A' KIS GEOMETRA.

A' TERJEDSÉG-TUDOMÁNY' ALAP-ELVEI.

MAGYAR GYERMEK' KÉZIKÖNYVE.

ÍRTA

NAGY KÁROLY.

Második Nyomtatás,

XXVIII kőre metszett táblával.

BÉCS, 1838.

Rohrmann Udvari Könyvárosnál. 269 szám.

A' kis-geometra' első nyomtatása nincs kereskedésben. Második nyomtatását azoknak kedvükért kivántam közrebocsájtani, kik a' könyvecskét megszerezni akarnák.

A' Kiadó.

A' természeti valamint müvészeti tárgyak, seregesen állanak előnkbe 's körülvesznek benünket. Különböző alakzatjaik már leggyengébb korunkban magokra vonják figyelmünket: de figyelmünk nem lel irányt és táplálalot, mert többnyire homályos és gyermeki kérdéseink, helyes felelet, tudni vágyásunk pedig kielégítés nélkül maradnak.

Midőn később, nem értelmi erőnk' de korunk szerint, elkezdjük a' terjedség és alakzatok' tudományát tanulni, az előtünk száraz és kecstelen, mert tanításmódja többnyire parancsoló törvényeken alapul, legszebb tanai és tekintetei pedig untató egyformaságba burkolvak.

Jelen könyvecskében, azon igyekzet fog szembetűnni, miként lehessen a' valóban gyönyörű tudományt kedvessé tenni az által, hogy tanítmányait a' gyermek' elméje könnyen felfoghassa és megérthesse.

Jól tudom hogy a' könyvecskét örömmel fogadják kis hazámfiai 's hogy belőle szorgalmasan fogják tanulni azon tudomány legelső elemeit, melly sok és becses ismereteket nyújt nekik 's jövendőjökre tetemes haszonnal béhatni fog.

Látni fogják miként kell minden feltételt és álítást megbizonyítani és a' kijelölt úton minden következésnek szorosan okát adni. El ne felejtsék hogy azt állítani »mit valónak lenni el nem ismertünk» majd-nem olly hibás és rossz, mint állitani azt »mit nem valónak lenni elismertünk.»

Valóban bizonyítás nélkül tanítani vagy tudni annyi, mint ok nélkül tenni valamit. Az egyik nemtudás, a' másik nemcselekvés, és ész egyikben sincs.

A' könyvecskében igen kevés tárgy van mellyet bármelly ép-elmejű és szorgalmas gyermek nem értene, és nincs példa mellyet ön-maga kiszámitani nem tudna. Ugy vélem hogy ha a' Kis-számitót jól érti és a' számbeli míveletekben gyakorlott, nagy könnyűséggel fog előre menni, 's ha imitt ,amott, »p. o. hol a' kör' és sugára közti viszonyról van szó» megakad, oka lesz kiterjedettebb ismeretek' szerzésére a' számok' tulajdoniról.

Nagy Károly.

Bécs. 1004 Karinti út.
1. Februar; 1838.

BÉVEZETÉS.

A' Geometria, mint különös és magában tökéletes tudomány, független áll a' többi kivált azon tudományoktól, mellyek a' természeti testeket és ezeknek különböző tulajdonikat vizsgálják. A' tért válosztván kirekesztőleg tárgyául azon feltételeket tekinti és vizsgálja, mellyek annak bíztositására vagy mérésére megkívántatnak.

Egyetlen hű segéde 's tőle elváloszthatlan a' mennyiség-tudománya vagy *számitás.*

A' geometri mennyiség vagy nagyság, *kiterjedés* vagy *terjedség*, 's ennek kifejezése ismet csak számok által lehető.

Beszélgetéseink' folytában világitani igyekszünk melly egybekötésben áll a' Geometriának három iránya a' számokkal, vagyis mennyiségek' kifejezésével.

Felfogván a' geometri pont' értelmét, nyilván lesz előtünk hogy ez nem egyébb mint a' mathezisi egység, 's következésképen *alapja* minden geometri mennyiségnek.

Valamint minden szám az egységből ered növés vagy fogyás által, szintugy ered a' geometriának minden alakja a' pontból, azon egyetlen különbséggel hogy a' számbeli egységet számtalan apróbb részekbe oszthatni a' semmiségig, holott a' Geometriának pontja már magában a' felvehető legkisebb mennyiség.

Ezen tekintetre különös figyelmet vetettünk beszélgetéseink' minden részeiben, mert mint egyedüli vezérünk a' tudományban, mindenütt eleitől fogva (bármeddig folytassuk előmentünket kiterjedett pállyán) biztos alapjául szolgál vizsgálatainknak.

Csakugyan minden vizsgálat legalaposabb akkor, ha a' kérdésben fekvő tárgyat első eredetire vissza vihetjük. A' geometriában ezen visszavivés nem csak mindenkor lehető de a' legnagyobb szigorusággal megbizonyítható.

Ha eszerint a' kiterjedések' természetét vizsgáljuk, egyenesen eredetükre megyünk vissza kérdezvén, miként támadott vagy támadhatott ez vagy amaz irány; terjedség vagy alak vagy miként előhozható?

Ezen támadást, előhozást vagy nemzést mi *származtatásnak* neveztük 's minden tekinteteink' és vizsgálatainknál alapul tettük. Arról, hogy a' Geometria' (minden ágaiban) ezen fő és ugyszólván egyetlen elvének alkalmazása állandóan eszközölhető, mindegyikünk csak hamar meggyőződik.

Azért mondjuk első beszélgetésünkben hogy, a' vonal pontból származik, vagyis hogy egymásmelett álló több pontoknak összesse. Ha a' vonal' származásának ezen fogalmát tartjuk fenn természetes hogy, annak számbeli kifejezése az egymásmelett álló pontok' mennyisége által van adva; ezen tekintetből mondjuk hogy a' vonal mennyiség megegyez a' természetes számsorral, vagy is, a' természetes számokkal nő vagy fogy mint ezek *összeadás* és *levonás* által nőnek vagy fogynak. Hasonlóan vehetjük a' vonal származását az által, hogy a' pontot mozgásban lenni gondoljuk és hogy így egész utjában *nyomát* hagyja; itt is szinte vagy nyomainak — mellyek minden legparányibb mozdúlatával ismet pontok — vagy mozdulatának számát vehetjük nagysága' vagy hosszasága kifejezésének; mindegyik esetben a' növés és fogyás a' természetes számsor' növésével és fogyásával megegyez. Mi ezen utóbbi tekintetet vesszük alapul minden alakzatnál azért, mert közönségesebb és egyszersmind tisztább. Ha a' származást csak a' pontok' összitése által gondoljuk, mellékes tekintetet kell segédül vennünk mint a' vonalok irányát is kijelölni akarjuk, melly tudjuk különböző lehet, holott a' mozgás' iránya egyszersmind a' vonal' fekvését is tökéletesen bíztosítja. A' kiindulási pont mindenkor a' vonal' vagy alakzat' *kezdete* vagy egyik *véghatára*, a' tett ut pedig a' vonal' vagy alakzat' nagyságát jelöli másik *véghatárával*, végével, hol ismet megáll.

Ezen nemzés vagy származtatás minden vonalra nézve ugyan az és egyenlő, legyen a' vonal egyenes vagy görbült, mert valamint az egyenes vonal minden kítérés nélkül egyenes irányú haladás által származik, szintugy származik a' görbült vonal (millyen p. o. a' kör) bizonyos törvény-szerinti mozdulás által, melly törvénytől a' pont utjának görbülései függenek.

A' mozgás általi származtatás ezen felül természeti, mert minden mozgásban levő test, az égítestektől fogva a' leg parányibb mozgóig (millyen a' zsebóra apró része) állatok, kezünk az irásnál, rajznál, festésnél, 's a' t. 's a' t. bizonyos vonalat írnak le, mellynek alakja (egyenes vagy görbült léte) tökéletesen egyenlő a' tett uttal. Bármelly tekintetek és példák által világositsuk ezen tárgyat, mindinkább meggyőződünk egyszerű létéről. Valóban krétát vevén kezünkbe mit teszünk vonalokat huzván a' táblára? Nem de egy ponttal kezdvén az irást, kénszeritjük iró-eszközünket hogy nyomát hagyja egész utjának minden pontján, nemde kezünk' mozgásától függ az alakzat' iránya és terjedsége? Ezen környülállás csak példátlan egyszerűsége miatt szökhetnék ki figyelmünk alól.

Első hét beszélgetésünkbe foglaltuk mindazt, mi a' vonalokat illeti. Nemeik, egymásközti állásaik, az altalok béfoglalt szögök 's alkotott geometri idomok, ezeknek osztások, alkotások 's közelebbi viszonyaik kiterjedetten vannak érintve.

Figyelmeztetve van a' tanuló hogy, az idomok állása vagy helyezése által, mint ez a' rajz vagy írás által történt el ne csábítassa magát. Több ízben említetik hogy az alakok' állása vagy történetbeli vagy szántszándékos. Történetbeli ha, nem gondolván semmi bizonyos állással valamely idomot széltire oda-írunk; szántszándékos ha a' rajzot a' szemnek kedvezőleg, vagy könyebb felfogás kedviért némely részeit szembetűnőbbnek akarjuk tenni, vagy végre helyt kimélvén bizonyos térbe szoritjuk. Sok tanuló hozzászokván, valamely idomot mindenkor ugyanazon helyezésben látni, egész bölcsességét elveszti ha az alakot p. o. felforditjuk 's így kivánunk tőlle egy vagy más bizonyítványt. Hogy házaink' tetői nem a' földszinén vannak és az Egyptusi pyramisok nem csúcsokon állanak, annak helyes oka van, de bárhogy fektessük a' házat vagy pyramist egyik vagy másik oldalárâ, hegyire, sem alakja sem terjedsége nem változik.

Ajánlásunkhoz — mellyszerint a' tanuló kiírja idomainkat a' könyvecskéből — adjuk, hogy az alakokat önkénye szerint írja különböző állásokba 's a' vonalok' vég és vágó pontjait változtatott betükkel jelölje, egy két illy példa, tetemesen segélvén eszméletét, hamar gyakorlottá tészi.

Nyolczadik beszélgetésünket az aránylatokra szántuk. Noha az aránylatok' kifejezései csak számok és egyes tagjaik' meglelésére számbeli míveletek kívántatnak, mind a' mellett a' geometriának nem csak hathatós segédjei, de tölle elválaszthatlanok 's ugy-szólván tulajdon szülöttjei. Mit különösen geometri aránylatnak nevezünk, szoros egybefüggésben van a' vonalok', sikok' és tér' növésével és fogyásával, 's azért tekíntének azt mint tárgyunkhoz tartozót. Az Arithmetikában szorosan véve nincs szükségünk a' geometri aránylatokra, mert hellyettők más míveleteket vehetünk 's ezek által pótolhatjuk jelentőségöket: ha tehát a' geometri aránylatokat a' számvetésben használjuk, azokat egyenesen a' geometriából kölcsönözzük.

Valamikor kisebb alakot nagyobbra, vagy megfordítva nagyobb alakot kisebbre kell vinnünk vagy alkotnunk ugy, hogy az egyes részek (vonalok) viszonyaikban változatlanul megmaradjanak, az aránylatok' egyenes és legegyszerűbb haszonvétükre ötlünk. Ha valamelly idomot, rajzot, tájképet, földabroszt 's a' t., különböző mérték szerint másolunk, az adott és alkotandó alak-közti *viszony*, alapja minden egyes, a' kettőben egymásnak megfelelő résznek, 's köztük állandóan fenn marad. A' mint az egyes vonalok a' természetes számsor' törvénye szerint nőnek és fogynak, az általok békerített tér, vagyis, a' vonalok' által képzelt alaknak két irányú terjedsége a' származati. sokszorozási vagy négyszög számok szerint nő vagy fogy.

Mihelyt a' vonalok valamely tért mindenfelől békerítenek, azonnal sik támad, 's ez azon kétirányu tér mellyet kilenczedik beszélgetésünkben mérünk. Szükséges azonban ezen itt említett, vonalok által békerített tért azon valóságos geometri sikoktol megkülönböztetnünk, mellyek a' geometri testek' alkotásához járulnak. A' vonalok csakugyan körülveszik a' tért mindazon idomainkban mellyeket tekinteteink alá vetettünk, de ezeknek ugyszólván csak rámáji, mint valamely ablak' vagy festés rámája mellyben üveg vagy kép nincs; szembetünő hogy ha illy sikokkal akarnók testeket (háromirányú alakokat) alkotni, ezeknek csak terjedségüket jelölnők ki 's a' vonalok váz gyanánt fognák azokat körül.

Már első beszélgetésünkben megalapítánk azonban a' három irányhoz tartozó geometri alakzatok' felfogását, 's elég világosan kijelölénk hogy, a' testek helyett az általuk elfoglalt tért mérjük. Nyilván eszerint hogy, ha a' *sik* szónak kétféle értelmet adunk, ez csak a' tekintet két nemét jelölheti, a' két értelem közti különbség pedig csak az *alkalmazást* de nem a' *mennyiséget* vagy *tulajdont* illetheti. Azon sikokat, mellyekről XI-Beszélgetesünkben szóllunk 's mellyek a' merőtestek' alkotásához járulnak, ugy tekintjük mintha minden részeik, ben merök (feszesek, zomokok, keresztül nem hathatók) lennének, hogy p. o. ha valamely üres gömböt, hengert vagy köböt vizzel megtöltünk az ki ne fojhassék belőle, de mind a' melett csak két térirányuk legyen. Ezen feltétel első tekintetre ellenmondást mutat, ha kivált mindennapi tapasztalásainkat vesszük vezetőül, mert olly anyagot, testet vagy anyagi alakot nem ismerünk mellynek széle és hossza melett vastagsága nem lenne, (a' leg vékonyabb vert arany levelkének is van mérhető vastagsága); de az ellenmondás elenyészik tudományos tekintetünk által, változatlan fenntartván az elvet, hogy ha a' sikoknak vastagságuk van is, ezt térszinük mérésinél tekintetbe nem vehetjük, mert a' térszinnek csak két iránya van. Ha tehát a' sikokat egymásra rakjuk lapjaikkal, széleikkel, hegyeikkel és oldalaikkal, hajtogatjuk egyenesen, görbülten, mint a' papirost vagy az érczeket, felteszszük hogy semmi vastagságuk nincs. Beszélgetéseink folytában egyedül csak azon különbséget tettük ezen kétfele tekintetbe hogy, a' vonalok' által békeritett tért, mint terjedségének kiféjezését kerestük, *térszinnek*, a' merőtesteket alkotó sikok térszinét pedig egyszerüen csak *szinnek*, felső vagy *külső szinnek* neveztük.

Hogy a' nemzés vagy származtatás elvét a' sikokra is alkalmazhatjuk, nyilván. Minden sik, legyen iránya, kiterjedése és alakja bármelly, szintugy származik a' vonalból mint ez származott a' pontból.

Első származtatásunk szerint valamelly sik, bizonyos számú vonalokból van összetéve, mellyeknek számától egyik, hosszaságuktól pedig másik iránya — következésképp alakja és kiterjedése — függ. Ezen megjegyzésből szembetünő miként egyez meg a' geometri négyszögités a' számok sokszorozásával, hol tudjuk a' származat ugy támad a' sokszorozóbul; mint ez támadott az egységből. Tegyük fel például hogy valamelly vonal kifejezése 16, vagyis hogy ezen vonal 16 egyenlő kis pontocskákból van összetéve, és rakjunk egymásmellé 1, 2, 3, 4, 5 sat illy egyenlő vonalokat; bizonyos hogy minden egyes vonal hozzájárultával 16 pontal nagyobbodik a' térszín és sorjában 2szer 16, 3szor 16, 4szer 16, sat következik míg végre ha 16 vonal áll szorosan egymásmelett, rendes négyszög alak származik mellynek kifejezése tudjuk $16 \times 16 = 16^2$. Ezen példában nem tettük fel melly irányba rakjuk egymásmellé a' vonalokat, és négyszögünk oldalairól semmi egyebet nem tudunk, mint csupán csak azt hogy négyszögünk két terjedsége egyenlő; 's azért találjuk egyszerűen és közönségesen a' bizonyitványt hogy a' négyszögök' térszíne egyenlő, a' talpok és magosságokközti származattal. Ha a' vonalok bizonyos törvény szerint nőnek vagy fogynak mint egymásmellé rakatnak, minden kigondolható alak származtatik.

Ha a' származtatás a' vonal' mozgása által eszközöltetik, hasonló következésre jutunk; itt minden mozdultával egész hosszának nyomát hagyja 's maga magának sokszorozója lesz. Ha eredeti hosszaságában megmarad, négyszög tért származtat mellynek talpa egyenlő tett utjával; ha utján függőleg mozog, egyenszögű támad, mellynek magossága egyenlő a' vonal' hosszával: ha állása vagy mozgása valamely hajlásban van utjához, rézsnégyszög támad, mellynek magossága a' származtató vonal végpotjából utjára ejtett függöny: ha végre a' vonal — utjaközben — bizonyos törvény szerint nő vagy fogy, különböző de bizonyos alakokat származtat.

Ha kört származtatunk vonal által, vagy olly vonalokat rakunk egymásmellé, mellyek az átmérőtől kezdve (melly a' kör' középpontján megy keresztül és nagyságát határozza) ennek mindkét felin párosan kisebbülnek a' körvonal görbülése szerint a' pontig; vagy az átmérőnek közép pontján fél fordulást, vagy a' sugárnak egyik vég pontján egész fordulást engedünk. Ha ezen utóbbi származtatásnál most megállunk, a' sugár minden mozdulatával nyomát hagyván, egész fordulása közben annyiszor fog egymásmelett állani, hány pontbóll áll az egész körvonal; de első tekintetre is nyilván hogy, bármelly csekélyre vegyük sugár vonalunk vastagságát. egyik nyoma a' közvetlen melette álló nyomának bizonyos részét szükségesképen bé-fedi, mert valamennyi vonal a' közép pontban egyesülvén lehetetlen hogy egy pontban szintannyi férjen el egymás melett, mennyi elfér a' körület vonalában; természetes az is, hogy ezen részszerénti béfedés mindjárt a' körületnél kezdődik, mert mentül közelebb jönnek a' vonalok a' középponthoz annál szükebb lesz a' tér, és hogy végre valamennyi vonalnak vége összevéve a' kör' közép pontjába jön; már ebből is nyilván hogy mindegyik vonalnak épen fele elenyészik az-által, hogy minden következő az elötte állónak felit elfedi; ebből pedig következik hogy a' körnek térszíne egyenlő a' félkörülete és sugára közti származattal. Be szélgetéseink' folytában látjuk miként oszlik a' kör számtalan kis háromszögbe; ezekett itt megleltük ha származtató vonalunkat parányi szélességű négyszögnek tekintjük (mit valóban tehetünk mert a' vonal már a' legkisebb szélességgel négyszög), 's ennek felét elenyésztetjük.

A' körület és átmérő-közti viszonyt — tán kitűzött elemeinken túl — több oldalról de szigoruan vizsgáljuk. A' tárgy valóban legnagyobb figyelmünket veszi számba 's aligha nem lebhathatósb segédje, világítója, tudományos előmentünknek.

Ha vizsgáljuk, melly utat tesz az egyet forduló sugár egy egy pontja? nyilvánodik hogy tett utja állandó arányban van hosszaságával, mert egyik vége mozdulatlan marad a' középpontban, mig másik végpontja a' körületet irja; igy találunk kimondott elvünkre, hogy t. i. *mentül nagyobb vagy kisebb a' sugár, annál nagyobb vagy kisebb a' kör.* A' nemző sugár' minden pontjához tartozik tehát egy bizonyos körület, melly annál kisebb mentül inkáb közeledik a' középponthoz, vagy mi mindegy, a' nemzösugár' mozdulatlan pontjához. Ha e' szerint képzeljük, hogy sugárunk' minden pontja kört ir le (legnagyobbikát mozduló végsö pontja, legkisebbikét pedig a' középpont' képviseli), egész körünk ezen különböző nagyságú körületek' összese lesz.

A' nemző sugár ezen itt tekintett utja azon viszony, mellyet IX. Beszélgetésünkben kiterjedetten visgálunk kérdezvén, mekkora valamely sugárhoz tartozó körület és kör, az elsőt vonal, a' másikat sik mérőben fejezvén ki?

Visgálataink' következése azt bizonyítja, hogy a' sugár és hozzá tartozó körület közti viszony mérhetlen, 's ha a' körület véges számokban kifejezhető, a' hozzá tartozó sugárt lehetlen egész és véges számokban kifejezni; szinte ha a' sugár kifejezhető véges számokkal, a' körület nem; 's igy a' köztük levö viszonyt csak közelítőleg lehet adni. Ha a' körületet legombolyítjuk — mit könnyen tehetünk ha valamely körnek nyomát valamely sikra ejtjük, egy bizonyos pontjától kezdvén ugyan ezen pontig — egyenes vonalunkat megmérhetjük. Feltételünk szerint ezen vonalat vagy az átmérővel vagy a' sugárral mérjük; az első háromszor, a' második 6 szor találtatik benne 's mindegyik esetben marad egy vonal darab mellynek hosszát semmi módon nem lehet az átmérő vagy sugár részeivel megmérni bármelly aprók legyenek ezek; ha p. o. egy ezred részbe lenne osztva sugárunk, a' köröletet jelölö π számunk harmadik tizedes jegyét meglelnők, vagy is a' körületben a' sugárt 6·283 szor találnók meg.

Láttuk hogy a' kör térszine, körületének fele, de négyszög mérőben kifejezve. Ha tehát valamely kör' sugára $=$ 1 a' hozzá tartozó kör térszíne $= \pi = 3{\cdot}1415$ Ezen viszony tehát a' körnek állandó sokszorozója vagy is állondó egyik tériránya, a' másik pedig a' sugár

Tizedik beszélgetésünkben, mélyebb tekintetet vetünk a' geometri és arithmetikai mennyiségek közti viszonyokra és hasonlóságokra. Itt világosan látjuk míként nő vagy fogy a' sik négyszög mértékben, ha az azt békeritő vonalak hosszmértékben nőnek vagy fogynak. Mit tapasztalásból tudunk, azt itt a' tudomány' elvei megerősitik. Mindegyikünk tudja hogy, ha valamelly tájfestést, földabroszt, épitési tervet sat: kell változtatott mértékben másolnunk, a' másolatra megkivántató tér (papiros nagysága) négyszögben nő vagy fogy, ha az eredeti rajz és a' másolat közti viszony vonal hosszaságban nő vagy fogy. Ha p o. valamely terv' rajza fél mértékben kívántatik 's eléb egy ív papiroson volt, a' másolatra elég lesz egy fertály ív, mert félnek négysöge $= \frac{1}{4}$. Ha megfordítva dupla vagy háromszoros nagyságban kivántatik négy vagy kilencz akkora térre lesz szükségünk, mert $2^2 = 4$ és $3^2 = 9$.

Mi egyik alakról igaz és való, valamennyire nézve fenn áll. A' rendes alakoknál — mellyekhez a' kör is tartozik, — hol elég egy oldal' nagyságát ismerni, az egész alak' térszíne arányban áll ezen oldal (a' körnél sugár vagy átmérő) négyszögével. A' rendetlen alakok' térszíne szinte ezen törvényt követi azon különbséggel, hogy ezeknél a' két térirány' származata áll elöbbi négyszög kifejezéseink helyibe. De minthogy ezen két irány az oldalok változásával aránylag változik, szorosan fenn áll a' tétel, hogy, ha az alakok' oldalai (vonalok) hosszmérőben nőnek vagy fogynak — természetesen feltévén hogy a' növés vagy fogyás valamennyin arányban történik, — az általok békerített tér négyszögmértékben nő vagy fogy. A' térszin' kifejezése mindenkor a' két térirány' származata lesz, legyen ez tökéletes vagy nem tökéletes négyszögszám.

XI és XII beszélgetéseinkben a' geometri testeket (merőket) vizsgáljuk. A' nemzés vagy származtatás itt is helyt talál. Mint származtak a' vonalok pontból, a' sikok vonalból, ugy származnak a' merők sikokból összegyülés (aggregatio) vagy mozgás által. A' három terjedség' tiszta felfogása, biztos uton vezet benünket. Ha azon kifejezéseket, mellyeket a' merők szinére és tartalmára nézve találtunk, eredetükre vissza visszük, közöttök és az alakok származása közt fenn álló egybehangzást könnyen megleljük. Harmadik térirány járulván a' merők' kifejezéséhez, növésük vagy fogyásuk állandóan fogja következtetni az a..kotó sikok növését vagy fogyását, az az mindhárom irány egyidőben és aránylag fog nőni vagy fogyni.

A' geometri testek' nemző alapja a' sik, de a' sik a' számok négyszögeit vagy a' két térirányú mennyiségeket képviseli, a' harmadik térirány hozzájárultával három sokszorozó (factor) kell valamely merő' terjedségének vagy tartalmának kifejezésére, 's ezen három factor megfelel a' számok harmadik (köb) emelésének, vagy három számbeli factor' származatának.

A' Geometria három téririánynál többet el nem ismer, mert ez által bármelly kiterjedésű vagy alakú tért megmér és biztosít; el is válik itt az arithmetikától, melly tudomány széltire folytatja tekinteteit és visgálatait határtalanul terjesztvén ki a' számok hatóságait vagy emeléseit minden egyébb viszonyaikkal.

Beszélgetéseink végihez csatoltunk néhány példát. Tagadhatlan hogy a' példák a' szóbeli vagy irási előadásnak hathatós támoszai és a' tapasztalati gyakorlás' hiányát pótolják. Sajnálni lehet hogy, az illy kis könyvecskében, millyen kis Geometránk, több okok miatt nagyobb számmal fel nem vehetők. Miért nem állanak példáink, mint tüsténti alkalmazások, a' közvetlen hozzájok tartozó tanoknál külön külön? meg mondom. Beszélgetéseink' egyik czélja, hogy a' tudomány' fő tanait, szoros egybefüggéseikben és egybehangzásaikban szembetünően és állandóan elöttünk tarthassuk elemi tekinteteink daczára, és hogy a' sebesen egymást követő tételek, szinte egymásnak ugyan annyi támoszai és kölcsönös segédei lehessenek. Igy a' most hátra utasitott példák azon becses időből, melly ujabb ismeretek szerzésére és előhaladásra volt kitűzve, semmit el nem vonnak. De ha egyfelől előmentünkben nem háborítanak, szorosan számba veszik másfelől egész figyelmünket, mert nem kevesbet kívánnak, mint tökéleles tudását mindannak mi a' beszélgetésekben foglalva van, és ezt parancsolóan kívánják. Példáink azonban osztályokba vannak véve, 's csakugyan elővehetők azon beszélgetések után mellyekhez különösen tartoznak.

Ha több ifju tanul együtt, kétségkivül fog egyik 's másik példákat feladni. Ha valamelyiknek a' szerencse oktatót engedett, ez mint érdemes vezetője el nem fogja múlasztani mindazon esetekre példákat adni böséggel tanitványának, mellyek ez vagy amaz tudományos tétel' felvilágosítására és alkalmazására helyesek. Mentül nagyobb a' példák' száma, mentül több változásokban mutatkoznak, mentül több esetet és elvet gyüjtnek össze vagy foglalnak magukban, annál jobb.

Hátul a' kis könyv' tartalmának jegyzéke a' leg fontosabb kérdéseket mutatja; ezen kérdések a' vizsgálatra alapul szolgálhatnak; ha a' tanulónak előmente bizonyos és való? egy kérdést sem fog helyes felelet nélkül hagyni.

A' könyvecskének tartalma' elibe tettük végre a' tudomány' azon tanait, mellyeknek számai megegyezőleg a' beszélgetések közt álló számokkal, itt is szögletes korlátok közzé tétettek. Ezen tételek csak nem változatlanul ugyan azok mellyek Euclid' könyveiből ismeretesek, csak rendjüket változtattuk imitt amott czélunk, tekinteteink' és kitüzött utunk szerint, és ugyan azon szám alá itt ott több de rokon tételt csatolánk egybe. Ezen tételek is szinte alapul szolgálhatnak a' vizsgálatnál.

Igyekeztünk magyarázatainkat és műszavainkat nyelvünk legegyszerübb kifejezéseivel egyeztetni, vagy is a' tudományos tekinteteket mindennapi tapasztalásainkal egybehangzásba hozni. Szavainkat eszerint ugy válosztani kerestük, hogy a' tárgyak' önsége tulajdonaikkal, a' környülmények' és tételek' valósága bizonyítványaikkal, tisztán, mellékes tekintetektől és többértelmű reávitelektől megszabadítva mutatkozzanak. Reménljük így, hogy a' tanuló kevés akadályokkal küzdvén sebesen haladhat, 's ha a' tudományt folytatván ennek felsőbb ágaira átlép, gátra nem talál, 's mit itt tulajdonává tett haszonba veheti.

Kevés olly szóval élünk mellynek többféle értelme lenne, és ezek közt egyedül az *irány* szó kiván némely észrevételt.

Könyvecskénk három különös és meghatározott részbe oszlik, a' tárgyához tartozó három terjedség szerint. Első a' vonal terjedség, második a' sikterjedség, a' harmadik pedig a' testek' zomok' vagy térterjedsége. Ezeket neveztük *iránynak*, mondván, hogy a' vonalnak csak egy, a' siknak két, a' geometri testnek vagy térnek pedig három iránya van, melly irányokat *térirány* névvel jelöltük. *Az irány* szó ezen tekintetben szoros egybekötésben áll a' geometri terjedségek fő tulajdonával, mert a' háromféle alakok csakugyan háromféle irány szerint terjednek. Ha valamelly alak, legyen ez vonal, sik vagy merő, csak egy irányban terjed vagy nő, ezen terjedését egyedül a' vonal fejezi ki, vagy is csak ezen egyik tériránya határozza növését; ha valamely alak *két* irányban terjed vagy nő, szinte igy lesz szármoztatója a' sik vagy két térirány; ha végre az alakok három irányban nőnek, természetes hogy mindegyik terjedségök egyszerre nő. A' térirányokat is vonalok képviselik és ha két vagy három irány jön tekintet alá, a' két vagy három vonal mindenkor egymáson *függőleg állónak* vétetik, megegyezöleg a' kiterjedés természetével. Igy áll a' szélesség függőleg a' hosszaságon, a' magosság pedig függőleg a' szélességen és hosszaságon egyszersmind; azért kerestük a' sikmérésnél *magosságát* valamelly idomnak — melly magosság mint második térirány a' szélesség helyibe vétetik ha az első irányt hosszaságnak neveztük — melly talpán mindenkor függőleg áll, mert mint egyik térirányának sokszorozója, az alak' terjedségét határozza; sík mérőnk is ezen okból rendes négyszög;

így kerestük a' három térirány függölegi nagyságát, mellynek egységét alap mérő köbünk képviseli.

Iránynak nevezzük, más de ezzel csakugyan rokon értelemben, a' vonalok' helyezését a' sikban vagy térben, 's ekkor a' vonal' *állásának* irányát jelöljük, holott elébb terjedsegük' irányáról szóllottunk. Ezen irány jelölésére a' közönséges életben több szavaink vannak, millyének, balra, jobbra, felűl, alól, elől, hátul, oldalt, rézsutan, mellékesen sat. sat. melly szavakat a' tudomány kirekeszt, mert a' vonalok' vagy sikok' egymásközti állását a' köztük levő szögök által tökéletesen biztosítja. Valamennyi rajzolt alakjaink sikban vannak, térirányuk tehát csak kettő lehet, de állási irányuk számtalan, vagy is annyi, mennyi különböző állásba jöhet valamelly vonal vagy idom ha valamellyik pontján egyet fordul, 's fordulása tudjuk 0 és 360 fok közt lehető: ha eszerint valamely vonal állásának egy bizonyos alap irányt válosztunk, erre kell vissza vinnünk — biztosítván általa — minden más állását. Ha a' harmadik térirány járul a' kettőhőz, vagy tekintjük melly különböző állásba jöhet valamely vonal a' térben, forduljunk a' gömbhöz kérdezvén melly irányokban állhat benne a' sugár? Természetes hogy ha elébbi síkkörünknek fél fordulást engedünk, gömb támad, annyi változtatott iránya lehető tehát valamely gömbsugárnak hány pontja van a' körületnek, — mert a' sík kör' átmérője ismét nagy kört írt le —; de már elébb is annyi állásban volt hány pontja volt a' sik' körületének, tehát mostani különböző állásait a' körület maga magávali származata vagyis négyszöge képviseli.

Nyilván látjuk ebből, miként áll a' gömb' nagy köre kétszer egymásután mint factor, tartalma kifejezéséhez, és miként képviseli két térirányát midőn a' harmadikat sugára jelöli. Három térirányú alak a' sikban nem létezhet, 's ha illyent rajzolunk, szükséges hogy harmadik (vagy egyidőben mindhárom) térirányát azon törvények szerint vessük a' sikra — papiros vagy egyébb anyagra — mellyek látó szereinket (szemünket) is vezetik, igazgatják. Csakugyan szemünk is minden háromirányu alakot sikban lát nem pedig térben: vagy más szóval, a' testek' három irányát nem láthatja egyszerre de csak kettőt közülök bármelly oldalára forditsa; a' gyakorlat és tapasztalás azonban elismertetik vele a' harmadik irány' valóságát, 's azon kell igyekeznünk a' rajzban is, hogy a' háromirányu testeket ugy alkossuk, mint ezek a' természetben szemünk előtt mutatkoznak. A' rajzban tehát a' testek némely részei hoszabbulnak más részei rövidülnek, az elől — szemünkhöz közelebb — álló részek világosbaknak, a' távolabbiak sötétebbeknek látszanak sat.

Utolsó belzsélgetéseink és példáink után több illy rajzolt testes alakot mutatunk, 's ezekben némely vonalok másként látszanak mint azokat szóval leírtuk. A' rendes négzszögből p.o. gyakorta hoszitott vagy rézsnégyszög lett, a' tökéletes kör pedig hoszítottba változott. Ezen környülmény azonban alig fog akadályt okozni mert mindegyikünknek elég tapasztalása van hogy a' tárgyak különböző állásokban különböző képeket mutatnak. Ha p. o. abroncsot veszünk elé 's azt mint átmérője két pontjánál fogva kezeink közt tartjuk, tökéletes körünk lessz ha az abroncs egyenesen fenn áll vagyis egész nyílása felénk fordul; ha most átmérőjén mint tengelyén mozditjuk, mind inkáb inkáb hoszitott körnek látszik mentül inkáb lefelé hajtjuk egyik részét, míg egy fertály fordulatával a' leg kisebb nyílású kör is elenyészett és egyenes vonalnál egyebet nem látunk, és ezen egyenes vonal abroncsunk' átmérője. Ezen tekintet bármelly alakra alkalmazható, 's a' figyelmes tanuló az illy nézetekben gyakorolni fogja magát.

Beszélgetéseink közt imitt amott némely szórövidítéseket használtunk, mellyek reméljük zavart nem okoznak. Az *egyenes*ből valamint az *egyenlő*ből is *egyent* vettünk; hol van egyik 's másik alkalmazva? nyilvánosodik a' tárgyaknál. Megkülönböztettük azonban az *egyenszögü* háromszögöket az *egyenesszögüektől*, 's nyilván mondjuk hogy az egyenszögű háromszögben mindhárom szög egyenlő; ha itt ott *egyenes szög* helyett *egyenszögöt* írtunk, ez többnyire a' négyszögöknél történt és a' tárgy értelmét nem zavarja. Igy mondjuk némelykor *egyenlő irányú* helyett *egyen irányú* vagy vele *egyirányú*, hol két vagy több *vonal'* irányárol van szó; a' *egyenirány* szó magában véve *egyenesirányt*, vagyis egyenes és *nem görbített* vonalat jelent.

A' KIS GEOMETRA.

I. BESZÉLGETÉS.

K. Tudjuk, hogy minden tárgyat a' természetben *mennyiségnek* tekinthetjük, és egészen, vagy bármelly apró részeibe véve számokkal ki is fejezhetjük; de szembetünő, hogy a' tárgyaknak olly tulajdonok van, melly azoknak mennyiségektől független, 's ezen tulajdonok, formájok, alakjok, idomaik, vagy egy-szóval azon tér, mellyet elfoglalnak. Miként jutunk a' tárgyak' ezen tulajdonok ismeréséhez?

F. Valóban, minden a' természetben lévő, szinte mint a' művészetek által előhozott tárgy vagy test bizonyos és tulajdon alakjában mutatkozik, melly mennyiségétől tökéletesen független. Bármelly formája legyen a' tárgynak, annyi bizonyos, hogy tért foglal el, 's bármekkora legyen, nagysága határok között van. A' tárgyaknak nagyságát és alakját öszvevéve *terjedségnek* nevezzük, a' terjedség' ismerésére pedig azon tudomány vezet, mellyet *Geometriának* nevezünk.

K. A' szó Geometria tudom egy a' leg régibb tudományt jelöli, 's két görög szóból *geos*, vagy *ge* (föld), és *metron* (mérték, vagy mérő) van öszvetéve. Nem de *földmérés* a' Geometria?

F. Igen hihető, hogy e' tudományra főkép a' földmérés vezetett, mert a' földeket elfoglalók birtokaikat szorgosan méregették, kivált Egyptusban, hol a' Nil ömlései a' határ jegyeket majd minden évben eltörlötték, 's igy az uj mérésekre kénszeriték a' lakosokat, 's ezek e' tudományt szorgalommal gyakorlották. De, mint említők, a' Geometria nem a' földet méri egyedűl, hanem a' természet' valamennyi tárgyát vizsgálata alá bocsájtja, minden nemű nagyságokat mér, alakokat kifejez, és egymásközt hasonlít. Igy az esztergás, ki apró idomjait faragja; az asztalos, ki a' házibútorokat gyalulja; az épitőmester, ki az épűlet nagyságát, és formáját intézi; a' tengeren hajózó, ki hajójának irányát, 's utját; a' csillagász, ki az égitestek' állását és távolát méri, egyenlően használják a' térmérés vagy *terjedség-mérés'* tudományát, vagy is, használják, űzik a' Geometriát.

K. E' szerint a' földmérés csak egyes és különös esete és példája a' Geometria számtalan gyakorlatának.

Mit értünk közönségesen terjedség alatt?

F. A' szó értelme szerint, a' testek' vagy tárgyak' *kiterjedéseket* nevezzük *terjedségnek.* Terjedség nélkül a' természetben semmi tárgy nem létezhet, mellynek valóságát érzékeink elismerhetnék. Ebből következik: hogy nem csak az alakok vagy testek birnak terjedséggel, de az üreg vagy a' tér maga is, mellyben semmi egyéb tárgy helyezve nincs: igy a' Geometria nem csak a' testeket, alakokat, formákat, idomokat, s. a. t. tekinti, viszgálja és méri, de azt' is, mit közönségesen üres térnek nevezünk, mert ennek is van terjedsége.

K. Értem, hogy a' Geometria nem csak kézzel fogható testeket, és látható alakokat mér, de a' távolt is, noha ez csupán a' térben van, mint p. o. megméri, mennyire van egyik torony', vagy hegy' csúcsa, más torony vagy hegy' csúcsától, mennyire egyik csillag másiktól, 's a' t.; de azt látom, hogy a' terjedség nem minden tárgynál egyenlő és ugyan az, vagy, hogy különböző targyakat különbféleként kell mérni, ha p. o. két város' egymástoli távolát mérem, vagy szántóföldemet, vagy szénakazalomat, mindegyik esetben másként mérek.

Miben különböznek egymástól a' terjedségek?

F. A' terjedségnek ezen helyes megjegyzés szerint, három neme van, és csakugyan azon *irány* szerint, mellyre *nyúlik* vagy terjed. Ez a' három nem: a' *hossz*, *szél*, és *mély* vagy *magosság*, 's mindegyiket külön vagy öszvevéve *térirányнak* nevezzük. Az egyenes iránynak, millyen p. o. a' vonal, vagy két pontközti távol, egyedül csak hossza van, de sem széle, sem magossága nincs. Ezen egyszerű, vagy is, egy iránynak mérője ismét csak egyirány t. i. a' vonal, mellyet *hosszmérőnek* nevezünk, általa egyebet hosszuságnál, vagy egyenes vonalu távolnál ki nem fejezhetünk. Minden békeritett térnek széle is van hosszával, 's ezért mondjuk, hogy a' térségnek széle és hossza van de mélye nincs, mert csak külső szinét tekintjük. Példánkban, hol szántóföldünknek csak *tèrtartalmát*, foglalatját, terjedését, területét, térségét, vagy felső színét tekintjük, a' föld vastagságát, vagy mélységét nem vehetjük számba. Minden testnek végre, legyen az természeti, vagy művészeti, három téríránya van: hossza, széle és magossága, hol a' mély, vagy magosság helyett ha szükséges, a' *vastagság* szót vehetjük. Széna kazalunknak e' szerint, széle hossza és magossága, az az három tériránya van; igy van a' *térnek*, vagy *ürességnek* magának is három tériránya, akar van benne valamelly test, akar nincs.

K. Igy a' Geometria minden tárgynak megméri és ismeri terjedségét, ha egy, két vagy három térirányát megmérni tudja. Szeretném némelly tudományos tekintetét megismerni, minekelőtte eszközei' tanulására fordulnók. Mi a' Geometri vonal?

F. A' geometri vonal szorosan egymás mellett álló pontokból van összetéve, és valamelly test színét két részre osztja. Nem de nehéz ezt megérteni? azonban a' magyarázat tudományos, és tiszta.

Mivel a' vonal számtalan pontok' öszvese, tekintsük először a' geometri pontot, mint legkisebb gondolható tárgyat. A' geometri pont sokkal parányibb mint bármelly pont mellyet irótollal vagy tűheggyel jelölhetünk, és sokkal közelebb áll valamelly ideális, vagy képzelt tárgyhoz, mint a' természet bármelly tárgyához; sokkal kisebb p. o. mint bármelly por, vagy lisztporszem ki nem vevén az éles tűhegyet, melly nagyító üveg alatt még göröngyöket, és hasadásokal mutat. Ha képzeljük, hogy valamelly test szünetlenül fogy elvesztvén lépcsőnként mindhárom térirányát, inkáb' inkáb közeledik a' geometri ponthoz, mellynek sem hossza, sem széle, sem magossága nincs. Itt most mondom, hogy ha a' geometri vonal illy egymást követő pontokból áll, következik; hogy annak sem széle sem vastagsága nincs, de egyedül csak hossza van, 's hogy a' leghegyesebb irótollal sem írhatni geometri vonalat, mert az illy műszereink által huzott vonalnak mindég lesz széle, valamint a' leg véknyabb haj', selyem', vagy pókháló szálnak is van még vastagsága. Bàrmelly testre huzzunk végre vonalat, az két részre válik, melly két résznek egyike a' vonalon innen, másika azon túl esik.

K. Noha megvallom, hogy ezen tekintetekhez szokva nem vagyok, örömmel sejdítem, melly tisztán, 's minden mellékes nézetektől szabadítva veszi ezen tudomány tárgyait, 's vágyódásom tanulására mind inkáb nő. Valóban, ha pontról és vonalról van szó, 's azoknak tulajdoniról, vagy terjedségeiről, legkisebbet sem gondolok vele, akar vastagon akar véknyan vannak ezek vonva vagy rajzolva, noha kivánható, hogy p. o. a' pont alig észrevehető, a' vonal pedig a' lehetőségig vékony legyen az írásban, elég tudnom, hogy az egyiknek semmi iránya, a' másiknak pedig csak hossza van, 's valamelly test színét ketté vágja; valamint hogy ha a' honunkon keresztűl folyó dunát vonalnak tekintem, melly folyó hunniát dunáninneni, 's dunántúli kerűletekre osztja, számba sem veszem szélességét, noha ez imitt amott valóban tetemes. Látom, miként fogják körűl vonalok a' tért, 's képezik a' *térszínt*, *sikot*, vagy *fölszínt*; továbbá a' sikok a' három térirányu testeket. Nem de vonalok keritik be a' sikokat?

F. Bizonyosan, valamint minden képet vagy idomot bármelly legyen formája. Nem is képzelni, miként lehetne p. o. valamelly darab földet megmérni, ha annak határait nem ismerjük, és épen ezen minden oldali határok, legyenek azok bármelly számosak, ugyan annyi a' földet békeritő vonalok. Tekintsünk bármelly rajzot, földabroszt, tájfestést, vagy emberi alak' máslatát, mindezek' terjedsége a' külső és határ vonalok által van adva, és ezek mérhetők. Ha most említem, hogy a' geometri siknak két téríránya, hossza és szèle van, de semmi magossága' vogy mélye nincs, nem lesz többé szokatlan előttünk, mert ha történetből lenne is az épen tekintetünk alá vett tárgynak mélye vagy magossága, avval nem gondolunk.

K. Ezt jól értem, 's magam is tudok reá példát adni. Ha p. o. valaki tőlem kérdezi, mennyi tért foglal el egy kiterített ív papiros, bizonyosan csak hosszát, és szélét veszem tekintetbe, nem pedig vastagságát, bármelly finom vagy durva legyen papirosom; a' kérdés szerint csak azt vizsgálom, mennyi térszint fedez bé egy iv? Épen így, ha szobáimat padoltatni akarom, számba sem veszem a' szükséges deszkák' vastagságát, de csupán hosszát és szélét, ha tudni akarom mennyire van szükségem. Ha itt a' deszkák' vastagságát is tekintem, arra más okok vezetnek, millyenek p. o. a' tartósság, vagy olcsóság; de akar vékonyak, akar vastagok deszkáim, szobáimba minden esetben egyenlő mennyiség, vagy darab kivántatik. Szinte így, ha pitvaromat kövezni kell, 's tudni akarom, mennyi kőre lesz szükségem, nem jöhet kérdésbe, minő mélyen akarom a' köveket földbe rakni, de csupán csak pitvarom', és következésképen a' kövek' széle és hossza. Nem de valamint a' vonalok alkotják a' sikot, határozzák annak terjedségét, úgy alkotják a' sikok a' testeket, 's határozzák terjedségeket?

F. Valóban úgy van. Ha a' két térirányhoz a' harmadik járul, azonnal minden felől békerítve van a' tér. Mint emlitők, minden testnek ezem három iránya van, következéskép minden test felűlete, felsőszíne sikok által van alkotva ugy, hogy annak formáját az ezt mindenfelől körülvevő sikok határozzák, 's így terjedségét is. Vegyünk például valamelly tárgyat, p. o. egy könyvet: azt mondom, hogy a' könyvnek három téririánya van, hossza, széle és vastagsága vagy magossága, és sikok által van minden felől körülvéve. Két táblája két leg-nagyobb sika, de három oldala, és háta egyenlőképen sikok, 's a' könyv vastagságát, szélességét és hosszát jelölik. Mint változnak ezen három irányu sikok, úgy változik a' könyv' alakja. Valamelly koczkának hat egyenlő sik-oldala van, 's az oldalok párosan tartoznak egyik egyik térirányához.

K. Ezt tökéletesem értem. Ha felteszem, hogy könyvemnek csak hossza változik, két táblája, és két oldala fog változni, széle és vastagsága változatlan maradnak. Ha oldalainak magossága nő vagy fogy, a' könyv vastagabb vagy véknyabb lesz, de sem hoszabb sem szélesebb nem; ha végre csak széle nő vagy fogy, két tetője és oldala szélessége nő vagy fogy, de a' könyv hossza és vastagsága változatlan maradnak, 's így, ha könyvem egyik iránya változik, négy sika változik egyszerre ugyan ezen irányban, a' többi változatlan marad. Természetes, hogy ha két vagy mind három iránya egyszerre változik, két iránya nő vagy fogy egyszerre, vagy végre az egész könyv' hossza széle és vastagsága nő vagy fogy. Ha a' koczkát az asztalra teszem, azon oldalát, mellyen fekszik talpának nevezhetem, ez megegyez azon oldalával, melly általellenében felül áll 's tetőjét képezi, bal oldala megegyez a' jobbal, azon oldala végre melly felém van fordítva az áltellenivel; az első két oldal magosságát, a' másik kettő szélét, a' harmadik pár végre hosszát jelöli, de ezen három irány a' koczkában tudjuk egyenlő. Hogy kell értenünk azt, hogy a' tér is ugyanazon alakot veszi fel, millyen az épen benne lévő testé?

K. Kiterjedett értelemben a' tér az, mit helynek nevezünk, legyen az elfoglalva vagy ne legyen. A' hely nevezet azonban nem adhatja tökéletesen a' tér értelmét, de csak valamelly részét jelöli. Az egész világ, a' mindenség, tér, 's benne a' végtelen számu égitestek. Földünk' lege (atmosphaerája) tér, szobáink tert foglalnak, akar üresek akar teli rakvak, 's igy különösen bármelly mérő, millyen az akó a' véka a' köböl, edények mint hordó palacz s. a. t. megtöltve vagy üresen tért foglalnak. Nagy mértékű példát vevén azt mondom, hogy földünk épen akkora, 's szinte olly alaku tért foglal el a' világtérben, mekkora tulajdon terjedsége, 's következéskép minő formája, vagy alakja: közeledvén kisebb tárgyakhoz, egy ház p. o.: épen olly tért foglal el, millyen a' terjedsége, egy kis kunyhó kicsit, nagy palota nagyot 's a' t. ha szobámba bútort rakok, mindegyik ágy, asztal vagy szekrény szinte akkora, 's olly alaku tért foglal el, millyen és mennyi tulajdon terjedsége. Hogy pedig a' tér felveszi a' testek formáját könyű megbizonyitani, mert p. o.: ha valamelly golyót akarok minden felől szorosan körülvéve bétakarni, a' takaró (lepleg) tökéletesen felveszi a' golyó formáját, szinte ha koczkát akarok bepólálni, 's valamelly katuljába tenni, azt bizonyosan kerekbe nem teszem, de olly alakuba melly a' koczka térét foglalja el. Egy palacz p. o.: olly tért foglal el, millyen alakja, 's ha vizzel megtöltöm, a' viz is felveszi formáját; ezt mindegyikünk tudja, mert ha illy vizzel töltött palaczot fagynak teszünk ki, 's az üveget eltörjük, a' fagyott viz, a' jég, csak ugyan a' palacz formáját vette fel.

K. Ezen utolsó tekintet sejdíteti velem mi lesz vég következtetésünk a' geometri testekre nézve. Valamint az üres hordó ugyan azon tért foglalja el ha teli van, szintugy foglalja el valamelly formájú test ugyan azon tért, bármelly legyen anyaga. Valamelly koczka (köb) lehet p. o. arany, vas, vagy bármelly ércz, fa, viasz, papiros, jég, üveg, egyszóval akarmi, csak hogy elő-leges formáját megtartsa; és csakugyan ha tulajdon ereje által tarthatja meg ezen eredeti alakzatját, *merőtestnek zomoknak* nevezzük, ha pedig csak általok elfoglalt téreikre nézve tekintjük, *foglalatnak, tartalomnak*; a' folyamok p. o. tulajdon erejökből semmi alakzatot fel nem vehetnek, de mindég csak az edényét, mellyben vannak, de ennek formáját tökéletesen felveszik, a' folyó-vizek-partjaitól és ágyától fogva a' legkisebb üvegig. Igy adhatunk a' lágy viasznak, vagy agyagnak bármelly alakzatot, azt egymás után különböző forma mintákba gyúrván, 's mindegyik uj alak, hozzá hasonló tért foglal el. Nem de következik ebből, hogy a' Geometria mint térmérés a' testek egyéb tulajdonit, millyenek a' szín, a' súly, a' tömötség 's a' t. tekintetbe nem veszi, de csupán csak azon tért vizsgálja mellyet elfoglalnak, és hogy példánkat megtartván mindegy akar a' palaczot mérje, akar a' benne lévő folyamot, 's ennek jég alakját, vagy akar csupán a' tért mellyet elfoglal?

F. Valóban úgy van, és a' geometri zomok, tömött, vagy merő test ideális térbe változik, bármelly legyen belső tartalma, vagy külső formája. Ezt következő tekintet által magyarázom. Vegyük elő koczkánkat, 's legyen ez bármelly nagyságu, p. o. akkora mint egy középszerü szoba, mellynek négy fala padolatja és gerendája egyenlő nagyságu sikok; tegyük fel, hogy koczkánk belől üres, mintha hat egyenlő nagyságu vas-pléh, vagy papiros sikból lenne öszvetéve: már eddig is bizonyos hogy koczkánk minden esetre ugyan azon tért foglalja akar telve van valamivel (mint p. o. ha földből lenne ásóval öszszerakva) akar üres, akar vastag deszkából állnak oldalai, akar a' leg véknyabb papirosból. Képzeljük továbbá, hogy azon anyag, mellyből koczkánk készült minden vastagságát elveszti, 's a' hat oldal a' már előttünk ismeretes geometri sikba változik; bizonyos hogy a' koczka alakja megmarad, de semmi észrevehető test többé nincs a' három tárirányon kivül, melly a' koczkához megkivántatik. Itt van tehát koczkánk' terjedsége egész tisztaságában, 's ezt tekinti a' geometra.

K. Örömmel veszem észre, miként jutunk ezen tekintetek által az alakok 's általok elfoglalt térnek tiszta felfogására. Valóban csudálatra méltó tulajdona ezen tudománynak, hogy szoros tekintetei által függetlenné teszi magát a' természeti testektől megelégedvén egyedűl a' térrel mellyet elfoglalnak. Nem is gondolható, hogy más úton juthatott volna tökéletességre, mert képzelni sem lehet, hogy mind azon tárgyakat öszvehordani lehessen, mellyeket vizsgálata alá bocsájt. Melly nevetséges lenne p. o. mondani, hogy a' geometra csak azon testek' terjedségét méri, mellyeket kezében tart, vagy mellyekhez férni tud; melly csekély kiterjedésű lenne akkor a' tudomány. Miként mérhetné igy földünket, vagy valamelly más planetát, mellyet csak távulról szemlélhet? De megvallom más felől, hogy csakugyan nehéznek lenni látszik előttem gondolatainkat, vagy inkáb képzelő erőnket úgy feszitni, hogy ugyan azon időben, és ugyan azon térben egyszerre több és különféle alakokat vehessünk tekintetünk alá?

F. Épen ebben áll a' tudomány legnagyobb fontossága, 's ebben különbözik minden egyéb tudománytól. A' közönséges életben nem gondolható, hogy egyik tárgy helyét ugyan azon időben, vagy is egyszresmind mástárgy is elfoglalhassa, és ha p. o. egyik asztal helyibe másikat teszünk, az elsőt szükségesképen elmozditanunk kell, szinte ugy ha valamelly ház helyibe mást akarunk épiteni, az elsőt lerontanunk kell: de a' geometria ugyan azon térbe egyszerre számtalan asztalt, vagy házat helyez és vizsgál különböző alakjaikban 's terjedségeikben, és csupán csak azon okból, hogy sem egyik, sem másik asztalt vagy házat nem veszi különösen tekintetébe, de egyedűl a' tért mellyet foglalhatnak. Az illy tekintetekre csakhamar szokunk, mint a' tudományban előlépünk, és sehol sem találunk akadályt. Tulajdon szorgalmunk és gondolataink alkalmazása által a' természeti jelenetekre, számtalan adatokra és hasonlitásokra akadunk, mellyek a' tudomány' tanainak világos értelmére vezetnek. Igy p. o. ha egy darab papirosra alakokat rajzolunk, 's egyik idomot (figurát) a' másikba irjuk, csakugyan nehéz lesz az egyes idomokat hozzájok tartozó vonalaikkal egy pillanatra megkülönböztetni annak, ki az idomok illyen öszverakásához nem szokott, ha csak mindegyiket más más szinű festékkel vagy tentával nem jelöljük. Ha a' gyakorlatot két idommal kezdem, 's ezen kivül egyiket a' papiros' egyik felire, másikat ennek másik felire rajzolom, 's igy nézem a' napvilágon keresztül már szokni kezdek, 's gyakorlott szem csak hamar megkülönböztet több egymásba irt idomot is. Ha p. o. közűlünk valaki tettleges magyarázatját kivánná a' geometri siknak, mellynek csak széle és hossza de mélye nincs, annak egyenesen az árnyékot mutatnám melly árnyék (legyen ez bármelly testé) tökéletesen körülvéve van vonalokkal, 's bizonyos terjedségű. Tudjuk, hogy az árnyék annál sötétebb, mentül erősebb a' világ; könnyű lesz egyik test' árnyékát a' másik test' árnyékába vetni ugy, hogy nagyobb világitás által a' következő testek árnyékai mindég sötétebbek legyenek; ha igy különböző alakzatu tárgyakat veszünk, p. o. koczkát, golyót, pálczát 's a' t. mindegyiknek árnyéka együtt lesz ugyan azon térben, de külön ánnyékaik terjedsége mérhető.

