ÉRTEKEZÉSEK
EMLÉKEZÉSEK

RÉVÉSZ PÁL

MENNYIRE VÉLETLEN A VÉLETLEN?

1828

24

AKADÉMIAI KIADÓ, BUDAPEST

ÉRTEKEZÉSEK
EMLÉKEZÉSEK

ÉRTEKEZÉSEK EMLÉKEZÉSEK

SZERKESZTI

TOLNAI MÁRTON

RÉVÉSZ PÁL

MENNYIRE VÉLETLEN A VÉLETLEN?

AKADÉMIAI SZÉKFOGLALÓ

1982. NOVEMBER 1.

AKADÉMIAI KIADÓ, BUDAPEST

A kiadványsorozatban a Magyar Tudományos Akadémia 1982. évi CXLII. Közgyűlése időpontjától megválasztott rendes és levelező tagok székfoglalói — önálló kötetben — látnak napvilágot.

A sorozat indításáról az Akadémia főtitkárának 22/1/1982. számú állásfoglalása rendelkezett.

ISBN 963 05 3514 9

A kiadásért felel az Akadémiai Kiadó és Nyomda főigazgatója
Felelős szerkesztő: Klaniczay Júlia
A tipográfia és a kötésterv Löblin Judit munkája
Műszaki szerkesztő: Érdi Júlia
Terjedelem: 1,98 (A/5) ív
AK 1554 k 8486
84.12651 Akadémiai Kiadó és Nyomda, Budapest
Felelős vezető: Hazai György

Printed in Hungary

BEVEZETÉS

Ily módon összekapcsolva a matematikai bizonyítások szabatosságát a véletlen bizonytalanságával, és ezeket a látszólag homlokegyenest ellenkező dolgokat egymással kibékítve, e tan joggal tarthat igényt a következő, mindkét ellentétes alkotóelem nevét kölcsönvevő, valóban meghökkentő elnevezésre: a véletlen matematikája ([10], [11])

Első fiktív Pascal-levelében Rényi ezeket a valóban Pascaltól származó sorokat idézi. Majd ugyanezt a gondolatot folytatva a harmadik Pascal-levélben így ír: „A véletlen fogalmát évszázadokon át babonás hit övezte, és azt hiszem, ez tartotta vissza az embereket attól, hogy a véletlen jelenségeket megpróbálják tudományos vizsgálat tárgyává tenni." Úgy gondolom, hogy valóban igaza van Rényinek, amikor azt állítja, hogy a valószínűségszámítás viszonylag késői kialakulásának az az oka, hogy a matematikusok Pascal és Fermat előtt nem hittek abban, hogy a véletlen jelenségek is szigorú törvényszerűségeket követnek, amelyeket matematikai eszközökkel lehet tárgyalni.

Borel csak 1909-ben bizonyította be a nagy számok erős törvényét (illetve annak legegyszerűbb alakját), amely azt állítja, hogy *egy szabályos pénzdarab egymás utáni dobásai során* *a fej relatív gyakorisága* 1 *valószínűséggel* 1/2-*hez konvergál.* Ez volt az első szabatosan bizonyított tétel, amely azt állította, hogy egy véletlen sorozat elég hosszú idő (elég sok dobás) után 1 valószínűséggel tetszőlegesen közel kerül egy konstanshoz, vagyis lényegében determinisztikussá válik.

Borelnek ez a tétele ma már mindenki számára természetesnek tűnik, de gondoljuk meg, hogy bár mindennapi tapasztalatainkból jól ismert tényről van szó, mégis a józan ész számára egyáltalán nem világos, hogy egy véletlen sorozat (a fej-dobások relatív gyakorisága) miért követ bármilyen törvényszerűséget 1 valószínűséggel.

Ugyancsak klasszikus eredmény a következő: legyen $X_1, X_2 \ldots$ független (0, 1) paraméterű normális eloszlású valószínűségi változók sorozata, és legyen

$$X_n^* = \max_{1 \leq k \leq n} X_k.$$

Ekkor

$$\lim_{n \to \infty} (X_n^* - \sqrt{2 \log n}) = 0$$

1 valószínűséggel. Vagyis elég nagy n esetén az n elemű $X_1, X_2, \ldots, X_n$ minta legnagyobb elemének értéke szinte determinisztikus lesz, lényegében $\sqrt{2 \log n}$-nel lesz egyenlő.

Azt hiszem, azok is, akik Borel említett tételét, a nagy számok erős törvényét a nyilvánvaló, világos dolgok közé sorolják, ezen utóbbi tételre már nem fogják azt állítani, hogy természetes.

Jelen dolgozatban néhány további, ilyen jellegű, meglepő példát kívánunk bemutatni. Nevezetesen olyan véletlen sorozatokat fogunk vizsgálni, amelyek előbb-utóbb közel olyan viselkedést mutatnak, mintha determinisztikus sorozatok lennének.

A szereplő tételek bizonyítását itt nem fogjuk közölni, de utalunk arra, hogy a bizonyításokat hol lehet megtalálni.

DEFINÍCIÓK

Legyen $X_1, X_2, \ldots$ valószínűségi változók egy sorozata, azt mondjuk, hogy

1. Definíció. Az $\alpha(n)$ $(n = 1, 2, \ldots)$ függvény az (X_n) sorozat felső-felső osztályába tartozik $(\alpha(n) \in FFO(X_n))$, ha 1 valószínűséggel véges sok n kivételével

$$X_n < \alpha(n).$$

Ez a feltétel úgy is fogalmazható, hogy: létezik olyan 1 valószínűséggel véges, egész értékű n_0 valószínűségi változó, hogy $n \geqq n_0$ esetén $X_n < \alpha(n)$.

2. Definíció. A $\beta(n)$ $(n = 1, 2, \ldots)$ függvény az (X_n) sorozat felső-alsó osztályába tartozik, $(\beta(n) \in FAO(X_n))$, ha 1 valószínűséggel végtelen sok n-re

$$X_n \geqq \beta(n).$$

3. Definíció. A $\gamma(n)$ $(n = 1, 2, \ldots)$ függvény az (X_n) sorozat alsó-felső osztályába tartozik $(\gamma(n) \in AFO(X_n))$, ha 1 valószínűséggel végtelen sok n-re

$$X_n \leqq \gamma(n).$$

4. Definíció. A $\delta(n)$ $(n = 1, 2, \ldots)$ függvény az (X_n) sorozat alsó-alsó osztályába tartozik

($\delta(n) \in AAO(X_n)$), ha 1 valószínűséggel véges sok n kivételével

$$X_n > \delta(n).$$

1. Megjegyzés. Nyilvánvaló, hogy minden olyan függvény, amely nem tartozik az (X_n) sorozat felső-felső osztályába, eleme a felső-alsó osztálynak, azaz $FFO(X_n)$ komplementer halmaza $FAO(X_n)$. Hasonlóan $AAO(X_n)$ komplementer halmaza $AFO(X_n)$.

