

ÉRTEKEZÉSEK EMLÉKEZÉSEK

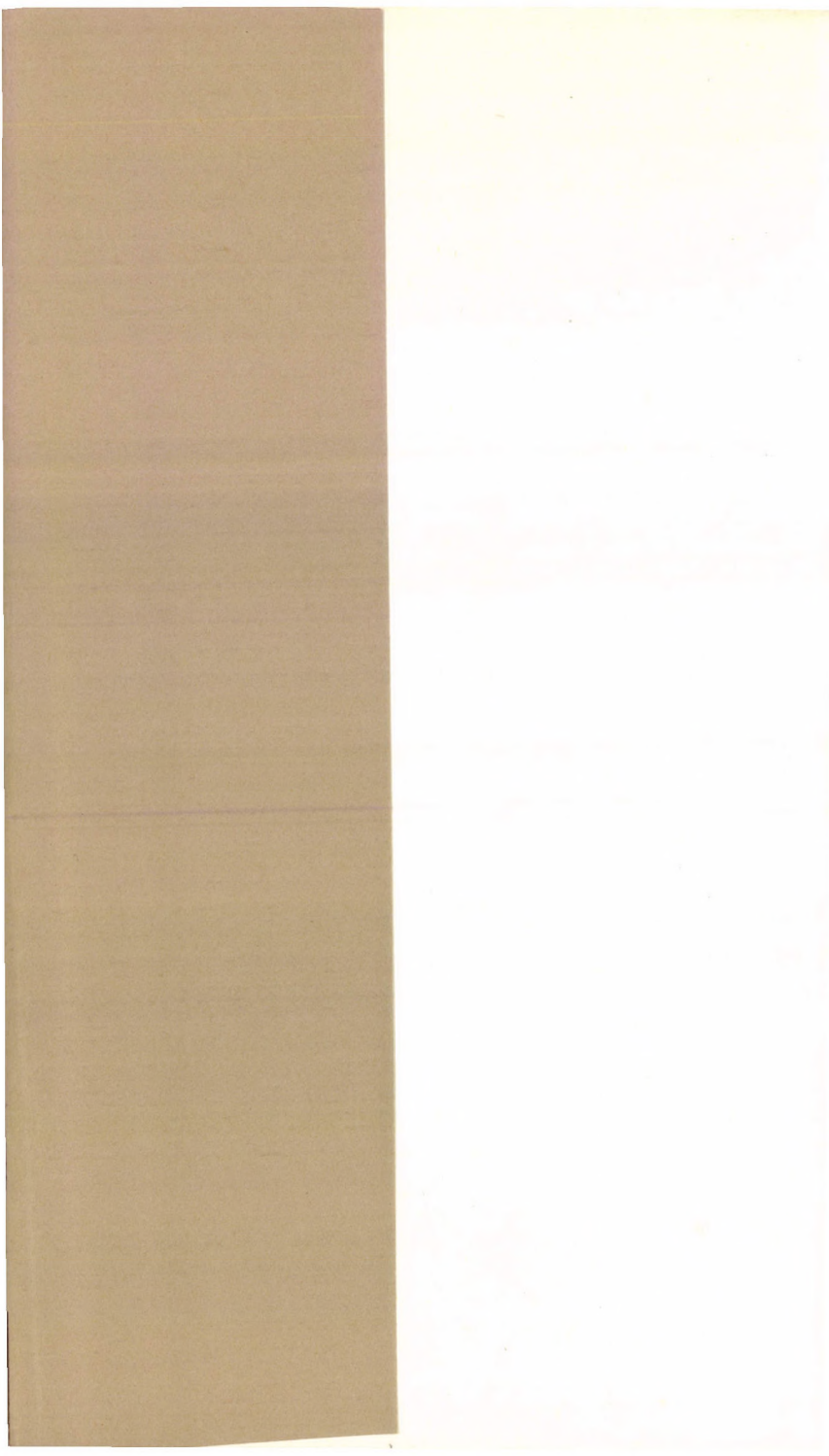
BARTA GYÖRGY

A FÖLDMAG
NÉHÁNY SAJÁTSÁGA
A FÖLD ERŐTEREINEK
VIZSGÁLATA ALAPJÁN



28

AKADÉMIAI KIADÓ, BUDAPEST



ÉRTEKEZÉSEK
EMLÉKEZÉSEK

ÉRTEKEZÉSEK EMLÉKEZÉSEK

SZERKESZTI
TOLNAI MÁRTON

BARTA GYÖRGY

A FÖLDMAG
NÉHÁNY SAJÁTSÁGA
A FÖLD ERŐTEREINEK
VIZSGÁLATA ALAPJÁN

AKADÉMIAI SZÉKFOGLALÓ

1983. FEBRUÁR 7.



AKADÉMIAI KIADÓ, BUDAPEST

A kiadványsorozatban a Magyar Tudományos Akadémia 1982. évi CXLI. Közgyűlése időpontjától megválasztott rendes és levelező tagok székfoglalói — önálló kötetben — látnak napvilágot.

A sorozat indításáról az Akadémia főtitkárának 22/1/1982. számú állásfoglalása rendelkezett.

ISBN 963 05 3853 9

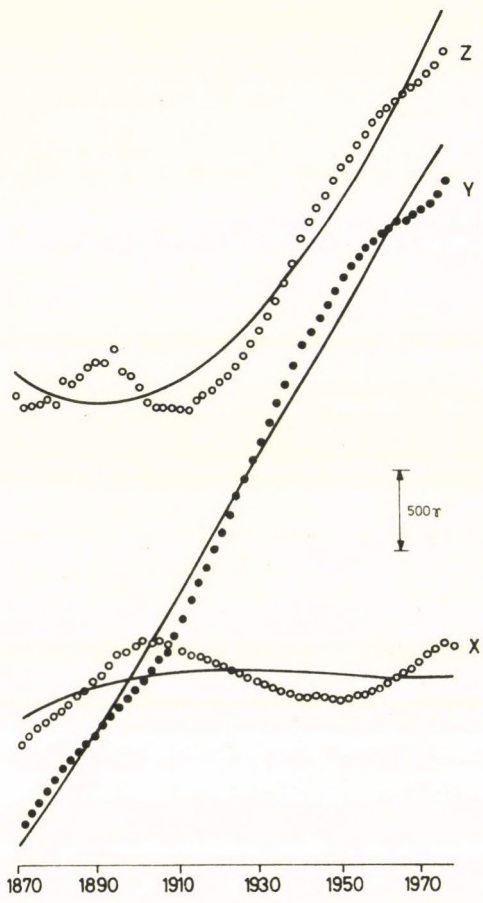
© Akadémiai Kiadó, Budapest 1984, Barta György

Printed in Hungary

BEVEZETÉS

Előadásom a 12 év előtti levelező tagsági székfoglalóm folytatása. Új eredményeim régi kutatásaimra épülnek, legyen szabad ezért bevezetésként röviden összefoglalni régebbi előadásom lényegét.

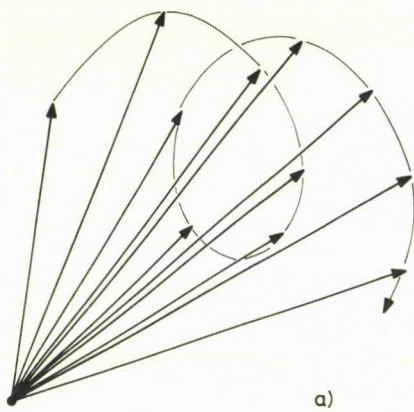
A Kárpát-medencében — nemzetközi mércével mérve is korán — 1871-ben kezdődött meg mágneses terünk rendszeres mérése. Részenben technikai, részben határváltozási okokból a mérési sorozat gyakran megszakadt. Kívánatos volt ezért a 20–25 éves részletsorozatokból és néhány töredékből egy új, egységes sorozatot összeállítani. A sorozatok illesztése, a kimaradások interpolálása megkívánta a mágneses évszázados változás részletes vizsgálatát. Ennek során kiderült, hogy a legtöbb obszervatóriumban a mágneses összetevők évszázados változására ráakódik egy félévszázad körüli periódusú másodlagos hullám (1. ábra) [1].



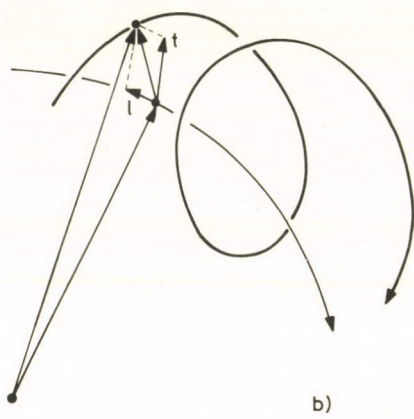
1. ábra. A földmágneses tér évszázados változása Magyarországon

A KUTATÁS GONDOLATMENETÉNEK KIALAKULÁSA

Az évszázados változás tulajdonképpen a mágneses vektor végpontjának térbeli mozgása. A ráakódott hullám miatt ez a térgörbe egy csavarvonal [2]. A csavarvonal egyes pontjainak a kiegyenlített évszázados változás megfelelő pontjaihoz viszonyított helyzetét egy vektor határozza meg. A vektort felbonthatjuk a kiegyenlített évszázados változás érintője és normálsíkja irányába mutató összetevőkre (2. ábra), az előbbit longitudinális, az utóbbit transzverzális effektusnak nevezzük. Mindkét jelenségről bizonyos általános tulajdonságokat lehet megállapítani. A transzverzális effektus során a főváltozás irányába nézve a vektor körüljárási iránya az északi féltekén megegyezik az óramutató járásával (3. ábra), a longitudinális effektus szélső értékei pedig egyidőben következnek be (4. ábra). Ugyanilyen hullám észlelhető a Föld forgássebességének változásában, a sarkmagasság-ingadozás amplitúdójának változásában és néhány tengerszint-magasság mérő obszervatóriumban, a Föld vízfelületének változásában. Mindezek a változások jelentős, ugyancsak félévszázad periódusú tömegátrendeződésekre mutatnak a Föld belsejében (5. ábra). Ennek a tömegmozgásnak igen nagy mélységben kell végbemennie, mert ilyen geológiailag gyors mozgások csak ott tételezhetők fel [3].



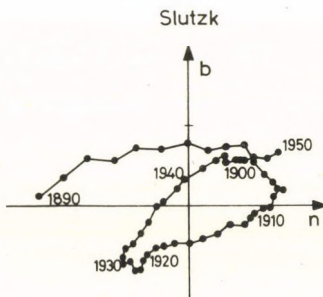
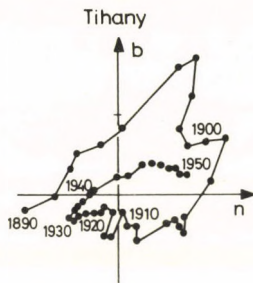
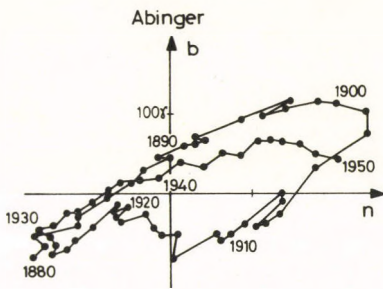
a)



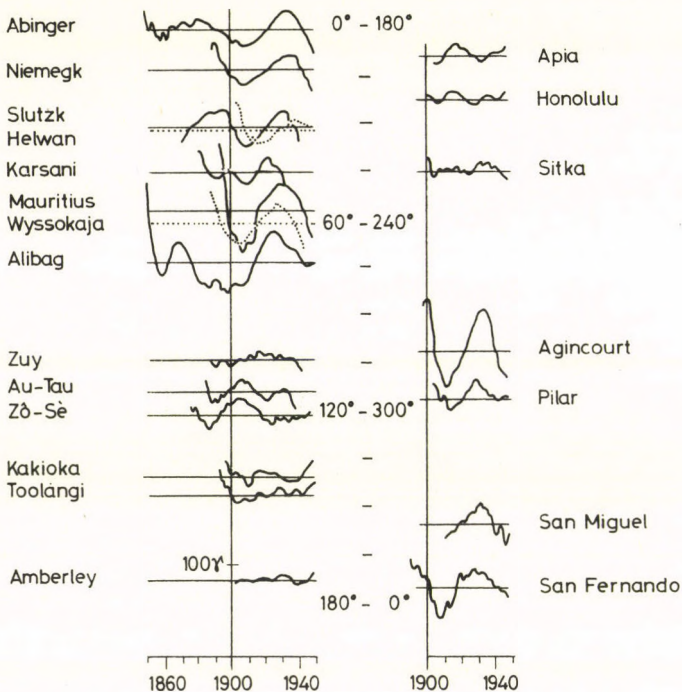
b)

2/a. ábra. A mágneses vektor csavarvonal jellegű évszázados változása

2/b. ábra. A vektor felbontása komponensekre
Az l, t a szuperponált hullámot leíró vektor érintőirányú, ill. normálsíkba eső komponense