K. Eddigi értekezésünkből nyilván látom, hogy a' geometria minden tárgyat megmér, bármelly legyen annak alakja vagy terjedsége. Miként jut ezen méréshez, melly mint előre látható számtalan esetben igen bajos.

F. Igyekszik a' tudomány minden kérdést a' legegyszerübb esetekre visszavinni, 's ezekből következtetni a' bonyolódottakat.

Vizsgálatait a' legegyszerübb tárgyakon kezdi, a' vonalokon, mellyeket minden lehető viszonyaikban és állásaikban tekint. A' vonalok mint tudjuk tért keritnekbe, következteti utánnok a' legegyszerűbb tér alakok vagy sikok tulajdonit és mérését, igy menvén tovább míg a' zomokok vagy három térirányu tárgyak' viszgálatára jut.

K. Érzem, hogy a' tudomány a' melett hogy az elmét élestíti, 's a' gondolkodásnak tágas mezőt nyit, a' társasági élet' számtalan helyezésében nagy hasznu befolyást űz, és a' tudományok' értésére elmulhatlan szükséges. Vallyon régóta taníttatik a' geometria, és mindenűtt?

F. Mint már emlitők, e' tudomány eredete a' leg régibb időkre nyúlik, 's előmente az emberi nemzetével szoros egybekötésben volt, és van. Az első tudós, kinek híre és munkája korunkra jutott Euclides volt, ki mostani időszámlálásunk előtt három száz évvel született, és a' tudomány fő tanitmányait könyvébe összeszedte. Euclid' könyve olly fontos tárgyakat foglal magában, és olly tiszta előadással bír, hogy munkájának nagy része most is változatlan taníttatik ugy, mint ő azt írta. A' geometria az egész földön, 's minden oskolákban taníttatik mint alaptudomány, és elmulhatlan segédje 's mozditója minden tudományos előmenetnek.

II. BESZÉLGETÉS.

K. A' vonalok mint legegyszerübb geometri alakok vizsgálataink' első tárgyai. Nem de különfélék a' vonalok?

F. Szorosan véve csak két neme van a' vonaloknak, az az *egyenes*, és *görbitett* vonalokra oszlanak. Az egyenes vonalok mind hasonlók egymáshoz, a' görbitett vagy görbült vonal számtalan változásokban mutatkozik.

K. Egyenes vonalnak nevezzük eszerint azt, melly minden részében ugyan azon iránynak fordul, és sehol sem mutat görbülést. Hogy a' görbitett vonal számtalan formákban lehető, azt megmutathatom valamelly hajlékony vessző vagy zsineg által, mellyet akként és annyiszor hajtogathatok, miként és mennyiszer akarom; de tán még világosabb ideát ád a' görbült vonal' változhatóságáról a' kigyó, melly csúszómászó az egyenes vonaltól kezdve minden kigondolható görbűléseket felvehet teste hajlékonysága által. Miként rajzolunk, vagy húzunk egyenes vonalat?

F. Azon vékony vagy lapos deszka darabnak, mellyet *lineának* nevezünk kiterjedett haszonvéte van. Ennek sima és egyenes oldalára támasztván tollunkat vagy ónunkat, azon tárgyra nyomjuk hosszában vezetvén ezt, mellyre a' vonal kivántatik.

K. Ezt jól tudom, 's azt is, hogy ha egy illyen linea készen van, az asztalos bárhányat tud utánna késziteni, de miként készült az első línea?

F. Ki nem látta miként osztja el a' kertész egyenes útjait, vagy virágágyait, zsinórt feszitvén a' földre két czövek által? ki nem az ácsokat, kik szinte zsineget mártanak veres festékbe, 's azt két végén meghúzván a' gerendára szöktetik?

K. Igy tehát a' geometri vonal azon alak lenne, mellyet valamelly zsineg felvesz ha két végén erősen meghúzatik? Én ebből azt következtetem, hogy két pont közzé egy vonalnál többet nemlehet húzni?

[1] *) *F*. Csakugyan nem, mert két vonal csak egymás melett állhat, 's ha egymáson feküsznek a' kettőből egy lesz, mert egyik a' másikat béfedi. Bárhányszor húzzuk el tollunkat a' lineán, papirosunkon egy vonalnál többet nem látunk, ha lineánk és kezünk ugyan azon irányban maradnak.

K. Tudom hogy több úton jutunk azon meggyőződésre, vallyon egyenes-e húzott vonalunk. Ha rajta hosszába nézünk el, szemünk iránya megismerteti velünk, nincsenek e' rajta görbülések. A' lineát megforditjuk 's a' már húzott vonalra tesszük élít, ha ezen megforditott éle is tökéletesen megegyez a' húzott vonallal biztosok lehetünk, mert nem gondolható, hogy két él, millyen a' fából készült lineáé, minden részeiben egyenlő görbüléseket, vagy béhorpadásokat mutasson. Egyenes vonal tehát csak egyetlen egy lehet két pont közt (mindenkor egyik ponttól a' másikig vevén hosszát) de görbült vonal több és számtalan lehető?

[2] *F*. Ezt két példa által világositom. Gondoljunk két szöget béverve a' falba, legyen távoluk bármelly p. o. egy rőfnyi: geometri két pontunkat most a' két szög képviseli. Tudjuk, hogy ha valamelly zsineget kötünk az egyikre, 's a' másikon erősen meghúzzuk, egyenes vonalat származtatunk, de ha engedünk a' zsineg lóg, 's annyival inkább lóg, mentűl többet eresztünk az egyik szögrül. Minden lógó zsineg görbült vonalat képez, 's ez annyival görbültebb, mentűl hoszabb a' lógó zsineg. Ide rajzolom 1-ő Idom alatt a' két szöget, és reá egyenes vonalat, ezután mindég nagyobb nagyobb lógót; nyilván látni, hogy ezen utolsóknak határa nincs,

---

*) Mind olly számok mellyeket [ ] korlátokba kiteszünk tudományos tételekre mutatnak.

mert számtalant rajzolhatnók alájok, de ennyi is elég lesz a' feltétel megértésére *). Megjegyzendő hogy a' görbűlt vonalok mint itt rajzoltattak sehol sem érintik egymást. Második példámul válosztom két helység' egymástoli távolát, melly legyen p. o. egy mérföld, kilépvén egyik helységből a' mâsik előttem áll, mert szemem iránya azt egyenes vonalnak végin mutatja, 's bizonyos, hogy ha ezen vonalat követem 's utánna megyek, a' helységnek legrövidebb utját választom. Természetesen következik, hogy a' két helység közt csak ez az egyenes és legrövidebb út lehet egyedül, 's a' többi nálánál mind hoszabb. Mellyik legyen azonban a' leghoszabbik, azt meghatározni lehetlen, mert a' számtalan tekervényes utak közt nem mutathatunk ollyat melly a' gondolható leghoszabb lenne, ha p. o. valaki azt mondaná hogy ha keresztűl kasul kering a' két helység közt egy hétig, egy hónapig vagy egy évig 's a' t. az még mind nem lehetne a' leghosszabb ut köztük, mert egy más körül járathatná velünk sok izben az egész földet 's még sem érnénk el a' helységet, noha ez sem lenne a' leghoszabb útja.

K. Ebből következtetem, hogy minden vonal közt leg rövidebb az egyenes, melly két pontot öszszeköt. Nem de nevezetes tulajdona ez az egyenes vonalnak?

[3] *F.* Két pontot az egyenes vonalnál rövidebb nem köthet öszsze. Az egyenes vonal a' rövidségre nézve határa a' távolnak 's egyszersmind mérője; a' görbült vonal hossza két pont közt határtalan és végtelen. Az egyenes vonalról mint két pont-közti leg rövidebbről azt mondjuk, hogy *egyenesen vég pontjaiban fekszik*. Ezt megérteni nem nehéz, mert ha illyen vonalon (vegyünk egy vékony hosszú pálczát például),

*) A' magyarázatokra rajzokat alkotunk, 's ezeket *Idomoknak* nevezzük. Ha tehát Id. vagy csak I van valamelly számmal írva, mindenkor idomot, és mellette lévő számát jelenti.

keresztűl nézünk hosszában, sehol sem találunk görbülésekre, vagy olly részecskékre, mellyek vagy felül, vagy alul a' vonalon kivül láthatók, 's a' mint a' vonalat szemünk' egyenes irányába helyeztük hossza is eltünt, 's a' véginél, vagy kezdő pontjánál egyebet nem látunk.

K. Az egyenes vonal mint leg rövidebb távola két pontnak tudom a' távolok', vagy hosszaságok' (egyirányú terjedségek'), mérésére is használtatik; azért minden hosszmérőink, millyenek az *öl*, *rőf*, *láb* 's a' t. egyenes vonalok különböző anyagokból készülve, millyen a' csont, fa, vas, réz 's a' t. Tudom továbbá hogy az egyenes vonal magában semmi változást nem szenved, és semmi különös tulajdont nem mutat, bár miként forgassuk azt, vagy tegyük egy helyről a' másikra. Ha hosszasága adva van és bizonyos, minden helyezésben változatlan ugyan az. Melly tulajdonokat mutatnak a' vonalok ha egymás közt érintésbe jőnek vagy különböző állásokba?

[4] *F.* Emlitők már, hogy a' számtalan alakokat vagy idomokat, mellyeket sikoknak neveztünk vonalok alkotják, és csupán csak különböző nagyságok és állások által.

Kezdjük el tekinteteinket két vonallal, 's vizsgáljuk melly állásokba jöhetnek egymásra nézve.

Ha két vonalat egymásra teszünk tudjuk belőlök *egy* támad mert egyik a' másikat *béfedi*. Tegyük fel, hogy két geometri vonal nem egymás fölött, de *egymás melett* áll vagy fekszik, 's csakugyan olly szorosan, hogy egyiknek minden pontja, a' másiknak valamennyi pontjával érintésben van; a' két vonalból természetes hogy ekkor is egyetlen egy válik, de valamelly csekély vastagsága lesz. Tegyük fel hogy most a' két vonal egész hoszában csak annyira távoz egymástól hogy pontjai érintésbe többé nincsenek, de a' két vonalnak minden pontjai egyenlő távolban vaunak egymástól, mintha p. o.

két vonal közzé most egy harmadikat lehetne bécsusztatni, mellynek pontjai egész hosszában mind két vonalat érik, ha két vonal így áll egymás melett, hogy pontjaik egész hosszaságokban mindenütt ugyan azon távolban állnak egymástól, akkor az illy két vonal *egyenközű*, *egyenirányú*, *parallel* vonalnak neveztetik. Az *egyen* szó itt az egyenlő szóból van röviditve, 's épen így mondhatnók *hasonirányu*, vagy *hasonközű* a' hasonló szót rövidítvén. Mi, beszélgetéseink közben, ha illy vonalokról lesz szó mindenkor az *egyenirány* nevezetet használjuk, mert leg-tökéletesebben kifejezi tulajdonokat; a' *köz* már melesleges ideát ád, 's a' *hason*, vagy *egyenközűség* csak következése az *egyeniránylatnak*, mert két vagy több egyenirányú vonal szükségesképen egyenközű, de két, vagy több vonal egyenközű lehet a' nélkül, hogy egyenirányu lenne. Ezen tekintet előttünk annál világosabb lesz, mentűl előbb megyünk. Bizonyos az, hogy két vagy több egyenirányu vonal' mindegyik pontja egész hosszaságában ugyan azon távolban marad, bármint távoztassuk a' két vonalat egymástól, de a' leg több esetben távoluk nem jő kérdésbe és csupán csak irányuk.

[5] *K.* Eszerint egyik egyenirányú vonalat a' másik helyett lehet venni, 's mivel itt csupán csak irányt tekintünk, mondhatjuk, ha két vagy több vonal egyenirányu, egyiknek irányát a' másika helyett vehetni. A' vonalok' ezen tulajdonából azt következtetem hogy, két egyenirányu vonal, bármint hoszabitsuk azokat, soha sem közeledik egymáshoz, következésképen soha sem érheti egymást egyik pontjában is; legyen a' hoszabbitás bár végtelen a' vonalok' mind két végső pontja felé. Ezt bizonyosan több egyenirányu vonalokra is alkalmazhatjuk? Vallyon mi használata van az egyenírányu vonaloknak?

F. Az egyenirányu vonalok mindenütt mutatkoznak, hova fonditjuk szemünket, mert haszonvétök kiterjedett.

Irásunk, és nyomtatott könyveink' ;sorai mindannyi egyenirányú vonalok, a' szántóvető egyenirányú vágásokba veti magvát, a' kertész ülteti növényét, a' hangászi koták egyenirányu vonalok, a' házak' falai egyenirányuak 's a' t.

K. Ebből látom hogy a' sikokban is megleljük az egyenirányt, így lehetnek házaink, utzáink 's a' t. egyenirányuak, a' könyvtárokba bérakott könyvek, a' rendesen fel-álitott katonák és soraik hasonlóan egyenirányuak: a' tiszának egy része dunánkal egyenirányulag folyik 's a' t. Azon esetből, hogy az egyenirányu vonalok soha sem érintődnek, bár miként hosszitsuk azokat, nem de következik hogy a' nem egyenirányu vonalok szükségesképen érintik egymást?

[6] *F.* Ugy van, és két vonal p. o. ha nem egyenirányu, bármelly csekély legyen irányának különbsége, bizonyosan érintésbe jő. Ide irok két vonalat (2 I) 's felteszem, hogy az egyik nem egyirányu a' másikkal. Látjuk, hogy a' két vonal jobb felé inkáb' inkáb' közeledik egymáshoz, 's ha ezen felin mind kettőt hoszabbitjuk végre érintésbe jőnek, melly érintést a' (3 I) mutatja, ha pedig a' hoszabbítást folytatjuk, egymást keresztül vágják mint (4 I) ban látjuk.

A' tekintetek következő észrevétekre vezetnek:

1-ször, ha két vonal nem egyenirányu, szükségesképen egymáshoz *hajlik*, vagy hanyatlik, 's ha eléggé hoszitatnak, elébb utóbb érintésbe jőnek, 's végre egymást keresztül vágják.

2-szor, ha két nem-egyenirányu vonal érintésbe jő, azt mondjuk, hogy *zugot* vagy *szögletet* képez, és ezen zugnak, vagy szögletnek *csúcsa* vagy *hegye* épen azon pontban van, mellyben (3.I) a' két vonal érintésbe jött.

3-szor, ha két nem-egyenirányu egymáshoz hajló (vagy egy szóval ha két vonal) egymást keresztül vágja, két zug vagy szöglet támad a' vágáspont kétfelin.

B

Két vonal érintési pontja mindenkor zugot alkot, 's ezt rövidség kedviért *szög*-nek nevezzük, ha két vonal egymáson keresztűl megy, érintéspontját *vágáspontnak* nevezzük.

K. Ebből következtetem hogy, bármelly hanyatlása legyen két vonalnak egymáshoz, végső pontjaik mindenkor érintésbe jőnek (ha t. i.: a' hoszabbitás hanyatló felin történik, mert az ellenkező részek mind inkáb inkáb távoznak egymástól) és a' két vonal szögöt alkot. Ezen szög annyival tágosabb, mentül távolabb esik a' két vonal másik két végpontja egymástól. Miként lehetne ezt tisztán megmagyarázni?

F. Ollót veszek kezembe. Ha ollóm zárva van, azt egy vonallal hosonlíthatom, vagy kettővel, melly kettő egymás mellé van téve. Nyitni kezdem; a' leg-kisebb nyilással két végső pontja (két hegye) már távozni kezd egymástól, két szárnya pedig már egy kis-szögöt képez. Minden nagyobb nyilással a' két hegy inkáb' inkáb' távozik, az oldalok vagy szárnyak által képzelt szög pedig tágosodik. Ezen példához hosonlóan szobám ajtaját egészen felnyitom, 's ugy hajtom hátra hogy a' fallal érintésbe jöjjön, ekkor a' fallal egyenirányu; most lépcsőnként ismét béteszem, 's a' zug (melly előttünk elég isméretes lehet, mert gyakorta bujtunk megé) mindég nagyobb nagyobb lesz, míg végre az ajtó sarkában fordulván szokott állásába jött, 's a' fallal ismét egyenirányu. De vegyük a' leg egyszerübb tekintetet. Ha egy favonalat közepében ketté török, 's két végső pontját sarokkal ellátom, ollyas műszert készitek, mit *körirónak* (cirkalom) nevezünk, 's melly közönségesen rézből van alkotva. Ha a' két vonal szorosan egymáson fekszik, tud juk, csak egy, 's ekkor bezárt körirónkat képviseli. Feltévén, hogy két vonalunk (itt körirónk) csak egyik egyik végső pontja mozdulatlan, a' másik kettő pedig egymástól távoztatható (mint a' két előbbi sarkon fordul) és egész fordulást tehet.

K. Most már tökéletesen értem, miként nőnek a' szögök, 's magam is megtudom mutatni, melly különböző állásba jöhet a' két vonal. Nyitni kezdvèn körirómat egy alig észrevehető kis szög támad, melly a' folytatott nyilással mindég nő (mint azt 5, 6, 7, 8, 9 és 10.) Idomok mutatják, mig végre (10 I) a' két szárny egyenes vonalat képez. Most az egyik szárnyat lefelé forditom, 's látom szintúgy fogynak a' szögök mint előbb nőttek, mig végre köriróm ismèt bézárodik, 's két szárnya az előbbi egyenes vonalba vált (11, 12, 13, 14, 15 és 16 idomok a' szögek fogyását mutatják). Ezen tekintetet közönségesen is adhatom, ha valamennyi szögünket egy idomba foglalom (millyen a' 17-ik) 's felteszem, hogy körirómnak mozgó, vagy forduló fele *B*, a' mozdulatlan helyben álló szárnya pedig *A*, 's ezen betüket oda irom. Bizonyos, hogy mint *B* szárny egyet fordul, minden mozdulásával nagyobb szöget képez míg *A* val egyenes vonalba esik; de elég tudnom, hogy eszerint minden *lehető szög* származtatik, mert egyéb állásba két vonal egymás közt nem jöhet két végső pontját öszsze állítván. Miként különböztetjük meg egymástól a' sokféle szögöket?

[7] *F.* Mint sarkán fordul *B* vonal (17 I) mozdulása kez detétől végéig bizonyos utat tett, 's eredeti állására vissza tért. Ezen út tudjuk *kerek*, 's végső pontja *körben* fordult. Ha a' két vonal egymásnak folytatása, vagy is *B* vonal *A* vonallal egyenes irányban áll, vagyis a' két vonal öszvesen egy de két akkora vonalat képez mekkoraegyik egyik egyedűl véve, akkor mondom *B* szárny fele útját tette fordulásának. A' mint *B* vonal útját kezdi lassan lassan távozván *A* tól, olly állásba jön vele, hogy hozzá többé sem egyik sem másik felére nem hajlik de rajta egyenesen fennáll, mínt áll p. o.; egy magos szálfa a' földön, vagy egy fal; ekkor *B* vonal épen fele útjának felét, vagy egész útjának egy negyedrészét tette. Ha egyik vonal a' másikon ugy áll mint

B *

áll *B* vonal *A* vonalon azon szempillanatban, mellyben útjának negyed részét elérte, azt mondjuk hogy egyik a' másikon *függőleg* áll (mint ezt 7 és 13 I látjuk) a' köztük levő szöget pedig *egyenes* szögnek nevezzük.

[8] *K.* A' tekintetet magam is folytathatom; *B* vonalom megtévén fele utját, semmi uj esetet többé nem mutat fordulása másik felében, de megfordított állásban ugyanazon hajlásokat mutatja *A* hoz. Természetes hogy ha útja' másik felének ismét felét tette, vagy is egész útjának három negyedét, fuggőlegi állása még egyszer elöjön mit már (13 I) láttunk. Következtetem ebből, hogy *valahányszor két vonal függőleg áll egymáson, a' köztük levő szög mindenkor egyenes*, 's ebből ismét természetesen következik megforditva, hogy *ha két vonal egyenes szöget képez, szükségesképpen függőleg áll egymáson.*

F. A' következtetés tökéletesen tudományos. Ha előbbi példánk helyett, mellyben két vonalat sarkon tekinténk' más két vonalat épen közepében fordítunk (mintha két fácsikát épen közepette tüznők öszve) négy szárnyunk lesz kettő helyett, 's természetesen fél fordítással érjük az előbbinek minden állását. Azon pillanatban, mellyben egyik fele útját tette, a' másikon függőleg fog állani mint ezt (18 I) látjuk *). Szükséges, hogy a' vonalokat végső pontjaiknál betűkkel jelöljük. Itt p. o. mondjuk hogy *AB* vonalon *CD* vonal függőleg áll, vagy helyesebben *AB* függőleg vágja *CD* vonalat keresztül. Ezen tekintetünk egyszerübb lesz, ha *CD* vonalunk alsó felét elhagyjuk, és ekkor lesz (19 I) *CD* függőleg *AB* vonalon, s'egyszersmind *D* azon pontja *ABnek*, mellyben *CD* függőleg áll *AB* vonalon. Itt látjuk *CD* vonal két szögöt képez *ABvel*, jobbra és balra, és ezen két szög tökélete-

*) A' tanuló irja-ki mindenkor külön papirosra vagy táblára az idomokat, és csakugyan jó nagyra véve, igy előtte áll a' kérdésben forgó idom 's nem kell mindenuntalan a' táblába tekintenie, 's ezen kivül gyakorolja is magát a' rajzolásban.

sen egyenlő egymással, és mind kettő egyenes, mert különben *CD* nem lenne függőleg. Szinte egyenlő, és egyenes (18 Iban') mind a' négy szög.

[9] *K.* Nyilván látom, hogy először, ha egyik vonalon egy másik függőleg áll' mind két felin egyenlő és egyenes szög támad, 's következésképp a' két szög együttvéve két egyenes szög mennyiségére nézve. Ebből tüstént következtetem, hogy *bármelly hajlásban álljon egyik vonal a' másikon a' két felin lévő szögök öszvese soha sem lehet nagyobb vagy több két egyenes szögnél.* Ha a' szögök nem egyenesek miként neveztetnek?

[10] *F.* Minden az egyenesnél kisebb szög *hegyesnek* neveztetik, az egyenesnél nagyobb pedig *tompának* (a' 3, 4, 5, 6, 14, 15 és 16 idomok hegyes, a' 8, 9, 11 és 12 idomok pedig tompa szögök). 20 Idomukban az *a* betűvel jelölt szög tompa, a' *b* vel jelölt hegyes a' kettő pedig öszvesen mint tudjuk, *két* egyenes.

K. Az egyszerű egyenes vonalra nézve azt jegyezhetem meg, hogy rajta úgy-szólván két egyenes szög fér el ha csak egyik felét veszem, de mivel alatta is szintolly tér van mint felette, itt is két egyenes szög talál helyt, 's következésképp a' vonalon négy egyenes szög fér el, ha a' szögök mind ugyan-azon egy pontjából veszik eredetöket. Nincs a' két vagy négy egyenes szögnek, vagy egy szóval két egymást vágó vonal' négy szögének különös viszonya egymásra nézve.

[11] *F.* Valóban minden lehető szögök, mellyeket az egyik vonal fordulása közben a' másikkal képez (mint 17 idomban) nem több négy egyenesnél, valamint ezeknek fele (20 I) öszszvéve csak két egyenes szögöt tehet. Megjegyzem itt, hogy a' szögöket és vonalokat szinte úgy adhatjuk össze, vagy levonhatjuk egymásból, mint egyéb' mennyiségeket, mit továbbá bőven fogunk látni; 's ezen tekintetben mondom hogy itt (21 I) a' szögök összese *két egyenes*, valamint ezeknek fele (22 I) öszszvéve *egy egyenes.* Az illyen egymás melett álló, 's ösz-

szesen *egy* egyenest tevő szögök egymásra nézve *pótlóknak, tódóknak* neveztetnek.

Ha eszerint valamelly hegyes szögnek pótlóját keresem, ezen pótlója épen azon szög, mellyet hozzá kell adnom hogy a' kettőnek öszszese egyenes szög legyen; 23 idomban p. o. *a* szög szinte ugy pótlója *b* szögnek mint ez potlója *a* nak. Ha valamelly szöghöz egy akkora más szögöt adunk, hogy a' kettönek öszszese *két egyenes*, akkor egyik a' másiknak *egészitője* mert egymást két egyenesre *egészitik*.

K. Igen természetes hogy két, valamelly egyenes vonalon álló szög öszszese mindég két egyenes, bármellyik legyen hegyes vagy tompa; mert bár-mint nő vagy fogy az egyik, szintugy fogy vagy nő a' másik, ha az azokat képező vonal érintő pontjában mozdul. Ha egy vonal a' másikat bármelly hajlásban keresztül vágja négy szög támad, vallyon nem egyenlők az egymás ellenében álló szögök.

[12] *F.* Bizonyosan egyenlők, mert a' vágó vonal iránya mindenütt ugyan az. Ha 18 Imot vesszük például, hol a' két vonal függőleg vágja egymást keresztül, (tehát négy egyenes szögöt szármoztat) és *DC* vonalat vágás pontjában jobbra, vagy balra mozdítjuk, természetes, hogy alsó vég pontja *D* szint'-annyival mozdul odébb balra vagy jobbra mennyivel mozdul *C* felső végpontja jobbra vagy balra, következésképen az egymás átellenében lévő szögök, mellyeket 24 Iban *aa* és *bb* betűkkel jelöltük, tökéletesen egyenlők. Ezen magában igen egyszerü észrevétnek jövőben szünetleni hasznát vesszük.

K. Alig hihető, hogy két vonal olly állásba jöhessen egymás közt, melly tekinteteink alól el maradt, valamint szög nem lehet, mellyet nem ismernénk. Melly észrevéteket tehetünk, ha két vagy több egyenirányu vonalat egy másik keresztül vág?

[13] *F*. Amint két egyenirányú vonalat egy harmadik keresztül vág, nyolcz szög támad, millyent 25 I mutat. Abból mit a' vonalokról, és szögökről eddig tudunk azonnal következtetjük, hogy az *a'* betüvel jelölt 4 szög egyenlő, valamint egyenlő a' *b* betüvel jelölt másik 4 szög.

Ez igen természetes, mert mi egyik vonalról igaz és való, a' másikról is való, 's itt csak előbbi példánkat kettőztethettük. Ezen kivül a' szögök' egyenlősége által is bizonyithatjuk megforditva, hogy a' két vonal egyenirányú. Ezen 8 szög közt négy *belső*, négy pedig *külső* szögnek neveztetik; belsőknek neveztetnek azok mellyek a' két egyenirányu vonal-közé belöl esnek.

K. Ezen észrevételen semmi különöst vagy uj esetet nem látok, mert tudom, hogy a' szögök nagysága azon hajlástól függ, melly a' két vonal közt van. Ha p. o. valamelly szögöt veszek elő (millyen a' 26 I) ennek egyik, vagy másik *szárnyához* vagy *oldalához* bárhány vonalat húzhatok egyenirányában, a' szög nem változhatik, mert legfeljebb egyik vonalat a' másik helyébe teszek, de hajlását, vagy állását a' másik vonalhoz nem változtatom: két esetem 27 és 28 Iban van kifejezve, az elsőben egyik, a' másikban a' másik oldalhoz írtam egyenirányú vonalokat. Az első tekintet is bizonyítja, hogy mindegyik egyenirányúnak ugyan azon hajlása van a' másik szárnyhoz, tehát valamennyi általok képzelt szög egyenlő.

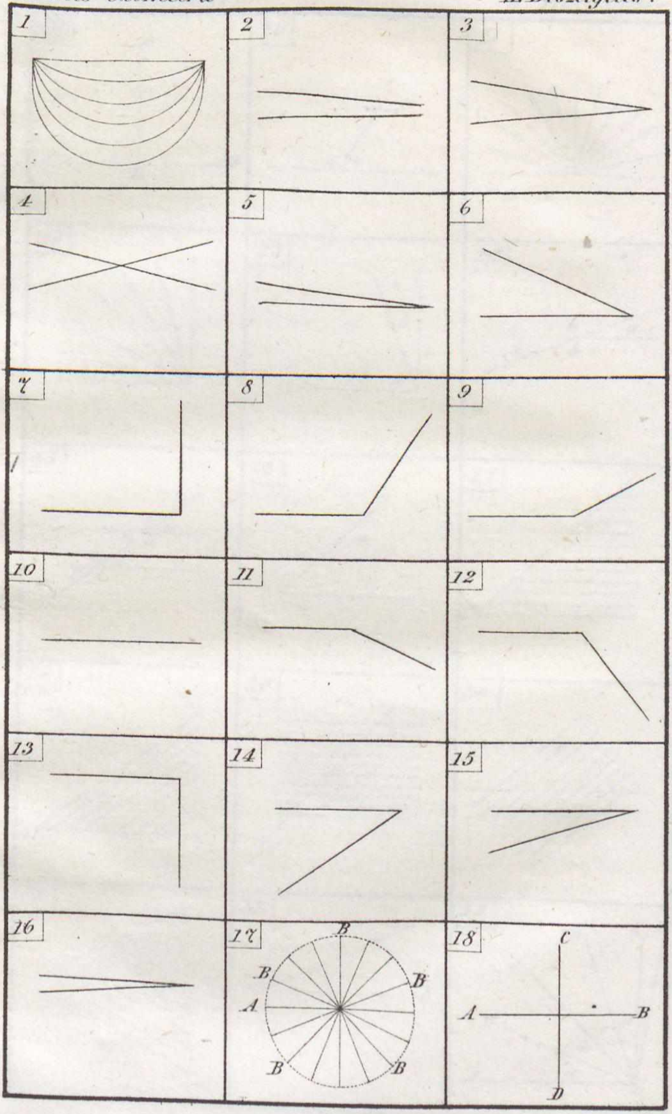
Szinte így lesz, ha egy vonalat bár-hány más egyenirányu vonallal, vagy megfordítva, bár-hány egyenirányu vonalat egy más vonallal vágok keresztül, az érintés vagy vágáspontok által származtatott szögök valamennyien egyenlők azokkal, mellyeket csak két vonal' keresztül vágása alakít vagy származtat. Ezen két esetre 29 és 30 I szolgáljanak, 's mind ezen példák csak szaporított bizonyitványai a' leg-egyszerűbb esetnek.

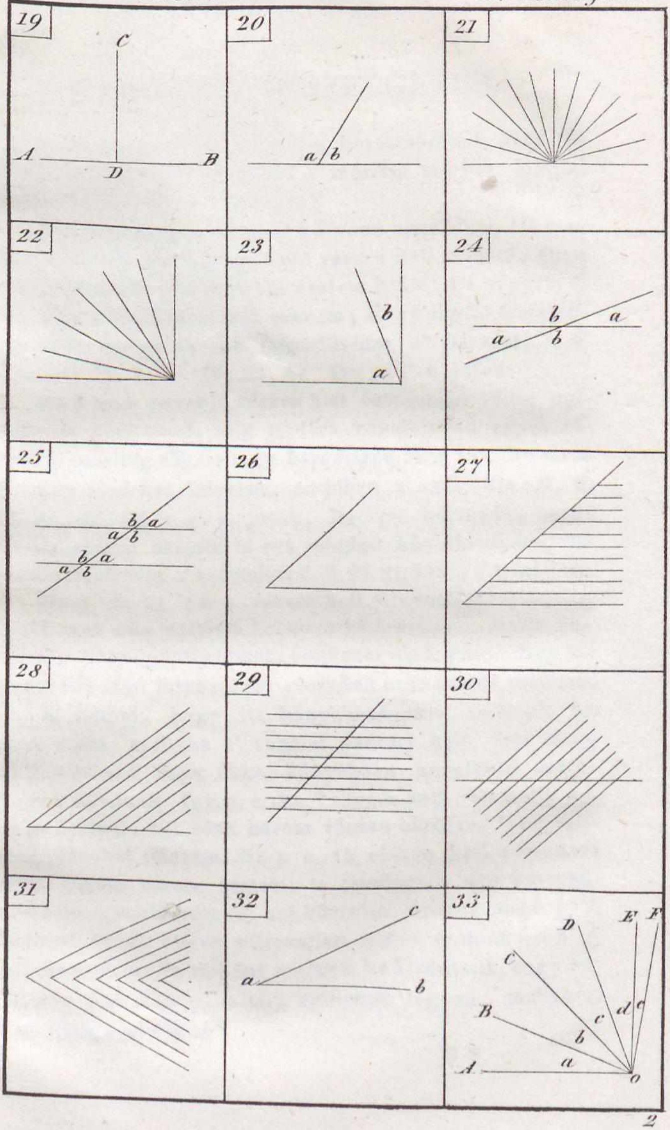
F. A' megjegyzés helyes, mert p. o. 27 és 28 Iban a' vonalokat csak kurtitottuk a' - nélkűl, hogy hajlásokat változtatnók, a' 29 és 30 I alatti példákban pedig nem tettünk egyebet, mintha ugyan-azon vonalat, írányát megtartván, odább odább vittük volna, 's így a' számos egyenirányú vonal csak az elébbinek nyomát mutatná. Ebből nyilván látjuk hogy a' szögök' nagysága nem a' vonalok' hosszu vagy rövid lététől függ, de egyedűl csak a' két vonal egymáshozi, vagy egymástóli hajlásától, vagy nyilvánobban kifejezve, a' két vonal *nyilásától*; mert ugyan azon szögbe számtalan egyenlő szögöt írhatunk, ha két vonalához, vagy szárnyához egyenírányu vonalokat húzunk. 31 I ban p. o. sok szög van egymásba írva, de ezek mind egyenlők, 's a' leg kisebbik vonalú szög épen akkora, mekkora a' leg nagyobbik vonalú, vagy is a' leg belső szög egyenlő a' külsővel 's a' t. Azt, mit itt rajz által tettünk, szinte ugy is eszközölhetjük, ha valamelly szög két oldalát egyszersmind, és folyvást elvagdaljuk; a' vonalok az igaz rövidülnek, de az általok befoglalt szög változatlan marad.

K. A' tudomány' szelleme szerint tehát ha szögrül van szó, a' vonalok hossza tekintetbe nem jöhet, de csupán csak nyilása. Minekelőtte tovább mennénk, szeretném tudni miként használjuk czélirányosan az idomokba írt betűket.

F. Látom, hogy a' betűk kivált eleinten és ha nagy számmal vannak, alkalmatlanok, 's igyekezni is fogunk közülök olly keveset venni, mennyi épen az előadás' vagy magyarázat' tiszta értelmére szükséges. A' betűkkeli jelölést azonban megszoknunk okvetlenül kell, mert csak általok tehetünk különbségeket több hasonló idomok közt, 's ezen-felűl a' tudománynak szűkséges müszerei. Ha csak egy vonal jő tekintetbe, azt jelőlni csak akkor szükség, ha irányát akarjuk kifejezni, ha p. o. valamelly egyenes vonal két végső pontját *A*, és *B* betűvel jelölöm, *AB* nem jelölhet egyebet mint az egész vonalat elejétől fogva végéig, de ha a' vonal irányáról szóllok mondhatom hogy *AB* ellenkező iránya *BA* nak, 's ha *AB* utat *előmenetnek* nevezem, *BA* ut *visszafelé* lesz. Ha két vonal jő tekintetbe, ezeket már betűkkel jelölnünk kell, mert így hasonlítjuk, 's nevezzük állásokat, 's nagyságokat. Ha két vonal szögben végzödik, ekkor tudjuk a' két vonal' két végső pontja egybe üt, és a' szögnek csúcsát képezi, ekkor csak három betüre van szükségünk, egyet a' szög csúcsára egyet egyet pedíg a' két vonal' két végpontjára teszünk, 's mondjuk p. o. (32 I) egyik vonal *ab*, a' másik *ac* 's az általok képzelt szög *a*. A' szögöket kétféleképen jelölhetjük, vagy egyenesen a' szögbe irunk egy kis betüt (melly jelölést már ismerjük) vagy a' vonalok által fejezzük ki három betűvel melly 3 közt a' közepső a' szög' csúcsán szokott állani; esetünkben *cab* vagy *bac* jelöli a' szögöt. Ha csak egy szögöt tekintünk, a' csúcsán álló betű elég, de ha több szög áll egymás melett a' jelölés három betűvel történik, 33 Iban p. o. 5 szög áll egymás melett, 's ezekbe írtuk sorjában *a*, *b*, *c*, *d*, *e* kis betüket, ha a' szögöket oldalaik által akarjuk, jelőlni, melyek sorjában *AO*, *BO*, *CO*, *DO*, *EO* és *FO* tudjuk hogy a' szögök' csucsai mind *O* pontban vannak egyesülve, és sorjában *AOB*, *BOC*, *COD*, *DOE* és *EOF* jelölik az öt szögöt. Ha most két vagy több szög lenne együve veendő, a' jelölés is èszerint fog történni, a' két szög *a* és *b* p. o. összevéve *AOC* által van kifejezve, szinte *b* és *c* szög összesen *BOC* által; továbba *c* és *d* szögök *COD*, *d* és *e* szögök öszszesen *DOF* által. Igy a' három *a*, *b* és *c* szögök összese *AOD*; *a*, *b*, *c*, *d* összesen *AOE*, valamint *b*, *c*, *d*, *e* összesen *BOF*, 's végre minden szög együtt véve *AOF*. Az illy jelölésben helyes, némi gyakorlást szerezni.

Megjegyzem azt is hogy ha krétával, ónnal, írótollal vagy bármivel idomokat irunk, irjuk azokat jó nagyokra, mert így szembetünőbbek, 's könyebben felfoghotók. Ajánlom ezen felül, hogy a' tanuló az idomokat, kivált a' jövőket papirosból vagdalja ki ollóval, 's csak-ugyan itt is jó nagyra, így mintegy kézzel fogható idomai lesznek, 's rajtuk tetszése szerint tehet változásokat.


1
2
3
4
5
6
7
8
9
10
11
12
13
14
15
16
17
B
B
B
A
B
B
18
C
A
B
D


19
C
A
B
D
20
a
b
21
22
23
b
a
24
b
a
a
b
25
b
a
a
b
b
a
a
b
26
27
28
29
30
31
32
c
a
b
33
D
E
F
C
B
d
e
c
b
a
A
o

HARMADIK BESZELGETÉS.

K. Az egyenes vonal tudom hosszmérőnek használtatik, 's igy egyik vonallal a' másikat mérjük. Miként osztjuk a' vonalokat részekre?

F. Leg-egyszerűbben a' körvonó segédével. Ha p. o. valamelly vonalat két egyenlő részre kell osztani, épen középpontját keresem, 's ott osztom ketté; ha négyre, a' már megtalált felinek felit veszem; ha nyolczba fertályának felit 's igy tovább folytathatom a' felezést, 's a' részekre, 2, 4, 8, 16, 32, 64, 128 's a' t. jutok.

Ha három egyenlő részre kell osztanom, addig nyitogatom körírómat, mig nyilása vonalomban egyik végitől a' másikig tökéletesen háromszor meg van, ha most a' talált részeket felezem, sorjában a' számokra: 3, 6, 12, 24, 48, 96 's a' t. jutok; ha egy harmadát ismét három részre osztom 's ezt minden következő harmad részen folytatom' a' számokat 3, 9, 27, 81, 243 's a' t. találom.

Ha 5, 7, 11 's a' t. részre kell a' vonalát osztanom, ismét csak olly nyilását keresem körirómnak, melly annyiszor megtaláltatik benne, hányszor kivántatott. Egy kis gyakorlás által ügyességet szerzünk ezen osztás módban.

K. Látom, hogy itt könyebbségekre találunk ha azon szám, mellybe a' vonalat osztani kell, más szám által osztható, mert ekkor könyebben kezelhető osztályokra akadunk. Igy p. o. ha 6 részre kell valamelly vonalat osztani, azt csak három részre osztom, 's a' harmad részeket felezem. Ha p. o. 15 részre kell osztanom ismét három részre osztok, 's mindegyik egy harmadrészt öt egyenlő részbe, hol körirón' nyilása mindegyik harmad részre nézve változatlan marad a' mint azt 5 uj részbe osztom. De miként osztunk ha kivántatik, hogy valamelly két rész p. o. olly arányban legyen, mellyben van három az öthöz?

F. Természetes, hogy akkor a' vonalat 8 egyenlő részre kell osztanunk, 's ezután egyik résznek 3, a' másiknak 5 illy nyolczadrészt adunk. Ezen aránylati osztást későbben fogjuk tekinteni.

K. Gondolom hogy az efféle osztások szoros egybefüggésben vannak olly tekintetekkel, mellyekhez eddig nem jutottunk. Tudom azonban, hogy a' szögök is oszthatók, mert minden mennyiség mellyet nagyobbitani vagy kisebbiteni lehet, a' számok alá van vetve. Nem de helyén van itt megismernünk miként méretnek, és osztatnak a' szögök?

F. Valóban ezen tárgyat is csak később fogjuk egész kiterjedésében vizsgálni. Nem követünk el azonban semmi rendtörést, ha jövő vizsgálatainkat megelőzzük.

A' szög' mérője a' kör.

K. A' kört ismerem, 's körvonómmal bármelly nagyságút tudok húzni, de nem foghatom meg, miként lehessen a' kör által mérni valamelly szög' nagyságát?

[14] *F.* Azt mondom, hogy valamelly szög akkora, *mekkora darabját foglalja el két oldalának nyilása a' körnek görbült vonalából, ha a' szög' csúcsa a' kör' középpontjában van.*

K. Igen, de ehez szükséges, hogy a' kör' mennyiségét ismerjem, mert különben a' szög' nagyságát sem tudom megmondani. Ezen kivűl a' kör is nagy vagy kicsi lehet, valamint a' szög' két szárnya rövid, vagy hosszu. Szeretném tudni, melly öszveköttetésben állnak a' szögök a' körrel?

F. Nézzünk vissza (II. B.) 17 Ira. Ha ott *B* vonalunk hegyét tentába mártjuk, egész útjában (fordultában) nyomát fogja hagyni, 's következésképen tökéletes kört fog leírni; szinte így, ha egy kis pálczikát egyik véginél fogva tűvel asztalunkhoz szoritunk, másik végét festékkel bekenjük 's igy adunk neki egy fordulást bizonyos, hogy mozgása alatt minden lehető szögöt, 's ha papiros van alatta, erre festékes végével tökéletes kört irt; 1-ő idomunkban ezen alak látható. *AB* vonal *B* pontján fordult egyet; *A* pontja, mint útjában a' kört írja egyszersmind a' szögök' nagyságát jelöli. Figyelemmel tekintvén ezen idomot, a' kör és szögök-közti viszony szembetünő, 's következő észrevételeket szüli:

1-ször. *AB* vonalnak *B* pontja *a' körnek középpontja.* Valamint ha körirómmal kört irok, egyik szárnya mozdulatlan áll a' papiroson, mig a' másik, köröm' görbült vonalát jelöli, körirom' mozdulatlanpontja szinte középpontja körömnek.

2-szor. Ha képzeljük, hogy *AB* vonal első állásában mint az idomban kijelölve van nyomát hagyja, 's ezután kezdi útját, minden következő állásában szögöt képez eredeti állásával, a' szögök tudjuk a' leg parányibbtól kezdve mindég nőnek, míg egész fordulása után *AB* eredeti állásába vissza ér.

3-szor. A' szögöknek *ABC*, *ABD*, *ABF*, 's valamennyi szögnek csúcsa *B* pontban egyesül; de *B* a' körnek középpontja.

4-szer. Minden ezen szögök a' körnek bizonyos darabját vagy részét elfoglalják, 's ezen kördarab épen akkora, mekkora útat tett *A* pont, következéskép akkora mekkora a' szög.

A' szögök' oldalainak hossza tudjuk tekintetbe nem jöhet, mekkora darabot foglal tehát magában a' szög szárnyainak nyilása a' körbül, annyi lesz nagyságának kifejezése.

Kérdésünk eszerint; mi ezen kördarabnak neve, vagy melly részekre osztatik a' kör? Ha ezt tudom, a' szögök' nagyságát is azonnal megmondhatom.

F. Megjegyzem itt, hogy ha körrül szólunk mostani tekinteteink szerint, ennek csak az azt békerítő görbült vonalát, tehát csak *körületét* értjük 's ha kört mondunk jövőben, az egész tért értjük mellyet körülete befoglal.

A' körület eszerint, legyen az bármelly nagy vagy kicsi a' leg parányibbtól kedzve, azon körig mellyet földtekénkre vonhatunk, egyenlőképen 360 részre oszlik, melly egyes részeket fokoknak (gradoknak), nevezünk.

K. Most már közelítek a' szögök méréséhez. Vonalunk *A* pontja, fordulásában 360 fokon ment keresztül, tehát valamennyi általa képzelt szög öszvevéve 360 fok, vagyis négy egyenes szög 360 fok. Ebből természetesen következik, hogy fele útja, vagy is két egyenes szög 180, fertály útja pedig, az egyenes szög 90 fok. Igy fele útja *AE* vonal, 's ezen két egyenes szög fér el [11] *), *AD* fertály útja egyenes szög, egyiknek 180, másiknak 90 fok mérője. Mi *AE* vonalon felül van, alatta ismét előjő, 's így *EBF* és *FBA* szögök egyenesek, 's mértékök szinte 90 fok. Ha eszerint tudom, melly útat tett *A* pont a' körületen, *ABC* szög' nagysága azon fokok' számával van kifejezve, mennyi *A* és *C* két pont közt áll. Ha feltesszük p. o. hogy *AC* épen egy negyedrésze *AD* útnak, vagy a' fertály körületnek, ekkor mérője 90 : 4 = 22²/₄ fok. Nem lehet-é következtetnem, hogy *ABC* szög három negyedrésze 4 egyenes szögnek, vagy a' körületnek 's következésképen három egyenes?

F. A' következtetés helyes és természetes, szükséges is azt meg jegyeznünk hogy, noha ezen számitásmód a' tudomány felsőbb ágainál megtartatik, minekünk kik csak elemeit tanuljuk nem elmulhatlan szükséges, és hogy mi nem fogunk nagyobb szögöket tekinteni, mint ollyakat, mellyek 180 fokhoz közelítnek: eszerint körünk egyik felét bátran elhagyhatjuk most, mondván, hogy mi a' kör' egyik felire alkalmazható, a' másik felire nézve is fenn marad; vagy is, a' számlálást másik félin ismét előkezdjük egytől 180íg menvén.

K. Ha valamelly szög egész fokokban ki nem fejez-

---

*) Ha a' tanitmányok' számai (mint itt a' [11]) belől állanak, azokra hivatkozunk.

hető, nem de tört számokat veszünk segédül, vagy tán a' fokok is apróbb részekbe oszlanak?

F. Mindegyik fok 60 egyenlő részre oszlik, 's egy olly részt *perczneк* nevezünk. Minden percz ismét 60 egyenlő részbe oszlik, 's illyen résznek neve *másodpercz.*

A' fokokat, és osztályait jegyekkel szoktuk jelölni, 's csakugyan a' fokok' felibe egy kis üreset vagy o t teszünk, a' perczek felibe egy kis vonalat, vagy vonást, a' másodperczek felibe két vonást. Lesz p. o. harminczöt fok 47 percz 's 54 másodpercz így jelölve: $35^0\ 47'\ 54''$. Ha még több alsó ostzályra lenne szükségünk, a' másod perczet is 60 egyenlő részbe oszthatnók, 's nevezhetnők *harmadperczneк*, de illy kis mérőre szüksegünk nincs, 's leg feljebb ha a' másodperczek tört részeit tizedes tört számokkal fejezzük ki.

K. Látom, hogy már így is sok apró részre oszlik a' körület, mert 360 fokban, $360 \times 60 = 21600$ percz, és $360 \times 60 \times 60 = 1296000$ másodpercz van, 's bármelly két szög közt a' leg csekélyebb különbség is észrevehető. Nem de illy részekbe osztott körön mérjük a' szögöket?

F. Egész körre, mint láttuk szükségünk nincs, de szorosan véve egy fertály kör is elég lenne, mert ha valamelly kör 90^0nál nagyobb, ezt az egyenes szögöt mindég hozzá lehetne adni.

K. Hogy a' mérő félkör bármelly nagyságu lehet tudom, de ezen felül igen-nagy nem lehet, mert ekkor nehéz volna vele bánni. Más felől pedig egy kis szögmérőre nem sok osztályt jegyezhetünk fel, mert ha azt másodpercz részekre akarnók osztani úgy, hogy a' vonalok észrevehető távolban legyenek egymástól (vagy könnyen meg számlalhatók) (félkörünkre 648000 osztály vonalat kellene húzni) csakugyan valamelly malomkerék felinél is nagyobbat kelleni venni. Miként segítünk ezen bajon?

F. Az észrevét igen helyes, mert már az első perczek' száma is 10800 a' fél körre, 's valóban már olly fél kör mellyen ezen osztályok világosan láthatók puszta szemmel, jó nagy. Szögmérőnk közönségesen rézből szokott készítetni, 's alig nagyobb természeti nagyságában, mint 4 idomunk kétszer véve. Közönségesen megelégszünk ha egész, és fél fokok vannak rajta kielégitő pontossággal osztva, 's ekkor rajta $2 \times 180 = 360$ vonal van. Mint itt 15, 30, 45 's a' t. vagy 10, 20, 30, 40 's a' t. fő részekre oszlik, a' fő részek közt pedig apró vonalak jelölik a' számokat.

Ezen szögmérő' középpontja *C*ben van, ha most megmérendő szögöm' csúcsát ugy helyezem szögmérőmre, hogy *AC* vonala épen a' 0^0 és *C* középpont közzé essék (csucsa természetesen *C* pontba) másik vonala megmutatja, hány fok a' szög nagysága. Ha példánkat meghagyjuk, 's említett megmérendő szögünk *ACB*, *CB* vonal 63 fokra esvén jelöli, hogy szögünk nagysága 63^0.

K. Mit eddig a' szögökről tudok bizonyitja, hogy ha a' szög' csúcsa vagy hegye szögmérőm' középpontjába esik két vonala a' kerületnek bizonyos részét közibe vevén fokainak számát jelöli.

Azt is tudom, hogy ha szögöm' vonalai igen hoszak, azokat a' szög' ártalma nélkűl elvághatom, vagy ha ígen rövidek kényem szerint meghoszabbithatom. De még sem tudom miként tegyem szögöm' hegyét szögmérőm középpontjába?

F. Egy kis gondolkodás pedig könnyen reá vezet, mert ha szögömet nem tehetem szögmérőmre, megforditom a' dolgot, vagy is szögmérőmet teszem a' szögre; ekkor az igaz szögöm' vonalai alól lesznek nem pedig felül, de a' gyakorlott szem könnyen megkülönbözteti, melly osztályon megy keresztül a' két vonal. De ha azt sem akarnók tenni, mutatok egy más útat. Legyen megmérendő szögünk, 2 vagy 3 idom. Mérjük meg szögmérőnk *AC* vonalát, 's körirónk' ugyan ezen nyilásával kör darabot irjunk *BAC* szögünkre (feltesszük itt hogy szögünk *AB* darabja egyenlő hosszaságú szögmérőnk *AC* vonalával). Ekkor a' kördarab szögmérőnk' kerületéhez tartozik, 's vele hasonlítható. Megmérem most köriróm' nyilásával mennyire esik *B* pont *C* ponttól, 's vele keresem szögmérőmön a' fokok' számát. Igen természetes, hogy bármelly osztályra tegyem egyik vagy másik hegyét körirómnak, nyilásába mindég egyenlő számu fok fér, ha p. o. szögöm 45 fok, valóban mindegy akar az 0 pontra, akar a' 30ra akar a' 120ra tegyem egyik hegyét, a' másik vagy 45őt, vagy 75őt, vagy 165öt mutat, 's egy hegyétől a' másikig számlálván a' köztük lévő fokokat, számukat megleljük.

K. Ezt tökeletesen értem, mert ekkor csak a' két szám-közti különbséget kell vennem, 's ez mindenkor 45, mert 75—30=45, és 165—120=45, ha pedig visszafelé számitok, szinte így lesz. Leg egyszerübb azonban a' köriró hegyét az 0 pontba helyezni, 's ekkor másik hegye egyenesen reá mutat, hány fok nagyságú a' szög.

Nem de részekbe osztjuk a' szögöket, ha a' vonalaik által foglalt kördarabot osztjuk részekbe?

F. Ha valamelly szögöt 2, 3, vagy 4 részre kell osztani, az osztást egyszerűen eszközölhetjük az által, ha a' két szárny-közti kördarabot osztjuk 2, 3, vagy 4 részre.

Ekkor mindegy bár mekkora nyilásával húzzunk körirónknak kördarabot a' szög' két szárnya közzé, ezt pedig elosztani tudjuk.

5-ik. Idomunkban p. o. körirónk' *AB* nyilásával irtuk *BC* kördarabot, 's ezt 4 egyenlő részre osztottuk, a' pontolt vonalok *Aa*, *Ab* és *Ac*, *A* szögöt négy egyenlő részre osztják.

K. Nem de mindegy, ha a' körvonal helyett egyenes vonalat irunk a' szög' két szárnyára, 's ezt osztjuk részekre?

F. Valóban egy, 's mivel a' köriró' nyilása változatlanul *AB* marad, elég, ha *AB* és *AC* két szárnyon egyenlő darabokat jelölünk 's a' két pontot (*B* és *C*) egyenes vonallal egybe kötjük, mint ez 6ik idomunkban történt. Ha most *BC* vonalat 4 részre osztjuk, 's részeit pontokkal ellátjuk, a' szög' hegyiből ezen pontokra vonalokat húzván szögünk is 4 egyenlő részbe lesz osztva.

Ha végre a' szögmérő' segéde által akarunk valamelly szögöt részekbe osztani, a' fokok' számát osztjuk el, 's eszerint húzzuk hegyiből a' szögöknek megfelelő vonalokat.

Adva van p. o. valamelly szög' nagysága 60^0 's kivántatik, hogy 6 egyenlő részre osztassék, vagy kivántatik csak egy hatod része?

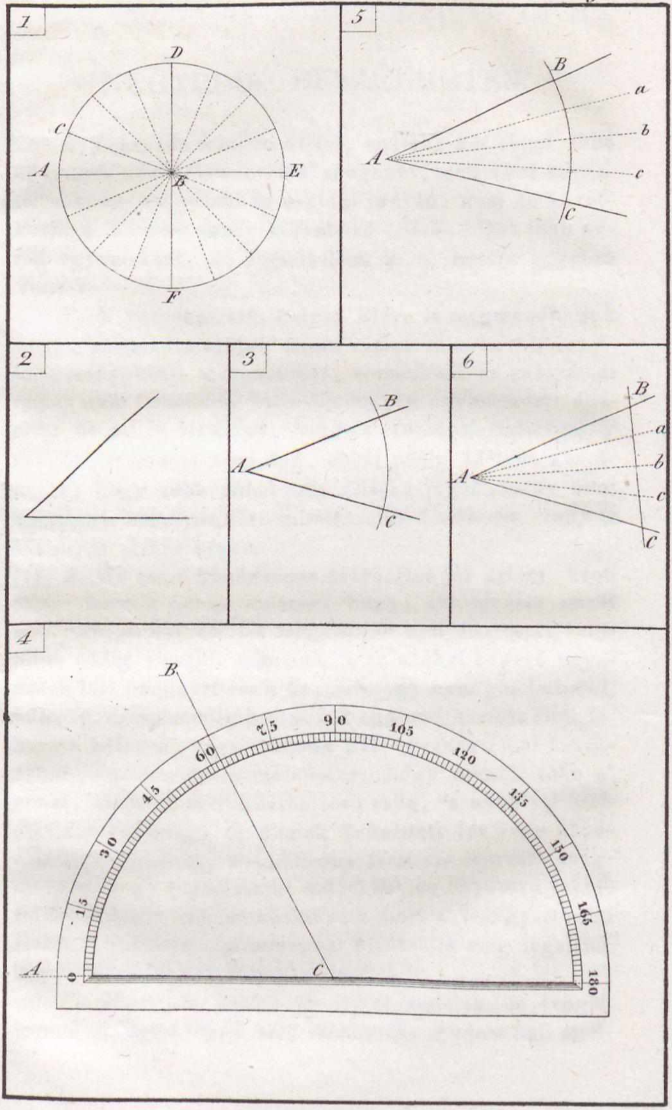
Mindenek előtt az adott szög' két szárnya közé olly kör darabot írok, mellynek görbülése egyenlő szögmérőmnek görbülésével, vagy is kördarabomat ugyan azon nyilásával húzom köriromnak, mekkora szögmérőm' fél vonala *CA* közép pontjától kezdve részekre osztott körületéig.

