

A felsöbb analysis' elemei. 1.

Egyet. ny.

Budan; Budapest 1836

Signatur: 54832-C.1

Barcode: +Z197918900

Zitierlink: <http://data.onb.ac.at/ABO/%2BZ197918900>

Umfang: Bild 1 - 128

Nutzungsbedingungen

Bitte beachten Sie folgende Nutzungsbedingungen: Die Dateien werden Ihnen nur für persönliche, nichtkommerzielle Zwecke zur Verfügung gestellt. Nehmen Sie keine automatisierten Abfragen vor. Nennen Sie die Österreichische Nationalbibliothek in Provenienzanangaben. Bei der Weiterverwendung sind Sie selbst für die Einhaltung von Rechten Dritter, z.B. Urheberrechten, verantwortlich.

Hinweis: Das Dokument enthält hinterlegte Textdaten, die eine Suche in der Datei ermöglichen. Diese Textdaten wurden mit einem automatisierten OCR-Verfahren ermittelt und weisen Fehler auf.

3. Nn. 78.

Győry

A' FELSŐBB
ANALYSIS' ELEMEI.

IRTA

GYÖRY SÁNDOR,

FÖLDMÉRŐ, A' M. T. TÁRSASÁG' RENDES TAGJA.

ELSŐ FÜZET.

A' M. TUDÓS TÁRSASÁG' KÖLTSÉGÉVEL.

BUDÁN,
A' MAGYAR KIRÁLYI EGYETEM' BETŰIVEL.

1836.

6



TUDNIVALÓK.

1. A' m. t. társaság ezen munkának csak kiadója lévén, nem kezeskedik a' benne követett nyelvszabályokról, sem az írásmódról, sem végre akárminemű nyelvet 's írást illető elvekről; egyedül arra kívánt a' kéziratok' bírálataban ügyelni, hogy az elfogadott és sajtó alá bocsátandó munka, mint egész, egy vagy más tekintetből ajánlható legyen, 's a' literatura' jelen állapotjában kiadásra méltónak tartathassék.

2. Nem vizsgálhatván meg a' benyújtott kéziratokat a' társaság fejenként és egészben: ez, u. m. A' felsőbb analysis' elemei, Győry Sándor által, Bitnicz Lajos és Nyíry István, mint e' végre hivatalosan megbízott rendes tagok' ajánlására adatott sajtó alá.

3.) A' társaság által kiadott kéziratok közül ez XXVII-dik számu.

D. Schedel Ferencz,

titoknok.

TARTALOM.

	Lap.
Bevezetés	1 — 9
A' függvényekről általában (<i>De functionibus in genere</i>)	10 — 20
A' számláló haladásokról (<i>De progressionibus arithmeticiis</i>)	21 — 23
A' szorzalékokról (<i>De factorialibus</i>)	24 — 30
A' hatóságokról (<i>De facultatibus</i>)	31 — 42
A' felsőbb rangú számláló haladásokról (<i>De progressionibus arithmeticiis superiorum ordinum</i>)	43 — 56
A' kétszaki oktatmány (<i>Theorema binomiale</i>)	57 — 77
Sok szakúak. Végtelen szakúak. (<i>Polynomia. Infinitinomia</i>)	78 — 85
A' sorzatokról általában (<i>De seriebus in genere</i>)	86 — 93
A' sorzatok' öszvehajlásáról és szétterüléséről (<i>De convergentia et divergentia serierum</i>)	93 — 124

B E V E Z E T É S.

A' mennyiségeknek létető (*essentialis*) tulajdonságuk lévén, hogy azok különféle számolási munkálatok által, kívántatókép nagyobbíthatassanak, vagy kisebbíthetessenek; innét egyenesen következik, hogy két különböző mennyiségek, a' megkívántató számolási munkálatok' eszközül vételével, egymással egyenlőkké tétethetnek. Például: legyen az egyik felvett mennyiség 15 a' másik 45 látni valóképen a' kisebbiknek nagyobbítása, vagy a' nagyobbiknak kisebbítése által a' kettő között tökéletes egyenlőséget lehet előállítani, melly szerint:

$$15 + 30 = 45; 15 \times 3 = 45; 45 - 30 = 15; \frac{45}{3} = 15; 15 + 20 = 45 - 10$$

... 's a' t.

Ezen végbe viendő számolási munkálatoknak (mellyek után t. i. két, eredetikepen különböző mennyiségek egymással egyenlőkké lesznek) analytika jegyek által előterjesztett kitétele, egyenlítésnek (*aequatio*) mondatik.

Továbbá: a' mennyiségek azon tekintetből, mellynél fogva némellyeket, csak előlegesen végrehajtott kiszámítások után lehet meghatározni, ismeretleneknek (*incognitae*), azok pedig mellyek közbevetlenül tudva vannak, 's belőlők az ismeretlenek' értékeit a' köztők találató ismert viszonyokhoz képest kitalálhatjuk, ismereteseeknek (*cognitae*, *datae*) neveztetnek, 's bevett betűjegyeikkel is egymástól megkülönböztetnek.

Az analytikai jegyeket ezek szerint kétfelé lehet osztani; t. i. némellyek azok közül magokat az ismeretes vagy ismeretlen mennyiségeket, mások pedig azon ismeretes, vagy ismeretlen mennyiségekkel véghez viendő munkálatokat, vagy azoknak egymás közti viszonyaikat terjesztik elő. Ilyenek, egyik osztályból az adott vagy ismeretes mennyiségeknek az *ábécé'* elsőbb, a, b, c, d . . . 's a' t., az ismeretleneknek pedig utolsóbb, x, y, z . . . 's a' t. betűivel szokott eljegyzéseik; másikkól, az öszveadás $a + b$; kivonás $a - b$; sokszorozás $a \times b$ vagy $a \cdot b$; elosztás $\frac{a}{b}$ vagy $a : b$; felemelés a^n ; gyökérhúzás $\sqrt[n]{a}$. . . egyenlőség = egyenetlenség $>$ vagy $<$'s a' t. már az elemi algebrából tudva lévő

eljegyzéseik; melyekhez a' felsőbb analysisben, valamint eddig ugy ezentúl is, naponként újabbak 's többfélék járultak és fognak járulni.

Most ezen előbocsátmányok után, vegyünk fel valamelly egyenlítést. Például:

$$4x + \frac{3x}{7} - \frac{x}{9} = \frac{a}{b\sqrt[3]{c}}. \quad \text{Ebben:}$$

Szám- és betűjegyek, még pedig mind ismeretes, mind ismeretlen mennyiségek' betűjegyei foglaltatnak. Továbbá:

Ezen mennyiségek' betűjegyei, bizonyos számolási munkálatokat előterjesztő jegyekkel vannak együvé kapcsolva, melyeknek végre hajtása után az egyenlőség' jegyével különválasztott két részeknek, mennyiségökre nézve ugyan azoknak kell lenni, vagy az egyik résznek egyenlőnek kell lenni a' másikkal: mind kétféle jegyeknek pedig szóba foglalt értelme az egyenlőség' törvényét, vagy is azon feltételt határozza meg, melly alatt a' két részek egymással egyenlökké válnak. Különösen a' példaul tett egyenlítés szóba foglalva ezt teszi: *Ha az ismeretlennek négyszer vett értékehez, hozzá adatik annak háromszor vett 's héttel elosztott értéke, végre ezen öszvetből (Summa), ugyan azon ismeretlennek kilenczed része kivonatik; az ezen munkálatok után származandó mennyiségnek, egyenlőnek kell lenni: az ismeretes a, b, c, mennyiségekből öszvetett $\frac{a}{b\sqrt[3]{c}}$ hanyadossal (quotiens).* Már:

Mint az elemi algebrából tudva van, az ismeretlen mennyiség' értékét úgy lehet kitalálni, ha az ismeretlen magánosan egyik, az ismeretesek pedig öszvesen a' másik oldalra elkülönöztetnek. T. i. ezen elkülönzés, szokott módokon végre hajtván, a' másik oldalon csupán ismeretes mennyiségek jelennek meg a' véghez viendő munkálatok' jegyeivel összekapcsolva; vagy is, azon oldalon előterjesztetnek a' munkálatok, melyeknek az ismeretes mennyiségekre alkalmazott végrehajtásuk után, az ismeretlennel egyenlő értéknek, az az: magának az ismeretlen értékének színre kell jönni. Jelen példában és egyenlítésben külön választván az ismeretlent, lenne:

$$x = \frac{63a}{272b\sqrt[3]{c}}$$

itten; és minden így végrehajtott egy ismeretlenes egyenlítésben, látnivalókép az ismeretlennek nem lehet más értéke annál, mint a' mi az adott mennyiségekből, ugyan csak adott és algebrai jegyek által előterjesztett munkálatok által kihozathatik.

Tudva van az is, hogy midőn több ismeretlenekre nézve, az ismeretlenek' számával egyenlő számú különféle egyenlítések adatnak, azokból, a' többieknek egymás utáni kiiktatása' következésében, egy vég egyenlítés formáltathatik, mellyben, egy ismeretlennél és az adottaknál, egyéb mennyiségek elő nem fordulnak.

Az illyetén, akár közvetlenül egy ismeretlen mennyiségű, akár többekből olyanná tett egyenlítésekben befoglalt ismeretlennek értéke tehát, a' mondott okoknál fogva mindenkor meghatározott; 's megfelelőképen azon feladatok, megfejtések és egyenlítések, mellyek vagy eredetiek csupán egy ismeretlent foglalnak magokban, vagy pedig olyanokká tétethetnek, meghatározottaknak (*determinatae*) mondatnak.

Ellenben ha valamely adott egyenlítésben két ismeretlen, vagy több adott egyenlítésekben, az egyenlítések' számánál több ismeretlen jön elő, a' megfejtés' azon szükséges feltételének: hogy egyik oldalon egy ismeretlen magánosan, a' másikon csupa ismert mennyiségek álljanak, nem lehet eleget tenni. Illyenkor hogy az ismeretlen bizonyos értéket vehessen fel, az az: meghatározathassék; a' másikat vagy általában, vagy a' kérdés' feltételeihez képest megszorítva, szabad tetszés szerint kell megállapítani: 's így azon ismeretlennek különféle felvett értékéhez képest, nyér az elsőbb is, különös meghatározott értékeket (*valores speciales*). E' szerint ismét mind azon feladatok, megfejtések és egyenlítések, mellyeket olyanokká, hogy bennök végezetre csupán egy ismeretlen jöjjön elő, nem lehet tenni; határozatlanoknak (*indeterminatae*) neveztetnek.

A' feltételek is pedig, mellyek szerint egyik vagy másik ismeretlen értéke szabad tetszés szerint vétethetik fel, vagy olyanok: hogy azoknak csak bizonyos meghatározott számú, vagy olyanok hogy azoknak határozatlan számú felvett értékek tehetnek eleget.

Az utolsóbb nemüeknél, mind két ismeretlennek végetlen sokféle értékei lévén, azokat egyenként kiszámítgatni lehetetlen volna: minél fogva ha az egyik ismeretlennek akármi felvett értékéhez képest, a' másik ismeretlenét megtudjuk határozni, meg kell elégednünk azon törvénynek kitalálásával; melly szerint ugyan azon ismeretlennek akármi felvett értékéhez képest, ismét a' másik ismeretlennek megfelelő érték előterjesztetik.

Illyenkor az egyik ismeretlent szükségképen két állapotban kell tekintenünk. Elsőben úgy, mint meghatározott értékűt, mellyhez képest a' másik ismeretlen is, bizonyos meghatározott 's az egyenlítés' törvényeinek megfelelő értéket veszen fel: másodikban úgy, melly szerint azon elsőbb meghatározott érték, kisebbnek vagy nagyobbban tétetvén, annak fogyása vagy nevedésé-

hez képest, a' másik ismeretlen is bizonyos törvények szerint fog fogyni vagy nevedekni. Ezen két tekintet összefoglalva ide megy ki. A' szabadon felvett egyik változó' értékeinek külzéséhez (*differentia*) az az: az egyik változó' nevedéséhez vagy fogyásához képest, mi lesz a' másik változónak az egyenlítés' törvényei szerint meghatározandó külzése az az: nevedése vagy fogyása.

A' határozatlanul sokféle értékeket felvehető ismeretleneket, ezentúl változóknak (*variabilis*), még pedig azokat mellyeknek értékei szabadon vétetnek fel, függetlenül (*independent*), viszont azokat mellyeknek értékei a' változó' nevedése vagy fogyása szerint, az egyenlítésbe befoglalt törvényekhez képest határozatnak meg, függve változóknak (*dependent variables*), a' nevedést és fogyást pedig, minthogy a' fogyás nem egyéb tagadó nevedésnél, általában nevedésnek, (mindig alatta értvén hogy állító és tagadó lehet) végezetre; azon kitételeket mellyek a' változó' egymástól függésének törvényeit terjesztik elő' függvényeknek (*functiones*) fogjuk nevezni.

Az előadottaknak felvilágosítására, vegyük fel a' kétszakúnak (*binomium*) már az elemi algebrából tudva lévő, 's legalább az egész számos kitevőkre (*exponens*) nézve, ugyan ott meg is mutatható kitételét:

$$(a + b)^m = a^m + m a^{m-1} b + \frac{m \cdot m-1}{1 \cdot 2} a^{m-2} b^2 + \frac{m \cdot m-1 \cdot m-2}{1 \cdot 2 \cdot 3} a^{m-3} b^3 + \dots + b^m.$$

Ha az $(a + b)$ ét, melly általában akármi féle nevedő vagy fogyatkozó mennyiséget jelenthet, tesz x ; az egyenlítésnek másik tagját pedig y ; azután az x nevedését Δx -el, az y -onét Δy -al jegyezvén, azt keressük: mennyivel nő az y , vagy mi a' Δy -onnak az egyenlítés' törvényei által előterjeszthető értéke midőn x hez Δx járul, lesz:

$$x^m = y; \text{ és: } (x + \Delta x)^m = y + \Delta y \text{ tehát:}$$

$$y + \Delta y = x^m + m x^{m-1} \Delta x + \frac{m \cdot m-1}{1 \cdot 2} x^{m-2} \Delta x^2 + \frac{m \cdot m-1 \cdot m-2}{1 \cdot 2 \cdot 3} x^{m-3} \Delta x^3 + \dots \Delta x^m$$

mellyből $y = x^m$ lehúzatván marad:

$$\Delta y = m x^{m-1} \Delta x + \frac{m \cdot m-1}{1 \cdot 2} x^{m-2} \Delta x^2 + \frac{m \cdot m-1 \cdot m-2}{1 \cdot 2 \cdot 3} \Delta x^3 + \dots \Delta x^m$$

Ezen példában:

a.) Az x változó (*variabilis*), minthogy $a + b$ akármi mennyiséget jelenthetvén, annál fogva $x = (a + b)$ -nek végtelenül sokféle értékei lehetnek.

b.) Az x függetlenül változó (*independent variabilis*), mert annak mind értékét mind nevedését szabadon felvehetőnek tettük.

c.) Az y is változó, mert annak az x értékeihez képest, szintén annyi különféle, tehát szintén úgy végtelen sokféle értékei vannak valamint az x nek.

d.) Az y függve változó (*dependenter variabilis*), mert annak nevekedeése vagy fogyása, mindenkor az x nek nevekedeése vagy fogyása által határoztatik meg, még pedig az egyenlítés' törvényei szerint.

e.) Δx külzése (*differentia*) az x nek; Δy külzése y nak, mert:
 $(x + \Delta x) - x = \Delta x$ és: $(y + \Delta y) - y = \Delta y$.

f.) x^m ; és: $x^m + mx^{m-1}\Delta x + \frac{m \cdot m-1}{1 \cdot 2} x^{m-2} \Delta x^2 + \dots \Delta x^m$; úgy: $mx^{m-1}\Delta x + \frac{m \cdot m-1}{1 \cdot 2} x^{m-2} \Delta x^2 + \dots \Delta x^m$ kitételek, függvényei a' bennök előforduló

x változónak, minthogy az x el teendő munkálatokat terjesztik elő; 's hasonlóan mivel megfelelőkép y ; és: $y + \Delta y$ és: Δy a' fentebbi kitételekkel egyenlők, ezek is x -nek függvényei.

Az egyenlítéseknek előadott tekintetek alatti fejtegetése, külzés hánylásnak (*calculus differentiarum*) mondatik.

Mind eddig az elemi algebrára támaszkodva, az ismeretlenekről, változokról's azoknak külzéseiről, úgy szóllottunk mint számokban kitétethető vagy szakos mennyiségekről (*quantitas discreta*). Vannak azonban mind a' tiszta, mind az alkalmazott tudványnak (*mathesis*) igen sok tárgyai, melyeknek vizsgálata körül a' csupa számok' tulajdonságainak ismeretével be nem érhetjük, vagy is: melyekben az előforduló mennyiségeknek minden tulajdonságait azon nézet alá, mintha azok több vagy kevesebb külön részekből mint egységekből volnának összetétele, nem vonhatjuk vagy azon nézet alatt megelégtőleg ki nem meríthetjük. Így, minden kiterjedést valami meghatározott egységnek lehet ugyan felvenni, 's annak egy másik nagyobbhoz mért arányát (*proportio*), számokban tenni ki; de ha azon arányát nem lenne tökéletes: (t. i. az arányát' számával sokszorozott egység, a' mérendő terjedést nem egyenlítőtené hanem vagy hiányzana tőle, vagy azt felmulná) akkor az egységnek bizonyos számú részei közt, 's ha magát megint az elébbeni eset adná elő, ismét a' részek' részei közt kellene hova tovább újabb meg újabb arányokat keresgélteni.

P. o. Ha egy merőszegnek (*rectangulum*) átszőgellőjéről (*diagonalis*) kérdenék, mekkora volna az, a' mellék oldalak' (*cathetus*) mértékeiben? más képen: mi volna, annak a' mellék oldalak' mértékéül felvett egységhez képesti aránya? (*ratio*) ezen kérdésre egész számokban kitétethető feleletet csak igen ritkaesetekben, t. i. csupán az úgy nevezett ráviteles (*rationalis*) gyökereknél lehetne adni, minden rávihetlen gyökereknél pedig, a' mérték' részeinek ré-

szei között végetlenül folytatva, újabb meg újabb arányok' keresgetése lenne szükségessé.

Azonban noha így, valamelly rávihetlen mekkoraságot soha számok által tökéletesen még nem lehet határozni, nem következik mindazonáltal, hogy ugyan azon mértékhez rávihetlen két különböző mekkoraságoknak egymás-közt, számokban előadható aránya ne volna. p. o. $\sqrt{3}$ és $2\sqrt{3}$ egy közös mértékre nézve rávihetlen mennyiségek, még is: $\sqrt{3} : 2\sqrt{3} = \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{3}} = \frac{1}{2} = 1 : 2$.

Ezen szemléletek a' szakatlan mennyiségek' (*quantitas continua*) tulajdonságiból következő, végetlen nagyok' és végetlen kicsinyek' vizsgálatára vonják figyelmünket. Ugyan is:

a.) Midőn az egységet, a' maga részeihez 's részeinek részeihez akarjuk hasonlítani, még pedig úgy hogy a' hasonlítgatásban soha meg ne állapodjunk, ezen viszonyt (*relatio*) vesszük vizsgálat alá $1 : x = \frac{1}{x}$ az x -et változónak gondolván. Már ha az x et határozatlanul nevekedhetőnek tekintjük, látnivalóképen az $\frac{1}{x}$ nek értéke a' szerint fogyatkozik, a' mint annak nevezője egymás után nagyobb és nagyobb lesz, 's ezen fogyatkozásnak a' semmiségen kívül más határa nem lehet; vagy, azt kell mondanunk hogy a' mennyiségeket, több több részekre osztás által mind addig lehet kisebbiteni, valámig azok semmivé $= 0$ nem lesznek; 's viszont, a' mennyiség csak akkor lehet semmivé, ha végetlen sokfelé osztatik. Mellyből az x nek határozatlanul vagy végetlenül nagy értékére nézve, a' végetlenség' bevett jegyével $= \infty$ lesz:

$$\frac{1}{\infty} = 0; \text{ innét: } \frac{1}{0} = \infty \text{ és } 1 = 0. \infty.$$

b.) A' semmiségnek és végetlenségnek ismértei tehát, egymással szoros összeköttetésben állanak. A' ki a' semmiséget a' fogyatkozó mennyiségek' véghatárának lenni elismeri, annak egyszersmind el kell ismerni a' végetlenséget a' nevekedő mennyiségek' véghatárának, 's a' ki meg engedi, hogy $\frac{1}{0} = \infty$ vagy is, akármilyen mennyiség 's mekkoraság a' semmihez képest, számokban ki nem tétethető végetlen nagy rávitelben áll, annak egyszersmind el kell ismerni, hogy $\frac{1}{\infty} = 0$ vagy is, akármilyen mennyiségnek 's mekkoraságnak, a' számokban ki nem tétethető végetlen nagysághoz hasonlított rávitele, egyenlő

semmihez $= 0$. azaz: akármilyen véges, számokban kitétethető mennyiség a' végetlennek gondolatotthoz képest semmivé lesz és elenyészik.

c.) $1 = 0. \infty$. A' semmiséget hogy belőle akármilyen, ha bár számokban kitétethető legkisebb mennyiség is t. i. egység (melly a' számoknak eleme) lehessen, végetlennel kellene sokszorozni. Ennél fogva a' semmiséget akármilyen gondolható vagy képzelhető mennyiséggel sokszorozzuk, annak tevéte (*factum*) mindenkor kisebb a' lehető legkisebb mennyiségnél t. i. az egységnél, tehát $= 0$; mivel akármilyen nagy gondolható meghatározott mennyiség, kisebb a' végetlen 's meghatározatlanul nagy mennyiségnél. Azért is $0 \cdot x = 0$; $0 \cdot y = 0 = 0 \cdot a = 0 \dots 's a' t$.

d.) A' semmiségnek mennyiség tekintetbeli lételet, a' fogyatkozó és nevedő szakatlan mennyiségekben lehetetlen tagadni, ugyan is: ha egy felvett állandó mekkoróság vagy meghatározott szakatlan mennyiség, változó szakatlan mennyiséggel kivonás' jegye által összekapcsolatik, ezen kitétel: $a - x$; minthogy a' változó kisebb lehet a-nál azon esetben valamely maradékot hágy fenn, melly semminél nagyobb. Ha azontul az x et szakatlanul nevedkedni gondoljuk, egyszer annak akkorának kell lenni mint a melly esetben $a - x = 0$'s ha még is nevededik lesz $x > a$ és $a - x$ tagadó maradékot fog jelenteni, melly azt teszi: hogy az állító szakatlan mennyiségnek, minekelőtte tagadóvá lenne, szükségképen $0 - n$ kell keresztül menni; szükségképen semmivé kell lennie, vagy el kell enyésznie.

e.) Mind ezek mellett pedig $0 = 0$. Ha tehát két olyatén mennyiségeket mint c.) alatt, összehasonlítunk $\frac{0 \cdot x}{0 \cdot y} = \frac{0}{0} = \frac{x}{y}$; $\frac{0 \cdot x}{0 \cdot z} = \frac{0}{0} = \frac{x}{z}$; $\frac{0 \cdot a}{0 \cdot x} = \frac{0}{0} = \frac{a}{x} \dots 's a' t$. azoknak, a' velők egybekötött mennyiségek' minden meghatározott értékeire nézve, szintén úgy meghatározott és számokban kitétethető rávitelek vannak, 's ugyan az igaz, az a.) alatt előadott szoros egybekötöttség miatt a' végetlenségről is. Minekokáért noha általánosán a' semmi semmivel és a' végetlen végetlennel egyenlő; mindazonáltal, azoknak különböző összekötöttesek miatt származott rávitelek különbözők, és a' származás' törvénye, 's a' származtató mennyiségek' meghatározatása szerint meghatározottak. 'S ezen okból:

f.) A' sokszorozás' jegyével más mennyiségekhez kapcsolt, végetlen kicsiny 's végetlen nagy mennyiségek magokban, vagy más állandó 's változó mennyiségekhez hasonlítva mindenkor $= 0$ vagy $= \infty$: ellenben magokhoz 's egymáshoz képest meghatározott rávitelek lehetnek 's vannak, mellyeket az

elenyésző változónak függvényéből kell kikeresni, az eredeti függvény' ismerése nélkül pedig ráviteleik ezen értékeiről sem ítéltünk.

g.) Ezek szerint a' semmiséget és végetlenséget, mennyiségnek t. i. az egyiket fogyható, a' másikat szaporítható nagyságnak, nem lehet ugyan tartani; mindazáltal mind kettőnek megfogása a' mennyiségek' megfogásával olly szoros kapcsolatban áll, hogy a' nélkül a' mennyiségek' fogyásáról, nevedéséről, tagadókká válásáról, 's ezen tekintetekből támadó tulajdonságairól teendő vizsgálatoknál tellyességgel el nem lehetünk. Mind a' semmiségnek, mind a' végetlenségnek megfogásai csupán tagadók. A' semmiség nem egyéb mint olly végetlenül vagy határtalanul megkicsinyített mekkoraság, melly megszűnik számokban kitétethető, akármi véges mennyiséghez hasonlítható, 's a' fogyasztás által kisebbsíthető mennyiség lenni; mellyet csupán azon okból hogy a' szüntelen fogyatkozás' megállapodatlan képzetének kitűzött határ vettessék, semminek nevezünk, 's hasonló okból a' számokban ki nem tétethető határtalanul nagy mennyiséget végetlenségnek mondjuk.

h.) A' szakatlan mennyiségek' tulajdonságainak fejtegetése körül tehát, a' fentebb előterjesztett értelemhez képest, a' végetlen kicsinyek' és végetlen nagyok' vizsgálatába szükségképen bé kell az analysisnek bocsátkozni, 's hogy ezt, azoknak rávitelei' keresésére, 's az azokból származó következményekre nézve meg is teheti, az e.) alatt előadottakból világos.

Ha már most, a' változó x nek nevedését végetlen kicsinynek vesszük fel, és azt, hogy ugyan azon változónak véges $= \Delta x$ nevedéseitől megkülönböztessük dx -el 's így az y véges nevedését Δy ; végetlen kis nevedését dy -al 's a' t. jegyezvén, a' külzéstől (*differentia*) megkülönböztetőleg a' dx -et dy -ont 's a' t. külzeléknek (*differentiale*), azon hánylás' (*calculus*) nemét pedig, melly a' végetlen kis nevedésekkel vagy külzelékekkel foglalatoskodik, külzelék hánylásnak (*calculus differentialis*) fogjuk nevezni. Ollyas esetekben, hol a' nevedések általában tekintetvén, azoknak véges, vagy végetlen megkülönböztetéseket semmi szükség nem kívánja; az ekként általánosan akár véges akár végetlen nevedések' kitételére $l, h, k, \dots u, v, w$, 's a' t. betűk használatnak.

Továbbá: az elemi algebrában az ismeretlenek, a' felsőbb analysisben pedig a' változók, mind egymással mind az egyenlítésekre és függvényekre befoglalt állandókkal, különbözőképen összeszerkeztetve fordulhatnak elő, melly öszveszerkeztetéseknek egy nemét kapcsolatoknak (*combinatio*), onnét pedig ismét azon hánylás' nemét is, melly a' szerkezeteknek különbféle előállítható

formái 's mennyiségbeli tulajdonságai körül forgolódik, kapcsolatos hánylásnak (*calculus combinatorius*) hívjuk.

Ezek szerint, az egész általános számvetés (*arithmetica universalis*) következő részekre oszlik:

1.) Elemi Algebrára v. csak egyszerűn Algebrára. Tárnya a' véges mennyiségek' tulajdonságainak, és a' határozott 's határozatlan ismeretlenek' értékeinek 's ráviteleinek felkeresése.

2.) A' Függvények (*functiones*) tudománya, mellynek mind a' külzés, mind a' külzelék hánylások' tudományát meg kell előzni; a' változó akar szakos akar szakatlan mennyiségeket magokban foglaló analitikai kitételeknek általános tulajdonságait vizsgálja, egyszersmind azokat az algebra tárgyaira alkalmazván, annak tételeit 's tanitmányait felvilágosítja bővíti 's bizonyítja.

3.) Külzés hánylás (*calculus differentiarum*) a' nevedkedhető vagy fogyható, szakos mennyiségeknek gondolt változók körül forgolódik.

4.) Külzelék hánylás (*calculus differentialis*) a' végetlenül nevedkedhető 's fogyható szakatlan mennyiségekről 's a' végetlen kicsinynek gondolt külzelékek' ráviteleiről tanít.

5.) Kapcsolati hánylás (*calculus combinatorius*). Az analitikai kitételekben előfordulható különbféle mennyiségek' egybeszerkesztése formáit 's mennyiségbeli tulajdonságait fejtegeti.

Ezen felállított rendszerhez képest az elemi algebrának tanitmányait tudva lévőknek tévén fel, ezentúl a' Függvények' tudományát fogjuk előadni.

A' Függvényekről általában.

(*De functionibus in genere.*)

A' fentebb előadott értelem szerint tehát, minden kitételek, mellyekben valamely változó foglaltatik, azon változónak függvényei: 's minthogy az ilyen kitételek a' bennök foglalt változónak értékével együtt változnak, ha az egész kitétet, mint csak egy változót tekintjük 's egyes betűjeggyel nevezük, ezen egyes betűjeggyel nevezett változó is, a' kitételben befoglalt változónak vagy változóknak leszen függvénye. p. o. $Ax^2 + Bx - C$ egy egész kitétel, melly a' befoglalt x változóról az x függvényének mondatik, hogy ha pedig ugyan

ezen egész kitétel jelentésére egy magános változót p. o. y — ont veszünk fel, leszen az y is függvénye x nek.

Illyenkor az egész kitételnek jelentésére felvett magános betűjegyet, látni valóképen a' kitétellel magával egyenlítésbe lehet tenni. p. o. a' fentebbi esetben volna:

$$y = Ax' + Bx - C \text{ és az } y \text{ függvénye az } x \text{ nek.}$$

Ezenkívül mint mondatott, az egyenlítések azon törvényt tejesztik elő: mellynél fogva annak két külön tagai egymással egyenlőkké lesznek, 's azon törvénynek tudatából, ha az egyik tag adatik, belőle a' másikat meg lehet határozni; 's az egyik tag, különösebben az egyik változó, (minthogy az állandó mennyiségek értéke mindenkor ugyan az marad) ahoz képest lessz az egyenlítés törvényeivel megegyezőleg kisebbé vagy nagyobbá, a' mint az egyik változó fogy vagy nevedik. Minekokáért hasonlóképen:

Azon változók mellyek közül egyiknek változásával a' másiknak is szükségképen változni kelletik, egymásnak kölcsönösen függvényei. P. o. a' görbe liniáknál a' metszékek (*abscissae*) változásával, változnak az öszrendesek; (*coordinatae*) a' szabadon leeső vagy akarmikép mozdulásra indított testeknél, az idő' t. i. az esés vagy mozgás tartóssága' változásával, változnak az által futott térek, tehát: a' metszékek és öszrendesek, az idő és tér, egymásnak kölcsönösen függvényei.

Továbbá részint azért, hogy a' különben hosszú analytikai kitételek meg rövidítve szem elébe terjesztessenek, részint azért, hogy nem csak a' kitételekben előforduló külön mennyiségek, hanem magok azon egész kitételek is, általános vizsgálatok alá vonathassanak; az ollyan egész kitételeknek szem elébe terjesztésére, a' szerint a' mint egy vagy több változót foglalnak magokban, a' változók elébe írott $F, F', f, \varphi, \psi, f', \phi, \psi' \dots$'s a' t. jegyek vétettek fel így: $F(x); f'(x); \varphi(x, y, z \dots)$ melly közben különböző alkatásu kitételek különböző betűkkel jegyeztetnek, az így eljegyzettek pedig hasonlóképen a' befoglalt változók függvényeinek hivattatnak; ellenben azon munkálatoknak végbe vitele, mellyeken a' függvény jegye alá befoglalt egy vagy több változóknak, hogy belőlök bizonyos függvény származzék, keresztül kell menni; a' függvény kifejtésének neveztetik.

A' függvények különféle nemekre és fajokra osztatnak:

Algebrai függvényeknek (*functiones algebraicae*) neveztetnek azok, mellyeknek, (a' beléjek foglalt változó ismeretlennek tekintetvén) vagy közbevetve vagy közbevetlenül, meghatározott számu tagokból álló algebrai egyenlítés felel meg. p. o.

$Ax^2 + Bx - C = 0$ algebrai függvénye az x nek, mivel az x et ismeretlennek tekintvén, belőle közbevetlenül ezen egyenlítést formálhatjuk:

$$Ax^2 + Bx = C$$

mellyből az x nek mint ismeretlennek értéke:

$$x = \pm \sqrt{\frac{B^2}{4A^2} + \frac{C}{A}} - \frac{B}{2A}$$

Hasonlag: $y = 1 + \frac{x}{a} + \frac{x^2}{a^2} + \frac{x^3}{a^3} + \frac{x^4}{a^4} + \dots$'s a ' t. algebrai függvény; mert noha látszóképen végtelen számú tagokból áll, mindazonáltal (mivel: $\frac{a}{a-x} = 1 + \frac{x}{a} + \frac{x^2}{a^2} + \frac{x^3}{a^3} + \dots$'s a ' t.) közbevetve ezen algebrai egyenlítésre vonathatik $y = \frac{a}{a-x}$. A' bizonyos törvény szerint alkotott véges vagy végtelen számú tagokból álló függvények véges vagy végtelen sorzatoknak (*series*) mondatnak.

Némelly egyenlítésekből, az ismeretlennek értékét, semmi módokon véges számú tagok által nem lehet meghatározni. Illyenek p. o. azok, melyekben az ismeretlen mint kitevő jelenik meg, 's ugyan azért kitevőlegéseknek (*exponentialis*) neveztetnek. p. o. ha volna: $A = a^x$. Hogy ezen egyenlítésből az ismeretlennek értékét kitalálhassuk, arra az elemi algebra semmi módokat előadni nem tud. Más forma alatt: az a^x függvénynek gondoltatván 's $f(x) = y$ nak tétetvén lenne: $y = a^x = f(x)$.

Ezen egyenlítésben ha az egyik ismeretlennek értékét szabadon felvesszük, az algebrai egyenlítéseknek fentebb kifejtett természete szerint, éppen az által a ' másik ismeretlennek minden esetekben hasonló munkálatok' végbevitelével kellene meghatározatni. Tévé pedig a ' jelen példában szabad akaratként $x = 0; 1; 2; 3; \dots$'s a ' t. $= -1; -2; -3 \dots$'s a ' t. $= \frac{1}{2}; \frac{1}{3}; \frac{1}{4} \dots$'s a ' t. $= -\frac{1}{2}; -\frac{1}{3}; -\frac{1}{4} \dots$'s a ' t. mind ezen külön esetekben a ' másik ismeretlen y más más munkálatok által határozatnék meg, 's annak az x szabadon felvett értékéhez képesti értékeit; $y = 1; = a; = a^2; = a^3 \dots$'s a ' t. $y = \frac{1}{a}; = \frac{1}{a^2}; = \frac{1}{a^3} \dots$'s a ' t. $y = \sqrt{a}; = \sqrt[3]{a}; = \sqrt[4]{a} \dots$'s a ' t.

$y = \frac{1}{\sqrt{a}}; = \frac{1}{\sqrt[3]{a}}; = \frac{1}{\sqrt[4]{a}} \dots$'s a' t. mindenkor más más munkálatok által kellene keresgélteni.

Illyen végetlenül sokféle, sőt egymással éppen ellenkező munkálatoknak általános törvényét, véges tagokból álló egyenlítésben, az az olyanban, mellynél fogva mint fentebb láttuk, az ismeretlennek értékei, mindenkor ugyan azon nemű munkálatok, 's véges számú adott tagok által határozatnának meg, előterjeszteni lehetetlen, minél fogva az illyenek túl h á g ó f ü g g v é n y e k n e k (*transcendentes*) mondatnak.

Mindazonáltal alább látni fogjuk, hogy ezeknek törvényét is, végetlen tagokból álló egyenlítésekbe lehet foglalni, 's ekképen valamint a' túl h á g ó f ü g g v é n y e k b ű l mindenkor csupán végetlen tagokból álló kitételt lehet származtatni, szintűgy megfordítva, azon végetlen tagokból álló kitételek, melyeket semmiképen algebrai egyenlítésre vissza vinni nem lehet, mindenkor túl h á g ó f ü g g v é n y e k r e mutatnak, noha azok sok esetekben ismeretlenek. Továbbá a' függvények:

Összetettek (*compositae*), melyekben a' változó ismét más változónak függvénye, p. o. ha $f(t) = At^2 + Bt - C$ mellyben t volna $= \sqrt{ax+b}$ lenne t helyett ezen értéknek helyre tételével $\psi(x) = A(ax+b) + B\sqrt{ax+b} - C$ összetett függvénye x nek.

Eredezettek (*derivatae*). Mikor ezen összetételek több függvényeken keresztül, ugyan azon változóra nézre mindig egy törvény szerint folytattnak. p. o. Ha volna a' fentebbi példában $f(t) = \sqrt{ax+b}$ mellyben x ismét volna $= \sqrt{ay+b}$ és tovább y ismét $= \sqrt{az+b}$ lenne a' kívántató helyre tételek után $\varphi(y) = \sqrt{a\sqrt{ay+b} + b}$; $\psi(z) = \sqrt{a\sqrt{a\sqrt{az+b} + b} + b}$ Vagy is: mivel a' változó mindenféle értéket felvehet tétetvén $x = y = z$ lenne $f(x) = \sqrt{ax+b}$ ből $\varphi(x) = \sqrt{a \times \sqrt{ax+b} + b}$ első, $\psi(x) = \sqrt{a \times \sqrt{a \times \sqrt{ax+b} + b} + b}$ második, eredeztetett függvény; mellyekben $f(x)$ ből $\varphi(x)$ et ebből ismét $\psi(x)$ et ugyan azon törvény szerint t. i. ugy származtattuk hogy $f(x)$ ben x helyett $\sqrt{ax+b}$ ét 's hasonlóképen $\varphi(x)$ ben x helyett $\sqrt{ax+b}$ ét tettünk: 's ehhez képest viszont az olyan függvények, mellyekből ugyan azon törvények szerint más függvények származnak:

Nemzőknek, eredetieknek (*generatrices, primitivae, originariae*) v. kezdetieknek mondatnak.

Az ilyen eredeztetett függvények, a' függvény-jegy' ismétlésével szoktak iratni így: $f(x)$; $ff(x)$; $fff(x)$; ... 's a' t. vagy még rövidebben a' kitevő jegyek' használatával így: $f^1(x)$; $f^2(x)$; $f^3(x)$; 's a' t. melyeknek értelme tehát ez: hogy, a' milyen függvénye x nek az $f^1(x)$ szinte olyan függvénye $f^1(x)$ nek az $f^2(x)$ és $f^2(x)$ nek az $f^3(x)$'s a' t.

Nem különben, ezen eljegyzéshez kötött megfogásnak, visszaható értelmet adván; mivel $f^1 f^{-1}(x) = f^0(x) = x$; az $f^{-1}(x)$ azon függvényt fogja tenni, mely $f^1(x)$ ben x helyett tétetvén magát az x et hozza elő, melyből ismét a' több hasonló p. o. $f^{-m}(x)$ eljegyzéseknek értelmök is világos. T. i. Ha a' függvényeket, említett mód szerint egymásból eredeztetjük $f^{-m}(x) = f^{0-m}(x)$ ből (x helyett egymás után $f(x)$ et tévén) $ff^{-m}(x) = f^{1-m}(x)$; ebből $f^{2-m}(x)$; ebből ismét $f^{2-m}(x)$ $f^{-1}(x)$; $f^0(x) = x$; $f^1(x)$; 's tovább $f^2(x)$; $f^3(x)$ $f^m(x)$ származnak. Vagy is: Ha az $f^{-m}(x)$ -et eredeti függvénynek nézzük, a' tőle eredeztetett első függvény $f^{1-m}(x)$; a' második $f^{2-m}(x)$ m dik $f^0(x) = x$; $m+1$ dik $f^1(x)$; $m+2$ dik $f^2(x)$'s a' t. mint volt az x től eredeztetett első függvény $f(x)$ második $f^2(x)$'s a' t.

Szamos függvények (*discretae*), melyekben a' változók' nevedése számokban kitétethető lépcsőnként, vagy véges mennyiségek szerint történik.

Szakaatlanok (*continuae*), melyekben a' változókhoz járuló nevedések végtelen kicsinyeknek tekintetnek, 's ennél fogva a' bevezetésben előterjesztett szemléletek szerint, elenyészőknek, semmivel egyenlőknek $= 0$ mondatnak, és rávitelek 's össze köttetéseik azon nézetek szerint ítéltetnek.

Különösebben:

Bontott függvények (*explicitae*). Melyekben valamelyik változó a' többtől elkülönözve magánosan áll. p. o. $y = Ax^2 + Bx - C$.

Bontatlanok (*implicitae*), melyekben a' változók egymástól így el választva nincsenek p. o. $x^2 - cx^2y + y^2 = 0$; vagy $y = a^x$ ebben y bontott függvénye x nek, x pedig y nak bontatlan függvénye.

Ráviteles v. rávihetős (*rationalis*), melyekben a' változók kitevőji mindnyájan egész számok.

Ráviteletlen v. rávihetlen (*irrationalis*) melyekben a' változók kitevőji között tört számok találtnak.

Képzeletesek (*imaginae*), melyekben $\sqrt{-1}$ el sokszorozott mennyiségek jönnek elő.

Valóságok (*reales*), melyekben olyanok elő nem fordulnak.

Egészek (*integrae*), ha nevezőjük nincs, vagy ha van is, azokban változó nem foglaltatik.

Törttek (*fractae*), melyeknek nevezőjökben változó jelenik meg. Még pedig:

Öntörttek (*genuinae*), ha a' számszójokba (*numerator*) foglalt,

Öntelentörttek (*impropriae*), ha a' nevezőjökbe foglalt változónak kitevője nagyobb.

Hasonlók (*similes*), melyekben az állandó mennyiségek a' változókkal hasonló törvények szerint vannak összekapcsolva, ha szintén azok más betűjegyekkel neveztettek is el. p. o. $\frac{ax - x^2}{b + x}$ és $\frac{ay - y^2}{b + y}$ hasonló függvények, ezeknek kitételére a' változókat ugyan azon függvény-jegyek alá lehet foglalni, így: $f(x)$; $f(y)$.

Hasonlatlanok (*dissimiles*), melyekben a' változóknak 's állandóknak összekapcsolataik különböznek.

Azon formájúk (*ejusdem formae*), melyekben a' változóknak ugyan azon hatványai foglaltatnak p. o. $a + bx + cx^2 + dx^3$ és $A + Bx + Cx^2 + Dx^3$.

Egyformások (*uniformes*), melyekben a' változó' szabad tetszésként felvett különös értékeinek megfelelőkép, a' függvénynek is mindenkor csak egy értéke származik.

Két, három, több, vagy sokformások (*biformes, multiformes*), melyekben a' változó' minden egyes különös értékéhez képest, a' függvénynek két, három, 's több értékei vannak. p. o. $f(x) = A + Bx$ egyformás,

$$f(x) = x \pm \sqrt{x^2 + ax - b} \text{ két formás függvény.}$$

Egy néműk (*homogeneae*) ha minden tagban a' változók' kitevőinek öszvete egyenlő p. o. $f(x, y) = x^3 + bx^2y + cxy^2 + y^3$.

Más néműk (*heterogeneae*), melyekben nem minden tagok' változói kitevőinek öszvete egyenlő p. o. $f(x, y) = a + bx^2y + cx^3y + x^5$.

Ezen különböztetés a' függvények' tagaira nézve is szokott alkalmaztatni, 's azon tagok melyekben a' változók kitevőinek öszvete ugyan az, egy némű; a' többiek más némű tagoknak neveztetnek. p. o. $f(x, y) = x^6 + x^5y + x^4y^2 + x^3y^3$ ebben x^6 és x^5y egy némű, x^4y^2 és x^3y^3 más némű tagok.

Öszmérségesek (*symmetricae*), melyeknek értékeik ha bennök a' változók egymással felcseréltetnek, meg nem változnak.