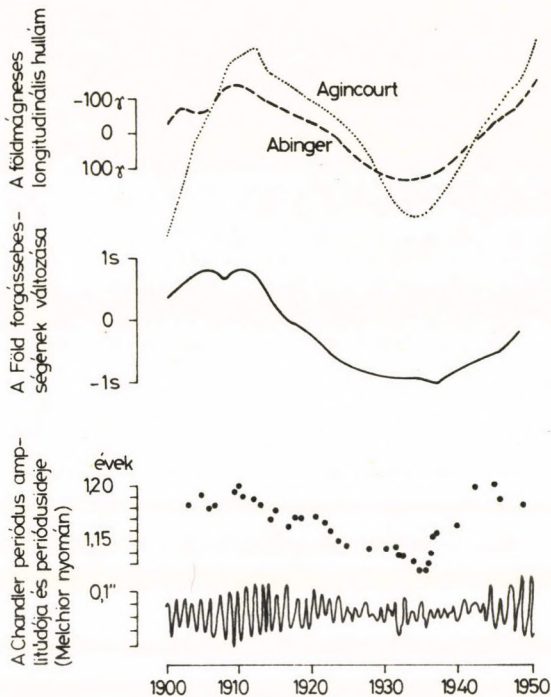


3. ábra. A transzverzális hullám európai obszervatóriumokban



4. ábra. A longitudinális hullám a Föld különböző obszervatóriumaiban

Ha a mágneses évszázados változás részjelenségeiben az egész Földre érvényes általános vonásokat lehetett felismerni, joggal feltehető, hogy maga a teljes változás is tartalmaz hasonló általános jegyeket. Egységes koordináta-rendszerre transzformálva az egyes obszervatóriumok mérési adatait az évszázados

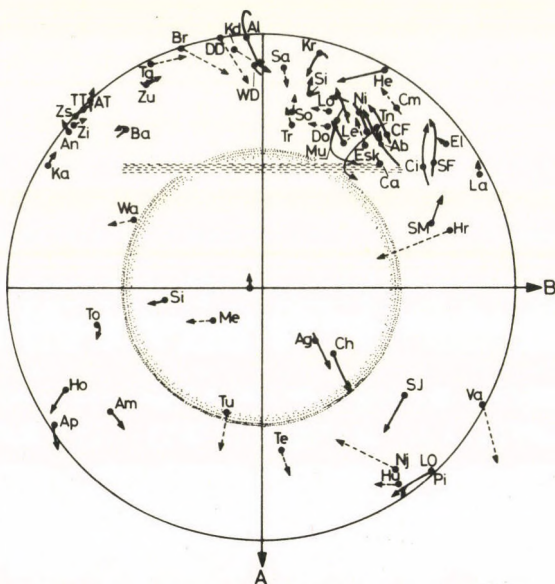


5. ábra. A longitudinális hullám és a Föld forgási jelenségeiben felismerhető félévszázados hullám

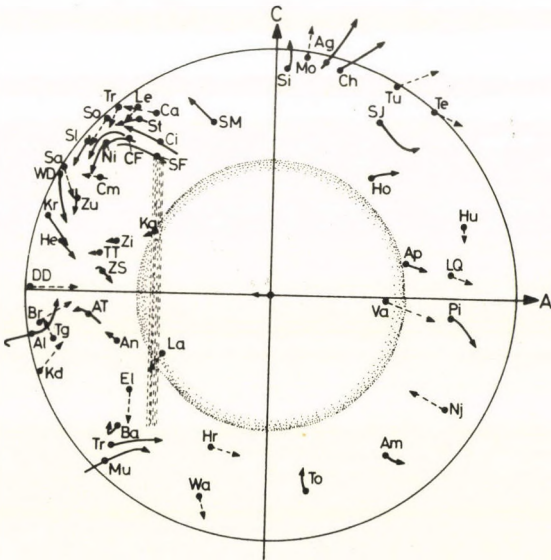
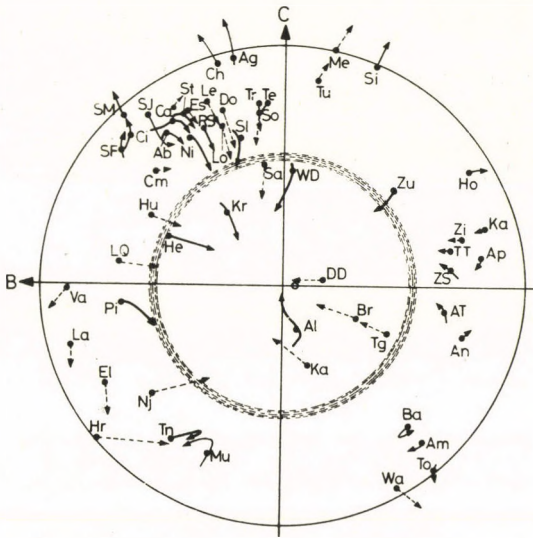
változás térgörbéi valóban mutatnak globális vonásokat. Ortogonális vetítésben a térgörbék Pakisztán mint vetítési centrum körül konvergálnak, a peremobszervatóriumok térgörbéi divergálnak. A vetítési képekből úgy látszik, hogy a mágneses térnek három, egymásra közel merőleges, főiránya van; a mágneses

tengely iránya, a legjobban közelítő dipólus excentricitásának iránya és erre a kettőre merőleges, éppen Pakisztán felé mutató irány (6. ábra) [4].

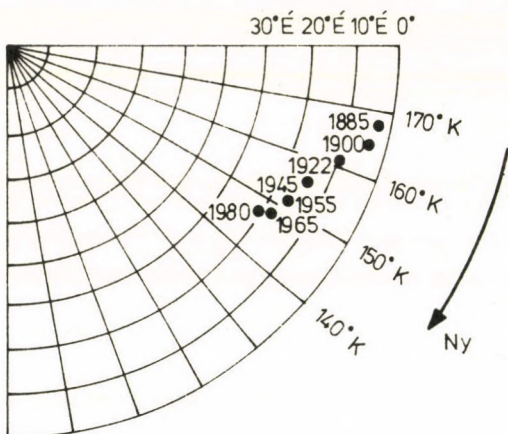
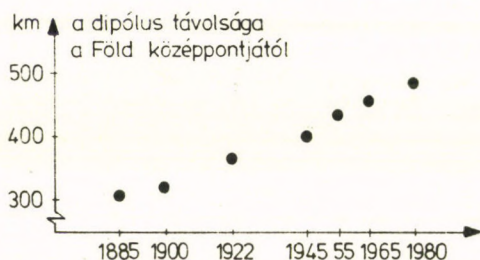
A másfél évszázada rendszeresen meghatározott mágneses gömbfüggvények eredményeiből tudjuk, hogy az excentrikus dipólus 5 évenként kb. 1 fokkal nyugati irányba vándorol. Az excentricitás igen nagyméretű, manapság 450 km. Ha feltesszük, hogy ezt a mágneses jelenséget a belső mag excentrikus



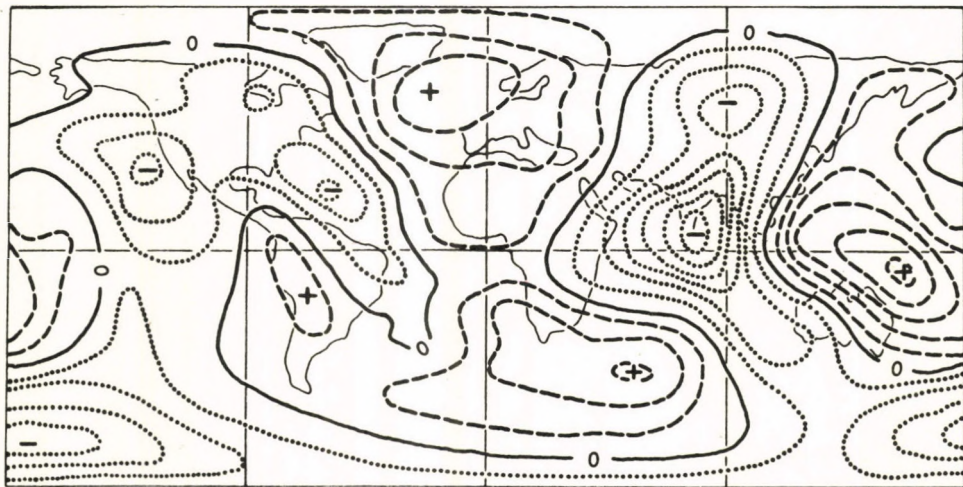
6. ábra. A mágneses évszázados változás térgörbéinek vetületei a földmágneses tengelyek által meghatározott síkokban



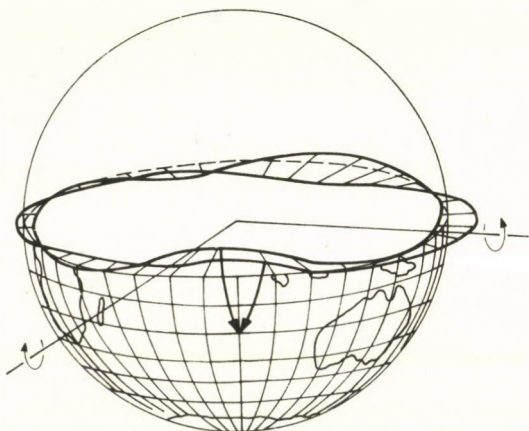
helyzete okozza, akkor ennek a tömeginhomogenitásnak a Föld alakjának torzultságában is jelentkeznie kell (7. ábra). Ez az elgondolás – jó geoid-alak meghatározás hiányában – a 60-as évek elején csak sejtésnek volt tekinthető [5]. Az 1966-os első szatellit geoid azonban megerősítette ezt a sejtést. A két legnagyobb



7. ábra. Az excentrikus dipólus vándorlása az elmúlt száz évben



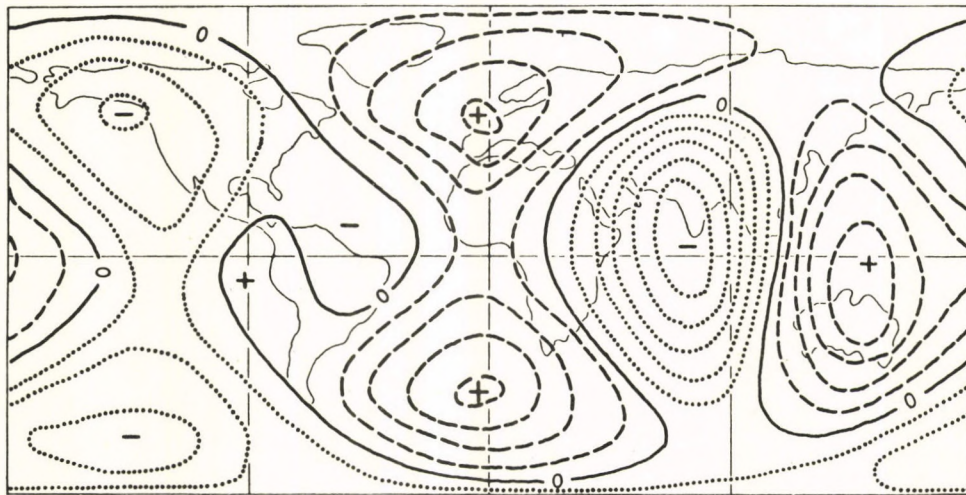
8. ábra. Az SAO I. geoid. A szintvonalak értékköze 15 m



9. ábra. A geoid alak kiszámítása két forgásszimmetrikus anomáliarendszerből

anomália Ausztrália és India környékén jelentkezett; 4 további jellegzetes – az előbbieknél valamivel kisebb – anomália volt azonban az Atlanti és Csendes óceánok északi és déli részén. Ezeknek a magyarázata nehézségekbe ütközött.

A további vizsgálatok során a geoid egyenlítői metszetét megközelítettük két zonális gömbfüggvény sorral. A gömbfüggvények pólusát úgy választottuk, hogy a megközelítés a legjobb legyen (8. ábra). A gömbfüggvények által képviselt két görbét a szimmetriatengely körül megforgatva elvégeztük az anomáliák sugárirányú összegzését. A számítás eredménye szerint az így nyert szimmetriatengelyek



10. ábra. A két forgásszimmetrikus anomáliarendszer összegeként számított geoid alak
A szintvonalak értékkeze 15 m

az Ausztrália és Pakisztán felé mutató – említett – mágneses irányokkal közel összeesnek (9. ábra). Az így összetett geoidon hely, előjel, nagyság és alak szerint az óceánokon lévő mérsékeltövi anomáliák is megjelentek, vagyis a geoid két forgásszimmetrikus alak összege (10. ábra) [6].

Figyelemre méltó, hogy az elméleti alak számításaiban csak az egyenlítői adatokat használtuk fel és mégis megkaptuk az egész geoid térképet. Az egyenlítői adatsor tehát implicit tartalmazza az egész geoidot, azaz a geoid alakban egy globális jelenséggel állunk szemben, és az egyes geoidundulációkat nem lehet helyi gravitációs inhomogenitásokkal külön-külön magyarázni.

ÚJ FELISMERÉSEK ÉS MEGÁLLAPÍTÁSOK

A geoid ezen rendkívül érdekes geometriai tulajdonságának nyilvánvalóan fontos fizikai oka van. Ennek az oknak pontosabb megismerése érdekében további vizsgálatainkban erre a geometriai tulajdonságra összpontosítottuk a figyelmünket.

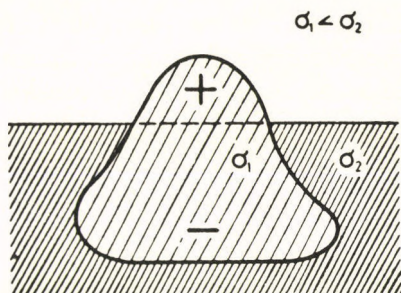
Ezt a két szabályos anomáliarendszert vagy az egész földtest sajátosságosan szabályos tömegeloszlás-anomáliája, vagy – és ez a valószínűbb – a Föld magjában lévő aszimmetrikus tömegeloszlás és annak folyamatai okozzák. Ezért a következőkben ezeket a globális hatókat röviden nagymélységű hatóknak nevezzük. Ha a teljes geoidból levonjuk a nagymélységű hatók által okozott anomáliákat, akkor a reziduális képben megkapjuk a felszíni tömegek hatását. Ezek ismerete pedig a kéreg-felsőköpeny szerkezetének jobb megismerésére vezethet.