Ez meglévén, szögmérömön 10 foknak megfelelő kördarabot veszek körirómnal, bizonyos, hogy ha az osztás tökéletes, és a' szögöm két szárnyaközti körvonal megfelel szögmérőm' beosztott vonalának, ezen 10 fok tökéletesen hatszor megvan szögöm' körvonalában, 's 6 egyenlő részre oszlik körvonóm' nyilásával, a' 10 fok pedig szögöm' egy hatod részének megfelel.

Ha p. o. kivántatnék, hogy valamelly 38 foknyi szög 5 részre osztassék, biztosabban mívelünk, ha előbbi mód szerint osztjuk 5 egyenlő részre szögmérőnk nélkül a' két szárny közt lévő vonalat, mert $38:5=7^3/_5$, és a fokoknak tört részeit kivánja, de szögmérőnkben ezeket alig találhatjuk: ha $^3/_5$ fokot perczbe változtatunk, kifezése 36 percz, szögmérőnk pedig perczeket nem ad.

Leg-jobb hasznát vesszük a' szögmérőnek akkor ha valamelly szögöt alkotni kell, vagy valamelly bizonyos része kivántatik a' szögnek.

Mindezen méréseket, osztásokat, és alkotásokat gyakorlás által könnyen megszokjuk.


1
D
C
A
B
E
F
5
B
a
b
A
c
C
2
3
B
A
C
6
B
a
b
A
c
C
4
B
15
30
45
60
75
90
105
120
135
150
165
A
0
C
180

NEGYEDIK BESZÉLGETÉS.

K. Ismervén minden állást, mellybe két vonal jöhe egymásra nézve, ismervén a' szögöket, mellyeket képezhetnek, ezeket mérni és osztani tudván, nem de következik a' kérdés: melly különböző állásba jöhet több vonal egymásközt, de legközelebb p. o. három egyenes vonal?

F. A' következtetés helyes. Előre is megmondhatjuk hogy, bármiként rakjuk össze vissza minden kigondolható irányokban a' vonalokat, vonaloknál és szögöknél egyéb nem támodhat, bármelly legyen egymásközti állásuk; de az is bizonyos, hogy a' vonalok' számával a' szögök' száma is nőni fog, ebből pedig tüstént következik, hogy több vonal olly állásba jöhet, melly által valamelly bizonyos tért mindenfelől körülvesz, vagy is bizonyos alakot képez.

[14] *K.* Ha ezen közönséges észrevételt jól értem, azon állítás fekszik benne először, hogy; *két egyenes vonal tèrt nem zárhat be.* Ez magában is nyilván, mert valamint eddig vizsgált szögeink 's az azokat képező egyenesek tért nem kerítének be, szintugy nem gondolhatni, hogy p. o. valamelly kertet két egyenes kerítés által lehessen béfogni, vagy épületet két egyenes fallal körülvenni. Veszem észre másodszor, hogy mentül több a' vonal, annál több a' köztük levő szög, 's annyival több oldalú vagy szögű az általok békerített tér vagy képezett alak. Minthogy a' tudomány' szelleme szorosan megkívánja, hogy lépcsőnként haladjunk az egyszerű tekintetekkel, látom miként következik most a' legegyszerűbb alakú tér. Nemde három vonal kívántatik meg legalább, hogy valamelly tér békerítve legyen?

F. Bizonyos hogy, az egyes vonalok és szögök semmi uj esetet többé nem mutatván, a' térre kell általmennünk, 's hogy előre azon tért kell tekintenünk, melly a' legegyszerűbb alakot mutatja. Nem helyes azonban mondani, hogy valamelly tér' békerítésére legalább három vonal kívántatik, mert erre nem csak kettő, de egy is elég, mit már a' körnél láttunk. A' kör is csak egy vonal, de görbített vonal; a' félkör is egy vonal, 's ha két végső pontját valamelly egyenes vonallal egybekötjük, két vonal által foglalhatunk tért. Figyelemmel legyünk tehát a' kifejezésekre 's tisztán mondjuk hogy: valamelly tér' békerítésére legalább három *egyenes vonal* kívántatik.

Tekintsük eszerint három egyenes vonal' egymásközti *lehető* állásait *).

Ha mindhárom vonal egymásmellé vagy egyirányba esik, tudjuk ismét csak vonal jön elő.

Ha kettő marad egyirányban, a' harmadik nem jöhet velök olly állásba, mellyet már nem ismernénk, mert a' három vonalból kettő lett. Ha mindhárom különböző irányú, számtalan eset van, mellyben tért nem foglalnak, 's valamennyiben egyikfelől nyílás van, valamint ha szobánk' negyedik fala hibáznék.

Egy feltét maradt eszerint még; ha szükségesképen megkívántatik, hogy három egyenes vonal tért foglaljon, szükséges, hogy: vagy végső pontjai jöjjenek mindhárom vonalnak érintésbe, vagy egyik a' *másikat keresztülvágja ugy, hogy egyfelül se maradjon nyílás.*

Az első idomban a' három vonal' végső pontjai érintésben vannak, a' másodikban egymást keresztül vágják. Természetes, hogy a' második idom' példája számtalan változtatást enged, mert hol egyik hol másik, egy, két, vagy mind három vonal vághatja egymást, a' vágáspontok pedig magok is számtalanok lehetnek, holott az első példa csak egyetlen egy esetet mutat. Nyilvánvaló, hogy bármelly állásban kerítsen be tért a' három egyenes vo-

*) A' magyarázat közben a' tanuló három fácsikát vehet kezíbe 's rakhat minden irányba 's állásba.

nal, bármekkora legyen ezen általok békeritett tér, alakja mindenkor hasonló, mert mindegyikben három szög van és sem több sem kevesebb.

[15] *K.* Ebből következő jegyzékeket húzom:

1-ször. Tért, három egyenes vonalnál kevesebb által bé nem keríthetni.

2-szor. A' három egyenes vonal által békerített térnek három szöge van; azon geometri alak tehát, mellynek neve *háromszög*, valamennyi között legegyszerűbb.

3-szor. Ha három vonal adva van, általok, ha végső pontjaikat kell érintésbe hozni, csak egyetlen egy háromszög lehető.

4-szer. Minden háromszögben hat rész jön tekintetbe, az azt képező három egyenes vonal, és a' köztük foglalt három szög. A' vonalokat, ha azok valamelly alakot képeznek, *oldaloknak* nevezzük. Természetes, hogy az oldalok közzül mindegyik lehet nagyobb vagy kisebb, vagy is: a' háromszögök' oldalai különböző nagyságúák lehetnek. Nemde azt fogjuk most vizsgálni, melly viszonyban állanak a' háromszögök' oldalai a' köztök levő szögökkel, vagy is: miként változnak a' szögök, ha az oldalok változnak?

F. A' háromszög, mint legegyszerűbb geometri alak, a' többinek ismerésére fog bennünket vezetni, 's már előre is látható, hogy ha a' háromszögök' tulajdonit tökéletesen ismerjük, a' többi alakok' ismeretére könnyen jutunk, mert azok több vonalokból és több szögökből lévén összetéve, háromszögökre visszavihetők, vagy is azokba oszthatók.

A' háromszögök' oldalait és szögeit betűkkel jelöljük. 's csakugyan kétféleként, vagy az oldalok közepe felé írjuk ezeknek betűit (mint a' 3 Iban) 's ekkor a' szögökbe kis betűket írunk, vagy csak egyszerűen a' háromszög' három csucsára teszünk betűket (mint 4 Iban). Az első esetben az oldalokat sorban *A*, *B*, vagy *C* oldalnak nevezzük, a' szögöket pedig *a*, *b*, c szögnek; a' második esetben valamellyik oldal megnevezésére két betű kell, és a' három oldalnak neve sorjában *AB*, *AC* és *BC* oldal; a' szögök jelölésére pedig három betű, 's ezek sorjában *BAC*, *ABC* és *ACB*, hol látjuk ozon szög jelöltetik, mellynek betűje a' más kettő között áll. Mi a' környülményekhez képest egyik vagy másik jelölést válosztjuk, melly épen tekintetünkre' nézve rövidebb és egyszerűbb.

K. Miként lehessen többszögű alakot háromszögűre vinni, már abból is látom, ha papirosból négyszögöt vágok ki 's ezt két rézsút egymásellenben álló szögénél fogva összehajtom, vagy ollómmal ketté vágom; igy két egyenlő háromszögöm támad 's mindegyik tökéletesen fele elébbi négyszögömnek. Ide írom (5 l.) ezen négyszögöt, mellyet *BD* vonal két egyenlő *a* és *b* által jelölt háromszögbe osztott. Hogy szinte igy lesz a' többi alakokkal is, szembetűnő. De tekintsük, melly különböző változásokat szenved valamelly háromszög' alakja, ha oldalai vagy szögei változnak?

[16] *F.* Láttuk hogy, ha a' vonalok különböző irányokban egymást keresztülvágják, számtalan különböző háromszög támad. Ezen tekintetet most félre tesszük 's ha három oldaláról van szó valamelly háromszögnek, feltesszük, hogy azoknak végsőpontjai vannak mindenkor egymáshoz csatolva 's igy az oldalok egész hosszaságukban megmaradnak, végsőpontjaik pedig szoros érintésben egymásközt, hogy semmi hézag vagy nyilás észre nem vehető. Előre bocsájtván ezt, nyilván hogy, három egyenes vonal által csak egyetlen egy háromszög lehető, vagy más szóval: *ha valamelly háromszögnek három oldala adva van, a' háromszög maga is adva van.* Ezt következőkép magyarázom. Vegyünk három fa-darabocskát (mellyek három vonalat képviseljenek) 's kérdezzük, lehet e' ezeknek végsőpontjait kétféleként összetenni, mi más szóval annyi: lehet e' velük két vagy több különböző háromszögöt alkotni? Valóban nem, mert bárhogy forgassam azokat asztalomon, bármint változtas-

sam és illessem egyiket a' másikhoz, az általuk képezett háromszög változatlan ugyan az, 's legfeljebb csak állása, fordulása vagy helye változik. Ha pedig a' háromszög változatlan, bizonyosan szögei is' változatlan ugyan azok maradnak.

K. Igen természetes hogy, valamelly meghatározott, az az bizonyos mennyiség nem lehet változó, vagy is egy időben ugyan az, és más valami is; épen annyit tenne állítani hogy, valamelly papirosból kivágott háromszögöm változhatnék a' nélkül, hogy ollóval valamellyik oldalából levágok valamit. Nemde különös tulajdona ez a' háromszögnek?

F. Csak ugyan mit itt mondánk nem alkalmazható egyébb geometri alakra, és igen hibásan következtetné valaki mondván p. o. 4 fácsika által csak egy négyszögöt lehet illyetén alkotni, mert négy ugyan azon vonallal számtalan négyszögöt lehet alkotni, 's egyik sem lesz a' másikkal egyenlő. Ezt megmagyarázom. Vegyünk három fácsikát 's rakjuk össze háromszögbe ugy, hogy végpontjaikat egymásra tevén, azokat tűvel összetűzzük. Jól tudjuk hogy a' tű nem igen szorítja össze a' tárgyakat, és hogy a' fácsikák rajtuk mint valóságos sarkokon foroghatnak, még is állítom, hogy az igy összetűzött három fácsikám moczanni sem fog, de eredeti háromszög alakjában feszesen meg áll. Nem igy van a' négyszöggel. Ha szinte igy tűzök össze négy fácsikát, négyszögöm minden mozdulattal változik, mert négy szögén, mint valóságos sarkon, a' fácsikák mozognak, végtelen sokféle négyszög alakot képezvén a' rendes négyszögtől kezdve (millyen 51) az egyenes vonalig. 6 Iban mutatok egy illy négyszögöt; ha p. o. az egybetűzött fácsikák' két végső szögét (*A* és *C* szögét) meghúzzuk, mindég hoszabb hoszabb lesz irányában, a' másik két szög pedig egymáshoz közelít, míg végre a' négy oldal párosan összeesik. Mindezen sokféle négyszögben az oldalok egyenlők és változatlan ugyan azok.

K. Ezen példa meglepő, és most értem tökéletesen hogy, a' háromszög csak akkor változtatja alakját, ha egyik vagy másik oldala változik, holott a' négyszög ugyanazon vonalokkal különböző lehet 's egyszer nagy tért, másszor kisebbet foglalhat. Most értem azt is, miért válosztatnak különösen a' háromszögök, ha nagy tért kell megmérni; mert ha oldaluk ismeretes, akkor nagyságuk és térek is ismeretes; holott ha a' négyszögnek oldalai vannak adva, még sejdítnem sem lehet mekkora a' négyszög vagy mennyi tért foglal? Tudom tehát hogy, ha a' háromszög' alakja változik, egyik vagy másik, vagy valamennyi oldala is változik 's ebből következtetem, hogy ha oldalai változnak, szögletei is változni fognak.

[17] *F*. A' következtetés ismét vakmerő. A' tudomány meg nem fér az illy röktön ítélettel, de szoros figyelmet kíván. Mondhatni közönségesen hogy, ha valamellyik oldal nagyobb vagy kisebb, az áltelleniben lévő szög is nagyobb vagy kisebb; de nem mondhatom hogy, ha az oldalok változnak a' szögök is változnak, mert tudjuk hôgy a' szögök' nagysága nem a' vonalok' nagyságától függ.

Ha az előbbi következtetés helyes volna, nem lehetne p. o. valamelly háromszögöt kis alakba venni; mi ismét azt tenné, hogy a' geometriának hasznát sem lehet venni mert ekkor a' nagy mértékeket kicsinybe nem változtathatnók. Azt állítom tehát hogy, *ha a' háromszög' oldalai egy arányban nőnek vagy fogynak, a' szögök változatlan ugyan azok maradnak*. Ide írom 7dik Idomunkat, ha a' háromszög *BC* oldalához egyenirányú vonalokat húzok, a' háromszög mindég kisebb kisebb lesz, de p. o. a' legkisebbik *Abc* háromszögnek szögei épen azok maradnak, mellyek voltak eredeti *ABC* háromszögünkben. Hogy ez természetes tudjuk, mert bizonyítását megleljük az egyenirányú vonaloknál, mellyeket valamelly más vonal keresztül vág 's hol a' mellék szögletek egyenlők. Ha valamelly papiros háromszög' egyik oldalához egyirányúlag ollóval szeleteket vagdalok, a' kezemben maradt háromszög mindég kisebb kisebb lesz, de eredeti szögeinek nagysága változatlan maradt, mert mindegyik oldalból *aránylag* vágtunk el hasonló darabokat, 's igy háromszögünknek csak *nagysága* változott az oldalok' kisebbítése által, de sem alakja sem szögei nem változtak.

Ha ezen tekintetemet folytatom, valamelly háromszögbe számtalan háromszögöt írhatok, ha a' beírt háromszögök' oldalai egyirányúak az adott háromszög' oldalaival, millyen a' 8dik Idom. Szinte ha papiros háromszögöm' három oldalaiból egyenlő darabokat vagdalok le, mindegyik kisebbnek alakja és szögei változatlan maradnak és csupán csak a' háromszög' kiterjedése vagy nagysága változik. Ezen tekintetből már lehet következtetést húzni 's mondhatom hogy' számtalan nagy vagy kis olly háromszög *lehető*, mellyekben a' szögök változatlan ugyanazok, de szükséges hogy, *mindvalamennyinek* 3 *oldala egyenlő arányban legyen egymásközt.* Az illy háromszögöket *hasonlóknak* nevezzük megkülönböztetésül az *egyenlőktől*; mert két vagy több tárgy, tehát két vagy több háromszög is *csak akkor egyenlő egymásközt, ha az egyenlőség minden részeikben tökéletes,* az az: ha két vagy több háromszögnek nem csak szögeik, de oldalaik is tökéletesen egyenlők, vagy egyenlő nagyságúak.

K. Látom hogy, ha valamelly háromszögnek mind három oldala nő nagy fogy egyszersmind, és növések vagy fogyások aránylati, vagy is mindegyike egyenlő arányban nő vagy fogy, a' szögök változatlan maradnak és a' háromszögök egymásközt mind hasonlók. Melly változásokat szenved valamelly háromszög, ha csak egy vagy két oldala változik, kettő vagy a' harmadik pedig változatlan marad?

F. Ha a' háromszögnek egy vagy két oldala változik, mindegyik szöge változik. Ha 9dik Idomban *AC* és *CB* két oldalból egymásután egyenlő darabokat vágunk le, a' béírt kisebb háromszögök jönnek elé. Eszrevehető hogy, mentül többet vágunk el a' két oldalból (mindenkor ismét érintvén két végső pontjokat), annál nagyobb lesz a' háromszög' *C* szöge, de a' másik két *A* és *B* szögök egyidőben kisebbülnek. Ha végre annyit vágok le a' két oldalból, hogy összesen épen olly hosszúk, millyen hosszú *AB* harmadik oldala, ekkor tudjuk a' három vonal egybe esik, a' két szög *A* és *B* elenyészett vagy semmivé, de *C* szögbül két egyenes, vagy 180^0 lett (tudván hogy, az egyenes vonalon két egyenes szög talált helyt) [11].

[18] *K.* Ezen tekintetből két nevezetes megjegyzést huzok:

Az első az, hogy *mentül nagyobb valamelly oldal, annál nagyobb az általelleniben levő szög*, és megfordítva, *a' kisebb oldal általelleniben kisebb szög áll.* Második megjegyzésem az, hogy *a' háromszög két oldalának, összevéve hosszúságukat, szükségesképen nagyobbnak kell lenni, mint mekkora a' harmadik oldal egyedül*, mert különben a' három vonal tért nem foghat be, következésképen háromszögöt nem alkothat; nemde minden háromszögre alkalmazható ezen két megjegyzés?

F. Tökéletesen. De előbbi példánk (9 I) csak olly háromszögökre volt alkalmazva, mellyekben a' két rövidítendő oldal egyenlő; mert csak ollyan mennyiségek változnak egyenlően, ha belöllük egyenlőt elveszünk mellyek egymásközt is egyenlők. Feltettük pedig, hogy két oldalunkból egyenlő darabokat vágván el, a' kurtított oldalok mindegyik vágás után egyenlők maradtak, az az: egyik akkora, mekkora a' másik. De ha ezt olly háromszögre alkalmazzuk, mellynek p. o. mindhárom oldala különböző nagyságú, millyen 10-dik Idomunk, 's ennek is két oldalából vagdalunk el egyenlő darabokat, a' kisebb háromszögök nem olly rendesen következnek egymásból mint elébb, mert itt különböző nagyságú oldalokból egyenlő darabokat vágván le, a' köztük lévő arány nem maradhat fenn 's p. o. a' nagyobbik oldalból még jó darab megmarad, a' mint a' kisebbik már elfogyott.

Ezt számokkal is meglehet magyarázni; ha p. o. egyik oldal 8 hüvely, a' másik 5 hüvely hosszaságú 's mindegyikből mindég' egy egy hüvelyt elvágunk, lesznek sorjában 7 és 4, 6 és 3, 5 és 2 's végre 4 és 1 az oldalokat jelölő számok; de látszik hogy, a' kisebbikhez képest a' nagyobbik minden levágás után más más arányban van, vagy is hogy, a' két oldalközti arány az egyenlő darabok' levágása által *zavartatik.* Megtartván számainkat, a' nagyobbik oldal minden levágás után 3 hüvelyel nagyobb mint a' kisebb, valamint kezdetben is 3 hüvelyel volt nagyobb; de a' második levágás után a' nagyobbik kétszer akkora 's végre a' negyedik levágással már 4-szer akkora mint a' kisebb, holott ha arányban történnék a' levágás, a' nagyobbik oldalnak mindég *ugyan annyiszor* kellene nagyobbnak lenni a' kisebbnél, mint eleinte volt.

K. Hogy ez természetes nyilvánvaló, mert ha két különböző nagyságú tárgyból aránylag kell részeket elvenni, a' nagyobbikból nagyobbat, a' kisebbikből kisebbet kell elvenni, különben az arány zavarva van. Ha p. o. nekem 20 forintom van, pajtásomnak pedig csak 10, és együtt 3 forintot költöttünk azon feltétel alatt, hogy pénzünkhöz képest aránylag fizessünk, igen helytelenül kívánnám hogy ő is felét fizesse a' 3 forintnak, vagy is 1 f. 30 xrt., midőn a' 3 forintból kettő engem illet, őt pedig csak egy, mert ha vagyonom két akkora mint az övé, a' költségnek is két akkora részét kell ellátnom, 's megmaradott pénzünk ismét arányban lesz. Miként változnak a' szögök, ha csak egy oldal változik?

F. A' kérdés felteszi, hogy valamelly háromszögnek két oldala adva van, és hozzájuk a' harmadik oldal kerestetik, és következőbe fordul. Valamelly két vonalnak hossza változatlan maradván melly hajlásba jöhet egymásközt, vagy is, melly különböző szögöket képzelhet; és ezen feltételt már közelebbről tekintének 's ismerjük. Helyesebb tehát kérdezni: melly különböző nagyságú lehet valamelly háromszögnek harmadik oldala, ha a' másik kettő adva van? Tegyük fel először, hogy az adott két oldal egyenlő; 's így már előttünk ismeretes tekintetekre jutunk az által, ha egyik oldal' végpontját a' másiknak végpontjához érintvén, azt mint sarkán mozdítjuk félkörben, minden lehető szögöt képzelvén 0 től 180 ig. Ha most a' két oldal' minden lehető nyilásánál, egy harmadik vonal által öszvekötjük azoknak végső pontjait, minden lehető háromszög előjön. 11 és 12 Idomban két részre vettem a' példát azért, hogy sok vonal ne jöjjön együvé 's ezen okból jelöltem csak egynehány háromszögöt a' számtalan közül.

A' két egyenlő oldal itt *AB* és *AC*, *AC* oldal fordul, *AB* pedig mozdulatlan marad. Tudjuk, hogy *ABC* szög mindég nagyobb nagyobb, mentül inkáb távozik *C* pont *A* ponttól, és a' két oldal végsőpontjának épen ezen távola adja a' harmadik oldal' nagyságát, melly harmadik oldal tehát annál nagyobb, mentül nagyobb *B* szög és egyenlő a' két oldal' végpontja' távolával.

Mikor lehető legkisebb ezen harmadik oldal? *BC* oldal első mozdulatával, ha eleinten *AB* vonalon feküdt. Mikor elhető legnagyobb?

Ha *BC* oldal útjában fél fordulását közel esvégezte és ismét *AB* vonal irányába esvén, ezzel egy vonalat képez. De ekkor a' háromszög is elenyészett, miből következik, hogy *a' harmadik oldal nem lehet akkora, mekkora a' másik két oldal öszvevéve, de szükségesképen kisebbnek kell lennie, különben a' háromszög lehetlen.* [18]

K. Ezen viszgálat valamennyi háromszögöt magában foglalja, mellyben két oldal egyenlő, vagy is: minden *egyenszárnyú* háromszögöt *).

*) Szokásban van valamelly háromszög' egyik oldalát *talpának* nevezni, azt p. o. mellyik történetből épen alul esik; ekkor a' másik két oldalt *szárnyának* nevezzük. Bármekkora legyen tehát valamelly háromszög' talpa, mindenkor egyenszárnyú, ha másik két oldala egyenlő hosszaságú.

Ha 11 és 12 Idomainkat figyelemmel tekintem, látom hogy a' származtatott háromszögök' *A* és *C* pontjai mind a' félkörbe esnek, valamennyinek pedig *B* szöge a' kör' középpontjába, mi természetes, mert *BC* oldal *B* pontján fordulván, félkört ír le. Észrevehető, hogy mint eleinten a' két oldal egymást fedi *B* pontnál semmi szög nincs, következésképen háromszög sincs, és ezen eset egyenlő azzal, ha *BC* vonal *AB* vel egy irányba esik fél fordulása után; tehát mind két esetben az egyenes vonalon két egyenes szög $=180^0$ van.

Alig mozdulván *BC* oldal helyéből, *B* pontnál már egy parányi szög támad, melly, feltesszük, valamivel nagyobb a' semminél, p. o. két másodpercz, ebből következik egy vékony kis háromszög, mellynek harmadik oldala épen akkora darabját foglalja el a' körnek, mennyit *B* szög jelöl, vagy is két másodperczet, mi egy alig észrevehető kis vonal. Ezen esetben nagy hiba nélkül feltehetjük, hogy ezen kis oldal *AC* függőleg áll mind két *AB* és *BC* oldalon, vagy is, hogy az általa képzelt két szög egyenes, vagy kétszer 90^0, melly feltétel ismét következteti, hogy *B* szög egyenlő semmivel. De feltétünk szerint a' kis szög két másodpercz, tehát a' 180^0 ból levonandó 's lesz a' kis oldal mellett lévő két szög öszvesen $180^0-2''$. Bizonyos, hogy mentül nagyobb *B* szög, annál kisebb lesz öszvesen véve a' másik két szög, mig végre ha elérte 180^0 t, a' másik kettő semmivé válik. Nemde egész bátorsággal következtetni, hogy a' háromszögökben a' három szögök öszvevéve mindenkor és szükségesképen két egyenes szögöt, vagy 180^0 t tesznek?

[19] *F*. Igen helyesen, és a' vizsgálatot folytathatjuk.

Ismételjük hogy, az adott két egyenlő oldalhoz tartozó harmadik oldalát kerdesvén a' háromszögnek, ezen harmadik oldal semmitől, vagy a' ponttól mint legparányibb vonaltól kezdve addig nő a' két oldal nyílásával, mig hossza egyenlő lesz a' két oldal öszves hosszával, vagy is, egyiküknek dupla hosszával. Természetes hogy, lesz a' nyílásnak vagy az oldal mozgásának olly szempillanata, mellyben a' harmadik oldal tökéletesen egyenlő az adott két oldal hosszával, ekkor azon háromszög támad, mellyet *egyenoldalú* háromszögnek nevezünk. Az egyenoldalú háromszögnek tehát mind három oldala egyenlő; tudjuk pedig hogy, egyenlő oldalok' áltelleniben egyenlő szögök állanak, tehát *az egyenoldalú háromszögnek szögei is mind egyenlők.* Ha pedig a' szögök' öszvese = 180°, az egyenoldalú 's következésképen egyenlőszögű háromszögben mindegyik szög 180 : 3 = 60 fok. Erről könnyen meggyőződhetünk, ha illy háromszögöt alkotunk és, vagy három egyenlő oldalt veszünk, vagy három egyenlő szögöt, mindegyiket 60 fokra vévén; az oldalok' egyenlősége a' szögök' egyenlőségét következteti, 's megfordítva.

Előbb menvén, útjában *BC* oldal függőleg fog állani *AB* oldalon, tehát *B* szög egyenes = 90°, vagy is: a' háromszög' egyik szöge 90° és egyenes szög lesz, és másik két szöge is öszvesen 90°; de mivel *AB* és *BC* oldalok egyenlők, áltellenükben levő szögek is egyenlők, vagy is: mindegyik kölünvéve 45 fok. Az olly háromszögöket, mellyekben egyik szög egyenes, *egyenszögű háromszögöknek* nevezzük, bármelly különböző legyen a' másik két szög. Esetünkben egyenszögű háromszögünk egyszersmind egyenszárnyú is, 's azért egyenlő másik két hegyes szöge.

Bármelly állásba jöjjön tehát *BC* oldal, vagy bármelly legyen *B* szögnek nagysága, mennyivel kisebb 180 foknál, épen annyi a' háromszög' két' másik szöge öszvesen, és esetünkben, hol a' háromszögök mind egyenszárnyúak, a' 180 és *B* szög közti különbségnek mindegyik épen felét teszi. Ha p. o. *B* szög 30 fok, a' másik kettő 180 — 30 = 150 's mindegyike 75°.

Ha B szög	60^0	a' más. kettő	$180 - 60 = 120$	's mindegyik	60^0
Ha B szög	80^0	» »	$180 - 80 = 100$	» »	50^0
Ha B szög	100^0	» »	$180 - 100 = 80$	» »	40^0
Ha B szög	178^0	» »	$180 - 178 = 2$	» »	1^0

's a' t.

K. Hogy a' háromszögökben, közönségesen véve, a' háromszögnek öszvese mindenkor 180^0, előre is sejdítem, noha ezt csak azon háromszögökre nézve látom nyilván, mellyek egyenszárnyúak. Tudom pedig ezekről, hogy mentül nagyobb harmadik oldaluk, annál kisebbek a' két véginél levő szögök; más szóval: mentül nagyobb vagy kisebb a' két egyenlő oldal' nyílása, vagy végrel mentül *nagyobb* vagy *kisebb* a' két egyenlő oldalközti szög, annál *kisebb* vagy *nagyobb* a' másik két szög, és ezen két szög minden esetben egyenlő.

Fenn maradt még azon esetnek vizsgálata, mellyben a' háromszög' két adott oldala különböző nagyságú. Melly észrevételeket nyújt ezen eset?

F. A' kérdés visszavisz bennünket az előbbenire. Ha elébbi utunkat megtartjuk, legyen AB egyik, BC másik oldala a' háromszögnek (13 I.). Ha a' kisebbik oldal a' nagyobbikon fekszik, tudjuk három szög nincs és ekkor a' keresendő harmadik oldal egyenlő a' két adott oldal különbségével, vagy is: $AC = AB - BC$. Tudjuk pedig, hogy ha a' harmadik oldal nem nagyobb mint ezen különbség, a' háromszög lehetlen. Itt csak más szókkal fejeztük ki elébbi tételünket, mert a' végkövetkezés mindég csak ugyan az, hogy t. i.: két oldalnak öszvevéve mindenkor nagyobbnak kell lenni' a' harmadiknál, hogy a' háromszög lehető legyen. Ha p. o. a' két adott oldalnak egyike 7, másika 4 hüvely, lehetetlen háromszögöt alkotni míg a' harmadik oldal nem nagyobb $7 - 4 = 3$ hüvelynél, de akkor is lehetetlen, ha a' harmadik oldal $7 + 4 = 11$ hüvely vagy ennél nagyobb, mert mind két esetben az oldalok egy vonalba esnek és tért nem foglalhatnak.

Ezt előre bocsájtván mondom hogy 13 Iban a' keresett harmadik oldal, az adott két oldalközti különbség, azon szempillanatban, mellyben *BC* oldal mozdulni kezd. Legkisebb mozdulással már nagyobb lesz ezen különbségnél és addig nő (félfordulása végéig), míg a' két oldal öszves hosszát elérte. Eddigi észrevéteinket könnyen alkalmazhatjuk ezen esetünkre is.

K. Látom is mint nő harmadik oldalom *BC* mozdulásával, és hogy növésében először eléri a' kisebbik oldal (*BC*) nagyságát, továbbá pedig *AB* nagyságát is, és mind két esetben egyenszárnyú háromszögre találok; szinte így lesz egyszer utjában *BC* függőleg *AC* harmadik oldalon, valamint fele útján *AB* oldalon 's így két egyenszárnyú és két egyenszögű háromszögre találunk. Kivévén ezen 4 esetet, minden egyéb itt származtatott háromszögnek oldalai és szögei különbözők.

Tudom végre hogy mindegy, akar a' kisebbik oldalt fordítom a' nagy körül, akar a' nagyot a' kisebbiken, mert a' származtatott háromszögök nem változnak, vagy is, uj esetet nem mutatnak; legfeljebb, hogy a' harmadik oldal ekkor a' félkörön belül esik, nem pedig kül mint elébb. Ide írom 14I. alatt ezen megfordított esetet, nem végeztetvén *AB* vonalnak fele útját.

Ugy vélem, a' háromszögök nem mutatkozhatnak olly alakokban, mellyeket eddigi tekinteteink magukba nem foglalnának 's minden lehető változásaikat ismerjük?

F. Valóban a' háromszögök alakjára nézve semmi uj észrevételt nem adhatunk eddigi vizsgálatainkhoz.

Szem előtt tartván hogy, bármelly nagyságú legyen a' háromszög, tulajdonai a' legnagyobbaknak is szinte azok, mellyek a' legkisebbeké. Összevevén eddigi észrevéteinket, következőleg szoríthatjuk egybe azokat.

1-szőr. A' háromszögök csak hat részeikben változhatók, mert csak hat részből, az az: három oldalból és három szögből vannak összetéve.

2-szor. Három vonal csak akkor zárhat be tért, vagy alkothat háromszögöt, ha kettejének összese nagyobb a' harmadiknál, vagy megfordítva: ha egyedül véve egyik sem nagyobb mint a' másik kettő összesen, és egyik sem kisebb, de nagyobb mint a' másik kettőközti különbség.

[20] 3-szor. Az oldalokra nézve, valamennyi változhatás három különböző esetbe foglalható. Az oldalok vagy mind hárman, vagy csak ketten közűlök egyenlők, vagy végre mind három különböző. Az elsők *egyenoldalúak*, a' másikak *egyenszárnyúak*, az utobbiak végre *egyenetlen*, vagy *különböző oldaluak*.

[21] 4-szer. A' háromszögöknek szögei öszvesen 180 fokot vagy két egyenes szögöt tesznek. Mindegyik szög változhatik 0tól 180ig, és ekkor a' másik két szög összevéve akkora, mennyi hibázik az első szögben 180 ból.

A' szögöknek is három nemük van; vagy *hegyesek*, vagy *egyenesek*, vagy *tompák*, 's a' háromszögök eszerint neveztetnek. *A' hegyes szögű* háromszögben mind három szög hegyes; az *egyenszögű* háromszögben két hegyes szög van, valamint a' *tompaszögű* háromszögben is, hol a' tompa szög 90 fokot felülhalad.

5-ször. Egyenlő oldalok elleniben egyenlő szögök állanak, mert mindegyik oldal a' másik két oldal nyílását zárja, egyenlő nyílású szögök pedig egyenlők. A' nagyobb oldalok' átelleniben tehát nagyobb szögök, 's megfordítva a' kisebb oldalok elleniben kisebb szögök állanak.

Tekintsük a' háromszögöket egymáshoz hasonlítva.

alkothat háromszöget, ha kettőjének összege nagyobb a' harmadikénál, vagy megfordítva: ha egyenkint véve egyik sem nagyobb mint a' másik kettő összesen, és egyik sem kisebb, de nagyobb mint a' másik kettőjének különbsége.

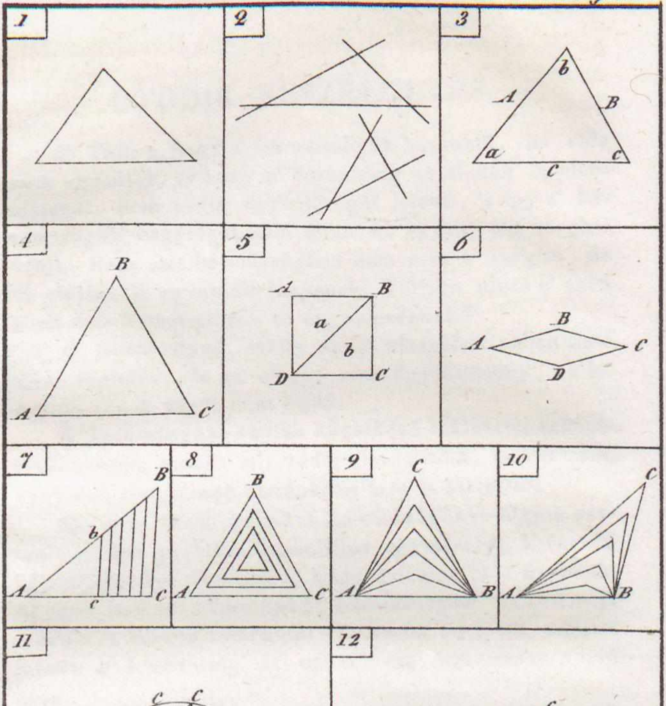
[20] 3-szor. Az oldalokra nézve, valamennyi változatás három különböző esetbe foglalható. Az oldalok vagy mind hárman, vagy csak ketten közülök egyenlők, vagy végre mind hárman különbözők. Az elsők egyenoldalúak, a' másikak egyenszárúak, az utóbbiak végre egyenetlen, vagy különböző oldalúak.

[21] 4-szer. A' háromszögeknek szögei összesen 180 fokot vagy két egyenes szöget tesznek. Mindegyik szög változhatik 0tól 180ig, és akkor a' másik két szög összevéve akkora, mennyi hibázik az első szögben 180hoz.

A' szögöknek is három nemök van; vagy hegyesek, vagy egyenesek, vagy tompák, 's a' háromszögek ezek szerint neveztetnek. A' hegyes szögű háromszögben mind három szög hegyes; az egyenesszögű háromszögben két hegyes szög van, valamint a' tompaszögű háromszögben is, hol a' tompa szög 90 fokot felülhalad.

5-ször. Egyenlő oldalok ellenében egyenlő szögek állanak, mert mindegyik oldal a' másik két oldal nyílásának zárja; egyenlő nyílású szögek pedig egyenlők. A' nagyobb oldalok ellenében tehát nagyobb szögek, 's megfordítva a' kisebb oldalok ellenében kisebb szögek állnak.

Tekintsük a' háromszögeket egymáshoz hasonlítva.


1
2
3
b
A
B
a
c
C
4
B
A
C
5
A
B
a
b
D
C
6
B
A
C
D
7
B
b
A
c
C
8
B
A
C
9
C
A
B
10
C
A
B
11
C C C C
A
B
12
C C C C C
A
B
13
C C C C C C C
A
B
14
B B B B B B
C
A

ÖTÖDIK BESZÉLGETÉS.

K. Tudom hogy a' háromszögök hasonlók, ha szögeik egyenlők, és hogy a' *hasonlóság* az alakok' egyformaságát, nem pedig egyenlőségét jelenti, 's igy a' háromszögök' nagyságát nem illeti. Az egyenlőség megkívánja, hogy két háromszögben nem csak a' szögök, de az oldalok is egyenlők legyenek. Vallyon nincs e' ezen kivül más ismertető jele az egyenlőségnek?

[23] *F.* Nincs ollyan, melly eddigi vizsgálatainkban nem lenne foglalva, 's ha eléggé nem figyelmezünk, az ismétléseknek végét nem érjük.

A' tudománynak ezután következő tekintetei szünetlenül számba veszik mit eddig vizsgáltunk, és felteszik, hogy mit vizsgáltunk elménkben meg is tartottuk.

Mivel a' többi alakokat háromszögökbe fogjuk osztani, ezeket gyakorta hasonlítjuk egymásközt, keresvén egyenlőségeket. Bizonyos, hogy tetemes időt nyerünk, ha nem kell a' hasonlítandó háromszögök' valamennyi oldalait és szögeit méregetni; keressük fel tehát, miként jutunk a' hasonlóság' és egyenlőség' ismerésére rövid úton.

Egyenlő, először, két háromszög, *ha egyik a' másikat tökéletesen bétakarja, vagy béfedi.* De ezt már ugy is tudjuk, mert nem mond egyebet mint azt, mit már említénk, hogy: ha egyiknek oldalai akkorák, mekkorák a' másiknak oldalai, a' két háromszög egyenlő.

Két egyenlő háromszög pedig természetesen összeillik, mint ha csak egy lenne, valamint hogy három vágással 8, 16 és még több egyenlő háromszögöt vághatok ki papirosból ha ezt 8 vagy 16-szor hajtottam össze.

Egyenlő, másodszor, két háromszög, ha *mindegyikben két oldal és ezen két oldal közt levő szög egyenlő.*

Ezt is tudjuk, mert a' kérdés igy áll. Adva van két oldal és a' köztük levő szög (tehát a' két oldal' hossza és nyílasa) mellyik a' harmadik oldal 's hány illy háromszög lehető? Nyilván, hogy csak egyetlen egy illy háromszög lehető, vagy hogy, csak egy oldal felelhet meg két más oldal valamelly bizonyos nyílásának. Legyen p. o. 1 Iban az adott két oldal *AB* és *AC* és a' köztük levő szög *a*, nem de adva van általok a' harmadik oldal is, melly természetesen következik, ha *C* és *B* pontokat vonallal egybekötöm? Bárhányszor írjuk oda ezen két oldalt köztük levő *a* szöggel, valamennyi egyenlő lesz, és bizonyosan egyenlő a' harmadik természetesen belőllök következő oldal is: hogy ezen felül a' másik két szög is bizonyos, nyilván, mert bizonyos oldaloknak átellenében vannak.

Mutassuk meg ezt egy más Idomon.

Legyen 2 I valamelly egyenszárnyú háromszög, hol eszerint $AC = BC$.

Ha ezen háromszögöt kettévágjuk *), (a' vágó vonal tudjuk *AB* talpot is, valamint *C* szögöt épen két részbe osztja) két egyenlő háromszögünk lesz, 's mindegyik fele az előbbinek.

Megjegyzem itt, hogy ha egyenszárnyú háromszögöt vágunk ketté, a' vágó vonal függőleg áll a' talpon és mind két felén egyenes szögöt képez. Ha talpát vágom ketté és középpontjára függőt írok, ez szükségesképen *C* szögöt is kettévágja, vagy is, a' háromszög' csucsát éri.

A' két uj háromszögben tehát (mellyet *a* és *b* által jelöltünk), *CD* vonal mindegyiknek egyenlően oldala, talpok is egyenlő, mert $AD = DB$'s mindegyik *AB* nek fele, *AC* végre tudjuk egyenlő *BC* vel tehát a' két háromszög' mind három *egymásnak megfelelő* oldala egyenlő.

*) Papirosból vágván ki az alakot, a' bizonyítván kézzelfogható.

A' szögökre nézve pedig, *D* pontnál mind két háromszögben egyenes szög áll, *C* szög felezve levén, mind két háromszögben egyenlő; *A* és *B* szögök végre egyenlők, mert egyenlő oldaloknak vannak átellenében. Meg lévén eszerint bizonyítva, hogy a' két háromszögöknek oldalai, szinte mint szögei egyenlők, következik, hogy a' két háromszög is egyenlő.

Egyenlő harmadszor két háromszög, ha *egyik oldal és a' mellette levő két szög egyenlők a' két háromszögben.* Ez ismét természetes, mert ha valamelly oldal két végsőpontjára bizonyos szögöket írunk, a' másik két oldal hossza természetesen következik, mert az adott két szög az oldalok hajlását és így nagyságát következteti [17] [18].

Ki tagadná p. o. hogy ha (31ban) *AB* oldal és a' rajta lévő két szög *a* és *b* adva vannak, csak egyetlen egy háromszög lehető?

A' szögök' nagysága tudjuk az oldalok' irányát határozza, 's ha a' kijelölt oldalokat vonjuk, ezek csak egy pontban vághatják egymást keresztül 's vágáspontjok a' háromszög csucsa lesz.

Második Idomunkból minden két háromszögközti egyenlőségnek bizonyítványát vezethetjük, 's ahoz visszafordulván mondjuk, hogy ha *a* és *b* két háromszögben a' talpok *AD* és *BD* és az ezeken lévő két szög *A*, *D*, és *B*, *D* egyenlők, a' háromszögök is egyenlők. Valóban, tudjuk hogy *D* szög mindkettővel közös, *A* és *B* szögök, valamint *AD* és *BD* talpok egyenlők, tehát *ACD* háromszög egyenlő *BCD* háromszöggel.

K. A' háromszögök közti egyenlőségnek bizonyos jeleit ismervén, könnyen biztosíthatjuk a' háromszögök egyenlő és hasonló léteket. Nemde azt tekintjuk ezután, miként méretnek a' háromszögök?

F. Megvizsgálván a' háromszögök' tulajdonit, alakjait, nemeit és változhatóságait, valóban haszonvételek, vagy is alkalmazások következik; de mivel haszonvételek főképen a' *térméresnél* mutatkozik 's ezen tekintetben a' többi alakokkal szoros egybekötésben vannak, a' kör után fogjuk térméréseket elővenni, most pedig csak ugy tekintsük a' háromszögöket, mint *szögmérőket*, vagy inkáb, mint részeit a' többszögű alakoknak.

K. Vallyon nem lehetne rajz által megmutatni, hogy a' háromszögöknek három szöge összesen véve épen 180°?

F. Rajz által, valamint ollóval is könnyen megbizonyíthatni, hogy a' három szög együttvéve két egyenes szög 's csakugyan különböző tekintetek reá-vezetnek.

Irjunk p. o. bármelly háromszögöt, vagy vágjunk ki egyszerre ollóval is papirosból, millyen a' 4-dik Idomban kijelölve van. Osszuk be vonalokkal, vagy vagdaljuk le három csucsát, mint kijelölve van *a*, *b* és *c* kis háromszögök által. Rakjuk egymásmellé a' szögöket, mint 5 Idomban, 's összesek bizonyosan két egyenes szög, vagy is, a' három különös szög egyenes vonalba esik. Példánkban háromszögünk' három szöge vagy csucsa 0 betűnél üt egybe, és az $a+b+c$ szög $=2$ egyenes $=180°$.

Vegyünk most valamelly egyenoldalú háromszögöt mellyben tudjuk mind három szög is egyenlő, és állítsuk azt valamellyik csucsára, mint 6 Idomban történt, és huzzunk *c* pontjára *AB* oldalával egyenirányú *DE* vonalat. Egyenirányú vonalok tudjuk [13] egyenlő szögöket zárnak be, tehát *e* szög egyenlő *a* szöggel, valamint egyenlő *d* szög *b* szöggel, *c* szög a' nélkül is ott lévén mint egyenlő maga magával, természetes, hogy $a+b+c$ szög egyenlő $d+c+e$ szöggel 's minden esetre $=180°$. Ezen példa bármelly háromszögre alkalmazható. Ha a' rajzot megforditjuk, 7-dik Idomunkban szinte ezen bizonyítványra találunk, 's ekkor a' felülvont *DCE* vonalra vittük a' három különös szögöt.

Ha 8-dik Idomunk szerint akarjuk a' bizonyítást adni, hosszabbítsuk *AC* oldalát *E*ig, 's vonjunk *C* pontjából egyenirányút *AB* oldalához. Természetesen következik, hogy *a* szög = *e* szög, valamint *d* szög = *b* szög, mert *CD* vonal' hajlása változatlan ugyan az *AC* és *BC* oldalokhoz melly *AB* oldalé, tehát a' mellette levő szögök is ugyan azok; *c* szög végre ott maradván következik, hogy $a+b+c$ szög $=c+d+e$ szög $=180^{0}$.

A' rendes négyszögben végre, millyen 9-dik Idomunk, tudjuk 4 egyenes szög van, mert az oldalok valamennyien függőleg állanak egymáson; ha ezen idomot bármelly rézsvonal által *AD* vagy *BC* irányban kettévágjuk, két tökéletesen egyenlő háromszögünk lesz; minthogy 4 egyenes szögöt kettévágtunk, lesz fele két egyenes, tehát mindegyik háromszög' összes szöge két egyenes.

A' körnél és a' többszögöknél még számtalan bizonyítványára akadunk ezen fontos tételnek, mert természetesen folyik a' háromszögök' tulajdoniból.

K. A' vonalok által békerített geometri alakokban tudom szögök is találkoznak. Vannak e' a' többoldalú alakoknak különös neveik, 's melly számmal vannak a' szögök bennük?

[24] *F.* Ha valamelly idom, több mint három vonalból van összetéve *sokszögnek, polygonnak* vagy *sokoldalúnak* neveztetik.

Mint az oldalok' száma nő, szintugy nő a' szögök' száma, hol több az oldal több a' szög is, és csakugyan *minden egyenes vonalok által alkotott Idomban a' szögök' száma egyenlő az oldalok' számával.*

Egyaránt nevezhetjük tehát az illy alakokat többszögű vagy több oldalúaknak.

A' több oldalú vagy többszögű idomok görög nevekkel jelöltetnek oldalaik' száma szerint, 's noha nekünk ezen nevezetekre szükségünk nincs, tudván, hogy az idomok nevét oldalaik' vagy szögeik' száma adja, még is ide írok közűlök néhányat azon okból, hogy ezek se legyenek előttünk ismeretlenek.

A' három oldalú idom, tudjuk, háromszög vagy három oldal.

A' 4 oldalú idom *négyszög* vagy négyoldal
az 5 „ » *pentagon*, ötszög vagy ötoldal
a' 6 „ » *hexagon*, hatszög vagy hatoldal
a' 7 „ » *eptagon*, hétszög vagy hétoldal
a' 8 » » *octagon*, nyolczszög vagy nyolczoldal
a' 9 „ » *enneagon*, kilenczszög vagy kilencz-oldal
a' 10 » » *decagon*, tízszög vagy tízoldal
a' 12 » » *dodecagon*, tizenkétszög vagy tizenkét oldal
's a' t.

K. Látom, hogy a' négyszög következik közelebbi vizsgálataink tárgyául, mint legegyszerűbb a' háromszög után. Tudom, hogy már ugyanazon 4 vonal által is számtalan négyszög alkotható. Nemde iszonyú lehet a' különböző négyszögök száma, ha az oldalok nagysága is változik?

F. A' négy és általjában többszögök' minden lehető alakját és változásait tekinteni mostani czélunk nem lehet, és a' mellett, hogy sok időt vesztenők, a' haszon, mellyet belőle húznók, csekély lenne. Elég tudnunk hogy, bármelly legyen alakjuk, azokat mindenkor háromszögökbe oszthatjuk, 's ezeket ismervén általuk megmérhetjük. Ha a' négyszögöket választjuk most előleges vizsgálataink tárgyául, ezek közül csak a' legnevezetesbeket 's ugy szolván a' közönséges haszonvétben leginkáb előfordulókat tekintjük.

A' 9, 10, 11, 12, 13 és 14 idomokban vannak ezen nevezetesb négyszögök képviselve, 's mindegyike két háromszögbe osztható. Tekintsük ezeknek fő tulajdonit.

Ha valamelly négyszögöt, egyik szögéből a' másikhoz húzott vonal által két részre osztunk, ezen osztó vonalat *rézsvonalnak*, *keresztvonalnak* vagy *diagonálnak* nevezzük. Minden négyszögben két illy keresztvonal lehető, mert a' négy szög közül kettő kettő áll egymás ellen részsútosan.

Idomainkban ezen keresztvonalok pontokkal és mindegyikben *AD* és *BC* betükkel vannak jelölve. Természetes hogy, ha csak egyiket vonjuk, négyszögünk két háromszögbe oszlik; ha pedig a' másodikat is oda írjuk, a' négyszög négy háromszögbe oszlik.

K. A' 9 és 11 számok alatti idomokat már ismerem.

A' 9-dik tudom egyenszögű négyszög, mert oldalai függőleg állanak egymáson, és ezen felül egyenlők is.

A' 11-diknek is egyenlők oldalai, de rézsútt állanak és csakugyan két tompa és két hegyes szögöt képeznek. Nemde nevezhetjük megkülönböztetésül az elsőt egyenszögű, a' másodikat rézsszögű négyszögnek?

F. Mint láttuk, a' második csakugyan az elsőből származik, 's tőlle csak alakjában különböző, vagy is, szögeiben. Ha tehát mondjuk, hogy az első *egyenes*, a' második *rézs-négyszög*, a' nevezet magában helyes lesz, de a' számtalan egyenes és rézs szögöktől azért ezeket meg nem különböztetjük. Igy p. o. a' 10-dik és 12-dik Idomok szinte egymásból származnak, 's szinte egyenes és rézsszögű négyszögök, mert a' 10-dik idomban az oldalok függőleg állanak egymáson, a' 12-ben pedig rézsútan. De a' 10 és 12-dik idomban csak két két egymás átelleníben álló oldalok egyenlők egymással, holott elébbi két négyszögünkben mind négy oldal egyenlő volt. Ha tehát az előbbieket *egyenoldalú* négyszögöknek nevezzük, emezeket *különböző* vagy *kétféle oldalúknak* kell neveznünk, vagy is: *hosszított négyszögnek*, mit a' geometria *Parallelogram* névvel jelöl. De ezáltal az első még sincs szorosan megkülönböztetve, mert a' 11-dik idom is *egyenoldalú*, noha szögei nem egyenesek; szükséges tehát, hogy tulajdon nevét keressük, 's ha olly négyszögről szóllunk, mellynek oldalai mind egyenlők és függőleg állanak egymáson, ezt *tökéletes négyszögnek* nevezzük, kikerülvén latán nevezetét, melly, csupán csak reá alkalmazva *Quadrat*.

[25] *K.* Észrevéteinket magam is tudom folytatni:

A' két első négyszögben (9 és 10) *a' két keresztvonal egyenlő, minden más négyszögben különböző.*

A' tökéletes négyszög adva van és bizonyos, ha egy oldala ismeretes, mert ezzel 4 egyenlő oldalt függőleg állítok egymásra, hogy 4 szöge is egyenlő legyen.

A' hosszított négyszög ismeretes, ha két oldala — a' hosszabbik és rövidebbiknek egyik egyike — *ismeretes*, mert a' másik kettő ezekkel egyenlő és függőleg áll egymáson.

A' rézsútos egyenoldalúban elég egy oldalt és a' rajta lévő szögöt ismerni, mert a' többi oldal egyenlő az adottal és párosával egyirányú, a' többi szög tehát természetesen következik az adottból, mert az egymás ellenében álló szögök egyenlők.

A' hosszított rézs-négyszögben, egy hosszú és egy rövid oldal 's a' köztök lévő szög kivántatik; a' többi ezekből következik.

Melly észre vételeket tehetünk a' két utolsó (13 és 14) négyszögre nézve?

[26] *F. Trapéznak* neveztetik olly négyszög, *mellyben két egyirányú oldal van, bármellyek legyenek az oldalok' hosszaságai, bármellyek a' szögök.*

Ha egy szög benne egyenes, a' trapéz *egyenesszögű*; de ha egy szög egyenes, azonnal következik, hogy még egy egyenes szögnek kell benne lennie, mert két oldala egyirányú. 13-dik Idomunk illyen egyenesszögű trapez.

Ha valamelly négyszögben mindegyik oldalnak más más az iránya, akkor neve *Trapezoida* 's ebben nincs két egyenlő szög. Illyen a' 14-dik Idom.

K. A' tökéletes négyszögben tudjuk 4 egyenes szög, vagy is, 360° van.

Vallyon minden négyszögben 4 egyenest tesz a' szögök' összese?

F. Ha minden négyszög két háromszögbe osztható, mi tudjuk mindenkor lehető, bizonyos, hogy minden négyszögben 360°, vagy 4 egyenes a' szögök' összese, mert mindegyik háromszögben két egyenes szög van, és kétszer 180° = 360°.

K. Melly észrevéteket tehetünk az ötszögökre nézve?

[27] *F.* Ide rajzolok két ötoldalút (15 és 16 idom alatt).

Természetes hogy, mentül több valamelly idomnak az oldala, annál több változás lehető, mert minden egyes oldal vagy szög változható, 's igy az egész alak is. Bizonyos annyi, hogy bármelly alakja legyen az ötszögnek, vagy más szóval, bármelly irányban álljanak egyes oldalai, mindenkor három háromszögbe osztható az által, ha valamellyik szögéből vagy csucsából a' másik két átellenében lévőhöz vonalokat huzunk, mint ez 16 és 17-dik idomokban történt. Nyilvánvaló, hogy mindegy, bármellyik szögét válosztjuk az öt közül kiindulási pontnak, a' béosztás mindenkor hasonló példánk' béosztásához, csak hogy azon szögöt válosztjuk, mellyből a' béosztás alkalmasabb, vagy is, mellyből helyesebb alakú háromszögök következnek.

Az ötszögöt — valamint minden többszögöt — *rendes* ötszögnek nevezzük akkor, ha az *oldalok mind egyenlők*; minden egyéb ötszög *rendetlen*, vagy csak egyszerűen, *ötszög*. Rendes többszögnek, többoldalnak, vagy egy szóval, rendes alaknak nevezzük közönségesen mindazon geometri idomokat, mellyekben az oldalok, — bármelly számmal legyenek ezek — valamennyien egyenlők.

Az oldalok' egyenlőségéből pedig tudjuk a' szögök' egyenlőléte következik, 's igy a' rendes alakokban a' szögök is mind egyenlők, 's egyik akkora mekkora a' másik.

K. Mivel az ötszögök három háromszögbe oszthatók, bizonyosan szögeiknek öszvese háromszor két egyenes, vagy is, 3 × 180 = 540° lesz, mert annyi találtatik három háromszögben. Nem de természet szerint lehet közönségesen állítani, hogy valamelly többoldalú idom' összes szögei annyiszor tesznek két egyenest, hány háromszögbe osztható?

