AZ
ANALYSIS SITUS
ELEMEI

ELSŐ RÉSZ

(FELÜLETEK)

A MAGYAR TUDOMÁNYOS AKADÉMIA MEGBÍZÁSÁBÓL

IRTA

KŐNIG DÉNES

BUDAPEST

KIADJA A MAGYAR TUDOMÁNYOS AKADÉMIA

1918

Ára 6 korona

AZ
ANALYSIS SITUS
ELEMEI

ELSŐ RÉSZ

(FELÜLETEK)

A MAGYAR TUDOMÁNYOS AKADÉMIA MEGBÍZÁSÁBÓL

IRTA

KŐNIG DÉNES

BUDAPEST

KIADJA A MAGYAR TUDOMÁNYOS AKADÉMIA

1918

FRANKLIN-TÁRSULAT NYOMDÁJA.

ELŐSZÓ.

L'importance de l'Analysis
Situs est énorme.

H. Poincaré.

Midőn munkám első részét a nyilvánosságnak átadom, mindenekelőtt köszönetet mondok a Magyar Tudományos Akadémiának azért az erkölcsi és anyagi támogatásért, melylyel munkám kiadását elvállalta. Külön köszönetet kell mondanom dr. Fröhlich Izidor úrnak, az Akadémia III. osztálya titkárának, ki munkám iránt tanusított jóindulatával lehetővé tette, hogy ez a mostani nehéz viszonyok közt is megjelenhessék. Hálával tartozom dr. Kürschák József tanár úrnak is, ki az Akadémia részéről szintén szíves volt munkámat átolvasni.

A most megjelenő első rész bizonyos mértékig önmagában is befejezett egészet alkot. E rész a felületek analysis situsát tárgyalja, tehát az analysis situsnak azt a részét, mely Riemanntól kezdődőleg leginkább talált eddig egyéb mathematikai disciplinákban alkalmazást és a mely az analysis situsnak legteljesebben kidolgozott fejezetét alkotja. Megírásánál két általános szempont vezetett: a felületek absolut és relativ tulajdonságainak szigorú szétválasztása és a módszerek tisztaságának az elve, mely az analysis situsban a metrikus geometria fogalmainak teljes mellőzését követeli. Kívánatosnak látszhatik még a szemléleti elem mellőzése, vagy legalább szabatos körülhatárolása, de e követelmény teljesítésére — egyéb okok mellett — már csak azért sem törekedhettem, mert munkámat a kezdő számára is érthetően óhajtottam megírni. És ez nem is annyira nehéz feladat: az analysis situs a geometriának annyira primitiv fejezete, hogy aligha okoz nagyobb nehézségeket, mint a közönséges euklidesi geometria. Mint Hadamard megjegyzi, evvel éppenséggel nincs ellentmondásban az a tény, hogy «az analysis situs belejátszik a legmagasabb problémák megoldásába, melyeket a mathematikai tudomány csak felvethet».

Munkám főrészét a felületek absolut tulajdonságait tárgyaló 2—5. fejezetek alkotják. E vizsgálatokat a homœomorphismus szükséges és elegendő feltételeinek megállapítása tetőzi be. Itt bizonyos fokig teljességre törekedtem. Ellenben a 6. fejezet, mely a felületeket mint terünk részeit vizsgálja, csak egy néhány legfőbb idetartozó problémával foglalkozik; teljesen elintézett problémákról e téren egyébként mindezideig nem lehet szó. Mindezek a tárgyalások a geometriai szemléletre vannak alapítva. A szigorúsághoz fűzött modern követelményeknek csak az által próbáltam megfelelni, hogy az 1. fejezetben egy utat vázolok, melyen haladva el lehetne jutni az analysis situs tisztán fogalmi felépítéséhez. Örülnék, ha e fejezetnek természetszerűleg elvont fejtegetései nem vennék el még a kezdő olvasó kedvét sem a későbbi, szemléletes fejtegetésektől. Egyébként a kezdő megelégedhetik azzal, ha e fejezetet éppen csak átfutja. Meg kell még említenem, hogy a függvénytani és egyéb alkalmazásokat teljesen mellőztem.

Az irodalom összeállításában és idézésében meglehetős teljességre törekedtem. Tekintve, hogy az analysis situsnak tankönyve vagy kézikönyve mindezideig nincsen, nem volt könnyű feladat a rendkívül elszórtan megjelent dolgozatok egybegyűjtése. Nem is sikerült volna ez, ha Dehn és Heegaard kitűnő referatuma a nagy német mathematikai Encyklopädie-ben nem állott volna rendelkezésemre.

Az analysis situsban az ábrák a szövegnek igen fontos kiegészítő részét alkotják. Mindenesetre nagy mértékben a munka javára szolgált, hogy ezeknek (a 98. és 99. ábra kivételével, melyeket Boy munkáiból vettem át) megrajzolását Egerváry Jenő barátom volt szíves elvállalni, a ki a bonyolódottabb ábrák tervezésénél is nagy mértékben segítségemre volt. Kivüle még Szűcs Adolf és Sz. Nagy Gyula barátaimnak kell őszinte köszönetet mondanom azért a szivességükért, melylyel a korrekturák átolvasását elvállalták.

Munkám hátralevő részének elkészülése még bizonyára hosszabb időt fog igénybe venni.

Budapest, 1918. julius hó.

Kőnig Dénes.

TÖRTÉNETI BEVEZETÉS.

Az analysis situs egyike a mathematika legujabb ágainak. Innen van az, hogy a mathematikának mindmáig számos olyan meghatározása szokásos, melyek szerint az analysis situs nem is tartoznék a mathematikába. Valóban az analysis situsban, a természetes számoktól eltekintve, a *mennyiség* fogalmának semmi szerepe nincsen és a szó igen általános értelmében vett *rend* fogalma az, melyek köré az analysis situs vizsgálatai csoportosulnak. Az analysis situs t. i. az alakzatok (elsősorban vonalak és felületek) olyan tulajdonságait vizsgálja, melyek az alakzat deformatiójánál mindaddig nem változnak, a míg az alakzaton szakítást vagy összeforrasztást nem végzünk; más szóval kifejezve oly tulajdonságokról van itt szó, melyek *folytonos* deformatiókkal szemben invariánsak, a melyek tehát nem quantitativ, hanem qualitativ tulajdonságok.

Egészen a múlt század közepéig a mathematikusokat a geometriában csaknem kizárólag a quantitativ vizsgálatok érdekelték. Megfelel ez a «geometria» szó eredeti jelentésének és ezért a már LEIBNIZ és GAUSS által használt «geometria situs» elnevezés helyett inkább az «analysis situs» megjelölés terjedt el, ámbár itt a «situs» (helyzet) szó sem teljesen megfelelő, annál kevésbbé, mert a «géométrie de position» és a «Geometrie der Lage» elnevezésekben CARNOT, illetve VON STAUDT óta a «situs»-szal egyébként æquivalens «position» és «Lage» szavakat más értelemben használják. Ujabban divatba jött ismét a LISTING-től származó «topologia» elnevezés is.

Már az 1847. évet megelőzőleg foglalkoztak EULER, VANDERMONDE, CLAUSEN, GAUSS és MÖBIUS oly kérdésekkel, melyek ma részben az analysis situsba soroltatnak, de csak LISTING göttingai professor volt az első, ki határozott problémák felvetése kapcsán ilyetén problémák összetartozását felismerte és a geometria qualitativ (a mint ő mondja: modalis) oldalának kifejlesztését mint czélt kitűzte. Első e tárgyra vonatkozó művében, *Vorstudien zur Topologie*, Göttinger Studien, 1847 már több oly tárgyat érint, melyek azóta az analysis situsban fontosságot nyertek; ilyen a geometriai «értelem» szerepe, a vonalrendszerek és a hurkolt görbék bizonyos tulajdonságai, stb. De LISTINGnek e művével kevés sikere volt; Angliában talán még inkább olvasták, mint Németországban (TAIT pl. két ismertetést is írt LISTINGről [1]); igaz, hogy a sok új műszó nehézkessé teszi olvasását. De e sikertelenség igazi magyarázatát inkább abban az elvben találhatjuk meg, melyet FELIX KLEIN a históriai folytonosság elvének nevez. A mathematika történetében nem ritka jelenség, hogy egy elszigetelten fellépő problémacsoport felé csak akkor irányúl az általános érdeklődés, ha a problémák egy már többé-kevésbbé kifejtett disciplinából sarjadzanak ki. Hogy egy példát említsünk, BOLZANOnak mélyen járó halmazelméleti megjegyzései csaknem teljesen ismeretlenek maradtak a mathematikusok körében, mindaddig, míg CANTORt a FOURIER-féle sorok vizsgálata nem vezette a végtelen halmazok általános elméletéhez. Egészen hasonló a helyzet az analysis situs történetében; LISTINGnél a problémák semmiféle régebbi problémával sem lépnek kapcsolatba (a «Vorstudien» idézetei úgyszólván mind botanikai művekre vonatkoznak).

RIEMANN volt az, ki először doktori értekezésével (1851) disciplinánkat a históriai fejlődés folyamába beleillesztve, függvénytani vizsgálatokból jutott a felületek általános analysis-situs-beli tulajdonságainak vizsgálatához, elsősorban a róla elnevezett felületek kapcsán. Azóta egyrészt MÖBIUSnak és JORDANnak (RIEMANN munkáitól független) vizsgálatai, másrészt RIEMANN iskolájának (CARL NEUMANN, KLEIN, DYCK, PETERSEN és mások kutatásai a felületek összefüggési viszonyainak elméletét az analysis situs legjobban kidolgozott fejezetévé fejlesztették. Már

[1] *Johann Benedict Listing*, Nature, 1883 és *Listing's Topologie*, Philosophical Magazine, 1884. Mindkettő megtalálható TAIT összegyűjtött műveiben is: Scientific Papers, II. k., Cambridge, 1900, 81. l. és 85. l.

maga Riemann foglalkozott e vizsgálatainak többméretű terekre való kiterjesztésével; e téren különösen Betti (1871) és Poincaré, továbbá Picard, Heegaard, Tietze és Dehn értek el nevezetes eredményeket, de véglegesen befejezett eredményekről a három és többméretű alakzatok analysis situsában mindezideig nem lehet szó. — Mind a felületek, mind a magasabb méretű alakzatok analysis situsában alapvető fontosságú szerepet játszik Euler polyedertétele és ennek általánosításai. Mégis e tételekhez fűződő rendkívül kiterjedt irodalom az analysis situs fejlődésében alig jön tekintetbe, mert itt az analysis situs szempontjai csak igen kis mértékben vétettek figyelembe és e vizsgálatok inkább a quantitativ (metrikus) geometriába sorolandók.

Megemlítendő még a térképszínezés mindezideig elintézetlen problémája, mely Cayley kezdeményezésére 1878 óta sok (különösen angol és amerikai) mathematikust foglalkoztatott.

A felületek után a vonalrendszerek (graphok) az analysis situs legbővebben megvizsgált alakzatai. E körbe tartozik már a königsbergi hidak Euler-féle problémája, melyet az analysis situs történetileg első kérdésének szoktak tekinteni (1741). Kirchhoff 1847-ben a linearis elektromos áramok elágazódásának vizsgálatánál jutott idetartozó eredményekhez, míg Cayley «tree»-nek nevezett vonalrendszereit chemiai szerkezetek szemléletes leírására alkalmazta (1874). A combinatorikának számos problémája szintén szoros kapcsolatban van a vonalrendszerekkel, különösen sok olyan, melyeket a «mathematikai mulatságok» irodalmában szoktak tárgyalni. Igen figyelemreméltó eredményekhez jutott a graphok elméletében Petersen (1891) és pedig az invariánsok elméletéből kiindulólag. Legujabban a graphok kapcsolatba léptek a determinánsok és a halmazok általános elméletével is.

Nehéz és nevezetes problémákhoz vezet az alakzatok relativ tulajdonságainak vizsgálata; itt az alakzatokat mint más alakzatok részeit tekintik. E körből leginkább csak a zárt vonalakat tárgyalták és pedig 1. mint felületek és 2. mint terünk részeit. Az első problémakörrel különösen Jordan és Poincaré, a másodikkal (hurkolt és lánczolt görbékkel) Listing, Tait, Simony és mások foglalkoztak. Mindkét körből legujabban Dehn jutott véglegesebb eredményekhez.

Az egész analysis situsnak, mint önálló mathematikai disciplinának fejlődését hatalmas lépéssel vitte előre 1907-ben DEHN és HEEGAARD «*Analysis situs*» cz. referatuma az *Encyklopädie der Mathematischen Wissenschaften* III-ik kötetében.[1] (E munka népszerűsített — és egy lényeges pontjában helyesbített — kivonatának tekinthető DEHN «*Topologie*» cz. czikke a PASCAL-féle *Repertorium der höheren Mathematik* második német kiadásában, 1910). Nem csak kimeritő ismertetését adja e mű az analysis situs teljes azideig megjelent irodalmának, de — eltérően az *Encyklopädie* szokásaitól — több új eredményt és bizonyításokat is tartalmaz. Számos hézag betöltésével e munka egységes rendszerbe foglalja az analysis situs problémáit és vizsgálatait. E rendszerbe foglalás, valamint az analysis situsnak minden geometriai szemlélettől független, a módszerek tisztasága elvének megfelelő szigorú megalapozása tekintendő DEHN és HEEGAARD munkájának főérdeméül.

Ezzel kapcsolatban külön kell szólnunk az analysis situs módszereiről. Az analysis situs (még a több dimensiós is) — mondja POINCARÉ — a geometriai intuitió igazi hazája. Semmiféle geometriai disciplinában sem jár a térszemlélet mellőzése annyi nehézséggel, mint az analysis situsban. Már LISTING említi a «térbeli intuitiókat fogalmakra visszavezető módszerek» feltalálásával járó nehézséget és e nehézséggel magyarázza azt a mostoha bánásmódot, melyben a mathematikusok a qualitativ geometriai tulajdonságokat részesítették. Mindenesetre vitatható, hogy e nehézség az analysis situs lényegében rejlik-e, avagy a geometria történeti fejlődésében szereplő véletleneknek a következménye; de az kétségtelen, hogy az analysis situsban e nehézség megvan. Elég ennek igazolása czéljából a felületre rajzolt görbe két «part»-jának a fogalmára, a térképszinezés problémájára vagy a hurkolt és nem hurkolt zárt térgörbék megkülönböztetésére rámutatunk.

Másrészt a puszta szemléleti evidentiára való hivatkozás — és az eddig említett vizsgálatok csaknem kizárólag ezen alapultak — nem felel meg a mathematikai szigorúsághoz fűzött modern követelményeknek. Éppen az analysis situs történetéből vett számos példával igazolható a térszemlélet megbizhatatlan-

[1] Röviden mint «Encyklopædia-czikk»-et fogjuk idézni.

sága, mely határozottan téves felfogásokhoz is vezetett. Elég talán itt arra a téves szemléletre rámutatnunk, mely szerint egy felületet egy zárt görbéje mentén felmetszve mindig két új határgörbe keletkezik; e tévedés az összes egyoldalúaknak nevezett felületek teljes mellőzését vonta maga után. Már LISTING írja említett munkája bevezetésében az analysis situsról, hogy «csak úgy érheti el az exakt tudomány rangját, melyet hivatva van elérni, ha sikerül neki térszemléletünk tényeit lehetőleg egyszerű fogalmakra visszavezetni».

A szemlélet mellőzése mellett joggal megkövetelhetjük a módszerek tisztasága elvének teljes keresztülvitelét is,[1] a mely szerint az analysis situst tisztán az analysis situsba tartozó fogalmakkal kell felépíteni. Mellőznünk kell tehát a geometria metrikus fogalmait (a mint már RIEMANN is mellőzte) és különösen az «infinitesimális» elemeknek amúgy is homályos fogalmát, mely utóbbi pl. MÖBIUS, JORDAN és KLEIN vizsgálataiban lényeges szerepet játszik.

Mindkét itt említett követelmény elérésére az analysis situs arithmetikai megalapozása szolgálhat, vagyis az alakzatoknak, mint ponthalmazoknak, a halmazelmélet és (esetenként) az arithmetika fogalmaival való leírása és vizsgálása. A CANTOR halmazelméleti kutatásaihoz csatlakozó SCHOENFLIES-féle vizsgálatok, valamint ujabban különösen BROUWER nagysikerű vizsgálatai, stb. eléggé mutatják e módszer nehézségeit, mely «szemléletileg magától értetődő» tételek (pl. a híres JORDAN-féle tétel) bizonyítására is igen bonyodalmas meggondolásokat igényel. Igaz, hogy másrészt e módszer éppen szemléleti tévedések felismerésére képesít, a mint a négyzetet betöltő PEANO-féle görbe példája mutatja. E módszer különben inkább általános ponthalmazok vizsgálatára látszik alkalmasnak és nem a RIEMANNhoz csatlakozó analysis situs speciális alakzatainak vizsgálatára. Egy másik módszer abból áll, hogy valamely koordinátarendszert véve alapul, a függvényfogalmat is alkalmazzuk és ily módon a geometria többi ágaiban annyira bevált analytikus módszert állítjuk az analysis situs szolgálatába. E módszert különösen több-

[1] Ez az elv itt szűkebb vagy tágabb értelemben vehető, a szerint, hogy az általános számfogalmat is kizárjuk-e vagy sem.

méretű alakzatokra elsősorban POINCARÉ alkalmazta sikerrel. Itt azonban az a nehézség lép fel, hogy a függvénytan módszereinek alkalmazhatósága a differentiálható függvényekre való szorítkozást teszi szükségessé és e megszorítás, mely geometriailag metrikus tulajdonságokban nyer kifejezést, nem felel meg az analysis situs természetének.

Az analysis situs természetének legjobban megfelelő megalapozási módhoz (mely egyszersmind fenti két követelményünket is teljes mértékben kielégíti) annak a felismerése vezet, hogy az egész analysis situsban a *combinatorius elem* játszsza a legfőbb szerepet.[1] DEHN és HEEGAARD elmélete, melynek nyomai már MÖBIUS és POINCARÉ felfogásában megtalálhatók, valóban az analysis situst — és pedig bármely dimensiószám esetére — mint «a combinatorikának szemléleti jelentése által kitüntetett részét» s így «mint a geometria legprimitivebb fejezetét tekinti, melyben a határérték fogalmának még semmiféle szerepe sincsen». Ők nemcsak a pontot tekintik definiálatlan alapfogalomnak, hanem minden méretszámnak megfelelőleg egy-egy alapfogalmat vezetnek be: a 0-méretű pontot, az 1-méretű vonaldarabot, a 2-méretű elemi felületet, a 3-méretű czellát, stb. Axiomáik ezek közt az alapalakzatok közt fennálló néhány egyszerű kapcsolatot fejeznek ki. Minden szereplő alakzat végesszámú ily alapalakzatból tevődik össze, pl. a felület — mint «polyeder»-felület — szögpontjaiból, éleiből és lapjaiból. Az összetevés módját bármely alakzatra véges számú kombinatorius adat határozza meg. Ugyancsak kombinatorius módon és ugyancsak a szemléletre való hivatkozás nélkül értelmezik ezután, hogy két ily módon felépített alakzat mikor tekintendő az analysis situs értelmében æquivalensnek, azaz — POINCARÉ műkifejezésével — homœomorphnak. Hogy e definitió mennyiben fedi a homœomorphismus szemléleti vagy halmazelméleti fogalmát, annak vizsgálata már nem e kombinatorius elmélet feladata.

WEYL *Die Idee der Riemannschen Fläche* cz. könyvé-

[1] Mind a halmazelméleti, mind a kombinatorius módszert az jellemzi, hogy csupán az «elem», «halmaz» és «leképezés» fogalmával operál. Különbség csak annyiban van a két módszer között, hogy az utóbbiban csak *véges* halmaz szerepel.

ben (1913) felületekre vonatkozólag sikeresen egyesítette a most vázolt DEHN-HEEGAARD-féle elméletet a fentebb említett halmazelméleti eljárással, különösen BROUWER vizsgálataival. Többméretű alakzatokra pedig STEINITZ (1908) fejlesztette tovább e kombinatorius elméletet.

Mint minden formalis és axiomákra alapított elméletnek, úgy DEHN és HEEGAARD elméletének is megvan az a hiánya, hogy a logikai szempont mellett a psychologiai és historiai szempont háttérbe szorul és az a felépítési rend, melyet ők adtak az analysis situs számára, lényegesen eltér attól a sorrendtől, a melyben akár az egyes tudós, akár a tudomány az analysis situs igazságaihoz eljutott. Ezért, a szemléleti elem mellőzése következtében, a kombinatorius eljárás megértése nagy nehézséggel jár az olyan olvasó számára, ki az analysis situs igazságait ilyen módon akarja először elsajátítani. Mert — az analysis situsban még inkább, mint bármely más ágában a geometriának — nemcsak a kutatásnak és felfedezésnek, de a megértésnek is mindenkor a geometriai szemlélet az alap a.

1. §.

ALAPFOGALMAK.[1]

1. Az analysis situs tárgya.

Bevezetésünk elején már röviden jellemeztük az analysis situs tárgyát, úgy a hogy az e tárgy irodalmában szokásos. Az ott szereplő «alakzat» és «folytonosság» szavakhoz bizonyára mindenki fűz valamelyes szemléleti fogalmat. Ámbár egyáltalában nem czélunk az analysis situs felépítésében a szemléleti elemet mellőzni, mégis szükségesnek tartjuk e fogalmakat és általában az analysis situs főfogalmait a szemlélettől függetlenül értelmezni, azaz a mathematika logikai szempontból legprimitivebb — t. i. halmazelméleti — fogalmaira visszavezetni. Ismételjük, hogy a 2. §-ban kezdődő részletes vizsgálatainkat nem tisztán ezekre az értelmezésekre fogjuk alapítani, hanem fontos szerepet juttatunk majd a «szemléleti evidentiá»-nak is. Itt adandó alapvetésünkben csak egy utat akarunk vázolni, melyen haladva el lehet jutni az analysis situs fogalmi felépítéséhez.

A legáltalánosabb értelemben vett *analysis situs* az általános *halmazelmélet* részének tekinthető. Az analysis situs tárgyát azonban bizonyos elemek halmaza csak akkor alkotja, ha reá nézve a *limes-elem* fogalma értelmezve van, azaz, ha a halmaz bizonyos részhalmazaihoz az eredeti halmaz egy-egy eleme oly módon van, mint e részhalmaz limes-eleme vagy rövi-

[1] A halmazelméleti meggondolásokhoz nem szokott olvasó, kinek az e fejezetben foglalt értelmezések nehézséget okoznak, megelégedhetik azzal, ha az itt bevezetett fogalmak *szemléleti* jelentésével tisztába jön.

den *limese*, hozzárendelve, hogy a következő követelmények teljesülnek:[1]

1. Véges halmaznak nincs limese.
2. Minden halmaznak legfeljebb egy limese van.
3. Ha egy halmaznak van limese, akkor minden végtelen részének is van és ez ugyanaz az elem.
4. Ha két halmaznak közös limese van, akkor a két halmaz egyesítésével keletkező halmaznak is van limese és pedig (ez már következik 3.-ból) ez ugyanaz az elem.
5. Ha egy halmazból véges számú elemet elhagyva oly halmazt nyerünk, melynek van limese, akkor az eredeti halmaznak is van limese és (ez ismét már következik 3.-ból) ez ugyanaz az elem.[2]

(Az analysisben és az analytikus geometriában szereplő limes-fogalom természetesen kielégíti e követelményeket.)

Ha valamely halmazra egy *limes-vonatkozás* e feltételeknek megfelelőleg van megadva — a mivel a halmaz ú. n. *folytonossági* vagy *összefüggési* viszonyai jellemeztetnek — akkor a halmazt az (analysis situs értelmében meghatározott) *alakzat*nak fogjuk nevezni. Ha két alakzat, A és B, elemeire olyan kölcsönösen egyértelmű vonatkoztatás van megadva, hogy valahányszor az A egy A_1 részének a a limese, mindannyiszor az A_1 elemeinek B-ben megfelelő elemek B_1 halmazának is van limese és ez az a-nak megfelelő elem — valamint fordítva — akkor A-t és B-t egymáshoz *homoeomorph*nak nevezik. Ily vonatkoztatás A-t és B-t egymásra «folytonosan képezi le», A-t és B-t mint egymásnak «folytonos kép»-ét adja meg. Értelmezésünk szerint minden alakzat homœomorph önmagához és, ha

[1] V. ö. FRÉCHET, Rendiconti del Circ. Mat. di Palermo, 22. k. (1906), 5—6. l. és RIESZ Frigyes, Atti del IV Congresso dei Matematici, Roma, 1908, II. k., 18. l.; valamint Math. és Phys. Lapok 15 k., 97. l. és 16 k., 145. l.

[2] A limes-elem helyett a «sűrűsödési hely» vagy «környezet» fogalmát is lehet és szokásos alapfogalomnak venni és ezekre megfogalmazni bizonyos követelményeket. Ekkor a limes-elemet mint egyetlen sűrűsödési helyet és a sűrűsödési helyet mint oly elemet értelmezik, melynek minden környezetében az illető halmaznak (melynek ez az elem sűrűsödési helye) végtelen sok eleme van.

két alakzat egy harmadikhoz homœomorph, egymás közt is homœomorphak. Homœomorph alakzatokat az analysis situs æquivalenseknek tekint és gyakran egymástól meg sem különböztet. Az analysis situs főfeladata oly tulajdonságok felismerése, melyek homœomorph alakzatokra közösek,[1] valamint két alakzat homœomorphismusának elegendő feltételeit is megállapítani.

2. Egyesítés és összeforrasztás.

Egy alakzattal együtt annak minden része is *mint alakzat* van értelmezve.[2] Ha egy C alakzat közös elem nélküli két része, A és B olyan, hogy A semmiféle részének sem limese egy B-beli elem és viszont, akkor azt fogjuk mondani, hogy A és B *egymástól el van választva.* Gyakran egy alakzat részeképpen értelmezett A alakzat vizsgálatánál, csak azokra a limes-kapcsolatokra vagyunk figyelemmel, melyek A részei és elemei közt fennállanak és nem veszszük figyelembe, hogy A valamely eleme esetleg oly halmaznak is limese, melynek elemei nem mindnyájan elemei A-nak. Ilyenkor azt fogjuk mondani, hogy az A részt *absolute tekintjük.*

Két vagy több (közös elem nélküli) alakzat *egyesítésé*vel keletkező halmaz maga is — közvetetlenül adódó értelemben — mint alakzat van megadva. Ettől az egyesítéstől jól megkülönböztetendő az a másik eljárás, melylyel szintén két vagy több alakzatból egy újat nyerhetünk s a mely eljárás az *összeforrasztás* elnevezést viseli. Teljesen meghatározott alakzathoz jutunk, ha egy alakzat bizonyos (két vagy több elemből álló) elemcsoportjainak elemeit egymásközt azonosaknak tekintjük és öt követelményünket — mint ezentúl is mindig — érvényben tartjuk. Ha az eredetileg különböző P és Q elemek azonosaknak tekintetnek, ez általában megváltoztatja az alakzat folytonossági tulajdonságait is. Ha pl. az eredeti alakzat egy részének P, egy

[1] Ily tulajdonság első sorban az alakzatnak, mint elemei halmazának a *számossága ;* de e tulajdonság vizsgálata a halmazelméletbe tartozik. A szűkebb értelemben vett analysis situsban csak oly alakzatok szerepelnek, melyeknek számosságát a «continuum számossága» adja.

[2] Egy alakzat valamely részére mindenkor ugyanazt a limes-vonatkozást tekintjük érvényesnek, mint az eredeti alakzatra.

másiknak Q a limese, akkor e két rész egyesitésével keletkező halmaznak, mint az új alakzat részének (4. követelményünk alapján) $P = Q$ limese lesz, bár eredetileg nem volt limese. Legyen általában az A alakzat A' és a B alakzat B' része egymással homœomorph s legyen adva A'-nek és B'-nek egy egymásra való folytonos leképezése. Tekintsük azonosaknak azokat az elemeket, melyeket e leképezés egymásnak meg feleltet. Az A-ból és B-ből így adódó C alakzatról, mely öt követelményünk figyelembevételével teljesen meg van határozva, azt mondjuk, hogy belőlük A' és B' *mentén való összeforrasztással* keletkezett. Itt A és B ugyanazt az alakzatot is jelentheti [1] és A' és B' egy-egy pont is lehet.

3. Vonaldarab és elemi felület.

Az elmondottak a legáltalánosabb értelemben vett alakzatokra vonatkoztak, bármik is az elemek. A leggyakrabban szereplő alakzatok a számok, számpárok, stb. halmazai, valamint azok a ponthalmazok, melyek a három- vagy többméretű euklidesi ponttér részeit alkotják. Mindezekre (az analysisből jól ismert módon) egy limes-vonatkozás közvetlenül adva van és, ha mást nem emlitünk, ily halmazoknál mindig ezt a limes-vonatkoztatást fogadjuk el. De szerepelnek az analysis situsban olyan geometriai alakzatok is, melyeknek elemei nem pontok, hanem pl. egyenesek, pontpárok, gömbök. Ha ezek terünk részét alkotják, akkor e halmazokra is közvetlenül adva van egy limesvonatkozás (feltéve, hogy a fenti elemekből csak egynemüeket foglalunk egy halmazba). De az alakzatok — a mint itt e fogalmat értelmeztük – bármily arithmetikailag vagy akár logikailag értelmezett elemekből állhatnak, sőt az elemeknek nem is kell «tárgyi jelentés»-sel birniok, ha csak a halmazra a limes-vonatkozás a fenti módon értelmezve van. Minket elsősorban olyan alakzatok fognak foglalkoztatni, melyeknek terünk ponthalmazai közt van képviselőjük, illetőleg melyek csekély módosítással ilyenekké válnak. Mint láttuk, az alakzatokat egy-egy repræsen-

[1] Sőt e feltevés nem is megszorítás: csupán az A és B egyesítésével keletkező alakzatot kell e czélból A-val és B-vel jelölni.

tánsuk (azaz egy-egy velük homœomorph alakzat) az analysis situsban teljesen jellemzi.

A geometriai analysis situsban a következő három alakzat játssza a legfőbb szerepet:

1. a 0 és 1 közti számok halmazának, illetőleg egy egyenesdarab pontjai halmazának (a határokat beleértve);

2. az $x^2 + y^2 = 1$ feltételnek megfelelő valós számpárok, vagyis egy kör (körvonal) pontjai halmazának;

3. az $x^2 + y^2 \leqq 1$ feltételnek megfelelő számpárok, azaz egy körlemez pontjai halmazának

folytonos képei. Ezeket az alakzatokat, melyeket itt egy-egy repræsentánsukkal jellemeztünk, rendre *vonaldarabnak, zárt vonalnak,* illetőleg *elemi felületnek* nevezik.

Könnyű bebizonyítani, hogy ha egy egyenesdarabot önmagára folytonosan leképezünk, a két végpontnak ismét a két végpont (esetleg felcserélve) felel meg. Innen azonnal következik, hogy bárhogyan képezünk is le folytonosan egy vonaldarabot egy egyenesdarabra, a vonaldarabnak mindenkor ugyanaz a (különböző) két pontja felel meg az egyenesdarab végpontjainak. E két pontot nevezik a vonaldarab *végpont*jainak, a többi *belső pont.* Hasonlóképpen (habár már nem olyan könnyen) bebizonyítható, hogy körlemeznek önmagára való folytonos leképezésénél a határpontok halmaza önmagára képeződik le, tehát bárhogyan képezünk is le folytonosan egy elemi felületet egy körlemezre, mindenkor az elemi felületnek ugyanazok a pontjai felelnek meg a körlemez határpontjainak. Az elemi felület e pontjait nevezik az elemi felület *határpont*jainak. A többi *belső pont.* Az elemi felület határpontjainak halmaza, mint kör folytonos képe, zárt vonal.

4. Összefüggő és nem összefüggő alakzatok.

A vonaldarab fogalma segítségével néhány az általános alakzatokra is nevezetes fogalmat értelmezhetünk most. Egy alakzat vonaldarab alakú részének két végpontját (az alakzaton) *egymásból elérhetőnek* nevezzük. Ha egy alakzat bármely két pontja egymásból elérhető, akkor az alakzatot *(önmagában) össze-*

függőnek nevezik. Az eddig értelmezett három alakzat mindegyike összefüggő és ilyen marad akkor is, ha pl. határ-, illetőleg végpontjaikat (a zárt vonalnak ilyen nincs) eltávolítjuk. *Minden* A *alakzat oly önmagukban összefüggő alakzatok egyesítésével (ezek véges vagy végtelen sokan lehetnek) keletkeztethető, hogy* P *és* Q *két tetszés szerinti, de különböző ily részalakzatnak lévén egy-egy tetszés szerinti eleme,* P *és* Q *egymásból az* A*-n nem érhető el.*[1] Továbbá: *minden alakzat csak egyféleképpen esik szét ilyen összefüggő részekre.* Az utóbbi állítás magától értetődik: csak akkor nyerhetünk követelményeinket kielégítő részekre bontást, ha minden elemet minden oly elemmel (és csakis olyannal) foglalunk egy részbe, mely belőle A-n elérhető. Hogy még belássuk, hogy ez utóbbi utasítás keresztülvihető — a mivel első állításunk is igazolva lesz — csak azt kell belátnunk, hogy valahányszor P és Q, valamint Q és R az A-n egymásból elérhető, mindannyiszor P és R is elérhető egymásból az A-n. Ez azonban következménye a következő könnyen igazolható tételnek: ha egy vonaldarab végpontjai P és Q, egy másiké Q és R, akkor e két vonaldarab pontjaiból (akár vannak közös belső pontjai, akár nem) oly vonaldarab is összeállítható, melynek P és R a végpontjai. Minden alakzathoz tartozik tehát egy meghatározott szám vagy végtelen számosság, ν, mint a fenti tulajdonságú összefüggő részeinek száma vagy számossága. Világos, hogy homœomorph alakzatokra e ν közös. Ha az alakzat összefüggő, $\nu = 1$. Ha μ számú (a μ *véges*) oly összefüggő $A, B, \ldots$, alakzatot, melyek közül bármely kettő egymástól el van választva (a mi pl. bekövetkezik, ha őket absolute tekintjük), egy H alakzattá egyesítünk, akkor e H alakzatra a fent értelmezett ν éppen $= \mu$. Ennek igazolására csak azt kell belátni, hogy H-nak minden vonaldarab-alakú része vagy egyedül A-nak, vagy egyedül B-nek, stb. része. Ha ez nem volna így, volna oly vonaldarab, mely véges számú, egynél több, összefüggő és páronként egymástól szétválasztott alakzat elemeiből volna összerakva. Ez pedig (még ha az összefüggő szót itt el is hagyjuk) ellentmond a következő arithmetikai

[1] E tulajdonság úgy is megfogalmazható, hogy A-nak minden vonaldarab-része: része e részalakzatok valamelyikének.

tételnek: a 0 és 1 közti számok halmaza, 0 és 1 beleértésével, nem bontható szét véges számú oly részre, mely részek mindegyike a szó halmazelméleti értelmében zárt (azaz tartalmazza minden limessel biró részének limesét). E tétel bizonyítására itt nem térünk ki.

5. Egy- és kétméretű alakzatok. A felület és határgörbéi.

A vonaldarabok és elemi felületek azok az alapalakzatok, melyekből összeforrasztásokkal az analysis situs főanyagát alkotó ú. n. *egy- és kétméretű alakzatok* összetevődnek. Legyen adva a vonaldaraboknak csupa különböző elemből (pontból) álló véges halmaza. Ha ezen tetszőleges számban oly összeforrasztásokat végzünk, hogy az összeforrasztás mindig csak e vonaldarabok végpontjai mentén történik, keletkezik az általános *egyméretű alakzat (graph, vonalrendszer)*. Az eredetileg adott vonaldarabok a vonalrendszer *él*einek, végpontjai a vonalrendszer *szögpont*jainak neveztetnek. *Végpont* az oly szögpont, melyből csak egy él fut ki; a vonalrendszer többi pontja: *belső* pont. Végpontból kifutó él *végződő* élnek neveztetik. Ha a vonaldarabok mindeme összeforrasztásának következményeképpen soha kettőnél több (vég-)pontjuk nem válik egymás közt azonossá, az egyméretű alakzatot *vonal*nak nevezik. Könnyű belátni, hogy *minden összefüggő vonal: vagy vonaldarab vagy zárt vonal.* Nem összefüggő vonal pedig: két vagy több (véges számú) csupa különböző pontból álló összefüggő vonal összessége. Ha pl. a

$$V_1, V_2, \ldots, V_n$$

vonaldarabokat ($n = 1, 2, 3, \ldots$) úgy forrasztjuk össze, hogy minden V_i-nek mindkét szomszédjával egy-egy közös végpontja lesz (V_1 és V_n is szomszédosnak tekintendő), akkor zárt vonal keletkezik, mint n-oldalú polygon (n-szög). Fordítva is, minden zárt vonal (tehát pl. minden elemi felület határa) n-oldalú sokszögnek tekinthető és pedig a zárt vonal bármely n-számú pontja szerepelhet az n-számú «oldal» (vonaldarab, él) végpontjaiként.

