cum $\delta\delta$ ipsi u æqualem faciat: $p\delta \perp \delta\delta$ erit. In hyperbola (Fig. 175.) $a < \delta\delta$, adeoque $u > v$; est autem u aut obtusus aut acutus, quia rectus esse nequit; esset enim angulus $\delta\delta\delta$ in semicirculo, adeoque q in centro esset, et $q\delta \parallel \delta\delta$ esset, nec ullum p nec tangens e centro datur. Si vero u obtusus est, tum z acutus est, adeoque p supra $\delta\delta$ cadet. Si u acutus fuerit (Fig. 175*), moveatur $\delta\delta$ circa δ deorsum, donec $p\delta$ cum $\delta\delta$ angulum $= u$ faciat, nempe $v < u$; eritque $\delta p = \delta p$, et $\delta p \perp \delta\delta$.

Est autem (Fig. 174.)

$$\begin{aligned} p\delta &= p\delta \quad \text{et} \quad p\delta + p\delta = a = \delta\delta. \\ \text{In (Fig. 175.) est} \quad \delta p - p\delta &= a = \delta p - p\delta; \end{aligned}$$

quia $p\delta = p\delta$. In (Fig. 175*)

$$p\delta - p\delta = a = p\delta - p\delta.$$

VIII.

Quoad explicationem (pagg. 158 §) dictorum patet angulos v ad tangentem verticalesque æquales esse. Plura referre instituti ratio vetat.

IX.

Diametri sectionum conicarum.

Centrum lineæ L in plano dicitur c , si quodcumque punctum p ipsius L fuerit, recta $p\tilde{c}$ lineam L adhuc in uno tali punto q secet, ut $p\tilde{c} = qc$ sit.

Quæcumque recta autem bisecans omnes ipsius L chordas rectæ cuiquam r parallelas tales, ut nulla pars continua ipsius L sit, in qua chordarum dictarum aliqua haud terminetur: *diameter lineae L* dicitur *sensu latiore*; semperque, nisi aliud monitum fuerit, talis diameter intelligatur; diameter quippe etiam *alio sensu* venit.

At *sensu stricto diametro gaudere* dicitur L , si ut pro circulo et

ellipsi, recta R circa centrum ubivis in eodem plano mota donec redeat, semper pro dicta r accipi queat, saltem nonnisi certus sit rectarum numerus, in quas R tales pervenit, quas pro r sumere non liceat; ex. gr. pro parabola nonnisi una recta (nempe axi parallelæ) excluditur, pro hyperbola asymptotis parallelæ itaque duæ excluduntur, nempe tam in parabola quam hyperbola limites tangentium ad puncta dabili quovis remotiora.

Centro gaudere linea potest absque eo, ut diametro sensu stricto gaudeat (uti Fig. 110.); et conversim parabola diametro sensu stricto pollens centro caret. Lineæ plures ordinis binario altioris quoque certo diametri numero gaudent, imo plures centrum habent.

In ellipsi et hyperbola, si recta e punto quovis p lineæ per c , meditullium axeos maioris, producatur usque in δ , ut $cd = cp$ fiat: per æquationem e centro patet δ quoque punctum lineæ esse.

In parabola autem e quovis certo punto p parabolæ ad punctum in axe dabili quovis remotius ducta recta eo tendit, ut axi parallelæ fiat; si igitur hoc sensu accipiatur parabolæ centrum in axe omni dabili remotius, et pro recta per centrum eius ducta quævis axi parallelæ intelligatur: generaliter dici poterit, in quavis sectione conica L quamvis rectam per centrum ductam, præter asymptotos, diametrum esse; et pro quavis diametro δ chordas per eam bisectas, si δ ipsam L secet, esse tangentia ad illud punctum, in quo δ ipsam L secat, ductæ parallelas; aut δ tangentia alicui parallelam esse, chordasque rectæ e centro per punctum tactus ductæ esse parallelas.

Est autem pro abscissis x in diametro æquatio ellipseos e centro

$$y^2 = \frac{d^2}{4} - \frac{d^2 x^2}{D^2};$$

æquatio hyperbolæ vero, si linea abscissarum secet hyperbolam, est

$$y^2 = \frac{d^2 x^2}{D^2} - \frac{d^2}{4},$$

aut pro abscissa y item e centro et ordinata x est

$$x^2 = \frac{D^2}{4} + \frac{D^2 y^2}{d^2},$$

quod e priore sequitur; diciturque in duobus prioribus D diameter *primaria* respectu alterius, et d eius *coniugata*, in postremo autem d dicitur *primaria*, et D *coniugata*.

Ex. gr. abscissæ nunc x dictæ eadem sunt, quæ superius per u denotabantur; atque ibi, pro abscissis u e centro in a acceptis, erat in ellipsi

$$y^2 = \frac{a}{4} - \frac{u^2}{a};$$

hoc autem est

$$= \frac{b^2}{4} - \frac{b^2 u^2}{a^2},$$

quia $b = \sqrt{a}$.

Est autem in ellipsi D æqualis lineæ abscissarum utrinque in ellipsi terminatæ, et d æqualis rectæ per centrum ad tangentem in puncto, ubi D ellipsim secat, parallelæ et utrinque in ellipsi terminatæ. Quoad hyperbolam quoque diametri utriusque, meditullio in centrum posito, primaria in lineam abscissarum continuetur, et coniugata ordinatis parallela sit; interim ipsorum D , d illud (ex. gr. D), quod per centrum eundo secat hyperbolam (ex. gr. in a), secabit eam in alio punto b quoque, atque tum pro D in calculo recta ab intelligatur, pro d autem tangens hyperbolæ ad punctum a (vel b) ab una asymptoto usque ad aliam; et eandem quantitatem retineat d in calculo, etsi ipsa fiat linea abscissarum, et D sit eius *coniugata*.

Notandum etiam est, quod proportionalis tertia ad diametrum et eius coniugatam parameter diametri prioris dici soleat. Nempe parameter ipsius a seu parameter principalis p prodit ex

$$a : b = b : \frac{b^2}{a},$$

seu quia $b = \sqrt{a}$ erat, est

$$a : \sqrt{a} = \sqrt{a} : 1.$$

Ita parameter P ipsius b , cuius coniugata a est, prodit ex

$$b : a = a : \frac{a^2}{b},$$

ubi $\frac{a^2}{b} = P$. Atque eodem modo exprimitur per parametrum et diametrum ordinatæ quadratum, abscissis e vertice acceptis. Ex. gr.

$$y^2 = px - \frac{px^2}{a} \quad \text{et} \quad Y^2 = u^2 = PX - \frac{PX^2}{b},$$

si X abscissam in b e vertice denotet; nempe pro abscissis x in a e vertice acceptis erat

$$y^2 = x - \frac{x^2}{a} = \frac{b^2 x}{a} - \frac{b^2 x^2}{a^2},$$

quia $b = \sqrt{a}$ et $b^2 = a$, adeoque $\frac{b^2}{a} = 1 =$ parametro principali. Sed

$$x = \frac{a}{2} + u,$$

itaque

$$y^2 = \frac{b^2}{a} \left(\frac{a}{2} + u \right) - \frac{b^2}{a^2} \left(\frac{a}{2} + u \right)^2 = \frac{b^2}{4} - \frac{b^2}{a^2} u^2;$$

et hoc propter $y = \frac{b}{2} - X$ est

$$= \frac{b^2}{4} - bX + X^2;$$

atque hinc u^2 seu

$$Y^2 = \frac{a^2 X}{b} - \frac{a^2 X^2}{b^2} = PX - \frac{PX^2}{b}.$$

Quod et ad reliquas diametros applicari patet.

§. I.

In parabola quamvis rectam L axi parallelam diametrum esse, si ordinatæ tangenti ad illud punctum, ubi L parabolam secat, parallelæ accipiuntur, neque aliam dari, nec hanc pro aliis ordinatis diametrum esse patet sic (Fig. 176.).

Sit abscissa t axi parallela, et tangens sit T , ac subtangens $s = 2\alpha$, ordinata superior u , inferior u' ; nempe et inferius secari parabolam statim patebit.

Per latera trianguli BAC parallela lateribus reliquorum (in Fig. 176. §) triangulorum ponatur in omnibus casibus, prius tangens ad subtangensem (nempe T ad 2α), tum tangens ad ordinatam, (nempe T ad $\sqrt{\alpha}$).

Terminatur u aut infra axem, aut in axe, aut supra axem; et quidem in casu prostremo aut a perpendiculari ex C ad t erecta ad dextram, aut ad laevam. Est (Fig. 176.)

$$\begin{aligned} T : 2\alpha &= u : k \quad \text{et} \quad T : \sqrt{\alpha} = u : y + \sqrt{\alpha}, \\ \text{itaque} \quad k &= \frac{2\alpha u}{T} \quad \text{et} \quad y = \frac{u\sqrt{\alpha} - T\sqrt{\alpha}}{T} = \frac{(u - T)\sqrt{\alpha}}{T}. \end{aligned}$$

Est autem

$$x = t - k + \alpha \quad \text{et} \quad y^2 = x;$$

itaque substituendo valores ipsius k in x , et ipsius y in y^2 , erit

$$y^2 = \frac{u^2\alpha - 2uT\alpha + T^2\alpha}{T^2}$$

et

$$x = t - \frac{2\alpha u}{T} + \alpha = \frac{tT^2 - 2\alpha uT + T^2\alpha}{T^2};$$

consequenter

$$u^2\alpha - 2uT\alpha + T^2\alpha = tT^2 - 2\alpha uT + T^2\alpha,$$

id est $u^2\alpha = tT^2$, adeoque

$$u^2 = \frac{tT^2}{\alpha}.$$

Ita si u' sit continuatio ipsius u usque ad parabolam: est

$$l = Y - \sqrt{\alpha} \quad \text{et} \quad Y^2 = X = t + k' + \alpha;$$

atque

$$T : 2\alpha = u' : k' \quad \text{et} \quad T : \sqrt{\alpha} = u' : Y - \sqrt{\alpha},$$

et hinc

$$k' = \frac{2\alpha u'}{T} \quad \text{et} \quad Y = \frac{(u' + T)}{T} \sqrt{\alpha};$$

consequenter

$$Y^2 = \frac{u'^2\alpha + 2u'T\alpha + \alpha T^2}{T^2} = \\ X = t + \frac{2\alpha u'}{T} + \alpha = \frac{tT^2 + 2\alpha u'T + \alpha T^2}{T^2};$$

adeoque

$$u'^2 = \frac{tT^2}{\alpha},$$

uti u erat, et si duorum valorum ipsius $u = \sqrt{\frac{tT^2}{\alpha}}$ alter negative accipiatur, u' quoque exhibebitur.

Ita (Fig. 177.) est

$$T : 2\alpha = q : k \quad \text{et} \quad T : \sqrt{\alpha} = q : y;$$

et hinc

$$k = \frac{2\alpha q}{T} = \frac{2\alpha(u - T)}{T}$$

(quia $q = u - T$), et

$$y = \frac{q\sqrt{\alpha}}{T} = \frac{(u - T)\sqrt{\alpha}}{T}.$$

Est porro

$$x = t - \alpha - k$$

et

$$y^2 = \frac{u^2\alpha - 2u'T\alpha + T^2\alpha}{T^2} = \\ x = t - \alpha - \frac{2\alpha(u - T)}{T} = \frac{tT^2 - 2\alpha u'T + \alpha T^2}{T^2};$$

atque hinc pariter

$$u'^2 = \frac{tT^2}{\alpha}.$$

Ita

$$u'^2 = \frac{tT^2}{\alpha}.$$

Nam

$$T : 2\alpha = u' : i \quad \text{et} \quad T : \sqrt{\alpha} = u' : l = u' : (Y - \sqrt{\alpha});$$

est vero $X = t + i + \alpha$; atque $Y^2 = X$; et valoribus ipsorum i et Y , ut antea, substitutis prodit.

In (Fig. 178.) est

$$T : 2\alpha = q : h, \quad \text{et} \quad T : \sqrt{\alpha} = q : y,$$

et hinc

$$h = \frac{2\alpha q}{T} = \frac{2\alpha(T-u)}{T},$$

(quia $q = T - u$); estque

$$y = \frac{q \sqrt{\alpha}}{T} = \frac{(T-u) \sqrt{\alpha}}{T}.$$

Est vero

$$x = t + h - \alpha \quad \text{et} \quad y^2 = x;$$

itaque substituendo est

$$x = t + \frac{2\alpha(T-u)}{T} - \alpha = \frac{tT^2 + \alpha T^2 - 2\alpha u T}{T^2} =$$

$$y^2 = \frac{T^2 \alpha - 2Tu\alpha + u^2 \alpha}{T^2};$$

unde

$$u^2 \alpha = tT^2 \quad \text{et} \quad u^2 = \frac{tT^2}{\alpha}.$$

Ita

$$u'^2 = \frac{tT^2}{\alpha}.$$

Nam

$$X = t + i + \alpha,$$

et ex

$$T: 2\alpha = u': i \quad \text{et} \quad T: \sqrt{\alpha} = u': l = u': (Y - \sqrt{\alpha})$$

atque

$$Y^2 = X$$

prodit ut supra

$$\frac{u'^2 \alpha + T^2 \alpha + 2u' \alpha T}{T^2} = \frac{tT^2 + 2\alpha u' T + \alpha T^2}{T^2}.$$

Unde

$$u'^2 = \frac{tT^2}{\alpha}.$$

Erat vero $T^2 = 4xr$, (per r radium vectorem intelligendo); si igitur pro x ponatur α , erit $\frac{T^2}{\alpha} = 4r$, atque

$$u'^2 = u^2 = 4rt;$$

ubi $4r$ parameter huius diametri dici solet.

Quod autem nulla alia diameter sit, nec hæc sit pro aliis ordinatis, patet sic.

Quævis recta, præter axem et ei parallelam, secat præter axem etiam parabolam in duobus punctis; nam (Fig. 179.) quæratur valor talis ipsius x , ut y sit ordinata communis rectæ axem secantis et simul parabolæ: erit

$$b : k = x : y,$$

adeoque

$$y = \frac{xk}{b} = x\beta,$$

si $\frac{k}{b}$ dicatur β ; ordinata parabolæ autem est $\sqrt{\alpha + x}$; eruntque æquales, si

$$\alpha + x = \beta^2 x^2,$$

adeoque

$$x = \frac{1}{2\beta^2} \pm \sqrt{\frac{1}{4\beta^4} + \frac{\alpha}{\beta^2}}.$$

Quæcunque igitur alia diameter esset, illa per fī (Fig. 180.) repræsentari potest, atque ordinatæ quoque aut axi parallelæ essent, aut secarent axem. Si parallelæ axi essent, superiores finitæ, inferiores infinitæ essent. Si vero axem secent, consideretur ordinata e punto c; erit hæc aut perpendicularis ad Ali axem primarium, aut supra vel infra perpendicularem cadet. Si prius, ordinatæ sequentes, eidem abscissæ appertinentes, inæquales erunt. Si ordinata ec fuerit, erit $ec > cb$, quia triangula ecq et bqm similia sunt et $eg > bm$. Pariter si ordinata pc fuerit, erit $pc < cq$; quia per triangula similia pcn, qci atque pn < qi est $pc < cq$.

Pro eadem diametro pariter ordinatas in quavis coni sectione ab ordinatis prioribus diversas inæquales esse inferius facile patebit.

§. 2.

Quoad ellipsim (Fig. 181.) sit $pq = y$ et $pf = \lambda$; Ac est $= \frac{D}{2}$. Erat (pag. 183)

$$s = \frac{a^2 - 4u^2}{4u} \quad \text{et} \quad k^2 = \frac{a}{4} - \frac{u^2}{a},$$

atque e triangulorum \mathfrak{AGC} , ac similitudine est

$$t:s = \frac{d}{2}:U \quad \text{et} \quad s:k = U:K;$$

atque singulos terminos quadrando, fit

$$t^2 = \frac{s^2 d^2}{4U^2} \quad \text{et} \quad U^2 = \frac{K^2 s^2}{k^2};$$

unde prius U^2 reperitur, et tum t^2 .

Est nempe

$$\begin{aligned} U^2 &= \frac{s^2 K^2}{k^2} = \left(\frac{\alpha^2 - 4u^2}{4u} \right)^2 \left(\frac{\alpha}{4} - \frac{U^2}{\alpha} \right) : \left(\frac{\alpha}{4} - \frac{u^2}{\alpha} \right) = \\ &= \frac{(\alpha^2 - 4u^2)^2}{4 \cdot 4u^2} \frac{\alpha^2 - 4U^2}{4\alpha} \frac{4\alpha}{\alpha^2 - 4u^2} = \frac{(\alpha^2 - 4u^2)(\alpha^2 - 4U^2)}{4 \cdot 4u^2}, \end{aligned}$$

et hinc

$$\alpha^4 - 4\alpha^2 U^2 - 4\alpha^2 u^2 + 4 \cdot 4u^2 U^2 = 4 \cdot 4u^2 U^2,$$

seu

$$\alpha^4 - 4\alpha^2 u = 4\alpha^2 U^2;$$

et hinc

$$U^2 = \frac{\alpha^2}{4} - u^2.$$

Atque hinc t^2 , quod erat $= \frac{s^2 d^2}{4U^2}$, est

$$= \frac{(\alpha^2 - 4u^2)^2}{4 \cdot 4u^2} \frac{d^2}{4} : \frac{\alpha^2 - 4u^2}{4} = \frac{\alpha^2 - 4u^2}{4 \cdot 4u^2} d^2.$$

Assumantur porro duo paria triangulorum similium, nempe tsk , performans
et xhi , \mathfrak{AGC} , atque valores v, λ, i, h quærantur. Erit

$$t:k = y:v, \quad t:s = y:\lambda, \quad \frac{D}{2}:x = k:i, \quad \frac{D}{2}:x = u:h,$$

atque hinc

$$v = \frac{ky}{t}, \quad \lambda = \frac{ys}{t}, \quad i = \frac{2kx}{D}, \quad h = \frac{2ux}{D}.$$

Est autem $V = i - v$, et simul

$$V^2 = \frac{a}{4} - \frac{(u+z)^2}{a} = \frac{a}{4} - \frac{(h+\lambda)^2}{a},$$

quia $u+z=h+\lambda$.

Substitutis in

$$V^2 = (i-v)^2 = \frac{a}{4} - \frac{(h+\lambda)^2}{a}$$

seu

$$a(i-v)^2 = \frac{a^2}{4} - (h+\lambda)^2$$

valoribus $i, v, h, \lambda, k, t, s$, fiet

$$a\left(\frac{2kx}{D} - \frac{ky}{t}\right)^2 = \frac{a^2}{4} - \left(\frac{2ux}{D} + \frac{ys}{t}\right)^2;$$

et hinc

$$\frac{y^2}{t^2}(ak^2+s^2) + \frac{4xy}{Dt}(us-ak^2) + \frac{4x^2}{D^2}(ak^2+u^2) = \frac{a^2}{4};$$

ubi terminus primus $= \frac{y^2a^2}{d^2}$, secundus $= 0$, tertius $= \frac{x^2a^2}{D^2}$, adeoque

$$\frac{y^2a^2}{d^2} + \frac{x^2a^2}{D^2} = \frac{a^2}{4},$$

seu

$$\frac{y^2}{d^2} + \frac{x^2}{D^2} = \frac{1}{4},$$

consequenter

$$y^2 = \frac{d^2}{4} - \frac{x^2d^2}{D^2}.$$

Quod autem termini primi, secundi et tertii valores dicti sint, patet
sic. In termino primo est

$$\frac{y^2}{t^2} = y^2 : \frac{(a^2 - 4u^2)d^2}{4 \cdot 4u^2} = \frac{4 \cdot 4u^2 y^2}{(a^2 - 4u^2)d^2}$$

atque

$$ak^2 + s^2 = \frac{a^2 - 4u^2}{4} + \frac{(a^2 - 4u^2)^2}{4 \cdot 4u^2} = \frac{a^2(a^2 - 4u^2)}{4 \cdot 4u^2}.$$

Consequenter

$$\frac{y^2}{t^2}(ak^2 + s^2) = y^2 \cdot \frac{a^2}{d^2}.$$

In termino secundo nempe $\frac{4xy}{Dt} (us - ak^2)$ est

$$us - ak^2 = \frac{u(a^2 - 4u^2)}{4u} - \frac{a^2 - 4u^2}{4} = 0.$$

Tertius terminus est $\frac{4x^2}{D^2} (ak^2 + u^2)$; est autem

$$ak^2 + u^2 = \frac{a^2 - 4u^2}{4} + u^2 = \frac{a^2}{4};$$

adeoque terminus tertius $= \frac{4x^2}{D^2} \cdot \frac{a^2}{4} = \frac{x^2 a^2}{D^2}$.

Prodibit autem pariter et $y' = pr = y$, si pro y , λ , v , et ordinata $V = i - v$ et abscissa $\lambda + h$ ponatur y' , λ' , v' , ordinata $V' = i + v'$ et abscissa $\lambda' - h$; quod, uti si y in fine axis vel infra eum terminetur, exercitio Tyronum relinquitur.

§. 3.

Sit D recta per centrum c hyperbolæ (Fig. 182.) ducta, utrinque in ea terminata, sitque tangens $t + t'$ ad punctum p , in quo hyperbolam secat D ; tum si ordinata e fine q ipsius x , abscissæ e centro in recta D continuata acceptæ, ad tangentem parallela y dicatur, erit

$$y^2 = \frac{d^2 x^2}{D^2} - \frac{d^2}{4}.$$

Nam $t' = t$; quia hyperbola inter asymptotos e recta utrinque æquales partes resecat (pag. 176); et si recta tangenti parallele moveatur usquequo in punctum tactus veniat, partium resectarum eosque semper æqualium limites quoque nempe t et t' æquales erunt.

Hinc si $y \parallel t$, et α , γ ad axem primarium perpendicularia sint: erit

$$\frac{D}{2} : t = cq : y' + \beta' = x : y' + \beta',$$

nam $cq = x$; est vero hinc

$$\gamma' + \beta' = tx : \frac{D}{2} = \frac{dx}{2} : \frac{D}{2} = \frac{dx}{D};$$

nam $t = t'$, et $t + t'$ tanquam coniugata ipsius D dicitur d .

Est porro (per parallelas)

$$\beta' : \gamma' = t : \alpha = \frac{d}{2} : \alpha$$

atque

$$\beta + 2y : \gamma = t : \alpha' = \frac{d}{2} : \alpha';$$

nempe $y = y'$, nam in triangulo, cuius vertex c est, $(y + y')$ est parallela $(t + t')$, atque $t = t'$, adeoque $\gamma' + \beta' = y + \beta$, sed $\beta = \beta'$, (pag. 176) itaque $y = y'$.

E proximis duabus proportionibus autem fit

$$\beta'(\beta + 2y) : \gamma\gamma' = \frac{d^2}{4} : \alpha\alpha';$$

sed (pag. 163)

$$\gamma\gamma' = \frac{a}{4} = \alpha\alpha';$$

itaque

$$\beta'(\beta + 2y) = \frac{d^2}{4} = (\beta + y - y)(\beta + y + y).$$

Erat autem superius $\beta + y = \frac{dx}{D}$. Consequenter

$$\frac{d^2}{4} = \left(\frac{dx}{D} - y \right) \left(\frac{dx}{D} + y \right),$$

atque hinc

$$\frac{d^2}{4} = \frac{d^2x^2}{D^2} - y^2,$$

et hinc

$$y^2 = \frac{d^2x^2}{D^2} - \frac{d^2}{4}.$$

At vero et quævis alia recta $\mathfrak{U}\mathfrak{K}$ per centrum ducta (præter asymp-totum) diameter est.

Accipiantur nempe pro abscissis X ordinatæ Y parallelæ ad rectam

e centro per tactum tangentis ipsi \mathfrak{K} parallelæ: erit abscissa y , et x ordinata, atque

$$x^2 = \frac{D^2 y^2}{d^2} + \frac{D^2}{4}.$$

Scholion I.

Quaevis recta per centrum sectionis conicae (praeter asymptotum) diameter est; nec ulla alia est, nec eadem pro chordis rectae aliae parallelis diameter est, et cuivis rectae praeter asymptotos (et axi parallelam in parabola) dantur chordae parallelæ diametro unica gaudentes.

Dicatur v angulus, quem tangens cum subtangente s facit; in triangulo rectangulo, cuius catheti s et y sunt, est (pag. 139)

$$\frac{y}{s} = \text{tang. } v;$$

est etiam (Tom. I. pag. 306)

$$\text{tang. } v = \frac{y}{s}.$$

In parabola est

$$y = \sqrt{x} \quad \text{et} \quad s = 2x$$

(pag. 181), adeoque

$$\text{tang. } v = \frac{y}{s} = \frac{1}{2\sqrt{x}},$$

et pro quovis v datur x , nempe

$$2\sqrt{x} = \frac{1}{\text{tang. } v} \quad \text{et} \quad x = \frac{1}{4 \text{tang. } v^2};$$

pro $v = \infty$ fit tangens infinita, et $x = 0$; pro $x \rightarrow \infty$ fit $\text{tang. } v \rightarrow 0$. Patet etiam pro quovis ulterius ad dextram terminato x subtangentem quoque crescere ad lævam, angulum v autem decrescere, quum crescente x quotus $\frac{1}{2\sqrt{x}} = \text{tang. } v$ decrescat.

In ellipsi est

$$\frac{y}{s} = \sqrt{\frac{a^2 - 4u^2}{4a} : \frac{a^2 - 4u^2}{4u}} = \frac{2u}{\sqrt{a} \sqrt{a^2 - 4u^2}} = \text{tang. } v;$$

et hinc

$$4u^2 = \alpha(a^2 - 4u^2) \operatorname{tang}^2 v,$$

atque hinc

$$u^2(4 + 4\alpha \operatorname{tang}^2 v) = a^3 \operatorname{tang}^2 v,$$

et

$$u = \sqrt{\frac{a^3 \operatorname{tang}^2 v}{4 + 4\alpha \operatorname{tang}^2 v}};$$

itaque quum tam numerator quam denominator adeoque et quotus positivus sit, pro quovis v datur u ; fit autem pro $u = 0$ angulus $v = 0$, et pro $u = \frac{a}{2}$ fit v rectus, nempe valor $\operatorname{tang.} v$ pro $u = 0$ fit $\frac{0}{a}$, pro $u = \frac{a}{2}$ autem fit $\infty = \frac{2u}{0}$ (Tom. I. pag. 46). Decrescit vero subtangens ex infinito usque ad 0 crescente u usque ad $\frac{a}{2}$, crescitque v a 0 usque ad rectum, ita ut pro quovis maiore u subtangens intra priorem terminetur, et v maior fiat. Nempe $\frac{a^2}{4u} - u = s$ fit crescente u minus; fiat enim $u + \omega$ ex u , erit subtangens

$$s' = \frac{a^2}{4(u + \omega)} - (u + \omega) < \frac{a^2}{4u} - u;$$

quia $4(u + \omega) > 4u$, adeoque e quo (propter divisorem maiorem) minore maius subtrahitur, pro subtangente abscissæ maiori respondente. Ita $\operatorname{tang.} v$ fit maior; nempe

$$\frac{2(u + \omega)}{\sqrt{a} \sqrt{a^2 - 4(u + \omega)^2}} > \frac{2u}{\sqrt{a} \sqrt{a^2 - 4u^2}},$$

quia numerator prior est maior, denominator autem minor est, nam ex a^2 maius subtrahitur.

In hyperbola tangens anguli α , quem asymptotus cum axe facit, est $= \frac{1}{\sqrt{a}}$; nam (pag. 163)

$$\frac{\alpha}{2} : \frac{\sqrt{a}}{2} = 1 : \operatorname{tang.} \alpha.$$

Crescente u , prima ordinata est 0 pro $u = \frac{a}{2}$, et tum $\operatorname{tang.} v$ est infinita, adeoque v est rectus, et subtangens 0; postmodum crescente u in infinitum, crescit subtangens usque ad limitem $= \frac{a}{2} + x$, semper ulterius versus centrum terminata, et decrescit v usque ad α , ita ut centrum per sub-

tangentem et α per decrescentem v haud attingatur; estque pro quovis maiore u ultra verticem subtangens propior centro, et v minor.

Nam

1. Subtangens $\frac{4u^2 - \alpha^2}{4u}$ pro $u = \frac{\alpha}{2}$ fit $= 0$, et

$$\text{tang. } v = \frac{2u}{\sqrt{\alpha} \sqrt{4u^2 - \alpha^2}}$$

fit $\frac{2u}{0} = \infty$ (Tom. I. pag. 46).

2. Si ex u fiat $u + \omega$ (pro ω positivo), subtangens s pro u est $u - \frac{\alpha^2}{4u}$, et s' pro $u + \omega$ est $u + \omega - \frac{\alpha^2}{4(u + \omega)}$; et subtrahendo priorem e posteriore manet

$$\frac{\alpha^2}{4u} + \omega - \frac{\alpha^2}{4(u + \omega)} = \omega + \frac{\alpha^2(u + \omega) - \alpha^2 u}{4u(u + \omega)},$$

atque ut extremitas subtangentis s' versus centrum prodeat, adhuc ω subtracto quoque positivum manebit, nempe $\frac{\alpha^2 \omega}{4u(u + \omega)}$.

3. Est autem v pro $u + \omega$ minus quam pro u ; nam tang. v pro $u + \omega$ est

$$\frac{2(u + \omega)}{\sqrt{\alpha} \sqrt{4(u + \omega)^2 - \alpha^2}},$$

pro u est

$$\frac{2u}{\sqrt{\alpha} \sqrt{4u^2 - \alpha^2}};$$

quorum utrumnam sit maius, nonnisi

$$\frac{u + \omega}{\sqrt{4(u + \omega)^2 - \alpha^2}} \quad \text{et} \quad \frac{u}{\sqrt{4u^2 - \alpha^2}}$$

adeoque

$$\frac{(u + \omega)^2}{4(u + \omega)^2 - \alpha^2} \quad \text{et} \quad \frac{u^2}{4u^2 - \alpha^2}$$

comparanda veniunt. Reducendo ad denominationem eandem, erunt numeratores

$$4u^2(u + \omega)^2 - \alpha^2(u + \omega)^2 \quad \text{et} \quad 4u^2(u + \omega)^2 - \alpha^2u^2,$$

quorum priorem subtrahendo e posteriore manet

$$a^2(u + \omega)^2 - a^2u^2 = a^2[(u + \omega)^2 - u^2],$$

quod manifesto positivum est.

4. Nunquam vero $v = \alpha$ fieri potest, sed $v < \alpha$. Nam pro $v = \alpha$ fieret

$$\tan v = \frac{I}{\sqrt{a}} = \frac{2u}{\sqrt{a} \sqrt{4u^2 - a^2}},$$

adeoque $4u^2 = 4u^2 - a^2$, et $0 = -a^2$. Pro quovis positivo ω autem datur tale u , ut $\tan v$ sit $= \frac{I}{\sqrt{a}} + \omega$, at pro nullo positivo ω datur tale u , ut $\tan v = \frac{I}{\sqrt{a}} - \omega$ sit.

In casu primo enim esset

$$\tan v = \frac{I + \omega \sqrt{a}}{\sqrt{a}} = \frac{2u}{\sqrt{a} \sqrt{4u^2 - a^2}},$$

et hinc

$$(I + \omega \sqrt{a})^2 = \frac{4u^2}{4u^2 - a^2} = I + 2\omega \sqrt{a} + \omega^2 a,$$

quod dicatur k . Erit

$$4u^2 = 4u^2k - a^2k,$$

et hinc

$$u = \frac{a}{2} \sqrt{\frac{k}{k - I}},$$

quod, quia pro ω positivo fit $k > I$, reale est.

Pro $-\omega$ vero erit

$$k = I - 2\omega \sqrt{a} + \omega^2 a;$$

sed ut $\tan v = \frac{I}{\sqrt{a}} - \omega$ sit, manifesto hic $\omega < \frac{I}{\sqrt{a}}$ esse debet, ut tangens positiva sit; si igitur $\omega = \frac{I}{\beta \sqrt{a}}$ ponatur (pro β positivo et $> I$): erit, si nunc $I - 2\omega \sqrt{a} + \omega^2 a$ dicatur k , radix ex $\frac{k}{k - I}$ imaginaria, quia tum k positivum et $< I$ erit; nam

$$- 2\omega \sqrt{a} + \omega^2 a = \frac{I}{\beta^2} - \frac{2}{\beta} = \frac{\beta - 2\beta^2}{\beta^3},$$

quod (pro β positivo et $> I$) negativum est.

5. In hyperbola asymptoto nulla chorda parallela est. Sit enim (Fig. 183.) prius parallela ad distantiam ω a centro, tum sit ad distantiam $\frac{a}{2} + b$.

Erit

$$\frac{a}{2} : \frac{\sqrt{a}}{2} = \frac{a}{2} + x - \omega : Y, \quad Y = \frac{\frac{a}{2} + x - \omega}{\sqrt{a}};$$

est vero

$$y = \sqrt{x + \frac{x^2}{a}};$$

adeoque si $Y=y$ esse possit, erit

$$\left(\frac{a}{2} + x - \omega\right)^2 = ax + x^2,$$

et hinc $\omega = \frac{a^2}{4} + \omega^2 - \omega a - 2\omega x$, atque hinc

$$x = \frac{a^2}{2 \cdot 4\omega} + \frac{\omega}{2} - \frac{a}{2},$$

quod si $\omega = \frac{a}{n}$ ponatur (pro $n > 2$) valorem positivum ipsius x sed unicum dat.

Ita pro casu altero est (Fig. 184.)

$$\sqrt{a} : 1 = x - b : Y, \quad Y = \frac{x - b}{\sqrt{a}},$$

quod si $=y$ esse queat, erit

$$(x - b)^2 = ax + x^2,$$

et hinc $ax + 2bx = b^2$, et

$$x = \frac{b^2}{a + 2b};$$

valor ipsius x pariter unicus, pro quo hyperbola infra axem secatur. Nam $(x - b)^2 = (b - x)^2$; atque si

$$\frac{b^2}{a + 2b} = b + \omega$$

ponatur, erit

$$\omega = \frac{b^2 - ab - 2b^2}{a + 2b} = -\frac{ab + b^2}{a + 2b},$$

quod negativum est. Asymptoto eadem inferius continuata, idem pro parte hyperbolæ ad lævam patet.

6. *Cuivis alii rectae autem per centrum ductae (in eodem plano) respondent chordae parallelæ, et his diameter per centrum transiens.*

Fiat enim e c centro hyperbolæ semicirculus supra axem, et sit cf perpendicularis ad axem; concipiaturque cuivis tangentium (ad hyperbolam supra axem ad dextram a cf) parallela per c, dicaturque l hæc parallela, et recta e c per punctum tactus dicatur L, atque l et L sibi respondere dicantur. Quicunque angulus fuerit ab α (angulo asymptoti cum axe) incipiendo usque ad rectum ipsum et o (solum α excludendo): manifestum e dictis est, quemvis radium in quadrante dicto (præter asymptotum) esse ipsarum L et l aliquam, et cuivis hyperbolæ puncto aliam l, et cuivis l aliam L respondere, et quamvis ipsarum L et l ab asymptoto diversam esse. Idem nempe ad lævam patet.

Erat autem quævis L diameter pro chordis ipsi l parallelis, et quævis l diameter pro chordis ipsi L parallelis. Quævis recta igitur (præter asymptotos) per centrum hyperbolæ ducta diameter est. *Asymptotus autem diameter non est;* quia recta per c illa, ad quam parallelæ chordæ per asymptotum bisecarentur, aut asymptotus altera aut aliqua ipsarum L et l esset; asymptoto nulla chorda parallela est, et cuivis ipsarum L et l fuerint chordæ parallelæ, illi ipsarum altera respondet tanquam diameter, et quævis L aut l diversa ab asymptoto est, nec meditullia chordarum earundem in rectis diversis iacere queunt.

In ellipsi pariter tangenti cuivis parallela per centrum ducta l, et recta e centro per punctum tactus ducta L, atque l et L sibi invicem respondere dici possunt; angulus v autem heic a o usque ad rectum, a centro ad dextram lævamque eundo, quantusvis esse potest, et cuivis punto dimidiæ ellipseos supra axem alia l, et cuivis alii l alia L respondet; unde reliqua fluunt.

Consequenter quævis recta per centrum sectionis conicae (præter asymptotos) diameter est; et asymptotis atque axe parabolæ exceptis, chordarum ad quamvis rectam parallelarum meditullia in recta per centrum eunte iacent.

Quod vero nulla alia diameter sit, nec ulla pro aliis chordis sit, patet sic: pro parabola demonstratum (pag. 192) est; in ellipsi et hyperbola autem quæcunque alia diameter esset, chordæ per eam bisectæ alicui ipsarum L et l parallelæ essent; his autem certa diameter, nec alia recta ab hac diversa per meditullia chordarum earundem duci potest. Si vero eadem diameter et chordas alii ipsarum L et l parallelas bisecaret: et his chordis respondet certa diameter, et quidem alia a priore diversa; nempe cuivis L alia l respondet (pag. 202).

Scholion 2.

Centro et plures lineae ordinis altioris gaudent; et num linea quædam centro gaudeat, modo sequente inquiritur. (Fig. 185.)

Sit linea abscissarum $\mathfrak{A}\mathfrak{B}$, et origo in \mathfrak{A} , sitque $F(x)=y$; feratur linea abscissarum in rectam priori per c parallelam, et ponatur origo abscissarum in c . Dicantur abscissæ novæ t , et ordinatæ u ; facile patet, dari tales constantes α, β , ut sit $x=t+\alpha$, et $y=u+\beta$, adeoque $F(t+\alpha)=u+\beta$ (pro angulo coordinatarum eodem, qui prius erat, abscissis t et ordinatis u). Si igitur c centrum fuerit, et accipientur abscissæ e centro ad dextram lævamque æquales, erit ordinata positiva negativæ æqualis; adeoque t et u sive simul positiva sive simul negativa ponantur, æquatio $F(t+\alpha)-(u+\beta)=0$ pro quovis t manet.

Hinc autem sequitur, quod si æquatio ista ordinis n fuerit, nec ordine inferiore exprimi queat (de quo inferius): termini cuiusvis, in quo variabilium t, u numerus sub formam $n-2m+1$ venit (pro m integro et non 0), coefficiens 0 esse debet, siquidem linea centro gaudeat; atque si dentur talia α, β , ut quivis dictorum coefficientium = 0 sit, linea centro gaudebit, secus autem illo carebit.

Nam n aut par aut impar erit. Si n par fuerit, quilibet terminorum dictorum numerum variabilium imparem habebit. Si itaque summa terminorum, in quibus numerus variabilium par est, S dicatur, et summa terminorum, in quibus variabilium numerus impar est, s dicatur; atque $S+s=0$ sit: S non mutabitur etsi pro $\pm t$ et $\pm u$ simul ponatur $\mp t$

et $\mapsto u$, at s in $-s$ mutabitur; itaque nisi $s=0$ sit, $S+s$ et $S-s$ utrumque $=0$ esse nequit. Si vero $s=0$ sit, linea centro gaudet; adeoque si singulis coefficientibus dictis $=0$ positis, valores ipsorum α, β reperiantur, petito satisfiet. At si s non fuerit $=0$, centrum deerit.

Nempe tam $S=0$ quam $s=0$ esse debet; hoc autem fieri nequit, nisi singuli coefficientes dicti in s fuerint $=0$. Nam radices numero n æquationis $S=0$ manifesto a t dependent; exprimantur per $f(t)$; substituto quovis $f(t)$ ipsi u in s , oportet $s=0$ fieri; alioquin $S+s=0$ non esset. Sed hoc pacto $s=0$ omnes valores ipsius u exhiberet, quos $S-s=0$ præbet, neque $s=0$ plures radices habere potest, quum ad summum æquatio ordinis $(n-1)$ -ti sit; itaque æquatio dicta gradu minore exprimeretur (contra hypothesin).

Si n impar sit, quilibet terminorum dictorum numero variabilium pari gaudet; atque S nec pro hoc casu mutatur, etsi pro t, u positivis negativa accipientur; et s pariter $=0$ esse oportet; nam $s+S=0=-s+S$ esse aliter nequit, nisi tam S quam $s=0$ sit; si enim tantum $S=0$ esset, $s=-s$ esse nequit, nisi $s=0$ sit; si vero tantum $s=0$ esset, $S+s$ non esset $=0$, nisi et $S=0$ sit. Reliqua modo antea dicto patent.

Ex. gr. Sit $y^2 - px = 0$ (æquatio parabolæ pro parametro p); ponatur $t+\alpha$ pro x , et $u+\beta$ pro y ; fiet $(u+\beta)^2 - p(t+\alpha) = 0 = u^2 + 2\beta u + \beta^2 - pt - p\alpha$; et si ponantur coefficientes superius dicti singuli $=0$, fiet $2\beta = 0, p = 0$, adeoque $\beta = 0, p = 0$, et parabola centro caret; quia pro $p = 0$ esset quodvis $y = 0$.

At parabolam ordinis $(2n+1)$ -ti, cuius æquatio est $y^{2n+1} = px$, (nempe $y^n = px$ parabola ordinis n -ti dicitur), centro gaudere vel inde patet, quod et abscissis manentibus, ac pro $\alpha = \beta = 0$ mutatis tam x quam y e positivis in negativa, æquatio manet. At parabola ordinis $2n$ -ti, nempe cuius æquatio est $y^{2n} - px = 0$, centro carere modo antea dicto patet, ponendo $(u+\beta)^{2n} - p(t+\alpha) = 0$, et singulos coefficientes dictos $=0$ ponendo; nimirum non solum $\beta = 0$ prodibit, sed etiam p (nempe coefficientis ipsius t) $=0$ erit, adeoque manebit $u^{2n} = 0$, id est $u = 0$.

Scholion 3.

Linea secundi ordinis est aut parabola aut ellipsis, quo etiam circulus pro eccentricitate =o pertinet, aut hyperbola, (praeter $y^2=cx^2$, quo sectio plani cum cono per verticem exprimitur; si una recta fuerit sectio, pro abscissis in hac sumtis, sit $c=0$; si vero duæ rectæ efficiant sectionem, tum abscissæ in recta angulos verticales bisecante e vertice accipientur utrinque; et si sectio solum punctum ad verticem fuerit, c negativum accipi potest).

Nam lineam secundi ordinis prius diametro gaudere demonstratur; et tum pro abscissis in diametro acceptis, res patebit. (Fig. 186.)

Est æquatio generalis lineæ secundi ordinis

$$ay^2 + (bx + c)y + (dx^2 + ex + f)y^0 = 0;$$

ubi α non est =o, quia y habet duos valores pro abscissa per punctum internum chordæ ducta.

Dividatur æquatio per α ; et pro $x=\mathfrak{M}$ dicatur coefficiens posterior β , et prior α ; erit $y^2 + \alpha y + \beta = 0$; adeoque fit

$$\begin{aligned}\mathfrak{Pm} &= -\frac{\alpha}{2} \pm \sqrt{\frac{\alpha^2}{4} - \beta}, \\ \mathfrak{Pm} &= -\frac{\alpha}{2} \mp \sqrt{\frac{\alpha^2}{4} - \beta}.\end{aligned}$$

Itaque

$$\mathfrak{Pm} - \mathfrak{Pm} = \mathfrak{M} = \pm 2\sqrt{\frac{\alpha^2}{4} - \beta};$$

et si \mathfrak{L} huius meditullium sit, erit

$$\begin{aligned}\mathfrak{M} &= \pm \sqrt{\frac{\alpha^2}{4} - \beta}, \\ \mathfrak{P} &= \mathfrak{Pm} + \mathfrak{M} = -\frac{\alpha}{2} \mp \frac{bx + c}{2\alpha} = -\frac{c}{2\alpha} \mp \frac{bx}{2\alpha};\end{aligned}$$

atque pro quovis x et chordæ priori parallelæ medio, illi x respondente, idem prodit; nempe ordinata e fine ipsius x usque ad chordæ meditullium est $= -\frac{c}{2\alpha} - \frac{bx}{2\alpha}$; quæ manifesto æquatio rectæ est.

Itaque quum quarumvis trium chordarum parallelarum respectu ita duci possit abscissarum linea, ut chordæ illæ totæ in eandem plagam cadant: patet quarumvis trium chordarum parallelarum meditullia et consequenter omnia meditullia in eadem recta esse.

Si iam abscissæ in recta hac accipientur, quævis æquatio lineæ secundi ordinis ad formam $y^2 = a + bx + cx^2$ reducetur. Nam in expressione priore coefficiens primus ipsius y evanescit, quia summa radicum binarum æqualium sed sibi invicem oppositarum est = 0 (Tom. I. pag. 399).

Tum vero aut $c = 0$ est, aut non: in casu primo fit $y^2 = a + bx$, æquatio parabolæ pro parametro b ; mutetur nempe abscissarum t initium, ut sit $x = t - \frac{a}{b}$, fiet

$$y^2 = a + b\left(t - \frac{a}{b}\right) = a + bt - a = bt.$$

Si c non = 0, mutetur abscissarum t initium, ut sit $t = x + \frac{b}{2c}$, adeoque $x = t - \frac{b}{2c}$; fiet

$$\begin{aligned} y^2 &= a + bx + cx^2 = a + b\left(t - \frac{b}{2c}\right) + c\left(t - \frac{b}{2c}\right)^2 \\ &= a + bt - \frac{b^2}{2c} + ct^2 - tb + \frac{b^2}{4c}, \end{aligned}$$

quod (pro A , B constantibus) sub formam $y^2 = A + Bt^2$ venit; ubi tam A quam B simul negativa esse nequeunt, quia tum valores ipsius y omnes imaginarii essent. Casus itaque sequentes sunt: $\pm A$ et $\neg B$, $\neg A$ et $\pm B$, $\mp A \mp B$.

Pro casu primo, dum $y^2 = \pm A \neg Bt^2$, ponatur

$$A = \frac{d^2}{4} \quad \text{et} \quad \neg B = -\frac{d^2}{D^2};$$

adeoque $d = 2\sqrt{A}$ et $D = 2\sqrt{(-A:B)} = 2\sqrt{-(A:B)}$, ubi propter A positivum et B negativum, $-(A:B)$ et $-B$ positiva sunt, eritque $A + Bt^2$ id est $\pm A \neg Bt^2$

$$= \frac{d^2}{4} - \frac{d^2 t^2}{D^2},$$

æquatio ellipseos e centro pro diametro D et eius coniugata d . Ponatur ex. gr. ipsorum D et d maius pro axe maiore, et alterum pro minore; si $D=d$, circulus est.

Casus secundus, dum $y^2 = -A + Bt^2$; ponatur

$$-A = -\frac{d^2}{4} \quad \text{et} \quad +B = \frac{d^2}{D^2};$$

et erit $A + Bt^2$ id est $-A + Bt^2$

$$= \frac{d^2 t^2}{D^2} - \frac{d^2}{4},$$

æquatio hyperbolæ e centro pro diametro $D = 2\sqrt{(-A:B)}$, et coniugata eius $d = 2\sqrt{-A}$, ubi $-A$ pro A negativo positivum est.

Casus tertius, si tam A quam B positivum sit, sitque $y^2 = A + Bt^2$. In hyperbola pro abscissis x e centro in diametro D per punctum tactus eunte coniugataque d et ordinata y erat (pag. 196)

$$y^2 = \frac{d^2 x^2}{D^2} - \frac{d^2}{4};$$

atque hinc, si abscissæ item e centro in \bar{d} , quæ antea coniugata erat, accipientur, et D fiat coniugata ipsius d , atque ordinatæ prioribus abscissis parallelæ æqualesque sint, adeoque x ordinatæ, y abscissæ vicem subeant: erat

$$x^2 = \frac{D^2 y^2}{d^2} + \frac{D^2}{4}.$$

Si igitur $\frac{D^2}{4} = A$ adeoque $D = 2\sqrt{A}$ ponatur, et $\frac{D^2}{d^2} = B$ itaque $d = 2\sqrt{\frac{A}{B}}$, et in $y^2 = A + Bt^2$ ordinata y dicatur x , atque abscissa t dicatur y , æquatio proxima hyperbolæ e centro pro abscissis in diametro d tangenti parallela, et coniugata eius per punctum tactus eunte prodibit.

X.

Intersectiones linearum secundi ordinis, atque inde certarum aequationum resolutio.

Si duarum linearum L et l ordinatæ fuerint $Y=F(x)$ et $y=f(x)$, pro iisdem abscissis x (in eadem abscissarum linea ex eodem puncto incipientibus) et eodem ordinatarum angulo; atque pro quapiam abscissa x' fiant ordinatæ Y' ipsius L , et y' ipsius l æquales: erit $Y'-y'=0$ seu $F(x')-f(x')=0$, et lineæ L et l in extremitate communi ordinatarum Y' et y' se invicem secabunt; atque ubi se invicem secabunt L et l , pro abscissa puncto illi respondente erit $Y-y$ seu $F(x)-f(x)=0$.

Si igitur $F(x)-f(x)$ ad formam

$$x^\mu + \alpha x^{\mu-1} + \beta x^{\mu-2} + \cdots + \kappa x^0 = 0$$

reduci queat, sitque æquatio resolvenda

$$x^\mu + Ax^{\mu-1} + Bx^{\mu-2} + \cdots + K = 0,$$

(denotantibus A, B, \dots constantes cognitas, μ numerum integrum, α, β, \dots vero constantes indeterminatas); atque in duabus his æquationibus coefficientes eiusdem potentiae æquentur: orientur æquationes $\alpha=A, \beta=B, \dots \kappa=K$; e quibus si constantes a, b, c, \dots ad linearum L et l constructionem (pro eadem abscissarum linea eodemque initio, et eodem coordinatarum angulo) requisitæ reperiantur, atque L et l construantur: ubicunque secuerint hæ se invicem, abscissa respondens radix æquationis erit.

Vocatur autem modus iste radices æquationis reperiendi *constructio æquationum*.

Notandum tamen est: ex eo, quod pro certo valore ipsius x æquatio $Y-y=0$ fiat, intersectionem haud sequi; potest enim tam Y quam y imaginarium esse, sectio autem reales ordinatas requirit; fierique potest, ut æquatio nulla radice reali gaudeat.

Exempla. Pro æquatione gradus tertii: Sit parabolæ B (Fig. 187.) ordinata u pro abscissa t , et $u^2=bt$, adeoque $t=\frac{u^2}{b}$; et ordinata pro

quovis puncto p ipsius B ad abscissam x ex eodem abscissarum initio \mathfrak{A} reducta dicatur Y ; erit $x=u$, et $Y=t$, adeoque $Y=\frac{x^2}{b}$. Sitque parabolæ A pro abscissa x et initio eodem \mathfrak{A} ordinata y , et $y^2=ax$; ponaturque $Y-y=0$, id est $\frac{x^2}{b}-\sqrt{ax}=0$; erit $\frac{x^4}{b^2}=ax$; atque hinc $x^3-ab^2=0$, et $x=\sqrt[3]{ab^2}$. Et hoc pacto radix cubica exhiberi poterit, sed minime constructione geometrica sensu stricto, quum parabolæ quodvis punctum, sed non omnia puncta ita construi queant. Potest $b^2=1$ poni, et quævis quantitas Q pro a accipi, ut sit $x=\sqrt[3]{Q}$; ex. gr. si $Q=2$ sit, erit $x=\sqrt[3]{2}$, adeoque $x^3=2$, et

$$1:x=x:x^2=x^2:2;$$

nempe erunt duæ proportionales mediæ x et x^2 inter 1 et 2; eritque (per inferiora) simul x latus dupli cubi illius, cuius latus 1 est; quod pro Apollinis ara geometrica construendum frustra postulaverat Oraculum peste Athenis furente interrogatum: nempe ex $Y-y=0$ sive duæ rectæ, sive recta et circulus, sive duo circuli fuerint generalitate summa expressæ, æquatio formæ $x^3-Q=0$ haud prodibit; uti calculo inito patet.

Pro æquatione $x^3+Ax^2+Bx+C=0$ construenda autem mutetur (Fig. 188.) caput abscissarum in p , et abscissæ accipientur in recta, in qua x est: erit

$$y=y'-a=\frac{(b+x)^2}{p}-a,$$

si $(b+x)^2=py'$; hinc vero est

$$y=\frac{b^2+2bx+x^2-ap}{p}=\frac{2bx+x^2}{p},$$

quia $b^2=ap$. Si vero $p=1$ ponatur, et $y=\frac{2bx}{p}+\frac{x^2}{p}$, fiet æquatio parabolæ ad formam $Y=ax+x^2$ reducta; nempe dicatur ordinata eius Y , et ordinata circuli radio r et centro c (Fig. 189.) scripti, pro eodem x et eodem abscissarum principio p , dicatur y . Erit circuli ordinata

$$y=c+\sqrt{r^2-(x-e)^2};$$

atque si ponatur

erit
$$Y - y = 0 = \alpha x + x^2 - c - \sqrt{r^2 - (x - e)^2},$$

$$x^4 + 2\alpha x^3 + x^2(\alpha^2 + 1 - 2c) - x(2e + 2\alpha c) + e^2 - r^2 + c^2 = 0;$$

et si $e^2 - r^2 + c^2 = 0$ sit, reducetur æquatio ad formam

$$x^4 + \beta x^3 + \gamma x^2 + \delta x = 0;$$

e quo per x dividendo fit

$$x + \beta x^2 + \gamma x + \delta = 0;$$

hinc si æquatio cubica construenda fuerit

$$x^3 + Ax^2 + Bx + C = 0,$$

eruantur constantes requisitæ ex æquationibus

$$A = \beta, \quad B = \gamma, \quad C = \delta,$$

(substituendo literis græcis valores superiores); et tum r ex $e^2 - r^2 + c^2 = 0$ prodit.

Pariter æquatio biquadratica

$$x^4 + Ax^3 + Bx^2 + Cx + K = 0$$

construetur (positis supra dictis) ex æquatione priore

$$x^4 + \beta x^3 + \gamma x^2 + \delta x + \kappa = 0,$$

si $(e^2 - r^2 + c^2)$ breviter \varkappa dicatur.

Scholion. Altioris gradus æquatio $Y - y = 0$ pro duabus sectionibus conicis haud prodit. At lineæ cuiusvis, cuius ordinata

$$y = \alpha + \beta x + \gamma x^2 + \cdots + x^n,$$

(literis græcis constantes denotantibus), æquatio ordinis n -ti est; atque quodvis punctum eius construi geometrice sensu stricto potest, quum nonnisi multiplicationis additionisque certus numerus requiratur.

Si autem linea eiusmodi constructa sit: ubique fuit $y = 0$, ab-

scissa x radix æquationis

$$x^n + ux^{n-1} + \cdots + \beta x + \alpha = 0$$

erit, secabiturque linea abscissarum in tot punctis, quot radices reales æquatio habet, quarum numerus integrum n superare nequit (Tom. I. pag. 397); fieri autem potest, ut omnes imaginariæ sint, nec ullibi secessetur linea abscissarum a linea dicta. Itaque pro resolvenda quavis æquatione nonnisi construenda linea eiusmodi esset; quod tamen innumerabiles operationes propter puncta innumerabilia requirit.

XI.

Quoad areas ceteraque numerum hunc concernentia instituti ratio ad ea, quæ (Tom. I. pagg. 229 &) dicta sunt, relegare iubet.

222.

Linearum, quarum non omnia puncta quidem, sed aut quodvis, aut inter quævis duo quotvis intermedia geometrice sensu stricto construere licet.

Exemplo sint sequentia.

I. Lineæ cuiusvis, cuius æquatio est

$$y \text{ vel } y^2 = \frac{ax^0 + bx^1 + cx^2 + \cdots + gx^n}{Ax^0 + Bx^1 + Cx^2 + \cdots + Hx^m},$$

quodvis punctum construi geometrice potest: certies requirens multiplicationem, additionem, divisionem et radicem quadraticam. Potest autem constantium a, b, \dots, A, B, \dots quævis o esse, dummodo aliquis coefficiens, potentiae alicuius non o ipsius x , haud o sit. Si y^2 sit, tum y erit radix e membro ad dextram, et chordæ per lineam abscissarum bisecantur. Talis est etiam *Cissois Dioclis*, linea ordinis tertii, cuius æquatio est

$$Ay^2 - xy^2 - x^3 = 0 \quad \text{seu} \quad y^2 = \frac{x^3}{A-x},$$

pro quo est $n=3$, $m=1$, et quilibet coefficientium est 0, praeter $A=A$ et $g=1$ atque $H=-1$.

2. Si quis circulus fuerit, (Fig. 190.) et quævis puncta \mathfrak{A} , \mathfrak{B} fuerint, dicaturque quodvis peripheriæ punctum generaliter p , atque ducatur ex \mathfrak{A} ad quodvis p recta, et accipiatur in quavis recta $\overline{\mathfrak{Ap}}$ ex p utrinque recta æqualis rectæ $p\mathfrak{B}$, dicaturque cuiusvis rectæ ex p acceptæ extremitas a p diversa q : complexus omnium q lineas variæ formæ producet; qualem (Fig. 191.) pro \mathfrak{B} in peripheria, \mathfrak{A} extra peripheriam, et \mathfrak{AB} per c centrum circuli eunte acceptis exhibet.

3. Si (Fig. 192.) peripheria A volvatur extus per peripheriam B , ita ut arcus $b\delta$ ipsius A sit æqualis arcui ab ipsius B ; aut intus volvatur circulus C , ut arcus $b\delta'$ sit æqualis arcui ab : via puncti a ipsius A , *epicyclois* in casu primo, in postremo *hypocyclois* dicta, (si motus continuetur donec libuerit), talis erit, ut punctum quodvis eius construï geometrice possit, si radius circuli A vel C sit r , et radius R circuli B sit nr pro n integro. Nam si radiis R et r describantur circuli concentrici (Fig. 193.), pro quovis arcu ab reperitur $b\delta$ et $b\delta'$, si e punto a' arcus $a'b'$ n -ies accipiatur.

Si motus extus fiat et $n=1$ sit, tum linea redibit in a ; et pro $n=$ aliis numero, ex. gr. 5, totidem arcus describentur æquales in peripheria B terminati.

Si motus intus fiat et $r=\frac{R}{2}$, erit via diameter deorsum pro prima circumvolutione, tum eadem sursum erit, et idem semper repetetur. Nam (Fig. 192*) sit $b\delta'=ba$, erit δ' in diametro $a\delta$; nam anguli bcd' (tangunt anguli ad peripheriam in circulo minore) quantitas est dimidium arcus $b\delta'$, et simul (ut anguli ad centrum in B) est arcus ba , qui item est $= b\delta'$ arcui duplo gradus, quum radius bis minor sit.

4. Si via puncti p , in peripheria centri c ex a incipiendo semper porro moti, u dicatur, sitque certa recta α , ac cuiusvis u fine q dicto, in quavis recta ipsi α per q parallela, accipiatur y ex q incipiendo, ita ut quævis duo y in plaga eadem ex. gr. superius terminentur; aut in

quavis recta e centro c per q ducta accipiatur y' vel y'' ex c incipiendo; atque sit $y=f(u)$, et $y'=F(u)$, ex. gr. sit $y=au$, et $y'=a:u$ vel au ; aut $y''=a^u$ & ... (a rectam denotante): extremitatum omnium y , uti extremitatum omnium y' , sive omnium y'' , complexus linea certa erit.

Pro singulis, si unitas arcu peripheriae dictae exhibeatur (ponaturve), extremitas cuiusvis ordinatae y vel y' aut y'' geometricamente exhiberi pro quovis $u=\frac{m}{2^n}$ poterit, si m, n integros denotent; nempe $\frac{m}{2^n}=m\frac{1}{2^n}$, et arcus = 1 per 2^n dividi geometricamente, atque partes eiusmodi numero m accipi possunt, et pro y et y' rectae a potest $\frac{m}{2^n}$ -tum accipi, ita pro y'' quoque potest a ad m elevari, et inde radix 2^n -ti gradus geometricamente exhiberi. Sed si u nequeat per fractionem numeratoris integrum, nec per denominatorem arcus geometricamente dividi queat, (si ex. gr. $u=\frac{1}{7}$), nullum ipsorum y , y' , y'' exhiberi geometricamente poterit; nempe pro y et y' nullo modo constabit, quodnam u sit $=\frac{1}{7}$, pro y'' autem radix 7 gradus ex a geometricamente extrahenda esset. Si vero recta ponatur pro unitate, y'' non nisi pro $u=0$ et $a^0=1$ geometricamente exhibebitur, nullum aliud u enim per rectam, tanto minus fractione formae dictae, exprimi poterit.

Plura quoque huius generis Tyronei ipsi cogitare possunt.

223.

De lineis ordinis cuiusvis in genere quaedam scitu magis necessaria (pag. 149).

1. Si abscissarum initium in eadem abscissarum linea mutetur ex \mathfrak{A} in α vel in α' (Fig. 194.), et abscissae dicantur x pro \mathfrak{A} , et t pro α , atque t' pro α' ; sitque $y=f(x)$: erit $x=t+\alpha=t'-\alpha$; consequenter $y=f(t+\alpha)=f(t'-\alpha)$ erit æquatio lineæ pro abscissis novis, nempe prior pro t , posterior pro t' .

2. Si linea abscissarum mutetur in \mathfrak{AB}' priori \mathfrak{AB} parallelam, (Fig. 195.) et \mathfrak{A}' fiat novarum abscissarum origo, nempe ubi nova abscissarum linea per rectam ex \mathfrak{A} priore abscissarum origine ductam ad ordinatas priores parallelam secatur: erit (manente angulo coordinatarum) ordinata nova $Y=y+\beta$, itaque $Y=f(x)+\beta$; si \mathfrak{AB}' supra \mathfrak{AB} duca-

tur, β negativum erit; aut si positive sumatur, subtrahendum ex $f(x)$ erit; itaque in casu isto erit $y = Y - \beta$, in altero autem $y = Y + \beta$.

3. Si vero, manente angulo coordinatarum, tam origo abscissarum mutetur in \mathfrak{AB} , quam linea abscissarum mutetur in \mathfrak{AB}' , ut fiat ex. gr. $t + \alpha$ ex x , $Y + \beta$ ex y : fiet pro novis abscissis t in \mathfrak{AB}' e novo abscissarum initio et novis ordinatis Y æquatio $Y + \beta = f(t + \alpha)$, substituendo nempe $Y + \beta$ ipsi y , et $t + \alpha$ ipsi x . Si $Y - \beta$ ex y , aut $t' - \alpha$ ex x factum fuerit, id substituendum esse patet. Neque vero hac mutatione æquationis ordo mutatur, quum cuivis x , etsi plures ut factor occurrat, t plane toties substituatur; idemque de y patet. In genere si æquatio lineæ sit $F(x, y) = 0$ pro coordinatis x, y : erit lineæ eiusdem pro eodem coordinatarum angulo, sed abscissis t et ordinatis u , æquatio $F(a(t), b(u)) = 0$, si $x = a(t)$ et $y = b(u)$.

4. Si angulus coordinatarum mutetur, sive obliquus q in rectum sive rectus in obliquum q , prodibit æquatio lineæ modo sequente.

Sit prius q in rectum mutandus: fiat (Fig. 196.) ex \mathfrak{A} origine abscissarum ad ordinatas perpendicularis, sitque abscissa nova z , et ordinauta eius sit u , nempe ordinata y abscissæ prioris x usquequo novam abscissarum lineam secat. Erit

$$x : z = 1 : \sin. q \quad \text{et} \quad k : z = 1 : \tan. q ;$$

atque hinc

$$x = \frac{z}{\sin. q} \quad \text{et} \quad k = \frac{z}{\tan. q} ;$$

ac

$$y = u - k = u - \frac{z}{\tan. q} = u - z \cot. q ;$$

quibus valoribus in æquatione lineæ ipsis x et y substitutis, prodibit æquatio lineæ eiusdem quæsita; nec ordo lineæ ob rationem antea dictam mutabitur.

Rectangularium coordinatarum x, y angulus rectus in obliquum q pariter mutabitur modo sequente: sit (Fig. 197.) abscissa t priori parallela et ordinata u ; erit

$$y + b : u = \sin. q : 1 \quad \text{et} \quad u : k = 1 : \cos. q ;$$

hinc

$$y = u \sin. q - b \quad \text{et} \quad k = u \cos. q,$$

estque $t = x - a + k$, adeoque

$$x = t + a - k;$$

quibus valoribus substitutis in æquatione lineæ pro coordinatis x, y , probabit æquatio quæsita pariter ordinis eiusdem.

5. Si abscissis x (Fig. 198.) in $\mathfrak{U}\mathfrak{B}$ ex \mathfrak{A} acceptis respondeant ordinatae perpendiculares y , atque origo abscissarum in \mathfrak{A}' ponatur, et abscissæ t in $\mathfrak{U}'\mathfrak{K}$ accipientur (rectam $\mathfrak{U}'\mathfrak{B}'$ lineæ abscissarum priori parallelam ad angulum q secante): æquatio lineæ pro abscissis t et ordinatis u reperitur modo sequente. Sit ex \mathfrak{A}' ad lineam abscissarum priorem perpendicularis b , atque ex \mathfrak{B}' fiant perpendiculares $\mathfrak{B}'\mathfrak{M}$ et $\mathfrak{B}'\mathfrak{K}$ ad u et $\mathfrak{U}'\mathfrak{K}$.

Erit propter triangula rectangula verticalia angulus ad \mathfrak{M} angulo q ad \mathfrak{A}' æqualis; et $\mathfrak{A}'\mathfrak{B}' = x + a$, $k = \mathfrak{M}\mathfrak{B}'$.

Estque

$$x + a : t + k = 1 : \cos. q,$$

et hinc

$$\mathfrak{A}'\mathfrak{K} = t + k = (x + a) \cos. q \quad \text{et} \quad \mathfrak{A}'\mathfrak{B}' = x + a = \frac{t + k}{\cos. q};$$

est porro

$$x + a : l = 1 : \sin. q,$$

unde

$$\mathfrak{B}'\mathfrak{K} = l = (x + a) \sin. q;$$

est etiam

$$(y + b) : k = 1 : \sin. q,$$

et hinc

$$\mathfrak{M}\mathfrak{B}' = k = (y + b) \sin. q;$$

porro

$$(y + b) : (u - l) = 1 : \cos. q,$$

unde

$$\mathfrak{M}\mathfrak{M} = u - l = (y + b) \cos. q;$$

atque hinc

$$t = \mathfrak{A}'\mathfrak{K} - k = (x + a) \cos. q - (y + b) \sin. q$$

et

$$u = \mathfrak{M}\mathfrak{M} + l = (x + a) \sin. q + (y + b) \cos. q,$$

et hinc

$$x + a = \frac{u - (y + b) \cos. q}{\sin. q} = \frac{t + (y + b) \sin. q}{\cos. q}.$$

Unde valores in æquatione ipsis x et y substituendi sic reperiuntur :
Si brevitatis caussa sin. q dicatur q' , et cos. q dicatur q'' , erit

$$x + a = \frac{t + (y+b)q'}{q''} = \frac{u - (y+b)q''}{q'};$$

et hinc

$$tq' + (y+b)q'^2 = uq'' - (y+b)q''^2;$$

atque hinc

$$(y+b)(q'^2 + q''^2) = q''u - q't;$$

et (quia omnia pro radio 1 computata sunt, adeoque $q'^2 + q''^2 = 1$), erit
 $y + b = q''u - q't$; consequenter

$$y = q''u - q't - b.$$

Eodem modo prodit

$$x = q'u + q't - a;$$

quibus valoribus in æquatione lineæ ipsis x et y substitutis, prodit æquatio lineæ quæsita.

Quod vero omnibus his substitutionibus ordo lineæ maneat, sic patet : si pro coordinatis x et y linea n -ti ordinis fuerit, numerus variabilium x , y tanquam factorum in aliquo termino plane n est, et in nullo ipsum n superat. Consideretur terminus quivis, in quo x ut factor m -ies, y vero $(n-m)$ -ies occurrit ; substituantur valores novi ipsis x et y ; neglectis factoribus constantibus, quæ ad lineæ ordinem nihil conferunt, mutabitur terminus in $[(u+t)-a]^m [(u-t)-b]^{n-m}$, ubi item quoad ordinem lineæ nonnisi variabiles respiciendo, $[(u+t)^m + (u+t)^{m-1} + \dots]$ per $[(u-t)^{n-m} + (u-t)^{n-m-1} + \dots]$ multiplicatum considerandum venit.

In binomio ad μ elevato summa exponentium in quovis termino idem μ est ; si igitur terminus quicunque ipsius $(u+t)^m$ per terminum quemcunque ipsius $(u-t)^{n-m}$ multiplicetur, summa literarum variabilium (ut factorum) in facto erit $m+n-m=n$; in facto autem e quolibet termino item ipsius $(u+t)^m$ per quemlibet terminum ipsius $(u-t)^{n-m-1}$, numerus variabilium erit $m+n-m-1=n-1$; et patet in nullo facto, nisi quod ex $(u+t)^m (u-t)^{n-m}$ oritur, numerum variabilium ad n exsurgere ; quodvis enim ex $(u+t)^{m-m'} \perp (u-t)^{n-m-n'}$ multiplicato ori-

tur, (denotantibus m' , n' integros positivos, et $m' < m$, $n' < n - m$); fiet igitur summa literarum variabilium

$$m - m' + n - m - n' = n - m' - n' = n - (m' + n')$$

quod $< n$ est; est nempe $m' + n' < n$, quia $n = n - m + m$, et $n' < n - m$ atque $m' < m$.

