ÉRTEKEZÉSEK
EMLÉKEZÉSEK

KOLLÁR LAJOS

MŰSZAKI TUDOMÁNY
MÉRNÖKI KÖZELÍTÉS

1828

118

AKADÉMIAI KIADÓ, BUDAPEST

ÉRTEKEZÉSEK
EMLÉKEZÉSEK

ÉRTEKEZÉSEK
EMLÉKEZÉSEK

SZERKESZTI
TOLNAI MÁRTON

KOLLÁR LAJOS

MŰSZAKI TUDOMÁNY MÉRNÖKI KÖZELÍTÉS

AKADÉMIAI SZÉKFOGLALÓ

1991. JANUÁR 14.

AKADÉMIAI KIADÓ, BUDAPEST

A kiadványsorozatban a Magyar Tudományos Akadémia 1982. évi CXLII. Közgyűlése időpontjától megválasztott rendes és levelező tagok székfoglalói — önálló kötetben — látnak napvilágot.

A sorozat indításáról az Akadémia főtitkárának 22/1/1982. számú állásfoglalása rendelkezett.

ISBN 963 05 6534 X

Kiadja az Akadémiai Kiadó, Budapest

A kiadásért felelős
az Akadémiai Kiadó és Nyomda Vállalat igazgatója
A nyomdai munkálatokat
az Akadémiai Kiadó és Nyomda Vállalat végezte
Felelős vezető: Zöld Ferenc
Budapest, 1993
Nyomdai táskaszám: 21795
Felelős szerkesztő: Szente László
Műszaki szerkesztő: Kiss Zsuzsa
Kiadványszám: 137
Megjelent: 2,5 (A/5) ív terjedelemben
HU ISSN 0236-6258

Printed in Hungary

TARTALOM

1. BEVEZETÉS

Amióta a mérnökök számítással akarják követni a műszaki létesítmények viselkedését, lényegében két, egymással ellentétes tendencia érvényesül: egyrészt arra törekszenek, hogy minél pontosabban tudják kiszámítani az erőket, feszültségeket, mozgásokat; másrészt pedig igyekeznek különböző közelítések bevezetésével egyszerűbbé és áttekinthetőbbé tenni a számítást. Ez a kétféle törekvés egészséges feszültséget hozott létre a műszaki tudományban, és hosszú időn át biztosította a fejlődést. Ma, amikor az elektronikus számítógépek a korábbihoz képest szinte korlátlan numerikus lehetőségeket nyitnak a mérnökök előtt, érdemes újra megvizsgálni ezt a kérdéskört, különös tekintettel arra, hogy milyen létjogosultsága van még a mérnöki közelítéseknek.

2. PONTOS ÉS KÖZELÍTŐ SZÁMÍTÁS

Mindenekelőtt azt kell tisztáznunk, hogy mit nevezünk pontos és mit közelítő számításnak.

A teljesen pontos megoldások már a matematikában is legtöbbször csak utasítások. Ilyenek pl. $\sqrt{2}$, π, $\sin x$ (eltekintve x néhány speciális értékétől). Ezek csak addig pontosak, amíg nem akarjuk megadni numerikus értéküket. Jóllehet, egyértelmű eljárás van arra, hogy hogyan tehetjük egyre pontosabbá a fenti kifejezések számértékét, a teljes pontosságot csak végtelen sok tizedesjegy meghatározásával „érhetnénk el”.

A matematika sokszor már a pontos megoldást is csak végtelen sor formájában tudja megadni. Lényegében ezt a megoldásmódot is az előzőkhöz sorolhatjuk, hiszen a végtelen sorral tetszés szerinti pontossággal közelíthetjük meg az eredményt, éppen úgy, mint a $\sin x$ kiszámítására szolgáló sorral. A kettő közötti különbséget egyszerűen úgy fogalmazhatjuk meg, hogy a $\sin x$ kiszámítására szolgáló sor határértékének külön nevet adtunk, s úgy dolgozunk vele, mint egy ismert (és pontosan megadható) mennyiséggel.

Áttérve most már a mechanikára, elsősorban azt kell megállapítanunk, hogy itt is léteznek pontos megoldások, de ezek mindig csak egy mechanikai modellre vonatkoznak, nem pedig a valóságra. A mechanikai modell pedig szükségképpen mindig leegyszerűsíti a valóságot, hiszen éppen ezért hozzuk létre. Ilyen egyszerűsítés például a (végtelenül) kis alakváltozások, ill. elmozdulások feltételezése, amin a klasszikus rugalmasságtan ún. pontos megoldásai alapulnak. A mai komputertechnika birtokában azonban már nem szükséges megtartanunk ezt az egyszerűsítő feltételezést, sőt más olyan feltételezéseket sem, amelyek korábban a számíthatóság érdekében elengedhetetlenek voltak, mint pl. az anyag lineárisan rugalmas viselkedése stb. Ma már olyan programok is vannak, amelyek a vasbeton szerkezetet rétegekre bontva vizsgálják, s ezzel követni tudják a repedések kialakulását és hatását az erőjátékra. A végeselem-módszerre gondolva azt mondhatjuk, hogy ma már igen nagy pontossággal tudjuk követni a szerkezetek viselkedését. Még így sem lesz az eredmény a korábban említett értelemben teljesen pontos, de kétségtelen, hogy szinte tetszőlegesen fokozhatjuk a pontosságát.

A szinte korlátlan számítási lehetőségekkel sem tudunk azonban minden közelítést nélkülözni. A valóságban fellépő terheket csak közelítően tudjuk leírni. Így pl. a szélteher sztochasztikus leírásmódja nem a valódi terhelést adja meg, csak egy hozzá hasonlóan változó intenzitású, képzelt szélterhet.

Amint már említettük, maga a modell is mindig tartalmaz közelítéseket. Így pl. a rudaknak modellezett szerkezeti elemek keresztirányú méreteit a hosszukhoz képest elhanyagolhatóan kicsinek feltételezzük. Hasonlóképpen a lemezeket és héjakat ma is „vékonynak" tekintjük, mivel ez lényeges egyszerűsítésekhez vezet. Igaz ugyan, hogy elvileg modellezhetnénk őket a vastagsági méreteik figyelembevételével is, de ez oly mértékben bonyolítaná a számítást, hogy legtöbbször eltekintünk ettől a lehetőségtől, annál is inkább, mivel a számítás terjedelmének növekedése nem áll arányban a pontosság fokozásával.

A pontos módszereknek más fajtái is vannak. A parciális differenciálegyenletek elmélete pl. részletesen meghatározza, hogy milyen peremfeltételek biztosítják az egyértelmű megoldást. Ezeket az elméleti eredményeket közvetlenül felhasználhatjuk a membránhéjak statikailag határozott megtámasztásmódjának meghatározásához. A kompatibilitási (ill. az egyensúlyi) mátrix vizsgálatából pedig a rácsszerkezetek statikai és kinematikai túlhatározottságát, határozottságát, ill. határozatlanságát állapíthatjuk meg (Szabó és Roller, 1971), (Tarnai, 1990). Ezeket az eredményeket azonban nem szoktuk a pontos számítási módszerekhez sorolni, mivel nem arra szolgálnak, hogy egy adott terhelésre kiszámítsuk a szerkezet igénybevételeit.

Mielőtt rögzítenénk, hogy mit nevezünk pontos számításnak, tekintsük át röviden a közelítő mérnöki módszereket.

A közelítő módszereket elsősorban az jellemzi, hogy bizonyos — többé-kevésbé önkényes — elhanyagolásokon alapulnak, és így nem pontosíthatók korlátlanul, sőt igen sok esetben egyáltalán nem is pontosíthatók. Így érvényességi tartományuk — ahol tehát pontosságuk a gyakorlat számára kielégítő — általában korlátozott.

A közelítő számításmódokat többféle okból és többféle úton fejlesztették ki. Az egyik csoportjuk — elsősorban régebben — azért jött létre, mert reménytelennek látszott a pontos elmélet kidolgozása, és a mérnökök számára már az is nagy előny volt, hogy egyáltalán volt valamilyen számításmód a kezükben. Ilyen pl. a hajlított gerendák Bernoulli—Navier-elmélete, amely lineáris feszültségeloszlást tételez fel a keresztmetszetben; vagy a boltozatokra régebben használt támaszvonalmódszer, amely megfelelőnek nyilvánított egy boltozatot, ha lehetett a terhekre olyan kötélgörbét szerkeszteni, amely belül maradt a belső magon. Ezekhez a módszerekhez sorolhatjuk a héjak membránelméletét is, amely nem veszi figyelembe a hajlító- és csavarónyomatékokat.