F. Valóban ugy van. Minden hatszögöt p. o. 4 háromszögbe lehet osztani, mint ezt 17 és 18-dik idomban mutatjuk. Négy háromszög' összes szögei pedig 4-szer két egyenest, vagy is 8 egyenest tesznek. Ha vizsgálatainkat nem is terjesztjük most különösen a' hatoldalú után következő többoldalúkra, minden bíztossággal következtethetjük hogy: *minden több szög, melly a' háromszög után sorjában következik, egy egy háromszöggel nő, vagy is, egy háromszöggel többe osztható mint az előtte álló*; igy p. o. a' négyszög két, az ötszög három, a' hatszög négy, a' hétszög 5 háromszögbe oszlik; és mivel minden háromszögben két egyenes szög foglaltatik, *mindegyik a' sorban következő sokoldal' összes szöge, két egyenes szöggel nő.* Ha néhány számokat ide írok, következőleg állanak a' háromszögök' és összes szögök' számai az oldalok' számával.

3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12 oldalú,
1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10 háromszögbe oszlik
2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18, 20 egyenes szögöt tart.

K. Azt veszem észre hogy, valamennyi alakunkban csak azon szögöket tekintének, mellyek az oldalokon *belül* esnek. Vallyon nem lehet e' a' külső szögöket haszonnal visgálni, mellyek támadnak, ha valamelly idom oldalait meghosszabbítjuk?

[28] *F.* A' *külső szögök* csakugyan ugy támadnak, ha (mint ez 19 és 20dik idomainkban történt) az oldalok meghosszabbíttatnak. A' háromszögben *a, b* és *c* külsőszögök, az ötszögben *a, b, c, d, e* külsőszögök támadtak. Szembetünő, hogy külsőszög is szinte annyi lesz, mennyi a' belső, sem több sem kevesebb.

Azt állítom hogy, *bármelly legyen valamelly idomban a' külső szögöknek száma, ezek összevéve mindenkor négy* *egyenest tesznek, és sem többet, sem kevesebbet.* Ezt pedig következőkép bizonyítom.

Egy belső és egy külső szög összesen véve két egyenes, mit már számtalanszor emlitettünk, mert a' két szög egymásnak egészítője [11].

Minden alakban, bármelly legyen oldala' vagy szögeinek száma, annyiszor van tehát két egyenes szög — összvéve a' külső és belső szögöket — hány rajta a' szög, vagy oldal.

Ismervén a' külső és belső szögök' összesét, ismervén a' belső szögök' összesét különvéve, könnyen meglelem a' köztük lévő különbséget, melly a' külső szögök' összesét adja. Ezt a' háromszögre alkalmazván, van három külső és három belső szög: összesük 3szor két egyenes $=$ 6 egyenes; a' belső szögök' összese két egyenes, 's igy: $6-2=4$ egyenes a' külső szögök' összese.

A' négyszögben $4 \times 2 = 8$ egyenes külső ès belső szög van; de a' belsők' száma 4 egyenes, tehát a' külsőké is 4 egyenes.

Az ötszögben $2 \times 5 = 10$ egyenes szög a' külső és belső szögök' összese; de a' belsők különvéve 6 egyenest tesznek 's marad igy a' külsök összesére 4 egyenes.

Szinte a' hatszögnek 12 egyenes szögéből a' belső szögök' összesét, 8 egyenest levonván, marad a' külső szögökre 4 egyenes, és ez bármelly sokoldalra nézve változatlan igy van.

K. Ebből nyilván látszik hogy, mentül kisebbek a belső szögök, annál nagyobbak a' külsők, és megfordítva. Mint a' belső szögök' száma szaporodik, a' szögök nagysága is nő, mert az oldalok' nyílása minden uj hozzájáruló oldallal nagyobb nagyobb lesz; de mint a' külső szögök is szaporodnak, szükségesképen kisebbülnek; és csakugyan azon arányban fogynak, mellyben nőnek a' belsők, mert, mint tudjuk ezeknek egészítőji maradnak; összesük e' szerint, bármelly legyen számuk, soha sem lehet nagyobb sem kisebb mint négy egyenes.

Abból is hogy, *minden sokoldal annyi háromszögbe osztható, mennyi oldalainak vagy szögeinek száma ha ebből kettőt elveszünk*, könnyen meglelhetjük a' belső szögök' összesét, mert ez a' háromszögök' száma kétszer véve.

Igy p. o.

a'	4	szög	4 — 2 = 2	háromszögbe
az	5	»	5 — 2 = 3	»
a'	6	»	6 — 2 = 4	»
a'	8	»	8 — 2 = 6	»
a'	10	»	10 — 2 = 8	»
a'	13	»	13 — 2 = 11	»
a'	15	»	15 — 2 = 13	»
a'	24	»	24 — 2 = 22	»
a'	30	»	30 — 2 = 28	»
a'	64	»	64 — 2 = 62	»

's a' t., 's ha közönségesen mondjuk hogy, valamelly sokszög' oldalainak száma n által van kifejezve, melly n betű alatt bármelly egész számot gondolhatunk, az illyen sokoldal $n-2$ háromszögbe osztható. Ha pedig a' háromszögök' számát tudjuk, a' szögök' összesét is tudjuk, mert ez egyenlő két egyenessel annyiszor véve, hány a' háromszög és utolsó közönséges kifejezésünkre alkalmazva $=(n-2)$ 2 egyenes.

Ha itt p. o. $n=32$, lesz a' kifejezés (32—2) 2 egyenes, vagy is: 30 szor két egyenes, mi $=60$ egyenes; tehát a' 32 oldal 30 háromszögbe oszlik és szögeinek összese 60 egyenes, mit az által is meglelünk, ha a' belső és külső szögök' összeséből 4 egyenest levonunk, melly 4 egyenes tudjuk a' külső szögök' összese. Ezen esetben mondjuk hogy, valamelly n oldalú vagy szögű alakban a' külső és belső szögök' összese $=2n$ egyenes; marad tehát a' belsőkre $2n-4$ egyenes. Ezt 32 oldalunkra alkalmazva, lesz a' külső és belső szögök' összese $32\times2=64$; a' belsőké egyedül $64-4=60$ egyenes, mint elébb.

Vallyon alkalmazhatni e' ezen törvényeket olly idomokra, mellyekben a' szögök a' helyett hogy *kifelé* állanának (mint valamennyi, mellyet eddig tekintének), *befelé* fordulnak?

A' három oldalú alakban lehetetlen valamelly *bészökő* szög, de a' négy oldalúban már egy szög benn állhat az alakban, és a' több oldalúkban több. Felírok ide illy 4, 5 és 6 oldalú idomokat, mellyeken bészökő szögök láthatók; szemlélhető hogy mindhármat (21, 22 és 23 idom) rendesen beoszthatom háromszögökbe, tehát a' belső szögök összese nem változott a' bészökő szögök által; de miként van itt a' külső szögök' összese?

F. Ezeknek sem változik összesük és mindenkor négy egyenes, akar belül hosszabbítsuk az oldalokat, akar kivül, mint ezt 23 Iban tettük; ha mindegyik oldalt kül hoszabbitjuk, kettő keresztülvágja egymást minden bészökő szögnél, mint *a* és *b* szögöknél 23 Iban.

K. Ha a' sokoldalúk' szögeinek összesét ismerjük, természetesen mindegyik egyes szög' nagyságát ismerjük a' rendes alakokban, mert ezek mind egyenlők?

[29] *F.* Bizonyosan *megleljük valamelly rendes alak' egy egy szögének nagyságát, haszögeinek összesét oldalai' vagy szögei számával elosztjuk.* A' talált részes, egy szögnek nagysága.

Az egyenoldalú vagy rendes háromszőgben p. o. a' szögök összese 180^0 egy szög tehát $180 : 3 = 60^0$.

A' rendes négyszögnek egy szöge $360 : 4 = 90^0$.
» » ötszögnek » » $540 : 5 = 108^0$.
» » hatszögnek » » $720 : 6 = 120^0$.
» » hétszögnek » » $900 : 7 = 138^4/_7{}^0$.

és igy következik továbbá.

a' rendes 8 szögnek mindegyik szöge 135^0.
» » 9 » » » 140^0.
» » 10 » » » 144^0.
» » 11 » » » $147^3/_{11}{}^0$.
» » 12 » » » 150^0 's a' t.

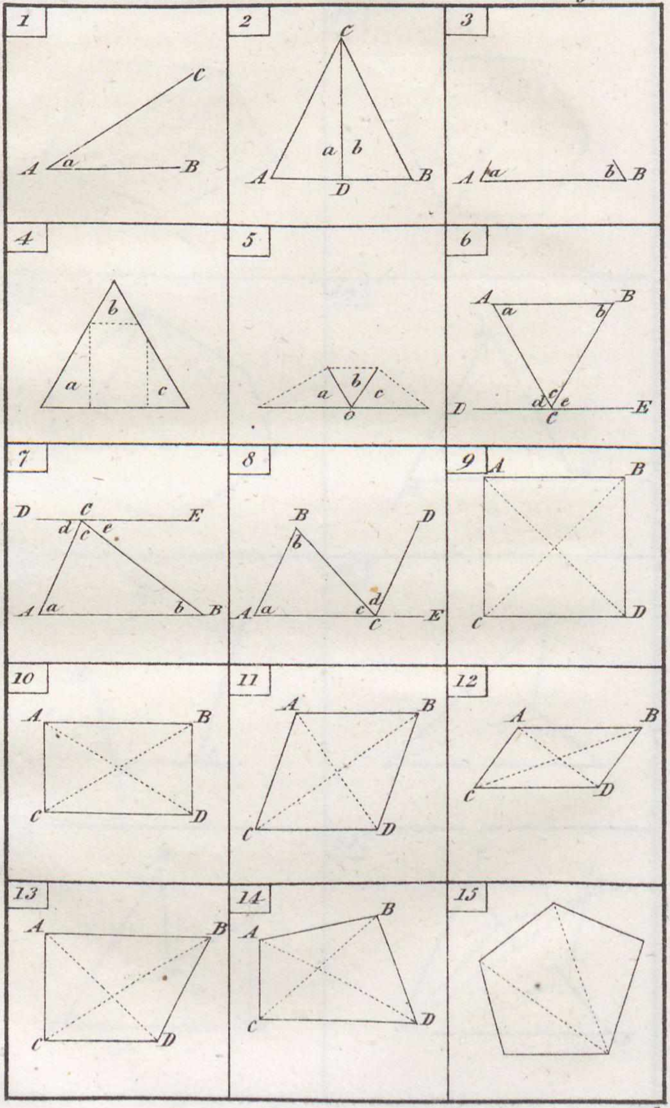
Látjuk mint nőnek a' szögök az oldalok' számával, de észrevehető hogy, mentül nagyobb az oldalok száma, annál lassabb a' szögök' növése, vagy is: a' 12 oldalún túl a' különbségek már kicsinyek, holott a' 3, 4 és 5 oldalúk közt tetemesek. P. o. a' négyoldalúnak egy szöge 90^0, az 5 oldalúnak 108; a' kettőközti különbség 18 fok, holott a' 11 és 12 oldalúk-közti különbsége a' két szögnek csak $150 - 147^3/_{11} = 2^8/_{11}$.

A'120 oldalban egy szögnek nagysága=21240:120=177^0,
a' 128 » » » » =22680:128=$177^3/_{16}{}^0$
és a' különbség csak $^3/_{16}$ fok, noha az oldalok' száma 8al szaporodott.

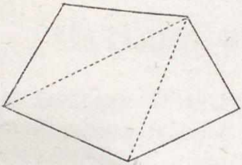
Ha valamelly belső-szögöt ismerünk, belőle természetesen következik a' külső szög, mert annak egészítője 180 hoz; igy lesz p. o.

a' 6 szögnek egy külső szöge $180 - 120 = 60^0$,
a' 12 » » » » $180 - 150 = 30^0$,
és a' 120 » » » » $180 - 177 = 3^0$

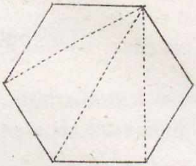
's már innen is látszik, hogy hányszor nagyobb az oldalok vagy szögök' száma, annyiszor kisebbek a' külső szögök.


1
A a B C
2
C a b A D B
3
A a b B
4
b a c
5
b a c o
6
A a b B c d e D C E
7
D C E d c e A a b B
8
B b D d A a c C E
9
A B C D
10
A B C D
11
A B C D
12
A B C D
13
A B C D
14
A B C D
15

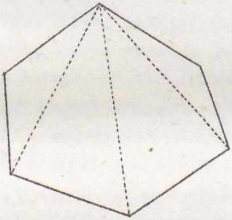
16



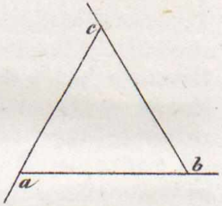
17



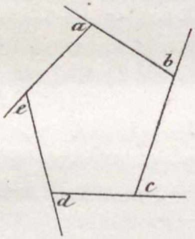
18



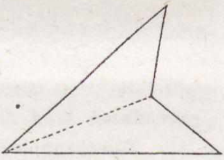
19



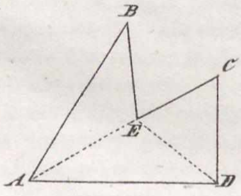
20



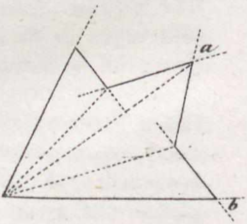
21



22



23



HATODIK BESZÉLGETÉS.

K. Ismervén az egyenes vonalok által alkotott idomokat 's azoknak jelesebb tulajdonit, nem de haszonvétek következik?

F. Minekelőtte alkalmazásaikra mennénk által, tudnunk kell minő és mennyi tért foglalnak az alakok, vagy is, *tértartalmokat, térszínöket* megmérni tudnunk. De mivel, mint már említém, az alakok egymásközt bizonyos egybefüggésben vannak, különösen pedig a' körrel, vizsgáljuk először a' kör' tulajdonit, azután a' kör' viszonyait a' többi alakokkal, így elkészülve könnyebben fordulhatunk a' térméréshez, valamennyi alakot együve vevén.

K. A' kört már tekintének ugyan, de megvallom tulajdoniról alig tudok egyebet minthogy: *minden részeiben egyenlő-görbületű vonal, melly magába ismét visszafordul,* hogy elosztva van fokokba első és másodperczekbe 's hogy végre darabjai a' szögöknek mérőji.

Mit nevezünk körsugárnak?

[30] *F.* Ide írok (1 Idom) egy kört 's bele némelly vonalokat.

A' kör' nagysága tudjuk, köríronk' nyilásátol függ 's mentül nagyobb ez, annál nagyobb kört írunk vele: épen ezen nyílás az, mit *körsugárnak* nevezünk. Ezen egyszerű észrevétel már több jeles tulajdonit mutatja a' sugárnak.

1-ször. A' súgár azon egyenes vonal, melly a' kör' középpontjából a' körvonalra húzatik, illyen sugár idomunkban *CD* vonal, melly *C* középpontból a' körvonal' *D* pontjára huzatott.

2-szor. Minden vonal, melly a' középpontból a' körület valamelly pontjára huzatik, sugár; sugár tehát számtalan lehet ugyan azon körben, és valamennyi egyenlő egymással, mi természetes, mert körvonónk, egyik hegye a' középpontban mozdulatlan levén, midőn a' másik a' körvonalat leírta, egymástóli távolyok változatlan ugyan az és a' körvonal' minden pontjában sugár volt.

Két sugár együttvéve a' kör' *átmérőjének* neveztetik ha, mint Idomunkban *ACB* vonal, egyirányban állanak. Az átmérő leghosszabb vonal melly a' körbe huzható, és a' kör kiterjedését méri. Az átmérő szükségesképen a' középponton megy keresztül és a' körvonalnak két egymáselleniben legtávolabb álló pontját köti össze. Ha tehát a' középponton keresztül egyenes vonallal kötjük össze a' körület' két pontját, ezen vonal mindenkor átmérője a' körnek, és a' kört szükségesképen két egyenlő félbe vágja. Az átmérők is tehát mind egyenlők egymásközt.

Minden egyéb egyenes vonal, melly a' körület' két pontját éri és a' középponton *nem* megy keresztül, *kisebb* az átmérőnél és a' kört két *különböző* darabba vágja azért nevezzük ezen vonalokat *körvágóknak* a' legkisebbiktől fogva a' lehető legnagyobbikig, melly tudjuk már átmérő. Idomunkban *BH* és *EF* vonalok, körvágok.

Eszerint azon kör-részeket, mellyeket *EF* és *BH* vonalok levágnak, *kördaraboknak* vagy *körszeleteknek* nevezhetjük megkülönböztetéséül azon darabnak, mellyet Idomunkban *AB* és *BH* vonalok összesen kivágnak, mert ezen *ABH* darabot *körvágánynak* vagy *körkivágásnak* kell neveznünk.

A' körvonal' darabjait végre, millyenek *AD*, *AH*, *AHE* 's a' t. számokkal szoktuk kifejezni, mint láttuk fokokba és perczekbe osztva. Főrészei a' *félkör* és *körnegyed*. A' félkör *ADB* tudjuk $= 180^0$ ennek fele pedig $AD = 90^0$ a' környegyed, vagy *Quadrans*. Ha az átmérőre függőleg írunk sugárt, mint Idomunkban *AB* vonalon *CD* függőleg áll, a' környegyed mind két felin megvan, és *C* pontnál a' két egyenes szög $= 180^0$, valamint a' félkörület is $= 180^0$, mi előttunk már ismeretes. Ha egyik átmérő áll függőleg a' másikon, a' kör 4 egyenlő részre oszlik, vagy is négy fertályába.

K. Tudom hogy ezen itt említett tulajdonok minden körben változatlan megvannak. Mit nevezünk *ívnek, nyilnak* és különösen *érintő vonalnak,* vagy röviden *érintőnek*?

[31] *F.* Ide írok egy idomot 2 szám alatt. Ebben az *AB* vonal által levágott kördarab neveztetett régi időben *ívnek, ED* vonal pedig *nyilnak* és csupán azon okból, mert ezen alak hasonló a' lövőnyillal. Mi az ívet körvágánynak neveztük 's ezen nevezetet mint helyesebbet megtartjuk. A' nyil pedig nem egyéb, mint a' körvágon középpontjában függőleg álló vonal, 's következő jeles tudajdonnal bír.

Ha valamelly körvágot — millyen *AB* vonal — *felezünk, és középpontjára függőt vonunk, a' függő eléggé hosszítva szükségesképen a' kör' középpontján megy keresztül.* Ebből következik hogy: *minden sugár vagy átmérő, melly valamelly körvágón függőleg áll, ezt szükségesképen két egyenlő félre vágja.* Ezen tulajdona az ívnek hasznos alkalmazást fog mutatni a' kör' alkotásánál, bizonyítása könnyen és természetesen folyik a' két háromszög' egyenlőségéből, melly 2 Iban támadott, mint a' nyil' vágópontját vonalokkal egybekötének.

Ha valamelly egyenes vonal, legyen hossza bármelly, a' körület' valamelly pontját kül éri, *érintőnek, tangensnek* neveztetik. Illyen érintő vonal *FK* 2 Iban. A' körvonalat egyenes vonal *csak egyetlen egy pontban* érintheti, mi természetes, tehát a' körület valamelly pontján csak *egy* érintő vonal lehető.

Minden egyenes vonal, melly az érintőre érintőpontjában függőleg vonatik, a' kör középpontján keresztül megy. Idomunkban *CG* vonal függőleg áll *FK* érintőn. Ebből következik hogy, az érintőn annak érintőpontjában csak a' sugár vagy átmérő állhat függőleg. Ha tehát a' körület valamellyik pontjára érintőt kell vonni, vonjunk ezen ponthoz sugárt 's erre függönyt, a' függöny lesz a' kívánt érintő.

K. Mivel a' körvonalat az egyenes csak egy pontban érintheti, kivévén ha ezt kétfelül keresztül vágja, nem de következik, hogy egyik körvonal is a' másikat csak egy pontban érintheti?

Mit jegyezhetünk meg a' különböző körökrül?

F. Tudjuk hogy a' körök, nagyságokban csak sugárjaik' különblétektől függenek. Ha több körnek ugyanazon középpontja van, mint 3 Iban, ekkor *egypontúak*, *központúak*, és szükségesképen *egyenirányúak* is. Idomunkban, a' nagy körnek sugára *CD*, vagy átmérője *AB* a' kisebb köröket egy vagy két pontban keresztülvágja. Az egyenirányú körökhöz tartozó érintők is egyenirányúak, ha mind ugyanazon átmérőn állanak függőleg. A' legkisebbik kör' érintője *EF* egyszersmind vágója is mindegyik nagyobb körnek.

K. Folytatván tekinteteinket, látom hogy, ha a' körök nem központúak, de középpontjaik ugyanazon vonalon vannak, csak három eset lehető:

1) Vagy érintik egy pontban egymást,

2) vagy keresztülvágják, melly keresztülvágás szükségesképen két pontban történik, vagy végre

3) nem érintik egymást.

4-dik Idomunkban három kört írtam *ABC* egyenes vonalra. *A* körnek középpontja a' vonal közepén, *B* köré *B* és *C* közt, *C* köré épen *C* pontban van.

Az illyen köröket külpontiaknak nevezzük.

A' kis kör *C érintőköre A* körnek, mert azt egy pontjában, *F* ben érinti. *B* kör sehol sem ér *A* körhöz, de abban tökéletesen benn van. *B* és *C* körök végre egymást keresztül vágják.

Nemde ugyan ezen észrevéteket tehetni, ha a' körök távoznak egymástól, az az, kül esnek a' helyett, hogy mostani példánkban belől tettem azokat? És nem lehet e' bizonyosan tudni, melly feltétek alatt érintik vagy vágják egymást a' külponti körök?

F. Alkalmazásunk itt is helyt talál. 5 Iban ismét 3 kört írok, és ezen kivül három körvonal darabot, melyek alatt valóságos köröket gondolhatunk, és mellyek azért nem írattak oda egészen, mert a' kis helyen el nem fértek. Mindezen köröknek középpontjai ugyanazon egyenes vonalon vannak. *a* kört *b* kör érinti, valamint a' körvonalok *AB*, *EF* és *CD*, 's végre az egyenes érintő *HK* egy pontban jönnek össze, a' harmadik *c* kör végre távol esik *a* körtül, de *b* kört keresztülvágja.

Ha valamelly egyenes vonalon kört irtunk, és körírонk változatlan nyílásával több olly köröket, mellyeknek középpontjai az adott vonalon távolabb távolabb állnak, a' körök mindaddig vágják egymást, mig a' kör középpontjának távola egyenlő az átmérővel 's ekkor a' két kör érinti egymást; ebből következik, hogy mihelyt a' két kör távola nagyobb a' dupla sugárnál, többé nem érintődhetnek, de inkáb inkáb távoznak egymástól.

K. Ezt kezemben lévő körvonómmal valósítom, de minden más esetre is alkalmazom, bármelly legyen a' két sugár-közti különbség. Legyen p. o. két sugár adva, egyik nagyobb mint a' másik, és a' körök' középpontjai egyenes vonalban maradjanak. Leírván a' nagyobbik kört, ennek középpontjától a' kisebbik kör' középpontját távoztatom. Ha középpontjok ugyan az, tudom a' két kör központú vagy egyirányú, és a' kisebbik kör mindaddig tökéletesen bennmarad a' nagyobbik körben, míg annyira nem távozott a' két középpont, mennyi a' két sugárközti különbség. Ezen pillanatban még benn lesz a' kisebbik, de már érinti a' nagynak egy pontját, mint 4 Idomban *C* kör *A* kört. Minden mozdulatában vágni fogja ezután a' kis kör a' nagyobbikat, és csakugyan mindaddig, mig a' távoly a' két sugár' összesét el nem éri, melly pillanatban a' kis kör ismét érinti a' nagyot, de most kül, mint 5-dik Idomban *b* kör érinti *a* kört. A' pontnak további távozása tudjuk a' köröket is távoztatja.

Miként lehet az itt mondottat közönségesen kifejezni?

F. Adva legyen mint eléb két sugár *m* és *n*, melly betűk alatt tudjuk bármelly hosszaságú vonalat gondolhatunk. Tegyük fel hogy, m kisebb mint n és hogy a' két kör' középpontja ugyanazon egyenes vonalban marad.

Tekinteteink szerint m kör mindaddig ben marad n körben, míg középpontjának távola kisebb $(n-m)$ nél. Ha ezen távol $= n-m$, vagy is, a' két sugár-közti különbség, akkor a' kisebbik kör belől érinti a' nagyobbikat. Vágja pedig mindaddig m kör n kört, mig a' két középpont távola $n+m$'s ezen pillanatban m kör kül érinti n kört. Ha a' távoly nagyobb mint $n+m$, a' két kör mind inkáb távozik egymástól.

Ha p. o. feltesszük hogy $n=2m$, vagy is, hogy a' nagyobbik kör sugára két akkora mint a' kisebbiké, a' kis kör mindaddig ben marad a' nagyobbikban, mig a' két középpont' távolya $= m$, mert: $n-m=2m-m=m$, 's ha ezen távolyát eléri, érintő lesz. Ezentúl mindaddig vágja, mig a' távoly $3m=n+m$ lesz, mert: $n+m= 2m+m=3m$, 's ekkor ismét érintő, ezentúl pedig a' távoly csak nő.

K. Ha a' sugár vagy átmérő ismeretes, a' kör természetesen adva van. De ha az átmérő vagy sugár helyett valamelly vonal adatik azon megjegyzéssel, hogy valamelly körnek vágója, meglehet e' a' hozzá tartozó kört találni?

F. Ezen feladat' oldása lehetlen, mert a' vágókról egyebet nem tudunk, mint hogy kisebbek a' kör átmérőjénél, és hogy ha azokat kettévágjuk és vágáspontjukra függőt irunk, ezen függő a' kör' középpontján keresztül megy. Azt mondhatom tehát legfeljebb, hogy azon kör, mellyhez ezen vágó tartozik, kisebb nem lehet azon körnél, mellynek átmérője az adott vonallal közel egyenlő; de már előre is láthatni, hogy az ennél nagyobb köröknek száma végtelen nagy és mindegyiknek vágója lehet az adott vonal.

K. Ez elég világos, mert 6-dik Idomban *AB* vonalra, melly vonal feltételünk szerint ezen vágó legyen, csak néhány körvonalat irtam, melly mind hozzátartozik. Ezeknek középpontjai mind *CD* vonalban vannak, melly *AB* vonalon függőleg áll, de rajta végtelen sok pont lehető. Megvagyok győződve, hogy két pont által a' kör nincs bíztosítva, ha ezen két pont nem az átmérő két végpontja. Vallyon bizonyos e' a' kör, ha körületének három pontja van adva?

F. Tudjuk hogy a' körvonal minden részeiben ugyanazon egyforma görbülésű, 's ha csak két pontját veszszük is bármelly közel egymáshoz, ezt egyenes vonallal összekötvén, már körvágó támad; ha két pont helyett hármat veszünk, természetesen két vágó támad, mert a' körűlet három pontját lehetlen egy egyenes vonal által összekötni, épen azon okból, mert a' körvonal' pontjai görbültek és nem egyenes irányban vannak. Mí egyik körről való, a' másikat is illeti; bizonyos azonban hogy, mentül nagyobb a' körület, annál kisebb görbülése, és megfordítva; és ezen tekintetből mondhatnók hogy: valamelly nagy sugárhoz tartozó körvonal' egy kis darabja majd-nem hasonló a' vele egyenlő hosszaságú egyenes vonalhoz; de görbülése mind e' mellett bizonyos és való, és ezen görbülését három pontja bíztosítja. Ha pedig valamelly körvonal' görbülése ismeretes, bizonyosan megleljük hozzátartozó *félmérőjét* vagy sugárát, 's következésképen az egész kört. Ugy vélem eddigi ismereteink reávezetnek, miként találunk meg valamelly három ponthoz tartozó kört, ha az adott három pont nem egyenes vonalban fekszik?

K. Valóban ha két vágóvonal van adva, 's mindegyiknek középpontjára függőt emelek, ezeket eléggé hoszszítván, két vonal fog egyszerre a' keresett kör' középpontján keresztül menni [31]. De mivel a' két vonal különböző irányú, valamelly pontjokban keresztülvágják egymást [6]. Nem épen ezen vágáspont lesz a' keresett körnek középpontja?

F. Tökéletesen. Legyen 7-dik Idomunkban a' három adott pont *A*, *B* és *C*, összekötvén ezeket *AB* és *BC* vonalokkal, ezek keresendő körünknek vágói lesznek; felezvén mindkettőt, *D* és *E* pontjaikra függőket húzok *DK* és *EH* hosszaságúakat, és a' két függöny' vágáspontja *O*, köröm' keresett középpontja; mert az adott három pont a' körületben lévén, tőlle egyenlő távolyban van. Ha tehát körírom' egyik hegyét *O* pontba helyezem, nyilása vagy *AO*, *BO* vagy *CO* lesz, 's bármellyiket válosztom, a' leírt körület szükségesképen keresztül megy a' másik kettőn.

K. Ezt csakugyan eszközlöttem 's látom, hogy három pont *szükséges* és *elég* valamelly kör' maglelésére és hogy példánk' valamennyi esetét magába foglalja. Ha három pontnál több van adva, épen illy könnyen találjuk meg a' pontokhoz tartozó kört?

[321 *F. Bármiként legyen három pont elszórva, vagy egymásközt rakva, és ne álljon egyirányban, szükségesképen van olly körület, melly mind három ponton keresztül megy.* Ezen tétel több pontra nem alkalmazható, mert egy pillanat is meggyőzhet benünket a' felől, hogy a' körön belől és kivül számtalan pont állhat, mellynek egyikén sem megy keresztül a' körület. 8-dik Idomunkban elébbi adatunkat feloldottuk *A*, *B* és *C* három ponton vonván keresztül a' kört.

K. Nem mondhatjuk eszerint, hogy van olly kör, melly p. o. 4 adott ponton keresztülmegy?

F. Ezt csak akkor mondhatjuk, ha a' 4 pont a' *körületben fekszik.* A' körület tudjuk számtalan pontból áll 's eszerint számtalan 4, 5 's több külön külön pontokat jelölhetünk, mellyeken a' körület keresztül megy, mert mind hozzátartoznak. A' kör már három pont által bizonyos, több szükségtelen; és közönségesen 's változatlan áll hogy: minden három ponthoz tartozik valamelly kör, mellynek görbülése a' három pont állásától függ és csakugyan a' legparányibb körtül a' lehető legnagyobbig. A' két határ pedig a' pont és vonal, az az: ha az adott három pont olly közel esik egymáshoz, hogy mintegy egybefolyik, vagy is, a' három pontból egy lesz, akkor a' kör parányi és maga is pont; ha pedig az adott három pont egyenes vonalban fekszik, a' kör végtelen nagy, vagy is görbülése észre nem vehető, vagy végre maga is egyenes vonal és nem kör többé.

Ebből következik hogy, a' három ponthoz adott negyedik vagy több pont nem járulhat a' kör' biztosításához, vagy más szóval: a' háromnál több ponttól a' kör nem függ többé, de megfordítva: minden háromnál több pont a' körtől függ és ha hozzá tartozik, szükséges hogy annak görbült vonalában legyen.

Ezen tekintetek' alkalmazását későbben fogjuk látni, ha a' körbe írt alakokrul szóllunk. Forduljunk az egyenes vonalokhoz és szögökhöz, mellyek a' körbe íratnak.

K. Ugy vélem, sem a' vonalok, sem a' szögök nem mutathatnak olly tulajdonokat, mellyeket nem ismernénk?

F. Valóban nem, 's most csak azt vizsgálhatjuk, melly viszonyokban állhatnak azok a' körrel 's ennek tulajdonival.

9-dik, Idomban körünkbe több egyenirányú *aa, bb, cc, dd, De* vonalokat húztam, legyen benne *AB* átmérő függőleg a' vonalokon, *CD* a' sugár pedig bármelly irányban. Tudjuk hogy mind az átmérő, mind a' sugár valamennyi vonallal egyenlő szögöket képeznek, bármelly legyen irányuk, mert a' vonalok egyenirányuak [13], az eset tehát nem uj; de ide járul hogy: *egyenlő irányú vonalak a' körületből egyenlő darabokat vágnak le*, vagy is: *a' körület' mindkét felén egyenlő íveket foglalnak* *). Ebből következik megfordítva, hogy különböző irányú vonalak különböző íveket foglalnak.

K. A' vonalok tehát a' körben is csak szögöket képeznek, és a' szögök bizonyos ívdarabokat foglalnak, melly ívdarabok tudom a' szögöknek mértékei. De a'

*) Nevezzük mi a' körvonal' egy egy külön darabját vagy részét, ívnek.

körbe különböző szögöket lehet írni, vagy sokféle szög támadhat a' vonalok hajlásai szerint. Igy p. o. ha valamelly két vonal hajlása kicsi, ezek csak a' körön kivül fogják egymást érinteni, tehát a' szög kivül esik a' körön, lehet a' szög épen a' kerületben, a' középpontban 's végre számtalan helyen a' körön belül, de kivül a' középponton.

Ide írok két idomot; a' 10-dikben *BAD* szög' csucsa épen a' kerületben van, *DCH* a' középpontban, *FEG* kül a' középponton, de ben a' körben; 11-dik idomban pedig több szög és mindegyik a' kerületen kül van és csakugyan, *BAC* szögnek *BA* szárnya érintője a' körnek, *CAD* szög' mind két szárnya a' körben belül van, és *BAE* szög' mindkét szárnya érintő. Említem, hogy az első esethez tartoznak *BAD* és *EAC* szögök is, mert ezeknek is egyik szárnyuk érintő.

Tudom hogy csak azon szögök' mértéke a' szárnyok között levő ívdarab, mellyeknek csucsa a' kör' középpontjában van; miként méretnek ezen különböző szögök, vagy melly ívdarab tartozik hozzájok?

F. Ha tudjuk hogy, a' középpontban levő szögök' mértéke azon ív, melly két szárnyok közt áll [14], nem de természetesen következik a' felelet 's nemde feloldva van mindegyik eset?

K. Valóban jól tudom hogy, a' szögök' nagysága nem változik, bár hova tegyük azokat; változatlan maradnak tehát akar kül akar belől legyenek a' körön, valamint hogy szárnyaik' hossza semmi béfolyással nincs nagyságukra. Ha az egyenes szögöt veszem például, mellyről tudom hogy szárnyai függőleg állnak egymáson 's mértéke a' körnegyed, vagy 90^{0}, bizonyosan változatlan marad és azonnal reáismerek, bármelly részin legyen a' körnek helyezve. Kérdésem tehát csak azt czélozza, miként helyezzük ezen különböző szögök' csucsait a' kör középpontjába, hogy azonnal megláthassuk, melly ív vagy körvonal tartozik hozzájok?

[34] *F.* Ha a' szögöket helyükből mozdíthatnók, ugyebár könnyen a' középpontba tehetnök csucsaikat? Igen, de ezen mozdítást könnyen eszközölhetjük az egyenirányú vonalokkal, tudván hogy, ezek a' szögöket nem változtatják [13]. Alkalmazzuk ezen tant mindegyik egyes esetünkre sorjában.

Első eset. Legyen, 12 Idomban, *ACB* szögünk a' körben belül, de kül a' középponton. Előre bocsájtom azon észrevételt, hogy: ha a' szögök szárnyai kisebbek a' sugárnál, természetesen nagyobb ivdarabokat foglalnak mint azok, mellyeknek szárnyai nagyobbak, és hogy minden szögnek szárnyai, mellyeket a' kör' középpontjába viszünk vissza, egyenlők a' sugárral.

Ha körünk' középpontja *O*, képzelhetem hogy *ACB* szögöm mozdítható és *C* csucsát vagy hegyét egyenesen *O* pontba viszem, és ekkor *aOb* helyébe áll, melly átvitelt *aO* és *bO* vonalokkal tökéletesen eszközlöm egyenirányban húzván azokat *AC* és *BC* szárnyakhoz. *ACB* szögnek mértéke tehát az ív *ab*. Tekintsük ezen esetet közönségesen minden szögre alkalmazva, mellynek hegye a' körben, de ennek középpontján kül áll.

Legyen 13-dik Idomunkban *ACB* szög átviendő a' középpontba. Két szárnyához egyeniránylag húzom mint éleb *aO* és *bO* vonalokat, 's lesz ismét a' szög' mèrtéke *ab* ív. De ha az adott szög' két szárnyát hosszabítjuk mig ezek a' kerületet érik, mint ezt *AE* és *BD* vonalok mutatják, *DCE* szög egyenlő *ACB* szöggel [12], és szinte ha *aO* és *bO* szárnyakat igy hosszabítjuk, *aOb* szög egyenlő *dOe* szöggel. Egy pillanat mutatja, hogy *ab* ív egyenlő *de* ivvel és következéskép együttvéve egyenlő *DE* és *AB* ívek' összesével, mert *ACB* szögünk *C* pontját a' középpontba hozván, épen annyival nőtt *DE* ív, mennyivel fogyott *AB* ív, és a' kettőnek öszszese minden állásban egyenlő $ab + ce$ vagy kettős *ab* ívvel. Valóban ha *ab* ívet megmérjük, találni fogjuk hogy épen akkora, mekkora *AB* és *DE* ívek öszszesének fele, mi természetes. Ebből következtetjük közönségesen, hogy *minden szögnek, mellynek csucsa a' középpont és körület közt áll, mértéke azon két iv összesinek fele, mellyet adott és hosszitott szárnyai foglalnak.* Betűkkel fejezvén ki a' mondottat, ACB szögnek mértéke = fél AB ív több fél DE ívvel, és ez $\frac{AB + DE}{2}$ vagy, $\frac{1}{2} AB + \frac{1}{2} DE$.

Második eset. Ha a' szög' csucsa a' körület valamelly pontját éri. Ide értvén minden lehető esetet, szinte lehozzuk a' szögöt egyirányú vonalok által a' középpontba, mint ez 14-dik Idomban ACB szöggel történt an és bm vonalok által ACB szög egyenlö aob vagy mon szöggel és nyilván, hogy AB ív akkora, mekkora ab és mn ív öszszevéve, vagy is, ab ív épen fele AB ívnek, mit megbizonyítani könnyű, mert Aa ív $= Cn$, valamint bB iv $= mC$ ivvel [32], mn pedig $= ab$ ívvel, tehát $ab = AB - mn$, vagy $= AB - (Aa + bB) = \frac{1}{2} AB$. *Azon szög' mérője tehát, mellynek csucsa a' körületben van, a' szárnyak közt levő ivnek fele.*

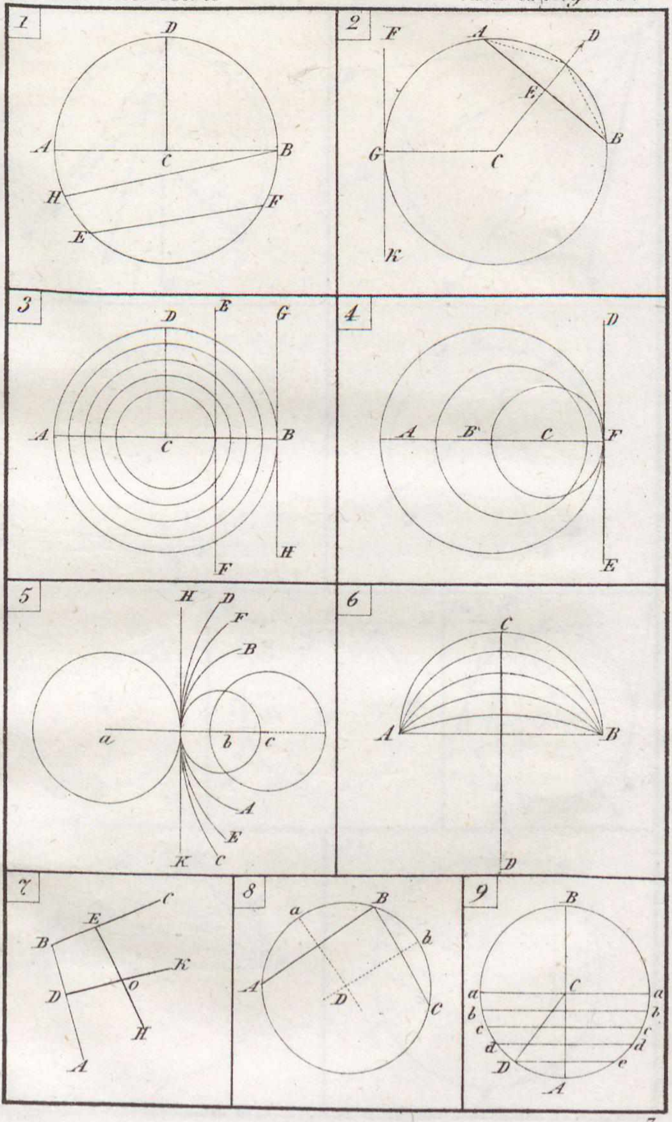
Ide tartozik azon eset, ha az illy szögnek egyik szárnya érintő. 15-dik Idomunkban ACD szögnek C pontja vagy csucsa a' körületben van, de ACB szárnya érintő. Észrevehető itt hogy AC szárny hosszabítása által B pontig, két szög támad, az egyik ACD, a' másik BCD 's nyilván, hogy egyik a' másiknak egészítője [11]. Az egyenirányú vonalokat ab és cd húzván, ACD szög mértéke ad ív $= \frac{1}{2}\, CaD$ ív, BCD szögé pedig db ív $= \frac{1}{2}\, CbD$ iv. Tudjuk ezenfelül, hogy m szög $= n$ szög, valamint p szög $= q$ szög, vagy is, hogy $n = p = q$ szög. A' késszög összevéve tudjuk két egyenes, hozzájok tartozik tet hát a' félkörület; és csakugyan $ad + db = adb$ ív, vagy is: a' körületnek fele a' középpontba vitt két szögnek $ACD + BCD = aqd + dqb$ mérője.

Harmadik eset. A' szög csucsa a' körön kül esik: 16-dik Idomunkban CDA szögünk egyik szárnya érintő, *ADB* szögünk mind két szárnya a' körben van, *FGE* szögünk mind két szárnya végre érintő.

Az illy szögöket visszavihetjük ollyanokra, mellyeknek csucsai a' körületben vannak. Ha *DA* szárnyhoz egyirányúlag húzzuk *ck* vonalat, *ADB* szög = *kcB* szöggel; szinte ha *DC* höz huzzuk *ch* vonalat, *CDA* = *hck* szög, 's most tudjuk hogy *ADB* szög mérője $1/2$ *ke* ív, *CDA* mérője pedig $1/2$ *hk* ív. Természetes hogy *ad* ív, mellyet elébb zárt be *CDA* szög két szárnya, szinte annyival kisebbült, mennyit zárt be a' körület felső részén, vagy is *ab* vel mert *ab* ív = *ah* ív; szinte igy kisebbült *AB* ív *bc* = *Ak* ívvel. *CDA* szög' mérője tehát $1/2$ (*ad* — *ab*) vagy $1/2$ *ad* — $1/2$ *ab* ív, és *ADB* szög' mérője $1/2$ (*de* — *bc*) = $1/2$ *de* — $1/2$ *bc* ív. Közönségesen: *valamelly szögnek mérőjét, mellynek csucsa a' körön kül esik, megtaláljuk, ha szárnyai közt levő nagyobbik ívnek felibül a' kisebb ívnek felit elvesszük.* Megjegyzem itt, hogy valamelly körületet két félbe oszthatunk azon tekintettel, hogy felső felit, mellynek görbülése lefelé esik *domborúnak*, másik felit pedig, mellynek görbülése felfelé esik *homorúnak* nevezzük. Mondhatjuk eszerint hogy: *valamelly a' körületen kül eső szögnek mértéke a' szárnyai közt levő homorú és domború ívek különbségének fele*; vagy másként fejezve ki, megleljük valamelly a' körön kül álló szöghöz tartozó ívet, ha szárnyai közt levő homorú ívnek feléből a' csakugyan szárnyai közt levő domború ívnek felét levonjuk.

Szembetűnő azonban, hogy ezen nevezetek a' szögök' állásával változnak, mert irányuk vagy helyezések bármelly lehet, azért is mindenkor helyesebb a' betűkkeli jelölés. Ultolsó példánkban, hol mind két szárny érintő, a' köztük levő két ivdarab' öszszese természetesen az egész körület. A' körületnek kisebbik része *FGE*, nagyobbik *FadeE*; a' szögnek mérője pedig a' $1/2$ nagyobb rész kisebbítetvén a' fél kisebb résszel. Ezen példá-

vonalok által vannak képezve; egyenlő szögökköz pedig egyenlő ívek tartoznak, 's igy *c* szöghöz *de* ív, *b* szöghöz *fg* ív és *a* szöghöz $be = df$ ív tartozván, a' háromszögnek öszszes íve $gf + fd + de =$ félkör $= 180^0$.


1
D
A C B
H F
E
2
F A D
E
G C B
K
3
D E G
A C B
F H
4
D
A B C F
E
5
H D
F
B
a b c
A
E
K C
6
C
A B
D
7
C
E
B
K
O
D
H
A
8
B
a
b
A
D
C
9
B
C
a a
b b
c c
d d
D e
A

HETEDIK BESZÉLGETÉS.

Alkotás.

K. Miként osztunk egyenes vonalat és szögöt bizonyos részekre, tudom.

A' körmérő és egy línea segédével bármelly osztást eszközleni lehet. Nincs a' körvonon és lineán kivül valamelly mérő és rajzoló szerre szükségünk, kivált a' különböző alakok' mérésére és alkotására?

F. Épen azt fogjuk most tapasztalni, hogy ezeken kivül semmi egyéb szerre elmulhatlan szükségünk nincs, feltévén hogy irótollunk vagy ónunk van. Van azonban több olly szer vagy eszköz, melly czélirányosan használtatván, a' rajzolást nagyon könnyíti 's ezek közt jeles azon linea, mellyet *parallel* vagy *egyenirányú* lineának nevezünk. Ez egy fából készült egyenesszögű háromszög, millyen 1. Idomunk által van képviselve. Több haszna' ezen lineának abban áll, hogy *a* szöge egyenes. Előre is szembetünő, hogy segédje által könnyen húzhatni a' vonalokra' függőket, ha ezekre *ac* vagy *ab* oldalát illetjük, 's így egyenes szögöket is; ha végre *b* és *c* szögeit is ismerjük, utánnok is huzhatunk egyenlő szögöket. Más jeles haszna ezen lineának abban áll, hogy segédjével számtalan és tökéletes egyenirányú vonalokat húzhatunk egymásmellé, mert egyik vagy másik oldalát egy más egyenes közönséges lineára helyezvén, azt mindkétfelé (jobbra vagy balra) mozdíthatjuk 's huzhatunk utánna vonalokat a' nélkül hogy iránya változnék. Illyen' egyenirányú vonalokat biztossággal húzní más eszközzel alig lehet.

Szükséges szereink tehát összvéve következők lehetnek:

1.) Rajzón (cerusa) mindenkor jól hegyítve. Kése mindegyikünknek van.

2.) Irótoll, vagy rajztoll vasból készítve; ez utóbbin egy kis csavar van melly a' toll két hegyes szárnyát közelíti vagy távoztatja, mint véknyabb vagy vastagabb vonalokat akarunk húzni.

3.) Közönséges fa-linea, szorgosan készítve. Vallyon egyenes e' az általa húzott vonal? megtudjuk, ha másik élét fordítjuk azon vonalra, mellyet épen egyik éle után húztunk; ha tökéletesen megegyez a' húzott vonallal, bizonyosan egyenes vonalú, mert fel nem lehet tenni, hogy ha valamelly görbülés vagy egyenetlenség van egyik élin, szintezen görbülése vagy hibája a' másik élin is ugyan az legyen.

4.) Fa egyenes háromszög, vagy parallel linea. Ennek készítésénél a' művész figyelemmel legyen. Lineáknak legjobb a' juhar vagy körtvélyfa.

5.) Köríró, rézből készült czirkalom. Hegyei élesek, de ne háromszögűek hanem kerekek legyenek, mert az elébbiek a' papirosba vagy asztalba nagy jukat fúrnak fordulásaik alatt. Két szárnya tökéletesen záródjék és se nehezen, se igen könnyen ne forduljon sarkában. Hozzátartozik egy beleváló vas rajztoll és még egy tok, mellybe vékony rajzónt lehessen szorítani.

6.) Réz félkör, elosztva a' kör' részeibe szögök mérésére és alkotására.

Mi ezeken felül van, felesleges és nem szükséges.

K. Mindezen eszközöknek birtokokban vagyok, de p. o. függő vonalat parallel linea nélkül is tudok valamelly más vonalra állítani.

Adva legyen p. o. *AB* vonal (2 Idom) 's kivántatik hogy épen közepébe állítassék függő. Legyen közepe *c* pontban, kinyitom körvonómat bármelly nyilással (csak nagyobb legyen *AC*=*CB* nél) 's egyszer *A* pontból, ezután *B* pontból jelölök kis ívdarabokat, mellyek egymást keresztül vágják; ha vágás pontjok *D*, az innen *C* ponthoz húzott vonal függőleg áll *AB* vonalon, mit könnyen megbizonyítok, ha *AD* és *BD* vonalokat húzom *a* és *b* háromszögök' egyenlőségéből.

F. Ezen alkotás szinte az, mintha az adott vonalra bármelly egyenszárnyú háromszög kívántatnék, és helyes létének bizonyítását abban találja, hogy ha az egyenszárnyú háromszög talpára olly függőt vonunk, melly annak csucsán keresztülmegy, ezen függő egyszersmind a' talpat, a' szögöt és a' háromszögöt magát is egyenlő két részre osztja. Egyik bizonyítvány á' másikat segélli és következteti.

K. Ha példámban köríróm nyílását akkorára veszem mekkora *AB*, egyenoldalú háromszögöt alkotok. Ha bármelly szögéből vezetek fuggőt az egyenoldalú háromszögnek, ez az áltelliben levő oldalt szükségesképen felezi.

Eszerint bármelly egyenszárnyú, egyenoldalú és egyenesszögű háromszögöt tudok alkotni.

Miként alkotunk, ha a' függő az adott vonalnak valamelly más pontjára kivántatik?

F. Bármelly pontja legyen adva *AB* vonalnak, azt ugy tekinthetem mint valamelly más vonal' középpontját, mert rövidebb részét annyival hoszabbíthatom, mennyivel kisebb a' másiknál, 's igy alkotásom változatlan és független marad a' vonal' hosszától.

K. De ha a' hosszabbítás meg nem engedtetik, vagy hely nincs, ha p. o. a' vonalnak épen végpontjára kívántatik a' függő?

F. Ekkor szinte mint elébb *B* és *A* pontokból (3 Idom) ívdarabokat jelölök, mellyek p. o. *D* pontban vágják egymást, és *DB* függőleg lesz *AB* vonalon, *ABD* pedig egyenes szög. Természetes hogy itt körírómnak nyilása különböző lesz, mert *BD* rövidebb mint *AD*.

Hasonlóan alkotunk, ha a' körület valamelly pontjához érintő kivántatik, mert *AB* vonal ekkor átmérő. Ha *DB* vonalat két akkorára vesszük, az az $DB = BC$, két egyenlő háromszög ADB és ACB támad, melly az alkotás' helyeslétét bizonyítja:

K. Miként alkotjuk a' szögöket közönségesen?

F. Ha a' körmérőt használni nem akarjuk és a' szögök valamelly bizonyos és egész számokban adott részei az egész fél vagy fertály körületnek, egyszerű osztás által találhatjuk meg a' kívánt szögöket.

K. Miként osztunk két félbe valamelly szögöt.

F. Láttuk hogy vagy a' szárnyakközti körvonalat osztjuk a' kívánt részekre, vagy az egyenlö hosszaságú szárnyakat egybekötő egyenes vonalat, 's az osztáspontokból vonalokat húzunk a' szög' csucsára. Ha csak két fele kivántatik valamelly szögnek, a' kört elmellözhetjük 's ekkor osztásunk egyenlő lesz elébbi alkotásunkal, hol az egyenszárnyú háromszögöket kerestük. 4-dik Idomban p. o. ACB szög' AC és BC szárnyaiból egyenlő aC és bC darabokat jelölvén, a és b pontokból körirónk' valamelly nyílásával a' kis ívek vágását keressük, melly D vagy E pontban történt; a' vonal CDE tökéletesen felezi C szögöt, mert $m = n$, mit könnyen megbizonyítunk, ha ab vonalat húzzuk, $aCb = aDb$ háromszögök' egyenlősége által, ha körírónk nyílása $= aC$ volt.

Miként lehet az alkotás' helyeslétét minden különös esetben megbizonyítani? elég alkalmunk volt látni, azért is nem fogjuk jövendőben azon bizonyítványokat ismételni, mellyeket már gyakorta említénk. De ha itt helyt kell kímélnünk, azért a' tanuló soha el ne mulassza az illy bizonyítványokat, mert mentül többfélekint és szorosabban tudja azokat adni, annál nagyobb lesz haszna, megnyugvása és előmenete: igy mintegy számot ád arrol, érti e mit mivel és alkot.

K. Ha valamelly szögöt felezni tudunk, láttuk könnyen oszthatunk 2, 4, 8, 16, 32, 64 's a' t. részre is. Nemde segél bennünket a' kör' elosztása is az által, hogy ezen számokkal némiképen megegyez?

F. Noha a' kérdés homályos, veszem észre hova czéloz. Helyesebb lesz kérdezni: vallyon a' szám 360, mennyi fokba a' körület osztva van, több és sok más szám által osztható e' ugy, hogy a' részesek is egész számok legyenek? Valóban csupán azon okból válosztatott a' 360 szám, mert sok osztóji vannak 's nem is lehetne egyéb helyes okát adni miért nem válosztatott bármelly más szám. Századunk' kezdetével a' Francziák a' kört 400 egyenlő részbe (fokba) osztották, minden fokot 100 perczbe és minden perczet 100 másodperczbe 's igy az egész osztálynak tizedes alapot adtak; de ezen számítás-mód csak kevés ideig és még kevesebb munkákban használtatott mert 400nak egyfelől sokkal kevesebb osztóji vannak mint 360nak, másfelől a' szám 360 több viszonyban áll az egyéb geometriai kérdésekkel és közönségesen felvéve van. Igy maradt fen a' franczia beosztás mint újitási emlék, mert haszonbavéve nincs.

K. Tudom hogy 360nak egyszerű osztóji 2, 3 és 5, és csakugyan háromszor lehet egymásután kettő által, kétszer három által és egyszer 5 által osztani, és ha a' számokat 2.2.2.3.3.5 sorjában egymással sokszorozom, előjön a' 360. De ezeken kivül több más szám által is osztható?

F. Ha az említett sokszorozási származatokat sorjában feljegyezzük, következő számokat találjuk:

4, 6, 8, 9, 10, 12, 15, 18, 20, 24, 30, 36, 40, 45, 60, 72, 90, 120, és 180, mellyek mind összetett számok; ha ezekhez tesszük 2, 3 és 5öt, a' 22 szám egyenlőkép elosztja 360t, 's következésképen ezen számnak 22 osztója van.

K. Az egyenes szög 90°; az egyenoldalú háromszög' egyik szöge 60°, már ezekből is különböző szögöket alkothatni puszta felezés által. A' 90ből kerül 45, 22½, 11¼ 's a' t.; a' 60ból 30, 15, 7½ 's a' t.; ugyan is: 60nak egyharmada 20, ennek fele 10, ennek fele 5 's a' t.

Ha az egyenesszögű háromszög egyszersmind egyenszárnyú, két másik szöge $=180-90=90^0$ és külön mindegyik 45^0.

Miként alkotunk valamelly kívánt háromszögöt?

F. Ha bizonyos szögű vagy oldalú háromszögök kívántatnak, eddigi tapasztalásaink minden különös adat' feloldására vezetnek. Láttuk hogy egyenoldalú, egyenszárnyú és egyenesszögű háromszögöket alkotni könnyű. Az elsőhöz elég egy oldal' hossza, a' másodikhoz két oldal szükséges a' köztük lévő szöggel, a' harmadikhoz is két oldal. Ha a' háromszög' oldalai nincsenek adva, de csak szögei, tudjuk hogy ezeknek összese mindenkor 180^0 és hogy két tompaszög valamelly háromszögben lehetlen. A' kérdésben tehát képtelenség lappangna, ha p. o. olly háromszög kívántatnék mellynek egyik szöge 93^0, a' másik 88^0 vagy több legyen, mert $93+88=181^0$'s a' két egyenest felülmulja. Szinte ha a' három szög sorjában 42^0, 56^0 és 63^0 adva lenne, összesek 161^0 és a' háromszög ismét lehetlen. Ha csak egy szög van adva, a' másik kettőnek öszszese ennek egészítője és a' második és harmadik szög ezen egészítő szám közt forog. P. o. kivántatik olly háromszög, mellynek egyik szöge 85^0 legyen; következik hogy a' másik kettő öszszesen $180-85=95^0$. A' másik két szög tehát a' legparányibbtól kezdve (p. o. 1 másodpercztől) 95^0ig nőhet közel külön kölön, és igy ha a' szögöket csak egy egy perczel növesztjük, mindegyik szög legalább $95\times60-2=5698$ változást enged, vagy is: olly háromszög, mellynek egyik szöge 85^0, már 11396 lehető, ha a' két másik szög egy egy perczel változik.