Mivel a' változó mennyiségek, az alatt míg az állandóknak egyszer meghatározott értékek folyvást ugyan az marad, minden lehető legkisebb és leg-

nagyobb értéket felvehetnek: a' függvények pedig, a' változóknak állandó mennyiségekkel vegyes különféle összeköttetéseikből állanak: következik, hogy azon összeköttetések szerint, 's a' bevezetésben a' változóknak végetlen nevedésök 's fogyatkozásukról előterjesztett ismeretekkel egyezőleg:

a.) A' hasonjegyű, az az csupa állító vagy csupa tagadó végetlenül nevedő mennyiségek, — vagy az állandókból és végetlenül nevedő egy jegyű mennyiségekből származott öszvet, végetlen nagyra nő; két végetlenig nevedő külön jegyű mennyiségek öszvete pedig, végetlenné nőhet, végetlenül fogyhat, vagy változatlanul maradhat: — ellenben a' végetlenül fogyó akar azon egy, akar külön jegyű mennyiségek öszvete, minden képzelhetőnél kisebbé válik.

b.) A' végetlen nagygyá nevedő mennyiségek tevete (*factum*) egymással vagy állandó mennyiségekkel, végetlen nagygyá; — a' végetlenül fogyóké egymással vagy állandó mennyiségekkel, végetlen kicsinyé lesz.

c.) Az olyan tört függvény mellynek számszója állandóul maradván, nevezője változik; végetlen nagygyá leszen ha a' nevező végetlenül fogy, végetlen kicsinyé ha a' nevező végetlenül nevededik.

d.) A' változatlan hatványra emelt változó mennyiség p. o. x^a végetlen nagygyá vagy végetlen kicsinyé válik, a' szerint a' mint gyökere végetlenül nő, vagy végetlenül fogy.

e.) Az 1-nél nagyobb változatlan gyökér, állító hatványra emelve, p. o. a^x mellyben $a > 1$, a' kitevő (*exponens*) végetlen nevedésével végetlenül nő, végetlen fogyásával végetlenül kisebbedik. Ha pedig $a < 1$ az állító kitevő végetlen nevedésével végetlenül fogy, a' tagadó kitevő végetlen nevedésével végetlenül nő.

f.) A' végetlen nagy mennyiség, végesnek, a' véges mennyiség végetlen kicsinynek hozzá járultával kisebbé vagy nagyobbá nem lehet, az az: $\infty \pm a = \infty$ marad. Ugyan is: ha ezen egyenlítés igaz, leszen: $\frac{\infty}{\infty} \pm \frac{a}{\infty} = \frac{\infty}{\infty}$ mellyben (6.lap a.) szerint lévén $\frac{1}{\infty} = 0$ találtatik $\frac{a}{\infty} = \frac{1}{\infty}$. $a = 0$. $a = 0$ (7.lap c.)

g.) A' magasabb hatványra (*potentia*) emelt végetlen nagyság, egy kisebb hatványunak hozzáátételével, nem különben az alsóbb hatványra emelt végetlen kicsiny, felsőbb hatványunak hozzá járultával sem nem nő, sem nem

fogy. az az $\frac{a^n}{0^n} + \frac{a^{n-1}}{0^{n-1}} = \frac{a^n}{0^n}; \frac{a^n \cdot 0^{n-1}}{0^n} + a^{n-1} = \frac{a^n \cdot 0^{n-1}}{0^n}; \frac{a^n}{0} + a^{n-1} = \frac{a^n}{0}$

melly utolsó egyenlítésben a^{n-1} mint véges mennyiség a' végetlen $\frac{a^n}{0}$ hoz képest (f.) szerint) elenyészik. — A' végetlen kicsinyekre nézve mindenben hasonló megmutatások alkalmaztathatnak.

h.) A' hasonló kitételek alatt $\frac{F(x)}{f(x)}$ vagy általában $\varphi(x)$ mikor azok az

x nek bizonyos értékével $\frac{0}{0}; 0^n; \frac{a}{0}; \infty; \infty - \infty; 0 - 0$ ba mennek

által, gyakran (7 lap e.) szerint) a' végetlen nagyoknak 's végetlen kicsinyeknek számokban kitétethető rávitelek lappanghatnak, mellyeket tehát az eredeti függvényből kell vagy egyenesen elitélni, vagy ha a' változó helyett annak végetlen kicsinyével nevezkedő értéke tétetvén, a' függvény ahhoz képest igazítatik, a' kívánt rávitelek azzonnal előtűnnek. Felvilágosításul néhány példák szolgáljanak.

Lévén $\varphi(x) = \frac{F(x)}{f(x)} = \frac{a^3 - x^3}{a - x}$ ebből midőn $x = a$, leszen $\varphi(a) = \frac{0}{0}$

De mivel: $a^3 - x^3 = (a^2 + ax + x^2)(a - x)$ következik: $\frac{(a^2 + ax + x^2)(a - x)}{a - x}$

$= a^2 + ax + x^2$'s azon esetben mikor $x = a$, leszen: $\frac{0}{0} = 3a^2$.

Másképen: Tétetvén x helyett, annak végetlen kis nevezkedésével $x + h$, leszen: $\frac{a^3 - (x+h)^3}{a - (x+h)} = \frac{a^3 - (x^3 + 3x^2h + 3xh^2 + h^3)}{a - x - h}$ és mikor $x = a$, le-

szen: $\frac{3a^2h + 3ah^2 + h^3}{h} = 3a^2 + 3ah + h^2$, vagy mivel a' végetlen kicsinyek, 's

azokkal sokszorozva egybekötött mennyiségek a' végesekhez képest elenyésznek, $\frac{0}{0} = 3a^2$ mint fentebb.

$\infty - \infty$ ra nézve:

Legyen $\varphi(x) = \frac{1}{1-x} - \frac{2}{1-x^2}$ lévén $x = 1$, leszen $\varphi(1) = \frac{1}{0} - \frac{2}{0}$

$$= \infty - \infty \text{ de mivel: } 1 - x^2 = (1-x) \cdot (1+x) \text{ lesz } \varphi(x) = \frac{1+x-2}{(1-x)^2} =$$

$$\frac{x-1}{(1-x)^2} = -\frac{(1-x)}{(1-x)^2} = \frac{1-x}{-1} \cdot \frac{1}{1-x} \text{ és } x \text{ helyett } 1\text{-et tévén } \infty - \infty$$

$$= -\frac{1}{2}.$$

Másképen: tétetvén x helyett $(x+h)$ lesz: $\varphi(x+h) = \frac{1}{1-(x+h)}$

$$\frac{-2}{1-(x+h)^2} \text{ 's lévén } x=1 \text{ akkor: } \frac{1}{-h} \cdot \frac{-2}{-h^2-2h} = \frac{-h^2-2h+2h}{h^2+2h^2}$$

$$= \frac{-h^2}{h^2+2h^2} = \frac{-1}{2+h} = \frac{-1}{2} \text{ mivel } h \text{ elenyészik (7. lap. f.) szerint.}$$

Hasonlón kell bánni a' végetlenséghez járulható állító és tagadó jegyek meghatározásában. P. o. Legyen $\frac{F(x)}{f(x)} = \frac{a+bx}{cx+dx^2+ex^3}$ lévén $x=0$ lesz $\frac{F(0)}{f(0)} = \frac{a}{0} = \infty$ melyből a' végetlenség' állító vagy tagadó jegyét egyenesen elhatározni nem lehetne. Tétetvén pedig x helyett $x+h$ találtatik: $\frac{F(x+h)}{f(x+h)} = \frac{a+bh}{(c+dh+eh^2)h}$ melyben mivel $a > bh$ és $c > dh+eh^2$ a' végetlenség, $\frac{a}{c}$ jegyeit fogja felvenni, vagy is a' szerint a' mint $\frac{a}{c}$; állító vagy tagadó lesz.

0^n -re nézve:

Ha az n állító egész vagy tört mennyiség, akkor a' 0^n a' 0 -nak valamely hatványát avagy gyökerét jelentvén ezen két-esetekben mindenkor $= 0$ marad, ellenben ha $n=0$ vagy n tagadó mennyiséget teszen, akkor az 0^n -nek meghatározott rávitelekre mutató értelmet kell tulajdonítani. Mellynél fogva:

Ha n állító egész vagy tört szám ... $0^n = 0$

Ha n tagadó egész vagy tört szám ... $0^{-n} = \frac{1}{0^n} = \infty$

Ha $n = 0$... $0^0 = \frac{0^n}{0^n} = \frac{1 \times 0^n}{1 \times 0^n} = 1$

Midőn valamely folyvást nevekődő vagy fogyatkozó változó függvényének értéke, valami állandó mennyiséghez annyira közelít, hogy a' kettő közti

különbség végtire bármily gondolható mennyiségnél kisebbé válik, azon állandó neveztetik a' függvény határának vagy határ értékének. (*Limes*) P. o. Le-
gyen:

$y = \frac{a+bx}{c+dx}$ lévén $x = \infty$ lenne $y = \frac{a+b\infty}{a+d\infty}$ melyből ugyan az y -ont meghatározni nem lehetne, de mivel ugyan ezen egyenlítés szerint

$$y = \frac{\frac{a}{x} + b}{\frac{c}{x} + d} \text{ és midőn } x = \infty; y = \frac{0+b}{0+d} = \frac{b}{d}. \text{ Melly azt teszi: hogy}$$

valamíg az x -nek véges értéke van soha addig $y = \frac{b}{d}$ nem lehet, ámbár ahhoz

az x -nek nevedésével mindig közelit, 's ezen esetben az y -nak vagy is a' folyvást nevedhető x függvényének határa $\frac{b}{d}$. Nem különben ha a' fent-

tebbi egyenlítésben $x = 0$ tétetik, leszen $y = \frac{a+0}{c+0} = \frac{a}{c}$; vagy is a' szüntel-

en fogyatkozható x függvényének határa $\frac{a}{c}$.

A' Határ értékekről megjegyzendők:

a.) Ha egy változónak $= x$ határ értéke $= a$, minthogy a' változó ezen határ értékhez végtelenül közelit: feltéven hogy h végtelenül fogyatkozó mennyiséget jelent tehetjük $= a + h$.

Ha pedig az x állandóvá $= c$ lenne, akkor a' h -nak mellytől az x változhatósága függ, szükség volna $= 0$ válnia: tehát a' változóknak határ értékeit $\text{Lim. } x$, $\text{Lim. } y$, $\text{Lim. } z \dots$ vel 's a' t. a' végtelenül fogyható mennyiségeket pedig h , $k \dots$ val jegyezvén:

$$1.) x = \text{Lim. } (x + h)$$

$$a.) c = \text{Lim. } c$$

b.) $\text{Lim. } (x \pm y) = x \pm y = \text{Lim. } x + h \pm \text{Lim. } y + k$ és mivel h , k , végtelenül fogy:

$$2.) \text{Lim. } (x \pm y) = \text{Lim. } x \pm \text{Lim. } y$$

c.) $x = \text{Lim. } x + h$; $y = \text{Lim. } y + k$ tehát $xy = \text{Lim. } x \text{ Lim. } y + k \text{ Lim. } x + h \text{ Lim. } y + hk$ tehát mivel a' végtelen kicsinnyel sokszorozott tagok elenyésznek:

$$3.) \operatorname{Lim.} (x y) = \operatorname{Lim.} x \operatorname{Lim.} y$$

$$d.) \operatorname{Lim.} (x y^{-1}) = \operatorname{Lim.} \left(\frac{x}{y} \right) = \operatorname{Lim.} x \operatorname{Lim.} y^{-1} = \frac{\operatorname{Lim.} x}{\operatorname{Lim.} y}.$$

$$4.) \operatorname{Lim.} \left(\frac{x}{y} \right) = \frac{\operatorname{Lim.} x}{\operatorname{Lim.} y}.$$

e.) Tétetvén $xy = t$ legyen: $\operatorname{Lim.} (tz) = \operatorname{Lim.} t \operatorname{Lim.} z = \operatorname{Lim.} x \operatorname{Lim.} y \operatorname{Lim.} z$; és általában $\operatorname{Lim.} (x. y. z. v. \dots) = \operatorname{Lim.} x \operatorname{Lim.} y \operatorname{Lim.} z \operatorname{Lim.} v \dots$'s a' t. melyben ismét $x = y = z = v \dots$ nek tétetvén $(\operatorname{Lim.} x)^m = (\operatorname{Lim.} x^m)$ tehát:

$$5.) \operatorname{Lim.} (x y z v \dots) = \operatorname{Lim.} x \operatorname{Lim.} y \operatorname{Lim.} z \operatorname{Lim.} v \dots \text{ 's a' t.}$$

$$\operatorname{Lim.} (x^m) = (\operatorname{Lim.} x)^m$$

Legyen $m = \frac{p}{q}$ az az: tört kitevőre nézve:

tétessek x helyett $x^{\frac{p}{q}}$; m helyett q legyen: $\operatorname{Lim.} (x^p) = (\operatorname{Lim.} x^{\frac{p}{q}})^q$ tehát:

$$(\operatorname{Lim.} (x^p))^{\frac{1}{q}} = \operatorname{Lim.} \left(x^{\frac{p}{q}} \right) \text{ és mivel } \operatorname{Lim.} (x^p) = (\operatorname{Lim.} x)^p \text{ legyen:}$$

$$\left((\operatorname{Lim.} x)^p \right)^{\frac{1}{q}} = \operatorname{Lim.} \left(x^{\frac{p}{q}} \right); (\operatorname{Lim.} x)^{\frac{p}{q}} = \operatorname{Lim.} \left(x^{\frac{p}{q}} \right)$$

$$\operatorname{Lim.} \left(x^{\frac{p}{q}} \right) = (\operatorname{Lim.} x)^{\frac{p}{q}}$$

Legyen $m = -n$ az az: tagadó kitevőre nézve; mivel: $\frac{1}{\operatorname{Lim.} (x^n)} =$

$$\frac{1}{(\operatorname{Lim.} x)^n} = (\operatorname{Lim.} x)^{-n} \text{ és:}$$

$$\frac{1}{\operatorname{Lim.} (x)^n} = \frac{\operatorname{Lim.} 1}{\operatorname{Lim.} (x)^n} = \operatorname{Lim.} \left(\frac{1}{x^n} \right) = \operatorname{Lim.} x^{-n}$$

$$\operatorname{Lim.} (x^{-n}) = (\operatorname{Lim.} x)^{-n}$$

f.) Mivel $a^0 = 1$ ha a ' h szüntelen fogyó mennyiséget jelent, a^h az 1 -hez végtelenül közelít tehát:

$$6.) \operatorname{Lim.} (a^h) = 1$$

$$g.) x = \operatorname{Lim.} x + h; \text{ tehát } a^x = a^{\operatorname{Lim.} x + h} = a^{\operatorname{Lim.} x} a^h = a^{\operatorname{Lim.} x}$$

$$7.) \operatorname{Lim.} (a^x) = a^{\operatorname{Lim.} x}$$

h.) Ha mind x mind y változó, tétessék $x = \operatorname{Lim.} x + h$; $y = \operatorname{Lim.} y + k$ tehát: $x^y = a^{\operatorname{Lim.} y + k} = x^{\operatorname{Lim.} y} x^k$ és: $\operatorname{Lim.} (x^y) = \operatorname{Lim.} (x^{\operatorname{Lim.} y} x^k)$
 $= \operatorname{Lim.} (x^{\operatorname{Lim.} y}) \operatorname{Lim.} (x^k) = (\operatorname{Lim.} x)^{\operatorname{Lim.} y} \operatorname{Lim.} (\operatorname{Lim.} x + h)^k$ és mivel:
 $\operatorname{Lim.} (\operatorname{Lim.} x + h)^k = 1.$

$$8.) \lim (x') = (\lim x)^{\lim y}$$

Mikor valamely változóról csak annyit tudhatni hogy az, bizonyos értéknél $= A$ nagyobb, egy másiknál pedig $= B$ kisebb, ezen előtudatok ugyan a' változót tökéletesen meg nem határozzák, mindazonáltal vezérül szolgálnak, nem csak egy közép értéknek kitalálására mely az igazhoz mind A -nál mind B -nél közelebb esik, hanem egyszersmind a' lehető legnagyobb hibának is meghatározására. P. o. legyen:

$$1.) \left\{ \begin{array}{l} x > A \\ x < A + a \end{array} \right\} \text{ a' középérték } x' = A + \frac{1}{2}a$$

tehát a' kitalált közép értékből a' kisebbet vagy a' nagyobbikból a' közép értéket kihúzával a' legnagyobb hiba $x' - A$ vagy $A + a - x' = H = \frac{1}{2}a$

$$2.) \left\{ \begin{array}{l} x < A \\ x > C \end{array} \right\} \text{ ből, a' közép érték } x' = \frac{B + C}{2}$$

$$\text{a' lehető legnagyobb hiba: } H = \frac{B - C}{2}$$

$$3.) \left\{ \begin{array}{l} x < A + a \\ x > A - a \end{array} \right\} \text{ a' közép érték } x' = A$$

$$\text{a' lehető legnagyobb hiba } H = a$$

Legyen azon feltétel alatt, hogy az igaz érték B -hez mint sem A -hoz jár közelebb

$$4.) \left\{ \begin{array}{l} x < B \\ x > C \end{array} \right\} \text{ mivel ezen feltételhez képest, } x' \text{-nek } B, \text{ és } \frac{B + C}{2} \text{ között}$$

kell esni, az az: $x' < B$ és $x' > \frac{B + C}{2}$ tehát lesz:

$$x' = B + \frac{B + C}{2} : 2 = \frac{3B + C}{4} \text{ melyet a' két határok közép értékéből:}$$

$$\frac{B + C}{2} = \frac{2B + 2C}{4} \text{ kihúzával: } \frac{3B + C - 2(B + C)}{4} \text{ a' lehető legnagyobb}$$

$$\text{hiba: } H = \frac{B - C}{4}$$

A' számláló haladásokról

(de progressionibus Arithmeticiis.)

Leg egyszerűbb változásuk a' mennyiségeknek midőn azokhoz valami hozzájuk adatik vagy belőlök elvétetik, melly munkálatban tehát leg előbb is a' fő mennyiséget kell a' hozzá járulótól megkülönböztetni. Például ha a -hoz k -át hozzá adok vagy belőle elveszek leszen: a a' fő, k pedig (mellyet a' fentebb (lap.3.4.) elő adottak értelmében akar hozzá adandó akar kiveendő legyen külzésnek nevezünk) a' hozzá járuló mennyiség. Ismét ezen változás, legegyszerűbben leszen rendszeressé, ha a' mondott külzésnek adása vagy elvévése szabad tetszésként több ízben meg újittatik. Így a -ból k -nak hozzá adásával vagy elvételével leszen $a \pm k$ honnét azon módon $a \pm k$ -ból $a \pm 2k$ és így tovább $a \pm 3k \dots$'s a' t. mellyek egymás után leíratván; az elő adott törvény szerint rendszeresen származott mennyiségek' folyamata:

$$\begin{array}{ccccccccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & \dots & n \\ a, & a \pm k, & a \pm 2k, & a \pm 3k, & a \pm 4k, & \dots & a \pm (n-1)k \end{array}$$

számláló haladásnak (*arithmetica progressio*) mondatik, az első, vagy fő mennyiség számokban kitéve alapszámnak; (*basis*) a' $\pm$ jeggyel össze- kapcsolt mindenkor csak magánosan álló alapszám, a' helyenként több vagy kevesebb meg felelő külzésekkel együtt, tagoknak; a' felül irt és a' tagok helyének hanyadikságát mutató számok pedig, tagok számának vagy mutató- nak (*index*) mondatnak.

Már most, legelsőben is öt féle különböző mennyiségek tűnnek elő, úgy mint: az alapszám, a' külzés, a' tagok száma, és a' tagok értéke külön, 's ugyan a' tagok értéke összesen, mellyek közül mindegyik, a' másik négynek bizonyos állandó törvény szerinti összetételéből származván, egyszersmind egyik akarmeltyik, a' másik négynek ismeretes értékeiből kitaláltatható.

Különösebben: ha a' nevezett mennyiségeket külön külön a' többi négy függvényeinek tekintjük, 's a' tagok öszvetét S -el jegyezvén ezen egyenlítést:

$$\alpha.) a + (a + k) + (a + 2k) + (a + 3k) + (a + 4k) + \dots + a + (n-1)k = S$$

mellyben k állító és tagadó lehet, vesszük gondolóra; ebben mind a' tagok értéke külön külön, (legyen $= T$) mind azoknak öszvete $= S$ az egyenlítés egyik oldalán befoglalt a, k, n , mennyiségek felvett vagy meghatározott értékeihez képest fog változni, vagy is: mind a' T mind az S függvényei (a, k, n)-ek,

és egyszersmind függve változók, amazoknak független értékei szerint. Annak okáért:

$$T = F(a, k, n.)$$

$$S = F'(a, k, n.)$$

melly két függvények' törvénye egyenlítésbe foglaltatván 's azoknak szabályai hoz módosittatván mind azon munkálatokat, mellyek a' számláló haladásokban előfordulható mennyiségek' felkeresésére szolgálhatnak, elő fogják terjeszteni.

Már pedig nevezvén az n -dik tagot $= u$ leszen, mint azonnal szembetűnk:

$$I.) \quad u = a + (n-1)k$$

A' másodikra nézve u -t vévén alapszámmak, 's a' tagokat vissza fordított rendel számítván találattik:

$$\beta.) \quad u + (u-k) + (u-2k) + (u-3k) + \dots + (a+2k) + (a+k) + a = S$$

tehát $\alpha.)$ -t és $\beta.)$ -t össze adván:

$$\gamma.) \quad (a+u) + (a+u) + (a+u) + (a+u) + (a+u) + \dots + (a+u) = 2S$$

az az $2S = (a+u)n$ honnét:

$$II.) \quad S = \frac{(a+u)n}{2}$$

Leszen pedig az első egyenlítésből:

$$I. \quad \begin{cases} a = u - (n-1)k \\ k = \frac{u-a}{n-1} \\ n = + \frac{(u-a+k)}{k} \\ u = a + (n-1)k \end{cases}$$

a' másodikból:

$$II. \quad \begin{cases} a = \frac{2S - nu}{n} \\ n = \frac{2S}{a+u} \\ u = \frac{2S - na}{n} \\ S = \frac{(a+u)n}{2} \end{cases}$$

's a' megkívántató munkálatok után:

$$\begin{aligned}
 a & \left\{ \begin{aligned} &= \frac{u - (n-1)k}{2S - nu} \\ &= \frac{n}{\sqrt{(2u+k)^2 - 8Sk} + k} \\ &= \frac{2S - n(n-1)k}{2n} \end{aligned} \right. \\
 k & \left\{ \begin{aligned} &= \frac{2(S - an)}{n(n-1)} \\ &= \frac{(u+a)(u-a)}{2S - (u+a)} \\ &= \frac{2(nu - S)}{n(n-1)} \\ &= \frac{(u-a)}{(n-1)} \end{aligned} \right. \\
 n & \left\{ \begin{aligned} &= \frac{2S}{a+u} \\ &= \frac{\sqrt{(2a-k)^2 + 8Sk} - (2a-k)}{2} \\ &= \frac{\sqrt{(2u+k)^2 - 8Sk} + 2u+k}{2k} \\ &= \frac{u-a+k}{k} \end{aligned} \right. \\
 S & \left\{ \begin{aligned} &= \frac{[2a + (n-1)k]n}{2} \\ &= \frac{(a+u)n}{2} \\ &= \frac{[2u - (n-1)k]n}{2} \\ &= \frac{(u-a+k)(u-a)}{2k} \end{aligned} \right.
 \end{aligned}$$

Következendőkben a' függvények' némelly különösebb nemeiről fogunk szólni mellyeknek rövid előterjesztésére tulajdon példázatok (*symbola*) vétet-

tek fel és használatnak, 's azoknak ismerete ennél fogva, mi előtt tovább mennénk mulhatlanul megkívántatik.

A' Szorzalékokról

(*De Factorialibus.*)

Ha a' számláló haladásnak (*arithmetica progressio*) akárhány következő tagai egymással össze sokszoroztatnak: az úgy származott tevet (*factum*) szorzaléknak, (*Factoriel*) a' felvett haladás' első száma alapszámnak, (*basis*) az egymás után következő tagok' közös külözése különösebben a' szorzalék' külözésének, az össze sokszorozott tagok száma pedig kitevőjének (*exponens*) neveztetik.

Legyen: $a. a + d. a + 2d. a + 3d. \dots a + (m-1)d = A$

a' mondottak szerint az A szorzalék' alapszáma a; kitevője m; külözése d.

A' szorzalékok' eljegyzésire felvétellett: hogy az alap szám felibe az öszvesorozott tagok száma mint kitevő, (*exponens*) 's mellé félkolonnal, kom-mával vagy egy vonással választva a' külözés íratassék p. o.

$$a^{m:d} \quad a^{m:d} \quad \text{vagy} \quad a^{m|d}$$

teszi az a-n kezdődő, d külözéssel m számú tagokig folyvást menő számok tevetét, (*factum*) vagy: azon szorzalékot (*factoriel*) mellynek alapszáma a, kitevője m, külözése d.

A' szorzalékok' eléadott természetiből tehát világos:

$$\text{I.) } a^{m:d} = a. a + d. a + 2d. a + 3d. \dots \times a + (m-n)d. \dots \times a + (m-2)d. \times a + (m-1)d$$

$$\begin{aligned} a^{m:d} &= a. a + d. a + 2d. a + 3d. a + 4d. \dots \times a + (2m-1)d \\ &= a. a + 2d. a + 4d. a + 6d. \dots a + (m-1)2d. \times a + d. a + 3d. \\ &\quad a + 5d. \dots a + d + (m-1)2d \\ &= a^{m:2d}. (a+d)^{m:2d} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a^{4m:d} &= a. a + 4d. a + 8d. \dots a + (m-1)4d \times a + d. a + 5d. a + 9d. \dots \\ &\quad \dots a + d + (m-1)4d \\ &\quad \times a + 2. a + 6d. a + 10d. \dots a + 2d + (m-1)4d \times a + 3d. a + 7d. \\ &\quad a + 11d. \dots a + 3d + (m-1)4d. \end{aligned}$$

tehát páros kitevővel, vétetvén mindenkor n párosnak: m párosnak vagy páratlannak:

$$\text{II.) } a^{nm:d} = a^{m:nd} \cdot (a+d)^{m:nd} \cdot (a+2d)^{m:nd} \cdot (a+3d)^{m:nd} \dots a+(n-1)d^{m:nd}$$

hasonlóképen:

$$a^{2m+1:d} = a \cdot a+2d \cdot a+4d \dots a+m \cdot 2d \times a+d \cdot a+3d \cdot a+5d \dots$$

$$a+(m-1)2d$$

$$= a^{m+1:2d} \cdot (a+d)^{m:2d}$$

$$a^{4m+3:d} = a \cdot a+4d \cdot a+8d \dots a+m \cdot 4d \times a+d \cdot a+5d \cdot a+9d \dots$$

$$a+d+m \cdot 4d$$

$$\times a+2d \cdot a+6d \cdot a+10d \dots a+2d+m \cdot 4d \times a+3d \cdot a+7d \cdot$$

$$a+11d \dots a+3d+(m-1)4d$$

$$= a^{m+1:4d} \cdot (a+d)^{m+1:4d} \cdot (a+2d)^{m+1:4d} \cdot (a+3d)^{m:4d}$$

általában lévén $n > r$

$$\text{III.) } a^{nm+r:d} = a^{m+1:nd} \cdot (a+d)^{m+1:nd} \dots (a+(r-1)d)^{m+1:nd} \cdot (a+rd)^{m:nd} \cdot$$

$$(a+(r+1)d)^{m:nd} \cdot (a+(r+2)d)^{m:nd} \dots (a+(n-1)d)^{m:nd}$$

Ha $n < r$ p.o. $nm+r = 8m+11$ az m helyett $(m+1)$ -et tévén leszén $a^{8m+11:d} = a^{8(m+1)+3:d}$ melly móddal az r szükségképen n -él kisebbé válik 's a' szerint a' III.) alkalmazható

$$\text{IV.) } a^{m+n:d} = a \cdot a+d \cdot a+2d \dots a+(n-1)d \cdot a+nd \dots a+md \cdot a+(m+1)d \dots a+(m+n-2)d \cdot a+(m+n-1)d \text{ ha } m > n; \text{ vagy:}$$

$$= a \cdot a+d \cdot a+2d \dots a+(m-1)d \cdot a+md \cdot a+(m+1)d \dots$$

$$a+nd \cdot a+(n+1)d \dots a+(m+n-1)d \text{ ha } m < n$$

$$\text{V.) } h^m \cdot a^{m:d} = h \cdot a \cdot h(a+d) \cdot h(a+2d) \cdot h(a+3d) \dots h(a+m-1)d$$

$$\text{VI.) } \frac{a^{m:d}}{h^m} = \frac{a}{h} \cdot \frac{a+d}{h} \cdot \frac{a+2d}{h} \cdot \frac{a+3d}{h} \dots \frac{a+(m-1)d}{h}$$

vége: tévén az alapszámot $= a$, a' külzést $= d$, a' szorzalék' utolsó tagát $= M$ a' kitevőt $= m$

$$\text{VII.) } M = a + md - d$$

$$a = M - md + d$$

$$d = \frac{M - a}{n - 1}$$

$$m = \frac{M - a}{d} + 1$$

Most már ezen általános kitételekből következnek:

- A' Szorzalékok' szorzókra (*factores*) oszthatóságuk (alább 1. 2. 3. 4. sz.)
- Ellenkező külzésre változtatásuk (5. sz.)
- A' kitevők külzéséből vagy öszvetéből álló kitevőjű (6. 7. sz.)

- d.) A' bizonyos szám hatványával szorozott vagy elosztott (8. 6. sz.)
 e.) A' más kitevőjű de ugyan azon alapszámu és külzésű szorzalékkal elosztott szorzalékok' értékei. Mellyre nézve:

- 1.) $a^{m;d} = a \cdot (a+d)^{m-1;d}$
- 2.) $a^{m;d} = a^{m-1;d} \cdot (a+(m-1)d)$ } (I. böl)
- 3.) $a^{nm;d} = a^{m;nd} \cdot (a+d)^{m;nd} \cdot (a+2d)^{m;nd} \dots (a+(n-1)d)^{m;nd}$ (II. böl)
- 4.) $a^{nm+r;d} = a^{m+1;nd} \cdot (a+d)^{m+1;nd} \dots (a+(r-1)d)^{m+1;nd} \cdot (a+rd)^{m;nd}$
 $\dots (a+(r+1)d)^{m;nd} \dots (a+(n-1)d)^{m;nd}$ (III. böl)
- 5.) $a^{m;d} = (a+(m-1)d)^{m;-d}$ (I. böl)
- 6.) $a^{m+n;d} = a^{m;d} \cdot (a+md)^{n;d} = a^{n;d} \cdot (a+nd)^{m;d}$ (IV. böl)
- 7.) $a^{m-n;d} = \frac{a^{m;d}}{(a+(m-n)d)^{n;d}}$ (IV. böl)
- 8.) $h^m a^{m;d} = (ha)^{m;hd}$ (V. böl)
9. $\frac{a^{m;d}}{h^m} = \left(\frac{a}{h}\right)^{m;\frac{d}{h}}$ (VI. böl)
10. $\frac{a^{m;d}}{a^{n;d}} = (a+nd)^{m-n;d}$ (I. böl)

Az eléadott kitételeket csak azon feltétel alatt következtettük ki, hogy a' szorzalék' kitevője állító egész szám volt, vagy is a' tagok az alapszámtól kezdve, mindenkor előre számláltattak; melly értelemben az $a^{m-n;d}$ kitételben az n sem akkora mint az m, sem az m-nél nagyobb nem lehetne, más értelemben pedig mellyet (7. sz.alatt) a' véle egyenlő hanyados jelent; az eddig valókkal semmit nem ellenkezik: hogy az $a^{m;d}$ osztandót $(a+(m-n)d)^{n;d}$ -vel osztva gondoljuk, akkor is midőn n az m-el egyenlőnek vagy annál nagyobbbnak vétetik. Illyen értelmök van a' hasonló kitételeknek $a^{o;d}$ és $a^{-n;d}$ t. i. egyik az $\frac{a^{m;d}}{a^{m;d}}$ másik az $\frac{a^{m;d}}{(a-nd)^{m+n;d}}$ hanyadosot jelenti.

Egyébiránt a' mi illeti ezen kitételeket $a^{1;d}$; $a^{o;d}$; $a^{-n;d}$ ezek így is írathatnak $a^{(m+1)-m;d}$; $a^{m-m;d}$; $a^{m-(m+n);d}$ tehát, fentebbiek szerint a' következő hanyadosokat jelentik.

$$\text{I.) } a^{1;d} = \frac{a^{m+1;d}}{(a+d)^{m;d}} = \frac{a(a+d)^{m;d}}{(a+d)^{m;d}} = a$$

$$\text{II.) } a^{o;d} = \frac{a^{m;d}}{a^{m;d}} = 1$$

$$\text{III.) } a^{-n;d} = \frac{a^{m;d}}{(a-nd)^{m+n;d}} = \frac{a^{m;d}}{(a-nd)^{n;d} \cdot a^{m;d}} \\ = \frac{1}{(a-nd)^{n;d}} = \frac{1}{(a-d)^{n;-d}}$$

Melleyekből újra következik:

- 1.) $a^{m;o} = a^m$ (lap. 26. I.) lévén $d = 0$
 - 2.) $a^{o;o} = 1$ (II.) ből
 - 3.) $o^{m;d} = 0$ (lap. 26. I.) lévén $a = 0$
 - 4.) $o^{o;d} = 1$ (II.) ből
 - 5.) $o^{o;o} = 1$ (II.) ből
 - 6.) $a^{-n;d} = \frac{1}{(a-nd)^{n;d}}$ (lap. 26. 7. ből) lévén $m = 0$ és II. ből
 - 7.) $a^{-n;d} = \frac{1}{(a-d)^{n;d}}$ (III.) ből
 - 8.) $a^{-n;d} = \frac{a}{a \cdot (a-d)^{n;-d}} = \frac{a}{a^{n+1;-d}}$
 - 9.) $o^{-n;d} = \frac{1}{(-d)^{n;-d}}$
 - 10.) $o^{-n;-d} = \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot nd^n}$
- és tévén $rd = a$ ha $a < (n+1)d$
- 11.) $rd^{-n;d} = \infty$
 - 12.) $a^{-1;d} = \frac{1}{a-d}$ (III.) ből.

J e g y z é s. A' 11dik számból (7. szerint) lenne:

1

$$rd^{-n;d} = \frac{1}{rd-d \cdot rd-2d \cdot rd-3d \cdot \dots \cdot rd-nd}$$

az az: ha a ; $(n+1)d$ -nél legközelebb kisebb vagy is $a=nd$ akkor az utolsó tag $rd-nd = 0$; ha pedig a ; még kisebb mint nd , a' közbe vetett tagok között mindig előjön egy $= rd-nd = 0$ melly az egész nevezőt $= 0$ változtatván $rd^{-n;d}$ -ét $= \infty$ teszi. (mit 11 sz. alatt).

A' (24. lap.) I. számát visszásan így lehet írni:

$$a^{m;d} = (a+md-d) \cdot (a+md-2d) \cdot \dots \cdot a+d \cdot a \text{ tehát:}$$

$$\text{I.) } a^{m;d} = (a+md-d)^{m;-d}$$

hasonlóképen: (lap. 25., 9.) h helyet d -ét tévén, visszásan:

$$\frac{a^{m;d}}{d^n} = \frac{a}{d} + m - 1 \cdot \frac{a}{d} + m - 2 \dots \frac{a}{d} + 1. \text{ a tehát:}$$

$$\text{II.) } \frac{a^{m;d}}{d^n} = \left(\frac{a}{d} + m - 1 \right)^{m;-1}$$

továbbá:

$$a^{-m;-n;d} = \frac{1}{(a-d) \cdot (a-2d) \dots (a-nd) \cdot (a-nd-d) \dots a-(n+m)d}$$

$$\text{III.) } a^{-m;-n;d} = a^{-n;d} \cdot (a-nd)^{-m;d}$$

a' lap. 24. I. szám egyenlítésnek mind az első mind a' hátulsó

részt $\frac{a-d}{a+md-d}$ -vel sokszorozván:

$$\text{IV.) } \frac{(a-d)a^{m;d}}{a+md-d} = (a-d) \cdot a \cdot (a+d) \dots (a+md-2d) = (a+d)^{m;d}$$

a' lap. 25. V. VI. számaiból következik:

$$a^{m;\pm d} = \frac{ab(ab \pm bd) \dots (ab \pm mbd \mp b)}{b^m} \quad (\text{lap. 25. V.})$$

$$a^{m;\pm d} = \frac{a^m \cdot \frac{ab(ab \pm bd)}{a} \dots \frac{(ab \pm mbd \mp bd)}{a}}{b^m} \quad (\text{lap. 25. VI.})$$

tehát:

$$\text{V.) } a^{m;\pm d} = \frac{a^m \cdot b \left(b \pm \frac{bd}{a} \right) \dots \left(b \pm \frac{mbd}{a} \mp \frac{bd}{a} \right)}{b^m}$$

Ezekből és a' fentebb előadottakból a' Szorzalékoknak következendő értékei vagynak:

a.) Egyszerű kitevőkkel:

$$1.) a^{n;d} = \frac{(a+nd-d)}{a-d} \cdot (a-d)^{n;d} \quad (\text{IV.)ből}$$

$$2.) a^{n;d} = \frac{a^{m;d}}{(a+nd)^{m-n;d}} \quad (\text{lap. 26. 7.}) \quad n \text{ helyett } m-n \text{-et tévén}$$

$$\left. \begin{aligned} 3.) a^{n;d} &= \frac{1}{(a+nd)^{-n;d}} \\ 4.) a^{n;-d} &= \frac{1}{(a-nd)^{-n;d}} \end{aligned} \right\} \quad (\text{lap. 27. 6.}) \quad a \text{ helyett } (a+nd) \text{-vel}$$

$$\left. \begin{aligned} 5.) a^{n;d} &= \frac{1}{(a-d)^{-n;-d}} \\ 6.) a^{n;-d} &= \frac{1}{(a+d)^{-n;d}} \end{aligned} \right\} a \text{ helyett } (a+d) \text{ -vel}$$

$$\left. \begin{aligned} 7.) a^{n;d} &= (a+nd-d)^{n;-d} \\ 8.) a^{n;-d} &= (a-nd+d)^{n;d} \end{aligned} \right\} (\text{lap. 27. I.})$$

$$9.) a^{n;-d} = \frac{(a-nd-md+d)^{m+n;d}}{(a-nd-md+d)^{m;d}}$$

$$\text{t. i. a' lap. 26. 6.) szerint} = \frac{(a-nd-md+d)^{m;d} \cdot (a-nd+d)^{n;d}}{(a-nd-md+d)^{m;d}}$$

= $(a-nd+d)^{n;d}$ mint fentebb 8.) szám alatt.

$$10.) (-a)^{m;d} = (-1)^m \cdot (a)^{m;-d} \quad (\text{lap. 26. 8.})$$

$$11.) (-a)^{m;d} = (-1)^m \cdot (a+d-md)^{m;d} \quad 10.) \text{ből} \quad (\text{lap. 26.})$$

$$12.) (a)^{m;d} = a^m \cdot 1^{m;\frac{d}{a}} \quad (\text{lap. 26. 8.})$$

$$13.) a^{m;d} = d^m \left(\frac{a}{d}\right)^{m;d} \quad (\text{lap. 26.8.}) \quad h=d, a=\frac{a}{d} \text{ -vel}$$

$$14.) a^{m;d} = \left(\frac{d}{c}\right)^m \cdot \left(\frac{ac}{d}\right)^{m;c} \quad (\text{lap. 26. 8.}) \quad h=\frac{c}{d} \text{ -vel}$$

$$15.) a^{m;d} = \left(\frac{a}{b}\right)^m \cdot b^{m;\frac{bd}{a}} \quad \text{a' 14.)ből } c \text{ helyett } \frac{db}{a} \text{ -t tévén, vagy}$$

(lap. 28. V.ből)

$$16.) a^{-m;d} = \left(\frac{b}{a}\right)^m \cdot b^{-m;\frac{bd}{a}} \quad 15.-ből \quad m \text{ helyett mindenütt } -m \text{ -et téve}$$

b.) Összetett kitévőkkel:

$$1.) a^{n+1;d} = a \cdot (a+d)^{n;d}; \quad (\text{lap. 26. 1.})$$

$$2.) a^{n+1;-d} = (a+nd) a^{n;d} \quad (\text{lap. 26. 2.})$$

$$3.) a^{m-n;d} = \frac{(a-nd)^{m;d}}{(a-nd)^{n;d}} \quad (\text{lap. 28. 2.}) \quad a \text{ helyett } a-nd \text{ -vel}$$

$$4.) a^{n-1;d} = \frac{(a-d)^{n;d}}{a-d} \quad (3.)\text{ből} \quad n \text{ helyett } 1 \text{ -et } m \text{ helyett } n \text{ -et tévén:}$$

$$5.) a^{-m-n;d} = a^{-n;d} \cdot (a-nd)^{-m;d} \quad \text{mint (lap. 28. III.)}$$

$$6.) a^{-n-1:d} = \frac{(a-d)^{-n:d}}{a-d} \quad (4. \text{ből}) \quad n \text{ helyett } -n \text{-el}$$

$$7.) a^{-n-1:d} = \frac{a^{-n:d}}{a-nd-d} \quad (5. \text{ből})$$

c.) Egyenlítések:

$$1.) a^{n:d} \cdot (a+nd)^{m:d} = a^{m:d} \cdot (a+md)^{n:d} \quad (\text{lap. 26. 6.})$$

a helyett $a-nd$ vel:

$$2.) a^{n:d} \cdot (a-nd)^{n:d} = (a-nd)^{m:d} \cdot (a+md-nd)^{n:d}$$

ismét az 1.)-ben a helyett $a-nd+d$ -ét tévén:

$$3.) a^{n-1:d} \cdot (a+d)^{m:d} = (a-nd+d)^{m:d} \cdot (a+md)^{n-1:d}$$

$$a^{n:d} = (a+nd-d) \cdot a^{n-1:d}$$

$$(a-d)^{n:d} = a^{n-1:d} \cdot (a-d)$$

tehát:

$$a^{n:d} - (a-d)^{n:d} = (a+nd-d) \cdot a^{n-1:d} - a^{n-1:d} \cdot a-d$$

szorzókra osztva:

$$a^{n:d} - (a-d)^{n:d} = (a-d) a^{n-1:d} + nd \cdot a^{n-1:d} - a^{n-1:d} \cdot a-d$$

innen:

$$4.) a^{n:d} - (a-d)^{n:d} = nd \cdot a^{n-1:d}$$

és mivel:

$$(a+d)^{n:d} = \frac{a+nd}{a} \cdot a^{n:d} \quad (\text{lap. 28. 1.}) \quad a \text{ helyett } a+d \text{-vel}$$

$$a^{n:d} = \frac{a}{a} \cdot a^{n:d}$$

$$5.) (a+d)^{n:d} - a^{n:d} = \frac{nd}{a} \cdot a^{n:d}$$

$$6.) (a+d)^{n:d} - a^{n:d} = nd (a+d)^{n-1:d} \quad a' \text{ hátulsó tagban } a^{n:d} \text{ helyett } a' \text{ vele egyenlő } a \cdot (a+d)^{n-1:d} \text{-vel;}$$

vagy minden tagokat a -val szorozva a' 6.)-ból:

$$7.) a^{n+1:d} - a \cdot a^{n:d} = nd a^{n:d}$$

$$a^{n:d} = \frac{a \cdot (a+d)^{n:d}}{a+nd} \quad (\text{lap. 29.) b.) 1)-ből}$$

$$a^{-n-1:d} = \frac{1}{(a+d)^{n:d}} \quad (\text{lap. 26. 7.))} \quad d \text{ helyett } -d \text{-vel}$$

$$8.) a^{n:d} \cdot (a^{-n-1:d}) = \frac{a}{a+nd}$$

$$a^{n+1-d} \cdot (a - nd)^{m+1-d} = a^{m+1-d} \cdot (a - md)^{n+1-d} \text{ (lap. 30. c.) 1.)-ből}$$

a helyett $(a + md)$ -vel:

$$a^{n+1-d} \cdot (a + md)^{m+1-d} = (a + md - nd)^{m+1-d} \cdot (a + md)^{n+1-d}$$

és az m kitevős tagokat állító külzésre véve:

$$9.) a^{n+1-d} \cdot (a + d)^{m+1-d} = (a - nd + d)^{m+1-d} \cdot (a + md)^{n+1-d} \text{ (lap. 26. 5.)}$$

A' H a t ó s á g o k r o l

(*De facultatibus.*)

Az olyan Szorzalékot különösen mellynek mind alapszámát mind külzését egység teszi, nevezik hatáságnak, (*facultas*) p. o. $1^{m+1} = m^{m+1}$ (lap. 26. 5. sz.) teszi az 1-en kezdődő 1 külzéssel m számú tagokig folyvást menő számok tevetét (*factum*) vagy az m -dik hatáságot. Röviden csak a' kitevő által jegyeztetnek így m' vagy így $m!$

Ezen meghatározásból és a' lap. 24. 25. 1. II. III. számaiból következik:

$$0! = 1, 1! = 1, 2! = 2, 3! = 6, 4! = 24, 5! = 120.$$

nem különben:

$$(-1)! = \frac{1}{0}, (-2)! = \frac{1}{0}, (-3)! = \frac{1}{0} \dots \text{'s a' t.}$$

továbbá a' Szorzalékok' természetiből és az éppen mondottakból:

$$1.) \frac{n!}{n} = (n-1)!$$

$$2.) \frac{(n+1)!}{n!} = n+1$$

$$\frac{(m+n)!}{n!} = \frac{1^{m+n+1}}{1^{n+1}} = (1+n)^{m+1} \text{ (lap. 26. 10.)}$$

$$= (m+n)^{m+1} \text{ (lap. 26. 5.)}$$

tehát:

$$3.) \frac{(m+n)!}{n!} = (n+1)^{m+1}$$

$$4.) \frac{(m+n)!}{n!} = (m+n)^{m+1}$$

$$5.) \frac{(m+n)!}{m! n!} = \frac{(m+n)^{m+1}}{m!} = (m+n)_m \text{ (lap. 32.)}$$

$$6.) \frac{(m+n)!}{m! n!} = \frac{(m+n)^{n-1}}{n!} = (m+n)_n$$

Az egész Analysisben szélesen kiterjedt alkalmaztatásokért különös figyelmet érdemelnek az ilyen formájú összetett Szorzalékok mellyek alább megmondandó okokból kétszoros ösztetőknek (*coëfficientes binomiales*) nevezetnek.

$$\frac{a. a-1. a-2. a-3. \dots a-n+1.}{1. 2. 3. 4. \dots n}$$

vagy visszásan:

$$\frac{(a-n+1). (a-n+2). (a-n+3) \dots a-2. a-1. a.}{1. 2. 3. \dots n-2. n-1. n}$$

midőn t. i. valamely alapszámnak, a' példában a vagy $(a-n+1.) \pm 1$ külözessel n tagokat magába foglaló Szorzaléka (*Factoriel*) az n -dik hatósággal (*facultas* lap. 31.) elosztva jön elő.