Ezeknek a módszereknek az a gyengéjük, hogy hibájukat nem tudtuk egy pontosabb módszerhez mérni, mert ilyen akkor nem volt, hanem az ún. „mérnöki érzékre” lehetett hivatkozni, amely a dolog természeténél fogva nem eléggé megbízható. Ellenőrzési lehetőséget csak a kísérlet nyújtott, valamint később a pontosabb elmélet kidolgozása, pl. a hajlított gerendák esetében a faltartókra is érvényes rugalmasságtani megoldás megszületése. (A kísérleteknél külön problémát jelent a modellhasonlóság, de erre most nem kívánunk kitérni.)

A közelítő számításmódok egy másik csoportja úgy keletkezett, hogy megvoltak a pontos elmélet egyenletei, de túlságosan bonyolultnak tűntek, és ezért az egyenletekben bizonyos tagokat elhanyagoltak a többi mellett. Ilyenekkel elsősorban a héjelméletben találkozunk: a pontos egyenletekből bizonyos elhanyagolásokkal megkapjuk a lapos héjak hajlításelméletét, vagy — dongahéjak esetében — az alkotóirányú hajlítónyomaték és a csavarónyomaték elhanyagolásával a Finsterwalder- és a Schorer-elméletet.

Az utóbbi csoportba tartozó elméleteket közelítésrendszereknek is nevezhetjük. Nagy előnyük, hogy — mivel a pontos levezetésből elhanyagolásokkal kaptuk meg őket — megbízhatóan meg lehet adni érvényességi tartományukat.

Végül sok közelítő módszer azért született meg, mert a mérnökök nem találták eléggé áttekinthetőnek a pontos módszert, és egyszerű, gyors számításmódhoz akartak jutni, még azon az áron is, hogy veszítettek a pontosságból. Ilyet mutatunk be a 4. pontban a háromcellás siló példáján.

Mindezek alapján rögzíthetjük, hogy

— mindazokat a számításmódokat *pontosnak* fogjuk hívni, amelyeknek a pontossága tetszés szerint fokozható;
— *közelítőnek* pedig azokat, amelyeknek a pontossága — a számítás alapjául szolgáló feltevések megtartásával — nem fokozható tetszés szerint.

E kétféle módszer között azonban nincs mindig éles határ, hanem bizonyos esetekben fokozatos köztük az átmenet.

Amint már említettük, a közelítő módszerek pontatlansága egyrészt a statikai modell felvétele során tett elhanyagolásokból, másrészt magának a számításnak a pontatlanságából származik. A továbbiakban nem tárgyaljuk különválasztva ezt a két okot, de megjegyezzük, hogy a közelítő módszerek pontatlansága a legtöbb esetben elsősorban a modellfelvétel hibáiból származik.

3. A PONTOS MÓDSZEREK SZEREPE A GYAKORLATBAN

Vizsgáljuk meg: a felhasználás, azaz a mérnöki gyakorlat oldaláról hogyan jellemezhetjük az előzőkben definiált pontos számítási módszereket.

Elsősorban azt kell megállapítanunk, hogy a mérnöki gyakorlatban sohasem merül fel a teljes pontosság igénye. Az igénybevételeket (feszültségeket) és az alakváltozásokat mindig elegendő a pontos értékhez képest 1—2%-os hibával meghatározni, és a geometriai méretekben sincs szükség 0,1 mm-nél nagyobb pontosságra, még szélsőséges esetekben sem. Így az előzőekben definiált pontos számítások a mérnöki gyakorlat szempontjából „teljesen pontosnak" tekinthetők. Ezenkívül azt is meg kell gondolnunk, hogy az építőanyagok mechanikai jellemzőit sohasem ismerjük teljes pontossággal, hanem csupán statisztikus átlagértéküket és szórásukat, így a számítás sohasem tükrözheti teljesen pontosan a valóságos szerkezet viselkedését.

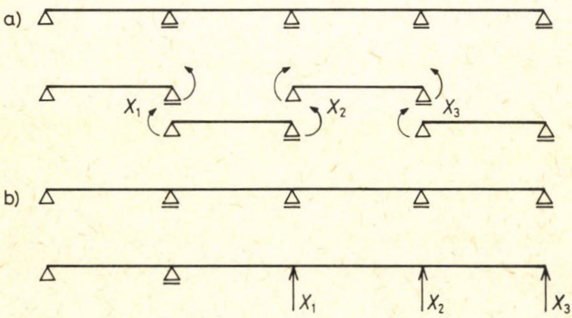
A pontos módszerek előnyei a mérnök számára olyan közismertek, hogy szinte nem is szükséges felsorolni őket: eredményeik szabatosak, és érvényességük nincs egy bizonyos tartományra korlátozva. Nincs szükség arra, hogy a pontos módszereket méltassuk, főként ezen a helyen nem. Inkább a közelítő számításoknak kell a nekik megfelelő rangot biztosítani, így ezekkel majd bővebben fogunk foglalkozni.

A pontos módszerek előnye az is, hogy — ha analitikus megoldásra vezetnek és zárt képletet szolgáltatnak — áttekinthetően megmutatják, hogy mi mitől és hogyan függ, ami a gyakorlat számára igen hasznos. Sajnos csak ritkán fordul elő, hogy a pontos megoldás zárt képletre vezet; ez sokkal inkább a közelítő módszerek sajátja. Úgy is mondhatjuk, hogy minél több tényezőt vesz egy módszer figyelembe, annál valószínűtlenebb, hogy egyszerű és áttekinthető eredményt szolgáltat. A numerikus módszerek pedig eleve rosszul áttekinthető eredményeket adnak, legalábbis abban az értelemben, hogy nem mutatják meg: mi mitől és hogyan függ. Ezt csak paraméteres vizsgálattal lehet megtudni, de akkor sem képletszerűen.

A pontos módszereket általában az ellenőrző számításoknál alkalmazzák annak vizsgálatára, hogy a közelítő számítások alapján kialakított szerkezet valóban megfelelő-e.

Nem felesleges talán e helyen is megjegyezni, hogy a pontos (gépi) számítást éppen olyan fontos ellenőrizni, mint a kézi számítást. Bár a gép nem követ el számítási hibát, de téves lehet egy adatbevitel, vagy egyszerűen kimarad egy terhelési eset vagy építési fázis vizsgálata, és a szerkezet összedőlhet. Erre már csak azért is fel kell hívnunk a figyelmet, mert a sok tizedes pontossággal megkapott eredmény azt a hitet keltheti a felhasználóban, hogy az eredmény minden szempontból igen pontos. Az ellenőrzésre vagy egy független, más alapokon álló pontos számítást kell alkalmaznunk, vagy sok esetben megelégedhetünk egy közelítő számítással is.

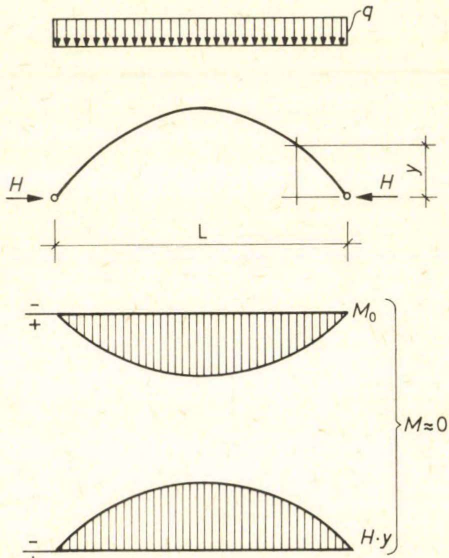
A nagy numerikus pontosság sok esetben kiküszöböli a „nagy számok kis különbségének" ismert veszélyét, de itt is helyénvaló az óvatosság: csak akkor küszöböli ezt ki, ha a törzstartó célszerűtlen felvételéből származik *(1. ábra)*. Előfordul azonban, hogy



1. ábra

a „nagy számok kis különbsége” magának a szerkezetnek az erőjátékából következik. Úgy is mondhatjuk, hogy maga a szerkezet „érzékeny erőjátékú”: erőjátéka nagymértékben megváltozik, ha kismértékben módosul a terhelés, ill. a geometriája. Ez a jelenség azzal függ össze, hogy a szerkezetre ellentétes igénybevételeket okozó hatások működnek, és így a végleges igénybevételek két nagy mennyiség kis különbségeként jönnek létre. Ezt az érzékenységet nem küszöböli ki a számítógépek adta nagymértékű pontosságnövekedés sem, hiszen nem az a probléma, hogy nem tudjuk eléggé pontosan kiszámítani ezt a különbséget, hanem hogy maguk a „nagy számok” bizonytalanok.