2. Megjegyzés. A fenti 4 definíció lényegében P. Lévytől származik (1937).

5. Definíció. Valószínűségi változóknak egy $X_1, X_2, \ldots$ sorozata aszimptotikusan kvázi determinisztikus (AKD), ha léteznek olyan $f_1(n) \leqq f_2(n)$ $(n = 1, 2, \ldots)$ determinisztikus függvények és olyan $C > 0$ állandó, hogy

$$\limsup_{n \to \infty} (f_2(n) - f_1(n)) \leqq C,$$

és 1 valószínűséggel véges sok n kivételével

$$f_1(n) \leqq X_n \leqq f_2(n).$$

6. Definíció. Valószínűségi változóknak egy $X_1, X_2, \ldots$ sorozata aszimptotikusan determinisztikus (AD), ha létezik olyan $f(n)$ $(n = 1, 2, \ldots)$ determinisztikus függvény, amelyre

$$\lim_{n \to \infty} (X_n - f(n)) = 0$$

1 valószínűséggel.

Az 5—6. definíciók világosabbá tétele érdekében talán érdemes a következő nyilvánvalóan ekvivalens definíciókat is megadni.

5.* Definíció. Valószínűségi változóknak egy $X_1, X_2, \ldots$ sorozata AKD, ha léteznek olyan $f_2(n) \in FFO(X_n)$ és $f_1(n) \in AAO(X_n)$ függvények, valamint olyan $C > 0$ állandó, amelyekre

$$\limsup_{n \to \infty} (f_2(n) - f_1(n)) \leqq C. \tag{1}$$

6.* Definíció. Valószínűségi változóknak egy $X_1, X_2, \ldots$ sorozata AD, ha léteznek olyan $f_2(n) \in FFO(X_n)$ és $f_1(n) \in AAO(X_n)$ függvények, amelyekre

$$\lim_{n \to \infty} (f_2(n) - f_1(n)) = 0.$$

3. Megjegyzés. Abban az esetben, ha $X_1, X_2, \ldots$ nem AKD, azaz nem léteznek olyan $f_2(n) \in FFO(X_n)$, $f_1(n) \in AAO(X_n)$ függvények, amelyekre (1) teljesül, akkor is elképzelhető, hogy találhatók olyan $f_2(n) \in FFO(X_n)$ és $f_1(n) \in AAO(X_n)$ függvények, amelyekre az $f_2(n) - f_1(n)$ különbség igen „lassan" tart végtelenhez. Ilyen esetekben azt mondhatjuk, hogy az $X_1, X_2, \ldots$ sorozat „kevéssé véletlen". Ilyen értelemben a felső-felső, illetve alsó-alsó osztályok együttesen válaszolnak arra a kérdésre, hogy valószínűségi változóknak egy $X_1, X_2, \ldots$ sorozata „mennyire véletlen".

4. Megjegyzés. Az $X_1, X_2, \ldots$ valószínűségi változó sorozat helyett egy $(X_t;\ t \geqq 0)$ sztochasztikus folyamatot vizsgálva triviálisan megadható a fenti hat definíció folytonos megfelelője.

(i) Legyen $Y_1, Y_2, \ldots$ független, egyforma eloszlású valószínűségi változók sorozata, közös eloszlásuk legyen

$$\mathbb{P}(Y_i = +1) = \mathbb{P}(Y_i = -1) = 1/2 \qquad (i = 1, 2, \ldots).$$

Továbbá legyen

$$X_n = \frac{Y_1 + Y_2 + \ldots + Y_n}{n} \qquad (n = 1, 2, \ldots).$$

A nagy számok erős törvényének a Bevezetésben említett Borel-féle alakja szerint

$$\lim_{n \to \infty} X_n = 0$$

1 *valószínűséggel.*
Fenti definíciók felhasználásával ez a tény a következőképpen fogalmazható: *tetszőleges* $\varepsilon > 0$ *esetén*

$$\alpha(n) \equiv \varepsilon \in FFO(X_n), \tag{2}$$

$$\beta(n) \equiv -\varepsilon \in FAO(X_n), \tag{3}$$

$$\gamma(n) \equiv \varepsilon \in AFO(X_n), \tag{4}$$

$$\delta(n) \equiv -\varepsilon \in AAO(X_n), \tag{5}$$

az (X_n) *sorozat AD.*

(ii) Borel tétele természetesen nem adja meg az (X_n) sorozat négy osztályának pontos jellemzését. A pontos jellemzés megtalálásával számos kutató foglalkozott, végül Erdős (1942) és Feller (1943) a következő eredményre jutottak. *Legyen $f(n)$ monoton növekvő függvény és legyen*

$$I(f) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f(n)}{n} e^{-\frac{f^2(n)}{2}}.$$

Ekkor

$$\sqrt{n} f(n) \in FFO(X_n), \quad \text{ha} \quad I(f) < \infty,$$

$$\sqrt{n} f(n) \in FAO(X_n), \quad \text{ha} \quad I(f) = \infty,$$

$$-\sqrt{n} f(n) \in AFO(X_n), \quad \text{ha} \quad I(f) = \infty,$$

$$-\sqrt{n} f(n) \in AAO(X_n), \quad \text{ha} \quad I(f) < \infty.$$

5. Megjegyzés. Ez az eredmény pontosan megadja, hogy a monoton függvények közül melyik melyik osztályba tartozik. Nem ad választ azonban arra a kérdésre, hogy egy nem monoton függvény melyik osztályba tartozik.

(iii) A Bevezetésben említett (X_n^*) sorozat négy osztályára is a fentihez hasonló jellemzés adható, erre itt nem kívánunk kitérni.

A LEGHOSSZABB TISZTA FEJ BLOKK HOSSZÁRÓL

Varga Tamás (aki számtalan jó ötlettel gazdagította a közép- és általános iskolai matematikatanítást) általános iskolások valószínűségszámítás-oktatását a következő kísérlettel szokta kezdeni.

