FÖLDRAJZI TANULMÁNYOK 19

Matematikai és statisztikai módszerek alkalmazási lehetőségei a területi kutatásokban

Szerkesztette

Sikos T. Tamás

AKADÉMIAI KIADÓ, BUDAPEST

1828

Matematikai és statisztikai módszerek alkalmazási lehetőségei a területi kutatásokban

Szerkesztette

Sikos T. Tamás

Földrajzi tanulmányok 19.

Mint azt a nemzetközi szakirodalom is tükrözi, napjainkban egyre kényszerítőbb erővel hat a regionális kutatásokra a matematikai és statisztikai szemlélet terjedése. E könyvnek az a célja, hogy megismertesse az olvasót a matematika és a statisztika egyes módszereivel, hogy az alkalmazó számára példákon keresztül tegye megfoghatóvá az egyes módszerek lényegét, előnyét és hátrányát. Segítséget kíván nyújtani a felhasználó szakembereknek ahhoz, hogy — mintegy eszközként — önállóan tudják alkalmazni e módszereket. Megírásával szerzői minden bizonnyal eredményesen mozdítják elő a matematikai és statisztikai módszerek szélesebb körű elterjedését a regionális kutatásokkal foglalkozó szakemberek körében.
A szerzők között elméleti szakemberek és gyakorlati tervezők, matematikusok, közgazdászok és geográfusok egyaránt szerepelnek, biztosítva, hogy a könyv a sokféle igényt sokoldalúan elégítse ki.

AKADÉMIAI KIADÓ
BUDAPEST

FÖLDRAJZI TANULMÁNYOK

19

FÖLDRAJZI TANULMÁNYOK

19

A MAGYAR TUDOMÁNYOS AKADÉMIA

FÖLDRAJZTUDOMÁNYI KUTATÓ INTÉZETÉNEK

KIADVÁNYAI

Matematikai és statisztikai módszerek alkalmazási lehetőségei a területi kutatásokban

Írták

Dr. Beluszky Pál

Kulcsár Tamás

Dr. Nemes Nagy József

Dr. Piros György

Dr. Rechnitzer János

Dr. Sikos T. Tamás

Dr. Simon Imre

Szerkesztette

Dr. Sikos T. Tamás

AKADÉMIAI KIADÓ, BUDAPEST 1984

Lektorok

Dr. MÉSZÁROS REZSŐ

a földrajztudományok kandidátusa

Dr. NOVÁKY ERZSÉBET

a közgazdaságtudományok kandidátusa

ISBN 963 05 3442 8

Printed in Hungary

Tartalomjegyzék

TÖBBVÁLTOZÓS MATEMATIKAI ÉS STATISZTIKAI MÓDSZEREK

Előszó

A regionális kutatások első átfogó módszertani kézikönyvét jelenti a Földrajzi Tanulmányok e kötete. Mind a gazdaságföldrajzban, mind a regionális gazdaságtanban az elmúlt két évtized során fokozódó kutatási jelentőségre tettek szert a matematikai–statisztikai módszerek. A módszerek alkalmazásakor más tudományágak analóg példáit vettük mintának. Az egyes egyetemeken a geográfus hallgatók nagyon eltérő mértékben és mélységben foglalkoztak a matematikai–statisztikai kutatási módszerek elsajátításával. A néhány sikerült egyetemi jegyzet nem vált közkinccsé.

A regionális gazdaságtan művelői számára 1976-ban Kulcsár Viktor szerkesztésében „A regionális elemzések módszerei" címmel jelent meg egy gyűjteményes kötet. A színvonalas tanulmányok egy része azonban nem volt módszertani jellegű, inkább egyes regionális problémák módszertani megfogalmazását adta; a módszertani fejezet néhány, szervesen össze nem függő, s nem minden esetben gyakran használt módszert mutatott be. Ezért minősíthető jelen tanulmánykötet olyan első magyar publikációnak, amely igen sokféle, egymásra épülő, egymással összefüggő regionális elemzési módszert mutat be, rámutatva az alkalmazás konkrét lehetőségeire is. Elismerés illeti ezért a fiatal szerzőgárdát s a közöttük is legfiatalabb szerkesztőt.

A késedelem eléggé jelentős, ha figyelembe vesszük, hogy a földrajz „mennyiségi forradalma" – amely egekig csapó vitákat váltott ki egyes országokban és nemzetközi fórumokon – 15–20 éve lezajlott. A matematikai és statisztikai módszerek földrajzi alkalmazása persze korábban is ismert volt. O'Reilly a városi vonzásterület-vizsgálatra 1929-ben már gravitációs modellt használt; Christaller geometriai vizsgálattal fogalmazza meg a 30-as évek elején a központi helyek térbeli rendjét; Hägerstrand 1952-ben publikálja innovációhullám elméletét (diffúziós modelljét). Ám a 60-as években az USA-ban a számítógépek tömeges elterjedése lehetővé teszi az elméleti modellek gyakorlati működtetését; lehetségessé válik a regionális vizsgálatok során olyan adat-tömeg feldolgozása, amiről korábban nem is álmodhattunk. A földrajz a korábbinál sokkal egzaktabbá válik, hipotézisei adatszerűen bizonyíthatóak vagy elvethetőek. Az új módszereknek és technikai eszközöknek köszönhetően behatolhatunk az eddig csak leírt térbeli jelenségeket kiváltó folyamatokba, feltárhatjuk általános törvényszerűségeiket. Ez az új lehetőség igen átalakította a földrajz módszereit, vizsgálati irányzatait, de még a tárgyát is.

Az új irányzatok megjelenése szinte szétszakította a geográfiát. Az „új, modern, mennyiségi, elméleti" geográfia (első képviselői fiatalemberek voltak) és a „hagyományos, leíró, empirikus" geográfia hívei szembefordultak egymással, vitáik inkább hevesek, mint termékenyek voltak. A modern geográfia – az USA-n kívül – rövidesen teret nyert Nagy-Britanniában, Skandináviában, a Szovjetunióban; nehezen hatolt be a francia és a német nyelvű geográfia területére.

A kis országok tudománya többnyire a nagy nemzetközi iskolák hatására fejlődik. A magyar geográfiának hagyományosan kevés kapcsolata volt az angolszász iskolákkal – ez is oka volt a késedelemnek. Már kevésbé érthető a szovjet iskolák – főleg a Moszkvai Állami Egyetemen Szauskin professzor és munkatársai és a novoszibirszki Közgazdasági és Ipargazdasági Intézet regionális kutatói – eredményeinek késedelmes megismerése. A „késedelem" kifejezés a mennyiségi módszerek általános elterjedésére vonatkozik, hiszen egy-két kutató mindig akadt, aki igyekezett lépést tartani a nemzetközi színvonallal.

Az elmúlt évtizedekben az is kiderült, hogy a mennyiségi *vagy* empirikus földrajz hamis alternatíva. A korszerű matematikai–statisztikai módszerek alkalmazása eredménytelen maradt, üres formalizmusba fulladt, ha alkalmazóik nem ismerték kellően minőségi értelemben is azt a tárgyat, amelyről adatokat gyűjtöttek, s feldolgoztak. H. Isnard, a neves francia geográfus így intette egy tanítványát: „amidőn elsajátítja az új módszereket, hogy megújítsa, hatékonyabbá tegye, szélesebb pályára helyezze a geográfiát: soha ne feledje, hogy hatalmas eszközökhöz jutott, amelyeket megalapozott földrajzi filozófiával kell uralnia." Én sem tudnék jobb tanácsot adni e kötet olvasóinak.

Enyedi György

Bevezetés

Napjainkban egyre gyakrabban alkalmaznak matematikai–statisztikai módszereket a területi problémák elemzéséhez. Ez mindenképpen örvendetes dolog és arra utal, hogy a különböző matematikai–statisztikai módszerek polgárjogot nyertek kutatásainkban, s hathatós eszközök a területi szakemberek kezében. A számítástechnika gyors fejlődése is segítette a matematikai–statisztikai módszerek szélesebb körű felhasználását.

E könyv célja nemcsak az, hogy megismertesse az Olvasót a matematika és a statisztika egyes módszereivel, hanem az is, hogy képessé tegye a módszerek eszközként való önálló alkalmazására. Könyvünkkel szeretnénk elősegíteni a matematikai–statisztikai módszerek még szélesebb körű terjedését a regionális kutatásokkal foglalkozó földrajzosok, közgazdászok, urbanisták és szociológusok körében.

A könyv két fő részből áll. Az első rész (I. fejezet) a matematikai–statisztika legfontosabb alapfogalmait igyekszik megadni. Olyan kérdéseket kívánunk megvilágítani, mint az alapadatok kezelése, osztályozása, az egyes statisztikai próbák használatának feltételei, továbbá a variancia- és regresszióanalízis fontosabb problémái. Az I. fejezet anyagának összeállításához az is fontos szempont volt számunkra, hogy mi módon tudjuk segíteni (a nem matematikus) az Olvasót a második részben (II – X. fejezet) összegyűjtött eljárások megértéséhez, alkalmazásához (pályaanalízis, faktor- és clusteranalízis, kanonikus korrelációszámítás, shift-analízis, gravitációs modellek, ÁKM-módszer, termelési függvények, játékelméleti rendszerek, gráf elméleti módszerek).

A könyvben szereplő módszereket gyakorlati alkalmazásukban mutatjuk be. Tisztában vagyunk azzal, hogy a területi elemzési módszerek teljes körét nem ölelik fel a kötetben közölt tanulmányok, csupán morzsákat sikerült összeszedni a matematika és a statisztika „terülj-terülj" asztalkájáról.

A könyv anyagának összeállításakor különösen nagy figyelmet szenteltünk a nemzetközi és a hazai irodalomban eddig elért módszertani eredmények ismertetésének. Az egyes fejezeteket részletes irodalomjegyzékkel láttuk el abból az elgondolásból, hogy ezzel is hozzásegítsük a nem matematikus Olvasót a módszerek leírásának könnyebb megismeréséhez, illetve a más területeken szerzett gyakorlati tapasztalatok áttekintéséhez.

Itt szeretnénk köszönetet mondani Enyedi Györgynek azért a biztatásért és segítségért, amivel e könyv létrehozásához hozzájárult.

A szerkesztő

Egyszerűbb matematikai–statisztikai módszerek

I. *Alapfogalmak és egyszerűbb, a területi kutatásokban alkalmazható módszerek*

1. *Alapfogalmak*

1.1. *A statisztika mint módszer*

A társadalomtudós – ami a törvények megfogalmazhatóságát és bizonyíthatóságát illeti – sokszorosan nehezebb helyzetben van a természettudósnál. Először, mivel a gazdaságban, ill. a társadalomban ható törvények főleg sztochasztikus jellegűek, így felismerésük, megfogalmazásuk is nehézségekbe ütközik. Másodszor azért, mivel a társadalomtudósnak nincsen módjában laboratóriumi kísérleteket végezni, csupán az egész bonyolult rendszer megfigyelésére van módja s a változók, tulajdonságok, amelyeket végül is mérni tud, sokfélék, sokszor egymásnak ellentmondó hatás eredői. Harmadsorban pedig azért, mert általában nincs módjában az összes, a kutatás szempontjából érdekes és számba jöhető alanynál (pl. személynél vagy vállalatnál) elvégezni a mérést (kérdezést), s így kénytelen ún. mintát venni, vagyis a számba jöhető alanyoknak csak egy részét bevonni a vizsgálatba.

Ezen nehézségek leküzdésére a statisztika tudománya siet a kutató segítségére. A továbbiakban nem teszünk különbséget statisztika és matematikai statisztika között – szerintünk ez a megkülönböztetés inkább káros, mint hasznos –, az ismertetésre kerülő módszerek egy része ide, más része oda tartozna. A rendelkezésünkre álló szűk terjedelem miatt egyébként sem tudunk matematikai levezetéseket, fejtegetéseket közölni.

E fejezetben célunk az, hogy a bonyolultabb, nehezebben megérthető módszerek olvasása előtt összefoglaljuk az „egyszerűbb", konkrét számítási képlettel megadható módszereket, s felhívjuk a figyelmet e módszerek gyakorlati hasznára. Véleményünk szerint a bonyolultabb eljárások (faktor-, clusteranalízis) használata előtt feltétlenül szükséges az „egyszerűbb" módszerek segítségével megismerkednünk változóink statisztikai tulajdonságaival.

A fenti nehézségek azt is jelentik, hogy a kutató nem elégedhet meg egyetlen változó, egyetlen jellemző mérésével és vizsgálatával, hanem több jellemző vizsgálatát kell elvégeznie, feltárva a közöttük levő kapcsolatokat, struktúrákat, esetleg okokozati összefüggéseket.

Mindezek alapján a kutatónak még a felmérés elvégzése előtt a következőket kell tisztáznia:

a) milyen változókat vonjon be a vizsgálatba vagyis „mit mérjen?" Erre nézve a statisztika kevés segítséget tud nyújtani, itt a kutató saját tapasztalatára, a „megérzésre" kell hogy támaszkodjon.[1]

[1] Bár a szociológiában foglalkoznak olyan kérdésekkel, mint pl. hogyan kell egy kérdőívet összeállítani. Erről részletesebben ld. Cseh-Szombathy–Ferge (1968).

b) Hogyan állítsa össze a mintát, vagyis mely egyedeket vonja be a vizsgálatba?
Miután megtörtént a mérés, a kapott információk további feldolgozását nagyon nagy mértékben befolyásolja az a tény, hogy adataink milyen *mérési szint*hez tartoznak. Ennek tudatosulása azért lényeges, mert a különböző mérési szintek különböző technikák, mutatók használatát engedik meg. Alapvetően négy mérési szintet különböztetünk meg.[2]

„A skálatípusok illusztrálására tekintsünk két objektumot, és jelöljük őket *A*-val és *B*-vel. Legyen X az a változó, amelyik A esetén X_A és B esetén X_B értéket veszi fel.

1. *Nominális (névleges) skála*

A nominális skála csupán megkülönbözteti ezeket az objektumokat; köztük csak az azonosság és különbség viszonyát tételezzük fel. Vagyis A és B-ről csak annyit tudunk mondani, hogy $X_A = X_B$ vagy $X_A \neq X_B$.

2. *Ordinális (rendező) skála*

Az ordinális skála definiálja az objektumok viszonylagos helyét is, megvalósítja az objektumok rendezését. Vagyis azon túl, hogy különbséget teszünk $X_A = X_B$ és $X_A \neq X_B$ között, azt is mondhatjuk, hogy $X_A > X_B$ vagy $X_A < X_B$.

3. *Intervallum skála*

Az intervallum skálánál a különbségek mértékét is értelmezhetjük. Vagyis $X_A >$ $> X_B$ vagy $X_A < X_B$ rendezésen túl azt is mondhatjuk, hogy $X_A - X_B$ egységgel különbözik A a B-től.

4. *Arány skála*

Az arány skála az intervallum skála tulajdonságain túl még értelmezhető kezdőponttal, 0 ponttal is rendelkezik. Vagyis ha $X_A > X_B$, akkor nemcsak azt mondhatjuk, hogy A $X_A - X_B$ egységgel nagyobb, hanem azt is, hogy X_A/X_B-szer nagyobb mint B.

Ez az osztályozás hierarchikus felépítésű, mivel minden skála rendelkezik minden őt megelőző skála tulajdonságaival, így pl. az intervallum skála rendelkezik az ordinális és nominális skála tulajdonságaival is. A nominális és ordinális skálán mért változókat gyakran nevezik kategorikus változónak vagy minőségi változónak, az intervallum és arány skálán értelmezett változókat pedig mennyiségi változóként említik. (Füstös 1977, pp. 25–48.)

A statisztikai módszerek csak nagyon ritkán engedik meg különböző mérési szinten levő változók bevonását ugyanazon technika alkalmazásába. Ezért a vizsgálatokat úgy célszerű elvégezni, hogy az azonos skálatípusú változókat kezeljük együtt. Igaz, van lehetőség a mérési skálák bizonyos átalakítására, ez azonban kívül esik fejezetünk tárgyán. Erről a témáról részletes ismertetést ad Füstös L. (1977).

[2] A mérési szintek ismertetését ld. pl.: Cseh-Szombathy—Ferge (1968), pp. 286—296.

Mindezek után a kutatónak vizsgálata során a következő lépéseket kell elvégeznie:

a) az információ sűrítése – azaz a megfigyelt értékek változónkénti csoportosítása, a változók kevés számmal való jellemzése (ld. 1.2. pont);

b) a változórendszer struktúrájának felfedése – a változók közötti kölcsönös kapcsolatok számszerűsítése, megállapítása (ld. 4. pont);

c) különböző hipotézisek felállítása és ellenőrzése. Alapjában kétféle hipotézis lehetséges: az egyik különféle statisztikai jellemzők értékére vonatkozik, a másik pedig a különböző változók közötti kapcsolatok formájára. Az elsővel a 2. pontban, a másodikkal az 5. pontban foglalkozunk;

d) ha indokolt: bonyolult, többváltozós statisztikai módszerek használata;

e) eredményközlés – esetleg a b)–d) pontok többszöri ismétlése után.

1.2. *Az információ sűrítése*

1.2.1. *Az alapadat mátrix*

Tételezzük fel, hogy egy vizsgálat során p számú változót figyeltünk meg, N számú alanynál (megfigyelési egységnél). Ekkor alapadatainkat egy mátrixba rendezhetjük, amelynek sorai a megfigyelési egységeket jelentik, oszlopai pedig a változókat.

$$X_{(N_p)} = \begin{bmatrix} x_{11} \dots x_{1j} \dots x_{1p} \\ x_{i1} \dots x_{ij} \dots x_{ip} \\ x_{N1} \dots x_{Nj} \dots x_{Np} \end{bmatrix}.$$

Természetesen esetenként lehet ugyanazon vizsgálaton belül az alapadat mátrix más és más, attól függően, hogy melyik többváltozós módszert használjuk, azaz a módszerek feltételrendszerétől, adottságaitól függően válogatnunk kell változóink között.

Néhány megjegyzés az alapadat mátrixhoz:

– A mátrixban nem lehet hiányzó adat. A hiányzó adatok nem pótolhatók 0-val, mert ez a változóra vonatkozó mérés egy konkrét eseményét jelenti, s nem azt, hogy az adatokat nem ismerjük.
– Ha lehetséges, kerüljük a kiugró értékeket (azt a sort, amelyikben jelentkezik, töröljük). Kiugrónak tekinthető az adat, ha az átlagtól való eltérése meghaladja a 4 szórásegységet. (Standardizált értéke nagyobb, mint 4.)
– Az eredmények megbízhatóságát fokozza, ha teljesül az $N \gg p$ egyenlőtlenség.
– A mátrixban nem lehet olyan oszlop (változó), ahol minden érték azonos.
– Az adott vizsgálati módszerhez használt mátrixban ne legyen olyan változó, amely más, szintén szereplő változók lineáris kombinációjaként felírható.

Adatainkat azonban gyakran nem az eredeti formájukban, hanem átalakítva, transzformálva használjuk fel. *A transzformációnak* alapvetően háromféle *célja* *lehet*. Először is *szóráscsökkentés*, a legtöbb módszer ugyanis ilyenkor megbízhatóbb eredményeket ad. Másodszor *az eloszlás megváltoztatása*, azért, hogy egy adott módszert egyáltalán használni tudjunk. Harmadszor pedig egyes transzformációk *a számítási munkát könnyítik meg*. Lássuk most röviden a legfontosabb transzformációkat:

a) *Standardizálás*

Most és a következőkben jelölje a transzformált értéket $X^{(r)}$. Ekkor az eredeti x_{ij} érték standardizáltja:

$$X_{ij}^{(r)} = \frac{x_{ij} - \bar{x}_j}{s_j},$$

ahol $\bar{x}_j$ – a j-edik változó átlaga,
s_j – a j-edik változó szórása.

A standardizálás geometriailag azt jelenti, hogy egyrészt a standardizált változó 0 pontja az eredeti változó átlaga lett, másrészt pedig a standardizált változóhoz tartozó skála beosztásának egysége az eredeti változó szórása.

Legalább intervallumszintű változók esetén használható. Főbb tulajdonságai:
– a változókat „megfosztja" dimenziójuktól,
– a standardizált változó átlaga = 0,
– a standardizált változó szórása = 1,
– nem változtatja meg a változó eloszlását!

Gyakran használt eljárás, mivel a többváltozós módszereket általában standardizált változókhoz dolgozták ki.

b) *Lineáris transzformáció*

$$Y_{ij}^{(r)} = A + BX_{ij},$$

ahol A és B alkalmasan megválasztott konstansok.

Ez a transzformáció a változó eloszlását nem változtatja meg. A számítások megkönnyítése érdekében szokták használni. Előnye az, hogy viszonylag széles körben használható, mivel elég sok módszer érzéketlen a lineáris transzformációval szemben. Ilyenek pl. a korrelációelemzés, lineáris regresszió, a faktoranalízis, a kanonikus korrelációelemzés.

c) *Dichotomizálás*

Csak nominális változó esetén alkalmazható, ha több csoportunk van. Célunk az, hogy ezt a változót helyettesítsük olyan változókkal, amelyek – bár szintén nominálisak – már csak kétosztályúak (alternatív kérdésre válaszolnak). Ennek az az értelme, hogy az ilyen bináris változók a legtöbb többváltozós statisztikai módszerbe bevonhatók, noha e módszerek egyébként az intervallumszintet követelik meg.

Legyen pl. három osztályunk: A, B és C. Ekkor változónkat az alábbi két bináris változóval helyettesíthetjük: A és nem A, ill. B és nem B. Ezek kombinációja már kiadja C két lehetőségét is.

d) *Logaritmus-transzformáció*

$$X_{ij}^{(r)} = \log(x_{ij} + 1).$$

Intervallumszintű változónál alkalmazható, ha minden érték nem-negatív. $(X_{ij} + 1)$-et azért alkalmazzuk, mert log 0 nincs értelmezve, adataink között pedig előfordulhat.

Akkor alkalmazzuk, ha a változó szorzatos hatást mér (pl. köbtartalom mérése). Akkor is *indokolt* ilyen transzformáció, *ha a változó eloszlása „jobbra ferde"*. (Pl. aprózódással, „osztódással" keletkező mennyiséget mér változónk. Röviden szólva, ha a változó szórása arányos a változó átlagával.)

Hatása szóráscsökkentő, az eloszlás szimmetrikusabb lesz, sok esetben sikerül normalizálni vele a változót.

e) *Négyzetgyök-transzformáció*

$$X_{ij}^{(r)} = +\sqrt{X_{ij}}.$$

Akkor használjuk, *ha a változó nagyon aszimmetrikus,* s középértéke a szórásnégyzettel arányos.

Hatása szintén normalizáló, ill. szóráscsökkentő. Természetesen csak intervallumszintű változónál alkalmazhatjuk.

f) *Reciprok-transzformáció*

$$X_{ij}^{(r)} = \frac{1}{x_{ij}}.$$

Csak intervallumszintű változónál alkalmazhatjuk. Használata akkor indokolt, *ha az eloszlás szélsőségesen ferde.* Objektív mérőszámot erre nehéz mondani, a gyakorlatban bevált az, hogy akkor használják, ha a változó szórása az átlag (a várható érték) négyzetével arányos. Ilyen adatok lehetnek pl. sebesség jellegű adatok, vagy a „túlélés" jellegű változók. Általában, ha nagyobb számban van „végtelen" adat, akkor indokolt – a transzformáció a „végtelent" 0-ra alakítja.

Hatása szóráscsökkentő, szimmetrikusabbá teszi az eloszlást. Nem feltétlenül, de esetleg normalizál is.

Meg kell még jegyeznünk a (d – f) transzformációkhoz, hogyha eredetileg normális eloszlású változóra alkalmazzuk ezeket, az eredmény biztosan nem normális eloszlású változó lesz, ezért csak indokolt esetben használjuk őket.

g) *Arcus sinus transzformáció*

$$X_{ij}^{(r)} = \arcsin\sqrt{\frac{X_{ij}}{100}}.$$

Százalékban kifejezett változók esetén használjuk, ha az adatok között gyakran előfordul 15%-nál kisebb, ill. 85%-nál nagyobb érték.

Szóráscsökkentő hatású.

1.2.2. *A változók jellemzése*

A j-edik változót jellemezhetjük pl. az adatmátrix j-edik oszlopának egyszerű lemásolásával, ezt azonban nem tekinthetjük megfelelő módszernek a jellemzéshez. Egyrészt azért, mert áttekinthetetlen, másrészt azért, mert nem tömöríti a változó jellemzését egy vagy két mérőszámba. A továbbiakban ennek lehetőségeivel fogunk foglalkozni. Ezután a j indexet a változó neve mellől mindenütt elhagyjuk.

1.2.2.1. Az adatok osztályozása

Nominális változó

Itt csak azt tudjuk megadni, hogy az egyes kategóriákba, osztályokba hány egyed esett. Jelölje n_i azon egyedek számát, amelyek az i-edik kategóriához tartoznak. n_i neve: gyakoriság. Az $f_i = n_i/N$ relatív gyakoriság pedig azt mondja meg, hogy az adatoknak hány százaléka esett az i-edik kategóriába (pl. $f_i = 0{,}27$ esetén az adatok 27%-a).

Intervallum változó

Ha adataink intervallumszintűnek tekinthetők, akkor is célszerű tömörítés céljából a következő lépéseket tenni:
- az adatok nagyság szerinti sorbarendezése,
- a „kategóriák" – osztályhatárok kijelölése; az osztályközök hossza egyenlő legyen,
- az adatok besorolása a különböző osztályokba, n_i és f_i meghatározása,
- hisztogram (gyakorisági görbe, eloszlás görbe) készítése.

Ezt az utolsó lépést akkor célszerű megtenni, ha szemléltetni is akarjuk adataink megoszlását az adott változó szerint. Úgy készítjük, hogy az egyik koordinátatengelyre az osztályközepeket mérjük fel, a másik tengelyre pedig a hozzájuk tartozó gyakoriságot, ill. relatív gyakoriságot. Ez az ábra tájékoztat bennünket a változó eloszlásáról – mennyire szimmetrikus, mennyire ferde, hány „csúcsa" van stb.

1.2.2.2. A középérték mérőszámai

a) *A modus* (M_o)

Leginkább nominális szintű változókra használjuk (természetesen használható magasabb mérési szinten levő változók esetén is)

$$M_o = \left\{ x_i \,\middle|\, \max_i n_i \right\} = \left\{ x_i \,\middle\|\, \max_i f_i \right\},$$

vagyis szavakkal: *a modus a legnagyobb gyakoriságú érték* (kategória) *az eloszlásban.* Hisztogram alapján a modus az az érték, amelyhez az eloszlásgörbe csúcsa tartozik.[3]

[3] Egyenlő hosszú osztályközöket feltételezve. Nem egyenlő hosszú osztályközöknél a gyakoriságokat korrigálni kell, ld. Köves–Párniczky (1973), p. 171. Még egy megjegyzés: az általunk adott definíció az ún. „nyers modus", ennek korrigálására szintén ld. id. mű., p. 253.

A modus megadásánál elegendő helyi maximumot venni, vagyis ha $f_{i-1} < f_i > f_{i+1}$, akkor ott modus van. Emiatt létezhetnek többmodusú változók (sőt olyanok is, ahol meg sem tudjuk határozni).

A modus *arra ad választ, hogy melyik a változó legvalószínűbb értéke*. Vagyis, ha utólag még egy egyedet bevonunk a vizsgálatba, s meghatározzuk e változó értékét, a legnagyobb eséllyel éppen a modust fogjuk kapni.

A változó jellemzésére ilyen értelemben használható leginkább.

b) *A medián* (M_e)

A medián valóban a középső érték. *Az az érték, amelytől jobbra is* (lefelé is), *balra is* (felfelé is) – *az adattengelyen – éppen a minta fele helyezkedik el.*

A medián tehát pontosan felezi a mintát (a változó eloszlásgörbéje alatti területet a mediánnál húzott vonal felezi).

A mediánhoz hasonló mutatószámok a kvartilisek és a decilisek is.

A *kvartilisek* negyedelik (tehát negyedelik, felezik, háromnegyedelik), *a decilisek* pedig tizedelik a mintát (a második kvartilis és az ötödik decilis megegyezik a mediánnal).

A mediánt általában nem, a kvartiliseket, deciliseket általában különböző egyenlőtlenségi mutatóknál szokták használni. A mediánnak van egy érdekes tulajdonsága: az

$$f(x) = \sum_i |x_i - a|$$

függvény akkor minimális, ha $a = M_e$.

c) *Számtani átlag* ($\bar{x}$)

Legalább intervallumszintű változónál alkalmazhatjuk. A változó gyors, egyetlen számmal való jellemzésére a leginkább alkalmas mutató.

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{N} x_i}{N} = \frac{\sum_{i=1}^{k} n_i x_i}{\sum_{i=1}^{k} n_i},$$

ahol k – a csoportok száma,
n_i – az i-edik csoport gyakorisága; $\Sigma n_i = N$,
N – a minta nagysága.

Itt az n_i-nek lehet más értelmezést is adni. Ebben az esetben n_i-ket *súlyok*nak nevezzük, amelyek az egyes értékek jelentőségét fejezik ki számunkra. Így itt $n_i \neq N$ is előállhat. Az ilyen átlagot súlyozott számtani átlagnak nevezzük, a továbbiakban azonban a képletbeli értelmezést tartjuk meg.

A fenti második képlet osztályba sorolás esetén is alkalmazható. Ekkor n_i az egyes osztályok gyakorisága, x_i pedig az i-edik osztály közepe (alsó és felső határának számtani átlaga).

A számtani átlag tulajdonságai:

– A számtani átlagtól való eltérések összege nulla

$$\sum_i (X_i - \overline{X}) = 0.$$

– Legyen $y_i = A + Bx_i$. Ekkor:

$$\overline{Y} = A + B\overline{X}.$$

Vagyis a számtani átlag ugyanúgy transzformálódik (csak lineáris transzformáció esetén), mint azok az adatok, amelyekből számítottuk.

– Legyen $z_i = x_i + y_i$. Ekkor

$$\bar{z} = \bar{x} + \bar{y},$$

vagyis összegek átlaga egyenlő a megfelelő tagok átlagának az összegeivel.

– Legyen $f(x) = \sum_i (x_i - a)^2$

$f(x)$ akkor lesz minimális, ha $a = \bar{x}$.

d) *Harmonikus átlag* ($\bar{x}_h$)

Szintén intervallumszintű változóknál alkalmazzák.

$$\bar{x}_h = \frac{N}{\sum_{i=1}^{N} \frac{1}{x_i}}.$$

Reciprok-transzformáció esetén használhatjuk, ha ragaszkodunk az eredeti adatokhoz.

e) *Mértani (geometriai átlag)* ($\bar{x}_g$)

$$\bar{x}_g = \sqrt[N]{x_1 x_2 \ldots x_N}.$$

A logaritmus-transzformációval van kapcsolatban.

f) *Négyzetes átlag* ($\bar{x}_q$)

Intervallumszintre

$$\bar{x}_q = +\sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{N} x_i^2}{N}}.$$

A szóródásszámításnál használjuk.

A különböző átlagokra igaz a következő sorrend:

$$\bar{x}_h < \bar{x}_g < \bar{x} < \bar{x}_q.$$

1.2.2.3. A szóródás mérőszámai

A különböző átlagok csak a változó (eloszlás) egy jellemző helyét, értékét adják meg, azt viszont, hogy a változó értékei mennyire tömörülnek e jellemző hely körül, a szóródás különböző mérőszámai mutatják. Ezeket a mutatókat csak intervallumszintű változókra használhatjuk.

a) *A terjedelem* (*R*)

$$R = X_{max} - X_{min}.$$

Nagyon ritkán használjuk, mivel csak két adatra támaszkodik, így a véletlen (az, hogy milyen elemeket vettünk a mintába) erősen befolyásolja.

b) *Interkvartilis félterjedelem (IF)*

$$IF = \frac{K_3 - K_1}{2},$$

ahol K_3 a harmadik, K_1 pedig az első kvartilis.
Általában a mediánnal együtt szokták használni.

c) *Átlagos eltérés* (δ)

$$\delta = \frac{\sum_{i=1}^{N} |X_i - \bar{X}|}{N},$$

vagyis a számtani átlagtól való eltérések abszolút értékeinek átlaga. Az abszolút érték nehezen kezelhető volta miatt ritkán használják, kiszorította a szórás.

d) *Szórás (variancia, kovariancia)*

Az elméleti szórást a következő képlettel definiáljuk:

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{N} (x_i - \bar{X})^2}{N}},$$

vagyis a szórás a számtani átlagtól való eltérések négyzetes átlaga. Ennek négyzete az elméleti variancia (szórásnégyzet):

$$\sigma^2 = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} (x_i - \bar{x})^2.$$

Az elméleti értéket azonban ritkán ismerjük, általában csak a minta alapján tudjuk becsülni. A minta alapján való becslésben azonban a következő képleteket kell használni:[4]

[4] Mivel — statisztikai műszóval — a σ^2 adott képlet torzított becslés (azaz a becslés várható értéke éppen σ^2), míg σ-ra nincs általánosan torzítatlan becslés.

$$S^2 = \frac{1}{N-1} \sum_{i=1}^{N} (x_i - \bar{x}) .$$

Ez a tapasztalati korrigált variancia, míg a tapsztalati korrigált szórás

$$S = \sqrt{S^2}.$$

A gyakorlati számolási munkát megkönnyítendő, még két ekvivalens formulát adunk S^2 számolására:

$$S^2 = \frac{x_1^2 - \bar{x}\sum x_i}{N-1} = \frac{\sum x_i^2 - \frac{(\sum x_i)^2}{N}}{N-1} .$$

Ha osztályközbe sorolás alapján számítjuk a szórást, a megfelelő képlet:

$$S^2 = \frac{\sum f_i (y_i^* - \bar{x})^2}{N-1} - \frac{h^2}{12} ,$$

ahol f_i – az i-edik osztály gyakorisága,
y_i^* – az i-edik osztályközép,
$\bar{x}$ – a minta átlaga,
h – az osztályok (intervallumok) hossza.

Itt a $h^2/12$ tag az ún. Sheppard-korrekció, ami az osztályba sorolásból adódó torzítást csökkenti.[5]

A szórás tulajdonságai:

Lineáris transzformáció esetén, ha $y_i = ax_i + b$, akkor $S_y = aS_x$, tehát csak a szorzást kell figyelembe venni; az $\frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} (x_i - a)^2$ kifejezés akkor minimális, ha $a = \bar{x}$.

A szórás kapcsán kell még egy, a többváltozós statisztikai módszereknél alapvető jelentőségű fogalmat, a kovarianciát ismertetni.
Az x_i és az x_j változók kovarianciája a következő:

$$S_{ij} = \frac{\sum_{k=1}^{N} (x_{ki} - \bar{x}_i)(x_{kj} - \bar{x}_j)}{N-1} = \frac{\sum_{k=1}^{N} x_{ki}x_{kj} - \frac{(\sum x_{ki})(\sum x_{kj})}{N}}{N-1} .$$

A kovarianciák egy $p \times p$ méretű szimmetrikus mátrixba rendezhetők, ahol a főátlóban az S_i^2 varianciák, a többi helyen az S_{ij} kovarianciák állnak. A kovariancia mátrix részletesen kiírva:

[5] Az átlagszámításnál nincs szükség korrekcióra, ezért nem említettük azon a helyen.

$$\underset{(p\times p)}{S} = \begin{bmatrix} S_1^2\ S_{12} \dots S_{1i} \dots S_{1p} \\ S_{21}\ S_2^2 \dots S_{2i} \dots S_{2p} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ S_{i1} \dots\dots S_i^2 \dots S_{ip} \\ S_{pi} \dots\dots S_{pi} \dots S_p^2 \end{bmatrix}.$$

e) *Variációs együttható (relatív szórás) V*

$$V = \frac{S}{\bar{x}},$$

ahol S – a szórás,
$\bar{x}$ – a minta átlaga.

Ezen együttható segítségével olyan esetekben is össze tudjuk hasonlítani a változók szórását, amikor a változókhoz tartozó adatok fizikai dimenziója különbözik.

1.2.2.4. Egyéb egyszerű módszerek

Ha egy változó minden lehetséges értékére (csoportjára, osztályára) meghatározzuk az f_i relatív *gyakoriságokat* $f_i = \frac{n_i}{N}$, akkor azok a változó struktúráját jellemzik, belső arányokat, összetételt fejeznek ki.

Két, egymással valamilyen kapcsolatban álló statisztikai adat hányadosa a *viszonyszám.* A fenti relatív gyakoriság is viszonyszám: megoszlási viszonyszám. Idősoroknál és területi adatoknál jellegzetes a dinamikus viszonyszámok használata. Alapvetően kétféle viszonyszámot számíthatunk. *Bázisviszonyszám* esetén mindig ugyanahhoz az adathoz (pl. évhez) viszonyítjuk a többit, míg *láncviszonyszám* esetén mindig két, „szomszédos” időszakot hasonlítunk össze.

Legyen pl. a statisztikai idősorunk a következő:

$$y_1, y_2, \dots y_{i-1}, y_i, y_{i+1}, \dots$$

Ekkor a bázisviszonyszámok, ha y_1-et választjuk bázisnak:

$$b_i = \frac{y_i}{y_1}; \quad b_{i+1} = \frac{y_{i+1}}{y_1}.$$

A láncviszonyszámok pedig:

$$l_i = \frac{y_i}{y_{i-1}}; \quad l_{i+1} = \frac{y_{i+1}}{y_i}.$$

Két összefüggés:

$$b_k = \prod_{i=1}^{k} l_i \, (l_1 = 1) \text{ és } l_k = \frac{b_k}{b_{k-1}}.$$

A bázisviszonyszámok számításánál a bázis helyes megválasztására kell felhívni a figyelmet – a bázis lehetőleg ne legyen kiugró érték semmilyen irányban sem; leghelyesebb egy minden szempontból átlagos értéket választani bázisul (feltéve, hogy van ilyen).

Szemléltessük az eddig elmondottakat egy példán. Jelentsék a következő adatok a kukorica hektáronkénti termésátlagát „A" megyében:

1977: 48 q; 1978: 53 q; 1979: 42 q; 1980: 48 q; 1981: 54 q.

A fenti adatok egy rövid idősort képeznek, amelyből mind bázis-, mind láncindex számítható. A bázisindexek, ha 1977-et választjuk bázisnak:

1978: 1,10; 1979: 0,87; 1980: 1,00; 1981: 1,12.

Az 1981-es bázisindex azt mutatja meg, hogy a kukorica termésátlaga 12%-kal nőtt 1977-hez viszonyítva „A" megyében. Megjegyezzük, hogy nem lett volna szerencsés sem 1978-at (kiugróan magas a termésátlag), sem 1979-et (kirívóan alacsony a termésátlag) bázisnak választani.

A fenti idősorból a következő láncindexek számíthatók:

1978/77: 1,10; 1979/78: 0,79; 1980/79: 1,14; 1981/80: 1,12.

Mint látható, a láncindexek mindig arra a kérdésre válaszolnak, hogy a közvetlenül megelőző időszakhoz képest milyen változás történt a vizsgált jelenségben. Területi összehasonlításoknál a láncindexek számításának általában nincs értelme (a területi egységeknek általában nincs kötött logikai sorrendjük), a bázisindexek alkalmazása azonban gyakori.

2. *Statisztikai hipotézisek, próbák*

2.1. *Hipotézis és becslés*

Mint már említettük, a kutatónak általában nincsen lehetősége az egész alapsokasággal foglalkozni, hanem kisebb-nagyobb minták alapján dolgozik. Ha a mintavétel során betartotta a szabályokat, azaz valóban véletlen mintát vett, akkor a minta alapján számolt bármilyen érték, mutató (pl. átlag, relatív gyakoriság stb.) szintén valószínűségi változó. Ez érthető, ha meggondoljuk, hogy mintánk esetleges, s egy másik mintából egészen más számértéket is kaphatunk a vizsgált jellemzőre. Ez tehát azt jelenti, hogy az alapsokaságbeli (a tulajdonképpen kutatott) jellemzőt nem ismerjük, s csupán a mintánk alapján mondhatunk róla valamit. Ezek után természetes módon merül fel az alábbi két feladat:

– Ha azt már nem is tudjuk megmondani, hogy mi az alapsokaságbeli jellemző valódi értéke, legalább olyan határokat szeretnénk megadni, amelyek közé az alapsokaságbeli jellemző valóságos értéke nagy (lehetőleg minél nagyobb) valószínűséggel esik. Ezt a feladatot *becslés*nek[6] hívjuk, a megadott intervallumot pedig konfidencia-intervallumnak. (Tehát pl. mondhatjuk, hogy az alapsokaság átlaga 95%-os valószínűséggel az 5,5–15,5 intervallumba esik.)

– Ha már a kutatás megkezdésekor volt egy hipotézisünk, amit ellenőrizni szeretnénk a minta alapján (részben azért is végezzük a vizsgálatot), s viszonylag nagy biztonsággal dönteni arról, hogy a hipotézis helyes volt-e, avagy sem. Ekkor *hipotézisvizsgálat*ról beszélünk.

Mindkét esetben az első lépés az, hogy meghatározzuk a vizsgált jellemző vagy valamilyen függvényének eloszlását (esetleg vissza tudjuk vezetni ismert, könnyen kezelhető eloszlásra).

A *becsléses* esetben ezután olyan (α_1, α_2)-intervallumot keresünk, amely nagy valószínűséggel tartalmazza α valódi, alapsokaságbeli paraméterértéket, vagyis:

$$P(\alpha_1 \leqq \alpha \leqq \alpha_2) = 1 - \varepsilon$$

teljesül, ahol $0 < \varepsilon < 1$. Nyilvánvaló, hogy minél kisebbre választjuk az ε-t, annál nagyobb lesz az (α_1, α_2) intervallum. Az $(1-\varepsilon)\cdot 100\%$-ot megbízhatósági szintnek nevezzük. A gyakorlatban leginkább a 95%-os szint terjedt el, de szoktak használni 99%-os és 90%-os megbízhatósági szinteket is.

A hipotézisvizsgálat, vagy másnéven statisztikai próba, rendszerint valamilyen alkalmasan választott statisztikai függvényhez kapcsolódik, amelynek eloszlását a felállított hipotézis (a nullhipotézis, jele H_0) határozza meg. Ha választunk egy ε valószínűségi szintet, a kérdéses statisztikai függvény eloszlásának ismeretében kiszámítható a függvénynek az ún. kritikus tartománya, ahova az ellenőrzésre szánt hipotézis fennállása esetén csak ε valószínűséggel esik a függvény értéke. A próba elvégzése ezek után a következő gondolatmenetre épül. Kiszámítjuk az adott minta alapján a statisztikai függvény konkrét értékét, s ha az a kritikus tartományba esik, akkor (mivel ennek valószínűsége kicsi: ε) azt mondjuk, hogy mintánk alapján a hipotézisünk nem látszik igaznak; a nullhipotézist elvetjük; míg ha a statisztikai függvény értéke nem esik a kritikus tartományba, akkor azt mondjuk, hogy mintánk alapján $1 - \varepsilon$ valószínűséggel hipotézisünk helyesnek látszik.

Döntésünk (ti., hogy elvetjük vagy megtartjuk-e a nullhipotézist) kétféle módon is hibás lehet. Előfordulhat, hogy a nullhipotézist elutasítjuk, holott az fennáll. Ez az elsőfajú hiba. Másodfajú hibát akkor követünk el, ha elfogadjuk a nullhipotézist, holott az nem áll fenn.

Könnyen belátható, hogy az elsőfajú hiba valószínűsége ε. Így ezt a hibát szabályozni tudjuk, hiszen ε-t nekünk kell megválasztani. Sajnos, a másodfajú hiba valószínűségét nem tudjuk megmondani. Ezért javasoljuk, hogy ahol lehet, ott indirekt bizonyítást, gondolatmenetet használjunk. Nézzük meg ezt egy példán.

Az *A* és *B* közötti kapcsolatot akarjuk kimutatni. Ha most az lenne a nullhipotézis, hogy *A* és *B* között kapcsolat van, akkor ε valószínűséggel mondjuk azt, hogy *A* és *B* függetlenek, holott a valóságban van köztük kapcsolat, és meghatározatlan

[6] Itt most bennünket a becslés csak a konfidencia-intervallumok megadásáig érdekel, s nem foglalkozunk a *becsléselmélet* statisztikailag igen fontos fogalmaival, mint pl. torzítatlan becslés, konzisztens becslés stb. Az e téma iránt érdeklődőnek ajánljuk pl. Vincze 1968, 4. fejezet.

valószínűséggel mondjuk azt, hogy A és B között kapcsolat van, holott a valóságban függetlenek. Míg, ha az a nullhipotézis, hogy A és B függetlenek, akkor ε a valószínűsége annak, hogy nemlétező hatást mutatunk ki, s meghatározatlan annak a valószínűsége, hogy nem mutatunk ki semmit, holott van kapcsolat.

Annak eldöntését, hogy egy konkrét esetben melyik fajta hiba az „elviselhetőbb", a kutatóra kell bíznunk.

A kritikus tartományt általában nem nekünk kell kiszámítanunk – ezeket különböző táblázatokba foglalták. A táblázatok kezeléséhez tartozik még egy fogalom: a *szabadságfok*, amelyen általában a *független összetevők számát* értjük; minden ismertetésre kerülő próbánál meg fogjuk adni a szabadságfok számítási utasítását is.

Összefoglalóan *a hipotézisvizsgálat menete* általában a következő:

– felállítjuk a hipotézist,
– kiválasztjuk a megfelelő statisztikai próbát,
– megállapítjuk a szignifikancia szintet (ε-t),
– végrehajtjuk a számolást,
– meghozzuk a döntést.

A következőkben néhány gyakori, s általunk fontosnak ítélt próbát ismertetünk.

2.2. *Az átlagra (várható értékre) vonatkozó próbák*

2.2.1. *Az u-próba*

Az u próba akkor alkalmazható, ha van egy normális eloszlású változónk, amelynek ismerjük a szórását és a várható értékre (számtani átlagra) vonatkozó hipotézisünket akarjuk ellenőrizni.

A nullhipotézis: $H_0 : \bar{x} = a$.

A statisztikai próbafüggvény: $u = \dfrac{\bar{x} - a}{\sigma} : \sqrt{N}$,

ahol σ – az ismert szórás,
N – a mintaelemek száma.

Ha igaz a nullhipotézis, akkor u eloszlása standard normális, N (0,1).

Ha most választunk egy ε kicsiny valószínűséget, akkor az ehhez tartozó kritikus tartomány:

$$u \leq u_\varepsilon \quad \text{vagy} \quad u \geqq u_\varepsilon,$$

ahol u_ε a következő egyenletből határozható meg:

$$1 - \varepsilon = 2\Phi(u_\varepsilon) - 1,$$

ahol Φ a standard normális eloszlás eloszlásfüggvénye (értékeit ld. a Függelék *I. táblázat*ában).

Példaként: ha $\varepsilon = 0{,}05$, akkor $u_\varepsilon = \pm 1{,}96$. Tehát, ha mondjuk $u = 2{,}13$ adódik, akkor elvetjük a nullhipotézist.

A fentiek alapján az $\bar{x}$-ra konfidencia-intervallum adható: $1 - \varepsilon$ valószínűséggel igaz, hogy a valóságos átlag (az alapsokaság átlaga) az alábbi intervallumba esik:

$$\left(\bar{x} - u_\varepsilon \frac{\sigma}{\sqrt{N}}; \quad \bar{x} + u_\varepsilon \frac{\sigma}{\sqrt{N}}\right).$$

Ha itt u_ε-t egész számnak (1, 2, 3) választjuk, felismerhetjük a szokásos $1\sigma, 2\sigma, 3\sigma$ szabályt, amelyhez a megbízhatósági szintek $(1 - \varepsilon) \cdot 100\%$: 68,26%, 95,44%, 99,73%.

2.2.2. *Egymintás t (Student-)-próba*

Szintén normális eloszlású változónál használhatjuk, de itt a szórást nem kell ismernünk, azt a mintából becsüljük. A várható értékre vonatkozó hipotézisünket akarjuk ellenőrizni.

$$H_0 : \bar{x} = a.$$

A statisztikai próbafüggvény:

$$t = \frac{\bar{x} - a}{S} \sqrt{N}.$$

A nullhipotézis fennállása esetén $t\,(N - 1)$ szabadságfokú Student-eloszlást követ. (A t-eloszlás kritikus értékeit ld. a Függelék *II. táblázat*ában).

Ebben az esetben is adhatunk konfidencia-intervallumot $\bar{x}$-ra, amelynek határai $1 - \varepsilon$ valószínűséggel:

$$\left(\bar{x} - t_\varepsilon \frac{S}{\sqrt{N}}; \quad \bar{x} + t_\varepsilon \frac{S}{\sqrt{N}}\right).$$

Meg kell jegyeznünk, hogy ugyanez a próba bizonyos feltételek mellett alkalmas két minta összehasonlítására. Ebben az esetben vagy az $x_i - y_i$ különbségeknek, vagy az x_i/y_i hányadosoknak kell normális eloszlásúaknak lenni. További feltétel még, hogy a mintáknak összetartozóknak kell lenniök. Ha a feltételek teljesülnek, akkor különbség esetén $a = 0$, hányados esetén $a = 1$ választással végezzük a próbát.[7]

2.2.3. *A kétmintás t-próba*

Két független minta átlagának összehasonlítására szolgál. Feltétel, hogy a változók normális eloszlásúak legyenek, egyforma szórással. Az utóbbi feltételt F-próbával (ld. 2.3.2. pont) szokás ellenőrizni.

[7] Részletesebb tanulmányozásra ajánljuk Hajtman (1971), pp. 154—159.

Álljon az egyik minta x_i elemekből, az elemszám N; a másik minta y_i elemekből az elemszám M.

A nullhipotézis

$$H_0 : \bar{x} = \bar{y}.$$

A próbastatisztika:

$$t = \frac{\bar{x} - \bar{y}}{\sqrt{(N-1)S_x^2 + (M-1)S_y^2}} \sqrt{\frac{NM(N+M-2)}{N+M}}.$$

A szabadságfok: $N + M - 2$.

A t tehát $(N + M - 2)$ szabaságfokú Student-eloszlást követ.

2.2.4. *A d-próba*

A kétmintás t-próbát akkor használhatjuk, ha a két minta szórása megegyezik. Ha azonban az F-próba alapján a két szórás nem egyezik meg, akkor a kétmintás t-próba nem alkalmazható. Egzakt próba nem adható, így a következő közelítést használják (Vincze 1968, p. 131):

$$d = \frac{\bar{x} - \bar{y}}{\sqrt{\frac{S_x^2}{N} + \frac{S_y^2}{M}}}.$$

Itt d közelítően Student-eloszlást követ, f szabadságfokkal, ahol f értéke a következő módon határozható meg: Legyen

$$c = \frac{\frac{S_y^2}{M}}{\frac{S_x^2}{N} + \frac{S_y^2}{M}}; \quad \text{ekkor } \frac{1}{f} = \frac{c^2}{M-1} + \frac{(1-c)^2}{N-1}.$$

Ha f nem egész szám, akkor vehetjük a legközelebbi egész számot. d_ε értékét szintén a Student-eloszlás táblázatából kell kikeresni.

2.2.5. *Többváltozós várható értékvizsgálat — egymintás Hotelling-próba*

Többváltozó esetén rendelkezünk az $\bar{x}_j$ átlagokkal ($j = 1, \ldots, p$), valamint mindegyik változóhoz egy hipotetikus a_j értékkel. Szeretnénk megvizsgálni, hogy a változók átlagai mennyire felelnek meg hipotetikus értékeiknek. A változók normális eloszlást követnek, szórásukat nem ismerjük, azokat a mintából becsüljük. Természetesen végezhetnénk minden változóra külön-külön egymintás t-próbát, ez ellen azonban két érvet is felhozhatunk. Az egyik az, hogy ebben az esetben nem tudnánk figyelembe venni a változók közötti kapcsolatokat, a másik pedig az, hogy a sok egymásutáni próba miatt mindig megnő az elsőfajú hiba veszélye.

A nullhipotézis: $H_0 : \bar{x} = a$.

A próba során előbb meghatározzuk a $d = \bar{x} - a$ eltérésvektort:

$$d = \begin{bmatrix} d_1 \\ \vdots \\ d_j \\ \vdots \\ d_p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{x}_1 - a_1 \\ \\ \bar{x}_j - a_j \\ \\ \bar{x}_p - a_p \end{bmatrix},$$

majd kiszámítjuk a Hotelling-féle T^2 értékét:

$$T^2 = Nd^* S^{-1} d,$$

ahol d^* – a d vektor transzponáltja,

S^{-1} – az S kovariancia mátrix inverze.

Ezután a T^2-et F eloszlásúvá alakítjuk:

$$F = \frac{N-p}{(N-1)p} \cdot T^2.$$

Itt a számláló szabadságfoka $= p$, a nevező szabadságfoka $= N - p$. Az F_{ε} táblázati értéket is eszerint kell kikeresni. Az inverz számítás miatt a gyakorlatban inkább számítógéppel használható.

2.2.6. *Két átlagvektor összehasonlítása – kétmintás Hotelling-próba* (Sváb 1979, p. 43).

Feltételeiben az egyváltozós eset d-próbájának megfelelője. (Két független mintánk van p számú változóra, N, ill. M elemszámmal.) A próba alkalmazásával két minta középértékvektorának ($\bar{X}$ és $\bar{Y}$) az eltérését tesztelhetjük:

$$H_0 : \bar{x} = \bar{y}.$$

Először meghatározzuk az eltérésvektort:

$$d = \begin{bmatrix} d_1 \\ \vdots \\ d_p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{x}_1 \\ \\ x_p \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \bar{y}_1 \\ \\ y_p \end{bmatrix},$$

majd a D^2 általánosított távolságot:

$$D^2 = d^* \bar{S}^{-1} d,$$

ahol $\bar{S}^{-1}$ az X és Y alapadat mátrixokból számított átlagos kovariancia mátrix inverze. Az átlagos kovariancia mátrix meghatározása

$$\bar{S} = \frac{(N-1)S_x + (M-1)S_y}{N+M-2}.$$

Ezután az F próbastatisztika:

$$F = \frac{N+M-p-1}{(N+M-2)p} \cdot \frac{NM}{N+M} D^2.$$

Itt a számláló szabadságfoka p, a nevezőé $= N + M - p - 1$. Az F_ε értéket is e szerint kell kikeresni a táblázatból.

2.3. *A varianciára (szórásnégyzetre) vonatkozó próbák*

Mivel szórásra nincs, a varianciára viszont létezik torzítatlan becslés, ezért a statisztikai próbák is ez utóbbira vonatkoznak.

2.3.1. *Konfidencia-intervallum a varianciára*

Ha normális eloszlású változónkra számolt varianciára konfidencia-intervallumot akarunk adni, akkor erre a célra egy speciálisan készített χ^2-táblázatot használhatunk fel (értékeit ld. a Függelék *III. táblázat*ában). Ebben a táblázatban minden ε-hoz két χ^2 érték is tartozik: egy alsó határ $(\underline{\chi}^2)$ és egy felső határ $(\bar{\chi}^2)$. A szabadságfok $N - 1$ (Campbell 1974, pp. 144–145).

A mintából számított variancia (S^2) alapján az alapsokaság valódi varianciája $(1 - \varepsilon)$-valószínűséggel az alábbi határok közé esik:

$$\text{alsó határ: } \frac{S^2}{\bar{\chi}^2}, \text{ felső határ: } \frac{S^2}{\underline{\chi}^2}.$$

Lássunk egy számpéldát.

Legyen egy 10 elemű mintánk, s e minta alapán $S^2 = 12{,}9$. A táblázatban $\varepsilon =$ $= 0{,}05$ esetén a 9 szabadságfoknál talált értékek: $\underline{\chi}^2_{0,05} = 2{,}70$ és $\bar{\chi}^2_{0,05} = 19{,}02$. Most $12{,}9/19{,}02 = 0{,}6782$ és $12{,}9/2{,}70 = 4{,}7778$. Így tehát az alapsokaság valódi varianciája 95%-os valószínűséggel a (0,6782, 4,7778) intervallumba esik.

Ezúton lényegében a szórásra is nyerhetünk konfidencia-intervallumot. Jelen esetben az alapsokaság szórása 95%-os valószínűséggel eleme a ($\sqrt{0{,}6782} = 0{,}82$; $\sqrt{4{,}7778} = 2{,}19$) intervallumnak.

Ilyen számításokat ritkán végzünk, mégis fontosnak tartottuk szerepeltetését. Véleményünk szerint ugyanis fontos azt tudni, hogy egy olyan jellemző, amit a számításaink során s a legtöbb próbánál is állandóan használunk, mintegy erre támaszkodunk, mennyire megbízható; valódi értéke milyen tág határok között mozoghat. Nyilvánvalóan jóval óvatosabban kell kezelnünk számításaink eredményét, ha abban olyan szórás szerepel, amely pl. a (3; 25) intervallumba eshet, mint olyan szórás esetén, ahol ez az intervallum (0,6 ; 2).

2.3.2. *Az F-próba*

Az F-próba azt vizsgálja, hogy két normális eloszlású változó varianciája lehet-e ugyanannak az elméleti varianciának a becslése. Vagyis nullhipotézisünk az, hogy a két variancia megegyezik.

Legyen két mintánk, az egyik N_1 elemű, a másik N_2. Indexeljük úgy őket, hogy a nagyobbik variancia kapja az 1-es, a kisebbik a 2-es indexet. Ekkor a döntés alapja:

$$F = \frac{S_1^2}{S_2^2}.$$

Itt a számláló szabadságfoka $N_1 - 1$, a nevezőé $N_2 - 1$, F értéke pedig $N_1 - 1$, $N_2 - 1$ paraméterű F-eloszlást követ. (Az F eloszlás kritikus értékeit ld. a Függelék *IV. táblázat*ában.) Ha $F > F_\varepsilon$, akkor a nullhipotézist elvetjük.

2.3.3. *Több szórás egyezésének vizsgálata — Bartlett-próba*

A próba akkor használható, ha több egymástól független normális eloszlású minta varianciájáról meg akarjuk állapítani, hogy egyformák-e.

Legyen k darab normális eloszlású mintánk, az elemszámokat jelöljük N_i-vel ($i = 1, \ldots k$). Legyen $f_i = N_i - 1$ és $\sum_{i=1}^{k} f_i = f$. Az egyes varianciákat jelöljük S_i^2-vel. Legyen továbbá:

$$S^2 = \frac{1}{f} \sum_{i=1}^{k} f_i S_i^2.$$

Nullhipotézisünk az, hogy a varianciák megegyeznek. Bartlett kimutatta, hogy a

$$K^2 = \frac{2,3026}{c}\left(f \lg S^2 - \sum_{i=1}^{k} f_i \lg S_i^2\right)$$

közelítően $k - 1$ szabadságfokú χ^2-eloszlást követ (a χ^2-eloszlás értékeit ld. a Függelék *V. táblázat*ában). A közelítés akkor jó, ha minden minta legalább négyelemű. A c paramétert az alábbi képlettel definiáljuk:

$$c = 1 + \frac{1}{3(k-1)}\left(\sum_{i=1}^{k} \frac{1}{f_i} - \frac{1}{f}\right).$$

2.3.4. *Kovariancia mátrixok összehasonlítása*

Több, egymástól független mintánk van, sorra $N_1, \ldots N_k$ elemszámmal. Mindegyik mintában ugyanazt a p számú változót figyeltük meg, mindegyik változó normális eloszlású, s mindegyik mintára elkészítettük az S_i kovariancia mátrixokat. Ha a nullhipotézis igaz, akkor a

$$B = \sum_{i=1}^{k}\left[(N_i - 1)\ln\frac{|\bar{S}|}{|S_i|}\right] = 2,3026 \cdot \sum_{i=1}^{k}\left[(N_i - 1)\lg\frac{|\bar{S}|}{|S_i|}\right]$$

$(k - 1)p(p + 1)/2$ szabadságfokú χ^2-eloszlást követ.

A képletben ln a természetes alapú logaritmus, lg a 10-es alapú logaritmus jelölése, $|S|$ pedig mátrix determinánst jelent. $\bar{S}$-sel az összevont, átlagos kovariancia mátrixot jelöltük.

$$\bar{S} = \frac{\sum_{i=1}^{k} (N_i - 1) S_i}{\sum_{i=1}^{k} N_i - k}.$$

A próbát $k > 3$ esetén, a determináns-számítások bonyolultsága miatt már csak számítógéppel érdemes végezni.

2.4. *Egyéb próbák*

2.4.1. *Konfidencia-intervallum egy esemény ismeretlen p valószínűségére*

Ismeretes, hogy egy esemény valószínűségét a $p' = k/N$ relatív gyakorisággal becsüljük, ahol k az illető esemény bekövetkezéseinek száma. A gyakoriság (k) binomiális eloszlást követ, azonban elegendően nagy N esetén a

$$\sqrt{N} \frac{p' - p}{\sqrt{p(1-p)}}$$

kifejezés már közelítőleg standard normális eloszlású, s ennek alapján meghatározható a konfidencia-intervallum alsó (p_1), ill. felső (p_2) határa is:

$$p_1 = \frac{p' + \frac{\lambda^2}{2N} - \frac{\lambda}{\sqrt{N}} \sqrt{p'(1-p') + \frac{\lambda^2}{4N}}}{1 + \frac{\lambda^2}{N}}, \quad \text{ill.}$$

$$p_2 = \frac{p' + \frac{\lambda^2}{2N} + \frac{\lambda}{\sqrt{N}} \sqrt{p'(1-p') + \frac{\lambda^2}{4N}}}{1 + \frac{\lambda^2}{N}},$$

ahol λ a következő egyenletből számolható (mint az u-próbánál u_ε):

$$2\Phi(\lambda) - 1 = 1 - \varepsilon,$$

ahol $\Phi(\lambda)$ a standard normális eloszlás eloszlásfüggvényét jelenti. Ha N már olyan nagy, hogy $1/N$ elhanyagolható $1/\sqrt{N}$-hez képest, akkor egyszerűbb szerkezetű közelítés adható p_1-re és p_2-re:

$$p_1 \approx p' - \lambda \sqrt{\frac{p'(1-p')}{N}}; \quad p_2 \approx p' + \lambda \sqrt{\frac{p'(1-p')}{N}}.$$

Példánk legyen $N = 100$ és $p' = 0{,}36$. Ha 90%-os biztonsággal akarjuk lefedni p-t, akkor λ meghatározása:

$$2\Phi(\lambda) - 1 = 0{,}9\,,$$

$$\Phi(\lambda) = 0{,}95\,.$$

A standard normális eloszlás táblázatából leolvasható, hogy $\lambda = 1{,}64$. Ha most a konfidencia-határokat a bonyolultabb úton adjuk meg, akkor

$$p_1 = \frac{0{,}36 + \frac{1{,}64^2}{200} - \frac{1{,}64}{\sqrt{100}}\sqrt{0{,}36(1-0{,}36) - \frac{1{,}64^2}{400}}}{1 + \frac{1{,}64^2}{100}} = 0{,}2859$$

és

$$p_2 = 0{,}4113;$$

míg ha a nagy N értékre vonatkozó közelítést alkalmazunk, akkor $p_1 = 0{,}2813$ és $p_2 = 0{,}4387$.

A gyakorlatban szintén nagyon ritkán használt próba. Elsősorban megoszlási viszonyszámok megbízhatóságának vizsgálatára ajánljuk, de felhasználható kontingencia-táblák elemeinek korrigálására, megbízhatóságuk vizsgálatára is.

2.4.2. *Illeszkedés(eloszlás)-vizsgálat — χ^2-próba*

A statisztikai próbák alkalmazásának egyik jellegzetes esete az, amikor egy változóról azt akarjuk eldönteni, hogy a minta alapján tekinthető-e adott típusúnak a változó eloszlása vagy sem. Mivel egyes statisztikai módszerek kikötik, hogy az alkalmazott változó eloszlása milyen legyen, így ennek eldöntésére elég gyakran alkalmazzuk ezt a próbát.

A χ^2-próba alkalmas mind folytonos, mind diszkrét eloszlás vizsgálatára, *alkalmazásának egyetlen feltétele a nagy mintaelemszám* (legalább 10 elemű legyen a minta).

Tiszta illeszkedésvizsgálatról beszélünk, ha feltevésünk egyetlen, teljesen meghatározott elméleti eloszlásfüggvényre vonatkozik, s becsléses illeszkedésvizsgálatról, ha a hipotézis csupán az eloszlás jellegét adja meg, amelynek paramétereit még a mintából kell becsülni.

A próbát a következőképpen hajtjuk végre.

Osszuk fel a valószínűségi változó értelmezési tartományát r intervallumra (folytonos eloszlás esetén lehetőleg egyenlő hosszúságú). Jelölje az i-edik intervallumba eső mintaelemek számát f_i. Nyilván $\sum_{i=1}^{r} f_i = N$.

Végezzük úgy a felosztást, hogy minden i-re $f_i \geq 10$ teljesüljön — akkor ugyanis a nagy minta követelményét teljesítettnek vehetjük. Ezután az elméleti eloszlásfüggvény alapján meghatározzuk (becsléses esetben ennek paramétereit a mintából becsüljük) minden intervallumra az adott intervallumba esés p_i valószínűségét. Ekkor nyilván Np_i az i-edik intervallum elméleti eloszlása alapján várható gyakoriságát adja meg, ha a minta nagysága N.

A próbastatisztika most már: $\chi^2 = \sum_{i=1}^{r} \frac{(f_i - Np_i)^2}{Np_i}$.

Ez a mennyiség tiszta illeszkedésvizsgálat esetén $(r - 1)$ szabadságfokú, becsléses esetben $(r - s - 1)$ szabadságfokú χ^2 eloszlást követ (ld. a Függelék *V. táblázatát*), ahol s a mintából becsült paraméterek száma.

Az eloszlásra vonatkozó hipotézisünket elvetjük, ha $\chi^2 > \chi^2_\varepsilon$, ahol χ^2_ε az $(1 - \varepsilon)$ valószínűségi szinthez tartozó táblázati érték.

Látható, hogy a fentebb ismertetett próba igen általános, bármilyen eloszlásra megfelel. Természetesen dolgoztak ki speciális próbákat egyes eloszlások vizsgálatára (pl. a normális és az exponenciális eloszlásra), ezekre azonban helyhiány miatt nem térhetünk ki.

A χ^2-próba fenti alkalmazása a gyakorlat szempontjából teljes mértékben kielégítő.

2.4.3. *Homogenitás-vizsgálat — χ^2-próba*

A területi kutatásokban igen fontos annak vizsgálata, hogy két megfigyelési sorozat, pl. két területi egység független mintái azonos eloszlású sokaságból származnak-e az adott változó szempontjából. Másképpen fogalmazva: e két területi egységben az adott változóra ugyanazon viselkedési jellegzetességek érvényesek-e, vagy sem. Ennek eldöntésére szolgál a homogenitásvizsgálat.

A próba feltétele a nagy mintaelemszám, mindkét mintában.

A nullhipotézis az, hogy a két minta azonos eloszlású sokaságból származik.

Osszuk fel mindkét mintát ugyanolyan csoportokra, a csoportok számát jelölje r. Legyen u_i az i-ik intervallumba eső egyik minta elemeinek száma és v_i az ugyanabba az intervallumba eső másik minta elemeinek a száma ($\Sigma u_i = N$, $\Sigma v_i = M$). Ekkor az

$$\chi^2 = N \cdot M \sum_{i=1}^{r} \frac{1}{u_i + v_i} \left(\frac{u_i}{N} - \frac{v_i}{M} \right)^2$$

$(r - 1)$ szabadságfokú χ^2-eloszlást követ.

A próba végrehajtása a fentiekből következik.

2.4.4. *Mann–Whitney-próba*[8]

Sok esetben két minta összehasonlítására használnánk a kétmintás t-, illetve d-próbát, azonban a normalitási feltétel (amit pl. illeszkedésvizsgálattal ellenőrizhetünk) nem teljesül. Ilyen esetben használhatjuk a Mann–Whitney-próbát, sőt ez a próba alkalmas ordinális mérési szinten levő változó kezelésére is.

A nullhipotézis a várható értékek egyezése, a próba során azonban nem készül becslés a várható értékre. További előnye a próbának, hogy kis minták esetén is

[8] Nevezik Wilcoxon-próbának is. Ld. Vincze (1968), p. 155.

használható. Legyen a két mintánk N_1 és N_2 elemszámú. Készítsünk együttes rangsort az $N = N_1 + N_2$ elemszámú mintából (a rangsorolást általában a legkisebb elemnél kezdjük). Ezután meghatározzuk az egyes mintákhoz tartozó rangszámösszegeket, R_1-et és R_2-t. Ezután a választott ε-szinthez kikeressük az N_1 és N_2-höz tartozó szignifikanciahatárokat (R_a és R_f). (A Mann–Whitney-próba értékeit ld. a Függelék *VI. táblázat*ában.) Ha R_1 az (R_a, R_f) intervallumba esik, akkor a hipotézist elfogadjuk, ha a határra, ill. kívülre esik, akkor a hipotézist elvetjük.

Nézzünk a próba lefolytatására egy példát; legyen a két minta:

I. minta	5	4	8	11	6	14	$N = 6$
II. minta	11	9	11	13	8		$N = 5$.

A rangszámok:

I. minta	2	1	4,5	8	3	11	$R_1 = 39{,}5$
II. minta	8	6	8	10	4,5		$R_2 = 36{,}5$.

Itt a két 4,5-es és a három 8-as érték az ún. kapcsolt rangok miatt került kiosztásra. Az egyesített rangsor 4. és 5. helyét ugyanis nem tudtuk egyértelműen meghatározni az egyforma mintaértékek miatt. Ezért mind a kettőhöz a $(4 + 5)/2 = 4{,}5$ rangszámot rendeltük. Ugyanígy jártunk el a három 11-es érték esetén is.

Most a táblázatban az $N_1 = 6$ és $N_2 = 5$ sor, ill. oszlop találkozásánál $R_a = 24$, $R_f = 48$, az $\varepsilon = 0{,}05$ táblát használva. Így az eltérés nem szignifikáns, a nullhipotézist megtartjuk.

Nagy minták esetén az R_1 rangszámösszeg normális eloszlást követ, a várható értéke:

$$\bar{R}_1 = \frac{N_1(N_1 + N_2 + 1)}{2}$$

és a szórása:

$$\sigma_{R_1} = \sqrt{\frac{N_1 N_2 (N_1 + N_2 + 1)}{12}}.$$

Így az $(R_1 - \bar{R}_1)/\sigma_{R_1}$ már standard normális eloszlást követ, tehát a további vizsgálathoz elegendő a normális eloszlás táblázata (ld. Függelék *I. táblázat*).

A mintát nagynak vehetjük, ha N_1 és N_2 egyaránt nagyobb 20-nál, bár a próba táblázata ennél nagyobb értékeket is tartalmaz, az ilyen táblázati értékek természetesen már normális eloszlással való közelítés útján születtek.

2.4.5. *Kruskal–Wallis-próba*

Az előző próba többmintás változata. Alkalmazásának feltételei ugyanazok. A nullhipotézis tehát az, hogy a minták átlagai (középértékei) megegyeznek.

Jelöljük az összehasonlítandó minták számát r-rel. A minták elemszámai legyenek $N_i - k$. Így $\sum_{i=1}^{r} N_i = N$. Ezután az összes minták elemeiből egyetlen rangsort képezünk, s az így adott rangszámokat mintánként összegezzük. Jelölje R_i az i-edik minta rangszámösszegét. Ekkor a

$$H = \frac{12}{N(N+1)} \sum_{i=1}^{r} \frac{R_i^2}{N_i} - 3(N+1)$$

változó $(r - 1)$ szabadságfokú χ^2-eloszlást követ. A szignifikancia megállapítása tehát a χ^2-táblázatból történik.

Ha a próba során a nullhipotézist elvetettük, akkor joggal merül fel az a kérdés, hogy mely minták különböznek jelentősen. Ilyenkor különböző minta-összeállítások mellett ugyanezen próba ismétléseivel kereshetjük a választ.

2.5. *Megjegyzés*

Szűkre szabott áttekintésünk természetesen nem lehetett teljes. Még nagyon sok egyéb próba létezik, úgy érezzük azonban, hogy a legfontosabb, a leginkább használható próbákat bemutattuk, különös tekintettel a területi kutatásokban igen fontos többmintás eljárásokra.

Természetesen a későbbiekben a bemutatott módszerekhez kapcsolódva, amenynyiben szükséges, még fogunk ismertetni újabb próbákat.

3. *Varianciaanalízis*

E módszer alapgondolatához kétféle, egyaránt természetesnek tűnő módon is eljuthatunk.

Egyrészt természetes módon adódik ez a módszer a két mintás t-próba általánosításaként – itt több minta esetén vizsgáljuk azt a hipotézist, hogy a minták azonos alapsokaságból valók-e – átlagaik megegyeznek. Ha igaz ez a kiinduló hipotézis, akkor a közös alapsokaság közös varianciájára becslést készíthetünk. Mégpedig a módszer szerint két vagy több, egymástól független becslést készítünk, s utána megvizsgáljuk, hogy statisztikailag megegyeznek-e. Meg kell hogy egyezzenek, hiszen ugyanazon elméleti paraméter becslései. Ha mégsem egyeznek meg, azaz eltérésük szignifikáns, akkor elvetjük a minták azonosságára vonatkozó hipotézisünket, a minták között különbség van.

A másik gondolatmenet szerint egy intervallum változó és egy (vagy több) nominális változó közötti kapcsolat elemzését végezhetjük varianciaanalízis segítségével. Az intervallum változó megfigyelt értékeit a nominális változó lehetséges csoportjaiba soroljuk, s azt vizsgáljuk, hogy az így kialakított részminták között van-e szignifikáns különbség. Ha igen, akkor azt mondhatjuk, hogy az intervallum változó függ a nominális változótól. Itt most a teljes minta varianciáját bontjuk fel két összetevőre: egy csoportokon belüli és egy csoportok közötti varianciára. Ha ez a két variancia szignifikánsan eltér egymástól, akkor elvetjük azt a kiinduló hipotézisünket, hogy a nominális változó nincs kapcsolatban az intervallum változóval.

E módszer alkalmazásának két feltétele van. Az egyik az, hogy az intervallum változó eloszlása normális legyen (ez illeszkedésvizsgálattal ellenőrizhető), a másik pedig az, hogy a mintákon (csoportokon) belüli varianciák azonosak legyenek. Ez utóbbit Bartlett-próbával ellenőrizhetjük.

E módszernek éppen a területi kutatások szempontjából van nagy jelentősége. Itt ugyanis természetes módon adódnak a területi egységekre vonatkoztatott különálló minták. Egy ilyen vizsgálati kérdés lehet például: van-e különbség adott típusú szakmunkások különböző területi egységeken kapott bére között?

3.1. *Egyszempontos varianciaanalízis*

Ekkor csak egyetlen nominális változó hatását vizsgáljuk az intervallum változóra. Legyen a nominális változó csoportjainak száma (a minták száma) k, a minták elemszámát jelöljük N_i-vel, $\sum_{i=1}^{k} N_i = N$. Az intervallum változó i-edik mintabeli értékeit jelöljük x_{ij}-vel ($j = 1, \dots N_i$). Az egyes minták átlagát jelöljük $\bar{x}_i$-vel:

$$\bar{x}_i = \frac{1}{N_i} \sum_{j=1}^{N_i} x_{ij} \quad (i = 1, \dots k).$$

Az összesített átlagot pedig jelölje $\bar{\bar{x}}$:

$$\bar{\bar{x}} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{k} N_i \bar{x}_i .$$

Az átlagoktól való eltérésnégyzet-összegekre igaz a következő felbontás:

$$\sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{N_i} (x_{ij} - \bar{\bar{x}})^2 = \sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{N_i} (x_{ij} - \bar{x}_i)^2 + \sum_{i=1}^{k} N_i(\bar{x}_i - \bar{\bar{x}})^2.$$

Jelöljük a bal oldali négyzetösszeget Q-val, a jobb oldaliakat sorrendben Q_2-vel és Q_1-gyel. Ekkor lényegében előttünk áll a szórásnégyzet (variancia) felbontása.

Lényegében a következő modellt vizsgáljuk: az egyes mintaelemek felírhatók úgy, mint a közös (egész mintabeli) elméleti átlag (jelölése u) plusz az egyes minták hatása (a_i) + véletlen hibatag (ε_{ij}):

$$x_{ij} = u + a_i + \varepsilon_{ij} ,$$

ahol az ε_{ij} hibatagok normális eloszlású, független, zéró várható értékű és szórású valószínűségi változók.

Most tulajdonképpen azt a hipotézist vizsgáljuk, hogy minden a_i egyforma-e? Ez a fentebbi szórásfelbontás képlet segítségével történik, mégpedig úgy, hogy mintabeli adataink alapján kiszámítjuk a kétféle tapasztalati varianciát.

A számítás menete:

Szóródás oka	Négyzetösszeg	Szabadságfok	Tapasztalati variancia
Csoportok között	$Q_1 = \sum_{i=1}^{k} N_i(\bar{x}_i - \bar{\bar{x}})^2$	$k-1$	$S_1^2 = \frac{Q_1}{k-1}$
Csoportokon belül	$Q_2 = \sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{N_i} (x_{ij} - \bar{x}_i)^2$	$N-k$	$S_2^2 = \frac{Q_2}{N-k}$
Teljes	$Q = \sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{n} (x_{ij} - \bar{\bar{x}})^2$	$N-1$	–

Ezután F-próbát végzünk:

$F = \frac{S_1^2}{S_2^2}$, a számláló szabadságfoka $k-1$, a nevezőé $N-k$, vagyis teszteljük, hogy a csoportok közötti eltéréseket mérő S_1^2 szignifikánsan nagyobb-e, mint a csoportokon belüli ingadozásokat mérő S_2^2, mivel az utóbbiakat csak a véletlen okozza. A próbának kétféle eredménye lehet:

I. eset: $F < F_\varepsilon$

Ebben az esetben a nullhipotézist elfogadjuk, vagyis minden a_i-t egyformának tekintünk.

Ilyenkor azt mondjuk, hogy a nominális változó nincs hatással az intervallum változóra – a két változó független.

II. eset: $F > F_\varepsilon$

Ekkor a nullhipotézist elvetjük, vagyis nem minden a_i egyforma. Szükség lehet ilyenkor az egyes $a_i - k$, ill. egyes $a_i - a_\varepsilon$ különbségek becslésére. Ezekre az alábbi konfidencia-intervallumok adhatók:

$$\bar{x}_i - t_\varepsilon \frac{S_2}{\sqrt{N_i}} < a_i \leqq \bar{x}_i + t_\varepsilon \frac{S^2}{\sqrt{N_i}},$$

ahol t_ε az $N-k$ szabadságfokú Student-eloszlás táblázati értéke. Ebben az esetben a kapcsolat szorosságát is mérhetjük a következő korrelációs együtthatóval (interclass correlation):

$$r_i = \frac{S_1^2 - S_2^2}{S_1^2 - (L-1)S_2^2},$$

ahol
$$L = \frac{1}{k-1}\left(\sum_{i=1}^{k} N_i - \frac{\sum_{i=1}^{k} N_i^2}{\sum_{i=1}^{k} N_i}\right).$$

E korrelációs együttható a $\left(\frac{-1}{L-1}, +1\right)$ határok közé esik, amit az elemzéseknél nem szabad figyelmen kívül hagyni.

Hogy a számítási sémát szemléltessük, bemutatunk egy rövid példát.

Vizsgáljuk meg, van-e különbség az esztergályosok bére között attól függően, hogy hol, az ország mely területén dolgoznak. Kiindulásként rendelkezésre áll 100 esztergályos béradata Budapestről, 80 Baranya megyéből, 120 pedig Borsodból. Tehát három mintánk van ($k = 3$) és a minták elemszáma $N_1 = 100$, $N_2 = 80$, $N_3 = 120$. Összesen $N = 300$ esztergályost kérdeztünk meg. Nyilván könnyen kiszámolható a pesti esztergályosok átlagbére ($\overline{X}_1$) éppúgy, mint a baranyaiaké ($\overline{X}_2$) és a borsodiaké ($\overline{X}_3$). Mind a 300 adat felhasználásával elkészíthető a vizsgálatba bevont esztergályosok átlagbére ($\overline{X}$).

Most Q_1 a területek átlagainak az összminta átlagától való eltéréseinek négyzetösszegét tartalmazza (vagyis a pesti átlagnak az összminta átlagától [főátlagtól] való eltérésének négyzete + baranyai átlagnak az összminta átlagától való eltérésének négyzete) az egyes területek elemszámával súlyozva.

A Q_2 pedig minden egyes esztergályosnak a saját csoportátlagától (tehát a pestinek a pesti átlagtól, a borsodinak a borsodi átlagtól) való négyzetösszegét tartalmazza.

Ezek alapján számítható a S_1^2 és a S_2^2. Ha most a továbbiakban az I. eset áll fenn, akkor azt mondhatjuk, hogy az esztergályosok bérét nem befolyásolja az, hogy hol (milyen területi egységben) dolgoznak; e két változó (a területi megoszlás és az esztergályosok bére) független. A II. eset fennállásakor pl. 95%-os valószínűséggel állíthatjuk, hogy az esztergályosok bérében területi egyenlőtlenségek is mutatkoznak.

3.2. *Kétszempontos varianciaanalízis*

Ebben az esetben nem egy, hanem két nominális szintű változó hatását vizsgáljuk egy intervallum változóra.

Az alapgondolat és az eljárás is lényegében ugyanaz, mint az egyszempontos varianciaanalízisnél, azzal a különbséggel, hogy itt a két változó külön-külön kifejtett hatása mellett figyelembe kell venni a két változó kölcsönhatását (interakció) is. Ez némileg bonyolítja a helyzetet, azért itt feltételezzük, hogy minden részminta azonos elemszámú.

A fentebb leírtakat a következő példán szemléltetjük: ha az esztergályosok bérét nemcsak területi megosztásban vizsgáljuk, hanem aszerint is, hogy az esztergályos férfi vagy nő. A kétszempontos varianciaanalízissel nemcsak azt tudjuk kimutatni, hogy hogyan hat az esztergályosok bérére külön-külön az a tény, hogy hol dolgoznak, ill. milyen neműek, hanem azt is, hogy a területi megoszlás és a nemek közötti megoszlás között van-e kapcsolat (tehát pl. a borsodi esztergályosok között szignifikánsan több a nő, mint máshol).

Legyen a két nominális változónk A és B. A-t $A_1, \ldots, A_k$ csoportra, míg B-t $B_1, B_2, \ldots, B_m$ csoportra oszthatjuk. Minden lehetséges A_i és B_j mellett mintát kell vennünk, vagyis km független mintánk van, minden mintában l db mintaelem. Az általános mintaelemet jelöljük x_{ijv}-vel ($i = 1, 2, \ldots k$; $j = 1, 2 \ldots m$; $v = 1, \ldots l$). A megfelelő átlagokat pedig úgy jelöljük, hogy a szummázásra kerülő index helyére pontot teszünk. Így pl. $\overline{X} \ldots$ jelöli az összevont átlagot:

$$\bar{X}\ldots = \frac{1}{kml}\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{m}\sum_{v=1}^{l} x_{ijv} \qquad \text{és pl:}$$

$$\bar{X}_i.. = \frac{1}{ml}\sum_{j=1}^{m}\sum_{v=1}^{l} x_{ijv} \qquad \text{minden } i\text{-re.}$$

A kiinduló alapmodell az, hogy a mintaelemeket a következő módon állíthatjuk elő:

$$x_{ijv} = \mu + a_i + b_j + c_{ij} + \varepsilon_{ijv},$$

ahol a_i az A változó i-edik csoportjának, b_j a B változó j-edik csoportjának a hatását, befolyását méri, c_{ij} pedig az A_i és B_j csoportok kölcsönhatását fejezi ki. Az ε_{ijv} hibatagok független, normális eloszlású változók zérus várható értékkel és szórással. E modellnek megfelelően a következő hipotéziseket vizsgáljuk:

$$H_A : a_1 = a_2 = \ldots = a_k = 0$$

$$H_B : b_1 = b_2 = \ldots = b_m = 0$$

H_{AB}: $c_{ij} = 0$ minden (i, j) indexpárra *(1. táblázat).*

1. TÁBLÁZAT

A teljes négyzetösszeg (Q) felbontása

Szóródás oka	Négyzetösszeg	Szabadságfok	Tapasztalati variancia
„A" változó	$Q_1 = ml \sum_{i=1}^{k} (\bar{x}_{i..} - \bar{x}_{...})^2$	$k - 1$	$S_1^2 = \frac{Q_1}{k-1}$
„B" változó	$Q_2 = kl \sum_{j=1}^{m} (\bar{x}_{.j.} - \bar{x}_{...})^2$	$m - 1$	$S_2^2 = \frac{Q_2}{m-1}$
„AB" kölcsönhatás	$Q_3 = l \sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{m} (\bar{x}_{ij.} - \bar{x}_{i..} - \bar{x}_{.j.} + \bar{x}_{...})^2$	$(k-1)(m-1)$	$S_3^2 = \frac{Q_3}{(k-1)(m-1)}$
Véletlen hiba	$Q_4 = \sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{m}\sum_{v=1}^{l} (x_{ijv} - \bar{x}_{ij.})^2$	$km(l-1)$	$S_4^2 = \frac{Q_4}{km(l-1)}$
Teljes	$Q = \sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{m}\sum_{v=1}^{l} (x_{ijv} - \bar{x}_{...})^2$	$(mkl - 1)$	—

Az analízist a H_{AB} hipotézis vizsgálatával kell kezdeni. Ezt F-próbával végezzük, az

$$F = \frac{S_3^2}{S_4^2}$$

mennyiség F-eloszlású, a számláló szabadságfoka $(k - 1)(m - 1)$, a nevezőé pedig $km(l - 1)$. Most megint két eset lehetséges:

I. eset: $F > F_\varepsilon$.

Ekkor a H_{AB} hipotézist elvetjük, vagyis arra következtetünk, hogy a két nominális változó között kölcsönhatás van. Ebben az esetben nyilván a H_A és H_B hipotézisek sem elfogadhatók. Ilyenkor szükség lehet az a_i, b_j és c_{ij} értékek becslésére, az $\hat{a}_i$, $\hat{b}_j$, $\hat{c}_{ij}$ mennyiségek meghatározására:

$$\hat{a}_i = \bar{x}_{i..} - \bar{x}_{...} = \frac{1}{ml} \sum_{j=1}^{m} \sum_{v=1}^{l} x_{ijv} - \frac{1}{kml} \sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{m} \sum_{v=1}^{l} x_{ijv}.$$

Konfidencia-intervallum a_i-re:

$$\hat{a}_i - t_\varepsilon S_4 \sqrt{\frac{klm}{k-1}} < a_i < \hat{a}_i + t_\varepsilon S_4 \sqrt{\frac{klm}{k-1}},$$

ahol a t_ε értéket a $km(l - 1)$ szabadságfokú Student-eloszlás táblázatából kell kikeresni.

$$\hat{b}_j = \bar{x}_{.j.} - \bar{x}_{...}$$

s a konfidencia-intervallum:

$$\hat{b}_j - t_\varepsilon S_4 \sqrt{\frac{klm}{m-1}} < b_j < \hat{b}_j + t_\varepsilon S_4 \sqrt{\frac{klm}{m-1}},$$

ahol t_ε ugyancsak a $km(l - 1)$ szabadságfokú Student-eloszlás táblázatából való.

$$\hat{c}_{ij} = \bar{x}_{ij.} - \bar{x}_{i..} - \bar{x}_{.j.} + \bar{x}_{...},$$

az erre adott konfidencia-intervallum pedig:

$$\hat{c}_{ij} - t_\varepsilon S_4 \sqrt{\frac{kml}{(k-1)(m-1)}} < c_{ij} < \hat{c}_{ij} + t_\varepsilon S_4 \sqrt{\frac{kml}{(k-1)(m-1)}},$$

itt t_ε értékét a $km(l - 1)$ szabadságfokú Student-eloszlás táblázat szolgáltatja.

II. eset: $F < F_\varepsilon$.

Tehát a H_{AB} hipotézist elfogadjuk, vagyis a két nominális változó között nincs interakció. Az S_3^2 varianciát csupán véletlen hatások okozták. Ekkor azonban az eddig „interakciónak" tulajdonított variancia-részt egyesítenünk kell az S_4^2 véletlen hiba okozta szórásnégyzettel. Az új S_4^2 variancia:

$$S_4^{*2} = \frac{Q_3 + O_4}{kml - k - m + 1},$$

melyben a tört nevezője adja egyúttal a szabadságfokot is.

Ezek után a H_A hipotézis az

$$F_A = \frac{S_1^2}{S_4^{*2}}\,;\ (k - 1, kml - k - m + 1),$$

míg a H_B az

$$F_B = \frac{S_2^2}{S_4^{*2}}\,;\ (m - 1, kml - k - m + 1)$$

szabadsáfokkal rendelkező F-eloszlású mennyiségekkel vizsgálható. Ha ezek közül valamelyik szignifikáns lenne, vagyis elutasítanánk vagy a H_A vagy a H_B hipotézist, akkor ismét van értelme az a_i, ill. b_j hatások becslésének. Az erre szolgáló képletek megegyeznek az I. esetnél közölt képletekkel, azzal a különbséggel, hogy S_4 helyett mindenütt S_4^* szerepel, s a Student-eloszlások szabadságfoka $(kml - k - m + 1)$.

Ez a kétszempontú varianciaanalízis a közölt sémák alapján könnyen kiterjeszthető három vagy még több szempont szerinti elemzésre, melyek sémáját bárki könnyen elvégezheti.

4. *A változók kapcsolatának mérése*

Bármi is legyen a statisztikai vizsgálat célja, megállapításokat, következtetéseket, összefüggéseket csak akkor állapíthatunk meg, ha változóink valóban hatnak egymásra, kapcsolataik nemcsak véletlen hatásokat, hanem jelentős, szignifikáns összefüggéseket is mutatnak. Valamilyen objektív módszerrel szeretnénk eldönteni, hogy változóink között valóban léteznek-e kapcsolatok, s ha igen, azok milyen erősek. Vagyis mérni akarjuk a változók közötti kapcsolat szorosságát, s tesztelni akarjuk, hogy a mért kapcsolat vajon nemcsak véletlen hatásokat tükröz-e. E fejezetben olyan módszerekről lesz szó, amelyek lehetővé teszik mind a mérést, mind a tesztelést.

Minden konkrét esetben az itt ismertetésre kerülő módszerek közül ki kell választani azt (azokat), amelyet (amelyeket) *jogosan* használhatunk. Ehhez elsősorban arra kell válaszolnunk, hogy adataink milyen mérési szinten vannak (nominális, arány, intervallum). A továbbiakban e szempont szerint vesszük sorra a módszereket.

4.1. *Nominális mérési szint*

Általában azt az elvet követjük, hogy előbb közöljük a kapcsolat erősségét mérő mutatót, s csak ezt követően azt az eljárást, amellyel a mutató szignifikanciáját mérhetjük. Itt azonban kénytelenek vagyunk eltérni ettől, mivel a mutatók maguk is javarészt a szignifikancia-teszt eredményén alapulnak.

Az alábbiakban közölt eljárásnak még egy szempontból van óriási jelentősége; mint az előzőekben láttuk, skálatranszformációval bármilyen típusú változó viszonylag könnyen nominális szintre hozható, s így alkalmazhatók rá az erre a szintre vonatkozó eljárások.

4.1.1. *A χ^2-próba*[9]

Ez az „ezerarcú" próba többek között két változó közötti kapcsolat „valódiságának" eldöntésére is szolgál. Önmagában ez az eljárás nem mutatja a kapcsolat erősségét, csak arra ad választ, hogy egy bizonyos valószínűségi szintet kritériumként állítva, van-e tényleges kapcsolat a változók között. *A χ^2-próba szimmetrikus*, vagyis a két változó kölcsönhatását mutatja ki, nem pedig az egyik hatását a másikra.

A χ^2-próba számításánál a kontingencia-táblázat adataiból indulunk ki. Legyen az egyik változónk r osztályba sorolható, a másik pedig c osztályba. Jelölje a kontingencia-táblázat általános elemét n_{ij} — azon egységeknek a számát, amelyek az első változó szerint az i-edik, a második változó szerint a j-edik osztályba sorolhatók. Legyen $n_{i.}$ a megfelelő sorösszeg, $n_{.j}$ pedig a megfelelő oszlopösszeg, azaz $\sum_i \sum_j n_{ij} = \sum_j n_{.j} = \sum_i n_{i.} = N$. A nullhipotézis a következő:

$$H_0 = \text{a két változó független.}$$

A próba célja most már az, hogy megállapítsa, milyen mértékű eltérés tapasztalható a megfigyelt értékek és a nullhipotézis alapján elméletileg elvárt értékek között. Az eltérés mértéke a változók egymásra hatásából adódik, s minél nagyobb ez az eltérés, annál valószínűbb a változók közötti tényleges kapcsolat.

A próba formulája a következő:

$$\chi^2 = \sum_i \sum_j \frac{(n_{ij} - \nu_{ij})^2}{\nu_{ij}},$$

ahol ν_{ij} — az elvárt, elméleti gyakoriság, feltételezve a függetlenséget.

Képlete: $$\nu_{ij} = \frac{n_{i.}}{N} \cdot \frac{n_{.j}}{N} \cdot N = \frac{n_{i.} n_{.j}}{N}.$$

Gyakorlati számításra azonban alkalmasabb a következő képlet:

$$\chi^2 = N\left(\sum_i \sum_j \frac{n_{ij}^2}{n_{i.} n_{.j}} - 1\right).$$

A *szabadságfok* (szf) $= (r - 1)(c - 1)$, s ha $\chi^2 > \chi^2_\varepsilon$, akkor a két változó között szignifikáns kapcsolat van.

[9] (Hajtman 1971, pp. 295—336.)

Ha a χ^2-próbát függetlenségvizsgálatra alkalmazzuk, akkor az alkalmazás feltételei még szigorúbbak, mint egyébként. A nagy mintaelemszám itt is alapvető feltétel. További feltétel, hogy az elvárt gyakoriságok (ν_{ij}) között nem fordulhat elő 1-nél kisebb érték, és az 5-nél kisebb értékek száma sem lehet több a cellák számának egyötödénél.

Ha nagy szabadságfokú χ^2-értékünk van (szf > 30), akkor bizonyos nehézséget jelent a χ^2-táblázat használata, mivel a megfelelő értékek nincsenek kidolgozva minden egyes szabadságfokra. Ebben az esetben azonban $\sqrt{2\chi^2}$ normális eloszlást közelít, amelynek várható értéke $\sqrt{2\,\text{szf}-1}$, szórása pedig 1. Így ilyenkor a standard normális eloszlás táblázatát lehet felhasználni a szignifikancia-vizsgálatra a $\sqrt{2\chi^2}-\sqrt{2\,\text{szf}-1}$ érték alapján.

A 2×2-es tábla

2×2-es tábla esetén egyszerűbben is számolhatunk. Legyen a 2×2-es tábla a következő:

$$\begin{array}{ccc} a & b & a+b \\ c & d & c+d \\ \hline a+c & b+d & N \end{array}.$$

Ezek alapján:

$$\chi^2 = \frac{N(ad-bc)^2}{(a+c)(a+b)(b+d)(c+d)}.$$

Mivel a χ^2-eloszlás nem diszkrét, ezért ún. folytonossági korrekciót kell használni. Az új képlet:

$$\chi^2 = \frac{N\left(|ad-bc| - \frac{1}{2}N\right)^2}{(a+c)(a+b)(b+d)(c+d)}.$$

A következőkben olyan eljárásokat mutatunk be, amelyek segítségével egyetlen számmal jellemezhetjük két nominális szintű változó kapcsolatának szorosságát. *A kontingencia koefficiens* csak a 2×2-es tábla esetén használható:

$$\Phi = \sqrt{\frac{\chi^2}{N}}.$$

Mivel $0 \leqq \Phi \leqq 1$, ezért a mutató a kapcsolat irányát nem, csak a szorosságát méri.

4.1.2. *Yule-féle asszociációs együttható*

Szintén csak 2×2-es táblára alkalmazható.

$$Q = \frac{ad-bc}{ad+bc}.$$

Ez a mutató már -1 és 1 közé esik, így tájékoztat a kapcsolat irányáról is. Véleményünk azonban az, hogy jobb ezt az irányt figyelmen kívül hagyni, és $|Q|$-val dolgozni, mivel a csoportok sorrendje itt tetszőleges, általában a mi önkényes választásunktól függ.

4.1.3. *Tetra-korrelációs együttható*

Pearson-féle cos π formulának is nevezik. Akkor használják, ha egy 2×2-es tábla szorossági mutatóját korrelációs együtthatóval kell összehasonlítani.

$$r_{tet} = \cos \pi \frac{\sqrt{bc}}{\sqrt{ad}+\sqrt{bc}},$$

ahol $\pi = 180°$.

4.1.4. *Kontingencia koefficiens*

Akkor is használható, ha egyik változó sem dichotom (ld. előbb dichotomizálás).

$$C = \sqrt{\frac{\chi^2}{\chi^2+N}} = \sqrt{\frac{\Phi^2}{1+\Phi^2}}.$$

A C értéke 0 és $+1$ között mozoghat. Hátránya, hogy csak végtelen számú osztály esetén érheti el a $+1$-et, maximális értéke ugyanis függ a kontingencia-tábla méretétől. Ha a kontingencia tábla $r\times c$ méretű, akkor

$$C_{max} = \frac{k-1}{k},$$

ahol $k = \min(r, c)$.
Néhány K és C_{max} érték (Yule–Kendall 1964, p. 77):

$$\begin{aligned}
k &= 2 & C_{max} &= 0{,}707\\
k &= 3 & C_{max} &= 0{,}816\\
k &= 4 & C_{max} &= 0{,}866\\
k &= 5 & C_{max} &= 0{,}894\\
k &= 6 & C_{max} &= 0{,}913\\
k &= 7 & C_{max} &= 0{,}926\\
k &= 8 & C_{max} &= 0{,}935\\
k &= 9 & C_{max} &= 0{,}943\\
k &= 10 & C_{max} &= 0{,}949\,.
\end{aligned}$$

4.1.5. *A Csuprov-féle együttható*

Szintén tetszőleges méretű táblára alkalmazható:

$$T = \sqrt{\frac{\chi^2}{N\sqrt{r-1}\sqrt{c-1}}}.$$

A T értékét mindig pozitívnak tekintjük. Ez a mutató csak az $r = c$ esetben érheti el a $+1$-et, egyébként kisebb 1-nél. Ha $r \neq c$, akkor az együttható által felvehető maximális érték:

$$T_{\max} = \sqrt[4]{\frac{\min[(r-1),(c-1)]}{\max[(r-1),(c-1)]}}.$$

E hiányosság kiküszöbölésére szolgál e mutató Cramertől származó módosítása;

$$C = \sqrt[4]{\frac{\max[(r-1),(c-1)]}{\min[(r-1),(c-1)]}}\,T,$$

s ez már az $r \neq c$ esetben is elérheti a $+1$ értéket.

A fenti mutatókhoz a következő két megjegyzést fűzzük:

1. az összes felsorolt együttható szignifikanciáját az előzőekben ismertetett χ^2-próba eredménye adja – tulajdonképpen ezen mutatókat csak akkor illik számolni, ha a χ^2-próba már szignifikáns kapcsolatot jelzett;
2. e mutatók egymással egyáltalán nem, saját magukkal is általában csak azonos méretű táblák esetén hasonlíthatók össze.

4.2. *Ordinális mérési szint*

Ehhez a ponthoz elsősorban a rangsoroláson alapuló technikák tartoznak. Éppen ezért már most felhívjuk a figyelmet arra, hogy az eredmények értékelésénél itt fokozottan figyelembe kell venni, hogy a mutatók csak a rangsorok közötti kapcsolatok erősségét mérik, ez viszont semmiféle garanciát nem nyújt arra, hogy a változók között a valóságban is áll fenn kapcsolat. A rangsorolás ugyanis mindig szubjektív dolog, lehet, hogy a rangsorolást végzők valamelyike téved. Csak objektív adatok mellett állíthatjuk azt biztonsággal, hogy a változók közötti kapcsolat a valóságban is megvan.

4.2.1. *A Kendall-féle τ*

Képlete:

$$\tau = \frac{2S}{N(N-1)},$$

ahol N a rangsorolt egyedek száma, S kiszámítása pedig a következőképpen történik: két rangsor készült az N egyedre. Jelöljük az egyik rangsor elemeit x_i-vel, a másikét y_i-vel. Most rendezzük sorba az egyedeket úgy, hogy az x_i rangok a természetes számok sorrendjének feleljenek meg. Ekkor az y_i rangok alapján a következő p_i, ill. q_i számokat képezhetjük. Jelentse p_i azon rangok számát az y rangsorban, amelyek nagyobbak y_i-nél, q_i pedig azon rangok számát, amelyek kisebbek. Mindezek után S-sel az

$$S = \sum_{i=i}^{N-1} (p_i - q_i)$$

számot jelöltük.

Nézzünk a fentiekre egy számpéldát:

x	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
y	9	10	8	5	7	6	3	4	2	1
p	1	0	0	2	0	0	1	0	0	
q	8	8	7	4	5	4	2	2	1	
$p-q$	-7	-8	-7	-2	-5	-4	-1	-2	-1	

$$S = \sum_{i=1}^{N-1} (p_i - q_i) = -37, N = 10$$

$$\tau = \frac{-2\times 37}{10\times 9} = -0{,}822\,.$$

E mutatót csupán a p_i értékek alapján is kiszámíthatjuk: jelölje

$$p = \sum_{i=1}^{N-1} p_i, \quad \text{ekkor} \quad \tau = \frac{4p}{N(N-1)} - 1\,.$$

Egyező rangok előfordulása esetén τ kiszámítása:

$$\tau_T = \frac{S}{\sqrt{\frac{1}{2}N(N-1) - T_x}\cdot\sqrt{\frac{1}{2}N(N-1)T_y}}\,,$$

ahol

$$T_x = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{k} a_i(a_i - 1); \quad T_y = \sum_{i=1}^{l} b_i(b_i - 1)\,,$$

ahol k, ill. l jelenti az egyező rangok előfordulási számát az x, ill. y rangsorban, a_i, ill. b_i pedig az egyes előfordulásokban érintett rangok száma.

A következő számpélda alapján könnyen érthető lesz az eljárás:

x	1	2	3,5	3,5	5	6,5	6,5	8	9	10
y	9	10	8	5	7	6	3	3	3	1
p	1	0	0	2	0	0	0	0	0	
q	8	8	6	4	5	3	1	1	1	
$p-q$	−7	−8	−6	−2	−5	−3	−1	−1	−1	

$$S = -34;\ k = 2;\ a_1 = 2,\ a_2 = 2;$$

$$1 = 1,\ b_1 = 3$$

$$T_x = \frac{1}{2}(2\times 1 + 2\times 1) = 2$$

$$T_y = \frac{1}{2}(3\times 2) = 3$$

$$\tau_T = \frac{-34}{\sqrt{45-2}\cdot\sqrt{45-3}} = -0{,}800.$$

Felmerülhet a kérdés, hogy a kapott τ érték szignifikáns kapcsolatot jelöl-e vagy sem.

Ha $N \leqq 10$, akkor a megoldást a Kendall-féle τ szignifikancia táblázat adja (ld. Függelék *VII. táblázat*át), amelyet az S értékek és az N alapján állítottak össze. A táblázat belsejében azok a valószínűségek (%-os formában) találhatók, amelyek mellett a τ szignifikáns (azaz nemcsak véletlen okozta) kapcsolatot jelent. Az első számpéldánkbeli $S = -37$ és $N = 10$ találkozásánál talált 0,04% azt jelenti, hogy 0,0004 annak a valószínűsége, hogy ekkora S értéket csak a véletlen hoz létre, tehát 1 − 0,0004 = 0,996 − 99,96%-os valószínűséggel az összefüggés is szignifikáns.

Ha $N > 10$, akkor az

$$\frac{S\sqrt{18}}{\sqrt{N(N-1)(2N+S)}}$$

közelítően standard normális eloszlású a $\tau = 0$ nullhipotézis mellett. Tesztelésre tehát a standard normális eloszlás táblázatát használjuk (ld. Függelék, *I. táblázat*).

4.2.2. *A Kendall-féle konkordancia együttható (W)*

Ez az együttható ordinális szinten kettőnél több változó kapcsolatát vizsgálja. Egyrészt alkalmazható annak kimutatására, hogy egy csoport mennyire homogén vagy heterogén több dolog egyidejű megítélésében rangsorolás útján. Másrészt segítségével vizsgálható kettőnél több csoport hatása ugyanarra a dologra azonos időperiódusban.

Az együttható képlete:

$$W = \frac{12S}{M^2(N^3-N)},$$

ahol N – az egyedek száma (a rangsorolás terjedelme),
M – a változók száma,
$S = \Sigma(x - \bar{x})^2$, ahol x a minta egyes elemei ranghelyeinek összege,
$\bar{x}$ – a ranghelyek összegének átlaga.

A rangszámok összege általánosan: $\frac{M \cdot N(N+1)}{2}$. Nézzünk most egy számpéldát. Legyen $N = 7$, $M = 4$, a rangszámok összege 112, $\bar{x}$ pedig 16.

N	M: x	y	w	z	A rangszámok összege	Eltérés az átlagtól	Az eltérés négyzete
A	1	2	3	4	10	−6	36
B	2	3	4	5	14	−2	4
C	3	4	5	6	18	2	4
D	4	5	6	7	22	6	36
E	5	6	7	1	19	3	9
F	6	7	1	2	16	0	0
G	7	1	2	3	13	−3	9
Összesen					112	0	98

Ezekután $w = \frac{12 \cdot 98}{4^2(7^3 - 7)} = 0{,}22.$

Egyező rangok esetén a megfelelő formula:

$$w_T = \frac{12S}{M^2(N^3 - N) - M\sum(t^3 - t)},$$

ahol $\Sigma(t^3 - t) = \Sigma(t_x^3 - t_x) + \Sigma(t_y^3 - t_y) + \Sigma(t_w^3 - t_w) + \Sigma(t_z^3 - t_z)$.

Itt a t_x, t_y, t_w, t_z kifejezések a megfelelő változóknál előforduló egyező rangok darabszámát jelzik.

A W szignifikancia vizsgálatára a χ^2-próbát alkalmazhatjuk, ha $N > 7$. Ekkor

$$\chi^2 = M(N - 1)W$$

és a szabadságfok: $N - 1$

A próba menete a szokásos.

4.2.3. *A Spearman-féle rangkorreláció* (ϱ)

A leggyakrabban használt eljárás rangsorok kapcsolatának vizsgálatára. Számítási módja egyszerűbb a τ-nál, annál liberálisabb (ugyanazon adatokra számolva általában $\tau < \varrho$), viszont hátránya, hogy nem terjeszthető ki a τ-hoz hasonlóan többszörös, ill. parciális vizsgálatokra.

$$\varrho = 1 - \frac{6 \cdot \sum d^2}{N(N^2 - 1)},$$

ahol d^2 a rangkülönbségek négyzete.

A számítás menetét egy számpéldán is végigkövethetjük:

	x	1	2	3	4	5	6	7	8
	y	2	1	4	3	5	8	7	6
rangkülönbség (d)									
	d	-1	$+1$	-1	$+1$	0	-2	0	$+2$
	d^2	1	1	1	1	0	4	0	4

$\Sigma d^2 = 12$

$$\varrho = 1 - \frac{6 \cdot 12}{8(8^2 - 1)} = 0{,}86 .$$

Egyező ranghelyek használata esetén:

$$\varrho_T = 1 - \frac{6\Sigma d^2}{(N^3 - N) - (T_x + T_y)},$$

ahol

$$T_x = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{k} (a_i^3 - a_i); \quad T_y = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{l} (b_i^3 - b_i),$$

s itt a_i és b_i, valamint k és l értelmezése megegyezik a Kendall-féle τ számításánál adott értelmezéssel.

A ϱ szignifikanciáját $N > 10$ esetén a t-eloszlás táblázata alapján vizsgálhatjuk (ld. Függelék *II. táblázat*):

$$t = \varrho \sqrt{\frac{N-2}{1-\varrho^2}}$$

az szf $= N - 2$.

4.3. *Intervallum mérési szint*

4.3.1. *A Pearson-féle szorzat momentum korrelációs együttható* (r)

Két változó kapcsolatának mérésére a legáltalánosabban használt módszer, annak ellenére, hogy elég szigorú feltételekhez kötött, melyek a következők:

- mindkét változó intervallumszinten van,
- mindkét változó normális eloszlású,
- feltételezhető, hogy a két változó között lineáris összefüggés van.

A gyakorlatban azonban ritkán teljesül maradéktalanul mindhárom feltétel. Bizonyos könnyítések tehát megengedhetők, e mutató talán legkevésbé a normalitási feltételekre érzékeny.

A korrelációs együttható definíciója, ha az x_1 és x_2 változók között számítjuk (itt visszautalunk az adat mátrix formájára), a következő:

$$r_{12} = \frac{\sum_{i=1}^{N} (x_{i1} - \bar{x}_1)(x_{i2} - \bar{x}_2)}{\sqrt{\sum_{i=1}^{N} (x_{i1} - \bar{x}_1)^2 \sum_{i=1}^{N} (x_{i2} - \bar{x}_2)^2}},$$

ahol az i index az i-edik megfigyelést jelenti.

A fenti képlet az előzőekben definiált kovariancia mátrix felhasználásával egyszerűbben is felírható:

$$r_{12} = \frac{S_{12}}{S_{11} \cdot S_{22}}.$$

A korrelációs együttható mindig -1 és $+1$ közé esik. Abban az esetben pontosan $|1|$, ha x_1 és x_2 egymástól lineárisan függenek, azaz $x_2 = a + bx_1$, ahol a és b konstans, valamint r és b előjele megegyezik. Ha a két változó független egymástól, akkor $r = 0$ mindig igaz, azonban az $r = 0$ tényből a változók függetlensége nem következik. Lehet, hogy az r azért 0, mert nem lineáris, hanem valamilyen görbe vonalú összefüggés van a két változó között. Tehát jegyezzük meg jól: a változók korrelálatlanságából ($r = 0$) nem következik azok függetlensége is!

A korrelációs együttható négyzete a determinációs együttható képlete:

$$\beta_{12} = r_{12}^2.$$

Ez megadja a két változó lineáris függésének fokát. Pontosabban fogalmazva, ez a kifejezés azt mutatja meg, hogy a változók közötti összefüggést leíró regressziós egyenes pontjainak szórása mekkora az x_2 változó összes szórásához képest.