Consequenter *ut cunque mutetur abscissarum linea et origo abscissarum angulusque ordinatarum, ordo lineae manet.*

*Notandum autem per multiplicationem terminorum dictorum omnium prodire omnes terminos, tam qui nonnisi aliquam variabilium t et u continent, quam qui quocunque numero v ipsum n haud superante continet quamvis aliquam ipsarum t et u , et alteram v' -ies continet (pro $v + v'$ haud $> n$); nempe ut (Tom. I. pag. 562) dictum est, omnes *uniones, biniones* &c prodire ex t et u , usque ad n -iones (inclusive) *admissa repetitione literae eiusdem, haud numerata diversa earundem literarum permutatione.* Facile hoc patet, quum ex $(t+u)^v$ prodeat omnis possibilis v -io, uti ex $(t-u)^v$ omnis possibilis v' -io, adeoque ex $(t+u)^v(t-u)^{v'}$ omnis possibilis $(v+v')$ -io.*

6. *Linea ordinis n-ti a nulla recta in pluribus quam n punctis secari potest.*

Nam etsi recta quævis pro linea abscissarum accipiatur, gradus æquationis haud augetur. Erit autem ubicunque secuerit linea rectam abscissarum t , ordinata $u = 0$; adeoque pro $u = 0$ omnes termini æquationis ipsam u ut factorem continentis disparent, et pars reliqua æquationis, quæ nonnisi variabilem t nec eam ad ipso n altiore gradum elevatam continet, erit $= 0$ pro $u = 0$; quamobrem plures quam numero n valores illi ipsius t , pro quibus $u = 0$, dari nequeunt.

7. *Linea n-ti ordinis per $\frac{(n+1)(n+2)}{2} - 1$ puncta determinatur,* et quidem ita, ut quanquam non ad quamvis tot puncta requirantur, per tot puncta nulla linea ordinis n -ti alia duci possit; et per quævis data $\frac{(n+1)(n+2)}{2} - 1$ puncta linea aliqua ordinis n -ti duci possit, dummodo eorum plura quam n puncta in recta haud sint, quia linea ordinis n -ti in pluribus quam n punctis rectam non secat.

In æquatione generali lineæ ordinis n -ti sunt (pag. 149) termini numero $\frac{(n+1)(n+2)}{2}$, quorum primus constans sine ulla variabili est.

Sint (Fig. 199.) puncta data $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \mathfrak{C}, \dots$; ducatur linea abscissarum quæcunque $\mathcal{K}\mathcal{H}$, et sit * origo abscissarum, demittantur ex $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \mathfrak{C}, \dots$ perpendiculares A, B, C, \dots tanquam ordinatæ respondentes abscissis a, b, c, \dots ; substituatur prius in æquatione generali ubicunque a abscissæ t et A ordinatæ u , dein in eadem priore æquatione generali substituatur ubique b abscissæ t et B ordinatæ u , tum substituatur item in æquatione generali c abscissæ t et C ordinatæ u , et ita porro; donec tot æquationes gradus primi prodeant, quot puncta data et quot constantes quærendæ sunt; itaque constantes ex iis determinantur; et linea pro constantibus repertis in æquationem positis, erit gradus n -ti per data puncta transiens.

Potest etiam constans variabili destituta = 1 poni, et reliquæ constantes quoad eam exprimi.

Neque autem ulla alia linea n -ti ordinis per eadem puncta transit. Nam si alia linea L esset per eadem puncta transiens: reducta ad lineam abscissarum priorem et idem abscissarum initium, quod prius erat, modo dicto æquatio generalis easdem æquationes pro constantibus reperiendis, easdemque constantes, adeoque eandem lineæ L æquationem præbebit.

8. Si lineæ n -ti ordinis æquatio sit $F(x, y) = 0$ pro abscissa x et ordinata y , atque pro iisdem abscissis et ordinata u sit lineæ m -ti ordinis æquatio $f(x, u) = 0$: pro omni casu, ubi lineæ hæ se invicem secant, $u = y$ esse oportet; adeoque pro illo x debet $F(x, y) = 0 = f(x, u)$ esse.

Probari autem potest, eliminato y æquationem non nisi ad gradum mn assurgere; adeoque haud dari posse plures eiusmodi valores ipsius x , pro quibus $u = y$ fiat, adeoque lineæ dictæ se invicem secent; quanquam non dicatur in tot punctis secare posse. Sed instituti ratio transire ad numerum 3 iubet.

ELEMENTA GEOMETRIAE.

SECTIO IV.

REDITUS E PLANO IN ABYSSUM SPATII.

3.

Ambitus constructionis geometricae sensu lato; numero rectarum operationumque trium primitivarum finito, nempe præter duas, quæ in constructione geometrica sensu stricto adhibebantur, etiam tertia admittitur, exclusa tamen hic quoque operationum coniunctione.

Ordo (in calce) præscriptus plura satis declarat, et primaria quoque (pagg. 38 &) dicta repetere supervacuum est: ex. gr. quod *recta cum piano* aut punctum, aut totam se, aut nihil *commune habeat*; *planum cum piano* aut rectam, aut nihil *commune habeat*; porro quod recta per planum, pariter planum per planum in alteram plagam transeat; &c. Nempe

3. REDITUS E PLANO IN ABYSSUM SPATII.

- 3I. *Numero* rectarum operationumque trium primitivarum *finito* (constructio geometrica sensu lato): nimirum duabus accedit tertia, nempe *motus circa axem*.
- 3II. Motus circa axem linearum planorumque, absque figurarum respectu.
- 3III. *Linearum motus circa axem*, figuræ haud efficientium.
- 3IV. Rectilineorum figuræ haud constituentium motus circa axem.
- 3V. *Unus motus circa axem*.
- 3VI. Complexus duarum rectarum se mutuo in plano *P* secantium motus circa unam earundem: parit, si angulus rectus fuerit, *planum*, secus autem *conos verticales*.

·311112.

Plana parallela describuntur (pag. 42).

·311112.

Recta e punto extra planum P, ad duas rectas in P sitas perpendicularis, est ad planum P perpendicularis (pag. 39); patetque planum per α descriptum (in ·311112) et planum per β descriptum punctum p commune habere, et se invicem in recta secare; *darique* igitur e quovis plani P punto p perpendicularem ad P ; esseque unicum ex p ad P (pag. 39).

Patet etiam quamvis rectam, quae ad planorum parallelorum P et Q (in ·311112) aliquod perpendicularis est, esse ad alterum eorumdem quoque perpendicularem; atque quasvis duas eiusmodi rectas esse aequales et parallelas; et hinc etiam quasvis duas rectas eidem tertiae parallelas inter se quoque parallelas esse.

1. Nempe quoad primum (Fig. 200.): si $bb' = cc'$, erit $bcc'b'$ rectangulum, atque in motu circa bc describent b' et c' circulos radiis æqualibus bb' et cc' (in planis P et Q); atque tangentes circulorum horum in plana P et Q cadent, et recta $b'c'$ ad tangentem in b' circuli radio bb' in P scripti, et pariter ad tangentem in c' radio cc' in Q scripti perpendicularis est: nam $bcc'b'$ sive antrosum sive retrorsum moveatur circa bc , generationes æquales sunt (Tom. I. pag. 12); est igitur $b'c'$ tam in P quam in Q ad duas rectas perpendicularis, consequenter tam ad P quam ad Q perpendicularis.

·311112. E punctis b, c, \dots rectæ A in plano aliquo sint perpendicularares B, C, \dots , moveaturque schema circa A ; viæ rectarum B, C, \dots erunt *plana parallela* P, Q, \dots

·311112. *Plures motus circa axem*: sint in plano P ad rectas A, B , se mutuo in p secantes, rectæ α, β , ex p perpendicularares; vertaturque α circa A , et β circa B ; via prioris secare viam posterioris debet, atque ibidem est perpendicularis ad P .

Potest vero quævis recta ad planum P vel Q perpendicularis per bc aut $b'c'$ repræsentari: nam quodvis punctum alterutrius (ex. gr. plani P) aliquod punctum rectæ bb' est, itaque per b' repræsentari potest; ex b' autem ad P nonnisi unica perpendicularis ad P datur; eratque hæc $b'c'$, atque eadem ad planum Q perpendicularis est.

2. Quoad secundum. Si duæ eiusmodi rectæ $b'c'$ et $b''c''$ in planis parallelis P et Q terminatæ ad utrumque perpendicularares fuerint: erit (pro b' et b'' in P , et c' et c'' in Q sitis) tam recta $b'c'$ quam $b''c''$ perpendicularis tam ad rectam bb'' quam ad rectam $c'c''$; consequenter quadrilaterum rectilineum $b'b''c''c'$ erit rectangulum, adeoque $b'c' \parallel$ et $= b''c''$.

3. Unde etiam sequitur, quod si (Fig. 201.) rectæ E , F eidem rectæ A parallelæ fuerint, inter se quoque parallelæ erunt. Nam sint e punctis b , c ipsius A ad rectas E , F perpendicularares bb' , cc' et bb'' , cc'' ; erit $b'c' = bc = b''c''$; moveatur circa A schema ut prius: manifesto erunt rectæ $b'c'$, $b''c''$ ad plana parallela per rectas bb' , cc' descripta perpendicularares; adeoque (per præcedentia) erunt E et F parallelæ.

Atque hinc etiam patet *e quovis punto p extra planum P sito dari rectam ad P perpendiculararem*. Nam sit (Fig. 202.) *e quovis punto a plani P recta alpha ad P perpendicularis*, sitque $p\ell$ ad α *e punto f ipsius alpha perpendicularis*, atque in plano $a\ell p$, quod propter punctum a commune secat planum P in recta ab , accipiatur in hac sectione utriusque plani recta $ab = fp$; et concipiatur moveri $p\ell ab$ circa $a\ell$: fient duo plana parallela, et recta $p\ell b$ perpendicularis ad P .

31121.

De angulo duorum planorum quoque dictum (pag. 40) est: unde etiam ibidem patet dari *e quavis recta imo e quovis punto plani P planum perpendicularare ad P*.

3112. *Motus planorum circa axem.*

31121. *Motus unus*: planum, circa rectam quamvis in eo sitam motum producit angulum duorum planorum.

Sed demonstrantur ibidem sequentia: *Quodvis planum Q, in quod recta perpendicularis ad planum P cadit, est perpendicularare ad P; et si sectio planorum P et Q sit ab, perpendicularis ad P e quolibet punto rectae ab in Q cadit; item quaevi perpendicularis ad ab in Q cadens est perpendicularis ad planum P* (pagg. 40 §).

Si vero praeter planum Q etiam planum q sit perpendicularare ad P, atque Q et q secant se invicem, sectio planorum Q et q erit recta ad planum P perpendicularis (pag. 42).

Quod anguli planorum se invicem secantium verticales aequales sint §, vide (pagg. 40 §).

311221.

Sit (Fig. 203.) c punctum commune, concipiaturque facies plani abcde superior alba, inferior nigra; moveaturque prius planum bcde circa bc, ita ut facies alba ipsius cbde faciei albæ ipsius acb obvertatur, et tum moveatur planum cde circa cd, ita ut si prius alba facies albæ obvertebatur, et nunc alba ipsius cde facies albae ipsius cbd faciei obvertatur: si per planum altera vice motum secetur abc (cadente ex. gr. ce in ca), orietur *angulus solidus rectilineus* per tria latera nempe sectores acb, cbd, cde ad apicem communem clausus, quorum summa manifesto est minor quatuor rectis.

Patet etiam cœ circa cf moveri, motumque quoties libuerit continuari posse: ut angulus solidus numero laterum quolibet claudatur. Poterit conditio esse, ut facies nigra nigræ obviam semper eat, aut hæc conditio tolli.

31122. Plures motus plani circa axem.

311221. Cuiusvis motus axi punctum idem p commune: nempe intelligantur omnia in eadem spatiī e plano P plaga (ex. gr. superiore), sitque motus plani cuiusvis angulus $< 2R$, denotante R rectum; moveaturque sub hac conditione planum P circa rectam pa in eo sitam; atque e quovis loco, unde libuerit, moveatur item circa aliquam rectam ipsiusdem per p euntem, continuando donec libuerit; orietur *angulus solidus rectilineus*. Poterit ea quoque determinatio accedere, ut P semper versus faciem illam moveatur, quæ inferior erat.

Notandum autem est numerum laterum anguli solidi rectilinei ad apicem communem clausi minimum esse tres, et latera talia esse, ut summa quorumvis binorum (ut in triangulo) maior tertio sit. Nam si (Fig. 204.) arcus $ba = ba'$ et $da' = de$: moveatur abc circa bc , donec ca in ca' cadat, et moveatur dce circa cd , donec ce in ca' cadat; atque tum moveatur retrorsum abc circa cb , et dce circa cd ; describent puncta a et e circulos in superficie sphæræ; sit enim $a\mathcal{U} \perp cb$, et manifesto describet in motu dicto $\mathcal{U}a$ planum et a circulum, qui omnino in superficie sphæræ erit, manente nempe centro c et radio ca . Duo hi circuli autem si præter punctum a adhuc aliquid commune haberent supra planum $cb\delta$, fieret id etiam inferius; adeoque duo circuli se invicem in pluribus quam duobus punctis secarent. Hoc autem fieri nequit, etsi circuli non in idem planum cadant: sint enim puncta p , a , q circulo utriusque communia; ea non in recta sunt, adeoque planum idem circuli utriusque determinant; ibi vero duo circuli tria puncta communia habere nequeunt.

Atque manifesto si summa arcuum ab et de sit arcu bd minor, ex. gr. sit arcus $ab = ba'$ et arcus $de = de'$, et sint ex e ad cd , et ex a ad cb perpendiculares $e\mathcal{E}$ et $a\mathcal{U}$: circuli centrorum \mathcal{U} et \mathcal{E} radiis $\mathcal{U}a$ et $\mathcal{E}e$ secare se invicem prorsus nequeunt. Nam si circuli priores se invicem nonnisi in a' secabant, circulus centri \mathcal{E} radii $e\mathcal{E}$ nihil cum circulo centri \mathcal{U} radii $\mathcal{U}a'$ commune habebit; namque circulus in superficie sphæræ circa centrum \mathfrak{d} per punctum e scriptus, totus intra circulum centri eiusdem per punctum a' scriptum manet.

Quod nempe via talis in superficie sphæræ circulus sit, patet e prius dictis, ubi $a\mathcal{U}$ perpendicularis ad cb mota planum, et a circulum plano sphæræque communem generat.

Sunt igitur in angulo solido rectilineo trilatero quævis bina latera simul sumta tertio maiora. Atque hinc patet etiam, quodvis triangulum sphaericum, nempe figuram in superficie sphæræ e tribus arcubus circuli maximi compositam, talem esse, ut summa quorumvis binorum laterum tertio maior sit: secus enim anguli solidi dicti bina quædam latera tertio maiora non essent. Unde et via minima inter duo puncta superficie sphæricæ in circulo maximo est.

Est quoque angulus solidus rectilineus dictus *per tria latera forma absolute determinata*, uti triangulum rectilineum per tria latera; et *idem de triangulo sphaerico* patet. Nam si (Fig. 205.) c in centrum sphæræ ponatur, et c in c manente, e in a cadat, trianguli apex d cadet aut supra aut infra planum acb , neque vero ullum aliud tale punctum d' in eadem plaga (ex. gr. supra planum) datur; quia tum duo circuli extremitate d perpendicularium ex d ad \overline{ac} et \overline{bc} missarum, circa has motarum, descripti se invicem supra planum in duobus, adeoque et infra illud in duobus secarent.

Manifesto quoque forma determinata generatur, etiamsi novus angulus solidus rectilineus trium laterum, ad eundem apicem, priori ita iungatur, ut nonnisi unum latus (nempe unus sector) utriusque commune sit; idemque compositione plurium eiusmodi angulorum continuari posse patet, eodemque ordine iuxta se invicem positis eiusmodi angulis, formam determinatam, eidem semper æqualem, generari.

31122211.

Planum R, plana parallela P, Q secans, alternos angulos et externum interno oppositum aequales, atque summam duorum internorum duobus rectis aequalem facit (Fig. 206.).

Fiat enim e punto quopiam p plani P perpendicularis pp' ad planum R , perpendicularis pq ad planum Q , atque ponatur per pqp' pla-

- 311222. Plures motus circa axem, absque punto axium communi;
- 3112221. Nonnisi planorum.
- 31122211. Moto planorum (in 311112) parallelorum P, Q , uno circa quamvis rectam in eo sitam, donec ad alterum perveniat: novo hoc plani loco R dicto, *anguli ab R cum P et Q facti alterni* comparantur.
- 31122212. Moto R circa rectam quamvis α per P et Q euntem: novo plani loco S dicto, queruntur sectiones cum P et Q formæ ex R et S constantis.
- 31122213. Moto S quoque circa quamvis rectam β per P et Q euntem: novo plani loco T dicto, queruntur sectiones cum P et Q formæ ex R, S, T compositæ; tam pro casu si $\alpha \parallel \beta$, quam si non.
- 311222. Planorum cum rectis.

num A ; erit A tam ad P quam ad Q imo et ad R perpendicularare; nam pq est tam ad P quam ad Q perpendicularis, adeoque planum per pq positum est perpendicularare ad P et Q (pag. 222), ita planum per pp' positum est perpendicularare ad R .

Sint porro sectiones plani A cum planis P, Q, R rectæ $pi', qr', ip'r$; erunt anguli $i'pq$ et $r'qp$ recti, atque parallelæ pi' , qr' (in quibus secat planum A plana parallela P, Q) cum recta per p' planis A et R communi in eodem plano A sunt. Est autem summa internorum, quos rectæ $p'i$ et pi' ad pp' faciunt, ita summa internorum, quos rectæ $p'r$ et qr' ad rectam $p'q$ faciunt, duobus rectis minor. Consequenter pi' et qr' per ir secantur; fiat hoc in i'' et r'' . Unde assertum patet, quum angularum, qui planorum parallelorum P et Q per tertium facta sectione generantur, quantitates eadem sint, quæ rectarum $pi' qr'$ parallelarum per tertiam sectarum. Idem vero eodem modo patet, si p' supra vel infra plana P et Q cadat.

31122212.

Sectiones planorum R et S cum planis parallelis P et Q non solum sibi invicem parallelæ sunt, sed etiam angulos aequales faciunt. (Fig. 207.). Sint enim planorum R et S cum P sectiones ab , ac adeoque sit $\triangle bac$, et cum piano Q sectiones AB , AC adeoque sit $\triangle ABC$; fiantque ab , ac , AB , AC aequales; erunt $ab \parallel AB$, $ac \parallel AC$, atque $\triangle labB$ et $\triangle lacC$ parallelogramma (pag. 68); itaque cC et bB , eidem aA parallelæ et aequales, erunt inter se quoque parallelæ et aequales. Consequenter $cbBc$ erit parallelogrammum (pag. 68); adeoque $cb = CB$; et per consequens $\triangle cab = \triangle CAB$ (per tria latera); itaque et $\angle cab = \angle CAB$, et anguli ad basim cb angulis ad basim CB aequales sunt.

Atque hoc continuari posse patet, si ut in numero

31122213

etiam planum T , imo plura quotvis accedant. Si vero ibidem $\alpha \parallel \beta$ fuerit, sectio in P sectioni in Q aequalis erit; nempe non solum anguli sibi invicem

respondentes æquales, (quod etiamsi α non $\parallel \beta$, semper est), sed et latera sibi invicem respondentia æqualia erunt: considerentur enimvero duæ eiusmodi parallelæ uti α et β sunt; sit a extremitas in P cadens ipsius α , et extremitas in Q sit a' , extremitas in P ipsius β sit b , et b' in Q ; erit recta ab in plano P rectæ $a'b'$ in Q parallela; quia in planum parallelarum α et β cadunt, et sectiones per hoc factæ planorum parallelorum P et Q sunt; itaque latera sibi invicem respondentia quoque nempe latera opposita parallelogrammi sunt æqualia.

3112221.

Cum planis parallelis P, Q non solum planum tertium secans, sed et recta cum alterutro ipsorum P, Q aliquid commune habens, in neutrum incidens, angulos alternos æquales, pariterque externum interno opposito aequalem, et summam duorum internorum duobus rectis aequalem facit.

Si enim (Fig. 208.) ex punto p ipsius P ad quodvis punctum q vel q' recta concipiatur, fiant e punctis p, q (vel q') perpendiculares pP, qQ (vel $q'Q$) ad Q ; erunt hæc etiam ad P perpendiculares, atque $pPQr$ rectangulum erit; unde propter summam duorum internorum, (quos ad pP faciunt pQ et pq , vel pQ et $q'p$ producta), duobus rectis minorem, secabitur recta \overline{pQ} , adeoque planum Q ; transbitque recta pq (vel pq') per utraque plana parallela P et Q .

Fiant hi transitus in p et f (Fig. 209.), fiatque e punto d rectæ fp perpendicularis de ad Q ; erit hæc perpendicularis ad planum P quoque, necnon ad sectiones ip, ef planorum parallelorum P, Q per planum def factas; suntque ip, ef parallelæ per df sectæ, atque anguli ipd,efd plane anguli rectæ df , quos cum planis P et Q efficit.

Scholion 1. Sunt autem etiam anguli, quos rectæ parallelæ ac, bf per planum P sectae (in a, b) cum piano eodem faciunt, aequales.

3112221. Rectæ, quæ e quovis plani P punto est ad quodvis punctum plani Q ad P paralleli, anguli alterni \mathcal{E} , quos cum P et Q facit, comparantur.

Sint enim (Fig. 210.) rectæ parallelæ ac et bf in plano tabulæ, quod dicatur Q : erit recta ab planis P et Q communis, utcunque vertatur P circa ab . Erigantur ex a , b perpendiculares ac' , bf' ad ab in Q , et ex iisdem punctis a , b ad eandem rectam ab perpendiculares aa' , bb' in P , et perpendiculares aa'' , bb'' ad P . Angulus rectæ ac cum piano P est is, quem ac cum sectione plani illius ρ facit, in quod ac et perpendicularis ex c ad planum P cadunt; atque hoc planum idem cum eo est, in quod ac cum perpendiculari ex a ad planum P erecta cadit; nam duæ hæ perpendiculares ad idem planum P , sunt parallelæ, in quarum alteram cadit a , et c in alteram.

Si Q circa ab moveatur, donec $\wedge c'aa'$ (consequenter etiam $f'bb'$) rectus sit, ac' cum aa'' , et bf' cum bb'' coincidet; secat autem planum per aa'' et ac , cum piano P punctum a commune habens, ipsum P in recta quapiam aa'' per a eunte; atque angulus, quem recta ista ad verticem a cum recta ac facit, est quantitas anguli rectæ ac cum piano P .

Evidens autem est, totum schema in se moveri posse, recta ab in se, P in se, Q in se manentibus, donec a in b veniat; atque tum ac' in bf' , ac in bf venire; et propter generationes æquales angulum rectæ bf cum piano P æqualem priori produci.

Scholion 2. Manifesto quoque aa'' cum ab in piano P angulum α illi æqualem facit, quem bb'' cum recta ab ultra b continuata facit: consequenter $aa'' \parallel bb''$; nempe rectae ex a , b , in quibus parallelæ ac , bf planum P secant, ad puncta, in quae perpendiculares ad P ex c et f cadunt, ductæ sunt parallelæ.

Scholion 3. Si (Fig. 211.) in piano Q sit $\mathfrak{A}\mathfrak{B} \parallel \mathfrak{A}'\mathfrak{B}'$ et $\mathfrak{A}\mathfrak{C} \parallel \mathfrak{A}'\mathfrak{C}'$, atque supra Q sint talia puncta a et a' , ut $\mathfrak{A}a$ cum $\mathfrak{A}\mathfrak{B}$ ita $\mathfrak{A}'a'$ cum $\mathfrak{A}'\mathfrak{B}'$ faciant angulum v , et $\mathfrak{A}a$ cum $\mathfrak{A}\mathfrak{C}$ ita $\mathfrak{A}'a'$ cum $\mathfrak{A}'\mathfrak{C}'$ faciant angulum q (quovis seorsim intellecto): erit tum $\mathfrak{A}a$ ipsi $\mathfrak{A}'a'$ parallela.

Nam orientur hoc pacto anguli solidi ad apices \mathfrak{A} et \mathfrak{A}' triangulares, qui \mathfrak{A}' in \mathfrak{A} , et $\mathfrak{A}'\mathfrak{C}'$ in $\mathfrak{A}\mathfrak{C}$ atque $\mathfrak{A}'\mathfrak{B}'$ in $\mathfrak{A}\mathfrak{B}$ cadentibus super Q congruunt, angulo $\mathfrak{C}\mathfrak{A}'a'$ in $\mathfrak{C}\mathfrak{A}a$, et angulo $\mathfrak{B}'\mathfrak{A}'a'$ in $\mathfrak{B}\mathfrak{A}a$ cadentibus. Demissis igitur ex a et a' ad planum Q , in quod bases $\mathfrak{A}\mathfrak{B}\mathfrak{C}$, $\mathfrak{A}'\mathfrak{B}'\mathfrak{C}'$ angularorum cadunt, perpendicularibus aK , $a'K'$: manifesto erunt anguli $\mathfrak{C}\mathfrak{A}K$

et $\Sigma\alpha'K'$, atque $\alpha'K$ et $\alpha'K'$ æquales; adeoque propter $\Sigma\Sigma \parallel \Sigma'\Sigma'$ erit quoque $\alpha K \parallel \alpha'K'$.

Plana αK et $\alpha'K'$ (perpendiculares ad planum Q complectentia) autem sunt ad Q perpendicularia, et præterea de parallelis αK , $\alpha'K'$ erecta; adeoque parallela sunt, secanturque per planum Q (nempe $K\alpha K'$) et $\alpha\alpha'$ se invicem in $\alpha\alpha'$ secantia: et erunt sectiones angulares æquales, nempe sectio per planum $\alpha\alpha'$ in plano $\alpha'K'$ facta cum $\alpha'K'$ angulum ipsi αK æqualem efficit, sectio autem alia præter $\alpha'K'$ esse nequit. Consequenter αa et $\alpha'a'$ in idem planum cadunt, suntque sectiones eiusdem cum duobus planis parallelis, adeoque parallelæ.

Scholion 4. (Fig. 212.). *Si plana parallela P et Q per rectas parallelas pq , $p'q'$ secentur, et p , p' in P atque q , q' in Q fuerint: erit $pq = p'q'$. Nam ex p , p' fiant pb , $p'b'$ perpendicularares ad Q , orientur (nisi pq adeoque $p'q'$ perpendicularares sint) triangula pqb et $p'q'b'$ æqualia; quia $pb = p'b'$, anguli pqb , $p'q'b'$ sunt rectarum pq , $p'q'$ anguli cum piano Q , adeoque æquales, atque et rectus æqualis recto. Manifesto etiam fit $pqq'p'$ parallelogrammum, quum $pq \parallel$ et $= p'q'$.*

Scholion 5. *Si plana parallela P et Q per planum R secentur, et sectio planorum P et R sit recta p , planorum Q et R autem sectio sit qr : quodcumque planum p ponatur per p ad Q parallele, sectio planorum p et R eadem cum p erit. Nam per p nonnisi unum planum ad Q parallelum datur; sed inde quoque patet, quod si sectio p planorum p et R diversa a p esset, in piano R per punctum p ad rectam qr duæ diversæ parallelæ darentur.*

31122222.

Hoc numero in calce expositæ constructionis resultatum, ibidem *prisma rectilineum* dicitur; quod si pro $\alpha\beta\gamma\dots$ nonnisi $\alpha\beta\gamma$ fuerit,

31122222. Si in piano P fuerit figura rectilinea $\alpha\beta\gamma\dots$, et quodvis punctum a fuerit supra planum (omnibus supra planum acceptis); vertatur P circa $\alpha\beta$ donec recta αa incidat, fiatque $\beta b \parallel et = \alpha a$, et tum vertatur planum item prius P circa $\beta\gamma$ donec recta βb incidat, fiatque $\gamma c \parallel et = \beta b$: atque hoc

triangulare, si ABC parallelogramnum sit, *parallelepipedum* & audit. Dicitur vero *prisma rectum*, si Aa ad basim $\text{ABC} \dots$ perpendicularis sit, secus *obliquum* audit.

Scholion. Datur autem (pag. 17 &) conceptus prismatis generalior; et si ex omnibus punctis cuiusvis continuæ portionis plani rectæ concipiuntur (in eadem plaga) eidem cuipiam rectæ parallelæ et æquales: complexus omnium illarum rectarum *prisma* est. Interim hic de prismate tali, quod geometrice (sensu lato) construi potest et sub numero '3122222 cadit, prius sermo est, inferius sub numero '3121 cylinder pariter (sensu lato) geometrice constructum prisma erit.

§. I.

1. In constructione prismatis rectilinei, cuius portio plani a figura rectilinea $\text{ABC} \dots$ clausa *basis* dicitur, oriuntur præter $\text{ABC} \dots$ et $\text{abc} \dots$ tot latera, quot latera ipsius $\text{ABC} \dots$ sunt: nempe ex. gr. ipsius ABCDA latera AB , BC , CD , DA producent parallelogramma ABba , $\text{B}Ccb$, CDdc , $\text{D}Aad$. Præterea vero $\text{abc} \dots$ erit in plano per a ad planum, in quo $\text{ABC} \dots$ est, parallelo, eritque ipsi $\text{ABC} \dots$ congruenter æqualis.

2. Si planum q ex Q ipsi Q parallele moveatur in illa plaga, in qua prisma est, ubicunque sectio eius cum prisme ipsi $\text{ABC} \dots$ congruenter æqualis erit, et prisma prius in duo prismata dividit.

3. Si punctum quodvis P ipsius $\text{ABC} \dots$ (sive in perimetrum sive intus cadat) et punctum p , in quo planum $\text{abc} \dots$ per parallelam ex P ad Aa erectam secatur, *sibi invicem respondentia* dicantur: erunt hæc plane ea, quæ A in a , B in b , C in c & cadentibus congruent, et quæcunque portio continua b plani perimoto $\text{ABC} \dots$ clausi fuerit, complexus rectarum ex omnibus portionis illius punctis usque ad puncta illis respondentia *prisma* basi b insistens erit, atque in prius cadet; et quæ-

continuetur usque ad ultimum latus; ac demum moveatur planum $ab\text{Aa}$ circa ab , donec c incidat: nascetur *parallelepipedum*, si ABC parallelogrammum fuerit, in genere vero *prisma rectilineum*.

cunque figuræ planæ $\mathfrak{ABC}\dots$ et $\mathfrak{ABC}'\dots$ fuerint in plano tales, ut recta \mathfrak{AB} sit $\parallel \mathfrak{A'B'}$, et puncto \mathfrak{A}' in recta \mathfrak{AA}' usque in \mathfrak{A} moto, rectam $\mathfrak{A'B'}$ ad \mathfrak{AB} parallela ferendo (simul cum figura $\mathfrak{ABC}'\dots$), \mathfrak{A}' in \mathfrak{A} veniente congruant: prismata per complexum rectarum ex omnibus figuræ $\mathfrak{ABC}\dots$, item ex omnibus figuræ $\mathfrak{ABC}'\dots$ punctis eidem rectæ \mathfrak{Aa} parallelarum et æqualium, generata congruilibilia sunt. Generale hoc tamen, hic ad figuræ rectilineas restringitur.

I. Quod primum attinet: ponatur per \mathfrak{a} planum ρ ad planum Q , in quo $\mathfrak{ABC}\dots$ est, parallelum, seceturque hoc per planum $\mathfrak{abB'A}$ in recta \mathfrak{ab}' ; erit \mathfrak{b}' et \mathfrak{b} idem. Nam $\mathfrak{ab} \parallel$ et $= \mathfrak{AB}$, quia $\mathfrak{Aa} \parallel$ et $= \mathfrak{Bb}$; itaque \mathfrak{ab}' et \mathfrak{ab} coincidunt, quia per \mathfrak{a} ipsi \mathfrak{AB} nonnisi una parallela datur. Est vero $\mathfrak{abB'A}$ parallelogrammum, quod pariter de $\mathfrak{bcC'B}$, et porro de omnibus patet; sed quum de \mathfrak{b} idem quod de \mathfrak{a} dictum est valeat, cadet etiam \mathfrak{bc} in planum ρ ; atque eadem ad $\mathfrak{c}, \mathfrak{d}, \dots$ applicando, $\mathfrak{abc}\dots$ in planum ρ per punctum \mathfrak{a} ad planum Q parallelum cadet.

II. Quod alterum attinet: sit plani q cum piano \mathfrak{ABCa} sectio $\mathfrak{a'b'}$, ita $\mathfrak{b'c'}$ sectio item plani q cum \mathfrak{BCcb} , et ita porro; dari has sectiones patet, si q per rectam \mathfrak{Aa} feratur; secabit enim quamvis ipsi \mathfrak{Aa} parallelam; eritque $\mathfrak{a'b'} \parallel$ et $= \mathfrak{AB}$, $\mathfrak{b'c'} \parallel$ et $= \mathfrak{BC}$ &, item $\wedge \mathfrak{a'b'c'} = \wedge \mathfrak{ABC}$, $\wedge \mathfrak{b'c'd'} = \mathfrak{BCD}$ & (pag. 225). Itaque figura $\mathfrak{a'b'c'}\dots$ congruere ipsi $\mathfrak{ABC}\dots$ poterit.

III. Tertium sic patet: quocunque punctum \mathfrak{H}' fuerit (Fig. 213.), sive in perimetro ipsius $\mathfrak{ABC}\dots$ sive intus, illi respondens \mathfrak{h}' plane illud erit, in quod caderet \mathfrak{H}' congruentibus $\mathfrak{ABC}\dots$ et $\mathfrak{abc}\dots$, cadentibus \mathfrak{A} in \mathfrak{a} , et \mathfrak{B} in \mathfrak{b} , atque \mathfrak{C} in \mathfrak{c} &. Nam etsi non in perimetrum adeoque intus caderet \mathfrak{H}' , poterit recta \mathfrak{AH}' duci et continuari, donec perimenter in \mathfrak{H}'' secetur; sit \mathfrak{H}'' in perimetri latere \mathfrak{HJ} , accipiatur in perimetri $\mathfrak{abc}\dots$ latere \mathfrak{hi} recta $\mathfrak{hh}'' = \mathfrak{H}H''$. Erit \mathfrak{HJih} parallelogrammum, adeoque et $\mathfrak{H}H''h'h$; quia tum $\mathfrak{HH}'' \parallel$ et $= hh''$. Eritque $\mathfrak{H}h''$ et \mathfrak{Aa} eidem $\mathfrak{H}h =$ et \parallel ; itaque $\mathfrak{H}h'' =$ et $\parallel \mathfrak{Aa}$; atque hinc $\mathfrak{Aah}''\mathfrak{H}''$ parallelogrammum est, atque $\mathfrak{ah}'' \parallel$ et $= \mathfrak{AH}''$. Consequenter si in \mathfrak{ah}'' accipiatur $\mathfrak{h}''\mathfrak{h}' = \mathfrak{H}''\mathfrak{H}'$, erit $\mathfrak{H}''\mathfrak{H}h''\mathfrak{h}'$ parallelogrammum, atque et $\mathfrak{H}h'$ ipsi \mathfrak{Aa} parallela; quæ sola ex \mathfrak{h}' ad \mathfrak{Aa} est, nempe e punto illo ipsius $\mathfrak{abc}\dots$,

quod in \mathfrak{H}' cadit, congruentibus $\mathfrak{ABC} \dots$ et $abc \dots$, cadentibusque \mathfrak{A} in a , et \mathfrak{B} in b , \mathfrak{C} in c .

Si igitur sive toto $\mathfrak{ABC} \dots$, sive e quavis figura (nunc rectilinea) $\mathfrak{KLM} \dots$ in $\mathfrak{ABC} \dots$ existente, concipientur rectæ e quovis puncto ad punctum ei respondens, complexus earum erit prisma *inter eadem plana parallela, basi* $\mathfrak{KLM} \dots$ *iuxta rectam* \mathfrak{Aa} *superstructum*; et quidem si $\mathfrak{KLM} \dots$ idem cum $\mathfrak{ABC} \dots$ fuerit, fiet idem cum prismate priore, secus vero pars huius erit. Nam si puncta ipsis $\mathfrak{K}, \mathfrak{L}, \mathfrak{M}, \dots$ respondentia $\mathfrak{k}, \mathfrak{l}, \mathfrak{m}, \dots$ dicantur: erit $\mathfrak{Kk} \parallel$ et $= \mathfrak{Aa}$, et $\mathfrak{Ll} \parallel$ et $= \mathfrak{Aa}$ \mathfrak{S} , atque $\mathfrak{KkLl}, \mathfrak{LlmM} \mathfrak{S}$ parallelogramma erunt, et antea dicta applicari poterunt.

Evidens etiam est, prisma basi $\mathfrak{ABC} \dots$ iuxta rectam \mathfrak{Aa} superstructum rectarum e quovis puncto ipsius $\mathfrak{ABC} \dots$ ad \mathfrak{Aa} parallelarum et æqualium complexum esse: nam recta e quovis puncto ipsius $\mathfrak{ABC} \dots$ ad \mathfrak{Aa} parallela et eidem æqualis in dictum prisma cadit, nec ullum in dicto prismate punctum \mathfrak{f}' est, quod non in parallelam ad \mathfrak{Aa} ex aliquo ipsius \mathfrak{ABC} punto in eadem cum reliquis plaga cadat; quia si planum per \mathfrak{f}' ipsi \mathfrak{ABC} parallelum ponatur, sectio plani positi cum prismate erit congruenter æqualis ipsi $\mathfrak{ABC} \dots$, et \mathfrak{f}' in hac sectione erit, quia in prisma cadit; atque paulo antea dictis applicatis, patet rectam per \mathfrak{f}' ad \mathfrak{Aa} parallelam tam per $\mathfrak{ABC} \dots$ quam per $abc \dots$ ire.

Quod autem congruentiam prismatum super basibus $\mathfrak{ABC} \dots$ et $\mathfrak{ABC}' \dots$ congruenter æqualibus (in eodem plano sitis) sub conditione (pag. 230) dicta iuxta eandem rectam \mathfrak{Aa} in eadem plaga exstructis attinet: sint ambo prismata in plaga superiore, et facies ipsius $\mathfrak{ABC} \dots$ (ac pariter facies ipsius $\mathfrak{ABC}' \dots$) superior dicatur *alba*, inferior *nigra*; facies nigra ipsius $\mathfrak{ABC}' \dots$ faciei albæ in omni casu superimponi poterit, et tum $\mathfrak{A'a'}$ cum \mathfrak{Aa} , $\mathfrak{B'b'}$ cum \mathfrak{Bb} , \mathfrak{S} coincident, (extremitates parallelarum ex $\mathfrak{A}', \mathfrak{B}' \dots$ ad \mathfrak{Aa} ductarum literis accentu insignitis denotando); nam $\mathfrak{A'a'}$, facie nigra ipsius \mathfrak{ABC}' faciei albæ ipsius $\mathfrak{ABC} \dots$ superimposita, in plagam eandem cum \mathfrak{Aa} cadit, neque aliorum cadere potest: quia $\mathfrak{Aa} \parallel \mathfrak{A'a'}$, adeoque cum plano eodem angulos æquales faciunt; atque idem de $\mathfrak{B'b'}$ et reliquis patet. Et facile perspici potest, et inferius prisma super eadem basi iuxta eandem rectam \mathfrak{Aa} generatum priori

congruere, si basis inferior sursum moveatur sibi parallele, donec ipsi \mathfrak{ABC} ... congruat.

§. 2.

At vero superficies prismatis basi \mathfrak{ABC} ... superstructi, rete e parallelogrammis supra dictis, (quorum unum latus in omnibus æquale est, alterum vero in primo est \mathfrak{AB} , in secundo vero \mathfrak{BC} &, atque anguli pro dato angulo rectæ \mathfrak{Aa} cum plano \mathfrak{ABC} computari possunt), adiectis duabus basibus, compositum ultro præbet; e quo si facies superior alba sit in plaga superiore, nonnisi una eadem forma compingi potest; atque idem rete, prouti facies alba aut nigra extrorsum vertetur, formas dare potest, quæ congruere nequeunt, alioquin æquales.

Nimirum si latera anguli solidi sint A, B, \dots , ordine eorum eodem, forma unico modo determinatur, atque idem e fine lateris cuiusvis ulterius progrediendo patet; nec maius vel minus prodire potest, si rete invertatur, ut facies nigra claudatur, et alba extrorsum versa sit; quum nullum aliud duarum generationum per se resultato unico gaudentium discrimen sit, nisi quod altera in altera plaga faciem baseos nigram respiciente suscepta sit.

Possunt tamen hoc pacto formæ tales prodire, quæ congruere nequeunt. Ex. gr. sit (Fig. 214.) prismatis basis \mathfrak{ABC} in plano Q , et sit e D meditullio rectæ \mathfrak{AB} ad \mathfrak{AC} parallela DD' , atque CD' sit $\parallel \mathfrak{AB}$, concipiaturque prisma iuxta rectam \mathfrak{Aa} (ut in præcedentibus) plano tabulæ superius insistens; nec sit \mathfrak{Aa} , adeoque \mathfrak{Bb} perpendicularis ad \mathfrak{ABC} , sed sit ex. gr. \mathfrak{Bb} ad lævam versus \mathfrak{BD} inclinata; evidens post dicta est, quod si prisma rectum esset, atque $\triangle D\mathfrak{EB}$ cum prisme super eo exstructo superponeretur triangulo $D'\mathfrak{EC}$, (E in se, D in D' et B in C cadentibus): oreretur parallelepipedum rectum super basi $\mathfrak{ACD'D}$ exstructum; at si \mathfrak{Bb} inclinet (ex. gr. ad lævam, ut dictum est), et superimponatur $\triangle D\mathfrak{BE}$ triangulo $D'\mathfrak{CE}$ (nempe si superior facies alba dicatur, inferior nigra), facies trianguli $D\mathfrak{EB}$ nigra faciei albæ trianguli $D'\mathfrak{EC}$ superponetur; et recta \mathfrak{Bb} in prisme basi \mathfrak{CED}' superposito, ad dextram versus \mathfrak{CD}' inclinata erit; concipiatur nimirum \mathfrak{DB} sursum sibi parallele

moveri (triangulum $\Delta\mathcal{E}\mathcal{B}$ ante se ferendo) donec \mathcal{D} in \mathfrak{C} , et \mathfrak{B} in \mathfrak{D}' veniat; cadet recta $\mathfrak{D}\mathfrak{B}$ in $\mathfrak{C}\mathfrak{D}'$, sed \mathfrak{D} in \mathfrak{C} , et \mathfrak{B} in \mathfrak{D}' , atque \mathfrak{E} supra $\mathfrak{C}\mathfrak{D}'$ erit; at si vertatur $\mathfrak{D}\mathfrak{B}$ e hoc loco circa meditullium, donec extremitas dimidium circulum describat: cadet \mathfrak{B} in \mathfrak{C} , \mathfrak{D} in \mathfrak{D}' , \mathfrak{E} in \mathfrak{E} , sed $\mathfrak{B}\mathfrak{b}$ ad dextram, nempe ad $\mathfrak{C}\mathfrak{D}'$ inclinabitur; adeoque si triangula dicta nonnisi ista superimpositione congruere queant, prismata super iis tanquam basibus iuxta eandem rectam $\mathfrak{A}\mathfrak{a}$ exstructa congruere non poterunt. At vero si rete invertatur, adeoque generetur prisma super basi $\mathfrak{C}\mathfrak{D}'\mathfrak{E}$ in plaga inferiore, ut facies alba baseos $\mathfrak{C}\mathfrak{E}\mathfrak{D}'$ extus maneat superius; sitque recta $\mathfrak{C}\mathfrak{c}'$ sectio parallelogramorum rectis $\mathfrak{C}\mathfrak{D}'$, $\mathfrak{C}\mathfrak{E}$ in plaga inferiore insistentium: erit prisma dictum in plaga inferiore, ad basim $\mathfrak{C}\mathfrak{E}\mathfrak{D}'$ iuxta rectam $\mathfrak{C}\mathfrak{c}'$ exstructum, atque $\mathfrak{C}\mathfrak{c}'$ cum $\mathfrak{C}\mathfrak{D}'$ angulum æqualem illi faciet, quem $\mathfrak{B}\mathfrak{b}$ cum $\mathfrak{B}\mathfrak{D}$ faciebat, et angulus ipsius $\mathfrak{C}\mathfrak{c}'$ cum $\mathfrak{C}\mathfrak{E}$ etiam fit æqualis angulo, quem $\mathfrak{B}\mathfrak{b}$ cum $\mathfrak{B}\mathfrak{E}$ faciebat; atque si continuatio rectæ $\mathfrak{C}\mathfrak{c}'$ in plaga superiore $\mathfrak{C}\mathfrak{c}''$ sit, faciet $\mathfrak{C}\mathfrak{c}''$ cum $\mathfrak{C}\mathfrak{K}$ angulum æqualem illi, quem $\mathfrak{B}\mathfrak{b}$ cum $\mathfrak{B}\mathfrak{D}$ faciebat, et eadem recta $\mathfrak{C}\mathfrak{c}''$ faciet cum $\mathfrak{C}\mathfrak{H}$ angulum æqualem ei, quem $\mathfrak{B}\mathfrak{b}$ cum $\mathfrak{B}\mathfrak{E}$ faciebat; atque hinc (per pag. 227) fiet $\mathfrak{C}\mathfrak{c}'' \parallel \mathfrak{B}\mathfrak{b}$ et per consequentiam $\mathfrak{C}\mathfrak{c}''$ parallela $\mathfrak{A}\mathfrak{a}$ est.

Poterit igitur prismatis inferioris basis inferior iuxta rectam $\mathfrak{C}'\mathfrak{C}$ sursum sibi parallele moveri, usquequo in basim superiore perveniat: atque tum manifesto prisma totum super plano \mathcal{Q} erit, triangulo $\mathfrak{C}\mathfrak{E}\mathfrak{D}'$ iuxta rectam $\mathfrak{A}\mathfrak{a}$ superstructum; atque hoc, simul cum primate basi trapezio $\mathfrak{A}\mathfrak{D}\mathfrak{E}\mathfrak{C}$ superstructo, efficiet parallelepipedum basi $\mathfrak{A}\mathfrak{D}\mathfrak{D}'\mathfrak{C}$ iuxta rectam $\mathfrak{A}\mathfrak{a}$ superstructum.

Unde quum rete etiamsi invertatur, corpora æqualia (etsi non semper congruentia) producantur: quodvis prisma triangulare erit parallelepipedo tali æquale, cuius *altitudo* (nempe perpendicularis *e basi superiore ad planum baseos inferioris* superiori parallelum) est eadem, basis vero est parallelogrammum, in quod basis triangularis modo dicto mutata est; inferius patebit idem valere, etsi triangulum in aliud parallelogrammum mutetur.

Scholion. Eodem tantum modo per retis inversionem fiunt et duo illa prismata triangularia æqualia, in quæ parallelepipedum obliquum

dispescitur, si basi per diagonalem in duas partes æquales divisa in altera basi diagonalis respondens accipiatur. Erunt nempe duæ diagonales in plano; et plane (in Fig. 214.) tale parallelogrammum $EfCd'$ cum diagonali Ce exhibetur, si $\triangle DcB$ ad ductum rectæ Bc feratur, donec E in C , et B in E , atque Bd in Ef veniat; quo pacto, si fiat super basi $EfCd'$ prisma iuxta rectam prius dictam Al , e dictis patet prisma ipsius EfC prismati ipsius $Ed'C$ nonnisi per retis inversionem congruere posse.

§. 3.

Parallelepipedo super basi eadem EbCd (in plano Q sita) in plaga eadem exstructa basibus superioribus in plano q ad Q parallelo terminata, si parallelogramma Ebæ et Eb'a' tanquam latera prismatum ipsi Eb insistentium in eodem plano fuerint: aequalitate terminata aequalia erunt.

Si enim (in Tom. I. Fig. 17c) prius concipiatur schema circa Eb elevatum plano tabulæ insistens, item in tabulæ plano concipiatur $Cd \parallel$ et $=Eb$, ut fiat pro basi parallelogrammum $EbDc$; atque claudantur prismata: erunt manifesto et parallelogramma ipsi Cd insistentia in eodem plano, atque alterum alteri congruenter æquale respondebit. Evidens etiam est, etiam parallelogramma $Ebæ$ et $Eb'a'$ pro basibus prismatum eorundem iuxta rectam Ec exstructorum accipi posse; concipientur idecirco novæ hæ eorundem prismatum bases $Ebæ$, $Eb'a'$, ita uti in tabula sunt; cadent prismata et basis prior $EcdB$ in plagam inferiorem; atque si (pag. 230) lineis, quæ partes parallelogrammorum aequalitate terminata æquales distinguunt, in basibus novis inferioribus respondentes accipientur, orientur totidem prismata sibi invicem respondentia æqualia; nempe ut prismatum horum partialium bases congruant, quævis solo motu rectangularum (tanquam laterum) sine versione pervenire potest.

Scholion. Atque hinc etiam sequitur: 1. quodvis parallelepipedum obliquum etiam, si latere (nempe parallelogrammo) ad basim perpendiculari gaudeat, recto æquale esse terminata aequalitate, adeoque etiam tali, cuius basis rectangulum est; nam prisma rectum ad quamvis basim,

priori basi æqualitate terminata æqualem, reduci posse patet. 2. Atque etiam (Fig. 121.) applicari posse in aperto est; nempe si parallelepipedum quodpiam ad rectum reductum sit, adeoque angulus x rectus sit, reperiatur parallelogrammum æqualitate terminata æquale inter eadem plana parallela; nempe reperitur x pro datis A, a, B .

§. 4.

Parallelepipeda P et p super basi ABCD in plano Q sita, superioribus basibus in plano q ad Q parallelo terminata, etsi nulli parallelogrammi ABCD lateri insistentia ipsorum P et p latera (nempe parallelogramma) in eodem plano fuerint: sunt æqualitate terminata aequalia.

Dicantur enimvero (Fig. 215.) A et A' plana laterum ipsius P parallelorum, lateribus baseos parallelis AB, CD insistentium, et dicantur a et a' plana laterum ipsius p parallelorum ipsis AD, BC insistentium; sitque in A latus ipsius P parallelogrammum $ABCba$, in A' vero sit $CDDdc$, latus ipsius p autem sit $ADD'a'$ in a , et in a' sit $BCC'b'$.

Plana parallela A et A' manifesto secantur per plana a et a' , nam a cum A punctum A et cum A' punctum D commune habet, ita a' cum A punctum B et cum A' punctum C commune habet. Sint hæ sectiones (a plano Q usque ad planum q) Aa'', Bb'', Cc'', Dd'' ; orietur hoc pacto super eadem basi tertium parallelepipedum, quod dicatur k ; nempe Aa'' est \parallel et $= Dd''$, quia sectiones planorum parallelorum A, A' per planum a factæ inter plana parallela sunt (pagg. 225, 228), ita $Bb'' \parallel$ et $= Cc''$; atque etiam $Aa'' \parallel$ et $= Bb''$, quia planorum parallelorum sectiones per A inter plana parallela Q et q sunt.

Evidens quoque est parallelepipeda p, k inter plana parallela a et a' , atque P et k inter plana parallela A et A' contineri. Consequenter tam P quam p eidem k (per præcedentia), atque adeo (Tom. I. pag. 64) et P ipsi p æqualitate terminata æqualia sunt.

Scholion. (Fig. 216.). Itaque qualevis parallelepipedum in *rectum* æqualitate terminata exstrui potest, et basis in *rectangulum*, atque hoc in

quadratum mutari, imo et quotvis et qualiasi parallelepipedo ad bases quadratas reduci, et haec in unum quadratum summarri (pagg. 109, 110), atque (pag. 108) dicta applicari possunt. Sint nimis parallelepipedo iam ad rectum reducti dimensiones A, B, C , nempe pro basi rectangula laterum A et B sit altitudo C ; mutetur basis haec in rectangulum, cuius latus α sit, prodeat latus alterum β , et fiat e prisme priore novum huic rectangulo altitudine C insistens; erit idem parallelepipedum rectum etiam pro basi rectangula laterum C et β , et altitudine α ; mutata iam ista basi in rectangulum, cuius latus α sit, prodeat alterum $=\gamma$, reducaturque parallelepipedum ad hanc basim; manebit omnino altitudo α , et baseos latus unum erit pariter α ; consequenter latus unum parallelepipedo quadratum lateris α , altitudo vero γ erit.

§. 5.

Parallelepipedo P soliditas est, sensu statim dicendo, basi per altitudinem multiplicatae aequalis: per altitudinem in omnibus prismatibus (etsi non rectilinea fuerint) distantiam duarum basium, nempe perpendicularis e qualibet ad alteram, intelligendo.

Sint enim baseos rectangulae latera A et B , atque altitudo sit C (Fig. 217.); sintque prius A, B, C commensurabilia; ac pro unitate determinata, et m, a, b, c numeros integros denotantibus, sit

$$A = \frac{a}{m}, \quad B = \frac{b}{m}, \quad C = \frac{c}{m} \quad \text{et} \quad u = \frac{1}{m}.$$

Fiant ab extremitatibus ipsorum u in A parallelæ ad B , et ab extremitatibus ipsorum u in B parallelæ ad A ; eriganturque ex omnibus his rectis rectangula altitudinis C ad basim perpendicularia, atque ab extremitatibus ipsorum u in C fiant plana ad basim parallela: fient manifesto in strato inferiore tot cubi, quot quadrata in basi generata sunt, nempe numero ab tales cubi, quorum latus lineare $u = \frac{1}{m}$ est; itaque in toto parallelepipedo erunt abc tales cubi. Est vero rectarum A, B, C factum nempe ABC

$$= \frac{a}{m} \cdot \frac{b}{m} \cdot \frac{c}{m} = abc \cdot \frac{1}{m^3},$$

atque cubus quadrato, cuius latus = 1 est, insistens, qui pro unitate solidorum ponitur, continet numero m^3 cubum quadrato, cuius latus $u = \frac{1}{m}$ est, insistentem: itaque factum lineare ABC est unitatis linearis abc/m^3 -tum, uti parallelepipedum unitatis solidorum. Itaque *hoc sensu* exprimet basis nempe AB (pag. 99) multiplicata per altitudinem C soliditatem parallelepipedi.

Si vero aliquod ipsorum A, B, C , aut certa duo, vel singula cum unitate incommensurabilia fuerint: sit

$$A = a \frac{1}{m} + \omega, \quad \omega < \frac{1}{m},$$

id est A contineat a -ies ipsum u , et supersit $\omega < u$, sitque

$$B = \frac{b}{m} + \chi, \quad \chi < \frac{1}{m},$$

$$C = \frac{c}{m} + \lambda, \quad \lambda < \frac{1}{m},$$

(si quod ipsorum ω, χ, λ non $< u$ sed $= 0$ esset, ibi $= 0$ pro $< \frac{1}{m}$ scribi debet).

Erit

$$\frac{(a+1)(b+1)(c+1)}{m^3} > P > \frac{abc}{m^3};$$

dicatur trium harum quantitatum prior P' , et posterior p ; fiet $P' - p = o$, si $m \sim \infty$, adeoque $P - \frac{abc}{m^3} = o$, (quum $P - p < P' - p$ sit); consequenter $\frac{abc}{m^3} \sim P$, nempe limes ipsius $\frac{abc}{m^3}$ est ipsi P æqualis; limes iste autem ABC erit (Tom. I. pag. 86); nam $\frac{a}{m} \sim A$, $\frac{b}{m} \sim B$ et $\frac{c}{m} \sim C$. Id igitur tantum demonstrandum venit, quod $P' - p = o$; quod facile sic patet.

Est

$$\begin{aligned} P' - p &= \frac{bc+ac+c+ab+b+a+1}{m^3} \\ &= \left(\frac{b}{m} \frac{c}{m} + \frac{a}{m} \frac{c}{m} + \frac{a}{m} \frac{b}{m} + \frac{a+b+c+1}{m^2} \right) : m; \end{aligned}$$

et hoc est

$$< \frac{BC}{m} + \frac{AC}{m} + \frac{AB}{m} + \frac{A+B+C}{m^2} + \frac{I}{m^3}$$

atque hoc quoque $\sim o$ (Tom. I. pag. 80).

§. 6.

Est autem qualevis parallelepipedum α aequale tali parallelepipedo recto β , cuius altitudo altitudini prioris, et basis rectangula basi prioris (qualevis parallelogrammum fuerit) aequalis est. Nempe quævis parallelepipeda α et γ , quorum altitudines æquales sunt, si bases congruenter æquales sint, ita poni possunt, ut basibus congruentibus, bases oppositæ in eodem plano ad basim priorem parallelo sint; atque tum (pag. 234) dicta valent, etsi γ prisma rectum fuerit; tum vero basi ipsius γ in rectangulum mutata, γ in β mutari poterit.

Atque hinc manifesto *soliditas* non solum parallelepipedi cuiusvis sed et *prismatis* cuiusvis, adhucdum saltem *rectilinei*, *basi per altitudinem multiplicata prodit*. Quodvis prisma triangulare enim æquatur (pag. 233) parallelepipedo, cuius altitudo altitudini illius, et basis basi illius (nempe parallelogrammum triangulo) æquales sunt; atque quodvis prisma rectilineum, basi rectilinea in triangula divisa, in totidem prismata triangularia dispescitur, adeoque totum æquatur summae triangulorum, in quæ basis divisa est, per altitudinem eandem multiplicata.

3112223.

Forma sub hoc numero (in calce) generata cum complexu rectarum ex omnibus figuræ planæ rectilineæ punctis ad idem punctum α ductarum manifesto coincidit: *forma pyramidalis* (sensu generaliore) exponitur pag. 10, quo etiam conus (de quo plura inferius) aliaque pertinent.

3112223. Si in 3112222 e cuiusvis anguli vertice ad quodvis punctum α ibidem dictum recta cogitetur; vertaturque planum P circa latus quodvis, donec α incidat: nascitur *pyramis rectilinea*.

§. 1.

Si *pyramis triangularis* (Fig. 218.), nempe triangulo ΔBC superstructa, plano ad basim ΔBC per α parallelo secta fuerit, latus ΔAC secabitur in $ac \parallel AC$, latus ΔCB secabitur in $ab \parallel CB$, atque latus tertium nempe ΔAB secabitur in $cb \parallel AB$; fientque anguli ad apices triangulorum abc , ΔBC litera nominis eiusdem designatos æquales; consequenter triangula dicta erunt similia; quod et inde patet, quod propter $ac \parallel AC$ et $ab \parallel CB$, atque $bc \parallel BC$, triangula acf et ΔAC , afb et ΔCB , bfc et ΔBC similia sint, adeoque

$$ac : AC = fa : fA = ab : CB = fb : fB = bc : BC;$$

unde triangula per latera proportionalia similia sunt.

§. 2.

Pyramidis rectilineae soliditas est aequalis basi multiplicatae per tertiam partem altitudinis (id est rectæ perpendicularis ex apice α ad planum baseos demissæ).

Nam si pyramidis triangularis (nempe cuius basis triangulum est) soliditas basi per tertiam partem altitudinis multiplicataæ æqualis sit, quævis pyramidis rectilinea, si basis in triangula dispescatur, erit summæ horum triangulorum (nempe basi totius pyramidis) per altitudinis totius (nempe perpendicularis ex eodem apice α ad idem planum demissæ) tertiam partem multiplicataæ æqualis.

Quamobrem id tantum demonstrandum est, quod pyramidis triangularis soliditas sit tertia pars facti e basi in altitudinem, adeoque parallelepipedi, cuius basis basi pyramidis, altitudo altitudini æqualis est: quod fit modo sequente. (Fig. 219.)

Basis ΔBC dicatur B' , altitudo A' , sintque latera linearia ad verticem A , B , C , sintque

$$\frac{A}{3} = a, \quad \frac{B}{3} = b, \quad \frac{C}{3} = c,$$

atque fiant per puncta divisionis rectarum A , B , C plana: erunt hæc (per præcedentia) ad basim B' parallela; fientque tria strata, quorum infimum cum medio triangulum abc , uti medium cum supremo triangulum $a'b'c'$ commune habebit. Ducantur ex apicibus a , b trianguli abc , (quod strato infimo medioque commune est), parallelæ ab'' , ac'' ex a ad B et C , et ex b ad A et C parallelæ ba'' , bc'' ; orientur in strato infimo quatuor corpora, nempe prisma super basi $c''c''\mathcal{C}$ iuxta rectam $\mathcal{C}c=c$ exstructum, pyramis e basi $Ab''c''$ ad apicem a , et pyramis e basi $Ba''c''$ ad apicem b , et corpus quinque laterum, quorum retia (Fig. 219*, 1, 2, 3, 4) exhibent; nimirum basis \mathfrak{ABC} dispescitur in triangula $Ab''c''$, $Ba''c''$, trapezium $b''a''c''c''$, et triangulum $c''c''\mathcal{C}$ basim prismatis.

Pyramides dictæ sunt singulæ pyramidæ, quæ stratum supremum constituit, æquales, uti rete (Fig. 219*, 5) demonstrat, nempe in triangulo \mathfrak{ACf} est

$$\mathfrak{Ac}' : \mathfrak{AC} = \mathfrak{Af} : \mathfrak{Af};$$

itaque si $\mathfrak{AC}=3\alpha$, erit $\mathfrak{Ac}'=\alpha$; ita $\mathfrak{Ab}''=\gamma=\mathfrak{Ba}''$, et si $\mathfrak{BC}=3\beta$, est $\mathfrak{Bc}''=\beta$; adeoque dum c'' baseos cum c'' lateris \mathfrak{AfC} coincidit, $c''b''$ fit $=\beta$, etiam b'' in se manente \mathfrak{C} . Prismatis dicti autem soliditas est $=\frac{4A'B'}{27}$; nam basis est

$$\triangle c''\mathcal{C}c''=abc=\left(\frac{2}{3}\right)^2 B',$$

quia areæ similiū sunt, uti quadrata laterum homologorum, ab vero $\frac{2}{3}$ -tum ipsius \mathfrak{AB} est; altitudo autem prismatis dicti est $=\frac{A'}{3}$, quia si perpendicularis demittatur ex f ad \mathfrak{ABC} , erit hæc et ad abc perpendicularis, sit hoc in punctis \mathfrak{P} et p : erunt triangula \mathfrak{fPa} et \mathfrak{fpA} similia, adeoque

$$\mathfrak{fp} : \mathfrak{fP} = \mathfrak{fa} : \mathfrak{fA}.$$

Stratum medium vero erit pyramis truncata, cuius si uti tota pyramis compacta est, in planis laterum $aa'c'c$ et $bb'c'c$ ad rectam cc' ex a et b rectæ parallelæ æqualesque ducantur: orietur manifesto prisma, completa pyramide truncata dicta per corpus quinque laterum, cuius rete est plane illud, quod (Fig. 219*, 4) in strato inferiore exponitur; quamvis

inverti debeat, ut complementum dictum prodeat; erit nempe superius trapezium, cuius latus unum $a'b' = \gamma$ et ei parallelum 2γ est, latus ex a' est $= \alpha$ et latus ex b' est $= \beta$ (per parallelogrammorum latera opposita); secundum latus corporis huius, pyramidem dictam truncatam ad prisma complentis, est parallelogrammum ex $ab = 2\gamma$ et c , tertium est trapezium $a'b'ba$, quartum et quintum sunt ad A et B triangula laterum a, c, α et laterum b, c, β .

Tota pyramis igitur est $= \frac{8A'B'}{27} + 3p$ (si pyramidis stratum superius constituens p dicatur), nempe duo strata inferiora simul duo prismata aequalia et duo p efficiunt. Est autem ipsius p basis $= \frac{B'}{9}$ (pag. 111), altitudo $\frac{A'}{3}$; et si cum p eadem operatio suscipiatur, dicaturque p' pyramidis stratum superius constituens: erit $p = \frac{8A'B'}{27^2} + 3p'$, quum pro A' nunc $\frac{A'}{3}$ et $\frac{B'}{9}$ pro B' sit; adeoque $3p$ erit $= \frac{3 \cdot 8A'B'}{27^2} + 3^2 p'$; atque si eodem modo tractetur quodvis p' , et quævis pyramidis stratum superius efficiens uno accento plures nanciscatur: manifesto prisma totum erit

$$= 8A'B' \left(\frac{1}{27} + \frac{3}{27^2} + \frac{3^2}{27^3} + \frac{3^3}{27^4} + \cdots + \frac{3^{n-1}}{27^n} \right) +$$

$$+ 3^n$$
 eiusmodi pyramidibus, quarum basis $\frac{B'}{9^n}$, altitudo $\frac{A'}{3^n}$ est.

Est autem summa s harum pyramidum minor, quam si pro eadem basi et altitudine in prismata mutarentur; esset vero prismatum horum summa $3^n \cdot \frac{B'}{9^n} \cdot \frac{A'}{3^n}$, adeoque $s < \frac{A'B'}{9^n}$, consequenter $s \sim o$ si $n \sim \infty$.

Summa S progressionis geometricæ intra parenthesim (quum exponentis $\frac{3}{27} < 1$ sit) autem $\sim \frac{1}{27} : \left(1 - \frac{3}{27} \right) = \frac{1}{24}$; quod per $8A'B'$ multiplicatum $\sim \frac{A'B'}{3}$. Consequenter $S \sim \frac{A'B'}{3}$, et si tota pyramis P dicatur, S semper $< P$ manet, sed $P - S = s \sim o$; itaque $S \sim P$; et per consequentiam $P = \frac{A'B'}{3}$.

Scholion 1. Pyramidem triangularem quamvis in genere aequalitate terminata ad prisma reduci posse vel non posse (adhucdum) haud liquet.

Scholion 2. Potest etiam quodvis corpus planis rectilineis clausum in pyramides rectilineas (uti figura rectilinea in triangula) dispesci; et *summa pyramidum erit soliditas totius.*

Scholion 3. *Superficies pyramidis rectilineae* manifesto est summa triangulorum latera pyramidis constituentium, basi addita.

Sed quæstiones oriuntur :

1. quomodo perpendicularis ex apice demissæ quantitate locoque atque basi ΔBC pyramidis triangularis, cuius apex p est, datis, latera innotescant, ut etiam rete construi queat.

2. Si nonnisi basis ΔBC , recta Ap et angulus solidus ad A detur: inde altitudinem et latera reperire.

I. Quoad primum : sit (Fig. 220.) p apex pyramidis, cuius basis ΔBC est, et perpendicularis ex p ad planum baseos sit pp' ; erit pp' perpendicularis ad PB , PC , BC ; atque in triangulis rectangulis ApP , CpP , BpP e cathetis hypotenusa innotescunt, nempe ex Ap , Pp prodit hypotenusa Ap , ex Bp et Pp prodit Bp , et ex Cp et Pp prodit Cp . E trianguli ApC lateribus autem innotescit γ , atque e triangulo Apq ad q rectangulo prodit Pq , et in triangulo pPq ad P rectangulo prodit etiam angulus, quem pq cum qP , id est planum pAc cum plano ΔBC , facit.

II. Quoad secundum (Fig. 220.) si præter basim ΔBC nonnisi Ap et angulus solidus ad A detur, nempe $\angle pAc = v$, et $\angle CAB = \beta$, atque $\angle BAp = \alpha$: dicatur u angulus, quem planum ApC cum basi facit. Concipiatur angulus solidus ad A in centrum sphæræ poni; per angulos v , β , α , ad verticem A datos, latera trianguli sphærici omnia data erunt, unde prodit u (per inferius dicenda).

Demissa tum ex p in plano ApC perpendiculari pq ad AC , in triangulo Apq ad q rectangulo ex Ap et v prodit pq (imo etiam Aq); atque hinc in triangulo ad P rectangulo pqP , ex pq et angulo u planorum ApC et ΔBC , prodit cathetus nempe perpendicularis quæsita pP , et prodit etiam Pq .

Latus pB trianguli ApB autem prodit ita: ex Aq et Pq , quæ antea prodierant, in triangulo rectangulo Aqp prodit γ et Ap ; atque in triangulo PAB ex angulo $\gamma + \beta$ et lateribus Ap et AB prodit PB ; atque hinc in triangulo ad P rectangulo PpB e cathetis Pp , PB prodit pB .

Scholion 4. Superficies prismatis rectilinei est summa parallelogramorum lateribus baseos insistentium, additis duabus basibus æqualibus. Hic quoque prisma triangulare considerare sufficit. *Latera linearia* hic omnia sunt æqualia; nempe si (pagg. 228 §) basis sit \mathfrak{ABC} , et latera prismatis sint parallelogramma \mathfrak{ABa} , \mathfrak{ACa} , \mathfrak{BCb} : erit prisma iuxta rectam \mathfrak{Aa} constructum, et $\mathfrak{Aa} = \mathfrak{Bb} = \mathfrak{Cc}$, atque \mathfrak{Aa} , \mathfrak{Bb} , \mathfrak{Cc} *latera linearia* dici possunt.

Quæstiones heic prioribus analogæ exoriuntur.

1. Data basi \mathfrak{ABC} , (Fig. 221.) et puncto a' , quo perpendicularis ex a ad planum baseos demissa cadit, si latus lineare \mathfrak{Aa} detur, e triangulo rectangulo $aa'\mathfrak{A}$ innotescit cathetus aa' ex hypotenusa \mathfrak{Aa} et catheto $a'\mathfrak{A}$. Si vero præter punctum a' et prismatis altitudo aa' data fuerit, innotescit latus lineare \mathfrak{Aa} , ex eodem triangulo ad a' rectangulo, e cathetis aa' et \mathfrak{Aa}' .

Ex \mathfrak{Aa}' , \mathfrak{AC} , $a'\mathfrak{C}$ vero innotescit angulus γ ; atque ex \mathfrak{Aa}' et γ prodit $a'q$ perpendicularis ad \mathfrak{AC} , et prodit etiam \mathfrak{Aq} ; atque e triangulo rectangulo $aa'q$, ex aa' et $a'q$ prodit angulus plani \mathfrak{AaC} cum piano baseos.

2. Si vero præter basim \mathfrak{ABC} et latus lineare \mathfrak{Aa} nonnisi angulus solidus ad \mathfrak{A} , ex $v = a\mathfrak{AC}$, $\beta = \mathfrak{CAB}$ et $\alpha = a\mathfrak{AB}$, detur: tum (ut antea in pyramide, e triangulo sphærico) prodibunt anguli u , u' , quos prismatis latera \mathfrak{AaC} , \mathfrak{AabB} cum basi faciunt. E triangulo ad q rectangulo $aq\mathfrak{A}$ vero ex \mathfrak{Aa} et v prodibunt aq et \mathfrak{Aq} ; atque hinc e triangulo ad a' rectangulo $aa'q$, ex aq et angulo lateris $a\mathfrak{AC}$ cum basi prodit altitudo aa' .