Az osztályt két részre osztja, az egyik csoportban minden gyereknek egy pénzdarabot kell (mondjuk) kétszázszor feldobnia és leírnia egy papírra a dobások eredményeit. A második csoportban a gyerekeknek pénzdobás nélkül kell előállítaniuk egy 200 hosszúságú „véletlen" fej–írás sorozatot. A kísérlet elvégzése után a gyerekeknek a papírokra egy-egy jelszót kell felírniuk. Így a papirosokat összeszedő tanár nem tudja, hogy melyik papírszelet jött az igazi és melyik az álvéletlen csoportból. Ennek ellenére kevés hibával képes megállapitani a kapott fej–írás sorozatok eredetét.

A kísérlet általában jó eredménnyel végződik, a tanár az eseteknek csak mintegy 10 százalékában téved. Mondanunk sem kell, hogy a gyerekeket a sikeres „bűvészmutatvány" nagy lelkesedéssel szokta eltölteni.

Varga Tamás ezen sikeres mutatványa a következő egyszerű észrevételen alapszik. Az a gyerek, aki mesterségesen próbál meg egy véletlen sorozatot gyártani, félni fog túl sok fejet (vagy írást) írni egymás után, úgy gondolja, hogy 3—4 fej után okvetlenül írásnak kell következnie. A pénzdarab „memóriája” nem ilyen jó, egy 200 hosszúságú igazán véletlen fej–írás sorozatban 6—7 hosszúságú tiszta fej-blokk is elő szokott fordulni. Ennek alapján Varga Tamás döntési eljárása a következő: azokról a fej–írás sorozatokról mondja, hogy igazi véletlen sorozatok, amelyekben a leghosszabb csak fejet tartalmazó blokk hossza 5-nél hosszabb. Ez az eljárás szolgáltatja az említett sikeres eredményt.

A sikeres bűvészmutatvány a következő komoly matematikai problémához vezet:

Egy n hosszúságú véletlen fej–írás sorozatban milyen hosszú a leghosszabb csak fejet tartalmazó blokk?

Ezt a problémát Erdős Pállal ([6]) közösen vizsgáltuk. Eredményünk egyszerűbb leírásához érdemes bevezetni a következő jelöléseket.

Legyen $X_1, X_2, \ldots$ független, egyforma eloszlású valószínűségi változók sorozata

$$\mathbb{P}(X_1=0) = \mathbb{P}(X_1 = 1) = 1/2$$

eloszlással, továbbá legyen $S_0 = 0$, $S_n = X_1 + X_2 + \ldots + X_n$ és

$$I(N, K) = \max_{0 \leqq n \leqq N-K} (S_{n+k} - S_n) \qquad (K \leqq N).$$

Végül jelentse Z_N a legnagyobb egész számot, amelyre

$$l(N, Z_N) = Z_N.$$

Itt természetesen Z_N a leghosszabb tiszta fej blokk hossza. Ekkor Erdőssel közös eredményünk így fogalmazható.

(i) *Legyen* $(\alpha(n))$ *pozitív számoknak tetszőleges sorozata, amelyre*

$$\sum_{n=1}^{\infty} 2^{-\alpha(n)} < \infty,$$

ekkor $\alpha(n) \in FFO(Z_n)$,

(ii) *Legyen* $(\beta(n))$ *pozitív számoknak tetszőleges szorzata, amelyre*

$$\sum_{n=1}^{\infty} 2^{-\beta(n)} = \infty,$$

ekkor $\beta(n) \in FAO(Z_n)$,

(iii) *tetszőleges* $\varepsilon > 0$ *esetén*

$$\gamma(n) = [\log n - \log\log\log n + \log\log e - 1 + \varepsilon] \in AFO(Z_n), \tag{6}$$

(iv) *tetszőleges* $\varepsilon > 0$ *esetén*

$$\delta(n) = [\log n - \log\log\log n + \log\log e - 2 - \varepsilon] \in AAO(Z_n), \tag{7}$$

ahol log *kettes alapú logaritmust jelent.*

6. Megjegyzés. Fenti eredményből világos, hogy (Z_n) nem AD, sőt nem is AKD. Azonban a $FFO(Z_n)$-nek például az

$$\alpha_0(n) = \log n + 1, 1 \log\log n$$

eleme olyan közel van az $AAO(Z_n)$-nek a (7) formulával megadott $\delta(n)$ eleméhez, hogy joggal mondhatjuk, hogy a (Z_n) sorozat „közel determinisztikus". Ha kiszámítjuk $\alpha_0(n)$ és $\delta(n)$ értékét $n = 2^{2^{20}} \sim 6{,}74 \,.\, 10^{315652}$ és $\varepsilon = 0{,}1$ esetén, akkor az $\alpha = \alpha_0(2^{2^{20}}) = 1\,048\,598$ és a $\delta = \delta(2^{2^{20}}) = 1\,048\,571$ számokat kapjuk. Eredményeink tehát azt jelentik, hogy ha $2^{2^{20}}$ alkalommal feldobunk egy pénzdarabot, akkor a leghosszabb tiszta fej-sorozat hosszának 1 048 571 és 1 048 598 között „kell" lennie.

7. Megjegyzés. Az $AFO(Z_n)$ és $AAO(Z_n)$ függvényosztályok pontos jellemzését Guibas–Odlyzko (1980) és Samarova (1981) is megadták. Samarova azzal a kérdéssel is foglalkozott, hogy ha a (Z_n) sorozatot definiáló egyforma eloszlású valószínűségi változók nem függetlenek, hanem egy homogén Markov-lánc elemei, akkor hogy lehet a (Z_n) sorozat négy osztályát jellemezni.

8. Megjegyzés. Számítástechnikában érdekes és fontos probléma, hogy hogyan lehet géppel „véletlen" számsorozatokat generálni. Számos módszert dolgoztak ki arra, hogy megtanítsanak egy gépet olyan fej–írás sorozatot generálni, amely úgy viselkedik, mint egy szabályos pénzdarab feldobásával nyert valóban véletlen fej–írás sorozat. Valójában már az sem világos, hogy ha gépünk már tud gyártani valamilyen „véletlen" fej–írás sorozatot, akkor hogyan

lehet meggyőződni arról, hogy ez a sorozat valóban olyan, mintha igazi véletlen sorozat lenne. Legtöbb véletlen-szám generátor esetén attól kell félni, hogy a gép valamilyen (ismeretlen) periódussal egy többé-kevésbé periodikus sorozatot gyárt. A legtöbb szokásosan használatos statisztikai módszer nem alkalmas arra, hogy ezt a hibát észrevegye. Úgy tűnik, hogy a leghosszabb tiszta fej blokk hosszának vizsgálata nemcsak arra alkalmas, hogy kimutassa, hogy az osztályban melyik gyerek produkált igazi és melyik álvéletlen sorozatot, hanem arra is, hogy eldöntse, hogy egy gép által generált sorozat tekinthető-e véletlennek. Egy a leghosszabb tiszta fej blokk hosszán alapuló statisztikai próba különösen alkalmas arra, hogy a sorozatnak a periodicitás okozta nemvéletlen voltát kimutassa.