A korrelációs együttható szignifikancia-vizsgálata

Azt kell eldöntenünk, hogy a kapott r érték valódi, szignifikáns kapcsolatot jelöl-e a két változó között, vagy csak véletlen hatások eredőjeként alakult ki. Az elméleti korrelációs együttható $r = 0$ nullhipotézist a következő képlettel vizsgálhatjuk:

$$t = \frac{r_{12}}{1 - r_{12}^2} \sqrt{N - 2},$$

mely $(N - 2)$ szabadságfokú Student-féle t-eloszlást követ. Most már ha $t > t_\varepsilon$, akkor $1 - \varepsilon$ valószínűséggel a korrelációs együttható szignifikáns kapcsolatot jelöl. A számítások megkönnyítésére a legkisebb, még szignifikáns korrelációs együtthatókat is táblázatba foglalták (ld. Függelék *VIII. táblázat*).

A korrelációs mátrix szignifikancia-vizsgálata

Több változó esetén a páronkénti korrelációs együtthatókat korrelációs mátrixba foghatjuk össze.

$$R = \begin{bmatrix} 1 & r_{12} & \ldots r_{1p} \\ r_{21} & 1 & \ldots r_{ip} \\ r_{p1} & & 1 \end{bmatrix}, \quad p - \text{a változók száma.}$$

Most az R mátrix determinánsának felhasználásával tesztelhetjük az egész korrelációs rendszer szignifikanciáját:

$$\chi^2 = -N \ln |R|,$$

ahol $|R|$ az R-mátrix determinánsát jelenti.

A fenti kifejezés $p(p-1)/2$ szabadságfokú χ^2-eloszlást követ, melynek χ^2_ε értékét használjuk fel a szignifikancia eldöntésére.

A Fischer-féle Z-transzformáció

R. A. Fischer vezette be a gyakorlatba a korrelációs együttható alábbi transzformációját.

$$Z = 1{,}1513 \lg \frac{1+r}{1-r}.$$

Z nagy N-érték esetén normális eloszlású lesz $\sqrt{\dfrac{1}{N-3}}$ szórással, így a $Z\sqrt{N-3}$ érték már standard normális eloszlású lesz, s így felhasználható a korrelációs együttható szignifikanciájának eldöntésére. Igazi érdeme azonban nem ez, hiszen erre már van egy módszerünk (amiben t-eloszlásra vezettük vissza a feladatot), hanem az, hogy csak e transzformáció segítségével tudjuk megválaszolni azt a kérdést, hogy két vagy több korrelációs együttható tekinthető-e azonosnak.

A számítások megkönnyítésére a Z értékeket is táblázatba foglalták (ld. Függelék *IX. táblázat*).

Két korrelációs együttható összehasonlítása

Területi vizsgálatokban gyakran fordul elő az az eset, hogy a korrelációs együtthatókat területi egységenként (pl. megyénként) is kiszámíthatjuk. Ekkor igen érdekes lehet annak vizsgálata, vajon a területi egységenként kapott más-más konkrét együtthatók tekinthetők-e ugyanazon elméleti korrelációs együttható becslésének; vagyis a változók között ugyanazon összefüggés érvényes-e minden területi egységben.

Két korrelációs együttható összehasonlítását a következőképpen végezzük el: legyen a két független korrelációs együttható r_1 és r_2, a megfelelő mintaelemszámok N_1 és N_2. Ekkor

$$u = \frac{Z_1 - Z_2}{\sqrt{\dfrac{1}{N_1 - 3} + \dfrac{1}{N_2 - 3}}},$$

ahol Z_1 és Z_2 a megfelelő Z transzformáltak.

Ez a változó standard normális eloszlású, $N(0, 1)$, így u értékét a standard normális eloszlás táblázatát felhasználva számított u_ε értékkel kell összevetni. Ha $u > u_\varepsilon$, akkor a két korrelációs együttható nem lehet ugyanazon elméleti együttható becslése – a két területi egység különbözik egymástól.

Több korrelációs együttható összehasonlítása

Legyen k független mintánk (területi egységünk), $N_1, N_2, \ldots N_k$ elemszámmal. A nullhipotézis:

$$H_0: r_1 = r_2 = \ldots = r_k.$$

Az alkalmazható próba

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^{k} (N_i - 3)(Z_i - \bar{Z})^2,$$

ahol Z_i az r_i Z-transzformáltja, $\bar{Z}$ pedig ezen értékek súlyozott átlaga:

$$\bar{Z} = \frac{\sum_{i=1}^{k} (N_i - 3) Z_i}{\sum_{i=1}^{k} (N_i - 3)}.$$

Itt χ^2 $(k - 1)$ szabadságfokú χ^2-eloszlást követ, így ha $\chi^2 > \chi^2_\varepsilon$, akkor a nullhipotézist elvetjük.

A próba alkalmazhatóságához még szükséges feltétel, hogy $N = \sum_{i=1}^{k} N_i \gg k$, azaz az összesített mintaelemszámnak jóval nagyobbnak kell lennie a k értékénél.

4.3.2. *Parciális korrelációs együttható*

Gyakran előfordul, hogy két változó között erős korrelációt találunk, holott úgy érezzük, hogy ez a két változó nincs egymással ilyen szoros kapcsolatban, s a magas korrelációt csupán az okozza, hogy az egyik változó hatása a másikra egy harmadik (vagy esetleg több más) változón keresztül érvényesül. Ilyenkor kíváncsiak lennénk tisztán a közvetlen kapcsolat erősségére is, már csak azért is, hogy előbbi hipotézisünket ellenőrizni tudjuk.

Többváltozós rendszer esetében a fenti kérdésre a parciális korreláció válaszol. Legyen $x_1, x_2, \ldots, x_p$ változónk, s kíváncsiak vagyunk az x_i és x_j változók közötti korreláció nagyságára, feltételezve, hogy az x_k változó hatását kiszűrtük. Jelöljük ezt a korrelációt $r_{ij.k}$-val. Az $r_{ij.k}$ parciális korrelációs együtthatót az r_{ij}, r_{ik}, r_{jk} korrelációs együtthatók ismeretében a következőképpen számíthatjuk ki:

$$r_{ij.k} = \frac{r_{ij} - r_{ik} \cdot r_{jk}}{\sqrt{(1 - r_{ik}^2)(1 - r_{jk}^2)}}.$$

A parciális korrelációs együttható akkor is számolható, ha több változó hatását szűrjük ki egyszerre. A magasabb rendű (több változót kiszűrő) parciális korrelációs együtthatók rekurzív módon nyerhetők az alacsonyabb rendűekből. Például ha x_1 változó hatását is ki akarjuk szűrni, akkor:

$$r_{ij.k1} = \frac{r_{ij.k} - r_{i1.k} \cdot r_{j1.k}}{\sqrt{(1 - r_{i1.k}^2)(1 - r_{j1.k}^2)}}.$$

Teljes általánosságban (a számozás tetszőleges lehet):

$$r_{12.34,\dots p} = \frac{r_{12.34\dots(p-1)} - r_{1p.34\dots(p-1)} \cdot r_{2p.34\dots(p-1)}}{\sqrt{(1 - r_{1p.34\dots(p-1)}^2)(1 - r_{2p.34\dots(p-1)}^2)}}.$$

Létezik a parciális korrelációs együtthatóknak jóval egyszerűbb felírási módja is, ahhoz azonban a kovariancia mátrix inverz mátrixának kiszámítása szükséges (egy A mátrix inverze az az A^{-1} mátrix, amellyel az eredetit megszorozva, az egység mátrixot kapjuk eredményül, azaz $AA^{-1} = E$). Legyen tehát

$$S^{-1} = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} \dots c_{1p} \\ c_{21} & c_{22} \dots c_{2p} \\ \vdots & \\ c_{p1} & c_{p2} \dots c_{pp} \end{bmatrix}.$$

Ekkor az $r_{ik.12\dots(i-1)(i+1)\dots(k-1)(k+1)\dots p}$ (vagyis e módszer akkor használható, ha az összes változó hatását ki akarjuk szűrni).

$$r_{ik.12\dots(i-1)(i+1)\dots(k-1)(k+1)\dots p} = -\frac{c_{ik}}{\sqrt{c_{ii} \cdot c_{kk}}}.$$

(Ha csak néhány változó hatása nem kívánatos, akkor a kovariancia mátrix megfelelő almátrixának inverzét számítjuk ki, és az alapján a parciális korrelációs együtthatót.)

Ezen együttható szignifikancia-vizsgálata a $H_0 = r_{ik.12\dots(i-1)(i+1)\dots(k-1)(k+1)\dots p} = 0$ nullhipotézisre a

$$t = \frac{r_{ik.12\dots(i-1)(i+1)\dots(k-1)(k+1)\dots p}}{\sqrt{1 - r_{ik.12\dots(i-1)(i+1)\dots(k-1)(k+1)\dots p}^2}} \sqrt{N-p}$$

statisztikával történik. Itt t $(N - p)$ szabadságfokú Student-féle t-eloszlás.

Többszörös korrelációs együttható

Az eddigi korrelációs együtthatók mindig *két* változó kapcsolatának erősségét mérték. Szükség lehet azonban arra is, hogy egy változó több változóval való kapcsolatának erősségét vizsgáljuk. Erre szolgál a többszörös korrelációs együttható.

Három változó esetén konkrét képlet adható:

$$R_{1.23} = \sqrt{\frac{R_{12}^2 + R_{13}^2 - 2R_{12}R_{13}R_{23}}{1 - R_{12}^2}}.$$

Háromnál több változó esetén ismét a kovariancia mátrix inverzének segítségével számolhatunk:

$$R_{i.12\ldots(i-1)(i+1)\ldots p} = \sqrt{1 - \frac{1}{s_{ii}^2 c_{ii}}},$$

ahol s_{ii} a kovariancia mátrix megfelelő eleme.

A többszörös meghatározottsági fok a többszörös korrelációs együttható négyzete:

$$B_{i.12\ldots(i-1)(i+1)\ldots p} = 1 - \frac{1}{s_{ii}^2 c_{ii}}.$$

A $B_{i\cdot *} = 0$ nullhipotézist az F-próba segítségével vizsgálhatjuk:

$$F = \frac{(N-p)B_{i,*}}{p(p-1)(1-B_{i,*})}.$$

A $*$ itt az $12\ldots(i-1)(i+1)\ldots p$ helyett áll. F-nél a számláló szabadságfoka $(p-1)$, a nevezőé $(N-p)$.

A nem-lineáris korrelációs együttható — korrelációs hányados

Az eddig tárgyalt korrelációs együtthatók mindig a *lineáris kapcsolat* szorosságát mérték, s ezért esetleg teljesen félrevezető információt adnak (pl. 0 értéket függvényszerű kapcsolat esetén!) abban az esetben, ha a változók közötti kapcsolat valamilyen görbe vonalú függvénnyel írható le.

Két változó esetén ezen segít *a korrelációs hányados* (többváltozós megfelelője nem ismert). Jelöljük a két változót y-nal és x-szel. A most tárgyalandó mutató *nem szimmetrikus*, más az értéke, ha x hatását vizsgálom y-ra, s más a fordított esetben. Ha x hatását vizsgáljuk y-ra, akkor az alkalmazás szokásos feltételei — intervallumszintű változó, normális eloszlás (elegendő az y változónak normális eloszlásúnak lennie!) — mellé még az is belép, hogy egy x ponthoz több y értéknek kell tartoznia. Nem teljesülés esetén az x változó csoportosításával érhetjük el e feltétel érvényesülését. Az együttható képlete tehát:

$$e_{yx} = \sqrt{\frac{Q_k}{Q_y}},$$

ahol a varianciaanalízisbeli jelölésekkel összhangban:

$$Q_k = \sum_j^k N_j(\bar{y}_j - \bar{\bar{y}})^2$$

$$Q_y = \sum_i \sum_j (y_{ij} - \bar{\bar{y}})^2,$$

ahol k — az x csoportok száma.

e_{yx} 0 és +1 közé esik; +1 jelöli a függvényszerű kapcsolatot. Az e_{yx} együtthatót az $e_{yx} = 0$ nullhipotézisre az F-próba segítségével tesztelhetjük:

$$F = \frac{N-k}{k-1} \frac{e_{yx}^2}{1-e_{yx}^2}.$$

A fenti kifejezés F-eloszlást követ, a számláló szabadságfoka $(k - 1)$, a nevezőé $(N - k)$.

Az e_{yx} mindig nagyobb r-nél, kivéve, ha lineáris kapcsolatra számoljuk, ilyenkor azzal egyenlő.

5. *Regresszió-számítás és idősorok elemzése*

Tudatában vagyunk annak, hogy ezt a hatalmas és szerteágazó témát nem tudjuk még megközelítően elfogadható mélységben sem tárgyalni. Sok esetben még a probléma felvetéséig sem jutunk el. Ezek figyelembevételével csupán a lineáris regressziót ismertetjük, s megadunk néhány speciális esetet, melyek könnyen visszavezethetők a lineáris esetre, majd az idősorok elemzésének néhány egyszerűbb esetére térünk ki. (A részletesebb ismereteket Olvasóink megtalálhatják a következő magyar nyelvű könyvekben: Yule–Kendall 1964, Ezekiel–Fox 1970, Köves–Párniczky 1973, Malinvaud 1974.)

5.1. *Lineáris regresszió*

Ha már úgy találtuk (pl. korreláció-számítás útján), hogy változóink között szignifikáns kapcsolatok vannak, akkor felmerülhet az a kérdés, hogy egy tetszőleges változót kiválasztva – jelöljük azt Y-nal – ennek értéke hogyan határozható meg az összes többi változó értékeinek ismeretében.

Vagyis egy olyan $Y = f(x_1, x_2, \ldots x_p)$ függvényt keresünk, melynek ismeretében az Y változóra különböző x-ek mellett becsléseket készíthetünk. Az f-függvényt nevezzük az Y-ra vonatkoztatott regressziós függvénynek.

Elméletileg a regressziós függvény nem más, mint egy feltételes várható értékfüggvény – keressük az Y értékek (Y is valószínűségi változó!) várható értékeit az összes lehetséges X érték, mint feltételek mellett. A regresszió tehát bizonyos valószínűségi változók konkrét értékeinek ismeretében egy további valószínűségi változó értékére vonatkozó előrejelzés, következtetés eszköze.

Ha a keresett f regressziós függvény képe egyenes (vagy többdimenziós esetben hipersík), akkor lineáris regresszióról beszélünk. A lineáris regresszió kiemelt jelentőségét a következők támasztják alá:

- becslése a legegyszerűbb, a legmegoldottabb;
- sok görbe vonalú regresszió visszavezethető lineáris regresszióra;
- ha a valószínűségi változók együttes eloszlása normális, akkor az *elméleti regressziófüggvény* is lineáris.

A gyakorlatban a feladat általában úgy jelentkezik, hogy adottak az (x_{i1}, x_{i2}, . . ., x_{ip}) pontok ($i = 1, 2, \ldots, N$), s keressük azt a lineáris függvényt, amelyik valamilyen értelemben jól reprezentálja az ismert pontokat. A közelítés jóságának kritériumaként legáltalánosabb a legkisebb négyzetek elvének használata. Ezen elv szerint olyan függvényt kell keresnünk, ahol az x_{i1} és a függvény által adott $\hat{x}_{i1}$ becslés eltérése a legkisebb, vagyis minimalizálni kell az $\sum\limits_{i=1}^{N} (x_{i1} - \hat{x}_{i1})^2$ függvényt. (Feltéve, hogy eredményváltozónak az x_1 változót választottuk, ezt azonban az általánosság megsértése nélkül megtehetjük.)

Válasszuk eredményváltozónak x_1-et. Ekkor a regressziófüggvényt a következő alakban keressük:

$$f = b_1 + b_{12}x_2 + \ldots + b_{1p}x_p.$$

Jelölje $b = [b_1, b_{12}, \ldots b_{1p}]$ p elemű vektort, $x_1 = [x_{11}, x_{12}, \ldots x_{1N}]$ az eredményváltozó megfigyelt értékeit, és

$$U = \begin{bmatrix} 1 & x_{12} \ldots & x_{1p} \\ 1 & x_{22} & x_{2p} \\ 1 & . & . \\ . & . & . \\ 1 & x_{N2} & x_{Np} \end{bmatrix}, \quad (N\text{x}p) \text{ méretű mátrixot.}$$

Bizonyítható, hogy ekkor a b együtthatók az

$$(U^*U)\ b = U^*x \text{ (ahol a * a transzponálás jele)}$$

ún. normálegyenletből határozhatók meg, melynek mátrixmegoldása

$$b = (U^*U)^{-1}U^*x_1.$$

Gyakorlati útmutatásként felírjuk $p = 2$ és $p = 3$ esetén a normálegyenleteket. A keresett függvény

$$x_1 = b_1 + b_{12}x_2 \,|\, + b_{13}x_3 + \ldots$$

A normálegyenletek pedig:

$$\begin{array}{l} \Sigma x_1 = b_1N + b_{12}\Sigma x_2 + \,\vdots\, b_{13}\Sigma x_3 + \ldots \\ \Sigma x_1x_2 = b_1\Sigma x_2 + b_{12}\Sigma x_2^2 \,\vdots\, b_{13}\Sigma x_2x_3 + \ldots \\ \hdashline \Sigma x_1x_3 = b_1\Sigma x_3 + b_{12}\Sigma x_2x_3 + b_{13}\Sigma x_3^2 + \ldots \end{array}$$

A sémában elválasztó vonalakkal határoltuk el a két-, ill. háromváltozós regresszió normálegyenleteit (Köves–Párniczky 1973, p. 610).

A fenti rendszer könnyen kiterjeszthető háromnál több változó esetére is. A b_{1i} ún. regressziós együtthatók konkrét és jól értelmezhető jelentéssel bírnak. Ha $i > 1$, akkor b_i azt fejezi ki, hogyha x_i egy egységgel nő, akkor az mekkora változást idéz elő az eredményváltozóban, miközben a modellben szereplő többi tényezőváltozó értéke nem változik. A b_1 együttható viszont az $x_2 = x_3 = \ldots = x_p = 0$ feltétel mellett mutatja az eredményváltozó értékét. De lehet a b_1 jelentés nélküli, csupán technikai paraméter is, ha pl. az $x_2 = x_3 = \ldots = x_p = 0$ az adott példában értelmetlen, ez a hely nem tartozik a regressziófüggvény értelmezési tartományába. Láthattuk, hogy a regressziós együtthatók meghatározásához minden esetben a normálegyenletek megoldására van szükség. Ezt elkerülhetjük, ha rendelkezünk a kovariancia mátrix inverz mátrixával, ekkor a regressziós együtthatók megadására csupán egy osztás szükséges. Jelölje az inverz mátrix általános elemét $[c_{iv}]$. Ekkor a regressziós együtthatók, ha az x_i változót választottuk eredményváltozónak

$$b_{ik} = -\frac{c_{ik}}{c_{ii}}$$

és

$$b_i = \bar{x}_i - b_{12}\bar{x}_2 - \ldots - b_{ip}\bar{x}_p.$$

5.2. *Statisztikai próbák*

A most következő statisztikai próbák alkalmazásának egyetlen feltétele, hogy az $x_1, x_2, \ldots, x_p$ együttes eloszlása normális eloszlás legyen.

Az alábbiakban a regressziós együtthatók elméleti értékeit β_{ik}-val, mintából számított értékeit pedig b_{ik}-val fogjuk jelölni.

5.2.1. *A regressziós együttható egy megadott szám-e*

A nullhipotézis: $H_0 : \beta_{ik} = A$, ahol A a hipotézisünk konkrét értéke.

Ekkor

$$t = \sqrt{N-p}\,\frac{c_{ii}}{c_{kk}}(b_{ik} - A)$$

mennyiség $(N - p)$ szabadságfokú Student-eloszlást követ, így ha $t > t_\varepsilon$, akkor a hipotézist elvetjük.

5.2.2. *Konfidencia-intervallum a regressziós együtthatóra*

Ha nincs hipotézisünk, akkor konfidencia-intervallumot adhatunk β_{ik}-ra, β_{ik} $1 - \varepsilon$ valószínűséggel beleesik az alábbi intervallumba:

$$b_{ik} - t_\varepsilon \frac{1}{\sqrt{N-p}} \frac{c_{kk}}{c_{ii}} \leqq \beta_{ik} \leqq b_{ik} + t_\varepsilon \frac{1}{\sqrt{N-p}} \frac{c_{kk}}{c_{ii}}.$$

5.2.3. *A becslés jósága*

Nyilvánvaló, hogy az eredményváltozó és a tényezőváltozók kapcsolatát megbízhatóbban jellemzi egy olyan regressziós egyenes (hipersík), amelyre a megfigyelési értékek szorosan illeszkednek, mint egy olyan, amely körül a megfigyelési pontok nagy ingadozásokat mutatnak. Így a regresszió megbízhatóságát, az illeszkedés jóságát mérhetjük az S_{x_i} mennyiséggel, a regressziós becslés szórásával:

$$S_{x_i}^2 = \frac{\sum_{i=1}^{N} (x_i - \hat{x}_i)^2}{N-1},$$

ahol $\hat{x}_i$-vel az x_i eredményváltozó regressziós becslését jelöltük.

Mivel az eloszlások normálisak, ezért mondhatjuk, hogy kb. 95%-os valószínűséggel az $x_i \pm 2S_{x_i}$ intervallumba esik az eredményváltozó valódi értéke.

5.3. *Nem-lineáris regresszió — lineárisra visszavezethető formák*

Sok esetben az eredményváltozó és a tényezőváltozók közötti kapcsolatot nemlineáris, hanem valamilyen más alakú görbe fejezi ki. Ilyenkor a lineáris regresszió nem jellemzi helyesen a kapcsolatot, s így félrevezethet. Egyes speciális görbék esetén azonban a regresszió ilyenkor is visszavezethető a lineáris alapesetre. A továbbiakban ezzel fogunk foglalkozni. Az egyszerűség kedvéért csak két változó közötti regresszióval foglalkozunk; jelölje az eredményváltozót Y, a magyarázó változót X.

Az n-edfokú polinom visszavezetése

A két változó közötti kapcsolatot a következő formában tételezzük fel:

$$Y = b_0 + b_1x + b_2x^2 + \ldots + b_nx^n.$$

Ez az alábbi transzformáció-sorozattal vezethető vissza lineáris formára:

$$x_1 = x; \quad x_2 = x^2; \quad \ldots x_n = x^n.$$

Ha a mátrixformát (normálegyenleteket) használjuk, akkor a mátrixok összeállítása:

$b = [b_0, b_1 \ldots b_n]$ $(n+1)$ elemű vektor

$u = [1, x_1 \ldots x_n]$ $(N \cdot (n+1))$ méretű mátrix.

Hatványfüggvény visszavezetése

A két változó közötti összefüggést az

$$Y = ax^b$$

alakú függvény jellemzi. Ezt a logaritmus transzformációval vezethetjük vissza a lineáris regresszióra:

$$\lg Y = \lg a + b \lg X,$$

helyettesítés: $Y = \lg Y$; $b_0 = \lg a$; $x_1 = \lg x$.

Exponenciális függvény visszavezetése

$Y = ab^x$ a kapcsolat formája.

Ismét a logaritmus transzformáció vezet célhoz:

$$\lg Y = \lg a + x \lg b\,.$$

Hiperbolikus függvények

A regressziós függvények gyakran alkalmazott csoportját képezik az

a) $Y = a + b\dfrac{1}{x}$, ill.

b) $Y = \dfrac{1}{a + bx}$

alakú hiperbolikus függvények. Ilyen alakú függvények esetén a reciprok transzformációt alkalmazhatjuk:

a) $x = \dfrac{1}{x}$ helyettesítés után már lineáris függvényünk van.

b) $\dfrac{1}{Y} = a + bx$ transzformáció vezet lineáris alakra.

5.4. *Multikollinearitás*

A regressziós egyenlet és az egyenlet paraméterei csak azon feltétel mellett számolhatók, ha a tényező változók kölcsönösen függetlenek és nincs közöttük függvényszerű kapcsolat. Ennek egyszerűen az az oka, hogy ellenkező esetben az U^*U mátrix nem volna invertálható, és a regressziós paraméterek meghatározhatatlanná válnának.

Ha azonban a tényező változók között sztochasztikus kapcsolat van, akkor a regressziós számítás elvégezhető ugyan (az U^*U mátrix invertálható), ám a paraméterek becslése igen bizonytalanná válik. Ezt, a gyakorlatban igen sokszor fellépő esetet nevezzük multikollinearitásnak.

A multikollinearitás „felfedezése" a vizsgálatba bevont változók korreláció mátrixa alapján történhet. Ha két tényezőváltozó közötti korrelációs együttható szignifikáns, ebben az esetben számolnunk kell a multikollinearitás meglétével.

A multikollinearitás további tárgyalására itt nem térhetünk ki, csak annyit jegyzünk meg, hogy részben e probléma megoldására, enyhítésére alkalmasak a könyv későbbi részeiben ismertetett modern vizsgálati módszerek közül pl. a faktoranalízis és a kanonikus korreláció számítás.

Kétváltozós vizsgálatnál gyakori eset, hogy az egyik változó az idő, vagyis a vizsgálat tárgya egy változó idősora, s ezen idősorbeli változások vizsgálata. Elméletileg az idősor egy speciális sztochasztikus folyamat, amelynél egy adott időpontra vonatkozó x_t valószínűségi változónak csak egyetlen értékét ismerjük (éppen x_t — t) a valószínűségi változó általában végtelen sok lehetséges értékei közül. Éppen ebben van az idősorok vizsgálatának matematikai nehézsége.
A gyakorlatban ezen úgy próbálnak segíteni, hogy egyrészt minél hosszabb idősorra törekednek, másrészt viszonylag egyszerű feltételezéssel dolgoznak. Az egyik leggyakrabban használt modell a következő:

$$x_t = z_t + d_t + y_t,$$

ahol x_t – a t-edik időpont megfigyelt értéke,

z_t – az alaptendenciát kifejező un. trend-komponens,

d_t – a periodikus (szezonális) hatás,

y_t – a stacionárius véletlen komponens.

Az alapvető feladat a különböző hatások szétválasztása, ill. becslése, majd esetleg ezek birtokában előrejelzés készítése. A szokásos eljárás általában az, hogy először a trend-komponenst határozzák meg, majd a szezonális hatást, s a végén a „maradékokat" felhasználva vizsgálják az eljárás jóságát. Nézzük mi is ebben a sorrendben.

5.5.1. *Trend-komponens*

Ez a komponens teljes egészében megfelel a regressziós függvény fogalmának, s azt fejezi ki, hogy milyen általános hatások léteznek az idősorban. Mivel azonban nem kötelező, hogy legyen trendhatás, az első kérdés az, hogy létezik-e egyáltalában trend.

Létezik-e trend?

Ennek vizsgálatára és tesztelésére felhasználhatjuk a Spearman-féle rangkorrelációt.

Legyen a megfigyelt idősorunk x_t (t = 1, 2, . . ., T). Rendezzük most x_t-ket növekvő sorrendbe, s az új sorrendet hasonlítsuk össze az eredetivel. A két sorrend nyilván független, ha $\{x_t\}$ idősor tisztán véletlen jellegű, s korrelál, ha kifejezetten létezik a trend. Jelölje a_t az új sorrendben levő t-edik megfigyelés rangját, ekkor a Spearman-féle ϱ:

$$\varrho = 1 - \frac{6}{T(T^2-1)} \sum_{t=1}^{T} (a_t - t)^2.$$

Ennek szignifikancia-próbája a 4.2.3. pont szerint történhet. Ha létezik trend, annak leválasztására két fő módszer ismert.

5.5.2. *Mozgó átlagolás*

Előnye az 5.5.3. pontban ismertetésre kerülő analitikus trenddel szemben egyszerűsége és gyorsasága. Hátránya viszont, hogy nem kapunk könnyen kezelhető görbét, valamint hogy a trendhatástól „megtisztított" idősor rövidebb, mint az eredeti. Legyen a mozgó átlag tagszáma k. A számítás menete a következő: kiszámítjuk az idősor első k adatának egyszerű számtani átlagát. Ez az első trendérték, melyet az érintett időszak közepéhez $(k + 1)/2$-edik időszakhoz rendelünk (ha k páratlan, akkor a most számított és a soron következő mozgóátlag számtani közepét a $[(k + 1)/2] + 1$-edik időszakhoz rendeljük). Ezután elhagyjuk az első adatot, s vesszük a $(k + 1)$-ediket. Ismét átlagot számolva nyerjük a következő trendértéket. Képletben:

$$\bar{x}_m = \frac{1}{k}(x_1 + x_2 + \ldots + x_k)$$

$$\bar{x}_{m+1} = \frac{1}{k}(x_2 + x_3 + \ldots + x_{k+1})$$

$$\bar{x}_{T-m+1} = \frac{1}{k}(x_{T-k+1} + x_{T-k+2} + \ldots + x_T),$$

ahol $m = (k + 1)/2$.

Ez az eljárás a véletlen hatás kiküszöbölését éppen az átlagolással éri el, a periodikus ingadozás hatását pedig a k helyes megválasztásával küszöbölhetjük ki. Szezonális ingadozásnál arra kell ügyelni, hogy minden egyes mozgó átlag átfogjon egy (vagy több) teljes időciklust (pl. negyedéves adatok esetén k lehet 4 vagy 8, de nem lehet mondjuk 5).

A most leírt mozgó-átlagolás lineáris trend leválasztására képes. Léteznek olyan mozgóátlag-képletek is, amelyek polinom alakú trend kiszámítására képesek (Yule – Kendall 1964, pp. 609 – 616).

5.5.3. *Analitikus trend*

Ekkor feltesszük, hogy

$$x_t = f(t) + \varepsilon,$$

vagyis az időnek valamilyen függvényében (lineáris vagy parabola vagy polinom stb.) fejezzük ki az idősor megfigyelt értékeit (az ε hibától eltekintve), s a legkisebb négyzetek elve szerint határozzuk meg az f függvény paramétereit. Vagyis látható, hogy a már tárgyalt regressziós problémához jutottunk.

5.5.4. *Szezonális komponens*

Ha az idősorból a trendhatást kiküszöböltük (ez a trendértékek egyszerű kivonásával történik), akkor adataink már csak szezonális és véletlen hatást tartalmaznak.

A számítás a következő: meghatározzuk az összes érték átlagát. Jelölje ezt $\bar{V}$. Ezután az azonos szezontípusra vonatkozó értékek átlagát számoljuk ki, jelölje ezt V_j (ahol a j index a szezontípusokat jelöli). Például, ha 5 évre vannak adataink havi bontásban, akkor a trendhatás kiszűrése után – V_1 pl. az öt év januári átlagértéke. Ezután a szezonális eltérések

$s_j = V_j - \bar{V}$ képlettel adottak.

5.5.5. *Véletlen komponens*

Ha a trend- és szezonhatást eltávolítottuk, akkor a maradéknak már csupán a véletlen hatásokat szabad tükröznie. Vagyis, ha jól állapítottuk meg a trendfüggvény alakját, helyesek voltak ismereteink a szezonális hatásokról, akkor az Y_t-knek korrelálatlanoknak kell lenniük egymással – nem szabad, hogy fellépjen autokorreláció.

Létezik-e autokorreláció?

Erre a kérdésre is tudunk szignifikancia-vizsgálatot adni, a kérdést az ún. Neumann-féle hányados segítségével dönthetjük el. Ezt a hányadost nevezik még „a szukcesszív különbségnégyzetek átlagának és a varianciának a hányadosa"; ez az elnevezés mindjárt megadja azt is, hogyan kell kiszámítani.

A Neumann-féle hányados képlete:

$$p = \frac{\dfrac{\Sigma(Y_{t+1} - Y_t)}{T-1}}{\dfrac{\Sigma Y_t^2}{T}}.$$

(A Neumann-féle hányados [p] értékeinek táblázatát ld. a Függelék *X. táblázatá*ban.) Adott szignifikanciaszinten (ε) és megfelelő mintanagyságnál (T) a Neumann-féle hányados számított értéke akkor jelzi pozitív autokorreláció jelenlétét, ha az a kritikus k érték alá esik és akkor jelzi a negatív autokorreláció jelenlétét, ha ez túllépi a megfelelő kritikus értéket, ha a Neumann-féle hányados a két kritikus érték közé esik, akkor nincs bizonyítékunk az autokorreláció jelenlétére (Ezekiel–Fox 1970, p. 380).

6. *Területi egyenlőtlenségi mutatók*

A területi kutatások alapvető kérdései közé tartozik a természeti, gazdasági, társadalmi jelenségek *területi, regionális differenciáltságá*nak mérése. E szerteágazó, de módszertani szempontból mégis sok analóg problémát magában foglaló kérdéskörbe tartoznak olyan, statisztikai adatok alapján gyakorta elemzett témakörök, mint a különböző természetföldrajzi jellemzők területi variációinak kutatása, a népesség vagy az egyes gazdasági ágak térbeli koncentrálódásának mérése, a gazdasági fejlettség, a hatékonyság, az életszínvonal, az életkörülmények, a kultúra területi sémájának vizsgálata, a különböző társadalmi csoportok területi szegregációjának feltárása.

E széles spektrumból adódóan a különböző területi egyenlőtlenségi indexek is rendkívül elterjedtek a területi kutatásokban. Az egyik legnagyobb problémát épp az okozza, hogy szinte minden szerző – okkal vagy ok nélkül – más és más matematikai apparátust használ, s így még ha tartalmilag nagyon közel álló kérdéseket vizsgálnak is, a végeredmények általában nem vethetők közvetlenül számszerűen össze. A következőkben e – megítélésünk szerint túlburjánzott – mutatószámhalmazból csak a szakirodalomban *leggyakrabban előforduló* és általunk *leginkább hasznosíthatón*ak tartott mutatószámokat ismertetjük. Ezek többsége nemcsak a területi egyenlőtlenség mérésére alkalmas; segítségükkel lehetőség van az egyenlőtlenség egyes *tényezőinek* feltárására is.

Az egyenlőtlenségi indexek területi adatsorokból számíthatók. A használt adatsorok jellegüket tekintve több típusba sorolhatók *(2. táblázat)*. Számíthatunk területi egyenlőtlenségi indexeket naturális mértékegységben megadott területi jellemzők adatsorából (e típust a továbbiakban általánosságban x_i típusú adatsoroknak nevezzük) újabb típust alkot az x_i típusú adatsorok megoszlási viszonyszám formájában megadott értéke, a területegységek százalékos részesedése az adott jelenség összvolumenéből (ezeket X_i típusú adatsoroknak nevezzük). Külön jelölést alkalmazunk abban az esetben, amikor az adott területi jellemző fajlagos érték (pl. népességre, területre vetített intenzitási mutató – ezeket y_i típusú adatsoroknak nevezzük). Ha az y_i típusú fajlagos értékeket az átlagérték százalékában (vagy az átlagot 1-nek tekintve) fejezzük ki, újabb típushoz jutunk (Y_i típus). Az adatsorok átlagainak jelölése: $\bar{x}$, $\bar{X}$, $\bar{y}$, $\bar{Y}$.

Az egyenlőtlenségi mutatók mindegyikének közös, objektív hiányossága az, hogy értéke függ a területi aggregáció szintjétől, a területegységek számától.

Az egyenlőtlenségi indexek ugyanazon adatsorból származó értékei számszerűen általában egymással nem vethetők össze. Ezen túlmenően általában nincs monoton függvénykapcsolat a különböző egyenlőtlenségi indexek között. Matematikailag ezt úgy fejezhetnénk ki, hogy két, azonos tartalmú a_i és b_i (akár x_i vagy y_i típusú) adatsorból számolt d_1 és d_2 (általánosan jelölt) egyenlőtlenségi index esetében a $d_1(a_i) > d_1(b_i)$ relációból nem következik $d_2(a_i) > d_2(b_i)$ reláció. Ez azzal függ össze, hogy a mutatószámok nem csupán formailag különbözőek, hanem az esetek túlnyomó többségében a területi egyenlőtlenség tartalmilag is különböző aspektusait tárják fel. Ebből az is következik, hogy egy-egy adott jelenség vizsgálatakor többféle egyenlőtlenségi index kiszámítása célszerű.

A bemutatásra kerülő mutatószámok jó része a matematikai–statisztika alapelemeiből került a területi elemzések módszerei közé. Itt azonban nem a matematikai–statisztika logikája szerint és terminológiáját használva ismertetjük őket, hanem olyan formában, ahogy a konkrét elemzésekben szerepelnek.

A területi egyenlőtlenségek mérésére szolgáló mutatószámok lényegében három nagyobb csoportba oszthatók:

1. A szélső értékek összevetésén alapuló mutatók;
2. Szórás-típusú mutatószámok;
3. Megoszlási viszonyszámok összevetésén alapuló mutatók.

2. TÁBLÁZAT

A területi egyenlőtlenségi mutatók számításához felhasználható adatok típusai

(a mintapélda alapadatai 1978. évre vonatkozó értékek)

Mutatószámok megnevezése és típusai / Tervezési-gazdasági körzetek	Népesség		A szocialista iparban foglalkoztatottak		A szocialista ipar bruttó állóeszköz-értéke		$\frac{(3)}{(1)}$	$\frac{(7)}{(\overline{7})}$	$\frac{(5)}{(1)}$	$\frac{(9)}{(\overline{9})}$	$\frac{(5)}{(3)}$	$\frac{(11)}{(\overline{11})}$
	1000 fő x_i	% X_i	1000 fő x_i	% X_i	mdFt x_i	% X_i	y_i	Y_i	y_i	Y_i	y_i	Y_i
	(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)	(8)	(9)	(10)	(11)	(12)
Központi	3 070	28,7	555	33,0	178	31,3	181	115,2	58	109,4	321	95,0
É-magyarországi	1 382	12,9	245	14,5	115	20,2	177	112,7	83	156,6	469	138,8
É-alföldi	1 569	14,7	181	10,7	43	7,6	115	73,2	27	50,9	238	70,4
D-alföldi	1 465	13,7	192	11,4	48	8,4	131	83,4	33	62,3	250	74,0
É-dunántúli	1 890	17,7	331	19,7	133	23,4	175	111,5	70	132,0	402	118,0
D-dunántúli	1 322	12,3	180	10,7	52	9,1	136	86,6	39	73,6	289	85,5
Ország összesen	10 698	100,0	1 684	100,0	569	100,0	–	–	–	–	–	–
Átlag	1 783	16,66	281	16,66	95	16,66	157	100,0	53	100,0	338	100,0

Megjegyzés: A csak számmal jelölt oszlopok tartalma:
(7) 1000 főre jutó ipari foglalkoztatottak száma (fő),
(8) 1000 főre jutó ipari foglalkoztatottak száma az átlag százalékában,
(9) 1000 főre jutó ipari állóeszközök értéke (mill. Ft),
(10) 1000 főre jutó ipari állóeszközök értéke az átlag százalékában,
(11) 1000 ipari foglalkoztatottra jutó ipari állóeszközök értéke (mill. Ft),
(12) 1000 ipari foglalkoztatottra jutó ipari állóeszközök értéke az átlag százalékában.

6.1. *A szélső értékek összevetésén alapuló mutatószámok*

6.1.1. *Az adatsor maximális és minimális értékének összevetése*

(range-típusú indexek) mind x_i, mind y_i típusú adatsorok esetében lehetséges. Ilyen területi egyenlőtlenségi indexek az alábbiak:

$$K=\frac{x_{\max}}{x_{\min}} \qquad K=\frac{y_{\max}}{y_{\min}} \qquad 1\leq K<\infty$$

$$P=x_{\max}-x_{\min} \qquad P=y_{\max}-y_{\min} \qquad 0\leq P<\infty$$

$$Q=\frac{x_{\max}-x_{\min}}{\bar{x}}\cdot 100 \quad Q=\frac{y_{\max}-y_{\min}}{\bar{y}}\cdot 100 \quad 0\leq Q<\infty\,.$$

A szakirodalomban előfordul az, hogy nem csupán az adatsor maximumát és minimumát vetik össze, hanem az adatsor pólusairól több értéket véve számítják ki a hányadosokat, ill. a különbségeket. Az ilyen összevetésnek semmilyen elvi akadálya nincs, alkalmazása azonban tartalmi indoklást kíván.

6.1.2. *Az átlag feletti és alatti értékek összevetése*

Szoros rokonságban van a fentiekben leírt K egyenlőtlenségi indexszel az alábbi, y_i típusú adatsorok esetében használható mutatószám:

$$A=\frac{\bar{y}_1}{\bar{y}_2} \qquad 1\leq A<\infty\,,$$

ahol $\bar{y}_1$ – az y_i adatsor $\bar{y}$ *átlagánál nagyobb* y_i értékek átlagát jelenti,
$\bar{y}_2$ – az y_i adatsor $\bar{y}$ *átlagánál kisebb* y_i értékek átlagát jelenti.

Az A index tehát az átlag feletti, ill. az átlag alatti y_i értékek átlagának hányadosa. Önmagában használatát kevés érv indokolná, mellette szól azonban az a tulajdonsága, hogy segítségével – bizonyos újabb matematikai összefüggéseket felhasználva – mód van a területi egyenlőtlenségek tényezőkre bontására. E felhasználási területet az alábbi példa segítségével könnyebben megvilágíthatjuk, mint a teljesen általános formulákat használva.

Mivel az indexben y_i típusú mutatószámok szerepelnek, így minden regionális érték lényegében egy-egy hányados. Például, ilyen mutató lehet az egy főre jutó jövedelem egy adott területegységben:

$$y_i=\frac{\text{az } i\text{-edik területegységben termelt jövedelem } (J_i)}{\text{az } i\text{-edik területegység népessége } (N_i)}\,.$$

Tételezzük fel, hogy minden területegységre rendelkezünk a foglalkoztatottak számával is (F_i). Ezen értékek ismeretében minden területegységre felírható az alábbi egyenlet:

$$\frac{J_i}{N_i}=\frac{F_i}{N_i}\,\frac{J_i}{F_i}\,.$$

Ez az összefüggés azt jelenti, hogy az egy főre jutó jövedelem $\left(\frac{J_i}{N_i}\right)$ minden területegységben a foglalkoztatottsági ráta $\left(\frac{F_i}{N_i}\right)$ és az egy foglalkoztatottra jutó jövedelem $\left(\frac{J_i}{F_i}\right)$ szorzatával egyenlő.

Ezen összefüggést felhasználva felírható:

$$A=\frac{\left(\frac{J_i}{N_i}\right)_1}{\left(\frac{J_i}{N_i}\right)_2}=\frac{\left(\frac{F_i}{N_i}\right)_1\left(\frac{J_i}{F_i}\right)_1}{\left(\frac{F_i}{N_i}\right)_2\left(\frac{J_i}{F_i}\right)_2},$$

azaz az egy főre jutó jövedelem A szerint értelmezett területi *egyenlőtlensége*, két jól értelmezhető mutatószám (a foglalkoztatottsági ráta és az egy foglalkoztatottra jutó jövedelem) egyenlőtlenségének szorzataként írható fel. Ez az összefüggés additívvá tehető, ha az egyenlőtlenség mérésére log A-t használjuk (ezt a logaritmusfüggvény monotonitása és A pozitív előjele alapján megtehetjük). Ekkor:

$$\log\frac{\left(\frac{J_i}{N_i}\right)_1}{\left(\frac{J_i}{N_i}\right)_2}=\log\frac{\left(\frac{F_i}{N_i}\right)_1}{\left(\frac{F_i}{N_i}\right)_2}+\log\frac{\left(\frac{J_i}{F_i}\right)_1}{\left(\frac{J_i}{F_i}\right)_2}.$$

J_i, N_i és F_i ismeretében az egyenlet minden tagja kiszámítható, s a jobb oldalon felírt tagokat a bal oldal százalékában kifejezve arra is választ kapunk, hogy a jövedelem egyenlőtlenség hány százaléka ered a foglalkoztatottság, ill. az egy foglalkoztatottra jutó jövedelem területi egyenlőtlenségeiből.

Ez az index és a szorzattá bontás módszere a legkülönbözőbb esetekben alkalmazható, arra azonban feltétlenül ügyelni kell, hogy a felbontásban szereplő hányadosok valóban *értelmes tartalom*mal bírjanak, s ne csupán két érték fiktív hányadosai legyenek.

6.2. *Néhány megjegyzés a szórás-típusú mutatókhoz*

A *szórás-típusú* mutatószámok jelentősége nem csupán az egyenlőtlenségek mérésére való alkalmazásukban van, hanem abban is, hogy a szórás matematikai–statisztikai fogalma, közvetlenül vagy közvetve alapja az összes többváltozós módszernek, amit a területi kutatásokban használnak. A leggyakrabban használt összefüggések y_i típusú mutatószámok esetében (ld. részletesebben az 1.2.2.3. pontban):

a) *Átlagos abszolút eltérés*

$$D=\frac{\Sigma\,|y_i-\bar{y}|\cdot f_i}{\Sigma f_i}\qquad 0\leq D<\infty$$

b) *Szórás*

$$S = \sqrt{\frac{\Sigma(y_i - \bar{y})^2 \cdot f_i}{\Sigma f_i}} \qquad 0 \leq S < \infty$$

c) *Relatív átlagos eltérés, relatív szórás (variáció)*

$$U = \frac{100D}{\bar{y}} = \frac{\Sigma\,|\,y_i - \bar{y}\,|\cdot f_i}{\Sigma f_i} \qquad 0 \leq U < \infty$$

$$V = \frac{100S}{\bar{y}} = \frac{\sqrt{\frac{\Sigma(y_i - \bar{y})^2 \cdot f_i}{\Sigma f_i}}}{\bar{y}} \qquad 0 \leq V < \infty.$$

A fenti összefüggésekben szereplő f_i „súly" az adott y_i fajlagos mutatószám nevezőjében szereplő jellemző területi érték (az egy főre jutó jövedelem esetén pl. a népességszám).

A D és S index közül az utóbbit jóval gyakrabban használják. Ez egyrészt azzal magyarázható, hogy a különböző adatsorok területi egyenlőtlenségének értékei sok esetben bonyolultabb matematikai–statisztikai elemzések (pl. korreláció- és regresszióelemzés, faktoranalízis) melléktermékeiként kerülnek kiszámításra, s ezekben a módszerekben a szórás szerepel, másrészt az átlagos abszolút eltérés a benne szereplő abszolút érték miatt matematikailag nehezen kezelhető. Az átlagos abszolút eltérés használatával szemben elvi kifogás nem hozható fel, egyszerűbb számítások esetében használata praktikusabb is. Egyébként értelmezése is kézenfekvőbb, mint a négyzetre emelést pusztán matematikai meggondolásból tartalmazó szórásé.

Már utaltunk arra, hogy a különböző egyenlőtlenségi indexek között nincs monoton függvénykapcsolat. Többek között ez a metodikai tény az egyik gyökere a területi fejlettségi közeledés vagy kiéleződés megítélése körül a szakirodalomban kialakult vitának; nem egy esetben előfordul ugyanis a regionális egyenlőtlenségek vizsgálata során, hogy míg az egyenlőtlenség abszolút mérőszámai a különbségek növekedésére utalnak, a relatív mutatók szerint csökkennek a differenciák. Nem tagadva a differenciáció abszolút mérőszámainak szerepét a területi különbségek megítélésében, meggyőződésünk, hogy a problémák többségében a relatív indexek (variáció) nemcsak más, hanem a folyamat valós jellemzőit jobban megközelítő tartalmat hordoznak, mint az abszolút mérőszámok.

6.3. *Területi különbségek vizsgálata X_i-típusú adatsorok felhasználásával*

6.3.1. *Hoover-féle index*

A megoszlási viszonyszámokon alapuló egyenlőtlenségi indexek egész családjának kiindulópontja a Hoover-féle *területi egyenlőtlenségi mutató:*

$$H = \frac{\Sigma \mid a_i - b_i \mid}{2} \qquad 0 \leq H < 100,$$

ahol a_i és b_i X_i típusú megoszlási viszonyszám, amelyekre fennáll a következő két egyenlet:

$$\Sigma a_i = 100$$

$$\Sigma b_i = 100.$$

A Hoover-féle egyenlőtlenségi mutató *számításakor* két megoszlási viszonyszám területi értékei különbségének abszolút értékeit összegezzük, s osztjuk kettővel. A H konkrét jelentést hordoz: megmutatja, hogy az egyik területi jelenség hány százalékát kellene átcsoportosítani a területegységek között ahhoz, hogy a területi megoszlása azonos legyen a vele összevetett jelenségével. Külön előnye a Hoover-féle indexnek, hogy nemcsak alulról, hanem felülről is korlátos.

A H mutatót nemcsak két különböző területi jellemző megoszlásának összevetésére, hanem térbeli megoszlások időbeli változásának mérésére is használhatjuk:

$$H_d = \frac{\Sigma \mid a_{1i} - a_{2i} \mid}{2},$$

ahol a_{1i} – az i-edik területegység százalékos részesedése az a_i adatsor országos összvolumenéből az 1. időpontban,
a_{2i} – ugyanezen érték a 2. időpontban.

Időbeli elemzéskor H módosított változataival kiszámíthatjuk az egy területegységre eső arányváltozás (H_n), ill. több évet átfogó periódus esetén az egy évre eső arányváltozás (H_t) mértékét is:

$$H_n = \frac{\Sigma \mid a_{1i} - a_{2i} \mid}{2n}$$

$$H_t = \frac{\Sigma \mid a_{1i} - a_{2i} \mid}{2t},$$

ahol n – a vizsgált területegységek száma,
t – a vizsgált időperiódus hossza (években).

A Hoover-féle index egyik speciális változatának tekinthetők azok a mutatószámok is, amelyekben valamely jelenség területi megoszlását az egyenletes megoszlással vetik egybe:

$$H_e = \frac{\Sigma \left| a_i - \frac{100}{n} \right|}{2}.$$

Találkozhatunk a szakirodalomban a Hoover-féle indexhez hasonló egyenlőtlenségi mutatóval, amelynek a nevezőjében 2 helyett 100 szerepel

$$H^x = \frac{\Sigma \mid a_i - b_i \mid}{100}.$$

E mutatószámnak nemcsak az a sajátos hátránya, hogy nincs olyan egyértelműen szavakba önthető tartalma, mint H-nak, hanem az is, hogy csak látszólag új egyenlőtlenségi index. Bizonyitható ugyanis, hogy H^x megegyezik az $a_i/b_i = Y_i$ típusú adatokból kiszámítható átlagos abszolút eltéréssel, azaz D-vel. A bizonyítás a következő:

$$\left.\begin{aligned} a_i > 0,\ & b_i > 0 \\ \Sigma a_i &= 100 \\ \Sigma b_i &= 100 \\ Y_i &= \frac{a_i}{b_i} \\ f_i &= b_i \end{aligned}\right\} \text{feltételek teljesülésekor}$$

$$D = \frac{\Sigma\,|Y_i - \bar{Y}|\,b_i}{\Sigma b_i} = \frac{\Sigma\left|\dfrac{a_i}{b_i} - 1\right| b_i}{100} = \frac{\Sigma\,|a_i - b_i|}{100} = H^x.$$

E rövid kitérőt annak érzékeltetésére tettük, hogy rámutassunk arra, miként lehet bizonyos matematikai átalakításokkal olyan új konstrukciókhoz jutni, amelyek könnyen megtéveszthetik a felhasználót a maguk újdonságával.

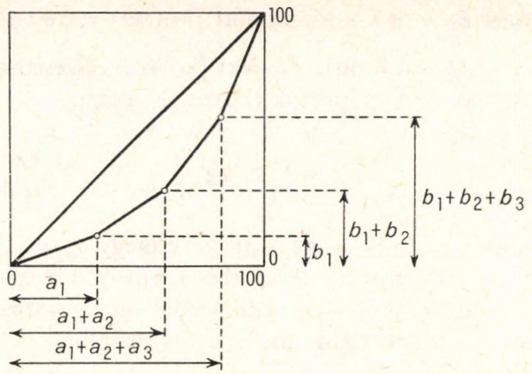
6.3.2. *A Lorenz-görbe*

A szakirodalomban általánosan ismert a Lorenz-görbe. Információtartalmát a geometriai megjelenítés növeli, felhasználása ellen szól azonban az, hogy mélyebb elemzése nehézkes. A Lorenz-görbe lényegében az ún. Gini-féle koncentrációs mutató geometriai megjelenítése.

$$G = \frac{\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_i a_j \left|\dfrac{b_i}{a_i} - \dfrac{b_j}{a_j}\right|}{2} \qquad 0 \leq G \leq 1\,.$$

Ha a Lorenz-görbével két megoszlást (a_i és b_i) összevetünk, akkor a területegységeket először az a_i/b_i értékek sorrendjébe kell állítani (a fejezet elején szereplő *2. táblázat*ban a tervezési gazdasági körzeteket például az egy ipari foglalkoztatottra jutó állóeszköz-érték nagysága szerint rangsorolhatjuk – ott ezeket az értékeket a (11) ill. (12) oszlop tartalmazza). Ezután felrajzolunk egy négyzetet, oldalait 100 egységre osztva, s meghúzzuk az átlóját. Így lényegében egy koordináta-rendszert készítünk, amelynek vízszintes tengelye lesz az a_i (foglalkoztatottak), függőleges tengelye b_i (állóeszközök tengelye). E rendszerbe (az *1. ábra* szerint) berajzolhatjuk a területegységek a_i és b_i értékei szerinti kumulatív görbét, amelynek pontjai az $(a_1;\ b_1)$, $(a_1 + a_2;\ b_1 + b_2)$, $(a_1 + a_2 + a_3;\ b_1 + b_2 + b_3)$ . . . . . . síkbeli pontok lesznek. E pontokat összekötő törött vonal szemlélteti az a_i és b_i értékek területi eloszlásának egyenlőtlenségét; minél távolabb van a négyzet átlójától a törött vonal (ez a tulajdonképpeni Lorenz-görbe, amely nagyszámú területegység ese-

1. ábra. Lorenz-görbe



tén kisimul, valódi görbévé válik), annál nagyobb a területi egyenlőtlenség. Ha csupán egyetlen adatpár megoszlásának egyenlőtlenségét kívánjuk mérni, akkor nincs értelme felrajzolni a Lorenz-görbét, ezzel szemben *összehasonlítások* során (akár az adott jelenség területi egyenlőtlenségének *több időpontra* való kiszámításakor, akár két értelemszerűen összehasonlítható fajlagos mutatószám esetében) a Lorenz-görbe segítségével szemléletes képet kaphatunk a területi egyenlőtlenségek alakulásáról, viszonyáról. Ha a Lorenz-görbe felrajzolását a négyzetbe nem a_i/b_i, hanem reciproka, b_i/a_i nagysága szerinti sorrendben kezdjük, akkor a négyzet átlója felett kapunk egy görbét. A két eset között elvi–matematikai különbség nincs, csupán arra kell ügyelni, hogy a reciprok érték is értelmes tartalmú mutatót adjon.

6.3.3. *Entrópia-érték*

Az információelméletből került a területi kutatásokban is alkalmazott egyenlőtlenségi mutatók közé az ún. entrópia-érték. Ez ugyancsak két területi megoszlás összevetésére alkalmas. Az összefüggés használatakor az a_i és b_i megoszlásoknak teljesíteni kell a $\Sigma a_i = \Sigma b_i = 1$ kritériumot is.

$$E = \sum_{i=1}^{n} b_i \log \frac{b_i}{a_i} \qquad 0 \leq E < \quad \log \frac{1}{a_{\min}}.$$

Az entrópia előnyös tulajdonsága az, hogy korlátos és matematikailag lehetőséget nyújt arra, hogy a vizsgálatban szereplő területegységeket csoportokba összevonva (belőlük magasabb aggregációs szintű területi egységeket alkotva; pl. megyei alapadatok esetén körzetekbe összevonva) választ adjon arra a kérdésre, hogy a területi egyenlőtlenség mekkora hányada adódik a csoportok *közötti* és a csoportokon *belüli* heterogenitásból az adott mutatószám alapján (amely ez esetben is tulajdonképpen b_i/a_i).

E felbontást a következő összefüggés adja:

$$E = \sum_{i=1}^{n} b_i \log \frac{b_i}{a_i} \longrightarrow \text{az } \textit{összentrópia}$$

$$F = \sum_{k=1}^{m} B_k \log \frac{B_k}{A_k} \qquad \text{a } \textit{csoportok} \text{ (körzetek) } \textit{közötti entrópia},$$

ahol B_k – a k-adik csoport (körzet) részesedése a b_i országos összvolumenéből,

A_k – a k-adik csoport (körzet) részesedése az a_i országos összvolumenéből,

m – a csoportok (körzetek) száma.

$$G_k = \sum_{i \subset k} c_i \log \frac{c_i}{d_i} \longrightarrow \text{az egyes } \textit{csoportokon} \text{ (körzeteken) } \textit{belüli egyenlőtlenség},$$

ahol $c_i = b_i/B_k$ – az i-edik területegység részesedése a c_i mutató szerint a k-adik csoportban (körzetben), amelybe összevontuk,

$d_i = a_i/A_k$ – az i-edik területegység részesedése (az a_i mutató szerint) a k-adik csoportban, amelybe összevontuk.

G_k természetszerűleg teljesen analóg E-vel, csupán itt nem az összes területegységet, hanem csak a k-adik körzetbe tartozókat vesszük figyelembe.

A három index között az alábbi összefüggés áll fenn:

$$E = F + \sum_{k=1}^{m} B_k \cdot G_k .$$

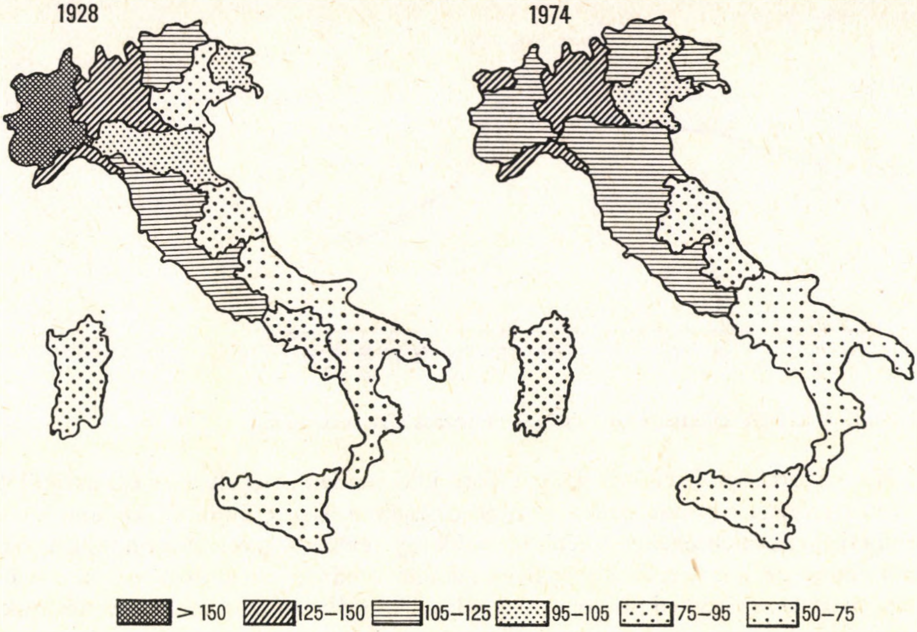
Az entrópiának ezt a tulajdonságát felhasználhatjuk – többek között – arra, hogy valamely fajlagos mutatószám (b_i/a_i) szempontjából eldöntsük azt, hogy a területegységek mely csoportosítása (milyen körzetek) esetében alakulnak ki a *leghomogénebb* csoportok (több körzetbeosztás közül ennek a feltételnek az felel meg, ahol F/E a maximális, azaz az összentrópiában ez esetben a legnagyobb a körzetek *közötti* egyenlőtlenség aránya).

G_k értékek alapján összehasonlíthatjuk a körzetek belső heterogenitását. A módszer természetesen időbeli összevetésekre is lehetőséget ad, ilyen esetben pl. mód van annak eldöntésére, hogy egy korábbi időpontban kialakított csoportosítás (körzetesítés) az idő előrehaladtával hogyan értékelhető; csökkent vagy növekedett-e a körzetek belső heterogenitása. A belső heterogenitás növekedésének kimutatása esetleg érveket szolgáltathat a körzetbeosztás módosítására. Természetesen itt csupán *egyetlen mutató* alapján történő csoportosításról van szó, azzal az implicit értékítélettel, hogy a *homogén* körzeteket tekintjük kívánatosnak. E két feltétel természetesen nem minden esetben áll fenn.

Ugyanezen módszer alkalmas fajlagos mutatók térképezése során a kategóriahatárok kiválasztására is, továbbá az entrópiát felhasználva, lehetőség van az adott területi jellemzőnek a lehető legkisebb információveszteséggel történő feltérképezésére.

6.4. *Területi fejlettségi különbségek elemzése egyenlőtlenségi mutatók segítségével*

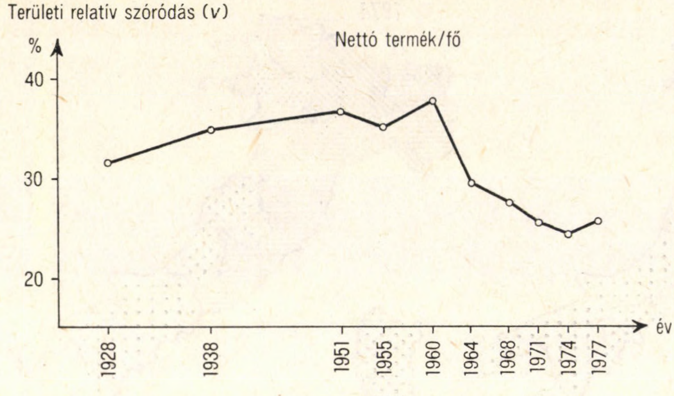
Az előzőekben bemutatott egyenlőtlenségi mutatók a területi gazdasági fejlődés elemzése során különösen akkor juthatnak nagy szerephez, ha az időbeli vagy nemzetközi összehasonlító elemzések egy-egy kiemelt mutatószám bázisán zajlanak. A területi fejlettségi különbségek elemzésében ez a kiemelt jelzőszám – összes, a szakirodalomban sokoldalúan tárgyalt problémája, korlátai ellenére – az egy fő-



2. ábra. Területi fejlettségi különbségek Olaszországban (a fejlettségi szint az országos átlag százalékában)

re jutó nemzeti jövedelem (ill. a vele analóg más értékbeni mutatószámok). Az ilyen jellegű vizsgálatokban az adatbázis korlátozottsága és összehasonlíthatósági problémái miatt általában nincsen mód az egy-egy időpont és egy-egy kisebb területegység vizsgálatakor sok hasznos eredménnyel kecsegtető többváltozós matematikai–statisztikai módszerek alkalmazására.

A területi egyenlőtlenségi indexek kiszámítását, használatát a földrajzi elemzésekben mindenekelőtt az indokolja, hogy bár a területi adatok – akár több időpontra vonatkozó – térképezése az adott jelenség térszerkezetéről érzékletes, vizuális információt ad, de önmagában nem teszi lehetővé a regionális differenciáltság mértékének megítélését. Az „Észak–Dél" probléma mintaországának tekinthető Olaszország tartós fejlettségi tagoltsága, az elmaradott „Mezzogiorno" léte jól leolvasható a *2. ábrá*ról, de a területi fejlettségi különbségek változásának menete csak a szóródási index (esetünkben *v*) idősorának kiszámításával és ábrázolásával válik érzékelhetővé *(3. ábra)*. Ez az adatsor feltárja a hatvanas években lezajlott kiegyenlítődési folyamatot, de legutolsó, 1977-re vonatkozó értéke már arra utal, hogy a gazdasági válság hatására a kiegyenlítődés megtorpant, sőt a relatív szórás kissé növekedett is. A *3. ábrán* szereplő, 1977-re vonatkozó *v* érték 25,3%-os szóródást jelez, Olaszországban az egy főre jutó nettó nemzeti termék regionális értékei között. Az ábra jól mutatja, hogy ez a területi diszparitás kisebb, mint a korábbi évtizedekben mért értékek, ahhoz azonban, hogy a fejlettségi különbség így mért nagyságát valóban reálisan értékelni tudjuk, szükség van nemzetközi összehasonlításra is.



3. ábra. A területi fejlettségi különbségek változása Olaszországban

Ha a gazdasági értéktermelés egy főre jutó területi értékeit – megközelítőleg azonos időszakra vonatkozóan – több országban összegyűjtjük és kiszámítjuk a területi egyenlőtlenségeket, lehetőség nyílik egy nemzetközi összehasonlító keresztmetszet-elemzésre. A *4. ábrán* egy ilyen számítás eredményeit ábrázoltuk. Itt a területi jövedelemszóródási adatokat egy olyan koordináta-rendszerben ábrázoltuk, amelyben a vízszintes tengely (a független változónak tekintett paraméter) az országok gazdasági fejlettségi szintje, a megfelelő évekre vonatkozó egy főre jutó GNP folyó áron dollárban kifejezett értéke. Az ábrán 40 ország egy-egy 1960 és 1978 közötti évre vonatkozó adata szerepel.

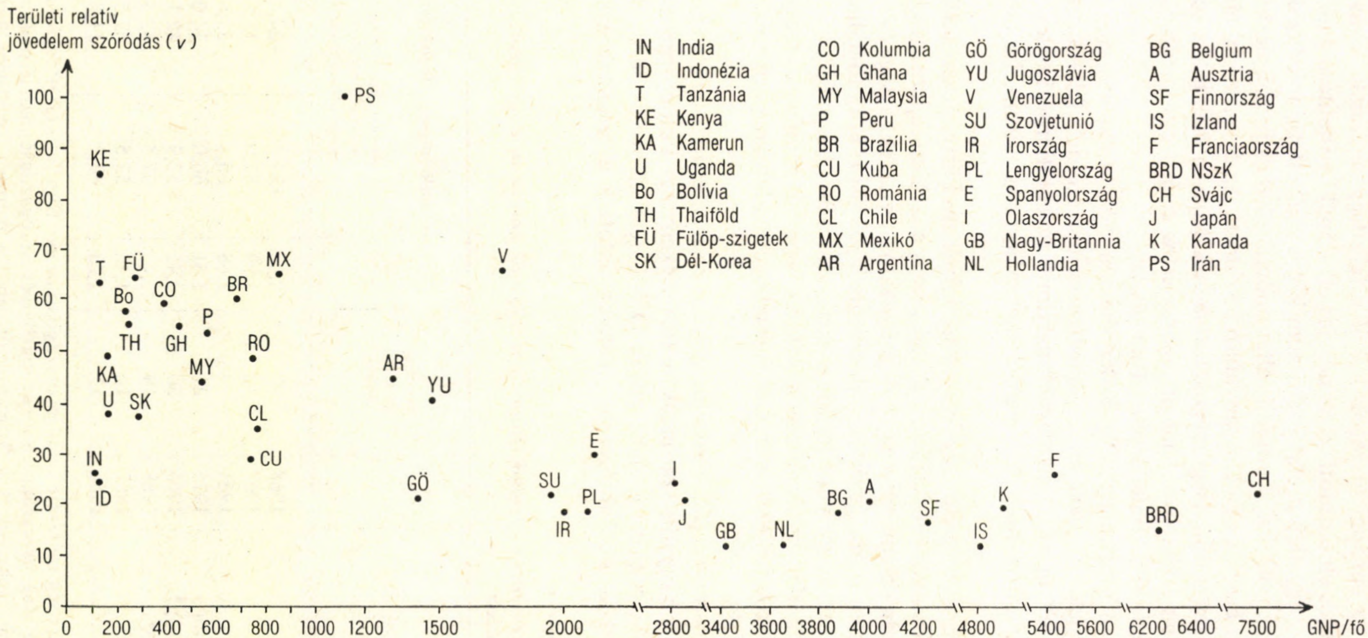
A vizsgálatban szereplő adatok – még egy felszínes áttekintés alapján is – érdekes információkat szolgáltatnak az országos fejlettségi szint és a belső regionális fejlettségi differenciáltság kapcsolatáról. Mivel itt a kapcsolatrendszer alapos tárgyalására nincs mód, csak néhány, az ábráról leolvasható (egy részletes elemzés során természetesen pontosan, számszerűen is ellenőrizendő) lényeges vonást emelünk ki.

– Az ábra alapján úgy tűnik, hogy az országos fejlettségi szint növekedésével párhuzamosan csökkennek a szórás-értékek, azaz a fejlett országok regionálisan kiegyensúlyozottabbak, mint a gyengén és közepesen fejlettek.

– Néhány ország szóródási adata (pl. Kenya, Irán, Venezuela, Mexikó vagy India, Indonézia, Kuba, Görögország) nem illeszkedik a pontok többségéből kialakuló, csökkenő irányzatú ponthalmazba; ezek az országok – úgy tűnik – fejlettségi szintjükhöz képest a várhatótól eltérő – annál jóval nagyobb, ill. kisebb – belső fejlettségi megoszlással jellemezhetők. Ezen országok esete azért részletesebb elemzést érdemel.

– Feltűnik az ábra alapján az is, hogy fejlettségi sávokat tekintve, az elmaradott országok csoportján belül jóval nagyobb szélső értékeket találunk, mint a fejlettek között; 2000 dolláros érték felett megszűnnek a nagy ingadozások, szinte teljesen kisimul a ponthalmaz.

– Ha az ábrán megkeressük Olaszországot, akkor azt a megállapítást tehetjük, hogy az ország – az adott mutatószám alapján – fejlettségi szintjének függvényében nem rendelkezik kirívóan nagy szórás-értékkel, így pl. a nála jóval fejlettebb



4. ábra. A gazdasági fejlettség és a területi fejlettségi különbségek összefüggése (nemzetközi keresztmetszetvizsgálat)

Franciaországban is hasonló a fejlettségi diszparitás. Olaszország mindenekelőtt azzal tűnik ki az európai országok közül a fejlettség regionális sémája alapján, hogy itt a fejlett és elmaradott térségnek jól elkülönülő zonalitása alakult ki. Természetesen ez az egyetlen mutatószám nem képes érzékeltetni mindazokat a társadalmi, gazdasági, politikai, kulturális ellentmondásokat és feszültségeket, amelyek Olaszországban Észak és Dél viszonyában feszülnek. Az összehasonlításként említett Franciaország a fejlettségi megosztottságnak teljesen más földrajzi sémájával rendelkezik, mint Itália; ott a magas szórás-érték elsősorban a túlfejlett főváros kiemelkedő súlyával és fejlettségével függ össze.

Az előzőekben megismert egyenlőtlenségi mutatók közül még egy – a 6.1.2. pontban *A*-val jelölt, a területi egyenlőtlenség tényezőinek feltárására, az összegyenlőtlenség felbontására alkalmas logaritmus egyenlőtlenségi index – nemzetközi összehasonlító elemzésében való felhasználásra mutatunk be konkrét vizsgálati eredményt.

A gazdasági értéktermelés egy főre vetített értékeivel értelmezett területi fejlettségi szint vizsgálatakor felmerül az a kérdés, hogy a területi fejlettségi különbségek mekkora hányada származik a gazdasági ágazatok termelékenysége (az egy foglalkoztatottra vetített termelési érték), ill. a foglalkoztatási ráta (a foglalkoztatottaknak a népességhez viszonyított aránya) regionális különbségeiből.

Ha egy kis mintán, nyolc ország példáján keressük a választ erre a kérdésre, akkor az *A* mutató értékei és a felbontás eredményei alapján a következő megállapításokat tehetjük.

A *3. táblázat*ban szereplő összes ország esetében a területi fejlettségi különbségeknek nagyobb hányada származik a termelékenységi különbségekből, mint a foglalkoztatottság regionális eltéréseiből. Dél-Koreát kivéve az adott időpontban a foglalkoztatottság különbségei egy irányba hatottak a termelékenység területi

3. TÁBLÁZAT

A termelékenységi és foglalkoztatottsági tényezők aránya a területi fejlettségi különbségekben

Ország	Év	Terület-egységek száma	*A*	A termelékenységi	A foglalkoztatási
				tényező százalékos aránya a területi egyenlőtlenségben	
Dél-Korea	1968	11	2,08	124,4	−24,4
Chile	1967	12	1,99	87,0	13,0
Ausztria	1961	9	1,68	66,4	33,6
Franciaország	1975	21	1,51	66,0	34,0
Magyarország*	1965	20	1,45	57,9	42,1
Szovjetunió*	1968	19	1,45	57,5	42,5
Finnország	1962	16	1,42	52,5	47,5
Hollandia	1966	11	1,23	88,2	11,8

* A területi fejlettség mérésére minden országban az egy főre jutó GDP regionális értékeit használtuk, kivéve Magyarországot, ahol az iparban és mezőgazdaságban termelt ún. korrigált nemzeti jövedelem értékeivel és a Szovjetuniót, ahol a nemzeti jövedelem területi relatív mutatóival dolgoztunk.

differenciáltságával. Ezekben az országokban tehát a fejlett területek nemcsak az átlagnál termelékenyebb ágazatokat tömörítették, hanem az átlagnál magasabb foglalkoztatottsági rátával is kitűnnek. Ezen túlmenően az adatok alapján az is feltételezhető, hogy minél nagyobbak a területi aránytalanságok (A), annál inkább a termelékenységi különbségek a meghatározók. Ez alól csak Hollandia kivétel, ahol a rendkívül kicsiny A érték miatt nem stabil az átlag feletti, ill. alatti területek csoportja, ami a felbontást évről-évre is lényegesen módosíthatja. Ha több harmadik világbeli országról lennének adataink, akkor minden valószínűség szerint megnövekedne a dél-koreaihoz hasonló összefüggések (a két tényező ellentétes előjelű) száma. Ez az előjelkülönbség ezekben az országokban azt tükrözi, hogy a legtermelékenyebb ágazatokat tömörítő központok, régiók (Dél-Koreában a főváros, Szöul) egyszersmind felduzzadt népességtömörülések is, amelyekben rendkívül nagy számban élnek – a modern üzemek mellett – a munkanélküliek, a beköltözött nagy családok, s az improduktív „szolgáltató” szféra közismert ázsiai és afrikai utcai munkásai.

Többváltozós matematikai és statisztikai módszerek

II. *A pályaanalízis*

A pályaanalízis[9] első alkalmazója S. Wright volt 1920-ban. Ugyancsak ő alkalmazta a módszert a populációk genetikai szerkezetének feltárásához, 1951-ben. Az ötvenes években már társadalmi problémákra is – elsősorban szociológiai jellegűekre – kezdték alkalmazni a módszert. Az eljárás szélesebb körű alkalmazására azonban csak a hatvanas években került sor.

Ezen időszak legjelentősebb alkalmazói: A. Lughod és M. M. Foley (1960), P. A. P. Moran (1961), O. D. Duncan (1963, 1966), H. M. Blalock (1963, 1964), M. Murphy (1964), C. Pelz és V. M. Andrews (1964), C. Turner (1964), A. Z. Harris (1966), E. Müeller (1967), J. M. Simmons (1968), R. R. Boyce (1969), A. S. Barnett, C. G. Pickvance, R. H. Ward (1970).

A módszer hazai alkalmazása a hatvanas években, ill. a hetvenes évek elején indult meg, Osváth I. (1961, 1968), Juhász-Nagy P. (1966, 1972), Précsényi I. (1971), Gráf L. (1962) révén elsősorban biológiai és meteorológiai problémákkal kapcsolatban.

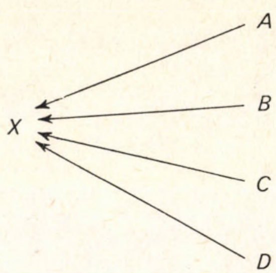
Az eddigi nemzetközi és hazai kutatási tapasztalatokból leszűrhető, hogy a módszer jól felhasználható különböző (természeti–társadalmi) rendszerek struktúrájának vizsgálatához, és így a területi problémák elemzéséhez is. Előnyként említhető, hogy viszonylag egyszerű és könnyen kezelhető.

1. *A módszer rövid leírása*

A módszer segítségével arra kaphatunk választ, hogy az általunk elemzett problémát leíró mutatók között hogyan alakulnak a valóságos kapcsolatok, a direkt, ill. az indirekt hatások.

A nemzetközi irodalomban a pályakoefficiensek meghatározására kétféle irányzat van. Az egyik a pályakoefficienst a standardizált parciális regressziós koefficiensekből vezeti le, míg a másik a parciális korrelációs koefficiensekből. A korrelációs koefficiensek a mintavétel körülményeitől függően labilisak lehetnek, ezért csak meghatározott feltételek mellett alkalmasak elemzéseinkhez, amelyeket most nem kívánunk részletesen tárgyalni. A standardizált parciális regressziós koefficiensek viszont minden körülmények között állandóak, így tehát a belőlük származó becslések is hívebben tükrözik a valóságos viszonyokat, alkalmasabbak további elemzéseinkhez.

[9] Pályaanalízis = Path Analysis.



5. ábra. Egy lehetséges pályaanalízis modell

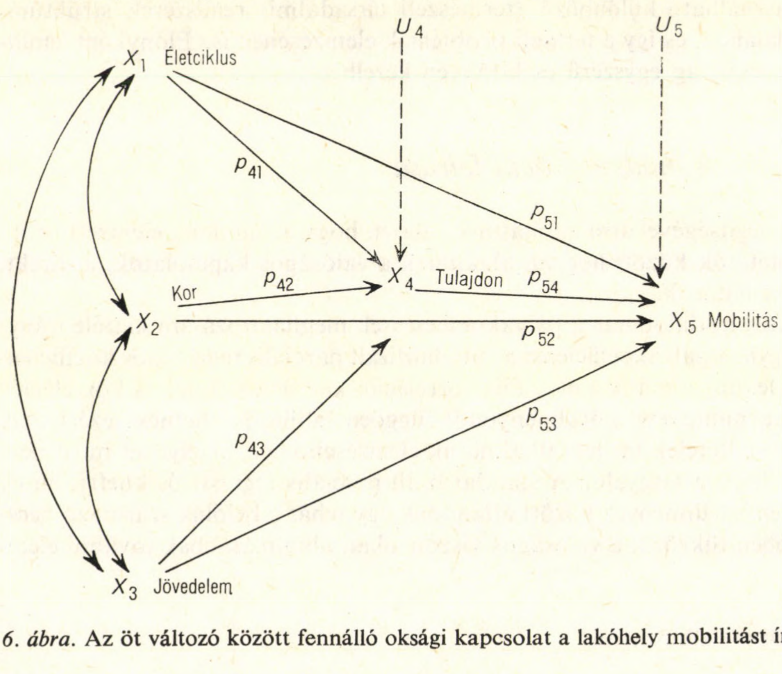
A pályaanalízist másként *oksági rendszer*nek (causal system) is nevezhetjük. A pályaelemzéshez előzetes követelményként egy oksági modellt kell felállítani, amely az érdeklődésre számot tartó változókat kapcsolja össze. Mivel a lehetséges „pályáknak" vagy befolyásolási utaknak a száma már ötváltozós vizsgálat esetén is számos, ezért egy olyan modellt kell alkotnunk, amely a legvalószínűbben reprezentálja az érintett viszonylatokat.

Vegyünk egy egyszerű példát *(5. ábra).* Ebben a rendszerben az *X* függőváltozót az *A, B, C* és *D* független változók határozzák meg.

Az okokat az okozattal összekötő nyilakat nevezzük pályának (path-nak), az ilyen sémákat pedig pályadiagramnak.

A metodika lényege tehát, hogy olyan diagramot állítsunk fel, amelyben a változókat – akár mérjük őket, akár nem – a többiek teljesen és additíven determinálják, és ezt mindazon változókig teszik, amelyek közötti korrelációt még ismertnek tételezhetjünk fel.

Példaként tekintsük Pickvance-nek (1973) a lakóhelyi mobilitásra felállított modelljét *(6. ábra).*



6. ábra. Az öt változó között fennálló oksági kapcsolat a lakóhely mobilitást írja le

A modell szerint az életciklus (X_1), a kor (X_2) és a jövedelem (X_3) meghatározása a modellen kívül történik, vagyis exogének. A tulajdont (X_4) a három exogén változó közös hatása határozza meg, és a mobilitást a négy megelőző változó hatása együttesen determinálja. Így a *6. ábra* kielégíti a rekurzivitás követelményét (ami a pályaelemzés előfeltétele), vagyis egy változót sem határoz meg egy rákövetkező változó. Az u_4 és u_5 szimbólumok a nem mért vagy „implicit" változókat jelölik, amelyek hatása a modellben szintén jelen van. Az X_1, X_2, X_3 közötti ívelt nyilak az egyes változók közötti korrelációk meglétét jelölik, amelyek oksági szerkezetét nem elemezzük, mivel a három változó exogén.

Pickvance modelljében az öt változó közti nyilak a befolyásolás vonalait, vagy másképpen „oksági pályákat" jelölik. Ezeknek a pályáknak az értékét az adatokból becsüljük a pályakoefficiensek, p_{ji} számítása segítségével, amelyek egy adott változóba, X_j-be, a korábbi változókból, X_i-ből vezető pályákat jelölik; a pályakoefficiens értéke az X_j-ben bekövetkezett változást mutatja, amelyet az X_i-ben bekövetkezett változás standardizált egysége eredményez.

Mivel a pályakoefficiensek standardizáltak, nem valószínű, hogy szóródásuk terjedelme a -2 és $+2$ közötti tartományon kívül esne, általában a -1 és $+1$ közötti tartományon belül helyezkedik el.

Az ilyen és ehhez hasonló sémák felállítását segíti, hogy ismeretlen tényezőket is feltüntethetünk, mint a többiektől független változókat. Általában minden változó két faktorra bontható, az egyik, amelynek variabilitása meghatározott, a másik a becslés, a mintavétel hibája.

Másként megfogalmazva:

$$v = M(X) + \beta(\varepsilon), \tag{1}$$

ahol ε a hiba.

A hiba-komponensekről feltételezzük, hogy függetlenek mind attól a változótól amelyre vonatkoznak, mind a többitől. A hiba-komponensek közös értékbe gyűjthetők, amelyet a pályaanalízisben pályahibának is nevezünk.

A pályaanalízis logikája mindig megköveteli, hogy a rendszerről az elemzést végzőknek konkrét elképzelésük legyen. Az elemzést végzőnek kell eldöntenie minden esetben, hogy mely változókat választja oknak, melyet okozatnak vagy éppen vegyes jellegűnek (mint pl. Pickvance modelljében az X_4).

Legyen X_0 változó, amelyet teljesen és additíven determinálnak az X_1, X_2, X_3, ... X_n változók. Ekkor X_0 lineáris regressziós metodikával becsülhető;

$$X_0 = a + b_1x_1 + b_2x_2 + \ldots b_nx_n, \tag{2}$$

ill. a változókat standardizálva:

$$X_0' = b_1 \frac{\sigma_{11}}{\sigma_{00}} x_1' + b_2 \frac{\sigma_{22}}{\sigma_{00}} x_2' + \ldots + b_n \frac{\sigma_{nn}}{\sigma_{00}} X_n', \tag{3}$$

vagy másként felírva, bevezetve: $B_j = b_j \dfrac{\sigma_{jj}}{\sigma_{00}}$ jelölést

$$X_0' = B_1X_1' + B_2X_2' + \ldots + B_nX_n'. \tag{4}$$

Az olyan rendszerekben, ahol X_0 oksági összefüggésben van X_1, X_2, ..., X_n változókkal, a standardizált regressziós koefficienst pályakoefficiensnek nevezzük.

Ahhoz, hogy a pályakoefficiensek azonosak legyenek a standardizált regressziós koefficiensekkel, teljesülniük kell a következő feltételeknek:

1. X_i-nek közeli vagy távoli oknak kell lennie az elemzés során,
2. a becslési egyenletben szereplő összes többi változó oka legyen X_0-nak,
3. minden lényeges változót figyelembe vegyünk.

A pályakoefficiens alkalmazásában a fentiek teljesülése esetén használható a regressziós metodika. Ehhez azonban ismerni kell az összes változó közötti korrelációt és ebből normálegyenletek felállításával és megoldásával közvetlenül nyerhető a pályakoefficiens.

A pályaelemzés alapegyenlete a következő (Duncan, 1966):

$$r_{ij} = \sum_q p_{iq} r_{jq} \tag{5}$$

és így Pickvance modelljében pl.

$$r_{54} = p_{51}r_{14} + p_{52}r_{24} + p_{53}r_{34} + p_{54}\,. \tag{6}$$

A (6) egyenlet azt bizonyítja, hogy az X_4 és X_5 közötti korrelációs koefficiens (r_{54}) lebontható négy összetevőre: három közvetett hatásra (az első három viszony) és egy közvetlen hatásra (a negyedik viszony). A három közvetett hatás megfelel a három pályának, amelyek X_4-et és X_5-öt összekötik a három exogén változón keresztül. A közvetlen hatás természetesen a tulajdonból a mobilitásba vezető közvetlen pálya. Így a korábban felvetett kérdés, vajon a tulajdonnak (X_4) van-e közvetlen hatása a mobilitásra (X_5), újra megállapítható hipotézis formájában, vagyis $p_{54} \neq 0$. Hasonlóképpen az a kérdés, vajon a tulajdon mobilitásra gyakorolt közvetett hatásai jelen vannak-e, újrafogalmazható három hipotézis formájában, vagyis, $p_{51}r_{14} = 0$, $p_{52}r_{24} = 0$ és $p_{53}r_{34} = 0$.

A pályaelemzés azt is lehetővé teszi számunkra, hogy ellenőrizzük, mennyire felel meg a modell az adatoknak, vagy mennyire illeszkedik hozzájuk. Ezt mutatja az u_4-ből X_4-be és az u_5-ből X_5-be vezető „maradványpályák" értéke. Ha ezek a pályák a nullához közelítenének, ez azt jelentené, hogy a modellbe expliciten bevont öt változó nagyon jól magyarázza a tulajdon (X_4) és a mobilitás (X_5) közötti szóródást. Ha viszont a reziduális pálya értékei 1-hez közeliek lesznek, ez azt jelentené, hogy a modell rosszul illeszkedik az adatokhoz. A pályaelemzés tehát lehetővé teszi a modell változói között feltételezett pályák relatív értékének kiszámítását. Nem engedi meg azonban a modell bizonyítását. Csak azt engedi meg, hogy egy előzetesen feltételezett modellt kipróbáljunk. Nem szabad megfeledkezni arról, hogy itt a pályakoefficienseket egymás melletti adatokból számoljuk: nem mondhatjuk, hogy ezek az időbeni változást illetően is megállnák a helyüket. Egy struktúra pillanatnyi helyzetét tükrözik, nem pedig ennek a struktúrának a dinamikáját.

A fentebb leírtakból világosan következik tehát, hogy a pályaanalízisben szereplő bármely két változó közötti korreláció meghatározásához összegezni kell mindazon utakat, amelyekben az egyik változótól a másikig eljuthatunk. Eközben azonban nem szabad megsérteni a következő szabályokat:

1. tilos az először előre, aztán hátra mozgás (azaz, ha egyszer már nyílirányban haladtunk, akkor visszafelé egyik nyílon sem mehetünk);

2. megengedett az először-hátra – aztán-előre mozgás;

3. kapcsolódó változók esetén annyit léphetünk hátra, majd vissza, amennyire csak lehetőség van;

4. az egyik változótól a másikig vezető úton egy kétfejű nyíl is lehet, de csak egy. A kétfejű nyíl mindkét irányban járható.

A pályaanalízist leggyakrabban a *variancia-kovarianciaanalízissel, a korrelációanalízissel együtt alkalmazzák*, az említett módszerek mintegy kiegészítőjeként. Igen hasznos információhoz juthatunk pl. a korrelációs koefficiensek számításakor, amennyiben a korrelációs koefficienseket a pályaanalízisből származtatjuk, mivel így lehetővé válik a változók közötti összefüggések pontosabb megvilágítása, az egyes változók közötti korreláció felbontása, az azt okozó tényezők szerint. Jelentős segítséget nyújthat a pályaanalízis a faktoranalízis változóinak megválogatásához, a köztük levő összefüggések feltárásához.

A faktoranalízis mutatóinak megválasztásakor az egyébként fennálló szubjektivitás mértéke is csökkenthető a módszer alkalmazása révén. A továbbiakban a faktor- és a pályaanalízis együttes alkalmazásából mutatunk be egy példát. Pontosabban azt, hogy egy korábban elvégzett faktoranalitikus vizsgálatot hogyan egészít ki pályaanalízis.

2. *A pályaanalízis egy gyakorlati alkalmazása*

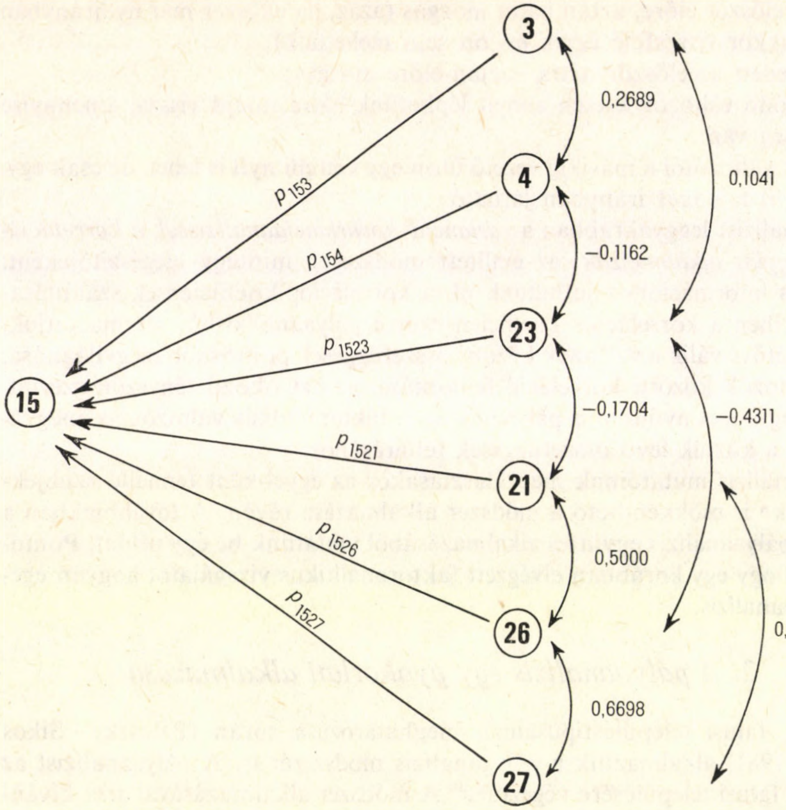
Az ország falusi településtípusainak meghatározása során (Beluszky – Sikos 1979, 1980, 1981) alkalmaztuk a pályaanalízis módszerét is. A pályaanalízist az ország 3 134 falusi településére végeztük.[10] A módszer alkalmazásával arra kívántunk választ kapni, hogy miként alakulnak az általunk vizsgált változók közötti ok-okozati kapcsolatok, vagy másként, a korrelációs változók mennyire helyesen írják le az egyes tényezők közötti valóságos kapcsolatokat. Vizsgálati célkitűzésünk között szerepelt továbbá az is, hogy maga a módszer alkalmas-e területi szerkezet vizsgálatára. Ezen célkitűzések mellett kezdtük elemezni az országos vizsgálat során kapott F_1 faktorunk belső szerkezetét. Az F_1 faktor a településnagyság–alapellátottság–forgalmi helyzet faktora.

Az F_1 faktoron belüli ok-okozati kapcsolatokat a *7. ábra* tárja fel.

A diagramon számmal jelzett mutatók jelentése (a kétfejű nyilak a korrelációs kapcsolatokat mutatják):

15. mutató: a községek általános fejlettségének színvonala;
3. mutató: a települések átlagos nagysága 1970-ben;
4. mutató: Az 1 főre jutó iparcikk-kiskereskedelmi forgalom értéke, ezer Ft;
23. mutató: a legközelebbi város (+községi jogállású járási székhely) időtávolsága;
21. mutató: az alapfokú ellátó–szolgáltató intézmények színvonala;
26. mutató: a közlekedési hálózatok kiépítettsége;
27. mutató: a város felé induló tömegközlekedési eszközök járatsűrűsége.

[10] A községeket az 1977. január 1.-i közigazgatási beosztás szerint vettük figyelembe.



7. ábra. A településekben zajló településformáló folyamatokat alapvetően meghatározó F_1 faktor belső szerkezetének pályadiagramja

Az F_1 faktor komplex módon ragadja meg a településformáló folyamatokat. A *7. ábrán* felvázolt pályadiagramból arra kívántunk választ kapni, hogy az F_1 faktort alkotó mutatók a települések fejlettségét a valóságban milyen mértékben határozzák meg, miből áll össze a településfejlettség és az azt meghatározó mutatók közötti korrelációs kapcsolat. A vázolt modellben a település fejlettségét (15. mutató) függő változóként vettük figyelembe, míg a többi változót exogénnek tekintettük. Felhasználva a pályaanalízis már korábban leírt alapegyenletét, a következő összefüggéseket kapjuk:

$$r_{153} = p_{153} + p_{154} r_{34} + p_{1523} r_{323} + p_{1521} r_{321} + p_{1526} r_{326} + p_{1527} r_{327}$$

$$r_{151} = p_{154} + p_{153} r_{43} + p_{1523} r_{423} + p_{1521} r_{421} + p_{1526} r_{426} + p_{1527} r_{427}$$

$$r_{1523} = p_{1523} + p_{153} r_{233} + p_{154} r_{234} + p_{1521} r_{2321} + p_{1526} r_{2326} + p_{1527} r_{2327}$$

$$r_{1521} = p_{1521} + p_{153} r_{213} + p_{154} r_{214} + p_{1523} r_{2123} + p_{1526} r_{2126} + p_{1527} r_{2127}$$

$$r_{1526} = p_{1526} + p_{153} r_{263} + p_{154} r_{264} + p_{1523} r_{2623} + p_{1521} r_{2621} + p_{1527} r_{2627}$$

$$r_{1527} = p_{1527} + p_{153} r_{273} + p_{154} r_{274} + p_{1523} r_{2723} + p_{1521} r_{2721} + p_{1526} r_{2727}$$

A képletekbe a megfelelő értékeket helyettesítve a következőket kapjuk:

$$0{,}3825 = 0{,}0061 + 0{,}0370 + 0{,}0042 + \mathit{0{,}1746} + 0{,}0480 + \mathit{0{,}1122} \quad (7)$$

$$0{,}5167 = \mathit{0{,}1377} + 0{,}0016 + 0{,}0047 + \mathit{0{,}2048} + 0{,}0615 + \mathit{0{,}1061} \quad (8)$$

$$-0{,}2643 = (-0.0408) + (-0{,}0006) + (-0{,}0160) + (-0{,}0555) + \\ + (-0{,}0607) + (-0{,}0905) \quad (9)$$

$$0{,}6282 = \mathit{0{,}3257} + 0{,}0033 + 0{,}0866 + 0{,}0069 + 0{,}0069 + \mathit{0{,}1351} \quad (10)$$

$$0{,}5788 = \mathit{0{,}1408} + 0{,}0021 + 0{,}0607 + 0{,}0176 + \mathit{0{,}1628} + \mathit{0{,}1951} \quad (11)$$

$$0{,}6021 = \mathit{0{,}2913} + 0{,}0023 + 0{,}0502 + 0{,}0126 + \mathit{0{,}1511} + 0{,}0943 \quad (12)$$

A (7)–(12) egyenletek első oszlopa tartalmazza a páronkénti korrelációkat, a 15. mutató és az azt meghatározó mutatók között. A kapcsolatok többségére a közepesnél valamivel erősebb korreláció a jellemző. A (7)–(12) egyenletek 2. oszlopából viszont arra kaphatunk feleletet, hogy miként alakulnak a 15. mutató és a vele páronkénti korrelációt alkotó többi mutató közötti direkt kapcsolatok a valóságban. A 2. oszlop jól tükrözi, hogy mindössze 2 mutató direkt kapcsolata jelentős, s adja a páronkénti korrelációk 50%-át ((10) és (12) egyenlet):

21. mutató (az alapfokú ellátó–szolgáltató intézmények színvonala) és a
27. mutató (a városok felé induló tömegközelekédési eszközök járatsűrűsége).

A (10) egyenletből az is megállapítható, hogy a településfejlettség és az alapfokú ellátó–szolgáltató intézmények közötti (0,6282) korrelációs kapcsolatot a direkt kapcsolatokon kívül milyen mértékben befolyásolják indirekt hatások. Az indirekt kapcsolatok közül a 27. mutatónak (a város felé induló tömegközlekedési eszközök járatsűrűsége) a hozzájárulása a korreláció összértékéhez mintegy 25%. A fennmaradó 25%-ot pedig további négy indirekt kapcsolat alakítja.

Hasonló jelenség figyelhető meg a (12) egyenlet esetében is, ahol a direkt kapcsolat szintén mintegy 50%, azzal a különbséggel, hogy itt a 15. mutató (a településfejlettség színvonala) és a 27. mutató (a városok felé induló tömegközlekedési eszközök járatsűrűsége) között áll fenn ez a kapcsolat, míg az indirekt kapcsolatok közül most a 21. mutató (alapfokú ellátó–szolgáltató intézmények színvonala) értéke a legjelentősebb, mintegy 25%, az összkorreláció fennmaradó 25%-át pedig itt is további négy indirekt kapcsolat alkotja.

Természetesen nem meglepő az a tény, hogy a településfejlettséget az alapfokú ellátás színvonala és a járatsűrűség alakítja legközvetlenebbül, a két tényező szervesen kapcsolódik egymáshoz; ezt tükrözi a modell és a két mutató között fennálló közepes (0,4640) korrelációs kapcsolat is.

A (8) és (11) egyenletek közös jellemzője, hogy mindkettőt alapvetően egy direkt és két indirekt kapcsolat alakítja, továbbá, hogy a fennálló két indirekt kapcsolatnak az összkorrelációhoz való hozzájárulása nagyobb, mint a direkt kapcsolatnak.

A településfejlettség színvonala a (8) egyenletben az 1 főre jutó iparcikk-kiskereskedelmi forgalom értékével, a (11) egyenletben pedig a közlekedési hálózatok kiépítettségével alkot említésre méltó kapcsolatot, amelyhez mindkét egyenlet esetében két, jelentős indirekt kapcsolat járul a 21. mutató (az alapfokú ellátó–

szolgáltató intézmények színvonala) és a 27. mutató (a város felé induló tömegközlekedési eszközök járatsűrűsége) révén. Ezek az összefüggések logikusan alakulnak így, hiszen egy település fejlettségének színvonala annál magasabb, minél kedvezőbb az alapfokú ellátás és szolgáltatás, minél magasabb az egy főre jutó iparcikk-kiskereskedelmi forgalom nagysága, amelyet természetszerűleg kedvezően befolyásol a járatsűrűség, az egyes szolgáltatások jó elérési lehetősége.

Az elemzés során annál meglepőbbnek találjuk a (7) és (9) egyenletet, hiszen ezek azt mutatják, hogy az indirekt kapcsolatok ezekben az egyenletekben erősebbek a direkt kapcsolatoknál. Az indirekt kapcsolatok között, hasonlóan a (8) és (11) egyenletekhez, itt is a 21. mutató és a 27. mutató szerepe dominál. A (7) egyenletet, ill. a többi egyenletet is megvizsgálva meglepő számunkra az a tény, hogy a településnagyságnak „semmilyen kimutatható direkt, ill. indirekt hatása" nincs a településfejlettség színvonalára, hiszen joggal feltételezhető, hogy egy nagyobb népességszámú település esetében jobban kiépült az alapellátás–szolgáltatást nyújtó intézmények rendszere, ill. a kiskereskedelmi bolthálózat stb. Az a tény, hogy a településnagyságnak viszonylag kis szerepe van a településfejlettség alakulásában, kifejezésre jut az egyes típusok (clusterek) kialakulásában is. Egymás mellett olyan települések szerepelnek egy clusterben, amelyek különböző nagyságú népességszámmal rendelkeznek. A különböző népességszámú települések egy típusba kerülésének oka abban keresendő, hogy a falusi települések életét alapvetően meghatározó folyamatokban az alapfokú ellátásnak–szolgáltatásnak, az 1 főre jutó iparcikk-kiskereskedelmi forgalom alakulásának, a tömegközlekedési eszközök járatsűrűségének nagyobb a súlya, mint magának a település népességszám-nagyságának. A népességszám-nagyság mint mutató sem tökéletes, hiszen a települések közötti differenciákat is csak részben tükrözi, inkább csak a települések főbb csoportjait adja vissza.

A hipotetikus pályadiagram felállítása során fel kell készülnünk arra, hogy valamennyi okot nem vehetjük figyelembe vagy nem ismerjük. Az általunk felrajzolt teljes pályadiagram (csak az F_1 faktor alapján készült) hibája a következő képletből származtatható:

$$p_e^2 = 1 - \sum_{i=1}^{n} p_{0i} r_{0i}.$$

Kiszámításához feltételezzük, hogy a pályahiba a végső okokkal nem korrelált. A p_e^2 értékére 0,45 adódik, ebből $p_e = 0{,}67$, ami azt jelenti, hogy a pályahiba közepes nagyságú. Ez az elemi pályakapcsolatok értékét egyáltalán nem rontja, csupán arra utal, hogy a faktoranalízis további faktoraiban is szerepelnek olyan tényezők, amelyeket a jelenlegi diagramból ugyan kihagytunk, ennek ellenére hatással vannak a települések fejlettségének színvonalára.

Ha célunk egy teljes oksági rendszer felépítése, akkor újabb és újabb okok figyelembevételével – iterációval – a pályahiba értékét igen kicsire lehet csökkenteni.

A fentebb leírt példánkban a pályaanalízis egy lehetséges alkalmazását kívántuk csak bemutatni. Úgy véljük, vizsgálataink során bizonyítást nyert, hogy a pályaanalízis a faktoranalízist kiegészítve, ill. önállóan is alkalmas területi elemzésekhez, területi szerkezet vizsgálatokhoz, továbbá az ok-okozati összefüggések pontosabb megvilágításához.

III. *A faktor- és clusteranalízis*

1. *A faktoranalízis alkalmazási lehetősége és az eddigi alkalmazási kísérletek*

A társadalom és a gazdaság folyamatainak területi vetületei egyre sokrétűbbek, egyre bonyolultabbak. A területi kutatások által vizsgált számos jelenség csak nagyszámú „mutatóval", adattal ragadható meg. Gondoljunk pl. a lakosság életkörülményei színvonalának mérésére, mely során nem hagyható figyelmen kívül az alapfokú intézményellátottság mértéke, a műszaki infrastruktúra kiépítettsége, a lakásellátottság és lakásfelszereltség szintje, a munkahelykínálat mennyisége és választéka, a jövedelmi viszonyok, a közlekedési lehetőségek, a városi szolgáltatások igénybevételének lehetőségei és így tovább. Csak mindezeknek a szempontoknak a számszerűsítése nyomán ítélhető meg megbízhatóan az életkörülmények színvonala. A mutatórendszer esetleges szűkítését kérdésessé teszi az a tény, hogy az életkörülmények egyes elemei egymással nem helyettesíthetők (egy községben az egészséges ivóvíz hiányát nem közömbösíti a jól működő művelődési ház), „súlyozásuk" pedig a szubjektivitás veszélyét hordozza. Számos más vizsgálati terület – pl. a sokszempontú településosztályozás, a mezőgazdaság színvonala, struktúrája, a gazdasági fejlettség stb. – hasonló igényeket támaszt az elemző munkával szemben. A „sokváltozós" megközelítés azonban a „hagyományos" módszertani eljárások keretei között csak igen nehezen valósítható meg.

Alkalmazásának gátja lehet:

– Az adatbázis *kezelhetősége*, az egyes megfigyelési egységekre vonatkozó adatsorok *szintetizálásának* korlátozott lehetősége, vagy az egyszerű, mennyiségi összegezés iránti szaktudományi kételyek. (Pl. ha a települések tipizálása során két szempontból – mint pl. a foglalkozási szerkezet és a nagyságrend alapján – 5–5 típust képezünk, ezek egymással kombinálva 25 lehetséges típust adnak. Három szempont esetén a nyerhető típusok száma már 125, tehát egy alig kezelhető rendszer. Ezért a hagyományos eszközökkel kialakított „legmerészebb" településtipológiák is legfeljebb 3–4 szempont figyelembevételére vállalkoztak úgy, hogy következetesen végig sem tudták vinni e szempontok kombinálását. Ugyanakkor a mutatók egyszerű összegzésével – a pontozásos módszerek valamelyikének alkalmazása – szemben is számos szaktudományi ellenvetés tehető, mint a súlyozás, a helyettesíthetőség problémája stb.)

– *A hagyományos „eszközökkel" kezelt sokmutatós adatrendszerek* s a „leképzett" valóság közötti viszony, valamint a mutatók egymás közötti viszonya körüli bizonytalanságok is gátolták ezen eljárások alkalmazását (az egyes mutatók jelentősége a vizsgált jelenség tükrözésében, súlyuk, helyettesíthetőségük kérdései, a mutatók multikollinearitása stb.).

Ha nem akarunk lemondani a sokmutatós megközelítések előnyéről, olyan matematikai–statisztikai módszereket kell alkalmaznunk, amelyek lehetővé teszik a rendkívül nagyszámú változó kezelését, feltárják a mutatórendszer belső összefüggéseit, ezáltal megállapíthatók lesznek a megfigyelt jelenség sajátosságai (a jelenség részelemei közötti összefüggések), valamint értékelhető lesz a felhasznált mutatórendszer.

E követelményeknek tesz eleget a faktoranalízis; ez a többváltozós matematikai–statisztikai módszer alkalmas a felhasznált információk (adatok) néhány hipotetikus, fiktív változóba (faktorba) való sűrítésére, miközben az eredeti információtartalom vesztesége minimális, ill. a kívánt szint alatt tartható, egyúttal feltárja a mutatórendszer s az általa tükrözött jelenség belső törvényszerűségeit.

A faktoranalízis matematikai–statisztikai alapvetése már a századfordulón megtörtént (K. Pearson, C. Spearman által), a gazdasági és társadalmi elemzésekben, a földrajzi kutatásokban azonban csak a 60-as évek közepétől terjedt el szélesebb körben. Ennek magyarázata részben az, hogy számításigényessége folytán – különösen a területi kutatásokban, ahol a megfigyelési egységek (települések, termelőszövetkezetek, járások stb.) száma rendszerint nagy – csak a számítógépek megjelenése után válhatott általános gyakorlattá a faktoranalízis alkalmazása, másrészt – amint erre Francia L. (1974) is rámutatott – az általánosítás oly fokától, amit a faktoranalízis nyújt, idegenkedtek a területi kutatások szakemberei (a faktoranalízis eredményéül nyert, önálló jelentéssel nem bíró, valamely ismert gazdasági fogalommal [mutatóval] közvetlenül nem azonosítható fiktív változók!). Hozzáteendő, hogy egy faktoranalitikus vizsgálat lefolytatása minden objektivitása ellenére annyi szubjektív elemet is tartalmazó döntést igényel (l. alább), hogy egyes konkrét vizsgálatok mások által nem ismételhetők meg, ill. a nyert eredmények más vizsgálati területegységre nem vihetők át (ugyanakkor pl. a foglalkozási szerkezet értékhatárai által megadott településosztályozási rendszer könnyen adaptálható).

A módszer vázolt előnyei azonban indokolttá tették annak elterjedését. Hazánkban a hetvenes évek elejétől jelennek meg faktoranalízis-vizsgálatok a területi kutatások gyakorlatában.

Az Országos Tervhivatal Tervgazdasági Intézetében Lackó L. és Francia L. vezetésével az életkörülmények és az azokat befolyásoló tényezők területi elemzését végezték el az ország feltételezett problematikus területein (Francia 1974, 1975; Lackó 1974, 1975a,b). Az MTA Földrajztudományi Kutató Intézetében ugyancsak az életkörülmények területi színvonalának meghatározására alkalmazott faktor- és clusteranalízist Enyedi Gy. (1977) és Beluszky P. (1976, 1977). Vizsgálataikat az ország valamennyi községére, ill. járására elvégezték. Enyedi Gy. (1975) a magyar mezőgazdasági tér felosztására alkalmazott faktoranalízist. A hetvenes évek közepétől a falusi települések tipizálása igényelte a faktor- és clusteranalízis igénybevételét. A Beluszky P. és Sikos T. T. által folytatott vizsgálatok során néhány megye (Beluszky 1979, Beluszky–Sikos 1979, 1980, 1981) falusi településeinek típusba sorolása után sor került az ország valamennyi községének tipizálására is. Kiterjedt alkalmazási kísérletek folytak a KSH Számítástechnikai Igazgatóságán is az 1973–1979. években. Sor került – többek között – Magyarország 65 középfokú központja fejlettségének, az alföldi városok ellátottsági színvonalának, 276 ipari telephely iparstatisztikai jellegzetességeinek, az ország XIX. századi iskolázottsági szintjének stb. vizsgálatára (Zágon 1979).

Andorka R. (1976, 1979) a hetvenes évek második felében már összegezhette a faktoranalízis alkalmazásának eredményeit a társadalom-ökológiai és a regionális vizsgálatok terén. A hetvenes évek végére a faktor- és clusteranalízis már gyakran alkalmazott módszerré vált a területi kutatásokban, a gazdaságföldrajzban: Mészáros R. (1979) dél-alföldi faluvizsgálataiban, Simon I. – Tánczos-Szabó L. (1979) iparföldrajzi vizsgálatai során, Krajkó Gy. – Bank K. (1981) a regionális növekedés tényezőinek feltárásakor támaszkodott a faktor- és clusteranalízis által nyújtott lehetőségekre.

A clusteranalízis ugyancsak nagyszámú megfigyelési egység nagyszámú *mutatójának elemzésére alkalmas.* Ugyanakkor a clusteranalízis – a faktoranalízissel ellentétben – nem törekszik a mutatórendszer sűrítésére, a dimenziók csökkentésére, hanem csak a megfigyelt vizsgálati egységek észrevételeinek csoportosítására.

A faktor- és a clusteranalízis tehát egyaránt alkalmas csoportosítási problémák megoldására. E módszerek önállóan is alkalmazhatóak; igen gyakori azonban a két módszer együttes alkalmazása, egymásba kapcsolása. Ez esetben a faktoranalízis során nyert – fiktív – faktorértékek (faktorpontértékek, l. alább) kerülnek a clusteranalízis során csoportosításra.

2. *Szempontok az alapadatok (a faktoranalízis input-változói) összeállításához*

A faktoranalitikus vizsgálatokat ért bírálatok jelentős hányada a kiinduló adatrendszert illeti.

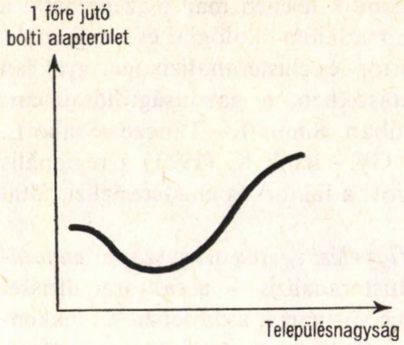
Kétségtelen, hogy az alapadatok pontossága, a vizsgált jelenség mérésére való alkalmassága meghatározza az alkalmazott modellek értékelhetőségét, megbízhatóságát. Ez indokolja, hogy külön szóljunk a faktoranalízis input-változóival kapcsolatos kérdésekről.

