ÉRTEKEZÉSEK
EMLÉKEZÉSEK

KÁTAI IMRE

SZABÁLYOS VISELKEDÉSŰ ARITMETIKAI FÜGGVÉNYEK

1828

73

AKADÉMIAI KIADÓ, BUDAPEST

ÉRTEKEZÉSEK
EMLÉKEZÉSEK

ÉRTEKEZÉSEK EMLÉKEZÉSEK

SZERKESZTI

TOLNAI MÁRTON

KÁTAI IMRE

SZABÁLYOS VISELKEDÉSŰ ARITMETIKAI FÜGGVÉNYEK

AKADÉMIAI SZÉKFOGLALÓ

1985. OKTÓBER 30.

AKADÉMIAI KIADÓ, BUDAPEST

A kiadványsorozatban a Magyar Tudományos Akadémia 1982. évi CXLII. Közgyűlése időpontjától megválasztott rendes és levelező tagok székfoglalói — önálló kötetben — látnak napvilágot.

A sorozat indításáról az Akadémia főtitkárának 22/1/1982. számú állásfoglalása rendelkezett.

ISBN 963 05 4982 4

Kiadja az Akadémiai Kiadó, Budapest

A kiadásért felelős az Akadémiai Kiadó
és Nyomda Vállalat főigazgatója
A nyomdai munkálatokat
az Akadémiai Kiadó és Nyomda Vállalat végezte
Felelős vezető: Hazai György
Budapest, 1989
Nyomdai táskaszám: 17728
Felelős szerkesztő: Szente László
Műszaki szerkesztő: Kiss Zsuzsa
Kiadványszám: 2184
Megjelent 4,74 (A/5) ív terjedelemben
HU ISSN 0236—6258

Printed in Hungary

BEVEZETÉS

A számelmélet alaptétele szerint minden természetes szám egyértelműen állítható elő prímszámok szorzataként. A természetes számok halmazán értelmezett függvényeket számelméleti, más néven aritmetikai függvényeknek nevezzük. A számelmélet ezek közül azokat vizsgálja, amelyek valamilyen módon összefüggésben vannak a természetes számok multiplikatív struktúrájával, vagyis prímtényezős felbontásukkal.

Egy f függvényt additívnak, egy g függvényt multiplikatívnak nevezünk, ha az $f(mn)=f(m)+f(n)$, illetve a $g(mn)=g(m)g(n)$ feltétel minden relatív prím m, n számpárra teljesül. Ha az előbbi egyenletek nemcsak a relatív prím párokra, hanem minden m, n számpárra teljesülnek, akkor az f függvényt teljesen additívnak, a g függvényt teljesen multiplikatívnak nevezzük. Az n szám törzstényezős (más néven prímtényezős) felbontása legyen $n=p_1^{\alpha_1}\ldots p_r^{\alpha_r}$. Ekkor additív f-re $f(n)=f(p_1^{\alpha_1})+\ldots+f(p_r^{\alpha_r})$, multiplikatív g-re $g(n)=g(p_1^{\alpha_1})\ldots g(p_r^{\alpha_r})$. Látható, hogy ezeket a függvényeket a prímhatványhelyeken felvett értékeik teljesen meghatározzák.

Egyes nevezetes aritmetikai függvények vizsgálata mintegy kétszáz évvel ezelőtt kezdődött. Észrevették, hogy az aritmetikai függvények általában lokálisan szabálytalanul viselkednek, hogy például egy additív függvénynek az n helyen felvett értéke alig befolyásolja az $n+1$ helyen felvett értékét.

Kivételt képez azonban az $f(n)=c \log n$ függvény, amely monoton, s teljesíti az $f(n+1)-f(n)\to 0$ $(n\to\infty)$ feltételt. Erdős Pál [1] 1946-ban kimutatta, hogy nincs más additív függvény, amely e két tulajdonság bármelyikével rendelkezne. Ezzel az észrevételével elindította a szabályos viselkedésű aritmetikai függvények kutatását. Az I. fejezetben Erdős tételének több, messzemenő általánosítását tárgyaljuk. A II. fejezetben azokat a multiplikatív, komplex értékű f függvényeket vizsgáljuk, amelyekre $\Delta f(n):=f(n+1)-f(n)\to 0$ vagy ennél egy kicsit erősebb feltétel teljesül. A III. fejezet Daróczy Zoltánnak és a szerzőnek kompakt kommutatív csoportokba képező szabályos viselkedésű additív függvények karakterizációjára vonatkozó eredményét tartalmazza.

Igyekeztünk bemutatni a bizonyítási módszerek sokszínűségét, az egyszerűbb kifejtés érdekében nem törekedtünk az elérhető legélesebb tételek bizonyítására.

Dolgozatunkban a következő szokásos jelöléseket használjuk: $\mathbb{N}$ a természetes számok, $\mathbb{Z}$ a racionális egészek halmaza, $\mathbb{Q}$ a racionális számok additív csoportja; $\mathbb{Q}_x$ a pozitív racionális számok multiplikatív csoportja; $\mathbb{R}$ a valós számok additív csoportja; $\mathbb{R}_x$ a pozitív valós számok multiplikatív csoportja, $\mathbb{T}$ az egydimenziós tórusz. A III. fejezet tárgyalásánál mindegyiket a szokásos topológiával ellátva tekintjük. Ha $a, b \in \mathbb{N}$, akkor (a, b) az a és b számok legnagyobb közös osztóját, $[a, b]$ a legkisebb közös többszörösét jelöli. Valamely $\{x_n\}$ sorozatra

$$Ex_n := x_{n+1},$$

$$\Delta x_n = x_{n+1} - x_n,$$

$$Ix_n := x_n.$$

Ha $z \in \mathbb{R}$, akkor $\|z\|$ a z számnak legközelebbi egésztől való távolságát jelöli. $c, c_1, c_2, \ldots$, ha mást nem mondunk, alkalmas pozitív állandókat jelölnek. A könnyebb áttekinthetőség kedvéért a tételek bizonyításának végét ■ jelöli, a közben felhasznált lemmák bizonyításáét pedig □.

I. SZABÁLYOS VISELKEDÉSŰ ADDITÍV FÜGGVÉNYEK

1.§. Jelölje A az $\mathbb{N}\to\mathbb{R}$ additív függvények és A* a teljesen additív függvények halmazát. Erdős Pál említett tétele szerint, ha $f(n)$ monoton vagy $\Delta f(n)\to 0$ $(n\to\infty)$ és $f\in$ A, akkor f csak a log függvény konstansszorosa lehet. Ennek a tételnek számos lényeges általánosítása van.

1970-ben e dolgozat írója kimutatta, Erdős egyik sejtését igazolva ezzel, hogy $f\in$ A esetén az

$$\frac{1}{x}\sum_{n\le x}|\Delta f(n)|\to 0 \qquad (x\to\infty) \tag{I.1}$$

reláció is csak az $f=c\log$ függvényekre teljesül [2]. Később ezt az állítást a gyengébb

$$\liminf_{x\to\infty}\frac{1}{\log x}\sum_{n\le x}\frac{1}{n}|\Delta f(n)|=0 \tag{I.2}$$

feltételből is sikerült levezetnie [3].

Még tovább ment E. Wirsing német matematikus, bebizonyítva, hogy ha $\gamma>0$ állandóval

$$\liminf_{x\to\infty}\frac{1}{x}\sum_{x\le n\le(1+\gamma)x}|\Delta f(n)|=0 \tag{I.3}$$

teljesül valamely $f\in$ A függvényre, akkor $f=c\log$ [4].

Ugyancsak Wirsing nevéhez fűződik az alábbi két eredmény [5]:

(a) Ha $f\in$ A* és $\Delta f(n)=o(\log n)$ $(n\to\infty)$, akkor $f=c\log$.

(b) Ha $f \in \mathrm{A}$ és $\Delta f(n) \geq -K$, $K > 0$ konstans, akkor $f(n) = c \log n + u(n)$, ahol u korlátos additív függvény.

A szerző már 1964-ben felvetette a következő problémát. Adott $c_0, c_1, \ldots, c_k$ valós (avagy komplex) állandók esetén határozzuk meg azokat az $f \in \mathrm{A}$ függvényeket, amelyekre

$$\lim_{n \to \infty} \sum_{i=0}^{k} c_i f(n+i) = 0 \tag{I.4}$$

teljesül. Sejtésként fogalmazta meg, hogy $\Sigma c_i = 0$ esetén a $c \log$ alakú függvények alkotják az összes megoldást, $\Sigma c_i \neq 0$ esetén az egyetlen megoldás az $f(n) = 0$ $(\forall n \in \mathbb{N})$. Mintegy 10 évvel később P.D.T.A. Elliottnak is, a szerzőnek is, kb. egyidőben, egymástól függetlenül sikerült ezt a sejtést bebizonyítania. A bizonyításhoz kidolgozott módszer azután hatásosnak bizonyult további problémák megoldására. Így sikerült Wirsing tételéből levezetni, hogy $f \in \mathrm{A}^*$ esetén a

$$\sum_{i=0}^{k} c_i f(n+i) = o(\log n) \tag{I.5}$$

feltétel csak az $f = c \log$ függvényre teljesülhet.

Vizsgáljuk most azokat az $f, g \in \mathrm{A}$ függvénypárokat, amelyekre $g(n+1) - f(n) \to 0$ $(n \to \infty)$ teljesül. A szerző észrevette, hogy ekkor $f(n) = g(n)$ $(\forall n \in \mathbb{N})$, és Erdős tételével $f(n) = g(n) = \mathrm{c} \log n$ $(\forall n \in \mathbb{N})$. Egyszerű eszközökkel sikerült Wirsing tételéből levezetnie, hogy $f, g \in \mathrm{A}^*$,

$$g(n+1) - f(n) = o(\log n) \qquad (n \to \infty) \tag{I.6}$$

esetén $f(n) = g(n) = c \log n$.

2.§. Bebizonyítjuk a következő tételt.

1. Tétel. Ha $f \in A^*$, és

$$\liminf \frac{1}{\log x} \sum_{n \leq x} \frac{|\Delta f(n)|_+}{n} = 0, \tag{I.7}$$

akkor $f(n) = c \log n$. Itt $|y|_+ = \max(0,y)$.

Bizonyítás. Legyen

$$g_a(n) = \max_{j=0,\dots,a} |\Delta f(n+j)|_+.$$

Legyen $p \geq 2$ *tetszőleges egész szám*, $x_\nu = p^\nu$ $(\nu = 0, 1, 2, \dots)$. Minden N természetes számhoz tekintsük a p-adikus kifejtését $\{0,1,\dots,p-1\} = B$ halmazbeli jegyekkel, más szóval tekintsük az

$$N_0 := N, \dots, N_{j+1} = \left[\frac{N_j}{p}\right] \quad (j = 0, 1, \dots)$$

sorozatot. Ekkor

$$N_j = pN_{j+1} + a_j \qquad (a_j \in B).$$

Világos, hogy $x_\nu \leq N < x_{\nu+1}$ esetén $x_{\nu-j} \leq N_j < x_{\nu+1-j}$. Észrevesszük továbbá, hogy bármely $k \in [x_{\nu-j}, x_{\nu+1-j}]$ szám pontosan p^j-szer fordul elő N_j-ként. Mivel

$$f(N_0) - \nu f(p) = \big(f(N_0) - f(pN_1)\big) + \big(f(N_1) - f(pN_2)\big) + \dots +$$
$$+ \big(f(N_{\nu-1}) - f(pN_\nu)\big) + f(N_\nu),$$

ezért

$$|f(N_0) - \nu f(p)|_+ \leq g_p(pN_1) + \dots + g_p(pN_\nu) + A_p,$$

ahol

$$A_p = \max_{j=1,\dots,p-1} |f(j)|.$$

Összegezzük most az előző egyenlőtlenséget az $N \in [x_\nu, x_{\nu+1})$ értékekre. Így az

$$\frac{1}{x_{\nu+1}} \sum_{N \in [x_\nu, x_{\nu+1}]} |f(N) - \nu f(p)|_+ \le \frac{1}{x_\nu} \sum_{x_\nu \le N < x_{\nu+1}} g_p(N) +$$

$$+ \frac{1}{x_{\nu-1}} \sum_{x_{\nu-1} \le N < x_\nu} g_p(N) + \dots + A_p \le p \sum_{N \le x_{\nu+1}} \frac{g_p(N)}{N} + A_p$$

egyenlőtlenséghez jutunk.

Adott N-re legyen most az $M_0 = N, M_1, M_2, \dots$ egész számokból álló sorozat az

$$M_j = pM_{j+1} - b_j \qquad (b_j \in \mathrm{B})$$

formulával értelmezve. Legyen $x_\nu \le N < x_{\nu+1}$. Ekkor a

$$\nu f(p) - f(M_0) = (f(pM_1) - f(M_0)) + (f(pM_2) - f(M_1)) + \dots +$$

$$+ (f(pM_\nu) - f(M_{\nu-1})) - f(M_\nu)$$

egyenlőtlenségből kiindulva

$$|\nu f(p) - f(M_0)|_+ \le g_p(M_0) + g_p(M_1) + \dots + g_p(M_{\nu-1}) + A_p$$

adódik. Összegezve az $M_0 = N \in [x_\nu, x_{\nu+1})$ egészekre, hasonlóan, mint az előbb,

$$\frac{1}{x_{\nu+1}} \sum_{x_\nu \le N < x_{\nu+1}} |\nu f(p) - f(N)|_+ \le p \sum_{N < x_{\nu+1}} \frac{g_p(N)}{N} + A_p$$

adódik.

Minthogy $|y| = |y|_+ + |-y|_+$, ezért a fenti két egyenlőtlenségből

$$\frac{1}{x_{\nu+1}} \sum_{x_\nu \le N < x_{\nu+1}} |f(N) - \nu f(p)| \le 2p \sum_{N < x_{\nu+1}} \frac{g_p(N)}{N} + 2A_p \qquad (I.8)$$

következik. Mivel $\nu = \left[\dfrac{\log N}{\log p}\right]$, ezért

$$\left|\frac{f(N)}{\log N} - \frac{f(p)}{\log p}\right| = \frac{1}{\log N}\left|f(N) - \frac{\log N}{\log p} f(p)\right| \leq$$

$$\leq \frac{1}{\log N}|f(N) - \nu f(p)| + \frac{|f(p)|}{\log N},$$

s (I.8) segítségével

$$\begin{aligned} &\frac{1}{x_{\nu+1}} \sum_{x_\nu \leq N < x_{\nu+1}} \left|\frac{f(N)}{\log N} - \frac{f(p)}{\log p}\right| \leq \\ &\leq \frac{c_p}{\nu+1} \sum_{N < x_{\nu+1}} \frac{g_p(N)}{N} + O\left(\frac{1}{\nu+1}\right), \end{aligned} \tag{I.9}$$

ahol c_p alkalmas, p-től függő állandó.

Válasszunk most p helyett egy q számot, legyen $y_\mu = q^\mu$ ($\mu = 0,1,2,\ldots$). Ekkor

$$\begin{aligned} &\frac{1}{y_{\mu+1}} \sum_{y_\mu \leq N < y_{\mu+1}} \left|\frac{f(N)}{\log N} - \frac{f(q)}{\log q}\right| \leq \\ &\leq \frac{c_q}{\mu+1} \sum_{N < y_{\mu+1}} \frac{g_p(N)}{N} + O\left(\frac{1}{\mu+1}\right). \end{aligned} \tag{I.10}$$

Legyen $q^2 < p$. Mivel $x_{\nu+1} = p x_\nu$, $y_{\mu+1} = q y_\mu$, ezért az $(x_\nu, x_{\nu+1})$ intervallum q-nak legalább két egészkitevős hatványát tartalmazza. Legyen az $(x_\nu, x_{\nu+1})$ intervallumbeli legkisebb q hatvány $q^\mu = y_\mu$, a legnagyobb pedig $q^{\mu+l} = y_{\mu+l}$. Legyen $I_\nu = [y_\mu, y_{\mu+l})$. Mivel

$$y_\mu = g y_{\mu-1} < q x_\nu,$$

$$y_{\mu+l} = \frac{1}{q} y_{\mu+l+1} \geq \frac{1}{q} x_{\nu+1},$$

ezért

$$y_{\mu+l}-y_\mu \geq \frac{p}{q}x_\nu-(q-1)x_\nu=\left(\frac{p}{q}-(q-1)\right)x_\nu.$$

Beláttuk tehát, hogy I_μ-nek legalább $\delta x_{\nu+1}$ számú eleme van, ahol δ alkalmas pozitív állandó. Legyen

$$E:=\left|\frac{f(p)}{\log p}-\frac{f(q)}{\log q}\right|.$$

Figyelembe véve az (I.9), (I.10) egyenlőtlenségeket,

$$E\delta \leq \frac{1}{x_{\nu+1}}\sum_{N\in I_\nu} 1 \leq \frac{\tilde{c}}{\log x_{\nu+1}}\sum_{N<x_{\nu+1}}\frac{g_p(N)}{N}+O\left(\frac{1}{\nu}\right)$$

adódik. Az (I.7) feltételből közvetlenül következik, hogy

$$\frac{1}{\log x_{\nu+1}}\sum_{N<x_{\nu+1}}\frac{g_p(N)}{N}\to 0 \qquad (\nu\to\infty),$$

ezért a jobb oldal zérushoz tart. Ez csak $E=0$ esetén lehetséges. Beláttuk tehát, hogy

$$\frac{f(p)}{\log p}=\frac{f(q)}{\log q}, \tag{I.11}$$

ha $p>q^2$. Legyen most p és q tetszőleges. Válasszunk olyan nagy k egészet, amelyre $p^k>q^2$. Ekkor (I.11) miatt

$$\frac{f(p^k)}{\log p^k}=\frac{f(q)}{\log q},$$

másrészt a bal oldal megegyezik $\dfrac{f(p)}{\log p}$-vel. Ezért (I.11) minden p, q választásra fennáll, tehát $f(n)=$ $=c\log n$. Tételünket bebizonyítottuk. ■

Ha (I.7) helyett a

$$\liminf \frac{1}{\log x} \sum_{n \le x} \frac{|\Delta f(n)|}{n} = 0 \tag{I.12}$$

kétoldali korlátozást tételezzük fel, akkor az $f(n) = c \log n$ alakú függvények lesznek a megoldások az additív függvények körében is, vagyis érvényes a következő tétel.

2. Tétel. Ha $f \in$ A, és (I.12) teljesül, akkor $f(n) = c \log n$.

Bizonyítás. Elég belátni, hogy (I.12) esetén $f \in$ A*. Legyen p tetszőleges prímszám, N relatív prím p-hez. Ekkor

$$\begin{aligned} f(p^\nu) + f(N) = f(p^\nu N) = \big(f(p^\nu N) - f(p^\nu N + p)\big) + \\ + \sum_{j=1}^{\nu-2} \big(f(p^{\nu-j} N + 1) - f(p^{\nu-j} N + p)\big) + \\ + \big(f(pN+1) - f(pN)\big) + f(N) + f(p), \end{aligned}$$

és így

$$|f(p^\nu) - \nu f(p)| \sum_{N \le x} 1 \le \sum_{n \le xp} h_p(n), \tag{I.13}$$

ahol

$$h_a(n) = \max_{-a \le j \le a} |f(n+j) - f(n)|.$$

Az (I.12) feltételből egyszerűen következik, hogy

$$\liminf \frac{1}{x} \sum_{n \le x} h_p(n) = 0, \tag{I.14}$$

másrészt

$$\sum_{\substack{N \le x \\ (N,p) = 1}} 1 = x\left(1 - \frac{1}{p}\right) + O(1),$$

ezért (I.13)-ból a

$$|f(p^{\nu})-\nu f(p)|\left(1-\frac{1}{p}\right)\leq\frac{1}{x}\sum_{n\leq xp}h_p(n)+O\left(\frac{1}{x}\right)$$

egyenlőtlenséghez jutunk. Alkalmas $x_l\to\infty$ sorozatot választva, (I.14)-ból $f(p^{\nu})=\nu f(p)$ adódik. Ez pedig éppen a teljes additivitás feltétele. ∎

Egy egyszerű, de meglepő általánosítás a következő.

3. Tétel. Ha $f, g\in A$, és

$$\liminf\,(\log x)^{-1}\sum_{n\leq x}\frac{1}{n}|g(n+1)-f(n)|=0, \tag{I.15}$$

akkor $f(n)=g(n)=c\log n$.

Bizonyítás. Legyen $H(n)=g(n)-f(n)$. Nyilvánvalóan elegendő belátni, hogy $H(n)\equiv 0$. Legyen

$$\rho(n)=g(n+1)-f(n),$$

$$C:=g(4)-g(2)-f(2).$$

Vegyük észre, hogy

$$g(16k+12)-f(16k+10)=C+\rho(8k+5), \tag{I.16}$$

$$g(16k+12)-f(16k+10)=$$
$$=\rho(16k+11)-H(16k+11)+\rho(16k+10). \tag{I.17}$$

E két egyenlőségből

$$C+H(16k+11)=g(16k+11)+\rho(16k+10)-\rho(8k+5) \tag{I.18}$$

következik. Legyen $m\equiv 1 \pmod{16}$ rögzített egész,

$16k+11$ relatív prím m-hez. Ekkor (I.18)-ból

$$C+H(m(16k+11))=\rho(m(16k+11))+\rho(m(16k+11)-1)-$$
$$-\rho\left(\frac{m(16k+11)-1}{2}\right),$$

és így

$$H(m)=\rho\big(m(16k+11)\big)+\rho\big(m(16k+11)-1\big)-$$
$$-\rho\left(\frac{m(16k+11)-1}{2}\right)-\rho(16k+11)-$$
$$-\rho(16k+10)+\rho(8k+5).$$

Innen

$$|H(m)|\sum_{\substack{k\le x\\(k,m)=1}}\frac{1}{k}\le 6\sum_{n\le 18x}\frac{|\rho(n)|}{n}.$$

Mivel

$$\sum_{\substack{k\le x\\(k,m)=1}}\frac{1}{k}=\frac{\varphi(m)}{m}\log x+O(1),$$

ezért

$$|H(m)|\le\frac{c}{\log x}\sum_{n\le 18x}\frac{|\rho(n)|}{n}+O\left(\frac{1}{\log x}\right)$$

alkalmas pozitív m-től függő állandóval. Alkalmas $\{x=x_l\}$ sorozatot választva, (I.15) miatt $H(m)=0$. Beláttuk tehát, hogy $H(m)=0$, ha $m\equiv 1 \pmod{16}$. Legyenek most m_1, m_2 páratlan számok, $m_1\equiv m_2 \pmod{16}$. Legyen ν olyan egész, amelyre $(\nu, m_1m_2)=1$ és $m_1\nu\equiv 1 \pmod{16}$. Nyilvánvaló, hogy ilyen ν létezik. Ekkor $m_2\nu\equiv 1 \pmod{16}$ is teljesül, s az előbb bebizonyított állítás miatt $H(m_1\nu)=0=H(m_2\nu)$. Beláttuk tehát, hogy $H(m_1)=H(m_2)$. Ez azt jelenti, hogy páratlan m-re $H(m)$ értéke csak attól függ, hogy m mod 16 melyik maradékosztályba esik. Mivel H additív függvény, ez csak akkor teljesülhet, ha $H(m)=0$ minden páratlan m egészre.

Legyen $n \equiv 1 \pmod 3$. Ekkor

$$\rho(n)=\rho(3n+2)+\rho(3n+1)+\rho(3n)-H(3n+2)-H(3n+1). \tag{I.19}$$

Jelölje B_α az $n \equiv 1 \pmod 3$, $2^\alpha \| 3n+1$ feltételt kielégítő n természetes számok halmazát. Ha $n \in B_\alpha$ $(\alpha \geq 1)$, akkor $H(3n+2)=0$, $H(3n+1)=H(2^\alpha)$. (I.19) miatt

$$H(2^\alpha) \sum_{\substack{n \leq x \\ n \in B_\alpha}} \frac{1}{n} \leq 3 \sum_{m \leq 4x} \frac{|\rho(m)|}{m}. \tag{I.20}$$

Figyelembe véve, hogy

$$\lim_{x \to \infty} \frac{1}{\log x} \sum_{\substack{n \leq x \\ n \in B_\alpha}} \frac{1}{n} > 0,$$

(I.20) és (I.15) segítségével $H(2^\alpha)=0$ adódik. Ezért $H(n)=0$ minden n természetes számra teljesül, érvényes tehát a tétel. ■

Jelölje $\Delta^k f$ az f függvény k-adik differenciáját, azaz $\Delta^1 f(n)=f(n+1)-f(n), \ldots, \Delta^j f(n)=\Delta^{j-1} f(n)$. Határozzuk meg azokat az $f \in A$ függvényeket, amelyekre a

$$(\mathrm{H}_k) \qquad \liminf_{x \to \infty} (\log x)^{-1} \sum_{n \leq x} n^{-1} |\Delta^k f(n)| = 0$$

feltétel teljesül valamely $k>0$ egésszel.