Atque etiam lateris ipsi \mathfrak{BC} insistentis angulus $b\mathfrak{BC}$ parallelogrammi \mathfrak{BCcb} innotescit modo sequente: $b\mathfrak{B}$ est $= a\mathfrak{A}$, et si ex \mathfrak{B} parallela \mathfrak{Bb}' ducatur ipsi \mathfrak{Aa}' , eidem æqualis, erit bb' perpendicularis ex b ad basim; et ex b' perpendiculari $b'q'$ ad \mathfrak{BC} missa exhibebitur \mathfrak{Bq}' , eritque bq' perpendicularis ad \mathfrak{Bq}' ; adeoque in triangulo ad q' rectangulo $\mathfrak{Bq}'b$ innotescit angulus ad \mathfrak{B} parallelogrammi ipsi \mathfrak{BC} insistentis. Aut ponatur anguli solidi ad \mathfrak{B} apex in centrum sphæræ; erit in triangulo sphærico latus unum per parallelogrammi \mathfrak{AabB} angulum $\mathfrak{AAb} = 2R - \alpha$ datum (nempe summa duorum internorum $= 2R$), alterum quoque datur,

quum sit $=\angle ABC$, et angulus u' antea innotuerat. Unde latus tertium prodit, parallelogrammi lateris BC insistentis angulum ad B exprimens; adeoque latera prismatis singula innotescunt. Si parallelepipedum sit, tum parallelogrammis, quae ipsis AC et AB insistunt, opposita æqualia sunt.

·312.

Motus figurarum circa axem.

·3121.

Quadrilaterum rectangulum circa latus aliquod revolutum parit *cylindrum rectum* circulo tanquam basi insistentem, e cuius centro erecta ad basim perpendicularis *axis cylindri* audit. Estque manifesto cylinder prisma rectum, quum recta axi parallelia, donec redeat, ubique eadem et tam ad tangentem circuli quam ad radium perpendicularis, adeoque ad planum ipsum perpendicularis sit.

Est vero, sive circulus sive quævis figura in plano (sive curva, sive ex curva et recta utcunque mixta) pro basi accipiatur, iuxta quamvis rectam, plano sive perpendiculariter sive oblique insistentem, constructum fuerit prisma: *soliditas eius, basi per altitudinem multiplicatae aequalis.*

Nam consideretur prius cylinder (sive rectus sive obliquus) circulo insistens: erat (ex pag. 104) polygoni inscripti area a , atque $a + \lambda > C > a$. Si igitur cylindri altitudo A sit, et concipientur ad eandem altitudinem A prismata rectilinea basibus $a + \lambda$ et a insistentia, dicaturque prius Q , posterius q , atque cylinder dicatur C' : erit manifesto $Q > C' > q$ (nempe $(a + \lambda) A > C' > aA$); atque $Q - q \sim o$. Consequenter $C' - q \sim o$, adeoque $q \sim C'$. Sed $q \sim \frac{PrA}{2}$, (si radius r sit, et $p \sim P$); itaque C' æqualis est areæ circuli per altitudinem multiplicatae.

·312. *Motus figurarum circa axem.*

- 3121. *Quadrilateri rectanguli revolutio circa latus parit cylindrum rectangularem.*
- 3122. *Trianguli rectanguli revolutio circa cathetum parit conum rectangularem.*
- 3123. *Revolutio semicirculi circa diametrum parit sphæram.*

Potest autem quævis basis, (sive una linea curva claudatur, sive perimetri tantum pars una vel plures curvæ sint), ita dividi, ut summa prismatum his baseos partibus insistentium prisma toti æqualis sit; possuntque pro quavis α harum baseos partium, cuius perimeter parte curva gaudet, talia rectilinea L , l generari, ut $L > \alpha > l$, atque $L - l \sim o$, adeoque $\alpha - l \sim o$, et consequenter $\alpha A - Al \sim o$, atque $Al \sim \alpha A$, id est αA sit ipsius Al limes, æqualis prisma basi α altitudine A insistenti.

3122.

Trianguli rectanguli revolutio circa cathetum parit *conum rectum*, et cathetus dictus *axis*, *hypotenusa vero coni latus* audit. Patet autem iuxta (pag. 10) pyramidem sensu latiore esse non hunc conum solum, sed et obliquum, nempe complexum omnium rectarum, quæ e circulo ad idem aliquod tale punctum p sunt, etsi recta ex p ad centrum circuli non sit perpendicularis ad planum circuli; imo et complexum rectarum e cuiusvis figuræ planæ punctis omnibus ad idem punctum p extra planum situm; atque etiam iis, quæ (in præcedentibus) de cylindro dicta sunt, applicatis, cuiusvis coni soliditatem esse basi per tertiam partem altitudinis multiplicatæ æqualem.

§. I.

Superficies cylindri recti (præter bases) est $A\pi D$, si A altitudinem cylindri, D diametrum baseos circularis, et π quantitatem peripheriae pro diametro r denotet. Si nimur basi inferiori inscribatur polygonum, et in basi superiore puncta inferioribus respondentia accipientur, atque parallelogramma, per latera parallelæ polygonorum in basibus parallelis sibi invicem respondentia efformata, concipientur: limes summæ horum parallelogrammorum est summæ laterum polygoni limes per constantem A multiplicatus; atque per superficiem cylindri, dum cum plano comparatur, hoc intelligitur; fit nempe tum quantitas respectiva, quamvis et per se etiam quantitas sit, et quævis eius portiones quidem inter se (quoad maioritatem minoritatemve) comparari queant; interim et duæ

superficies cylindricæ, si circulis radiorum inæqualium insistant, respectu dicto nonnisi ut quantitates respectivæ comparantur.

Idem ad conum, aliasque quasvis superficies curvas applicatur; demonstrari nempe potest triangulis se invicem excipientibus inscriptis, ut nempe apices omnes eorum in superficiem curvam cadant: summam eorum ad limitem certum tendere, si cuiusvis eorum singuli tres apices sibi invicem dato quovis proprius veniant; limitemque eum, utcunque inscribantur triangula, eundem esse.

In cono recto circulo insistente patet, triangulorum ex apice ad latera polygoni basi inscripti generatorum summam ad $\pi D\alpha$ tendere, si D diametrum baseos et α dimidium lateris coni denotet.

Scholion. Atque hinc *rete cylindri recti* erit (præter bases) rectangulum altitudinis eiusdem, quæ cylindri est, rectæ perimetrum baseos cylindri exæquanti superstructum; basis autem si circulus fuerit, sive recta dicta computatur e diametro, sive si e recta data quæratur diameter, facile construitur. Si vero alia linea sit perimeter baseos, eius longitudine computanda est, ut rectanguli basis prodeat.

Rete coni recti autem sector est, cuius centrum apicem, latus radium, et arcus perimetrum baseos circularis præbet. Sunt enim, si basis circulus et recta e centro ad apicem ducta ad basim perpendicularis fuerit, latera coni omnia æqualia, quum sint hypotenusæ triangulorum rectangularium æqualium: quod ex. gr. si pro circulo ellipsis esset centro eodem gaudens, minime locum haberet. Basis circularis ex arcus longitudine, quæ e ratione arcus ad peripheriam atque radio innotescit, prodit; longitudo arcus enim per π divisa diametrum baseos præbet. Est vero angulus ad apicem eo acutior, quo minor angulus sectoris ad centrum est, et eo magis obtusus, quo proprius ad quatuor rectos angulus dictus accedit.

Potest quoque e dato angulo ad apicem arcus sectoris, uti ex arcu sectoris angulus ad apicem reperiri. Sit nempe (Fig. 222.) latus coni l , axis a , et radius baseos sit r ; dato angulo u et axe a , reperitur tam l quam r ; eritque perimeter baseos $2r\pi$ arcui sectoris radio l scripti æqualis; tota peripheria esset $2l\pi$; sit x quantitas quæsita talis, ut

$$2l\pi x = 2r\pi$$

sit; erit

$$lx = r \quad \text{et} \quad x = \frac{r}{l}.$$

Si vero l et x data fuerint, erit $r = lx$, atque ex l et r prodit u .

Potest etiam rete pro cylindro basi qualivis datae ad quemvis angulum insidente, saltem per puncta utvis propinqua construi; et idem de cono valet; neque proprius sensu geometrico præcisum sensum sive recta in curvam, sive planum in superficiem curvam flexa habent, nisi id per motum circa puncta illius, vel rectas huius ad intervalla fiat, atque resultatorum limites geometrici accipientur.

Ex. gr. Sit basi circulari superstruendus cylinder aut conus talis, ut cum basi inferiore, in cylindro recta basium centra iungens, et in cono recta e centro baseos ad apicem, faciant certum angulum datum; aut in utroque sit basis ellipsis, cuius centrum c sit, atque angulus, quem in cylindro recta per centra baseos, in cono recta ex apice ad centrum, cum basi facit, dato angulo æqualis sit.

Potest cuivis curvæ, (qualiscunque fuerit), linea polygonalis inscribi, atque sive prisma sive pyramis fuerit, potest in triangularia dividi, quorum bases latera lineæ polygonalis dictæ sint; atque applicatis iis, quæ (pag. 242) dicta sunt, rete quantolibet exactius construi; imo etiam limes geometricus baseos in plano quæri, tam in prismate, si parallelogramma laterum basi inconsistentium æqualium, uti se invicem excipiunt, iungantur, quam in pyramide triangula, uti se invicem apice communi excipiunt, iungantur. Parallelepipedo recti rete (exclusis basibus) constabit e quatuor rectangulari eidem rectæ inconsistentibus; quia latera parallelogrammarum coincidentia cum basibus angulos rectos adeoque tales angulos deinceps positos efficiunt, qui simul duos rectos exæquant. Ubi vero hoc neque per limitem locum habet, parallelogramma in prismate, triangula in pyramide ita poni debent, uti se invicem excipiendo prodeunt; et ubi locum habet, limes geometricus quærendum est.

Est quoque, ut inferius patebit, cylinder obliquus circulo insistens nonnisi cylinder rectus ellipsi insistens, ad certum angulum oblique sectus;

et pariter conus circulo oblique insistens nonnisi conus rectus ellipsi insistens oblique sectus est: unde retia tam cylindri quam coni obliqui, sive circulo sive ellipsi ad datum angulum insistentium, reperiuntur.

Nempe cylindri recti circulo, imo et ellipsi insistentis rete construitur (pag. 245). Coni recti ellipsi insistentis quoque rete construi potest. Nam (Fig. 223.) sit ellipseos centrum c , sitque cd dimidium axis minoris, et Ac dimidium axis maioris; sitque $cc' \perp Ac$, et c' apex coni; moveatur cd usque in Ac , fiet ubique triangulum ad c rectangulum, cuius cathetus e c usque ad ellipsin crescat usque ad Ac , et ubique determinari poterit, alter cathetus vero cc' erit; unde hypotenusa, nempe latus coni in illo loco, reperitur; adeoque etiam triangula se invicem excipientia, quorum bases chordae et latera hypotenuse dictae sunt, adeoque rete cum errore quantovis minore construi poterit.

Si vero conus (vel cylinder) rectus constructus fuerit: sit (Fig. 224.) basis $ABCE$ in plano tabulæ, atque AH sit tangens ad punctum A , circa quam planum e basi elevetur ad certum angulum u , atque planum baseos sit P , et planum elevatum dicatur ρ .

Quamvis res summa generalitate exponi posset, simpliciora proferre sufficiat.

Sit prius cylinder vel conus rectus ellipsi insistens, cuius axis minor $AD = b$, et axis maior EC , centrum f , et perpendicularis ad basim ex f usque ad basim cylindri superiorem (aut apicem coni) sit pf ; secetque planum ρ perpendicularē dictam fp in f' . Innotescet ff' in triangulo ad f rectangulo Aff' ex angulo u et catheto Af .

Sit iam e fine B arcus AB ad P erecta perpendicularis usque ad ρ ; cadet hæc manifesto in superficiem cylindri; sit b' punctum eius cum ρ commune.

Patet quod si cylindri rete rectangulare sit (Fig. 225.), cuius basis $AQ =$ perimetro baseos, atque pro arcu $AB =$ rectæ $A'B'$ construatur ad $A'B'$ perpendicularis $B'b'' = Bb'$; et quum hoc cum punctis perimetri baseos quam proximis suscipi queat: rete cum errore quantovis minore construi possit, si ex A' incipiendo usque ad Q rectæ ducantur ab A' ad b'' et a b'' ad c'' E , atque pars infra hanc lineam cadens resecetur.

Itaque quæstio eo redit, ut (in præcedentibus) $\mathfrak{B}\mathfrak{b}'$ determinetur, quod modo sequente fieri potest: perpendicularis ex \mathfrak{B} ad $\mathfrak{A}\mathfrak{H}'$ demissa cadat in \mathfrak{B}'' , erit

$$\wedge \mathfrak{b}'\mathfrak{B}''\mathfrak{B} = \wedge \mathfrak{f}'\mathfrak{A}\mathfrak{f} = u;$$

itaque triangula rectangula $\mathfrak{b}'\mathfrak{B}'\mathfrak{B}$ et $\mathfrak{f}'\mathfrak{A}\mathfrak{f}$ erunt similia; adeoque erit

$$\mathfrak{A}\mathfrak{f} : \mathfrak{f}\mathfrak{f}' = \mathfrak{B}''\mathfrak{B} : \mathfrak{B}\mathfrak{b}' \text{ seu } \mathfrak{B}\mathfrak{b}' = \alpha \cdot \mathfrak{B}\mathfrak{B}'',$$

si $\frac{\mathfrak{f}\mathfrak{f}'}{\mathfrak{A}\mathfrak{f}}$ dicatur α . Est autem

$$\mathfrak{B}''\mathfrak{B} = \frac{b}{2} + y,$$

si y infra \mathfrak{EC} negative et superius positive accipiatur.

Si vero cylinder circulo insistat, adeoque b diameter sit: manifesto $\mathfrak{B}''\mathfrak{B}$ sinus versus arcus $\mathfrak{A}\mathfrak{B}$ erit; adeoque si polygonum regulare inscribatur, et $\mathfrak{A}\mathfrak{B}$ sit arcus chordæ primæ ex \mathfrak{A} incipientis, dicaturque β , erunt in rete transferendæ perpendiculares sequentes: α sin. vers. β , α sin. vers. 2β , α sin. vers. 3β \mathfrak{T} , nempe ad distantias β , 2β , 3β \mathfrak{T} ex \mathfrak{A}' acceptas.

Sit iam conus rectus basi eidem superimpositus; in reti coni punctum piano ρ superficie conicæ commune, reperto $\mathfrak{B}\mathfrak{b}'$, facile innotescit: (Fig. 226.) $\mathfrak{p}\mathfrak{f}$ et $\mathfrak{b}'\mathfrak{B}$ ad planum P perpendiculares in plano sunt, at in hoc idem cadit coni latus $\mathfrak{p}\mathfrak{B}$, et in idem cadit recta $\mathfrak{f}'\mathfrak{b}'$, (quia puncta \mathfrak{p} , \mathfrak{f}' , \mathfrak{b}' , \mathfrak{B} in idem cadunt, adeoque et recta inter quævis bina eorum); manifesto autem secatur $\mathfrak{p}\mathfrak{B}$ per $\mathfrak{f}'\mathfrak{b}'$, et sectio ista in ρ est, quia puncta \mathfrak{f}' , \mathfrak{b}' in ρ sunt, adeoque quodvis punctum rectæ $\mathfrak{f}'\mathfrak{b}'$ in ρ est. Sit sectio ista q ; recta $\mathfrak{B}q$ in rete ad latus $\mathfrak{p}\mathfrak{B}'$ ex \mathfrak{B}' transferenda facile prodit, (sive per constructionem, sive calculum), quum $\triangle \mathfrak{f}\mathfrak{p}\mathfrak{B}$ ad \mathfrak{f} rectangulum, simul cum $\mathfrak{f}\mathfrak{f}'$ et $\mathfrak{B}\mathfrak{b}'$ data sint.

Si vero (Fig. 227.) planum P circa $\mathfrak{A}\mathfrak{H}''$ ipsi $\mathfrak{A}\mathfrak{H}'$ parallelam elevetur, et planum elevatum in loco novo dicatur ρ : tum nonnisi β subtrahendum ex $\mathfrak{B}\mathfrak{B}''$ erit, ut remaneat $\mathfrak{B}\mathfrak{B}'''$; et si perpendicularis ex \mathfrak{D} usque ad planum ρ erecta k dicatur, hæc ex γ et angulo u ipsis ρ cum P innotescit; et si perpendicularis ex \mathfrak{B} ad P sit $\mathfrak{B}\mathfrak{b}''$, erit

$$\gamma : k = \mathfrak{B}\mathfrak{B}''' : \mathfrak{B}\mathfrak{b}''' ;$$

et huic $\mathfrak{B}\mathfrak{b}''$ æqualis erit pro hoc casu in reti perpendicularis ad basim ad distantiam ab \mathfrak{A}' ipsi \mathfrak{AB} æqualem pro punto \mathfrak{B} construenda.

In cono recto autem (Fig. 227.), si $\mathfrak{f}\mathfrak{p}$ per ρ non secetur, adeoque planum secans ρ ad P planum baseos perpendicularare sit, erit $u=R$, nempe angulus planorum ρ et P se invicem (Fig. 228.) in $\mathfrak{P}\mathfrak{Q}$ secantium rectus erit; prodibitque pro puncto \mathfrak{M} recta $\mathfrak{M}\mathfrak{m}'$ e latere $\mathfrak{p}\mathfrak{M}$ ex \mathfrak{M} incipiendo in reti resecanda modo sequente: fiat e centro \mathfrak{f} recta ad \mathfrak{M} , secetque hæc rectam $\mathfrak{P}\mathfrak{Q}$ in c' ; secabunt se invicem plana $\mathfrak{f}\mathfrak{M}\mathfrak{p}$ et ρ , ad P perpendicularia et punctum c' commune habentia, in recta aliqua per c' eunte; erit igitur hæc perpendicularis ad P adeoque ad $\mathfrak{f}\mathfrak{M}$, secabitque hæc rectam $\mathfrak{p}\mathfrak{M}$; fiat id in m' ; erunt triangula rectangula $\mathfrak{p}\mathfrak{f}\mathfrak{M}$ et $m'c'\mathfrak{M}$ similia; consequenter

$$\mathfrak{f}\mathfrak{M} : \mathfrak{p}\mathfrak{M} = c'\mathfrak{M} : \mathfrak{M}\mathfrak{m}'.$$

§. 2.

Corporum similiū soliditates sunt, ut cubi linearum homologarum, superficies autem sunt, ut quadrata linearum homologarum.

Etenim quodvis corpus C , cuius superficies sit S , in pyramides triangulares (saltem e punto interno uno aut pluribus) dispesci potest; et aut summa basium superficies corporis erit, aut apicibus basium triangularium dato quovis propius acceptis summa pyramidum $\sim C$, summa basium vero $\sim S$.

Sint corpora similia A et B ; applicatis iis, quæ (pagg. 77—78, 111 et 239) dicta sunt: quævis linea in A erit eidem homologæ in B per constantem α (eandem pro omnibus) multiplicatæ æqualis; et si bases triangulares in utroque semper simultaneo homologæ accipientur, erit in A quodvis triangulum t ei in B homologo t' per α^2 multiplicato æquale; pyramidis ρ autem basi t insistentis altitudo erit altitudini pyramidis ρ' basi t' insistentis homologa, adeoque si altitudo ipsius ρ sit $a=\alpha\alpha'$, erit

$$p = \frac{ta}{3} = \frac{\alpha^2 t' \alpha a'}{3} \quad \text{et} \quad p' = \frac{t' a'}{3},$$

consequenter

$$p:p' = \frac{\alpha^3 t' a'}{3} : \frac{t' a'}{3} = \alpha^3 : 1,$$

sive uti tertiae potentiae linearum homologarum.

Hinc etiam, si summa omnium pyramidum $p \sim P$, et summa omnium pyramidum $p' \sim P'$, erit

$$P:P' = \alpha^3 : 1.$$

Ita si summa omnium triangulorum $t \sim s$, et summa omnium triangulorum $t' \sim s'$, erit

$$s:s' = t:t' = \alpha^2 : 1.$$

Scholion. In pyramidibus similibus, quae rectilineis insistunt, divisio in pyramides triangulares ex apice in utraque fieri potest. In sphæra fit e centro via limitis: atque hinc, (quum sphæræ similes sint), soliditates sunt uti tertiae, superficies autem uti secundæ potentiae radiorum. S sphæræ, cuius radius 1 est, superficies β , soliditas γ dicatur: erit sphæræ, cuius radius n est, superficies $n^2\beta$, soliditas $n^3\gamma$.

Prismata vero quævis, etsi modo dicto per divisionem e puncto interno in pyramides triangulares tractari queant: quum tamen factis ex altitudine in basim æqualia sint: si similia fuerint, sufficit bases altitudinesque quoad soliditatem considerare; nempe si alterutrius altitudo a sit, et basis b , alterius autem altitudo sit na : erit huius basis n^2b , et soliditas $n^2bna = n^3ab$, prioris autem est ab .

3123.

Revolutio semicirculi circa diametrum parit sphæram: cuius soliditas et superficies quærendæ veniunt. (Fig. 229.)

Sit quadratum $ABCD$, et diagonalis DB , ac quadrans AC centro B radio BA , atque parallela quævis dc ad AB : erit manifesto v (ubicunque scriptum est) $= \frac{1}{2} R$, adeoque trianguli fcB crura fc et cB æqualia erunt. Dividatur porro BC per n , et sit ex B incipiendo versus C recta fc

pars eiusmodi; fiatque per f parallela ef ad \mathfrak{AB} , atque erigatur ex f perpendicularis ft ad dc , et demittatur e puncto r , in quo ef quadrantem secat, perpendicularis rg ad ef , atque fiant perpendicularares hi et fl . Revolvatur schema totum circa BC ; describet quadrans AC hemisphærium, quadratum $ABC\mathfrak{D}$ cylindrum, et $\triangle DBC$ ad C rectangulum describet conum, eritque tam coni quam cylindri basis circulus, cuius radius æqualis radio r hemisphærii est, altitudo vero radius; per rectangula $edcf$, $tscf$, $rgcf$ et $hicf$, $lfcf$ autem describentur cylindri, quorum altitudo $cf = \frac{r}{n}$, bases vero sunt circuli radiorum r , sc , gc , ic , fc . ARCHIMEDES movendo planum e circulo per \mathfrak{AB} descripto huic parallele, donec in DC perveniat, sectiones simultaneas in cylindro, hemisphærio, conoque comparat, et reperiendo, quod (quasvis sectiones simultaneas intelligendo) sectio C in cylindro facta sit æqualis summæ sectionis c in cono factæ et sectionis s in hemisphærio factæ: concludit (omnes sectiones simultaneas accipiendo) cylindrum esse summæ coni et hemisphærii æqualem. Et hoc rite intelligendo, ut (Tom. I. pagg. 209 §) dictum est, germen calculi sublimioris continet.

Explicatio sequens est.

Soliditas cylindri dicatur A , soliditas sphæræ sit B , et soliditas coni sit K ; dicaturque cylinder qui per $edcf$ describitur a , per $tscf$ descriptus sit s' , per $rgcf$ scriptus sit s'' , et per $hicf$ scriptus sit c'' , ac per $lfcf$ scriptus dicatur c' ; atque per rcf scriptum (per rf arcum intelligendo) sit b , et per $hfcf$ scriptum sit k .

In triangulo rectangulo fcB est

$$fB^2 = fc^2 + cB^2 = fc^2 + cf^2,$$

quia $fc = cB$. Atque hinc circulus radio Bf scriptus est summæ circumlorum radiis fc , fc scriptorum æqualis, id est (quia $fB = cd$) erit $C = s + c$; et hinc $a = s' + c'$.

Dicatur B' summa omnium s' , et summa omnium s'' sit B'' ; atque summa omnium c' sit K' , et summa omnium c'' sit K'' ; summa pro quibusvis n omnium a est A , omnium b est B , omnium k est K ; atque quum tam cylindri a , quam cylindri s' et c' numero eodem prodeant, et pro quibusvis simultaneis sit $a = s' + c'$, manifesto erit $A = B' + K'$.

Sed

$$B' + K'' > B + K > B'' + K';$$

quia

$$s' > b > s'' \quad \text{et} \quad c'' > k > c'$$

adeoque, quum hoc de omnibus simultaneis valeat, est

$$B' > B > B'' \quad \text{et} \quad K'' > K > K'.$$

Atque si $n \sim \infty$, fit

$$B' + K'' - (B'' + K') \sim 0,$$

quia $\frac{s'}{s''} \sim 1$, et $\frac{c'}{c''} \sim 1$; adeoque et

$$B + K - (B'' + K') \sim 0,$$

id est

$$B'' + K' \sim B + K.$$

Sed et $B' \sim B$, et $K' \sim K$; nam ex $\frac{s'}{s''} \sim 1$ et $\frac{c'}{c''} \sim 1$, et $s' > b > s''$, atque $c'' > k > c'$, fit etiam $\frac{s'}{b} \sim 1$, et $\frac{c'}{k} \sim 1$ (Tom I. pagg. 93 et 209 §). Consequenter

$$B' + K' \sim B + K = A.$$

Est autem $K = \frac{A}{3}$; nempe conus et cylinder eidem circulo maximo insistunt, et altitudo utriusque radius est: consequenter

$$B = A - K = \frac{2}{3}A;$$

atque tota sphæra diametri d fit $= \frac{d^3\pi}{6}$; nempe area circuli maximi est $\frac{d^2\pi}{4}$, et hemisphærium est

$$\frac{2}{3} \cdot \frac{d^2\pi}{4} \cdot \frac{d}{2} = \frac{d^3\pi}{3 \cdot 4},$$

et huius duplum est

$$\frac{d^3\pi}{6} = \frac{4r^3\pi}{3}.$$

Hinc item ARCHIMEDES reperit superficiem S sphærae quadruplo areæ circuli maximi aequalem.

Accipiantur nempe tria puncta in S , et iungantur rectis, ut fiat triangulum, et quodvis latus fiat trianguli novi basis cum apice novo in S , atque hoc semper porro continuetur, ita ut per triangula omnia demum superficies simplex e planis composita apicibus angulorum solidorum in S cadentibus exsurgat. Dicatur summa horum triangulorum S' , fiantque hæ pyramidum apice communi in centro gaudentium bases, sitque pyramidum istarum summa ρ . Si cuiusvis harum pyramidum latera triangulalia producantur, poterunt hæc per planum priori basi parallelum et ipsum S tangens tale secari, ut pyramis baseos novæ priore maior sit, et si pro quavis priorum pyramidum eiusmodi pyramis fiat, dicatur omnium novarum pyramidum summa P . Facile patet, quod $P - \rho \sim o$, si cuiusvis trianguli apices dato quovis propius accipientur; est vero (sphæra B dicta),

$$P > B > \rho,$$

adeoque $B - \rho \sim o$; consequenter $\rho \sim B$. Sed radio r dicto, poni potest

$$\rho = S' \frac{r - \omega}{3},$$

nam quamvis S' summa diversorum triangulorum esse possit, altitudo semper est radio minor; atque ex. gr.

$$\alpha(r - \lambda) + \beta(r - z) = (\alpha + \beta)(r - \omega)$$

poni potest, quia inde valor ipsius ω prodit.

Patet autem, quod $\omega \sim o$, adeoque si tum $S' \sim S''$, ipsum $\rho \sim S'' \frac{r}{3}$; atque hinc, quum soliditas sphæræ antea fuerit $= \frac{(2r)^3 \pi}{6}$, erit

$$\frac{4r^3 \pi}{3} = S'' \frac{r}{3};$$

et hinc

$$S'' = 4r^2 \pi;$$

id est (per superficiem sphæræ limitem laterum planorum corporis inscripti intelligendo) erit superficies sphæræ quadruplo areæ circuli maximi æqualis. Aliquid tamen hanc eandem materiam concernens paulo inferius addetur.

Scholion 1. Rete sphaerae quidem e planis neutiquam construi potest, ut statim patebit; sed exhiberi quam proxime potest: nempe concipiatur (Fig. 230.) quadrans $\alpha\varphi$ in partes numero m dividi; sit centrum c , et revolvatur $\alpha\varphi$ circa qc ; describet α circulum maximum, basim coni recti apicem in polo q habente; r vero describet circulum priori parallelum, basim coni recti apicem in eodem q habente; atque via chordæ αr conus truncatus erit. Si iam tam huius coni truncati rete, quam uti se invicem chordæ m -tarum partium quadrantis usque ad polum excipiunt, retia conorum truncatorum per vias chordarum dictarum descriptorum construantur, atque ita uti se invicem excipiunt compingantur, manifesto quo maius m accipitur, eo minore errore sphæra exhibebitur.

Coni truncati per chordam αr descripti rete prodit modo sequente: secet continuatio rectæ αr continuationem rectæ cq in p ; fiatque centro p radio pa arcus $ab=2r\pi$, et eodem centro p radio pr fiat arcus $rd=2r'\pi$: erit $rabd$ rete coni truncati; nempe notandum est, quod basis coni, cuius apex q et latus qa erat, et basis coni, cuius apex p et latus pa est, congruant, quum utrumque circulus sit, peripheria longitudinis eiusdem gaudens.

Innotescit autem tam ap quam r' , sive per constructionem, sive per calculum, quum

$$rr' = \sin. qr = \cos. \alpha r$$

sit, et anguli, quos latera polygoni ex α incipientis cum perpendicularibus ad qc missis faciunt, facile computentur. Idem vero de quovis latere ad sequens continuari posse patet: ex. gr. conus truncatus lateris rt generatur per arcum $= 2\pi.tt'$, centro p' radio $p't$ scriptum, et arcum $= 2\pi rr'$ centro p' radio $p'r$ scriptum. Constructi autem hi coni truncati, uti se invicem excipiunt, conglutinari et omnia intra bases quadamtenus expleri quoad proxim possunt.

Aut circulus maximus dividitur in quo plures partes æquales, et segmenta a quavis parte ad polos exstruuntur æqualia; si plana per axem et puncta divisionis ponantur: manifesto conorum truncatorum bases omnes in totidem partes divisæ, segmenta appropinquantia præbebunt.

Plures huius modos ad primum magis pertinentes vulgaresque referre non huius loci est.

Quod reipsa autem e plano segmentum tale construi nequeat, sic patet: sit recta $\alpha'q'$ in quadrantem αq flexa, ita ut q' in polum q et α' in α cadat; planum $q'de$ quoque simul incurvabitur; atque etiam de per se circa coni latus qa incurvari posset, ut in circulum maximum C , cuius polus q est, cadat; pariter seorsim quivis arcus $f\bar{g}$ posset in arcum circuli paralleli per ei respondens r euntis incurvari; at si hoc simul fieri debeat, in motu flexus α, r, q simul quiescere deberent, quamvis non in recta sint.

Pariter patet, si prius de incurvetur, ut in C cadat; fiet enim tum figura plana $q'de$ pars superficiei cylindricæ aut conicæ; atque tum novam incurvationem, ut $\alpha'q'$ in αq cadat, fieri non posse pariter patet; quia primus motus circa de fiet, et nulla portio plani ex de incipientis manente arcu de moveri poterit, quum de non sit recta, adeoque axis motus esse nequeat.

Generaliter nulla flexio superficiei esse potest, nisi rectæ se invicem continuo excipiant, atque motus circa illas fiat, uti se invicem continuo excipiunt.

Scholion 2. Solet in praxi hexapeda in 6 pedes, pes in 12 pollices, pollex in 12 lineas primas, linea μ -ta in 12 lineas $\mu+1$ -tas dividi; ita ut $25^{\circ} 5' 7''$ denotet 25 hexapedas 5 pedes 7 pollices; at eandem subdivisionem tam in areis quam in soliditatibus retinere (ob numeros minores) visum est: nempe ubi de areis sermo est, *pes quadratus* significat sextam partem quadrati, cuius latus hexapeda est, et huius pars duodecima dicitur *pollex quadratus* &, ita ut pes quadratus sit rectangulum, cuius altitudo unus pes est, pollex rectangulum altitudinis unius pollicis & sit, semper hexapedam pro basi accipiendo; ita cubi, cuius latus hexapeda est, sexta pars *pes cubicus*, et huius duodecima pars *pollex cubicus* & audit; adeoque pes cubicus est parallelepipedum, cuius altitudo pes, et pollex cubicus parallelepipedum, cuius altitudo pollex & est, pro basi semper quadratum, cuius latus hexapeda est, intelligendo.

Variæ hinc tam areas quam soliditates computandi methodi sunt,

quibus computata sensu dicto exhibeantur. Simplicissima videtur sequens.

Sit unitas duobus hexapedis æqualis, *pertica* dicta; erunt in pertica pedes 12, in pede pollices 12 et ita porro; atque quum computatio areæ per factum e duobus factoribus, soliditas vero e tribus prodeat, res ad multiplicationem reddit: quæ si pro 10 et 11 signa darentur, *numeratione duodecadica* facile peragi, et factum ad linguam communem dictam transferri posset, modo sequente. Scribantur factores ita, ut numerus hexapedarum numero perticarum exprimatur; ex. gr. pro $101^{\circ} 5' 10''$ scribatur 50, 11' 10''; nempe absque eo, ut pro 10 et 11 signa peculiaria ponerentur, possunt pedes, pollices &c imo et perticæ, intervallis distincta, decadice designari, ut in exemplo allato 50 unitates, 11 duodecimæ, et unius duodecimæ 10 duodecimæ denotentur; imo factum quodvis partiale e termino in terminum decadice quæri scribique potest.

Ita scriptis binis areæ factoribus, multiplicatio in numeratione duodecadice peragenda est, ita ut in decadica, dummodo heic 12 ipsius 10 vicem subeat; notando, quod in productorum partialium postea addendorum linea suprema prius tot loca notarum duodecimalium signanda sint, quot notæ duodecimales in factore utroque simul sunt, atque his anteponendum comma sit, ante quod ad lævam numerus unitatum sequitur; atque numeri duodecadum additio ad lævam nonnisi usque ad locum commate insignitum fiat continueturve. Demum vero factum post comma per 2, ante comma autem per 4 multiplicetur, ea cum restrictione, ut a dextra incipiendo usque ad terminum, qui post comma est, translatio duodecadum fiat, in termino post comma ad dextram autem numerus seniorum addatur termino, qui e multiplicatione per 4 termini ante comma prodit. Si vero soliditas quæratur: factum, quod e duobus factoribus prodit, ante multiplicationem per 4 ante comma et post comma per 2, per tertium factorem eodem modo ut dictum est, (juxta systema duodecadicum) multiplicetur; et factum plane ut antea tractetur, eo tantum discrimine, quod termini post comma per 4, et terminus ante comma per 8 multiplicentur.

Nempe una pertica quadrata continet 4 hexapedes quadratas, et una

pertica cubica 8 hexapedas cubicas continet: atque hinc pars duodecima perticæ quadratæ est æqualis tertiae parti hexapedæ quadratæ, adeoque 2 pedibus sensu dicto; ita duodecimæ duodecima 2 pollices facit, quod porro continuari patet; quivis igitur terminus facti e duobus factoribus prodeuntis post comma per 2 ante comma per 4 multiplicandus est; at quum 6 pedes sensu dicto hexapedam quadratam faciant, numerus seniorum termino ante comma per 4 multiplicato additur. Duodecima scilicet perticæ quadratæ

$$= \frac{4^\circ}{12} = \frac{1^\circ}{3} = \frac{6'}{3} = 2',$$

et huius duodecima

$$= \frac{2'}{12} = \frac{2 \cdot 12''}{12} = 2'' \text{ et.}$$

Et perticæ cubicæ duodecima

$$= \frac{8^\circ}{12} = \frac{4^\circ}{6} = 4 \cdot \frac{1^\circ}{6}.$$

Exemplis tamen sequentibus etiam illustrare haud supervacuum erit; notando, quod non solum ut dictum est, termini singuli, etsi novenarium excedant, decadice scribantur, et termini quivis decadice multiplicentur, sed etiam divisio per 12 decadice peragatur; quod omnino facile fit, quum duplum, triplum, ... usque ad nontuplum ipsius 12 memoria facile retineatur.

Sint areæ alicuius dimensiones per se invicem multiplicandæ $6^\circ 2' 7''$ et $8^\circ 1' 8''$, et sint soliditatis dimensiones $6^\circ 2'$, $8^\circ 5'$ et $4^\circ 2'$; fiet

$3, \quad 2 \quad 7$	$3, \quad 2$
$4, \quad 1 \quad 8$	$4, \quad 5$
$0, \quad 2 \quad 1 \quad 8 \quad 8$	$1, \quad 3 \quad 10$
$0, \quad 3 \quad 2 \quad 7$	$12, \quad 8$
$12, \quad 10 \quad 4$	$13, \quad 11 \quad 10$
$13, \quad 3 \quad 8 \quad 3 \quad 8$	$2, \quad 2$
4	$2, \quad 3 \quad 11 \quad 8$
$53^\circ \quad 1' \quad 4'' \quad 7''' \quad 4''''$	$27, \quad 11 \quad 8$
	$30, \quad 3 \quad 7 \quad 8$
	8
	4
	$242^\circ \quad 2' \quad 6'' \quad 8'''$

Sit etiam exemplum pro divisione per 12, nonnisi usque ad locum commatis extendenda. Sit una dimensio $303^{\circ} 5'$, altera $3^{\circ} 4'$

$$\begin{array}{r} 151, \quad 11 \\ \quad \quad \quad 1, \quad 10 \\ \hline 126, \quad 7 \quad 2 \\ 151, \quad 11 \\ \hline 278, \quad 6 \quad 2 \\ 4 \quad \quad \quad 2 \\ \hline 1114^{\circ} \quad 0' \quad 4'' \end{array}$$

Scholion 3. Si duo prismata P et p fuerint, et prioris altitudo A basis B , posterioris altitudo a basis b fuerit: erit

$$P = AB \text{ et } p = ab;$$

adeoque

$$P:p = AB:ab,$$

atque si $P=p$, erit

$$A:a = b:B,$$

et si $A=a$, erit

$$P:p = B:b,$$

et si $B=b$, erit

$$P:p = A:a.$$

Eritque, si $A=a$ et bases similes atque L et l lineæ homologæ sint,

$$P:p = L^2:l^2.$$

Idem ad pyramidem applicari evidens est.

Scholion 4. Transmutari quoque corpus quodpiam in aliud potest; si ex. gr. sphæra diametri d in pyramidem altitudinis a baseos x mutanda sit: erit

$$\frac{d^3\pi}{6} = \frac{xa}{3};$$

atque hinc

$$x = \frac{d^3\pi}{2a}.$$

Atque basis x computata, item sive in circulum sive in aliam figuram converti potest. Nec his amplius immorari necesse est; quum perspectis iis, quæ dicta sunt, Tyrones ipsi omissa reperire queant.

3124.

De hoc in Tomo primo dicta sufficient.

313.

Si planum cum superficierum relatarum aliqua punctum commune habeat: oriuntur *sectiones coni, cylindri, sphaerae* &c.

§. I.

Si planum quamvis infinitum apicem solum cum superficie coni commune habeat, sectio punctum est; si adhuc unum commune habeat, sectionem aut duæ rectæ se invicem in apice coni secantes efficient, aut sectio latus coni erit. Si planum secans basi parallelum fuerit, erit sectio figura basi similis, orieturque *conus truncatus rectus circularis*, si conus rectus et basis circulus fuerit: quæ omnia facile patent.

Si (Fig. 231.) cylinder rectus basi B parallele secetur, sectio $b = B$ erit; atque si per planum ad angulum u secetur, erit $F = G$ (tam quod superficiem quam quoad soliditatem); adeoque etiam $E + F$ innotescit, quum F sit $= \frac{F+G}{2}$, adeoque

$$E + F = B\alpha + B \frac{\beta}{2} = \frac{2B\alpha + B\beta}{2} = B \frac{A + \alpha}{2};$$

- 3124. Sectionum coni cum plano statim sequentium revolutiones pariunt *paraboloidem, ellipsoidem* et *hyperboloidem*.
- 313. Motus plani circa axem, punctum aliquod formæ cuiuspiam earum, quæ prodierunt, complectentem.
- 3131. Si coni verticales fuerint, oriuntur *sectiones conicae*.
- 3132. Forma secta etiam Cylinder aut
- 3133. Pyramis vel
- 3134. Prisma esse potest.
- 3135. Si forma hæc *sphaera* fuerit, et
- 31351. Plana per centrum eant: oritur in superficie sphæræ *triangulum sphæricum*; quæ e datis sufficientibus computare docet *Trigonometrica sphærica*.

ubi si de soliditate sermo fuerit, area ipsius B , si superficies quæratur, peripheria accipienda est.

§. 2.

Coni truncati, nempe partis coni recti inter basim et planum basi parallelum, *superficies* exclusis basibus est *lateri per peripheriam illam multiplicatae æqualis*, *quae cum perpendiculari e medio lateris ad axem missa tanquam radio describitur*. Sit nempe (Fig. 232.) rete coni truncati abed, et coni totius sit pde, atque latus coni truncati sit ad, et eius medium c; erit radiis r et r' descriptis circulis, area annuli (pag. 108)

$$\begin{aligned} &= (r^2 - r'^2) \pi = (r + r')(r - r') \pi = \\ &= (r - r') \left(\frac{r + r'}{2} \right) 2\pi = (r - r') \cdot \left(r' + \frac{r - r'}{2} \right) 2\pi. \end{aligned}$$

Est vero $r - r'$ latus coni truncati, $r' + \frac{r - r'}{2}$ vero est pc, quod per 2π multiplicatum dat peripheriam radii pc.

Hinc idem de sectore patet; si nempe is n -ta pars totius fuerit, erit et pars annuli in sectore pars n -ta annuli totius. Unde res in aperto est.

§. 3.

Soliditas coni per planum basi parallelum *truncati* e basibus et altitudine prodit sic. Sit (Fig. 233.) data *basis inferior B*, *superior b*; atque *a* *altitudo coni truncati*. Sit coni superius absecti altitudo x . Erit

$$B:b = (a+x)^2:x^2.$$

Hinc autem est

$$Bx^2 = b(a+x)^2,$$

et hinc

$$x^2 - \frac{2abx}{B-b} - \frac{a^2b}{B-b} = 0,$$

adeoque

$$\begin{aligned} x &= \frac{ab}{B-b} + \sqrt{\frac{a^2b^2}{(B-b)^2} + \frac{a^2b}{B-b}} = \\ &= \frac{ab + a\sqrt{b^2 + b(B-b)}}{B-b} = \frac{a(b + \sqrt{Bb})}{B-b}. \end{aligned}$$

Itaque

$$a+x = \frac{Ba - ba + ab + a\sqrt{Bb}}{B-b} = \frac{a(B + \sqrt{Bb})}{B-b}.$$

Est vero conus truncatus æqualis residuo coni totius, subtracto superiore, adeoque fit

$$\begin{aligned} &= \frac{B(a+x)}{3} - \frac{bx}{3} = \frac{a(B + \sqrt{Bb})B - a(b + \sqrt{Bb})b}{3(B-b)} = \\ &= \frac{a(B^2 - b^2 + \sqrt{Bb}(B-b))}{3(B-b)} = \frac{a(B+b+\sqrt{Bb})}{3}. \end{aligned}$$

Et posterius ad conum obliquum etiam, imo et pyramidem quamvis etiam obliquam, dummodo sectio per planum basi parallelum fiat, applicari, atque de quavis pyramide valere evidens est.

Scholion 1. Si vero l latus lineare pyramidis modo dicto truncatæ (Fig. 234.), atque β et β' sectiones basium cum piano per apicem factæ data fuerint: reperietur L latus pyramidis completæ ex

$$\beta : \beta' = l + x : x;$$

est enim

$$\beta x = \beta' l + \beta' x,$$

et hinc

$$x = \frac{\beta' l}{\beta - \beta'},$$

adeoque

$$L = l + x = \frac{\beta l}{\beta - \beta'},$$

quod et de cono valet.

Scholion 2. Notandum etiam est, quod

1. pyramidis truncatæ, si basis figura regularis, et recta per centra basium ad eas perpendicularis fuerit, superficies (præter bases) sit summa trapeziorum æqualium; adeoque unus factor altitudo trapezii, alter autem sit perimeter sectionis plani ad basim per lateris linearis meditullium paralleli.

2. In primate vero qualemque fuerit, perimeter sectionis plani ad latus lineare perpendicularis multiplicatur per latus lineare, ut super-

ficies (præter bases) prodeat: nam si prisma iuxta rectam $\mathfrak{A}\mathfrak{a}$ exstructum sit, in quovis parallelogrammo latus lineare = $\mathfrak{A}\mathfrak{a}$ pro basi accipi potest, et altitudo erit sectio parallelogrammi cum plano ad $\mathfrak{A}\mathfrak{a}$ perpendiculari. Idem de cylindro obliquo etiam valere patet.

Scholion 3. Si omnia dolia similia conficerentur, tum nonnisi certa dimensio dolii certæ quantitatis nota esse deberet, ut cuiusvis alias dolii dimensione homologa cum priore comparata, vasis posterioris quantitas innotescat: si ex. gr. prioris dolii quantitas q , dimensio certa d , et posterioris quantitas Q , dimensio D esset, fieret

$$d^3 : D^3 = q : Q.$$

Manifesto autem et alia dimensio tentanda est, ut eo certius fiat idem pluribus modis comprobatum.

Quum vero hoc non sit: potest dolium ordinatis e linea per supremum eius punctum horizontali demissis, in conos truncatos quantumvis proxime dividi; et sive constructione sive calculo, tam plenum quam usque ad planum certum horizontale repletum, computari; ratione etiam crassitudinis ligni habita, quæ si non eadem ubique sit, errorem aliquem inducit. (Fig. 235.)

Coni truncati, cuius bases segmenta sunt, in casu si dolia plena non fuerint, soliditates (per pag. 261) innotescunt; nempe bases per plana verticalia liquidum secantia efformantur; et fiunt pyramides truncatae, e basibus earumque distantia eodem modo computandæ.

Scholion 4. Sit (Fig. 236.) ab latus polygoni regularis n laterum ex q incipientis, radius r quadrantis $q\alpha c$, et δD sit perpendicularis e chordæ ab meditullio ad radium qC , et $a\mathfrak{A}l$, $b\mathfrak{B}l$ pariter sint ad radium qC perpendiculares, et ap perpendicularis ad $b\mathfrak{B}$. Fient triangula $C\delta d$ et abp (pag. 69) similia (propter latera reciproce perpendicularia), adeoque $u' = u$; itaque

$$Cd : \delta D = ab : ap,$$

et hinc

$$Cd \cdot ap = \delta D \cdot ab \quad \text{et} \quad 2\pi Cd \cdot \mathfrak{A}B = 2\pi \delta D \cdot ab.$$

Sed revoluto schemate circa qC , posterius est superficies coni truncati

(exclusis basibus), cuius latus ab et altitudo $ap = AB$ est; prius autem nempe $2\pi Cd \cdot AB$ est superficies cylindri (exclusis basibus), cuius altitudo AB , radius peripheriae baseos autem Cd est. Atque pro quovis alio polygoni latere pariter superficies coni truncati, per chordam descripti, erit superficie cylindri eius æqualis, cuius altitudo est pars radii qC inter perpendicularares ad eum ab extremitatibus lateris missas, basis vero est æqualis circulo, cuius radius æqualis perpendiculari e centro ad chordam missa, nempe $Cd \perp ab$, quia d meditullium chordæ est. Dicatur hæc nomine generali r' ; est nempe perpendicularis e centro ad quodvis latus polygoni regularis eiusdem æqualis.

Summa superficierum conorum truncatorum dicatur s' . Si n semper duplicetur, atque uti chordæ se invicem a b usque ad a excipiunt, coni truncati per revolutionem schematis generati accipientur: erit $s' = 2\pi r' \cdot AB$; quod manifesto $\sim 2\pi r \cdot AB$, quia $r' \sim r$. Consequenter *superficies zonae aequatur peripheriae circuli maximi per altitudinem zonae multiplicatae*.

Et si hoc ad totum quadrantem extendatur, fiet superficies hemisphærii peripheriae circuli maximi per radium multiplicatæ æqualis: scilicet erit $= 2\pi r \cdot r$, et totius sphæræ superficies $= 4r^2\pi$ (ut antea).

Scholion 5. Per latus ultimum ad q quidem non conus truncatus, sed conus apice ad q gaudens describitur; at coni recti quoque superficies (exclusa basi) æquatur lateri per peripheriam illam multiplicato, quæ per perpendiculararem e meditullio lateris ad axem missam describitur; sit enim latus coni adeoque radius sectoris rete superficie præbentis r , et arcus ad imum radii sit a ; erit e medio ipsius r arcus $= \frac{a}{2}$, et area sectoris

$$= \frac{r}{2} \cdot a = \frac{a}{2} \cdot r.$$

Unde patet et segmentum sphæræ e q incipiendo esse peripheriae circuli maximi per altitudinem multiplicatæ æquale.

Scholion 6. Et superficies coni truncati limes trapeziorum est, quæ, a certo latere coni incipiendo basibus inscribendo polygona regularia totidem laterum, oriuntur, et quodvis trapeziorum horum in duo trian-

gula apices in superficie habentia dispesci potest; atque limitem summæ triangulorum per superficiem curvam intelligi dictum est, sicubi cum plano ut *quantitas respectiva* comparatur (Tom. I. pag. 299).

Scholion 7. Appendix Auctor (Geometra acutissimus), in opusculo singulari attentione digno (nec ratione voluminis æstimando), non solum independentem ab axiomate XI Euclideo Geometriam sagacitate summa docuit primus, sed ab eodem independenter Trigonometriam sphæricam stabilivit, imo etiam superficies sphæricas esse ut secundæ diametrorum potentiae; atque superficie sphæræ quantitatem deduxit.

§. 4.

Sectiones cont' autem (ut pag. 152 dictum est) *lineas secundi ordinis esse*, et quidem si planum secans P lateri coni parallelum fuerit, *parabolam*, si P e situ parallelo versus latus dictum moveatur, *ellipsim*, si retrorsum moveatur, *hyperbolam in cono verticali utroque*, et quidem e duabus curvis æqualibus (in duobus conis verticalibus) constantem, esse sic patet. Sit (Fig. 237.) planum tabulæ T planum per axem conorum verticalium, quorum anguli verticales n sint; sitque planum P prius parallelum coni lateri \mathfrak{V} , et perpendicularare ad planum tabulæ, sitque \mathfrak{AP} cum hoc sectio ipsius P ; fiatque planum ρ perpendicularare ad axem per \mathfrak{P} , sitque sectio \mathfrak{BC} ipsius ρ cum planu tabulæ; erit sectio ipsius ρ cum superficie coni supra planum tabulæ semicirculus, in quo perpendicularis ex \mathfrak{P} ad \mathfrak{BC} dicatur y , cui correspondens \mathfrak{AP} dicatur x ; nempe in recta \mathfrak{AP} poterit \mathfrak{P} ubi vis sumi, et dicenda ubique valebunt; erit manifesto y perpendicularis ad planum tabulæ adeoque ad x . Sit circuli radius r ; $\triangle \mathfrak{VBC}$ æquicrurum est, adeoque anguli v ad basim sunt æquales, et

$$v = \frac{2R - n}{2} = R - \frac{1}{2}n,$$

et hinc

$$\sin v = \cos \frac{1}{2}n.$$

Porro in triangulo \mathfrak{APC} est

$$x : 2r - z = \sin. v : \sin. n = \cos. \frac{I}{2} n : \sin. n.$$

Et hinc

$$2r - z = \frac{x \sin. n}{\cos. \frac{I}{2} n}.$$

Et si ex \mathfrak{A} ipsi \mathfrak{BC} parallela \mathfrak{Ab}' fiat, erit

$$c : z = \sin. v : \sin. n = \cos. \frac{I}{2} n : \sin. n;$$

adeoque

$$z = \frac{c \sin. n}{\cos. \frac{I}{2} n}.$$

Est autem in semicirculo

$$y^2 = (2r - z)z;$$

consequenter substitutis valoribus ipsorum $2r - z$ et z , erit

$$y^2 = \frac{x \sin. n}{\cos. \frac{I}{2} n} \cdot \frac{c \sin. n}{\cos. \frac{I}{2} n} = \frac{cx \sin^2 n}{\cos^2 \frac{I}{2} n}.$$

Et hæc æquatio parabolæ pro parametro

$$\frac{c \sin^2 n}{\cos^2 \frac{I}{2} n}$$

est; atque parabola cuiusvis parametri q prodit, si

$$c = \frac{q \cos^2 \frac{I}{2} n}{\sin^2 n}$$

accipiatur; nempe is valor ipsius c accipi potest, proditque ex

$$q = \frac{c \sin^2 n}{\cos^2 \frac{I}{2} n}$$

posito.

Sit (Fig. 237*) $\wedge m > n$, et sit $\mathfrak{A}'\mathfrak{P}$ nunc abscissa x ex \mathfrak{A}' incipiens (ut prius ex \mathfrak{A} erat). Erit tum

$$z = z + k - k;$$

est vero

$$z + k = \frac{c \sin. n}{\cos. \frac{I}{2} n} \quad \text{et} \quad k = \frac{x \sin. (m - n)}{\cos. \frac{I}{2} n};$$

nam in triangulo $\mathfrak{A}'\mathfrak{P}\mathfrak{A}'$ externus

$$m = n + m - n,$$

et in triangulo $\mathfrak{A}'\mathfrak{a}\mathfrak{P}$ est

$$x : k = \sin. u : \sin. (m - n) = \sin. v : \sin. (m - n),$$

(quia angulus deinceps ipsius u est $= v$). Unde

$$k = \frac{x \sin. (m - n)}{\sin. v} = \frac{x \sin. (m - n)}{\cos. \frac{I}{2} n}.$$

Atque hinc substitutis valoribus ipsorum $z + k$ et k , erit

$$z = z + k - k = \frac{c \sin. n - x \sin. (m - n)}{\cos. \frac{I}{2} n}.$$

Porro in triangulo $\mathfrak{A}'\mathfrak{P}\mathfrak{C}$ est

$$2r - z : x = \sin. m : \sin. v = \sin. m : \cos. \frac{I}{2} n,$$

adeoque

$$2r - z = \frac{x \sin. m}{\cos. \frac{I}{2} n}.$$

Atque hinc

$$\begin{aligned} y^2 &= z(2r - z) = \frac{c \sin. n - x \sin. (m - n)}{\cos. \frac{I}{2} n} \cdot \frac{x \sin. m}{\cos. \frac{I}{2} n} \\ &= \frac{xc \sin. n \sin. m}{\cos^2 \frac{I}{2} n} - \frac{x^2 \sin. (m - n) \sin. m}{\cos^2 \frac{I}{2} n}; \end{aligned}$$

quæ pro axe maiore

$$a = \frac{c \sin. n}{\sin. (m - n)}$$

et parametrum

$$\beta = \frac{c \sin. n \sin. m}{\cos^2 \frac{I}{2} n}$$

aequatio ellipseos est.

Nempe ex

$$\frac{\beta}{a} = \frac{c \sin. n \sin. m}{a \cos^2 \frac{I}{2} n} = \frac{\sin. (m - n) \sin. m}{\cos^2 \frac{I}{2} n}$$

sequitur

$$a = \frac{c \sin. n}{\sin. (m - n)} \quad \text{atque} \quad c = \frac{a \sin. (m - n)}{\sin. n}.$$

Si $a'q \parallel fb$, et $a'b' \parallel bc$, atque $a'p$ sit x , et $m < n$ sit (Fig. 237**. supra f), et planum ρ antea ad T in BC perpendiculariter insistens nunc ipsi T in bc insistat perpendiculariter: erit tum

$$z = h + k \quad \text{atque} \quad c : h = \sin. v : \sin. n,$$

adeoque

$$h = \frac{c \sin. n}{\sin. v} = \frac{c \sin. n}{\cos. \frac{I}{2} n};$$

porro in triangulo $a'pq$ est $\wedge pa'q = n - m$, quia $\wedge ca'q = n$ (propter $a'q \parallel fb$); atque est

$$x : k = \sin. v : \sin. (n - m);$$

adeoque

$$k = \frac{x \sin. (n - m)}{\sin. v} = \frac{x \sin. (n - m)}{\cos. \frac{I}{2} n}.$$

Porro in triangulo $a'pc$ est

$$2r - z : x = \sin. m : \sin. v,$$

atque hinc

$$2r - z = \frac{x \sin. m}{\sin. v} = \frac{x \sin. m}{\cos. \frac{I}{2} n}.$$

Consequenter (ut antea)

$$\begin{aligned}
 y^2 &= z(2r - z) = (h + k)(2r - z) \\
 &= \left(\frac{c \sin. n}{\cos. \frac{I}{2} n} + \frac{x \sin. (n - m)}{\cos. \frac{I}{2} n} \right) \frac{x \sin. m}{\cos. \frac{I}{2} n} = \\
 &= \frac{c \sin. n \sin. m}{\cos^2 \frac{I}{2} n} x + \frac{\sin. (n - m) \sin. m}{\cos^2 \frac{I}{2} n} x^2;
 \end{aligned}$$

quæ aequatio hyperbolae est pro parametro

$$\gamma = \frac{c \sin. n \sin. m}{\cos^2 \frac{I}{2} n},$$

et axe primo

$$a = \frac{c \sin. n}{\sin. (n - m)}.$$

Nempe ex

$$\gamma = \frac{c \sin. n \sin. m}{\cos^2 \frac{I}{2} n},$$

simul coefficientem ipsius x ipsi $\frac{\gamma}{a}$ ponendo æqualem, erit

$$\frac{\sin. (n - m) \sin. m}{\cos^2 \frac{I}{2} n} = \frac{c \sin. n \sin. m}{a \cos^2 \frac{I}{2} n};$$

atque hinc

$$\sin. (n - m) = \frac{c \sin. n}{a},$$

et

$$c = \frac{a \sin. (n - m)}{\sin. n} \quad \text{et} \quad a = \frac{c \sin. n}{\sin. (n - m)}.$$

§. 5.

Estque sectio in cono verticali facta priori æqualis.

Denotentur enim (ab hinc usque ad pag. 273) sinus angulorum per nomina angulorum accento insignita; ex. gr. sin. n denotetur per n' , et $(n - m)'$ denotet sinum anguli $(n - m)$, ita v' erit $= \sin. v = \cos. \frac{I}{2} n$.

Si iam (Fig. 238.) in cono superiore sectio per δp , in inferiore autem continuatio eius per $\mathfrak{D}\mathfrak{P}$ fuerit, dicanturque M anguli verticales ad \mathfrak{D} : erit

$$c:C=M':m'=(n-m)':m',$$

(nempe $M=n-m$); itaque

$$C=\frac{cm'}{(n-m)'}.$$

Est vero (ut in præcedentibus)

$$y^2=\frac{Cn'M'x+(n-M)'M'x^2}{v'^2},$$

quia $n>M$, (nempe externus interno opposito maior). Substituendo autem valores ipsorum C et M , fit

$$y^2=\frac{cm'.n'.(n-m)'x}{(n-m)'v'^2}+\frac{m'(n-m)'x^2}{v'^2}=\frac{cm'n'x}{v'^2}+\frac{m'(n-m)'x^2}{v'^2},$$

uti in §. 4.

Scholion 1. Sit (Fig. 239. I.) cuiusvis rectæ datae \mathfrak{DB} meditullium \mathfrak{C} , sitque ad angulum quemvis u recto minorem recta $\mathfrak{C}\mathfrak{f}$; ducanturque e quovis rectæ $\mathfrak{C}\mathfrak{f}$ puncto \mathfrak{k} rectæ $\mathfrak{k}\mathfrak{D}$, $\mathfrak{k}\mathfrak{B}$; in triangulis $\mathfrak{DC}\mathfrak{f}$ et $\mathfrak{BC}\mathfrak{f}$ est latus $\mathfrak{k}\mathfrak{C}=\mathfrak{k}\mathfrak{C}$, latus $\mathfrak{CD}=\mathfrak{CB}$, angulus interceptus u autem est altero intercepto deinceps posito minor, quia u (per hypothesim) acutus est; itaque $\mathfrak{k}\mathfrak{B}<\mathfrak{k}\mathfrak{D}$ est. Fiat $\mathfrak{k}\mathfrak{E}=\mathfrak{k}\mathfrak{D}$, et \mathfrak{DE} dicatur A ; atque translato schemate (in Fig. 239. II.), et tabulæ plano C dicto, erigatur ex A planum B ad C perpendicularare, fiatque in B ad axem A pro parametro $Q=\frac{Av'^2}{m'\omega'}$ ellipsis; erit recta e meditullio ipsius A ad \mathfrak{k} ducta perpendicularis ad B , et simul axis coni recti per complexum rectarum ex omnibus ellipseos punctis ad apicem \mathfrak{k} ductis efformati; eritque sectio huius coni, per planum P (ex $D=\mathfrak{DB}$) ad C perpendicularare facta, circulus diametri D ; atque coni ex apice \mathfrak{k} huic circulo insistentis axis (nempe recta ex apice \mathfrak{k} ad \mathfrak{C} centrum circuli) efficiet cum piano circuli tanquam basi angulum u ; est enim basis hæc in piano P , et C planum tabulæ, in quod axis dictus cadit, ad P perpendiculariter positum est, quia P ad C (per hypothesim) perpendicularare est.

Nam moveatur planum ex B sursum ipsi A parallele; quounque venerit, ex. gr. in planum b ad C ex de perpendiculari, sectio eius cum cono erit ellipsis inferiori similis. Ellipseos huius axis (per de repræsentatus) dicatur generaliter a , et parameter eius dicatur q , sitque $\mathfrak{B}p$ abscissa x ; et quæratur y nempe sectio plani P cum ellipsi, in qua planum b conum secat; est y tam ad D quam ad a nempe ad de perpendicularis, quia sectio duorum planorum P et b ad tertium C perpendicularium est.

Eritque $A:a = Q:q$ (pag. 161), adeoque

$$q = \frac{aQ}{A}.$$

Estque

$$a = z + a - z = \frac{cn' - x\omega' + xm'}{v'};$$

quia et hic (ut pag. 267)

$$z = \frac{cn' - x\omega'}{v'} \quad \text{et} \quad a - z = \frac{xm'}{v'},$$

nimirum

$$v' = \cos. \frac{\frac{I}{2}}{} n \quad \text{et} \quad \omega' = (m - n)'.$$

Est igitur

$$q = \frac{cn' - x\omega' + xm'}{v'} \cdot \frac{Q}{A} \quad \text{et} \quad y^2 = qz - \frac{qz^2}{a};$$

et hoc (substituendo valores ipsorum z et q) fiet

$$\begin{aligned} &= \frac{cn' - x\omega'}{v'} \cdot \frac{cn' - x\omega' + xm'}{v'} \cdot \frac{Q}{A} - \left(\frac{cn' - x\omega'}{v'} \right)^2 \cdot \frac{Q}{A} = \\ &= \frac{Qcm'n'x}{Av'^2} - \frac{Q\omega'm'x^2}{Av'^2}, \end{aligned}$$

(nempe $\frac{Q}{A} = \frac{q}{a}$). Substituendo autem valorem supra dictum ipsius Q , fit

$$y^2 = \frac{Av'^2 cm'n'x}{m'\omega' Av'^2} - \frac{Av'^2 \omega'm'x^2}{m'\omega' Av'^2} = \frac{cn'}{\omega'} x - x^2 = Dx - x^2 = x(D - x);$$

nam

$$D = \frac{cn'}{\omega'},$$

quia in triangulo fDB est

$$D:c = n':\omega'.$$

Scholion 2. Sit pariter (Fig. 239. III.) in plano C rectangulum ACED , et ducatur recta DB ad quemvis angulum acutum u ; fiantque (ut antea) planum B ex DE , et planum b ex de , et planum P ex DB , ad C perpendicularia; fiatque in B ad axem a pro parametro $q = \frac{D}{u'}$ ellipsis, et fiat ad hanc ellipsim tanquam basim cylinder rectus; erit sectio per planum b facta ellipsis basi æqualis, manentque q et a eadem. Eritque $z:x = u':1$, adeoque $z = xu'$, et $D:a = 1:u'$, adeoque $a = Du'$; atque (per y sectionem planorum P et b in cylindri superficie terminatam intelligendo) fit

$$\begin{aligned} y^2 &= qz - \frac{qz^2}{a} = \frac{Dxu'}{u'} - \left(\frac{D}{u'} : Du' \right) x^2 u'^2 = \\ &= Dx - \frac{Dx^2 u'^2}{u' Du'} = Dx - x^2 = x(D-x); \end{aligned}$$

itaque cylinder superior circulo diametri D ad datum angulum u insistet.

Scholion 3. Sit (Fig. 239. IV.) DE diameter baseos circularis coni obliqui, sitque fE latus brevissimum, adeoque $u < v$. Ponantur (ut antea) ad C perpendiculariter planum P ex BD , et planum b per de ad basim parallelum; erit sectio coni per b circulus diametri $\text{de} = \delta$; et

$$z+k:c = n':u',$$

atque

$$k:x = (m-n)':u' = \lambda':u',$$

adeoque

$$z+k-k = \frac{cn'-x\lambda'}{u'} = z;$$

et

$$\delta-z = \frac{xm'}{v'},$$

quia

$$\text{pe:pB} = m':v'.$$

Atque hinc

$$y^2 = z(\delta-z) = \frac{cn'-x\lambda'}{u'} \cdot \frac{xm'}{v'} = \frac{cn'm'x}{u'v'} - \frac{\lambda'm'x^2}{u'v'}.$$

Pro circulo

$$\frac{cn'm'}{u'v'} = D = \frac{cn'}{\lambda'} \quad \text{et} \quad \frac{m'\lambda'}{u'v'} = 1,$$

(nempe $c:D=\lambda':n'$), adeoque $m'\lambda'=u'v'$ esset. Sed hoc fieri nequit: quia tum esset

$$m':v'=u':\lambda',$$

atque quum in triangulo $\text{pB}\bar{e}$ sit

$$m':v' = \text{pe} : \text{pB}$$

et in triangulo $\text{Dp}\bar{d}$

$$u':\lambda' = \text{Dp} : \text{dp}$$

quia $u'=\omega'$, esset

$$\text{pe} : \text{pB} = \text{Dp} : \text{dp},$$

et triangula Bpe et $\text{Dp}\bar{d}$ (per duo latera cum angulo intercepto æquali proportionalia) similia fierent, et $\lambda=v$ ac $\omega=m$. Sed u (externus) $>\lambda$; consequenter $u>v$ esset, quamvis $u<v$ sit.

At (Fig. 239. V.) pro $\wedge \text{fK}\bar{G}=v$, circulus fit; nam

$$y^2 = \frac{cm'n'x}{u'v'} - \frac{\lambda'm'x^2}{u'v'} \quad \text{et} \quad D = \frac{cn'}{\lambda'},$$

sed

$$m'=v', \quad u=2R-v-n=\lambda, \quad \frac{cn'm'}{u'v'} = \frac{cn'}{\lambda'} = D, \quad \frac{\lambda'm'}{u'v'} = 1.$$

Scholion 4. Pariter prodit cylindri circulo oblique insistentis sectio (Fig. 239. VI.): nempe fit

$$y^2 = \frac{a\omega'x}{v'} - \frac{\omega'^2x^2}{v'^2};$$

ubi ut $\frac{a\omega'}{v'} = D$, (quod $= \frac{av'}{\omega'}$), et $\frac{\omega'^2}{v'^2} = 1$ fiat, $v'=\omega'$ esse deberet; sed $u+v=2R$, hinc $v+\omega<2R$, et v, ω non gaudent sinu eodem.

In omnibus his autem pro K et k positivis fiet

$$y^2 = kx - Kx^2,$$

quæ æquatio ellipseos erit; nempe ex $K=\frac{k}{a}$ erit $a=\frac{k}{K}$, atque

$$y^2 = kx - \frac{k}{a}x^2.$$

ubi k parameter et $\frac{k}{K}$ axis maior est. Unde reliqui casus etiam (tam pro $m = n$, quam pro $m < n$) sectionis coni (et pariter cylindri) obliqui patent; omissisque aliis huius generis, sequitur in numero

3135.

§. I.

Sphaerae cum plano sectio aut punctum, aut circulus est, qui si per centrum transierit, maximus audit, quum omnes alii minores sint; pars sphæræ per planum absecta segmentum, et pars sphæræ inter duo plana parallela zona dicitur.

Nempe quocunque planum secuerit sphærā, perpendicularis e centro ad illud missa aut in superficiem sphæræ cadet, aut intra eam; extus enim cadere nequit, quia quævis alia recta e centro ad planum idem dicta perpendiculari adeoque et radio maior est; itaque nullum planum punctum cum sphæra commune esset. Si vero extremitas perpendicularis dictæ in superficiem cadat, nullum aliud punctum erit plano sphæræque commune, quia quævis alia recta e centro ad planum excedit radium. Atque si perpendicularis intra sphærā terminetur, erit hæc ad omnes rectas ex eo punto in plano secante perpendicularis, quæ singulæ exhibunt per sphærā, efformabuntque omnia triangula rectangula æqualia; quia cathetus e centro omnibus communis, et hypotenusa radius est; atque manifesto sectio erit via catheti alterius, moto triangulo rectangulo circa cathetum priorem. Neque præter circulum hunc planum cum sphæra quidquam commune habet; superficies sphæræ enim via semicirculi circa diametrum est, et si in motu trianguli rectanguli plane dicto semicirculus moveatur, perpendicularis e quovis semicirculi punto ad axem motus aliud planum describet, eruntque quævis plana parallela, adeoque nihil commune habentia.

§. 2.

Est quoque manifesto centrum sphæræ in perpendiculari e centro circuli in superficie sphæræ siti, ad planum huius erecta; atque *duarum talium perpendicularium sectio centrum est.*

§. 3.