Az illy feladás tehát bizontalan.

Ha két szög van adva, á' háromszög már bizonyos, mert a' harmadik szög egészítője 180^0 hoz az adott két szög öszszesének. De tudjuk hogy ha csak a' szögök vannak adva, velük számtalan háromszög lehető a' legkisebbtől fogva a' képzelhető legnagyobbig: mert hasonló háromszögökben a' szögök egyenlők.

Szinte illy esetekre jutunk ha csak egy vagy két oldal van adva. Egy oldalra számtalan háromszög lehető. Kettőre mint láttuk annyi, mennyi az egyik oldal félfordulásában a' másikon megfér.

Ha mind három oldal van adva, csak egy háromszög lehető, de tudjuk hogy két oldalnak összevéve szükségesképen nagyobbnak kell lenni a' harmadik oldalnál, különben a' háromszög lehetlen. Mindezen környülményekre tehát figyelmezni kell mind a' kérdésnél mind annak feloldásánál.

K. Tudom hogy, ha három oldal adva van, a' háromszög bizonyos és szögei természetesen következnek utánok, és ha a' három oldal p. o. fadarabocska, özszerakása könnyű, de miként alkotjuk papirosra a' háromszögöt?

F. Legyen 7-dik Idomunk szerint három vonal 1, 2, 3 adva. Leirom egyiket közülök 's alkotandó háromszögöm' *AC* talpának válosztom. A' másik két vonal hosszát veszem körìróm nyílásának egymásután, és *A* és *C* végpontjaiból ívdarabokat jelölök, mellyek *B* pontban vágják egymást; *AB* és *CB* vonalokat húzván, kívánt háromszögöm alkotva van. Az oldalok sorjában 1, 2 és 3 számokkal jelöltettek.

K. Ezen példából észreveszem hogy, ha körìróm kétféle nyílásával a' kis ívdarabok helyett egész köröket írok, háromszögöm azon oldala, mellyet talpának válosztottam, a' két kör' középpontja közzé esik, a' másik két oldal pedig ott üt egybe, hol a' két kör egymást keresztülvágja. De két kör két pontban vágodik; nemde két egyenlő háromszög támad egyszerre ezen alkotás szerint?

F Valóban ugy van. Ha utóbbi példánkhoz hasonlóan 1, 2 és 3 oldal van adva, 's az 1-et háromszögöm talpának válosztom, két végső pontja *a* és *b* a' két kör' középpontja, a' másik két oldal pedig *bc* és *ac* a' két körnek sugára. 8 I ban az adott oldalok sorjában *ab*, *ac* és *bc* vel vannak jelölve; *ac* a' legnagyobbik oldal tehát a' nagy kör' sugára, *bc* a' kisebbiké.

K. Látom hogy, egy háromszög helyett kettő támadott és hogy az alul pontokkal jelölt *abd* háromszög tökéletesen egyenlő a' felső *abc* háromszöggel. Nemde bizonyítja ezen eset, hogy bármelly irányban álljanak az egyenlő háromszögök, oldalaik és szögeik nem változhatnak?

F. Valóban két vagy több egyenlő háromszög semmi változást nem szenvedhet egyenlőségében, bármelly állásba jöjjenek egymásra nézve a' háromszögök.

Valamint papirosból kivágott háromszögöm nem változhatik, bármiként forgatom azt asztalomon és minden kigondolható vagy lehető állásában, alakját szögei és oldalai nagyságát megtartja; szintugy gondolhatok két háromszögöt, melly csak valamelly csucsánál fogva van egymáshoz tüzve ugy, hogy egyik a' másik körül szabadon fordulhat. Illyen két egyenlő háromszög legyen 9 I. Egy forditás bizonyosan minden lehető állását előhozza a' két háromszögnek. Szinte ha valamelly más pontban tüzzük ezeket öszsze (mint p. o. 10 I ban ez *a* pontnál történt), egy fordulás minden lehető esetet előhoz. Bizonyos hogy a' két háromszög' egyenlősége nem változhatik a' különböző állás által. Mit itt az egyenlő háromszögökről említünk, a' hasonló háromszögökre is alkalmazandó.

8 I. példánk tehát azt mutatja, hogy ha 7 I példánkban, az ívdarabokat *AC* vonal' tulsó felére jelöljük, szinte czélt érünk. Mivel pedig az első oldal helyezése vagy íránya önkényes, látni való, hogy bármelly felire jelöljük a' másik két oldal összeütési pontját, a' feltételnek eleget teszünk.

Ajánlom a' tanulónak, hogy jóidején szokja meg az idomokat elvontan tekinteni, vagy is függetlenül állásoktól. Legyen ezeknek irányuk bármelly, csak alakjuk, formájuk, szögeik, oldalaik 's a, t. jöjjenek tekintetbe, mert a' geometriában, valamint a' világalkotmányban nincs *felül* és *alúl*, de csak *terjedség* van. Ha bizonyos, bennünket körülvevő, vagy tulajdon állásunkhoz irányozott tárgyakról van szó, ekkor a' felül és alul szavak közelebbi és különös értelmét ki kell fejeznünk.

K. A' háromszögök' alkotására nézve bő ismereteim lévén, forduljunk a' többoldalú alakokhoz.

Rendes és tökéletes négyszög adva van, ha egy oldala adva van; mert evvel egyenlővé teszem a' többit 's mind négyet függőleg állítom egymásra. Miként alkotunk hosszított egyenszögű négyszögöt?

F. Ehez egy hosszú és egy rövid oldal kívántatik, mindkettőt párosan véve egymásra rakjuk függőleg.

K. Mi kivántatik a' rézs négyszöghöz?

F. Egy oldal és a' rajta lévő szög. Az oldalok mind egyenlők, a' többi szög pedig természetesen következik az adottból, mert az oldalok párosan egyenirányúak.

K. Ha ezen adott szög 25°, mekkora lesz a' többi?

F. Ennek áltelleniben vele egyenlő = 25° szög áll, a' kettő tehát összesen 50°, a' négyszög' öszvese 360, marad tehát a' két tompára 360—50=310 's mindegyike lesz 155°.

K. A' hosszított résznégyszöghöz szinte két egymásmelletti oldal és a' köztük levő szög kívántatik. Mi szükséges a' trapézhoz?

F. Elég három oldal és egy nem egyenes szög. Ha két szög benne egyenes, a' harmadik az adottból következik, valamint a' negyedik oldal is. Adva van p. o. 11 Iban *AB*, *AC* és *CD* három oldal és *c* szög *CD* vonalra állítom *CA* oldalát *c* szög hajlásával, *AB* oldalt pedig *A* pontra egyeniránylag *CD* oldallal, a' 4-dik oldal *BD*, valamint *a*, *b* és *d* szögök is természetesen következnek.

A' trapezoidhoz vagy mindnégy oldal megkívántatik, vagy három oldal és a' köztük lévő két szög.

K. Miként alkotjuk a' több oldalú alakokat?

F. A' rendes alakok' alkotása igen egyszerű, mert bárhány legyen oldalainak száma, elég közülök egy, mert mind egyenlők, valamint egyenlők szögeik, mellyeket ismerünk [27. 29]. Ha tehát egy oldal adva van és az oldalok' száma ismeretes, felkeresem hány fok felel meg mindegyik szögének. Leírom az oldalt és körmérőmmel a' talált szög szerint állítom egymásután az oldalokat, míg az utolsó términészetesen bézárja az egész alakot.

Ha az oldalok' száma párotlan, egyik oldal sincs egyirányban a' másikkal, holott a' párosoldalú idomokban két két egymás áltelleniben álló oldalok egyenirányúak.

Ajánlhatni gyakorlásul egyenlő hoszaságú fácsikák' összerakása. Hány illy darabokat rak össze a' tanuló, annyi oldalú rendes idomot alkotott.

K. Ezen összeállításban már gyakorolt vagyok, de szeretnék valamelly bíztosabb 's egyszersmind könnyebb útat ismerni, mert a' körmérővel gyakorta különbségekre találok és a' legnagyobb vigyázattal is egyik szög nagyobb vagy kisebb mint a' másik. Nem lehetne e a' kör' segédével helyesebb alkotás módot találni?

F. Kétség kivül igen, mert a' rendes idomok a' körülettel bizonyos egybekötésben vannak és mint tudjuk szögeiknek mérőjit a' körben lelik. Tekintsük a' *körbe írt* idomokat.

K. Mit nevezünk *körbe írt* idomoknak?

F. Bárhány szögű vagy oldalú idomokat úgy írhatunk valamelly körbe, hogy azoknak szögei valamennyien a' körületbe essenek; illyen idomokat *béírt* idomoknak nevezünk. Ha az idomok oldalai a' körön kivül vannak, valamennyien érintői a' körületnek; ezeket *körülírt* idomoknak nevezzük.

Természetes hogy, a' rendes idomokba kört írhatni, valamint azokon kivül is, és ekkor a' kör lesz *béírt* és *körülírt* kör.

K. Eszerint tökéletes négyszögöt könnyen írhatni körbe, ha két egymáson függőleg álló átmérő' végpontjait 4 vonallal egybekötjük. 12 Iban *AB* és *CD* illy átmérők, *ABDC* négyszögünkben *a*, *b*, *c* és *d* szögök egyenesek.

Körülírva lesz pedig a' négyszög ha a' béírotthoz, egyenirányút alkotunk, mellynek oldalai érintők. Idomunkban *EFGH* négyszög körülírt, oldalai érintők és a' béírt négyszög' oldalaival egyenirányúak.

Tán egyszerűbb az alkotás, ha a' körülírt négyszög' oldalait azon pontokban érintjük a' körhöz, mellyekben vannak a' béírt átmérők 's ekkor oldalai az átmérőkkel egyenirányúak. 13 dik Idomunk mutatja ezen alkotást. A' bizonyítvány mind két esetben abban áll, hogy mindegyik szögnek mérője körnegyed, vagy 90^0.

K. Nemde alkalmazható ezen alkotási mód minden egyéb sokoldalra?

F. Válóban igen, mert az elv változatlan hogy: annyi részre oszlik a' körület, hány oldalú a' béírandó idom; mivel pedig a' rendes idomok' oldalai mind egyenlők, a' körület is egyenlő részekbe oszlik. Meglévén a' béosztás, a' jelölt osztási pontokat vonalokkal egybekötvén, a' kívánt idom bé van írva.

A' körülírt idom hasonlóul íratik, mert ha külön kívántatnék, ezt az osztási pontokra húzott érintők alkotják. Ha pedig a' béírt idom már készen áll, oldalaihoz vonhatunk egyenirányú érintőket.

K. A' kör' béosztása valamelly részekbe nem igen könnyű, azért mert csak egyenes vonallal (millyen körírom nyílása) történhetik. Ha p. o. párotlan számú részek be kell a' körületet osztani, tetemes ideig kell keresnem egyik egyik részt, míg az öszszes részek épen a' körületet teszik, vagy is hogy: az utólsó rész tökéletesen azon pontba érjen, mellyből kezdetben kiindultam.

Ha az osztási részek száma páros, ekkor majd minden esetben a' felezés által lehet sebesen és biztosan alkotni.

Ha p o. nyolczoldal kívántatik, a' négyszögnek oldalait felezem 's azonnal rendes nyolczsögöm lesz. Illyen a' 14I., mellyben ha a' körülírt négyszögbe két rézsvonalat húzok, béírt négyszögöm' oldalai egyenlő felekre oszlanak; a' mint a' körület' vágáspontjait *a*, *b*, *c* és *d* a' béírt négyszög hegyeivel egybekötöm, rendes nyolczszögöm alkotva van.

Ha eszerint körülírt nyolczoldal kívántatik, oldalait vagy egyeniránylag húzom a' béírtnak oldalaihoz, mínt 15 Idomban, vagy függőleg az átmérőkre, mint 16 Idomban. Az első esetben p. o. *AB* egy oldal látjuk egyirányú a' béírt oldallal, másodikban függőleg az osztási ponton?

F. Az első alkotás ugy látszik egyszerűbb, mert ha az átmérőket a' körön kivül hosszabbitjuk, a' béírt oldalokhoz könnyen írhatunk egyirányúkat. A' második pedig azon tekintetben alkamasabb, hogy belőle természetesen következik a' 16 oldal, ha a' körülírt 8 oldalúnak szögeiből ismét vonalokat húzunk, és az osztási pontokat a' béírt nyolczszög hegyeivel egybekötjük.

Igy következik a' 16 szögbűl 32, 64, 128 's a' t. szög egyszerű osztás által és az alkotás csalhatlan.

K. Miként írunk háromszögöt a' körbe?

F. Ha a' sugárt két egyenlő részre osztjuk 's osztási pontjában függőt vonunk réa, a' vágóvonal épen egyharmadrészét vágja le a' körületnek.

17 Idomunkban *AB* sugárnak fele C pontban van, és ezen ponton függőleg *DE* vonal; a' körületnek harmadrésze *DBE* ív, és *DE* vonal a' rendes háromszög' egyik oldala, a' másik két oldala *BA* irányában üt össze az átmérő végpontjában.

K. Miként bizonyítjuk meg az alkotás helyeslétét?

F. 18. Idomba írom az egész alakot. A' körbe írt rendes (egyenoldalú) háromszög *DEF*: a' kör' középpontjából (*A* ból) vonalokat húzok, *D* és *E* pontokhoz, a' béírt rendes háromszögöt más három háromszögbe osztottam 's ezek sorban *DAE*, *DAF* és *EAF*, mindegyíknek tompa szöge *A* középpontba ütvén egybe. Az illyen szögöket *középponti szögöknek* nevezzük; 's ha mostani esetünkben megbizonyítjuk hogy ezen szögök egyenlők, bizonyos hogy a' három oldal $DE = EF = DF$ is egyenlő lesz [18].

A' három támadott háromszögök egyenszárnyúak és szárnyaik valamennyien egyenlők mert sugárok, 's már ebből is következik, hogy p. o. D szög egyenlő E szöggel ha ezen felül még DB vonalat huzzuk, más két kis háromszög BDC és ADC támad, mellyek szükségesképen egyenlők, mert C pontnál egyenesszögüek, AC és BC oldalok egyenlők, tehát [20] az oldalok AD és BD is egyenlők.

K. Ebből következik hogy, DAB háromszögünk egyenoldalú.

F. Ebből pedig hogy, mindengyik szöge 60^0, tehát BDA szög $= 60^0$; következik tovább, hogy mivel $DB = AE$ és a' két vonal egyenirányú, BDA szög egyenlő BAE szöggel, vagy hogy BAE szög is $= 60^0$, de a' két szög öszszese $BDA + BAE = DAE = 120^0$, vagy is egy középponti szög $= 120^0$. Mit itt az egyikről bizonyítánk, a' másik kettőre is alkalmazható 's igy a' három középponti szög öszszesen 3-szor $120 = 360^0$, mi szembetűnő, mert az egész körületet béfogják; mivel végre egyenlő szögök egyenlő oldalokat kívánnak, a' három oldal egyenlő, vagy $DE = DF = EF$.

K. A' bizonyítás tökéletes és a' körbe írt rendes háromszög oldalai egyenlők ha igy alkotunk. Nemde DB vonal egyik oldala a' rendes hatszögnek?

F. Igen is. Ha a' háromszög oldalaihoz egyiránylag vagy azokra függőleg érintő vonalokat húzunk, körülírt háromszögöt alkotunk. Ide irok 21 I. alatt illy bé és körülírt háromszögöt, mellyben a' körülírt háromszög oldalai az általlenükben álló béírt háromszög oldalaival egyenirányúak.

K. Nemde a' rendes hatszög' egyik oldala, épen a' körsugár?

F. Valóban a' rendes hatszög' tulajdona, hogy 6 egyenlő rendes háromszögbe oszlik, ha szögeit átmérőkkel kötjük egybe. A' sugár pedig a' körületnek épen egyhatodrésze, ha ezt egyenes vonallal mérjük, millyen körírónk' nyílása, 's igy ha körírónk nyílását megtartjuk, mellyel épen a' kört írtuk, vele a' körületet hat egyenlő részre oszthatjuk; az osztási pontokat vonalokkal kötvén egybe, rendes hatszögünk alkotva van. 19 Iban láthatni egy béírt és egy körülírt hatszögöt, a' körülírtnak oldalai függőleg állnak a' béírtnak oldalain.

K. Hogy a' béírt rendes hatszögnek oldala egyenlő a' körsugárral szembetűnő, 's azért is láttam első pillanatra 18 Iban hogy, mivel $DB = DA =$ sugár, szükségesképen rendes hatszög fog támadni, ha a' rendes háromszög' oldalait megduplázom, vagy mindegyik helyett kettőt húzok.

Illy kettőztetés által jutok a' 12, 24, 48, 96 's a' t. oldalú rendes alakokra.

Nemde párotlan oldalú idomokat is szinte lehet a' körbe írni?

F. Bárhány legyen valamelly idomnak oldala, csak á körületet kell annyi részre osztanunk, mennyi ezeknek száma és az osztási pontokat vonalokkal egybekötnünk.

[36] *K.* Nemde bárhány oldalú legyen valamelly idom, középponti szögeinek öszszese mindenkor 360° és sem több sem kevesebb?

F. Ez igen természetes, mert a' körületben csak 360° van, tehát öszszesük több nem lehet, de kevesebb sem, mert bárhány legyen a' középponti szögök' száma, a' körületet mindenkor egészen elfoglalják. A' rendes alakok annyi háromszzögbe oszlanak, hány oldaluk száma, és ezen háromszögök mind egyenlök egymással és egyenszárnyúak, csucsaik pedig valamennyien az alak' középpontjában egyesülnek. Könnyü eszerint megmondani, mekkora egyik vagy másik sokszöghöz tartozó középponti szög, *ha a' körületet, oldalai vagy szögei számával elosztjuk.*

A' rendes háromszög' egy középponti szöge			360 : 3=120°,
a' négyszögé	»	»	360 : 4=90,
ötszögé	»	»	360 : 5=72,
hatszögé	»	»	360 : 6=60,
hétszögé	»	»	360 : 7=$51^3/_7$
nyolczszögé	»	»	360 : 8=45,
kilenczszögé	»	»	360 : 9=40,
tízszögé	»	»	360 : 10=36,
tizenegyszögé	»	»	360 : 11=$32^8/_{11}$
tizenkét szögé	»	»	360 : 12=30

's a' t. mert hány oldalú valamelly idom, annyi háromszögbe oszlik középpontjából, 's ezeknek csucsai levén a' kör' középpontjában, öszszesük adja 360° a' körületet, az egyes szögök pedig elébbi számainkat.

K. Miként találjuk meg a' rendes alakok' középpontját?

F. Ha az oldalok száma páros, az egymásellenében álló szögöket összekötő vonalok valamennyien az alak' középpontjában vágják egymást.

Bárhány oldalú legyen az alak, oldalait körvágóknak tekinthetjük: felezvén közülök kettöt, az osztópontra emelt függők a' középpontban vágják egymást [31].

K. Hogy a' körbe bármelly idomot írhatni világos. Feltétünk azt kívánja hogy, az idomnak minden szöge a' körületben legyen; ezt pedig eszközleni könnyű, bármelly rendetlen legyen a' többszög, p. o. valamennyi szög vagy oldal különböző, 's igy körülírni is lehet bármelly rendetlen idomot, ha mindegyik oldal a' körnek érintője. Nincsenek itt kivételek? és lehet é minden alakba vagy körülte kört írni?

K. Ha közönségesen vesszük a' kérdést, mondhatjuk hogy lehet bármelly olly rendetlen sokoldal, mellybe kört írni 's rajta körülírni is lehető, de ekkor megkívántatik, hogy az első esetben oldalai érintők, a' másodikban hogy szögei a' körületben legyenek De különös esetre ez nem alkalmazható. Igy p. o. lehet valamelly idomba kört írni a' nélkül hogy azt körülirni lehetne, és megfordítva.

Különös tulajdona a' háromszögnek, hogy mindegyik körül lehet kört írni és egyszersmind belé is, bármellyek legyenek a' háromszög oldalai. Ezen tulajdonnal a' rendes alakokon kivül a' többi nem bír. 20 I. ban látható *ABC* háromszög körül és béírt körrel.

K. Tehát ha valamelly négyszög körül lehet kört írni, nem következik hogy, belé is lehessék kört írni?

F. Csakugyan nem. 22 I. ban *ABCD* négyszög körül írtunk kört, de a' belőlirt kör legfeljebb csak három oldalát érheti, ha központú a' körülírtal (mi feltétel) csak kettőt.

K. Miként találhatnók meg egyszerre valamelly rendes sokszöghöz tartozó bel és külkört?

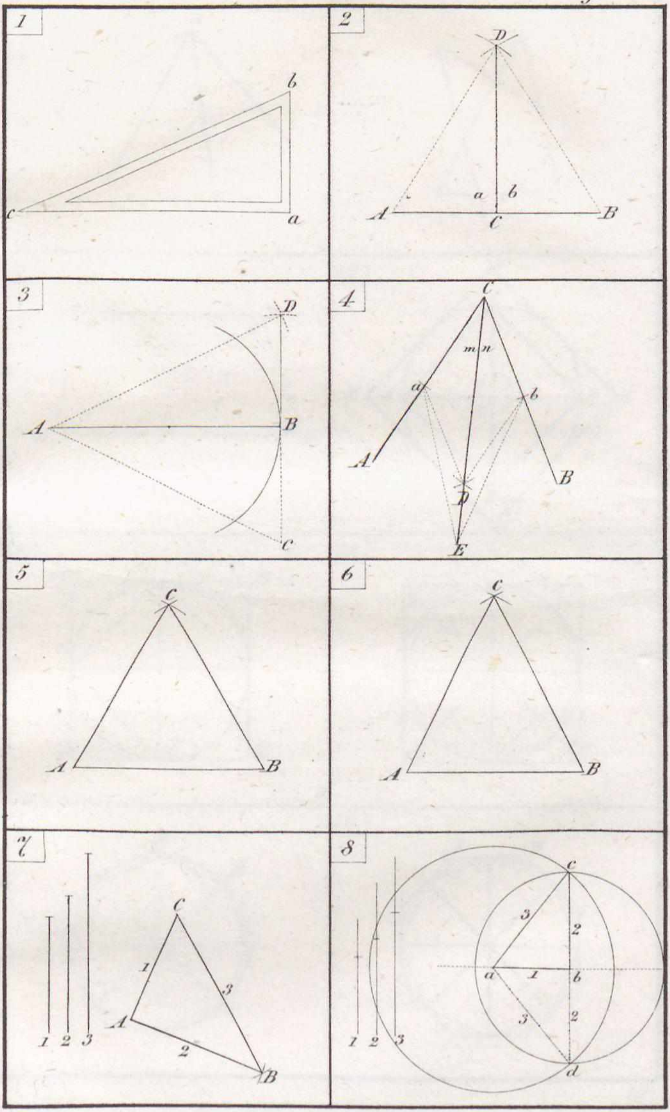
F. Ha valamelly többszögnek két oldalát kettévágjuk függők által, ezek tudjuk az alak középpontján vágják egymást és mennek keresztül; a' függöny hossza (a' középpontól vágópontjáig) a' belső kör' sugára, a' középpontból az adott oldal végpontjáig nyúló vonal pedig a' külső kör' sugára.

Legyen 23. I. ban *ab* és *bc* két oldala valamelly többszogűnek, mind két oldalnak közepe *e* és *f* pontokban, függőleg az oldalokon *d* pontban vágódnak és *d* az alak' középpontja, $ed = fd$ a' béirandó kör' sugára, $ad = bd = cd$ pedig a' körülírandó körnek sugára.

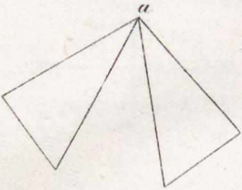
A' bizonyítvány $ade = edb$ háromszögök egyenlőlétéből folyik. 24 I ban a' külső kör sugára $CA = CB = CD$, a' belső *Co* 's egyszersmind *AB* a' rendes 12 szögnek egy oldala.

K. Nemde mentül több valamelly sokszögnek oldala, annál inkáb közelednek a' belső és külső körök egymáshoz?

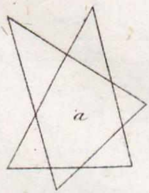
F. Ez igen természetes, mert a' sokaldalúk szögei az oldalok számával nőnek, 's következéskép az oldalok nyílása mindég nagyobb nagyobb. Ha valamelly többszögűből kétannyi szögöt alkotunk (6ból p. o. 12őt, vagy 8ból 16 ot) az oldalok kisebbülnek mint számok nő valamint a' szögök nőnek, és ezen viszonti fogyás és növés szünetlen, bármelly nagy legyen az oldalok' száma. Erről ki ki meggyőződhetik; ha a' 32 oldalún feljebb nem is megy, már tetemes nagy körben alig veheti észre az oldalokat. Tegyük fel, hogy valamelly körbe 360 oldalú idomot írunk; ekkor minden oldal épen egy fokát foglalja el a' körületnek és csakugyan majd mindegy lesz, akar a' kört írjuk belé, akar a' 360 oldalút a' körbe, a' különbséget alig láthatni. Ezen tekintetek azon észrevétre vezetnek, hogy a' béírt és körülirt sokoldalúk csakugyan közelednek a' körhöz, ha oldalaik száma nő, és annyival inkáb, mentül nagyobb ezen szám, és végre, a' körül és béírt oldalok olly erősen közibük szorítják a' kört hogy a' megkülönböztétés majd nem lehetlen. Ha tehát képzeljük, hogy a' körülírt és béírt alaknak oldalai olly aprók, hogy a' pontoktól többé nem különböznek, igen természetes, hogy mind ketten együvéütnek a' köztük lévő körrel, vagy is ennek görbülését tökéletesen felveszik. De mivel az egyenes vonal, millyenből állanak a' sokszögök' oldalai, soha sem veheti fel azon tökéletes görbülést, mellyel a' körvonal bír; bármelly számtalan legyen a' be és körülírt sokszögnek oldala, a' körrel egyenlő soha sem lehet, de ahoz csak közelíthet, melly közelítést a' körület' mérésinél bővebben fogjuk vizsgálni.


1
b
c
a
2
D
a b
A
C
B
3
D
A
B
C
4
C
m n
a
b
A
B
D
E
5
C
A
B
6
C
A
B
7
C
1
3
A
2
B
1 2 3
8
c
3
2
a 1 b
3
2
d
1 2 3

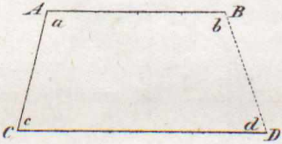
9



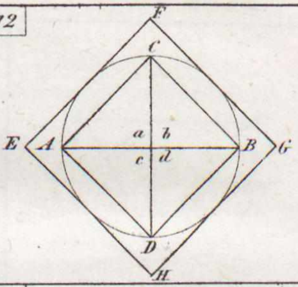
10



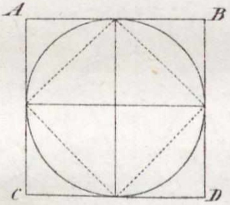
11



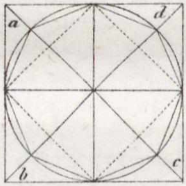
12



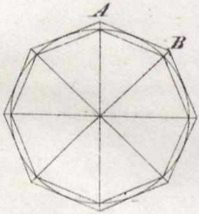
13



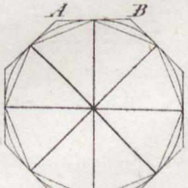
14



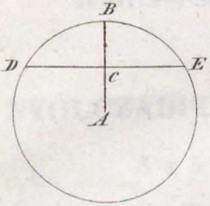
15



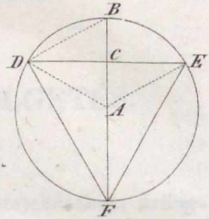
16



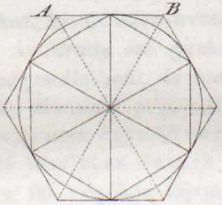
17



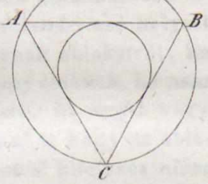
18



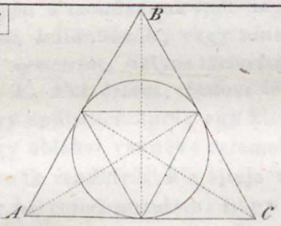
19



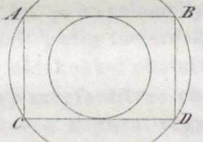
20



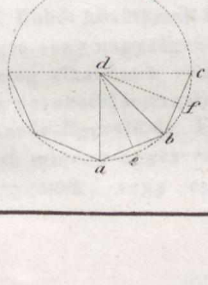
21



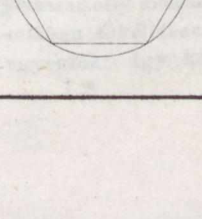
22



23



24



NYOLCZADIK BESZÉLGETÉS.

Aránylat.

K. Gyakorta használtuk már a' kifejezéseket: *arány-lat aránylati*; noha értelmüket felfogtam, még is szeretném közelebbi és meggyőző tekintetek általi világításokat, kivált haszonvételeikre nézve?

F. Az *arány* szó gyakorta hibásan alkalmaztatik a' közönséges életben, és nem ritkán a' *rendes* szó helyett vétetik. Mondani p. o. valamellyháznak ablakairól, ha ezek vagy nem egyenlő nagyságúak vagy alakúak, ha nem egyenlő távolyban vannak egymásközt, ha egyik vagy másik a' fal végéhez közelebb áll' 's a' t. hogy az ablakok nincsenek arányban hibás; mert a' kifejezés nincs helyén 's mondanunk kell hogy: a' ház' ablakai, *rendetlenek*, különbözők, vagy nincsenek rendben, melly rend szó *symetriat*, helyes elrendelést jelent.

K. Ezt értem, tudom is hogy, ha p. o. valamelly nagy épületnek apró, egy kis házikónak pedig temérdek nagy ablakai vannak; valamelly nagy ablakokkal ellátott háznak rendkivüli kis ajtaja van, vagy megfordítva; ekkor helyesen mondom, hogy az ablakok a' kapuval vagy az épülettel nincsenek arányban; valamint mondjuk: ha több az emésztő mint az ennivaló, ha valaki többet költ mint mennyi jövedelme, hogy az emésztők az eleséggel, és a' kiadás a' bévétellel nincsenek arányban?

F. Ebből következik hogy, az arány mindenkor mennyiségre vagy nagyságra mutat a' tárgyak hasonlításánál. Mint elég alkalmunk volt látni, a' geometria következő három nevezetet használja kirekesztőleg.

1-ször *Egyenlőség*. Egyenlők egymással olly alakok, mellyek minden egyes és külön részeikben tökéletesen megegyeznek, vagy egymásközt egyenlők. Igy két egyenlő vonal, szög, három, négy, sokszög vagy sokoldal, egyenlő hosszaságú, nyílású, terjedségű 's a' t.

2-szor *Rendeslét.* A' rendes vagy symetrikai alakokban egyenlő oldalok és egyenlő szögök vannak; bárhány oldalúak vagy szögűek legyenek a' rendes idomok, egymásközt hasonlíthatók. Igy a' rendes három vagy négyszög p. o. a' rendes 5, 6, 8 vagy 12 szöggel hasonlítható, mert valamennyien egyenlő oldalokkal és szögökkel bírnak *külön külön véve.*

3-szor *Hasonlóság.* Hasonlók az alakok egymásközt, ha egyes részeik egymásközt *arányban* vannak.

Igy p. o. két háromszög egymással hasonló, ha egymásnak megfelelő oldalaik arányban állanak. I Idomunkban két háromszögöt látunk, a' kisebbiknek három oldala *a*, *b* és *c*, a' nagyobbiknak *A*, *B* és *C*, az egymásnak megfelelő oldalok a' két háromszögben tehát *a* és *A*, *b* és *B*, *c* és *C*. Tudjuk hogy, a' hasonló harómszögökben a' szögök egyenlők, azon oldalokat nevezzük eszerint *egymásnak megfelelőknek* két háromszögben, mellyek az egyenlő szögök átellenében vannak.

K. Nemde következik ebből hogy, *A* oldal annyival nagyobb *a* oldalnál, mennyivel nagyobb *B* *b* nél és *C* *c* nél?

F. Ezt csak akkor mondhatnók, ha a' háromszögök egyenoldalúak vagy rendesek volnának; de mihelyest az oldalok' nagysága egyik egyik háromszögben különböző, az egyenlővel *több* vagy *kevesebb*, *nagyobb* vagy *kisebb* kifejezések nem helyesek, de helyettük az arány nevezetet kell válosztanunk.

Valamelly két vagy több hasonlítandó tárgy' egymásközti arányát csak számok által lehet kifejeznünk, 's ha két különböző mennyiség arányban nő vagy fogy, mindenkor az azokat kifejező számok nőnek vagy fogynak a' köztük fennálló arányban.

K. Ez igen világos, mert ha p. o. két vonal (melly közűl egyik nagyobb) arányban nő, a' nagyobbik ugyanazon idő alatt szükségesképen nagyobbat nőtt mint a' kisebbik. Szinte ha két gyermek nagyságát tekintjük, feltévén hogy egyik 24 hüvely, a' másik 18 hüvely magosságú és hogy arányban nőnek; midőn a' kisebbik 24 hüvelyre nőtt, az elsőnek 30 hüvelynél nagyobbnak kell lennie, mert ha csak 30 hüvely volna, növésük nem lehetett arányban a' mint mindegyík 6 hüvellyel nagyobbodott?

F. A' példa elég helyes hogy, bármelly két különböző hosszaságú vonal' aránylagi növésére alkalmazzuk. Arra visszük vissza kérdésünket, ha 18 hüvely hosszaságú vonal 6 hüvelyt nő, mekkorára kell nőni 24 hüvely hosszaságú vonalnak, ha növésük arányban van? Ezen kérdésben az arány és aránylat értelme tiszta, mert valamint következett 18ból 24, ugy kell 24ből következni a' nagyobbik vonal mostani hosszának. *Arányban nőnek vagy fogynak eszerint a' mennyiségek, ha növésök vagy fogyások minden egyes részeiken történik.*

K. Látom ebből hogy, elébbi kifejezésem: „*annyival nagyobb*" nem alkalmazható az aránylati növésre, és hogy ezen növés nem az összeadás által fejeztetik ki, mert ekkor, ha mindkét vonal egyenlő mennyiséggel nő, az egyik $18+6=24$, a' másik pedig $24+6=30$ hüvely lesz, de szembetünő hogy, mi nem az *egyenlő* hanem az *aránylati* növést keressük. Ezt látni már több alkalmunk volt, kivált a' háromszögöknél, hol vizsgáltuk (IV Beszélg. 10 I.), miként változik a' különböző oldalú háromszög alakja, ha oldalai egyenlő darabokkal nőnek vagy fogynak? De miként találjuk meg az aránylagi növést?

F. Mondom, miként nő, vagy is: mennyivel nagyobb lesz a' 18 hüvely hosszú vonalnak mindegyik egyes hüvelye, szintugy nő, vagy annyival nagyobb lesz a' 24 hüvelyes vonalnak mindegyik egyes hüvelye.

K. Bizonyos hogy a' növés, az egésznek legkisebb részeiben is észrevehető és aránylagi: következtetem tehát, hogy e kérdés az előbbivel megegyez; mennyi hüvelye vagy része kívántatik az egyik vonalnak hogy p. o. a' növés' egy hüvelyét vagy bármelly egyes részét eszközölje, annyi kívántatik a' másikból is?

F. Helyesen és épen ezen tekintet bizonyítja, hogy a' növés: *származás*, vagy is, a' vonalok vagy mennyiségek bizonyos részükkel szaporodnak.

Példánkban mondom hogy, a' 18 hüvely öszszesen 6 hüvellyel, tehát mindegyik egyes hüvely $^6/_{18} = ^1/_3 =$ egyharmadrészivel, következésképen az egész vonal egyharmadával nőtt. Ezen *egyharmad* azon arány, mellyet vizsgálunk és példánkra alkalmazva keresünk: ha tehát a' másik vonal ezen arányban nő, szükségesképen minden egyes részeinek 's következőleg egészének is egy harmadával kell nőni, ennek harmada pedig $^{24}/_3 = 8$, vagy is: minden egyes részeinek egyharmadát vévén $24 \times ^1/_3 = 8$ egész hüvely. Igy lett tehát 24 ből 32, aránylag nőve, ha 18 ból 24 következett.

K. Javítom tehát kifejezésemet mondván hogy: arányban nőnek vagy fogynak a' mennyiségek, nem akkor, ha egyik *annyival* nő vagy fogy mint a' másik, de akkor, ha egyik *annyiszorta* nő vagy fogy, *mennyiszerte* nő vagy fogy a' másik.

Igy az összeadás helyébe a' sokszorozást, a' levonás helyébe pedig az elosztást teszem mondván hogy, ha p. o. egyik 2-szer, 3-szor, 4-szer 's bárhányszor akkorát nőtt vagy fogyott, a' másik is szinte annyiszor nagyobb vagy kisebb lett.

Ha pedig azt veszem fel, hogy 24-ből származott 30 és keresem, mennyivel szaporodott ezen arányban a' másik, találom hogy 24 épen egynegyedrészével nőtt, mert $^6/_{24} = ^1/_4$'s igy 18 is egynegyedével szaporodván, $^{18}/_4 = 4^1/_2$ hüvellyel nőtt 's lett belőle $18 + 4^1/_2 = 22^1/_2$ hüvely?

F. Mindezen tekinteteink' fő czélja, a' háromszögök' és egyéb alakok' hasonlóságát megtalálni. De tekintsük előre, miként találni meg a' vonalok arányait szögök nélkül.

Adva van két vonal, egyik 2 hüvely hosszú, a' másik 3, kerestetik egy harmadik vonal, melly hozzájuk arányban legyen?

Abból, mit eddig vizsgáltunk, nyilván következik hogy, a' kérdés nem az: mennyivel nagyobb 3 a' kettőnél? mert ekkor a' harmadik aránylat természetesen következnék's 4 lenne; bizonyos hogy 4 annyival nagyobb háromnál, mennyivel nagyobb három a' kettőnél, az az: egyel; de a' 3 és 4 közti arány nem egyenlő a' 2 és 3 közti aránnyal, mi pedig az arány egyenlőségét tesszük fel minden tekinteteinkben.

Azt keressük tehát: miként származott 3 a' 2ből, és ugy fog származni 4 a' 3ból.

Tudjuk pedig hogy a' keresett arány nem egyéb, mint a' két számközti részes, vagy is $^3/_2$, mert, $2\times{}^3/_2=3$, az az: három, kettőből ugy származik ha $^3/_2$el sokszoroztatik; szinte igy támad háromból $^3/_2$ sokszorozása által a' keresett harmadik aránylat vagy vonal, 's lesz

$$3 \times {}^3/_2 = {}^9/_2 = 4^1/_2.$$

Ha a' kérdést megfordítjuk, mondván hogy: a' harmadik vonal azon arányban álljon *kettőhöz*, mellyben áll 2 a' 3 hoz, természetes hogy, az elébbi sokszorozónk is megfordul, mert 3 és 2 közti arány $^2/_3$, és a' keresendő harmadik szám' kisebb 2nél, vagy $=2\times{}^2/_3={}^4/_3=1^1/_3$. Az első esetben tehát azon arányban áll $4^1/_2$ 3hoz, mellyben áll 3 a' 2höz; a' másodikban $1^1/_3$ 2 höz, mellyben 2 a' 3 hoz.

K. Ebből következtetem hogy: ha valamelly két vonalközti arány adva van és bárhány vonalnak kívántatik aránylagi' növése, azen arány lesz valamennyinek változatlan sokszorozója: 's valamint következik p. o. a' harmadik a' másodikból, szintugy származik a' harmadikból a' negyedik, ebből az ötödik 's a' t. vonal vagy mennyiség. Mit nevezünk kirekesztőleg *aránylatnak*?

F. Az *aránylat* írásbeli műszere a' geometriának és különösen csak négy mennyiségre nézve fejezzük ki általa, melly arányban állanak ezek egymásközt. Ha csak két mennyiség jön tekintetbe 's kérdezzük: mennyiszerte nagyobb vagy kisebb egyik a' másiknál, az ezen különbözöséget kifejező számot nem aránynak, de *viszonynak* nevezzük. Igy p. o. nem kérdezzük melly arányban van a' két szám 3 és 5, hanem melly a' két számközti viszony?

Ez tudjuk a' két számközti részes, 's ha növesztő vagy nagyobbító, ekkor a' nagyobbik szám osztandó, a' kisebbik osztó, és esetünkben $^5/_3$; megfordítva pedig a' kisebbik osztandó, a' nagyobbik osztó és$=^3/_5$, melly viszony fogyasztó vagy kisebbitő.

Ha két szám osztatik el külön különvéve más két szám által, és az osztási részesek egyenlők, ekkor a' két pár szám közt a' viszonyok is egyenlők és a' 4 szám egymásközt aránylatban van. Ha tehát 4 szám, vagy mennyiség aránylatban van, párosan vevén azokat, egyenlő viszonyokra találunk.

K. Eszerint minden aránylatnak 4 tagja van és két két tagnak viszonya egyenlő.

Miként jelöljük vagy írjuk fel az aránylatot?

F. Vegyük a' kérdést közönségesen, könnyen alkalmazhatunk jövőben különös példákat és eseteket betűinkre.

Legyen adva 4 mennyiség *a*, *b*, *c* és *d* azon megjegyzéssel hogy *a* és *b* közt, és *c* és *d* közt a' viszonyok egyenlők, tehát $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$, mi nem egyéb mint, ha az elsőt a' másodikkal elosztom, részesem ugyan az, melly a' harmadik és negyedikközti részes, és a' kifejezés tökéletes, a' jelölés mód pedig igen egyszerű. Azt is tudjuk hogy, ha a' viszonyokat megfordítjuk, a' növésből fogyás lesz, vagy a' fogyásból nővés, ha eléb nővest vagy fogyást származtattak a' viszonyok; de változatlan megmarad $\frac{b}{a} = \frac{d}{c}$, csak hogy az osztandóból osztó lett 's megfordítva az osztóból osztandó.

Az osztásnak jele tudjuk a' kéttős pont (:), ha ezt válosztom a' két számot elkülönző vonal helyett, előbbi írásom lesz $a:b = c:d$; 's igy szokás felírni a' közönséges geometri aránylatot 4 mennyiség közt, melly felírás szóval azt teszi hogy: valamint áll *a* hoz *b*, szintugy áll c hez *d*. Minden geometri arány tehát 4 tagból áll, és mint származik az elsőből a' második, ugy származik a' harmadikból a' negyedik.

K. Tudom, miként írhatunk a' betűk helyibe számokat, ha különös példákat keresünk; és ha aránylatunkra alkalmas számokat válosztunk, azonnal bizonyos aránylatokra jutunk.

Párosával keresek olly számokat, mellyeknek részesei egyenlők 's a' 4 számot aránylatba írom. Illyen 4 szám p. o.

$$6/3 = 18/9 = 2$$

szinte $8/2 = 16/4 = 4$

$$25/5 = 5/1 = 5$$

és végre $36/12 = 6/2 = 3$

Itt egyszerre 4 példát vettem, mindegyikben két pár számot, az együvé tartozó két párnak részesei egyenlők, mi egy pillanattal észrevehető. Két elsőbb példámban a' második pár számok nagyobbak, a' két utolsóban az első párok, mindegyik példa' 4 száma geometri arányban áll 's ha elébb kijelölt írásomat megtartom, lesz a' 4 aránylatom sorjában:

$$6 : 3 = 18 : 9$$
$$8 : 2 = 16 : 4$$
$$25 : 5 = 5 : 1$$
$$36 : 12 = 6 : 2.$$

Ha a' viszonyokat megfordítom, az aránylat fennmarad változatlan, csak a' tagoknak helyei változnak.

Legelső példám' viszonyait megfordítván lesz:

$$3/6 = 9/18 = 1/2$$

's látjuk miként fordultak az osztók osztandókba a' nélkül, hogy a' viszonyok' egyenlősége szenvedne. Ha ezen megfordított viszonyban álló 4 mennyiséget aránylatba írom, lesz: $3 : 6 = 9 : 18$

's ha eszerint betüink helyeit cseréljük fel, szinte így irjuk $b : a = d : c$. Mind két esetben fennmaradt tehát tételünk hogy: *a' geometri aránylatban szintugy származik a' 4 dik tag a' 3 dikból, mint származik a' második az elsőből, történjék a' származás növés vagy fogyás által.*

Mellyek ezen kivül az aránylatoknak tulajdoni?

[37] *F.* A' geometri arány' négy tagja közt az első és utolsó (vagy negyedik) *külső* tagoknak, a' második és harmadik *belső* tagoknak neveztetnek.

Változatlan és fő ismertető jele a' geometri aránylatnak hogy: *a' külső tagok' származata egyenlő a' belső tagok' származatával.*

Vegyünk magyarázatink' világosítására két példát, közönségeset és egy különöset, legyen

$$a = 3, \quad b = 6, \quad c = 9 \quad \text{és} \quad d = 18.$$

Két aránylatunk

$$a : b = c : d \quad \text{és} \quad 3 : 6 = 9 : 18.$$

A' mondott szerint

$$ad = bc \quad \text{és} \quad 3 \times 18 = 6 \times 9$$

a' belső tagok sokszorozva egyenlők a' külső tagokkal, sokszorozva ezeket is, és valóban:

$$3 \times 18 = 54 \quad \text{és} \quad 6 \times 9 = 54.$$

Ha a' 4 tag ezen feltételnek eleget nem tesz, *nincs arányban*. Hogy pedig a' most kijelölt származatok egyenlősége minden aránylatban szükségesképen megvan következőleg bizonyítjuk.

Feltételünk szerint $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, valamint $3/6 = 9/18$, vagy is, a' két viszony egyenlő. Tudjuk hogy ha valamelly mennyiséget maga magával osztunk, részesünk az egység, két egyenlő mennyiség pedig annyi, mint egy mennyiség kétszer véve és maga magával hasonlítva. Esetünkben p. o. $^3/_6 = ^1/_2$ és $^9/_{18}$ is $= ^1/_2$, tehát felet féllel osztani annyi mint $^3/_6$ot $^9/_{18}$al osztani, a' részes mindegyik esetben $= 1$ mert felet félben csakugyan egyszer találunk; 's igy közönségesen

$$\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = 1, \text{ és } {}^3/_6 : {}^9/_{18} = 1.$$

A' törtszámok' elosztásából tudjuk, hogy ez helyesen irvá

$$\frac{ad}{bc} = 1, \text{ és } \frac{3 \times 18}{6 \times 9} = 1.$$

De itt egyes viszonyokra találtunk, mellyekből azonnal következik, hogy $ad = bc$ és $3 \times 18 = 6 \times 9$, mi természetes, különben a' részes nem lehetne $= 1$, tehát megbizonyítva van, hogy a' külső tagok' származata egyenlő a' belső tagok' származatával.

K. Könnyen reá ismerhetni tehát ez által, helyes e' valamelly aránylat. Nemde következtethetni ebből, hogy az aránylat' 4 tagját bárhogy rakhatom szét egymásközt ha ezen feltétnek eleget teszek, hogy t. i. a' két említett származat egyenlő maradjon?

F. Ugy van és mindegyik külön felírás bizonyítja, miként változik a' viszony a' nélkül hogy az aránylat változnék. Tekintsük, hányféleként lehet írni 4 tagú aránylatot.

Láttuk egyenes és megfordított visszonyait két példaaránylatunknak 's ezek voltak:

$$1) \quad \frac{a}{b} = \frac{c}{d}, \quad {}^3/_6 = {}^9/_{18} = {}^1/_2$$

$$2) \quad \frac{b}{a} = \frac{d}{c}, \quad {}^6/_3 = {}^{18}/_9 = 2.$$

Ha az első viszony' osztóját a' másiknak osztandójával felcserélem, következő viszonyra találok:

$$3)\quad \frac{a}{c} = \frac{b}{d} = 3/9 = 6/18 = 1/3$$

's ezt megfordítva, lesz

$$4)\quad \frac{c}{a} = \frac{d}{b} = 9/3 = 18/6 = 3,$$

's igy négy pár különböző viszonyra találtam a' 4 mennyiség közt, hol a' számok által kifejezettek sorjában $1/2$, 2, $1/3$ és 3, és hol tudjuk a' 2 visszált értéke $1/2$nek, 3 pedig a' $1/3$nek, vagy megfordítva.

Ezen négy pár visszonynál több lehetetlen az aránylat 4 tagja közt; de az aránylatot még 4 féleként lehet felírni' a' hely változtatás által, ha p. o. ezen 4 pár viszony egyes tagjainak helyüket felcserélem 's mi az egyenlőség jegyeinek most jobb felin áll annak balfelire teszem, jön:

$$5)\quad \frac{c}{d} = \frac{a}{b},\quad 9/18 = 3/6$$

$$6)\quad \frac{d}{c} = \frac{b}{a},\quad 18/9 = 6/3$$

$$7)\quad \frac{b}{d} = \frac{a}{c},\quad 6/18 = 3/9$$

$$8)\quad \frac{d}{b} = \frac{c}{a},\quad 18/6 = 9/3.$$

Ha most ezen 8 esetet sorjában aránylati alakba írjuk, lesznek:

1)	$a : b = c : d$	»	$3 : 6 = 9 : 18$
2)	$b : a = d : c$	»	$6 : 3 = 18 : 9$
3)	$a : c = b : d$	»	$3 : 9 = 6 : 18$
4)	$c : a = d : b$	»	$9 : 3 = 18 : 6$
5)	$c : d = a : b$	»	$9 : 18 = 3 : 6$
6)	$d : c = b : a$	»	$18 : 9 = 6 : 3$
7)	$b : d = a : c$	»	$6 : 18 = 3 : 9$
8)	$d : b = c : a$	»	$18 : 6 = 9 : 3.$

és mindegyik esetben $ad = bc$, $6 \times 9 = 3 \times 18$.

[37] *K.* Látom miként lehet a' negyedik tagot meglelni, ha csak három ismeretes.

Valamelly külső tag megtaláltatik, ha a' belső tagok' származata az adott külső taggal elosztatik, mert:

$$a = \frac{bc}{d} \text{ és } d = \frac{bc}{a} \text{ valamint } 3 = \frac{6 \times 9}{18} \text{ és } 18 = \frac{6 \times 9}{3}$$

Valamelly közép tag megtaláltatik, ha a' külső tagok' származata az adott belső tag által elosztatik, mert:

$$b = \frac{ad}{c} \text{ és } c = \frac{ad}{b},\ 6 = \frac{3 \times 18}{9} \text{ és } 9 = \frac{3 \times 18}{6}$$

Ha tehát valamelly aránylatnak három tagja adva van, ezekből a' negyedik könnyen megtalálható.

Nemde vannak olly aránylatok is, mellyekben két egyenlő tag van?

F. Vannak, és ezekben vagy a' külső, vagy a' belső tagok egyenlők: de mint láttuk a' külső tagokat belsőkké tehetjük, tehát a' két egyenlő tagot mindenkor belsőnek vehetjük 's ekkor csak egyszer kell azt írnunk 's aránylatunknak 4 tagja helyett 3 van és *állandónak* neveztetik. Ekkor a' középső tag, maga magával sokszorozva, egyenlő a' külső tagok származatával. Ha p. o. a' kérdés lenne, miként áll b c hez, ugy álljon c hez d, aránylatunk $b : c = c : d$ és helyibe írhatjuk $b : c : d$, hol mondjuk hogy c *közép arány* b és d közt. Számokkal lesz, mondván: ugy álljon 12 a' 6 hoz, mint 6 áll 3 hoz,

$$3 : 6 = 6 : 12, \text{ vagy } 3 : 6 : 12,$$

és a' két származat

$$c \times c = bd = c^2, \quad 3 \times 12 = 6 \times 6 = 6^2.$$

[38] *K.* Látom hogy a' külső tagok származata egyenlő a' közép arány négyszögével, tudván hogy minden mennyiség maga magával sokszoroztatva négyszögét adja. De azt is tudom hogy, ezen két számközti középarányt másként meg nem találjuk, ha csak a' külső tagok' származatának gyökerét nem vesszük?

F. Valóban ugy van, 's kitől kérdeznők: mi 2 és 8 közt a' középarány, a' kérdésre felelni nem tudna, ha a' számok' gyökerét venni nem tanulta: ezen esetben $2 \times 8 = 16$, olly számot kell tehát keresnünk, melly maga magával sokszorozva 16-ot adja származatul; ez tudjuk 4, mert $4 \times 4 = 16$, következésképen 16-nak gyökere 4, mi írva: $\sqrt{16} = 4$, ha a' gyökér jegyet $\sqrt{}$ vel jelöljük, feleletünk eszerint $2 : 4 : 8$, vagy $2 \times 8 = 4^2$, és $4 = \sqrt{2 \times 8}$, betünkel pedig, hol $c^2 = bd$ volt, $c = \sqrt{bd}$.

K. Noha ezen itt előadott tárgyat értem, őszinte megvallom, hogy a' számok' gyökerét venni nem tudom, mert a' számvetésnek csak elemeit tanultam, a' gyökérvevésig pedig nem jutottam. Vallyon nem mehetünk e' tovább tekinteteinkben a' nélkül, hogy a' gyökérvevést szükségesképen most mindjárt megtanulnom kellenék?

F. Noha az arithmetikai míveleteket, mellyeknek száma csakugyan nem nagy, ismerni és jól tudni mindegyikünknek szükséges és minden környülmények közt ajánlható, szerencsénkre mostani tekinteteinkhez, mellyeket a' geometriának csak legelső elemeire terjesztünk, a' gyökérvevésre elmulhatlan szükségünk nincs. De mivel némelly későbbi magyarázatinknál a' számok' négyszögére és gyökerére hívatkozni fogunk, tekintsük rövideden, mellyek az egészszámok' négyszögei a' természetes számsorban, és mit nevezünk *tökéletes emelésnek* és *tökéletes gyökérnek.*

K. A' számok' *második emeléseit* vagy *négyszögeit* ismerem 's tudom hogy ez nem egyéb, mint a' szám' tulajdon származata, ha magát magával egyszer sokszorozzuk. Fel is írok ide néhány a' természetes számsorban egymásután következő számot négyszögével együtt 's ezek:

1.	$1 = 1^2 = 1.$	5.	$5 = 5^2 = 25.$	9.	$9 = 9^2 = 81.$
2.	$2 = 2^2 = 4.$	6.	$6 = 6^2 = 36.$	10.	$10 = 10^2 = 100.$
3.	$3 = 3^2 = 9.$	7.	$7 = 7^2 = 49.$	11.	$11 = 11^2 = 121.$
4.	$4 = 4^2 = 16.$	8.	$8 = 8^2 = 64.$	12.	$12 = 12^2 = 144.$

's a' t. ezekből természetesen következik, hogy ha p. o. 7-nek négyszöge 49, bizonyosan 49-nek gyökere $= 7$, valamint 121-nek gyökere = 11. Nemde olly számokat nevezünk tökéletes gyökereknek, mellyek *egészszámokkal* vannak írva?

F. Valóban ugy van, valamint azon számokat nevezzük tökéletes négyszögöknek, mellyek valamelly szám' maga magával történt sokszorozásából származtak. Könnyű lesz most következtetni, mikor nem tökéletes valamelly gyökér?