Áttérve a kétméretű alakzatok értelmezésére, véges számú csupa különböző elemből (pontból) álló elemi felületből indulunk ki, melyeknek határát mint n-oldalú polygont tekintjük, hol n elemi felületenként változhatik. Ezeket az oldalakat most *él*eknek, végpontjaikat *szögpont*oknak nevezzük; mint vonaldarabok, az élek egymásközt mind homœomorphak. Ha ezeken az elemi felületeken — tetszés szerinti számban — oly összeforrasztásokat végzünk, hogy minden összeforrasztás egy-egy él mentén történik, keletkezik az általános *kétméretű alakzat* (*felületrendszer*). Ha mindezeknek az összeforrasztásoknak következtében soha kettőnél több él nem válik egymás közt azonossá, a kétméretű alakzatot *felület*nek nevezik.[1] Az oly élek pontjai, melyek mentén nem történt összeforrasztás, a felület *határpont*jainak neveztetnek, a felület többi pontja: *belső pont*. Könnyű belátni, hogy a határpontok véges számú zárt vonalat alkotnak; ezek a felület *határgörbéi*. Ha minden él mentén történt összeforrasztás, azaz nincs határpont, a felületet *zárt*nak[2] nevezzük, ellenkező esetben *határolt*nak. Minden felület vagy összefüggő, vagy véges számú összefüggő felületből áll.

A felület belső- és határpontjainak megkülönböztetése független attól, hogy a felületet elemi felületekből miképpen építettük fel. Ez a következőképpen látható be. A felületnek háromféle belső pontja van:

1. a szerepelt elemi felületek belső pontjai,

2. olyan élek belső pontjai, melyek mentén összeforrasztás történik,

3. azok a szögpontok, melyekből kiinduló minden él mentén történt összeforrasztás.

Belátható, hogy mind a három fajta B belső ponthoz található a felületnek olyan elemi felület-része, melynek B belső pontja, míg a felület bármely határpontjához, akár

1. belső pontja ez oly élnek, melynek mentén nem történt összeforrasztás, akár

[1] E definitió szerint pl. a kettős kúp és a «végtelenszeres gyűrű» nem felület.

[2] Itt a »zárt» szó *nem* a halmazelméleti értelemben veendő. A halmazelméleti értelemben, mint pontjainak halmaza, terünk *minden* felülete zárt, a határolt is.

2. oly szögpont ez, melyből kiinduló valamely él mentén nem történt összeforrasztás,

ilyen elemi felület nincsen. A belső és határpontoknak ez utóbbi megkülönböztetése most már valóban csak a felülettől függ és azt is mutatja, hogy a felület folytonos leképezésénél belső pont belső pontba, határpont határpontba megy át. Ha tehát két felület homœomorph, akkor határaik azaz határpontjaik összessége is homœomorph. Láttuk, hogy e határok véges számú zárt görbéből vannak összetéve. Továbbá egy felület két határgörbéje, mint a felület két része, egymástól szét van választva.[1] A határgörbék száma tehát a megelőző pont meggondolásai szerint homœomorph felületekre közös. E nevezetes tényt úgy is kifejezhetjük, hogy minden felületnél a határgörbék száma (mely véges) oly tulajdonságát adja a felületnek, mely folytonos leképezesekkel szemben invariáns.

Ha egy határolt felületet valamelyik határgörbéje mentén és egy elemi felületet egyetlen határgörbéje mentén egymással összeforrasztunk, akkor újból felületet nyerünk egygyel kevesebb határgörbével. Ezt az eljárást úgy is fogjuk leírni, hogy a felületet e határgörbéje mentén egy elemi felülettel *kitöltöttük*. Minden határgörbére elvégezve ezt, végül zárt felülethez jutunk.

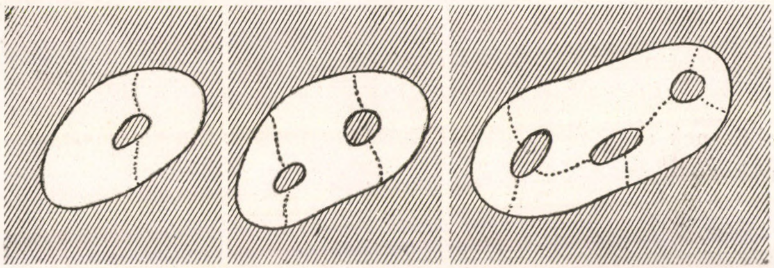
6. Felületek terünkben; a legegyszerűbb példák.

A következőkben egyszerű példáit akarjuk megadni az oly felületeknek, melyek a háromméretű euklidesi tér részét alkotják. A felület fogalmára elfogadott értelmezésünknek megfelelőleg ezeket mint elemi felületek ott előírt módon való összeforrasztásának eredményét fogjuk jellemezni, térszemléletünkre való hivatkozással. Azt is szemléletileg elfogadottnak tekintjük, hogy a szerepelendő elemi felületek valóban elemi felületek. Egy térbeli alakzat elemi felület voltának szemléleti felismerésére a következő meggondolás szolgálhat. Gondoljunk egy csekély vastagságú, minden határon túl tágítható, összenyomható és hajlítható anyagból készült körlemezt, melynek vastagságá-

[1] Ha t. i. egy határgörbe valamely részének van limese, ez ugyanahhoz a határgörbéhez tartozik.

tól teljesen eltekintünk. Bárhogyan deformáljuk is ezt terünkben folytonosan, azaz úgy, hogy sem szakítást, sem forrasztást nem végzünk, ismét elemi felületet nyerünk. Hasonlóan ismerhetjük fel esetleg szemléletileg más két «anyagi» alakzat homœomorphismusát is.

A legegyszerűbb határolt felületre, az elemi felületre terünkben bármely egyetlen zárt görbével határolt síkidom, valamint sokféle térbeli idom nyújthat példát. A legegyszerűbb zárt felület a *gömb*, melyet — ez a gömbfelület analysis-situs-beli definitiója — két oly elemi felület pontjai alkotnak, melyeknek közös határvonaluk van és egyébként közös pontjuk nin-

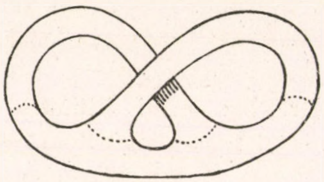


1. ábra. 2. ábra. 3. ábra.

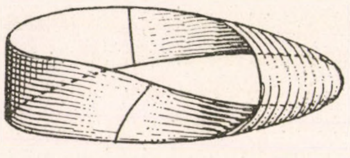
csen.[1] Két, három, négy, ... határgörbével bíró felületekre az 1—3. ábrák szolgáltatnak példát; az elsőt *körgyűrű* vagy *hengerpalást* felületnek nevezzük (az árnyékolt rész nem tartozik a felülethez). Itt, mint a következő ábrákban, a berajzolt vonalak mutatják, hogy miképpen keletkezhetnek e felületek elemi felületek összeforrasztásával. (A 6—8. ábrák is könnyen kiegészíthetők ilyen beosztással.) Hogy e részek valóban elemi felületek, azt fenti megjegyzésünkkel szemléletileg igazoltnak tekintjük; ugyanígy következő példáinkban. Egyetlen határgörbével bíró felületet mutat a 4. ábra is; ez már nem része a síknak (a kereszteződésnél a két felületrész egyike a másik fölött vonul el). Igen nevezetes felület az analysis situsban a MÖBIUS-*féle*

[1] Bebizonyítható, hogy az így jellemzett felületek éppen a metrikus értelemben vett gömbbel homœomorph felületeket adják és így egymásközt is homœomorphak.

szalag (5. ábra), mely pl. úgy keletkeztethető két elemi felületből, hogy ezeket két-két különálló élük mentén az itt lát-



4. ábra.



5. ábra.

ható módon összeforrasztjuk. Analytikusan egy MÖBIUS-féle szalag pl. mint az

$$x = \cos u\left(1 - v\sin\frac{u}{2}\right),\quad y = \sin u\left(1 - v\sin\frac{u}{2}\right),\quad z = v\cos\frac{u}{2}$$

vagyis mint az

$$y(y+z)^2 + 2x(y+z)(x-1) - (x-1)^2 y = 0$$

felületnek az a része adható meg, melyet a két parametérre vonatkozó

$$0 \leqq u < 2\pi,\quad -1 \leqq v \leqq 1$$

egyenlőtlenségek jellemeznek.[1] Ez már a harmadik, egyetlen határgörbével biró felület példája; később ki fog derülni, hogy e három felület közt nincs kettő, mely egymással homœomorph volna. Az általános vizsgálat tárgya lesz éppen oly felületi tulajdonságokat megállapitani, melyekben e felületek egymástól eltérnek. A gömb után a legegyszerűbb zárt felület a 6. ábrában látható *közönséges gyűrű (torus)*, mely pl. úgy keletkezik, hogy egy kör egy a síkjában fekvő és őt nem metsző egyenes körül forog. Ha a forgó kör sugara r s középpontjának távolsága a forgás tengelyétől R, akkor az u, v paraméterekkel a közönséges gyűrűfelület analytikusan a következő egyenletrendszerrel jellemezhető:[2]

[1] Szűcs Adolf: *Két adalék az egyoldalú felületek elméletéhez*, Math. és Természettud. Értesítő, 30. k. (1912), 954 l.; SCHEFFERS, *Theorie der Flächen* (2. kiadás, Leipzig, 1913), 40—43. l. V. ö. továbbá MASCHKE: *Note on the unilateral surface of Möbius*, Transactions of the Am. Math. Society, 1. k. (1900), 39 l. és FELDBLUM egy lengyel nyelvű dolgozatát (1897), melyet a Fortschritte der Mathematik (28. k., 579 l.) ismertet.

[2] Itt a forgástengely a z-tengely, a kör középpontja az x-tengelyen, maga a kör az (xz) síkban van.

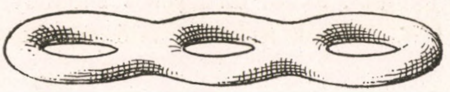
$$x = (R + r\cos u)\cos v,\quad y = (R + r\cos u)\sin v,\quad z = r\sin u\,;$$

vagy u-t és v-t kiküszöbölve:

$$(x^2 + y^2 + z^2 - R^2 - r^2)^2 + 4R^2(z^2 - r^2) = 0.$$

6. ábra.

7. ábra.



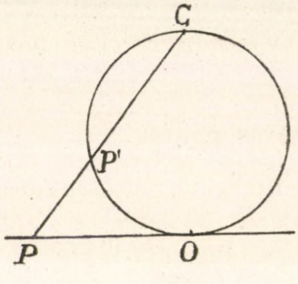
8. ábra.

A 7. és 8. ábra mutatja a *kétszeres* és *háromszoros gyűrű* alakját.

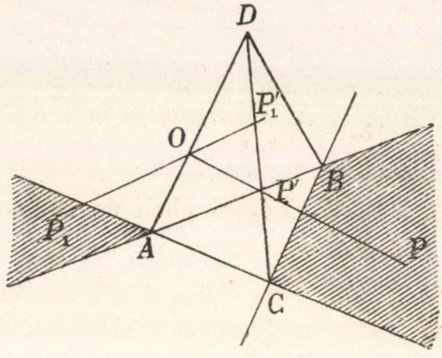
7. Végtelenbeli és többszörös pontok.

Számos más felületnek is van terünkben repræsentánsa, így pl., mint látni fogjuk, minden határolt felületnek s a zártak közül is mindazoknak, melyeket kétoldalúaknak fogunk nevezni. De ki fog derülni az is, hogy nincs minden felülethez homœomorph felület terünkben, a mi bizonyos felülettypusok vizsgálatát megnehezíti. Hogy mi ily felületeket is a felület fogalma alá osztottunk be — a mi terünk szempontjából első pillanatra természetellenesnek látszik — nem bonyolultabbá, hanem egységesebbé s így egyszerűbbé fogja tenni vizsgálatainkat. Ily felületek vizsgálatánál a geometriai szemlélet közvetetlenül nem alkalmazható, de alkalmazhatóvá válik némileg azáltal, hogy bizonyos konventiók elfogadásával kibővítjük terünk pontjainak halmazát.

Az első bővítés abból áll, hogy új, idealis pontokat vezetünk be és a limes-vonatkozást ezekre is kiterjesztjük. Szemléletünknek az ilyen új pontokat is tartalmazó alakzatok az által tehetők valamelyest hozzáférhetőkké, ha az új pontokat *végtelenbeli*, azaz a régi (végesben fekvő) pontoktól végtelen távolságra gondoljuk; az analytikus tárgyalást is ez a felfogás teszi legjobban alkalmazhatóvá. Így pl. a mindkét értelemben végtelen egyenes (végesben fekvő) pontjait egyetlen új végtelenbeli ponttal egészítjük ki és ezt — egyébként nem módosítva a limesvonatkozást — a régi pontokból alakított minden oly végtelen halmaz limes-pontjának deklaráljuk, melynek minden véges hosszúságú egyenesdarabon véges számú pontja van. Az így kiegészített, ú. n. *projectiv* egyenes homœomorph a körhöz. Ha t. i. a kört úgy helyezzük el, hogy ez az egyenest O-ban érintse (9. ábra) és a körnek O-val diametrálisan szemben fekvő pontját C-vel jelöljük, akkor az egyenes bármely végesben fekvő P pontjának P'-t, PC-nek a körrel való másik metszéspontját



9. ábra.

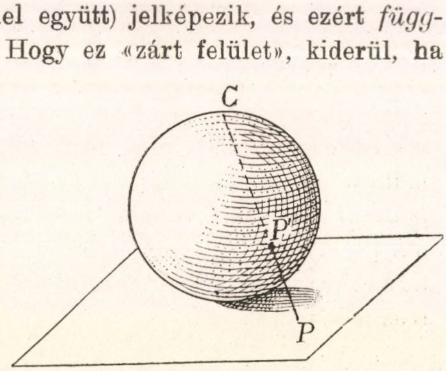


10. ábra.

feleltetvén meg, az egyenes végtelenbeli pontjának pedig C-t, ezzel oly kölcsönösen egyértelmű vonatkozást állapítottunk meg a projectiv egyenes és a kör pontjai között, mely látnivalóan folytonos. Ugyanígy lehet végtelen sok új végtelenbeli pont bevezetésével a síkot az ú. n. *projectiv* síkká kiegészíteni. Ezt a projectiv geometria elemeiből jól ismert eljárást itt nem részletezzük. Meg kell azonban mutatnunk, hogy e projektiv sík is felület az általunk elfogadott értelemben. Három, egymást nem egy pontban metsző egyenest rajzolunk a projectiv síkra; a metszéspontok legyenek A, B, C. Válaszszunk a síkon kívül egy D pontot és az AD egyenesdarabon egy O vetítési centrumot (10. ábra). Az ábrán látható, kétfelé a végtelenbe nyúló árnyékolt terület (végtelen háromszög) bármelyik P pontjának (mely végtelenbeli pont is lehet) OP-nek a BCD síkkal való

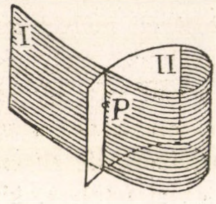
P' átdöfési pontját feleltetvén meg, e végtelen háromszög és a véges BCD háromszög (elemi felület) pontjai között kölcsönösen egyértelmű és folytonos vonatkoztatást állapitottunk meg. Így tehát e végtelen háromszög a véges BCD háromszöggel homœomorphnak és így ugyancsak elemi felületnek bizonyult. Ugyancsak elemi felület tehát a projectiv síkban keletkezett másik két végtelen háromszög, éppen úgy, mint a véges ABC háromszög. A projectiv sík tehát négy elemi felület egybeforrasztásával keletkeztethető. Az összeillesztés itt úgy történik, hogy adott értelmezéseink alapján *a projectiv sík mint zárt felület adódik.* A projectiv sík az analysis situs egy nevezetes felülettypusára (a legegyszerűbb egyoldalúnak nevezendő zárt felületre) ád példát. Végtelenbeli pont bevezetése nélkül e typust terünkben nem sikerülne megvalósítani, a miről majd a 6. §-ban lesz szó.

A sík végesben fekvő pontjainak halmaza (mely homœomorph az elemi felület *belső* pontjainak halmazával, de maga nem «felület») egyszerűbb módon is kiegészíthető zárt felületté, t. i. egyetlen végtelenbeli pont bevezetésével, melyet minden oly végtelen részhalmaz limesének deklarálunk, melynek minden körön belül csak véges számú pontja van. Az így kiegészített sík a függvénytanban játszik fontos szerepet, hol a sík pontjai a complex számokat (a ∞-nel együtt) jelképezik, és ezért *függvénytani sík*nak neveztetik. Hogy ez «zárt felület», kiderül, ha mindjárt belátjuk azt is, hogy *a gömbfelülettel homoeomorph.* Ez pedig az ú. n. stereographikus vetítéssel (11. ábra) éppen úgy belátható, mint a hogy az imént a projectiv egyenesnek (mely egyszersmind függvénytani egyenesnek is nevezhető volna) a körrel való homœomorphismusát beláttuk.

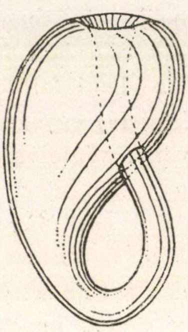


11. ábra.

A most tárgyalandó második bővítés még sokkal messzebbmenő fontossággal bír. A felületeknek elemi felületekből való felépítésénél feltettük, hogy egy elemi felület belső pontjai nem pontjai még egy szereplő elemi felületnek és kirekesztettük tehát két elemi felületnek olyan összeillesztését, a milyet a 12. ábra mutat (hol a két négyszögalakú elemi felület egyike árnyékolva van, másika nincs). Ilyen «önmagát metsző», «kettős pontokkal bíró» felületet mi nem neveztünk felületnek. E megszorítást most részben elejtjük. Terünk pontjait t. i. alkalomadtán mint *többszörös pontot*, azaz mint két vagy több *különböző* «pont» közös helyzetét fogjuk tekinteni, melyeknek egyenként való megadásához helyzetükön kívül annak a többszörös pont nélküli elemi felületnek a megadása is szükséges, melynek pontjaképpen tekinteni akarjuk. Hogy «a P pontot az E elemi felület pontjaképpen tekintjük», azt jelentse, hogy csak akkor limese P a H halmaznak, ha, az eddigi követelményeken kívül, P a H halmaz E-be eső reszének is limese. A 12. ábrán látható két elemi felületből összetett felület ebben a felfogásban maga is



12. ábra.



13. ábra.

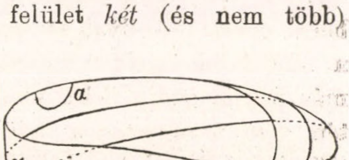
látnivalóan elemi felület, mert folytonos képe egy kettős pont nélküli elemi felületnek. Egy kétszeres (azaz csupa kétszeres pontból álló) zárt vonalat tartalmazó felület alakjában ábrázol pl. 13. ábránk egy oly felületet, mely többszörös pont nélkül terünkben nem volna megvalósítható. (E felületről majd még részletesen lesz szó.)

8. Keresztmetszet és körmetszet.

Ha egy F' alakzatot két homœomorph része, V_1 és V_2 mentén meghatározott módon összeforrasztunk, meghatározott F alakzatot nyerünk. Az összeforrasztással azonossá váló V_1-et és V_2-t közös jellel V-vel jelölve, ilyenkor azt is mondjuk, hogy az F' az F-ből «*V mentén való felmetszés*» által keletkeztethető. Meg kell itt jegyezni, hogy F és V megadásával F' még általában nincs meghatározva. A felmetszéssel t. i. V-nek egy P eleméből két elem, P_1 és P_2 keletkezik és — F valamely H részének P lévén a limese — nincs még eldöntve, hogy H-nak mint F' részének P_1-e a limese, avagy P_2, vagy végül egyik sem. F'-nek, mint analysis-situs-beli alakzatnak teljes meghatározására újabb utasítások szükségesek, melyek általában sokféleképpen adhatók meg.

Ha azonban F speciálisan felületet, V pedig egy «reárajzolt» (azaz részét képező) oly vonalrendszert jelent, melynek minden belső pontja az F-nek is belső pontja, akkor a szemlélet[1] azt mutatja, hogy F-nek V mentén való felmetszésével egy meghatározott F' *felület* keletkezik. A V minden pontjából F'-nek *két határpontja* válik. (Ha a vonalrendszer valamely végpontja belső pontja a felületnek, akkor e végpontot most nem számítjuk a vonalrendszerhez: ez a felmetszéssel nem kétszereződik meg). Alapvető fontosságú szerepet játszanak — RIEMANN óta — a felületek analysis situsában az ilyetén felmetszések, ha V vonaldarabot vagy zárt vonalat jelent.

Ha egy összefüggő határolt F felületet oly V vonaldarabja mentén metszünk fel, melynek végpontjai az F határpontjai, míg többi pontja belső pontja az F-nek, azt fogjuk mondani, hogy a V *keresztmetszetet* alkalmaztuk. A szerint, a mint a keletkező felület megszünik összefüggő lenni vagy nem, azt mondjuk, hogy V *szétdarabolja*, illetőleg nem darabolja szét a felületet. Az első esetben a keletkező felület *két* (és nem több) összefüggő részből áll (két darabra esik szét). Az összefüggő felületnek csupa belső pontjából álló zárt vonal mentén metszvén fel a felületet, *körmetszet*ről szólunk; ez is lehet szétdaraboló vagy nem. Mindkét fajta kereszt- és körmetszetre eddig ismertetett felületeinknél is láthatunk példát; pl. a MÖBIUS-féle szalagnál mind a négyre; 14. ábránk jelölésében:



14. ábra.

[1] Innen kezdve általános vizsgálatainkban is hivatkozni fogunk a geometriai szemléletre.

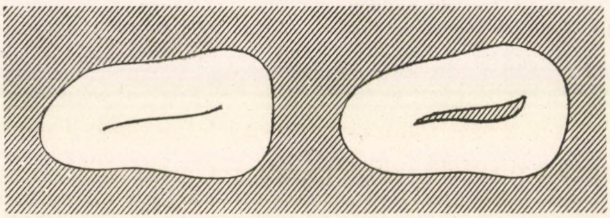
α: szétdaraboló keresztmetszet,

β: szét nem daraboló keresztmetszet,

γ (a Möbius-féle szalag «középvonala»): szét nem daraboló körmetszet (v. ö. a 28. ábrát),

δ: szétdaraboló körmetszet.

Egy kereszt- vagy körmetszet szétdaraboló volta természetesen folytonos deformatiókkal szemben invariáns; azaz: ha az F felületnek F'-re való folytonos leképezésénél a v metszet v'-be megy át, akkor v és v' egyidejűleg szétdaraboló vagy nem. Szétdaraboló körmetszet alkalmazását, mikor a keletkező két darab egyike elemi felület, *pontozás*nak [1] nevezik; a pontozás



15. ábra.

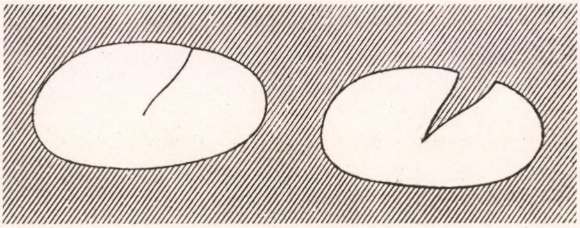
eredményének a másik darabot tekintjük. (Gömb esetében, és csak ekkor, ez is elemi felület). A pontozás a már ismertetett kitöltésnek invers művelete.

A szemlélet mutatja, hogy egy felületnek oly vonaldarab mentén való felmetszése, melynek minden pontja a felületnek belső pontja, æquivalens egy pontozással (15. ábra). Ha pedig a vonaldarab egyik végpontja a felület határpontja, minden más pontja pedig belső pontja a felületnek, akkor ennek mentén való felmetszés a felületen egyáltalában nem változtat. (16. ábra.) Ábráink e kétféle felmetszést az elemi felület példáján mutatják. Ha tehát F' az F-ből ennek V vonalrendszere mentén való felmetszése által keletkezik, (az F határgörbéit is hozzászámítjuk V-hez), akkor ugyanezt az F'-t nyerjük, ha a

[1] Ez az elnevezés onnan származik, hogy metrikusan is jellemzett felületnél gyakran czélszerű a pontozást úgy végezni, hogy a felületből ez által eltávolított elemi felület kicsiny legyen, mintegy vékony tűvel átszúrni a felületet.

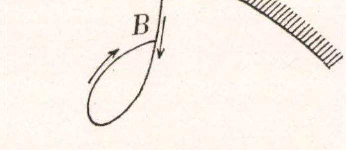
V-nek oly éleit bárhányszor elhagyjuk (azaz ezek mentén nem metszünk fel), melyeknek egyik (és csak egyik) végpontjuk az egész vonalrendszernek is végpontja.

Most még bővíteni akarjuk a keresztmetszet fogalmát. Ez a következő szemléleten alapszik. Egy keresztmetszet alkalmazása úgy végezhető, hogy (czeruzával vagy késsel) elindulunk a



16. ábra.

felület egy A határpontjából és mindaddig haladunk, míg újból egy határponthoz jutunk (B). Ha így folytatólag keletkeztetjük az új felületet, azaz minden áthaladott pontot még a keresztmetszet bevégzése előtt (két) határpontnak tekintünk, akkor egy már áthaladott ponttal (mely az eredeti felületnek belső pontja) mint végponttal berekeszthetjük a keresztmetszetet (17. ábra). Ellentétben az eleinte bevezetett és ezentúl *közönséges*nek nevezendő keresztmetszettel, az ily keresztmetszeteket *σ-alakú* keresztmetszeteknek nevezzük. Ez tehát egy zárt vonalból és egy oly vonaldarabból áll, melynek egyik végpontja a zárt vonalon van, a másik az eredeti felület határán; a σ-alakú keresztmetszet többi pontja, tehát második (B) végpontja is, belső pontja az eredeti felületnek. A keresztmetszet fogalmának ez a bővítése számos kivételes eset megszüntetése kedvéért czélszerű.



17. ábra.

Látnivaló, hogy egy közönséges keresztmetszet vagy egy körmetszet akkor és csak akkor nem darabol szét egy összefüggő felületet, ha ennek van olyan csupa belső pontból álló zárt vonala, mely e kereszt-, illetőleg körmetszetet csak egyszer «metszi».

A szemlélet mutatja, hogy elemi felületet bármely keresztmetszete (akár közönséges ez, akár σ-alakú) szétdarabol [1] és pedig két elemi felületre. E tényt *az elemi felület alaptulajdonságának* fogjuk nevezni. Ugyancsak szemléletileg igazoltnak tekintjük, hogy az elemi felületet minden körmetszete is szétdarabolja. Ez lényegileg a JORDAN-féle tétel. [2]

[1] RIEMANN-nál ez az elemi felület definitiója; e definitió tehát a felület fogalmának az elemi felület fogalmát nem tartalmazó definitióját feltételezi. RIEMANN nem ád ily definitiót. Hogy a két rész mindegyike elemi felület, azt RIEMANN már bizonyítja. Mi azonban ezt a tényt is közvetlen szemlélet eredményének tekintjük, annál inkább, mert ha egy felületnek «egy vonala mentén való felmetszésé»-t szemléletünktől függetlenül értelmezni akarnók, már hivatkoznunk kellene e tényre.

[2] JORDAN, *Cours d'Analyse*, 2. kiad., I. k. (1893), 91. l.; l. továbbá OSGOOD: *Lehrbuch der Funktionentheorie*, 2. kiad. (1912). I., 160—172. l., hol egyéb irodalmi utalások találhatók (SCHOENFLIES, AMES, BLISS, VEBLEN) és BROUWER, Mathematische Annalen, 69. k. (1910), 169. l.

2. §.

AZ ALAPSZÁM.

1. Irodalom.

A felületek analysis situsának megalapítója RIEMANN, kit függvénytani kutatások vezettek felületek összefüggési viszonyainak megvizsgálásához. Elsősorban a következő két dolgozata jön itt tekintetbe:

Grundlagen für eine allgemeine Theorie der Functionen einer veränderlichen complexen Grösse, Inauguraldissertation, Göttingen 1851. = Mathematische Werke (2. kiad., Leipzig, 1892), 3. l.

Theorie der Abel'schen Functionen, Journal für r. u. a. Mathematik, 54. k., 1857 = Mathematische Werke, 88. l.

Az elsőben a tárgyalás a keresztmetszet, a másodikban a körmetszet fogalmára van alapítva. A mi tárgyalásunk az első módszerhez fog csatlakozni. (A később idézendő lapszámok az összegyűjtött művek 2. kiadására vonatkoznak.)

RIEMANN röviden megfogalmazott gondolatainak első bővebb tárgyalása C. NEUMANN-tól való:

Vorlesungen über Riemann's Theorie der Abel'schen Integrale (2. kiad., Leipzig, 1884), 146—186. l. (Az 1. kiadás 1865-ben jelent meg.)

Ugyancsak teljesen RIEMANN gondolatköréhez csatlakozik a következő dolgozat:

LIPPICH: *Untersuchungen über den Zusammenhang der Flächen im Sinne Riemann's* (Mathematische Annalen, 7. k., 1874, 212. l.).

Különösen az analysissel és a metrikus geometriával való kapcsolat tekintetében számos nevezetes adalékot szolgáltatott a felületek analysis situsához KLEIN és DYCK. Dolgozataik közül kiemeljük a következőket:

F. KLEIN: *Bemerkungen über den Zusammenhang der Flächen* (Mathematische Annalen, 7. k., 1874, 549. l.) és *Über den Zusammenhang der Flächen* (U. o., 9. k., 1876, 476. l.). L. továbbá KLEIN-nek számos más dolgozatát, melyeknek nagy része a Mathematische Annalen későbbi köteteiben jelent meg, valamint több sokszorosított előadási füzetét.

W. DYCK: *Beiträge zur Analysis situs*, I. (Mathematische Annalen, 32. k., 1888, 457. l.). E dolgozat további kifejtését tartalmazza azoknak a vizsgálatoknak, melyeket DYCK 1885-ben és 1886-ban a lipcsei Akadémia Berichte-iben közölt.

A complex változók függvénytanának tankönyvei mind szentelnek kisebb-nagyobb részt a felületek analysis situsának. Felemlítjük a következőket:

PETERSEN: *Vorlesungen über Funktionstheorie* (Kopenhagen, 1898). E könyv, melynek dán eredetije 1895-ben jelent meg, a felületek összefüggési viszonyaira vonatkozó számos eredeti vizsgálatot is tartalmaz.

DURÈGE: *Elemente der Theorie der Funktionen einer complexen veränderlichen Grösse* (4. kiad., Leipzig, 1893). E munkának 5. kiadásából a felületek analysis situsára vonatkozó fejezet teljesen kimaradt.

FORSYTH: *Theory of functions of a complex variable* (2. kiad., Cambridge, 1900).

APPELL et GOURSAT: *Théorie des fonctions algébriques* (Paris, 1895.).

Továbbá még HADAMARD referatumát kell megemlítenünk: *Notions élémentaires sur la géométrie de situation* (Nouvelles Annales de Mathématiques, 1909, 9. k.). E dolgozat az analysis situsnak a RIEMANN-féle felületekkel kapcsolatos vizsgálatait tárgyalja. Ugyanez áll a következő munkára:

H. WEYL: *Die Idee der Riemannschen Fläche*, Mathematische Vorlesungen an der Universität Göttingen, V. (Leipzig, 1913). E munkának itt különösen az első fejezete (Begriff und Topologie der Riemannschen Flächen) jön tekintetbe.

Áttérve az EULER-féle tétel és általánosításának irodalmára, EULER-nek a következő két dolgozata említendő:

Elementa doctrinae solidorum és *Demonstratio nonnullarum insignium proprietatum, quibus solida hedris planis inclusa sunt praedita;* Novi Commentarii Academiae scient. imp. Petropolitanae, 1752/3 (megjelent 1758-ban), IV. k., 109. és 140. l.

Az első dolgozatban csak kimondja EULER az empirikusan talált tételét, a másodikban «bizonyítást» is ád számára, a nélkül azonban, hogy a tétel érvényességéhez szükséges feltételeket kijelentené és felhasználná.

EULER tételének első felfedezőjéül különben újabban nem EULERt, hanem DESCARTESot szokás megnevezni, hivatkozással DESCARTESnak *De solidorum elementis* cz. dolgozatára, mely először csak 1860-ban és pedig hézagosan jutott nyilvánosságra.[1] E dolgozat több tétele valóban szoros kapcsolatban van EULER tételével, a mire először PROUHET[2] figyelmeztetett, de nem állítható, hogy EULER tételének explicit kimondását tartalmazza.

EULER tételére és általánosítására vonatkozó rendkívül kiterjedt irodalom (LEGENDRE 1808, L'HUILIER 1812, CAUCHY 1813, STEINER 1826, GRUNERT 1827, KIRKMAN 1835, VON STAUDT 1847, LISTING 1862, MÖBIUS 1863, BALTZER 1883, DE JONQUIÈRES 1890, POINCARÉ 1895 és sok más dolgozat részletes egybeállítása megtalálható a következő munkákban:

BRÜCKNER: *Vielecke und Vielflache,* Leipzig, 1900, 58. l.;

HAUSSNER 21. jegyzete az Ostwalds Klassiker 151. kötetében («Szabályos csillagpolyederek»), 119. l.

SIMON: *Entwicklung der Elementar-Geometrie im XIX. Jahrhundert* (Leipzig, 1906), 217—223. l.

DEHN és HEEGAARD 99. jegyzete Encyklopædia-czikkük 199. lapján (A 198. l. formulájában $2r$ helyébe r teendő).

A közönséges EULER-féle tételre közölt bizonyítások nagy része helytelen. Ez részben abban leli magyarázatát, hogy

[1] *Oeuvres inédites de Descartes* par FOUCHER DE CAREIL (Paris, 1860), II. k., 214. l. — Pótlásokkal és jegyzetekkel kiadta 1890-ben DE JONQUIÈRES (Bibliotheca Mathematica, 4. k., 43. l.)

[2] Comptes Rendus, 50. k. (1860), 779. l.

a XIX. század első felében a gömbbel homœomorph polyedereket tekintették a polyederek általános typusának, míg a többit, melyekre, mint azt empirikusan megállapították, EULER relatiója nem érvényes, kivételeseknek, singulárisoknak vélték. A probléma fejlődése sokáig nagyrészt arra szorítkozott, hogy a csúcsok, élek és lapok száma között «sok» polyederre megelőzőleg érvényesnek felismert relatiót újabb és újabb, «magasabb fajtájú» polyederekre érvénytelennek ismerték fel. Egyes ily relatiók érvényességi körét még POINSOT és CAUCHY is tévesen állapította meg. Csak a felületek analysis situsának kifejlesztése, a RIEMANN-féle alapszám fogalma tette lehetővé a probléma teljes elintézését és az eredmény szabatos kimondását. Az elemi geometria tan- és kézikönyveiből azonban igen csekély kivétellel a régi fogalmazás mindmáig nem tudott kiveszni. [1]

Az EULER-féle tételnek és általánosításának számos bizonyítása természetesen metrikus fogalmakat használ. Az analysis situs szempontjából különösen figyelemre méltó VON STAUDT elegáns és szabatos bizonyítása (*Geometrie der Lage*, Nürnberg, 1847, 20—21. l.), mely a szóba jövő polyedereket is analysis-situs-fogalmakkal jellemzi. Ez volt az első lépés a (zárt) felületek analysis-situsbeli osztályozására. VON STAUDT bizonyításával lényegileg megegyezik POINCARÉ egyik bizonyítása (Journal de l'École Polytechnique (2), 1. k., 1895), mely a problémát linearis formák algebrai elméletével hozza érdekes kapcsolatba.

2. Felbontás elemi felületekre.

Áttérve a felületek részletes vizsgálatára, hangsúlyoznunk kell, hogy a felület fentebb (1. §, 5. pont) adott értelmezéséből indulunk ki. A felületeknek e definitióból és szemléletünkből folyó és terünk fogalmától független (azaz ú. n. absolut) tulajdonságai érdekelnek majd elsősorban minket és csak a 6. §-ban fogunk egy felületnek terünk részeképpen való megvalósításával,

[1] Még WEBER és WELLSTEIN kitünő *Encyklopädie der Elementar-Mathematik*-ja (3. kiad., II. kötet,. 585. l.) is helytelenül fogalmazza meg EULER tételét. Kifogástalan azonban HADAMARD tárgyalása: *Leçons de Géométrie élémentaire* (2. kiad., II. kötet, 419—425. l.)

a mennyiben e megvalósítás lehetséges, foglalkozni és a terünkben elhelyezkedő felületek terünkben való elhelyezkedését, terünkhöz való relativ tulajdonságait vizsgálni.