Az ilyeneket röviden e' képen fogjuk jegyezni a_n vagy így $\left(\frac{a}{n}\right)$ t. i. az alapszám mellé alol a' hatóság kitévőit írjuk. Mivel pedig az alapszám mint minden számláló haladásban (*arithmetica progressio*) úgy itt is akarmi állító vagy tagadó, egész, tört, vagy összetett mennyiség lehet, a' meghatározásból (*Definitio*) önként világos:

$$I. a_n = \frac{a. a-1. a-2. \dots a-n+1}{1. 2. 3. \dots n}$$

$$(-a)_n = \frac{-a. -a-1. -a-2. \dots -a-n+1}{1. 2. 3. \dots n}$$

$$II. (-a)_n = \pm \frac{a. a+1. a+2. \dots a+n-2. a+n-1.}{1. 2. 3. \dots n-1. n}$$

hol a' páros n -et $+$; a' páratlant $-$ jegy illeti.

$$\left(\frac{a}{b}\right)_n = \frac{\frac{a}{b}. \frac{a}{b}-1. \frac{a}{b}-2. \dots \frac{a}{b}-n+2. \frac{a}{b}-n+1}{1. 2. 3. \dots n}$$

$$III. \left(\frac{a}{b}\right)_n = \mp \frac{a. b-a. 2b-a. \dots (n-2)b-a. (n-1)b-a}{b. 2b. 3b. \dots (n-1)b. nb}$$

$$\left(\frac{-a}{b}\right)_n = \frac{\frac{-a}{b}. \frac{-a}{b}-1. \frac{-a}{b}-2. \dots \frac{-a}{b}-n+2. \frac{-a}{b}-n+1}{1. 2. 3. \dots n-1. n}$$

$$\text{IV.) } \left(\frac{-a}{b}\right)_n = \pm \frac{a \cdot b + a \cdot 2b + a \dots (n-2)b + a \cdot (n-1)b + a}{b \cdot 2b \cdot 3b \dots (n-1)b \cdot nb}$$

a' felső jegyek (mit fentebb) páros az alsók páratlan n-hez

$$\text{V.) } (a \pm b)_n = \frac{a \pm b \cdot a \pm b - 1 \cdot a \pm b - 2 \dots a + b - n + 1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots n-1 \cdot n}$$

$$\text{VI.) } m_n = \frac{m \cdot m-1 \cdot m-2 \dots 5 \cdot 2 \cdot 1}{1 \cdot 2 \cdot 4 \dots m-2 \cdot m-1 \cdot m} = 1.$$

$$\text{VII.) } m_{n+r} = \frac{m \cdot m-1 \cdot m-2 \dots m-m-1-2-3 \dots -r+1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots m+1 \cdot m+2 \dots m+r} = 0$$

$$m_{n-r} = \frac{m \cdot m-1 \cdot m-2 \dots m-(m-r)+1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots m-r}$$

az r-nek egymás után 1. 2. 3. 4. 's a' t. értékeket adván 's azokat
mellyek egymást elviszik kihagyva:

$$m_{n-1} = \frac{m \cdot m-1 \cdot m-2 \cdot m-3 \dots 4 \cdot 5 \cdot m-(m-1)+1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \dots m-3 \cdot m-2 \cdot m-1} = \frac{m}{1} = m_1$$

$$m_{n-2} = \frac{m \cdot m-1 \cdot m-2 \cdot m-3 \cdot m-4 \dots 5 \cdot 4 \cdot 3}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \dots m-4 \cdot m-3 \cdot m-2} = \frac{m \cdot m-1}{1 \cdot 2} = m_2$$

$$m_{n-3} = \frac{m \cdot m-1 \cdot m-2 \cdot m-3 \cdot m-4 \cdot m-5 \dots 6 \cdot 5 \cdot 4}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \dots m-5 \cdot m-4 \cdot m-3}$$

$$= \frac{m \cdot m-1 \cdot m-2}{1 \cdot 2 \cdot 3} = m_3$$

általában:

$$\text{VIII.) } m_{n-r} = m_r$$

Ezen fő egyenletekből ismét következnek:

- 1.) $m_n = 1$ (lap. 32. I) m -nek o. 1. 2. 3. 's a' t. akarmi értékeivel.
- 2.) $m_{n+r} = 0$ VII.)-ből
- 3.) $m_{n-r} = m_r$ VIII.)-ből
- 4.) $nm_n = (m-n+1)m_{n-1}$ mivel: $\frac{m_n}{m_{n-1}} = \frac{m-n+1}{n}$ (lap. 32. I.)
- 5.) $m_0 = 1$ a' 3-ból lévén $r = m$ (1st szám szerint.) és: (lap. 26. II-ből).
- 6.) $m_{-r} = 0$ mivel $m_{-r} = \frac{m^{-r-1}}{-r!}$ az eljelelés szerint (lap. 13.)

$$= \frac{m^{-r-1}}{\frac{1}{0}} \text{ (lap. 27. 11.)} = \frac{0 \cdot m^{-r-1}}{r} = 0.$$

7.) $o_0 = 1$ mivel: $o_0 = \frac{0^{0-1}}{0!}$ az eljелеlés szerint $= \frac{1}{1}$ (lap. 27.) (lap. 31.)

8.) $o_r = 0$ mivel $o_r = \frac{0^{r-1}}{r!} = \frac{0 \cdot 1 \cdot 2 \dots -r+1}{r!} = 0$

9.) $(-m)_n = (-1)^n \cdot (m+n-1)_n$ mivel: $(-m)_n = \frac{(-m)^{n-1}}{n!}$
 $= \frac{(-1)^n \cdot m^{n-1}}{n!}$ (lap. 29. 7.) de: $m^{n-1} = (m+n-1)^{n-1}$ (lap. 29. 10.)

tehát: $\frac{(-1)^n \cdot m^{n-1}}{n!} = (-1)^n \cdot \frac{(m+n-1)^{n-1}}{n!} = (-1)^n \cdot (m+n-1)_n$

10.) $(-m)_n = (-1)^n \cdot (m+n-1)_{n-1}$ a' 3-ból m helyett $(m+n-1)$ -el
 r helyett n -el

11.) $(-m)_n = (-1)^n \cdot \frac{m^{n-1}}{n!}$ (lap. 29. 10.) $= (-1)^n \cdot (m+n-1)_n$ (9.)-ből

továbbá minthogy:

$$(-1)^n \cdot (-m-1)_n = (-1)^n \cdot \frac{(-m-1)^{n-1}}{n!} = \frac{(m+1)^{n-1}}{n!} \text{ (lap. 29. 10.)}$$

$$= \frac{(m+n)^{n-1}}{n!} = (m+n)_n = \frac{(m+n)!}{m! n!} \text{ (lap. 31.) azonképen:}$$

$$(-1)^n \cdot (-n-1)_n = (m+n)_n = \frac{(m+n)!}{m! n!}$$

12.) $(-1)^n \cdot (-m-1)_n = (-1)^n \cdot (-n-1)_n = \frac{(m+n)!}{m! n!}$

$$= (m+n)_n = (m+n)_n$$

ezenkívül:

$$(m+n)_n \cdot a_{m+n} = \frac{(m+n)^{n-1}}{n!} \cdot \frac{a^{m+n-1}}{(m+n)!}$$

$$= \frac{(m+n)!}{m! n!} \cdot a^{m-1} \cdot \frac{(a-m)^{n-1}}{(m+n)!} \text{ (lap. 32. 6.) és (lap. 26. 6.)}$$

egyenlő nevezőkre vonva:

$$= \frac{(m+n)!}{m!} \cdot \frac{m! a_m}{n!} \cdot \frac{n! (a-m)_n}{(m+n)!} \text{ a' közös szorzók nélkül:}$$

$$= a_m (a-m)_n = a_n \cdot (a-n)_m$$

tehát:

$$13. (m+n)_n \cdot a_{m+n} = a_m \cdot (a-m)_n = a_n (a-n)_m$$

és még:

$$a_{n+1} = \frac{a^{n+1;-1}}{(n+1)!} = \frac{a^{n;-1} \cdot (a-n)}{(n+1)!}$$

$$a_n = \frac{a^{n;-1}}{n!} = \frac{a^{n;-1} \cdot (n+1)}{(n+1)!}$$

összeadván:

$$a_{n+1} + a_n = \frac{(a+1) \cdot a^{n;-1}}{(n+1)!} = \frac{(a+1)^{n+1;-1}}{(n+1)!} = (a+1)_{n+1}$$

$$14.) a_{n+1} + a_n = (a+1)_{n+1}$$

$$15.) \left(\frac{a}{b}\right)_n = \frac{a^{n;-b}}{b^n n!} = \frac{a+b-nb}{b^n n!} \text{ (lap. 32. III.) (lap. 26. 5.)}$$

$$16.) \left(-\frac{a}{b}\right)_n = (-1)^n \cdot \frac{a^{n;b}}{b^n n!} \text{ (lap. 32. IV.)}$$

$$17.) m_n = (-1)^n \cdot (n-m-1)_n = \pm (n-m-1) \text{ (lap. 34. 10.) } m \text{ helyett } -m \text{ -el}$$

$$18.) \left(\frac{a}{b}\right)_n = \pm \left(n - \frac{a}{b} - 1\right)_n \text{ 17-ből } m \text{ helyett } \frac{a}{b} \text{ -vel}$$

$$19.) \left(-\frac{a}{b} - 1\right)_n = \pm \left(n + \frac{a}{b}\right)_n \text{ 17-ből } m \text{ helyett } \frac{a}{b} + 1 \text{ -el}$$

$$20.) (-n)_n = \pm (2n-1)_n \text{ (lap. 34. 9.)}$$

$$21.) (-n)_n = \pm (2n-1)_{n-1} \text{ (lap. 34. 10.)}$$

$$22.) (m+r)_r = (m+r)_m \text{ (lap. 26. 5.) 6.)}$$

$$23.) (m+r)_{m-n} = (m+r)_{n+r} \text{ 22.)ből. tévén } r = m-n \text{ és } m = n+r$$

$$24.) (m-r)_{m-n} = (m-r)_{n-r} \text{ 23.)ből. } r \text{ helyett } -r \text{ -el}$$

Feltéven hogy a' következőkben m, n, k, r, t mint kitevők vagy mutatók (*exponentes vel indices*) csak egész, az a, b, d betűk pedig akarmi számokat jelenthessenek, ezenkívül $m > r$ és $n > t$

mivel: A.)

$$n, t! = n \cdot n-1 \cdot \dots \cdot n-t+1$$

és n helyett $a + m$ -et t helyett $m - r$ -et tévén:

$$(a + m)_{m-r} \cdot (m - r)! = a + m, a + m - 1 \dots a + r + 1.$$

ismét a helyett $a - n$, r helyett $r + t$ -vel a' legközelebbiből:

$$(a - n + m)_{m-r-t} \cdot (m - r - t)! = a - n + m, a - n + m - 1 \dots a - n + r + t + 1$$

B.)

$$\frac{(m - r)!}{(m - r - t)! \cdot t!} = \frac{1 \cdot 2 \dots m - r - t}{1 \cdot 2 \dots m - r - t} \cdot \frac{m - r - t + 1 \dots m - r}{1 \cdot 2 \dots t} = (m - r),$$

$$\frac{(m - r + t)!}{(m - r)! \cdot t!} = \frac{1 \cdot 2 \dots m - r}{1 \cdot 2 \dots m - r} \cdot \frac{m - r + 1 \dots m - r + t}{1 \cdot 2 \dots t} = (m - r + t).$$

C.)

$$\frac{(a + m)_n}{(a + r)_{n-t}} = \frac{a + m, a + m - 1 \dots a + r + 1, a + r, \dots, a + m - n + 1}{1 \cdot 2 \dots n - t, n - t + 1 \dots n} \cdot \frac{a + r, a + r - 1 \dots a - n + m + 1, a - n + m, \dots, a + r - n + t + 1}{1 \cdot 2 \dots n - t}$$

és a' közös szorzókat elhagyván:

$$\frac{(a + m)_n}{(a + r)_{n-t}} = \frac{a + m, a + m - 1 \dots a + r + 1}{n - t + 1, n - t + 2 \dots n} \cdot \frac{a - n + m, a - n + m - 1 \dots a + r - n + t + 1}{1}$$

hasonlóképen:

$$\frac{(a + r)_n}{(a + m)_{n-t}} = \frac{a + r, a + r - 1 \dots a - n + m + t + 1, a - n + m + t, \dots, a - n + r + 1}{1 \cdot 2 \dots n - t, n - t + 1 \dots n} \cdot \frac{a + m, a + m - 1 \dots a + r + 1, a + r, \dots, a - n + m + t + 1}{1 \cdot 2 \dots n - t}$$

a' közös szorzókat elhagyván:

$$\frac{(a + r)_n}{(a + m)_{n-t}} = \frac{a - n + m + t, a - n + m + t - 1 \dots a - n + r + 1}{n - t + 1, n - t + 2 \dots n} \cdot \frac{a + m, a + m - 1 \dots a + r + 1}{1}$$

D.)

$$(a + m)_{n+r} = \frac{a + m, \dots, a + 1, a, \dots, a - n + 1, a - n, \dots, a + m - n - r + 1}{1 \dots m, m + 1 \dots n + m, n + m + 1 \dots n + r}$$

vagy:

$$(a + m)_{n+r} = \frac{a + m, \dots, a + 1, a, \dots, a + m - n - r - 1, a + m - n - r, \dots, a - n + 1, 1 \dots m}{m + 1 \dots n + r, n + r + 1 \dots n + m, n + r + 1 \dots n + m, a + m - n - r, \dots, a - n + 1}$$

ezekből:

$$\frac{(a+m)_n}{(a+r)_{n-t}} = \frac{(a+m)_{m-r} (m-r)!}{(a-n+m)_{m-r-t} n_t t!}$$

tehát:

$$I.) \frac{(a+m)_n}{(a+r)_{n-t}} = \frac{(a+m)_{m-r} (m-r)_t}{(a-n+m)_{m-r-t} n_t}$$

nem különben:

$$\frac{(a+r)_n}{(a+m)_{n-t}} = \frac{(a-n+m+t)_{m-r+t} (m-r+t)!}{(a+m)_{m-r} (m-r)! n_t t!}$$

az az:

$$II.) \frac{(a+r)_n}{(a+m)_{n-t}} = \frac{(a-n+m+t)_{m-r+t} (m-r+t)_t}{(a+m)_{m-r} n_t}$$

úgy a' D.) szerint, ha $m > r$

$$(a+m)_{n+r} = \frac{(a+m)_m a_n (n+m)_{m-r}}{(n+m)_n (a+m-n-r)_{m-r}}$$

ha $r > m$

$$(a+m)_{n+r} + \frac{(a+m)_m a_n (a-n)_{r-m}}{(n+m)_n (n+r)_{r-m}}$$

tehát:

$$III.) \frac{(a+m)_{n+r}}{a_n} = \frac{\text{ha } m > r \quad \text{vagy: } \text{ha } r > m}{(a+m)_m (n+m)_{m-r}} = \frac{(a+m)_m (a-n)_m}{(n+m)_m (n+r)_m}$$

továbbá; mivel a' feltétel szerint az I.)-ben $m > r$ de szintén $r > -k$ lehet ugyan ott m helyibe r -et, r helyibe $-k$ -át tenni mellyváltozással:

$$IV.) \frac{(a+r)_n}{(a-k)_{n-t}} = \frac{(a+r)_{k+r} (k+r)_t}{(a-n+r)_{k+r-t} n_t}$$

ugyan azon okból a' II-ben m helyett k -át r helyett $-r$ -et tévén:

$$V.) \frac{(a-r)_n}{(a+k)_{n-t}} = \frac{(a-n+k+t)_{k+r+t} (k+r+t)_t}{(a+k)_{k+r} n_t}$$

És mivel ha $m > r$ leszen $-r > -m$ ugyan a' II.)ben m helyett $-r$ és r helyett $-m$ -el

$$VI.) \frac{(a-m)_n}{(a-r)_{n-t}} = \frac{(a-n-r+t)_{m-r+t} (m-r+t)_t}{(a-r)_{m-r} n_t}$$

$$VII.) \frac{(a+r)_n}{a_{n-t}} = \frac{(a+r)_r r_t}{(a-n+r)_{r-t} n_t} \quad \text{a' IV.)ben } k=0 \text{-val}$$

$$\text{VIII.) } \frac{(a+t)_n}{a_{n-t}} = \frac{(a+t)_t}{n_t} \text{ VII-ben } r = t \text{ -vel}$$

$$\text{IX.) } \frac{(a-r)_n}{a_{n-t}} = \frac{(a-n+t)_{r+t} (r+t)_t}{a_r n_t} \text{ V.-ben } k = 0 \text{ -val}$$

$$\text{X.) } \frac{a_n}{a_{n-t}} = \frac{(a-n+t)_t}{n_t} \text{ IX.-ben } r = 0 \text{ -val}$$

Ezen egyenlítésekből továbbá ismét a' következendők származnak:

$$1.) \frac{a_n}{a_r} = \frac{(a-r)_{n-r}}{n_r} \text{ X.-ben } t = n - r \text{ -el}$$

$$2.) \frac{a_{n+t}}{a_n} = \frac{(a-n)_t}{(n+t)_t} \text{ X.-ben } n = n + t \text{ -vel}$$

$$3.) \frac{a_n}{a_{n-1}} = \frac{a-n+1}{n} \text{ X.-ben } t = 1 \text{ -el}$$

$$4.) \frac{\left(\frac{a}{b}\right)_n}{\left(\frac{a}{b}\right)_{n-1}} = \frac{a-nb+b}{nb} \text{ 3-ból } a = \frac{a}{b} \text{ -vel}$$

$$5.) \frac{(a+1)_n}{a_{n-1}} = \frac{a+1}{n} \text{ VII.-ben } t = 0 \text{ -val}$$

$$6.) \frac{a_n}{(a-1)_{n-1}} = \frac{a}{n} \text{ 5-ből } a = a - 1 \text{ -el}$$

$$7.) \frac{\left(\frac{a}{b} + 1\right)_n}{\left(\frac{a}{b}\right)_{n-1}} = \frac{a+b}{nb} \text{ 5-ből } a = \frac{a}{b} \text{ -vel}$$

$$8.) \frac{(a+r)_n}{a_n} = \frac{(a+r)_r}{(a-n+r)_r} \text{ VII.-ből } t = 0 \text{ -val}$$

$$9.) \frac{(a-r)_n}{a_n} = \frac{(a-n)_r}{a_r} \text{ I X-ből } t = 0 \text{ -val}$$

$$10.) \frac{(a+1)_n}{a_n} = \frac{a+1}{a-n+1} \text{ 8-ból } r = 1 \text{ -el}$$

$$11.) \frac{(a-1)_n}{a_n} = \frac{a-n}{a} \text{ 9-ből } r = 1 \text{ -el}$$

$$12.) \frac{\left(\frac{a}{b} + 1\right)_n}{\left(\frac{a}{b}\right)_n} = \frac{a+b}{a-nb+b} \quad 10\text{-ből } a = \frac{a}{b} \text{ -vel}$$

$$13.) \frac{\left(\frac{a}{b} - 1\right)_n}{\left(\frac{a}{b}\right)_n} = \frac{a-nb}{a} \quad 11\text{-ből } a = \frac{a}{b} \text{ -vel}$$

$$14.) \frac{(a+n)_{n+t}}{(a+n)_n} = \frac{a_t}{(n+t)_t} \quad 2\text{-ből } a = a+n \text{ -el}$$

$$15.) \frac{(a+n+r)_n}{a_n} = \frac{(a+n+r)_{n+r}}{(a+r)_{n+r}} \quad 8\text{-ből } r = n+r \text{ -el}$$

$$16.) \frac{(a+n+1)_n}{a_n} = \frac{(a+n+1)_{n+1}}{(a+1)_{n+1}} \quad 15\text{-ből } r = 1 \text{ -el}$$

$$17.) \frac{(a+n-r)_n}{a_n} = \frac{(a+n-r)_{n-r}}{(a-r)_{n-r}} \quad 15\text{-ből } r = -r \text{ -el}$$

$$18.) \frac{(a+n-1)_n}{a_n} = \frac{(a+n-1)_{n-1}}{(a-1)_{n-1}} \quad 17\text{-ből } r = 1 \text{ -el}$$

$$19.) \frac{(a+n+r)_n}{(a+n)_n} = \frac{(a+n+r)_r}{(a+r)_r} \quad 8\text{-ből } a = a+n \text{ -el}$$

$$20.) \frac{(a+n+1)_n}{(a+n)_n} = \frac{a+n+1}{a+1} \quad 19\text{-ből } r = 1 \text{ -el}$$

$$21.) \frac{(a+n-r)_n}{(a+n)_n} = \frac{a_r}{(a+n)_r} \quad 9\text{-ből } a = a+n \text{ -el}$$

$$22.) \frac{(a+n-1)_n}{(a+n)_n} = \frac{a}{a+n} \quad 21\text{-ből } r = 1 \text{ -el}$$

$$23.) \frac{(a+n)_r}{(a+n-1)_{r-1}} = \frac{a+n}{r} \quad 6\text{-ből } \left\{ \begin{array}{l} n=r \\ a=a+n \end{array} \right\} \text{ -el}$$

$$24.) \frac{(a+r)_n}{(-a)_n} = \pm \frac{(a-1)_{n-r-1}}{(a+n-1)_{n-r-1}} \quad \text{II-ben } \left\{ \begin{array}{l} t=0 \\ m=n-1 \end{array} \right\} \text{ (lap.24.12. szerint.)}$$

$$25.) \frac{(a-r)_n}{(-a)_n} = \pm \frac{(a-1)_{n+r-1}}{(a+n-1)_{n+r-1}} \quad 24\text{-ből } r = -r \text{ -el}$$

$$26.) \frac{a_n}{(-a)_n} = \pm \frac{(a-1)_{n-1}}{(a+n-1)_{n-1}} \quad 25\text{-böl } r = 0 \text{ -val.}$$

$$27.) \frac{(a+n+r)_n}{(-a)_n} = \pm \frac{(a+n+r)_{r+1}}{(a+r)_{r+1}} \quad \text{I.-böl } \left\{ \begin{array}{l} t = 0 \\ r = n-1 \\ m = n+r \end{array} \right\} \text{ -el}$$

$$28.) \frac{(a+n-r)_n}{(-a)_n} = \pm \frac{(a-1)_{r-1}}{(a+n-1)_{r-1}} \quad 25\text{-böl } r = r-n \text{ -el}$$

$$29.) \frac{(-a)_n}{(a+n-1)_{n-1}} = \pm \frac{(a+t-1)_t}{n_t}$$

$$30.) \frac{(-a)_n}{(a+n-1)_{n-1}} = \pm \frac{a}{n}$$

$$31.) \frac{(a+n)_n}{(-a)_n} = \pm \frac{a+n}{a} \quad 27\text{-böl } r = 0 \text{ -val}$$

$$32.) \frac{(a+n-2)_n}{(-a)_n} = \pm \frac{a-1}{a+n-1} \quad 28\text{-böl } r = 2 \text{ -vel}$$

$$33.) \frac{\left(n + \frac{a}{b} + 1\right)_n}{\left(n + \frac{a}{b}\right)_n} = \frac{a+nb+b}{a+b} \quad 10\text{-böl } a = \frac{a}{b} \text{ -vel}$$

$$34.) \frac{\left(n + \frac{a}{b} - 1\right)_n}{\left(n + \frac{a}{b}\right)_n} = \frac{a}{a+nb} \quad 22\text{-böl } a = \frac{a}{b} \text{ -vel}$$

$$35.) \left(-\frac{a}{b} - 1\right)_n = \pm \left(n + \frac{a}{b}\right)_n \quad (\text{lap. 34.11.}) m = \frac{a}{b} + 1 \text{ -el}$$

$$36.) \frac{\left(-\frac{a}{b}\right)_n}{\left(n + \frac{a}{b} - 1\right)_{n-1}} = \pm \frac{a}{nb} \quad 30\text{-böl } a = \frac{a}{b} \text{ -vel}$$

$$37.) \frac{\left(n + \frac{a}{b}\right)_n}{\left(-\frac{a}{b}\right)_n} = \pm \frac{a+nb}{a} \quad 31\text{-böl } a = \frac{a}{b} \text{ -vel}$$

$$38.) \frac{\left(n + \frac{a}{b} + r\right)_n}{\left(-\frac{a}{b} - r\right)_n} = \pm \frac{a + (n+r)b}{a + rb} \quad 37\text{-ből } a = a + rb \text{-vel}$$

$$39.) \frac{\left(-\frac{a}{b} - r - 1\right)_n}{\left(-\frac{a}{b} - r\right)_n} = \frac{a + (n+r)b}{a + rb} \quad 22\text{-ből } a = -\frac{a}{b} - n - r \text{-el}$$

$$40.) \frac{\left(n - \frac{a}{b} + r\right)_n}{\left(\frac{a}{b}\right)_n} = \pm \frac{\left(n - \frac{a}{b} + r\right)_{r+1}}{\left(r - \frac{a}{b}\right)_{r+1}} \quad 27\text{-ből } a = -\frac{a}{b} \text{-vel}$$

$$41.) \frac{\left(n - \frac{a}{b} - r\right)_n}{\left(\frac{a}{b}\right)_n} = \pm \frac{\left(-\frac{a}{b} - 1\right)_{r-1}}{\left(n - \frac{a}{b} - 1\right)_{r-1}} \quad 28\text{-ből } a = -\frac{a}{b} \text{-vel}$$

$$42.) \frac{\left(n - \frac{a}{b}\right)_n}{\left(\frac{a}{b}\right)_n} = \pm \frac{a - nb}{a} \quad 40\text{-ből } r = 0 \text{-vel}$$

$$43.) \frac{\left(n - \frac{a}{b} - 2\right)_n}{\left(\frac{a}{b}\right)_n} = \pm \frac{a + b}{a - nb + b} \quad 41\text{-ből } r = 2 \text{-vel}$$

A' fentebbi (lap. 37. 38.) III.-dik számából, vagy ugyan ott VII.-ből (r) -ért 1 -et (t) -ért 0 -t; a' X.-ből (r) -ért 1 -et (t) -ért 0 -t, és a' VI.-ból (n) -ért n + 1 -et tévén, következik:

$$(a+1)_n = \frac{a+1}{a-n+1} a_n$$

$$a_{n+1} = \frac{a-n}{n+1} a_n$$

$$(a+1)_{n+1} = \frac{a+1}{n+1} a_n$$

mellyekből a' különböző nevezőjű törtet egyenlő nevezőkre vonván a' következő összetett egyenlítéseket lehet kihozni:

$$1.) a_{n+1} + a_n = \frac{a+1}{n+1} a_n = (a+1)_{n+1}$$

$$2.) (a+1)_n + a_n = \frac{2a-n+2}{a-n+1} a_n = \frac{2a-n+2}{n} a_{n-1} = 2a_n + a_{n-1}$$

$$3.) (a+1)_{n+1} + a_n = \frac{a+n+2}{n+1} a_n = \frac{a+n+2}{a+1} (a+1)_{n+1} = a_{n+1} + 2a_n$$

$$4.) a_{n+1} b_n + a_n b_{n+1} = \frac{a+b-2n}{n+1} a_n b_n = \frac{a+b-2n}{a+1} (a+1)_{n+1} b_n$$

$$5.) (a+1)_{n+1} b_n + a_n (b+1)_{n+1} = \frac{a+b+2}{n+1} a_n b_n = \frac{a+b+2}{a+1} (a+1)_{n+1} b_n$$

$$6.) \frac{a_{n+1}}{b_{n+1}} + \frac{a_n}{b_n} = \frac{(a+b-2n)a_n}{(n+1)b_{n+1}} = \frac{a+b-2n}{a+1} \frac{(a+1)_{n+1}}{b_{n+1}}$$

$$7.) \frac{(a+1)_n}{(b+1)_n} + \frac{a_n}{b_n} = \frac{2(a+1)(b+1) - n(a+b+2)a_n}{(b+1)(a-n+1)b_n}$$

$$8.) \frac{(a+1)_{n+1}}{(b+1)_{n+1}} + \frac{a_n}{b_n} = \frac{a+b+2}{n+1} \frac{a_n}{(b+1)_{n+1}} = \frac{a+b+2}{(a+1)(b+1)_{n+1}} (a+1)_{n+1}$$

$$9.) \frac{1}{a_{n+1}} + \frac{1}{a_n} = \frac{a+1}{(a-n)a_n} = \frac{a+1}{(n+1)a_{n+1}} = \frac{a+1}{a(a-1)_n}$$

$$10.) \frac{1}{(a+1)_n} + \frac{1}{a_n} = \frac{2a-n+2}{(a+1)a_n} = \frac{2a-n+2}{(n+1)(a+1)_{n+1}}$$

$$11.) \frac{1}{(a+1)_{n+1}} + \frac{1}{a_n} = \frac{a+n+2}{(a+1)a_n} = \frac{a+n+2}{(n+1)(a+1)_{n+1}}$$

$$12.) a_{n+1} - a_n = \frac{a-2n-1}{n+1} a_n = \frac{a-2n-1}{a+1} (a+1)_{n+1}$$

$$13.) (a+1)_n - a_n = \frac{n}{a-n+1} a_n = \frac{n}{a+1} (a+1)_n = a_{n-1}$$

$$14.) (a+1)_{n+1} - a_n = \frac{a-n}{n+1} a_n = \frac{a-n}{a+1} (a+1)_{n+1} = a_{n+1}$$

- $$15.) a_{n+1}b_n - a_nb_{n+1} = \frac{a-b}{n+1} a_n b_n = \frac{a-b}{a+1} (a+1)_{n+1} b_n$$
- $$16.) (a+1)_{n+1} b_n - a_n (b+1)_{n+1} = \frac{a-b}{n+1} a_n b_n = \frac{a-b}{a+1} (a+1)_{n+1} b_n$$
- $$17.) \frac{a_{n+1}}{b_{n+1}} - \frac{a_n}{b_n} = \frac{a-b}{n+1} \frac{a_n}{b_{n+1}} = \frac{a-b}{a+1} \frac{(a+1)_{n+1}}{b_{n+1}}$$
- $$18.) \frac{(a+1)_n}{(b+1)_n} - \frac{a_n}{b_n} = \frac{n(b-a)}{(b+1)(a-n+1)} \frac{a_n}{b_n} = \frac{b-a}{n+1} \frac{a_{n-1}}{(b+1)_{n+1}}$$
- $$19.) \frac{(a+1)_{n+1}}{(b+1)_{n+1}} - \frac{a_n}{b_n} = \frac{a-b}{(n+1)(b+1)_{n+1}} \frac{a_n}{b_n} = \frac{(a-b)(a+1)_{n+1}}{(a+1)(b+1)_{n+1}}$$
- $$20.) \frac{1}{a_{n+1}} - \frac{1}{a_n} = \frac{2n-a+1}{(a-n)a_n} = \frac{2n-a+1}{(n+1)a_{n+1}}$$
- $$21.) \frac{1}{(a+1)_n} - \frac{1}{a_n} = \frac{-n}{(a+1)a_n} = \frac{-n}{(n+1)(a+1)_{n+1}}$$
- $$22.) \frac{1}{(a+1)_{n+1}} - \frac{1}{a_n} = \frac{n-a}{(a+1)a_n} = \frac{n-a}{(n+1)(a+1)_{n+1}}$$

A' felsőbb rangú számláló haladásokról

(*De progressionibus arithmetice superiorum ordinum.*)

Ha egy felvett számláló haladásnak (mellyett a' tőle eredttekre nézve 1-ső rangúnak mondunk) először egy, azután két, három, négy... 's több tagai' öszvetét (*summa*) egymás után rakjuk; azokból ismét más meg más haladások származnak, mellyeknek viszont szükségképen azon tulajdonsággal kell birniok; hogy ha megfordítva már most, valamellyiken elkezdvén a' tagokat egymásból kivesszük, 's az így találtató külzéseköl újabb meg újabb haladásokat alkotunk; a' kívántató számszor ismételt kivonások után, végtire az eredeti haladás' egymással mindig egyenlő külzéseinek kell színre jöni.

Például: Legyen az 1-ső rangú haladás (a) alapszámmal (k) külzéssel:

I.) a, a+k, a+2k, a+3k, a+4k, a+5k, 's a' t.

ezzel előadott képen bányán származik belőle:

II.) a, 2a+k, 3a+3k, 4a+6k, 5a+10k, 6a+15k... 's a' t.

ismét ebből, hasonló bánással:

III.) $a, 3a+k, 6a+4k, 10a+10k, 15a+20k, 21a+35k \dots$'s a' t.

Megfordítva: a' III.) alatti tagokat egymásból kivévén találhatjuk: $2a+k, 3a+3k, 4a+6k \dots$'s a' t. 's a' kivonást ismételvén: $a+2k, a+3k, a+4k \dots$'s a' t. melly tagoknak külösei: $k, k, k, \dots$ végtire az eredeti haladás' egymással mindig egyenlő külöset állítják elő.

A' mondott törvény szerint, valamelly felvett külösből és alapszámból, egyszeri, kétszeri $\dots$'s a' t. összeadások által alkotott haladások; és megfordítva mind azok, mellyek egyszeri, kétszeri, háromszori $\dots$'s a' t. kivonások után, egyenlő közös külöseket hagynak fent: felsőbb, még pedig a' végre hajtandó összeadások vagy kivonások számától, $I^{\text{d}}, II^{\text{d}}, III^{\text{d}} \dots$'s a' t. rangú számláló haladásoknak (*Progressiones arithmeticae I, II, III... etc. ordinis*) neveztetnek.

Hogy az ezen tulajdonságokkal biró haladások' alkotásának általános törvényét megállapíthassuk, figyelmezzünk fentebb mondottakkal egyezőleg, a' tagok' egymásból származtának feltételeire, azokat az algebrai ráviteles függvényekre alkalmazva.

Mindenek felett tehát: Ha az I-ső rangú haladásnak akarhanyadik számú tagából, az éppen előtte valót kivesszük: a' közös egyenlő külösetnek kell fennmaradni. Analytikai kitételekkel élvén, 's az n -dik tagot, az n -ek függvényével $f(n)$ az előtte való $(n-1)$ -iket $f(n-1)$ -el jegyezvén, kell lenni:

$$f(n) - f(n-1) = k.$$

De az algebrai ráviteles függvényeknek (13-dik lap.) más formája nem lehet mint ez:

$$f(x) = Ax^0 + Bx + Cx^2 + Dx^3 + Ex^4 + Fx^5 + \dots \text{'s a' t.}$$

mellyben az $A, B, C, D, \dots$'s a' t. östevők (0-t is ide foglalván) mindenféle állandó mennyiségeket tehetnek, és az egyenlítés törvényei szerint meghatározthatnak. Tehát ezen formára x helyett n -et helyhetvén, az I^{d} rang külöseire nézve:

$$f(n) - f(n-1) = A + Bn + Cn^2 + Dn^3 + \dots \text{'s a' t.}$$

$$- [A + B(n-1) + C(n-1)^2 + D(n-1)^3 + \dots \text{'s a' t.}] = k$$

Mivel pedig jobb felől a' (k) magánosan áll; ellenben az $(n-1)$ -nek felsőbb hatványai kifejtetvén, azokból n -el n^2 -vel $\dots$'s a' t. összekapcsolt mennyiségekre kellene akadnunk; látnivalóképen, hogy az adott egyenlítés' feltételeinek elég tétethessék: az n , és $(n-1)$ felsőbb hatványaiboz járuló

ösztévőknek $= 0$ kell lenni; 's így az I^s rangra nézve meg nem állható tagokat kihagyván marad:

$f(n) - f(n-1) = A + Bn - [A + B(n-1)] = k$ honnét: $B = k$
's a' B -nek ezen értékét $f(n)$ -be tévén, az n -ek így számozott függvényét pedig $f'(n)$ -el jegyezvén: az olyan haladásoknak, melyek egyszeri kivonás után, közös egyforma külzésekét hagynak fent, vagy, az úgy nevezett I^s rangú számláló haladásoknak, szükségképen illetén formájuknak kell lenni:

$$\text{I-ső rang } f'(n) = A + kn$$

mellyben A, az n -től független, 's szabad akaratként felvételhető vagy meghatározható mennyiség, ugyan az; mellyet fentebb alapszámnak nevezvén (a) betűvel jegyeztünk. És így n -ek egymás után 0, 1, 2, 3, 4 's a' t. értéket tulajdonítván, ahoz képest $a, a+k, a+2k, a+3k, a+4k, \dots$'s a' t. az (a) alap számmal és (k) külzéssel folytatott I-ső rangú számláló haladás, mint legközelebb I.) alatt találtuk.

Kitaláltatván e' szerint az I-ső rangú haladásnak általános törvénye, le-szen újra a II-dik rangúra nézve:

$$f(n) - f(n-1) = A + Bn + Cn^2 + Dn^3 + \dots \text{'s a' t.}$$

$- [A + B(n-1) + C(n-1)^2 + D(n-1)^3 + \dots \text{'s a' t.}] = a + kn$
mellyben ismét, az n , és $(n-1)$ harmadik 's felsőbb hatványainak ösztévőit, (mint a' mellyből különben az egyenlítés feltételeivel meg nem állható mennyiségek származnának) tévén $= 0$, 's az ennek következtében elenyésző tagokat kihagyván: marad:

$$f(n) - f(n-1) = A + Bn + Cn^2 - [A + B(n-1) + C(n-1)^2] = a + kn$$

$$\text{az az: } A + Bn + Cn^2 - [A + Bn - B + Cn^2 - 2Cn + C] = a + kn$$

vagy is: az (n) ugyan azon hatványainak megfelelő ösztévőket rendbe szedvén:

$$\left. \begin{array}{r} A + B \\ - A - B \\ + B + 2C \\ - C \end{array} \right\} n + C \left\} n^2 = a + kn \text{ honnét:}$$

$B - C = a$; $2C = k$ és így $C = \frac{1}{2}k$; $B = a + \frac{1}{2}k$; 's a' B -nek C -nek ezen értékeit $f(n)$ -be tévén, az n -ek így származott függvényét pedig $f''(n)$ -el jegyezvén: az olyan haladásoknak, melyek kétszeri kivonás után közös egyforma külzésekét hagynak fent; vagy, az úgy nevezett II-dik rangú számláló haladásoknak, szükségképen illetén formájuknak kell lenni:

II-dik rang $f''(n) = A + (a + \frac{1}{2}k)n + \frac{1}{2}kn^2$ melyben mint fentebb, (a) az eredeti haladás' alapszámát teszi, A által pedig újonnan akarmi szabad akaratként felvétethető mennyiség jelentetik. Újra tehát n -ek egymás után 0, 1, 2, 3, 4, 's a' t. értékével a' II-dik rangú számláló haladás' egymás után következő tagai lesznek:

$$A; A + (a + k); A + (2a + 3k); A + (3a + 6k); A + (4a + 10k) \dots \dots \dots 's a' t.$$

és különösen azon esetben ha $A = a$

$$a, 2a + k, 3a + 3k, 4a + 6k, 5a + 10k, \dots \dots \dots 's a' t. \text{ mint (lap. 44. II.) alatt.}$$

továbbá ezekhez mindenben hasonló bánással a'

$$\text{III-dik rang } f'''(n) = A + (\frac{1}{2}a + \frac{1}{2}k)n + \left(\frac{a+k}{2}\right)n^2 + (\frac{1}{6}k)n^3$$

's itt is különösen azon esetben ha $A = a$

$$a, 3a + k, 4a + 6k, 5a + 10k, \dots \dots \dots 's a' t. \text{ mint (lap. 44. III.) alatt.}$$

$$\text{IV-dik rang } f^{IV}(n) = A + (\frac{1}{6}a + \frac{1}{2}k)n + (a + \frac{1}{2}k)n^2 + (\frac{1}{6}a + \frac{1}{2}k)n^3 + (\frac{1}{24}k)n^4$$

.....

Ezen lehozatokból következik:

a.) Hogy a' felsőbb rangú számláló haladásoknak legáltalánosabb törvénye az: midőn az $n=0$ -nak megfelelő tagok, melyeket fentebbiekben A -val jegyeztünk; minden rangoknál szabad akaratként változnak: azok pedig melyekben A, minden rangokra nézve állandóul meghatározottatik, csak különösebb fajoknak tekintethetnek; mint voltak azok melyeket (lap. 44.) legelőbb szemlélet alá vettünk.

b.) Tétetvén A, a' felsőbb rangok szerinti változásainak megfelelőkép': $A' + a, A'' + a, A''' + a, A^{IV} + a \dots 's a' t.$ a' fentebbi alkatkák (formulae) következőkbe mennek által:

$$\text{I-ső rang} = A' + [a + kn]$$

$$\text{II-dik} \dots = A'' + [a + (a + \frac{1}{2}k)n + (\frac{1}{2}k)n^2]$$

$$\text{III-dik} \dots = A''' + [a + (\frac{1}{2}a + \frac{1}{2}k)n + \left(\frac{a+k}{2}\right)n^2 + (\frac{1}{6}k)n^3]$$

$$\text{IV-dik} \dots = A^{IV} + [a + (\frac{1}{6}a + \frac{1}{2}k)n + (a + \frac{1}{2}k)n^2 + (\frac{1}{6}a + \frac{1}{2}k)n^3 + (\frac{1}{24}k)n^4]$$

.....

c.) Ha tehát valamely m -dik rangú haladásból, $m+1$ számú tagok, az n -ek megfelelő értékeivel együtt adatnak: azokból ugyan annyi, $A_0 n^0 + A_1 n + A_2 n^2 + A_3 n^3 + A_4 n^4 + \dots \dots \dots A_m n^m$ -hez hasonló formájú

egyenlítéseket lehet alkotni: melyekből az (n) hatványaihoz járuló összevők, a' kérdéselt haladásra nézve változatlanul meghatározhatatnak; különösen pedig, az A_0 -nak megtalált értéke, egy állandó mennyiséget, 's még azon kívül az alapszámot rejti magában.

Például: Legyen a' II-dik rangú haladásban a' 3, 4, 5 -dik tag, megfelelőkép 7, 14, 23; ezen adatokból következő 3 egyenlítésekkel fogunk birni:

$$A_0 + 3A_1 + 9A_2 = 7$$

$$A_0 + 4A_1 + 16A_2 = 14 \text{ honnét: } \begin{matrix} A_1 + 7A_2 = 7 \\ A_1 + 9A_2 = 9 \end{matrix} \text{ és: } 2A_2 = 2$$

$$A_0 + 5A_1 + 25A_2 = 23$$

mellyből a' megkívántató helyretételekkel: $A_0 = -2$; $A_1 = 0$; $A_2 = 1$'s így az 1-ső tag $= (-2 + 1) = -1$, a' 2-dik $(-2 + 4) = 2$, a' 3-dik $(-2 + 9) = 7$, mint adva volt 's a' t. a' 6-dik $= (-2 + 36) = 34$, a' 7-dik $= (-2 + 49) = 47$'s a' t. melyek egymás után rakatván, a' következő:

II-dik rangú — 1; 2; 7; 14; 23; 34; 47 's a' t.

egymásból kivonatván pedig imez:

I-ső rangú 3; 5; 7; 9; 11; 13 's a' t. haladást állítják elő.

d.) Ezek szerint, ugyan azon alapszámból és külzésből, valamelly szabadon felvétethető mennyiségnek minden tagoknál és rangoknál hozzá adásával, vagy kivételével; határozatlanul sokféle felsőbb rangú haladásokat lehet alkotni.

Például: Legyen az I-ső II-dik III-dik IV-dik rangú haladás $a = 1$ alapszámmal, $k = 2$ külzéssel, lesz:

	mellyekben
I-ső rang = 1; 3; 5; 7; 9; 11; 13;	's a' t. } $A' = 0$
II-dik = 1; 4; 9; 16; 25; 36; 49;	's a' t. } $A'' = 0$
III-dik = 1; 5; 14; 30; 55; 91; 140;	's a' t. } $A''' = 0$
IV-dik = 1; 6; 20; 50; 105; 196; 236;	's a' t. } $A^{IV} = 0$

ugyan ezen haladások, tévén az I-ső rangban $A' = 5$ a' II-dikban $A'' = -2$ a' III-dikban $A''' = 10$ a' IV-dikben $A^{IV} = 100$ e'ként változnak:

	mellyekben
I-ső rang = 6; 8; 10; 12; 14; 16; 18;	's a' t. } $A' = 5$
II-dik = -1; 2; 7; 14; 23; 34; 47;	's a' t. } $A'' = -2$
III-dik ... = 11; 15; 24; 40; 65; 101; 150;	's a' t. } $A''' = 10$
IV-dik ... = 101; 106; 120; 150; 205; 296; 336;	's a' t. } $A^{IV} = 100$

e.) Irjuk le most az (a) alapszámmal és (k) külzéssel, azon feltétel alatt, hogy legyen $A', A'', A''' \dots 's a' t. = 0$ formáltatható, felsőbb rangú haladásokat egymás alá; leszen:

		k ü l z é s					
		k;	k;	k;	k;	k;	k; ... 's a' t.
I-ső rang=	alapszám	a;	a+k;	a+2k;	a+3k;	a+4k;	a+5k; a+6k; ... 's a' t.
II-dik ... =	a;	2a+k;	3a+3k;	4a+6k;	5a+10k;	6a+15k;	7a+21k; ... 's a' t.
III-dik ... =	a;	3a+k;	6a+4k;	10a+10k;	15a+20k;	21a+35k;	28a+56k; ... 's a' t.
IV-dik ... =	a;	4a+k;	10a+5k;	20a+15k;	35a+35k;	56a+70k;	84a+126k; ... 's a' t.

világos: hogy az I-ső rangnak m -dik tagja, az (a) alapszámból és (k) külzésből, éppen azon törvény szerint van összetéve; mint az m -dik rangnak első tagja megfordítva (k) alapszámból és (a) külzésből: hasonlóképen a' II-dik rangnak m -dik tagja, az (a) alapszámból és (k) külzésből éppen úgy; mint az m -dik rangnak 2 -dik tagja (k) alapszámból és (a) külzésből 's a' t.: és hogy ezen viszonyok minden további tagokra és felsőbb rangokra nézve állanak. Ha tehát valamely felsőbb rangú haladásban, az 1-ső 2-dik 3-dik tagot c.) szerint kitálatuk, ugyan azokból a' b.) -nél előterjesztett alkatkák' alkalmazásával, benne egyedül az alapszámot és külzést jelentő betűket cserélvén fel, új egyenleteket lehet alkotni; 's belőlök az A_0 ; a; k; eddig ismeretlenül maradt értékeit meghatározni.