Két forgásszimmetrikus alak sugárirányú összege a szimmetriatengelyek síkjára tükörszimmetrikus. A geoidról azonnal megállapítható, hogy ez a kitüntetett főkör nem az egyenlítő. Jó közelítő alak kiszámításához tehát általános helyzetű tengelyirányokat kell keresnünk. A megközelítést azonban zavarja a forgásszimmetrikusnak semmiképpen nem tekinthető felszíni tömegek hatása. Vagyis éle-

sen definiálható, mély tömegek hatását jól képviselő tengelypontokat nem kapunk.

A megoldás az volt, hogy kiszámítottuk 6000 km magasságban a geoid alakot, és erről bizonyítottuk be, hogy az két forgásszimmetrikus alak összege. A 6000 km magassággal kihasználtuk a távolság szűrő hatását. Ez a hatás a következő megfontoláson alapszik: először az inhomogén felszíni tömegek kicsinyek a Föld össztömegéhez képest, másodsor a felszíni tömegek nagymértékben úszási egyensúlyban vannak. A kiemelkedő hegyeknek megfelelő pozitív tömegek súlyával a környező sűrűbb köpenyanyagba besüllyedő ritkább hegységgyökerek felhajtóereje tart egyensúlyt. Ez az utóbbi tömegkülönbség tehát negatív tömegként, tömeghiányként jelentkezik. Ilyen dipólikus szerkezetű tér erőssége a távolság köbével csökken és a tömegektől viszonylag kis távolságra már elhanyagolhatóvá válik (11. ábra). Harmadszor az egyensúlyban nem lévő tömegek a kiegyensúlyozotthoz képest nagyságrendileg kisebbek, és habár az ilyen tömegkülönbségek hatása csak a távolság négyzetével csökken, de kicsiségük miatt hatásuk nagy magasságokban szintén elhanyagolható (12. ábra).

Így sikerült a magasság szűrő hatását kihasználva lényegesen csökkenteni a felszíni tömegek zavaró hatását. Ez fontos volt, mert a felszíni hatók bonyolult rendszere nem írható le jól egyszerű matematikai formaliz-



11. ábra. A tömeginhomogenitás izosztázia hatására kialakuló dipólikus jellege

mussal; a már említett mélyhatók pedig két jól leírható forgásszimmetrikus alak összegében jelentkeznek. Így 6000 km magasságban élesen meg lehet határozni a nagymélységű hatók által okozott forgásszimmetrikus alakok tengelyirányát.

Dr. Hajósy Adrienne munkatársamnak sikerült a megközelítő irányok helyes választásának egy matematikai kritériumát is megállapítani. Kiderült ugyanis, hogy két forgásszimmetrikus alak sugárirányú összegét leíró felület egyenlete speciális térszögek függvényében ugyanaz, mint a szimmetriasíkban fekvő metszetgörbe egyenlete a megfelelő síkbeli szögek függvényében. A tételnek a fordítottja is igaz: ha egy felület rendelkezik ezzel az analitikus tulajdonsággal, akkor az két forgásszimmetrikus felület sugárirányú összege. Másszóval, a kitüntetett főkör menti adatokból, illetve a teljes geoid adatrendszeréből számítva a

gömbfüggvény együtthatókat, a két eljárás során számszerűleg azonos eredményre kell jutnunk, ha a tengelyirányokat helyesen választottuk meg. A számítások meglehetősen hosszadalmasak voltak, mert a kitüntetett főkört éppen a tengelyirányok határozzák meg (Appendix I).

A kérdést bonyolította, hogy a Föld belső szerkezetének aszimmetriájából származó ellipticitás az általában felhasznált sarki lapultságban már számításba van véve, ami a kétféle megközelítésnél nem egyformán esik latba. Például az egyenlítői vagy ahhoz közeli főkör felhasználása esetén a sarki lapultság nem játszik szerepet. A térkép szerinti adatmegközelítés esetében azonban teljes mértékben számításba jön. A sarki lapultságot $1/298,25$ -nek véve a geoid nem tartalmaz semmiféle sarki lapultságot. Ennek egy részét azonban a tárgyalt mélyhatók okozzák, ezért ennél a lapultságnál kisebb lapultságú ellipszoidon kell a számítást elvégezni. Ismerve az egyenlítői ellipszis méreteit, úgy láttuk, hogy az $1/298,75$ lapultságú geoidon kell a számítást elvégezni, mert ez már nem tartalmazta az egyenlítői ellipticitásból származó lapultsági komponenst. Ez a változtatás a sarki sugárban 25 m növekedést, az egyenlítői sugárban 13 m csökkenést jelent.

A sarki lapultságot így két összetevőre bontottuk: az egyik – a túlnyomó rész – a forgásból származik; a másik – a sokkal

kisebb – a belső tömeginhomogenitás következménye. Ismeretes, hogy a Föld lapultsága a ma elfogadott földi paraméterek mellett 0,5%-kal nagyobb (mintegy 100 méterrel) a hidrosztatikus egyensúly által megengedettnél. Ennek az eltérésnek majdnem a felét tehát a belső aszimmetrikus tömeginhomogenitással magyarázhatjuk (13. ábra). A másik rész talán a két tömegtartomány – eddig tekintetbe nem vett – kölcsönhatásából származik. Ez azonban kérdéses.

A lapultságnak ez a változtatása 6000 km magasságban azt jelenti, hogy az egyenlítői nagytengelyt az ún. best-fitting ellipszoidénál 6,5 m-rel kisebbnek választjuk. A geoidunduláció az egységgömb tetszőleges P pontjába mutató (λ, φ) geocentrikus irányban:

$$\Delta r(\lambda, \varphi) = a \cdot \sum_{nm} [C_{nm} \cos m\lambda + S_{nm} \sin m\lambda] \cdot P_{nm}(\cos \varphi),$$

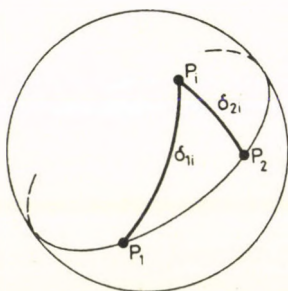
ahol a C_{nm} , ill. az S_{nm} a földi gravitációs potenciál 6000 km magasságra számított harmonikus együtthatói; $a = 12\,378\,133,5$ m az egyenlítői fél nagytengely.

A geoidundulációk értékrendszerét két zonális gömbfüggvénysor összegével közelítjük:

$$\Delta r(\lambda_i, \varphi_i) \approx \sum_n A_n P_n(\cos \delta_{1i}) + \sum_n B_n P_n(\cos \delta_{2i}),$$

ahol a $\cos \delta_{1i}$, ill. a $\cos \delta_{2i}$ az egységgömb rögzített P_1 , ill. P_2 pontja és a P_i pont gömbi távolsága (ábra), és

$$\sum_i \left[\sum_n A_n P_n(\cos \delta_{1i}) + \sum_n B_n P_n(\cos \lambda_{2i}) - \Delta r(\lambda_i, \varphi_i) \right]^2 = \text{minimum.}$$



A közelítő függvény sor A_n, B_n számegyütthatóit kétféleképpen számítottuk. Az ún. térbeli közelítésnél egyenközű fokbeosztás mentén a geoidundulációk teljes adatrendszerét bevontuk a minimumfeltételbe. Az ún. síkbeli közelítésnél csak a P_1, P_2 pontok által meghatározott főkör adatait vettük figyelembe.

Egyetlen olyan P_1, P_2 pontpár van, amelyre a kétféle módon számított A_n, B_n együtthatók (jó közelítéssel) megegyeznek. Geocentrikus koordinátáik:

P_1	P_2
74°	90°
$59,5^\circ$	$163,5^\circ$

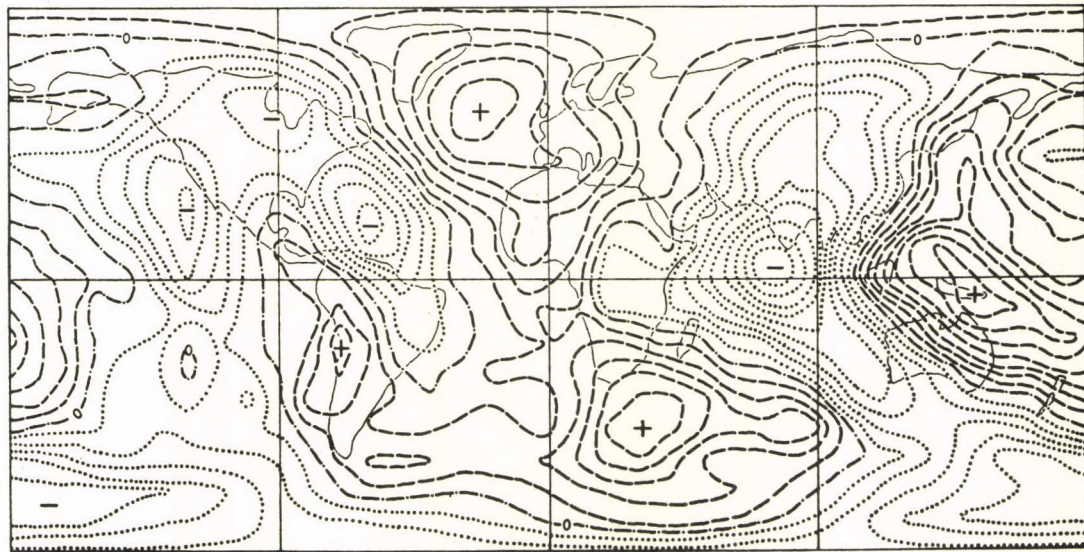
A méter dimenziójú számegyütthetők:

n	A_n	B_n
2	- 0.62	24.36
3	-11.09	12.28
4	- 0.56	-0.81
5	0.75	-0.93
6	0.05	0.18
7	-0.07	0.04
8	0.05	0.01

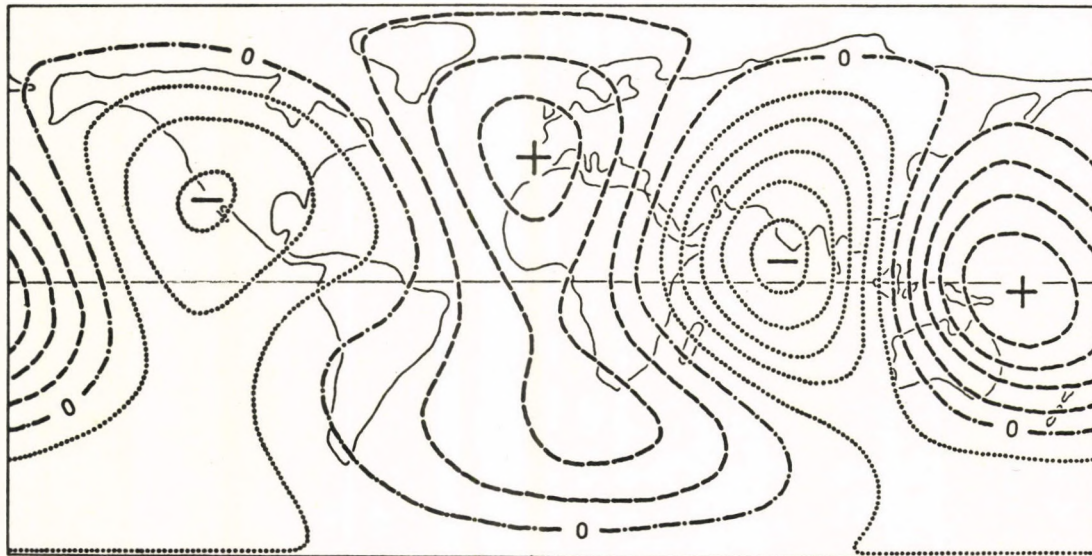
A P_1 , P_2 pontok természetesen úgy értendőek, mint két kicsiny gömbi kör középpontjai. A kétféle közelítés jó egyezése a középpontok körül kb. $0,5^\circ$ sugarú körökön belül teljesül.

A közelítő kép igen kis eltéréseket mutat a geoidundulációktól; a közelítés jósága, amelyet a szórások hányadosából számíthatunk, 97%. A maximális eltérés is igen csekély, 3 m körüli érték. 6000 km magasságban tehát a geoid valóban csak két forgásszimmetrikus alak összege, és a kiszámított tengelyek iránya matematikailag szorosan egymáshoz rendelt, meghatározásuk tehát szabatosnak tekinthető (14. ábra).