A felület értelmezése szerint minden felület egy rárajzolt vonalrendszerrel elemi felületekre bontható. Ennek kiegészítéseképpen kimutatjuk a következő tételt:

I. Ha egy vonalrendszer egy összefüggő határolt felületet elemi felületekre bont, akkor a felület minden határgörbéjéből kiindul a vonalrendszernek legalább egy vonala.

Valóban, ha e felület K határgörbéjéből nem indulna ki ilyen vonal, akkor K egyetlen létrehozott E elemi felületnek volna a határa. E-nek, mint elemi felületnek, K volna egyetlen határgörbéje. Minthogy pedig K az eredeti felületnek határa, azért E semmiféle más létrehozott elemi felülettel nem függne össze (nem volna összeforrasztva). s igy — összefüggő felületről lévén szó — E maga volna az egész felület és egyáltalában nem is volna vonalrendszer.

A bebizonyított tételből következik:

II. Ha egy vonalrendszer egy összefüggő zárt felületet elemi felületekre bont, akkor e vonalrendszer összefüggő.

Ha t. i. zárt F felületünket oly V vonalrendszer bontja elemi felületekre, mely két olyan V_1 és V_2 részre esik szét, melyeknek nincs közös pontjuk (nem függnek egymással össze), akkor felületünket csupán V_1 élei mentén metszve fel, olyan (összefüggő vagy össze nem függő) F' felület keletkezik, melyet V_2 elemi felületekre bont szét. Tehát V_2 az F'-nek oly önmagában összefüggő F_1' részét is elemi felületekre bontja, melyen egyáltalában van egy éle V_2-nek. (Ha F' összefüggő, akkor F_1' megegyezik F'-vel) Az I. tétel szerint tehát V_2-nek van oly éle, mely F_1'-nek egy határgörbéjéből indúl ki. Ámde, eredeti F felületünk zárt lévén, F'-nek s így F_1'-nek is minden határvonala: éle a V_1-nek és így V_1 és V_2 mégis összefüggne egymással.

Határolt felület esetére eredményünket így bővíthetjük ki.

III. Ha egy vonalrendszer egy összefüggő felületet elemi felületekre bont, akkor, hozzávéve e vonalrendszerhez a felület esetleges határgörbéit, összefüggő vonalrendszert nyerünk.

Zárt felület esetére e tételt most bizonyítottuk be. Ha pedig vannak a felületnek határgörbéi, ezek mentén a felületet egy-egy elemi felülettel kitöltjük. Az így keletkező zárt felületre alkalmazva a II. tételt, a kivánt eredményt nyerjük.

Most már áttérhetünk a következő tétel bizonyítására.

IV. Ha egy határolt összefüggő felületet egy vonalrendszer (mely, hozzászámítva a felület határgörbéit, végződő élt nem tartalmaz) elemi felületekre bont, akkor e vonalrendszer keresztmetszetek folytatólagos[1] *alkalmazásával keletkeztethető.*

Az I. tétel szerint felületünk egy K határgörbéjéből kiindul a vonalrendszer egy vonala. Ennek K-beli végpontjából kiindulva addig haladunk, tetszés szerinti módon, a vonalrendszer mentén, mig egy már áthaladott pontig vagy felületünk egy határpontjáig jutunk (végződő él nem lévén, ez lehetséges). A leírt vonal keresztmetszete felületünknek és pedig σ-alakú az első és közönséges a második esetben. E keresztmetszet mentén felmetszve felületünket, új felület keletkezik, mely lehet összefüggő vagy össze nem függő, de mindenesetre minden önmagában összefüggő része határolt, mert határolt és összefüggő felületből, egy keresztmetszet mentén való felmetszéssel, csupa határolt darabból álló felület jön létre. Ha vonalrendszerünket ezzel az egyetlen keresztmetszettel kimerítettük, akkor tételünk be van bizonyítva; ellenkező esetben az I. tétel szerint az új felületre rajzolt vonalrendszerből ismét egy keresztmetszetet választhatunk ki, és így tovább. Minthogy a vonalrendszer véges számú élből áll és minden keresztmetszet legalább egy élt tartalmaz, ily módon véges számú lépésben kimerítjük a vonalrendszert és tételünk ki van mutatva.

E kimerítés természetesen sokféleképpen történhetik. Látni fogjuk azonban, hogy a folytatólag alkalmazott keresztmetszetek *száma* minden módnál ugyanaz.[2]

Minthogy a felület fogalmának értelmezése szerint minden felület egy vonalrendszerrel véges számú elemi felületre bont-

[1] A keresztmetszet pontjai a keletkező felület határpontjainak tekintendők. — E tételben «keresztmetszet» nem pótolható «közönséges keresztmetszet»-tel.

[2] Ez közvetetlen folyománya az itt következő VI. tételnek; ha t. i. — az ottani jelöléssel — ugyanarra a felületre $a_1 = a_2$, akkor egyszersmind $k_1 = k_2$.

ható szét és e vonalrendszerből az esetleg szereplő végződő élek, mint láttuk, elhagyhatók mindaddig, míg ily él már nem fordul elő, azért a IV. tétel főtartalma így is kimondható:

V. Minden határolt összefüggő felület keresztmetszetekkel elemi felületekre bontható.

3. Riemann alaptétele.

Ezek után rátérhetünk RIEMANN következő *alaptétel*ének bizonyitására.

VI. Ha k_1-számú folytatólag alkalmazott keresztmetszet egy F felületet a_1-számú elemi felületre bont szét és ugyanez a felület bizonyos k_2-számú folytatólagosan alkalmazott keresztmetszettel a_2-számú elemi felületre bomlik, akkor

$$k_1 - a_1 = k_2 - a_2.$$

Itt adandó bizonyitásunk RIEMANN alapgondolatára [1] támaszkodik és egyébként lényegileg NEUMANN-tól [2] származik.

Jelöljük I-gyel, illetve II-vel a k_1-, illetve k_2-számú keresztmetszetből álló két keresztmetszetrendszert és rajzoljuk felületünkre *egyidejűleg* az I. és II. összes vonalait. Feltesszük, hogy I-nek és II-nek csak véges számmal van közös pontjuk [3] (és így pl. közös vonaldarabjuk nincs), valamint azt is, hogy egy I-beli és egy II-beli keresztmetszetnek nincs közös *vég*pontja. E két megszoritás (melyek közül az utóbbi könnyen mellőzhető volna) a bizonyitandó tétel érvényességi körét nem szűkiti, mert az I. vagy II. vonalrendszer csekély változtatásával (mely sem a, sem k értékén nem változtat) e két körülmény fennállása, mint a szemlélet közvetetlenül mutatja, könnyen elérhető.

Legyen ezek után a II-beli $q_1, q_2, \ldots, q_{k_2}$ keresztmetszeteknek a I-beliekkel rendre $s_1, s_2, \ldots, s_{k_2}$-számú közös pontjuk. Minthogy két II-beli keresztmetszetnek csak végpontjai lehetnek közösek és feltevésünk szerint ily végpont nem pontja I-nek,

[1] l. c., 10—11. l.

[2] l. c., 152—155. l.

[3] RIEMANN nem követeli teljességében ezt a megszorítást, miáltal bizonyítása kissé nehézkesebb. A szemléleti elem az ő bizonyításában még sem mondható csekélyebbnek, mert RIEMANN hallgatagon felteszi, hogy discret közös pont, valamint közös vonaldarab is csak véges számmal van.

azért ez csupa különböző pont és így I. és II. közös pontjainak a számát s-sel jelölve:

$$s_1 + s_2 + \ldots + s_{k_2} = s.$$

Csupán I-et rajzolva a felületünkre, ez jelölésünk szerint a_1-számú elemi felületre bomlik; hozzávéve a II-beli q_1 keresztmetszetet — az elemi felület alaptulajdonsága (1. §, 8. pont végén) szerint — e szám $a_1 + s_1 + 1$-re emelkedik, mert q_1-nek minden ($s_1 + 1$-számú) szelete — akkor is, ha a keresztmetszet σ-alakú — rendre 1-gyel növeli e számot. (Hogy az eddig keletkezett darabok elemi felületek, szintén az elemi felület alaptulajdonságának következménye.) Még q_2-t is hozzávéve, e szám $a_1 + s_1 + 1 + s_2 + 1$-re növekedik és így tovább. Végül q_{k_2} hozzácsatolásával kitűnik, hogy azoknak a daraboknak (elemi felületeknek) száma, melyekre I. és II. együttesen bontja felületünket:

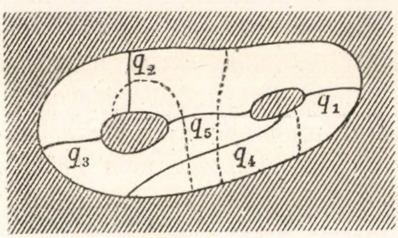
$$a_1 + (s_1 + 1) + (s_2 + 1) + \ldots + (s_{k_2} + 1) = a_1 + s + k_2.$$

Az I. és II-beli keresztmetszetek szerepét felcserélve ugyanezen számra éppen így az $a_2 + s + k_1$ értéket nyerjük, úgy, hogy

$$a_1 + s + k_2 = a_2 + s + k_1,$$

honnan, mint bizonyítandó volt,

$$k_1 - a_1 = k_2 - a_2.$$



18. ábra.

[A 18. ábrában, hol az I. vonalai pontozottan, II.-éi pedig kihúzva vannak rajzolva:

$$k_1 = 3,\ a_1 = 2,$$
$$k_2 = 5,\ a_2 = 4,$$
$$s_1 = 0,\ s_2 = 1,\ s_3 = 0,\ s_4 = 2,\ s_5 = 2;\ s = 5.]$$

Kiemeljük, mert erre az esetre még külön hivatkozni fogunk, hogy az adott bizonyítás akkor is érvényes, ha k_1 vagy k_2 zérus; ekkor a felület elemi felület.

4. Határolt felület alapszáma.

A most bebizonyított alaptétel alapján kimondhatjuk, hogy minden határolt felületre a keresztmetszetek és általuk keletkezett elemi felületek számának különbsége, $k-a$, e keresztmetszetek rendszerétől és sorrendjétől független és így a felületnek egy jellemző állandója. E számot az *összefüggés rendszámának* (RIEMANN) és ellenkező előjellel a felület *charakteristikájának* (DYCK [1]) nevezik. Czélszerűbb és szokásosabb a 2-vel nagyobb

$$A = k - a + 2$$

számot mint a felület *alapszámát* (*Grundzahl, ordre de connexion*) (PETERSEN [2] invariáns számnak nevezi) bevezetni. Ez az elemi felületre éppen 1 (t. i. pl. $k = 0$, $a = 1$).

A helyett, hogy «F alapszáma: A», az a RIEMANN-féle beszédmód is használatos, hogy «F A-szorosan összefüggő felület».

Az V. tétel szerint minden határolt *összefüggő* felületnek (és egyelőre csak ezeknek) *tulajdonítottunk alapszámot*. Ezért a következőkben mindenütt, hol egy felület alapszámáról lesz szó, összefüggő felület értendő. Összefüggő *zárt* felület esetére csakhamar általánositani fogjuk az alapszám fogalmát.

Az alapszámnak az által jut az egész analysis situsban alapvető szerep, hogy *homoeomorph felületek alapszáma ugyanakkora*. Ha t. i. a határolt F és F' felületek homœomorphak és az elsőt k-számú keresztmetszet a-számú elemi felületre bontja szét, akkor az F' *megfelelő* pontjaiból álló k-számú keresztmetszet F'-t bontja a-számú elemi felületre.

A határgörbék száma után ily módon összefüggő felületekre (de eddig csak határoltakra) vonatkozólag a folytonos leképezések egy második invariánsát találtuk meg.

Néhány példát említünk. A körgyűrű (hengerpalást) alapszáma: 2, az n-szer pontozott elemi felületé: $n+1$, a pontozott gyűrűfelületé: 3, a MÖBIUS-féle szalagé: 2, a 4. ábrabeli felületé: 3 (pl. $k = 4$, $a = 3$).

Arra vonatkozólag, hogy az alapszám milyen értékeket vehet fel, már most látnivaló, hogy

VII. Határolt felület alapszáma $\geqq 1$.

Valóban, mivelhogy egy keresztmetszet összefüggő felületet

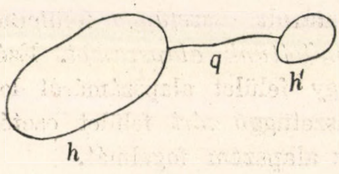
[1] l. c., 474. l.; a definitió itt más.
[2] l. c., 69. l.

legfeljebb két darabra bonthat szét, azért $a \leq k+1$, azaz valóban $k-a+2 \geq 1$.

5. Zárt felület alapszáma.

Hogy most már az alapszám fogalmát zárt felületekre is átvihessük, meg kell vizsgálnunk, hogy a pontozás (a legegyszerűbb művelet, mely zárt felületet határoltba visz át) miképpen változtat az alapszám értékén. Erre vonatkozólag a következő tételt mutatjuk ki:

VIII. *Egy [határolt]*[1] *F felületből pontozással keletkező $\dot{F}$ felület alapszáma 1-gyel nagyobb F-énél.*



19. ábra.

Legyen h az F-nek egy határgörbéje; a pontozással keletkezett határgörbét pedig h'-vel jelöljük (19. ábra). Legyen továbbá q az $\dot{F}$-nek egy oly keresztmetszete, mely a h-nak egy pontját h' egy pontjával köti össze. Hozzávéve ehhez h'-t, az $\dot{F}$-nek egy σ-alakú keresztmetszetét nyerjük. További $k-1$ keresztmetszettel F-et a-számú elemi felületre bontjuk. E σ-alakú keresztmetszetet q-val pótolva, látnivaló, hogy $\dot{F}$ ugyancsak k-számú keresztmetszettel $a-1$-számú elemi felületre bomlik, mivelhogy az F-nek a pontozással kieső elemi felülete $\dot{F}$-ből hiányzik. Ennélfogva $\dot{F}$ alapszáma, $k-(a-1)+2$ valóban 1-gyel nagyobb F-énél, $k-a+2$-nél.

IX. *Ha két felület, F_1 és F_2 ugyanabból az F felületből egy-egy pontozással keletkezik, akkor alapszámuk ugyanaz.*[2]

Ha F határolt felület, akkor ez közvetetlen folyománya a most bebizonyított tételnek. Hogy minden F felületre igaz, az így látható be. Világos, hogy az F, F_1, F_2 felületeken úgy alkalmazhatunk egy-egy pontozást (mi által az $\dot{F}$, $\dot{F}_1$, $\dot{F}_2$ felületek keletkeznek), hogy $\dot{F}_1$ is, $\dot{F}_2$ is a határolt $\dot{F}$-ből pontozással

[1] Az alapszám fogalmának rögtön adandó kiterjesztése zárt felületekre úgy történik, hogy látnivaló lesz, hogy e szó itt elhagyható.

[2] Később ki fog derülni, hogy F_1 és F_2 egyáltalában homœomorph.

keletkezettnek tekinthető. Ezért a VIII. tétel szerint $\dot{F}_1$-nek és $\dot{F}_2$-nek ugyanaz az alapszáma, de ekkor valóban F_1 és F_2 alapszáma is megegyezik egymással, mert ezek, ismét a VIII. tétel szerint — F_1 és F_2 határolt lévén — 1-gyel kisebbek $\dot{F}_1$, illetőleg $\dot{F}_2$ alapszámánál.

Ezek után most már definitióképpen megállapodunk abban, hogy *zárt F felület alapszáma 1-gyel kisebb az F-ből egy pontozással keletkező határolt felület alapszámánál.* [1] Csak a IX. tétel teszi e definitiót jogosulttá, mert csak e tétel szerint függ az alapszám zárt felületnél is csupán a felülettől és független a pontozás módjától.

Közvetetlen folyománya e definitiónak, hogy az az alapvető tény, hogy *homoeomorph felületek alapszáma ugyanakkora,* zárt felületekre is érvényes marad.

A VII. tétel folyományaképpen kimondhatjuk továbbá, hogy

X. Zárt felület alapszáma $\geqq 0$. *Sem határolt, sem zárt felület alapszáma nem lehet negativ.*

Hogy itt is említsünk példákat, megemlítjük, hogy a gömbfelület alapszáma (és, a mint később ki fog derülni, csakis ezé): 0, a gyűrűfelületé: 2, azé a felületé, mely a Möbius-féle szalagból úgy keletkezik, hogy ezt egyetlen határgörbéje mentén egy elemi felülettel kitöltjük, 1; [2] mert e felületekből egy-egy pontozással a következő felületek keletkeznek: elemi felület, pontozott gyűrűfelület, Möbius-féle szalag és láttuk, hogy ezek alapszáma rendre: 1, 3, 2.

6. Hogyan változtatja egy kereszt- vagy körmetszet az alapszámot?

A következő meggondolások feladata megvizsgálni, hogy egy-egy keresztmetszet vagy körmetszet alkalmazása miképpen

[1] Az irodalomban szokásos (de rendkívül czélszerűtlen) az itt értelmezett számnál 1-gyel nagyobb számot is a *zárt* felület alapszámának nevezni és e kétféle elnevezés már számos félreértéshez vezetett; l. erre nézve Dyck, l. c., 483. l.; valamint Schläfli és Klein ott idézett egy-egy megjegyzését.

[2] Ez a felület, mely terünkben csak önmagát metszően valósítható meg, mint ki fog derülni, homœomorph a projectiv síkkal.

változtatja az alapszámot. Minthogy csupán összefüggő felületnek tulajdonitottunk alapszámot, azért itt természetesen csupán szét nem daraboló metszetek jönnek tekintetbe.

Először is világos, hogy

XI. Szét nem daraboló keresztmetszet a felület alapszámát 1-gyel kisebbíti.

Ha t. i. e szét nem daraboló q keresztmetszet alkalmazásával az F felület F'-be megy át és F', tehát F is további k keresztmetszettel a-számú elemi felületre bomlik, akkor látnivaló, hogy F' alapszáma $(k - a + 2)$ valóban 1-gyel kisebb F alapszámánál, a mely $k + 1 - a + 2$.

A körmetszeteket illetőleg pedig a következő tételt bizonyítjuk be:

XII. Szét nem daraboló körmetszet a felület alapszámán nem változtat.

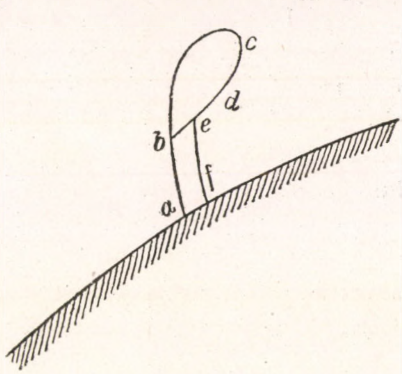
Legyen először az F felület határolt és jelöljük c-vel a körmetszetet, mely F-et az ugyancsak összefüggő F'-be viszi át. Legyen továbbá q az F'-nek egy oly keresztmetszete, mely az F egy h határgörbéjének és c-nek egy-egy pontját köti össze. E q keresztmetszet alkalmazásával F'-ből keletkező F'' felület még mindig összefüggő, mert két különböző határgörbe pontjait összekötő keresztmetszet nem darabolhat szét egy felületet. (T. i. az egyik határgörbe megkerülésével e keresztmetszet egyik oldaláról a másik oldalára juthatunk a felületen). F'', úgy, mint F'-ből, F-ből is egy keresztmetszet alkalmazásával keletkezik (nem egyéb ez, mint a c és q egyesitésével keletkező σ-alakú keresztmetszet). Utolsó tételünk szerint tehát F-nek is, F'-nek is 1-gyel kisebb az alapszáma, mint F''-é s igy F és F' alapszáma valóban megegyezik egymással.

Zárt F felület esetét könnyen az elintézett esetre vezethetjük vissza. Ez utóbbi szerint t. i. az egy-egy pontozással F-ből és F'-ből keletkező határolt $\dot{F}$ és $\dot{F}'$ felületek megegyező alapszámúak. A VIII. tétel alapján ugyanez áll tehát F-re és F'-re is.

Hivatkoznunk kell majd még a következő tételre:

XIII. Ha egy összefüggő felületet valamely σ-alakú keresztmetszete nem darabol szét, akkor van közönséges szét nem daraboló keresztmetszete is.

Hogy az *a b c d e b* σ-alakú keresztmetszet (20. ábra) nem darabol szét, azt jelenti, hogy e keresztmetszet (vagy pl. *cd* darabjának) egyik oldaláról másik oldalára el lehet jutni a felületen oly úton, mely e keresztmetszetet nem metszi; de ekkor rajzolható az *ab*-hez «elég közel» egy *ef* vonaldarab úgy, hogy az út ezt se messe; tehát az egész *a b c d e f* *közönséges* keresztmetszetet sem. Mivelhogy tehát ennek egyik oldaláról másik oldalára lehet átmetszése nélkül eljutni, azért valóban e közönséges keresztmetszet sem darabolja szét felületünket.



20. ábra.

7. Felbontás egyetlen elemi felületre.

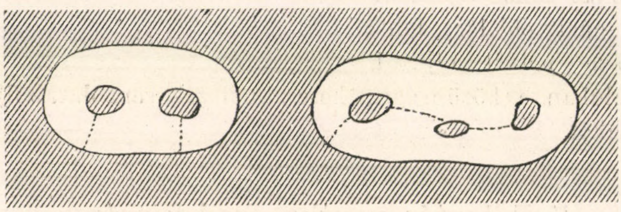
Most a következő alapvető tételre térünk át.

XIV. Minden határolt összefüggő felület folytatólag alkalmazott keresztmetszetekkel (egyetlen) elemi felületbe vihető át.[1] *Ha a felület alapszáma A, akkor e keresztmetszetek száma mindenkor A—1.*

Felületünk — összefüggő volta miatt — az őt alkotó elemi felületekből úgy származtatható, hogy tetszés szerint választva egy első elemi felületet, ehhez hozzáforrasztunk egy másodikat, az így keletkező felülethez egy harmadikat, az így keletkezett felülethez egy negyediket, stb. Így felületünk mint egy *V* vonalrendszerrel elemi felületekre bontott felület adódik. Ha ezeket az összeforrasztásokat csak részben végezzük el, úgy t. i., hogy mindig csak egy-egy vonaldarab mentén forrasztunk össze, akkor minden lépés után s így végeredményképpen is elemi felülethez jutunk (ez onnan következik, hogy két elemi felületet

[1] Neumann tárgyalásában, hol a felületeknek véges számú elemi felületből való összerakhatósága nincs postulálva, e tény mint axioma szerepel.

egy-egy vonaldarabjuk mentén összeforrasztva ismét elemi felületet nyerünk.) E végül nyert elemi felület úgy nyerhető felületünkből, hogy ezt egy V részét alkotó V' vonalrendszer mentén felmetszszük. Hagyjuk el még V'-ből, hozzászámítva most ehhez felületünk határgörbéit is, folytatólag az esetleges végződő éleit, mindaddig, míg ily él többé nem fordul elő. E vonalrendszer természetesen szintén egyetlen elemi felületre bontja felületünket. A IV. tétel alapján ezzel a kimondott tétel első részét bebizonyítottuk. A mi a második részt illeti, legyen a felületünket egyetlen elemi felületbe átvivő keresztmetszetek száma: k; akkor az alapszám értelmezése szerint a felület alapszáma: $A = k - 1 + 2 = k + 1$, honnan valóban $k = A - 1$.



21. ábra.

Az alapszámnak a bebizonyított tételben szereplő tulajdonsága az alapszám definiálására is használható, így HADAMARD [1] és mások tárgyalásában.

Az egyetlen elemi felületre való bontás két egyszerü példáját mutatja a 21. ábra.

A XIV. tétel második része szerint, ha $A = 1$, akkor az F felületet 0-számú keresztmetszet bontja egyetlen elemi felületre, tehát F maga elemi felület:

XV. Ha egy határolt felület alapszáma: 1, *akkor ez elemi felület.*

Van azonban 1 alapszámmal bíró zárt felület is, t. i. mint láttuk: a kitöltött MÖBIUS-féle szalag ilyen. Nem helyes tehát, bár szokásos, az «egyszerűen összefüggő felület» elnevezést az «elemi felület» elnevezéssel megegyező értelemben használni.

[1] l. c., 22. l.

Ha F nem elemi felület, akkor az egyetlen elemi felületbe átvivő keresztmetszetek száma, a XV. tétel szerint, $A-1>0$. E keresztmetszetek együttesen is összefüggőnek hagyják meg a felületet s így közülök az első sem darabolja szét. Ha ez σ-alakú is, a XIII. tétel szerint van ugyanilyen tulajdonságú közönséges keresztmetszet is, azaz:

XVI. Az elemi felület az egyetlen összefüggő határolt felület, melyet minden közönséges keresztmetszete szétdarabol.

Innen most már következik:

XVII. Minden összefüggő határolt felület csupa közönséges keresztmetszettel vihető át elemi felületbe.

Felületünkre t. i. a XVI. tétel szerint mindaddig alkalmazhatunk szét nem daraboló közönséges keresztmetszetet, míg elemi felülethez nem jutunk. Ez pedig a XI. és XV. tétel alapján az $A-1$-edik keresztmetszet alkalmazása után bekövetkezik.

Ugyancsak a XI. és XV. tétel alapján a XIV. tétel még a következő módon egészíthető ki.

XVIII. Ha egy határolt összefüggő felületet egy tetszés szerinti keresztmetszet nem darabol szét, az ezen keresztmetszet alkalmazásával keletkezett felületet egy második tetszés szerinti keresztmetszet nem darabol szét, stb., akkor, A lévén az eredeti felület alapszáma, az $A-1$-edik keresztmetszet alkalmazása után elemi felülethez jutunk.

8. Euler tétele és általánosítása.

Ezek után a következő alapvető fontosságú általánosított EULER-féle tétel bizonyítására térünk rá.

XIX. Ha egy α_0-számú szögpontból és α_1-számú élből álló vonalrendszer, melyhez a felület esetleges határgörbéit is hozzászámítottuk, egy A alapszámmal bíró összefüggő felületet α_2-számú elemi felületre bont, akkor

$$\alpha_0 - \alpha_1 + \alpha_2 = 2 - A.$$

Mindenekelőtt egy vonalrendszer szögpontjainak és éleinek számlálására vonatkozólag kell egy megjegyzést tennünk, mivelhogy e két számot a vonalrendszer, mint ponthalmaz, nem határozza meg teljesen. Legegyszerübb a vonalrendszer ama pontjait tekinteni szögpontoknak, melyekből vagy *egyfelé*, vagy *kettőnél többfelé* (szóval: *nem kétfelé*) indúl ki vonal, élnek pedig a vonalrendszer minden oly vonaldarabját, melynek két végpontja: szögpont; de belső pontjai közt nincs szögpont. (Ha tehát pl. a gömböt egyetlen zárt vonallal bontjuk elemi felületekre, akkor $\alpha_0 = 0$, $\alpha_1 = 0$, $\alpha_2 = 2$.)[1] Utóbb aztán, véges számban, bárhány más pontját a vonalrendszernek is szögpontnak tekinthetjük. Ha az eredeti számlálásnál a bebizonyítandó relatió érvényes, akkor érvényes marad az utóbbira is, mert minden új szögpont felvétele az élek számát is 1-gyel növeli s így az $\alpha_0 - \alpha_1$ számot változatlanúl hagyja. Már pedig a szóban lévő egyenlőség α_0-t és α_1-et csupán e combinatióban tartalmazza.

Bizonyításunkban feltehető, hogy vonalrendszerünk nem tartalmaz végződő élt, mert egy ilyen él elhagyása (ha azt a végpontját, mely nem végpontja a vonalrendszernek, megtartjuk szögpontnak) egyrészt α_2-t változatlanúl hagyja, másrészt α_0-t is és α_1-et is 1-gyel csökkenti. Ha tehát először határolt felületekre szorítkozunk, akkor a IV. tétel és az alapszám definitiója szerint vonalrendszerünk $k = A + \alpha_2 - 2$ számú keresztmetszet folytatólagos rajzolásával[2] keletkeztethető. Látnivaló, hogy minden keresztmetszet az ezt megelőzőleg keletkezett vonalrendszerhez viszonyítva (akár közönséges, akár σ-alakú) az $\alpha_1 - \alpha_0$ számot 1-gyel növeli. Az első keresztmetszet megrajzolását megelőző vonalrendszer nem egyéb, mint a felület határgörbéinek rendszere s így erre, minthogy zárt vonal éleinek és szögpontjainak száma megegyezik egymással, $\alpha_1 - \alpha_0 = 0$. A $k = A + \alpha_2 - 2$ keresztmetszet mindegyike e számot 1-gyel növeli és így a végleges vonalrendszerre

$$\alpha_1 - \alpha_0 = A + \alpha_2 - 2,$$

a mi éppen a szóbanforgó egyenlőség. Eredményünket azonnal kiterjeszthetjük zárt F felületre is. Legyen V egy tetszés szerinti

[1] Egy él két végpontja tehát egybe is eshetik; az él ekkor zárt vonal (pl. egy elemi felület egy σ-alakú keresztmetszettel).

[2] Rajzolásról és nem felmetszésről szólunk annak feltüntetésére, hogy a «keresztmetszet» szögpontjai és élei egyszeresen számíttatnak.

vonalrendszer, mely ezt elemi felületekre bontja; az α_0, α_1, α_2 jelölések most e V-re vonatkoznak. Az így keletkezett valamely E elemi felület belsejéből ennek egy E_1 elemi felületdarabját elhagyva, nyerjük a pontozott $\dot{F}$ felületet, melynek — F alapszámát A-val jelölve — a VIII. tétel szerint alapszáma $A+1$. Hozzávéve V-hez egy oly vonaldarabot, mely összeköti egymással E és E_1 egy-egy oly határpontját, melyek közt az első sem szögpontja V-nek, (s a mi által a szögpontok száma 2-vel, az éleké pedig 3-mal nő) látnivalóan $\dot{F}$ elemi felületekre esik szét. (E vonaldarab mindkét oldalról ugyanazt az elemi felületet határolja.) Pontosabban szólva: az $A+1$ alapszámmal bíró $\dot{F}$ felületet egy α_0+2 szögpontból és α_1+3 élből álló vonalrendszer α_2 elemi felületre bontja. De $\dot{F}$ határolt felület s így alkalmazhatjuk rá az általánosított EULER-féle relatiót:

$$(\alpha_0+2)-(\alpha_1+3)+\alpha_2=2-(A+1).$$

És ez éppen F-re és V-re szolgáltatja a bizonyítandó összefüggést. Tételünket ezzel teljesen bebizonyítottuk. Képletünk érvényes marad akkor is, ha α_0-t és α_1-et úgy értelmezzük, hogy ez csupán ama szögpontok és élek számát jelentse, melyek nincsenek a felület határán; hiszen e módosítás sem változtat $\alpha_0-\alpha_1$ értékén.

E képlet számára még egy második bizonyítást[1] is adunk, hol a zárt és határolt felületek megkülönböztetése fölösleges. Utolsó megjegyzésünk értelmében a felület (esetleges) határán lévő szögpontokat és éleket most nem nevezzük szögpontoknak és éleknek. Bármely P szögponthoz, mely tehát belső pontja a felületnek, kijelölhető felületünk egy oly elemi felületdarabja, melynek P belső pontja és melynek határa csupán P-be futó éleket metsz és pedig azokat pontosan egyszer. Hagyjuk el a felületből ezt az elemi felületet és végezzük el ezt a műveletet minden szögpontra és pedig természetesen úgy, hogy a szögpontok elhagyandó környezeteinek párosával ne legyen közös pontjuk. Ezzel az α_0-számú pontozással keletkező F' felületnek $A'=A+\alpha_0$ az alapszáma (VIII. tétel). Az eredeti éleknek megfelelő α_1-számú keresztmetszet F'-t α_2-számú elemi felületre

[1] l. APPELL és GOURSAT, l. c., 231. l.

bontja (t. i. ismét feltesszük, hogy végződő él nincsen) és így az alapszám értelmezése szerint:

$$A + \alpha_0 = \alpha_1 - \alpha_2 + 2.$$

És ez éppen az általánosított EULER-féle képlet.

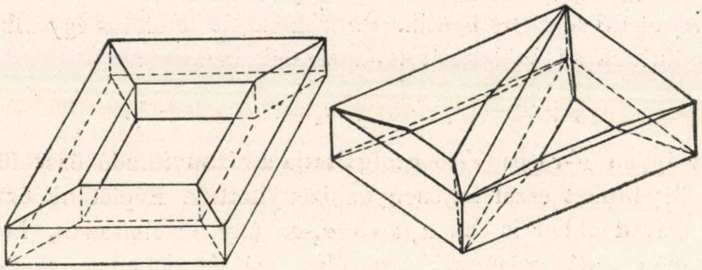
A 22. ábrára vonatkozólag például

$$\alpha_0 = 16,\ \alpha_1 = 32,\ \alpha_2 = 16,\ A = 2;$$

és valóban

$$\alpha_0 - \alpha_1 + \alpha_2 = 0,$$

a mely kapcsolat a közönséges gyűrűfelülettel ($A = 2$) homœ-



22. ábra. 22*a*. ábra.

omorph felületek beosztására jellemző. A 22*a* ábrabeli felületre pedig

$$\alpha_0 = 14,\ \alpha_1 = 32,\ \alpha_2 = 16,$$

a mi ismét megfelel formulánknak, mert a kétszeres gyűrűfelületre $A = 4$.

Hogy egy harmadik példát is említsünk, láttuk (10. ábra), hogy a projectív síkot, melynek alapszáma[1] 1, egy 3 csúcsból és 6 élből álló vonalrendszer 4 elemi felületre bontja és valóban;

$$3 - 6 + 4 = 2 - 1.$$

Gömbfelületre, mikor $A = 0$, egyenlőségünk az EULER-féle relatióba megy át:

$$\alpha_0 - \alpha_1 + \alpha_2 = 2, \qquad (1)$$

mely a metrikus geometriában is fontos szerepet játszik. Ott

[1] l. a 3. § 4. pontját.

többnyire egyenesélű, síklapú *convex* polyederekre szokás kimondani. Bebizonyítható t. i., hogy convex felület[1] mindig a gömbbel homœomorph. Az (1) relatiónak azonban, mely tisztára az analysis situsba tartozik, a (metrikus) convexitás nem az «igazi» feltétele, mert hiszen nem minden a gömbbel homœomorph felület convex. Említettük már, hogy ki fog derülni, hogy $A = 0$ csupán a gömbfelületre érvényes és így az (1) relatió egyszersmind elegendő feltétele is annak, hogy a szóban lévő felület a gömbbel homœomorph legyen.

Ha feltesszük, hogy minden szögpontból legalább 3 él fut ki és hogy minden elemi felületnek legalább 3 éle van, akkor fennállnak a következő ugyancsak már EULER-től felismert kapcsolatok:

$$3\alpha_0 \leq 2\alpha_1, \; 3\alpha_2 \leq 2\alpha_1, \tag{2}$$

hol az egyenlőségjel akkor és csak akkor érvényes, ha minden szögpontból pontosan 3 él fut ki, illetőleg minden elemi felületet pontosan 3 él határol. Van-e az általánosított EULER-féle egyenlőségen és a (2) egyenlőségeken kívül más, ezektől független, általános kapcsolat is az α_0, α_1, α_2 számok közt? Az $A = 0$ esetre STEINITZ[2] kimutatta, hogy nincsen, bebizonyítván a következő tételt: ha a positiv egész α_0, α_1, α_2 számok kielégítik az (1) és (2) feltételeket, akkor van oly (egyenesélű, síklapú) convex polyeder, melynek α_0 szögpontja, α_1 éle és α_2 lapja van.

EULER általánosított tételénél lényeges feltevés, hogy felületünk csupa elemi felületre bomlik. Ha e feltételt elejtjük, azaz csupán azt tesszük fel, hogy az α_0 szögpontból és α_1 élből álló vonalrendszer α_2 különálló darabra bontja az A-szorosan

[1] Convex test határpontjainak összessége neveztetik convex felületnek. Convex test pedig terünk egy gömbön belül fekvő olyan ponthalmaza, mely két pontjával együtt e két pontot összekötő egyenesdarab minden pontját is tartalmazza és tartalmazza valamely pontjának egy teljes térbeli környezetét. (Valamely pontról a térben akkor mondjuk, hogy határpontja egy terünkben elhelyezkedő ponthalmaznak, ha e pont minden térbeli környezete tartalmaz olyan pontot is, mely pontja a halmaznak és olyat is, mely nem pontja.)

[2] *Über die Eulerschen Polyederrelationen*, Archiv der Math. u. Phys. (3), 11. k. (1907), 86. l.

összefüggő felületet, akkor általában csupán az

$$\alpha_0 - \alpha_1 + \alpha_2 \leqq 2 - A$$

egyenlőtlenséget mondhatjuk ki. *Csak* akkor érvényes itt az egyenlőség jele, ha a felület csupa elemi felületre bomlott. E két tétel igen könnyen bebizonyítható.