Például: c.) alatt a' II-dik rangú haladás 1-ső 2-dik 3-dik tagainak értéke találtatott $= -1; +2; +7; -$ nek. Kell pedig lenni az éppen elő adottaknál fogva, a' b.) alatti előterjesztés következtében, vagy még láthatóbban legközelebb d.) alatti szerint, m -nek $= 2$ értékével:

$$A'' + [k + ma] = A'' + k + 2a = -1$$

$$A'' + [k + (k + \frac{1}{2}a)m + (\frac{1}{2}a)m^2] = A'' + 3a + 3k = 2$$

$$A'' + [k + (\frac{3}{2}k + \frac{1}{2}a)m + (\frac{k+a}{2})m^2 + (\frac{1}{2}a)m^3] = A'' + 6k + 4a = 7$$

mellyekből találtatik: $k = 2$; $a = 1$; mint volt d.) alatt.

f.) Minthogy a' c.) szerint meghatározott ösztevők, az n -ek akarhanyadik tagot jelentő értékére nézve ugyan azok maradnak; tévén n helyett $(n+r)$ -et, az ottani általános forma imígy fog elváltozni:

$$A_0(n+r)^0 + A_1(n+r)^1 + A_2(n+r)^2 + A_3(n+r)^3 + A_4(n+r)^4 + \dots + A_m(n+r)^m$$

Kifejtve, 's az (n) ugyan azon hatványainak megfelelő összevőket elrendelve:

$$\begin{array}{l} A_0 \\ +A_1 r \\ +A_2 r^2 \\ +A_3 r^3 \\ +A_4 r^4 \\ \dots \\ \dots \end{array} \left\{ \begin{array}{l} n^0 + 1 \\ + 2r \\ + 3r^2 \\ + 4r^3 \\ \dots \end{array} \right\} \begin{array}{l} A_1 n + 1 \\ + 3r \\ + 6r^2 \\ \dots \end{array} \left\{ \begin{array}{l} A_2 n^2 + 1 \\ + 4r \\ \dots \end{array} \right\} \begin{array}{l} A_3 n^3 + 1 \\ \dots \end{array} \left\{ \begin{array}{l} A_4 n^4 + \dots A_m n^m \\ \dots \end{array} \right\}$$

mellyből kitűnik: hogy ha r-et szabad akaratként felvévén a' tagok' számát változtatjuk, ahoz képest az A_0 állandó mennyiséghez ismét újabb állandó fog járulni, a' többi összevők pedig $A_1 P_1$; $A_2 P_2$; $A_3 P_3$; 's a' t. formákba mennek által; 's mivel ezen változások, b.)-nél a' rekesz alá foglalt (a) és (k) mennyiségek' változatlanóságával történnek: a' tagok' hanyadikságának rende ugyan azon rangban sem a' rang' általános törvényére, sem az eredeti alapszámra és külzésre befolyással nincs; 's az így származott új haladás' tagai, azon kívül hogy r-el elébbieknek vagy utóbbiaknak tétettek, egyéb iránt ugyan azon számok.

Például: Ha most c.)-nél n-et változtatván, az adott 7; 14; 23; számok 1-ső 2-dik 3-dik tagoknak tétetnek, leszen:

$$A_0 + A_1 + A_2 = 7$$

$$A_0 + 2A_1 + 4A_2 = 14 \text{ honnét: } A_1 + 3A_2 = 7$$

$$A_0 + 3A_1 + 9A_2 = 23 \quad A_1 + 5A_2 = 9 \quad \text{és: } 2A_2 = 2$$

mellyből a' megkívántató helyretételekkel, lévén: $A_0=2$; $A_1=4$; $A_2=1$ leszen; a' 4-dik tag $= A_0 + 4A_1 + 16A_2 = 34$ az 5-dik $= A_0 + 5A_1 + 25A_2 = 47$... 's a' t. a' 0-dik $= 2$; a' -1-dik $= -1$; mellyek egymás után rakatván, a' következő:

II-dik rangú -1; 2; 7; 14; 23; 34; 47 's a' t.

egymásból kivonatván pedig imez:

I-ső rangú 3; 5; 7; 9; 11; 13; 's a' t.
haladást állítják elő mint fentebb.

g.) Ezen okból, 's ama' másiból, hogy minden rangú haladásokhoz egy szabad akaratként felvétethető mennyiség járulhat: az első rangú haladás' első taga alá akarmi számot lehet írni, azt a' felette valóval össze adván belőle 2-dik, ebből 's a' felette valóbol ismét 3-dik 's a' t. tagot alkotni; 's ezen bánás módot akár hanyadik rangokon 's tagokon által folytatni.

Például: Legyen I-ső rang = 3; 5; 7; 9; 11; 13... 's'a't. leszen:
 kezdvén 5-el a' II-dik..... = 5; 8; 13; 20; 29; 40.... 's'a't.
 kezdvén 4-el a' III-dik = 4; 9; 17; 30; 50; 79.... 's'at.
 kezdvén 7-el a' IV-dik.... = 7; 11; 20; 37; 67; 127.... 's'a't.

.....
 ugyan is ezekben, felvilágosításul a' II-dik rangnál nem történt egyéb; mint,
 hogy a' 0 -nak megfelelő szabad akaratként felvételhető mennyiség, tétetvén = 5;
 az $n = 0; 1; 2; 3; 4; 5; 6; \dots$'s'a't. értékeinek megfelelőkép'
 az I-ső = 0; 3; 5; 7; 9; 11; 13.... 's'a't. rangbol, elébb 5-el kezdve
 a' II-dik = 5; 8; 13; 20; 29; 40; 59.... 's'a't. szokott mód szerint
 formáltatott, azután ugyan az n -ek eredeti értéke 1-el megszorítottván,
 annál fogva minden tag 1-el elébbre mozdult.

Az alakított 3szög, 4szög,... 's'a't. sokszög, és sudar-számokrol

(*De numeris figuratis triangularibus, tetragonis, etc. polygonis; et pyramidalibus.*)

Az ollyatén számoknak, mellyek az eddigiekben előterjesztett bánás-móddal úgy formáltattak, hogy: 1-en kezdve és $a' k = 1; 2; 3; 4 \dots$'s'a't. értékével előre menő számláló haladások I-ső rangoknak tétetvén, belőlök II-dik rangok alkottattak: az a' különös tulajdonságuk van, mellynél fogva a' 2-dik tagéval egyenlő számú rendes szögekbe irathatnak; vagy ugyan annyi pontok a' hány egység akarmellyik tagban előfordul, hasonlóképen rendes szögekben elhelyeztethetők; a' III-dik rangúnak pedig leg nagyobbik taga alapul vétetvén, ha a' kisebbek egymás után következő rendel felibe rakatva képzeltetnének, sudarasan összébb menve utóbb 1-en kellene végződniek. Ezen okból az így formált II-dik rang haladásba tartozó számok, három, négy, öt, . . . sokszög számoknak (*numeri triangulares, tetragoni, pentagoni, polygoni*) a' III-dik haladásba tartozók három, négy, öt, . . . sokszög első rendű sudar-számoknak, 's így tovább a' felsőbb rangok hasonlatosság szerint második, harmadik, 's a't. rendű sudar számoknak (*numeri pyramidales I-i II-i III-i ordinis*) mindnyájan pedig általában alakított számoknak (*numeri figurati*) neveztetnek.

Például: $a' k$ -nak $= 1$ értékével:

I-ső rang $= 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; \dots$ 'sa't.)	} vagy: {	(eredeti haladás 1 külzéssel háromszög számok $\triangle$ első rendű sudar számok $\triangle$ másod rendű sudar számok
II-dik... $= 1; 3; 6; 10; 15; 21; 28; \dots$ 'sa't.)		
III-dik... $= 1; 4; 10; 20; 35; 56; 84; \dots$ 'sa't.)		
IV-dik... $= 1; 5; 15; 35; 70; 126; 210; \dots$ 'sa't.)		

k -nak $= 2$ értékével:

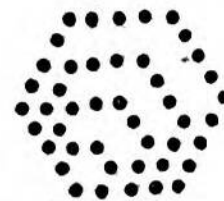
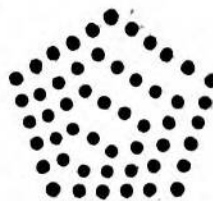
I-ső rang $= 1; 3; 5; 7; 9; 11; 13; \dots$ 'sa't.)	} vagy: {	(eredeti haladás 2 külzéssel négyyszög számok $\square$ első rendű sudar számok $\square$ másod rendű sudar számok
II-dik... $= 1; 4; 9; 16; 25; 36; 49; \dots$ 'sa't.)		
III-dik... $= 1; 5; 14; 30; 55; 91; 140; \dots$ 'sa't.)		
IV-dik... $= 1; 6; 20; 50; 105; 196; 336; \dots$ 'sa't.)		

k -nak $= 3$ értékével:

I-ső rang $= 1; 4; 7; 10; 13; 16; 19; \dots$ 'sa't.)	} vagy: {	(eredeti haladás 3 külzéssel ötszög számok ötszög első rendű sudar számok ötszög másod rendű sudar számok
II-dik... $= 1; 5; 12; 22; 35; 51; 70; \dots$ 'sa't.)		
III-dik... $= 1; 6; 18; 40; 75; 126; 196; \dots$ 'sa't.)		
IV-dik... $= 1; 7; 25; 65; 140; 266; 462; \dots$ 'sa't.)		

leirattathatnak pedig, vagy pontonként elrakathatnak rendes szögekbe
illetéknépen:

1.	1.	4.	9.	16.			
2.	3.	2.	3.	8.	15.		
4.	5.	6.	5.	6.	7.	14.	
7.	8.	9.	10.	10.	11.	12.	13.
11.	12.	13.	14.	15.			



Ezekon kívül: szögszám' szegeletének mondatik, az eredeti haladás 2-dik tagát tevő szám, oldalának pedig ugyan azon eredeti haladás' öszveztet tagainak száma (*numerus terminorum summatorum*); minthogy elsőre nézve, mint már érintettük; a' másod rangú haladás' minden külön tagaiban befoglalt egységek, annyi oldalú sokszögbe irathatnak, vagy pontonként bérakathatnak, mint a' második tag szám szerint jelenti; másodkra nézve: minthogy megfelelőkép' egy egy oldalra annyi szám vagy annyi pont esik, mint a' hány tagok az eredeti haladásból egybeöszveztettek.

Alkalmaztassuk most, a' fentebbi általános vizgálatokat, különösen $a' k$ -nak $= 1$ értékével származott haladásra vagy a' természeti számok' sorzatára (*series numerorum naturalium*)'s az abból eredő felsőbb rangú haladásokra. Ezekben:

Az. egységet első tagnak vévén fel, mindenik tag annyi, mint a' maga helyzetének hanyadikságát jelentő szám. Tehát $f'(n) = n$ melyet az I-ső rangú haladások általános kitételével (46. lap. b.) egybevetvén találhatik azonnal: $A' = 0$; $a = 0$; $k = 1$ és ha legegyszerűbben a' felsőbb rangokban is $A'' = 0$; $A''' = 0$; $A^{IV} = 0$; ... 's a' t. tétel; lesznek az egymás után következő rangoknak általános kitételei:

I-ső rang, vagy: természeti számok' sorzata:

$$f'(n) = n$$

II-dik rang, vagy: három szög-számok;

egynevezőre vonva: szorzókra osztva:

$$f''(n) = \frac{1}{2}n + \frac{1}{2}n^2 \dots \dots \dots = \frac{n + n^2}{2} \dots \dots \dots = \frac{n \cdot n + 1}{1 \cdot 2}$$

III-dik rang, vagy: első rendű $\triangle$ sudar számok:

$$f'''(n) = \frac{1}{6}n + \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{6}n^3 \dots \dots \dots = \frac{2n + 3n^2 + n^3}{6} \dots \dots \dots = \frac{n \cdot n + 1 \cdot n + 2}{1 \cdot 2 \cdot 3}$$

IV-dik rang, vagy: másod rendű $\triangle$ sudar számok:

$$f^{IV}(n) = \frac{1}{24}n + \frac{1}{4}n^2 + \frac{1}{4}n^3 + \frac{1}{24}n^4 = \frac{6n + 11n^2 + 6n^3 + n^4}{24} = \frac{n \cdot n + 1 \cdot n + 2 \cdot n + 3}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4}$$

.....

k -nak = 2 értékével:

A' legközelebbiekkel mindenben megegyező össze hasonlításokból következik: az 1-ső rangban $a = 1$; $A' = 0$; 's tételvén legegyszerűbben a' felsőbb rangokban is egymás után mindenütt; $A'' = 0$; $A''' = 0$'s a' t. a' felvett eredeti haladásból származnak:

I-ső rang:

$$f'(n) = 1 + 2n$$

II-dik rang, vagy: négyszög számok:

$$f''(n) = 1 + 2n + n^2 \dots \dots \dots = (1+n)^2 \text{ az az: } \left. \begin{array}{l} n\text{-ek minden értékeire} \\ \text{nézve, ide értvén } 0\text{-t} \\ \text{is; a' } \square \text{ számok' általá-} \\ \text{nos kitétele.} \end{array} \right\}$$

III-dik rang, vagy: első rendű $\triangle$ sudar számok:

$$f'''(n) = 1 + \frac{1}{6}n + \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{6}n^3 \dots \dots \dots = 1 + \frac{13n + 9n^2 + 2n^3}{6}$$

IV-dik rang, vagy: másod rendű $\triangle$ sudar számok:

$$f^{IV}(n) = 1 + \frac{7}{12}n + \frac{2}{3}n^2 + \frac{2}{3}n^3 + \frac{1}{12}n^4 = 1 + \frac{28n + 23n^2 + 8n^3 + n^4}{12}$$

.....

Különösen a' sokszögszámokra nézve, a = 1 -nek továbbra is meghagyatván, $f''(n)$ -be pedig egymás után $k = 3; 4; 5; \dots$'s a' t. -nek tétetvén, lesznek a' megfelelő alkatkák:

$$\begin{aligned} &\text{Ötszögszámok: } 1 + \frac{5n+3n^2}{2}; \text{ Hatszögek } 1 + \frac{6n+4n^2}{2}; \text{ Hétszögek;} \\ &1 + \frac{7n+5n^2}{2} \dots \dots \text{'s a' t. vagy általában nevezvén a' szegletek' számát m -nek;} \\ &(m) \text{ szögek; } 1 + \frac{mn+(m-2)n^2}{2} \end{aligned}$$

Ezen alkatkáknak azonban alapja, hogy az $n = 0$ -nak megfelelő tag, legyen = 1: de ha az egységet első tagnak tekintjük, 's minden egyebeket, csupán (n) helyett (n-1)-nek helyretételével változatlanul hagyunk; (lap.49.) lesz a' $\square$ számok kitétele: $(1+n-1)^2 = n^2$; az ötszögeké:

$$\begin{aligned} 1 + \frac{5(n-1)+3(n-1)^2}{2} &= \frac{2+(5n-5)+(3n^2-6n+3)}{2} = \frac{3n^2-n}{2} \\ &= \frac{n(3n-1)}{2}; \text{ a' hatszögeké } 1 + \frac{6(n-1)+4(n-1)^2}{2} = \frac{2+(6n-6)+(4n^2-8n+4)}{2} \\ &= \frac{4n^2-2n}{2} = \frac{n(4n-2)}{2} \text{ a' hétszögeké: } \frac{5n^2-3n}{2} = \frac{n(5n-3)}{2} \end{aligned}$$

és általában az:

$$\begin{aligned} (m) \text{ szögeké} &= \frac{2+m(n-1)+(m-2)(n-1)^2}{2} = \frac{(m-2)n^2-(m-4)n}{2} \\ &= \frac{n[(m-2)n-(m-4)]}{2} \end{aligned}$$

A' további alkalmazások magokban világosok lévén, még egy észrevétel legyen figyelemre méltó. Melly is ez:

Írattassék le egymás után következő rendel, egymás alá, a' természeti számok' sorzata, azután a' II-dik rangú haladás' tagai ismét egymás alá egy hellyel lejjebb.... 's a' t. ezen elő terjesztés szerint, a' bizonyos m -dik számnak megfelelő tagokat m -el és a' rangnak számával, vagy az ugyan azon sorba eső tag' hanyadikságának számával lehet kifejezni.

Például: leírva:

I.									
1.	II.								
2.	1.	III.							
3.	3.	1.	IV.						
4.	6.	4.	1.	V.					
5.	10.	10.	5.	1.	VI.				
6.	15.	20.	15.	6.	1.	VII.			
7.	21.	35.	35.	21.	7.	1.	VIII.		
8.	28.	56.	70.	56.	28.	8.	1.	IX.	
9.	36.	84.	126.	126.	84.	36.	9.	1.	X.
10.	45.	120.	210.	252.	210.	120.	25.	10.	1.

Minthogy ezen leírással az m -dik sorban eső II -dik rangú alakított szám, a' maga sorzatának $(m-1)$ -dik, a' III -dik rangú ugyan a' maga sorzatának $(m-2)$ -dik, és így tovább mindegyik rangú egymás után a' maga sorzatának $(m-3)$ -dik; $(m-4)$ -dik $m-(r-1)$ -dik tagát teszi: tévén a' fentebbiekben, (ha most m -nek a' sor' r -nek a' rang' hanyadiksga neveztetik,) n helyett $m-(r-1)$ -et; leszen az ugyan azon sorban eső alakított számok' általános kitétele:

$$\frac{m-r+1.m-r+2. \dots m-2.m-1.m.}{1. \quad 2. \dots r-2. \quad r-1. \quad r} = \frac{m.m-1.m-2. \dots m-r+1}{1. \quad 3. \quad 3. \dots r}$$

Számokban: Keressük az 5-dik sornak 2-dik tagát. lesz: $m=5$;

$r=2$ tehát az általános kitétele számokra vévén: $\frac{5. 4.}{1. 2.} = 10$. Hasonlóképen a'

6-dik sornak 3-dik tagára nézve: $m=6$; $r=3$ tehát a' keresett tag $\frac{6. 5. 3.}{1. 2. 3.}$

$= \frac{120}{6} = 20$. A' 7-dik sornak 4-dik taga: $\frac{7. 6. 5. 4.}{1. 2. 3. 4.} = \frac{840}{24} = 35$. 's így

tovább.

Az eddig mondottaknak még könnyebben lehető felvételére, a' helyett hogy a' függvények' szokott kitételével élnénk, jegyezzük az m -dik rang' n -dik tagát így: T^n ; az m -dik rang' n tagai' öszvetét azon formára így: S_m^n ; a' már mondottakból következik:

$$\text{I.) } T_m^n = S_{m-1}^n$$

$$\text{II.) } T_m^n = S_m^n - S_{m-1}^{n-1}$$

$$\text{III.) } S_{m+1}^{n+1} = S_{m+1}^n + S_m^{n+1}$$

melly alkatkák (*formulae*) ha az I-ső rang felett csupa egységekből álló 0 -dik rangot gondolunk, az n -ek és m -nek $= 1$ értékeire is illenek,

Fentebb (lap. 52.) találtuk:

$$S_1^n = T_1^n = \frac{n \cdot n + 1}{1 \cdot 2} = \frac{n^{2+1}}{2!}$$

$$S_2^n = T_2^n = \frac{n \cdot n + 1 \cdot n + 2}{1 \cdot 2 \cdot 3} = \frac{n^{3+1}}{3!}$$

$$S_3^n = T_3^n = \frac{n \cdot n + 1 \cdot n + 2 \cdot n + 3}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} = \frac{n^{4+1}}{4!}$$

mellyekből következtetvén általában feltesszük:

$$S_m^n = T_{m+1}^n = \frac{n \cdot n + 1 \cdot n + 2 \dots n + m}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots m + 1} = \frac{n^{m+1+1}}{(m+1)!}$$

Meg kell mutatni hogy a' szemlélet alá vett kitétel; az m -nek és n -ek minden értékeire nézve áll.

a.) Ha a' kitétel valamelly rangban igaz, az n -ek egy meghatározott értékéről melly legyen $= r$; igaz lesz a' nyomban következőről is, az az: $r + 1$ -ről

Tegyük fel $S_3^r = T_4^r = \frac{r^{4+1}}{4!}$ mint fentebb (lap 52.) lehoztuk, valóban helyesnek találtatott; mivel: $S_3^{r+1} = S_3^r + T_3^{r+1}$ (II.-ből) $= S_3^r + S_2^{r+1}$ (III-ból) és már; $S_3^{r+1} = \frac{(r+1)^{3+1}}{3!}$ valamint, $S_3^r = \frac{r^{4+1}}{4!}$ bizonyos;

leszen: $S_3^{r+1} = \frac{r^{4+1}}{4!} + \frac{(r+1)^{3+1}}{3!} = \frac{r^{4+1} + 4(r+1)^{3+1}}{4!}$ kifejtve:

$$\frac{r \cdot r + 1 \cdot r + 2 \cdot r + 3 + 4(r+1 \cdot r + 2 \cdot r + 3)}{4!} = \frac{r + 1 \cdot r + 2 \cdot r + 3 \cdot r + 4}{4!} + \frac{(r+1)^{4+1}}{4!}$$

és mivel az okoskodást minden előbbiről, a' nyomban következőre ki lehet terjeszteni; általában meg van mutatva: $S_m^n = T_{m+1}^n = \frac{n^{m+1+1}}{(m+1)!}$ az n -ek ugyan minden, az m -nek pedig csak a' feltett 1; 2; 3; értékeiről. De:

b.) Meg lehet mutatni hogy: igaz lévén egyszer a' felvett egyenlítés az m -nek egy bizonyos értékére nézve: ugyan az igaz minden nyomban következő többekre nézve.

Tegyük fel tehát, hogy az n -ek felvett $= r$; és az m -nek egy bizonyos $= k$ értékére nézve igaz legyen:

$$S_k^r = \frac{r^{k+1,1}}{(k+1)!} \text{ és: } S_{k+1}^r = \frac{r^{k+2,1}}{(k+2)!} \text{ legyen a' III.-bol}$$

$$S_{k+1}^{r+1} = S_k^{r+1} + S_{k+1}^r = \frac{(r+1)^{k+1,1}}{(k+1)!} + \frac{r^{k+2,1}}{(k+2)!} \text{ egy nevezőre vonva:}$$

$$S_{k+1}^{r+1} = \frac{r^{k+2,1} + (k+2) \cdot (r+1)^{k+1,1}}{(k+2)!} \text{ kifejtve:}$$

$$S_{k+1}^{r+1} = \frac{r \cdot r + 1 \cdot r + 2 \dots r + k + 1 + (k+2) \cdot (r+1 \cdot r + 2 \dots r + 1 + k)}{(k+2)!} = \frac{(r+1)^{k+2,1}}{(k+2)!}$$

és mivel az okoskodás itt is, $(k+1)$ -ről $(k+2)$ -re, onnét $(k+3)$ -ra.....'sa't. kihat; mind az (n) mind az (m) értékeiről általában meg van mutatva:

$$S_m^n = T_{m+1}^n = \frac{n^{m+1,1}}{(m+1)!}$$

Összevetvén mind ezeket azokkal, melyek a' szorzalékokról fentebb elő adattak; mivel:

$$1.) T_0^n = 1 = \frac{n^{0,1}}{0!}$$

$$2.) T_1^n = S_0^n = \frac{n^{1,1}}{1!} = \frac{n^{1,-1}}{1!} = n_1 = n_{n-1} \\ = \frac{n^{n-1,1}}{(n-1)!} = \frac{2^{n-1,1}}{(n-1)!}$$

$$3.) T_2^n = S_1^n = \frac{n^{2,1}}{2!} = \frac{(n+1)^{2,-1}}{2!} = (n+1)_2 = (n+1)_{n-2} \\ = \frac{(n+1)^{n-1,-1}}{(n-1)!} = \frac{3^{n-1,1}}{(n-1)!}$$

$$4.) T_3^n = S_2^n = \frac{n^{3,1}}{3!} = \frac{(n+2)^{3,-1}}{3!} = (n+2)_3 = (n+2)_{n-3} \\ = \frac{(n+2)^{n-2,-1}}{(n-1)!} = \frac{4^{n-2,1}}{(n-1)!}$$

.....

általában:

$$\begin{aligned} T_m^a = S_{m-1}^a &= \frac{n^{m+1}}{m!} = \frac{(n+m-1)^{m+1}}{m!} = (n+m-1)_m = (n+m-1)_{a-1} \\ &= \frac{(n+m-1)^{n-1+1}}{(n-1)!} = \frac{(m+1)^{n-1+1}}{(n-1)!} \end{aligned}$$

A' kétszaki oktatmány, a' sokszakúak', végetlen szakúak',
határozatlan hatványra felemelése.

(Theorema binomiale, elevatio polynomiorum, infinitinomiorum, ad potentiam indeterminatam.)

Valamelly két részre szakasztott mennyiség p. o. $(a+b)$ kétszakúnak vagy kétszakosnak (*binomium*) mondatik.

Fejtsék ki $(a+b)^m$ az m -nek 0, 1, 2, 3, 4 's a ' t. értékei szerint; leszén:

$\underbrace{m}_{0=1}$	$\underbrace{(a+b)^m}$
$1=a+b$	
$2=a^2+2ab+b^2$	
$3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$	
$4=a^4+4a^3b+6a^2b^2+4ab^3+b^4$	
$5=a^5+5a^4b+10a^3b^2+10a^2b^3+5ab^4+b^5$	
$6=a^6+6a^5b+15a^4b^2+20a^3b^3+15a^2b^4+6ab^5+b^6$	
$7=a^7+7a^6b+21a^5b^2+35a^4b^3+35a^3b^4+21a^2b^5+7ab^6+b^7$	
$8=a^8+8a^7b+28a^6b^2+56a^5b^3+70a^4b^4+56a^3b^5+28a^2b^6+8ab^7+b^8$	
$9=a^9+9a^8b+36a^7b^2+84a^6b^3+126a^5b^4+126a^4b^5+84a^3b^6+36a^2b^7+9ab^8+b^9$	
$10=a^{10}+10a^9b+45a^8b^2+120a^7b^3+210a^6b^4+252a^5b^5+210a^4b^6+120a^3b^7+45a^2b^8+10ab^9+b^{10}$	

A' kifejtésekből világos lévén hogy: minden következő felemelés, az éppen előtte valóbol a'ként származik, ha az, mind a -val mind b -vel még egyszer külön külön szoroztatván, azontúl az egy nemű tagok öszve szedetnek:

Például: $(a+b)^2=(a+b)a+(a+b)b=(a^2+ab)+(ab+b^2)=a^2+2ab+b^2$
 $(a+b)^3=(a+b)^2a+(a+b)^2b=(a^2+2ab+b^2)a+(a^2+2ab+b^2)b$
 $= (a^3+2a^2b+ab^2)+(a^2b+2ab^2+b^3)=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$

ennél fogva:

1.) Minden egymás után következő felemeléseknek (a) -val szorzott részében, a' tagoknak az (a) legfelsőbb, és a' felemelés' izedével (*gradus*) egyenlő hatványától kezdve lefelé, (a) szerint kell az (a) -nak első hatványáig alább szállaniok; a' b -vel szorzott részben pedig (b) szerint hasonlólag (b) -nek a' felemelés' izedével egyenlő hatványáig emelkedniök; 's mivel ezenkívül az egyik részben (a); a' másikkban (b); a' legfelsőbb hatványra felemelve csak magánosan és csupán egyszer kerülhet elő: akarmellyik m -dik felemelés szükségképen (m+1) tagokból fog állani, 's az egységtől különböző östevőket $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \dots$ val 's'at. jegyeztvén, más formájú nem lehet mint:

$$(a+b)^m = \overset{1.}{a^m} + \overset{2.}{\alpha a^{m-1}b} + \overset{3.}{\beta a^{m-2}b^2} + \overset{4.}{\gamma a^{m-3}b^3} + \overset{5.}{\delta a^{m-4}b^4} + \dots + \overset{m+1}{b^m}$$

2.) Az (m+1) -dik felemelés' két különböző, és egyik a -val másik b -vel szorzott szakaszokra osztható, általános formája tehát:

$$(a+b)^{m+1} = \left(\overset{1.}{a^m} + \overset{2.}{\alpha a^{m-1}b} + \overset{3.}{\beta a^{m-2}b^2} + \dots + \overset{m+1}{b^m} \right) a + \left(\overset{1.}{a^m} + \overset{2.}{\alpha a^{m-1}b} + \overset{3.}{\beta a^{m-2}b^2} + \dots + \overset{m+1}{b^m} \right) b$$

mellyben a' kívánt szorozás végrehajtása után:

a.) Az első rész' első taga (a); és a' második rész' utolsó taga (b); újonnan östevők nélkül magánosan kerülnek elő, csupán azon különbséggel hogy 1 -el magasabb hatványra emelkedtek. Ellenben:

b.) Az első rész' második taga, egy nemüvé válik a' második rész' első tagával; az első rész' harmadik taga, a' második rész' második tagával; az első rész' negyedik taga, a' második rész' harmadik tagával; az első rész' (n) -dik taga a' második rész' (n-1) -dik tagával; tehát: az egyenmüket ugyan azon östevők alá foglalván leszen az (m+1) -dik felemelés' második tagának östevője ($\alpha+1$) a' harmadiké ($\alpha+\beta$) a' negyediké ($\beta+\gamma$) 's'at. és így az (m+1) -dik felemelés' általános kitétele östvezett tagokkal:

$$(a+b)^{m+1} = \overset{1.}{a^{m+1}} + \overset{2.}{(\alpha+1)a^m b} + \overset{3.}{(\alpha+\beta)a^{m-1}b^2} + \overset{4.}{(\beta+\gamma)a^{m-2}b^3} + \dots + \overset{m+2}{b^{m+1}}$$

mellyben $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \dots$'s' a' t. az éppen elébbi m -dik felemelés második, harmadik, negyedik, 's' a' t. tagainak östevőit jelentik.

3.) Tétetvén most, $m=0$ találattik $(a+b)^0 = 1 = a^0 + \alpha a^{m-1}b$ tehát: $\alpha=0$; $(a+b)=a+(\alpha+1)b$ tehát: $\alpha'=0+1=1$; $(a+b)^2=a+(\alpha'+1)b+b^2$ tehát: $(\alpha'+1)=\alpha''=2$; $\alpha''+1=\alpha'''=3 \dots$'s' a' t. honnét az m -nek 0, 1, 2, 3, 's' a' t. értékeihez képest:

a.) A' második tagok' összevőinek a' természeti számok' sorzata szerint, mindenkor a' felemelések' számával ugyan azon haladásban kell elébbre menniök.

b.) A' harmadik tagoknak általános kitétele: $(\alpha + \beta)a^{m-1}b^2$. De mivel az m -dik felemelés $(m+1)$ tagokból áll, a' harmadik tag legelőször csak a' második felemelésben kerülhet elő, 's ott is mint legutolsó magánosan, az előtte ni felemelésben pedig találtatott $\alpha = 1$ tehát: kell lenni a' második felemelés' 2-dik tagában $(1+\beta) = 1$ ennél fogva az első felemelésben $\beta' = 0$ a' másodikban $\beta'' = 1$ a' harmadikban minthogy az előtteni másodikban volt $\alpha'' = 2$; $\beta'' = 1$ leszen $(\alpha'' + \beta'') = \beta''' = 3$ a' negyedikben mivel az elébbeni harmadikban $\alpha''' = 3$; $\beta''' = 3$ azonképen, $(\alpha''' + \beta''') = \beta^{iv} = 3 + 3 = 6$ az ötödikben $(\alpha^{iv} + \beta^{iv}) = \beta^v = 4 + 6 = 10$ a' hatodikban $(\alpha^v + \beta^v) = \beta^vi = 5 + 10 \dots$'s 'a t. az az: a' harmadik tagok összevőinek a' természeti számok' szorzatából alakított második rangú haladások' folytatában kell elébbre menniök.

c.) Ellenmondhatlanul hasonló alkalmazások találván helyet minden következő tagok' összevőinek meghatározásában, mellyeket hogy hoszasak ne legyünk tovább mutogatni felesleges lenne; általában kitűnik hogy: az (r) -dik tagok' összevői mindenkor az $r-1$ -dik rangú alakított számok' sorzatába tartoznak. 's végezetre:

d.) A' fentebb (lap. 54.) mondottakhoz képest, az (m) -dik felemelés' (r) -dik tagának általános kitétele: $\frac{m. m-1. m-2 \dots m-(a-2)}{1. 2. 3. \dots (r-1)} a^{m-(r-1)} b^{r-1}$ vagy

is: megjegyezvén hogy az (m) -dik felemelésnek csak $m+1$ számú tagai lehetnek, és így az utolsó tagra nézve $m+1=r$; a' (0) -ba menő tagokat 's a' b^m -nek $= 1$ összevőjét kimarasztván, általában az m -nek $= 0$ és akarmi állító egész szám értékére nézve:

$$(a+b)^m = a^m + m. a^{m-1}b + \frac{m. m-1.}{1. 2.} a^{m-2}b^2 + \frac{m. m-1. m-2.}{1. 2. 3.} a^{m-3}b^3 + \dots + \frac{m. m-1. m-2. \dots 3. 2.}{1. 2. 3. \dots m-2. m-1.} ab^{m-1} + b^m$$

Meg lehet pedig mutatni hogy az állító egész számokra nézve e'ként lehozott általános kitétele, az (m) -nek nem csak (0) és állító egész szám értékeire, hanem egyszersmind minden egyéb, törött, tagadó, gyökeres (*radicalis*) és képzetes (*imaginaria*) mennyiség értékeire is ki lehet terjeszteni. Ugyan is:

Ha (p) és (q) elsőben mindennemű lehető állító és tagadó mennyiséget jelentenek, legyen:

$$np_n = (p - n + 1)p_{n-1} \text{ és } mq_m = (q - m + 1)q_{m-1} \text{ (lap. 33.)}$$

$$\text{tehát: } np_n q_m = (p - n + 1)p_{n-1} q_m$$

$$mp_n q_m = (q - m + 1)p_n q_{m-1} \quad \text{innen:}$$

$$1.) (n+m)p_n q_m = (p - n + 1)p_{n-1} q_m + (q - m + 1)p_n q_{m-1}$$

és (n) helyett r, r-1, r-2 3, 2, 1, 0 -t; (m) helyett 0, 1, 2, 3 r-2, r-1, r-et tévén:

$$rp_r = (p - r + 1)p_{r-1}$$

$$rp_{r-1}q_1 = (p - r + 2)p_{r-2}q_1 + q p_{r-1}$$

$$rp_{r-2}q_2 = (p - r + 3)p_{r-3}q_2 + (q - 1)p_{r-2}q_1$$

$$rp_{r-3}q_3 = (p - r + 4)p_{r-4}q_3 + (q - 2)p_{r-3}q_2$$

$$\dots \dots \dots$$

$$rp_1q_{r-2} = (p - 1)p_1q_{r-2} + (q - r + 3)p_2q_{r-3}$$

$$rp_1q_{r-1} = p_1q_{r-1} + (q - r + 2)p_1q_{r-2}$$

$$rq_r = (q - r + 1)q_{r-1}$$

mellyeket összevén 's az egymást kivető tagokat elhagyván:

$$r(p_r + p_{r-1}q_1 + p_{r-2}q_2 + p_{r-3}q_3 + \dots \dots \dots p_2q_{r-2} + p_1q_{r-1} + q_r) \\ = (p + q - r + 1)(p_{r-1} + p_{r-2}q_1 + p_{r-3}q_2 + \dots \dots \dots p_2q_{r-3} + p_1q_{r-2} + q_{r-1})$$

$$\text{vagy: } p_r + p_{r-1}q_1 + p_{r-2}q_2 + \dots \dots \dots p_1q_{r-1} + q_r = \frac{p + q - r + 1}{r}(p_{r-1} + p_{r-2}q_1 + \dots \dots \dots q_{r-1})$$

(r) helyett pedig egymás után r-1, r-2, r-3, 3, 2, 1-et tévén:

$$p_{r-1} + p_{r-2}q_1 + \dots \dots \dots p_1q_{r-2} + q_{r-1} = \frac{p + q - r + 2}{r - 1}(p_{r-2} + p_{r-3}q_1 + \dots \dots \dots q_{r-2})$$

$$p_{r-2} + p_{r-3}q_1 + \dots \dots \dots + q_{r-2} = \frac{p + q - r + 3}{r - 2}(p_{r-3} + p_{r-4}q_1 + \dots \dots \dots q_{r-3})$$

$$\dots \dots \dots$$

$$p_2 + p_1q_1 + q_2 = \frac{p + q - 1}{2}(p_1 + q_1)$$

$$p_1 + q_1 = \frac{p + q}{1}$$

mind jobb mind bal felől az egymás felett valókat szorozván, a' közös szorzók' elhagyásával:

$$p_r + p_{r-1} q_1 + p_{r-2} q_2 + p_{r-3} q_3 + \dots + p_2 q_{r-2} + p_1 q_{r-1} + q_r$$

$$= \frac{p+q-r+1}{r} \cdot \frac{p+q-r+2}{r-1} \cdot \frac{p+q-r+3}{r-2} \cdot \dots \cdot \frac{p+q-1}{2} \cdot \frac{p+q}{1}$$

és mivel ezen végső kitétel nem egyéb mint $(p+q)_r$ (lap. 32.)

2.) $(p+q)_r = p_r + p_{r-1} q_1 + p_{r-2} q_2 + p_{r-3} q_3 + \dots + p_2 q_{r-2} + p_1 q_{r-1} + q_r$
 melyből:

$$(p+q)_1 = p + q$$

$$(p+q)_2 = p_2 + p_1 q_1 + q_2$$

$$(p+q)_3 = p_3 + p_2 q_1 + p_1 q_2 + q_3$$

$$(p+q)_4 = p_4 + p_3 q_1 + p_2 q_2 + p_1 q_3 + q_4$$

.....

Ezeket előre bocsátván, jegyezzük a' következő sorzatot:

$$1 + p_1 b + p_2 b^2 + p_3 b^3 + p_4 b^4 + \dots + p_{r-1} b^{r-1} + p_r b^r + \dots \text{'s 'a t.}$$

mint (p) -nek függvényét f_p -vel; hasonlóképen ezen másikat:

$$1 + q_1 b + q_2 b^2 + q_3 b^3 + q_4 b^4 + \dots + q_{r-1} b^{r-1} + q_r b^r + \dots \text{'s 'a t.}$$

mint (q) -nek függvényét f_q val; legyen:

3.) $\left\{ \begin{array}{l} f_p = 1 + p_1 b + p_2 b^2 + p_3 b^3 + \dots + p_{r-1} b^{r-1} + p_r b^r + \dots \text{'s 'a t.} \\ f_q = 1 + q_1 b + q_2 b^2 + q_3 b^3 + \dots + q_{r-1} b^{r-1} + q_r b^r + \dots \text{'s 'a t.} \end{array} \right.$

a.) $f_p f_q = 1 + p_1 b + q_1 b + p_2 b^2 + q_2 b^2 + p_3 b^3 + q_3 b^3 + \dots + p_{r-1} b^{r-1} + q_{r-1} b^{r-1} + p_r b^r + q_r b^r + \dots \text{'sa' t.}$

b.) $f_p f_q = 1 + p_1 b^2 + p_2 b^2 + p_3 b^3 + \dots + p_{r-1} b^{r-1} + p_r b^r + \dots \text{'sa' t.}$

q_1	$p_1 q_1$	$p_2 q_1$	$\dots$	$p_{r-2} q_1$	$p_{r-1} q_1$
	q_2	$p_1 q_2$	$\dots$	$p_{r-3} q_2$	$p_{r-2} q_2$
		q_3	$\dots$		
				$p_2 q_{r-3}$	$p_3 q_{r-3}$
				$p_1 q_{r-2}$	$p_2 q_{r-2}$
				q_{r-1}	q_r

vagy legközelebb 2.) szerint:

$$f_p f_q = 1 + (p+q)_1 b + (p+q)_2 b^2 + \dots + (p+q)_{r-1} b^{r-1} + (p+q)_r b^r + \dots \text{'sa' t.}$$

Hasonlóképen ha (f_p) -be (p) helyett $(p+q)$ tétetik:

$$f(p+q) = 1 + (p+q)_1 b + (p+q)_2 b^2 + \dots + (p+q)_{r-1} b^{r-1} + (p+q)_r b^r + \dots \text{'sa' t.}$$

mellyből:

4.) $f(p+q) = f_p \cdot f_q$

és lévén: $q = p$ lesz: $f(2p) = f_p \cdot f_p = (f_p)^2$

„ „ $q = 2p$ „ $f(3p) = f_p \cdot f(2p) = (f_p)^3$

„ „ $q = 3p$ „ $f(4p) = f_p \cdot f(3p) = (f_p)^4$

.....

tehát a' (k) -nak állító egész értékeivel:

$$5.) f(kp) = (fp)^k$$

Továbbá ha 3.) -ba és 5.) -be (p) helyett 1 tétetik

$$f(1) = 1+b \text{ és mivel; } fk = (f1)^k \text{ tehát: } fk = (1+b)^k$$

de a' 3.) szerint (q) helyett (k) -át tévén:

$$fk = 1 + k_1 b + k_2 b^2 + k_3 b^3 + \dots + k_{r-1} b^{r-1} + k_r b^r + \dots \text{'s a' t.}$$

tehát:

$$6.) (1+b)^k = 1 + k_1 b + k_2 b^2 + k_3 b^3 + \dots + k_{r-1} b^{r-1} + k_r b^r + \dots \text{'s a' t.}$$

melly kitételben (k) akarmi állító egész számot tehet.

Téessék $p = \frac{h}{k}$ legyen az 5.) -ből

$$\left(f \frac{h}{k}\right)^k = f\left(k \cdot \frac{h}{k}\right) = fh$$

és (k) helyett (h) -át tévén $fh = (1+b)^h$
ebből:

$$\left(f \frac{h}{k}\right)^k = (1+b)^h \text{ tehát: } (1+b)^{\frac{h}{k}} = f \frac{h}{k}$$

a' 3.) szerint pedig:

$$f \frac{h}{k} = 1 + \left(\frac{h}{k}\right)_1 b + \left(\frac{h}{k}\right)_2 b^2 + \left(\frac{h}{k}\right)_3 b^3 + \dots \text{'s a' t azért is:}$$

$$7.) (1+b)^{\frac{h}{k}} = 1 + \left(\frac{h}{k}\right)_1 b + \left(\frac{h}{k}\right)_2 b^2 + \left(\frac{h}{k}\right)_3 b^3 + \dots + \left(\frac{h}{k}\right)_r b^r + \dots \text{'s a' t.}$$

tehát az m -nek állító egész és tört szám értékeire nézve, meg van általában mutatva: $fm = (1+b)^m$. Lévé pedig $m=0$ lesz: $f0 = (1+b)^0 = 1$ az az: $f0 = 1$

Téessék a' 4.) -ben $p = m$ és $q = -m$ legyen:

$$fm \cdot f(-m) = 1 \text{ tehát: } f(-m) = \frac{1}{fm} = \frac{1}{(1+b)^m} = (1+b)^{-m}$$

mivel pedig a' 3.) -bol:

$f(-m) = 1 + (-m)_1 b + (-m)_2 b^2 + (-m)_3 b^3 + \dots \text{'s a' t.}$ tehát ekkor is:
 $(1+b)^{-m} = 1 + (-m)_1 b + (-m)_2 b^2 + (-m)_3 b^3 + \dots + (-m)_r b^r$
következésképen a' 6.) és 7.) szám, mind az állító mind a' tagadó tört és egész kitevőre nézve igaz lévén; általában meg van mutatva hogy ha az (n) akarmi egész vagy tört, állító vagy tagadó mennyiséget jelent:

$$8.) (1+b)^n = 1 + n_1 b + n_2 b^2 + n_3 b^3 + \dots + n_r b^r \dots 's a' t.$$

Ha az (n), rávihetlen (*irrationalis*) p. o. $n = \sqrt[m]{m}$ vagy képzetes $n = \sqrt{-1.m}$ ezen kitételeket tört szám által mindenkor annyira meg lehet közelíteni a' mint kívántatik: tehát mivel a' 8.) törtre nézve meg van mutatva, ugyan az illik a' rávihetlen és képzetes kitevőkre is.