A fentiekben láttuk, hogy egy n hosszúságú véletlen fej–írás sorozat véges sok n kivételével 1 valószínűséggel tartalmaz legalább egy

$$\gamma(n) = [\log n - \log\log\log n + \log\log e - 2 - \varepsilon]$$

hosszúságú tiszta fej blokkot. Érdekes megvizsgálni azt a kérdést is, hogy mi lesz a diszjunkt $\gamma(n)$ hosszúságú tiszta fej blokkok száma.

Legyen $v_n(k)$ a $[0, N]$ intervallum azon k hosszúságú blokkjainak száma, amelyek csak fej-dobásokból állnak, azaz $v_n(k) =$

$=j$, ha létezik olyan $0 \leqq l_1 < l_1 + k \leqq l_2 < < l_2 + k \leqq \ldots \leqq l_j < l_j + k \leqq n$, amelyre

$$S_{l_i+k} - S_{l_i} = k \quad (i = 1, 2, \ldots, j),$$

de

$$S_{m+k} - S_m < k, \text{ ha } l_i + k \leqq m < l_{i+1} \quad (i = 1, 2, \ldots, j).$$

Ekkor a diszjunkt $\gamma(n)$ hosszúságú tiszta fej blokkok $\nu_n(\gamma(n))$ száma a következő módon jellemezhető ([12]).

Bármely $\varepsilon > 0$*-hoz találhatóak olyan*

$$0 < c_1 = c_1(\varepsilon) < c_2 = c_2(\varepsilon) < \infty$$

konstansok, amelyekre

$$c_1 = \liminf_{n \to \infty} \frac{\nu_n(\gamma(n))}{\log \log n} \leqq$$

$$\leqq \limsup_{n \to \infty} \frac{\nu_n(\gamma(n))}{\log \log n} = c_2$$

1 *valószínűséggel.*

Így nemcsak azt mondhatjuk, hogy egy n hosszúságú véletlen fej–írás sorozat véges sok n kivételével 1 valószínűséggel tartalmaz legalább egy $\gamma(n)$ hosszúságú tiszta fej blokkot, hanem azt is, hogy legalább és legfeljebb $O(\log \log n)$ ilyen diszjunkt blokk van. Ez a tény akkor válik meglepővé, ha meggondoljuk, hogy 1 valószínűséggel végtelen sok n-re $\gamma(n)+2$ hosszúságú tiszta fej blokk egyáltalán nem lesz.

Természetesen, ha $\delta(n)$ vagy nagyobb hosszúságú blokkokat vizsgálunk, akkor elő fog fordulni, hogy ilyen hosszú tiszta fej blokk egyáltalán nincs, de az is előfordulhat, hogy több viszonylag hosszú tiszta fej blokk van. Például $[\log n + \log\log n]$ hosszúságú blokkokat vizsgálva a következő eredményre jutunk ([12])

$$0 = \liminf_{n\to\infty} \nu_n([\log n + \log\log n]) <$$

$$< \limsup_{n\to\infty} \nu_n([\log n + \log\log n]) \leqq 2$$

1 *valószínűséggel.*

HÁNY FEJ LEHET EGY HOSSZABB BLOKKBAN?

Láttuk, hogy egy n hosszúságú fej–írás sorozatban milyen hosszú lehet a leghosszabb, csak fejet tartalmazó blokk. Ha hosszabb blokkokat vizsgálunk, akkor természetesen nem fordulhat elő, hogy ezek között is lesz tiszta fej blokk, de előfordulhat, hogy valamelyik blokkban igen sok fej lesz. Jelen fejezetben azt fogjuk megvizsgálni, hogy egy viszonylag hosszú blokkban milyen sok fej lehet.

a) Erdőssel együtt ([6]) vizsgáltuk azt a kérdést is, hogy milyen hosszú lehet a leghosszabb legfeljebb egy (vagy általában legfeljebb T $(T=1,2,\ldots)$) írást tartalmazó blokk. Legyen $Z_N(T)$ a legnagyobb egész szám, amelyre

$$I(N, Z_N(T)) \geqq Z_N(T) - T.$$

Ekkor $Z_N(T)$ jelenti a leghosszabb legfeljebb T írást tartalmazó blokk hosszát. $Z_N(T)$ a következő módon jellemezhető.

(i) *Legyen* $(\alpha(n))$ *pozitív számoknak tetszőleges sorozata, amelyre*

$$\sum_{n=1}^{\infty} (\alpha(n))^T \, 2^{-\alpha(n)} < \infty,$$

ekkor $\alpha(n) \in FFO(Z_N(T))$,

(ii) *Legyen* $(\beta(n))$ *pozitív számoknak tetszőleges sorozata, amelyre*

$$\sum_{n=1}^{\infty} (\beta(n))^T 2^{-\beta(n)} = \infty$$

ekkor $\beta(n) \in FAO(Z_N(T))$,

(iii) *tetszőleges* $\varepsilon > 0$ *esetén*

$$[\log N + T \log\log N - \log\log\log N -$$

$$- \log(T!) + \log\log e - 1 + \varepsilon] \in AFO(Z_N(T)),$$

(iv) *tetszőleges* $\varepsilon > 0$ *esetén*

$$[\log N + T \log\log N - \log\log\log N -$$

$$- \log(T!) + \log\log e - 2 - \varepsilon] \in AAO(Z_N(T)).$$

A 6. Megjegyzésben mondottak a $(Z_N(T))_{N=1}^{\infty}$ sorozatra is érvényesek, természetesen az ott szereplő numerikus értékek változnak, de most is elmondható, hogy a $(Z_N(T))_{N=1}^{\infty}$ sorozat „közel determinisztikus".

b) Erdős és Rényi (1970) vizsgálták azt a kérdést, hogy egy $c \log n$ $(c \geqq 1)$ hosszúságú blokkban hány fej lehet. Eredményük a következő

$$\lim_{n\to\infty} \frac{I(n, c \log n)}{c \log n} = \frac{\alpha(c)+1}{2}$$

1 *valószínűséggel, ahol*

$$\alpha(1) = 1, \qquad \alpha(c)$$

$\alpha(c)$ az

$$\frac{1}{c} = 1 - h\left(\frac{1+\alpha(c)}{2}\right)$$

egyenlet megoldása és

$$h(x) = x \log x - (1-x)\log(1-x) \quad (0<x<1).$$

Valamivel erősebb eredményt kapott Csörgő M. és Steinbach (1981). Ők azt bizonyították be, hogy

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{I(n, c\log n)}{c\sqrt{\log n}} - \frac{\alpha(c)+1}{2}\sqrt{\log n}\right) = 0$$

1 valószínűséggel, azaz

$$((\log n)^{-1/2}\, I(n, c\log n))$$

egy *AD* sorozat.