4. Tétel. Ha $f \in A$ *és* (H_k) teljesül valamely $k>0$ egészre, akkor $f(n)=c \log n$.

Bizonyítás. Elegendő belátnunk a 2. tétel miatt, hogy (H_k) fennállása esetén (H_{k-1}) is fennáll, ha $k \geq 2$. Legyen $k \geq 2$.

Legyen

$$\Delta_2 f(n) = f(n+2) - f(n),$$

$$\Delta_2^j f(n) = \Delta_2^{j-1} f(n+2) - \Delta_2^{j-1} f(n).$$

Mivel $\Delta = E - I$, $\Delta_2 = E^2 - I$, $\Delta^k = (E-I)^k$, $\Delta_2^k = (E^2 - I)^k$, felhasználva, hogy E és I felcserélhetők,

$$\Delta_2^k = (E+I)^k \cdot \Delta^k = \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} \Delta^k E^j,$$

innen

$$\Delta_2^k f(n) = \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} \Delta^k f(n+j) \tag{I.21}$$

adódik. Másrészt páratlan n-re

$$\Delta_2^k f(n) = \sum_{j=0}^{k} \Delta_2^k f(2n+2j) \tag{I.22}$$

fennáll. (I.22) egyszerűen bebizonyítható például k szerinti indukcióval.

(I.21)-et k helyett $k-1$ választással n-re és $n+1$-re alkalmazva,

$$\Delta_2^{k-1} f(n+1) - \Delta_2^{k-1} f(n) = \sum_{j=0}^{k-1} \binom{k-1}{j} \Delta^k f(n+j) \tag{I.23}$$

adódik. (I.21)-ből rögtön következik továbbá a

$$\begin{aligned} |\Delta_2^{k-1} f(n+2) - \Delta_2^{k-1} f(n)| &= |\Delta_2^k f(n)| \leq \\ \leq \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} |\Delta^k f(n+j)| &\leq 2^{k+1} \sum_{j=0}^{k} |\Delta^k f(n+j)| \end{aligned} \tag{I.24}$$

egyenlőtlenség.

Legyen n páratlan. Alkalmazzuk az (I.22) formulát k helyett $k-1$ választással. Ekkor

$$\Delta_2^{k-1} f(n) - 2^{k-1}\Delta_2^{k-1} f(2n) =$$

$$= \sum_{j=0}^{k-1} \binom{k-1}{j} \left(\Delta_2^{k-1} f(2n+2j) - \Delta_2^{k-1} f(2n)\right),$$

s innen

$$\begin{aligned} |\Delta_2^{k-1} f(n) - 2^{k-1}\Delta_2^{k-1} f(2n)| &\le \\ \le 2^{k-1} \sum_{h=0}^{k-1} |\Delta_2^{k} f(2n+2h)| & \end{aligned} \tag{I.25}$$

adódik.

Legyen $x_\nu = 2^\nu$ $(\nu = 1,2,\ldots)$, $\mathrm{I}_\nu = [x_\nu, x_{\nu+1})$. Legyen továbbá

$$\alpha(\nu) = \sum_{n\in \mathrm{I}_\nu} |\Delta^{k-1} f(n+1) - \Delta^{k-1} f(n)| = \sum_{n \in \mathrm{I}_\nu} |\Delta^k f(n)|.$$

Jelölje B, C, E rendre a páros, a páratlan számok, illetőleg a páratlan számok kétszereseinek a halmazát. Jelölje továbbá ennek megfelelően a

$$\sum_n |\Delta_2^{k-1} f(n)|$$

összeget $\beta(\nu)$, $\gamma(\nu)$, $\varepsilon(\nu)$, ahol az összegezést a $\mathrm{B}\cap\mathrm{I}_\nu$, $\mathrm{C}\cap\mathrm{I}_\nu$, $\mathrm{E}\cap\mathrm{I}_\nu$ halmazokra terjesztjük ki.

Tegyük fel, hogy $k < x_{\nu+1}$. (I.23)-ból egyszerűen adódik a

$$|\beta(\nu+1) - \gamma(\nu+1)| \le 2^{k+1}\left(\alpha(\nu+1) + \alpha(\nu+2)\right) \tag{I.26}$$

egyenlőtlenség. Világos, hogy

$$\gamma(\nu+1) = \varepsilon(\nu+1) + \sum_{4m\in \mathrm{I}_{\nu+1}} |\Delta_2^{k-1} f(4m)|.$$

Az (I.24) egyenlőtlenségből adódik, hogy a jobb oldali összegnek az $\varepsilon(\nu+1)$-től való eltérése abszolút értékben legfeljebb $2^{k+1}(k+1)\big(\alpha(\nu)+\alpha(\nu+1)\big)$. Ezért

$$|\gamma(\nu+1)-2\varepsilon(\nu+1)|\leq 2^{k+1}(k+1)\big(\alpha(\nu)+\alpha(\nu+1)\big). \qquad \text{(I.27)}$$

Az (I.25) egyenlőtlenségből

$$|\gamma(\nu)-2^{k-1}\varepsilon(\nu+1)|\leq 2^{2k-1}(k+1)\big(\alpha(\nu+1)+\alpha(\nu+2)\big) \qquad \text{(I.28)}$$

következik.

(I.27) és (I.28) összevetésével a

$$\gamma(\nu+1)\leq\frac{\gamma(\nu)}{2^{k-2}}+c_1(k)\big(\alpha(\nu+1)+\alpha(\nu+2)\big) \qquad \text{(I.29)}$$

egyenlőtlenséghez jutunk, ahol $c_1(k)$ csak a k-tól függő állandó.

A (H_k) feltételből adódik, hogy

$$\liminf_{\mu}\frac{1}{\mu}\sum_{\nu\leq\mu}\frac{\alpha(\nu)}{x_\nu}=0.$$

Legyen $\rho_\nu=2^{-\nu}\beta(\nu)$. (I.29) miatt

$$\rho_{\nu+1}\leq\frac{1}{2^{k-1}}\rho_\nu+\tau_\nu \qquad (x_\nu\geq k), \qquad \text{(I.30)}$$

ahol

$$\tau_\nu=c_2(k)\left(\frac{\alpha(\nu+1)}{2^{\nu+1}}+\frac{\alpha(\nu+2)}{2^{\nu+2}}\right).$$

Legyen $\mu_1<\mu_2<\ldots$ az egészeknek olyan sorozata, amelyre

$$\mu_t^{-1}\sum_{\nu\leq\mu_t}\tau_\nu\to 0 \qquad (t\to\infty).$$

Ekkor az (I.30)-ból egyszerűen adódik, hogy

$$\lim \mu_t^{-1} \sum_{\nu \leq \mu_t} \rho_t = 0$$

is fennáll. Figyelembe véve az (I.27) egyenlőtlenséget, ekkor

$$\lim_{t \to \infty} \mu_t^{-1} \sum_{\nu \leq \mu_t} \frac{1}{2^\nu}\big(\beta(\nu) + \gamma(\nu)\big) = 0,$$

azaz

$$\lim_{x_{\mu_t} \to \infty} (\log x_{\mu_t})^{-1} \sum_{n \leq x_{\mu_t}} \frac{|\Delta_2^{k-1} f(n)|}{n} = 0 \tag{I.31}$$

is fennáll.

Az (I.21) formulát k helyett $k-1$ választással alkalmazva, a

$$\Delta_2^{k-1} f(n) - 2^{k-1} \Delta^{k-1} f(n) =$$

$$= \sum_{j=0}^{k-1} \binom{k-1}{j} \big(\Delta^{k-1} f(n+j) - \Delta^{k-1} f(n)\big) = \tag{I.32}$$

$$= \sum_{j=0}^{k-1} \binom{k-1}{j} \sum_{h=0}^{j-1} \Delta^k f(n+h)$$

egyenlőséghez, s innen a

$$|\Delta^{k-1} f(n)| \leq \frac{1}{2^{k-1}} |\Delta_2^{k-1} f(n)| + k \sum_{j=0}^{2k-3} |\Delta^k f(n+h)| \tag{I.33}$$

egyenlőtlenséghez jutunk. Innen

$$\sum_{n \leq x} \frac{|\Delta^{k-1} f(n)|}{n} \leq \frac{1}{2^{k-1}} \sum_{n \leq x} \frac{|\Delta_2^{k-1} f(n)|}{n} + 2k^2 \sum_{n \leq x + 2k} \frac{|\Delta^k f(n)|}{n},$$

és $x = x_{\mu_t} - 2k$ választással, (I.31) figyelembevételével

$$\lim_{t \to \infty} \frac{1}{\log x_{\mu_t}} \sum_{n \leq x_{\mu_t} - 2k} \frac{|\Delta^{k-1} f(n)|}{n} = 0,$$

azaz a (H_{k-1}) feltétel teljesül. Ezzel a bizonyítást befejeztük. ■

3.§. Megmutatjuk most, hogy $f \in A^*$ esetén csak a $c \log$ alakú függvényekre teljesülhet az (I.5) reláció. Wirsing tétele szerint csak annyit kell belátnunk, hogy (I.5) teljesülése esetén $\Delta f(n) = o(\log n)$ is fennáll. E redukciós lépés bizonyítása elemi, ami távolról sem mondható el Wirsing tételéről, azaz a $\Delta f(n) = o(\log n) \Rightarrow f(n) = c \log n$ állításról. Annak bizonyításához a prímszámok különböző számtani sorozatokban való eloszlására vonatkozó mély eredményekre, az A.I. Vinogradovtól és E. Bombieritől származó középértéktételekre van szükség.

5. Tétel. Legyen $f \in A^*$, $P(z) = \alpha_0 + \alpha_1 z + \ldots + \alpha_k z^k$ $(\alpha_0 \neq 0, \alpha_k = 1)$ tetszőleges komplex együtthatós polinom. Tegyük fel, hogy

$$\frac{P(E)f(n)}{\log n} \to 0. \tag{I.34}$$

Ekkor, $P(1) \neq 0$ esetén $f(n) = 0$ $(\forall n \in \mathbb{N})$, míg $P(1) = 0$ esetén $f(n) = c \log n$ $(\forall n \in \mathbb{N})$. Nyilvánvaló, hogy ezek a függvények teljesítik is az (I.34) feltételt.

Bizonyítás. Tegyük fel, hogy f nem a zérusfüggvény. Jelölje I mindazoknak a komplex együtthatós Q polinomoknak a halmazát, amelyekre a

$$\frac{Q(E)f(n)}{\log n} \to 0 \tag{I.35}$$

reláció teljesül. (I.33) miatt I a zéruspolinomon kívül mást is tartalmaz. Világos, hogy $Q_1, Q_2 \in \mathrm{I}$, $c_1, c_2 \in \mathbb{C}$

esetén $c_1Q_1 + c_2Q_2 \in \mathrm{I}$. Másrészt $Q \in \mathrm{I}$ esetén az $xQ(x)$ polinom is I-hez tartozik, mivel $EQ(E)f(n) = Q(E)Ef(n) = Q(E)f(n+1)$. Innen azonnal adódik, hogy tetszőleges $R(x)$ polinom és $Q(x) \in \mathrm{I}$ esetén $R(x)Q(x) \in \mathrm{I}$. Ezek szerint I ideál. Mint minden $\mathbb{C}[x]$-beli ideál, I is egy elemmel generálható, azaz létezik egy egyértelműen meghatározott

$$S(z) = \gamma_0 + \gamma_1 z + \ldots + \gamma_M z^M \qquad (\gamma_M = 1) \tag{I.36}$$

minimális fokszámú főpolinom I-ben, úgy hogy I elemei éppen az $S(z)$ polinom többszörösei.

Legyenek $S(z)$ gyökei $\theta_1, \ldots, \theta_M$. Legyen $m > 1$ tetszőleges egész,

$$Q_m(z) = \prod_{j=1}^{M} (z - \theta_j^m). \tag{I.37}$$

Világos, hogy $Q_m(z^m)$ többszöröse $S(z)$-nek, ezért $Q_m(z^m) \in I$, tehát

$$\frac{Q_m(E^m)f(n)}{\log n} \to 0 \qquad (n \to \infty). \tag{I.38}$$

Legyen

$$Q_m(z) = \beta_0 + \beta_1 z + \ldots + \beta_M z^M \qquad (\beta_M = 1).$$

Világos, hogy

$$Q_m(E^m)f(mn) = \beta_0 f(mn) + \beta_1 f\big(m(n+1)\big) + \ldots + \beta_M f\big(m(n+M)\big) =$$

$$= Q_m(1)f(m) + Q_m(E)f(n). \tag{I.39}$$

(I.39) bal oldala $o(\log n)$, (I.38) miatt, ezért $Q_m(E)f(n) = o(\log n)$, s így $Q_m \in \mathrm{I}$. Mivel Q_m is minimális fokszámú főpolinom I-ben, ezért $Q_m = S$, és

$$\prod_{j=1}^{M} (z - \theta_j^m) = \prod_{j=1}^{M} (z - \theta_j) \qquad (m = 1, 2, \ldots). \tag{I.40}$$

Vegyük még észre, hogy a θ gyökök között a zérus nem fordulhat elő. Ellenkező esetben ugyanis $\gamma_0=0$, $S(z)=zT(z)$ lenne, s innen egész nyilvánvalóan adódna, hogy $T(E)f(n)=o(\log n)$, azaz $T\in \mathrm{I}$. T fokszáma azonban kisebb S fokszámánál.

(I.40) miatt $\theta_j^m \in \{\theta_1, \ldots, \theta_M\}$ minden j-re és m-re. Ezért $|\theta_j|=1$ $(j=1,2,\ldots,M)$. Írjuk most a θ_j-ket exponenciális alakban. Legyen $\theta_j=\exp(2\pi i\eta_j)$ $(j=1,\ldots,M)$. Ha az η_j-k között lenne irracionális, mondjuk η_1, akkor a $\theta_1^m=\exp(2\pi i\eta_1 m)$ $(m=1,2,\ldots)$ számok mind különbözőek lennének, ami $\theta_1^m\in\{\theta_1,\ldots,\theta_M\}$ miatt lehetetlen. Tehát $\eta_1,\ldots,\eta_M$ racionálisak. A legkisebb közös nevezőjük legyen B. Ekkor

$$\eta_j=\frac{a_j}{B}\ (j=1,\ldots,M) \qquad (a_j\in\mathbb{Z}),$$

s így

$$\theta_j^B=1 \qquad (j=1,\ldots,M).$$

Az (I.40) bal oldala $m=B$ választással $(z-1)^M$, ezért $\theta_1=\ldots=\theta_M=1$. Kimutattuk, hogy $S(z)$ speciális alakú,

$$S(z)=(z-1)^M.$$

Már csak annyit kell belátnunk, hogy $M\geq 2$, $(z-1)^M\in \mathrm{I}$ esetén $(z-1)^{M-1}\in \mathrm{I}$ is fennáll. A bizonyítás a 4. tétel bizonyításánál használt azonosságok és egyenlőtlenségek alkalmazásával történik, a teljes additivitás feltételezése miatt azonban a helyzet kicsit egyszerűbb. A (I.21), (I.23), (I.25) formulákat $k=M$ választással alkalmazzuk. (I.21) miatt található olyan $\varepsilon(x)$ monoton zérushoz tartó függvény, amellyel

$$|\Delta_2^M f(n)|<\varepsilon(n)\log n \qquad (n\geq 2). \qquad \text{(I.41)}$$

Válasszuk az $\varepsilon(n)$-et úgy, hogy $\varepsilon(n)\log 2n$ monoton végtelenhez tartó legyen.

Legyen

$$m(x):=\max_{n\le x}|\Delta_2^{M-1}f(n)|. \tag{I.42}$$

Megmutatjuk, hogy $m(x)$ nem növekedhet túl gyorsan. Tegyük fel, hogy $m(x)$ nem korlátos. Tegyük fel, hogy

$$m(x)>m\left(\frac{x}{2}\right).$$

Legyen

$$x\ge 4,\qquad \frac{x}{2}\le 2n\le x.$$

Ekkor az (I.25) formulából

$$|\Delta_2^{M-1}f(2n)|\le\frac{1}{2^{M-1}}|\Delta_2^{M-1}f(n)|+\varepsilon\left(\frac{x}{2}\right)M\log(x+2M), \tag{I.43}$$

továbbá innen és az (I.23) formulából n helyett $2n$ választással

$$|\Delta_2^{M-1}f(2n+1)|\le$$

$$\le\frac{1}{2^{M-1}}|\Delta_2^{M-1}f(n)|+(2^{M-1}+M)\,\varepsilon\left(\frac{x}{2}\right)\log(x+2M) \tag{I.44}$$

adódik. Az (I.43), (I.44) egyenlőtlenségek minden, az $\left[\frac{x}{2},x\right]$ intervallumba eső egészre érvényesek, tehát arra is, amelyre az $m(x)$ maximum eléretik, ezért

$$m(x)\le\frac{1}{2^{M-1}}m\left(\frac{x}{2}\right)+c\varepsilon\left(\frac{x}{2}\right)\log 2x, \tag{I.45}$$

alkalmas $c>0$ állandóval. Mindkét oldalból $m\left(\frac{x}{2}\right)$-t levonva,

$$0 \leq m(x) - m\left(\frac{x}{2}\right) \leq \left(\frac{1}{2^{M-1}} - 1\right) m\left(\frac{x}{2}\right) + c\varepsilon\left(\frac{x}{2}\right) \log 2x,$$

azaz

$$m\left(\frac{x}{2}\right) \leq c_1 \varepsilon\left(\frac{x}{2}\right) \log 2x, \qquad c_1 = c(1-2^{1-M})^{-1},$$

s ezt (I.45)-be behelyettesítve,

$$m(x) < c_2 \varepsilon\left(\frac{x}{2}\right) \log 2x \tag{I.46}$$

adódik. Tegyük fel, hogy

$$m(x) = m\left(\frac{x}{2}\right) = \ldots = m\left(\frac{x}{2^t}\right) > m\left(\frac{x}{2^{t+1}}\right).$$

Ekkor az (I.46) formula érvényes x helyett $x/2^t$ választással:

$$m(x) = m\left(\frac{x}{2^{t+1}}\right) < c_2 \varepsilon\left(\frac{x}{2^{t+1}}\right) \log \frac{2x}{2^{t+1}}.$$

Az $\varepsilon(x) \log 2x$ monotonitása miatt (I.46) ekkor is fennáll, legalábbis minden elég nagy x-re. Ha $m(x)$ korlátos, akkor (I.46) nyilvánvalóan teljesül.

Kimutattuk ezzel, hogy a Δ_2^{M-1}-nek megfelelő $(z^2-1)^{M-1}$ polinom I-hez tartozik. Osszuk el ezt a polinomot maradékosan a $(z-1)^M$ polinommal,

$$(z^2-1)^{M-1} = k(z)S(z) + r(z).$$

Ekkor, I ideál lévén, $r \in \mathrm{I}$. Másrészt r nem lehet azonosan zérus, és fokszáma kisebb S fokszámánál, M-nél. Ez azonban nyilvánvalóan ellentmondás. Az $M \geq 2$ feltevésünk tehát helytelen volt. Tehát $M=1$, $S(z)=z-1$, azaz $\Delta f(n)=o(\log n)$. Wirsing tétele szerint ekkor $f(n)=c \log n$. Vegyük még észre, hogy a (I.34) reláció valamely $f(n)= =c \log n \ (c \neq 0)$ függvényre csak akkor teljesülhet, ha $P(1)=0$. Tételünket bebizonyítottuk. ∎

Módszerünket bizonyos mértékig módosítani kell, ha a teljes additivitás helyett csak az additivitást tételezzük fel.

6. Tétel. Legyen

$$P(z)=\alpha_0+\alpha_1 z+\ldots+\alpha_k z^k \qquad (\alpha_k=1,\ \alpha_0\neq 0)$$

komplex együtthatós polinom, f komplex értékű additív függvény amelyre

$$x^{-1}\sum_{n\leq x}|P(E)f(n)|\to 0 \qquad (x\to\infty) \tag{I.47}$$

fennáll. Ekkor alkalmas c állandóval

$$f(n)=c\log n+f_1(n),$$

és teljesül a

$$P(E)f_1(n)=0 \qquad (n=1,2,\ldots) \tag{I.48}$$

rekurzió. Ha $P(1)\neq 0$, akkor csak $c=0$ lehetséges.

Definíció. Valamely f additív függvényről azt mondjuk, hogy véges tartójú, ha minden elég nagy p prímre $f(p^\alpha)=0$ $(\alpha=1,2,\ldots)$.

7. Tétel. Ha az f komplex értékű additív függvényre fennáll a

$$P(E)f(n)=0 \quad (n=1,2,\ldots) \tag{I.49}$$

rekurzió valamely k-adfokú P polinommal, akkor

(1) $f(p^\alpha)=0$ minden olyan p^α prímhatványra, amelyre $p>k+1$,

(2) $f(p^{\gamma+1})=f(p^\gamma)$, ha $p^{\gamma+1}-p^\gamma>k+1$,

(3) $f(n)$ periodikus $B=\prod_{p\leq k+1} p^{\gamma_p}$ periódussal, ahol γ_p az a legkisebb egész, amelyre $p^{\gamma_p+1}-p^{\gamma_p}>k+1$ fennáll.

8. Tétel. Ha a 6. tétel feltételei fennállnak, és f teljesen additív, akkor $f(n)=c\log n$ alakú, és $c\neq 0$ esetén a $P(1)=0$ feltétel is teljesül.

A 8. tétel bizonyítása az eddig alkalmazott módszerek kombinálásával történik. Jelölje I azoknak a P polinomoknak a halmazát, amelyekre (I.47) fennáll. Mint az 5. tétel bizonyításánál, itt is egyszerűen belátható, hogy I ideál. Ismét az 5. tétel bizonyítására hivatkozva megmutatható, hogy I generáló eleme $(z-1)^M$ alakú, teljesül tehát a

$$\lim_{x\to\infty} x^{-1}\sum_{n\leq x}|\Delta^M f(n)|=0$$

reláció valamely $M\geq 1$ egészre. Már csak azt kell észrevennünk, hogy a 4. tétel (H_M) feltétele teljesül, s a 4. tétel szerint $f(n)=c\log n$. Mivel $P(E)f(n)=$ $=cP(1)\log n+o(1)$ $(n\to\infty)$, ezért (I.47) miatt $cP(1)=0$. Ezzel a 8. tételt teljes egészében bebizonyítottuk. ■

A 6. tétel bizonyítása. Vegyük észre, hogy az (I.47) feltételt kielégítő P polinomok halmaza ideált alkot. Jelölje ezt az ideált I. Ezért, ha az (I.47) teljesül a tételben szereplő $P(z)$ polinommal, akkor a $P(z)$ polinom minden $k(z)$ többszörösére is

$$x^{-1}\sum_{n\leq x}|k(E)f(n)|\to 0 \qquad (x\to\infty) \tag{I.50}$$

fennáll.

Legyen $m>1$ tetszőleges egész, jelölje P gyökeit $\theta_1,\ldots,\theta_k$, azaz

$$P(z)=\prod_{j=1}^{k}(z-\theta_j).$$

Legyen

$$Q_m(z)=\prod_{j=1}^{k}(z-\theta_j^m)=\beta_0+\beta_1 z+\ldots+\beta_k z^k.$$

Ekkor $\beta_0\neq 0$, $\beta_k=1$. Vezessük be a

$$\Delta(m,n):=\sum_{j=0}^{k}\beta_j\big(f(m(n+j))-f(n+j)\big) \tag{I.51}$$

jelölést. Világos, hogy

$$\Delta(m,n)=Q_m(E^m)f(nm)-Q_m(E)f(n). \tag{I.52}$$

Alkalmazzuk (I.52) bal oldalára a $P(E)$ operátort, s írjuk fel az

$$\begin{aligned}x^{-1}\sum_{n\leq x}|P(E)\Delta(m,n)|&\leq x^{-1}\sum_{n\leq x}|P(E)Q_m(E^m)f(nm)|+\\&+x^{-1}\sum_{n\leq x}|P(E)Q_m(E)f(n)|\end{aligned} \tag{I.53}$$

egyenlőtlenséget. Világos, hogy a $P(z)Q_m(z^m)$, $P(z)Q_m(z)$ polinomok I-hez tartoznak, ezért (I.53) jobb oldala zérushoz tart. Így

$$x^{-1}\sum_{n\leq x}|P(E)\Delta(m,n)|\to 0 \qquad (x\to\infty). \tag{I.54}$$

Legyen $p>2k+1$, p prímszám, n fusson végig azokon a természetes számokon, amelyekre $p^{\nu}\|n$ teljesül. Itt $\nu\geq 1$ tetszőleges rögzített egész. Ekkor

$$\Delta(p,n)=\beta_0\big(f(p^{\nu+1})-f(p^{\nu})\big)+(\beta_1+\ldots+\beta_k)f(p)=$$

$$=\beta_0\big(f(p^{\nu+1})-f(p^{\nu})-f(p)\big)+Q_m(1)f(p),$$

$$\Delta(p,n+h)=f(p)Q_m(1) \qquad (0<h\leq 2k),$$

s ezért

$$P(E)\Delta(m,n)=P(1)Q_m(1)f(P)+\alpha_0\beta_0\big(f(p^{\nu+1})-f(p^{\nu})-f(p)\big). \tag{I.55}$$

Mivel a $p^{\nu}\|n$ feltételt kielégítő n egészek sűrűsége pozitív, ezért (I.54) miatt (I.55) jobb oldalán zérus áll.