Ha p. o. számainkat 1, 2, 3, 4, 5, ... sorjában gyökereknek nevezzük, tulajdon származataik 1, 4, 9, 16, 25 . . . , négyszögeik lesznek. Ezek mind egészszámok. A' gyökerek egyel egyel nagyobbodván a' természeti számsor' egymásután következő tagjai, 's kettő között nem állhat a' sorban más egészszám, azért mondjuk hogy, ezen sorunkban minden egymásután álló két gyökér közt a' különbség csak = 1. De ha ezen számok' négyszögeit tekintjük, azt vesszük észre hogy, a' különbség két egymásután következő közt' annál nagyobb, mentül távolabb esnek számaink a' sorban, vagy is, mentül nagyobbak, annál több egyes szám fér el közöttük. Ha néhányat veszünk például különbségekkel, látjuk hogy:

1	és	4	között	a'	különbség	3,
4	»	9	»	»	»	5,
9	»	16	»	»	»	7,
16	»	25	»	»	»	9,
25	»	36	»	»	»	11,
36	»	49	»	»	»	13,
49	»	64	»	»	»	15,
64	»	81	»	»	»	17 's a' t.

Ebből látom p. o. hogy 3 és 4 közt nem lévén egészszám, ezen gyökerek' négyszögei közt, 9 és 16 közt, 7 egész egyes szám van, ha tehát 3 és 4 közt nincs tökéletes gyökér, 9 és 16 közt sem lehet tökéletes négyszög.

K. Ez nyilván, és más szóval azt teszi, hogy ha a' számoknak 10, 11, 12, 13, 14 és 15, mellyek mind 9 és 16 közt állanak, gyökereit akarom venni, ezeket egészszámokkal ki nem fejezhetném mert 3 és 4 közzé esnek, ugy hogy mindegyiknek gyökere nagyobb 3-nál, de kisebb 4-nél. Miként lehet ezen nem tökéletes gyökereket kifejezni?

F. Ha 3 és 4 közt egészszám nem áll, igen természetes hogy egész és törtszámokkal lehet csak kifejezni azokat, mellyek 3-nál nagyobbak, de 4-nél kisebbek. Tudjuk hogy a' tizedes törtek legalkalmasabbak erre, mert általok annyira közelíthetünk a' keresett gyökér valódi' értékéhez, mennyire kívántatik. Ezen szóból *közelítés* észrevehető, hogy valamelly nem tökéletes gyökérnek valódi értékét soha sem lehet tökéletesen kifejezni, bárhány tizedes számjegyet vegyünk, de csak közelítve, melly közelítés, mint említém, minden kívánatnak megfelelhet.

K. A' tizedes törteket ismerem 's tudom hogy p. o. már a' szám $1/3$ sem fejezhető ki általok tökéletesen, mert a' tizedes rendszerre alapulván, csak azon közönséges törteket fejezik ki, mellyeknek nevezőji a' tíznek rendjeit osztják. Sejdítem hogy, a' gyökerekkel is így van, de miért nem válosztjuk tehát inkáb a' közönséges törteket?

F. Azért, mert a' gyökérvevés is a' tizedes rendszeren alapult, valamint a' tizedes törtek, közönséges törtek által pedig nem szokás gyökeret venni. De ezen kivül az $1/3$ példa igen helyesen alkalmazható tekinteteinkre, mert azt jelöli, hogy 1 és 3 közt a' közép arány kerestessék, vagy is azon szám, melly 3 által sokszoroztatván 1-et ád származatul. Szinte igy keressük a' gyökérvevésnél azon számot, melly maga magával sokszorozva, az adott számot szármoztatja, vagy is a' négyszög és gyökere közti viszonyt. Ha első esetünkben, hol valamelly közönséges törtet tizedesbe változtatunk, a' tört' nevezője a' tizet 's ennek felsőbb rendjeit meg nem osztja, a' számláló és nevező közti viszony nem fejezhető ki tökéletesen, de csak közelítve, de a' közelítés végtelenig folytatható. Ha második esetünkben az adott szám nem tökéletes négyszög, gyökere sem lehet tökéletes, de értékéhez mind inkáb közeledünk, mentül több tizedes tört jegyet veszünk kifejezésére. Mindkét esetben mondjuk, hogy a' szám (viszony) *mérhetlen.*

K. Hogy valamelly mérhetlen gyökér értékéhez tetszésünk szerint közeledhetünk, magam is megtudom egy példán mutatni.

Kívántatnék p. o. 3 és 7 közt a' közép arány, melly mint tudjuk ezen két szám származatának, 21-nek gyökere.

A' szám 21 nem lehet tökéletes négyszög, mert 4 és 5 négyszöge közt, az az, 16 és 25 közt áll, gyökere tehát nem mérhető, mert 4 és 5 között lévén, 4-nél nagyobb, de 5-nél kisebb. Arithmétikám' egyik táblájából látom, hogy 21-nek gyökere közelítő számokkal kifejezve $= 4{\cdot}5825757$, vagy is 4 egész és törtszám, melly tört 7 tizedes jeggyel van adva.

Ha $4{\cdot}5825757$ tökéletes gyökere 21-nek, maga magával sokszoroztatván, a' származat szükségesképen $= 21$.

Tekintsük lépcsönkint, miként közeledünk 21-höz, ha több több számjegyeit sokszorozzuk egymásután az adott gyökérnek maga magával.

Ha 4 egészet 4 egészel sokszorozunk, a' származat tudjuk 16, és 21-ből még 5 egész hijánzik.

Egy tizedes helyet vevén az egészekhez $4{\cdot}5 \times 4{\cdot}5 = 20{\cdot}15$ és most már csak $0{\cdot}85$, vagy 85 századrész $= {}^{17}/_{20}$ hijánzik, tehát $(4{\cdot}5)^2 = 20{\cdot}15$. Ha igy veszek több több tizedes jegyet, a' különbségek mindég kisebbek lesznek, míg végre ha mindhét tizedes jegyet sokszorozom maga magával (a' 4 egészhez adván mindég a' jegyeket) következő közelítésekre találok:

4^2	$= 16$	hijány	5 egész
$(4{\cdot}5)^2$	$= 20{\cdot}15$	»	$0{\cdot}85.$
$(4{\cdot}58)^2$	$= 20{\cdot}9764$	»	$0.0236.$
$(4{\cdot}582)^2$	$= 20{\cdot}994724$	»	$0{\cdot}005276.$
$(4{\cdot}5825)^2$	$= 20{\cdot}99930625$	»	$0{\cdot}00069375.$
$(4{\cdot}58257)^2$	$= 20{\cdot}99994779$	»	$0{\cdot}00005221.$

$(4{\cdot}582575)^2 = 20{\cdot}99999303$ hijány $0{\cdot}00000697$.
$(4.5825757)^2 = 20.9999999$ » $0{\cdot}00000001$.

21-nek gyökere eszerint az adott 4 egész számmal és a' hozzá ragasztott 7 tizedes jeggyel megnyugtató közelítéssel van adva, mert valódi értékéből alig egy száz milliomod része hiányzik az egységnek.

K. Alkalmaztassunk az aránylatokra néhány példát. Adva van két vonal, 5 és 9 hüvely hosszaságú, a' harmadik 3 hüvely 's ehez kerestetik a' negyedik aránylati vonal?

F. A' kérdés nem elég világos. Annyit tudok, hogy a' negyedik vonal keresendő, melly 3 hoz azon viszonyban álljon, mellyben állanak a' számok 5 és 9, de mellyikben, az egyenesben vagy megfordítottban? nem tudom. 5 és 9 közt az első $^5/_9$, a' másik $^9/_5$; két aránylatom lesz tehát, 's egyik, ha az ismeretlen 4-dik tagot x által jelölöm:

$5 : 9 = 3 : x$, a' másik pedig:
$9 : 5 = 3 : x$,

az elsőből következik $x = 9 \times 3 : 5 = 27 : 5 = 5^2/_5$
a' mósodikból $x = 5 \times 3 : 9 = 15 : 9 = 1^2/_3$.

's mint előre tudhattuk, az első eset a' negyedik vonalat 3-nál nagyobbra, a' második pedig kisebbre véteti.

Az adott két vonalközti viszonyt helyesen kell tehát kifejeznünk a' kérdés által, 's mondani p. o. azon viszonyban álljon a' keresendő 4-dik vonal a' számhoz 3, mellyben áll a' szám 5 a' szám 9 hez, vagy mellyben áll 9 az 5 höz ha a' kérdést megfordítjuk 's ekkor a' második kimondott szám mindenkor osztója az előbb kimondott számnak.

K. Hasonló háromszögökben az oldalok arányban állanak [17].

Ha p. o. egyik háromszögnek oldalait sorjában a' számok 3, 4 és 5 fejezik ki, a' másik háromszögben pedig p. o. a' 3-nak megfelelő oldal 6, 9, 12 vagy 15 szám által van adva, természetes hogy, másik két oldala annyiszor lesz 4 és 5, hányszor 3 az első, vagy is: az első szerint lesznek 2, 3, 4 vagy 5-ször akkorák, és a' második oldal a' 8, 12, 16, 20, a' harmadik pedig 10, 15, 20, 25 számok által kifejezve.

Legyenek például egyik háromszögünk oldalai 4, 5 és 6 hüvely hosszúk, kerestetnek azon hasonló háromszög' egymásnak megfelelő oldalai, mellyben egy oldal 6-szor akkora?

F. Ezek sorjában $4 \times 6 = 24$, $5 \times 6 = 30$ és $6 \times 6 = 36$ hüvely hosszúk, mert itt a' két háromszög' oldalaiközti viszony $= 6$, és ezzel sokszoroztatnak az első háromszög' oldalai.

K. Tehát ha valamelly két hasonló háromszögben két egymásnak megfelelő oldalközti viszony ismeretes, a' többi oldal is ismeretes?

F. Bizonyosan, mert mindegyik oldal ugyanazon viszonyban áll az adott háromszög neki megfelelő oldalával. Ha p. o. valamelly adott háromszögöm oldalai sorjában a, b és c betűvel vannak kifejezve, és tudom hogy egy más hasonló háromszög' oldala és az adott háromszög ennek megfelelő oldalai közti viszony x, a' keresendő háromszög' oldalai sorjában ax, bx és cx.

Eszerint bármelly hasonló háromszögöt alkothatni, ha x adva van, melly szám egyszerűen azt jelenti, mennyiszer nagyobbak vagy kisebbek az alkotandó háromszögnek oldalai az adottnak oldalainál, vagy is: mennyiszer nagyobb vagy kisebb az egész háromszög az adottnál.

K. Ezen viszonyt (mellyett itt x által jelöltünk) bármelly két mennyiség közt tudom könnyű meglelni, mert egyiket a' másik által egyszerűen elosztjuk. Adjunk egy közönséges példát valamelly hasonló háromszög oldalainak meglelésére?

F. Felteszem mint elébb hogy, az adott háromszög oldalai sorjában a, b és c; legyenek a' hasonló háromszög ezeknek megfelelő oldalai a', b' és c', hol tudjuk hogy az egymásnak megfelelő oldalok ugyanazon betűkkel jelöltetnek, és aa', bb', cc' egymásnak megfelelő oldalok.

Az első háromszög oldalai tehát a' második háromszög oldalaival arányban vannak, és:

$$a : a' = b : b' = c : c'$$

valamint mindegyik háromszögben az oldalok is, és:

$$a : b : c = a' : b' : c'.$$

Tudjuk hogy az egymásnak megfelelő oldalokközti viszony egyenlő, és hogy:

$$\frac{a'}{a} = \frac{b'}{b} = \frac{c'}{c}$$

és megfordítva is:

$$\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'}$$

melly viszonyt ha ismét x-nek nevezzük, következnek a' második háromszög' oldalai az elsőből sorjában

$$ax,\ bx \text{ és } cx,$$

az első pedig következik megforditva, a' másodikból:

$$a'x,\ b'x \text{ és } c'x.$$

Ha x elébbi értékét visszaadjuk, leszenek ezen oldalok sorjában a' viszony által kifejezve:

$$a' = a \times \frac{a'}{a} \text{ vagy } a' = a \times \frac{b'}{b} = a \times \frac{c'}{c}$$

$$b' = b \times \frac{a'}{a} \quad \text{»} \quad b' = b \times \frac{b'}{b} = b \times \frac{c'}{c}$$

$$c' = c \times \frac{a'}{a} \quad \text{»} \quad c' = c \times \frac{b'}{b} = c \times \frac{c'}{c}$$

mellyből az első háromszög oldalai is következnek.

Látjuk hogy, ha a' viszony x az egységnél nagyobb, a' keresendő háromszög is nagyobb az adottnál, ha pedig x kisebb az egységnél, a' keresendő hasonló háromszög kisebb az adottnál, 's ha végre $x = 1$, a' két háromszög egyenlő.

K. Ezen kiterjedett előadás eléggé nyilvánitja, hogy bármelly oldalát osztom az adott háromszögnek a' keresendő háromszög ennek megfelelő oldalával, a' viszony mindenkor ugyan az.

Az is bizonyos, hogy az oldalok' hosszát számokkal kifejezni szükséges. Mire hosználjak ezen tanítmányt?

F. Gyakorta csak egy oldala ismeretes valamelly hasonló háromszögnek, a' többi vagy nincs adva, vagy mint a' nagy méréseknél, hozzá nem férhető; ezen esetben az aránylat vagy viszony által találjuk meg a' másik két oldal hosszát.

Felteszem hogy, valamelly háromszög oldalai sorjában 7, 9 és 11 számok által vannak kifejezve: egy más ehez hasonló háromszögben csak azon oldalt ismerem, melly a' 9-nek felel meg, 's látom hogy a' 81 szám által van kifejezve. Tüstént következtetem, hogy az oldalok' 's következésképp a' háromszögök közti viszony $^{81}/_{9} = 9$, 's ha 9 által sokszorozom ismert háromszögöm' oldalait, megtalálom sorjában a' keresendő hasonló háromszög' odlalait, mert ezek: $7 \times 9 = 63$, $9 \times 9 = 81$ és $11 \times 9 = 99$, melly számok akkor is természetesen következnek ha az adott háromszög oldalai közti viszonyokkal sokszorozom keresendő háromszögöm' adott oldalát 81et. Az adott háromszög oldalai közti viszonyok pedig $^{7}/_{9}$ és $^{11}/_{9}$, lesz tehát a' 7-nek megfelelő oldal $81 \times {}^{7}/_{9} = 63$, a' 11-nek megfelelő $81 \times {}^{11}/_{9} = 99$.

K. Ha három vonal van adva A, B és C és a' negyedik aránylati vonal x kerestetik, hogy legyen $A : B = C : x$ és $x = \frac{BC}{A}$, miként találjuk meg ezen x vonalat alkotás által?

F. Legyen a' három adott vonal A, B és C, 2-dik Idomunkban. Háromszögöt alkotván általok, mellyben csak két oldal legyen egyenlő az adott vonallal, p. o. A és B, a' harmadik oldal természetesen következik a szögből, de kérdésünkre nézve bármelly lehet, valamint a szög is.

Ezen háromszöghöz egy más hasonlót alkotok, mellyben egy oldal legyen C adott harmadik vonalom. Itt C

feleljen meg előbbi háromszögöm *A* oldalának. Mivel a' hasonló háromszögökben a' szögök egyenlők, x oldal (3 I) az aránylat 4-dik tagja, mert $x : C = B : A$, vagy is: azon arányban áll *C* hez, mellyben áll *B* oldal *A* oldalhoz [17].

3-dik I ban alakunk szemlátomást kisebbre van véve, de ez nem fogja zavarni tekintetünket.

K. Miként lehetne ezen alkotást egyszerübben eszközleni?

F. Ha elsőbb háromszögöm *A* oldalát *C* vonal nagyságáig meghosszabbítom, mint ez 4-dik Idomban történt, végsőpontjából *C* nek csak egyenirányút vonok *B* oldalhoz, 's ekkor x a' keresett 4-dik tag azonnal előjön. A' bizonyítvány igen egyszerü.

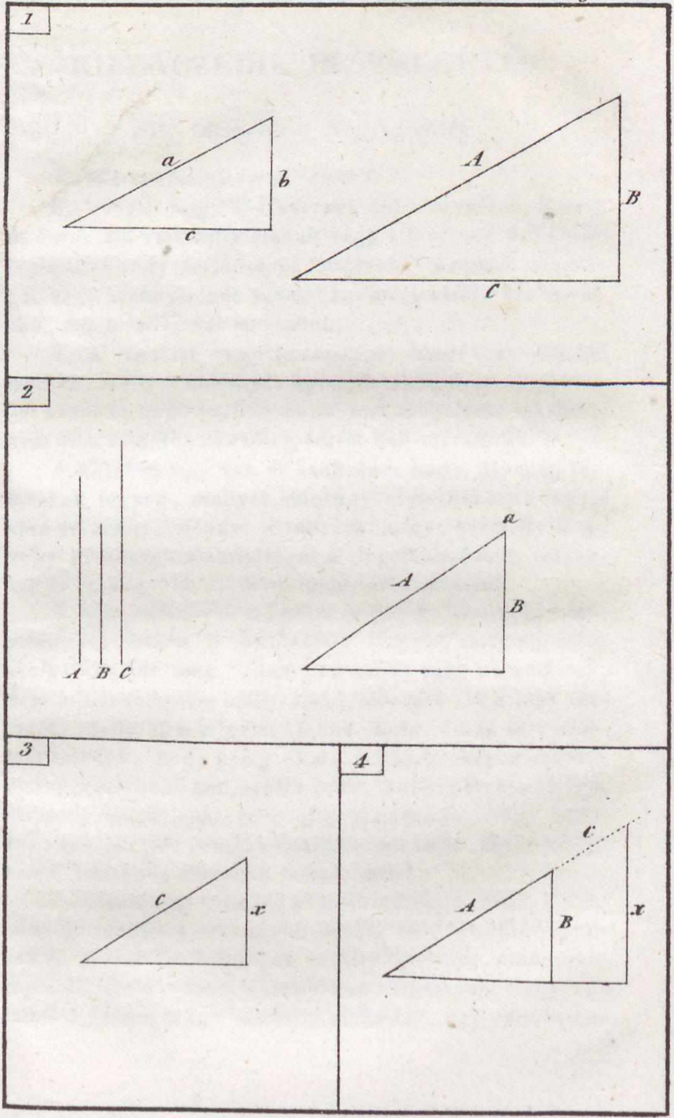
K. Nemde következik abból, mit a' hasonló háromszögök tulajdoniról tudunk hogy, minden hasonló geometri idomban az oldalok arányban állanak, bármelly legyen ezeknek száma?

[39] *F.* Természetesen alkalmazhatjuk ezt minden sokszögre, legyenek ezek rendesek vagy rendetlenek.

Ha rendesek, tudjuk, az oldalok mind egyenlők 's igy egymásnak valamennyien megfelelők, ha mindegyikből csak egyet veszünk. Ha rendetlenek, az egymásnak megfelelő oldalokközti viszony változatlanul egyenlő.

Ezen vizsgálataink által könnyen alkothatunk az adotthoz hasonló idomot, bármelly legyen oldalainak száma, csak a' két egymásnak megfelelő oldalközti viszony legyen adva:

Forduljunk a' térméréshez.


1
a
b
c
A
B
C
2
a
A
B
A B C
3
c
x
4
c
A
B
x

KILENCZEDIK BESZÉLGETÉS.

Sik-térmérés. Négyszögítés.

K. Mit nevezünk *térmérésnek*?

F. Tudjuk hogy a' sík térnek két iránya van, hossza és széle. Ha valamelly síknak vagy sík térnek tartalmát, foglalatját vagy terjedségét keressük, 's ennek nagyságát vagy mennyiségét számokkal kifejezzük, azt míveltük, mit *térmérésnek* nevezünk.

K. A' vonalat vagy hosszaságot ismét csak vonallal mértük, mellyet önkényes apró részekbe osztánk. A' vonal azonban egyirányú lévén, a' tért többé nem mérheti; nem de a' tért következőleg térrel kell mérnünk?

F. Valóban ugy van és szükséges hogy, illy alap térmérőnk legyen, mellyet szintugy eloszthassunk annyi apró részekbe, mennyi kívántatik hogy, bármelly nagy vagy kis térnek mennyiségét a' legalkalmasabb részekkel és legnagyobb szigorúsággal biztosíthassuk.

K. Már különböző mérőket ismerek, mellyek a' közönséges életben a' különbféle tárgyak' megmérésére szolgálnak, de meg vallom, térmérőt még nem láttam; nem is képzelhetem melly alakú lehessen azon alap térmérő, melly által minden kigondolható idomú tért megmérhessünk, hogy pedig általa szükségesképen minden tért megmérhetni kell, szoros feltét. Annyi bizonyos hogy, bármelly alakú lehet ezen alap térmérőnk, vagy egyenes vagy görbült vonalok által alkotott idom. Melly alakja van a' haszonba vett alap térmérőnek?

F. Illyen alap térmérő a' gyakorlatban, vagy a' közönséges életben csakugyan nincs, és a' térmérés egyedül a' geometria tulajdona és kirekesztőleg számokkal történik. De a' tudomány' szelleme megkívánja hogy, valamennyi idom 's igy bármelly alakú tér, egy változatlan alakra vitessék vissza, mellyhez mindegyiket hasonlítani lehessen és ezen alak legyen a' a' térmérték' alapja. Természetes hogy, valamennyi eddig előttünk ismeretes alak, a' háromszögtől fogva a' körig, szolgálhatna alapmérő gyanánt; de van egy közöttük, melly már természetesen alkalmas a' térmérésre azért, mert széle és hossza egyenlő 's ez mint tudjuk, a' *rendes négyszög*.

K. Eszerint tehát a' tért négyszögökkel mérjük. Most látom mit tesz a' kifejezés *négyszögítés*?

Ha alap mérőnk négyszög, 's általa minden idomot megmérhetünk, szembetűnő hogy, valamennyit olly négyszöggel hasonlítjuk, mellynek tértartalma velük egyenlő, vagy más szóval: minden idomot négyszögűbe keresünk áltváltoztatni. Értem hogy, ezen mérő négyszög akkora lehet, mekkora kívántatik a' környülményekhez képest, nagy kiterjedésre nagy, kisebb alakokra kis négyszög; nem de a' hosszmérők szerint oszthatjuk be a' négyszögmérőket is?

F. Ugy van. Ha mérő négyszögünk' egyik oldala egy hüvely, a' térmérőt *négyszöghüvelynek* nevezzük; tudjuk hogy, a' hüvelyek vonalokba, ezek pedig pontokba oszlanak, valamint hogy a' hüvelyen felül jönnek a' lábok, ölek és végre mérföldek. Melly egységét válosztjuk most a' hosszmérőnek, hogy térmérőnk' alapja legyen, a' belőle származó négyszög (mellynek mint tudjuk egyik oldala a' hosszmérő' egysége) ugyan azon nevezetet veszi fel.

K. Ez előttem világos. Ha p. o. valamelly ország' vagy vármegye' térét keresem vagy mérni akarom, olly négyszögöt válosztok, mellynek egy oldala mérföld, 's a' tér négyszögmérföldben lesz kifejezve; ha szántóföldjeimet vagy kertemet mérem, négyszögöm' egyik oldala öl, mérőm pedig négyszögöl lesz; ha szobám' padolatját mérem, a' láb is elég lesz, 's mérőm négyszögláb, 's ha végre apróbb téreket mérek, a' négyszöghüvelyt 's a' t. válosztom. Bizonyos hogy, hányszor foglaltatik alaptérmérőm az adott vagy megmérendő térben, annyi lesz tartalmának számbeli kifejezése. De mivel illy alkotott térmérőm nincs, nem tudom miként találhatni puszta számokkal valamelly térnek tartalmát, 's miként mérhetek főkép olly téreket négyszöggel, mellyek p. o. sokszögűek, rendetlenek vagy kerekek?

F. Kezdjük tekinteteinket a' legegyszerűbb esetekkel. Ha valamelly nagyobb négyszögöt veszek, mellyben valamelly kisebb négyszög többször és bizonyos számmal megtaláltatik hányszor van meg a' kisebbik a' nagyobbikban, azon szám fejezi ki ennek tartalmát.

Legyen p. o. alapmérőnk négyszöghüvely, tehát széle és hossza egyenlően egy hüvely; írjunk fel egy rendes négyszögöt, mellynek egy oldala 4 hüvely 's lássuk hányszor található benne alapmérőnk?

Első Idomunkban *ABCD* négyszögünk' *AB* oldala 4 hüvely. Ha *AB* és *BD* oldalt 4 egyenlő részre osztjuk 's az osztási pontokat vonalokkal egybekötjük, kis négyszögökbe oszlik a' nagy, mellyeknek széle és hossza egyenlőképen egy hüvely és valamennyi egyenlő *a* kis négyszöggel, melly esetünkben *négyszöghüvely* alapmérőnket képviseli. Megszámlálván a' kis négyszögöket látom, hogy számok = 16, 's mondom hogy: *ABCD* négyszögnek térszíne 16 négyszöghüvely.

K. A' példából látom, miként oszthatok valamelly nagyobb térmérőt apróbba, ha a' négyszög' oldalait annyi részre osztom, mennyi kisebb rendű mérő foglaltatik bennük, 's az osztási pontokat vonalokkal egybekötöm. Igy a' négyszögölből négyszöglábokat alkotok, ha oldalait 6 részre osztván, a' pontokból pontokhoz vonalokat húzok. Második Idomban felteszem hogy, a' négyszögnek egy oldala öl, elosztván mindegyiket 6 egyenlő részre; látom hogy egy négyszögölben 36 négyszögláb van. Ha a' négyszöglábot négyszög hüvelybe osztom, mindegyik oldal 12 részre oszlik, mert egy lábban 12 hüvely van, 's igy lesz egy négyszöglábban 144 négyszöghüvely: szinte igy, mivel egy hüvely 12 vonalba oszlik, lesz egy négyszöghüvelyben 144 négyszögvonal 's a' t. Ha észrevéteimet terjesztem 's valamelly rendes négyszög oldalait sorjában 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 's a' t. részekre osztom, az osztás által származott apróbb négyszögök száma sorjában 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64 's a' t. lesz, 's ezen számok az előbbieknek *négyszögei*, mert tudom az Aritmeticából hogy, ha valamelly számot maga' magával sokszorozok, a' számnak négyszögére találok. Nemde ezen tekintet is nyilván vezet bennünket a' két kifejezésnek: *térméres* és *négyszögítés* hasonlóságára?

[40] *F.* Az észrevét magában helyes, és ha rendes négyszög van kérdésben, csakugyan *térszínét azon szám' négyszöge* (második emelése, vagy maga magávali származata) *jelöli, mellybe egyik oldal oszlott*, vagy melly egyik oldalának részeit jelöli, legyenek ezen részek bármelly mérőkben kifejezve. De ha a' megmérendő tér nem rendes négyszög, ennek térszinét többé sem az egyik, sem a' másik oldalát kifejező szám' négyszöge nem jelöli, 's ezen esetben tekintetünket tágítanunk kell, mondván hogy: valahányszor két szám sokszoroztatik egymással, a' köztük támadó származatot mindenkor valamelly más szám négyszögének tekinthetjük, de ezen szám sem egyik sem másik a' kettő közzül, de mindenkor kettőjök között áll.

K. Ezen észrevételt valamennyire értem azon tekintetek segédje által, mellyek az aránylatoknál előfordultak, de alkalmazását a' térmérésre felfogni nem tudom. Ha p. o. 3at sokszorozok 4 által, a' származat 12, 's ha 12 négyszög, gyökere sem 3, sem 4, de az egyiknél nagyobb, a' másiknál kisebb: szinte ha 4et 8al sokszorozok, 32nek gyökere 5nél nagyobb, de 6nál kisebb, mert $5^2 = 25$ és $6^2 = 36$, a' szám 32 pedig 25 és 36 közt áll; da hat 4et 9el sokszorozok, a' származat $= 36$ tökéletes négyszög és gyökere 6, mert $6 \times 6 = 36$, 's igy látom, hogy, sok olly két szám található, mellynek származata tökéletes négyszöge valamelly más számnak, de hogy sokkal több van ollyan, mellynek származata nem tökéletes négyszög. Miként mérjük valamelly nem rendes négyszögnek térszínét?

[41] *F. Valamelly egyenszögű négyszögnek térszínét megtaláljuk, ha egyik hosszabb oldalát egyik rövidebb oldalával sokszorozzuk.*

K. Jól tudom hogy, vonalat vonallal sokszorozni nem lehet, de csak számokat; ha tehát oldalról vagy oldalokról van szó, mellyeket egymásközt sokszorozni vagy osztani kell, mindenkor csak azon számokat értjük, mellyek hosszaságukat fejezik ki és csakugyan azon mérőben, melly a' feladásra nézve alkalmas. Ha tehát valamelly egyenszögű négyszögnek két egymáson függőleg alló oldalát számban kifejezve egymással sokszorozom, meglelem térszínét ugyanazon térmérőben, melly alapul vétetett. Szeretnék erre egy példát?

F. Harmadik idomban olly egyenszögű négyszög áll, mellynek egyik oldala 6, másik 4 egyenlő részekre oszlott. Ezen részek alatt tetszésünk szerint bármelly alapmérőt gondolhatunk, számuk minden esetben 24 lesz, tehát négyszögünk térszíne 24 négyszög alapmérő.

K. Ezen példát figyelemmel tekintvén látom hogy, mindegyik függő osztályban 6, mindegyik fekvőben 4 kis négyszög van, tehát összesen 6szor $4=24$. Ha felteszem hogy, a' kis négyszögök egyik oldala egy hüvely 's p. o. a' függő sorokhoz még egy sort adok, következik hogy, minden fekvő sorban 5 kis négyszöghüvely, a' függő sorban pedig megmaradván a' 6, összesen $5 \times 6=30$ kis négyszögöm lesz. Ha ellenben a' fekvő sorokhoz adok egyet, a' függők száma nő 's lesz mindegyikben 7, megmaradván 4 a' fekvőkben 's összesen $7 \times 4=28$ kis négyszög támad. Ha tehát a' függő sorok szaporodnak, mindegyik hüvely 6 négyszöghüvelyt, ha a' fekvők szaporodnak, mindegyik hüvely 4 négyszöghüvelyt következtet. Nyilván tehát, melly egybefüggésben van a' hossz a' széllel és hogy változatlan megmaradhat hogy: *valamelly négyszögnek térszíne egyenlő a' hossza és széle közti szármozattal?*

F. Ez csak kirekesztőleg az egyenszögű négyszögökre alkalmazható. Sokkal helyesebb mondani hogy: valamelly négyszögnek térszíne a' *talpa és magossága* közti szármozat, szinte számokban fejezve ki.

K. Talpa valamelly négyszögnek tudom bármellyik oldala lehet; magossága pedig azon oldala, melly talpán függőleg áll. De miként leljük meg valamelly résznégyszögnek magosságát?

F. Valamelly résznégyszög' magosságát szinte azon vonal mutatja, melly két egyirányú oldalán függőleg áll. 4 Iban *ABCD* rézsnégyszögünk *A* pontjából függőleg vittünk *Aa* vonalat *CD* oldalra, tehát *Aa* magossága *ABCD* négyszögünknek, ha *CD* oldalát talpának válosztjuk. Nemde könnyű lesz most térszínét kifejezni?

K. Ha a' térszínt csak betükkel akarom kijelölni, bizonyosan ez $= CD \times Aa$ vagy: Talp *CD* sokszorozva *Aa* magossággal, mi $= T \times M$, ha *T* betű alatt talpot, *M* alatt pedig magosságot értek. Ha pedig a' vonalokat megmérem 's látom p. o. hogy $T = CD = 11$ hüvely, $Aa = M$ pedig $= 8$ hüvely, *ABCD* négyszögnek térszíne $11 \times 8 = 88$ négyszöghüvely. De én különböző négyszögöket írhatok két egyenirányú vonal közzé, mellyeknek talpai mind egyenlők, valamint magosságok is, de alakjok különböző. 5 Iban p. o. három négyszögöt alkottam, mind háromnak talpa $=$ *AB* és mind háromnak magossága $=$ *AC*, vallyon egyenlők-e ezeknek térszínek?

[42] *F.* Igen természetes hogy egyenlők, mert egyiket a' másikba lehet változtatni. Már első tekintetre is nyilván hogy, ha két vagy több négyszögnek talpa és magossága egyenlő, térszíne is szükségesképen egyenlő, mert erről kételkedni szintannyi lenne mint arról, hogy p. o. 5×6 nem mindenkor 30, hanem egyszer több, másszor kevesebb. De mivel itt szemünk csábít vagy vezet a' kétre, segélljük némelly tekintet által.

Ha p. o. egy vagy két játék kártyát teszek rendesen összevéve az asztalra, felém fordított oldala, melly a' kártya egyes levelei' vastagságából áll, egyenszögű négyszög és térszíne tudjuk a' kártyák hossza és magossága közti szármozat által van adva; bizonyos hogy, ezen négyszögnek térszíne változatlan marad, bármelly állásba jőjjenek a' kártya-levelek egymásközt, ha belőllök egyet sem veszünk el; és csakugyan, ha rendes állásokból a' leveleket úgy mozdítom el, hogy rézsnégyszög alakot vegyen [ɐɟ] a' hozzám fordított oldal, nem gondolom hogy valaki állítaná hogy; igy a' kártyák' felém fordult oldala több vagy kevesebb tért foglalna el, mint eléb?

K. Látom hogy, a' kártyák' ezen kétféle állása 6 és 7 Imunkban van képviselve, és valóban a' tér, mellyet a' 4 vonal foglal, mindegyik esetben egyenlő' mert sem a' kártyák' vastagsága, sem leveleiknek száma a' mozdítás által nem változhatott. Miként lehetne ezt még szembetűnőbben megmutatni?

F. Nézzünk 8 Idomunkra. Itt két négyszög van, az egyik *abcd* rendes, a' másik *efgh* rézsnégyszög; magosságok és talpaik egyenlően $ab = ac = ef = gh$. Illyen két négyszögöt könnyen vághatunk ollóval ugyanazon szelet papirosból, mellynek szélessége $= ac$, hossza pedig bármelly. Azt állítom most hogy, papiros rézsnégyszögömet ugy eldarabolhatom, hogy darabjai tökéletesen béférjenek *abcd* rendes négyszögbe 's ez által szemlátomást 's ugy szólván kézzelfogható lesz, hogy térszíneik egyenlők. Mivel ollóm nincs, két négyszögömet egyenlő részekre osztom vonalokkal, 's ezekután kiki hasonló példákat alkothat. Általviszem elébbi két négyszögömet 9 és 10 Idomba és osztásokat következően kezdem.

Rézsszögöm (9 I.) *gh* talpára *hk* függőt húzok, 's lesz egyik darabom *ghk* háromszög. Ha most rendes négyszögöm' *bd* oldalára akkora vonalat jelölök, mekkora *hk* függő rézsnégyszögömben, lesz $dm = hk$, összekötvén c és m pontokat, természetes hogy $gk = cm$ és a' két háromszög mindkét négyszögben egyenlő, vagy $gkh = cmd$.

Rézsnégyszögöm' hf oldalára akkora vonalat jelölök, mekkora gk, vagy is $hi = gk$ és i pontból ismét függőt vonok ef oldalra, ezen osztás által rézsnégyszögöm 1, 2 és 3 darabba oszlott. Ha rendes négyszögöm ac oldalára co vonalat jelölöm $= dm = hk$ és cm hez egyenirányú on vonalat húzom, bizonyosan $ke = on$ és $il = mb$, tehát a' két ötszög $hkeli = conbm$, vagy is a' 2 számmal jelölt részek mindkét négyszögben egyenlők; hogy végre a' 3 számmal jelölt darabok $lif = aon$ háromszögök is egyenlők, könnyű megbizonyítani.

Ha rézsnégyszögünk még inkáb hanyatlik, több több illy részekbe lesz osztható. 11 Idomunkban még egy példát adunk gyokorlatul; az 1, 2, 3, 4 és 5 részek egyenlőségéből egyik 's másik négyszögben következik a' térszinek egyenlősége.

K. Nyilvánitják ezen példák hogy, bármelly rézsszögű négyszögöt egyenszögűre lehet visszavinni, ha a' rész oldalok helyett a' talpra függőleg írjúk az uj két oldalt; 's hogy bármelly rézssögnek térszine megtaláltatik, ha talpa és magossága, számban fejezve ki, egymással sokszoroztatik; mert a' talált szármozat a' keresett térszín. Miként találjuk meg olly rézszög' magosságát, mellynek talpára vezetett függő nem éri a' talp ellenében álló oldalt?

F. Ekkor vagy a' talpat, vagy az ellenében álló oldalt hosszabítjuk addig, mig a' függő azt érheti. 13 Iban, ha a' talp alul van, db lesz ezen hosszabítás, felül pedig ac vonal; a' két függő ab és cd egyenlően magosságát jelölik a' résznégyszögnek. Látni való ezen példából hogy, ha ezen függők a' rézsnégyszög talpának két végső pontjára állítatnak, az alkotott egyenszögű négyszög térszíne egyenlő lesz az adott rézsnégyszög' térszínével, 's igy emez egyenszögűbe változott.

K. Nem alkalmazható minden négyszögre azon tétel hogy: ha talpa T és magossága M, térszíne $= T \times M$?

F. Természetesen csak azon négyszögökre alkalmazható, mellyeknek oldalai párosan egyenirányúak, de a' rendetlen négyszögökre más törvényt kell keresnünk.

K. Nemde a' háromszögök' térszínei vezetnek benünket természetesen a' rendetlen négyszögök''s más alakok' térszíneinek meglelésére, tudván hogy minden sokszög bizonyos számú háromszögbe oszlik?

F. Igen helyesen, mert ha a' háromszögök' térszíneit minden különös esetben ismerjük, könnyen találjuk meg egyszerű összeadás által több együtt álló háromszögök' összes térszíneit is.

K. Miként találjuk meg valamelly háromszög' térszínét?

F. Ha valamelly rendes négyszögöt két egyenlő háromszögbe osztok, nemde egyenlő lesz mindegyik háromszög' térszíne és egyszersmind mindegyik, fele a' rendes négyszög térszínének?

[43] *K.* 14 Iba írtam illy rendes négyszögöt, melly 1 és 2 háromszögökbe oszlott, ebből tüstént következik hogy, mindegyik háromszög épen fele a' rendes négyszögnek, és hogy térszíne mindegyiknek *a' rendes négyszög térszínének fele.*

F. Helyesen. Ha tehát a' háromszög' térszíne épen fele a' hozzátartozó négyszög térszínének, meglelem azt, ha *a' háromszög' talpát fél magosságával*, vagy pedig: *fél talpát egész magosságával* sokszorozom.

K. Ezen tekintet azt mutatja hogy, minden háromszögöt valamelly négyszög felének lehet venni, de csak olly négyszög felének, mellynek oldalai párosan véve egyenirányúak, 's ezt igen könnyű megbizonyítani, mert bármelly alakú két egyenlő háromszögöt legnagyobb oldalaival egymásmellé teszünk, szükségesképen illy egyenirány oldalú négyszög támad. Ebből természetesen következik hogy, a' háromszögök' térszíne megtaláltatik, ha fél magosságuk talpukkal sokszoroztatik. Tudom hogy az egyenszögű háromszögök magosságát a' talpon függőleg álló oldal adja, az egyenoldalú és egyenszárnyú háromszögök' magosságát pedig, a' csúcsból a' talpra ejtett függő. Miként találjuk meg a' többi háromszögök' magosságát?

F. Hasonlóul a' négyszögökhöz, meghosszítjuk a' talpat, mig a' csúcsból függőleg húzott vonal ezt érinti; mert a' magosság nem lehet egyéb, mint a' talptól a' csucsra vezetett legrövidebb vonal, melly tudjuk csak a' függő. 15 Iban, ha *ABC* háromszögünk *B* csúcsából függőt vonunk, ez kívül esik *AC* talpon, és csakugyan meghosszabbított talpának *D* pontjába, következésképen magossága *BD* vonal által van adva.

K. Megáll-e azon törvény a' háromszögöknél hogy; egyenlő talpú és egyenlő magosságú háromszögök' térszínei egyenlők?

F. Bizonyosan, mert természetesen következik a' négyszögnél megbizonyított törvényből. Ide írok 16 I. alatt több különböző alakú háromszögöket, ezeknek magosságai mind egyenlők, mert talpaik és csúcsaik ugyanazon két egyenirányú vonalban feküsznek. Az *A* val jelölt két háromszögnek talpa is egyenlő, valamint szembetűnő hogy *B* talpon két különböző háromszög áll; végre *C* vel jelölt háromszögök' talpai egyenlők, hol az utolsó alakban három különböző háromszög áll ugyanazon talpon.

Ha felteszem hogy, ezen ideírt háromszögök' talpai is mind egyenlők, térszíneik is egyenlők lesznek, de alakjainkban csak azon háromszögök' talpai egyenlők, mellyek *A*, *B* és *C* betűkkel jelölve egymáshoz tartoznak, 's p. o. a' *c* betűvel jelölt 4 háromszögnek térszinei egyenlők.

K. Ez igen természetes, mert a' mint az oldalok hanyatlanak, összeszorulások tökéletesen pótolva van nyulásuk által, mit p. o. *B* háromszögünk vastagságából veszt oldalainak hanyatlása által, azt hosszúságok által megnyeri 's igy térszíne változatlan marad, mit ollóval is megtudok bizonyitani ha hasonlóul a' négyszögökhöz egyik háromszögöt a' másikba rakom bízonyos darabokba vagdalva. Eszerint minden kivétel nélkül mondhatom, hogy ha a' háromszög talpa T, magossága pedig M, térszíne ki van fejezve $\frac{1}{2}\, T \times M$ által, mi azt teszi hogy: a' fél talp sokszoroztassék a' magossággal, kivan fejezve továbbá $T \times \frac{1}{2}\, M$ által, ha a' talpat fél magosságával sokszorozzuk, 's végre $\frac{T \times M}{2}$, ha a' talp és magosság-közti származatnak felét vesszük?

F. Igen helyesen. Ha p. o. valamelly háromszög' talpa 6 hüvely, magossága 8 hüvely, térszíne ki van fejezve:

$$\frac{6}{2} \times 8 = 6 \times \frac{8}{2} = \frac{6 \times 8}{2} = 3 \times 8 = 6 \times 4 = \frac{48}{2}$$

által, melly származatok minden esetben = 24et tesznek, 's igy háromszögünk' térszine 24 négyszöghüvely.

K. Nem lehet-e a' háromszögöket is elosztani apró négyszögökbe, mint elosztottuk a' négyszögöket?

F. Ha az illy apró négyszögökbe osztott rendes négyszögöt két egyenlő háromszögbe osztjuk, mint 17 I. ban látható, *ad* rézsvonal az útjában álló kis négyszögöket is kettévágja, mert azoknak oldalai is függőleg állanak egymáson. Példánkban a' rendes négyszög' oldalai 8 egyenlő részre oszlottak, 's következésképen $8 \times 8 = 64$ kis négyszögöt foglalnak; jut eszerint mindegyik háromszögre 32 kis négyszög, és csakugyan 28 egész és 8 fél négyszög.

K. A' négyszögítés szó' értelme mind inkáb világosul előttem, mert azt jelöli hogy, ha valamelly vonalok által békerített tér, vagy is bármelly geometri idom' tartalmát keressük, ezt mindenkor a' rendes négyszögre keressük visszavinni, mert alapmérőnk is rendes négyszög, és vele különben a' rendetlen és görbült vonalokkal alkotott idomokat megmérni nem lehetne. Valamint tehát a' rézsnégyszögöt egyenszögű négyszögre, ezt pedig rendesre vittük, szinte ugy változtatjuk a' háromszögöket is egyenszögűekre 's következésképp rendes négyszög' felirc. Szükséges-e az átváltoztatást alkotás által eszközleni?

F. Ebben semmi nyereség nem lenne, mert mint láttuk, ritka esetben találnók az alkotott rendes négyszöggel megegyező tökéletes négyszög számokat. Alkotás által minden kigondolható geometri alakot vissza vihetni rendes négyszögre, mit későbben fogunk látni; de a' számokkal csak közelítőleg fejezhetjük ki ezen négyszögök oldalait.

Tudjuk hogy, ha a' származatnak gyökerét veszszük, melly származat mindenkor valamelly idom térszínének kifejezése lehet, ezen gyökér a' rendes négyszögnek egyik oldala; de elég alkalmunk volt látni, hogy számaink, valamint ezekből következő alapmérőink a' vonalokkal nem mindég, de csak ritka esetben mérhetők, valamint a' számok és gyökereik ritka esetben mérhetők, de legtöb'ben csak közelítők.

Adok egy példát, miként lehet bármelly négyszögöt rendes négyszögre vinni alkotás által; tudván hogy, minden sokszögöt háromszögökbe lehet osztani, a' háromszögökből következnek a' négyszögök, ezen úton bármelly idomot rendes négyszögbe tudunk változtatni.

Következő bizonyítványom az egyenszögű háromszögök' tulajdonin alapult.

Írjunk egy kört (18 I.), ha *ab* átmérőre a' körület bármelly pontjából függőt vonunk, melly egyes esetünkben *dc* legyen, és *ad, bd* vonalokat húzzuk, *adb* háromszögünk tudjuk egyenszögű, mert csúcsa a' körületben van, oldalai pedig az átmérő' két végső pontjában végződnek [35].

dc vonal a' nagy háromszögöt hozzá hasonló két kisebb háromszögbe osztja, mert *c* pontnál mindkettő egyenszögű, *a* szög *adc* és *adb* háromszögökben közös, valamint *b* szög közös *bdc* és *bda* háromszögökben [23].

Tudjuk hogy a' hasonló háromszögök' oldalai arányban állanak; példánk háromszögei következő aránylatokat adják:

$ab : ad = ad : ac$ tehát $ab \times ac = (ad)^2$
$ab : bd = bd : bc$ » $ab \times bc = (bd)^2$
$ac : cd = cd : cb$ » $ac \times cb = (cd)^2$ vagy is

1-ször. Az egyenszögű *adb* nagy háromszögben a' kis oldal *ad* közép arány, *ab* nagy oldal és ennek *ac* darabja közt.

2-szor. Kisebbik oldala *bd* középarány, *ab* nagy oldala és ennek *bc* darabja közt.

3-szor. *cd* függővonal középarány a' nagy oldal *ac* és *bc* két része közt.

Ezen harmadik aránylat adja kérdésünk' feloldását következőleg. Legyen 19 I. ban írt *ABDC* egyenszögű négyszög rendes négyszögbe változtandó. Tudjuk hogy a' rézsszög (20 I.) könnyen változtatható egyenszögűbe, ha rézsoldalai helyett függőket írunk talpára, 's p. o. *abcd* résznégyszögből a' vele egyenlő térszínű *abcf* egyenszögű négyszög válik.

Ha 19 I. négyszögének *AC* és *CD* két oldalát összesenvéve alkotandó köröm' átmérőjének teszem, felező pontjokból, mint 21 I. ban *ad* vonalra félkört írok, hol *ad* átmérő $= AC + CD$ két oldala 19 I. négyszögnek, és $ac = AC$, *cd* pedig $= CD$; ha most *c* pontból függőt vezetek a' körületre, *cx* vonal keresett rendes négyszögöm' egy oldala, mert az előbbi szerint $(cx)^2 = ac \times ad$. 22 I. ban ezen *cx* vonalra rendes négyszögöt alkottam, 's ennek térszíne egyenlő a' 19 I. négyszögnek térszínével.

A' mivelet helyes létét ollóval is megbizonyithatni.

K. Miként változnak a' három és négyszögök' térszinei az oldalok' változásával?

[44] *F.* Ha az oldalok 2, 3, 4, 5, 's a' t.-ször nagyobbak, térszíneik 4, 9, 16, 25 's a' t.-ször nagyobbak, vagy is, ha a' vonalok növése a' gyökerek által van kifejezve, a' térszíneket a' számok' négyszögei adják.

K. A' rendes négyszögöknél 's következésképen a' négyszögöknél közönségesen ez való, mert bármelly szám fejezze ki egyik oldalát, térszíne, a' számnak négyszöge által van adva; miként bizonyíthatjuk meg ezt a' háromszögökre nézve?

F. Tekintsünk 23, 24 és 25 Idomokra. Legyen *abc* kis háromszögöm valamelly alap vagy származtató háromszög, 's tegyük fel hogy rendes vagy egyenoldalú. Ha egyik oldalát megduplázom, a' két-akkora talpra állított háromszögbe 4 fér be az elébbi alapháromszögből, ha egy oldalát 3-szor akkorára veszem 9, ha 4 akkorára 16 's a' t. Látni hogy közvetlen a' talpon legnagyobb számmal állanak a' kis háromszögök és hogy sorjában a' párotlan számokat 1, 3, 5, 7 's a' t. képviselik 's minden egység hozzáadásával két kis háromszög járul az alsókhoz 's következnének 9, 11, 13, 15 's a' t. valamint a' második, harmadik 's 'a t. sorokban állók is ezen törvényt követik; de ha a' kis háromszögök' számát összeveszem, minden esetben azon szám' négyszögét találom, melly a' talp osztási részeit jelöli. Ha tehát *valamelly háromszög' oldalai egyenlőként hosszmértékben nőnek, térszínei négyszög mértékben nőnek.*

K. Itt több észrevételeket tudok tenni.

Látom először hogy, ha a' párotlan számokat sorjában összeadom, kettőt, hármat, négyet 's a' t. vevén egymásután öszszesen, sorjában a' természetes számok' négyszögeit találom; látom másodszor hogy, *hány* sorjában az egységtől fogva egymásután következő párotlan számokat adok össze, azon számnak négyszögét találom, melly az összeadott számok' mennyiségét mutatja; 's végre hogy, ha valamelly szám' négyszögéhez a' következő párotlan számot adom, ugyan azon szám után következőnek négyszögét találom. Ide írok néhány négyszögöket sorjában; elég lesz ennyi hogy nyilván lássuk a' négyszögök származásait 's miként vannak összekötve háromszögeinknél tett vizsgálatinkal, hol a' sorban szinte a' kis háromszögök a' párotlan számokat képviselik rendjükben.

$2^2 = 2\times 2 = 1+3 \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad = 4 = 1^2 + 3$
$3^2 = 3\times 3 = 1+3+5 \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad = 9 = 2^2 + 5$
$4^2 = 4\times 4 = 1+3+5+7 \qquad\qquad\qquad\qquad = 16 = 3^2 + 7$
$5^2 = 5\times 5 = 1+3+5+7+9 \qquad\qquad\qquad = 25 = 4^2 + 9$
$6^2 = 6\times 6 = 1+3+5+7+9+11 \qquad\qquad = 36 = 5^2 + 11$
$7^2 = 7\times 7 = 1+3+5+7+9+11+13 \qquad = 49 = 6^2 + 13$
$8^2 = 8\times 8 = 1+3+5+7+9+11+13+15 = 64 = 7^2 + 15$
$9^2 = 9\times 9 = 1+3+5+7+9+11+13+15+$
$+17 = 81 = 8^2 + 17$
$10^2 = 10\times 10 + 1+3+5+7+9+11+13+15+$
$+17+19 = 100 = 9^2 + 19$
's a' t.

K. A' számokat már az Arithmeticából ismerjük; szembetűnő azon törvény az utolsó írássorból, melly szerint következik valamelly szám' négyszöge a' számsorban előtteálló szám' négyszögéből, ha t. i. ezen előtteálló szám négyszögéhez az egységgel nagyobbított kettesét ugyan azon számnak hozzáadjuk; így lett p. o. 7^2ből 8^2, a' mint 7^2 hez kétszer $7(+1)$, vagy $14+1=15$-öt adtunk, mert $49+15=64$; nem lehetne-e ezen törvényt közönségesen kifejezni betűk által?

F. Igen könnyen, és noha ezen tekintet szorosan véve nem tartozik a' geometriához, hasznát bizonyosan vehetjük alkalmazása által, mert ha vonalainkat számokkal fejezzük ki, az itt mondottat alkotás által is megbizonyítjuk. Mondom tehát hogy, ha a' számsorban valamelly szám m négyszögét, tehát m^2et ismerem, az utánna következő $m+1$ számnak négyszöge $(m+1)^2$ természetesen megtaláltatik, ha m^2hoz $2m+1$ szám adatik, 's lesz közönségesen kifejezve.

$$(m+1)^2 = m^2 + 2m + 1.$$

Tudjuk hogy, a' betűk alatt minden kigondolható számot érthetünk, keressük eszerint 11nek négyszögét, tudván hogy 10nek négyszöge $=100$; ha tehát $m=10$, az utánna következő szám $m+1=10+1=11$'s lesz kifejezésünk:

$$11^2 = 10^2 + 2 . 10 + 1 = 100 + 20 + 1 = 121$$

és valóban $11 \times 11 = 121$: eszerint találjuk meg bármelly példát.

K. Ezt látom azon rendes négyszögön is, mellyhez, ha eléb egyik oldala 10 hüvelyre oszlott 's következéskép minden függő és fekvő sorban tíz tíz négyszög hüvely volt, még egy hüvely hossz és szélet adok, mert ekkor, p. o. ha a' fekvő sorhoz 10 kis négyszög járult, a' függő sorban 11 illy négyszöghüvely 's összesen 21 kis négyszög járult. Visszatérvén háromszögünkre látom hogy, ha a' rendes négyszög helyett rendes háromszögöt választok alapmérőnek, a' háromszög' térszíne ki lesz fejezve a' talpa és magossága közti számozat által; de mivel ezen kis alapháromszögünk épen fele kis alapnégyszögünknek, a' számozatnak is csak fele vétetik.

Miként mérjük valamelly rendetlen négyszögnek térszínét?

[45] *F.* Minden négyszög két háromszögbe oszlik, ha a' két háromszög különböző, külön külön méretik térszinek, de minden esetben *a' két háromszög' összes térszíne adja a' négyszög térszínét.* 26 I ban $ABCD$ négyszögünk ABD és ACD háromszögökre oszlott AD vonal által.

Ezen példában fel van téve hogy, AB egyenirányú CD vel, AC pedig a' két oldalon függőleg áll, vagy is hogy, a' négyszög *trapéz*; mind két háromszög magossága tehát egyenlően AC, és az egyiknek színe

$$\tfrac{1}{2}\, AC \times CD$$

a' másiké $\tfrac{1}{2}\, AC \times AB$

's ha a' kettőt összevesszük, lesz a' trapéz térszíne:

$$\tfrac{1}{2}\, AC \times (CD + AB)$$

vagy: $$\frac{AC \times CD + AC \times AB}{2}$$

vagy végre: $$AC \times \frac{(CD + AB)}{2}$$

és mindegyik felirás egyenlő a' többivel.

Ha ezen betűkre számokat alkalmazunk, vegyük p. o.

$AB = 8$, $CD = 7$ és $AC = 6$

hüvely hosszú oldalnak; egyik háromszögünk

$$6/2 \times 8 = 6 \times 8/2 = 24$$

a' másik $6/2 \times 7 = 6 \times 7/2 = 21$

és a' trapéz' tartalma

$$6/2(7+8) = 6 \times \left(\frac{7+8}{2}\right) = \frac{6 \times 7 + 6 \times 8}{2} = 3 \times 15$$

$$= 6 \times 7\tfrac{1}{2} = \frac{42+48}{2} = 90/2 = 45$$

és $24 + 21 = 45$ négyszöghüvely.

K. Ha tehát valamelly többszögnek térszínét keressük, azon háromszögök térszine' öszszesét vesszük, mellyekbe oszlik. Tudom hogy, ha a' háromszögök egymástól különbözők, munkám annyival több mentül több háromszögöt kell számítanom külön külön. De a' rendes sokszögök valamennyien egyenlő háromszögökbe oszlanak 's itt csak egy háromszög' térszínét keresvén, ezt annyiszor veszem, hány illy egyenlő háromszög van az idomban, 's térszíne ki van fejezve. Nemde más úton is jutunk a' rendes sokszögök' térszíneihez?

F. Az ut mindenkor csak ugyanaz, valamint a' következés is, 's legfeljebb ennek kifejezése különböző. Igy p. o. ha valamennyi háromszög' talpát együveveszem 's öszszesüket sokszorozom egyiknek fél magosságával, nem épen azt teszem, mintha az öszszes talpoknak felét sokszorozom az egész magossággal; vagy a' magosságot, annyiszor véve hány háromszög van, sokszorozom egy fél talpal?

K. Valóban, bármiként forditsam az egymással sokszorozandó mennyiségeket, származatjuk mindenkor egyenlő, mit egyszerűen megbizonyíthatunk a' számok' tulajdoniból is; jelen kérdésünkben egyik fél a' másik egészszel, vagy egyik egész a' másik féllel sokszoroztatik, és három esetet mutat az által, ha számolási módunkat változtatjuk. Vegyük például hogy, valamelly háromszög' talpa 4, magossága 6 hüvely; térszíne ki van fejezve 12 négyszöghüvely által, és a' két egymással sokszorozandó mennyiség 4 és 6, elosztva kettő által, azoknak származata.