Ugyan a' 8.) a' maga ösztevőinek különösebb eljegyzésével iratván le:

$$(1+b)^n = 1 + \frac{n}{1} b + \frac{n.n-1}{1.2} b^2 + \dots + \frac{n.n-1\dots n-r+1}{1.2\dots r} b^r + \dots 'sa' t.$$

b helyett $\frac{x}{a}$ -t tévén és a^n -el szorozván:

$$a^n (1 + \frac{x}{a})^n = a^n + \frac{n}{1} a^{n-1} x + \frac{n.n-1}{1.2} a^{n-2} x^2 + \dots + \frac{n.n-1\dots n-r+1}{1.2\dots r} a^{n-r} x^r + \dots$$

az az; mivel: $a^n (1 + \frac{x}{a})^n = (a+x)^n$

$$(a+x)^n = a^n + \frac{n}{1} a^{n-1} x + \frac{n.n-1}{1.2} a^{n-2} x^2 + \dots + \frac{n.n-1\dots n-r+1}{1.2\dots r} a^{n-r} x^r + \dots$$

$$9.) (a+x)^n = a^n (1 + \frac{x}{a})^n = a^n + \frac{n}{1} a^{n-1} x + \frac{n.n-1}{1.2} a^{n-2} x^2 + \dots 's a' t.$$

Ezek szerint tehát már most általában:

$$(a+x)^m = a^m + m. a^{m-1} x + \frac{m.m-1}{1.2} a^{m-2} x^2 + \frac{m.m-1.m-2}{1.2.3} a^{m-3} x^3 + \frac{m.m-1.m-2.m-3}{1.2.3.4} a^{m-4} x^4 + \dots 's a' t.$$

vagy más eljegyzésekkel (lap. 32.)

$$(a+x)^m = a^m + m_1 a^{m-1} x + m_2 a^{m-2} x^2 + m_3 a^{m-3} x^3 + m_4 a^{m-4} x^4 + \dots 'sa' t. \text{ és:}$$

$$(a+x)^m = a^m + \left(\frac{m}{1}\right) a^{m-1} x + \left(\frac{m}{2}\right) a^{m-2} x^2 + \left(\frac{m}{3}\right) a^{m-3} x^3 + \left(\frac{m}{4}\right) a^{m-4} x^4 + \dots 'sa' t.$$

Tagadó kitevőre nézve, tétetvén (m) helyett $-m$

$$(a+x)^{-m} = \frac{1}{(a+x)^m} = \frac{1}{a^m} - \frac{m.x}{1.a^{m+1}} + \frac{m.m+1.x^2}{1.2.a^{m+2}} - \frac{m.m+1.m+2.x^3}{1.2.3.a^{m+3}} + \dots 'sa' t.$$

tört és gyökeres kitevőkkel pedig:

$$(a+x)^{\frac{n}{m}} = a^{\frac{n}{m}} \left(1 + \frac{n.x}{m.a} - \frac{n.m-n.x^2}{m.2m.a^2} + \frac{n.m-n.2m-n.x^3}{1.2m.3m.a^3} - \dots 'sa' t. \right)$$

$$\sqrt[n]{a+x} = \sqrt[n]{a} \left(1 + \frac{1 \cdot x}{n \cdot a} - \frac{1 \cdot n - 1 \cdot x^2}{n \cdot 2n \cdot a^2} + \frac{1 \cdot n - 1 \cdot 2n - 1 \cdot x^3}{n \cdot 2n \cdot 3n \cdot a^3} - \dots \text{'sa't.} \right)$$

$$\frac{1}{\sqrt[n]{a+x}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{1} \left(1 - \frac{1 \cdot x}{n \cdot a} + \frac{1 \cdot n + 1 \cdot x^2}{n \cdot 2n \cdot a^2} - \frac{1 \cdot n + 1 \cdot 2n + 1 \cdot x^3}{n \cdot 2n \cdot 3n \cdot a^3} + \dots \text{'sa't.} \right)$$

Az eddigi lehozatokból, a' kétszakos ősztévőknek következő általános és egyszerű tulajdonságai könnyen szembe tűnhetnek:

1.) A' kétszakos ősztévők (*coefficientes binomiales*) a' 32-dik lapon mondottak szerint törek- (*fractio*) képen összetett kétféle szorzalékból állanak, melyben: tévén a' hatvány' kitevőjét (*exponens potentiae*) = m, a' nevező' utolsó szorzóját = (r) lesz a' számító' utolsó szorzója m — (r — 1) = m — r + 1. 'S ugyan így a' nevezőben előforduló egyéb k, l, p, q ... 's a' t. szorzóknak, a' számítóban m — (k — 1); m — (l — 1); m — (p — 1); m — (q — 1) felelven meg: ha az (m) -dik hatvány' (r + 1) -dik tagának ősztévője, vagy tulajdonképen (a' kétszakos ősztévők a' 2-dik tagtól kezdődven számlálatni) az (r) -dik kétszakos ősztévő kívántatnék; lenne az, a' k, l, p, q, -nak megfelelőképen:

$$m_r = \frac{m \cdot m - 1 \cdot m - 2 \dots m - k + 1 \dots m - l + 1 \dots m - p + 1 \dots m - q + 1 \dots m - r + 1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots k \dots l \dots p \dots q \dots r}$$

2.) Viszont megfordítva, ha a' számítóban bizonyos mennyiség mint előforduló szorzó adatik; a' nevezőben neki megfelelő szorzót kitaláljuk, ha ezen adottat egy hijján a' hatvány' kitevőjéből levonjuk. Így: ha a' fentebbi kitételben m — k + 1 mint a' számítóban előforduló szorzó adatik m — k -át a' hatvány kitevőjéből (m) -ből lehúzáván marad (k) a' számítóban adott m — k + 1 -nek a' nevezőben megfelelő szorzója. Honnét: tétetvén m — k + 1 = l, p, q ... 'sa't. a' számítóban előforduló l, p, q, -nak ... 'sa't. a' nevezőben m — l + 1; m — p + 1; m — q + 1 ... 'sa't. fognak megfelelni, 's ehez képest ismét az (r) -dik kétszakos ősztévő a' k, l, p, q -nak ... 'sa't. megfelelőkép:

$$m_r = \frac{m \cdot m - 1 \cdot m - 2 \dots k \dots l \dots p \dots q \dots m - r + 1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots m - k + 1 \dots m - l + 1 \dots m - p + 1 \dots m - q + 1 \dots r}$$

mellyeknél fogva általában:

3.) A' számító' és nevező' külön szorzói között ugyanazon viszonyok (*relatio*) találnak helyet. Valamint a' számítóban előforduló k, l, p, q -nak ... 'sa't. a' nevezőben m — k + 1; m — l + 1; m — p + 1; m — q + 1 ... 'sa't. felelnek meg; szintúgy a' nevezőben előforduló k, l, p, q -nak ... 'sa't. a' számítóban hasonlóan m — k + 1; m — l + 1, m — p + 1; m — q + 1 -nek ... 'sa't. kell megfelelni.

Például: Ha a' 10-dik felemelésnek 8-dik ösztevője kerestetnék, volna az, $m = 10$; $r = 8$ -nak tétetvén: $10_8 = \frac{10.9.8.7.6.5.4.3.}{1.2.3.4.5.6.7.8.}$ melyben k -nak $= 9$; l -nek $= 8$; p -nek $= 7$; q -nak $= 6 \dots$'s a' t. értékeihez képest lennének a' megfelelő nevezők:

$m - k + 1 = 10 - 9 + 1 = 2$; $m - l + 1 = 10 - 8 + 1 = 3$;
 $m - p + 1 = 10 - 7 + 1 = 4$; $m - q + 1 = m - 6 + 1 = 5$; ... 's a' t.
 És viszont a' nevezőben, k -nak $= 4$; l -nek $= 5$; p -nek $= 6$; q -nak $= 7$ értékeihez képest a' megfelelő számítók:

$m - k + 1 = 10 - 4 + 1 = 7$; $m - l + 1 = 10 - 5 + 1 = 6$;
 $m - p + 1 = 10 - 6 + 1 = 5$; $m - q + 1 = 10 - 7 + 1 = 4$; ... 's a' t.
 mint 1.) és 2.) alatt előadatott, és a' jelen példában számokra alkalmazott kitételből nyilván szembe tűnik.

4.) Mivel (33. lap. 2.)) $m_{m+r} = 0$; következik hogy: az (m) -diken túli ösztevők (0) -vá válnak, vagy: ezen kitételben $m_n = \frac{m.m-1.m-2.m-3.....}{1. 2. 3. 4.}$

melly az ösztevőknek általános kitétele, (m) -nél több számu szorzókból összetett szorzalék, a' nélkül hogy (0) -vá válják meg nem jelenhetvén: mivel e' szerint, az egymás után következő m_1 ; m_2 ; m_3 ; ... 's a' t. ösztevők csak (m) számmal lehetségesek; hozzá tévén ezen számhoz még az első tagot, a' kétszakú' m -dik felemelésének szükségképen $m+1$ tagokból kell állani. Mint (lap. 58.) mondatott, és a' kifejtésben (lap. 57.) $(a+b)^5$ hat; $(a+b)^6$ hét; $(a+b)^7$ nyolcz; ... 's a' t. tagokból állanak.

5.) Lévéen tehát az utolsó tag, melly még (0) -vá nem válik $= m_m a^{m-m} b^m$; mivel $m_m = 1$ (32. 33. lap.) és $a^{m-m} = a^0 = 1$; végről az utolsó tag (m) -dik hatványra felemelve magánosan áll, szinte úgy mint az első tag előlről.

6.) Mivel: $m_{m-r} = m_r$ (34. lap. 3.)) a' két végső tagtól egyenlő távozatban lévő ösztevők egymással egyenlők lenni tartoznak. Így:

$$(a+x)^m = a^m + m_1 a^{m-1} x + m_2 a^{m-2} x^2 + m_3 a^{m-3} x^3 + \dots + m_{m-3} a^3 x^{m-3} + m_{m-2} a^2 x^{m-2} + m_{m-1} a x^{m-1} + x^m$$

mellyben: $m_1 = m_{m-1}$; $m_2 = m_{m-2}$; $m_3 = m_{m-3} \dots$'s a' t.

7.) Ha az ösztevők csak a' második tagtól kezdve számíttatnak, minden ösztevők' száma egyel kevesebb lesz a' kétszak sorzat' (*series binomialis*) tagai' szá-

mánál; és a' kétszak sorzat' $(r+1)$ -dik tagához az (r) -dik, a' kétszak sorzat' (r) -dik tagához pedig az $(r-1)$ -dik östevő fog tartozni.

8.) Legyen az (m) állító egész szám, a' kétszak sorzat 4.) szerint $(m+1)$ tagokból fog állani, mellyek között az első és utolsó tagoktól egyenlő távozatban eső tagok' östevői 6.) szerint egymással egyenlők lenni tartoznak. Így pedig ha az (m) páros, a' tagok' száma szükségképen' páratlan lévén, középtűt a' két szélsőtől egyenlő távozatban egy tagnak kell esni mellynek általános kitétele:

$$m_{m-\frac{1}{2}m} = m_{\frac{1}{2}m} = \frac{m.m-1.m-2 \dots \frac{1}{2}m+2. \frac{1}{2}m+1}{1. 2. 3. \dots \frac{1}{2}m-1. \frac{1}{2}m}$$

Ha (m) páratlan, a' tagok' száma szükségképen páros lévén, annak egyik fele az $\frac{m+1}{2}$ -dik tagon végződik, másik fele az $\frac{m+1}{2} + 1$ -diken kezdődik, 's az elébbi az első; az utóbbi az utolsó tagtól egyenlő távozatra állván, mind ketten egymással egyenlők. Tehát páratlan (m) -el az $\frac{m+1}{2}$ -dik tag' östevője, vagy a' második tagtól kezdván számlálni az $\frac{m+1}{2} - 1$ -dik = $\frac{m-1}{2}$ -dik östevő; az $\frac{m+1}{2} + 1 = \frac{m+3}{2}$ -dik tag' östevőjével, vagy a' második tagtól kezdván számlálni, az $\frac{m+3}{2} - 1 = \frac{m+1}{2}$ -dik östevővel; egyenlő lenni tartozván páratlan (m) -el:

$$m_{\frac{m-1}{2}} = m_{\frac{m+1}{2}} = \frac{m.m-1.m-2 \dots \frac{m-1}{2}+1}{1. 2. 3. \dots \frac{m-1}{2}} = \frac{m.m-1.m-2 \dots \frac{m+1}{2}+1}{1. 2. 3. \dots \frac{m+1}{2}}$$

vagy a' 5.)-dik szám szerint:

$$m_{\frac{m-1}{2}} = \frac{m.m-1.m-2 \dots p \dots m-q+1 \dots \frac{m+7}{2} \cdot \frac{m+5}{2} \cdot \frac{m+3}{2}}{1. 2. 3 \dots m-p+1 \dots q \dots \frac{m-5}{2} \cdot \frac{m-3}{2} \cdot \frac{m-1}{2}}$$

$$m_{m+1} = \frac{m \cdot m - 1 \cdot m - 1 \dots p \dots m - q + 1 \dots \frac{m+5}{2} \cdot \frac{m+3}{2} \cdot \frac{m+1}{2}}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots m - p + 1 \dots q \dots \frac{m-3}{2} \cdot \frac{m-1}{2} \cdot \frac{m+1}{2}}$$

és a' két kitétel egymással egyenlő.

Például: páros (m)-el. Léven $m = 8$ volna a' tagok' száma 9; középső tag az 5 -dik; mellynek ha az östevők a' 2 -dik tagtól kezdődnek számíttatni a' 4 -dik $= \frac{1}{2} m$ -dik östevő felelne meg, és találatnék $m_{\frac{1}{2}m} = 8_4 = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} = 70$

páratlan (m)-el. Léven $m = 9$ volna a' tagok' száma 10; az elsőől és utolsóól egyenlő távozatban eső két tagok pedig:

$$m_{\frac{m-1}{2}} = m_{\frac{m+1}{2}} \text{ az az: } 9_4 = 9_5 \text{ vagy: } \frac{9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} = \frac{9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} = 126$$

mint a' fentebbi kifejtésekben (lap. 57.) valósággal találtattak.

Észre lehet venni hogy a' kétszaku' (*binomium*) határozatlan felemelésének általános kitételében: (lap. 59.)

$$(a + b)^m = a^m + m a^{m-1} b + \frac{m \cdot m - 1}{1 \cdot 2} a^{m-2} b^2 + \frac{m \cdot m - 1 \cdot m - 2}{1 \cdot 2 \cdot 3} a^{m-3} b^3 + \dots$$

akarmelylek tagot az éppen előtteniből ugyan azon bánásmóddal lehet származtatni; még pedig:

$$a.) \text{ Az östevők általános kitétele: } \frac{m \cdot m - 1 \cdot m - 2 \cdot \dots \cdot m - (r - 1)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot r}$$

mellyből a' következő tag' östevője úgy származik, ha a' szorzókat mind a' számítóban, mind a' nevezőben, egyel arrébb folytatjuk.

b.) Az említett östevőhöz az (a)-nak nevezett 1-ső tag' (m-r)-dik hatványa $= a^{m-r}$; és a' 2 -dik (b) nek nevezett tag' (r) -dik hatványa $= b^r$ tartozik; az éppen utánnok következőben pedig, ugyan az 1-ső tagnak (m-r-1)-dik hatványa $= a^{m-(r+1)} = \frac{a^{m-r}}{a}$; és a' 2 -dik tagnak (r+1) -dik hatványa $=$

b^{r+1} jön elő. Ennél fogva:

c.) A' tagok' egymásból származtának nyilvános törvénye lévén, hogy az általános tag $\frac{m \cdot m - 1 \cdot m - 2 \cdot \dots \cdot m - (r - 1)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot r} a^{m-r} b^r$; szoroztatván $\frac{m-r}{r+1} \cdot \frac{b}{a}$ -val

mindenkor az éppen után következő tagot állítja elő: ezen észrevételt a' a' gyakorlati kiszámítások könnyítésére, és helyesebb elrendelésére lehet alkalmaztatni. Ugyan is:

Az 1-ső tag lévén mindenkor $= a^m$; az (r) -nek, $\left(\frac{m-r}{r+1} \cdot \frac{b}{a}\right)$ -ben c.) alatt 0, 1, 2, 3, 's a' t. értékek adatván, találtnak az 1-ső, 2-dik, 3-dik, 4-dik egymás után következő tagok: 1-ső $= a^m$; 2-dik $= a^m \cdot \frac{b}{a}$ vagy ha az 1-ső tag $a^m = A_1$ -nek és $\frac{b}{a} = B$ -nek tétetik lesz a' 2-dik $= m A_1 B$. Nem különben a' 2-dik tag A_2 's az egymás után következő 3-dik 4-dik, 5-dik r-dik tagok $A_2; A_3; A_4; A_5; \dots A_r$ -el jegyeztetvén, kell lenni a' 3-diknak $A_3 = m A_1 B \cdot \frac{m-1}{2} B = \frac{m-1}{2} A_2 B$; a' 4-diknek $A_4 = \frac{m-1}{2} A_2 B \cdot \frac{m-2}{3} B = \frac{m-2}{3} A_3 B$'s így tovább: $A_5 = \frac{m-3}{4} A_4 B$; $A_6 = \frac{m-4}{5} A_5 B \dots A_r = \frac{m-(r-2)}{r-1} A_{r-1} B$; $A_{r+1} = \frac{m-(r-1)}{r} A_r B$'s a' t. Mellyeknek következésében végezetre:

$(a+b)^m = A_1 + m A_1 B + \frac{m-1}{2} A_2 B + \frac{m-4}{3} A_3 B + \dots + A_r$ mellyben mint elő adatott: $A_r = \frac{m-(r-2)}{r-1} A_{r-1} B$; $A_{r-1} = \frac{m-(r-3)}{r-2} A_{r-2} B$; $A_{r-2} = \frac{m-(r-4)}{r-3} A_{r-3} B \dots A_4 = \frac{m-2}{3} A_3 B$; $A_3 = \frac{m-1}{2} A_2 B$; $A_2 = m A_1 B$; $A_1 = a^m$.

Például: Kerestessék $(125)^6 = (100 + 25)^6$ volna: $a = 100$; $b = 25$;

$\frac{a}{b} = B = 0, 25$; $m = 6$; $(100)^6 = a^m = A_1$; 's ezen értékekkel:

előadott képen: szokott kifejtéssel: számokban:

$$\begin{aligned} 1\text{-ső tag } A_1 &= a^6 = a^6 = 1(0)^{11} \dots\dots\dots \\ 2\text{-dik } \dots A_2 &= 6 A_1 B = 5a^5b = 15(0)^{10} \dots\dots\dots \\ 3\text{-dik } \dots A_3 &= \frac{6-1}{2} A_2 B = 15a^4b^2 = 9375(0)^9 \dots\dots\dots \\ 4\text{-dik } \dots A_4 &= \frac{6-2}{3} A_3 B = 20a^3b^3 = 3125(0)^8 \dots\dots\dots \\ 5\text{-dik } \dots A_5 &= \frac{6-3}{4} A_4 B = 15a^2b^4 = 5859375(0)^7 \dots\dots\dots \\ 6\text{-dik } \dots A_6 &= \frac{6-4}{5} A_5 B = 6ab^5 = 5859475(0)^6 \dots\dots\dots \\ 7\text{-dik } \dots A_7 &= \frac{6-5}{6} A_6 B = b^6 = 244140625 \dots\dots\dots \end{aligned}$$

$$\text{összesen } \dots (a + b)^m = (100 + 25)^6 = 5814697265625$$

Tört kitevőkre, vagy is a' gyökökerek' kihuzására nézve: a' c.) alatti áta-

lános szorzóbol melly volt $\frac{m-r}{r+1} \cdot \frac{b}{a}$ tétetvén (m) helyett $\frac{m}{n}$ lesz: $\frac{\frac{m}{n}-r}{r+1} \cdot \frac{b}{a}$

$$= \frac{\frac{m-nr}{n} \cdot \frac{b}{a}}{r+1} = \frac{m-nr}{n(r+1)} \cdot \frac{b}{a}; \text{ következőleg:}$$

$$\begin{aligned} (a + b)^{\frac{m}{n}} &= A_1 + \frac{m}{n} A_1 B + \frac{m-n}{2n} A_2 B + \frac{m-2n}{3n} A_3 B + \frac{m-3n}{4n} A_4 B \\ &\dots\dots\dots + A_r \text{ mellyben hasonlatosképen mint egész kitevőkkel:} \\ A_r &= \frac{m-(r-2)n}{(r-1)n} A_{r-1} B; A_{r-1} = \frac{m-(r-3)n}{(r-2)n} A_{r-2} B; A_{r-2} = \frac{m-(r-4)n}{(r-3)n} A_{r-3} B \\ &\dots\dots\dots A_4 = \frac{m-2n}{3n} A_3 B; A_3 = \frac{m-n}{2n} A_2 B; A_2 = \frac{m}{n} A_1 B; A_1 = a^{\frac{m}{n}}. \end{aligned}$$

Például: Kerestessék a' 125-nek négyzög gyökere $\sqrt[4]{125} = (100+25)^{\frac{1}{4}}$ tehát ismét $a = 100$; $b = 25$; $B = 0, 25$; ezenkívül: $m = 1$; $n = 1$; $A_1 = a^{\frac{1}{2}} = 10$ -nek tétetvén lesz:

$$\begin{aligned}
 1\text{-ső tag } A_1 &= a^{\frac{m}{n}} = a^{\frac{1}{2}} = + 10,00 \dots\dots\dots \\
 2\text{-dik... } A_2 &= \frac{m}{n} A_1 B = \frac{1}{2} A_1 B = + 1,25 \dots\dots\dots \\
 3\text{-dik... } A_3 &= \frac{m-n}{2n} A_2 B = - \frac{1}{4} A_2 B = - 0,078125 \dots\dots\dots \\
 4\text{-dik... } A_4 &= \frac{m-2n}{3n} A_3 B = - \frac{1}{2} A_3 B = + 0,009765625 \dots\dots\dots \\
 5\text{-dik... } A_5 &= \frac{m-3n}{4n} A_4 B = - \frac{5}{8} A_4 B = - 0,0015258789 \dots\dots\dots \\
 6\text{-dik... } A_6 &= \frac{m-4n}{5n} A_5 B = - \frac{7}{10} A_5 B = + 0,0002670288075 \dots\dots\dots \\
 7\text{-dik... } A_7 &= \frac{m-5n}{6} A_6 B = - \frac{3}{4} A_6 B = - 0,000050067991406 \dots\dots\dots
 \end{aligned}$$

mellyekből $\sqrt[4]{125}$ közelítve a' 7-dik tagig:

(+) (-)

- 1.) = 10,000
- 2.) = 1,250000 3.) = 0,078125
- 4.) = 0,009765625 ... 5.) = 0,0015258789 ...
- 6.) = 0,000267028807. 7.) = 0,000050067901406

összesen: 11,26003265380 — 0,079700946801406 = 11,180331706998594

Noha ezen kiszámítások már így is rendszeresebbeknek látszhatnak ugyan, az elemi algebrában elő adatni szokott gyökér kihúzásoknál: mindazáltal még a' következő könnyítéseket lehet velök összevetni.

1.) Mivel $B = \frac{b}{a}$ mint szorzó, minden tagokban újra meg újra előkerül; látnivalóképen minél nagyobb (a) a' (b)-hez képest, az egymás utáni tagoknak annál hirtelenebben fogyni kellett: az igaz értéket annál inkább megközelíthetjük, minél nagyobbak vesszük (a) -t; azért is első tagnak, az adott mennyiséghez legközelebb járó (n)-dik hatvány, minden kevesebbet je-

lentők felett sokkal helyesebben választathatik. Így a' felvett példában $a = 100$ helyett, a' legközelebb járó négyszöget $a = 121$ -et (b) helyett a' fentmardott 4-et helyhetvén, a' kívánt négyszög gyökér kihuzása már csak ez által is tetemesen megkönnyítették.

2.) Fentebbiek szerint (63.lap. 9.) $(a + b)^{\frac{m}{n}} = a^{\frac{m}{n}} \left(1 + \frac{b}{a}\right)^{\frac{m}{n}}$; hogy tehát a' munkálatot felesleges számjegyekkel ne nehezítsük, a' nagyobbik tag' kívántató gyökérét kihuzván és külön választván, hánylásainkat (*calculus*) csak a' rekesz alá foglalt mennyiségekkel folytathatjuk, melly után a' talált keletkezmény (*resultatum*) végzetül $a^{\frac{m}{n}}$ -el szoroztassék. Mellynek következtetésében ismét a' felvett példa volna $\sqrt[10]{120} = \sqrt[10]{100 + 25} = 10 \sqrt[10]{1 + \frac{25}{100}}$ vagy:

$\sqrt[10]{125} = \sqrt[10]{121 + 4} = 11 \sqrt[10]{1 + \frac{4}{121}}$ és a' szövédékesebb munkálatokat illetőleg csak $10 \sqrt[10]{1 + \frac{25}{100}}$ vagy $11 \sqrt[10]{1 + \frac{4}{121}}$ -el kellene végre hajtani.

3.) Ha valamelly mennyiséget, egy másikkal szorozunk és elosztunk egyszersmind, annak értéke nem változik. Tehát: $M^{\frac{m}{n}} = \left(\frac{1}{q} \cdot Mq\right)^{\frac{m}{n}}$ így pe-

dig (q) -t lehet úgy választani hogy belőle az $\frac{m}{n}$ -dik gyökér kihúzható legyen, azon kívül $Mq > M$ -nél tartozván lenni, egyszersmind úgy szakaszthatassék kétfelé hogy az utolsó tag az elsőhöz képest az 1.) alattinál is még in-

kább megkisebbüljön. A' példára alkalmazva $\sqrt[10]{125} = \sqrt[10]{\frac{1}{100} \cdot 125 \cdot 100}$
 $= \frac{1}{10} \sqrt[10]{12500} = \frac{1}{10} \sqrt[10]{(111)^2 + 179} = \frac{111}{10} \sqrt[10]{1 + \frac{179}{(111)^2}} = \frac{111}{10} \sqrt[10]{1 + \frac{179}{12321}}$
 mellyben: $\frac{179}{12321}$ kisebb mint 1.) alatt; $\frac{4}{121}$

4.) A' kihuzandó gyökér 2.) szerint lévén elrendelve, leszen mindenkor:
 $(a + b)^{\frac{m}{n}} = a^{\frac{m}{n}} \cdot \left(1 + \frac{b}{a}\right)^{\frac{m}{n}} = a^{\frac{m}{n}} \cdot \left\{ 1 + \frac{m}{n} B + \frac{m \cdot m - n}{n \cdot 2n} B^2 + \frac{m \cdot m - n \cdot m - 2n}{n \cdot 2n \cdot 3n} B^3 + \right.$
 $\left. \dots \dots \dots \frac{m \cdot m - n \cdot m - 2n \cdot \dots \cdot m - (r-1)n}{n \cdot 2n \cdot 3n \cdot \dots \cdot rn} B^r + \text{'sa' t.} \right\}$

vagy ha a' B hatványainak megfelelő összetevőket $C_1; C_2; C_3; C_4; \dots$ 'sa't.

jegyezzük $C_1 = \frac{m}{n}; C_2 = \frac{m-n}{2n} C_1; C_3 = \frac{m-2n}{3n} C_2; C_4 = \frac{m-3n}{4n} C_3 \dots$

$\dots C_r = \frac{m-(r-1)n}{rn} C_{r-1}; C_{r+1} = \frac{m-rn}{(r+1)n} C_r \dots$'s a' t. mel-

lyeket az $\frac{m}{n}$ -ek gyakortább előkerülő értékeihez képest előlegesen is kilehet számítani, és hasonló esetekben azonnal alkalmazni. Különösen ha négyszög gyökök kivántatnának, volna: $m=1; n=2$; és az összetevők:

$$C_1 = \frac{1}{2}; C_2 = \frac{-1}{8}; C_3 = \frac{5}{16}; C_4 = \frac{-5}{128} \dots \text{'s a' t.}$$

köbök gyökökre nézve: $m=1; n=3$; és az összetevők:

$$C_1 = \frac{1}{3}; C_2 = \frac{-1}{9}; C_3 = \frac{5}{81}; C_4 = \frac{-10}{243} \dots \text{'s a' t.}$$

sőt nagyobb pontosság kedviért, ezeket is a' tagok' egymásból származtának világos törvénye szerint, akarmeddig könnyű tovább folytatni.

5.) Ha a' gyökér megközelítve kiszámíttatott, 's azt nevezzük (g) -nek; az adott mennyiséget mellynek (m) -dik gyökere kivántatik M -nek; a' megközelítés' hibáját (h) -nak; kell lenni: $M^{\frac{1}{m}} = g + h$; és így:

$$M = (g + h)^m = g^m + mg^{m-1}h + \frac{m \cdot m-1}{1 \cdot 2} g^{m-2} h^2 + \dots \text{'s a' t.}$$

tehát elsőben a' két első tagon megállapodván:

$$1.) h = \frac{M - g^m}{mg^{m-1}}; \text{ a' három első tagig menvén pedig;}$$

$$2.) h = \frac{M - g^m}{mg^{m-1} + \frac{m \cdot m-1}{1 \cdot 2} g^{m-2} h} = \frac{2 (M - g^m)}{mg^{m-1} + m \cdot m-1 \cdot g^{m-2} h}$$

honnét a' (h) -nak 1.) alatti értékét 2.) -be helyhetvén:

$$\begin{aligned} 3.) h &= \frac{2 (M - g^m)}{mg^{m-1} + \frac{m \cdot m-1}{1 \cdot 2} g^{m-2} (M - g^m)} = \frac{2g (M - g^m)}{mg^m + (m-1) (M - g^m)} \\ &= \frac{2g (M - g^m)}{(m+1) g^m + (m-1) M} \end{aligned}$$

és ezen utóbbi alkatjának segédével, maga a' megközelítés' hibája találtatván ki; a' már megközelített gyökérből, ismét annál is közelítőbbet lehet kiszámítani.

Mind ezekre felesleges lévén új meg új példákat hordani fel, csak fentebbiek' alkalmazásával, a' kiszámításoknak egész menetelét összefoglalva és egy folytában terjesztjük elő. Tehát:

Hogy az 1.) 2.) 3.) alatt előadottak szerint a' B-nek nevezett törek minél kisebb legyen, tegyük $\sqrt{125} = \sqrt{\frac{1}{10000} \cdot 125 \cdot 10000} = \frac{1}{100} \sqrt{1250000}$ ebben: lévén a' gyökér jegy alá foglalt mennyiséghez legközelebb járó négy-
szög $= (1118)^2 = 1249924$ találtatik azonnal $\sqrt{125} = 11,18 \sqrt{1 + \frac{76}{1249924}}$

honnét: $a^{\frac{m}{n}} = 11,18$; $B = 0,0000608$ és C_1 ; C_2 ; C_3 ; C_4 -nek 4.) alatt kiszámított értékeivel:

$$\sqrt{125} = 11,18 \left\{ \left(1 + \frac{1}{2} (0,0000608) - \frac{1}{8} (0,0000608)^2 + \frac{1}{16} (0,0000608)^3 - \frac{5}{128} (0,0000608)^4 \dots \right) \right\} = 11,180339 \dots$$

Ha pedig ebből a' két első tagot megközelített gyökérnek vévén fel, azzal 5.) szerint bánunk; leszen: $g = 11,18034$; $g^m = 125,000002516$: mely-
lyekből:

$$h = \frac{2g(M - g^m)}{(m+1)g^m + (m-1)M} = \frac{-0,00005635947088}{500,000007548} = -0,000000000112$$

és ezen igazítással végezetre; $\sqrt{125} = 11,180339999888$

Mind eddig azonban hogy a' figyelem félre ne vonassék, nem adtuk okát a' 3.) alatt mondottaknak. Mellyeknek átlátásra meg kell mutatni jelennen; hogy az adott szám, (q)-nak a' kívántató gyökérhez képest felveendő valamelly értékével szoroztatván, azontúl:

a.) Két részekre szakaszthatatik, mellyek közül a' nagyobbik' gyökere kihúzható.

b.) A' kisebb rész a' nagyobbbal elosztva az előtteninél kisebb értékű töreket tesz.

Minthogy $\frac{m}{n}$ -ek akarmi értékével mindenben hasonló megmutatások talál-
lálnak helyet, tegyük $\frac{m}{n} = \frac{1}{2}$ melly által a' határozatlan gyökér keresés, négy

szög gyökér kihúzássá válik; ezenkívül: jelentse M most is azon mennyiséget mellynek gyökere kívántatik, 's az abból kitelhető legnagyobb négyszöget nevezzük α^2 -nak; a' fentmaradt részt β -nak; a' segédül veendő négyszöget mellyel $M = \alpha^2 + \beta$ szoroztatni fog γ^2 -nak; leszén a' 3.) szerint elsőben: $\sqrt{M} = \frac{1}{\gamma} \sqrt{\alpha^2 \gamma^2 + \beta \gamma^2}$ és a' nagyobbik rész' $\alpha^2 \gamma^2$ -nak gyökere $\alpha \gamma$

ráviteles volna ugyan, de viszont: $\sqrt{1 + \frac{\beta \gamma^2}{\alpha^2 \gamma^2}}$ -ban a' fent maradott törek

ismét ugyan azon $\frac{\beta}{\alpha^2}$ maradván, meg nem kisebbedhetnék. Innét látnivalóképen, hogy a' kívántató feltételnek elégtétessék, a' $\beta \gamma^2$ -bol egy résznek, $\alpha^2 \gamma^2$ -hoz, valamelly felsőbb négyszög' formáltatására pótlékul kell adatni; mellynek következtetésében a' számító fogyván, a' nevező szaporodván mind kettőnek a' törek' kisebbülésére legyen befolyása. Mostan tegyük fel hogy a' kitelhető legnagyobb négyszög $(\alpha \gamma + r)^2 = \alpha^2 \gamma^2 + 2\alpha \gamma r + r^2$; akkor az eddigi $\beta \gamma^2$ -bol csak $\beta \gamma^2 - (2\alpha \gamma r + r^2)$ maradhat fent, és szükségképen:

$$\frac{\beta \gamma^2 - 2\alpha \gamma r - r^2}{(\alpha \gamma + r)^2} < \frac{\beta \gamma^2}{\alpha^2 \gamma^2} = \frac{\beta}{\alpha^2}$$

Ezekből könnyen által lehet látni:

1.) Hogy a' γ -nak valamelly meghatározott értékéhez képest, az (r) -nek is megfelelőkép több vagy kevesebb felvétethető értékei lesznek, mellyekkel $\beta \gamma^2 > 2\alpha \gamma r + r^2$ és a' kérdéselt törek mind annyiszor állító mennyiség leszén; ellenben: az (r) -nek bizonyos értékén túl $\beta \gamma^2 < 2\alpha \gamma r + r^2$ és a' törek tagadóvá válik.

2.) A' legkisebb állító törek az (r) -nek azon értékével áll elő, mellyen túl ha (r) nagyobbnak vétetik, a' töreknek azonnal tagadóvá kell válnia; a' legkisebb tagadó törek pedig (r) -nek azon értékével melly az állító töreket közvetlenül tagadóvá változtatja. Mivel tehát az állító törek a' legközelebbi négyszög számot magáig a' feladott számig, a' tagadó törek viszont magát a' feladott számot a' nálánál legközelebb nagyobb négyszög számig pótolja ki: első esetben, (az az: ha a' kétszaku első tagának a' legközelebbi kisebb négyszög számot tesszük) (r) -nek a' felvétethető legnagyobb értékét, másikkban, (az az: ha a' kétszaku első tagának a' legközelebbi nagyobb négyszög számát vétetik) az (r) -nek azon felül legközelebbi értékét kell választanunk.

3.) Az állító törekben mint legközelebb 1.) -nél elő adatott $\beta\gamma^2 > 2\alpha\gamma r + r^2$ tehát $\gamma > \frac{2\alpha r}{\beta} + \frac{r^2}{\beta\gamma}$; minél fogva $\frac{r^2}{\beta\gamma}$ -ra tekintet nélkül $\frac{2\alpha}{\beta}$ -nak tudott értékével a' γ értékét elosztván, az (r)-et mindenkor könnyű feltalálni. Nevezetesen a' fentebbi példában volna $\frac{2\alpha}{\beta} = 5,5$; $\gamma = 100$ azért is: $\frac{100}{5,5} = 18$ és: $100 > 5,5 \cdot 18 + \frac{(18)^2}{\beta\gamma}$ honnét: $r = 18$ és: $\gamma + r = 1118$ mint volt (lap. 73.) Tagadó törekre nézve pedig 2.) szerint (r)-nek legközelebbi értékét választván volna $r = 19$ és: $100 < 5,5 \cdot 19 + \frac{(19)^2}{\beta\gamma}$

4.) Azon alkalmatlanságot hogy az állító mennyiségek külön, a' tagadók ismét külön össze adassanak, 's azután egymásból kivonattassanak; el lehet meilőzni az által ha a' legközelebbi alacsonyabb négyszögszám helyett, a' legközelebbi felsőbb vétetvén, annak következésében mind a' fent maradott törek, mind pedig a' sorzatnak külön tagai tagadókká tétetnek. Így a' példában volna:

$$\sqrt{125} = 11,19 \left\{ 1 - \frac{1}{2} \left(\frac{2161}{1252161} \right) - \frac{1}{8} \left(\frac{2161}{1252161} \right)^2 - \frac{1}{16} \left(\frac{2161}{1252161} \right)^3 - \frac{1}{32} \left(\frac{2161}{1252161} \right)^4 - \dots 's a' t. \right\}$$

Mindazonáltal néha a' tagadó, néha az állító törek lévén kisebb, annál fogva a' kiszámításokra is alkalmasabb, a' mit abból lehet elítélni ha a' γ -nak 3.) szerint kitaláltatható értéke; az egyik vagy másik felvételhez jár közelebb: még azon módot adjuk elő, melly szerint minden előkészületek nélkül, magokat a' két ellenkező jegyű tagok' külzéseit, azonnal fel lehet találni. Erre nézve legyen a' kétszakunak $(a + b)^m$ általános kifejtésében ezután is: $B = \frac{b}{a}$ és az egymás utáni 1, 2, 3, 4, -dik... 's a' t. tagok illetőleg A_1 ; A_2 ; A_3 ; A_4 ; - el... 'sa' t. jegyeztetvén $A_1 = a^m$.

Mivel azonban már a' fentebbi megmutatásokból $A_2 = m a^{m-1} B$; $A_3 = \frac{m-1}{2} A_2 B$; tétetvén most $A_2 = \alpha_1$ lesz: $A_3 = \alpha_1 \frac{m-1}{2}$ és: $A_2 + A_3 = \alpha_1 + \alpha_1 \frac{m-1}{2} B = \alpha_1 \left(1 + \frac{m-1}{2} B \right)$

Továbbá: $A_4 = A_3 \frac{m-2}{3} B$; $A_5 = A_4 \frac{m-3}{4} B$; volt pedig: $A_3 = \alpha_1 \frac{m-1}{2} B$

tehát: $A_4 = \alpha_1 \frac{m-1}{2} \cdot \frac{m-2}{3} B^2$, de ismét: $A_4 = \alpha_2$ -nek tétetvén találattik:

$$A_5 = \alpha_2 \frac{m-3}{4} B$$

honnét: $A_4 + A_5 = \alpha_2 + \alpha_2 \frac{m-3}{4} B$: az az: $A_4 + A_5 = \alpha_2 \left(1 + \frac{m-3}{4} B\right)$

Nem különben: $A_6 = A_5 \frac{m-4}{5} B$; $A_7 = A_6 \frac{m-5}{6} B$: volt pedig: $A_5 = \alpha_2 \frac{m-3}{4} B$

tehát:

$$A_6 = \alpha_2 \frac{m-3}{4} \cdot \frac{m-4}{5} B^2 \text{ de ismét: } A_6 = \alpha_3 \text{-nak tétetvén találattik:}$$

$$A_7 = \alpha_3 \frac{m-5}{6} B^2 \text{ honnét: } A_6 + A_7 = \alpha_3 + \alpha_3 \frac{m-5}{6} B^2$$

$$\text{az az: } A_6 + A_7 = \alpha_3 \left(1 + \frac{m-5}{6} B\right)$$

Igy lévén a' dolog minden következőkben is, mely már az előbbi megmutatásokból önként következik, igaz lesz általában:

$$A_1 = \dots a^m \dots A_1 = a^m$$

$$A_2 = \alpha_1 = m a^m B \dots A_2 + A_3 = \alpha_1 \left(1 + \frac{m-1}{2} B\right)$$

$$A_4 = \alpha_2 = \alpha_1 \frac{m-1}{2} \cdot \frac{m-2}{3} B^2 \dots A_4 + A_5 = \alpha_2 \left(1 + \frac{m-3}{4} B\right)$$

$$A_6 = \alpha_3 = \alpha_2 \frac{m-3}{4} \cdot \frac{m-4}{5} B^2 \dots A_6 + A_7 = \alpha_3 \left(1 + \frac{m-5}{6} B\right)$$

$$A_8 = \alpha_4 = \alpha_3 \frac{m-5}{6} \cdot \frac{m-6}{7} B^2 \dots A_8 + A_9 = \alpha_4 \left(1 + \frac{m-7}{8} B\right)$$

melly kitételek' egymásból származtának törvényei, egyszerűk és világosok lévén, könnyű őket akarmeddig tovább folytatni.

Tegyük most $A = \frac{a}{b}$ legyen $B = \frac{b}{a} = \frac{1}{A}$ minél fogva B-nek ezen értékevel:

$$\begin{aligned}
 A_1 &= a^m & \dots & A_1 = a^m \\
 A_2 = \alpha_1 &= \frac{ma^m}{A} & \dots & A_2 + A_3 = \alpha_1 \left(\frac{2A-1+m}{2A} \right) \\
 A_4 = \alpha_2 &= \alpha_1 \frac{m-1}{2} \frac{m-2}{3A^2} & \dots & A_4 + A_5 = \alpha_2 \left(\frac{4A-3+m}{4A} \right) \\
 A_6 = \alpha_3 &= \alpha_2 \frac{m-3}{4} \frac{m-4}{5A^2} & \dots & A_6 + A_7 = \alpha_3 \left(\frac{6A-5+m}{6A} \right) \\
 A_8 = \alpha_4 &= \alpha_3 \frac{m-5}{6} \frac{m-6}{7A^2} & \dots & A_8 + A_9 = \alpha_4 \left(\frac{8A-7+m}{8A} \right) \\
 & \dots & & \dots
 \end{aligned}$$

tört kitevővel pedig (m) helyett $\frac{m}{n}$ -et tévén általában:

$$\begin{aligned}
 A_1 &= a^{\frac{m}{n}} & \dots & A_1 = a^{\frac{m}{n}} \\
 A_2 = \alpha_1 &= \frac{ma^{\frac{m}{n}}}{nA} & \dots & A_2 + A_3 = \alpha_1 \frac{(2A-1)n+m}{2An} \\
 A_4 = \alpha_2 &= \alpha_1 \frac{m-n}{1} \frac{m-2n}{2(nA)^2} & \dots & A_4 + A_5 = \alpha_2 \frac{(4A-3)n+m}{4An} \\
 A_6 = \alpha_3 &= \alpha_2 \frac{m-3n}{4} \frac{m-4n}{5(nA)^2} & \dots & A_6 + A_7 = \alpha_3 \frac{(6A-5)n+m}{6An} \\
 A_8 = \alpha_4 &= \alpha_3 \frac{m-5n}{6} \frac{m-6n}{7(nA)^2} & \dots & A_8 + A_9 = \alpha_4 \frac{(8A-7)n+m}{8An} \\
 & \dots & & \dots
 \end{aligned}$$

Példában: Legyen ismét a' kihuzandó gyökér mint volt eddig: $\sqrt{125} = \sqrt{100+25}$ és: $a=100$; $b=25$; $A=\frac{a}{b}=\frac{100}{25}=4$; melyekből:

$$\begin{aligned}
 A_1 &= \dots 10 & \dots & A_1 = 10 & & = 10, \dots \\
 A_2 = \alpha_1 &= \frac{10}{2.4} = \frac{5}{4} & & A_2 + A_3 &= \frac{5}{4} \cdot \frac{15}{16} = \frac{75}{64} & & = 1,171875 \dots \\
 A_4 = \alpha_2 &= \frac{5}{4} \cdot \frac{1}{8} \cdot \frac{1}{16} = \frac{5}{512} & & A_4 + A_5 &= \frac{5}{512} \cdot \frac{27}{32} = \frac{135}{16384} & & = 0,008239746 \dots \\
 A_6 = \alpha_3 &= \frac{5}{512} \cdot \frac{35}{80} \cdot \frac{1}{16} = \frac{175}{655360} & & A_6 + A_7 &= \frac{175}{655360} \cdot \frac{39}{48} = \frac{136}{6291456} & & = 0,000216960979
 \end{aligned}$$

tehát $\sqrt{125}$ a' 7-dik tagig közelítve, összesen: 11,180331706979

A' sok- és végetlen szakuakrol.

Ezekután a' sok-szakúak' és végetlen szakuak' kifejtésére mehetünk által mellyet a' kétszakúnak már előadott törvényeiből akadály nélkül lehozhatni, következőképen:

$$(a + b)^m = a^m + m_1 a^{m-1} b + m_2 a^{m-2} b^2 + m_3 a^{m-3} b^3 + \dots m_r a^{m-r} b^r \dots b^m$$

Mivel pedig (a) és (b) akarmi mennyiséget tehetnek, lehet (b) helyett (b + c)-ét tenni, és akkor a' háromszakúnak általános kifejtése:

$$(a + (b + c))^m = a^m + m_1 a^{m-1} (b + c) + m_2 a^{m-2} (b + c)^2 + m_3 a^{m-3} (b + c)^3 + \dots m_r a^{m-r} (b + c)^r + \dots (b + c)^m$$

vagy is rövidebb előterjesztés kedvéért, tétetvén $m_1 a^{m-1} = A_1$; $m_2 a^{m-2} = A_2$; $m_3 a^{m-3} = A_3 \dots$'s 'a t.; és a' (b + c) kifejtett hatványai' helyretételével:

$$\begin{aligned} (a + b + c)^m = & a^m + A_1 b + A_2 b^2 + A_3 b^3 + \dots A_r b^r + \dots b^m \\ & + A_1 c + A_2 b c + A_3 b^2 c + \dots A_r b^{r-1} c + \dots m_1 b^{m-1} c \\ & + A_2 c^2 + A_3 b c^2 + \dots A_r b^{r-2} c^2 + \dots m_2 b^{m-2} c^2 \\ & + A_3 c^3 + \dots A_r b^{r-3} c^3 + \dots m_3 b^{m-3} c^3 \\ & + \dots A_r b^{r-4} c^4 + \dots m_4 b^{m-4} c^4 \\ & \dots \dots \dots m_m c^m \end{aligned}$$

megjegyezvén azonban hogy $2_2 = 1$; $3_3 = 1$; $\dots r_r = 1 \dots m_m = 1$ és ezentúl ismét:

$$\begin{aligned} A_1 + 2_1 A_2 b + 3_1 A_3 b^2 + \dots r_1 A_r b^{r-1} + \dots m_1 b^{m-1} &= A'_1 \\ A_2 + 3_2 A_3 b + \dots r_2 A_r b^{r-2} + \dots m_2 b^{m-2} &= A'_2 \\ A_3 + \dots r_3 A_r b^{r-3} + \dots m_3 b^{m-3} &= A'_3 \\ \dots \dots \dots &\dots \dots \dots \text{nak 'sa' t.} \end{aligned}$$

tétetvén, leszen szintén úgy:

$$\begin{aligned} (a + b + c)^m = & a^m + A_1 b + A_2 b^2 + A_3 b^3 + \dots A_r b^r + \dots b^m \\ & + A'_1 c + A'_2 c^2 + A'_3 c^3 + \dots A'_r c^r + \dots c^m \end{aligned}$$

nem különben (c) helyett (c + d)-ét tévén:

$$\begin{aligned} (a + b + c + d)^m = & a^m + A_1 b + A_2 b^2 + A_3 b^3 + \dots A_r b^r \dots b^m \\ & + A'_1 (c + d) + A'_2 (c + d)^2 + A'_3 (c + d)^3 + \dots A'_r (c + d)^r + \dots (c + d)^m \end{aligned}$$

mellyben a' (c+d) egymás után következő hatványai újra kifejtetvén:

[illegible]

tehát itt is lévően:

$$\begin{array}{l} A_1 + 2_1 A_2 c + 3_1 A_3 c^2 + \dots r_1 A_r c^{r-1} + \dots m_1 c^{m-1} = A'_1 \\ \quad A_2 + 3_2 A_3 c + \dots r_2 A_r c^{r-2} + \dots m_2 c^{m-2} = A'_2 \\ \quad \quad A_3 + \dots r_3 A_r c^{r-3} + \dots m_3 c^{m-3} = A'_3 \\ \quad \quad \quad \vdots \\ \quad \quad \quad \quad \vdots \end{array}$$

kell lenni a' négyszakú általános kifejtésének:

$$(a+b+c+d)^m = a^m + A_1b + A_2b^2 + A_3b^3 + \dots A^rb^r + \dots b^m$$

$$+ A'_1c + A'_2c^2 + A'_3c^3 + \dots A'_rc^r + \dots c^m$$

$$+ A''_1d + A''_2d^2 + A''_3d^3 + \dots A''_rd^r + \dots d^m$$

mellyben A_r ; A'_2 ; A''_r egymásból az előterjesztett törvények szerint származnak. És ha A_r''' ; A_r^{IV} -nek 's általában $A_r^{n'}$; $A_r^{(n+1)'}$ -nek 's 'a t. hasonló értékeket tulajdonítunk, az egymás utáni helyretételeket akarmeddig folytatván, mint hogy minden következő sorzatok a' két szakúnak fentebb megbi-
zonyított általános törvényei szerint tartoznak alkotva lenni; általában:

[illegible]

mellyben A_r ; A'_r ; A''_r ; A'''_r ; $A^{(n-1)}_r$; $A^{(n)}_r$ az (m) és a' sokszaku' adott tagainak értékei szerint meghatározthatnak.