Et facile de sphæris quoque patet, (uti de circulis in eodem plano, si sectionis sphærarum circularis, sectio duorum punctorum in circulis, vicem subeat), quod si sphærarum S et s centra sint C et c , radii R et r , atque distantia centrorum d sit: pro casu si c extra S cadat, sphæræ nil commune habeant, si $d > R + r$; si vero $d = R + r$, punctum solum commune utriusque sit; et si $d < R + r$ fuerit, sectio circulus sit; pro c in superficiem sphæræ S aut intus cadente autem sectio nulla sit, si $r > R + d$ aut $r < R - d$, sectio punctum sit, si $r = R \pm d$, et sectio circulus sit, si $r < R + d$, et r non $=$ nec $< R - d$ fuerit. Per currendo singulos casus Tyronei ipsi e sola (Fig. 240.) inspectione rem in plano quoad circulos facile perspicere possunt.

Et tum quoad sphæras S et s quoque concludi potest, plano per centra C et c adeoque rectam \overline{Cc} , in quam diameter utriusque cadit, posito, atque in hoc tam centro C radio R quam centro c radio r circulis descriptis. Sint nimurum circuli hi C et c ; atque revolvatur schema e circulis C et c compositum circa \overline{Cc} ; generabuntur manifesto sphæræ S et s ; quæ, si C et c nihil commune habuerint, pariter nihil commune habebunt, si autem C et c tetigerint se invicem, et sphæræ tangent se invicem, tangenturque a plano per viam rectæ ad diametrum e puncto tactus perpendicularis descriptum; si vero C et c in duobus punctis P et p secuerint se invicem, orientur duo triangula æquicrura $C\overline{P}p$ et $c\overline{P}p$, adeoque si meditullium rectæ $\overline{P}p$ sit m , erit tam Cm quam cm perpendicularis ad $\overline{P}p$, itaque m in \overline{Cc} erit, et in motu dicto per rectam $\overline{P}m$ ad \overline{Cc} perpendiculararem describetur planum, et per punctum circulus in plano eodem sphæræ utriusque communis.

31351.

§. 1.

Si planum P per centrum eat, fit *circulus*, quem *maximum* esse inde patet, quod si e centro huius circuli C dicti, ad planum P perpendicularis L erigatur, et planum tale ponatur, in quod perpendicularis dicta incidit: secet hoc sphæram in circulo C' ; huius revolutio circa L eandem sphæram parit; patetque, quod si radius circuli C' sit r' , circuli per quodvis aliud peripheriae C' punctum descripti radius versus polum propiorem semper descrescat; nempe circuli cuiusvis in hoc motu descripti radius est sinus arcus a polo usque ad punctum peripheriam describens. Quicunque autem circulus c in superficie sphæræ sit, alicui per puncta ipsius C' descriptorum æqualis est; nam c in plano est, et si e centro sphæræ perpendicularis ad planum hoc demittatur, hæc in centrum circuli c cadet; unde antea dictis applicatis patet.

§. 2.

Quilibet duo circuli maximi secant se invicem in duobus punctis, et quidem bisecant (pag. 41); atque duo illa sectionis puncta cum centro in eadem recta sunt.

§. 3.

Quomodo autem fiat angulus duorum circulorum maximorum quantitas respectiva, quæ in comparatione arithmeticæ semper intelligi debet, dictum (pag. 41) est: nempe angulus planorum, in quæ circuli illi cadunt, intelligitur, atque huius quantitas est arcus circuli maximi inter extremitates quadrantum e sectione circulorum illorum, de quorum angulo sermo est, acceptorum.

§. 4.

Demonstratum etiam est :

1. Circuli maximi a et b ad tertium c perpendicularares in fine quadrantum communi secant se invicem, fine hoc ρolo ipsius c dicto. Unde extremitas quadrantis ad c perpendicularis polus ipsius c est.
2. Si $p\alpha$, $p\beta$ quadrantes fuerint, anguli arcum $p\alpha$ et $p\beta$ quantitas arcus ab est.

§. 5.

Patet etiam :

1. e quovis superficie sphæræ puncto p ad quemvis circulum maximum C dari circulum maximum perpendicularare. Nam tum p in hemisphærio est, cuius æquator C est, et polus q sit; adeoque circulus maximus per q et p secat circulum maximum C , et arcus ex q usque ad C quadrans ad C perpendicularis est.

2. Si p , a , b talia superficie sphæræ puncta fuerint, ut p tam ab a quam ab b quadrante distet, p polus arcus ab erit. Sit enim c centrum, erunt rectæ ca , cb perpendicularares ad cp ; adeoque cp perpendicularis ad planum acb , et plana pca , pcb perpendicularia ad planum acb sunt.

§. 6.

Oriuntur quidem et in sphæra ut in plano triangula plurimum generum, sed in primis triangula sphærica tractare necesse est: figura quævis in superficie sphæræ tribus eiusmodi arcubus circulorum maximorum clausa, ut quivis bini arcus se invicem non nisi in puncto secent, et divisorum circulorum maximorum arcus sint, sensu lato *triangulum sphæricum* est; et manifesto ab extremitatibus chordarum radiis ductis, pyramis triangularis orietur, cuius basis triangulum e chordis componitur, et lateris cuiusvis angulus rectilineus ad apicem est duobus rectis minor; at si latera plana huius pyramidis (inter crura angularorum rectilineorum dictorum) producantur, sectio illa, quæ cum superficie sphæræ fiet, dicitur

strictius *triangulum sphaericum*; nempe etsi pro arcu aliquo trium illorum, in quibus pyramis sphæræ superficiem secat, arcus alter eiusdem circuli maximi earundem extremitatum accipiatur, pariter triangulum sphæricum manebit sensu lato, sed chorda eadem erit, eademque pyramis generabitur.

§. 7.

Summæ angulorum latera pyramidis triangularis constituentium, idest laterum trianguli sphærici, limites sunt ω et $4R$; ita summæ angulorum, quos latera pyramidis dictæ faciunt, (adeoque angulorum trianguli sphærici), limites sunt $2R$ et $6R$, nempe summa est $>2R$ et $<6R$.

Nam *quoad latera*: sint A , B , C latera pyramidis triangularis; est omnino quodvis $<2R$; cadant A et B supra planum C et apex pyramidis in centrum sphæræ, seceturque sphæra per C in arcu ba , hemisphærium supra C autem secetur per A , B in bc , ca ; poterit $bc = 2R - \omega$ et $ca = 2R - \lambda$, et $ba = 2R - \alpha$ poni (Fig. 241.). Continuetur arcus cb ultra b , donec ex c incipiendo semicirculus fiat, patet ipsi cb additum ω infra planum C cadere; pariter si arcui ca addatur λ , semicirculus fiet, cum priore simul incipiens supra planum C , et simul desinens infra C ; nam duo circuli maximi se in duobus punctis bisecant, eruntque semicircularum dictorum initium et finis extremitates diametri; atque et infra C efformabitur nova pyramis et novum triangulum sphæricum, cuius laterum ω et λ summa est tertio maior; adeoque $\omega + \lambda - h = C$ poni potest, eritque

$$A + B + C = 2R - \omega + 2R - \lambda + \omega + \lambda - h = 4R - h.$$

Quoad angulos: laterum pyramidis triangularis quoque, evidens est, quemvis trium angulorum duobus rectis minorem, adeoque et summam sex rectis minorem esse.

Sed summam hanc duobus rectis maiorem, et sex rectis ita minorem esse, ut dato quovis minus ab utroque limite differre queat, sic patet. Construatur triangulum modo sequente: (In Fig. 242.) descriptis in superficie sphæræ ex apicibus trianguli sphærici abc (in quo pyramis trian-

gularis eam secat), tanquam centris, quadrantis intervallo circulis maximis, erunt centra dicta poli circulorum descriptorum, et horum quilibet bini secabunt se invicem in duobus punctis et orietur trilaterum $a'b'c'$, sectione illa a' accepta pro A (ex extremitatibus b , c eius facta), quæ respectu plani ipsius A in eandem plagam cum a cadit, ita sectione illa b' accepta pro B , quæ respectu plani ipsius B in eandem plagam cum b cadit, atque sectione illa c' ipsius C accepta, quæ respectu plani ipsius C in eandem plagam cum c cadit; fieri nimur posse hoc patet, quem trianguli abc latus quodvis $< 2R$ sit, adeoque quadrantes circa extremitates motæ se invicem in hemisphærio illo quoque secant, ubi apex oppositus trianguli est.

Erit vero $\triangle abc$ et $a'b'c'$ eiusmodi, ut cuiusvis eorum anguli cuiusvis, latus alterius ei oppositum, complementum ad $2R$ sit.

Nempe a , b , c poli arcuum A' , B' , C' , et a' , b' , c' poli arcuum A , B , C sunt; in quovis enim duo puncta ab eodem punto quadrante distant (pag. 277). Itaque ex. gr.

$$b = u,$$

et

$$z + u = R = u + v, \quad \text{adeoque} \quad z = v;$$

et

$$z + u + v + u = 2R = B' + u = B + b.$$

Quod pariter de reliquis patet; idemque applicare ad casus, si quod ipsorum A , B , C , aut duo eorundem, sive singula quadrantem excedant, Tyronibus relinquitur.

Atque hinc

$$A + B + C + a' + b' + c' = 6R = A' + B' + C' + a + b + c;$$

itaque tam $a' + b' + c'$ quam $a + b + c < 6R$, et quodvis ipsorum a' , b' , c' , a , b , c , et A' , B' , C' est $< 2R$, nam ex. gr.

$$A' + a \text{ est } = 2R.$$

Efficiunt autem etiam A' , B' , C' pyramidem triangularem. Nam a' , b' , c' non in eodem circulo maximo sunt, quia per b' , c' unicus maximus cir-

culus datur, cuius polus α est, ita per c' , a' et b' , α' ; adeoque trium eiusdem circuli maximi arcuum tres diversi poli nempe a , b , c essent. Cadit igitur c' (adeoque $c'b'$ et $c'a'$ etiam) extra planum C' , adeoque in hemisphærium supra vel infra illud cadere debet, suntque A' , B' , C' et a' , b' , c' singula duobus rectis minora.

Erit itaque et

$$A' + B' + C' < 4R;$$

atque hinc et

$$\alpha + b + c > 2R;$$

nam

$$\alpha + b + c + A' + B' + C' = 6R,$$

et si ex utroque ipso $4R$ minus subtrahatur, utrinque $> 2R$ manebit.

Potest autem $\triangle abc$ tale construi, ut $A + B + C$ quantovis α minus $a \circ$ aut a $4R$ differat. Sit enim $\alpha = 2\omega$, et fiant e puncto superficiei sphæricæ duo arcus circuli maximi ipsi $\frac{\omega}{2}$ æquales, atque ducatur arcus circuli maximi per extrema eorum; erit summa priorum $= \omega$ tertio latere maior, adeoque summa trium $< 2\omega$.

Ita triangulum æquilaterum in sphæra describi potest pro basi $< \frac{4R}{3}$; nempe si basis $= \frac{4R}{3}$, arcus in eodem baseos circulo conveniunt; si vero quantovis minor accipiatur basis, in hemisphærio pariter intersectio fiet ut in plano.

Atque hinc $A + B + C$ potest ad limitem \circ tendere, adeoque $a' + b' + c' - 6R$; ita dum $A + B + C - 4R$ manens tamen $< 4R$, manifesto $a' + b' + c' - 2R$, manens tamen $> 2R$.

Notandum vero est dari triangulum sphæricum *sensu lato*, cuius laterum summa $> 4R$. Ex. gr. accipiatur in circulo maximo arcus $= 3R$, et ducantur ex eius polo quadrantes ad extremitates eiusdem arcus, erit summa laterum $= 5R$.

§. 8.

Posset quidem trigonometria sphærica e pyramidis triangularis analysi quoque deduci: at quum sphæra planum præcedat, certo tamen respectu eadem qualitate gaudens, et præterea quoque trigonometria sphærica,

ut (pag. 265) dictum est, ab Axiomate XI Euclidei independenter vera sit; tam ob dignitatem sphæræ æque tribuendam, quam ob rationem posterius dictam, pyramidum theoriam e trigonometria sphærica, in quantum a trigonometria dependet, deducere libet.

Manifesto autem in superficie sphæræ quoque plures operationibus in plano analogæ suscipi possunt: ex. gr. triangulum æquicrurum, æquilaterum & construi, perpendicularis erigi, demitti & possunt.

§. 9.

Circuli maximi A , B , C dividunt (Fig. 243.) sphærām in octo triangula, nempe t , a , b , c , a' , b' , c' , et abc sphærām inferius claudens, ipsi t æquale; estque $a = a'$, $b = b'$, $c = c'$; nimirum biscent se invicem plana circulorum B et C , A et C , A et B in diametris $\mathfrak{A}a$, $\mathfrak{B}b$, $\mathfrak{C}c$; centrum \mathfrak{f} his commune est, et anguli verticales $\mathfrak{A}\mathfrak{B}\mathfrak{B}$ et $\mathfrak{a}\mathfrak{b}\mathfrak{b}$, $\mathfrak{A}\mathfrak{C}\mathfrak{C}$ et $\mathfrak{a}\mathfrak{c}\mathfrak{c}$, $\mathfrak{B}\mathfrak{C}\mathfrak{C}$ et $\mathfrak{b}\mathfrak{c}\mathfrak{c}$ æquales sunt; et pariter in ceteris ita est; unde (per pag. 224) patet. Praeterea et pro latere trianguli ex. gr. $\mathfrak{A}\mathfrak{B}\mathfrak{C}$, potest pro latere quovis ex. gr. $\mathfrak{A}\mathfrak{p}\mathfrak{B}$ accipi $\mathfrak{A}\mathfrak{B}\mathfrak{B}$, ut sensu latiore aliud triangulum prodeat; quamvis (ut dictum est) pyramidem per chordas eandem præbeat.

At priusquam in supplemento numerum hunc respiciente Trigonometria sphærica tractaretur, dicendum aliquid est de numero

31352.

Corpora regularia numerus hic respicit. Dicuntur autem hæc *sensu stricto* ea, quæ figuris planis regularibus ita clauduntur, ut nullus angulus convexus sit (sive omnes anguli æquales sint); possentque etiam e superficie sphæræ deduci; nempe operationibus analogis ut in plano, figuræ regulares, arcus circulorum maximorum pro lateribus accipiendo, construi tales possunt, ut se invicem excipientes eam exhaustant.

31352. Si planum quodvis tangat sphærām, aut aliter secet, atque plana omnia simul efficiant superficiem simplicem portionem spatii cludentem: inter hæc oriuntur etiam corpora aut *perfecte* aut *certo respectu regularia*.

§. I.

Sed satis omnium constat, quomodo e retibus quinque corpora regularia componantur: nempe e triangulo æquilatero tria prodeunt, e quadrato unum, et unum e pentagono. Nec plura prodire posse sic patet. E tribus triangulis ad apicem anguli solidi fit *tetraedron*, e quatuor fit *octaedron*, et *icosaedron* ex quinque; at si sex triangula æquilatera componantur, fiet summa angulorum ad apicem $= 360^\circ = 6 \cdot 60^\circ$; adeoque in planum cadent. Tres anguli recti efficiunt *cubum*, quatuor autem item in planum deciderent, quum $4 \cdot 90^\circ = 360^\circ$. Pentagoni angulus est $= 108^\circ$, quorum tres pariunt *dodecaedrum*; sed $4 \cdot 108^\circ$ transit in plagam alteram.

Si vero polygoni regularis laterum numerus n sit > 5 : erit angulus polygoni (pag. 88)

$$= \frac{2nR - 4R}{n} = \frac{(n-2) \cdot 2R}{n},$$

adeoque quum ad angulum solidum ad minimum tres anguli requirantur, esset summa eorum $6R \frac{(n-2)}{n}$, quod pro $n > 5$ excedit quatuor rectos; nam sit $n = 5 + m$ (pro m integro positivo); erit

$$\frac{6R(n-2)}{n} = \frac{6R(m+3)}{5+m},$$

quod si $m = 1$ fuerit, $= 4R$ erit; si vero m crescat, erit

$$\frac{6(m+1)+18}{5+m+1} > \frac{6m+18}{5+m},$$

ad eundem denominatorem reducendo patet.

§. 2.

Quod apices corporis regularis omnes in superficiem sphæræ cadant, sic patet. Demittantur (Fig. 244.) e duarum figurarum regularium latere ineari ab communi gaudentium centris f et f' perpendicularares fq et $f'q$; cadent illæ manifesto in punctum idem q ; erigantur ex f et f' perpen-

diculares f_r et f'_r ad plana figurarum regularium dictarum, ducaturque recta ff' ; erit summa angulorum, quos perpendiculares f_r , f'_r cum ff' faciunt, duobus rectis minor, adeoque concurrent; fiat hoc in p . Nempe e meditullio q lateris communis duarum figurarum regularium æqualium (tanquam chordæ duorum circulorum communi) erectæ perpendiculares in planis earundem figurarum, per centra earum ducuntur; et angulus perpendicularium harum angulus planorum est, atque planum, in quod hæ perpendiculares cadunt, est ad utrumque perpendicularare; perpendiculares f_r et f'_r autem, ex iis centrī ad plana figurarum centris appertinentium erectæ, in planum dictum ad utrumque perpendicularare cadunt.

Continuentur dicta a quavis figura regulari ad sequentem: manifesto concursus omnium in p erit; si enim anguli rectilinei quotvis æquales ad angulum solidum convexum compingantur, anguli laterum planorum omnes æquales, et omnia circumcirca æqualiter determinata erunt.

Erit igitur recta, quæ a centro figuræ cuiusvis regularis usque ad idem p est, ad planum figuræ perpendicularis, et pro quavis figura eidem rectæ æqualis; adeoque erit radius sphæræ illius, quæ figuras omnes tangit.

Si vero in quavis figurarum e centro f ad apicem recta ducatur, ex. gr. ex f ad apicem a : erit $\triangle fpa$ ad f rectangulum, in quo hypotenusa, pro quavis figurarum æqualis, radius sphæræ circumscriptæ erit.

§. 3.

Si reperiatur u angulus duorum laterum planorum corporis regularis: dabitur $\wedge p q f = \frac{1}{2} u$ (p , q , f iuxta præcedentia intellectis); fq e figura data notum est, adeoque e triangulo pqf ad f rectangulo innotescit pf ; et hinc in triangulo afp ad f rectangulo ex af et pf innotescit radius sphæræ circumscriptæ.

§. 4.

Angulus u autem, e data figura regulari et numero angulorum angulum solidum ad apicem constituentium, prodit sic. In *tetraedro* tres anguli sunt ad apicem, in *cubo* et *dodecaedro* pariter; in *octaedro* quatuor

triangulorum ad apicem concurrentium bases efficiunt quadratum, cuius latus $l =$ lateri triangulorum; unde (Fig. 245.) diagonalis d quadrati dicti innotescit, et efformabitur angulus solidus ad apicem priorem e tribus angulis compositus, quorum duo sunt anguli triangulorum æquilaterorum, tertius est ipsi d oppositus in triangulo, cuius duo latera $= l$ sunt, et tertium latus d est. Itaque angulus u per trigonometriam sphæricam in pyramide triangulari e lateribus datis prodit.

In *icosaedro* angulus ad apicem pariter ad pyramidem triangularem reduci potest modo sequente: quinque triangulorum ad apicem positorum bases pentagonum efficiunt, cuius latus $l =$ lateri triangulorum est; adeoque (Fig. 246.) k e latere utroque $= l$, et angulo intercepto 108° innotescit. Itaque et hic angulus solidus fiet, cuius duo latera anguli trianguli æquilateri erunt, et tertium erit angulus ipsi k oppositus in triangulo, cuius duo latera ipsi l æqualia et tertium latus k est.

Prodeunte hinc u , e triangulo $f\bar{p}q$ ad f rectangulo prodit etiam altitudo $\bar{p}q$, per cuius tertiam partem multiplicanda superficies corporis est, ut soliditas prodeat.

§. 5.

Quævis pyramis, cuius basis figura regularis n laterum est, si quævis atera pyramidis linearia eidem b æqualia fuerint, soliditas facile computatur. Nam ex. gr. (Fig. 247.) ex figura ipsa prodit z , distantia centri baseos ab apice eiusdem quovis; atque in triangulo ad centrum rectangulo, e hypotenusa b et catheto z , prodit pyramidis altitudo $y =$ catheto alteri.

Ita in *tetraedro*, ubi basis triangulum æquilaterum est, cuius area $= \frac{1}{4} b^2 \sqrt{3}$ (pag. 119, ubi radius est $= z = \frac{b}{\sqrt{3}}$), erit

$$y^2 = b^2 - \frac{b^2}{3} = \frac{2b^2}{3},$$

itaque

$$y = b \sqrt{\frac{2}{3}};$$

adeoque soliditas

$$= \frac{1}{4} b^2 \sqrt{3} \cdot \frac{b}{3} \sqrt{\frac{2}{3}} = \frac{b^3 \sqrt{2}}{12}.$$

Octaedrum e duabus eiusmodi pyramidibus constat, quarum bases sunt quadrata lateris b , quod etiam latus triangulorum lateralium est. Est autem hic z , quadrati diagonalis dimidium,

$$= \sqrt{\frac{b^2}{2}} = \frac{b}{\sqrt{2}};$$

adeoque

$$y = \sqrt{b^2 - z^2} = \sqrt{b^2 - \frac{b^2}{2}} = \frac{b}{\sqrt{2}};$$

adeoque soliditas octaedri

$$= 2 \cdot b^2 \cdot \frac{b}{3\sqrt{2}} = \frac{2b^3}{3\sqrt{2}} = \frac{b^3 \sqrt{2}}{3}.$$

Si vero radius r sphæræ quæratur, cui corpus regulare inscriptum est: sit x perpendicularis e centro ad latus quodvis corporis demissa; erit hæc recta e centro sphæræ ad centrum lateris; adeoque si n fuerit laterum numerus, et β sit area lateris, erit soliditas corporis $= \frac{n\beta x}{3}$; atque ex x et z prodit hypotenusa r . Imo et anguli ad centrum in triangulis æquicurvis, quæ latera pyramidum constituunt, innotescunt; quum duo latera ipsi r sint æqualia, tertium vero b sit.

Potestque etiam arcus u circuli maximi, cuius chorda b est, reperiri: nempe

$$b = 2 \sin \frac{I}{2} u,$$

adeoque

$$\sin \frac{I}{2} u = \frac{b}{2},$$

et arcus ipsi $\frac{b}{2}$ tanquam sinui respondentis duplum erit arcus circuli maximi, quo tanquam latere in superficie sphæræ, figuræ regulares (concernentes) eam claudentes describi possunt. Potest autem b per r exprimi; adeoque etiam sinus pro dato radio r quæri.

Quod si ad *tetraedrum* applicetur: fiet soliditas

$$\frac{x}{3} \cdot 4 \cdot \frac{b^2}{4} \sqrt{3} = \frac{x}{\sqrt{3}} b^2 = \frac{b^3 \sqrt{2}}{12},$$

atque hinc

$$x = \frac{b \sqrt{6}}{12}.$$

Est autem

$$r^2 = x^2 + z^2 \quad \text{et} \quad z = \frac{b}{\sqrt{3}},$$

adeoque

$$r = \sqrt{\frac{6b^2}{144} + \frac{b^2}{3}} = b \sqrt{\frac{3}{8}};$$

atque etiam b ex r dato prodit, nempe

$$b = r : \frac{\sqrt{3}}{8} = r \sqrt{\frac{8}{3}}.$$

Atque si quæratur u arcus chordæ b , erit

$$\sin \frac{1}{2} u = \frac{1}{2} r \sqrt{\frac{8}{3}}.$$

Idem ad reliqua applicatur. *Dodecaedri* et *icosaedri* soliditates sub-sidio trigonometriæ prodeunt: nempe pro latere linearī b est *dodecaedri soliditas*

$$= \frac{b^3}{4} (15 + 7\sqrt{5}),$$

et *icosaedrum*

$$= \frac{5b^3}{12} (3 + \sqrt{5}).$$

Unde x et r & modo dicto reperiuntur, ex. gr. *pro icosaedro* erat $z = \frac{b}{\sqrt{3}}$, et basis cuiusvis pyramidum, quæ heic ad centrum numero 20 fient, est $\frac{b^2 \sqrt{3}}{4}$; itaque ex

$$\frac{5b^3}{12} (3 + \sqrt{5}) = 20 \cdot \frac{x}{3} \cdot \frac{b^2 \sqrt{3}}{4} = \frac{5b^2 x}{\sqrt{3}}$$

prodit x , et tum r .

Quod cubum attinet, pro latere linearī b eius erit area lateris plani b^2 , et soliditas b^3 , z vero erit $\frac{b}{\sqrt{2}}$ (Fig. 247.) ; atque hinc

$$b^3 = \frac{x \cdot 6b^2}{3};$$

unde

$$x = \frac{b}{2}.$$

Itaque quum sit

$$r^2 = x^2 + z^2,$$

erit

$$r^2 = \frac{b^2}{4} + \frac{b^2}{2} = \frac{3b^2}{4},$$

adeoque

$$r = \frac{b\sqrt{3}}{2} \quad \text{et} \quad b = \frac{2r}{\sqrt{3}}.$$

Hinc si arcus u chordæ b quæratur, erit

$$\sin. \frac{1}{2} u = \frac{1}{2} b = \frac{r}{\sqrt{3}};$$

itaque arcus ipsi $\frac{r}{\sqrt{3}}$ tanquam sinui respondentis duplum erit arcus quæsitus u .

Quod ad reliqua etiam applicari evidens est.

Scholion. Notandum autem est, quod si circulus maximus C per n dividatur, atque e divisionis punctis ad utrumque polum quadrantes ducantur, et e quovis divisionis puncto in quadrantibus inde ductis ubique æquales arcus v absecantur; atque in quovis hemisphærio arcuum absекторum proximorum fines, item eorundem fines in quovis semicirculo rectis iungantur: oriantur corpora certa e duabus figuris regularibus n laterum et n rectangularis, quæ quadrata esse possunt; et si ab extremitatibus arcuum ad divisionis ipsius C puncta rectæ ducantur, trapezia numero $2n$ æqualia et duo polygona n laterum æqualia erunt sphæræ inscripta.

§. 6.

Erant autem (§. 2) dicta corpora regularia sensu stricto; at dantur etiam alia, quæ figuris regularibus quidem, sed diversæ speciei clauduntur; et dantur præterea talia, quæ per figuras rectilineas non regulares, sed omnes inter se æquales clauduntur; imo et hoc per figuras diversæ speciei quoque fieri potest, quarum quævis eiusdem speciei inter se æquales sunt, atque certo ordine continuo se invicem excipiunt; imo possunt etiam figuræ nonnisi quoad aream æquales esse; possuntque hæc *corpora regularia ordinis primi, secundi, &c.* dici.

Recensere autem hæc, computareque et retia exhibere, quamvis disquisitionem haud inelegantem præbeat, longius esset, quam heic locum habere queat. Aliquid tamen annotare liceat.

Quæri potest: superficies sphæræ in quot qualesve figuræ æquales, quarum latera arcus circulorum maximorum sint, dividi queat? et quarum sint laterum chordæ in plano, quarum non? atque in casu priore quales figuræ planas præbeant?

Ex. gr. Dividitur superficies sphæræ in n triangula pro quovis numero pari n , si circulus maximus per $\frac{n}{2}$ dividatur, atque ad puncta divisionis a polis quadrantes ducantur; imo quivis numerus n etiamsi impar fuerit, circulo maximo per n diviso, semicirculis a polo ad polum per divisionis puncta ductis, partes æquales numero n prodibunt; at aliter superficies sphæræ (adeoque spatium per formas pyramidales, apice communi in centro gaudentes) nonnisi per numerum parem dividi potest. Dividitur autem superficies sphæræ, ope quinque corporum regularium, (iuxta Fig. 248.) modis sequentibus:

1. e cuiusvis lateris plani centro ducantur rectæ ad apices figuræ;
2. e quovis apice per centrum usque ad perimetrum figuræ;
3. in quovis triangulo æquicruro, (in 1.) generato, ducatur e centro perpendicularis ad basim;
4. e cuiusvis figuræ centro mittatur perpendicularis ad quodvis figuræ latus;

5. in cubo præterea etiam ducatur ad duo tantum latera quadrati parallela;

atque producantur, usque ad superficiem sphæræ, rectæ omnes e centro sphæræ per extrema rectilineorum hoc pacto generatorum; et ponantur per puncta sectionis arcus circulorum maximorum, lateribus figurarum rectilinearum respondentes. Manifesto dividetur in quovis casuum dictorum superficies sphæræ in figuræ æquales.

Sed et, paucis exceptis, chordæ laterum cuiusvis figuræ sphæricæ novum corpus regulare sensu latoe præbent. Ex. gr. (Fig. 249.) dat trapezium, et hoc pacto duodecim trapeziis æqualibus clausum corpus e cubo prodit. Sed (Fig. 250.) nullum dat, quia chordæ non sunt in plano. Sit enim (Fig. 249.) quadratum \mathfrak{ABCD} latus cubi, cuius centrum f sit, sintque E, f, G, K meditullia rectarum $\mathfrak{AD}, \mathfrak{BC}, \mathfrak{AB}, Ef$, et sit f'' centrum illius lateris cubi, quod cum \mathfrak{ABCD} rectam \mathfrak{AB} communem habet: erunt A, B, C, D in superficie sphæræ, cuius centrum f et radius fa est; atque planum Ef secabit sphærā in circulo maximo C , ad quem recta ff'' perpendicularis erit; et polus p ipsius C in hanc cadet; eruntque A, E, f, p in plano, uti B, f, f, p ; nam $\mathfrak{AE} \parallel GK \parallel ff''$. Secent EF, ff , fK, fG productæ superficiem sphæræ in e, f, f', g ; efficient eEf et $ff'p$ cum arcubus claudentibus eAp et fBp quadrantes ad C perpendicularares, quorum partes eA et fB æquales sunt. Estque recta ef in plano Ef , et parallela ad Ef , atque hac maior, sed $Ef = ef$ et $\parallel AB$; itaque et $ef \parallel AB$, adeoque $efAB$ in plano est, et quum $ef > Ef = AB$ sit, trapezium est.

Sed (Fig. 250.) si planum c per AB ad ff'' perpendicularare concipiatur, nempe cubi latus illud, cuius centrum f'' erat: erit hoc parallelum ipsi C , et sectio eius cum sphæra circulus parallelus; sit huius sectio q cum quadrante pf' ; erit arcus $qf' = eA$, et e, A, q, f' in plano erunt; sed recta fG transit per planum c , adeoque g ultra q cadit, et arcus $gf' > eA$ est. Erant autem A, q, e, f' in plano, itaque A, g, e, f' non sunt in plano; quia si essent, etiam g in eodem plano illo esset, quod per A, e, f' determinatur; adeoque et A, e caderent in planum per circuli tria puncta g, q, f' determinatum; quod fieri nequit, quia arcus Ag

et q̄' partes quadrantum diversorum ad C perpendicularium sunt, quorum plana nonnisi rectam per polos communem habent; neque \mathfrak{A} neque \mathfrak{e} autem in rectam \mathfrak{ff}' per polos euntem cadit. Itaque casus posterior sphæram quidem (spatiumque) dividit, sed corpus regulare novum haud præbet.

Sed his amplius vacare instituti ratio prohibens, transire iubet ad

Supplementum numeri 31351.

Ut in Trigonometria plana, et hic mutuam laterum ab angulis oppositis dependentiam quærere (præter plura iam dicta et veritatis ipsius desiderium) plurimæ mensurationes in cœlis terraque necessariæ induxerunt; quum inde triangulum sphæricum quoque e tribus datis illud determinantibus computare liceat. *Determinatur triangulum sphæricum* in eadem sphæra :

1. *per duo latera et angulum interceptum,*
2. *per duos angulos et latus interceptum,*
3. *per tria latera,*
4. *per tres angulos.*

Pagina sequens formulas primarias exhibet, e quibus reliqua fluunt; ex. gr. ex IV., dato latere B cum angulis adiacentibus a, c , reperitur $\wedge b$; nempe

$$\cos. b = \cos. B \sin. a \sin. c - \cos. a \cos. c;$$

atque tum ex B, b, a latus A ipsi a oppositum quoque prodit per I.

§. I.

Dependentia laterum ab angulis oppositis mutua vero a dependentia in triangulo rectilineo in eo differt, quod ibi latera, hic vero sinus laterum sint ut sinus angulorum oppositorum.

Sit nempe triangulum sphæricum (Fig. 251.) abc , et

$$bc = A, ca = B, ab = C,$$

et anguli oppositi sint

$$a, b, c;$$

est :

$$\text{I. } \sin. A : \sin. B = \sin. a : \sin. b;$$

unde e datis ipsorum A, B, a, b tribus prodit quartum; et ex hoc promanant formulæ pro Trigonometria sphærica primariæ sequentes.

$$\text{II. } \cot. a = \frac{\sin. C \cot. A - \cos. b \cos. C}{\sin. b}$$

(e datis A, C et intercepto angulo b angulus a).

$$\text{III. } \cos. b = \frac{\cos. B - \cos. C \cos. A}{\sin. C \sin. A}$$

(e datis tribus lateribus angulus b).

$$\text{IV. } \cos. B = \frac{\cos. b + \cos. a \cos. c}{\sin. a \sin. c}$$

e datis tribus angulis latus B).

Demonstrantur autem hæc in sequentibus; relatis etiam formulis triangula rectangula specialiter concernentibus.

§. 2.

Sinus laterum quorumvis esse ut sinus angulorum illis oppositorum, prius pro triangulo rectangulo demonstratur; unde generaliter liquet.

Sit (Fig. 252.) \mathfrak{C} centrum sphæræ, et A, B sint catheti, atque H hypotenusa: erit angulus plani A cum plano B rectus, sit a angulus plani H cum plano B , et b angulus plani H cum plano A ; hypotenusa H rectus, et ipsis A, B opponentur a, b , compactoque triangulo, b et b' coincident. Demittatur ex b ad $\mathfrak{C}h$ perpendicularis $b\delta$; erit hæc perpendicularis ad planum B , quia planum $A \perp B$, et $\mathfrak{C}h$ eorum sectio est (pag. 222), neque alia ex b omnino cum b' (in triangulo sphærico compacto) coincidente datur. Sit $b'f \perp \mathfrak{Ca}$, et in B sit $f\ell$ perpendicularis

ex ℓ ad $\mathfrak{C}a$ erecta; erit $\wedge b'\ell$ angulus ipsorum H et B ; eritque $\mathfrak{C}\ell$ perpendicularis ad planum $b'\ell$, quod dicatur Q ; quia $\mathfrak{C}\ell$ perpendicularis ad $\ell b'$ et ℓ est; et hinc etiam $\mathfrak{C}\ell$ planis H et B communis, utrumque ad Q perpendiculare reddit, atque sectio planorum B et Q est recta ℓ . Hinc autem ex b' (quod cum b coincidens in plano Q ad B perpendiculari est) demissa ad B perpendicularis, necessario in ℓ cadit: quamobrem, quum perpendicularem hanc in δ cadere dictum sit, δ in ℓ et simul in $\mathfrak{C}h$ cadit. Efformatur itaque triangulum $b\ell\delta$, in quo $\wedge \ell\delta b$ rectus, adeoque $=\wedge AB$ id est angulo ipsorum A et B), $\wedge \delta\ell b$ vero $=\wedge HB=a$, atque latus $b\ell=\sin. H$, et latus $\ell\delta=b$.

In triangulo rectilineo $b\ell\delta$ vero est

$$b\ell : \ell\delta = \sin. \text{tot.} : \sin. \alpha,$$

id est

$$\sin. H : \sin. A = 1 : \sin. \alpha$$

(*pro radio i computando omnia*), atque hinc

$$\sin. H = \frac{\sin. A}{\sin. \alpha}.$$

Pariter (e Fig. 252*) patet, esse

$$\sin. H : \sin. B = 1 : \sin. b,$$

atque hinc

$$\sin. H = \frac{\sin. B}{\sin. b}.$$

Consequenter

$$\frac{\sin. A}{\sin. \alpha} = \frac{\sin. B}{\sin. b},$$

seu

$$\sin. A : \sin. B = \sin. \alpha : \sin. b.$$

Hinc in quovis triangulo sphaericō, quaecunque duo latera A , B accipiāntur, erunt sinus laterum uti sinus angulorum oppositorum.

Nam e vertice trianguli lateri C opposito, arcus circuli maximi perpendicularis D ad C demitti potest (pag. 277); cadetque hæc aut intra fines ipsius C , aut extra C , aut ad finem. In casu primo (Fig. 253. a.) est

$$\sin. A : \sin. D = 1 : \sin. b$$

et

$$\sin. B : \sin. D = 1 : \sin. \alpha ;$$

nempe A, B hypotenusæ sunt, et D cathetus; et hinc

$$\sin. D = \sin. A \sin. b = \sin. B \sin. \alpha ;$$

atque hinc

$$\sin. A : \sin. B = \sin. \alpha : \sin. b.$$

In casu secundo (Fig. 253b.) autem est

$$\sin. A : \sin. D = 1 : \sin. b$$

et

$$\sin. B : \sin. D = 1 : \sin. \alpha' ;$$

sed

$$\alpha + \alpha' = 2R,$$

itaque

$$\sin. \alpha' = \sin. \alpha ;$$

adeoque idem quod prius erat, pariter sequitur.

In casu tertio erit triangulum rectangulum, de quo (in præcedentibus) demonstratum est.

§. 3.

In triangulo rectangulo præter angulum rectum duo sunt data: aut *duo latera*, aut *duo anguli*, aut *unum latus et unus angulus*; duo latera sunt aut *catheti*, aut *hypotenusa et cathetus*; *duo anguli* sunt nonnisi illi, qui *hypotenusae adiacent*; *unum latus et unus angulus* autem sunt *angulus hypotenusae adiacens et cathetus aut adiacens angulo, aut ei oppositus*. Omnium horum autem resolutio sequitur (e præcedentibus) modo sequente. (Fig. 254.)

Trianguli rectanguli \mathfrak{ABH} hypotenusa H et catheti A, B (si necesse fuerit) continuentur, donec per circulum maximum ex \mathfrak{B} quadrantis inter-
vallo in superficie sphæræ descriptum, secentur in $\mathfrak{h}, \mathfrak{a}, \mathfrak{b}$. Casus plures
dantur: nempe A est aut $>$ aut $<$ aut $= R$; atque in quolibet casuum

priorum sectio circuli, ex \mathfrak{B} (tanquam polo) quadrantis intervallo descripti, cum B continuato aut cadet in H , aut inter H et A , aut ultra H .

Consideretur prius casus, ubi tam A , B quam $H < R$ (Fig. 254a.): manifesto ad a angulus rectus est, adeoque $\mathfrak{h}b$, ab quadrantes (pag. 277), atque \mathfrak{B} , b poli arcuum ah , $a\mathfrak{h}$ sunt, adeoque $ah = \wedge b$, $\mathfrak{h}a =$ angulo ad polum b ; præterea patet, A' , B' , b' , H' complementa ipsorum A , B , b , H esse. In $\triangle hAh$ (ubi verticales a sunt æquales), est

$$\text{I. } 1 : \sin. a = \sin. B' : \sin. b' = \cos. B : \cos. b;$$

et in $\triangle AhB$ *sinus totus ad sinum anguli*, uti *cosinus catheti adiacentis ad cosinum anguli oppositi*; atque hinc

$$\sin. a = \frac{\cos. b}{\cos. B},$$

quo valore substituto in proportione, quæ in $\triangle AhB$ est, nempe in

$$\sin. a : \sin. b = \sin. A : \sin. B,$$

fit

$$\frac{\cos. b}{\cos. B} : \sin. b = \sin. A : \sin. B,$$

et hinc

$$\sin. b \sin. A = \frac{\cos. b \cdot \sin. B}{\cos. B} = \cos. b \tang. B;$$

et

$$\tang. B = \frac{\sin. b \sin. A}{\cos. b} = \sin. A \tang. b,$$

seu

$$\text{II. } 1 : \sin. A = \tang. b : \tang. B,$$

id est: *sinus totus ad sinum catheti*, uti *tangens anguli adiacentis ad tangentem lateris oppositi*; et hinc

$$\sin. A = \frac{\tang. B}{\tang. b} = \cot. b \tang. B,$$

et

$$\tang. B = \sin. A \tang. b.$$

III. In eodem triangulo hAh est

$$\sin. B' : \sin. H = 1 : \sin. A',$$

seu

$$\cos. B : \cos. H = 1 : \cos. A;$$

unde *e quibusvis duobus lateribus tertium prodit*, et

$$\cos. H = \cos. A \cos. B.$$

IV. In eodem triangulo (per II.) est

$$1 : \sin. b' = \tan. A' : \tan. H',$$

seu

$$1 : \cos. b = \cot. A : \cot. H = \tan. H : \tan. A;$$

quia

$$\frac{\cos. A}{\sin. A} : \frac{\cos. H}{\sin. H} = \frac{\sin. H}{\cos. H} : \frac{\sin. A}{\cos. A}$$

(per factum extremorum mediorumque =1).

Id est *sinus totus ad cosinum anguli, uti tangens hypotenusae ad tangentem catheti angulo adiacentis*.

V. Item (per II.) in eodem triangulo est

$$1 : \sin. H' = \tan. a : \tan. b',$$

seu

$$1 : \cos. H = \tan. a : \cot. b,$$

id est *sinus totus ad cosinum hypotenusae, uti tangens anguli adiacentis ad cotangentem alterius*.

E quibus resolutiones quæsitæ patent. Sequitur etiam ex II., ubi $\tan. B = \sin. A \tan. b$ erat, quod si cathetus $>$ vel $=$ aut $< R$, et angulus ei oppositus $>=$ aut $< R$ sit; nam $\sin. A$ positivus est, itaque $\tan. B$ et $\tan. b$ (nisi $B = R = b$) simul positivæ aut simul negativæ esse debent, ut æqualitas locum habeat; tangens enim anguli obtusi negativa est, et recti infinita est, $\sin. A$ vero finitum est.

Ex III. autem, ubi $\cos. H = \cos. A \cos. B$, sequitur, quod si $H > R$, alteruter cathetorum tantum $> R$; et si $H < R$, tum uterque $>$ vel $< R$ est; si vero $H = R$, tum alterutrum saltem cathetorum item rectum esse oportet. Nam cosinus anguli obtusi negativus est, et $\cos. R = 0$;

itaque si $H=R$, fiet $\circ = \cos. A \cos. B$; adeoque sive $\cos. A$ sive $\cos. B$ vel utrumque \circ est, quod, nisi A vel $B=R$ sit, fieri nequit. Ita si $\cos. H$ negativus fuerit, sive $\cos. A$ sive $\cos. B$ negativus erit; at si $\cos. H$ positivus fuerit, tam $\cos. A$ quam $\cos. B$ simul positivus vel simul negativus esse debet.

Ut tamen dicta generaliter valeant, casus omnes supra dicti percendi sunt, quos (Fig. 254.) exhibet: demonstratio autem eadem in quo vis casu erit, dummodo complementum arcus rite sumatur (nempe complementum 100 graduum — 10° est), et angulorum se invicem ad $2R$ complementum sinus idem accipiatur, atque complementa literis iisdem accentu insigniantur; reflectaturque polum esse in sectione duarum perpendicularium, et anguli ad polum quantitatem esse arcum circuli maximi ad quadrantis distantiam interceptum. Si $A=R$, tum etiam (pag. 295) $a=R=A$, adeoque $B=b$; atque $1:\sin. a = \cos. B : \cos. b$ (ex I.) fit $1:1 = 1:1$. Casus reliquos singulos percensere Tyronum exercitio relinquitur.*

§. 4.

Si e vertice quovis trianguli sphærici ad latus oppositum C perpendicularis D demittatur (pag. 277), tres casus sunt: cadet nempe D aut intra fines ipsius C , aut ad finem, aut extra fines. Eritque (Fig. 253).

I. (e præcedente II.)

* Applicando (Tom. I. pagg. 531—532) dicta Tyronibus relicta facile sequent. Nempe (Fig. 254. b. dum $H=R$ et $A < R$, est b polus arcus A (propter R et R); itaque et

atque iuxta (pag. 294) in I. fit $b = B = R$ et $a = A$;

in II. fit $1 : \sin. a = \circ : \circ$;

nempe $1 : \sin. A = \infty : \infty$,

in III. fit $\tang. b = \tang. B = \infty$;

$\circ : \circ = 1 : \cos. A$,

in quo casu ex H et B cathetus alter A haud innotescit; in IV. fit

$1 : \circ = \infty : \tang. A$

et in V. fit $1 : \circ = \tang. a : \circ$.

(Errata Ed. I. Tom. II. pag. 371).

$$1 : \sin M = \tan. b : \tan. D \quad \text{et} \quad 1 : \sin. N = \tan. a : \tan. D$$

atque hinc

$$\sin. M : \sin. N = \tan. a : \tan. b;$$

II. (e præcedente III.)

$$1 : \cos. M = \cos. D : \cos. A \quad \text{et} \quad 1 : \cos. N = \cos. D : \cos. B$$

atque hinc

$$\cos. M : \cos. N = \cos. A : \cos. B.$$

Notandum autem: quod si D extus cadat, a obtusus sit, adeoque angulus deinceps positus a' acutus erit; adeoque in linea secunda $\tan. a$ negativa sit $= -\tan. a'$; itaque N in hoc casu negative accipendum est, ut proportio valeat (Tom. I. pag. 42); valebit enim hoc pacto; nam tum $\sin. N$ erit negativus, et $\tan. a$ quoque negativa, atque D erit $< R$, quum angulus oppositus $a' < R$ sit, adeoque $\tan. D$ positiva erit; itaque ordo signorum erit $\pm \leftarrow \leftarrow \pm \star$.

§. 5.

Atque hinc (ex §. 3. IV.) est

$$1 : \cos. b = \tan. A : \tan. M,$$

adeoque

$$\tan. M = \cos. b \tan. A.$$

Estque (e §. 4. I.)

$$\sin. M : \sin. N = \tan. a : \tan. b,$$

et hinc (quia $N = C - M$) fit

$$\sin. M : (\sin. C \cos. M - \cos. C \sin. M) = \tan. a : \tan. b;$$

* Si (Fig. 253. $a - c$) hypotenusa $A = R$ fuerit, in singulis tribus casibus $M = R$ (nisi $b = R$, adeoque triangulum ABC rectangulum sit); quia tum (pag. 295) alterutrum cathetorum $= R$ esse oportet, si vero D esset R , tum b quoque R esset. Erit igitur B polus ipsius D , et $m = R$, atque $D = b$ in duobus casibus prioribus, in tertio vero D æquale deinceps posito ipsius b . Unde formulæ applicatae patent.

et dividendo per $\cos. M$, fit

$$\tan. M : (\sin. C - \cos. C \tan. M) = \tan. a : \tan. b;$$

atque hinc

$$\frac{\sin. C \tan. a}{\tan. b + \cos. C \tan. a} = \tan. M,$$

quod $= \cos. b \cdot \tan. A$ erat. Atque hinc

$$\sin. C \tan. a = \cos. b \tan. A \tan. b + \cos. C \tan. a \cos. b \tan. A;$$

et per $\tan. a \tan. A$ dividendo, et ipsi $\tan. b$ substituendo $\frac{\sin. b}{\cos. b}$, fit

$$\sin. C \cot. A = \sin. b \cot. a + \cos. b \cos. C;$$

e quo, si *latera A et C cum angulo intercepto b* data fuerint, *reperitur angulus a*.

Ita (in §. 5) ex

fiet

$$\tan. M = \cos. b \tan. A,$$

$$\infty = \cos. b \cdot \infty.$$

Eritque in triangulo rectangulo, cuius catheti N et D , hypotenusa B est, in casu primo

$$N = C - M,$$

in secundo $- (C - M)$, in tertio $C + M$; adeoque in primo est

$$\sin. N = - \cos. C$$

(pag. 131), in secundo et tertio est $\cos. C$; atque angulus adiacens est a in primo et tertio, in secundo $2R - a$. Atque (pag. 294, II.) in primo est

$$1 : \sin. N = \tan. a : \tan. D$$

seu

$$1 : - \cos. C = \tan. a : \tan. b,$$

in secundo

$$1 : \sin. N = \tan. (2R - a) : \tan. D$$

seu

$$1 : \cos. C = - \tan. a : \tan. b,$$

in tertio

$$1 : \sin. N = \tan. a : \tan. D$$

seu

$$1 : \cos. C = \tan. a : - \tan. b.$$

Itaque

$$\tan. a = - \frac{\tan. b}{\cos. C};$$

atque hinc et pro $A = R$ valet formula (pagg. 291, 298); nempe ibidem

$$\cot. a = \frac{\sin. C \cdot \cot. A - \cos. b \cdot \cos. C}{\sin. b};$$

quod pro $A = R$ fit

$$= - \frac{\cos. b \cdot \cos. C}{\sin. b};$$

§. 6.

Erat porro (§. 4. II.)

$$\cos. M : \cos. N = \cos. A : \cos. B,$$

et (quia $N = C - M$) fit

hinc $\cos. M : (\cos. C \cos. M + \sin. C \sin. M) = \cos. A : \cos. B;$

$$\frac{\cos. M}{\cos. M} : \left(\frac{\cos. C \cos. M}{\cos. M} + \frac{\sin. C \sin. M}{\cos. M} \right) = \cos. A : \cos. B,$$

seu

$$1 : (\cos. C + \sin. C \tan. M) = \cos. A : \cos. B;$$

et (§. 5.)

$$\frac{\cos. B - \cos. C \cos. A}{\sin. C \cos. A} = \tan. M = \cos. b \tan. A.$$

Atque hinc

$$\cos. b = \frac{\cos. B - \cos. C \cos. A}{\sin. C \cos. A \tan. A}$$

quod item

$$= \frac{\cos. B - \cos. C \cos. A}{\sin. C \sin. A},$$

$$\text{quia } \tan. A = \frac{\sin. A}{\cos. A}.$$

Datis igitur tribus lateribus, reperitur angulus lateri cuivis B oppositus.

§. 7.

Ex hoc etiam sequitur modus e datis tribus angulis latus cuivis oppositum reperiendi.

nempe

$$\frac{1}{\tan. a} = \cot. a,$$

$$1 : -\frac{\tan. b}{\cos. C} = -\frac{\cos. C}{\tan. b};$$

atque hinc

$$\cot. a = -\frac{\cos. C \cdot \cos. b}{\sin. b} \text{ (seu } -\cot. b \cdot \cos. C).$$

Si et $D = R$, tunc etiam $B = R$, et triangulum rectangulum est; atque tunc

$$a = R = b, \quad \text{et} \quad \cot. a = -\cot. b \cos. C = 0.$$

(Errata Ed. I. Tom. II. pagg. 371—372).

Sit enim (Fig. 255.) $\triangle abc$, et verticibus pro polis acceptis, descriptisque quadrantis intervallo arcubus, orietur triangulum novum $\alpha\beta\gamma$, cuius angulus quivis latus prioris trianguli illi angulo oppositum ad $2R$ complet (pag. 279).

Erit (per præcedentia)

$$\cos. \omega = \frac{\cos. \beta - \cos. \alpha \cos. \gamma}{\sin. \alpha \sin. \gamma}.$$

Sed arcus se invicem ad $2R$ compleentes sinu eodem gaudent, imo et cosinus nonnisi in eo differunt, quod arcus quadrante minoris positivus sit, et eum ad $2R$ complementis negativus sit: itaque

$$\cos. \omega = -\cos. B, \quad \cos. \beta = -\cos. b, \quad \cos. \alpha = -\cos. a,$$

et

$$\cos. \gamma = -\cos. c; \quad \sin. \alpha = \sin. a, \quad \sin. \gamma = \sin. c.$$

Consequenter

$$-\cos. B = \frac{-\cos. b - (-\cos. a)(-\cos. c)}{\sin. a \sin. c};$$

adeoque

$$\cos. B = \frac{\cos. b + \cos. a \cos. c}{\sin. a \sin. c}.$$

Unde etiam, quum per angulos a, b, c singula latera, nempe A, B, C , determinentur, atque per trium laterum æqualitatem in duobus triangulis, in eadem sphæra ponatur æqualitas triangulorum (pag. 224): manifesto in eadem sphæra per solam angulorum æqualitatem in duobus triangulis ponitur triangulorum æqualitas.

§. 8.

Trianguli sphærici \mathfrak{AWC} (Fig. 243.) autem area t e radio r et angulis α, β, γ prodit modo sequente. Erat (pag. 281) S superficies sphæræ $= 2t + 2a + 2b + 2c$; sed

$$t + a = \frac{r^2 \pi \alpha}{R},$$

nam segmentum hoc a polo \mathfrak{A} ad alterum a toties minor ipso S est.

quoties minor $\wedge \alpha$ ipso $4R$ est; adeoque fit

$$4R : \alpha = 4r^2\pi : t + a.$$

Pariter est

$$t + b = \frac{r^2\pi\beta}{R} \quad t + c = \frac{r^2\pi\gamma}{R};$$

adeoque

$$t + a + t + b + t + c = \frac{r^2\pi}{R} (\alpha + \beta + \gamma);$$

et

$$\frac{2r^2\pi}{R} (\alpha + \beta + \gamma) = 2(t + a + t + b + t + c) = 2t + 2a + 2b + 2c + 4t = S + 4t;$$

et hinc

$$t = \frac{2r^2\pi}{4R} (\alpha + \beta + \gamma) - \frac{S}{4} = \frac{r^2\pi}{2R} (\alpha + \beta + \gamma) - r^2\pi = \frac{r^2\pi(\alpha + \beta + \gamma - 2R)}{2R}.$$

Scholion 1. Formulæ ad casus quosvis calculo logarithmico adaptatae reperiuntur in tabellis, tabulis trigonometricis plerumque adnexit.

Ex. gr. In §. 6. (pag. 299) erat

$$\cos. b = \frac{\cos. B - \cos. C \cos. A}{\sin. C \sin. A}.$$

Sed erat (pag. 135) $\cos. b = 1 - 2 \sin^2 \frac{1}{2} b$; et hinc

$$1 - 2 \sin^2 \frac{1}{2} b = \frac{\cos. B - \cos. C \cos. A}{\sin. C \sin. A};$$

atque hinc

$$\cos. B - \cos. C \cos. A = \sin. C \sin. A - 2 \sin^2 \frac{1}{2} b \sin. C \sin. A,$$

et

$$\sin^2 \frac{1}{2} b = \frac{\cos. B - \cos. C \cos. A - \sin. C \sin. A}{-2 \sin. C \sin. A} = \frac{\cos. (C-A) - \cos. B}{-2 \sin. C \sin. A}.$$

Ponatur

$$C - A = x - y = d, \quad B = x + y = s;$$

erit

$$x = \frac{B + C - A}{2}, \quad y = \frac{B - C + A}{2};$$

nempe

$$\frac{s+d}{2} = x, \quad \frac{s-d}{2} = y;$$

eritque

$$\cos. s = \cos. (x+y) = \cos. \frac{s+d}{2} \cos. \frac{s-d}{2} - \sin. \frac{s+d}{2} \sin. \frac{s-d}{2}$$

et

$$\cos. d = \cos. (x-y) = \cos. \frac{s+d}{2} \cos. \frac{s-d}{2} + \sin. \frac{s+d}{2} \sin. \frac{s-d}{2};$$

adeoque

$$\begin{aligned} \cos. d - \cos. s &= 2 \sin. \frac{s+d}{2} \sin. \frac{s-d}{2} = \\ &= \cos. (C-A) - \cos. B = 2 \sin. \frac{B+C-A}{2} \sin. \frac{B-C+A}{2}; \end{aligned}$$

quod item, si $\frac{A+B+C}{2}$ dicatur S , erit

$$= 2 \sin. (S-A) \sin. (S-C).$$

Consequenter

$$\sin^2 \frac{1}{2} b = \frac{\sin. (S-A) \sin. (S-C)}{\sin. A \sin. C},$$

et

$$\log. \sin. \frac{1}{2} b = \frac{\log. \sin. (S-A) + \log. \sin. (S-C) - \log. \sin. A - \log. \sin. C}{2}.$$

Quæ formula ab ea, quæ (pag. 143) in trigonometria plana pro angulo e tribus lateribus relata est, nonnisi in eo differt, quod in membro æquationis ad dextram sinus deleatur.

Pariter $\cos. \frac{1}{2} b$ reperitur; nempe sinus sæpe ambiguum esse potest, quum acuto obtusoque eum ad $2R$ complementi sinus idem respondeat; cosinus autem negative prodiens angulum recto maiorem indicet, uti tangens et cotangens. Est (pag. 135) $2 \cos^2 \frac{1}{2} b - 1 = \cos. b$; atque hinc

$$\frac{\cos. B - \cos. (C+A)}{2 \sin. C \sin. A} = \cos^2 \frac{1}{2} b;$$

atque si B ponatur d , et $C+A$ ponatur s , fiet

$$\cos. B - \cos. (C+A) = 2 \sin. \frac{A+B+C}{2} \sin. \frac{C+A-B}{2}$$

et

$$\cos^2 \frac{1}{2} b = \frac{\sin. S \sin. (S-B)}{\sin. A \sin. C}.$$

Scholion 2. Applicationes etiam quasdam trigonometriæ sphæricæ adferre in Tyronum gratiam supervacuum haud erit.

1. Satis omnium constat, dum sol in æquatore est, ubivis terrarum æquinoctium esse, exceptis polis ipsis: nam æquator et horizon duo circuli maximi bisecant se ubique, nisi coincidant, quod nonnisi pro polis fit; itaque ubivis præter polos, semicirculus est supra et infra horizontem; pro polis autem tunc totus circulus per 24 horas in horizonte percurritur; refractio (per se quoque variabilis) nunc haud consideratur.

Dicitur (Fig. 256.) sectio \mathfrak{f} æquatoris $\alpha\delta$ cum horizonte $m\mathfrak{f}$, a meridiano $m\mathfrak{h}\mathfrak{p}$ versus orientem, *cardo orientis*; et si sol supra vel infra æquatorem sit, describatque apparenter circulum C æquatori parallelum: arcus horizontis a cardine orientis usque ad sectionem \mathfrak{p} circuli C cum horizonte (a meridiano versus orientem) dicitur *amplitudo ortiva*; quæ post æquinoctium vernale in hemisphærium boreale, post æquinoctium autumnale autem in australe cadit. Itaque arcus $\mathfrak{p}\mathfrak{p}$ cadit æstate supra æquatorem, hieme infra.

Si a polo nostro \mathfrak{P} ad alterum ducatur per \mathfrak{p} (amplitudinis ortivæ a cardine orientis incipiendo finem) semicirculus, hic æquatorem secabit, fiat hoc in δ ; secet C meridianum supra horizontem in \mathfrak{h} , et æquator secet meridianum in α ; erit $\mathfrak{p}\mathfrak{h}$ arcus solis ab ortu ad meridiem usque decurrentus, atque æquatoris arcus $\delta\alpha$ totidem graduum erit. Est vero motus terræ circa axem uniformis, et circuli paralleli cum æquatore revolutionem tempore 24 horarum simul absolvunt, et $\mathfrak{f}\alpha$ quadrans a \mathfrak{f} usque in meridianum 6 horas habet. Si igitur δ ultra \mathfrak{f} sit, arcus $\mathfrak{f}\delta$ in tempus converti, et hoc tempus addi 6 horis debet (uti æstate fit); si vero δ inter meridianum et \mathfrak{f} fuerit (ut hieme), tum $\mathfrak{f}\delta$ in tempus conversum e 6 horis subtrahendum est, ut tempus ab ortu ad meridiem prodeat; cuius duplum, diem totum supra horizontem, et differentia huius a 24 horis noctem exhibet.

In triangulo sphærico $\mathfrak{f}\delta\mathfrak{p}$ ad δ rectangulo, dato angulo b ad \mathfrak{f} , qui (nempe angulus plani æquatoris cum horizonte) *altitudo æquatoris* audit, datoque arcu $\delta\mathfrak{p}$ (latere B ipsi b opposito), qui est *declinationi* solis æqualis, reperitur arcus $\mathfrak{f}\delta$ (id est A) per (pag. 294); est nempe

$$\sin. A = \frac{\tang. B}{\tang. b} \quad \text{et} \quad \log. \sin. A = \log. \tang. B - \log. \tang. b,$$

pro radio 1 (pag. 140).

Dicitur nempe *declinatio* stellæ cuiusvis arcus circuli maximi a stella ad æquatorem perpendicularis; adeoque dum sol in p oritur, eius *declinatio* p est. Dicitur etiam f *differentia ascensionalis* solis: nempe *recta ascensio* stellæ est arcus æquatoris ad orientem, e puncto æquinoctii vernalis usque ad arcum *declinationis*; et *obliqua ascensio* stellæ dicitur arcus æquatoris, ab eodem puncto vernali usque ad f cardinem orientis, tanquam punctum æquatoris illud, quod cum stella simul in horizonte est, adeoque simul oritur; uti hic punctum f æquatoris et sol in p existens simul oriuntur. Patet itaque f *differentiam ascensionalem esse*, eamque, dum sol in æquatore est, = o fieri; nam tum p et f coincidunt.

Si vero quæratur: pro *declinatione B* solis, quantanam altitudo b æquatoris esse debeat, ut dies ex. gr. 22 horarum fiat? Dimidium huius erit 11, unde subtracto 6, residuum 5 in gradus conversum erit = A; atque in triangulo sphærico ad d *rectangulo* ex B et A reperietur b (per pag. 294), ubi $\tang. B = \sin. A \tang. b$.

Si quæstio eadem pro 24 horis fuerit: tum e dimidio ipsius 24 subtracto 6, manet 6; et hoc in arcum conversum æquale quadranti erit, itaque f polus ipsius B erit; adeoque B = b; nempe *declinatio* solis æqualis altitudini æquatoris.

2. *Gnomonica* etiam, certo sensu ad *unicum problema reductum*, ope trigonometriæ sphæricæ facile resolvitur.

Concipiatur nempe terra quasi globus transparens vacuus superficie vitrea, solo axe opaco; et concipiatur sol sive in æquatore, sive ei parallele circulum describere, radio ad axem terræ perpendiculari, haud considerato eo motu solis annuo, quo apparenti diurno contrarie movetur quotidie.

Concipiatur porro planum quodvis P per centrum f sphæræ (Fig. 257.) eam in circulo maximo C secans (sed extra polum, de quo inferius dicitur); et perpendicularis ad P e centro f erecta secet superficiem in m, sintque poli P et p; erit P loci m *planum horizontale*, et recta mf

linea verticalis, atque planum $\text{Pm}\ell$ *planum meridiani* illius loci est; ac si demittatur ex P (polo supra horizontem) perpendicularis PP' ad P , $\wedge \text{PP}'$ *altitudo poli* loci in dicitur. Secet recta $\ell\text{P}'$ superficiem sphæræ in P'' , erit arcus PP'' æqualis altitudini poli; et secet meridianus æquatoriem in m' .

Dividatur æquator in partes æquales 24 (aut 2.24, 4.24 ℓS) ab m' incipiendo, fiantque per divisionis puncta circuli maximi ad polum: manifesto centrum et uterque polus, adeoque axis omnibus communis erit; dicuntur autem omnes hi *circuli horarii*, et anguli, quos cum quadrante Pmm' faciunt ad P , *anguli horarii* dicuntur.

Si iam sol in æquatore aut circulo ei parallelo, e meridiano Pmm' uniformiter motus, describat arcum quempiam α , erit α quoad gradus quantitas anguli, quem planum meridiani cum plano ℓ per axem et solem posito facit; eruntque anguli verticales planorum horum æquales. Manifesto autem umbra axeos in planum ℓ , et ad planum P infra axem cadit, (si non in hemisphærio boreali, fiet in australi); atque nonnisi punctum illud q queritur, in quo peripheria C per planum ℓ secatur; tum enim recta ℓq , e centro ℓ ad q , linea horaria in plano P erit; id est si ex. gr. $\alpha = \frac{n \cdot 360^\circ}{24}$ sit versus occidentem, dum umbra axeos tanquam stili in ℓq cadet: erit tempus ante meridiem, ab ea n horis distans.

Innotescit autem ℓq (Fig. 257*) per angulum, quo a $\ell\text{P}''$ (nempe recta, in qua planum meridianum secat planum P) distat, e triangulo sphærico $\text{PP}''q$ ad P'' rectangulo; si enim detur A altitudo poli = arcui PP'' , et angulus horarius $b = \wedge q\text{P}''$: prodit arcus $q\text{P}''$, nempe in triangulo sphærico ad P'' rectangulo latus B angulo b oppositum; scilicet (pag. 294) $\text{tang. } B = \sin. A \text{ tang. } b$.

Atque ita lineæ pro quavis hora in P determinari poterunt; et quum sensu physico idem sit, sive per centrum sit P , sive P' ei parallelum per m ad superficiem terræ positum fuerit, si et stilus umbram proiecens axi terræ parallele ponatur; id est error sensibus perceptibilis inde, nec propter *refractionem* radiorum, nec *parallaxim* (id est angulum, quem rectæ e centro et superficie terræ ad solem faciunt) exsurgat: monstrabuntur per umbram stili horæ, si in P' e centro m ducatur me-

ridiana, id est sectio plani meridiani cum P' , et eo scribatur XII; atque ad angulos repertos ductis lineis horariis, adscribantur numeri horarum, recedendo a XII per numeros XI, X, . . . , dum sol versus orientem est, et progrediendo per I, II, . . . sole ad occasum vergente. Et hoc præbet loco in *horologium horizontale*.

Sed eidem plano P parallelum quocunque ad superficiem terræ latum, simul cum omnibus lineis in eo designatis et axe, ita ut omnes lineæ locis prioribus parallelæ maneant, ubique idem monstrabunt, nempe horas pro loco in. Consequenter, si meridiani loci huius M differentia a meridiano loci in arcu æquatoris data fuerit, hac in tempus conversa, nonnisi horarum numeros aliter scribere necesse erit; nempe si in ab M distet $\frac{360^\circ}{24}$ versus orientem, ibi XII una hora citius eveniet, ita reliqua; adeoque XII pro I et XI pro XII & scribere oportet.

Quodvis planum P' autem in loco M fuerit, illud pro aliquo loco in horizontale erit; adeoque nonnisi illius loci *altitudo poli* et *distantia meridianorum* locorum in et M quærenda est: quod (quum res tota praxim respiciat) facile fit, erigendo e puncto p plani P' perpendicularē L , quæ punctum *zenith* loci in respicit, ponendoque per idem punctum p planum meridiani loci M , et ex eodem puncto ponendo rectam β axi terræ parallelam; angulus enim huius rectæ cum piano est æqualis altitudini poli in in, et angulus, quem planum per β ad P' perpendiculariter positum cum piano meridiani loci M (in quo β adest) facit, differentia meridianorum locorum in et M est; nimirum si β tanquam axis terræ spectetur, omnibus meridianis communis erit. Mensuratis itaque his duobus angulis, numeris per dicta mutatis, horologium pro M inserviet.

Scholion 3. Quum sphæra (ut dictum est) sola cum piano id commune habeat, ut circa quodvis sui punctum in se moveri queat: in hac arcus circuli maximi rectæ vicem subire, imo alii circuli quoque describi, et motus componi possunt. Ita si per arcum arcus circuli maximi, per distantiam puncti p a puncto b autem arcus pb, per distantiam puncti p ab arcu C arcus pp' ad C perpendicularis intelligatur, et p' locus puncti p ad C reductus dicatur, definitiones dictæ fient breviores: nempe stellæ distantia ab æquatore est *declinatio*, ab ecliptica *latitudo*, a ho-

rizonte *altitudo* (uti *poli altitudo*); distantia a puncto vernali (orientem versus) stellæ ad æquatorem reductæ *recta ascensio*, illius æquatoris puncti, quod sub cardine orientis stella oriente est, *obliqua ascensio*, ad eclipticam reductæ *longitudo*, et distantia a *cardine australi* stellæ ad horizontem reductæ *azimuth* dicuntur. Dividit nempe *meridianus* cum *meridionali* item verticali, (sive cum æquatore, quum utrumque ad meridianum perpendicularē sit) horizontem in quatuor quadrantes, fiuntque quatuor *cardines*, quorum duo meridiani et duo meridionalis *poli* fiunt, uti *zenith* in medio meridiani *polus* horizontis est.

32.

Campum ampliorem peragrare, huius opusculi (si Deus valetudini *et alioquin* benignius faverit) supplemento reservaturus, in *Appendice* ea pars Matheseos applicatæ sequitur, quæ e Matheseos anno ad cursus physici annum relinquī haud potest: nempe *primae lineae Perspectivae*, *Gnomonicae*, et *Chronologiae*.

32. Formæ quæ rectarum operationumque primitivarum numero certo generari nequeunt: ex. gr. si figuræ, quæ ita generari nequit, omnibus punctis rectæ ad idem punctum, vel ad eandem rectam parallelæ, cogitentur; et tanto magis si sectio formæ cuiuspiam cum complexu rectarum dictarum quæratur, quod etiam *Perspectivae* problema est, si figuræ vicem qualisvis forma subeat. Verbo omnes formæ, quæ motu e tribus aut pluribus composito, sive modo in arbore exposito per tres rectas perpendicularares, sive motu in quavis forma certa lege facto, generantur, una cum omnibus iis, quæ e compositione horum oriuntur, huc pertinent.

APPENDIX TRIPLEX.

I. DE PERSPECTIVA.

Si quid A , punctum vel linea aut aliud quidpiam e spatio fuerit, atque superficies certa T positione detur; sitque punctum \mathcal{O} item positione datum tale, ut recta quævis ex A usque ad \mathcal{O} ducta cum T aliquid commune habeat: quæri potest

1. Complexus omnis eius, quod recta quæpiam ex \mathcal{O} ad aliquod punctum ipsius A ducta cum T commune habet; diciturque complexus iste *imago* obiecti A in *tabula T pro oculo O*, et data singulorum positione erga se invicem.