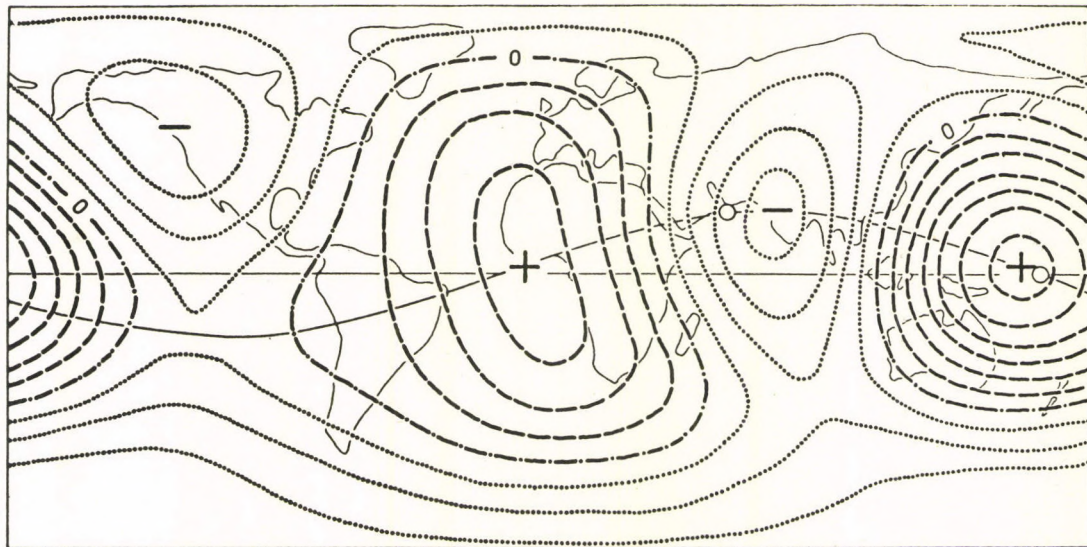
Ugyancsak Hajósy Adrienne munkatársamnak sikerült matematikailag bebizonyítania, hogy forgásszimmetrikus nívófelületeket csak forgásszimmetrikus sűrűségeloszlású tömegek okozhatnak. Ez a meglátás a kettős számításban alkalmazott felismeréssel együtt a geofizi-



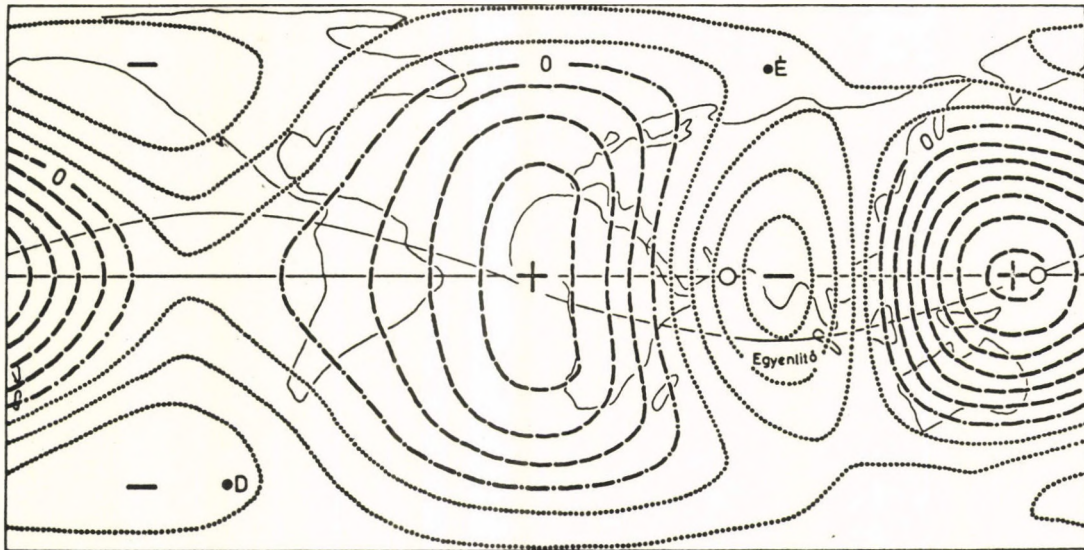
12/a. ábra. Az SAO III. geoid. A referenciaellipszoid paraméterei:
 $a = 6\,378\,140$ m, $f = 1/298.256$. A szintvonalak értékköze 10 m



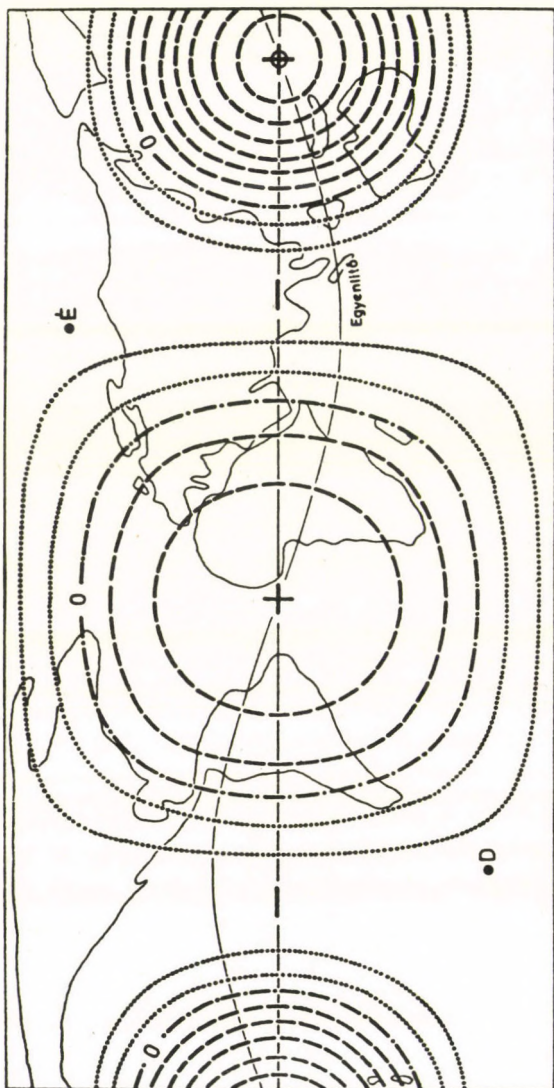
12/b. ábra. A geoid 6000 km magasságban a Föld felszínétől. A referenciaellipszoid paraméterei: $a = 12\,378\,140$ m, $f = 1/2327.9$. A szintvonalak értékköze 5 m

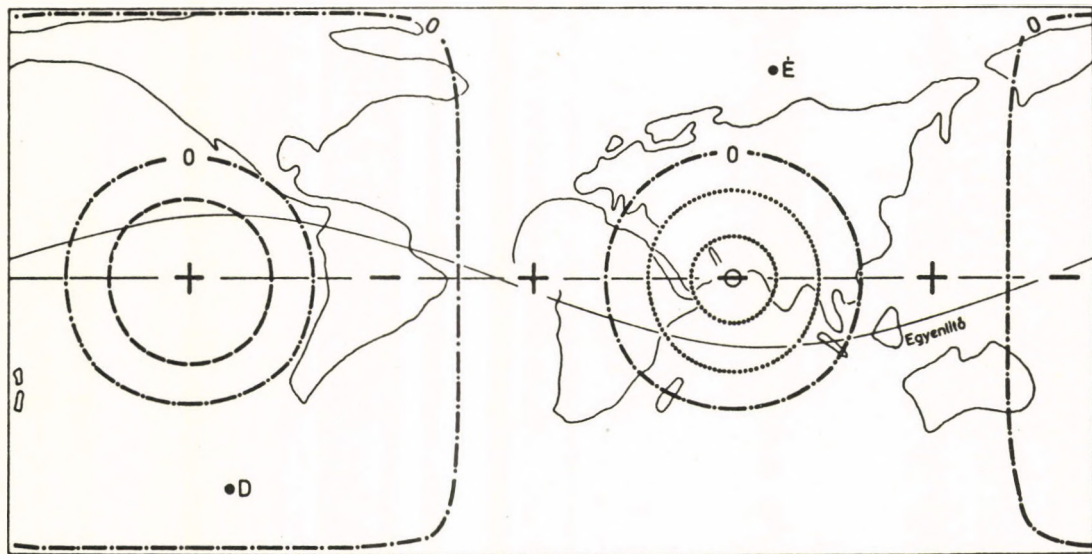


13/a. ábra. A geoid 6000 km magasságban a Föld felszínétől. A referenciaellipszoid paraméterei: $a = 12\,378\,133$ m, $f = 1/2337.1$. A szintvonalak értékköze 5 m



13/b. ábra. A 13/a. ábrán feltüntetett ferde főkör síkjára a geoid szimmetrikus





14/a–b. ábra. A geoidot felépítő forgásszimmetrikus felületek. Sugárirányú összegük állítja elő a geoid 6000 km magasságban levő értékrendszerét. A szintvonalak értékköze 5 m

kában szokatlan, szinte matematikai pontosságúnak tekinthető megállapításra vezet. Ha ugyanis a geoid alak globális hatóinak csak két forgásszimmetrikus összetevője van, és ezeket csak forgásszimmetrikus tömegeloszlás okozhatja, akkor a geoid alak tárgyalt összetevése az egyetlen lehetséges megoldása a kérdésnek. Így, és csakis így lehet a geoid alakot felépíteni. Ez pedig kizárja azt a szokásos magyarázatot, hogy a 6 nagy geoidanomáliát a köpeny–mag határon lévő 6 különálló tömeginhomogenitás okozza. Vagy ha mindenáron ragaszkodunk több hatóhoz, akkor azok két forgásszimmetrikusba összevonhatók (Appendix II).

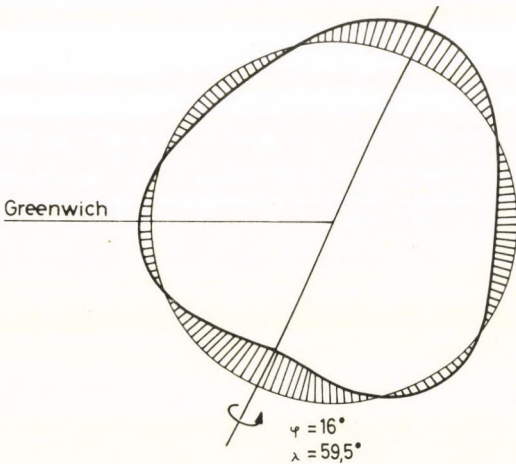
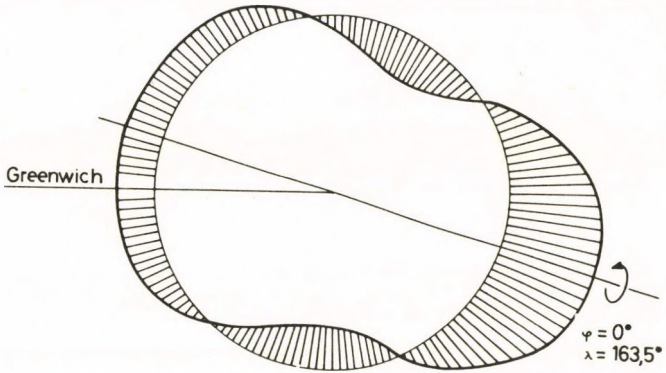
Természetes, hogy a felszínen észlelt szintfelület-anomáliák megvannak nagyobb mélységben – a magban lévő hatók esetén – a mag–köpeny határon is, csak az oksági viszonyok fordulnak meg; vagyis nem a maghatár esetleges undulációi okozzák a felszínen észlelt geoidundulációkat, hanem a két forgásszimmetrikus globális ható okozza mindkettőt.

A részletek pontosabb vizsgálata kimutatja, hogy:

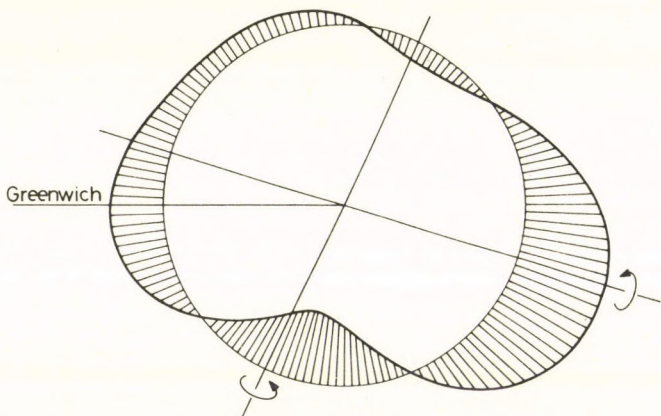
1. A forgásszimmetrikus alakok tengelypontjai közel esnek a mágneses tér jellegzetes pontjaihoz és a jobb közelítés elérésére szintén északra kell kimozdulni az egyenlítőtől a mágneses pontokhoz hasonlóan.

2. Az Ausztrália irányába mutató tengelyű közelítő alak elliptikus, nagy- és kistengelyé-

nek különbsége 72 m; hegyes vége minden közelítés esetén Ausztrália felé mutat (15. ábra). Ami azt jelzi, hogy a nagy mélységű, környezeténél sűrűbb belső mag a mágneses



15/a–b. ábra. A geoidot felépítő forgásszimmetrikus felületek meridiánmetszetei

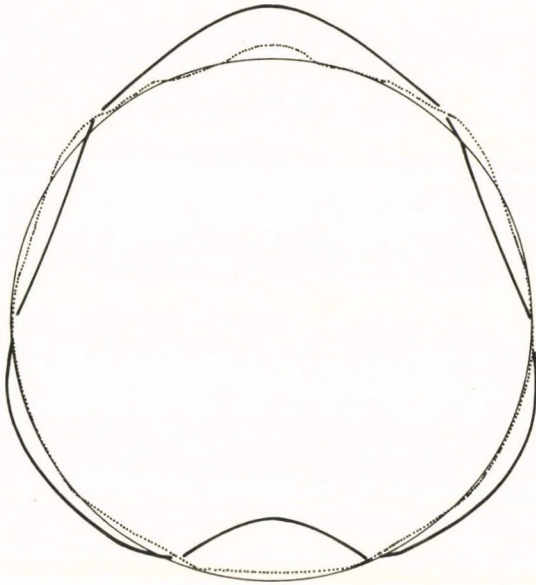


15/c. ábra. A görbék sugárirányú összege

méréseknek megfelelően Ausztrália felé excentrikus.