Például: Ha egy 6 tagokból álló sokszakúnak 5-dik felemelése, $a = 2$; $b = 3$; $c = -4$; $d = 10$; $p = -7$; $q = 6$ értékeivel kívántatnék, volna:

$(a + b + c + d + p + q)^m = (10)^5 = 100000$ és a' lehozott kifejtésekben:

$$\begin{cases} A_1 = 5a^4 = 80; A_2 = 10a^3 = 80; A_3 = 10a^2 = 40; A_4 = 5a = 10 \text{ tehát:} \\ a^m + A_1b + A_2b^2 + A_3b^3 + A_4b^4 + b^5 = 4125 \end{cases}$$

Az ösztevők egymásból származtának törvénye pedig a' kívántató értékek' helyretételével:

$$\begin{aligned} A'_1 &= A_1 + 2A_2b + 3A_3b^2 + 4A_4b^3 + 5b^4 \\ A'_2 &= \dots A_2 + 3A_3b^2 + 6A_4b^3 + 10b^4 \\ A'_3 &= \dots A_3 + 4Ab + 10b^2 \\ A'_4 &= \dots A_4 + 5b \end{aligned}$$

melly szerint (b) helyett c-nek d-nek p-nek q-nak helyretételével az egymásutáni származtatásokat folytatván:

$$\begin{aligned} A_1 &= 80 \\ A_2 &= 80 \\ A_3 &= 40 \\ A_4 &= 10 \end{aligned} \left\{ \begin{array}{l} \text{böl, } b=5\text{-al: } \{ A'_1 = 5125; A'_2 = 1250; A'_3 = 250; A'_4 = 25 \text{ tehát:} \\ A'_1c + A'_2c^2 + A'_3c^3 + A'_4c^4 + c^5 = -3124 \end{array} \right.$$

honnét:

$$\begin{aligned} A'_1 &= 5125 \\ A'_2 &= 1250 \\ A'_3 &= 250 \\ A'_4 &= 25 \end{aligned} \left\{ \begin{array}{l} \text{böl, } c=-4\text{-el: } \{ A''_1 = 5; A''_2 = 10; A''_3 = 10; A''_4 = 5 \text{ tehát:} \\ A''_1d + A''_2d^2 + A''_3d^3 + A''_4d^4 + d^5 = 161050 \end{array} \right.$$

honnét:

$$\begin{aligned} A''_1 &= 5 \\ A''_2 &= 10 \\ A''_3 &= 10 \\ A''_4 &= 5 \end{aligned} \left\{ \begin{array}{l} \text{böl, } d=10\text{-el: } \{ A'''_1 = 73205; A'''_2 = 13310; A'''_3 = 1210; A'''_4 = 55 \text{ tehát:} \\ A'''_1p + A'''_2p^2 + A'''_3p^3 + A'''_4p^4 + p^5 = -160027 \end{array} \right.$$

honnét:

$$\begin{aligned} A'''_1 &= 73205 \\ A'''_2 &= 13310 \\ A'''_3 &= 1210 \\ A'''_4 &= 55 \end{aligned} \left\{ \begin{array}{l} \text{böl, } p=-7\text{-el: } \{ A^{IV}_1 = 1280; A^{IV}_2 = 640; A^{IV}_3 = 160; A^{IV}_4 = 20 \text{ tehát:} \\ A^{IV}_1q + A^{IV}_2q^2 + A^{IV}_3q^3 + A^{IV}_4q^4 + q^5 = 98976 \end{array} \right.$$

végezetre az állító és tagadó mennyiségeket külön választván:

$$\begin{array}{r} + \quad 5125 \qquad \qquad - \quad 3124 \\ \quad 161050 \qquad \qquad 160027 \\ \quad 98976 \qquad \qquad \dots\dots \\ \hline 263151 \quad - \quad 163151 = 100000 = (10)^5 \end{array}$$

Egyébiránt, ha a' számbeli mennyiségek helyett magokat a' betűjegyeket tartjuk meg, találattik:

$$\begin{aligned} A_1 &= ma^{m-1}; A_2 = \frac{m \cdot m-1}{1 \cdot 2} a^{m-2}; A_3 = \frac{m \cdot m-1 \cdot m-2}{1 \cdot 2 \cdot 3} a^{m-3}; \\ A_4 &= \frac{m \cdot m-1 \cdot m-2 \cdot m-3}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} a^{m-4}; \dots \end{aligned}$$

tehát a' (b) - nek emelkedő hatványaival szorozott tagok:

$$a^m + \frac{m}{1} a^{m-1}b + \frac{m \cdot m-1}{1 \cdot 2} a^{m-2}b^2 + \frac{m \cdot m-1 \cdot m-2}{1 \cdot 2 \cdot 3} a^{m-3}b^3 + \frac{m \cdot m-1 \cdot m-2 \cdot m-3}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} a^{m-4}b^4 + \dots b^m$$

továbbá $A_1; A_2; A_3; A_4; \dots$ böől 's' a' t. $A'_1; A'_2; A'_3; A'_4; \dots$ et 's' a' t. származtatván:

a' (c) - nek emelkedő hatványaival szorozott tagok:

$$A'_1 c = \left(\frac{m}{1} a^{m-1} + \frac{m \cdot m-1}{1 \cdot 1} a^{m-2}b + \frac{m \cdot m-1 \cdot m-2}{1 \cdot 2 \cdot 1} a^{m-3}b^2 + \frac{m \cdot m-1 \cdot m-2 \cdot m-3}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 1} a^{m-4}b^3 + \dots m_1 b^{m-1} \right) c$$

$$A'_2 c^2 = \left(\frac{m \cdot m-1}{1 \cdot 2} a^{m-2} + \frac{m \cdot m-1 \cdot m-2}{1 \cdot 1 \cdot 2} a^{m-3}b + \frac{m \cdot m-1 \cdot m-2 \cdot m-3}{1 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 2} a^{m-4}b^2 + \frac{m \cdot m-1 \cdot m-2 \cdot m-3 \cdot m-4}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 1 \cdot 2} a^{m-5}b^3 + \dots m_2 b^{m-2} \right) c^2$$

$$A'_3 c^3 = \left(\frac{m \cdot m-1 \cdot m-2}{1 \cdot 2 \cdot 3} a^{m-3}b + \frac{m \cdot m-1 \cdot m-2 \cdot m-3}{1 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3} a^{m-4}b^2 + \left(\frac{m \cdot m-1 \cdot m-2 \cdot m-3 \cdot m-4}{1 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3} a^{m-5}b^3 + \dots m_3 b^{m-3} \right) c^3 \right.$$

mellyekből, mivel akarhány tagokon és hatványokon keresztül, ugyan ezen munkálatoknak mindenkor hasonlatosképen kell folytatattatniok; általában kitűnik hogy az,

$(a + b + c + d + \dots p + q)^m$ kifejtésének minden tagai ezen általános kitételbe foglalhatók:

$$\frac{m \cdot m-1 \cdot m-2 \cdot m-3 \cdot \dots m-n+1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots p \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots q \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots r \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots s} a^{m-n} b^p c^q d^r \dots 's' a' t.$$

ha egymás után $a' p, q, r, s, \dots$ nek 's' a' t. $p + q + r + s \dots = n$ egyenlítéssel megállható minden lehetséges $0, 1, 2, 3 \dots$'s' a' t. értékei helyre tételnek, azon betűk mellyeknek 0 érték adatott, a' nevezőből egészen ki-marasztatván.

Mindazáltal a' sokszakú' ezen általános tagát, magának a' kétszakú' általános tagának szemrevételéből sokkal rövidebben lehet kikövetkeztetni. Ugyan is, lévén a' két szakú' általános taga $m, a^{m-1}b$ ha ebben (b) helyett $(b+c)$ té-

tetik, leszen a' háromszakúé: $m_n a^{m-n} (b+c)^n$ de a' $(b+c)$ általános taga ismét $n_q b^{n-q} c^q$ tehát a' háromszakúé $m_n n_q a^{m-n} b^{n-q} c^q$ mellyben ha $n-q=p$ -nek ne-

veztetik $n=p+q$. Ezen kívül: $m_n n_q = \frac{m \cdot m-1 \cdot m-2 \cdot \dots \cdot m-n+1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot n}$

$\times \frac{n \cdot n-1 \cdot n-2 \cdot \dots \cdot 1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot q}$ tehát a' számítóban és nevezőben közös szor-

zókat elhagyván $m_n n_q = \frac{m \cdot m-1 \cdot m-2 \cdot \dots \cdot m-n+1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot n-q}$ vagy $n=p+q$ -hol

$m_n n_q = \frac{m \cdot m-1 \cdot m-2 \cdot \dots \cdot m-n+1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot p \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot q}$ 'S így lévén a' dolog minden

következőkben is a' három, négy, öt, 's a' t. szakúakra nézve: a' fentebb adott általános kitételnek igaz volta minden felemeléseken és akarhány tagokon keresztül, nyilván által látható.

Már most ha ezentúl a' változó' hatványai szerint elrendelt sokszakúnak, határozatlan felemelése, vagy az: $(a + bx + cx^2 + ex^3 + \dots 's a' t.)^m$ kívántat-
nék; látni valóképen a' külön tagok' hatványai $b^p x^p$; $c^q x^{2q}$; $d^r x^{3r}$; 's a' t. formá-
júak tartoznak lenni, és azoknak tevéte, (*factum*) $b^p x^p$, $c^q x^{2q}$, $d^r x^{3r}$'s a' t.
 $= b^p c^q d^r \dots 's a' t. \times x^{p+2q+3r+\dots 's a' t.}$ lévén; tegyük; $a = \alpha$; $bx = \beta$; $cx^2 = \gamma$;
 $dx^3 = \delta \dots$ lesz ezen helyretételekkel a' kifejtendő sokszakú általános taga:

$$\frac{m \cdot m-1 \cdot m-2 \cdot \dots \cdot m-n+1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots p \times 1 \cdot 2 \cdot 3 \dots q \times 1 \cdot 2 \cdot 3 \dots r \times \dots 's a' t.} \alpha^{m-n} \beta^p \gamma^q \delta^r \dots 's a' t.$$

$$= \frac{m \cdot m-1 \cdot m-2 \cdot \dots \cdot m-n+1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots p \times 1 \cdot 2 \cdot 3 \dots q \times 1 \cdot 2 \cdot 3 \dots r \times \dots 's a' t.} \alpha^{m-n} b^p c^q d^r \dots 's a' t. \times x^{p+2q+3r+\dots 's a' t.}$$

A' sok szakúak' és végtelen szakúak' határozatlan hatványra felemelésé-
nek kérdése tehát, első esetben egyszerűn oda megy ki: hogy az általános tagban
az (n)-ek kívántató értéke megállapíttatván, p, q, r, s, t- nek 's a' t. (n)- el
egyenlő minden lehetséges öszvetei felkerestessenek; másokban: hogy elébb az
(x) valamelly megállapított hatványához képest melly legyen (n') a' p, 2q, 3r,
4s 's a' t. (n')- el egyenlő minden lehetséges öszvetei felkerestessenek; és
azután ezekből ismét a' $p+q+r+s+\dots = n$ egyenlítés szerint az (n) kü-
lön meghatározassék. Azonban a' hasonló kérdések' megoldásai körünkön ki-
vül a' kapcsolati (*combinatoria*) analysisbe tartozván, a' nélkül hogy az ide tar-
tozó részletes munkálatok' előterjesztésébe bocsátkoznánk, csupán felvilágosítá-
sul, és az analysis' egyik fő része iránt előlegesen figyelem gerjesztésül,

Példában: Kívántassék az $(a+b+c+d+e+\dots)$ sokszakú' ha-
tározatlan (m)- dik hatványának 5- dik taga, mellyre nézve lévén $n=4$ kell lenni:

$p+q+r+s \dots 's' t. = 4$; és mivel $p, q, r, s, \dots 's' t. 0$ -tól kezdve 4-ig akarmi állító egész szám értéket felvehetnek, az adott elemek' minden lehető változatai határozott öszvetre ismétléssel (*variationes ad determinatam summam cum repetitione*) $n = 4$ -nek tétetvén a' szokott módokon kifejtve, és $p, q, r, s, -$ nek megfelelőkép:

p	q	r	s
*0	0	0	4
0	0	1	3
0	0	2	2
0	0	3	1
0	0	4	0
0	1	0	3
0	1	1	2
0	1	2	1
0	1	3	0
0	2	0	2
0	2	1	1
0	2	2	0
0	3	0	1
0	3	1	0
*0	4	0	0
1	0	0	3
1	0	1	2
1	0	2	1
*1	0	3	0
1	1	0	2
1	1	1	1
1	1	2	0
1	2	0	1
1	2	1	0
1	3	0	0
2	0	0	2
2	0	1	1
2	0	2	0
2	1	0	1
2	1	1	0
*2	2	0	0
3	0	0	1
3	0	1	0
3	1	0	0
*4	0	0	0

Következőleg a' p, q, r, s -nek mind ezen értékeit, a' kifejtett 35 számra menő változatokhoz képest helyretétvén, belőlök ugyan csak 35 egyes tagok származnának; mellyek közül jelesen az öt első lenne: $\frac{m \cdot m - 1 \dots m - 3}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} a^{m-4} e^4$; $\frac{m \cdot m - 1 \dots m - 3}{1 \times 1 \cdot 2 \cdot 3} a^{m-4} d e^3$; $\frac{m \cdot m - 1 \dots m - 3}{1 \cdot 2 \times 1 \cdot 2} a^{m-4} d^2 e^2$; $\frac{m \cdot m - 1 \dots m - 3}{1 \cdot 2 \cdot 3 \times 1} a^{m-4} d^3 e$; $\frac{m \cdot m - 1 \dots m - 3}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} a^{m-4} d^4$; $\dots 's' a' t.$

Másik esetben: Ha az (x) hatványai szerint elrendelt sorzat' felemeléséből, a' negyedik hatványhoz (x^4) tartozó ösztevők kerestetnének, mivel a' $p + 2q + 3r + 4s \dots = 4$ egyenlítéssel csak a' *-al jegyzett változatok férhetnek öszve, azokból pedig az (n) -et meghatározó egyenlítések volnának: $0 + 0 + 0 + 1 = n = 1$; $1 + 0 + 1 + 0 = 2$; $2 + 1 + 0 + 0 = 3$; $4 + 0 + 0 + 0 = 4$; melylyekből a' keresett tag, az az: (x^4) a' maga ösztevőivel együtt:

$$\left\{ \frac{m}{1} a^{m-1} e + \frac{m \cdot m - 1}{1 \cdot 2} a^{m-2} c^2 + \frac{m \cdot m - 1}{1 \times 1} a^{m-2} b d + \frac{m \cdot m - 1 \cdot m - 2}{1 \cdot 2 \times 1} a^{m-3} b^2 c + \frac{m \cdot m - 1 \cdot m - 2 \cdot m - 3}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} a^{m-4} b^4 \right\} x^4$$

De mivel a' kapcsolati (*combinatoria*) analysis által eszközöltet-hető ki fejtéseket jelenleg mellőznünk kellett, ezen módoknak rövid érintése után, ismét a' fentebb előadottakra térvén: a' kétszakú' 5-dik tagának általános kitétele volna $m_4 a^{m-4} b^4$; mellyben b^4 helyett $(b+c+d+e)^4$ -el kellene lenni $(b+c)^4$ kifejtéséből, a' $(b+c+d+e)^4$ kifejtésében:

$$A_1 = 4_1 b^3; A_2 = 4_2 b^2; A_3 = 4_3 b; A_4 = 4_4 b^0 = 1$$

és az ösztevők további származtatásait (79. lapon) előterjesztett szabályok szerint folytatva:

$$A'_1 = A + A_1 2_1 c + A_3 3_1 c^2 + A_4 4_1 c^3$$

$$A'_2 = \dots A_2 2_2 + A_3 3_2 c + A_4 4_2 c^2$$

$$A'_3 = \dots A_3 3_3 c + A_4 4_3 c^2$$

$$A'_4 = \dots A_4 4_4$$

$$A''_1 = A'_1 + A'_1 2_1 d + A'_3 3_1 d^2 + A'_4 4_1 d^3$$

$$A''_2 = \dots A'_2 2_2 + A'_3 3_2 d + A'_4 4_2 d^2$$

$$A''_3 = \dots A'_3 3_3 + A'_4 4_3 d$$

$$A''_4 = \dots A'_4 4_4$$

tehát az 5-dik tag' tellyes kifejtésére találtnék:

$$\begin{aligned} & b^4 + A_1 c + A_2 c^2 + A_3 c^3 + c^4 \\ & + A'_1 d + A'_2 d^2 + A'_3 d^3 + d^4 \\ & + A''_1 e + A''_2 e^2 + A''_3 e^3 + e^4 \end{aligned}$$

mellyben az első sor, szám szerint 5 tagból; a' második, $(4 + 3 + 2 + 1)$ öszvesen 10-ből; a' harmadik $(10 + 6 + 3 + 1)$ öszvesen 20 tagból; tehát az egész 5-dik tag, mindöszve 35 külön tagokból állana, mint legközelebb találattott; mellyeknek egyenkénti felkeresését mindazáltal az adott útmutatások után, magános gyakorlatra bizhatjuk.

A' mi a' változó' hatványai szerint elrendelt sorzatokat illeti, azokra nézve a' kétszakúnak $(a + bx)$ ha benne (b) helyett $(b + dx)$ tétetik, három szakúvá $(a + bx + dx^2)$; a' három szakúnak ismét ha benne (d) helyett $(d + ex)$ tétetik, négyszakúvá $(a + bx + dx^2 + ex^3)$'s a' t. kell által változni, 's annál fogva az egymás utáni helyretételek láthatóképen ezekben is alkalmazhatók.

Annak okáért ha az (x) valamelly adott hatványának megfelelő ösztevők kívántatnának, itt is legelőbb a' kétszakút kifejtjén:

$$\begin{aligned} (a + bx)^m &= a^m + \frac{m}{1} a^{m-1} bx + \frac{m \cdot m-1}{1 \cdot 2} a^{m-2} b^2 x^2 + \frac{m \cdot m-1 \cdot m-2}{1 \cdot 2 \cdot 3} a^{m-3} b^3 x^3 \\ &+ \frac{m \cdot m-1 \cdot m-2 \cdot m-3}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} a^{m-4} b^4 x^4 + \frac{m \cdot m-1 \cdot m-2 \cdot m-3 \cdot m-4}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} a^{m-5} b^5 x^5 + \dots 's a' t. \end{aligned}$$

Ebben: az (x) valamellyik (mellyet hogy előadásainkat bizonyos tárgyra alkalmazhassuk, vegyünk fel 4-diknek) hatványához (x^5) -höz tartozó ösztevő (b)-vel egybekapcsolva közvetlenül megjelenik. De még ezenkívül, az előtteni tagból mihelyt (b) helyett $(b + cx)$ tétetik, a' $(b + cx)^4$ kifejtésében a' második tagnak jelesen: $\frac{4}{1} b^3 cx \cdot x^4$ -nek a' kívánt 5-dik hatványra szükség felemelkedni, mellynél fogva az (x^5) másik ösztevője mingyárt az első helyre tétel után a' köz-

vetlenül előtteni tagból leszen: $\frac{m \cdot m-1 \cdot m-2 \cdot m-3}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 1} a^{m-4} b^3 c$; a' többi tagok mellyekben ezentúl (x) az ötödiknél mindig felsőbb hatványokra hág, ide nem tartozhatván.

Hasonlatosképen az x^5 -nak megfelelő ösztevőben (b^5) helyett $(b+cx)^5$ kifejtetvén, annak 2-dik taga $\frac{5}{1} b^4 cx$ a' változó' hatványát csak egy, 3-dik taga pedig $\frac{5 \cdot 2}{1 \cdot 2} bc^2 x^2$ két izeddel (*gradus*) a' kívántó 5-dik hatványra emeli felebb, és ennél a' fogva a' $(b+cx)^5$ kifejtéséből a' 3-dik tag, egyszeri helyre tétel után az x^5 alá foglaltathatik 's leszen: $\frac{m \cdot m-1 \cdot m-2}{1 \cdot 1 \cdot 2} a^{m-3} bc^2$; a' 2-dik további helyretételre fent marad, a' 3-dik 's a' t. tagok pedig kelleltinél magasabb hatványra hágván félre vetendők.

Továbbá az x^2 ösztevőjében (b^2) helyett $(b+cx)^2$ kifejtetvén $(b^2+2bcx+c^2x^2)x^2$ -ben a' kívánt 5-dik hatványra egyik tag sem emelkedik, és így az egészszel további helyretételekre kell várakoznunk.

Végezetre $\frac{m}{1} a^{m-1} bx$ -ből (b) helyett $(b+cx)$ -et tévén leszen: $\frac{m}{1} a^{m-1} cx^2$.

Melly munkálatok' végbevitale után, az x^5 -nek eddig kitalált ösztevői:

$$1.) \frac{m \cdot m-1 \cdot m-2 \cdot m-3 \cdot m-4}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} a^{m-5} b^5; \frac{m \cdot m-1 \cdot m-2 \cdot m-3}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 1} a^{m-4} b^3 c;$$

$$\frac{m \cdot m-1 \cdot m-2}{1 \cdot 1 \cdot 2} a^{m-3} bc^2.$$

Fent maradtak pedig további helyretélre: az (x^5) ösztevőjéből:

$$\frac{m \cdot m-1 \cdot m-2}{1 \cdot 2 \cdot 1} a^{m-3} b^2 cx^2; \text{ az } (x^2)\text{-éből: } \frac{m \cdot m-1}{1 \cdot 1} a^{m-2} bcx^3 + \frac{m \cdot m-1}{1 \cdot 2} a^{m-2} c^2 x^4;$$

$$\text{az } (x)\text{-éből } \frac{m}{1} a^{m-1} cx^2.$$

tehát (c) helyett $(c+dx)$ -el találtatik ismét két ösztevő:

$$2.) \frac{m \cdot m-1 \cdot m-2}{1 \cdot 2 \cdot 1} a^{m-3} b^2 d; \text{ és: } \frac{m \cdot m-1}{1 \cdot 1} a^{m-2} cd$$

Fentmaradnak: $\frac{m \cdot m - 1}{1 \cdot 1} a^{m-2} b d x^4$; és: $\frac{m}{1} a^{m-1} d x^5$; mellyek után vége-

zetre, az elsőből egyszeri, a' másikkol kétszeri helyretétellel a' két hátra lévő
ösztévők:

$$3.) \quad \frac{m \cdot m - 1}{1 \cdot 1} a^{m-2} b e; \text{ és: } \frac{m}{1} a^{m-1} f.$$

tehát 1.) 2.) 3.)-bol az (x)-nek 5-dik hatványa a' maga ösztévőivel együtt:

$$\left\{ \frac{m \cdot m - 1 \cdot m - 2 \cdot m - 3 \cdot m - 4}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} a^{m-5} b^5 + \frac{m \cdot m - 1 \cdot m - 2 \cdot m - 3}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 1} a^{m-4} b^3 c \right. \\ + \frac{m \cdot m - 1 \cdot m - 2}{1 \cdot 1 \cdot 2} a^{m-3} b c^2 + \frac{m \cdot m - 1 \cdot m - 2}{1 \cdot 2 \cdot 1} a^{m-3} b^2 d + \frac{m \cdot m - 1}{1 \cdot 1} a^{m-2} c d \\ \left. + \frac{m \cdot m - 1}{1 \cdot 1} a^{m-2} b e + \frac{m}{1} a^{m-1} f \right\} x^5$$

A' sorzatokrol általában.

(*De seriebus in genere.*)

Bizonyos törvény szerint alkotott több mennyiségek' egymás után következése, sorzatnak; (*series*) a' különböző mennyiségek egyenkint, a' sorzat tagainak; a' sorzat tagainak hanyadikságát jelentő szám, mutatónak; (*index*) az elébb következő, vagy kisebb mutatónak megfelelő tag, elébbi; az utóbb következő vagy nagyobb mutatónak megfelelő tag, utóbbi tagnak neveztetnek.

E'nél fogva a' sorzatot és a'nak minden tagait, egy szabad tetszés szerint választott betű és a' mutató által könnyen szem elébe lehet terjeszteni; így: $A_1 + A_2 + A_3 + A_4 + A_5 + \dots$'s a' t. vagy: $a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + \dots$ 'sa' t. $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4 + \alpha_5 + \dots$'s a' t. $u_1 + u_2 + u_3 + u_4 + u_5 + \dots$'s a' t. És midőn a' sorzatokban állandó mennyiségekkel változók vagynak öszve kötötve így: $A_1 x + A_2 x^2 + A_3 x^3 + \dots + A_{n-1} x^{n-1} + A_n x^n + A_{n+1} x^{n+1}$.

Az utóbbiakban ha a' sorzat' egyes tagai a' változó hatványai' mentében következnek egymás után, a' sorzat a' maga változójának hatványai; még pedig ha minden következő tagban az alsóbb hatványra felsőbb következik, annak

emelkedő; ha viszont minden következő tagban a' felsőbb hatványra alsóbb következik, ugyan annak hanyatló vagy apadó hatványai szerint elrendelt sorzatnak; az $A_1; A_2; A_3; A_4; \dots$'s a' t. meghatározott vagy határoztható állandó mennyiségek ösztevőknek; a' tagok' hanyadikságát jelentő szám (n) szabad akaratként felvételhetőnek gondoltatván A_n , általános ösztevőnek; 's végre $A_n x^n$ a' sorzat általános tagának (*terminus generalis*) mondatik. Mindenik esetben pedig a' mutatókat jobbra és balra 0-n keresztül állító és tagadó jeggyel lehet folytatni így: $A_{-3} + A_{-2} + A_{-1} + A_0 + A_1 + A_2 + A^3 \dots$'s a' t. vagy így:

$$A_{-3}x^{-3} + A_{-2}x^{-2} + A_{-1}x^{-1} + A_0 + A_1x^1 + A_2x^2 + A_3x^3 + \dots \text{'s a' t.}$$

Azon törvényt mely szerint a' sorzatok' külön tagai alkotva vannak, kétféleképen lehet előterjeszteni: vagy úgy, hogy minden következő, az előtteniekből határozthatik meg, és így bizonyos tagnak ismeréséhez minden előbbi tagok' ismerése megkívántatik; vagy úgy, hogy csupán a' tagok' hanyadikságának tudásából egyszersmind akarmelly kívántató tag azonnal ismeretessé lesz. A' sorzatok' közönséges törvénye' elő terjesztésének elsőbb formája vissza futónak (*reccurrens*) a' másik függetlennek (*independens*) neveztetik. Az első formában egymás után annyi tagoknak mennyin a' keresett tagot megelőzik, előbb egyenkint ismeretessé kell lenniök, hogy a' keresettet végtire az éppen előtteniből kihozhassuk; a' másikkban pedig az általános tag az (n)-ek vagy a' tagok' számának függvénye, mellyben ha $n = 1, 2, 3, \dots$'s a' t. tétetik, az által az 1-ső, 2-dik, 3-dik $\dots$'s a' t. tagok meghatározatnak. Például mind a' két formára: A' mérleges haladásban (*geometrica progressio*) tévén az alapszámot (a) nak a' kitevőt (e) -nek a' tagok' hanyadikságát (n) -ek; az általános tag' vissza futó formája $A_n = A_{n-1}e$; független formája $A_n = ae^{n-1}$

Mivel a' független formából (n) -et 1-el kevesítvén, az előtteni tagot mindenkor ki lehet találni: az általános tag' független formájából egyszersmind a' vissza futó is megtalálthatatik. Például: a' mérleges sorzat' általános tagának független formájából $A_n = ae^{n-1}$ az (n) -et 1-el kevesítvén, az előbbi tag volna

$$A_{n-1} = ae^{n-2} \text{ tehát: } \frac{A_n}{A_{n-1}} = \frac{ae^{n-1}}{ae^{n-2}} \text{ mellyből a' vissza futó forma találtatik:}$$

$A_n = A_{n-1}e$. Ellenben a' vissza futó formából a' belé nem foglalt állandó mennyiség = (a) melly a' független forma meghatározására elkerülhetlenül szükséges semmikép' ki nem hozathatik, mellynél fogva a' vissza futóbol a' független általános tag kitalálása nem eszközölhető, hanem különös módokat kíván.

Nem csak a' sorzat' egyes tagaira, hanem több vagy kevesebb tagok' öszvetére is lévén szükségünk. az (n) -ek olytén függvénye is kívántathatik, melly-

ben az $n = 1, 2, 3, \dots$'s a' t. tétetvén, egy, két, három $\dots$'s a' t. tagok' öszvetét állítsa elő. Az (n) -ek ilyen függvénye öszvező tagnak (*terminus summatorius*) mondatik. Valamint azonban az általános tag' független és vissza futó formáira, úgy az általános és öszvező tagra nézve is, ugyan azon észrevétel talál helyet. Tudni illik az öszvező tagból az általános tag, mindenkor kitá-
láltathatik; az általános tagból azonban az öszvezőt kihozni nem lehet, hanem annak eszközlésére mindenkor tulajdon módok és munkálatok' végbeviteli ki-
vántatnak.

Minthogy akarmi felvett sorzatnak egymás után következő tagai, egy-
más közt mindenkor több vagy kevesebb mennyiséggel külzenek: két egy-
más után következő tagok közötti külzést ismét a' sorzat' törvénye szerint
határozatlanul sok részekre lehet felosztani: vagy a' sorzatnak két tagai kö-
zé, a' sorzat' törvénye szerint alkotott több tagokat rakni. Az illetén tagok-
nak, valamelly sorzat' adott két tagai közé rakását, közbe iktatásnak (*inter-
polatio*) nevezik, a' közbe iktatott tagok' mutatói pedig tört számokkal je-
leltetnek. Például: ha az A_n és A_{n+1} tagok' külzése a' sorzat' törvénye szerint
(r) felé osztatik; vagy, az A_n és A_{n+1} tagok közé ($r - 1$) számú új tagok iktat-
tatnak; lesznek; az A_n -től A_{n+1} -ig számlált és megfelelő mutatóikkal eljegy-
zett tagok: $A_n; A_{n+\frac{1}{r}}; A_{n+\frac{2}{r}}; A_{n+\frac{3}{r}} \dots A_{n+\frac{r-2}{r}}; A_{n+\frac{r-1}{r}}; A_{n+1}$. Hason-
latosképen valamelly mennyiség' hatványait $a; a^2; a^3; a^4; \dots$'s a' t. úgy
lehet tekinteni mint, egy sorzatnak mutatóit, mellyben ha a' tagok vissza felé
számláltatnak $a^0; a^{-1}; a^{-2}; a^{-3}; \dots$'s a' t. a' $0; -1; -2; -3; \dots$'s a' t.
felelnek meg; $\sqrt[r]{a} = a^{\frac{1}{r}}$ pedig, leszen a' mondottak szerint az $(r - 1)$ számú
közbe iktatott tagok' (n) -dike.

Midőn a' változónak valamely függvénye sorzatot formál, 's azon függ-
vényből második, harmadik, negyedik $\dots$'s a' t. függvények eredeztetvén,
azok úgy tekintetnek mint, egy új sorzatot alkotó tagok; az e'képen száрма-
zott sorzat kettős sorzatnak neveztetik, mellyből mik legyenek a' hármas,
négyes $\dots$'s a' t. általában többes sorzatok könnyü megérteni. Például: ha
volna az (x) -nek sorzatot formáló függvénye $f(x) = A + A_1 + A_2 + A_3 + A_4 \dots$'s a' t.
és a' szintén úgy sorzatot formáló eredeztetett függvények $f'(x) = A' + A'_1 + A'_2 + A'_3 + A'_4 + \dots$'s a' t.
 $f''(x) = A'' + A''_1 + A''_2 + A''_3 + A''_4 + \dots$'s a' t.
 $f'''(x) = A''' + A'''_1 + A'''_2 + A'''_3 + A'''_4 + \dots$'s a' t.

és az ezen tagokból származó kettős sorzat lenne:

$$\begin{aligned}
\varphi(x) &= f(x) + f'(x) + f''(x) + f'''(x) + \dots \quad 's\ a'\ t. \\
&= A + A' + A'' + A''' + \dots \quad 's\ a'\ t. \\
&\quad + A_1 + A'_1 + A''_1 + A'''_1 + \dots \quad 's\ a'\ t. \\
&\quad + A_2 + A'_2 + A''_2 + A'''_2 + \dots \quad 's\ a'\ t. \\
&\quad + A_3 + A'_3 + A''_3 + A'''_3 + \dots \quad 's\ a'\ t. \\
&\quad + A_4 + A'_4 + A''_4 + A'''_4 + \dots \quad 's\ a'\ t. \\
&\quad + \dots \quad 's\ a'\ t.
\end{aligned}$$

vagy, más eljegyzéssel a' vonások helyett számokat tévén:

$$\begin{aligned}
\varphi(x) &= f(x) + f^1(x) + f^2(x) + f^3(x) + \dots \quad 's\ a'\ t. \\
&= A_{0.0} + A_{0.1} + A_{0.2} + A_{0.3} + \dots \quad 's\ a'\ t. \\
&\quad + A_{1.0} + A_{1.1} + A_{1.2} + A_{1.3} + \dots \quad 's\ a'\ t. \\
&\quad + A_{2.0} + A_{2.1} + A_{2.2} + A_{2.3} + \dots \quad 's\ a'\ t. \\
&\quad + A_{3.0} + A_{3.1} + A_{3.2} + A_{3.3} + \dots \quad 's\ a'\ t. \\
&\quad + A_{4.0} + A_{4.1} + A_{4.2} + A_{4.3} + \dots \quad 's\ a'\ t. \\
&\quad + \dots \quad 's\ a'\ t.
\end{aligned}$$

Egyéb nemei a' sorzatoknak:

Végesek (*series finitae*) melyekben a' tagok' egymásból származtának törvénye, bizonyos számot felül haladó további tagokra ki nem terjesztethetik, 's az azon túl menő tagok 0-vá válnak.

Végetlenek (*infinitae*) melyekben a' tagoknak egymásból származtatása ugyan azon törvények szerint vég nélkül tovább folytattathatik. Mind kettőre például lehet a' kétszak-sorzat' határozatlan kifejtése $(a+b)^m$; melyben ha (m) állító egész szám, megmutatottképen a' tagok' száma $(m+1)$ -nél több nem lehet, ha pedig (m) tört vagy tagadó, a' kifejtés végetlen sorzatot formál.

Emelkedők (*ascendentes*) ha a' tagok nevekedeve, hanyatlók (*descendentes*) ha fogyva következnek egymás után. Melyektől a' (87. lapon) az emelkedő és és hanyatló hatványok szerint elrendeltek meg kell különböztetni.

Öszve hajlók vagy öszvetartók (*convergentes*) ha valamely véges határhoz (*Limes*) minél több tagoknak öszveszámítása mind inkább közelít. Ezek annál öszvehajlóbbaknak mondatnak, ha a' kitűzött megközelítésre minél kevesebb tagok' öszveszámítása elégséges.

Szét hajlók vagy szét terülők (*divergentes*) a' nem ilyen tulajdonságúak.

Félöszve hajlók (*semiconvergentes*) melyeknek öszvehajlása nem mingyárt eleintén, hanem csak bizonyos tagon túl kezdődik.

Ingók (*vacillantes*) Mellyeknek több több tagai öszve számíttatván azoknak öszvete, az igaz értéknél váltogatva hol többet hol kevesebb tesz. Például:

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + x^4 - \dots \text{'s a' t. ebben tétetvén } x = 1 \text{ leszen:}$$

$$\frac{1}{2} = 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \dots \text{'s a' t. melly ki fejtésben az egész végetlen}$$

sorzat' értéke ugyan volna $= \frac{1}{2}$; de az öszve számlált tagoké 1 és 0 között ingadoz.

Ezen kívül. A' sorzatokat különféle formák alatt lehet haszonvételre alkalmazni. Mellynek következésében ha valamelly sorzatnak előbbi értéke változatlanul hagyatván, a' tagok' egymásból származtának törvényét megváltoztatjuk, az illetén vélebanást átformálásnak (*transformatio*) hívják. Hogy ha pedig, két változók közötti viszony sorzatban vagyon előterjesztve, és annál fogva a' kettő közötti egyenlítés, $y = a + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \dots$'s a' t. adva lévén, megfordítva a' jön kérdésbe: miként lehet (x) -et (y) által határozni meg, hogy azontúl legyen, $x = a + a_1y + a_2y^2 + a_3y^3 + \dots$'s a' t. ezen kérdésnek feloldása, a' sorzat' vissza fordításának (*reversio seriei*) neveztetik.

A' sorzatok' tudományának főbb pontjai már most érintve lévén; mi előtt a' tárgyba ereszkednénk, szükség némelly általános szemléleteket előre bocsátanunk. Illyenek:

1.) Az (x) apadó hatványai szerint elrendelt sorzatban:

$$x^n + A_1x^{n-1} + A_2x^{n-2} + A_3x^{n-3} + A_4x^{n-4} + \dots + A_n$$

a' legnagyobbik ösztevő A_m -el jegyeztetvén, mihelyt $x =$ vagy $> A_m + 1$; azonnal az első tag nagyobbá válik mint minden után következők' öszvete.

Ugyan is, tétetvén az utóbbi tagok' öszvete:

$$A_1x^{n-1} + A_2x^{n-2} + A_3x^{n-3} + A_4x^{n-4} + \dots + A_{n-1}x + A_n = P$$

leszen, ha a' kisebb helyett mindenütt a' legnagyobb ösztevő tétetik; nyilvánosan:

$$A_mx^{n-1} + A_mx^{n-2} + A_mx^{n-3} + A_mx^{n-4} + \dots + A_mx + A_m > P \text{ vagy is:}$$

$$A_m (1 + x + x^2 + x^3 + \dots + x^{n-5} + x^{n-2} + x^{n-1}) > P$$

tehát, a' mérleges sorzat helyett, annak az elemi algebrából tudva lévő öszvete tétetvén:

$$A_m \left(\frac{x^n - 1}{x - 1} \right) > P$$

Vétessék most $x = A_m + 1$; tehát: $x - 1 = A_m$; honnét: $(x - 1)x^n = A_mx^n$. Ezen egyenlítésnek pedig első tagát változatlanul hagyván, az utolsót

A_m -nek kivétele által megkisebbitvén lesz: $(x-1)x^n > A_mx^n - A_m$ az az: $(x-1)x^n > A_m(x^n - 1)$'s végezetre:

$$x^n > A_m \left(\frac{x^n - 1}{x - 1} \right) \text{ vagy } x^n > P$$

melly megmutatásnak $x > A_m + 1$ értékével még inkább helyet kell találni.

2.) Ellenben ugyan az (x) apadó hatványai szerint elrendelt sorzatban:

$$A_0x^n + A_1x^{n-1} + A_2x^{n-2} + A_3x^{n-3} + \dots + A_{r-1}x^{n-(r-1)} + A_rx^{n-r}$$

mihelyt $x =$ vagy $< \frac{A_r}{A_m + A_r}$ azonnal a' legkisebb hatványt magában foglaló tag nagyobb leszen mint a' többi minden tagoknak öszvete.

Ugyan is, tétessék $x = \frac{1}{y}$ leszen (x) -nek ezen értékével ugyan azon sorzat:

$$\begin{aligned} & \frac{A_0}{y^n} + \frac{A_1}{y^{n-1}} + \frac{A_2}{y^{n-2}} + \frac{A_3}{y^{n-3}} + \dots + \frac{A_{r-1}}{y^{n-(r-1)}} + \frac{A_r}{y^{n-r}} \\ &= \frac{1}{y^n} (A_0 + A_1y + A_2y^2 + A_3y^3 + \dots + A_{r-1}y^{r-1} + A_ry^r) \\ &= \frac{A_r}{y^n} \left(\frac{A_0}{A_r} + \frac{A_1}{A_r}y + \frac{A_2}{A_r}y^2 + \frac{A_3}{A_r}y^3 + \dots + \frac{A_{r-1}}{A_r}y^{r-1} + y^r \right) \end{aligned}$$

de a' rekesz alá foglalt sorzatban tévén a' legnagyobb ösztevőt $\frac{A_m}{A_r}$ -nek,

1.) alatt már meg van mutatva hogy mihelyt $y =$ vagy $> \frac{A_m}{A_r} + 1$ azonnal y^r nagyobb mint a' többi minden tagok' öszvete; következésképen (y) -nak ilyen értékével:

$$A_ry^{r-n} > \frac{A_r}{y^n} \left(\frac{A_0}{A_r} + \frac{A_1}{A_r}y + \frac{A_2}{A_r}y^2 + \frac{A_3}{A_r}y^3 + \dots + \frac{A_{r-2}}{A_r} + \frac{A_{r-1}}{A_r}y^{r-1} \right)$$

végezetre (y) helyett $\left(\frac{1}{x}\right)$ -et tévén, 's az egymást kiejtő szorzókat elhagyván:

$$A_rx^{n-r} > A_0x^n + A_1x^{n-1} + A_2x^{n-2} + \dots + A_{r-2}x^{n-(r-2)} + A_{r-1}x^{n-(r-1)}$$

$$\text{azon esetben mikor } y = \frac{1}{x} > \frac{A_m}{A_r} + 1 = \frac{A_m + A_r}{A_r}$$

$$\text{az az: } \frac{A_r}{A_m + A_r} > x; \text{ a' legkisebb hatványt magá-}$$

ba foglaló tag, nagyobb mint a' többiek' öszvete.

3.) Ha valamely, a' maga változójának hatványai szerint elrendelt véges vagy végtelen sorzat 0-hoz egyenlő; abban minden külön hatványok összevontjainak egyenként $= 0$ kell lenniök. Ugyan is legyen ismét:

$$A_0 + A_1x + A_2x^2 + A_3x^3 + A_4x^4 + \dots A_nx^n = 0 \text{ ebben:}$$

minthogy az (x) változó lévén 0-ba is által mehet, azon esetben az (x) -el szorzott tagokat ki hagyván kell lenni $A_0 = 0$. Mivel tehát az előterjesztett függvény, azon feltételnek, hogy az (x) változó lévén annak minden lehető még olly kicsiny sőt éppen $= 0$ értékére nézve is, 0-nak maradjon, különben eleget nem tehetne ha csak A_0 nem volna $= 0$; annál fogva $A_0 = 0$; kihagyatván marad újra.

$$A_1x + A_2x^2 + A_3x^3 + A_4x^4 + \dots A_nx^n = 0$$

mellyet (x) -el lehet osztani, és akkor:

$$A_1 + A_2x + A_3x^2 + A_4x^3 + \dots A_nx^{n-1} = 0$$

de azon feltételnek, hogy (x) változó és így 0 értéket is felvehető legyen, ezen utóbbi, határozatlan tagokból álló sorzat, ismét eleget nem tehetne ha csak A_1 nem volna $= 0$. Melly okoskodást, minthogy akarmennyi összevontkőn keresztül, végtelenül folytathatni, szükség hogy a' szemlélet alávelt formájú akar véges akár végtelen sorzatok' minden összevontj, egyenként 0-val egyenlők legyenek.

4.) Ha valamely sorzatnak összevontja, a' maga kezdő tagától melly legyen $= A_q$ hátra felé folytatva kívántatik:

a.) A' kezdő tagot közvetlenül megelőző tagig folytatott összevontnak kell lenni $= 0$.

$$\text{Ugyan is, legyen: } S_n = A_q + A_{q+1} + A_{q+2} + A_{q+3} + \dots A_n$$

$$\text{kell lenni: } S_{n-1} = A_q + A_{q+1} + A_{q+2} + A_{q+3} + \dots A_{n-1}$$

$$\text{honnét 1.) } S_n - S_{n-1} = A_n$$

$$2.) S_q - S_{q-1} = A_q$$

$$3.) S_q - A_q = S_{q-1} \text{ és mivel } a' \text{ kezdő tagnak csupán magának összevontja } S_q = A_q$$

$$3.) A_q - A_q = S_{q-1} = 0$$

b.) Ha a' kezdő tag, A_1 -el jegyeztetvén a' sorzat hátra felé folytatik, a' közvetlenül előbbi tagnak kell lenni $= 0$'s azt a' felvett eljegyzéssel egyezőleg S_0 -val A_0 -val kell jegyeznünk.

Ugyan is, tétetvén $q = 1$ leszen a' 4.) bö $A_1 - A_1 = S_{1-1} = 0 = S_0$; azután pedig mivel a' összevont' jelentésére felvettük hogy S alá mutatóul az összevont tagok' száma írassék; S_0 semmi tagnak meg nem felelhetvén;

1.) Ha $k < 1$ lesz $S_n = \frac{a}{1-k} - \frac{ak^n}{1-k}$; ebben, minél nagyobbak vétetik (n) azonképen $\left(\frac{ak^n}{1-k}\right)$ -nak is annál kisebbé kell lenni, (n)-ek végetlen értékével pedig egészen elenyészni, tehát a' végetlen mérleges sorzat' öszvete, azon esetben mikor $k < 1$ bizonyos határhoz $\left(\frac{a}{1-k}\right)$ közelít, 's azt soha által nem hághatván szükségképen öszve hajlik.

2.) Ha $k > 1$ lesz $S_n = \frac{ak^n}{k-1} - \frac{a}{k-1}$ így pedig, minél nagyobb (n) annál nagyobbak kell egyszersmind lenni $\left(\frac{ak^n}{k-1}\right)$ -nek; e' mellett $-\left(\frac{a}{k-1}\right)$ ugyan azon értékű maradván. Tehát: a' mérleges sorzat ha $k > 1$ -nél, akarmi gondolható mennyiségnél nagyobbá válhatik, 's annál fogva szétterül.