Az adatrendszer összeállítását végső soron

– *szaktudományi szempontok* (mennyire alkalmas az adatrendszer a vizsgált jelenség mérésére) és

– a *faktoranalízis* módszeréből fakadó *követelmények*, ill. *lehetőségek* szabják meg.

Az előző szempontról itt nem szólunk részletesen. Nyilvánvaló, hogy az összeállítandó adatrendszereknek szakmai szempontból alkalmasaknak kell lenniük a vizsgált jelenség *átfogó* mérésére. Igaz, a faktoranalízis szelektálja az alapmutatókat, információkat nyújt használhatóságukról, de ha az adatrendszerbe több „alkalmatlan" mutató kerül, befolyásolhatják az eredményt, különösen ha *több mutató torzítása azonos okra vezethető vissza.* Területi vizsgálatoknál pl. gyakran kerül sor fajlagos mutatók használatára, különösen színvonal-vizsgálatoknál, tipizálási feladatok során. E fajlagos mutatók torzíthatnak, ha a fajlagos értékek s a mért jelenség közti kapcsolat nem lineáris. (A településhálózati vizsgálatoknál gyakori, hogy pl. az intézményhálózatra vonatkozó fajlagos értékek a legkisebb falvak esetében – az intézmények kihasználatlansága miatt! – hasonlóak a nagy-



8. ábra. Az 1 főre jutó bolti alapterület és a településnagyság kapcsolata

községek értékeihez, ahol az intézmények koncentrációja eredményezi a fajlagos értékek emelkedését. Például az 1 főre jutó bolti alapterület a településnagyság függvényében a *8. ábra* szerint alakul.)

Ezért vitatható pl. a fajlagos mutatók alkalmazása Baranya megye falusi életkörülményeinek vizsgálatában (Francia 1974). Ugyancsak a vizsgálat tárgyának és területének ismeretében szűrhetők ki azok a mutatók, amelyek homogén eloszlásuk következtében érdemleges információt nem hordoznak (pl. napjainkban az életkörülmény-vizsgálatoknál a rádió- és TV előfizetők aránya, egyes megyékben a villannyal ellátott lakások aránya olyannyira homogén, hogy megszűnt differenciáló tényező lenni).

A faktoranalízis módszeréből fakadó követelmények, ill. lehetőségek:

a) A faktoranalízis előnyei között említettük, hogy nagy mennyiségű információ kezelésére alkalmas. Valójában egyetlen követelmény szab gátat az egyes megfigyelési egységekre vonatkozó bemenő változók (alapadatok) száma növelésének; nevezetesen a *megfigyelési egységek számának meg kell haladnia a változók számát.* Ugyanis csak a megfigyelés $>$ változó feltétel teljesülése esetén állítható elő a korrelációs mátrix inverze, melyet az eljárás során a becslésekhez felhasználnak (Francia 1974). E követelmény figyelmen kívül hagyása esetén formálisan lefolytatható a faktoranalízis, ám a hibahatárok erősen megnövekednek, az eredmények bizonytalanokká válnak (s az sem becsülhető meg, hogy a nyert eredményeket milyen mértékben torzította a követelmény mellőzése).

Ez a korlátozás a gyakorlatban ritkán befolyásolja a mutatórendszer kialakítását. Inkább *a mutatórendszer „túldimenzionálása" fenyegeti a vizsgálatok irányítóit.* A hazai területi kutatásokban végeztek már 400 egynéhány mutatóval is faktoranalízist (Perczel 1976). Némelykor a kutatók biztonságérzetük növelése céljából gyarapítják a mutatók számát, úgy gondolkodván, hogy így csökkentik valamely fontos mutató kimaradásának veszélyét.

Tapasztalataink szerint a mutatók számának meghatározásakor ésszerű kompromisszum alakítható ki, ha figyelembe vesszük, hogy mutatórendszerünk célja többnyire nem egy-egy jelenség, folyamat teljes „leltározása", hanem annak *mérése*. A mutatórendszernek nem kell egy folyamat, jelenség valamennyi mérhető elemét számba venni (ez amúgyis ritkán lenne elérhető), hanem a „lakmuszpapír" szerepét betöltenie. Nem hagyható figyelmen kívül, hogy a legtöbb mutató sokkal szélesebb körű „mögöttes" tartalommal is rendelkezik, mint a közvetlenül mért részjelenség (erre természetesen a mutatók további értelmezésekor is gondolni kell; a faktorazonosításkor pl. a mutatók mögöttes tartalmát is figyelembe kell vennünk). A szélsőséges példa kevéért: a lakosság életkörülményeinek vizsgálatakor (járási szinten) figyelembe vettük az egy lakosra jutó presszókávé-fogyasztás mértékét is, ami – feltevésünk szerint – nemcsak az „étkezési szokásokra" utal, hanem az urbanizáltság, az életmód szintjére is; így aztán nem vonható le az a következtetés sem, hogy a társadalmi–gazdasági fejlettség vagy elmaradottság oka a kávéfogyasztás magas vagy alacsony mértéke.

b) A faktoranalízis végső eredményét is messzemenően befolyásoló tényező az alapmutatók belső kapcsolatrendszere, a köztük kialakult sztochasztikus kapcsolatok jellege és nagysága. Miután egy-egy vizsgálat alapmutatói egy bizonyos jelenséget, folyamatot mérnek, köztük szükségszerűen sztochasztikus kapcsolatok alakulnak ki, többnyire a közös keletkezési feltételek alapján. A sikeres faktoranalízisnek is *feltétele* az *alapmutatók közötti sztochasztikus kapcsolatok megléte.* Ennek *mértéke* azonban döntő a faktoranalízis szempontjából; *korrelálatlan* mutatórendszer esetén a faktoranalízis nem tud megfelelni alapvető céljának, a nagyszámú változó által hordott információmennyiség csekély veszteséggel való sűrítésének, a megfigyelt jelenség egyszerűsített, áttekinthető belső struktúrája kimutatásának. Egy mutatórendszerbe természetesen bekerülhet néhány olyan mutató, amely a rendszerrel korrelálatlan; ezek eredményezik a csupán egy-egy mutató információtartalmát hordozó specifikus faktorokat (l. alább). Kiszűrésükre az alapmutatók egymás közti korrelációját tartalmazó korrelációs mátrix alapján lehetőség nyílik. Szaktudományi megítélés kérdése, hogy melyek mellőzendők a további vizsgálatok során. Nem tartjuk minden esetben követendőnek Francia L. eljárását, aki az életkörülmény-vizsgálatok során a korrelációs mátrix alapján azokat a változókat, amelyek a mutatók többségével nem mutattak szoros korrelációt, elhagyta, mivel úgy ítélte meg, hogy „. . . ezek a vizsgált jelenség szempontjából lényeges információkat nem jelentettek" (Francia 1974, p. 64.).

Nem hagyható figyelmen kívül, hogy a *nyert faktorok egymással korrelálatlanok*, így a mutatórendszer azon mutatóit fejezik ki, amelyek egymással szorosabb sztochasztikus kapcsolatban állnak; így a mutatórendszer több, egymással korreláló, ún. halmazt tartalmaz. Ezeknek a halmazoknak egyike-másika lehet egyelemű is. Néhány korrelálatlan mutatót tehát elvisel a faktoranalízis, ha azonban túlsúlyba kerülnek a mutatórendszerben, a nyert faktorok száma lényegesen nem – vagy csak igen nagy információveszteség árán – csökkenthető.

Ugyancsak értelmetlenné (feleslegessé) teszi a faktoranalízist az alapmutatók közötti szoros, *determinisztikus* kapcsolat is. Ez esetben a faktoranalízis az információk túlnyomó többségét egyetlen faktorba sűríti, ennek alakításában *valamennyi mutató szerepe közel azonos*, tehát vajmi keveset tudunk meg a vizsgált jelenség struktúrájáról, a nyert fiktív faktor-értékek pedig valamely mutató naturális értékeivel helyettesíthetők. Ebből a szempontból kérdőjelezhető meg Simon I. és Tánczos-Szabó L. (1979) Békés megye ipari fejlettsége területi különbségeinek kimutatására folytatott faktoranalízis-vizsgálata. Az ipari fejlettség szintjét kimutató 10 alapadat *egymással igen szoros korrelációs kapcsolatban áll.*[11] Így a 45, páronkénti korreláció együtthatói közül mindössze 1 maradt 0,8 alatt, 7 viszont 0,8 – 0,9 között volt, a többi pedig meghaladta a 0,9-es értéket. Ezáltal a kiinduló információk 95,5%-át tartalmazó F_1 faktor sűrítette magába az alapadatbázis valamennyi tagját.

Meg kell jegyeznünk, hogy az alapadat, ill. -rendszer korreláltsága függ a vizsgált jelenség összetettségétől is. Minél „homogénebb" a vizsgálat tárgya – mint pl. az ipari fejlettség, a mezőgazdasági termelés színvonala, a lakosság iskolázottsági szintje stb. –, szükségszerűen annál korreláltabb a mutatórendszer, várhatóan annál kevesebb, a kiinduló információtartalom magas hányadát hordozó faktorokat kapunk. Ennek ellenkezője várható összetett jelenségek – pl. településtípusok, területegységek társadalmi–gazdasági fejlettsége, területek természetföldrajzi elemzése stb. – vizsgálata esetén.

c) A faktoranalízis adatbázisának összeállítását nem köti a legtöbb többváltozós analízis (mint pl. a korreláció- és regresszióanalízis) követelménye, hogy a *felhasznált mutatókat* – egyirányú függőséget feltételezve – eleve függő (eredmény) és független (magyarázó) változókra kell osztani, s a független változóknak egymást befolyásolniuk nem szabad (nem korrelálhatnak). Csakhogy az összetettebb társadalmi–gazdasági jelenségek esetében e feltételek csak a legritkább esetben teljesíthetők, s a változók függő, ill. független változókra való elkülönítése önkényes. Ha pl. a vándormozgalom mértékét vizsgáljuk – ez a függő változó! –, aligha küszöbölhető ki, hogy a magyarázó változók – pl. a lakóhely infrastrukturális ellátottsága, lakásviszonyai, az ott elérhető jövedelmi szint, a munkaalkalmak kínálata stb. között kapcsolat (korreláció) ne legyen, ugyanakkor az el- vagy bevándorlás mértéke is befolyásolja a változókat. Fellép tehát a *multikollinearitás jelensége*, amely kérdésessé teszi a többtényezős korreláció és regresszióanalízisek értékelhetőségét.

A faktoranalízis adatbázisának összeállításánál a multikollinearitás elkerülésének követelménye nem áll fenn; nem kell különbséget tenni függő és független változók között, s az analízis a többirányú és kölcsönös kapcsolatokat, a direkt és indirekt (közvetett) összefüggéseket is feltárja.

d) A mutatórendszer belső összefüggéseiről, mindenekelőtt a közvetett kapcsolatokról a korrelációs mátrixnál – a páronkénti korrelációs együtthatónál –

[11] Felhasznált mutatók:

1. fizikai foglalkoztatottak évi átlagos állományi létszáma;
2. az összes foglalkoztatott évi átlagos állományi létszáma;
3. a foglalkoztatott nők évi átlagos állományi létszáma;
4. a fizikai foglalkoztatottak teljesített munkaóráinak száma;
5. a fizikai foglalkoztatottak munkabére (ezer Ft);
6. az összes foglalkoztatott munkabére (ezer Ft);
7. erőgépek, villamosmotorok teljesítőképessége (kW);
8. a fizikai foglalkoztatottak gyári munkahely-száma;
9. az összes állóeszköz bruttó értéke (ezer Ft);
10. ebből az összes gép, berendezés értéke (ezer Ft);
11. az összes felhasznált villamosenergia (ezer kWó);
12. az anyagmozgató gépek, berendezések értéke (ezer Ft);
13. telepek száma.

differenciáltabb képet ad a path-analízis; a közvetett kapcsolatok kimutatása révén egyes „korrelálatlan" mutatók sztochasztikus összefüggései is kimutathatók (a path-analízisnek a faktoranalízis során való felhasználásáról könyvünk II. fejezete szól).

e) A mutatórendszer megítéléséhez maga a faktoranalízis ad támpontokat; a korrelációs együtthatók felhasználhatóságát említettük; ugyancsak utal az alapadatok használhatóságára a *kommunalitások* h_j^2 értékeinek alakulása is (l. alább). Az alapadatok korreláltsága, a kommunalitások elemzése szükségessé teheti a mutatórendszer átalakítását, a faktoranalízis – új adatbázisról kiinduló – megismétlését.

f) A változók összegének normális eloszlását nagyobb elemszámú adatbázis többnyire kielégíti (társadalmi, gazdasági problémák vizsgálata esetén). Ha a kiinduló adatok száma alacsony, célszerű a változók normális eloszlásáról meggyőződni. (A normális eloszlás vizsgálatának módszerét – pl. χ^2-próba – l. az I. fejezetben.)

g) A mutatórendszer összeállításánál könnyebbséget jelent, hogy felesleges az adatokat súlyozni, rangsorolni, előzetesen értékelni.

h) A faktoranalízis alkalmas különböző jellegű adatok, mennyiségi ismérvek, számszerűsíthető minőségi jegyek, értékítéleteket nem tartalmazó jellemzők (jelek, számcsoportok) *együttes kezelésére*. A falusi települések tipizálására tett kísérlet során Beluszky P.–Sikos T. T. (1980) az elemzésbe vont több számszerűsített kvalitatív tényezőt, ill. értékelést nem tartalmazó jellemzőt. (Számszimbolikával jelölték pl. a természeti környezet jellegét, pontszámozással adták meg az alapfokú intézményhálózat kiépítettségét stb.)

A fenti szempontok figyelembevételével alakult ki pl. a Beluszky P.–Sikos T. T. által végzett községtipizálás adatbázisa, mely 8 szempont 27 mutatóját öleli fel (egyes mutatók maguk is „szintetizáló" mutatók).

A) *A falvak természeti környezete*

1. A falvak határában uralkodó természeti környezettípus.[12]
2. A földhasznosítás jellege (a szántók aránya a községek összes területéből).
3. A falvak mezőgazdaságának termőhelyi adottságai.

B) *A falvak helye a településszerkezetben*

4. A falvak lakónépessége 1970-ben.
5. A külterületi népesség aránya 1970-ben.
6. A környék településeinek átlagos nagysága 1970-ben.

[12] Az országos vizsgálat során 10 környezettípust különítettünk el:
- ártéri síkság, vízjárta térszínek,
- ártérperemi fekvés,
- ármentes síkságok, löszfelszínek,
- homokhátságok, teraszos hordalékkúp-síkságok,
- ártér-ármentes térszínek mozaikja,
- mérsékelten tagolt dombság, hegységelőtér,
- déli hegylábfelszínek,
- erősen tagolt dombságok,
- középhegységek,
- hegyközi medencék, völgytalpak.

C) *A falvak gazdasági szerepköre*

7. Ipari + építőipari keresők részesedése az összes keresőből 1970-ben.
8. A tercier szektor keresőinek (közlekedési, kereskedelmi, egyéb keresők) részesedése az összes keresőből 1970-ben.
9. A községből eljáró keresők az összes kereső százalékában 1970-ben.
10. A község ipari telephelyein dolgozók száma.
11. Az inaktív keresők a lakónépesség százalékában 1970-ben.
12. A község idegenforgalmi funkcióinak fejlettsége (pontértékelés alapján[13]).

D) *A falvak alapfokú ellátó–szolgáltató szerepkörének fejlettsége*

13. Az alapfokú ellátó–szolgáltató intézmények színvonala (pontozásos módszer alapján[14]).
14. Az 1 főre jutó iparcikk-kiskereskedelmi forgalom értéke.

E) *A településfejlődés iránya, üteme*

15. A tényleges népességszám-változás aránya 1949–1970 között.
16. A lakónépesség vándormozgalma 1960–1970 között.
17. A foglalkozási átrétegződés üteme 1960–1970 között.[15]
18. 1960–1970 között épült lakások aránya az összesből.
19. Népességszám-változás 1970–1976 között.

F) *A falvak forgalmi helyzete*

20. A közlekedési hálózatok kiépítettsége.
21. A legközelebbi város (+ községi jogállású járási székhely) időtávolsága a leggyorsabban igénybe vehető közlekedési eszközön.
22. A városok felé induló tömegközlekedési eszközök járatsűrűsége.

G) *A falvak művi környezete (lakásfelszereltség)*

23. Az 1945 után épült lakások aránya.
24. Az egylakásos lakóépületek aránya az összes lakóépületből 1970-ben.
25. Az egyszobás lakások aránya az összes lakásból 1970-ben.
26. A vízvezetékkel ellátott lakások aránya az összes lakásból 1970-ben.

H) *A községek általános fejlettségének színvonala*

27. A községek általános fejlettségének színvonala (pontértékelés alapján; Enyedi 1977).

[13] 0–25 ponttal értékeltük az egyes települések idegenforgalmi adottságait, fogadóképességét és az idegenforgalomra ható egyéb tényezőket, mindenekelőtt a forgalmi fekvést, az idegenforgalmi folyósokhoz viszonyított helyzetét stb.

[14] Az alapfokú intézményhálózat színvonalát, az egyes intézmények meglétét vagy hiányát figyelembe véve pontozással állapítottuk meg; az ellátottság mértékét, színvonalát (pl. a bölcsődés korúakra jutó férőhely, az általános iskola színvonala, szaktanár-ellátottsága stb.) nem mérhettük.

[15] Tóth J. (1977) képlete alapján számítva:

$$A = \frac{L_1 \cdot Mg_2}{L_2 \cdot Mg_1},$$

ahol L_1 — lakosságszám (1970),
L_2 — lakosságszám (1960),
Mg_1 — mezőgazdasági keresők száma (1970),
Mg_2 — mezőgazdasági keresők száma (1960).

3. *A faktoranalízis matematikai modellje*

Induljunk ki abból a feltételezésből, hogy egy vizsgálat kapcsán N számú megfigyeléssel rendelkezünk, továbbá hogy a megfigyeléseink során n számú ismérvet (változót) mértünk. Példának itt most hadd említsük a falusi településtipológiai munkánkat, amiben a megfigyelési egységek az egyes megyék települései, ill. az ország falusi települései voltak. A megfigyelések (az egyes megyék településeinek) vizsgálatához n számú változót mértünk. Ha a mérési eredményeket X_{ij}-vel jelöljük, akkor a következő induló mátrixot kapjuk, ahol X_{ij} az i-edik megfigyeléshez tartozó j-edik változó értékét jelenti.

Megfigyelések száma	Változók (ismérvek) száma 1	2	......	j	...	n
1	X_{11}	X_{12}	......	X_{1j}	...	X_{1n}
2	X_{21}	X_{22}	......	X_{2j}	...	X_{2n}
.	.	.		.		.
.	.	.		.		.
.	.	.		.		.
i	X_{i1}	X_{i2}	......	X_{ij}	...	X_{in}
.	.	.		.		.
.	.	.		.		.
N	X_{N1}	X_{N2}	......	X_{Nj}	...	X_{Nn}

Az előállt mátrix mérete $(N \times n)$-es, amely tartalmazza a vizsgálathoz szükséges mérési eredményeket.

A rendelkezésre álló információkat az értelmezés egyszerűsítése miatt standardizáljuk a következő módon:

$$Z_{ij} = \frac{X_{ij} - \overline{X}_j}{S_j} \qquad \begin{array}{l} i = 1, 2, \ldots, N \\ j = 1, 2, \ldots, n, \end{array} \tag{1}$$

ahol – a j-edik oszlop empirikus középértéke $\overline{X}_j = \frac{\sum\limits_{i=1}^{N} X_{ij}}{N}$,

– S_l pedig a j-edik oszlop tapasztalati szórása.

A standardizált értékek középértéke 0-val, szórása pedig 1-gyel egyenlő. Számításaink eredményeként a következő standardizált mátrixot kapjuk:

$$Z = \begin{bmatrix} Z_{11} & Z_{12} & \ldots & Z_{1n} \\ Z_{21} & Z_{22} & \ldots & Z_{2n} \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ Z_{N1} & Z_{N2} & \ldots & Z_{Nn} \end{bmatrix}. \tag{2}$$

Ismeretes, hogy standardizált változók esetén a korrelációs együtthatók mátrixa $R=\frac{1}{N}Z^*Z$-vel egyenlő, ahol Z^* a Z mátrix transzponáltja.

Az R mátrix a következő tulajdonságokkal rendelkezik:

1. kvadratikus, azaz $(n\times n)$-es típusú,
2. szimmetrikus, azaz $(r_{jk}\times r_{kj})$ minden j, $k = 1, 2, \ldots, n$ értékre,
3. A fődiagonálisában csak egyesek vannak.

Ezt az R mátrixot tekintsük a továbbiakban a faktoranalízis kiinduló pontjának. A fentebb leírtakból következik, hogy n számú X_j változó a megfelelő standardizált (Z_j) valószínűségi változókkal fejezhető ki. A változók közötti korrelációs kapcsolatokat több faktor hatása idézi elő.

A faktorok következő típusait különböztetjük meg:

1. azok a faktorok, amelyekben több változó jelentkezik, az $(F_1, F_2, \ldots, F_m)$, ún. közös faktorok. Ezek a faktorok feltételezik, hogy Z_j korrelációban van más valószínűségi változókkal;

2. azok a faktorok, amelyek csak egy változónál lépnek fel, az ún. speciális faktorok; S_j-vel jelöljük $(j = 1, 2, \ldots, n)$;

3. végül azokat a faktorokat, amelyek nem tartalmaznak meghatározó alkotóelemeket, hibafaktoroknak nevezzük és E_j-vel jelöljük $(j = 1, 2, \ldots, n)$ (Jahn–Vahle 1974, p. 57).

A továbbiakban a specifikus és hibafaktort az U_j specifikus faktorba vonjuk össze; U_j a Z_j változónak más változókkal alkotott korrelációján kívüli része. Az egyes faktorok eltérő súllyal a_{jp} részesednek a megfigyelt tulajdonságokból. Az X_j, ill. a Z_j ismérvek korrelációs együtthatói megfelelnek az F_p faktoroknak, ahol $j = 1, 2, \ldots, n$ és $p = 1, 2, \ldots, m$.

A Z_j standardizált változók a következő lineáris modell segítségével írhatók fel: $j = 1, 2, \ldots, n$

$$\begin{aligned} Z_1 &= a_{11}F_1 + a_{12}F_2 + \ldots + a_{1m}F_m + a_1U_1 \\ Z_2 &= a_{21}F_1 + a_{22}F_2 + \ldots + a_{2m}F_m + a_2U_2 \\ &\vdots \\ Z_M &= a_{n1}F_1 + a_{n2}F_2 + \ldots + a_{nm}F_m + a_nU_m , \end{aligned} \tag{3}$$

mely a faktoranalízis Thurstone-féle modellje

$$J = AF + \tilde{A}U . \tag{4}$$

A modell linearitása mellett feltételezzük a faktorok egymás közötti függetlenségét, továbbá, hogy az egyforma faktorok szorzatának várható értékei 1-gyel egyenlők, míg a többi szorzatok várható értékei nullák, vagy másképpen kifejezve:

$$\begin{aligned} E(F_i\cdot F_k) &= \delta_{ik} \\ E(U_j\cdot U_l) &= \delta_{jl} \\ E(S_j\cdot S_l) &= \delta_{jl} = E(E_j\cdot E_l) , \end{aligned} \tag{5}$$

továbbá $E(F_i\cdot U_l) = E(F_i\cdot S_l) = E(F_i\cdot E_l) = 0$, ahol $i, k = 1, 2, \ldots, m$ és $j, l = 1, 2, \ldots, n$

$$\delta_{jl} = \delta_{ik} = \begin{cases} 1, \text{ ha } i = k \text{ ill. } j = 1 \\ 0, \text{ ha } i \neq k \text{ ill. } j \neq l. \end{cases} \tag{6}$$

Az X_j standardizálásával kapott Z_j várható értéke 0-val egyenlő, és éppen így a faktorok várható értéke is 0.
Érvényes tehát

$$E(Z_j) = E(F_i) = E(U_j) = E(S_j) = E(E_j) = 0, \tag{7}$$

ahol $j = 1, 2, \ldots, n$ és $i = 1, 2, \ldots, m$.
Az (5) összefüggésből következik, hogy

$$\sum_{i=1}^{N} f_{ik}^2 = N. \tag{8}$$

A fentiekből pedig már az is következik, hogy az r_{jk} egyszerű korrelációs együttható egyenlő a következő formulával:

$$r_{jk} = \frac{\sum_{i=1}^{N} Z_{ij} Z_{ik}}{N} \tag{9}$$

$$r_{jk} = a_{j1}a_{k1} + a_{j2} \cdot a_{k2} + \ldots + a_{jm}a_{km} + \delta_{jk}a_j a_k,$$

ahol $j, k = 1, 2, \ldots, n$. A faktorok függetlenségének feltétele lényeges.
Az R korrelációs mátrix vizsgálatából megállapítottuk, hogy a főátló csak egyesekből állhat, másképpen megfogalmazva

$$r_{jj} = S_j^2 = 1 = a_{j1}^2 + a_{j2}^2 + \ldots + a_{jm}^2 + a_j^2, \tag{10}$$

ahol $j = 1, 2, \ldots, n$.

A (10) kifejezés Z_j változók S_j^2 teljes szórásnégyzetét adja. Az a_{jk}^2 az F_k faktor hozzájárulását fejezi ki Z_j változó szórásnégyzetében. Összegüket h_j^2-tel jelöljük és kommunalitásnak nevezzük.

$$h_j^2 = a_{j1}^2 + a_{j2}^2 + \ldots + a_{jm}^2 \quad (j = 1, 2, \ldots, n). \tag{11}$$

Ez a teljes szórásnégyzet azon része, amely a közös faktorokba vezethető vissza (l. (9) egyenlet).

Ha $j = k$, a korrelációs mátrixban az egyesek helyére a (11) összefüggés szerint a h_j^2 kommunalitásokat írjuk a specifikus szórásnégyzetek és a hibaszórásnégyzetek elhanyagolásával. Ezek azonban előzetesen nem ismeretesek, ezért megfelelő becslési módszerekkel kell meghatároznunk.

Ha a faktoranalízis Thurstone-féle (4) modelljéből indulunk ki és feltételezzük, hogy a kommunalitások pontosak, továbbá ha elhanyagoljuk a speciális, valamint hibaszórásnégyzeteket, akkor R' mátrix a következőképpen írható fel:

$$R' = \frac{1}{N} \cdot Z^* \cdot Z = AA^*, \tag{12}$$

ahol A az a_{jp} faktorsúlyok mátrixa.

Az egyenlőségből leolvasható, hogy a kiindulási adatok mátrixának rangja redukció vagy adatkoncentráció révén nem változik, és hogy Z az X-ből véges számú elemi alakítások útján nyerhető.

Célunk a továbbiakban az A faktorsúly mátrix meghatározása:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2m} \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ a_{nm} & a_{n2} & \dots & a_{nm} \end{bmatrix}.$$

Ehhez azonban tudnunk kell, hogy az R' mátrix annyiban különbözik az R mátrixtól, hogy diagonálisában $1 - a_j^2$ kifejezések állnak (az R' mátrixot emiatt nevezzük redukált korrelációs mátrixnak). Az $1 - a^2$ kifejezések a j-edik változó kommunalitását jelentik, $h_i^2 = 1 - a_j^2$.

Ha tehát az R' mátrix fődiagonálisában álló kommunalitásokat valamilyen módon meg tudjuk határozni, nagy lépést tennénk A mátrix meghatározásához. Nyilvánvaló tehát, hogy olyan maximális kommunalitások meghatározása a cél, amelyek mellett a redukált korrelációs mátrix rangja – amely megegyezik a megfigyelések redukált mátrixának rangjával, tehát $\varrho(R') = \varrho(Z')$ – minimális (Kulcsár 1976, pp. 273–274). Ilyen feltételek mellett lehet minimális számú faktorral magyarázni a változók szórásnégyzetének maximális hányadát.

A kommunalitások meghatározására gyakorlatban több becslési eljárás kínálkozik (Kulcsár 1976). Általában a kezdeti becsléseket addig javítják, míg a kívánt pontosságot el nem érik. Tételezzük fel, hogy megfelelő pontossággal tudjuk becsülni a kommunalitásokat. Célunk ezek után az A közös faktorsúly mátrix meghatározása azzal a kikötéssel, hogy AA^* a lehető legjobban megközelítse az R' mátrixot. Az A mátrix meghatározását a Hotelling-féle főfaktor módszer segítségével tehetjük meg. A módszer azon a geometriai elképzelésen alapszik, hogy az összes Z_j ($j = 1, 2, \dots, n$) standardizált változó egy n-dimenziós teret feszít ki és a változók normális eloszlásúak, a hozzájuk tartozó egyszerű korrelációs együtthatók pedig egy n dimenziós ellipszoidon fekszenek. Az ellipszoidok tengelyei a meghatározandó faktoroknak felelnek meg. A faktorok meghatározása tehát ekvivalens az ellipszoid főtengelyének meghatározásával, amely egy sajátérték problémára vezethető vissza. A korábban leírtakra támaszkodva *a főfaktor módszer lényege* a következőkben fogalmazható meg: az F_1 faktort úgy kell meghatároznunk, hogy annak részesedése minden egyes Z_j változó h_j^2 kommunalitásában maximális legyen.

F_1 hozzájárulása h_j^2-hez a_{j1}^2. Ennek megfelelően a

$$V_1 = a_{11}^2 + a_{21}^2 + \dots + a_{n1}^2 = \sum_{j=1}^{M} a_{j1}^2$$

kifejezésnek kell maximálisnak lennie.

Ha az F_1 faktort meghatároztuk, a maradék korrelációt kell kiszámítani. Az F_2 legközelebbi faktort hasonlóan úgy kell meghatározni, hogy a kommunalitásokhoz a hozzájárulása, azaz

$$V_2 = a_{21}^2 + a_{22}^2 + \ldots + a_{n2}^2 = \sum_{j=1}^{M} a_{j2}^2$$

ismét maximális legyen.

Ezen a módon haladhatunk tovább, ameddig valamennyi m faktort $F_1, F_2, \ldots, F_m$-et megkapjuk (Jahn – Vahle 1974, pp. 96 – 107).

Amennyiben sikerült már valamennyi $F_1, F_2, \ldots, F_m$ faktort számszerűsíteni, akkor a következő lépés a kiszámított faktorsúly mátrix alapján a faktoroknak a konkrét értelmezése. A faktorok értelmezése, azonosítása egyáltalán nem könnyű feladat, sokszor a gyakorlati számítások során előfordul, hogy a faktoranalízis alkalmazásával nyert faktorsúly mátrix nem teszi egyértelműen lehetővé az egyes faktorok azonosítását. Ez nem azt jelenti, hogy a faktoranalízisnek nincs megoldása, csak arra utal, hogy a faktoroknak nincs gazdaságföldrajzi vagy közgazdasági értelmezése. Ilyenkor olyan további megoldásokat kell keresni, amelyek az értelmezést megkönnyítik. Erre az ad lehetőséget, hogy a faktoranalízisnek nemcsak egy lehetséges megoldása van, hanem a faktorsúly mátrix ortogonális transzformációjával nyert megoldások is kielégítik a Thurstone-féle faktormodellt.

A faktorsúlyokat transzformáló módszerek két csoportba sorolhatók (Jahn – Vahle 1974, pp. 115 – 149):

1. varimax módszer
2. promax módszer.

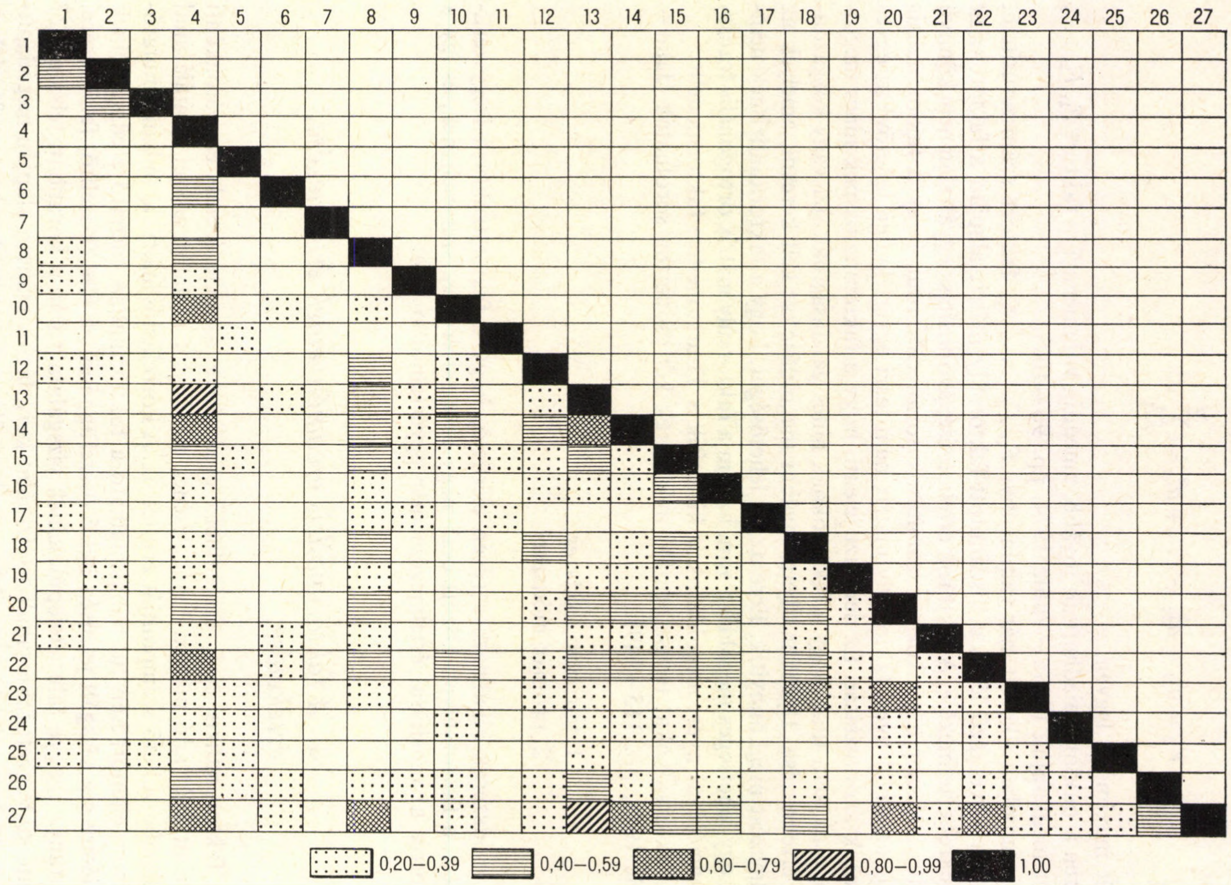
E módszerek alkalmazása révén elérhető, hogy a faktorstruktúra leegyszerűsödjön, a faktorsúlyok között csak nagy és kicsi értékek szerepeljenek, és így a faktorok azonosítása, értelmezése már egyértelműbb lehet.

4. *A faktoranalízis eredményeinek értelmezése, értékelése*

A faktoranalízis első, értékelhető eredménye a mutatórendszer páronkénti korreláltságát adó mátrix. Értékelésének néhány, a mutatórendszer elbírálásánál figyelembe vehető szempontját érintettük. A korrelációs mátrix azonban a mutatórendszer ellenőrzésén túl felhasználható a faktoranalízis várható eredményeinek becslésére s a vizsgált jelenség belső összefüggéseinek első (közelítő) felmérésére.

Baranya megye falusi településeinek vizsgálata során a korábban felsorolt 27 mutatóval végzett faktoranalízis-vizsgálat korrelációs mátrixa alapján megállapítható volt, hogy a mutatórendszerünk korreláltsága viszonylag laza; a 351 lehetséges páronkénti korrelációból 52 utal szorosabb kapcsolatra *(9. ábra)*.

Figyelemre méltó, hogy a 4. mutató (a lakónépesség száma 1970-ben), ill. a 13. mutató (az alapfokú ellátó–szolgáltató intézmények színvonala) páronkénti korre-



9. ábra. A Baranya megyei mutatórendszer korrelációs mátrixa lációs kapcsolata a többi mutatóval erősebb, mint a korábbiakban végzett borsodi és vasi vizsgálatainkban volt, ugyanakkor viszont a 27. mutató (a községek általános fejlettségének színvonala) páronkénti korrelációs kapcsolata gyengébb. A szoros, ill. gyengébb korrelációk oka a megye településeinek 70%-át adó aprófalvas jellegből adódik; ez az érték magasabb a borsodi, ill. Vas megyei értékeknél. Mindez azt bizonyítja, hogy a megyében a településnagyság messzemenően befolyásolja a települések helyzetét, a településformáló folyamatokat, megszabja pl. az alapfokú intézményhálózat kiépítettségét *(9. ábra)*; ugyanakkor a települések helyzete visszahat a település nagyságára is (a demográfiai folyamatok befolyásolása!). A korrelációs táblából az is kitűnik, hogy a 7. mutató (az ipari + építőipari keresők részesedése az összes keresőből 1970-ben) egyetlen mutatóval sem korrelál; ami több, mint feltűnő. Magyarázatul szolgálhat, hogy a foglalkozási szerkezetet alakító munkaalkalmak – kitermelő–ipari – nem igazodnak a településméretekhez, s a kis falvakba ipar nem is tud letelepedni. Az ingázás és a nyomában fellépő foglalkozás–szerkezetváltás pedig új keletű, még nem formálta át a településállományt. Az urbanizálódás horizontálisan terjed, a településállomány felszínén fut át, a települések életét viszont más tényezők alakítják. Arra is utal a tény, hogy az *„egyváltozós” településosztályozások* – pl. a foglalkozási szerkezetre alapozó osztályozás – esetenként mennyire megbízhatatlan eredményeket adnak, másrészt az urbanizálódást mennyire egyoldalúan fejezi ki a lakosság foglalkozási szerkezete.

A faktoranalízis eredményeinek értékelését a rotálatlan, ill. a rotált faktorsúly mátrix alapján végezhetjük. Gyakorlatban *az elemzések többségénél a rotált* (transzformált, l. előbb) *faktorsúly mátrixot használják fel.* Ennek oka abban keresendő, hogy az ortogonális rotáció utáni faktorsúly mátrix leegyszerűsödik és a benne szereplő faktorsúlyok között csak nagy és kicsi értékek szerepelnek, ami nagymértékben megkönnyíti a faktorok tartalmának azonosítását, értelmezését. A faktorok értelmezése annak alapján történik, hogy az egyes mutatók milyen faktorsúllyal szerepelnek az adott faktorban. A faktoranalízis számítása során a sajátértékszintek változtatása mellett különböző tartalmú és struktúrájú faktorsúlymátrixok érhetők el, természetesen más-más információs veszteség árán. Az optimális változat kiválasztásánál törekednünk kell az információs veszteség minimalizálására, ill. a minél homogénebb faktorstruktúrák kialakítására. Ez természetesen csak úgy valósítható meg, ha ismerjük különböző sajátértékszintek mellett faktoraink tartalmát, mert csak így, a különböző faktorstruktúrák ismeretében tudunk dönteni az egyes változatok elvetéséről ill. elfogadásáról. A faktorok számának meghatározásához támpontokat nyújthatnak a következő gyakorlati tapasztalatok:

– társadalmi–gazdasági vizsgálatok esetén a magyarázott összszórás lehetőleg érje el a 70–80%-ot,
– a még figyelembe vett faktor sajátértéke 1-nél lehetőleg ne legyen kisebb,
– a faktorok száma lehetőleg ne legyen nagyobb az eredeti változók 1/3–1/4-énél.[16]

[16] A faktorok számának becslésére l. Jahn—Vahle 1974, p. 113.

4. TÁBLÁZAT

Az egyes rotált faktorok tartalma a 0,6, 0,7 és 0,8 sajátértékszintek mellett

Faktor	0,6 változat	Faktorsúly*	0,7 változat	Faktorsúly	0,8 változat	Faktorsúly
F_1	21.	0,84	1.	0,84	1.	0,86
	1.	0,83	4.	0,82	4.	0,83
	27.	0,78	21.	0,81	21.	0,80
	15.	0,78	27.	0,78	15.	0,77
	4.	0,78	15.	0,75	27.	0,75
	8.	0,70	8.	0,71	17.	0,69
	26.	0,68	26.	0,67	26.	0,65
			17.	0,63	8.	0,63
F_2	24.	−0,85	24.	0,84	19.	0,77
	22.	−0,62	22.	0,71	23.	0,57
					13.	−0,75
F_3			19.	0,79		
	19.	−0,83	13.	0,74	22.	−0,78
	13.	0,66	23.	0,57	24.	−0,75
F_4	14.	0,79	14.	0,81	14.	0,81
					10.	0,78
	10.	0,74	10.	0,75	5.	0,56
					6.	0,52
					16.	0,49
F_5	2.	0,91	2.	0,89	2.	0,77
					12.	−0,59
F_6	3.	−0,85	9.	0,81	3.	−0,80
			18.	0,68		
F_7	20.	−0,90	20.	−0,89	20.	−0,79
	18.	−0,49	18.	−0,44	18.	0,71
F_8	20.	−0,89	7.	−0,84	7.	0,98
F_9	9.	−0,89	3.	−0,84	20.	0,90
F_{10}			25.	−0,56	11.	0,55
	25.	0,85	11.	−0,46	25.	0,51
F_{11}	12.	0,91	6.	−0,73	—	—
			5.	−0,56		
F_{12}	6.	0,75				
	5.	0,56	12.	0,90	—	—
F_{13}	16.	0,80	—	—	—	—
F_{14}	23.	0,85	—	—	—	—

* Az egyes faktorokban szereplő mutatók faktorsúlyainak megítélésénél a következő tapasztalati jellegű értékhatárokat használtuk:
- meghatározó jellegű változó (faktorsúlya abszolút értékben 0,95-nél nagyobb);
- igen jelentős változó (faktorsúlya 0,70 és 0,95 között);
- jelentős változó (faktorsúlya 0,50—0,70 között);
- kis szerepet játszó változó (faktorsúlya 0,30 és 0,50 között);
- kétséges befolyással rendelkező változó (faktorsúlya 0,20 és 0,30 között);
- jelentéktelen változó (faktorsúlya 0,20 alatt).

Nézzük a továbbiakban példaként a Baranya megyében végzett számításainkat, amelyeket az *ún. főkomponens módszer* alkalmazásával több változatban végeztük. Vizsgálatainkból most a 0,6, a 0,7, ill. a 0,8 sajátértékszint mellett készült változatainkat mutatjuk be *(4. táblázat)*; e változatok 13, 12 és 10 faktort eredményeztek.

A faktoranalízis eredményeként kapott rotált faktor mátrixunk főfaktorainak faktorstruktúrája különböző aggregáltsági szintek mellett is stabil marad. A 0,6, a 0,7 és a 0,8 változatok közül a 0,8 javára az billentette a mérleget, hogy az F_4 faktort illetően komplexebb képet ad a vizsgált területről. A második és harmadik faktor szerkezetét illetően a három változat között lényegi különbség nincsen, csak az egyes faktorok sorrendje változik.

A további vizsgálatainkat tehát a 10 faktort adó változatra alapoztuk, amely a változók szórásnégyzetének 74,72%-át magyarázza *(5. táblázat)*.

5. TÁBLÁZAT

A sajátérték-százalékok alakulása

Faktorok megnevezése	Baranya megye		
	sajátértékek	%	kummulatív %
F_1	7,47	27,67	27,67
F_2	2,47	9,18	36,85
F_3	2,32	8,59	45,45
F_4	1,63	6,06	51,51
F_5	1,35	5,00	56,52
F_6	1,12	4,15	60,67
F_7	1,05	3,91	64,59
F_8	1,00	3,72	68,31
F_9	0,89	3,32	71,63
F_{10}	0,83	3,08	74,72

Az eddig publikált megyei vizsgálatainkhoz képest (Borsod, Vas, Szolnok, Bács megye) 5–6%-kal nagyobb az információs veszteség. Ennek ellenére az eredeti információtartalom 74,72%-os átmentését kedvező értéknek tartjuk, figyelembe véve természetesen azt is, hogy korábban a második és harmadik faktor tartalma egy faktorban jelent meg. Az első 4 faktor együttesen az összinformációnak 51,51%-át magyarázza.

A faktoranalízissel végzett eddigi vizsgálatok közül itt négyet említenénk meg *(6. táblázat)*. A vizsgálatok közös jellemzője, hogy az információveszteséget illetően mindegyik kedvező értéket mutat. A faktorok számát, ill. az első faktor információ-tartalmát tekintve viszont a vizsgálatok között jelentős különbségek mutatkoznak, attól függően, hogy mennyire komplex, ill. homogén problémát választottak elemzésük tárgyául a szerzők. Simon I.–Tánczos-Szabó L. (1979) az ipari fejlettség területi különbségeinek feltárására tett kísérletet Békés megyében. Vizsgálatuk alapadatai szinte determinisztikus kapcsolatban állnak egymással (l. előbb; ez tükröződik az általuk megadott korrelációs mátrixból is). Ez az oka minden mutató egy faktorba kerülésének, ami esetünkben a faktoranalízis alkalmazásának szükségességét is kérdésessé teszi. A „Baranya megye életkörülmény-vizsgá-

6. TÁBLÁZAT

Különböző vizsgálatokban a szórásnégyzetek alakulása

Szerzők neve és a vizsgálat tárgya	Faktorok száma	Az első faktor információ-tartalma	Össz-információ-tartalom
Lukács P. A lakosság kulturális színvonalának vizsgálata az alföldi városokban	6	61,0	89,8
Francia L. Baranya megye életkörülmény-vizsgálata	5	52,0	88,2
Simon I.—Tánczos-Szabó L. Ipari fejlettség területi különbségeinek vizsgálata Békés megyében	3	95,5	99,8
Beluszky P.—Sikos T. T. Baranya megye falusi településeinek tipológiája	10	27,6	74,7

lata" (Francia in Kulcsár 1976) és „Az urbanizáció és a lakosság kulturális színvonalának elemzése az alföldi városokban" (Lukács 1979) c. munkák első faktora magasabb információ-tartalommal rendelkezik, mint a Baranya megye községeinek tipológiája során kapott első faktor (Beluszky—Sikos 1981). Ennek oka, hogy egy településtipológia kapcsán az előbbieknél bonyolultabb, komplexebb folyamatokkal kell számolnunk, amelyeknek eredményeképpen a szórásnégyzetek jobban megoszlanak az egyes faktorok között.

A faktoranalízis eredményeinek elemzésekor — a kommunalitások révén — arra is választ kaphatunk, hogy az eredeti mutatók információ-tartalmának hányadrésze veszett el a számítások során *(7. táblázat).* (A h_j^2 értékek azt tükrözik, hogy a fenti 10 faktor összesen hány százalékban határozza meg az egyes változók teljes szóródását.) Andorka R. (1976, 1979) szerint azokat a mutatókat, amelyek kommunalitás-értékei 0,60 alattiak, az elemzésből ki kell venni. Való igaz, hogy a 0,60 alatti kommunalitásokkal rendelkező mutatók a vizsgálat során nem játszanak fontos szerepet, inkább zavarók, azonban vannak esetek, amikor mégsem célszerű őket automatikusan kivenni az elemzésből. Ez pl. az az eset, amikor egy mutató-garnitúrával több területi egységben végzünk számításokat. A mi esetünkben pl. a 6. mutató (a környék településeinek átlagos nagysága) kommunalitásának értéke Borsodban 98,64, míg Baranyában 56,07. Ez utóbbi esetben természetesen a mutatónak az elemzésből történő elhagyása indokolt lehetne.

A faktoranalízis eredményeinek értékelése során a következő lépés a faktorstruktúrák feltárása.

Baranya megye falusi településeinek tipizálásakor az F_1 *faktor* 7,47 *sajátértékszint mellett az összinformáció* 27,67 %-*át magyarázza.* Az első faktor súlya a településformáló folyamatokban háromszor nagyobb, mint az őt követő faktoré. A faktor tartalmát a magas faktorsúlyú mutatók alapján határozhatjuk meg:

4. mutató: A falvak lakónépességének száma 1970-ben 0,8646 fs[17]
14. mutató: Az 1 főre jutó iparcikk-kiskereskedelmi forgalom értéke Ft-ban 0,8307 fs
13. mutató: Az alapfokú ellátó–szolgáltató intézmények színvonala 0,8011 fs
27. mutató: A községek átlagos fejlettségének színvonala 0,7711 fs
22. mutató: A városok felé induló tömegközlekedési eszközök járatsűrűsége 0,7539 fs
10. mutató: A községek ipari telephelyein dolgozók száma 0,6964 fs
20. mutató: A közlekedési hálózatok kiépítettsége 0,6551 fs
8. mutató: A tercier szektor keresőinek (közlekedési, kereskedelmi, egyéb keresők) részesedése az összes keresőből 1970-ben, %-ban 0,6371 fs

Az F_1 faktor belső szerkezetének feltárásához nyújt segítséget a korrelogram *(10. ábra)*. Az F_1 faktort alakító változók korreláltság-szintje a közepesnél valamivel erősebb a vázolt kapcsolatok kétharmadában. Az F_1 faktor korrelogramja a *legerősebb kapcsolatokat a* 27. *mutató* (a települések általános fejlettsége), a 4. *mutató* (a falvak lakónépessége 1970-ben), a 13. *mutató* (az alapfokú ellátó–szolgáltató intézmények színvonala), a 14. *mutató* (az 1 főre jutó iparcikk-kiskereskedelmi forgalom értéke, Ft) és a 22. *mutató* (a városok felé induló tömegközlekedési eszközök járatsűrűsége) között mutatja.

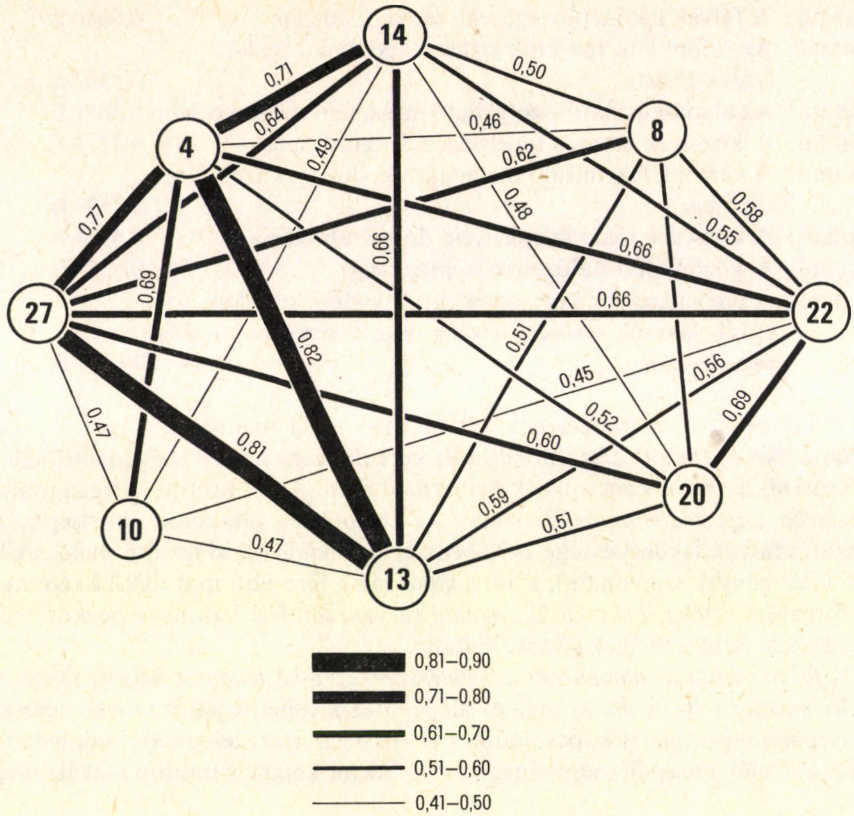
Az F_1 faktor tehát *az alapellátás–településszerkezet–közlekedési helyzet faktora.* A tercier szektor keresőinek aránya az alapellátás kiépítettségéhez (s ezen keresztül a településnagysághoz) kapcsolódik, s a községek ipari telephelyein dolgozók száma is korrelál a településnagysággal. Az F_1 faktor komplex módon ragadja meg

7. TÁBLÁZAT

A kommunalitások (h_j^2) értékei

Változó	h_j^2	Változó	h_j^2
1.	77,90	15.	72,27
2.	75,35	16.	80,98
3.	60,97	17.	85,38
4.	76,80	18.	60,15
5.	88,46	19.	88,94
6.	56,07	20.	75,69
7.	96,69	21.	80,33
8.	64,06	22.	68,52
9.	78,45	23.	79,43
10.	68,20	24.	79,66
11.	75,97	25.	57,06
12.	66,03	26.	89,63
13.	67,11	27.	71,91
14.	75,30		

[17] fs = faktorsúly.



10. ábra. Az F_1 faktort alkotó változók korrelogramja

azokat a településformáló folyamatokat, amelyek egy aprófalvas megye községeiben lezajlanak. A *hálózati elemek uralkodóvá válása* Baranya megyében várható, „deduktív úton" levezethető volt a falvak lélekszám szerinti nagyfokú differenciálódásából, az alapfokú ellátottságban mutatkozó erős különbségekből, a közlekedési adottságokból stb. Ugyanakkor a vizsgálat korábbi időpontokra történő kiterjesztése nélkül is valószínűsíthető, hogy korábban – az ötvenes évek második felében, a hatvanas években – a falvak gazdasági szerepkörének, iparosodottságának, a lakosság foglalkozási szerkezetének, a napi ingázás mértékének nagyobb szerepe volt Baranya megyében a falvak közötti különbségek kialakításában. Ezt a helyzetet tükrözték a foglalkozási szerkezeten alapuló településosztályozások, a településfejlesztési, területfejlesztési politika, a szociálpolitikai intézkedések is. Társadalompolitikánk térbeli vetületének alakításában, a települések ilyen szempontú megítélésében ugyancsak a gazdasági szerepkör, a falvak foglalkozási szerkezete, az ingázás mértéke dominált.

Az F_1 faktorban foglalt tényezők, vagyis a falvak mérete, alapellátottsága, fejlettsége köré számos olyan jelenség csoportosul, amelyek mélyrehatóan megszabják egy-egy település jellegét, lakosságának életét, lehetséges életmódját, életvitelét, a falvak társadalmának tagolódását, a helyi közösségek formálódásának lehetőségét. E tényezőkkel összefüggésben alakulnak a települések demográfiai folyamatai is.

A különböző területeken azonos szempontok alapján végzett vizsgálatok összehasonlítása lehetőséget nyújt a településformáló folyamatok helyi sajátosságainak, területi különbségeinek felismerésére, így a településformáló folyamatok behatóbb megismerésére.

A falusi települések típusainak vizsgálata során több, részben hasonló, részben rendkívül eltérő településhálózattal, természeti környezettel, gazdasági szerkezettel, demográfiai folyamatokkal, életkörülményekkel rendelkező területre (Baranya, Vas, Borsod-Abaúj-Zemplén, Szolnok megye) készítettünk faktoranalízist. *Baranya* tipikusan aprófalvas, Pécset, Komlót leszámítva vontatottan városiasodó, a társadalmi–gazdasági élet „koncentrációjára" törekvő településfejlesztési politikát folytató megye; *Vas* harmonikusabban városiasodó, kiegyensúlyozott településfejlesztést folytató, szintén aprófalvas megye; *Borsod-Abaúj-Zemplén* heterogén társadalmi–gazdasági szerkezetű, nagy ipari-települési koncentrációval is rendelkező, ugyanakkor hátrányos helyzetű határmenti területekkel övezett megye, ahol az ország szinte valamennyi településtípusa megtalálható, de a megye területén túlsúlyban az aprófalvak vannak; *Szolnok* megyét pedig a közép- és nagyfalvas, mezővárosi településszerkezet jellemzi; természeti környezete homogén, az agrártermelés megőrizte vezető helyét a (falvak) gazdasági szerkezetében. A faktorok tartalmát bemutató *8. táblázat* érdekes képet tár elénk, mivel *a részben hasonló, ill. rendkívül eltérő településhálózatú megyék* végső soron *nagyfokú hasonlóságot mutatnak a faktorok tartalmát illetően.* Különösképp az F_1 faktor tartalmát vizsgálva meglepő az eredmények nagyfokú egyezése a négy megyében. Az alföldi megyében fél, ill. két százalékkal játszik kisebb szerepet az F_1 faktor, mint Vas, ill. Borsod megyében, Baranyához képest pedig értéke két százalékkal magasabb. A faktorok belső tartalma rendkívül hasonló, ha nem is teljesen azonos, mivel Borsod, ill. Baranya megyében az F_1 faktorban szerepel még a közlekedés kiépítettsége is. Ennek oka a közös tanácsú községek nagy számában, ill. az alapellátás koncentrálódásában kereshető. Az F_2 faktort vizsgálva megállapítható, hogy az aprófalvas megyék faktorstruktúrája alapvetően különbözik Szolnok megye eredményeitől.

Az ok nyilvánvaló: *Szolnok* megye homogén természeti adottságokkal rendelkezik, ezért érthető, hogy csak az ötödik (mezőgazdasági adottságok), ill. a nyolcadik (domborzati adottságok) faktorban jelentkezik a természeti környezet hatása a településformáló folyamatokra. Az F_2 faktor belső szerkezetében *Vas* és *Borsod* megye között teljes egyezés van. *Baranya* megye esetében az F_2 és F_3 faktor tartalmazza a természeti környezetet, de emellé még az F_2 faktorba beépült a települések forgalmi helyzete is, mely egy aprófalvas megye esetében nem meglepő a fentebb leírt okok következtében.

Az 1970-es években a falvak fejlettségét, külső képét, lakosságuk életkörülményeit, életmódját, demográfiai folyamatait sokkal inkább a falvak fekvése, mérete, a dinamikus térségekhez való kötődés lehetősége, ellátottsági színvonala köré csoportosuló jelenségek határozták meg.

8. TÁBLÁZAT

A faktorok tartalma (elnevezése) a Vas, Borsod-Abaúj-Zemplén, Baranya és Szolnok megyei vizsgálatok esetében

Faktor	Vas megye	Borsod-Abaúj-Zemplén megye	Baranya megye	Szolnok megye
F_1	Településszerkezet–urbanizációs fejlettség szintje	Alapellátás–településszerkezet	Településszerkezet–alapellátás–közlekedési helyzet	Településszerkezet–alapellátás
F_2	Természeti környezet jellege	Természeti környezet jellege	Természeti környezet-forgalmi helyzet	Településfejlődés iránya és üteme
F_3	Településfejlődés iránya és üteme	Foglalkozási szerkezet és ingázás	Mezőgazdasági adottságok	Foglalkozási szerkezet (ingázás–urbanizációs szint)
F_4	Foglalkozási szerkezet és ingázás	Tercier szektor fejlettsége	A településfejlődés iránya és üteme	Agglomerálódás
F_5	Az idegenforgalmi szerepkör fejlettsége	A településfejlődés iránya és üteme	A külterületi népesség és az 1 szobás lakóépületek aránya	Természeti környezet jellege (mezőgazdasági adottságok)
F_6	Az inaktív keresők aránya	A külterületi népesség aránya	A környék településeinek átlagos nagysága	Az idegenforgalmi szerepkör fejlettsége
F_7	A külterületi népesség aránya	Az urbanizáltság mértéke	Az átrétegződés és ingázás mértéke	Közlekedési helyzet
F_8	Közlekedési helyzet	Az idegenforgalmi szerepkör fejlettsége	Foglalkozási szerkezet	Természeti környezet jellege (domborzat)
F_9	Urbanizáció–agglomerálódás	A kiskereskedelmi szerepkör fejlettsége	Az inaktív keresők aránya	Foglalkozási átrétegződés
F_{10}	–	Közlekedési helyzet	Az idegenforgalmi szerepkör fejlettsége	Kommunális ellátottság

A települések foglalkozási szerkezete (l. a *8. táblázat*ot), gazdasági jellege elvesztette vezető szerepét a falvak közötti különbségek alakításában. Ez a folyamat Baranya megyében – a vázoltak okán – még inkább előrehaladt, mint az ország más megyéiben. Meg kell azonban említenünk azt is, hogy a nem városi térségek mezőgazdasági szerepköre mindmáig jelentős, a községek keresőinek többsége a mezőgazdaságban dolgozik, továbbá, hogy a foglalkozási átrétegződés a vizsgált megyékben jelentősen előrehaladott. Az 1970-es évek során a mezőgazdasági keresők jövedelemviszonyai megváltoztak, az ipari keresők jövedelmeihez folyamatosan közelítettek.

Egyes faktoranalízis-vizsgálatok a faktorok tartalmának értékelésével, értelmezésével zárulnak; a területi kutatásokban azonban többnyire olyan feladatok adódnak, amelyek a faktoranalízis során nyert faktorpontértékek, *s azok területi elterjedésének értékelését* is megkívánják.

A faktorpontszámok dimenzió nélküli, közvetlenül mért értékek (hiszen a faktorok az eredeti változók lineáris kombinációi). A faktorpontszámok tehát az adott objektum (megfigyelési egység) faktor szerinti helyét határozzák meg: ha egy objektum pontszáma magasabb, akkor az az objektum az adott faktor tekintetében átlag feletti, vagyis erre az objektumra az adott faktor nagyon jellemző, e faktor szerint az objektumnak magas értéke van (Zágon 1979).

Baranya megye településeinek tipizálásakor az F_1 faktorpontértékeinek térképezése *(11. ábra)* kimutatta, hogy a legkedvezőtlenebb helyzetben levő aprófalvak a megye szinte valamennyi tájában mozaikszerűen fordulnak elő. A Zselicség, a Hegyhát és a Mecsek nem kedvez a mezőgazdaságnak, és mivel jelentősebb iparral sem rendelkeznek, vándorlási veszteségük nagymérvű.

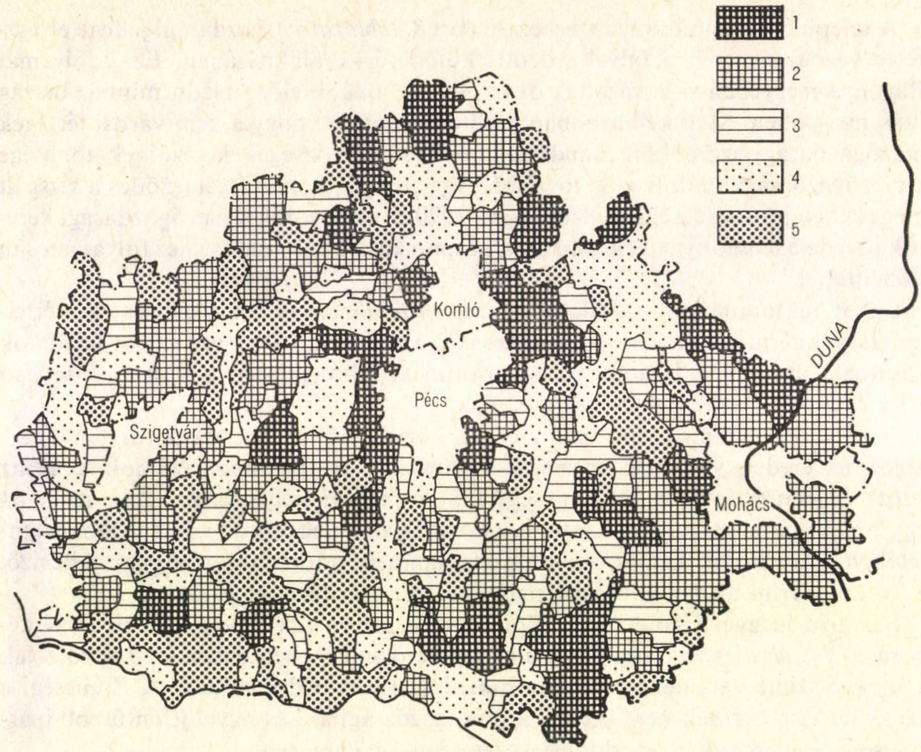
A modern mezőgazdaság e területről a Baranyai- és Geresdi-dombságra, a Mohácsi-síkságra, ill. a Völgységbe húzódik; ennek következményeként a fentebb felsorolt térségekben nagymérvű elvándorlás indult meg. A népesség fogyatkozását pedig rövid időn belül követte az alapfokú intézmények megritkulása, a munkaalkalmak választékának további szűkülése, a népesség nagymérvű elöregedése, ami egyben a további elvándorlás előidézője is. E területek fokozatosan stagnáló, depressziós területekké válnak, ha azt valamilyen más tevékenység – bányászati, ipari vagy idegenforgalmi – nem módosítja.

A Baranyai- és Geresdi-dombságon, valamint a Mohácsi-síkságon előforduló kedvező faktorpontértékek a modern mezőgazdaság hatásának, ill. a települések kedvezőbb forgalmi fekvésének tulajdoníthatók (Bóly, Szederkény, Majs, Baksa, Görcsöny, Vokány, Villánykövesd stb.).

A megye településeinek alapfokú intézményekkel való átlagos ellátottsága nagyon alacsony: a számba vett 16 intézményből átlagosan mintegy 4 fordul elő. Baranya megyének mindössze 16 olyan települése van, amelynek népessége nagyobb 2 000 főnél – ez a megye településeinek nem több, mint 5%-a –, és ahol az alapfokú intézmények kiépítettségi színvonala kielégíthetőnek nevezhető. A további faktorok elnevezését a 8. *táblázat* tartalmazza.

A faktoranalízis eredményeinek értékelése után a *további elemzésekhez két út* áll rendelkezésünkre:

1. az eredmények kartográfiai értékelése,
2. clusteranalízis az eredmények alapján.



11. ábra. Településszerkezet-alapellátottság, közlekedési helyzet faktora Baranya megye községeiben (az F_1 faktor faktorpontértékei).
1 = >7,0000; 2 = 1,0001–6,9999; 3 = 1,0000– –1,0000; 4 = –1,0001– –3,5000; 5 = < –3,5001

Az eddigi gyakorlat általában az volt, hogy a kutatók a két lehetséges út egyikét választották az elemzéshez. A két módszer együttes alkalmazása nem mondható általánosnak. Mindkét esetben a módszerek kiinduló adatai a faktoranalízis eredményeként kapott faktorpontok mátrixa.

A *kartográfiai módszer* alkalmazása során a faktorok közül két, esetleg három faktort tudtunk egy térképen ábrázolni, figyelembe véve a térképek olvashatóságának határait. Ennél több faktor ábrázolása egy térképen zavaró, tulajdonképpen áttekinthetetlenné tette volna azt; ugyanez vonatkozik arra az esetre is, amikor két vagy több faktort pontdiagramon ábrázolunk. Ha az első három faktor az összinformáció 50%-át meghaladja, akkor általában az első három faktort ábrázoló térkép elegendőnek bizonyul ahhoz, hogy hozzávetőleges képet kapjunk várható típusainkról. 50%-nál nagyobb információtartalom esetén a vizsgálat a kartográfiai módszerrel nyert eredmények értékelésével lezárható. A további faktorok térképezése a valószínű típusok számát növeli, ill. csökkenti. Így a *clusteranalízis* megkezdése előtt már kialakíthatjuk a clusterek számára vonatkozó hipotézisünket, amelyet nemcsak tapasztalati ismereteink alapján fogalmazhatunk meg, hanem azt már alá tudjuk támasztani a kartográfiai módszerből nyert eredményeinkkel.

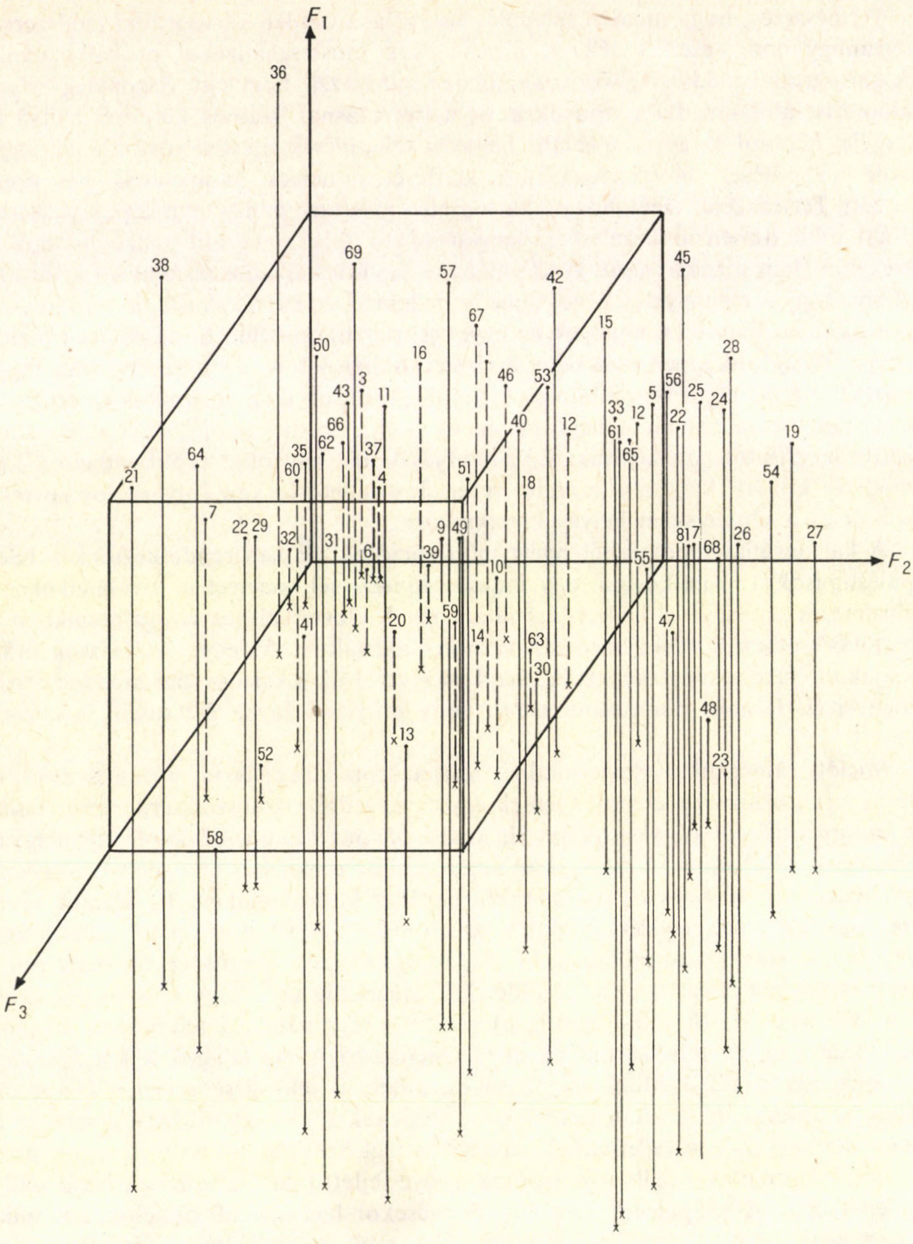
Természetes, hogy minden település besorolása csupán kartográfiai módszerrel ugyanúgy nem vezethet célhoz, mintha csak clusteranalízissel próbálkoznánk. A kartográfiai módszer elsősorban ahhoz segít hozzá, hogy egy viszonylag helyes hipotézist állítsunk fel a típusokra, de a tipizálásnak számos kérdését nyitva is hagyja. Például az egyes speciális helyzetű települések típusba sorolásának vagy azon települések hovatartozásának kérdését, amelyek határesetek két típus között. Természetes tehát, hogy a kartográfiai módszer, amely nem képes egyszerre 3-nál több dimenzió kezelésére, megkívánja a feladat egzakt megoldásához a clusteranalízis alkalmazását. A két módszer együttes alkalmazásával azt kívántuk elérni, hogy a megfigyelési objektumokat jellemző számértékek alapján olyan csoportok alakuljanak ki, amelyek az egyes csoportokon belüli homogenitást biztosítják. Tulajdonképpen ez a célja a clusteranalízisnek is, de a heurisztikus megközelítési mód algoritmusaiban az egyes megoldások összehasonlítására szolgáló kritérium formálisan nincs megfogalmazva. A clusteresítés alapját lényegében szubjektív megfontolások képezik. Ez a szubjektivitás nagyrészt csökkenthető a két módszer közötti kapcsolatteremtés révén. Így lehetőség van folyamatos korrekciókra és a clusterszám helyes kialakítására.

A kartográfiai módszerből nyert információink alapján rendelkeztünk a településtípusokra vonatkozóan egy induló hipotézissel, amelyet a továbbiakban a clusterezés segítségével kellett finomítanunk. A clusterezéshez vizsgálatainkban a legtöbb esetben a MacQueen algoritmust használtuk. Az egyes futtatások után kialakult clustereket térképeztük, majd összevetettük a kartográfiai módszer eredményeivel. Ezután döntöttünk arról, hogy milyen irányba folytassuk a clusterezést.

Mielőtt rátérnénk a clusteranalízis részletesebb tárgyalására, érdemes még kitérni a faktoranalízis eredményeinek egy egyszerűbb osztályozására, nevezetesen a *faktorpontok térbeli elemzésé*re. Ha az első három faktor a szórásnégyzet magyarázásához több mint 50%-kal járul hozzá, akkor e módszer eredményesen alkalmazható. Az F_1, F_2 és F_3 faktor faktorpontjait koordinátaként figyelembe véve, megadhatók a megfigyelési egységek térbeli helyei. A *12. ábrá*n a települések egy egyszerű osztályozását mutatjuk be „fejlettségi rangsor" segítségével. A tér pozitív negyedében ábrázoltuk a településeket, mégpedig úgy, hogy először képeztük a települések (megfigyelési egységek) pozitív koordinátáit, a települések átlagos fejlettségi szintjét mindhárom faktorra vonatkozóan. Az átlagos fejlettségi szint ismeretében szerkesztettünk egy hasábot, amely a településeket jelen állapotuk alapján differenciálta „fejlettekre" és „fejletlenekre". A települések között az a település számít a legfejlettebbnek, amelyik a legközelebb esik az (1,1,1) ponthoz. A hasáb belsejében találhatók Szolnok megye fejlett falusi települései, kívül pedig a fejletlenek. A települések további fejlesztésekor hasznos információhoz jutunk, ha megvizsgáljuk, hogy az adott település mely koordinátája (faktora) miatt került a hasábon kívülre *(12. ábra és 9. táblázat)*.

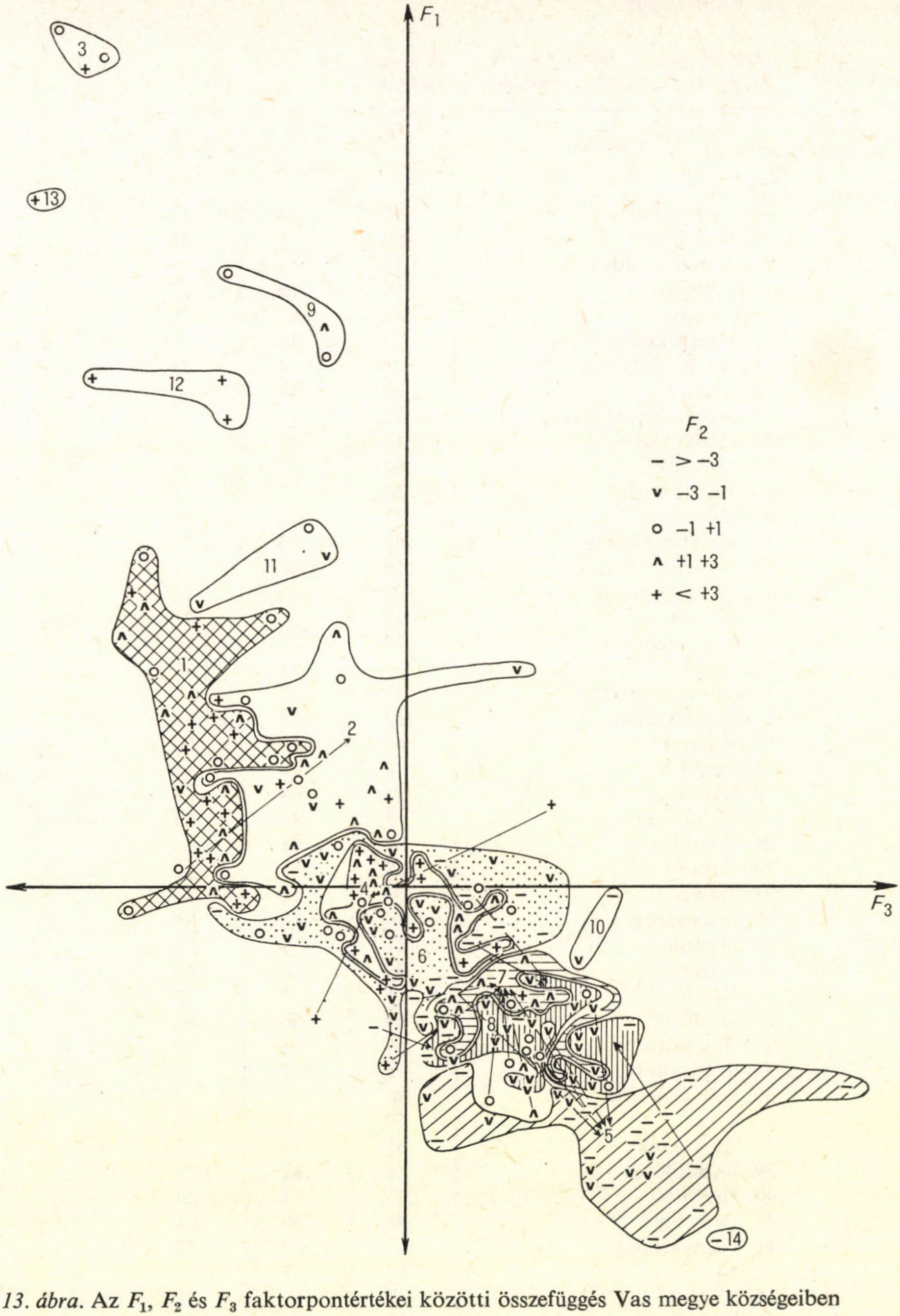
Az F_1, F_2 és F_3 faktor faktorpontjainak egy másfajta ábrázolását képviseli a *13. ábra*. A Vas megyei vizsgálat F_1 és F_2 faktora,[18] továbbá az F_2 és F_3 faktor faktorpontjai között közepes korrelációs kapcsolatot tudtunk kimutatni, míg az

[18] A faktorok elnevezését ld. a *8. táblázat*ban.



12. ábra. Az F_1, F_2 és F_3 faktor faktorpontértékei Szolnok megye községeiben. A települések sorszáma megegyezik a 9. táblázat sorszámozásával

F_1 és F_3 faktorok között erős kapcsolatot találtunk. Ezért ábrázoltuk az F_1 és F_3 faktor faktorpontjait együtt egy koordináta-rendszerben, feltüntetve ebben a természeti körülmények faktorát – F_2 faktort – is. Az ábrán jelöltük azt a 14 clus-



13. ábra. Az F_1, F_2 és F_3 faktorpontértékei közötti összefüggés Vas megye községeiben

9. TÁBLÁZAT

Szolnok megye falusi településeinek rangsora az F_1, F_2, F_3 faktor faktorpontértékei alapján

Település	F_1	F_2	F_3
	faktorok		
1. Alattyán	32	24	16
2. Jánoshida	22	31	14
3. Jászalsószentgyörgy	16	11	13
4. Jászapáti	6	15	11
5. Jászágó	67	63	66
6. Jászárokszállás	8	20	10
7. Jászboldogháza	24	4	25
8. Jászdózsa	29	47	33
9. Jászfelsőszentgyörgy	42	40	49
10. Jászfényszaru	17	28	22
11. Jászivány	62	42	67
12. Jászjákóhalma	25	37	17
13. Jászkisér	15	29	35
14. Jászszentandrás	41	46	58
15. Jásztelek	56	43	31
16. Pusztamonostor	27	16	12
17. Cibakháza	19	48	27
18. Cserkeszőlő	39	41	40
19. Csépa	36	58	30
20. Kunszentmárton	3	17	18
21. Mesterszállás	60	23	64
22. Nagyrév	62	67	62
23. Öcsöd	20	62	46
24. Szelevény	55	64	51
25. Tiszainoka	65	49	63
26. Tiszakürt	47	68	56
27. Tiszasas	28	61	32
28. Tiszazug	53	60	44
29. Besenyszög	30	14	34
30. Jászladány	11	34	26
31. Kőtelek	46	33	55
32. Martfű	1	1	1
33. Mezőhék	69	66	69
34. Nagykörü	45	63	50
35. Rákóczifalva	12	2	4
36. Rákócziújfalu	48	3	9
37. Szajol	10	6	2
38. Szászberek	61	13	45
39. Tiszaföldvár	4	12	5
40. Tiszajenő	35	35	29
41. Tiszasüly	43	30	61
42. Tiszavárkony	40	32	20
43. Tószeg	18	7	6
44. Újszász	7	5	1
45. Vezseny	59	56	43
46. Zagyvarékas	21	21	8
47. Abádszalók	26	52	39
48. Kunmadaras	9	49	28

9. táblázat (folytatás)

Település	F_1	F_2	F_3
	faktorok		
49. Nagyiván	52	45	60
50. Tiszabura	49	22	38
51. Tiszaderzs	51	44	54
52. Tiszafüred	2	9	24
53. Tiszaigar	58	50	52
54. Tiszaörs	37	54	37
55. Tiszaszentimre	34	55	42
56. Tiszaszőlős	44	51	36
57. Tomajmonostora	64	39	48
58. Fegyvernek	13	18	47
59. Kenderes	14	25	29
60. Kengyel	23	10	19
61. Kétpó	66	65	68
62. Kuncsorba	63	38	65
63. Kunhegyes	5	27	15
64. Örményes	50	19	51
65. Tiszabő	54	57	53
66. Tiszagyenda	57	36	57
67. Tiszapüspöki	38	26	21
68. Tiszaroff	33	59	41
69. Tiszatenyő	31	8	7

tert is, amelyeket a clusteranalízis elvégzése után kaptunk. A különböző fejlettségi szintű településtípusok jól elhatárolódnak egymástól.

5. *A clusteranalízis matematikai lényege és bemutatása*

Induljunk ki abból a feltételezésből – amit már a faktoranalízis leírásánál is megtettünk –, hogy egy vizsgálat kapcsán N számú megfigyeléssel rendelkezünk, továbbá, hogy a megfigyelések során n számú ismérvet (változót) mértünk. Ha a mérési eredményeinket X_{ij}-vel jelöljük, akkor a következő induló mátrixhoz jutunk:

Megfigyelések száma	Változók száma						
	1	2	.....	j	..	n
1	X_{11}	X_{12}	.....	X_{1j}	..	X_{1n}
2	X_{21}	X_{22}	.....	X_{2j}	..	X_{2n}
.	.	.		.		.
.	.	.		.		.
.	.	.		.		.
i	X_{i1}	X_{i2}	.....	X_{ij}	..	X_{in}
.	.	.		.		.
.	.	.		.		.
.	.	.		.		.
N	X_{N1}	X_{N2}	.....	X_{Nj}	..	X_{Nn}

ahol X_{ij} jelenti az i-edik megfigyeléshez tartozó j-edik változó értékét.

Ez az indulótábla akkor áll így össze, ha a faktoranalízistől függetlenül kezeljük a clusteranalízist, ellenkező esetben a táblában a változók helyén a faktoranalízis súlypontja, az egyes faktorok faktorpontértékei szerepelnek.

A clusteranalízis a faktoranalízistől eltérően nem törekszik egyszerűbb szerkezetek kialakítására, dimenziók csökkentésére, hanem *megelégszik a megfigyelt objektumokat jellemző változók csoportosításával.*

Ezek után a clusteranalízis lényegét a következőkben lehetne megfogalmazni. A clusteranalízis módszerével arra törekszünk, hogy a megfigyelési egységek között a szórt változókon keresztül olyan csoportokat hozzunk létre, amelyeken belül *a homogenitás maximális.* Az így kialakított csoportokat nevezzük clustereknek. Az osztályozást mindig valamilyen döntési függvény alapján végezzük el. A clusteranalízis legtöbb módszere meglehetősen egyszerű, lényegének megértéséhez tulajdonképpen elegendő az euklideszi geometria ismerete. Eszerint – több számértékkel jellemzett – megfigyelési egységek (pl. települések, termelőszövetkezetek) felfoghatók úgy, mint egy annyi dimenziós euklideszi tér pontjai, ahány számértékkel a megfigyelési egységeket jellemeztük. Kiinduló példánknál maradva tehát egy n-dimenziós euklideszi térről kell beszélnünk. Az n-dimenziós térben a pontok közötti távolságok egyértelműen megadhatók (valamely távolság-fogalommal), és így objektív módon elvégezhető a megfigyelési egységek csoportba sorolása. A clusteranalízis euklideszi távolság-képlete a következő:

$$d_{ik}^2 = \sum_{j=1}^{n} (X_{ij} - X_{kj})^2,$$

ahol X_{ij} és X_{kj} a j-edik változó i-edik, ill. k-adik objektumra vonatkozó értéke.

Ha az egyes ismérvek (változók) különböző jelentőséget kapnak, akkor a fentebb felírtakat súlyozva, azt a következőképpen írhatjuk le:

$$d_{ij}^{k2} = \sum_{j=1}^{n} (X_{ij} - X_{kj})^2 W_j^2,$$

ahol W_j jelenti a j-edik változónak az általunk megadott tapasztalati értékét.

Ha az egyszerű, ill. a súlyozott euklideszi távolságok olyan esetben kerülnek felhasználásra, amikor az egyes ismérvek más-más dimenzióban vannak megadva (pl. Ft, fő), akkor ezek értelmezése, kiszámítása értelmetlen. Ha azonos mértékegységben vannak kifejezve, de ha az egyes jellemzők között értékben nagyságrendi eltérés van, akkor a távolság torz lesz, mivel a nagyobb értékkel jellemzett ismérv a távolság számítása során nagyobb súlyt kap. Az így fellépő torzítások úgy küszöbölhetők ki, hogy az eredeti megfigyelési értékek helyett azok standardizált értékeivel számolunk.

Ez azt jelenti, hogy a távolságokat a következő formában számoljuk:

$$d_{ik}^N = \sum_{j=1}^{n} \frac{(X_{ij} - X_{kj})^2}{S_j},$$

ahol S_j a j-edik változó szórását jelenti.

Nem lép fel hasonló probléma akkor sem, ha a faktoranalízis eredményével, annak outputjával számolunk, mivel *a faktorértékek standard normális eloszlást követnek.*

Az euklideszi távolságfogalmon kívül léteznek más távolságfogalmak is. A cél természetesen továbbra is az, hogy a különböző távolságfogalmak felhasználásal mellett biztosítva legyen a clusterezés során kialakuló egyes csoportokon belüli maximális homogenitás. Településvizsgálataink során több clusterezési módszerrel dolgoztunk; ezek közül számunkra 4 adott használható eredményt. A következőkben – Bács megye falusi településeinek tipizálása révén – e módszereket, ill. főbb eredményeiket ismertetjük.

A Ward-módszer abból a feltevésből indul ki, hogy a csoportok összevonásával információ-veszteség keletkezik. A csoportosítás döntésfüggvénye ezt az információ-veszteséget minimalizálja. Ward az információ-veszteséget úgy határozta meg, mint a megfigyelések csoportátlaguktól való eltéréseinek a négyzetösszegét.

A döntési kritérium a csoportokon belüli hibanégyzet minimalizálása:

$$D(I,J) = \frac{m_1 \cdot m_2}{m_1 + m_2} (\bar{X} - \bar{Y})^2,$$

ahol $\bar{X}$ és $\bar{Y}$ – a két cluster (I és J átlagvektora),
$I = 1, 2, \ldots, m_1$,
$J = 1, 2, \ldots, m_2$ a megfigyelési egységek száma az I-edik és a J-edik clusterban.

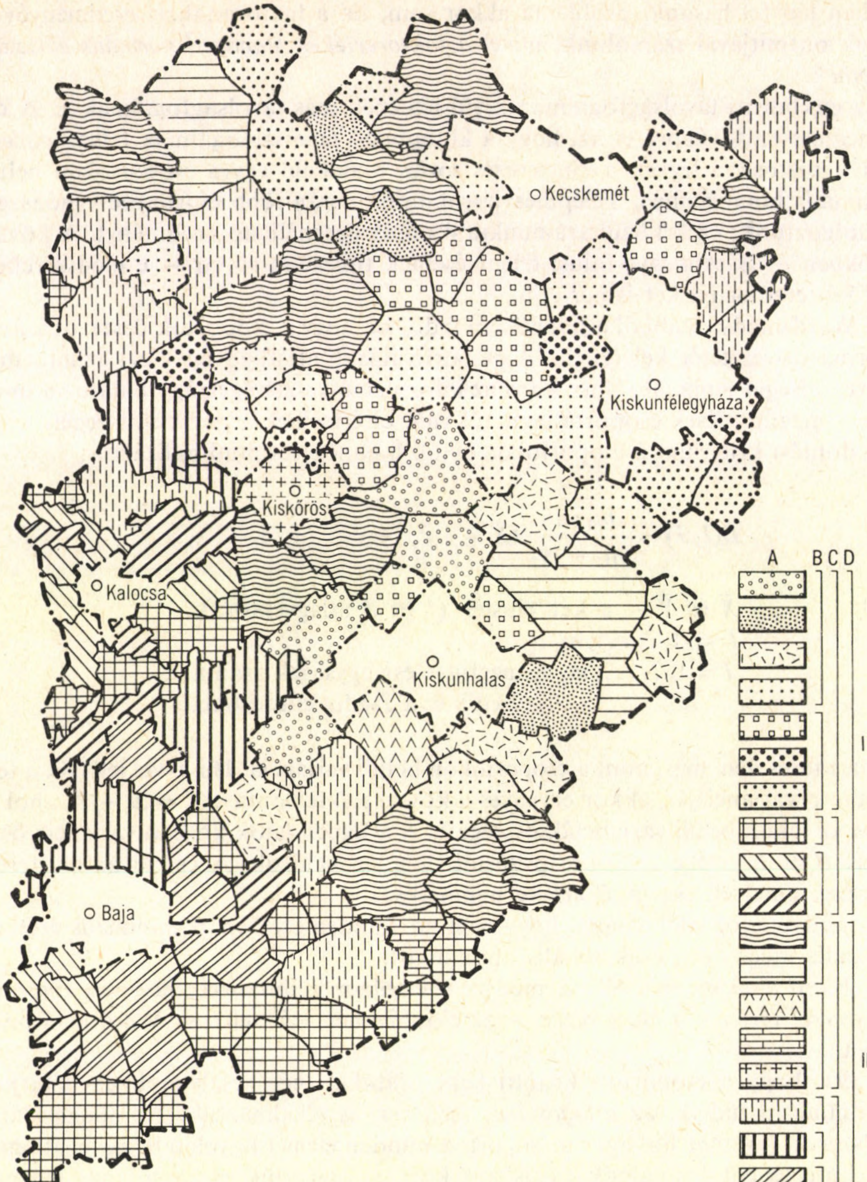
Ez az eltérés nem más, mint a csoportokon belüli variancia. Ha T-vel jelöljük a teljes minta varianciáját, akkor érvényes a következő felbontás: $T = B + K$, ahol B a csoportokon belüli varianciák összege és K a kapcsolatok közötti variancia öszszege. B és K értéke a csoportosítástól függően változik. A cél olyan clusterek keresése, amelyek esetén B értéke minimális.

A módszer fogyatékossága, hogy nem ad minden esetben B minimális értékre optimális megoldást, csak lokális optimumot.

A *Ward 7 módszer* a Ward módszertől abban különbözik, hogy itt *centroid módszerrel történik a clusterezés* – az előbbiekben már leírt – Ward kritérium alapján.

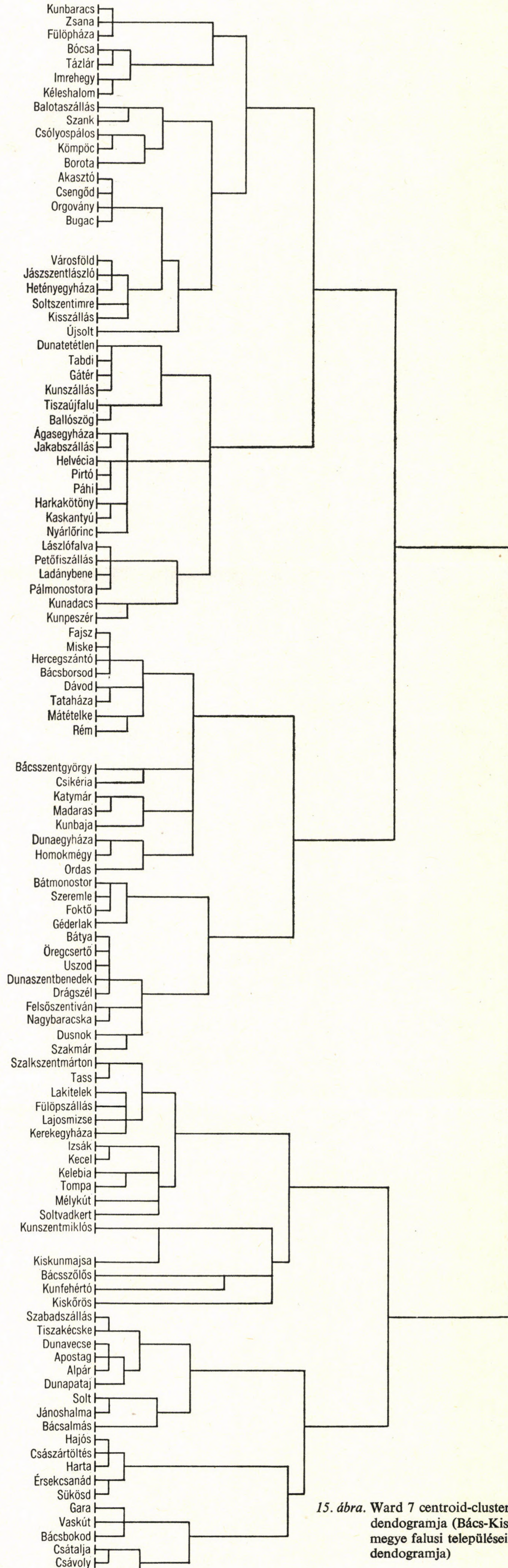
Azért, hogy a csoportok közötti kapcsolatokat még részletesebben feltárjuk és értelmezni tudjuk, az *átlagos lánc módszert* is alkalmaztuk. Az átlagos lánc módszerek (average linkage) a csoportok minden elemét figyelembe véve, átlagos összekötő láncot definiálnak a clusterek között, segítségükkel „amőboid" jellegű, viszonylag zárt clustereket kaptunk.

A különböző osztályozási eljárások más-más aspektusnak adnak előnyt, így a nyert eredmények között is karakterisztikus eltérések adódhatnak. Érdemes e szempontból összehasonlítani a Ward 7 (centroid clusterezés) és a Ward hierarchikus agglomeratív módszerrel nyert eredményeket. A Ward 7 módszer a *„falusiasságot"* (falusias jelleg erősségét) állította előtérbe a főcsoportok kialakításakor *(14., 15. ábra)*. Így az első főcsoportba a hagyományosan falusi jellegű, tehát kis népességszámú, agrár jellegű, nem agglomerálódó települések, míg a második

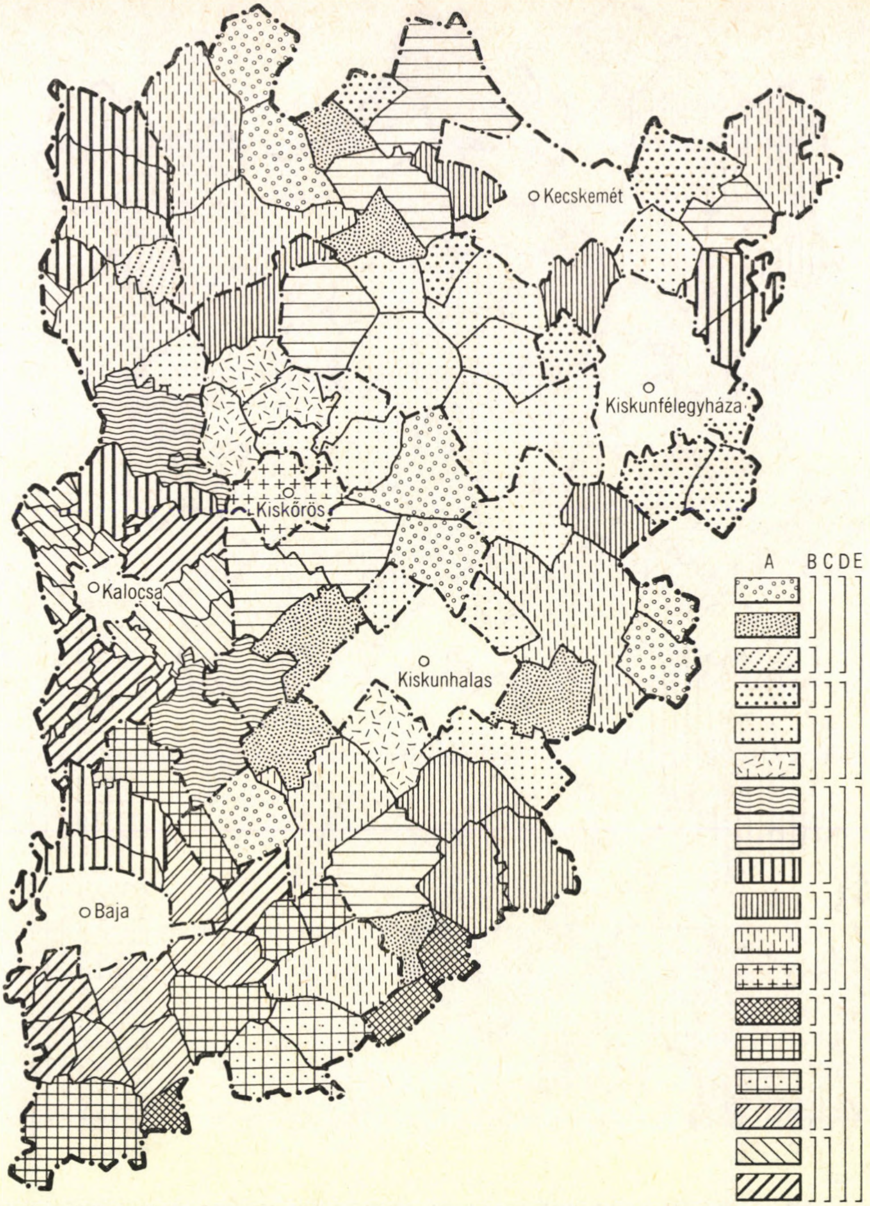


14. ábra. Ward 7 centroid clusterezés segítségével kialakítható faktortípusok Bács-Kiskun megyében. A jelmagyarázatban a 6(A), 11(B), 16(C) és 18(D) lépés után kialakult típusokat jelöltük

csoportba a népesebb (Bács megye esetében 5, 10, 14 ezer lakosú falvak is előfordulnak), agrár-vegyes lakosságú, urbanizálódó, esetenként városias jellegű intézményekkel is rendelkező községek kerültek. A hierarchikus agglomeratív

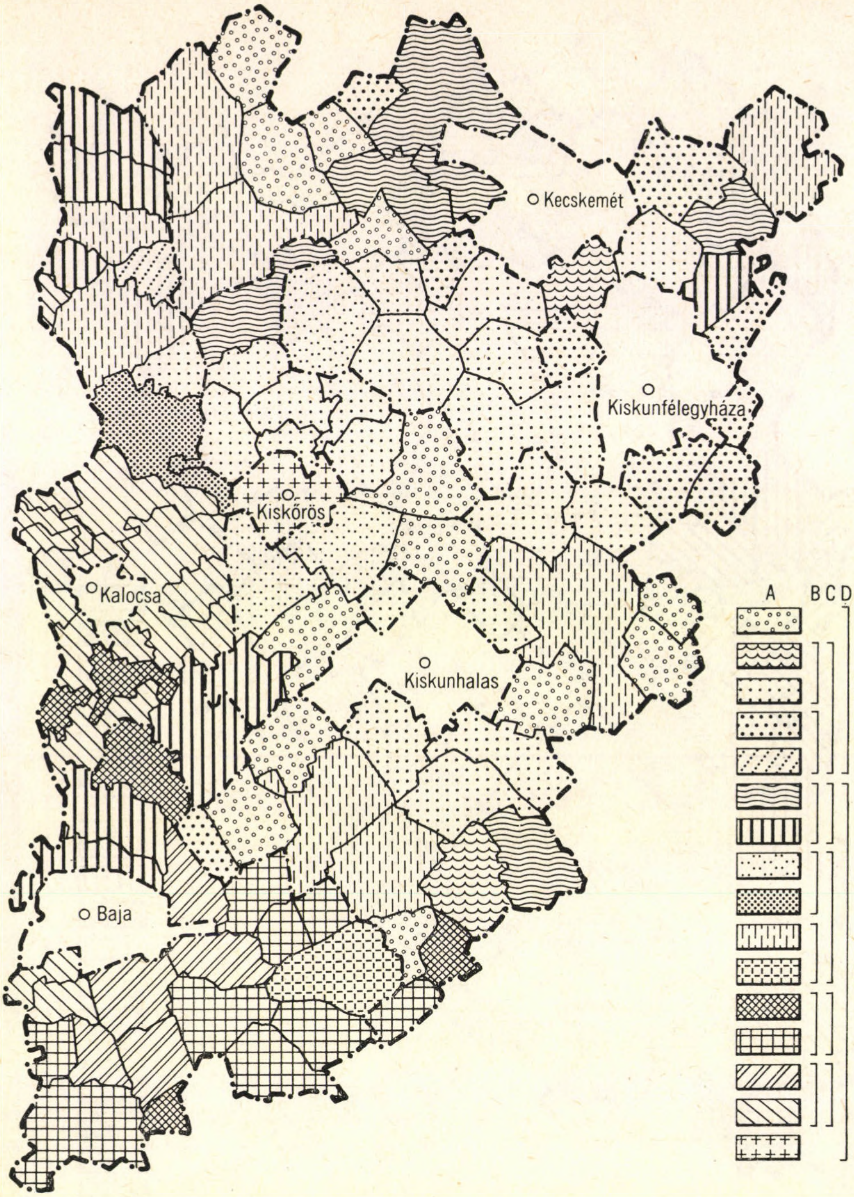


15. ábra. Ward 7 centroid-clusterezés dendogramja (Bács-Kiskun megye falusi településeinek dendogramja)



16. ábra. Ward hierarchikus agglomeratív módszerrel kialakítható falutípusok Bács-Kiskun megyében. A jelmagyarázatban a 9(A), 11(B), 12(C), 15(D) és 21(E) lépés után kialakult típusokat jelöltük

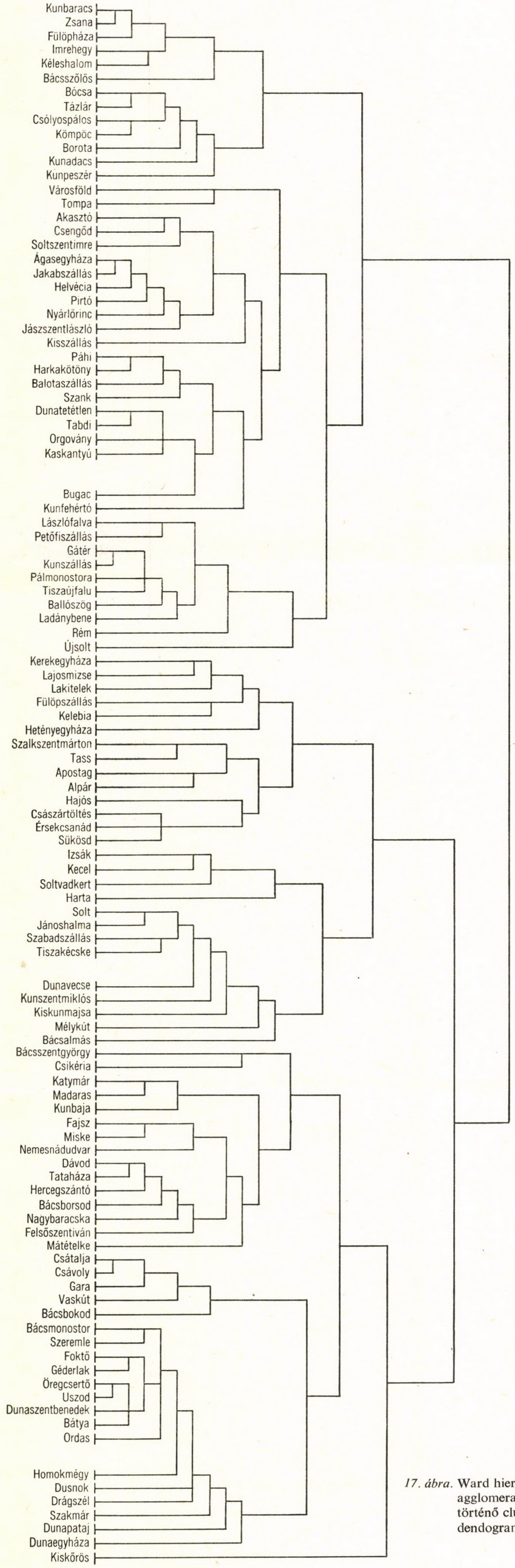
módszer viszont a tanyás (magas külterületi népességarányú), nagyobb belterülettel nem rendelkező 39 települést különítette el a többi községtől *(16., 17. ábra)*. A két eredmény összevetése az osztályozás további finomítását teszi lehetővé; így pl. kijelölhető a kifejezetten falusias jellegű és tanyás települések csoportja, a



18. ábra. Átlagos láncclusterezéssel kialakítható falutípusok Bács-Kiskun megyében. A jelmagyarázatban 10(A), 14(B), 15(C) és a 22(D) lépés után kialakult típusokat jelöltük

falusi jellegű, de nem tanyás falvak csoportja és így tovább. Az átlagos lánc clusterezés *(18. ábra)* a hierarchikus agglomeratív módszerhez hasonló eredményeket adott.

Vizsgálataink során felhasználtuk a MacQueen – adaptív típusú – *algoritmus*t is.[19] E módszer lényege, hogy bizonyos önkényesen kiválasztott szempontok figye-



17. ábra. Ward hierarchikus agglomeratív módszerrel történő clusterezés dendogramja

lembevételével „megtakarítja" a clusterok alulról történő fokozatos kialakítását s általában egy ilyen módon kialakított „induló felosztás" javításában merül ki. A legegyszerűbb adaptív algoritmus első lépésként kiválaszt néhány objektumot, amelyeket clusterközéppontoknak tekint. A módszer ezután teljesen önkényes sorrendben megvizsgálja a megmaradó objektumokat, s az adott objektumot a hozzá legközelebbi clusterközépponthoz rendeli. Az így kialakított clustercentrumot ezek után a hozzá rendelt objektum figyelembevételével átszámolja, majd sorrendben a következő elemre ugorva, azt is valamelyik centrumhoz kapcsolja. Minden egyesítés után a megfelelő cluster centrumának átszámításával az eljárás akkor ér véget, ha valamennyi objektumot clusterbe soroltuk.

Bács-Kiskun megye községeit négy alaptípusba soroltuk (a MacQueen algoritmus alapján); a megye viszonylag homogén társadalmi–gazdasági térszerkezete, a falusi térség majd egyveretű agrár jellege, a településhálózat csekélyebb mérvű hierarchizáltsága következtében a típusok száma viszonylag kevés. Mindenekelőtt a foglalkozási átrétegződés és az ingázás szerény méretű, s így kevéssé differenciált. A kis lélekszámú községek hiánya pedig a nagyságrend köré csoportosuló jelenségek (alapellátás kiépítettsége, demográfiai folyamatok stb.) differenciáló szerepét csökkenti. Ezért a településtörténeti múlt, a külterületi népesség aránya, a városiasodás egyes elemeinek megjelenése differenciálhat a települések között. Részben ez magyarázza a különböző faktor-, ill. clusterezési eljárások egymástól eltérő eredményeit, a kialakítható változatok nagy számát.

A nyert településtípusok (l. a *19. ábrát* is) a következők.

I. *Szélsőségesen agrár jellegű, rohamosan csökkenő népességű szórványtelepülések* (tanyaközségek) *kis lélekszámú belterülettel* (4., 6., 7., 8., 9. és 11. cluster).

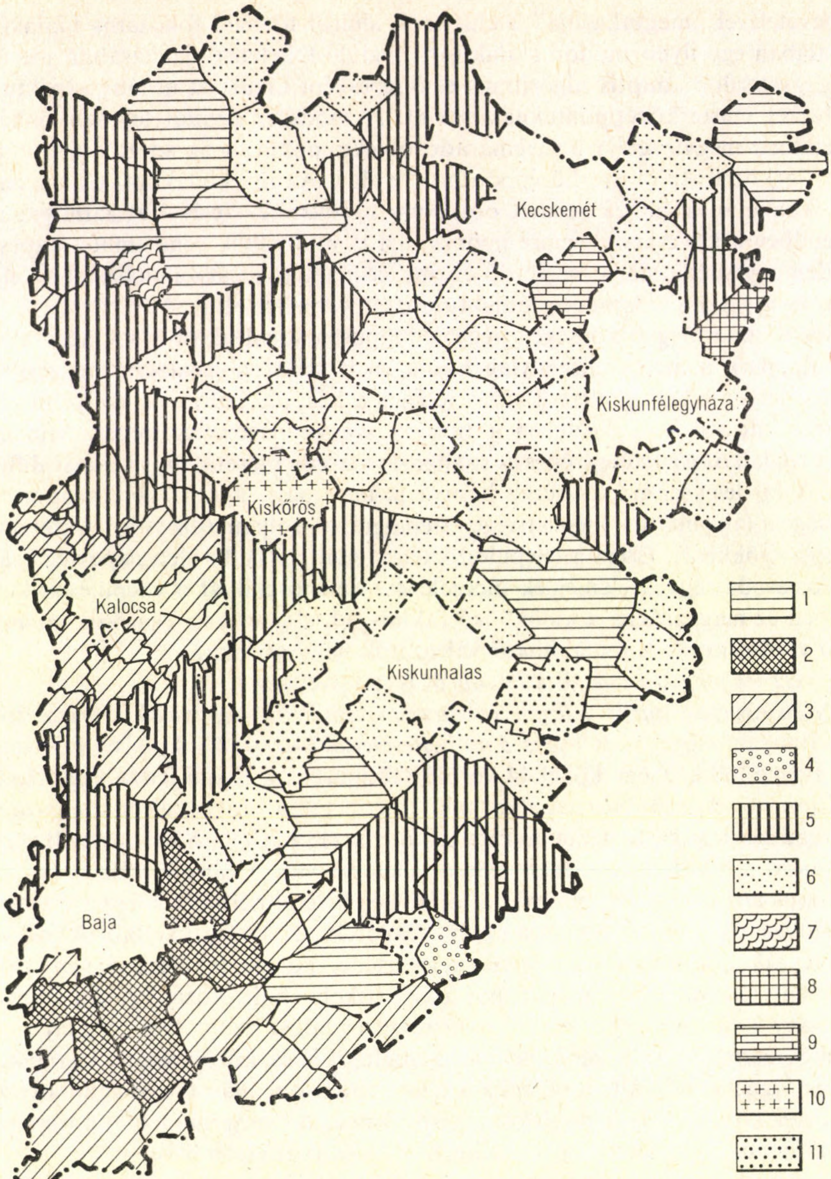
A megye 108 községe közül 44 került e főtípusba; a Duna–Tisza közi Homokhátságon összefüggő övezetet alkotnak. E területen a tanyás települési–gazdálkodási rendszer hosszú történeti múltra tekint vissza; a XVI–XVII. századi előzmények után a XVIII. században már általánossá vált a tanyarendszer.