A felületek további vizsgálatához szükségesnek mutatkozik annak a megállapítása, hogy egy-egy kereszt- vagy körmetszet alkalmazása miképpen változtatja a felület határgörbéinek a számát. Itt nem fogunk olyan egyöntetű választ adhatni, mint a milyet a felület alapszámának változását illetőleg a XI. és XII. tétellel adhattunk. Ennek magyarázata abban rejlik, hogy a most felvetett probléma a felületek egy harmadik (folytonos leképezésekkel szemben) invariáns tulajdonságával, melyet *egy-vagy kétoldalúságnak* fogunk nevezni, van elválaszthatatlan kapcsolatban. Legközelebbi feladatunk: e tulajdonságnak értelmezése és vizsgálata.

3. §.

EGY- ÉS KÉTOLDALÚSÁG.

1. Irodalom.

Egyoldalú felület példája az irodalomban először LISTING-nél fordúl elő:

J. B. LISTING: *Der Census räumlicher Complexe oder Verallgemeinerung des Euler'schen Satzes von den Polyedern* (Abhandlungen der kgl. Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen, 10. k., 1862).

E dolgozat 3. ábrája valóban az egyoldalú — később MÖBIUS-félének elnevezett — szalagot ábrázolja. Mégis jogosult az irodalomban általánosan elfogadott az a vélemény, mely MÖBIUSt tekinti az egyoldalú felületek felfedezőjének. Nem azért jogosult ez, mert REINHARDT a MÖBIUS-féle hagyatékból «meglehetős biztonsággal» megállapitani vélte, hogy MÖBIUS már 1858-ban konstruált egyoldalú polyeder-felületet[1], hanem elsősorban, mert annak a jellemzésnek, melylyel az azóta kétoldalúaknak elnevezett felületek számára LISTING próbálkozott (l. c., p. 13.) és a mely még máig sem veszett ki teljesen, geometriai (vastagság nélküli) felületekre, hol «szemben fekvő *(antipodisch gegenüberliegend)*» pontok egymástól nem különböztethetők meg, értelme sincs. Fontos lépésnek kell tekinteni az áttérést egy felület (vastagsággal bíró) anyagi «model»-jéről a geometriai fe-

[1] Meg kell jegyeznünk, hogy MÖBIUSnak egy 1863-ban megjelent és majd még említendő dolgozatából éppenséggel nem derül ki, hogy szerzője már akkor ismert volna egyoldalú felületeket.

lületre és e lépést MÖBIUS tette meg következő dolgozatában[1]:

A. F. MÖBIUS: *Über die Bestimmung des Inhaltes eines Polyeders*, Berichte d. Sächs. Ges. der Wiss., 17. k., 1865 = Gesammelte Werke, II. k. (Leipzig, 1886), 473. l.

Lásd továbbá összegyűjtött műveinek ugyane kötetében a «*Zur Theorie der Polyeder und der Elementarverwandtschaft*» cz. fejezetet, melyet MÖBIUS hagyatékából C. REINHARDT dolgozott ki. (Idézeteink mindenkor az összegyüjtött művek e II. kötetére fognak vonatkozni.)

Az egy- és kétoldalúságnak az *indicatrix* fogalmával való értelmezése a következő dolgozatban foglaltatik:

F. KLEIN: *Über den Zusammenhang der Flächen* (Mathematische Annalen, 9. k., 1876, 479 l.).

POINCARÉ-tól való az egy- és kétoldalúság analytikus értelmezése, mindjárt 2-nél magasabb méretű alakzatok esetére is. Ez egy a felületet értelmező függvényekből szerkesztett függvénydetermináns előjele segitségével történik. Lásd:

H. POINCARÉ: *Analysis situs* (Journal de l'École Polytechnique (2), 1. k., 1895, 25. l.)

A differentiál-geometriában eddig igen kevéssé tárgyalták a felületeket az egy- és kétoldalúság szempontjából. Csak DARBOUX és SCHEFFERS felületelméleti kézikönyvei szentelnek az egyoldalú felületeknek néhány rövid megjegyzést. Egyoldalú minimálfelületet már LIE tárgyalt (Mathematische Annalen, 14. k., 1879).

Szintén analytikusan vizsgálja az egyoldalú felületeket és pedig különösen a vonalfelületeket és a metrikus értelemben lefejthető felületeket:

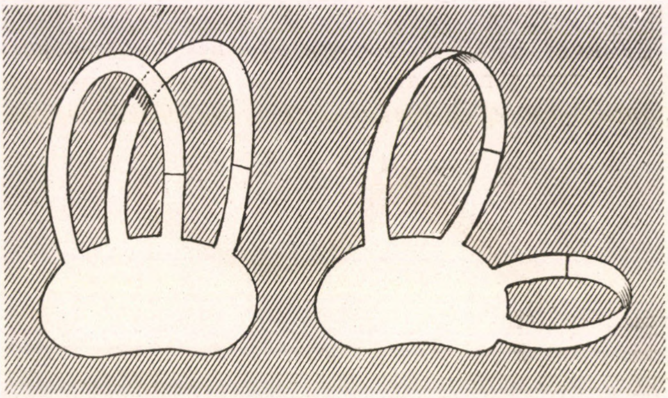
DELAUNAY: *Sur les surfaces n'ayant qu'un côté* stb., Bulletin de la Soc. Math. de France, 26. k. 1898, 43. l.

2. Újabb invariáns bevezetésének szükséges volta.

Arra, hogy a határgörbék számán és az alapszámon kívül a felületek más analysis-situs-beli tulajdonsága után kutassunk,

[1] LISTING-nek MÖBIUS-szal szemben való prioritását illetőleg l. STAECKEL, Mathematische Annalen, 52. k., 598. l.; SCHEFFERS, *Einführung in die Theorie der Flächen*, 2. kiadás, 41. l. és TIETZE, Jahresb. d. Deutschen Math.-Ver., 1910., 155. l.

az kényszerít, hogy az első két tulajdonság az analysis situs szempontjából még nem határozza meg a felületet, azaz: két felület határgörbéinek számában és az alapszámukban is megegyezhetik a nélkül, hogy a két felület homœomorph volna. Erre példát[1] szolgáltat a 23. ábrában látható két felület. Látnivaló, hogy mindkettőnek 1 határgörbéje van és mindkettőnek 3 az alapszáma, mert mind a kettőt 2 keresztmetszet viszi át



23. ábra.

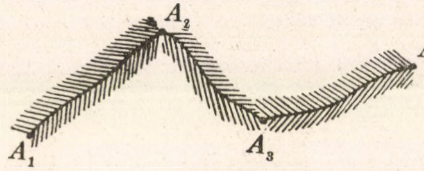
egyetlen elemi felületbe (l. a XIV. tételt). E két-két keresztmetszet az ábrában meg van jelölve. Hogy e két felület egymás közt még sem homœomorph, kiderül onnan, hogy a második felületnek van olyan keresztmetszete (a megjelölt két keresztmetszet bármelyike), melynek alkalmazása után a határgörbeszám megmarad 1-nek, míg az első felületre ilyen keresztmetszetet nem sikerül találni. (Hogy ilyen keresztmetszete az első felületnek *nincs,* annak teljesen kielégítő bizonyítását e helyen a dolog természete szerint még nem adhatjuk, mégis tanulságosnak látszott e példát előre bocsátani.)

E §-ban, bár ez nem okvetetlenül szükséges, összefüggő felületekre szorítkozunk és az «összefüggő» szót rövidség kedvéért elhagyjuk.

[1] Ha csupán terünkben kettőspont nélkül megvalósítható felületekre szorítkozunk, akkor e jelenségre ez a példa a legegyszerűbb, azaz kisebb határgörbe- vagy alapszámmal ilyen példa nem adható.

3. Egy- és kétpartú körmetszetek. Az egy- és kétoldalúság értelmezése.

A most bevezetendő új invariáns-tulajdonságnak (melyet *egy-*, illetőleg *kétoldalúságnak* fogunk nevezni) ama jellemzésénél, melyet itt választunk, fontos szerepet játszik egy *felületre rajzolt vonal partjának* a fogalma. (Csupán oly vonalak partjáról lesz mindig szó, melyek csupa belső felületi pontból állnak). Egy *vonaldarabnál* világosan két partot lehet megkülönböztetni[1]. Világos értelme van annak is, midőn azt mondjuk, hogy az A_1A_2 vonaldarab egyik partja az A_2A_3 vonaldarab egyik part-



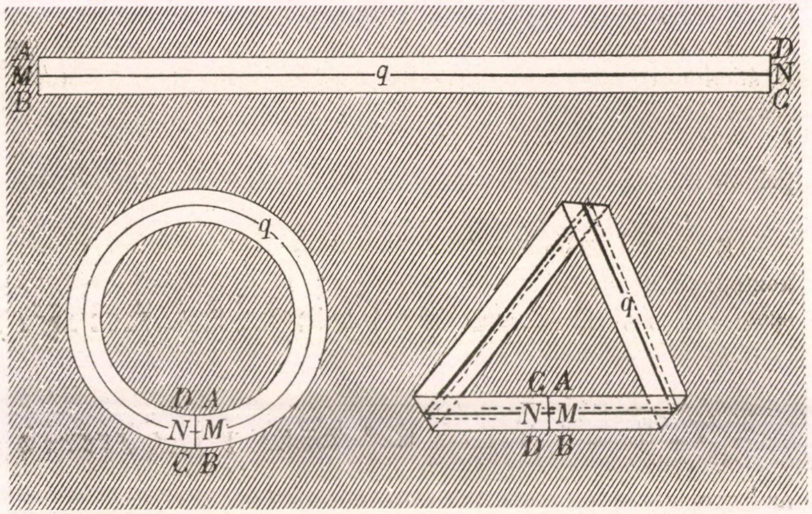
24. ábra.

jához, a másik a másikhoz *csatlakozik* (24. ábra). Hasonlóan áll a dolog, ha egy újabb A_3A_4, stb. vonaldarabot (mely csupa új belső pontból áll) csatolunk a megelőzőhöz. Ha azonban vonalunkat egy utolsó $A_n A_1$ darabbal zárttá alakítjuk, akkor kétféle eshetőség állhat elő a keletkező zárt vonalnak a felülethez viszonyított relativ helyzetét illetőleg: vagy 1. mindkét part önönmagához csatlakozik, vagy 2. mindkét part a másikhoz csatlakozik. Az első esetben, midőn a zárt vonalnak is két partja különböztethető meg, a zárt vonalat a felület *kétpartú* körmetszetének nevezzük: a második esetben pedig *egypartúnak*. Ezeket az elnevezéseket az teszi jogosulttá, hogy látnivaló, hogy egy felületi zárt vonalnak egy- vagy kétpartú volta csupán a zárt vonaltól függ és független attól, hogy a kezdeti A_1 pontot, vala-

[1] Ha a «part»-ot mint felületdarabot akarnók értelmezni, ehhez metrikus, sőt infinitesimális meggondolások elkerülhetetlenek volnának. Mi azonban a «part» szót csupán néhány vonatkozásban fogjuk használni és így csak néhány a «part»-ra vonatkozó kijelentésünket (ezeket is csak a mennyiben nincs közvetlen szemléleti jelentésük) kell külön értelmeznünk.

mint az A_1A_2, A_2A_3 stb. darabokra való bontást miképpen választjuk.

Mindkét fajta körmetszetre egy-egy egyszerű példát említünk. Egy elemi felület határgörbéjén az A, B, C, D pontok, a határgörbe egyik körülfutásánál, ebben a sorrendben következzenek egymásután, úgy, hogy e határgörbe az AB, BC, CD, DA vonaldarabokból van összetéve. Legyen q ennek az



25. ábra.

elemi felületnek oly keresztmetszete, mely AB és CD egy-egy (M, illetve N) pontját köti össze (25. ábra). Elemi felületünket most átalakítjuk úgy, hogy az AB és CD vonaldarabokat egybeforrasztjuk egymással és pedig úgy, hogy M és N egybeessék. Ez történhetik 1.) úgy, hogy A a D-vel és B a C-vel vagy 2.) A a C-vel és B a D-vel esik össze. Az első esetben körgyűrű, a másodikban Möbius-féle szalag keletkezik. Mindkét esetben q-ból zárt vonal lesz és pedig az első esetben kétpartú, a másodikban egypartú.[1]

[1] Az ábrában a szaggatott vonal jelzi, hogy miképpen megy át egyik part a másikba.

Most már egy felületet *egyoldalú* felületnek nevezünk, *ha van egypartú körmetszete*, ellenkező esetben *kétoldalúnak*.

Az egy- vagy kétoldalúság a felületeknek folytonos leképezésekkel szemben invariáns tulajdonsága, minthogy a felület folytonos leképezésénél egypartú körmetszet egypartúba, kétpartú kétpartúba megy át.

Definitiónkból rögtön következik, hogy:

Egyoldalú felületből összeforrasztással csak egyoldalú, kétoldalúból felmetszéssel csak kétoldalú felület keletkezhetik.

Ha egy felület egy kétoldalú felületnek része, akkor maga is kétoldalú; azaz: *egy felület egyoldalú, ha van egyoldalú része.*

Ellenben egyoldalú felületnek van kétoldalú része, így például:

Az elemi felület kétoldalú.

E tényt a szemlélet által igazoltnak tekintjük (de következtethető onnan is, hogy nincs szét nem daraboló körmetszete; v. ö. a lentebb említendő II. tételt).

4. Egy- és kétoldalú felületek példái.

A legegyszerűbb egyoldalú felület a MÖBIUS-féle szalag, mely az egyoldalú felületek közt, általános szempontból is kitüntetett szerepet játszik.

Egy másik nevezetes egyoldalú felület a végtelen *projectiv sík*. Ennek minden e egyenese valóban egypartú körmetszet. Ha t. i. e' a projectiv sík egy másik egyenese (26. ábra), mely e-t O-ban metszi, akkor e és e' a projectiv síkot, figyelembe véve ennek végtelenbeli összefüggését is, *két* tartományra bontja; e vagy e' átmetszése nélkül nem lehet egyikből a másikba jutni. Ha tehát O-ból elindulunk az e egyik partján, akkor a végtelenen át O-hoz visszatérve átjutunk e másik partjára [1].

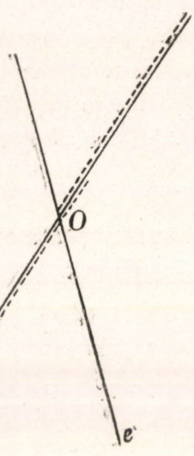
[1] A projectiv sík egyoldalúságára nézve KLEIN említett két dolgozatán kívül lásd pl. a következő dolgozatokat:

COMBEBIAC, Comptes Rendus, 135. k., 1044. l.

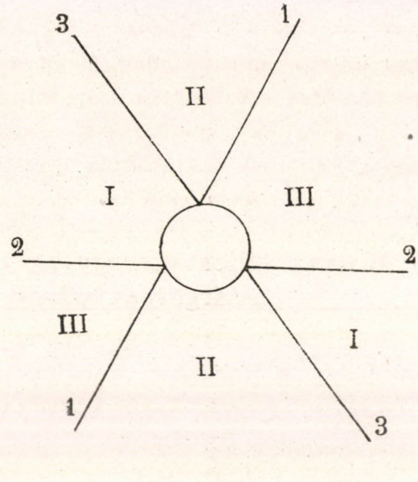
HADAMARD, l. c., 13. pont.

STEINITZ, Journal, f. r. u. a. Math., 130. k., 281. l.

A projectiv sík egyoldalúsága még így is belátható. A pontozott projectiv síkot, mint a 27. ábra mutatja, 3 keresztmetszet 3 elemi felületre bontja és így a pontozott projectiv sík alapszáma $3-3+2=2$, a projectiv síké tehát (2. §, VIII. tétel szerint) $2-1=1$. Ugyancsak 1 tehát (a 2. § XII. tétele szerint) annak a felületnek is az alapszáma, melyet a projectiv síkból úgy nyerünk, hogy egy egyenese mentén felvágjuk, minthogy ez által a felület összefüggő marad. A 2. § XV. tétele szerint



26. ábra.



27. ábra.

tehát *a projectiv sík, ha ezt egy egyenese mentén felmetszszük, elemi felületbe megy át* [1]. Ennek egyetlen határvonala lévén, az egyenes a projectiv síknak valóban egypartú körmetszetét adja [2].

Szűcs, Math. és Természettud. Értesítő XXX. k., 950. l., ki a projectiv sík egyoldalúságának analytikus bizonyítását adja.

Weyl, l. c., 64. l.

Kőnig Dénes, Math. és Phys. Lapok, 22. k., 40. l. = Archiv der Math. (3), 19. k., 214. l.; továbbá Proceedings of the 5th int. Congress of Mathematicians, Cambridge, 1912. II. k., 129. l. E két dolgozat a magasabb dimensiós projectiv terek egy- vagy kétoldalúságát állapítja meg.

[1] Más szóval: az elemi felületet úgy lehet határvonala mentén összeforrasztani, hogy a projectiv sík keletkezzék. Bekövetkezik ez pl. — mint könnyű belátni — ha az elemi felületet körlemez alakjában választjuk s a diametrálisan szembenfekvő határpontokat egyesítjük.

[2] L. a rögtön említendő II. tételt.

Egyoldalú felületek más egyszerű és nevezetes példáival és ezeknek egymásközti kapcsolatával még e § 8. pontjában fogunk foglalkozni.

A míg a felület egyoldalú voltát *egyetlen* egypartú körmetszet feltalálásával megállapíthatjuk, addig annak a megállapítása, hogy egy felület kétoldalú, általánosságban sokkal nehezebb feladat, mert ehhez *minden* körmetszetének kétpartú voltát kell belátnunk. Erre később (e § 7. pontjában), midőn a kétoldalúság tulajdonságát positiv alakban fogjuk megfogalmazni [1], egyszerűbb módszert fogunk adhatni. Addig csak bizonyítás nélkül említjük meg, hogy a gömb és a bárhányszoros gyűrűfelületek kétoldalúak s így mindazok a felületek is, melyek ezekből, akárhány pontozással keletkeznek, minthogy ezek az előbbiek részeinek tekinthetők. (Később ki fog derülni az is, hogy ezek az összes kétoldalú felületek.)

5. Hogyan változtatja egy kör- vagy keresztmetszet a határgörbék számát? — Hidak.

Definitiónk szerint egypartú körmetszet egyik partjáról át lehet jutni, a felületen haladva, másik partjára, a nélkül, hogy ezt az egypartú körmetszetet átmetszenők. Tehát

I. Egypartú körmetszet a felületet nem darabolja szét.

Ugyancsak közvetetlen folyománya az egy- és kétpartúság értelmezésének a következő tétel.

II. Egypartú körmetszet 1-gyel, kétpartú 2-vel növeli a határgörbék számát.

E tétel első része, mely szerint lehetséges, hogy egy körmetszet *egy* új határgörbét hoz létre (és nem kettőt), annak, ki csupán kétoldalú felületek szemléletéhez szokott, paradoxonszerűnek látszik és az idevágó irodalom — még az egyoldalú felületek felfedezése után is — e téren számos tévedést tartalmaz. [2] A 28. ábra világosan mutatja, hogy az egy határgörbé-

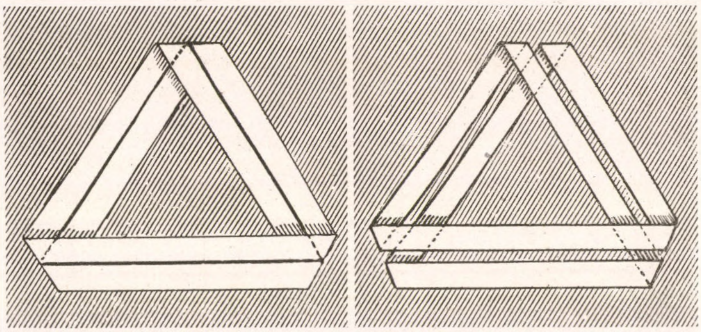
[1] L. a későbbi XIII. és XIV. tételt.

[2] Igy pl. LIPPICH dolgozatában (l. c., 218. l.) olvasható: «Es erhellt sofort: Jeder Rückkehrschnitt verwandelt die gegebene Fläche in eine andere, die um zwei Ränder mehr besitzt, als die ursprüngliche.» JORDAN később még említendő dolgozatában, Journal de Math., 1866, a 107. lapon hallgatagon szintén ez a feltevés foglaltatik, midőn egy körmetszet két különálló partjáról szól.

vel bíró MÖBIUS-féle szalagot «középvonala» mentén felmetszve oly felület keletkezik, mely egyrészt összefüggő (I. tétel), másrészt két határgörbével bír (II. tétel).[1]

A II. tétellel a megelőző § végén kitűzött problémát körmetszetek esetére elintéztük. A mi a keresztmetszeteket illeti, közvetetlenül látnivaló, hogy egy- és kétoldalú felületekre egyaránt:

III. Két különböző határgörbe egy-egy pontját összekötő keresztmetszet a felület határgörbéinek számát 1-gyel apasztja.

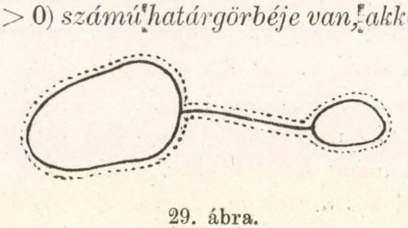


28. ábra.

Az ilyen keresztmetszet t. i. (l. a 29. ábrát.) egy határgörbévé (az ábrán pontozottan jelölve) egyesíti az összekötött két határgörbét.

Innen következik még:

IV. Ha egy felületnek ($H > 0$) számú határgörbéje van, akkor $H—1$ számú keresztmetszettel egyetlen határgörbével bíró felületbe vihető át. Bárhogy választjuk is folytatólag e keresztmetszeteket, de úgy, hogy különböző határgörbéket kapcsolnak össze, a



29. ábra.

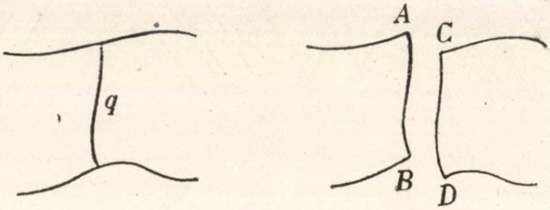
[1] Tanulságos módon szemlélhetővé válik ez, ha a MÖBIUS-féle szalagról, pl. papirosból, modelt készítünk és a középvonal mentén ollóval felvágjuk. A keletkezett felületnek terünkben való elhelyezkedésére nézve l. e § 8. pontját. Néhány analog meglepő felmetszési jelenséget tárgyal SIMONY (Wiener Berichte, 1880—1887), stb.

H—1-edik keresztmetszet alkalmazása után jutunk egyetlen határgörbével bíró felülethez.

Ez az eredmény analogiát mutat a megelőző § XVIII. tételével.

Nem ilyen egyszerűen és nem ilyen egyöntetűen adható meg a felelet kérdésünkre oly keresztmetszet esetében, mely ugyanannak a határgörbének két pontját köti össze. Ennek az esetnek elintézésére czélszerűnek mutatkozik előbb a közönséges keresztmetszet alkalmazásának *invers műveletéről* — *híd* alkalmazásáról — megvizsgálni, hogy a határgörbék számára milyen befolyással van.

Ha az F felületből a közönséges q keresztmetszet alkalmazásával az F' felület jön létre, akkor természetesen F'-ből

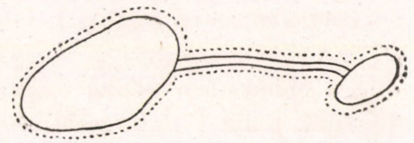


30. ábra.

az F úgy keletkeztethető, hogy F'-nek két határgörbedarabját, AB-t és CD-t, összeforrasztjuk (30. ábra). Látnivaló, hogy e helyett az összeforrasztás helyett úgy is nyerhetjük F'-ből F-et, hogy egy új elemi felület határgörbéjének egyik darabját AB-hez, egy másik darabját (melynek az elsővel nincs közös pontja) CD-hez forrasztjuk. Az így szereplő elemi felületet nevezzük *híd*nak és azt a beszédmódot fogjuk használni, hogy ez összeköti az AB és CD darabokat, melyek a híd két *torkolat*ának neveztetnek. Az elemi felület (híd) határának másik két darabját pedig a híd két *oldal*ának nevezzük. E híd alkalmazása F'-re «invers művelete» az F-re alkalmazott szét nem daraboló [1] q keresztmetszet alkalmazásának és viszont. A híd elhagyása æquivalens a híd két oldalát összekötő (a hidat «átszelő») keresztmetszet alkalmazásával. Ez éppen a híd invers keresztmetszete. A szerint,

[1] Mindenkor csupán összefüggő felületre alkalmazott hídról lesz szó.

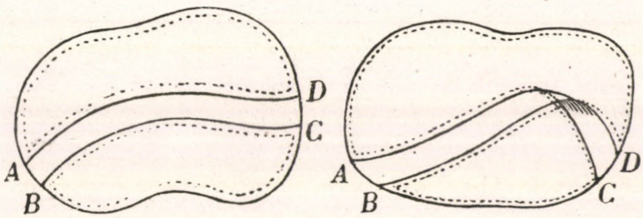
hogy AB és CD az F'-nek ugyanahhoz vagy két különböző határgörbéjéhez tartozik, a hidat *elsőfajú*-nak, illetőleg *másodfajú*-nak nevezzük. Világos most már, hogy másodfajú híd egyetlen (31. ábránkban pontozottan jelzett) határgörbébe viszi át azt a két határgörbét, melyeknek egy-egy darabját összeköti. Tehát



31. ábra.

V. Másodfajú híd alkalmazása a határgörbék számát 1-gyel apasztja.

Hogy a megfelelő kérdést elsőfajú hidakra is elintézhessük, ezeket két osztályba kell soroznunk. Az F' felület h határgörbéjén az A, B, C, D pontok ebben a rendben következzenek cyklikusan egymásután és a H híd az AB és CD darabokat kösse össze egymással. (32. ábra.) Ez kétféleképpen lehetséges: 1.) úgy,

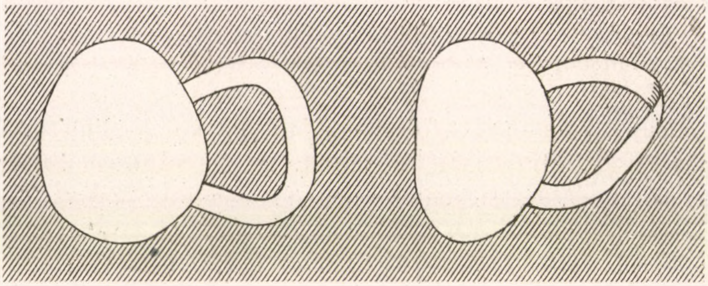


32. ábra.

hogy a hídnak, mint elemi felületnek, határgörbéjén szintén az A, B, C, D cyklikus rendben következnek pontjaink egymásután, vagy 2.) az A, B, D, C cyklikus rendben. (Mivelhogy sem A és B, sem C és D nem lehet egymástól a másik két pont által a zárt vonalon elválasztva, azért más, mint e két cyklikus sorrend nem lehetséges). Első esetben az elsőfajú hidat *nem csavart*-nak, a másodikban *csavart*-nak nevezzük. Látnivaló, hogy a nem csavart híd a h határgörbét két határgörbébe választja szét (a híd egyik oldala az egyik határgörbéhez, a másik a másikhoz tartozik), míg a csavart híd AC és BD oldalai h-val együtt ismét csak egy határgörbévé egyesülnek. *Elsőfajú* hidakra tehát a következő két eredményt nyertük:

VI. Nem csavart elsőfajú[1] *híd alkalmazása a határgörbék számát 1-gyel növeli. Csavart elsőfajú híd alkalmazása a határgörbék számát változatlanul hagyja.*

Példaképpen megemlítjük, hogy az elemi felületből nem csavart híd alkalmazásával a körgyűrűfelületet, csavart híd által pedig a Möbius-féle szalagot nyerjük. Az elsőnek valóban 2, az utóbbinak pedig 1 határgörbéje van. (33. ábra)

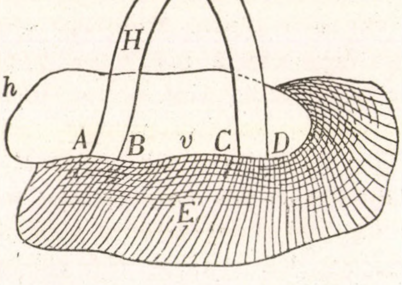


33. ábra.

Most végzett vizsgálatainknak az egy-, illetőleg kétoldalúsággal való kapcsolatát a következő tétel fejezi ki:

VII. Akár egy-, akár kétoldalú felületből csavart elsőfajú híd alkalmazásával keletkező felület mindenkor egyoldalú.

Bizonyításunkban arra a szemléleti tényre fogunk hivatkozni, hogy ha v egy tetszés szerinti F felület valamely határ görbéjének egy vonaldarabja, akkor van F-nek oly része, mely 1. elemi felület, s amelynek 2. a v határdarabja.



34. ábra.

Legyen F a felület, mely F'-ből a csavart H híd alkalmazásával keletkezik, legyen h az F'-nek az a határgörbéje, melynek két (AB és CD) darabját H összeköti és v oly darabja h-nak, mely e két hídtorkolat mindegyikét tartalmazza. (34. ábra.) Ha most már E oly elemi felületrésze F'-nek,

[1] Kiteszszük e szót, mert később bizonyos másodfajú hidakra is kiterjesztjük majd a «csavart» és «nem csavart» elnevezést.

melynek v határdarabja, akkor H mint E-hez csatolt csavart híd is felfogható. H és E együttesen tehát egy Möbius-féle szalagot alkot, azaz egyoldalú felületet; de e szalag része F-nek s így F, mint bizonyítandó volt, maga is egyoldalú.

Mindezek után most már könnyen felelhetünk arra a kérdésre, hogy az oly keresztmetszet, mely ugyanannak a határgörbének két pontját köti össze, miképpen módosítja a határgörbék számát.

Csak azt kell meggondolni, hogy — a mint láttuk — nem csavart elsőfajú híd két oldala a híd alkalmazásával keletkezett felület két különböző határgörbéjéhez tartozik. Ily híd invers keresztmetszete (mely a hidat átszeli) tehát két különböző határgörbét köt össze. Ugyanannak a határgörbének két pontját összekötő keresztmetszet inverse tehát vagy másodfajú híd, vagy elsőfajú csavart híd. Az utóbbi a VII. tétel alapján csak egyoldalú felület esetében lehetséges s így az V. és VI. tételből a következő eredményre jutunk.

VIII. Ugyanannak a határgörbének két pontját összekötő keresztmetszet kétoldalú felület esetében 1-gyel növeli, egyoldalú felület esetében pedig vagy 1-gyel növeli, vagy változatlanul hagyja a határgörbék számát.

Most már σ-alakú keresztmetszetre is elintézhetjük a megfelelő kérdést, hiszen ez mindenkor mint egy körmetszet és egy, két különböző határgörbét összekötő, keresztmetszet egymásutánja fogható fel. Az első a II. tétel szerint 1-gyel vagy 2-vel, az utóbbi a III. tétel szerint —1-gyel növeli a határgörbék számát és így

IX. σ-alakú keresztmetszet kétoldalú felület esetében 1-gyel növeli, egyoldalú felület esetében pedig vagy 1-gyel növeli (ha t. i. körmetszet-része kétpartú), vagy változatlanul hagyja (ha e körmetszet-rész egypartú) a határgörbék számát.

A III., VIII. és IX. tételben kimondott eredményeinket könnyebb áttekinthetőség czéljából még a következő táblázatban foglaljuk össze:

	kétoldalú	egyoldalú
	felületnél	
ugyanannak a határgörbének két pontját összekötő keresztmetszet	$+1$	$+1$ vagy 0
két különböző határgörbét összekötő keresztmetszet	-1	-1
σ-alakú keresztmetszet	$+1$	$+1$ vagy 0
	-val növeli a határgörbék számát	

Külön kiemeljük, hogy:

X. Kétoldalú felület minden keresztmetszete vagy 1-gyel növeli vagy 1-gyel apasztja a határgörbék számát.

Ellenben:

XI. Minden határolt egyoldalú felületnek van oly keresztmetszete, mely a határgörbék számát nem változtatja meg. [1]

[1] RIEMANN — ki nyilván egyoldalú felületet nem ismert — a X. tételt *minden* felületre érvényesnek mondotta ki (l. c., 12. l.). RIEMANN-nak ezt az állítását és «bizonyítását» NEUMANN is átvette (l. c., 162—163. l.) és — még könyvének 2. kiadásában is — csupán egy a fejezet végéhez illesztett megjegyzésben (167—168. l.) fűzi hozzá, hogy nem minden esetben érvényes. (Csodálatos módon ugyanezt az eljárást követi FORSYTH is, l. c., 354. l.) Ilyen «kivételes» felületek létezése mutatja, hogy a tétel oly felületekre, melyekre érvényes (a kétoldalúakra) *bebizonyítandó még akkor is, ha a függvénytani vagy más szempont a kétoldalú felületekre való korlátozást jogosulttá teszi,* s hogy a bizonyítás csak akkor lehet helyes, ha a felület kétoldalú voltát tényleg felhasználja. NEUMANN-nál erre nézve csak ezt a megjegyzést találjuk: «Eine genaue Überlegung zeigt, dass die Sätze... anwendbar sind auf bilaterale Flächen». Az idevágó irodalom nagy részében MÖBIUS felfedezésének, de még NEUMANN e megjegyzésének sem találjuk nyomát. Igy pl. DURÈGE (l. c., 229. l., X. tétel) és

Valóban a felület egy egypartú körmetszetét egy határpontjával kötve össze, ily tulajdonságú σ-alakú keresztmetszetet nyerünk. Később (5. §, 6. pont) ki fog derülni, hogy a XI. tételnek megfelelő *közönséges* keresztmetszete is van minden határolt egyoldalú felületnek. (A Möbius-féle szalagnak pl. minden szét nem daraboló keresztmetszete ilyen tulajdonságú.)

6. Az egy- és kétoldalúság Klein-féle értelmezése.

Az egyoldalú felületeknek az az értelmezése, melyre megelőző vizsgálatainkat alapítottuk, a szokásos értelmezések egyikével sem egyezik meg s ezért — már az idevonatkozó irodalommal való kapcsolat fenntartása czéljából is — az egyoldalú felületeknek még újabb jellegzetes tulajdonságaival kell megismerkednünk.

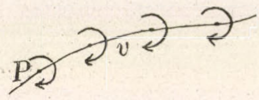
E tulajdonságok egyike a Klein-féle *indicatrix* fogalmán alapszik. A mint egy felületre rajzolt vonaldarabnak két partját tudtuk megkülönböztetni, éppen úgy egy F felület bármely belső P pontjának kétféle *megkerülés*-éről vagy kétféle *indicatrix*-áról szólhatunk, melyeknek egyike az által adható meg, hogy a felület egy oly elemi felület-darabjának, melynek P belső pontja, határvonalát *irányítjuk*, helyesebben: *értelem*mel látjuk el (35. ábra). Ellenkezően irányítva e zárt vonalat, a P másik indicatrixát jellemeztük. Jelöljük ki a P egyik indicatrixát, i-t és rajzoljunk P-ből kiindulóan az F felületen egy csupán belső felületi pontokból álló v vonaldarabot. Ezzel a v minden pontjának megadtuk egyik meghatározott indicatrixát, azt, «a melybe a P pont i indicatrixa a v vonal mentén átmegy». (36. ábra.) A szemlélet ennek a beszédmódnak pontos értelmet ad. Ha most már e v vonaldarabot zárt vonallá egészítjük ki a

Appell-Goursat (l. c., 228. l., II. tétel) is X. tételünket kétoldalú felületekre való megszorítás nélkül mondják ki és «bizonyítják», ugyanígy Lippich (l. c., 217. l.). Hasonlóképpen pl. Christoffel (Mathematische Annalen, 55. k., 497. l.) vizsgálatai is csak kétoldalú felületekre érvényesek. V. ö. még II. tételünkhöz fűzött irodalmi megjegyzéseinket, melyek az itteniekkel természetesen szoros kapcsolatban vannak. E kapcsolatra nézve l. Tonelli, Atti della Acc. dei Lincei (5) II_1 (1893), 15. l. Tonelli e dolgozata talán először figyelmeztet a szokásos tárgyalások e hiányaira.

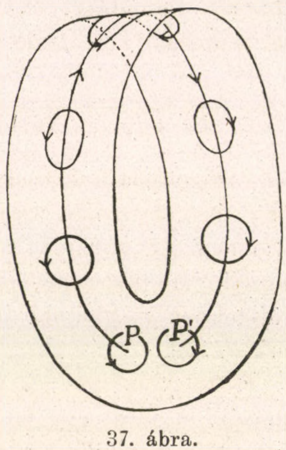
felületen, akkor lehetséges, hogy a P-nek i indicatrixa e zárt vonal mentén 1.) ismét i-be vagy 2.) a P másik indicatrixába megy át. A szemlélet mutatja, hogy az első vagy második esettel van dolgunk, a szerint, hogy e zárt vonal *kétpartú* vagy *egypartú*. (T. i. a második esetben, és csak akkor, felcserélődik az indicatrix-görbének az a két darabja, melyre ezt zárt vonalunk felbontja.) Kimondhatjuk tehát, hogy

XII, Kétoldalú felületen nincs olyan zárt vonal, melynek mentén az indicatrix megfordul, egyoldalún pedig mindenkor van ilyen (t. i. minden egypartú körmetszet).