Fusson most n végig az $n\equiv 1 \pmod p$ feltételt kielégítő egészeken. Ekkor $\Delta(p, n+h)=f(p)Q_m(1)$ teljesül, ha $0\leq h\leq 2k$, és ezért $P(E)\Delta(m,n)=$ $=P(1)Q_m(1)f(p)$. Az előbbi érvelést megismételve, $P(1)Q_m(1)f(p)=0$ adódik. (I.55) miatt, innen $f(p^{\nu+1})-f(p^{\nu})-f(p)=0$. Mivel ez minden $\nu\geq 1$ egészre fennáll, ezért $f(p^{\nu})=\nu f(p)$ ($\nu=1, 2 \ldots$) teljesül.

Legyen most p tetszőleges prímszám, γ_0 olyan nagy, amelyre $p^{\gamma_0}>2k+1$ fennáll. Az $\varepsilon_0, \varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_{2k}$ nemnegatív egészek legyenek olyanok, amelyekkel a $p^{\gamma_0}\|n$, $p^{\varepsilon_i}\|n+i$ ($i=1,\ldots,2k$) feltételek legalább egy n természetes számra fennállnak. Rögzítsük most az

$\varepsilon_0, \varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_{2k}$ értékeket, s jelöljük A_γ-val azoknak az n természetes számoknak a halmazát, amelyekre $p^\gamma \| n$, $p^{\varepsilon_i} \| n+i$ $(i=1, \ldots, 2k)$ teljesül. Nyilvánvaló, hogy $\gamma \geq \gamma_0$ esetén A_γ nem üres, sőt pozitív sűrűségű. Világos továbbá, hogy $P(E)\Delta(n,p)$ nem változik, ha n végigfut az A_γ elemein. Ekkor viszont (I.54) miatt $P(E)\Delta(n,p)=0$, hacsak $n \in A_\gamma$ $(\gamma \geq \gamma_0)$.

Legyen $n_1 \in A_{\gamma+1}$, $n_2 \in A_\gamma$ $(\gamma \geq \gamma_0)$, s írjuk ki gondolatban a

$$P(E)\Delta(n_1,p) - P(E)\Delta(n_2,p) = 0$$

egyenlőséget részletesen. Innen

$$\alpha_0\beta_0\big(f(p^{\gamma+2}) - f(p^{\gamma+1})\big) = \alpha_0\beta_0\big(f(p^{\gamma+1}) - f(p^\gamma)\big),$$

és $\alpha_0\beta_0 \neq 0$ miatt

$$\xi_{\gamma+1} = \xi_\gamma, \qquad \xi_\gamma = f(p^{\gamma+1}) - f(p^\gamma) \qquad (\gamma \geq \gamma_0) \qquad \text{(I.56)}$$

következik.

Írjuk most fel az $f(n)$ additív függvényt $f(n)= =f_1(n)+f_2(n)$ alakban, ahol $f_2(n)$ teljesen additív függvény, $f_2(p)=f(p)$, ha $p>2k+2$, míg $p \leq 2k+2$ esetén $f_2(p)=\xi_{\gamma_0}$. Már beláttuk, hogy $f(p^\gamma)=\gamma f(p)$, ha $p>2k+1$, ezért $f_1(p^\gamma)=0$, ha $p>2k+2$. (I.56) miatt $f_1(p^{j+1})=f_1(p^j)$ $(j \geq \gamma_0)$ is teljesül.

Innen következik, hogy $f_1(n)$ véges tartójú additív függvény, és hogy valamely alkalmas B_1 periódussal, f_1 periodikus. Ezért

$$P(E)(E^{B_1} - I)f_1(n) = 0 \qquad (n=1, 2, \ldots)$$

is teljesül. Minthogy $P(z)(z^{B_1}-1) \in I$ nyilvánvalóan fennáll, ezért az f_2 teljesen additív függvényre teljesül az

$$\frac{1}{x}\sum_{n\leq x}|(E^{B_1}-I)P(E)f_2(n)|\to 0 \qquad (x\to\infty) \tag{I.57}$$

reláció. A 8. tétel szerint $f_2(n)=c\log n$.

Tegyük fel először, hogy $P(1)\neq 0$. Ekkor alkalmas m egésszel $Q_m(1)\neq 0$. Előzőleg beláttuk már, hogy $p>2k+2$ prímszám esetén $P(1)Q_m(1)f(p)=0$, s így $f(p)=0$. Mivel $f_2(p)=f(p)$, ha $p>2k+2$, másrészt $f_2(n)=c\log n$, ezért $f_2(n)=0$ $(n=1,2,\ldots)$. Ekkor az $f=f_1$ függvény véges tartójú, periodikus, s teljesül (I.47). Ekkor viszont a (I.48) reláció fennáll.

Tegyük fel, hogy $P(1)=0$. Ekkor $P(E)f_2(n)=$ $=P(1)c\log n+o(1)$ $(n\to\infty)$, azaz (I.47) teljesül a véges tartójú, periodikus $f_1(n)$ additív függvényre. Ezért az (I.48) reláció teljesül. ■

Végül *bebizonyítjuk a 7. tételt.* (I.48) miatt az (I.47) feltétel teljesül, ezért a 6. tétel állítása is érvényes, azaz $f(n)=f_1(n)+c\log n$ alakú, ahol $P(E)f(n)=0$, $P(E)f_1(n)=0$ $(n=1,2,\ldots)$. Ezért $P(E)c\log n=0$ $(n=1,2,\ldots)$, ami csak $c=0$ esetén teljesülhet. Következésképpen $f(n)=f_1(n)$ véges tartójú, periodikus függvény. Létezik tehát egy $K>0$ küszöbszám, úgy hogy $f(p^\alpha)=0$, hacsak p a K-nál nagyobb prímszám. Adott n-re jelölje $A_K(n)$ az n szám K-nál nem nagyobb prímhatványosztóinak szorzatát, azaz $A_K(n)$ legyen az $n=mA_K(n)$, m minden prímosztója nagyobb K-nál, egyenlőséggel definiálva. Legyen $p(\leq K)$ adott prímszám, s $\delta(n)$ a p pontos kitevője n-ben, azaz $p^{\delta(n)}\|n$. Legyen $A'_K(n)=p^{-\delta(n)}A_K(n)$.

Válasszuk az n_1 számot úgy, hogy $\delta(n_1)=\gamma\geq 0$, és $n_1\equiv p^\gamma \pmod{p^{\gamma+1}}$ teljesül. Legyen γ olyan nagy, amelyre $p^{\gamma+1}-p^\gamma>k+1$ is fennáll. Ekkor találhatunk olyan n_2 egészet, amelyre $\delta(n_2)=\gamma+1$, $A'_K(n_1)=$ $=A'_K(n_2)$, $A^K(n_1+j)=A_K(n_2+j)$ $(j=1,\ldots,k)$. Vegyük még észre, hogy $f(n)=f(A_K(n))$. (I.48) miatt

$$0=P(E)f(n_2)-P(E)f(n_1)=\alpha_0\big(f(p^{\gamma+1})-f(p^{\gamma})\big),$$

s innen $\alpha_0\neq 0$ miatt $f(p^{\gamma+1})=f(p^{\gamma})$. A 7. tétel (1), (2) állítását beláttuk, a (3) állítás ezeknek közvetlen következménye. Ezzel a 7. tételt beláttuk. ■

4.§. A 3.§-ban használt módszerünk további alkalmazási lehetőségeit illusztrálva bebizonyítjuk most a következő tételt.

9. Tétel. Legyen $f\in A^*$, P racionális együtthatójú, nemzérus polinom, amelyre a

$$A_pP(E)f(n)\equiv 0 \pmod 1 \qquad (n=1,2,\ldots) \tag{I.58}$$

kongruenciareláció teljesül alkalmas $A_p\neq 0$ egész számmal. Ekkor alkalmas $B\neq 0$ egésszel $g(n):=$ $:=Bf(n)$ egész értékű.

Először bebizonyítjuk a következő segédtételt.

Lemma. Ha $f\in A^*$ és $\Delta^k f(n)\equiv 0 \pmod 1$ $(\forall n\in\mathbb{N})$ valamely $k\geq 1$ egészre teljesül, akkor $f(n)\equiv$ $\equiv 0 \pmod 1$ $(\forall n\in\mathbb{N})$.

A bizonyításnál k szerinti indukciót alkalmazunk. Legyen $k=1$. $\Delta f(n)\equiv 0 \pmod 1$ $(\forall n\in\mathbb{N})$ miatt $f(N)\equiv$ $\equiv f(M) \pmod 1$ minden M, N párra teljesül. Ha $N=$ $=nM$, akkor $f(n)=0 \pmod 1$, s n tetszőleges.

Tegyük fel, hogy az állítás k-ra igaz. Tegyük fel, hogy $\Delta^{k+1}f(n)\equiv 0 \pmod 1$ $(\forall n\in\mathbb{N})$ teljesül. Kiindulva a

$$\Delta^k f(N)-\Delta^k f(1)=\sum_{n=1}^{N-1}\Delta^{k+1}f(n)\equiv 0 \pmod 1$$

azonosságból,

$$\Delta^k f(N)\equiv c \pmod 1, \qquad c=\Delta^k f(1) \tag{I.59}$$

következik. Legyen most Q tetszőleges egész együtthatós polinom. (I.59) miatt

$$(E-I)^k Q(E)f(n)\equiv cQ(1) \pmod 1 \qquad (\forall n\in\mathbb{N}) \tag{I.60}$$

fennáll. Legyen $m\geq 1$ tetszőleges egész szám,

$$Q(z)=Q_m(z)=\left(\frac{z^m-1}{z-1}\right)^k=(1+z+\ldots+z^{m-1})^k.$$

Ekkor

$$(E-I)^k Q_m(E)=(E^m-I)^k,$$

s (I.60) miatt, $n=Nm$ helyettesítéssel

$$(E^m-I)^k f(mN)\equiv cQ_m(1) \pmod 1 \tag{I.61}$$

adódik. Vegyük észre, hogy (I.61) bal oldala

$$(E-I)^k f(N)=\Delta^k f(N)\equiv c \pmod 1.$$

Ezért

$$c\equiv cQ_m(1) \pmod 1,$$

s $Q_m(1)=m^k$ miatt

$$c(m^k-1)\equiv 0 \pmod 1. \tag{I.62}$$

(I.62) miatt c csak racionális szám lehet. Tegyük fel, hogy c nem egész. Ekkor

$$c=\frac{A}{B} \qquad (B>1),\ (A,B)=1$$

alakban felírható. Legyen most $m = B$. Ekkor (I.62)-ből $cB^k \equiv 0 \pmod 1$ miatt $c \equiv 0 \pmod 1$ fennáll. Ezért $\Delta^k f(n) \equiv 0 \pmod 1$ $(\forall n \in \mathbb{N})$ teljesül, és indukciós feltevésünk szerint $f(n) \equiv 0 \pmod 1$ $(\forall n \in \mathbb{N})$. A lemma állítását ezzel beláttuk.□

Rátérünk most *a tétel bizonyítására*. Jelölje J azoknak a racionális együtthatójú P polinomoknak a halmazát, amelyekre alkalmas $A_p \neq 0$ egész számmal

$$A_p P(E) f(n) \equiv 0 \pmod 1 \qquad (\forall n \in \mathbb{N})$$

teljesül. Világos, hogy J a $\mathbb{Q}[x]$ polinomgyűrűben ideál.

Legyen P a J tetszőleges nemzérus eleme,

$$P(z) = \prod_{j=1}^{k} (z - \theta_j),$$

és legyen

$$\mathrm{k}_m(z) = \prod_{j=1}^{k} \frac{z^m - \theta_j^m}{z - \theta_j} \qquad (m \geq 1 \text{ egész}).$$

A szimmetrikus polinomok alaptétele miatt $k_m(z)$ együtthatói racionálisak, ezért

$$R_m(z^m) := \prod_{j=1}^{k} (z^m - \theta_j^m) \in \mathrm{J}.$$

Következésképpen alkalmas $F \neq 0$ egésszel

$$F R_m(E^m) f(n) \equiv 0 \pmod 1 \qquad (\forall n \in \mathbb{N})$$

fennáll. Továbbá $f \in \mathrm{A}^*$ miatt

$$R_m(E^m) f(nm) = R_m(1) f(m) + R_m(E) f(n),$$

s így

$$FR_m(1)f(m)+FR_m(E)f(n)\equiv 0 \pmod 1 \qquad (\forall n\in\mathbb{N}). \qquad (I.63)$$

Ha $R_m(1)=0$, akkor innen $R_m(z)\in J$ következik. Ha $R_m(1)\neq 0$, akkor pedig az (I.63) mindkét oldalára a Δ operátort alkalmazva,

$$FR_m(E)\Delta f(n)\equiv 0 \pmod 1 \qquad (\forall n\in\mathbb{N}),$$

azaz $R_m(z)(z-1)\in J$ következik.

Legyen most P a J generáló eleme, azaz a minimális fokszámú főpolinom J-ben. A tétel feltétele szerint J tartalmaz zérustól különböző elemet. P fokszáma legyen k. Ha $k=0$, akkor tételünk nyilvánvalóan igaz.

Legyen $k\geq 1$. Tegyük fel először, hogy $P(1)=0$. Ekkor $P(z)$ és $R_m(z)$ legnagyobb közös osztója, $\delta(z)\in J$, $\delta(z)$ fokszáma megegyezik tehát P és Q_m fokszámával, k-val, ezért $P(z)=R_m(z)$, azaz

$$\prod_{j=1}^{k}(z-\theta_j)=\prod_{j=1}^{k}(z-\theta_j^m). \qquad (I.64)$$

A 3.§-ban alkalmazott gondolatmenetet alkalmazva, rögtön következik innen, hogy $\theta_1=\ldots=\theta_k=1$, $P(z)=(z-1)^k$.

Tegyük fel most, hogy $P(1)\neq 0$. Ekkor

$$\delta(z)=\big(P(z),R_m(z)(z-1)\big)\in J,$$

ezért $\delta(z)$ fokszáma k. $P(1)\neq 0$ miatt $\big(z-1,P(z)\big)=1$, s ezért $R_m(z)=P(z)$, azaz (I.64) fennáll. Ez azonban csak a $\theta_1=\ldots=\theta_k=1$ esetben állhat fenn, amit a $P(1)\neq 0$ feltétellel kizártunk.

Beláttuk tehát, hogy az

$$F\Delta^k f(n) \equiv 0 \pmod 1 \qquad (\forall n \in \mathbb{N})$$

reláció fennáll. Lemmánkat f helyett az Ff függvényre alkalmazva tételünk közvetlenül adódik. ■

II. SZABÁLYOS VISELKEDÉSŰ MULTIPLIKATÍV FÜGGVÉNYEK

1.§. Jelölje M a komplex értékű multiplikatív függvények halmazát, s M* a teljesen multiplikatív függvények részhalmazát. Vegyük észre, hogy az $f(n)=n^{\sigma+i\tau}$ $(\sigma,\tau\in\mathbb{R})$ függvények szabályos viselkedésűek, $\sigma<1$ esetén teljesül rájuk a

$$\Delta f(n)\to 0 \qquad (n\to\infty) \tag{II.1}$$

reláció.

A szerző 1980-ban fogalmazta meg először azt a sejtését, hogy ha egy $f\in$ M függvényre (II.1) fennáll, akkor vagy $f(n)\to 0$ $(n\to\infty)$, vagy $f(n)=n^{\sigma+i\tau}$ $(\sigma,\tau\in\mathbb{R},\sigma<1)$. Egyszerűen belátható, hogy $f(n)\to 0$ $(n\to\infty,\ n\in\mathbb{N})$ akkor teljesül, ha $f(q)\to 0$ $(q\to\infty)$, ahol q a prímhatványok halmazán fut végig. (II.1) helyett az $n^{\gamma}\Delta f(n)\to 0\ (n\to\infty)$, $(\gamma>0$ állandó) feltételből a szerzőnek sikerült sejtését levezetnie. Bebizonyította ezt — csupán (II.1) feltételezésével — minden olyan esetre is, amikor valamely n_0 alkalmas egészre $|f(n_0)|\neq 1$ teljesül.

A kidolgozott módszer alkalmazásával sikerült meghatározni azokat az $f\in$ M függvényeket, amelyekre

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}|\Delta f(n)|<\infty, \tag{II.2}$$

sőt azokat az $f,\ g\in$ M függvényeket is, amelyekre

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}|g(n+k)-f(n)|<\infty \tag{II.3}$$

teljesül valamely k egésszel [6].

Nem sikerült azonban a szerzőnek a (II.1) feltételt kielégítő multiplikatív függvényeket meghatároznia. 1985-ben E. Wirsing bebizonyította a sejtést.

Wirsing tétele. Ha $f \in \mathrm{M}$, $\Delta f(n) \to 0$ és $f(n) \to 0$ $(n \to \infty)$, akkor

$$f(n) = n^{\sigma + i\tau} \qquad (\sigma, \tau \in \mathbb{R}, \sigma < 1).$$

Wirsing tételének érdekes következménye van additív függvényekre.

Adott x valós számra jelölje $\|x\|$ az x-nek hozzá legközelebbi egésztől való távolságát.

Legyen $F \in \mathrm{A}$, s tegyük fel, hogy $\|\Delta F(n)\| \to 0$ $(n \to \infty)$. Az $f(n) = \exp(2\pi i F(n))$ függvény nyilván multiplikatív, továbbá

$$|\Delta f(n)| = |\exp(2\pi i \Delta F(n)) - 1|$$

miatt $\Delta f(n) \to 0$. $|f(n)| = 1$ miatt $f(n) = \exp(i\tau \log n)$. Érvényes tehát Erdős tételének következő általánosítása:

Ha $F \in \mathrm{A}$ és $\|\Delta F(n)\| \to 0$, akkor alkalmas $\lambda \in \mathbb{R}$ állandóval $F(n) - \lambda \log n = \text{egész}$ $(\forall n \in \mathbb{N})$.

A fejezet további §-aiban a (II.3) feltételnek eleget tevő $f, g \in \mathrm{M}$ függvényeket vizsgáljuk. Az egyszerűség kedvéért feltesszük, hogy $f, g \in \mathrm{M}^*$.

Jelölje $\mathrm{L} \subseteq \mathrm{M}$ azoknak az $f \in \mathrm{M}$ függvényeknek a halmazát, amelyekre

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{-1} |f(n)| < \infty \qquad \text{(II.4)}$$

fennáll.

p, q, π (indexszel és index nélkül is) prímszámokat jelölnek.

Legyen

$$R(f, p) := \sum_{\alpha=1}^{\infty} p^{-\alpha} |f(p^{\alpha})|. \tag{II.5}$$

Nyilvánvaló, hogy $f \in \mathrm{L}$ akkor és csak akkor teljesül, ha $R(f, p) < \infty$ minden p prímszámra, és

$$\sum_{p} R(f, p) < \infty. \tag{II.6}$$

Az is világos, hogy $f \in \mathrm{L} \cap \mathrm{M}^*$ akkor és csak akkor teljesül, ha

$$|f(p)| < p \quad (\forall p), \tag{II.7}$$

és

$$\sum_{p} p^{-1} |f(p)| < \infty. \tag{II.8}$$

Adott $\mathrm{S} \subseteq \mathbb{N}$ halmazra legyen

$$\mathrm{F}_f(n|\mathrm{S}) := \sum_{n \in \mathrm{S}} \frac{f(n)}{n}, \tag{II.9}$$

a jobb oldali sor lehet divergens is. Legyen Φ_f azoknak az $\mathrm{S} \subseteq \mathbb{N}$ részhalmazoknak a halmaza, amelyekre (II.9) jobb oldala abszolút konvergens.

Világos, hogy S_1, $\mathrm{S}_2 \in \Phi_f$ esetén $\mathrm{S}_1 \cup \mathrm{S}_2 \in \Phi_f$, továbbá, hogy $\mathrm{S} \in \Phi_f$, $\mathrm{S}_1 \subseteq \mathrm{S}$ esetén $\mathrm{S}_1 \in \Phi_f$.

2.§. Ebben néhány, a további vizsgálatok szempontjából fontos segédtételt bizonyítunk be.

1. Tétel. Legyen $f \in \mathrm{M}^*$, $f \notin \mathrm{L}$. Legyen $P(z) = a_0 + a_1 z + \ldots + a_k z^k$ ($a_0 \neq 0, a_k = 1$) olyan minimális fokszámú $P \in \mathbb{C}[z]$ polinom, amelyre a

$$\sum_{n \geq 1} n^{-1} |P(E)f(n)| < \infty \tag{II.10}$$

egyenlőtlenség teljesül. Ekkor fennáll a

$$\sum_{n \geq 1} n^{-1} |(E^B - I)^k f(n)| < \infty \tag{II.11}$$

egyenlőtlenség is, ahol $B = 1$, vagy $B = p_1^{\alpha_1} \dots p_j^{\alpha_j}$, és

$$f(p_1) = \dots = f(p_j) = 0.$$

Legfeljebb $k-1$ különböző p prímszám van, amelyre $f(p) = 0$.

Bizonyítás. Jelölje J azoknak a P polinomoknak a halmazát, amelyekre (II.10) teljesül. Tudjuk, hogy J ideál. A feltételünk szerint J a zérus elemen kívül más elemet is tartalmaz. Ha J-hez valamely nulladfokú polinom is hozzátartozna, akkor $f \in$ L teljesülne. Ezt kizártuk.

Belátjuk most, hogy f legfeljebb $k-1$ számú prímhelyen vehet fel zérus értéket. Tegyük fel indirekt módon, hogy $f(p_j) = 0$ $(j = 1, \dots, k)$, ahol $p_1, \dots, p_k$ különböző prímszámok. Legyen $N_0 \in \mathbb{N}$ a $N_0 + (i-1) \equiv 0 \pmod{p_i}$ $(i = 1, \dots, k)$ kongruenciarendszer egyik megoldása. Legyen $B = p_1 \dots p_k$. Ekkor $f(n+j) = 0$ $(j = 0, 1, \dots, k-1)$, hacsak $n \equiv N_0 \pmod{B}$.

Jelölje $\mathrm{F}_{B,l}$ az $\{n | n \equiv l \pmod{B}\}$ maradékosztályt. A (II.10) formula közvetlen következménye az alábbi állítás.

Ha létezik k számú maradékosztály mod B konzekutív $l=r, r+1, \ldots, r+k-1$ maradékokkal, azaz $\mathrm{F}_{B,r}, \ldots, \mathrm{F}_{B,r+k-1}$, úgy hogy $\mathrm{F}_{B,l} \in \Phi_f$ $(l=r, \ldots, r+k-1)$, akkor $\mathrm{F}_{B,r+k} \in \Phi_f$. Következésképpen $\mathbb{N} \in \Phi_f$, azaz $f \in \mathrm{L}$.

Mivel $\mathrm{F}_{B,N_0+j} \in \Phi_f$ $(j=0, \ldots, k-1)$ nyilvánvalóan teljesül, ezért $f \in \mathrm{L}$, amit kizártunk. Tehát legfeljebb $k-1$ számú prímszámhelyen vehet fel f prímszámértéket.