3. A Pakisztán felé irányuló tengely által képviselt forgásszimmetrikus alaknak páros gömbfüggvény együtthatói igen kicsinyek, ennek az alaknak ellipticitása nincs. Kérdés, hogy milyen tömegeloszlás okozhat ilyen nivófelület torzulást?

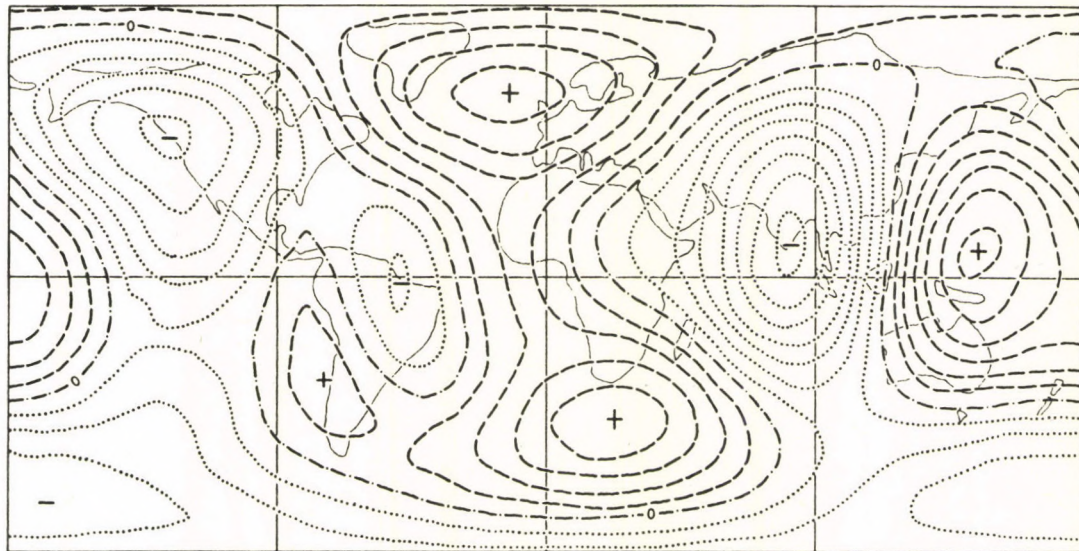
4. A felszínre visszszámított mélyhatók levonása után a Föld gravitációs erőtere nem mutat észak-déli aszimmetriát. A geoid ún. körtealakja a gömbfüggvények sajátágaiból származó látszat (16. ábra). A forgástengely ugyanis a gömbfüggvények esetén kitüntetett koordinátairány, és a geoid alak bármilyen torzultságának a tengely irányába eső vetületét a számítás során a maga irányába mintegy összegyűjti.



— a geoid zonális része
 a geoidanomáliák
 zonális része

16. ábra. A geoid és a geoidanomáliák zonális része

Ezek a 6000 km magasságban lévő nívófelületekből a Föld felszínére átszámított össze-tevő alakok főbb általános tulajdonságai, vagyis a globális tömeginhomogenitások hatásai a geoid alakra. Sikerült tehát a geoid alakban elválasztani a nagy mélységű – valószínűleg a magból származó – hatásokat a felszíni hatásoktól (17. ábra).



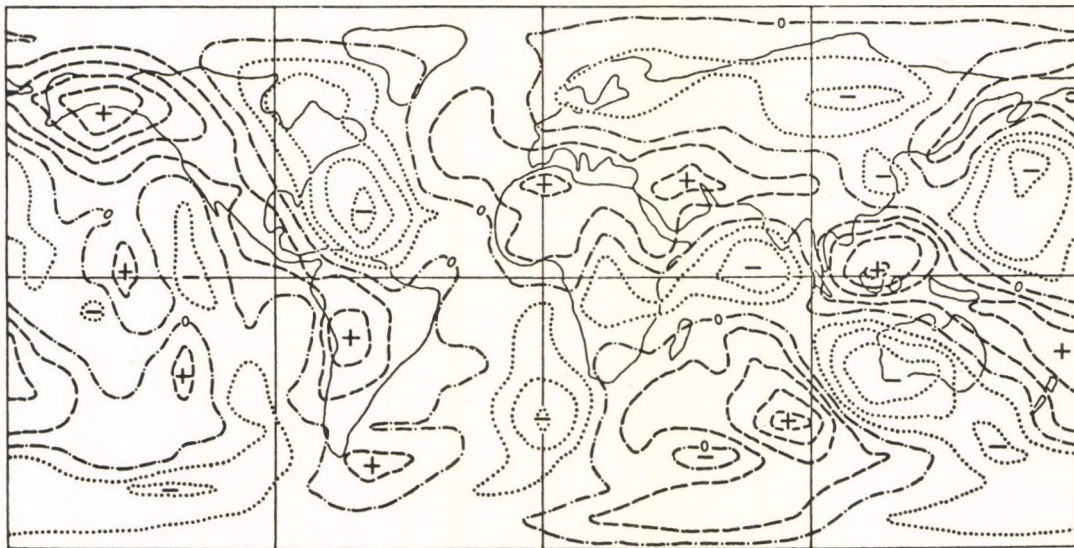
17. ábra. A globális hatók geoidundulációi a Föld felszínén
A szintvonalak értékköze 10 m

A megállapítások egy része már szerepelt az első székfoglalóban is főleg sejtések formájában, de ezek éppen az általánosabb megközelítés eredményeként szélesebb körű értelmezési lehetőséget nyertek (18. ábra).

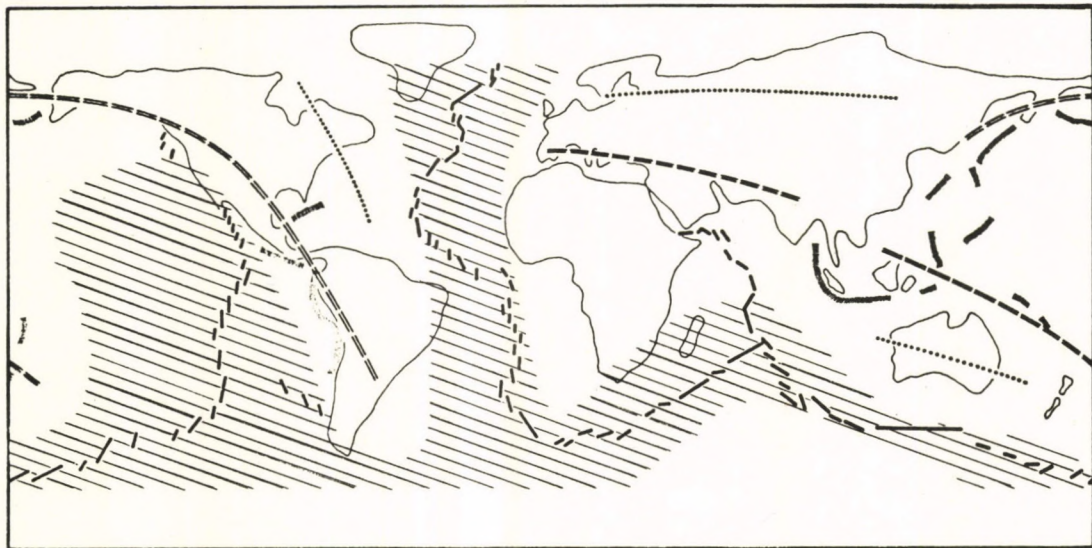
Ha ezt a forgásszimmetrikus komponenseiből összetett alakot a teljes geoidalakból levonjuk, akkor a maradék kép a felszínközeli inhomogenitások hatását fogja tükrözni, mert a középső és mély köpenyben az izosztázia miatt nagyobb tömeginhomogenitások valószínűleg nincsenek. A felszínközeli inhomogenitások pedig szoros kapcsolatban vannak a domborzattal, illetve a felszíni tömegek azt kialakító dinamikájával; feltehető tehát, hogy a maradék geoid képben ezek és csak ezek tükröződnek (19. ábra).

Valóban Földünk két nagy hegyrendszere, az Alp–Himalája és a Kordillerák–Andok vonulata pozitív sávokként jelentkezik a maradék képben. Skandinávia–Szibéria nagy negatív sávot képez, amelyet magyarázhatunk a jégkorszakban felhalmozódó jégtakaró hatásával. A jégtakaró benyomta a kéreg és a felsőköpeny anyagát: izosztatikus egyensúly állt be. A takaró gyors elolvadása után lassan kompenzálódó tömeghiány alakult ki.


Feltűnő továbbá, hogy a maradék kép nullvonalja közelítőleg követi az óceáni hátságok vonalát. Ez tetszetős összeesés, mert a hátságok anyaga az ottani heves tömegmozgások miatt valószínűleg izosztatikus egyensúlyi állapot-




18. ábra. Geoidanomáliák a Föld felszínén. A szintvonalak értékköze 10 m




 óceáni hátság középvonala

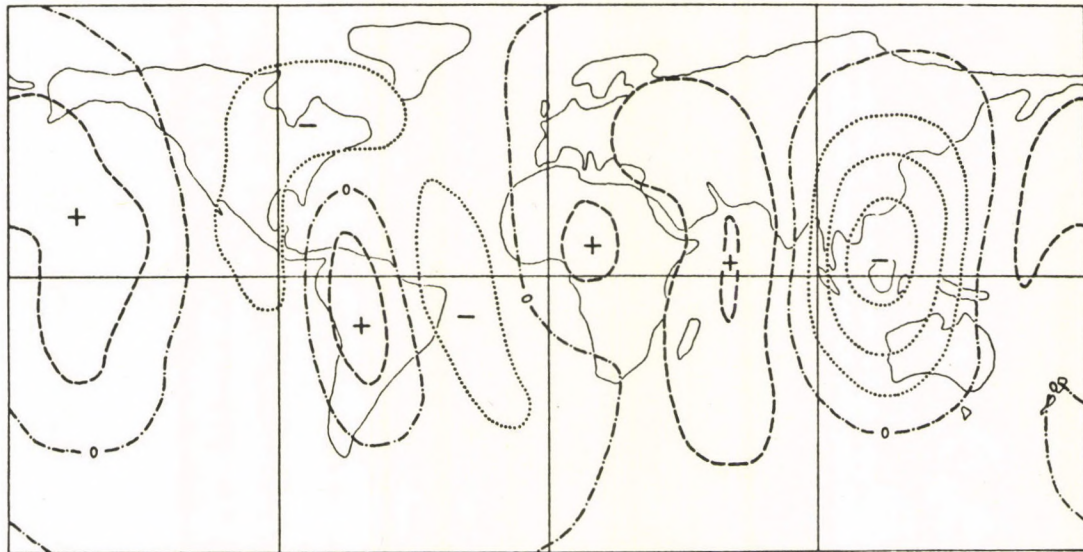
 szigetív

 pozitív geoidanomália

 negatív

 a kisértékű geoidanomáliák területe

19. ábra. A geoidanomáliák és a Föld nagy tektonikus vonalai



20. ábra. Feltételezett gravitációs évszázados változás
A g váltoása 1 év alatt. A szintvonalak értékköze 20 μ gal

ban van. A megfigyelés azonban további megfontolásokra is vezet. A hátságokat eddig geológiaiilag általában két oldalon szimmetrikus felépítésűnek tekintettük. Pedig ha a maradék geoid kép nullvonala velük összeesik, akkor a vonalak egyik oldalán pozitív, a másikon pedig negatív geoid területeket találunk, vagyis a hátság két oldalán lévő táblák más felépítésűek. Ezt a jelenséget tovább kellene kutatni és értelmezni.

Már ez a vizsgálat is jelzi a további kutatások lehetséges irányait. Kívánatos volna a maradék geoid képet felszíni, domborzati hatások ellen tovább redukálni, talán így elválaszthatnánk a sztatikus egyensúlyban lévő, és egyensúlyban nem lévő, de afelé törekvő tömegek hatását; és így új adatokat nyerhetnénk a földkéreg dinamizmusához.

Gravitációs kutatásaink kezdetén a Föld mágneses terének excentrikus felépítéséből következtettünk excentrikus tömegeloszlásra a Föld magjában. Ezen a nyomon elindulva jutottunk arra a felismerésre, hogy a geoid alak fő része (kb. kétharmada) két forgásszimmetrikus alak összege; kisebb része (mintegy egyharmada) pedig szabálytalan felszíni tömeginhomogenitásokra vezethető vissza. A forgásszimmetrikus alakok forgástengelyének irányai – mint említettük – jól megegyeznek a Föld mágneses terének fő irányaival. Ha feltesszük, hogy ez az egyezés nem véletlen jellegű, hanem tényleges fizikai kapcsolat,

akkor ezen tengelyek dőléspontjainak az idő folyamán ugyanúgy nyugati irányban kellene vándorolniuk, mint az excentrikus mágneses dipólusnak. A nagy mélységű gravitációs hatók ugyanolyan sebességű elmozdulása esetére kiszámítottuk a felszínen feltételezhető gravitációs évszázados változás értékét. A változás igen kicsi és sajnos a kultúrterületek általában egybeesnek a kis változású területekkel (20. ábra).