35. ábra.



36. ábra.



37. ábra.

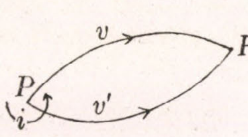
Az egyoldalú felületeknek e tételben foglalt tulajdonságával értelmezte Klein az egyoldalú felületeket (melyeket ő *Doppelfläche*-knek [1] nevez).[2]

A 37. ábra mutatja, hogy pl. a Möbius-féle szalag «középvonala» mentén hogyan «fordul meg» az indicatrix.

[1] Ezt az elnevezést — úgy, mint különben az «egy- és kétoldalú» elnevezéseket is — az egyoldalú felületeknek terünkben való elhelyezkedése indokolja, a miről még később (6. §, 2. pont) lesz szó.

[2] L. c., p. 479. Az ott adott értelmezés azonban könnyen félreérthető. Abból, hogy a felület egy irányított zárt vonala úgy tolható el a felületen, hogy eredeti helyzetébe, de ellentétes irányítással jut vissza, még nem következik a felület egyoldalúsága. Hiszen a gömb egy irányított főköre, bármely átmérője körül 180°-kal megforgatva, ellenkező irányítást nyer, pedig a gömb kétoldalú. Ezért Klein is, későbbi dolgozataiban, az indicatrix-görbét «infinitesimális»-nak teszi fel. Az által, hogy mi az indicatrixot mint a pont «megkerülés»-ét vezettük be, ilyen az analysis situsban idegen fogalomra nem kellett hivatkoznunk. — Az egyoldalú felület különben úgy is értelmezhető volna, hogy egy elemi felület-része úgy «vihető át» *a felületen* önmagába, hogy határvonalának irányítása az ellenkező irányításba megy át.

A megelőzők szerint világos, hogy, ha egy kétoldalú felület egyetlen P pontjának kijelöltük egyik i indicatrixát, akkor ezzel minden más P' pontnak is megadtuk egyik indicatrixát, azt, melybe az i «átmegy». Ez valóban az úttól független. Ha t. i. v és v' két oly vonaldarab, melyek P-t és P'-t kötik össze és e két úton az i a P'-nek a két különböző indicatrixába menne át, akkor v és v' együtt oly zárt vonalat adna, melynek mentén az indicatrix megfordul.[1] (38. ábra.) Ilyen értelemben beszélhetünk kétoldalú *felület*nek kétféle indicatrixáról. E két indicatrix egyikét bármely belső pontjának egyik indicatrixa meghatározza és viszont. E fogalomalkotások egyoldalú felületekre természetesen elvesztik értelmüket.



38. ábra.

7. Az egy- és kétoldalúság Möbius-féle értelmezése.

Az egyoldalú felületek most adott Klein-féle jellemzéséből könnyen áttérhetünk a Möbius-félére. Bontsa a v vonalrendszer, melyhez hozzászámítjuk a felület esetleges határvonalait, a kétoldalú és összefüggő F felületet elemi felületekre és legyen a felületnek (tehát egyszersmind minden pontjának) egyik indicatrixa kijelölve. Ez által minden elemi felület határának egyik irányítását is kijelöltük, mint az elemi felület bármely belső pontjának indicatrixát.[2] És pedig ez látnivalóan úgy történik, hogy

1. ha a határvonalnak (egy vagy több) kettős éle van, ezek egyszer az egyik, másszor a másik értelemben futtatnak be; (39. ábra).

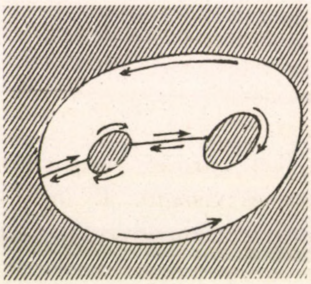
2. két elemi felület közös határvonalai egyszer az egyik, másszor a másik értelemben futtatnak be, a szerint, hogy ezek

[1] Érvényben marad ez a megjegyzés akkor is, ha v-nek és v'-nek közös belső pontjai is vannak.

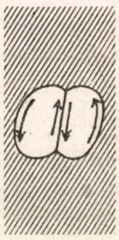
[2] Gömbfelületre rajzolt zárt vonal *két* elemi felületnek határa (éppen ez jellemzi az analysis situs szempontjából a gömbfelületet) s így ennek irányításánál megadandó, hogy egyik vagy a másik elemi felület határának tekintetik-e.

az egyik vagy másik elemi felület határának tekintetnek-e.[1] (40. ábra.)

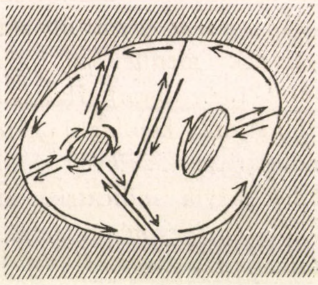
3. (határolt felületeknél) ugyanannak a határgörbének egyes darabjai (melyek csak egyszer futtatnak be) «egymáshoz csatlakozó» irányítást nyernek, úgy, hogy minden határvonal egy-egy meghatározott befutási értelmet nyer (41. ábra).



39. ábra.



40. ábra.

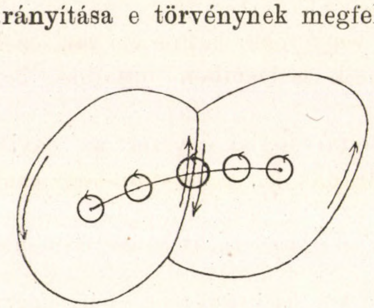


41. ábra.

Ha az elemi felületek határvonalainak irányítása e három tulajdonságnak megfelelőleg történik, akkor azt fogjuk mondani, hogy *az élek* MÖBIUS-*féle törvénye* ki van elégítve. Kimondhatjuk tehát, hogy

XIII. Kétoldalú felületet elemi felületekre bontó vonalrendszerre (ideszámítva az esetleges határvonalakat) az élek MÖBIUS-*féle törvénye kielégíthető.*

Könnyen belátható most már, hogy e tétel *csupán* kétoldalú felületre igaz. Ha t. i. az elemi felületek határvonalainak irányítása e törvénynek megfelel, akkor a felület minden belső pontjának oly módon tulajdonítottunk egy-egy indicatrixot (hiszen éppen az elemi felület határvonalának irányítása határozza meg az elemi felület belső pontjainak indicatrixát), hogy ezek *bármily vonal mentén* az ily módon meghatározott indicatrixba



42. ábra.

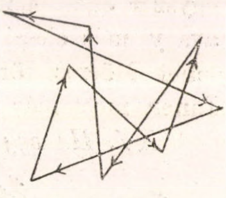
[1] WEYL (l. c., 62. l.) ilyenkor a két elemi felület határának befutását (indicatrixát) «*kohärent*»-nek nevezi.

mennek át. (42. ábra.) (A felület ama belső pontjai, melyek a felbontó vonalrendszeren feküsznek, sem alkotnak kivételt.) A XII. tétel szerint tehát a felület kétoldalú. Más szóval:

XIV. Egyoldalú felületet elemi felületekre bontó vonalrendszerre (ideszámítva az esetleges határvonalakat) az élek Möbius*-féle törvénye sohasem elégíthető ki.*

Az egy-, illetőleg kétoldalú felületeknek a XIII. és XIV. tételben kifejezett tulajdonságával értelmezte Möbius [1] a felületek egy- vagy kétoldalúságát (zárt polyederfelületek esetére). Megjegyzendő, hogy ha ebből az értelmezésből indultunk volna ki, bebizonyítandó volna, hogy ez a (Möbius-féle) egy- vagy kétoldalúság független a felületet elemi felületekre bontó vonalrendszer választásától. [2] A mi tárgyalásunk magában foglalja e tétel bizonyítását.

[1] L. c., l. különösen a 2., 9. és 11. §-t. Möbius metrikus geometriai meggondolásokból jutott e megkülönböztetéshez. Az a már régen ismert Meister-féle tétel, mely szerint sík sokszögnek akkor is tulajdonítható meghatározott terület, ha határa önmagát átmetszi, azon alapszik, hogy (43. ábra) a sokszög oldalait mindenkor úgy lehet irányítani, hogy minden szögpont egyik élnek kezdő, másiknak végpontja legyen. Möbius most már megállapítja, hogy a polygonok e tulajdonságának közönséges polyederfelületnél az felel meg, hogy az élek fentemlített Möbius-féle törvénye kielégíthető. Ez fejezi ki annak szükséges és elegendő feltételét, hogy egy esetleg önmagán áthatoló polyedernek tulajdoníthassunk köbtartalmat. Ehhez tehát a polyederfelületnek kétoldalúnak kell lenni. Ennek megfelel az a később (6. §) még tárgyalandó tény, hogy terünk bármely olyan zárt felülete, mely önmagát nem metszi, kétoldalú.



43. ábra.

Bár e tulajdonság vizsgálata már a geometria elemeiben is igen kívánatosnak látszik, az elemi mathematika tankönyveiben nem szokás a Möbius-féle törvényt tárgyalni; csak Klein (*Elementarmathematik vom höheren Standpunkt*, II., 1909, 33—40. l.) és Killing és Hovestadt (*Handbuch des mathematischen Unterrichts*, I., 1910, 108—110. és 128—146. l.) fejtegetik részletesen, felismerve és hangsúlyozva Möbius e gondolatának eleganciáját és fontosságát.

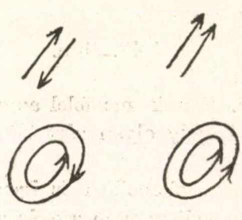
[2] E bizonyításra vonatkozólag l. Brouwer (Math. Ann., 71. k., 324. l.), Kőnig Dénes (Math. és Phys. Lapok, 22. k., 48. l. = Archiv der Math. (3), 19. k., 221. l.) és Weyl (l. c., 63. l.) eljárásait.

8. Möbius kritériumának alkalmazásai.

Ez a Möbius-féle kritérium gyakran a legalkalmasabb egy adott felület egy- vagy kétoldalúságának felismerésére. Segítségével pl. könnyen igazolható, hogy a gömb, az egyszeres, kétszeres stb. gyűrű: kétoldalú. E kritérium további alkalmazhatósága a következő megjegyzéseken alapszik.

Ha egy felület elemi felületekre van bontva és csak egyetlen elemi felület határgörbéjét irányítjuk (vagy ennek is csupán egy vonaldarabját, megadván, hogy e vonalat melyik elemi felület határának tekintjük), ezzel az egész vonalrendszerre az éleknek Möbius törvényét követő irányítása (ha ez egyáltalában lehetséges, azaz ha a felület kétoldalú) meg van állapítva. Ez tehát (természetesen csak ha a felület összefüggő) mindenkor pontosan kétféleképpen történhetik; az egyik módról a másikra *minden* irány megfordításával térhetünk át. Ha tehát egy elemi felület határát tetszés szerint irányítjuk, majd egy szomszédos elemi felület határát irányítjuk Möbius törvényének megfelelőleg és így tovább mindig újabb szomszédos elemi felületekre térünk át, akkor egyszer ellentmondásba jutván Möbius törvényével, [1] másképpen avagy más elemi felülettel kezdve az irányítást, szintén nem lehet Möbius törvényét kielégíteni, vagyis a felület egyoldalú. Innen most már következik:

XV. Ha egy kétoldalú felületet elemi felületekre felbontó vonalrendszer élei Möbius *törvényének megfelelőleg vannak irányítva és a felület két határdarabját vagy két teljes határgörbéjét összeforrasztjuk, akkor két- vagy egyoldalú felülethez jutunk a szerint, hogy a két vonalat ellentétes irányban forrasztottuk össze vagy nem.* (44. ábra.)

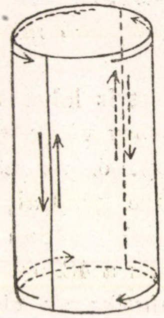


44. ábra.

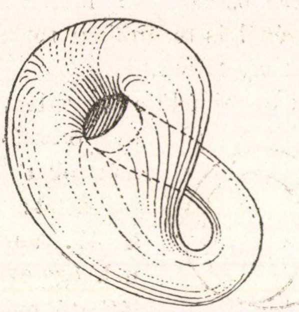
Így nyerünk pl. az elemi felületből az egyik vagy másik módon forrasztva össze két oly határdarabját, melyeknek nincs közös pontjuk, (kétoldalú) hengerpalást-felületet vagy (egyoldalú) Möbius-féle szalagot. Ha a hengerpalástból in-

[1] Már az első elemi felület határának irányítása ellentmondhat Möbius törvényének, ha annak van kettős éle.

dulunk ki (melyet pl. két alkotóval két elemi felületre gondolhatunk felbontva, l. a 45. ábrát) és ennek két határgörbéjét először úgy forrasztjuk össze, hogy ellentétes irányok illeszkedjenek egymáshoz, akkor a kétoldalú gyűrűfelülethez jutunk. Ha pedig e két határgörbét megegyező irányban forrasztjuk össze, valóban egyoldalú felületet nyerünk. E felületről[1] térünkben úgy nyerhetünk képet, hogy a hengerpalástot hosszú, keskenyedő cső alakjára hozzuk, az egyik végét belevezetve a cső belsejébe, ezután forrasztjuk csak össze a két határvonalat. (46. ábra) Az így nyert felületet, mely



45. ábra.



46. ábra.

a projectiv sík után a zárt egyoldalú felület legegyszerűbb typusa, Klein[2] konstruálta meg először s így Klein-féle felületnek fogjuk nevezni. (Belátható, hogy e felületnek van oly körmetszete, mely két Möbius-féle szalagba vágja szét a felületet; más szóval: két Möbius-féle szalagot úgy lehet teljes határvonaluk mentén összeforrasztani, hogy e Klein-féle felület keletkezzék).

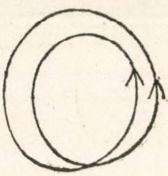
Ha egy vonalat *önmagával* forrasztunk össze, a XV. tétel természetesen szintén érvényben marad, tehát a kétoldalú felület azonnal egyoldalú felületbe megy át, ha van a vonalnak két oly darabja, melyek megegyező irányban forrasztattak össze. Először oly összeforrasztásra említünk két példát, a hol bármely két összeforrasztott darab megegyező irányú. Hengerpalástfelület egyik határgörbéjét e követelménynek megfelelőleg

[1] E felületet már az 1. § 7. pontja végén említettük: mind a 13., mind a 46. ábra e felületet ábrázolja.

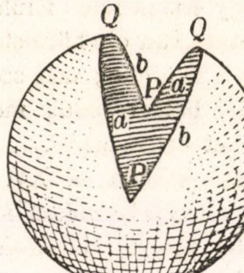
[2] *Ueber Riemann's Theorie der algebraischen Functionen und ihrer Integrale*, Leipzig, 1882., 80. l..

úgy lehet önmagával összeforrasztani, hogy MÖBIUS-féle szalagot nyerjünk, mert láttuk (l. a 28. ábrát), hogy a MÖBIUS-féle szalagot egypartú középvonala mentén felvágva, hengerpalástfelületet kapunk. (Ha e hengerpalástfelületet terünkben mint valóságos henger palástját választjuk, akkor ez az összeforrasztás terünkben önáthatolás nélkül nem valósítható meg; önáthatolás elkerülése céljából ezt előbb egy alkotója mentén fel kell vágni, egyik részét 360°-kal megforgatni és azután ismét úgy összeforrasztani, hogy ugyanazok a pontok kerüljenek együvé, melyek eredetileg összeestek; hiszen a MÖBIUS-féle szalag említett felmetszésénél is terünkben ily módon elhelyezkedő hengerpalástfelületet nyertünk.)

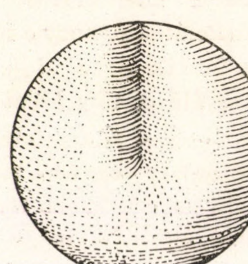
Az elemi felület egyetlen határgörbéjét is lehet önmagával úgy összeforrasztani, hogy végig megegyező irányokat nyerjünk (v. ö. az 53. lap [1]) jegyzetét; a határgörbe pontjai párosával a 47. ábrában látható módon egyesülnek egy-egy ponttá). Ez a 48. és 49. ábrán látható módon történhetik; az elsőn megegyező betűkkel jelölt pontokat és vonaldarabokat egyesítve keletkezik a másodikon látható felület,[1] mely az egyetlen valós kettős egyenessel biró



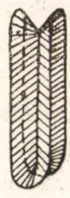
47. ábra.



48. ábra.



49. ábra.



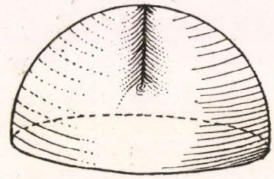
50. ábra.

ú. n. STEINER-féle felület. Az 50. ábra a kettős vonaldarab környezetét mutatja. E felületet, keletkeztetése folytán, egy kör-

[1] L. BOY: *Ueber die Curvatura integra u. d. Topologie geschlossener Flächen,* Diss., Göttingen, 1901, 39—40. l. és a 20. ábrát, valamint DYCK, l. c., 5. ábráját.

metszet (pl. az, mely a fenti ábrázolásban kettős vonaldarab) elemi felületbe visz át és így (a 2. § XII. tétele szerint) e felület alapszáma: 1. E körmetszet egypartú, mert egyetlen határgörbét teremt.

E STEINER-féle felületből, ha ez a leírt módon helyezkedik el terünkben, egy pontozással a DEHN és HEEGAARD-féle [1] «*Kreuzhaube*»-felületet nyerjük. Mi e felületet, melyet az 51. ábra mutat és mely később még szerepelni fog, *süveg*-felületnek nevezzük.



51. ábra.

Megemlítjük még, hogy az utóljára leírt három egyoldalú felület az adott keletkeztetéssel az analysis situs értelmében meg van határozva. Ez nem evidens, mert azt lehetne gondolni, hogy az alkalmazott összeforrasztások, melyek az említett követelmények betartásával is sokféleképpen végezhetők (valamint az utóljára alkalmazott pontozás) befolyással lehetnének a keletkező felület analysis situsbeli tulajdonságaira is. Hogy ez nincs így, annak bizonyításával itt most nem foglalkozunk, mert a felületek homœomorphismusára vonatkozó főtétel, mely szerint egyoldalú felületet alapszáma és határgörbéinek a száma az analysis situsban teljesen meghatároz, ezt közvetetlenül igazolni fogja. Éppen úgy következménye lesz e főtételnek az is, hogy a fenti STEINER-féle felület a projectiv síkkal, a pontozott projectiv sík pedig (tehát a süvegfelület is) a MÖBIUS-féle szalaggal homœomorph.

Hogy a MÖBIUS-féle kritériumnak még egy alkalmazását lássuk, mutassuk meg e kritérium alapján is, hogy a projectiv sík egyoldalú. E czélból [2] a projectiv sík először is elemi felületekre bontandó fel, pl. három egymást nem egy pontban metsző egyenessel.

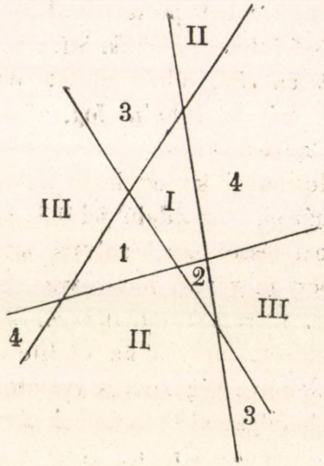
Így, a végtelenben való összefüggést is figyelembe véve, négy részre (I, II, III, IV) esik szét a sík, mely négy rész — mint az 1. §. 7. pontjában láttuk — mind elemi felület (52. ábra). Ha most I-et és II-t MÖBIUS-törvényének megfelelően fut-

[1] L. az Encyklopædia-czikk 198. lapját és 10. ábráját.

[2] L. a szerző fentebb említett dolgozatait.

juk körül (azaz úgy, hogy a közös él kétszer ellentétesen legyen befutva), akkor látni, hogy a III határának egyik befutása sem elégíti ki a Möbius-féle törvényt. Természetesen ugyanehhez az eredményhez jutunk, ha a projectiv síkot pl. 4 egyenessel 7 elemi felületre bontjuk fel: 4 háromszögre (1, 2, 3, 4) és 3 négy-

52. ábra.



53. ábra.

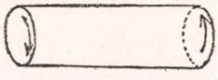
szögre (I, II, III). Ez a beosztás (53. ábra) különösen azért érdekes, mert előállítható terünkben oly zárt egyoldalú síklapú polyederfelület, melynek 7 lapja (4 háromszög és 3 négyszög) éppen úgy helyezkedik el egymáshoz, mint a projectiv sík e beosztásánál keletkezett 7 elemi felület. Ezzel az (az oktaeder élrendszeréhez illesztett) egyoldalú *heptaeder*-felülettel, mely tehát a projectiv síkkal homœomorph és a melyet Möbius nyomán Reinhardt konstruált meg először, itt nem foglalkozunk és csupán utalunk Reinhardt [1] és Steinitz [2] egy-egy e felületet tárgyaló dolgozatára.

Möbius kritériuma alapján most a másodfajú (két különböző határgörbe egy-egy darabját összekötő) hidakat is, a mint

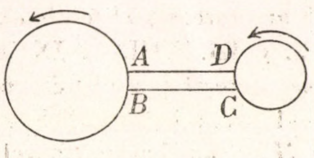
[1] *Zu Möbius' Polyedertheorie*, Leipziger Berichte, 37. k. (1885), 106. l.

[2] *Über ein merkwürdiges Polyeder mit einseitiger Gesammtfläche*, Journal f. r. u. a. Math., 130. k. (1905.), 281. l.

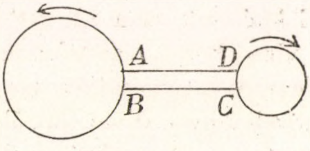
ezt az elsőfajúakra már az 5. pontban elvégeztük, csavart, illetőleg nem csavart hidak osztályába sorozhatjuk, de csak akkor, *ha a felület*, melyre a hidat alkalmazzuk, *kétoldalú*. A kétoldalú felület egyik indicatrixának kijelölése t. i. e két határgörbének összetartozó irányítását adja (hengerpalástra az 54. ábra mutatja két határgörbéjének összetartozó irányítását). Ha most már AB és CD egy másodfajú híd két torkolata, akkor e híd *«nem csavart»*-nak neveztetik, ha a hídnak, mint elemi felületnek határát befutva, AB és CD is ugyanabban, vagy mind a két torkolat ellentétes irányban futtatik be, mint a két



54. ábra.



55. ábra.



56. ábra.

határvonal összetartozó irányítású befutásánál (55. ábra). Ellenkező esetben (56. ábra) a híd *«csavart»*-nak neveztetik. Ha a két határgörbe azonos, azaz a híd elsőfajú, akkor az itt adott osztályozás csavart és nem csavart hidakra természetesen megegyezik azzal, melyet már ezelőtt megismertünk. Möbius kritériuma alapján most már első- és másodfajú hidakra egyaránt kimondhatjuk, hogy

XVI. Nem csavart híd meghagyja a kétoldalú felületet kétoldalúnak, míg a csavart híd egyoldalúvá alakítja.

4. §.

KÖRMETSZETEK.

1. Kétoldalú felületek nemszáma. Lefejthető felületek.

E kitérések után visszatérünk az összefüggő [1] felületek általános vizsgálatára, csatlakozva a 3. § III., VIII. és IX. tételéhez, melyek megmondják, hogy egy keresztmetszet milyen esetben növeli 1-gyel, 0-val, illetőleg —1-gyel a határgörbék számát. Bontsunk egy A alapszámmal és H-számú határgörbével bíró tetszés szerinti határolt felületet $A—1$-számú folytatólag alkalmazott keresztmetszettel egyetlen elemi felületre (2. §, XIV. tétel). E között az $A—1$-számú keresztmetszet közt legyen rendre k_1, k_0, k_{-1} azoknak a keresztmetszeteknek a száma, melyek az e keresztmetszet alkalmazását közvetetlenül megelőzően keletkezett felület határgörbéinek a számát 1-gyel, 0-val, illetve —1-gyel növelik, úgy, hogy

$$k_1 + k_0 + k_{-1} = A - 1.$$

Minthogy végül egyetlen határgörbével bíró elemi felülethez jutunk, azért

$$H - k_{-1} + k_1 = 1.$$

Összeadva e két egyenlőséget, a következő összefüggést nyerjük:

$$H + k_0 + 2k_1 = A, \tag{I}$$

honnan következik, hogy

I. A határgörbék száma nem lehet nagyobb a felület alapszámánál, $H \leq A$.

[1] E szót ezentúl is elhagyjuk.

A megelőző bizonyítás csak határolt felületre vonatkozott, a 2. § X. tétele szerint azonban zárt felületre ($H = 0$) is érvényes a tétel.

Tegyük most még fel, hogy határolt felületünk kétoldalú, akkor a 3. §. X. tétele szerint $k_0 = 0$, mert keresztmetszetek alkalmazásával kétoldalú felület nem mehet át egyoldalúba. Az (I) ez esetben tehát a

$$H + 2k_1 = A \tag{Ia}$$

alakot ölti s ennélfogva határolt felület esetében:

II. Kétoldalú felületnél $A—H$ páros. [1]

Ez a tétel szintén érvényes zárt felületekre is, azaz *zárt kétoldalú felület alapszáma páros.* Ez így bizonyítható be. Az A alapszámmal bíró zárt kétoldalú F felületből egy pontozással keletkező határolt $\dot{F}$ felületre $H' = 1$ és (a 2. § VIII. tétele szerint) $A' = A + 1$ és így (Ia) szerint

$$1 + 2k_1' = A + 1,$$

(hol k_1' is $\dot{F}$-re vonatkozik). Tehát $A = 2k_1'$ valóban páros.

Az ily módon nem negativ egész számnak bizonyult

$$P = \frac{1}{2}(A—H)$$

számot a kétoldalú felület *nemszám*-ának (genus, Geschlecht, genre) nevezik. [2]

Mivelhogy egy pontozás A-t is (2. § VIII. tétel) és H-t is 1-gyel növeli, azért

III. Pontozás a felület nemszámán nem változtat.

Továbbá:

IV. Két különböző határgörbét összekapcsoló keresztmetszet alkalmazása a nemszámon nem változtat.

Ilyen keresztmetszet t. i. A-t is H-t is 1-gyel apasztja (a 2. § XI. és a 3. § III. tétele szerint).

A nemszám szempontjából a legegyszerűbbek a 0-adnemű felületek, melyekre tehát $A = H$. Ezeket, később kifejtendő

[1] Az I. és II. tétel — a kétoldalúság hallgatag postulálásával — már megvan RIEMANN-nál (l. c., 12. l.).

[2] A nemszámnak e bevezetési módját MINKOWSKI-nak 1904/5. évi, a göttingai egyetemen tartott előadásában hallottuk.

okokból *(síkra) lefejthető*[1] felületeknek is nevezik. A gömbfelület (azaz az ezzel homœomorph függvénytani sík), melyre $A = H = 0$, valamint az ebből egy (ez az elemi felület), két, ... pontozással keletkező felületek szolgáltatnak ilyen felületekre példákat (az n-szer pontozott gömbfelületre t. i., a 2. § VIII. tétele szerint, $A = H = n$). Sőt látni fogjuk később, hogy ezek minden lefejthető felületet felölelnek (l. az 5. § 7. pontját).

A lefejthető felületeket már $A = H$ teljesen jellemzi. Kimutatjuk t. i., hogy $A = H$ *csak kétoldalú felületekre lehetséges.* Zárt felületre ez világos: ha egy egyoldalú felületre $A = H = 0$ volna, akkor — ismét a 2. § VIII. tétele szerint — egy oly pontozással, melynek alkalmazásával valamely egypartú körmetszetnek egyetlen pontja sem távolíttatik el,[2] belőle oly ismét egyoldalú felület keletkeznék, melyre $A = H = 1$ és ez (az elemi felület kétoldalú lévén) ellentmond a 2. § XV. tételének. Ha pedig a felület határolt, akkor $A = H$-ból az (I) képlet szerint $k_0 = 0$ (és $k_1 = 0$) következik. Tehát az elemi felülethez vezető $A - 1$ keresztmetszet között — *bárhogy választjuk is ezeket* — nincs olyan, mely a megelőző keresztmetszetekkel keletkezett felület határgörbéinek a számát változatlanul hagyná. Ezért eredeti felületünknek sincs ilyen tulajdonságú szét nem daraboló keresztmetszete, mert különben — a 2. § XVIII. tétele szerint — ezt választhatnók az $A - 1$ keresztmetszet elsejének. Már pedig egyoldalú felületnek — a 3. §. XI. tétele szerint — van ily keresztmetszete. Felületünk tehát valóban kétoldalú. Az I. tétel figyelembevételével eredményünk így mondható ki:

V. Egyoldalú felület határgörbéinek a száma mindenkor kisebb a felület alapszámánál.

A nemszám egy jellegzetes tulajdonságának megállapítása céljából most a következő RIEMANN-féle tételt[3] bizonyítjuk be:

VI. Lefejthető felületet minden körmetszete szétdarabol.

[1] A metrikus geometriában e szóval mást jelölnek. A lefejthető felületeket — más definitiót véve alapul — MÖBIUS (l. c., 450. l.) és DYCK (l. c., 477. l.) *Grundform*-nak nevezi. KOEBE és WEYL pedig a *schlichtartige Fläche* elnevezést használja.

[2] Bebizonyítható, hogy egyoldalú felület bármely pontozása ily tulajdonságú.

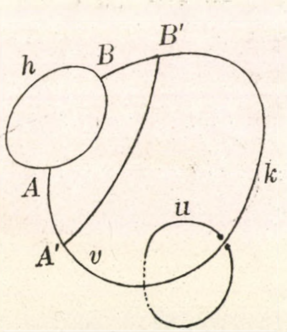
[3] L. c., 12. l. — Az itt következő bizonyítás is a RIEMANN-é.

Ha t. i. volna szét nem daraboló körmetszete, akkor ez (2. §, XII. tétel) a felület alapszámát, A-t változatlanul hagyná, a határgörbék számát pedig, mely (a felület lefejthető lévén) szintén A, felemelné (3. §, II. tétel) $A + 2$-re. Ámde az I. tétel szerint A alapszámmal bíró felületnek nem lehet $A + 2$ határgörbéje.

A bebizonyított tétel következő megfordítása is érvényes:

VII. Le nem fejthető felületnek mindig van szét nem daraboló körmetszete.

Mivelhogy a pontozás a lefejthetőségen vagy le nem fejthetőségen nem változtat (III. tétel), azért a bizonyításnál határolt felületekre szorítkozhatunk. Továbbá, a 3. § I. tétele szerint tételünk egyoldalú felületekre helyes. Feltehetjük tehát, hogy F felületünk határolt és kétoldalú; mivelhogy továbbá feltevésünk szerint le nem fejthető, azért reá nézve az (Ia) képletbeli $k_1 > 0$. Bizonyos szét nem daraboló keresztmetszetek alkalmazása után tehát F-ből oly — ugyancsak kétoldalú — F' felületet nyerünk, melynek van egy a határgörbék számát 1-gyel növelő szét nem daraboló keresztmetszete, k. A 3. § III., VIII. és IX. tétele szerint ez a k vagy 1.) σ-alakú, vagy 2.) az F' ugyanazon h határgörbéjének két pontját, A-t és B-t köti össze. Az első esetben a σ-alakú keresztmetszet körmetszetrésze F'-nek szét nem daraboló körmetszetét adja. A második esetben van F' belső pontjaiból álló olyan u út, mely a k egyik partjáról másik partjára vezet, a nélkül, hogy k ezt az u utat átmetszené; de ekkor van (a h határ AB darabjához «elég közel» választott) oly $A'B'$ vonaldarab (l. az 57. ábrát), mely u-t szintén nem metszi. Tehát $A'B'$ a k egy részével F'-nek oly zárt v vonalát adja, mely u-t ugyancsak nem metszi. Az u tehát v-nek egyik oldaláról is átvezet másik oldalára s így v az F'-nek szét nem daraboló körmetszete. Mindkét esetben találtunk tehát F'-n szét nem daraboló körmetszetet. És ez, mint bizonyítandó volt, természetesen szét nem daraboló körmetszete F-nek is.



57. ábra.

A lefejthető felületeknek a VI. és VII. tételben foglalt tulajdonságával értelmezni is lehetne egy felület lefejthető voltát.[1] Mutatja továbbá e két tétel, hogy minden felület, mely lefejthető felületnek része, maga is lefejthető, valamint azt is, hogy sem keresztmetszet, sem pontozás a felület lefejthetőségét nem szüntetheti meg.

Mivelhogy szét nem daraboló körmetszet (2. §, XII. tétel) az alapszámon nem változtat és kétoldalú felületnél a határgörbék számát 2-vel növeli, azért a nemszámot, amely

$$P = \frac{1}{2}(A - H),$$

1-gyel csökkenti:

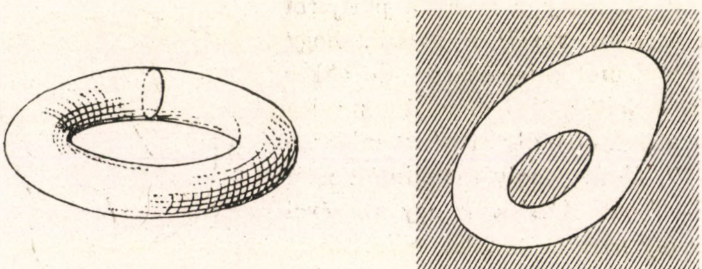
VIII. Szét nem daraboló körmetszet a kétoldalú felület nemszámát 1-gyel csökkenti.

A VII. és VIII. tételből világosan következik:

IX. Minden kétoldalú felület szét nem daraboló körmetszetek folytatólagos[2] alkalmazásával lefejthetővé alakítható. Ily körmetszetek száma mindenkor megegyezik a felület nemszámával.

Figyelemre méltó az az analogia, a mit ez az eredményünk a 2. § XIV. tételével mutat. A 2. § XVIII. tételének az analogonja is természetesen helyes, azaz:

X. Ha egy P-ednemű kétoldalú felületet egy első körmetszet

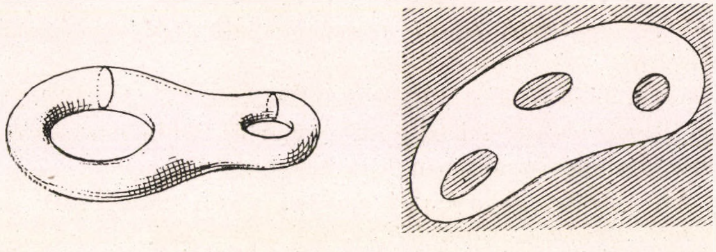


58. ábra.

[1] Így jár el pl. Weyl, l. c., 45. l.

[2] E szóval az is ki van mondva, hogy két körmetszetnek nincs közös pontja.

nem darabol szét, továbbá az így keletkezett felületet egy második körmetszet nem darabol szét, s. i. t., akkor pontosan a P-edik körmetszet alkalmazása után nyerünk lefejthető felületet.



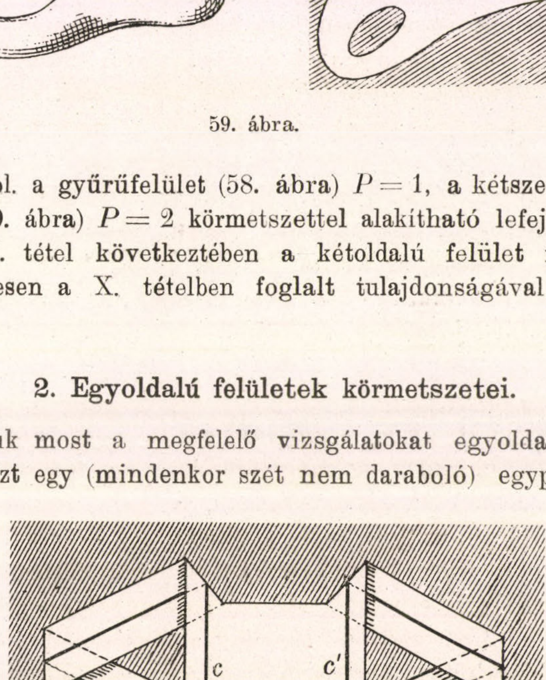
59. ábra.

Így pl. a gyűrűfelület (58. ábra) $P=1$, a kétszeres gyűrűfelület (59. ábra) $P=2$ körmetszettel alakítható lefejthetővé.

A IX. tétel következtében a kétoldalú felület nemszáma természetesen a X. tételben foglalt tulajdonságával is értelmezhető.