3.) Ha $k = +1$ lesz $S_n = \frac{0}{0}$ határozatlan értékű; melyet az eredeti sorzatból kell kifejtteni, és az a' (k)-nak ezen értékével: $a+a+a+a+a+\dots$'s a' t. hasonlatosképen minden véges mennyiséget meghaladhatván, a' mérleges sorzatnak $k = +1$ értékével is széthajlónak kell lenni.

4.) Ha $k = -1$ lesz $S_n = a-a+a-a+a-a+\dots$'s a' t. melynek értéke (a) és 0 közt ingadozván öszvehajló nem lehet. Annak okáért általában:

A' mérleges sorzat csak azon esetekben lehet öszve hajló, mellyekben az arány' kitevője (*exponens rationis*) melyet (k)-val jegyzettünk, kisebb 1-nél; vagy: $k < 1$.

II.) Az öszve hajló sorzatnak megkívántató tulajdonsága hogy az A_n -en túli tagok' öszvete $A_{n+1} + A_{n+2} + A_{n+3} + A_{n+4} + \dots$'s a' t. $= P$ minél nagyobbak vétetik az (n); annál kevesebb legyen, mert különben akárhány tagok' öszveszámlálásával valamelly véges határhoz legkisebbé sem közelíthetnénk; ezt előre bocsátván:

a.) Tegyük (n) számu tagoknak öszvetét $S_n = A_1 + A_2 + A_3 + A_4 + \dots + A_n$; és azontúl a' többi tagokét $A_{n+1} + A_{n+2} + A_{n+3} + A_{n+4} + \dots$'s a' t. $= P$; az egész végetlen sorzat' öszvetét pedig mind öszve nevezzük Q-nak leszen: $S_n + P = Q$; $S_n = Q - P$; tehát azon esetben midőn $S_n = Q$; a' P-nek 0 -vá kell válni; az az: arra hogy a' sorzat öszve hajló legyen, megkívántatik

hogy az (n) -ek végtelen érték adatván az A_n -en túli minden tagok' öszvete legyen $= 0$.

b.) Mivel tehát az öszvehajló sorzatokban az A_n -en túli minden tagok' egész öszvete, $A_{n+1} + A_{n+2} + A_{n+3} + A_{n+4} + \dots$'s a' t. az (n) -ek végtelen nevelkedésével elenyészik, annál inkább szükség egy magános tagnak A_{n+1} -nek elenyészni; így pedig minél nagyobb az (n) az A_{n+1} -nek annál inkább fogyni kell: az öszvehajló sorzatnak mulhatlan tulajdonsága, hogy a' későbbi tagok' értéke mindig kisebbedjék, melly tulajdonság apadásnak vagy hanyatlásnak neveztetik.

c.) E' szerint a' tagok' apadása ugyan a' sorzatok' öszvehajlására mulhatlanul megkívántatik, mellynek ellenkezője mindig a' szétterülésnek bizonyos jele: mind az által csupán ezen egy okból a' sorzatok' öszvehajlására elhatározó következtetést húzni nem lehet. Mert szintén megeshető lévén, hogy valamint egy egész öszvehajló sorzat mindig bizonyos határ értékhez közelít, azon képen a' sorzat' A_n -en túli minden tagainak öszvete is bizonyos határhoz közelítsen, ilyen esetben a' P soha el nem enyészhetik, és a' sorzat öszvehajló nem lehet.

Vegyük fel az úgy nevezet harmoniai sorzatot mellynek formája:

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \dots + \frac{1}{n} \text{ ebben a' tagok ugyan, az}$$

(n) -ek minél nagyobb értékére nézve mindig fogyatkoznak, és az utolsó tagnak az (n) végtelen értékével el kell enyészni; még is mivel az A_n -en túli tagok' öszvete:

$$P = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \frac{1}{n+3} + \dots \text{ 's a' t. tehát:}$$

$$P > \frac{1}{2n} + \frac{1}{2n} + \frac{1}{2n} + \dots \text{ 's a' t. az az:}$$

$$P > n \cdot \frac{1}{2n} \text{ vagy } P > \frac{1}{2} \text{ innét a' sorzat' széthajlása világos.}$$

Ellenben az: $1 + \frac{1}{1} + \frac{1}{1.2} + \frac{1}{1.2.3} + \frac{1}{1.2.3.4} + \dots + \frac{1}{1.2.3\dots n}$ sorzatban, volna az A_n -en túli tagok' öszvete:

$$\frac{1}{1.2.3\dots n} + \frac{1}{1.2.3\dots n(n+1)} + \frac{1}{1.2.3\dots n(n+1)(n+2)} + \frac{1}{1.2.3\dots n(n+1)(n+2)(n+3)}$$

következőleg minden tagok' öszvete kisebb mint:

$$\frac{1}{1.2.3\dots n} + \frac{1}{1.2.3\dots n} \cdot \frac{1}{n} + \frac{1}{1.2.3\dots n} \cdot \frac{1}{n^2} + \frac{1}{1.2.3\dots n} \cdot \frac{1}{n^3} + \dots \dots \dots 's a' t.$$

tehát kisebb mint:

$$\frac{1}{1.2.3\dots n} \left\{ 1 + \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2} + \frac{1}{n^3} + \frac{1}{n^4} + \dots \dots \dots 's a' t. \right\}$$

és a' rekesz alá foglalt mérleges haladás (lap. 94.) 1.) alatti értékét helyre téve; kisebb mint: $\frac{1}{1.2.3\dots n} \cdot \frac{1}{1-\frac{1}{n}} = \frac{1}{1.2.3\dots n-1} \cdot \frac{1}{n+1}$'s mivel az utolsó

kitételnek az (n) végetlen értékével el kell enyészni, a' felvett sorzat össze hajlik.

III.) Ha a' fogyatkozó tagok mingyárt a' sorzat' elején, vagy valamelyik tagon túl, folyvást felváltva hol tagadó hol állító jegyet vesznek fel; akkor a' sorzatok' összevahlását nem lehet kétségbe vonni. Ugyan is, legyen:

$S_n = A_0 - A_1 + A_2 - A_3 + A_4 - A_5 + \dots 's a' t.$ lesz az elmaradott tagok' összevete:

$$a.) P = \pm \{ A_{n+1} - (A_{n+2} - A_{n+3}) - (A_{n+4} - A_{n+5}) \dots 's a' t. \}$$

$$b.) P = \pm \{ A_{n+1} - A_{n+2} + (A_{n+3} - (A_{n+4} + (A_{n+5} - A_{n+6}) \dots 's a' t.$$

következőleg ha a' tagok mindig fogynak:

c.) $P > A_{n+1}$; mert A_{n+1} -ből hogy P-hez egyenlítették állító mennyiségeket kell ki vonni.

d.) $A < A_{n+1} - A_{n+2}$; mert $A_{n+1} - A_{n+2}$ -höz, hogy P-vel egyenlő legyen állító külzéseknek kell járulni. Minthogy tehát A_{n+1} 's annál inkább $A_{n+1} - A_{n+2}$ az az (n)-ek végetlen nagygyá létével elenyészik, szükségképen a' kettő között eső P-nek is el kell enyészni, mely a' sorzatok' összevahlásának bizonyos jele.

IV.) A' sorzatok' összevahlását vagy szétterülését meg lehet ismerni összevahlásból. Még pedig:

1.) Ha egy, összevahlónak el ismert sorzat' tagait: $A_0 A_1 A_2 A_3 A_4 \dots$ el. 'sa' t. }
a' vizgálat alá vettét pedig: $a_0 a_1 a_2 a_3 a_4 \dots$ el. 'sa' t. }<sup>jegyex-
vén.</sup>

úgy találjuk hogy az utóbbi sorzat' minden külön tagai, valahol elkezdvén illetőleg kisebbek az elébbi sorzat' külön tagainál; a' kérdésben forgó sorzatnak összevahlónak kell lenni. Ugyan is tétessék:

$$s_n = a_0 + a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + \dots \dots \dots a_{n-1}$$

$$S_n = A_0 + A_1 + a_2 + A_3 + A_4 + \dots \dots \dots A_{n+1} \text{ lesz:}$$

$$S_{n+m} - S_n = A_n + A_{n+1} + A_{n+2} + A_{n+3} + A_{n+4} + \dots \dots \dots A_{n+m-1}$$

de mivel az előre bocsátottak' következtetésében: $a_n < A_n$ és ennél fogva:

$$a_{2n} < A_n$$

$$a_{2n+1} < A_{n+1}$$

$$a_{2n+2} < A_{n+2}$$

$$\dots\dots\dots$$

$$a_{2n+m-1} < A_{n+m-1}; \text{ tehát:}$$

$$a_{2n} + a_{2n+1} + a_{2n+2} + \dots\dots\dots a_{2n+m-1} < S_{n+m} - S_n \text{ az az:}$$

$$S_{2n+m} - S_{2n} < S_{n+m} - S_n \text{ és tévén } k = 2n$$

$$S_{k+m} - S_k < S_{n+m} - S_n$$

öszvehajló lévén pedig az $A_0 + A_1 + A_2 + A_3 + \dots$'s a' t. sorzat, $S_{n+m} - S_n$ -nek szóval: az A_n -en túli minden tagok' öszvetének elenyészhetőnek kell lenni, 's annyival inkább $S_{k+m} - S_k$ -nak vagy az a_k -án túli minden tagok öszvetének; mellyből a' sorzat' öszvehajlása nyilvános.

2.) Ha egy széthajlónak elismert sorzat' tagait: $A_0 A_1 A_2 A_3 A_4 \dots$ el.'sat. }
a' vizsgálat alá vettét pedig: $a_0 a_1 a_2 a_3 a_4 \dots$ el.'sa't. } jegyezvén

úgy találjuk, hogy az utóbbi sorzat' külön tagai, valahol el kezdvén azontúl illetőleg mindig nagyobbak az előbbi sorzat' külön tagainál; a' kérdésbe forgó sorzatnak széthajlónak kell lenni. Ugyan is tétessék ismét:

$$S_n = a_0 + a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + \dots\dots\dots a_{n-1}$$

$$S_n = A_0 + A_1 + A_2 + A_3 + A_4 + \dots\dots\dots A_{n-1} \text{ lesz:}$$

$$S_{n+m} - S_n = A_n + A_{n+1} + A_{n+2} + A_{n+3} + A_{n+4} + \dots\dots\dots A_{n+m-1} \text{ és:}$$

$$a_{2n} > A_n$$

$$a_{2n+1} > A_{n+1}$$

$$a_{2n+2} > A_{n+2}$$

$$\dots\dots\dots$$

$$a_{2n+m-1} > A_{n+m-1}; \text{ tehát:}$$

$$a_{2n} + a_{2n+1} + a_{2n+2} + \dots\dots\dots a_{2n+m-1} > S_{n+m} - S_n \text{ az az:}$$

$$S_{2n+m} - S_{2n} > S_{n+m} - S_n \text{ és tévén } 2n = k$$

$$S_{k+m} - S_k > S_{n+m} - S_n$$

széthajló lévén pedig az $A_0 + A_1 + A_2 + A_3 + A_4 + \dots$'s a' t. sorzat, $S_{n+m} - S_n$ szóval: az A_n -en túli minden tagok' öszvete el nem enyészhetik, 's annyival inkább $S_{k+m} - S_k$; szóval: az a_k -án túli minden tagok' öszvete el nem enyészhetvén, innét a' sorzat' széthajlása nyilvános.

3.) Ha két össze hajló sorzatok, melyek közül:

$$\left. \begin{array}{l} \text{egyiket } S_n = a_0 + a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_{n-1} \\ \text{másikat } \Sigma_n = \alpha_0 + \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \dots + \alpha_{n-1} \end{array} \right\} \text{-el jegyezzünk.}$$

össze adatnak, a' kettőnek összetételéből származott sorzat ismét össze hajlik és lesz:

$$S_n + \Sigma_n = (a_0 + \alpha_0) + (a_1 + \alpha_1) + (a_2 + \alpha_2) + (a_3 + \alpha_3) + \dots \text{'s a' t. Ugyan is:}$$

Mivel a' felvett sorzatok összevethajlanak, ezen okból mind egyik' mind másik' összetételének bizonyos határhoz kell közelíteni; 's az S_n -ek határát P -vel az Σ_n -ét Π -vel jegyezvén, lehet az (n) -nek akkora értéket adni hogy mind $P - S_n$; mind $\Pi - \Sigma_n$ kisebb legyen mint akarmelly kicsiny adatható mennyiség. Nevezvén tehát ezen adatható legkisebb mennyiséget (h) -nak, ha már most (n) akkorának vétetik, hogy mind $P - S_n$; mind $\Pi - \Sigma_n$; kisebb legyen $\frac{1}{2} h$ -nál;

leszen szükségképen $(P + \Pi) - (S_n + \Sigma_n) < h$; következőleg:
 $(S_n + \Sigma_n) = (a_0 + \alpha_0) + (a_1 + \alpha_1) + (a_2 + \alpha_2) + \dots$'s a' t. az adott két sorzat' igaz összetételétől $(P + \Pi)$ -től kevesebbé különbözik mint akarmi adott mennyiség, 's ennél fogva a' feltett állítás meg van mutatva.

4.) Ha két össze hajló sorzatok közül:

$$\left. \begin{array}{l} \text{egyiket } S_n = a_0 + a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_{n-1} \\ \text{másikat } \Sigma_n = \alpha_0 + \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \dots + \alpha_{n-1} \end{array} \right\} \text{-el jegyezzünk}$$

a' következő sorzat:

$$\begin{aligned} \Theta_n = & a_0 \alpha_0 \\ & + a_0 \alpha_1 + a_1 \alpha_0 \\ & + a_0 \alpha_2 + a_1 \alpha_1 + a_2 \alpha_0 \\ & + a_0 \alpha_3 + a_1 \alpha_2 + a_2 \alpha_1 + a_3 \alpha_0 \\ & + a_0 \alpha_4 + a_1 \alpha_3 + a_2 \alpha_2 + a_3 \alpha_1 + a_4 \alpha_0 \\ & + \dots \end{aligned}$$

ismét össze fog hajlani, és (n) -nek végtelen értékével lesz $\Theta_n = S_n \cdot \Sigma_n$.

Ugyan is:

$$\begin{aligned} S_n \Sigma_n = & a_0 \alpha_0 + a_1 \alpha_0 + a_2 \alpha_0 + \dots + a_{n-1} \alpha_0 \\ & + a_0 \alpha_1 + a_1 \alpha_1 + a_2 \alpha_1 + \dots + a_{n-1} \alpha_1 \\ & + a_0 \alpha_2 + a_1 \alpha_2 + a_2 \alpha_2 + \dots + a_{n-1} \alpha_2 \\ & + a_0 \alpha_3 + a_1 \alpha_3 + a_2 \alpha_3 + \dots + a_{n-1} \alpha_3 \\ & \dots \\ & + a_0 \alpha_{n-2} + a_1 \alpha_{n-2} + a_2 \alpha_{n-2} + \dots + a_{n-1} \alpha_{n-2} \\ & + a_0 \alpha_{n-1} + a_1 \alpha_{n-1} + a_2 \alpha_{n-1} + \dots + a_{n-1} \alpha_{n-1} \end{aligned}$$

Ennél fogva: mivel a' két előterjesztésből azonnal láthatóképen $\mathfrak{S}_n < S_n \cdot \Sigma_n$ és viszont (n) helyett a' hátulsó tagban, a' hoz képest a' mint (n) páros vagy páratlan, tétetvén $m = \frac{n}{2}$ vagy $\frac{n-1}{2}$ $\mathfrak{S}_n > S_m \cdot \Sigma_m$ mint a' két féle előterjesztésekből ezt is világosan láthatni, ha már most ezentúl (n)-et, és így azzal együtt (m)-et is végetlenül nevekettetjük, az $S_n \cdot \Sigma_n$ és $S_m \cdot \Sigma_m$ egymáshoz végetlenül fognak közeledni, úgy annyira hogy utóbb a' kettő között semmi véges különbség helyet nem találhat, a' midőn egyszersmind annyival inkább a' kettő közé szorult $\mathfrak{S}_n$ -ek $S_n \Sigma_n$ -hez végetlenül közel kell járulni.

5.) Ha két sorzatok közül egyik a' másiktól úgy származik hogy legyen:

$$\left. \begin{array}{l} \text{egyik } S_n = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + \dots + a_n \\ \text{másik } T_n = a_1 + 2a_2 + 4a_3 + 8a_4 + \dots + 2^{n-1}a_n \end{array} \right\}$$

és az első sorzat' tagai végetlenül fogyatkoznak; mind a' két sorzat együtt fog öszvehajlani, vagy szét terülni. Ugyan is a' mondott feltételből következik:

$$\left. \begin{array}{l} a_1 = a_1 \\ 2a_2 = 2a_2 \\ 4a_4 < 2a_3 + 2a_4 \\ 8a_8 < 2a_5 + 2a_6 + 2a_7 + 2a_8 \\ \dots \end{array} \right| \left. \begin{array}{l} a_1 = a_1 \\ 2a_2 > a_2 + a_3 \\ 4a_4 > a_4 + a_5 + a_6 + a_7 \\ 8a_8 < a_8 + a_9 + a_{10} + a_{11} + \dots + a_{15} \\ \dots \end{array} \right.$$

tehát tévén $m = 2^{n-1}$

$T_n < 2S_m - a_1$ és: $T_n > S_{2m-1}$ mellyből:

a.) Ha $2S_m - a_1$ bizonyos határhoz közelít, az az: S_n az (n)-nek végetlenül nevekedésével öszvehajlik, ugyan az annál inkább igaz T_n -ről

b.) Ha S_{2m-1} az (n)-nek végetlenül nevekedésével mindig nő, a' nélkül hogy bizonyos határhoz közelítene az az: S_n szét terül, ugyan az annál inkább igaz T_n -ről.

továbbá hasonlatosképen:

$$\left. \begin{array}{l} 2a_1 = 2a_1 \\ 6a_3 < 3(a_2 + a_3) \\ 18a_9 < 3(a_4 + a_5 + \dots + a_9) \\ 54a_{27} < 3(a_{10} + a_{11} + \dots + a_{27}) \end{array} \right| \left. \begin{array}{l} 2a_1 > a_1 + a_2 \\ 6a_3 > a_3 + a_4 + a_5 + \dots + a_8 \\ 18a_9 > a_9 + a_{10} + a_{11} + \dots + a_{25} \\ 54a_{27} > a_{27} + a_{28} + a_{29} + \dots + a_{80} \end{array} \right.$$

tehát tévén $T_n = 2(a_1 + 3a_3 + 3^2a_9 + \dots + 3^{n-1}a_{3^{n-1}})$ lesz ismét:

$T_n < 3S_n - a_1$ és $T_n > S_{3^{n-1}}$

nem különben:

$$\begin{array}{l|l}
 4a_1 = 4a_1 & 4a_1 > a_1 + a_2 + a_3 + a_4 \\
 4.5.a_5 < 5(a_2 + a_3 + a_4 + a_5) & 4.5.a^5 > a_5 + a_6 + \dots a_{24} \\
 4.25.a_{25} < 5(a_6 + a_7 + \dots a_{25}) & 4.25.a_{25} > a_{25} + a_{26} + \dots a_{124}
 \end{array}$$

azért is tétetvén újra $T_n = 4(a_1 + 5a^5 + 5^2a_5 + \dots 5^{n-1}a_{5^{n-1}})$ lesz:

$$T_n < 5S_n - a_1 \text{ és } T_n > S_{5^{n-1}}$$

melly okoskodást mint hogy végtelenül tovább lehet folytatni; általában:

$$\begin{array}{l|l}
 (m-1)a_1 = (m-1)a_1 & (m-1)a_1 > a_1 + a_2 + a_3 + \dots a_{m-1} \\
 (m-1)m a_m < m(a_2 + a_3 + \dots a_m) & (m-1)m a_m > a_m + a_{m+1} + \dots a_{m^2-1} \\
 (m-1)m^2 a_{m^2} < m(a_{m+1} + a_{m+2} + \dots a_{m^2}) & (m-1)m^2 a_{m^2} > a_{m^2} + a_{m^2+1} + \dots a_{m^3-1}
 \end{array}$$

mellyben: $T_n = (m-1)[a_1 + m a_m + m^2 a_{m^2} + \dots m^{n-1} a_{m^{n-1}}]$ tehát

$$T_n < mS_n - a_1 \text{ és } T_n > S_{m^{n-1}}$$

's a' mondottképen egymásból származott sorzatok, (m)-nek egyéb értékére nézve is, általában együtt hajlanak össze, és együtt terülnék szét.

IV.) Azon sorzatok mellyekben a' két végső tag' hanyadosa $\frac{a_{n+1}}{a_n}$; vagy:

az (n)-dik tag' (n)-dik gyökere $a^{\frac{1}{n}}$ az (n)-nek nöttével 1-nél kisebb határhoz közelít összeválnak; azok ellenben mellyekben a' mondottak' határa 1-nél nagyobb széthajlanak.

1.) Legyen a' nevezett hanyados határa $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = B < 1$; továbbá

vegyünk fel két más mennyiségeket A-t és C-ét a' B-hez végtelenül közel A-t kisebbnek C-ét nagyobbak gondolva. Akarmilyen közel legyenek az A, B, C, mennyiségek egymáshoz még is az (n)-nek határozatlan értékével az $\frac{a_{n+1}}{a_n}$ hanyadost mindenkor az A; és C; mennyiségek közé lehet ejteni, melly-

nél fogva: $\frac{a_{n+1}}{a_n} < C$ tehát: $a_{n+1} < Ca_n$

származtassuk a' mérleges sorzatot C kitevővel:

a.) $a_n + Ca_n + C^2a_n + C^3a_n + C^4a_n + \dots$'s a' t,
ehhez hasonlítván:

b.) $a_n + a_{n+1} + a_{n+2} + a_{n+3} + a_{n+4} + \dots$'s a' t.

a' b.) sorzatnak minden (a_n) -en túli tagai kisebbek lesznek az a.) sorzat' megfelelő tagainál, 's minthogy az a.) sorzat (lap. 94.) szerint össze hajlik, annál inkább a' b.) sorzatot össze hajlónak kell tartani.

2.) A' B-hez végetlenül közel $A > 1$; $A < B$ vétethetik; tehát mivel az $\frac{a_{n+1}}{a_n}$ hanyados (n)-nek határozatlan értékével A és B közé ejthetni;

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} > A \text{ vagy is } a_{n+1} > Aa_n \text{ innét:}$$

a.) $a_n + Aa_n + A^2a_n + A^3a_n + A^4a_n + \dots$ széthajló mérleges sorzat.

b.) $a_n + a_{n+1} + a_{n+2} + a_{n+3} + a_{n+4} + \dots$ sorzatban pedig a' két egymás utáni tagok' hanyadosa, mindig nagyobb az a.) sorzat' két egymás után következő tagainak hanyadosainál: tehát a' b.) sorzat is az a.) nál még inkább széthajló.

3.) Ezen egyenlítést $\text{Lim. } \frac{a_{n+1}}{a_n} = B$ másképen így lehet kitenni $\frac{a_{n+1}}{a_n} = B + \alpha_n$;

megjegyezvén hogy α_n alatt az (n)-nek olytán függvényét értjük melynek értéke az (n) végetlenül nöttével végetlenül fogyatkozik. Tehát valahol elkezdvén 's az (n)-nek szüntelen nevedő r ; $r + 1$; $r + 2$; $r + 3 \dots \dots n - 3$; $n - 2$; $n - 1$ értéket tulajdonítván, kell lenni;

$$\frac{a_{r+1}}{a_r} \cdot \frac{a_{r+2}}{a_{r+1}} \cdot \frac{a_{r+3}}{a_{r+2}} \dots \dots \frac{a_{n-1}}{a_{n-2}} \cdot \frac{a_n}{a_{n-1}} = \frac{a_n}{a_r} = (B + \alpha_r) \cdot (B + \alpha_{r+1}) \dots (B + \alpha_{n-1})$$

mellyben az (n) végetlen nöttével elenyésző mennyiségekkel illetett tagokat kimarasztván:

$$\text{Lim. } \frac{a_n}{a_r} = B^{n-r} \text{ vagy, tévén ismét } \omega\text{-át az (n) végetlenül nöttével}$$

elenyészőnek: $\frac{a_{n+1}}{a_r} = (B + \omega)^{n-r}$ honnét $a_n = \alpha_r (B + \omega)^{n-r}$ és:

$\sqrt[n]{a_n} = \sqrt[n]{a_r (B + \omega)^{1 - \frac{r}{n}}}$ ezen utolsó egyenlítésben pedig az (n)-nek végetlenül nöttével $\sqrt[n]{a_r} = a_r^{\frac{1}{n}} = a_r^0 = 1$ és $(B + \omega)^{1 - \frac{r}{n}}$ -ben pedig, az (n) végetlenül nöttével ω elenyészvén: $(B + \omega)^{1 - \frac{r}{n}}$ által megy $(B)^{1 - \frac{r}{n}} = B$ -be tehát; $\text{Lim. } \frac{a_{n+1}}{a_n} = \sqrt[n]{a_n} = B$; az az:

a' $\sqrt[n]{a_n}$ -nek határa ugyan az a' mi $\frac{a_{n+1}}{a_n}$ -é, 's mivel erről meg van mutatva hogy a' sorzat csak akkor hajolhat ha a' nevezett hanyados kisebb 1-nél; ellenben ha 1-nél nagyobb akkor szét terül, ugyan az igaz $\sqrt[n]{a_n}$ -ről.

V.) Azon sorzatok mellyekben: $\frac{a_n \cdot a_{n+1}}{a_n - a_{n+1}}$ elenyészik, össze hajlanak; azok mellyekben ellenkező talál helyet, szét terülnek. Ugyan is:

Tétetvén $\lim. \frac{a_{n+1}}{a_n} = B = (B + \alpha_n)$ mellyben α az (n) -nek végtelenül nöttével szüntelen fogyatkozó 's végtire elenyésző mennyiséget jelent, leszen:

$$a_{n+1} = a_n (B + \alpha_n)$$

$$a_{n+2} = a_{n+1} (B + \alpha_{n+1}) = a_n (B + \alpha_n) \cdot (B + \alpha_{n+1})$$

$$a_{n+3} = a_{n+2} (B + \alpha_{n+2}) = a_n (B + \alpha_n) \cdot (B + \alpha_{n+1}) \cdot (B + \alpha_{n+2})$$

's mivel az (n) -en túli tagok' öszvete $P = a_{n+1} + a_{n+2} + a_{n+3} + a_{n+4} + \dots$ 'sa' t, az egyes tagok' kifejtett értékeinek helyretételével:

$$\begin{aligned} P = a_n \{ & (B + B^2 + B^3 + B^4 + \dots) + (1 + B + B^2 + B^3 + B^4 + \dots) \alpha_n \\ & + (B + B^2 + B^3 + B^4 + \dots) \alpha_{n+1} + (B^2 + B^3 + B^4 + \dots) \alpha_{n+2} \\ & + (1 + B + B^2 + B^3 + B^4 + \dots) \alpha_n \cdot \alpha_{n+1} + (B + B^2 + B^3 + B^4 + \dots) \alpha_n \cdot \alpha_{n+2} \dots \} \end{aligned}$$

Mivel már, az ezen kitételben elő forduló mérleges sorzatok, ha $B < 1$ öszve hajolnak; mellyeknek öszvete egyenkint:

$$B + B^2 + B^3 + B^4 + \dots \text{'sa' t.} = \frac{B}{1-B}$$

$$1 + B + B^2 + B^3 + \dots \text{'sa' t.} = \frac{1}{1-B}$$

$$B^2 + B^3 + B^4 + B^5 + \dots \text{'sa' t.} = \frac{B^2}{1-B}$$

tehát ezen értékek' helyre állításával:

$$P = a_n \left\{ \frac{B}{1-B} + \frac{\alpha_n}{1-B} + \frac{B\alpha_{n+1}}{1-B} + \frac{B^2\alpha_{n+2}}{1-B} + \dots \frac{\alpha_n \cdot \alpha_{n+1}}{1-B} + \dots \right\}$$

következésképen: minthogy α_n az (n) -nek végtelenül nöttével elenyészik, a'

$$P\text{-nek határa } \lim. P = a_n \frac{B}{1-B}$$

De a' P -nek az öszvehajló sorzatokban az (n) végtelenül nöttével elkelletvén enyészni; a' sorzatok' öszvehajlásának átalános megismertető jele, ha az (n) végtelen értékével:

$$P = a_n \frac{B}{1-B} = 0 \text{ leszen, vagy is elenyészik.}$$

az az: B-nek az (n) végtelen nevededéséhez képesti értékét $B = \frac{a_{n+1}}{a_n}$ vissza helyhetvén: ha:

$$P = \frac{\frac{a_{n+1}}{a_n}}{1 - \frac{a_{n+1}}{a_n}} = \frac{a_n \cdot a_{n+1}}{a_n - a_{n+1}} = 0 \text{ semmivé leszen.}$$

VI.) A' sorzatok öszvehajlanak ha (na_n) elenyészhető mennyiség, ellenkező esetben szét terülnek. Mellynek megmutatására vegyük ismét szemlélet alá az a_n -en kezdődő és azontúl végtelenül tovább folytatott tagok' öszvetét és legyen:

$$1.) P = a_n + a_{n+1} + a_{n+2} + a_{n+3} + a_{n+4} + \dots 's a' t.$$

mivel ebben:

$$a_n + a_{n+1} = 2a_n - (a_n - a_{n+1})$$

$$a_n + a_{n+1} + a_{n+2} = 3a_n - (a_n - a_{n+1}) - (a_n - a_{n+2})$$

$$a_n + a_{n+1} + a_{n+2} + a_{n+3} = 4a_n - (a_n - a_{n+1}) - (a_n - a_{n+2}) - (a_n - a_{n+3})$$

$$\dots \dots \dots$$

leszen általában:

$$P = na_n - (a_n - a_{n+1}) - (a_n - a_{n+2}) - (a_n - a_{n+3}) - (a_n - a_{n+4}) - \dots 's a' t.$$

tehát:

$$na_n = P + (a_n - a_{n+1}) + (a_n - a_{n+2}) + (a_n - a_{n+3}) + (a_n - a_{n+4}) + \dots 's a' t.$$

és ezen utolsó egyenlítésből, mivel a' P után következő mennyiségek a' sorzat hanyatlásánál fogva (mert a' fentebbiek szerint csak az olyanokról lehet kérdés) együl egyig állítók; ha (na_n) elenyészik, annál inkább P-nek is szükség lévén elenyészni: következik, hogy az (na_n) elenyészése nyilvánosan mindenkor a' sorzat' öszvehajlásának bizonyos jele.

2.) A' közelebbi utolsó egyenlítésben P után mindenütt a' végső legnagyobb külszt $(a_n - a_{2n+1})$ -et helyhetvén kell lenni:

$na_n < P + n(a_n - a_{2n+1})$ és ha (na_n) el nem enyészhetvén, még is P elenyészhetőnek állítatnék; az csak úgy volna lehető ha:

$na_n < n(a_n - a_{2n+1})$ melly feltétel képtelenséget foglalván magában, ismét nyilván van: hogy ha (na_n) el nem enyészhetik, egyszersmind lehetetlen

lévén P-nek is elenyészni; viszont az (na_n) el nem enyészhetése mindenkor a' sorzat' szétterülésének bizonyos jele.

VII.) Ha valamely sorzatot, bizonyos tagtól elkezdvén két össze hajló, még pedig egyik nagyobb másik kisebb értékű sorzat közé lehet ejteni, azon tagtól fogva a' közbe vett is össze hajlik; sőt ha a' nevezett két sorzatok' összevetei külön külön ismeretesek, azokból mind az elkövethető hiba' mennyisége mind a' sorzat' hajlásának kezdő taga meghatározható.

VIII.) Azon sorzatoknak, melyekben az állandó mennyiségekkel mint összevőkkel, valamely változónak egész kitevők szerint emelkedő hatványai vagynak egybe kapcsolva, általános formája:

a.) $\alpha_0 + \alpha_1 x + \alpha_2 x^2 + \alpha_3 x^3 + \alpha_4 x^4 + \dots + \alpha_n x^n + \alpha_{n+1} x^{n+1} + \dots$'s a' t. ezekről azt lehet kérni hogy a' változónak mi értékével hajolnak vagy terülnek.

Az (n) -nek határozott érték adatván a' fentebbiéből emez származik:

$\beta.) a_0 + a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + \dots + a_n + a_{n+1} + \dots$'s a' t. mellynél fogva ezeknek össze hajlásukat is a' már elő adott ismertető jelekből kell elítélni. Különösen:

1.) A' IV.) alatt már láttuk hogy a' $\beta.)$ sorzat, midőn az $\frac{a_{n+1}}{a_n}$ hanyados értéke bizonyos háttérhez $= B$ közelít; hajlik ha $B < 1$; terül ha $B > 1$. De itten:

a.) $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{a_{n+1} x^{n+1}}{a_n x^n} = \frac{a_{n+1}}{a_n} x$; tehát (x) -nek határozott érték adatván:

b.) $\lim. \frac{a_{n+1}}{a_n} = x. \lim. \frac{a_{n+1}}{a_n} = B$; tétessék $\lim. \frac{a_{n+1}}{a_n} = A$ legyen:

c.) $B = Ax$'s mivel a' sorzat' hajlására $B < 1$ -nél, terülésére pedig $B > 1$ -nél kívántatik, a' felvett sorzat' hajlását onnét kell elítélni: milyen érték adatott (x) -nek, olyan-e mellyel $Ax < 1$ vagy olyan mellyel $Ax > 1$; első esetben a' sorzat hajló, másikkban terülő lesz.

2.) Ha két vagy több sorzatok, az (x) -nek bizonyos értékével hajolnak, nem különben azon sorzatoknak mind összeveteik, mind külöseik, az (x) -nek ugyan azon értékével össze fognak hajlani. Ugyan is, legyen:

$$S_n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + a_4 x^4 + \dots + a_n x^n$$

$$\Sigma_n = \alpha_0 + \alpha_1 x + \alpha_2 x^2 + \alpha_3 x^3 + \alpha_4 x^4 + \dots + \alpha_n x^n$$

's ha az (n) végetlenül nő, lévén:

- a.) $\text{Lim. } S_n = A$ és $\text{Lim. } \Sigma_n = B$ lesz;
 b.) $\text{Lim. } (S_n \pm \Sigma_n) = \text{Lim. } S_n \pm \text{Lim. } \Sigma_n = A \pm B$ és így mivel;
 c.) $S_n \pm \Sigma_n$ az (n) -nek végetlenül nöttével az $A \pm B$ határt által nem hág-hatja, a' sorzat' hajlása nyilván van.

3.) Ha a' fentebbi két sorzatok, az (x) -nek bizonyos értékével öszvehajlottak, ezenkívül minden tagok' jegyei vagy csupa állítók vagy csupa tagadók; ezen feltételek alatt, a' két sorzatok' tevete is, (n) -nek határozatlanul nevekedhető értékével öszvehajlik, 's annak határa AB .

A' mondott sorzatok' tevete, fentebbi eljegyzéssel $= S_n \Sigma_n$; 's ezen tevetben az (x) -nek minden hatványai x^0 -tol fogva x^{2n} -ig befoglaltatnak. Tétetvén tehát az x^0 -tol x^n -ig számlált minden tagoknak öszvete $= \mathfrak{S}_n$ látnivalóképen:

a.) $\mathfrak{S}_n < S_n \Sigma_n$

Továbbá ha az (n) páros volna, tétessék $\frac{n}{2} = m$; ha páratlan, $\frac{n-1}{2} = m$.

Az $S_m \Sigma_m$ tevetben az $x^n = x^{2m}$ vagy csak egyszer jöhet elő az utolsó tagban ezen forma alatt $a_m \alpha_m x^{2m}$; még pedig egyszer is csak akkor midőn (n) páros; vagy ha (n) páratlan egyszer sem, és a' nevezett S_m ; Σ_m ; sorzatok' tevetében a' legfelsőbb hatvány csak x^{n-1} -ig emelkedhetik. Ellenben $\mathfrak{S}_n$ az alsóbb hatványokon kívül $a_0 \alpha_n x^n$; $a_1 \alpha_{n-1} x x^{n-1}$; $a_2 \alpha_{n-2} x^2 x^{n-2}$; ... 's a' t. vagy is az öszvezetett tagok' számához képest $(n+1)$ számú x^n -hez tartozó tagokat foglalván magába:

b.) $\mathfrak{S}_n > S_m \Sigma_m$

Már ha az (n) 's azzal együtt (m) is végetlenül nő; az S_n ; S_m ; Σ_n ; Σ_m az A -hoz és B -hez, tehát az $S_n \Sigma_n$ és $S_m \Sigma_m$ tevetek is (lap. 19.3.) szerint) az AB határhoz közelítenek; következőleg ugyan az, a' kettő közé szorult $\mathfrak{S}_n$ -ről is igaz lévén:

c.) $\text{Lim } \mathfrak{S}_n = AB$ szóval: a' szemlélet alá fogott két sorzatok' tevete, (n) -nek határozatlanul nevekedhető értékével öszvehajlik, és annak határa AB .

Azonban mivel okoskodásinkat kirekesztőleg azon feltételre alapítottuk, hogy az (x) bizonyos értékével, minden tagok ugyan azon jegyet tartsanak, melly nélkül $\mathfrak{S}_n$ a' kitűzött határok közé nem szükségképen foglaltatnék: ellenkező esetben a' kérdéselt sorzat' hajlását vagy területét (96. lapon) elő adott körülményből kell elítélni. Ezenkívül: különösen $n=1$ -nek tétetvén a' mon-

dottak' alkalmazása olytán sorzatokra nézve is melyekben változó elő nem fordul, magában világos.

Példák: Legyen a' szemlélet alá veendő sorzat,

$$1.) S_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \dots + \frac{1}{n}$$

Ebben, a' IV.) V.) VI.) számok alatt kifejtett általános ismertető jelekből

a.) A' két végső tag' hanyadosa $\frac{a_{n+1}}{a_n}$ legyen $= \frac{n}{n+1} = 1 + \frac{1}{n}$; tehát az (n)-nek végetlen értékével el nem enyészhetik hanem az egységhez közelít; nem másként van a' dolog az (n)-dik tag' (n)-dik gyökeivel is mely lévén

$$= \left(\frac{1}{n}\right)^{\frac{1}{n}} \text{találta az (n)-nek végetlen értékével } \left(\frac{1}{\infty}\right)^{\frac{1}{\infty}} = 0^0 = 1.$$

$$b.) \frac{a_n \cdot a_{n+1}}{a_n - a_{n+1}} = \frac{n \cdot (n+1)}{n \cdot (n+1)} = 1; \text{ el nem enyészhetik.}$$

c.) $n \cdot a_n = \frac{n}{n} = 1$; következésképen a' sorzat széthajló. Ha a' jegyek egymást váltogatva hol állítók hol tagadók volnának, utolsó tagnak az $(a_n - a_{n+1})$ -et kellene venni, és volna $n \cdot \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) = \frac{1}{n+1} = 0$; tehát a' sorzatnak össze kellene hajolni, mint már a' fentebbiekből is tudva van.

$$2.) \text{ Legyen: } S_n = 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} + \frac{1}{9} + \dots + \frac{1}{2n-1} + \frac{1}{2n+1}$$

$$\text{vagy: } S_n = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} + \dots - \frac{1}{2n-1} + \frac{1}{2n+1} \text{ legyen:}$$

$$a.) \text{ első esetben: } \frac{a_{n+1}}{a_n} = 1 + \frac{1}{n} + \frac{1}{2n^2} + \frac{1}{4n^3} + \dots \text{'s a' t.}$$

$$\text{másodikban: } \frac{a_{n+1}}{a_n} = 1 - \frac{1}{n} + \frac{1}{2n^2} - \frac{1}{4n^3} + \dots \text{'s a' t. tehát a'}$$

két végső tag' hanyadosa (n)-nek végetlen értékével egységhez közelít

hasonlóképen az (n) végetlen értékével $\sqrt[n]{a_n} = \left(\frac{1}{\infty}\right)^{\frac{1}{\infty}} = 0^0 = 1$; tehát ezen sorzatoknak hajlását a' fentebbi szerint (lap. 100.) el nem ítélnénk. Ellenben:

f b.) első esetben $\frac{a_n \cdot a_{n+1}}{a_n - a_{n+1}} = \frac{(2n-1)(2n-1)}{2(2n-1)(2n-1)} = \frac{1}{2}$; az (n)-nek akármeddig nöttével el nem enyészhetik, tehát az első sorzat szétterül.

másodikban: $\frac{a_n \cdot a_{n+1}}{a_n - a_{n+1}} = \frac{1}{n}$; az (n)-nek végtelen nöttével semmivé válik, tehát az utóbbi sorzat öszvetart.

c.) első esetben: $na_n = \frac{n}{2n-1} = \frac{1}{2 - \frac{1}{n}}$ el nem enyészhetik.

második esetben: $na_n = n \left(\frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n-1} \right) = \frac{2n}{4n^2-1} = \frac{1}{2n - \frac{1}{2n}}$ az (n)

végtelenül nöttével elenyészik, mellynél fogva: az első sorzat szétterül, az utolsó öszvetart.

3.) Legyen: $S_n = x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{5} - \dots - \frac{x^n}{n} + \frac{x^{n+1}}{n+1}$

vagy: $S_n = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{5} + \dots + \frac{x^n}{n} + \frac{x^{n+1}}{n+1}$

a.) Ezekben a' két végső tag' hanyadosa, nem különben az (n)-dik tag' (n)-dik gyökere az (x) határhoz közelítvén; mind kettőnek $x < 1$ értékére nézve öszvehajlása, $x > 1$ értékére nézve szétterülése azonnal szembe tűnhetik, $x = 1$ értékével pedig bizonytalan marad.

b.) első esetben: $\frac{a_n \cdot a_{n+1}}{a_n - a_{n+1}} = \frac{x^{2n+1}}{(n+1)x^n - nx^{n+1}} = \frac{1}{\frac{n+1}{x^{n+1}} - \frac{n}{x^n}}$

másodikban: $\frac{a_n \cdot a_{n+1}}{a_n - a_{n+1}} = \frac{1}{\frac{n+1}{x^{n+1}} + \frac{n}{x^n}}$ melyekből sem egyik' sem

másik' öszve hajlását, közvetlenül és egyéb segítségül veendő megmutatások nélkül el nem ítélnék. Ellenben:

c.) első esetben: $na_n = x^n$; úgy de $x < 1$ az (n)-nek végtelenül nöttével elenyészik; $x = 1$ mindenkor ugyan az marad; $x > 1$ végtelenné lesz: tehát: az első sorzat $x < 1$ értékével öszvehajlik, $x = 1$ vagy $x > 1$ értékével pedig szétterül.

második esetben: $na_n = n \left(\frac{x}{n} - \frac{x^{n+1}}{n+1} \right)$ az az: (n)-nek végtelen értékével:

$na_n = x^n - x^{n+1}$ mely is, $x = 1$ vagy $x < 1$ értékével el enyészvén ezen értékekkel a' sorzat össze hajlik; $x > 1$ értékével el nem enyészhetvén ezen utóbbi értékkel szét terül.

$$4.) \text{ Legyen: } S_n = x + \frac{x^2}{1.2} + \frac{x^3}{1.2.3} + \frac{x^4}{1.2.3.4} + \dots + \frac{x^n}{1.2.3.4\dots n} + \frac{x^{n+1}}{1.2.3\dots n+1}$$

Ebben: a.) A' két végső tag' hanyadosa $\frac{x}{n+1}$; mely az (x)-nek akarmi véges értékére nézve elenyészhető lévén: szint úgy a' sorzatnak is, az (x) akarmi véges értékével össze hajlónak kell lenni. Mivel továbbá az (n)-dik tag' (n)-dik gyökere volna $\sqrt[n]{\frac{x}{1.2.3\dots n}}$; mely a' fentebbi (lap.101.) megmutatások szerint a' nevezett hanyadossal egyenlő; következik egyszersmind hogy (n)-nek végtelen értékével $\sqrt[n]{1.2.3\dots n} = n$ és $\text{Lim. } 1.2.3\dots n = n^n$

$$b.) \frac{a_n \cdot a_{n+1}}{a_n - a^{n+1}} = \frac{x^{n+1}}{1.2.3\dots n(n+1-x)} = \frac{1}{\frac{1.2.3\dots n(n+1-x)}{x^{n+1}}} = \frac{1}{\frac{1.2.3\dots n(n+1-x)}{x \cdot x \cdot x \dots x \cdot x}}$$

ezen hanyadosban akarmi véges értéke legyen (x)-nek, lehet az (n)-nek olly értéket tulajdonítani és azt nevezzük (r)-nek, mellynél fogva mind $\frac{1.2.3\dots r}{x \cdot x \cdot x \dots x}$ mind $\frac{n+1-x}{x}$ nagyobb 1-nél. Azontúl pedig (r)-nek (n)-ig szüntelen és végtelenül nevekedhető értékével a' nevezőben mind $\frac{1.2.3\dots r \cdot r+1\dots n}{x \cdot x \cdot x \dots x \cdot x \cdot x \dots x}$; mind $\frac{n+1-x}{x}$; szüntelen és végtelenségig nevekedhetvén, azzal együtt a' szemlélet alá vett hanyadosnak el kell enyészni: honnét a' sorzatnak az (x) akarmi véges értékére nézve össze hajlása nyilvános.

c.) $na_n = \frac{nx^n}{1.2.3\dots n} = \frac{x^n}{1.2.3\dots (n-1)}$ az (n)-nek végtelenül nőttével mind az a.) mind a' b.) alatti észrevételek szerint az (x)-nek akarmi véges értékére nézve elenyésző lévén: a' sorzatnak is az (x) akarmi véges értékével össze hajlónak kell lenni.