Legyen

$$P(z) = \prod_{i=1}^{k} (z-\theta_i),$$

$$Q_m(z) := \prod_{i=1}^{k} (z-\theta_i^m).$$

$P(z)$ a tételben szereplő polinom, $Q_m(z^m) \in \mathrm{J}$, ezért

$$\sum_{n \geq 1} n^{-1} | Q_m(E^m) f(n) | < \infty.$$

Vegyük észre, hogy $Q_m(E^m) f(nm) = f(m) Q_m(E) f(n)$, s a fenti összegben n helyett csupán az nm alakú elemekre összegezzünk. Ha $f(m) \neq 0$, akkor innen

$$\sum_n n^{-1} | Q_m(E) f(n) | < \infty$$

adódik. Q_m főpolinom, fokszáma k, ezért $P(z) = Q_m(z)$, azaz

$$\{\theta_1, \ldots, \theta_k\} = \{\theta_1^m, \ldots, \theta_k^m\}, \quad \text{ha} \quad f(m) \neq 0. \quad \text{(II.12)}$$

Innen, $a_0 \neq 0$ miatt $|\theta_j| = 1$ $(j=1, \ldots, k)$,

$$\varphi_j = \frac{\arg \theta_j}{2\pi} = \text{racionális}$$

azonnal következik.

Legyen

$$\varphi_j = \frac{a_j}{B} \quad (j=1, \ldots, k, (a_1, \ldots, a_k)=1, B \geq 1).$$

(II.12) miatt az is világos, hogy B csak olyan p prímosztót tartalmazhat, amelyre $f(p)=0$. Ezzel tételünket bebizonyítottuk. ■

Megjegyzés. Ha (II.11) teljesül, és C többszöröse B-nek, akkor (II.11) B helyett C-vel is teljesül. Ugyanis $(z^B-1)^k$ osztója a $(z^C-1)^k$ polinomnak. Ezért feltehető az 1. tételben, hogy B tartalmaz minden olyan p_j prímosztót, alkalmas hatványon, amelyre $f(p_j)=0$.

2. Tétel. Legyen $f, g \in \mathrm{M}^*$, $C \neq 0$ állandó, $K \geq 1$ egész. Tegyük fel, hogy

$$\sum_{n \geq 1} \frac{|g(n+K) - Cf(n)|}{n} < \infty. \tag{II.13}$$

Ha létezik olyan p prímszám, amely nem osztója K-nak, és $f(p)=0$ vagy $g(p)=0$, akkor $f, g \in \mathrm{L}$.

Bizonyítás. Néhány észrevételt teszünk.

1. Mivel $\| g(n+K)| - |Cf(n)\| \leq |g(n+k) - Cf(n)|$, és az $f \in \mathrm{L}$ teljesülése csak $|f|$-től függ, ezért feltehetjük, hogy $f \geq 0$, $g \geq 0$, $C > 0$.
2. Ha $f \in \mathrm{L}$, akkor $g \in \mathrm{L}$ és viszont.
3. Feltehetjük, hogy $f(q)=0$ és $g(q)=0$ a K minden q prímosztójára.

Csak az utolsó állítást kell belátnunk. Tegyük fel, hogy $f(q) \neq 0$, $g(q) \neq 0$, $q|K$, s írjunk qn-et n helyére

(II.13)-ban. Ekkor

$$\sum_{n\geq 1} \frac{|g(q)g(n+K_1)-Cf(q)f(n)|}{n} < \infty \tag{II.14}$$

$K_1 = K/q(<K)$-val, amiből adódik, hogy (II.13) K helyett K_1-gyel $K_1|K$ is fennáll. Ha $g(q)=0$ és $f(q)\neq 0$, illetve $f(q)=0$ és $g(q)\neq 0$, akkor (II.14) miatt $f\in \mathrm{L}$, illetve $g\in \mathrm{L}$ máris adódik.

Feltesszük, hogy f, $g\geq 0$ és $f(q)=0$, $g(q)=0$, ha $q|K$. Jelölje P azoknak a K-hoz relatív prím p prímeknek a halmazát, amelyekre $f(p)=0$ teljesül. Hasonlóan legyen $\mathrm{R}=\{q|\mathrm{g}(q)=0,\ (q,K)=1\}$. A $\mathrm{P}_1\subseteq \mathrm{P}$, $\mathrm{R}_1\subseteq \mathrm{R}$ halmazokat a

$$\mathrm{P}_1=\{p\in \mathrm{P}|\exists n_0\equiv K \pmod p),\ g(n_0)\neq 0\}, \tag{II.15}$$

$$\mathrm{R}_1=\{q\in \mathrm{R}|\exists n_0\equiv -K \pmod q),\ f(n_0)\neq 0\} \tag{II.16}$$

formulákkal definiáljuk. P_1, R_1, továbbá P és R közül az egyik lehet üres halmaz is.

Vegyük észre, hogy $\mathrm{P}_1=\emptyset$, $\mathrm{R}_1=\emptyset$ esetén a következő (COND) feltétel teljesül:

(COND): $f(n)=0$ valamely n-re akkor és csak akkor teljesül, ha $g(n+K)=0$.

Ez nyilván igaz, ha $(n,K)>1$. Tegyük fel először, hogy $\mathrm{P}\neq\emptyset$, legyen $p\in \mathrm{P}$. Ekkor $g(n)=0$ $(\forall n\in \mathbb{N})$, $n\equiv K \pmod p$, $\mathrm{P}_1=\emptyset$ miatt. Ha pedig $\mathrm{R}\neq\emptyset$, $q\in \mathrm{R}$, akkor $\mathrm{R}_1=\emptyset$ miatt $f(n)=0$ $(\forall n\in \mathbb{N})$, $n\equiv -K \pmod q$.

Ha $f(n)=0$ és $(n,K)=1$, ekkor $\exists p\in \mathrm{P}$, $p|n$, és $\mathrm{P}_1=\emptyset$ miatt $g(n+K)=0$. Ha pedig $g(n)=0$, és $(n,K)=1$, akkor $\exists q|n$, $q\in \mathrm{R}$, és így $\mathrm{R}_1=\emptyset$, $n-K\equiv -K \pmod q$ miatt $f(n-K)=0$.

1. *Lépés.* Tegyük fel, hogy $\mathrm{P}_1=\emptyset$, $\mathrm{R}_1=\emptyset$. Ha $p\in \mathrm{P}$, akkor R tartalmaz minden olyan q prímet, amelyre $q\equiv K \pmod p$ teljesül. Ez ugyanis a (COND) feltételből azonnal következik. Ha $q\in \mathrm{R}$, akkor viszont P tartalmaz minden olyan π-t, amelyre $\pi\equiv -K \pmod q$. Mivel P és R közül legalább az egyik nem üres, ezért mindkettő végtelen sok elemet tartalmaz.

Legyen Q egy elég nagy páratlan prímszám, $Q\in \mathrm{R}$, $Q\nmid K-1$. Jelölje Z_Q a mod Q redukált maradékosztályok halmazát, legyen $\mathrm{A}=\mathrm{Z}_Q\backslash\bar{\mathrm{A}}$, $\mathrm{B}=\mathrm{Z}_Q\backslash\bar{\mathrm{B}}$, ahol $\bar{\mathrm{A}}$, $\bar{\mathrm{B}}$ a következő halmazok:

$$\bar{\mathrm{A}}=\{l_1,\ldots,l_R\,|\,f(n)=0,\ \text{ha}\ n\equiv l_i \pmod Q\},$$

$$\bar{\mathrm{B}}=\{k_1,\ldots,k_s\,|\,g(n)=0,\ \text{ha}\ n\equiv k_i \pmod Q\}.$$

Másszóval, valamely $l \pmod Q$ redukált maradékosztály $\bar{\mathrm{A}}$-hoz tartozik akkor és csak akkor, ha $f(n)=0$ $\forall n\equiv l \pmod Q$ egészre, és $k \pmod Q$ a $\bar{\mathrm{B}}$-hoz tartozik akkor és csak akkor, ha $g(n)=0$ $\forall n\equiv k \pmod Q$ egészre.

Legyen $l_i\in \bar{\mathrm{A}}$, azaz $f(n)=0$ $\forall n\equiv l_i \pmod Q$. Mivel a (COND) feltétel igaz, ezért $g(m)=0$, hacsak $m\equiv K+l_i \pmod Q$ és $m>K$. Az $m>K$ feltétel elhagyható. Legyen $m\equiv K+l_i \pmod Q$, t olyan nagy, hogy $N=m^{1+t(Q-1)}>K$. Ekkor $N\equiv K+l_i \pmod Q$, a kis Fermat-tétel miatt, ezért $g(N)=0$ és $g\in \mathrm{M}^*$ miatt $g(m)=0$ is teljesül. Beláttuk a következő állítást:

Ha $l_i\in \bar{\mathrm{A}}$, akkor vagy $l_i+K\equiv 0 \pmod Q$, vagy $l_i+K\in \bar{\mathrm{B}}$.

Hasonló módon bizonyíthatnánk be a következő állítást is:

Ha $k_i \in \bar{\mathrm{B}}$, akkor vagy $k_i - K \equiv 0 \pmod{Q}$, vagy $k_i - K \in \bar{\mathrm{A}}$. Mivel $Q \in \mathrm{R}$, $\mathrm{R}_1 = \emptyset$, ezért $-K \in \bar{\mathrm{A}}$, azaz $\bar{\mathrm{A}} \neq \emptyset$.

Különböztessünk meg most két esetet, annak megfelelően, hogy $K \in \bar{\mathrm{B}}$, vagy $K \notin \bar{\mathrm{B}}$.

I. Eset:

$$\bar{\mathrm{A}} = \{l_1, \ldots, l_{R-1}; l_R = -K\},$$

$$\bar{\mathrm{B}} = \{k_1, \ldots, k_{R-1}; \emptyset\}, \tag{II.17}$$

$$k_j = l_j + K \pmod{Q} \qquad (j = 1, \ldots, R-1).$$

II. Eset:

$$\bar{\mathrm{A}} = \{l_1, \ldots, l_{R-1}; l_R = -K\},$$

$$\bar{\mathrm{B}} = \{k_1, \ldots, k_{R-1}; k_R = K\}, \tag{II.18}$$

$$k_i \equiv l_i + K \pmod{Q} \qquad (i = 1, \ldots, R-1).$$

Az I. esetben:

$$\mathrm{A} = \{s_1, \ldots, s_H\} \qquad (H = Q - 1 - R),$$

$$\mathrm{B} = \{t_1, \ldots, t_H, t_{H+1}\}, \tag{II.19}$$

$$t_j \equiv s_j + K \pmod{Q} \qquad (j = 1, \ldots, H),$$

$$t_{H+1} = K.$$

Tegyük fel, hogy A nem üres. Világos, hogy A is, B is részcsoport Z_Q-ban. A rendje H, B rendje $H+1$. Ezért $H|Q-1$, $H+1|Q-1$, $\Rightarrow H(H+1)|Q-1, \Rightarrow$ $\Rightarrow H \leq \sqrt{Q}$.

Tudjuk, hogy R-nek végtelen sok eleme van. Tegyük fel, hogy végtelen sok $Q \in \mathrm{R}$ esetén az I. eset fordul elő. Mivel az $\bar{A}\cap\bar{B}$ halmazba tartozó prímszámok a $P\cap R$ halmazhoz tartoznak, és $H\leq\sqrt{Q}$, ezért létezik egy tetszőlegesen nagy π prímszám, amelyre $f(\pi)=g(\pi)=0$. Ha most $Q=\pi$, akkor a II. eset áll fenn.

Beláttuk ezzel, hogy végtelen sok $Q\in R$ létezik, amelyre a II. eset áll fenn.

A II. esetben:

$$\begin{aligned} &A=\{s_1,\dots,s_H\} && (H=Q-1-R),\\ &B=\{t_1,\dots,t_H\} && (K\notin B, -K\notin A), \qquad\qquad (II.20)\\ &t_j\equiv s_j+K\ (mod\ Q) && (j=1,\dots,H), \end{aligned}$$

feltéve, hogy A nem üres.

Mivel A és B azonos rendű részcsoportok Z_Q-ban, ezért megegyeznek. (II.20) miatt $a\in A\Rightarrow a+K\in B=$ $=A$, azaz $a\in A\Rightarrow a+tK\in A$ $(t=0,1,2,\dots)$, ezért $A=Z_Q$. Ez azonban lehetetlen, mert $-K\notin A$. Ezért $A=B=\emptyset$, és így $f(n)=g(n)=0$, ha $n\geq 2$, $(n,Q)=1$. Mivel $g(Q)=0$, ezért $g(n)=0$ $(\forall n\geq 2)$, és a (COND) feltétel érvényessége miatt $f(n)=0$ $(\forall n\geq 1)$. Ekkor természetesen $f, g\in L$.

2. *Lépés.* $P_1\neq\emptyset$. Legyen $p\in P_1$. Ekkor $f(p)=0$, $(p,K)=1$, és létezik n_0, $n_0\equiv K$ (mod p), úgy hogy $g(n_0)\neq 0$. Ekkor az $F_g(n|n\equiv K\ (\mathrm{mod}\ p))$ sor abszolút konvergens, azaz $\{n|n\equiv K\ (\mathrm{mod}\ p)\}\in\Phi_g$. Mivel $nn_0\equiv K$ (mod p), ha $n\equiv 1$ (mod p), továbbá $g(n_0)\neq 0$, ezért $\{n|n\equiv 1\ (\mathrm{mod}\ p)\}\in\Phi_g$.

Legyen $(n,p)=1$. Ekkor $n^{t\varphi(p)}\equiv 1\ (\mathrm{mod}\ p)$ $(t=$ $=1,2,\dots)$, $\{n^{t\varphi(p)}|t=1,2,\dots\}\in\Phi_g$, $g(n^{t\varphi(p)})=o(n^{t\varphi(p)})$ $(t\to\infty)$, azaz $0\leq g(n)<n$.

Ha $q_1, \ldots, q_{p-1}$ mod p kongruensek, akkor $q_1 \ldots q_{p-1} \equiv 1 \pmod p$. Legyen $l \not\equiv 0 \pmod p$, s tekintsük az

$$E := \sum_{q \equiv l \pmod p} \frac{g(q)}{q}$$

összeget, kiterjesztve minden prímre. Formálisan,

$$E^{p-1} = \sum_{q_1, \ldots, q_{p-1}} \frac{g(q_1 \ldots q_{p-1})}{q_1 \ldots q_{p-1}}.$$

Ha $E = \infty$, akkor $E^{p-1} = \infty$ lenne. Az utolsó egyenlet jobb oldalán azonban $q_1 \ldots q_{p-1} \equiv 1 \pmod p$, s valamely $n \equiv 1 \pmod p$ szám $n = q_1 \ldots q_{p-1}$ alakban korlátos sokféle módon állítható elő. Ezért a jobb oldal az $\mathrm{F}_g(n | n \equiv 1 \pmod p)$ sorral majorálható. Összegezve minden $l \pmod p$, $l \neq 0$ számtani sorra,

$$\mathrm{F}_g(q \mid q \neq p) < \infty, \qquad g(q) < q, \text{ ha } q \neq p \tag{II.21}$$

adódik. Innen

$$\mathrm{F}_g(n \mid (n,p) = 1) < \infty, \Rightarrow \mathrm{F}_f(n \mid n + K \not\equiv 0 \pmod p) < \infty \tag{II.22}$$

adódik.

Ha P_1-nek legalább két eleme van, mondjuk p_1, p_2, akkor máris készen vagyunk. A (II.21)-et p_1, p_2-vel alkalmazva $g(q) < q$ $(\forall q)$, $\mathrm{F}_g(q \mid \forall q) < \infty$, s innen $g \in \mathrm{L}$ következik.

Tegyük fel, hogy $\mathrm{P}_1 = \{p\}$. Legyen először $p \nmid K + 1$. A (II.22) második egyenlőtlenségből kiindulva,

$$\mathrm{F}_f(\pi \mid \pi \not\equiv -K \pmod p) < \infty$$

adódik. Mivel $p \nmid K + 1$, ezért $(-K)^2 \not\equiv -K \pmod p$, és így

$$\mathrm{F}_f(\pi \mid \pi \equiv -K \pmod p)^2 \ll \sum_{n \equiv K^2 \pmod p} \frac{f(n)}{n} < \infty. \tag{II.23}$$

Továbbá, ha $(\pi,p)=1$, és $\alpha\equiv 0\,(\mathrm{mod}(p-1))$, akkor $\pi^{\alpha}\not\equiv -K\ (\mathrm{mod}\ p)$, s mint az előbb, most is levezethetjük az $f(\pi^{\alpha})=o(\pi^{\alpha})$ $(\alpha\to\infty)$ relációt, ahonnan $0\le f(\pi)<\pi$ adódik. Ezért

$$\mathrm{F}_f(\pi\mid\pi\ne p)<\infty,\qquad 0\le f(\pi)<\pi, \tag{II.24}$$

s innen $f(p)=0$ miatt $\mathrm{F}_f(\pi\mid\forall\pi)<\infty$, $0\le f(\pi)<\pi\ (\forall\pi)$, azaz $f\in\mathrm{L}$.

Legyen most $p|K+1$. Legyen először $p=2$. Ez csak páratlan K esetén fordulhat elő. Legyen $K+1=2^{\beta}m$, ahol $(m,2)=1$. (II.22) miatt $\mathrm{F}_g\big(n|(n,2)=1\big)<\infty$.

Legyen $\gamma>\beta$. Mivel $2^{\gamma}\|n-1\Rightarrow 2^{\beta}\|n+K$, ezért

$$\mathrm{F}_f\big(n\mid n\equiv 1(\mathrm{mod}\ 2^{\gamma})\big)\ll\mathrm{F}_g\big(n\mid 2^{\beta}\,\|\,(n+K)\big)\ll\mathrm{F}_g\big(n\mid(n,2)=1\big)<\infty, \tag{II.25}$$

A már alkalmazott eljárásunkat alkalmazva, $\mathrm{F}_f(\pi|\pi\ne 2)<\infty$, $f(\pi)<\pi$ adódik, s $f(2)=0$-val $f\in\mathrm{L}$ következik.

Legyen most $p>2$. Tegyük fel, hogy létezik $k\in\mathbb{N}$, $k\not\equiv 1\ (\mathrm{mod}\ p)$, amelyre $f(k)\ne 0$. Mivel $kn\not\equiv 1\ (\mathrm{mod}\ p)$, ha $n\equiv 1\ (\mathrm{mod}\ p)$, ezért $n\to kn$ helyettesítés után a (II.22) második formuláját jelölő sorban következik, hogy $\mathrm{F}_f\big(n|n\equiv 1\ (\mathrm{mod}\ p)\big)<\infty$, amely a már többször alkalmazott gondolatmenettel az $f\in\mathrm{L}$ állításhoz vezet.

Hátravan az

(A) $\mathrm{P}_1=\{p^*\}$, $p^*|K+1, p^*>2, f(k)=0$
$\forall k\ne 1\ (\mathrm{mod}\ p^*)$

eset vizsgálata. Ezt az esetet később vizsgáljuk.

3. *Lépés.* $R_1 \neq \emptyset$. Megismételve a 2. lépés során alkalmazott gondolatmenetet, értelemszerű változtatásokkal, a bizonyítás a következő esetekre azonnal adódik:

(1) R_1 legalább két elemet tartalmaz,
(2) $R_1 = \{q\}$, $q \nmid K-1$,
(3) $R_1 = \{2\}$, $2 \mid K-1$,
(4) $R_1 = \{q\}$, $q \mid K-1$, $q > 2$, $\exists k$, $k \not\equiv 1 \pmod{q}$, $g(k) \neq 0$.

Egy eset marad ki:

(B) $R_1 = \{q^*\}$, $q^* \mid K+1$, $q^* > 2$, $g(k) = 0$ $\forall k \not\equiv 1 (\mathrm{mod}\ q^*)$.

4. *Lépés.* Tegyük fel, hogy (A) teljesül. Ekkor $\{\pi \mid \pi \not\equiv 1 \pmod{p^*}\} \subseteq P$. Innen levezetjük, hogy $g(n) = 0$, hacsak $(n, p^*) = 1$. Legyen $k \equiv l \pmod{p^*}$, $l \in \{2, \ldots, p^*-1\}$. Mivel $f(k) = 0$, ezért létezik $\pi \mid k$, $\pi \in P$. Mivel $\pi \neq p^*$, $\pi \notin P_1$, ezért $g(k+K) = 0$. Mivel $K \equiv -1 \pmod{p^*}$, $k + K \equiv l - 1 \pmod{p}$. Beláttuk ezzel, hogy $g(n) = 0$, ha $n > K$ és $n \equiv 1, 2, \ldots, p^* - 2 \pmod{p^*}$. Mivel $n^l \equiv n \pmod{p}$, ha $(p^*-1) \mid (l-1)$, és $g(n^l) = g(n)^l$, ezért az $n > K$ feltétel az $n > 1$ feltétellel helyettesíthető. Ezért $g(n) = 0$, ha $n > 1$, $n \not\equiv 0, -1 \pmod{p^*}$. Legyen $n \equiv -1 \pmod{p^*}$, $n^2 \equiv 1 \pmod{p^*}$, $1 \not\equiv -1 \pmod{p^*}$, mivel $p^* > 2$, innen $g(n^2) = 0$, $g(n) = 0$ következik. Beláttuk a következő állítást.

(ÁLL 1): Ha (A) teljesül, akkor $g(n) = 0$ minden olyan $n \geq 2$ egészre, amely nem p^* hatványa.

Belátjuk most a következőt.

(ÁLL 2): Ha (B) teljesül, akkor $f(n)=0$ minden olyan $n \geq 2$ egészre, amely nem q^* hatványa.

(B)-ből adódik, hogy $\{\pi | \pi \not\equiv 1 \pmod{q^*}\} \subseteq R$. Legyen $k \equiv l \pmod{q^*}$, $l \in \{2, \ldots, q^*-1\}$. Mivel $g(k)=0$, ezért létezik $\pi | k$, úgy hogy $g(\pi)=0$, és $\pi \neq q^*$. Ezért $\pi \in \mathrm{R}$, és $\pi \notin \mathrm{R}_1$ s így $f(k-K)=0$. Tehát $f(n)=0$ $\forall n \geq 2$, $n \equiv 1, \ldots, q^*-2 \pmod{q^*}$. Mivel ha $(N, q^*)=1$, akkor $N^t \equiv 1 \pmod{q^*}$ alkalmas egésszel fennáll, s így $f(N)=0$, (ÁLL 2) igaz.

Innen már egyszerűen befejezhetjük a bizonyítást. Tegyük fel, hogy $\mathrm{P}_1 \neq \emptyset$, $\mathrm{R}_1 \neq \emptyset$. Az az eset van hátra, amikor (A) is, (B) is teljesül. Ekkor viszont az (ÁLL 1), (ÁLL 2) állítások igazak. Azt kell belátnunk, hogy $g(p^*)<p^*$, vagy $f(q^*)<q^*$. Mivel a $(p^*)^\alpha - K = (q^*)^\beta$ diofantikus egyenletnek rögzített p^*, q^*, K esetén csak véges sok megoldása van, ezért $f((p^*)^\alpha - K)=0$ minden elég nagy α-ra teljesül, ezért a (II.23) feltétel miatt $R(g, p^*)<\infty$, azaz $g(p^*)<p^*$ teljesül. Innen $g \in \mathrm{L}$ azonnal adódik.

Tegyük fel most, hogy (A) teljesül, és $R_1=\emptyset$. Mivel $\forall p \neq p^*$ prím R-hez tartozik, $\mathrm{R}_1=\emptyset$, ezért $f(m)=0$, ha $m+K \neq (p^*)^\gamma$. De ekkor $f(\pi)=0$ $\forall \pi$ prímre, mivel a $\pi^\alpha + K$ nem lehet p^* hatványa, ha α elég nagy. Ezért $f \in \mathrm{L}$.

Tegyük fel végül, hogy $\mathrm{P}_1=\emptyset$, és (B) teljesül. Mivel P tartalmaz $\forall \pi \neq q^*$ prímet, és $\mathrm{P}_1=\emptyset$, ezért $g(n)=0$, ha $n-K \neq (q^*)^\gamma$. De ekkor $g(\pi)=0$ $\forall \pi$ prímre, mert

$\pi^{\alpha} - K$ nem lehet q^* hatványa, ha α elég nagy. Ezért $g \in \mathrm{L}$.

Ezzel a tétel bizonyítását befejeztük. ■

Főlemma. Legyen α irracionális, β pedig valós szám a következő tulajdonsággal: valahányszor természetes számokból álló $m_1 < m_2 < \dots$ végtelen sorozatra $\|m_\nu \alpha\| \to 0$ $(\nu \to \infty)$, mindannyiszor $\|m_\nu \beta\| \to 0$ $(\nu \to \infty)$. Ekkor $\beta = k\alpha + l$, ahol k, l alkalmas egészek.