Ennek az évszázados változásnak a kimutatása nagyon nehéz, de az új lézertechnikai mérések alkalmazásával talán nem lehetetlen. Amennyiben a g értéke a tömegeknek ilyen átrendeződése során fellépő valamilyen kompenzáció folytán nem változik, akkor is a geoid alak változásában hasonló nyugati drifetet kellene találni. Ennek a megállapítása a gravitációs és mágneses terek összefüggésének döntő bizonyítéka volna, jelenleg azonban az összefüggés csak a jellegzetes pontok közelségére alapított hipotézis.

A gravitációs pontok helye a leírt módon elvileg teljes pontossággal számítható, a gyakorlatban azonban mégsem lehet a felszíni inhomogenitások zavaró hatását tökéletesen eltüntetni, a mérésre, illetve számításra gyakorolt hatását megszüntetni. Jóval nagyobb a hiba lehetősége a mágneses pontok esetén. Már Adolf Schmidt, amikor megadta a mágneses tér gömbfüggvényének együtthatói alapján a legjobban közelítő dipólus helyét (a megha-

tározás az volt, hogy a mágneses teret leíró gömbfüggvény 5 másodrendű tagjának száma bizonyos koordinátatranszformációk elvégzésével 1-re redukálható) tudatában volt az új fogalom bizonyos hipotetikus voltának, mert a Föld mágneses középpontja kifejezést következetesen idézőjelbe tette. Utódainál ez az idézőjel lekopott, tehát a fogalom hipotetikuságának a hangsúlyozása csökkent.

Mindezen definíciós, mérési és megközelítési okokból, mind a mágneses, mind a gravitációs jellemző pontok helyének meghatározását hiba terheli. Ezért szükséges az egyszerű egybeesés bizonyító ereje mellett megvizsgálni, hogy a gravitációs térben jelentkező évszázados változás, és abban felismerhető-e egy nyugati irányú drift. Amennyiben ez fennáll, akkor a logikai összefüggést fizikai összefüggésként kezelhetjük és belőle következőket vonhatunk le a földmag anyagainak fizikai tulajdonságaira; bekapcsolhatjuk a mechanikai energiákat a Föld belsejének energiaháztartásába és megadhatjuk néhány ismert jelenség (pl. a földmágneses dinamó, mágneses évszázados változás) energiahátterét.

LEHETSÉGES KUTATÁSI IRÁNYOK ÉS CÉLKITŰZÉSEK

A kutatás során néhány, a Földre vonatkozó adatrendszer vizsgáltunk meg. A hasonlóságokból, illetőleg különbözőségekből következtetéseket vontunk le, felhasználva a geofizika, geodézia, csillagászat néhány eredményét. A vizsgálatra általában Legendre polinomokat – gömbfüggvényeket – használtunk. Érdekes, hogy a matematika – kvantitatív leírás eszköze szerepén túlmenően – néhány esetben a lehetőségek reális határát megszabó megállapítások alapját is szolgáltatta.

A 60-as évek második felében védte meg Le Minh Triet vietnami aspiráns kandidátusi dolgozatát. A megvédése után 12 évvel visszatérve Budapestre doktori fokozatát is itt védte meg 1981-ben. Magnetohidrodinamikai számításai szerint a Föld belső magjának sajátrezgése a külső mag anyagában a szokásos anyagi tulajdonságok feltételezése mellett (sűrűség, viszkozitás stb.) 67 év, ami megfelel a mágneses sorozatokban több mint 30 éve felismert periódusnak.

Úgy látszik, hogy ez a félévszázados periódus alapvetően fontos a földmag folyamatainak értelmezésében; vizsgálata fontos új eredményeket ígér. Az előző vizsgálatokat negyedszázaddal ezelőtt ugyanis 1950-ig terjedő adatsorokkal lezártuk. Azóta ezek a sorozatok 30 évvel meghosszabbodtak és sok új obszer-

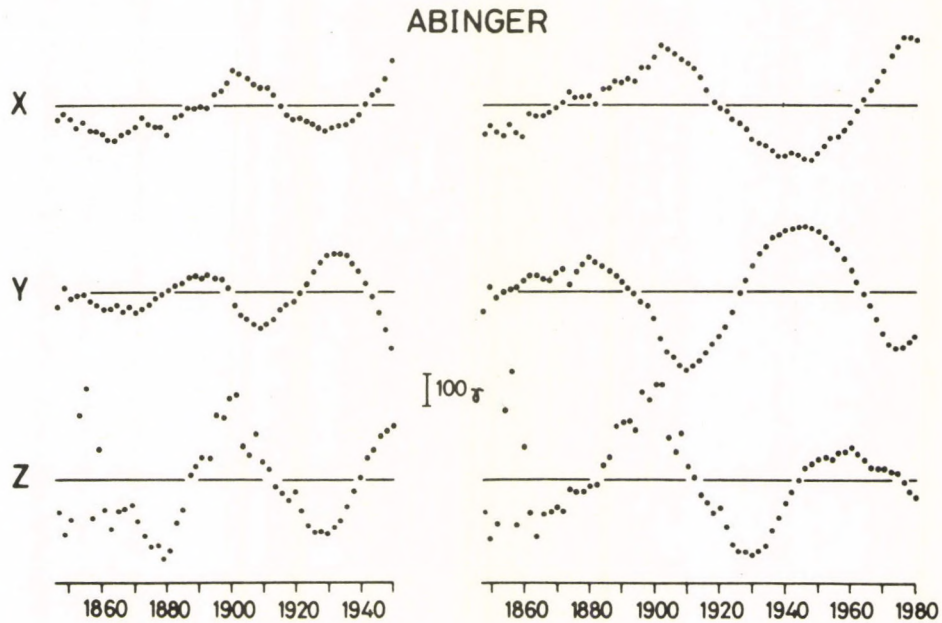
vatórium is tekintélyes hosszúságú, felhasználható adatsorral rendelkezik, kevesebb tehát az ismeretlen, obszervatórium nélküli terület.

A 30 évvel hosszabb sorozatokból egy újabb feldolgozással sok új információt nyerhetünk. Az első adatok jelzik, hogy a csavarvonal tovább folytatódik. A mai számítógépek lehetővé teszik ezeknek a térgörbéknek eddig el nem érhető részletességű vizsgálatát és sajátságaik nagy pontosságú összehasonlítását. Ezért a görbék az évszázados változást okozó folyamat részleteit világítják meg (21. ábra).

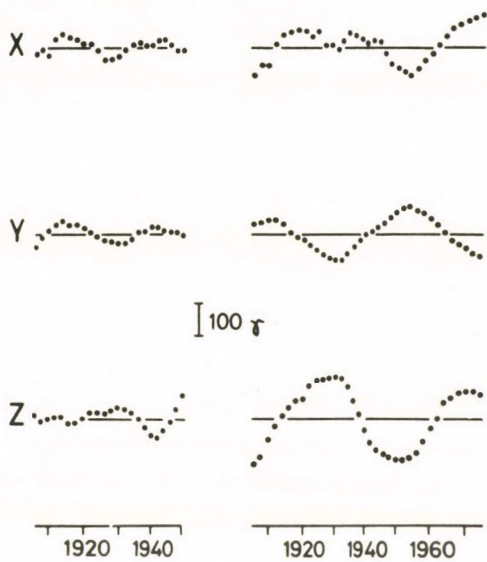
A félévszázados periódus jelentkezése és továbbkövetése a Föld forgási és mozgási folyamataiban is további fontos következtetések forrása lehet, de az összefüggés feltételezése még mindig hipotetikus. Ennek a hipotézisnek a megerősítése a geoid alak évszázados változásának kimutatásától nagymértékben függ és hosszú ideig tartó türelmes mérési és feldolgozási munkát igényel.

A belső mag nullgravitációs térben van, tehát nem úszik, hanem lebeg a környező külső maganyagban, az úzás törvénye ezért nem szabja meg a helyét. Mindmáig nem sikerült azonban az egyes tömegegyüttesek kölcsönhatását tekintetbe venni. A potenciálmélet szerint homogén gömbhéj belsejében a gravitációs tér ugyan zérus, de milyen lehet ez a hatás egy konfokális ellipszoid rendszerben; főleg akkor, ha tudjuk, hogy a külső tömegrészek homogenitása sem posztulálható egyér-

21. a. ábra



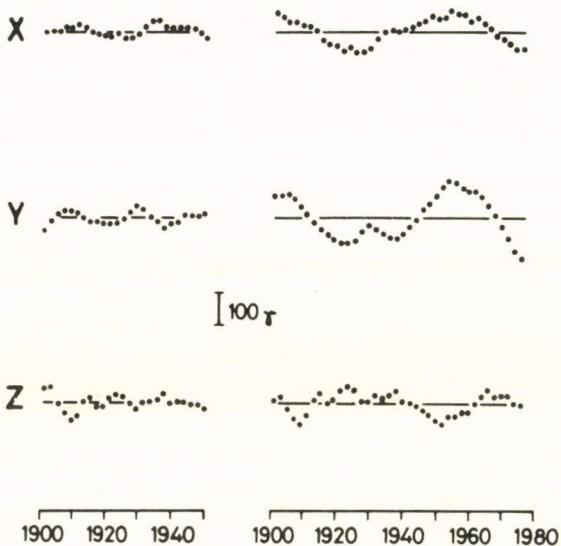
PILAR



21.b. ábra

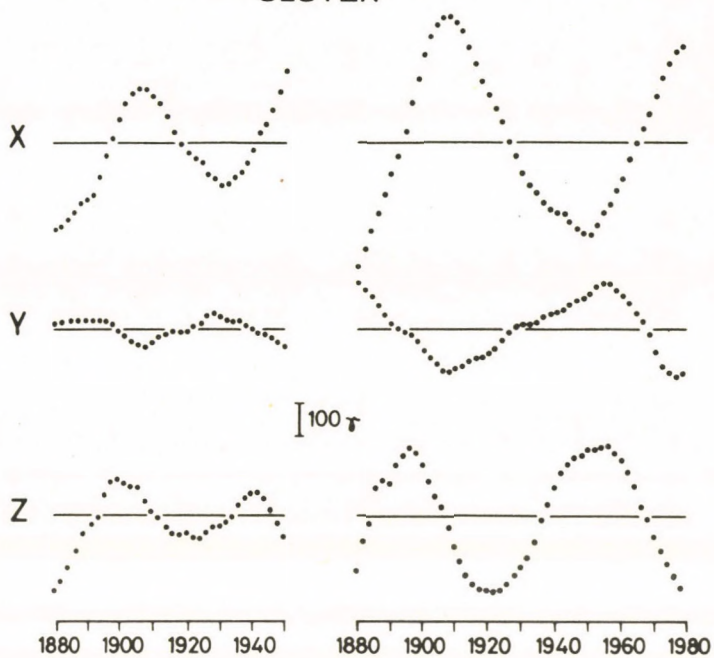
21.a-d. ábra. A földmágneses tér
évszázados változásának szuperponált
hulláma különböző obszervatóriumokban
1950-ig és 1980-ig

AMBERLEY



21.c. ábra

SLUTZK



21.d. ábra

telmüen. Kívánatos volna tehát a belső mag helyzetét a Föld külső magja és a köpeny-kéreg ismert szerkezeti elemeinek és a gömbi szerkezettől való eltérés és a tömegtartományok kölcsönhatásának teljes felhasználásával megállapítani.

Mindenesetre egy aszimmetrikus felépítésű Föld több szabadsági fokkal rendelkezik, ezért tágabb kutatási területet, hajlékonyabb gondolkodási lehetőséget biztosít számunkra, mint a szigorúan centrálszimmetrikus felfogás. A teljes centrálszimmetria a feltételezhető változások egész sorát kizárja a vizsgálati lehetőségek közül. Felszíni megfigyeléseink határozottan ellentmondanak a szigorú centrálszimmetriának, de nagy mélységben sem szabad ragaszkodni hozzá, esetleg kényelmi vagy szimmetria okokból, mert két erőterünk is világosan és mérhetően bizonyítja az aszimmetriát és számíthatóvá teszi annak a mértékét.

Hosszabb mágneses sorozatok felhasználásával, pontosabban definiált közelítési fogalmak alkalmazásával és a geoid alak minden irányú sajátosságainak állandó vizsgálatával eme nehéz, de a földfizika szempontjából rendkívül fontos feladat megoldását talán sikerül a jövőben az eddiginél is jobban megközelíteni.

APPENDIX I.

A geoidunduláció a földi gravitációs potenciál gömbfüggvény-együtthatóiból számítható; két azonos potenciálértékű felület, a geoid és egy őt jól közelítő ellipszoid sugárirányú különbsége. Ez a felület lényegében tehát potenciáljellegű mennyiség, amelyet a Föld tömegeloszlásának szabályostól eltérő része hoz létre.

A geoidunduláció-függvény értékeit az origótól különböző távolságokban is számíthatjuk; az azonos távolságokban számított függvényértékek adják a Föld tömegrendellenességeit jellemző nívófelületek alakját. Elég nagy távolságban a Föld felszínétől a felszíni rendellenességek hatása nyilvánvalóan igen csekély. A nívófelület ingadozása azonban nem csökken ennek megfelelően. Például a felszíntől 6000 km magasságban a felszíni tömegzavarok becsült maximális hatása kb. 1 m, az unduláció-értékek maximuma viszont 35 m. Ennek megfelelően a felületsereget két függvény összegére bonthatjuk. Az egyik a felszíni tömegzavarokat írja le, ennek értéke a magassággal gyorsan csökken. A másik részt nyilvánvalóan sokkal nagyobb tömegű és nagyobb mélységű hatók okozzák, ezt hívjuk a geoid fő részének. A geoidképen ez lényegében a hat nagy anomáliának felel meg.