Talán a legismertebb példa az érzékeny erőjátékú szerkezetekre a két- vagy háromcsuklós ívtartó *(2. ábra)*, amelynek hajlítónyomatéka — a jól ismert $M = M_0 - Hy$ képletnek megfelelően — a kéttámaszúnak képzelt tartó M_0 nyomatékának és a H erő nyomatékának a különbsége. Ha tehát építési pontatlanság,



2. ábra

támaszelmozdulás stb. miatt megváltozik akár M_0, akár H vagy y, az ív M nyomatéka ennél sokkal nagyobb mértékben módosul.

Hasonlóan viselkednek a feszített vasbeton gerendák (a repedésmentesség szempontjából), a légnyomásos szerkezetek, a feszített sátrak, a függőtetők (és általában a kötélszerkezetek), a helyzeti állékonyságra (felbillenésre, elcsúszásra, felúszásra) vizsgálandó szerkezetek, de ide tartoznak pl. a vasbeton hűtőtornyok is, amelyeknek függőleges vasalását a szélteherből származó húzás és az önsúly okozta nyomás különbségére kell méreteznünk.

Az érzékeny erőjátékú szerkezetek esetében tehát nem a számítógépek adta igen nagy pontosság oldja meg a problémát, hanem az osztott biztonsági tényezővel történő méretezés, feltéve hogy az osztott biztonsági tényezőket az ellenkező értelmű hatásokhoz rendeljük, és így ezek szórását képviselik. Ily módon tudjuk figyelembe venni mind a két „nagy szám" bizonytalanságait, melyek lényegesen nagyobb mértékben változtatják meg a kis különbségüket. Azt a tényt, hogy a számítógép maga nem tudja ezt a nehézséget kiküszöbölni, természetesen nem tekinthetjük a pontos számítás hátrányának, hiszen nem várhatjuk el egyetlen módszertől sem, hogy a saját körén kívül eső problémát is megoldjon.

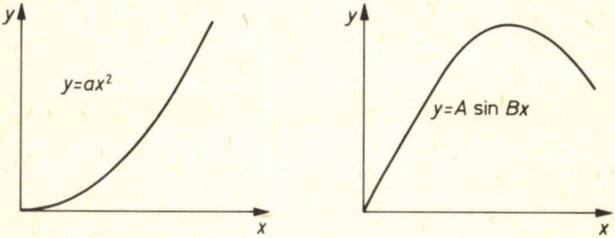
4. A KÖZELÍTŐ MÓDSZEREK SZEREPE A MÉRNÖKI GYAKORLATBAN

Amint már említettük, sok közelítő módszer azért született meg, mert reménytelennek tűnt a pontosabb számítás kidolgozása, ill. a számítás végrehajtása. Ma, a számítógépek és a végeselem-programok korában elvileg megszűnt ez az ellehetetlenülés, de gyakorlatilag sok esetben az idő- és pénzhiány korlátozza a számítás pontosítását. Ha a pontosabb számítással (elsősorban az építési anyagokban) elérhető megtakarítás kisebb, mint a magára a számításra fordított idő és költség, akkor a józan gazdasági megfontolás teszi indokolatlanná a pontosabb számítás elvégzését. Így azt mondhatjuk, hogy ma nem elvi, hanem gyakorlati okai vannak a közelítő módszerek alkalmazásának.

A következőkben néhány példán szeretnénk bemutatni a közelítő számításmódok hasznosságát és veszélyeit.

A görbe vonalak ívhosszát megadó pontos képletek általában meglehetősen bonyolultak és sokszor transzcendens függvényeket tartalmaznak. Így pl. az igen egyszerűnek számító másodfokú parabola ívhossza *(3. ábra bal oldali része)*:

$$s = \frac{x}{2}\sqrt{1+(2ax)^2} + \frac{1}{4}\,\mathrm{arsh}\,(2ax)\,,$$



3. ábra

a hasonlóképpen gyakran használt szinuszvonal ívhosszképlete pedig *(3. ábra jobb oldali része)*:

$$s=\int_0^x \sqrt{1+A^2B^2\cos^2(Bx)}\,\mathrm{d}x\,,$$

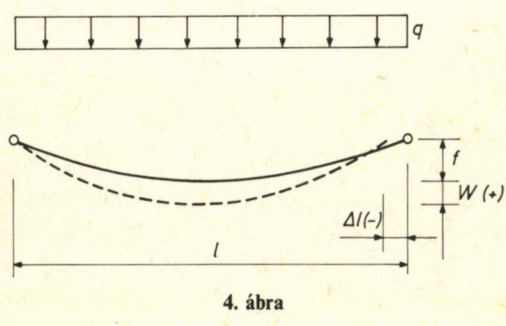
ami másodfajú elliptikus integrálra vezet, azaz nem fejezhető ki elemi transzcendens függvényekkel.

A parabola ívhosszképletét Taylor-sorba fejtve a *4. ábrán* vázolt szimmetrikus görbére az

$$s=l\left[1+\frac{8}{3}\left(\frac{f}{l}\right)^2-\frac{32}{5}\left(\frac{f}{l}\right)^4+\ldots\right]$$

kifejezést kapjuk. Ha a görbe *lapos* (a 4. ábrán $f \ll l$), akkor általában elegendő csupán az $(f/l)^2$-et tartalmazó tagig megtartani a sort. Ez a közelítő ívhosszképlet egyrészt szemléletesen mutatja, hogy s az f/l arány négyzetével arányosan növekszik, másrészt pedig nemcsak a parabolára, hanem minden lapos görbére érvényes, így a szinuszra is.

Ezzel a közelítő ívhosszképlettel könnyen meghatározhatjuk, hogy pl. a 4. ábrának megfelelő alakú, a két végén egy-egy támaszhoz rögzített kötél f belógása mennyivel növekszik meg, ha a jobb oldali támaszt Δl mérettel befelé elmozdítjuk (4. ábra).



4. ábra

Az f belógás megváltozását w-vel jelölve azt írjuk fel, hogy az ívhossz megváltozása f és l megváltozásából összesen zérus:

$$\frac{\partial s}{\partial f} w + \frac{\partial s}{\partial l} \Delta l = 0 ,$$

azaz

$$\frac{16}{3} \frac{f}{l} w + \left(1 - \frac{8}{3} \frac{f^2}{l^2}\right) \Delta l = 0 .$$

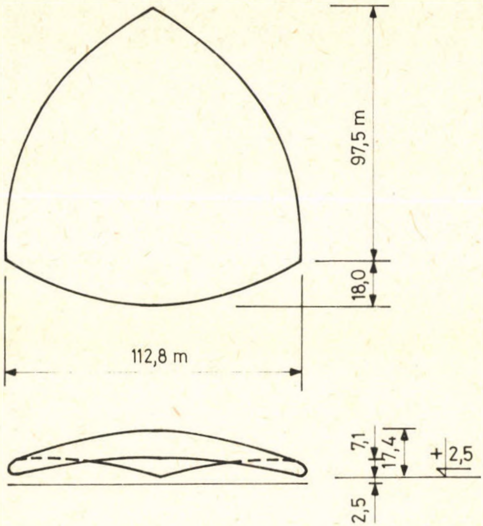
Mivel $(f/l)^2 \ll f/l$, ezért elhanyagolhatjuk az $(f/l)^2$-et tartalmazó tagot, és így azt kapjuk, hogy

$$w = - \frac{3}{16} \frac{l}{f} \Delta l .$$

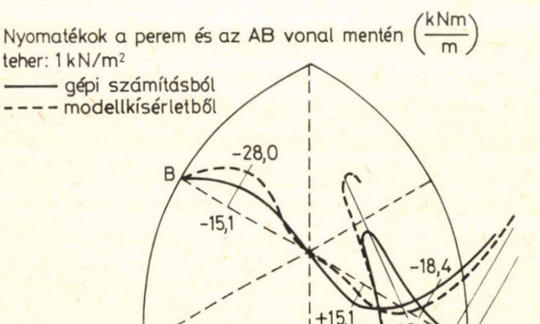
Ez az egyszerű képlet jól mutatja, hogy ha $l \gg f$, akkor a belógás w megnövekedése sokkal nagyobb lesz a Δl támaszelmozdulásnál.

Arra, hogy a közelítő számítás rossz tanácsadó is lehet, egy héjszerkezetű térlefedés példája mutat rá. A szerkezet egy lapos, merevítetlen szélű, három ponton támaszkodó, kupolaszerű acél rácsos héj volt *(5. ábra)*. Mivel a lapos görbék ívhosszképlete bármely lapos görbére érvényes, úgy gondoltuk, hogy egy lapos héjfelület esetében is mindegy, milyen a héj alakja, s ezért az első variánshoz gömbfelületet választottunk. Azonban a totális, egyenletesen megoszló teherrel a közelítő számítás helyett elvégzett első modellkísérlet azt mutatta, hogy a támaszok közelében igen nagy negatív nyomaték ébred *(6. ábra)*, és a héj ezen a helyen aránylag kis teherintenzitásnál eltört.