9. Megjegyzés. Természetesen egy $[c \log n]$ hosszúságú véletlen fej–írás sorozatban körülbelül $\left[\frac{c}{2}\log n\right]$ fej van. Az Erdős—Rényi-, illetve a Csörgő—Steinbach-tétel azt állítja, hogy az n hosszúságú dobás-sorozatban lesz olyan $[c \log n]$ hosszúságú blokk, amely ennél lényegesen több fejet tartalmaz.

c) Legyen (a_n) egész számoknak egy monoton növekvő sorozata, amelyre n/a_n monoton nem fogyó és $a_n/(\log n)^2 \to \infty$. Az $I(n, a_n)$ valószínűségi változó sorozatot fogjuk vizsgálni ([16]).

(i) *Tegyük fel, hogy a fenti kikötéseken kívül még teljesül a*

$$\lim_{n\to\infty}\frac{(\log n\, a_n^{-1})^{1/2}}{\log\log n} = \infty$$

feltétel is. Ekkor

$$\lim_{n\to\infty}\left(a_n^{-1/2} I(n,a_n)-\left(\frac{a_n^{1/2}}{2}+\left(\frac{\log na_n^{-1}}{2}\right)^{1/2}\right)\right)=0 \tag{9}$$

1 *valószínűséggel, azaz*

$$(a_n^{-1/2} I(n,a_n))$$

egy AD sorozat.

(ii) (8) *helyett tegyük fel, hogy*

$$\lim_{n\to\infty}\frac{(\log na_n^{-1})^{1/2}}{\log\log n}=c \quad (0<c<\infty). \tag{10}$$

Ekkor

$$0=\liminf_{n\to\infty}\left(a_n^{-1/2} I(n,a_n)-\left[\frac{a_n^{1/2}}{2}+\left(\frac{\log na_n^{-1}}{2}\right)^{1/2}\right]\right)<$$
$$<\limsup_{n\to\infty}\left(a_n^{-1/2} I(n,a_n)-\left[\frac{a_n^{1/2}}{2}+\right.\right.$$
$$\left.\left.+\left(\frac{\log na_n^{-1}}{2}\right)^{1/2}\right]\right)=\frac{1}{c\sqrt{2}} \tag{11}$$

1 *valószínűséggel, azaz ebben az esetben*

$$(a_n^{-1/2} I(n,a_n))$$

nem AD, de AKD.

(iii) *Ha* (10) *sem teljesül, csak a még gyöngébb*

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\log na_n^{-1}}{\log\log n}=\infty, \tag{12}$$

akkor

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt{2}\,\frac{I(n,a_n)-\dfrac{a_n}{2}}{\left(a_n\log\dfrac{n}{a_n}\right)^{1/2}}=1 \tag{13}$$

1 *valószínűséggel.*

(iv) Végül ha (a_n) növekedésére semmilyen külön megszorítást nem teszünk, akkor csak az iterált logaritmus tétel általánosításának tekinthető következő eredmény mondható

$$\limsup_{n\to\infty} \sqrt{2}\,\frac{I(n, a_n) - \dfrac{a_n}{2}}{a_n^{1/2}\left(\log \dfrac{n}{a_n} + \log\log n\right)^{1/2}} = 1 \tag{14}$$

1 *valószínűséggel.*

Megjegyezzük, hogy a (9), (11), (13), (14) eredményeknél erősebb állítások is megfogalmazhatók, nevezetesen bizonyos pontossággal leírható az

$$(a_n^{-1/2} I(n, a))$$

sorozat négy osztálya, de erre most itt nem térünk ki.

A *b*) és *c*) pontok közötti rés betöltésével, nevezetesen azzal az esettel, amikor a_n $\log n$ és $\log^2 n$ között van, foglalkozott Csörgő M. és Steinbach (1981).

A LEGNAGYOBB TISZTA FEJ NÉGYZET TERÜLETE

Az előző részben vizsgált probléma kétdimenziós általánosítását a következő módon lehet megfogalmazni. Legyen

$$(X_{ij}) \qquad (i = 0, 1, 2, \dots, j = 0, 1, \dots)$$

független, egyforma eloszlású valószínűségi változók végtelen mátrixa,

$$\mathbb{P}(X_{ij} = 0) = \mathbb{P}(X_{ij} = 1) = 1/2$$
$$(i = 0, 1, 2, \dots, j = 0, 1, 2, \dots)$$

eloszlással. Vezessük be a következő jelöléseket:

$$S(n, m, K) = \sum_{j=m}^{m+K-1} \sum_{i=n}^{n+K-1} X_{ij},$$

$$I(N, K) = \max_{\substack{0 \leq n \leq N-K \\ 0 \leq m \leq N-K}} S(n, m, K) \qquad (K \leq N).$$

Végül legyen Z_N az a legnagyobb egész szám, amelyre

$$I(N, Z_N) = Z_N^2.$$

Itt Z_N^2 jelenti a $[0, N] \times [0, N]$ négyzet rácspontjaiban véletlenszerűen elhelyezett fejírások által alkotott véletlen mezőben a legnagyobb tiszta fej négyzet területét.

A (Z_N) sorozat tulajdonságainak leírására vezessük be a következő jelöléseket:

$$f(N) = \sqrt{2 \log N} - 2,$$

$$a(N) = \sqrt{2 \log N} - [\sqrt{2 \log N}],$$

(a log itt is kettes alapú logaritmust jelent)

$$\beta_1(N, \varepsilon) = \beta_1(N) = \begin{cases} [f(N)] & \text{ha } a(N) \leqq \varepsilon, \\ [f(N)] + 1, & \text{ha } a(N) > \varepsilon, \end{cases}$$

$$\beta_2(N, \varepsilon) = \beta_2(N) = \begin{cases} [f(N)] + 3, & \text{ha } a(N) \leqq 1 - \varepsilon, \\ [f(N)] + 4, & \text{ha } a(N) > 1 - \varepsilon, \end{cases}$$

ahol $0 < \varepsilon < 1$.