2. Potestque etiam supponi, ut punctum \mathcal{O} in recta certa $\mathcal{O}t$ a T dabili quovis ulterius recedat, atque limes geometricus imaginis ipsius A in tabula T quæri; et si ex. gr. T planum sit, potest recta dicta perpendicularis ad tabulam, item tabula *horizontalis*, aut *verticalis* esse; aut potest recta dicta cum tabula dimidium rectum facere, aut alium quemvis.

3. Quum tria sint, nempe *oculus*, *obiectum* et *imago*; e quibusvis duobus tertium quæri potest: adeoque e dato obiecto eiusque imagine etiam locus oculi quæri potest; imo etiam e data imagine in tabula, et loco oculi, quæri obiectum A potest. Quo etiam *Gnomonica* pertinet; ubi nempe sol puncti \mathcal{O} vicem subit, stilus ut imago in tabula T spectari potest, quæ si ex umbra illius in datam superficiem projecta rectæ ad \mathcal{O} ducerentur, in T describeretur; atque hic umbra hæc tanquam obiectum e stilo tanquam imagine, pro dato loco puncti \mathcal{O} quæritur.

§. I.

Problemata hæc resolvere obiectum *Perspectivæ* est. Casus simplissimus est, si *tabula T* planum sit, et quidem aut *horizontale* aut *verticale*.

Si tabula *T* horizonti parallela sit, et $\text{Ot} \perp T$ atque O dato quovis ulterius recedat (seu ut dici solet, oculus in zenith in infinito sit): limes imaginis geometricus talis est, ut *quævis recta AB horizonti parallela imagini suae ab aequalis sit*. Nam tum Aa et Bb ad *T* perpendiculares sunt; adeoque parallelæ, per duo plana parallela sectæ, efficiunt parallelogrammum ABba . Hunc in finem delineantur sectiones per planum ad superficiem terræ horizontale ædificiorum exstruendorum, *Grundriß* dictæ. Manifesto etiam *quævis linea* in planum ad tabulam parallelum cadens imagine sibi æquali gaudet.

Rectæ ad tabulam perpendicularis autem imago punctum est, et quævis recta PQ ad tabulam nec parallela nec perpendicularis imagine sua maior est. Si enim P superius situm fuerit, quam Q ; sit ad tabulam perpendicularis Pp ex P , et perpendicularis Qq ex Q ; erit pq imago rectæ PQ ; atque ex P parallela Pp' ad pq (usquequo rectam Qq secat) erit $=\text{pq}$, et in triangulo $\text{pp}'\text{Q}$ erit hypotenusa $\text{PQ} >$ catheto Pp' . (Fig. 258.)

Ita si ad polum concipiatur planum *T* tangens: erit hoc ibidem horizontale, æquatori parallelum; et si ab æquatore incipiendo, ex omnibus hemisphærii punctis demittantur ad *T* perpendicularares, prodibit superficie hemisphærii terræ talis imago. Et manifesto pro quovis circulo æquatori parallelo, cuius radius est *cosinus latitudinis* (id est arcus quo ab æquatore in quadrante usque ad polum ducto distat), seu sinus distantia a polo; prodibit in imagine quoque circulus æqualis; sed pro distantia duorum circulorum parallelorum, nempe arcu illo α (quadrantis ab æquatore usque ad polum ducti), qui ab uno circulo usque ad alterum est, erit imago $\sin. \text{vers. } \gamma - \sin. \text{vers. } (\gamma - \alpha)$ (Fig. 259.).

Si tabula *T* verticalis, et recta $\text{Ot} \perp T$, atque O in $\widetilde{\text{O}}t$ removeatur in infinitum, adinstar orientis solis: pariter *quævis linea* in planum ad

tabulam parallelum cadens imagine sibi æquali gaudet, rectæ ad tabulam perpendicularis autem imago punctum est, et quævis recta ad tabulam nec parallela nec perpendicularis imagine sua maior est. Aedificiorum facies ita delineatur.

Si tabula T item verticalis, at $\mathcal{O}t$ cum T et simul cum horizonte efficiat 45° , atque sensu dicto removeatur oculus in infinitum: vocatur eiusmodi perspectiva *Hogelperspektive*; quum aves in altum sæpe ad talem angulum sublatæ, hoc visu gaudeant. Multa hoc modo videri possunt, quæ in prioribus celantur. Suntque heic tam *horizontalium linearum* quam *verticalium imagines aequales*. Sit enim (Fig. 260.) PQ horizontalis, PS verticalis; erunt triangula Pfp et Qfq æquicrura propter angulum 45 graduum; itaque $Qf=qf$, et $Pf=pf$; consequenter $PQ=qa$. Est etiam PSp parallelogramnum, adeoque $PS=pj$.

Scholion 1. Possunt autem omnes istæ imagines dictæ maiores minorresve similes construi, quasi maiorum minorumve similiū imagines essent.

Scholion 2. Si cuiusvis puncti imago eo colore lucisque gradu in tabula posita fuerit, ut inde radii ita in oculum veniant, quasi ex obiecto venirent: retina ab imagine ita afficietur ut ab obiecto; at hinc sequitur oculum hunc in finem eo locandum esse, unde obiecti imago per tabulam excepta fuit. Et sequitur etiam tales imagines construi posse, ut radii ita veniant, quasi ex. gr. in Londini plateam sub stellifero cœlo inspicetur; quod tamen fit imaginibus exactis, debite illuminatis intra focum lentium convexarum ita sitis, ut ad debitam distantiam removeantur imagines magnitudine naturali, unde radii ita veniant, quasi ab obiectis ipsis venirent.

§. 2.

(Fig. 261.) *Distantia puncti a plano* dicitur omnino perpendicularis e puncto ad planum. Sit D distantia oculi \mathcal{O} a tabula T , et d distantia a T puncti P (tanquam obiecti ultra tabulam siti); quodvis *planum P* horizontale pro lubito acceptum *fundamentale* dicitur, et sectio huius cum tabula *linea fundamentalis* vocatur; perpendicularis PP' ex P ad

P vero *altitudo* obiecti *p* dicitur, et si perpendicularis ex *p'* ad tabulam adeoque lineam fundamentalem in *p''* cadat, dicitur *p'' punctum obiecti p*, uti *O'*, si perpendicularis ex oculo ad tabulam in *O'* cadat, *punctum oculi* vocatur. Patet *p'p''* esse distantiae obiecti *p* æqualem. *Linea horizontalis* per punctum oculi in tabula vocatur *linea oculi*. Recta *O'p''* (nempe punctum oculi cum punto obiecti connectens) dicitur *linea punctorum*; et si in lineam oculi ex *O'* punto oculi translata distantia *D* oculi in *D* terminetur, et in lineam fundamentalem translata ex *p''* punto obiecti in alteram respectu *O'p''* (lineæ punctorum) plagam distantia *d* obiecti *p* in *d* terminetur: recta *Dd linea distantiarum* dicitur; atque si recta ex *p''* ad lineam fundamentalem in tabula perpendiculariter altitudini obiecti æqualis erecta in *A* terminetur: recta *O'A linea altitudinis* audit.

His denominationibus positis, *imago obiecti p in tabula T erit, ubi verticalis ex intersectione lineae punctorum et lineae distantiarum erecta lineam altitudinis secat*; si nempe sectio rectarum *O'p''* et *Dd* sit *q*, et verticalis ex *q* secet rectam *O'A* in *p*, erit *p* imago puncti *p*.

Etenim

I. (Fig. 262.) quodcumque punctum *f* tabulæ fuerit, si recta ex oculo *O* ad rectam *fP* parallela tabulam in *K* secet: imago *p* puncti *p* in recta *Kf* inter *K* et *f* erit. Nam tum rectæ *OK* et *fP* parallelæ in plano sunt, et rectæ *fK* et *O'P* se invicem secando in idem planum cadunt.

Hinc autem (Fig. 261.) quum punctum *p'* in planum fundamentale cadat, imago eius in *O'p''* cadit; quia *O'O'* et *p''p'* sunt parallelæ, nempe ad tabulam perpendicularares sunt.

II. Si igitur imago ipsius *p'* dicatur *i*, id est recta *O'p'* tabulam in *i* secuerit: *i* in *O'p'* inter *O'* et *p''* cadet; eruntque triangula *O'O'i* et *p''p'i* similia, quia *O'O' || p''p'*, et anguli ad *i* verticales sunt. Itaque

$$\frac{O'O'}{O'O'} = \frac{p''p'}{p'i},$$

seu (si *O'i* dicatur *x*, et *O'p''* dicatur *a*) est

$$D:d = x:a-x;$$

atque hinc $Da - Dx = dx$, adeoque

$$x = \frac{Da}{D+d}.$$

Sed in triangulis $\mathcal{O}'\mathfrak{D}\mathfrak{q}$ et $\mathfrak{P}''\mathfrak{d}\mathfrak{q}$ est

$$D:d = \mathcal{O}'\mathfrak{q}:\mathfrak{q}\mathfrak{P}''$$

seu (si $\mathcal{O}'\mathfrak{q}$ dicatur y) est $D:d = y:a-y$, adeoque

$$y = \frac{Da}{D+d} = x.$$

III. Imago ipsius \mathfrak{P} omnino in rectam ex \mathfrak{q} verticalem cadit, fiat id in \mathfrak{p}' ; erunt triangula $\mathcal{O}\mathfrak{q}\mathfrak{p}'$ et $\mathcal{O}\mathfrak{p}'\mathfrak{p}$ similia, quum plani verticalis $\mathcal{O}\mathfrak{p}\mathfrak{p}'$ sectio cum tabula, verticalis $\parallel \mathfrak{p}\mathfrak{p}'$ sit; suntque et triangula $\mathcal{O}\mathcal{O}'\mathfrak{q}$, $\mathfrak{p}'\mathfrak{p}''\mathfrak{q}$, necnon triangula $\mathcal{O}'\mathfrak{q}\mathfrak{p}$, $\mathcal{O}'\mathfrak{p}'\mathfrak{A}$ similia. Hinc

et

$$\mathcal{O}\mathfrak{p}':\mathcal{O}\mathfrak{q} = \mathfrak{p}\mathfrak{p}':\mathfrak{q}\mathfrak{p}',$$

adeoque

$$\mathcal{O}\mathfrak{q}:\mathfrak{q}\mathfrak{p}' = \mathcal{O}'\mathfrak{q}:\mathfrak{q}\mathfrak{p}''$$

et hinc

$$\mathcal{O}\mathfrak{p}':\mathcal{O}\mathfrak{q} = \mathcal{O}'\mathfrak{p}'':\mathcal{O}'\mathfrak{q},$$

$$\mathcal{O}'\mathfrak{p}'':\mathcal{O}'\mathfrak{q} = \mathfrak{p}\mathfrak{p}':\mathfrak{q}\mathfrak{p}'.$$

Estque e similitudine postrema

$$\mathcal{O}'\mathfrak{p}'':\mathcal{O}'\mathfrak{q} = \mathfrak{A}\mathfrak{p}'':\mathfrak{q}\mathfrak{p}.$$

Consequenter

$$\mathfrak{p}\mathfrak{p}':\mathfrak{q}\mathfrak{p}' = \mathfrak{A}\mathfrak{p}'':\mathfrak{q}\mathfrak{p}.$$

Itaque quum $\mathfrak{p}\mathfrak{p}' = \mathfrak{A}\mathfrak{p}''$ sit, est etiam $\mathfrak{q}\mathfrak{p}' = \mathfrak{q}\mathfrak{p}$.

Si vero \mathfrak{P} infra planum fundamentale fuerit: erit altitudo (quasi negativa) in perpendicularem ex \mathfrak{P}'' infra lineam fundamentalem transversam. Et quotvis punctorum obiecti numerabilium imagines reperiri poterunt: at si trianguli \mathfrak{abc} imago queratur, nonnisi punctorum a , b , c imagines querere necesse erit: si enim punctorum a , b imagines a' , b' fuerint, rectae \mathfrak{ab} imago recta $a'b'$ erit; nam in plano $\mathcal{O}\mathfrak{ab}$ rectae $\mathfrak{O}a$

circa \mathcal{O} usque in $\mathcal{O}b$ mota, simul per $a'b'$ ab a' usque in b' movebitur, et cuivis puncto cuiusvis rectarum ab et $a'b'$ punctum alterius respondebit.

§. 3.

Si vero data recta $\mathfrak{P}\mathfrak{P}'$ tanquam obiecto, et data imagine pq eius, *quaeratur situs oculi* \mathcal{O} : ubi $\mathfrak{A}\mathfrak{p}$ et $\mathfrak{P}'\mathfrak{q}$ se invicem secabunt, ibi erit \mathcal{O}' ; et \mathfrak{D} erit, ubi $\mathfrak{d}\mathfrak{q}$ lineam per \mathcal{O}' horizontalem secabit; et perpendicularis ad tabulam ex \mathcal{O}' erectæ, ipsi $\mathcal{O}'\mathfrak{D}$ æqualis, extremitas erit situs oculi \mathcal{O} ; nam pro dato hoc oculi et obiecti situ, imago (per præcedentia) pq erit.

Si vero (Fig. 263.) recta $\mathfrak{P}\mathfrak{Q}$, eiusque imago pq data fuerint: situs oculi innotescit modo sequente. Fiant ex \mathfrak{P} et \mathfrak{Q} ad planum fundamentale perpendiculares $\mathfrak{P}\mathfrak{P}'$ et $\mathfrak{Q}\mathfrak{Q}'$, atque ex \mathfrak{P}' et \mathfrak{Q}' fiant ad lineam fundamentalem perpendiculares $\mathfrak{P}'\mathfrak{P}''$ et $\mathfrak{Q}'\mathfrak{Q}''$, et altitudines $\mathfrak{P}'\mathfrak{A}$, $\mathfrak{Q}'\mathfrak{A}'$ punctorum \mathfrak{P} , \mathfrak{Q} ; ducanturque rectæ $\mathfrak{A}\mathfrak{p}$ et $\mathfrak{A}'\mathfrak{q}$: ubi hæ se invicem secabunt, ibi erit \mathcal{O}' ; et in tabula per hoc punctum \mathcal{O}' linea horizontali ducta, et translata ex \mathfrak{P}'' distantia $d = \mathfrak{P}''\mathfrak{P}'$, secet $\mathfrak{d}\mathfrak{p}'$ lineam horizontalem per \mathcal{O}' ductam in \mathfrak{D} ; erit perpendicularis ad tabulam ex \mathcal{O}' erectæ ipsi $\mathcal{O}'\mathfrak{D}$ æqualis, extremitas locus \mathcal{O} oculi. Nempe posito hoc, ipsius $\mathfrak{P}\mathfrak{Q}$ imago pq erit; imago vero unica est.

§. 4.

Pro oculo \mathcal{O} et imagine p autem locus puncti \mathfrak{P} ubique esse in recta $\mathfrak{O}\mathfrak{p}$ potest; uti oculus \mathcal{O} , pro punto \mathfrak{P} et imagine p ubique in recta $p\mathfrak{O}$ esse potest. At etiam quævis obiectum A fuerit ultra tabulam, ductis ad omnia eius puncta rectis, et omnes rectas per tale α multiplicando, ut quævis rectarum per α multiplicata ultra tabulam terminetur (iuxta pag. 10); omnium hoc pacto generatorum similium imago eadem erit.

Potest imagini certæ obiectum in certa superficie pro dato oculi situ quæri: et hoc respectu potest *Gnomonica* considerari, si ut dictum

(pag. 308) est, sol oculi, axis terræ imaginis, et umbra in superficie data obiecti quæsiti vices subeant. Et brevitati consulendo, ceteris prætermissis, transitus fit ad Gnomonicam.

II. DE GNOMONICA.

Fundamento inservit id, quod (pag. 304) dictum est: et sensu ibidem exposito, sphæra pellucida axe adiaphano axi terræ parallelo, ubique horologii vicem subire potest; atque (per ibidem dicta) in plano etiam quo-vis, quod axi terræ parallelum non est, ad superficiem terræ quoque ubivis horologium construi potest.

Non aliud igitur quoad horologia in plano exstruenda restat, nisi referre:

1. quomodo in planis axi terræ parallelis horologia construi queant;

2. quomodo horologium idem diversis locis inservire queat,

3. quomodo horologium etiam locum solis in ecliptica tempusque ortus et occasus eius (quovis die sive certis dierum intervallis) indicare queat.

Planum verticale ubivis ad planum meridiani perpendiculare dicitur *meridionale* loci illius; et quum per lineam verticalem innumera plana verticalia dentur, dicitur planum *verticale primarium*. Planum æquatori parallelum ubivis ad terram dicitur *aequinoctiale*. Planum per axem terræ et cardines orientis occidentisque dicitur *polare*, planum verticale per polum autem dicitur *planum meridiani*, et huius sectio cum horizonte vocatur *meridiana horizontalis*, atque sectio eius cum quavis superficie *meridiana superficie illius* dicitur. Horologia in iis describenda (*primaria* dicta) nomina a planis iis sortiuntur; et (præter horizontalia) dicuntur *aequinoctialia*, *polaria*, *meridionalia*, *meridiana*; sed postremum duplex est, prouti superficies orientem vel occidentem respicit, atque eatenus dicitur horologium *orientale* vel *occidentale*; ita *meridionale* duplex est, nempe *septemtrionale* et *australe*, prouti superficies septemtrioni vel austro obversa est; et *aequinoctiale* duplex est, *superius* versus boream, et *inferius* versus austrum; ita *polare* quoque,

superius et *inferius* est. Et præterea si planum horizontale circa meridianam, aut meridionale circa verticalem vertatur, vocatur horologium *declinans*, si æquinoctiale aut meridionale circa cardines orientis occidentisque vertatur, vocatur *inclinans*. Si vero declinans ex. gr. meridionale circa sectionem eius cum horizonte factam vertatur, *deinclinans* dicitur propter duplēm inclinationem &.

Patet autem planum polare ad æquatorem horizontale esse, nec non planum meridiani ad distantiam 90 graduum in æquatore esse horizontale; et æquinoctiale ad polum horizontale esse; axemque esse in hoc ad planum horologii perpendicularē; uti in horologiis, tam in plano polari, quam in meridiano, axem (seu stilum umbram monstrantem) piano horologii parallelū esse.

§. I.

Superius (pag. 305) fuit

$$\text{tang. } B = \sin. A \text{ tang. } b,$$

ubi A altitudinem poli, b angulum horariorum ad polum (a piano meridiani incipiendo), et B latus angulo b in triangulo sphærico rectangulo oppositum denotat; atque A altitudo poli et B angulus a meridiana incipiendo in piano dato, ad centrum terræ horarius, *catheti* sunt.

Si $A = 90^\circ$ fuerit, uti in piano æquinoctiali, fiet

$$\text{tang. } B = \sin. A \text{ tang. } b = 1 \cdot \text{tang. } b;$$

atque $B = b$; fietque nB ex B , dum nb fit ex b . Itaque in piano æquinoctiali circulus a meridiano incipiendo per 24 æqualiter dividitur.

Pro $A = 0$ autem, uti ad æquatorem pro piano horizonti æquatoris parallelo est, fit $\text{tang. } B = 0$, nam $\sin. A = 0$; nec iuxta ibidem dicta pro hoc casu, nempe dum axis terræ in planum cadit, triangulum sphæricum dictum datur.

At quocunque planum Q fuerit, in quod axis terræ incidit: bisecabit hoc æquatorem ex. gr. in \mathfrak{D} et \mathfrak{E} , et planum superficiem terræ in illo æquatoris punto \mathfrak{K} tangens, quod a \mathfrak{D} et \mathfrak{E} quadrante distat, ipsi Q parallelū erit; dicatur planum illud q .

Sit recta \mathfrak{W} (Fig. 264.) æquatorem in punto K tangens: et dividatur æquator ex K incipiendo in 24 partes æquales; atque ducantur ad tangentem dictam e f centro æquatoris, per puncta divisionis, rectæ f_a , f_b , f_c , ... f_a' , f_b' , f_c' , ... Erunt K_a , K_b , K_c , ... uti K_a' , K_b' , K_c' , ... tangentes angulorum 15° , 30° , 45° , ... pro radio fK ; nempe anguli ex fK incipiendo 15 gradibus crescunt, quia $\frac{360}{24} = 15$.

Sit Pp axis terræ, cuius meditullium f centrum terræ est, et planum æquatoris dicatur a , planum vero per axem Pp et K punctum æquatoris determinatum dicatur p ; axis ad æquatorem perpendicularis est, adeoque et $p \perp a$; item fK ad q (nempe planum in K tangens) perpendicularis est; adeoque quum fK in a sit, est $a \perp q$; itaque duo plana p et q fiunt ad tertium a perpendicularia, punctoque K communi gaudent. Consequenter sectio eorum KK' est ad a perpendicularis, adeoque cum perpendiculari ad \mathfrak{W} ex K in q erecta coincidet.

Cadetque umbra axeos, sole in plano p supra planum q existente, in planum q projecta in rectam KK' . Si vero inde porro in æquatore ex. gr. arcum 15° describat ad lœvam; erit umbra centri manifesto in a' , et in b' , si sol $2 \cdot 15^\circ$ descripserit \mathcal{S} . At umbra axeos in q , erit semper perpendicularis in q e puncto rectæ \mathfrak{W} illo erecta, in quod umbra centri cadit. Nam ex. gr. dum umbra centri in a' est, axis et a' determinant planum, in quod umbra axeos cadit; est nempe hæc sectio plani huius cum q (propter punctum a' utriusque commune) facta. Est autem recta $a'a''$, in qua sectio ista fit, axi parallelæ; quia in eodem plano est, nec tamen secat axem, quia q parallelum axi cum hoc nil commune habet. Sed axis rectæ KK' parallelus est; itaque quum eidem rectæ tam KK' quam $a'a''$ parallela sint, est quoque $a'a'' \parallel KK'$; consequenter et $a'a''$ ad \mathfrak{W} ex a' perpendicularis est.

Manifesto autem, etsi sol non in æquatore sed in circulo ei parallelo versetur, in cuiusvis circuli horarii plano, nempe in quocunque planorum horariorum fuerit, umbra axeos in sectionem plani huius cum plano q factam cadet. Consequenter umbra in easdem perpendicularares ad \mathfrak{W} ex a , b , c , ... a' , b' , c' , ... (utrinque continuatas) cadet.

Et (per superius dicta) si sphæra eiusmodi pellucida s (parva respectu

terræ) ad superficiem terræ ponatur, axe opaco axi terræ parallelo, simul cum plano q' ad q parallelo, sphæram s tangente in \mathfrak{f} puncto æquatoris ipsius s ; et diviso hoc æquatore in 24 partes æquales, ducantur ex \mathfrak{k}' centro ipsius s ad rectam, quæ æquatorem in \mathfrak{f} tangit, per divisionis puncta rectæ, atque e sectionibus tangentis erigantur ad tangentem perpendicularares: erunt hæ lineæ horariæ cursum solis ad horæ intervalla monstrantes.

Patetque stilum esse plano q' (nempe plano huius horologii) parallelum per centrum \mathfrak{k}' sphæræ s ductum, et simul perpendiculari ex \mathfrak{f} ad tangentem æquatoris sphæræ s , in plano q' erectæ, parallele positum esse. Unde intelligitur, quomodo in horologio in plano q' constructo *stili situs* reperiatur: nempe ex \mathfrak{f} erecta ad planum q' perpendiculari recta \mathfrak{f}' , ponatur per \mathfrak{k}' recta axi terræ parallela $\mathfrak{f}\mathfrak{f}''$; quomodo hoc practice fieri possit, inferius patebit.

Posito autem $\mathfrak{f}\mathfrak{f}''$ stilo axi terræ parallelo: (Fig. 265.) demittantur ex \mathfrak{k}' et \mathfrak{k}'' ad planum q' perpendicularares $\mathfrak{f}\mathfrak{H}$, $\mathfrak{f}''\mathfrak{H}'$, et fiat in q' (plano horologii) perpendicularis \mathfrak{H} ad $\mathfrak{H}'\mathfrak{H}$, et ex \mathfrak{H} planum K perpendicularare ad q' ; atque fiat in plano K , centro \mathfrak{k}' radio $\mathfrak{f}\mathfrak{H}$ circulus, et hic dividatur ex \mathfrak{H} incipiendo per 24, ducanturque per puncta divisionis rectæ, et ex illis punctis, ubi hæ rectam \mathfrak{H} (quæ tangens circuli ad \mathfrak{H} est) secabunt, ducantur ad \mathfrak{H} in plano q' perpendicularares.

Erunt hæ manifesto lineæ umbrarum horariarum in plano q' , per stilm $\mathfrak{f}\mathfrak{f}''$ projectarum; et quidem dum umbra in $\mathfrak{H}'\mathfrak{H}$ cadet, erit in loco, cuius planum horizontale ipsi q' parallelum est, hora XII. Unde per differentiam meridianorum loci illius et loci, in quo q' est, innotescet, qualisnam numerus ad \mathfrak{H} et quales ad sectiones tangentis ceteras scribendi sint.

Si vero differentia meridianorum non numerum horarum integrum efficiat, sed ex. gr. locus is , ubi q' planum horizonti parallelum est, a meridiano loci \mathfrak{H} distet orientem versus $\frac{n}{m} \cdot \frac{360}{24}$ gradibus (pro n, m integris), et superficies horologii quoque orientem respiciat: accipiatur ad dextram huic e regione stantis, in circulo, ex \mathfrak{H} incipiendo pars $(\frac{360^\circ}{24} : m)$ numero n , et inde accipiatur semper $\frac{360^\circ}{24}$ e quovis divisionis

puncto in eodem circulo porro eundo; adscribaturque ad dextram eo, ubi pars prius accepta terminatur, XII; ad finem sequentis ad dextram autem I, et tum II, et ita porro, ad lævam autem ad finem partis ante XII terminatæ scribatur XI, ante hoc X. Ducanturque ex f' (centro circuli) per extremitates partium dictarum rectæ; atque eo, ubi hæ tangentem \bar{H} secabunt, numeri iidem adscribantur: et manifesto rectæ e sectionibus his ad \bar{H} perpendiculares erunt lineæ horariæ in plano q'. Nempe dum sol umbram in $\bar{H}\bar{H}'$ proiicit, postea ad lævam moveri per $\frac{n}{m}$ horas debet, ut meridies in loco \bar{H} sit; adeoque umbra dextrorum ibit; antea vero per ascendentem solem umbra versus $\bar{H}\bar{H}'$ pariter dextrorum ibit.

In superficie altera occidentem respiciente pariter lineæ horariæ eadem manebunt, et ibi quoque umbra (stili ff'' circa $\bar{H}\bar{H}'$ ad duorum rectorum intervallum moti) ad dextram e regione stantis ibit sole descendente; adeoque a linea horaria, cui in priore superficie XII adscripta est, ad dextram I, II, . . . adscribi debent.

Si differentia meridianorum sex horas efficiat, *horologium meridianum* erit: et in superficie orientali quadrans $\bar{H}q$, qui ad dextram est, infrorsum erit, per cuius finem e centro f' recta ducta omnino tangentि parallelia erit; atque tempore meridiei in loco \bar{H} umbra stili haud proiicitur in planum horologii, sed XI, X, . . . sursum determinabuntur, ut in superficie occidentali ipsi XI respondebit I, et II ipsi X et ita porro.

In *polari*, tempore meridiei umbra manifesto in $\bar{H}\bar{H}'$ erit, quum $\bar{H}\bar{H}'$ sectio plani polaris cum meridiano sit; et reliqua patent.

Scholion 1. (Fig. 266.) Tyronibus primo obtutu videretur, horologium pro quovis indice (etiam axi terræ non parallelo) construi posse, si umbræ eius iuxta diei alicuius horas notentur: at sit stilus is recta fQ, et f centrum terræ, atque axis sit fP; manifesto fQ nonnisi in unum planum horariorum cadet; nam si in duo cadet, in sectione eorum erit, adeoque cum axe coincidet. Si fQ in aliquod planum horarium cadat, sole in illo versante horam rite monstrabit; in alio autem sit pro sole in puncto \bar{f} plani horarii existente umbra puncti Q designata q; crescente vel decrescente solis declinatione, ascendet vel descendet sol in eodem circulo

horario C ; veniat in δ' ; umbra puncti Q non erit q , nam recta qQ peripheriam C in δ secabit; sit umbra q' . Manifesto tam q quam q' adeoque et recta qq' in planum ipsius C cadunt; adeoque quum stili prior umbra fuerit fq , posterior fq' , essent (si umbra designata et nunc valeret) fq et fq' in recta eadem, et quidem illa, in qua planum horologii per planum horariorum C secatur; nam f , q , et Q in planum $fq\delta$, et f , q' , et Q in planum $f\delta'q'$ cadunt; per f , q et Q vero planum determinatur, et quidem illud, quod per f , q' et Q determinatur; itaque δ , et δ' quoque in illud cadit simul cum centro f ; est vero hoc planum horarium; adeoque fQ in hoc quoque planum horariorum caderet (contra hypothesis).

Scholion 2. Axis autem non ipse solum, sed et punctum quodvis eius, index esse potest; si nempe stilus cuiusvis formæ (sive centro fixus, sive fulcris insistens, sive perpendicularis) in eo terminetur, atque nonnisi extremitas umbræ ad lineam horariam appellens spectetur. Ex. gr. si axis centro f fixus sit $f\mathfrak{J}$, et ex \mathfrak{J} demittatur ad planum horologii perpendicularis $\mathfrak{J}\mathfrak{i}$; dum umbra ipsius $f\mathfrak{J}$ lineam horariam teget, manifesto etsi nonnisi punctum opacum \mathfrak{J} relinquatur, umbra huius quoque in eadem linea erit.

Atque hinc si nonnisi hoc punctum opacum \mathfrak{J} cogitetur, disparente terra opaca: quemvis circulum parallelum C descripserit sol tempore 24 horarum; orientur coni ad apicem \mathfrak{J} verticales, quorum superior circulo C insistet, latera radiis solis præbentibus, inferior autem fit per radiorum ad \mathfrak{J} lucentium continuationem umbrosam. Si vero sol infra æquatorem in circulo ad eandem declinationem versetur: fiet conus superior umbrosus, et inferior luminosus. Itaque si per planum P horologii per centrum f positum secetur conus umbrosus dictus: sectio conica erit; atque umbræ extremitas in sectione lineæ horariæ cum sectione conica dicta erit, pro hora lineæ horariæ respondente; nam umbra puncti in superficie coni est, adeoque quum pro illa hora etiam in linea horaria sit: erit ibi, ubi linea horaria conum secat; nempe quum linea in plano conum seante sit, erit in puncto sectionis coni cum linea horaria communi. Itaque quum pro quavis alia declinatione solis aliis conus generetur: si saltem pro quavis declinatione solis, dum in signum aliquod eclipticæ

ingreditur, sectio coni dicta construatur, cuvis sectionum conicarum istarum adscribi signum illud poterit; indicabitque extremitas umbræ ad quampiam earum appellens solem in signo adscripto versari.

Erit vero sectio ista parabola vel ellipsis aut hyperbola, prouti n (angulus coni) æqualis, minor vel maior ipso m fuerit (pagg. 265 §).

Sit ex. gr. (Fig. 267.) $\mathbf{f}\mathbf{Q}$ pars axeos, \mathbf{f} centrum terræ, et $\mathbf{f}\mathbf{q}$ meridiana in horologio horizontali, adeoque a altitudo poli, \mathbf{P} polus mundi, sitque $\mathbf{P}\mathbf{A}\mathbf{b}$ meridianus, atque sol in \mathbf{A} ; erit $\mathbf{A}c$ declinatio, quæ dicatur d ; eritque angulus coni nempe $n = 2(R - d)$; nempe quoad immamem solis distantiam, apex coni sive in \mathbf{Q} sive in \mathbf{f} accipiatur, nullum quoad sensus discriminem est; in triangulo $\mathbf{f}\mathbf{Q}\mathbf{q}$ autem ex a altitudine poli et angulo $\frac{1}{2}n$ atque latere $\mathbf{f}\mathbf{Q}$, innotescit $\mathbf{Q}\mathbf{q}$, quod (pagg. 266 §) c dicebatur; et pariter m innotescit, quum externus summæ internorum a et $\frac{1}{2}n$ æqualis sit; itaque sectio conica pro illa solis declinatione construi poterit; et pariter pro quavis declinatione alia. Patet vero angulum coni minimum pro maxima declinatione esse, atque redeunte sole ad æquatorem duobus rectis quam proxime ire, et conum ad æquatorem in planum huius mutari: atque numeris in calculum inductis facile patet, apud nos pro horologio horizontali, pro quavis declinatione solis (excepto dum ad æquatorem o fit) angulum $m < n$ esse, adeoque hyperbolam describi; itaque sole oriente ad dextram, et occidente ad sinistram, umbram quoad sensus ad asymptotos appellere, et tempus ortus occasusque tempore solis in illo signo versantis indicare.

Scholion 3. Si tamen non nisi signa, in quibus sol versatur, ex umbra puncti \mathbf{Q} tempore meridie cognoscere lubeat (quod *Analemma signiferum* dicitur): sit horologium horizontale, $\mathbf{f}\mathbf{Q}$ sit stilus, et $\mathbf{f}\mathbf{m}$ sit meridiana (Fig. 268.); sitque sole (dum in certo signo est) in meridianum appellente umbra puncti \mathbf{Q} in \mathbf{f} , atque declinatio solis sit tum d ; in triangulo $\mathbf{f}\mathbf{Q}\mathbf{f}$ latus $\mathbf{f}\mathbf{Q}$ datum est, $\wedge \mathbf{f}\mathbf{Q}\mathbf{f}$ est altitudo poli, et alter angulus adiacens nempe $\mathbf{f}\mathbf{Q}\mathbf{f}$ est $= R - d$; namque angulus hic (ut in præcedentibus) insensibiliter differt ab eo, qui ad centrum \mathbf{f} est; huius autem quantitas est distantia solis a polo. Itaque $\mathbf{f}\mathbf{f}$ innotescit, sive per constructionem, sive per calculum. Ita pro quibusvis declinationibus solis

eiusmodi puncta determinari, atque signa, in quibus sol tunc versatur, adscribi possunt. Et idem ad alias lineas horarias quoque applicari potest.

Scholion 4. Quum sol in ecliptica in ellipsi moveri videatur, at præterea iam acceleretur iam retardetur; adeoque recta ascensio eius (via ad æquatorem reducta) inæquabiliter crescat, decrescatque; et tempus ab una meridie ad proximam iam maior iam minor sit; et nonnisi tempus ab una culminatione stellæ fixæ ad proximam sit, propter uniformem terræ motum circa axem, semper idem; sol vero ab ea fixa, cum simul in meridiano erat, contra motum diurnum orientem versus recedens, adhuc tempore indigeat, donec in meridianum appellat, adeoque dies solaris sidereo longior sit, sed nec dies solares veri inter se æquales sint: solem aliquem medium fingere visum est, qui recta ascensione æquabiliter crescente, tempore cuiusvis anni, uti verus sol ad æquatorem reductus, totum circulum percurrat. Vocatur *tempus* sole hoc fictio duce determinatum, *medium*, quod ad *tempus solare verum*, imo et ad *tempus sidereum*, sive quodvis horum ad aliud, reduci potest. Horologia vero solem medium sequuntur; itaque si quis suum, ex. gr. tempore meridiei, horologio solari convenienter dirigere voluerit, nosse debet, quænam sit pro illa die differentia inter meridiem solis medii et veri, quæ sæpe etiam ad quadrantem exsurgit. Computata hæc pro annis quibus vis in Ephemeridibus exstant; quamvis adhucdum periodus nota haud sit, a cuius fine idem ordo incipiat; nec duæ imagines dictæ (nempe so fictus et verus ad æquatorem reductus) quater per annum congruentes, semper plane tempore meridiei loci certi sibi invicem occurrant.

§. 2.

Pro horologio meridionali construendo fit (Fig. 269.) triangulum sphæricum $\rho\bar{\zeta}q$ ad zenith $\bar{\zeta}$ rectangulum (ρ polum, \bar{k} centrum sphæræ, adeoque $\bar{k}\bar{\zeta}$ verticalem, in qua planum meridianum $\rho\bar{\zeta}$ et planum meridionale se mutuo secant, ρq vero circulum horarium denotante). Eritque A complementum altitudinis poli, adeoque altitudini æquatoris æquale: itaque ex angulo horario b et catheto A reperitur cathetus B angulo b

oppositus, nempe angulus horarius in plano meridionali circulo horario $\text{P}q$ respondens; eritque (pag. 294)

$$\tan. B = \sin. A \tan. b;$$

id est tangens arcus quæsiti erit sinus altitudinis æquatoris (seu cosinus altitudinis poli) per tangentem anguli horarii multiplicatus.

Si vero planum meridionale declinet, ex. gr. vertatur pars occidentalis versus austrum ad angulum d : fiet triangulum sphæricum pariter $\text{P}\tilde{\text{Z}}\text{q}$, manente angulo horario b et latere A , sed angulus $\text{P}\tilde{\text{Z}}\text{q}$ erit $= R + d$; unde e duobus angulis et latere, quibus adjacent datis, prodit B . Ad orientem quoque idem est, nam $\sin. (R + d) = \sin. (R - d)$; quia $R + d + R - d = 2R$.

Linea meridiana in plano meridionali autem est verticalis $\tilde{\text{Z}}\mathfrak{k}$, et stilus ultra \mathfrak{k} continuatus fit index superficie australis; ubi lineæ horariæ pariter prodeunt, suntque manifesto continuationes priorum. Patet autem, apud nos in huius horologii facie boreali nonnisi horas matutinas vespertinasque, atque in australi facie reliquas circa meridiem ostendi; neque in facie boreali meridiem monstrari, nisi distantia puncti zenith loci ab æquatore minor sit maxima solis declinatione, idque nonnisi eousque, donec declinatio distantiae dictæ æqualis fiat.

§. 3.

Si horizontale declinet (Fig. 270.), ex. gr. pars occidentalis vertatur circa meridianam ad angulum d , fiet triangulum sphæricum $\text{P}\text{P}''\text{q}'$, in quo $\text{P}\text{P}''$ altitudo poli, $\wedge \text{P}''\text{q}' = b$ angulus horarius in sphæra, et $\text{P}''\text{q}'$ est arcus quantitatatem anguli horarii in plano horologii exprimentis; itaque quum angulus $R + d$ sit, quem $\text{P}\text{P}''$ cum $\text{P}''\text{q}'$ facit, e duobus angulis b et $R + d$ cum latere adiacente datis prodit $\text{P}''\text{q}'$.

Manet vero et hic linea meridiana immota.

Si declinans etiam inclinet, nempe vertatur circa perpendiculararem ad meridianam, versus austrum, quo in casu *reclinans* dicitur: sit angulus reclinacionis d ; moveatur prius planum horologii horizontale circa

perpendicularem ad meridianam, movebitur linea meridiana in plano meridiani; veniat \mathfrak{P}'' in \mathfrak{P}''' ; et postea horologium hoc quasi horizontale pro altitudine poli \mathfrak{PP}''' constructum declinet (nempe circa sectionem plani meridiani cum plano horologii huius motum); prodibit (ut antea) angulus in plano horologii declinantis horarius quilibet posito b respondens.

Et pariter prodeunt lineæ horariæ in plano meridionali deinclinante; uti et in polari declinante aut deinclinante. In omnibus his autem meridianæ horologii est sectio plani horologii per planum illud facta, in quod perpendiculares e duobus punctis stili ad planum horologii demissæ cadunt.

§. 4.

Methodus non solum generalis pro quovis plano exposita est (pag. 304), sed pro horizontali quoque (utpote quod per totam diem collustratum usui maxime idoneum est) formula simplex data est ibidem: attamen pro iis, qui tedium calculi fugiunt, et methodus constructionis exponna est.

Fiat (Fig. 271.) $\triangle \mathfrak{ABC}$ ad C rectangulum, angulo b ad B altitudini poli æquali; erit angulus a ad A altitudo æquatoris. Fiatque (Fig. 272.) centro C radio CA circulus, et huius tangens ad A ; atque dividatur quadrans Aq in sex partes æquales, et ductis e centro C per puncta divisionis rectis, quinque puncta a, b, c, d, e , in quibus tangens per rectas dictas secatur, notentur, atque ad distantiis punctorum a, b, \dots ab A distantias æquales, ab A dextram lævamque in DE ad AB perpendiculari transferantur (Fig. 272.), atque ducantur ex B rectæ Ba, Bb, \dots Ba', Bb', \dots ; erunt hæ lineæ horariæ, si BA in meridiana fuerit, et $\triangle ABC$ elevetur ad planum horologii horizontale perpendiculariter. Erit nempe BC axi terræ parallela, et reliqua præterquam quod (ex pag. 305) pateant, inde etiam perspiciuntur; quod si planum per CA ponatur perpendiculariter ad planum ABC (quod ad planum horologii perpendiculariter erigatur), erit illud plano æquatoris parallelum; itaque producto axe BC (ad planum hoc perpendiculari), erunt puncta A, a, b, c, \dots ,

a' , b' , c' , ... umbræ horariæ puncti \mathfrak{C} , adeoque rectæ, e centro ad puncta hæc ductæ, lineæ horariæ erunt.

Patet vero axem $\mathfrak{B}\mathfrak{C}$ ita ponendum esse, ut \mathfrak{C} septemtrionem respi-
ciat; atque ad \mathfrak{A} numerum XII, XI ad a , X ad b , ..., I ad a' , II ad
 b' , ... scribendum esse.

Scholion 1. Est autem hic a altitudo æquatoris; et producto axe $\mathfrak{B}\mathfrak{C}$ perpendiculare ad planum dictum ipsi \mathfrak{AC} ad \mathfrak{ACB} perpendiculariter impositum, fit in hoc plano horologium æquinoctiale, in quo anguli ho-
rarii omnes æquales sunt.

Atque si planum hoc circa \mathfrak{B} pro quovis loco ad angulum a altitu-
dini æquatoris æqualem elevetur: stilus ex \mathfrak{C} ad planum hoc (tanquam
planum æquatori parallelum) perpendicularis, erit axi terræ parallelus,
et horas pro iisdem lineis horariis rite monstrabit. Si igitur plurimum
locorum altitudines æquatoris annotatae fuerint, et ope arcus cuiuspiam
elevatio ista plani horologii perfici, atque $\mathfrak{B}\mathfrak{I}$ ope acus magneticæ ad-
nexæ (data declinatione eius), in meridianum locari queat: erit horolo-
gium quoad loca annotata *aequinoctiale universale*.

Et pariter quoad loca quotvis horologium horizontale universale con-
strui potest. Nempe ut dictum (pag. 319) est, si e puncto quovis axeos
ex. gr. ex p demittatur perpendicularis pp' ad meridianam: stilus pp'
index esse poterit, si nonnisi extremitas umbræ eius ad lineam horariam
appellens spectetur. Si igitur pro variis altitudinibus poli, puncta horaria
umbræ puncti p construantur, et puncta quævis eidem horæ numero
respondentia lineis connectantur, adscriptis ad extremitates lineæ nume-
ris horariis, atque etiam quævis puncta omnium diei horarum eidem
altitudini poli respondentium lineis combinentur, adscripta altitudine poli
iis respondente; et simul index ita adaptatus fuerit, ut ad quamvis illa-
rum poli altitudinem, pro quibus puncta dicta constructa sunt, elevari
possit; e dictis patet, horas rite monstrari.

Imo horologium solare etiam splendente luna inservire potest, si
ætas lunæ nota fuerit: nempe dum luna in coniunctione est, si pro sole
extincto luna splendere posset, index horas sine errore sensibili mon-
strarerit; quum vero luna quovis die orientem versus progrediens circiter

tribus horæ quadrantibus tardius in meridianum appellat, patet ætatem lunæ per hoc multiplicari debere; et tempus istud numero horæ per indicem splendente luna monstratæ addendum esse. Possunt hinc etiam lunaria horologia construi, quæ sine isto calculo horam ostendant; sed ætatem lunæ semper notam esse oportet.

Solent etiam annuli portatiles variis construi, in quibus non umbra puncti, sed lux per foraminulum inmissa monstrat horam: unum tantum commemorasse sufficiat, quum e dictis varia excogitare facile sit.

Sit Pp axis (Fig. 273.), et annulus Pap sit in meridiano, et $\alpha\text{Vp}=90^\circ$ (gradibus annotatis), atque annulus aq̄e ita sit comparatus, ut dum hora quæritur, perpendicularis ad priorem fieri possit; si totum ex V suspenderatur (quod ope cursoris rite instituti, ad quotumvis gradum ab α fieri potest): erit Af in verticali, atque arcus αV , distantia puncti zenith ab æquatore aq̄e, altitudini poli æqualis. Si iam sol in æquatore versetur, et ex. gr. in α sit, foramen per centrum f (in axe Pp circa extremitates P et p vertibilis) radium solis ad e transmittet; et annulo æquatore repræsentante in viginti quatuor partes æquales (a punto meridiei incipiendo) diviso, horæ rite monstrabuntur; si vero sol ex. gr. in S veniat, adeoque declinatio eius borealis fiat αf , quærendum est illud axeos punctum i , ubi per foramen transmissus solis radius, in eodem circulo horario versantis, eodem ut prius, ex. gr. in e cadat. Hoc autem facile fit, nam propter solis distantiam, rectæ fS et eS ad sensum parallelæ sunt, adeoque $\wedge\text{fi}$ æqualis angulo declinationis solis est; atque hinc fi est tangens anguli declinationis solis pro radio fe , quia $\wedge\text{efi}=R$ est.

Ita puncta pro declinatione solis, cuivis signo, in quo versatur, respondentे tale punctum reperiri, atque cuivis signa respondentia adscribi possunt; imo ope cursoris, in quo foramen est, in crena laminæ circa Pp ad solem vertibilis, potest foramen ad puncta prius dicta duci, ut tempore solis in respondentे signo existentis, radius per foramen transmissus in punctum æquatoris e cadat; patetque pro sole in eodem circulo parallelo versante, adeoque declinatione plane eadem, æquatore in viginti quatuor partes æquales diviso, idem de reliquis horis valere;

nempe e meridiem monstraret, si tam $\text{P}\ddot{\text{A}}\text{p}$ meridianum, quam aq*e* æquatorem repræsentans pellucidi essent.

Scholion 2. Quamvis ad qualevis planum, sive parallelum axi fuerit sive non, dictum sit, quomodo horologium construi queat: attamen haud supervacuum est modum referre, quo ad qualevis superficiem practice horologium construi queat. Axem ante omnia necesse est, in aliquo horologio, ex. gr. horizontali, figere, atque horologio isto (debito situ) admoto, per prolongationem axeos, situm stili in horologio construendo procurare. Atque tum sufficit quocunque die, iuxta aliquod horologium solare rite factum, umbras quavis hora notare: nempe hic stilus axis terræ est (non ut pag. 318), atque lineæ horariæ, sectiones plani per axem eundem et solem determinati, cum superficie horologii sunt.

Et pariter patet, quod si horologium rite paratum horologio construendo admoveatur, et axeos continuatio secet ex. gr. in q planum horologii construendi, atque per lineas horarias prioris secetur hoc in a, b, . . . : fiant horologii exstruendi lineæ horariæ qa, qb, . . .

III. DE CHRONOLOGIA.

Tractat hæc *de modo subdivisionis temporis in vita civili*. Inserunt autem præcipue duo luminaria: nempe *sol*, quo tanquam indice monstrat manus æterni in circulo cœlestis horologii duodecim mensium signa adscripta; et *luna* noctu huius vices gerens.

Accipiatur vero tempus absolutum in anni circulo (quasi æternitatis annulo) post revolutiones quotvis semper versus futurum progrediens. *Locus relativus temporis*, sub quo aliquid evenit, autem in isto fluentis temporis alveo est distantia temporis a *certo puncto fixo*, (Fig. 274.) stellula insignito, sub quo phænomenon aliquod in cœlis aut terris contigit, a quo quasi principio (ob certas rationes) fluxum temporis considerare libet. Et si nonnisi locus relativus in alveo dicto consideretur, atque tota peripheria *P* dicatur, et lineæ versus futurum positive, retrorsum autem negative accipientur: (pro *n* integro) prodit idem, sive $nP+s$ sive $s-nP$, et sive $-s-nP$ sive $-s+nP$ fuerit.

Subdividitur autem tempus in vita civili in annos solares, quorum centum efficiunt seculum; annusque dividitur in menses et hebdomadas: hebdomadæ in dies naturales, qui nomina ab Astrologia (gentilium) sortiuntur, quæ Astronomiam tanquam soror adulterina haud pridem deseruit; dicunturque lingua ecclesiastica dies Dominica, feria prima, feria secunda &c. Cuivis horæ nempe planetarum systematis Ptolemaici, uti se invicem in eo excipiunt, aliquam præsidere crediderunt; qui quum numero septem sint, per 24 horas ter decurrendo, horam diei sequentis primam quartus incipiebat; et totum diem ab hoc denominaverunt. Ordo Ptolemaicus vero hoc versu retinetur:

Post SIM SVM sequitur, pallida Luna subest;

nempe *SIM* denotat *Saturnum, Iovem et Martem, SVM* vero *Solem Venerem et Mercurium*. Idem ordo regit vulgi creduli annos. Notandum autem *feriam primam* magis *diem Dominicam* et *feriam septimam diem Sabbati* dici.

Dies dividuntur in horas, quæ vario modo a variis gentibus numerantur; imo et apud nos aliter in vita civili, et aliter ab Astronomis numerantur: nempe hi a meridie incipiendo viginti quatuor horas numerant usque ad meridiem proximam, et quidem ita ut prima duodecima primæ Ianuarii in vita civili sit Astronomis vicesima quarta tricesimæ primæ Decembribus.

Dividuntur porro dies in *festos* et *communes*; festa item dividuntur in *fixa* seu *immobilia*, quæ semper in dies eorundem mensium eosdem (quoad numerum diei in mense) cadunt; uti ex. gr. *Festum Nativitatis Christi* vicesimæ quintæ Decembribus, *Epiphania* sextæ Ianuarii & affixa manent. *Festa mobilia* autem omnia a *Paschate* dependent; *Pentecoste* a Paschatis prima die (inclusive) quinquagesima die incipit, adeoque quia (ut dicetur) Pascha semper die Solis incipit, et primus dies Pentecostes in diem Solis cadit; post septimanam Pentecostes sequentem *Dominicae Trinitatis* numerantur, usque ad quatuor Dominicas *Adventus* Festum Nativitatis Christi præcedentes. Pascha autem præceditur sex *Septimanis*

Ieiuniorum, et antea dies Mercurii proximus *dies Cinerum* est; atque inde usque ad *Epiphaniam* (nempe sextam Ianuarii) *Bacchanalia* durant.

Distinguuntur præterea dies anni per literas; nempe cuiusvis mensis dies *n*-tus (pro quovis *n*) litera certa semper eadem insignitur (Fig. 275.); cuiusvis anni dies prima, adeoque prima Ianuarii litera *A* gaudet, secundæ litera *B* datur, et septem literæ *A, B, C, D, E, F, G* in circulum positæ, ut se invicem in gyrum porro eundo excipiunt, diebus se invicem excipientibus tribuuntur, ea cum restrictione: quod in anno bissextili (de quo paulo inferius) vicesima tertia et vicesima quarta Februarii litera eadem gaudeant, quasi unus dies esset; ut *litera mensis cuiusvis, diei quotaevi maneat*. Litera vero, quæ in anno quopiam diei *Dominicae* respondet, *litera Dominicalis* audit. Atque hinc methodus prodibit cuiusvis anni mensis cuiusvis quotamvis diem, qualisnam septimanæ dies fuerit, atque literam Dominicalem anni cuiusvis, tam Julianam quam Gregorianam, cyclosque earum reperiendi.

Quum vero in vita civili nec anni principium, nec alii termini iuxta calculum astronomicum per minuta secunda applicari possit, *regula* est: ut *fractiones ubique neglectae, dum integrum effecerint, tunc adendantur*; atque hoc modo, aliisque artificiis adhibitis, *omnia ita compensentur, ut in alveo fluentis temporis* (pag. 326) *dicto, tam punctum fixum* *, *quam alia necessaria in perpetuum maneant, ita ut quam minimum oscillando omnia locum tueantur*.

Determinatum vero pro puncto hoc fixo tempus illud est, quo *Concilium primum* statim dicendum celebratum est.

Itaque:

1. De anni quantitate, atque modo, quo *principium anni in puncto fixum* maneant.
2. De characteribus dierum chronologicis; quomodo nempe septimanæ dies literas mutent, et quibus cyclis idem redeat.
3. Quum omnia *Festa mobilia* a *Paschate* dependeant, modus, quo *Pascha* tam *Julianum* quam *Gregorianum* supputari in secula possit, imo etiam *cyclus Paschatum* exponetur.

Fundamentum supputationis Paschatis est *Decretum Concilii primi*

Nicaeae anno Christi 325 celebrati, cuius (etsi non verbis iisdem) sensus sequens est: *Paschatis dies prima celebretur die Dominica prima, post plenilunium aut in diem aequinoctii aut post eum proxime cadens.* At æquinoctium vernale tunc vicesima prima Martii fuit, et huic affixum putabatur. Res itaque eo redit, ut *Pascha celebretur Dominica prima, post plenilunium post vicesimam Martii primum.*

De modo plenilunia computandi etiam statutum est: de quo inferius.

Ratio autem huius Decreti est duplex: prima ut a Christianis tardius celebretur Pascha, quam a Iudæis in ipso plenilunio vernali celebrantibus, secundo quod tamen et Christianis plenilunio paschali, quod et lugubri *magnaque die* simul cum Paschate Iudæorum imminebat, proxima die Dominica celebrare Pascha conveniat. Præterea dum hominum summus amator, ab iis cruci affixus, inter cruentorum vulnerum dolores, *Patrem suum* rogando, ut irridentibus ob inscitiam eorum ignosceret, in extremas umbras mergebatur, conticentibus angelorum choris, in æternitatis quasi interruptæ silentio, nonnisi inferni undarum murmur erat: et quum *Sanctissimus* in cruce expalluit, mœsta cœli oculum caligo obduxit, lacryma paterna quasi delapsa. Neque eclipseis hæc solis astronomica fuit, quum luna prope ad oppositionem cum sole erat: et huius quoque memoriam conservare libuit.

§. I.

Annus Romuleus erat decem mensium solarium, a *Martio* incipiens, tot diebus post Decembrem additis (teste *Macrobius*) donec cœlum terraque ad statum priorem redierit. Numa duodecim mensibus lunaribus (de quibus inferius) dies intercalandos Sacerdotibus commisit; qui partim propter solutiones certis terminis præstandas a fœneratoribus corrupti, partim ex ignorantia, sexaginta septem dies neglexerant: quos *Iulus Caesar* (a quo *Calendarium Julianum* nomen gerit), suadente *Sosigene Astronomo*, anno suæ reformationis addidit, nempe quadragesimo quinto ante Christum, qui e 445 diebus compositus *magnus annus confusonis* dictus est. Statuitque præterea Cæsar suasu *Sosigenis*, annum sola-

rem 365 dierum et sex horarum aestimantis, ut haec sex horae quovis quadriennio unum diem efficientes, (in tribus annis neglectae), adderentur post vicesimam tertiam Februarii. Clarum est, quod posita illa anni solaris magnitudine, effluxo primo anno, sequentis prima Ianuarii sex horis citius dicatur, adeoque effluxis quatuor annis, quinti initium viginti quatuor horis maturius diceretur, nisi dies adhuc expectaretur. Potuisset quidem tum December triginta duos dies habere; sed ob sacra certa peragenda libuit diem hanc post vicesimam tertiam Februarii ponere, unde etiam *dies haec (e Calendario Romano) bissextilis*, atque inde et *annus bissextilis* vocatur.

At quum *Sosigenes* annum undecim minutis (omissis secundis) iusto maiorem acceperit: quibusvis quatuor annis Iuliani 4.11 minutis iusto serius incipiunt annum, quod effluxis 131 annis circiter diem efficit; adeoque 131 anni toties decurrere possunt, ut Iuliani primam Ianuarii media aestate dicant, et demum prima Ianuarii Iuliana quoque ad punctum fixum * redeat.

Error iste ab anno 325 usque ad annum 1600 computatus a *Gregorio Pontifice* (suasu Astronomi *Aloysii Lili*) ad decem dies (aliquot tantum horarum errore) exsurrexerat; adeoque tum prima Ianuarii, et etiam quarta Octobris (*dies reformationis Calendarii*) decem diebus iusto serius dicebatur; quapropter *Gregorius* quartam Octobris decimam quartam esse iussit, nempe ab anno 325 recte numerando, decima quarta fuisse; at iam æquinoctium vernale, quod anno 325 vicesima prima Martii erat, anno 1582 in undecimam cecidit.

Porro ne error iste rediret, cavit statuendo: ut post annum 1600, quibusvis quatuor seculis, anni priora tria secula terminantes, qui alioquin bissextilis essent, communes maneant, et nonnisi annus quartum seculum terminans bissextilis maneat, quosvis ceteros quartos annos bissextilis retinendo. Nimirum $400.11' = 3^d 1^h 20'$; et ex hoc tres dies, quibus posita anni Iuliani falsa quantitate nimis multum expectaretur ad incipiendum seculum quintum, omittuntur reformatione Gregoriana; una hora et viginti minuta vero, dum in diem excrescent, a posteris addentur.

Sunt autem hoc pacto 1700, 1800, 1900 communes, 2000 bissextilis:

atque quivis annus Christi n -tus Iulianus bissextilis est, si $\frac{n}{4}$ quotum integrum sine residuo det; nempe et reformatione Iuliana usque ad Christum (excluso reformationis anno) $44 = 4 \cdot 11$ defluxerunt, adeoque et is, ad cuius finem Christus natus est, bissextilis fuit; iuxta reformatiōnem Gregorianam quoque pariter annus n dictus, bissextilis sub eadem conditione est, si non sit seculum tale m -tum terminans, ut m per 4 exacte dividi nequeat, id est, ut si n seculum m -tum terminet, m quoque uti n per 4 exacte dividi queat.

Numerus dierum, quo Iuliani serius incipiunt annum, vocatur *aequatio solis*, quæ dicatur s ; estque (pro N denotante numerum seculorum ab Anno nativitatis Christi effluxorum, omissio quod supra integrum seculorum numerum est), $s = 1 + \frac{3(N-3)}{4}$ sine residuo.

Nam decem dies, quibus annus 1600 nimis sero dictus fuisset, ita impertiri inter priora secula possunt, ut seculo tertio attribuatur primus, et quorumvis sequentium quatuor seculorum tribus posterioribus tres dies dentur, nempe cuivis trium unus; ut respondeant

seculis	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
dies falsi	1	0	1	1	1	0	1	1	0	1	1	0	1	0
uti postea seculis						17	18	19	20	21	22	23	24	...
dies falso additi						1	1	1	0	1	1	1	0	...

Si igitur numerus seculi sit N , erit summa dierum a Iulianis additorum 1 (seculo tertio competens), addito eo, quod seculis $N-3$ appertinet. Si $N-3$ per 4 exacte dividi queat, prodibit pro $N-3$ seculis $\frac{3(N-3)}{4}$; at si 1 maneat, prodit $\frac{3}{4}$ præter integrum, quod omittendum erit, quia tum seculum unum supra multiplum quatuor seculorum dictorum est, et huic inferius 0 adscriptum est, adeoque in hoc seculo s non augetur. Si 2 maneat, tum $\frac{3(N-3)}{4}$ dabit $\frac{6}{4} = 1 + \frac{1}{2}$, atque seculo postremo unus dies conveniet, fractione omissa. Si 3 manserit ex $\frac{N-3}{4}$, tum $\frac{3(N-3)}{4}$ (supra quotum integrum ex $\frac{N-3}{4}$) dabit $\frac{9}{4}$,

atque usque ad seculum tertium post seculorum quaternarium præcedentem duo dies accedent, quod per $\frac{9}{4}$ (omisso $\frac{1}{4}$) exhibetur.

§. 2.

Quaelibet dies mensis cuiusvis quovis anno, tam in Calendario Iuliano quam Gregoriano, litera eadem perpetua gaudet; nec anno bissextili hoc mutatur, quia tum vicesimæ tertiae et vicesimæ quartæ Februarii (nempe diei additæ) litera eadem relictæ est. Atque hinc, quum (pag. 328) prima Ianuarii literam A habeat, atque septem literæ A, B, C, D, E, F, G in gyrum eundo usque ad finem anni cuiusvis semet excipient: cuiusvis mensis quotævis diei litera reperitur. Ex. gr. si quæratur tertiae Martii litera: addantur Ianuarii dies 31, Februarii dies 28 (ob rationem plane dictam non 29, etsi annus bissextilis fuerit), demum Martii dies 3; atque dividatur summa per 7, et si residuum m sit, erit ab A antrorsum numerando m-ta litera quæsita; nempe $31+28+3=62$, et $\frac{62}{7}$ dat residuum 6, atque litera ab A antrorsum in circulo est F litera tertiae Martii. Nempe quoties in numero dierum a prima Ianuarii (inclusive) continetur 7, toties decurrunt literæ ab A usque ad G (inclusive), et residui dies item ab A incipiendo literas nanciscuntur.

Si vero quæratur anno Christi n-to certa dies ex. gr. tertia Martii, qualisnam dies septimanæ fuerit: facile respondetur, si litera Dominicalis illius anni nota sit; nempe si ex. gr. hæc G fuerit, F dies *Sabbati* erit.

At quæritur *regula literam Dominicalem* anni cuiusvis n-ti *reperiendi*.

§. 3.

Annus communis constat e 365 diebus, adeoque 52 septimanis et uno die. Hinc quocunque diei nomine incipiat annus communis, eodem desinet; nempe septem nomina quinquagies et bis decurrent, atque item primum nomen redibit die annum terminante; ex. gr. si prima Ianuarii dies *Iovis* sit, annus idem, si communis sit, die *Iovis* terminabitur; at si

bissextilis fuerit, dies ultimus *Veneris* erit; nam tum annus ex 7.52+2 diebus constat, atque die addito nonnisi literam præcedentis vicesimæ tertiae Februarii retinente nomina dierum septimanæ nullo discrimine fluunt.

Hinc autem sequitur literam *Dominicalem* post quemvis annum communem una litera recedere, post bissextilem autem duabus. Nempe si litera *Dominicalis* in anno communi fuerit *G*, sit ex. gr. prima Ianuarii dies *Lunae*; hæc litera *A* gaudet, sequentis anni prima dies pariter *A*, sed dies *Martis* erit.

Si igitur duo circuli congruentes *c* et *c'* fuerint (Fig. 276.), et inferiori *c* adscribantur nomina dierum septimanæ, superiori *c'* vero literæ illis certo anno appertinentes, atque concipiatur inferior *c* moveri retrorsum sub superiore *c'*: die *Lunae* uno regrediente, dies *Martis*, quæ sub *B* erat, veniet sub *A*, atque simul dies *Dominica* quoque in circulo sub literam retrorsum sequentem veniet.

Si vero annus bissextilis sit, terminabitur annus, si ex. gr. die *Lunae* inceperit, die *Martis*, et sequens die *Mercurii* incipiet: itaque circulo *c* retrorsum sub *c'* moto, dies *Mercurii*, qui sub *C* erat, veniet sub *A*, adeoque dies *Dominica* sub tertiam literam retrorsum movebitur, nempe duabus recedet.

Sed anno bissextili et post vicesimam tertiam Februarii litera retrorsum sequens fiet *Dominicalis*: nam vicesima tertia (et vicesima quarta quoque in anno bissextili) litera *E* gaudet; at si ex. gr. anno bissextili vicesima tertia Februarii fuerit dies *Veneris*, vicesima quarta pariter *E*, dies *Sabbati* erit; itaque pariter concipi circulus *c* retrorsum moveri potest, ut *Sabbatum* sub *E* veniat; adeoque dies *Dominica*, quæ ante vicesimam tertiam Februarii *G* erat, post vicesimam tertiam *F* fiet; competentque anno illi duæ Dominicales *FG*, quarum prior post vicesimam tertiam Februarii accipienda est.

§. 4.

Dies reformationis Gregorianae est anni 1582 quarta Octobris, quæ semper litera *D* gaudet; fuitque tum *litera Dominicalis G*; adeoque dies *Iovis* erat: at vero (ut dictum est) diem eandem decimam quartam Octobris esse iussit, atque ut quotavis mensis, cuiuscunque literam retineat, progrediendo a quarta ex *D* usque ad decimam quartam, quasi dies illi reipsa præteriissent, dies eadem literam *G* nacta est; uti hoc schema ostendit.

4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
<i>D</i>	<i>E</i>	<i>F</i>	<i>G</i>	<i>A</i>	<i>B</i>	<i>C</i>	<i>D</i>	<i>E</i>	<i>F</i>	<i>G</i>

adeoque *litera Dominicalis* in *C* mutata est; nempe dies *Iovis* literam *G* acquisivit; sed præterea et annis secularibus Gregorio non bissextilibus quoque mutationem induci dicetur.

§. 5.

Cyclus Solis Julianus dicitur numerus annorum, quibus effluxis, literæ diei solis eodem plane ordine sequuntur. Quid *cyclus solis Gregorianus* sit, pariter patet.

Cyclus solis Julianus est 28 annorum; atque primus cyclus 9 annis ante Christum incipere ponitur, adeoque anno bissextili; attribuuntur vero huic literæ Dominicales *FG*. Unde e dictis liquet, quovis quadriennio quinque literas decurrere retrorsum in circulo, nempe anno illo fuit *FG*, postea *E*, tum *D*, dein *C*, et quinto ante Christum item bissextili fuit *AB*. Hinc autem septem quadriennis 7.5 literæ decurrent retrorsum; quod tantum est, ac si septem literæ quinques decurrerent; sequetur itaque retrorsum plane ea quæ prius erat, nempe *G*, cui *F* addi debet, quia annus undetricesimus pariter bissextilis est, quem annus inter duodetriginta primus bissextilis fuerit et septem quadrienniis defluxis, cum anno undetricesimo quadriennium novum incipiat.

Cyclus solis Gregorianus autem est octo seculorum: namque anno reformationis 1582 facta est *C* litera Dominicalis, unde pro anno bissextili 1600 fit litera Dominicalis *BA*; atque hinc quovis quadriennio ab anno 1600 (inclusive) usque ad annum 2400 (exclusive) id est 2399 (inclusive), defluunt retrorsum eundo quinque literæ, exceptis quadrienniis ultimis seculorum 17, 18, 19, 21, 22, 23, ubi propter annum iuxta Gregorium haud bissextilem, annus seculi ultimus nonnisi una litera *Dominicali* gaudet: nempe per seculum 17 intelligendo tempus effluxum ab initio anni 1700 usque ad finem anni 1799 (inclusive), ita cetera intelligantur. Decurrent igitur ab anno 1600 (inclusive), usque ad annum 2399 (inclusive) 8.25 quadriennia, adeoque defluunt quinque literæ a *B* inclusive incipiendo; et semper retrorsum in circulo eundo, 8.25 vicibus, nonnisi sex literis propter sex secula dicta subtrahendis. Est vero

$$8.25.5 - 6 = 994 = 142.7,$$

itaque septem literæ 142-ies decurrent a *B* (inclusive) incipiendo, et retrorsum eundo in circulo; adeoque annus 2399 litera *C* gaudebit, et quidem sola, quum bissextilis non sit; itaque anni 2400 litera Dominicalis ante vicesimam tertiam Februarii *B* erit, postea vero quum hic annus bissextilis sit, litera Dominicalis *A* erit, itaque plane uti anno 1600. Et patet casum eundem redire, a 2400 (inclusive) usque ad 3200 (exclusive) et ita porro.

§. 6.

Litera Dominicalis Iuliana pro anno Christi *n*-to est

$$\text{IO -- res. } \frac{n + \frac{n}{4} \text{ sine res.}}{7}$$

in circulo ab *A* antrorsum numerando: id est *n* per quatuor diviso, tantum pars quoti integra accipitur, at post divisionem per septem nonnisi residuum accipiendum est.

Nam cyclus solis incipit novem ante Christum natum annis, ita ut ab initio usque ad nativitatem Christi novem anni effluxerint; fuitque annus is in cyclo primus, bissextilis, literis *Dominicalibus FG* gaudens, adeoque et annus ultimus Veteris Testamenti bissextilis erat; et quadriennium novum cum nativitate Christi incepit, fuitque (Fig. 277.) anno Novi Testamenti primo *litera Dominicalis B*. Consideretur anno bissextili semper *litera Dominicalis* parti anni posteriori respondens (*quod et quoad formulam tenendum est*) et numeretur prius a *B* incipiendo (inclusive) in circulo retrorsum eundo (Fig. 278.) usque ad *literam Dominicalem* quæsitam (item inclusive), et si duæ fuerint in anno, posteriore intelligendo. Erit anno postremo quadriennii primi a nativitate Christi incipiendo litera quæsita *E*, itaque $(1 \cdot 4 + 1)$ -ta a *B* retrorsum; atque si anno m -ti quadriennii postremo sit litera *Dominicalis* $(m \cdot 4 + m)$ -ta, erit quadriennii $(m+1)$ -ti anno postremo *litera Dominicalis* item a *B* incipiendo retrorsum $(4m + m + 4 + 1)$ -ta; id est $[(m+1)4 + m + 1]$ -ta. Si igitur annus Christi $n = \mu \cdot 4 + \nu$ (pro μ, ν integris, et $\nu < 4$), erit *litera Dominicalis* anno n respondens $(4\mu + \nu + \mu)$ -ta. Est autem

$$4\mu + \nu + \mu = n + \frac{n}{4} \text{ sine residuo},$$

nam

$$n = 4\mu + \nu, \text{ et } \mu = \frac{n - \nu}{4}.$$

Est vero quævis litera q -ta (Fig. 279.) a *B* retrorsum, $(10 - q)$ -ta ab *A* antrorsum; nam sit $q = q' \cdot 7 + q''$; per quodvis multiplum ipsius 7 redditur ad literam *C* ante *B*, unde item a *B* incipiendo numeratis q'' literis, remanent adhuc $7 - q''$ literæ usque ad *B* (exclusive); itaque si ab *A* incipiendo antrorsum numeretur, erit litera, quæ a *B* incipiend o retror sum q'' -ta erat, nunc ab *A* incipiendo antrorsum $(7 - q'' + 3)$ -ta, id est $10 - q''$ -ta, quia illis $7 - q''$ literis, quæ remanserant, nunc addi *B* et *litera Dominicalis* atque *A* debet. Sit ex. gr. *litera Dominicalis F*, erit hæc a *B* retrorsum quarta, manebunt literæ $7 - 4 = 3$, et eadem ab *A* antrorsum $(10 - 4)$ -ta erit.