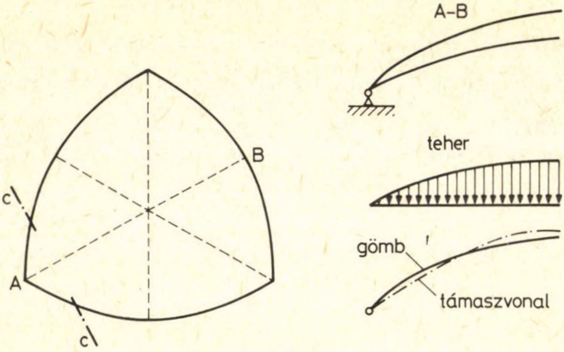
Ezt a jelenséget — utólag — szemléletesen is meg lehetett magyarázni. A héj ugyanis a támaszok környékén ívként működik, és a rá ható teher a héj szélességével arányos (a *7. ábrán* c—c-vel jelölve). Ilyenformán a teher nagysága a támasznál zérus, és a héj közepe felé fokozatosan növekszik. Az A—B metszet síkjában síkbeli ívnek tekintett héj tengelyvonala (vagyis a c—c-


97,5 m
18,0
112,8 m
7,1
17,4
+2,5
2,5

5. ábra


Nyomatékok a perem és az AB vonal mentén (kNm/m)
teher: 1 kN/m²
gépi számításból
modellkísérletből
-28,0
B
-15,1
-18,4
+15,1
-20,4
támasz
A
-19,6
-144,0
-22,9
+59,0
+68,8

6. ábra



7. ábra

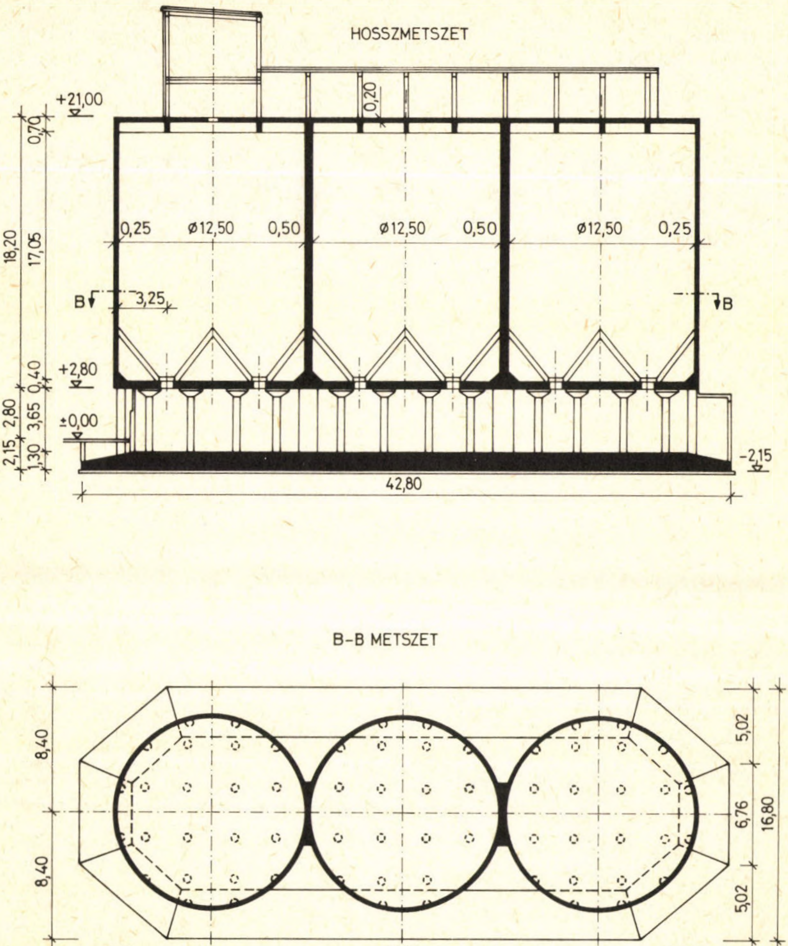
vel párhuzamos keresztmetszetek súlypontjának összekötő vonala) az ábrán folyamatosan kihúzott görbe, a terhek támaszvonala pedig (vagyis a terhekre rajzolt kötélgörbe, amelyre tehát a terhek nem adnak hajlítónyomatékot) az eredményvonallal megrajzolt görbe lesz.

A zérus teherintenzitáshoz azonban a támaszvonalban zérus görbület tartozik, a gömbhéj tengelyvonalának viszont a támasznál aránylag nagy görbülete van. Emiatt — amint a 7. ábrából is látható — a gömbhéj „túl van emelve" a támaszvonalhoz képest, és így nyilvánvaló, hogy miért jött létre a nagy negatív nyomaték.

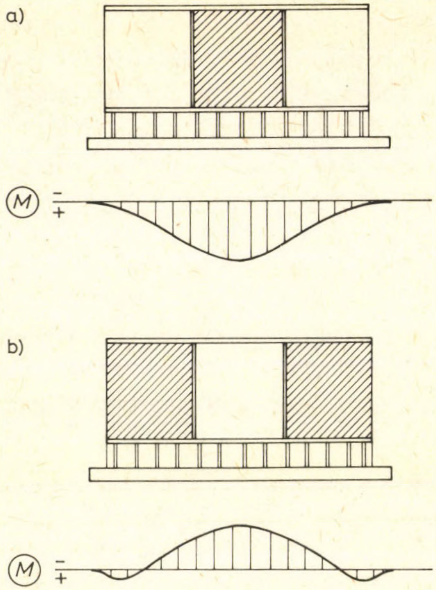
A héj alakját tehát korrigálnunk kellett. A legegyszerűbb olyan felület, amelynek a támaszoknál zérus a görbülete, a fél szinuszvonal megforgatásával jön létre. A második modellt e szerint alakítottuk ki, s ezen már tört részére csökkent le a gömbhéjon észlelt nagy negatív nyomaték.

Ez a példa jól szemlélteti a közelítő módszerek veszélyeit, és annak fontosságát, hogy mindig ellenőrizzük a közelítő feltevések érvényességét.

A közelítő módszerekkel nagymértékben egyszerűsíthetjük a bonyolultabb szerkezetek erőjátékát. Jó példa erre a *8. ábrán* vázolt háromcellás siló. Ha csak a középső (ill. ha csak a két


HOSSZMETSZET
+21,00
0,20
0,70
18,20
17,05
0,25
ø12,50
0,50
ø12,50
0,50
ø12,50
0,25
B
3,25
B
+2,80
0,40
2,80
3,65
±0,00
2,15
1,30
-2,15
42,80
B–B METSZET
8,40
8,40
5,02
6,76
5,02
16,80
5,33
32,14
5,33
42,80

8. ábra



9. ábra

szélső) cellát töltjük meg *(9. ábra)*, és feltételezzük, hogy — a teljes silótest merevsége folytán — a talajreakciók megoszlásgörbéje ugyanolyan lesz, mint teljesen megtöltött állapotban, akkor a silótest középső keresztmetszetére szokatlanul nagy hajlítónyomaték fog működni, ami a jelen esetben mintegy 400 MNm-t tesz ki. A kérdés mármost az, hogy a siló egyes szerkezeti elemei hogyan osztoznak e nyomaték felvételében.

E kérdés megválaszolásához természetesen alkalmazhatnánk a pontos módszert is: véges elemekre bontva a meglehetősen bonyolult szerkezetet, meghatározhatjuk az egyes elemekre ható igénybevételeket. Ez az út azonban, amellett hogy időtrabló és így költséges is, nem ad használható eredményt. Azt ugyan megmondja, hogy mi felel meg és mi nem, de azt már nem mondja meg, hogy miért, és hogy mit kell szerkezetileg megváltoztatnunk ahhoz, hogy a gyenge elemek megfeleljenek a rájuk ható igénybevételekre.

Közelítő megfontolásokkal azonban igen könnyen célt érhetünk. Elhanyagolva a tetőfelépítmény merevségét, a silóban három olyan tartószerkezeti elem található, amely részt vehet a hosszirányú nyomaték viselésében: a három cellával összekötött fedő- és fenéklemez, amelyek együtt egy (alaprajzban görbe gerinclemezű) I-tartót alkotnak, az alaplemez, és végül a siló fenéklemeze. (Ez utóbbi az I-tartó részeként csak húzást, ill. nyomást kap, önálló tartóelemként tekintve viszont hajlításra dolgozik, hasonlóan az alaplemezhez.) Az I-tartó gerincét alkotó cellafalak alaprajzi görbesége nem okoz lényegi eltérést az egyenes gerincű I-tartó statikai viselkedésétől.