2. Egyoldalú felületek körmetszetei.

Lássuk most a megfelelő vizsgálatokat egyoldalú felület esetére. Ezt egy (mindenkor szét nem daraboló) egypartú körmetszet vagy kétoldalúvá alakítja (mint pl. a MÖBIUS-féle szalag esetében, l. a 28. ábrát) vagy meghagyja egyoldalúnak (erre a 60. ábra c körmetszete szolgáltat példát). Utóbbi esetben ismét alkalmazható egy egypartú körmetszet (példánkban a c'), stb.



60. ábra.

Minden egyes lépésnél H értéke 1-gyel nő és A változatlan marad (2. §, XII. tétel). Mivelhogy H nem válhatik A-nál nagyobbá, azért legfeljebb $A-H$ számú lépés után oly felülethez jutunk, melynek nincs már egypartú körmetszete. Tehát

XI. Egyoldalú felület legfeljebb $A-H$-számú egypartú körmetszettel kétoldalúvá alakítható.

A IX. tétel szerint az így keletkezett kétoldalú felület további körmetszetekkel lefejthetővé válik és így e tétel első részének általánosításaképpen kimondhatjuk, hogy

XII. Minden felület szét nem daraboló körmetszetek folytatólagos alkalmazásával lefejthetővé alakítható.

Egyoldalú felület esetében azonban — nem úgy, mint kétoldalúaknál — a lefejthetővé alakító körmetszetek száma függ a körmetszetek választásától. Ha n_1 az alkalmazott egypartú és n_2 a kétpartú körmetszetek száma, akkor a határgörbék száma, H, alkalmazásuk által $H+n_1+2n_2$-re növekszik, míg a felület alapszáma, A változatlan marad s így, minthogy lefejthető felülethez jutottunk, nyilván

$$H+n_1+2n_2=A,$$

a mi mutatja, hogy n_1+2n_2 (és nem n_1+n_2) van pusztán a felület által megadva. A megelőző ábrában látható egyoldalú felület pl. nem csak két egypartú ($n_1=2$, $n_2=0$), hanem egyetlen kétpartú ($n_1=0$, $n_2=1$) körmetszettel is lefejthetővé alakítható. (Ilyet legegyszerűbben a két egypartú körmetszet «egybekapcsolásával» nyerhetünk.) Innen rögtön megállapítható, hogy adott számú határgörbével és adott alapszámmal bíró egyoldalú felületet lefejthetővé alakító körmetszetek száma milyen határok közt változhatik[1] és különösen, hogy

XIII. Egyoldalú felületet együttesen szét nem daraboló körmetszetek maximális száma $A-H$.

Hiszen a fenti képlet szerint:

$$n_1+n_2 \leq n_1+2n_2=A-H.$$

Csak később (5. § XIV. tétele) fogjuk bebizonyíthatni, hogy

[1] L. DYCK, l. c., 481. l.; e lap 26. sorában szereplő $2-r-K^{II}$ e szám felére változtatandó.

egyoldalú felületen mindig van pontosan $A-H$-számú együttesen is szét nem daraboló körmetszet, a mikor is ezek valamennyien egypartúak, mert csak akkor lehet $n_1 + n_2 = A-H$, ha $n_2 = 0$. Ez az $A-H$ szám ily módon sok tekintetben hasonló szerepet játszik, mint kétoldalú felületeknél a nemszám. Ezért — bár az irodalomban nem használatos — az $A-H$ számot *az egyoldalú felület nemszámának* fogjuk nevezni,[1] megjegyezvén, hogy ekkor a IX. tétel második része, valamint a VIII. tétel egyoldalú felületekre nem vihető át.[2] Ellenben — az ott adott bizonyítások alapján — a III. és IV. tétel egyoldalú felületre is igaz; továbbá — az V. tétel alapján — 0 csak kétoldalú felületnek lehet a nemszáma, úgy, hogy «0-adnemű» és «lefejthető», ezentúl is ugyanazt jelenti. Hogy egy kör- vagy keresztmetszet hogyan változtatja egyoldalú felület nemszámát, az általában attól is függ, hogy meghagyja-e egyoldalúnak vagy nem.

Egyoldalú felületet kétoldalúba átvivő körmetszetek számát A és H szintén nem határozza meg, mint az utóljára említett felület példája mutatja, melyet egyetlen (kétpartú) körmetszettel is kétoldalúvá alakíthatunk. Később (5. § XV. tétele) ki fogjuk mutatni, hogy minden egyoldalú felület egyetlen körmetszettel kétoldalúvá tehető, de az már itt látható, hogy

XIV. *Ha egy egyoldalú felületet egy körmetszete kétoldalúvá alakít, akkor e körmetszet egy- vagy kétpartú, a szerint, hogy a felület nemszáma $A-H$ páratlan vagy páros.*

A szerint t. i., hogy e körmetszet egypartú vagy kétpartú, a keletkező kétoldalú felület határgörbéinek száma $H+1$, illetőleg $H+2$, alapszáma pedig A lesz; a II. tétel szerint tehát $A-(H+1)$, illetőleg $A-(H+2)$ páros.

Utolsó eredményünkkel bizonyos analogiát mutat a következő tétel, melyet azért e helyen említünk:

[1] Zárt egyoldalú felület nemszáma tehát megegyezik az alapszámával.

[2] Érvényes marad a VIII. tétel egyoldalú felületre is, ha ott a «körmetszet» szót «egypartú körmetszet»-tel pótoljuk. Ellenben, mint szintén rögtön beláthatò, kétpartú körmetszet az egyoldalú felület nemszámát 2-vel csökkenti. — Megjegyezzük, hogy tételeink kimondásánál, ott, hol ez most szükséges, a «kétoldalú» jelzőt már akkor is kitettük, midőn a nemszám még csupán kétoldalú felület esetére volt értelmezve.

Ha valamely egyoldalú felületet egy keresztmetszete kétoldalúvá alakít,[1] *akkor ez vagy nem változtatja a határgörbék számát, vagy 1-gyel növeszti e számot, a szerint, hogy a felület nemszáma páratlan vagy páros.*

Valóban — először közönséges keresztmetszetre szorítkozva — e keresztmetszet nem csökkentheti 1-gyel a határgörbék számát, mert akkor a 3. § IV., V. és VI. tétele szerint az e keresztmetszethez invers híd, miután ez a határgörbék számát 1-gyel növesztené, elsőfajú nem csavart híd volna és így alkalmazásával kétoldalú felület nem válhatnék egyoldalúvá (3. § XVI. tétele). Ha tehát a szóban lévő keresztmetszet ε-nal növeli a H-t, akkor $\varepsilon = 0$ vagy 1. E keresztmetszettel létrehozott felület alapszáma $A—1$, határgörbéinek száma: $H + \varepsilon$, s így a II. tétel szerint $(A—1)—(H + \varepsilon) = P—(\varepsilon + 1)$ páros. Tehát valóban $\varepsilon = 0$, ha P páratlan és $\varepsilon = 1$, ha P páros. E bizonyításból az is következik, hogy *oly keresztmetszet, mely két különböző határgörbe pontját köti össze, nem vihet át egyoldalú felületet kétoldalúba,* mert az ily keresztmetszet (3. §, III. tétel) 1-gyel csökkenti a határgörbék számát. E megjegyzés és a XIV. tétel alapján a szóban lévő tétel bizonyítása könnyen kiegészíthető σ-alakú keresztmetszetre is.

3. Körmetszetpárok. Kétoldalú felületek kanonikus felmetszése.

A megelőzőkben mindig csak oly körmetszetek rendszeréről volt szó, melyek közül bármely kettőnek nem volt közös pontja. Most ezt a követelményt elejtjük és beszélni fogunk két olyan körmetszet *egyidejű* alkalmazásáról, melyeknek egyetlen közös pontjuk és pedig metszés-[2] pontjuk van. Ez az átalakitás mindig

[1] Minden határolt egyoldalú felületen van ilyen keresztmetszet; egy σ-alakút úgy nyerünk, hogy egy kétoldalúvá alakító körmetszetnek (ilyennek létezését, mint mondottuk, csak később bizonyítjuk be) egy pontját összekötjük egy felületi határponttal és ezt az összekötő vonaldarabot hozzáveszszük e körmetszethez. Bebizonyítható, hogy mindig van ily tulajdonságú *közönséges* keresztmetszet is.

[2] E szó itt és a következőkben szűkebb értelemben veendő; azaz úgy értendő, hogy a második görbe átmegy az elsőnek egyik partjáról a másikra.

mint egy körmetszet és egy keresztmetszet *folytatólagos* alkalmazása tekinthető, mert a második körmetszet az első körmetszet alkalmazásával keletkezett felületnek keresztmetszeteképpen jelentkezik.

Legyen k_1 egy F felületnek szét nem daraboló kétpartú körmetszete, mely F-et az összefüggő F'-be viszi át; e körmetszet két új határgörbét, h_1-et és h_2-t hoz létre. Legyen h_1-nek P_1, h_2-nek P_2 egy-egy oly pontja, melyek, visszatérve F'-ről F-re, (k_1-nek ugyanabban a P pontjában) egyesülnek. Legyen q az F'-nek oly keresztmetszete, mely P_1-et P_2-vel köti össze. Ez a q, mivelhogy két különböző határgörbe egy-egy pontját köti össze, nem darabolja szét F'-t. A q-nak F-en egy P-n átmenő k_2 körmetszet felel meg, és ez — mint láttuk — k_1-gyel egyidejűleg alkalmazva nem bontja szét F-et. Ily módon minden szét nem daraboló kétpartú körmetszethez található egy másik, mely ezt egy pontban *metszi* (l. az utolsó jegyzetet) és pedig úgy, hogy a két körmetszet együtt sem darabol szét. Két olyan körmetszetet, melyeknek egyike kétpartú, továbbá egyetlen metszespontjuk van (egyébként nincs közös pontjuk) és a felületet együttesen sem darabolják szét, *körmetszetpár*nak fogunk nevezni. Ezzel az elnevezéssel eredményünk így is kimondható:

XV. Minden szét nem daraboló kétpartú körmetszet körmetszetpárrá egészíthető ki.

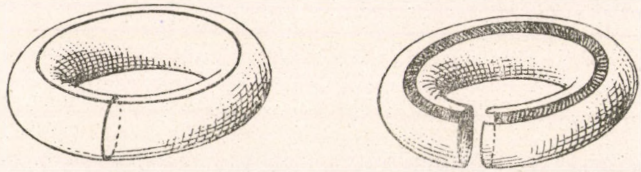
A VII. tétel alapján innen még következik:

XVI. Le nem fejthető kétoldalú felületen mindig van körmetszetpár.

Visszatérve előbbi jelölésünkhöz, a kétpartú k_1 körmetszet az F határgörbéinek számát 2-vel növeli, q pedig (a 3. § III. tétele szerint) az F' határgörbéinek a számát 1-gyel csökkenti. A nemszámot illetőleg pedig: k_1 — ha most feltesszük, hogy F kétoldalú — F nemszámát 1-gyel csökkenti (VIII. tétel), q pedig az F' nemszámát (a IV. tétel szerint) változatlanul hagyja. A k_1 és q egymás után való alkalmazása pedig nem egyéb, mint a (k_1, k_2) körmetszetpár alkalmazása; tehát a két eredményünk így fogalmazható:

XVII. Körmetszetpár minden felület határgörbéinek számát 1-gyel növeli; ha a felület kétoldalú, akkor nemszámát (tehát alapszámát is) 1-gyel csökkenti.

Ha egy le nem fejthető kétoldalú felületen egy körmetszetpárt alkalmazunk, ez vagy lefejthetővé válik, ha t. i., mint most láttuk, a felület nemszáma: 1 (pl. a gyűrűfelület így elemi felületbe megy át, 61. ábra) vagy nem, ha nemszáma > 1 (példa a bárhányszor pontozott kétszeres gyürű). Az utóbbi eset-



61. ábra.

ben újból alkalmazható rajta körmetszetpár, stb. Ha a felület nemszáma P, akkor utolsó tételünk második része szerint a P-edik pár alkalmazása után lesz a nemszám 0. Tehát:

XVIII. Minden kétoldalú felület körmetszetpárok folytatólagos alkalmazásával lefejthetővé alakítható. E körmetszetpárok száma mindig a felület nemszámát adja.[1]

A nemszám szempontjából tehát a körmetszetpár hasonlóan viselkedik, mint egy körmetszet (v. ö. a IX. tételt) és látnivalóan a X. tételnek megfelelő tétel szintén érvényes körmetszetpárokra is.

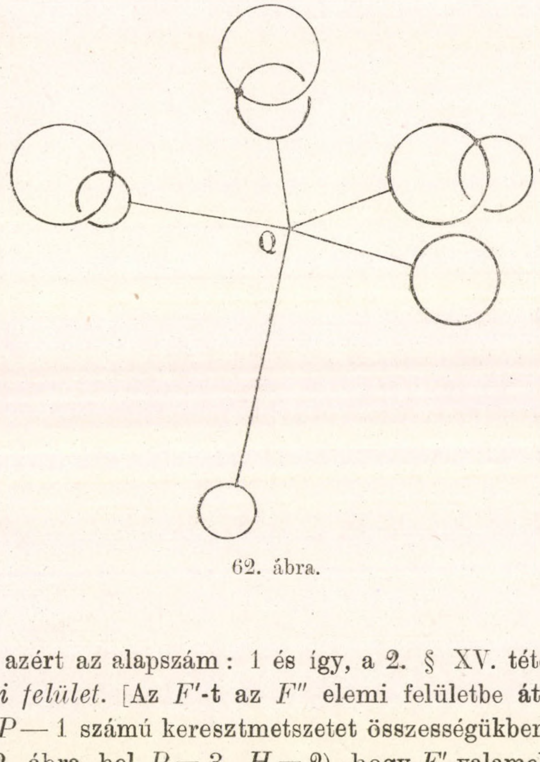
A nemszámot a XVIII. tételben foglalt tulajdonságával is lehet definiálni.[2]

A kétoldalú F felületre (melynek jellemző adatait az eddigi módon H, A, P betűkkel jelöljük) a XVIII. tételbeli P-számú körmetszetpárt alkalmazva, a keletkező lefejthető felületet jelöljük F'-vel. A XVII. tétel szerint F' határgörbéinek száma $H+P$ (azaz $A-P$). Ha e szám 0, azaz $H=0$, $P=0$, tehát $A=0$, akkor F és F' azonos és F: a gömbfelület. (T. i. egy pontozással oly felületet nyerünk F-ből, melyre $A=1$ és $H=1$ és a mely tehát, a 2. § XV. tétele szerint, elemi felület;

[1] Ilyen körmetszetpárokat alkalmaz KLEIN, *Ueber Riemann's Theorie der algebraischen Functionen*, Leipzig, 1882., Abschnitt II.

[2] Így jár el pl. HADAMARD, l. c., 29. l.

az elemi felületből pedig, ha határvonala mentén egy elemi felülettel kitöltjük, valóban gömbfelület adódik, ez lévén a gömbfelület analysis-situs-beli értelmezése). Minden más esetben F' határolt és így (a 3. § IV. tétele szerint) $H+P-1$ folytatólag alkalmazott (mindenkor két különböző határgörbét összekötő) keresztmetszettel egyetlen határgörbével bíró F'' felülethez jutunk, melynek nemszáma a IV. tétel szerint akkora, mint F'-é, azaz 0. Minthogy azonban a határgörbék száma: 1 és a nem-



62. ábra.

szám: 0, azért az alapszám: 1 és így, a 2. § XV. tétele szerint, F'': *elemi felület.* [Az F'-t az F'' elemi felületbe átvivő említett $H+P-1$ számú keresztmetszetet összességükben úgy nyerhetjük (62. ábra, hol $P=3$, $H=2$), hogy F' valamely belső Q pontját az F' minden ($H+P$-számú) határgörbéjével egy-egy egymást nem metsző vonal által összekötjük. E Q-beli $H+P$-ágú «csillag» két ágát adja az első keresztmetszet; a többi $H+P-2$ keresztmetszet pedig egy-egy ága a csillagnak.]

A leírt módon választott P-számú körmetszetpár és $H+P-1$-számú keresztmetszet alkalmazása, a mi a felületet, mint láttuk, elemi felületbe viszi át, *a kétoldalú felület kanonikus felmetszésé*nek [1] neveztetik.

Láttuk, hogy a gömbfelület kivételével ez minden kétoldalú felületre alkalmazható.

4. Egyoldalú felületek kanonikus felmetszése.

Lássuk most hasonló szempontból az egyoldalú felületeket. A XI. és XVIII. tételek közvetetlen folyománya a következő tétel:

XIX. Minden egyoldalú felület egypartú körmetszetek, majd körmetszetpárok folytatólagos alkalmazásával lefejthetővé alakítható.

Legyen az egyoldalú F felületre (melynek jellegzetes számait ismét H, A, P-vel jelöljük) alkalmazott egypartú körmetszetek száma n_1 és a körmetszetpárok száma n_2. Mindezek folytatólagos alkalmazásával keletkező lefejthető felületet jelöljük F'-vel. Ha F-re először az egypartú körmetszeteket és a körmetszetpárok körmetszetei közül minden párból csak az egyiket alkalmazzuk, a keletkező F'' felület alapszáma megmarad A-nak. F''-ből pedig úgy nyerjük F'-t, hogy a még nem alkalmazott n_2-számú körmetszetnek F'-n megfelelő (l. a megelőző pont elejét) n_2-számú szét nem daraboló keresztmetszetet alkalmazzuk. A 2. § XI. tétele szerint tehát F' alapszáma: $A' = A - n_2$. Az F' határgörbéinek száma pedig (itt felesleges az F'' figyelembe vétele) a 3. § II. tétele és a jelen § XVII. tétele szerint: $H' = H + n_1 + n_2$. Mivelhogy továbbá F' lefejthető, azért

$$A' - H' = A - H - (n_1 + 2n_2) = 0;$$

és így az F-re alkalmazott körmetszetek együttes száma:

$$n_1 + 2n_2 = A - H = P$$

az egyoldalú felület nemszámát adja. Ily módon analogiában a XVIII. tétel második részével, a XIX. tételt kiegészítő következő eredményhez jutottunk:

XX. Ha egy egyoldalú felület egypartú körmetszetek és

[1] L. RIEMANN, l. c., 129—130. l.; DYCK, l. c., 478—479. l. és WEYL, l. c., 74—76. l.

körmetszetpárok alkalmazásával lefejthető felületbe megy át, akkor az alkalmazott körmetszetek együttes száma mindenkor a felület nemszámát adja.[1]

Így pl. belátható, hogy a 60. ábrabeli felület két egypartú körmetszettel ($n_1 = 2$, $n_2 = 0$) vagy egyetlen körmetszetpárral ($n_1 = 0$, $n_2 = 1$) alakítható lefejthetővé; mindkét esetben $n_1 + 2n_2 = 2$ és ez valóban a felület nemszáma, mert 1 határgörbéje van és — mivelhogy két keresztmetszettel vihető át elemi felületbe — alapszáma 3.

Ha a leírt módon lefejthetővé alakított felületet még úgy, mint azt előbb kétoldalú felület esetében elvégeztük, keresztmetszetekkel elemi felületbe visszük át, akkor minde kör- és keresztmetszetek alkalmazását Dyck[1] *az egyoldalú felület kanonikus felmetszésé*nek nevezi.

Ez kivétel nélkül minden egyoldalú felületre alkalmazható: a gömbfelületnek megfelelő kivételes egyoldalú felület nincsen.

5. Körmetszetsorok.

Riemann zárt kétoldalú felületeknek egyetlen elemi felületté való felmetszésére még egy más eljárást is vázolt.[2] Ez az eljárás a következő tételen alapszik.

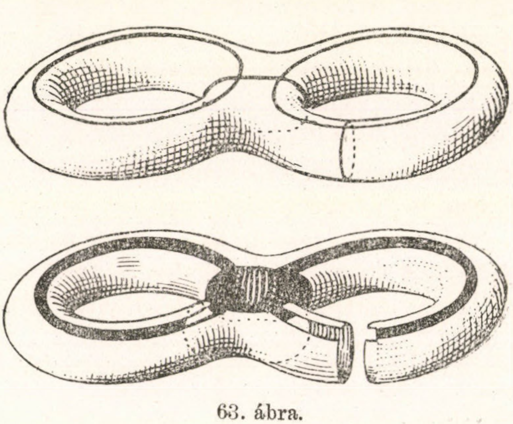
XXI. A gömbfelület kivételével minden kétoldalú zárt felület körmetszetsor alkalmazásával elemi felületbe vihető át.

Körmetszetsor-nak a felület $k_1, k_2, \ldots k_r$ körmetszeteinek összességét itt akkor nevezzük, ha (k_1, k_2), (k_2, k_3), ..., (k_{r-1}, k_r) rendre mind körmetszetpárok, e szó fentebb használt értelmében és egyébként e körmetszeteknek közös pontjuk nincsen. Tételünk következőképpen bizonyitható be. Mivelhogy (mint e § 3. pontjában láttuk) 0-adnemű zárt felület csupán gömbfelület lehet, azért a szóban lévő kétoldalú zárt F felület nem 0 adnemű felület és így (XVI. tétel) van egy (k_1, k_2) körmetszetpárja, mely (XVII. tétel) egyetlen határgörbét teremt és a felület A alapszámát $A-1$-be viszi át. Ha az így keletkezett F_1 felület elemi felület, tételünk be van bizonyítva. Ellenkező eset-

[1] L. Dyck, l. c., 481—482. l.
[2] L. c., 104. l.

ben van szét nem daraboló közönséges k_3 keresztmetszete, mely természetesen az egyetlen határgörbe két pontját köti össze; látnivaló, hogy e két pont úgy választható, hogy ezek eredeti felületünkön ugyanannak a pontnak feleljenek meg úgy, hogy k_3 az F-nek körmetszeteképpen jelentkezik. A 3. § VIII. tétele szerint a k_3 alkalmazásával keletkezett F_2 felületnek 1-gyel több, tehát 2 határgörbéje van és a k_3 két partjának egyike az egyik, másika a másik határgörbe partjának lesz része. Van tehát e két határgörbének egy-egy oly pontja, melyeknek F_1-en, tehát F-en is ugyanaz a pont felel meg. E két pontot összekötő bármely k_4 keresztmetszete az F_2-nek (mely tehát F-en, mint körmetszet jelentkezik) F_2-t nem darabolja szét, mert két különböző határgörbét köt össze és oly F_3 felületet hoz létre, melynek (3. §, III. tétel) ismét csak egy határgörbéje van. Ez lehet elemi felület, ha t. i. alapszáma 1, és ekkor czélunk el van érve; vagy nem és akkor ugyanezt az eljárást folytathatjuk. Mivelhogy F_1 alapszáma $A-1$, azért (2. §, XI. tétel) F_2, F_3, $F_4, \ldots$ alapszáma rendre $A-2$, $A-3$, $A-4, \ldots$ Tehát F_{A-1}, melyet F-nek ($k_1, k_2, \ldots, k_A$) körmetszetsora hoz létre, elemi felület lesz (2. §, XV. tétel) és tételünk be van bizonyítva. Sőt meggondolásunk azt is mutatja, hogy e tétel a következővel egészíthető ki:

XXII. Kétoldalú zárt felületet elemi felületbe átvivő körmetszetsor körmetszeteinek a száma mindenkor a felület alapszámát (a nemszám kétszeresét) adja.



63. ábra.

A 63. ábra mutatja a kétszeres gyűrű ($A = 4$) ilyetén felmetszését.

A XXII. tétel különben EULER általánosított tételéből is következtethető. Ha t. i. x-szel jelöljük a körmetszetsor körmetszeteinek a számát, akkor e körmetszetsor oly vonalrendszernek tekinthető, melyben a csúcsok, illetőleg élek száma:

$$\alpha_0 = x-1,\ \alpha_1 = 2x-2,$$

s a mely a felületet

$$\alpha_2 = 1$$

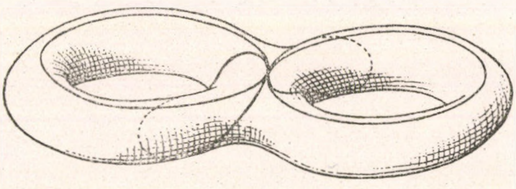
számú elemi felületre bontja. Ezért

$$(x-1)-(2x-2)+1 = 2-A;$$

és így valóban $x = A$.

A XXI. tétel számára adott bizonyításunk csekély módosításával belátható még a következő tétel.

XXIII. A P-ednemű zárt kétoldalú felület ($P > 0$) $2P$-számú, egy ponton áthaladó körmetszettel elemi felületbe vihető át. Ezek a $k_1, k_2, \ldots, k_{2P}$ körmetszetek továbbá úgy választhatók, hogy k_1 a k_2-t, k_3 a k_4-et, ... k_{2P-1} a k_{2P}-t átmesse. ($P = 2$ esetre mutatja ezt a 64. ábra.)



64. ábra.

Ilyen felmetszéseket alkalmaz POINCARÉ [1] és DEHN [2]. L. továbbá már BRUNEL egy dolgozatát. [3]

E $2P$ körmetszet mentén való felmetszéssel keletkező elemi felület $4P$-oldalú polygonnak tekinthető: a zárt vonalak két

[1] Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo, 18. k. (1904), 16. l.

[2] Mathematische Annalen, 71. k. (1911.), 119. l.

[3] Procès-Verbaux de la Société des Sciences de Bordeaux, 1894/5., 13. l.

partjának megfelelőleg minden körmetszetből a polygonnak két-két oldala válik. E polygonokat nevezi POINCARÉ FUCHS-féle polygonoknak.

Ha az ismertetett módon a körmetszetsort *határolt* kétoldalú felületre alkalmazzuk, akkor nem elemi felülethez, hanem oly *lefejthető* felülethez jutunk, melynek, ha az eredeti felület határgörbéinek száma H volt, $H+1$ határgörbéje lesz (t. i. e felületet H-számú határgörbéje mentén egy-egy elemi felülettel kitöltve, elemi felületet nyerünk, mert eredeti felületünk ugyanezzel az átalakítással zárt felületbe megy át). Ekkor tehát még H-számú keresztmetszet alkalmazására van szükség, hogy elemi felülethez jussunk (v. ö. e § 3. pontját). Megjegyezzük még, hogy határolt kétoldalú felületre a fenti módon alkalmazandó körmetszetsor körmetszeteinek száma nem az alapszámot, hanem (l. a III. tételt) most is a nemszám kétszeresét adja. (E két szám csak zárt felületre egyezik meg egymással.)

Az ismertetett eljárás természetesen *egyoldalú* felületre is szolgáltat egy egyetlen elemi felületre való felmetszést, ha ezt először (XI. tétel) egypartú körmetszetekkel kétoldalúvá alakítjuk, éppen úgy, a hogy a XVIII. tételről a XIX-re térhettünk át. Hogy a XX. tételnek itt mi felel meg, annak vizsgálatára már nem térünk ki.

5. §.

A FŐTÉTEL.

1. Irodalom.

Az e pontban tárgyalandó normáltypusok és főtétel irodalmát illetőleg LIPPICH, DYCK, PETERSEN, HADAMARD, DEHN és HEEGAARD már a 2. § elé helyezett irodalomban említett kutatásai mellett a következő három dolgozat említendő:

A. F. MÖBIUS: *Theorie der elementaren Verwandtschaft*, Berichte d. sächs. Ges. der Wiss., 15. k., 1863 = Gesammelte Werke, II. (Leipzig, 1886), 433. l.

C. JORDAN: *Sur la déformation des surfaces*, Journal de Mathématiques (2), 11. k., 1866, 105. l.

D. B. MAIR: *On the continuous deformation of surfaces*, Quarterly Journal, 27 k., 1894, 1. l.

E dolgozatokat a § végén ismertetjük.

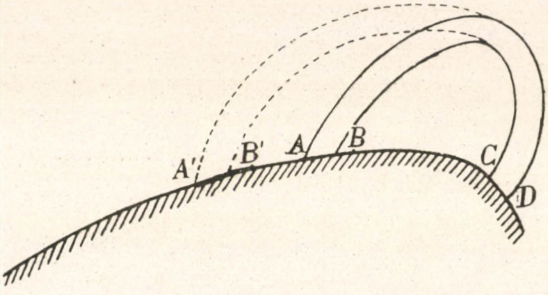
2. A határolt felületek egységes származtatása.

A felületeknek már eddig megismert néhány példája is mutatja, hogy két az analysis situs szempontjából æquivalens, azaz homœomorph felület szemünknek lényegesen különbözőnek tünhetik fel. Ennek magyarázata abban rejlik, hogy szemünk talán elsősorban a geometriai alakzatok metrikus tulajdonságainak felismeréséhez szokott, valamint ama tulajdonságainak vizsgálatához, melyek az alakzatnak terünkben való elhelyezkedését jellemzik. Ha e kétfajta tulajdonságok mindegyikétől tökéletesen abstrahálni tudnánk, akkor két homœomorph felület azonosnak tünne és így szemléletünknek hozzáférhetővé tett két felület homœomorphismusát tisztán szemléletünkkel azonnal konstatálhatnók. Az említett abstractiók azonban nem könnyen végezhetők és e tekintetben a metrikus geometriához szokott mathematikus még hátrányban látszik lenni a laikussal szemben. E psychologiai nehézségen felületek ú. n. *normáltypus*ainak felállításával segíthetünk. Pontosabban szólva, a következő feladatot tűzzük ki. Egy egységes elven nyugvó előállítás alapján a felületek oly sorozatát [1] akarjuk megadni, hogy bármely felülethez e sorozatban egy és csak egy homœomorph felület forduljon elő. E «normáltypusok» egyszersmind egyszerű és áttekinthető módon lesznek terünkben megvalósíthatók.

A 2. § XVII. tételéből indulunk ki. Közönséges keresztmetszet alkalmazása helyett az invers műveletet, a híd-alkalmazást véve alapul, e tétel így fogalmazható:

I. Minden határolt felület az elemi felületből hidak folytatólagos alkalmazásával keletkeztethető.

A szemlélet mutatja, hogy, ha egy F felület F'-ből oly h híd alkalmazásával keletkezik, mely F'-nek AB és CD határ-



65. ábra.

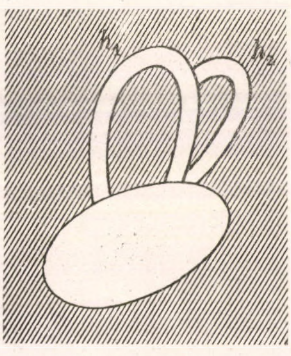
vonaldarabjait köti össze, s a melynek határán a cyklikus A, B, C, D sorrendet találjuk (65. ábra), akkor az $A'B'$ és CD határvonaldarabokat összekötő h' híd által az F'-ből keletkező felület F-fel homœomorph, feltéve, hogy $A'B'$ ugyanannak a v határgörbének darabja, mint AB és h' határán az A', B', C, D; a v-n pedig az A, B, A', B' cyklikus sorrendet találjuk. Ezt röviden így fejezzük ki:

[1] Az analysis situs értelmében különböző felület *megszámlálhatóan* végtelen sok van.

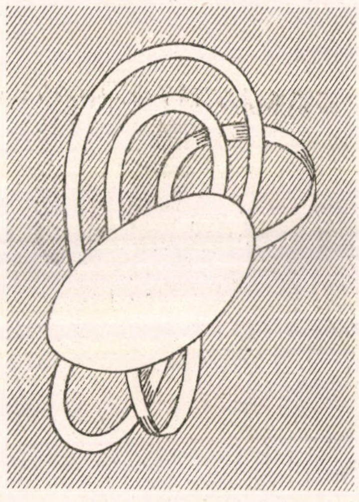
II. A hidak torkolatai az illető görbéken bárhová eltolhatók.

Csak arról kell természetesen gondoskodni, hogy a két torkolatnak ne legyen közös belső pontja. E tétel helyes, akár ugyanahhoz a határgörbéhez tartozik a híd két torkolata, akár nem.

Ha egy felület az elemi felületből két híd folytatólagos alkalmazásával keletkezik, akkor a második híd torkolatai már nem okvetetlenül az eredeti elemi felület határának darabjai, hanem ezek részben vagy egészen az első híd «oldal»-aihoz tartozhatnak (66. ábra). A II. tétel alapján azonban a második híd torkolatai is az eredeti elemi felület határára tolhatók, mert az első híd oldalai az ez által az első híd által keletkezett felület oly határgörbéjének darabjai, melyeknek más darabjai az elemi felület határához tartoznak. Ugyanígy



66. ábra.



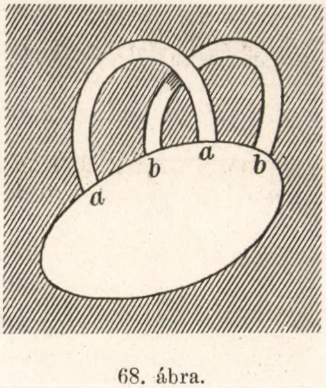
67. ábra.

járhatunk el egy a második híd után alkalmazandó harmadik híd torkolataival, s. i. t.; folytatólagosan bárhány híd mindkét torkolata az elemi felület határvonalára tolható. Az I. tétel tehát a következő PETERSEN-féle tétellé tökéletesíthető:

III. Minden határolt felület úgy keletkeztethető az elemi felületből, hogy határának bizonyos számú darabjait párosával egy-egy híddal összekötjük. (67. ábra.)

E hidak csupa különböző pontból állnak. A hidak e tételnek megfelelő alkalmazásával elértük azt, hogy a hidak bármily sorrendben alkalmazhatók, valamint azt is, hogy a hidakat csavart, illetőleg nem csavart hidakra osztályozhatjuk, a szerint t. i. (és ezt a következőkben is mindenkor így értjük), hogy ezek az eredeti elemi felületnek (mellőzve most az összes többi hidat) csavart vagy nem csavart hidjai (l. a 33. ábrát). A következőkben, a nélkül, hogy ezt mindig külön kijelentenők, most már csupán oly hidakról lesz szó, melyeknek torkolatai az eredeti elemi felület határának darabjai, valamint azt is felteszszük a következőkben, hogy két torkolatnak soha sincs közös pontja, úgy, hogy az egyenként említendő hidak elemi felületünkhöz egyidejüleg is alkalmazhatók.

Két hidat, melyek egyikének torkolatait a-val, másikéit b-vel jelöljük, *különálló*-nak vagy *egybekapcsolt*-nak nevezünk a szerint, hogy az elemi felület határának körüljárásánál az $a\,a\,b\,b$ vagy az $a\,b\,a\,b$ cyklikus sorrendet találjuk. Két egybekapcsolt nem csavart hidat együtt *kettős híd*-nak nevezünk (l. a 68. ábrát) és evvel ellentétben az oly hidat, mely más híddal nincs egybekapcsolva, *egyszeres* hídnak. A «különálló» és «egybekapcsolt» elnevezéseket kettős hidakra is bevezetjük: egy $(a\,b\,a\,b)$ kettős hidat egy $(c\;c)$ hídtól akkor nevezünk különállónak, ha az elemi felület határán az $a\,b\,a\,b\,c\,c$ cyklikus rendet találjuk, azaz, ha a c híd a kettős híd két hídjának egyikével sincs egybekapcsolva. Hasonlóképpen két kettős híd (h_1, h_2) és (g_1, g_2) akkor neveztetik (egymástól) különállónak, ha sem h_1, sem h_2 sem g_1-gyel, sem g_2-vel nincs egybekapcsolva. A «különálló»-val ellentétes értelemben ezekben az esetekben is az «egybekapcsolt» elnevezést használjuk. Például a 69. ábrában a (h_1, h_2) kettős híd sem a g_1 híddal, sem a (g_1, g_2) kettős híddal nincs egybekapcsolva.



68. ábra.

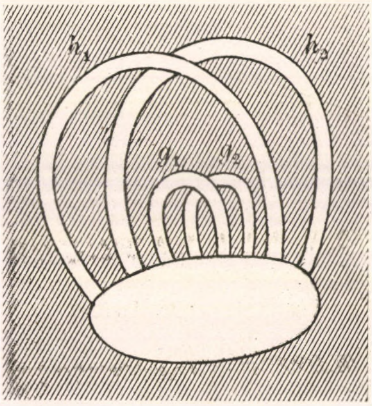
Közvetetlenül látnivaló, hogy

IV. Ha egy kettős híd (illetőleg egy csavart híd) semmiféle *híddal nincs egybekapcsolva, akkor mind a négy (illetőleg mindkét) oldala a felületnek ugyanahhoz a határgörbéjéhez tartozik.*

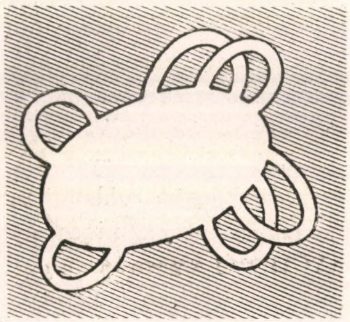
3. Kétoldalú határolt felületek normáltypusai.

A következőkben először kétoldalú felületekkel foglalkozunk, melyeknek a 3. § XVI. tétele szerint csavart hídjuk nincsen. Ugyane tétel szerint fordítva is: a felület kétoldalú, ha nincs csavart hídja.