IX.) A' mik VII.) alatt a' sorzatok' öszvehajlásának, kezdetéről, 's a' megközelítésben elkövethető legnagyobb hiba' számba vehetéséről mondattak, különösebb felvilágosítást kívánnák. Ezekre nézve:

1.) Mingyárt eleintén megmutattattott, hogy az öszvehajló sorzatok' mulhatlanul megkivántató tulajdonságuk, melly szerint valahol elkezdvén, azontúl minden, következő tagok, az éppen előtteninél kisebbé váljanak; az az: hogy az (n)-nek valamellyik értékével legyen $a_{n+1} < a_n$ honnét $\frac{a_{n+1}}{a_n} < 1$; melly általános kitételben, ha a' felvett sorzat' természetével egyezőleg a' megfelelő tagok' értékei helyeztetnek; abból a' sorzat' azon tagának hanyadikságát, mellynél az öszvehajlás kezdődik, el lehet itélni. Például:

a.) Legközelebb a' 3.) alatti sorzatban lenne: $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{nx}{n+1}$; mellyből az öszvehajlásnak (n)-nek azon értékével kellene kezdődni midőn; $\frac{n}{n+1} \cdot x < 1$ az az: $x < \frac{n+1}{n}$ és így (x)-nek akarmi tört értékével mingyárt a' második tagnál.

b.) Hasonlag a' 4.) alatti sorzatban $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{x}{n+1}$; tehát az öszvehajlás' elkezdődésénél $\frac{x}{n+1} < 1$; $x - 1 < n$. Így ha volna $x = 10$ az (n)-et 9-nél nagyobbának $= 10$ kellene venni; és azontúl az a_{n+1} , vagy is a' 11-dik tag, volna az öszvehajlás' kezdete.

$$\begin{aligned} \text{c.) Legyen } (1+\alpha)^m &= 1 + m\alpha + \frac{m \cdot m-1}{1 \cdot 2} \alpha^2 + \frac{m \cdot m-1 \cdot m-2}{1 \cdot 2 \cdot 3} \alpha^3 + \dots \\ &+ \frac{m \cdot m-1 \cdot m-2 \cdot \dots \cdot m-n+1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot n} \alpha^n \\ &+ \frac{m \cdot m-1 \cdot \dots \cdot m-n}{1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot n+1} \alpha^{n+1} + \dots \text{'s a' t,} \end{aligned}$$

tehát az öszvehajlás kezdeténél $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{m-n}{n+1} \alpha < \pm 1$ vagy:

$$-\left(\frac{n-m}{n-1}\right) \alpha < \pm 1 \text{ honnét: } -\left(\frac{1-\frac{m}{n}}{1+\frac{1}{n}}\right) \alpha < \pm 1; \text{ és mivel az } \alpha \text{ ösztevő-}$$

jének határa (n)-nek végtelenül nöttével $= \pm 1$ a' sorzat $\alpha < \pm 1$ értékeivel öszvehajlik. (lap. 104.)

Vegyük fel elsőben azon esetet midőn (m) állító, és tétessék $\alpha = \frac{1}{a}$

mellyben: $a > 1$. Az öszvehajlásnak el kell kezdődni mi után $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{m-n}{(n+1)a} < 1$

vagy: $1 > \frac{m-n}{(n+1)a}$; honnét: $(n+1)a > m-n$; $na+a > m-n$; $na+n > m-a$;

az az: $n > \frac{m-a}{a+1}$ mellyből az (n) meghatározatván az öszvehajlásnak a_{n+1} -nél

vagy is, az (n-1)-dik tagnál kell kezdődni.

Ha pedig $\frac{a_n}{a_{n-1}} = \frac{m-n+1}{n} \cdot \alpha$ és α -nak $= \frac{1}{a}$ értékével $\frac{m-n+1}{na}$

vétetik vizsgálat alá, az öszvehajlásnak megkívántató feltétele; $1 > \frac{m-n+1}{na}$;

mellyből: $na > m-n+1$; $na+n > m+1$; $n(a+1) > m+1$ az az:

$n > \frac{m+1}{a+1}$; mellyben az öszvehajlás az (n)-dik tagon kezdődik, 's ehez ké-

pest a' fentebb $\frac{a_{n+1}}{a_n}$ -re adott kitétellel öszve hasonlítva, (n) helyett (n-1)

helyeztetvén:

$$n-1 > \frac{m-a}{a+1}; n > \frac{m-a}{a+1} + 1; n > \frac{m-a+a+1}{a+1}; n > \frac{m+1}{a+1}$$

Számokban: Legyen: $m = \frac{9}{2}$; $\alpha = \frac{10}{11}$; $a = \frac{11}{10}$; innét: $\frac{a_{n+1}}{a_n}$

hanyadosra nézve; $n > \frac{m-a}{a+1} = \frac{\frac{9}{2} - \frac{11}{10}}{\frac{11}{10} + 1} = \frac{170}{105}$ az az: $n > 1$; tehát az

öszvehajlás ezen hanyados szerint a_{n+1} -nél $n > 1$ értékével a_3 -nál a' 3-dik tagon fog elkezdődni.

Ugyan azon adatokból $\frac{a_n}{a_{n-1}}$ hanyadosra nézve:

$$n > \frac{m+1}{a+1} = \frac{\frac{9}{2} + 1}{\frac{10}{11} + 1} = \frac{55}{21} \text{ az az: } n > 2 \text{ tehát az öszvehajlás ezen ha-}$$

nyados szerint a_n -nél $n > 2$ értékével szintén úgy mint legközelebb találtatott a_3 -nál a' 3-dik tagon kezdődik.

Ha (m) tagadó, $\frac{m-n+1}{na}$ által fog $-\frac{(m-n+1)}{na}$ -vá változni; 's e' szerint a' tagadó jegyre ügyelet nélkül a' sorzat' hajlására megkívántatik:

$$1 > \frac{m+n-1}{na}; na > m+n-1; na-n > m-1 \text{ végezetre: } n > \frac{m-1}{a-1};$$

's ezen esetben az öszvehajlás későn áll bé.

Számokban: Legyen $m=2$; $a=\frac{99}{100}$ melyekből: $a=\frac{100}{99}$ és $n>99$;

következőleg a' sorzat, 100 elsőbb tagaira nézve szétterül.

2.) A' megközelítésben elkövethető legnagyobb hiba mennyiségét ki lehet számítani:

a.) Ha számba vehetjük azon határt mellynél a' hátralévő minden tagok' öszvete többre nem mehet. Így, ha ezen sorzat:

$$1 + \frac{1}{1} + \frac{1}{1.2} + \frac{1}{1.2.3} + \frac{1}{1.2.3.4} + \dots + \frac{1}{1.2.3\dots n-1} \text{ bizonyos (n)-dik}$$

tagig ki volna számítva, lennének az (n)-dik után következők:

$$\frac{1}{1.2.3\dots n} + \frac{1}{1.2.3\dots n+1} + \frac{1}{1.2.3\dots n+2} + \dots \text{ 's a' t. együl egyig kisebb}$$

mint:

$$\frac{1}{1.2.3\dots n} \cdot \frac{1}{n}; \frac{1}{1.2.3\dots n} \cdot \frac{1}{n^2}; \frac{1}{1.2.3\dots n} \cdot \frac{1}{n^3}; \dots \text{ 's a' t. tehát az elmaradott minden tagok' öszvete is kisebb mint;}$$

$$\frac{1}{1.2.3\dots n} \left\{ 1 + \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2} + \frac{1}{n^3} + \frac{1}{n^4} + \dots \text{ 's a' t.} \right\} \text{ az az: kisebb mint:}$$

$$\frac{1}{1.2.3\dots n} \cdot \frac{1}{1-\frac{1}{n}} = \frac{1}{1.2.3\dots n-1} \cdot \frac{1}{n-1}; \text{ találtatik pedig e' szerint az } n=11\text{-dik}$$

tagig folytatott sorzat' öszvete:

Számokban: 2,7182818261983 és az elmaradott tagok' öszvete

kisebb mint: $\frac{1}{36288000}$ az az: kisebb mint 0,00000000275573

b.) Ha két határ érték ismeretes, mind az: mellynél az elmaradott tagok' öszvete nagyobb nem lehet; mind az: mellynél az elmaradott tagok' öszvete' kisebb nem lehet; ilyenkor (20 lap. szerint) a' közép értékekkel eszközölhető igazítás után, még azon felül a' fent maradt hiba' legnagyobb lehető mennyisége is ki számíttathatik.

Legyen ismét az $(1+\alpha)^m$ kifejtésében a' két egymás utáni tagok' rávitele: $\frac{m-n+1}{n} \alpha = \left(\frac{m+1}{n} - 1\right) \alpha = -\left(1 - \frac{m+1}{n}\right) \alpha$ melly tehát azontul, midőn $\frac{m+1}{n} < 1$ -nél ellenkező jegyűvé válik. Hogy tehát a' jegyek' válto-

zása zavart ne okozzon, vegyük fel a' sorzatnak ennél később tagait, egyszersmind α -át tagadónak gondolván, melly feltételek alatt minden következő tagok állító jeggyel fognak illetetni. Már most az (n) -dik tagot:

$\frac{m \cdot m-1 \cdot m-2 \cdot \dots \cdot m-n+2}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot n-1} \alpha^{n-1}$ tévén = N a' felvett sorzatnak következő formája lesz

a.) $N + N \left(1 - \frac{m+1}{n}\right) \alpha + N \left(1 - \frac{m+1}{n}\right) \alpha \cdot \left(1 - \frac{m+1}{n+1}\right) \alpha + \dots$'s a' t.

melly is, a' két mingyárt következőkhöz b.)-hez és c.)-hez hasonlítva:

b.) $N + N \left(1 - \frac{m+1}{n}\right) \alpha + N \left(1 - \frac{m+1}{n}\right) \alpha \cdot \left(1 - \frac{m-1}{n}\right) \alpha + \dots$'s a' t. és:

c.) $N + N\alpha + N\alpha^2 + \dots$'s a' t.

a' két első tagon kívül tagról tagra nagyobb a' b.) alattinál, kisebb pedig a' c.) alattinál; úgy hogy ennél fogva az a.) alatti sorzat' öszvetének, szükségképen a' b.) és c.) alatti sorzatok' öszvetei közé kell foglaltatnia, következőleg ezen határok közé:

$\frac{N}{1 - \left(1 - \frac{m+1}{n}\right) \alpha}$ és: $\frac{N}{1 - \alpha}$; honnét a' közép érték:

$$E = \frac{N \left(\frac{m+1}{n}\right) \alpha}{(1-\alpha) \left[1 - \left(1 - \frac{m+1}{n}\right) \alpha\right]} = \frac{N(m+1)\alpha}{(1-\alpha)[n + (m-n+1)\alpha]}$$

Látnivaló pedig egyszersmind az első kitételből, hogy (n) -et minél nagyobb-nak vévén, az által a' számító tetszőképen kicsinyíttethetik, míg azonban a' nevező $(1-\alpha)^2$ -nél alább nem szállhat; 's annál fogva: minél több tagoknak öszveszámításával a' sorzat' igaz értékéhez annál inkább, és megkívántatolag lehet közelíteni.

Számokban: Kívántassék $a' 2 = \frac{9-1}{4}$ -nek négyzög gyökere, leszen:

$$\sqrt{2} = \frac{1}{2} \sqrt{9-1} = \frac{3}{2} \left(1 - \frac{1}{9}\right)^{\frac{1}{2}}$$

Ezen esetben ha kiszámításainkat $n = 10$ -nél tovább folytatni nem akarjuk, legelébb;

$$N = \frac{1.1.3.5. 7. 9.11.13.15.17}{2.4.6.8.10.12.14.16.18.20.} \cdot \frac{1}{9^{10}} = 0,00000 \ 00000 \ 03$$

honnét a' b.) és c.) alatti sorzatok' öszvetei, mellyek közé az $\left(1 - \frac{1}{9}\right)^{\frac{1}{2}}$;

$n = 10$ -ig ki fejtett értékének esni kell:

$$\frac{N}{1 - \frac{1}{9} \left(1 - \frac{3}{20}\right)} \quad \text{és:} \quad \frac{N}{1 - \frac{1}{9}}$$

következésképen a' közép érték:

$$E = \frac{N \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{9}}{\left(1 - \frac{1}{9}\right) \left[10 + \left(\frac{1}{2} - 9\right) \frac{1}{9}\right]} = \frac{3.9.N}{8.163} = 0,00000 \ 00000 \ 0006$$

Ha $m > 1$ és egyszersmind tagadó; a' hasonlításul fel vel vett b.) és c.) sorzatok, az a.)-hoz képest egészen más viszonyban fognak állani. Ugyan is, az N -nek a' következő taghoz képesti rávitele b.)-ben fel múlja a' c.) alatinak csupán α által jelentett rávitelét; mindazáltal mint könnyen láthatni, az a.) alatti sorzat, ezen esethen is a' b.) és c.) alattiak' öszvetei közé foglaltatik; minekokaért a' közelítés határai mindenben hasonlatos módon kitalálthatók.

Az eddigi lehozatoknak egyik feltétele volt az is, hogy az a.) sorzat' minden tagai ugyan azon jegyűek legyenek, melly feltétel azonban nem telyesülhet, az (m) -nek állító vagy tagadó értékei szerint; első esetben:

ha $\frac{m+1}{n} = 1$ és α ; másik esetben: ha $-\left(\frac{m-1}{n} + 1\right)$ és α különböző je-

gyűiek. Illyenkor az a.) sorzat' tagai váltogatva hol állító hol tagadó jegyeket vesznek fel.

Rövidségnek okáért jelentse az a.) sorzatot illyenkor:

$$N - P\alpha + Q\alpha^2 - R\alpha^3 + S\alpha^4 - T\alpha^5 - \dots \text{'sa't.} = \beta$$

mellyből az egyenlő jegyű tagokat külön választván ezen másik kettőt lehet formálni:

$$\begin{aligned} N + Q\alpha^2 + S\alpha^4 + \dots \text{'sa't.} &= x \\ -(P\alpha + R\alpha^3 + T\alpha^5 + \dots \text{'sa't.}) &= \lambda \end{aligned}$$

mellyekben minden tagok ugyan azon jegyűek, 's vélők, $(1 - \frac{m+1}{n})\alpha$ helyett (minthogy a' külön választás miatt, mind x -ban mind λ -ban csak minden 3-dik tagok jelenhetnek meg) $(1 - \frac{m+1}{n})^2 \alpha^2$ -öt tévén, a' határ értékek' meghatározására nézve, mindenben a' fentebb előadottak szerint kellene bánni. E' szerint tehát:

Lévén a' x sorzatnak határa K és k ; a' λ -éé L és l ; úgy hogy $K > x > k$; és $L > \lambda > l$; annál fogva szükségképen:

$x - \lambda < K - l$; és $x - \lambda > k - L$ vagy is, a' sorzat' (n)-en túli tagainak öszvete a' $K - l$; és $k - L$ határok közé esik, 's a' lehető legnagyobb hiba volna: $H' = K + L - (k + l)$

Ha már ezek után a' közép értékről 's a' lehető legnagyobb hibáról (20. lapon) mondottakat mind a' kétféle, jelesen, mind az ugyan azon jegyű, mind a' változatos jegyű sorzatokra alkalmazzuk, következik:

Első esetben: vagy is, ugyan azon jegyű sorzatokra nézve. A' nagyobbik határ érték tétetvén $= B$; a' kisebbik $= C$; leszen a' közép érték;

$E = \frac{B+C}{2}$; mellynek hozzá adása után a' legnagyobb elkövethető hiba

$H = \frac{B-C}{2}$; annak elmulasztásával pedig $= B - C$; mellyekről ezenkívül

bizonytalan hogy bővölködést vagy hijánzást jelentenek - e.

Második esetben: A' változatos jegyű sorzathol, mint elő adatott, két külön sorzat formáltatván, mind a' két közép érték' keresésében külön külön hasonló hiba követhet el, 's ezen okból illyenkor az elkövethető legnagyobb hiba mennyiségének elítélése nagyobb bizonytalanságnak van alá vetetve. Ugyan is:

Tegyük fel hogy a' $\times$ és λ sorzatnak határai:

$$K > \times > k; L > \lambda > l; \text{ lenne a' } \times \text{ sorzat' közép értéke: } E = \frac{K+k}{2};$$

a' λ sorzaté: $E' = \frac{L+l}{2}$; tehát a' $\times$ sorzatnál a' közép érték hozzá adása után

elkövethető legnagyobb hiba: $H = \frac{K-k}{2}$; a' λ sorzatnál $H' = \frac{L-l}{2}$; és így

az a.) alatti sorzatnak egész öszvetét S' -el; a' bizonyos tagig kiszámítottat pedig S -el jegyezvén, következő egyenlítés talál helyet.

$$S + E - E' \pm H \pm H' = S' \text{ következőleg:}$$

$$E - E' \pm H \pm H' = S' - S$$

's a' fentebbi értékek' helyretételével:

$$\frac{K+k}{2} - \frac{(L+l)}{2} \pm \frac{(K-k)}{2} \pm \frac{(L-l)}{2} = S' - S$$

melly az elkövethető hibának átalános kitétele, 's belőle a' következő különö-
sebb kitételek származnak:

$$\left. \begin{aligned} E - E' + H + H' &= \frac{2K-2l}{2} = K-l \\ E - E' - H - H' &= \frac{2k-2L}{2} = k-L \\ E - E' + H - H' &= \frac{2k-2l}{2} = k-l \\ E - E' - H + H' &= \frac{2K-2L}{2} = K-L \end{aligned} \right\} = S' - S$$

Ha pedig a' közép értékek' hozzá adásával véghez viendő igazítás elmú-
lasztatnék, $H = K - k$ -vá és $H' = L - l$ -é válik; tehát az elkövethető hibá-
nak nagysága a' legközelebbi négyféle öszvetételnek megfelelőkép:

$$\left. \begin{aligned} H + H' &= K + L - (k + l) \\ - H - H' &= k + l - (K + L) \\ H - H' &= K + l - (L + k) \\ - H + H' &= k + L - (K + l) \end{aligned} \right\} = S' - S$$

mellyekből látnivalóképen, az igaz értékhez közelítés' meghatározása, ezen kü-
lönöző négyféle értékek között mindig kétséges maradván: ezen okból ollyas
esetekben, midőn a' sorzat' tagai, váltogatva hol állító, hol tagadó jegyet vesz-
nek fel, az eddig elő adott módhoz folyamodni nem lehet.

Azonban ilyenkor a' β .) sorzat kétféleképen kitétethető, mely szerint:

$$\beta = N - [(Pa - Q\alpha^2) + (Ra^3 - Sa^4) + \dots \text{'s a' t.}] \text{ és:}$$

$$\beta = N - Pa + [(Q\alpha^2 - Ra^3) + (Sa^4 - Ta^5) + \dots \text{'s a' t.}] \text{ tehát:}$$

szembetűnőképen $\beta > N$; és $\beta < N - Pa$; mely adatokból az elkövethető legnagyobb hiba' mennyisége nagyobb biztossággal kitalálthatatik.

Számokban: Ha (m) állító, miután $\left(\frac{m+1}{n} - 1\right)$ és α ; különböző jegyeket vesznek fel, azontúl a' sorzat' egymást követő tagainak, váltogatva hol állító hol tagadó jegyekkel szükség illetetniök. Legyen $m = \frac{1}{2}$; $\alpha = \frac{1}{10}$; mindenik állító, azontúl midőn $\frac{m+1}{n} < 1$ -nél az az: $n > m+1$; minden esetre $\left(\frac{m+1}{n} - 1\right)$ tagadóvá válik, α azonban folyvást állító maradván; következőképen a' sorzat' tagai, az (m)-nek felvett állító $= \frac{1}{2}$ értékére nézve, azon tagon túl melyben $n > \frac{1}{2} + 1$ azaz; $n = 2$; váltogatva hol állító hol tagadó jegyűek lesznek. E' szerint:

$$\begin{aligned} \left(1 + \frac{1}{10}\right)^{\frac{1}{2}} = & 1 + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{10}\right) + \frac{1 \cdot -1}{2 \cdot 4}\left(\frac{1}{10}\right)^2 + \frac{1 \cdot -1 \cdot -3}{2 \cdot 4 \cdot 6}\left(\frac{1}{10}\right)^3 + \frac{1 \cdot -1 \cdot -3 \cdot -5}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8}\left(\frac{1}{10}\right)^4 \\ & + \frac{1 \cdot -1 \cdot -3 \cdot -5 \cdot -7}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8 \cdot 10}\left(\frac{1}{10}\right)^5 + \dots \text{'s a' t.} \end{aligned}$$

vagy tizedes törtekben:

$$(1+0,1)^{0,5} = 1+0,5-0,0175+0,0000675-0,00000390625+0,0000002734375 - \dots \text{'s a' t.}$$

holott is a' jegyek' változása $n = 2$ -nél, a' sorzat' 3-dik tagán elkezdődött. Az eddig folytatott tagok' öszvete pedig $S = 1,0325638672325$

Most hogy a' κ és λ sorzatok illőleg formáltassanak tétessék az utolsó tag $N = 0,0000002734375$ az N utáni mind eddig Pa -val jegyzett tag $= M = 0,0000000205078125$ ezenkívül: a' két egymás utáni tagok' rávitele helyett, jelenleg $\left(1 - \frac{m+1}{n}\right)^2 \alpha^2$ tétetvén; κ -nak határa melyben $n = 5$

$$\frac{N}{1 - \left(1 - \frac{m+1}{n}\right)^2 \alpha^2} = 0,0000004734848\dots = K; \text{ és } \frac{N}{1 - \alpha^2} = 0,00000027619 = k;$$

honnét a' közép érték $E = \frac{K+k}{2} = 0,000000374$'s ennek hozzá adásával tett igazítás után, a' λ sorzat' igaz értékének meghatározásában elkövethető legnagyobb hiba $\frac{K-k}{2} = \pm H = \pm 0,0000000986474 \dots$

A' λ sorzat hasonló munkálatoknak vettetvén alája, azokból a' λ -nak határa mellyben $n = 6$

$$\frac{M}{1 - \left(1 - \frac{m+1}{n}\right)^2 \alpha^2} = 0,000000056966147 = L; \text{ és } \frac{M}{1 - \alpha^2} = 0,00000002071466 = 1$$

honnét a' λ sorzatnak közzép értéke $E' = \frac{L+1}{2} = 0,0000000388404035$'s ennek hozzá adásával tett igazítás után, a' λ sorzat igaz értékének meghatározásában elkövethető legnagyobb hiba $\frac{L-1}{2} = \pm H' = 0,0000000181257435$; mellyek után a' közép értékek' beszámításával elkövethető négy féle hibák' mennyisége;

$$\left. \begin{aligned} E - E' + H + H' &= K - 1 = 0,0000004527701 \\ E - E' - H - H' &= k - L = 0,0000002192239 \\ E - E' + H - H' &= k - 1 = 0,0000002554753 \\ E - E' - H + H' &= K - L = 0,0000004165187 \end{aligned} \right\} = S' - S$$

Ha pedig a' közép értékekkel igazítás tétetik:

$$\left. \begin{aligned} \pm (H + H') &= \pm 0,0000003535463 \\ \pm (H - H') &= \pm 0,0000001610423 \end{aligned} \right\} = S' - S \pm (E - E')$$

Azonban ilyenkor mint előadatott, a' sorzat' hátra lévő része $< N$; és: $> N - \frac{1}{2}M$ mellyből a' közép érték $= N - \frac{1}{2}M = 0,0000000102539$'s ennek az összevett tagokhoz adása után $S + N - \frac{1}{2}M = 1,0325641304161$; az elkövethető hiba pedig $< 0,0000000102539 = \frac{1}{2}M$; vagy is a' sorzatnak kiszámított és előadott képen megigazított értéke, a' hét első tizedes számjegyekben hibátlan.

Végezetre a' háromféleképen kifejtett keletkezményeket (*resultatum*) összevasonlítván, $n = 5$ - nek tétetvén a' 6 első tagok' öszvetét találtuk:

a.) $S = 1,0325638672325 \dots$; melyből lett a' biztosabbnak javasolt megigazítás után:

$$S + N - \frac{1}{2}M = 1,0325641304161 \dots; \text{'s az elkövethető hibának kell lenni}$$

$$< \frac{1}{2}M = 0,0000000102539$$

b.) Hasonlóképen mivel E -nek és E' -nek kitalált értékeiből $E - E' = 0,000000335997$ lesz:

$S + E - E' = 0,325642032295 \dots$ melyen, mint a' legközelebbi szorosabb kiszámításból láthatni, az elkövethető hiba $< -0,0000001610435 = -(H - H')$

c.) A' közép értékekkel véghez vihető igazítás elmulasztásával pedig azonnal: $S = 1,0325638672325 \dots$ melyen az elkövethető hiba $< 0,0000002554753 = k - l$

d.) És valóban, összehasonlítván egymással:

$$S + k - l = 1,0325641227078 \dots; \text{és: } S + N - \frac{1}{2}M = 1,0325641304161 \dots;$$

$$\text{a' kettő közti különbség kevesebb mint } \frac{1}{2}M = 0,0000000102530 \dots$$

XI.) Minthogy az általános tag, szükségképen függvénye az (n)-nek, a' két határozatlan tag' hanyadosát is, (n)-nek hatványai szerint elrendelve, a' következő általános forma alatt lehet előterjeszteni.

$$A.) \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{n^h + \alpha_1 n^{h-1} + \alpha_2 n^{h-2} \dots \dots \dots a_h}{n^h + \beta_1 n^{h-1} + \beta_2 n^{h-2} \dots \dots \dots \beta_h} = \frac{S}{s}$$

1.) Ezen kitételben a' számító és nevező két külön tagoknak kitételei lévén, nem lehetnek azonosok; tehát: szint úgy valamennyi $\alpha_1 - \beta_1$; $\alpha_2 - \beta_2$; $\alpha_3 - \beta_3$; $\dots$'s a' t. különbségeket nem lehet 0-nak gondolni. Ennél fogva legyen az első el nem enyészhető különbség $\alpha_g - \beta_g$; leszen:

$$S - s = (\alpha_g - \beta_g)n^{h-g} + (\alpha_{g+1} - \beta_{g+1})n^{h-(g+1)} \dots \dots \dots \alpha_h - \beta_h$$

2.) Mivel pedig (90. lap. szerint) az (n) úgy vétethetik, hogy az első tag nagyobb leszen minden után következők' öszveténél, 's akkor az $S - s$ különbség, az $\alpha_g - \beta_g$ jegyét azontúl folyvást meg fogja tartani: a' szerint mint $\alpha_g - \beta_g$ állító, vagy tagadó; szint úgy $S = a_{n+1} > s = a_n$; 's viszont $s = a_n > S = a_{n+1}$. Továbbá mivel az (n)-nek nevedésével az $S - s$ szükségképen nőni fog, ha az $\alpha_g - \beta_g$ állító, a' sorzatnak emelkedni; hogy ha pedig tagadó hanyatlani kelletik. Mert egyik esetben $a_{n+1} > a_n$; az az: minden következő tag nagyobb az előtt valónál; másikkban $a_{n+1} < a_n$ az az: minden következő tag kisebb az előbbinél:

3.) Részint minden külön esetekben határozatlan lévén az α_k és β_k ösztevők' hanyadiksga, melyeknél az első el nem enyészhető külzés megjelenik; részint csupán a' tagok' apadásából a' sorzat' öszvehajlására bizonyos következtést húzni nem lehetvén: ez okoknál fogva szükség a' sorzatot úgy formálni, hogy minél előbbi $\alpha_1 - \beta_1$; vagy, $\alpha_2 - \beta_2$; külzésből el lehessen ítélni, ha valyon a' tagok' apadása a' sorzat' öszvehajlására megkívántató elenyészhetőség megyen-e vagy nem.

Erre nézve származtassunk a' felvett sorzatból másikat, melyben feltévén hogy (k) állító egész szám, legyen:

B.) $K_n = \frac{(a_n)^k}{n}$; és ugyan úgy: $K_{n+1} = \frac{(a_{n+1})^k}{n+1}$; lesz a' kétszaki oktatmány szerint kifejtve:

$$1.) \frac{K_{n+1}}{K_n} = \frac{nS^k}{(n+1)s^k} = \frac{n(n^{hk} + k\alpha_1 n^{hk-1} + \dots 's a' t.)}{(n+1)(n^{hk} + k\beta_1 n^{hk-1} + \dots 's a' t.)} \text{ az az:}$$

$$\frac{K_{n+1}}{K_n} = \frac{n^{hk+1} + k\alpha_1 n^{hk} + \dots 's a' t.}{n^{hk+1} + (k\beta_1 + 1)n^{hk} + \dots 's a' t.}$$

Ha az $\alpha_1 - \beta_1$ állító; lehet a' (k)-nak olly értéket adni, mellyel:

2.) $k\alpha_1 - (k\beta_1 + 1) = k(\alpha_1 - \beta_1) - 1$ állító értéket nyer, azon esetben pedig végetlenül nevedvén az (n) egyszersmind K_n -nek is végetlenül kell nevedni; úgy de $K_n = \frac{(a_n)^k}{n}$ különben végetlenre nem nőhet, ha csak a' nevező végetlen nevedésével együtt, a' számító is végetlenre nem nevedik; melly a' (k)-nak egyszer meghatározott értéke miatt, egyedül azon feltétel alatt lehető, ha egyszersmind a_n végetlen nagygyá lesz.

3.) Tehát midőn $\alpha_1 - \beta_1$ állító; akkor az: $a + a_1 + a_2 + a_3 + \dots a_n + a_{n+1}$ sorzatnak szét kell terülni.

C.) Legyen: $K_n = na_n^k$ lesz:

$$1.) \frac{K_{n+1}}{K_n} = \frac{n^{hk+1} + (k\alpha_1 + 1)n^{hk} + \dots}{n^{hk+1} + k\beta_1 n^{hk} + \dots}$$

2.) Ha $\alpha_1 - \beta_1$ tagadó; lehet (k)-át úgy venni melly szerint:

$k\alpha_1 + 1 - k\beta_1 = 1 - k(\beta_1 - \alpha_1)$ tagadó értéket ad, 's ez esetben K_n az (n)-nek folyvásti nöttével végetlenül fogy; de $K_n = na_n^k$ végetlenül csak úgy fogyhat, ha egyszersmind a_n^k tehát a_n is végetlen kicsinnyé lesz. Tehát:

3.) Ha $\alpha_1 - \alpha_1$ tagadó; a' sorzat' tagai végetlenül fogynak.

D.) Midőn $\alpha_1 - \beta_1 = 0$ két eset lehet. Egyik hogy a_n az (n) -nek nőttével folyvást nevededik; másik hogy a_n az (n) -nek nőttével folyvást fogy.

Első esetben vagy is, emelkedő sorzatra nézve tétessék:

$$K_n = \left(\frac{n}{n-1}\right)^k a_n; \quad K_{n+1} = \left(\frac{n+1}{n}\right)^k a_{n+1} \text{ lesz:}$$

$$\frac{K_{n+1}}{K_n} = \frac{\left(\frac{n+1}{n}\right)^k a_{n+1}}{\left(\frac{n}{n-1}\right)^k a_n} = \frac{(n+1)^k (n-1)^k a_{n+1}}{n^k n^k a_n} = \frac{(n^2-1)^{2k} S}{n^{2k} s};$$

tehát:

$$1.) \frac{K_{n+1}}{K_n} = \frac{(n^2-1)^{2k} S}{n^{2k} s} = \frac{n^{h+2k} + \alpha_1 n^{h+2k-1} + (\alpha_2 - k) n^{h+2k-2} + \dots}{n^{h+2k} + \beta_1 n^{h+2k-1} + \beta_2 n^{h+2k-2} + \dots}$$

mivel pedig feltettük hogy $\alpha_1 - \beta_1 = 0$

2.) Az összevők első elem enyészhető külzése: $\alpha_2 - k - \beta_2$; hol a' (k) -át lehet; mindenkor úgy venni, mellynél fogva a' külzés tagadó legyen, következésképen K_n folyvást fogyjon; úgy de $\left(\frac{n}{n-1}\right)^k a_n = K_n > a_n$; 's mivel az emelkedő sorzatban (a_n) az (n) -nek nőttével folyvást nevededik, 's ezen viszonyban az egyik szüntelen nevedező mennyiségnek, a' másik szüntelen fogyatkozóra nézve mind inkább az egyenlőséghez kell közelíteni:

3.) Ha $\alpha_1 - \beta_1 = 0$; az emelkedő sorzat' általános taga bizonyos határhoz közelít.

Második esetben, legyen: $K_n = \left(\frac{n-1}{n}\right)^k a_n$ tehát:

$$4.) \frac{K_{n+1}}{K_n} = \frac{n^{h+2k} + \alpha_1 n^{h+2k-1} + \alpha_2 n^{h+2k-2} + \dots}{n^{h+2k} + \beta_1 n^{h+2k-1} + (\beta_2 - k) n^{h+2k-2} + \dots}$$

itt is az összevők első el nem enyésző külzése: $\alpha_2 - (\beta_2 - k) = k + \alpha_2 - \beta$; mellyben lehet (k) -át úgy venni hogy a' mondott külzés állító legyen, 's annál fogva K_n az (n) -nek nőttével folyvást nevededjék; úgy de $K_n < a_n$'s mivel a' hanyatló sorzatban (a_n) mindig fogy, az egyik szüntelen nevedezőnek a' másik szüntelen fogyatkozóval, mind inkább egyenlőséghez kell közelíteni. Tehát:

5.) Ha $\alpha_1 - \beta_1 = 0$; a' hanyatló sorzat' általános taga bizonyos határhoz közelít. És így általában:

6.) Azon sorzatok mellyekben $\alpha_1 - \beta_1 = 0$; minthogy bennök a' tagok' apadása bizonyos határon túl, és egész enyészhetőség nem mehet, össze nem hajolhatnak.

E.) Leg közelebb c.) alatt, bébizonyítottott ugyan a' sorzat' tagainak, midőn $\alpha_1 - \beta_1$ végetlenül fogyatkozása, de egyszersmind a' fentebb előadottakból tudjuk, hogy egyedül ezen feltétel az öszvehajlásnak nem csalhatatlan jegye. Arra nézve tehát hogy a' sorzat hajoljék megkívántatik hogy: $\beta_1 - \alpha_1$ egységnél nagyobb legyen; különben sem akkor midőn $\beta_1 - \alpha_1 < 1$; sem akkor midőn $\beta_1 - \alpha_1 = 1$ a' sorzat öszve nem hajlik.

$$\text{Legyen: } \frac{K_{n+1}}{K_n} = \frac{(n-k+1)a_{n+1}}{(n-k)a_n}; = \frac{(n-k+1) \cdot (n^h + \alpha_1 n^{h-1} + \alpha_2 n^{h-2} + \dots)}{(n-k) \cdot (n^h + \beta_1 n^{h-1} + \beta_2 n^{h-2} + \dots)} \text{ honnét:}$$

$$\frac{K_{n+1}}{K_n} = \frac{n^{h+1} + (\alpha_1 - k + 1)n^h + (\alpha_2 - \alpha_1(k-1))n^{h-1} + \dots}{n^{h+1} + (\beta_1 - k)n^h + (\beta_2 - \beta_1 k)n^{h-1} + \dots}$$

Első esetben az az: ha $\beta_1 - \alpha_1 < 1$; Az (n^h) ösztevőinek külzése $\alpha_1 - \beta_1 + 1$; nyilván mindig állító, annál fogva a' $\frac{K_{n+1}}{K_n}$ hanyados' értékének (n) -el együtt kell nevedkedni, és a' sorzatnak szét terülni.

Második esetben az az: ha $\beta_1 - \alpha_1 = 1$; Az (n^h) ösztevőinek külzése ugyan elenyészik, ellenben az (n^{h-1}) ösztevőinél lehet (k) -át mindenkor úgy venni, melly szerint azoknak külzése $= k(\beta_1 - \alpha_1) + \alpha_1 + \alpha_2 - \beta_2$ állító legyen; úgy pedig a' $\frac{K_{n+1}}{K_n}$ hanyados az (n) értékével együtt nevedkedvén, mihelyest az (n) bizonyos értéket melly legyen $= N$ általhág, azontúl mindig állító maradván, folyvást egységnél nagyobb lesz.

Legyen (m) mind (k) -nál mind N -nél nagyobb, leszen:

$$\frac{(m-k+1)a_{m+1}}{(m-k)a_m} > 1; \text{ tétetvén pedig ezentúl: } n=m; m+1; m+2; m+3; \dots \text{'s'at.}$$

$$\text{találtatik: } a_{m+1} + a_{m+2} + a_{m+3} + \dots > a_m \cdot (m-k) \cdot \left[\frac{1}{m-k+1} + \frac{1}{m-k+2} + \frac{1}{m-k+3} + \dots \text{'sa't.} \right] \text{ már pedig tudjuk, hogy a' harmoniai sorzat'}$$

$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots \text{'sa't.}$ mellynek c' jelenvaló, az $(m-k)$ -dik tag utáni pótléka, széthajlik; következésképen: az $a_{m+1} + a_{m+2} + a_{m+3} + \dots \text{'sa't.}$ és úgy: $a + a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + \dots \text{'sa't.}$ sorzatnak is; valahol kezdve, azontúl szét-hajlónak kell lenni.

Ha $\beta_1 - \alpha_1 > 1$; tétessék: $\frac{K_{n+1}}{K_n} = \frac{na_{n+1}}{(n-k-1)a_n}$; tehát:

$$1.) \frac{K_{n+1}}{K_n} = \frac{n^{h+1} + \alpha_1 n^h + \alpha_2 n^{h-1} + \dots \dots \dots 's a' t.}{n^{h+1} + (\beta_1 - k - 1)n^h + (\beta_2 - k\beta_1 - \beta_1)n^{h-1} + \dots \dots 'sa' t.}$$

az (n^h) ösztevőinek külzése; $\alpha_1 - \beta_1 + k + 1$; azon esetben midőn $k = \beta_1 - \alpha_1 - 1$ lesz $= 0$. Tehát $a' (k)$ -nak $\beta_1 - \alpha_1 - 1$; -nél kisebb értékeire nézve kisebb mint 0; vagy is tagadó. Így pedig, (mert $a' (k)$ -át lehet mindenkor $\beta_1 - \alpha_1 - 1$; -nél kisebbnek venni) $a' \frac{K_{n+1}}{K_n}$ hanyados, az (n) értékének nevededésével együtt fogyatkozván, midőn az, bizonyos határt $= N$ által hág, azontúl egységnél kisebbé válik; tehát (n) -nek N -en túli értékeivel:

$$2.) \frac{na_{n+1}}{(n-k-1)a_n} < 1; \text{ és: } a_{n+1} < \frac{n-k-1}{n} a_n$$

Legyen (m) mind az N -nél, és hogy $m - (k + 1)$ állítóvá váljék mind $(k + 1)$ -nél nagyobb, és tegyük egymás után (n) helyett; m ; $m + 1$; $m + 2$; $m + 3$; at 's a' t. lesz:

$$3.) a_{m+1} < \frac{m-k-1}{m} a_m; a_{m+2} < \frac{m-k}{m+1} a_{m+1}; a_{m+3} < \frac{m-k+1}{m+2} a_{m+2} \dots 'sa' t. \text{ tehát:}$$

$$4.) a_{m+2} < \frac{(m-k-1)(m-k)}{m(m+1)} a_m; a_{m+3} < \frac{(m-k-1)(m-k)(m-k+1)}{m(m+1)(m+2)} a_m \dots$$

... 's a' t.

és mivel:

$$1 = \frac{m-1}{k} - \frac{m-k-1}{k}; \text{ melly is } \frac{m-k-1}{k} \text{ -el szorozva:}$$

$$5.) \frac{m-k-1}{m} = \frac{m-k-1}{k} - \frac{(m-k-1)(m-k)}{km}$$

hasonlóképen mivel:

$$\frac{m-k-1}{m} = \frac{(m-k-1)(m+1)}{km} - \frac{(m-k-1)(m-k+1)}{km}$$

's ezen érték' helyretételével:

$$6.) \frac{(m-k-1)(m-k)}{m(m+1)} = \frac{(m-k-1)(m-k)}{km} - \frac{(m-k-1)(m-k)(m-k+1)}{km(m+1)}$$

és akarmeddig folytatva:

$$\begin{aligned}
 7.) \quad 1 &= \frac{m-1}{k} - \frac{m-k-1}{k} \\
 \frac{(m-k-1)}{m} &= \frac{m-k-1}{k} - \frac{(m-k-1)(m-k)}{km} \\
 \frac{(m-k-1)(m-k)}{m(m+1)} &= \frac{(m-k-1)(m-k)}{km} - \frac{(m-k-1)(m-k)(m-k+1)}{km(m+1)};
 \end{aligned}$$

honnét:

$$\begin{aligned}
 8.) \quad 1 + \frac{m-k-1}{m} + \frac{(m-k-1)(m-k)}{m(m+1)} + \frac{(m-k-1)(m-k)(m-k+1)}{(m+1)(m+2)} + \dots \\
 + \dots + \frac{(m-k-1)(m-k)\dots(m-k+t-1)}{m(m+1)(m+2)\dots(m+t)} \\
 = \frac{m-1}{k} - \frac{(m-k-1)(m-k)(m-k+1)\dots(m-k+t)}{km(m+1)(m+2)\dots(m+t)}
 \end{aligned}$$

$$\text{azonban: } \frac{(m-k)(m-k+1)\dots(m-k+t)(m-k+t+1)\dots(m+t)}{(m-k)(m-k+1)\dots(m-1)(m)(m-1)\dots(m+t)} = 1$$

$$\text{mellyben: } \frac{(m-k+t+1)(m-k+t+2)\dots(m+t)}{(m-k)(m-k+1)(m-k+2)\dots(m-1)} \text{ a' (t)-nek végetlenül}$$

nöttevel végetlen nagygyá $= \infty$ lesz; tehát hogy a' fentebbi kitétel azon esetben is $= 1$ maradjék szűkségképen:

$$\frac{(m-k)(m-k+1)\dots(m-k+t)}{m(m+1)(m+2)\dots(m+t)} = \frac{1}{\infty} = 0 \text{ vagy is elenyészik;}$$

következőleg végetlen számú tagokkal:

$$9.) \quad 1 + \frac{m-k-1}{m} + \frac{(m-k+1)(m-k)}{m(m+1)} + \dots = \frac{m-1}{k} \text{ mellynél fogva:}$$

$$10.) \quad a_m + a_{m+1} + a_{m+2} + a_{m+3} + \dots < a_m \frac{m-1}{k}$$

És utóljára: mivel ezen kitalált véges határt, az (a_m) -en kezdődő sorzat' akarmennyi tagainak öszvete soha által nem hághatja; szűkségképen az (m) felvett értékével öszvehajlásnak kell elő állani.

Néhány példák felvilágosításul legyenek.

$$1.) \text{ Legyen: } 1 + \frac{1.1.}{2.3.} = \frac{1.1.3.3.}{2.3.4.5.} = \frac{1.1.3.3.5.5.}{2.3.4.5.6.7.} + \dots \text{ 'sa' t.}$$

ebben tehát, mint a' tagok' formáltatásának törvényéből könnyen szembe tűnik:

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(2n-1)^2}{2n(2n+1)} = \frac{4n^2-4n+1}{4n^2+4n} + \frac{n^2-n+\frac{1}{2}}{n^2+n} \text{ mellyben:}$$

$\alpha_1 = -1$; $\beta_1 = 1$; következőleg $\alpha_1 - \beta_1$ tagadó, mellynél fogva a' sorzat tagai végtelenül fogynak. Ezenkívül $\beta_1 - \alpha_1 = 2$ egységnél nagyobb, 's annak következésében a' sorzatnak össze kell hajlani.

2.) Legyen: $1 + \frac{2.4.}{3.3.} + \frac{2.4.4.6.}{3.3.5.5.} + \frac{2.4.4.6.6.8.}{3.3.5.5.7.7.} + \dots$ 'sa' t. ebben:

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{2n(2n+2)}{(2n+1)^2} + \frac{n^2+n}{n^2+n+\frac{1}{4}} \text{ és: } \alpha_1 = \beta_1; \text{ tehát ezen sorzatban } \alpha_1 - \beta_1 = 0;$$

lévén: a' tagok' értéke bizonyos határhoz közelít.

3.) Legyen $1 + \frac{3.5.}{2.6.} + \frac{3.5.7.9.}{2.6.6.10.} + \frac{3.5.7.9.11.13.}{2.6.6.10.10.14.} + \dots$ 'sa' t. ebben:

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(4n-1)(4n+1)}{(4n-2)(4n+2)} = \frac{16n^2-1}{16n^2-4} = \frac{n^2-\frac{1}{4}}{n^2-\frac{1}{2}} \text{ tehát } \alpha_1 = \beta_1 = 0;$$

$\alpha_1 - \beta_1 = 0$; a' sorzat' tagai hasonlóképen bizonyos határ értékhez közelítenek.

4.) Legyen: $1 + \frac{\alpha.\beta.}{1.\gamma.} + \frac{\alpha.(\alpha+1)\beta(\beta+1)}{1.2.\gamma(\gamma+1)} + \frac{\alpha(\alpha+1)(\alpha+2)\beta(\beta+1)(\beta+2)}{1.2.3.\gamma(\gamma+1)(\gamma+2)} + \dots$ 'sa' t. ebben:

$$a_n = \frac{\alpha(\alpha+1) \dots (\alpha+n-1)\beta(\beta+1) \dots (\beta+n-1)}{1.2. \dots n. \gamma(\gamma+1) \dots (\gamma+n-1)}$$

$$a_{n+1} = \frac{\alpha(\alpha+1) \dots (\alpha+n-1)(\alpha+n)\beta(\beta+1) \dots (\beta+n-1)(\beta+n)}{1.2. \dots n.(n+1)\gamma(\gamma+1) \dots (\gamma+n-2)(\gamma+n)}$$

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(\alpha+n)(\beta+n)}{(1+n)(\gamma+n)} = \frac{n^2+(\alpha+\beta)n+\alpha\beta}{n^2+(\gamma+1)n+\gamma}$$

következőleg ezen sorzat' tagai végtelenül nőnek: ha $\alpha+\beta-\gamma-1$ állító: végtelenül fogynak: ha $\alpha+\beta-\gamma-1$ tagadó; bizonyos határhoz közelítenek: ha $\alpha+\beta-\gamma-1 = 0$; még pedig nevedve vagy fogyatkozva a' szerint a' mint $\alpha\beta-\gamma$ állító vagy tagadó; öszvehajlik pedig a' sorzat midőn $\gamma+1-\alpha-\beta > 1$ az az: $\gamma+1 > 1+\alpha+\beta$; $\gamma > \alpha+\beta$; vagy midőn $\alpha+\beta-\gamma$ tagadó.