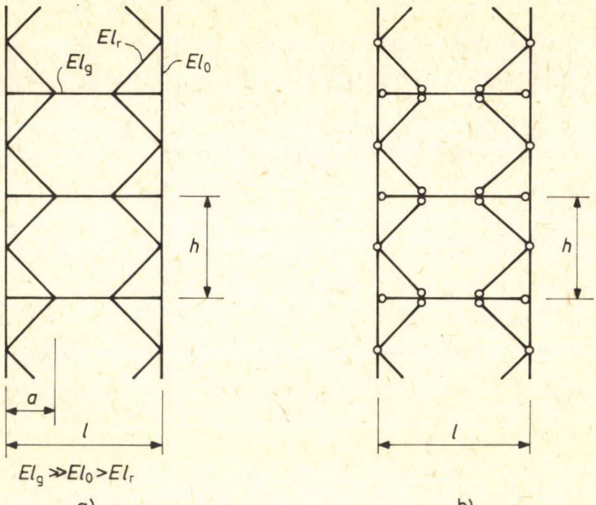
A három tartóelem (az I-tartó, az alaplemez és a fenéklemez) merevségének nagysága lényegesen különbözik egymástól: a fenéklemezé elhanyagolható az alaplemezéhez képest, az alaplemezé pedig az I-tartóéhoz képest. Ily módon a 9. ábrának megfelelő nagy hajlítónyomatékot jó közelítéssel teljes egészében az I-tartóra háríthatjuk.

A fenéklemezről feltételezhetjük, hogy valamennyi oszlop fix alátámasztást képvisel, hiszen ezek az oszlopok a lényegesen merevebb alaplemezre támaszkodnak.

Végül az alaplemezt egyrészt a talajreakciók terhelik, másrészt azok az oszlopok, amelyek a fenéklemezről kapják terhüket; a megtámasztást pedig a lényegesen merevebb silófalak vonalában lévő oszlopok biztosítják, lényegében három kör mentén.

Amint láthatjuk tehát, a három tartószerkezeti elemet statikai szempontból egymástól függetlenül kezelhetjük, hasonlóképpen egy „hierarchikusan" felépített tetőszerkezethez, ahol a melléktartó, a kereszttartó és a főtartó erőjátékát ebben a sorrendben haladva határozhatjuk meg, és a magasabb rendű tartó erőjátéka nem hat vissza az alacsonyabb rendűére.

A közelítő megfontolások a statikai modell felvételében is jó szolgálatot tehetnek. Példa lehet erre a *10a. ábrán* látható sok-

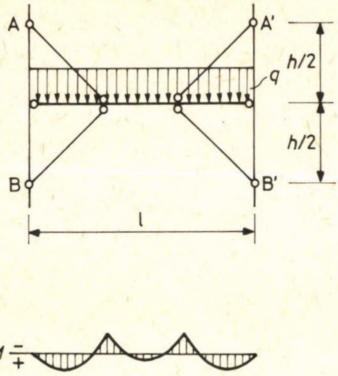


10. ábra

emeletes acélkeret, amelyben technológiai okokból nem lehetett az egyes emeleti gerendák között rácsozást készíteni. A közelítő számításhoz a *10b. ábrán* feltüntetett modellt célszerű alapul venni, amely figyelembe veszi, hogy a gerendák hajlításra lényegesen merevebbek az oszlopoknál.

A mértékadó teherelrendezések: hasznos teher minden szinten; hasznos teher minden második szinten; szélteher.

A felvett modell alapján azonnal látható, hogy ha a hasznos teher mindegyik szinten működik *(11. ábra)*, akkor egy gerenda a fölötte levő A és A' csomópontokat ugyanolyan erővel akarja befelé elmozdítani, mint amekkora erővel a fölötte lévő gerenda szeretné őket kifelé mozdítani. A csomópontok tehát helybenmaradnak. Mivel ez — a legfelső szintet kivéve — valamennyi szélső csomópontra igaz, a belső C és C' csomópontok sem mozdulnak el függőlegesen. Így a gerendákat fix alátámasztású folytatólagos tartókként számíthatjuk, és nyomatékábrájuk a 11. ábra szerint alakul.

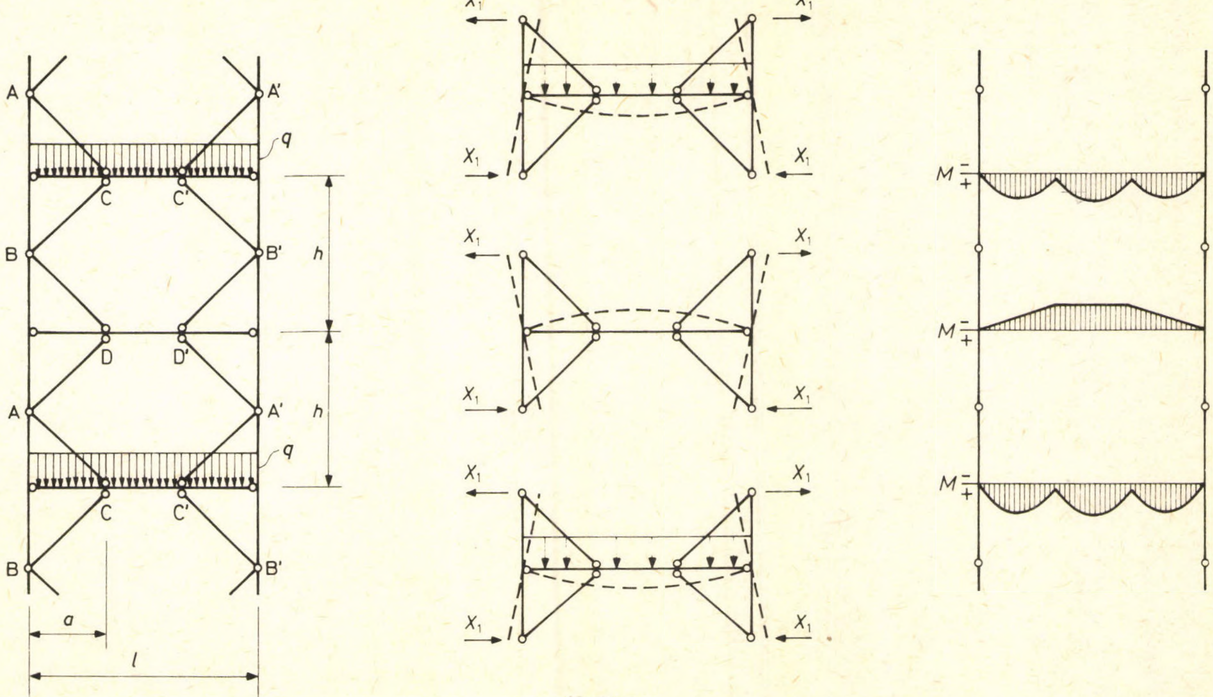


11. ábra

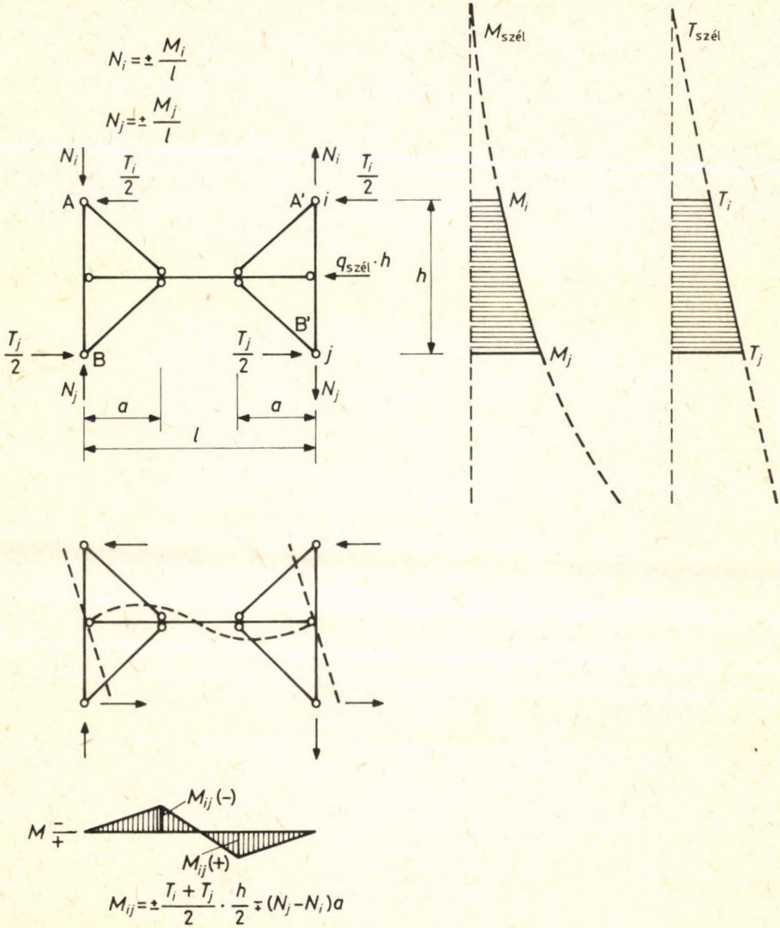
Ha a hasznos teher minden második szinten hat *(12. ábra)*, akkor egy statikailag egyszeresen határozatlan szerkezetet kell megoldanunk, mivel valamennyi A, A', B, B' csomóponton ugyanakkora X_1 vízszintes erő működik. A belső C, C' csomópontok most lesüllyednek, a terhelt gerendák tehát süllyedő belső alátámasztású tartókként működnek, s nyomatékábrájuk ennek megfelelően fog alakulni (12. ábra).