Bizonyítás. Ha α, β, 1 racionálisan függetlenek akkor, mint ismeretes, az $(\{n\alpha\}, \{n\beta\})$ sorozat az egységnégyzeten mindenütt sűrű, ezért a főlemma feltétele nem teljesülhet. Ezért alkalmas egész P, Q, r számokkal

$$\beta = \frac{P}{Q}\alpha + \frac{r}{Q}, \qquad (P, Q, r) = 1 \qquad (Q \geq 1).$$

Legyen most α lánctörtkifejtésének ν-edik közelítő törtje p_ν / q_ν. Tudjuk, hogy

$$\alpha = \frac{p_\nu}{q_\nu} + \frac{\theta_\nu}{q_\nu^2} \qquad (|\theta_\nu| \leq 1),$$

továbbá, hogy $|p_\nu q_{\nu-1} - p_{\nu-1} q_\nu| = 1$. Az α és β közötti összefüggésből, q_ν-vel szorozva

$$q_\nu \beta = \frac{P p_\nu}{Q} + \frac{r q_\nu}{Q} + \frac{\theta_\nu}{q_\nu}$$

adódik. $\|\alpha q_\nu\| \to 0$ miatt $\|q_\nu \beta\| \to 0$ is teljesül, ezért $P p_\nu + r q_\nu = l_\nu Q$, alkalmas l_ν egésszel fennáll. Az utóbbi egyenlet ν helyett $\nu - 1$ választással is felírva, majd az elsőt $q_{\nu-1}$-gyel, a másodikat q_ν-vel végigszorozva, és a kettőt kivonva egymásból

$$P[p_{\nu-1}q_\nu - p_\nu q_{\nu-1}] = Q[l_{\nu-1}q_\nu - l_\nu q_{\nu-1}]$$

adódik. Mivel a bal oldalon $\pm P$ áll, ezért $Q|P$.

P/Q tehát egész szám. Tegyük fel, hogy $Q \neq 1$. A $(P,Q,r)=1$ feltétel és $Q|P$ miatt $(r,Q)=1$. Tekintsük most az $n \equiv 1 \pmod{Q}$ alakú számokat. Ezek közül kiválasztható olyan $\{n_\nu\}$ végtelen részsorozat, amelyre $\|n_\nu\alpha\| \to 0$. Ekkor $\|n_\nu\beta\| \to 0$ is teljesül, továbbá $\left\|n_\nu \frac{P}{Q}\alpha\right\| \to 0$ is, ezért $\left\|\frac{r}{Q}\right\| = \left\|n_\nu \frac{r}{Q}\right\| \to 0$ is, ami lehetetlen. Tehát $Q=1$. A főlemmát beláttuk.■

3. §. Ebben a (II.11) feltételt kelégítő teljesen multiplikatív függvények karakterizálását adjuk meg.

3. Tétel. Legyen $B=1$ vagy $B=p_1^{\alpha_1}\dots p_j^{\alpha_j}$, ahol $p_1,\dots,p_j$ különböző prímszámok. Legyen $f \in \mathrm{M}^*$, $f(p_l)=0$ $(l=1,\dots,j)$, és $f(p) \neq 0$, ha $p \nmid B$. Tegyük fel, hogy

$$\sum_{n \geq 1} \frac{|(E^B - I)^k f(n)|}{n} < \infty \tag{II.26}$$

teljesül. Ekkor vagy $f \in \mathrm{L}$, vagy $f(n) = \chi_B(n) n^{\sigma + j\tau}$, ahol $\sigma, \tau \in \mathbb{R}$, $0 \leq \sigma < k$ és $\chi_B(n)$ multiplikatív karakter mod B. Ezekre a függvényekre a (II.26) állítás teljesül.

Bizonyítás. A második állítás nyilvánvaló, ezt nem bizonyítjuk. Az első állítást a következő vázlat szerint bizonyítjuk be.

Feltesszük, hogy $f \notin \mathrm{L}$.

(A) $|f(n)| = n^\lambda$, $0 \leq \lambda < k$, ha $(n,B)=1$.

(B) Legyen $k>1$. Ha $\lambda \geq k-1$, akkor (II.26) igaz $f(n)$ helyett $v(n) = n^{-1}f(n)$, k helyett $k-1$ választással. Ha $\lambda<k-1$, akkor (II.26) igaz k helyett $k-1$ választással.

(C) A tétel igaz, ha $k=1$.

(A) bizonyítása. Legyen $H(n)=(E^B-I)^{k-1}f(n)$. Ha $k=1$, akkor innen $H(n)=f(n)$ adódik. (II.26) miatt

$$\sum_{n\geq 1} n^{-1} \max_{|l_n|\leq D} |H(n+l_nB)-H(n)|<\infty \tag{II.27}$$

teljesül tetszőleges D állandóval.

Legyen $q>1$, $(q,B)=1$, ekkor

$$(1+z+\ldots+z^{q-1})^{k-1}=\alpha_0+\alpha_1 z+\ldots+\alpha_h z^h$$

$$(h=(q-1)(k-1)).$$

Világos, hogy $\sum\alpha_j=q^{k-1}$. Másrészt $f\in M^*$ miatt

$$f(q)H(n)=(E^{Bq}-I)^{k-1}f(qn)=\sum_{j=0}^{k}\alpha_j H(qn+jB),$$

s (II.27)-ből

$$\sum_n n^{-1} \max_{|l_n|\leq D} \left| H(qn+l_nB)-\frac{f(q)}{q^{k-1}}H(n)\right|<\infty. \tag{II.28}$$

Tetszőleges $N_0\in\mathbb{N}$, $(N_0,B)=1$ esetén jelölje a_0 azt a legkisebb nemnegatív egészet, amelyre $N_0-a_0B\equiv 0$ (mod q) fennáll, és N_1-et definiáljuk az $N_0=a_0B+qN_1$ egyenlettel. Világos, hogy $(N_1,B)=1$ teljesül. Ekkor, (II.28) miatt,

$$\sum_{(N_0,B)=1} N_0^{-1}\left| H(N_0)-\frac{f(q)}{q^{k-1}}H(N_1)\right|<\infty \tag{II.29}$$

fennáll. Az $(N_0,B)=1$ feltétel (II.29)-ben elhagyható, mert a tétel feltétele szerint $(N_0,B)>1$ esetén $H(N_0)=0$, és $(N_0,B)>1$ miatt $H(N_1)=0$.

Legyen

$$A(x)=\sum_{N\leq x}\frac{|H(N)|}{N}.$$

Mivel $N_1<\frac{N_0}{q}$, és $n<\frac{x}{q}$ legfeljebb q számú különböző $N_0\leq x$ számra lehet $N_1=N_1(N_0)$, ezért (II.29)-ből az

$$A(x)\leq\frac{|f(q)|}{q^{k-1}}A\left(\frac{x}{q}\right)+c_1 \qquad \text{(II.30)}$$

(c_1 alkalmas állandó) adódik. Ha $|f(q)|<q^{k-1}$, akkor innen $A(x)$ korlátossága egyszerűen levezethető, ami $k=1$ esetén azt jelenti, hogy $f\in \mathrm{L}$, $k>1$ esetén pedig, hogy (II.26) k helyett $k-1$ választással is fennáll. Tegyük fel most, hogy $|f(q)|=q^{k-1+\eta}$ $(\eta\geq 0)$, ha $n\leq x/q-B$, akkor az $n=N_1$ egyenlet pontosan q számú különböző $N_0\leq x$ számra következik be. Ezért (II.29) miatt az

$$A(x)\geq\frac{|f(q)|}{q^{k-1}}A\left(\frac{x}{q}-B\right)-c_2 \qquad \text{(II.31)}$$

egyenlőtlenség is érvényes, alkalmas c_2 állandóval.

Másrészt, (II.30)-ból $A(x)\ll x^{\eta}$, (II.31)-ből $A(x)\gg x^{\eta-\varepsilon}$, minden rögzített $\varepsilon>0$ választással, adódik. Ezért

$$\frac{\log A(x)}{\log x}\to\eta \qquad (x\to\infty) \qquad \text{(II.32)}$$

(II.32) miatt η nem függhet q-tól. Ezért $|f(n)|=$ $=n^{\eta+(k-1)}$, ha $(n,B)=1$. Belátjuk most, hogy $\eta<1$. Mivel $I=E^{-B}(E^B-I)+E^{-B}$, ezért

$$(E^B-I)^{j-1}f(n)=(E^B-I)^j f(n-B)+(E^B-I)^{j-1}f(n-B),$$

s az

$$U_l(x)=\sum_{n\le x}|(E^B-I)^l f(n)|$$

függvényre teljesül az

$$U_{l-1}(x)\le U_l(x-B)+U_{l-1}(x-B) \quad (l=1,\ldots,k) \tag{II.33}$$

egyenlőtlenség. A (II.26) formulából $U_k(x)=o(x)$ rögtön adódik. (II.33) miatt innen $U_{k-1}(x)=o(x^2)$ következik. A (II.33) formulát többször alkalmazva, innen $U_{k-2}(x)=o(x^3),\ldots,U_0(x)=o(x^{k+1})$, azaz $\eta<1$ azonnal kijön. Az (A) állítást beláttuk.

(B) bizonyítása. Mint azt az (A) bizonyítása során láttuk, (B) igaz, ha $\lambda<k-1$. Legyen $\lambda\ge k-1$, $v(n)=n^{-1}f(n)$. Ekkor $|v(n)|=n^{k-2+\eta}$ $(0\le\eta<1)$. Vegyük észre, hogy

$$\Delta_B^k v(n)=n\Delta_B^k v(n)+Bk\Delta_B^{k-1}v(n+B). \tag{II.34}$$

Legyen $g(n)=\Delta_B^{k-1}v(n)$. (II.34) és (II.26) miatt

$$(n+Bk)g(n+B)-ng(n)=\lambda_n, \tag{II.35}$$

$$\sum_n\frac{|\lambda_n|}{n}<\infty. \tag{II.36}$$

(II.35) miatt

$$|g(n)|\le|g(n-B)|+\frac{|\lambda_{n-B}|}{n} \qquad (n>B),$$

s így a

$$B(x)=\sum_{n\le x}|g(n)|$$

függvényre $B(x)\le B(x-B)+c_3$ adódik. Innen $B(x)=O(x)$ azonnal következik. Mivel

$$\sum_{n\ge x}\frac{|\Delta_B^k v(n)|}{n}\le\sum_{n\ge x}\frac{|n\Delta_B^k v(n)+Bkg(n+B)|}{n^2}+\sum_{n\ge x}\frac{|Bkg(n+B)|}{n^2},$$

továbbá a jobb oldali két összeg korlátos $x \to \infty$-re, ezért a v függvényre teljesül a (II.26) feltétel. De $|v(q)| < q^{k-1}$ is teljesül, s erre az esetre már (A) bizonyítása során beláttuk, hogy (II.26) k helyett $k-1$ választással is fennáll. Ezzel a (B) állítást beláttuk.

(C) bizonyítása. Feltehetjük, hogy $|f(n)| = n^{\eta}$ $(\eta \geq 0)$, $(n,B) = 1$. Legyen

$$f(n) = n^{\eta} t(n), \qquad |t(n)| = 1, \quad \text{ha} \quad (n,B) = 1.$$

Vegyük észre, hogy

$$\Delta_B f(n) = n^{\eta} \Delta_B t(n) + \eta n_{\xi}^{\eta-1} t(n+B) \qquad (n \leq n_{\xi} \leq n+B),$$

ezért (II.26), $k=1$ miatt

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{|t(n+B) - t(n)|}{n} < \infty \qquad \text{(II.37)}$$

teljesül, azaz (II.26) f helyett t-vel, $k=1$ választással fennáll.

Elegendő tehát a tételt az $|f(n)| = 1$ $(\forall n)$, $(n,B) = 1$ feltétel mellett bebizonyítani.

Tegyük fel, hogy $f \in \mathrm{M}^*$, $|f(n)| = 1$, ha $(n,B) = 1$, és $f(n) = 0$, ha $(n,B) > 1$, továbbá, hogy

$$\sum_{n} \frac{1}{n} |f(n+B) - f(n)| < \infty. \qquad \text{(II.38)}$$

Legyen $q_i \equiv 1 \pmod{B}$, $q_i > 2$ $(i = 1,2)$,

$$A_M^{(q_i)} = [q_i^{M_i - 1}, q_i^{M_i}).$$

Tegyük fel, hogy $q_2^2 < q_1$. Valamely $N \in \mathbb{N}$ egészre az $N_0, N_1, \ldots$, illetve a $n_0, n_1, \ldots$ sorozatot definiáljuk a következő algoritmussal. $N_0 := N$, a_0 az a legkisebb nemnegatív egész, amelyre

$$N_0 - a_0 B \equiv 0 \pmod{q_1}, \qquad N_1 = \frac{N_0 - a_0 B}{q_1}.$$

$N_{\nu+1}$-et úgy kapjuk, hogy az előző eljárást N helyett N_ν-re alkalmazzuk. Legyen $n_0 := N$, $\tilde{a}_0$ az a legkisebb nemnegatív egész, amelyre

$$n_0 - \tilde{a}_0 B \equiv 0 \pmod{q_2}, \qquad n_1 = \frac{n_0 - \tilde{a}_0 B}{q_2}.$$

Mivel $q_j \equiv 1 \pmod B$, ezért $N_0 \equiv n_\nu \equiv n_\mu \pmod B$ minden ν, μ választásra fennáll.

A definícióból világos, hogy

$$q_1^{-1} N_\nu - B < N_{\nu+1} \leq q_1^{-1} N_\nu,$$

$$q_2^{-1} n_\nu - B < n_{\nu+1} \leq q_2^{-1} n_\nu.$$

Ezt $\nu = 0, 1, \ldots$ választással alkalmazva

$$N_0 q_1^{-\nu} \geq N_\nu \geq N_0 q_1^{-\nu} - C_1,$$

$$N_0 q_2^{-\nu} \geq n_\nu \geq N_0 q_2^{-\nu} - C_2$$

adódik,

$$C_1 = B\frac{q_1}{q_1 - 1}, \qquad C_2 = B\frac{q_2}{q_2 - 1}$$

állandókkal.

Legyen

$$\rho(m) := \sum_{n \geq m} \frac{\varepsilon(n)}{n},$$

$$\varepsilon(n) := |\Delta_B f(n)|.$$

Írjunk most q_1 helyett q-t, az $N_0, N_1, \ldots$ sorozatot definiáljuk ugyanúgy, mint q_1 esetében tettük. Legyen

$$A_M = A_M^{(q)} = [q^{M-1}, q^M),$$

$$A_M^* = [q^{M-1} - C, q^M), \qquad C = B\frac{q}{q-1}.$$

Észrevesszük, hogy $N_0 \in A_M^*$ esetén $N_1 \in A_{M-1}^*$, és így $N_\nu \in A_{M-\nu}^*$ $(\nu = 0, 1, \ldots)$. Másrészt

$$|f(N_j) - f(q)f(N_{j+1})| \leq \sum_{t=0}^{B-1} \varepsilon(qN_{j+1} + tB). \qquad \text{(II.39)}$$

Vegyük észre, hogy az $N_j = n$ egyenletnek q^j számú $N = N_0$ megoldása van. Használjuk ki ezt a tényt, valamint azt, hogy $|f(q)| = 1$. A (II.38) egyenlőtlenségből, $j = 0, 1, \ldots, \nu - 1$ választással alkalmazva azt,

$$\sum_{N_0 \in A_M^*} |f(N_0) - f(q)^\nu f(N_\nu)| \leq$$

$$\leq \sum_{l=0}^{\nu-1} q^l \sum_{N_l \in A_{M-l}^*} |f(N_l) - f(q) f(N_{l+1})| \leq$$

$$\leq \sum_{l=0}^{\nu-1} q^{l+1} \sum_{n \in A_{M-l}^*} \varepsilon(n),$$

s innen

$$q^{-M} \sum_{N_0 \in A_M^*} |f(N_0) - f(q)^\nu f(N_\nu)| < q\rho(q^{M-\nu}) \qquad \text{(II.40)}$$

adódik.

Tekintsük most q helyett a q_1, q_2 egészeket, a mondott $q_2^2 < q_1$, $q_2 > 2$, $q_2 \equiv q_1 \equiv 1 \pmod B$ feltételekkel. Legyen H_1 nagy rögzített egész, $M_1 > H_1$.

Világos, hogy $A_{M_2}^{(q_2)*} \leq A_{M_1}^{(q_1)*}$ valamely alkalmas M_2 egészre. Miután rögzítettük H_1-et, a ν_1, ν_2 egészeket válasszuk nagynak, és úgy hogy

$$\left|\frac{q_2^{\nu_2}}{q_1^{\nu_1}-1}\right| < q_1^{-H_1} \tag{II.41}$$

teljesüljön. Most válasszuk M_1-et az $M_1 = \nu_1 + H_1$ egyenlet szerint, M_2-t pedig úgy, hogy $A_{M_2}^{(q_2)*} \leq A_{M_1}^{(q_1)*}$ teljesüljön. Legyen $H_2 = M_2 - \nu_2$. Világos, hogy $H_2 \to \infty$, ha $H_1 \to \infty$.

Írjuk most át a (II.39) egyenlőtlenséget a $q = q_1$, $q = q_2$ választásnak megfelelően:

$$\sum_{N_0 \in A_{M_1}^{(q_1)*}} |f(N_0) - f(q_1)^{\nu_1} f(N_{\nu_1})| \ll q_1^{M_1} \rho(q_1^{H_1-1}), \tag{II.42}$$

$$\sum_{N_0 \in A_{M_2}^{(q_2)*}} |f(N_0) - f(q_2)^{\nu_2} f(n_{\nu_2})| \ll q_2^{M_2} \rho(q_2^{H_2-1}). \tag{II.43}$$

Legyen $N_0 \in A_{M_2}^{(q_2)*}$. Világos, hogy

$$N_0 = q_2^{\nu_2} n_{\nu_2} + \eta(N_0)B,$$

$$\eta(N_0) = \tilde{a}_0 + \tilde{a}_1 q_2 + \ldots + a_{\nu_2-1} q_2^{\nu_2-1},$$

$$N_0 = q_1^{\nu_1} N_{\nu_1} + \xi(N_0)B,$$

$$\xi(N_0) = a_0 + a_1 q_1 + \ldots + a_{\nu_1-1} q_1^{\nu_1-1},$$

$$0 \leq \eta(N_0) < q_2^{\nu_2},$$

$$0 \leq \xi(N_0) < q_1^{\nu_1},$$

továbbá

$$n_{\nu_2} \in A_{q_2}^{(H_2)*}, \quad N_{\nu_1} \in A_{q_1}^{(H_2)*}.$$

Ezekből, s (II.40)-ből

$$N_{\nu_1}-n_{\nu_2}=\left(\frac{q_2^{\nu_2}}{q_1^{\nu_1}}-1\right)n_\nu^2+\frac{\eta(N_0)}{q_1^{\nu_1}}B-\frac{\xi(N_0)}{q_1^{\nu_1}}B,$$

s innen

$$|N_{\nu_1}-n_{\nu_2}|\le q_1^{-H_1}q_2^{H_2}+B\left(\frac{q_2^{\nu_2}}{q_1^{\nu_1}+1}\right)$$

következik. Mivel $A_{M_2}^{(q_2)*}\subseteq A_{M_1}^{(q_1)*}$, ezért $q_1^{-H_1}q_2^{H_2}$ abszolút korlát alatt marad. Innen $|N_{\nu_1}-n_{\nu_2}|\le c_4B$ adódik, alkalmas $c_4>0$ állandóval. Mint már mondtuk,

$$N_{\nu_1}\equiv N_{\nu_2}\ (\mathrm{mod}\ B),$$

ezért

$$N_0\in A_{M_2}^{(q_2)*}$$

esetén

$$|f(N_{\nu_1})-f(n_{\nu_2})|\le\sum_{t=-c_4}^{c_4}\varepsilon(n_{\nu_2}+tB),\qquad n_{\nu_2}\in A_{q^2}^{(H_2)*}.$$

Innen

$$\sum_{N_0\in A_{M_2}^{(q_2)*}}|f(N_{\nu_1})-f(n_{\nu_2})|\le q^{\nu_2}\sum_{h\in A_{M_2}^{(q_2)*}}\sum_{t=-c_4}^{c_4}\varepsilon(h+tB),$$

s így elég nagy H_2 esetén

$$\sum_{N_0\in A_{M_2}^{(q_2)*}}|f(N_{\nu_1})-f(n_{\nu_2})|\ll q_2^{M_2}\rho(q_2^{H_2-1})\tag{II.44}$$

következik. (II.42), (II.43), (II.44) segítségével

$$|f(q_1)^{\nu_1}-f(q_2)^{\nu_2}|\sum_{N_0\in A_{M_2}^{(q_2)*}}1\ll q_1^{M_1}\rho(q_1^{H_1-1})+q_2^{M_2}\rho(q_2^{H_2-1}).\tag{II.45}$$

Mivel rögzített H_1 esetén $q_2^{M_2}\ll q_1^{M_1}$, $q_1^{M_1}\ll q_2^{M_2}$, ezért

$$|1-\overline{f(q_1)}^{\nu_1}f(q_2)^{\nu_2}|\ll\rho(q_{-1}^{H_1})+\rho(q_2^{H_2-1}).\tag{II.46}$$

Világos, hogy (II.46) jobb oldala zérushoz tart, ha $H_1 \to \infty$.

Legyen $f(q_l) = \exp(2\pi i \Lambda_l \log q_l)$ $(l=1,2)$. A következő állítást bizonyítottuk be. Ha $(v_1^{(j)}, v_2^{(j)})$ $(j=1,2,\ldots)$ pozitív egész számpárok olyan sorozata, amelyre $v_1^{(j)} \log q_1 - v_2^{(j)} \log q_2 \to 0$, akkor

$$\|v_1^{(j)}\Lambda_1 \log q_1 - v_2^{(j)}\Lambda_2 \log q_2\| \to 0 \qquad (j \to \infty). \tag{II.47}$$

Rögzítsük q_2-t, válasszuk prímszámnak, s tegyük fel, hogy $\Lambda_2 = 0$. Ekkor az előbbi állításunk a következőképpen fogalmazható. Ha $v_1^{(j)}$ olyan sorozat, amelyre

$$\left\| v_1^{(j)} \frac{\log q_1}{\log q_2} \right\| \to 0,$$

akkor

$$\|v_1^{(j)}\Lambda_1 \log q_1\| \to 0 \qquad (v_1^{(j)} \to \infty).$$

A főlemma szerint ekkor érvényes a következő. Ha

$$\frac{\log q_1}{\log q_2} = \text{irracionális},$$

akkor

$$\Lambda_1 \log q_1 = k(q_1) \frac{\log q_1}{\log q_2} + l(q_1),$$

ahol $k(q_1)$ és $l(q_1)$ alkalmas egész számok. Ez igaz minden

$$q_1 \equiv 1 \pmod{B}, \qquad q_2^2 < q_1, \qquad \frac{\log q_1}{\log q_2} = \text{irracionális}$$

esetben. Írjunk q_1 helyébe m-et, n-et, majd mn-et. $f \in \mathbf{M}^*$, tehát

$$k(mn) \frac{\log mn}{\log q_2} \equiv k(m) \frac{\log m}{\log q_2} + k(n) \frac{\log n}{\log q_2} \pmod{1}$$

teljesül. Innen

$$(mn)^{k(mn)}=m^{k(m)}\cdot n^{k(n)}\cdot q_2^{l_{m,n}} \tag{II.48}$$

teljesül, alkalmas $l_{m,n}$ egésszel. Ha $(m,n)=1$, valamint $(mn,q_2)=1$, akkor a prímfelbontás egyértelműségéből $k(mn)=k(m)=k(n)$ következik. Igaz tehát a következő.

Létezik olyan L egész, hogy $n\equiv 1 (\mathrm{mod}\ B)$, $n>q_2^2$, $(n,q_2)=1$ esetén $k(n)=L$, következésképpen $f(n)=$ $=\exp(2\pi i\tau \log n)$ $(\tau=L/\log q_2)$.

Az $n>q_2^2$ feltételtől könnyen megszabadulhatunk. Legyen ugyanis $n_0\equiv 1\ (\mathrm{mod}\ B)$ tetszőleges, $(n_0,q_2)=1$. Legyen $n>q_2^2$, $n\equiv 1 (\mathrm{mod}\ B)$. Ekkor $f(n_0)=f(nn_0)\bar{f}(n)$, másrészt n-re és nn_0-ra igaz, hogy $f(N)=\exp(2\pi i\tau \log N)$ $(N=n,\ nn_0)$, ezért n_0-ra is igaz. Másrészt $f(q_2)=1$, $\exp(2\pi i\tau \log q_2)=1$ miatt $f(q_2^l)=\exp(2\pi i\tau \log q_2^l)$ is igaz. Belátjuk most, hogy az $f(q_2)=1$ feltétel nem jelent különösebb megszorítást.