Ekkor eredményünk a következőképpen fogalmazható ([15]):

$$\beta_1(N) \in AAO(Z_N) \quad \textit{és} \quad \beta_2(N) \in FFO(Z_N), \tag{15}$$

azaz

$$\beta_1(N) < Z_N < \beta_2(N) \tag{16}$$

1 *valószínűséggel véges sok N kivételével.*

A (15) állítást úgy is fogalmazhatjuk, hogy 1 valószínűséggel véges sok N kivételével

$$Z_N = \begin{cases} [f(N)] + 1 \quad \text{vagy} \quad [f(N)] + 2, & \text{ha} \quad a(N) \leqq \varepsilon, \\ [f(N)] + 2, \quad \text{ha} \quad \varepsilon < a(N) < 1 - \varepsilon, & \\ [f(N)] + 2 \quad \text{vagy} \quad [f(N)] + 3, & \text{ha} \quad a(N) \geqq 1 - \varepsilon. \end{cases}$$

Az állításnak ebből a formájából teljesen világos, hogy (Z_N) *AKD*, ugyanakkor az is világos, hogy (Z_N) nem *AD*.

Vegyük észre, hogy egy dimenzióban a leghosszabb tiszta fej blokk hossza nem *AKD*, de két dimenzióban a legnagyobb tiszta fej négyzet oldalhossza már AKD. A különbség okát nehéz látni. Megjegyezzük azonban, hogy magasabb dimenzióban is a legnagyobb tiszta fej kocka élhossza AKD lesz. Érdekes lenne a legnagyobb tiszta fej négyzet helyett a legnagyobb területű tiszta fej téglalap területét vizsgálni. Pontos választ kapni erre a kérdésre igen nehéznek látszik.

Hangsúlyozni kívánjuk, hogy a (15), illetve (16) formulák nem adják a lehető legjobb eredményt. Belátható például, hogy ha β_1, ill. β_2 definíciójában az ε értékét az

$$\varepsilon_N = C\frac{\log\log N}{\sqrt{2}\log N} \qquad (C>1/2)$$

kifejezéssel helyettesítjük (15) és (16), változatlanul érvényben marad. Természetesen nem állítjuk, hogy az így adódó élesebb eredmény már a lehető legjobb.

A LEGHOSSZABB NÖVEKVŐ BLOKK HOSSZÁRÓL

Legyenek $U_1, U_2, \ldots$ a $(0, 1)$ intervallumon egyenletes eloszlású valószínűségi változók. Azt fogjuk vizsgálni, hogy az $U_1, U_2, \ldots, U_n$ sorozatban mi a leghosszabb növekvő blokk hossza. Pontosabban jelentse Q_N azt a legnagyobb egész számot, amelyhez található olyan R_N egész szám, amelyre

$$U_{R_N+1} < U_{R_N+2} < \ldots < U_{R_N+Q_N}$$

és

$$R_N + Q_N \leqq N$$

Itt nyilván Q_N jelenti az $U_1, U_2, \ldots, U_N$ sorozatban a leghosszabb növekvő blokk hosszát. A (Q_N) sorozat tulajdonságai a következő módon jellemezhetőek ([14]).

Legyen

$$f(n) = \frac{\log n}{b_n} - 1/2 \quad \text{és} \quad a(n) = f(n) - [f(n)], \tag{17}$$

ahol b_n *a*

$$b_n e^{b_n} = e^{-1} \log n \tag{18}$$

egyenlet megoldását jelenti. Itt és a következőkben log *természetes alapú logaritmust jelent. Továbbá tetszőleges* $0 < \varepsilon < 1$ *esetén legyen*

$$l(n) = l(n, \varepsilon) = \begin{cases} [f(n)] - 3, & \text{ha} \quad a(n) \leqq \varepsilon, \\ [f(n)] - 2, & \text{ha} \quad a(n) > \varepsilon, \end{cases}$$

$$u(n) = u(n, \varepsilon) = \begin{cases} [f(n)]+2, & ha \quad a(n) < 1-\varepsilon, \\ [f(n)]+3, & ha \quad a(n) \geqq 1-\varepsilon. \end{cases} \tag{19}$$

Ekkor

$$l(N) \in AAO(Q_N) \quad \textit{és} \quad u(N) \in FFO(Q_N), \tag{20}$$

azaz

$$l(N) < Q_N < u(N) \tag{21}$$

1 *valószínűséggel véges sok N kivételével.*

A (20) állítást úgy is fogalmazhatjuk, hogy 1 valószínűséggel véges sok N kivételével

$$Q_N = \begin{cases} [f(N)]-2, \quad \text{vagy} \quad [f(N)]-1, \\ \quad \text{vagy} \quad [f(N)], \quad \text{vagy} \quad [f(N)]+1, \\ \text{ha } a(N) \leqq \varepsilon, \\ [f(N)]-1, \quad \text{vagy} \quad [f(N)], \\ \quad \text{vagy} \quad [f(N)]+1, \quad \text{ha} \quad \varepsilon < a(N) < 1-\varepsilon, \\ [f(N)]-1, \quad \text{vagy} \quad [f(N)], \\ \quad \text{vagy } [f(N)]+1, \text{ vagy } [f(N)]+2, \\ \text{ha } a(N) \leqq 1-\varepsilon. \end{cases}$$

Az állításnak ebből a formájából teljesen világos, hogy (Z_N) AKD, ugyanakkor az is világos, hogy (Z_N) nem AD.

10. Megjegyzés. A (18) egyenlet megoldása a következő alakú

$$b_n = \log\log n - \log\log\log n - 1 + \\ + (1 + o(1)) \frac{\log\log\log n}{\log\log n} \tag{22}$$

11. Megjegyzés. Nyilvánvaló, hogy az a feltétel, hogy az $U_1, U_2, \ldots$ valószínűségi

változók egyenletes eloszlásúak, itt semmilyen szerepet nem játszik. Ugyanilyen joggal kiindulhattunk volna abból a feltevésből, hogy az $U_1, U_2, \ldots$ valószínűségi változók független, egyforma eloszlásúak és közös eloszlásfüggvényük egy tetszőleges folytonos $F(x)$ eloszlás.