A 11. és 12. ábrák nyomatékdiagramjait összehasonlítva megállapíthatjuk, hogy az első terhelési eset a terhelt gerendák negatív nyomatéka, a második a pozitív nyomatékuk szempontjából mértékadó. Ezenkívül még ellenőriznünk kell, hogy a terheletlen gerenda negatív nyomatéka (12. ábra) nem nagyobb-e a 11. ábra terhelt gerendeájéánál.

Végül szélteherre a modell szerinti szerkezet határozott tartóként viselkedik *(13. ábra)*: mivel mindegyik gerenda antimetrikusan deformálódik, az A és A', B és B' stb. csomópontok távolsága nem akar megváltozni, ezekben a csomópontokban tehát nem ébred ismeretlen vízszintes erő az egymás fölött lévő tartórészek között. Így az igénybevételeket a 13. ábrán látható módon, egyensúlyi egyenletekből határozhatjuk meg.



12. ábra



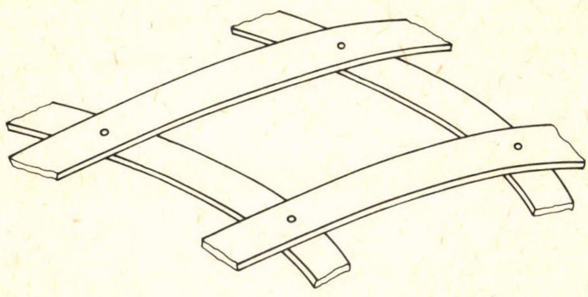
13. ábra

A közelítő módszerek nemcsak a modell megválasztásához adhatnak segítséget, hanem magának a tartószerkezetnek a kialakításához is. Így a héjszerkezetek célszerű megtámasztását egy közelítő elmélet: a membránhéjak elmélete mutatja meg a következő gondolatmenet alapján:

Egy héjszerkezet akkor gazdaságos, ha a terheket membránerőkkel képes viselni, azaz ha a hajlítónyomatékokra nem az egyensúly biztosításához van szükség, hanem csak az összeférhetőség kielégítéséhez.

A membránhéjak egyensúlyát egy másodrendű parciális differenciálegyenlet fejezi ki (Csonka, 1981). A megoldás létezésének és egyértelműségének feltételeit tehát a parciális differenciálegyenletek elméletének a peremérték- és kezdetiérték-feladatokra vonatkozó része adja meg. Ezt most nem kívánjuk részletezni, csupán azt említjük meg, hogy az elmélet világosan megmondja: hogyan kell megtámasztanunk egy héjat, hogy membránként viselje a terheket, és milyen feltételek teljesülése mellett lehet a perem egy része teljesen szabad (Tarnai, 1978).

Egy további érdekes példa arra, hogy mi módon segítik a közelítő módszerek egy szerkezet célszerű kialakítását, vagy egy nem teljesen helyesen kialakított szerkezet módosítását, az ún. lécrácshéjak esete. Ezek falécekből az alapsíkon derékszögű hálózat szerint lazán összecsavarozott rácsok *(14. ábra)*, amelyeket több ponton megemelve juttatnak a kívánt helyzetbe. A megemelés során a négyzetek rombuszokká torzulnak, és az eredetileg sík rácsozat kétszeresen görbült felület alakba fog elhelyezkedni. A rácsoshéj szélét a peremtartó(k)hoz rögzítve, és meghúzva a léceket összekötő csavarokat, készen áll a tartószerkezet.



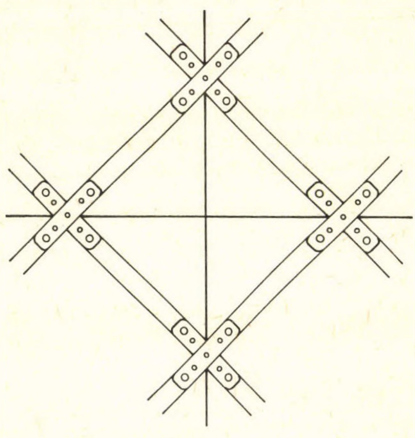
14. ábra

E szerkezet előnye elsősorban az egyszerű megépíthetőség: állvány és zsaluzat nélkül lehet vele kétszer görbült lefedést előállítani. Hátrányai azonban nem csekélyek. A megemelés során a lécek két irányban is meg kell görbüljenek. Mivel az ezzel járó feszültségek a keresztmetszet méreteivel arányosak, ez korlátozza az alkalmazható keresztmetszet méreteit. A végleges szerkezetben pedig a lécek meglehetősen nagy nyomatékokat kapnak, hiszen csak két irányban futnak, hiányzik a harmadik irányú rudazat, amely lehetővé tenné a membránhéjszerű teherviselést. Az egyrétegű térbeli rácsok kontinuumelméletéből (Kollár és Hegedűs, 1985) ugyanis világosan következik, hogy egy rács akkor működhet membránhéjszerűen, ha legalább három irányban futnak benne rudak. Mivel a lécrácshéjban ez nem teljesül, ezért a léceknek nagyobb keresztmetszetet kellene adni, mintha három irányban futnának a rudak. Ilyenformán a megépíthetőség és a teherbírás egymással ellentétes követelményeket támaszt, ami meglehetősen szűk korlátok közé szorítja a szerkezet alkalmazhatóságát.

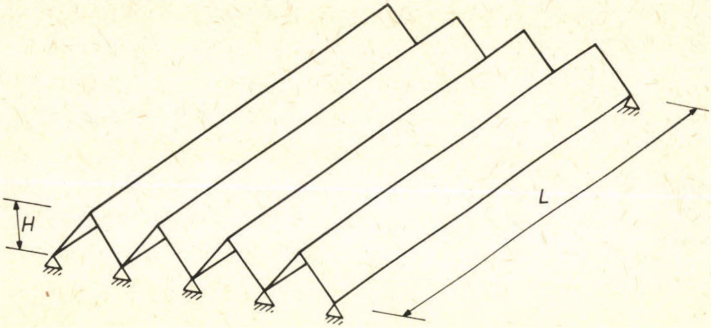
Mindezen megfontolások két lényeges dologra mutatnak rá: a rudakban a meggörbítésből aránylag nagy sajátfeszültségek ébrednek, amelyek csökkentik a teherbíró képességet; és hiányzik a harmadik irányú rudazat, amely lehetővé tenné a membránhéjszerű működést.

A rudak érintősíkban keletkező hajlítási feszültségeit úgy küszöbölhetjük ki, hogy a csomópontokban (legalábbis építés közben) csuklósan csatlakoztatjuk a rúddarabokat. A harmadik irányú rudazatot nyilván csak utólag lehet elhelyezni, mert egyébként az egyszerű építésmód válnék lehetetlenné. Nehézséget okoz azonban, hogy szinte mindegyik csomóponttávolság különböző lesz, és az építés jellegéből következően e távolságok méreteltérése számottevő lehet a tervezetthez képest. Így csak olyan megoldás jöhet szóba, amely nem előre felfűrt rudakat helyez el a harmadik irányban, hanem mintegy „alkalmazkodik" a tényleges csomóponttávolságokhoz. Ilyen megoldást láthatunk a *15. ábrán* (Schlaich és munkatársai, 1990), (Gerkan és munkatársai, 1990), ahol a megszakított lécek olyan hevederekkel vannak összekötve, amelyek a léc hossztengelyében két-két lyukkal csatlakoznak egy-egy léchez, de e lyukak közül az egyik keresztirányban ovális. Így a lécek az érintősíkban akadálytalanul „meggörbülhetnek", pontosabban fogalmazva: törésszöget alkothatnak mindegyik csomópontban. Ily módon elmaradnak a meggörbítésből származó nagy feszültségek.