A típus községei a századforduló táján még kivétel nélkül a környező városok, óriásfalvak közigazgatási határán belül feküdtek, azok részei voltak. A fokozódó végleges kiköltözés hatására helyenként sűrűsödési gócok alakultak ki; vagy néhány intézmény települt ki a tanyaközpontokba (iskola, bolt, közigazgatási kirendeltség), vagy a városok legtávolabbi határrészein a falusi belterületek mintájára házhelyeket mértek ki, faluszerű település alakult ki. Ezek közül néhány közigazgatásilag is függetlenné vált, többségüket azonban csak a második világháború után szervezték községgé. A legtöbb község azonban ekkor még mindenfajta tömörülésnek híján volt, sőt néhány ma is kifejezetten szórványtelepülés.

A községek lakóinak átlagosan 64%-a 1970-ben is a külterületen élt; nem ritka az olyan község, ahol a lakosság 80–90%-a tanyán élt (Kékeshalom 94,6%, Zsana 92,7%, Lászlófalva 91,6%, Helvécia 92,2% stb.). Így viszont az átlagosan kb. 2300 lakosú községek belterületein alig ezren élnek.

E sűrűn települt, az anyatelepülésekkel laza kapcsolatot tartó (a tanyák felérekétharmadára már a század elejére kiköltöztek tulajdonosaik, ún. „farmtanyák"

[19] A MacQueen algoritmus részletes leírását és a módszer bizonyítást lásd MacQueen 1967.



19. ábra. Bács-Kiskun megye falusi településeinek típusai (az 1—11. cluster leírását l. a szövegben)

jöttek létre), kertműveléssel foglalkozó tanyavilág sorsa, helyzete a felszabadulás után is sajátosan alakult. A szőlő- és gyümölcstermelés, s nem utolsósorban épp a tanyai lakosság nagy száma kedvezett az alacsonyabb fokú társulások, szakszövetkezetek kialakulásának. A Homokhátság területének negyedét szakszövetkezetek művelik. A termelőszövetkezetek jelentékeny része is földje egy részét családi művelés keretében dolgoztatja vagy dolgoztatta a közelmúltig. Így a tanyák gazdasági szerepe, üzemi központ jellege, a termelőterületekhez közel fekvő tanyán való lakás a termelés szempontjából is előnyös. A Homokhátság egyébként is kellemesebb életkörülményeket biztosít tanyai lakosainak, mint a Tiszántúl (pl. az év nagy részén járható földutak).

E magas külterületi népsűrűségű, a tanyai lakosságot sok szállal a lakóhelyéhez kötő körzetben a tanyai lakosság csökkenése 1960 és 1970 közt meglehetősen egyenletes elosztásban 15–30% volt, kisebb mérvű a vártnál (a vázolt okok következtében). Az áttelepülők többnyire nem az újonnan szervezett községekbe, hanem a városokba költöztek. Így a népesség – a községek népességszámához mérten – gyors ütemben csökkent a hetvenes években is.

A belterjes és jövedelmező mezőgazdasági kultúra, a napi ingázás csekély lehetőségei következtében e községek ma is egyoldalúan agrár jellegűek; a keresők mintegy 75%-a a mezőgazdaságban dolgozott. Az ingázók aránya 16,8%. A sajátos településszerkezet, a hosszú ideig érvényben levő külterületi építési tilalom, a szórványok nehezen megoldható közművesítése következtében a művi környezet, a lakásfelszereltség, az életkörülmények színvonala igen alacsony.

II. *Közepes nagyságú, csekély külterületi népességgel rendelkező, mérsékelten csökkenő lakosságszámú, „hagyományos” agrárfalvak a Duna mentén és a Bácskában* (2., 3. cluster)

A megye falusi településeinek negyedét, 31 települést soroltunk e típusba; ezek két altípust alkotnak. E típus községei is összefüggően helyezkednek el a Duna mentén Kalocsa környékén, ill. Bajától D-re, DK-re. Míg a Kalocsa környéki falvak a részletes (sok clustert eredményező) vizsgálatok szerint is egységes, azonos jellegű tömböt alkotnak, addig a Bácska falvai a részletes vizsgálatok szerint meglehetősen mozaikszerű képet adtak, s a különböző vizsgálatokban eléggé eltérően csoportosultak.

Hasonlóságuk a „szabályos” és kevésbé átformálódott falusi jellegben van. Ez megnyilvánul lakosságuk foglalkozási szerkezetében, amelyben még 1970-ben is az agrár jelleg dominált. Keresőiknek 62,7%-a a mezőgazdaságban dolgozott. Ugyanakkor a meginduló foglalkozási átrétegződés nyomán, másodlagos funkcióként már megjelent a lakóhely jelleg; keresőiknek negyede ingázó. Az ingázás ugyan nem stabilizálta a községek lélekszámát, de azt eredményezte, hogy szélsőségesen magas elvándorlás nem tapasztalható e körzetekből (1949–1970 között 17,3%-os, 1970–1980 között 8,5%-os népességcsökkenés).

E típusra tehát a lassú és kiegyenlített településformáló folyamatok a jellemzőek, amelyek gyökeresen nem formálták át a falusi térséget, noha „kiegyensúlyozott” urbanizációjukat (technikai civilizációjuk szintjének emelkedését, lakosságuk foglalkozási szerkezetét) megindították.

III. *Népes belterületű, fejlett alapfokú intézményhálózattal rendelkező, stagnáló népességű agrár-vegyes foglalkozási szerkezetű falvak, jelentős tanyavilággal* (5. cluster)

Az 5. cluster 25 községe a jellegzetes alföldi településszerkezet tipikus elemeit alkotja, a megye tanyás településrendszerű területén találhatóak, tanyasűrűségük magas. Mivel azonban e községek belterülete is népes – az átlagos lakosszám 5 ezer fő felett van, Lajosmizsén 12 600-an, Kecelen 10 090-en, Soltvadkerten 7 700-an élnek! – a külterület népesség aránya – 28,6% – nem túl magas. A népes, a legtöbb országban városi méretűnek számító belterületek élete – éppen méretük miatt – eltér a megszokott falusitól, noha funkcióik jellegzetesen falusiak. Ugyanakkor e belterületeket nagy kiterjedésű tanyavilág övezi. A népességszám következménye, hogy alapfokú intézményhálózatuk jól kiépített, esetenként már városias jellegű intézmények is fellelhetők (szaküzletek, szakorvosi rendelés, szolgáltatások). A községek az agrártermelés jelentős központjai (állami gazdasági központok, mezőgazdasági termékfeldolgozás, pincészetek stb.). Agrár jellegüket megőrizték (1970-ben keresőik közel 60%-a a mezőgazdaságban dolgozott). A belterületek fejlődése dinamikus, a külterületről elköltözők egy része a belterületre települ át. Ennek köszönhető, hogy lélekszámuk csak csekély mértékben csökkent, miközben a belterületi lakosságszám még emelkedett is.

IV. *Városi funkciókkal is rendelkező óriásfalvak, városias települések* (1. és 10. cluster)

Az 1. cluster 7 községe főképpen lélekszámában különbözik az előző típustól; átlagosan közel 10 ezren élnek e településekben. Ennek következménye, hogy városi jellegű intézményeik száma, választéka nagyobb (középiskolák, rendelőintézetek, szaküzletek stb.). Ugyanakkor falusi eredetük jellemvonásait is őrzik. Pusztán a szemléletesség kedvéért hármas gyűrű-rendszerként is leírhatók e települések: kicsiny városias funkciójú és morfológiájú magjukat hatalmas falusias burok övezi, majd ezt fogja körül a kiterjedt tanyavilág; lakóik 24,6%-a 1970-ben tanyán élt. Keresőik egyharmadát az ipar, építőipar, bő ötödét a tercier szektor foglalkoztatja; agrárkeresőik aránya így is felülmúlja a 40%-ot. Gyáriparuk ma már számottevő; helyben átlagosan ezer ipari keresőt foglalkoztatnak. Mindezek következtében népességszámuk stabil. (A 10. clusterbe sorolt Kiskőröst a vizsgálat óta várossá nyilvánították.)

A különböző távolságfogalmakkal való operálás során a kérdés tehát mindig úgy vetődik fel, hogy mekkora legyen a távolság, milyen küszöbértékeket kell megadni ahhoz, hogy elérjük a kívánt kritériumokat és befejezettnek tekinthessük az eljárást. Hiszen a clusteranalízis során megadhatók olyan kritériumok, melyek alapján a módszer az összes megfigyelést egy típusba vonja össze, de ennek az ellenkezője is fennállhat, mégpedig az, hogy minden település külön csoportba kerül. A feladat tulajdonképpen abban áll, hogy megtaláljuk azt a valóságos *clusterszám-érték*et, amely mellett a csoportokon belüli homogenitás maximálisan biztosítható. Ehhez viszont támaszkodnunk kell más módszerekből nyerhető információkra (l. kartográfiai módszerek). Természetesen az, hogy egy adott vizsgálat esetében 26 vagy 27 cluster közelíti jobban a valóságos helyzetet, csak némi szubjektivitással dönthető el, ezért nagyon fontos a vizsgálatot végzők szakmai felkészültsége.

Szükségesnek tartjuk itt megjegyezni, hogy ma már rendelkezünk olyan matematikai–statisztikai eljárásokkal is, amelyek – mintegy önkontrollként – megítélik eredményeink „jóságát”, a clusterek homogenitását, azonban még ezek birtokában is végső soron a vizsgálatok lefolytatóinak szubjektív elemeket is tartalmazó döntése szabja meg, hogy a rendelkezésre álló változatok közül melyik kerüljön elfogadásra. E döntéseket alapvetően befolyásolja a vizsgálatok célkitűzése, az adott vizsgálat mélysége, a felhasználás gyakorlati szempontja. Túlságosan nagy számú típus, valamint az empirikus úton nyert kép összevetése a clusteranalízis eredményeivel nehezen tekinthető át. Ugyanakkor, ha pl. az empiriák – lakosságszám, központi szerepkör, gazdasági jelleg, demográfiai folyamatok stb. – alapján túlságosan eltérő jellegű települések kerülnek azonos típusba, a clusterek számát emelnünk kell.

Az *osztályozás* során a különböző változatok egybevetésekor értékes támpontot nyújt annak számbavétele, hogy mely települések helye változatlan a különböző vizsgálatokban (vagyis a törzsállományát képezik), ill. melyek helyzete labilis, vándorolnak az egyes típusok között. Ez utóbbiakat sorravéve pl. megállapítható, hogy többségük helyzete speciális, tulajdonságaik, jellemzőik „belső korreláltsága" csekély.

Maga a clusteranalízis a csoportokat nem jellemzi, csupán a községek faktorpontértékeinek hasonlósága, a hasonlóság mértéke alapján képez clustereket. Az egyes módszerek által kialakított csoportok egyetlen „jellemzővel", bizonyos adatok értékhatáraival nem írhatók le. A kialakult csoportokat nem is annyira a különböző adatokkal, egymástól független jellemzőkkel írhatjuk le, hanem inkább a bennük lezajló folyamatok hasonlóságával.

A clusterek „azonosításához" jól felhasználhatjuk a clusterközéppontokat, a clusterek községei alapmutatóinak átlagait, szórásait, a faktorok faktorpontértékeinek diagramját.

A clusteranalízis segítségével történő tipizálás további szokatlan, nehezen megszokható jellegzetessége, hogy *egyes alapadatok értékhatáraival nem írhatók le a nyert típusok*, vagyis pl. ugyanolyan népességszámú vagy ugyanannyi ingázóval rendelkező település különböző clusterekbe kerülhet. Ez nem fordulhat elő az „egymutatós" településosztályozások esetén, vagy ha a több szempontú osztályozást izolált határértékek egymásba szerkesztése nyomán állítottuk elő. Ugyanennek a jelenségnek a másik oldala, hogy az egyes típusok bizonyos mutatói nagymértékben szóródhatnak; ugyanabban a típusban előfordulhat 618 és 135 lakosú vagy 2 959 és 541 lakosú település és így tovább (l. II. fejezet 2. pont). Mindez megköveteli, hogy az egyes izolált adatok helyett a típusokat a bennük lezajló településformáló folyamatok hasonlósága alapján jellemezzük. A clusterek azonosítása is csak a folyamatok leírásával történhet.

A fentebb leírtak igazolására néhány példát említünk Baranya megyei vizsgálatainkból. Az elemzéseinket a MacQueen *algoritmus* alkalmazásával végeztük. Vizsgálatainkhoz kiindulásként mintegy két tucat cluster-változatot készítettünk, majd előzetesen szelektáltuk azokat, kiszűrve közülük a nyilvánvalóan túlságosan nagy vagy kis clusterszámú változatokat.

Végül négy változatot elemeztünk behatóan *(10. táblázat)*.

A clusterstruktúráknak az egyes clusterekbe sorolt települések száma alapján való egybevetése során feltűnő, hogy a clusterek belső koncentráltsága a nagyobb clusterszámot adó változataiban nem csökken egyértelműen, sőt a 21–22 clustert adó változatokban a nagy elemszámú clusterek száma nem magasabb, mint a 15–17-es változatokban. Míg a 15, ill. 17 clustert eredményező változatban a

10. TÁBLÁZAT

Az egyes clusterekbe sorolt települések száma a vizsgált változatokban

Clusterszám	A clusterbe sorolt települések száma az			
	A változatban	*B* változatban	*C* változatban	*D* változatban
1.	42	37	31	54
2.	92	97	87	102
3.	105	101	92	3
4.	7	3	3	2
5.	19	20	2	13
6.	12	17	12	32
7.	2	1	19	5
8.	15	1	5	1
9.	1	4	14	1
10.	1	14	1	50
11.	5	1	1	1
12.	3	1	1	3
13.	9	5	3	17
14.	1	3	15	1
15.	1	8	6	1
16.	—	1	1	1
17.	—	1	1	17
18.	—	—	15	1
19.	—	—	2	3
20.	—	—	1	5
21.	—	—	1	1
22.	—	—	—	1

3 nagy cluster (105, 92 és 42 elemszám, ill. 101, 97, 37 elemszám) a települések háromnegyedét felöleli, s mellettük 2–3 közepes méretű (20–30 elemszámú) cluster van, addig a *C* és *D* változatban a közepes és nagy clusterek száma 7, ill. 8. Ugyanakkor növekszik az 1–3 elemszámú, egyedi településeket tartalmazó clusterek száma: a *D* változat esetében ezek száma 12, az *A* változat esetében viszont csak 6. Vagyis a változatok – csupán a clusterek elemszámát véve figyelembe – mindenekelőtt abban különböznek egymástól, hogy a nagyobb clusterszámú változatokban az egyedi – tulajdonképpen típusba nem sorolt – települések száma jóval nagyobb. Ez a tény, egyéb szempontok mellett, a kisebb clusterszámú változatok mellett szól.

A kevesebb clusterszámú változatok egyes típusai a *C* és *D* változatban több típusra esnek szét, a kis, lokális központok *A* változatban kialakult clustere pl. a 21-es változatban 3 clusterre bomlik.

	A változat		*C változat*		*B változat*
4. *cluster*	Beremend	4. *cluster*	Beremend	4. *cluster*	Beremend
	Villány		Villány		Villány
	Bóly		Bóly		Bóly
	Pécsvárad	12. *cluster*	Pécsvárad	9. *cluster*	Pécsvárad
	Sellye	13. *cluster*	Sellye		Sellye
	Szentlőrinc		Szentlőrinc		Szentlőrinc
	Sásd		Sásd		Sásd

A nagyobb elemszámú clusterek megfelelői mind a négy változatban jól azonosíthatók.

Az egyes típusok értékelését azonban csak a korábban már leírt clusterközéppontok, az alapadatok, faktorpontdiagramok felhasználásával tudjuk elvégezni. Hiszen csak így kaphatunk elegendő magyarázatot a települések clusterbe kerülésére.

Ez ideig még egy nagyon fontos kérdésről nem beszéltünk, nevezetesen a vizsgálatok aggregáltsági szintjéről. Egyáltalán nem mindegy, hogy a megfigyelési egységek száma 100, 200 vagy éppen 2 000. Eddigi tapasztalataink azt mutatják, hogy sokszor az a módszer, amely kiválóan alkalmas egy 300-as minta vizsgálatára, nem használható 3 000-es mintánál. Ennek oka abban keresendő, hogy míg a háromszázas mintánál a megfigyelési egységek alapadatai erősen szóródnak, addig a háromezres minta alkalmazása esetén jelentősen kiegyenlítődhetnek, megnehezítve az osztályképzést. Ezért nagy mintához úgy kell megválasztanunk módszerünket, hogy az elég érzékeny maradjon a megfigyelési egységek alapmutatói szórásának elemzéséhez. Kisebb minták alkalmazásával mélyebbre hatolhatunk; az adott terület vizsgálatához egyáltalán nem mindegy, hogy pl. egy megyét egy országos vizsgálat keretében elemzünk-e vagy pedig önmagában. Egy országos vizsgálat esetében aggregáltabb eredményeket kapunk, míg egy megye vizsgálata esetében a települések közötti különbségek markánsabbak.

IV. *Kanonikus korrelációszámítás*

A kanonikus korrelációszámítás is azon eljárások közé tartozik, amelyeknek elméleti alapjait ugyan már régen kidolgozták, de gyakorlati felhasználásukra – nagymértékű és bonyolult számításigényességük miatt – csak a számítógépek elterjedése után kerülhetett sor.

A módszert M. Hotelling fejlesztette ki 1936-ban, majd az 1950-es évek vége felé Anderson (1958) újból ismerteti. Ezek után egyre gyakrabban szerepel a matematikai-statisztikai kézikönyvekben (pl. Morrison 1968, Kendall – Stuart 1968, Cooley – Lohnes 1971). Ez utóbbi már számítógépes programot is tartalmaz. Meglepően kevés azonban az alkalmazásról szóló leírás. Ezek közül területi vonatkozásai miatt kiemeljük Ranner (1974) és Bartels – Nijkamp (1975) munkáját.

Az első magyar nyelvű leírás Imrényi B. nevéhez fűződik (1971). Ezután a leírások örvendetesen megszaporodtak (Lackó 1976, Füstös 1977, Sváb 1979), s ráadásul az egyik legelső hazai alkalmazás éppen a területi kutatások köréből való (Lackó 1976). A módszer használata azonban nem vált gyakorivá.

Ennek okát elsősorban a számítógéphez való kötöttségében, bonyolult értelmezésében, valamint abban látjuk, hogy jelenleg más, többváltozós módszerek divatosabbak.

1. *A módszer általános leírása*

A kanonikus korrelációszámítás módszere két változó csoport közötti globális függőségi kapcsolatok elemzésére szolgál. A változók egyik csoportja általában valamilyen jelenséget vagy állapotot ír le. Ezt a változócsoportot függő vagy magyarázandó vagy kritérium; egyes munkákban baloldali változóknak szokták nevezni. A másik változócsoportot, amely feltételezésünk szerint hat a függő változókra (ha nincs ilyen hatás, maga a probléma sem merül fel), független, magyarázó, jósló vagy predictor változókként szokták emlegetni.

Kanonikus korrelációszámítással általában *a következő kérdésekre kaphatunk választ:*

1. Milyen erős a függőségi kapcsolat a két változóhalmaz között? Ide tartozik még annak megválaszolása is, hogy ez a kapcsolat szignifikáns-e?

2. A függő változók ingadozásainak létrejöttében hogyan oszlik meg a magyarázó változók egyes részhalmazainak szerepe? Ez a kérdés azért tehető fel, mert előfordulhat, hogy a kapcsolat erősségét a jósló változók egy-egy részcsoportja ellentétes irányba befolyásolja.

3. Itt arra vagyunk kiváncsiak, hogy a függő, ill. a magyarázó változó halmazoknak melyek azok az elemei, amelyek a leginkább felelősek a függőségi kapcsolat létrejöttében.

Kétféle esetben gondolhatunk szinte automatikusan a kanonikus korreláció alkalmazására. Az egyik az, amikor eleve van két változó halmazunk, valamilyen (akár elméleti, akár tapasztalati) módon ismerjük a függőségi kapcsolat irányát, s a kapcsolat szorosságát akarjuk megtudni, valamint azt, hogy a változók mely dimenziói mentén a legszorosabb ez a kapcsolat. A másik eset az, amikor két olyan fogalmat s azok kapcsolatát kívánjuk vizsgálni, amelyeket nem tudunk közvetlenül megmérni. Ekkor mindkét fogalmat mérhető változók halmazaival próbáljuk közelíteni, s a változó halmazok vizsgálatán keresztül ismerhetjük meg a fogalmak egymáshoz való viszonyát.

A módszer bonyolultságához képest már viszonylag enyhe feltételek teljesülése esetén is használható. E feltételek:

— A változók intervallum mérési szinten legyenek. Ez eléggé természetes feltétel, főleg, ha meggondoljuk, hogy a számítás során a korreláció mátrixból indulunk ki, márpedig e mátrixnak is csak legalább intervallumszintű változók esetén van értelme.

— A változók együttes eloszlása normális legyen. E feltétel nehézkes ellenőrzése miatt be szokták érni azzal, hogy a változók rendszere lineárisan független legyen, vagyis egyik változó se legyen kifejezhető más változók lineáris kombinációjaként.

— A megfigyelések száma legalább kb. 2–3-szorosa legyen a változók együttes számának.

— A jósló vagy független változók száma nagyobb vagy egyenlő legyen a függő változók számával.

A kanonikus korrelációszámítás módszere úgy oldja meg feladatát, hogy olyan fiktív változópárokat hoz létre a két változóhalmazból, amelyek egymással maximálisan korrelálnak. Összesen maximum annyi ilyen változópárt hoz létre, amennyi a függő változók száma. A feladat egy ún. sajátérték-probléma megoldásához vezet, amelynek eredménye annyi sajátérték lesz, amennyi a magyarázandó változók száma. Ezek a sajátértékek viszont nem mások, mint a fiktív változók közötti korrelációk, s ezeket a sajátértékeket nevezzük kanonikus korrelációnak. A kanonikus korrelációk ismeretében kiszámíthatjuk a fiktív változókat alkotó lineáris kombinációk konkrét együtthatóit. Ezeket a lineáris kombinációkat kanonikus változóknak nevezzük. Minden kanonikus korrelációhoz tartozik egy kanonikus változó-pár, amelyek az egyes változóhalmazok elemeinek súlyozott összegéből állnak elő. Végül a kanonikus változók együtthatói alapján meghatározhatjuk a kanonikus struktúrát, amely megmutatja az egyes eredeti változók szerepét, fontosságát az adott kanonikus változó létrehozásában.

2. *A módszer matematikai leírása*

Legyen a függő, a magyarázandó változók halmaza p elemű, a magyarázó változók halmaza pedig q elemű. Az alkalmazás egyik feltétele miatt $p \leq q$. A függő változókat fogjuk össze egy $Y = [x_1, x_2, \dots x_p]$, a független változókat egy

$X^1 = [x_{p+1}, x_{p+2}, \ldots, x_{p+q}]$ mátrixba. Az egyszerűség kedvéért tegyük fel, hogy a változók már standardizáltak.

Írjuk fel a változórendszer *korreláció mátrix*át:

$$R = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} \ldots r_{1\,p-q} \\ r_{21} & r_{22} \ldots r_{2\,p+q} \\ r_{p+q1} & r_{p+q\,2} \ldots r_{p+q\,p+q} \end{bmatrix}.$$

Majd *particionáljuk az R mátrixot* a következő módon:

$$R = \begin{bmatrix} R_{11} & R_{12} \\ R_{21} & R_{22} \end{bmatrix},$$

ahol R_{11} a függő változók közötti $p \times p$ méretű korreláció mátrix, R_{22} a magyarázó változók közötti $q \times q$ méretű mátrix, míg $R_{12} = R_{21}$ a „vegyes" korrelációkat tartalmazó $q \times p$ méretű mátrix.

A feladat tehát az, hogy keresni kell olyan a és b súlyvektorokat, amelyekkel képzett lineáris változók (U, V) egymással maximálisan korrelálnak.

A *Lagrange-szorzók* módszerét alkalmazva a következő egyenlethez jutunk (λ-val jelöljük a Lagrange-szorzót):

$$(R_{11}^{-1} R_{12} R_{22}^{-1} R_{21} - \lambda^2 I)\, a = 0\,. \tag{1}$$

A fenti egyenletből látható, hogy λ^2 az $(R_{11}^{-1} R_{12} R_{22}^{-1} R_{21})$ $p \times p$ méretű mátrix sajátértéke, a pedig a sajátvektora.

A sajátérték számítása során speciális számítógépes eljárást kell alkalmazni, mivel a sajátérték-számító programok általában szimmetrikus mátrixokra vannak kidolgozva, s az $R_{11}^{-1} R_{12} R_{22}^{-1} R_{21}$ mátrix nem szimmetrikus.[20] Ha a kanonikus korrelációszámítás gépi programját valamelyik statisztikai programcsomagból hívjuk le, akkor ilyen problémánk nincs

A (1) egyenletből a sajátértékeket az alábbi

$$|\, R_{11}^{-1} R_{12} R_{22}^{-1} R_{21} - \lambda^2 I \,| = 0 \tag{2}$$

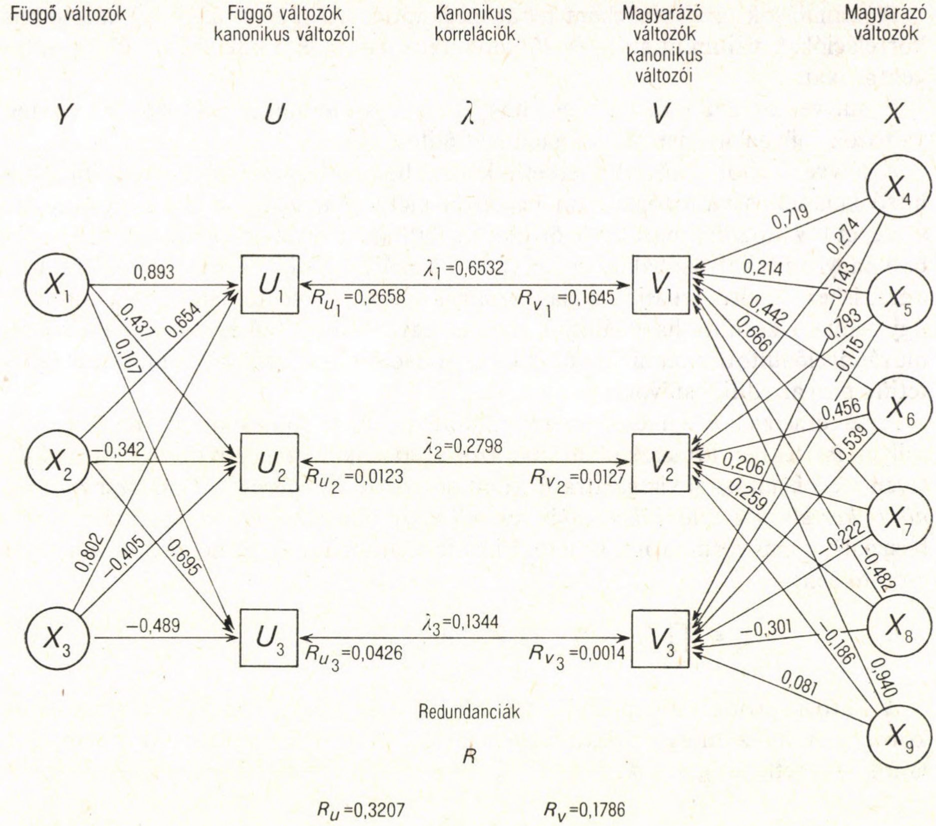
karakterisztikus egyenlet megoldásából nyerjük. Az egyenletnek p db gyöke van, jelöljük ezeket $\lambda_1^2 > \lambda_2^2 \ldots > \lambda_p^2$.
Ekkor az

$$\lambda_i = +\sqrt{\lambda_i^2}$$

értékeket kanonikus korrelációnak hívjuk, s az $U_i = a_i' Y$ és a $V_i = b_i' X$ kanonikus változók közötti kapcsolat szorosságát méri.

A *20. ábrá*ról látható, hogy a λ_i kanonikus korreláció lényegében két fiktív változó, az U_i és V_i változók közötti egyszerű korrelációs együttható.

[20] Ilyen speciális program található pl. Cooley—Lohnes 1971, pp. 194—198.



20. ábra. A kanonikus korrelációszámítás eredményeinek összefoglalása

Az elemzéshez a kanonikus korreláció konkrét értéke nemigen ad támpontot: az együttható értéke önmagában keveset mond a vizsgált kapcsolat realitásáról – azt szignifikancia-vizsgálattal kell kiegészíteni. Viszonylag gyakran előfordul ugyanis az az eset, hogy a magas korrelációs együttható ellenére sem szignifikáns a számítás (l. Lackó 1976).

Ha már ismertek a λ_i^2 sajátértékek, akkor a hozzájuk tartozó a_i súlyvektort az (1) egyenletbe való visszahelyettesítéssel kapjuk meg:

$$(R_{11}^{-1}R_{12}R_{22}^{-1}R_{21} - \lambda_i^2 I)a_i = 0\,. \qquad (3)$$

A b_i súlyvektor pedig a_i és λ_i ismeretében a következő módon határozható meg:

$$b_i = \frac{R_{22}^{-1}R_{21}a_i}{\lambda_i}\,. \qquad (4)$$

Az U_i és V_i kanonikus változókra igaz:

– varianciájuk (szórásuk) 1,

– az U_i változók és a V_i változók egymás között korrelálatlanok (ortogonálisak).

A számítások eredményeként tehát megkaptuk a $\lambda_i (i = 1, 2, \dots p)$ kanonikus korrelációkat, valamint az U_i és V_i kanonikus változókat kifejező a_i, ill. b_i súlyvektorokat.

A súlyvektor azt mutatja meg, hogy az egyes kanonikus változók az eredeti változók milyen lineáris kombinációival álltak elő.

A súlyvektorból is következtethetünk arra, hogy a legnagyobb korrelációt létrehozó kanonikus változópárokon keresztül mely változók játsszák a legnagyobb szerepet a változóhalmazok közötti kapcsolatban. Ezeket az együtthatókat azonban nagyban befolyásolják az egyes változók szórásai, s így – hasonlóan a faktoranalízishez – eltúlozhatjuk a nagyszórású változók jelentőségét. Ezt a torzítást úgy tudjuk elkerülni, ha előállítjuk minden egyes változóból és a saját változóhalmazából előállított kanonikus változók korrelációit – a továbbiakban ezeket feleltetjük meg az eddigi súlyoknak.

Az eredmények értelmezése szempontjából azonban fontos kérdés, hogy azokra milyen mértékben támaszkodhatunk, azok statisztikailag mennyire megbízhatóak. Ilyen megbízhatósági vizsgálatra Bartlett dolgozott ki *eljárást*. A módszer *a kanonikus korrelációk szignifikanciáját teszteli nagy minta esetén*. A számításhoz felhasználja a más területről is ismert Wilks-féle lambdát (Λ). Ennek definíciója a mi esetünkben:

$$\Lambda_k = \prod_{i=k}^{p} (1 - \lambda_i^2) \quad (k = 1, 2, \dots, p). \tag{5}$$

A Bartlett-próba nullhipotézise az, hogy a még vizsgálatba bevont kanonikus korrelációk nullával egyenlőek, vagyis az U_i és V_i kanonikus változók korrelálatlanok (függetlenek), $i = k, k + 1, \dots, p$-re. Ezt az alábbi mennyiséggel méri:

$$\chi_k^2 = -\left[(N-1) - \frac{1}{2}(p + q + 1)\right] \log_e \Lambda_k , \tag{6}$$

ahol N a minta elemszáma.

Ez a statisztika χ^2-eloszlású, $(p + 1 - k) \cdot (q + 1 - k)$ szabadságfokkal. Ez alapján a megfelelő *χ^2-eloszlás* táblázatát használva dönthetünk a nullhipotézis elfogadásáról, ill. elvetéséről.

A próba végrehajtása a következőképpen történik. Kiszámítjuk $k = 1$-re a Λ_k, χ_k^2 értékeket. Ha (χ_k^2 és a táblázatban szereplő χ_α^2) alapján a nullhipotézist elfogadjuk, akkor ez azt jelenti, hogy a vizsgált kanonikus korrelációk közül egyik sem szignifikáns, vagyis nem sikerült olyan kanonikus változókat létrehozni, melyek között valóban létezne kapcsolat. Ha viszont a nullhipotézist elvetjük ($\chi_k^2 > \chi_\alpha^2$), akkor a kanonikus korrelációk közül legalább egy szignifikáns. Mivel a kanonikus korrelációk nagyság szerinti sorrendben vannak, a szignifikancia a legnagyobbra (jelen esetben λ_1-re) vonatkozik. Ezután a legnagyobb korrelációs értéket elhagyva, a k helyett $k + 1$-gyel megismételjük az egész eljárást a maradék kanonikus korrelációkra. Ezt egészen addig folytatjuk, amíg egyszer a nullhipotézist elfogadjuk. Az ebben a hipotézis-vizsgálatban szereplő összes kanonikus korreláció már nem szignifikáns, a további vizsgálatból a hozzájuk tartozó kanonikus változókkal együtt elhagyhatók.

Nyilvánvaló, hogy a továbbiakban csak a szignifikánsnak bizonyult kanonikus korrelációkhoz tartozó kanonikus változókkal érdemes foglalkozni.

A területi vizsgálatoknál különösen érdekes lehet az az eset, amikor pl. két térség párhuzamos vizsgálatánál az *azonos tartalmú* kanonikus változók közötti kapcsolat az egyik térségben szignifikánsnak bizonyul, a másikban ellenben nem. Az okok kiderítését természetesen a kutató szakmai ítéletére bízhatjuk.

A további kérdés az, hogy az egyes kanonikus változók képzésében az eredeti változók közül melyek s milyen súllyal vesznek részt. Ennek megválaszolására a *kanonikus faktorstruktúra* szolgál.

A kanonikus faktorstruktúra képzése:

$$c_i = R_{11}a_i,$$

illetve

$$d_i = R_{22}b_i. \tag{7}$$

A c_i, ill. d_i vektor egy-egy eleme azt mutatja meg, hogy az adott eredeti változó milyen erősen befolyásolja a másik változóhalmazzal a függőségi kapcsolatot az adott kanonikus változópáron keresztül. Lényegében c_i és d_i nem más, mint az i-edik kanonikus változóknak a saját eredeti változókkal való egyszerű korrelációit tartalmazó vektor.

Az elemzés során a struktúra vektorok tanulmányozásával kaphatunk választ arra a kérdésre, hogy mely eredeti változók milyen súllyal szerepelnek a kanonikus változók előállításában. Lényegében a vektor-elemek értékei és előjelei alapján állapíthatjuk meg, hogy a függő, ill. független változóhalmaz egy-egy eleme milyen irányban és milyen erősen befolyásolja a másik halmazzal való függőségi kapcsolatot. Ugyanakkor ezeknek az értékeknek a négyzetei azt is megmondják, hogy a függő vagy magyarázó változóhalmaz egy-egy eleme az illető változóhalmaz valamely kanonikus változójának teljes szórásából mennyit magyaráz.

Területi vonatkozásban nagyon fontos az azonos tartalmú kanonikus változók belső struktúrája területi egységenkénti eltéréseinek elemzése.

Arra a kérdésre, hogy az u_i, ill. v_i kanonikus változók az eredeti változók szórását milyen mértékben magyarázzák, vagyis hogy milyen mértékben építhetünk a kanonikus változók hordozta összefüggésekre, Stevart és Lova 1968-ban kidolgozott egy vizsgálati módszert. Az általuk *redundancia index*nek elnevezett mérőszámot a következőképpen definiálhatjuk (az ismertetés Lackó [1976] alapján történik). Y-nak az X-re vonatkozó R_{u_i} i-edik redundancia indexe:

$$R_{u_i} = \lambda_i^2 \frac{1}{p} \sum_{j=1}^{p} c_{ij}^2 \qquad i = 1, 2, \ldots, p, \tag{8}$$

ahol λ_i – a meghatározott kanonikus korrelációs együttható,
c_{ij} – az U_i és X_j közötti egyszerű korrelációs együttható,
c_{ij} – t (7) szerint számoljuk.

R_{u_i} azt a részét adja meg az X-hez tartozó adathalmazban levő szórásnak, amely az U_i i-edik kanonikus változó segítségével magyarázható meg.

Y-nak az X-re vonatkozó R_u összredundanciája:

$$R_u = \sum_{i=1}^{p} R_{ui}. \tag{9}$$

R_u az a része az X szórásnak, amely a kanonikus változók segítségével az Y szórásával értelmezhető.

Hasonló módon:

$$R_{v_i} = \lambda_i^2 \frac{1}{q} \sum_{k=1}^{q} d_{ik}^2 \qquad i = 1, 2, \ldots, p \tag{10}$$

és

$$R_v = \sum_{i=1}^{p} R_{v_i}, \tag{11}$$

ahol d_i a (7) szerint számolható.

A redundancia index a függő, ill. független változók szórásának azt a részét adja meg, amely a másik változócsoport segítségével megmagyarázható. Felfoghatjuk úgy is, hogy a redundancia index mértékéig helyettesíthető egyik változócsoport a másikkal. Fontos felhívni a figyelmet arra, hogy a redundancia index nem szimmetrikus $R_u \neq R_v$. Ennek az eltérésnek a nagyságából is lehet következtetéseket levonni.

A fentiek is magyarázzák, miért tekinthetjük a kanonikus korrelációszámítást több más statisztikai módszerrel szoros kapcsolatban levőnek, ill. több módszer általánosításának.

Az elnevezésben is szereplő korrelációszámítással egyértelmű a kapcsolat – a kanonikus korrelációk lényegében a megfelelő kanonikus változók közötti „egyszerű" korrelációk. A módszer a megoldás eszközét, gondolatmenetét és a kapott eredmény struktúráját, elemzési lehetőségeit tekintve szoros összefüggésben van a főkomponens analízissel (ill. faktoranalízissel). Lényegében azt is mondhatjuk, hogy *a kanonikus korreláció* nem más, mint *két változócsoport szimultán főkomponens-analízise*. Végül pedig a módszer felfogható a többszörös regresszió általánosításának is: itt független változók nem egy, hanem több függő változó együttes alakulását magyarázzák.

Ezek a hasonlóságok, ill. megfogalmazási lehetőségek majd a kanonikus korrelációszámítás eredményeinek értelmezésénél nyújthatnak segítséget.

A kanonikus korrelációszámítás néhány más módszerrel való hasonlósága alapján megemlítünk – konkrét számítási utasítás nélkül – még néhány érdekes lehetőséget.

– Ha a kanonikus korrelációk szignifikancia-vizsgálata jól sikerült, több együttható is jelentősnek bizonyult statisztikailag, érdekes lehet a – parciális korrelációk mintájára – parciális kanonikus korrelációk számítása. Ennek akkor lehet jelentősége, ha pl. a független változók két részhalmaza ellentétes irányban befolyásolja a függő változók halmazát. Ekkor a feladat az, hogy a függő változókból kiszűrjük a magyarázó változók egyik részhalmazának hatását, s így mintegy tisztítva kapjuk meg a másik részhalmaz szerepét. Megjegyezzük, hogy ez technikailag bonyolult számításokat igényel.

– Az a_i és b_i súlyok segítségével az eredeti változók lineáris kombinációjaként kifejezhetők a kanonikus változók. Minden egyes egyednél (a faktoranalízis mintájára) a konkrét értékekkel való behelyettesítéssel meghatározhatók a kanonikus változók konkrét értékei. Ezeket sorba rendezve (pl. településenként) a megfigyelési egységeket kategóriákba sorolhatjuk, melyeket azután térképen is ábrázolhatunk.

– A kanonikus korrelációszámítást regresszióanalízisként is felfoghatjuk. Az alábbi egyenlet alapján:

$a_i\ Y = b_i\ X$ az i-edik kanonikus változó szerint, lényegében a függő változók (Y) befolyásolásának egy eszközét kapjuk. Hiszen b_{ij}-t következőképpen is felfoghatjuk:

Az X_j változó egységnyi növeléséből b_{ij} rész fordítódik a z Y változók befolyására, s ott az X_k változó értékét a_{ik}-val módosítja.

Ez azt jelenti, hogy a tervezés kezébe egy jól használható eszközt is adunk – a kanonikus korrelációszámítással – a beavatkozások (a független változók oldalán) hatásmechanizmusainak (a függő változók oldalán) pontosabb, árnyaltabb, komplexebb leírásával.

3. *A kanonikus korrelációszámítás egy gyakorlati alkalmazása*

Jelenleg a kanonikus korreláció alkalmazását Baranya megye példáján mutatjuk be. Vizsgálatunkban a megye községeinek 1970-es adatait használtuk fel 1976 január 1-i jogállás szerint. A feladat adatbázisa az MTA Földrajztudományi Kutató Intézet „Magyarország falusi településeinek típusai" című kutatásából származik.

A vizsgálatba bevont változókról jó áttekintést nyújt Beluszky P. és Sikos T. T. munkája (1981).

Mivel e mintafeladattal célunk elsősorban a szemléltetés volt, ezért a 27 változóból rostáltunk. Arra törekedtünk, hogy a bemutatott jelenség viszonylag egyszerű legyen, s lehetőleg kevés számú változóval legyen jellemezhető, ugyanakkor az elemzés során lehetőleg mindenféle eset előforduljon. Végül is függő, magyarázandó változóként az alábbi három változó szerepelt.

I. A függő változók:

1. a tényleges népességszám-változás aránya 1949–1970 között (%),
2. a lakónépesség vándormozgalma 1960–1970 között (%),
3. az 1960–1970 között épült lakások aránya (%).

Független, magyarázó változóként pedig az alábbiakat szerepeltettük:

II. A magyarázó változók:

4. a falvak lakónépessége 1970-ben,
5. a külterületi népesség aránya 1970-ben,
6. a község ipari telephelyein dolgozók száma,
7. az alapfokú ellátó-szolgáltató intézmények színvonala (pontozásos módszer alapján),

8. a legközelebbi város (+ községi jogállású járási székhely) időtávolsága,
9. a közlekedési hálózatok kiépítettsége.

A függő változókkal a települések fejlődésének dinamikáját próbáltuk megadni. Úgy véltük, hogy a 4–9 pontok alatt felsorolt változók valamilyen módon hatással vannak a függő változókra. Természetesen még sok más változót fel lehetett volna sorolni a magyarázó változók között, azonban az eredmények könnyebb értelmezése és szemléltethetősége miatt végül is ennyi változó használata mellett döntöttünk.

A változók korrelációs mátrixa a következő:

$$R = \left[\begin{array}{rrr:rrrrrr}
1,000 & & & & & & & & \\
0,507 & 1,000 & & & & & & & \\
0,493 & 0,367 & 1,000 & & & & & & \\
\hdashline
0,451 & 0,268 & 0,354 & 1,000 & & & & & \\
0,220 & 0,005 & 0,029 & 0,082 & 1,000 & & & & \\
0,321 & 0,196 & 0,148 & 0,691 & 0,091 & 1,000 & & & \\
0,410 & 0,244 & 0,338 & 0,829 & 0,085 & 0,479 & 1,000 & & \\
-0,254 & -0,258 & -0,264 & -0,255 & -0,043 & -0,134 & -0,235 & 1,000 & \\
0,527 & 0,427 & 0,509 & 0,524 & 0,054 & 0,341 & 0,519 & -0,341 & 1,000
\end{array}\right].$$

Első ránézésre a mátrixban szereplő korrelációk alacsonyaknak s a további elemzésre alkalmatlanoknak tűnnek. Ez azonban két ok miatt sincs így. Egyrészt társadalomtudományi vizsgálatokban a 0,35–0,50 körüli korrelációk már jelentősnek számítanak, másrészt ilyen mintaelemszámnál (315) 99%-os valószínűséggel már a 0,148-as korreláció is szignifikáns (l. I. fejezet).

A fenti korrelációs mátrixot egy 3×3-as R_{11}-re és egy 6×6-os R_{22}-re particionáltuk. A szükséges számításokat $R22$-es számítógépen végeztük.

A (2) karakterisztikus egyenlet megoldásai, s *a kanonikus korrelációk*:

saját értékek	*kanonikus korrelációk*
$\lambda_1^2 = 0{,}42671$	$\lambda_1 = 0{,}65323$
$\lambda_2^2 = 0{,}07830$	$\lambda_2 = 0{,}27982$
$\lambda_3^2 = 0{,}01808$	$\lambda_3 = 0{,}13445\,.$

Mint már említettük, a kanonikus korrelációk konkrét értékei nem jelentenek túl sokat *szignifikancia-vizsgálat* nélkül, s itt a közepes értékek maguk is kötelezővé teszik ezt a vizsgálatot.

Az (5) és (6) képletek alapján számoltunk. Először mind a három kanonikus korrelációt bevontuk a vizsgálatba. Ekkor:

$$\chi_1^2 = 202{,}75\,,$$

a szabadságfok 18. Mivel $\chi^2 > \chi^2_{0,01}$ (34,805), ezért a nullhipotézist elvetjük, s ezzel λ_1-et szignifikánsnak fogadtuk el.

A következőkben – a próba logikájának megfelelően – elhagytuk λ_1-et, s a maradék két kanonikus korrelációra számítottuk ki a próbát:

$$\chi_2^2 = 30{,}83\,,$$

s a szabadságfok 10. Itt is $\chi_2^2 > \chi^2_{0,01}$ (23,209), ezért ezt a kanonikus korrelációt is szignifikánsnak kell elismernünk. Ennek ellenére λ_2 olyan alacsony érték, hogy a továbbiakban fő figyelmünket a λ_1 által képviselt kanonikus változókra helyezzük.

A harmadik kanonikus korrelációra is:

χ_3^2 = 5,64, s ez 4 szabadságfok mellett kisebb $\chi^2_{0,01}$ (13,276)-nál, így a nullhipotézist elfogadjuk, λ_3 nem szignifikáns. Ezért a további vizsgálatból ki is marad.

Tekintettel arra, hogy az általunk használt BMDP program nem számolt súlyvektorokat, azokat nekünk kellett előállítanunk. Az R_{11}^{-1}, ill. az R_{22}^{-1} ismeretében azonban a megfelelő *kanonikus súlyvektorok* a struktúra vektorokból visszaszámolhatók. Ilyen visszaszámolást – későbbi felhasználás miatt – csak az első kanonikus változónál végeztünk, s ott is csak az U_1-hez tartozó a_1-et határoztuk meg.

$$a_1 = \begin{bmatrix} 0{,}5709 \\ 0{,}2005 \\ 0{,}4487 \end{bmatrix}.$$

Ez azt jelenti, hogy az U_1 változó létrehozásában legnagyobb súllyal a tényleges népességszám-változó, majd az 1960–1970 között épült lakások aránya-változók vettek részt, s a legkisebbel a lakónépesség vándormozgalma. Ezt a kijelentést a struktúra elemzésénél még pontosítani fogjuk.

A teljesség kedvéért megadjuk mind *a három kanonikus korrelációhoz tartozó struktúrát*.

A függő változók struktúráját a *11. táblázat*, a magyarázó változók struktúráját pedig a *12. táblázat* tartalmazza.

Az eddigiek szerint c_1 az U_1 kanonikus változó és az eredeti függő változók közötti korrelációkat tartalmazza. Látható, hogy ezek a korrelációk mind a közepesnél erősebbek, s jelentősen szignifikánsak. Ez azt jelenti, hogy mindhárom függő változó erősen részt vesz az U_1 kanonikus változó kialakításában (azt is

11. TÁBLÁZAT

A függő változók kanonikus struktúrája

	C_1 (U_1)	C_2 (U_2)	C_3 (U_3)
Népességszám-változás	0,893	0,437	0,107
Vándormozgalom	0,654	−0,342	0,695
1960–70-ben épült lakások	0,802	−0,405	0,489

12. TÁBLÁZAT

A magyarázó változók kanonikus struktúrája

	d_1 (V_1)	d_2 (V_2)	d_3 (V_3)
Lakónépesség száma	0,719	0,274	−0,143
Külterületi népesség aránya	0,214	0,793	−0,115
Ipari telephelyen dolgozók száma	0,442	0,456	0,539
Ellátás–szolgáltatás színvonala	0,666	0,206	−0,222
Legközelebbi város időtávolság	−0,482	0,259	−0,301
Közlekedési hálózat kiépítettsége	0,940	−0,186	0,081

mondhatnánk, hogy jól választottuk ki a függő változókat, hiszen ugyanazon háttérváltozóval jellemezhetők, helyettesíthetők).

A korrelációk alapján az U_1-hez tartozó magyarázandó változók rangsora: népességszám-változás, 1960–1970 között épült lakások aránya és a vándormozgalom. Itt kissé meglepő a vándormozgalom utolsó helye: bár ez csupán azt jelenti, hogy a V_1 kanonikus változóval összefogott magyarázó változók segítségével legkevésbé a vándormozgalmat tudjuk magyarázni, befolyásolni.

A V_1 kanonikus változó struktúrájából három magyarázó változó szerepét emeljük ki: a közlekedési hálózat kiépítettségét (döntő, erős 0,94 korrelációval), a lakónépesség számát (0,71) és az ellátás–szolgáltatás színvonalát. Ezzel azt is mondjuk, hogy a település-fejlődés dinamikájára – ha az U_1 kanonikus változót ezzel azonosítjuk – a vizsgálat szerint a fenti változók hatnak a legerősebben.

Itt meglepő a legközelebbi város időtávolságának viszonylag kisebb szerepe. A negatív előjel jól magyarázható: minél messzebb van egy község a várostól vagy kiemelt településtől, annál kevésbé dinamikusan fejlődik.

*A redundancia index számításá*nak főbb eredményét a *13. táblázat* tartalmazza.

A táblázatból látható, hogy az összredundanciát szinte teljes egészében az $U_1 - V_1$ kapcsolat hordozza. Ez azt jelenti, hogy igazán nyugodtak csak az $U_1 - V_1$ kapcsolat s az erre épülő elemzések megalapozottságában lehetünk.

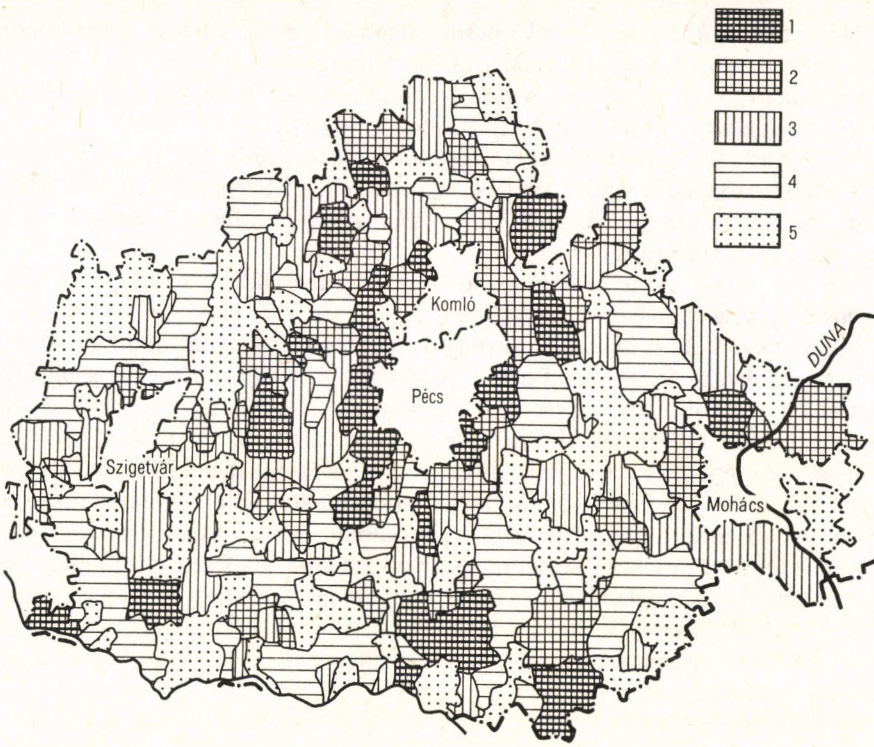
Az $U_2 - V_2$ kapcsolat szinte jelentéktelen információt hordoz, noha a vizsgálat a korrelációt szignifikánsnak mutatta ki.

Az összredundanciák elég alacsonyak, bár a társadalmi vizsgálatokban nem jelentéktelenek (főleg a 32%-os R_u redundancia). A magyarázó változók oldaláról

13. TÁBLÁZAT

A kiszámított redundancia-érték (összes redundancia)

$R_u = 0{,}3207$	100,00%	$R_v = 0{,}1786$	100,00%
$R_{u1} = 0{,}258$	82,89%	$R_{v1} = 0{,}1645$	92,10%
$R_{u2} = 0{,}0123$	3,83%	$R_{v2} = 0{,}0127$	7,12%
$R_{u3} = 0{,}0426$	13,28%	$R_{v3} = 0{,}0014$	0,70%



21. ábra. Baranya megye községeinek rangsora az U_1 kanonikus változó értékei alapján
1 = > 1,000; 2 = 0,9999– 0,2600; 3 = 0,2599– –0,2500; 4 = –0,2499–1,0000; 5 = < –1,0001

ennek oka lehet egyrészt az, hogy kevés független változót szerepeltettünk, másrészt az, hogy a vizsgált jelenséggel szorosan összefüggő változók is kimaradhattak a magyarázó változók közül. Valószínűleg egy szélesebb alapokon nyugvó vizsgálat – a redundancia szempontjából – jobb eredményt hozott volna. Összefoglalóul a *20. ábrán* megtekinthetjük a kanonikus korrelációs vizsgálat eredményeit.

Végezetül kiszámoltuk Baranya megye minden községére az U_1 kanonikus változó értékeit *(21. ábra)*. (A kanonikus korrelációszámítás eredményeinek elemzésénél felhasználtuk Beluszky P.–Sikos T. T. előbb idézett [1981] tanulmányának megállapításait.)

1. A megyében a településtípusok *mozaikszerű* elhelyezkedése a jellemző az U_1 kanonikus változó alapján.

Ez a mozaikszerűség azonban nem jelent szükségszerűen véletlenszerű, rendszertelen elhelyezkedést. A megyében ugyanis a faluméretek differenciáltsága, az igen kis lélekszámú települések nagy gyakorisága miatt igen erős differenciáltság, pontosabban hierarchikus rendszer alakult ki a falvak között. A „hierarchizáltság" – ill. a kedvezőtlentől a kedvező felé való rangsorolódás – tulajdonképpen nemcsak a fejlődési dinamikára, hanem az intézményhálózatra, az életkörülmények szintjére, a demográfiai jelenségekre stb. jellemző, s *egy soklépcsős falusi*

településrendszert hoz létre. E soklépcsős települési rendszerben a településközi kapcsolatok is több egymás feletti szint között alakulnak ki:
teljesen ellátatlan kis község – néhány alapintézménnyel (alsótagozatos iskola, tanácsi kirendeltség, postahivatal stb.) ellátott község;
kevéssé ellátott részleges alsófokú központot képező (tanácsi székhely);
teljeskörű alapellátást nyújtó település, városias jellegű település. Ezek a lépcsők szükségszerűen alakulnak ki, tehát *kis területegységen* belül szükségszerű több hierarchikus szint előfordulása.

A *vertikális tagoltság* térbeli leképződése tehát a települések mozaikszerű elhelyezkedéséhez vezet; ez látható a *21. ábrán* is.

2. Figyelembe kell vennünk a baranyai falvak vizsgálatánál azok rendkívül *heterogén előtörténet*ét. Ismert, hogy a megyében a negyvenes évek végéig igen éles területi különbségek álltak fenn a lakosság nemzetiségi tagolódásában, vallási hovatartozásában. Az akkori mohácsi, pécsváradi, villányi, sásdi járásban a lakosság többsége német ajkú volt; arányuk egyes községekben felülmúlta a 90%-ot is. A 102 német többségű község mellett számottevő volt a délszlávok aránya; 9 községben abszolút többségben voltak. Hasonlóan vegyes volt a vallási összetétel is. Mindez természetesen messzemenően befolyásolta a községek egyéb életjelenségeit. Nemcsak a gazdálkodás irányai és színvonala, az építkezés, telekhasználat módja, az életkörülmények eltérő szintje, az életvitel különbségei voltak szembetűnőek, hanem a nemzetiségi hovatartozás messzemenően befolyásolta pl. a demográfiai folyamatokat, a falvak népesedését.

Ezek a különbségek 1945 után, a német ajkú lakosság nagyobb részének kitelepítését követően mérséklődtek ugyan, de ekkor meg a betelepülők hozták magukkal korábbi lakóhelyük életszemléletét, szokásait, gazdálkodási ismereteit stb., ill. alakítottak ki sajátos magatartásformákat új lakóhelyükön. Így hosszú ideig öröklött vagy „idegen" elemek is befolyásolták a községek életét, s fedték el a „helyi" tényezők – pl. a településméretből, közlekedési helyzetből, természeti környezetből stb. fakadó követelmények – hatását. Egy-egy község „rendellenes" viselkedése olykor csak igen alapos helyismeret alapján – a lakosságcsere mértéke, a betelepülők eredeti lakhelye, az új környezetben kialakult attitűdök stb. – lenne magyarázható. Ezek a hatások mára kétségtelenül mérséklődtek. A nagyszámú népességcsere a községek többségében fellazította, szétzúzta a helyi közösségeket és ezek szétziláltsága is hozzájárult ahhoz, hogy a megye faluhálózatát az országos méreteket meghaladó változások érjék.

3. Sajátosan alakult az urbanizáció–agglomerálódás Baranya megyében. Noha Pécsett s környékén (Komló, Kővágószőllős, É-mecseki bányavidék) számottevő ipar, ill. bányászat alakult ki, nagymértékű az ingázás is; a tulajdonképpeni agglomerálódás igen kis területre terjed ki. A kiterjedt ingázási övezet tulajdonképpen csak lakó–alvó településeket hozott létre, tényleges agglomerálódást nem. Pécs 27 város környéki községe közül mindössze ötnek növekedett a lakossága 1970–1979 között, s az agglomerálódás jellemzésére használt legtöbb mutató – pl. a lakásépítés üteme, infrastruktúra, életkörülmények fejlettsége – hasonló eredményt ad. E folyamathoz a *követett településhálózatfejlesztési stratégia* is hozzájárul – az ipar (a szükségszerűen szórt kitermelőipart is beleértve) „lakossági infrastruktúráját" a városokban hozták létre: Pécs-Uránváros, Komló, újabban

Szentlőrinc, a beremendi cementgyár siklósi lakótelepe stb. –, de az a tény is, hogy az agglomerálódás, a *városok kisugárzása igen nehezen tud előretörni az aprófalvas területeken.*

4. A településhálózat-fejlesztési stratégia *erős koncentrálódás*sal számolt. Első lépésként a falvak körzetesítését, az alapellátás koncentrálódását végezték el, párhuzamosan a közigazgatási körzetesítéssel (1962–1977 között). Ez a településfejlesztési politika természetesen ugyancsak befolyásolta a falusi településhálózat helyzetének alakulását, s hozzájárult a vázolt hierarchikus–mozaikszerű kép kialakulásához.

5. A vázoltak következménye, hogy Baranya megyében nem határolhatók el a falusi településállomány homogén körzetei. Talán csak a Mohács körüli népesebb és fejlettebb települések gyűrűje, valamint a Pécset és Komlót körülvevő, mintegy másfél tucat agglomerálódó község emelhető ki a megye többi területéből.

V. *Shift-analízis és struktúra-vektorokkal való elemzés*

1. *A shift-analízis*

A területi kutatások matematikai módszereinek többsége a matematika egyes részdiszciplínái (elsősorban a matematikai statisztika) eredményeinek adaptációja a területi problémákra, s a módszerek nagy része más szaktudományok közvetítésével került a regionális vizsgálatokba. Ezért meggyőződésünk szerint különös figyelmet érdemelnek azok a módszerek, amelyek kizárólagosan vagy elsődlegesen a regionális kutatásokban kaptak ez ideig helyet, s útjuk innen vezethet a más típusú alkalmazások felé. A következőkben bemutatásra kerülő eljárás ilyen sajátos módszernek tekinthető.

A módszer első alkalmazója Daniel B. Cramer volt 1942-ben. Ezután a módszer egy időre feledésbe merült, hasonlóan a faktor- és clusteranalízishez; újbóli felfedezése E. S. Dunn (1960) nevéhez fűződik.

Valójában a módszer széles körű felhasználása csak a hatvanas évek végén, ill. a hetvenes évek elején indult meg. Ebben az időszakban legjelentősebb alkalmazói: L. D. Ashby (1968), J. R. Boudeville (1966), A. P. Thirlvall, G. Steed, J. G. Maddox és C. P. Liebhavsky (1967), A. J. Brown és F. J. B. Stilwell (1969), F. N. Randall (1973).

Hazánkban Nemes Nagy J. a regionális gazdaságnövekedés vizsgálatára (1977), Lackó L. a szocialista iparban foglalkoztatottak számának területi elemzésére (1978), Beluszky P.–Sikos T. T. (1980) pedig az encsi járás demográfiai vizsgálatára alkalmazta az eljárást. Mint az eddigi nemzetközi és a hazai alkalmazásokból kitűnik, a shift-analízis eredményesen felhasználható a társadalom és a gazdaság *területileg* és *strukturálisan* egyaránt tagolt folyamatainak mennyiségi elemzésére; mindenekelőtt a – tágan értelmezett – regionális növekedés jellemzőinek feltárására. Az alapkérdés, amelyre a módszer segítségével választ adhatunk az, hogy miként befolyásolja a regionális növekedés folyamatát két számszerűen is szétválasztható faktor: a *területi* (regionális, lokális) *dinamika* és a *struktúra* (ágazati, demográfiai, települési szerkezet) egyes komponenseinek növekedési üteme.

Ez az általános megfogalmazás világosabbá válik, ha a regionális gazdasági fejlődés példáján kissé részletesebben kifejtjük.

Ha valamely ország gazdaságának regionális fejlődését vizsgáljuk, megállapítható, hogy általában azoknak a területeknek a gazdasága fejlődik leggyorsabban, ahol az országosan legdinamikusabb ágazatok túlsúlyban vannak a kevésbé gyors növekedési ütemű gazdasági ágakkal szemben. A nagy népgazdasági szektorokat tekintve pl. a gyors regionális fejlődésnek kedvez az ipar túlsúlya a mezőgazdasággal szemben. Ha csak az ipar fejlődését tekintjük, akkor a – történelmileg és országonként eltérő – dinamikus iparágak nagy súlya egy körzet gazdaságában az egész térségnek az átlagnál gyorsabb fejlődési lehetőségeket teremt. Az átlagosnál kedvezőbb lehet egy régió helyzete, gyorsabb lehet a gazdasági növekedés azonban akkor is, ha a körzetbe települt iparágak – amelyek esetleg országosan nem a legdinamikusabbak – helyi növekedési üteme meghaladja az országos átlagot. Az előbbi esetben az előnyös ágazati struktúra, a másik esetben a lokálisan dinamikus szerkezet előnyét élvezi a terület. A fentiekből következik az is, hogy egy régió ágazati szerkezete önmagában csak korlátozott mértékben határozza meg a térség gazdaságának dinamikáját, ill. fejlettségét; sok függ attól, hogy az adott szerkezet megfelel-e a helyi adottságoknak.

Ha az ágazati szerkezet kettős hatását a fentiek szerint értelmezzük, akkor az átlagnál gyorsabb, ill. lassabb növekedés a strukturális és a lokális hatások alábbi kombinációja alapján következhet be:

Az átlagosnál gyorsabb növekedés

pozitív struktúra – pozitív lokális adottságok,
pozitív struktúra – negatív lokális adottságok,
negatív struktúra – pozitív lokális adottságok.

Az átlagosnál lassabb növekedés

negatív struktúra – negatív lokális adottságok,
pozitív struktúra – negatív lokális adottságok,
negatív struktúra – pozitív lokális adottságok.

A pozitív, ill. negatív minősítés a regionális növekedés tényezőit számszerűen feltáró, későbbiekben bemutatásra kerülő matematikai módszerben konkrét előjeles mennyiségeknek felel meg.

Amikor a két tényező körül az egyik negatív és a másik pozitív, akkor ezek egyenlegétől függően lehet a növekedés az átlagnál gyorsabb (ha a pozitív tényező nagyobb) vagy az átlagnál lassúbb (ellenkező esetben).

1.1. *A módszer leírása*

1. A shift-analízis elvégzéséhez *részletes területi és ágazati bontású adatok*ra van szükség, *két időpontra*. Ezek a kiindulási adatok két mátrixban foglalhatók össze: $T_n(t_{ij})_m$ tartalmazza a kiindulás helyzetet, $T_n^*(t_{ij}^*)_m$ pedig a vizsgált periódus végére vonatkozik; a mátrixok az alábbi típusúak:

$$T = \begin{array}{c|cccc|} & \multicolumn{4}{c}{\text{TERÜLETEK}} \\ \hline \text{Á} & t_{11} & t_{12} & \cdots & t_{1m} \\ \text{G} & & & & \\ \text{A} & & & & \\ \text{Z} & t_{21} & t_{22} & \cdots & t_{2m} \\ \text{A} & . & . & \cdots & . \\ \text{T} & . & . & \cdots & . \\ \text{O} & . & . & \cdots & . \\ \text{K} & t_{n1} & t_{n2} & & t_{nm} \\ \hline \end{array} .$$

Ahogy már említettük, az ágazatok itt különböző strukturális tagolást jelezhetnek: gazdasági ágazatokat, korcsoportokat, település-nagyságcsoportokat stb. A területek is tetszőlegesek: települések, megyék, országok stb. (A továbbiakban a módszer leírásakor ismét a regionális gazdasági növekedés, a termelési érték területileg differenciált növekedésének példáját használjuk.)

2. T és T^* mátrixokból kiszámíthatók:

$t_{i0} = \sum_{j=1}^{m} t_{ij} =$ az i-edik ágazat országos össztermelése (a T mátrix sorainak összegei);

$t_{0j} = \sum_{i=1}^{n} t_{ij} =$ a j-edik körzet (terület) össztermelése (a T mátrix oszlopösszegei);

$t_{00} = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} t_{ij} =$ az országos össztermelés (a T mátrix elemeinek összege), ill. a kezdő időpont analógiájára:

$t^*_{i0}, t^*_{0j}, t^*_{00}$.

3. A számítás első érdemi lépése a növekedési indexek $M_n(m_{ij})_m$ mátrixának kiszámítása:

$$M = \begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} & \dots & m_{1m} \\ m_{21} & m_{22} & \dots & m_{2m} \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ m_{n1} & m_{n2} & & m_{nm} \end{bmatrix},$$

ahol $m_{ij} = \frac{t^*_{ij}}{t_{ij}}$, azaz a mátrix elemeiből leolvasható az, hogy az egyes ágazatok termelése területenként hányszorosára nőtt az adott időszakban.

Hasonlóképpen számíthatók az országos ágazati növekedési ütemek, a régiók össznövekedésének üteme és az országos össznövekedés:

$$m_{i0} = \frac{t^*_{i0}}{t_{i0}} \quad m_{0j} = \frac{t^*_{0j}}{t_{0j}} \quad m_{00} = \frac{t^*_{00}}{t_{00}}.$$

4. *Az összes változás* (S_{tj}) *számítása:*

$$S_{tj} = t^*_{0j} - \frac{t^*_{00}}{t_{00}} \cdot t_{0j} = \boxed{t^*_{0j} - m_{00} \cdot t_{0j}}.$$

A fenti összefüggés segítségével minden régióra kiszámíthatjuk azt, hogy menynyi a régióban a periódus végén képződött termelési többlet (az átlagnál gyorsabban fejlődő körzetekben), ill. termelési hiány (az átlagnál lassabban fejlődő körzetekben), annak következtében, hogy a terület gazdasága az országos átlagnál gyorsabban vagy lassabban növekedett.

Az átlagnál gyorsabban fejlődő régiók esetében $S_{tj} > 0$, mivel esetükben:

$$m_{0j} > m_{00},$$

ezért

$$t_{0j}^* = m_{0j} \cdot t_{0j}$$

következtében.

$$t_{0j}^* > m_{00} \cdot t_{0j}.$$

Az átlagnál lassabban fejlődő körzetekben $S_{tj} < 0$, mivel esetükben (a fenti levezetés mintájára) $t_{0j}^* < m_{00} \cdot t_{0j}$.

5. Ezt követően kiszámíthatjuk azt, hogy a termelési többlet, ill. hiány kialakulásában mekkora része van az ágazati, ill. a lokális (területi) tényezőnek.

A területi (lokális) tényező (S_{kj}) számítása:

$$S_{kj} = \sum_{i=1}^{n} \left(t_{ij}^* - \frac{t_{i0}^*}{t_{i0}} \cdot t_{ij} \right) = \boxed{\sum_{i=1}^{n} (t_{ij}^* - m_{i0} \cdot t_{ij})}.$$

S_{kj} lehet pozitív és negatív. S_{kj} akkor pozitív, ha az adott körzetben az országos ágazati növekedési ütemet meghaladó ütemben fejlődő ágazatok vannak túlsúlyban.

S_{kj} részletezve:

$$S_{kj} = (t_{1j}^* - m_{10} \cdot t_{1j}) + (t_{2j}^* - m_{20} t_{2j}) + \ldots + (t_{nj}^* - m_{n0} \cdot t_{nj}).$$

Az összeg tagjai lehetnek pozitívak (ha $m_{i0} > m_{ij}$), ill. negatívak (ha $m_{i0} < < m_{ij}$). A részletösszegek összege aszerint lesz pozitív vagy negatív, hogy az adott körzetben nagy részaránnyal (nagy t_{ij}) szereplő ágazatok lassan vagy gyorsan növekednek (azaz telepítésük – a tágan értelmezett – adottságoknak nagyon, kevésbé vagy egyáltalán nem felel meg).

Az ágazati (strukturális) tényező (S_{pj}) számítása:

Gondolatmenetünknek megfelelően

$$S_{tj} = S_{kj} + S_{pj},$$

azaz

$$\boxed{S_{pj} = S_{tj} - S_{kj}}.$$

Bizonyításra vár, hogy van-e S_{pj}-nek értelmezhető tartalma, és segítségével kimutatható-e az országos szempontból dinamikus vagy lassan növekvő ágazatok hatása a növekedésre:

$$S_{pj} = S_{tj} - S_{kj} = (t_{0j}^* - m_{00} \cdot t_{0j}) - \sum_{i=1}^{n} (t_{ij}^* - m_{i0} \cdot t_{ij});$$

felhasználva azt, hogy

$$t_{0j} = \sum_{i=1}^{n} t_{ij}$$

és

$$\sum_{i=1}^{n} t_{ij}^* = t_{0j}^*$$

összevonások után az alábbi egyszerűbb formához jutunk:

$$S_{pj} = -m_{00} \cdot \sum_{i=1}^{n} t_{ij} + \sum_{i=1}^{n} m_{i0} \cdot t_{ij};$$

felhasználva azt, hogy m_{00} konstans

$$S_{pj} = -\sum_{i=1}^{n} t_{ij} \cdot m_{00} + \sum_{i=1}^{n} t_{ij} \cdot m_{i0},$$

kiemelés után

$$\boxed{S_{pj} = \sum_{i=1}^{n} t_{ij}(m_{i0} - m_{00})}$$

részletezve

$$S_{1j} = t_{1j}(m_{10} - m_{00}) + t_{2j}(m_{20} - m_{00}) + \ldots + t_{nj}(m_{n0} - m_{00}).$$

S_{pj} részletösszegei és azok összege lehet pozitív és negatív. A részletösszegek közül az a tag pozitív, amelyben az országos összágazati növekedési ütemnél országosan dinamikusabb ágazat szerepel ($m_{i0} > m_{00}$), fordított esetben negatív az értéke. Ha azoknak az $(m_{i0} - m_{00})$ tagoknak a szorzója, súlya (t_{ij}) nagy, amelyek pozitívak és a negatív tagoké kisebb, akkor S_{pj} pozitív lesz, ellenkező esetben negatív. Ennek megfelelően ha S_{pj} pozitív, akkor ez azt jelenti, hogy az adott körzetben az országosan dinamikus ágazatok vannak túlsúlyban (azaz fejtegetéseink értelmében „jó a struktúrája"); negatív S_{pj} esetében – a növekedés szempontjából – „rossz struktúrával" számolhatunk. S_{pj} *számítása* természetesen nem kell, hogy a fenti bizonyítás bonyolult menetét kövesse – erre csak tartalmának, értelmezésének megvilágításához volt szükségünk –; kiszámítása egyszerűen *a körzetenkénti* S_{tj} *és* S_{kj} *kivonásával végezhető el.*

6. Számításaink eredményeként mindegyik körzetre rendelkezésünkre áll:

$$\begin{array}{ccc} S_{t1} & S_{k1} & S_{p1} \\ S_{t2} & S_{k2} & S_{p2} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ S_{tm} & S_{km} & S_{pm}. \end{array}$$

7. Ezek között az értékek között vannak negatívak és pozitívak.

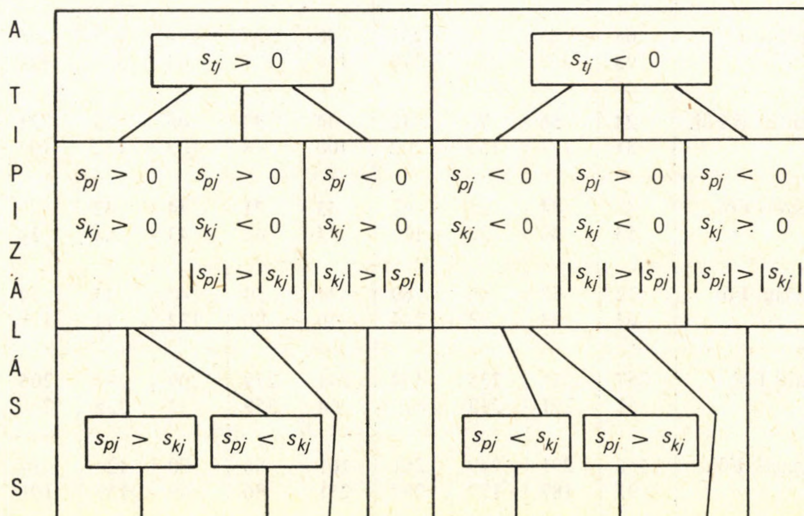
Az oszlopokba rendezett értékeket oszloponként külön-külön szétválaszthatjuk aszerint, hogy negatívak vagy pozitívak-e, és ezután kiszámíthatjuk az egyes értékek százalékos részesedését az azonos előjelű értékek összegéből. Az előjel szerint szétválasztott S_{tj} értékek százalékos alakra hozatalával eredményeként megkapjuk, hogy az egyes területeknek mekkora a részesedése az egyenlőtlen növekedés következtében kialakuló termelési többletből, ill. hiányból. Az S_{kj} és S_{pj} értékek hasonló átalakításával a strukturális (ágazati), ill. a lokális (területi) adottságok következtében kialakult termelési többlet, ill. hiány regionális megoszlása kapható meg. Az így kapott adatokat térképezhetjük.

8. A fenti feldolgozás az egyes területeken kialakuló termelési többlet és hiány nagyságának összevetésére alkalmas. Ha területenként kiszámítjuk azt, hogy az ágazati (S_{pj}), ill. a területi adottságok (S_{kj}) következtében kialakuló többlet, ill. hiány hány százaléka az egyenlegnek (S_{tj}), akkor arra a kezdeti kérdésünkre kaphatunk választ, hogy milyen arányban eredményezi a két tényező a lemaradást vagy a gyors növekedést.

9. A számítási eredmények alapján *a vizsgált területegységek tipizálhatók*. A tipizálás alapja a három számszerűen feltárt tényező – S_t, S_k, S_p – előjele és nagyságrendje. Az elvileg lehetséges nyolc típust a *14. táblázat* foglalja össze

14. TÁBLÁZAT

A területek besorolásának szempontjai



15. TÁBLÁZAT

Alapadatok: a megyékből felsőoktatási intézmények nappali tagozatára járók fő képzési

	Baranya	Bács-Kiskun	Békés	Borsod-Abaúj-Zemplén	Csongrád	Fejér	Győr-Sopron	Hajdú-Bihar	Heves	Komárom
Tud. Egy.	305 406	332 487	311 344	634 731	513 615	208 297	337 403	596 766	304 313	187 263
Műsz. Egy.	257 285	233 299	230 213	926 884	196 237	270 244	418 404	269 319	285 264	287 293
Orv. Egy.	400 417	284 339	224 200	405 418	521 608	134 154	195 207	335 525	130 179	119 158
Agrár Egy.	149 121	266 212	191 141	249 230	129 115	139 171	375 342	246 266	150 119	113 141
Tanárk. Főí.	316 491	233 377	230 384	385 809	229 468	147 243	184 358	212 365	269 344	116 249
Tanítók. Főí.	68 193	123 262	86 258	231 379	48 114	56 131	136 304	105 358	55 128	127 259
Óvónőképző Főí.	24 81	56 177	73 150	42 202	34 100	32 78	46 102	25 112	31 107	37 51
Művészeti Főí.	45 53	34 43	25 33	62 104	43 74	21 42	34 43	42 68	27 39	21 34
Gazdasági Főí.	32 63	52 98	66 93	69 244	34 70	34 90	40 132	33 94	54 119	38 106
Műszaki Főí.	257 361	325 291	235 213	454 619	241 264	279 359	269 433	294 325	205 216	244 198
Mezőgazd. Főí.	156 93	291 187	249 177	261 207	161 231	86 86	70 69	126 159	84 101	55 75
Összesen	2010 2564	2229 2772	1920 2206	3730 4827	2152 2896	1406 1905	2104 2797	2283 3357	1594 1929	1344 1827

Forrás: *Statisztikai Tájékoztató, Felsőoktatás.* 1970/71 és 1979/80, Egyetemi Számítóközpont, *áganként az 1970/71 és 1979/80-as tanévben (fő)*

Nógrád	Pest	Somogy	Szabolcs-Szatmár	Szolnok	Tolna	Vas	Veszprém	Zala	Budapest	Összesen
118	473	277	337	390	164	243	297	148	4022	10196
183	615	289	481	401	222	249	376	269	3954	11664
168	458	202	280	280	165	271	381	191	3873	9643
158	472	181	312	282	159	248	352	185	2988	8779
74	354	208	275	237	234	170	175	138	2462	6974
91	364	166	255	235	139	158	178	164	2313	7268
62	359	171	241	219	102	175	273	104	890	4602
60	296	136	165	178	92	165	177	151	887	4165
85	251	171	487	191	137	147	171	99	488	4577
167	313	247	622	332	187	333	290	281	1245	8205
40	102	108	197	134	63	116	104	54	196	2151
91	367	246	292	225	240	189	160	178	734	5108
14	72	30	45	45	23	29	44	28	102	832
60	113	58	115	92	76	94	91	55	132	2246
19	36	17	14	24	7	12	11	9	690	1193
22	77	16	23	41	14	36	39	11	852	1664
29	121	36	36	50	29	32	43	17	871	1716
83	188	69	93	134	60	106	134	125	930	3041
161	399	187	299	285	214	200	246	138	2176	7118
140	381	187	284	269	172	201	323	189	1724	7149
64	172	131	269	191	73	103	134	89	160	2935
43	143	82	191	189	64	53	71	35	205	2458
834	2797	1538	2480	2046	1111	1498	1879	1015	15967	51937
1098	3429	1677	2833	2378	1425	1832	2191	1643	16161	61747

Bp. 1971 és 1980.

16. TÁBLÁZAT

Növekedési indexek; a hallgatólétszám növekedése 1970/71 és 1979/80 között (1970/71-es lét

	Baranya	Bács-Kiskun	Békés	Borsod-Abaúj-Zemplén	Csongrád	Fejér	Győr-Sopron	Hajdú-Bihar	Heves	Komárom
Tud. Egy.	1,331	1,467	1,106	1,153	1,199	1,428	1,196	1,285	1,030	1,406
Műsz. Egy.	1,109	1,283	0,926	0,955	1,209	0,904	0,967	1,186	0,926	1,021
Orv. Egy.	1,043	1,194	0,893	1,032	1,167	1,149	1,062	1,567	1,377	1,328
Agrár Egy.	0,812	0,797	0,738	0,924	0,891	1,230	0,912	1,081	0,793	1,248
Tanárk. Fői.	1,554	1,618	1,670	2,101	2,044	1,653	1,946	1,722	1,279	2,147
Tanítók. Fői.	2,838	2,130	3,000	1,641	2,375	2,339	2,235	3,410	2,327	2,039
Óvónők. Fői.	3,375	3,161	2,055	4,810	2,941	2,438	2,217	4,480	3,452	1,378
Művészeti Fői.	1,178	1,265	1,320	1,677	1,721	2,000	1,265	1,619	1,444	1,619
Gazdasági Fői.	1,969	1,885	1,409	3,536	2,059	2,647	3,300	2,848	2,204	2,789
Műszaki Fői.	1,405	0,895	0,906	1,363	1,095	1,287	1,610	1,105	1,054	0,811
Mezőgazd. Fői.	0,596	0,643	0,711	0,793	1,435	1,000	0,986	1,262	1,202	1,364
Összesen	1,276	1,244	1,149	1,294	1,346	1,355	1,329	1,470	1,210	1,359

(Boudeville 1966 nyomán). Itt hangsúlyozottan elvi lehetőségekről van szó, a konkrét vizsgálatok esetében általában nem minden típusba kerül területegység. Ez a tipizálás annyiban mutat túl a bevezetésben már jelzett hat típuson, hogy az ágazati és területi tényező azonos előjel esetében újabb bontást tartalmaz, a tényezők nagyságát is figyelembe véve.

1.2. *Példa a shift-analízis alkalmazására*

A könyv végén levő Irodalomjegyzékben felsorolt hazai és külföldi munkák túlnyomó többsége a termelés vagy a foglalkoztatottak területileg differenciált növekedésének elemzésére használja a módszert. Ehelyütt egy, a korábbi vizsgálatokban nem szereplő problémakör elemzését szerepeltetjük, ezzel is érzékeltetve a módszer sokirányú alkalmazási lehetőségeit.

Példánkban a felsőfokú továbbtanulás megyék és fő képzési ágak szerinti alakulását elemezzük a hetvenes években. Adataink, ill. az eredmények részletes elemzése nem célunk, elsősorban a módszerhez szükséges adatbázis jellegének és a fő számítási lépcsőknek a bemutatására törekszik.

A *15. táblázat* összevontan tartalmazza a T és T^* mátrixokat. Lényeges megjegyeznünk, hogy a shift-analízisben az alapadatok mindig *abszolút számok*, s nem százalékos megoszlások. A százalékos adatok ugyanis elfedik az egyes területek közötti tényleges nagyságarányokat.

A *16. táblázat* az M mátrix egy konkrét példája. Itt már lehetőség van bizonyos elsődleges elemzésre is. Esetünkben pl. leolvasható a táblázatról, hogy mely szakágakban volt a legdinamikusabb (pedagógusképzés három szintje, a gazdasági főiskolák), ill. a legkisebb (a műszaki- és agráregyetemek, a mezőgazdasági főiskolák) a hallgatólétszám növekedése az adott időszakban.

Ugyanígy a megyék is minősíthetők. A két szélső póluson Zala megye (1,619), ill. Budapest (1,012) áll.

szám = 1)

Nógrád	Pest	Somogy	Szabolcs-Szatmár	Szolnok	Tolna	Vas	Veszprém	Zala	Budapest	Összesen
1,551	1,300	1,043	1,427	1,028	1,354	1,025	1,266	1,818	0,983	1,144
0,940	1,031	0,896	1,114	1,007	0,964	0,915	0,924	0,969	0,771	0,910
1,230	1,028	0,798	0,927	0,992	1,037	0,929	1,017	1,188	0,939	1,042
0,968	0,825	0,795	0,685	0,813	0,902	0,943	0,648	1,452	0,997	0,905
1,965	1,247	1,444	1,277	1,738	1,365	2,265	1,696	2,838	2,551	1,793
2,275	3,598	2,278	1,482	1,679	3,810	1,629	1,538	3,296	3,745	2,375
4,286	1,569	1,933	2,556	2,044	3,304	3,241	2,068	1,964	1,294	2,700
1,158	2,139	0,941	1,643	1,708	2,000	3,000	3,545	1,222	1,235	1,395
2,862	1,554	1,917	2,583	2,680	2,069	3,313	3,116	7,353	1,068	1,772
0,870	0,955	1,000	0,950	0,944	0,804	1,005	1,313	1,370	0,792	1,004
0,672	0,831	0,626	0,710	0,990	0,877	0,515	0,530	0,393	1,281	0,837
1,317	1,226	1,090	1,142	1,162	1,283	1,223	1,166	1,619	1,012	1,189

A *15.* és *16. táblázat*ban szereplő adatok segítségével – az 1.1 pontban már leírt módon – számítható az összes változás (S_{tj}), az ágazati (S_{pj}), valamint a területi (S_{kj}) tényező értéke. Ezeket az adatokat tartalmazza a *17. táblázat.*

17. TÁBLÁZAT

A shift-analízis végeredménye

Megyék	Összes változás S_{tj}	Ágazati tényező S_{pj}	Területi tényező S_{kj}
Baranya	174	32	142
Bács-Kiskun	122	49	73
Békés	− 77	97	−174
Borsod-Abaúj-Zemplén	392	24	368
Csongrád	337	−20	357
Fejér	233	12	221
Győr-Sopron	295	29	266
Hajdú-Bihar	643	− 3	646
Heves	34	90	− 56
Komárom	229	99	130
Nógrád	106	18	88
Pest	103	122	− 19
Somogy	−152	75	−227
Szabolcs-Szatmár	−116	268	−384
Szolnok	− 55	62	−117
Tolna	104	44	60
Vas	51	45	6
Veszprém	−43	5	−48
Zala	436	107	329
Budapest	−2 824	−854	−1 970

Az eredmények a korábban említett módon térképezhetők. Elemezhetők az ágazati és területi tényező megyénkénti nagyságviszonyai. Ebből a szempontból a *17. táblázat*ból kiolvasható pl. az, hogy a 20 területegység közül 17-ben a területi tényező abszolút értéke fölülmúlja az ágazatiét. Ez arra utal, hogy egyes képzési ágak kiemelt, gyorsabb fejlesztése vagy visszafogása a jelenlegi területi beiskolázási séma mellett kevésbé befolyásolja a továbbtanulók számát, ami jórészt annak következménye, hogy megyénként a továbbtanulók szakági szerkezete elég hasonló. Egy területileg specializáltabb intézményhálózat hatására minden valószínűséggel kialakuló specializáltabb megyei beiskolázási szerkezet esetében a nagy ágazati ütemkülönbségeknek jelentősebb területi hatása lehet.

A *18. táblázat*ban a shift-analízis eredményeként kialakítható típusokat mutattuk be. Számszerű jellemzőként itt a növekedési többlet, ill. hiány relatív értékét

18. TÁBLÁZAT

A megyék csoportosítása a shift-analízis alapján

Típusok megyék	A többlet, ill. a hiány az 1979/80-as létszám százalékában	
A) Pozitív ágazati — pozitív területi tényező		
Zala	26,5	
Komárom	12,5	
Fejér	12,2	
Győr-Sopron	10,5	
Nógrád	9,7	
Borsod-Abaúj-Zemplén	8,1	
Tolna	7,3	Relatív növekedési többlet
Baranya	6,8	
Bács-Kiskun	4,4	
Vas*	2,8	$S_{ti} > 0$
B) Pozitív ágazati — negatív területi tényező		
Pest	3,0	
Heves	1,8	
C) Negatív ágazati — pozitív területi tényező		
Hajdú-Bihar	19,2	
Csongrád	11,6	
D) Negatív ágazati — negatív területi tényező		
Budapest	−17,5	
E) Pozitív ágazati — negatív területi tényező		Relatív növekedési hiány
Veszprém	− 2,0	
Szolnok	− 2,3	$S_{ti} < 0$
Békés	− 3,5	
Szabolcs-Szatmár	− 4,1	
Somogy	− 9,1	

* Vas az A) típuson belül altípust képvisel, mivel itt az ágazati tényező súlya nagyobb a területinél, míg a többi megyében fordított a helyzet (lásd *17. táblázat*).

szerepeltetjük. Az elvileg lehetséges 8 típus közül 6 szerepel. A típusba sorolás jelzi az esélykülönbségek kiegyenlítődését a főváros és a vidék között. Budapest önálló, a legnagyobb növekedési hiánnyal rendelkező típus. Érdekes felfigyelni arra, hogy Csongrád és Hajdú-Bihar megye (a két legjelentősebb vidéki intézményszékhely megyéje) milyen jelentős többletet mutat. Ez a tény a főváros és a vidék közötti nivellálódás folyamatával párhuzamosan a vidéki térségeken belül végbemenő további polarizációt tükrözi a legjelentősebb intézményszékhelyek körzetei javára.

A *17.* és *18. táblázat*ban bemutatott számítási eredmények pontosabb értelmezéséhez természetesen felhasználhatók a *15.* és *16. táblázat* adatai, amelyek módot adnak az erősen aggregált végeredmények belső komponenseinek feltárására.

A fentebb ismertetett példa is jól érzékelteti, hogy a módszer – bár nem lép túl az elemi matematikai műveleteken – rendkívül számításigényes, ezért ismétlődő alkalmazása esetén számítógép felhasználását igényli.

2. *Háromszög-diagram*

Napjainkban a számítástechnika gyors terjedésének köszönhetően egyre nagyobb méretű és komplexebb feladatok elvégzésére vagyunk képesek. Sokszor azonban emiatt elfeledkezünk azokról az egyszerű és a kitűzött célt jól leíró módszerekről, amelyekkel már régóta rendelkezünk.

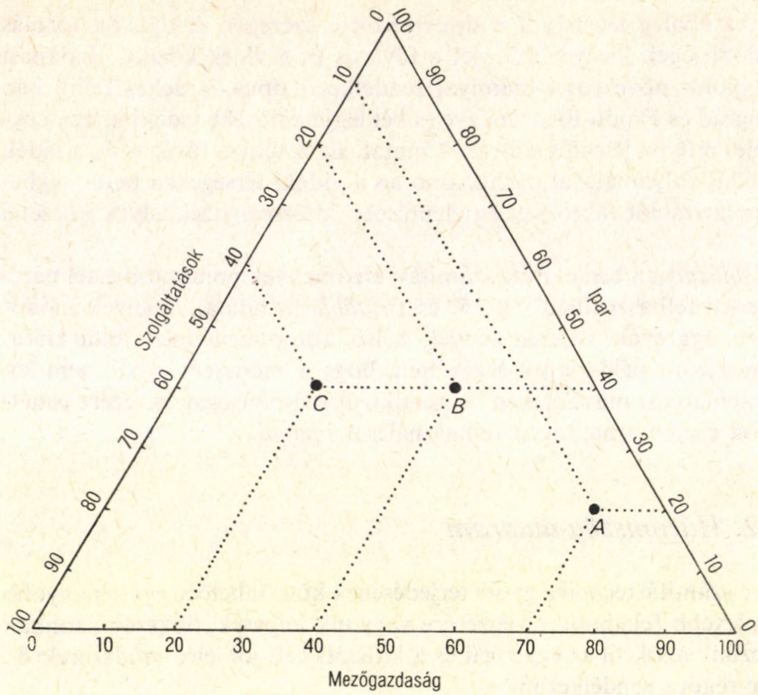
Ezek az egyszerűbb módszerek sokszor nagy szolgálatot tesznek – pl. a faktoranalízist megelőzően a mutatók megválasztásához, vagy a shift-analízis alkalmazása esetén a mutatók helyes értelmezéséhez.

Ilyen módszer a háromszög-diagram is, amely a háromdimenziós, megoszlási viszonyszámokból álló struktúrák (pl. a foglalkoztatottság vagy a termelési érték három fő gazdasági szektor szerinti megoszlását mutató vektorok) összevetését, a struktúra-átalakulás folyamatának szemléltetését szolgálja.

A háromszög-diagram, mint speciális koordináta-rendszer alkalmazását egy matematikai tétel teszi lehetővé. Ez kimondja, hogy ha egy szabályos háromszög belső pontjából kiindulva párhuzamosokat húzunk az oldalakkal, akkor a pontból ily módon a háromszög oldalaihoz húzott három szakasz összege állandó, független a pont helyzetétől, egyenlő a háromszög oldalának hosszával. Jelölje az alábbi három vektor *A*, *B* és *C* ország foglalkoztatottjainak megoszlását a három fő gazdasági szektor között (mezőgazdaság, ipar, szolgáltatások sorrendben):

$$A(70;20;10) \quad B(40;40;20) \quad C(20;40;40).$$

Az ábrázoláshoz vegyünk fel egy szabályos háromszöget, oldalait – ezek lesznek a három ágazat tengelyei – osszuk fel 0 és 100 közötti egységekre *(22. ábra)*. *A* ország helyzetének meghatározásakor a mezőgazdaság-tengely 70-es egységétől párhuzamost húzunk a szolgáltatás-tengellyel, az ipar-tengely 20-as egységétől a mezőgazdaság-tengellyel, a szolgáltatás-tengely 10-es egységétől az ipar-tengelylyel (általánosabban fogalmazva, az egyes oldalaktól elinduló szakaszok mindig az adott oldalra az óramutató járásával megegyező irányban következő oldallal



22. ábra. Háromszög-diagram

párhuzamosak). Az így húzott szakaszok – az említett matematikai tétellel összhangban – mindig egy pontban metszik egymást, kijelölve *A* helyzetét. Az így szerkesztett háromszög-diagramban az elmaradott (mezőgazdasági túlsúlyú) területek a jobb alsó sarokban, a fejlettebb térségek ettől balra és magasabban találhatók. A módszer nemzetközi összevetésre és időbeli folyamatok megjelenítésére is alkalmas.

3. *Területegységek ágazati struktúrájának összehasonlítása*

A területi struktúra fogalmát a szakirodalom általában *kettős értelemben* használja. Egyrészt területi struktúráról beszélünk pl. akkor, ha valamely területegység gazdaságának ágazati szerkezetét vagy a településhálózat tagozódását, a népesség demográfiai, foglalkozási szerkezetét vizsgáljuk, másrészt egy adott ország vagy régió területi struktúráján a gazdasági objektumok, települések, a közöttük fennálló hierarchikus kapcsolatok és a regionális tőke-, népesség-, nyersanyag vagy késztermék-áramlások térbeli hálóját, rendszerét értjük. Rendszeranalógiákat használva az előbbi értelmezés a területegységek, mint rendszerelemek belső szerkezeti sajátosságaira utal, míg az utóbbi az elemek és a közöttük levő *kapcsolatok*, *viszonyok*, *hierarchiák* térbeli hálóját jelenti. A következőkben bemutatásra kerülő módszerek az *első* megközelítés szerinti struktúrák összehasonlítására adnak lehetőséget.[21]

Az itt bemutatásra kerülő módszerek a *vektor* matematikai fogalmán alapulnak. Felhasználásukra a területi kutatásokban leggyakrabban a gazdasági szerkezet területi összehasonlításakor a termelési, foglalkozási struktúra időbeli változásának elemzésekor kerülhet sor. A termelés, a foglalkoztatás területi szerkezetének vizsgálatát az emeli ki a felhasználási területek közül, hogy köztudottan a gazdaság *területi* fejlődése szorosan összefonódik az *ágazati* szerkezet változásával. Így a gazdaságilag legelmaradottabb területek fejlesztése világszerte leggyakrabban a térségek iparosítását jelentette és a kevésbé fejlett országokban jelenti ma is. A strukturális különbségek bemutatásra kerülő mérőszámai szoros rokonságban vannak az előzőekben már ismertetett területi egyenlőtlenségi mutatókkal, de míg ott egydimenziós (skalár jellegű) adatsorokat jellemeztünk, itt többdimenziós (vektor jellegű) adatok, megoszlások, struktúrák kerülnek összevetésre. Struktúrák összehasonlítása, a közöttük levő különbségek mérése akkor lehetséges, ha maguk a struktúrák számszerűen jellemezhetők, ill. jellemzettek. Egy vizsgálati egység (ország, régió) struktúrája akkor mérhető, ha hozzárendelhető egy $a = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$ strukturális vektor (pl. a foglalkoztatottak ágazati megoszlása, vagy a korszerkezet vagy a legáltalánosabb esetben n darab tetszőleges jelzőszám). Két vizsgálati egység struktúrája akkor hasonlítható össze, ha két megfelelő strukturális vektorra (a és b) fennáll, hogy bármelyik i-re az a_i és b_i komponensek azonos tartalmúak és a két vektor dimenzió-száma megegyezik.

A strukturális eltérések mérőszámainak teljesíteni kell az alábbi követelményeket:

a) a mérőszám ne mutasson különbséget, ha egy adott a struktúra vagy egy $c \cdot a$ (vele megegyező) csak egy pozitív konstanssal, c-vel szorzott struktúra eltérését méri egy másik struktúrától, azaz (a struktúra mérőszámát általánosságban H-val jelölve):

$$H(a, b) = H(c \cdot a, b);$$

b) a H mérőszám akkor és csak akkor legyen zérus, ha

$a = c \cdot b$ $(c > 0)$, egyébként

$H(a, b) > 0$, azaz a mértékszám *pozitív* érték;

c) a H mutatószám legyen szimmetrikus, azaz

$$H(a, b) = H(b, a);$$

d) teljesüljön az ún. háromszög-egyenlőtlenség

$$H(a, b) + H(b, c) \geq H(a, c).$$

E követelményeknek a következő mérőszámok eleget tesznek; s ily módon bármely olyan esetben felhasználhatók területi összehasonlításra, amikor a területegységeket egy-egy n dimenziós vektorral jellemeztük:

[21] A fejezet témaköréből — területi alkalmazások nélkül — ad ismertetést Frigyes—Simon (1972).

1. Két strukturális vektor *hajlásszöge* (h); amely az alábbi összefüggés alapján számolható:

$$\cos h = \frac{(a \cdot b)}{|a| \cdot |b|}.$$

2. Két, egységnyi hosszúságúra normált strukturális vektor távolsága (d):

$$d(a, b) = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} \left(\frac{a_i}{|a|} - \frac{b_i}{|b|} \right)^2}.$$

E két mutatószám a fentiekben legáltalánosabban értelmezett struktúrák összevetésére alkalmas. Bizonyos speciális, de gyakran előforduló esetekben (pl. amikor az adott struktúravektorok olyan megoldási viszonyszámokból állanak, amelyeknek összege 100) természetesen más, egyszerűbb mutatószámok is használhatók struktúrák összevetésére, így mindenekelőtt a területi egyenlőtlenségi mutatók között már bemutatott *Hoover-féle egyenlőtlenségi index* (l. I. fejezet, 6.3.1 pont), vagy a strukturális vektorok egyszerű különbsége, amely főként abban az esetben hasznos, amikor arra is kíváncsiak vagyunk, hogy az egyes dimenziókban különkülön mekkora az eltérés két területi strukturális vektor között.

A sok lehetséges alkalmazási terület közül a következő problémakört emeljük ki; a területi egyenlőtlenségek, a gazdasági fejlettség területi különbségeinek vizsgálata során gyakran felmerülő kérdés a fejlettség és az ágazati szerkezet viszonya. Elemzésre érdemes az a kérdés is, hogy a nagy fejlettségi, jövedelmi elkülönülés, diszparitás az egyes országok területegységei között vajon egyúttal azt is jelenti-e, hogy a területegységek gazdasági struktúrája is élesen különbözik egymástól? A *19. táblázat*ban tíz európai ország példáján vizsgáljuk, hogy az egy főre jutó

19. TÁBLÁZAT

Az egy főre jutó nemzeti jövedelem (GDP) területi relatív szóródása (V) és a nemzeti jövedelem ágazati szerkezetének területi különbségei (H) néhány európai országban

Ország	Év	Terület-egységek száma	*H*	*V*
Spanyolország	1962	17	18,6	38,0
Szovjetunió	1968	19	14,5	22,0
Lengyelország	1970	17	11,0	18,1
Olaszország	1968	20	10,4	27,1
Ausztria	1972	9	9,9	20,8
Belgium	1966	9	8,9	18,2
Franciaország	1975	21	8,6	25,9
Hollandia	1965	11	8,6	12,3
Jugoszlávia	1975	8	8,2	40,7
NSZK	1973	10	5,5	14,4

Forrás: Nemes Nagy J. (1980): A regionális gazdasági fejlődés összehasonlító és dinamikus vizsgálata. Kandidátusi ért., Bp., p. 125.

nemzeti jövedelem területi relatív szóródása (v) és a nemzeti jövedelemnek a három fő gazdasági ág szerinti struktúrájában meglevő területi különbség viszonya milyen. A *19. táblázat*ban szereplő H indexet az alábbiak szerint számoltuk:

$$H = \frac{\sum_{i=1}^{n} h_i}{n},$$

ahol h_i – az adott ország i-edik területegysége struktúra-vektorának eltérése az országos struktúra-vektortól (a struktúra-vektorok hajlásszögével számolva),

n – a területegységek száma az adott országban.

Minden ország esetében tehát kiszámítottuk a nemzeti jövedelem országos ágazati szerkezetének vektora és a területegységek megfelelő strukturális vektorainak hajlásszögét és ezen értéket átlagoltuk.

H az adott országra jellemző területi strukturális heterogenitási érték a nemzeti jövedelem ágazati szerkezete alapján. Elméletileg lehetséges minimuma 0, maximuma 90 fok. A minimum esetében minden területegység struktúra-vektora azonos lenne az országos átlaggal; a maximumot olyan esetben kapnánk, amikor az átlag teljesen eltérő területi szerkezetekből (pl. csak mezőgazdasági és csak ipari területekből) tevődik össze.

Ez a minta – amely a benne szereplő országok viszonylag kis száma miatt, valamint azért, mert ezek az országok a világméretű fejlettségi skálának egy viszonylag szűk felső sávját reprezentálják, semmiképpen sem tekinthető egyértelműen bizonyító erejűnek – nem igazolja azt a hipotézist, hogy az éles fejlettségi elkülönülés és a strukturális heterogenitás feltétlenül együttjár. H és v között a Spearman-féle rangkorreláció értéke csak 0,26. Igaz ugyanakkor az, hogy ez a laza kapcsolat jórészt három ország (Jugoszlávia, Lengyelország és Franciaország) értékpárjainak köszönhető, míg a többi ország nagyon közeli pozíciót foglal el a két mutató szerinti rangsorban. A fejlettség szempontjából nagyon kiegyenlített Hollandia és NSZK területegységei az ágazati szerkezet szempontjával is nagyon hasonlók, mindegyikben a tercier szektor és az ipar dominál. Spanyolországban a H érték abból adódik, hogy az országos ágazati szerkezet élesen eltérő gazdasági jellegű területegységek „átlaga": a két nagyvárosban, Madridban és Barcelonában a tercier szektor a domináns, az északi (baszk) tartományok ipari jellegűek, míg az ország elmaradott középső és déli körzetei egyoldalú agrárvidékek. A fejlettség és a struktúra további – e módszertani megközelítésen messze túlmutató – összefüggéseire e helyütt nincs módunkban kitérni, ezeket a kutató a vizsgálatok során a rendelkezésre álló alapadatok segítségével lehet elemezni.

VI. *Fizikai analógiákon alapuló területi elemzési módszerek*

1. *Súlypontmódszer*

A területi fejlettségi különbségek, a területi koncentráció statisztikai mutatószámai (területi szóródás, különböző egyenlőtlenségi és koncentráltsági indexek, entrópia stb.) használatának a földrajzi elemzésben alapvető hiányossága az, hogy bár ezek mérik a területi egyenlőtlenségek nagyságát, ill. két időpontot összevetve megállapítható belőlük a kiegyenlítődés vagy a differenciálódás mértéke, de az adott jelenség *térbeli szerkezet*ére, a változások térbeli irányára vonatkozó explicit információt nem tartalmaznak. Kétségtelen, hogy az időbeli összehasonlítás során az adatok térképezésével szemléletes képet kaphatunk a térbeli átrendeződésről, de ennek egzaktabb mérése pusztán a térképek vizuális értékelése alapján nem lehetséges, így újabb módszerek felhasználására van szükség. A két megközelítés — a *mennyiségi* viszonyokat jellemző statisztikai analízis és a térszerkezetet *szemléletesen* feltáró térképi ábrázolás — egyesítésében a földrajznak a ***fizikából átvett analógiák*** nyújtanak segítséget. Ezek egyike a térbeli népességi és gazdasági folyamatok jellemzésére használható ***súlypontszámítás.***

1.1. *A súlypontszámítás menete*

Egy n pontból álló síkbeli rendszer súlypontjának koordinátái, ha a pontok helyzete koordináta-rendszerben adott és minden ponthoz egy-egy „súly" (tömeg) tartozik, a pontok koordinátáinak súlyozott számtani átlagaként számíthatók:

$$x = \frac{\sum_{i=1}^{n} f_i x_i}{\sum_{i=1}^{n} f_i}, \quad y = \frac{\sum_{i=1}^{n} f_i y_i}{\sum_{i=1}^{n} f_i},$$

ahol x és y a súlypont két koordinátáját; x_i és y_i az egyes pontok koordinátáit; f_i a pontokhoz tartozó súlyokat jelöli.

A fenti modellnek egyértelműen megfeleltethető bármely területegység, ország népességének területi megoszlása, amelyet ha térképen ábrázolunk, akkor a pontok a települések, a súlyok a népességszámok lesznek. A népességi súlypont kiszámításával a területi megoszlás *középérték*ét kapjuk meg.

A pontok koordinátáit vagy a települések középpontjának földrajzi szélességi és hosszúsági adatai alapján határozzák meg, vagy a térképre egy tetszőleges új derékszögű koordináta-rendszert rajzolnak fel, s erről olvassák le a pontok koordinátáit. A koordináta-rendszer többféleképpen elhelyezhető. Általában a térkép bal sarkában veszik fel az origót, mivel így minden koordináta pozitív előjelű lesz. Magyarország esetében előnyös az olyan elhelyezés, amelyen az origó Budapest középpontjában van, mert így a kiszámított súlypontok koordinátáinak előjeléből azonnal leolvasható a fővároshoz viszonyított földrajzi irányuk.

A tájékoztató jelleggel végzett, nagyobb összefüggések feltárására irányuló számítások során nem feltétlenül szükséges minden települést külön pontként szerepeltetni. Ilyenkor egy-egy terülegegység (pl. megye) egész népességét a terület előzetesen számított népességi súlypontjába, esetleg közigazgatási központjába koncentráltnak véve, kevesebb pont alapján is jól használható eredményekhez juthatunk.

Ha a súlypontszámításnál az alappontok (települések) súlyaként nem a népességszámot, hanem az adott helyen előállított termelési értéket, nemzeti jövedelmet használjuk, egy, a népességi súlyponttól mindig eltérő helyzetű területi középértékhez, a *gazdasági* súlyponthoz jutunk.

Ha rendelkezésünkre állnak a geometriai, népességi, gazdasági vagy egyéb más tartalmú súlypontok, akkor ezeket lényegében két fő szempont alapján vizsgálhatjuk, s vonhatunk le belőlük következtetéseket:

– elemezhetjük *önmagukban* az egyes súlypontokat, azok elhelyezkedését, ill. időbeli mozgását;
– vizsgálhatjuk a különböző súlypontok *egymáshoz viszonyított* helyzetét.

A súlypontok helyzete – miként a fentiekben már említettük – az adott jelenség területi megoszlásának középértékét mutatja. A súlypontok *elmozdulásának* üteme és iránya a népesség vagy a gazdaság területi átrendeződésének folyamatáról ad szintetikus információt.

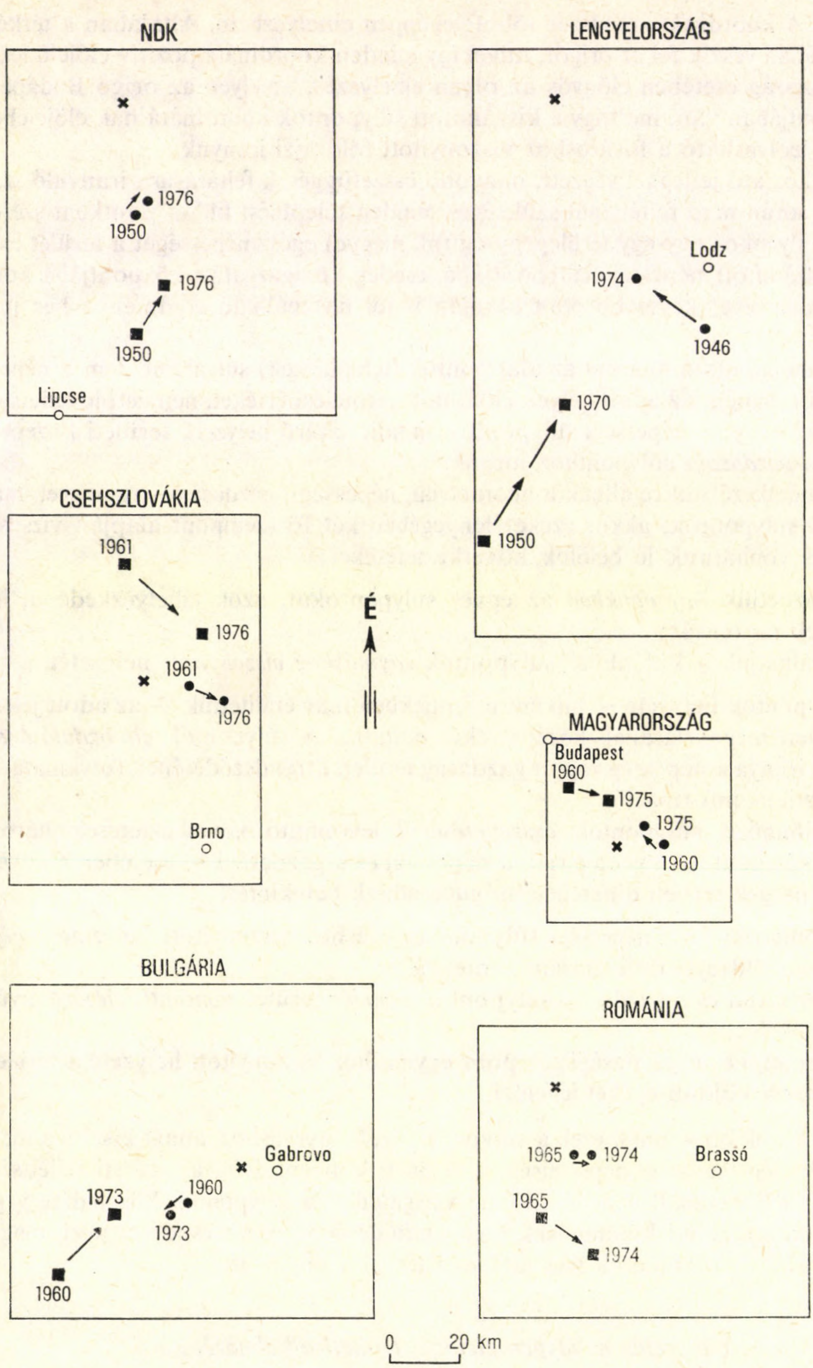
A különböző súlypontok *összevetéséből* levonható következtetések három konkrét súlypont – a geometriai, a népességi és a gazdasági – esetében a következő jelenségek térbeli differenciáltságába adnak betekintést:

– a geometriai és a népességi súlypont egymáshoz viszonyított helyzete a *népsűrűség* földrajzi differenciáit szintetizálja;
– a geometriai és a gazdasági súlypont *a termelés* területi *koncentrációjáról* nyújt információt;
– a népességi és a gazdasági súlypont egymáshoz viszonyított helyzete a területi *fejlettségi* különbségeket jellemzi.