Természetesen mindegy, akar négynek felével sokszorozzuk a' hatot, akar ennek felével a' négyet, vagy végre 4et 6al 's a' származatnak vesszük felét, a' következés minden esetben $= 12$.

Alkalmazván ezt sokszögeink' térszínére, bátran mondhatom hogy, a' tekintetek és számítási módok által a' következés nem változik. Tudom p. o. hogy, valamelly rendes sokszögöt alkotó egyenlő háromszögök' talpai öszszesen az idomot békerítik, tehát annak körületét képezik, tudom hogy, a' rendes idomok középpontjokból valamelly oldalra vezetett függő a' háromszögök' magosságát jelöli; ebből köv etkeztetem hogy, megtalálom valamelly rendes többszög' térszínét, ha körületét fél középponti távolával, vagy félkörületét középponti egész távolával sokszorozom?

[46] *F.* Igen helyesen. 27 I. ban van egy rendes nyolczszög.

Középpontja *c*; az egyenlő 8 háromszögnek csucsai mind a' középpontban egyesülvén, magosságok egyenlően *dc* függő *ab* oldalon, melly *dc* vonal egyszersmind a' körület' középponti távolát mutatja; a' körület tudjuk $8ab$ vagy is 8 egyenlő *ab* oldal. Kifejezhetjük tehát a' 8 szög' térszínét:

1-ször Nyolczszor véve *acb* háromszög' térszínét melly tudjuk $8ab \times \frac{1}{2}dc = 4ab \times dc$

2-szor A' körületet fél középponti távolával sokszorozván 's ez: $8ab \times \frac{1}{2}dc = 4ab \times dc$

3-szor A' félkörület középponti egész távolával, 's ez ismét $4ab \times dc$

's mind három esetben a' kifejezés egyenlő.

Ezen példára bármelly számokat alkalmazhatunk 's ha a' sokszögök körületét *P* által jelöljük, melly *P* betű *perimetert* (körületet) értet, a' középponti távolyt pedig *r* által, melly *r* betű ismét *radiust* (sugárt) jelentsen, bármelly sokszög' térszíne ki van fejezve $T = \frac{1}{2} Pr$ vagy $\frac{Pr}{2}$ által; hol *T* betű térszint jelent.

K. Azon tekintetek, mellyeket a' bé és körülírt sokszögökről tettünk, egyenesen vezetnek a' következésre hogy, mivel a' körbe 's körülte irt sokszögök oldalaik' száma növésével végre a' körrel egybeütnek, tehát a' kör' és sokaldal' körülete egy; a' kör térszínét is fél körülete és sugára, vagy körülete és fél sugára közti sármozat adja?

[47] *F.* A' következtetés minden tekintetben helyes, mert a' kör' körületjét láttuk, számtalan háromszögök' talpából összetettnek, valamint a' kört is számtalan háromszögökből alkotottnak vehetjük, mellyeknek csucsai a' kör' középpontjában egyesülnek, magosságok pedig egyenlően a' kör' sugára.

Ha tehát a' kör körületét, számban fejezve ki, ismerjük, természetes hogy térszíne is következik. Itt azonban tetemes nehézségre találunk az által, hogy a' körület görbült vonal, és egyenes vonal által nem mérhető; ha azon viszonyt ismernénk, mellyben áll a' sugár vagy átmérő a' hozzá tartozó körülethez, számításunk igen könnyű lenne, mert tudjuk, a' körök mind hasonló idomok és azon arányban állanak egymásközt, mellyben állanak sugáraik vagy átmérőjök.

K. Nemde a' sokszögök vezetnek benünket ezen viszonyra?

F. Más úton alig jöhetni következésre, legalább mostani tekinteteink' sorában nem. A' rendes sokszögök oldalai, bármelly aprók legyenek, mindenkor egyenes vonalúk, tehát mérhetők, de a' görbült vonalat soha sem érhetik el, ha pontokká válnak is; legfeljebb tehát azt vizsgálhatjuk, mekkora valamelly sokszögnek öszszes oldala ezeknek középponti távolához képest, vagy más szóval: melly irányban áll a' körület a' sugárral, ha a' sokszög a' körhöz közelít?

K. Előre látom hogy, a' körület valódi értékéhez vagy hosszaságához csak közelíthetünk, de azt a' vonalok és következésképp egészszámok által tökéletesen kifejezni nem lehet. Nemde következik ebből, hogy a' körület és átmérő közti viszony mérhetlen?

[48] *F.* Ugy van; és noha ezen viszonyt számokkal tökéletesen kifejezni lehetlen, még is sokan törték fejöket 's még mai nap is törik azon feladással, miként lehessen megbizonyitani hogy, a' viszony csakugyan mérhető; és mivel a' térszíneket négyszögökkel mérjük vagy kifejezzük, azt is hogy, a' kör térszínét tökéletesen adhatni négyszög mértékben, 's végre hogy, valamelly kör tökéletesen átváltoztatható egy vele egyenlő négyszögbe; és ezen alaptalan vizsgálatnak neve a' *kör' négyszögitése.* A' háromféle tekintetnek értelme eszerint egyenlő.

Ha a' sugár vagy átmérő számokkal van kifejezve, a' körületnek is számokkal kell kifejezve lennie, és szükséges hogy a' két számközti viszony mérhető legyen. Ekkor természetesen következik hogy, a' két szám közti származat valamelly négyszög' térszínét képviselheti, mellynek egyik oldala a' sugárt, másik pedig a' körületet kifejező számmal egyenlő, 's melly négyszög mindenkor rendes négyszögre átvihető; ebből ismét természetesen következik hogy, bármelly alap négyszög által mérhető lesz, vagy is, tökéletes négyszög. De mivel az első feltétel nem áll, és a' sugár 's körület közti viszony mérhetlen, minden négyszögítési ipar hiú törekvés. Sok könnyelméjű, ki a' kérdésnek csak egyik oldalát veszi fel, és a' geometriát nem tanulta, bölcsességét fonallal bizonyítja, először valamelly kerek tárgyra (karikára) vonván azt 's azután 4 gombostűvel asztalára feszíti rendes négyszög alakban; elmés mívelete olly világos, hogy kétséget nem hágy miként hajlik valamelly fonal, zsinór vagy zsineg tetszésünk szerint; de ártatlanságában elfeledte a' számokat, mellyek egyedül adhatnak alapot, és elfeledte a' kérdést, melly tudjuk a' körület és átmérője közti viszonyt kívánja. De mivel ezen viszony mérhetlen, a' sugárnak vagy átmérőnek egyes részei nem mérhetik tökéletesen a' körület' hosszát, valamint ha a' körületnek vesszük bizonyos részét, ez viszont az átmérőben nem találtatik tökéletesen.

K. Nyilván látom hogy fő feladásunk: meglelni, hányszor találtatik a' sugár vagy ennek egyes részei a' körületben, vagy ennek egyes részeiben, 's mivel az egyenes vonal által a' görbültet nem mérhetjük, keresni azon közelítést, melly minden kívánatnak eleget tészen. Nemde legegyszerűbb lesz ha a' kör sugárát egységnek veszszük, az 1 számjegy által jelölvén, 's keressük hányszor van meg ezen 1 az egész körületben?

F. Csakugyan a' sokszögök is ezen útra vezetnek. Ha p. o. sokszögöket alkotunk és azokat körül 's belől írt körökkel ellátjuk, csak hamar elérjük a' körületek közti egyenlőséget, mert rajzoló szereink, valamint szemünk is nem eléggé alkalmasok a' kis különbségeknek felfogására. A' hatszögnél láttuk hogy a' kör sugára hat egyenlő részre osztja a' körületet, tehát annyi bizonyos, hogy a' sugár 6szor megvan a' körületben; de mivel a' hatszög' oldalai is sugárok 's a' körnek vágói, természetes hogy a' hozzájok tartozó ív vagy körületdarab nagyobb mint a' vágó (itt a' sugár); bizonyos tehát hogy, a' sugár 6szornál többször találtatik a' körületben. Mennyi legyen ezen 6szornál több; a' számok által csalhatlanul megleljük.

Ezen számítást elemien előadni alíg lehet, mert több gyakorlást és ismeretet kíván, mennyit mi feltehetünk, és különösen szünetleni gyökérvevést. Megmagyarázom azonban ezen vizsgálatot azoknak kedvükért, kik tulajdon szorgalmuk által a' kijelölt úton menni kívánnak; a' tárgy olly fontos (a' tudomány' egyik legfőbb és legszebb részét teszi) hogy, közelebbi vizsgálatát elmulasztani kár volna.

A' sugár és körület-közti viszony' meglelése.

Tekintsük, mint legegyszerűbb esetet, a' körbe és kör körül írt rendes négyszögöket és ezeknek térszíneit.

28 I. ban AB és CD vonalok az adott körnek egymáson függőleg álló átmérői; végső pontjaikat egybekötvén, a' béírt rendes négyszög támad, a' végpontokra emelt függők pedig a' körülírt rendes négyszögöt alkotják.

A' külső négyszögöt az átmérők négy egyenlő részre (négyszögbe) osztják 's mindegyiknek egy oldala a' sugár. A' belső négyszög oldalai a' külsőnek négy részét felezik, tehát a' külső négyszög *kétszer* akkora mint a' belső, és ha egy részit alapul vesszük., mondjuk hogy, a' külső *négy* egyenlő négyszögből áll mint a' belső csak kettőbül, és valóban, ha a' kör' sugára $= AO$ vagy $CO = 1$, mindegyik reá alkotott rendes négyszög' térszíne is $= 1$, tehát a' külső négyszögé $= 4$, a' belsőé $= 2$.

Ha ezen körbe 8 szögöt írunk, ez középarányban lesz a' külső és belső négyszög közt, tehát térszíne 2 és 4 közt a' középarány, vagy $\sqrt{8} = 2 \cdot 82847 \ldots$, 's szinte igy lesz a' körülírt négyszögnek térszíne 4 és $2.82847 \ldots$ közt a' középarány.

A' vizsgálat folytatása szembetűnő. Ha a' külső és belső 8 szögök' térszínei megtaláltattak, a' 16 oldalúaknak keressük térszíneiket; a' béírt 16 szögnek térszíne középarány a' két 8 szög' térszíne közt; a' körülírt 16 szögé pedig középarány a' körülírt 8 szög és béírt 16 szög közt; meglelvén ezeket, a' 32 oldalúkra megyünk által, 's ezektől a' 64 re mindenkor duplázván az elöbbinek oldalai számát, míg olly számokra találunk, mellyek a' béírt és körülírt sokszögökhöz egyenlően tartoznak azon közelítéssel, melly tetemes hiba nélkül minden esetben, használható.

A' középaránylat keresése illy két szám közt, millyenek a' körül és béírt szögöket kifejezők a' gyökérvevés elmellőzése által is történhetik; az illyen középarányt *egybehangzó középnek* (hármoniai középnek) nevezzük, mert egymásból folynak bizonyos és változatlan törvény szerint; ezeknek meglelésére az arithmeticából következő alak szolgáljon. Ha két szám m és n közt a' középszám x kerestetik, ez $= x = \frac{2mn}{m+n}$, vagy szóval: *két számközti egybehangzó arány megtaláltatik ha a' két számnak dupla szármozata*, a' két *szám' öszszesével elosztatik*. Ezen sokszögök' térszíneinek számbeli kifejezései mindenkor csak közelítők valódi értékekhöz, és az egészeket bizonyos számú tizedes törtjegyek követik. Ha az oldalok' számát ötször duplázzuk meg egymásután a' 4 szögön kezdvén, már a' két tizedes jegy egyenlő, de annyival megelégedni nem lehet. De ha vizsgálatunkat addig terjesztjük, míg a' körül és belülírt sokszögök térszínei a' tizedik törtjegyben megegyeznek, a' talált szám minden szükségnek megfelel. Elérjük pedig ezt, ha az oldalok' számát 18szor duplázzuk egymásután, de ekkor a' körül és béírt sokszögöknek oldalai száma 1048576 és térszíneik a' kör' térszínével egyenlőknek vétetnek.

Ide írom sorjában ezen következéseket; az első sorban állanak a' duplázat' jegyei, másodikban az oldalok' száma, harmadikban a' körbe írt, 's a' negyedikben végre a' kör körül írt sokoldalok' térszínei. Tudván hogy a' sugár, vagy mi mind egy, a' középpont és talpak közti távoly = 1nek vétetett 's belőle következik a' körül és béírt sokszögök' térszíne. A' különbségek szembetűnők 's látható, miként közelítnek egymáshoz a' béírt és körülirt sokszögök' térszinei, az előbbiek növés, az utóbbiak fogyás által, egy, két, három 's a' t. tizedes helyekben megegyezvén, mig végre az utolsó esetben mind a' tíz tizedes törtjegy egyenlő.

Duplázat.	Oldalok száma.	Béirt sokoldal.	Körülírt sokoldal.
	4	2·.........	4·.........
1	8	2·8284271247	3·3137084989
2	16	3·0614674589	3·1825978780
3	32	3·1214451522	3·1517249074
4	64	3·1365484905	3·1441183852
5	128	3·1403311569	3·1422236300
6	256	3·1412772509	3·1417503692
7	512	3·1415138011	3·1416320807
8	1024	3·1415729404	3·1416025103
9	2048	3·1415877253	3·1415951177
10	4096	3·1415914215	3·1415932696
11	8192	3·1415923456	3·1415928076
12	16384	3·1415925766	3·1415926921
13	32768	3·1415926343	3·1415926632
14	65536	3·1415926487	3·1415926560
15	131072	3·1415926523	3·1415926542
16	262144	3·1415926532	3·1415926537
17	524288	3·1415926535	3·1415926536
18	1048576	3·1415926535	3·1415926535

De mind a' mellett hogy az 1048576 oldalú bé és körülírt polygonok térszínei már a' tizedik tizedes törtjeggyel kifejezve is egyenlők, azért a' köztük levő körnek térszíne *nagyobb* mint a' béírt, és *kisebb* mint a' körülírt sokszögé, de mivel minden feladásra elég szigorúsággal felelhetünk az itt talált tíz törtjeggyel, a' vizsgálatot tovább terjeszteni szükségtelen.

A' szám 3·1415926535 eszerint kifejezi bármelly kör' térszínét, ha sugára $=1$ nek vétetik; tudjuk azonban, hogy valamint a' sokszögöknél, ugy a' körnél is, ezen térszín a' sugár és félkörület közti származat, fellyebbi számunk tehát a' félkörületet jelöli; ha a' sugár$=1$, természetes hogy az átmérő $= 2$, fellyebbi számunk tehát az átmérő és körület közti viszony, és közönségesen, ha r betű alatt sugárt értünk, k alatt pedig a' körületet

$$\text{a' sugár} = r = 1$$
$$\text{az átmérő} = 2r = 2$$
$$\text{a' félkörület} = \frac{k}{2} = 3\cdot1415926535$$
$$\text{és az egész körület} = k = 6\cdot2831853070$$

's igy a' sugár 6 szor és 2831 . . . . . szer, az átmérő pedig 3-szor és 1415 szer találtatik meg a' körületben.

Ezen viszony változatlan marad minden körben, bármelly szám fejezze ki a' sugárt.

Ha tehát valamelly körnek sugára vagy átmérője számokban kifejezve adva van, a' kör körületét szinte valamint térszínét megleljük, mert

$$\text{a' körület} = 2r\pi$$
$$\text{és térszíne} = r\pi,$$

ha π által, mi közönségesen felvehető, a' szám $3\cdot1415926535$ értetik.

Ha p. o. kérdezzük: valamelly körnek sugára 8 hüvely, mennyi körülete és térszíne? a' felelet természetesen következik

$$\text{körület} = 2 \times 8 \times 3\cdot14159\ \ldots = 50\cdot26554\ \ldots \text{ közel}$$
$$\text{és a' térszín} = 8 \times 3\cdot14159\ \ldots\ldots = 25\cdot13272\ \ldots \text{ közel}$$

a' körületnek fele, de négyszöghüvelyben.

Ezen π számra minduntalan van a' Geometrának szüksége és azt elméjében megtartani elmulhatlanul kell. Nem épen mind a' tíz tizedes jegy kívántatik azonban, és a' közönséges életben 3, legfeljebb 4 tízedes hely is elég, de mentül többet veszünk, annál inkáb közeledünk a' valóhoz. Már legrégibb időben keresték a' geometrák ezen viszonyt, és Archimedes ezt $^{22}/_{7}$ közönséges törtszám által fejezte ki, de melly már a' harmadik tizedes helyen hibás; említé azonban hogy, ha az átmérő=1, a' körület kisebb $3^{10}/_{70}$ nél és nagyobb $3^{10}/_{71}$ nél: egyik tört tizedesekbe változtatva 3·142, a' másik 3·141.

Metius sok hasonlítások után az átmérőt kifejező számot 113 ra alapítván, megtalálta hogy a' körületet kifejező szám közelebb áll 355 höz mint 354 hez. Ha számai által jelöljük viszonyunkat, a' közönséges tört $^{355}/_{113}$ tizedesekben = 3·1415926, és a' hetedik helyen még tökéletes: a' törtnek még azon jeles tulajdona van, hogy az elmében könnyen megtartható.

Ha p. o. a' hat jegyet ugy írjuk egymásmellé, hogy a' három egymás után következő párotlan szám párosan essék együvé, lesz 113355 két egyes, két hármas és két ötös; ha a' hat jegyet felezzük, 113 a' három első az átmérőt, 355 három utolsó a' körületet jelöli, és a' köztük levő viszony $^{355}/_{113}$ könnyen változtatható tizedes törtekbe, ha nem akarunk közönséges törtel számítani. Ludolphus van Ceulen már Metius előtt, 34 tizedes helyig számitotta a' viszonyt Archimedes utján nagy szorgalommal, 's azért is neveztetik még π szám, Ludolph számának.

1719 ben adá Lagny ezen viszonyt a' Franczia túdos Társaság' évkönyveiben 128 tizedes jeggyel, az Oxfordi könyvtárban végre egy kézirat, következő jegyeket adja:

3·14159 26535 89793 23846 26433 83279 50288 41971
69399 37510 58209 74944 59230 78164 06286 20899
86280 34825 34211 70679 82148 08651 32832 06647
09384 46095 50582 23172 53594 08128 4802· .....
's a' t.

Itt 154 tizedes jegy áll, de még ez sem fejezi ki tökéletesen az átmérő és körület közti viszonyt, 's egy szóval a' szám végtelenségig mérhetlen, mit először Lambert bizonyított 1761 ben; azóta számtalan meggyőződés nyujtatott a' tudomány által, hogy minden ipar a' kör négyszögítésére hasztalan idővesztés, mert az a' lehetőség határán túl van.

K. Ha valamelly kör' térszínét ismerjük, kétségkivül valamelly részének is ismerjük térszínét?

F. Bizonyosan, ha kivált ezen része egész számokkal van kifejezve, mert a' sugár = 1 és a' kör' térszine π lesz természetesen a' félköré $= \frac{1}{2}\pi$
a' fertályköré $= \frac{1}{4}\pi$
a' nyolczadrészköré $= \frac{1}{8}\pi$
és közönségesen bármelly részét jelöli m, $= \frac{1}{m}\pi$'s a' t.

Ha p. o. 29 Idomunk szerint *AOB* körkivágásnak térszíne kívántatnék, és a' körület *AB* darabja ismeretes, vele sokszorozzuk $AO = BO$ sugárnak felét, vagy *AOB* kivágás' térszíne $= \frac{1}{2}$ sugár sokszorozva *AB* ívvel. Ha p. o. ezen ív egy-hatodrésze a' körületnek és a' sugár ismét = 1, egyszerűen lesz *AOB* térszíne $\frac{\pi}{6} = 0{\cdot}5235987$.

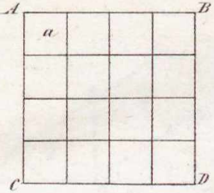
Ha csak az x betűvel jelölt körszelet' térszíne kivántatik, ezt megleljük, ha a' körkivágás tészínéből *AOB* háromszög' térszínét levonjuk, ez pedig $\frac{1}{2}\, OD \times AB$, tehát a' szelet' térszíne = *AOB* körkivágás — *AOB* háromszög.

K. Miként változtatjuk a' kört négyszögbe alkotás által?

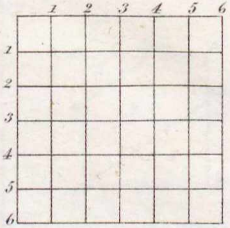
F. Ismervén az átmérő és körület közti viszonyt, számokban fejezvén ki a' félkörület' hosszaságát, mérő eszközeink által ezt egyenes vonalban felírjuk; négyszögünk' hosszú oldala tehát a' félkör hossza; rövid oldala pedig a' kör' sugára lesz, mert igy a' kör és négyszög térszínei egyenlők, természetes hogy itt mindenkor csak közelítésről lehet szó, mert ha a' félkörületet tökéletesen ki tudnók egyenlíteni, a' reá és sugárára alkotott négyszög tökéletesen egyenlő lenne a' körrel. 30 I. valamennyire szembetünteti az illy kiegyenlítését a' körnek, melly feltétünk szerint számtalan sok apró háromszögből van összetéve. Kettévágván körünket *AB* vagy *CD* átmérője szerint, a' két fél kiegyenlítve, a' kör mellett álló fűrész fogakhoz hasonló háromszögöket mutatja; a' fogak egymásba illenek 's ha a' két felet összeszorítjuk, természetesen támad azon négyszög, mellynek két hosszú oldala a' kör' fél fél körülete; két kisebb oldala pedig a' körnek sugárai, 's igy a' kör és négyszög térszíneik egyenlőként $r\pi$.

Az itt mondottat egyenesen megmutatom egyszerű alkotás által, mert a' kör' térszíne egyenlő azon egyenszögű négyszög térszíne' felivel, mellynek talpa a' körület, magossága pedig a' sugár. Ha 31Iban *AB* egyenlő a' körülettel, és *AC* a' kör' sugára, *ABC* háromszögnek térszíne egyenlő a' kör' térszínével, a' háromszög pedig épen fele az említett egyenszögű négyszögnek. Ezen négyszögöt pedig ismert alkotásunk szerint rendesre vivén feloldottuk a' híres kérdést, és körünkel egyenlő térszínű rendes négyszögöt alkottunk.

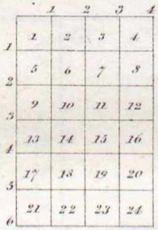
1


A
B
a
C
D

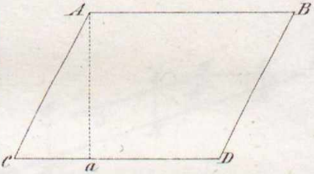
2


1 2 3 4 5 6
1
2
3
4
5
6

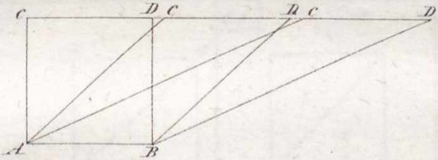
3


1 2 3 4
1 2 3 4
5 6 7 8
9 10 11 12
13 14 15 16
17 18 19 20
21 22 23 24
1
2
3
4
5
6

4


A
B
C
a
D

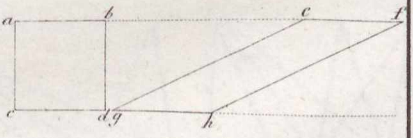
5

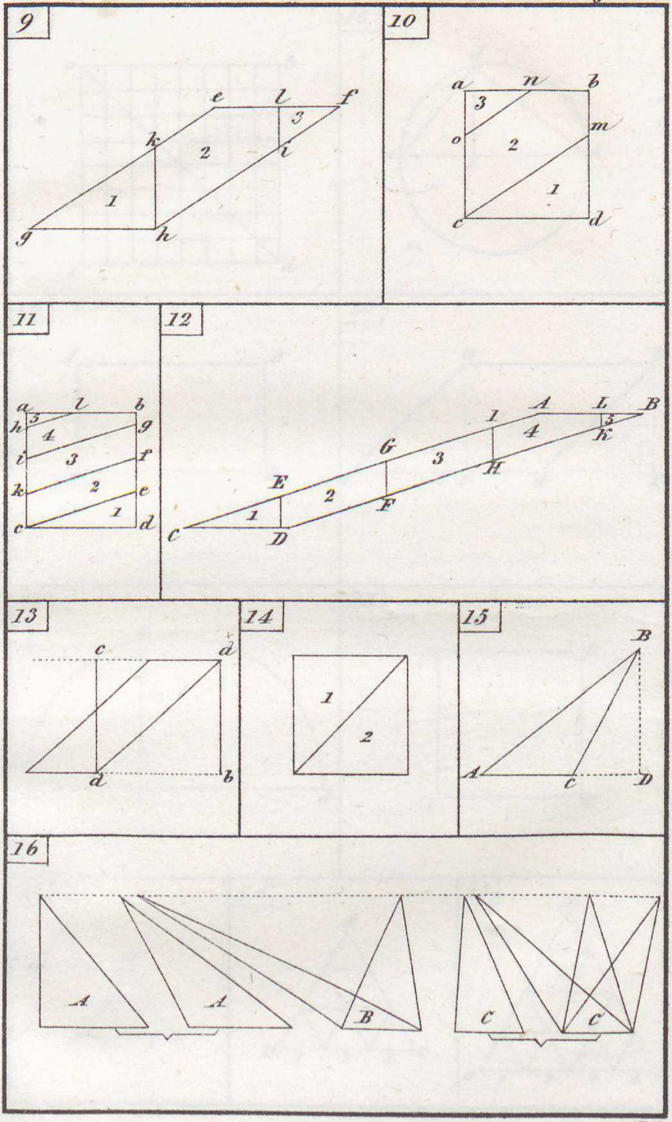

C
D C
D C
D
A
B

6

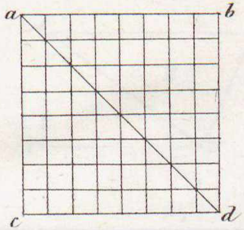
7

8

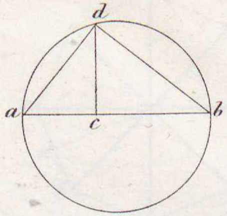

a
b
e
f
c
d g
h


9
e l f
k i
3
2
1
g h
10
a n b
3
o m
2
1
c d
11
a l b
3
h 4 g
i 3 f
k 2 e
1
c d
12
A L B
I 4 5
K
G 3 H
E 2
1 F
C D
13
c d
d b
14
1
2
15
B
A c D
16
A A B C C

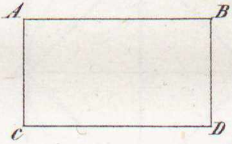
17



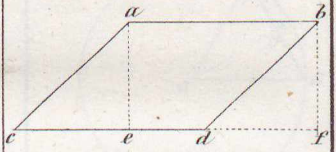
18



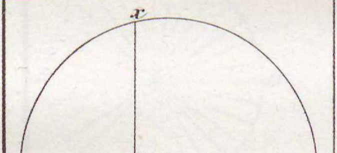
19



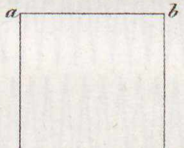
20



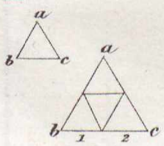
21



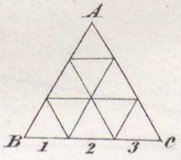
22



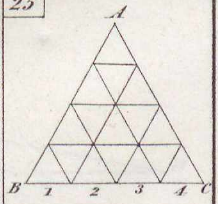
23



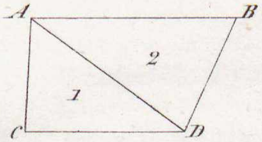
24



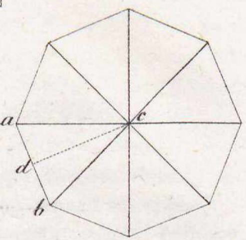
25



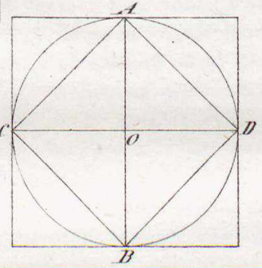
26



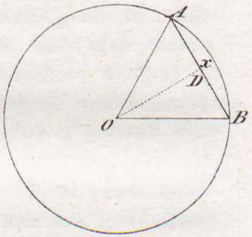
27



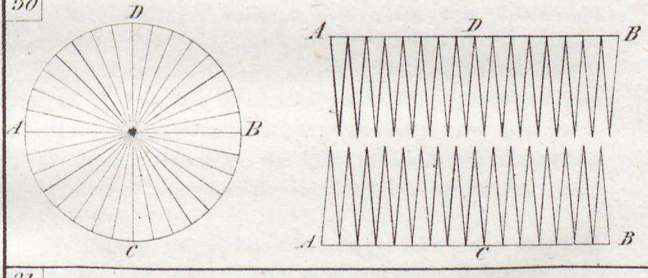
28



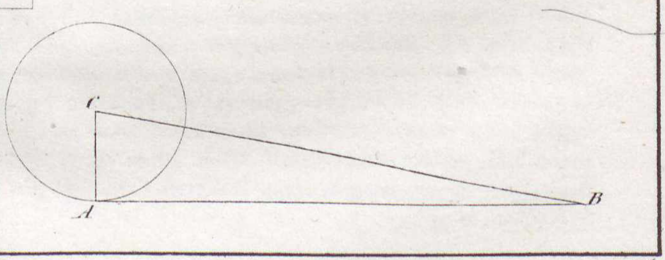
29



30



31



TIZEDIK BESZÉLGETÉS.

K. A' geometri vonalok, ha egymásközt viszonyba hozatnak, szoros egybeköttetésben vannak a' számokkal. Eddigi tekinteteink nyilván mutatják, miként változnak a' számok ha a' vonalok bizonyos idomok' alkotásaihoz járulnak. Minden végkifejezése valamelly geometri alaknak csak a' számok által történhetik, mert csak ezeken eszközölhetjük az arithmetikai míveleteket, mellyek a' következések meglelésére elmulhatlanul szükségesek. Nemde bizonyos mérőket kell mindenkor a' számok alatt gondolnunk?

F. Ez nem szükséges, mert a' feladásra nézve mindegy, bármelly ismert vagy képzelt mérőket gondoljunk a' számok alatt, mert bármelly legyen különös és megnevezett értékük, a' vonalok közti viszonyok változatlan maradnak.

Ha p. o. mondom hogy, egyik vonal 3, a' másik 5 szám által van kifejezve, a' két különböző szám egyenlően lehet hüvely, láb, öl vagy mérföld, vagy ezeknek ezer meg ezerszerte aprobb részeik, az adott két vonalközti viszony váztozatlanul megmarad, mint három az öthöz, vagy megfordítva.

K. Tudom hogy, ha valamelly vonal maga magával sokszorozandó, nem tészen egyebet, mint a' hosszmérőt térmérőbe változtatni. Ha valamelly számot maga magával sokszorozunk, négyszögét találjuk; ha tehát geometri vonalat kell maga magával sokszorozni, arra négyszögöt alkotunk, 's így négyszögítettük betű szerint a' vonalat, mert térszine ki van fejezve azon szám' négyszöge által, melly előbb hosszaságát jelölte. Mit nevezünk *két vonal alatt levő egyenszögűnek*?

F. Ha két különböző szám sokszoroztatik egymással, tudjuk, származatokat mindenkor valamelly más szám' négyszögének vehetjük; ha eszerint két különböző hosszaságú vonal sokszorozandó, egyenszögű négyszög támad, mert két terjedség tért jelent. Egyik vonal a' négyszög talpa, másik magossága. A' rendes négyszögnél a' talp és magosság egyenlők. Ha tehát valamelly egyenszögűnek két irányát, talpát vagy hosszát, és szélét vagy magosságat ismerjük, az egyenszögűt ezen két vonal alatt levőnek nevezzük, mert még két velük egyenlő oldal zárja be az egyenszögű négyszög' térét.

K. Két különböző nagyságú rendes négyszög van adva, millyenek 1 és 2 I., kivántatik egy olly rendes négyszög melly mindkettőt tökéletesen magába foglalja, vagy is: mellynek térszine az adott kettőnek térszine' öszszesével egyenlő legyen. Miként találjuk meg azt?

F. Ha olly egyenesszögű háromszögöt alkotok, mellyben az adott két rendes négyszög' két oldala közzé esik az egyenesszög, következésképen a' két vonalat háromszögöm' két kis oldalának veszem, a' harmadik, a' nagy oldal természetesen fog következni [20]. Ha háromszögöm' ezen nagy oldalára rendes négyszögöt alkotok, ez egyenlő lesz az adott két rendes négyszög' öszszesével. 3 I. ban legyen *A* szög egyenes, *AC* oldal egyenlő az adott nagyobbik négyszög' oldalával, *AB* pedig a' kisebbik oldalával; *BC* lesz a' keresendö rendes négyszög' oldala.

[49] *K.* Eszerint tehát: *minden egyenesszögű háromszögnek tulajdona hogy, a' nagy oldalára emelt rendes négyszög egyenlő a' két kis oldalára emelt rendes négyszögök' öszszesével?* Tudom hogy minden a' félkörbe írt háromszög egyenesszögű, ha három csúcsa a' körületben fekszik [35], és hogy nagy oldala ezen körnek átmérője; azt is tudom hogy, bármelly legyen a' másik két oldalnak állása, az egyenesszög nem változik, de a' két kisebbik oldal igen is változik 's a' mint egyik nö a' másik fogy, de

hogy ezen növés és fogyás különböző, vagy is nem *annyival* nő vagy fogy egyik, *mennyivel* fogy vagy nő a' másik, és a' két oldalnak öszszese soha sem egyenlő. 4 I. ban p. o. *BC* oldalok lassan fogynak, midőn *AC* oldalok sebesen nőnek 's ha öszszesüket megmérjük, mindegyiket a' felfelé következő háromszögben nagyobbnak lenni találjuk. Ezen okból meglepő, hogy az ezen oldalokra emelt négyszögök' öszszese mindenkor' egyenlő a' változatlan maradt harmadik oldalra emelt négyszöggel, holott amazok számtalan különbözők lehetnek. Miként lehetne ezt megbizonyítani?

F. Az egyenesszögű háromszögök' ezen jelel tulajdonát Pythagoras fedezte fel, ki idő számlálásunk előtt 500 évvel élt. Bizonyítását ezen tannak többféleként lehet adni. Az egyszerűbbeket mi is tekintsük. Ha mint 5 I. ban tettem, olly egyenesszögű háromszögöt alkotok, melly egyszersmind egyenszárnyú, a' legegyszerűbb esetre jutok; az alkotás könnyű, ha átmérőmre a' középpontban sugárt emelek függőleg, 's a' végpontokat egybekötöm; így lesz *ACB* háromszög egyenesszögű és egyenszárnyú. Ha *AC* és *BC* egyenlők, bizonyosan a' reájok emelt négyszögök is egyenlők lesznek, vagy $(AC)^2 = (BC)^2$ lesz. Azt kell tehát megbizonyítanunk hogy, $(AB)^2$ egyenlő legyen $(AC)^2 + (BC)^2$, vagy is a' két negyszög' öszszesével, melly öszszes mostani esetünkben egyenlő $2(AC)^2$ vagy $2(BC)^2$ el.

A' 6 I. ban ugy emeltem *ABC* háromszög' oldalaira rendes négyszögöket, hogy a' talpán mindegyik külön külön álljon. Egy kis gyakorlat az alkotásban több könnyítésekre vezet benünket, miként lehessen vonalainkat czélirányosan húzni s' bizonyítványunkat vezetni; az itteni alkotásainknál p. o. egyenirányú és függő vonalokon kivül nincs egyéb.

AC nagyoldalra emelt rendes négyszög p. o. a' kisebb négyszögök hosszabítása által 4 egyenlő háromszögbe oszlik, valamint a' két kisebb négyszög két félbe oszlik a' nagy négyszög' oldalai hosszabbítása által.

Egy pillanat ezen 6 Idomra mutatja hogy, valamennyi háromszög, melly benne találkozik (öszszesen 9), egyenlő; négy a' nagy négyszöghöz, kettő kettő a' kisebbikhez tartozik 's az utolsó végre az adott háromszög maga 's igy a' bizonyítvány egyenesen következik az alkotásból.

Szinte 7 I. ban is szembetűnő ezen egyenlőség, hol a' nagy négyszögöt nem lefelé, de felfelé emeltük *AB* nagy oldalra, 's itt is valamennyi háromszög egyenlő lévén, a' kis négyszögök természetesen béesnek a' nagyba, mert $b=b$ és $a=a$ háromszög.

Példánkról valaki mondhatná, hogy nem közönséges, de csak különös eset; vegyünk tehát olly egyenesszögű háromszögöt, mellynek két kisebb oldala különböző, és emeljük mint 8 I. ban külön külön a' rendes négyszögöket az oldalokra. A' kisebb négyszögöket olly darabokba lehet osztani, mellyek rendesen és tökéletesen beférnek a' nagyba; kijelöljük mindegyikben ezen osztási részeket, például vevén 9 Idomot.

Elosztom először *AB* oldal rendes négyszögét három darabba, *DE* vonalat *D* pontból *AC* vagy *NM* talphoz egyeniránylag húzván 's réa *NA* oldalt, hosszabítván azt *F* pontig, az 1, 2 és 3 számok által jelölt darabok következőként rakatnak a' nagy négyszögbe.

Háromszögöm *B* pontjából *BO* függőt vonok *NM* oldalra, *NQ* vonalat egyeniránylag *AB* oldalhoz, és *AR* vonalat *DA* oldal hosszabbítása által; az 1, 2 és 3 számok által jelölt darabok egyenlők a' kisebbik négyszög ugyan ezen számokkal jelölt darabjaival.

BC oldal rendes négyszögét 4 darabba osztom következőként: *G* pontjából *GH* egyenirányút húzom *AC* oldalhoz és *MC* oldalt hosszabbítom *I* pontig, *G* pontból *K*ig akkora darabot jelölök egyenirányú *HG* vel, mekkora *CH* és *LK* vonalom; igy a' négy darabot sorjában 4, 5, 6 és 7 számokkal jelöltem. Béosztom pedig ezen részeket a' nagy négyszög' megmaradott részébe, ha *GC* oldalt hosszabbítom *S* pontig, *M* pontból *MQ* egyenirányút húzom *BC* oldalhoz, 's ha *MT* egyenlő *KL* vonallal és *UT* egyenirányú *AB* vagy *CS* vonalokkal, a' 4, 5, 6 és 7 számokkal jelölt darabok egyenlők a' kis négyszög' ugyan ezen számokkal jelölt darabjaival.

Ha a' béosztás jól és ollóval történt, a' kisebb két négyszög' 7 darabja befér a' nagy négyszögbe 's azt rendesen megtölti; de mivel mi itt alkottunk, szükséges hogy az osztási részek egyenlőségét megbizonyítsuk. A' bizonyítás könnyű, mert az egyenlő háromszögök' tulajdonin alapul 's ezeken kivül csak egy rendetlen négyszög és egy ötszög jön elé.

K. Az alkotást figyelemmel követtem vonaltól vonalhoz és egymásután sorjában utánoztam; a' részek' egyenlőségét egyik vagy másik négyszögben megbizonyítani tudom. Azon környülállás, hogy a' háromszög' *B* pontjából vezetett *BO* föggő a' nagy négyszögöt olly két hosszított négyszögbe osztja, mellyek egyenlők a' felettük helyezett két kisebb négyszöggel, ígen segélli az alkotást és béosztást. Most magam is tudok egy hasonló bizonyítványt adni.

Ha a' nagy oldal' négyszögét felfelé írom, 10 Ira találok 's igy eredeti háromszögöm is ben van a' nagy négyszögben, valamint mindegyik kisebb négyszögnek egy darabja; ha ezen *ACB* háromszögöt ollóval kivágom, 11 Idomom marad, ha a' kivágás egyedül a' nagy négyszögön történt, a' háromszögöt tetejére helyezem 's 12-dik Idomra találok; itt látni hogy, a' nagy négyszög mennyiségéből nem vesztett, csak hogy *ABC* háromszög felül áll, üres helye pedig *DFE* és a' rendes négyszögből hatszög támadott; ha most *C* pontból *AD* vagy *BE* oldalhoz egyenirányú *CF* vonalat húzom, két rézsnégyszög támad; ha most megtudom bizonyítani, hogy ezen két rézsnégyszög' térszine egyenlő a' háromszög' kisebb oldalaira emelt rendes négyszögök' térszínével, a' feladásnak eleget tettem. Ha 11 és 12 Idomaimat összeállítom vagy kiegészítem, 13-dik Idomra jutok, 's itt *BGL* kis háromszög áll *AIM* helyett, mert vele egyenlő és emez ugy is benn van *ACB* háromszögben. 12 I. két rézsnégyszöge itt van, valamint itt van a' két kisebbik rendes négyszög is *DTIK* és *EFGH*.

Természetes hogy, *CFBE* rézsnégyszög egyenlő *EFGH* rendes négyszöggel, mert talpok és magosságok egyenlők [42]; mindkettőnek talpa $EF = CB$ és magossága $FG = CB$, szinte egyenlők *DFIK* rendes és *ACDF* rézsnégyszögök, mert magosságok egyenlően $DF = AC$, talpok pedig $DK = FI$.

Miként lehet ezt az aránylatok által megbizonyítani?

F. A' legegyszerűbb 's egyszersmind legbíztosabb úton.

Ha valamelly háromszög egyenesszögiből talpára függőt vonunk, mint 14 I. ban *ACB* háromszög' *C* pontjából *AB* talpára *CD* vonal által történt, *CD* a' háromszög magossága és általa két kisebb a' nagyhoz hasonló háromszög támad, mellyek közt már az előttünk ismeretes arányok állanak fenn, és csakugyan:

A' kis *CDB* háromszög' legkisebb *BD* oldala ugy áll *CB* legnagyobbik oldalához, mint áll *ABC* háromszögnek legkisebb *CB* oldala *AB* legnagyobb oldalához, és betűkkel kifejezve:

$$BD : CB = CB : AB$$

szinte: *ACB* háromszög' *AD* oldala ugy áll *AC* oldalához, valamint áll *ABC* háromszögnek *AC* oldala *AB* oldalahoz, és felirva:

$$AD : AC = AC : AB.$$

K. A' háromszögök tudom hasonlók egymásközt, mert mindegyikben két szög egyenlő [23] és a' köztük levő aránylatokat is ismerem. Nem is gondolom, hogy valaki különböző állások miatt kételkednék hasonlóságokról, különben 15 I. hoz utasitom, hol ugyan ezen három hasonló háromszögöt egyre vittem vissza, mellyben mint látjuk, sorjában *DCE*, *FCG* és *ACB* háromszögök *BDC*, *ADC* és *ACB* háromszögöknek felelnek meg 14 I. ban. Itt az állás nyilván mutatja, hogy mindegyik egyenesszögű, és ezen egyenesszöge C pontban van, a' talpok mind egyenirányúak, tehát a' rajtok lévő szögök mindegyik háromszögben egyenlők. Elébbi aránylataink egyenlőként folynak 15 I. ból is, mellyekből következik, tudván hogy, a' külső tagok' származata egyenlő a' belső tagok származatával [37]:

$$(CB)^2 = CE \times AB \text{ és } (AC)^2 = CF \times AB$$

és itt is $CE + CF = AB$, mint volt 14 I. ban

$$AD + DB = AB,$$

visszatérvén 14 I. hoz, két aránylatunk:

$$(CB)^2 = BD \times AB, \text{ és } (AC)^2 = AD \times AB.$$

Ha a' két kisebb négyszögöt összeveszem, vagy mi mindegy, a' két aránylatot összeadom, bizonyos hogy:

$$(CB)^2 + (AC)^2 = BD \times AB + AD \times AB$$

hol a' második részben AB kétszer állván mint sokszorozó, egyszer írathatik, ha a' másik két kifejezést korlát közé tesszük 's lesz:

$$(CB)^2 + (AC)^2 = AB\ (BD + AD).$$

Mivel végre AD és BD egyes részei AB nagy oldalnak, tehát öszszesen vele egyenlők; a' korlátba hellyettük AB tétethető 's lesz végső írásunk:

$$(AC)^2 + (CB)^2 = AB \times AB, \text{ vagy is:}$$

$$(AC)^2 + (CB)^2 = (AB)^2 \text{ és szóval,}$$

az AC és CB oldalra emelt négyszögök' öszszesse egyenlő az AB oldalra emelt négyszöggel.

Nemde egyenesen folyik ebből, hogy a' rendes négyszög' térszíne egyenlő azon két egyenszögű négyszög' térszínével, melly egyik oldala és ennek bármelly két részei alatt vannak?

F. Ezen helyes észrevét végső következtetésünkre 's igy tökéletes meggyőződésre vezet bennünket, mert eddigi vizsgálatainkat igy egyenesen bizonyítjuk.

Első aránylatunk $CB^2 = BD \times AB$ azt jelöli, hogy CB^2 (a' legkisebbik odalra emelt rendes négyszög) egyenlő azon négyszöggel, mellynek talpa AB, magossága pedig *BD* vonal. Hasonlóan mutatja $AC^2 = AD \times AB$ aránylatunk, hogy a' második oldalra emelt rendes négyszög egyenlő azon négyszöggel, melly a' két vonal *AD* és *AB* alatt áll; de *AB*, mint háromszögünk' nagy oldala, a' nagy rendes négyszögnek is egyik oldala, *BD* és *AD* pedig részei; ha tehát két egyenszögűt alkotunk *AB* vonalra, mint alkottuk 16 Idomot, és egyiknek magossága *AD*, a' másiké *DB*, a' két egyenszögűnek összszese egyenlő az *AB* vonalra emelt rendes négyszöggel. Idomunkban a' két egyenszögűt 1 és 2 számmal jelöltük, és összszesük *ABAB* rendes négyszög.

K. Ha tehát két rendes négyszög adva van, és egy harmadik kívántatik, melly egyenlő legyen a' kettőnek összszesével, ezt megtalálom, ha egyenesszögű háromszögöt alkotok, mellyben a' két kis oldal egyenlő az adott két rendes négyszög' oldalával; a' nagy oldal ezek után következvén, oldala a' kívánt rendes négyszögnek. Miként alkotunk ha p. o. a' két adott rendes négyszögnek nem összszese, de különbsége kívántatik?

F. Legyen az adott két rendes négyszög 17 I. ban *ABCD* és *abcd*; az első $(AB)^2$, a' másik $(ab)^2$ által van kifejezve, és kívántatik a' kettőközti különbség:

$$(AB)^2 - (ab)^2$$

vagy is, olly rendes négyszög, melly akkora legyen, mekkora a' nagyobbik ha ebből a' kisebbiket elveszük.

Ismét az egyenesszögű háromszög' oldalai képviselik a' kérdésben forgó három rendes négyszögök' alap oldalait azon különbséggel, hogy az adott nagyobbik rendes négyszög oldala az egyenesszögű háromszögnek legnagyobbik oldala, a' második négyszög oldala szinte a' háromszög második oldala, 's végre a' háromszög' legkisebb oldalára emelt rendes négyszög a' kettőközti különbség lesz, mert ha

$$(AB)^2 = (Aa)^2 + (aB)^2,$$

mint 18 Idomunkban, hol *AB* és *Aa* az adott két rendes négyszögnek oldalai, bizonyosan következik

$$(aB)^2 = (AB)^2 - (Aa)^2.$$

K. Vallyon megegyez-e ezen alkotás a' számokkal, vagy kifejezhetők-e általok ezen négyszögök?

F. Többnyire csak közelítőleg; de ha mindhárom oldal egész számokban kifejezhető, akkor a' négyszögök is tökéletesen kifejezhetők számokkal, mert ezek is tökéletes négyszögök, és a' két kisebb szám' négyszöge egyenlő a' nagyszám' négyszögével.

Ha egyik kis oldal p. o. 4, a' másik 5, ezen számok' négyszögei 16 és 25 lévén, öszszesük 41 nem tökéletes négyszög, de a' nagy oldal azért $\sqrt{41}$ által kifejezve van, mi közel $= 6 \cdot 403 \cdots$

Ha a' két kis oldal 3 és 4, a' nagy bizonyosan 5, mert

$$9 + 16 = 25 \text{ és } \sqrt{25} = 5,$$

valamint $3^2 + 4^2 = 5^2$. Ha a' két kis oldal 5 és 12, négyszögeik 25 és 144, öszszesen pedig 169 és $\sqrt{169} = 13$, tehát a' nagy oldal 13, mert $5^2 + 12^2 = 13^2$. Ebből is nyilván hogy, ha a' geometriai négyszögök, mellyek valamelly egyenesszögű háromszög' oldalaira emeltettek, a' számok négyszögeit képviselik, az oldalok' hossza ezeknek gyökereit adja.

Leg egyszerűbb kifejezése az egyenesszögű háromszögnek, ha oldalai sorjában 3, 4 és 5 számok által vannak adva, és ezen környülállás gyakorta használtatik, ha egyik vonalra függőleg kell másikat írni. Ha mint 191.ban történt, valamelly *AB* vonal 3, *BC* vonal 4 és egy harmadik *AC* vonal 5 egyenlő részre oszlik, a' három vonal összeállítva szükségesképen egyenesszögű háromszögöt alkottat; az egyenesszög mindenkor a' két kisebb vonal közt van, mert ezek állanak függőleg egymáson.

K. Ha valamelly rendes négyszög talpát bármelly két részre osztom 's ezen részekre rendes négyszögöket emelek, azt látom hogy, a' részekre emelt négyszögök öszszesen kisebbek a' nagy négyszögnél. 20-dik I.ban a' nagy négyszög talpát AC és CB részekre vettem, 's mindegyikre rendes négyszögöt emeltem; hogy a' kettő öszszesen sokkal kisebb a' nagynál igen természetes, mert ennek talpa és magossága egyenlően AB, holott a' második talpa és magossága csak AC a' harmadike végre csak CB.

Miként tudhatjuk meg, mennyi hibáz a' nagy négyszögből, vagy is, mennyi marad a' két beléírt négyszög felül?

[50] *F.* Ha AB oldalt két egyenlö részre osztom ugy hogy $AC = CB$ legyen, a' két ujonnan alkotott rendes négyszögöm magossága is CB lesz; de mivel CB fele AB nek, a' két négyszög is öszszesen csak fele lesz a' nagynak, vagy is $(AB)^2 = 2(AC)^2 + 2(BC)^2$, vagy $= 4\ AC^2$ lesz. Bátran mondhatom tehát, mivel $(AC)^2 = AC \times CB$, hogy bármelly részeket képviseljenek AC és CB a' reájok emelt négyszögök' öszszeséből, mindenkor 2-szer $AC \times CB$ fog hijánzani a' nagy négyszöghöz. Tudjuk pedig hogy $AC \times CB$ olly egyenszögű négyszög, mellynek talpa AC, magossága pedig CB. A' nagy négyszög tehát állani fog, a' két különös négyszögbül és a' két részei alatt lévő két egyenszögű négyszögbül [50]. Betűkkel fejezvén ki ezt, lesz:

$$(AB)^2 = (AC)^2 + (CB)^2 + 2(AC \times CB)$$

ezt pedig következőleg bizonyítom.

Legyen 21 I. szerint az adott rendes négyszög oldala AB, AC és CB részeire $ACGE$ és $BCHI$ rendes négyszögöket emelem; meghosszabbítom CH oldalt K ig és nyilván hogy, a' nagy négyszögbül $EGDK$ és $EKHI$ egyenszögűk híjánoznak. Hogy pedig ezen két egyenszögű egyenlő, bizonyos, mert $DK = EI = AB - CB$, és $DE = CB = AB - AC$, vagy is, talpok és magosságok egyenlően AC és CB, tehát kifejezések $AC \times CB$, mindkettő pedig öszszesen:

$$2(AC \times CB)$$

hozzáadván ezen kifejezést a' két négyszöghöz, megtaláljuk elébbi nagy négyszögünket 's lesz:

$$(AB)^2 = (AC)^2 + 2AC \times CB + (CB)^2.$$

K. Ezen vizsgálat tökéletesen egybeüt azzal, mellyet az arithmeticában a' számok' négyszögénél teszünk, ha valamelly számot két részre, 's részeinek vesszük négyszögüket, itt is szükséges, hogy a' két résznek dupla származatát adjuk a' két külön négyszöghöz, hogy az egész szám' négyszöge kikerüljön.

Ha p. o. a' szám 7-nek négyszöge $7 \times 7 = 49$, és bármelly két részének vegyem öszszes négyszögét, 49ből mindenkor a' két rész' dupla származata fog hijánzani.

Legyen először $7 = 1 + 6$, $1^2 + 6^2 = 1 + 36 = 37$ kell 49 hez még 12 és ez $=$ 2-szer $(1 \times 6) = 2 \times 6$.

ha $7 = 2 + 5$, $2^2 + 5^2 = 4 + 25 = 29$ kell 49 hez 20, és ez $= 2(2 \times 5) =$ 2-szer 10,

ha $7 = 3 + 4$, $3^2 + 4^2 = 9 + 16 = 25$ kell 49 hez 24, és ez $= 2(3 \times 4) =$ 2-szer 12.

Mit itt mutattam, mindegyik számmal változatlan ugy van. Ha tehát *valamelly számot két részbe veszek, 's ezek által akarom az egész szám négyszögét kifejezni, szükséges hogy vegyem, mindegyik résznek külön négyszögét* és *öszszesükhöz adjam a' két rész' dupla származatát.*

Adok még egy példát: vegyük 20at 12 és 8 részeiben 's fejezzük ki ezen részek által 20nak négyszögét?

$20 \times 20 = 400$ és az említett négy rész következő.

$$\begin{aligned} 12^2 &= 12 \times 12 = 144 \\ 8^2 &= 8 \times 8 = 64 \\ & 12 \times 8 = 96 \\ & \underline{12 \times 8 = 96} \\ \text{Öszses} & = 400. \end{aligned}$$

Ha tehát AB vonal két részre AC és BC re oszlik:

$$(AB)^2 = (AC)^2 + (CB)^2 + AC \times CB + AC \times CB.$$

22. Idomunk ezen részeket jelölve mutatja.

Legyen végképen *AB* vonal 9 hüvely, *AC* része 5, *CB* része pedig 4 hüvely, lesz a' négy külön rész' térszíne:

$$(AC)^2 = 5^2 = 25$$
$$(CB)^2 = 4^2 = 16$$
$$AC \times CB = 4 \times 5 = 20$$
$$AC \times CB = 4 \times 5 = 20$$

és a' nagy négyszögé $(AB)^2 = 81$ négyszög-hüvely.

K. A' sikok térszíneit ismervén, közönségesen mondhatjuk hogy, ha az idomok' oldalai egyszerűen (hosszmérőben kifejezve) nőnek vagy fogynak, térszíneik négyszögben (sik mérőben kifejezve) nőnek vagy fogynak?

[51] *F.* Innen következik hogy, hasonló idomok' térszínei arányban állanak az egymásnak megfelelő oldalok' négyszögeivel.

K. Hogy a' hasonló idomok' oldalai arányban állanak tudom, 's igy bizonyosan arányban fognak térszíneik is maradni; de mivel a' tér négyszög által méretik, aránya is négyszög számok által lesz kifejezve. De ha felteszem hogy, valamelly egyes oldal nő vagy fogy, mint p. o. ha a' háromszög' talpa nő vagy fogy, és magossága megmarad, melly arányban nő vagy fogy térszíne?

F. Egyenes arányban, az az ekkor csak *annyival* nagyobb vagy kisebb térszíne is, *mennyivel* nagyobb vagy kisebb lett talpa. Ez magában egyszerű, mert azt teszi hogy, egyenlő talpú és magosságú háromszögök' térszinei egyenlők, ha p. o. két egyenlő háromszögöt talpával összeteszek, magosságok egyenlő, talpok két akkora, 's igy öszszes térszinék is két akkora lesz.

[52]. *Egyenlő magosságú háromszögök' térszínei tehát azon arányban állanak, mellyben állanak talpaik.*

K. Ebből tüstént következik hogy, egyenlő talpú de különböző magosságú háromszögök térszínei ugy állanak egymásközt, mint állanak magosságaik. Lehet e' hasonlólag ezt a' többszögű idomokra alkalmazni?