A harmadik irányú rudazatot célszerűen sodronykötélből lehet elkészíteni, amely átbújik az (építés közben laza) csomópontokon, s így „végtelenítve" van. Emelés közben a lazán összecsavarozott léc és heveder között a sodronykötél meg tud csúszni, és így követni tudja az átlóknak a négyzetek rombusszá alakulása közben bekövetkező hosszváltozását. A végleges helyzet elérésekor meghúzzák a sodronykötelet, és csavarokkal összeszorítják a csomópontokat. Mivel azonban a sodronykötél nem tud nyomást felvenni, mind a két átló irányában el kell helyezni. Így a szerkezet pótátlós rácsozatúvá válik (az egyik kötélszár kihajolhat, a másik mindenképpen húzást kap), és membránhéjként viseli a rá ható terheket.



15. ábra



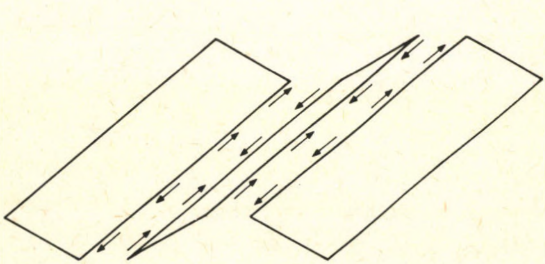
16. ábra

Ez a megoldás megtartja az építésmód egyszerűségét és igen nagy mértékben megnöveli a lécrácshéj teherbírását.

Láthatjuk, hogy a szerkezet átalakításához szükséges egyik alapvető tudnivalót (a kétirányú rudazatot ki kell egészítenünk egy harmadik irányúval) a közelítő jellegű membránhéjelmélet és a rácsos héjak ugyancsak közelítő jellegű kontinuumelmélete szolgáltatta.

Nézzünk még egy példát arra, hogy hogyan dönthetünk el egy elvi statikai kérdést közelítő megfontolások segítségével.

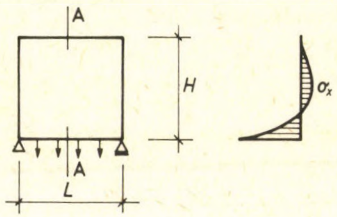
A lemezművek *(16. ábra)* erőjátékában fontos szerepük van az ún. háromélerő-egyenleteknek. A csatlakozó lemezelemek között fellépő élerők *(17. ábra)* biztosítják, hogy a két lemezelem az él mentén egyforma megnyúlást szenvedjen. Mivel a lemez-



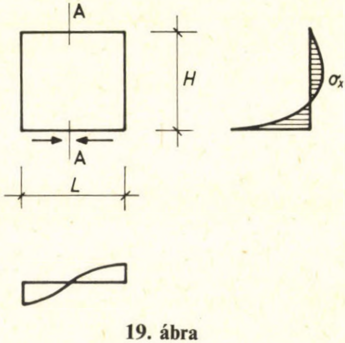
17. ábra

elem egyik szélén működő élerő általában számottevő megnyúlást okoz a szemben lévő élben is, a folytatólagos tartók Clapeyron-egyenleteinek analógiájára itt is olyan egyenleteket kell felírnunk, amelyek három egymás melletti élben fellépő élerőt foglalnak össze.

A hajlított tartók elméletéből ismeretes azonban, hogy ha a tartó rövid, azaz magassága megközelíti a támaszköz méretét, akkor pl. az alsó éle mentén terhelt és az alsó két sarkán megtámasztott tartó felső élén gyakorlatilag nem lép fel hajlítási feszültség *(18. ábra)*. A kérdés most már az, hogy az élerővel terhelt tartóban *(19. ábra)* ugyanolyan magasság/támaszköz arányok mellett lesz-e elhanyagolhatóan kicsi az élerővel átellenes él mentén keletkező feszültség, mint a 18. ábra szerint terhelt tartóban.



18. ábra



19. ábra

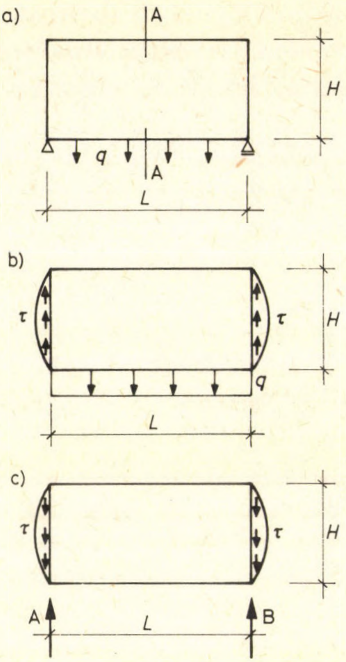
Ezt a kérdést a legszemléletesebben a Saint-Venant-elv segítségével vizsgálhatjuk meg, amely tudvalévőleg azt mondja ki, hogy a tartó peremének egy *a* hosszúságú szakaszán ható, önmagában egyensúlyban lévő erőrendszer hatása gyakorlatilag elenyészik a peremtől mért *a* távolságban. A 18. és 19. ábrákon a faltartó alsó *L* hosszúságú peremén hat egy-egy önmagában egyensúlyban lévő erőrendszer, így hatásuk $H=L$ magasságban már elenyészik.

Ha a tartó hosszabb, mint amilyen magas ($L>H$), akkor a következőképpen járhatunk el:

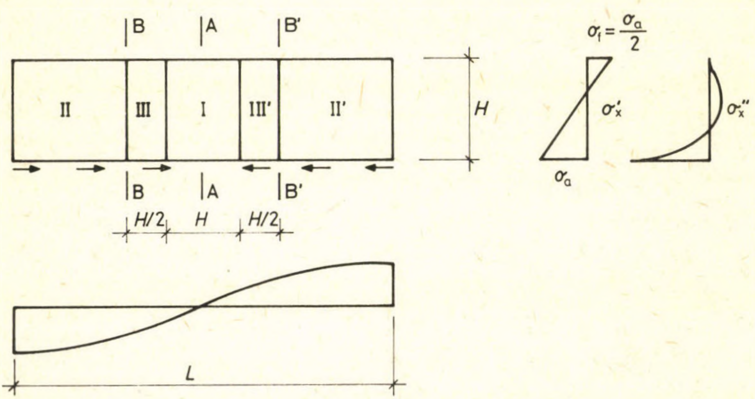
Az alsó élén terhelt és a sarokpontjaiban megtámasztott tartó (*20a. ábra*) feszültségállapotát két részből tehetjük össze: egyrészt a lineáris normálfeszültség-eloszlásnak megfelelő feszültségállapotból, amelyhez a két véglapon a parabolikus nyírófeszültség-eloszlásnak megfelelően kell hatnia a támaszerőnek (*20b. ábra*); másrészt pedig a *20c. ábrán* vázolt erőrendszer okozta feszültségállapotból, amely eltünteti a két véglapról a parabolikus reakcióerő-eloszlást és helyette az alsó sarokpontot támasztja meg egy koncentrált erővel. A két véglapon e két terhelés különbsége egyensúlyi erőrendszert alkot, amelynek zavaró hatása a tartó magasságával megegyező vízszintes távolságban gyakorlatilag elenyészik. Ha tehát a tartó hossza a magasság kétszerese vagy több ($L \geqq 2H$), akkor a középső A—A keresztmetszetben már nem érzékelhető, hogy a véglapon melyik erőrendszer működik, így itt mindenképpen lineáris lesz a feszültségeloszlás. A 20. ábrának megfelelően terhelt tartó tehát „hosszú”-nak számít, ha $L \geqq 2H$. A $H<L<2H$ tartományt átmeneti zónának tekinthetjük.

Megváltozik azonban a helyzet, ha a tartót az alsó szélén koszinusz-eloszlású élerőrendszer terheli. Ekkor a *21. ábra* szerint három szakaszra célszerű bontanunk a tartót.

A középső, *H* szélességű, I-gyel jelölt szakasz alsó élére egyensúlyi erőrendszer működik, amelynek hatása a *H* távolságban lévő felső élig a 19. ábra szerint elenyészik.



20. ábra

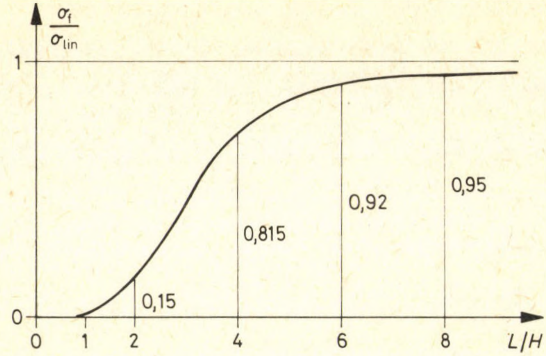


21. ábra

A két szélső (II, ill. II') szakasz B—B, ill. B'—B' határvonalára ismeretlen eloszlásban működnek a vízszintes σ_x feszültségek. Ha ezeknek az eloszlása lineáris lenne (a 21. ábrán σ'_x), akkor hatásukra a középső A—A metszetben is ugyanilyen lineáris feszültségeloszlás ébredne (mivel ez elégíti ki az összeférhetőségi követelményt). Ha viszont másfajta feszültségeloszlás működik a B—B (ill. B'—B') metszetre, pl. a 21. ábrán σ''_x-vel jelölt eloszlás, akkor ismét a Saint-Venant-elvet felhasználva azt mondhatjuk, hogy a kétféle σ_x-eloszlás különbsége egyensúlyi erőrendszert alkot, amelynek hatása elenyészik a középső A—A metszetig. Itt tehát mindenképpen lineáris σ_x-eloszlás keletkezik a II (ill. II') szakaszra ható élerőkről.