Minél közelebb vannak ezek a súlypont-párok egymáshoz, annál kisebb a megfelelő jelenség (tehát a népsűrűség, a területi koncentráció, a területi fejlettség) regionális differenciáltsága, ill. időben vizsgálódva a súlypontok közeledése vagy távolodása a területi különbségek kiegyenlítődését vagy növekedését jelzi, magában foglalva a folyamatok meghatározó térbeli irányait is.

1.2. *Példa a súlypontelemzés területi alkalmazására*

A súlypontelemzést hat európai szocialista ország területi gazdasági folyamatainak elemzésére használtuk *(23. ábra)*.



23. ábra. A népességi és ipari termelési súlypont mozgása az európai KGST országokban
× = geometriai súlypont; ● = népességi súlypont; ■ = ipari termelési súlypont

Számításaink során alapként az európai szocialista országokat ábrázoló 1 : 2 000 000 méretarányú térképet használtunk. Az alkalmazott koordináta-rendszer középpontja (az origó) Budapest volt. Ehhez a ponthoz viszonyítottuk a többi alappontot, amelyek az adott országok közigazgatási egységeinek (megye, Bezirk, Vajdaság, Kraj, judet, okrug) központjai voltak. A koordináta-rendszert É–D és K–Ny irányban vettük fel; 1 egységnek 80 km távolság felelt meg. Súlyként az adott közigazgatási egységek népességszámát és az ipari termelés értékét használtuk. A külön közigazgatási egységként szereplő nagyvárosokat (Budapest, Prága, Bratislava, Bukarest, Szófia, Wroclaw, Poznan, Lódz, Krakkó) a környező területegységhez számítottuk.

Minden országra kiszámítottuk (két időpontra) a geometriai (ennek helyzete természetesen nem változik), a népességi és az ipari termelési súlypontokat. Anélkül, hogy a számítási eredményeket e helyütt részletesen ismertetnénk, néhány összefoglaló – az ábráról szemléletesen is leolvasható – összefüggést említünk:

- az ipari súlypont (Csehszlovákiát kivéve) mindenütt távolabb van a geometriai súlyponttól, mint a népességi; ez azt jelzi, hogy a ipar területi koncentráltsága meghaladja a népességkoncentráció mértékét;
- a népességi súlypont elmozdulása minden országban jóval kisebb, mint az ipari termelés súlypontjáé, a népesség területi megoszlása jóval stabilabb a gazdaságénál;
- az ipari súlypont elmozdulása minden országban tartalmaz egy Kelet irányú vektort, ez a korábban elmaradott keleti zónák erőteljesebb fejlesztését és a Szovjetunióval kialakult intenzív kapcsolatok területi hatásait jelzi;
- a népességi és az ipari súlypont a vizsgált országokban (Románia kivételével) közeledett egymáshoz; ez a területi iparfejlettségi különbségek kiegyenlítődését jelzi.

1.3. *A súlypontmódszer néhány gyakorlati alkalmazásáról*

Míg a fentiekben a súlypontmódszer elméleti felhasználására mutattunk példákat, a következőkben röviden jelezzük, hogy a területi tervezés gyakorlatában miként alkalmazható a módszer.

A népességi súlypont helyzetét *telepítési döntések*ben célszerű figyelembe venni. Így volt ez az új brazil főváros, Brasilia helyének kijelölésénél, amely az ország népességi súlypontjának közelébe került. Az ausztrál főváros, Canberra megközelítőleg félúton helyezkedik el Melbourne és Sidney között. Magyarországon legújabban a solti rádióadó felépítésénél érvényesült az a szempont, hogy lehetőleg a népességi súlypont közelébe kerüljön. Ezekben az esetekben a súlypontnak azt a matematikai tulajdonságát veszik figyelembe, hogy a számításban figyelembe vett alappontoktól mért súlyozott távolságainak négyzetösszege bármely más ponttól mért távolságok összegénél kisebb. A súlypont közelébe telepített város vagy objektum az elérhetőség (rádióadó esetében a vételi lehetőség) szempontjából az ország egészét tekintve közelítőleg *optimális helyzetű.*

A népességi súlypont helye nemcsak országméretű telephelyválasztásnál lehet orientáló. Budapest népességi súlypontja a felszabadulás előtt a városközponttól nem messze, a Nagykörút közelébe esett. Ma már azonban a külső kerületek benépesülése és az 1950-es közigazgatási határváltozás következtében a Keleti pályaudvar irányába tolódott. A népességi súlypont helyzetét – városi vagy kerületi szinten is – érdemes figyelembe venni akkor, amikor az egész lakosság szükségleteit szolgáló létesítmény (üzletek, posta, tanács, pályaudvar stb.) helyéről döntenek. A végső telephelyválasztás természetesen számos egyéb fontos szempont figyelembevételével történik, s gyakran előfordul, hogy az egy szempontból elméletileg optimális hely gyakorlatilag nem jöhet számításba.

Miként a népességi súlypont, ugyanúgy a gazdasági súlypont is felhasználható a területi tervezésben, elsősorban az ipari telephelyválasztás elméleti előkészítése során. Hasznos lehet a súlypont ismerete pl. több termelő üzemet kiszolgáló raktárbázis vagy elosztóközpont, mezőgazdasági feldolgozó üzemek (pl. konzervgyárak), de kohászati vagy vegyipari létesítmények telepítésénél is. Ezekben az esetekben azonban célszerű nem a földrajzi légvonaltávolsággal, hanem a szállítási költséggel súlyozott költségtávolsággal dolgozni, mivel ez különböző áruk esetében eltérő lehet. Ilyen esetekben a kibocsátó pontok helyét a közlekedési útvonalak és a szállítási költségek alapján transzformált „költségtérben" kell meghatározni.

2. *Gravitációs- és potenciál-modellek*

A gravitációs hipotézis a Newton-féle gravitációs törvényből származtatható, amely kimondja, hogy minden anyagi test minden másik anyagi testre vonzerőt (gravitációs erőt) fejt ki, amely a két test tömegével (M_1, M_2) egyenesen, a távolságuk négyzetével (c^2) fordítottan arányos, azaz

$$F = K\frac{M_1 M_2}{c^2},$$

ahol K az ún. gravitációs állandó.

Ezt az összefüggést társadalomtudományi vizsgálatoknál először a múlt század végén használták fel, amikor rájöttek arra, hogy két, valamilyen szempontból (közlekedés, kereskedelem) központi szerepkörű város egymásra hatását a függvény elég jó megközelítéssel írja le.

A gravitációs és potenciál-modellek felhasználása a területi vizsgálatokban lényegében három nagy területre bontható. Felhasználhatók a modellek:

- vonzáskörzetek elméleti kijelölésére, lehatárolására;
- térbeli népesség- és anyagáramlások intenzitásának becslésére;
- a népesség (a települések) és a gazdasági objektumok által „generált" népességi és gazdasági erőtér, potenciálmező feltárására.

A területi alkalmazásokban a „testek" legtöbbször települések, a leggyakrabban használt „tömeg" a népességszám.

Napjainkra e modellek teljességgel integrálódtak a területi kutatásokba. Szinte minden olyan átfogó elméleti munka, amely a gazdaságföldrajz, a regionális gazdaságtan alapvető módszereivel foglalkozik, részletesen elemzi alkalmazási lehetőségeiket, összefüggésben más területi elemzési módszerekkel. A konkrét empirikus vizsgálatokban e módszereket alkalmazó kutatókon kívül ezért figyelmet érdemel E. M. Hoover (1971), P. E. Lloyd, P. Dicken (1972), W. Bunge (1967) munkája, a Models in Geography (szerk. R. J. Chorley, P. Haggett, 1967) c. kötet, valamint a magyar szerzők közül Illés I. (1975) összefoglaló munkája, amelyben rövid, de rendkívül világos és érdemi áttekintés olvasható a modellekről.

A gravitációs modellek matematikai apparátusa egyszerű, sok alappontot használva azonban rendkívül számításigényes, s így számítógépi feldolgozást igényel. Az adatelőkészítés legmunkaigényesebb fázisa az alappontok közötti $n \times n$-es szimmetrikus *távolság mátrix* összeállítása.

2.1. *Vonzáskörzetek lehatárolása gravitációs modellekkel*

Kezdetben elsősorban a piackutatók figyelme fordult a városi „intézmények" – mindenekelőtt a kereskedelem, a szolgáltatások – vonzástörvényeit feltáró gravitációs modellek felé, amelyek alkalmazásával elkerülhetőnek vélték a drága és nehézkes empirikus adatgyűjtést, vevőszámlálásokat. E modellek viszont hozzáférhető adatok – a városok lakosságszáma, a kereskedelemből élők száma, a központ áruházainak, szaküzleteinek száma, a kereskedelmi tevékenységből befolyó adók, távolság- és izokrónadatok – segítségével kísérlik meg a településközi egymásrahatások feltárását, a vonzáskörzetek kijelölését.

A gravitációs modellek a fizikai tömegvonzás analógiájára két tényezővel, a térrel és a tömeggel, tehát *távolságadatokkal* (légvonalban, közúton mért távolságok, idő- és költségtávolságok stb.) és a *központok súlyával* számolnak. A kezdeti kísérletek közül Reilly 1929-ben publikált „kiskereskedelmi vonzástörvénye" vált a legismertebbé.

Reilly feltételezte, hogy két kereskedelmi központnak, *A* és *B* városnak egy köztük fekvő *X* településre gyakorolt vonzó hatása egyenesen arányos az *A* és *B* városok lakosságszámával és fordítottan arányos az *X* távolságának négyzetével:

$$\frac{A \text{ vonzása } X\text{-re}}{B \text{ vonzása } X\text{-re}} = \frac{A \text{ lakosságszáma}}{B \text{ lakosságszáma}} \cdot \frac{BX \text{ távolság}^2}{AX \text{ távolság}^2}.$$

Ebből következik, hogy két város (kereskedelmi) vonzáskörzetét elválasztó határvonal azon pontok mértani helye, amelyek számára

$$R_{xa} = \sqrt{\frac{L_a \cdot R_{xb}^2}{L_b}},$$

ahol R_{xa} – *A* város távolsága a vonzáskörzeti határon levő bármely x ponttól,
R_{xb} – *B* város távolsága a vonzáskörzeti határon levő bármely x ponttól,
L_a – *A* város lakosságszáma,
L_b – *B* város lakosságszáma.

Ugyanis:

$$\frac{L_b}{L_a} = \frac{R_{xa}^2}{R_{bx}^2} \tag{1}$$

$$\frac{L_b}{R_{xb}^2} = \frac{L_a}{R_{xa}^2} \tag{2}$$

$$L_b \cdot R_{xa}^2 = L_a \cdot R_{xb}^2 \tag{3}$$

$$R_{xa} = \sqrt{\frac{L_a \cdot R_{xb}^2}{L_b}}. \tag{4}$$

Ha pl. *A* városnak 10 ezer, *B* városnak 40 ezer lakosa van, a közöttük levő távolság pedig 50 km, akkor

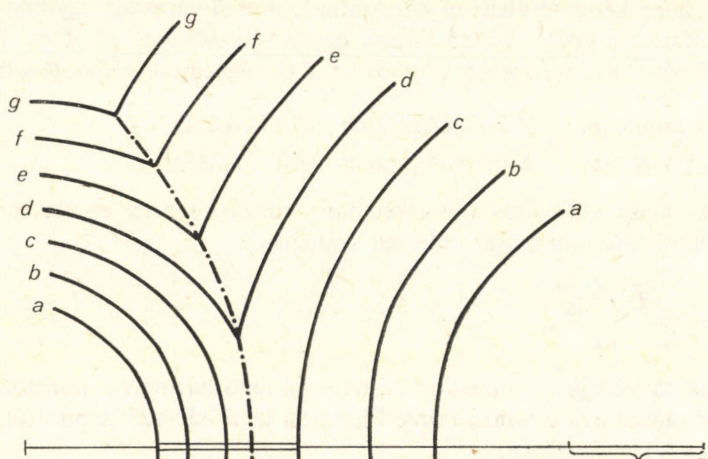
$$R_{xa} = \sqrt{\frac{10\,000 \cdot 50^2}{40\,000}} = 25\,,$$

Ha	R_{xb}	50	45	40	35	33,33 km
Akkor	R_{xa}	25	22,5	20	17,5	16,66 km
A metszéspont jele a *24. ábrán*		*g*	*f*	*e*	*d*	*x*

Az értéktáblázat segítségével megrajzolhatjuk a két város (kereskedelmi) vonzáskörzete közötti határvonalat *(24. ábra)*.

Maga Reilly mintegy 150 amerikai város kiskereskedelmi vonzáskörzetét jelölte ki a fenti módszerrel, s az eredményekkel igazoltnak látta eljárását.

Reilly alapgondolatát megtartva, a gravitációs modellek alkalmazói egyrészt az egyszerű távolság- és lakosságszám-adatok helyett érzékenyebb, pontosabb



24. ábra. Két város vonzáskörzete közötti határvonal (A Reilly formula álapján) *A, B* = a vizsgált városok; *a, b, c, d, e, f, g* = a városok vonzáskörzetét lehatároló vonalak (l. a szövegben)

„tömeg- és távolság-adatokat” kerestek, másrészt mind bonyolultabb matematikai apparátus bevezetésével tökéletesítették a gravitációs modelleket. Bővült az alkalmazási területük is.

A centrumok központi szerepkörének – gravitációs modellek tömegének – kifejezésére a lakosságszámnál érzékenyebb mutatókat alkalmaztak (felismerve, hogy a lakosságszám és a városi szerepkör mértéke között jelentős eltérések lehetnek). A kiskereskedelem vonzásának vizsgálatakor kézenfekvő a *forgalom nagyságának* vagy a *bolthálózat adatainak* felhasználása. O. Tuominen (1949) finnországi vizsgálatai során pl. úgy találta, hogy a vonzáskörzetek kiterjedése nem a központok lakosságszámával, hanem a város szaküzletei számának négyzetgyökével arányos. Két város közti távolságot a vonzáskörzeteik közti határ oly távolságarányban metszi, mint a „kereskedelmi erősségi számuk” közti arány.

A vonzáskörzeteket a következő módon kapjuk meg: a vonzáskörzeteket a kisebb centrumokat közrefogó körök határolják. E körök központja a centrumokat összekötő egyenesen van; a kör s ezen egyenes metszéspontjait a következő képlet adja:

$$\frac{S_1 \cdot 100}{S_1 + S_2}\% \quad \text{és} \quad \frac{S_1 \cdot 100}{S_1 - S_2}\%,$$

ahol S_1 – a jelentősebb centrum erősségi száma,
S_2 – a kisebb centrum erősségi száma.

Például: a *24. ábrán* feltüntetett *A* város boltjainak száma 100, „kereskedelmi erősségi száma”:

$$S_1 = \sqrt{100} = 10.$$

B város boltjainak száma 25; erősségi száma tehát 5.

Tehát $$\frac{10 \cdot 100}{10 + 5}\% = 66{,}6\% \quad \text{és} \quad \frac{10 \cdot 100}{10 - 5}\% = 200\%.$$

Vagyis a kör az egyenest az *A* várostól az *AB* távolság 66,6%-ában (20 km) és 200%-ában (60 km) metszi, központja tehát *A* várostól 40 km-re van.

C. A. Thorwid eljárása (1963) a következő volt: a központok lakosságszáma helyett a kiskereskedelmi alkalmazottak számával fejezte ki a „tömeget”, majd a

$$\frac{T}{1 + \sqrt{\frac{L_b}{L_a}}}$$

képletet akként módosította, hogy eltérő hierarchikus fokozatú központok esetében nem négyzet-, hanem köb-, negyedik gyökkel számolt képletében.

(A képlet Reilly formulájának más alakban való felírása.)

Reilly formulájának hazai alkalmazását elsőként Beluszky (1967, 1981) kísérelte meg. A munka során összehasonlította a Délkelet-Alföld, az ország ÉK-i része és a Kisalföld tapasztalati úton kijelölt vonzáskörzeteit a kapott hipotetikus vonzáskörzetekkel. Nem kapott egyértelműen kedvező eredményt, ami azonban az alkalmazott modell eredménye is lehetett. A Kisalföldön feltűnő az empirikus s a „modellezett" vonzáskörzet-rendszer hasonlósága. Különösen a szomszédos központokat összekötő egyeneseket metszik közel azonos helyen az empirikus úton nyert, s a gravitációs modell adatai alapján kijelölt határok (Győr–Csorna, Győr–Mosonmagyaróvár, Győr–Pápa, Sárvár–Celldömölk, Kapuvár–Csorna stb.). Mindez arra utal, hogy a gravitációs modell útján nyert eredmények használható elemeket tartalmaznak. Természetesen nem hagyhatjuk figyelmen kívül, hogy a Kisalföldön a földrajzi környezet meglehetősen homogén, a közlekedési hálózat sűrű, a településhálózat kis- és középfalvakból, valamint határozott profilú, *helyzeti* energiában felnőtt, tehát „szabályszerűen", a központi helyek törvényszerűségei szerint elhelyezkedő városokból áll. A központok lakosságszáma és kiskereskedelmi szerepköre között szoros korreláció áll fenn (a vizsgálat éveiben a korrelációs együttható +0,97 volt).

A Délkelet-Alföldön már jelentős különbségek adódtak, az ország ÉK-i részének vizsgálatánál pedig a két eredmény teljesen eltért egymástól.

Papp A. (1978) az Észak-Tiszántúl városainak vonzáskörzeteit vizsgálva a központok „súlyát" a következő 9 mutatóból képezte:

- a lakónépesség száma,
- a szocialista ipar munkahelyeinek száma,
- a szocialista ipar állóeszközeinek bruttó értéke,
- a közép-, és felsőfokú oktatási intézmények tanulóinak száma,
- a kórházi ágyak száma,
- az SZTK szakrendelési óráinak száma,
- a kiskereskedelmi forgalom évi Ft értéke,
- a lakossági javító szolgáltatások felvevőhelyeinek száma,
- a helyközi autóbuszjáratok és személyvonatok száma.

Az adatokat táblázatba rendezte a szerző úgy, hogy a tábla 9 oszlopa a számításba vett tényezőket, sorai pedig a központok adatait tartalmazták. Az egyes központok különböző tényezőinek ($y_1, \ldots, y_9$) értékeit a négyzetes átlageltéréssel:

$$V = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n} (\bar{y}_i - \bar{y})^2}{n}}$$

osztva, összevonható hányadosok képződtek. Ezeket soronként (központonként) összegezve alakult ki a felsorolt tényezők komplex mutatója. Ez a *komplex mutató* került be Reilly fent közölt képletébe.

Lackó L. (1978) három hierarchiaszintre végezte el a települések vonzáskörzeteinek gravitációs modell segítségével történő meghatározását. A vonzásközpontok (Budapest és a kiemelt felsőfokú központok; Budapest és a felsőfokú központok; a pozitív faktorpontértékkel rendelkező települések) tömegét – N. M. Hansen munkájára támaszkodva – a településhierarchia mérésére is alkalmas naturális mutatók faktoranalízise során számította ki, a településhierarchiát faktorpontértékekkel adta meg. Az elemzés során kiderült, hogy minél inkább homogén a településrendszer, az eredmény annál inkább értékelhető, de maga a módszer a ténylegesen meglevő vonzáskörzetek feltárására ebben a formában nem alkalmas.

2.2. *Térbeli népesség- és anyagáramlások vizsgálata gravitációs modellel*

Már a modellek alkalmazásának kezdeti szakaszában kiszélesítették alkalmazási területét is. Alkalmazták pl. a modellt a városok belső szerkezetének vizsgálatára. A modellt a kezdeti időben a következő formában használták:

$$I_{ij} = G\frac{P_i P_j}{d_{ij}^b},$$

ahol I_{ij} – az i-edik és j-edik város közötti kapcsolat mértéke,
P_i és P_j – az i-edik, ill. j-edik város vagy terület súlya,
d_{ij} – az i-edik és j-edik terület, ill. város közötti távolság,
b – tapasztalati úton nyert hatványkitevő (a kezdeti vizsgálatoknál általában kettővel volt egyenlő),
G – mindig a vizsgálat tárgyától, céljától, ill. az aktuális feltételektől függő tapasztalati gravitációs konstans.

A jobb érthetőség kedvéért egy példán mutatjuk be az elmélet alkalmazásának kezdeti típusát.

Tételezzük fel, hogy van egy három kerületből álló város 25 000 lakossal (P = 25 000), s ez a népesség naponta 75 000 utazást tesz városon belül. Arra vagyunk kiváncsiak, hogy ez a 75 000 napi utazás hogyan oszlik meg a különböző kerületek között. Mivel egy város három kerületéről van szó, a példa egyszerűsítése érdekében eltekintünk jelen esetben a távolság módosító hatásától. Így az utazásokat i-edik kerületből j-edik kerületbe csak a zónák tömege, ill. a gravitációs konstans határozza meg. A korábban említett képlet alapján felírhatjuk, hogy

$$T_{ij} = K\frac{P_i P_j}{P},$$

ahol T_{ij} – az i-edik kerületben élők j célú utazásait jelöli,
K = T/P, azaz az összes utazások száma/lakosság száma,
P_i – az i-edik kerületben lakók száma,
P_j – a j-edik kerületben lakók száma.

Tételezzük fel, hogy a különböző kerületek lakosainak száma: $P_1 = 6\,000$, $P_2 = 9\,000$, $P_3 = 10\,000$; ez esetben a megfelelő értékeket a fenti képletbe behelyettesítve összeállíthatunk egy táblázatot, amelynek a megfelelő sora, ill. oszlopa az i-edik és j-edik zóna közötti forgalomáramlást jelzi *(20. táblázat)*.

Nyilvánvalóan következik az egyszerűsített képletből, hogy az összes utazásból a j-edik kerület részesedik a legnagyobb értékkel, ill. a j-edik kerületen belül történik P_j/P, s ha $P_3 = 10$ ezer, akkor $P_j/P = 10/25$, azaz 40%. Az összes utazások-

20. TÁBLÁZAT

A területek közötti forgalomáramlás nagysága (T_{ij})

i \ j	1	2	3	Összesen
1	4 320	6 480	7 200	18 000
2	6 480	9 720	10 800	27 000
3	7 200	10 800	12 000	30 000
Összesen	18 000	27 000	30 000	75 000

nak a 40%-a 30 ezer, s ez a szám éppen egyezik azzal az értékkel, amelyet a 3. oszlop összegeként kapunk.

Természetesen ilyen mértékű leegyszerűsítésre csak akkor van alkalmunk, ha egy város három kerületéről van szó, de még ekkor sem mindig célszerű. Már Reilly (1929) is rámutatott a távolság módosító hatására. Később W. Isard (1960), J. D. Carrel és H. W. Bevis szerint a nagyobb távolság sokkal jobban befolyásolja a pontok közti megoszlást, ezért a $\frac{P_j/P}{d_{ij}^b}$ összefüggés használatát javasolták.

E szerint, ha a távolság két város között 2 egység ($d_{ij} = 2$) és a kitevő $b = 2$, akkor ez esetben a nevezőben 4 áll, ha viszont a távolságot kétszeresére növeljük, a nevezőben 16 lesz, ami megközelíti a vonzás csökkenésének gyakorlati tapasztalati úton nyert értékét. Ezek alapján két város közötti kapcsolatot felírhatjuk a következő formulával:

$$T_{ij} = \frac{\frac{KP_iP_j}{P}}{d_{ij}^b},$$

s mivel K és P is konstans, ezért ha $G = K/P$, akkor $T_{ij} = GP_iP_jd_{ij}^{-b}$.

S ha arra vagyunk kíváncsiak, hogy egy város milyen mértékben hat az összes többire, akkor a T_{ij} értékeket összegeznünk kell, azaz

$$\sum_i T_{ij} = G \sum_j \frac{P_iP_j}{d_{ij}^b}.$$

Az előző két formula két, ill. több egység közötti kölcsönhatást fejez ki. Az egységek lehetnek városok–bevásárlóközpont régiók, lakóhely–munkahely, vagy lakóhely–bevásárlóközpont kapcsolatok stb. A kölcsönhatást pedig legtöbbször valamilyen forgalomáramlás testesíti meg (pl.: az utazó személyek száma, a szállított árumennyiség, az információcsere szintje stb.).

A fenti példákból is érzékelhető, hogy a módszer egyik alapkérdése az, hogy a gravitációs összefüggés paramétereit úgy határozzuk meg, hogy a modell által szolgáltatott, pontok közötti elméleti vonzáserősség és a kapcsolatok valós mértéke lehetőleg jól közelítse egymást. A modell paraméterei (a G konstans és a b hatványkitevő) abban az esetben, ha a kapcsolatok, a pontok közötti áramlások mértékéről rendelkezésre állnak tényadatok, regressziós elemzéssel meghatározhatók. Legyen példánk a települések közötti népességáramlás modellezése. Jelöljük F_{12}-vel két tetszőleges (A_1 és A_2) település közötti vándorlók ismert számát egy adott időszakban; P_1 és P_2 legyen a települések lélekszáma, d_{12} pedig távolságuk. Keressük a gravitációs összefüggés G és b paraméterének azon értékét, amelyre (az összes pont-párt figyelembe véve) az $F_{12} = G \cdot \frac{P_1 P_2}{d_{12}^b}$ összefüggés a legkisebb hibával teljesül.

Végezzük el az alábbi matematikai átalakítást:

$$\log F_{12} = \log G + \log P_1 P_2 - b \log d_{12},$$

ha minden pont-párra rendelkezésünkre áll F_{ij}, P_i, P_j, d_{ij}, akkor G és b értékét az alábbi egyenlet alapján megadhatjuk:

$$\log G + b \log d_{ij} = \log \frac{F_{ij}}{P_i P_j},$$

mivel ez az összefüggés teljesen analóg az alábbi, általános alakban felírt, egyváltozós lineáris regresszió-egyenlettel:

$$a + bx_k = y_k .$$

Illés I. (1975) a regressziós összefüggést felhasználva a megyék közötti 1963. évi állandó vándorlások leírására a következő gravitációs összefüggést kapta:

$$F_{ij} = 15\,310 \frac{P_i P_j}{d_{ij}^{2,30}},$$

ahol F_{ij} – a vándorlások várható száma adott viszonylatban,
P_i és P_j – a megyék részaránya az ország népességéből,
d_{ij} – a megyeszékhelyek közötti távolságok.

Amikor nincsenek tényadataink az áramlásokról, G és b ily módon nem becsülhető, hanem értéküket előre meg kell adni (b a legtöbb esetben 1,5 és 2,5 között van).

E. M. Hoover (1971) szerint a módszer amerikai felhasználásának tapasztalatai azt mutatják, hogy a távolsághoz (vagy utazási időhöz) tartozó kitevő (b) jelentős mértékben változik a személyektől, az utazás céljától és a célállomástól, helyétől függően.

A kitevő értéke viszonylag alacsony (1,5–2,0 között):

– A városok *központi* kerületeibe való utazáshoz bármilyen céllal is történjék, összehasonlítva a peremi zónákba történő utazásokkal;

– a vezető állású, „fehér galléros" (tisztviselő) rétegek, elsősorban a diplomások és a vállalati felső szintű vezetők esetében;

– üdülési–pihenési célú utazások esetében összehasonlítva a munkába járással.

A kitevő értéke viszonylag magas (2,0 feletti):

– a központi üzleti kerületekből *kifelé* történő utazás esetében;
– a fizikai munkások esetében, szemben a szellemi dolgozókkal;
– nők munkahelyvállalásakor;
– általános vagy középiskolába történő utazásoknál összehasonlítva a munkába járással.

Mint már az előzőekben utaltunk rá, a gravitációs hipotézist igen gyakran felhasználják az áruszállítások vagy a személyforgalom bizonyos feltételek mellett történő becslésére. Ez esetben T_{ij} az i-edik körzetből a j-edik körzetbe irányuló áramlás mértékét (pl. szállítási mennyiségét vagy utazások számát) fejezi ki. Négy különböző alapeset különíthető el aszerint, hogy a $T_i = \sum_j T_{ij}$ vagy a $T_j = \sum_i T_{ij}$ összegei közül melyikre áll rendelkezésünkre előzetes becslési érték.

Ha nincs becslési értékünk, akkor feltétel nélküli gravitációs modellről beszélünk. Visszatérve a kiinduló modellhez, x_{ij} az alábbi általános alakba írható fel:

$$X_{ij} = K \cdot M_i M_j f(c_{ij}),$$

ahol K – az arányossági tényező,
M_i és M_j – az i-edik és j-edik egységhez tartozó tömegek mérőszáma (általában a lakosságszám, ill. ennek valamely alkörzet gazdasági jelentőségét kifejező paraméterrel korrigált értéke),
$f(c_{ij})$ – a távolság függvénye.

Kibocsátási oldalról korlátozott egy *modell* akkor, ha ismertek az x_i^* értékek előzetes x_i becslései.

Ez esetben a kibocsátó körzetek „tömegét" a kibocsátási áramlások összegével arányosnak vesszük: $M_i = A_i X_i$ és így

$$x_{ij} = K A_i X_i M_j f(c_{ij}) \sum_j x_{ij}\text{-t behelyettesítve}$$

$$A_i = (K \sum_j M_j f(c_{ij}))^{-1}.$$

Értelemszerűen *vonzási oldalról korlátozottnak* nevezzük a *modellt* akkor, ha x_j^*-nak Y_j becslését ismerjük, azaz $M_j = B_j Y_j$, ebből $x_{ij} = k M_i B_j Y_j f(c_{ij})$, s ha $x_{ij} = Y_j$, akkor $B_j = (k \sum_i M_i f(c_{ij}))^{-1}$.

Kettősen korlátozott (vonzási, ill. kibocsátási oldalról is) a modell akkor, ha egyaránt rendelkezünk X_i és Y_j becslésekkel. Ez esetben

$$x_{ij} = k A_i B_j X_i Y_j f(c_{ij})$$

$$\sum_j x_{ij} = X_i$$

$$\sum_i x_{ij} = Y_j,$$

s ezekből $A_i = (k \sum_j B_j Y_j f(c_{ij}))^{-1}$

$$B_j = (k \sum_i A_i X_i f(c_{ij}))^{-1}.$$

Ezeken az alaptípusokon kívül még számtalan típust használnak, amelyek közül néhányra még a későbbiekben visszatérünk.

Most az alaptípusra mutatunk be néhány példát.

2.2.1. *Hansen-féle gravitációs modell*

A gravitációs modell tervezéshez való felhasználásának egyik legkorábbi alkalmazója W. G. Hansen (1959). Az általa felírt elhelyezési modell a lakosság létszámának viszonylag jó becslését adja. Arra a feltételezésre épül, hogy a lakosság létszámának különbözősége jelentős mértékben befolyásolja a különböző foglalkoztatási ágakban történő alkalmazásuk arányát. Valójában ez nem tökéletes gravitációs modell, mert nem tartalmazza a különböző zónák egymásra hatását.

Hansen szerint a helyi lakosság létszáma, ill. a különböző ágazatokban foglalkoztatottak létszáma közötti kapcsolat viszonylag jól jellemezhető egy, az általa megközelíthetőségi indexnek nevezett mutatóval. A megközelíthetőségi index a következőképpen számítható ki:

$$A_{ij} = \frac{E_j}{d_{ij}^b},$$

ahol A_{ij} – az i-edik zónának j-edik zónához tartozó megközelíthetőségi indexe,
E_j – a j-edik zónában alkalmazottak teljes száma,
d_{ij} – a távolság az i-edik és j-edik zóna között.

A korábban elmondottak alapján itt is kialakítható egy újabb mutató az egyéni indexek összegzéseképpen:

$A_i = \Sigma E_j(d_{ij}^b)$, mely felbontható két tényező hányadosára. Az egyik a „fejlődési lehetőség" mutatója, a másik pedig a terület eltartóképessége. Ezek alapján kifejezhető minden terület relatív fejlettsége:

$$\frac{A_i H_i}{\sum A_i H_i},$$

ahol H_i = az i-edik terület eltartóképességével.

A fentiek alapján előrejelezhető egy-egy terület, ill. város népességének növekedési üteme, ill. mértéke abban az esetben, ha ismerjük a vizsgálatba bevont terület ilyen jellegű paraméterét. Azaz, ha a népesség növekedése G_t-vel egyenlő, akkor a különböző területekhez tartozó G_i értékeket kifejezhetjük az alábbi képletekből:

$$G_i = G_t \frac{(A_i H_i)}{(\sum_i A_i H_i)} \text{ vagy másképen } G_t \frac{D_i}{\sum_i D_i},$$

ahol $D_i = A_i H_i$.

Azt, hogy ezt a modellt mennyire könnyen lehet használni a gyakorlatban, egy számszerű példán mutatjuk be *(21.* és *22. táblázat)*. Számításaink során a távolság kitevőjét kettőnek vettük az egyszerűség kedvéért.

21. TÁBLÁZAT

A lakónépesség és a foglalkoztatottak számának alakulása a vizsgált területi egységekben

Város	Termelői ágazatban foglalkoztatottak száma	Szolgáltatásban foglalkoztatottak száma	Összes foglalkoztatottak száma	Lakónépesség száma	Eltartóképesség
1.	2 800	1 200	4 000	19 000	100
2.	4 000	4 000	8 000	35 000	125
3.	12 000	20 000	32 000	41 000	100
Összesen	18 800	25 200	44 000	95 000	325

22. TÁBLÁZAT

A vizsgált városok egymás közti távolsága órában

i-ből \ j-be	$j = 1$	$j = 2$	$j = 3$
$i = 1$	2	8	6
$i = 2$	8	3	4
$i = 3$	6	4	3

Elemzéseinkhez a *21.* és *22. táblázat*ot használjuk fel, s arra keresünk választ, hogy a modell alapján milyen korrekciók szükségesek a lakosság elhelyezésében. Első lépésként kiszámítjuk az összes esetre létező megközelíthetőségi indexeket, azaz az $A_{ij} = \frac{E_j}{d_{ij}^b}$ értékeket *(23. táblázat)*.

23. TÁBLÁZAT

Az A_{ij} értékek kiszámítása városonként

Város	$j = 1$	$j = 2$	$j = 3$	$\sum_j A_{ij}$
$i = 1$	$\frac{4\,000}{2^2} = 1\,000$	$\frac{8\,000}{8^2} = 125$	$\frac{32\,000}{6^2} = 889$	2 014
$i = 2$	62,5	889	2 000	2 951
$i = 3$	111	500	3 556	4 167

Az előzőekben kiszámított D értékekből most már becsülhetjük a viszonylagos fejlődési lehetőségeket, azaz a teljes érték megoszlását a különböző városok között *(24.* és *25. táblázat)*.

24. TÁBLÁZAT

A városok fejlődési indexeinek kiszámítása

Város	$\sum_j A_{ij}$	H_i	$D_i = A_i H_i$
1.	2 014	100	201 400
2.	2 951	125	368 924
3.	4 167	100	416 700
—	—	—	$\sum_i D_i =$ 987 024

25. TÁBLÁZAT

A városok relatív fejlődési potenciálja

Város	D_i	$D_i/\Sigma D_i$
1.	201 400	0,204
2.	368 924	0,374
3.	416 700	0,422
Összesen	987 024	1,000

A fenti megoszlási viszonyszámok alapján városonként meg tudjuk állapítani a teljes népességnövekedésben való részvételt. Miután ismerjük a *21. táblázat* alapján városonként a teljes népesség számát, most megpróbáljuk azokat a modell alapján reprodukálni. Ha a modell alapján becsült adatok megfelelő mértékben korrelálnak az eredeti adatokkal, akkor azt kell mondanunk, hogy a modell ebben az esetben helyesen írja le a valóságot. Ismert, hogy az eredeti adatok szerint a teljes népességnövekedés 95 ezer fő volt (G_t = 95 000). Ennek segítségével meg tudjuk becsülni a városonkénti teljes népességszámot a korábban már felírt $G_i = G_t \frac{D_i}{\sum_i D_i}$ képlettel *(26. táblázat)*.

26. TÁBLÁZAT

A becsült népességnövekedési érték városonként

Város	$D_i/\sum_i D_i$	$G_i = G_t(D_i)/\sum_i D(i)$
1.	0,204	19 384
2.	0,374	35 510
3.	0,422	40 106
Összesen	1,000	95 000

Most hasonlítsuk össze közvetlenül a becsült értékeket a tényleges értékekkel (*27. táblázat*).

27. TÁBLÁZAT

A becsült és tényleges népességnövekedési értékek közötti különbség alakulása városonként

Város	Becsült népesség	Tényleges népesség	Különbség
1.	19 384	19 000	+384
2.	35 510	35 000	+510
3.	40 106	41 000	−894

Az eltérések a becsült és tényleges népesség között nem nagyok, a modell esetünkben jó közelítést ad.

2.2.2. *Egy oldalról korlátos modell alkalmazása*

A továbbiakban egy példán keresztül (Lakshmaman és Hansen 1965) mutatjuk be azt, hogy miként lehet a helyi kiskereskedelmi egységeket telepíteni egy oldalról korlátozott *gravitációs modell* segítségével.

A számítás célja, hogy a meglevő fogyasztási kiadásokat megfelelően osszuk el a különböző vásárlási központok között. A kiindulási feltétel – más szóval korlát – a következő egyenlőséggel fejezhető ki: $\sum_j T_{ij} = O_i$.

A számításhoz felhasznált egyenlőség:

$$S_{ij} = C_i A_i F_j d_{ij}^{-b},$$

ahol S_{ij} – az i-edik lakókörzet fogyasztása a j-edik bevásárlási központban,
C_i – az i-edik lakókörzet teljes fogyasztási kiadása,
F_j – a j-edik bevásárló központ,
A_i = $(\sum_j F_j d_{ij}^{-b})^{-1}$,
d_{ij} – az i-edik lakókörzet és a j-edik bevásárlóközpont távolsága.

A bevásárlóközpontok teljes eladási forgalmát a következő formulával írhatjuk fel:

$$S_j = \sum_i C_i A_i F_j^a d_{ij}^{-b} = \sum_i S_{ij}.$$

A képletben az F_j értéke módosítva lett egy a kitevővel. Erre azért van szükség, mert a nagy bevásárlási központok kereskedelmi forgalma sokkal nagyobb, mint azt a méretei indokolnák. A *28. táblázat*ban a korábban vizsgált városokat három lakókörzetként kezeljük és úgy vesszük, hogy minden lakókörzet egyetlen bevásárlóközponttal rendelkezik.

28. TÁBLÁZAT

A bevásárlóközpont forgalma és alapterülete

Város	Fogyasztási kiadások (Ft)	A bevásárló központ alapterülete m^2-ben
1.	1 900 000	24 000
2.	3 500 000	80 000
3.	4 100 000	400 000

A további vizsgálat során legyen:
a-nak 1, b-nek 2 az értéke. Az első két lépésben ki kell számítanunk minden körzet-pár között a vonzás mértékét az $A_iF_jd_{ij}^{-b}$ alapján *(29. táblázat).*

29. TÁBLÁZAT

$F_j^1d_{ij}^{-2}$ érték alakulása körzetpáronként

$i \backslash j$	$j=1$	$j=2$	$j=3$	$A_i=\sum_j F_j^1 d_{ij}^{-2}$
$i=1$	$\frac{24\,000}{2^2}=6\,000$	$\frac{80\,000}{8^2}=1\,250$	$\frac{400\,000}{6^2}=11\,111$	18 361
$i=2$	$\frac{24\,000}{2^2}=375$	$\frac{80\,000}{3^2}=8\,889$	$\frac{400\,000}{4^2}=25\,000$	34 264
$i=2$	$\frac{24\,000}{6^2}=667$	$\frac{80\,000}{4^2}=5\,000$	$\frac{400\,000}{3^2}=44\,444$	50 111

Ezek után már kiszámíthatjuk a kapcsolatok valószínűségének mértékét is $P(r_{ij})$-t a városok között, páronként a következő képlet alapján:

$$P(r_{ij})=A_iF_jd_{ij}^b=F_j^a d_{ij}^{-b}/\sum_i F_j^a d_{ij}^{-b}\,.$$

A kapott értékeket a *30. táblázat*ba foglaltuk.

30. TÁBLÁZAT

A városok közötti páronkénti kapcsolatok valószínűsége

$i \backslash j$	$j=1$	$j=2$	$j=2$
$i=1$	$\frac{6\,000}{18\,361}=0{,}33$	$\frac{1\,250}{18\,361}=0{,}07$	$\frac{11\,111}{18\,361}=0{,}60$
$i=2$	$\frac{374}{34\,263}=0{,}01$	$\frac{8\,889}{34\,263}=0{,}26$	$\frac{25\,000}{34\,263}=0{,}73$
$j=3$	$\frac{667}{50\,111}=0{,}01$	$\frac{5\,000}{50\,111}=0{,}1$	$\frac{44\,444}{50\,111}=0{,}89$

A *30. táblázat*ban szereplő adatok alapján ki tudjuk számítani az $S_{ij} = C_i P(r_{ij})$ értékeket, amelyek azonosak a lakókörzetek vásárlóközpontokbeli fogyasztási kiadásaival (ahol i = lakókörzetek száma; j = a vásárlóközpontok száma).

31. TÁBLÁZAT

A fogyasztási kiadások a vásárlóközpontokban

i \ j	$j = 1$	$j = 2$	$j = 3$	Teljes kiadás
$i = 1$	627 000	133 000	1 140 000	1 900 000
$i = 2$	35 000	910 000	2 555 000	3 500 000
$i = 3$	41 000	410 000	3 649 000	4 100 000
Összes értékesítés	703 000	1 453 000	7 344 000	9 500 000

A *31. táblázat* utolsó sora tartalmazza a különböző bevásárlási centrumok értékesítési lehetőségét (azaz az $S_j = \sum_i S_{ij}$ értékeket).

2.2.3. *Mindkét oldalról korlátos gravitációs modell*

A két oldalról korlátos gravitációs modellt egy utazás (forgalom)-elosztási modellen keresztül mutatjuk be. Az előző modelltől abban különbözik, hogy itt két becsült változósorozat létezik. Egyrészt ismert az utazások eredete, másrészt a célja. A feladat, hogy becslést adjunk a városok közötti (páronkénti) utazások számára.

A két oldalról korlátos gravitációs modell képlete:

$T_{ij} = A_i B_j O_i D_i d_{ij}^{-b}$ feltételeként kezeljük a $T_{ij} = O_i$ és a $\sum_i T_{ij} = D_j$-t, ahol O_i = az i-edik városból kiinduló utazások száma. Nyilvánvalóan következik az előzőekből, hogy: $A_i = (\sum_i B_j D_j d_{ij}^{-b})^{-1}$ és $B_j = (\sum_j A_i O_i d_{ij}^{-b})^{-1}$.

Tételezzük fel, hogy a feltételek számszerű értékei a következők (*32. táblázat)*.

32. TÁBLÁZAT

A városok népessége és foglalkoztatottjainak száma

Város	Népességszám	Foglalkoztatottak száma
1.	8 800	4 000
2.	16 210	8 000
3.	18 990	32 000
Összesen	44 000	44 000

Az első oszlopban szerepelnek az O_i értékek, a másikban a D_j értékei. Ezekből és a távolságmátrixból kiszámítható a $D_j d_{ij}^{-2}$ (l. *33. táblázat*).

33. TÁBLÁZAT

$D_j d_{ij}^{-2}$ értékek alakulása városok között

$i \backslash j$	$j = 1$	$j = 2$	$j = 3$
$i = 1$	$\frac{4\,000}{2^2} = 1\,000$	$\frac{8\,000}{8^2} = 125$	$\frac{32\,000}{6^2} = 889$
$i = 2$	62,5	889	2 000
$i = 3$	111,1	500	3555,6

Ennek ismeretében kiszámítottuk az A_i-k és B_j-k értékét, majd ezekből a városok közötti utazások valószínűségét a $P(r_{ij}) = A_i B_j D_j d_{ij}^{-2}$, ezekből pedig a $T_{ij} = O_i P(r_{ij})$ értékeket *(34. táblázat)*.

34. TÁBLÁZAT

A $T_{ij} = O_i P(r_i)$ értékek alakulása városonként

$i \backslash j$	$j = 1$	$j = 2$	$j = 3$	Összesen
$i = 1$	3 432	704	4 664	8 800
$i = 2$	162	4 863	11 185	16 210
$i = 3$	380	2 279	16 331	18 990
Összesen (D_j)	3 974	7 846	32 180	44 000

Végül vessük össze a valóságos utazások számát a becsült értékekkel *(35. táblázat)*.

35. TÁBLÁZAT

A valóságos és becsült utazások száma városonként

Város	Valóságos (D_j) utazások száma	Becsült (D_i) utazások száma
1.	4 000	3 974
2.	8 000	7 846
3.	32 000	32 180

2.3. *Népességi és gazdasági potenciálmezők*

A fizikából közismert, hogy a tömeggel, elektromos, mágneses töltéssel rendelkező testeknek, részecskéknek nemcsak az a jellegzetességük, hogy hatnak egymásra, hanem környezetük egészének fizikai állapotát megváltoztatják, gravitációs, elektromos, mágneses teret, potenciálmezőt hoznak létre. A társadalmi és gazdasági tér is elképzelhető hasonló módon, s így egy-egy település vagy gazdasági egység, üzem működését, kapcsolatait nem csupán mérete, belső jellemzői határozzák meg, hanem az a társadalmi–gazdasági közeg is, amelyet ezen objektumok összességükben kialakítanak. A „térerősség", a valószínű kapcsolatok intenzitása a településhálózatban pl. a nagy centrumok közelében nagyobb, s egy itt elhelyezkedő település egész rövid és hosszú távú kapcsolatrendszerére, életútjára hat, és teljesen eltérő módon alakíthatja azt, mint egy ugyanolyan méretű, de a központoktól távoli, peremhelyzetű településé.

A települések példájánál maradva könnyen belátható, hogy a területfejlesztés, a területi politika szempontjából nemcsak annak az eldöntése lehet fontos, hogy a centrumok mekkora vonzáskörzetet alakítanak ki maguk körül, s hogy a kisebb települések melyik központhoz sorolhatók (a 2.1 fejezetben bemutatott módszerekkel). Fontos lehet az is, hogy egy-egy térség, ország tetszőleges pontjáról, településéről tudjuk azt, hogy a népességi vagy gazdasági erőtérben milyen a helyzete a többi településhez, a térség egészéhez viszonyítva.

A társadalmi–gazdasági tér egy tetszőleges (A_i) pontjának *potenciálját* a modellekben a következő összefüggés szolgáltatja:

$$P(A_i) = \sum_{j=1}^{n} \frac{m_j}{d_{ij}^k},$$

ahol $P(A_i)$ – az A_i pont potenciálja,
m_j – a tér többi (A_j) figyelembe vett pontjának tömege, töltése (népességszáma, gazdasági súlya stb.), $i \neq j$,
d_{ij} – A_i és A_j távolsága ($i, j = 1, 2, \ldots, n$), $i \neq j$,
n – a pontok száma,
k – konstans.

A potenciál értéke tehát magának a pontnak a tömegétől nem, csak a többi ponttól és az azoktól mért távolság adott hatványától függ.

Ha a vizsgált térségben a felvett A_i alappontok (és esetleg más, tömeggel nem rendelkező ún. kontrollpontok) potenciálját kiszámítjuk, elkészíthető egy térkép, amelyen görbék kötik össze az azonos potenciálú pontokat (izopotenciálok), s ezek rajzolják ki az erőteret. Ha a potenciálértékeket a maximális értékhez viszonyítjuk, akkor az izopotenciálok százalékos értékeket kaphatnak. Az izopotenciálok felrajzolása ugyanazon interpolációs módszerrel történik, mint a szintvonalaké vagy az izotermáké.

Hazánkban a potenciálmódszert elsőként Bene L. és Tekse K. (1966) használta J. A. Stewart (1948) munkássága nyomán a népesség földrajzi eloszlásának elemzésére. Térképsorozatuk 1900 és 1960 között, négy népszámlálási évre vonatkozóan 212 alappontot (62 megye- és járási székhely, 128 járás, a főváros 22 kerülete) felvéve, a súlypontmódszerrel kombinálva mutatja be az ország népességének potenciálterét. A népességpotenciál maximuma mindvégig a fővárosra (ill. környékére) esik, de értéke az időben egyre növekszik – tükrözve a fokozatos népességkoncentrációt. Figyelmet érdemel az, hogy a potenciáltérképeken, megtörve a fővárostól távolodva egyre csökkenő értékű izopotenciál-vonalakat, egy kisebb lokális maximum is kialakul: az ország ÉK-i részén, aminek relatív kiemelkedése – épp a főváros növekvő súlya miatt – azonban 1900 és 1960 között fokozatosan csökkent. A szerzők tanulmányukban részletesen elemzik a potenciálmódszer alkalmazásának lehetőségeit, eljárásukat pontosan fejtik ki, munkájuk a módszert alkalmazni szándékozók számára alapvető forrásértékű.

A fenti munkával megegyező módszertani bázisra épül Kovács Cs. (1976) közlekedésföldrajzi tanulmánya, amely ez ideig nagyobb településeink vasúti fekvésének a legátfogóbb, korszerű értékelését adja. Tartalmi és metodikai szempontból külön kiemelhető értéke a tanulmánynak, hogy az alkalmazott potenciál-modellben a települések „tömege" valóban a térben áramló mennyiség (áru), a nem a településekhez fiktíven hozzárendelt, feltételezett „elvi tömeg". A szerző megkülönbözteti egymástól a települések beszerzési és értékesítési helyzetét, potenciálját. Egy település potenciálját az árukhoz való hozzájutás, a beszerzés szempontjából a többi településen vasútra adott, indított árumennyiség (s természetesen a távolság adott hatványa) határozza meg. Az értékesítési, eladói helyzetet a többi településben vasútról leadott, érkező árumennyiség tömege határozza meg. A közlekedési potenciáltérképek lényegében a magyar gazdasági tér közismert sémáját tárják fel, generalizált formában. A legkedvezőbb fekvésű térség a főváros és környéke, valamint a Sajó-völgy, míg a legkedvezőtlenebb a magyarországi Alsó-Duna-mente. (Az ország legrosszabb vasúti fekvésű települése Mohács; átlagos vasúti távolsága a többi településtől 363 km, míg Budapesté 173 km). A szerző az eredmények értékelésekor felhívja a figyelmet olyan sajátos problémákra a módszer közlekedésföldrajzi alkalmazásában, mint a tranzit figyelembevétele, a határállomások sajátos helyzete, valamint a nagy tömegű árut forgalmazó, de egyébként csekély jelentőségű települések (pl. a Tapolcai-medence bazaltbányái) torzító hatása a potenciálok alakulásában.

A legutóbbi években több, figyelemre méltó tanulmány jelent meg fiatal szovjet geográfusok tollából a potenciálmódszer alkalmazására.

Érdekes következtetések adódnak A. I. Trejvis és M. O. Kibalcsics (1976) tanulmányából, akik a potenciálmódszert újszerűen alkalmazva elkészítették a Szovjetunió ún. belső és külső ipari potenciáltérképét. Az országban 156 alappontot (az oblasztyok központjait) felvéve, tömegként az iparban foglalkoztatottak számát használva, elkészítették a belső ipari potenciál térképét. Ugyanezen alappontokra ezután kiszámították a külső ipari potenciált, a Szovjetunióval közvetlenül vagy másodlagosan szomszédos 21 ország adatai alapján, az országokat fővárosaikkal reprezentálva, tömegként az országok összes ipari foglalkoztatottjának számát használva. A belső ipari potenciál térképe az európai magterülettől, Moszkvától távolodva lényegében körkörösen egyre csökkenő potenciálértékű erőteret mutat, míg a külső potenciál a határoktól az ország belseje felé csökken. Kivonva egymásból minden alappontra vonatkozóan a külső és belső potenciálértéket kitűnik, hogy az ország óriási területein a *külső ipari potenciál nagyobb a belsőnél.* Így van ez a Jenyiszejtől K-re egészen a Csendes-óceánig, Közép-Ázsiában, a Kaukázuson túl, Moldáviában; Ukrajna és Bjelorusszia Ny-i részén, a kalinyingrádi oblasztyban. Ezek azok a területek, amelyek fejlesztésében a külső kapcsolatok leginkább szóba jöhetnek, ill. gazdaságföldrajzi szempontból a legtöbb előnyt rejtik.

P. M. Poljan és A. I. Trejvis (1978) tanulmánya tovább finomítja, részletezi a külső és belső potenciál számítási és elemzési módjait, rendszerbe foglalja a fizikai analógiákon alapuló módszereket. A szerzők elkészítették az európai KGST-országok gépiparának potenciáltérképét, amellyel – e sajátos szempontból és módon – az országcsoportot mint egységet és az egyes országokat külön-külön is jellemezhették. Az országcsoport egészét tekintve a gépipari potenciálmaximum Lipcse körzetére esik. Ettől távolodva a maximális (100 százalékos) térerősséghez képest Csehszlovákiát három izopotenciál (80, 70, 60 százalékos) érinti, Lengyelország ÉK-i részének potenciálértéke már csak 40%, Budapest a 70- és 60%-os potenciálzónában van, míg Bulgáriában már csak 30%-os az érték. Magyarország, Románia és Bulgária a vizsgált szempontból egypólusú, csak a fővárosok emelkednek ki; Csehszlovákiában Prága és Brno a két lokális maximum központja, Lengyelországban Felső-Szilézia és Varsó, az NDK-ban Lipcse, Drezda és Berlin körzete emelkedik ki. A szerzők célkitűzése és eredményei túlmutatnak a vázolt alkalmazás konkrét megállapításain és a gazdasági *integrációk* földrajzi szempontú vizsgálatának is egyik lehetséges hasznos módszerét sejtetik a potenciálelemzésben.

2.4. *Észrevételek a modell alkalmazásához*

A gravitációs modellek csupán két tényezővel, a térrel és a tömeggel számolnak, ami a tényleges helyzet nagyfokú leegyszerűsítése. Emellett a gazdasági–társadalmi mozgásfolyamatoknak a mechanikai mozgás törvényszerűségeire való visszavezetése lehetetlenné teszi az előbbi mozgásfolyamatokban rejlő sajátosságok kifejezését. Ez a gravitációs modellek újabb hibaforrása. A gravitációs modellek által a vonzáskörzetekről nyújtott kép erősen leegyszerűsített; nem képes feltárni a vonzáskörzetek belső szerkezetét, a vonzásintenzitás számszerű értékét.

Hazánkban a város–vidék közti forgalom erősen kötődik a tömegközlekedési eszközökhöz; ugyanakkor az adminisztratív úton kijelölt határok jelentős mértékben megszabják a vonzáskörzetek alakulását (a közigazgatás mellett a gazdasági élet szervezése–irányítása, az egészségügyi intézmények, részben a kulturális-oktatási intézmények működési területének is „kijelölt" határai vannak); a központhálózat viszonylag sűrű, ezért a vonzáskörzetek deduktív feltárásának lehetősége csekély. A gravitációs modellek kidolgozói közül is többen elismerik, hogy kényszerűségből választották a vonzáskörzetek feltárásának deduktív útját. C. A. Thorwid (1963) írta: „Nem vitás, hogy egy helység körzetét bizonyos vizsgálatok segítségével tapasztalati úton lehet legbiztosabban meghatározni, ez a módszer azonban rendkívül drága, ha nagymértékben alkalmazzuk". Z. Chojnicki, A. Wrobel (1963) véleménye szerint „. . . úgy tűnik, a gravitációs és potenciális modellek alkalmazása Lengyelországban a legközelebbi jövőben csak kísérleti munkákra korlátozódik".

A gravitációs modellek hívei is kifejtik, hogy mikroökonómiai szinten e modellek nem alkalmazhatók, makroökonómiailag azonban a tér gazdaságtanának magvát képezhetik.

Lackó L. (1978) szerint: „. . . a területi makro- és mezostruktúra alapvonásainak megismerésében fontos szerep juthat e módszereknek; különböző szempontok (ágazati adatok) alapulvételével egyszerűen felvázolhatók a térszerkezet egyes elemei... a területi szerkezet változásainak nyomon követéséhez könnyen kezelhető eszköz lehet ez az eljárás..."

Figyelemre méltó, hogy a potenciál-modellek kidolgozói és alkalmazói többnyire olyan területen dolgoztak, ahol a távolságok nagyok, vagy a népsűrűség alacsony. Ilyen területeken a távolság szerepe megnő a vonzáskörzetek alakításában, a területi kapcsolatokban. Mivel a gravitációs modellek két változója közül az egyik a távolság, a modellek használhatósága nagymértékben függ a távolságnak a vonzáskörzet-hálózat alakításában játszott szerepétől.

Ugyanakkor nem hagyható figyelmen kívül, hogy a gravitációs modellek s az empirikus úton feltárt vonzáskörzetek közti eltérések földrajzi, gazdasági, társadalmi tényezőkkel többnyire indokolhatók. Tehát a két különböző úton nyert vonzáskörzet-hálózat összevetése feltárhatja azokat a torzulásokat, amelyek a központok súlyától és távolságuktól független tényezők hatására jöttek létre.

VII. *Az ágazati kapcsolatok mérlegének alkalmazása a területi szerkezetek és kapcsolatok vizsgálatában*

A területi társadalmi-gazdasági folyamatok tanulmányozásakor elengedhetetlen a területi egység alkotó elemeinek kölcsönös egymásrautaltságát, feltételezettségét vizsgálni. Ezeknek a kölcsönös kapcsolatokon keresztül jelentkező egymásra épüléseknek a felvázolásával, kimutatásával közelebb kerülhetünk az adott területi folyamat belső összefüggéseinek jobb megismeréséhez és megértéséhez. A területi egységen belül jelentkező, az adott folyamatot jellemző meghatározottságok mellett azonban külső, a területi egységen kívüli folyamatok is éreztetik hatásukat. Ezek is befolyásolják, számos esetben alapvetően meghatározzák a területi egység elemzés alá vett folyamatának működését és jellegét.

A belső szerkezeti meghatározottságok és a külső, a területi egységnek más területi egységhez fűződő kapcsolatai együttesen alkotják az elemezni kívánt területi folyamatot. A két alapvető elemet, az adott szerkezetet és annak kapcsolatait együttesen csak egy olyan modellben vizsgálhatjuk, amely egyrészt bemutatja a területi egység adott folyamatainak alkotóelemeit, azok kölcsönös viszonyait, egymásrahatásaik mértékét, másrészt ennek a belső szerkezetnek a külső kapcsolatait, kiindulási és teljesülési feltételeit. Az összekapcsolással már lehetőségünk van a kölcsönös feltételezettségek mélyebb összefüggéseinek kimutatására, a folyamatba történő beavatkozás összes hatásának a körülírására, és végezetül egy elérni kívánt állapothoz (megvalósítási célhoz) vezető utak sokaságának és azok következményeinek ábrázolására.

A területi elemzési eljárások közül az *input-output analízisre épülő területi ágazati kapcsolatok mérlege* alkalmas a területi belső és külső kapcsolatok együttes, átfogó kimutatására.

E fejezet ennek a területi modellnek a felépítésével, az input-output analízis területi szintű értelmezésével, a mérleg összeállításának gyakorlati kérdéseivel, végezetül az elemzés, a felhasználás néhány módjának bemutatásával foglalkozik.

A részletes tárgyalás előtt két megjegyzést kell tennünk.

Az első: nem foglalkozunk a területi gazdasági kapcsolatok modellezésének általános elméleti kérdéseivel, mivel az ezeket tárgyaló külföldi munkák – W. Leontief (1977), V. Sz. Dadajan – V. V. Kosszov (1963), W. Isard (1973), L. Moses (1955) – nagyrészt elérhetők, továbbá néhány hazai kísérletről is számot adhatunk: Csepinszky A. (1965), Wirth Gy. (1976). Sikos T. T. (1977), Rechnitzer J. (1980a). Ezek a munkák részletesen tárgyalják a területi gazdasági kapcsolatok modellezésének követelményeit, a legfontosabb elméleti megfontolásokat, összefüggéseket és a felhasználás módját, formáit.

A másik megjegyzés, hogy tanulmányunkban gyakorlati példán[22] keresztül mutatjuk be a területi ágazati kapcsolatok mérlegének kidolgozását, a mérleg alapján elemezhető gazdasági szerkezetet és területi kapcsolatokat.

Ebben a fejezetben bemutatjuk mindazokat az alapvető elemzési eljárásokat, amelyeket a területi ágazati kapcsolatok mérlegének matematikai feldolgozása után el lehet végezni.

1. *A területi ágazati kapcsolatok mérlegének szerkezete, a területi részmérlegek típusai*

A területi ágazati kapcsolatok mérlege a társadalmi újratermelési folyamat térbeli összefüggéseinek elemzésére szolgáló közgazdasági és matematikai modell. *Közgazdasági modell*, mivel a területi egységek ágazati szerkezetét, termelési és fogyasztási bonyolult rendszerét bizonyos feltételezések mellett, leegyszerűsített formában számszerűen képes ábrázolni. *Matematikai modell*, mivel alkalmas egyrészt az ágazatközi, másrészt a térbeli átgyűrűző hatások összetett matematikai eszközökkel történő elemzésére, kimutatására.

A területi mérleg az általános ágazati szemléletű input-output séma sakktáblaszerű felépítését követve a szoros termelési és fogyasztási kapcsolatokat mutató népgazdasági területek rendszerét ábrázolja. A mérlegek a termelő ágazatok kapcsolatát leíró *belső mátrix*ból, az ágazatok kibocsátásait részletező *oldalszárny*ból és az elsődleges ráfordításokat tartalmazó *alsó szárny*ból állnak. A terület közvetlen belső ágazati kapcsolatait bemutató tranzakciós mátrixból képzett inverz mátrix a termelési folyamatokon keresztül jelentkező közvetlen és közvetett kapcsolatokat tárja fel, amellyel kimutatható a végső felhasználás változásainak hatása az ágazatok termelésére. A területi mérlegek lényegében a *nyílt Leontief-féle* sémát követik, ahol a gazdasági tevékenységek két csoportjának statikus állapot szerinti rögzítése valósul meg. Az egyik csoport a gazdaság (terület) belső szerkezeti elemeinek összefüggéseivel meghatározható, a másik csoport viszont, amely a végső kereslet szféráit foglalja magába, nem. A területi mérlegekben a végső kereslet export tételeinek területi és ágazati kibocsátásával lehetőségünk van a területek összekapcsolására.

Az egyik terület exportja a másik terület importjaként jelenik meg, vagyis a területekre bontott gazdaság egységeinek kölcsönös feltételezettségével állunk szemben. A területi ágazati kapcsolatok mérlegében a termelés ráfordítási és elosztási rendszerének ábrázolását kétféle úton végezhetjük el.

Az első megközelítésben nem vagyunk tekintettel arra, hogy a felhasználásra kerülő anyagokat és termékeket hol állították elő, tehát a területen belüli és kívüli előállítású termékeket együtt kezelve adjuk meg az ágazatok felhasználását és elosztását. Az *„A” típusú mérlegek*kel így arra nyílik lehetőségünk, hogy a területen belüli kapcsolatokat a *források oldaláról* ragadjuk meg, azaz kimutathatjuk a fel-

[22] Az MTA Dunántúli Tudományos Intézetében az 1976—1980-as kutatási tervidőszakban kidolgoztuk a Dél-Dunántúl négy megyéjére — Baranya, Somogy, Tolna és Zala — vonatkozóan a területi ágazati kapcsolatok mérlegét.

használások nagyságát, szerkezetét, de arról már nincs információnk, hogy azok honnan származnak, a területen belülről vagy kívülről. Ezzel a mérlegtípussal csak közelíthetjük a terület ágazatainak belső felhasználási szerkezetét, nincs módunk a területi gazdaságban az ellátó funkciókat végző, meghatározó ágazatok kijelölésére.

Hiába mutatja a mérlegünk pl., hogy a villamosenergia ipar az egyik legfontosabb ellátó ágazat, ha annak belső termelését nem ismerhetjük, így fejlesztésének területen belüli hatásait nem tudjuk kellően felmérni.

Amikor nemcsak a terület gazdasági kapcsolatainak általános formáit kívánjuk megragadni, hanem abban elkülönítve kezeljük a területi belső termelést, felhasználást és elosztást, ill. az összes felhasználáson és elosztáson belül számot szeretnénk adni a külső területi hatásokról, akkor az ágazati kapcsolatok mérlegének *„B" változatát* alkalmazhatjuk.

A területi ágazati kapcsolatok mérlegének „B" változatában az egyes ágazatok soraiban a *területi (belső) eredetű anyagokat és termékeket tüntetjük fel,* míg a területen kívülieket (külsőket) elkülönítjük. A területre történő beszállítások ilyen jellegű kezelésével a területi mérlegek egyik központi kérdéséhez jutunk el, hiszen így a mérleget bővíthetjük – a külső gazdasági kapcsolatok révén – más területek, azok ágazatai felé. Feltárhatjuk a különböző területek, ill. ágazatok hozzájárulását a területünk termeléséhez. A kiszállítások hasonló – területi, ágazati – bontásával már nemcsak arról tudunk információkat adni, hogy a kiszállítások milyen szerepet játszanak a terület termelésében, végső felhasználásaiban, hanem arról is, hogy területünk ágazatainak termelése *melyik terület melyik ágazatában realizálódik.* A beszállítások „B" változat szerinti bontásával, valamint a végső felhasználás hasonló szerkezetű kidolgozásával a terület és a népgazdaság más területeinek együttes elemzésén túl, megnyílik előttünk az út *a területek egymás közötti, területközötti kapcsolatainak elemzésé*re is.

A területi ágazati kapcsolati mérlegek „B" típusának szerkezete a következő:

x	B	y
	i^*	
	w^*	

ahol B – a területi összes közvetlen ráfordítások,
x – a területi bruttó termelés,
y – a területről történő kibocsátások,
i^* – a területre történő beszállítások, területen kívüli ráfordítások,
w^* – a területen keletkező, nem anyag jellegű ráfordítások.

Az y és i^* vektorok különböző szemléletű bontásával a területi ágazati kapcsolatok mérlegének más-más típusát állíthatjuk elő a felhasználások és az elemzések szempontjai szerint.

A területi mérlegekben három alapformaként[23] ábrázolhatjuk a beszállításokat és ezzel összefüggésben a kiszállításokat:

1. A vizsgált területi egység ágazatainak be- és kiszállításait *területi elv* szerint bontjuk, ekkor két eset közül választhatunk:

a) kimutatjuk, hogy az összes beszállítások honnan, melyik területről származnak, ill. a kiszállítások melyik területen kerültek felhasználásra,

b) kimutatjuk, hogy az egyes területekről történő beszállításokat melyik ágazat használta fel, ill. a területről kibocsátásra kerülő termékek melyik ágazattól származnak és azokat melyik területen használják fel.

2. *Az ágazati elvből* is kiindulhatunk a területi mérlegek megszerkesztésénél itt is két esettel állunk szemben:

a) megállapíthatjuk, hogy melyik területen kívüli ágazatok adták át, ill. milyen területen kívüli ágazatoknak adták át termékeiket továbbfelhasználásra,

b) megállapíthatjuk, hogy a beáramló termékek ágazati eredetük után, ill. a kiszállításra kerülő termékek mely felhasználó ágazatokban kerültek továbbfelhasználásra.

A területi vagy ágazati elvet követő mérlegekre a *hazai gyakorlatban* is több példát találunk.

„A kazincbarcikai ipar input-output modellje"-nek (Kóródi 1968) kidolgozói vizsgálatukban arra kerestek választ, hogy egy vertikálisan és horizontálisan egyaránt összetartozó iparterületnek a beszállítási és kiszállítási kapcsolatai milyen összefüggéseket mutatnak az ország különböző területeivel. A kazincbarcikai ipari területre történő be- és kiszállításokat a területi egységként választott megyék, valamint a főváros, és az importanyagok relációnként és határátlépési hely szerinti bontásával lehetőség kínálkozott a területen belüli termékáramlások elemzésén túl a szállítási feladatok vizsgálatára, értékelésére.

A *területi elv* alapján bontott ki- és beszállításokkal a vizsgálatuk során közelebb kerültek az ellátási és beszerzési területek jellegének feltárásához, jobban megítélhették szerepüket a terület termelésében, ill. kimutathatták a felesleges szállításokat, azok költségtényezőjét stb. Az egyik legismertebb és legösszefogottabb területi ágazati kapcsolatok mérlegében, a Vas megyére szerkesztett input-output modellben (Csepinszky – Kovács – Novák 1973) is a területi elv érvényesül, mégpedig olyan formában, hogy egyetlen sorba, ill. oszlopba került összevonásra a megyén kívüli hazai és import anyagfelhasználás, ill. a megyén kívüli hazai kiszállítás és export. A mérlegben a külső kapcsolatok összevonását a kidolgozás célja tette indokolttá, amely a területi mérlegek adatgyűjtési lehetőségeinek feltárásában, a becslési, a számítási eljárások meghatározásában, valamint a megye gazdaságának elemzésében jelentkezett.

Hasonlóan a területi elvet követi a Központi Körzetre (Fodor – Illés – Bognár 1970) kidolgozott mérleg is, összevontan ábrázolja a körzeten kívüli kapcsolatokat mindkét oldalon.

Az *ágazati elv* alkalmazására is találunk hazai példát. A „Budapesti ipari kapcsolatok mérlegében" (Fodor 1976) a területre kívülről jövő, ill. onnan kiszállí-

[23] Az egyes változatok kidolgozásánál figyelembe vettük „A területi-ágazati kapcsolatok mérlegének kidolgozása és a tervezési gyakorlatban történő alkalmazása" c. tanulmányt (szerk.: Szép J. Kézirat. Bp., 1977).

tásra kerülő anyagokat és termékeket ágazati bontásban adták meg. A mérleg célja a területen belüli kapcsolatok elemzésével a budapesti ipar belső szerkezetének feltárása, másrészt a vidéki beszállítások szerepének megítélése a budapesti ipari ágazatok felhasználásában, továbbá a vidéki kiszállítások súlyának és ágazati szerkezetének a tanulmányozása.

3. A „B" változatú területi ágazati kapcsolatok mérlegének következő típusa a *területi és ágazati elvet egyaránt* magába foglaló mérleg, amelyet területi–ágazatközi mérlegnek nevezhetünk. A területi részmérlegek[24] csoportjának harmadik tagja arra ad választ, hogy a vizsgált terület milyen területekkel és ezen belül milyen ágazatokkal van kapcsolatban.

A *területi részmérlegre* az a jellemző, hogy a kiválasztott területi egységet veszi nagyító alá, ennek belső kapcsolatait, termelési, ráfordítási, elosztási rendszerét vizsgálja, valamint kimutatja a be- és a kiszállítások szerepét a terület gazdaságában. A ki- és beszállítások bontását ágazati, területi, ill. a két elv együttes alkalmazásával végezhetjük el. A részmérlegek közül a *területi–ágazatközi mérleg*gel a vizsgált egység ágazatainak területi kötődését, önellátásuk fokát, koncentrációjuk mértékét, belső ágazati vertikális és horizontális összefonódásukat, kibocsátási kapcsolataik ágazati és területi jellegét, nagyságát és külső beszállításokon keresztül jelentkező meghatározottságukat elemezhetjük. Nem szabad megfeledkeznünk az ilyen típusú mérlegek fontosságáról a területi tervezésben sem. Az összetartozó területek kapcsolatait egy területre vetítő mérleg segítséget adhat a fejlesztési elképzelések ágazati és területi szintű következményeinek feltárására, a szomszédos szállító és felhasználó körzetekre gyakorolt hatásainak kimutatására.

A területi–ágazatközi mérleg sémáját a *25. ábrán* mutatjuk be.

A mérlegünkben a ki- és beszállításokat mutató szubmátrixok $n \times n$-es méretűek, ahol „n" ($1 \leq i, j \leq n$) az ágazatok számát mutatja, ugyanakkor „m" ($k = 1, 2, \ldots, m$) darab ilyen mátrix létezik, ami a szállítási területeket adja meg, így lényegében a beszállítások egy $mn \times n$, a kiszállítások pedig egy $n \times mn$ méretű mátrixot adnak.

A beszállítások mátrixának B^K egy tagja

$$b_{ij}^{k}$$

azt a termékmennyiséget adja meg, amely k-adik terület i-edik ágazatából beszállításra és felhasználásra került a terület j-edik ágazatába.

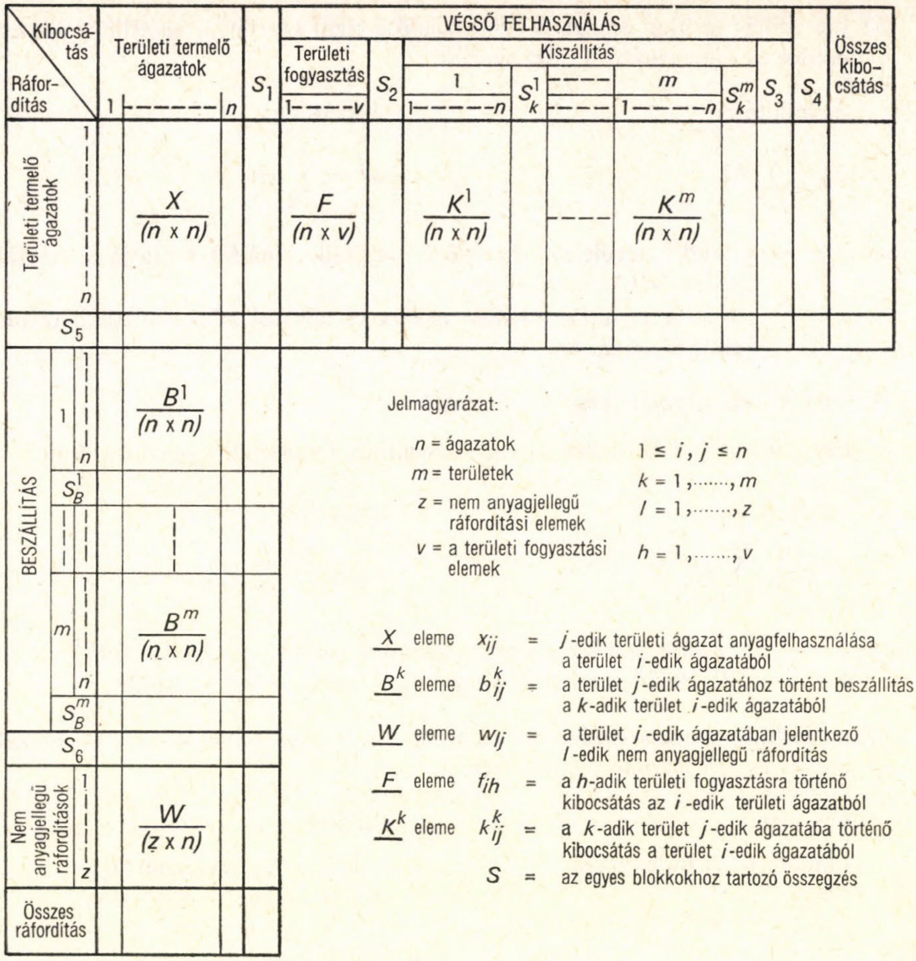
A kiszállítások mátrixának K^K egy tagja

$$k_{ij}^{k}$$

azt a termékmennyiséget mutatja, amely a terület i-edik ágazata k-adik terület j-edik ágazatának szállított.

A területi–ágazatközi mérlegek a kiválasztott terület szempontjából *mérlegrendszerként is alkalmazhatók*, hiszen belőlük különböző típusú, területi vagy ágazati elvet követő mérlegek állíthatók elő.

[24] A területi részmérlegek elnevezését Kiss F.: A kazincbarcikai ipari terület input—output modellje c. előadásában (II. Magyar ÁKM Konferencia, Siklós 1971. X. 18—20) használja.



25. ábra. A területi-ágazatközi mérleg általános sémája

A területi-ágazatközi mérlegekből előállítható:

1. a területi elv alapján készülő mérlegek

   a) beszállítási területi eredet szerint, ill. a kiszállítás felhasználó terület szerint

beszállítás	kiszállítás
$k = 1, \ldots, m$	$k = 1, \ldots, m$
$b_{..}^k = \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{n} b_{ij}^k$	$k_{..}^k = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} k_{ij}^k,$

ahol $b_{..}^k$ – a k-adik területről történő összes beszállítást adja meg a vizsgált területre,

$k_{..}^k$ – a k-adik területre történő összes kiszállítást adja meg a vizsgált területről;

b) beszállítás területi eredet és felhasználó ágazat szerint, a kiszállítás ágazati eredet és felhasználó terület szerint

beszállítás

$$b^k_{.j} = \sum_{i=1}^{n} b^k_{ij}$$

kiszállítás

$$k^k_{i.} = \sum_{j=1}^{n} k^k_{ij},$$

ahol $b^k_{.j}$ – a k-adik területről történő összes felhasználást mutatja a vizsgált terület j-edik ágazatában,

$k^k_{i.}$ – a k-adik területre történő összes kiszállítást adja a vizsgált terület i-edik ágazatából.

2. Az ágazati elv alapján készülő mérlegek

a) beszállítás ágazati eredet szerint, kiszállítás felhasználó ágazat szerint

beszállítás

$$b_i = \sum_{k=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} b^k_{ij}$$

kiszállítás

$$k^{\cdot}_{.j} = \sum_{k=1}^{m} \sum_{i=1}^{n} k^k_{ij},$$

ahol $b^{\cdot}_{i.}$ – az i-edik területen kívüli ágazattól történő összes beszállítás,

$k^{\cdot}_{.j}$ – j-edik területen kívüli ágazatába történt összes kiszállítás;

b) beszállítás ágazati eredet és felhasználó ágazat szerint, kiszállítás ágazati eredet és felhasználó ágazat szerint

behozatal

minden (i, j) indexpárra
$i = 1, \ldots, n$
$j = 1, \ldots, n$

$$b^{\cdot}_{ij} = \sum_{k=1}^{m} b^k_{ij}$$

kivitel

minden (i, j) indexpárra
$i = 1 \ldots, n$
$j = 1, \ldots, n$

$$k^{\cdot}_{ij} = \sum_{k=1}^{m} k^k_{ij},$$

ahol $b^{\cdot}_{ij}$ – a vizsgált terület j-edik ágazatában felhasználásra kerülő összes területen kívüli i-edik ágazattól származó beszállítás,

$k^{\cdot}_{ij}$ – a j-edik területen kívüli ágazatoknak történő összes kiszállítás a vizsgált terület i-edik ágazatából.

A fentiekből láthatjuk, hogy a területi–ágazatközi mérleg *egyetlen terület* szempontjából vizsgálja a kapcsolatokat és segítségével rendszerezhető, kiemelhető a kapcsolatok formája, típusa, amely ágazati és területi elv alapján is elvégezhető a felhasználási igények figyelembevételével.

A három alaptípus természetesen rendkívül *sok variációs* lehetőséget ad. Wirth Gy. (1976) több területi mérlegtípust mutat be, amelyek lényegében visszavezethetők az általunk csoportosított esetekre.

„A területi input-output modell régiók és ágazatok szerint" (Wirth 1976, p. 202) sémát, amely külön veszi a beszállító ágazatokat, és ezen belül adja meg az egyes területeket, azonosnak tekintjük az ágazati és területi elvet egyaránt magába foglaló mérleg típusával. „A területi input-output modell bi-regionális változata" (Wirth 1976, p. 203) a felhasználó ágazatok szerint adja meg a beszállításokat, azaz az ágazati elvet követő mérleg sémájára vezethető vissza.

A bemutatott típusoknál mindig egyetlen területet vizsgáltak, annak a külső kapcsolatait különböző szemléletben közelítették. A *területi részmérlegek* címszóval összefoglalt területi ágazati kapcsolati mérlegek tehát a kétirányú kapcsolatok rendszerét egyetlen terület nézőpontjából csoportosítják és ezeket a belső kapcsolatokon keresztül vizsgálják.

A térben jelentkező gazdasági folyamatok azonban nem szigetelhetők el egymástól. Összekapcsolásuk nemcsak azért szükséges, hogy feltárjuk az elemek (ágazatok) tevékenységének realizálási formáit, hanem azért is, hogy az *egész gazdaság* mint összefüggő rendszer térben jelentkező funkcióit teljességében át tudjuk tekinteni. A *területi kombinált mérleg* vagy *interregionális* mérleg a régiókra bontott gazdaságot az egymás közötti kölcsönös szállításokkal összekapcsolja és egységes egészként ábrázolja.

Itt már a *gazdaság minden eleme* (ágazata) *kettős funkcióban* él, egyrészt mint a régió meghatározott egysége a belső kapcsolatok által, másrészt, mint az egész gazdaság egyik alkotója a többi egység meghatározottságában. A *régiók* is *két* összetartozó és elválaszthatatlan *funkciót* képviselnek. Egyrészt a gazdasági szerkezetükkel, annak ágazati termelésével, felhasználásával és kibocsátásával meghatározzák a többi terület gazdaságának működését, azaz a gazdaság egészét. Másrészt a gazdaság egésze, s egyes régióinak ágazati termelése, felhasználása és kibocsátása determinálja az adott régió gazdaságát. Ez a rendszer-szemléletű közelítés teheti alkalmassá az egész gazdaságot térben ábrázoló interregionális mérleget arra, hogy a gazdasági tervezés egyik fontos segédeszközévé váljon. A hatásmechanizmusok sokrétűek, komplex folyamatokat váltanak ki, hiszen ha megváltoztatjuk a gazdaság bonyolult rendszerének egyetlen elemét, máris elemek sokasága jön mozgásba, a reakciók közvetlen formái mögött akár a közvetlen hatások tovagyűrűző rendszere jelenik meg, akár az ellentétes hatások fékező, visszafogó vagy más irányba fejlődő folyamatai indulhatnak meg.

A gazdasági tervezésnek tehát ahhoz, hogy döntéseinek következményeiről – amelyek összgazdasági formájukon túl térben jelennek meg – átfogó ismeretei legyenek, célszerű kialakítania egy nagy információtartalommal rendelkező modelltípust, az *interregionális ágazati kapcsolatok mérlegét*. Így a döntések kockázata jelentősen csökkenthető, a régiók fejlődésfolyamatai regisztrálhatók, és nem utolsó sorban megfigyelhetők a gazdaság egészének területi sajátosságai.

Az interregionális ágazati kapcsolati mérlegekkel (Csepinszky 1965, Dadajan – Kosszov 1963) részletesen nem kívánunk foglalkozni, mivel vizsgálatainkat egy területi ágazatközi mérleggel végeztük, így csak az ehhez kapcsolódó elméleti és módszertani kísérleteinkről adhatunk számot.

2. *A területi–ágazatközi mérleg matematikai alapjai*

A területi–ágazatközi mérleggel minden olyan analízis elvégezhető, mint ami az általános célzatú ágazati kapcsolatok mérlegével,[25] de sajátos jellege miatt – a gazdaság kiválasztott területi egységei belső ágazati szerkezetét és annak külső, más területi egységekkel kialakult kapcsolatait mutatja be – a képleteknek és összefüggéseknek eltérő értelmezése adódik.

A területi mérlegek input-output analízisének kiindulását a belső négyzet értékadataiból képzett *közvetlen ráfordítási együtthatók mátrixa* szolgáltatja.

A közvetlen ráfordítási együtthatók vagy technológiai koefficiensek A mátrixának egy elemét, a_{ij}-t a következő módon határozzuk meg:[26]

$$a_{ij} = \frac{x_{ij}}{x_{.j}}.$$

Az a_{ij} elem azt fejezi ki, hogy a vizsgált területünk j-edik ágazata egységnyi termelésének létrehozásához az i-edik termeléséből mennyit használt fel.

A terület szempontjából ez az információ akkor válik számunkra értékessé, ha az *egyes ágazatok összes területen belüli felhasználását megállapíthatjuk*, azaz

$$a_{ij} = \sum_{i=1}^{n} a_{ij}$$

összegzést végezzük, így megállapíthatjuk a vizsgált terület ágazatainak *önellátás fok*át.

Az önellátási fok tehát azt mutatja meg, hogy az egyes ágazatok egységnyi termelésükhöz milyen mértékben veszik igénybe a terület ágazatainak a termelését, azaz belső felhasználásaik révén mennyire kötődnek a területhez.

A belső négyzethez hasonlóan a mérlegünk alsó szárnyán szereplő elsődleges ráfordítások arányát is megállapíthatjuk az egységnyi termelésben. A két fő csoportban bemutatott elsődleges ráfordításokból képzett közvetlen ráfordítási együtthatók az alábbiak:

$$b_{ij}^{k'} = \frac{b_{ij}^{k}}{x_{.j}},$$

ahol $b_{ij}^{k'}$ a k-adik terület i-edik ágazatából származó felhasználás mértéke a j-edik ágazat termelésében.

$$w'_{lj} = \frac{w_{lj}}{x_{.j}} \qquad \begin{matrix} l = 1, \dots, z \\ j = 1, \dots, n, \end{matrix}$$

ahol w'_{lj} a j-edik ágazat egységnyi termeléséhez felhasznált l-edik nem anyag jellegű ráfordítás.

[25] Az ágazati kapcsolatok mérlege matematikai összefüggéseinek értelmezéséhez segítséget adhat Rácz A. (1973) tanulmánykötete.

[26] A jelölésrendszerünk megegyezik a *25. ábrán* alkalmazottakkal.

A *beszállítások* szerepének megállapítása – a vizsgált terület egészében, ill. ágazatainak termelésében – rendkívül nagy jelentőségű a területi kapcsolatok feltárásában. A beszállítási területenként elvégezve az összesítéseket

$$b^{k'}_{.j} = \sum_{i=1}^{n} b^{k'}_{ij}$$

lehetőségünk van kimutatni, hogy az egyes ágazatok egységnyi termelésükhöz milyen mértékben használták fel a különböző területek ágazatainak termelését. Ezáltal feltárhatjuk a különböző területek szerepét területünk ágazatainak termelésében, ami egyúttal a külső kötődésük mértékére is utal.

A beszállításokra kiszámított közvetlen beszállítási–ráfordítási együtthatók ágazati szintű összegzésével

$$b^{k}_{i.} = \sum_{j=1}^{n} b^{k}_{ij}$$

kimutathatjuk beszállítási területenként azokat az ágazatokat, amelyek a külső felhasználásokon keresztül alapvető jelentőségűek a vizsgált terület gazdaságában.

A *nem anyag jellegű ráfordítások*nak a termelési egységre történő vetítésével a terület anyagigényes és munkaigényes ágazatait tudjuk elkülöníteni, ill. a nem anyag jellegű ráfordítások többi elemének jelentőségét is felmérhetjük.

A közvetlen ráfordítási együtthatókra a következő összefüggésnek kell fennállnia:

$$\sum_{i=1}^{n} a_{ij} + \sum_{k=1}^{m} \sum_{i=1}^{n} b^{k'}_{ij} + w'_{.j} = 1 .$$

A vizsgálat alá vont terület ágazatainak egységnyi kibocsátásukhoz nemcsak az utolsó termelési vertikumból – amelyet a közvetlen ráfordítási együtthatók mutatnak –, hanem az azt megelőző *vertikum*ból is használtak fel anyagokat és termékeket. A terület ágazatai között lehetnek olyanok, amelyek akár a terület, akár a beszállítási területek ágazataiból közvetlenül nem használtak fel semmit, ugyanakkor közvetetten a más ágazatokból történő felhasználáson keresztül a terület gazdasága, valamint a beszállítási területek ágazatai felé jelentős igényt támasztottak.

A terület ágazatainak egységnyi kibocsátott termelési értékének előállításához a közvetlen és a közvetett kapcsolatokon keresztül jelentkező ráfordítási igényeket az *inverz együtthatók mátrixa* mutatja:

$$R = (E - A)^{-1}.$$

Az R inverz mátrix r_{ij} eleme azt adja meg, hogy a j-edik ágazat egységnyi kibocsátásra kerülő termelésének előállításához közvetlenül és közvetve milyen mértékben veszi igénybe i-edik ágazat termelését.

A halmozott ráfordításokat bemutató inverz mátrix oszlopirányú összegzésével

$$r_{.j} = \sum_{i=1}^{n} r_{ij}$$

megállapíthatjuk, hogy a terület j-edik ágazatánál a terület többi ágazatától milyen nagyságú együttes kibocsátásra van szükség a végső felhasználás megtermeléséhez. Az ágazatok *területi kötődését* most már a végső felhasználásra történő termelésen keresztül tudjuk nyomon követni, ill. a közvetlen és közvetett felhasználások együttes ábrázolása révén teljesebben felvázolhatjuk a terület gazdasági szerkezetét. A közvetlen és a halmozott ráfordítások egymáshoz való viszonyával lehetőségünk van az átgyűrűző hatások mértékének feltárására az egyes ágazatokban, amellyel már a közvetett kapcsolatokon keresztül tárjuk fel az ágazatok területi kötődését.

A halmozott ráfordítási együtthatók a terület egyes ágazatainak nettó kibocsátásához igénybe vett közvetlen és közvetett ráfordításaikon túl – amely a területen belüli kapcsolatok mélyebb feltárását segíti elő – lehetőséget adnak az elsődleges ráfordítások területi szintű halmozott mutatóinak az előállítására is.

$$B^{k''} = B^{k'} \cdot R, \qquad k = 1, \ldots, m$$

mátrix egy eleme $b_{ij}^{k''}$ a vizsgált terület j-edik ágazatának közvetlen és közvetett beszállítási ráfordításait mutatja a k-adik terület i-edik ágazatából, amelyet együttesen azért vett igénybe, hogy egységnyi nettó kibocsátását elő tudja állítani. A beszállítási területekre kibontottan tehát felhasználási és beszállítási ágazatonként rendelkezésre álló mátrixok oszlopirányú összegzésével megállapíthatjuk, hogy az egyes ágazatok nettó kibocsátásuk megtermeléséhez milyen beszállítási területtel állnak legszorosabb kapcsolatban. Ha ugyanezt a mátrixot *ágazatonként összegezzük*, megállapíthatjuk azokat a beszállító ágazatokat, amelyek *meghatározó szerepet játszanak* a *terület ellátásában* akár a közvetlen felhasználó ágazatnak, akár más ágazatoknak történő szállítással, amelyek területi belső felhasználásokon keresztül használják fel termékeiket.

$$W'' = W' \cdot R$$

mátrix egy eleme w_{lj}'' a *nem anyag jellegű ráfordítások halmozott tartalom mutatóit* adja meg ágazati bontásban, azaz kimutatható az egyes ágazatok egységnyi nettó kibocsátásában a közvetlenül és a területi belső felhasználásokon közvetetten jelentkező nem anyag jellegű ráfordítások mértéke. A mutató adta információkkal felderíthetjük az *egyes ágazatok munkabér-*, *értékcsökkenési-*, *tisztajövedelmi ráfordításainak szerepét*, *súlyát*, ill. a közvetlen és halmozott nem anyag jellegű ráfordítási elemek összevetésével kiemelhetjük azokat az ágazatokat, amelyek az ilyen jellegű ráfordításokból a *legmagasabb igénnyel lépnek fel a terület gazdasága felé.*

A külső eredetű ráfordítások és a nem anyag jellegű ráfordítások azért értelmezhetők elsődleges ráfordításoknak, mivel az inverz mátrix segítségével valamennyi ágazat termelése visszavezethető ezekre a ráfordításokra, azaz a terület ágazatainak egységnyi nettó kibocsátása előállítható a halmozott beszállítási ráfordítások, valamint a halmozott nem anyag jellegű ráfordítások összegéből, vagyis

$$\sum_{k=1}^{m} \sum_{i=1}^{n} b_{ij}^{k''} + \sum_{1=1}^{z} w_{1j}'' = 1\,.$$

A területi ágazatok termelésének bizonyos része a területi szinten termelő fogyasztásra kerül, amely lényegét tekintve szintén a terület ágazatainak végső felhasználására történő kibocsátását szolgálja. A mérleg oldalszárnyán elhelyezkedő *végső felhasználási szubmátrixoknak és az inverz mátrixnak a szorzata* ismételten értékes információt adhat számunkra a területről, ill. annak ágazatairól.

$$K^{K'} = R \cdot K^K$$

mátrix egy eleme $k_{ij}^{k'}$ a k-adik terület j-edik ágazatába történő szállításokhoz szükséges bruttó termelést mutatja, amelyet a terület i-edik ágazatának valamennyi területi ágazat számára közvetlenül és közvetetten biztosítania kellett, hogy a kiszállítás az adott terület adott ágazatában megvalósuljon.

A mátrix sorirányú összegzésével

$$k_{i.}^{k'} = \sum_{j=1}^{n} k_{ij}^{k'}$$

tehát rendelkezésünkre áll a k-adik területre történő kiszállításokhoz az a bruttó termelés, amelyet – a területen belüli felhasználáson közvetlenül és közvetve – i-edik ágazatnak biztosítani kellett valamennyi ágazat számára. Ha az összes területi ágazatra elvégezzük az összevonásokat és ezekből levonjuk az egyes ágazatok kiszállításait, akkor megállapíthatjuk, hogy melyik területi ágazat jelentkezik a folyó termelő felhasználáson keresztül a *legnagyobb ellátóként.* Az így meghatározásra kerülő területi ellátó ágazatoknál azt is kimutatjuk, hogy melyik területi ágazatnak adták át termékeiket továbbfeldolgozásra, azaz az alapvető ellátó ágazatoknak melyik területi ágazat a legnagyobb fogyasztója a kiszállításokon keresztül. A vizsgálatot az inverz mátrix meghatározott (legnagyobb ellátóhoz tartozó) sorával, valamint a területekre összegzett kiszállítási vektorok szorzatával állíthatjuk elő; itt is érvényes az, hogy a legnagyobb ellátók sorában a kiszállítások is szerepelnek.

A végső felhasználás további tételeinek elemzésével azonos módon járhatunk el, vagyis a

$$F' = R \cdot F$$

mátrix egyik eleme f_{ih} azt a bruttó termelést mutatja, amelyet az i-edik ágazatnak valamennyi ágazat számára közvetlenül és közvetetten biztosítani kellett, hogy a h-adik végső felhasználási elem megvalósuljon.

A terület ágazatainál itt már azokat tudjuk megnevezni, amelyek a bruttó felhalmozás, a nem termelő fogyasztásban a területi belső felhasználásokon keresztül meghatározó szereppel rendelkeznek, valamint a fentebb leírtakkal az ellátó ágazatok legnagyobb fogyasztóit is kijelölhetjük.

Az ágazati kapcsolatok mérlegének matematikai feldolgozása arra is lehetőséget ad, hogy *közvetlen kapcsolatot* tudjunk teremteni az *elsődleges ráfordítások* és a *végső felhasználás* között.

$$B^{k'} \cdot R \cdot K^K$$

$$B^{K'} \cdot R \cdot F$$

és a

$$W' \cdot R \cdot K^K$$

$$W' \cdot R \cdot F$$

mátrix szorzásokkal a végső felhasználás összetevőinek megtermeléséhez szükséges elsődleges ráfordítások értékét kapjuk meg.

Lényegében az általunk két-két csoportra bontott végső felhasználásnak és elsődleges ráfordításoknak az inverz mátrixon keresztül történt összekapcsolásaival a rendelkezésre álló mennyiségek elosztását végeztük el. Így kirajzolódik előttünk, hogy a tényleges mennyiségeket összetevőire bontjuk fel, ugyanis a szorzás eredményeként kapott mátrix oszlopösszegei megegyeznek a végső felhasználás megfelelő elemeinek oszlopösszegeivel, ill. a sorösszegei az elsődleges ráfordítási elemek megfelelő sorösszegeivel. Mindez a halmozott elsődleges ráfordítások mátrixának tulajdonságából adódik, vagyis az egységnyi végső felhasználás megtermeléséhez a termelési folyamaton keresztül közvetlenül és közvetve szükséges elsődleges ráfordítási igényeket mutatja.

A területi mérlegben az *első*ként bemutatott *összefüggés*sel a kiszállítások beszállítás-igényéről kapunk tájékoztatást, amikor a *k*-adik területre történő kiszállítások mátrixához rendeljük a *k*-adik terület halmozott beszállítási ráfordításait. Így megállapíthatjuk, hogy a *k*-adik terület *i*-edik ágazatából történő beszállítások – a területen belüli felhasználásokon keresztül – a *k*-adik terület *j*-edik ágazatában jelentkező kiszállításokban milyen mértékűek voltak.

Természetesen a *k* területet jelző index *futó indexként* jelentkezik, ugyanis minden beszállítási területet bármelyik kiszállítási területhez rendelhetjük, ill. minden kiszállítási területet bármelyik beszállítási területtel kapcsolhatjuk.

A kiszállítások beszállítás-igényességét mutató *k*-adik területre kiszámított mátrixban az összevonásokkal értékes információt kapunk. A *sorirányú összegzéssel* megállapíthatjuk, hogy a *k*-adik beszállítási terület *i*-edik ágazatából összesen milyen nagyságú beszállítás jelentkezik ezen területnek történő kiszállításokban, azaz kijelölhetjük azokat az ágazatokat, amelyek döntően meghatározzák a *k*-adik területnek történő kiszállítást. Az oszlopirányú összegzésnél arra tudunk választ adni, hogy a kiszállítási területen belül melyik az az ágazat, amelyik döntő mértékben „fogyasztója" a beszállítási területnek.

A *második eset*ben bemutatott összefüggéssel a beszállítások és a végső felhasználás további elemei között teremtünk kapcsolatot, azaz meghatározzuk, hogy a *k*-adik területről történő beszállítás a területen belüli felhasználáson keresztül melyik *k*-adik egyéb végső felhasználásban realizálódik és milyen nagyságban.

Az elemzések során ezzel az összefüggéssel kimutathatjuk, hogy a nem termelő fogyasztásban és a bruttó felhalmozásban a közvetlen beszállításokat figyelmen kívül hagyva milyen szerepe van az egyes területeknek, valamint ágazatoknak.

A *harmadik összefüggés*ben a nem anyag jellegű ráfordítások és a kiszállítások közötti kapcsolatot tárhatjuk fel, azaz meghatározhatjuk, hogy a *k*-adik terület *j*-edik ágazatába történő kiszállításokban a területen belüli felhasználási kapcsolatok figyelembevételével együttesen az *l*-edik nem anyag jellegű ráfordítás milyen nagyságban épült be.

A feldolgozásban ennek alapján megállapíthatjuk, hogy a kiszállítási területek és ágazatok közül melyeknél jelentkezik a nem anyag jellegű ráfordítások legmagasabb lekötöttsége, ami az egyes tényezők külön-külön végzett elemzésével elvezethet bennünket a terület nem anyag jellegű ráfordításainak teljesebb megítéléséhez a kiszállításokban.

Az *utolsóként bemutatott összefüggés*sel a nem anyag jellegű ráfordítások és az egyéb végső felhasználási elemek közötti kapcsolatot szemléltethetjük, azaz kimutatjuk, hogy a terület l-edik, nem anyag jellegű ráfordítása a területen belüli felhasználásokon keresztül milyen mértékben testesült meg a terület h-adik egyéb végső felhasználásában.

A két tényező közötti közvetlen kapcsolattal megítélhetjük, hogy a nem anyag jellegű ráfordítások közül melyek játszanak döntő szerepet a nem termelő fogyasztásban és a bruttó felhalmozásban.

Az eddig bemutatott matematikai feldolgozásból adódó elemzések mindig a *terület belső kapcsolati rendszeréből* kiindulva mutatták be a terület kötődését más területekhez, ágazatokhoz.

A közvetlen ráfordítási mutatók a terület ágazatainak termelésében – az utolsó termelési fázisban – jelentkező anyag jellegű és nem anyag jellegű ráfordításokról adnak számot.

A halmozott ráfordítási mutatók már arról tájékoztatnak, hogy a terület adott ágazatából kibocsátott egységnyi termelési érték létrehozásához milyen ráfordításokra van szükség nemcsak a termelés utolsó fázisában (tehát a közvetlen ráfordítási igények milyenek), hanem az azt megelőző valamennyi területi termelési fázisban. A területi szintű halmozódást kifejező inverz mátrix tehát kimutatja, hogy mekkora termelés szükséges az egységnyi nettó kibocsátás (végső felhasználás, ill. területen kívüli termelő fogyasztás) biztosításához a terület belső kapcsolatainak figyelembevételével. Az inverz mátrixszal meghatározhatjuk az egységnyi nettó kibocsátásokhoz szükséges halmozott elsődleges ráfordításokat és erőforrásokat, meghatározhatjuk a terület egyes ágazatainak hozzájárulását más területi ágazatok végső felhasználási céljainak eléréséhez, ill. a végső felhasználás és az elsődleges ráfordítások között kapcsolatot tudunk létesíteni.

A halmozott mutatókkal jelzett fenti összefüggések a területből magából, annak belső felhasználói és kibocsátói kapcsolatrendszeréből indulnak ki, átfogják a termelés egész rendszerét, folyamatát, azonban mindezt a terület belső felhasználási meghatározottságából kiindulva teszik.

A területek gazdaságának tevékenységét a belső kapcsolatokon túl a népgazdaság más területeivel kialakult kapcsolataik is determinálják, hiszen a terület ágazatai termelésükben a népgazdaság más területeiben és ágazataiban előállított anyagok és termékek fogyasztói, valamint az anyagfelhasználásaik révén az ezekben megtestesült amortizációt is megjelenítik. A terület ágazatainak kapcsolatát a népgazdaság egészével, ill. annak területeivel úgy tudjuk átfogóan megragadni, ha az egységnyi kibocsátott termék és előállításához szükséges minden anyagi kapcsolatot figyelembe vevő ráfordítási igényt megállapítjuk.

A területi mérlegekben számított *teljes tartalommutatók*kal (Balsay 1965) lehetőségünk van azt megállapitani, hogy a terület egységnyi nettó kibocsátásának megtermeléséhez a belső, valamint a beszállítási kapcsolataival milyen elsődleges ráfordítási igényt támaszt a népgazdaság egésze felé.

A népgazdasági szintű teljes ráfordítási mutatók meghatározásához azzal a feltétellel élünk, hogy

– a beszállítási ráfordítások szerkezete azonos legyen a beszállításokat fedező kiszállítási ráfordításuk szerkezetével,

– az amortizáció egységnyi értékének ráfordítási költségei átlagosan megegyezzenek a beruházások és felújítások egységnyi ráfordításaival.

A *teljes tartalommutatók előállításához* a fentieket figyelembe véve a terület *alapmátrixát bővítjük* az alsó szárnnyal a beszállítási felhasználások sorvektorával és az amortizáció sorvektorával, az oldalszárnynál pedig a beruházások, valamint a kiszállítások oszlopvektoraival. Az így megnagyobbodott mátrixokból a közvetlen ráfordítások mátrixát, és ebből inverz mátrixot képezünk. Az inverz mátrix már nemcsak a területi anyagfelhasználás átgyűrűződését, hanem a beszállításokon és az amortizáción keresztül történő átgyűrűző hatásokat is kimutatja.

A teljes tartalommutatót már a kiválasztott közvetlen tartalommutatók vektorának és az így kapott inverz mátrix szorzata adja, amivel meghatározhatjuk az egységnyi végső felhasználáshoz szükséges *teljes ráfordításokat*.

A teljes tartalommutatókat a mérleg alsó szárnyán szereplő ráfordítási tényezőkre, a területekről történő beszállításokra, az amortizációra, a bérekre és a tiszta jövedelemre, valamint a külső, mérlegben nem szereplő ráfordításokra, a munkaráfordításra, állóeszközráfordításra is számolhatjuk. Az egyes ráfordítási elemekből számított teljes ráfordítási mutatók közül a területi tevékenység legátfogóbb mutatója lehet a *teljes bértartalom* (Nyitrai 1965).

A teljes bértartalom magába foglalja az *összes élő- és holtmunka ráfordítás*okat, a területen belüli és a más területekről történő anyagok felhasználását és az állóeszközök igénybevételét az amortizáción keresztül. A terület ágazatainak hatékonyságáról kaphatunk képet a teljes bértartalom segítségével, hiszen minél kevesebb bérráfordítás szükséges egységnyi értékű termék előállításához, annál hatékonyabb a területen a népgazdasági erőforrások igénybevétele.

A teljes tartalommutatók számításával a terület egészének és azon belül az egyes ágazatainak tevékenységét átfogóbban megítélhetjük. A közvetlen értékekben mutatkozó kedvező vagy kedvezőtlen jelenségeket különböző tényezők – az ágazati és termelési szerkezet, a területi ágazati kapcsolatok jellege stb. – befolyásolják, amelyek a teljes mutatókban feloldódnak, ill. a területi termelést meghatározó tényezők ott is megjelennek, ahol a végiggyűrűzés termelési kapcsolatok alapján végbemegy.

A bemutatott matematikai feldolgozási módok az ágazati kapcsolatok mérlege általános összefüggéseiből adódnak, amelyek az elemzési igényeknek megfelelően bővíthetők, szűkíthetők vagy más eljárásokkal kiegészíthetők.

3. *Egy mérleg összeállításánál figyelembe vehető szempontok a Baranya megyei mérleg példáján*

A területi ágazati kapcsolatok mérlegének összeállításánál első lépés az ágazati szerkezet figyelembevétele. Az ágazati szerkezet megválasztása azt a kérdést veti fel, hogy csupán az *anyagi termelés szféráit* építsük-e mérlegünkbe, vagy bővítsük azt a *nem anyagi termeléssel* is. A mérlegünkbe együttesen vontuk be az anyagi termelés és a nem anyagi termelés bizonyos szféráit. Tettük ezt egyrészt a modellszerkesztés követelményéből fakadóan, vagyis a területen lezajló folyamatokat csak komplexen, átfogóan ábrázolhatjuk, másrészt a munkaerő újratermelésében, az életszínvonal minőségi jegyeinek alakításában ezeknek a tényezőknek egyre nagyobb jelentőségük van, így területi mérlegünkkel a nem anyagi termelés vizsgálatát nem nélkülözhetjük.

A terület gazdasági szerkezetét mutató ágazatok kiválasztásánál alapvető szempont, hogy kapcsolataik szerteágazóak, többirányúak legyenek. A kapcsolatok ugyanakkor ne csak a megyén belül mozogjanak széles skálán, hanem más megyékkel, azok ágazataival is összefüggéseket mutassanak. A mérlegben kialakított ágazati szerkezetnek még fontos tényezője az összehasonlíthatóság és az *összekapcsolhatóság* is.

Mérlegünket ugyanis a körzet egészére és annak megyéire vonatkozó mérlegekkel is egybe kell vetnünk. Így módunk van több megye esetén a kiszállítási és beszállítási kapcsolataik révén egyetlen nagy területi egységgé átalakítani, azaz lehetőségünk van a körzeti szintű mérleg kidolgozására.

A Baranya megyei mérleg ágazati bontásánál azt tűzzük ki célul, hogy az egyrészt jól körülírja a megye gazdasági szerkezetét, másrészt segítségével beilleszthető legyen a megye a körzeti mérlegébe.

A körzet megyéinek *összekapcsolása és összehasonlítása* érdekében *egységes ágazati szerkezet* kialakítására törekedtünk, amelyben az egyes megyék ágazati szerkezetén túl a körzet gazdasági szerkezetének sajátosságait is megjelenítettük.[27]

A megyei ágazati bontásnál figyelembe kellett még venni, hogy a megye területén több olyan gazdasági egység működik, amelynek tevékenysége *többmegyés rendszerben* valósul meg; pl. a villamosenergia iparon, az építőanyagiparon, a könnyűipar II.-n, a közlekedésen, a kereskedelmen belül találhatjuk ezeket. Vizsgálatunk nemcsak a megye, hanem a körzet szempontjából is jelentős, hiszen számos esetben döntően befolyásolja a megye és a körzet egyes ágazatainak termelését is.

A Baranya megyei mérlegben a területi kapcsolatok feltárása meghatározta az ágazati szerkezetet, ugyanakkor az ágazati szerkezet is visszahatott a területi–termelési kapcsolatok összefüggéseinek kimutatására. A két elv egymást kölcsönösen és áttételesen feltételezi, az egyik a másik nélkül nem valósulhat meg. A mérlegben a *ki- és beszállításokat két nagy csoportba soroltuk:* az egyik a *körzeten belüli* gazdaságból származó (Somogy, Tolna, Zala megyékből összesen), ill. oda kibocsátásra kerülő termékeket adja meg, a másik a *körzeten kívüli* gazdaságból (az ország többi területe és export vagy import) származó és az oda irányuló kibocsátásokat mutatja be.

A Baranya megyei mérleget 1975-re dolgoztuk ki, mivel az egyrészt a IV. ötéves terv utolsó éve volt, másrészt a gyakorlati tapasztalatok is befolyásolták választá-

[27] A következő ágazati bontást alkalmaztuk a mérlegünkben: bányászat, villamosenergia ipar, kohászat, gépipar, építőanyagipar, vegyipar, könnyűipar I. (papír-, nyomda-, fafeldolgozóipar), könnyűipar II. (textil-, bőr-, szőrme-, cipő-, textilruházati ipar), könnyűipar III. (kézmű-, háziipar és egyéb ipar), élelmiszeripar I. (hús-, baromfi-, tojásfeldolgozó-, tejipar), élelmiszeripar II. (tartósító-, malom-, sütő-, tészta-, cukor-, édesipar), élelmiszeripar III. (egyéb élelmiszeripar), építőipar, mező- és erdőgazdaság, közlekedés-szállítás-hírközlés, kereskedelem, vízgazdálkodás, személyi és gazdasági szolgáltatás.

sunkat, ugyanis ha időben minél távolabb lépünk vissza, az adatok beszerezhetőségének és realitástartalmának erős csökkenésével vagyunk kénytelenek számolni.