Midőn egy felület az elemi felületből nem csavart egyszeres és kettős hidak alkalmazásával keletkezik, akkor a felületet (PETERSEN-féle) *kétoldalú normálfelület*-nek nevezzük az esetben, ha az elemi felület határának befutásánál egy-egy egyszeres vagy kettős híd torkolatai (utóbbinál mind a négy) cyklikusan közvetetlenül egymásután következik. Ily normálfelület példáját mu-



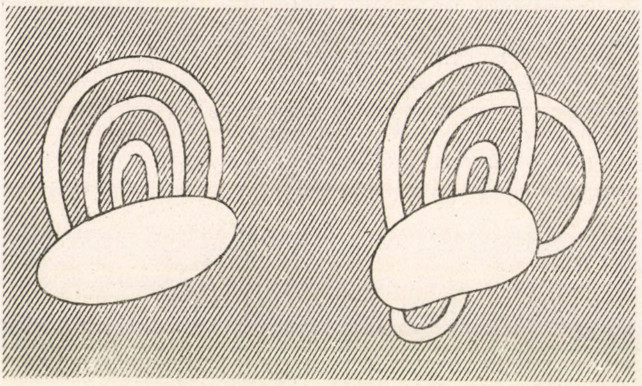
69. ábra.



70. ábra.

tatja a 70. ábra. Ellenben a 71. ábra két felülete — az ott látható módon keletkeztetve őket — *nem* normálfelület.

Az egyszeres és kettős hidak folytatólagos alkalmazásával keletkeztetve a normálfelületet, mindaddig, míg csak kettős hidat alkalmazunk, a határgörbék száma megmarad 1-nek, míg minden egyszeres híd *egy* új határgörbét teremt. Látnivaló azonban, hogy, a mint már említettük (IV. tétel), az egyszeres hidak alkalmazása után is minden kettős hídnak mind a négy oldala még mindig a normálfelületnek ugyanahhoz a határgörbéjéhez tartozik. Ehhez a *főhatár*nak nevezendő határgörbéhez tartoznak továbbá az eredeti elemi felület ama határdarabjai,



71. ábra.

melyek határdarabjai a normálfelületnek is, *kivéve* azokat, melyek egy egyszeres híd két torkolatának végpontjait kötik össze. Ez utóbbi határdarabok egy-egy egyszeres híd által keletkezett egy-egy ú. n. *mellékhatár* darabjai. Minden ily mellékhatár, továbbá egyetlen egyszeres híd egyik oldalát tartalmazza; míg e hidak másik oldalai mind a főhatárhoz tartoznak. Ha a normálfelületnek nincs kettős hídja, akkor a főhatárt utóbb említett tulajdonságával értelmezzük. (Kivételes eset áll elő, ha a normálfelületnek kettős hídja nincs és csupán egy egyszeres hídja; ilyenkor a felületnek — mely ez esetben hengerpalástfelület — bármelyik határgörbéjét (a kettő közül) nevezzük főhatárnak. Minden más esetben a főhatár a fentiekkel teljesen meg van határozva). A főhatár értelmezéséből következik még a következő tény (mely az említett kivételes esetben is érvényes):

V. Az elemi felület határának bármely hídtorkolathoz csatlakozó két darabja közül legalább az egyik a főhatárhoz tartozik.

Ezek után most már a következő alapvető tétel bizonyítására térünk rá:

VI. Kétoldalú normálfelület esetében bárhogy kötjük is össze az elemi felület két határdarabját egy nem csavart h híddal, a keletkező felület tisztán torkolateltolással (II. tétel) kétoldalú normálfelületbe vihető át.

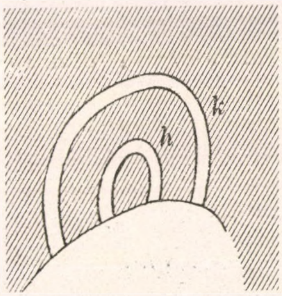
A bizonyításnál három esetet különböztetünk meg.

1. A h mindkét torkolata a főhatárhoz tartozik. Ilyenkor az egyik torkolat e főhatáron az elemi felület határára a másik mellé tolható.

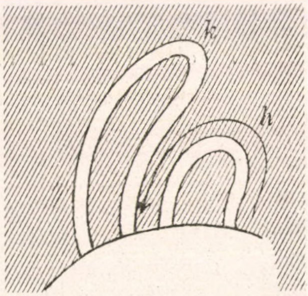
2. A h egyik torkolata a főhatáron, a másik pl. a k egyszerű híd által létrehozott mellékhatáron van. Ekkor a főhatáron levő torkolat az V. tétel szerint az elemi felület határára a k egyik torkolata mellé úgy tolható el, hogy (h, k) kettős híd legyen, melynek négy torkolata közvetetlenül egymásután következik.

3. A h mindkét torkolata mellékhatáron van; itt két aleset különböztetendő meg.

3a. E két torkolat ugyanannak a mellékhatárnak része. Ha e mellékhatár a k egyszerű híd egyik oldalát tartalmazza, akkor a k és h szerepének felcserélésével a már elintézett 1. esettel van dolgunk (l. a 72. és 73. ábrát).

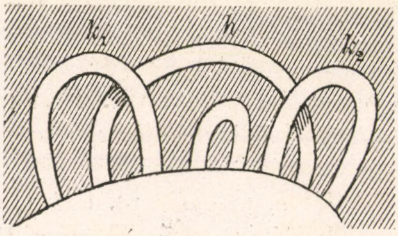


72. ábra.

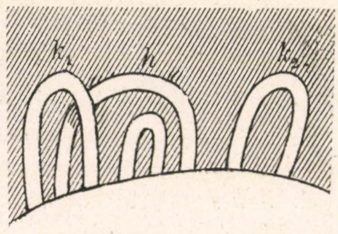


73. ábra.

3b. A h két torkolata két különböző mellékhatárnak, a k_1 illetőleg k_2 egyszeres híd által létrehozott mellékhatároknak egy-egy darabja. Ekkor a (h, k_1) kettős híd (74. ábra), ha k_2-t egy pillanatra elhagyjuk, semmiféle más híddal nincs egybekapcsolva, úgy, hogy a IV. tétel szerint a k_2 egyik torkolata — a (h, k_1) kettős híd és az elemi felület határán — másik torkolata mellé tolható (v. ö. az 1. esetet). Így azonban, mint a 75. ábra mutatja, még nem jutunk okvetetlenül



74. ábra.



75. ábra.

normálfelülethez. Elértük azonban azt, hogy, míg a h egyik torkolata változatlanul megmaradt egy mellékhatár részének, addig a másik most a főhatárhoz tartozik. Tehát a h egyik torkolatának eltolásával a 2. alatti módon ismét normálfelülethez jutunk.

Az ily módon teljesen bebizonyított VI. tételből most már könnyen következik, hogy

VII. Minden határolt kétoldalú felület mint kétoldalú normálfelület keletkeztethető.

Valóban, ha a III. tételnek megfelelőleg építjük fel felületünket, akkor az első két híd alkalmazásával minden esetre normálfelületet nyerünk. A VI. tétel szerint pedig valamennyi többi híd alkalmazása is úgy történhetik, hogy minden egyes lépés után, tehát az utolsó lépés után is normálfelületet nyerjünk.

Egy kétoldalú normálfelületnek valamely egyszeres vagy kettős hídját, h-t elhagyva, e felület főhatára a keletkezett normálfelület egy v határvonalába megy át. A h-nak mindkét vagy mind a négy torkolatát e v-n eltolva, h bármely két (eredetileg szomszédos) híd «közé» tolható, oly átalakítással, mely a II. tétel szerint nem változtat a felületen. Ezt bármelyik híddal elvégezhetjük és így elérhetjük, hogy az egyszeres és kettős hidak tetszés szerinti cyklikus sorrendben következzenek egymásután. Tehát

VIII. Ha két kétoldalú normálfelület ugyanannyi egyszeres és ugyanannyi kettős híddal keletkezik az elemi felületből, akkor homoeomorphak.

Az egyiknek t. i. a megelőzők szerint úgy «permutálhatjuk» a hídjait, hogy az egyszeres és kettős hidak ugyanúgy következzenek cyklikusan egymásután, mint a másikban. És ez esetben világos, hogy a két felület homoeomorph.

Legyen most már egy kétoldalú normálfelületnek r_1 egyszeres és r_2 kettős hídja; ennek az $r_1 + 2r_2$ számú hídnak mindegyikét egy-egy keresztmetszettel elvágva (egy-egy ily keresztmetszet alkalmazása æquivalens az illető híd elhagyásával), látnivalóan elemi felületet nyerünk s így a 2. § XIV. tétele szerint normálfelületünk alapszáma:

$$A = r_1 + 2r_2 + 1.$$

A határgörbék számát, H-t illetőleg pedig láttuk, hogy egy fő- és r_1-számú mellékhatár van, azaz:

$$H = r_1 + 1.$$

Tehát r_1 és r_2 meghatározza A-t és H-t. De fordítva is: A és H meghatározza r_1-et és r_2-t; e két kapcsolatból t. i.:

$$r_1 = H - 1 \text{ és } r_2 = \frac{A-H}{2}.$$

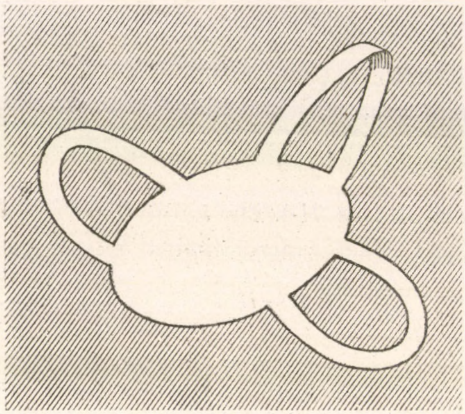
A VII. tételtől függetlenül is látnivaló, hogy e számok, A és H minden oly értékénél, melyek határolt kétoldalú felületnél együtt felléphetnek, nem negativ egész számok: az r_1, mert a felület határolt, r_2 pedig, mert nem egyéb, mint felületünk nemszáma. Ha tehát két kétoldalú határolt felület alapszáma és határgörbéinek száma ugyanaz, akkor mint normálfelületek (VII. tétel) mindketten ugyanannyi egyszeres és ugyanannyi kétszeres híddal keletkeznek az elemi felületből. A VIII. tétel szerint tehát:

IX. Ha két kétoldalú határolt felület alapszáma és határgörbéinek a száma megegyezik, akkor a két felület homoeomorph.

4. Egyoldalú határolt felületek normáltypusai.

Rátérve az egyoldalú felületekre vonatkozó megfelelő vizsgálatokra, sok tekintetben a megelőzőkkel teljes analogiában fogunk következtethetni. Ennek magyarázata abban van, hogy a kettős híd és az egyszeres csavart híd szereplése mutat analogiát. Elsősorban a IV. tétel az, mely a kettős és a csavart híd közös tulajdonságát kifejezi.

A III. tételhez csatlakozva, megállapodunk, hogy, midőn egy felület az elemi felületből csavart és nem csavart (de csupán egyszeres) hidakkal keletkezik, akkor a felületet (DEHN-HEEGAARD-féle) *egyoldalú normálfelület*-nek nevezzük, ha az elemi felület határának befutásánál minden híd két torkolata cyklikusan közvetetlenül egymásután következik és legalább egy csavart híd előfordul (különben a felület kétoldalú volna). Itt tehát bármely két híd különálló. A 76. ábra mutatja egy egyoldalú normálfelület példáját.



76. ábra.

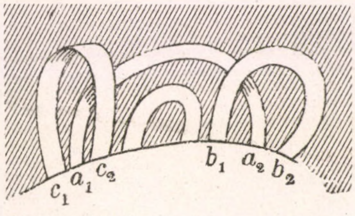
További teljes analogiában a megelőzőkkel: egyoldalú normálfelületnek is van egy *főhatára*, mely minden csavart híd mindkét oldalát, a nem csavart hidak egy-egy oldalát, valamint az elemi felület határdarabjait tartalmazza, *kivéve* ez utóbbiak közül azokat, melyek egy nem csavart híd két torkolatának egy-egy végpontját kötik össze. Ez utóbbiak a nem csavart hidak egy-egy oldalával együtt adják a *mellékhatár*okat. Az összes határgörbék száma tehát (és erre külön fogunk még hivatkozni) 1-gyel nagyobb a nem csavart hidak számánál. Az V. tétel a főhatár itt adott értelmezésének is közvetetlen folyománya. Érvényes továbbá a VI. tételnek megfelelő tétel:

X. Egyoldalú normálfelület esetében bárhogy kötjük is össze az elemi felület két határdarabját egy újabb (akár csavart, akár nem csavart) «a» hiddal, a keletkező felület tisztán torkolateltolással egyoldalú normálfelületbe vihető át.

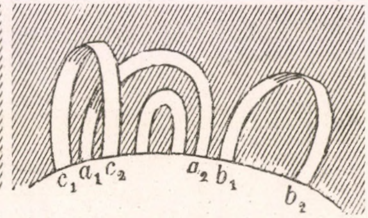
A bizonyításnál most is három esetet különböztetünk meg.

1. Az a mindkét torkolata a főhatárhoz tartozik. Ilyenkor a két torkolat e főhatáron az elemi felület határára egymás mellé tolható.

2. Az a egyik torkolata, a_1 a főhatáron, a másik a nem csavart (b_1, b_2) híd által teremtett mellékhatáron van (77. ábra).



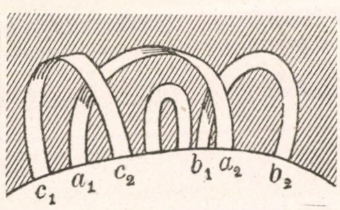
77. ábra.



78. ábra.

Minthogy a_1 eltolásával ez elérhető, feltehető, hogy a_1 egy csavart (c_1, c_2) híd két torkolata «közt» van, s hogy ily módon az elemi felület határán pl. a $c_1\, a_1\, c_2\, b_1\, a_2\, b_2$ cyklikus rendet találjuk. Lehet e mellett, hogy más hidaknak egy, tehát mindkét torkolata c_2 és b_1 közé esik, a mi a következők szempontjából mellékes. Ha most α) az a híd nem csavart, akkor b_1-et

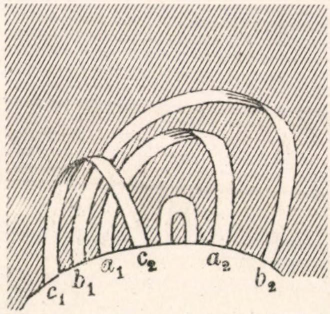
79. ábra.



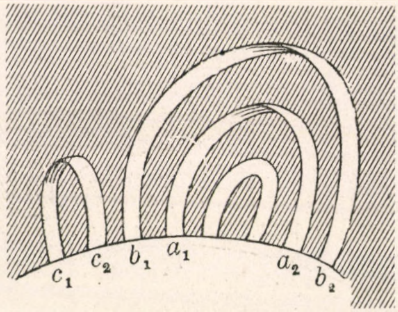
80. ábra.

a c-nek egyik oldalán, majd az a-nak egyik oldalán végigtolva a_2 és b_2 közé vihető, mi által a b csavarttá válik. (78. ábra.) Ezután pedig a_1 a c híd egyik oldalán a_2 mellé, c_2 és a_2 közé tolható, miáltal a is csavart híddá lesz. Ezek után az átalakítások után látnivalóan normálfelülethez jutottunk. (79. ábra.) Legyen most már β) az a csavart híd. (80. ábra.) Ekkor b_1-et az a egyik oldalán c_1 és a_1 közé viszszük, mi által b is csavarttá lesz (81.

ábra), majd c_2 t az a egyik oldalán s aztán a b egyik oldalán c_1 mellé, c_1 és b_1 közé toljuk (c így csavart marad). (82. ábra.) Most b_1-et toljuk az a mindkét oldalán b_2 mellé, a_2 és b_2 közé,



81. ábra.



82. ábra.

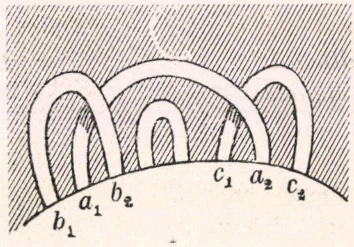
mikor is b csavart híd marad. (83. ábra.) Ezzel a már 1) alatt elintézett esettel van dolgunk, mert a most a főhatár két darabját köti össze.

83. ábra.

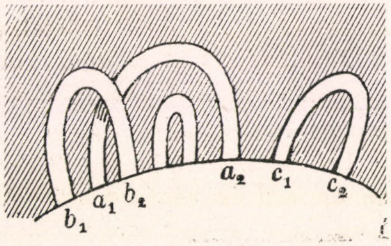
3. Az a mindkét torkolata mellékhatáron van; itt két aleset különböztetendő meg.

3a. A két torkolat ugyanannak a mellékhatárnak része. Ha e mellékhatárt a b híd hozza létre, akkor az a és b hidak szerepét felcserélve, látnivalóan az 1. esetre van ez az eset visszavezetve.

3b. Az egyik torkolat, a_1, a b (nem csavart) híd, a másik, a_2, a c (nem csavart) híd által teremtett mellékhatárnak legyen része. Legyen α) az a nem csavart híd (84. ábra.) Az elemi felület határán fellépő cyklikus sorrend legyen: $b_1\, a_1\, b_2\, c_1\, a_2\, c_2$. A b_2 és c_1 közt még akárhány különálló csavart és nem csavart hid előfordulhat. Eltolva c_1-et az a egyik, majd a b egyik s aztán az a másik oldalán: c_1 a c_2 mellé, a_2 és c_2 közé hozható (85. ábra), a mivel ez az eset a 2. alatt elintézett α) esetre van

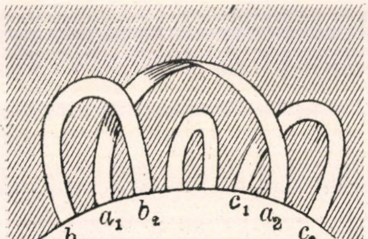


84. ábra.

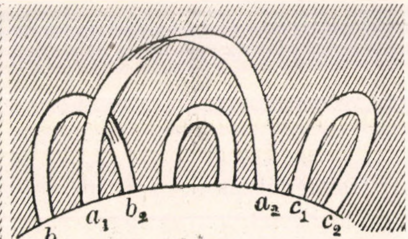


85. ábra.

visszavezetve, mert most már a a főhatár és egy mellékhatár egy-egy darabját köti össze. Ha β) az a híd csavart (86. ábra), akkor az utoljára adott utasítást szóról-szóra ismételve most (87. ábra) a 2. alatti β) esetre van ez az eset visszavezetve.



86. ábra.



87. ábra.

Ezzel a X. tételt teljesen bebizonyítottuk és ebből a VII. tételnek megfelelő következő tételhez jutunk:

XI. Minden határolt egyoldalú felület mint egyoldalú normálfelület keletkeztethető.

Ha t. i. a III. tételnek megfelelőleg építjük fel a felületet, elsőnek egy csavart hidat kell alkalmazni, mi által már egyoldalú normálfelületet nyerünk. A X. tétel szerint a többi híd alkalmazása is úgy történhetik, hogy minden egyes lépés után, tehát az utolsó után is, valóban egyoldalú normálfelületet nyerjünk.

Teljes analogiában a kétoldalú felület esetével belátható itt is, hogy a csavart és nem csavart hidak bármely cyklikus sorrendje tisztán torkolateltolásokkal elérhető és hogy ily módon, ugyanúgy, mint a VIII. tétel, a következő tétel is érvényes:

XII. *Ha két egyoldalú normálfelület ugyanannyi csavart és ugyanannyi nem csavart híd alkalmazásával keletkezik az elemi felületből, akkor homoeomorphak.*

Legyen most már egy egyoldalú normálfelületnek r-számú nem csavart és s-számú csavart hídja; eme $r+s$-számú hid mindegyikét egy-egy keresztmetszettel elvágva, látnivalóan elemi felületet nyerünk s így a 2. § XIV. tétele szerint felületünk alapszáma:

$$A = r + s + 1.$$

A határgörbék számát illetőleg pedig már láttuk, hogy

$$H = r + 1.$$

Tehát r és s meghatározza A-t és H-t. De fordítva is, A és H meghatározza r-et és s-et. Innen t. i.:

$$r = H - 1, \ s = A - H.$$

A XI. tételtől függetlenül is látnivaló, hogy ezek nem negativ egész számok, sőt s határozottan positiv (a mi a 4. § V. tételéből is következik) és, mint látjuk, nem egyéb, mint egyoldalú felületünk nemszáma. Ha tehát két egyoldalú határolt felület határgörbéinek száma és alapszáma ugyanaz, akkor, mint normálfelületek (XI. tétel) mindketten ugyanannyi csavart és ugyanannyi nem csavart híddal keletkeznek az elemi felületből. A XII. tétel szerint tehát:

XIII. *Ha két egyoldalú határolt felület alapszáma és határgörbéinek száma egymással megegyezik, akkor a két felület homoeomorph.*

5. A főtétel.

A IX. és XIII. tétel bebizonyításával a felületek homœomorphismusára vonatkozó főtételt határolt felületekre bebizonyítottuk. Zárt felületekre most már könnyen kiterjeszthetjük eredményünket. Legyen t. i. F és G két zárt felület, melyek mindketten egy-, vagy mindketten kétoldalúak és alapszámukban is megegyeznek. A belőlük egy-egy pontozással keletkező $\dot{F}$ és $\dot{G}$ felületek is megegyeznek e két adatban, mert egy pontozás az egy- vagy kétoldalúságon nem változtat és az alapszámot mindenkor 1-gyel növeli; $\dot{F}$-nek és $\dot{G}$-nek továbbá egy-egy határgörbéje van. A IX. vagy XIII. tétel szerint tehát $\dot{F}$ és $\dot{G}$ egymásra folytonosan leképezhető, ép úgy, mint az a két elemi felület is, melyekkel $\dot{F}$-et, illetőleg $\dot{G}$-t ki kell tölteni, hogy F-et és G-t nyerjük. Látnivaló, hogy ez utóbbi leképezés úgy választható, hogy a két elemi felület határpontjainak ugyanazt a megfeleltetését adja, mint $\dot{F}$ folytonos leképezése $\dot{G}$-re. Ekkor e két leképezés együtt F-nek folytonos leképezését szolgáltatja G-re. Ezzel teljesen ki van mutatva a felületek analysis situsának főtétele, melyet így fogalmazhatunk meg:

Főtétel. Két felület akkor és csak akkor homœomorph, ha a következő három adatban megegyeznek egymással:

1. egy- vagy kétoldaluság,

2. határgörbék száma,

3. alapszám.

Az utolsó két adat bármelyike helyébe természetesen a nemszám tehető és a következőkben gyakran czélszerű is lesz az alapszám helyett a nemszámot tekinteni harmadik meghatározó adatnak és így pl. a zárt egy- (és éppen így két-) oldalú felületet nemszámával jellemezni.

Főtételünk kiegészítéseképpen még a következő kérdésre kell választ adnunk: *Hogyan kell a felületet jellemző három adatot megadni, hogy ezeknek az adatoknak megfelelő felület valóban létezzék?*

Legegyszerűbben a felelet az esetben adható, ha a jellemző adatokul az egy- vagy kétoldalúságon kívül a nemszámot (P) és a határgörbék számát (H) írjuk elő. Ez esetre a következő tétel érvényes:

Előírva egy felületre az egy- vagy kétoldalúságot, továbbá a nemszámot és a határgörbék számát, mint nem negativ egész számokat, ahhoz, hogy e követelményeknek megfelelő felület létezzék, szükséges és elegendő, hogy egyoldalú felületre e nemszám ne legyen zérusnak előírva.

E feltétel szükséges voltát már bebizonyítottuk (4. §., V. tétel), elegendő voltát pedig úgy bizonyítjuk be, hogy — először határolt felületekre szorítkozva ($H > 0$) — a felületet mint normálfelületet állítjuk elő. Ha 1.) kétoldalúság követeltetik, akkor a $H-1$-számú egyszeres és P-számú kettős híddal bíró normálfelület felel meg követelményeinknek. Ha pedig 2.) egyoldalú felületet kívánunk, akkor a $H-1$-számú nem csavart és P-számú csavart híddal bíró normálfelület elégíti ki követelményeinket: ez utóbbi t. i. $P > 0$ miatt valóban egyoldalú. Ha meg zárt felületről van szó, azaz $H = 0$ van előírva, akkor előbb megalkotjuk azt a felületet, mely ismét egy-, illetőleg kétoldalú s a melyre $A' = A + 1$ és $H' = 1$ (ilyen, mint most láttuk, van, ha csak egyoldalú felületre nem $A = P = 0$ van előírva) és e felületet egyetlen határvonala mentén egy elemi felülettel kitöltjük.

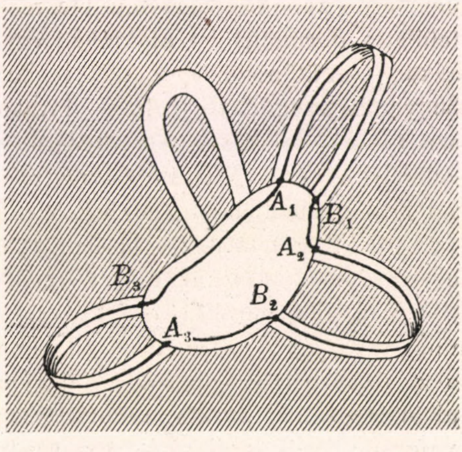
6. A normáltypusokból leolvasható néhány eredmény.

A felületek számos tulajdonsága a határolt felületekre megállapított normáltypusokból leolvasható. Az egyoldalú felületekre vonatkozó két tételt akarunk elsősorban felemlíteni. Egy egyoldalú határolt normálfelületet egy csavart h_i hídjának két torkolatán egy-egy A_i és B_i pontot választva, kössük össze e két pontot egy-egy egymást és önmagukat nem metsző vonaldarabbal, egyszer a hidon, másszor az elemi felületen. Ezt minden csavart h_i hídra elvégezve ($i = 1, 2, \ldots, P$), P-számú zárt vonalat nyerünk, melyek közös pont nélkül választhatók, mert két híd soha sincs egybekapcsolva; e P-számú egypartú körmetszet nyilván együttesen sem darabolja szét felületünket és ezzel kimutattuk a következő tétel első részét:

XIV. P-ednemű egyoldalú felületen mindig van P-számú együttesen szét nem daraboló egypartú körmetszet; ezek a felületet lefejthetővé alakítják.

E tétel második része közvetetlen folyománya a 4. § XIII. és VII. tételenek.

Ha az A_i és B_i pontokat csak az illető hídon vonuló vonaldarabbal kötjük össze ($i = 1, 2, \ldots, P$); de ezenkívül minden B_i-t az elemi felületen A_{i+1}-gyel is összekötjük ($i = 1, 2, \ldots, P$; $P+1$ helyett ismét 1 irandó), akkor mind e vonaldarabok, ha jelzésünk úgy volt választva, hogy az elemi felület határán az $A_1 B_1 A_2 B_2 \ldots A_P B_P$ cyklikus rendet találjuk (88. ábra), oly (kettőspont nélküli) zárt vonalat alkotnak, melyről — itt nem részletezendő módon — belátható, hogy ennek mentén felmetszve a felületet, ez kétoldalúvá lesz, mint azt $P = 1$-re már láttuk (l. a 28. ábrát). Tehát



88. ábra.

XV. Minden egyoldalú felületnek van oly szét nem daraboló körmetszete, mely a felületet kétoldalúvá alakítja (v. ö. a 4. § XIV. tételét).

Mindkét tételnél itt határolt felületre szorítkoztunk; de a zárt felület esete egy pontozással azonnal erre az esetre vezethető vissza.

Kiderül továbbá a normáltypusból, hogy (és ezzel a 3. § XI. tételét egészítjük ki) határolt egyoldalú felületnek mindig van oly *közönséges* keresztmetszete, mely a határgörbék számát nem változtatja meg; egy csavart híd átmetszése, a mi æquivalens a híd elhagyásával, t. i. valóban nem változtat a határgörbék számán.

7. Csövek és süvegek.

Ha a határolt felületekre megállapított normáltypusokat úgy terjesztenők ki zárt felületekre, hogy az egyszer pontozott felületet normálfelület alakjában egy elemi felülettel kitöltjük, akkor — különösen egyoldalú felület esetében — meglehetősen bonyolúlt szemléletre kellene hivatkozni. Valóban — különösen terünkben való elhelyezkedésüket illetőleg — nehezen képzelhetők el azok a felületek, melyeket az egyetlen határgörbével bíró normálfelületekből egy elemi felülettel való kitöltéssel nyerünk. Zárt felületekre, elsősorban a kétoldalúakra, más módon egyszerűbben adhatunk meg normáltypusokat.

E mód ismertetése czéljából a «*cső*»-alkalmazás [1] műveletét, mint a *kétpartú* körmetszet alkalmazásának invers műveletét akarjuk bevezetni, éppen úgy, a hogy a közönséges keresztmetszet alkalmazásának invers műveleteképpen a hídalkalmazást bevezettük. Ha a kétpartú k körmetszettel az F felület F'-be megy át, akkor F'-ből nem csak ugy térhetünk vissza F-re, hogy az F' így keletkezett két határgörbéjét összeforrasztjuk, hanem úgy is, hogy egy hengerpalást egyik határgörbéjét az egyikhez, a másikat a másikhoz forrasztjuk. A hengerpalást (cső) két határvonalának van egy «összetartozó» irányítása (l. a 3. § végét) és éppen úgy az F' szóban lévő két határgörbéjének is, *feltéve, hogy F' kétoldalú*, valamint azt is — és ezt a következőkben felteszszük — hogy F' is összefüggő (azaz, hogy szét nem daraboló körmetszet invers műveletéről van szó). Ha a cső alkalmazásával az egyik forrasztásnál ellentétes, a másiknál megegyező irányok illeszkednek egymáshoz, akkor a csövet *csavart cső*-nek nevezzük, ha pedig mindkét forrasztásnál ellentétes (vagy mindkettőnél megegyező) irányok illeszkednek, *nem csavart cső*-nek. MÖBIUS kritériuma, illetőleg a 3. § XV. tétele szerint, teljes analogiában a 3. § XVI. tételével, kimondhatjuk, hogy

XVI. Nem csavart cső meghagyja a kétoldalú felületet kétoldalúnak, míg a csavart cső egyoldalúvá alakítja.

Hangsúlyozzuk, hogy általában csak kétoldalú felületre al-

[1] L. MÖBIUS, l. c., 457. l.; PETERSEN, l. c., 68. l.

kalmazott csőre (éppen úgy, mint hídra) van a «csavart» és «nem csavart» jelzőknek értelmük, mivel csupán kétoldalú felület esetében lehet két határgörbénél «megegyező» vagy «ellentétes» irányról szólni.[1]

Egy kétoldalú felület két határgörbéje természetesen akár csavart, akár nem csavart csővel összeköthető. A cső elhagyása mindkét esetben æquivalens egy a csövet «körülfutó» és (a hengerpalást kétoldalú lévén) mindenkor kétpartú körmetszet alkalmazásával. Ez a «középvonal» éppen a cső invers körmetszete.

Egypartú körmetszet invers műveletét is hasonlóan lehet tárgyalni; ez valamivel bonyolódottabb szemléletet igényel. Ha egy egypartú körmetszet az F felületet F'-be viszi át és e körmetszet F'-nek h határgörbéjét hozta létre, akkor F'-ről úgy is visszatérhetünk F-re, hogy egy Möbius-féle szalagot egyetlen határgörbéje mentén h-hoz forrasztunk, vagy, más szóval, hogy F'-t h mentén egy Möbius-féle szalaggal kitöltjük. Sok esetben terünkben világosabb képet nyerünk e műveletről, ha a Möbius-féle szalagot *süveg*-felületnek (3. §, 8. pont) választjuk. E két felület t. i., mint említettük, homœomorph, mert mind a kettő egyoldalú, egy határgörbéjük van s alapszámuk: 2. A süveg-alkalmazás egypartú körmetszet alkalmazásának invers művelete lévén, a süveg egy egypartú körmetszetének (pl. annak, mely ábrázolásunkban mint kettős vonaldarab jelentkezik) alkalmazása æquivalens e süveg elhagyásával. A süvegalkalmazás természetesen mindenkor egyoldalú felületet hoz létre.

A zárt felületek normáltypusainak megállapítása céljából mindenekelőtt konstatáljuk, hogy a H-szor ($H = 0, 1, 2, 3, \ldots$) pontozott gömbfelület főtételünk szerint kimeríti az összes lefejthető felületeket, úgy, hogy ezek mind az (akár metrikus értelemben vett) gömbnek (vagy a függvénytani síknak) részei gyanánt foghatók fel; láttuk t. i., hogy e felületek minden H-nál lefejthetők (4. §, 1. pont). Ez indokolja a «(síkra, gömbre) lefejthető» elnevezést, hol tehát a «lefejthető» szó a «folytonosan leképezhető» kifejezés értelmében veendő.

A 4. § XII. tétele a most bevezetett fogalmakkal (éppen úgy,

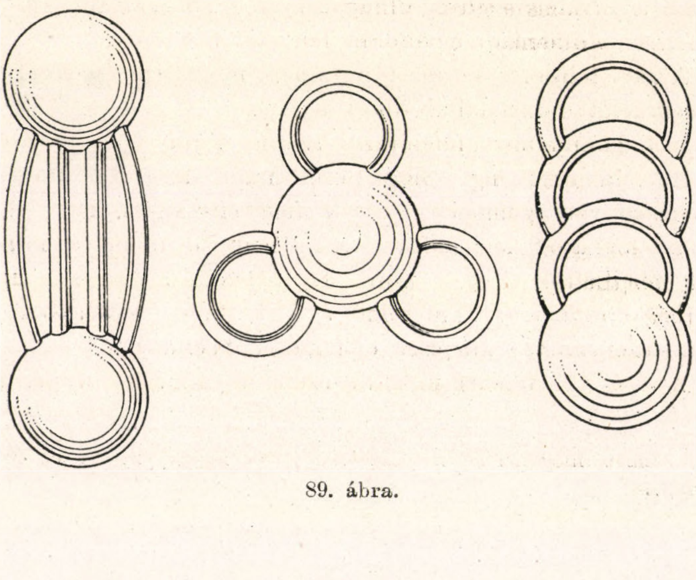
[1] Ennek megfelelőleg helyesbítendő Dyck megjegyzése, l. c., 488. l., 17—19. sor.

mint a hogy a 2. § XVII. tételét e §-nak I. tételével fejezhettük ki) így fogalmazható meg:

XVII. Minden felület csövek és süvegek alkalmazásával keletkeztethető egy lefejthető felületből.

8. Kétoldalú zárt felületek normáltypusai.

Kétoldalú felület ilyen származtatásánál természetesen csak csövek és pedig nem csavart csövek léphetnek fel. *Minden zárt kétoldalú felület most már a 2P-szer pontozott gömbfelületből úgy nyerhető, hogy a 2P határgörbét párosával P-számú nem csavart csővel összekötjük.* Mivelhogy minden csőalkalmazás, mint szét nem daraboló körmetszet inverse, 1-gyel növeli a nemszámot (l. 4. §, VIII. tételt), azért így *P*-ednemű kétoldalú zárt felületet nyerünk. Az így keletkező *P*-számú csővel ellátott gömbfelületek az összes *kétoldalú zárt felületek* (Möbius-féle) *normáltypus*ainak tekinthetők, mert a *P*-szám főtételünk szerint a kétoldalú zárt felületet teljesen jellemzi. Ha csak az első két pontozást végezzük az eredeti gömbfelületen és a továbbiakat kettenkint az utóljára alkalmazott csövön (a mi az analysis situs szempontjából természetesen nem okoz változást), akkor a normálfelületek mint *P-szeres gyűrűfelületek* jelentkeznek. Ezek a normálfelületek végül még úgy is keletkeztethetők — és ez



89. ábra.

tulajdonképpen a MÖBIUS-féle keletkeztetés — hogy két, egyenként $P+1$-szer pontozott gömbfelületből indulunk ki és az egyik gömb minden határgörbéjét a másik gömb egy-egy határgörbéjével egy-egy (összesen $P+1$-számú) csővel összekötjük. E felfogásból rögtön belátható MÖBIUS tétele, mely szerint *minden* zárt kétoldalú *felület*, tehát minden határolt is, *két lefejthető felület összeforrasztásával jön létre.* Az egyik P-szer pontozott gömb adja az egyik, a felület többi része a másik lefejthető felületet. Hiszen egy cső, míg csak egyik határvonalát forrasztjuk a felülethez, e felületet az analysis situs értelmében nem változtatja meg. A 89. ábra mutatja itt a 3-adnemű zárt kétoldalú felületet e háromféle felfogásban.

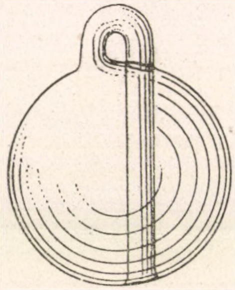
9. Egyoldalú zárt felületek normáltypusai.