Legyen f a (II.26) megoldása $k=1$ mellett, s tegyük fel, hogy $|f(n)|=1$ $(\forall n\in\mathbb{N})$, $(n,B)=1$ esetén. Legyen $f(q_2)=\exp(2\pi i\lambda \log q_2)$ alkalmas λ valós számmal. Legyen $\tilde{f}(n):=f(n)\exp(-2\pi i\lambda \log n)$. Könnyen belátható, hogy (II.26)-nak $\tilde{f}$ is megoldása, s erre teljesül a $\tilde{f}(q_2)=1$ feltétel, ezért $\tilde{f}(n)=\exp(2\pi i\tau \log n)$, ha $n\equiv 1\ (\mathrm{mod}\ B)$. Beláttuk ezzel, hogy ha f megoldás, akkor $f(n)=\exp(2\pi i\lambda \log n)$ $\forall n\equiv 1\ (\mathrm{mod}\ B)$ esetén. Tekintsük most f helyett az $f_1(n)=f(n)\exp(-2\pi i\lambda \log n)$ függvényt. Ez ugyancsak megoldása a (II.26) egyenletnek $k=1$-gyel, s $|f_1(n)|=1$, illetve 0 aszerint, hogy $(n,B)=1$, illetve $(n,B)>1$. Fennáll továbbá a $f_1(n)=1$ $(\forall n\in\mathbb{N})$, $n\equiv 1\ (\mathrm{mod}\ B)$. Mivel $f_1\in M^*$, ezért f_1 periodikus. Legyen ugyanis $m_1\equiv m_2\ (\mathrm{mod}\ B)$, $(m_1,B)=1$.

Ekkor található olyan N, hogy $m_1N \equiv m_2N \equiv 1 \pmod{B}$, s ezért $1 = f_1(m_1N) = f_1(m_2N)$, azaz $f_1(m_1) = f_1(m_2)$. Ekkor viszont f_1 mod B multiplikatív karakter, $f_1(n) = \chi_B(n)$. Ezért $f(n) = \chi_B(n)n^{i\lambda}$. Ezzel (C) és így a tételünk is bizonyítást nyert. ■

4.§.

4. Tétel. Legyen $f, g \in M^*$, $K \geq 1$ egész. Tegyük fel, hogy $f(n) = g(n) = 0$, ha $(n,K) > 1$ és $f(n) \neq 0$, $g(n) \neq 0$, ha $(n,K) = 1$. Tegyük fel továbbá, hogy

$$\sum_n \frac{|g(n+K) - f(n)|}{n} < \infty. \tag{II.49}$$

Ekkor vagy

(a) $$f, g \in L,$$

vagy

(b) $$f(n) = n^s F(n),\ g(n) = n^s G(n), \qquad 0 \leq \operatorname{Re} s < 1,$$

$$G(n+K) = F(n) \qquad (\forall n \in \mathbb{N}) \tag{II.50}$$

teljesül. Fordítva, ha az (a), illetve a (b) feltétel teljesül, akkor f és g kielégítik a (II.49) feltétel.

Bizonyítás. A második állítás nyilvánvaló. Az első állítás bizonyításához tegyük fel, hogy az (a) feltétel nem teljesül. Ekkor $f \notin L$, $g \notin L$.

Megmutatjuk először, hogy $|f(n)| = |g(n)|$ $\forall n \geq 1$ esetén fennáll. Mivel $||g(n+K)| - |f(n)|| \leq |g(n+K) - f(n)|$, ezért (II.49) az $|f|$, $|g|$ függvénypárra is teljesül. Legyen $f, g \geq 0$. Legyen továbbá

$$H(n) := \frac{g(n)}{f(n)}.$$

$H(n)$ az $(n,K)=1$ feltételt kielégítő m-ekre egyértelműen definiálva van, és $H(n)>0$. Legyen C pozitív egész, $(C,K)=1$, $C-1=\lambda\rho$, $(\rho,K)=1$ $(\lambda+1,K)=1$, ahol λ minden prímosztója osztója K-nak. Belátjuk, hogy

$$H(\lambda+1)=H(C). \tag{II.51}$$

A (II.49) formulát többször alkalmazva,

$$\sum_N \frac{1}{N}|g(C)f((\lambda+1)\rho N)-g(C)g((\lambda+1)\rho N+K)|<\infty,$$

$$\sum_N \frac{1}{N}|g((\lambda+1)\rho CN+KC)-f((\lambda+1)\rho CN+K\lambda\rho)|<\infty,$$

$$\sum_N \frac{1}{N}|f(\rho)f((\lambda+1)CN+K\lambda)-f(\rho)g((\lambda+1)CN+K(\lambda+1))|<\infty,$$

$$\sum_N \frac{1}{N}|f(\rho)g(\lambda+1)g(CN+K)-f(\rho)g(\lambda+1)f(CN)|<\infty$$

adódik. Innen, a háromszög-egyenlőtlenség többszöri alkalmazásával,

$$\sum_N \frac{1}{N}|g(C)f(\lambda+1)f(\rho)-f(\rho)g(\lambda+1)f(C)|\cdot|f(N)|<\infty.$$

Mivel $f \notin L$, $f(\rho)\neq 0$, (II.51) azonnal következik.

Legyen $\lambda=K^*$ olyan szám, amely K minden prímosztóját legalább az első hatványon tartalmazza, s nincs más prímosztója. Legyen $C=1+K^*\rho$, $(\rho,K)=1$. Ekkor $(\lambda+1,K)=1$ nyilván teljesül, s ezért (II.51) miatt

$$H(1-K^*\rho)=H(K^*+1). \tag{II.52}$$

Legyen ν olyan pozitív egész, amelyre $(\nu, K)=1$. Mivel $(1+K^*)^\nu=1+\nu K^*+\ldots=1+\rho K^*$, $(\rho, K)=1$, így

$H((1+K^*)^\nu)=H(1+K^*)$, s $H>0$ miatt, következik, hogy $H(1+K^*)=0$. Legyen $n\equiv 1 \pmod K$, tetszőleges. Mivel $n=1+K^*\rho$, $(\rho,K)=1$ alakban írható, ha K^*-ot ügyesen választjuk, ezért $H(n)=1$. Mivel $(m,K)=1$ esetén $m^{\varphi(K)}\equiv 1 \pmod K$, ezért $H(m)^{\varphi(K)}=1$, és $H>0$ miatt $H(m)=1$. Beláttuk tehát, hogy $H(n)=1$, hacsak $(n,K)=1$. Legyen $h(n)=|f(n)|=|g(n)|$. (II.49) miatt

$$\sum \frac{|h(n+K)-h(n)|}{n}<\infty,$$

$h\notin$ L, ezért a 3. tétel szerint $h(n)=n^\sigma$ $(0\leq\sigma<1)$.

Legyen $f_1(n)=n^{-\sigma}f(n)$, $g_1(n)=n^{-\sigma}g(n)$. Ekkor (II.49)-ből a

$$\sum \frac{|g_1(n+K)-f_1(n)|}{n}<\infty$$

formula egyszerűen következik. Ezért elegendő a tételt az $|f(n)|=|g(n)|=1$ esetre bebizonyítani.

Tegyük fel, hogy $|f(n)|=|g(n)|=1$, $(n,K)=1$.

A bizonyítás során lényegesen felhasználjuk, s később bebizonyítjuk a következő tétel.

5. Tétel. Legyen $U,V\in$ A*, legalább az $(n,K)=1$ feltételt kielégítő n egészekre definiálva. Tegyük fel, hogy

$$\frac{1}{x}\sum_{\substack{n\leq x\\(n,K)=1}} \|V(n+K)-U(n)\|\to 0 \qquad (x\to\infty) \qquad \text{(II.53)}$$

teljesül. Ekkor $\exp(2\pi i(V(n)-U(n)))=\chi_K{}^2(n)$, ha $(n,K)=1$, ahol $\chi_K{}^2$ mod K^2 multiplikatív karakter.

Folytassuk most a 4. tétel bizonyítását. Legyen $f(n)=\exp(2\pi i U(n))$, $g(n)=\exp(2\pi i V(n))$ az $(n,K)=1$ halmazon. Mivel $U,V\in A^*$, továbbá

$$\sum_{\substack{n\\(n,K)=1}} \frac{\|V(n+K)-U(n)\|}{n} \ll \sum_{\substack{n\\(n,K)=1}} \frac{1}{n}|g(n+K)-f(n)|<\infty,$$

ezért a (II.53) feltétel nyilván teljesül. Az 5. tétel miatt $g(n)=\chi_{K^2}(n)f(n)$, s ezért

$$\sum \frac{1}{n}|\chi_{K^2}(n+K)f(n+K)-f(n)|<\infty. \qquad \text{(II.54)}$$

Legyen

$$E(n):=\prod_{j=1}^{k} \bar{\chi}_{K^2}(n+jK), \qquad (n,K)=1. \qquad \text{(II.55)}$$

Észrevesszük, hogy $E(n) \bmod K$ periodikus. Legyen $E(n)=C(i)$, ha $n\equiv i \pmod K$. (II.54) miatt

$$\sum_{n\equiv i \pmod K} \frac{1}{n}|f(n+K^2)-C(i)f(n)|<\infty, \qquad (K,i)=1.$$

Legyen h olyan pozitív egész, hogy $C(i)^h=1$ minden i-re. $h=\varphi(K^2)$ például megfelelő állandó. Legyen $\xi=C(i)$. Mivel

$$\sum_{j=1}^{h} \xi^{h-j}[f(n+jK^2)-f(n+(j-1)K^2)]=f(n+hK^2)-f(n),$$

ezért

$$\sum_n \frac{1}{n}|f(n+hK^2)-f(n)|<\infty,$$

más szóval

$$\sum_n \frac{1}{n}|(E^B-I)f(n)|<\infty \qquad \text{(II.56)}$$

$B=hK^2$ választással. Legyen $h=\varphi(K^2)$, $B=B_1B_2$, ahol B_1 B-nek pontosan azokat a prímosztóit tartalmazza, amelyek B-hez relatív prímek. Legyen $n=mB_1$. Mivel $(E^{B}-I)f(mB_1)=f(B_1)(E^{B_2}-I)f(m)$, és $f(B_1)\neq 0$, azaz létezik olyan $B(=B_2)$, amellyel (II.56) teljesül, s minden prímosztója K-nak osztója. Ezért a 3. tétel feltételei teljesülnek, következésképpen $f(n)=\chi_B(n)n^{i\tau}$. Legyen $F(n):=\chi_B(n)$, $G(n)=\chi_{K^2}(n)\chi_B(n)$. Már láttuk, hogy $g(n)=\chi_{K^2}(n)f(n)=G(n)n^{i\tau}$.

Mivel $(n+K)^{i\tau}=n^{i\tau}+O(1/n)$, ezért (II.49) miatt

$$\sum_n \frac{|G(n+K)-F(n)|}{n}<\infty \tag{II.57}$$

teljesül. A F és G függvények periodikusak mod$[K^2,B]$, ezért (II.57) csak akkor teljesülhet, ha $G(n+K)=F(n)$ $\forall (n,K)=1$ esetben fennáll.

Beláttuk tehát, hogy (b) teljesül. Ezzel bebizonyítottuk a 4. tételt. ■

Ezen felül az is kijött, hogy

$$F(n)=\chi_B(n);\qquad G(n)=\chi_B(n)\chi_{K^2}(n) \tag{II.58}$$

alakú.

5.§. Ebben meghatározzuk (II.50) összes megoldását.

6. Tétel. Legyen $K\in\mathbb{N}$, $F,G\in\mathbf{M}^*$, s tegyük fel, hogy

$$G(n+K)=F(n)\qquad (\forall n\in\mathbb{N}) \tag{II.59}$$

teljesül, továbbá, hogy $F(n)=0$, ha $(n,K)>1$, és $F(n)\neq$ $\neq 0$, ha $(n,K)=1$. Ekkor a következő állítások érvényesek.

(a) $F(n)=G(n)=\chi_K(n)$ a (II.59) megoldása minden χ_K mod K vett multiplikatív karakterre.

(b) Nincs más megoldás, ha K páratlan, vagy ha $K\equiv 0 \pmod 4$.

(c) Ha $K=2R$, $(R,2)=1$, akkor a további megoldások

$$F(n)=\chi(n;8)\psi_R(n);$$

$$G(n)=\chi(n;4)F(n)$$

alakúak, ahol $\psi_R(n)$ mod R tetszőleges karakter; $\chi(n;4)$ a mod 4 vett nem-főkarakter; $\chi(n;8)$ pedig a következő formulákkal definiált mod 8 vett karakter:

$$\chi(n;8)=\left\{\begin{array}{l} 1, \text{ ha } n\equiv \pm 1 \pmod 8 \\ -1, \text{ ha } n\equiv \pm 3 \pmod 8 \end{array}\right\}, \text{ ha } R\equiv 1 \pmod 4,$$

$$\chi(n;8)=\left\{\begin{array}{l} 1, \text{ ha } n\equiv 1, 3 \pmod 8 \\ -1, \text{ ha } n\equiv 5, 7 \pmod 8 \end{array}\right\}, \text{ ha } R\equiv -1 \pmod 4.$$

Bizonyítás. Ha (II.59) teljesül, akkor $(F,G)=(f,g)$ választással (II.49) is. Megmutatjuk, hogy $F\notin$ L. Tegyük fel, hogy F, G megoldása (II.59)-nek. Ekkor $|F|$, $|G|$ is megoldás. Legyen

$$H(n):=\frac{|G(n)|}{|F(n)|}.$$

Ekkor $H(n)$ az $(n,K)=1$ halmazon egyértelműen van definiálva, $H(n)>0$. Ugyanúgy, mint azt a 4. tétel bizonyítása során bevezetett $H(n)$ függvényre beláttuk, most is belátható, hogy $H(n)=1$. Ez azt jelenti, hogy (II.59) teljesülése esetén $|F(N)|=|G(N)|$ $(=T(N))$, $(\forall N\in\mathbb{N})$, s teljesül (II.59) miatt a

$T(N+K)=T(N)$ $(\forall N\in\mathbb{N})$ egyenlet. Mivel $T\in \mathrm{M}^*$, és mod K periodikus, ezért mod K karakter, mivel $T\geq 0$, így csak a főkarakter lehet. Ekkor viszont $F\notin \mathrm{L}$. A mondottak miatt a (II.59) feltételnek eleget tevő (F,G) párra a 4. tétel (b) feltétele teljesül, ezért mint azt a 4. tétel bizonyítása során láttuk, (II.58) teljesül. Itt B olyan alkalmas egész szám, amely K prímosztóit tartalmazza, s nincs más prímosztója ezeken kívül. Mivel $B|K^\alpha$ alkalmas α egész esetén, ezért $B=K^\alpha$, $\alpha\geq 2$ feltehető. Így $F(N)=\chi_{K^\alpha}(N)$, $G(N)=\chi_{K^2}(N)\chi_{K^\alpha}(N)$, s fennáll a

$$G(N+K)=F(N)\qquad (N\geq 1)\tag{II.60}$$

összefüggés. Az F,G függvényeket negatív egészekre az $F(-N)=\chi_{K^\alpha}(-N)$, $G(-N)=\chi_{K^2}(-N)\chi_{K^\alpha}(-N)$ formulákkal definiáljuk. Ekkor $tK^\alpha>N$ esetén

$$F(-N)=\chi_{K^\alpha}(-N)=\chi_{K^\alpha}(tK^\alpha-N)=$$
$$=F(tK^\alpha-N)=G(tK^\alpha+K-N)=$$
$$=\chi_{K^2}(tK^\alpha-N+K)\chi_{K^\alpha}(-N+K)=G(-N+K)$$

teljesül. Azaz (II.60) minden N egészre fennáll. Ezért

$$\chi_{K^2}(N+K)F(N+K)=F(N)\tag{II.61}$$

minden N egészre. Továbbá F mod K^α karakter.

Legyen $N+K=1$. Ekkor (II.61)-ből

$$F(1-K)=1,\qquad F(K-1)=F(-1)\tag{II.62}$$

Legyen $N+K=-1$. Ekkor

$$\chi_{K^2}(-1)F(-1)=F(-K-1)=F(-1)F(K+1),$$
$$\chi_{K^2}(-1)=F(K+1).\tag{II.63}$$

Tekintsük először a $\chi_{K^2}(-1)=+1$ esetet. (II.63)-ból $F(K+1)=1$. (II.61)-be $N=1$ értéket téve, $\chi_{K^2}(1+K)=1$. Mivel $(1+K)^\nu\equiv 1+\nu K \pmod{K^2}$, ezért $\chi_{K^2}(1+\nu K)=1$ $(\nu=1, 2, \ldots)$. Ekkor viszont χ_{K^2} mod K is periodikus. Legyen ugyanis $A\equiv B \pmod{K}$, $(A, K)=1$. Legyen A^{-1} olyan egész, amelyre $AA^{-1}\equiv$ $\equiv 1 \pmod{K}$ teljesül. Ekkor $BA^{-1}\equiv 1 \pmod{K}$ is fennáll, $\chi_{K^2}(BA^{-1})=1$, s ezért $\chi_{K^2}(B)=\chi_{K^2}(A)$. Írjunk most rendre $N=1$, $K+1$, $2K+1$, ... értékeket (II.61)-be. Innen $1=F(1)=F(1+K)=F(1+2K)=\ldots$ adódik. Ezért F mod K karakter, következésképpen $F(N)=F(N+K)$, tehát $\chi_{K^2}(N+K)=1$, ha $(N, K)=1$. Ez azt jelenti, hogy χ_{K^2} főkarakter. Érvényes tehát: $F(N)=G(N)=\chi_K(N)$, χ_K valamely mod K karakter. Ezeket a megoldásokat az (a) eset tartalmazza.

Legyen most $\chi_{K^2}(-1)=-1$. Ha a (χ_{K^2},F) pár megoldása a (II.61) egyenletnek, akkor a $(\chi_{K^2}^2,F^2)$ is megoldása. Ez azonban már vizsgált eset, mivel $\chi_{K^2}^2(-1)=+1$. Ezért $\chi_{K^2}^2$ csak főkarakter lehet, azaz χ_{K^2} kvadratikus karakter, tehát valós értékű. (II.62) miatt $F(K+1)=-1$. (II.60)-ba $N=1$ értéket írva $\chi_{K^2}(1+K)=-1$ adódik. Mivel $(K+1)^2\equiv 2K+1 \pmod{K^2}$, ezért $\chi_{K^2}(2K+1)=1$. Továbbá $(2K+1)^\nu\equiv 2\nu K+1 \pmod{K^2}$, s ezért $\chi_{K^2}(2\nu K+1)=1$ $(\nu=1,2,\ldots)$. Következésképpen χ_{K^2} mod $2K$ is periodikus.

Legyen K páratlan. Mivel χ_{K^2} periodikus K^2 és $2K$ szerint, ezért a két periódus legnagyobb közös osztója, azaz K szerint is az. Ezért $\chi_{K^2}=\chi_K$ mod K karakter. (II.60) helyett tehát $\chi_K(N)F(N+K)=F(N)$ is érvényes. Ezt N helyett $N+K$-val is alkalmazva

$F(N+2K)\chi_K(N)\chi_K(N+K)=F(N)$, azaz $F(N)= = F(N+2K)$ adódik. F periodikus $2K$ szerint. Mint tudjuk, F mod K^α karakter, ezért F periodikus $(2K,K^\alpha)=K$ szerint. Ezért $F(N)=F(N+K)$. Ez csak akkor állhat fenn, ha $\chi_K(N)$ főkarakter.

Ezt a megoldást már vizsgáltuk. Beláttuk tehát, hogy páratlan K esetén nincs más megoldás, csak $F(n)=G(n)=\chi_K(n)$.

Legyen most K páros. Legyen $(n,K)=1$. Ekkor n páratlan. Mivel $(n+K)(1+K)=n+K(n+1)+K^2 \equiv \equiv n \pmod{2K}$, ezért $\chi_{K^2}(n+K)\chi_{K^2}(1+K)=\chi_{K^2}(n)$, és így $\chi_{K^2}(n+K)=-\chi_{K^2}(n)$, minden n-re. Ezért $\chi_{K^2}(n+2K)F(n+2K)=F(n+\mathrm{K})=\chi_{K^2}(n+K)F(n)$, azaz $F(n+2K)=-F(n)$, azaz $F(n+4K)=F(n)$. Következésképpen F mod $4K$ karakter. Továbbá $F\big((m+K)(n+K)\big) = \big(-\chi_{K^2}(m)\big)\big(-\chi_{K^2}(n)\big)F(mn) = =\chi(mn)\mathrm{F}(mn)$. A bal oldal $F\big(mn+(m+n)K+K^2\big)$. Ha $4|K$, akkor $K^2\equiv 0 \pmod{4K}$, s ez egyenlő az $F(mn+(m+n)K)$ számmal. Ha még $m+n\equiv 0 \pmod 4$ is teljesül, akkor helyette $F(mn)$ írható. Tehát $m+n\equiv 0 \pmod 4$ esetén $F(mn)=\chi_{K^2}(mn)F(mn)$. Legyen $m=1$, $n=-1$. Innen $\chi_{K^2}(-1)=1$ adódik, feltevésünkkel ellentétben. Nincs tehát a $\chi_{K^2}(-1)=-1$ feltételt kielégítő megoldás, ha $4|K$.

Legyen $K=2R$, $(R,2)=1$. Mivel F mod $4K$ karakter, χ_{K^2} mod $2K$ karakter, ezért

$$F(n)=\chi(n;8)\psi_R(n),$$

$$\chi_{K^2}(n)=\chi(n;4)\chi(n;R).$$

ψ_R mod R, $\chi(n;8)$ mod 8, $\chi(n;4)$ mod 4, $\chi(n;R)$ mod R multiplikatív karakterek. Ezeket a (II.60) egyenletbe helyettesítve

$$\chi(n+K;4)\chi(n+K;R)\chi(n+K,8)\psi_R(n+K)=$$
$$=\chi(n;8)\psi_R(n) \tag{II.64}$$

adódik. Mivel $\psi_R(n)=\psi_R(n+K)$, ezért (II.63)-ból következik, hogy $\chi(n;R)$ állandó az $(n,R)=1$ értékekre, ezért $\chi(n;R)=1$ $(\forall n\in\mathbb{N})$, $(n,R)=1$. Továbbá $\chi(n+K;4)=-\chi(n;4)$, s így

$$-\chi(n;4)\chi(n+2R;8)=\chi(n;8). \tag{II.65}$$

Az olvasóra bízzuk annak a belátását, hogy (II.64) éppen akkor teljesül, ha $\chi(n;8)$ teljesíti a tétel (c) állításában foglalt feltételeket. Ezzel a 6. tétel bizonyítását befejeztük.■

6. §. Ebben *bebizonyítjuk az 5. tételt.*

Legyen $H(n)=V(n)-U(n)$, $\varepsilon(n)=V(n+K)-U(n)$, $E(n)$ az $\varepsilon(n)$-hez legközelebb lévő egész szám, $\tilde{\varepsilon}(n)=\varepsilon(n)-E(n)$. Legyenek $m,p\in\mathbb{N}$ olyanok, hogy $(mp,K)=1$, $p>2$, s legyen

$$\delta_p(m):=H(p)+H(m)+H(m+K)+\ldots+H(m+(p-2)K). \tag{II.66}$$

Mivel

$$\varepsilon(n)+H(p)=V(pn+pK)-U(pn)=$$
$$=[V(pn+pK)-U(pn+(p-1)K)]+$$
$$+[U(pn+(p-1)K)-V(pn+(p-1)K)]+$$
$$+[V(pn+(p-1)K)-U(pn)]=$$
$$=\ldots=\varepsilon(pn+(p-1)K)+\ldots+\varepsilon(pn)-$$
$$-H(pn+(p-1)K)-\ldots-H(pn+K),$$

ezért

$$\varepsilon(n)-[\varepsilon(pn)+\ldots+\varepsilon(pn+(p-1)K)]=-\delta_p(pn+K).$$

Világos továbbá, hogy

$$\|\delta_p(pn+K)\|\leq\|\tilde{\varepsilon}(n)\|+\|\tilde{\varepsilon}(pn)\|+\ldots+\|\tilde{\varepsilon}(pn+(p-1)K)\|,$$

ahonnan (II.53) miatt

$$\frac{1}{x}\sum_{\substack{m\leq x\\ m\equiv K(\mathrm{mod}\ p)\\ (m,K)=1}}\|\delta_p(m)\|\to 0\qquad(x\to\infty)\tag{II.67}$$

adódik.