12. Megjegyzés. 8. megjegyzésünk itt is változatlanul elmondható, azaz itt is igaz, hogy a leghosszabb növekvő blokk hosszának (Q_N-nek) vizsgálata felhasználható egy mesterségesen generált „véletlen" sorozat véletlen voltának vizsgálatára.

A leghosszabb tiszta fej blokk hosszának vizsgálatával kapcsolatban megjegyeztük, hogy nemcsak egy $\gamma(n)$ hosszúságú tiszta fej blokk található egy n hosszúságú dobás-sorozatban, hanem igen sok, nevezetesen $O(\log\log n)$. A növekvő blokkokkal kapcsolatban is természetes annak a kérdésnek a vizsgálata, hogy hány darab $l(N)+1$ hosszúságú növekvő blokk található egy $U_1, U_2, \ldots, U_n$ véletlen sorozatban, illetve annak vizsgálata, hogy a második leghosszabb növekvő blokk hossza mennyi. Legyen $Q_N^{(2)}$ a második leghosszabb növekvő blokk hossza az $U_1, U_2, \ldots, U_N$ sorozatban. A (20) egyenlőtlenség bizonyításához hasonlóan belátható, hogy

$$l(N)-1<Q_N^{(2)}<u(N).$$

1 *valószínűséggel véges sok N kivételével.* Igen valószínűnek látszik az a sejtés, hogy $Q_N^{(2)} > l(N)$ 1 valószínűséggel véges sok n kivételével. Bár ezt a sejtést a leghosszabb tiszta fej blokk hosszára vonatkozó analógia is alátámasztja, ez ideig bizonyítani mégsem sikerült.

A POISSON-FOLYAMAT SŰRŰSÖDÉSI INTERVALLUMAIRÓL

Legyen

$$\pi(t) = \pi_\lambda(t) \qquad (t \geqq 0, \quad \lambda > 0)$$

egy λ paraméterű Poisson-folyamat. Vizsgáljuk a

$$Q(T, \lambda) = Q(T) = \max_{0 \leqq t \leqq T} (\pi(t+1) - \pi(t))$$

folyamat tulajdonságait.

Megjegyezzük, hogy a kiszolgálási (sorbanállási) modellekben általában feltételezik, hogy egy üzletbe a vásárlók érkezése egy λ paraméterű Poisson-folyamat, ahol λ jelenti az időegységenként (például óránként) érkező vásárlók számának várható értékét. Ebben a megfogalmazásban $Q(T)$ jelenti egy T órán keresztül nyitva tartó üzletbe a legforgalmasabb órában érkező vásárlók számát.

$\lambda = 1$ esetben a $Q(T, 1)$ folyamat tulajdonságai a következő módon jellemezhetők ([15]):

$$l(T) \in AAO(Q(T, 1)) \quad \textit{és} \quad u(T) \in FFO(Q(T, 1)) \tag{23}$$

azaz

$$l(T) < Q(T, 1) < u(T) \tag{24}$$

1 *valószínűséggel minden elég nagy* T*-re, ahol* $l(T)$ *és* $u(T)$ *a* (19) *képlettel definiált függvények.*

(Itt természetesen felhasználtuk a 4. Megjegyzésben mondottakat.)

13. Megjegyzés. Eredményeink azt állítják, hogy az itt vizsgált $Q(T, 1)$ folyamat és az előző fejezetben vizsgált (Q_N) sorozat nagy T-re, ill. nagy N-re teljesen hasonlóan viselkedik. Ennek a ténynek semmilyen intuitív oka nem látszik.

Érdemes megvizsgálni, hogy eredményünk hogy változik, ha a $\lambda = 1$ eset helyett egy tetszőleges $\lambda > 0$ paraméterű Poisson-folyamatot vizsgálunk. Eredményünk azt fogja mutatni, hogy $Q(T, \lambda)$ viselkedése alig függ λ-tól. Pontosabban $Q(T, \lambda)$-ra tetszőleges λ esetén is érvényesek lesznek a (23) és (24) formulák, csak az $l(T)$ és $u(T)$ definíciójában szereplő b_T függvény definícióját kell módosítanunk oly módon, hogy b_T legyen megoldása a

$$b_T e^{b_T} = \frac{\log T}{e\lambda}$$

egyenletnek. Megjegyezzük, hogy ennek az egyenletnek a megoldása

$$b_T = \log\log T - \log\log\log T - \log \lambda -$$

$$- 1 + (1 + o(1)) \frac{\log\log\log T}{\log\log T}.$$

Eredményeink azt jelentik, hogy $Q(T, \lambda)$ tetszőleges fix $\lambda > 0$ esetén egy AKD folyamat.

Nézzünk néhány számszerű példát. Vizsgáljuk meg bizonyos T és λ esetén, hogy ha egy üzletbe, amelybe óránként átlagosan λ vásárló érkezik, és T órán keresztül tart nyitva, hány vásárlónak „kellett” érkeznie a legforgalmasabb órában.

T \ λ	1	2	3
$e^{e^{20}} \sim 1{,}6.10^{210704567}$	30 033 749	31 379 935	32 226 183
$e^{e^{10}} \sim 9{,}4.10^{9565}$	3 178	3 532	3 778
$e^{e^{5}} \sim 2{,}9.10^{64}$	54	72	91
$e^{e^{4}} \sim 5{,}1.10^{23}$	24	30	35

Eredményeink azt állítják, hogy a legforgalmasabb órában érkező vásárlók száma a táblázatban közölt értékektől legfeljebb hárommal térhet el.

Ha arra gondolunk, hogy a radioaktív bomlás is Poisson-eloszlást követ, akkor világossá válik a vizsgált feladat fontossága.