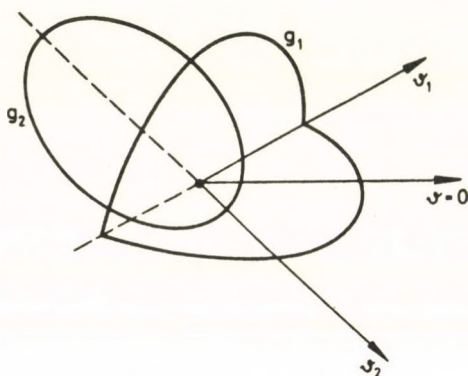
Számításokkal igazoltuk, hogy a geoid fő részének bármely nívófelülete egyértelműen előállítható két hengersizmetrikus felület sugárirányú összegeként. Az Appendix II. tételében bizonyítjuk, hogy csak hengersizmetrikus tömegeloszlás nívófelületserege hengersizmetrikus. Ennek alapján tehát megállapítható, hogy a geoid fő részét két hengersizmetrikus ható hozza létre. Ez az előállítás egyértelmű, vagyis ha kettőnél több ható feltételezésével kívánjuk magyarázni a geoid fő részét, ez csak a két, általunk meghatározott hengersizmetrikus ható részekre osztásával történhet.

Számításaink szerint a geoid fő része tehát két hengersizmetrikus felület sugárirányú összege. Ez a megállapítás nemcsak egyszerű közelítő számításra alapul. Megfelelően választott, hengersizmetrikus felületeket leíró zonális gömbfüggvény-sorok összege ugyanis meglepően kis hibával közelíti a geoidundulációkat. A potenciál additív volta miatt pusztán ennek alapján azonban a hatókra vonatkozóan még nem

tehetnénk konkrét megállapításokat. Nem is szólva arról, hogy egy közelítés pontossága numerikus eszközökkel (pl. ügyesebb függvénysor választása, a sor tagszámának növelése stb.) sokféleképpen javítható. Két hengersizmetrikus felület sugárirányú összege azonban rendelkezik olyan analitikus tulajdonsággal, amellyel más felület nem: egyenletét egyértelműen meghatározza a szimmetriatengelyek síkjába eső síkmetszetét leíró függvény. Ezt a tulajdonságot ismerte fel Barta György a geoid vizsgálata során [6].

A következőkben ezt a tulajdonságot bizonyítom.

Jelölje ϑ a síkbeli polárszöget. Legyen a g_1 görbe a ϑ_1 , a g_2 pedig a ϑ_2 irányra szimmetrikus síkgörbe; mindkét görbe zárt.



Jelöljük g_1 , ill. g_2 -vel a görbék síkbeli polárkoordinátás egyenletét. A szimmetria miatt független változónak a $\vartheta - \vartheta_1$, ill. a $\vartheta - \vartheta_2$ szögek koszinuszait választhatjuk.

A görbéket leíró egyenletek:

$$g_1 = g_1 [\cos (\vartheta - \vartheta_1)];$$

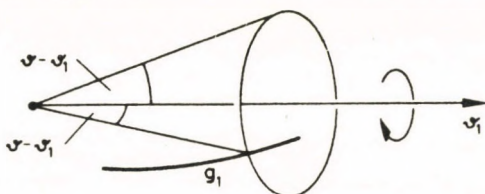
$$g_2 = g_2 [\cos (\vartheta - \vartheta_2)].$$

Jelölje g a két görbe sugárirányú összegét. Síkbeli polárkoordinátás egyenlete:

$$g = g_1 [(\cos(\vartheta - \vartheta_1))] + g_2 [\cos(\vartheta - \vartheta_2)].$$

A g_1 ill., a g_2 görbékét válasszuk úgy, hogy a g által határolt tartomány egyszerűen összefüggő legyen.

Forgassuk meg a térben mindkét görbét a saját szimmetriatengelye körül. Két hengersizmetrikus felület keletkezik. A felületeket egyértelműen meghatározza a g_1 , ill. a g_2 függvény. Ha a ϑ_1 , ill. a ϑ_2 irányoktól mért térbeli szögek gömbi koszinuszait választjuk független változónak, akkor nyilvánvalóan mindkét felületet ugyanaz a függvény írja le, mint a megfelelő síkgörbét.



Következésképpen a két felület sugárirányú összegeként keletkező felület egyenlete ezekben a speciális térszögváltozóknál ugyanaz, mint a g görbe egyenlete a megfelelő síkbeli szögek függvényeként.

Maga az összefelület nyilván tükörszimmetrikus a ϑ_1 és a ϑ_2 irányok által kijelölt síkra. A g_1 által meghatározott felület ugyanis szimmetrikus minden, a ϑ_1 irányt tartalmazó síkra; hasonló igaz a g_2 és a ϑ_2 vonatkozásában. Ezért a ϑ_1 -et és a ϑ_2 -t tartalmazó sík valóban szimmetriasíkja az összefelületnek.

Mivel a g zárt és egyszerűen összefüggő síkrészt határol, ezért a két hengersizmetrikus felület is zárt, és egyszerűen összefüggő tértartomány határa.

Végiggondolva az összefelület származtatásának módját, nyilvánvaló, hogy három görbe, és a nekik megfelelő három felület vonatkozásában is igaz lehet a fenti megállapítás. Ha a három szimmetriatengely egy síkban fekszik, és a három egyenes éppen az origóban metszi egymást, az összefelület egyenlete megegyezik a szimmetriasíkban lévő metszetgörbe egyenletével a megfelelő szögváltozóknál. Van azonban egy lényeges matematikai különbség a szimmetriasíkban lévő

metszetgörbék között. Feltételünk szerint a g korlátos és folytonos a $[0, 2\pi]$ intervallumon, következésképpen a Fourier sora elő is állítja a g görbét, legalábbis majdnem mindenütt. Azaz a g megadható

$$g(\vartheta) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot \cos n\vartheta + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \cdot \sin n\vartheta$$

alakban. Ez egyszerűen átrendezhető az

$$\left\{ 1, \cos n(\vartheta - \vartheta_1), \cos n(\vartheta - \vartheta_2) \right\}_{n=1}^{\infty}$$

rendszer tagjai szerint haladó sorra; megfelelő ϑ_1, ϑ_2 szögek esetén a rendszer tagjai lineárisan függetlenek. Két szimmetrikus síkgörbe összege tehát egyértelműen felírható a

$$\cos n(\vartheta - \vartheta_1), \cos n(\vartheta - \vartheta_2)$$

argumentumok függvényeként. Három görbe esetén ez már nem igaz, mert a

$$\cos n(\vartheta - \vartheta_1), \cos n(\vartheta - \vartheta_2), \cos n(\vartheta - \vartheta_3)$$

függvények lineárisan összefüggők tetszőlegesen rögzített $\vartheta_1, \vartheta_2, \vartheta_3$ esetén minden n természetes számra. Szemléletesen ez azt jelenti, hogy három (következőképpen akárhány) szimmetrikus síkgörbe összege – egy síkban fekvő szimmetriatengelyeik az origóban metszik egymást – mindig felírható két ilyen tulajdonságú görbe összegeként.

Foglaljuk össze a hengersizmetrikus felületek sugáriányú összegére vonatkozó megállapításainkat.

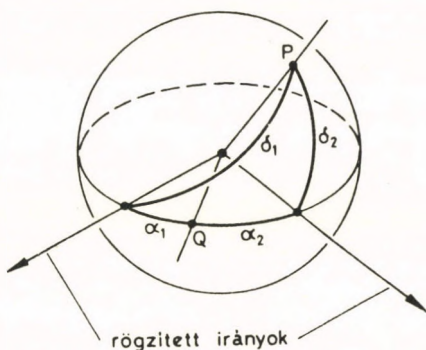
Legyen egy zárt felület egyenlete az egységgömb tetszőleges P pontján áthaladó irányban a 3. ábra jelöléseivel:

$$g(P) = g_1(\cos \delta_1) + g_2(\cos \delta_2),$$

ahol a $\cos \delta_1$, ill. a $\cos \delta_2$ két rögzített térbeli iránnyal bezárt szög gömbi cosinusa. Ez az egyenlet nyilván megegyezik a rögzített irányok síkjába eső metszetgörbe egyenletével. A szimmetriasík tetszőleges Q gömbfelületi pontjában:

$$g(Q) = g_1(\cos \alpha_1) + g_2(\cos \alpha_2),$$

ahol az α_1 , ill. az α_2 síkbeli szögek.



A g függvény által meghatározott felület két hengerszimmetrikus felület sugárirányú összege. Az előbbieknél alapján nyilvánvaló, hogy ez a felület rendelkezik azzal a tulajdonsággal, hogy egy síkmetszetének egyenlete egyértelműen meghatározza magát a teljes felületet.

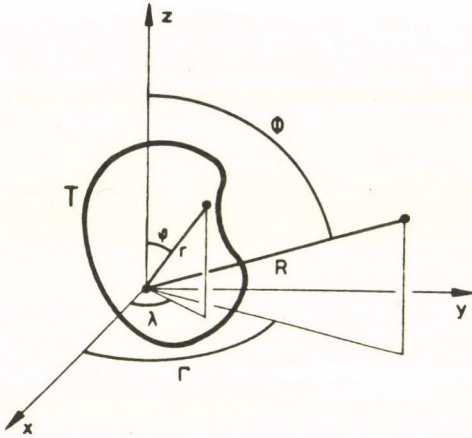
A geoid fő része ilyen tulajdonságú. Ezt úgy igazoltuk, hogy kétféle közelítő számítással határoztuk meg két zonális gömbfüggvénysor összegének számegettehetőit. Az egyikben a geoid teljes adatrendszerét kiegyenlítettük, a másikban csak a gömbfüggvénysorok szimmetriatengelyeinek síkjába eső részét. Ha a szimmetriatengelyek irányainak geocentrikus koordinátái $(74^\circ, 59,5^\circ)$, $(90^\circ, 163,5^\circ)$, akkor a kétféle közelítéssel nyert – megfelelő – számegettehetőek megegyeznek. A geoid fő részét tehát valóban egyértelműen meghatározza egyetlen síkmetszete.

A következő tétel alapján pedig magára a ható okra tehetünk hasonló megállapítást: a geoid fő részét két hengerszimmetrikus tömegeloszlású ható hozza létre.

APPENDIX II.

Tétel: Egy test gravitációs potenciálfüggvénye akkor és csak akkor hengerszimmetrikus függvény, ha a test maga is hengerszimmetrikus tömegeloszlású.

Jelölések:



A T gravitációs ható tetszőleges belső pontjának gömbi koordinátái: (r, φ, λ) , az (R, Φ, Γ) pedig egy hatón kívüli pont gömbi koordinátáit jelöli a 4. ábra szerint.

A T gravitációs hatót két függvény határozza meg:

1. $\sigma = \sigma(r, \varphi, \lambda)$, a T sűrűségfüggvénye,
2. $\rho = \rho(\varphi, \lambda)$, a T-t határoló felület egyenlete.

Legyen az U a T gravitációs potenciálfüggvénye a tér T-n kívüli pontjaiban.

Állítás: az U potenciálfüggvény akkor és csak akkor hengerszimmetrikus függvény, ha a T ható is hengerszimmetrikus, azaz

$$U(R, \Phi, \Gamma) = U(R, \Phi)$$

akkor és csak akkor, ha

$$\sigma(r, \varphi, \lambda) = \sigma(r, \varphi),$$

$$\rho(\varphi, \lambda) = \rho(\varphi).$$

Bizonyítás

1. Ha a ható hengersizmetrikus, az állítás nyilvánvaló.
2. Az állítás megfordításának bizonyításához felírjuk egy tetszőleges, a λ -tól is függő T ható potenciáljának gömbfüggvénysorát. Kihazsnálva a függvénysor hengersizmetrikus voltát, a sor számegyütthetőit előállító határozott integrálokból leolvasható az állítás.

A σ és a ρ által meghatározott T ható potenciálja gömbi koordinátákban:

$$U(R, \Phi, \Gamma) = \int_{\varphi=0}^{\pi} \int_{\lambda=0}^{2\pi} \int_{r=0}^{\rho(\varphi, \lambda)}$$

$$\sigma(r, \varphi, \lambda) r^2 \sin \varphi \, dr \, d\lambda \, d\varphi$$

$$\sqrt{r^2 + R^2 - 2rR(\cos \varphi \cos \Phi + \sin \varphi \sin \Phi \cos(\lambda - \Gamma))}$$

Nyilvánvaló, hogy a σ és a ρ függvényről feltételezhetjük az összes szükséges analitikus tulajdonságot (pl. a σ folytonos, a ρ egyszeresen összefüggő, az integrálási tartomány normáltartomány stb.), hiszen a potenciál additív függvény. A kedvezőtlen tulajdonságú T hatót addig oszthatjuk részekre, amíg valamennyi részható megfelel a feltételeknek.