Legyenek most p, q, r olyanok, hogy $p>q$, $r=$ $=p-q+1$, $(pqr,K)=1$, m olyan egész, amelyre

$$m\equiv K\ (\mathrm{mod}\ p),\qquad m\equiv K\ (\mathrm{mod}\ q),\tag{II.68}$$

$$m+(q-2)K\equiv 0\ (\mathrm{mod}\ r),\tag{II.69}$$

$$(m,K)=1\tag{II.70}$$

teljesül. Ha p, q, r, m ilyen négyes, akkor

$$\begin{aligned}\delta_p(m)&=H(p)+[H(m)+\ldots+H(m+(q-2)K)]+\\&\quad+[H(m+(q-1)K)+\ldots+H(m+(p-2)K)]=\\&=H(p)+[\delta_q(m)-H(q)]+[\delta_r(m+(q-1)K)-H(r)]=\\&=[H(p)-\mathrm{H}(q)-H(r)]+\delta_q(m)+\delta_r(m+(q-1)K).\end{aligned}\tag{II.71}$$

Innen

$$\|H(p)-H(q)-H(r)\|\leq\|\delta_p(m)\|+\|\delta_q(m)\|+\|\delta_r(m+(q-1)K)\|$$

adódik. Ha van olyan m, amelyre a (II.67)–(II.69) feltételek teljesülnek, akkor azon m-ek sűrűsége, amelyre ezek a feltételek teljesülnek, pozitív. (II.66) miatt

$$\| H(p)-H(q)-H(r) \| = 0 \tag{II.72}$$

fennáll.

Legyen r adott, $q=\eta r+1$, $p=(1+\eta)r$, $m=pqv+K$, ahol η, v pozitív egészek. A (II.68) feltételek teljesülnek. (II.69) ekvivalens a

$$pqv+(q-1)K \equiv 0 \pmod r$$

feltétellel. Ez azonban $r|q-1$, $r|p$ miatt teljesül. Tegyük fel még, hogy

$$(pqr,K) = \big(r(\eta r+1)(1+\eta),K\big) = 1.$$

Ekkor (II.72) miatt

$$H\big((1+\eta)r\big) - H(\eta r+1) - H(r) \equiv 0 \pmod 1,$$

azaz

$$H(1+\eta) - H(1+r\eta) \equiv 0 \pmod 1 \tag{II.73}$$

a

$$\big(r(\eta r+1)(1+\eta),K\big) = 1 \tag{II.74}$$

feltétel mellett érvényes. Legyen $\eta=\lambda K$. Ekkor (II.74) teljesül, hacsak $(r,K)=1$. Ezért

$$H(1+\lambda K) - H(1+r\lambda K) \equiv 0 \pmod 1, \qquad \text{ha } (r,K)=1. \tag{II.75}$$

Most a következő kézenfekvő állítást fogjuk alkalmazni. Ha $(\lambda,K)=(\mu,K)$, akkor léteznek r, s K-hoz relatív prím egészek, amelyekre $r\lambda=s\mu$ fennáll.

Ezért, (II.75) segítségével,

$$H(1+\lambda K) - H(1+\mu K) \equiv 0 \pmod 1, \qquad \text{ha } (\lambda,K)=(\mu,K). \tag{II.76}$$

(II.76)-ból levezetjük, hogy $H(n)$ mod 1 periodikus K^2 periódussal. Legyen $A \equiv B \pmod{K^2}$, $(A,K)=1$. Legyen θ olyan egész, amelyre $A\theta \equiv 1 \pmod{K^2}$. Ha $A\theta = 1+uK$, $B\theta = 1+vK$, akkor $u-v \equiv 0 \pmod{K}$, ezért $(u,K)=(v,K)$, s így $H(B\theta)-H(A\theta) \equiv 0 \pmod{1}$, azaz $H(B)-H(A) \equiv 0 \pmod{1}$. Tehát $H(n)$ periodikus K^2 periódussal. Ezzel a tételünket beláttuk. ■

III. KOMPAKT TOPOLOGIKUS CSOPORTOKBA KÉPEZŐ SZABÁLYOS ADDITÍV FÜGGVÉNYEK

1.§. Az ebben a fejezetben tárgyalt tételek Daróczy Zoltán és a szerző közös eredményei [8], [9].

Legyen G Abel-csoport, metrikusan kompakt az összeadásra nézve. A $\varphi : \mathbb{N} \to G$ függvényt additívnak nevezzük, ha minden $m,n \in \mathbb{N}$, $(m,n) = 1$ esetben $\varphi(mn) = \varphi(m) + \varphi(n)$. Az additív függvények osztályát jelölje A_G. Ha az előbbi egyenlet korlátozás nélkül, tehát minden $m,n \in \mathbb{N}$ esetén teljesül, akkor φ-t teljesen additívnak nevezzük, s mindezen függvények osztályát A_G^*-gal jelöljük.

Ha G-t multiplikatív csoportnak tekintjük, azaz a műveletet G-ben szorzásnak nevezzük, akkor a $V(nm) = V(n) \cdot V(m)$ feltételt kielégítő $V : \mathbb{N} \to G$ függvényt multiplikatívnak, illetve teljesen multiplikatívnak nevezzük, aszerint, hogy a feltételi egyenlet teljesülését csak a relatív prím számpárokra, illetve minden $m,n \in \mathbb{N}$ számra követeljük meg.

Metrikusan kompakt Abel-csoportra a legegyszerűbb példa az egydimenziós tórusz, jelölje $\mathbb{T}$, másszóval az egységkörvonalon lévő komplex számok multiplikatív csoportja. Az $A_{\mathbb{T}}$ osztály elemei a komplex értékű multiplikatív függvények közül azok, amelyek értékei az egységkörvonalra esnek.

Legyen $\{x_\nu\}$ végtelen sorozat G-ben. Azt mondjuk, hogy ez D tulajdonságú, ha minden konvergens

$\{x_{\nu_n}\}_{n=1}^{\infty}$ $(\nu_1 < \nu_2 < \ldots)$ részsorozatra az $\{x_{\nu_n+1}\}_{n=1}^{\infty}$ részsorozat is konvergens. Azt mondjuk továbbá, hogy $\{x_\nu\}$ Δ tulajdonságú, ha $x_{\nu+1} - x_\nu \to 0$ $(\nu \to \infty)$. Világos, hogy minden Δ tulajdonságú sorozat egyúttal D tulajdonságú is, fordítva azonban ez nem igaz. Jelölje $A_G(D)$, illetve $A_G(\Delta)$ azoknak a $\varphi \in A_G$ függvényeknek az osztályát, amelyekre az $\{x_n = \varphi(n)\}$ sorozat D, illetve Δ tulajdonságú. Az $A_G^*(D)$, $A_G^*(\Delta)$ függvényosztályokat a

$$A_G^*(D) = A^G(D) \cap A_G^*,$$

$$A_G^*(\Delta) = A^G(\Delta) \cap A_G^*$$

formulákkal definiáljuk.

Wirsingnek a II. fejezetben idézett tételét úgy fogalmazhatjuk, hogy $\varphi \in A_{\mathbb{T}}(\Delta)$ akkor és csak akkor teljesül, ha

$$\varphi(n) \equiv \tau \log n \pmod{2\pi} \qquad \text{(III.1)}$$

valamely $\tau \in \mathbb{R}$ állandóval. Wirsing tételét felhasználva később teljesen meghatározzuk az $A_G(\Delta)$ osztályt, tetszőleges metrikusan kompakt G Abel-csoport esetén.

2.§. Kiindulásul belátjuk a következő állítást.

1. Tétel. Ha G metrikusan kompakt Abel-csoport, akkor

$$A_G^*(D) = A_G^*(\Delta). \qquad \text{(III.2)}$$

Bizonyítás. Az $A_G^*(\Delta) \subseteq A_G^*(D)$ állítás nyilvánvaló. Legyen $\varphi \in A_G^*(D)$. Jelölje T az $\{a_n\} := \{\varphi(n)\}$ sorozat torlódási pontjainak a halmazát. Legyen $g \in T$, $N_1 < N_2 < \ldots$ és $n_1 < n_2 < \ldots$ olyan indexsorozat, amelyekre $\varphi(n_k) \to g$ $(N \to \infty)$. Ekkor léteznek $g_1, g_2 \in \mathrm{G}$ elemek úgy, hogy $\varphi(n_k+1) \to g_1$, $\varphi(N_k+1) \to g_2$. Tekintsük most az $\{N_k\}$, $\{n_k\}$ sorozat $\{n_k^*\}$ egyesítését, az elemeket nagyság szerint rendezve. Ekkor $\varphi(n_k^*) \to g$, továbbá $\{\varphi(n_k^*+1)\}$ határértéke létezik. Ezért $g_1 = g_2$. Beláttuk ezzel, hogy az

$$F(g) := g_1 = \lim \varphi(n_k+1)$$

összefüggéssel definiált F leképezés függvény, mivel g_1 csak g-től függ.

Vegyük észre, hogy $F(\mathrm{T}) = \mathrm{T}$. Ha $g \in \mathrm{T}$, akkor $\lim\limits_k \varphi(n_k) = g$ teljesül alkalmas $\{n_k\}$ részsorozatra. Mivel G metrikusan kompakt, ezért a $\{\varphi(n_k - 1)\}$ sorozatból kiválasztható konvergens részsorozat, azaz $\lim\limits_l \varphi(n_{k_l} - 1) = h$, alkalmas n_{k_l}-re. Ekkor $h \in \mathrm{T}$, $F(h) = g$.

Legyen $\mathrm{R} = \{\varphi(n) | n \in \mathbb{N}\}$. Kimutatjuk, hogy

$$\mathrm{R} + \mathrm{T} \subseteq \mathrm{T}. \tag{III.3}$$

Legyen $g \in \mathrm{T}$, $N \in \mathbb{N}$. Ekkor $\lim \varphi(n_k) = g$ alkalmas $n_1 < n_2 < \dots$ indexsorozatra. Mivel $\varphi(Nn_k) = \varphi(N) + \varphi(n_k)$, ezért $\varphi(Nn_k) \to \varphi(N) + g$, $\varphi(N) + g \in \mathrm{T}$, (III.3) tehát igaz.

1. Lemma. T zárt részcsoport G-ben.

T zártsága nyilvánvaló. Legyen $g_1, g_2 \in \mathrm{T}$, $\lim \varphi(n_k) = g_1$, $\lim \varphi(N_k) = g_2$. Ekkor, $\varphi \in \mathrm{A}_\mathrm{G}^*$ miatt $\varphi(n_k N_k) \to g_1 + g_2$, azaz $g_1 + g_2 \in \mathrm{T}$. T biztosan félcsoport. A zártság miatt T kompakt félcsoport, s mint ismeretes, ekkor T csoport (lásd [7], (9.16)).□

2. Lemma. Ha $g_n \in \mathrm{T}$ tetszőleges sorozat, akkor alkalmas $\{N_j\}$ $(N_j \in \mathbb{N})$ monoton növekvő sorozatra

$$g_n - \varphi(N_n) \to 0, \qquad F(g_n) - \varphi(N_n + 1) \to 0 \qquad (n \to \infty). \quad \text{(III.4)}$$

Továbbá F folytonos T-n.

Az első állítás nyilvánvaló. Legyen $g_n \to g$ $(g_n, g \in \mathrm{T})$. Az $N_1 < N_2 < \ldots$ indexsorozatot válasszuk úgy, hogy (III.4) teljesüljön. Mivel $g_n \to g$, ezért $\varphi(N_n) \to g$, s így $\varphi(N_n + 1) \to F(g)$, továbbá $F(g_n) \to F(g)$. □

Az 1. Lemma és (III.3) miatt $0 \in \mathrm{T}$.

3. Lemma. $F(0) = 0$, $F(-\varphi(k)) = -\varphi(k)$ $(K = 1, 2, \ldots)$.

Legyen $g \in \mathrm{T}$, N_k olyan, amelyre $\varphi(N_k) \to g$. Az $(x+1)^2 = x(x+2) + 1$ azonosságból kiindulva, ezt $x = N_k$ választással alkalmazva, figyelembe véve továbbá, hogy a $\{\varphi((N_k+1)^2)\}$, $\{\varphi(N_k(N_k+2))\}$, $\{\varphi(N_k(N_k+2)+1)\}$ sorozatok határértékei léteznek,

$$F(g) + F(g) = F(g + F^{(2)}(g)) \qquad \text{(III.5)}$$

érvényes. Itt $F^{(1)}(g) := F(g)$, $F^{(k+1)}(g) := F(F^{(k)}(g))$. $F(\mathrm{T}) = \mathrm{T}$ miatt $F^{(2)}(\mathrm{T}) = \mathrm{T}$. Ezért létezik $\tilde{g} \in \mathrm{T}$, amelyre $F^{(2)}(\tilde{g}) = 0$. (III.5)-öt $\tilde{g}$-ra alkalmazva $F(\tilde{g}) = 0$ adódik. Mivel $0 = F^{(2)}(\tilde{g}) = F(F(\tilde{g})) = F(0)$, ezért $F(0) = 0$.

Mivel $\varphi(k) \in \mathrm{T}$, T csoport, ezért $-\varphi(k) \in \mathrm{T}$. Legyen $\varphi(N_j) \to -\varphi(k)$. Ekkor $\varphi(kN_j) \to 0$, $\varphi(kN_j) \to 0$,

$\varphi(kN_j+k)\to F^{(k)}(0)$, $F^{(k)}(0)=0$, ezért $\varphi(N_j+1)= =\varphi(kN_j+k)-\varphi(k)\to -\varphi(k)$, s így $F(-\varphi(k))= -\varphi(k)$. □

4. Lemma $F(g)=g$ $(\forall g\in \mathrm{T})$.

Mivel T csoport, és R mindenütt sűrű T-ben, ezért $-\mathrm{R}$ mindenütt sűrű T-ben Az $F(g)-g$ függvény folytonos T-n, továbbá zérussal egyenlő a $-\mathrm{R}$ halmazon, ezért $F(g)=g$ $(\forall g\in \mathrm{T})$ teljesül. □

Most folytatjuk a tétel bizonyítását. Tegyük fel, hogy $\Delta\varphi(n)\not\to 0$. Ekkor alkalmas $n_1<n_2<\dots$ részsorozatra $\Delta\varphi(n_j)\to h(\neq 0)$. Az $\{n_j\}$ sorozatot alkalmasan kiritkítva konvergens $\{\varphi(n_{j_l})\}$ sorozatot kapunk. Legyen $\varphi(n_{j_l})\to g$ $(l\to\infty)$. Ekkor $\varphi(n_{j_l}+1)\to F(g)=g$. Másrészt $\varphi(n_{j_l}+1)\to g+h$, ami ellentmondás. Tehát $\Delta\varphi(n)\to 0$ $(n\to\infty)$, $\varphi\in \mathrm{A}_{\mathrm{G}}^{*}(\Delta)$. Tételünket bebizonyítottuk. ■

3.§. Legyen G Abel-csoport, $\varphi:\mathbb{N}\to \mathrm{G}$ teljesen additív függvény, azaz

$$\varphi(mn)=\varphi(m)+\varphi(n) \qquad (\forall m,n\in\mathbb{N}) \tag{III.6}$$

teljesül.

Világos, hogy a

$$\varphi\left(\frac{m}{n}\right):=\varphi(m)-\varphi(n) \tag{III.7}$$

formulával φ értelmezési tartományát $\mathbb{Q}_x$-re kiterjeszthetjük.

Multiplikatív írásmódot használva, ha $V:\mathbb{N}\to G$ teljesen multiplikatív, azaz

$$V(mn)=V(m)V(n) \qquad (\forall m,n\in \mathrm{N}), \tag{III.8}$$

akkor a

$$V\left(\frac{m}{n}\right):=V(m)V^{-1}(n) \tag{III.9}$$

formulával V-t $\mathbb{Q}_x$-re ugyancsak kiterjeszthetjük. Továbbá a

$$\varphi(rs)=\varphi(r)+\varphi(s),\ V(rs)=V(r)V(s) \qquad (r,s\in\mathbb{Q}_x) \tag{III.10}$$

egyenletek teljesülnek. Így tehát φ, illetve V $\mathbb{Q}_x\to G$ homomorfizmus.

Legyen G topologikus Abel-csoport, $\varphi:\mathbb{Q}_x\to G$ homomorfizmus. Azt mondjuk, hogy φ folytonos az $1(\in\mathbb{Q}_x)$ pontban, ha $r_v\in\mathbb{Q}_x$, $r_v\to 1$ $(v\to\infty)$ esetén

$$\varphi(r_v)\to 0 \tag{III.11}$$

teljesül.

5. Lemma. Legyen G additív, zárt Abel-féle csoport, $\varphi:\mathbb{Q}_x\to G$ olyan homomorfizmus, amely az 1 pontban folytonos. Ekkor φ értelmezési tartománya a

$$\varphi(\alpha):=\lim_{\substack{r_v\to\alpha\\ r_v\in Q_x}}\varphi(r_v) \qquad (\alpha\in\mathbb{R}_x) \tag{III.12}$$

formulával kiterjeszthető egyértelműen $\mathbb{R}_x$-re. Az így kapott $\varphi:\mathbb{R}_x\to G$ leképezés folytonos homomorfizmus, s így

$$\varphi(\alpha\beta)=\varphi(\alpha)+\varphi(\beta) \qquad (\forall\alpha,\beta\in\mathbb{R}_x) \tag{III.13}$$

teljesül.

A lemma állításai elég kézenfekvőek. Legyen $\alpha \in \mathbb{R}_x$, $r_\nu \to \alpha$ $(r_\nu \in \mathbb{Q}_x)$ tetszőleges sorozat. Mivel $r_\nu/r_\mu \to 1$ $(\nu,\mu \to \infty)$, ezért $\varphi(r_\nu/r_\mu) = \varphi(r_\nu) - \varphi(r_\mu) \to 0$ $(\nu,\mu \to \infty)$, $\{\varphi(r_\nu)\}$ tehát Cauchy-sorozat, s így konvergens. Ezért a határérték α-val egyértelműen meg van határozva. A lemma további állításai innen közvetlenül adódnak. □

Wirsingnek a II. fejezetben idézett tételét multiplikatív alakban a következő lemmában fogalmazzuk meg.

6. Lemma. Legyen $\mathrm{T} = \{z \in \mathbb{C} \,\|\, |z| = 1\}$ az egységkör, $V:\mathbb{N} \to \mathrm{T}$ teljesen multiplikatív függvény, amelyre

$$\delta V(n) := V(n+1)V^{-1}(n) \to 1(\in \mathrm{T}) \qquad (n \to \infty) \qquad \text{(III.14)}$$

Ekkor $V(n) = n^{i\tau}$ $(\tau \in \mathbb{R}.)$

Ez a lemma a következő tétel bizonyításához alapvető jelentőségű.

2. Tétel. Legyen G additív, metrikusan kompakt Abel-csoport, $\varphi \in A^*_G(\Delta)$. Ekkor a φ (III.7)-tel definiált $\mathbb{Q}_x \to G$ kiterjesztése folytonos az 1 pontban, következésképpen a (III.11) által definiált $\varphi:\mathbb{R}_x \to G$ kiterjesztés folytonos homomorfizmus.

Fordítva, ha $\varphi:\mathbb{R}_x \to G$ folytonos homomorfizmus, akkor ρ $\mathbb{N}$-re való leszűkítésére $\rho \in A^*_G(\Delta)$ teljesül.

Bizonyítás. A második állítás teljesen világos, csak az elsőt kell bizonyítanunk. Legyen $\varphi \in A^*_G(\Delta)$.

Legyen továbbá χ tetszőleges G→T folytonos karakter,

$$V(n):=\chi(\varphi(n)).$$

Ekkor $\delta V(n)=V(n+1)V^{-1}(n)=\chi(\Delta\varphi(n))\to\chi(0)=1$ $(n\to\infty)$. Mivel V teljesen multiplikatív, ezért a 6. lemma miatt $V(n)=\exp(i\tau\log n)$ $(\tau\in\mathbb{R})$.

Legyen $\{N_j/M_j\}$ $(N_j, M_j\in\mathbb{N};\ N_j/M_j\in\mathbb{Q}_x)$ 1-hez konvergáló sorozat, $A_j:=\varphi(N_j)-\varphi(M_j)$. Mivel G metrikusan, ezért szekvenciálisan is kompakt, választható tehát konvergens $\{A_{j_l}\}$ részsorozat. Legyen $A_{j_l}\to B(\in\mathrm{G})$ $(l\to\infty)$. Ekkor $\chi(A_{j_l})\to\chi(B)$. A 6. lemma miatt

$$\chi(A_{j_l})=\exp\left(i\tau\log\frac{N_{j_l}}{M_{j_l}}\right)\to 1.$$

Tehát $\chi(B)=1$ minden folytonos χ karakterre, ezért $B=0(\in\mathrm{G})$, és így $\varphi:\mathbb{Q}_x\to\mathrm{G}$ folytonos az 1 pontban.

Az 5. lemmából tételünk állítása azonnal következik. ■

1. Megjegyzés. Ismeretes, hogy minden kompakt módon generált lokálisan kompakt G Abel-csoport topologikusan izomorf az $\mathbb{R}^a\times\mathbb{Z}^b\times\mathrm{F}$ csoporttal, ahol a, b nemnegatív egészek, F kompakt ([7], 9.8. tétel, 90. lap). Tegyük fel még, hogy G metrizálható. Előző tételünk ebben az esetben is igaz marad. Azt ugyanis az előbb említett $\mathrm{G}=\mathbb{R}^a\times\mathbb{Z}^b\times\mathrm{F}$ felbontási tétel miatt elég belátni a $\mathrm{G}=\mathbb{R}$, $\mathbb{Z}$, F esetekre. A $\mathrm{G}=\mathrm{F}$ esetre ezt most mutattuk meg, a $\mathrm{G}=\mathbb{R}$ eset Erdős klasszikus tétele, míg $\mathrm{G}=\mathbb{Z}$ esetén a $\Delta\varphi(n)\to 0$ csak $\varphi(n)=0$ $(\forall n\in\mathbb{N})$ esetben teljesülhet.

2. Megjegyzés. A G Abel-csoportot szolenoidnak nevezzük, ha létezik folytonos $\tau:\mathbb{R}\to G$ homomorfizmus G-be, úgy hogy a $\tau(\mathbb{R})$ képhalmaz G-ben mindenütt sűrű. A $v\to e^v$ leképezés $\mathbb{R}\to\mathbb{R}_x$ topologikus izomorfizmus, ezért a szolenoid csoportok definíciójában $\mathbb{R}$ helyett $\mathbb{R}_x$-et mondhatunk. Ismeretes, hogy egy kompakt Abel-csoport akkor és csak akkor szolenoid, ha összefüggő, és számossága a kontinuumnál nem nagyobb (lásd [7] 25.18. tétel).

Tegyük fel, hogy G-re a 2. tételben vagy a 2. megjegyzésben tett feltételek teljesülnek. Legyen $\varphi:\mathbb{R}_x\to G$ folytonos homomorfizmus, $H:=\varphi(\mathbb{R}_x)$ a képhalmaz. Ekkor a $\varphi:\mathbb{R}_x\to H$ vagy topologikus izomorfizmus, vagy $\overline{H}$ ($\overline{H}$ a H lezártját jelöli) kompakt részcsoport G-ben (lásd [7], 9.1. tétel). Így eléggé teljes jellemzését adhatjuk azoknak a halmazoknak, amelyek folytonos $\varphi:\mathbb{R}_x\to G$ homomorfizmussal $\varphi(\mathbb{R}_x)$ képhalmazként előfordulhatnak.

Valamely $\varphi\in A_G^*(\Delta)$ függvényre legyen $K_\varphi=\varphi(\mathbb{R}_x)$ lezártja. Az előbb mondottak szerint érvényes a következő tétel.

3. Tétel. (a) Legyen G metrikusan kompakt Abel-csoport, S részcsoport G-ben. Ekkor a $K_\varphi=S$ feltételt kielégítő $\varphi\in A_G^*(\Delta)$ függvény létezésének szükséges és elégséges feltétele, hogy S kompakt, összefüggő és számossága legfeljebb kontinuum legyen.

(b) Legyen G metrizálható, kompakt módon generált, lokálisan kompakt Abel-csoport, S részcsoport G-ben. Ekkor a $K_\varphi = S$ feltételt teljesítő $\varphi \in A_G^*(\Delta)$ függvény akkor és csak akkor létezik, ha

(α) S topologikusan izomorf $\mathbb{R}$-rel, vagy

(β) S kompakt, összefüggő, számossága legfeljebb kontinuum.