Áttérve a zárt egyoldalú felületekre, ezeket is nemszámuk teljesen jellemzi. *A zárt P-ednemű egyoldalú felület úgy keletkeztethető a P-szer pontozott gömbből, hogy mind a P határgörbéje mentén egy-egy süveg-*[1]*felülettel kitöltjük.* Valóban, ha mind a P-számú süvegen egy-egy egypartú körmetszetet alkalmazunk, és pedig azt (már láttuk ilyennek a létezését), melynek alkalmazása æquivalens az illető süveg elhagyásával (és a mely a süveget, mint a MÖBIUS-féle szalagot a középvonala mentén való felmetszés, hengerpalást felületbe viszi át), akkor lefejthető felületet nyerünk. Minden ily körmetszet azonban (l. a 4. § VIII. tételéhez szóló [2]) jegyzetet a 79. lapon) 1-gyel kisebbíti a nemszámot s igy eredeti felületünk valóban P-ednemű. (V. ö. a XIV. tételt.) A P-szer pontozott, majd P-számú süveggel kitöltött gömbfelületet tekinthetjük tehát az *egyoldalú zárt felületek* (DYCK-féle) *normáltypusainak.*

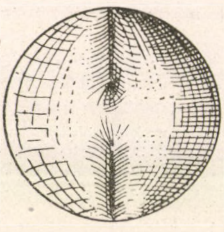
Ezeken az egyoldalú zárt normálfelületeken még az a vál-

[1] Helyesebb volna itt süveg helyett az általánosabb jelentésű MÖBIUS-féle szalagról szólni, mert csak ezt az elnevezést használtuk a felület absolut (térbeli elhelyezésétől független) megadására. A süveg-elnevezést itt az teszi indokolttá, hogy ha a gömbfelületet terünkben, és pedig a metrikus értelemben vett gömbfelülethez hasonló elhelyezkedésben választjuk, akkor süveg alakjában alkalmazva a MÖBIUS-féle szalagokat, minden *ujabb* önáthatolás elkerülhető.

toztatás tehető, hogy két süveg helyébe (ha $P > 1$) a megfelelő két határgörbét összekötő csavart csövet helyezünk; [1] s ez a süvegek akárhány párjával megismételhető. Hogy egy-egy ilyen változtatás a felületen nem változtat, vagyis a felületet nem csak zártnak és egyoldalúnak, de P-ednemünek is meghagyja, kiderül onnan, hogy egy csavart csőnek középvonala mentén való felmetszése, vagyis a cső elhagyása, éppen úgy, mint *két* süveg el-

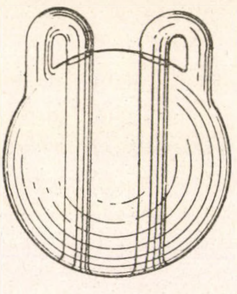


90. ábra.

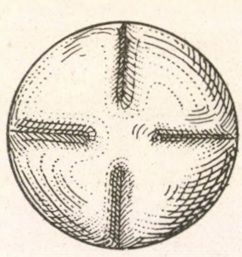


91. ábra.

hagyása a nemszámot 2-vel csökkenti akkor is, mint közvetetlenül igazolható, ha e műveletek által a felület kétoldalúvá lesz, a mi $P = 2$ esetében következik be. Ebben a $P = 2$



92. ábra.



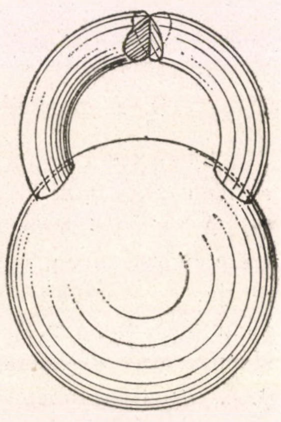
93. ábra.

esetben, azaz a KLEIN-féle felület esetében, a 90. és 91. ábrán látható kétféle alakot öltheti a felület. [2] Csupa csavart csővel (süveg alkalmazása nélkül) keletkeztethető ezek szerint egy egy-

[1] L. DYCK, l. c., 480. l.; a «csavart» szó úgy értendő, hogy a cső az eredeti pontozott gömbfelületre nézve is már csavart.

[2] L. BOY, l. c., 18. ábrát.

oldalú zárt felület a gömbből, ha nemszáma (= alapszáma) páros. A 4-ednemű zárt egyoldalú felület pl. a 92. és 93. ábrán látható kétféle módon valósítható meg. Az egymás közt homœomorph felületek terünkben való különböző elhelyezkedésük folytán itt szemünknek annyira különbözőknek tünnek fel, hogy főtételünk nélkül már e relative egyszerű felületek homœomorphismusának bebizonyítása is nehézséggel járna. — Egy csavart cső, mint a 94. ábra mutatja, úgy is alkalmazható terünkben, hogy ne, mint előbb, egy kettős zárt vonal, hanem egy kettős vonaldarab keletkezzék.[1] Ez az ábra is a KLEIN-féle felületet ábrázolja.



94. ábra.

Egyébként itt, ha csak ezáltal nem válik kétoldalúvá a felület, csavart cső helyett ugyanazt a két határgörbét összekötő (a gömbhöz relative) *nem csavart* csövet is alkalmazhatunk. A főtétel alapján rögtön kiderül t. i., hogy az analysis situs értelmében e két cső bármelyikének alkalmazása ez esetben æquivalens művelet. Ily módon azonnal belátható a következő tétel:

XVIII. A $2k+1$-ednemű zárt egyoldalú felületet az (1-nemű) projektiv síkból, a $2k+2$-ednemű zárt egyoldalú felületet pedig a (2-odnemű) KLEIN*-féle felületből úgy nyerhetjük, hogy ezt $2k$-szor pontozzuk és a keletkező $2k$ határgörbét párosával k-számú bármilyen csővel összekötjük.*

A zárt egyoldalú felületeknek ezt a előállítását WEICHOLD[2] adta először, a nélkül, hogy kimutatta volna, hogy e felületek kimerítik a zárt egyoldalú felületeket.

Megemlítjük végül, hogy az összes határolt felületekről is jó képet szerzünk magunknak, ha ezeket terünkben úgy állít-

[1] A terünkben ily módon elhelyezkedő csövet nevezi DEHN és HEEGAARD «sich durchsetzender Henkel»-nek; l. az Encyklopædia-czikk 11. ábráját.

[2] *Ueber symmetrische Riemann'sche Flächen*..., Zeitschrift für Mathematik und Physik, 28. k., 1883, 326—327. l.

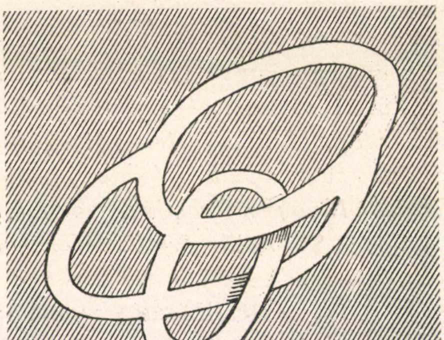
juk elő, hogy zárt normáltypusú felületen kellő számú pontozást végzünk. A 95. ábra mutatja ennek megfelelően azt a kétoldalú felületet, melyre $A = 10$, $H = 4$.

95. ábra.

10. A normáltypusok és a főtétel története.

Befejezésül a normáltypusok és a főtétel történetét akarjuk röviden ismertetni.

A *határolt normálfelületek* megállapítása kétoldalú felületekre Petersen-től, egyoldalúakra Dehn és Heegaard-tól származik. E szerzőknél más a származtatásuk, mint nálunk, a mennyiben ők a 2. § XIV. tételét, melyen a mi tárgyalásunk alapult, csak e normáltypusok alapján bizonyítják be. Petersen (l. c., 72. l.) mindenekelőtt az által egyszerűsíti a határolt felületet, hogy «határgörbéit folytonosan úgy változtatja, hogy a határolt felületdarab állandóan kisebbedik és ezt addig folytatja, míg egy határdarab távolsága a legközelebbihez egy kis véges távolság lesz». (A 96. ábra mutatja egy ily módon méreteire nézve átalakított kétoldalú felület példáját.) Ebből az elágazódó keskeny szalagalakból, mely már Listing-nél[1] és Möbius hagyatékában[2] is előfordul, vezeti le Petersen (l. c., 76. l.) a mi III.



96. ábra.

[1] «Census...», 19—20. l.; Listing az így átalakított felületet a felület *cyklomatikus diagrammá*-jának nevezi.

[2] L. c., 540—541. l. (1860)

tételünket. A VII. tételnek a III.-ból való bebizonyítása azonban PETERSEN-nél nem helyes, mert ő csak annak bizonyításával foglalkozik, hogy elérhető, hogy bármelyik híd legfeljebb egy híddal legyen egybekapcsolva, de az, hogy ez minden hídra *egyidejűleg* elérhető, PETERSEN meggondolásaiból egyáltalán nem derül ki és aligha is bizonyítható rövidebben, mint a mi tárgyalásunkban. Encyklopædia-czikkükben DEHN és HEEGAARD a határolt normálfelületeket egy- és kétoldalú felületekre egyaránt megállapítják (l. c., 190—195. l.), de, az encyklopædia-czikkek természetének megfelelőleg, a VII. és XI. tétel teljes bizonyítása itt sem található meg.

A kétoldalú *zárt felületekre* a megelőzőkben adott normáltypusok MÖBIUS-tól származnak (l. c., 456—457. l.)[1] és ezek különösen KLEIN működése által ma már a mathematikusok közkincsévé váltak. Az egyoldalú zárt normálfelületeket DYCK (l. c., 479. l.) állapította meg, a nélkül azonban, — és erre még visszatérünk — hogy bebizonyította volna, hogy minden egyoldalú zárt felület ilyen normáltypusra hozható. DYCK összeforrasztás helyett pontok egymásra való vonatkoztatásáról szól. E vonatkoztatásoknak süvegek és «sich durchsetzende Henkel»-ek által való megvalósítása (a mi terünkben valóban elég szemléletes képet ad az abstract felületről) DEHN és HEEGAARD-tól származik (l. c., 198. l.).[2]

Rátérve a *főtétel* irodalmára, elsősorban MÖBIUS említendő. Ő volt az első, ki e főtétellel elintézett problémával foglalkozott és pedig 1. (l. c., 450—451. l.) lefejthető felületek ($P = 0$, H akármi) és 2. (458—460 l.) terünkben önmagukat nem metszően elhelyezkedő zárt felületek ($H = 0$, P akármi) esetében. MÖBIUS e dolgozatában az egy- és kétoldalúság megkülönböztetése explicite még nem fordul elő, de a felületek e két osztályának mindegyikébe (l. a következő § III. tételét) csak

[1] Figyelemre méltó, hogy a felületek ilyetén keletkeztetésének — mint elintézetlen problémának — a nyomai már BOLYAI Jánosnál megtalálhatók, és pedig *Raumlehre*-jéhez írt hátrahagyott megjegyzéseiben (l. STAECKEL: Math. és Természettud. Értesítő, 21. k., 140. l.). — Az úgynevezett RIEMANN-féle felületeket TONELLI (Atti dei Lincei, 1875) és CLIFFORD (Proc. of the London Math. Soc., 1876) vizsgálták először ilyen felfogásban.

[2] L. azonban már BOY említett ábráit is.

kétoldalú felület tartozik. MÖBIUS «végtelen kis elem»-ekkel operál és az «elementare Verwandtschaft»-ot (homœomorphismust) is e fogalommal értelmezi.

JORDAN tárgyalására az utóbbi megjegyzés szintén érvényes. Az által, hogy feltételezi, hogy minden körmetszet két határgörbét teremt (l. c., 107., 109. l.), ő is hallgatagon kétoldalú felületekre szorítkozik (l. a [2]) jegyzetet az 54. lapon). JORDAN a két felületet először körmetszetekkel lefejthetővé alakítja, majd mindkettőt keresztmetszetekkel oly «végtelen kis elemekre bontja, hogy az egyik felület két szomszédos végtelen kis elemének két ugyanilyen elem felel meg a másik felületből» és ezen az alapon megállapítja, hogy a nemszám és a határgörbék számának megegyezése elegendő is a két felület homœomorphismusához.

LIPPICH tárgyalása a JORDAN-éval (kit nem említ) lényegileg megegyezik (a kétoldalúság hallgatag postulálását illetőleg is), az infinitesimális elem használatát azonban egy szabatosan megfogalmazott szemléleti tény axiomatikus postulálásával pótolja (l. c., 224. l.; *a)* alatt).

DYCK volt az első, a ki, az egyoldalú felületeket is figyelembe véve, a főtételt teljes általánosságában kimondotta. Bizonyítását DYCK az itt MÖBIUS-, illetőleg DYCK-félének nevezett normálfelületekre alapítja, ámde nem bizonyítja be, hogy minden egyoldalú felület, mint (*H*-szor pontozott) DYCK-féle normálfelület keletkeztethető. E hiány pl. a XIV. tételnek (a főtételre természetesen nem hivatkozó) bebizonyításával volna pótolható. DYCK e tételt *bizonyos* egyoldalú felületekre kimondja, de csak két példára bizonyítja be (l. c., 480. l.).

A főtétel első teljes és kifogástalan bizonyítását véleményünk szerint (és ellentétben az irodalomban szokásos megállapításokkal) MAIR adta említett dolgozatában, mely, bár sok tekintetben legteljesebb kifejtését adja a felületek analysis situsának, úgy látszik, egészen ismeretlen maradt (még az Encyklopædia czikk sem említi, s a londoni Royal Society katalogusában (I. k., Cambridge, 1908) e dolgozat a differentiálgeometria rovatába tévedt). [1] MAIR bonyolódottabb normáltypusokra alapítja

[1] Ezzel magyarázható, hogy ez a munka is már teljesen ki volt dolgozva, midőn MAIR dolgozatáról tudomást szereztem. Ily módon csak utólag tudtam meg, hogy ez az 5. § több érintkező pontot mutat MAIR fejtegetéseivel.

a főtétel bizonyítását, de a felületek némely tulajdonságának megállapitására e MAIR-féle «*standard form*»-ok sokkal alkalmasabbak.[1]

DEHN és HEEGAARD-tól származik a gondolat: a főtétel bizonyítását a mi tárgyalásunkban is szerepelt határolt normálfelületekre alapítani.

A főtétel egyéb bizonyításait illetőleg megemlítjük, hogy HADAMARD (l. c. 33—35. l.) a JORDAN és LIPPICH tárgyalásaival lényegileg megegyező bizonyítását csupán egy kétoldalú felület példájára fejti ki részletesebben és hogy FORSYTH (l. c., 362. l.) a főtételt, kétoldalú felületekre, négy és fél sorban véli elintézhetőnek.

[1] A MAIR-féle normálfelületekből például azonnal kiderül, hogy minden határolt egyoldalú felület egyetlen közönséges keresztmetszet alkalmazásával kétoldalúvá alakítható, míg a mi tárgyalásunkban alapul fektetett normálfelületekre ez nem közvetetlenül látnivaló.

6. §.

A FELÜLETEK TERÜNKBEN.

1. Mely felületek valósíthatók meg terünkben önáthatolás nélkül?

A megelőzőkben — néhány példától és a 4. § néhány megjegyzésétől eltekintve — a felületeket önmagukban, *absolute* vizsgáltuk és *nem* mint más alakzatok részeit. Sok érdekes és nehéz problémához vezet a felületek *relativ* tulajdonságainak vizsgálata és most néhány idetartozó vizsgálatra térünk rá. A felületeket *mint terünk részeit* akarjuk vizsgálni, csupán terünk végesben fekvő pontjaira szorítkozva és kizárva — egyelőre — többszörös ponttal bíró felületeket. Az első kérdés, mely itt felvetődik, a következő: *mely felületeknek van terünkben repræsentánsuk,* azaz mely felületekhez homœomorph terünk valamely része? Normáltypusaink megállapításánál láttuk, hogy minden határolt felület úgy keletkeztethető, hogy egy elemi felülethez alkalmas módon hidakat illesztünk (5. §, VII. és XI. tétel). Ezt az elemi felületet pl. mint terünk egy sík körlemezét választva, a szemlélet közvetlenül mutatja, hogy a hídalkalmazások mindenkor önáthatolások nélkül végezhetők:

I. Minden határolt felület terünkben többszörös pontok fellépése nélkül megvalósítható.

A mi a zárt kétoldalú felületeket illeti, főtételünk folyományaképpen láttuk, hogy ezeket a P-szeres gyűrűfelületek ($P = 0, 1, 2, 3, \ldots$) kimerítik, másfelől terünk szemlélete azt mutatja, hogy ezek mindannyian megvalósíthatók terünkben:

II. Minden zárt kétoldalú felület terünkben többszörös pontok nélkül megvalósítható.

Hátra vannak még az egyoldalú zárt felületek. Ezek terünkben nem valósíthatók meg önáthatolás nélkül. Ennek szemléleti igazolása, valamint az egyoldalú felületek terünkhöz való elhelyezkedésének vizsgálata czéljából, előbb terünknek, mint absolute tekintett analysis situs-beli alakzatnak, kell egy nevezetes — de kevéssé vizsgált — tulajdonságát megállapitanunk. Metrikus fogalmak használatával e tulajdonság így mondható ki: bontsa a G gömböt egyik főköre k, melynek kijelöljük egyik meghatározott befutási értelmét két félgömbre, G_1-re és G_2-re. Ha a gömböt terünkben bárhogyan elmozdítva úgy juttatjuk vissza eredeti helyzetébe, hogy k is régi helyére jut, akkor, ha k befutási értelme a végső helyzetben más, mint a kezdőhelyzetben volt, G_1 és G_2 okvetetlenül felcserélődik (és — a mi már innen következik — csakis ekkor). E tulajdonság, melyet szemléletileg igazoltnak tekintünk és a mely aligha vezethető vissza egyszerűbb tulajdonságokra, pusztán analysis-situs-fogalmakkal is leírható.

T. i. a gömb és főköre helyett tetszés szerinti gömbbel homœomorph felületből és egy zárt vonalából indulhatunk ki és ennek mereven való mozgatása helyett bármely terünkben történő oly folytonos deformatiójáról szólhatunk, melynek folyamán soha sincs felületünknek többszörös pontja. Ekkor is a zárt vonal befutási értelme akkor és csak akkor fordul meg, ha a két felületdarab (elemi felület) felcserélődik.

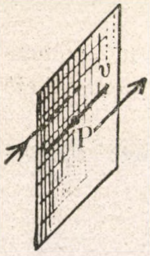
Terünk e tulajdonsága nyilván még így is megfogalmazható: az (x, y, z) derékszögű koordináta-rendszer nem vihető át mereven az $(x, y, -z)$ rendszerbe.

E tulajdonságot röviden így fogalmazzuk meg: *terünk, mint háromméretű alakzat, kétoldalú.* [1]

[1] Mi itt általánosságban nem foglalkozunk a 2-nél többméretű alakzatokkal és így az egy- és kétoldalúságnak ezekre való megállapitásával sem. E tulajdonság kiterjesztését adta, analytikus módszerrel: POINCARÉ l. c. és a MÖBIUS-féle értelmezés általánositásával: DEHN és HEEGAARD, l. c. L. még ez utóbbira nézve: STEINITZ (Sitzungsber. der Berliner Math. Ges. 7. k., 29. l., 1908) és KŐNIG Dénes (Math. és Phys. Lapok, 22. k., 40. l. és Proceedings of the 5th int. Congress of Math., Cambridge, 1913, II. k., 129. l.) dolgozatait. Az egy- és kétoldalúság értelmezése bármily méretű alakzatra úgy történik, hogy az 1 méretszámtól eltekintve, minden méretszámra van egy- és van kétoldalú alakzat; a vonaldarab és zárt vonal azonban mindkettő kétoldalú.

Terünknek egy másik nevezetes analysis-situsbeli tulajdonságát a már említett JORDAN-féle tétel háromméretű analogonja mondja ki, mely szerint *terünk minden többszörös pont nélküli zárt felülete a tér többi pontjait két egymással össze nem függő részre bontja szét.* E tényt is szemléletileg igazoltnak tekintjük.[1]

Legyen most már F terünknek egy többszörös pontokat nem tartalmazó egyoldalú felülete és v egy egypartú körmetszete F-nek. Jelöljük ki a v valamely P pontjának egyik KLEIN-féle indicatrixát az által, hogy F egy (P-t, mint belső pontot tartalmazó) elemi felületdarabjának h határára kijelöljük egyik befutási értelmét. A v egypartú volta miatt, ha P — és vele együtt ez az indicatrix — egyszer körülfutja v-t, az ellenkező indicatrix-szal jutunk vissza P-be (3. §, XII. tétel). Legyen G egy olyan (az analysis situs értelmében vett) gömb, melynek h, eredeti helyzetében, egy zárt vonala; e h bontsa G-t a G_1, G_2 elemi felületekre. A h vonal fenti mozgatásával együtt vigyük körül a G gömböt is úgy, hogy minden helyzetben a h rajta legyen G-n és G-nek soha se legyen kettős pontja. Visszatérve G-vel és egyidejűleg h-val eredeti helyükre — terünk kétoldalúsága miatt — mint láttuk, G_1 és G_2 felcserélődik. Ha tehát a P «közelében» elindulunk a felület egyik «oldalán» (a felületen kívül) és a v mentén egyszer körülhaladunk, akkor a felület másik oldalára jutunk *a nélkül, hogy F-et átmetszenők.* (97. ábra, hol a négyszög egyoldalú felületünk egy darabja.) Forditva is, terünk kétoldalú volta miatt ez csak egypartú körmetszetre, tehát csak egyoldalú felületre következhetik be.



97. ábra.

Éppen úgy áll tehát a dolog, mint (hogy egy 1-gyel alacsonyabb dimensiós példára hivatkozzunk) a hogy egy egyoldalú felületen, egy egypartú körmetszete mentén egyszer körülhaladva, ennek egyik partjáról másik partjára jutunk.

Ha most még azt is feltesszük, hogy F zárt, akkor ered-

[1] Gömbbel homœomorph felület esetében BROUWER adott e tételre — és magasabb dimensiószámra való általánosítására — szigorú bizonyítást (Mathematische Annalen, 71. k., 1911, 314 l.).

ményünk ellentmond a JORDAN-féle tétel fentemlített általánosításának. Tehát valóban:

III. Zárt egyoldalú felület terünkben többszörös pontok fellépése nélkül nem valósítható meg. [1]

2. Egyoldalú felület elhelyezkedése terünkben.

Terünk egyoldalú F felületére most nyert eredményünk úgy is kimondható, hogy F két oldala egymáshoz csatlakozik, ugyanúgy, a hogy egymáshoz csatlakozik egy egypartú körmetszet két partja. Az «oldal» fogalma teljes analogonja a «part» fogalmának. Az «egyoldalú (felület)» elnevezés is ennek az analogiának köszöni eredetét. A két oldalnak egymáshoz való csatlakozása terünkben gyakran szerepel az egyoldalú felület definitiójaképpen is és e definitiót — feltéve, hogy a metrikusan jellemzett felületnek minden pontjában van folytonosan változó érintő síkja — úgy is szokás fogalmazni, hogy egyoldalú az olyan felület, melynek valamely zárt vonala mentén a normálisa megfordul. Hiánya e definitiónak, hogy a felületek egy- és kétoldalúságát nem mint a felület absolut (belső) tulajdonságát állapítja meg [2] és nem világos *a priori* az, hogy egymás közt

[1] Algebrai felületekre vonatkozólag l. DARBOUX, *Théorie des surfaces,* I. k., 2. kiadás, 418. l. Általános felület esetére BOY közöl két bizonyítást már többször említett dissertatiójának 34. és 43. lapján. POINCARÉ, tetszés szerinti dimensiószámra általánosítva a tételt, kimondotta, hogy az n-méretű tér minden n—1-méretű «felülete» kétoldalú (Journal de l'École Polytechnique (2), 1. k., 1895. 29. l.). Ekkor természetesen ki van kötve, hogy többszörös pont nincs; e megjegyzéssel oszlatható el BRUNEL ellenvetése (Procès-Verbaux de la Société des Sciences de Bordeaux, 1895/6, 26. l.) POINCARÉ e tételével szemben, nem pedig, a mint BRUNEL teszi, a «zárt» szó kétféle értelmével.

[2] KLEIN már 1876-ban hangsúlyozta, hogy az analysis situsban szigorúan elválasztandók egymástól az alakzatok absolut (belső) és relativ tulajdonságai (Math. Ann., 9. k., 478. l.) és speciálisan az egyoldalúsággal kapcsolatban erre először DYCK figyelmeztetett (l. c., 474. l., jegyzet). L. továbbá STEINITZ, Sitzungsber. der Berliner Math.-Ges., 7. k., 29. l. és TIETZE, Jahresber. der deutschen Math.-Ver., 19. k., 155. l. DYCK nyomán több német szerző az «egy- és kétoldalú» elnevezést csupán e relativ (a felület környezetére vonatkoztatott) tulajdonság jelölésére használja és az absolut tulajdonságra a «Flächen mit umkehrbarer Indicatrix» beszédmódot alkalmazza.

homœomorph felületek e definitió szerint is egyidejűleg egyoldalúak vagy kétoldalúak. Egy egyszerű analógia megvilágítja e megjegyzést. A MÖBIUS-féle szalagnak (ez játszsza most terünk szerepét) középvonala egypartú, valamely más zárt vonala kétpartú s a két zárt vonal mégis homœomorph. Mi bebizonyítottuk, hogy ennek analogonja terünk felületeire nem következhetik be s a bizonyítás terünknek, mint háromméretű alakzatnak, kétoldalúságán alapult.

Terünkben helyet foglaló felületek oldalairól még szemléletesebb képet is alkothatunk magunknak, ha a felület egy elemi felületdarabjának egy-egy oldalát egy-egy (eredeti helyzetéhez kissé eltolt) elemi felülettel ábrázoljuk (úgy, a hogy egy felület vonaldarabjának két partja egy-egy vonaldarabbal ábrázolható). Ezt a felület mentén végig folytonosan folytatva, a felület *kettős felületéhez* jutunk, mely tehát, eredményeink szerint *összefüggő, ha felületünk egyoldalú és nem összefüggő, ha felületünk kétoldalú.* Ezt népszerűbben már MÖBIUS úgy fejezte ki, hogy, ha egy egyoldalú felületet befestünk és folytonosan mindaddig haladunk a festéssel a felületen, a míg már nincs a befestetthez szomszédos még befestetlen felületdarab, akkor a felület mindkét oldalát befestettük. A festékréteg tekinthető akkor a kettős felület modeljének E felfogás alapján nevezte KLEIN az egyoldalú felületet *Doppelfläche*-nek.

Egyoldalú felület kettős felülete kétoldalú. Ez most már a kettős felületnek terünkhöz elfoglalt helyzetéből következtethető; valóban: két oldala egymástól teljesen el van választva, az egyik az egyoldalú felület felé fekszik s ez nem csatlakozhatik a másik oldalhoz. Belátható továbbá, de erre itt nem térünk ki, hogy a kettős felületnek mindig kétszer annyi határgörbéje van, mint az eredeti felületnek és hogy az A alapszámmal bíró egyoldalú felület kettős felületének alapszáma: $2A-2$. Például a MÖBIUS-féle szalag, a projektiv sík, illetőleg a KLEIN-félefelület kettős felülete rendre: a hengerpalást, a gömb, az egyszerű gyűrűfelület. E tanulságos példák részletes vizsgálatát az olvasóra bízzuk.

Terünkben helyet foglaló minden testnek a felülete is természetesen kétoldalú: a test (belseje) felé eső oldala e felületnek nem csatlakozhatik a másikhoz. Ha tehát felületen csupán *testek határát* és ennek részeit értenők, [1] akkor egyoldalú felület nem is volna felület. Ez is egyik oka lehet annak, hogy az egyoldalú felület csak oly nehezen tud teljes polgárjogot nyerni a geometriában.

3. Egyoldalú zárt felületek lehetőleg egyszerű megvalósítása.

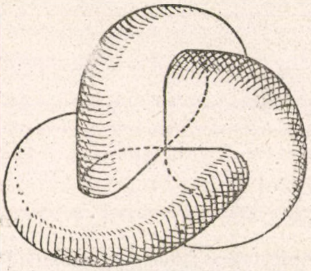
Az e § elején felvetett kérdésre I., II. és III. tételünk teljes feleletet ad: csupán az egyoldalú zárt felületek nem valósíthatók meg terünkben önáthatolás nélkül. Felmerül tehát az a kérdés, hogy — még mindig csupán végesben fekvő pontokra szorítkozva, de önáthatolást (többszörös pontokat) megengedve — miképpen valósíthatók meg terünkben lehetőleg egyszerűen az egyoldalú zárt felületek. Az 5. § XVIII. tételére hivatkozva, ezt először az 1 és 2 nemszámra (a projectiv síkra, illetőleg a KLEIN-féle felületre) akarjuk megállapítani. A mi az utóbbit illeti, láttuk, hogy ez mint terünk oly felülete valósítható meg, melynek egyetlen kettős zárt vonala van és egyébként pontjai nem esnek össze; és pedig e kettős vonal nem metszi önmagát. Nem olyan egyszerű a projectiv síknak végesben való ábrázolása; ezt a legegyszerűbben BOY oldotta meg. [2] Sikerült t. i. terünkben oly, a projectiv síkhoz homœomorph felületet előállítania, melynek szintén egyetlen kettős zárt vonala van (egyébként pontjai nem esnek össze), de e kettős vonalnak van egy háromszoros pontja (egyébként pontjai nem esnek össze). E BOY-féle előállítás csak elég hosszadalmasan ismertethető és így megelégszünk itt azzal, hogy BOY említett dolgozataira hivatkozzunk. 98. ábránk mutatja a BOY-féle felületet; a 99. ábrában pedig e felület egy jellegzetes része látható, t. i. a kettős vonal felületi környezetének a «fele».

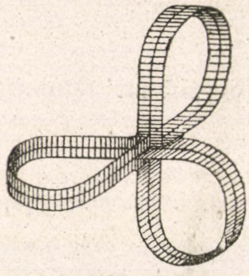
Látnivaló, hogy pontozások és csőalkalmazások bármely

[1] Mint test határát értelmezte a felületet (ἐπιφάνεια) EUKLIDES; l. «Elemei» XI. könyvének második definitióját. KILLING *Grundlagen der Geometrie*-jében (Paderborn, 1898, II., 194. l.) szintén így vezeti be a felület fogalmát.

[2] *Ueber die Curvatura integra u. d. Topologie der Flächen*, Diss., Göttingen, 1901.; Math. Ann., 57. k., 151. l. és Göttinger Nachrichten, 1901., 20. l.

felületnél újabb önáthatolások nélkül végezhetők terünkben; az 5. § XVIII. tétele alapján tehát a következő eredményre jutottunk:


98. ábra.


99. ábra.

IV. Minden egyoldalú zárt felület terünkben oly módon valósítható meg, hogy többszörös pontjai egyetlen zárt vonalat alkossanak. És pedig ez az ábrázolás úgy történhetik, hogy, ha a felület nemszáma páros, e zárt vonalnak nincs többszörös pontja; ha pedig páratlan, egyetlen háromszoros pontja van és e vonal pontjai egyébként nem esnek össze.

Ha végtelenbeli pontokat megengedünk, akkor természetesen a páratlan nemszámú egyoldalú felületek önáthatolás nélkül ábrázolhatók terünkben. Elég ehhez a projectiv síkot, mint ilyet, felvenni és ezen végezni a pontozásokat és csőalkalmazásokat.

A projectiv síknak a Boy-félénél látszólag egyszerűbb repræsentánsát ismertük fel a 3. §-ban leírt (egy kettős vonaldarabbal bíró) Steiner-féle felületben. Bizonyos alkalmazások szempontjából lényeges azonban, hogy a projectiv sík terünk véges részében *singuláris pont nélkül* is megvalósítható és ezt a feladatot csak Boy oldotta meg először. Itt a reguláris és singuláris pontok következőképpen különböztetnek meg, megjegyezvén mindjárt, hogy e tulajdonságok a felületet nem absolute jellemzik, hanem a felületnek terünkhöz relative elfoglalt helyzetét. Egy terünkben elhelyezkedő felület valamely belső P pontját (mely lehet többszörös pont is) *reguláris*nak nevezzük, ha van a felületnek véges-számú oly $E_1, E_2, \ldots E_\nu$ elemi felület-alakú része, hogy 1.) a P minden E_i-nek belső pontja, 2.) egy E_i-nek sincs többszörös pontja és 3.) eltávolítván a felületből minden E_i-t, P teljesen megszűnik pontja lenni a felületnek. E definitiót fogadva el,[1] könnyű belátni, hogy a Boy-féle felületnek minden pontja (a háromszoros pontja is) reguláris, ellenben a Steiner-féle felületnek két pontja singuláris, t. i. a kettős vonaldarab két végpontja.

Mint általános eredményt kimondhatjuk most már azt is, hogy *minden felületnek van terünkben singuláris pont nélküli repræsentánsa* és a IV. tétel érvényes marad akkor is, ha csak singularitás-nélküli megvalósításokat engedünk meg.

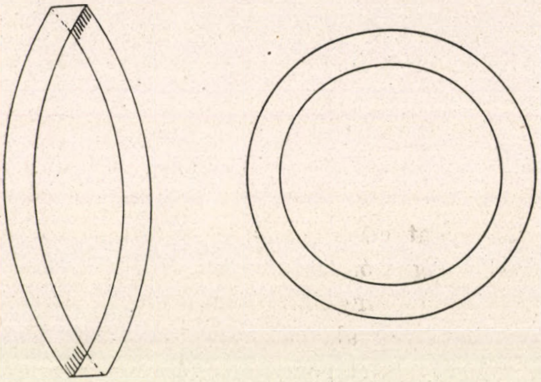
Az analysis situs bizonyos alkalmazásainál az önáthatolás vagy singuláris pont elkerülése nem a főszempont felületeknek terünkben való megvalósításánál. Az ú. n. Riemann-féle felületek pl. többszörös és singuláris pontokkal biró kétoldalú felületek. A felületek ilyen alakban való felvételének előnye, hogy pontjainak a gömbfelület pontjaihoz való bizonyos (többértelmű) vonatkoztatása szemlélhetővé válik. Ha a gömbfelületet mint a complex számok összességének képét tekintjük, akkor ily módon a Riemann-féle felületek fontos és szemléletes segédeszközt szolgáltatnak a complex változó többértékű függvényeinek elméletében. Mi e Riemann-féle felületekkel itt nem foglalkozunk, de meg kell említenünk, hogy történetileg függvénytani alkalmazhatóságuknak köszönhető elsősorban (Riemann-tól kezdve, a felületek analysis situsának kifejlesztése.

4. Felületek æquivalentiájának fogalma.

A felületeknek terünkhöz relativ tulajdonságaira vonatkozólag csak néhány oly vizsgálatról volt itt szó, melyek a felületek absolut elméletével szorosan összefüggnek, különösen annyiban, hogy ezt az eredetileg teljesen abstract elméletet szemlélhető képekhez fűzik. Pedig e téren számos más érdekes és mindezideig nagyrészt elintézetlen probléma is felmerül. A főprobléma a következő: *æquivalens*nek nevezve terünk két alakzatát, A-t és B-t, ha terünket úgy lehet önmagára folytonosan

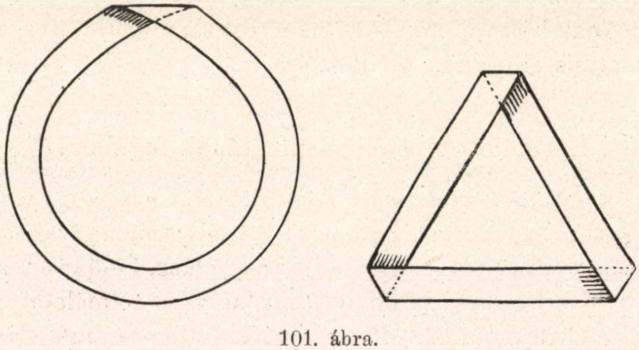
[1] Boy valószínűleg egy evvel æquivalens definitióra gondol, bár nem mondja meg, hogy mit ért a «singularitätenfrei» elnevezésen. Az Encyklopædia-czikk minden önáthatolást singularitásnak nevez.

leképezni, hogy e közben A a B-be menjen át, az a kérdés, hogy *mi a szükséges és elegendő feltétele annak, hogy terünk két felülete æquivalens legyen?* A két felület homœomorphismusa



100. ábra.

musa ehhez szükséges, de nem elegendő: szemléletileg plausibilis, hogy a 100. ábrában látható két kétoldalú felület homœomorph, a nélkül, hogy æquivalensek volnának. És ugyanez áll



101. ábra.

a 101. ábrában látható két egyoldalú felületre (MÖBIUS-féle szalagra). Kérdésünk természetesen kapcsolatos a vonalakra vonatkozó megfelelő kérdéssel: *mikor æquivalens terünk két zárt vonala?* Mindkét kérdéscsoportra nézve általános eredmények eddig nem ismeretesek.

TARTALOM.

FRANKLIN-TÁRSULAT NYOMDÁJA.