Quod vero divisione per septem facta, nonnisi residuum accipi de-

beat, inde patet, quod ab *A* incipiendo, quotiescunque defluant septem literæ, semper in *G* terminetur, atque item ex *A* porro antrorsum numeretur. Patet etiam hinc, formulam per

$$\begin{array}{r} n + \frac{n}{4} \text{ sine res.} \\ \hline 10 - \text{res.} \end{array} \quad \begin{array}{r} 7 \\ \hline \text{res.} \end{array}$$

exprimi posse, et si hoc residuum o sit, literam *Dominicalem G* esse.

Litera Dominicalis Gregoriana autem prodit ex Iuliana; est nempe

$$\begin{array}{r} n + \frac{n}{4} \text{ sine res.} \\ \hline 4 + \frac{3(N-3)}{4} \text{ sine res.} - \text{res.} \end{array} \quad \begin{array}{r} 7 \\ \hline \text{res.} \end{array}$$

(denotante *N* seculi numerum omisso excessu, qui supra multiplum centenarii est). Namque anno 1582 *litera Dominicalis* ex *G* ad quartam nempe literam *C* (adeoque tribus) prosiliit; itaque nisi alia mutatio adveniret, a *litera Dominicali Iuliana*, semper tantum tres adhuc antrorsum numerari deberent. At vero quovis tali anno seculari, qui e bisextili communis fit, *litera Dominicalis* non duabus literis sed una tantum recedit; ex. gr. si *BC* esset, tantum *C* manebit, adeoque dum hoc primo evenit anno 1700, *litera Dominicalis Gregoriana* præterquam quod tribus literis prosilierat, adhuc una prosiliet, nempe *litera Dominicalis* partis anni posterioris non recedet in *B*, sed in *C* (adeoque una litera porro) manebit. Fietque hoc pro quovis tali anno; itaque ipsi

$$\begin{array}{r} n + \frac{n}{4} \text{ sine res.} \\ \hline 10 - \text{res.} \end{array} \quad \begin{array}{r} 7 \\ \hline \end{array},$$

addi debet 3, et præterea incrementum (pag. 331) ipsius s post annum 1600, nempe

$$1 + \frac{3(N-3)}{4} \text{ sine res.} - 10$$

addendum erit. Est autem

$$\begin{aligned}
 & 10 - \text{res.} - \frac{n + \frac{n}{4} \text{ sine res.}}{7} + \left(1 + \frac{3(N-3)}{4} \text{ sine res.} - 10 \right) + 3 \\
 & = 4 + \frac{3(N-3)}{4} \text{ sine res.} - \text{res.} - \frac{n + \frac{n}{4} \text{ sine res.}}{7}.
 \end{aligned}$$

§. 7.

Superius (pag. 329) dictum est etiam regulam, qua *plenilunium*, quod in Decreto *Conciliij Nicaeni Pascha* determinat, adeoque *Paschale* dicitur, computandum sit, determinatam esse. Nimirum nec æquinoctium vernale, nec plenilunium, quod in hoc aut postea proxime cadit, astronomice computatur: sed singulari sagacitate est certus *computus ecclesiasticus* stabilitus, quo iuxta regulam superiorem (pag. 328) fractionibus, quæ in usu civili incommodæ essent, neglectis (donec in integrum excrescant), variis compensationibus, certisque oscillationibus, (quæ aliquando etiam duos dies efficere possunt), ad ingentem tamen annorum seriem, tam novilunia quam plenilunia *Paschalia* exhibeantur.

Fundamento quidem et in Calendario Gregoriano computus Iulianus inservit: attamen erroribus huius certo modo dicendo correctis. Computatoque novilunio tam in Calendario Iuliano, quam in Gregoriano, in illo prodeunt *novilunia Iuliana*, in hoc *Gregoriana* per totum annum; atque in utroque accipitur plenilunium decima quarta die a novilunio (id est dum ætas lunæ quatuor decim dierum est); in illo *plenilunium Iulianum*, in hoc *Gregorianum*.

Intelligitur autem per *novilunium* tempus coniunctionis lunæ cum sole, et tempus ab una coniunctione ad proximam vocatur *mensis Synodicus*; estque hoc numero medio 29 dierum 12 horarum 44 minutorum. *Mensis illuminationis* autem est ab apparitione novilunii ad proximam. Plures Gentes nocturnam istam lampadem sequendo annos numerabant. Excessus 12 mensium solarium, id est anni solaris, super 12 menses synodicos lunares (numero medio) est 10 dierum 21 horarum 11 minutorum. Si igitur in initio primæ Ianuarii novilunium fuerit, erit

ad finem anni lunæ ætas 10 dierum 21 horarum 11 minutorum. Dicitur ætas lunæ in anni cuiusdam initio *epacta anni* illius. Estque *epacta 1. astronomica*, eaque *vera* aut *media*, 2. *Iuliana* et *Gregoriana*; de quibus iam dicendum venit.

Si cursus lunæ numerum medium dictum sequeretur perpetuo, tum ex unico dato facile computarentur anni cuiusvis novilunia: at nullum corpus cœleste, quamvis vicinum exiguumque sit, Astronomos magis vexat: ratio huius est perturbatio virium attractivarum solis, planetarumque (maiorum, ex. gr. Iovis) proprius venientium, adeo ut nullus adhucdum cyclus lunæ absolutus notus sit, nempe tempus, quo defluxo novilunia, plenilunia, eclipsesque, plane ita se invicem excipient.

Cyclus 19 annorum quidem iam pridem adhibitus est: nam si ex. gr. prima Ianuarii novilunium fuerit, post 19 annos prima Ianuarii item novilunium erit, sed circiter $\frac{3}{2}$ horis maturius, si nimirum anni Iuliani accipientur. Namque tempore 19 annorum eveniunt 235 lunationes; et si tempus dictum medium astronomicum mensis synodici per 235 multiplicetur, prodit 19 annis Iulianis minus.

Sunt tamen plures cycli maiores computati, quo maiores, eo exactiores.

Epacta Iuliana anni β est ætas lunæ in initio anni β . *Epacta Gregoriana* est ætas lunæ in principio anni Gregoriani.

Dicatur illa *e* (in sequentibus), hæc autem *E*.

Dantur præterea etiam *epactae menstruae*: nempe numerus dierum epactæ anni addendus, ut ætas lunæ in initio mensis *M* prodeat, dicitur *epacta mensis M*.

Si vero *epacta annua* (sive Iuliana sive Gregoriana) nomine generali Σ dicatur; regula novilunii determinandi sequens posita est: ut si $\Sigma + m = 30$ sit, novilunium primum in anno sit $(m+1)$ -ta Ianuarii, et quidem Julianum vel Gregorianum prouti Σ est; abinde vero pro $e < 28$, ita pro $E < 25$, accipientur 29 dies usque ad novilunium proximum, et postea quoque a novilunio ad novilunium usque ad finem anni semper hi numeri nempe 30 et 29 alternent, nempe errore circiter dimidii diei, dum pro una lunatione 30 dies accipiuntur, recompensato per id, quod

proxima lunatio uno minor accipiatur; pro aliis casibus autem (nempe dum $e=28$, aut $e=0$ adeoque non <28 , aut E non <25 , adeoque ipsorum $0, 29, 28, 27, 26, 25$ alicui æqualis est) a primo anni novilunio, in utroque Calendario, numeri 30 et 29 alternent, sed a 30 , non a 29 incipiendo. Accipitur autem in hoc computo dierum Februarii numerus 28 , anno bissextili quoque.

At vero hoc pacto epactæ Gregorianæ 25 et 24 , novilunium in aliquot mensibus ad eandem diem indicant: ex. gr. si $E=25$ sit, cadet novilunium primum in $(30-25+1)$ -tam Ianuarii, atque pro lunatione sequente 30 diebus acceptis, a sexta Ianuarii inclusive, sequens dies novilunii, quinta Februarii est; si vero $E=24$, cadet novilunium primum in $(30-24+1)$ -tam id est septimam Ianuarii, et inde inclusive iam 29 dies pro lunatione accipiendo, dies sequens novilunii pariter quinta Februarii erit. Patebit autem inferius *epactarum Gregorianarum cyclum* decemnovennalem numeris aureis respondentium, iuxta secula certa lege variari: atque evenire, ut in *cyclo seculari*, (nempe cyclus per totum seculum manet), tam epacta Gregoriana 24 , quam 25 adsit; tum vero ne illa inconvenientia fiat, ut novilunium ante finem cycli decemnovennalis in eandem mensis diem (imo pluribus vicibus) cadat: statutum est, ut in hoc casu pro $E=25$, accipiatur 26 , adeoque novilunium uno die maturius ponatur, quasi epacta 26 esset; neque enim fieri potest, ut tum etiam 26 in *cyclo* eodem adsit; nam quovis seculo, pro quovis numero aureo prodit E , addendo ipsi e quantitatem constantem α eandem per totum seculum (inferius determinandam); itaque ut $24, 25, 26$ prodeant, tres epactas Iulianas dari oportaret, quarum quævis a sequente, unitate differat; non dari autem tales, percursis epactis Iulianis statim exponendis patet.

§. 8.

Epactae Iulianae in *cyclo* decemnovennali modo sequente computatae sunt: epactæ cuiusvis anni additur 11 ; et si summa <30 fuerit, ipsa accipiatur pro epacta anni sequentis; si summa dicta sit >30 , tum id quo 30 exceditur, si vero summa $=30$, tum 0 accipitur: subtrahitur

autem e summa dicta numerum 30 excedente 30, adeoque tempore lunationis maius, ideo, ut compensetur error propter 11 dies epactam medium astronomicam superantes (pag. 339).

Numerus (propter insignem eius in determinatione *Paschatis* usum) *aureus* anni dictus est, qui indicat quotusnam cycli decemnovennalis sit annus is. Incipere ponitur cyclus decemnovennalis primo anno ante Christum natum, nempe regrediendo ab aliquo dato, eo deventum est; idem *de cyclo solis* anno ante Christum nono incipiendo notandum est (pag. 336).

Respondent autem iuxta regulam dictam

<i>Numeris aureis</i>	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
<i>Epactae Iulianae</i>	8	19	0	11	22	3	14	25	6	17
<i>Numeris aureis</i>	11	12	13	14	15	16	17	18	19	
<i>Epactae Iulianae</i>	28	9	20	1	12	23	4	15	26	

Atque etiamsi epacta media astronomica, nempe 10 dies 21 horæ 11 minuta, per singulos annos huius cycli decemnovennalis, ab epacta primi incipiendo, semper porro addatur, et dum summa exæquat vel excedit tempus mensis synodici medium (nempe 29 dies 12 horas 44 minuta), residuum pro epacta accipiatur, quum interea una lunatio (calculo medio) defluat; atque hoc porro usque ad finem anni undevicesimi continuetur, ut in circulo progrediendo ad novum cyclum, epacta primi anni in cyclo sequente prodeat: fere idem prodibit, si ut in praxi in casibus analogis fieri solet, dum horarum numerus dimidium diem superat (saltem exæquat) pro integro accipiatur, et si dimidio die minor sit, eo anno negligatur, interea vero semper cuivis summæ, in quam epacta media astronomica excrevit, 10 dies 21 horæ 11 minuta addantur. Attamen quum cyclus hic decemnovennalis iam ad finem $312 + \frac{1}{2}$ annorum die aberret, epactæ per Gregorium modo mox dicendo correctæ sunt.

Patet autem ex antea dictis, pro quovis numero aureo *A* post tertium, esse epactam Iulianam

$$e = \text{res.} \frac{(A-3) \cdot 11}{30};$$

nam anno tertio est epacta 0, et postea quovis anno additur 11, et dum multiplum ipsius 11 numerum 30 superat, residuum accipitur; itaque si post tertium sit m -tus annus, et $m \cdot 11$ sit $= u \cdot 30 + v$, atque m -tus annus post tertium sit M -tus in cyclo: erit anni m -ti post tertium, id est $(M-3)$ -ti in cyclo, epacta v ; namque sive simul eximatur multiplum ipsius 30 e multiplo ipsius 11, sive singillatim, residuum idem manet.

Pro numero aureo 3 quoque valet formula: nam tum

$$\text{res. } \frac{(A-3) \cdot 11}{30} = 0,$$

nam $\frac{0}{30}$ dat quotum 0, et residuum 0. Pro numero aureo 1 autem fit

$$\text{res. } \frac{(A-3) \cdot 11}{30} = \text{res. } \frac{-22}{30} = -22;$$

nam -22 per 30 divisum dat 0 pro quoto integro, et residuum -22 ; quod si ita intelligatur, ut novilunium 22 diebus intra anni initium cadat, hoc sensu epacta erit: atque ex eadem computari epacta sensu positivo quoque potest; si novilunium annum proxime præcedens, a priori 30 diebus distare ponatur, adeoque epacta positiva fiat $30 - 22 = 8$, uti in cyclo numero aureo 1 respondet epacta 8.

Idem de numero aureo 2 patet; nempe

$$\text{res. } \frac{(2-3) \cdot 11}{30} \text{ fit } -11,$$

adeoque novilunium primum intra anni initium 11 diebus distat; atque epacta positive accepta est $30 - 11 = 19$.

Est igitur epactas negativas quoque admittendo

$$e = \text{res. } \frac{(A-3) \cdot 11}{30},$$

atque hoc pro anno Christo n -to est equale

$$\text{res. } \frac{11 \left(\text{res. } \frac{n+1}{19} - 3 \right)}{30};$$

nam

$$A = \text{res. } \frac{n+1}{19};$$

quia cyclus incipit anno primo ante Christum; itaque, si $n+1$ multiplum ipsius 19 sit, annus Christi n -tus erit undevicesimus in cyclo; si residuum ex. gr. m det, post certum cyclorum numerum agetur annus novi cycli m -tus.

§. 9.

Epacta Gregoriana E autem ex Iuliana e prodit; nempe litera s *aequationem solis* (pag. 331), et litera l *aequationem lunae* statim dicendam denotante, est

$$E = e + \text{res. } \frac{l-s}{30} = \text{res. } \frac{(e+l-s)}{30},$$

si in expressione priore valor positivus ipsius e , in expressione posteriore vero sive positivus sive negativus accipiatur; at si valor ipsius E negative prodeat, addatur 30, et positiva fit; per residuum autem intelligatur id, quod manet supra quotum integrum. Formula ipsius s supra tradita est; l autem, si N sensu (pag. 331) sumatur, pro N non > 18 est

$$\frac{8(N-6)}{25} \text{ sine residuo},$$

ea cum restrictione, ut si residuum > 13 fuerit, quanto integro addatur 1; si vero $N > 18$, tum $l = 4 + \frac{8(N-18)}{25}$ sine residuo, addito 1 hic quoque si residuum > 17 . Ratio huius est sequens.

I.

Quum quovis cyclo 19 annorum elapso novilunium tanto maturius eveniat, ut elapsis $312 + \frac{1}{2}$ annis (numero medio) novilunium uno die maturius fiat, quam methodo Iuliana indicatur: error iste iuxta Gregorium ita corrigitur, ut tempus illud l , quo novilunium ante initium anni Iuliani per epactam datum reipsa maturius evenit, epactæ illius anni

Iuliani addatur, ut epacta Iuliana correcta prodeat, fiatque $e+l$ ex e . Hinc vero epacta Gregoriana E prodit sic: sit (Fig. 280.) \mathfrak{G} initium anni Gregoriani, et \mathfrak{J} initium anni Iuliani; si novilunium in \mathfrak{V} fuerit, erit manifesto novilunium in \mathfrak{V} ante \mathfrak{G} , et si \mathfrak{VG} una lunatione fuerit minus, erit $\mathfrak{VG} = e + l - s$ epacta Gregoriana; si vero \mathfrak{VG} una lunatione maius fuerit, dividitur \mathfrak{VG} per 30, et residuum accipitur pro epacta; nempe in hoc computo etsi plures lunationes fierent interea, omnes 30 dierum accipiuntur, quamvis post immania tempora hoc quoque errorem inducat.

Si vero novilunium in \mathfrak{V} cadat (Fig. 281.), tum \mathfrak{VJ} erit $e+l$, et $\mathfrak{VJ}-s$ negativum est, atque epacta Gregoriana negative prodit et erit $-\mathfrak{GV}$, quod si <30 diebus fuerit (quod heic pro tempore unius lunationis sumitur), subtracto \mathfrak{GV} ex 30 diebus, manebit tempus, quo novilunium ante initium anni Gregoriani proximum evenit; sit ex. gr. $\mathfrak{GV} + \mathfrak{Gf} = 30$ diebus, erit \mathfrak{Gf} epacta Gregoriana. Si vero sub \mathfrak{GV} plures lunationes evenerint, pariter dividendo per 30 dies, residuum accipietur, eritque hoc aut 0, aut negativum; in casu primo novilunium in \mathfrak{G} cadet, eritque $E=0$, in postremo pariter novilunium ipsi \mathfrak{G} proximum inter initia anni Gregoriani et Iuliani cadens indicabitur, et pariter ut prius, huic epactæ Gregorianæ negativæ adduntur 30 dies, ut epacta positiva prodeat.

II.

Formula superior ipsius l autem prodit sic. Anno 550 fuit $l=0$; si iam pro quibusvis $312 + \frac{1}{2}$ annis l incrementum unius diei capiat, increbet l ad quatuor dies, elapsis $4(312 + \frac{1}{2})$ annis; quod efficit 1250 annos, quibus si addatur 550, prodit 1800; itaque usque ad annum Christi 1800 fiet $l=4$. Hoc autem ita distributum est, ut initio seculi octavi ponatur $l=1$, initio undecimi vero 2, et initio decimi quarti 3, atque initio duodecimeti 4; adeoque prius quibusvis tribus seculis tribuatur unus dies, uti ultimo quatuor postremorum. Postea autem ab anno 1800 exclusive, quibusvis 25 seculis fit ipsius l incrementum æquale octo diebus; nempe

$$\left(312 + \frac{1}{2}\right)8 = 2500.$$

Sunt autem octo hi dies ita distributi, ut quibusvis tribus seculis a duodecimmo (exclusive) numerando dies unus tribuatur, usquequo quatuor postrema 25 seculorum veniant, et octavus dies seculo postremo attribuatur. Idemque continuatur.

Hinc autem si

$$N - 18 = \mu \cdot 25 + (r < 25)$$

et μ integer sit, atque

$$r = m \cdot 3 + (2 \text{ vel } 1 \text{ aut } 0):$$

$\mu \cdot 25$ seculis convenient 8 μ dies; $8(m \cdot 3 + 1 \text{ vel } 2)$ vero est

$$= 24m + (8 \text{ vel } 16) = 25m - m + (8 \text{ vel } 16);$$

et hoc per 25 divisum dat quotum integrum m cum residuo (8 vel 16) $- m$; atque si ipsi m substituantur valores a 0 usque ad 8 inclusive (nempe $m > 8$ esse nequit, quia $m \cdot 3 > 25$ fieret, et si $m = 8$, tum præter $8 \cdot 3$ neque 1 esse potest, nam tum $8 \cdot 3 + 1 = 25$ esset), patebit regulam in quovis casu valere; ex. gr. pro 16, et $m = 7$, erit quoti pars concernens

$$7 + \frac{16 - 7}{25} = 7 + \frac{9}{25};$$

adeoque quum residuum 9 non sit > 17 , per regulam ipsi 7 nihil additur. Ita pro ceteris valoribus ipsius m formulam regulæ convenire, et pariter de formula

$$\frac{8(N-6)}{25} \text{ sine res.}$$

patet.

III.

Quod autem (pro e sive positivo sive negativo), sive

$$e + \text{res.} \cdot \frac{l-s}{30}$$

sive

$$\text{res. } \frac{e+l-s}{30}$$

acciupatur, idem sit, patet sic: e præmissis apparet s celerius crescere quam l, quia s quibusvis quatuor seculis tres dies crescit, adeoque 24 seculis in octo dies excrescit, l autem 25 seculis crescit totidem (nempe 8) dies; et s iam seculo 7 fuit æquale quatuor, l vero (pagg. 331 et 344) nondum fuit unus; itaque si tam s quam l ad directionem sagittæ (uti omnia hic accipienda sunt) intelligantur, semper porro (ad instar pag. 14), etsi circulus quotiesvis decurratur: erit l—s semper negativum. Sit

$$\text{res. } \frac{l-s}{30} = -r,$$

nempe

$$l-s = -m \cdot 30 - r$$

(pro r, m positivis); erit (pro e sive positivo sive negativo)

$$e + \text{res. } \frac{l-s}{30} = e - r;$$

atque

$$\text{res. } \frac{e+l-s}{30} = \text{res. } \frac{e-m \cdot 30 - r}{30} = e - r;$$

proditque in casu positivi e et $e > r$, epacta Gregoriana $e - r$ positiva, in casu negativi e autem erit $e - r$ (propter $e < 30$) aut $= -30$, aut erit $= -30 - r'$ (pro r' positivo); si prius, tum utraque expressio epactam o dabit, si posterius, tum erit epacta Gregoriana negativa $-r'$, adeoque $30 - r'$ erit epacta positiva in casu utroque.

§. 10.

Paschatis Iuliani pro anno Christi n-to formula est sequens: si a prima Martii (*stile veteri dicto*) in anno Iuliano numeretur, ita ut per $(31+m)$ -tam Martii intelligatur m-ta Aprilis; cadet Paschatis Iuliani dies prima (si e positive expressum sit) in

$$\frac{44 - e + \text{res.}}{7} \cdot \frac{\left(\text{res.}, \frac{n + \frac{n}{4} \text{ sine res.}}{7} \right)}{7} = \text{res.} \cdot \frac{\left(\text{res.}, \frac{44 - e}{7} + 3 \right)}{7}$$

-tam Martii (stilo veteri); tenendo:

1. quod si $e > 23$ fuerit, $44 + 30 = 74$ pro 44 accipi debeat;
2. quod si parentheseos posterioris residuum sit aut æquale residuo parentheseos prioris, aut eo maior, valori totius formulæ addi debeat 7;
3. quod si alterutrius parenthesium dictarum, aut utriusque seorsim residuum o sit, pro o semper 7 accipiatur.

Pro $e > 23$ nimirum $74 - e$, pro e non > 23 autem $44 - e$, exprimit *plenilunii Paschalis Iuliani diem*. Namque Ecclesia cavendo, ne Pascha cum illud in ipso plenilunio vernali celebrantibus (pag. 329) coincidat, ita computum instituere conabatur, ut hoc serius prodeat; qua-propter statutum est:

1. ut plenilunium accipiatur die decima quarta a die novilunii inclusive; sed
2. ut dum $e > 23$, adeoque novilunium Martii primum in $(30 - e + 1)$ -tam, plenilunium autem in $(30 - e + 14)$ -tam Martii cadens, non sit Paschale, nam semper ante vicesimam primam Martii cadat, cui affixum æquinoctium positum erat; etsi sequens lunatio 29 requireret, pro ea 30 accipientur; manifesto enim in hoc casu ad novilunium sequens progre-diendum est: atque hinc fit, quod pro $30 + 14$ accipientur $30 + 14 + 30 = 74$

Pro $e = 23$ fit $44 - e = 21$, quod plenilunium Paschale est (pag. 329), at si $e > 23$ fuerit, $44 - e$ fit < 21 . Ut vero primum Martii novilunium prodeat, epacta annua ex 30 subtrahenda est; nam patet facile ex (pag. 339), *epactam menstruam* Martii esse o, adeoque ætatem lunæ in initio Martii eandem esse, quæ incipiente anno fuit.

Parentheseos prioris residuum, nempe

$$\text{res.} \cdot \frac{\left(\text{res.}, \frac{n + \frac{n}{4} \text{ sine res.}}{7} \right)}{7}$$

indicat, quota sit *litera Dominicalis* ab *A* antrорsum in anno *n* (pag. 335); parenthesis posterior autem indicat, quota sit litera diei plenilunii Paschalis item ab *A* antrорsum numerando; unde etiam patet dum residuum post divisionem per 7 fit o, literam septimam *G* denotari, et 7 pro o accipiendum esse. Nam prima Martii litera *D* gaudet (pag. 332), adeoque litera plenilunii Paschalis prodibit, si ab *A* inclusive numeretur ultra literam diei plenilunii tribus antrорsum, nam *D* post *A* tribus literis porro est; itaque ut prodeat litera plenilunii Paschalis, tribus literis ultra numerum diei, in quem cadit, est numerandum ab *A* incipiendo, et ad literarum ordinem in circulo progrediendo. Atque hinc patet, quod si a prima Martii usque ad diem *plenilunii Paschalis* (inclusive) 7 dies semel aut pluribus vicibus defluxerint, residuum ex $44 - e$ per 7 diviso indicet literae plenilunii numerum a *D* incipiendo; atque si 3 addatur, numerus literae eiusdem ab *A* incipiendo prodeat.

Si iam numerus *n'* literae *Dominicalis* maior fuerit numero *m'* literae *Plenilunii*, sitque excessus *m*, erit tum $m < 7$, quia *n'* non > 7 , eritque $(44 - e + m)$ -ta Martii *dies Dominica* prima post plenilunium Paschale. Si vero

$$n' = m',$$

tum plenilunium in *diem Dominicam* cadit, adeoque 7 dies addi debent, uti si

$$m' > n'$$

fuerit; nam tum plenilunium ultra *diem Dominicam* cadit $m' - n'$ diebus; atque ad sequentem *literam Dominicalem* plenilunio proximam usque, in circulo erunt

$$7 - (m' - n') = 7 + n' - m'$$

literæ. Hoc item eodem redit, etsi toti valori addatur 7.

§. II.

Paschatis Gregoriani, pro epacta E positiva, formula est sequens: cadet Paschatis Gregoriani dies prima anno Christi *n*, in

$$\frac{44 - E + \text{res.} \left(4 + \frac{3(N-3)}{4} \sin \text{res.} - \text{res.} \frac{n + \frac{n}{4} \sin \text{res.}}{7} \right)}{7}$$

$$-\text{res.} \frac{\left(\text{res.} \frac{44-E}{7} + 3 \right)}{7}$$

-tam Martii *stile novo*; ea cum restrictione quod

1. si $E > 23$, pro 44 accipi hic quoque $30 + 44 = 74$ debet; quia ut (in præcedentibus) iam $44 - 23 = 21$ plenilunium Paschale (iuxta dicta) primæ Martii proximum dat;

2. quod (per ea, quæ pag. 340 dicta sunt) pro $E = 24$ semper 25 accipiatur, et dum in eodem cyclo seculari 24 et 25 adsunt, pro 25 accipiatur 26;

3. quod et hic si terminus tertius secundo æqualis aut eo maior fuerit, toti valori addendum 7 sit; atque dum residui parentheseos sive prioris sive posterioris valor 0 est, et hic, ut ibi 7 accipiatur pro 0.

Ratio e præcedentibus intelligitur: quia et hic terminus primus indicat, in quotam Martii *plenilunium Gregorianum* cadat in anno n (pag. 347); secundus terminus autem indicat, quotanam sit *litera Dominicalis Gregoriana* (pag. 338) ab A incipiendo; tertius autem indicat, quotanam litera ab A incipiendo sit litera plenilunii, semper antrorsum numerando. Unde, ut in præcedentibus, reliqua intelliguntur.

§. 12.

Formulae sunt pro utroque Paschate necessariae:

$$e = \text{res.} \frac{11 \left(\text{res.} \frac{n+1}{19} - 3 \right)}{30},$$

$$E = e + \text{res.} \frac{l-s}{30},$$

atque

$$l = \frac{8(N-6)}{25} \sin \text{res.} \quad \text{et} \quad 4 + \frac{8(N-18)}{25} \sin \text{residuo},$$

observando, quod si residuum > 13 (pro N non > 18) vel > 17 (pro $N > 18$), tum quoto integro 1 addatur (pagg. 344—345). Est quoque (pag. 331)

$$s = 1 + \frac{3(N-3)}{4},$$

quod si addatur tempori Iuliano, *stilus vetus ad novum reducetur*. Quum vero ipsa e numero undeviginti sint, maneantque eadem, in quovis seculo, addendo $l-s$, computari cyclus Gregorianus secularis potest.

Pro seculo praesente (1800—1899) autem, in quo $l=4$ et $s=12$, adeoque $l-s=-8$, *dies prima Paschatis Gregoriani* fit

$$\frac{\left(15 - \text{res.} \frac{n + \frac{n}{4} \text{ sine res.}}{7} \right)}{7} - \text{res.} \frac{\left(\text{res.} \frac{52-e}{7} + 3 \right)}{7}$$

-ta Martii (*stile novo*); nempe formula superior, pro quovis seculo (computatis l et s) ad simpliciorem reduci potest. Notandum autem quoad formulam hanc seculi præsentis: quod si e sive 0 sive 1 sit, in formula pro 52 poni 22 debeat; ad valores infra 9 ipsius e , (pag. 349) applicando, uti pro $e > 8$ adeoque $E < 23$, manere secus 52 patet. In cyclo præsentis seculi 24 non adest, adeoque hoc respectu attentione non indiget. Pro quovis seculo autem cyclus decemnovennalis Gregorianus ex l et s facile computatur (pag. 343), ut videatur, num 24 imo simul etiam 25 adsit (pag. 349).

Exemplo etiam illustrare haud supervacuum est. Sit pro anno 1810 Pascha Iulianum computandum. *Litera Dominicalis Iuliana* prodit per formulam sic: addatur ipsius 1810 pars quarta sine residuo;

$$\begin{array}{r} 1810 \\ 452 \\ \hline 2262, \end{array}$$

quod divisum per 7 residuum 1 dat, et $10-1=9$, atque res. $\frac{9}{7}=2$, adeoque litera Iuliana est *B*, et *litera Gregoriana* est *G*.

Epacta Iuliana e prodit per formulam (pag. 342) sic; 1810+1 per 19 divisum dat residuum 6, e quo subtracto 3, manet 3, et hoc per 11 multi-

plicatum et tum per 30 divisum dat residuum $3 = e$; et $44 - e = 41$, residuum parentheseos primæ in formula Iuliana erat 2, residuum parentheseos secundæ etiam est 2, quia res. $\frac{41}{7} = 6$, et $6 + 3 = 9$. Sed dictum est, si residuum posterius maius priore aut ei æquale sit, addendum 7 esse: fiet igitur *Pascha Iulianum* $(41 + 2 - 2 + 7) =$ quadragesima octava Martii adeoque decima septima Aprilis (*stilo veteri*) seu $(17 + 12) =$ undetricesima Aprilis (*stilo novo*).

Pascha Gregorianum autem prodit

$$52 - 3 + \text{res. } \frac{(15-1)}{7} - \text{res. } \frac{\text{res. } \frac{52-3}{7} + 3}{7} = 49 + 0 - 3;$$

et pro 0 ponendo 7 (per regulam), fit $49 + 7 - 3$; adeoque Pascha Gregorianum stilo novo erit quinquagesima tertia Martii, id est vicesima secunda Aprilis.

Potest formula superior ad quemvis cuiusvis seculi annum modo eodem applicari.

§. 13.

Quamquam *aequinoctium* dictum haud astronomicum sit, et hoc quoque per intercalationem dictum aliquando a vicesima prima Martii usque ad undevicesimam et vicesimam tertiam removeatur, imo et dum *Plenilunium astronomicum* evenit alicubi diei *Sabbati* hora ultima, et alibi dies *Dominica* esse, adeoque Paschata octiduo differe possent: posita tamen lege, *in rebus sacris* determinata, de *Cyclo Paschatum* dicere fas est.

Erat (pag. 344) anno 1800 *æquatio lunæ* nempe $l = 4$; quæ abinde quibusvis 25 seculis crescit, ut fiat $4 + 8$ anno 4300. Quibusvis 100 seculis *æquatio solis* nempe s crescit 3.25 dies, quia 4 in 100 continentur vicies quinquies, et quibusvis 4 seculis se invicem excipientibus a qualibet incipiendo, tres dies accedunt ipsi s . Item quum ab anno 1800 (exclusive) quibusvis 25.100 annis incrementum ipsius l sit 8 dierum, erit incrementum ipsius $l - s$ quibusvis 100 seculis elapsis $32 - 75 = - 43$.

Itaque ut res. $\frac{l-s}{30}$ (quod quovis seculo epactis Iulianis addi, ut Gregorianæ prodeant, dictum pag. 343 est) fiat æquale 0, ad minimum tot secula effluere necesse est, ut $l-s = -30 \cdot 43$ fiat; itaque 30.100 id est 3000 secula requiruntur; atque tum erit res. $\frac{l-s}{30}$ plane idem quod prius erat, quum incrementum eius 0 sit.

Incipiet igitur cyclus ab anno 1800 (ipso anno 1800 excluso, dum $l=4$ factum est), et quidem ita, ut primum seculum abinde in anno 1900, secundum in 2000 & ... atque ter millesimum in anno 301800 (nempe $1800 + 300000$) terminetur; eritque novorum 3000 seculorum primum seculum in anno 301900 adeoque pariter in anno seculari ante bissextili terminatum, ut prius; quod qualivis multiplo ipsius 300000 addito ipsi 1800, redire patet.

Sed ut cyclus epactarum Gregorianarum prodeat, non sufficit res. $\frac{l-s}{30}$ eodem ordine defluere, namque $E = e + \text{res. } \frac{l-s}{30}$. Itaque necesse est, ut etiam epactæ Iulianæ simul incipiendo eodem ordine fluant: at vero hoc quibusvis 19 annis eodem redeundo fluit in perpetuum. Si igitur cyclus prior per 19 multiplicetur, idem e redibit, eodemque ordine epactæ Iulianæ se invicem excipient. Erit igitur cyclus epactarum Gregorianarum 19. 3000 seculorum; quibus effluxis eodem ordine sequentur. Atque e dictis (pag. 349) patet etiam plenilunia Paschalia (Gregoriana) eodem ordine semet excipere: neque autem cyclus minor datur; quia 3000 seculorum numerus erat, nec 19 inter factores ipsius 3000 adest.

Interim hic tantum pleniluniorum (non Paschatum Gregorianorum) cyclus est: ut hoc fiat, oportet cyclum illum determinare, quo prima Ianuarii *Gregoriani* in seculo, eadem septimanæ die incipiat, seu quum prima Ianuarii semper *A* sit, *literae Dominicales Gregorianæ* cyclus quæritur. Est vero (pag. 335) hic 8 seculorum, quem igitur certies defluere oportet; nempe cyclum dictum 19.3000 seculorum per 8 multiplicare necesse esset; at quum 8 metiatur numerum 3000, manebunt pro *cyclo Paschatum Gregorianorum* ($19 \cdot 3000 = 57000$) *secula*.

Cyclus Paschatum Iulianorum autem non quoad locum absolutum respectu puncti fixi in alveo fluentis temporis rotundo (pag. 326), sed tantum nominali valore, nonnisi ad initium anni Iuliani referendo: est

$28 \cdot 19 = 532$ annorum. Nam epactarum cyclus est 19, et cyclus solis 28 annorum est.

Si vero cyclus ab anno 1800 quæratur, quo ambo Paschata simul quoad *punctum* (pag. 326) *pro certo loco fixum*, semper eodem ordine sequantur: necesse est etiam s idem redire. Est vero anno 1800 (usque ad finem 1899) $s=12$, crescitque usque ad 1900 (inclusive) uno die, et quibusvis quatuor seculis se invicem excipientibus crescit tres dies: distantiaque ab initio anni Iuliani decurrentia in circulo, qui nunc sit æqualis quantitati 365 dierum anni communis, donec s iterum idem sit, tot secula requirit, ut $365 - 12 = 353$ dies efficiat s. Requiruntur autem eo ad minimum 471 secula; nam $353 = 3 \cdot 117 + 2$; ad $3 \cdot 117$ vero requiruntur $4 \cdot 117 = 468$ secula, quod cum 18 efficit 486 secula: et quum 488 bissextile sit, ad duos dies adhuc tria secula requiruntur post 486; quia quartarius seculorum cum 19 incipit.

Nempe seculum bissextile potest *B* dici, præcedens vero *A*, illud autem *P* quod post bissextile est, et illud *M* (quasi medium) quod inter post et ante bissextile est; atque si quartarius seculorum in *A* incipiat, in *M* terminatur, si in *B* incipiat, in *A* terminatur; et si in *P* incipiat, in *B* terminatur, si in *M* incipiat, in *P* terminatur, cuius ratio habenda est: in casu allato post 1800 terminantur 468 secula (adeoque 48 600) in *M*; atque ut adhuc 2 dies accedant, *A*, *B*, *P* requiruntur, nam in *B* nihil accedit. Nempe series seculorum sequens est: *MABPMA BPMABPM...* Eritque annus quæsitus 48 900.

Itaque dum in certo punto p (Fig. 282.) Gregorianis ultima *Decembris* 48 900 erit, Iulianis prima Ianuarii anni 48 900 iis bissextilis erit; atque post unum diem incipiet Gregorianis 48 901 Gregorianis neuter bissextilis); itaque a p incipiendo post 366 dies terminabitur Gregorianis 48901, Iulianis vero annus 48 900.

Patet hinc cyclum desideratum prodire, si cyclus prior (nempe 57000 seculorum) per 471 multiplicetur; quum 471 non sit factor ipsius 57000.

§. 14.

Pascha Iulianum cum Gregoriano coincidere post tale seculum neutrquam potest (donec periodi statim referendæ adveniant), in quo s æquatio solis tanta est, ut et vicesima prima Martii Iuliani, si ad stilum novum reducatur, additis 7 ad sumnum ut proxima *Dominica* prodeat, ultra *Benedictum* (nempe vicesimam quintam Aprilis Gregoriani) cadat. Nimirum *Plenilunium Paschatis Iuliani* initio anni Gregoriani proximum in vicesimam primam Martii stilo veteri cadit, Pascha Gregorianum vero (iuxta regulam, quod *non praecedat Marcum*, in vicesimam primam Martii cadentem, *nec postcedat Benedictum*, nempe vicesimam quintam Aprilis) tunc distat ab anni initio maxime, dum $E=24$, adeoque *pleni-lunium Paschale* = 74 - 25 (pag. 349) = 49, cui maximum est 7, quod additur. Quum igitur $s=34$ fiet, nunquam amplius Paschata coincidere poterunt, usquequo periodi sequentes adveniant. Seculo præsente patet (per pag. 349) pro $e > 23$ coincidere non posse; quum formulæ Iulianæ addi $s=12$ debeat, ut valor uterque æqualis sit, et pro $e > 23$ in formula Iuliana ex 44 fiat 74.

§. 15.

Si res. $\frac{l-s}{30}=0$ fiat, et annus Iulianus cum Gregoriano simul incipient, in illo seculo per formulas patet Paschata omnia coincidere; nam tum $E=e$, et prima Martii eadem utrique est. Quæstio exoritur, quandonam hoc fiat?

Fiet (in §. præcedente) $s=0$, in quantum anni Gregoriani et Iuliani simul incipient, uti si abinde s crescat $q \cdot 365$ dies, atque pro $s=0$, etiam res. $\frac{l}{30}=0$, ut res. $\frac{l-s}{30}=0$ esse queat. Itaque quum anno 1800 sit $l-s=-8$; erit (ipsius l incremento l' dicto)

$$\text{res. } \frac{l'-8-353-q \cdot 365}{30}=0;$$

atque hinc

$$\text{res. } \frac{l'-1-q \cdot 5}{30}=0.$$

Si prius $q=0$ accipiatur, erit (e præcedentibus) pro 471 seculis, diebus 353 respondentibus, $l'=151$ diebus; quia $471 = 18 \cdot 25 + 21$, atque $8 \cdot 18 = 144$, cui si addantur 8 dies, seculis 21 competentes prodit 151. Fit igitur pro hoc casu formula

$$\text{res. } \frac{151 - 1}{30} = 0;$$

atque tum coincident prima vice Paschata per totum seculum. Si vero post tempus istud, dictis 353 diebus respondens, accedat tempus $q \cdot 365$ diebus respondens, et respondens incrementum æquationis lunæ l'' dicatur: expressio prior fiet res. $\frac{l'' - q \cdot 5}{30}$; et quæritur, quandonam hoc $= 0$ fiat.

Incipiet post primum $s=0$, tempus T ad incrementum 365 dierum ipsius s requisitum in M , desinet in A ; abinde secundum incipiet in B , et desinet in M , et abinde incipiens in A in P desinet, atque item in M incipiens in A desinet, idemque ordo porro erit: nempe incipient in MBA MBA , desinent in $AMP AMP$, requirentque primum 486, secundum et tertium 487; et item 486, 487, 487 sequuntur semper porro. Eritque quum quodvis T in seculo A vel M aut P , adeoque Gregorianis communi Iulianis bissextili desinat, $s=0$. Itaque id tantum quæritur, quandonam res. $\frac{l'' - q \cdot 5}{30} = 0$ fiat; tunc enim Paschata per totum seculum coincident.

Ad finem primi T , 486 dat $l''=155$ (excedentibus 2 seculis), itaque

$$\text{res. } \frac{l'' - 1 \cdot 5}{30} = \text{res. } \frac{150}{30} = 0;$$

at pro 2 T , $486 + 487$ dabit $l''=311$ (excedentibus 2 seculis); itaque

$$\text{res. } \frac{l'' - 2 \cdot 5}{30} = \text{res. } \frac{301}{30} = 1;$$

nec petito satisfiet.

Interim etsi nec æquatio lunæ, nec solis $= 0$; sed illa $- 29$, hæc $- 1$, aut illa $- 1$ hæc $+ 1$ sit: coincident Paschata per totum seculum, (excepto uno casu in quovis cyclo decemnovenali). Nempe dum $e=23$,

in casu priore fit $E = 23 - 29 = -6$, adeoque E positive accepta erit $30 - 6 = 24$. Erit igitur (pag. 349) plenilunium Paschale *Gregorianum* $74 - 25 = 49$, plenilunium *Iulianum* autem $44 - 23 = 21$, quod ad stilum novum reducetur addito $s = -1$, fietque $= 20$. In altero casu autem pro $e = 25$ fiet plenilunium *Iulianum* $74 - 25 = 49$, et E erit $= 25 - 1 = 24$, adeoque plenilunium *Gregorianum* erit pariter $74 - 25 = 49$, sed priori addi $s = 1$ debet, ut ad stilum novum reducatur; itaque fieri potest, ut Paschata haud coincidant. In omnibus aliis casibus autem coincident. Cogitetur enim pro casu priori addi 30 ipsi $e - 29$, ut prodeat E positive; erit $e - 29 + 30 = E = e + 1$; quo pacto cuivis e infra 23 addita unitate, in neutra plenilunii Paschalis expressione mutabitur 44 in 74 ; itaque fiet plenilunium *Iulianum* ad stilum novum reductum $44 - e - 1$, plenilunium *Gregorianum* autem $44 - (e + 1)$. Pariter si e supra 23 fuerit, in utroque erit 74 pro 44 .

In altero casu autem, si e infra 25 fuerit, per subtractionem unitatis, in utroque manebit 44 : nempe e infra 25 sequens est 23 . Idem de minoribus epactis Iulianis valet; et pariter si $e > 25$ fuerit, $74 - e + 1$ erit plenilunium *Iulianum* ad stilum novum reductum, et $74 - (e - 1)$ erit plenilunium *Gregorianum*, quia E erit $= e - 1$, et tum $e - 1 > 23$.

Potest autem facile computari, quantumnam fieri q oporteat, ut res $\frac{l-s}{30} = 0$ sit. Seculorum nempe numeri $486, 487, 487$ se invicem perpetuo excipiunt (positis iis, quae dicta sunt), et numeri quibus multiplum ipsius 25 excedunt, sunt numeri $11, 12, 12$ perpetuo; et nonnisi valores ipsius q tales quærendi sunt, ut incrementum ipsius l ex his excessibus exsurgens multiplum ipsius 30 sit, adeoque $l-s$ per 30 divisum residuum 0 det.

Seculo præsente (1800--1899) *Paschata pro numero aureo* $3, 8, 11, 14, 19$ non coincidunt; nec quod pro 13 anno 1817 coinciderint, ad 1836 concluditur. *Marci* dies (pag. 354) includi videtur, sed *tabulis* excluditur; facile vero regula adaptaretur. Quæri conversim pro dictis et annus potest.

ius opilio, certe ab aliis non tam aucto*re* sed etiam a*uctoribus* sumis*eruntur*.
Ius opilio autem iudicatur auctoribus, non a*uctoribus* aucto*re*, ut etiam
in*opere* de*litteris* et*opusculis* a*uctoribus* a*uctoribus* iudicatur, non a*uctoribus* a*uctoribus*
a*uctoribus*. Ius opilio, quod a*uctoribus* a*uctoribus* iudicatur, a*uctoribus* a*uctoribus* a*uctoribus*
a*uctoribus* a*uctoribus* a*uctoribus* a*uctoribus* a*uctoribus* a*uctoribus* a*uctoribus* a*uctoribus* a*uctoribus* a*uctoribus*

RECENSIO PER AUCTOREM IPSUM FACTA.

Horatii versus inverti posse videtur; nempe *Ubi pauca nitent, pluribus offendar maculis*: at quum has hucusque nonnisi auctor ostenderit, ius obtrectandi quoque adhucdum ei soli competit, in posterum cuique manens, qui novas detexerit. Itaque etsi, sententia mere, dictoria reprobantes, ruinis altiores utcunque despicerint; conscientia mens recti, non nitere sed tyronum evidentiam desiderantium vim tempusque ad ea quae niteant servare studens, haud probrose erubescat, imo quacunque macula, quam detergere licebit, nova luce gaudeat: recensens novas monstraturus, facere non potest, quin indignetur, auctoremque reprehendat.

1. Cur tam diu versaverit, quid valeant humeri; donec quod iam primi valuissent, demum ferre recusarint.

2. Cur unicam vitam brevem fere per omnem musarum numerum (quasi polygamia) diviserit.

3. Cur si defuerit otium, languens iam variisque tamen distractus, adversis omnibus quae tale opus desiderat, ita ediderit: ut saepe quasi per raptus, non amnis constantis naves ferentis, sed rivi, nunc falci viridem præbentis fundum, mox de cœlo exundantis instar, latus esse videatur.

Multa, donec virens vitae arbor resonat, spes musarum floret: sed fructus aut nullos relinquunt, aut boreas carpit immaturos, ni terra cœlumque faverint, desinenteque philomela in oliva cava vigilet ales Palladi sacra. Cum vero silvae calvae mutæque frigorum crysatillis efflorescunt, atque album in desertis sopitæ naturæ tegmen agitantes venti planctum incipiunt: non aliud restat, quam brevi post tinnitus cedere scena, campanisque comitantibus domum redire.

Denique tamen eo quæstio redit: num ita etiam uti est, edidisse, aut prorsus omisisse præstiterit? Recensens (ni fallatur) rem approbat: sed forma haud contentus, postulat, ut idem (præsertim in T. I.) per capita (iuxta radicem, truncum coronamque, pag. 1. T. I.* subdivisionibus etiam clare) distinctum, eaque de quibus postea agendum est, locis reservando propriis, correctius prodeat; quod iam utcunque edito hoc, ingenium conveniens otioque gaudens facilius præstare poterit; multa rigorem claritatemque sectans, ex his quoque amplexurus, etsi insuetorum signorum uti Tom. II.* in expl. sign. auctor ipse monet, non omnia retinuerit.

* Ed. I'

A P P E N D I X.

SCIENTIAM SPATII *absolute veram* exhibens:
a veritate aut falsitate Axiomatis XI Euclidei
(a priori haud unquam decidenda) independenter; adjecta ad casum falsitatis, quadratura circuli
geometrica.

Auctore JOHANNE BOLYAI de eadem, Geometrarum
in Exercitu Caesareo Regio Austriaco Ca-
strensium Capitaneo.

1. 100 S. 12 A.

1. 100 S. 12 A. 100 S. 12 A.

1. 100 S. 12 A. 100 S. 12 A.

1. 100 S. 12 A. 100 S. 12 A.

1. 100 S. 12 A. 100 S. 12 A.

1. 100 S. 12 A. 100 S. 12 A.

1. 100 S. 12 A. 100 S. 12 A.

1. 100 S. 12 A. 100 S. 12 A.

1. 100 S. 12 A. 100 S. 12 A.

1. 100 S. 12 A. 100 S. 12 A.

1. 100 S. 12 A. 100 S. 12 A.

1. 100 S. 12 A. 100 S. 12 A.

1. 100 S. 12 A. 100 S. 12 A.

1. 100 S. 12 A. 100 S. 12 A.

1. 100 S. 12 A. 100 S. 12 A.

1. 100 S. 12 A. 100 S. 12 A.

1. 100 S. 12 A. 100 S. 12 A.

1. 100 S. 12 A. 100 S. 12 A.

1. 100 S. 12 A. 100 S. 12 A.

1. 100 S. 12 A. 100 S. 12 A.

1. 100 S. 12 A. 100 S. 12 A.

1. 100 S. 12 A. 100 S. 12 A.

1. 100 S. 12 A. 100 S. 12 A.

1. 100 S. 12 A. 100 S. 12 A.

1. 100 S. 12 A. 100 S. 12 A.

1. 100 S. 12 A. 100 S. 12 A.

1. 100 S. 12 A. 100 S. 12 A.

1. 100 S. 12 A. 100 S. 12 A.

EXPLICATIO SIGNORUM.

- \overline{ab} denotet complexum *omnium* punctorum cum punctis a , b in recta
 sitorum.
 $a\tilde{b}$ " rectæ \overline{ab} in a bifariam sectæ dimidium illud, quod punc-
 tum b complectitur.
 \overline{abc} " complexum *omnium* punctorum, quæ cum punctis a , b , c
 (non in eadem recta sitis) in eodem plano sunt.
 $ab\tilde{c}$ " plani \overline{abc} per \overline{ab} bifariam secti dimidium, punctum c com-
 plectens.
 abc " portionum, in quas \overline{abc} per complexum rectarum $b\tilde{a}$, $b\tilde{c}$
 dividitur, *minorem*; sive *angulum*, cuius $b\tilde{a}$, $b\tilde{c}$ crura
 sunt.
 $abcd$ " (si d in abc sit et \overline{ba} , \overline{cd} se invicem non secant) porti-
 onem ipsius abc inter $b\tilde{a}$, $b\tilde{c}$, $c\tilde{d}$ comprehensam; $bacd$
 vero portionem plani \overline{abc} inter \overline{ab} , \overline{cd} sitam.
 K " angulum rectum.
 $ab \perp cd$ " $cab = acd$.
 \equiv " congruens.*
 $x \rightsquigarrow \alpha$ " x tendere ad limitem α .
 $\circ r$ " peripheriam circuli radii r .
 $\odot r$ " aream circuli radii r .

* Sit fas, signo hocce, quo summus Geometra GAUSS numeros *congruos* insignivit, congruentiam geometricam quoque denotare: nulla ambiguitate exinde metuenda.

§. I.

Si rectam $\alpha\tilde{m}$ non secet plani eiusdem recta $b\tilde{n}$, at secet quævis $b\tilde{p}$ Fig. 1.
(in abn): designetur hoc per
 $b\tilde{n} \parallel am$.

Dari talem $b\tilde{n}$, et quidem *unicam*, e quovis puncto b (extra \overline{am}),
atque

$$bam + abn \text{ non } > 2R$$

esse patet; nam bc circa b mota, donec

$$bam + abc = 2R$$

fiat, $b\tilde{c}$ aliquando *primo* non secat $\alpha\tilde{m}$, estque tunc $bc \parallel am$.

Nec non patet esse $b\tilde{n} \parallel em$, ubivis sit e in \overline{am} (supponendo in omnibus talibus casibus esse $am > ae$).

Et si, puncto c in $\alpha\tilde{m}$ abeunte in infinitum, semper sit $cd = cb$: erit
semper

$$cdb = (cbd < nbc);$$

ast $nbc \sim o$; adeoque et $adb \sim o$.

§. 2.

Si $b\tilde{n} \parallel am$; *est quoque* $cn \parallel am$.

Fig. 2.

Nam sit d ubicunque in $macn$. Si c in $b\tilde{n}$ sit; $b\tilde{d}$ secat $\alpha\tilde{m}$ (propter $b\tilde{n} \parallel am$), adeoque et $c\tilde{d}$ secat $\alpha\tilde{m}$; si vero c in $b\tilde{p}$ fuerit; sit $b\tilde{q} \parallel cd$: cadit $b\tilde{q}$ in abn (§. I.) secatque $\alpha\tilde{m}$, adeoque et $c\tilde{d}$ secat $\alpha\tilde{m}$. Quævis $c\tilde{d}$ igitur (in acn) secat in utroque casu $\alpha\tilde{m}$ absque eo, ut $c\tilde{n}$ ipsam $\alpha\tilde{m}$ secet. Est ergo semper $cn \parallel am$.

§. 3.

Fig. 2. *Si tam br quam cs sit ||am, et c non sit in br; tum br, cs se invicem haud secant.*

Si enim br, cs punctum d commune haberent; (per §. 2.) essent dr et ds simul ||am, caderetque (§. 1.) ds in dr et c in br (contra hyp.).

§. 4.

Fig. 3. *Si man>mab; pro quovis punto b ipsius ab datur tale c in am, ut sit bcm=nam.*

Nam datur (per §. 1.) bdm>nam, adeoque mdp=man, caditque b in nadp. Si igitur nam iuxta am feratur, usquequo an in dpm veniat; aliquando an per b transiisse, et aliquod bcm=nam esse oportet.

§. 5.

Fig. 1. *Si bn || am, datur tale punctum f in am, ut sit fm=bn.*

Nam (per §. 1.) datur bcm>cbn; et si ce=cb, adeoque ec=bc; patet esse bem<ebn. Feratur p per ec, angulo bpm semper u, et angulo pbn semper v dicto; patet u esse prius ei simultaneo v minus, posterius vero esse maius. Crescit vero u a bem usque bcm continuo; cum (per §. 4.) nullus angulus >bem et <bcm detur, cui u aliquando = non fiat; pariter decrescit v ab ebn usque cbn continuo: datur itaque in ec tale f, ut bf=fbn sit.

§. 6.

Si bn || am, atque ubivis sit e in am et g in bn: tum gn || em et em || gn.

Nam (per §. 1.) est bn || em, et hinc (per §. 2.) gn || em.

Si porro fm=bn (§. 5.); tum mfbn=nbfm, adeoque (cum bn || fm sit etiam fm || bn, et (per præc.) em || gn.

§. 7.

Si tam bn quam cp sit || am, et c non sit in bn: est etiam bn || cp. Fig. 4.

Nam $b\bar{n}$, $c\bar{p}$ se invicem non secant (§. 3.); sunt vero am , bn , cp aut in plano, aut non; atque in casu primo am aut in $bncp$ est, aut non.

Si am , bn , cp in plano sint, et am in $bncp$ cadat; tum quævis $b\bar{q}$ (in nbc) secat \bar{am} in aliquo puncto δ (quia $bn \parallel am$); porro cum $\delta m \parallel cp$ sit (§. 6.); patet $\delta\bar{q}$ secare $c\bar{p}$, adeoque esse $bn \parallel cp$.

Si vero bn , cp in eadem plaga ipsius am sint; tum aliqua earum ex. gr. cp *intra* duas reliquas \bar{bn} , \bar{am} cadit; quævis $b\bar{q}$ (in nba) autem secat \bar{am} , adeoque et ipsam $c\bar{p}$. Est itaque $bn \parallel cp$.

Si mab , mac *angulum* efficiant: tum $c\bar{b}n$ cum abn non nisi $b\bar{n}$, $a\bar{m}$ vero (in abn) cum $b\bar{n}$, adeoque nbc quoque cum $a\bar{m}$, nihil commune habent. Per quanvis $b\bar{d}$ (in nba) autem positum $b\bar{c}\bar{d}$ secat \bar{am} , quia (propter $bn \parallel am$) $b\bar{d}$ secat \bar{am} . Moto itaque $b\bar{c}\bar{d}$ circa bc , donec ipsam \bar{am} *prima vice* deserat, postremo cadet $b\bar{c}\bar{d}$ in $b\bar{c}n$. Eadem ratione cadet idem in $b\bar{c}\bar{p}$; cadit igitur bn in $b\bar{c}p$. Porro si $br \parallel cp$; tum (quia etiam $am \parallel cp$) pari ratione cadit br in bam ; nec non (propter $br \parallel cp$) in $b\bar{c}p$. Itaque $b\bar{r}$ ipsis mab , pcb commune, nempe ipsum $b\bar{n}$ est, atque hinc $bn \parallel cp$.

Si igitur $cp \parallel am$, et b extra \bar{am} sit: tum sectio ipsorum bam , $b\bar{c}p$, nempe $b\bar{n}$ est || tam ad am , quam ad cp .*

§. 8.

*Si bn || et = cp (vel brevius bn || = cp), atque am (in nbcp) rectam Fig. 5.
bc perpendiculariter bisecet; tum bn || am.*

Si enim $b\bar{n}$ secaret \bar{am} , etiam $c\bar{p}$ secaret \bar{am} in eodem puncto (cum $mabn = macp$), quod et ipsis $b\bar{n}$, $c\bar{p}$ commune esset, quanvis $bn \parallel cp$ sit. Quævis $b\bar{q}$ (in $c\bar{b}n$) vero secat $c\bar{p}$; adeoque secat $b\bar{q}$ etiam \bar{am} . Consequenter $bn \parallel am$.

* Casu tertio *praemisso* duo priores, adinstar casus secundi §. 10. brevius ac elegantius simul absolvit possunt. (Ed. I. Tom. I. Errata Appendix).

§. 9.

Fig. 6 *Si $bn \parallel am$, $map \perp mab$, atque angulus, quem nbd cum nba (in ea plaga ipsius $mabn$, ubi map est) facit, sit $< R$: tum map et nbd se invicem secant.*

Nam sit

$$bam = R, ac \perp bn$$

(sive in b cadat c , sive non), et

$$ce \perp bn \text{ (in } nbd\text{);}$$

erit (per hyp.) $ace < R$, et $af (\perp ce)$ in ace cadet. Sit ap sectio (punctum a commune habentium) abf et amp ; erit

$$bap = bam = R$$

(cum sit $bam \perp map$). Si denique abf in abm ponatur (a et b manentibus); cadet ap in am ; atque cum

$$ac \perp bn \text{ et } af < ac$$

sit, patet af intra bn terminari, adeoque bf in abn cadere. Secat autem bf ipsam ap in *hoc* situ (quia $bn \parallel am$), adeoque etiam in situ *primo* ap et bf se invicem secant; estque punctum sectionis ipsis map et nbd commune: secant itaque map et nbd se invicem.

Facile ex hinc sequitur map et nbd se mutuo secare, si summa internorum, quos cum $mabn$ efficiunt, $< 2R$ sit.

§. 10.

Fig. 7. *Si tam bn quam cp sit $\parallel \perp am$; est etiam $bn \parallel \perp cp$.*

Nam mab et mac aut *angulum* efficiunt, aut in *plano* sunt.

Si prius; bisecet qdf rectam ab perpendiculariter; erit $dq \perp ab$, adeoque $dq \parallel am$ (§. 8.); pariter si ers bisecet rectam ac perpendiculariter, est $er \parallel am$; unde $dq \parallel er$ (§. 7.). Facile hinc (per §. 9.) consequitur, qdf

et \overline{ers} se mutuo secare, et sectionem \widetilde{fs} esse $\parallel \delta q$ (§. 7.), atque (propter $bn \parallel \delta q$) esse etiam

$$\widetilde{fs} \parallel bn.$$

Est porro (pro quovis puncto ipsius \widetilde{fs})

$$fb = fa = fc,$$

caditque \widetilde{fs} in planum \widetilde{tgc} , rectam bc perpendiculariter bisecans. Est vero (per §. 7.) (cum sit $\widetilde{fs} \parallel bn$) etiam

$$gt \parallel bn.$$

Pari modo demonstratur $gt \parallel cp$ esse. Interim gt bisecat rectam bc perpendiculariter; adeoque $tgbn = tgcp$ (§. 1.) et

$$bn \parallel \perp cp.$$

Si bn , am , cp in plano sint; sit (*extra* hoc planum cadens) $\widetilde{fs} \parallel \perp am$; tum (per præc.) $\widetilde{fs} \parallel \perp$ tam ad bn quam ad cp , adeoque et $bn \parallel \perp cp$.

§. 11.

Complexus puncti a , atque *omnium* punctorum, quorum quodvis b tale est, ut si $bn \parallel am$ sit, sit etiam $bn \perp am$; dicatur F : sectio vero ipsius F cum quovis plano rectam am complectente nominetur L .

In quavis recta, quæ $\parallel am$ est, F gaudet punto, et non nisi uno; atque patet L per am dividi in duas partes congruentes; dicatur am *axis* ipsius L ; patet etiam, in quovis plano rectam am complectente, pro *axe* am unicum L dari. Quodvis eiusmodi L , dicatur L *ipsius am* (in plano, de quo agitur, intelligendo). Patet per L circa am revolutum, F describi, cuius am *axis* vocetur, et vicissim F *axi am attribuatur*.

§. 12.

Si b ubivis in L ipsius am fuerit, et bn \parallel \perp am (§. 11.); tum L ipsius am et L ipsius bn coincidunt.

Nam dicatur L ipsius $b\bar{n}$ distinctionis ergo l ; sitque c ubivis in l , et $cp \parallel \perp bn$ (§. 11.); erit (cum et $bn \parallel \perp am$ sit) $cp \parallel \perp am$ (§. 10.), adeoque c etiam in L cadet. Et si c ubivis in L sit, et $cp \parallel \perp am$; tum $cp \parallel \perp bn$ (§. 10.); caditque c etiam in l (§. 11.). Itaque L et l sunt eadem; ac quævis $b\bar{n}$ est etiam axis ipsius L , et inter omnes axes ipsius L , \perp est.

Idem de F eodem modo patet.

§. 13.

Fig. 8. Si $bn \parallel am$, $cp \parallel dq$, et $bam + abn = 2R$ sit; tum etiam $dcp + cdq = 2R$.

Sit enim $ea = eb$ et $efm = dcp$ (§. 4.); erit (cum

$$\begin{aligned} & bam + abn = 2R = abn + abg \\ & \text{sit)} \end{aligned}$$

$$abg = eaf;$$

adeoque si etiam $bg = af$ sit,

$$\Delta ebg = \Delta eaf, \quad beg = aef,$$

cadetque g in $f\bar{e}$. Est porro $gfm + fgn = 2R$ (quia $ebg = efa$). Est etiam $gn \parallel fm$ (§. 6.); itaque si $mfrs = pc\bar{d}q$, tum $rs \parallel gn$ (§. 7.), et r in vel extra fg cadit (si cd non $= fg$, ubi res iam patet).

I. In casu primo est frs non $> (2R - rfm - fgn)$, quia $rs \parallel fm$; ast cum $rs \parallel gn$ sit, est etiam frs non $< fgn$; adeoque $frs = fgn$, et

$$rfm + frs = gfm + fgn = 2R.$$

Itaque et $dcp + cdq = 2R$.

II. Si r extra fg cadat; tunc $ngr = mfr$, sitque $mfgn = nghl = lhfo$ et ita porro, usquequo $f\bar{k} =$ vel prima vice $> fr$ fiat. Est heic $fo \parallel hl \parallel fm$ (§. 7.). Si k in r cadat; tum fo in rs cadit (§. 1.); adeoque

$$rfm + frs = kf\bar{m} + kf\bar{o} = kf\bar{m} + fgn = 2R;$$

si vero r in hf cadat, tum (per I.) est

$$rh\bar{l} + hrs = 2R = rfm + frs = dcp + cdq.$$

§. 14.

Si bn || am, cp || dq, et bam + abn < 2R sit; tum etiam dcq + cdq < 2R.

Si enim dcq + cdq non esset <, adeoque (per §. 1.) esset = 2R; tum (per §. 13.) etiam bam + abn = 2R esset (contra hyp.).

§. 15.

Perpensis §§. 13. et 14. Systema Geometriae hypothesi veritatis Axiomatis Euclidei XI. insistens dicatur Σ ; et hypothesi contrariae superstructum sit S. Omnia, quae expresse non dicentur, in Σ vel in S esse; absolute enuntiari, i. e. illa, sive Σ sive S re ipsa sit, vera asseri intelligatur.

§. 16.

Si am sit axis alicuius L; tum L in Σ recta \perp am est.

Fig. 5.

Nam sit e quovis puncto b ipsius L axis bn; erit in Σ

$$\text{bam} + \text{abn} = 2\text{bam} = 2R,$$

adeoque bam = R. Et si c quodvis punctum in \overline{ab} sit, atque cp || am; est (per §. 13.) cp \perp am, adeoque c in L (§. 11.).

In S vero nulla 3 puncta a, b, c ipsius L vel F in recta sunt.

Nam aliquis axium am, bn, cp (ex. gr. am) intra duos reliquos cadit; et tunc (per §. 14.) tam bam quam cam < R.

§. 17.

L est etiam in S linea, et F superficies.

Fig. 7.

Nam (per §. 11.) quodvis planum ad axem am (per punctum aliquod ipsius F) perpendicularare secat ipsum F in peripheria circuli, cuius planum (per §. 14.) ad nullum alium axem bn perpendicularare est. Revolvatur F circa bn; manebit (per §. 12.) quodvis punctum ipsius F in F, et sectio ipsius F cum piano ad bn non perpendiculari describet super-

ficiem: atqui F (per §. 12.), quæcunque puncta a , b fuerint in eo, ita *sibi* congruere poterit, ut a in b cadat; est igitur F *superficies uniformis*.

Patet hinc (per §§. 11. et 12.) L esse *lineam uniformem.**

§. 18.

Fig. 7. *Cuiusvis plani, per punctum a ipsius F ad axem am oblique positi, sectio cum F in S peripheria circuli est.*

Nam sint a , b , c 3 puncta huius sectionis, et bn , cp axes; facient $ambn$, $amcp$ angulum; nam secus planum (ex §. 16.) per a , b , c determinatum ipsam am complecteretur (contra hyp.). Plana igitur, rectas ab , ac perpendiculariter bisecantia se mutuo secant (§. 10.) in aliquo axe fs (ipsius F), atque $fb = fa = fc$. Sit $ah \perp fs$, et revolvatur fa circa fs ; describet a peripheriam radii ha , per b et c euntem, et *simul* in F et \overline{abc} sitam; nec F et \overline{abc} præter $\bigcirc ha$ quidquam commune habent (§. 16.).

Patet etiam extremitate portionis fa lineæ L (tanquam radio) in F circa f mota ipsam $\bigcirc ha$ describi.

§. 19.

Fig. 5. *Perpendicularis bt ad axem bn ipsius L (in planum ipsius L cadens) est in S tangens ipsius L.*

Nam L in bt præter b nullo punto gaudet (§. 14.), si vero bq in tbn cadat, tum centrum sectionis plani per bq ad tbn perpendicularis cum F ipsius bn (§. 18.) manifesto in bq locatur, et si bq diameter sit, patet bq lineam L ipsius bn in q secare.

§. 20.

Per quaevis duo puncta in F linea L determinatur (§§. 11. et 18.); atque (cum ex §§. 16. et 19. L perpendicularis ad omnes suos axes sit)

* Demonstrationem ad S restringere haud necesse est; quum facile ita proponatur, ut absolute (pro S et Σ) valeat. (Ed. I. Tom. I. Errata Appendix).

quivis angulus Llineus in F angulo planorum ad F per crura perpendicularium aequalis est.

§. 21.

Duae lineae Lformes \overline{ap} , $\overline{b\delta}$ in eodem F , cum tertia Lformi \overline{ab} Fig. 6. summam internorum $< 2R$ efficientes, se mutuo secant (per \overline{ap} in F intelligendo L per a , p ductum, per \overline{ap} vero dimidium illud eius ex a incipiens, in quod p cadit).

Nam si \overline{am} , \overline{bn} axes ipsius F sint; tum \overline{amp} , $\overline{bn\delta}$ secant se invicem (§. 9.); atque F secat eorundem sectionem (per §§. 7. et 11.); adeoque et \overline{ap} , $\overline{b\delta}$ se mutuo secant.

Patet ex hinc Axioma XI. et omnia, quæ in Geometria Trigonometriae (plana) asseruntur, absolute constare in F , rectarum vices lineis L subeuntibus: idcirco functiones trigonometricæ abhinc eodem sensu accipientur, quo in Σ veniunt; et peripheria circuli, cuius radius L formis $=r$ in F , est $=2\pi r$, et pariter $\odot r$ (in F) $=\pi r^2$ (per π intelligendo $\frac{1}{2}\odot 1$ in F , sive notum $3.1415926\dots$).

§. 22.

Si \overline{ab} fuerit L ipsius \overline{am} , et c in \overline{am} ; atque angulus \overline{cab} (e recta Fig. 9. \overline{am} et L formi linea \overline{ab} compositus) feratur prius iuxta \overline{ab} , tum iuxta \overline{ba} semper porro in infinitum: erit via \overline{cd} ipsius c linea L ipsius \overline{cm} .

Nam (posteriore l dicta) sit punctum quodvis d in \overline{cd} , $\overline{dn} \parallel \overline{cm}$, et b punctum ipsius L in \overline{dn} cadens; erit $\overline{bn} \perp \overline{am}$, et $\overline{ac} = \overline{bd}$, adeoque $\overline{dn} \perp \overline{cm}$, consequ. d in l . Si vero d in l et $\overline{dn} \parallel \overline{cm}$, atque b punctum ipsius L ipsi \overline{dn} commune sit; erit $\overline{am} \perp \overline{bn}$ et $\overline{cm} \perp \overline{dn}$, unde manifesto $\overline{bd} = \overline{ac}$, cadetque d in viam puncti c , et sunt l et \overline{cd} eadem. Designetur tale l per $l \parallel L$.