Az adatgyűjtési munka megkezdése előtt az esetleges átfedések kizárása, a mérlegek felhasználása és összehasonlítása érdekében tisztázásra szorul, hogy milyen ismérvek alapján határozzuk meg az ágazatok tevékenységét. A *szervezeti elv* alapján történő meghatározásnál a gazdasági egységeknél jelentkező többfajta tevékenységet együttesen kezeljük, és nem vagyunk tekintettel a különböző tevékenységfajtákra. Az egységeknél felmerülő profilidegen tevékenységek leválasztása és átcsoportosítása más ágazatokhoz olyan feldolgozási munkatöbblettel járt volna, amelyet az adatok esetleges pontosságának növekedése sem kárpótolhatna.

A gazdasági alanyokat mint *jogi egységek*et vettük figyelembe, tevékenységük minden típusát együtt számoltuk el, azonban ezt az elvet további kiegészítéssel bővítettük, éspedig a *területi elv*vel. A területi elv azt tartalmazza, hogy a vizsgált területen működő valamennyi gazdasági egységet az ágazati, szervezeti rendszernek megfelelően csoportosítva vonjuk össze. A gazdasági egységek a termelési erőforrások hasznosítása, az értékesítési és a beszerzési tevékenységük lehetősége, valamint a munkaerővel való ellátásuk érdekében a térben szétszóródó *telephelyek*et hoznak létre.

A területi mérlegek összeállításakor a telephelyekkel kétféle módon találkozhatunk:

a) a vállalat székhelye más megyében van,
b) a vállalat székhelye a megyében van, azonban más megyékben is vannak telephelyei.

A megyei mérlegünket az *első esetben* a telephelyre vonatkozó adatokkal bővítettük. Ezt a telephelyeken rendelkezésre álló analitikus nyilvántartásokkal állapítottuk meg. Amennyiben ilyenekkel a telephelyek nem rendelkeztek, akkor a vállalati központtól szereztük be a különböző szintetikus mutatókat, és azok segítségével a telephelyre vonatkozó adatokat becsültük. A *második esetben* is – külső megyében levő telephelyek leválasztásánál – hasonló eljárásokhoz folyamodtunk.

A szervezeti és területi elv egymás melletti alkalmazásával az elszámolások egyértelművé válnak. A többszörös számbavételek elkerülhetők voltak, és a mérlegünk jól közelíti a megye gazdasági szerkezetét és területi-termelési kapcsolatait.

Az adatgyűjtési munkát a Baranya megyei mérleg összeállításánál a gazdasági egységek számbavételével és ezek ágazati besorolásával kezdtük meg. Ezután egy kérdőívet állítottunk össze, amellyel minden nyilvántartásunkban szereplő egységet felkerestünk. A kérdőívünk *első része* a mérleg *alsó szárnyának* kitöltésére vonatkozott, vagyis a bruttó termelési érték összetevőit tartalmazta megfelelő bontásban.

A *második rész*ben az *oldalszárny* kitöltéséhez szükséges, a gazdasági egységektől beszerezhető információkat, valamint a mérleg feldolgozásához nélkülözhetetlen egyéb, a termelési erőforrásokra vonatkozó mutatókat kértük (pl. foglalkoztatottak száma, állóeszköz-állomány bruttó, nettó értéke, gépi munkahelyek száma stb.).

A *harmadik rész* a gazdasági egységek anyagfelhasználására vonatkozó adatokat tartalmazta. A *fejrovatban* a beszállítási területeket, *oldalrovatban* pedig a mérleg ágazatait tüntettük fel. Tehát egyrészt azt kértük meg az egységektől, hogy 1975-ben a megyén belül milyen ágazatoktól szereztek be a feldolgozásra kerülő anyago-

36. TÁBLÁZAT

A Baranya megyei mérleg reprezentációs szintje az összes foglalkoztatottak és a bruttó állóeszköz-állomány értéke alapján

Ágazatok	Foglalkoztatottak (fő)		Reprezentációs szint %	Bruttó állóeszköz-állomány (millió Ft)		Reprezentációs szint (%)
	Vállalatok, szövetkezetek összesen (a)	A megfigyelt vállalatok, szövetkezetek összesen		Vállalatok, szövetkezetek összesen (b)	A megfigyelt vállalatok, szövetkezetek összesen	
Bányászat	23 149	15 007	64,8	7 766	4 510	85,0
Villamosenergia ipar	2 512	2 434	96,8	3 197	3 192	99,8
Kohászat	822	810	98,5	70	70	100,0
Gépipar	6 073	4 340	71,5	667	457	68,4
Építőanyagipar	5 713	4 831	84,5	3 688	1 295	89,1
Vegyipar	1 521	1 516	99,6	637	632	99,1
Könnyűipar I.	3 573	3 573	100,0	1 011	1 010	199,1
Könnyűipar II.	11 905	11 905	100,0	507	507	100,0
Könnyűipar III.	6 360	5 847	91,9	194	170	87,4
Élelmiszeripar	7 881	6 586	83,6	1 969	1 697	86,1
Ipar összesen	69 509	56 849	81,8	19 706	15 540	77,3
Építőipar	13 329	10 170	75,8	—	574	—(b)
Mezőgazdaság, erdő- és vízgazdálkodás	40 416	13 869	34,3	—	2 919	—
Közlekedés	13 405	13 202	98,5	—	4 273	—
Kereskedelem	17 494	15 575	89,0	—	4 149	—
Szolgáltatás	5 389	5 389	100,0	—	1 141	—
Összesen	159 547	115 054	72,1	—	29 062	—

Forrás: (a) Baranya megye Statisztikai Évkönyve 1975. KSH Baranya megyei Igazgatósága, Pécs 1976.
(b) Adatok hiányában nem volt megállapítható.

kat és termékeket, ill. milyen ágazatok számára értékesítették. Ugyanez vonatkozott a körzet megyéire és a körzeten kívüli gazdaságra is együttesen.

Felmérésünk befejezése után a gazdasági egységektől kapott információkat egybevetettük a Baranya megyei statisztikai évkönyv adataival. A *36. táblázat* a felmérésünk mélységét mutatja. Ágazatonként az összes foglalkoztatottak számának és a megyei évkönyv azonos mutatóinak összevetése alapján 72,1 %-os a megfigyelésünk; az iparon belül ez az arány magasabb, 81,8 %. Az állóeszköz-állomány bruttó értékére csak az iparban állt rendelkezésre adat, annak alapján az ipari állóeszköz-állomány közel 80 %-át vontuk be felmérésünkbe.

A végső felhasználás megyei fogyasztási elemeinek összeállításánál a gazdasági egységek által közölt információkon kívül az országos és a megyei statisztikai adatokra támaszkodtunk, ill. ezek alapján végeztünk becsléseket.

A megyei mérleg összeállításánál az egyes ágazatok eltérő és széles körű tevékenysége miatt, valamint azok területi elhelyezkedése és irányítása alapján más-más *adatgyűjtési* módszerekhez folyamodtunk.

Az *iparon* belül a bányászatban nem vehettük figyelembe az ércbányászatot. Az ipari ágazatokban rendkívül gyakori volt a más megyei székhelyű vállalat telephelyeinek vagy a megyei vállalatok idegen megyében levő termelőhelyeinek a leválasztása. Ezek az egységek számos esetben önálló beszerzéssel és gazdasági elszámolással nem rendelkeznek, így tevékenységük eredményeit nehéz megyei szinten elhatárolni. A vállalati központokhoz fordultunk adatokért, és a vállalati információk alapján becsültük ezeknek az egységeknek a kapcsolatát, valamint termelési értékük egyes tényezőit.

A *nem ipari szektoroknál* először a *mező- és erdőgazdaság* adatgyűjtéséről kell néhány szót szólnunk. A teljeskörűségre való törekvés ebben a szektorban az adatgyűjtési munka elhúzódását és költségeinek jelentős növekedését eredményezte volna. Ezért *reprezentatív megfigyeléssel* a termelőszövetkezetek 20%-ánál végeztünk felvételt a megyén belüli és a területi–termelési kapcsolatokról. Vigyáztunk arra, hogy a minta híven tükrözze a termelőegységek ágazati szerkezetének eltéréseit, a különböző természeti adottságok között termelő egységek képviselve legyenek, ugyanakkor a különböző tőkeerősségű gazdaságok is, de egyúttal a termelési szerkezetek eltérései is érvényre jussanak. Igyekeztünk a minta által tartalmazott gazdaságokat úgy kiválasztani, hogy magának a mintának a csoportátlaga lehetőleg ne térjen el szignifikánsan a megyei főátlagtól. A gazdaságok különbözőségeit viszont akkor vehettük a legjobban figyelembe, ha arra is törekedtünk, hogy a minta gazdaságainak jelentősebb mutatói az átlagtól minél nagyobb szóródást mutassanak. Az így begyűjtött adatokból azután a meglevő összes alapinformáció – amelyek a termelés nem anyag jellegű ráfordításait tartalmazták – segítségével becsültük a termelőszövetkezetek megyén belüli és területi–termelési kapcsolatait. (Az állami gazdaságoknál és az erdőgazdaságoknál teljes körű adatfelvételre törekedtünk.)

A *közlekedés, szállítás, hírközlés* ágazatnál a két döntő egység, a vasút és a posta többmegyés szervezetek. A posta működési területe lefedi a Dél-Dunántúl négy megyéjét, a vasút viszont ettől a területtől eltérést mutat. Mindkét egységnél központi és helyi beszerzések egyaránt léteznek, ill. a tevékenység eredményeinek megjelentetése megyei szinten elég támpontot adott a mérleg adatainak kiszámításához. Ebben segítségünkre volt az ágazat országos anyagfelhasználási szerkezete, ennek alapján becsültük az oszlopirányú adatokat, míg az elosztásnál, a sorirányú adatoknál az egyes ágazatok felhasználásait vettük figyelembe, ettől a szektortól, vagyis a felhasználók oldaláról közelítettük a belső kapcsolatok másik metszetét. A körzeten belüli kapcsolatokat ezekben az egységekben nem jelentettük meg, hiszen az egyes megyékre jutó értékeket megyei szintű termelésnek minősítettük. A körzeten kívüli kapcsolatoknál viszont az anyagfelhasználás és a tevékenység arányait súlyként használva felosztottuk az egyes megyékre a központokba kerülő és onnan kiinduló körzeten kívüli kapcsolatokat. A gazdasági erőforrások megyei szintű számbavételére az állóeszköz-állomány esetében s a vasútnál nem volt mód, így Baranya megyénél tüntettük fel az összes állóeszköz értékét.

A *kereskedelem*ben hasonló problémákkal találkoztunk, itt is több üzlet, kereskedelmi egység található, amelyek országos ellátó szervezetekbe tartoznak, továbbá a Dél-Dunántúl nagykereskedelme alapvetően Baranya megyére koncentrálódik. A beszerzéseket és az értékesítéseket minden egységnél megkértük, a tevékenység költségei eligazítást adtak a ráfordításokra vonatkozóan, amelyeket a legtöbb esetben az országos arányok alapján becsültük. A sorirányban jelentkező, az ágazatoknak átadott termékekre jutó árrés összegét az értékesítési szerkezet alapján bontottuk fel kapcsolódó ágazatokra.

A területi fogyasztás elemeinél a nem termelő fogyasztás, köztük a lakossági értékesítés árréstartalma a vállalatoknál adott volt, a készletállományt és a beruházásra történő átadást az alapadatok felhasználásával becsültük.

A *szolgáltatás* szektorban az adatgyűjtési munka megkönnyítése és költségeinek további csökkentése érdekében a személyi és gazdasági szolgáltatások közül csupán a személyi és közületi szolgáltatásokat, valamint a lakás-, város- és községgazdálkodási szolgáltatásokat vettük figyelembe.

Az adatgyűjtési és -rendezési problémák közül csak néhányat kívántunk bemutatni. A vázlatos leírás is bizonyítja, hogy a jelenlegi területi statisztikai információs rendszer csak részben alkalmas a területi ágazati kapcsolati mérlegek összeállítására, ezért törekednünk kellett az egyedi adatgyűjtésre és a különböző becslési eljárások kidolgozására. Ezekben az eljárásokban és a vállalati adatközlésben is számtalan hibaforrás létezhet. Ezek a hibák torzíthatják a mérlegeket, csökkenthetik megbízhatósági szintjüket, azonban az adott területigazdaság belső és külső, területi–termelési kapcsolatainak általános összefüggéseit nem változtathatják meg.

4. *A területi ágazati kapcsolatok mérlege alapján végezhető néhány elemzés*

A területi ágazati kapcsolatok mérlegének szerkezete, matematikai feldolgozása és az összeállítását meghatározó tényezők után tekintsük át a mérleg alapján végezhető elemzéseket.

A területi mérleg két fő vizsgálati metszetet tesz lehetővé. Az egyik az adott terület *gazdasági szerkezetének*, a gazdaság egyes elemei belső, területen belüli kapcsolatainak feltárása. A másik a *területi–termelési kapcsolatok* jellegének, ágazati és területi szerkezetének a kimutatása. A matematikai feldolgozással lehetőségünk van a területen belüli termelési kapcsolatokat összekötni az adott területen kívülről származókkal. Így már a termelés *környezeti feltételezettségét* mutathatjuk be, és egyúttal kijelölhetjük azokat az ágazatokat, amelyek a megyei termelést az átgyűrűző hatások révén alapvetően behatárolják.

A továbbiakban a Baranya megyei mérleg ipari[28] szektorainak elemzésén keresztül mutatjuk be azokat a módszereket, vizsgálati eljárásokat, amelyekkel az adott terület szerkezeti jellemzőit és területi–termelési kapcsolatait részletesen kimutathatjuk.

[28] A nem ipari ágazatok elemzését azért nem mutatjuk be, mert ezzel jelentősen megnövelnénk könyvünk terjedelmét.

4.1. *A terület iparának szerkezete és belső kapcsolatai*

A megyei ipar termelésében felhasználásra kerülő anyagok és termékek közül a megyei, és ezen belül ipari eredetűek kimutatásával az ipari szektorok *önellátási fokát* vagy *területi kötődését* mérhetjük. A területi kötődés az egységnyi termelési érték előállításához szükséges megyei, ill. ipari eredetű anyagok és termékek arányát mutatja *(37. táblázat)*.

A két mutató egymás mellé állítása jól tükrözi az egyes szektorok termelési, felhasználási jellegét. Az élelmiszeripar I. és II. szektorokban a legmagasabb az önellátás foka, ami a megyei mezőgazdaságból származó termékek feldolgozására enged következtetni.

A területen belüli ipari kooperációt jól szemlélteti a villamosenergia ipar anyagfelhasználásának magas területi–ipari részesedése (90,5%). A kitermelő iparral, a bányászattal való intenzív kapcsolatán kívül az ágazaton belüli „önfogyasztás" mértéke az összes területi–ipari fogyasztásnak a 34%-át adja, vagyis kimutatható a megyei villamosenergia ipar sajátos helyzete (energiatermelés–energiaelosztás).

Az élelmiszeriparral ellentétben a könnyűiparban már magasabb a területi iparból történő anyagfelhasználás aránya. Az iparcsoportoknak az egymás közötti kapcsolatai jelentősek, meghatározóak; különösen érvényes ez a könnyűipar II. és III. között.

A terület iparának kapcsolati rendszerében nemcsak annak megállapítása szükséges, hogy az ágazatok milyen mértékben kötődnek a területhez, az iparhoz, hanem az is, hogy kapcsolataik milyen ágazatokra koncentrálódnak. A *mátrixháromszögesítési eljárással* (Rácz 1964) lehetőség kínálkozik arra, hogy olyan

37. TÁBLÁZAT

A Baranya megyei ipar területi önellátása és ipari kötődése

Ágazatok	Egységnyi termelésre jutó közvetlen anyagfelhasználás (Ft) megyéből	Egységnyi termelésre jutó közvetlen anyagfelhasználás (Ft) iparból
1. Bányászat	0,1271	0,0707
2. Villamosenergia ipar	0,3080	0,2789
3. Kohászat	0,1752	0,1062
4. Gépipar	0,0798	0,0440
5. Építőanyagipar	0,1598	0,1231
6. Vegyipar	0,0554	0,0240
7. Könnyűipar I.	0,1104	0,0815
8. Könnyűipar II.	0,0550	0,0303
9. Könnyűipar III.	0,1592	0,1094
10. Élelmiszeripar I.	0,8705	0,0121
11. Élelmiszeripar II.	0,6981	0,1010
12. Élelmiszeripar III.	0,0585	0,0068
Ipar összesen	0,2879	0,0812

iparcsoport-blokkok alakuljanak ki, amelyek egymás termelését kölcsönösen meghatározzák.

Az eljárásnál a közvetlen ráfordítások mátrixát úgy rendeztük át, hogy az iparcsoportok mindig csak az utánuk következőnek szállítsanak, ezáltal a főátló feletti elemek összege minimális, az alatta levőké pedig maximális lett. Az ipari szektorok átcsoportosításaként a háromszög „csúcsán" azok az ágazatok helyezkedtek el, amelyek minden más ágazat termelését igénylik, azaz csak végső felhasználásra termelnek. Míg a háromszög „alján" azok az ágazatok jelennek meg, amelyek termelését minden más ágazat igényli, ugyanakkor a többi ágazat termelését nem, vagy csak kismértékben használják fel. A csoportosítás végül is blokkokat, összetartozó egységeket hozott létre, amelyekben a felhasználások erőssége (a kapcsolatok intenzitása) egyre nagyobb mértékben növekszik. A megyei iparra elvégzett mátrix-háromszögesítés eredményét a *26. ábra* mutatja.

A *hat blokk* közül öt a főátló elemeit is magában foglalja, vagyis ez az egyes iparcsoportok belső, ágazaton belüli felhasználását erősen kiemeli. Ha a blokkok vizsgálatánál most eltekintünk az ágazaton belüli önfogyasztástól, akkor mindegyik csoportnál, akár a felhasználás, akár a kibocsátás oldaláról nézve, kiemelhetjük a *jellemző ágazatokat*. Az első esetben az élelmiszeripar I. a kibocsátó ágazat, tehát ez határozza meg ennek a csoportnak a jellegét, másrészt magán a csoporton belül a legkisebb a kapcsolatok mértéke. A II. blokk egyértelműen könnyűipari jellegű, az ágazat alágazatainak kapcsolatát mutatja meg. A harmadik csoportban az építőanyag- és a könnyűipar II. felhasználási kapcsolatai dominálnak, míg a negyedik blokkban kirajzolódik az élelmiszeripar II. belső, alágazaton belüli felhasználása, ill. kibocsátása. Az V. blokkban már a megye kitermelő és energiatermelő szektorai a meghatározóak mint kibocsátók, a terület más ágazatai felé. Az utolsó csoportban ezeknek az ágazatoknak az egymás közötti nagyon intenzív kapcsolatai jelennek meg, amelyek ráirányítják a figyelmet a terület iparszerkezetében játszott meghatározó szerepükre.

A mátrix-háromszögesítési eljárással a megyei ipar belső kapcsolataiban meghatározhatjuk azokat az ágazatokat:

- amelyek között intenzív a kétoldalú (felhasználói és kibocsátói) kapcsolat, ez az alapja a magas termelési kooperációnak (VI. blokk),
- amelyeknek az ipari ágazatok ellátásában alapvető a szerepük (V. blokk).
- amelyek egyoldalúan felhasználják az ipar ágazatainak termékeit (II–III. blokk),
- amelyeken belül magas az ágazati belső kooperáció és ez a termelés egyik alapvető tényezője (IV. blokk).

A megyei ipar belső kapcsolatainak jellegét és mértékét nem csupán az egységnyi termelési érték előállításához szükséges közvetlen felhasználásokkal szemléltetjük, hanem a *halmozott ráfordításokkal* is. Ezek már nem a termelési érték egységnyi előállításához szükséges ráfordításokat adják meg, hanem a végső felhasználáshoz szükséges valamennyi megyei felhasználásban közvetlenül, és a szerteágazó termelési kapcsolatok által keresztülgyűrűző közvetett ráfordítások nagyságát is kimutatják. A halmozott ráfordítások mátrixának *oszlopirányú összeg-*

	Élelmiszeripar III	Vegyipar	Élelmiszeripar I	Kohászat	Könnyűipar III	Könnyűipar II	Építőanyagipar	Könnyűipar I	Gépipar	Élelmiszeripar II	Villamosenergia ipar	Bányászat
Élelmiszeripar III	0	0	2	3	4	3	0	3	1	0	0	0
Vegyipar	0	0	38	14	5	3	27	7	21	7	0	12
Élelmiszeripar I	2	25	55	22	43 I	1	17	3	0	22	0	0
Kohászat	1	5	0	48	10	7	82	0	70	0	0	4
Könnyűipar III	2	0	1	0	165	6	0	6	75	2	3	4
Könnyűipar II	11	27	0	4	487	180 II	53	7	3	1	0	0
Építőanyagipar	6	11	4	28	7	10	108	107 III	6	0	1	36
Könnyűipar I	0	8	3	10	67	20	52	78	20	4	2	17
Gépipar	7	5	2	205	136	10	226	52	68	5	6	66
Élelmiszeripar II	0	0	2	0	17	1	0	3	0	918 IV	0	2
Villamosenergia ipar	0	149	12	76	89	61	570	261 V	95	50	950	551 VI
Bányászat	31	10	2	652	64	10	96	288	81	1	1827	15

26. ábra. Az ipar–ipar ráfordítási együtthatók mátrixának „háromszögesített" változata (megj.: A ráfordítási együtthatók mátrixa négy tizedes jegyig került kiszámításra, az itteni adatok az ezrel való felszorzással kerültek feldolgozásra a könnyebb áttekintés végett) *zés*ével azt az együttes ágazati kibocsátási nagyságrendet kapjuk meg, amelyet az egyes megyei ipari ágazatok egységnyi végső felhasználása a megye gazdaságában indukált.

A *végső felhasználásra* történő kibocsátáson keresztül jelzett *területi kötődés* értékei sorrendben a megye iparában a következők:

1. Élelmiszeripar I.	2,2810
2. Élelmiszeripar II.	2,0822
3. Villamosenergia ipar	1,3805
4. Kohászat	1,2261
5. Építőanyagipar	1,2156
6. Könnyűipar III.	1,1991
7. Bányászat	1,1670
8. Könnyűipar I.	1,1408
9. Gépipar	1,0988
10. Élelmiszeripar III.	1,0833
11. Vegyipar	1,0799
12. Könnyűipar II.	1,0678

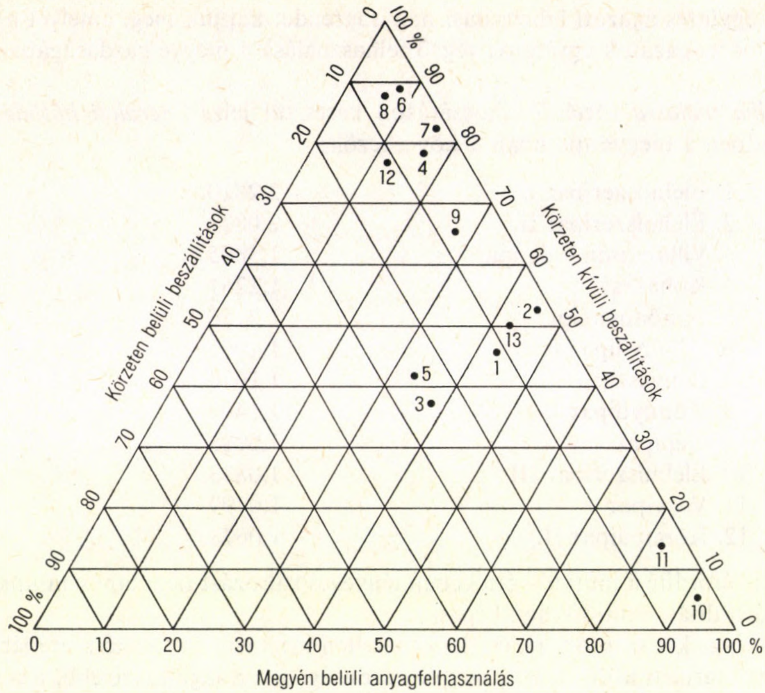
A halmozott ráfordítási mutatók értékében lényeges változást nem tapasztalunk a közvetlen ráfordítási mutatókhoz képest.

Az élelmiszeripar két szektora (I. és II.) ismételten megtartotta vezető szerepét, jelezve azt, hogy területi kötődésük a megye gazdaságához a legintenzívebb, azaz egységnyi végső felhasználásra történt kibocsátásuk a legmagasabb bruttó termelési igényt támasztja a megye gazdasága felé.

Az élelmiszeripar helyzete sajátos, mivel iparon belüli kapcsolatai minimálisak, ebből is az ágazati önfogyasztás a meghatározó, ellenben a megye mezőgazdaságának termékeit dolgozza fel, így területi kötődésének alapját ez az ágazat adja. A többi szektornál a halmozott ráfordítási mutatók kiegyensúlyozottabb képet mutatnak, a gépipartól kezdve értékük egyre jelentéktelenebb lesz, vagyis ezeknek az ágazatoknak a területi kötődése, felhasználási és értékesítési kapcsolataik jelentéktelen, elenyésző a megyén belül.

4.2. *Az ipar területi termelési kapcsolatai*

A területek ipara – a munkamegosztás kialakult rendjének megfelelően, valamint termelési sajátosságaikból és jellegükből adódóan – egyre nagyobb mértékű igényt támaszt az ország különböző területein működő gazdasági egységek termelése iránt. A kialakult és kialakuló gazdasági (felhasználási és értékesítési) kapcsolatok a területi egységek fejlődését kölcsönösen meghatározzák, feltételezik. A kapcsolatok jellegének és mértékének a kimutatása nemcsak azért válik szükségessé, hogy ezen keresztül a területi egységek gazdaságszerkezetének fejlődési lehetőségeit behatároljuk, hanem ezáltal közelebb kerülhetünk a legintenzívebben kapcsolódó területi ágazatok gazdaságfejlesztési programjainak és terveinek az összehangolásához. A közösségi ellátást és fogyasztást végző szektorok koordinált fejlesztésén túl a területek specializációját biztosító ágazatokig rendkívül nagy



27. ábra. A Baranya megyei iparcsoportok területi anyagfelhasználási szerkezete (megj.: az iparcsoportok megnevezését a 37. táblázat tartalmazza)

lehetőség kínálkozik a beruházások és fejlesztések területi összehangolására, amelyekkel nemcsak a gazdaságosság és hatékonyság kritériumai bővülhetnek, hanem maguknak a területeknek a gazdasági szerkezete is jelentős változáson mehet keresztül.

A területi kapcsolatok feltárása, részletes elemzése csak lépés a fentebb leírtak megvalósulásához, azonban jelzésként szolgálhat további vizsgálatok megindítására.

A megye területi kapcsolatait egyrészt a *beszállításokon* keresztül mutatjuk be, amikor is az egyes ágazatok nem megyei eredetű (körzeten belüli és kívüli) felhasználásait elemezzük, másrészt a *kiszállításokon* keresztül, vagyis kijelöljük azokat a területeket, felhasználó és kibocsátó ágazatokat, amelyek között intenzív kapcsolatok alakultak ki.

A megyei ipar beszállításának elemzését az egyes ágazatok összes anyagfelhasználásának területi részletezésével kezdjük. A *27. ábrá*n a háromszög-diagram egy-egy oldalán a beszállítások területi eredetét tüntettük fel. Az ágazatok az ábra alapján négy csoportba tömörülnek. Az első csoportra az a jellemző, hogy az összes felhasználáson belül magas a körzeten kívüli beszállítások aránya (gépipar, vegyipar, könnyűipar I., II.). A második csoportnál az ágazatok az átlag körül mozognak (villamosenergia ipar, bányászat), míg a harmadik csoport tagjainál megnő a körzeten belüli szállítások aránya, valamint magasabb részesedéssel jelentkezik a megyei felhasználás is (kohászat, építőanyagipar). Végül az utolsó csoportba tartozó ágazatoknál a megyén belüli felhasználások a meghatározók (élelmiszeripar II. – III.).

A *beszállítási kapcsolatok* vizsgálatánál nemcsak azt kell megnéznünk, hogy az összes felhasználásból az egyes területek milyen arányban részesednek, hanem azok intenzitását is fel kell derítenünk.

A beszállítások intenzitásán azt értjük, hogy az egységnyi termelési érték milyen arányban tartalmazza a körzeten belüli ágazatok, valamint a körzeten kívüli ágazatok anyagait és termékeit. Az ipar ágazatainál rangsorban a következőképpen alakult a beszállítások intenzitása:

Körzeten belüli gazdaságból		Körzeten kívüli gazdaságból	
1. Építőanyagipar	0,1337	Könnyűipar II.	0,6291
2. Kohászat	0,1231	Vegyipar	0,5824
3. Élelmiszeripar III.	0,0578	Könnyűipar I.	0,5571
4. Könnyűipar III.	0,0441	Élelmiszeripar III.	0,4281
5. Könnyűipar II.	0,0432	Gépipar	0,3655
6. Élelmiszeripar II.	0,0342	Könnyűipar III.	0,3655
7. Élelmiszeripar I.	0,0318	Villamosenergia ipar	0,3427
8. Gépipar	0,0298	Építőanyagipar	0,2111
9. Vegyipar	0,0248	Kohászat	0,1637
10. Bányászat	0,0226	Bányászat	0,1402
11. Könnyűipar I.	0,0165	Élelmiszeripar II.	0,1120
12. Villamosenergia ipar	0,0118	Élelmiszeripar I.	0,0324

A *körzeti beszállítások* alacsony és a körzeten kívüli beszállítások magas aránya rajzolódik ki előttünk. Az összes ipari termelés egy forintjának előállítása 4,18 fillér körzeten belüli beszállítást igényel; ezt az átlagot lényegében csak az első öt ágazat haladja meg. Az építőanyagipar kötődik legintenzívebben a körzethez, ugyanakkor a kohászat, amely a megye termelésében jelentéktelen szerepet játszik, a második a rangsorban; ez az ágazatban megvizsgált egységek begyűjtő és alapanyag-feldolgozó funkciójából ered. A többi szektornál jelentéktelen a körzeti kötődés.

A *körzeten kívüli gazdasághoz* intenzívebben kötődik a megye ipara; ezt már az ipari összes termelésre vetített beszállítások is mutatják. A körzeten kívüli beszállítások átlaga 32,81 fillér, amelyet hét ágazat lép túl. A könnyűipar egyes iparcsoportjai jelentős felhasználási igénnyel jelentkeznek a körzeten kívüli gazdaság felé. A jelenség okát egyrészt abban kell keresnünk, hogy pl. a könnyűipar II. iparcsoportban a vállalatok területi koncentrációja magas, másrészt a vállalatok között a nem Baranya megyei székhelyű egységek aránya jelentős. (A könnyűipar II-ben felmérésünk alapján az összes foglalkoztatott 26%-ot, a könnyűipar I-ben 24%-ot tesz ki.) Így az itt működő egységek termelési, technológiai rendszerében a meghatározó a félkésztermékek előállítása, valamint a vállalaton belüli továbbfeldolgozás. A könnyűipar II. iparcsoportban a fenti tényező alakulásánál számolni kell azzal is, hogy a bőr- és szőrmeipari szakágazatba sorolt egységek alapanyagellátásában a körzeten kívüli gazdaságnak és azon belül is különösen az importnak jelentős szerepe van.

A beszállítások ágazati szerkezetét mindkét területről alapvetően az ágazaton belüli kapcsolatok jellemzik, vagyis a beszállítási terület ágazata és a megyei fogadó ágazat megegyezik. A körzeten belüli gazdaságból származó felhasználások közül nyolc esetet emelhetünk ki (az alsó határ a termelési érték egy százaléka); ebből öt az ágazaton belüli kooperációra enged következtetni (élelmiszeripar III.: 0,0443(1),[29] könnyűipar II.: 0,0306(3), gépipar: 0,0143(5), élelmiszeripar II.: 0,0138(6), élelmiszeripar I.: 0,0137(7). A második területnél már az ágazatok közötti kapcsolatok erőssége lényegesen megváltozott, azonban a kiemelt 15 kapcsolat (alsó határ a termelési érték három százaléka) közül még mindig az ágazaton belüliek a meghatározók 7 esetben (élelmiszeripar III.: 0,2896(1), villamosenergia ipar: 0,2803(2), könnyűipar II.: 0,1695(4), gépipar: 0,1488(5), kohászat: 0,0986(8), könnyűipar I.: 0,0593(12), bányászat: 0,0402(14)).

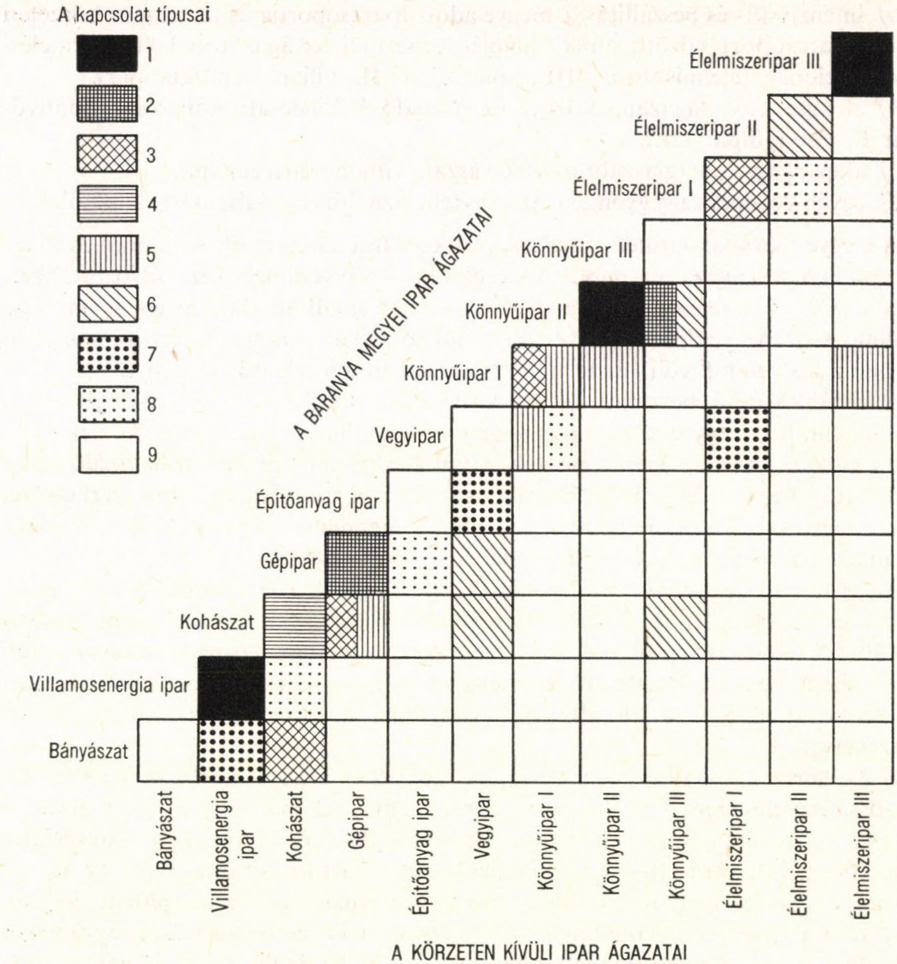
A megyei ipar gazdasági kapcsolatainak másik szférája a *végső felhasználásra történő kibocsátások*. A területi, nem termelő fogyasztásra, a bruttó felhalmozásra átadott anyagokon és termékeken kívül a más területi egységek ágazatainak történő kiszállítással felvázolhatjuk a megyei ipar termelésének potenciális értékesülését.

Az ipar 70,1 %-ban részesedik a megye gazdaságának körzeten belüli értékesítéséből, ugyanakkor az importból származik a körzeten kívüli értékesítés 85,0 %-a. A *kiszállítások* mindkét területi egységnél rendkívül *koncentráltak*. Az első esetben a kiszállítások háromnegyedét sorrendben az építőanyagipar, az élelmiszeripar I. és II., a gépipar és a könnyűipar II. adja. A körzeten kívüli kiszállítások jelentős hányada szintén 5 szektorra koncentrálódik: könnyűipar II, élelmiszeripar I., könnyűipar I., bányászat, élelmiszeripar III. A megye iparának kiszállítását lényegében mindkét relációban a könnyűipari és az élelmiszeripari szektorok határozzák meg, vagyis ezek az ágazatok területileg erősen koncentráltak.

A kiszállítások ágazati szerkezetének felvázolásakor nem hagyhatjuk figyelmen kívül azt sem, hogy az egyes területek az *ágazatok termelési értékének milyen hányadát kötik le*. Az ipar átlagában ez az érték a körzeten belüli kiszállításoknál 10,8 %, míg a másik relációban 66,6 %. Ágazati szinten a termelési érték lekötöttsége a körzeten belüli gazdaság felé lényegében megegyezik a kiszállítási koncentráció sorrendjével, csupán az ötödik helyre a könnyűipar II. helyett a villamosenergia ipar lép be. A körzeten kívüli kiszállításoknál a könnyűipar II. vezető szerepét megtartja (84,7 %), a vegyipar lép a második helyre (79,6 %), a harmadik hely változatlan (könnyűipar I. 79,6 %), a negyedikként áll a kohászat (75,4 %) és ötödik a sorban a könnyűipar III. (69,3 %). Következtetéseink megegyeznek a fentebb leírtakkal, csupán azzal bővítjük, hogy már erőteljesebben kirajzolódik az élelmiszeripar értékesítésének területi jellege (körzeten belül), valamint a könnyűiparnak – a beszállításoknál is jelentkező – körzeten kívüli kötődése.

A kiszállítások szerkezeti vizsgálatának harmadik vetülete a megyei *kibocsátó* és a területi *fogadó* ágazatok kimutatása. A páronként rendezett ágazati kapcsolatok összeállításával a körzeten belüli gazdaság esetében hasonlóságot vélünk felismerni a beszállításokkal. Az ágazaton belüli kooperáció ismételten a meghatározó, hiszen nyolc kiemelt kapcsolatból öt jelzi ezt, sorrendben a következők:

[29] A rangsorban elfoglalt hely.



28. ábra. A Baranya megyei ipar és a körzeten kívüli ipar tipizált kapcsolatai
1 = jelentős kétoldalú; 2 = jelentős felhasználó; 3 = jelentős kibocsátó; 4 = közepes kétoldalú; 5 = közepes felhasználó; 6 = közepes kibocsátó; 7 = gyenge kétoldalú; 8 = gyenge felhasználó; 9 = gyenge kibocsátó; 10 = jelentéktelen

könnyűipar II.: 14,89, élelmiszeripar I.: 12,94, könnyűipar I.: 3,44, élelmiszeripar II.: 1,87, építőanyagipar: 1,49 fillér az egy forint termelési értékből az azonos körzeti ágazatban kerül felhasználásra.

A körzeten kívüli kiszállítások ágazati kapcsolatai jelentősen bővebbek, erősebbek.

A *28. ábrán* a körzeten kívüli ki- és beszállítási kapcsolatokat tipizáltuk, egyrészt a termelési értékben elfoglalt helyük (jelentős, közepes, gyenge), másrészt a jellegük (felhasználó és kibocsátó) szerint. Az ábra alapján az alábbi típusokat tudjuk elkülöníteni:

a) intenzív ki- és beszállítás a megye adott iparcsoportja és az azonos körzeten kívüli iparcsoport között, amely alapját képezheti az ágazaton belüli termelési kooperációnak (élelmiszeripar III., könnyűipar II., villamosenergia ipar),

b) az ágazatok alágazatai közötti felhasználó és kibocsátó kapcsolat (könnyűipar I., könnyűipar III.),

c) alapanyag-, energiaszállítás (bányászat, villamosenergia ipar),

d) egyéb közepes vagy gyenge vertikális felhasználói vagy kibocsátói kapcsolatok.

A megye iparának területi-gazdasági kapcsolatai tehát rendkívül koncentráltak, jellegükben az ágazaton belüli kapcsolatok érvényesülnek (ez súlyozottabban jelentkezik a körzeten belüli gazdaságnál), ezen kívül az alapanyag- és energiaszállítás – a megyei iparszerkezet jellegéből adódóan – a meghatározó, ami elsősorban a körzeten kívüli gazdaság ellátásában játszik jelentős szerepet.

A kiszállítások és beszállítások összevetésénél a fentieken kívül szükséges azt is áttekinteni, hogy egyrészt az ágazatonkénti beszállítások mennyiben fedezik a kiszállításokat, azaz az iparcsoportok a külső kapcsolataikban felhasználó vagy kibocsátó jellegűek. Másrészt a beszállításoknak milyen a hatása az iparszerkezetre, azaz az egyes ágazatok mennyiben igénylik és mennyiben járulnak hozzá beszállításaikkal más ágazatok kiszállításainak megvalósításához.

Az ágazatok beszállítási és kiszállítási egyenlegének megállapítását úgy végezhetjük el, ha összevetjük a kiszállításokat a beszállításokkal, ezzel a két tényező közötti közvetlen kapcsolatot tárjuk fel. Az összevetést azonban elvégezhetjük úgy is, hogy nem a közvetlen felhasználásból és kibocsátásból indulunk el, hanem az ágazatok halmozott kiszállítását[30] vizsgáljuk a halmozott beszállításokkal[31] összevetve.

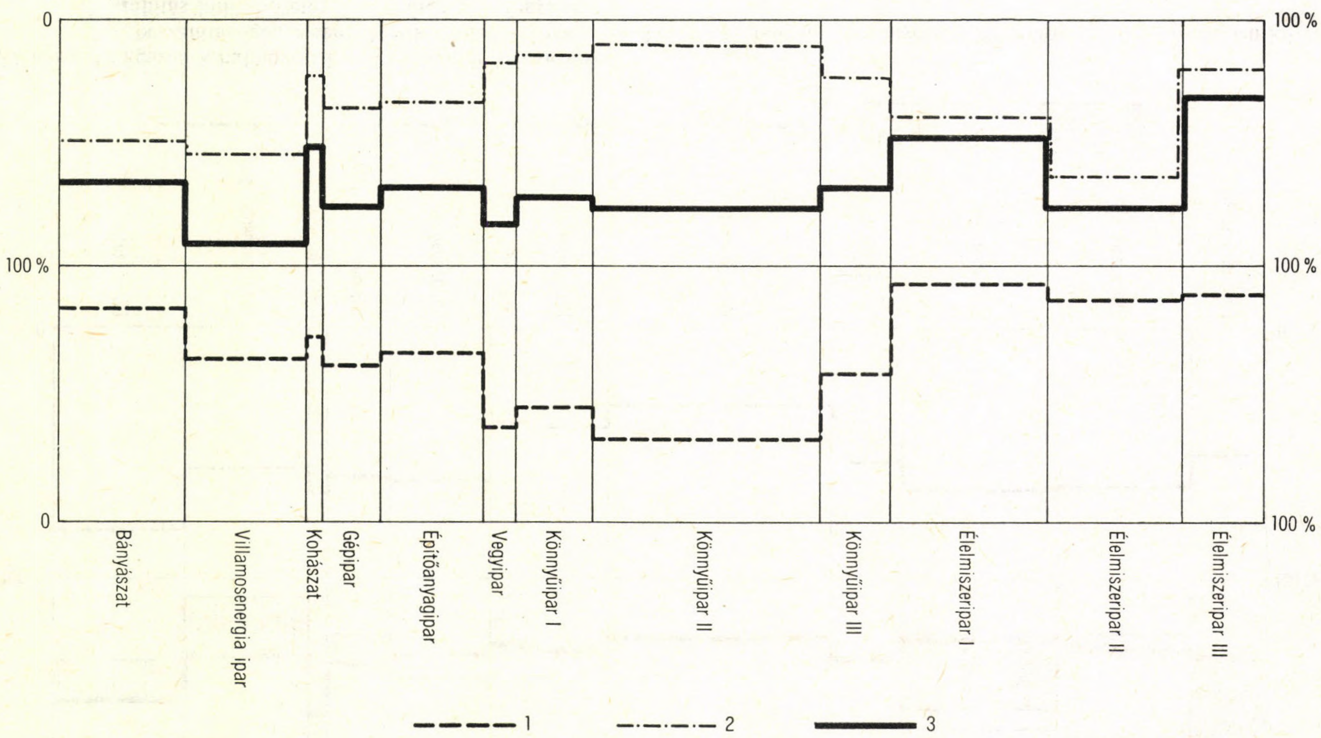
A *29. ábrán* a kiszállítás és a beszállítás közvetlen arányát ábrázoltuk az ágazatok össztermelésében. A *30. ábrán* ugyanezt tettük, csak már nem a közvetlen részesedések arányában, hanem a halmozott kiszállítási és beszállítási szükségletet vetítettük a termelési értékre. Az ábrázolásnál arra törekedtünk, hogy az ágazatoknak az összes ipari termeléshez való hozzájárulása is megállapítható legyen.

A vastag lépcsőzetes vonallal mindkét ábrán a ki- és beszállítások egyenlegét jelöltük; ennek alapján megállapíthatjuk, hogy az ipari ágazatoknak *pozitív egyenlegük van*, azaz kibocsátó jellegűek. A kiszállítási többletek mögött azonban a halmozott megyén belüli ráfordítások bekapcsolásával egyenlegünk eltérő képet mutat. A *30. ábrán* nemcsak a halmozott ki- és beszállítási egyenlegeket tüntettük fel (vastag vonal), hanem a közvetlen ki- és beszállítások egyenlegét (vékony vonal) is.

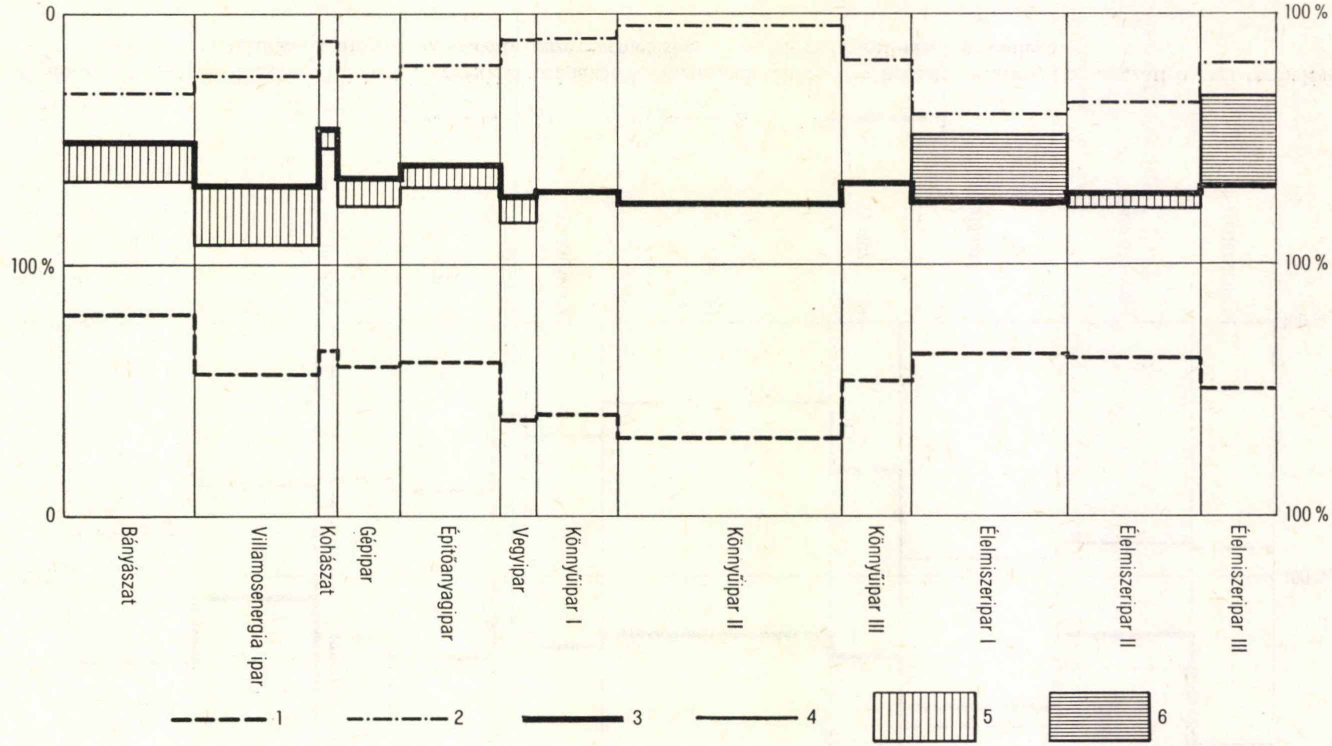
A szektorok körül az első hatnál (bányászat, villamosenergia ipar, kohászat, gépipar, építőanyagipar, vegyipar), valamint az élelmiszeripar II.-nél a halmozott kiszállítás-igényesség magasabb, mint a halmozott beszállítás-igényesség, ezáltal egyenlegük magasabb értéket vesz fel, mint a közvetlen mutatók esetében. A megye

[30] A halmozott kiszállítás-igényesség azt mutatja meg, hogy az adott ágazatnak valamennyi ágazat közvetlenül és folyó termelőráfordításokon keresztül közvetve mekkora bruttó termelést kellett hogy biztosítson.

[31] A halmozott beszállítás-igényesség arra ad választ, hogy az adott ágazat végső felhasználásának megtermeléséhez milyen beszállítási ráfordítási igénnyel lép fel a megye több ágazata felé közvetlen és közvetett kapcsolatain keresztül.



29. ábra. A kiszállítások és beszállítások részesedése az ágazatok össztermeléséből: 1 = beszállítás aránya az ágazati összes termelésben; 2 = kiszállítások aránya az ágazati összes termelésben; 3 = ki- és beszállítások egyenlege



30. ábra. Az ágazatok halmozott ki- és beszállítás-igényessége
1 = beszállítás-igényesség; 2 = kiszállítás-igényesség; 3 = ki- és beszállítás-igényesség különbözete; 4 = közvetlen ki- és beszállítás különbözete; 5 = ellátó; 6 = fogyasztó

gazdaságában ezek az ágazatok ellátó funkciókat képviselnek, tehát a megye többi ágazata akár közvetlenül, akár az anyagfelhasználáson keresztül közvetve – az iparon belül – a fenti ágazatok felé támasztja a legmagasabb igényt kiszállításainak megtermeléséhez. Az ágazatok közül kiemelkedik a villamosenergia ipar, hiszen a két egyenleg közötti eltérés itt a legnagyobb, vagyis meghatározó jelentősége van még az ellátó ágazatokon belül is.

Az élelmiszeripar I. és II. iparcsoportban az előzővel ellentétes jelenségre lehetünk figyelmesek. Itt a halmozott beszállítás-igényesség magasabb, s túllépi a kiszállítási mutatót, ezáltal az egyenlegük csökken. A két iparcsoport kiszállításainak megtermeléséhez nagymértékű igényt támaszt a megye gazdasága felé, azaz a közvetlenül és az anyagfelhasználásokban közvetetten jelentkező ráfordításai révén *fogyasztói* lesznek a különböző területekről származó beszállításoknak. A könnyűipar iparcsoportjainál a halmozott ki- és beszállítás-igényesség megegyezik, azaz ezek az ágazatok se nem fogyasztói, se nem ellátói a terület gazdaságának, semlegesek a megye gazdasága iránt.

Ha összevetjük vizsgálatunk eredményeit a háromszögesítési eljárással, akkor a jelenségek mögötti összefüggéseket az ipar oldaláról közelíteni tudjuk. A villamosenergia ipar és a bányászat alapvetően ellátó ágazatként működik a belső kapcsolatokban, ugyanakkor az egymás közötti kölcsönös kétirányú kapcsolataik a meghatározók. Mindkét vizsgálat – más-más oldalról ugyan, egyik a belső kapcsolatok alapján, a másik a ki- és beszállítás rendszerében – bemutatta, hogy ezeknek az ágazatoknak alapvető szerepük van a megye gazdaságában. Az élelmiszeriparnál az iparon belül a minimális kibocsátói funkciókat, ugyanakkor a magas ágazaton belüli felhasználásokat emeltük ki, tehát a fogyasztói jegyek dominálnak ennél az ágazatcsoportnál (a mezőgazdaság bekapcsolásával ezt jobban közelíthetjük). A könnyűiparnál szintén legjelentősebb az ágazaton belüli felhasználás, ill. az egymás közötti kibocsátás, valamint a közvetlen beszállítások szerepe, így ezek az iparcsoportok „önálló életet élnek" a terület gazdaságában.

Végezetül szeretnénk hangsúlyozni, hogy a bemutatott néhány elemzési eljárás és az azokból adódó összefüggések csak kiinduló pontjai a területek gazdasági szerkezetének és kapcsolati rendszerének vizsgálatához.

A területi ágazati kapcsolatok mérlegével még további vizsgálatok, részletesebb elemzések, akár ágazati szintű értékelések is elvégezhetők. Ugyanakkor a mérleg által feltárt összefüggések pl. elmélyíthetik a területi munkamegosztás kategóriájának értelmezését, tartalmi jegyeinek pontosítását (Rechnitzer 1980b).

5. *Felhasználás, továbblépés*

A területi ágazati kapcsolatok mérlegének gyakorlati felhasználását, ill. a módszer hazai elterjedését számos tényező akadályozza. A legfontosabb az, hogy az adatok csak a gazdasági egységektől szerezhetők be, a jelenlegi statisztikai információs rendszer nem szolgáltat adatokat a területi mérleghez. Az adatgyűjtés anyagi és adminisztratív korlátjai megnehezítik a módszer elterjedését. Ennek felszámolása érdekében a becslési eljárások kidolgozására van szükség, azonban ezekhez is számtalan mélyebb területi szintű adatra lenne szükség.

Az elterjedést akadályozza, hogy a *gazdaságirányítás területi metszete* kezdetleges. A területi irányító szervek elsődlegesen az infrastrukturális fejlesztésekre koncentrálhatnak. Így igényük is csak az infrastruktúra és az „irányítható" ágazatok területi szerkezetének és kapcsolatainak tanulmányozására terjed ki. Ez a tényező befolyásolja azt is, hogy az egymással szomszédos, gazdasági kapcsolataik és erőforrásaik racionális felhasználására rászorult területi egységek fejlesztéseiket nem, vagy csak felszínesen koordinálják. A *területi szintű koordináció* hiánya oda vezet, hogy párhuzamos fejlesztések, egymást lefedő és erőforrásokat feleslegesen lekötő beruházások jönnek létre, amelyeknek a hatékonysága sokszor megkérdőjelezhető. A területi mérleggel – amelyben a szomszédos, kooperációs viszonyban levő területi egységeket összekapcsolhatjuk – megállapíthatjuk az egyes fejlesztések következményeit az adott területi egységekben, gazdaságban. A gyakorlati felhasználás adta korlátok serkentik a módszer továbbfejlesztését, hiszen mint a legátfogóbb s könnyen kezelhető területi szerkezet- és kapcsolatábrázoló eljárás számtalan további lehetőséget tartalmaz.

A lehetőségek egyik metszete a *dinamizálás*. A mérleg egy időpontra mutatja be a szerkezeteket, nem jeleníti meg azok időbeli változását, annak következményeit és lehetőségeit. A népgazdasági szintű mérlegek dinamizálása már hosszú múltra tekint vissza (Glattfelder 1980). A területi mérlegek dinamizálásának néhány külföldi kísérletéről is van tudomásunk (Kádas 1976), azonban ezek a próbálkozások még számos becslést, közelítést tartalmaznak. Szükségesnek tartjuk, hogy több időpontban történt felvétellel, ill. a területi beruházási mátrix pontos kidolgozásával közelebb kerüljünk a területi ágazati kapcsolatok mérlegének dinamizálásához. Ehhez elengedhetetlen a becslési eljárás kidolgozása és a területi statisztikai információs rendszer mérleg orientált továbbfejlesztése.

A továbbfejlesztés másik nagy metszete a *területrendszer* (Rechnitzer 1980) problematikájához kapcsolódik. A területi folyamatok rendszerszemléletű közelítésére, az egyes ún. *területi alrendszerek* összekapcsolására, a közöttük levő közvetlen és áttételezett viszonyoknak az ábrázolására és modellbe foglalására véleményünk szerint az input-output analízis kiválóan alkalmas. A területrendszer egyes alkotóelemei önálló bemutatására és összekapcsolására felhasználhatjuk az általános input-output séma kiszélesített változatait, egyrészt a gazdaság környezetterhelési hatásának mérlegeit (Leontief–Ford 1972), másrészt az egyes infrastruktúra elemek és a gazdaság alkotóinak viszonyát bemutató modelleket (Fodor–Illés–Bognár 1970, Peterka 1979).

Az egyes infrastrukturális elemek és a gazdaság kapcsolatát bemutató mérlegek már a gyakorlat számára is kézzelfoghatóbbá válnak, jó eszközei lehetnek a településszintű területfejlesztési elképzelések modellezésének. Ennek a mérlegtípusnak a továbbfejlesztéséhez szintén nélkülözhetetlen a területi adatszolgáltatás fejlesztése, eszköz- és adattárának kibővítése.

Az input-output séma alapján kidolgozásra kerülő területi mérlegek a területkutatás *elengedhetetlen módszerei*. Átfogó és komplex eszközök, segítségükkel a területi folyamatok mélyebben és összetettségükben ragadhatók meg.

A módszer jövője a *gyakorlati felhasználhatóságban* rejlik, így a tökéletesítés egyik legfontosabb útja, hogy a területfejlesztés számára az elemzési eljárást még közelebb vigyük, még hozzáférhetőbbé tegyük.

VIII. *A termelési függvények elméletéről és gazdaságföldrajzi alkalmazásáról*

1. *A termelési függvény fogalma*

A termelési függvényekkel kapcsolatos vizsgálatok lényege mindig a termelés és a ráfordítások közötti összefüggések elemzése. A termelési függvény az élő- és a holtmunka-ráfordítások és a ráfordítások eredményeként kapott termékmennyiség közötti összefüggéseket fejezi ki.

A termelési függvények elméletének alapjait a klasszikus polgári közgazdaságtani iskola képviselői (A. Smith, D. Ricardo, J. S. Mill stb.) rakták le. A termeléshez szükséges tényezőket három nagy csoportba sorolták, ezek: a munka, a természeti erőforrások és a tőke. A konkrét vizsgálatokban a követők legtöbbször csak a munkát és a tőkeállományt szerepeltették. Ez a szemlélet ment át a szocialista országok szakirodalmába is, ahol a vizsgált függvényekben a munkát általában a ledolgozott órák számával vagy a foglalkoztatottak számával, a „tőkét" pedig anyagráfordításokkal, állóeszköz-ráfordításokkal (gépek-, műhelyek értéke), népgazdasági szinten a termelő állóalapok értékével veszik figyelembe.

A termelési függvényeknek a felhasználás területe, célja szerint számos csoportja alakult ki. A szakirodalomból általánosíthatóan egyik alapvető felosztás az elemzés szintje szerint történhet, így vannak vállalati (mikroökonómiai), ágazati (mezoökonómiai), népgazdasági (makroökonómiai) termelési függvények. A figyelembe vett termelési tényezők köre szerint vannak részleges és totális függvények. A totális termelési függvények jelentősége inkább csak elméleti, a gyakorlatban alkalmazott függvények, a termelési tényezők figyelembevételének nehézségei miatt kivétel nélkül részlegesek. A termelési függvényekkel folytatott elemzések célját tekintve a fölosztás igen sokféle lehet, ezek közül két típus kívánkozik kiemelésre, az *ex ante* és az *ex post termelési függvények*. A termelési függvények elmélete szerint a vizsgálatok alapján meghatározhatók a munkaerő és a termelő alapok azon kombinációi, amelyekkel egy bizonyos meghatározott szintű termelés elérhető. Az ilyen jellegű függvények a tervezés szintjén az egy-egy üzemben alkalmazandó technológiák közüli választási lehetőségeket tükrözik, tehát valóban ex ante termelési függvények. Az ex post függvényeket múltbeli adatok alapján határozzák meg és lényegében a fejlődési utat állapítják meg, nem pedig az adott terv változatait. A kétfajta szemlélet között alapvető különbség tehát az, hogy a beruházás előtt a munka és a termelési alapok arányának meghatározása viszonylag tág keretek között változhat, míg a meglevő gyárakban, berendezéseknél a helyettesítési lehetőségek igen korlátozottak.

2. *A termelési függvények analitikus alakja*

A termelési függvények analitikus alakjának meghatározásakor a termeléselmélet alapvető összefüggéseiből indulnak ki. Számos szerző a csökkenő hozadék törvényét tekinti elvi kiindulási alapnak. A csökkenő hozadék törvényének lényege az, hogy minden termelési folyamatban van egy X erőforrás mennyiség, amelynél a ráfordítás állandó növekményeihez a termelésnek növekvő vagy állandó növekményei vannak hozzárendelve, s az X érték túllépése után az állandó felhasználásnövekményekhez csökkenő termelésnövekedés tartozik. Ebből az is következik, hogy az ilyen tulajdonságokkal rendelkező függvények a $(0, X)$ intervallumban szigorúan konkávok, az (X, ∞) intervallumban pedig szigorúan konvexek. A termelési függvények egyes típusainak tulajdonságaiban más meggondolások is érvényesülnek.

A legelterjedtebben használt termelési függvény a Cobb–Douglas-típusú, melynek általános alakja

$$Y = \alpha_0 X_1^{\alpha_1} X_2^{\alpha_2} \ldots X_k^{\alpha_k},$$

ahol – Y jelöli a termelést, $X_i (i = 1, 2, \ldots, k)$ a ráfordításokat,
– $\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_k$ pozitív előjelű paraméterek.

A Cobb–Douglas termelési függvények a következő absztrakciókat tartalmazzák:

1. a ráfordítások (erőforrások) felhasználásának rugalmassága egyenlő a függvény kitevőivel;
2. a termelés a költségek $\sum_{i=1}^{k} \alpha_i$ – fokú homogén függvénye;
3. az erőforrások határtermelékenysége arányos a termelési költségek rugalmasságával és az erőforrások átlagos termelékenységével;
4. az erőforrások helyettesíthetők, s a helyettesítés állandó rugalmassága eggyel egyenlő;
5. az erőforrások felhasználásának és határtermelékenységeiknek szorzata egyenlő a termelés mennyiségével (Unčovsky 1977).

A Cobb–Douglas termelési függvényeknek további tulajdonsága, hogy ha valamennyi X_i ráfordítás ugyanazzal a p %-kal nő, akkor a termelés:

a) lassúbb ütemben nő, mint a ráfordítások, ha $\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_k < 1$;
b) ugyanabban az ütemben nő, mint a ráfordítások, ha $\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_k = 1$;
c) gyorsabb ütemben nő, mint a ráfordítások, ha $\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_k > 1$.

A Cobb–Douglas típusú függvények egy módosított, idősorokra alkalmazott változatánál mód van a technikai és szervezési haladás határainak kimutatására is. E hatáson a termelésnek azt az időegység alatti növekményét értjük, amely sem a ráfordítások növekedésének, sem a különböző ráfordítások arányeltolódásának nem tulajdonítható. A függvény alakja ebben az esetben a t-edik évben:

$$Y_t = \alpha_0 X_{1t}^{\alpha_1} X_{2t}^{\alpha_2} \ldots X_{kt}^{\alpha_k} \cdot e^{\gamma t}.$$

Mivel a föltételezés szerint a ráfordítások nem változnak, a függvény alakja a $(t + 1)$-dik évben:

$$Y_{t+1} = \alpha_0 X_{1t}^{\alpha_1} X_{2t}^{\alpha_2} \ldots X_{kt}^{\alpha_k} \cdot e^{\gamma(t+1)} .$$

A termelés növekményének indexe pedig

$$\frac{Y_{t+1}}{Y_t} = e^{\gamma} .$$

Az index értéke csak a γ paramétertől függ és nagyobb egynél, ha $\gamma > 0$, egyenlő eggyel, ha $\gamma = 0$, vagy kisebb egynél, ha $\gamma < 0$. Ezt az összefüggést úgy is megfogalmazhatjuk, hogy ha $\gamma > 0$, akkor a technikai és szervezési haladás hatására a termelés átlagosan évi $(e^{\gamma} - 1) \cdot 100\%$-kal növekszik. Ha $\gamma = 0$, akkor nincs technikai és szervezési haladás. Abban az esetben, amikor $\gamma < 0$, változatlan ráfordítások mellett a termelés évente átlagosan $(1 - e)^{\gamma}$ 100%-kal csökken (Pawlowski 1970).

Közgazdaságtani, ökonometriai vizsgálatoknál igen gyakran – főleg makroökonometriai szinten – a Cobb–Douglas függvénynél csak két tényezőt, a munkát (L) és a tőkét (K) veszik figyelembe és a következő alakba írják:

$$Q = AL^{\alpha}K^{\beta} ,$$

ahol A, α és β meghatározandó együtthatók.

Az együtthatók meghatározása a fönti változók logaritmusai közti lineáris összefüggés alapján történhet, azaz

$$\lg Q = \lg A + \alpha \lg L + \beta \lg K .$$

Erre az összefüggésre alkalmazható a legkisebb négyzetek módszere, bár több szerző, az egyenletben szereplő változók közti kölcsönös és egyidejű összefüggésekre hivakozva, a paraméterek becslését a legkisebb négyzetek módszerével, torzítottnak és nem-konzisztensnek tartja.

A Cobb–Douglas termelési függvényeknél egyszerűbb analitikus formája van a – főként a mezőgazdasági szakirodalomban előforduló – állandó hozadékú termelési függvénynek. Ennek szokásos alakja a

$$q = a + bM_0 ,$$

ahol q a hozam, M_0 az élőmunkát is tartalmazó aggregált ráfordításcsoport, b jelenti az M_0 átlagos termelékenységét, a pedig a termelési adottságoktól függő ráfordítás nélküli hozamot. A fenti lineáris összefüggésből másodfokú vagy négyzetgyökös analitikus alakú függvényt is szokás alkotni (Fekete–Heady–Holdren 1977).

A négyzetgyökös termelési függvény formája, szintén egy M erőforrás-„csomag”-ra a következő:

$$q = a - bM + cM^{0,5} .$$

Ha a $q = a + bM_0$ függvényből az a állandót elhagyjuk, akkor a Cobb–Douglas függvény egy speciális esete áll elő, ahol az M_0 ráfordításcsoport termelési rugalmassága (hatványkitevője) egységnyi.

Szintén a hozadék törvényéből származtatja Wittmann a termelési függvény egy, a Cobb–Dauglas függvénytől analitikus formáját tekintve eltérő alakját. Abban az esetben, ha egy termékkel és két erőforrással van dolgunk a Wittmann-féle függvény a következő alakot veszi föl (Unčovsky 1977):

$$y = X_1 \frac{X_2^2}{1 + X_2^2} \, .$$

A föntebb bemutatott Cobb–Douglas termelési függvények esetében a helyettesítési rugalmasság egységnyi. A gazdasági növekedés szempontjából azonban az az előnyös, ha a munka technikai felszereltségének növekedése csak viszonylag csekély mértékben növeli meg az egységnyi élőmunka kiváltásához szükséges beruházást. Ez esetben azonban a helyettesítési rugalmasság egynél nagyobb. A Cobb–Douglas függvények fenti hiányossága miatt vezették be a CES vagy konstans helyettesítési rugalmasságú termelési függvényeket. Az állóeszköz (k)- és az élőmunka (l)-ráfordításokat véve figyelembe, a termelés nagysága (q) a következő módon fejezhető ki:

$$q_t = \gamma e^{\varepsilon t}[\delta k_t^{-\rho} + (1 - \delta) l^{-\rho}]^{-\frac{\mu}{\rho}},$$

ahol ε a műszaki fejlődés évi átlagos üteme, γ az ún. hatékonysági, δ az ún. betudási és ϱ az ún. helyettesítési paraméter, t pedig az időváltozó. A helyettesítési paraméter segítségével a helyettesítési rugalmasság (σ) a következő összefüggés alapján számítható ki (Pölöskei – Szakolczai 1972):

$$\sigma = \frac{1}{1 + \varrho} \, .$$

A termelési függvények analitikus alakjainak fölsorolását lehetne még tovább is folytatni; számuk majdnem annyi, ahány szakterületre, problémára megpróbálták őket adaptálni, alkalmazni. Az egyes kutatók, szakterületüknek megfelelően újabb meggondolásokkal finomították a ráfordítások és a termelés nagysága közti összefüggés kifejezésének módját. Bár mind a paraméterek meghatározásának technikáját, mind pedig a függvények pontosabb fölírását, gyakorlati ellenőrzését illetően jelentős eredmények születtek, számos szerző megállapítja, hogy a termelési függvényeknek a valóság megragadását illetően számos korlátja van. A következőkben az alkalmazás problémáiról szólunk.

3. *A termelési függvények alkalmazásának problémái*

A termelési függvények bírálata egyszerre több pontra irányul. A termelési függvények több esetben túlságosan szigorú, a valóságban igen ritkán meglevő feltételezésekkel élnek, máskor meg túl általános, a valóságot eltorzító hipotézisek rejlenek alkalmazásuk mögött.

A termelési függvényekkel szembeni ellenvetések sorában első helyen a ráfordítások (munka, tőke, termelőalapok) és a termelés mennyiségének számbavételi nehézségei állnak. A termelés számbavétele általában pénzértékben történik. Szocialista gazdaságban az ezzel kapcsolatos probléma kettős. Egyrészt a pénzben kifejezett érték sok esetben nem esik egybe a tényleges értékkel, ezért nem tükrözheti a ráfordítások nagyságát, másrészt a szocialista gazdaság sem mentes az árváltozásoktól, aminek figyelembevétele idősorok elemzésénél jelentős problémákat vet föl.

A munka számbavétele a ledolgozott munkaórák, esetleg a munkanapok számával vagy a foglalkoztatottak számával történik. E mögött az eljárás mögött azonban az az irreális hipotézis rejlik, hogy minden munkás egyformán képzett és egyformán értékelhető részese a termelésnek. A valóságban ez nyilvánvalóan nem így van. Ez a probléma az aggregáltság magasabb szintjein különösen élesen vetődik föl. Vállalati keretek között, esetleg egy termék termelési függvényének meghatározásakor a munka és munka közti különbségek, a terméket előállító szakképzettségének figyelembevételével kimutathatók és így a valóság megragadása realisztikusabbá tehető.

Az állóeszköz- és anyagráfordítások számbavétele is számos problémát vet föl. A termelési függvények kidolgozói igen gyakran eltekintenek attól, hogy nagyon különböző típusú gépekről, épületekről van szó. Még az azonos rendeltetésű gépek is különböznek egymástól hatékonyságukat tekintve attól függően, hogy mikor létesítették azokat. A különböző állóeszközöket azonban valamilyen módon közös mértékegységben kell kifejezni még abban az esetben is, ha egy gép (technológiai lánc) és egy termék termelési függvényét határozzuk meg. Az állóeszközöket figyelembe lehetne venni pl. a valamikori előállítási költségeik szerint vagy más érték alapján; ekkor azonban megint csak szembekerülünk az árváltozzások és a központi preferenciák problémájával, nem beszélve arról, hogy az állóeszköz árában már benne van az azt előállító vállalat nyeresége is. E problémák áthidalása részben megoldható, ha a termelési függvényben a különböző évekből származó berendezések külön-külön szerepelnek.

Az aggregáltság magasabb szintjén további problémát okoz, hogy az állóeszközök kihasználtsága nem mindig 100%-os, vagyis nem a teljes állóeszköz-állomány vesz részt a termelésben. Az állóeszköz-állományt tehát valamilyen kapacitás-kihasználási tényezővel kellene korrigálni.

A termelési függvények meghatározásának további három alapfeltétele van:

1. a vizsgált egységek (az adott vizsgálati szinten) az alkalmazott technológiát és technikát nem változtatják véletlenszerűen, azok hosszabb időszakon keresztül változatlanok maradnak;

2. a meghatározott technológia keretei között az egyes termelési tényezők ráfordításai és a termelés nagysága közötti arányok vagy nem változnak hosszabb időn át, vagy pedig a változások lassan, szisztematikusan mennek végbe;

3. a termelési függvény statisztikai úton történő meghatározására egy vállalatra, vagy a vállalatok egy csoportja esetében csak akkor kerülhet sor, ha a vizsgált termelési egységek azonos termelési eljárást alkalmaznak.

A fenti három feltételből következik, hogy a termelési függvények az aggregáltság magasabb szintjén (ágazati, népgazdasági szinten) általában inkább rövid távon írják le jól a valóságot, bizonyos képet adnak a termelékenység változásairól és előrejelzésre is használhatók.

A további problémák a paraméterek becsléséhez kapcsolódnak. A becslésekhez kívánatos lenne minél hosszabb idősorok felhasználása, viszont minél hosszabb az idősor, annál nagyobb a valószínűsége, hogy az előzőekben ismertetett három feltétel valamelyike nincs folyamatosan érvényben, azaz alapvető strukturális változások következtek be, amelyek hatására megváltozott a termelési függvény alakja. Különösen lényegesek lehetnek a gazdaság intézmény-rendszerében, mechanizmusában bekövetkezett változások. További, szintén alapvető probléma a paraméterek becslésénél a ráfordításváltozók multikollinearitása.

Az előzőekben fölsorolt három föltétel közül a harmadik vitathatóvá teszi az ágazati és az egyes vállalatok közti keresztmetszeti becsléseket is, mivel csak igen durva megközelítésben lehet érvényes egy ágazat vállalataira, hogy azonos termelési eljárást alkalmaznak.

Mindezek a bírálatok kétségessé teszik azt is, hogy jogosult-e a magasabb aggregáltsági szintű termelési függvényeknek olyan speciális és bonyolult alakot választani, mint a Cobb–Douglas és CES függvények. Lehet-e ezeknek a függvényeknek a paramétereit úgy értelmezni, ahogyan ezt általában a termelési függvényekkel foglalkozó kutatók teszik. A termelési függvényekhez kapcsolódó implicit és explicit föltételezések meglehetősen absztraktak, a valóságos gazdaság, termelés lényegesen bonyolultabb képet mutat. Ha elvetjük a feltételezéseket, akkor lényegében újra kellene felépíteni a termelés elméletét és „valószínűleg le kellene mondani a deduktív módszer összes előnyeiről, eleganciájáról" (Andorka 1972).

A fentebb megfogalmazott problémák ellenére a termelési függvények alkalmazása az utóbbi 10–15 évben rohamosan elterjedt, a publikációk száma is jelentősen növekedett. Az alkalmazás korlátainak ismeretében a termelési függvényekből levonható következtetések alapján a gazdaság, a termelés egyes összetevőinek alakulására helyes következtetések vonhatók le még akkor is, ha e függvények a valóságot többé-kevésbé idealizált formában tükrözik is vissza.

4. *A termelési függvények alkalmazási lehetőségei a gazdaságföldrajzban*

Mint az előző fejtegetésekből is kiderült, a termelési függvények elmélete a közgazdaságtan keretei között alakult ki és kifejezetten közgazdasági megfontolásokra épül. Ennek ellenére az alábbiakban kísérletet teszünk a termelési függvények gazdaságföldrajzi alkalmazhatóságának felvázolására.

Az első kérdéskör kapcsán vissza kell kanyarodni a termelési függvényekben használt termelési tényezők hármas felosztásához. Ezek: a munka, a természeti erőforrások és a tőke.

Földrajzi szempontból e felosztásban a természeti erőforrások érdemelnek megkülönböztetett figyelmet. A közgazdaságtani vizsgálatokban rendszerint csak a munkát és a tőkét szerepeltetik. Az utóbbi időben a magyar földrajzi kutatásokban kiemelt szerepet játszik a természeti erőforrások értékelése. A termelési függvények szemszögéből nézve az ilyen irányú vizsgálatok lehetőséget adnak e függvények elméletének továbbfejlesztésére, egyúttal az eredmények gazdasági gyakorlatba való közvetlen alkalmazására is sor kerülhet. A természeti erőforrások értékének a termelési függvényekbe való beépítésével elérhető, hogy egy adott szintű termelési volumenhez ne csak a munka és a termelési alap optimális arányát, hanem a természeti erőforrások kihasználásának optimumát is meghatározzuk.

Mivel a természeti erőforrások közül a termőföld az, ami a mezőgazdasági termelés vizsgálatánál minden körülmények között figyelembe veendő, ezért az első ilyen jellegű elemzések is ezen a területen születtek. Ki kell emelni Góczán L. és Benet I. ilyen irányú munkásságát (1973).

Góczán L. elsősorban talajföldrajzi, Benet I. pedig közgazdasági szemlélettel közelített a földértékelés problémáihoz. Közös munkáik jelentik a szintézist, melyben megvalósult a termelési függvények és a természeti erőforrások értékelésének elméleti egysége. A következőkben az említett két szerző nyomán ismertetjük a termelési függvények egy földrajzi alkalmazását.

A három erőforrásos Cobb–Douglas-féle termelési függvényből indulnak ki, amelyet a következő alakban adnak meg:

$$Y = aF^{\alpha}L^{\beta}K^{\gamma},$$

ahol Y – az eredményváltozó,

a – az ún. hatékonysági tényező;

α, β, γ – rugalmasságot kifejező együtthatók, amelyek azt mutatják meg, hogy a kérdéses termelési erőforrás egységnyi változása – a másik két tényező konstans voltát feltételezve – milyen módosulást indukál az eredményváltozóban,

F – a föld,

L – az élőmunka,

K – az álló- és forgóeszközök,

$\alpha + \beta + \gamma \gtreqless 1$ – volumenrugalmassági együttható.

Érdeklődésre tarthat számot, hogyan oldották meg a szerzők az egyes tényezők mérésének problémáit.

Az Y eredményváltozót három változatban határozták meg:

a) bruttó termelési értékben (Ft);
b) bruttó jövedelemben (Ft);
c) gabonaegységben.

F – értékét tábla szinten talajértékszámmal és termőhelyérték-számmal adták meg;

L – értékét az adott gazdasági évben eszközölt közvetlen és közvetett élőmunka ráfordítással Ft-ban fejezték ki;

K – értékét, az eszköz jellegű ráfordításokat szintén Ft-ban adták meg, figyelembe véve a tábla szintű gépüzemi költségeket, valamint a műtrágya felhasználást is.

A talajérték-szám és termőhelyérték-szám meghatározásának földrajzi problémáira nem térünk ki, ezek megtalálhatók a szerzők publikációiban (Góczán–Benet 1973, Góczán 1980).

Az említett vizsgálatok végső célja a földértékelés új, korszerű módszereinek kidolgozása, valamint a föld értékének (árának) konkrét meghatározása volt. A kapott eredmények azonban tágabb összefüggésben túlmutatnak ezen a célon, lehetővé teszik a termelési függvények kiteljesítését és földrajzi alkalmazását a természeti erőforrások értékelésében.

A lehetséges földrajzi alkalmazások másik köre a termelési függvények alapjául is szolgáló hozadék koncepció és a gazdálkodó egységek „mérete" közötti kapcsolatra épül. A „méret" fogalmát az alábbi kifejezésekkel lehet körülírni: vállalatnagyság, gazdaságnagyság, üzemnagyság, birtoknagyság stb. A „méret" fogalmának a bevezetése felfogható a termelési függvények egy sajátos bővítéseként is. A gazdasági egységek mérete és a termelés nagysága, gazdaságossága közötti kapcsolat régóta képezi a kutatások tárgyát. Ennek a problémakörnek a területi folyamatokkal, a gazdasági tevékenység koncentrálódásával, agglomerálódással való összekapcsolására azonban kevés kísérlet történt (pl. Richardson 1980, Nagy–Wirth 1973). Nagy S. és Wirth Gy. általánosságban említi meg, hogy a nagyobb gazdálkodó szervek és egy terület mint gazdasági egység termelési függvénye idősorokból és keresztmetszeti adatokból meghatározható. A függvény analitikus alakjára azonban nem tesznek javaslatot, mindössze megállapítják, hogy annak konkrét formája az adott terület, gazdasági egység jellemzője, ezért széles körben érvényre kell juttatni az egyedi szakértői megítélést.

Más szerzők szerint a területi koncentrálódást és agglomerálódást, más szóval a térbeli tömörülést az ebből származó, az egyének és a gazdálkodó egységek szintjén is érzékelhető plusz hozadék váltja ki. Az agglomerációs hozadék termelési függvényekkel meghatározható, bár számbavétele nem egyszerű, és mint a termelési függvények általában, leegyszerűsítéseket tartalmaz. Az agglomerációs hozadék azonban többféle lényeges szerepet játszik a területi folyamatokban:

a) elősegíti a technikai haladást és a termelékenység növekedését az adott térségben;

b) vonzza az ipart és általában a beruházásokat;

c) befolyásolja a népesség letelepedési döntéseit, vándorlását;

d) hatással van a térség belső térszerkezetére.

Mindezek a hatások akkor is érvényre jutnak, ha a területi folyamatok irányítottak, tervezettek. A kialakulóban levő agglomerációknál várható hozadék a tervezők telepítési döntéseire is hatással vannak. Az agglomerációs hozadék talán magyarázatot adhat arra is, hogy a központi preferenciák ellenére miért nehéz megvalósítani, hogy egyes vállalatok elhagyják az agglomerációs térségeket.

A gazdaságföldrajzi szakirodalom jelentős része foglalkozik agglomerációs kérdésekkel és a térbeli koncentrálódás folyamataival; az ilyen jellegű vizsgálatokban jelentős szerep juthat a termelési függvények elméletének. Az ilyen függvényekbe beépíthetők a következő tényezők: népesség, munkaerő, a gazdálkodó szervek gazdasági tevékenysége, eredményessége, a fejlesztési alapok forrásai (saját források, bankhitelek, állami hozzájárulások stb.).

A termelési függvények és a gazdálkodó egységek „mérete”-nek összekapcsolása révén a földrajzi vizsgálatok köre más irányba is bővülhet. Ezek közül kettőt említünk: a gazdasági körzetek optimális méretének, valamint az agráripari egyesülések optimális területi kiterjedésének problémáit.

Végezetül a termelési függvényeknek egy, az eddigiektől eltérő kiterjesztési lehetőségére utalunk. Az egyszerűség kedvéért tekintsünk egy kéttényezős (L és K változót tartalmazó) Cobb–Douglas-féle termelési függvényt, ahol a munka (L) és anyagi (K) ráfordításokat területegységenként, körzetenként vesszük figyelembe. A függvény ekkor a következő alakba írható:

$$Q_0 = aL_0^{\alpha_0}L_1^{\alpha_1}\dots L_k^{\alpha_k}\cdot K_0^{\beta_0}K_1^{\beta_1}\dots K_l^{\beta_l},$$

ahol L_i ($i = 1, 2, \dots, k$) az egyes területi egységekből (pl. településekből) bejáró dolgozók száma, vagy az általuk teljesített munkaórák száma, K_j ($j = 1, 2, \dots, l$) pedig a Q_0 termeléshez az egyes területi egységekből származó anyagi erőforrások mennyisége. L_0 és K_0 a saját körzetből származó munka és termelési alap mennyiségét jelenti. A termelés rugalmasságát kifejező α_i és β_j indexek kifejezik a terméket előállító körzet és a „bedolgozó” körzetek kapcsolatának jelentőségét, a függőség mértékét, a beszerzési körzetek megváltozásának hatásait a termelésre. Lehetőség nyílik a körzetek közti anyagáramlási folyamatok optimalizálására is.

A fönti típusú függvénnyel végzett vizsgálatra mutat be egy kísérletet a *38. táblázat*. Függő változónak (Q_0) a békéscsabai központú üzemek ipari telephelyein képződő becsült termelési értékeket tekintettük településenként, független változóként pedig az adott telephelyen lekötött állóeszközök értékadatait (K_i), valamint a foglalkoztatottak számát (L_i) adtuk meg. Mint megállapítható, a békéscsabai központú üzemek termelési értékét 1970-ben leginkább a városban levő állóeszkö-

38. TÁBLÁZAT

A békéscsabai központú ipari üzemek és az egyes településekben levő telephelyeik kapcsolatának mutatói a Cobb–Douglas típusú termelési függvények alapján

Települések	Az α_i kitevők értéke a foglalkoztatottak száma szerint		A β_i kitevők értéke az állóeszközérték szerint	
	1970	1979	1970	1979
Békéscsaba	1,47	3,85	6,73	4,61
Gyula	2,35	1,87	0,84	2,72
Békés	1,37	3,11	1,13	0,64
Mezőberény	1,21	2,94	0,66	0,45
Sarkad	0,15	1,25	2,89	0,83
Újkígyós	1,16	0,61	1,08	2,59
Szabadkígyós	—	0,95	—	0,52
Köröstarcsa	1,00	0,67	1,00	0,93
Doboz	—	0,95	—	0,70
Kétegyháza	—	0,66	—	0,78
Elek	1,68	0,56	0,56	0,71
Murony	—	0,96	—	0,66
Gerla	—	0,62	—	0,96

zök értéke határozta meg, ezt követte a sarkadi telephelyek állóeszköz-értéke, majd a gyulai telephelyeken foglalkoztatottak száma.

1979-re azonban a békéscsabai állóeszközök értékének meghatározó szerepe relatíve csökkent, második helyre került a város ipari foglalkoztatottjainak száma, megnőtt a békési telephelyeken foglalkoztatottak termelési értéket befolyásoló szerepe is. Ha a bemutatott értékeket a kapcsolatok szorosságát is kifejező mutatóknak tekintjük, megállapítható, hogy míg 1970-ben a kapcsolatok szorosságának csökkenő sorrendje a foglalkoztatottak szerint Gyula, Békés, Mezőberény volt, addig 1979-ben Békés, Mezőberény, Gyula, Sarkad a sorrend, majd a többi település következik kb. azonos súllyal. Az állóeszközök értéke szerint vizsgálva, 1970-ben Sarkad, Békés, Újkígyós, 1979-ben pedig Gyula, Újkígyós, Gerla, Köröstarcsa vezetnek. Ezek a települések azok, amelyek ipari szempontból legerősebben kötődnek Békéscsabához, a legnagyobb mértékben befolyásolják a békéscsabai központú üzemek termelési értékének alakulását.

Az ilyen jellegű termelési függvények összefüggésbe hozhatók a területi ágazati kapcsolatok mérlegével folytatott vizsgálatokkal is. A területi ÁKM-ek esetében az egyes körzetek termelésének prognosztizálása, a kapcsolatok különböző változatainak megvizsgálása sokszor komoly nehézségekbe ütközik. A termelési függvényekkel folytatott termelés-becslések az ÁKM-vizsgálatoknak mintegy első fázisát képviselhetnék, és kiinduló adatokat szolgáltathatnak a területi ÁKM-ek megalkotásához.

IX. *Játékelméleti modellek a termelőerők területi elhelyezésének gazdaságmatematikai modellezéséhez*

A termelőerők fejlődésével, a tudományos-műszaki haldással egyre összetettebbé válik a termelés területi struktúrája, növekszik a természeti környezet igénybevétele, s mindezek következtében fokozódnak a követelmények a termelőerők racionális elhelyezésének (telepítésének) komplexitására, ill. a már kialakult egységek racionális átalakítására (komplexebbé tételére).

A népgazdaság területi egyensúlya, optimális nagyságú és szerkezetű területi komplexumok kialakítása elképzelhetetlen a holt és eleven munka kombinációjának számos variánsát tartalmazó, egy-egy térséget sokoldalúan átfogó gazdaságmatematikai módszerek alkalmazása nélkül. A hagyományos empirikus módszerekkel ma már nem lehet megvilágítani olyan fontos összefüggéseket, mint:

— a termelőerők minél tökéletesebb elhelyezésének és a területi gazdasági kapcsolatoknak az összeegyeztetése és ennek révén magas népgazdasági hatékonyság elérése;

— a termelőerők racionális elhelyezésével továbbfejlesztésük és modernizálásuk biztosítása, az egyes népgazdasági ágak tudományosan megalapozott telepítése és optimális területi elhelyezése, különös tekintettel a nagyvárosok mérsékelt fejlesztésére és a perspektivikus településekre (kis- és középvárosok);

— a különböző méretű körzetek komplex fejlesztésének összehangolása a természeti, az anyagi és munkaerőforrások minél hatékonyabb felhasználásával;

— a gazdasági erőforrásokkal rendelkező körzetekben területi termelőkomplexumok kialakításának elősegítése;

— a gazdasági körzetesítés összehangolása az ország közigazgatásának területi felépítésével;

— az ország egyes területei természeti feltételeinek és forrásainak gazdasági értékelése;

— az adott terület gazdasági struktúrájának tökéletesítése a nemzetközi gazdasági kapcsolatok (integráció) figyelembevételével.

A termelőerők területi elhelyezésének vizsgálatában új lehetőségeket nyitnak meg a játékelméleti modell-rendszerek, amelyekkel a továbbiakban bővebben foglalkozunk.

1. *A játékelméleti modellek és a termelőerők területi elhelyezésének problematikája*

Az egymással kölcsönhatásban levő gazdaságmatematikai modellekre épülő gazdaságirányítási rendszerben a gazdasági szervezetek közötti optimális kapcsolatok megfogalmazása esetén a rendszer egyensúlypontja egybeesik a népgazdasági optimummal.

E kérdés matematikai vizsgálatánál jól alkalmazhatók a különböző játékelméleti módszerek. Mint lehetséges módszer, számításba jöhet az *n-személyes játékok elmélete* is.

A termelési komplexum modellje megfogalmazható úgy is, mint a lehetséges *stratégiák*, pl. a termelési tervek alternatíváinak halmaza és a komplexum irányító szervei kifizetőfüggvényének leírása, ahol az optimalitás kritériuma a nyereség. A tervkidolgozás folyamata felfogható játékként, amelyben a játékosok a tervezési és irányítási rendszer különböző szintjeit képviselik. Az egyes játékosok *kifizetőfüggvénye* függ a többi játékos által megválasztott stratégiától. Például egy vállalati modellben a kifizetőfüggvény függ a termékek értékétől, amelyet az ágazati irányítás stratégiája határoz meg.

Ismeretes, hogy a lineáris programozási feladat ekvivalens a 2 személyes, zérus összegű mátrixjátékkal. Ha a mátrixjátéknak van megoldása, akkor a játákospárok stratégiája egyensúlyi stratégia. Ekkor a primál és duál feladat megoldási feltételeinek megfelelően a *mini-max elv* megfelel az optimális döntésnek. Ez a tétel kiterjeszthető a konvex programozás és az n-személyes játékok modelljeire is.

A konvex programozási feladatban a konvexitásból következik, hogy a játékosok játéka egymástól független, a játéknak csak egyetlen *egyensúlyi pontja* van, amely a feladat optimális megoldása.

Ennek az elvnek a közgazdasági alkalmazására több konkrét példa mutatható be. E fejezetrész a konvex programozási feladat egy interpretációját vizsgálja nyereségorientált gazdaságban.

Legyen az egész gazdaság termelési egységek, pl. a vállalatok vagy ágazatok összessége. Általánosabban fogalmazva, a termelésért és a termelés tervezéséért felelős szervezeteké. Legyen J a gazdaságban funkcionáló erőforrások csoportja. y_j^k vektor jelentse k-adik termelési egység j-edik csoportja erőforrásainak kibocsátását ($y^k \in Y^k$). A nem termelő fogyasztást jelentse az $x = (x_1 \ldots x_y)$ vektor, a következő erőforráskorlátok mellett: $y^k = (y_1 \ldots y_j)$ és $y = \sum_k^K y^k$. Ha az optimalitás kritériuma teljesül, akkor van egy olyan x, amelyre igaz, hogy $U(x)$ maximális értéket ér el. A feladatot matematikai formában a következőképpen írhatjuk fel:

$$U(x) \to {}_{\max} \cdot$$

$$x \leq y$$

$$y \in Y,$$

ahol

$$Y = \left\{ y : y = \sum_k^K y^k, y^k \in Y^k \qquad (k = 1, 2, \ldots, K) \right\}.$$

Legyen az $U(x)$ függvény konkáv, az Y^k-ok halmaza pedig konvex és korlátos. Ekkor – mint ismeretes – a feladat megoldása egybeesik a Lagrange függvény nyeregpontjával.

$$Y(x,y,p) = U(x) + (p, y - x)$$

$$X = \{(x,y)\, x \in Y\, y \in Y\}.$$

A p^* jelentse a Lagrange-féle szorzót; a nyeregpontban felsoroljuk az erőforrások értékeit is (az egyensúlykorlát értékeit $x \leq y$ adja). A mini–max elv szerint, ha az $U(x)$ függvényt megszorozzuk bármilyen pozitív konstans C-vel, akkor értéke változatlan. Tehát $U(x)$ függvényt az optimalitás kritériuma szerint felcserélhetjük a $CU(x)$ függvénnyel. Az optimális tervnél x^*, y^* nem változik, p^* értéke viszont Cp^*-ra módosul. A C konstans szorzó („az ártömeg") és $(p^*, x^*) \leq S$ feltételből határozzuk meg, ahol S az adott mennyiség (a fogyasztási alap). Az optimális tervnek X^*, Y^*-ot, az optimális áraknak a P^*-ot nevezzük, amelyek az optimális pontot adják.

Vizsgáljuk meg a $K + J + 1$ játékossal játszó játékot. A K játékosok termelési egységek (a játékosok száma fut $1 \ldots, K$-ig) és *stratégiájuk* Az $\bar{\bar{y}} \in Y^k$ input-output vektorok. A gazdasági szervek felelősek az értékesítésért, ellátásért, továbbá a termékek és erőforrások árainak megállapításáért. Ezeket a játékosokat a $J = K + 1, \ldots K + J$ jelöli. A $K + J$-edik játékos stratégiái, j-edik erőforráscsoport p_j árai. Egyszerűsíthető a feladat, ha az árváltozást illetően bevezetjük a $0 \leq p_j \leq P$ korlátokat, ahol p vektor eléggé nagy komponens, a rövidség kedvéért $P = (p_1 \ldots p_j)$.

Végül megadják a tervező szervek a nem termelő fogyasztást ($K + J + 1$-edik játékosok, fogyasztók), amelynek stratégiái az X vektorok.

Feltételezzük, hogy ismert az S nem termelő fogyasztás társadalmi alapja. A fogyasztást tervező szerv, tanulmányozva a társadalmi szükségleteket, előirányozza az elosztást és kidolgozza a fogyasztás legracionálisabb anyagi struktúráját (X fogyasztási terv).

Feltételezzük, hogy az X halmaz korlátos. A nem termelő szféra oldaláról X terv a termék keresletét jelenti és természetszerűen módosul az árak változása esetén. Az árak növekedésekor vagy csökkenésekor a játékosoknak új stratégiákat kell kidolgozniuk. Ha ez a szerv helyesen értékeli a társadalmi szükségleteket, akkor az $U(x)$ értéknek a maximális értékhez kell tartania azzal a feltétellel, hogy teljesül az optimalitás kritériuma $(P, X) \geq S$. Ha ezeket a feltételeket játék formában akarjuk kifejezni, magas R bírságot (kamatot) kell meghatározni (bizonyos jövedelemszint felett), és ekkor a fogyasztás kifizetőfüggvénye a következőképpen írható fel:

$$\Phi(x,p) = U(x) - R[(p,x) - S]^+,$$

ahol

$$[a]^+ = \begin{cases} 0, & \text{ha } a \leq 0 \\ a, & \text{ha } a > 0. \end{cases}$$

Feltételezzük továbbá, hogy a termelési objektumok maximális nyereség elérésére törekszenek; kifizetőfüggvényük K játékos esetén:

$$\Phi_k(y^k, p) = (p, y^k), \text{ ahol } k = 1, \ldots, K.$$

Tegyük fel, hogy minden kereskedelmi (értékesítési) szervezet maga határozza meg az árakat az áruk meghatározott körére és kötelezi magát arra, hogy kielégíti ezen áruk termelői és fogyasztói keresletét, továbbá, hogy megszervezi az összes áru felvásárlását és értékesítését, előre megállapított árakon. A kereskedelem értékesítési munkájával kapcsolatos költségeket és az árkülönbözetből eredő nyereséget nem vesszük figyelembe. Ez természetes is, mivel ha a felvásárlási ár indokolatlanul meghaladja a kibocsátási árat, akkor az kedvezőtlenül érinti magát a szervezetet. Ekkor ugyanis a termékfogyasztó és a termelő nem lenne érdekelt abban, hogy igénybe vegye a szervezet szolgáltatásait. Ilyen körülmények között feltételezhetjük, hogy a kereskedelmi–értékesítési szervezetek a kereslet és kínálat különbségéből eredő nyereség maximalizálására törekszenek. A kereslet–kínálat kifizetőfüggvénye a modellben a következő:

$$\Phi_j(p_j, x_j, y_j) = (p_j, x_j - y_j), \quad j = K+1, \ldots, K+J.$$

Ha az y^k termelési lehetőségek halmaza nem üres konvex halmaz és az $U(x)$ függvény folytonos és konkáv, ebből következik, hogy a játéknak van egyensúlyi pontja. Könnyű bebizonyítani azt a tételt, hogy a feladat minden optimális pontja a játék egyensúlyi pontja. E tétel fordítottja is igaz; minden egyensúlypont $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{p})$ egyúttal optimális pont is. Valójában, ha úgy választjuk a C konstanst, hogy a feladatban a Lagrange-szorzó értéke a $CU(x)$ függvény maximuma és $(P, X) \leq S$ feltétel mellett egységnyi, akkor az $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{p})$ egyensúlyi pont nyeregpontja a Lagrange-függvénynek.

2. *A körzetközi optimális tervezés komplex modellje*

A mátrixjátékok problematikája sokkal szélesebb a lineáris programozásnál, mivel a lineáris programozási feladatok speciális mátrixjátékként is kezelhetők. A kapcsolat azonban kétoldalú; éppen a lineáris programozás nyújtja a tetszőleges mátrixjátékok egyensúlyi stratégiáinak megkeresésére a leghatékonyabb módszert. Vizsgáljunk meg a továbbiakban egy n-személyes játékot, amelyet a körzetközi optimális tervezéshez használnak fel.

Legyen R a körzetek száma, és a termelésnek minden körzetben legyen J ágazata, amely egyben megfelel J terméknek is. E feltétel mellett a körzetek alapmodellje egy kvadratikus mátrix, azaz az Ágazati Kapcsolatok Mérlege (ÁKM). A továbbiakban megadjuk *a modell jelöléseit és korlátait*, elhanyagolva a szállítási költségeket:

1. A körzeten belüli mérlegegyenlegek

$$V^h = (E - A^h) X^h - \bar{y}^h - \bar{S}^h, \tag{1}$$

ahol

E = $J \times J$ méretű egységmátrix;

A = a közvetlen költség-koefficiensek mátrixa, amelyben szerepel az állóalapok amortizációjának megtérülése is;

X = $(x_1 \ldots X_j)$ az ágazat bruttó kibocsátása;

h = 1, . . ., R a körzetek száma. A „termékek" közé sorolhatjuk – mint ahogy ezt teszik is az Ágazati Kapcsolatok Mérlegének az összeállításánál – az olyan mutatókat, amelyek kifejezik az építő–szerelőmunka volumenét, sőt a szolgáltatások külöböző fajtáit is;

V^h = $(V_1^h \ldots V_j^h)$ vektorok a termelés, ill. a folyó termelő és nem termelő fogyasztás különbségei. A szállítható termékek mennyisége egybeesik a körzetből történő kivitel és a körzetbe történő behozatal különbségével (a kivitel és behozatal egyenlege). Itt célszerű figyelembe venni az ország többi körzetéből történő szállításokat, a külkereskedelmi szállítások nélkül;

$\bar{y}^h$ = a nem-termelő fogyasztás vektora, ide célszerű bekapcsolni a külkereskedelmi egyenleget (import és az export egyenlege);

$\bar{S}^h$ = a felhalmozás vektora. A felső index mindig a körzet számát jelöli. Azt az évszámot, amelyhez az adott mennyiség tartozik, a továbbiakban zárójelbe tesszük, pl. $X^h(t)$, $\bar{y}^h(t)$ stb.

2. A munkaerőforrások korlátai körzetek szerint

$$S_l^h + y_l^h + (l^h, X^h) \leq L^h, \tag{2}$$

ahol l^h – a termékek termelésének munkaigényességi vektora a h-adik körzetben, ágazatok szerint,

L^h – a munkaerőforrás alakulását jelzi a h-adik körzetben (a migrációt ösztönző módszerek – azokban a körzetekben, ahol érezhető a munkaerőhiány – túllépik e modell kereteit),

y_l^h – a munkaköltségek összege a nem termelő szférában,

S_l^h – a termelő és nem-termelő szféra felhalmozása, amelyek nem lettek figyelembe véve az (l^h, X^h) mennyiségekben. A továbbiakban y^h és $S^h - J + 1$ jelenti a mérésre szolgáló vektorokat, amelyekbe bekapcsolhatók a munka komponensei

$$y^h = (\bar{y}^h, y_l^h);\ \bar{S}^h = (\bar{S}^h, S_l^h). \tag{3}$$

A telepítés komplex modellje a mutatók körének szélesítésével formálisan átfogja az egész gazdaságot. A termelési lehetőségek teljes rendszerének népgazdasági korlátait a továbbiakban adjuk meg.

3. A behozatal és a kivitel egyensúlykorlátai körzetenként $\sum_h v^h \geqq 0$ és a nem szállítható termékek korlátai a szolgáltatásoknál $v_j^h \geqq 0$, ahol j a termékek száma.

Minthogy a nem szállítható termékek az Ágazati Kapcsolatok Mérlegében jelentéktelenek, az a legjobb, ha teljes egészében kizárjuk őket a modellből annak ellenére, hogy sok termék előállítása szempontjából termelésük nélkülözhetetlen. A nem szállítható termékek költségeit a munkaköltségek tartalmazzák. A nem szállítható termékek termelésének korlátai is hiányoznak a modellből.

4. Θ^h függvény fogyasztási színvonalából kiszámítható az optimalitás kritériuma, különböző időperiódusokban:

$$U = U(\Theta^h(t), h = 1, \ldots, R, t \in T). \tag{4}$$

Ilyenfajta elosztástól függő optimális terv megfogalmazására felhasználható a piaci verseny egyensúlyi modellje. Ilyen az Arrow–Debren-féle modell (Karpil 1964).

Feltételezzük, hogy a célfüggvény minden körzetben lineáris, és mutatja a fogyasztási színvonalat is a különböző években.

5. $$U^h = \sum_{t \in T} Q_t^h \cdot \Theta^h(t) \text{ koefficiensek.} \tag{5}$$

A Q_t diszkontálási koefficiensben kifejeződik a társadalom értékítélete. Ezeknek a koefficienseknek kifejezése a modellben kísérleti jellegű, területi aspektus nélkül (jelöléseik $\bar{Q}_t$), ezért a modellt minden körzete számára $\bar{Q}_t^h$ egységesnek kell venni, ahol a $\bar{Q}_t$ jelentések egyenlők.

A játék célja a népgazdasági optimum megkeresése, amely cél több játékos egyensúlyi pontjaként áll elő. A játék során minden körzet fellép majd mint: 1. fogyasztó; 2. termelő; 3. munkaerővel rendelkező.

A továbbiakban újabb tényezőkkel bővítve, részletesen ismertetjük a korábban leírt játékelméleti modellt. A játékba az eddiginél még több játékost kapcsolunk be.

Nézzük a játékot először $4R + J$ játékossal (ahol R a körzetek száma, J pedig a termékeké). Minden körzetnek ($h = 1, \ldots R$) négy játékosa van a következő számokkal: h, $R + h$, $2R + h$ és $3R + h$. Minden körzetben a következő négy játékos vesz részt a játékban: 1. a termelést tervező szerv; 2. a beruházó és építést tervező szerv; 3. a nem-termelő fogyasztást tervező szerv; 4. a munka értékét tervező szerv. Ezen kívül szerepel még a modellben az árképző szerv.

Az egyes játékosok a játék folyamán egymással szembenállnak. *Minden játékos nyeresége stratégiájának helyes megválasztásától függ.* A két szembenálló játékos közül mindig annak a játékosnak lesz a legnagyobb a nyeresége, amelyik a legváratlanabb helyes stratégiát választja. Nézzük most egyenként az egyes játékosok stratégiáját. Az első játékos stratégiája (h játékos a termelést tervező szerv) $X^h(t)$ nem negatív vektor, ahol $t \in T$-nek. A második játékos stratégiája ($R + h$ játékos, a beruházó és építést tervező szerv) $S^h(t)$ nem negatív vektor, ahol $t \in T$-nek. A harmadik játékos stratégiája ($2R + h$ játékos) a nem-termelő fogyasztást tervező szerv; $\Theta^h(t)$, $t \in T$ mennyiségek), amely a fogyasztás színvonala körzetenként vagy az a mennyiség, amely meghatározza $y^h(t)$, $t \in T$ vektorokat (különböző javak fogyasztási volumene).

Minden körzet rendelkezik még egy további szervvel, amely a munka értékét határozza meg az adott körzetben és felelős a munkaerőforrások keresletének és kínálatának az egyensúlyáért ($3R + h$ játékos). Ennek a játékosnak a stratégiája $V^h(t)$ vektor (azaz a munka értéke), ahol $t \in T$. Az azonos típusú munka a modellben mindenhol egyenlő egy skalárral. Ezen kívül a modellben szerepel J ellátási és értékesítési szerv vagy árképző szervek, amelyek felelősek az összes többi termék és erőforrás keresletének és kínálatának egyensúlyáért. Ezek a szervek határozzák meg a termékek és források árait is.

A J-edik árképző szerv ($4R + J$ játékos) stratégiáját a j-edik tervezett vagy várható árai $p_j(t)$, $t \in T$ jelentik egy adott időpontban.

A $h = 1, 2, \ldots R$ játékos kifizetőfüggvénye a termelő számára:

$$\Phi_h(X^h, P, V, \Theta) = \sum_{t \in T} \{P(t) V^h(t) - V(t) \cdot (l^h, X^h(t))\}, \tag{6}$$

ahol

$$V^h(t) = (V_1^h(t), \ldots, V_j^h(t)) = (E - A^h) X^h(t) - \bar{S}^h(t) - \bar{y}^h, \tag{7}$$

a fogyasztók számára

$$\Phi_{2R+h}(\Theta^h, P, V) = \sum_{t \in T} Q_1 \Theta^h(t) - M \left[\sum_{t \in T} p(t) \bar{y}^h(t) + V^h(t) \cdot \right.$$
$$\left. \cdot y_l^h(t) - S^h \right]^+, \tag{8}$$

ahol

$$[a]^+ = \begin{cases} a, \text{ ha } a > 0 \\ 0, \text{ ha } a \leq 0. \end{cases} \tag{9}$$

M – elég nagy pozitív szám (bírság a jövedelem feletti kiadások túllépéséért);
S^h – a jövedelmek vektora, amely meghatározza a nem-termelő fogyasztás alapjainak körzetek közötti elosztását. Kiszámítása az adott körzet népességének száma és a munka termelékenysége alapján történik;
$\bar{L}^h(t)$ – a lakosság száma az adott körzetben t-edik évben,
$L^h(t)$ – a munkaerőforrás nagysága az adott körzetben a t-edik évben.

Ezzel rendelkezésünkre áll az anyag az optimális tervek (egyensúlypontok) vizsgálatához.

$$S^h = \alpha \sum_{t \in T} \bar{L}^h(t) + (1 - \alpha) \sum_{t \in T} V^h(t) L^h(t), \tag{10}$$

ahol

$0 \leq \alpha \leq 1$ között mozog.

Ez a fogyasztási alap olyan felosztásának felel meg, amely összhangban van a lakosság számával és a munka termelékenységével (e felosztás célja többek között az, hogy a migrációt azokba a körzetekbe irányítsa, amelyek munkaerőhiánnyal küzdenek).

A beruházó szervek

$$\Phi_{R+h}(S^h, P, V) = -\sum_{t \in T} \left\{ \left[p(t) S^h(t) - M \sum_j \Phi_j^h(t, X^h, y^h) - S_j^h(t) \right]^+ \right\}. \tag{11}$$

A kapcsos zárójelen belül az első tagot az alapok növekedésének költségeiként értelmezzük, a második tag pedig azokat a veszteségeket jelzi, amelyek a tőkejavakbani szükségletek t-edik évbeni hiányos tervezéséből adódnak.

A munka értékét tervező szervek

$$\Phi_{3R+h}(V^h, X^h) = \sum_{t \in T} V^h(t) [l^h, X^h(t) - L^h(t)], \tag{12}$$

a j-edik árképző szerv

$$\Phi_{4R+j}(P_j X, \Theta) = \sum_{t \in T} p_{j(t)} \sum_h V_j^h(t). \tag{13}$$

Ezzel megfogalmaztuk a körzetközi optimális tervezés alapmodelljét, amely – mint a továbbiakban látni fogjuk – több irányban továbbfejleszthető a játék folyamán.

3. *A körzetközi optimális tervezés komplex modelljének továbbfejlesztett változata*

Az optimális területi–termelési tervezés alapfeladatát egy olyan mechanizmus kidolgozásával lehet megoldani, amely mechanizmus összehangolja a társadalom és az egyes területi-termelő komplexumok érdekeit és egyúttal figyelembe veszi azok egyenjogúságát. Az így kialakított rendszerben az egyensúlyi pont képezi a modell optimumát.

A játék során a gazdasági körzetek és ágazatok érdekei ellentétesek, szemben állnak egymással, mint „termelők" és „fogyasztók". Bármely körzet tevékenysége mint termelőé az általa nyújtott kínálatban fejeződik ki.

A különböző ágazatok meghatározott összeget fizetnek a körzeten belüli elhelyezésükért. A körzeteken belül úgy kell az ágazatokat elhelyezni (telepíteni), hogy az ott élő lakosság életszínvonala maximális legyen. Minden ágazat mint fogyasztó a körzeten belüli elhelyezkedés iránt keresletet támaszt. Az illető ágazatnak úgy kell növelnie a termelését, hogy nyeresége maximális legyen.

Vezessük be a Pareto-féle egyensúlyi pont fogalmát a „körzet-ágazat" rendszerbe. A Pareto-féle egyensúlyi pont a rendszernek azt az állapotát jelenti, amelyben az ágazatok telepítésének fizetési készlet normái meghatározottak az egyes körzetek keretein belül és pótlólagos költségek nélkül egyik ágazat sem növelheti saját nyereségét, és egyik körzet sem biztosíthat magasabb életszínvonalat lakosai számára. A körzet-ágazatok rendszerét bármely tervévben, egyenlőtlenségi rendszerekkel lehet leírni. Az egyenlőtlenségi rendszerek leírják az ágazatok termelésének körzeteken belüli elhelyezkedését, a körzetek által nyújtott kínálatot, az egyensúlyi feltételeket és végül a kereslet-kínálat egész termelésre vonatkozó egyezőségét.