A III (ill. III') szakaszra ható élerőkből az A—A metszetben ébredő σ_x feszültségek eloszlását csak pontosabb (rugalmasságtani) vizsgálattal lehetne meghatározni. Közelítésképpen azonban azt mondhatjuk, hogy az itt ható erők hatása az I. és a II. szakaszon működő erőké között helyezkedik el, és a legegyszerűbb, ha a kettő „átlagát" vesszük, azaz feltételezzük, hogy a III. szakaszon ható erőkből a felső élben feleakkora σ_f keletkezik, mintha ezek az erők a II. szakaszon működnének.

Mindezek alapján meghatározható különböző L/H arányokhoz a középső A—A metszet felső élében keletkező σ_f feszültség. Elosztva ezt a σ_{lin} értékkel, amelyet a teljes $L/2$ tartófélre ható erőkből ugyanitt a lineáris feszültségeloszlás feltételezésével kapunk meg, képet alkothatunk arról, hogy mikor mennyire tér el a felső élben ébredő σ_f feszültség a „hosszú" tartó σ_{lin} feszültségétől *(22. ábra)*. A diagram azt mutatja, hogy az alsó élén koszinusz-eloszlású élerőkkel terhelt lemezelem (tárcsa) mintegy $L \leqq 2H$-ig „rövidnek" vehető, mintegy $L \geqq 4H$-tól kezdve pedig „hosszúnak". A $2H < L < 4H$ tartomány átmeneti zóna. Mivel a háromélerő-egyenletek létrejöttét az dönti el, hogy az egyik szélen ható élerő okoz-e feszültséget, ill. megnyúlást az átellenes szélen, ezért a háromélerő-egyenletek felírásának szükségességét a 22. ábra szerint állapíthatjuk meg.



22. ábra

Ez az igen egyszerű eszközökkel elvégzett vizsgálat tehát megmutatta, hogy a két terhelési esetben, vagyis az alul terhelt faltartó és az élerőkkel terhelt lemezelem esetében, más lesz a „rövid" és a „hosszú" lemezelemek határa.

A közelítő módszerek kidolgozásánál ügyelni kell arra, hogy ne hanyagoljunk el olyan mennyiségeket, amelyeknél kisebbeket figyelembe veszünk. Ez nem is olyan egyszerű, mint amilyennek első hallásra tűnik, ugyanis a levezetésben szereplő kifejezésekből többnyire nem derül ki világosan ezeknek a mennyiségeknek a nagyságrendje, hanem ezt sokszor csak külön vizsgálattal lehet megállapitani. Ezt a veszélyt jól illusztrálja a következő példa.

A héjhorpadási vizsgálatokban a kritikuson túli viselkedés leírásához a leggyakrabban használt Donnell-elmélet figyelembe veszi a héj érintősíkjában bekövetkező u és v eltolódások első hatványait, valamint a héjfelületre merőleges w eltolódás második hatványait. Ennek oka az, hogy a horpadási alakváltozás során keletkező, a felületre merőleges eltolódáskomponens sokkal nagyobb az érintősíkba esőknél, és ezért négyzete azonos nagyságrendű az utóbbiak első hatványával.

Néhány éve egy külföldi folyóiratban megjelent egy dolgozat, amely céljául tűzte ki a Donnell-elmélet pontosítását, és figyelembe vette az érintősíkba eső (u és v) eltolódáskomponensek második hatványait is. E vizsgálatnak azonban még sincs különösebb jelentősége, mivel egyidejűleg figyelembe kellett volna vennie a felületre merőleges w eltolódás negyedik hatványait is, hiszen ez azonos nagyságrendű u és v második hatványával. Csak ily módon tudta volna a szerző valóban pontosítani a Donnell-egyenleteket.

5. A PONTOS ÉS A KÖZELÍTŐ MÓDSZEREK ÖSSZEVETÉSE

A pontos és a közelítő módszerekről eddig elmondottak alapján elsősorban azt állapíthatjuk meg, hogy a kettő nem egymás vetélytársa, hanem más célt szolgál, és így kiegészítik egymást. A közelítő módszerek elsősorban áttekinthetőségük és egyszerűségük folytán alkalmasak arra, hogy segítségükkel ki tudjuk választani a legmegfelelőbb szerkezetet és meg tudjuk határozni a fő méreteit. A pontos számítás pedig arra szolgál, hogy igazoljuk: a közelítő számítás és egyéb szempontok figyelembevételével kialakított szerkezet erőtanilag minden vonatkozásban megfelel a követelményeknek. Mind a kettőre szükség van, már csak azért is, mert sem a közelítő, sem a pontos számítás nem nélkülözheti az ellenőrzést, és nincs jobb ellenőrzés, mint két, egymástól független számítás összevetése.

A közelítő módszerek nagy értéke a szemléletességük, s ez annál fontosabb, minél inkább fejlődik a komputertechnika, és minél bonyolultabbak a programok, amelyeket a pontos számításhoz használunk. Kevés veszélyesebb dolog van, mint egy bonyolult gépi számítás alapján elkészíteni egy tervet anélkül, hogy közelítően, józan mérnöki szemlélettel követnénk az erőjátékát, és legalább durván ellenőriznénk az eredmények helyességét.

A mérnöki szerkezetek kialakításához elengedhetetlenül szükséges az erőjáték tisztázása és az igénybevételek meghatározása. Szeretném hinni, hogy az előadottakból világosan kitűnik: e célt egyaránt szolgálják mind a pontos, mind a közelítő módszerek, mindegyikük a maga helyén és a maga szerepkörében. A mérnök akkor jár el helyesen, ha a legkorszerűbb pontos számítást és a legkorszerűbb közelítő számítást használja. Legyen szabad ezzel kapcsolatban idéznünk Kherndl Antalt, a hídépítéstan múlt században élt professzorát, aki 1868-ban, a Bazilika kupolájának építés közben bekövetkezett összeomlásáról tartott előadást a Magyar Mérnök és Építész Egyletben, és amit több mint 100 éve mondott, az lényegében ma is helytálló:

„— Eddig egy egyszerű dongabolt vagy vasív oldalnyomásának és azon fal erősségének meghatározása, a mely ezen oldalnyomásnak ellentállni képes, csak napokra terjedő idővesztéséggel volt lehetséges.
— Két évvel ezelőtt jelent meg Culmann az építészeti egyensúlytant szerkezeti úton tárgyaló munkája, a mely hasonló feladatok megoldását néhány negyed óra alatt lehetségesítő módokat tartalmaz, és ma már ott, hol a munka ösmeretes, alig terveztetik még építmény egyedül szemmérték alapján.
— Kinek jutna ma eszébe egy nagyobb vashíd tervezése a nélkül, hogy méreteit tüzetesen kiszámítaná?”

6. IRODALOM

CSONKA P. (1981): Héjszerkezetek. Akadémiai Kiadó, Budapest.

KOLLÁR, L.—HEGEDŰS, I. (1985): Analysis and Design of Space Frames by the Continuum Method. Elsevier Sci. Publ., Amsterdam — Akadémiai Kiadó, Budapest.

GERKAN, MARG und Partner mit SCHLAICH, BERGEMANN und Partner (1990): Museum für Hamburgische Geschichte. Deutsche Bauzeitung **124**, 32—39.

SCHLAICH, BERGEMANN und Partner (1990): Filigrankuppel der Freizeitbades Neckarsulm. Archiv des Badewesens, 265—268.

SZABÓ J.—ROLLER B. (1971): Rúdszerkezetek elmélete és számítása. Műszaki Könyvkiadó, Budapest.

TARNAI T. (1978): A héjak membránállapotának létezési és egyértelműségi feltételeiről. Műszaki Tudomány **56**, I. Hiperbolikus héjak 19—47, II. Parabolikus héjak 169—192, III. Elliptikus héjak 379—410.

TARNAI T. (1990): Kinematikailag határozatlan szerkezetek és szerkezeti topológia. Akadémiai doktori értekezés, Budapest.

Ára: 176,– Ft 10% áfával