§. 23.

Si linea L formis $\overline{cdf} \parallel \overline{abe}$ (§. 22.), et $\overline{ab} = \overline{be}$, atque \overline{am} , \overline{bn} , \overline{ep} sint Fig. 9. axes; erit manifesto $\overline{cd} = \overline{df}$; et si quælibet 3 puncta a , b , e fuerint ipsius

\tilde{ab} , ac $ab = n \cdot cd$: erit quoque $ae = n \cdot cf$; adeoque (manifesto etiam pro ab , ae , dc incommensurabilibus)

$$ab : cd = ae : cf,$$

estque $ab : cd$ ab ab *independens* et per ac *prorsus determinatum*. Denotetur quotus iste, nempe $ab : cd$ litera maiore eiusdem nominis (puta per X), quo ac litera minuscula (ex. gr. x) insignitur.

§. 24.

Quaecunque x et y fuerint; est $Y = X^{\frac{y}{x}}$ (§. 23.).

Nam aut erit alterum (ipsorum x, y) multiplum alterius (ex. gr. y ipsius x), aut non.

Si $y = nx$; sit $x = ac = cg = gh$ ℒ, usquequo $ah = y$ fiat; sit porro $cd \parallel gf \parallel hl$; erit (§. 23.)

$$X = ab : cd = cd : gf = gf : hl;$$

adeoque

$$\frac{ab}{hl} = \left(\frac{ab}{cd}\right)^n,$$

sive

$$Y = X^n = X^{\frac{y}{x}}.$$

Si x, y multipla ipsius i sint, puta

$$x = mi \quad \text{et} \quad y = ni;$$

est (per præc.)

$$X = I^m, \quad Y = I^n,$$

consequi.

$$Y = X^{\frac{n}{m}} = X^{\frac{y}{x}}.$$

Idem ad casum incommensurabilitatis ipsorum x, y facile extenditur.
Si vero fuerit $q = y - x$; erit manifesto $Q = Y : X$.

Nec non manifestum est, in Σ pro quovis x esse $X = 1$, in S vero $X > 1$ esse, atque pro *quibusvis* ab, ae dari tale $cd \parallel ab$, ut sit $cd = ab$,

unde $\text{ambn} = \text{amep}$ erit, etsi hoc illius qualevis multiplum sit; quod singulare quidem est, sed absurditatem ipsius S evidenter non probat.

§. 25.

In quovis rectilineo triangulo sunt peripheriae radiorum lateribus Fig. 10. aequalium, uti sinus angulorum oppositorum.

Sit enim $\text{abc} = R$, et $\text{am} \perp \text{bac}$, atque sint $\text{bn}, \text{cp} \parallel \text{am}$; erit $\text{cab} \perp \text{ambn}$, adeoque (cum $\text{cb} \perp \text{ba}$ sit) $\text{cb} \perp \text{ambn}$, consequ. $\text{cpbn} \perp \text{ambn}$. Secet F ipsius cp rectas $\overline{\text{bn}}, \overline{\text{am}}$ (respective) in δ, ϵ , et fascias $\text{cpbn}, \text{cpam}, \text{bnam}$ in lineis L formibus $\text{cd}, \text{ce}, \text{de}$; erit (§. 20.) $\text{cde} = \text{angulo ipsorum ndc, nde}$, adeoque $= R$; atque pari ratione est $\text{ced} = \text{cab}$.

Est autem (per §. 21.) in L lineo triangulo ced (heic radio semper $= 1$ posito)

$$\text{ec} : \text{dc} = 1 : \sin. \text{dec} = 1 : \sin. \text{cab}.$$

Est quoque (per §. 21.)

$$\begin{aligned} \text{ec} : \text{dc} &= \circ \text{ec} : \circ \text{dc} \text{ (in } F\text{)} \\ &= \circ \text{ac} : \circ \text{bc} \text{ (§. 18.)}; \end{aligned}$$

adeoque est etiam

$$\circ \text{ac} : \circ \text{bc} = 1 : \sin. \text{cab};$$

unde assertum pro quovis triangulo liquet.

§. 26.

In quovis sphærico triangulo sunt sinus laterum, uti sinus angulorum iisdem oppositorum. Fig. 11.

Nam sit $\text{abc} = R$, et ced perpendicularare ad sphæræ radium oa ; erit $\text{ced} \perp \text{aob}$, et (cum etiam $\text{hoc} \perp \text{boa}$ sit) $\text{cd} \perp \text{ob}$. In triangulis ceo, cdo vero est (per §. 25.)

$$\begin{aligned} \circ \text{ec} : \circ \text{oc} : \circ \text{dc} &= \sin. \text{coe} : 1 : \sin. \text{cod} \\ &= \sin. \text{ac} : 1 : \sin. \text{bc}; \end{aligned}$$

interim (§. 25.) etiam

○ ec : ○ dc = sin. cde : sin. ced ;
 itaque
 sin. ac : sin. bc = sin. cde : sin. ced ;
 est vero cde = R = cba, atque ced = cab. Consequenter
 sin. ac : sin. bc = 1 : sin. a.

E quo pro manans Trigonometria sphaerica ab Axiomate XI. independenter stabilita est.

§. 27.

Fig. 12. *Si ac, bd sint \perp ab, et feratur cab iuxta \overline{ab} ; erit (via puncti c dicta heic cd)*

$$cd : ab = \sin. u : \sin. v.$$

Nam sit de \perp ca; est in triangulis ade, adb (per §. 25.)

$$\circ ed : \circ ad : \circ ab = \sin. u : 1 : \sin. v.$$

Revoluto bacd circa ac, describetur $\circ ab$ per b, $\circ ed$ per d; et via dictae cd denotetur heic per $\circ cd$. Sit porro polygonum quodvis bfg... ipsi $\circ ab$ inscriptum; nascetur per plana ex omnibus lateribus bf, fg &c, ad $\circ ab$ perpendicularia, in $\circ cd$ quoque figura polygonalis totidem laterum; et demonstrari (ad instar §. 23.) potest, esse

adeoque

$$cd : ab = dh : bf = hf : fg = \dots,$$

$$dh + hf + \dots : bf + fg + \dots = cd : ab$$

Quovis laterum bf, fg, ... ad limitem o tendente, manifesto

$$bf + fg + \dots \sim \circ ab \quad \text{et} \quad dh + hf + \dots \sim \circ ed.$$

Itaque etiam

$$\circ ed : \circ ab = cd : ab.$$

Erat vero

$$\circ ed : \circ ab = \sin. u : \sin. v.$$

Consequ.

$$cd : ab = \sin. u : \sin. v.$$

Remoto ac a $\delta\delta$ in infinitum, manet

$$\begin{aligned} \text{adeoque etiam} \\ \text{c}\delta : \text{ab} \\ \sin. u : \sin. v \end{aligned}$$

constans; u vero $\sim R$ (§. 1.), et si $\delta m \parallel bn$ sit, $v \sim z$; unde fit

$$\text{c}\delta : \text{ab} = 1 : \sin. z.$$

Via dicta $c\delta$ denotabitur per $c\delta \parallel ab$.

§. 28.

Si bn $\parallel am$, et c in am , atque $ac = x$ sit: erit X (§. 23.)

Fig. 13.

$$= \sin. u : \sin. v.$$

Nam si $c\delta$ et ae sint $\perp bn$ et $b\delta \perp am$; erit (ad instar §. 27.)

$$\circ b\delta : \circ c\delta = \sin. u : \sin. v.$$

Est autem evidenter $b\delta = ae$: quamobrem

$$\circ ea : \circ dc = \sin. u : \sin. v.$$

In superficiebus vero *F*ormibus ipsorum am et cm (ipsum $ambn$ in ab et cq secantibus) est (per §. 21.)

$$\circ ea : \circ dc = ab : cq = X.$$

Est itaque etiam

$$X = \sin. u : \sin. v.$$

§. 29.

Si bam = R, ab = y, et bn $\parallel am$ *sit; erit in S*

Fig. 14.

$$Y = \cot. \frac{I}{2} u.$$

Nam si fuerit $ab=ac$, et $cp \parallel am$ (adeoque $bn \parallel cp$), atque $pcd=qcd$; datur (§. 19.) $ds \perp cd$, ut $ds \parallel cp$, adeoque (§. 1.) $dt \parallel cq$ sit. Si porro $be \perp ds$; erit (§. 7.) $ds \parallel bn$, adeoque (§. 6.) $bn \parallel es$, et (cum $dt \parallel cq$ sit) $bq \parallel et$; consequ. (§. 1.) $ebn = ebq$.

Repræsententur, bcf ex L ipsius bn , et fg, dh, cf et el ex L formibus lineis ipsorum ft , dt , cq et et ; erit evidenter (§. 22.)

$$\begin{array}{ll} hg = df = dk = hc; \\ \text{itaque} & \\ & cg = 2ch = 2v. \\ \text{Pariter patet} & \\ \text{esse. Est vero} & bg = 2bl = 2z \\ \text{quapropter} & bc = bg - cg; \\ \text{adeoque (§. 24.)} & y = z - v, \\ \text{Est demum (§. 28.)} & Y = Z:V. \end{array}$$

$$Z = 1 : \sin \frac{I}{2} u \quad \text{et} \quad V = 1 : \sin \left(R - \frac{I}{2} u \right).$$

consequ.

$$Y = \cot \frac{I}{2} u.$$

§. 30.

Fig. 15. Verumtamen facile (ex §. 25.) patet, resolutionem problematis *Trigonometriae planae* in S , peripheriae per radium expressæ indigere; hoc vero rectificatione ipsius L obtineri potest.

Sint $ab, cm, c'm' \perp ac$, atque b ubivis in $a\bar{b}$; erit (§. 25.)

$$\begin{array}{ll} \sin. u : \sin. v = \odot p : \odot y \\ \text{et} & \sin. u' : \sin. v' = \odot p : \odot y'; \\ \text{adeoque} & \frac{\sin. u}{\sin. v} \odot = \frac{\sin. u'}{\sin. v'} \odot y'. \end{array}$$

Est vero (per §. 27.)

$\sin. v : \sin. v' = \cos. u : \cos. u'$;
consequ.

$$\frac{\sin. u}{\cos. u} \circ y = \frac{\sin. u'}{\cos. u'} \circ y',$$

seu

$$\circ y : \circ y' = \tang. u' : \tang. u = \tang. w : \tang. w'.$$

Sint porro $cn \parallel ab$, $c'n' \parallel ab$ et cd , $c'd'$ lineæ L formes ad \overline{ab} perpendiculares; erit (§. 21.) etiam

adeoque

$$\begin{aligned}\circ y : \circ y' &= r : r', \\ r : r' &= \tang. w : \tang. w'.\end{aligned}$$

Crescat iam ρ ab a incipiendo in infinitum; tum $w \sim z$ et $w' \sim z'$; qua-

propter etiam

$$r : r' = \tang. z : \tang. z'.$$

Constans $r : \tang. z$ (ab r independens) dicatur i ; dum $y \sim o$, est

adeoque

$$\left(\frac{r}{y} = \frac{i \tang. z}{y} \right) \sim I,$$

$$\frac{y}{\tang. z} \sim i.$$

Ex §. 29. fit

$$\tang. z = \frac{I}{2}(Y - Y^{-1});$$

itaque

$$\frac{2y}{Y - Y^{-1}} \sim i,$$

seu (§. 24.)

$$\frac{2y I^{\frac{y}{i}}}{I^{\frac{2y}{i}} - 1} \sim i.$$

Notum autem est, expressionis istius (dum $y \sim o$) limitem esse
 $\frac{i}{\log. \text{nat. } I}$; est ergo

$$\frac{i}{\log. \text{nat. } I} = i \quad \text{et} \quad I = e = 2.7182818\dots$$

quæ quantitas insignis hic quoque elucet. Si nempe abhinc i illam rectam denotet, cuius $I = e$ sit, erit $r = i \tan z$. Erat autem (§. 21.) $\circ y = 2\pi r$; est igitur

$$\begin{aligned}\circ y &= 2\pi i \tan z = \pi i (Y - Y^{-1}) = \\ &= \pi i (e^{\frac{y}{i}} - e^{-\frac{y}{i}}) = \frac{\pi y}{\log. \text{nat. } Y} (Y - Y^{-1})\end{aligned}$$

(per §. 24.).

§. 31.

Fig. 16. Ad resolutionem omnium triangulorum rectangulorum rectilineorum trigonometricam (e qua omnium triangulorum resolutio in promtu est) in $S 3$ æquationes sufficiunt: nempe (a, b cathetus, c hypotenusam, et α, β angulos cathethis oppositos denotantibus) æquatio relationem exprimens *primo* inter a, c, α , *secundo* inter a, α, β , *tertio* inter a, b, c ; nimirum ex his *reliquae* 3 per eliminationem prodeunt.

I. Ex §§. 25. et 30. est

$$1 : \sin. \alpha = (C - C^{-1}) : (A - A^{-1}) = (e^{\frac{c}{i}} - e^{-\frac{c}{i}}) : (e^{\frac{a}{i}} - e^{-\frac{a}{i}});$$

(æquatio pro α, c, a).

II. Ex §. 27. sequitur (si $\beta \parallel \gamma \parallel \alpha$ sit)

$$\cos. \alpha : \sin. \beta = 1 : \sin. u;$$

ex §. 29. autem fit

$$1 : \sin. u = \frac{1}{2} (A + A^{-1});$$

itaque

$$\cos. \alpha : \sin. \beta = \frac{1}{2} (A + A^{-1}) = \frac{1}{2} (e^{\frac{a}{i}} + e^{-\frac{a}{i}});$$

(æquatio pro α, β, a).

III. Si $\alpha\alpha' \perp \beta\alpha\gamma$, atque $\beta\beta'$ et $\gamma\gamma'$ fuerint $\parallel \alpha\alpha'$, (§. 27.), atque $\beta'\alpha'\gamma' \perp \alpha\alpha'$; erit manifesto (uti in §. 27.)

$$\begin{aligned}\frac{\beta\beta'}{\gamma\gamma'} &= \frac{1}{\sin. u} = \frac{1}{2} (A + A^{-1}), \\ \frac{\gamma\gamma'}{\alpha\alpha'} &= \frac{1}{2} (B + B^{-1}),\end{aligned}$$

ac

$$\frac{\beta\beta'}{\alpha\alpha'} = \frac{I}{2}(C + C^{-1});$$

consequ.

$$\frac{I}{2}(C + C^{-1}) = \frac{I}{2}(A + A^{-1}) \frac{I}{2}(B + B^{-1}),$$

sive

$$e^{\frac{c}{i}} + e^{-\frac{c}{i}} = \frac{I}{2} (e^{\frac{a}{i}} + e^{-\frac{a}{i}}) (e^{\frac{b}{i}} + e^{-\frac{b}{i}});$$

(æquatio pro a, b, c).

Si $\gamma\alpha\delta = R$, et $\beta\delta \perp \alpha\delta$ sit; erit

$$\circ c : \circ a = I : \sin. \alpha,$$

et

$$\circ c : \circ (d = \beta\delta) = I : \cos. \alpha,$$

adeoque ($\circ x^2$ pro quovis x factum $\circ x, \circ x$ denotante) manifesto

$$\circ a^2 + \circ d^2 = \circ c^2.$$

Est vero (per §. 27. et II.)

$$\circ d = \circ b \cdot \frac{I}{2}(A + A^{-1}),$$

consequ.

$$(e^{\frac{c}{i}} - e^{-\frac{c}{i}})^2 = \frac{I}{4} (e^{\frac{a}{i}} + e^{-\frac{a}{i}})^2 (e^{\frac{b}{i}} - e^{-\frac{b}{i}})^2 + (e^{\frac{a}{i}} - e^{-\frac{a}{i}})^2;$$

alia æquatio pro a, b, c (cuius membrum *secundum* facile ad formam *symmetricam* seu *invariabilem* reducitur).

Denique ex

$$\frac{\cos. \alpha}{\sin. \beta} = \frac{I}{2}(A + A^{-1})$$

atque

$$\frac{\cos. \beta}{\sin. \alpha} = \frac{I}{2}(B + B^{-1})$$

fit (per III.)

$$\cot. \alpha \cot. \beta = \frac{I}{2} (e^{\frac{c}{i}} + e^{-\frac{c}{i}});$$

(æquatio pro α, β, c).

§. 32.

Restat adhuc modum *problemata* in *S* resolvendi breviter ostendere, quo (per exempla magis obvia) peracto, demum quid theoria hæcce præstet, candide dicetur.

Fig. 17. I. Sit \overline{ab} linea in plāno, et $y=f(x)$ æquatio eius (pro coordinatis perpendicularibus), et quodvis incrementum ipsius z dicatur dz , atque incrementa ipsorum x , y , et areæ u , eidem dz respondentia, respective per dx , dy , du denotentur; sitque $bh \parallel cf$, et exprimatur (ex §§. 31. et 27.) $\frac{bh}{dx}$ per y , ac quæratur ipsius $\frac{dy}{dx}$ limes tendente dx ad limitem 0, (quod, ubi eiusmodi limes quæritur, subintelligatur): innotescet exinde etiam limes ipsius $\frac{dy}{bh}$, adeoque $\operatorname{tg} \angle b\bar{h}g$; eritque, (cum hbc manifesto nec $>$ nec $<$ adeoque $= R$ sit), *tangens* in b ipsius bg per y determinata.

II. Demonstrari potest, esse

$$\frac{dz^2}{dy^2 + bh^2} \rightsquigarrow I.$$

Hinc *limes* ipsius $\frac{dz}{dx}$, et inde z integratione (per x expressum) reperitur.

Et potest lineæ cuiusvis *in concreto datae* æquatio in *S* inveniri, ex. gr. ipsius L

Si enim $a\bar{m}$ axis ipsius L sit; tum quævis $c\bar{b}$ ex $a\bar{m}$ secat L (cum per §. 19 quævis recta ex a præter $a\bar{m}$ ipsum L secet); est vero (si $b\bar{n}$ axis sit)

$$X = 1 : \sin c\bar{b}n \quad (\text{§. 28.}),$$

atque

$$Y = \cot \frac{1}{2} c\bar{b}n \quad (\text{§. 29.}),$$

unde fit

$$Y = X + \sqrt{X^2 - 1}$$

seu

$$e^{\frac{y}{i}} = e^{\frac{x}{i}} + \sqrt{e^{\frac{2x}{i}} - 1}$$

æquatio quæsita. Erit hinc

$$\frac{dy}{dx} \sim X(X^2 - 1)^{-\frac{1}{2}};$$

atqui

$$\frac{bh}{dx} = i : \sin. cbn = X;$$

adeoque

$$\frac{dy}{bh} \sim (X^2 - 1)^{-\frac{1}{2}};$$

$$1 + \frac{dy^2}{bh^2} \sim X^2 (X^2 - 1)^{-1},$$

$$\frac{dz^2}{bh^2} \sim X^2 (X^2 - 1)^{-1},$$

$$\frac{dz}{bh} \sim X (X^2 - 1)^{-\frac{1}{2}}$$

atque

$$\frac{dz}{dx} \sim X^2 (X^2 - 1)^{-\frac{1}{2}};$$

unde per integrationem invenitur

$$z = i(X^2 - 1)^{\frac{1}{2}} = i \cot. cbn$$

(uti §. 30.).

III. Manifesto

$$\frac{du}{dx} \sim \frac{hfcbh}{dx},$$

quod (non nisi ab y dependens) iam primum per y exprimendum est;
unde u integrando prodit.

Si $ab = p$, $ac = q$, et $c\delta = r$, atque $cabdc = s$ sit; poterit (uti in II.) Fig. 12.
ostendi esse

$$\frac{ds}{dq} \sim r,$$

quod

$$= \frac{1}{2} p (e^{\frac{q}{i}} + e^{-\frac{q}{i}}),$$

atque integrando

$$s = \frac{1}{2} pi (e^{\frac{q}{i}} - e^{-\frac{q}{i}}).$$

Potest hoc absque integratione quoque deduci.

Aequatione e. g. circuli (ex §. 31, III.), rectæ (ex §. 31, II.), sectio-
nis coni (per præc.) expressis; poterunt areæ quoque his lineis clausæ
exprimi.

Palam est, superficiem t ad figuram planam ρ (in distantia q) || lam
esse ad ρ in ratione potentiarum secundarum linearum homologarum,
sive uti

$$\frac{1}{4} (e^{\frac{q}{i}} + e^{-\frac{q}{i}})^2 : 1.$$

Porro computum soliditatis pari modo tractatum, facile patet duas
integrationes requirere (cum et differentiale ipsum hic nonnisi per inte-
grationem determinetur); et ante omnia solidum a ρ et t ac complexu
omnium rectarum ad ρ perpendicularium, fines ipsorum ρ , t connecten-
tium, clausum quærendum esse. Reperitur solidum istud (tam per inte-
grationem quam sine ea)

$$= \frac{1}{8} \rho i (e^{\frac{2q}{i}} - e^{-\frac{2q}{i}}) + \frac{1}{2} \rho q.$$

Superficies quoque corporum is S determinari possunt, nec non *cur-
vaturae, evolutae, evolventesque* linearum qualiumvis \mathcal{E} . Quod curva-
turam attinet; ea in S aut ipsius L est, aut per radium circuli, aut
distantiam curvæ ad rectam || lœ ab hac recta, determinatur; cum e
præcedentibus facile ostendi possit, præter L , lineas circulares, ac rectæ
|| las, nullas in plano alias lineas uniformes dari.

IV. Pro circulo est (uti in III.)

$$\frac{d \odot x}{dx} \rightsquigarrow \odot x,$$

unde (per §. 30.) integrando fit

$$\odot x = \pi i^2 (e^{\frac{x}{i}} - 2 + e^{-\frac{x}{i}}).$$

Fig. 9. V. Pro area $cabdc = u$ (linea L formi $ab = r$, huic || la $cd = y$, ac
rectis ac , $bd = x$ clausa) est

$$\frac{du}{dx} \sim y,$$

atque (§. 24.)

$$y = re^{-\frac{x}{i}};$$

adeoque (integrando)

$$u = ri(1 - e^{-\frac{x}{i}}).$$

Crescente x in infinitum, fiet in S $e^{-\frac{x}{i}} \rightarrow 0$, adeoque $u \rightarrow ri$. Per quantitatem ipsius mabit in posterum limes iste intelligetur.

Simili modo invenitur, quod si ρ sit figura in F ; spatium a ρ et complexu axium e terminis ipsius ρ ductorum clausum $= \frac{1}{2}\rho i$ sit.

VI. Si angulus ad centrum segmenti z sphæræ sit $2u$, peripheria Fig. 10. circuli maximi sit ρ , et arcus $\mathfrak{f}c$ (anguli u) $= x$; erit (§. 25.)

$$1 : \sin. u = \rho : \circ bc,$$

et hinc

$$\circ bc = \rho \sin. u.$$

Interim est

$$x = \frac{\rho u}{2\pi}, \quad \text{ac} \quad dx = \frac{\rho du}{2\pi}.$$

Est porro

$$\frac{dz}{dx} \sim \circ bc,$$

et hinc

$$\frac{dz}{du} \sim \frac{\rho^2}{2\pi} \sin. u,$$

unde (integrando)

$$z = \frac{\sin. vers. u}{2\pi} \rho^2.$$

Cogitetur F in quod ρ (per meditullum \mathfrak{f} segmenti transiens) cadit; planis $\mathfrak{f}\mathfrak{m}$, $c\mathfrak{m}$ per $a\mathfrak{f}$, ac ad F perpendiculariter positis, ipsumque in $\mathfrak{f}eg$, ce secantibus; et considerentur L formis cd (ex c ad $\mathfrak{f}eg$ perpendicularis) nec non L formis $c\mathfrak{f}$; erit (§. 20.)

$$cef = u,$$

et (§. 21.)

$$\frac{\mathfrak{f}d}{\rho} = \frac{\sin. vers. u}{2\pi},$$

adeoque	$z = \mathfrak{f}\delta \cdot p.$
Ast (§. 21.)	$p = \pi \cdot \mathfrak{f}\delta g,$
itaque	$z = \pi \cdot \mathfrak{f}\delta \cdot \mathfrak{f}\delta g,$
Est autem (§. 21.)	$\mathfrak{f}\delta \cdot \mathfrak{f}\delta g = \mathfrak{f}c \cdot \mathfrak{f}c;$
consequ.	$z = \pi \cdot \mathfrak{f}c \cdot \mathfrak{f}c = \odot \mathfrak{f}c \text{ in } F.$

Fig. 14. Sit iam $bj = cj = r$; erit (§. 30.)

$$\begin{aligned} \text{adeoque (§. 21.)} \quad & 2r = i(Y - Y^{-1}), \\ \text{Est quoque (IV.)} \quad & \odot 2r \text{ (in } F) = \pi i^2 (Y - Y^{-1})^2, \\ & \odot 2y = \pi i^2 (Y^2 - 2 + Y^{-2}); \end{aligned}$$

igitur $\odot 2r$ (in F) $= \odot 2y$, adeoque et superficies z segmenti sphærici aequatur circulo, chorda $\mathfrak{f}c$ tanquam radio descripto.

Hinc tota sphæræ superficies

$$= \odot \mathfrak{f}g = \mathfrak{f}\delta g \cdot p = \frac{p^2}{\pi},$$

suntque superficies sphærarum, uti secundae potentiae peripheriarum earundem maximarum.

VII. Soliditas sphæræ radii x in S reperitur simili modo

$$= \frac{I}{2} \pi i^3 (X^2 - X^{-2}) - 2\pi i^2 x;$$

Fig. 12. superficies per revolutionem lineæ $c\delta$ circa ab orta

$$= \frac{I}{2} \pi i p (Q^2 - Q^{-2}),$$

et corpus per $cabd\delta$ descriptum

$$= \frac{I}{4} \pi i^2 p (Q - Q^{-1})^2.$$

Quomodo vero omnia a (IV.) hucusque tractata etiam absque integratione perfici possint, brevitatis studio supprimitur.

Demonstrari potest, *omnis expressionis literam i continentis (adeoque hypothesi, quod detur i, innixæ) limitem, crescente i in infinitum, exprimere quantitatem plane pro Σ (adeoque pro hypothesi nullius i), siquidem non eveniant aequationes identicae.* Cave vero intelligas putari, *systema ipsum variari posse (quod omnino in se et per se determinatum est) sed tantum hypothesin, quod successive fieri potest, donec non ad absurdum perducti fuerimus.* *Posito* igitur, quod in *tali* expressione litera *i* pro casu, si *S* esset reipsa, *illam* quantitatem unicam designet, cuius $I = e$ sit; si vero *revera Σ* fuerit, *limes dictus* loco expressionis accipi cogitetur: manifesto *omnes* expressiones ex *hypothesi realitatis* ipsius *S* oriundæ (hoc sensu) *absolute valent*, etsi *prorsus ignotum sit, num Σ sit, aut non sit.*

Ita e. g. ex expressione in §. 30. obtenta facile (et quidem *tam differentiationis auxilio, quam absque eo*) valor notus pro Σ prodit

$$\odot x = 2\pi x;$$

ex I. (§. 31.) rite tractato, sequitur

$$I : \sin. \alpha = c : a;$$

ex II. vero

$$\frac{\cos. \alpha}{\sin. \beta} = 1, \text{ adeoque } \alpha + \beta = R;$$

æquatio *prima* in III. fit identica, adeoque *valet* pro Σ , quamvis nihil in eo *determinet*; ex *secunda* autem fluit

$$c^2 = a^2 + b^2.$$

Aequationes notae fundamentales trigonometriae planae in Σ .

Porro inveniuntur (ex §. 32.) pro Σ area et corpus in III., utrumque

$$= pq;$$

ex IV.

$$\odot x = \pi x^2;$$

ex VII. sphæra radii x

$$= \frac{4}{3} \pi x^3$$

ꝝ.

Sunt quoque theorematum ad finem (VI.) enuntiata manifesto *inconditionate vera*.

§. 33.

Superest adhuc, quid theoria ista sibi velit, (in §. 32. promissum) exponere.

I. Num Σ aut S aliquod *re ipsa* sit, indecisum manet.

II. Omnia ex hypothesi *falsitatis* Ax. XI. deducta (semper *sensu* §. 32. intelligendo) *absolute* valent, adeoque *hoc sensu nulli hypothesi innituntur*. Habetur idcirco *trigonometria plana a priori*, in qua *solum* sistema *verum ignotum* adeoque *solummodo absolutae magnitudines expressionum incognitæ manent*, per *unicum* vero casum notum, manifesto totum sistema figeretur. Trigonometria sphærica autem in §. 26. absolute stabilitur. (Habeturque Geometria, Geometriæ planæ in Σ prorsus analoga in F).

III. Si *constaret* Σ esse, nihil hoc respectu amplius incognitum esset; si vero *constaret non esse* Σ , tunc (§. 31.) (e. g.) e lateribus x, y et angulo rectilineo ab iis intercepto, in *concreto datis* manifesto in se et per se impossibile esset triangulum absolute resolvere (i. e.) a priori determinare angulos ceteros et *rationem lateris tertii* ad duo data; nisi X, Y determinentur, ad quod *in concreto* haberi aliquod a oportet, cuius A notum esset; atque tum *i unitas naturalis longitudinum* esset, (sicuti e est basis logarithmorum naturalium). Si existentia huius *i* constiterit; quomodo ad usum saltem quam exactissime construi possit, ostendetur.

IV. Sensu in I. et II. exposito patet, omnia in spatio methodo recentiorum Analytica (intra iustos fines valde laudanda) absolvi posse.

V. Denique lectoribus benevolis haud ingratum futurum est; pro casu illo, quodsi non Σ sed S re ipsa esset, circulo æquale rectilineum construi.

§. 34.

Ex δ ducitur δm || an modo sequente.

Fig. 12.

Fiat ex δ

$$\delta b \perp an;$$

erigatur e puncto quovis aliquo a rectæ \overline{ab}

$$ac \perp an \text{ (in } \delta ba\text{),}$$

et demittatur

$$\delta e \perp ac;$$

erit (§. 27.)

$$\circledcirc ed : \circledcirc ab = 1 : \sin z,$$

siquidem fuerit $\delta m \parallel bn$.

Est vero $\sin z > 1$, adeoque $ab > de$. Descriptus igitur quadrans radio ipsi de æquali ex a in bac, gaudebit puncto aliquo b vel o cum $b\bar{d}$ communi. Priore in casu manifesto $z = R$; in posteriore vero erit (§. 25.)

$$(\circledcirc ao = \circledcirc ed) : \circledcirc ab = 1 : \sin aob,$$

adeoque

$$z = aob.$$

Si itaque fiat $z = aob$, erit $\delta m \parallel bn$.

§. 35.

Si fuerit S reipsa; ducetur recta ad anguli acuti crus unum perpendicularis, quae ad alterum || sit, hoc modo.

Fig. 18.

Sit $am \perp bc$, et accipiatur $ab = ac$ tam parvum (per §. 19.), ut si ducatur $bn \parallel am$ (§. 34.), sit $abn >$ angulo dato. Ducatur porro $cp \parallel am$ (§. 34.), fiantque $n\bar{b}q$, $p\bar{c}d$ utrumque æquale angulo dato; et $b\bar{q}$, $c\bar{d}$ se mutuo secabunt. Secet enim $b\bar{q}$, (quod per constr. in nbc cadit) ipsam $c\bar{p}$ in e; erit (propter $bn \perp cp$) $ebc < ecb$, adeoque $ec < eb$. Sint

$$ef = ec, efr =ecd, \text{ et } fs \parallel ep;$$

cadet fs in bfr . Nam cum $bn \parallel cp$, adeoque $bn \parallel ep$, atque $bn \parallel fs$ sit;

erit (§. 14.)

$$\text{f} \text{bn} + \text{bfs} < {}_2 R = \text{f} \text{bn} + \text{bfr};$$

itaque $\text{bfs} < \text{bfr}$. Quamobrem fr secat ep , adeoque cd quoque ipsam eq in puncto aliquo δ .

Sit iam $\text{dg} = \text{dc}$, atque $\text{dgt} = \text{dcp} = \text{g} \text{bn}$; erit (cum $\text{cd} = \text{gd}$ sit)

$$\text{bn} \perp \text{gt} \perp \text{cp}.$$

Si fuerit lineæ L formis ipsius bn , punctum in bq cadens f (§. 19.), et axis fl ; erit

$$\text{bn} \perp fl,$$

adeoque

$$bfl = bgt = dc p;$$

sed etiam

$$fl \perp cp:$$

cadit ergo f manifesto in g , estque $gt \parallel bn$. Si vero ho ipsum bg perpendiculariter bisecet; erit $ho \parallel bn$ constructum.

§. 36.

Fig. 10. Si fuerint data recta cp et planum mab , atque fiat $cb \perp mab$, (in bcp) $bn \perp bc$, et $cq \parallel bn$ (§. 34.); *sectio ipsius cp* (si hæc in bcq cadat) *cum* $b\bar{n}$ (in $c\bar{b}n$), adeoque *cum* mab reperitur. Et si fuerint data duo plana $p\bar{c}q$, mab , et sit $cb \perp mab$, $cr \perp p\bar{c}q$, atque (in bcr) $bn \perp bc$, $cs \perp cr$; cadent bn in mab , et cs in $p\bar{c}q$; et sectione ipsarum $\bar{b}n$, $\bar{c}s$ (si detur) reperita, erit perpendicularis in $p\bar{c}q$ per eandem ad $c\bar{s}$ ducta manifesto *sectio ipsorum mab, p\bar{c}q*.

§. 37.

Fig. 7. In $\overline{am} \parallel bn$ reperitur tale a , ut sit $am \perp bn$; si (per §. 34.) construatur extra \overline{nbm} $gt \parallel bn$, et fiant $bg \perp gt$, $gc = gb$, atque $cp \parallel gt$; ponaturque $tg\delta$ ita, ut efficiat cum tgb angulum illi æqualem, quem pca cum pch facit; atque quæratur (per §. 36.) *sectio dq ipsorum tg\delta, nb\bar{a}*; fiatque

$ba \perp dq$. Erit enimvero ob triangulorum L lineorum in F ipsius bn exortorum similitudinem (§. 21.) manifesto $db = da$, et $am = bn$.

Facile hinc patet (L lineis per *solos terminos* datis) reperiri posse etiam *terminos* proportionis quartum ac medium, atque omnes constructiones geometricas, quae in Σ in plano fiunt, hoc modo in F absque *XI. Axiomate* perfici posse. Ita e. g. $4R$ in quotvis partes æquales geometricice dividi potest, si sectionem istam in Σ perficere licet.

§. 38.

Si construatur (per §. 37.) e. g. $nbq = \frac{1}{3} R$, et fiat (per §. 35.) in S ad Fig. 14. $b\bar{q}$ perpendicularis $am \parallel bn$, atque determinetur (per §. 37.) $jm = bn$; erit, si $ja = x$ sit, (§. 28.)

$$X = 1 : \sin \frac{1}{3} R = 2,$$

atque x *geometrica* constructum.

Et potest $n\bar{b}\bar{q}$ ita computari, ut ja ab i quovis dato minus discrepet, cum nonnisi $\sin. n\bar{b}\bar{q} = \frac{1}{e}$ esse debeat.

§. 39.

Si fuerint (in plano) pq et st , \parallel rectæ mn (§. 27.), et ab , cd sint perpendiculares ad mn æquales; manifesto est Fig. 19.

$$\triangle dec \equiv \triangle bea,$$

adeoque anguli (forsan mixtilinei) ecp , eat congruent, atque

$$ec = ea.$$

Si porro $c\bar{f} = ag$, erit

$$\triangle ac\bar{f} \equiv \triangle cag,$$

et utrumque *quadrilateri* $fagc$ dimidium est. Si $fagc$, $hagf$ duo eiusmodi quadrilatera fuerint ad ag , inter pq et st ; æqualitas eorum (uti apud EUCLIDEM), nec non triangulorum agc , agh eidem ag insistentium,

verticesque in \overline{pq} habentium, æqualitas patet. Est porro

$$\begin{aligned} acf &= cag, \quad gcq = cga, \\ \text{atque} \quad acf + acg + gcq &= 2R \\ (\S. 32.), \quad \text{adeoque etiam} \quad cag + acg + cga &= 2R; \end{aligned}$$

itaque in quovis eiusmodi triangulo acg summa trium angulorum $= 2R$.

Sive in ag (quæ $\parallel mn$) ceciderit autem recta ag , sive non; triangulorum rectilineorum agc, agh tam ipsorum, quam summarum angulorum ipsorumdem, æqualitas in aperto est.

§. 40.

Fig. 20. *Aequalia triangula abc, abd (ab hinc rectilinea) uno latere aequali gaudentia, summas angulorum aequales habent.*

Nam dividat mn bifariam tam ac quam bc , et sit pq (per c) $\parallel mn$; cadet d in \overline{pq} . Nam si $b\bar{d}$ ipsum \overline{mn} in puncto e , adeoque ($\S. 39.$) ipsum \overline{pq} ad distantiam $ef = eb$ secet; erit

$$\begin{aligned} \triangle abc &= \triangle abf, \\ \text{adeoque et} \quad \triangle abd &= \triangle abf, \end{aligned}$$

unde d in f cadit: si vero $b\bar{d}$ ipsum \overline{mn} non secuerit, sit c punctum, ubi perpendicularis rectam ab bisecans ipsum \overline{pq} secat, atque $gs = ht$ ita, ut \overline{st} productam $b\bar{d}$ in puncto aliquo f secet (quod fieri posse modo simili patet, ut $\S. 4.$); sint porro $sl = sa$, $lo \parallel st$, atque o sectio ipsorum \overline{bf} et \overline{lo} ; esset tum ($\S. 39.$)

$$\begin{aligned} \triangle abl &= \triangle abo, \\ \text{adeoque} \quad \triangle abc &> \triangle abd \\ (\text{contra hyp.}). \end{aligned}$$

§. 41.

Aequalia triangula abc, def aequalibus angulorum summis gau- Fig. 21.
dent.

Nam secet mn tam ac quam bc , ita pq tam df quam fe bifariam, et sit $rs \parallel mn$, atque $to \parallel pq$; erit perpendicularis ag ad rs aut æqualis perpendiculari dh ad to , aut altera e. g. dh erit maior: in quovis casu $\odot df$ e centro a cum gs punctum aliquod k commune habet, eritque (§. 39.)

$$\triangle abf = \triangle abc = \triangle def.$$

Est vero $\triangle afb$ (per §. 40.) triangulo df , ac (per §. 39.) triangulo abc *aequiangulum*. Sunt igitur etiam triangula abc, def aequiangula.

In S converti quoque theorema potest. Sint enim triangula abc, def reciproce aequiangula, atque $\triangle bal = \triangle def$; erit (per præc.) alterum alteri, adeoque etiam $\triangle abc$ triangulo abl aequiangulum, et hinc manifesto

$$bcl + blc + cbl = 2R.$$

Atqui (ex §. 31.) cuiusvis trianguli angulorum summa in S est $< 2R$: cadit igitur l in c .

§. 42.

Si fuerit complementum summae angulorum trianguli abc ad 2R Fig. 22.

trianguli def vero
est $\triangle abc : \triangle def = u : v$.

Nam si quodvis triangulorum acg, gch, hcb, dff, ffe sit $= \rho$, atque

$$\triangle abc = mp, \quad \triangle def = np;$$

sitque s summa angulorum cuiusvis trianguli, quod $= \rho$ est: erit manifesto

$$\begin{aligned}
 & 2R - u = ms - (m-1)2R = 2R - m(2R - s), \\
 \text{et} \quad & u = m(2R - s), \\
 \text{et pariter} \quad & v = n(2R - s). \\
 \text{Est igitur} \quad & \Delta abc : \Delta def = m:n = u:v.
 \end{aligned}$$

Ad casum incommensurabilitatis triangulorum abc , def quoque extendi facile patet.

Eodem modo demonstratur triangula in superficie sphærica esse uti *excessus* summarum angulorum eorundem supra $2R$. Si duo anguli trianguli sphærici recti fuerint, tertius z erit excessus dictus; est autem triangulum istud (peripheria maxima ϕ dicta) manifesto

$$= \frac{z}{2\pi} \frac{\phi^2}{2\pi} \quad (\S. 32. VI.);$$

consequenter quodvis triangulum, cuius angulorum excessus $= z$, est

$$= \frac{z\phi^2}{4\pi^2}.$$

§. 43.

Fig. 15. Iam *area* trianguli rectilinei in S per summam angulorum exprimitur.

Si ab crescat in infinitum; erit ($\S. 42.$)

$$\begin{aligned}
 & \Delta abc : (R - u - v) \\
 \text{constans. Est vero} \quad & \Delta abc \sim bacn \quad (\S. 32. V.) \\
 \text{et} \quad & R - u - v \sim z \quad (\S. 1.); \\
 \text{adeoque} \quad & bacn : z = \Delta abc : (R - u - v) = bac'n' : z'.
 \end{aligned}$$

Est porro manifesto

$$bdcn : bd'c'n' = r : r' = \text{tang. } z : \text{tang. } z' \quad (\S. 30.).$$

Pro $y' \sim o$ autem est

$$\frac{bd'cn'}{bac'n'} \sim^1,$$

nec non

$$\frac{\operatorname{tang}.z'}{z'} \sim^1;$$

consequ.

Erat vero (§. 32.)

$$bd'cn : bacn = \operatorname{tang}.z : z.$$

est igitur

$$bd'cn = ri = i^2 \operatorname{tang}.z;$$

$$bacn = zi^2.$$

Quovis triangulo, cuius angulorum summæ complementum ad $2R$ z est, in posterum breviter Δ dicto, erit idcirco

$$\Delta = zi^2.$$

Facile hinc liquet, quod si

Fig. 14.

$$or \parallel am \quad \text{et} \quad ro \parallel ab$$

fuerint; *area* inter \widetilde{or} , \widetilde{st} , \widetilde{bc} comprehensa (quæ manifesto limes absolutus est areæ triangulorum rectilineorum sine fine crescentium, seu ipsius Δ pro $z \sim 2R$), sit

$$= \pi r^2 = \odot i \text{ in } F.$$

Limite isto per \square denotato, erit porro (per §. 30.)

Fig. 15.

$$\begin{aligned} \pi r^2 &= \operatorname{tang}.z^2 \square = \odot r \text{ in } F \text{ (§. 21.)} \\ &= \odot s \text{ (per §. 32. VI.),} \end{aligned}$$

si chorda dc s dicatur. Si iam radio dato s , circuli in plano (sive radio L formi circuli in F) perpendiculariter bisecto, construatur (per §. 34.) $db \parallel \perp cn$; demissa perpendiculari ca ad db , et erecta perpendiculari cm ad ca ; habebitur z ; unde (per §. 37.) $\operatorname{tang}.z^2$, radio L formi ad lubitum pro unitate assumto, *geometrice determinari potest per duas lineas uniformes eiusdem curvaturae* (quæ solis terminis datis, constructis axis, manifesto tanquam rectæ commensurari, atque hoc respectu rectis æquivalentes spectari possunt).

Fig. 23. Porro construitur quadrilaterum ex. gr. regulare $=\square$, ut sequitur. Sit

$$abc = R, \quad bac = \frac{1}{2} R, \quad acb = \frac{1}{4} R, \quad \text{et} \quad bc = x;$$

poterit X (ex §. 31. II.) per meras radices quadraticas exprimi, et (per §. 37.) construi: habitoque X , (per §. 38., sive etiam 29. et 35.) x ipsum determinari potest. Estque octuplum $\triangle abc$ manifesto $=\square$, atque *per hoc, circulus planus radii s, per figuram rectilineam, et lineas uniformes eiusdem generis (rectis, quoad comparationem inter se, aequivalentes) geometricamente quadratus; circulus F formis vero eodem modo complanatus: habeturque aut Axioma XI. Euclidis verum, aut quadratura circuli geometrica*; etsi hucusque indecimum manserit, quodnam ex his duobus revera locum habeat. Quoties $\tan z^2$ vel numerus integer vel fractio rationalis fuerit, cuius (ad simplicissimam formam reductæ) denominator aut numerus primus formæ $2^m + 1$ (cuius est etiam $2 = 2^0 + 1$) aut productum fuerit e quocunque primis huius formæ, quorum (ipsum 2, qui solus quotvis vicibus occurrere potest, excipiendo) quivis semel ut factor occurrit: per theoriam polygonorum ill. GAUSS (præclarum nostri imo omnis ævi inventum), etiam ipsi $\tan z^2 \square = \odot s$ (et nonnisi pro talibus valoribus ipsius z) figuram rectilineam æqualem constituere licet. Nam *divisio* ipsius \square (theoremate §. 42. facile ad quælibet polygona extenso) manifesto *sectionem* ipsius $2R$ requirit, quam (ut ostendi potest) unice sub dicta conditione geometrica perficere licet. In omnibus autem talibus casibus præcedentia facile ad scopum perducent. Et potest quævis figura rectilinea in polygonum regulare n laterum geometricamente converti, siquidem n sub formam *GAUSSianam* cadat.

Superesset denique, (ut res omni numero absolvatur), impossibilitatem (absque suppositione aliqua) decidendi, num Σ aut aliquod (et quodnam) S sit, demonstrare: quod tamen occasione magis idoneæ reservatur.

WOLFGANGI BOLYAI
ADDITAMENTUM AD APPENDICEM.

Denique *aliquid Auctori Appendix proprium, coronidis instar,*
addere fas sit: qui tamen ignoscat, si quid non acu eius tetigerim.

Res breviter in eo consistit: *formulae trigonometriae sphæricæ,*
in Appendice dicta ab axiome XI. Eucl. independenter demonstratæ,
cum formulis trigonometriae planæ conveniunt, si (modo statim
dicendo) *latera trianguli sphærici realia, rectilinei vero imaginaria*
accipiantur; adeo ut quoad formulas trigonometricas planum ut sphæra
imaginaria considerari possit, si pro reali illa accipiatur, in qua $\sin R = 1$.

Pro casu, si axioma Eucl. verum non fuerit, demonstratur (Appendix §. 30.) dari certum i , pro quo ibidem dictum I est $= e$ (basi logarithmorum naturalium), atque pro hoc casu formulæ trigonometriæ planæ quoque demonstrantur (ibidem §. 31.); et quidem ita, ut (iuxta §. 32., post VII., ibidem) formulæ et pro casu veritatis axiomatis dicti valeant; nempe si supponendo, quod $i \rightarrow \infty$, limites valorum accipiantur; nimirum sistema Euclideanum est quasi limes systematis antieuclidei (pro $i \rightarrow \infty$). Ponatur, pro casu existentis i , unitas $= i$, atque conceptus *sinus cosinusque* extendatur et ad arcus imaginarios; ita ut arcum sive realem sive imaginarium denotet ρ , dicatur

$$\frac{I}{2}(e^{i\rho\sqrt{-1}} + e^{-i\rho\sqrt{-1}})$$

cosinus ipsius ρ , et

$$\frac{I}{2\sqrt{-1}}(e^{i\rho\sqrt{-1}} - e^{-i\rho\sqrt{-1}})$$

dicatur sinus ipsius ρ .

Erit hinc pro q reali

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\sqrt{-1}}(e^q - e^{-q}) &= \frac{1}{2\sqrt{-1}}(e^{-q\sqrt{-1}}\sqrt{-1} - e^{q\sqrt{-1}}\sqrt{-1}) = \\ &= \sin.(-q\sqrt{-1}) = -\sin. q\sqrt{-1} \end{aligned}$$

Ita

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}(e^q + e^{-q}) &= \frac{1}{2}(e^{-q\sqrt{-1}}\sqrt{-1} + e^{q\sqrt{-1}}\sqrt{-1}) = \\ &= \cos.(-q\sqrt{-1}) = \cos. q\sqrt{-1}; \end{aligned}$$

si nempe et in circulo imaginario sinus negativi arcus sinui arcus positivi alioquin priori æqualis sit, præterquam quod negativus sit, atque cosinus arcus positivi et negativi (si alioquin æquales fuerint), sit idem.

In Appendice dicta §. 25. demonstratur absolute, id est ab axiomate dicto independenter; quod in quovis triangulo rectilineo *sinus angulorum sint, uti peripheriae radiorum lateribus oppositis aequalium*; demonstraturque porro, pro casu existentis i , peripheriam radii y esse

$$=\pi i(e^{\frac{y}{i}} - e^{-\frac{y}{i}}),$$

quod pro $i=1$ fit

$$\pi(e^y - e^{-y}).$$

Itaque (§. 31. ibidem) pro triangulo rectilineo rectangulo, cuius catethi sunt a et b , hypotenusa c , et anguli lateribus a , b , c oppositi sunt α , β , π ; est (pro $i=1$)

in I.

$$I: \sin. \alpha = \pi(e^c - e^{-c}) : \pi(e^a - e^{-a});$$

adeoque

$$I: \sin. \alpha = \frac{1}{2\sqrt{-1}}(e^c - e^{-c}) : \frac{1}{2\sqrt{-1}}(e^a - e^{-a}).$$

Unde

$$I: \sin. \alpha = -\sin. c\sqrt{-1} : -\sin. a\sqrt{-1}.$$

Et hinc

$$I: \sin. \alpha = \sin. c\sqrt{-1} : \sin. a\sqrt{-1}.$$

In II. fit

$$\cos. \alpha : \sin. \beta = \cos. a \sqrt{-1} : 1.$$

In III. fit

$$\cos. c \sqrt{-1} = \cos. a \sqrt{-1} \cos. b \sqrt{-1}.$$

Quæ prouti omnes exinde promanantes formulæ trigonometriæ planæ, cum formulis trigonometriæ sphæricæ prorsus conveniunt; nisi quod si ex. gr. trianguli sphærici rectanguli quoque catheti angulique iis oppositi, hypotenusaque nomina eadem sortiantur, latera trianguli rectilinei per $\sqrt{-1}$ dividenda sint, ut formulæ pro sphæricis prodeant.

Nempe ex I. fiet

$$1 : \sin. \alpha = \sin. c : \sin. a,$$

ex II. fiet

$$1 : \cos. \alpha = \sin. \beta : \cos. \alpha,$$

ex III. fiet

$$\cos. c = \cos. a \cos. b.$$

Quum ceteris supersedere liceat, et lectorem deduction (App. §. 32. post VII.) omissa offendi impedirique expertus sim: haud abs re erit ostendere, quomodo ex. gr. ex

$$e^{\frac{c}{i}} + e^{-\frac{c}{i}} = \frac{1}{2} (e^{\frac{a}{i}} + e^{-\frac{a}{i}}) (e^{\frac{b}{i}} + e^{-\frac{b}{i}})$$

sequatur

$$c^2 = a^2 + b^2$$

(theorema Pythagoreum pro systemate Euclideo); verosimiliter Auctor quoque ita deduxit, et ceteræ quoque eodem modo sequuntur.

Est nempe potentii ipsius e per series expressis

$$\begin{aligned} e^{\frac{k}{i}} &= 1 + \frac{k}{i} + \frac{k^2}{2i^2} + \frac{k^3}{2 \cdot 3i^3} + \frac{k^4}{2 \cdot 3 \cdot 4i^4} + \dots \\ e^{-\frac{k}{i}} &= 1 - \frac{k}{i} + \frac{k^2}{2i^2} - \frac{k^3}{2 \cdot 3i^3} + \frac{k^4}{2 \cdot 3 \cdot 4i^4} - \dots; \end{aligned}$$

adeoque

$$\begin{aligned} e^{\frac{k}{i}} + e^{-\frac{k}{i}} &= 2 + \frac{k^2}{i^2} + \frac{k^4}{3 \cdot 4i^4} + \dots \\ &= 2 + \frac{k^2 + u}{i^2}, \end{aligned}$$

(si omnium terminorum post $\frac{k^2}{i^2}$ summa $\frac{u}{i^2}$ dicatur); estque $u \sim o$, dum $i \sim \infty$. Nam multiplicentur omnes termini post $\frac{k^2}{i^2}$ per i^2 ; erit terminus primus $\frac{k^4}{3 \cdot 4 i^2}$, et quivis exponens $< \frac{k^2}{i^2}$; essetque etsi exponens ubique hic maneret, summa

$$\frac{k^4}{3 \cdot 4 i^2} : \left(1 - \frac{k^2}{i^2} \right) = \frac{k^4}{3 \cdot 4 (i^2 - k^2)},$$

quod manifesto $\sim o$, dum $i \sim \infty$.

Atque ex

$$e^{\frac{c}{i}} + e^{-\frac{c}{i}} = \frac{1}{2} (e^{\frac{a+b}{i}} + e^{-\frac{a+b}{i}} + e^{\frac{a-b}{i}} + e^{-\frac{a-b}{i}})$$

sequitur (pro ω , v , λ adinstar u acceptis)

$$2 + \frac{c^2 + \omega}{i^2} = 1 + \frac{(a+b)^2 + v}{2i^2} + 1 + \frac{(a-b)^2 + \lambda}{2i^2}.$$

Atque hinc

$$c^2 = \frac{1}{2} (a^2 + 2ab + b^2 + a^2 - 2ab + b^2 + v + \lambda - 2\omega),$$

quod

$$\sim a^2 + b^2.$$

Scholion. Sphæræ illius, in qua sinus totus est $1=i$, radius est ordinata y lineæ L formis ipsi $i=1$ æqualis, ad axem per unam extremitatem ex altera perpendiculariter missa. Nempe in *superficie* (App. §. 21.) F dicta, tota Geometria Euclidea valet, lineis L vicem rectarum subeuntibus: atque pro radio L formi $=1$, qui sinus totus in F erit, peripheræ eiusdem radius in plano erit plane dictum y ; quod ad sphærā imaginariam, ad quam planum (in systemate antieuclideo) revocatur, facile applicatur.

EGY KIS TOLDALÉK
ÉS
JELENTÉS.

EGY KIS TOLDALÉK A' DÉÁK ELSŐ KÖTETHEZ.

(ADDITAMENTA QUAEDAM AD TOMUM I. LATINUM.) *

A' kik ezen két darabból álló Déák munkára előre fizettek, 2. Rhf. 30 xrt. ezüsten; neveik itt következnek: a' tsak felirtak közül is azok, nem különben mások is, a' kik netalám ezután fizetni fognak, a' második darabba fognak ki nyomtattatni.

*

T. T. Antal János Professor és Gen. Notarius	I	példány
T. Artz Károly Professor Szebenben	I	"
M. Angustinovits Pál Gub. Cons.	I	"
Áts Sándor N. Enyedi Tog.	I	"
M. Balási Jó'sef K. Tábla Biró	I	"
T. Barabás Miklós Képiró	I	"
M. Barcsai János Gub. Cons.	I	"
Bárdi István Theol. Candidat.	I	"
Bartha Dániel N. Enyedi Tog.	I	"
T. Benedek István Nevelő	I	"
T. Benkő Ferencz Ügyvéd	I	"
G. Bethlen Ádám	16	"
G. Bethlen Ferentz Birthler Friedrik	3	"
G. Bethlen Gergely	2	"
G. Bethlen László R. T. Cancell.	I	"
G. Bethlen János	I	"
G. Bethlen János R. T. Cancell.	I	"
T. Bod Péter Jurium Insp.	I	"
Borsos Márton Med. Candidat.	I	"
Borsos Márton N. Enyedi Tog.	I	"
T. Brassai Sámuel Nevelő	I	"
Bugyul Elek N. Enyedi Tog.	I	"
G. Degenfeld Pál	I	"
Dobai Pál N. Enyedi Tog	I	"

* De hac re vide pagg. 436—437.

143

EGY KIS TOLDALÉK ÉS JELENTÉS.

M. Filep Jó'sef Vice Director	I	példány
Fülöp Elek N. Enyedi Tog.	I	"
M. Gál László Ország Directora	I	"
T. Gyergyai Ferentz	I	"
T. Gazda János Inspector	I	"
M. Katona Miklós	I	"
B. Kemény Domokos Fő Biró	I	"
B. Kemény Pál Kollégym Curátora	3	"
G. Kemény Sámuel	I	"
G. Kornis Mihály Thes. Cons.	I	"
Mihályi Károly N. Enyedi Tog.	I	"
T. Moos István Ügyvéd	I	"
T. Nagy János Ügyvéd	I	"
M. Pávai Elek K. Tábla Biró	I	"
T. Pávai Jó'sef Inspector	I	"
T. Pető Jó'sef R. T. Cancell.	I	"
T. T. Pétzeli Jó'sef Professor Debretzenben	I	"
Posoni Gergely N. Enyedi Tog.	I	"
T. Raff Mihály Ügyvéd	I	"
G. Rhédei Ádám Fő Ispány és Koll. Fő Curátora	I	"
T. Salánki Lajos Prédikátor	I	"
T. Siko István K. Tábla Archivariussa	I	"
T. Szász Károly Professor N. Enyeden	I	"
N. M. Székely Mihály K. Tábla Præsesse	2	"
Szentpáli 'Sigmond N. Enyedi Tog.	I	"
T. Szabó György R. T. Cancell.	I	"
T. Szilágyi Jó'sef Ügyvéd	3	"
T. Szonnyi Pál Debretzenben	I	"
T. Szöts Mihály	I	"
T. Szöllösi Pál Gub. Cancell.	I	"
G. Teleki Domokos	26	"
G. Teleki Imre	I	"
T. Tétsi Ferentz Nevelő	I	"
G. Toldalagi Ferentz	I	"
G. Toldalagi 'Sigmond Koll. Fő Curatora	2	"
Toth Ferentz N. Enyedi Tog.	I	"
T. Török Pál Debretzenben	I	"
M. Zeyk Dániel Gub. Cons. és Koll. Fő Curátora	10	"
M. Zeyk János	I	"
M. Zeyk Jó'sef	I	"
M. Zeyk Miklos	I	"

T. Zoványi Sámuel R. Tab., Cancell.	I	példány
T. Jakab György	I	€
T. Vályi Károly Posta Mester	I	€
T. Vajda Dániel Nevelő	I	€

*

Ezeken kívül fő indítója és segítője ezen munka kiadásának elfelejthetlen kedves baráttá lett tanítványom *Med. D. Bögözi Jakab Lajos* vót; ki is jobb kezemet kérve előre, hogy kérését telyesítem, öt száz Váltó Rhftot adott által, azt mondván, hogy a' *Hazának adja*. Mekkora kár az ö' elvesztése, azok tudják, a' kik öt' esmerték: az emberségért buzgó szíve, elméjének tsendes tiszta világa, könnyű felfogása, 's alapos mély nézése, 's minden fitogatástól 's füsstől idegen egyszerű szép lelke, igazmondó egycenességgel, 's szava' pontosságával — megannyi vonásai az igaz tallentomnak; mellyel minden itt tanittatott tudományokban, 's azok között különösen a' *Mathesisiekben* kitündökölvén, a' mind ezekkel külföldön 6 év alatt szerzett kints, a' hazai partoknál süllyedett el — miképpen az ellenség a' vezérre tör, a' halál is azokat számítván, kiket ö' egy hosszu élet alatt tartott vóna meg, egynek személyében minden ezeket is ejtette el.

Nem hallgathatom még el több kedves hív Tanítványim közül Ilentzalvi Szász Pált; ki midön az oskolai pálya' végéről a' földi élet' viszontagságokkal telyes útjára lépett vóna, annak sárján 's napfényét szünetlen szaggató borulatjain fölül emeltetett, az örökkévalóság további pályája folytatására. — Egy ártatlan romlatlan ifjúban, egy emberséges ember, és maga helyén egy pontos természetzsgáló, 's tsillagász veszett el. Az új mathesi jegyekből, a' mi jó, neki köszönöm: ö kapta ki a' nyomtató mühelyben fél század óta hevert betű-öntő-szer használását, 's jóllehet soha se mettsett az előtt, ö mettette a' jól kijött jegyeket, 's öntötte, 's mutatta ki öntésekét. — Ez is többet tsinált, mint szollott, 's kevesebbet mutatott mint vót; holott minden kitsi messzire szokott kiáltani.

Egyáltaljában (kevés különös kivétellel) azon köz panasz ellen vagyok; hogy *Shakespeare*ként a' tanítványok hasonlók a' tsemetékhez, melyek zöld levelekkel kizárták az öket eléhozott napot; — sőt vissza mosolyognak. — A' kit meghüt az, valamint egyáltaljában a' ki háládatosságra számít; nem méltó reá, szintúgy mint a' háládatlan a' nemes lelke sorába.

Tulajdonképpen nem is olly' rosszak az emberek, mint a' köz panasz kiáltja: egy nap se lehet kimenni az útszára is, hogy sokat ne lásson az ember, a' kinek ne köszönhesse valamit; legalább azt, hogy vagy éppen nem, vagy erősebben nem bántotta meg — vagy idejét nem vette el, legalább többet nem vett el abból, a' minek betse nálunk oly' tsekély, hogy tsak a' napszámosnál van árra, 's különben nem tsak egy mástól büntelen ragadozzuk el, sőt ezen pillantatnyi örökségnek számtalan fattyú osztozót keresünk, az igazi örököök' kárára.

KÖTELESSÉGEM MÉG A' TISZTELT KÖZÖNSÉGNEK, JELENTENI:

1-ben. Elpirulok ezen munkátskának oly késő kijötén, hogy könnyen eszibe juthat valakinek, *Mons parturiebat . . . de nálunk minden efféle, ha kitsi is, nehéz*; — sok ideig kelle várnom, míg tsak ennyi előfizetés is gyűlt, úgy hogy a' lemondásról kezdek vala gondolkodni; a' midön végre ott láttam magamat, a' honnan már vissza nem, 's elé is tsak romlás' veszedelmével léphettem — azután is pedig sok fátumok 's betegség mellett, hol egy hol más hibázott; a' jegyekkel, figurákkal 's több effélékkel is sok késleltető baj volt, 's egyetlen sajtó, kevés tsak most szaporodott betükkel, sok egyéb munkákkal volt elfoglalva — 's még most is a' mintegy fél esztendőtől fogva kijött első darab, a' figurákra vár.

2-szor. A' 2-dik darabot magyarul akartam kiadni; egyfelöl azért, mivel az első darab (az *Arithmetika' Elejiben* vallott kárommal együtt) szinte minden költséget el nyelvén, nem láttam más módját a' 2-diknak, hanem hogy megrövidítve oltsobb papirosra tsak 300-at nyomtattassak (nem 500-at mint az elsőből), mathesisból ennyi is felesleg lévén nálunk; — másfelöl így Hazámnak egy közhasznú könyvet adni reménylettem, melyhez az első darabot is ugyan magyarul hozzá alkalmaztam volna: de az előfizetők közül többen, a' kiknek tanátsokat meg nem vethettem, azt kivánták, hogy ha az első déák, a' második is úgy légyen.

3-szor. A' tiszta Mathesi műszókra nézve is, mellyeknek egy részével az *Arithmetika' Elejiben M. Vásárhelyt* 1830 éitem, 's a' többet az említett 2-dik darabban mutattam volna ki; következőket jelenteni hazafui kötelességeim.

I. Azoknak formálásában ezen három fő régulám volt:

a) hogy a' mennyiben lehet rövidek, a' nyelv' természetéből folyók, legalább azzal nem ellenkezők, könnyen megsokhatók, 's tudványba való igaz bélátással a' dolog természetére mutatók legyenek.

b) hogy azonagy szó ne tegyen különbözőket; 's hogy egyebet jelentsen, egy kis helyes változtatás engedessék meg.

c) hogy a' mellyeket okvetlen szükséges megkülönböztetni, azoknak külön (ha lehet más atyafiasból formált) név adattassék.

A' mi az elsőt illeti: világos, hogy a' kezdő annál nehezebben érti a' dolgot meg, minél különbözőbb a' szónak tulajdon értelme a' tudványítól, 's annál könnyebben érti meg, minél inkább magára a' dologra mutat. A' kurtitás pedig túl lehet a' határon, de azon belül könnyít; hogy lenne képes egy felsőbb mathesi dolog' eladása azon nemzetnél, mely a' 3-at *Polertarirorunkuráknak* nevezte? 's az *Analysisi* rövid 's okos jegyek melly igen megkönnnyítik a' különben áthatlan dolgokat — melly rövid 's mathesi lehet a' felső lények nyelve!

Azért tsak móddal legyen, sok a' szokatlanság miatt előbb visszataszító, azután megérte szokottá lesz — mennyi példa nints erre az újabb időkben: melly szokatlan

vala előbb *át*, *gyönyör* ..., *kellemes* kellemes hellyett, *közvetlen* közvetetlen hellyett 's a' t. Igy jövény, nyugalom, türelem, győzelem, veszelem etc.: az efféle ujítás könnyű lévén, mihelyt szabad, omlik mindenfelől — kár, hogy *Erbschaft* nem bár örökmény, 's *örökség Ewigkeit* helyett oly hosszú szóval élünk, mintha azzal akarnak kifejezni. —

A' 2-dikra nézve, bajt tsinálván a' *szeg* Nagel, melly szint is teszen, mivel szeglet, zugoly (Winkel) igen hosszak az összetételben: maradna *Dugonits* szerint Winkel *szög*-nek, 's mikor *szeg* szint teszen, hagyatnék el az s; vagy *szög* tenné a' szint, 's *zeg* vagy *zög* lenne Winkel; még *mons* és *apex* is lehetne *hegy* és *högy*.

A' 2-dikra 's 3-dikra nézve, legyen szabad például hozni elé: *Id Zeit*, *idő Wetter*, *Vil* (az honnan villám) *Licht*, *Világ Welt*; *han* (mindegy ha! n!) *Schall*, *hang* tonus vagy megfordítva; Nap *Sonne*, viradtól estig *Napp* (lehetne *Vily*); dies soláris *nápi kétdélköz* (röviden az illy dies *délköz*). *Densitas* *töm*, *tömeg* (Fogarasi szerint) massa.

Az 1-sore 's 2-dikra nézve, legyen szabad a' hol *egyenlöt* mondani hosszas vóna, *eggyel* jelenteni ki, 2 gyvel, hogy *egytöl* unum megkülönböztessék (p. o.) *eggyoldalú háromszög* nem 1 oldalú, hanem *egyenlő oldalú háromszöget* tegyen.

II. A' *Dugonits* 's *Pete* műszavain kívül másokat nem láttam; 's egyáltaljában még a' kezdeten vagyunk: — de ha egyfelől elpirulunk, midőn a' *Mathesisben* más nemzeteknek tanítói éppen nem, tanítvánnyi is (annyira a' mennyire is) kevesen vagyunk; más-felől hogy valaha tanítói is lehessünk, *eljünk legalább most mig ideje vagyon, éppen ezen elmaradásunkból származott* ólyan *jussunkal*, a mellyet más nemzetek már elvesztettek; a' midőn már régen a' *Mathesis*' böltsői nyelvét fordítván le, sok ollyan szók gyökeretek a' századokba, mellyek a' tanuló' elméjét a' tudványi értelemtől félre vonják. Béfolyása van ennek a' nemzeti kimivelődésre. —

III. Engedtessék azért meg, Hazánk 's Nemzetünk nevében! az a' kérés: hogy a' *mathesisi műszök* adásában, egyik fő tzél legyen, hogy azok a' mennyire lehet tudványi bélátással, a' kifejezendő dolgokra mutassanak.

Bátorokodom a' főbbekre nézve következő probát ide tenni; minden jobbnak elfogadására való készseggel.

Az említett *Arithmetika (Id-mennyiségi tudvány)* *Elejiben*, a' többek közt következő nevek adattak, az holott is a' kivánt okok is (valamint ezen első déák darabban is) megtaláltatnak.

Spatium *Ür*, az honnan üres, az az a' miben (oda értve *csak*) ür van. Tempus *id*, *tempestas* *idő*, quidditas *miség*, quantitas (*midség* mintegy azon kérdésre eredve *mi id?*), ugyantsak maradhat *mennyiségek*, qualitas *milliségek*; pars *rész*, portio *darab*, continuum *szakadatlan*, tekinteti (darabi) *egyenlőség*, *tekinteti mennyiségek*; *positiv*, *negativ* (*mathesisi értelemben*) \vdash (*keresz*), \dashv (*vondás*) *mennyiségek*; azaz a' midség bizonyos milliséggel (melly \vdash , \dashv jeggyel jelentetik ki, hogy az eszet egyébre ne vigye), szüli ezt, (pag. 22)*; vagy amaz, bizonyos \vdash *határozatu*, ez *ellenes határozatu*; — a, vontja a-nak, vagy *ellenesse* (oppositum).

* Ed. II. Tom. I. pag. 28.

Summa meghagyatik ; ugyantsak lehetne *össvet* is.

Addere *summázni*; subtrahere *pótlé kazni* (*pótlotársazni*); subtrahendus *pótlandó*, minuendus *tett summa*, differentia *pótlék* (vagy *pótlotárs*), differentia ipsius *P* ab *S*, *P*-nek *pótléka S-re*, $a - b + c$, *a* 's vontja *b*-nek meg *c*.

Series *sor*, (arithm. *eggypótléki*, geom. *eggyméreti*) ; mensurare *B* quoad *A*, mérni *B*-t *A*-val, mensura *mérték*, *B* mértje *a'* mértéknak, fractio *méret*, Unitas *főmérték*, numerus integer *egész* szám, fractio vera *tört egy*, proportio geom. *eggyméret*; *A* ita est ad *B*, uti *a* ad *b*, *A* annyidja *B*-nek mint *a* *b*-nek. Multiplicare *a* per *B*, *eggymértezni a-t B-vel* (röviden *mértezni*), az-az olyan mértet adni *a*nak, *a'* *millyen mért B* (azaz *a'* *millyen mértje B a' fómértéknak*), multiplicator *B* *fómért* (vagy *mértező*), *a* multiplicandus *tett mérték* (vagy *mértezendő*), factum *eggymért*, factores *mérők*.

Ugyantsak ha szerzeni helyett egyszer se mondattatnák szerezni, még ezzel is inkább lehetne *a'* rosszul nevezett *sokszorozás* helyett elni ; factum szerezet lenne 's *a'* t.