Az integrandusban éppen a gömbfüggvénysor generátorfüggvénye szerepel, ezért:

$$U(R, \Phi, \Gamma) = \int_{\lambda=0}^{2\pi} \int_{\varphi=0}^{\pi} \int_{r=0}^{\rho(\varphi, \lambda)} \sigma(r, \varphi, \lambda) \cdot$$

$$\cdot \sin \varphi \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^n \frac{r^{n+2}}{R^{n+1}} \cdot P_{nm}(\cos \varphi) \cdot$$

$$\cdot P_{nm}(\cos \Phi) \cdot \cos m(\lambda - \Gamma) \, dr \, d\varphi \, d\lambda.$$

Az összegzés és integrálás sorrendje felcserélhető, lévén az integrandus egyenletesen konvergens függvénysor:

$$U(R, \Phi, \Gamma) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^n \frac{1}{R^{n+1}} \cdot P_{nm}(\cos \Phi) \cdot \\ \cdot [I_{nm} \cos m\lambda + I_{nm}^* \sin m\lambda],$$

ahol

$$I_{nm} = \int_{\lambda=0}^{2\pi} \int_{\varphi=0}^{\pi} \int_{r=0}^{\rho(\varphi, \lambda)} \sin \varphi \cdot \sigma(r, \varphi, \lambda) \cdot r^{n+2} \cdot \\ \cdot P_{nm}(\cos \varphi) \cos m\lambda \, dr \, d\varphi \, d\lambda,$$

$$I_{nm}^* = \int_{\lambda=0}^{2\pi} \int_{\varphi=0}^{\pi} \int_{r=0}^{\rho(\varphi, \lambda)} \sin \varphi \cdot \sigma(r, \varphi, \lambda) \cdot r^{n+2} \cdot \\ \cdot P_{nm}(\cos \varphi) \sin m\lambda \, dr \, d\varphi \, d\lambda.$$

A feltétel szerint a potenciálfüggvény hengersizmetrikus:

$$U(R, \Phi, \Gamma) = U(R, \Phi),$$

Ezért a gömbfüggvénysorokban csak a zonális tagok együtt-
hatói nem nullák:

$$U(R, \Phi, \Gamma) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{R^{n+1}} \cdot P_n(\cos \Phi) \cdot I_{n0},$$

azaz

$$I_{nm} = 0, \quad \text{ha} \quad m \neq 0, \\ I_{nm}^* = 0.$$

Az U hengersizmetrikus voltából tehát

$$\int_{\lambda=0}^{2\pi} \cos m\lambda \int_{\varphi=0}^{\pi} \int_{r=0}^{\rho(\varphi, \lambda)} \sin \varphi \cdot P_{nm}(\cos \varphi) \cdot$$

$$\cdot r^{n+2} \sigma(r, \varphi, \lambda) dr d\varphi d\lambda = 0,$$

$$\int_{\lambda=0}^{2\pi} \sin m\lambda \int_{\varphi=0}^{\pi} \int_{r=0}^{\rho(\varphi, \lambda)} \sin \varphi \cdot P_{nm}(\cos \varphi) \cdot$$

$$\cdot r^{n+2} \sigma(r, \varphi, \lambda) dr d\varphi d\lambda = 0$$

következik. A belső kettősintegrál mint a λ függvénye tehát ortogonális a

$$\{\cos m\lambda, \sin m\lambda\}$$

rendszer elemeire. Ebből, és a trigonometrikus rendszer teljességéből következik, hogy

$$\int_{\varphi=0}^{\pi} \sin \varphi \cdot P_{nm}(\cos \varphi) \int_{r=0}^{\rho(\varphi, \lambda)} r^{n+2} \cdot \sigma(r, \varphi, \lambda) dr d\varphi = C_{nm}$$

konstans $n, m = 1, 2, \dots$ esetén. Következésképpen a belső integrál eredménye csak a φ -től függhet:

$$\int_{r=0}^{\rho(\varphi, \lambda)} r^{n+2} \cdot \sigma(r, \varphi, \lambda) dr = D_n(\varphi).$$

Bizonyítani csak a σ és a ρ λ -tól való függetlenségét szeretnénk, ezért a φ -től való függés jelölését elhagyjuk a továbbiakban a rövidebb írásmód kedvéért.

Az U hengerszimmetrikus voltából tehát végeredményként a következő azonossághoz jutunk:

$$\int_{r=0}^{\rho(\lambda)} r^{n+2} \cdot \sigma(r, \lambda) dr = D_n$$

konstans $n = 1, 2, \dots$ esetén.

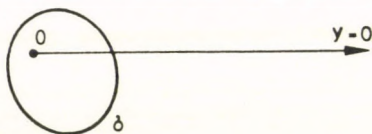
A segéd­tétel szerint ez akkor és csak akkor állhat fenn, ha

$$\sigma(r, \lambda) = \sigma(r),$$

$$\rho(\lambda) = \rho \quad \text{konstans,}$$

azaz a ható heng­erszimmetrikus test.

Segéd­tétel: Jelölje az r és a λ a sík tetszőleges pontjának polárkoordinátáit. Legyen a ρ olyan zárt folytonos görbe, amelyre



$$0 < \rho(\lambda) < 1, \lambda \in [0, 2\pi].$$

Legyen a σ folytonos függvény a ρ által határolt tartományban. Jelölje az f_n a következő függvényt:

$$f_n(\lambda) = \int_{r=0}^{\rho(\lambda)} r^n \cdot \sigma(r, \lambda) \, dr, \quad n = 1, 2, \dots \quad (1)$$

Állítás: Az f_n akkor és csak akkor a λ -tól független konstans minden n természetes számra, ha a ρ éppen egy körvonal, és a σ heng­erszimmetrikus függvény, azaz

$$f_n(\lambda) = D_n \quad \text{konstans} \quad (2)$$

akkor és csak akkor, ha

$$\sigma(r, \lambda) = \sigma(r) \quad \text{és} \quad (3)$$

$$\rho(\lambda) = \rho \quad \text{konstans.}$$

Bizonyítás

A (3)-ban foglalt két feltétel teljesüléséből nyilvánvalóan következik a (2) fennállása.

Most bizonyítjuk, hogy a (2)-ből is következik a (3). Nyilvánvaló, hogy a (3) két állítása közül elegendő az egyiket belátni, a másik ebből már következik.

Bizonyítani fogjuk tehát a következőt: Ha

$$\int_0^{\sigma(\lambda)} r^n \cdot \sigma(r, \lambda) dr = D_n, \quad n = 1, 2, \dots$$

akkor

$$\rho(\lambda) = \rho \quad \text{konstans.}$$

Jelölje G az (1) primitív függvényét:

$$G(r, \lambda) = \int r^n \cdot \sigma(r, \lambda).$$

Megállapíthatjuk, hogy a G mint az r függvénye nem azonosan konstans, hiszen

$$\frac{\partial G(r, \lambda)}{\partial r} = r^n \cdot \sigma(r, \lambda) \neq 0. \quad (4)$$

A feltétel szerint:

$$G(r, \lambda) \Big|_{r=\rho(\lambda)} - G(r, \lambda) \Big|_{r=0} = D_n.$$

Mivel a G értéke az alsó határon éppen a függvény origóbeli G_0 számértéke, ezért:

$$G(\rho(\lambda), \lambda) = D_n + G_0 = A \text{ konstans}$$

vagyis a primitív függvény a ρ görbén konstans értékű. Számítsuk ki az $n + 1$ -edik integrált a G felhasználásával, parciális integrálással:

$$\begin{aligned}
 D_{n+1} &= \int_0^{\rho(\lambda)} r \cdot r^n \cdot \sigma(r, \lambda) \, dr = \\
 &= [r \cdot G(r, \lambda)]_0^{\rho(\lambda)} - \int_0^{\rho(\lambda)} G(r, \lambda) \, dr = \\
 &= \rho(\lambda) \cdot A - \int_0^{\rho(\lambda)} G(r, \lambda) \, dr,
 \end{aligned}$$

amiből

$$\int_0^{\rho(\lambda)} G(r, \lambda) \, dr = \rho(\lambda) \cdot A - D_{n+1}. \quad (5)$$

A G_0 -ra vonatkozó meggondoláshoz hasonlóan az (5) integrál alsó határon vett értéke szintén a λ -tól független konstans, ezért az (5) G^* primitív függvénye:

$$G^*(r, \lambda) = A \cdot r.$$

Innen:

$$G(r, \lambda) = \frac{\partial G^*(r, \lambda)}{\partial r} = A \quad \text{konstans,}$$

ellentmondásban a (4)-ben foglalt megállapítással. Vagyis a ρ görbe nem függhet a λ -tól, körvonal egyenlete. Ezzel tehát bizonyítottuk, hogy hengersizmetrikus nívófelületseveget csak hengersizmetrikus eloszlású tömeg hozhat létre.

IRODALOM

1. BARTA GY.: *A földmágneses tér évszázados változásának 44 éves periódusáról*, Geofizikai Közlemények, III. 1. 1954. 2–24.
2. BARTA GY.: *A földmágneses tér évszázados változásának longitudinális és transzverzális effektusa*, Geofizikai Közlemények, VII. 1. 1958. 3–31.
3. BARTA GY.: *A Föld mágneses sarkainak és középpontjának időbeli vándorlásáról*, Geofizikai Közlemények, VIII. 1–2. 1959. 3–17.
4. BARTA GY.: *A földmágneses tér évszázados változásáról*, Geofizikai Közlemények, VI. 1–2. 1957. 29–35.
5. BARTA GY.: *A földmágneses tér excentricitásának kapcsolata a Föld háromtengelyűségével*, Geofizikai Közlemények, X. 1–4. 1962. 45–62.
6. BARTA GY.: *A Föld erőtereinek évszázados változásáról és torzultságáról*, MTA X. Oszt. Közl. 2–4. 1971. 91–103.

A kiadásért felel az Akadémiai Kiadó és Nyomda Főigazgatója

Felelős szerkesztő: Klaniczay Júlia

A tipográfia és a kötésterv Löblin Judit munkája

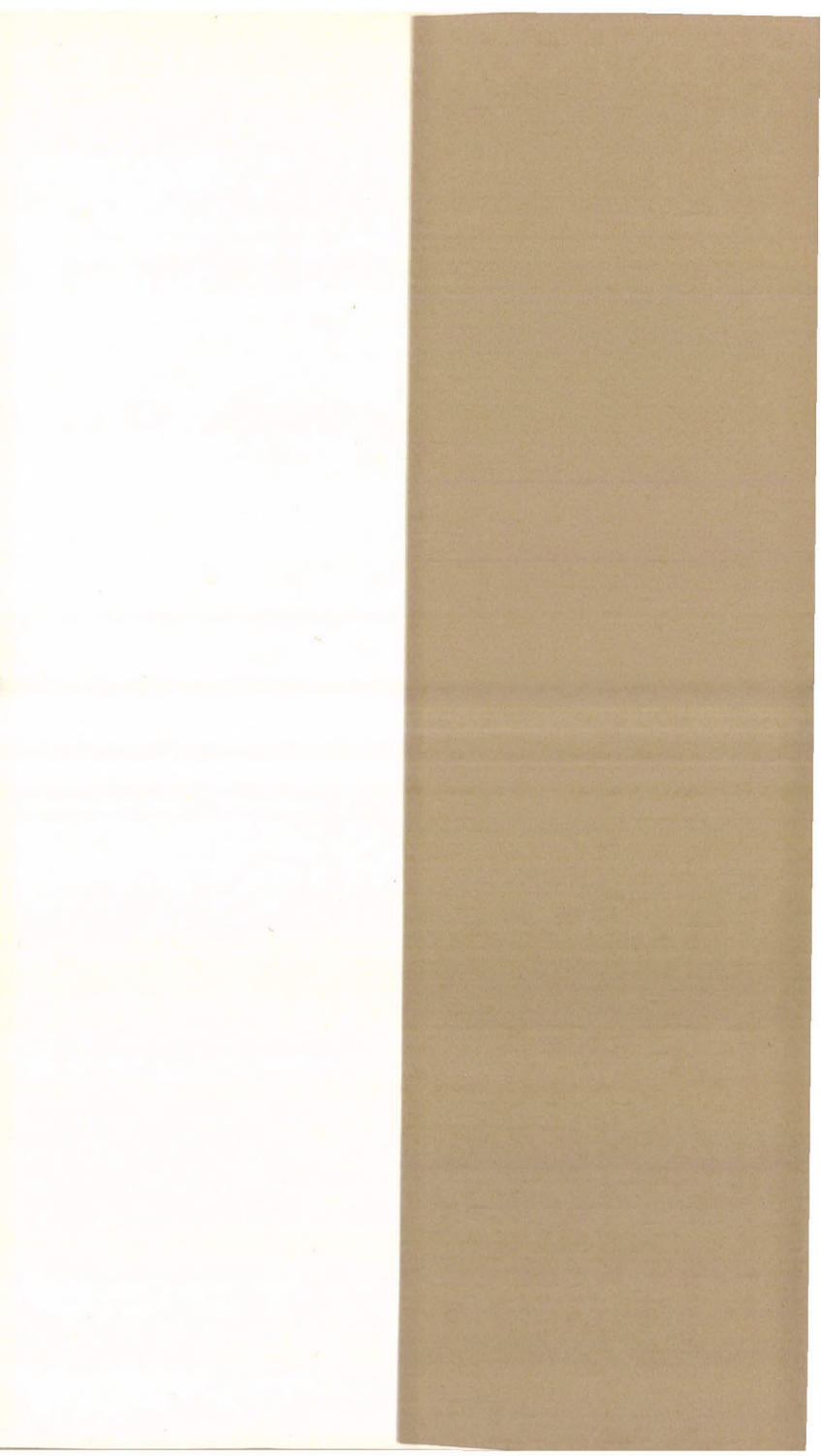
Műszaki szerkesztő: Érdi Júlia

Terjedelem: 3,16 (A/5) ív – AK 1647 k 8487

HU ISSN 0236-6258

13125 Akadémiai Kiadó és Nyomda

Felelős vezető: Hazai György



Ára: 21,- Ft