A körzetek–ágazatok rendszerében az egyensúly a következő feltételek mellett teremthető meg:

a) A különböző gazdasági ágazatok adott körzeteken belüli telepítéséért fizetett összegnek olyan egyensúlyi árnak kell lennie, amely maximálja a körzetek lakosságának életszínvonalát;

b) A különböző termelés-elhelyezési variánsok kidolgozásával minden ágazat nyereségének maximalizálására törekszik. E variánsok csak akkor fogadhatók el, ha nem szárnyalják túl az adott körzet technológiai lehetőségeit és gazdaságosak;

c) Az összes ágazat kereslete kielégíthető és nulla fizetési norma állapítható meg, ha az egyes körzetek olyan termelés telepítését javasolják, amely meghaladja a keresletet.

A továbbiakban tételezzük fel, hogy az ágazatok által termelt áruk és erőforrások árai rögzítettek és az ágazatok fejlesztése stagnál.

Az egyensúlyi elmélet és a jóléti gazdaságtan elmélete szerint, ha a „termelőerők elhelyezése és fejlesztése tervére csak egy körzet is tenne egy olyan ajánlatot, amely szerint az ágazatok telepítésének a kereslete meghaladná a kínálatot és az ágazatok fejlődését csak az erőforrások korlátoznák", akkor a következőket mondhatjuk: ahhoz, hogy a termelőerők telepítése és fejlesztése maximálisan kielégítse (települési helytől függetlenül) a társadalom minden tagjának szükségleteit, léteznie kell a következő terveknek:

– ágazatfejlesztési terveknek;
– a körzetek kínálati tervének; (termeléselhelyezés a körzeteken belül);
– fizetési normák tervének;
– termékek-erőforrások ártervének.

E tervek összessége alapján alakul ki „a körzet–ágazat" rendszerben a már említett egyensúly. A termelőerők telepítése és fejlesztése ilyen terveiben fogalmazódik meg a legvilágosabban a paretói optimum gondolata. A Pareto-elv azt mondja ki, hogy egyik ágazat sem növelheti nyereségét oly módon, hogy azzal megsértse más ágazat érdekeit, továbbá egyik körzet sem emelheti lakosainak életszínvonalát más körzet lakosságának terhére. Ily módon biztosítható a szocialista társadalom és az egyes területi–termelő komplexumok érdekösszhangja. A népgazdasági optimummal egybeeső egyensúlyi pont (a körzetek–ágazatok rendszerében történő) meghatározása speciális matematikai (szélső érték) feladat. A feladat megoldásához egy nem lineáris programozási feladat megoldásán keresztül juthatunk el, amely egyben n-személyes játék.

Tekintsük a népgazdaságit mint n-ágazat összességét ($i = 1, \ldots, n$), amelyek megtermelik a h termékeket és elfogyasztják az erőforrásokat ($s = 1, \ldots h$) az m számú gazdasági körzetben ($j = 1, \ldots m$). $Z_j = (Z_j^1, \ldots Z_j^s, \ldots Z_j^h)$ vektor a j-edik gazdasági körzet nem-termelő fogyasztását jelenti, a $V_j = (V_j^1, \ldots V_j^s, \ldots V_j^h)$ vektor a körzet számára kívánatos és a társadalom szempontjából legelőnyösebb $V_j(Z_j)$ vagy $U_j(V_j)$, a fogyasztást leíró hasznossági függvények, amelyek folytonosak és konkávak. A λ-függvény az adott körzet lakossága szükségletei társadalmi kielégítésének a hasznosságát méri. A javak szocializmusbeli elosztási elveinek a gazdaság körzeteiben $\lambda_1 = \lambda_2 \ldots = \lambda_m$ jelölések felelnek meg minden nemzeti területen és termelési komplexumban.

X_{ij}^s jelentse a termelés vagy a fogyasztás volumenét a gazdaság i-edik ágazata j-edik gazdasági körzetében a s-edik erőforrásra vagy termékre. Az X_i input-output mátrix komponenseknek ez a nagysága a termelési lehetőségek szempontjából megengedett nagyság. Az i-edik ágazat $X_i(x_i \in X)$ szimmetrikus mátrixa nem üres, korlátos és konvex halmaz. A gazdaság minden ágazatának fejlődésére és elhelyezésére vonatkozó $X = \sum_i x_i$ lehetséges tervek halmaza szintén konvex.

Tegyük fel, hogy Y_{ij}^s a j-edik gazdasági körzet előirányzott termelési volumene vagy a szükséges fogyasztás volumene a körzet területén az i-edik ágazatban, Y_{ij}^s-edik termékből vagy erőforrásból. Y_j mátrix a körzetek közötti ágazati kapcsolatok mérlege, amely sajátosan tartalmazza a termelési lehetőségeket (felvéve a lehetőségek közé az újra nem termelhető erőforrásokat: a földet, vizet stb.).

Az $Y_j(y_j \in Y_j)$ a j-edik körzet mátrixa nem üres halmaz, konvex és korlátos ($j = 1, \ldots, m$). A mátrix elemei:

χ_j^s – a kívánatos bevitel volumene j-edik körzet területére s-edik termékből vagy erőforrásból, ill. az előírt s-edik termék vagy erőforrás kivitelének volumene a j-edik körzetből az állami „piacra";

U_j^s – a népgazdasági szempontból legelőnyösebb bevitel volumene s-edik termékből vagy erőforrásból a j-edik gazdasági körzetbe. Az U^s (ahol $u_j^s \in U^s$) halmaz konvex és korlátos;

a $G = (g_1, g_2, \ldots g_n)$ vektor azokat a termékeket és erőforrásokat jellemzi, amelyeket az egész országban az össztársadalmi szükségletek kielégítésével kapcsolatos bővített újratermelésben, a honvédelemmel és külpolitikával kapcsolatos társadalmi igények kielégítésére vonnak el.

A fentebb említettek figyelembevétele mellett kívánatosak a körzetek szempontjából a következők:

a) minden termék és erőforrás termelése, fogyasztása az ország egészében egyensúlyban legyen;

b) minden gazdasági körzet mérlege számításba veszi a behozatalt és kivitelt;

c) a termékek és erőforrások bevitelét a gazdasági körzetekbe nem lehet növelni, még ha az népgazdasági szempontból kívánatos is lenne;

d) a gazdasági körzetekből szállított bármely termék vagy erőforrás-volumen nem múlhatja felül az állami piac készleteit;

e) adott körzeten belül elhelyezhető termelési volumennek nem szükséges fölülmúlnia a körzet kínálatát.

A korábbi feltevéseinkből következik, hogy X_j, Y_j, U^s, $U(Z_j)$, $U_j(V_j)$ feladatok megoldása (7–13) megegyezik a Lagrange-függvény nyeregpontjával.

$$\Phi(V, Z, U, X, \chi, U, P, \varrho, \zeta, \xi, \eta, v) = \sum_j \lambda_j U_j(V_j) + (\zeta_j V_j - Z_j) +$$

$$+ (P_1 \sum_i V_j - \sum_i X_i + G) + (\varrho_i Z_j - Y_j - X_j + G_j) + (\xi_j[\chi_j]^+ - U_j) +$$

$$+ (V_i \sum_j U_j - \sum_j [\chi_j]^- + G) + (\eta_j[\chi_j]^+ - [Y_j]^+),$$

ahol

$$\{X, Y, Z, V, \chi, U / x \in X, y \in Y, u \in U\}$$

halmazértéke $\zeta_j, P, \varrho_j, \xi_{jj}$, és η_j; ebben a pontban azt feltételezzük, hogy a gazdasági körzetekben a termékek és erőforrások nem-termelő fogyasztása korlátozott, az összállami „piacra" termelt források és termékek népgazdasági és körzeti értékei által, az egyes körzetek területfelhasználásának értékei és a különböző termeléseknek a körzetben való telepítése által. Összességükben ezek az értékek és az optimális gazdaságfejlesztési tervek adják az optimumot, a nyeregpontot.

Nézzük tovább a feladatot mint $(5m + n + h + 3)$ személyes játékot. Az első m játékos képviseli azokat a szerveket, amelyek a nem-termelő fogyasztást tervezik gazdasági körzetenként. A megfelelő terveket (Z_j) a lakossági szükségletek tanulmányozása alapján készítik, miközben az egyes körzetek társadalmi fogyasztási alapját is figyelembe veszik. Ez az alap (H_j)-nek fix részéből képződik – amelyet a statikus szállítási feladatnál előre meg kell adni – és változó nagyság. Ez utóbbi jelenti azt az összeget, amelyet a körzet területén belüli termelés elhelyezéséért az ágazatok fizetnek. A körzetek a népgazdasági árból engedményt adnak a termékek és erőforrások nem-termelő fogyasztása után. A nem-termelő fogyasztást tervező szervek közül mindegyik igyekszik maximalizálni a $V_j(Z_j)$ függvényt akkor, amikor a kiadások nem lépik túl a körzet fogyasztási alapját. A körzetek fogyasztási alapjának emelése nem lehetséges minden határon túl.

$$(P_j^*, Z_j) \leq H_j - (\eta_j^*[Y_j^*]^+) + (\xi_j^*, Z_j^*) . \tag{14}$$

A (14) feltétel könnyebb kezelhetősége végett leírjuk e körzet lakosságának kifizetőfüggvényét:

$$\phi_j(Z, P, \eta, [y]^+, \xi) - V_j(Z_j) - M\{(P^*, Z_j) - H_j - (\eta_{j'} \cdot [Y_j^*]^+ - \\ - (\xi_j^*, Z_j)\} , \tag{15}$$

ahol M elég nagy pozitív szám (bírság a jövedelem feletti kiadások túllépéséért).

Továbbiakban az m játékosoknak azokat a szerveket tekintjük, amelyek javaslatokat készítenek az egyes gazdasági körzetek fejlesztésére. A szervek stratégiája tartalmazza a javaslatot (y_j) az adott körzet területén a különböző termelőegységek elhelyezésére, a társadalmi munkamegosztás következtében a termelőegységek specializációjának javaslatát, és e körzetek fejlődéséhez kívánatos állami támogatás (x_j) javaslatát.

A körzet gazdaságának kifizetőfüggvénye a következő:

$$f_j = (p_j^*, y_j) + (v^* - p_j^*[\chi_j]^-) - (\xi_j^* - \varrho_j^*, [\chi_j]^+) \rightarrow \max , \tag{16}$$

a következőkben az m játékosok – a körzeten belüli ármegállapító szervek. A körzeten belüli árak (p_j), amelyeket a körzetek terveinek az összeállításánál használnak fel és ennek a szervnek a kifizetőfüggvénye a j-edik körzetben:

$$\psi_j(\varrho_j Z_j Y_j \chi_j) - (\varrho_j^* Z_j^* - Y_j^* - \chi_j^* + G_j^*) \rightarrow \max . \tag{17}$$

Bármely $(3m + j)$ játékos – $(j = 1, \ldots m)$ a szervek száma – függvényébe bekerül a körzetek termékekkel és erőforrásokkal való ellátása, amely termékeket és erőforrásokat a fogyasztóhoz szállítanak. A szervek határozzák meg a (b_j) árakat, amelyek szerint minden körzet egységesen fizet a termékekért és erőforrásokért és egyben kötelezi magát arra, hogy azokat körzeten belül realizálja.

A nevezett szervek kifizetőfüggvénye:

$$F_j(b_j, U_j, v, \chi_j) = (b_j[\chi]^+ - U_j^*) \rightarrow \max . \tag{18}$$

A következő játékos az állami szerv, amely kidolgozza a nem-termelő fogyasztás tervét az egész ország viszonylatában, körzetenkénti bontásban úgy, hogy közben maximalizálja a népgazdasági célfüggvényt.

$$\sum_j \lambda_j U_j(V_j) . \tag{19}$$

A következő feltétel mellett

$$\sum_i (p, V_j) \leq \sum_i (P, X_i) - (P, G) . \tag{20}$$

Feltételezzük, hogy

$$G = \sum_j G_j .$$

A (15) egyenlet analógiájára ennek a szervnek a kifizetőfüggvénye a következőképpen alakul:

$$\phi_{\varrho m+1}(V_j, \chi_i, P) = \sum_j \lambda_j, V_j - M[\sum_j (P^*, V_j) - \sum_i (P^*, X_i^*) + $$
$$+ (P^*, G^*)]^+ . \tag{21}$$

Az n játékos – minisztérium – stratégiája, az önálló ágazatok elhelyezésének és fejlesztésének tervei (X_i) úgy állnak elő, hogy maximalizáljuk minden ágazat nyereségét olyan feltételek mellett, hogy körzetenként minden termeléstelepítés rentábilis legyen.

$$\{(P^*, X_i) - (\eta_i, [X_i]^+)\} \to \max,$$
$$\text{ahol} \quad \{X_i/x_i \in X), (P^*, X_{ij}^*) - (\eta_{ij}^{sx}[x_{ij}^s]^+) \geq 0\}. \tag{22}$$

A játék könnyebb levezethetősége végett ezeknek a szerveknek a kifizetőfüggvénye a következő formában írható át:

$$\phi_i(X_i P, \eta_j) = (P^*, X_i) - (\eta_i^*, [X_i]^+) - \sum_{i,j,s} K_{ij}^s\{(P^*, X_{ij}^s) -$$
$$- (\eta_{ij}^s[X_{ij}^s]^+)\}^+ \to \max, \tag{23}$$

ahol K_{ij}^s – a körzetenkénti nem rentábilis termelés bírsága (Volkoinszkij 1966).

A következő játékosok – a pénzügyi szervek – feladata az ágazatok körzetenkénti fizetési normáinak megállapítása a termelés elhelyezéséért (η_j), továbbá az, hogy biztosítsák az ágazatok keresletének és a körzetek kínálatának az egyensúlyát:

$$f_i(\eta_j[X_j]^+, [Y_j]^+) = (\eta_j[X_j^*]^+ - [Y_j^*]^+) \to \max. \tag{24}$$

A játékosok száma $4m + 2n + 1 + S$ ($S = 1, \dots h$). A játékosok stratégiája azonos a kereskedelmi szervek stratégiájával. A kereskedelmi szervek feladata megállapítani a termékek és erőforrások árait ($0 \leq p \leq P$), továbbá biztosítani értékesítésüket és nem-termelő fogyasztásukat. A kereskedelmi szervek kifizetőfüggvénye egyenlő:

$$f_s = (p, v, \chi) = (P, \sum_j v_j^* - \sum_i X_j^* + G^*) \to \max. \tag{25}$$

A következő játékos – az állami eladási (értékesítési) szervezet. Az állami szerv stratégiája az ár (v), amely szerint a szervek felvásárolják az értékesítő szervek segítségével minden körzet kínálatát, amely kínálat erőforrásait és termékeit kiviszik az állami piacra és ott garantálják értékesítésüket. Az utóbbi játékos kifizetőfüggvénye:

$$f_{4m+1+2n+h+1}(v, U, \chi) = (v, \sum_j U_j^k - \sum_j [\chi_j^*]^+ + G) \to \max. \tag{26}$$

A következő játékos az az állami szerv, amely a körzetek termékekkel és erőforrásokkal való ellátását befolyásolja az állami piacon keresztül. E játékos maximalizálni igyekszik a körzetközi csere eredményét az állami piacon kifizetőfüggvénye (U_j) stratégia mellett.

$$f_{4m+1+2n+h+2}(\xi, U, v, \chi) = \{\sum_j (\xi_j U_j) - (v^*, \sum_j [\chi_j^*]^- - G) \to \max. \quad (27)$$

Végül az utolsó játékosok a pénzügyi szervek, amelyek körzetenkénti differenciált árengedményeket állapítanak meg a nem-termelő fogyasztás különböző áraira (b_j) vonatkozóan. E szervek célja az egyes körzetek lakossága szükségleteinek kielégítése közötti egyensúly biztosítása, a körzet érdekeit alárendelve a népgazdasági érdeknek.

Ennek a szervnek a kifizetőfüggvénye:

$$f_j(b_j V_j Z_j) - (b_j V_j^*, Z_j) \to \max. \quad (28)$$

A fent említett feltételek mellett X, Y, U $(V\,(Z))$ vizsgált játékról megállapíthatjuk, hogy konvex és létezik egyensúlyi pontja, amely egybeesik a (7)–(13) feladat optimális pontjával.

Vizsgáljuk tovább a rendszert úgy, hogy feltételezzük, hogy az egyénekből és szervezetek összességéből áll. Az egyének ($i = 1, \dots m$) árutermelők, személyes fogyasztásra termelnek és nyereség céljából eredeti készleteket képeznek. Az individuumok lehetnek felvásárlói a személyes fogyasztási cikkeknek és aktív résztvevői lehetnek a különböző szervezeteknek. A szervezetek alatt helyezkednek el a kollektívák, amelyek 2 vagy annál több ember kölcsönös kapcsolatából állnak. Tegyük fel, hogy a szervezeteknek kétfajta tevékenysége lehet: termelési ($j = 1, \dots m$) és export jellegű ($f = 1, \dots g$). Az elsőbe tartoznak az anyagi javakat termelő szervezetek, a különböző társadalmi és szociális csoportok (politikai klubok), amelyek meghatározott szociális és kulturális szolgáltatásokat stb. nyújtanak (nem-gazdasági javak termelése).

Az exportőr szervezetek nem foglalkoznak közvetlenül a termékek termelésével. E szervezetek funkciója a termékek cseréjének a különböző körzetek közötti lebonyolítása. A körzetek ($L = A, \dots K$) mennyiségéből kitűnik, hogy mely termékekből visznek ki ($F = A, \dots U$) mennyiségeket és melyekből hoznak be ($J = A, \dots U$) mennyiségeket. A csere folyamata a körzetek gazdasági piacán és szervezett piacán bonyolódik le. A szervezett piacon bármelyik termelő szervezet részt vehet.

Az összes termék három csoportra osztható fel:

I – tradicionális gazdasági termékek ($h = 1, \dots, l$), közülük válik ki az l-edik komponens – a munka ($l - 1$) –, a pénz és ($l - 2$) a szállítási szolgáltatás;

II – a nem-gazdasági termékek ($h = l + 1, \dots, \Phi_{-1}$);

III – különleges termékek ($h = \Phi$), amelyek exportálását a társadalom jóváhagyta, továbbá az egyének és szervezetek más egyéb tevékenységei.

Ebből a csoportból minden termékek közötti különbség élesen elhatárolható, ami a gazdasági termékek esetében nem lehetséges. *A gazdasági piacon a nem-gazdasági termékek nem realizálódnak.* A Φ különleges termék abban különbözik a többi terméktől, hogy a szervezetek, ill. az egyének sem megtermelni, sem felhasználni nem tudják.

Az egyének és szervezetek igyekeznek maximalizálni saját tevékenységük eredményét. Eredményül maximális nyereséget vagy maximális jövedelmet kapnak. Az egyének jövedelmei a nyereségből és a jövedelmekből állnak össze, amelyekre az egyének mint az önálló termelés és csere résztvevői tesznek szert (ill. mint a szervezetek résztvevői). Ebben az esetben a kapott nyereség részaránya α_{ij}^{jh}, a jövedelem részaránya pedig β_{if}^{JL}. A rendszer működését a következő kiinduló premisszákkal feltételezzük:

1. az egyének és szervezetek nem tudnak hatást gyakorolni az árszínvonalra, de bevezetjük a csere bizonyos fiktív résztvevőjét, az árvektort, ami szabályozza a keresletet és kínálatot;

2. adott körzetben az áruk realizálásának és kivitelének terve az egyik körzetben nem függ más körzet áruinak realizálásától;

3. az individuumok által megvalósított 5 függvény önállóan is kezelhető;

4. a nem-gazdasági termékeket a szervezetek nem vihetik át az egyik körzetből a másikba.

E termék cseréje csak az egyének között megy végbe úgy, mint F-edik körzet szervezeteinek tagjai között. Ezek és más premisszák alkotják a körzetek közötti verseny egyensúly-modelljét. A premisszák megfogalmazása hipotéziseken alapszik, ebből következően lehet a kiinduló premissza helytelen is.

Az elemzés ilyen modellek segítségével azonban mindenképpen tárgyilagos állásfoglalásra ad lehetőséget.

Az egyének és szervezetek tevékenységének minden lehetséges köre vektorok segítségével írható le. A tevékenységek halmaza a kitevőben szerepel, tehát a jelölés R^{Φ}.

Maga a verseny egyensúlyi modellje a következő elemekből épül fel:

$\{\bar{y}_j^L\}$ – a termelés lehetséges terveinek halmaza, amelynek elemei $\bar{y}_j^L \in \{\bar{y}_j^L\}$ vektorok az R^{Φ}-ből, a h-adik komponens $(\bar{y}_{hj}^L)$ jelenti a h-adik termék kibocsátási költségeit, ahol $(h = 1, \ldots, l, j = 1, \ldots, w, L = A, \ldots, U)$;

$\{S_f^{F-L}\}$ – F körzet f szervezetének exportterv-halmaza az L-edik körzetben, a következő feltételek mellett: $S_f^{F-L} = \{S_f^{F-L} \in \Omega / S_{hf}^{F-1} = 0$ minden $h = l + 1, \ldots \Phi$; $S_{l-1,f}^{F-L}, \leq M'\}$ minden kombináció számára f, F és L, $L \neq F$ stb., f szervezetek számára a nem-gazdasági termékek kivitelének terve a körzetből 0, a pénzkivitel egyik körzetből a másik körzetbe pedig korlátozott (M' – nagy pozitív szám);

$\{\overline{\overline{W}}_i^J\}$ – j-edik körzet i-edik egyéne termelési tervének halmaza. A tervet az egyén saját szükségleteinek kielégítése céljából valósítja meg ($i = 1, \ldots, m$ $J = A, \ldots, U$); $\overline{\overline{w}}_i^J \in \overline{\overline{W}}_i^J$, $\overline{\overline{w}}_{hi}^J = 0$, ahol $h = l - 1, l + 1, \ldots \Phi$;

$\{\overline{W}_i^J\}$ – az egyén termelési terveinek halmaza, amelyeket nyereségszerzés céljából valósít meg ($i = 1, \ldots, m$; $J = A, \ldots, U$);

$\{\bar{G}_i^J\}$ – a termékek eredeti készletének halmaza, amelyekkel az egyének rendelkeznek;

g_{hi}^J az összes termék eredeti készletei, $h = 1, \ldots, \Phi$, emellett $(l - I) - W$ komponensei (pl. a pénz) rendelkeznek $\bar{g}_{l-1,i}^J > \xi_{l-1,i}^j$ feltételekkel a nem gazdasági termékek $\bar{g}_{hi}^J \geq 0$ esetén, ahol $(h = 1, 2, \ldots, l - 2, l)$;

ξ_i^j – az egyének létfenntartási eszközeinek a vektora;

$\xi_{l-1,i}^j$ időintervallum esetén a mennyiség negatív lesz.

A termékek eredeti készleteit az egyének felhasználhatják a személyes szükségletüket kielégítő vagy a piacon cserére kerülő más termékek termelésére. Az eredeti készleteknek az a része, amelyet az egyének nem visznek piacra (visszatartanak), ($\bar{\bar{g}}^J_{hi}$) nem lehet több az eredeti készletek teljes mennyiségénél.

$$0 \leq \bar{\bar{g}}^J_{hi} \leq \bar{g}^J_{hi} \text{ minden } h = 1, \ldots, l-2, l.$$

($h = l - 1, l + 1, \ldots, \Phi$) (a pénz és a nem-gazdasági termékek) létezése esetén a komponensek egyenlők ($\bar{\bar{g}}^J_{hi} = 0$).

A gazdasági termékeknek az a része, amely az egyének eredeti készletéből a gazdasági piacra kerül, a következő formulával írható le:

$$g^J_{hi} = \begin{cases} \bar{g}^J_{hi} - \bar{\bar{g}}^J_{hi}, \text{ ahol } h = 1, \ldots, l; \\ 0 \text{ minden } \quad h = l + 1, \ldots, \Phi - 1; \\ \sum\limits_{h=1}^{l} \overset{g}{K}{}^J_{hi}(\bar{g}^J_{hi} - \bar{\bar{g}}^J_{hi}), \text{ ahol } h = \phi; \end{cases}$$

B^J_i – az egyének saját fogyasztásának felvásárlási vektora;
$B^J_i = \{b^J_i \in R / b^J_{hi} = 0$ minden $h = 1, \ldots, l - 2, b^J_{l-1,i} \geq \xi^J_{l+1,i} + 1, i$;
$b^J_{hj} = 0$ minden $h = 1, \ldots, \Phi - 1$, $\xi^J_{hi} = 0$ minden $h = l - 1$;
$\bar{R}^{JL}_{ij}$ – vektor a J-edik körzet i-edik egyénét, mint a j-edik szervezet résztvevőjét jellemzi az L-edik körzetben.

$L - T$ vektor komponensei a körzeten belüli szervezetek tervéből $\bar{H}^{JL}_{hij}$ állnak össze, amelyek az egyének tevékenységének szociális és társadalmi aspektusában tükröződnek vissza. Például, ha az i-edik egyén a j-edik körzetben résztvevője a j-edik hivatali szervezetnek, akkor egyben saját terveiben is megjelenik mint alkalmazott és $l - t$ komponensei negatívak lesznek; $H^{JJ}_{ij} < 0$ pótlásul (cserébe) az egyén némi pénzösszeget kaphat.

Ha a J-edik körzet egyéneiből állnak össze az L-edik körzet j-edik társadalmi csoportjainak résztvevői, akkor

$$\bar{H}^{JL}_{lij} < 0 \text{ és } \bar{H}^{JL}_{l-1,i,j} < 0.$$

A tervek lehetséges vektorainak megfelel egy állandó mennyiség, amelyet a társadalom, az egyének és szervezetek tevékenységére jóváhagyott.

$$\overset{v}{K}{}^L_{hj}; \overset{W}{K}_{hi}; \overset{H}{K}{}^{JL}_{hij}; \overset{H}{K}{}^{gJ}_{hi} \text{ minden } h = 1, \ldots, \Phi - 1,$$

$(l - 1) - \omega$ komponensei számára.

$\overset{g}{K}{}^J_{L-1,i} = \overset{t}{K}{}^J_{l-1,i} = \overset{H}{K}{}^{JH}_{l-1,ij} = 0$ minden i-re és J-re, J-re és h-ra. Ez a mennyiség Φ egységnyi termékmennyiséget jellemez, amely h árutermelőre jut, és lehet pozitív, negatív vagy 0-val egyenlő.

Φ termék összes mennyisége, amelyből a j-edik termelő szervezet részesedik, meghatározó mint

$$\sum_{h=1}^{\Phi-1} \overset{v}{K}{}^L_{hj} \cdot \bar{Y}^L_{hj}.$$

Minden egyén, aki anyagi javakat termel, Φ terméket kap a következő mennyiségben:

$$W^J_{\Phi i} = \sum_{h=1}^{\Phi-1} \overset{w}{K^J_{hi}} \cdot \overline{W}^J_{hi},$$

és mint a j-edik szervezet résztvevője

$$\sum_{h=1}^{\Phi-1} K^h_{hij} \cdot \overline{H}^{jh}_{hij}$$

mennyiséget kap.

B^J_i – vektornak megfelelő mennyiség

$$b^J_{\Phi i} = \sum_{h=1}^{\Phi-1} \overset{b}{K^J_{hi}} \cdot b^J_{hi},$$

G^J_i – vektornak megfelelő mennyiség

$$g^J_{\Phi i} = \sum_{h=1}^{\Phi-1} \overset{g}{K^J_{hi}} \cdot (\bar{g}^J_{hi} - \bar{\bar{g}}^J_{hi}).$$

A rendszer még tökéletesebben jellemzéséhez bevezetjük az alábbi új halmazokat, amelyek magukba foglalják a Φ komponenseit is:

$$\{y^L_j\};\ \{W^J_i\};\ \{R^{JL}_{ij}\}.$$

y^L_j-t másképp leírva:

$$y^L_j = \{y^L_j \in R^{\Phi}\ (\text{bizonyos } y^L_j \in \overline{Y}^L_j) y^L_{hj} = y^h_{hj}\ \ h = 1, \ldots, \Phi - 1$$
$$\text{és } y^L_{\Phi j} = \overset{y}{K^L_j} \cdot \bar{y}^L_j\}.$$

Tegyük fel, hogy $y^L = \sum_{j=1}^{m} y^L_j$, akkor az y^L elemei az összes lehetséges input-output tervet jelentik, amelyek magukba foglalják az L-edik körzet szervezetének komponensét; $y = \sum_{L=A}^{n} y^L$ – minden körzet és szervezet terveinek az összessége. Analóg számításokat végezhetünk $\{W^J_i\}$-re és $\{R^{JL}_{ij}\}$-re is. Az exportálandó gazdasági termékektől elválasztják a szállítási szolgáltatásokat. Az exportterv által meghatározott szállítási szolgáltatások általános volumene és a különleges szállítások (pl. az elektromos energia és tüzelőanyagok stb. átadásához) a következő egyenlettel fejezhetők ki:

$$S^{F-L}_{l-2,f} = S^{F-L}_{l-2,f} + \alpha^{F-L}(S^{F-L}_f \cdot W),$$

ahol α^{F-L} F és L körzet közötti távolság,

$$\alpha^{F-L} = \alpha^{L-F} > 0.$$

W – egységnyi termék súlya ($W_k > 0, h = 1, \ldots, \Phi$), $h \neq l - 1, \ldots, W_{l-1} = 0$).
h termék exporttervének kiválasztására az F és L körzetben, h termék árában és szállítási költségeiben levő különbségek gyakorolnak befolyást.

Bevezetünk egy τ^{F-L}-en vektort, amelyet a következő egyenlőség fejez ki:

$$\tau^{F-L} = p^L - p^F - (P^L_{L-2}\alpha^{F-L}) \cdot W,$$

ahol p^L és p^F vektorok F és L körzet gazdasági piacának árai,
P^F_{l-2} – F-ik körzetbe az áruk egységnyi szállítási szolgáltatásának az értéke.

A körzetek közötti verseny *egyensúlyi rendszere* a következő öt feltétellel jellemezhető:

I. feltétel: j-edik szervezet kiválasztja y^h_j ráfordítások–kibocsátások tervét oly módon, hogy $(p^{L*} + p^{L*}_i)y^L_i$ elérje a maximumot minden $j = 1, \ldots m, L = A, \ldots U$-ra; p^{L*} és p^{L*}_j – a gazdasági és a szervezett piac egyensúlyi árainak kifejezése:

$$p^{L*} = 0, \text{ ahol } L > l; \; p^{L*}_j = 0, \text{ ahol } h = 1, \ldots, l.$$

II. feltétel: az F-edik körzet f-edik szervezete kiválasztja az exporttervet S^{F-L*}_f, amely maximalizálja a $\tau^{F-L*} \cdot S^{F-L*}_f$ az f, F és L, $L \neq F$-nek bármely kombinációja segítségével. Az f szervezet összesített exporttervére a körzetközi egyensúly leírható a következőképpen:

$$\overline{L \neq F}\, S^{F-L*}_f \text{ maximálja } \overline{L \neq F}\, \tau^{F-L*} \cdot \overline{L \neq F}\, S^{F-L*}_f,$$

f és F minden kombinációja esetére

$$(\overline{L \neq F}\, S^{F-L}_f \text{ és } \overline{L \neq F}\, \tau^{F-L*} \text{ Descartes-féle sorozat}).$$

III. feltétel (az egyének tevékenységének leírása): mind az öt szféra tevékenységéből úgy választunk egy vektortervet, hogy az egyén hasznossági függvénye $U^J_i(X^J_i)$ elérje a maximumot. X^J_i-en meghatározható, mint a vektorok összege

$$(\bar{\bar{g}}^J_i, \bar{\bar{W}}^J_i, W^J_i\, b^{J, \overline{J, L}}_i \cdot H^{ij}_{if}).$$

Egyúttal be kell tartani a munkából adódó korlátokat

$$\bar{\bar{g}}^J_{li} W^J_{li} - \sum_{JL} H^{LJ}_{lij} \leq g^j_{li},$$

a pénzügyi költségek korlátait

$$\bar{\bar{g}}^J_i + \bar{\bar{W}}^J_i + b^j_i + P_{1}, \ldots, {}_l(W^J_i + \bar{g}^J_i + \sum_{JL} H^{JL}_{ij}) + g^J_{\Phi i} \cdot \delta^{\Phi} \geq \xi^J_{l-1,i} \cdot \delta^{l-1}$$

és a létfenntartási eszközök minimális színvonalának a korlátait.

$$\bar{\bar{g}}^J_i + \bar{\bar{W}}^J_i + b^J_i P_{1 \ldots l}(W^J_i + \bar{g}^J_i + \sum_{JL} H^{JL}_{ij}) + g^J_{\Phi i} \cdot \delta^{\Phi} \geq \xi^j_i,$$

ahol $\bar{g}^J_{li}$ – egyének eredeti munkakészlete,

W^J_{li} – az a munkamennyiség, amelyet a termelés során használnak fel nyereség elérése céljából,

$\sum_{jh} H^{JH}_{ij}$ – az individuumok aktív részvételével kifejtett munka a J-edik és h-adik körzet j-edik szervezetének a tevékenységében.

$\delta^{\Phi} \in R^{\Phi}$ minden eleme vektor δ^{Φ}, amely egyenlő 0, a Φ kivételével, amely egyenlő 1; $P_{1,\dots,l}$ a következőképp határozható meg: $P_K(V)$ minden $K \leq l$ és $V(V_1, \dots V_l)$ vektora felírható, mint

$$P_{K_1} \dots {}_{K_l} = P_{K_1} = \dots P_{K_l}.$$

Feltételezhető, hogy az egyéneknek – mint az L-edik körzet f-edik szervezete résztvevőinek – a jövedelme és kiadása egyenlő:

$$(P^L + P^L_j) \cdot \bar{H}^{jL}_{if} = 0.$$

Az egyének pénzjövedelmei összetevődnek az eredeti árukészletek realizált jövedelméből – amely magában foglalja a munkát; a nyereségből – amelyet az egyének a termelési tevékenységük után kapnak; az egyének szervezeten belül realizált tervének jövedelméből, amely magában foglalja a termelési szervezetek nyereségének és az exportszervezetek jövedelmének egy részét.

$$P^J b^J_i = p^J \cdot g^j_i + p^J W^J_i + p^J \cdot \sum_{jL} H^{JL}_{il} + \sum_{jL} \alpha^{JL}_{ij} \max[0, p^L(y^L_J - \bar{H}^L_J)] +$$
$$+ \sum_{fF} \beta^{JF}_{if} \max[0, \overline{F \neq L}\,\tau\,\overline{F \neq L}\;{}^{F\neq L}S^{F-L}_f].$$
$$\alpha^{JL}_{ij} \geq 0 \text{ minden } i, j, h \sum_{J,i} \alpha^{JL}_{ij} = 1 \text{ és minden } j, L\text{-re},$$
$$\beta^{JL}_{if} \geq 0 \text{ minden } i, j, f, F \sum_{J,i} \beta^{JL}_{ij} = 1 \text{ minden } f, F\text{-re}.$$

$(y^L_j - \bar{H}^L_j)$ különbség mutatja az L-edik körzet j-edik szervezete által realizált áruknak azt a mennyiségét, amelyet más körzet gazdasági piacán realizálnak.

Az egyensúly következő két feltétele a csere szférájára vonatkozik a gazdaság és belső piacon. Bevezetjük Z^J vektort, amely a kereslet és a kínálat között viszonyt mutatja Ha

$$b^J = \sum_i b^J_i;\; g^j = \sum_i g^J_i;\; W^J = \sum_i W^j_i;$$
$$\sum_{j,h} H^{jh}_j = \sum_{i,jh} H^{JL}_{ij};\; \bar{H}^{JL}_{ij} - \bar{y}^j = \sum (\bar{H}^J_j - y^J_j);$$

$S^J = \sum_{f,L} S^{J-L}_f$(kivitel p-ből J-be); $\sigma^J = \sum_{f,h\,L\neq J} S^{L-J}_f$ behozatal a b-edik körzetbe, akkor

$$z^J = P_{i-1}, \dots, {}_{\Phi}[b^j - g^j - W^j - \sum_{J,L} \bar{H}^{JL}_j - y^J + S^J - \sigma^J + \bar{H}^J].$$

P^L árvektor aránya L-edik gazdasági körzet piacán

$P^L = \{P^L \in \Omega / P^L_{l-1} = 1$ és $P^L = 0$ minden $h = l + 1, \dots \Phi\} L = A, \dots U.$

Ebből következik, hogy árak a gazdasági piacokon, mindig pozitívak, de az árak a gazdasági piacon nem realizálódnak. Továbbá létezik egy olyan M szám, hogy

$$\frac{P_h^L}{P_{l-1}^L} \geq M,$$

amely mellett $Z_h^L < 0$ minden L-re és egy olyan, hogy

$$\frac{P_h^L}{P_{L-1}} \geq M.$$

$Z_{hj}^L < 0$ mellett minden szervezetre vonatkozóan $j, L(h = 1, \ldots, \Phi)$ körzet h-adik termékeinek árarányai végtelenek, de csak azon feltétel mellett, ha a kínálat felülmúlja a keresletet ($Z_h^L < 0$).

IV. feltétel: A szervezetek és egyének arra törekszenek, hogy maximalizálják $p^J \cdot Z^J$ fizetőfüggvényt. Ha adott $P_h^J(h \neq l-1, l+1 \ldots \Phi)$ mellett $Z_h^J > 0$, akkor P_h^J nő addig, míg Z_h^J nem csökken 0-ig. Ha adott $p_h^j > 0$ $(h \neq l-1, l+1, \ldots \Phi)$ és $Z_h^J < 0$, akkor h-adik termék ára a j-edik körzetben csökken. A folyamat elhúzódik addig, amíg Z_h^J nő 0-ig, vagy az árak esnek 0-ig. Ebből következik, hogy a gazdasági piacon létrejön az egyensúly $Z^{J*} \leq 0$ és $p^{J*} \cdot Z^{J*} = 0$ feltétel mellett minden J-re akkor, ha a kereslet egyenlő a kínálattal, vagy ha a kínálat felülmúlja a keresletet, a termékek ára egyenlő 0-val. Analóg módon leírhatók a körzetek közötti csere egyensúlyi feltételei is:

$$\tau_h^{F-L} \leq 0; \; \tau_h^{F-L*} \cdot S_h^{F-L*} = 0$$

minden $h = 1 \ldots l-2, l$ és $F \to L \quad L \neq F$-fel.

V. feltétel: Az árvektorok arányában feltételezzük, hogy

$$P_j^L = \{p_j^L \in \Omega / P_{hj}^L = 0 \text{ minden } h = 1, \ldots, l\};$$

minden j, L-re vizsgáljuk a nem-gazdasági termék keresletét és kínálatát.

A fentebb leírtakból következik, hogy az egyensúlyi feltétel leírható úgy is, mint:

$$Z_j^{L*} \leq 0 \text{ és } p_j^{L*} \cdot Z^{L*} = 0 \text{ minden } j, L\text{-re}.$$

Bármely körzetek közötti verseny esetén a tétel formalizált kikötése: ha kielégítik a fentebb említett feltételeket, akkor létezik a verseny körzetek közötti egyensúlya (Isard 1969).

X. *A gráfelmélet gazdaságföldrajzi alkalmazásáról*

(Az Alföld közúthálózatának vizsgálata)

1. *Néhány gráfelméleti alapfogalom*

A *véges, irányítatlan gráf* a véges elemszámú X halmazból és az ugyancsak véges elemszámú U halmazból áll. Az X halmaz elemeit jelöljük $x_1, x_2, \ldots, x_n$ jelekkel és nevezzük a gráf csúcsainak. Az U halmaz elemeit jelöljük az (x_i, x_j) vagy (x_j, x_i) számpárokkal és nevezzük a gráf éleinek. A gráf tehát csúcsokból és élekből áll. A *31. ábrán* bemutatott egyszerű gráf csúcsai az x_1, x_2, x_3, x_4 pontok, élei pedig az $(x_1, x_2), (x_1, x_4), (x_2, x_3), (x_2, x_4), (x_3, x_4)$ számpárokkal jelölt vonalak.

Például egy ország vagy terület települései és a köztük levő kapcsolatok is leképezhetők egy, a *31. ábrán* látható, csak lényegesen bonyolultabb gráfra. Ez esetben a települések lesznek az $x_1, x_2, \ldots x_n$ jelekkel megadott csúcsok, a közöttük létező közvetlen kapcsolatokat (vasút, telefon, közút stb.) pedig az $(x_1, x_2), (x_1, x_4)$ stb. számpárok fejezik ki.

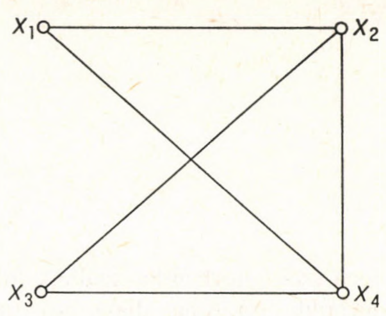
Egy gráf megadható a *31. ábrá*hoz hasonlóan grafikus formában, vagy az X és U halmazok elemeinek felsorolásával, valamint mátrix formában is. Azt a gráfot, amelyben minden csúcspár között van él, *teljes gráf*nak nevezzük.

A gráf éleinek egy sorozatát vonalnak nevezzük, a vonal hossza az élek számával adható meg. Gyakorlati vizsgálatok esetén az élekhez valamilyen számérték (pl. távolság, idő, költség, szintkülönbség stb.) rendelhető; ekkor egy vonal hosszát ezen számértékek összegével fejezhetjük ki.

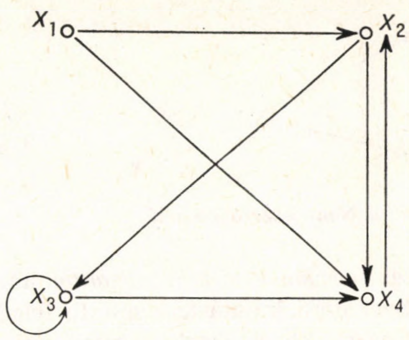
A zárt vonalat *körnek* (ciklusnak) nevezzük, vagyis a kör olyan vonal, hogy ha a vonalon elhelyezkedő bármely csúcsból elindulunk a kör mentén, ugyanabba a csúcsba juthatunk vissza.

Véges, irányított gráf az irányítatlan gráftól abban különbözik, hogy a csúcsok közti kapcsolatok (élek) rendezettek *(32. ábra)*. Sorrendben az első csúcsot az él kezdőpontjának, a másodikat pedig az él végpontjának nevezzük. Az irányított gráfokban két csúcs között lehet kétirányú kapcsolat is, a *32. ábrán* pl. az x_2 és x_4 csúcsok között. Az ilyen éleket *párhuzamos élek*nek nevezzük. (Az irányítatlan gráf lényegében csak párhuzamos éleket tartalmazó irányított gráf.) Az olyan éleket, amelyeknek kezdő- és végpontja is ugyanaz a csúcs (a *32. ábrán* az x_3), *hurokél*nek nevezzük. A sem párhuzamos, sem pedig hurokélt nem tartalmazó gráfok az *antiszimmetrikus* gráfok. Az irányított gráfok is megadhatók három különböző módon: grafikusan, az élek és csúcsok fölsorolásával, valamint mátrix formában. A *32. ábrán* bemutatott gráf mátrix-reprezentációja a következő *(39. táblázat)*.

A *gráfok mátrix-reprezentációja* igen nagy jelentőségű. Lehetővé teszi, hogy a tapasztalat alapján hálózatot képező rendszerek (pl. településhálózat) grafikus képéből kiindulva áttérhessünk matematikailag jól kezelhető szimbólumokra,



31. ábra. Irányítatlan gráf



32. ábra. Irányított gráf

számításokat végezzünk, meghatározzuk ezen rendszerek olyan tulajdonságait, amelyek a szemlélet alapján nem vagy a tévedés nagy kockázatával ítélhetők meg.

A 32. *ábrán* látható gráf mátrixából igen sok információ kiolvasható. A mátrix második sora pl. megmutatja, hogy az x_2 csúcsból az x_3 és x_4 csúcsba indulnak élek. A második oszlop pedig azt, hogy az x_2 csúcsba csak az x_1 és x_4 csúcsokból induló élek futnak be. A főátlóban levő egyesek reprezentálják a gráf hurokéleit. A főátlóra szimmetrikusan elhelyezkedő 1-es értékű elemek a párhuzamos éleket reprezentálják. Irányított gráfokban a vonal és kör korábbi fogalmának *az út és körút* fogalma felel meg.

Az út és körút megadása irányított gráfban az irányítatlan gráfokban levő vonalhoz és körhöz hasonlóan történik. Az út szomszédos irányított élek egymásutánja, a körút pedig olyan út, amelynek kezdő- és végpontja egybeesik. A körút és út hossza ebben az esetben is az őket alkotó élek számával (vagy az élekhez rendelt valamilyen konkrét jelentéssel bíró értékkel) adható meg.

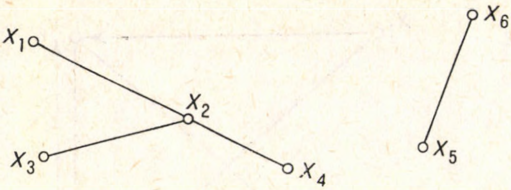
Az olyan – irányított vagy irányítatlan – gráfokat, amelyekben bármely két tetszőleges csúcs között létezik út vagy vonal, összefüggőeknek nevezzük. A *33. ábra* nem összefüggő gráfot mutat.

39. TÁBLÁZAT

Irányított gráf mátrix-reprezentációja

	x_1	x_2	x_3	x_4
x_1	0	1	0	1
x_2	0	0	1	1
x_3	0	0	1	1
x_4	0	1	0	0

A mátrixban 1-gyel jelölt értékek a kapcsolatok meglétét, a 0-val jelölt értékek ezek hiányát jelölik. A bal oldalon a kezdőpontok, fölül pedig a végpontok helyezkednek el.



33. ábra. Nem összefüggő gráf

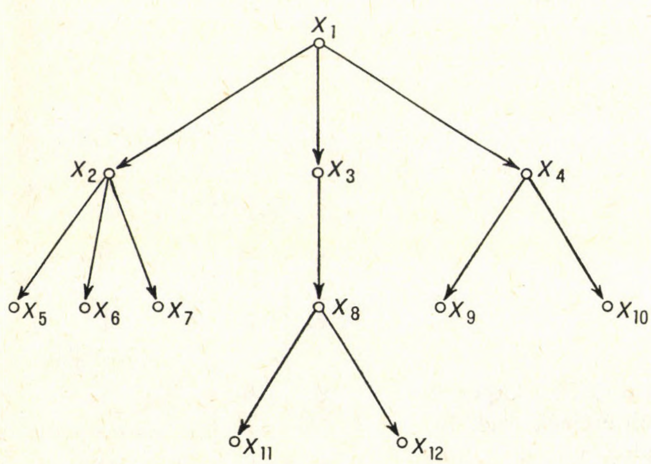
Egy speciális gráf a *hálódiagram*, amelyet igen széles körben használnak folyamatszervezési, kutatástervezési stb. feladatok megoldására. A hálódiagramok tulajdonságai a következőek: csúcsaik száma véges, éleik irányítottak, sem párhuzamos, sem hurokélt nem tartalmaznak, azaz antiszimmetrikusak, összefüggőek és nincs bennük körút.

A gráfok igen érdekes tulajdonságokkal rendelkező típusát alkotják a *fák*; nevüket sajátos alakjukról kapták *(34. ábra)*. A fák szintén lehetnek *irányítottak vagy irányítatlanok*. Irányított fák esetén az olyan csúcsot, amelybe nem fut be él, gyökérnek, az olyant pedig, amelyből nem indul él, levélnek szokás nevezni. A fák egy lehetséges másik megadási módja az, hogy a gyökérből kiindulva a különböző hierarchia-szinteknek megfelelően az $x(y_1, y_2, \ldots, y_m)$ szimbólum szerint lineárisan fölírjuk, ahol az y_i-k valamely x csúccsal kapcsolatban levő, alacsonyabb hierarchia-szinten álló csúcsok. A *34. ábrán* megadott fa lineáris alakja a következő:

$$x_1\big(x_2(x_5x_6x_7)x_3(x_8(x_{11}x_{12}))x_4(x_9x_{10})\big).$$

A földrajzban széles körben alkalmazott osztályozási, csoportosítási feladatok matematikai módszerei igen sok esetben a fák elméletére vezethetők vissza, ezért is nagy a gráfelmélet ezen ágának jelentősége a konkrét földrajzi vizsgálatokban.

A gráfelmélet valamennyi alkalmazási lehetőségét bemutatni jelen fejezet keretei között nincs lehetőség. A következőkben az Alföld közútjainak, mint véges,



34. ábra. Irányított fa

irányítatlan gráfként megadható hálózatnak a vizsgálatán keresztül próbáljuk meg érzékeltetni a gráfelmélet egyes lehetőségeit.

2. *Az alföldi közúthálózat fejlettségének gráfelméleti vizsgálata*

Az utóbbi évtizedekben a gazdaságföldrajzosok fokozódó figyelmet fordítottak a termelő és a nem termelő infrastruktúra tanulmányozására. Ezek a vizsgálatok igen fontosak, mivel az infrastruktúra a népgazdaság szerves része. A legtöbb szerző az infrastruktúra részének tekinti a közlekedést, az elektromos vezetékek hálózatait, a vízellátás és vízelvezetés műszaki berendezéseit, a távfűtési rendszereket, telefon, telex és távíró kapcsolatokat stb.

Már ebből a rövid felsorolásból is érzékelhető, hogy a termelő infrastruktúra részei azok a kommunikációs rendszerek, amelyeknek fő funkciója az anyag, energia és információ területileg kiterjedt továbbítása, átadása.

Az egyik legfontosabb kommunikációs alrendszer a szállítás, amelynek fő funkciója a teher- és személyforgalom feltételeinek megteremtése különböző körzetek és települések között. A szállítás egyes formáinak – vasúti, közúti, vízi, légi, vezetékes – jelentősége az egyes gazdasági körzetekben eltérő, és igen nagy mértékben függ a konkrét feltételektől. Így, az agrár–ipari profilú térségben, mint amilyen az Alföld is, a körzeten belül legnagyobb szerepe a közúti szállításoknak van. Ezt alátámasztja:

1. a mezőgazdasági termelés szórtsága;
2. a viszonylag sűrűn elhelyezkedő feldolgozó üzemek nagy száma;
3. az egyes térségekben meglevő sűrű településhálózat.

A termelés szórtsága és az üzemek sűrű elhelyezkedése a rövidebb távú közúti szállítások, míg a településhálózati struktúra a személyszállítások volumenét növeli. Az elmaradott és gyengén fejlett területek gazdasági fejlődésében nagy jelentőséget tulajdonítva a közúti közlekedésnek, a következőkben a gráfelmélet alkalmazásával teszünk kísérletet az alföldi megyék közúthálózata területi különbségeinek föltárására, valamint a felső- és középfokú központok közlekedésföldrajzi helyzetének meghatározására.

A közúthálózat jellemzésére alkalmazhatók a gráfelmélet különböző paraméterei (indexei), amelyek leírását, interpretálását tartalmazzák pl. a következő művek: D. Avondo-Bodino (1966), O. Ore (1972), F. Harrari (1973), Ju. V. Medvedkov (1968), P. Hagget (1968, 1975), L. Ja. Nutenko (1971), M. E. Eliot Hurst (1974), Illés I. (1975) stb.

Az Alföld közúthálózatának vizsgálatára az alábbi indexeket alkalmaztuk:

$$\alpha = \frac{e - v + g}{2v - 5},$$

$$\beta = \frac{e}{v},$$

$$\psi=\frac{e}{3(v-2)},$$

$$\pi=\frac{l}{\mathrm{d}},$$

ahol e – az élek száma, v – a csúcsok száma,
g – a gráf összefüggő komponenseinek száma,
l – a hálózat teljes hossza (km),
d – a gráf topológiai átmérője (km).

A β index a gráf összekötöttségét jellemzi, értéke 0 és 3 között változik. A β értéke egynél kisebb nem összefüggő gráfok és fák esetében, egyenlő eggyel gyengén fejlett hálózat esetében (csak egy ciklus létezik a gráfban), és minél közelebb van a 3-as értékhez, annál fejlettebb a hálózat.

Az α index kifejezi – ciklomatikus szám $(e - v + g)$ – a meglevő ciklusok száma és a maximálisan lehetséges ciklusok száma $(2v - 5)$ közti arányt. Az α értéke 0 és 1 között változik, gyakran százalékban adják meg (0%–100%) és a kapcsolatok kiépítettségét fejezi ki.

A ψ index a hálózatban meglevő élek, és a maximálisan lehetséges $(3v - 2)$ élek számának arányát fejezi ki. A ψ értéke 0 és egy között változik és kifejezi a gráf teljességét.

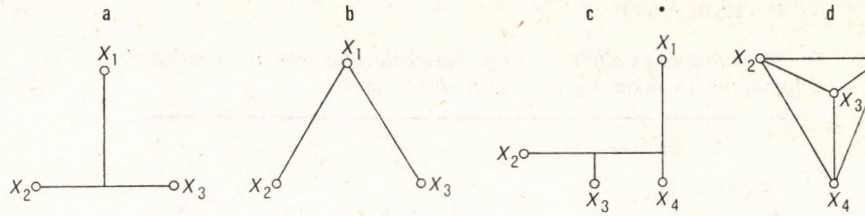
Nemcsak a β, de az α és ψ indexeket is szokás a gráf összekötöttségét kifejező mutatók csoportjához sorolni, mivel ezek magas értéke – más-más szempont szerint – a hálózat bonyolultságát (fejlettségét) fejezik ki.

A π index a gráf alakját kifejező mutató. Ezen index kiszámításakor először meg kell keresni a gráf átmérőjét, azaz a két legtávolabbi csúcs közti legkevesebb élből álló utat, majd pedig meg kell határozni ezen átmérő hosszát km-ben. Ha a gráf egyetlen útból áll, a π index értéke eggyel egyenlő. A π alacsony értéke hosszan elnyúló hálózatokra jellemző, magas értéke pedig kifejezi, hogy a hálózat egyenletesen oszlik el a vizsgált terület egészén.

A fenti mutatókat az Alföld egészére, és területükkel teljesen az Alföldön elhelyezkedő hat megye közúthálózatára külön-külön is meghatároztuk.

A topológiai indexeket két változatban határoztuk meg. Az első változatban az útminőséget figyelmen kívül hagytuk. Így ezen számítások eredményei elsősorban a prognosztizálás szempontjából jelentősek, mivel ezek a meglevő hálózat lehetőségeit írják le, arra az esetre, ha az úthálózat az egész térségben közel azonos minőségűre javulna. A második változatban figyelembe vettük a közutak eltérő minőségét, így az itt kapott eredmények jobban tükrözik a közúthálózat fejlettségének tényleges állapotát és a települések közlekedésföldrajzi helyzetét.

Mivel az Alföldön az úthálózat kiépítettsége általában fejlettnek mondható, így igen sok helyen a településektől távoli pontokban alakultak ki útkereszteződések, ez a jelenség pedig a gráfelméleti reprezentálást nehezíti. Két megoldás képzelhető el. Az első szerint minden kereszteződésben fiktív csúcsot (települést) értelmezhetnénk, a második szerint az úthálózatot mint a meglevő települések közti kapcsolatok kialakulásának lehetőségét értelmezzük, a topológiai indexek kiszámítha-



35. ábra. A vizsgálat során felhasznált néhány fogalom szemléltetése

tósága érdekében transzformációnak vetjük alá *(35. ábra)*. E transzformáció során azonban egyes esetekben *(35a, 35b ábra)* nem, más esetekben azonban fiktív élek jelentek meg *(35c, 35d ábra)*. A fiktív élek megjelenése következtében a gráfban levő ciklusok száma is megnőhet, ami a topológiai indexek értékét javítja, a tényleges helyzetet kedvezőbbnek tünteti föl. Jelen esetben a második megoldás szerint jártunk el. Mivel a torzító hatás minden területegységnél azonosan érvényesül, a kapott eredmények összehasonlíthatók.

Azért is célszerű volt továbbá ezt az utat követni, mert így a települések közlekedésföldrajzi helyzete a létrejöhető közvetlen kapcsolatok számbavétele révén reálisan tükröződik. Az ilyen jellegű vizsgálatokban nagyobb hangsúlyt kap a települések közlekedésföldrajzi helyzete, a közúthálózat településközi kapcsolatokat lehetővé tevő szerepe, ezek pedig mind a teher-, mind a személyforgalom szempontjából igen fontosak.

Az útkategóriák figyelembevétele nélkül számított α, β és ψ mutatók *(40. táblázat)* értékei a dél-alföldi gazdasági körzet három megyéje esetében magasak. Az Észak-Alföldön Szabolcs-Szatmár megye rendelkezik a legalacsonyabb értékkel, de általában is az Alföld két mezokörzete között jelentős eltérés mutatkozik.

A vizsgált hat megye sorrendje valamennyi index alapján megegyezik, megerősítve, hogy ezek az indexek az összekötöttséget kifejező mutatócsoportba vonhatók össze.

A gráf alakját kifejező π index alapján megállapítható, hogy legtökéletesebb formája az Alföld egészének van. Az Alföld topológiai átmérője DNy – ÉK-i

40. TÁBLÁZAT

Az Alföld és az alföldi megyék közúthálózatát jellemző topológiai mutatók az útkategóriák figyelembevétele nélkül

Területi egységek	β	α	ψ	π	λ
Békés megye	1,77	0,40	0,61	8,8	11
Bács-Kiskun megye	1,74	0,38	0,59	12,2	9
Csongrád megye	1,70	0,38	0,59	13,2	12
Szolnok megye	1,51	0,27	0,52	10,7	10
Hajdú-Bihar megye	1,50	0,26	0,51	11,1	9
Szabolcs-Szatmár megye	1,45	0,23	0,49	11,7	46
Alföld	1,58	0,29	0,53	21,3	63

41. TÁBLÁZAT

Az Alföld és az alföldi megyék közúthálózatát jellemző topológiai mutatók az útkategóriák figyelembevételével

Területi egységek	β	α	ψ
Bács-Kiskun megye	1,75	0,39	0,59
Szolnok megye	1,74	0,39	0,59
Csongrád megye	1,64	0,34	0,56
Békés megye	1,49	0,26	0,51
Hajdú-Bihar megye	1,46	0,25	0,50
Szabolcs-Szatmár megye	1,44	0,23	0,49
Alföld	1,56	0,28	0,52

irányú, és a következő főbb településeken halad át: Baja, Kecskemét, Mezőtúr, Körösladány, Balmazújváros, Nyíregyháza, Záhony. Ez az átmérő keresztülszeli az Alföldön átfutó valamennyi centrális irányú fő közlekedési útvonalat. Az alföldi megyék közúthálózata külön-külön vizsgálva kevésbé fejlett és a π index értéke is mindenütt közel azonos.

Az Alföld közúthálózatának gráfja és a megyék algráfjai esetében is meghatároztuk a *tagolási pontok* számát (λ). Tagolási pontnak nevezzük a gráf azon csúcsát, amely úgy osztja két részre a gráfot, hogy bármely két csúcs között, amelyek nem azonos részben helyezkednek el, csak ezen a csúcson keresztül létezik út. Egy ilyen csúcs „megsérülése" esetén a gráf két része között a közlekedési kapcsolatok lehetetlenné válnának.

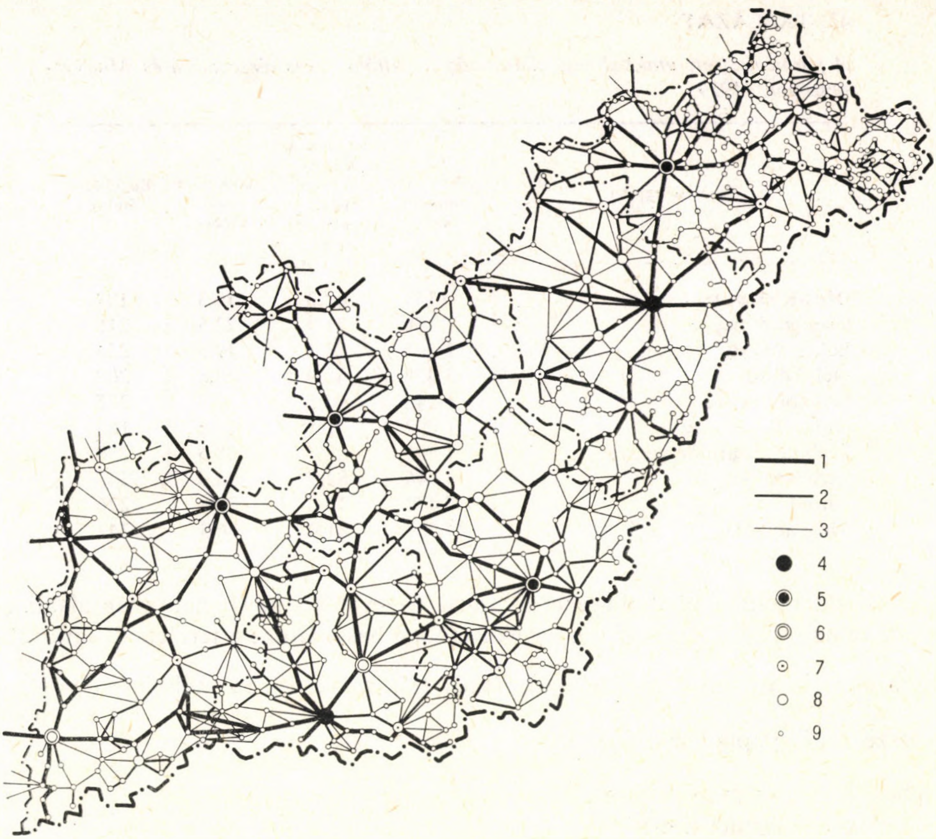
Minél nagyobb számú csúcsot választ el egymástól egy ilyen tagolási pont, annál nagyobb a jelentősége az egész hálózat sérülékenysége szempontjából. Például tagolási pont Szolnok, ahol a megye két részét összekötő egyetlen Tisza-híd helyezkedik el. Csongrád megyében ilyen település Makó, amely a megye központjától, Szegedtől 8 települést választ el. A tagolási pontok száma igen magas Szabolcs-Szatmár megyében *(40. táblázat)*. Ezeknek a pontoknak a jelentősége topológiai értelemben azonban kicsi. Tagolási pont van fontos nemzetközi útvonalon is (pl. Tiszabezdéd). Az ilyen pontok reális jelentősége sokkal nagyobb, mint az a topológiai vizsgálatok alapján adódik, szükségesek tehát további konkrét elemzések annak eldöntésére, hogy egy-egy tagolási pont jelentősége a terület tényleges helyzete szempontjából mekkora.

A topológiai indexek kiszámításának második változatánál figyelembe vettük az útkategóriák módosító hatását *(41. táblázat)*.

A közutakat három csoportba osztottuk:

1. főutak,
2. pormentes összekötő utak,
3. nem pormentes összekötő utak.

Az egyes kategóriákba tartozó utakat súlyoztuk. A főutaknak megfelelő élek számát kettővel szoroztuk, a pormentes utakat reprezentáló élek számát változatlanul hagytuk, a harmadik csoportba tartozókat feleztük *(36. ábra)*.



36. ábra. Az alföldi megyék közútjainak hálózatai
1 = főútvonal; 2 = összekötő út; 3 = gyengébb minőségű összekötő út; 4 = kiemelt felsőfokú központ; 5 = felsőfokú központ; 6 = részleges felsőfokú központ; 7 = középfokú központ; 8 = részleges középfokú központ; 9 = egyéb település

A két változat szerint kapott eredményeket összehasonlítva (*40.* és *41. táblázat*) megállapítható, hogy a Szolnok megyei főutak jó kiépítettsége miatt ez a terület került az első helyre a második változat szerint. Nem sokkal marad el tőle Bács-Kiskun megye sem. Békés megye az első változathoz képest jelentősen hátrább áll, mivel a jó összekötöttségeket biztosító közúthálózatának minősége sokkal rosszabb, mint a két előző megye esetében.

A számítások második változata szerint az Alföldet két részre lehet osztani. A nyugati rész magába foglalja Bács-Kiskun, Szolnok és Csongrád megyéket. E terület magasabb fejlettsége Budapest közelségével és az igen jelentős nemzetközi átmenőforgalommal magyarázható. A keleti részhez tartozó Békés, Hajdú-Bihar és Szabolcs-Szatmár megyék fejlettsége elmarad az előzőektől.

A β, α és ψ topológiai indexek mindkét változat szerint Hajdú-Bihar és Szabolcs-Szatmár megyék alacsony fejlettségét, valamint Bács-Kiskun és Csongrád magasabb fejlettségét mutatják.

42. TÁBLÁZAT

A pormentesített utakkal való ellátottság az Alföld egyes térségeiben és Magyarországon (1979)

Területi egység	Az úthálózat hossza (km)	Aránya a közúthálózat teljes hosszából (%)	A 100 km^2-re jutó úthossz	Engel-féle index
Bács-Kiskun megye	1363	62,3	16,3	197
Csongrád megye	958	71,4	22,5	216
Békés megye	1 105	73,2	19,5	224
Dél-Alföld	3 426	68,0	18,8	209
Szolnok megye	1 248	98,5	23,0	275
Hajdú-Bihar megye	1 067	71,5	17,2	183
Szabolcs-Szatmár megye	1 695	80,8	28,6	290
Észak-Alföld	4 046	82,7	22,8	243
Alföld	7 472	75,2	20,8	226
Magyarország	24 467	81,8	26,3	247

Az eddig kapott eredményeket célszerű összevetni a hagyományosan alkalmazott mutatókkal. Ezek közül a leggyakrabban használtak: a területegységre vetített úthossz, valamint az *Engel-féle index (42. táblázat)*. Ez utóbbit a $d=\frac{l}{\sqrt{sp}}$ összefüggés alapján számítják ki,

ahol l – az úthossz (km),
s – terület (km^2),
p – a népesség száma (ezer fő).

A közúttal való ellátottság alapján *(42. táblázat)* a legelső helyre Szabolcs-Szatmár megye került, második helyen Szolnok megye áll. A topológiai indexek alapján Szolnok megye az első, Szabolcs-Szatmár az utolsó volt a rangsorban *(40. táblázat)*.

Az ellátottsági mutatók alapján Csongrád és Békés megye a középső helyeket foglalják el megközelítően azonos értékekkel, ugyanakkor a topológiai indexek alapján Csongrád megye a fejlettebb, Békés megye pedig az elmaradottabb csoportba tartozik. A legkevésbé ellátott megyék Bács-Kiskun és Hajdú-Bihar. Ugyanakkor Bács-Kiskun megye topológiai indexe a legmagasabb, Hajdú-Biharé pedig egyike a legalacsonyabbaknak az Alföldön.

A különböző vizsgálatok szerint kapott eltérő eredmények törvényszerűek. Az ellátottsági mutatók függnek a terület nagyságától, ugyanakkor a legfontosabb országos jelentőségű utak nyomvonalának meghatározásakor nem cél, hogy minél több településen haladjon át, különösen nem, hogy apró falusi településeket kössön össze. Ez a körülmény megerősíti, hogy a topológiai indexekkel végzett hálózati vizsgálatok szükségesek, mivel megfelelően jellemzik a hálózat fejlettségét, a települések között létrejöhető kapcsolatokat, valamint a települések közlekedés-földrajzi helyzetét.

A közlekedésföldrajzi helyzet meghatározására szolgáló mutató a gráf csúcsainak fokszáma (az egy csúcsra illeszkedő élek száma). Másként fogalmazva, egy adott településből közvetlenül elérhető települések száma.

Az Alföld valamennyi kiemelt felsőfokú, felsőfokú és részleges felsőfokú központjának fokszáma (Baja kivételével) 9-nél magasabb. Szeged 12, Debrecen 11, Kecskemét 13, Békéscsaba 12, Nyíregyháza 10, Szolnok 9, Hódmezővásárhely 11, Baja 7 fokszámmal rendelkezik.

Az Alföld 40 középfokú és részleges középfokú központjának fokszáma 3 és 10 között változik *(43. táblázat)*. Legmagasabb fokszáma Orosházának (10) és Szentesnek (10) van. További jelentősebb fokszámú központok: Kiskunfélegyháza (9), Vásárosnamény (9), Balmazújváros (9), Makó (8), Törökszentmiklós (8), Mátészalka (8). A vizsgált központok 73%-ának fokszáma 4 és 7 közé esik.

Összegzésül meg kell jegyezni, hogy:

1. a közlekedési hálózatok és a matematikai értelemben vett hálózatok hasonlósága miatt a gráfelmélet – nagyszámú tényadatot magukba sűrítő – mutatóival a területek közti hálózatfejlettségi differenciák kimutathatók;

2. a települések úthálózattal való összekötöttsége a dél-alföldi gazdasági körzet három megyéjében a legteljesebb;

3. Szolnok és Bács-Kiskun megye úthálózatában a főútvonalaknak jelentős szerep jut, ugyanakkor a kiemelt településeknek főútvonallal való összekötöttsége Szolnokban hiányos;

43. TÁBLÁZAT

Az Alföld középfokú (A) és részleges középfokú (B) központjainak száma a fokszámok értéke szerint

Területi egységek	Központ típusok	A központok fokszáma							
		3	4	5	6	7	8	9	10
Bács-Kiskun megye	A		1		1	2		1	
	B					1			
Csongrád megye	A		1				1		1
	B				1				
Békés megye	A		1	1		1			1
	B			1	1	1			
Szolnok megye	A	1		2		1			
	B	2	2	1			1		
Hajdú-Bihar megye	A				1				
	B			1	1	2		1	
Szabolcs-Szatmár megye	A			1	1		1		
	B		2		1			1	
Alföld	A	1	3	4	3	6	2	1	2
	B	2	4	3	4	2	1	2	

4. Szabolcs-Szatmár megye úthálózata, a részben aprófalvas településszerkezet következtében kialakult nagyszámú közút ellenére, minden mutató szerint kedvezőtlen; vonatkozik ez a főútvonalak hálózatára is;

5. Több olyan település van az Alföldön (Kunhegyes, Fülöpszállás stb.), amelynek rangszáma magas, a közúthálózatban elfoglalt helyzete jobb, mint több más kiemelt településé, ugyanakkor az országos településhálózat–fejlesztési koncepció centrumtelepülésnek nem jelölte.

Irodalomjegyzék

I. fejezet. Alapfogalmak és egyszerűbb, a területi kutatásokban alkalmazható módszerek

Amedee, D.—Golledge, R. G. (1975): *An Introduction to Scientific Reasoning in Geography.* John Wiley, New York—London.

Anderson, T. W. (1958): *An Introduction to Multivariate Statistical Analysis.* John Wiley, New York—London, 374 p.

Arató M. (1979): Fejezetek a matematikai statisztikából számítógépes alkalmazásokkal II. Többdimenziós analízis. *SZÁMKI Közlemények*, 22/II, Budapest, 117 p.

Bahrenberg, G.—Giese, E. (1975): *Statistische Methoden und ihre Anwendungen in der Geographie.* Toubner, Stuttgart, 308 p.

Bocsarov, M. K. (1971): *Metodü matematicseszkoj sztatyisztiki v geografii.* Müszl, Moszkva, 157 p.

Campbell, R. C. (1974): *Statistics for Biologists.* Cambridge University Press, 380 p.

Cole, J. P.—King, C. A. M. (1968): *Quantitative Geography. Techniques and Theories Geography.* John Wiley, London, 692 p.

Cseh-Szombathy L.—Ferge Zs. (1968): *A szociológiai felvétel módszerei.* KJK, Budapest, 430 p.

Everitt, B. J. (1977): *The Analysis of Contingency Tables.* Chapman and Hall, London, 128 p.

Ezekiel, M.—Fox, K. A. (1970): *Korreláció és regresszió analízis.* KJK, Budapest, 594 p.

Éltető Ö.—Frigyes E. (1968): Új jövedelemegyenlőtlenségi mutatók tulajdonságai és hasznosítási lehetőségei. *Szigma*, 2, pp. 19—47.

Füstös L. (1977): *Szociológiai kutatások sokváltozós matematikai statisztikai módszerei I.* MTA Szociológiai Kutató Intézet, Budapest, 220 p.

Hajtman B. (1971): *Bevezetés a matematikai statisztikába pszichológusok számára.* Akadémiai Kiadó, Budapest, 491 p.

Kovacsics J. (1974): *Statisztika.* Tankönyvkiadó, Budapest, 284 p.

Köves P.—Párniczky G. (1973): *Általános statisztika.* KJK, Budapest, 817 p.

Kulcsár L. (1976): *A változók közötti kapcsolatok mérése, matematikai statisztikai módszerek a szociológiai kutatásban.* Tömegkommunikációs Kutatóközpont, Tanfolyami jegyzet, Budapest, 56 p.

Malinvaud, E. (1974): *Az ökonometria statisztikai módszerei.* KJK, Budapest, 804 p.

Matyematyika v ekonomicseszkoj geografii. „Vaproszü geografii" No. 77, Müszl, Moszkva, 1968.

Meszéna Gy.—Simonné Mosolygó N. (1970): Autoregresszivitás vizsgálata az ágazati kapcsolatok mérlegében. *OT Tervgazdasági Intézet Közleményei*, 5. sz., Budapest, 48 p.

Meszéna Gy.—Ziermann M. (1981): *Valószínűségszámítás és matematikai statisztika.* KJK, Budapest, 554 p.

Móricz F.—Abonyi Gy.-né (1975): *Matematikai módszerek a földrajzban.* JATE TTK jegyzet, Tankönyvkiadó, Budapest.

Nemes Nagy J. (szerk.) (1977): *Regionális gazdaságföldrajzi gyakorlatok.* ELTE TTK jegyzet, Tankönyvkiadó, Budapest, 221 p.

Srivastava, U. S.—Khatri, C. G. (1979): *An Introduction to Multivariate Statistics.* McGraw-Hill, New York, 350 p.

Sváb J. (1979): *Többváltozós módszerek a biometriában.* Mezőgazdasági Kiadó, Budapest, 222 p.

Theil, H. (1970): *Közgazdaságtan és információelmélet*. Közgazdasági és Jogi Kiadó, Budapest, 501 p.
Toyne, P.—Newby, P. T. (1971): *Technique in Human Geography*. Macmillan, London, 270 p.
Vámos F.—Wirth Gy. (1968): A tér-faktor hatásának néhány meghatározási módja. *Területi Statisztika*, 18, pp. 25—39.
Vincze I. (1968): *Matematikai statisztika ipari alkalmazásokkal*. Műszaki Könyvkiadó, Budapest, 350 p.
Yule, G. U.—Kendall, M. O. (1964): *Bevezetés a statisztika elméletébe*. KJK, Budapest, 669 p.

II. fejezet. A pályaanalízis

Alwin, D. F.—Mauser, R. M. (1975): The Decomposition of Effects in Path Analysis. *American Sociological Review*, 40, pp. 37—47.
Barnett, A. S.—Pickvance, C. G.—Ward, R. M. (1970): Some Factors Underlying Racial Discrimination in Housing: a Preliminary. Report on Manchester. *Race*, 12, pp. 75—85.
Beluszky P.—Sikos T. T. (1978): Vas megye falusi településeinek típusai. *Vasi Szemle*, 34, pp. 498—517.
Beluszky P.—Sikos T. T. (1979): A faktor- és clusteranalízis alkalmazása a területi kutatásokban (Borsod-Abaúj-Zemplén megye falusi települései tipizálásának példáján). *Szigma*, 12, pp. 191—209.
Beluszky P.—Sikos T. T. (1980): Hatásarány-analízis a területi kutatásokban (Az encsi járás demográfiai vizsgálata). *Szigma*, 13, pp. 181—201.
Beluszky P.—Sikos T. T. (1981): *Baranya megye falusi településeinek típusai*. Kézirat, Budapest, 110 p.
Blalock, H. M., Jr. (1972): *Social Statistic*. McGraw-Hill, New York.
Duncan, O. D. (1966): Path Analysis. Sociological Examples. *American Journal of Sociology*, 72, pp. 1—16.
Isard, W. (1969): *General Theory: Social, Political, Economic and Regional*. Cambridge Massachusetts: The M. I. T. Press, 351 p.
Leitner, H.—Wohlschlagl, M. (1980): Metrische und ordinale Pfadanalyse: ein Verfahren zur Testung komplexen Kausalmodelle in der Geographie. In: *Geogr. Zeitschrift*, 68, pp. 81—116.
O'Loughlin, J.—Glebe, G. (1981): The Location of Foreigners in Düsseldorf: A Causal Analysis in a Path Analytic Framework. In: *Geogr. Zeitschrift*, 69, 81—97.
Osváth J. (1968): *A termés elemzése „path analízissel"*. Kandidátusi értekezés, Budapest, 184 p.
Pickvance, C. G. (1973): Life-cycle, Hausing Tenure and Intra-Urban Residential Mobility. A causal Model. *Sociological Review*, 21, pp. 279—297.
Pickvance, C. G. (1974): Life-cycle, Housing Tenure an Residential Mobility: a Path Analytic Approach. *Urban Studies*, 11, pp. 171—188.
Precsányi I. (1971): „Relationship among the Matter Production of Natural Plant Communities and Weather Elements. *Acta Climat. Ac. Univ.*, Szeged, X. 69.
Sikos T. T. (1982): A pálya-analízis alkalmazása a területi kutatásban. *Földr. Ért.*, 31, pp. 263—271.
Simons, I. W. (1968): Changing Residence in the City — A Review of Intra-Urban Mobility. *Geographical Review*, 58, pp. 622—641.
Sváb J. (1971): *A populáció genetikai alapjai*. Mezőgazdasági Kiadó, Budapest.
Wold, M.—Jureen, L. (1953): *Demand Analysis*. John Wiley, New York—London, 358 p.
Wright, S. (1921): Correlation and Causation. *J. Agriculture Research*, 20, pp. 557—585.
Wright, S. (1934): The Method of Path Coefficient. *Ann. Math. Stat.*, 5, pp. 161—215.
Wright, S. (1951): The Genetic Structure of Populations. *Ann. Eng.*, 15, pp. 323—354.
Wright, S. (1960): Path Coefficients and Path Regressions: Alternative or Complementary Concepts. *Biometrics*, 16, pp. 189—202.

III. fejezet. A faktor- és clusteranalízis

Abonyi J. (1977): Regional differentation and accord of the development level of the main branches of food economy determined by a factor analytical model. *Acta Geographia Szegediensis*, 17, pp. 21—28.

Anderberg, M. R. (1973): *Cluster Analysis for Applications*. Academic Press, New York, 360 p.

Andorka R. (1976): A faktoranalízis alkalmazása társadalomökológiai vizsgálatokban. *Szigma*, 9, pp. 159—177.

Andorka R. (1979): A faktoranalízis felhasználása a regionális vizsgálatban. *Területi Statisztika*, 29, pp. 8—17.

Beluszky P. (1976): Területi hátrányok a lakosság életkörülményeiben (Hátrányos helyzetű területek Magyarországon). *Földr. Ért.*, 25, pp. 301—312.

Beluszky P. (1977): A lakosság életkörülményeinek járásonkénti színvonala és szerkezete. *Földr. Ért.*, 26, pp. 87—117.

Beluszky P. (1978): Kutatási jelentés Borsod-Abaúj-Zemplén megye falusi településeinek tipizálásáról. *Területi Kutatások*, pp. 4—18.

Beluszky P. (1979): Borsod-Abaúj-Zemplén megye falusi településeinek típusai (Településformáló folyamatok a megye falusi térségeiben). *Földr. Ért.*, 28, pp. 339—370.

Beluszky P.—Sikos T. T. (1979): A faktor- és clusteranalízis alkalmazása a területi kutatásokban (Borsod-Abaúj-Zemplén megye falusi települései tipizálásának példáján). *Szigma*, 12, pp. 191—209.

Beluszky P.—Sikos T. T. (1980): *Településalakító folyamatok Bács-Kiskun megye falusi településeiben*. Kézirat, Budapest, 40 p.

Beluszky P.—Sikos T. T. (1981): *Baranya megye falusi településeinek típusai*. Kézirat, Budapest, 110 p.

Beluszky P.—Sikos T. T. (1982): Kutatási jelentés a Bács-Kiskun megyében végzett falutipológiai vizsgálatokról. *Földr. Ért.*, 31, pp. 83—119.

Csicsman J. (1979): A klaszter-elemzés módszerei és alkalmazási lehetőségei a statisztikában. *Statisztikai Szemle*, 57.

Die Faktoranalyse — ein modernes statistisches Hilfsmittel des Geographen für die objektive Raumgliederung und Typenbildung, 1965. *Geographica Helvetica*, 20, pp. 20—34.

Enyedi Gy. (1975): A magyar falu átalakulása. *Földr. Ért.*, 24, pp. 109—224.

Enyedi Gy. (1977): A falusi életkörülmények területi típusai Magyarországon. *Földr. Ért.*, 26, pp. 67—85.

Francia L. (1974): A faktoranalízis alkalmazási lehetőségei a területi tervezésben. *Tervgazdasági Közlemények*, 8, 117 p.

Francia L. (1975): A faktoranalízis alkalmazása a lakosság életkörülményeire és az infrastrukturális ellátottság közötti összefüggések területi elemzésében, Baranya megye problematikus területeinek példáján. *Területi Statisztika*, 25, pp. 245—253.

Futó P. (1977): *Új cluster definíció és eljárás kidolgozása*. Építéstudományi Intézet, Budapest, 132 p.

Glattfelder P. (1980): Az ágazati kapcsolatok mérlegének előrebecslési módszerei. *Közgazdasági Értekezések*, 27, Akadémiai Kiadó, Budapest, 103 p.

Jahn, W.—Vahle, H. (1974): *A faktoranalízis és alkalmazása*. Közgazdasági és Jogi Könyvkiadó, Budapest, 231 p.

Krajkó Gy.—Bank K. (1981): A regionális növekedés néhány tényezőjének együttes hatása az Alföld gazdasági mikrokörzeteiben. *Alföldi Tanulmányok*, 4, pp. 85—104.

Kulcsár V. (szerk.) (1976): *A regionális elemzések módszerei*. Akadémiai Kiadó, Budapest, 334 p.

Lackó L. (1974): Az ország kedvezőtlen feltételekkel rendelkező területeinek helyzete. *Tervgazdasági Közlemények*, 7, 130 p.

Lackó L. (1975a): Az ország kedvezőtlen feltételekkel rendelkező területeinek fontosabb jellemző vonásai. *Területi Statisztika*, 25, pp. 352—362.

Lackó L. (1975b): Az ország elmaradott területeinek vizsgálata. *Területi Statisztika*, 25, pp. 474—455.

Lackó L. (szerk.) (1976): *A kanonikus korrelációszámítás, a clusteranalízis és az egymásrahatási modellek alkalmazási lehetőségei a területi elemzésekben* (Vitaanyag). OTTI, Budapest, 79 p.

Lukács P. (1979): Az urbanizáció és a lakosság kulturális színvonalának összefüggései az alföldi városokban. *Területi Statisztika,* 29, pp. 131–150.

MacQueen, I. (1967): Some Methods for Classification and Analysis of Multivariate Observations *5th Berkeley Symp. Math. Stat. Prob.*, 1, pp. 281–297.

Mather, P. M. (1976): *Computational Methods of Multivariate Analysis in Physical Geography.* John Wiley, London–New York, 532 p.

Meszéna Gy.–Füstös L.–Simonné Mosolygó N. (1977): Clusteranalízis. *Szigma,* 10, pp. 111–148.

Mészáros R. (1979): *A falusi átalakulás alapvető térfolyamatai a Dél-Alföldön.* Kandidátusi értekezés, Szeged, 192 p.

Perczel K. (1976): A magyarországi területi fejlesztés általános törvényszerűségeinek feltárása. *Területrendezés,* 1, 63–75.

Rubin, I.–Friedman, H. P. (1967): *A Cluster Analysis and Taxonomy System for Grouping and Classifying Data.* IBM Contributed Program Library, New York, 220 p.

Rysin, J. V. (ed.) (1977): *Classification and Clustering.* Academic Press, New York–London, 467 p.

Schmidt, G.–Krönert, R.–Neumann, H. (1977): Anwendung der Faktoranalyse beider Gemeindetypisierung. *Petermanns Geogr. Mitteilungen,* 118, pp. 189–194.

Sikos T. T. (1981): *Osztályozási módszerek alkalmazása a területi szerkezetek vizsgálatában.* Kézirat, Budapest, 34 p.

Simon I.–Dövényi Z. (1975): Homogén településcsoportok elkülönítése automatikus osztályozással (A mezőkovácsházi járás néhány népességi mutatója alapján). *Földr. Ért.*, 24, pp. 205–210.

Simon I.–Rakonczai J. (1975): Kísérlet a termelőerők területi különbségeinek vizsgálatára az automatikus osztályozás módszerével. *Földr. Ért.*, 24, pp. 336–346.

Simon I.–Tánczos-Szabó L. (1979): Az ipari fejlettség területi különbségének vizsgálata Békés megyében faktoranalízis segítségével. *Alföldi Tanulmányok,* 3, pp. 149–160.

Spath, H. (1975): *Cluster-analyse-algorithmen zur objektklassifizierung und Datenreduktion.* R. Oldenbourg Verlag, München–Wien, 216 p.

Szilágyi Gy. (1979): Nemzetközi struktúra összehasonlítások klaszterelemzése. *Statisztikai Szemle,* 57, pp. 955–972.

Thurstone, L. L. (1935): *The Vectors of Mind.* University of Chicago Press, Chicago, 322 p.

Thurstone, L. L. (1965): Multiple-factor Analysis. Chicago University Press, Chicago, 535 p.

Tóth J. (1977): Az urbanizáció népességföldrajzi vonatkozásai a Dél-Alföldön. *Földrajzi Tanulmányok,* 14, Akadémiai Kiadó, Budapest, 142 p.

Vita L. (1970): A faktoranalízis közgazdasági alkalmazásának lehetőségei. *Szigma,* 3, pp. 127–152.

Ward, J. M. (1963): Hierarchical Grouping to Optimise an Objective Function. *Journ. Amer. Statist. Assoc.*, 58, pp. 236–244.

Zágon Cs. (1979): A faktoranalízis alkalmazása a statisztikai gyakorlatban. *Statisztikai Szemle,* 57, pp. 1105–1128.

Yeates, M. (1974): *An Introduction to Quantitative Analysis in Human Geography.* McGraw-Hill Book Co., New York, 300 p.

IV. fejezet. Kanonikus korrelációszámítás

Bartels, C. P. A.–Nijkamp, P. (1975): An Empirical Welfare Approach to Regional Income Distributions. Vrije Universitait, Amsterdam, *Research Memorandum,* No. 26.

Beluszky P.–Sikos T. T. (1979): Szolnok megye falusi településeinek típusai. *Alföldi Tanulmányok,* 3, pp. 89–117.

Beluszky P.—Sikos T. T. (1981): *Baranya megye falusi településeinek típusai.* Kézirat, Budapest, 110 p.
Bornemissza E. (1980): Kanonikus korreláció-elemzés az empírikus társadalomtudományban. Tömegkommunikációs Kutató Központ, *Műhely*, 9, 33. sz., 22 p.
Cooley, W. W.—Lohnes, P. R. (1971): *Multivariate Analysis.* John Wiley and Sons, Inc., New York—London, 364 p.
Elmerné Túri M. (1979): Helyzetkép Baranya megye nagyközségeiről. *Területi Statisztika*, 29, pp. 538—549.
Füstös L. (1977): *Szociológiai kutatások sokváltozós matematikai statisztikai módszerei I* MTA Szociológiai Kutató Intézete, Budapest, 220 p.
Hotelling, H. (1936): Relations Between two Sets of Variates. *Biometrika*, 28, pp. 321—377.
Imrényi B. (1971): A kanonikus korrelációszámítás. *KSH Ökonometriai Laboratóriumi munkaanyagok*, Budapest, 13, 27 p.
Kendall, M. G.—Stuart, A. (1968): *The Advanced Theory of Statistics. Vol. 3.* (Second ed.) Charles Griffin and Company, London, 676 p.
Lackó L. (1976): A kanonikus korrelációszámítás alkalmazási lehetőségei területi jelenségek elemzésére. *Tervgazdasági Közlemények*, 2, pp. 8—39.
Morrison, D. R. (1968): *Multivariate Statistical Methods.* Mc. Graw-Hill, New York, 338 p.
Ranner, A. P. (1974): Analysing Relations between Regions and their Surroundings. *Regional and Urban Economics*, 4, pp. 141—162.
222 p.
Sváb J. (1979): *Többváltozós módszerek a biometriában.* Mezőgazdasági Kiadó, Budapest, 222 p.
Timm, Neil H. (1975): *Multivariate Analysis with Applications in Education and Psychology.* Brooks/Cole Publishing Company, Monterrey, California, 690 p.

V. fejezet. Shift-analízis és struktúra-vektorokkal való elemzés

Ashby, L. D. (1968): The Shift and Share Analysis. *Southern Economic Journal*, 34, pp. 423—425.
Barta Gy.—Beluszky P.—Berényi I. (1975): A hátrányos helyzetű területek vizsgálata Borsod-Abaúj-Zemplén megyében. *Földr. Ért.*, 24, pp. 299—390.
Beaudry, R.—Martin, F. (1979): Shift-Share Analysis Revised: the Allocation Effect and the Stability of Regional Structure, a Comment. *Journal of Regional Science*, 19, pp. 389—392.
Beluszky P. (1977): Krasznokvajda — egy alsófokú közlekedési központ (?) gondjai a Cserehátoն. *Földr. Ért.*, 26, pp. 349—386.
Beluszky P. (1979): Borsod-Abaúj-Zemplén megye falusi településeinek típusai (Településformáló folyamatok a megye falusi térségeiben). *Földr. Ért.*, 27, pp. 339—370.
Beluszky P.—Sikos T. T. (1979): A faktor- és clusteranalízis alkalmazása a területi kutatásokban (Borsod-Abaúj-Zemplén megye falusi települései tipizálásának példáján). *Szigma*, 12, pp. 191—209.
Beluszky P.—Sikos T. T. (1980): Hatásarány-analízis a területi kutatásokban (Az encsi járás demográfiai vizsgálata). *Szigma*, 13, pp. 181—201.
Berzeg, K. (1978): The Empirical Content of Shift-Share Analysis. *Journal of Regional Science*, 18, pp. 463—470.
Boudeville, J. R. (1966): *Problems of Regional Economic Planning.* Edinburgh University Press, Edinburgh, 77—80.
Edwards, A. J. (1976): Industrial Structure and Regional Change: A Shift-Share Analysis of the British Columbian Economy 1961—1970. *Regional Studies*, 10, pp. 307—317.
Floyd, C. F.—Sirmans, C. F. (1973): Shift and Share Projections Revised. *Journal of Regional Science*, 13, pp. 115—120.

Frigyes E.—Simon B. (1972): Strukturális változások mértékének és irányának mérése. *Szigma*, 5, 2. sz.
Herzog, H. W.—Olsen, R. J. (1977): Shift-Share Analysis Revised the Allocation Effect and the Stability of Regional Structure. *Journal of Regional Science*, 17, pp. 441—454.
Herzog, H. V.—Olsen, R. J. (1979): Shift-Share Analysis Revised: The Allocation Effect and the Stability of Regional Structure. A Reply. *Journal of Regional Science*, 19, pp. 393—396.
Hoppen, H. D. (1975): Die Shift-Analyse. *Raumordnung und Raumforschung*, 33, pp. 6—18.
James, F.—Hughes, H. (1973): A Test of Shift and Share Analysis as a Predictive Device. *Journal of Regional Sciences*, 13, pp. 223—231.
Kalbacher, J. Z. (1979): Shift-Share Analysis: A Modified Approach. *Agricultural Economics Research*, 31, pp. 12—25.
Lackó L. (1978): A „shift and share" eljárás alkalmazási lehetőségeiről. *Területrendezés*, 3. sz., pp. 67—71.
Lukács J. (1975): Kölcsönhatások az aprófalvas körzetek és a gazdaságilag elmaradott területek között Borsod-Abaúj-Zemplén megyében. *Területi Statisztika*, 25, pp. 422—429.
Lloyd, P. E.—Dicken, P. (1972): *Location in Space: a Theoretical Approach to Economic Geography*. Harper et Row, N. Y.
Malézia, E. (1978): Standardized Share Analysis. *Journal of Regional Science*, 18, pp. 283—292.
Nemes Nagy J. (szerk.) (1977): *Regionális gazdaságföldrajzi gyakorlatok*. (ELTE TTK jegyzet.) Tankönyvkiadó, Budapest, 221 p.
Nemes Nagy J. (1979): A shift-analízis alkalmazási lehetőségei a regionális gazdasági fejlődés vizsgálatában. *Földr. Ért.*, 28, pp. 237—247.
Novák Z. (1973): Az aprófalvak demográfiai helyzete és perspektívái. In: *A településhálózat demográfiai vizsgálatának néhány kérdése*. Statisztikai Kiadó, Budapest, pp. 76—84.
Perloff, H. S.—Dunn, E. S.—Lampard, E. E.—Muth, R. F. (1960): *Region, Resources and Economic Growth*. The J. Hopkins Press, Baltimore.
Richardson, H. W. (1978): The State of Regional Economics: A Survey Article. *International Regional Science Review*, 3, pp. 1—48.
Shaffer, R. (1979): Determinants of the Competitive Share in Wisconsin Counties, 1962—1972: The Role of Government Policy. *The annals of regional science*, 12, pp. 67—80.
Stilwell, F. J. B. (1969): Regional Growth and Structural Adaptation. *Urban Studies*, 6, pp. 162—178.
Zimmerman, R. (1975): A Variant of the Shift and Share Projection Formulation. *Journal of Regional Science*, 15, pp. 29—38.

VI. fejezet. Fizikai analógiákon alapuló területi elemzési módszerek

Bene L. (1961): Magyarország népességi súlypontja. *Demográfia*, 3, pp. 91—102.
Bene L.—Tekse K. (1966): Vizsgálatok a népesség területi eloszlásának alakulásáról Magyarországon 1900—1960. *KSH Népességtudományi Kutató Csoport Közleményei*, 9. sz., Budapest.
Beluszky P. (1967): Die Kleinhandelszentren Ungarns und ihre Anziehungsbereiche. *Acta Geogr. Debrecina*, Debrecen, pp. 80—82.
Beluszky P. (1981): A városi vonzáskörzetek (városkörnyékiség) vizsgálatának elvi módszertani kérdései. *ÁSZI*, Budapest, 97 p.
Bunge, W. (1967): *Tyeoretyicseszkaja geografija*. Progressz, Moszkva, 300 p.
Carrell, J. D.—Bevis, H. W. (1957): Predicting Local Travel in Urban Regions. *Pap. and Prec. of Reg. Ass.*, Vol. 3.
Chojnicki, Z.—Wrobel, A. (1963): Matematikai–statisztikai módszerek a gazdasági földrajzban. *Földr. Ért.*, 12, pp. 379—392.
Chorley, R. J.—Haggett, P. (eds) (1967): *Models in Geography*. Matthuen and Co., London, 816 p.
Hansen, W. G. (1959): How Accessibility Shapes Land Use. *Journal of the American Institute of Planners*, May, pp. 245—262.

Hoover, E. M. (1971): *An Introduction to Regional Economics*. A. A. Knopf, New York, 350 p.
Illés I. (1975): *Regionális gazdaságtan*. ELTE TTK jegyzet. Tankönyvkiadó, Budapest, 298 p.
Isard, W. (1960): *Methods of Regional Analysis*. M. I. T. Press, 784 p.
Kádas S. (1976): *A regionális modellezés irodalma*. KSH. Könyvtár és Sok. Szolgálat, Budapest, 95 p.
Kovács Cs. (1976): Főbb településeink egymáshoz viszonyított vasúti átlagtávolságai és forgalmi potenciáljai (in: A magyar népgazdaság fejlődésének területi problémái. Szerk.: Enyedi Gy.). Akadémiai Kiadó, Budapest, 254 p.
Kulcsár V. (szerk.) (1972): *Területi tervezés, tanácsi tervezés*. Közgazdasági és Jogi Könyvkiadó, Budapest, 372 p.
Lackó L. (1978): Települések vonzáskörzetének meghatározása egymásrahatási modell segítségével. *Földr. Ért.*, 27, pp. 31—43.
Lakshmanan, T. R.—Hansen, W. G. (1965): A Retail Market Potential Model. *Journal of American Institute of Planners*, May, pp. 345—364.
Lee, C. (1980): *Models in Planning*. Pergamen Press, Oxford.
Lloyd, P. E.—Dicken, P. (1972): *Location in Space a Thematical Approach to Economic Geography*. Harper et Row, New York.
Nemes Nagy J. (szerk.) (1977): *Regionális gazdaságföldrajzi gyakorlatok*. Tankönyvkiadó, Budapest, 221 p.
Nemes Nagy J. (1980): *A regionális gazdasági fejlődés összehasonlító és dinamikus vizsgálata*. Kandidátusi értekezés, kézirat. Budapest, 204 p.
Papp A. (1978): *A Tiszántúl középső részének központjai mint koncentrációs helyek, területi elrendeződésük és potenciáljuk*. Kézirat. Debrecen, 13 p.
Poljan, P. M.—Trejvis, A. J. (1978): Pozicionno-reljativanüje kaptü: metod potencialov i centrograficseszkij metod (in: Tyeritorialnaja organizacija praizvogyityelnüh szil SZSZSZR, Moszkva, Tyeoretyicseszkaja geografija). Progressz, Moszkva, 300 p.
Reilly, W. J. (1929): Methods for the Study of Retail Relationships. *University of Texas Bulletin*, No. 2944.
Reilly, W. J. (1931): *The Law of Retail Gravitation*. Knickerbocker Press, New York.
Ruttkay É.—Csorba Z.-né (1976): Ajka, az iparból nőtt város. *Területrendezés*, 2. sz., pp. 93—104.
Stewart, J. A. (1948): Demographic Gravitation: Evidence and Application. *Sociometry*, 11, pp. 31—58.
Trejvis, A. I.—Kibalcsics, M. O. (1976): *Kísérlet a potenciál-módszer alkalmazására a Szovjetunió regionális iparföldrajzi helyzetének térképészeti elemzésében, a szomszédos országok figyelembevételével* (magyarul in: Regionális gazdaságföldrajzi olvasókönyv II. szerk.: Nemes Nagy J.). ELTE TTK jegyzet. Tankönyvkiadó, Budapest.
Tuominen, O. (1949): Das Einflussgebiet der Stadt Turku. Im System der Einflussgebiete SW-Finland. *Fennia*, 71, pp. 1—138.
Thorwid, C. A. (1963): Ett försök till indelming ov Sverige i ekonomista regioer. *Statistiks Tidskrift*.
Wilson, A. G. (1970): *Entropy in urban and regional modelling*. Pion, England, London.

VII. fejezet. Az ágazati kapcsolatok mérlegének alkalmazása a területi szerkezetek és kapcsolatok vizsgálatában

Balsay É. (1965): Népgazdasági szintű ráfordítások meghatározása. *Statisztikai Szemle*, 43, pp. 1115—1125.
Bródy A. (1964): *Az ágazati kapcsolatok modellje*. Akadémiai Kiadó, Budapest, 217 p.
Csepinszky A. (1964): Gazdasági közösségekre szerkeszthető input—output sémák. 1,2. r. *Statisztikai Szemle*, 42, pp. 490—506, 619—644.
Csepinszky A. (1965): Multiregionális input-output analízis. *Megyei és Városi Statisztikai Ért.*, 1. sz., pp. 1—11., 2. sz., pp. 53—65.

Csepinszky A. (1969): Input–output analízis a területi statisztikában. *Területi Statisztika*, 19, pp. 212–231.
Csepinszky A. (1973): Egy regionális ágazati kapcsolati mérlegrendszer kialakításának néhány kérdése. *Területi Statisztika*, 23, pp. 597–607.
Csepinszky A.—Kovács T.—Novák Z. (1973): A megye gazdaságának átfogó jellemzése, az ágazati kapcsolati mérlegszámítások eredményei Vas megyében. *Területi Statisztika*, 23, pp. 117–134.
Dadajan, V. Sz.—Kosszov, V. V. (1963): *Az ágazati mérleg, mint a területi tervezés eszköze*. Közgazdasági és Jogi Könyvkiadó, Budapest, 203 p.
Fodor I. (1976): *Termelőerők területi koncentrációja, agglomerációk, Budapest*. Akadémiai Kiadó, Budapest, 179 p.
Fodor L.—Illés I.—Bognár J. (1970): A budapesti agglomeráció vizsgálatánál alkalmazott mérlegrendszer összefoglaló ismertetése. *Országos Tervhivatal Tervgazdasági Intézet Közlemények*, 4, Budapest, 240 p.
Isard, W. (1973): *A regionális tervezés módszerei*. Fordítás, OT Tervgazdasági Intézet, 690 p.
Kádas S. (1976): *A regionális modellezés irodalma*. KSH Könyvtár és Dok. Szolgálat, Budapest, 95 p.
Kóródi J. (1968): Az input-output módszer alkalmazása a hazai iparföldrajzi kutatásokban. *Földr. Ért.*, 17, pp. 429–440.
Leontief, W.—Ford., D. (1972): Air Pollution and the Economic Structure: Empirical Results of Input-Output Computations. Input-Output Techniquels (eds A. Bródy and A. P. Carter). North Holland Publ. Co., Amsterdam—New York—Oxford, pp. 9–30.
Leontief, W. (1977): *Terv és gazdaság*. Közgazdasági és Jogi Könyvkiadó, Budapest, 240 p.
Morrison, W. I.—Smith, P. (1976): Input-Output Methodes in Urban and Regional Planning. A Practical Guide. *PRAG Technical Papers* TP. 6, London.
Moses, L. (1955): The Stability of Interregional Trading Patterns and Input-Output Analysis. *The American Economic*, 15, No 5.
Nyitrai F. (1965): Az ágazati kapcsolatok mérlegének felhasználása a statisztikában. *Statisztikai Szemle*, 43, pp. 997–1009.
Peterka, V. (1979): Lakott területek komplex szisztémájának modellezése. Fordítás. *MTA Dunántúli Tudományos Intézete*, Pécs, 51 p.
Rácz A. (1964): Konzultáció W. W. Leontief professzorral az input-output módszerről. *Statisztikai Szemle*, 42, pp. 531–536.
Rácz A. (szerk.) (1973): *Tanulmányok a modern gazdaságstatisztika köréből*. KSH, Budapest, 329 p.
Rechnitzer J. (1980a): A területi modellek kialakításának néhány tényezője. *MTA Dunántúli Tudományos Intézete Közlemények*, Pécs, 27, pp. 51–66.
Rechnitzer J. (1980b): Baranya megye ágazati kapcsolatok mérlegének elemzése. *MTA Dunántúli Tudományos Intézete kutatási eredmények. 1976–1980*. Pécs, Házi Soksz., 113 p.
Sikos T. T. (1977): Változatok a termelőerők területi elhelyezésének gazdaságmatematikai modellezésére. (Területközi matematikai modellek.) *Földr. Ért.*, 26, pp. 387–402.
Speer, E. (1966): *Räumliche Aktivitätanalysen Wirtschaftspolitische Studien*. 7. Vandernhoeck Ruprecht in Göttingen.
Strassert, G. (1967): *Möglichkeiten und Grenzen der Erstellung und Auswertung regionaler Input-Output Tabellen*. Duncker-Humblot, Berlin, 123 p.
Wirth Gy. (1976): A területi ágazati kapcsolatok mérlegei. In: *A regionális elemzések módszerei* (Szerk.: Kulcsár Viktor), Akadémiai Kiadó, Budapest, pp. 189–219.

VIII. fejezet. A termelési függvények elméletéről és gazdaságföldrajzi alkalmazásáról

Andorka R. (1972): Vita a népgazdasági termelési függvényekről a nemzetközi szakirodalomban. *Szigma*, 5, pp. 81–91.
Arrow, K. J. (1979): *Egyensúly és döntés*. Közgazdasági és Jogi Könyvkiadó, Budapest, 410 p.

Balch, B. W.—Huang, C. J. (1979): Mnogomernie sztatyisztyicseszkie metodi dlja ekonomiki. Moszkva, 316 p. (Multivariate Statistical Methods for Business and Economics. Prentice-Hall, Englewood-Cliffs, N. J. 1974).
Fekete F.—Heady, E. O.—Holdren, B. R. (1977): *Célok és optimumok a termelőszövetkezeti gazdálkodásban.* Akadémiai Kiadó, Budapest, 134 p.
Góczán L. (1980): Mezőgazdasági területek agroöko-geográfiai kutatása. *Földrajzi Tanulmányok,* 18, Budapest, 125 p.
Góczán L.—Benet I. (1973): Mezőgazdasági mikrorégió értékelésének megközelítése új földértékelési módszerrel. *Földr. Ért.*, 22, pp. 55—71.
Halabuk L. (1975): Ökonometriai modellek és módszerek kutatása és alkalmazása Magyarországon. *Statisztikai Szemle,* 53, pp. 821—839.
Kornai J. (1973): *A gazdasági szerkezet matematikai tervezése.* Közgazdasági és Jogi Könyvkiadó, Budapest, 507 p.
Kornai J.—Rimler J. (1972): Tervmodellek alapján számított makrofüggvények: elvek és módszerek. *Szigma,* 5, pp. 49—59.
Kovács J. (1966a): A szakképzés és a nemzeti jövedelem. *Közgazdasági Szemle,* 13, pp. 443—453.
Kovács J. (1966b): Szakképzés és beruházás. *Közgazdasági Szemle,* 13, pp. 899—915.
Malinvaud, E. (1974): *Az ökonometria statisztikai módszerei.* Közgazdasági és Jogi Könyvkiadó, Budapest, 804 p.
Mátyás A. (1964): A Cobb-Douglas-féle termelési függvény és Solow növekedési elmélete. *Közgazdasági Szemle,* 11, pp. 821—838.
Nagy S.—Wirth Gy. (1973): A városfejlesztési elképzelések kidolgozásának tervezési modellje. *Statisztikai Szemle,* 51, pp. 1120—1137.
Pawlowski, Z. (1970): *Ökonometria.* Közgazdasági és Jogi Könyvkiadó, Budapest, 359 p.
Pölöskei P.—Szakolczai Gy. (1972): Az ágazati CES termelési függvény számítások újabb eredményei és egyes módszertani tapasztalatai. *Szigma,* 5, pp. 3—25.
Rácz A. (szerk.) (1973): *Tanulmányok a modern gazdaságstatisztika köréből.* Statisztikai Kiadó, Budapest, 329 p.
Rechnitzer J. (szerk.) (1980): *Dél-Dunántúl társadalmi-gazdasági szerkezetének vizsgálata.* 1. Baranya megye ágazati kapcsolati mérlegének elemzése. Az MTA Dunántúli Tudományos Intézetének kutatási eredményei 1976—1980, Pécs, 113 p.
Richardson, H. W. (1980): A területi gazdaságtan jelenlegi helyzete: áttekintő tanulmány. *Szigma,* 13, pp. 69—109.
Rimler J.—Dániel Zs. (1972): Tervmodellek alapján számított makrofüggvények: Numerikus alkalmazás. *Szigma,* 5, pp. 59—81.
Samuelson, P. A. (1976): *Közgazdaságtan.* Közgazdasági és Jogi Könyvkiadó, Budapest, 1088 p.
Szakolczai Gy.—Pölöskei P. (1972): Termelési függvények felírása technológiai adatok alapján. *Szigma,* 5, pp. 25—49.
Unčovsky, L. (1977): *Vállalati modellek.* Közgazdasági és Jogi Könyvkiadó, Budapest, 391 p.

IX. fejezet. Játékelméleti modellek a termelőerők területi elhelyezésének gazdaságmatematikai modellezéséhez

Alampiev, P.—Volf, M.—Pinhenszon, D.—Szemevszkij, B. (1976): Novie zadacsi ekonomicseszkoj geografii. *Voproszi Ekonomiki,* 4, pp. 108—118.
Csernátony Cs.—Hüttle A.—Kádas S. (szerk.) (1976): *Közgazdasági operációkutatási alkalmazások.* Közgazdasági és Jogi Könyvkiadó, Budapest, 399 p.
Fedorenko, N. P. (szerk.) (1976): *Komplex népgazdasági tervezés.* Közgazdasági és Jogi Könyvkiadó, Budapest, 315 p.

Isard, W. (1969): *General Theory Social Political Economic and Regional with Particular References to Decision. Making Analisis.* The M.I.T. Press Cambridge Massachussets, London, England, 350 p.
Karpil, Sz. (1964): *Matematicseszkije metodi v teori igr pregoromirovnyiji i ekonomike.* Mir, Moszkva.
Kulcsár V. (szerk.) (1976): *A regionális elemzések módszerei.* Akadémiai Kiadó, Budapest, 334 p.
Sárfalvi B. (szerk.) (1971): *Válogatott tanulmányok a gazdasági földrajzból.* Tankönyvkiadó, Budapest, 415 p.
Sikos T. T. (1978): Változatok a termelőerők területi elhelyezésének gazdaságmatematikai modellezésére (Játékelméleti modellek). *Földr. Ért.*, 27, pp. 357—377.
Szép J.—Forgó F. (1974): *Bevezetés a játékelméletbe.* Közgazdasági és Jogi Könyvkiadó, Budapest, 313 p.
Volkoinszkij, V. A. (1966): *Problemi optimalnogo planyirovanyija.* M. CENI AN SZSZSZR.
Zavebszkij, M. G. (1968): *Problemi i metodi optimalnogo territorialno-proizvodsztvennogo planyirovanyija.* Nauka, Moszkva.