A WIENER-FOLYAMAT FOLYTONOSSÁGI MODULUSA

Legyen $(W(t);\ 0 \leqq t \leqq 1)$ Wiener-folyamat. $W(t)$ folytonossági modulusán a

$$\varphi(h) = \sup_{0 \leqq t \leqq 1-h} |W(t+h) - W(t)| \qquad (0 < h < 1)$$

sztochasztikus folyamatot értjük. A $\varphi(h)$ folyamat, pontosabban az $\omega(h) = h^{-1/2}\,\varphi(h)$ folyamat tulajdonságaival sokszor foglalkoztak. Egyik legfontosabb eredmény P. Lévy-től (1937) származik, és azt állítja, hogy

$$\lim_{h \downarrow 0} \frac{\omega(h)}{\sqrt{2 \log h^{-1}}} = 1 \tag{25}$$

1 *valószínűséggel.* Az $\omega(t^{-1})$ $(t > 1)$ folyamat négy osztályának vizsgálatát Chung, Erdős és Sirao (1959) kezdték meg. Ők a következőt bizonyították. *Legyen $f(t)$ tetszőleges monoton növekvő függvény, és legyen*

$$I(f) = \int_e^{\infty} (\log x)^{3/2} e^{-f^2(x)/2}\, dx. \tag{26}$$

Ekkor

$$f(x) \in FFO(\omega(1/x)), \qquad \textit{ha} \qquad I(f) < \infty \tag{27}$$

és

$$f(x) \in FAO(\omega(1/x)), \qquad \textit{ha} \qquad I(f) = \infty. \tag{28}$$

Az $\omega(h)$ folyamat két alsó osztályáról a következő mondható ([13]).

Tetszőleges $\varepsilon > 0$ *esetén*

$$(2\,\mathit{log}\,x + \log\log x - 2\log\log\log x - \\ - \log(\pi - \varepsilon))^{1/2} \in AFO(\omega(1/x)) \tag{29}$$

és

$$(2\log x + \log\log x - 2\log\log\log x - \\ - \log(9\pi + \varepsilon))^{1/2} \in AAO(\omega(1/x)). \tag{30}$$

Természetesen (29) és (30) együttesen sem adják meg a két alsó osztály teljes jellemzését. Annak ellenére, hogy a (29)-ben és a (30)-ban szereplő függvények igen közel vannak egynáshoz, mégis érdekes volna megadni a két alsó osztálynak egy pontosabb jellemzését.

Vegyük észre, hogy (27) és (30) együttes alkalmazásával azonnal adódik a következő (25)-nél élesebb eredmény

$$\lim_{h \downarrow 0} (\omega(h) - \sqrt{2\log h^{-1}}) = 0 \tag{31}$$

1 *valószínűséggel, azaz* $\omega(t^{-1})$ *AD folyamat.*

(27) és (30) együttes alkalmazásával még a (31)-nél is erősebb

$$\sqrt{2}/4 = \liminf_{h \to 0} \frac{(\log h^{-1})^{1/2}}{\log\log h^{-1}} (\omega(h) - \sqrt{2\log h^{-1}}) < \\ < \limsup_{h \to 0} \frac{(\log h^{-1})^{1/2}}{\log\log h^{-1}} (\omega(h) - \sqrt{2\log h^{-1}}) = 5\frac{\sqrt{2}}{4} \tag{32}$$

1 *valószínűséggel* eredmény is nyerhető.

HOGYAN TOVÁBB?

Az eddigiekben felsoroltunk néhány elég meglepő példát aszimptotikusan determinisztikus és aszimptotikusan kvázi-determinisztikus sorozatokra. Azt hiszem, hogy egyik példa esetén sem lenne képes senki előre megmondani, megsejteni, hogy valamelyik sorozat *AD* vagy *AKD* lesz. Érdekes lenne valamilyen általánosan használható módszert kidolgozni, amely segítségével eldönthető, hogy egy adott véletlen sorozat *AD*-e, illetve *AKD*-e. Remélhető, hogy egy ilyen módszer segítségével magyarázatot is lehetne adni arra, hogy egyes sorozatok miért *AD*-k, illetve *AKD*-k. Jelen pillanatban el sem tudok képzelni egy ilyen módszert vagy magyarázatot. Szinte azt mondhatnánk, hogy teljesen „véletlen", hogy egy véletlen sorozat *AD*-e, *AKD*-e, vagy egyik sem.

Elképzelhető, hogy az általános módszer keresése helyett célszerűbb előbb további példákat keresni *AD*, illetve *AKD* sorozatokra, és csak kellő mennyiségű példa összegyűjtése után foglalkozni az általános törvényszerűségek megkeresésével.

IRODALOM

1. BOREL, É. (1909) Sur les probabilités dénombrables et leurs applications arithmetiques. *Rendiconti del Circolo Mat. di Palermo* **26,** 247—271.
2. CHUNG, K. L.—ERDŐS, P.—SIRAO, T. (1959) On the Lipschitz condition for Brownian motion. *J. of Math. Soc. Japan* **11,** 263—274.
3. CSÖRGŐ, M.—STEINBACH, J. (1981) Improved Erdős—Rényi and strong approximation laws for increments of partial sums. *Ann. Probability* **9,** 988—996.
4. ERDŐS, P. (1942) On the law of iterated logarithm. *Ann. of Math.* **43,** 419—436.
5. ERDŐS, P.—RÉNYI, A. (1970) On a new law of large numbers. *J. Analyse Math.* **23,** 103—111.
6. ERDŐS, P.—RÉVÉSZ, P. (1976) On the length of the longest head run. *Coll. Math. Soc. J. Bolyai* **16,** *Topics in Information Theory*. North Holland.
7. FELLER, W. (1943) The general form of the so-called law of the iterated logarithm. *Trans. Amer. Math. Soc.* **54,** 373—402.
8. GUIBAS, L. J.—ODLYZKO, A. M. (1980) Long repetitive patterns in random sequences. *Z. Wahrscheinlichkeitstheorie* **53,** 241—262.
9. LÉVY, P. (1937) *Théorie de l'addition des variables aléatoires.* Gauthier—Villars, Paris.
10. PASCAL, B. *Œuvres Complètes*. Bibliothèque de la Pléiade Gallimard, Paris, 1964.
11. RÉNYI, A. (1967) *Levelek a valószínűségről.* Akadémiai Kiadó.
12. RÉVÉSZ, P. (1978) Strong theorems on coin tossing. *Proc. of the Int. Congress of Mathematicians,* Helsinki, 749—754.
13. RÉVÉSZ, P. (1982) On the increments of Wiener and related processes. *Ann. Probability* **10,** 613—622.
14. RÉVÉSZ, P. (1983) Three problems on the lengths of increasing runs. *Stochastic Processes and their Applications* **15,** 169—179.

15. RÉVÉSZ, P. (1983) How random is random?
16. CSÖRGŐ, M.—RÉVÉSZ, P. (1979) How big are the increments of a Wiener process? *Ann. Probability* **7,** 731—737.
17. (SAMAROVA) Самарова, С. С. (1981) О длине максимальной серии «успехов» для Марковской цепи с двумя состояниями. *Теория вероятностей и ее применения* **26,** 510—520.

Ára: 16,– Ft