Dividere *b* per *a*, *b*-re *párazni* (vagy *mérőtársazni*, röviden *mérőtársazni*) *a-t*: dividendus *tett eggymért*, divisor *fómérő* (vagy *párazandó*), quotus *mérőtárs* (röviden *mérőtárs*) ; *b* divisum per *a*, *b*-re *párja a-nak*. Kár hogy $2 \cdot 3 = 24 : 4$ helyett nem más jegyeket vettek, (p. o.) $2 \cdot 3 = 24 \diagdown 4$, (az irásbeli 1 's 2 pontra nézve).

Elevare *a* ad potentiam exponentis *q*, *eggymérőzni a-t q ranggal* (röviden *q-val*) ; 's ha *B* ezen potentia, *B* az *a*-nak *q rangú eggymérőzete*, 's *B*-nek *a, q rangú alapmérője*, radix exponentis *q* ipsius *B*; *alapmérőzni B-t q ranggal* (röviden *q-val*), radicem exponentis *q* extrahere ex *B*.

Logarithmus *rangjel*, basis communis *közalapmérő*, vagy *köztalp*.

Vagy következő nevek is lehetnek: *a-t q-val rangozni*, *a-nak q rangja B*, *B*-nek *a, q alrangja, B-t lerangozni q-val*.

Vagy: *a-t q-ra emelni*, *B a-nak q rangú emeletje*, *a B-nek q rangú emeltje*, *B-t q ranggal* (röviden *q-val*) *emelezni*. Radix quadrata *félrang* 's *a'* t.

Quantitas imaginaria *vonás eggyi midseg*, (Tom. I. pag. 105.)*

Proportionalis geom. media, *eggyméreti közép*. Terminus *iz*, polynomium *több-izet*, binomium *két-izet*, terminus seriei *sor-iz*, terminus generalis *iz-kép*, coefficiens *iz-fómért*.

Functio *köz kép*, series incrementorum *növet-sor*, differentiale *növet-sor-iz kép* (röviden *növet-izkép*), coefficiens differentialis *növet-iz fómért*, integrale *summázat*. Calculus variationum *közüképes közkép vi'sgálat*.

Aequatio *egyenlet*; limes *véghatár*, comma *vonat*; incommensurabile *összemérhetlen*; *decimales notae tizedes helyek*; expressio *kifejezet*.

Analysis combinatoria, *szedet* 's *rakat vi'sgálat*, permutatio *elrendelet* (röviden *rendelet*), variatio *ismétlet*; ambo, terno etc. *kettős szedet*, *hármas szedet* . . . vagy *kettőzet*, *hármazat* . . .; *kétszeretje*, *háromszoratja* . . . valaminek, dupluma, tripluma . . .

Superficies *terj, lep* (az honnan lepedő, lepel), néha *kület*, corpus geometricum *Ür-test*; *féret*, area ha superficiesről van szó, soliditas ha corporusról van szó (ez lehet

* Ed. II. Tom. I. pag. 121.

*tely is). Planum lap, (horizontale tér, vagy vizirányu lap). Verticale *függő*s vagy *fügén*y; linea, forma meghagyatnak; figura keríték, sectio vágat, recta *egyen*, arcus *iv*, chorda *húr*, radius *sugár*, centrum *középpont*, sphæra *gömb*, Cylinder *henger*, Cubus *kőb*, angulus *szög*, triangulum *háromszög*, polygonum *többszög* (regulare *rendes*); circulus *kör*. A' *gömben* kezdve eddig Dugonits-ból vétettek. Angulus rectus *negyed szög* (t. i. a' szög tekinteti mennyisége, a' szárai közt lévő ívben), így 60 grad *hatod szög*, 45 *nyoltszad szög* (mind az egész karimára értve) . . . Apex anguli *szöghegy*, anguli *verticales tővi szögek*; anguli alterni *átelleni szögek*, vagy z forma szögek; szögnek (vagy conusnak) *verticalissa*, az ö *tővi társa*. Perpendicularis *rá álló* (vagy röviden *álló*). Diagonalis *átló*, diameter *kettelő* (vagy *kettéző*).*

Parallelum *eggyközű* (Dugonits), (tágasabb értelemben *eggyközűi*); parallelogrammum *lap-eggyközény*, prisma *ür-eggyközény*; Rhomboides, Rhombus *dült eggyközény*; (röviden *dülény*); Rhombus *eggyoldalu dülény*, rhomboides *nemeggyoldalu dülény*, vagy röviden amaz *dülény*, ez *eggyoldalány* (oda értve, hogy csak az oldalai egyenlök), quadratum *rendes négy szög* (röviden *négyeg*). Rectangulum oblongum *hosszukó állány* (röviden *állány*); rectilinea figura *egyeni keríték*: figura plana *lapí keríték*, figura sphærica *gömbi keríték*.

Focus *tűz pont*, tangens *érintő*, asymptota *szinte érő*. Abscissæ *fő útak*, ordinatae *al-útak* (nem ál útak; Lásd az *Arbort* ezen darabban). Az alútak lehetnek 1-ső 's 2-dik *rendűek* . . . Cathetusok *befogók*, hypotenusa *átfogó*. Sinus *végtáv* (az *iv'* vége tája a' *fő kettézötől* p. 456)*; cosinus *középpont táv* (röviden *központ táv*); sinus versus *kezdet táv* (az *iv* kezdete távját értve, 's mind a' két utóbbit a' *sinustól* értve), secans *vágó*, complementum *pótlék-iv*, cosinus *pótlék végtáv* (röviden *pótvégtáv*) 's a' többi. Pyramis *tetény*, conus *tsúp* (az honnan *tsupa*), vagy *körtetény*; így *három-szög tetény*, *három-szög üreggyközény*; Parallelepipedum *ürlap-eggyközény*, ha *rectangulare ür-állány*, (vagy Dugonittsal *téglány*) Pyramis truncata *elszelt tetény*, (vagy *szelt tetény*), így *szelt tsúp*. Conicæ sectiones *tsúp* *vágatok*: parabola *eggytávú* (mindenik pontját azon egy ponttól, a' *tűzponttól*, 's azonégy *egyentől* értve); ellipsis *kisobb távu*, hyperbola *nagyobb távu*, (a' ponttól mint az *egyentől* értve). Vagy az első, *közepetlen tsúp* *vágat*, a' második *vissza térfö*, a' harmadik, *középpontos vissza nem térfö*. Vagy az első, 2 *karu*, a' 2-dik *vissza térfö*, a' 3-dik 4 *karú*, (a' *tsúpat* az ö *tővi társával* együtt, vagy p. 101** szerint véve). Eccentricitas *tűz* 's *középpont táv*; radius vector *tűzpont-sugár*, parameter *tűzpont húr*.

Pes quadratus, cubicus, terj-láb, tely-láb (a' Pallérok számítása szerint, Arithmet. Eleje p. 128). Simile *hasonló*, homologum *eggyfekvésű*, (néha *megfelelő*).

Propositio *mondatvány*, (sőt röviden *mondat*), *tétel*, *tét*, theorema *okváró tét*, problema *feladat*, *feladó tét*, resolutio *megfejtés*, végbe *vitel*, demonstratio *okmutatás*. Intuitus *ön-látvány*, axioma *ön-igazság*, alap igazság, *önlátványi tét*. Lemma *segéd-tét* 's a' t.

Scientia *tudvány*, *oktudvány* vagy *tanvány*, *okadalom* vagy *okalom*, scientificus *okász*,

* Ed. II. Tom. II. pag. 14.

** Ed. II. Tom. I. pag. 116.

a' honnan *okászat* is lehet, mint vadász, vadászat, fényész, fényészet, ditsész, ditsészet 's a' t.

4-dszer. A' *Caputak* etc. helyett, akármellyik osztályt lehetne *betű* vagy *számkeppel* fejezni ki, (nem külömben a' *plántát*'s sok egyebet is); tsak a' felosztásnak ugyanazon gráditsfogán lévő osztályok, 1-ső, 2-dik . . ., külömben azonagy osztály-névvvel külömböztessenek meg: balról az első szám tegye az annyiadik legelső osztályt, 's akármellyik szám tegye az előttevalónak felosztása' első fogán lévő annyiadik osztályt, a' mekkora azon szám; (ha a' szám 9-et meghaladná, a' kétfelől békártat egy számnak véve). Igy '34112. vagy '34112-dik rész lenne az 3-dik főrész 4-dik alrész 1-ső főosztálya első alosztályának 2-dik főszakassza, 's viszont ez úgy íródnék le. Ugyanis ezen osztályokat a' 12-dikig le így lehet nevezni: *főrész, alrész, főosztály, alosztály, főszakasz, alszakasz, főszak, alszak, főtzikkely, altzikkely, főtzikk, altzikk*; mellyet még tovább is lehet folytatni iz, izetske 's több nevekkel; noha római számokkal 's közönségesekkel, 's más jegyekkel is lehet az alább oda tartozókat megkülöböztetni. Elöl is lehetnek még *könyv, darab, söt fődarab, aldarab* nevek is. A' melly számnak eleadására, a' szükségesek még azon a' helyen nintsenek meg; a' hol már megvannak, kipótlását oda lehet tenni, eleibe irva, mellyik *számnak kipótlása*.

Légen ezen osztás módjára például az *Ür tudvány*.

- 1. *ELSŐ FORÉSZ*: az Ürnek alap-szemléése: *lep*, (ollykor *kület*) *linea, pont, forma, gömb; 3 egyes főmozgás; egyen, lap, kör*, 's egyéb *alap-képzetek* (vagy *képezetek*), és *alap-igazságok*; mellyek ezen első darabnak végén pag. 442-tön* kezdve találtatnak.
- 2. *MÁSODIK FŐ-RÉSZ*: leszállás a' lapra; *lap-tudvány* (planimetria).
- 21. *Első alrész*: véges számu, egyenekkel 's két első főmívvvel, (*constructio geom. sensu stricto*).
- 211. *Első főosztály*: azon formák, mellyek ennek elsőben szembeötlő származat-jainak egymást vágása vagy nem vágása által erednek.
- 2111. *Első alosztály*: a' feret vizsgálása nélkül.
- 21111. *Első főszakasz*: nem vágása.
Alszakaszok: (1-ső, 2-dik, 3-dik); két egyenek 's többnek, két körnek; egyenek 's körnek.
- 21112. *Második főszakasz*: vágás.
- 211121. *Első alszakasz*: szöggel való vágás.
- 2111211. *Első főszak*: tsupa egyenek egymással.
- 21112111. *Első alszak*: két egyen; (4-ed szög, tompa szög, hegyes szög).
- 21112112. *Második alszak*: 3 egyen.
- 211121121. *Első főtzikkely*: tsak egyik pár nem vágja egymást, kinyujtva is.

* Ed. II. Tom. II. pag. 1.

- '211121122. *Második főtzikkely*: mindenik vágja egymást; innen a' *háromszögek*.
- '2111211221. *Első altzikkely*: a' háromszögek' egyenlőségének feltétei.
- '2111211222. *Második altzikkely*: A' háromszög oldalainak 's szembelévo szögeknek költsönös függése: az honnan a' háromszöget meghatározó adatokból, a' meg nem adottakat felszámítani tanit a' *Trig. plana* az ezen számot illető kipótásban.
- '211121133. *Harmadik alszak*: 4 egyen.
- '211121131. *Első főtzikkely*: ha nincs olly kettő, melly kinyujtva egymást ne vágja.
- '211121132. *Második főtzikkely*: ha van olly kettő, melly egymást ne vágja.
- '2111211321. *Első altzikkely*: ha a' más kettő is illyen; tehát mivel vágás van, ezen pártól a' másik vágatik, (*parallelogrammum*).
- '2111211322. *Második altzikkely*: ha tsak egyik pár ollyan; tehát ez vágatik a' másik nem ollyantól, (a' *hasonlatosság alapja*); innen a' háromszögek' hasonlatossága feltétei.
- '211121144. *Negyedik alszak*: több akárhány egyenek.
- '211121141. *Első főtzikkely*: egyenekból álló (röviden *egyen*) egyes linea (p. 461).*
- '2111211411. *Első altzikkely*: más illyennel való összetételből egy pár egyenek eggyközüségből származó közönséges képzete az *eggyközüségeknek*.
- '2111211412. *Második altzikkely*: több oldalú egyeni keríték.
- '211121142. *Második főtzikkely*: valamelly egyeni linea minden szöghegyeire egyenek azonegy pontból.
- '2111211421. *Első altzikkely*: az egyeni kerítéknak háromszögekre való felosztása.
- '2111211422. *Második altzikkely*: mindenik egyenek a' központtól azonegy annyidját véve; a' *hasonlatosság közönséges képzete magva*.
- '211121212. *Második főszak*: egyen a' körrel.
- '211121211. *Első alszak*: egy egyen a' kört, csak egy pontban, vagy kettőben vágja.
- '211121222. *Második alszak*: több a' kört vágó egyenek.
- '211121221. *Első főtzikkely*: azon egyenek vágva egymást.
- '2111212211. *Első altzikkely*: azonegy pontban.
- A' *főtzikkek*, (1-ső, 2-dik, 3-dik): azon pont a' karimában, a' karimán belül, vagy kívül.
- '2111212212. *Második altzikkely*: ha azon egyenek nem azonegy pontban vágva egymást, egyes visszatérő egyeni linea formálnak.
- '21112122121. *Első főtzikk*: mindenik egyen (úgy a' mint van a' kezdetitől a' végeig) húrja a' karimának; ennek altzikkjei, 3 egyen, 4's a' többi; sőt ezeknek alsóbb osztályai, ha az egyenek egyenlők vagy nem.
- '21112122122. *Második főtzikk*: mindenik egyen érintője a' karimának; mellynek ugyan az imintiek az alsóbb osztályai.
- '211121222. *Második főtzikkely*: ha azon egyenek nem vágják egymást.

* Ed. II. Tom. II. pag. 18.

- 2111213. *Harmadik főszak*: körek egymással.
Első főszikk: érintési vágat; 2-dik az érintés nélkül való.
- 211122. *Második alszakasz*: a' szögetlen vágás; melynek alsóbb osztályai, az egyenkből 's körivekből, vagy tsupa körivekből való, 3 's több oldalu formák.
- 2112. *Második alosztály*: férete az eléhözött kerítékeknek; melynek alsóbb osztályai, az egyeni kerítékek, kör, vagy tsupa körivekből, avagy körivekből 's egyenekből valók.
- 212. *Második főosztály*: azon formáknak, melyeknek az első főosztályban csak magában való lehetsége ötlik szembe (vagy kérdésbe jöhét); véges számu két fő mívvel való lehetsége vagy lehetlensége vi'sgálása.
- 22. *Második alrész*: számtalan két fő mívvel (*kettős egyesült mozgása*, az *Id-mennyiségi tudvány* segítségével).
- 221. *Első főosztály*: a' melyeknek ha nem is minden, de mindenik pontja megadatik véges számú 2 fő mívvel.
- 222. *Második főosztály*: a' melyeknek mindenik pontja sem.

- 3. *HARMADIK FÖRÉSZ*: vissza menetel a' lapról az ür mélységébe.
- 31. *Első alrész*: a' véges számu egyenekkel 's három fő mívvel származhatók' vi'sgálata (*constructio geom. sensu lato*). Tudniillik az előbbi két fő munkához járul a' tengelyi fordulás.
- 311. *Első főszakasz*: tengelyi fordulása kerítéket nem formáló lineáknak, és lapoknak.
- 3111. *Első alszakasz*: lineák' tengelyi fordulása.
- 31111. *Első főszak*: kerítéket nem formáló egyeni lineák' fordulása.
- 311111. *Első alszak*: egy fordulás.
- 3111111. *Első főszikkely*: két egymást P lapban vágó egyen megfordul az egyik körül; a' mozgó egyen útja lap, ha a' szög negyed szög, 's tövi tsúpák (azaz tsúp az ő tövi társával), ha a' szög kissébb negyedszögénél.
- 3111112. *Második főszikkely*: Ugyan P -ben A egyenek b, c, \dots pontjairól legyenek B, C, \dots egyenek A -ra ráállók, 's $ABC\dots$ linea forduljon meg A körül; az egyenek útjai *eggyközű lapok*.
- 3111112. *Második alszak*: több fordulás; legyenek P lapban A, B egymást p pontban vágó egyenekre α és β rá állók p -ból, 's forduljon meg A körül α , 's B körül β ; a' két út' vágatja a' ráálló p -ból P -re.
- 3112. *Második alszakasz*: lapok fordulása.
- 31121. *Első főszak*: egy fordulás; fordulva P lap, valamely egyenje körül, szüli a' két lap' szögét.
- 31122. *Második főszak*: több fordulás.
- 311221. *Első alszak*: mindenik fordulás tengelyének azonagy p közös pontja: úgymint értétek minden, P lapra nézve, azonagy felől, (p. o. fölől),

's minden fordulás $<2R$ legyen, (R negyed szöget tévé). Ezen feltételel forduljon P lap $\rho\alpha$ egyenje körül, 's mindenkor újra, a' hová jött, forduljon onnan, valamely ρ pontról vont egyenje körül hajolva, folytatva a' míg tetszik; ered az *angulus solidus* (tely-szög); lehet még azon határozást is tenni, hogy P minden szine felé hajoljon, a' melly előbb alól volt.

311222. *Második alszak*: több fordulás, mindenik fordulás' tengelye' központja nélkül.

3112221. *Első főszikkely*: *tsupán lapok*.

31122211. *Első altzikkely*: a' fölül két eggyközű lap P és Q közül egyik forduljon akármelly egyenje körül, míg a' másik lapnak valamelly pontját éri; nevezessék ezen új lap R -nek; vi'sgáltatnak az R -től tsinált átelleni szögek 's a' t.

31122212. *Második altzikkely*: az előbbi R forduljon akármelly az P és Q lapokon átmenő α egyenje körül; 's legyen az új lap S ; vizsgáltatnak P -vel és Q -val lévő vágatjai az R és S lapokból álló formának.

31122213. *Harmadik altzikkely*: forduljon S is akármelly, P és Q lapokon átmenő β egyenje körül; vi'sgáltatnak az R , S , T lapokból álló formának P -vel és Q -val lévő vágatjai; minden esetben, ha $\alpha \parallel \beta$, mind akkor, ha nem.

3112222. *Második főszikkely*: *lapok egyenekkel*.

31122221. *Első altzikkely*: a' fölebbi P és Q eggyközű lapok közül egyiknek akármelly pontjából a' másiknak akármelly pontjára egyen gondoltassék; vi'sgáltatik az *egyenek lappal való szöge*, az *átelleni szögek* 's a t.

31122222. *Második altzikkely*: P lapban legyen $\mathfrak{B}\mathfrak{C} \dots$ egyeni keríték, 's akármelly a' lapon fölül lévő α pont legyen, forduljon (mindent egyfelöl, p. o. P lapon fölül értve) P lap \mathfrak{B} egyen körül, míg $\mathfrak{A}\alpha$ egyen belé esik; és legyen $\mathfrak{B}\mathfrak{b} \parallel$ és $=\mathfrak{A}\alpha$; azután forduljon ugyanaz első P lap $\mathfrak{B}\mathfrak{C}$ egyen körül, míg $\mathfrak{B}\mathfrak{b}$ belé esik. 's legyen $\mathfrak{C}\mathfrak{c} \parallel$ és $=\mathfrak{B}\mathfrak{b}$, 's így tovább az utolsó oldalig; és ekkor forduljon \mathfrak{abB} lap \mathfrak{ab} körül, míg \mathfrak{c} pont belé esik. Születik az *egyeni ür-eggyközény*, melly *parallelepipedum*, ha $\mathfrak{B}\mathfrak{C}\mathfrak{D}$ *parallelogrammum*.

31122223. *Harmadik altzikkely*: ha P lapban lévő $\mathfrak{B}\mathfrak{C} \dots$ egyeni kerítéknek, minden szöghegyeiről azonagy ρ pontra egyenek gondoltatnak, 's P fordul mindenik oldala körül az említett kerítéknek, míg ρ belé esik; születik az *egyeni tetény*, (a' mennyiben a kör-tetény az-az kör talpu tetény 's akármelly más talpu mind tetény).

312. *Második főszakasz*: *tengelyi fordulása lapi kerítékeknek*.

3121. *Első alszakasz*: negyedszöges háromszögnek megfordulása az egyik *béfogó* körül; (*negyed szögü tsup*).

3122. *Második alszakasz*: lap-állány megfordulása valamelly oldal körül; (*negyed szögü henger*).

- '3123. *Harmadik alszakasz*: félkör megfordulása a' kettéző körül, (*gömb*).
 '3124. *Negyedik alszakasz*: a' mindenjárt származandó tsupi vágatok megfordulásával eredő formák.
 '3125. *Harmadik főszakasz*: tengelyi fordulása a' lapnak az eddig származottaknak valamelly pontja körül.
 '3131. *Első alszakasz*: a' tsuppal (*tsupi vágatok*); Ellipsis sőt parabola talpu tsup, (*szelt tsup*).
 '3132. *Második alszakasz*: a' hengerrel.
 '3133. *Harmadik alszakasz*: az egyeni teténnyel.
 '3134. *Negyedik alszakasz*: az egyeni ür eggyközénnel.
 '3135. *Ötödik alszakasz*: a' gömbbel.
 '31351. *Első főszak*: ha a' közép ponton mennek által a' lapok; erednek 3 labból a' gömb' szinén a' *gómbi háromszögek*; mellyeket a' meghatározó darabokból felszámítni tanit a' *Trigonometria sphærica (gómbi háromszög számítás)*.
 '31352. *Második főszak*: ha mind érintik a' lapok a' gömbet, vagy mind vágják, 's ür darabot záró egyes formát tsinálnak; ezek közt erednek a' egészen vagy részszerint *rendes ür-testek*.
 '32. *Második alrész*: azon formák, a' mellyek véges számu egyenekkel 's három fő művel nem származhatnak; (p. o.) ha valamelly úgy elé nem állítható formának minden pontjairól azonagy pontra egyenek, vagy azonagy egyenhez eggyközük gondoltatnak; 's annyival inkább, ha azon egyenek' foglalatjának bizonyos formával való vágatja kerestetik 's a' t. Egyáltaljában mindenféle formák, akármelly (akár az *Arborban* három egymásra rá álló egyennel, akár valamelly formában bizonyos törvény szerint lévő) hármas avagy többes egyesült mozgás által származhatnak, mind azokkal egyetemben, a' mellyek ezeknek egybetételével lesznek, ide tartoznak.

5-szer. A' fenn emlitett *Ariithm. Elejében* XVIII. lapon javaltatott *egy írás-mód*; mellyben nem csak összetett betű ne legyen, hanem egy betű se iródjék kétszer egymásután, sőt egy betű felett is, se pont, sem ékezet ne legyen, még is minden hangzónak, még pedig a' rövidnek a' hosszútól megkülönböztetett jele legyen, a' nélkül hogy új betű vétessék fel; ott a' hosszak szintúgy mint a' kétszer irandók, fölül vagy alól (a' mint az irás' folyása kivánja) nyújtott egyenes vonással jelentetnek ki; a' többi egy a' folyó írásra (némelly betűnél vizirányulag vive másnál fölülről szállítva) alkalmas jeggyel tétezik ki: ma is valami illyen formát kívánék, hogy nyelvünk kimondása meghatározott, 's legalább írásunk' módja, első lenne; de a' *gy* kijelentésére inkább lehetne *d* mint *g* betűt az emlitett jeggyel venni, mivel *adjon* könnyen változik *aggyon-ra*, de vágjon helyett nem mond senki *vaggont*; — 's vagyon még kettő mellynek jegy kell; ezen szókból megtetszik *edzeni*, *findzia*, (az utolsót egy 6 éves gyermek mon-

dotta, hogy egyikkel se lehet le irni, az a' mint *giorno* mondatik): *zs* vóna *z* azon jeggyel, *edzeni* iródnék ugyan *z*-vel, de azon jegy megkettőztetnék a' közepén, ez úgy is ritkán jön elő; valamint a' *giorno* hang, mellyet *g* eleibe tett jeggyel lehetne kitenni.

6-odszor. Egyébaránt ezen lapokon az írás sokban különbözik az említett könyvetskebelitől; ugyan is itt a' Pesthen 1832-ben nyomtatott *Magyar Helyesírás főbb szabályai-haz* kivántam' magam alkalmazni; mivel a' midőn a' hánynan vagyunk annyi-képpen írunk, onnan lehet egyedül várni, hogy valahára megállítódjék; 's noha kicsit tartóztathatom avagy segíthetem elő, egy pihével sem akarom terhelni a' hazai kimi-velős' kincséért szerencsés széllel feszülő vitorlákkal evező hajót. — Sok van, a' mellyre nézve kissebb az, miként, mint az hogy eldőjtve legyen; 's megegyezve, valahára azon a' nyelven tanulunk, a' mellyet Anyáinktól tanultunk; ekkor indulhatunk meg a' mély völgyekből fenn az Alpeseken az ég felé emelkedő Nemzetek után.

Ha Őseink deákul akartak tanultatni, a' léányokat kellett vóna inkább a' Deák oskolákba járatni, hogy ők tudjanak előbb, 's az anyai téjjel szopva a' magyarral együtt a' deákot, a' *főbába* való megvénülés helyett, belé születtünk vóna — a' holt nyelvet is az asszonyi eleven nyelv feltámasztotta vóna — 's tsak két nyelvet meg is lehet bírni, (legalább inkább, mint annyit, a' hánynat most tanálni kéntelenek vagyunk), 's a' tudomány nyelve is akkor a' Déák volt.

Vajha a' tudós Társaságok abban egyeznének meg, hogy a' tudományok óriási növésével, a' midőn az emberi erő 's idő nem nő, a' mostani sok 's mind több-több helyett egy mathesisi 's musikai lélekkel alkotott vég nélkül tökélyesíthető nyelven nyomtassanak minden (a' szükséges is le fordítva): nagy részét rövid' életünknek, melyben mind a' koltsat keresve, alig lépünk bé a' tudományok' templomába 's a' nap le menyen-ebben tölthetnök. — Ugyan is a' tudományhoz idő és munka nélkül jútni, (a' termé-szetet megtalálni) nem lehet: hiába várja valaki a' külömben sok szép felü társalkodástól, hogy a' *Leucipp*' atomjaiból (mint a' tánc-házakbeli találkozásokból) származó világ' módjára, abból tudós legyen; a' gondolatok tántzoló 's párosodó szálája is inkább a' magányban van, 's a' fülemile sem a' seregben énekel. — Lehetne mindazáltal a' társalkodást a' sok rosszat szülő kártya 's egyéb idő-pazérlás helyett, éppen nagy idő nye-reségre használni; a' midőn annyi olyas jön ki mindenfelől, a' mit megkellene olvasni, ha elég idő 's szem vóna rá: sok egynapi olvasást ellehet fél-óra alatt lelkesen mondanival; 's tsak 12 olyan találkozzék össze, felosztva egymást között, mindeniknek tsak egy napba 's hat órába kerülne, a' mi 12 napba került vóna mindeniknek — sőt egy nemes rúgója is vóna kinek kinek a' magára vállalt rész' telyesítése, több halgatók' életök' hosszabbítására, 's lelkeik kimivelésére. — Ugyanis a' tanulást is lehet olyan rúgóval ébreszteni, melly rosszabb a' tudatlanságnál: illyen a' fölül-vágy' világ-égése országokon átfúró szelekkel; ezzel serkenteni, annyi, mint egy pokoli kiólthatlan (a' testtel elmaradó vétkeket is fölül élhető) tüzet vetni az emberi nem' mejjébe; — mitsoda gonosztévő tenné meg, ha tehetné is, hogy fájdalmat támasszon a' fűbe, hogy nem rozsa bokor, 's ebben hogy nem tölgyfa ... hogy az egész szép természet munkás álmú csendjéből jajra serkenjen fel. Azt kell fejteni a' mi van, csak föld napfény 's esső kell

a' magnak — 's úgy kell nevelni minden, hogy kiki azzal a' mire teremtetett, 's rendeltetett, megelégedve éljen.

De az említett nyelvre térd vissza; az nem rekeszti a' nemzeti nyelvet ki; minden Magyar meg van azon kedves hangoktól vará'solva, mellyekkel Édes Hazánk' Anyái altatták Nemzetünk' hajdoni hőseit, a' kiknek majd kardvillámjaikkal ropogó menny-dörgéseikre vérzápor omlott a' ditsősségg' mezején — ha szintén az akkor kardok tollukká, 's a' karok is inkább ezekhez mint az ösi fegyverekhez valókká lettenek is, 's a' ditsősségg' mezején is a' hajdoni kőszikla-méjjekből fakasztott vérforrások helyett, fejekből szivárgó tenta patakok kigyóznak mindenfelé.

A' köz nyelv mellett, minden nemzetnek ekkor is mivelni kellene a' magáét; 's két nyelvet megis tanúlhatna mind a' két nem; 's minden nemzet egy nyelven tudván szollani, az egymás' megértése millyen egybefoglaló kötél lenne, (a' melly Hazánkban is olly kívánatos volna); 's melly közelítés lenne ez az emberi nem egyességére.

De mikor hozza fel a' szeretet bús angyala az ezeredék' elpiruló reggelén azt a' napot, mellyen le olvadnak a' csak ön sebét érző kevélsg' jégvárai; 's feltámadván kiki, mint megannyi senyvedő halott, külön kriptájából, a' setétfen egymás ellen hadazott testvéri karok, megesmérvin egymást köz ölelésre ragadtatnak; 's a' köz Tempalom kiderülő bólta alatt minden szívből kivettetvén az Én-bálvány, mindenik egy vég-hetlen Atyával 's egy világgal telvén meg, egy nyelven zendül meg a' földről az első *Mi Atyánk!* égi boldogsággal mosolyog vissza a' végetlenség, az örökkévalóság' szeretetgyűrűje rogyog a' föld körül — a' belső teremtés' első hajnalát örom könnyek gyöngyöz — 's az angyalok oda fenn ditséretet énekelnek.

Ekkor lesznek egybegyűlve az örökösek az Uj Testamentom telyesítésére — arra az osztályra, a' hol tsak mindennek juthat minden — a' köz szeretet' mennyei kintse az.

De mikor értjük meg, hogy mindenjáron elesünk ezen tulajdon magunk ellen dü-hösködő háborúban? 's mikor záródik bé *Janus*-nak az első *Kain*-tól fogva mind nyilva álló ajtaja? Egymást szaggató fenevadok' ordító pusztája az, mellynek az Égre az Isten' képeivel kellene vissza rogyogni; elszakadt az odakötő szeretet szent lántza, 's az else-tétült tsillag számkivetve bujdosik — azon kevesen a' kik keresik egymást, sem találhatják fel — 's a' legmelegebb szivek is magánoson vernek a' mindenfelől kizárt jég-falak közt — egy zivataros éjjben fut kiki külön lámpásoknál haza, félve mindenből, leginkább egymástól — mikor lessz az a' mennyei szó, melyre a' magát emésztő rivó zürzavar' sötétségében *világosság légyen?* ha nem csak szájjal, hanem egymáshoz közeledő szívvel kérnök, eljöne az Isten' Országa — 's e' kősziklás szigeten való útunkat, a' helyett hogy nehezsüük egymásnak megkönyitve, vigan érkeznénk a' tengerhez további útunkra. — Akármely kitsi is ez élet, nem megvetni való; mikor felsőbb kötelesség kéri is, nagy árrára mútat, a' mellyért eladó is; nem végtél ugyan, de a' mint eszköz egyfelől a' továbbira, tzél másfelől magában is. — 'S oh! a' mit most úgy meg-rútitunk, melly széppé tehetnök; hogy nemcsak a' jelen nyerődnék meg, hanem szebben nevekednék a' belső ember is, 's a' halált is úgy néznök, mint egy még szébb világ' bábját — midön ez a' föld alól a' napra útat nyitván, a' megnött szárnyu új angyalt

leszállott kedvessei repitik a' menyre ki — 's a' felsőbb Természet mint egy anya a' fájdalom után mosolyog az újan szülöttnek. — Csak új életre mútat az új domb is, mellyel az anyaföld méhébe fogadván, virágokkal szölt zöld leplét reményszivárványok alatt kapja vissza. — Söt mikor a' sohajtások a' szemekre fellegezvén, a' sirhalmok' nefelejtseit könnyekkel öntözik, a' sirattak a' menny' tornáttziból néznek alá — 's mikor elalutt képeik felett a' pá'sint hánkyodik a' nyögő szélben — mulandóság 's örökkel valóság' tenger habjai — honvágy — (semmi emberi szó ki nem mondhatja, 's a' mu'sika is csak inkább sebesíti az édes fájdalomtól sajgó szívet —), azt súgják lelkeinkbe: *Ne szomorkodjatok! ah! hogy nem mondhatjuk meg, melly idvesség az Istenhez közelebb — türjetek békével, 's higgyetek!* — a' végetlenség mennyei mágnesse, a' mi a' nemes lelkeket vonja, itt van.

MEGIGÉRT JELENTÉS.

(NUNTIUM PROMISSUM.)

Háládatos köszönettel jegyzem ide azoknak neveiket, a kik az első darabban fel
írttakon kívül előfizetvén, ezen munka kiadására segítségül váltanak, még pedig ké-
retlenül.

G. Bethlen Ádám	8	példányra
T. Ertsei János, Sz. Udvarhelyi professor	I	"
T. Intze Ferentz, Nevelő	I	"
B. Kemény Diénes	4	"
B. Kemény Domokos	4	"
B. Kemény István	4	"
B. Kemény György	4	"
Krassai András R. Tab. Cancellista	I	"
Locodi György Fiscalis Procurator	I	"

Ezen kívül Bolyai János P. J. Kapitány az Első darab' Appendixének, mint tulaj-
don munkájának kinyomattatására, részint példányokra, adott *száz négy* váltó rft. 's
54 xrt.

Az üresen maradott hely az igéreteké.

ADNOTATIONES EDITORUM.

Pag. XI. Arbor hic in Ed. I. chartæ maximæ initio Tomi I. agglutinatæ in folio ut dicitur typis impressus est.

Pag. XVIII. ¶. 4—7 *a calce ad laevam*. Verba «ubi tamen sive functionem constituentia, sive functionis qualitas quantitasve quæri possunt.» inseruimus ex Erratis Tomi I. pag. XXXVI.

Pag. XXI. Hunc «indicem rerum» parvis solum momentis correctum recepimus, tamen in margine ascripsimus numeros paginarum Editionis II. Quæ vero Bolyai animadvertisit, ut Errata emendatoria fierent, penitus omisimus.

Pag. XXIII—XXXVI. In Ed. I. asterisco * apposito designati sunt loci, quos Bolyai Tyronibus in lectione secunda descendos commendavit.

Pag. XXIX. ¶. 15 *a calce*. Quæ uncis [] inclusa sunt, nos inseruimus. Eadem repetita recurrent posterius in indice rerum hac ipsa significatione.

Pag. XXXIV. ¶. 8 *a calce* «variabilis» scriptum est pro «logarithmus».

Pag. XLIII. ¶. 4 *a calce*. «Si unum parallelum per alterum non parallelum secetur» scripsimus. In Ed. I. errore quodam hæc leguntur: «Si duo paria fuerint parallela» . . .

Pag. I, ¶. 3. «Conspectus Geometriæ Generalis» posuimus pro «Generalis Conspectus Geometriæ» restituto verborum ordine, quo Bolyai in Conspectu Arithmeticæ generali usus est.

*Pag. 3, ¶. 4 «via lineæ» subintelligitur *rigidae*.*

Ibidem ¶. 12—7 a calce. Cf. pag. 12, sub 3.

Pag. 4, ¶. 5 a calce loco *T* in Ed. I. errore typographi *M* legitur.

Pag. 5, ¶. 5—4 a calce verba «*quarumvis binarum*» et «*eadem*» in Ed. I. non leguntur. Hunc locum ipse Bolyai in Erratis Tomi I. pag. LIII, ¶. 5 a calce emendandum designat his verbis: «post *sectio* adde *singulis tribus communis*». Item in iisdem Erratis pag. XC: «*sectio quarumvis binarum eadem* intelligatur». Ex emendatione auctoris posteriore varietatem lectionis a nobis constructam evidentissimam aestimantes in textum inseruimus.

Post hanc emendationem ibidem pag. XC Bolyai sic orditum: «*Superficies* est, in qua punctum undevis innumeratas vias habet, nec portio spatii inest: hicque talis supponitur, cuius nulla portio cum reliquo punctum solum commune habet; quæ *planum* fit, si in ea quævis *linea rediens sphæræ communis* portionem se facie utraque tegentem claudat.»

Pag. 7, ¶. 11 a calce post «*sphæra*» verbum «*duplex*» inseri voluit Bolyai in «*Recensione per auctorem ipsum facta*».

Ibidem ¶. 6 a calce verba «*quæ revolutione*» in Ed. I. ordine inverso leguntur.

Pag. 8, ¶. 12 punctum spatiale in Ed. I. *punctum spatii* legitur. De hoc loco ipse Bolyai in «*Recensione per auctorem ipsum facta*» scripsit «pro *puncti spatii* lege *puncti spatialis*». Cum ipse pro *punctum* errore quodam *puncti* scripsisset, recte nominativum restituimus.

Pag. 10 distinctio §. 8. in Ed. I. deest.

*Ibidem ¶. 4 post «quadam» inseruimus literam *f*.*

Ibidem ¶. 6 «formæ f», in Ed. I. legitur «formæ alicuius».

Ibidem ¶. 8 post verba «Hinc porro», in Ed. I. versui præcedenti ascripta, alinea nova sic incipit: «1. Rectarum istarum . . .», quam

alineam sustulimus, ne numerus 1. in alinea §. 18 recurrens lectorem turbaret.

Pag. 12, §. 7—6 a calce. In Erratis Tomi I. pag. LIII Bolyai hanc emendationem præcipit: «post parallelogrammi adde: nisi quadratum fuerit». Cum præter quadratum etiam alia parallelogramma inveniri queant, quæ excipienda sunt, melius putavimus §. sequenti verbum «generaliter» inserere.

Pag. 13. §. 7 usque 2 a calce alineam ex Erratis Tomi II. pag. 373 (sive Tomi I. pag. LIII) inseruimus.

Pag. 14, §. 11 a calce. Definitionem «tang. v et sec. v pro radio r» vide pag. 128.

Pag. 15, §. 13. Verba «non in illo plano sitæ» inseruimus ex Erratis lucubratiunculæ «Recensio per auctorem ipsum facta». Aliter emendare voluit Bolyai hunc locum in Erratis Tomi I. pag. XC: «nil aliud cum plano illo utvis producto commune habenti». Nos autem emendationem tempore posteriorem Recensionis, cum etiam brevior esset, inserere melius putavimus.

Pag. 17, §. 13. Bolyai *perpendicularem* signo « \perp » significat; nos melius putavimus signo usitatiore « \perp » uti, quamquam signum Bolyaianum naturæ anguli recti a semirectis inclusi nempe casui perpendicularium simplicissimo magis conveniat.

Pag. 20, §. 5—7. Partes Figg. 5. et 6. literis *a* et *b* distinctæ, nec non pars *c* Fig. 5. in Ed. I. hanc inscriptionem habent: «Aut si non ponatur distantia eadem».

Pag. 21, §. 10 a calce «admissa operatione tertia quoque» inseruimus ex Erratis Tomi I. pag. XXX.

Ibidem ¶. 3 a calce «potest iis, quæ» in Ed. I. sic legitur: «potest; iis vero quæ».

Pag. 22. ¶. 8. «Arbor inferius» de quo hic agitur paginis 408—412 continetur, atque idem est, qui legitur pagg. LIX—LXIII.

Pag. 23, ¶. 14—15 «si punctum motum b fuerit» inseruimus ex Erratis Tomi I. pag. XXXVI.

Pag. 27, ¶. 18 «ininterrupe» pro «in interruptæ» Editionis I.

Pag. 28, ¶. 7 a calce. In Erratis pag. XC leguntur hæc: «Annulus e centro f aliter determinandus: moveatur nempe superficies sphærica S' in se circa f: punctum aliquod ipsum f includens, lineam uniformem re-deuntem describet». Et: «Notandum autem, rectam planumque brevius quoque deduci posse».

Ibidem ¶. 2 a calce literam «o» nos inseruimus.

Pag. 29, ¶. 1 pro litera «o» in Ed. I. «c» legitur.

Pag. 31, ¶. 12 a calce «c * C» correximus ex «c * p», errore manifesto calami in Ed. I. scripto.

Ibidem ¶. 2 a calce «annuli concentrici» scripsimus pro «circuli concentrici», cum nondum demonstratum esset lineam circulum esse.

Pag. 36, ¶. 12 a calce post «huius» indicationem paginæ 26, quam Bolyai uncinis inclusam ibi apposuit, omisimus.

Pag. 37, ¶. 3. «(Fig. 14.)» a nobis insertum est.

Ibidem ultimo versu «cd» posuimus pro «ab» Editionis I.

Pag. 41 ultimo versu. Post «essent» indicationem Bolyaianam paginæ 39, ut minus accuratam, omittendam censuimus.

Pag. 42, §. 13 «crescentibus» et §. 2 a calce «descripta» inseruimus ex Erratis pag. LIV.

Pag. 44, §. 3. «a'b, ab æqualem» scripsimus pro «a' a b æqualem». Ibidem §. 3 a calce «suppositive» pro «suppositio».

Pag. 56, §. penultimo post «in Appendix» in Ed. I. «sequente» legitur.

*Pag. 58, §. 5 a calce et pag. 60, 211121122 §. 1 et 2 pro «suf-
ficiente» melius esset «quantalibet».*

Pag. 59. §. 2. §. 1. «v = u > u'» positum est pro «u = u'», item « \overline{AB} » pro « \overline{AB} » ex Erratis Tomi II. pag. 375.

Pag. 60, §. 5. «sectione prima» scripsimus pro «tomo primo».

Ibidem §. 1. Nulla mentio facta est casus illius, duo triangula æqualia esse, cum duo latera et angulus maiori oppositus æqualia sint.

Pag. 61. §. 12. «ac in \overline{AC} » scripsimus pro «ab in \overline{AB} ».

*Ibidem ante §. 6 a calce in Ed. I. distinctio «§. 2.» legitur, quam delevimus, cum duo versus ita distincti simpliciter ex Casu tertio seque-
rentur.*

Ibidem §. 4 a calce «§. 2.» positum est pro «§. 3.»

*Pag. 63, §. 1. «quamvis» scripsimus pro «quarumvis», secundum Er-
rata Tomi II. pag. 375.*

*Ibidem §. 2 a calce «adiacentes æquales» scripsimus pro «intercep-
tum æqualem», ut loco laudato Bolyai præcepit.*

*Pag. 64, §. 2. De hac re Bolyai pag. 375 Tomi II. Ed. I. hæc anno-
tavit: «Interim eaedem trianguli acquiruri proprietates, e statim postea
ab hoc independenter demonstrato, quod angulo maiori latus maius,*

et lateri maiori angulus maior opponatur, manifesto immediate sequuntur». Demonstratio, cuius hic mentio facta est, pag. 66 huius Tomi et in annotatione ad illum locum exposita est.

Pag. 65, §. 16 «maiores» in Ed. I. «minores».

Pag. 66, §. 16. Ad hunc locum in Erratis Tomi II. pag. 385 nota sequens legitur:

«P. 18. non error quidem proprie est, verum si in triangulo æquicruro angulorum ad basim et crurum æqualitatem se mutuo ponere, non iuxta p. 16. 1¹, sed e laterum angulorumque mutua dependentia demonstrare libeat, ut p. 375² dictum est: tum conversa ad finem paginæ 18³ alter demonstranda erit; nempe si $u > v$, erit u aut rectus vel obtusus, aut non; prius e parte priore patet; in casu posteriore autem erit u et v uterque acutus; nam si v rectus vel obtusus, et simul $u > v$ esset, summa duorum angulorum trianguli 2 rectos excederet.

Pro acutis u et v et $u > v$ autem demissa (uti Fig. 23⁴) perpendiculari, patet angulos u ad dextram lævamque æquales, et v ulterius ad dextram cadere; quia nec tegere angulum u , nec interius ad lævam cadere potest, nam in casu priore $u = v$, in posteriore $v > u$ esset. Tum vero $b > (a' = a)$ est.

Hinc si $u = v$, erit $a = b$, quia pro $a > b$ esset $v > u$, et pro $a < b$ esset $v < u$. Ita si $a = b$, est etiam $u = v$; quia pro $u > v$ esset $b > a$, et pro $u < v$ esset $b < a$.

Sed idem et alioquin ex ipsa Fig. 23⁴ facile liquet; imo etiam alio modo patet; nempe *pro cruribus aequalibus*

¹ In hac ed. pag. 63, 1.

² “ “ pag. 424, al. 1.

³ “ “ pag. 66.

⁴ “ “ Fig. 60.

recta ex apice ad meditullium baseos ducta, fient triangula æqualia (per tria latera), *si angula ad basim fuerint aequales*, perpendicularis e meditullio baseos, formas utrinque æquales faciet, exibitque e triangulo, quod nisi per apicem fiat, fiet triangulum æquale non triangulo.»

Pag. 67, in fine §. 2 delevimus hæc: «Atque post hoc numero».

Ibidem §. 4—5 a calce pauca correximus, ut Bolyai in Erratis Tomi II. pag. 375 corrigenda voluit.

Pag. 68, §. 7—8. «Quadrati, rhombique alia constructio e (Fig. 91 a, b, c, d) patet» ex Erratis Tomi II. pag. 375 insertum est.

Pag. 69, §. 12 «λ» scriptum est pro «v».

Ibidem §. 2. Inter conditiones similitudinis triangulorum omissus est casus, si in duobus triangulis duorum laterum proportio angulique horum maioribus oppositi æquales sint.

Pag. 77, §. 14 «in» ante «divisione» in Ed. I. deest.

Pag. 79. §. 5—2 a calce. Locus, quem Bolyai hic designat, Editionis libri Christiani Wolfii, qui inscribitur «Elementa matheseos universæ» Genevæ anno 1793 in publicum datae Pagina 98. sic legitur:

Definitio VII. 17. Linea recta AB est, cuius pars quæcumque est toti similis.

Definitio similitudinis ibidem pag. 18 hæc est:

Definitio XII. 24. Similia sunt, in quibus ea eadem sunt, per quæ a se invicem discerni debebant. *Dissimilia* sunt, in quibus ea diversa sunt, per quæ a se invicem discerni debent. Atque adeo *Similitudo* est identitas; *Dissimilitudo* diversitas eorum, per quæ res a se invicem discerni debent.

Pag. 81, §. 5. Figuræ 79*, in qua demonstratur constructio *tangentis ex y*, solum in indice rerum mentio facta est.

Pag. 82. Distinctio «§. I.» in Ed. I. deest.

Pag. 83. ¶ 4. In Fig. 82. pro literis c , d , e in Ed. I. hæc inæqualitates scripti sunt: $c < a$, $d > a$, $e > b$.

Ibidem ¶ 11. Pro « $\frac{\gamma}{2}$ », « $\frac{\delta}{2}$ » in Ed. I. legitur « γ », « δ », errore manifesto calami.

Pag. 85, ¶ 3. Vocabulum «Est» a nobis insertum est.

Pag. 86. §. 1. De Fig. 88. in Erratis Tomi II. pag. 386 leguntur hæc:

«Notandum etiam centrum circuli inscripti cum centro circumscripti, in Fig. ob triangulum æquilaterum coincidere: secus perpendiculares e duorum laterum trianguli meditulliis, et rectæ duos angulos bisecantes diversas sectiones præbent.»

Ibidem ¶ 3 a calce. In Ed. I. « $\frac{p}{m}$ » legitur pro « $\frac{p}{n}$ », errore typothetæ.

Pag. 87, §. 3., ¶ 7—8. «propter hypotenusam cathetusque æqualia (pag. 64)». In Ed. I. sic: «(propter p_b commune et angulos adiacentes æquales)». Correximus ex Erratis Tomi II. pag. 386. Ubi etiam hæc leguntur:

«Fig. 52.* etiam u non nisi extremitatibus rectæ ab adscribi debuisse, quum initium a perpendicularibus e laterum ab et bc meditulliis fiat. Potuissent quidem ad eundem finem duo anguli ad b , c bisecari, et e rectarum bisecantium sectione p rectæ ad apices omnes duci: etenim totidem triangula, quot latera polygoni, patet per duo latera et angulum interceptum æqualia esse; nempe tum $p_b = pc$, et $\triangle pbc = pba$, itaque angulus ad a pariter bisecatur, idemque porro continuatur; et manifesto perpendicularares

* In hac ed. Fig. 89.

etiam ex p apice triangulorum æquicrurorum æqualium communi æquales erunt, centrumque circuli circumscripti inscriptique in figura regulari idem erit.»

Pag. 88. Pro «§. 5.» et «§. 6.» in Ed. I. erronee «§. 4.» et «§. 5.» scriptum est. Quantitatatem anguli Bolyai in §. 5. gradibus exprimit, quamquam divisionem circuli in gradus nondum pertractavit. Denotionem tamen reapse retinendam putavimus.

Pag. 89, ¶. 4 a calce. In Ed. I. Fig. nostra 91. deest, sed inveniuntur quatuor Figuræ, quæ potius ad pag. 68 pertinent. Infra duas earum, quas nos literis *a* et *b* denotavimus, «Rhombus», infra tertiam, litera *c* denotatam «Rhombus vel quadratum», infra quartam, litera *d* denotatam «Quadratum» scriptum est.

Pag. 93, ¶. 1 in Ed. I. sic incipit: «Quantitas anguli quam esse eadem potest, anguli quem . . .» Correximus iussu Erratorum Tomi II. pag. 375.

Pag. 94, ¶. 13 «ap» correximus ex «aq» Editionis I.
Ibidem ¶. 14 a calce «H» scripsimus pro «A» Ed. I.

Pag. 97 pro «§. 4.» et *Pag. 98 «§. 5.»* in Ed. I. erronee «§. 3.» et «§. 4.» scriptæ sunt.

Pag. 98, ¶. 13 a calce «ebf» scriptum est pro «ebf» Editionis I.
Ibidem ¶. 3 a calce «talis» insertum ex Erratis Tom. II. pag. 375.

Pag. 101. Ante «§. 2.» numerus «I.» in Ed. I. iterum inscriptus est. Delevimus.

Ibidem ¶. 14 «δΕΣ» scriptum est pro «δEf». Litera δ significatur punctum rectæ Εg, pro quo Εδ=ΒC.

Ibidem §. 6—7 *a calce*. In figura allata Tomi I. Ed. I. demonstratio etiam æqualitatis triangulorum quoad portiones terminatae indicata est. Confer etiam pag. 109.

Pag. 103. Ad §. 7. Bolyai «in gratiam Tyronum» hæc addidit (Tomi II. pag. 377) :

«Pro imperitis asserentibus, trapezii aream æqualem esse facto ex β et semisumma laterum non parallelorum (nempe l et lateris ei oppositi), imo quadrilateri cuiusvis aream prodire, si semisumma laterum oppositorum per semisummam reliquorum multiplicetur: sit l æquale lateri opposto, et construatur rectangulum pro basi β et altitudine l : atque ponderentur trapezium rectangulumque in bilance.»

Pag. 110. «§. 3.» in Ed. I. inscripta est «§. 2.», distinctio «§. 3.» vero ante alineam tertiam huius paragraphi scripta est, quam nos hic omittere debebamus.

Pag. 112, §. 3. §. 1. insertum est «similium».

Pag. 116. Pro numero «IV.» in Ed. I. «V.» legitur.

Pag. 125, §. 2. «laterum» scripsimus pro «angulorum» iussu auctoris in Erratis Ed. I. Tomi II. pag. 376.

Ibidem pro linea 10 in Ed. I. hæc leguntur: « $\cos u^2 = r^2 - \sin u^2$ (per $\cos u^2$, 2-dam potentiam non arcus u , sed ipsius $\cos u$, ita per $\sin u^2$, 2-dam potentiam sinus u intelligendo)». Ubi nos, ut et in locis similibus ratione scribendi consueta $\cos^2 u$, $\sin^2 u$, scripsimus.

Pag. 128, §. 3 a calce «monitum» scriptum est pro «motum».

Pag. 129, §. 6 a calce. Post «tang. α » in Ed. I. scriptum est «pro radio r », quod nos omisimus, insertis verbis «et tangente» §. antecedenti.

Pag. 133. Lineis Figuræ Editionis I., quam nos numero 137. denotavimus, inscriptæ sunt denominations functionum trigonometricarum. Nos omissis inscriptionibus literas punctis Figuræ apposuimus, easque textui inseruimus.

Pag. 146. «Scholion 8.» in Ed. I. numero «6.» erronee denotatum est.

Pag. 147, ¶. 2 a calce «additum est aliquid in Tomi I. pagg. 512—520, 569—581.» In Ed. I. legitur «addetur aliquid inferius. Atque nunc sequitur» (nempe '22). Verbum «sequitur» ad initium '22 transtulimus.

Pag. 148. In Ed. I. finis sectionis II. et initium sectionis III. sic coniuncta sunt: «Atque nunc sequitur

'22 MOTUS GEOMETRICUS COMPOSITUS: nempe . . .»

Ibidem '22 ¶. 2. De «Arbore» confer adnotationem ad Pag. 22.

Pag. 149, ¶. 3. In Erratis Tomi II. Pag. 401 vel LXXV adnotata sunt hæc:

«Si punctum ex *A* linea abscissarum in *B* sursum moveatur, via accipiatur positiva, si deorsum, negativa; atque hic conditio *C* esse potest, ut quæratur resultatum, quod fieret, si motus puncti deorsum e fine viæ sursum factæ poneretur.»

Ibidem ¶. 7—8. In Ed. I. $(\alpha)x$ et $(\beta)y$ scriptum est pro $\alpha(x, y)$ et $\beta(x, y)$.

Ibidem ¶. 4 a calce. Post «constare» in Ed. I. legitur «inferius», pro «patet» vero «patebit».

Pag. 151, ¶. 7 a calce. In Ed. I. legitur y pro y' .

Ibidem ¶. 5 a calce. In Ed. I. æquationi alteri præscriptum est \leftarrow .

Pag. 152, ¶. 18. «bisecant» in Ed. I. erronee «bisecat» scriptum est.

Pag. 156, §. 11 a calce. Alinea in Ed. I. errore typographi numero 6. denotata est.

Pag. 157, §. 13 a calce «distantiæ ab f et D aequales erunt» in Ed. I. sic legitur: «distantia ab f et D aequalis erit».

Pag. 161, §. 14 a calce. De designatione hic applicata vide Tom. I. Pagg. 113 et 628.

Pag. 164, ultimo versu et Pag. 165, §. 1. Ipsa res declarat restrictionem «si $\beta > \sqrt{a}$ » præter necessitatem esse, sed duo valores ipsius x , dum reales sint, simul ≥ 0 fieri. Ex duobus radicibus x , si $\beta > \frac{\sqrt{a}}{2}$, uni solum y' positivum ita convenit ut $z - y' = \beta$ sit. In exemplo Bolyaiano etiam pro $x = \frac{2-\sqrt{3}}{2}$ est $y' = \frac{1-\sqrt{3}}{2} < 0$.

Pag. 175, §. 3. In Ed. I. post «cadat» errore quodam hæc leguntur: «demittatur ex q' perpendicularis ad axem; gaudet hyperbola in hac puncto p ».

Ibidem §. 5—4 a calce. «Sit (Fig. 158.) ad axem parabolæ» scripsimus pro «Si (Fig. 120) ad axem parabolæ sit» Editionis I.

Pag. 179. §. 8—7 a calce. «Atque et parabola ut ellipsis foci in axe in infinitum remoti consideretur.» Inseruimus ex Erratis Tom. II. Pag. 387.

Ibidem §. 2. a calce. Verbum «priore» Auctor ipse scribi voluit in Erratis Tom. II. Pag. 387 pro «ipso» Editionis I.

Pag. 185, §. 2—4. Punctum q tunc solum in centro hyperbolæ erit, si pro punctis duobus d ei respondentibus utrisque $u = R$ est. Si pro uno d solum $u = R$ est, punctum q in asymptoto qf erit.

Pag. 192, §. 3—4. BOLYAI hic solum de rectis parabolam secantibus tractat.

Pag. 204. in fine §. II a calce « $\beta^2 + p\alpha = 0$ » *ut mendosum delevimus.*

Ibidem §. 10 *a calce* post « $p = 0$ » æquationem « $\alpha = 0$ » *ut mendo-sam delevimus.*

Pag. 205, §. 3—8. Quæ uncinis inclusimus, ex Erratis Tom. II. Pag. 376 sumpta sunt. Ex lineis secundi ordinis tamen oblivione quadam excidit æquatio duarum rectarum parallelarum, $y^2 = c$.

Ibidem §. 15. Rectius demonstrandum fuisset aptiore coordinatarum systemate adhibito casum $\alpha = 0$ evitari posse.

Pag. 206, §. 10. Oblivione quadam omissus est casus $b = c = 0$.

Pag. 209, §. 14—17 non sufficiunt ad demonstrandum problema De-lium insolubile esse.

Pag. 210, §. 12 «et tum §» inseruimus ex Erratis Tom. II. Pag. 387.

Pag. 211. In Erratis Tom. II. Pag. 387 legitur annotatio Auctoris: «Linea ima autem iuxta pag. 5* sub numerum 222 non nisi ea venire debuissent, quorum nec quodvis punctum construi geometrice sensu stricto potest».

Pag. 212, §. 9—10. Fig. 191. casum $2c = 2cB$ illustrat.

Pag. 217, §. 6—4 a calce. De hoc theoremate positio singularis punctorum exceptionis causa esse potest iam in casu, si $n = 3$.

Pag. 218, §. 5 a calce post «æquationem» delevimus « $(F)(x, y) = = (f)(x, y)$ ».

* In hac ed. pag. LXI.

Pag. 219—307. Subdivisio Sectionis IV. in calce repetita novum est editorum ac præsertim optabile, cum in subdivisione contextus huius sectionis essentialiter expleatur; definitiones nonnullæ vero in ea solum reperiuntur.

Pag. 219. In fine §. 8 in Ed. I. affertur Index rerum Tomi I. Delevimus.

Ibidem §. 9 «(in calce)» scripsimus. In Ed. I. legitur «pag. 3».

Pag. 220, §. 5 a calce «*P, Q, ...*» addiderunt editores.

Pag. 223, §. 1 post «est» delevimus «i-mo».

Ibidem §. 2—1 *a calce.* Sententiam postremam addidimus ex Erratis Tom. II. Pag. 401.

Pag. 225, §. 6—7. Ordinem vocabulorum immutavimus; in Ed. I. enim «parallelæ» §. 6 post vocabula inclusa legitur.

Pag. 228, §. 6 a calce «in calce» scripsimus pro «(p. 7)».

Pag. 230, §. 10 a calce «*H'*» nos inseruimus.

Pag. 231, §. 12 a calce «sub conditione (pag. 230) dicta» inseruimus ex Erratis Tom. II. Pag. 376.

Pag. 234, §. 7. Pro »*ED'Ε*» in Ed. I. legitur »*ΕΔΕ*».

Pag. 239, §. 2 §. 2. Vocabulum «perpendicularis» insertum est ex Erratis Tom. II. Pag. 376.

Pag. 243, §. 13—14. In Ed. I. propositio vitiose terminatur sic: «*e catheto αα'* et *hypotenusa Αα'*».

Ibidem §. 16 «etiam *Αα'*» in Ed. I. legitur «*Αα'* et *α'α'*».

Pag. 248, §. 14 §. In Fig. 224. etiam in originali circulus pro ellipsi delineatus est, probabiliter quia pars contextus ad hunc casum limitalem spectat.

Pag. 258, §. contextus ultimo «4° 4'» correximus in «4° 2'».

Pag. 265, §. 4. Post «Appendicis» delevimus «in tomo primo», ante «in» vero delevimus «ibidem».

Ibidem §. 8—9. Diametri hic intelligantur L formes. Theorema hoc casus specialis est formulæ, quæ ad *segmentum Z sphaerae* attinet (Pag. 384), nempe $Z = \pi \cdot \mathfrak{f}c \cdot \mathfrak{f}c$.

Ibidem §. 13. « P » legitur pro « ϕ » Editionis I. ex Erratis (Tom. II. pag. 387).

Ibidem §. 16. In Erratis (Tom. II. Pag. 387) legitur de Fig. 237.: «Notandumque est, quod P circa $\mathfrak{A}\mathfrak{P}$ motum quoque $\parallel \mathfrak{B}$ maneat, atque tum ordinata in semicirculo ad angulum obliquum reducenda sit (pag. 165*)»

Pag. 283. §. 15. In Ed. I. Figuræ 240. suprascripta sunt hæc: «Sectio nulla, si $r < \pm(R-d)$ vel $> R+d$. Sectio in puncto, si $r = \pm(R-d)$ vel $R+d$. Sectio in 2 punctis, si $r < R+d$, sed non $< \text{nec } \pm(R-d)$ ».

Pag. 284, §. 13 a calce «§. 5.» in Ed. I. «§. 4.» inscripta est.

Pag. 288, §. 1. «§. 6.» in Ed. I. «§. 5.» inscripta est.

Pag. 291 sqq. Significationes Figurarum 252—254. commutavimus, ut partes triangulorum oppositæ similibus literis denotentur.

Pag. 303, §. 9—10. Literæ $\mathfrak{af}d$, $m\mathfrak{f}j$ et $mab\mathfrak{P}$ hic additæ sunt, ne in Figuris nomina circulorum adscribi debeant, ut in Ed. I. Puncta duo horizontis, australe et boreale in Ed. I. literis insignita non sunt.

* In hac editione pag. 214.

*Pag. 309, ¶. 14—16 et Pag. 309, a ¶. ultimo usque ad Pag. 310,
¶. 3 correximus ex Erratis Tom. II. Pag. 387.*

Pag. 310. ¶. 5 a calce. In Ed. I. Figuræ 261. nomina singulorum
punctorum, linearum etc. ascripta sunt.

Ibidem ¶. 6 a calce «§. 2.» in Ed. I. «§. 3.» inscripta est.

Pag. 311, ¶. 13 a calce post «fuerit» delevimus «puncti P».

Pag. 312, ante ¶. 6 a calce delevimus «§. 2.»

*Pag. 313, ¶. 14 «et altitudines P'U, Q'U' punctorum P, Q;» ex
Erratis Tom II. Pag. 376 insertum est.*

Pag. 326. ¶. 3. Post «Scholion» in Ed. I. deest «2.»

Pag. 328, ¶. 6. Literas dies denotantes Bolyai ubique parvos (*abc...*)
scribit.

Pag. 331, ¶. 7—8 correximus ex Erratis Tom. II. Pagg. 387—8.

Pag. 333, ¶. 10. Duo circuli Figuræ 276 in Ed. I. literis magnis
(*C, C'*) insigniti sunt. Ibidem circulus superior Figuræ charta separata
fictus et in centro filo tabulæ affixus est.

Pag. 335, ¶. 1—6. Cyclus solis Gregorianus quatuor tantum sæculo-
rum vere est. — Errores in chronologia alii etiam inveniuntur sed minimi
momenti, ut neque emendatione neque mentione in annotationibus egeant.

Pag. 343, ¶. 9 et 11 a calce et Pag. 350, ¶. 1 correximus ex Erratis
Ed. I. Tom. I. Pag. XC: «Pro *N* non > 18 , dum residuum > 13 , tunc
est addendum 1». In contextu Ed. I. legitur «pro *N* < 18 », «residuum
 > 17 », «addatur 1».

Pag. 344, ¶. II «et erit» scriptum est pro «=».

Pagg. 357—358. Post Recensionem per auctorem ipsum factam in Ed. I. Errata et Supplementa Tomorum I. et II. leguntur. Nos, postquam hæc omnia in opere edendo adhibueramus et in adnotationibus ad locos emendatos attuleramus, cuncta ordine repetere noluimus.

Pag. 361. In Ed. I. Appendicis literæ singulares puncta denotantes literis quæ dicuntur *cursivis* impressæ sunt, sed in libellis nobis relictis manu Ioannis Bolyai scriptis puncta literis qu. d. *fractur* denotantur, quibus etiam pater eius usus est.

Ibidem post ¶. 15. in Ed. I. legitur :

└ denotet perpendicularare
 └ “ angulum.

Nos hæc delevimus, quia pro signo └ usitatiore ┴ utimur, vocabulum «angulum» autem ubique integrum scribimus.

Pag. 368. ¶. ultimo «ſrſ» correximus in «hrs», ut et ipse auctor corredit in libello manu scripto, quo Appendicem lingua Germanica denuo pertractavit.

Pag. 370. ¶. ultimo §. 18. «○ ha» emendavimus ex «○ hf».

Pag. 374. extremæ §. 26. auctor ascripsit exemplari in bibliotheca Academiæ Hungaricæ asservato «cos. quoque necessarium». Videtur in editione quadam altera propositionem de cosinu demonstraturus fuisse, quamquam nihil hic maioris momenti vere desideratur. Revera considerationes, quibus in «Supplemento numeri 31351» Tom. II. Tentaminis ex

$$\sin H : \sin A = 1 : \sin \alpha$$

trigonometria sphærica integra deducitur, et in geometria absoluta valent.

Pag. 376. ¶. 3. Ex libello Germanico auctoris manu scripto «cq» scripsimus pro vitioso «cg» Editionis I.

Pag. 377. ¶. 6. «cn || ab, c'n' || ab» scripsimus pro «cn, c'n' || ab» Ed. I.

Pag. 380. ¶. 8. Ioannes Bolyai ad hunc versum «et 27» ascripsit in exemplari Academiæ Hungaricæ.

Pag. 382. ¶. 4. a calce «§. 30.». scripsimus pro «§. 29.». Ed. I.

Pag. 394. ¶. 5—4. a calce. Hæc per errorem animadvertisuntur. Aream limite superiore certo minorem esse constat. Porro angulus α generaliter dividi in n partes constructione geometrica nequit, etiam si n sub formam Gaussianam cadat.

Pag. 395. In hoc Additamento, quod pagg. 380—383 Tom. II. Ed. I. Tentaminis continetur, delevimus mentionem de paginis huius operis factam, in quibus solum theorematum omnibus nota continentur. Articulum vero secundum in hunc locum reiecumus:

«Pro v positivo radicem positivam \sqrt{v} per $+v$ denotat, et negativam per $-\sqrt{v}$, sed ob defectum signorum (quum vix hæc duo quadamtenus prodierunt), radix positiva ipsius -1 per $\sqrt{-1}$ et negativa per $-\sqrt{-1}$ denotabitur».

Ibidem ¶. 3. Post «Appendicis» delevimus «in tomo primo».

Ibidem ¶. 11. Initium articuli huius in Ed. I. sic legitur:

«Nimirum de axiome Euclideo dictum in tomo primo satis superque est: pro casu, si verum non fuerit \mathcal{E} ».

Pag. 388. ¶. 2. «multiplicantur» scripsimus pro erroneo «dividuntur».

Ibidem ¶. 8. Latus sinistrum formulæ in Ed. I. deest.

Pag. 401. sqq. In his «Additamentis quibusdam ad Tomum I. Latinum» Wolfgangus Bolyai enumerat nomina eorum, qui usque ad hoc

tempus nomina ad librum emendum subsignaverunt, posteriores in Tomo II. enumeraturum sese pollicetur. Tradit posteritati memoriam duorum discipulorum insignium immatura morte sibi ereptorum, quorum unus, Ludovicus JAKAB de Bögöz medicinæ doctor 500 florenos Rhenenses cambiales ad sumptus editionis subsistendos dedit, alter vero, Paulus SZÁSZ de Ilenczfalva formas signorum mathematicorum sculpsit, fuit et fundendas curavit.

Excusat se, quod opus tanta mora interposita foras datur. Exponit porro quædam, quæ ad vocabula mathematica Hungarica, ad Subdivisiones Geometriæ, ad orthographiam Hungaricam spectant, et linguam quæ dicitur universalis ingenio quodam artis mathematicæ et musicæ perito concipiendam et ad perfectionem exædificandam esse.

Nomina eorum, qui posterius nomina subsignaverunt, in Tomo II. leguntur, in pagina, quæ inscribitur Megigért jelentés (quasi Nuntium promissum), quam nos pag. 416 iterum typis imprimi curavimus. Ibidem legimus etiam Ioannem Bolyai centum quatuor florenos Rhenenses cambiales et 54 crucigeros dedisse partim ad sumptus edendæ Appendicis, partim pro exemplaribus integri operis.

Ut in Additamentis legitur, primum 128, deinde 28 exemplaria subsignata erant, et summa, quæ pro duobus Tomis solvebatur, 2 fl. Rh. argenteorum et 30 crucigerorum erat.

ERRATA.

Tom. I. Pag. 449 $\check{\psi}$. ultimo lege $\sqrt[m]{a} \sqrt[m]{a} \sqrt[m]{a} \dots$ pro $\sqrt{a} \sqrt[m]{a} \sqrt[m]{a} \dots$
Pag. 628. $\check{\psi}$. 4 a calce. Pro 112 lege 114.

Ibidem. $\check{\psi}$. 2 a calce. Pro $n \frac{U}{nv} = U$ lege $nv \frac{U}{nv} = U$.

Tom. I. Fig. 17. c. Litera \eth significandum est punctum rectæ \mathfrak{Eg} , pro quo $\mathfrak{Ed} = \mathfrak{Bc}$.

Tom. II. Pars I. Pag. 19. $\check{\psi}$. 6. Pro « \mathfrak{Ji} » lege « \mathfrak{hi} ».

Tom. II. Pars II. Tab. IX. Fig. 41. Ad peripheriam circuli scribe « e » pro « c ».

Tab. XXII. Fig. 99. Ad punctum, ubi rectæ « cj » et « bq » se invicem secant,
scribe « a ».

Appendix Tab. V. Fig. 14. Rectam ad lævam signa literis « or » pro « cr ».

MAGYAR TUDOMÁNYOS AKADÉMIA
KÖNYVTÁRA 778 /1951 N. SZ.