X. fejezet. A gráfelmélet gazdaságföldrajzi alkalmazásáról

Avondo-Bodino, D. (1966): *Primenyenyie v ekonomike tyeorii grafov.* Izd. Progressz, Moszkva, 243 p.
Babics L.—Dénes I. (1979): Gráfelméleti eszközök az empírikus szociológia kumulatív felépítésének vizsgálatához. *Szigma*, 12, pp. 211—237.
Eliot Hurst, M. E. (1974): *Transportation Geography.* McGraw-Hill, New York, 528 p.
Haggett, P. (1968): *Prosztransztvennij analiz v ekonomicseszkoj geografii.* Izd. Progressz, Moszkva, 682 p.
Haggett, P. (1975): *Geography: A Modern Synthesis.* Harrow, New York, 672 p.
Haggett, P.—Charley, R. J. (1969): *Network Analisis in Geography.* Matthuen and Co., London, 348 p.
Harrari, F. (1973): *Tyeorija grafov.* Izd. Progressz, Moszkva, 321 p.
Ignasiak, E. (1976): A tevékenységek tervezése gráfelméleti módszerekkel. In: *Közgazdasági operációkutatási alkalmazások.* Közgazdasági és Jogi Könyvkiadó, Budapest, 399 p.
Illés I. (1975): *Regionális gazdaságtan.* Egyetemi jegyzet. Budapest, 186 p.
Kocsis A. (1977): Hálóstervezés. In: *Operációkutatási módszerek.* SZÁMOK, Budapest, 499 p.
Matyematyicseszkaja enciklopedija. 1. A—G. Izd. Szov. Enciklopégyija, Moszkva, 1977.
Medvedkov, Ju. V. (1968): Topologicseszkij analiz szetyej naszeljonnih meszt. in.: *Vaproszi geografii*, No. 77, Matyematyika v ekonomicseszkoj geografii. Moszkva, pp. 159—168.
Miheeva, V. Sz. (1978): *Matyematyicseszkoe modeliroványie v ekonomicseszkok geografii.* Izd. Mosz. Unyiv-ta Moszkva, 140 p.
Nutenko, L. Ja. (1971): Meri kacsesztva szhem cslenyenyija tyerritorii. In.: *Voproszi geografii*, No. 88, Moszkva.
Ore, O. (1972): *A gráfok és alkalmazásaik.* Közgazdasági és Jogi Könyvkiadó, Budapest, 156 p.
Párniczky G. (1976): *A statisztikai informatika alapjai.* Statisztikai Kiadó, Budapest, 190 p.
Simon I. (1980): *Isszledoványie tyerritorailnih razlicsij v razvityii promislennogo proizvodsztva Alföld a sz primenyenyiem matyematyicseszkih metodov.* Kandidátusi értekezés, Moszkva, 183 p.
Simon I.—Tánczos-Szabó L. (1978): Az alföldi megyék közúthálózatának topológiai vizsgálata. *Alföldi Tanulmányok*, 2, pp. 183—200.

Függelék

I. TÁBLÁZAT

A standard normális eloszlású valószínűségi változó $\Phi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{x}e^{-\frac{t^2}{2}}\mathrm{d}t$ *eloszlásfüggvényének táblázata* $\left(\Phi(-x)=1-\Phi(x)\right)$

x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$
0,00	0,5000	0,51	0,6950	1,02	0,8461	1,53	0,9370	2,08	0,9812
0,01	0,5040	0,52	0,6985	1,03	0,8485	1,54	0,9382	2,10	0,9821
0,02	0,5080	0,53	0,7019	1,04	0,8508	1,55	0,9394	2,12	0,9830
0,03	0,5120	0,54	0,7054	1,05	0,8531	1,56	0,9406	2,14	0,9838
0,04	0,5160	0,55	0,7088	1,06	0,8554	1,57	0,9418	2,16	0,9846
0,05	0,5199	0,56	0,7123	1,07	0,8577	1,58	0,9429	2,18	0,9854
0,06	0,5239	0,57	0,7157	1,08	0,8599	1,59	0,9441	2,20	0,9861
0,07	0,5279	0,58	0,7190	1,09	0,8621	1,60	0,9452	2,22	0,9868
0,08	0,5319	0,59	0,7224	1,10	0,8643	1,61	0,9463	2,24	0,9875
0,09	0,5359	0,60	0,7257	1,11	0,8665	1,62	0,9474	2,26	0,9881
0,10	0,5398	0,61	0,7291	1,12	0,8686	1,63	0,9484	2,28	0,9887
0,11	0,5438	0,62	0,7324	1,13	0,8708	1,64	0,9495	2,30	0,9893
0,12	0,5478	0,63	0,7352	1,14	0,8729	1,65	0,9505	2,32	0,9898
0,13	0,5517	0,64	0,7389	1,15	0,8749	1,66	0,9515	2,34	0,9904
0,14	0,5557	0,65	0,7422	1,16	0,8770	1,67	0,9525	2,36	0,9909
0,15	0,5596	0,66	0,7454	1,17	0,8790	1,68	0,9535	2,38	0,9913
0,16	0,5636	0,67	0,7486	1,18	0,8810	1,69	0,9545	2,40	0,9918
0,17	0,5675	0,68	0,7517	1,19	0,8830	1,70	0,9554	2,42	0,9922
0,18	0,5714	0,69	0,7549	1,20	0,8849	1,71	0,9564	2,44	0,9927
0,19	0,5753	0,70	0,7580	1,21	0,8869	1,72	0,9572	2,46	0,9931
0,20	0,5793	0,71	0,7611	1,22	0,8888	1,73	0,9582	2,48	0,9934
0,21	0,5832	0,72	0,7642	1,23	0,8907	1,74	0,9591	2,50	0,9938
0,22	0,5871	0,73	0,7673	1,24	0,8925	1,75	0,9599	2,52	0,9941
0,23	0,5910	0,74	0,7703	1,25	0,8944	1,76	0,9608	2,54	0,9945
0,24	0,5948	0,75	0,7734	1,26	0,8962	1,77	0,9616	2,56	0,9948
0,25	0,5987	0,76	0,7764	1,27	0,8980	1,78	0,9625	2,58	0,9951
0,26	0,6026	0,77	0,7794	1,28	0,8997	1,79	0,9633	2,60	0,9953
0,27	0,6064	0,78	0,7823	1,29	0,9015	1,80	0,9641	2,62	0,9956
0,28	0,6103	0,79	0,7853	1,30	0,9032	1,81	0,9649	2,64	0,9959
0,29	0,6141	0,80	0,7881	1,31	0,9049	1,82	0,9656	2,66	0,9961
0,30	0,6179	0,81	0,7910	1,32	0,9066	1,83	0,9664	2,68	0,9963
0,31	0,6217	0,82	0,7939	1,33	0,9082	1,84	0,9671	2,70	0,9965
0,32	0,6255	0,83	0,7967	1,34	0,9099	1,85	0,9678	2,72	0,9967
0,33	0,6293	0,84	0,7995	1,35	0,9115	1,86	0,9686	2,74	0,9969
0,34	0,6331	0,85	0,8023	1,36	0,9131	1,87	0,9693	2,76	0,9971
0,35	0,6368	0,86	0,8051	1,37	0,9147	1,88	0,9699	2,78	0,9973
0,36	0,6406	0,87	0,8078	1,38	0,9162	1,89	0,9706	2,80	0,9974
0,37	0,6443	0,88	0,8106	1,39	0,9177	1,90	0,9713	2,82	0,9976
0,38	0,6480	0,89	0,8133	1,40	0,9192	1,91	0,9719	2,84	0,9977
0,39	0,6517	0,90	0,8159	1,41	0,9207	1,92	0,9726	2,86	0,9979
0,40	0,6554	0,91	0,8186	1,42	0,9222	1,93	0,9732	2,88	0,9980
0,41	0,6591	0,92	0,8212	1,43	0,9236	1,94	0,9738	2,90	0,9981
0,42	0,6628	0,93	0,8238	1,44	0,9251	1,95	0,9744	2,92	0,9982
0,43	0,6664	0,94	0,8264	1,45	0,9265	1,96	0,9750	2,94	0,9984
0,44	0,6700	0,95	0,8289	1,46	0,9279	1,97	0,9756	2,96	0,9985
0,45	0,6736	0,96	0,8315	1,47	0,9292	1,98	0,9761	2,98	0,9986

I. táblázat (folytatás)

x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$
0,46	0,6772	0,97	0,8340	1,48	0,9306	1,99	0,9767	3,00	0,9987
0,47	0,6808	0,98	0,8365	1,49	0,9319	2,00	0,9772	3,20	0,9993
0,48	0,6844	0,99	0,8389	1,50	0,9332	2,02	0,9783	3,40	0,9996
0,49	0,6879	1,00	0,8413	1,51	0,9345	2,04	0,9793	3,60	0,9998
0,50	0,6915	1,01	0,8438	1,52	0,9357	2,06	0,9803	3,80	0,9999

Útmutatás: Az $N(a, \sigma)$ eloszlású valószínűségi változó eloszlásfüggvényét az $\Phi(y; a, \sigma) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\frac{y-a}{\sigma}} e^{-\frac{t^2}{2}} dt$ kifejezés adja. Vagyis az eloszlásfüggvény az y helyen a táblázatban található $x = \frac{y-a}{\sigma}$-hoz tartozó (x) érték.

Forrás: Vincze I. (1968): *Matematikai statisztika ipari alkalmazásokkal.* Műszaki Könyvkiadó, Bp., p. 325

II. TÁBLÁZAT

A t-eloszlás táblázata

f	Valószí-					
	0,9	0,8	0,7	0,6	0,5	0,4
1	0,158	0,325	0,510	0,727	1,000	1,376
2	0,142	0,289	0,445	0,617	0,816	1,061
3	0,137	0,277	0,424	0,584	0,765	0,978
4	0,134	0,271	0,414	0,569	0,741	0,941
5	0,132	0,267	0,408	0,559	0,727	0,920
6	0,131	0,265	0,404	0,553	0,718	0,906
7	0,130	0,263	0,402	0,549	0,711	0,896
8	0,130	0,262	0,399	0,546	0,706	0,889
9	0,129	0,261	0,398	0,543	0,703	0,883
10	0,129	0,260	0,397	0,542	0,700	0,879
11	0,129	0,260	0,396	0,540	0,697	0,876
12	0,128	0,259	0,395	0,539	0,695	0,873
13	0,128	0,259	0,394	0,538	0,694	0,870
14	0,128	0,258	0,393	0,537	0,692	0,868
15	0,128	0,258	0,393	0,536	0,691	0,866
16	0,128	0,258	0,392	0,535	0,690	0,865
17	0,128	0,257	0,392	0,534	0,689	0,863
18	0,127	0,257	0,392	0,534	0,688	0,862
19	0,127	0,257	0,391	0,533	0,688	0,861
20	0,127	0,257	0,391	0,533	0,687	0,860
21	0,127	0,257	0,391	0,532	0,686	0,859
22	0,127	0,256	0,390	0,532	0,686	0,858
23	0,127	0,256	0,390	0,532	0,685	0,858
24	0,127	0,256	0,390	0,531	0,685	0,857
25	0,127	0,256	0,390	0,531	0,684	0,856
26	0,127	0,256	0,390	0,531	0,684	0,856
27	0,127	0,256	0,389	0,531	0,684	0,855
28	0,127	0,256	0,389	0,530	0,683	0,855
29	0,127	0,256	0,389	0,530	0,683	0,854
30	0,127	0,256	0,389	0,530	0,683	0,854
40	0,126	0,255	0,388	0,529	0,681	0,851
60	0,126	0,254	0,387	0,527	0,679	0,848
120	0,126	0,254	0,386	0,526	0,677	0,845
∞	0,126	0,253	0,385	0,524	0,674	0,842

Forrás: Hajtman B. (1971): *Bevezetés a matematikai statisztikába pszichológusok számára.*

nűségek

0,3	0,2	0,1	0,05	0,02	0,01	0,001
1,963	3,078	6,314	12,706	31,821	63,657	636,619
1,386	1,886	2,920	4,303	6,965	9,925	31,598
1,250	1,638	2,353	3,182	4,541	5,841	12,924
1,190	1,533	2,132	2,776	3,747	4,604	8,610
1,156	1,476	2,015	2,571	3,365	4,032	6,869
1,134	1,440	1,943	2,447	3,143	3,707	5,959
1,119	1,415	1,895	2,365	2,998	3,499	5,408
1,108	1,397	1,860	2,306	2,896	3,355	5,041
1,100	1,383	1,833	2,262	2,821	3,250	4,781
1,093	1,372	1,812	2,228	2,764	3,169	4,587
1,088	1,363	1,796	2,201	2,718	3,106	4,437
1,083	1,356	1,782	2,179	2,681	3,055	4,318
1,079	1,350	1,771	2,160	2,650	3,012	4,221
1,076	1,345	1,761	2,145	2,624	2,977	4,140
1,074	1,341	1,753	2,131	2,602	2,947	4,073
1,071	1,337	1,746	2,120	2,583	2,921	4,015
1,069	1,333	1,740	2,110	2,567	2,898	3,965
1,067	1,330	1,734	2,101	2,552	2,878	3,922
1,066	1,328	1,729	2,093	2,539	2,861	3,883
1,064	1,325	1,725	2,086	2,528	2,845	3,850
1,063	1,323	1,721	2,080	2,518	2,831	3,819
1,061	1,321	1,717	2,074	2,508	2,819	3,792
1,060	1,319	1,714	2,069	2,500	2,807	3,767
1,059	1,318	1,711	2,064	2,492	2,797	3,745
1,058	1,316	1,708	2,060	2,485	2,787	3,725
1,058	1,315	1,706	2,056	2,479	2,779	3,707
1,057	1,314	1,703	2,052	2,473	2,771	3,690
1,056	1,313	1,701	2,048	2,467	2,763	3,674
1,055	1,311	1,699	2,045	2,462	2,756	3,659
1,055	1,310	1,697	2,042	2,457	2,750	3,646
1,050	1,303	1,684	2,021	2,423	2,704	3,551
1,046	1,296	1,671	2,000	2,390	2,660	3,460
1,041	1,289	1,658	1,980	2,358	2,617	3,373
1,036	1,282	1,645	1,960	2,326	2,576	3,291

Akadémiai Kiadó, Bp., Függelék, p. 19.

III. TÁBLÁZAT

Speciális χ^2 táblázat a varianciára adható konfidencia-intervallum számítására

P	5		1	
	$\underline{\underline{\chi}}^2$	$\overline{\chi}^2$	$\underline{\underline{\chi}}^2$	$\overline{\chi}^2$
$\nu =$ 1	$0{,}0^3982$	5,02	$0{,}0^4393$	7,88
2	0,0506	7,38	0,0100	10,60
3	0,216	9,35	0,0717	12,84
4	0,484	11,14	0,207	14,86
5	0,831	12,83	0,412	16,75
6	1,24	14,45	0,676	18,55
7	1,69	16,01	0,989	20,28
8	2,18	17,53	1,34	21,95
9	2,70	19,02	1,73	23,59
10	3,25	20,48	2,16	25,19
11	3,82	21,92	2,60	26,76
12	4,40	23,34	3,07	28,30
13	5,01	24,74	3,57	29,82
14	5,63	26,12	4,07	31,32
15	6,26	27,49	4,60	32,80
16	6,91	28,85	5,14	34,27
17	7,56	30,19	5,70	35,72
18	8,23	31,53	6,26	37,16
19	8,91	32,85	6,84	38,58
20	9,59	34,17	7,43	40,00
21	10,28	35,48	8,03	41,40
22	10,98	36,78	8,64	42,80
23	11,69	38,08	9,26	44,18
24	12,40	39,36	9,89	45,56
25	13,12	40,65	10,52	46,93
26	13,84	41,92	11,16	48,29
27	14,57	43,19	11,81	49,64
28	15,31	44,46	12,46	50,99
29	16,05	45,72	13,12	52,34
30	16,79	46,98	13,79	53,67
40	24,43	59,34	20,71	66,77
50	32,36	71,42	27,99	79,49
60	40,48	83,30	35,53	91,95
70	48,76	95,02	43,28	104,2
80	57,15	106,6	51,17	116,3
90	65,65	118,1	59,20	128,3
100	74,22	129,6	67,33	140,2

Forrás: Campbell, R. C. (1974): *Statistics for Biologists*. Cambridge University Press, p. 359.

IV. TÁBLÁZAT

Az F-eloszlás táblázata

$p = 10\%$

f_2 \ f_1 (A nevező szabadságfoka \ A számláló)	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	39,9	49,5	53,6	55,8	57,2	58,2	58,9	59,4	59,9
2	8,53	9,00	9,16	9,24	9,29	9,33	9,35	9,37	9,38
3	5,54	5,46	5,39	5,34	5,31	5,28	5,27	5,25	5,24
4	4,54	4,32	4,19	4,11	4,05	4,01	3,98	3,95	3,94
5	4,06	3,78	3,62	3,52	3,45	3,40	3,37	3,34	3,32
6	3,78	3,46	3,29	3,18	3,11	3,05	3,01	2,98	2,96
7	3,59	3,26	3,07	2,96	2,88	2,83	2,78	2,75	2,72
8	3,46	3,11	2,92	2,81	2,73	2,67	2,62	2,59	2,56
9	3,36	3,01	2,81	2,69	2,61	2,55	2,51	2,47	2,44
10	3,29	2,92	2,73	2,61	2,52	2,46	2,41	2,38	2,35
11	3,23	2,86	2,66	2,54	2,45	2,39	2,34	2,30	2,27
12	3,18	2,81	2,61	2,48	2,39	2,33	2,28	2,24	2,21
13	3,14	2,76	2,56	2,43	2,35	2,28	2,23	2,20	2,16
14	3,10	2,73	2,52	2,39	2,31	2,24	2,19	2,15	2,12
15	3,07	2,70	2,49	2,36	2,27	2,21	2,16	2,12	2,09
16	3,05	2,67	2,46	2,33	2,24	2,18	2,13	2,09	2,06
17	3,03	2,64	2,44	2,31	2,22	2,15	2,10	2,06	2,03
18	3,01	2,62	2,42	2,29	2,20	2,13	2,08	2,04	2,00
19	2,99	2,61	2,40	2,27	2,18	2,11	2,06	2,02	1,98
20	2,97	2,59	2,38	2,25	2,16	2,09	2,04	2,00	1,96
21	2,96	2,57	2,36	2,23	2,14	2,08	2,02	1,98	1,95
22	2,95	2,56	2,35	2,22	2,13	2,06	2,01	1,97	1,93
23	2,94	2,55	2,34	2,21	2,11	2,05	1,99	1,95	1,92
24	2,93	2,54	2,33	2,19	2,10	2,04	1,98	1,94	1,91
25	2,92	2,53	2,32	2,18	2,09	2,02	1,97	1,93	1,89
26	2,91	2,52	2,31	2,17	2,08	2,01	1,96	1,92	1,88
27	2,90	2,51	2,30	2,17	2,07	2,00	1,95	1,91	1,87
28	2,89	2,50	2,29	2,16	2,06	2,00	1,94	1,90	1,87
29	2,89	2,50	2,28	2,15	2,06	1,99	1,93	1,89	1,86
30	2,88	2,49	2,28	2,14	2,05	1,98	1,93	1,88	1,85
40	2,84	2,44	2,23	2,09	2,00	1,93	1,87	1,83	1,79
60	2,79	2,39	2,18	2,04	1,95	1,87	1,82	1,77	1,74
120	2,75	2,35	2,13	1,99	1,90	1,82	1,77	1,72	1,68
∞	2,71	2,30	2,08	1,94	1,85	1,77	1,72	1,67	1,63

Forrás: Hajtman B. (1971): *Bevezetés a matematikai statisztikába pszichológusok számára.*

szabadságfoka

10	12	15	20	24	30	40	60	120	∞
60,2	60,7	61,2	61,7	62,0	62,3	62,5	62,8	63,1	63,3
9,39	9,41	9,42	9,44	9,45	9,46	9,47	9,47	9,48	9,49
5,23	5,22	5,20	5,18	5,18	5,17	5,16	5,15	5,14	5,13
3,92	3,90	3,87	3,84	3,83	3,82	3,80	3,79	3,78	3,76
3,30	3,27	3,24	3,21	3,19	3,17	3,16	3,14	3,12	3,10
2,94	2,90	2,87	2,84	2,82	2,80	2,78	2,76	2,74	2,72
2,70	2,67	2,63	2,59	2,58	2,56	2,54	2,51	2,49	2,47
2,54	2,50	2,46	2,42	2,40	2,38	2,36	2,34	2,32	2,29
2,42	2,38	2,34	2,30	2,28	2,25	2,23	2,21	2,18	2,16
2,32	2,28	2,24	2,20	2,18	2,16	2,13	2,11	2,08	2,06
2,25	2,21	2,17	2,12	2,10	2,08	2,05	2,03	2,00	1,97
2,19	2,15	2,10	2,06	2,04	2,01	1,99	1,96	1,93	1,90
2,14	2,10	2,05	2,01	1,98	1,96	1,93	1,90	1,88	1,85
2,10	2,05	2,01	1,96	1,94	1,91	1,89	1,86	1,83	1,80
2,06	2,02	1,97	1,92	1,90	1,87	1,85	1,82	1,79	1,76
2,03	1,99	1,94	1,89	1,87	1,84	1,81	1,78	1,75	1,72
2,00	1,96	1,91	1,86	1,84	1,81	1,78	1,75	1,72	1,69
1,98	1,93	1,89	1,84	1,81	1,78	1,75	1,72	1,69	1,66
1,96	1,91	1,86	1,81	1,79	1,76	1,73	1,70	1,67	1,63
1,94	1,89	1,84	1,79	1,77	1,74	1,71	1,68	1,64	1,61
1,92	1,88	1,83	1,78	1,75	1,72	1,69	1,66	1,62	1,59
1,90	1,86	1,81	1,76	1,73	1,70	1,67	1,64	1,60	1,57
1,89	1,84	1,80	1,74	1,72	1,69	1,66	1,62	1,59	1,55
1,88	1,83	1,78	1,73	1,70	1,67	1,64	1,61	1,57	1,53
1,87	1,82	1,77	1,72	1,69	1,66	1,63	1,59	1,56	1,52
1,86	1,81	1,76	1,71	1,68	1,65	1,61	1,58	1,54	1,50
1,85	1,80	1,75	1,70	1,67	1,64	1,60	1,57	1,53	1,49
1,84	1,79	1,74	1,69	1,66	1,63	1,59	1,56	1,52	1,48
1,83	1,78	1,73	1,68	1,65	1,62	1,58	1,55	1,51	1,47
1,82	1,77	1,72	1,67	1,64	1,61	1,57	1,54	1,50	1,46
1,76	1,71	1,66	1,61	1,57	1,54	1,51	1,47	1,42	1,38
1,71	1,66	1,60	1,54	1,51	1,48	1,44	1,40	1,35	1,29
1,65	1,60	1,55	1,48	1,45	1,41	1,37	1,32	1,26	1,19
1,60	1,55	1,49	1,42	1,38	1,34	1,30	1,24	1,17	1,00

Akadémiai Kiadó, Bp., Függelék, pp. 20—24.

IV. táblázat (folytatás)

$p = 5\%$

f_2 \ f_1	A száml áló 1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	161	200	216	225	230	234	237	239	241
2	18,5	19,0	19,2	19,2	19,3	19,3	19,4	19,4	19,4
3	10,1	9,55	9,28	9,12	9,01	8,94	8,89	8,85	8,81
4	7,71	6,94	6,59	6,39	6,26	6,16	6,09	6,04	6,00
5	6,61	5,79	5,41	5,19	5,05	4,95	4,88	4,82	4,77
6	5,99	5,14	4,76	4,53	4,39	4,28	4,21	4,15	4,10
7	5,59	4,74	4,35	4,12	3,97	3,87	3,79	3,73	3,68
8	5,32	4,46	4,07	3,84	3,69	3,58	3,50	3,44	3,39
9	5,12	4,26	3,86	3,63	3,48	3,37	3,29	3,23	3,18
10	4,96	4,10	3,71	3,48	3,33	3,22	3,14	3,07	3,02
11	4,84	3,98	3,59	3,36	3,20	3,09	3,01	2,95	2,90
12	4,75	3,89	3,49	3,26	3,11	3,00	2,91	2,85	2,80
13	4,67	3,81	3,41	3,18	3,03	2,92	2,83	2,77	2,71
14	4,60	3,74	3,34	3,11	2,96	2,85	2,76	2,70	2,65
15	4,54	3,68	3,29	3,06	2,90	2,79	2,71	2,64	2,59
16	4,49	3,63	3,24	3,01	2,85	2,74	2,66	2,59	2,54
17	4,45	3,59	3,20	2,96	2,81	2,70	2,61	2,55	2,49
18	4,41	3,55	3,16	2,93	2,77	2,66	2,58	2,51	2,46
19	4,38	3,52	3,13	2,90	2,74	2,63	2,54	2,48	2,42
20	4,35	3,49	3,10	2,87	2,71	2,60	2,51	2,45	2,39
21	4,32	3,47	3,07	2,84	2,68	2,57	2,49	2,42	2,37
22	4,30	3,44	3,05	2,82	2,66	2,55	2,46	2,40	2,34
23	4,28	3,42	3,03	2,80	2,64	2,53	2,44	2,37	2,32
24	4,26	3,40	3,01	2,78	2,62	2,51	2,42	2,36	2,30
25	4,24	3,39	2,99	2,76	2,60	2,49	2,40	2,34	2,28
26	4,23	3,37	2,98	2,74	2,59	2,47	2,39	2,32	2,27
27	4,21	3,35	2,96	2,73	2,57	2,46	2,37	2,31	2,25
28	4,20	3,34	2,95	2,71	2,56	2,45	2,36	2,29	2,24
29	4,18	3,33	2,93	2,70	2,55	2,43	2,35	2,28	2,22
30	4,17	3,32	2,92	2,69	2,53	2,42	2,33	2,27	2,21
40	4,08	3,23	2,84	2,61	2,45	2,34	2,25	2,18	2,12
60	4,00	3,15	2,76	2,53	2,37	2,25	2,17	2,10	2,04
120	3,92	3,07	2,68	2,45	2,29	2,17	2,09	2,02	1,96
∞	3,84	3,00	2,60	2,37	2,21	2,10	2,01	1,94	1,88

A nevező szabadságfoka

szabadságfoka									
10	12	15	20	24	30	40	60	120	∞
242	244	246	248	249	250	251	252	253	254
19,4	19,4	19,4	19,4	19,5	19,5	19,5	19,5	19,5	19,5
8,79	8,74	8,70	8,66	8,64	8,62	8,59	8,57	8,55	8,53
5,96	5,91	5,86	5,80	5,77	5,75	5,72	5,69	5,66	5,63
4,74	4,68	4,62	4,56	4,53	4,50	4,46	4,43	4,40	4,36
4,06	4,00	3,94	3,87	3,84	3,81	3,77	3,74	3,70	3,67
3,64	3,57	3,51	3,44	3,41	3,38	3,34	3,30	3,27	3,23
3,35	3,28	3,22	3,15	3,12	3,08	3,04	3,01	2,97	2,93
3,14	3,07	3,01	2,94	2,90	2,86	2,83	2,79	2,75	2,71
2,98	2,91	2,85	2,77	2,74	2,70	2,66	2,62	2,58	2,54
2,85	2,79	2,72	2,65	2,61	2,57	2,53	2,49	2,45	2,40
2,75	2,69	2,62	2,54	2,51	2,47	2,43	2,38	2,34	2,30
2,67	2,60	2,53	2,46	2,42	2,38	2,34	2,30	2,25	2,21
2,60	2,53	2,46	2,39	2,35	2,31	2,27	2,22	2,18	2,13
2,54	2,48	2,40	2,33	2,29	2,25	2,20	2,16	2,11	2,07
2,49	2,42	2,35	2,28	2,24	2,19	2,15	2,11	2,06	2,01
2,45	2,38	2,49	2,23	2,19	2,15	2,10	2,06	2,01	1,96
2,41	2,34	2,27	2,19	2,15	2,11	2,06	2,02	1,97	1,92
2,38	2,31	2,23	2,16	2,11	2,07	2,03	1,98	1,93	1,88
2,35	2,28	2,20	2,12	2,08	2,04	1,99	1,95	1,90	1,84
2,32	2,25	2,18	2,10	2,05	2,01	1,96	1,92	1,87	1,81
2,30	2,23	2,15	2,07	2,03	1,98	1,94	1,89	1,84	1,78
2,27	2,20	2,13	2,05	2,00	1,96	1,91	1,86	1,81	1,76
2,25	2,18	2,11	2,03	1,98	1,94	1,89	1,84	1,79	1,73
2,24	2,16	2,09	2,01	1,96	1,92	1,87	1,82	1,77	1,71
2,22	2,15	2,07	1,99	1,95	1,90	1,85	1,80	1,75	1,69
2,20	2,13	2,06	1,97	1,93	1,88	1,84	1,79	1,73	1,67
2,19	2,12	2,04	1,96	1,91	1,87	1,82	1,77	1,71	1,65
2,18	2,10	2,03	1,94	1,90	1,85	1,81	1,75	1,70	1,64
2,16	2,09	2,01	1,93	1,89	1,84	1,79	1,74	1,68	1,62
2,08	2,00	1,92	1,84	1,79	1,74	1,69	1,64	1,58	1,51
1,99	1,92	1,84	1,75	1,70	1,65	1,59	1,53	1,47	1,39
1,91	1,83	1,75	1,66	1,61	1,55	1,50	1,43	1,35	1,25
1,83	1,75	1,67	1,57	1,52	1,46	1,39	1,32	1,22	1,00

IV. táblázat (folytatás)

$p = 2{,}5\%$

f_2 \ f_1	A számláló								
	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	648	800	864	900	922	937	948	957	963
2	38,5	39,0	39,2	39,2	39,3	39,3	39,4	39,4	39,4
3	17,4	16,0	15,4	15,1	14,9	14,7	14,6	14,5	14,5
4	12,2	10,6	9,98	9,60	9,36	9,20	9,07	8,98	8,90
5	10,0	8,43	7,76	7,39	7,15	6,98	6,85	6,76	6,68
6	8,81	7,26	6,60	6,23	5,99	5,82	5,70	5,60	5,52
7	8,07	6,54	5,89	5,52	5,29	5,12	4,99	4,90	4,82
8	7,57	6,06	5,42	5,05	4,82	4,65	4,53	4,43	4,36
9	7,21	5,71	5,08	4,72	4,48	4,32	4,20	4,10	4,03
10	6,94	5,46	4,83	4,47	4,24	4,07	3,95	3,85	3,78
11	6,72	5,26	4,63	4,28	4,04	3,88	3,76	3,66	3,59
12	6,55	5,10	4,47	4,12	3,89	3,73	3,61	3,51	3,44
13	6,41	4,97	4,35	4,00	3,77	3,60	3,48	3,39	3,31
14	6,30	4,86	4,24	3,89	3,66	3,50	3,38	3,29	3,21
15	6,20	4,77	4,15	3,80	3,58	3,41	3,29	3,20	3,12
16	6,12	4,69	4,08	3,73	3,50	3,34	3,22	3,12	3,05
17	6,04	4,62	4,01	3,66	3,44	3,28	3,16	3,06	2,98
18	5,98	4,56	3,95	3,61	3,38	3,22	3,10	3,01	2,93
19	5,92	4,51	3,90	3,56	3,33	3,17	3,05	2,96	2,88
20	5,87	4,46	3,86	3,51	3,29	3,13	3,01	2,91	2,84
21	5,83	4,42	3,82	3,48	3,25	3,09	2,97	2,87	2,80
22	5,79	4,38	3,78	3,44	3,22	3,05	2,93	2,84	2,76
23	5,75	4,35	3,75	3,41	3,18	3,02	2,90	2,81	2,73
24	5,72	4,32	3,72	3,38	3,15	2,99	2,87	2,78	2,70
25	5,69	4,29	3,69	3,35	3,13	2,97	2,85	2,75	2,68
26	5,66	4,27	3,67	3,33	3,10	2,94	2,82	2,73	2,65
27	5,63	4,24	3,65	3,31	3,08	2,92	2,80	2,71	2,63
28	5,61	4,22	3,63	3,29	3,06	2,90	2,78	2,69	2,61
29	5,59	4,20	3,61	3,27	3,04	2,88	2,76	2,67	2,59
30	5,57	4,18	3,59	3,25	3,03	2,87	2,75	2,65	2,57
40	5,42	4,05	3,46	3,13	2,90	2,74	2,62	2,53	2,45
60	5,29	3,93	3,34	3,01	2,79	2,63	2,51	2,41	2,33
120	5,15	3,80	3,23	2,89	2,67	2,52	2,39	2,30	2,22
∞	5,02	3,69	3,12	2,79	2,57	2,41	2,29	2,19	2,11

A nevező szabadságfoka

szabadságfoka

10	12	15	20	24	30	40	60	120	∞
969	977	985	993	997	1000	1010	1010	1010	1020
39,4	39,4	39,4	39,4	39,5	39,5	39,5	39,5	39,5	39,5
14,4	14,3	14,3	14,2	14,1	14,1	14,0	14,0	13,9	13,9
8,84	8,75	8,66	8,56	8,51	8,46	8,41	8,36	8,31	8,26
6,62	6,52	6,43	6,33	6,28	6,23	6,18	6,12	6,07	6,02
5,46	5,37	5,27	5,17	5,12	5,07	5,01	4,96	4,90	4,85
4,76	4,67	4,57	4,47	4,42	4,36	4,31	4,25	4,20	4,14
4,30	4,20	4,10	4,00	3,95	3,89	3,84	3,78	3,73	3,67
3,96	3,87	3,77	3,67	3,61	3,56	3,51	3,45	3,39	3,33
3,72	3,62	3,52	3,42	3,37	3,31	3,26	3,20	3,14	3,08
3,53	3,43	3,33	3,23	3,17	3,12	3,06	3,00	2,94	2,88
3,37	3,28	3,18	3,07	3,02	2,96	2,91	2,85	2,79	2,72
3,25	3,15	3,05	2,95	2,89	2,84	2,78	2,72	2,66	2,60
3,15	3,05	2,95	2,84	2,79	2,73	2,67	2,61	2,55	2,49
3,06	2,96	2,86	2,76	2,70	2,64	2,59	2,52	2,46	2,40
2,99	2,89	2,79	2,68	2,63	2,57	2,51	2,45	2,38	2,32
2,92	2,82	2,72	2,62	2,56	2,50	2,44	2,38	2,32	2,25
2,87	2,77	2,67	2,56	2,50	2,44	2,38	2,32	2,26	2,19
2,82	2,72	2,62	2,51	2,45	2,39	2,33	2,27	2,20	2,13
2,77	2,68	2,57	2,46	2,41	2,35	2,29	2,22	2,16	2,09
2,73	2,64	2,53	2,42	2,37	2,31	2,25	2,18	2,11	2,04
2,70	2,60	2,50	2,39	2,33	2,27	2,21	2,14	2,08	2,00
2,67	2,57	2,47	2,36	2,30	2,24	2,18	2,11	2,04	1,97
2,64	2,54	2,44	2,33	2,27	2,21	2,15	2,08	2,01	1,94
2,61	2,51	2,41	2,30	2,24	2,18	2,12	2,05	1,98	1,91
2,59	2,49	2,39	2,28	2,22	2,16	2,09	2,03	1,95	1,88
2,57	2,47	2,36	2,25	2,19	2,13	2,07	2,00	1,93	1,85
2,55	2,45	2,34	2,23	2,17	2,11	2,05	1,98	1,91	1,83
2,53	2,43	2,32	2,21	2,15	2,09	2,03	1,96	1,89	1,81
2,51	2,41	2,31	2,20	2,14	2,07	2,01	1,94	1,87	1,79
2,39	2,29	2,18	2,07	2,01	1,94	1,88	1,80	1,72	1,64
2,27	2,17	2,06	1,94	1,88	1,82	1,74	1,67	1,58	1,48
2,16	2,05	1,94	1,82	1,76	1,69	1,61	1,53	1,43	1,31
2,05	1,94	1,83	1,71	1,64	1,57	1,48	1,39	1,27	1,00

IV. táblázat (folytatás)

$p = 1\%$

f_2 \ f_1 (A számláló)	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	4050	5000	5400	5620	5760	5860	5930	5980	6020
2	98,5	99,0	99,2	99,2	99,3	99,3	99,4	99,4	99,4
3	34,1	30,8	29,5	28,7	28,2	27,9	27,7	27,5	27,3
4	21,2	18,0	16,7	16,0	15,5	15,2	15,0	14,8	14,7
5	16,3	13,3	12,1	11,4	11,0	10,7	10,5	10,3	10,2
6	13,7	10,9	9,78	9,15	8,75	8,47	8,26	8,10	7,98
7	12,2	9,55	8,45	7,85	7,46	7,19	6,99	6,84	6,72
8	11,3	8,65	7,59	7,01	6,63	6,37	6,18	6,03	5,91
9	10,6	8,02	6,99	6,42	6,06	5,80	5,61	5,47	5,35
10	10,0	7,56	6,55	5,99	5,64	5,39	5,20	5,06	4,94
11	9,65	7,21	6,22	5,67	5,32	5,07	4,89	4,74	4,63
12	9,33	6,93	5,95	5,41	5,06	4,82	4,64	4,50	4,39
13	9,07	6,70	5,74	5,21	4,86	4,62	4,44	4,30	4,19
14	8,86	6,51	5,56	5,04	4,69	4,46	4,28	4,14	4,03
15	8,68	6,36	5,42	4,89	4,56	4,32	4,14	4,00	3,89
16	8,53	6,23	5,29	4,77	4,44	4,20	4,03	3,89	3,78
17	8,40	6,11	5,18	4,67	4,34	4,10	3,93	3,79	3,68
18	8,29	6,01	5,09	4,58	4,25	4,01	3,84	3,71	3,60
19	8,18	5,93	5,01	4,50	4,17	3,94	3,77	3,63	3,52
20	8,10	5,85	4,94	4,43	4,10	3,87	3,70	3,56	3,46
21	8,02	5,78	4,87	4,37	4,04	3,81	3,64	3,51	3,40
22	7,95	5,72	4,82	4,31	3,99	3,76	3,59	3,45	3,35
23	7,88	5,66	4,76	4,26	3,94	3,71	3,54	3,41	3,30
24	7,82	5,61	4,72	4,22	3,90	3,67	3,50	3,36	3,26
25	7,77	5,57	4,68	4,18	3,85	3,63	3,46	3,32	3,22
26	7,72	5,53	4,64	4,14	3,82	3,59	3,42	3,29	3,18
27	7,68	5,49	4,60	4,11	3,78	3,56	3,39	3,26	3,15
28	7,64	5,45	4,57	4,07	3,75	3,53	3,36	3,23	3,12
29	7,60	5,42	4,54	4,04	3,73	3,50	3,33	3,20	3,09
30	7,56	5,39	4,51	4,02	3,70	3,47	3,30	3,17	3,07
40	7,31	5,18	4,31	3,83	3,51	3,29	3,12	2,99	2,89
60	7,08	4,98	4,13	3,65	3,34	3,12	2,95	2,82	2,72
120	6,85	4,79	3,95	3,48	3,17	2,96	2,79	2,66	2,56
∞	6,63	4,61	3,78	3,32	3,02	2,80	2,64	2,51	2,41

A nevező szabadságfoka

szabadságfoka

10	12	15	20	24	30	40	60	120	∞
6060	6110	6160	6210	6230	6260	6290	6310	6340	6370
99,4	99,4	99,4	99,4	99,5	99,5	99,5	99,5	99,5	99,5
27,2	27,1	26,9	26,7	26,6	26,5	26,4	26,3	26,2	26,1
14,5	14,4	14,2	14,0	13,9	13,8	13,7	13,7	13,6	13,5
10,1	9,89	9,72	9,55	9,47	9,38	9,29	9,20	9,11	9,02
7,87	7,72	7,56	7,40	7,31	7,23	7,14	7,06	6,97	6,88
6,62	6,47	6,31	6,16	6,07	5,99	5,91	5,82	5,74	5,65
5,81	5,67	5,52	5,36	5,28	5,20	5,12	5,03	4,95	4,86
5,26	5,11	4,96	4,81	4,73	4,65	4,57	4,48	4,40	4,31
4,85	4,71	4,56	4,41	4,33	4,25	4,17	4,08	4,00	3,91
4,54	4,40	4,25	4,10	4,02	3,94	3,86	3,78	3,69	3,60
4,30	4,16	4,01	3,86	3,78	3,70	3,62	3,54	3,45	3,36
4,10	3,96	3,82	3,66	3,59	3,51	3,43	3,34	3,25	3,17
3,94	3,80	3,66	3,51	3,43	3,35	3,27	3,18	3,09	3,00
3,80	3,67	3,52	3,37	3,29	3,21	3,13	3,05	2,96	2,87
3,69	3,55	3,41	3,26	3,18	3,10	3,02	2,93	2,84	2,75
3,59	3,46	3,31	3,16	3,08	3,00	2,92	2,83	2,75	2,65
3,51	3,37	3,23	3,08	3,00	2,92	2,84	2,75	2,66	2,57
3,43	3,30	3,15	3,00	2,92	2,84	2,76	2,67	2,58	2,49
3,37	3,23	3,09	2,94	2,86	2,78	2,69	2,61	2,52	2,42
3,31	3,17	3,03	2,88	2,80	2,72	2,64	2,55	2,46	2,36
3,26	3,12	2,98	2,83	2,75	2,67	2,58	2,50	2,40	2,31
3,21	3,07	2,93	2,78	2,70	2,62	2,54	2,45	2,35	2,26
3,17	3,03	2,89	2,74	2,66	2,58	2,49	2,40	2,31	2,21
3,13	2,99	2,85	2,70	2,62	2,54	2,45	2,36	2,27	2,17
3,09	2,96	2,81	2,66	2,58	2,50	2,42	2,33	2,23	2,13
3,06	2,93	2,78	2,63	2,55	2,47	2,38	2,29	2,20	2,10
3,03	2,90	2,75	2,60	2,52	2,44	2,35	2,26	2,17	2,06
3,00	2,87	2,73	2,57	2,49	2,41	2,33	2,23	2,14	2,03
2,98	2,84	2,70	2,55	2,47	2,39	2,30	2,21	2,11	2,01
2,80	2,66	2,52	2,37	2,29	2,20	2,11	2,02	1,92	1,80
2,63	2,50	2,35	2,20	2,12	2,03	1,94	1,84	1,73	1,60
2,47	2,34	2,19	2,03	1,95	1,86	1,76	1,66	1,53	1,38
2,32	2,18	2,04	1,88	1,79	1,70	1,59	1,47	1,32	1,00

IV. táblázat (folytatás)

$p = 0{,}5\%$

f_2 \ f_1 (A számláló)	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	16 200	20 000	21 600	22 500	23 100	23 400	23 700	23 900	24 100
2	199	199	199	199	199	199	199	199	199
3	55,6	49,8	47,5	46,2	45,4	44,8	44,4	44,1	43,9
4	31,3	26,3	24,3	23,2	22,5	22,0	21,6	21,4	21,1
5	22,8	18,3	16,5	15,6	14,9	14,5	14,2	14,0	13,8
6	18,6	14,5	12,9	12,0	11,6	11,5	10,8	10,6	10,4
7	16,2	12,4	10,9	10,1	9,52	9,16	8,89	8,68	8,51
8	14,7	11,0	9,60	8,81	8,30	7,95	7,69	7,50	7,34
9	13,6	10,1	8,72	7,96	7,47	7,13	6,88	6,69	6,54
10	12,8	9,43	8,08	7,34	6,87	6,54	6,30	6,12	5,97
11	12,2	8,91	7,60	6,88	6,42	6,10	5,86	5,68	5,54
12	11,8	8,51	7,23	6,52	6,07	5,76	5,52	5,35	5,20
13	11,4	8,19	6,93	6,23	5,79	5,48	5,25	5,08	4,94
14	11,1	7,92	6,68	6,00	5,56	5,26	5,03	4,86	4,72
15	10,8	7,70	6,48	5,80	5,37	5,07	4,85	4,67	4,54
16	10,6	7,51	6,30	5,64	5,21	4,91	4,69	4,52	4,38
17	10,4	7,35	6,16	5,50	5,07	4,78	4,56	4,39	4,25
18	10,2	7,21	6,03	5,37	4,96	4,66	4,44	4,28	4,14
19	10,1	7,09	5,92	5,27	4,85	4,56	4,34	4,18	4,04
20	9,94	6,99	5,82	5,17	4,76	4,47	4,26	4,09	3,96
21	9,83	6,89	5,73	5,09	4,68	4,39	4,18	4,01	3,88
22	9,73	6,81	5,65	5,02	4,61	4,32	4,11	3,94	3,81
23	9,63	6,73	6,58	4,95	4,54	4,26	4,05	3,88	3,75
24	9,55	6,66	5,52	4,89	4,49	4,20	3,99	3,83	3,69
25	9,48	6,60	5,46	4,84	4,43	4,15	3,94	3,78	3,64
26	9,41	6,54	5,41	4,79	4,38	4,10	3,89	3,73	3,60
27	9,34	6,49	5,36	4,74	4,34	4,06	3,85	3,69	3,56
28	9,28	6,44	5,32	4,70	4,30	4,02	3,81	3,65	3,52
29	9,23	6,40	5,28	4,66	4,26	3,98	3,77	3,61	3,48
30	9,18	6,35	5,24	4,62	4,23	3,95	3,74	3,58	3,45
40	8,83	6,07	4,98	4,37	3,99	3,71	3,51	3,35	3,22
60	8,49	5,79	4,73	4,14	3,76	3,49	3,29	3,13	3,01
120	8,18	5,54	4,50	3,92	3,55	3,28	3,09	2,93	2,81
∞	7,88	5,30	4,28	3,72	3,35	3,09	2,90	2,74	2,62

A nevező szabadságfoka

szabadságfoka									
10	12	15	20	24	30	40	60	120	∞
24 200	24 400	24 600	24 800	24 900	25 000	25 100	25 300	25 400	25 500
199	199	199	199	199	199	199	199	199	200
43,7	43,4	43,1	42,8	42,6	42,5	42,3	42,1	42,0	41,8
21,0	20,7	20,4	20,2	20,0	19,9	19,8	19,6	19,5	19,3
13,6	13,4	13,1	12,9	12,8	12,7	12,5	12,4	12,3	12,1
10,1	10,0	9,81	9,59	9,47	9,36	9,24	9,12	9,00	8,88
8,38	8,18	7,97	7,75	7,65	7,53	7,42	7,31	7,19	7,08
7,21	7,01	6,81	6,61	6,50	6,40	6,29	6,18	6,06	5,95
6,42	6,23	6,03	5,83	5,73	5,62	5,52	5,41	5,30	5,19
5,85	5,66	5,47	5,27	5,17	5,07	4,97	4,86	4,75	4,64
5,42	5,24	5,05	4,86	4,76	4,65	4,55	4,44	4,34	4,23
5,09	4,91	4,72	4,53	4,43	4,33	4,23	4,12	4,01	3,90
4,82	4,64	4,46	4,27	4,17	4,07	3,97	3,87	3,76	3,65
4,60	4,43	4,25	4,06	3,96	3,86	3,76	3,66	3,55	3,44
4,42	4,25	4,07	3,88	3,79	3,69	3,58	3,48	3,37	3,26
4,27	4,10	3,92	3,73	3,64	3,54	3,44	3,33	3,22	3,11
4,14	3,97	3,79	3,61	3,51	3,41	3,31	3,21	3,10	2,98
4,03	3,86	3,68	3,50	3,40	3,30	3,20	3,10	2,99	2,87
3,93	3,76	3,59	3,40	3,31	3,21	3,11	3,00	2,89	2,78
3,85	3,68	3,50	3,32	3,22	3,12	3,02	2,92	2,81	2,69
3,77	3,60	3,43	3,24	3,15	3,05	2,95	2,84	2,73	2,61
3,70	3,54	3,36	3,18	3,08	2,98	2,88	2,77	2,66	2,55
3,64	3,47	3,30	3,12	3,02	2,92	2,82	2,71	2,60	2,48
3,59	3,42	3,25	3,06	2,97	2,87	2,77	2,66	2,55	2,43
3,54	3,37	3,20	3,01	2,92	2,82	2,72	2,61	2,50	2,38
3,49	3.33	3.15	2,97	2,87	2,77	2,67	2,56	2,45	2,33
3,45	3,28	3,11	2,93	2,83	2,73	2,63	2,52	2,41	2,29
3,41	3,25	3,07	2,89	2,79	2,69	2,59	2,48	2,37	2,25
3,38	3,21	3,04	2,86	2,76	2,66	2,56	2,45	2,33	2,21
3,34	3,18	3,01	2,82	2,73	2,63	2,52	2,42	2,30	2,18
3,12	2,95	2,78	2,60	2,50	2,40	2,30	2,18	2,06	1,93
2,90	2,74	2,57	2,39	2,29	2,19	2,08	1,96	1,83	1,69
2,71	2,54	2,37	2,19	2,09	1,98	1,87	1,75	1,61	1,43
2,52	2,36	2,19	2,00	1,90	1,79	1,67	1,53	1,36	1,00

V. TÁBLÁZAT

Az χ^2-eloszlás táblázata

f	Valószínűségek											
	0,99	0,95	0,90	0,80	0,70	0,50	0,30	0,20	0,10	0,05	0,01	0,001
1	$0{,}0^3157$	0,00393	0,0158	0,0642	0,148	0,455	1,074	1,642	2,706	3,841	6,635	10,827
2	0,0201	0,103	0,211	0,446	0,713	1,386	2,408	3,219	4,605	5,991	9,210	13,815
3	0,115	0,352	0,584	1,005	1,424	2,366	3,665	4,642	6,251	7,815	11,345	16,266
4	0,297	0,711	1,064	1,649	2,195	3,357	4,878	5,989	7,779	9,488	13,277	18,467
5	0,554	1,145	1,610	2,343	3,000	4,351	6,064	7,289	9,236	11,070	15,086	20,515
6	0,872	1,635	2,204	3,070	3,828	5,348	7,231	8,558	10,645	12,592	16,812	22,457
7	1,239	2,167	2,833	3,822	4,671	6,346	8,383	9,803	12,017	14,067	18,475	24,322
8	1,646	2,733	3,490	4,594	5,527	7,344	9,524	11,030	13,362	15,507	20,090	26,125
9	2,088	3,325	4,168	5,380	6,393	8,343	10,656	12,242	14,684	16,919	21,666	27,877
10	2,558	3,940	4,865	6,179	7,267	9,342	11,781	13,442	15,987	18,307	23,209	29,588
11	3,053	4,575	5,578	6,989	8,148	10,341	12,899	14,631	17,275	19,675	24,725	31,264
12	3,571	5,226	6,304	7,807	9,034	11,340	14,011	15,812	18,549	21,026	26,217	32,909
13	4,107	5,892	7,042	8,634	9,926	12,340	15,119	16,985	19,812	22,362	27,688	34,528
14	4,660	6,571	7,790	9,467	10,821	13,339	16,222	18,151	21,064	23,685	29,141	36,123
15	5,229	7,261	8,547	10,307	11,721	14,339	17,322	19,311	22,307	24,996	30,578	37,697
16	5,812	7,962	9,312	11,152	12,624	15,338	18,418	20,465	23,542	26,296	32,000	39,252
17	6,408	8,672	10,085	12,002	13,531	16,338	19,511	21,615	24,769	27,587	33,409	40,790
18	7,015	9,390	10,865	12,857	14,440	17,338	20,601	22,760	25,989	28,869	34,805	42,312
19	7,633	10,117	11,651	13,716	15,352	18,338	21,689	23,900	27,204	30,144	36,191	43,820
20	8,260	10,851	12,443	14,578	16,266	19,337	22,775	25,038	28,412	31,410	37,566	45,315
21	8,897	11,591	13,240	15,445	17,182	20,337	23,858	26,171	29,615	32,671	38,932	46,797
22	9,542	12,338	14,041	16,314	18,101	21,337	24,939	27,301	30,813	33,924	40,289	48,268
23	10,196	13,091	14,848	17,187	19,021	22,337	26,018	28,429	32,007	35,172	41,638	49,728
24	10,856	13,848	15,659	18,062	19,943	23,337	27,096	29,553	33,196	36,415	42,980	51,179
25	11,524	14,611	16,473	18,940	20,867	24,337	28,172	30,675	34,382	37,652	44,314	52,620

26	12,198	15,379	17,292	19,820	21,792	25,336	29,246	31,795	35,563	38,885	45,642	54,052
27	12,879	16,151	18,114	20,703	22,719	26,336	30,319	32,912	36,741	40,113	46,963	55,476
28	13,565	16,928	18,939	21,588	23,647	27,336	31,391	34,027	37,916	41,337	48,278	56,893
29	14,256	17,708	19,768	22,475	24,577	28,336	32,461	35,139	39,087	42,557	49,588	58,302
30	14,953	18,493	20,599	23,364	25,508	29,336	33,530	36,250	40,256	43,773	50,892	59,703
32	16,362	20,072	22,271	25,148	27,373	31,336	35,665	38,466	42,585	46,194	53,486	62,487
34	17,789	21,664	23,952	26,938	29,242	33,336	37,795	40,676	44,903	48,602	56,061	65,247
36	19,233	23,269	25,643	28,735	31,115	35,336	39,922	42,879	47,212	50,999	58,619	67,985
38	20,961	24,884	27,343	30,537	32,992	37,335	42,045	45,076	49,513	53,384	61,162	70,703
40	22,164	26,509	29,051	32,345	34,872	39,335	44,165	47,269	51,805	55,759	63,691	73,402
42	23,650	28,144	30,765	34,157	36,755	41,335	46,282	49,456	54,090	58,124	66,206	76,084
44	25,148	29,787	32,487	35,974	38,641	43,335	48,396	51,639	56,369	60,481	68,710	78,750
46	26,657	31,439	34,215	37,795	40,529	45,335	50,507	53,818	58,641	62,830	71,201	81,400
48	28,177	33,098	35,949	39,621	42,420	47,335	52,616	55,993	60,907	65,171	73,683	84,037
50	29,707	34,764	37,689	41,449	44,313	49,335	54,723	58,164	63,167	67,505	76,154	86,661
52	31,246	36,437	39,433	43,281	46,209	51,335	56,827	60,332	65,422	69,832	78,616	89,272
54	32,793	38,116	41,183	45,117	48,106	53,335	58,930	62,496	67,673	72,153	81,009	91,872
56	34,350	39,801	42,937	46,955	50,005	55,335	61,031	64,658	69, 919	74,468	83,513	94,461
58	35,913	41,492	44,696	48,797	51,906	57,335	63,129	66,816	72,160	76,778	85,950	97,039
60	37,485	43,188	46,459	50,641	53,809	59,335	65,227	68,972	74,397	79,082	88,379	99,607
62	39,063	44,889	48,226	52,487	55,714	61,335	67,322	71,125	76,630	81,381	90,802	102,166
64	40,649	46,595	49,996	54,336	57,620	63,335	69,416	73,276	78,860	83,675	93,217	104,716
66	42,240	48,305	51,770	56,188	59,527	65,335	71,508	75,424	81,085	85,965	95,626	107,258
68	43,838	50,020	53,548	58,042	61,436	67,335	73,600	77,571	83,308	88,250	98,028	109,791
70	45,442	51,739	55,329	59,898	63,346	69,334	75,689	79,715	85,527	90,531	100,425	112,317

Forrás: Hajtman B. (1971): *Bevezetés a matematikai statisztikába pszichológusok számára.* Akadémiai Kiadó, Bp., Függelék, p. 29.

VI. TÁBLÁZAT

A Mann–Whitney-próba

$p = 0{,}10$

n_2 \ n_1	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
	R_a R_f	R_a R_f	R_a R_f	R_a R_f	R_a R_f	R_a R_f	R_a R_f	R_a R_f	R_a R_f	R_a R_f	R_a R_f
4	11– 25	17– 33	24– 42	32– 52	41– 63	51– 75	62– 88	74–102	87–117	101–133	116–150
5	12– 28	19– 36	26– 46	34– 57	44– 68	54– 81	66– 94	78–109	91–125	106–141	121–159
6	13– 31	20– 40	28– 50	36– 62	46– 74	57– 87	69–101	82–116	95–133	110–150	126–168
7	14– 34	21– 44	29– 55	39– 66	49– 79	60– 93	72–108	85–124	99–141	115–158	131–177
8	15– 37	23– 47	31– 59	41– 71	51– 85	63– 99	75–115	89–131	104–148	119–167	136–186
9	16– 40	24– 51	33– 63	43– 76	54– 90	66–105	79–121	93–138	108–156	124–178	141–195
10	17– 43	26– 54	35– 67	45– 81	56– 96	69–111	82–128	97–145	112–164	128–184	146–204
11	18– 46	27– 58	37– 71	47– 86	59–101	72–117	86–134	100–153	116–172	133–192	151–213
12	19– 49	28– 62	38– 76	49– 91	62–106	75–123	89–141	104–160	120–180	138–200	156–222
13	20– 52	30– 65	40– 80	52– 95	64–112	78–129	92–148	108–167	125–187	142–209	161–231
14	21– 55	31– 69	42– 84	54–100	67–117	81–135	96–154	112–174	129–195	147–217	166–240
15	22– 58	33– 72	44– 88	56–105	69–123	84–141	99–161	116–181	133–203	152–225	171–249
16	24– 60	34– 76	46– 92	58–110	72–128	87–147	103–167	120–188	138–210	156–234	176–258
17	25– 63	35– 80	47– 97	61–114	75–133	90–153	106–174	123–196	142–218	161–242	181–267
18	26– 66	37– 83	49–101	63–119	77–139	93–159	110–180	127–203	146–226	165–251	186–276
19	27– 69	38– 87	51–105	65–124	80–144	96–165	113–187	131–210	150–234	170–259	191–285
20	28– 72	40– 90	53–109	67–129	83–149	99–171	117–193	135–217	154–242	175–267	196–294
21	29– 75	41– 94	55–113	69–134	85–155	102–177	120–200	139–224	159–249	180–275	202–302
22	30– 78	43– 97	57–117	72–138	88–160	105–183	123–207	142–232	163–257	184–284	207–311
23	31– 81	44–101	58–122	74–143	90–166	108–189	127–213	146–239	167–265	189–292	212–320
24	32– 84	45–105	60–126	76–148	93–171	111–195	130–220	150–246	171–273	194–300	217–329
25	33– 87	47–108	62–130	78–153	96–176	114–201	133–227	154–253	176–280	199–308	222–338
26	34– 90	48–112	64–134	81–157	98–182	117–207	137–233	158–260	180–288	203–317	227–347
27	35– 93	50–115	66–138	83–162	101–187	120–213	140–240	162–167	184–296	208–325	233–355
28	36– 96	51–119	67–143	85–167	103–193	123–219	144–246	166–274	189–303	213–333	238–364
29	37– 99	53–122	69–147	87–172	106–198	126–225	147–253	170–281	193–311	218–341	243–373
30	38–102	54–126	71–151	89–177	109–203	129–231	151–259	174–288	197–319	222–350	248–382
31	39–105	55–130	73–155	92–181	111–209	132–237	154–266	178–295	202–326	227–358	253–391
32	40–108	57–133	75–159	94–186	114–214	135–243	158–272	181–303	206–334	232–366	259–399
33	41–111	58–137	77–163	96–191	117–219	138–249	161–279	185–310	210–342	237–374	264–408
34	42–114	60–140	78–168	98–196	119–225	141–255	165–285	189–317	215–349	241–383	269–417
35	43–117	61–144	80–172	100–201	122–230	144–261	168–292	193–324	219–357	246–391	274–426
36	44–120	62–148	82–176	102–206	124–236	148–266	172–298	197–331	223–365	251–399	279–435
37	45–123	64–151	84–180	105–210	127–241	151–272	175–305	201–338	228–372	256–407	258–443
38	46–126	65–155	85–185	107–215	130–246	154–278	179–311	205–345	232–380	260–416	290–452
39	47–129	67–158	87–189	109–220	132–252	157–284	182–318	209–352	236–388	265–424	295–461
40	48–132	68–162	89–193	111–225	135–257	160–290	186–324	213–359	241–395	270–432	300–470
41	49–135	69–166	91–197	114–229	138–262	163–296	189–331	217–366	245–403	275–440	305–479
42	50–138	71–169	93–201	116–234	140–268	166–302	193–337	221–373	249–411	279–449	311–487
43	51–141	72–173	95–205	118–239	143–273	169–308	196–344	224–381	254–418	284–457	316–496
44	52–144	74–176	96–210	120–244	146–278	172–314	200–350	228–388	258–426	289–465	321–505
45	53–147	75–180	98–214	123–248	148–284	175–320	203–357	232–395	262–434	294–473	326–514
46	55–149	77–183	100–218	125–253	151–289	178–326	207–363	236–402	267–441	299–481	331–523
47	56–152	78–187	102–222	127–258	154–294	181–332	210–370	240–409	271–449	303–490	337–531
48	57–155	79–191	104–226	129–263	156–300	184–338	214–376	244–416	275–457	308–498	342–540
49	58–158	81–194	106–230	132–267	159–305	197–344	217–383	248–423	280–464	313–506	347–549
50	59–161	82–198	107–235	134–272	162–310	190–350	221–387	252–430	284–472	318–514	352–558

$p = 0{,}10$

15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25
R_a R_f	R_a R_f	R_a R_f	R_a R_f	R_a R_f	R_a R_f	R_a R_f	R_a R_f	R_a R_f	R_a R_f	R_a R_f
132–168	150–186	168–206	187–227	207–249	228–272	250–296	273–321	297–347	322–374	348–402
138–177	155–197	173–218	193–239	213–262	235–285	257–310	281–335	305–362	330–390	357–418
143–187	161–207	179–229	199–251	220–274	242–298	265–323	289–349	313–377	339–405	366–434
148–197	166–218	186–239	206–262	227–286	249–311	272–337	297–363	322–391	348–420	375–450
153–207	172–228	192–250	212–274	234–298	257–323	280–350	305–377	330–406	357–435	385–465
159–216	178–238	198–261	219–285	241–310	264–336	288–363	313–391	339–420	366–450	394–481
164–226	184–248	204–272	226–297	248–322	272–348	296–376	321–405	348–434	375–465	403–497
170–235	190–258	210–283	232–308	255–334	279–361	304–389	329–419	356–449	384–480	413–512
175–245	196–268	217–293	239–319	262–346	286–374	312–402	338–432	365–463	393–495	423–527
181–254	201–279	223–304	245–331	269–358	294–386	320–415	346–446	374–477	403–509	433–542
186–264	207–289	229–315	252–342	276–370	301–399	328–428	355–459	383–491	412–524	442–558
191–274	213–299	235–326	259–353	284–381	309–411	336–441	363–473	392–505	422–538	452–573
197–283	219–309	242–336	266–364	291–393	317–423	344–454	372–486	401–519	431–553	462–588
202–293	225–319	248–347	273–375	298–405	325–435	352–467	380–500	410–533	440–568	472–603
208–302	231–329	255–357	280–386	305–417	332–448	360–480	389–513	419–547	450–582	482–618
214–311	237–339	261–368	286–398	313–428	340–460	368–493	398–526	428–561	459–597	492–633
219–321	243–349	268–378	293–409	320–440	348–472	376–506	406–540	437–575	469–611	501–649
225–330	249–359	274–389	300–420	327–452	355–485	385–518	415–553	446–589	478–626	511–664
230–340	255–369	280–400	307–431	335–463	363–497	393–531	423–567	455–603	488–640	521–679
236–349	261–379	287–410	314–442	342–475	371–509	401–544	432–580	464–617	497–655	531–694
242–358	267–389	293–421	321–453	349–487	379–521	409–557	441–593	473–631	507–669	541–709
247–368	273–399	300–431	328–464	357–498	386–534	417–570	449–607	482–645	516–684	551–724
253–377	279–409	306–442	335–475	364–510	394–546	426–582	458–620	491–659	526–698	561–739
258–387	285–419	313–452	342–486	371–522	402–558	434–595	467–633	500–673	535–713	571–754
264–396	291–429	319–463	348–498	379–533	410–570	442–608	475–647	510–686	545–727	581–769
270–405	297–439	326–473	355–509	386–545	418–582	450–621	484–660	519–700	554–742	591–784
275–415	303–449	332–484	362–520	393–557	425–595	459–633	493–673	528–714	564–756	601–799
281–424	309–459	339–494	369–531	401–568	433–607	467–646	501–687	537–728	574–770	611–814
286–434	315–469	345–505	376–542	408–580	441–619	475–659	510–700	546–742	583–785	621–829
292–443	321–479	352–515	383–553	415–592	449–631	483–672	519–713	555–756	593–799	631–844
298–452	327–489	358–526	390–564	423–603	457–643	492–684	527–727	564–770	602–814	641–859
303–462	333–499	365–536	397–575	430–615	464–656	500–697	536–740	574–783	612–828	651–874
309–471	340–508	371–547	404–586	438–626	472–668	508–710	545–753	583–797	621–843	661–889
315–480	346–518	378–557	411–597	445–638	480–680	516–723	554–766	592–811	631–857	671–904
320–490	352–528	384–568	418–608	452–650	488–692	525–735	562–780	601–825	641–871	681–919
326–499	358–538	391–578	425–619	460–661	496–704	533–748	571–793	610–839	650–886	691–934
331–509	364–548	397–589	432–630	467–673	504–716	541–761	580–806	619–853	660–900	702–948
337–518	370–558	404–599	439–641	474–685	511–729	549–774	588–820	628–867	669–915	712–963
343–527	376–568	410–610	446–652	482–696	519–741	558–786	597–833	638–880	679–929	722–978
348–537	382–578	417–620	452–664	489–708	527–753	566–799	606–846	647–894	689–943	732–993
354–546	388–588	423–631	459–675	497–719	535–765	574–812	615–859	656–908	698–958	742–1008
360–555	394–598	430–641	466–686	504–731	543–777	583–824	623–873	665–922	708–972	752–1023
365–565	400–608	436–652	473–697	511–743	551–789	591–837	632–886	674–936	718–986	762–1038
371–574	406–618	443–662	480–708	519–754	558–802	599–850	641–899	683–950	727–1001	772–1053
377–583	412–628	449–673	487–719	526–766	566–814	607–863	649–913	693–963	737–1015	782–1068
382–593	418–638	456–683	494–730	534–777	574–826	616–875	658–926	702–977	746–1030	792–1083
388–602	425–647	462–694	501–741	541–789	582–838	624–888	667–939	711–991	756–1044	802–1098

VI. táblázat (folytatás)

$p = 0{,}05$

n_1 / n_2	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
	R_a R_f	R_a R_f	R_a R_f	R_a R_f	R_a R_f	R_a R_f	R_a R	R_a R_f	R_a R_f	R_a R_f	R_a R_f
4	10– 26	16– 34	23– 43	31– 53	40–64	49– 77	60– 90	72–104	85–119	99–135	114–152
5	11– 29	17– 38	24– 48	33– 58	42– 70	52– 83	63– 97	75–112	89–127	103–144	118–162
6	12– 32	18– 42	26– 52	34– 64	44– 76	55– 89	66–104	79–119	92–136	107–153	122–172
7	13– 35	20– 45	27– 57	36– 69	46– 82	57– 96	69–111	82–127	96–144	111–162	127–181
8	14– 38	21– 49	29– 61	38– 74	49– 87	60–102	72–118	85–135	100–152	115–171	131–191
9	14– 42	22– 53	31– 65	40– 79	51– 93	62–109	75–125	89–142	104–160	119–180	136–200
10	15– 45	23– 57	32– 70	42– 84	53– 99	65–115	78–132	92–150	107–169	124–188	141–209
11	16– 48	24– 61	34– 74	44– 89	55–105	68–121	81–139	96–157	111–177	128–197	145–219
12	17– 51	26– 64	35– 79	46– 94	58–110	71–127	84–146	99–165	115–185	132–206	150–228
13	18– 54	27– 68	37–83	48– 99	60–116	73–134	88–152	103–172	119–193	136–215	155–237
14	19– 57	28– 72	38– 88	50–104	62–122	76–140	91–159	106–180	123–201	141–223	160–246
15	20– 60	29– 76	40– 92	52–109	65–127	79–146	94–166	110–187	127–209	145–232	164–256
16	21– 63	30– 80	42– 96	54–114	67–133	82–152	97–173	113–195	131–217	150–240	169–265
17	21– 67	32– 83	43–101	56–119	70–138	84–159	100–180	117–202	135–225	154–249	174–274
18	22– 70	33– 87	45–105	58–124	72–144	87–165	103–187	121–209	139–233	159–257	179–283
19	23– 73	34– 91	46–110	60–129	74–150	90–171	107–193	124–217	143–241	163–266	184–292
20	24– 76	35– 95	48–114	62–134	77–155	93–177	110–200	128–224	147–249	167–275	188–302
21	25– 79	37– 98	50–118	64–139	79–161	95–184	113–207	131–232	141–257	172–283	193–311
22	26– 82	38–102	51–123	66–144	81–167	98–190	116–214	135–239	155–265	176–292	198–320
23	27– 85	39–106	53–127	68–149	84–172	101–196	119–221	139–246	159–273	180–301	203–329
24	27– 89	40–110	54–132	70–154	86–178	104–202	123–227	142–254	163–281	185–309	208–338
25	28– 92	42–113	56–136	72–159	89–183	107–208	126–234	146–261	167–289	189–318	213–347
26	29– 95	43–117	58–140	74–164	91–189	109–215	129–241	150–268	171–297	194–326	217–357
27	30– 98	44–121	59–145	76–169	93–195	112–221	132–248	153–276	175–305	198–335	222–366
28	31–101	45–125	61–149	78–174	96–200	115–227	135–255	157–283	179–313	203–343	227–375
29	32–104	47–128	63–153	80–179	98–206	118–233	139–261	160–291	183–321	207–352	232–384
30	33–107	48–132	64–158	82–184	101–211	121–239	142–268	164–298	187–329	211–361	237–393
31	34–110	49–136	66–162	84–189	103–217	123–246	145–275	167–306	191–337	216–369	242–402
32	34–114	50–140	67–167	86–194	106–222	126–252	148–282	171–313	195–345	220–378	246–412
33	35–117	52–143	69–171	88–199	108–228	129–258	151–289	175–320	199–353	225–386	251–421
34	36–120	53–147	71–175	90–204	110–234	132–264	155–295	178–328	203–361	229–395	256–430
35	37–123	54–151	72–180	92–209	113–239	135–270	158–302	182–335	207–369	234–403	261–439
36	38–126	55–155	74–184	94–214	115–245	137–277	161–309	185–343	211–377	238–412	266–448
37	39–129	57–158	76–188	96–219	117–251	140–283	164–316	189–350	215–385	242–421	271–457
38	40–132	58–162	77–193	98–224	120–256	143–289	167–323	193–357	219–393	247–429	275–467
39	41–135	59–166	79–197	100–229	122–262	146–295	170–330	196–365	223–401	251–438	280–476
40	41–139	60–170	80–202	102–234	125–267	149–301	174–336	200–372	227–409	256–446	285–485
41	42–142	61–174	82–206	104–239	127–273	151–308	177–343	204–379	231–417	260–455	290–494
42	43–145	63–177	84–210	106–244	129–279	154–314	180–350	207–387	235–425	265–463	295–503
43	44–148	64–181	85–215	108–249	132–284	157–320	183–357	211–394	239–433	269–472	300–512
44	45–151	65–185	87–219	110–254	134–290	160–326	186–364	214–402	243–441	273–481	305–521
45	46–154	66–189	88–224	112–259	137–295	163–332	190–370	218–409	247–449	278–489	309–531
46	47–157	68–192	90–228	114–264	139–301	165–339	193–377	222–416	251–457	282–498	314–540
47	48–160	69–196	92–232	116–269	141–307	168–345	196–384	225–424	255–465	287–506	319–549
48	48–164	70–200	93–237	118–274	144–312	171–351	199–391	229–431	259–473	291–515	324–558
49	49–167	71–204	95–241	120–279	146–318	174–357	202–398	232–439	263–481	296–523	329–567
50	50–170	73–207	97–245	122–284	149–323	177–363	206–404	236–446	267–489	300–532	334–576

$p = 0{,}05$

15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25
R_a R_f	R_a R_f	R_a R_f	R_a R_f	R_a R_f	R_a R_f	R_a R_f	R_a R_f	R_a R_f	R_a R_f	R_a R_f
130–170	147–189	164–210	183–231	203–253	224–276	246–300	269–325	293– 351	317– 379	343– 407
134–181	151–201	170–221	189–243	209–266	230–290	253–314	276–340	300– 367	325– 395	352– 423
139–191	157–211	175–233	195–255	215–279	237–303	260–328	283–355	308– 382	333– 411	360– 440
144–201	162–222	181–244	201–267	222–291	244–316	267–342	291–369	316– 397	342– 426	369– 456
149–211	167–233	187–255	207–279	228–304	251–329	274–356	298–384	324– 412	350– 442	378– 472
154–221	173–243	192–267	213–291	235–316	258–342	281–370	306–398	332– 427	359– 457	387– 488
159–231	178–254	198–278	219–303	242–328	265–355	289–383	314–412	340– 442	368– 472	396– 504
164–241	183–265	204–289	226–314	248–341	272–368	296–397	322–426	349– 456	376– 488	405– 520
169–251	189–275	210–300	232–326	255–353	279–381	304–410	330–440	357– 471	385– 503	414– 536
174–261	195–285	216–311	239–337	262–365	286–394	312–423	338–454	365– 486	394– 518	423– 552
179–271	200–296	222–322	245–349	269–377	293–407	319–437	346–468	374– 500	403– 533	433– 567
184–281	206–306	228–333	251–361	275–390	301–419	327–450	354–482	382– 515	412– 548	442– 583
190–290	211–317	234–344	258–372	282–402	308–432	335–463	362–496	391– 529	421– 563	451– 599
195–300	217–327	240–355	264–384	289–414	315–445	342–477	370–510	399– 544	429– 579	461– 614
200–310	223–337	246–366	271–395	296–426	322–458	350–490	378–524	408– 558	438– 594	470– 630
205–320	228–348	252–377	277–407	303–438	330–470	358–503	387–537	416– 573	447– 609	479– 646
211–329	234–358	258–388	283–419	310–450	337–483	365–517	395–551	425– 587	456– 624	489– 661
216–339	240–368	264–399	290–430	317–462	344–496	373–530	403–565	434– 601	465– 639	498– 677
221–349	245–379	270–410	296–442	324–474	352–508	381–543	411–579	442– 616	474– 654	508– 692
226–359	251–389	276–421	303–453	330–487	359–521	389–556	419–593	451– 630	483– 669	517– 708
232–368	257–399	282–432	309–465	337–499	366–534	396–570	427–607	459– 645	492– 684	527– 723
237–378	262–410	289–442	316–476	344–511	374–546	404–583	436–620	468– 659	502– 698	536– 739
242–388	268–420	295–453	322–488	351–523	381–559	412–596	444–634	477– 673	511– 713	545– 755
247–398	273–431	301–464	329–499	358–535	388–572	420–609	452–648	485– 688	520– 728	555– 770
253–407	279–441	307–475	335–511	365–547	396–584	427–623	460–662	494– 702	529– 743	564– 786
258–417	285–451	313–486	342–522	372–559	403–597	435–636	468–676	503– 716	538– 758	574– 801
263–427	291–461	319–497	348–534	379–571	411–609	443–649	477–689	511– 731	547– 773	584– 816
268–437	296–472	325–508	355–545	386–583	418–622	451–662	485–703	520– 745	556– 788	593– 832
274–446	302–482	331–519	362–556	393–595	425–635	459–675	493–717	529– 759	565– 803	603– 847
279–456	308–492	337–530	368–568	400–607	433–647	467–688	501–731	537– 744	574– 818	612– 863
284–466	313–503	343–541	375–579	407–619	440–660	474–702	510–744	546– 788	583– 833	622– 878
289–476	319–513	350–551	381–591	414–631	447–673	482–715	518–758	555– 802	592– 848	631– 894
295–485	325–523	356–562	388–602	421–643	455–685	490–728	526–772	563– 817	602– 862	641– 909
300–495	330–534	362–573	394–614	428–655	462–698	498–741	534–786	572– 831	611– 877	650– 925
305–505	336–544	368–584	401–625	435–667	470–710	506–754	543–799	581– 845	620– 892	660– 940
311–514	342–554	374–595	407–637	442–679	477–723	514–767	551–813	589– 860	629– 907	670– 955
316–524	347–565	380–606	414–648	449–691	485–735	521–781	559–827	598– 874	638– 922	679– 971
321–534	353–575	386–617	420–660	456–703	492–748	529–794	568–840	607– 888	647– 937	689– 986
326–544	359–585	392–628	427–671	463–715	499–761	537–807	576–854	616– 902	656– 952	698–1002
332–553	365–595	399–638	434–682	470–727	507–773	545–820	584–868	624– 917	666– 966	708–1017
337–563	370–606	405–649	440–694	477–739	514–786	553–833	592–882	633– 931	675– 981	717–1033
342–573	376–616	411–660	447–705	484–751	522–798	561–846	601–895	642– 945	684– 996	727–1048
347–583	382–626	417–671	453–717	491–763	529–811	568–860	609–909	651– 959	693–1011	737–1063
353–592	387–637	423–682	460–728	498–775	536–824	576–873	617–923	659– 974	702–1026	746–1079
358–602	393–647	429–693	466–740	505–787	544–836	584–886	626–936	668– 988	711–1041	756–1094
363–612	399–657	435–704	473–751	512–799	551–849	592–899	634–950	677–1002	721–1055	766–1109
369–621	405–667	441–715	480–762	519–811	559–861	600–912	642–964	685–1017	730–1070	775–1125

VI. táblázat (folytatás)

$p = 0{,}02$

n_2 \ n_1	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
	R_a R_f	R_a R_f	R_a R_f	R_a R_f	R_a R_f	R_a R_f	R_a R_f	R_a R_f	R_a R_f	R_a R_f	R_a R_f
4	—	15–35	22–44	29–55	38–66	48–78	58–92	70–106	83–121	96–138	111–155
5	10–30	16–39	23–49	31–60	40–72	50–85	61–99	73–114	86–130	100–147	115–165
6	11–33	17–43	24–54	32–66	42–78	52–92	63–107	75–123	89–139	103–157	118–176
7	11–37	18–47	25–59	34–71	43–85	54–99	66–114	78–131	92–148	107–166	122–186
8	12–40	19–51	27–63	35–77	45–91	56–106	68–122	81–139	95–157	111–175	127–195
9	13–43	20–55	28–68	37–82	47–97	59–112	71–129	84–147	99–165	114–185	131–205
10	13–47	21–59	29–73	39–87	49–103	61–119	74–136	88–154	102–174	118–194	135–215
11	14–50	22–63	30–78	40–93	51–109	63–126	77–143	91–162	106–182	122–203	139–225
12	15–53	23–67	32–82	42–98	53–115	66–132	79–151	94–170	109–191	126–212	143–235
13	15–57	24–71	33–87	44–103	56–120	68–139	82–158	97–178	113–199	130–221	148–244
14	16–60	25–75	34–92	45–109	58–126	71–145	85–165	100–186	116–208	134–230	152–254
15	17–63	26–79	36–96	47–114	60–132	73–152	88–172	103–194	120–216	138–239	156–264
16	17–67	27–83	37–101	49–119	62–138	76–158	91–179	107–201	124–224	142–248	161–273
17	18–70	28–87	39–105	51–124	64–144	78–165	93–187	110–209	127–233	146–257	165–283
18	19–73	29–91	40–110	52–130	66–150	81–171	96–194	113–217	131–241	150–266	169–293
19	19–77	30–95	41–115	54–135	68–156	83–178	99–201	116–225	134–250	154–275	174–302
20	20–80	31–99	43–119	56–140	70–162	85–185	102–208	119–233	138–258	157–285	178–312
21	21–83	32–103	44–124	58–145	72–168	88–191	105–215	123–240	142–266	161–294	182–322
22	21–87	33–107	45–129	59–151	74–174	90–198	108–222	126–248	145–275	165–303	187–331
23	22–90	34–111	47–133	61–156	76–180	93–204	110–230	129–256	149–283	169–312	191–341
24	23–93	35–115	48–138	63–161	78–186	95–211	113–237	132–264	152–292	173–321	196–350
25	23–97	36–119	50–142	64–167	81–191	98–217	116–244	135–272	156–300	177–330	220–360
26	24–100	37–123	51–147	66–172	83–197	100–224	119–251	138–280	159–309	181–339	204–370
27	25–103	38–127	52–152	68–177	85–203	103–230	121–259	142–287	163–317	185–348	209–379
28	26–106	39–131	54–156	70–182	87–209	105–237	124–266	145–295	167–325	189–357	213–389
29	26–110	40–135	55–161	71–188	89–215	108–243	127–273	148–303	170–334	193–366	218–398
30	27–113	41–139	56–166	73–193	91–221	110–250	130–280	151–311	174–342	198–374	222–408
31	28–116	42–143	58–170	75–198	93–227	112–257	133–287	155–318	178–350	202–383	227–417
32	28–120	43–147	59–175	77–203	95–233	115–263	136–294	158–326	181–359	206–392	231–427
33	29–123	44–151	61–179	78–209	97–239	117–270	139–301	161–334	185–367	210–401	235–437
34	30–126	45–155	62–184	79–215	99–245	120–276	141–309	164–342	189–375	214–410	240–446
35	30–130	46–159	63–189	81–220	101–251	122–283	144–316	168–349	192–384	218–419	244–456
36	31–133	47–163	65–193	83–225	103–257	125–289	147–323	171–357	196–392	222–428	249–465
37	32–136	48–167	66–198	84–231	105–263	127–296	150–330	174–365	199–401	226–437	253–475
38	32–140	49–171	67–203	86–236	107–269	129–303	153–337	177–373	203–409	230–446	258–484
39	33–143	50–175	69–207	88–241	109–275	132–309	156–344	181–380	207–417	234–455	262–494
40	34–146	51–179	70–212	90–246	111–281	134–316	159–351	184–388	210–426	238–464	267–503
41	34–150	52–183	72–216	91–252	113–287	137–322	161–359	187–396	214–434	242–473	271–513
42	35–153	53–187	73–221	93–257	116–292	139–329	164–366	190–404	218–442	246–482	276–522
43	35–157	54–191	74–226	95–262	118–298	142–335	167–373	194–411	221–451	250–491	280–532
44	36–160	55–195	76–230	97–267	120–304	144–342	170–380	197–419	225–459	254–500	284–542
45	37–163	56–199	77–235	98–273	122–310	147–348	173–387	200–427	229–467	258–509	289–551
46	37–167	57–203	78–240	100–278	124–316	149–355	176–394	203–435	232–476	262–518	293–561
47	38–170	58–207	80–244	102–283	126–322	152–361	179–401	207–442	236–484	266–527	298–570
48	39–173	59–211	81–249	103–289	128–328	154–368	181–409	210–450	240–492	270–536	302–580
49	39–177	60–215	82–254	105–294	130–334	157–374	184–416	213–458	243–501	274–545	307–589
50	40–180	61–219	84–258	107–299	132–340	159–381	187–423	216–466	247–509	279–553	311–599

$p = 0{,}02$

15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25
R_a R_f	R_a R_f	R_a R_f	R_a R_f	R_a R_f	R_a R_f	R_a R_f	R_a R_f	R_a R_f	R_a R_f	R_a R_f
127–173	143–193	161–213	180–234	199–257	220–280	242–304	264–330	288– 356	313– 383	338– 412
131–184	148–204	166–225	185–247	205–270	226–294	248–319	271–345	295– 372	320– 400	346– 429
135–195	152–216	171–237	190–260	210–284	232–308	254–334	277–361	302– 388	327– 417	354– 446
139–206	157–227	176–249	195–273	216–297	238–322	261–348	284–376	309– 404	335– 433	361– 464
144–216	162–238	181–261	201–285	222–310	244–336	267–363	291–391	316– 420	342– 450	370– 480
148–227	167–249	186–273	207–297	228–323	250–350	274–377	298–406	324– 435	350– 466	378– 497
153–237	172–260	191–285	212–310	234–336	257–363	281–391	306–420	331– 451	358– 482	386– 514
157–248	177–271	197–296	218–322	240–349	263–377	288–405	313–435	339– 466	366– 498	394– 531
162–258	182–282	202–308	224–334	246–362	270–390	295–419	320–450	347– 481	374– 514	403– 547
167–268	187–293	208–319	230–346	253–374	276–404	301–434	327–465	354– 497	382– 530	411– 564
171–279	192–304	213–331	235–359	259–387	283–417	308–448	335–479	362– 512	391– 545	420– 580
176–289	197–315	218–343	241–371	265–400	290–430	315–462	342–494	370– 527	399– 561	429– 596
181–299	202–326	224–354	247–383	271–413	296–444	323–475	350–508	378– 542	407– 577	437– 613
185–310	207–337	229–366	253–395	278–425	303–457	330–489	357–523	386– 557	416– 592	446– 629
190–320	212–348	235–377	259–407	284–438	310–470	337–503	365–537	394– 572	424– 608	455– 645
195–330	217–359	241–388	265–419	290–451	317–483	344–517	373–551	402– 587	432– 624	464– 661
200–340	222–370	246–400	271–431	297–463	323–497	351–531	380–566	410– 602	441– 639	473– 677
204–351	228–380	252–411	277–443	303–476	330–510	359–544	388–580	418– 617	449– 655	482– 693
209–361	233–391	257–423	283–455	310–488	337–523	366–558	395–595	426– 632	458– 670	490– 710
214–371	238–402	263–434	289–467	316–501	344–536	373–572	403–609	434– 647	466– 686	499– 726
219–381	243–413	269–445	295–479	322–514	351–549	380–586	411–623	442– 662	475– 701	508– 742
224–391	248–424	274–457	301–491	329–526	358–562	388–599	418–638	450– 677	483– 717	517– 758
229–401	254–434	280–468	307–503	335–539	365–575	395–613	426–652	458– 692	492– 732	526– 774
233–412	259–445	285–480	313–515	342–551	371–589	402–627	434–666	466– 707	500– 748	535– 790
238–422	264–456	291–491	319–527	348–564	378–602	409–641	441–681	475– 721	509– 763	544– 806
243–432	269–467	297–502	325–539	355–576	385–615	417–654	449–695	483– 736	517– 779	553– 822
248–442	275–477	302–514	331–551	361–589	392–628	424–668	457–709	491– 751	526– 794	562– 838
253–452	280–488	308–525	337–563	368–601	399–641	431–682	465–723	499– 766	534– 810	571– 854
258–462	285–499	314–536	343–575	374–614	406–654	439–695	472–738	507– 781	543– 825	580– 870
262–473	290–510	319–548	349–587	381–626	413–667	446–709	480–752	515– 796	552– 840	589– 886
267–483	296–520	325–559	356–598	387–639	420–680	453–723	488–766	523– 811	560– 856	598– 902
272–493	301–531	331–570	362–610	394–651	427–693	461–736	496–780	532– 825	569– 871	607– 918
277–503	306–542	336–582	368–622	400–664	433–707	468–750	503–795	540– 840	577– 887	616– 934
282–513	311–553	342–593	374–634	407–676	440–720	475–764	511–809	548– 855	586– 902	625– 950
287–523	317–563	348–604	380–646	413–689	447–733	483–777	519–823	556– 870	595– 917	634– 966
292–533	322–574	353–616	386–658	420–701	454–746	490–791	527–837	564– 885	603– 933	643– 982
296–544	327–585	359–627	392–670	426–714	461–759	497–805	534–852	573– 899	612– 948	652– 998
301–554	333–595	365–638	398–682	433–726	468–772	505–818	542–866	581– 914	620– 964	661–1014
306–564	338–606	371–649	404–694	439–739	475–785	512–832	550–880	589– 929	629– 979	670–1030
311–574	343–617	376–661	410–706	446–751	482–798	519–846	558–894	597– 944	638– 994	679–1046
316–584	348–628	382–672	416–718	452–764	489–811	527–859	565–909	605– 959	646–1010	688–1062
321–594	354–638	388–683	423–729	459–776	496–824	534–873	573–923	614– 973	655–1025	697–1078
326–604	359–649	393–695	429–741	465–789	503–837	541–837	581–937	622– 988	663–1041	706–1094
330–615	364–660	399–706	435–753	472–801	510–850	549–900	589–951	630–1003	672–1056	715–1110
335–625	369–671	405–717	441–765	478–814	517–863	556–914	597–965	638–1018	681–1071	724–1126
340–635	375–681	410–729	447–777	485–826	524–876	563–928	604–980	646–1033	689–1087	733–1142
345–645	380–692	416–740	453–789	491–839	531–889	571–941	612–994	655–1047	698–1102	743–1157

VI. táblázat (folytatás)

$p = 0{,}01$

n_2 \ n_1	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
	R_a R_f	R_a R_f	R_a R_f	R_a R_f	R_a R_f	R_a R_f	R_a R_f	R_a R_f	R_a R_f	R_a K_f	R_a R_f
4	—	—	21–45	28–56	37–67	46–80	57–93	68–108	81–123	94–140	109–157
5	—	15–40	22–50	29–62	38–74	48–87	59–101	71–116	84–132	98–149	112–168
6	10–34	16–44	23–55	31–67	40–80	50–94	61–109	73–125	87–141	101–159	116–178
7	10–38	16–49	24–60	32–73	42–86	52–101	64–116	76–133	90–150	104–169	120–188
8	11–41	17–53	25–65	34–78	43–93	54–108	66–124	79–141	93–159	108–178	123–199
9	11–45	18–57	26–70	35–84	45–99	56–115	68–132	82–149	96–168	111–188	127–209
10	12–48	19–61	27–75	37–89	47–105	58–122	71–139	84–158	99–177	115–197	131–219
11	12–52	20–65	28–80	38–95	49–111	61–128	73–147	87–166	102–186	118–207	135–229
12	13–55	21–69	30–84	40–100	51–117	63–135	76–154	90–174	105–195	122–216	139–239
13	13–59	22–73	31–89	41–106	53–123	65–142	79–161	93–182	109–203	125–226	143–249
14	14–62	22–78	32–94	43–111	54–130	67–149	81–169	96–190	112–212	129–235	147–259
15	15–65	23–82	33–99	44–117	56–136	69–156	84–176	99–198	115–221	133–244	151–269
16	15–69	24–86	34–104	46–122	58–142	72–162	86–184	102–206	119–229	136–254	155–279
17	16–72	25–90	36–108	47–128	60–148	74–169	89–191	105–214	122–238	140–263	160–288
18	16–76	26–94	37–113	49–133	62–154	76–176	92–198	108–222	125–247	144–272	164–298
19	17–79	27–98	38–118	50–139	64–160	78–183	94–206	111–230	121–255	148–281	168–308
20	18–82	28–102	39–123	52–144	66–166	81–189	97–213	114–238	132–264	152–290	172–318
21	18–86	29–106	40–128	53–150	68–172	83–196	99–221	117–246	136–272	155–300	176–328
22	19–89	29–111	42–132	55–155	70–178	85–203	102–228	120–254	139–281	159–309	180–338
23	19–93	30–115	43–137	57–160	71–185	88–209	105–235	123–262	142–290	163–318	184–348
24	20–96	31–119	44–142	58–166	73–191	90–216	107–243	126–270	146–298	167–327	188–358
25	20–100	32–123	45–147	60–171	75–197	92–223	110–250	129–278	149–307	170–337	193–367
26	21–103	33–127	46–152	61–177	77–203	94–230	113–257	132–286	152–316	174–376	197–377
27	22–106	34–131	48–156	63–182	79–209	97–236	115–265	135–294	156–324	178–355	201–387
28	22–110	35–135	49–161	64–188	81–215	99–243	118–272	138–302	159–333	182–364	205–397
29	23–113	36–139	50–166	66–193	83–221	101–250	120–280	141–310	163–341	185–374	209–407
30	23–117	37–143	51–171	68–198	85–227	103–257	123–287	144–318	166–350	189–383	213–417
31	24–120	37–148	53–175	69–204	87–233	106–263	126–294	147–326	169–359	193–392	217–427
32	24–124	38–152	54–180	71–209	89–239	108–270	128–302	150–334	173–367	197–401	222–436
33	25–127	39–156	55–185	72–215	90–246	110–277	131–309	153–342	176–376	200–411	226–446
34	26–130	40–160	56–190	73–221	92–252	112–284	134–316	156–350	180–384	204–420	230–456
35	26–134	41–164	57–195	75–226	94–258	114–291	136–324	159–358	183–393	208–429	234–466
36	27–137	42–168	58–200	76–232	96–264	117–297	139–331	162–366	186–402	212–438	238–476
37	28–140	43–172	60–204	78–237	98–270	119–304	141–339	165–374	190–410	216–447	242–486
38	28–144	44–176	61–209	79–243	100–276	121–311	144–346	168–382	193–419	219–457	274–495
39	29–147	45–180	62–214	81–248	102–282	123–318	147–353	171–390	197–427	223–466	251–505
40	29–151	46–184	63–219	82–254	103–289	126–324	149–361	174–398	200–436	227–475	255–515
41	30–154	46–189	65–223	84–259	105–295	128–331	152–368	177–406	203–445	231–484	259–525
42	31–157	47–193	66–228	85–265	107–301	130–338	155–375	180–414	207–453	234–494	263–535
43	31–161	48–197	67–233	87–270	109–307	133–344	157–383	183–422	210–462	238–503	268–544
44	32–164	49–201	68–238	88–276	111–313	135–351	160–390	186–430	214–470	242–512	272–554
45	32–168	50–205	69–243	90–281	113–319	137–358	162–398	189–438	217–479	246–521	276–564
46	33–171	51–209	71–247	91–287	115–325	139–365	165–405	192–446	220–488	250–530	280–574
47	34–174	52–213	72–252	93–292	117–331	142–371	168–412	195–454	224–496	253–540	284–584
48	34–178	53–217	73–257	95–297	118–338	144–378	170–420	198–462	227–505	257–549	289–593
49	35–181	54–221	74–262	96–303	120–344	146–385	173–427	201–470	231–513	261–558	293–603
50	36–184	55–225	76–266	98–308	122–350	148–392	176–434	204–478	234–522	265–567	297–613

Forrás: Hajtmann B. (1971): *Bevezetés a matematikai statisztikába pszichológusok számára.*

$p = 0{,}01$

15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25
R_a R_f	R_a R_f	R_a R_f	R_a R_f	R_a R_f	R_a R_f	R_a R_f	R_a R_f	R_a R_f	R_a R_f	R_a R_f
125–175	141–195	159–215	177–237	197–259	218–282	239–307	262– 332	285– 359	310– 386	335– 415
128–187	145–207	163–228	182–250	202–273	223–297	245–322	267– 349	291– 376	316– 404	342– 433
132–198	149–219	168–240	187–263	207–287	228–312	250–338	274– 364	298– 392	323– 421	349– 451
136–209	154–230	172–253	192–276	212–301	234–326	256–353	280– 380	305– 408	330– 438	357– 468
140–220	158–242	177–265	197–289	218–314	240–340	263–367	287– 395	311– 425	337– 455	364– 486
144–231	163–253	182–277	202–302	223–328	246–354	269–382	293– 411	319– 440	345– 471	372– 503
149–241	167–265	187–289	208–314	229–341	252–368	275–397	300– 426	326– 456	352– 488	380– 520
153–252	172–276	192–301	213–327	235–354	258–382	282–411	307– 441	333– 472	360– 504	388– 537
157–263	177–287	197–313	218–340	241–367	264–396	289–425	314– 456	340– 488	368– 520	396– 554
162–273	181–299	202–325	224–352	247–380	271–409	295–440	321– 471	348– 503	376– 536	404– 571
166–284	186–310	208–336	230–364	253–393	277–423	302–454	328– 486	355– 519	383– 553	413– 587
171–294	191–321	213–348	235–377	259–406	283–437	309–468	335– 501	363– 534	391– 569	421– 604
175–305	196–332	218–360	241–389	265–419	290–450	315–483	342– 516	370– 550	399– 585	429– 621
180–315	201–343	223–372	246–402	271–432	296–464	322–497	350– 530	378– 565	407– 601	437– 638
184–326	206–354	228–384	252–414	277–445	302–478	329–511	357– 545	385– 581	415– 617	446– 654
189–336	211–365	234–395	258–426	283–458	309–491	336–525	364– 560	393– 596	423– 633	454– 671
193–347	216–376	239–407	263–439	289–471	315–505	343–539	371– 575	401– 611	431– 649	463– 687
198–357	220–388	244–419	269–451	295–484	322–518	350–553	378– 590	408– 627	439– 665	471– 704
202–368	225–399	250–430	275–463	301–497	328–532	356–568	386– 604	416– 642	447– 681	480– 720
207–378	230–410	255–442	280–476	307–510	335–545	363–582	393– 619	424– 657	455– 697	488– 737
211–389	235–421	260–454	286–488	313–523	341–559	370–596	400– 634	431– 673	464– 712	497– 753
216–399	240–432	265–466	292–500	319–536	348–572	377–610	408– 648	439– 688	472– 728	505– 770
220–410	245–443	271–477	298–512	325–549	354–586	384–624	415– 663	447– 703	480– 744	514– 786
225–420	250–454	276–489	303–525	332–561	361–599	391–638	422– 678	455– 718	488– 760	522– 803
229–431	255–465	281–501	309–537	338–574	367–613	398–652	430– 692	462– 734	496– 776	531– 819
234–441	260–476	287–512	315–549	344–587	374–626	405–666	437– 707	470– 749	504– 792	540– 835
239–451	265–487	292–524	321–561	350–600	380–640	412–680	444– 722	478– 764	513– 807	548– 852
243–462	270–498	298–535	326–574	356–613	387–653	419–694	452– 736	486– 779	521– 823	557– 868
248–472	275–509	303–547	332–586	362–626	394–666	426–708	459– 751	494– 794	529– 839	565– 885
252–483	280–520	308–559	338–598	368–639	400–680	433–722	467– 765	501– 810	537– 855	574– 901
257–493	285–531	314–570	344–610	375–651	407–693	440–736	474– 780	509– 825	545– 871	583– 917
261–504	290–542	319–582	349–623	381–664	413–707	447–750	481– 795	517– 840	554– 886	591– 934
266–514	295–553	324–594	355–635	387–677	420–720	454–764	489– 809	525– 855	562– 902	600– 950
270–525	300–564	330–605	361–647	393–690	426–734	461–778	496– 824	533– 870	570– 918	608– 967
275–535	305–575	335–617	367–659	399–703	433–747	468–792	504– 838	540– 886	578– 934	617– 983
280–545	310–586	340–629	372–672	406–715	440–760	475–806	511– 853	548– 901	587– 949	626– 999
284–556	314–598	346–640	378–684	412–728	446–774	482–820	518– 868	556– 916	595– 965	634–1016
289–566	319–609	351–652	384–696	418–741	453–787	489–834	526– 882	564– 931	603– 981	643–1032
293–577	324–620	357–663	390–708	424–754	459–801	496–848	533– 897	572– 946	611– 997	652–1048
298–587	329–631	362–675	396–720	430–767	466–814	503–862	541– 911	580– 961	620–1012	660–1065
303–597	334–642	367–687	401–733	437–779	473–827	510–876	548– 926	587– 977	628–1028	669–1081
307–608	339–653	373–698	407–745	443–792	479–841	517–890	556– 940	595– 992	636–1044	678–1097
312–618	344–664	378–710	413–757	449–805	486–854	524–904	563– 955	603–1007	644–1060	687–1113
316–629	349–675	384–721	419–769	455–818	493–867	531–918	570– 970	611–1022	653–1075	695–1130
321–639	354–686	389–733	425–781	461–831	499–881	538–932	578– 984	619–1037	661–1091	704–1146
325–650	359–697	394–745	430–794	468–843	506–894	545–946	585– 999	627–1052	669–1107	713–1162
330–660	364–708	400–756	436–806	474–856	512–908	552–960	593–1013	635–1067	677–1123	721–1179

Akadémiai Kiadó, Bp., Függelék, pp. 30–37.

VII. TÁBLÁZAT

Kendall-féle τ szignifikancia táblázata N ≦ 10-re

|S|	*n* értéke				|S|	*n* értéke		
	4	5	8	9		6	7	10
2	75	82	90	92	3	72	77	86
4	33	48	72	76	5	47	56	73
6	8	23	55	61	7	27	38	60
8		8	40	48	9	14	24	48
10		1,7	27	36	11	6	14	38
12			18	26	13	1,7	7	29
14			11	18	15	0,3	3,0	22
16			6	12	17		1,0	16
18			3,2	8	19		0,3	11
20			1,4	4,4	21		0,04	7
22			0,6	2,4	2,3			4,6
24			0,17	1,3	25			2,8
26			0,04	0,6	27			1,7
28			0,0^{2}5	0,24	29			0,9
30				0,09	31			0,5
32				0,02	33			0,2
34				0,0^{2}5	35			0,09
36				0,0^{3}6	37			0,04
					39			0,012
					41			0,0^{2}3
					43			0,0^{3}6
					45			0,0^{4}6

Forrás: Campbell, R. C. (1974): *Statistics for Biologists*. Cambridge University Press, p. 355.

VIII. TÁBLÁZAT

A korrelációs együttható valószínűségi szintjei

	Valószínűségek				
f	0,1	0,05	0,02	0,01	0,001
1	0,98769	0,99692	0,999507	0,999877	0,9999988
2	,90000	,95000	,98000	,990000	,99900
3	,8054	,8783	,93433	,95873	,99116
4	,7293	,8114	,8822	,91720	,97406
5	,6694	,7545	,8329	,8745	,95074
6	,6215	,7067	,7887	,8343	,92493
7	,5822	,6664	,7498	,7977	,8982
8	,5494	,6319	,7155	,7646	,8721
9	,5214	,6021	,6851	,7348	,8471
10	,4973	,5760	,6581	,7079	,8233
11	,4762	,5529	,6339	,6835	,8010
12	,4575	,5324	,6120	,6614	,7800
13	,4409	,5139	,5923	,6411	,7603
14	,4259	,4973	,5742	,6226	,7420
15	,4124	,4821	,5577	,6055	,7246
16	,4000	,4683	,5425	,5897	,7084
17	,3887	,4555	,5285	,5751	,6932
18	,3783	,4438	,5155	,5614	,6787
19	,3687	,4329	,5034	,5487	,6652
20	,3598	,4227	,4921	,5368	,6524
25	,3233	,3809	,4451	,4869	,5974
30	,2960	,3494	,4093	,4487	,5541
35	,2746	,3246	,3810	,4182	,5189
40	,2573	,3044	,3578	,3932	,4896
45	,2428	,2875	,3384	,3721	,4648
50	,2306	,2732	,3218	,3541	,4433
60	,2108	,2500	,2948	,3248	,4078
70	,1954	,2319	,2737	,3017	,3799
80	,1829	,2172	,2565	,2830	,3568
90	,1726	,2050	,2422	,2673	,3375
100	,1638	,1946	,2301	,2540	,3211

Forrás: Hajtmann B. (1971): *Bevezetés a matematikai statisztikába pszichológusok számára.* Akadémiai Kiadó, Bp., Függelék, p. 27.

IX. TÁBLÁZAT

A korrelációs együttható transzformációs táblázata

r	Z	r	Z	r	Z	r	Z	r	Z
0,000	0,000	0,200	0,203	0,400	0,424	0,600	0,693	0,800	1,099
,005	,005	,205	,208	,405	,430	,605	,701	,805	1,113
,010	,010	,210	,213	,410	,436	,610	,709	,810	1,127
,015	,015	,215	,218	,415	,442	,615	,717	,815	1,142
,020	,020	,220	,224	,420	,448	,620	,725	,820	1,157
,025	,025	,225	,229	,425	,454	,625	,733	,825	1,172
,030	,030	,230	,234	,430	,460	,630	,741	,830	1,188
,035	,035	,235	,239	,435	,466	,635	,750	,835	1,204
,040	,040	,240	,245	,440	,472	,640	,758	,840	1,221
,045	,045	,245	,250	,445	,478	,645	,767	,845	1,238
,050	,050	,250	,255	,450	,485	,650	,775	,850	1,256
,055	,055	,255	,261	,455	,491	,655	,784	,855	1,274
,060	,060	,260	,266	,460	,497	,660	,793	,860	1,293
,065	,065	,265	,271	,465	,504	,665	,802	,865	1,313
,070	,070	,270	,277	,470	,510	,670	,811	,870	1,333
,075	,075	,275	,282	,475	,517	,675	,820	,875	1,354
,080	,080	,280	,288	,480	,523	,680	,829	,880	1,376
,085	,085	,285	,293	,485	,530	,685	,838	,885	1,398
,090	,090	,290	,299	,490	,536	,690	,848	,890	1,422
,095	,095	,295	,304	,495	,543	,695	,858	,895	1,447
,100	,100	,300	,310	,500	,549	,700	,867	,900	1,472
,105	,105	,305	,315	,505	,556	,705	,877	,905	1,499
,110	,110	,310	,321	,510	,563	,710	,887	,910	1,528
,115	,116	,315	,326	,515	,570	,715	,897	,915	1,557
,120	,121	,320	,332	,520	,576	,720	,908	,920	1,589
,125	,126	,325	,337	,525	,583	,725	,918	,925	1,623
,130	,131	,330	,343	,530	,590	,730	,929	,930	1,658
,135	,136	,335	,348	,535	,597	,735	,940	,935	1,697
,140	,141	,340	,354	,540	,604	,740	,950	,940	1,738
,145	,146	,345	,360	,545	,611	,745	,962	,945	1,783
,150	,151	,350	,365	,550	,618	,750	,973	,950	1,832
,155	,156	,355	,371	,555	,626	,755	,984	,955	1,886
,160	,161	,360	,377	,560	,633	,760	,996	,960	1,946
,165	,167	,365	,383	,565	,640	,765	1,008	,965	2,014
,170	,172	,370	,388	,570	,648	,770	1,020	,970	2,092
,175	,177	,375	,394	,575	,655	,775	1,033	,975	2,185
,180	,182	,380	,400	,580	,662	,780	1,045	,980	2,298
,185	,187	,385	,406	,585	,670	,785	1,058	,985	2,443
,190	,192	,390	,412	,590	,678	,790	1,071	,990	2,647
,195	,198	,395	,418	,595	,685	,795	1,085	,995	2,994

Forrás: Hajtmann B. (1971): *Bevezetés a matematikai statisztikába pszichológusok számára.* Akadémiai Kiadó, Bp., Függelék, p. 26.

X. TÁBLÁZAT

A Neumann-féle hányados táblázata

A szukcesszív különbségnégyzetek átlagának és a varianciának a hányadosára vonatkozó 5 százalékos és 1 százalékos küszöbértékek

N	K értékei		K' értékei		N	K értékei		K' értékei	
	P = 0,01	P = 0,05	P = 0,05	P = 0,01		P = 0,01	P = 0,05	P = 0,05	P = 0,01
4	0,8341	1,0406	4,2927	4,4992	33	1,2667	1,4884	2,6365	2,8583
5	0,6724	1,0255	3,7945	4,3276	34	1,2761	1,4951	2,6262	2,8451
6	0,6738	1,0682	3,7318	4,1262	35	1,2852	1,5014	2,6163	2,8324
7	0,7163	1,0919	3,5748	3,9504	36	1,2940	1,5075	2,6068	2,8202
8	0,7575	1,1228	3,4486	3,8139	37	1,3025	1,5135	2,5977	2,8085
9	0,7974	1,1524	3,3476	3,7025	38	1,3108	1,5193	2,5889	2,7973
10	0,8353	1,1803	3,2642	3,6091	39	1,3188	1,5249	2,5804	2,7865
11	0,8706	1,2062	3,1938	3,5294	40	1,3266	1,5304	2,5722	2,7760
12	0,9033	1,2301	3,1335	3,4603	41	1,3342	1,5357	2,5643	2,7658
13	0,9336	1,2521	3,0812	3,3996	42	1,3415	1,5408	2,5567	2,7560
14	0,9618	1,2725	3,0352	3,3458	43	1,3486	1,5458	2,5494	2,7466
15	0,9880	1,2914	2,9943	3,2977	44	1,3554	1,5506	2,5424	2,7376
16	1,0124	1,3090	2,9577	3,2543	45	1,3620	1,5552	2,5357	2,7289
17	1,0352	1,3253	2,9247	3,2148	46	1,3684	1,5596	2,5293	2,7205
18	1,0566	1,3405	2,8948	3,1787	47	1,3745	1,5638	2,5232	2,7125
19	1,0766	1,3547	2,8675	3,1456	48	1,3802	1,5678	2,5173	2,7049
20	1,0954	1,3680	2,8425	3,1151	49	1,3856	1,5716	2,5117	2,6977
21	1,1131	1,3805	2,8195	3,0869	50	1,3907	1,5752	2,5064	2,6908
22	1,1298	1,3923	2,7982	3,0607	51	1,3957	1,5787	2,5013	2,6842
23	1,1456	1,4035	2,7784	3,0362	52	1,4007	1,5822	2,4963	2,6777
24	1,1606	1,4141	2,7599	3,0133	53	1,4057	1,5856	2,4914	2,6712
25	1,1748	1,4241	2,7426	2,9919	54	1,4107	1,5890	2,4866	2,6648
26	1,1883	1,4336	2,7264	2,9718	55	1,4156	1,5923	2,4819	2,6585
27	1,2012	1,4426	2,7112	2,9528	56	1,4203	1,5955	2,4774	2,6524
28	1,2135	1,4512	2,6969	2,9348	57	1,4249	1,5987	2,4728	2,6465
29	1,2252	1,4595	2,6834	2,9177	58	1,4294	1,6019	2,4684	2,6407
30	1,2363	1,4672	2,6707	2,9016	59	1,4339	1,6051	2,4640	2,6350
31	1,2469	1,4746	2,6587	2,8864	60	1,4384	1,6082	2,4596	2,6294
32	1,2570	1,4817	2,6473	2,8720					

Adott szignifikancia-szinten (*P*) és megfelelő mintanagyságnál (*N*) a Neumann-féle hányados számított értéke akkor jelzi pozitív autokorreláció jelenlétét, ha a kritikus K érték alá esik, és akkor jelzi negatív autokorreláció jelenlétét, ha túllépi a megfelelő K' kritikus értéket; ha a két kritikus érték közé esik, akkor nincs bizonyítékunk az autokorreláció jelenlétére.

Forrás: Ezekiel, M.—Fox, K. A. (1970): *Korreláció és regresszió analízis.* KJK, Bp., p. 380.

A kiadásért felelős az Akadémiai Kiadó és Nyomda főigazgatója
Felelős szerkesztő: Polyánszky Piroska — Műszaki szerkesztő: Merkly László
Terjedelem: 27,1 (A/5) ív + 2 melléklet — AK 1510 k 8487
HU ISSN 0071—6650
84.12061 Akadémiai Kiadó és Nyomda — Felelős vezető: Hazai György

Megjelent a sorozatban:

Góczán László

MEZŐGAZDASÁGI TERÜLETEK AGROÖKOGEOGRÁFIAI KUTATÁSA, TIPIZÁLÁSA ÉS ÉRTÉKELÉSE

Földrajzi tanulmányok 18.

A racionális földhasználat előfeltétele a termőföld minőségének és területi kiterjedésének számbavétele, minősítése és értékelése. A könyv nemzetközi viszonylatban is új módszerrel nyújtja a termőhelyek komplex (ökológiai és ökonómiai) értékelését, amely helyszíni agroökológiai felmérésen, a talaj vízgazdálkodási modellkísérleteinek elemzésén, agrárközgazdasági és programozott gépi számítások eredményein alapul, s bemutatja a szántóföldek táblák szerinti pénzbeni értékelését is. Az új módszerre jellemző, hogy egyszerűsíti és tipizálja a mezőgazdasági területek földrajzi és ökológiai jellemzőit. Ezzel egy új tudományág van kibontakozóban, az *agroökogeográfia*.

AKADÉMIAI KIADÓ
BUDAPEST

Ára: 68,– Ft

ISBN 963 05 3442 8