3. Megjegyzés. Legyen G topologikus Abel-csoport, $\varphi, \psi \in A_G^*$. Tegyük fel, hogy

$$\psi(n+1) - \varphi(n) \to 0 \qquad (n \to \infty). \tag{III.15}$$

Ekkor

$$\psi(n) = \varphi(n) \qquad (\forall n \in \mathbb{N}).$$

Ez majdnem nyilvánvaló. Legyen $H(n) := \psi(n) - \varphi(n)$. A $\psi(n + 1) - \varphi(n) = - H(2) + \psi(2n + 2) - \varphi(2n) = - H(2) + \psi(2n + 2) - \varphi(2n + 1) - H(2n + 1) + \psi(2n+1) - \varphi(2n)$ formából kiindulva, (III.15) segítségével

$$H(2n+1) + H(2) \to 0 \qquad (n \to \infty) \tag{III.16}$$

adódik. Legyen m páratlan. (III.16) bal oldalába $2n+1$ helyett $(2n+1)m$-et írva $H\big((2n+1)m\big) \to -H(2)$, s ez (III.16)-tal együtt a $H(m) = 0$ egyenlőséghez vezet. Tehát $H(m) = 0$ minden páratlan m-re. Ekkor (III.16) miatt $H(2) = 0$. $H \in A_G^*$ miatt $H(n) = 0$ $(\forall n \in \mathbb{N})$, azaz állításunk igaz.

4.§. Nézzük most meg, hogyan általánosíthatjuk az előző két § eredményeit az $A_G(D)$ függvényosztályra.

Legyen G metrikus kompakt Abel-csoport. Jelölje $\mathbb{N}_1$ a páratlan, $\mathbb{N}_0$ a páros természetes számok halmazát. Legyen $\varphi \in A_G$. Legyen $S(\mathbb{N}_j)$ a $\{\varphi(n)\}$ $(n \in \mathbb{N}_j; j=0,1)$ sorozat torlódási pontjainak, S $(\mathbb{N})$ a $\{\varphi(n)\}$ $(n \in \mathbb{N})$ sorozat torlódási pontjainak a halmaza.

4. Tétel. Legyen $\varphi \in A_G(D)$. Ekkor $S(\mathbb{N}_1)$ kompakt részcsoport G-ben, $S(\mathbb{N}_0)=\gamma+S(\mathbb{N}_1)$ alkalmas $\gamma \in G$-vel. Létezik $\psi:\mathbb{R}_x \to G$ folytonos homomorfizmus úgy, hogy $\varphi(n)=\psi(n)$ $(\forall n \in \mathbb{N}_1)$. Az $u(n):=$ $:=\varphi(n)-\psi(n)$ függvény zérus az $n \in \mathbb{N}_1$ halmazon, $u(2)$ $=u(2^\alpha)$ $(\alpha=1,2,\ldots)$. Ha $u(2) \in S(\mathbb{N}_1)$, akkor $(2u(2):$ $=)u(2)+u(2)=0$.

Fordítva, legyen $\psi:\mathbb{R}_x \to G$ folytonos homomorfizmus. Legyen $\beta \in G$. A $\beta \in \psi(G)$ esetben teljesüljön még $2\beta=0$ is. Legyen $u \in A_G$ az

$$u(2^\alpha)=\beta \qquad (\alpha=1,2,\ldots),$$

$$u(n)=0 \qquad (\forall n \in \mathbb{N}_1)$$

egyenletekkel definiálva. Ekkor a $\varphi=u+\psi$ függvény $A_G(\Delta)$-hoz tartozik.

A tétel bizonyításához néhány segédtételre lesz szükségünk.

7. Lemma. Ha $\varphi \in A_G$ és

$$\varphi(m+2)-\varphi(m) \to 0 \qquad (m \to \infty, m \in \mathbb{N}_1), \qquad \text{(III.17)}$$

akkor $\varphi(mn)=\varphi(m)+\varphi(n)$ minden $m,n \in \mathbb{N}_1$ számpárra fennáll.

A lemma bizonyításához azt kell belátnunk, hogy

$$L_\alpha := \varphi(p^\alpha)-\varphi(p^{\alpha-1})-\varphi(p)=0$$

minden $p \in \mathbb{N}_1$ prímszámra teljesül. (III.17) miatt

$$E_m := \varphi(p^\alpha m) - \varphi(p^\alpha m - 2p) \to 0$$

$$F_m := \varphi(p^{\alpha-1} m) - \varphi(p^{\alpha-1} m - 2) \to 0 \qquad (m \to \infty, m \in \mathbb{N}_1).$$

Mivel $(m(m+2), 2p) = 1$ esetén $E_m = L_\alpha + F_m$, ezért $L_\alpha = 0$. □

Wirsing tétele igaz a következő változatban is.

8. Lemma. Legyen $G = \mathbb{T}$, $\mathbb{T}$ az egydimenziós tórusz, s a 7. lemma feltételei teljesüljenek. Ekkor $\varphi(n) \equiv \tau \log n \pmod{2\pi}$ ($\forall n \in \mathbb{N}_1$, és $\tau \in \mathbb{R}$).

Ebből könnyen levezethető a következő állítás.

9. Lemma. Tegyük fel, hogy a 7. lemma feltételei fennállnak. Ekkor létezik olyan $\psi: \mathbb{R}_x \to G$ folytonos homomorfizmus, amelyre $\varphi(n) = \psi(n)$ ($\forall n \in \mathbb{N}_1$).

A 9. lemmát ugyanúgy bizonyíthatjuk, mint az 5. lemmát. A bizonyítást elhagyjuk.

Ezen előkészületek után rátérünk *tételünk bizonyítására.* Tegyük fel, hogy $\varphi \in A_G(\Delta)$.

Jelölje S a $\{\varphi(n)\}$ ($n \in \mathbb{N}$) sorozat torlódási pontjainak halmazát, azaz $g \in S$ akkor teljesül, ha létezik $n_1 < n_2 < \ldots$ ($n_\nu \in \mathbb{N}$) sorozat, amelyre $\varphi(n_\nu) \to g$. Legyen $\varphi(n_\nu + 1) \to g'$. Mint azt az előző §-ban láttuk, g'-t a g meghatározza, értelmezhető tehát S-en az $F: g \to g'$ függvény. Továbbá $F(S) = S$ is igaz.

Jelölje $p(n)$, illetve $P(n)$ az $n \in \mathbb{N}$ egész legkisebb, illetve legnagyobb prímosztóját.

Legyen k tetszőleges egész szám, és legyen

$$\underline{R} = \{R_1 < R_2 < \ldots\} \tag{III.18}$$

a természetes számok egy részsorozata. Azt mondjuk, hogy $\underline{R}$ a P_k halmazhoz tartozik, ha minden $d \in \mathbb{N}$ esetén d osztója az $R_\nu - k$ egészeknek, hacsak ν (d-től függően) elég nagy, azaz, ha $\nu > \nu_0(\underline{R}, d)$. Legyen $\tilde{\mathrm{P}}_k \subseteq \mathrm{P}_k$ azoknak az $\underline{R} \in \mathrm{P}_k$ sorozatoknak a halmaza, amelyekre $\lim\limits_{n \to \infty} \varphi(R_n)$ is létezik.

Tetszőleges (III.18) alakú sorozatra legyen

$$a(\underline{R}) := \lim_{\nu \to \infty} \varphi(R_\nu),$$

feltéve, hogy a jobb oldali határérték létezik.

Továbbá, tetszőleges (III.18) alakú $\underline{R}$ sorozatra és k egészre jelölje $\underline{R} \dotplus k$ az $\{R_\nu + k\}$ sorozat pozitív elemeinek a sorozatát, növekvő sorrendben rendezve azokat. Nyilvánvaló, hogy $\underline{R} \dotplus k \in \mathrm{P}_k$ akkor és csak akkor teljesül, ha $\underline{R} \in \mathrm{P}_0$. Továbbá, ha $l < k$, $\underline{R} \in \tilde{\mathrm{P}}_l$, akkor $\underline{R} \dotplus (k-l) \in \tilde{\mathrm{P}}_k$. Ha $l > k$, akkor a $\underline{R} \in \tilde{\mathrm{P}}_l$ feltételből csak $\underline{R} \dotplus (k-l) \in \mathrm{P}_k$ következik. Ebben az esetben csak annyit tudunk állítani, hogy az $\underline{R} \dotplus (k-l)$ sorozatból kiválasztható olyan részsorozat, amely $\tilde{\mathrm{P}}_k$-hoz tartozik.

Legyen

$$\mathrm{K}_k := \{a(\underline{R}) \mid \underline{R} \in \tilde{\mathrm{P}}_k\}. \tag{III.19}$$

Nyilvánvaló, hogy

$$F[\mathrm{K}_k] = \mathrm{K}_{k+1} \qquad (\forall k \in \mathbb{Z}), \tag{III.20}$$

továbbá, hogy

$$\bigcup_{k=-\infty}^{\infty} \mathrm{K}_k \supseteq \mathrm{S}. \qquad \text{(III.21)}$$

Legyen $g_1 \in \mathrm{K}_k$, $g_2 \in \mathrm{K}_l$ és $k \in \{-1,1\}$. Ekkor létezik $\underline{R} \in \mathrm{P}_k$, $\underline{S} \in \mathrm{P}_l$, úgy hogy $a(\underline{R}) = g_1$, $a(\underline{S}) = g_2$. Mivel $k \in \{-1,+1\}$, ezért $p(R_\nu) \to \infty$ $(\nu \to \infty)$. A $\{Q_\nu\} = \{R_{j_\nu} \cdot S_\nu\}$ sorozatot a következő módon definiáljuk. Legyen $j_0 = 0$, $j_\nu > j_{\nu-1}$, s teljesüljön a $p(R_{j_\nu}) > P(S_\nu)$ egyenlőtlenség. Világos, hogy $(R_{j_\nu}, S_\nu) = 1$, s így $\varphi(Q_\nu) = \varphi(R_{j_\nu}) + \varphi(S_\nu) \to g_1 + g_2$. Továbbá $Q_\nu \equiv kl \pmod d$ minden $d \in \mathbb{N}$ esetén, minden $\nu > \nu_0(d)$ egészre, ezért $\{Q_\nu\} \in \tilde{\mathrm{P}}_{kl}$, azaz $g_1 + g_2 \in \mathrm{K}_{kl}$. Érvényes tehát az alábbi lemma.

10. Lemma. Minden l egészre

$$\mathrm{K}_1 + \mathrm{K}_l \subseteq \mathrm{K}_l. \qquad \text{(III.22)}$$

$$\mathrm{K}_{-1} + \mathrm{K}_l \subseteq \mathrm{K}_{-l}. \qquad \text{(III.23)}$$

(III.22) miatt $\mathrm{K}_1 + \mathrm{K}_1 \subseteq \mathrm{K}_1$, azaz K_1 félcsoport G-ben. Nyilvánvaló, hogy K_1 zárt. Mivel K_1 zárt, ezért kompakt is. K_1 tehát kompakt félcsoport G-ben, s ezért az előző §-ban idézett tétel miatt K_1 csoport.

11. Lemma. Legyen $k \in \mathbb{N}$. Ekkor

$$\mathrm{K}_k = \mathrm{K}_1 + \varphi(k), \qquad \mathrm{K}_{-k} = \mathrm{K}_{-1} + \varphi(k). \qquad \text{(III.24)}$$

A (III.24) alatti első relációt bizonyítjuk csak be, a második bizonyítása hasonlóan történhet.

Legyen $\tau \in \mathrm{K}_k$, $\underline{R} \in \tilde{\mathrm{P}}_k$, $a(\underline{R}) = \tau$. Legyen $\{S_\nu\} := \{R_{j_\nu} - k\}$ olyan részsorozata az $\{R_\nu - k\}$ sorozatnak, amelyre $\{S_\nu\} \in \tilde{\mathrm{P}}_0$. Ekkor R_{j_ν} és S_ν a

$$R_{j_\nu} = k[A_\nu + 1], \qquad S_\nu = kA_\nu$$

alakban írható. Mivel $\{A_\nu\} \in \mathrm{P}_0$, ezért $(A_\nu+1,k)=1$ minden elég nagy ν-re, így $\varphi(A_\nu+1)=\varphi(R_{j_\nu})-\varphi(k)$, ahonnan $\varphi(A_\nu+1)\to\tau-\varphi(k)\in \mathrm{K}_1$ következik. Beláttuk ezzel, hogy $\mathrm{K}_k-\varphi(k)\subseteq \mathrm{K}_1$, $\mathrm{K}_k\subseteq \mathrm{K}_1+\varphi(k)$.

Legyen most $\rho\in\mathrm{K}_1$, $\underline{R}\in\tilde{\mathrm{P}}_1$, $a(\underline{R})=\rho$. Az $\{S_\nu\}:=\{kR_\nu\}$ sorozat $\tilde{\mathrm{P}}_k$-hoz tartozik, $(k,R_\nu)=1$, ha ν elég nagy, ezért $\lim\varphi(S_\nu)=\varphi(k)+\lim\varphi(R_\nu)=\varphi(k)+\rho\in\mathrm{K}_k$.

Tehát $\mathrm{K}_1+\varphi(k)\subseteq\mathrm{K}_k$ is fennáll. Érvényes tehát a (III.24) alatti első egyenlőség.□

Legyen $F^{(1)}=F$, $F^k=F\circ F^{k-1}$, az F k-adik iteráltja.

12. Lemma. Ha $g\in\mathrm{K}_{-2}$, akkor

$$F(g)+F^2(g)=F^2\big(g+F^3(g)\big). \tag{III.25}$$

Induljunk ki az $n(n+3)+2=(n+1)(n+2)$ azonosságból. Ha $(n,3)=1$, akkor $(n,n+3)=1$, továbbá $(n+1,n+2)=1$ minden $n\in\mathbb{N}$ esetén fennáll. Legyen $\{n_\nu\}\in\tilde{\mathrm{P}}_{-2}$ úgy választva, hogy $a(\{n_\nu\})=g\in\mathrm{K}_{-2}$ teljesüljön. Ekkor $3\nmid n_\nu$ minden elég nagy ν-re, ezért $\varphi\big(n_\nu(n_\nu+3)\big)=\varphi(n_\nu)+\varphi(n_\nu+3)$, $\varphi\big((n_\nu+1)(n_\nu+2)\big)=\varphi(n_\nu+1)+\varphi(n_\nu+2)$. Mivel $\varphi(n_\nu+k)\to F^k(g)$ $(k=0,1,2,3)$, ezért (III.25) azonnal következik.□

13. Lemma.

$$F^2(0)=0, \tag{III.26}$$

$$0\in\mathrm{K}_{-1}. \tag{III.27}$$

Mivel $0\in\mathrm{K}_1$, ezért létezik olyan $\underline{R}\in\tilde{\mathrm{P}}_1$, amelyre $a(\underline{R})=0$. Legyen $\{R_{j_\nu}-3\}$ az $\{R_\nu-3\}$ sorozat olyan ritkítása, amelyre $\lim \varphi(R_{j_\nu}-3)(=\eta)$ létezik. Mivel $\{R_{j_\nu}-3\}\in\tilde{\mathrm{P}}_{-2}$, ezért $\eta\in\mathrm{K}_{-2}$, és $F^3(\eta)=0$. Alkalmazzuk (III.25)-öt $g=\eta$ választással. $F(\eta)=0$ adódik. Mivel $F(\eta)\in\mathrm{K}_{-1}$, ezért $0\in\mathrm{K}_{-1}$. Továbbá, $0=$ $=F^3(\eta)=F^2(F(\eta))=F^2(0)$.□

14. Lemma.

$$\mathrm{K}_{-1}=\mathrm{K}_1. \qquad \text{(III.28)}$$

A (III.23) formulát $l=1$ választással alkalmazva, $\mathrm{K}_{-1}+\mathrm{K}_1\subseteq K_{-1}$ következik. Mivel $0\in\mathrm{K}_{-1}$, ezért $\mathrm{K}_1\subseteq\mathrm{K}_{-1}$. Legyen most $l=-1$. Ekkor (III.23)-ból: $\mathrm{K}_{-1}+\mathrm{K}_{-1}\subseteq\mathrm{K}_1$. Mivel $0\in\mathrm{K}_{-1}$, ezért $\mathrm{K}_{-1}\subseteq\mathrm{K}_1$.□

Mivel $F^2(\mathrm{K}_l)=\mathrm{K}_{l+2}$ minden l egészre igaz, ezért $\mathrm{K}_{2n+1}=\mathrm{K}_1$, hacsak $n\in\mathbb{N}$. (III.24) miatt $\varphi(2n+1)\in\mathrm{K}_1$. Ezért $\mathrm{S}(\mathbb{N}_1)\subseteq\mathrm{K}_1$. A $\supseteq$ reláció teljesülése nyilvánvaló. Így

$$\mathrm{S}(\mathbb{N}_1)=\mathrm{K}_1. \qquad \text{(III.29)}$$

Mivel $F(\mathrm{K}_m)=\mathrm{K}_{m+1}$, ezért $\mathrm{K}_2=\mathrm{K}_{2n}$ $(n\in\mathbb{N})$, s (III.24) miatt $\varphi(2n)-\varphi(2)\in\mathrm{K}_1$ $(\forall n\in\mathbb{N})$, és így $\varphi(2^\alpha)-\varphi(2)\in\mathrm{K}_1$ $(\alpha=1,2,\ldots)$.

Érvényes tehát a következő formula:

$$\mathrm{S}=\begin{cases}\mathrm{K}_1{}^T\mathrm{K}_2, & \text{ha} \quad \varphi(2)\notin\mathrm{K}_1;\\ \mathrm{K}_1, & \text{ha} \quad \varphi(2)\in\mathrm{K}_1.\end{cases}$$

15. Lemma. Ha $g\in\mathrm{K}_1$, akkor

$$F(g)=g+F(0). \qquad \text{(III.30)}$$

Ha $h\in\mathrm{K}_2$, akkor

$$F^2(h)=h+C, \qquad \text{(III.31)}$$

ahol

$$C=\varphi(4)-2\varphi(2)+F(0). \tag{III.32}$$

Legyen $k\in\mathbb{N}_1$, $\underline{M}\in\tilde{\mathrm{P}}_1$, $\mathrm{a}(\underline{M})=-\varphi(k)$. Ekkor $(k,M_\nu)=1$, $\varphi(kM_\nu)\to 0$, $\varphi(kM_\nu+k)\to F^k(0)=F(0)$. Továbbá $(kM_\nu+1)=1$, ezért $\varphi(kM_\nu+k)=\varphi(k)+$ $+\varphi(M_\nu+1)$, $\varphi(M_\nu+1)\to F(-\varphi(k))$. Innen

$$F(-\varphi(k))=-\varphi(k)+F(0) \tag{III.33}$$

következik.

A továbbiakban felhasználjuk azt az egyszerűen bizonyítható tényt, hogy $F{:}\mathrm{S}\to\mathrm{S}$ folytonos függvény.

Mivel $\{-\varphi(k)|k\in\mathbb{N}_1\}$ mindenütt sűrű K_1-ben, és F folytonos, ezért (III.30) a (III.33) formulából következik.

Legyen most $h=\varphi(2)-\varphi(k)$, k és $\underline{M}$ maradjanak változatlanok. Ekkor $\varphi(2M_\nu)\to-\varphi(k)+\varphi(2)=h$. Mivel $2^2|(2M_\nu+2)$, $2^3\not|(2M_\nu+2)$, ezért

$$\varphi(2M_\nu+2)=\varphi(4)-\varphi(2)+\varphi(M_\nu+1),$$

s így

$$F^2(h)=\varphi(4)-\varphi(2)+F(-\varphi(k)).$$

Mivel $-\varphi(k)\in\mathrm{K}_1$, (III.30) miatt $F(-\varphi(\mathrm{k}))=-\varphi(k)+$ $+F(0)$, s így $F^2(h)=h+C$, a (III.32) formulával definiált C-vel. Mivel $\{-\varphi(k)|k\in\mathbb{N}_1\}$ mindenütt sűrű K_1-ben, ezért $\{\varphi(2)-\varphi(k)|k\in\mathbb{N}_1\}$ mindenütt sűrű K_2-ben, F^2 folytonossága miatt (III.31) azonnal következik. □

16. Lemma. Érvényesek a

$$\lim_{m \in \mathbb{N}_1} \Delta\varphi(m) = F(0), \tag{III.34}$$

$$\lim_{m \in \mathbb{N}_0} \Delta_2\varphi(m) = C, \tag{III.35}$$

$$\lim_{m \in \mathbb{N}_1} \Delta_2\varphi(m) = 0, \tag{III.36}$$

$$C = 0 \tag{III.37}$$

formulák.

Tegyük fel, hogy (III.34) nem igaz. Ekkor alkalmas $\{2n_\nu + 1\}$ $(n_1 < n_2 < \ldots, n_\nu \in \mathbb{N})$ részsorozatra $\varphi(2n_\nu + 2) - \varphi(2n_\nu + 1) \to \delta$, $\delta \neq F(0)$. Egy alkalmas ritkításra $\{\varphi(2n_{j_\nu} + 1)\}$ konvergens, $\varphi(2n_{j_\nu} + 1) \to \alpha$ $(\alpha \in \mathrm{K}_1)$, és $F(\alpha) = \alpha + \delta$. (III.30) miatt ez lehetetlen. (III.34) tehát igaz. (III.35) bizonyítása hasonló, ezért elhagyjuk.

Mivel $\Delta_2\varphi(2n-1) = \Delta_2\varphi(4n-2) + \Delta_2\varphi(4n)$, ezért (III.35) felhasználásával

$$\Delta_2\varphi(2n-1) \to 2C \tag{III.38}$$

következik. Továbbá

$$\Delta\varphi(2n+1) - \Delta\varphi(2n-1) = \Delta_2\varphi(2n) - \Delta_2\varphi(2n-1),$$

és (III.34), (III.35) miatt $0 = F(0) - F(0) = C - 2C$, azaz (III.37) adódik. (III.38)-ből (III.36) azonnal következik. □

Innen tételünk gyorsan következik. Tudjuk, hogy $\Delta_2\varphi(2n-1) \to 0$, a 7. lemma feltétele fennáll. A 9. lemma szerint létezik olyan $\psi: \mathbb{R}_x \to \mathrm{G}$ folytonos homomorfizmus, amelyre $\varphi(n)=\psi(n)$ $(\forall n \in \mathbb{N}_1)$. Legyen $u(n):=\varphi(n)-\psi(n)$. Ekkor $u \in \mathrm{A}_G$, $u(n)=0$ $(\forall n \in \mathbb{N}_1)$. Mivel ψ folytonos, ezért $\psi(n+k)-\psi(n)=$ $=\psi\left(1+\frac{k}{n}\right)\to 0$ $(n\to\infty)$, minden rögzített k-ra. (III.34) miatt $u(2n+2)\to F(0)\,(n\to\infty)$, s ezért $u(2)=u(2^\alpha)=F(0)$ $(\alpha=1,2,\ldots)$. Ha még $F(0)\in \mathrm{K}_1$ is teljesül, akkor (III.34) kétszer is alkalmazható, $F^2(g)$ $=F(F(g))=F(g+F(0))=g+2F(0)$ következik. $g=0$ választással innen, $F^2(0)=0$ miatt, $2F(0)=0$ következik.

Bebizonyítottuk ezzel tételünk első felét. A második állítás nyilvánvaló. ■

IRODALOMJEGYZÉK

1. P. ERDŐS, On the distribution of additive functions, Annals of Math. 47 (1946) 1—20.
2. I. KÁTAI, On problem of P. Erdős, Journal of Number Theory 2 (1970) 1—6.
3. I. KÁTAI, On additive functions 25 (1978) 251—257.
4. E. WIRSING, Characterization of log n as an additive arithmetical function, Symposia Mathematica, IV (1970). Instituto Nazionale di Alta Matematica, Roma.
5. E. WIRSING, Additive and completely additive functions with restricted growth, Recent Progress in Analytic Number Theory, Volume 2. Academic Press, London, 1981, pp. 231—280.
6. I. KÁTAI, Multiplicative functions with regularity properties, I—V. Acta Math. Hung. 42 (1983) 295—308; 43 (1984) 105—130, 259—272; 44 (1984) 125—132; 45 (1985) 379—380.
7. E. HEWITT, K. A. ROSS, Abstract Harmonyc Analysis, Vol. I. Springer Verlag, Berlin 1963.
8. Z. DARÓCZY, I. KÁTAI, On additive number-theoretical functions with values in a compact Abelian group, Aequationes Math. 28 (1985) 288—292.
9. Z. DARÓCZY, I. KÁTAI, On additive functions taking values from a compact group, Publ. Math. Debrecen (Sajtó alatt).

Ára: 30,– Ft