[53] *F.* A' háromszögökről könnyen megyünk által a' sok-

szögökre. *Minden hasonló többszög' térszíne azon arányban áll, mellyben áll az egymásnak megfelelő két oldalra emelt rendes négyszög' térszíne.*

[54] A' kör tudjuk számtalan oldalú sokszöghöz hasonlítható, tehát a' körök' térszínei, arányban állanak átmérőjök' vagy sugárjok' négyszögével, vagy más szóval: *két kör' térszíne azon arányban áll, mellyben áll a' sugárjaikra emelt két rendes négyszög' térszíne.*

K. A' háromszög minden rendes idom közt legnagyobb helyet foglal; de legkisebb tért; a' négyszögnek, melly helyében elfér, már dulpa térszíne van; nemde következtethetni: mennél több oldalú valamelly idom, annál nagyobb térszíne?

[55] *F.* *A'* kérdés nem világos, mert mennyi helyet foglal el egyik vagy másik idom? nem határozhatja meg az idomokat békerítő vonalok' hosszát, sem az általok békerített tért. A' kérdés következőbe fordul. Valamelly rendes háromszög' oldalai kisebb tért foglalnak, mint foglal azon rendes négyszög, mellynek 4 oldala összesenvéve épen olly hosszaságú, millyen a' háromszög' három oldala öszszesen. Ha eszerint háromszögöm oldalai hosszát összevéve négy egyenlő részre osztom 's velük rendes négyszögöt alkotok, négyszögöm' térszíne nagyobb a' háromszög térszínénél. Ezt alkotás és számok által bizonyítani könnyű.

K. Kérdem tehát: ugyan azon hosszaságú vonalokkal annyival több tért zárhatni be, mentül több részekre osztjuk azokat, vagy is: ha az idomokat alkotó vonalok' öszszesét változatlanul *körületnek* nevezem, mondhatom hogy, egyenlő körülettel annál több tért foglalhatni, mentül nagyobb az olda ' száma?

[56] *F.* Igy közelítünk a' tétel' tiszta értelméhez, és *egyenlő körületű rendes idomok közt az foglal el legnagyobb tért, mellynek oldalai legszámosabbak.*

Eszerint a' kör azon alak, melly minden idom közt ugyan azon körülettel legnagyobb tért kerít bé.

Az idomok' ezen tulajdona hasznot nyujt az épitésnél, hol kevés anyaggal nagy tért kell békeríteni. A' templomok' ablakai gyakorta 6 vagy 8 szögű üvegdarabokból vannak összetéve, 's ezek ónnal illetve egymáshoz. Mentül több oldalúak az üveg-táblák, annál kevesebb ón szükséges reájok.

K. Következő észrevételeim az alkalmazásnál fontosak. Ha az idomok térszíneit keressük, ritkán számíthatunk egész számokkal, mert p. o. a' háromszögök magosságai ritkán vannak egész számokkal kifejezhető viszonyban, bármelly kicsiny legyen alapmérőnk' egysége. A' rendes sokszögök sugárjai csaknem mindenkor mérhetlenek az oldalokkal. A' kör' körülete sugárjával nemmérhető 's a' t.

Nem lehetne-e bizonyos szabájokat adni ezen viszonyok' meglelésére?

F. Mivel jelen vizsgálataink a' tudománynak csak első elemeire terjeszkednek, az említett viszonyok' meglelésére eddigi ismereteink nem elégségesek. Mit tehetünk, csak abban áll hogy, leírt vonalainkat valamelly hosszmérővel lehető pontosságig megmérjük 's az igy talált számbeli kifejezéseket használjuk. Ha p. o. valamelly rendes háromszögöt írunk, és egyik oldala 's magossága közti viszonyt keressük, valamelly sok apró részekbe osztott hosszmérővel mérjük mindkettőt. Az idomok oldalait megmérni tudjuk és több esetben számbeli kifejezéseik már adva is vannak, ha tehát azon függőket ismernők, mellyek, mint magosságok vagy sugárok, mint az oldalok' vagy körületek sokszorozoji a' térszínt származtatják, az azokat kifejező számokat minden különös esetre használhatnók.

A' *háromszögmérés* (trigonometria) igen egyszerüen vezet ezen viszonyokra; de mivel a' tudomány ezen ágával mi most nem foglalkozunk, ide írom ezen viszonyokat egy kis táblába a' rendes háromszögöktől kezdve a' rendes 12-szögig bézárólag.

Ezen kis tábla minden gyakorlati feladatokra használható. A' *függöny* felírású sorban azon vonalok hossza áll 7 tizedes hellyel adva, mellyeket magosságoknak vagy sugároknak neveztünk; valóban, ha a' sokszögöket háromszögökbe osztjuk, mindegyiknél ezen magosság értetődik és azon vonal, melly a' rendes sokszögök' középpontjából egy oldalra függőleg vezettetik, a' háromszögök' csucsából pedig a' talpra; ezen magosságot vagy függönyt a' sokszögöknél *apothemának*, körületjüket pedig a' kör' körületjétől *perimeter*nek nevezzük. Fel van táblánk alkotásánál véve, hogy a' többszögök egyes oldalai mindegyik idomban változatlanúl az egységet képviselik, vagy is, hogy egy oldal = 1 számmal van kifejezve, és ezen feltétből következik a' függönyök nagysága: Ha p. o. a' rendes 9 szögnek egy oldala = 1 (bármelly mérőben kifejezve), apothemája = 1·3737387.

A' második, *sokszorozó* felírású sorban azon számok állanak, mellyek egyenesen a' sokszögök' térszínét adják, ha egy oldaluk = 1. Igy p. o. ha a' négyszög' oldala = 1, térszíne is = 1, ha ugyan ezen mérőben kifejezve a' háromszög oldala = 1, térszíne = 0·4330127.

Látni, mint nőnek a' térszínek az oldalok' számával, 's hogy végre a' 12oldal' térszíne 11-szer nagyobb azon rendes négyszög térszínénél, mellynek egy oldala egyenlő a' 12-szög egy oldalával.

Természetes hogy, a' tizedes törtjegyekből annyit veszünk, mennyi elég hogy a' kerdésre kielégítően felelhessünk.

Ha egy oldal = 1

Oldalok' száma	Rendes idom' neve		Függöny	Sokszorozó
3	Háromszög	Triagon	0·2886751	0·4330127
4	Négysög	Quadrat	0·5000000	1·0000000
5	Ötszög	Pentagon	0·6881910	1·7204774
6	Hatszög	Hexagon	0·8660254	2·5980762
7	Hétszög	Heptagon	1·0382607	3·6339124
8	Nyolczszög	Octagon	1·2071068	4·8284272
9	Kilenczszög	Nonagon	1·3737387	6·1818242
10	Tízszög	Decagon	1·5388418	7·6942088
11	Tizenegyszög	Undecagon	1·7028439	9·3656411
12	Tizenkétszög	Dodecagon	1·8660254	11·1961524

A' táblácska' haszonvéte igen egyszerű. Ha valamelly rendes sokszögnek egy oldala adva van, azonnal megleljük térszínét, *ha ezen oldalát kifejező számnak négyszögét a' hozzá tartozó, sokszorozó felírású sorban álló számmal sokszorozzuk.*

K. Mennyi tért foglal olly rendes hétszög, mellynek egy oldala 6 láb?

F. Hatnak négyszöge = 6 × 6 = 36, a' hétszöghöz tartozó sokszorozo 3·6339124, tehát térszíne 36-szor ennyi, vagy = 130·8208464, vagy csak két tizedes jegyet hagyván meg = 130·82, közel 130⁴/₅ négyszögláb. Miként vegyünk több vagy kevesebb tizedes jegyet a' kérdés természete szerint, bővebben fogjuk tekinteni.

K. Ha valamelly 10 szögnek egy oldala 19-öl, mennyi térszíne?

F. 19^2 = 361 és térszíne 361 × 7·6942088 = 2777·6093768 □öl, vagy közel 2777·61 négyszögöl.

Itt azért nagyobbitottam egyel a' második tizedes jegyet, mert a' harmadik ·009 = kilencz ezred közel áll 1 századhoz 's igy kifejezésem is közelebb áll valódi értékéhez.

K. Ha valamelly rendes 12szögnek egy oldala 125öl, mennyi lesz térszíne?

F. $125^2 = 15625$, tehát $15625 \times 11{\cdot}1961524 = 174939{\cdot}88125$ □öl. Szembetűnő hogy, ha a' sokszorozó számot kétszer sokszorozzuk egymásutan az adott oldal számával, ennek négyszögét venni nem szükséges és a' következés mindkét esetben egyenlő.

Ekkor írjuk: $11{\cdot}1961524 \times 125 = 1399{\cdot}51905$

és továbbá: $1399{\cdot}57905 \times 125 = 174939{\cdot}88125$

megelégedvén két tizedes hellyel, a' térszín négyszögölben van kifejezve.

K. Valamelly rendes 5szögnek egy oldala 3·54 mérföld, mennyi térszíne?

F. 1·7204774 számot' kétszer sokszorozván egymásután 3·54 által, a' térszin:

$1{\cdot}7204774 \times 3{\cdot}54 \times 3{\cdot}54 = 21{\cdot}56033458584$ □ mérföld.

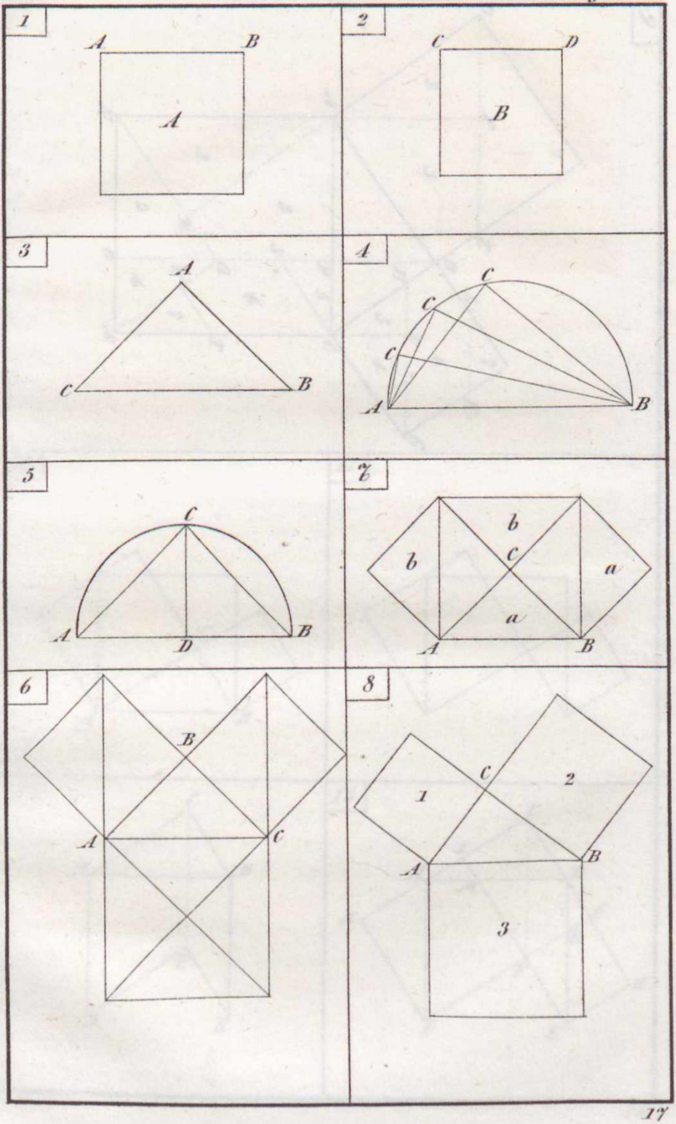
A' szármozatban tudjuk annyi tizedes hely támad, mennyi volt a' sokszorozandó számok után öszszesen, tehát esetünkben $7 + 2 + 2 = 11$. Ezen tizenegy jegyből annyit vehetünk, mennyi kívántatik.

K. Miként számitunk a' táblában álló függönyökkel?

F. Ha valamelly rendes sokszögnek egy oldala adva van, körülete is ismeretes. Megleljük tehát térszínét, *ha félkörületét függönyével sokszorozzuk*; ezen függönyök pedig táblánkban vannak felvéve, épen azért, mert azokat olly szigoruan megmérni csaknem lehetlen, mint itt a' számítás által vannak adva.

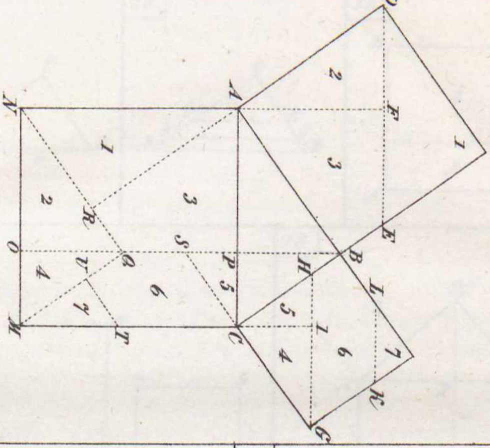
K. Vallyon alkalmazhatni-e ezen számokat a' három és négyszögökre?

Azt veszem észre p. o. táblámban első tekintettel, hogy itt a' háromszög' függönye igen kicsi, és alig lehet azon függöny, mellyet a' rendes háromszög csucsából

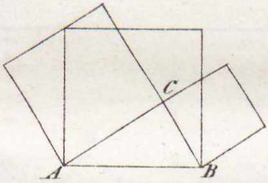


17

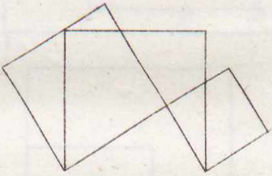
9



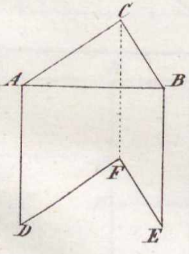
10



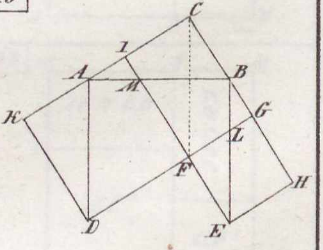
11

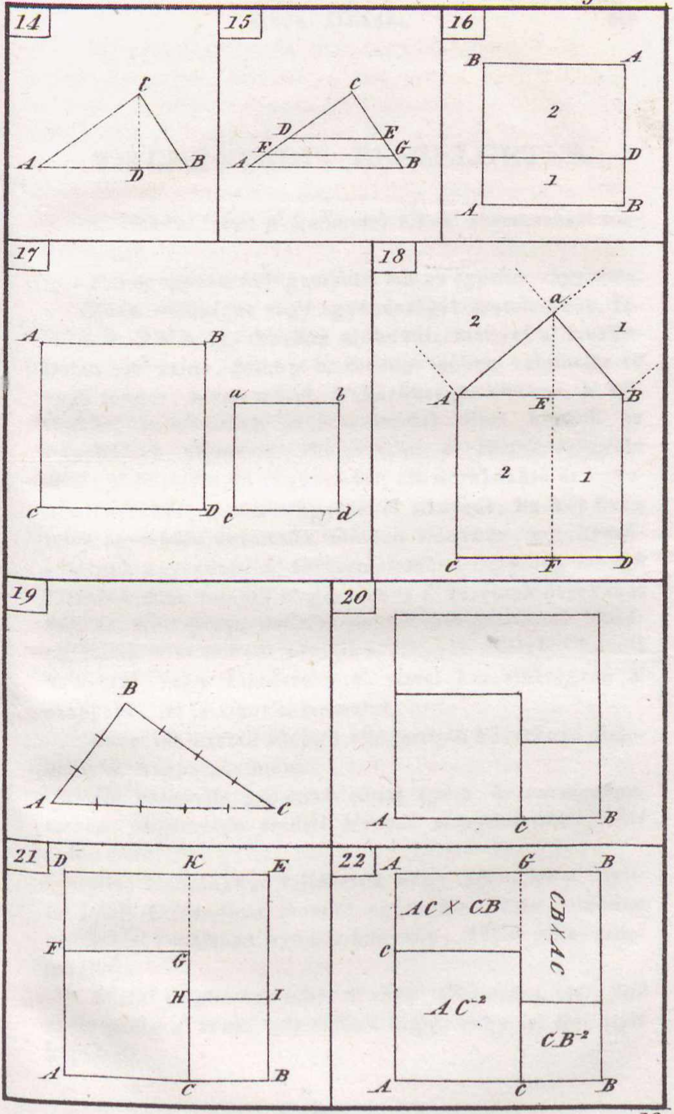


12



13




14
C
A
B
D
15
C
D
E
F
G
A
B
16
B
A
2
D
1
A
B
17
A
B
a
b
c
D
c
d
18
a
2
1
A
E
B
2
1
C
F
D
19
B
A
C
20
A
C
B
21
D
K
E
F
G
H
I
A
C
B
22
A
G
B
AC × CB
CB × AC
C
AC^{2}
CB^{2}
A
C
B

TIZENEGYEDIK BESZÉLGETÉS.

K. Miként lehet a' geometri sikok' származását magyarázni?

F. Legegyszerűbb geometri sík az *egyenes* vagy *síma*. Ezen símaságot vagy egyenességet asztalainkon, falainkon 's a' t. igyekezünk előhozni, mellyet a' mozdulatlan viz' színe, mint p. o. csendes időben valamelly tó vagy tenger, híven másol. A' közönséges életben, a' különböző művészetek számos módok által keresik az egyensíkok alkotását. Az asztalos a' fürész és gyalu által; a' kőmíves ón függönnyel, sík deszkákkal és egyenes léczekkel; a' tűkör ugy éri el síkságát, ha két üveg tábla egymáson suroltatik minden irányban, mit köszörülésnek nevezünk. A' fürészmalomban függőleg mozgó fürészek elibe tolódik a' gerenda 's a' fürészek deszkákat vágván, *mint mozgo vonalok sikokat származtatnak.* Mindegyikünk látta miként vágatik a' szappan vesszőre húzott zsinorral vagy lószőrrel, a' vonal kerestülvágván a' szappant, itt is síkot származtat.

Ezen tekintetek eléggé világosítják következő tudományos magyarázatomat.

Ha valamelly geometri vonal egész hosszaságában, mozog, megtartván eredeti irányát mozgása alatt síkot származtat.

Első idomunkban feltesszük hogy *AB* vonal a' nyillal jelölt *C* irányban mozdul egész hosszában, minden mozdulási pontjában nyomát hagyván, *ABCD* síkot származtatja.

A' sik' magossága tehát a' vonal *AB* hossza, *AC*, *CD* széle pedig a' vonal' tett útjától függ, vagy is, tett útját képviseli.

K. Valamint tehát a' pont' mozgása vonalokat származtat, ugy származtat a' vonalok' mozgása síkokat. Kiterjesztvén tekintetünket, mondhatjuk hogy, ha valamelly vonal egyik végső pontján megfordul, kerék sikot származtat, mellyet a' síma' tányérral hasonlíthatunk. Midön a' szögök' származását tekinténk, mozgó vonalunk szintezen útat tette. Tudom hogy a' geometri sik tökéletes simaságú, az az, minden részeiben egyenes és rajta a' legkisebb emelkedés vagy göröny nem lehet. Miként fejezzük ki tudományosan ezen tulajdonát?

[57] *F*. Ha valamelly síkra vonalat helyezünk, *a' vonalnak minden pontja érinti a'* sikot, vagy is: *minden pontja a' sík' pontjában van.*

Ha a' közönséges életben valamelly sik' egyenes létéről biztosítást keresünk, egyenes vonalat (léczet, línеát 's a' t.) fektetünk réa 's mozgatunk minden irányban; ha a' vonalnak minden irányban minden része érintésben marad a' sikkal, akkor meggyözödve vagyunk simaságárol, vagy inkáb, egyenes létéről.

K. Nemde több síkok olly állásokba jöhetnek egymásközt, mellyekben vizsgáltuk a' vonalokat?

F. Valóban, és semmi uj esetre többé nem jutunk.

A' síkok valamint a' vonalok minden kigondolható szögöket képezhetnek egymásközt, és a' szögök ugyanazon nagyságúak, mint ha csak két vagy több vonal állása által származtak volna, a' sikok keresztülvághatják egymást minden irányban 's végre ugy álhatnak össze, hogy bizonyos tért foglaljanak.

2-dik. Idomunkban két sik van egymásmellé állítva ugy hogy, *ab*, *cd* és *eg*, *fh* pontok egyenlő távolyba essenek egymástól, ekkor a' két sík *egyenközü* vagy *egyenirányú.*

3-dik. Idomunkban *ab* sík függőleg áll *AB* síkon és megfordítva, ekkor tudjuk a' két szög egyenes, ha ezen felül *ab* épen közepén áll *AB* nak, ezt két egyenlő részre osztja.

4-dik. Idomban a' síkok *ab* végükben érintődnek 's hajlásuk szerint hegyes szögöt zárnak bé.

5-dikben. Függőleg vágják egymást 's ha a' vágás vonal *ab* egyszersmind mindkettőnek közepe, két két egyenlő félbe oszlanak.

6-dik. Idomban két sík áll egy harmadikon függőleg, a' 7-dikben végre két egyenlő hegyes szögben vágják egymást keresztül, hol tudjuk a' két szög a' nagyobb vagy kisebb hajlástól függ.

K. Épületeink, valamint minden nemű bútoraink síkok által vannak alkotva 's ezeken is láthatni, miként álhatnak a' síkok egymásközt minden irányban. A' függő és egyenirányú állás az igaz leggyakoribb, mert a' falak többnyire egyenszögöket és egyenirányt mutatnak, valamint bútoraink' oldalai is. De a' háztető már a' fallal szögben áll. Nemde azt fogjuk most vizsgálni, miként járulnak a' síkok a' geometriai testek', merök vagy zomokok' alkotásához?

F. Fő czélunk csakugyan a' geometriai testek' vizsgálata. Eleinten származásukat fogjuk tekinteni és különféle alakukat, azután fordulunk színeik' és tartalmuk' méréséhez.

Szükséges lesz megegyeznünk előre némelly szóbeli kifejezésekben, hogy zavarra ne adjunk alkalmat.

Ha valamelly tér síkok által van békerítve, minden esetre olly alak támad, mellyet geometri testnek nevezünk; de nem következik ebből, hogy a' tér szükségesképen minden irányban békerítve legyen.

K. Igy tehát különbséget kell tenünk az alakok közt, mellyek csak tért foglalnak, és azok közt, mellyek zomok testek?

F. Valóban kell, mert valamelly merő test szükségesképen mindenfelől' békerítve van és ezen felül belől is töltve, mit tömegnek nevezünk, millyen p. o. egy darab kőszikla vagy márvány oszlop, egy alma vagy más gyümölcs 's a' t. holott ha valamelly alak csupán csak síkok által van békerítve, vagy belűl üres, vagy tán egy két felől nyitva is maradhat; illyenek p. o. az üres bútorok, hordók 's a' t. a' gabona és híg mérők 's a' t. melly utóbbiak tudjuk felül nyitvák, de tartalmuk szintakkora mintha telvék. Azért nem tesz a' geometra ezen alakokban semmi különbséget terjedségekre nézve, mert bármelly anyag legyen az alak' belseje, tartalma változatlan ugyan az.

K. Ebből csak azt látom hogy, egy felől a' geometri testekben különbséget teszünk, másfelől pedig nem; miként érteni ezt?

F. Erre egyszerűen felelek mondván hogy: minden geometri testen két tulajdon van, mellyet a' tudomány külön tárgyául vehet, és ezen két tulajdon a' test' *külseje* és *belseje*. De mivel ez sem lehetne elég világos, magyarázom:

Ha azt vízsgáljuk, mennyi sík kívántatik valamelly test' békerítésére ugy hogy minden irányban körülvéve legyen, a' kérdésben forgó test' *külsejét* mérjük, és ez valóságos és már előttünk ismeretes térszínmérés; de mivel a' testek különböző hajlású vagy görbülésű sikok által lehetnek körülvéve, megkülönböztetésül a' testek tértartalmától *színöknek* kell neveznünk. Valahányszor tehát az alakok külső térét tekintjük, vizsgáljuk és mérjük, mindenkor *színének* nevezzük öszszes tértartalmát. Szembetűnő hogy, ezen külső szín (felütet) csak akkora lehet, mekkora a' síkok' öszszese, és hogy p. o. olly alakoknál mellyek egy vagy más oldalukon nyitvák, mint a' hígmérők, csővek 's a' t. csak azon síkok jöhetnek számba, mellyek meg vannak, holott ha az egész alakot tekintjük, a' sikok' imitt amotti hijánya tekintetbe nem jön.

Ha valamelly test' belsejét keressük, a' térméres *üregméréshe* változik, mert vizsgálataink szerínt azt kérdezzük: mennyi fér valamelly alakba? Hogy pedig ezen *mennyi* a' tudomány' szelleme szerint csak tér vagy terjedség lehet, eléggé tudjuk, mert ha a' merő vagy zomok testekben tömegekre nézve különbséget teszünk, már kilépünk valamelly más tudományba, 's ekkor a' test' phisikai tulajdonait vizsgáljuk, millyenek a' tömöttség és nehézség; mindenkor tehát, ha valamelly test' foglalmárol vagy kiterjedéséröl szóllunk, a' *tartalom* nevezetet használjuk.

K. Tudom hogy a' geometra minden létező testet megmér, bármelly rendes vagy rendetlen legyen alakja. Melly alakokat választunk mi különösen vizsgálataink' tárgyául?

F. Tekintsük eleinten a' legegyszerűbb test alakzatokat és különösen a' *rendeseket*, mellyek a' mindennapi haszonvétre szükségesek. A' rendetleneket, mint mostani tárgyunkhoz nem tartozókat bátran elmellőzhetjük.

K. Nemde legegyszerűbbek itt is a' háromszögök, mellyeket, mivel telve vannak, *merő* haromszögöknek nevezünk?

F. Csakugyan, ha valamelly üreget mindenfelől béfogni akarunk egyenes síkok által, legalább is 4re van szükségünk, és ezen négy síknak szükségesképen háromszögű síknak kell lennie, azért is legegyszerübb alak a' merő háromszög, melly *rendes* akkor, ha a' 4sík egymással egyenlő rendes háromszög. 8-dik I. ban vannak illyen merő háromszögök rajzolva.

K. Látom hogy számtalan különböző merő háromszög lehető, az egyes síkháromszögök' különböző változásai szerint. Nemde mindegyik oldal más más háromszög lehet ezen felül?

F. Bizonyos hogy, az egyes síkok' változásai következésében a' merő háromszögök' lehető száma csaknem végtelen; de előre is látni hogy nagy síkok kicsinyekkel nem állhatnak össze merő háromszögbe, mert a' fő feltétel az, hogy az oldalok' szélei a' merőszögben összeálljanak. Hol legyen az alkotási lehetőségnek határa, most ne vizsgáljuk és maradjunk a' rendes merő háromszögnél, mellyben tudjuk mindegyík sík egyenlően rendes háromszög. 9 I. ban látható ezen alak.

F. Valóban, 10 I. ban van illy hosszított merö háromszög, és neve *sudar*, vagy tán helyesebben *pyramis*. Ezeket a' szerint nevezzük három, négy, öt 's a' t. oldalú pyramisoknak, a' mint hosszú oldalaik' száma 3, 4 vagy 5, és talpok hasonlóan 3, 4 vagy 5 oldalú idom lesz

K. Ezen pyramisokat talpok alatt tetszésünk szerint hosszabbíthatjuk 's a' talp csak nagyobb de hasonló 3, 4, 5 vagy-több szög lesz az oldalok' száma szerint. Nemde bármekkora legyen valamelly pyramis, mindenkor ugy tekinthető, mint valamelly más nálánál nagyobb pyramisnak felső darabja, és szinte a' merő rendes háromszög is illy pyramis darab?

F. Az észrevét helyes, és a' mérésnél hasznát fogjuk venni; említem itt hogy, merő háromszögnek azon alakot nevezzük, melly egyszersmind rendes is, minden egyéb háromszög, pyramis; pyramisnak pedig kirekesztőleg azon alakokat nevezzük, mellyeknek csucsai tökéletesek és hegyben végzödnek; ha ezen csucsokat levágjuk, a' levágott darab lesz pyramis, a' megmaradott csonk pedig, millyen a' 11 Idomi, mindenkor csak *pyramis darabnak* neveztetik.

K. Ezen levágásból következik hogy, a' pyramis darabnak egy uj oldala támadott, melly talpának átelleniben van; most tehát egy oldalával több van mint eléb volt. A' pyramis' oldalai felfelé keskenyülnek, és a' talp felé tágulnak; bárhol vágjuk el tehát a' pyramist talpán felül, a' támadott síkidom *hasonló* marad a' talphoz, de oldalai szükségesképen kisebbek, valamint p. o. *ab* vonal nagyobb *cd* vonalnál. A' pyramis-darab' oldalai azonban négyszögök, mint *abcd* négyszög, de nem egyenszögűek hanem trapezok, mert csak két oldalvonal egyenirányú; nemde más neve van azon alakoknak, mellyeknek oldalai egyenszögű négyszögök?

F. Az illyen alakokat *oszlopoknak, prysmáknak* nevezzük, és ezeknek *két egyenlö* talpuk van. Hány oldalú valamelly oszlop, *annyi oldalúnak* neveztetik. 12 I. ban háromoldalú oszlop van képviselve. Bármelly legyen ezen idomnak hosszasága, neve mindenkor oszlop, 's ha p. o. el elsőből *ab* darabot levágjuk, *ab* darab is szinte oszlop marad. 13 I. ban 4 oldalú, 14ben szinte 4 oldalú oszlopok vannak; ezen utóbbi alakban az oldalok nem egyenlők, tehát a' talpok rendetlen négyszögök. Ha valamelly oszlopnak oldalai mind egyenlők, az oszlopok rendesek, mert ekkor talpok a' már előttünk ismeretes sokszögök. 15 és 16 I. ban rendes 5 és 6 oldalú oszlopok vannak.

K. Mit nevezünk köbnek vagy koczkának?

[59] *F. Ha valamelly rendes négyoldalú oszlopból akkora darabot vágok le, mekkora talpának valamellyik vonaloldala,* azon rendes merő négyszögre jutok, melly 6 *egyenlő rendes négyszögsikból van alkotva 's neve köb.* 17 I. ban van illy köb, 's mindegyik (6) oldala egyenlő *abcd* = *abef* oldalával.

Ha most két vagy több illy köböt ismét egymásra rakok, elébbi rendes négyoldalú oszlopom előjön 's magossága az egymásra rakott köböktől függ. 18 I. ban három egyenlő köböt rajzoltam egymásfelibe. Ha az oszlopokból olly vékony darabokat vágunk le, mellyek a' talphoz hasonlítva csekély magossággal bírnak, ezeket gyakorta csak *tábláknak* nevezzük oszlop darab helyett. 13 I. ban levágott *ab* darabocskát eszerint 4 oldalú táblának nevezhetjük.

K. Szinte a' pyramisok is, bárhány oldalúak és bármelly magosságúak lehetnek, mert oldalaik' száma határozza talpok' alakját; és ezek is rendesek akkor, ha az oldalok egymással mind egyenlők. 19, 20, és 21 idomokban 4, 5 és 6 oldalú rendes pyramisok vannak képviselve.

Melly rendes merők következnek ezek után?

F. Először is a' rendes 8 oldal, 22 I. ban 3 féle rajz által képviselve. Neve rendes *nyolczsikú (Octaedron)* és nyolcz egyenlő rendes háromszögből van összetéve.

Azután a' rendes 12*oldal vagy sik*, 12 rendes ötszögből összetéve, 23 I. háromféle rajzát mutatja; és végre mint utolsó rendes merő vagy geometri test, a' *húsz-sikú* (*icosaedron*), húsz egyenlő rendes háromszögből összetéve, és rajza 24 I. ban adva.

De hogy ezeken kivül számtalan sokféle alakokat lehet alkotni, három, négy, öt, hat 's a' t. 's bármelly szögű és szárnyú síkokkal, említeni felesleges; igen helyes azonban ezen itt emlitett rendes merőket fából, könnyen faragható föld vagy kő anyagból, vagy egyszerűen kemény papirosból is alkotni, hogy kezeink között forgatván azokat, minden állásbani rendes létöket nyilván láthassuk, mert a' rajz által sokkal nehezebb, kivált a' sokoldalúkat, világosan adni.

K. Nemde kemény papirosból annál könnyebb az alkotás, mert idomainkat már rajzolní tudván, az egész merőt egy darab papirosból kivághatjuk? Irjuk ide ezen rajzokat.

F. Az öt rendes geometri testet ide írom papirosból kivágva.

1) A' *tetraedron*, rendes merő háromszög, tudjuk 4 egyenlő rendes sík háromszögből áll; ha tehát csak egy oldal' hossza adva van, az egész alak természetesen következik, valamint mindegyik rendes merőnél. 25 Idomunkban 1, 3, 4 számokkal jelölt *abc* 4 egyenlő háromszög rendesen összeáll, ha a' kijelölt belső 3-szög *ab, bc* és *ac* vonalait késsel egy kissé bévágjuk a' kemény papirosba.

2) A' rendes *hatoldal*, *hexaedron*, összeáll ha 26 I. szerint a' 6 egyenlő rendes négyszögöket számok' sora szerint egymásra hajtjuk, így alkotni minden köböt, melly belől üres.

3) Az *octaedron*, 8 egyenlő rendes háromszögből áll, 's ha papirosunkat 27 I. szerint kivágjuk, a' számokkal jelölt részek rendesen összehajlanak.

4) A' *dodecaedron*, 12 rendes 5 oldalú síkból áll és 28 I. szerint a' sikok összehajthatók.

5) Az *icosaedron* végre 20 rendes 3szögű síkból állván, 29 I. szerint alkotható.

K. Ezen útmutatás szerint a' többi alakokat is kitudom vágni papirosból. Ha p. o. valamelly oszlopnak egy oldala adva van, eszerint 3, 4, 5 vagy bárhány oldalú oszlopot tudok alkotni. Illyenek p. o. 30 I. ban levő 3, 4, 5 és 6 oldalú oszlopok; 31 I. ban pedig 3, 4, 5 és 5 oldalú pyramisok.

Ha pedig pyramisdarab kívántatik, hasonlóan fogok alkotni, mint 32 I. ban mutattam.

Mindezen idomaink egyenes síkokból támadtak. Miként származnak azok, mellyeknek oldalai görbült síkok, millyenek a' *kerek oszlop*, *kup*, *henger* és a' *a' gömb*?

F. Ezen alakokat *fordulási* alakoknak nevezzük azért, mert valamelly egyenes vagy görbült vonal' fordulása által származnak.

Ezek közül csakugyan a' legyszerűbb a' *kerek oszlop*, mellynek neve *henger* ha vastagsága magosságához képest nagy; ha pedig hossza nagy, és ezenfelül két végin nyílt, *csönek* neveztetik; az oszlop nevet akkor veszi fel, ha vastagságához hossza elég tetemes és ezenfelül mindkét talpa meg van.

Ha valamelly vonal egész hosszában fordul meg valamelly kör' középpontján mint tengelyén, és minden mozdulásában nyomát hagyja, a' *henger* származik.

33 Idomunkban feltesszük hogy: *AB* vonal egész hosszaságában fordul egyet azon pontokkal jelölt körön, mellynek középpontja *C* és minden állásában nyomát hagyja; a' fordulás után támad *ABDE* hengerünk. Szembetűnő, hogy *AC* sugára a' hengernek, valamint sugára talpainak, mellyek tökéletes körök; szinte igy átmérője *BE.* Természetes hogy, mentül nagyobb a' sugár, annál vastagabb vagy tágosabb henger támad. *C* középpontja a' körnek vagy *talpaknak*, *CF* vonal pedig *tengelye* a' hengernek, és gorbült kerek oldalától egyenlő távolyban van. Megjegyzem itt hogy, ha *AB* vonal egyedül fordul *CF* tengelyén, nyílt henger támad, az az: sem talpa sem fedele nem lesz, vagy is az, mit *csőnek* nevezünk;

de ha feltesszük hogy, *AB* vonallal egyszersmind *AC* sugár is fordul; felül már a' fedél vagy síkkör támad mint szinte alól is a' talp, ha *BF* sugár egyet fordul.

K. Ismervén ezen alakot és származását, kemény papirosból magam is tudok hengert vágni. Lássuk 34 I.ot. Ha magossága *EG* adva van és a' henger sugára, ekkor az alak bizonyos, mert kiszámítván a' sugárhoz tartozó körület' hoszszát, a' vonal *EF*=*GH*, *EFGH* négyszög' két oldala, melly négyszög a' kívánt henger külső színe, a' talpakat *AC* és *BD* átmérőkre írom az adott sugárral; 's alakom összeáll. Miként támad a' kup?

F. *A' kup görbült síkú pyramis*, talpa pedig kör, valamint minden körülete, melly a' talptól egyenlő távolyban áll, tökéletes kör. Legismeretesb alakja a' kupnak, mit czukorsüvegnek nevezünk, csak hogy ez csucsa felé ismét begörbül, a' rendes kup pedig talpától fogva tetőig egyenlően keskenyül 's hegye, pont. Származik pedig a' kup olly vonal fordulása által, mellynek egyik végső pontja mozdulatlan, mig a' másik valamelly kört ír. 35. Idomunkra tekintvén *AB* vonal *A* pontján függ és mozdulatlan, ha *B* pontja az alul jelölt körben egyet fordul, melly fordulást könnyen eszközöljük, ha kerekbe mozdítjuk a' vonal végét, *ABC* kupot származtatja. Természetes hogy, a' kup talpának nagysága azon távolytól függ, mennyire *AB* vonal' *B* pontja függő irányától eltávozik. Ha *D* pont a' *kup talpának középpontja*, *AD* vonal *tengelye.*

A' magyarázatból elég világos hogy, *AB* vonal számtalan kupokat származtathat, a' mint nagyobb vagy kisebb kört ír *B* pontja, 36 I. ban egyik kup a' másikban áll, de tengelyek nem mind egyenlők; és mivel a' tengely egyszersmind a' kupnak magossága, az egymásban levő kupok nem egyenlő magosságúak.

K. Eszerint kupot is tudok alkotni papirosból, ha tengelye és talpának sugára adva van?

F. Mit a' kup' *oldal hosszának* nevezünk, nem egyenlő a' kup tengelyével és mindenkor nagyobb, bármelly kis kör legyen is talpa; ez igen természetes, mert a' kup külső színe első tekintetre egyenszárnyú háromszögöt mutat, tengelye pedig ezen háromszög' magosságát. Szükséges tehát hogy a' kup' alkotására az oldal' magossága vagy hossza legyen adva, nem pedig tengelye. Ennek megmagyarázására legyen 37 Idomunkban származtató vonalunk *AB*, függő - vagy eredeti állásában; ha most kimozdítjuk függőlegi állásából jobbra vagy balra, természetes hogy *A* pontban állandóan megmaradván, mindkét felől kördarabokat fog írni *B* pontja, és mentül inkáb távozik, annál nagyobb talpú kupot fog származtatni ha körben fordítatik, míg végre *AC*, vagy fekvő irányában csak tányért vagy síkkört fog származtatni, de kupot többé nem; igy változik a' tengelyek hossza is anélkül, hogy *AB* vonal vagy a' kup' oldala változnék; és p. o. *Ad* állásához *Aa* tengely tartozik, *Ae* hez *Ab* és *Af* hez végre *Ac* tengely, melly mindég rövidebb lesz, míg végre AC állásnál egyenlő *semmivel*, az az: semmi tengely nincs, de csupa középpont.

K. Szükséges tehát az alkotáshoz a' kup *fekvő* vagy *hajló* oldala és talpának sugára, és ekkor mint 38 I. ban tettem, ezen *AB* oldallal *A* pontból akkora kördarabot írok, mekkora az adott sugárhoz tartozó körület, ezen *ABD* kördarab' *C* közepe adja a' tengely *AC* magosságát; *AC* vonalhoz adom a' talp' átmérőjét *CE*, és a' sugárral reá kört írok. Eképen alkotva, kivágott papirosom kupba áll össze. Miként származik a' gömb?

F. Mindegyikünk tudja hogy, ha valamelly fa vagy vas abroncsot sebesen forgatunk tengelyén vagy átmérőjén egyik pontját a' földhöz szorítván, az átalellenit pedig két ujjal mozdítván, egy kerek test tűnik szemünkbe, mellyet golyónak vagy gömbnek nevezünk. Az abroncs mint karika vagy egész kerék, már félfordulással származtat gömböt, ha tehát egész fordulást akarunk, a' felkkör elég lesz. Ha 39 Idomunk félköre *ABC* egyet fordul, gömb támad; *AC* vonal pedig a' gömb' *tengelye*, mellyen fordult a' félkör.

K. A' gömb' fő tulajdona tehát hogy, görbülése minden részében egyenlő. Tudom hogy tengelye minden olly két pontját összekötő vonal, melly egyszersmind a' legnagyobb és középpontján szükségesképen keresztül megy, szinte sugárjai mind egyenlők 's mivel középpontjától szinének valamennyi pontja egyenlő távolyban van, sugárai számtalanok.

Minden alakjaink, mellyeket a' vonalok fordulása által származtattunk, *üresek*, mert csak külső szineiket származtattuk; miként lehet a' zomok vagy merő testek' származását gondolni?

F. Igen egyszerűen, ha a' vonalok helyett síkokat teszünk. Valamelly egyenszögű sík négyszög, hengert, síkháromszög kupot, 's végre a' zíkkör gömböt származtatnak.

K. Ismervén a' legjelesb geometri testek' alakjait, szeretném azoknak jelesb tulajdonitis megismerni. Nemde ha bizonyos darabokba vagdaljuk azokat bizonyos irányban, más más alakokra akadunk?

F. Ezen vizsgálat a' legrövidebb úton vezet bennünket azon ismeretekre, mellyek mostani tekinteteink szerint a' geometri alakokra nézve fontosak.

A' merőket bizonyos részekre oszthatjuk, mellyek magokban is külön tárgyai lehetnek tekinteteinknek; ezen felül más tekintet alá is vehetjük a' vágást, és csakugyan.

1-ször. Minden egyes vágás által, barmelly részin történjen ez valamelly alaknak és bármelly irányban, sik támad, melly síkot mint különös a' darabtól független idomót vizsgálhatjuk. Felteszem hogy, ha vágásról van szó, ezen vágás mindenkor egyenes vonal által egyenes irányban történik.

2-szor. A' vágás által támadott síkra csak annyiban figyelünk, mennyiben a' levágott darabnak *valamellyik* *oldalává* lett, de ekkor a' levágott darabot tekintjük mint különös alakot. Vegyük rendre ismeretes alakjainkat.

1) *Az oszlop* négyszögü oldalokból áll 's ezeknek száma egyenlő talpa' oldalainak vagy szögeinek számával. Ha valamelly oszlopot hosszában valamellyik oldalával egyenirányban vágjuk, a' támadott sík ismét *négyszög*, valamint a' darab is oszlop, mellynek alakját uj talpa határozza. Ha a' vágás talpához történik íránylag, minden vágás sík egyenlő a' talpal 's a' darab az egészhez hasonló oszlop, mellynek magosságát a' vágás' talptoli távolya adja. Ha valamelly könnyen faragható vagy vágható anyagból készítünk alakokat, ezen itt kijelölt vágásokat könnyen eszközölhetjük.

2) Ha *pyramist* vágunk csucsából talpáig valamelly oldalhoz egyenirányban, a' támadott sík háromszög; a' darab pyramis' oldalai számát pedig talpa mutatja. Ha a' vágás függőleg történik a' tengelyen, vagy mi mindegy, egyenirányban a' talpal, a' sík hasonló a' talphoz de annál kisebb, mentül közelebb esik csucsához a' vágás; a' levágott darab pedig vagy kisebb pyramis, vagy pyramisdarab csucs nélkül.

3) Ha *hengert* vágunk tengelyével egyirányban, a' vágássík négyszög, mellynek magossága változatlanul egyenlő a' henger' magosságával, de széle változik a' vonaltót fogva a' henger átmérőjéig. Ha p. o. 40 I. a' vágás csak parányi, *ab* vonal támad, mi az igaz magában nem vágás, de tán csak a' késnek lecsúsztatása *ab* vonalon, szorosan lehet tehát mondani hogy, a' hengernek minden hosszvágása 4 szögű sik, a' darab pedig *henger levágás*; ha a' vágás keresztülmegy a' tengely hoszszán, a' négyszög sik legnagyobb és ekkor a' henger két egyenlő félbe oszlik. Ha a' vágás függőleg történik a' tengelyre, a' síkok mind egyenlők a' talpal, a' levágott hengerdarabok magosságát pedig tengelyük' hoszsza adja. Ha egyféle pénzdarabokat rakunk egymásra, legegyszerűbben alkotunk merő hengert 's ekkor mindegyik pénz-

darab a' tengelyre függőlegi vágást képviselhet. Ha a' hengert valamellyik széliből vagdaljuk, vagy három, vagy négyszög síkok támadnak, mint a' vágást irányozzuk. Ha a' vágás a' talpra történik, mindaddig háromszög sík támad, míg az átmérőn megy keresztül ; 41 Idomunkban *a*, *b* és *c* illy vágások. Ha a' vágás túl ésik a' talp átmerőjén, vagy a' henger átelleni oldalán megy keresztül, mindenkor négyszög sík támad. 42 I. ban a' vágás egyik széltől a' másikig ér, és *abcd* négyszög sík támad.

4. Legnevezetesbek a' *kup* vágásai, mert ezek számos és jeles tulajdonú görbült vonalokat származtatnak. Ha a' kupot csucsából vágjuk talpára, a' sik mindenkor háromszög. 43 Idomunkban a' vágások igy történtek.

Ha a' vágások függőleg vannak a' tengelyen, a' síkok körök, 's annál kisebbek, mentül közelebb történnek a' csucshoz. 44 I. ban a' vágások egyenirányuak a' talphoz.

Ha a' vágás rézsutan történik egyik oldalról a' másikra, a' támadott sikok vagy az azokat békerítő vonalok *hosszított kőrök*, *Ellipsek*, mint 45 I. ban. Mentül inkáb hajlik a' vágas iránya a' tengely felé, annál inkáb hosszítottak az elipsek. Ha a' vágás a' talp átmérőjén megy keresztül, a' parabola nevezetű vonal támad 's a' t. De mível ezen vonalok nem tartoznak mostani vizsgálataink körébe, elhagyhatjuk azokat.

5. *A' gömböt* végre, bármelly irányban vagdaljuk ; a' vágás sík mindenkor kör, mellynek nagysága a' vágás távolától függ a' középpontól ; ha ezen keresztül megy, a' kör lehető legnagyobb, 's mentül távolabb esik tőle, annál kisebb.

K. A' rendes merők bizonyos alakokba oszthatók hasonlóul a' több-szögökhöz, mellyek ezek ?

F. Tudjuk hogy a' rendes merők' (számok 5) oldalai 3, 4 vagy 5 szögök. Különös tulajdonok ezeknek, hogy szögeik egyenlő távolyban vannak középpontjoktól. Minden rendes geometri testnek eszerint középpontja van, 's ezen középpontjából vonalokat húzván minden szögeihez, a' vonalok egyenlő hosszaságúak és a' test sugárinak nevezhetők.

Már ebből is látható a' rendes merők azon tulajdona hogy, gömböt lehet reájuk kül valamint belül is alkotni, és hogy a' körül alkotott gömböt minden szöge érinti, a' belső gömb pedig minden oldalát.

Mivel mostani vizsgálatunk természete szerint, rendes merőinket zomokoknak vesszük, osztási részeik is zomokok lesznek.

Eloszlanak pedig a' rendes merők csupa pyramisokba, mellyeknek talpa a' rendes merő' egy oldala, csucsa pedig a' merő középpontjában van. A' pyramisok oldalai számát a' merő oldalait békerítő vonalok adják, valamint a' pyramisok számát a' merő oldalainak száma.

Minden rendes merő tehát pyramisokba oszlik és megfordítva egyenlő pyramisokból alkotható.

Tekintsük mind az ötöt sorjában.

[58] 1. A' rendes háromszög, *tetraedron*, maga is pyramis de három egyenlő háromoldalú pyramisba oszlik középpontjából, mellyeknek talpa a' merő' egyik oldala, magossága pedig annak középpontjából a' talp közepire vezetett függöny.

[59] 2. A' rendes merő-hatoldal, *hexaedron*, hat egyenlő pyramisba oszlik, ezeknek talpa a' köbnek oldala, magosságok pedig a' köbnek félmagossaga. 46 I. ban látszik egy illy négyoldalú pyramis.

[60] 3. A' rendes merő-nyolczoldal, *octaedron*, 8 egyenlő hármoldalú pyramisba oszlik középpontjából.

[61] 4. A' rendes merő-12 oldal, *dodecaedron*, 5 szögű síkok által levén körülvéve, 12 egyenlő 5 oldalú pyramisba oszlik középpontjából.

[62] 5. A' rendes merő-húzsoldal, *Icosaedron*, végre, 20 egyenlő háromoldalú pyramisba oszlik.

K. Mit lehet közönségesen a' rendes merők' tulajdoniról észrevenni; mit nevezünk p. o. a' pyramis magosságának?

F. Minden alaknak, tehát a' pyramisnak is, magossága vagy tengelye mind egy és ugyan az.

Hogy tengelye csak a' rendes alakoknak lehet tudjuk, és ezek a' csucsban kezdődvén a' pyramis és kupnál, épen a' talpak' középpontjába üt, mert a' rendes többszögökre szinte mint azokba kört írhatunk. Minden nem rendes kup' vagy pyramis' magossága pedig azon vonal, melly csucssából talpára függőleg áll.

K. Miként számitjuk a' merők' síktartalmát vagy is színét?

F. A' merők síkokból vannak összetéve; ezen síkok' öszszes térszínei adják a' merő' színét. Ha a' síkok egyenesek, a' merők egyenesoldalúak és ezek három, négy, öt vagy többszögök, valamint talpaik is; ismervén a' síkok' térszíneit, a' merő' színét összeadásuk által találjuk meg. Ha p. o. valamelly háromszögű pyramis van adva, három oldala háromszög valamint talpa is; ha a' háromszög oldalok mind különbözők, térszínöket különösen kell számitanunk, ha egyenlők csak egyet 's ez háromszor véve lesz a' pyramis' szine, mellyhez még adandó a' talp' térszíne. Ha p. o. valamelly köb színe kivántatik, egy oldalának térszíne hatszor véve lesz színének kifejezése.

K. Tudom hogy, valamelly merőnek színét valamennyi oldala' öszszes térszíne teszi, 's hogy az egyes oldalok térszíneinek összeadása által az egészet meglelem. Nincs-e valamelly könnyebbítő szabály a' szinek meglelésére, melly által a' külön számítást és összeadást elkerülhetnők?

[63] *F.* Egyszerübb számítási módot alig találhatni; látni fogjuk azonban hogy imitt amott, kivált a' rendes alakoknál csakugyan némelly könnyebbítésekre akadunk. Lássuk sorjában az alakok' színét megjegyezvén hogy: *az egyenlő magosságú merők talpaikkal arányban vannak, ha*

talpokhoz egyenirányú és egyenlő távolú vágás-darabjaik arányban állanak. Ha p. o. egyenlő magosságú pyramist, oszlopot vagy kupot veszek, 's mindegyikből tengelyére függőleg egyenlő magosságú darabot elvágok, és ezen darabok arányban állanak egymáshoz, ugy az egész pyramis oszlop vagy kup is arányban áll egymásközt. Ezen tan tetemes segitséget nyújt a' szinek és tartalmok meglelésére.

[64] I. Valamelly *oszlop*' síkja megtaláltatik, *ha oldalainak térszínéhez talpainak* térszíne adatik.

Ha az oldalok egyenlők, csak egyet kell számítani 's ezt annyiszor venni hány az oldal, talpát egyszer számítván' duplán adjuk az oldalok' térszínéhez.

Ha a' háromoldalú oszlop' magossága a, oldalának szélessége b, egy oldálának térszíne tudjuk ab 's ezt háromszorvéve $=3ab$, ehez járul a' 3 oldalú rendes háromszög dupla térszíne mellyet számítani tudunk.

Ha a' 4oldalú oszlop' magossága a, talpának egyik oldala b, síkja ki van fejezve $4ab+2b^2$ által, mert egyik oldala ab 's ez négyszer véve $4ab$, talpának oldala b, tehát, rendesnégyszögök lévén, térszinök b^2 's a' kettőjé öszszesen $2b^2$.

Bárhány oldalú legyen az oszlop, a' mívelet nem változik. Különös példákat számokkal kifejezve könnyen adhatni.

Valamelly *paralellopíped*, 4oldalú oszlop' magossága 11láb, talpának egy oldala 29 hüvely, kívántatik színe?

Ez 4-szer 11 láb sokszorozva 29 hüvellyel, mi egyenlö 4·85 lábbal, hozzáadván a' két talp' színét (4·85nek négyszögét) kétszer, tehát

$$4\times 11\times 4\cdot 85+2\,(4\cdot 85)^2=258\cdot 445 \square \text{láb}.$$

[65] II. A' *pyramisok' színe megtaláltatik, ha háromszög oldalaik térszinének öszszeséhez talpok' térszine adatik.*

Ha az oldalok egyenlő háromszögök, csak egy oldal' térszíne számíttatik, de annyiszor vétetik hány az oldal, 's öszszesekhöz adatik a' talp' térszíne.

Ha az oldalok különbözők külön külön számíttatnak.

1. Valamelly háromoldalú pyramis egy oldalának magossága 11·5 láb, talpának egy oldala 32 hüvely kívántatik színe?

Megjegyzem itt hogy, a' pyramis magossága egészen más mint oldalainak magossága, 's mint már említők, emez a' háromszögök magossága, mellyet oldalaik képviselnek. Ha színt számítunk, mindenkor az oldalok' magosságát vesszük, nem pedig a' merő magosságát, melly tudjuk, a' talpa' középpontjára, vagy talpára függőleg álló vonal. Ha a' *talp' oldaláról* szóllunk, ez nem lehet egyéb; mint a' talpat alkotó vagy békerítő vonalok közül egy, a' talp' oldala mindenkor csak vonal és hosszmérőben van kifejezve; igy áll tehát a' pyramis oldalának magosságát jelölő vonal függőleg a' *talp' oldalán.*

Visszatérvén példánkhoz, egy oldalnak térszíne:

$$11{\cdot}5 \times 1{\cdot}3333\cdots = 15{\cdot}3333\cdots \text{láb [43]},$$

a' talp' térszíne

$$0{\cdot}433012 \times (2{\cdot}6)^2 = 3{\cdot}0792 \,\square\, \text{láb (X. B Tábla) *)}$$

színe pedig 3-szor

$$15{\cdot}333\cdots + 3{\cdot}0792 = 46 + 3{\cdot}0792 = 49{\cdot}079 \,\square\, \text{láb.}$$

2. Egy négyoldalú pyramisban az oldal' magossága 9 láb, a' talp' egyik oldala 28 hüvely.

Színe $= 47\frac{4}{9} \,\square$ láb.

3. Egy ötszögű pyramis' oldal magossága 10 láb, talpának egy oldala 26 hüvely.

Színe $= 62{\cdot}24335 \,\square$ láb.

4. Egy 6szögű pyramis' olnalmagossága 20 láb, talpának egy oldala 36 hüvely.

---

*) A' rendes idomok' számításánál azon számokat fogjuk használni, mellyeket a' X. Beszélgetés táblácskájában adtunk.

Színe $= 203 \cdot 383 \; \square$ láb.

Minden háromoldalú oszlop egyenlő három pyramisba oszlik, minden háromoldalú pyramisnak színe egyenlő eszerint olly háromoldalú oszlop színének egyharmadával, mellynek magossága és talpa egyenlő a' pyramis oldal magosságával és talpával.

[66] III. *A' rendes merők' színe megtaláltatik, ha egy oldalok' térszíne annyiszor vétetik, hány az oldal.*

Bármelly oldalú legyen a' rendes merő ezen a' 3, 4, 5 vagy többszögü rendes oldalt könnyen számítjuk, talált térszínét pedig a' síkoldalok' számával sokszorozzuk.

A' rendes sokszögök' térszínét az említett táblácskából ismerjük, ha oldalok' hossza $= 1$, tehát a' sokszögöknek megfelelő számokat a' táblából vevén, az oldalok' számával egyszerűen sokszorozzuk.

Ezen számok' segéde által könnyen alkotunk egy más kis táblát, melly a' rendes merők' színeit adja egyenesen, ha oldalaik számával ezeknek térszínei kifejezéseiket sokszorozzuk. Igy p. o. a' rendes merő háromszög' színe egyenlő egy oldalának négyszer vett térszínével, vagy is:

$$4 \times 0 \cdot 4330127 = 1 \cdot 7320508;$$

igy alkotjuk következő kis táblánkat az 5 geometri rendes testek színére alkalmazva.

A' rendes merők' színei.

Oldalok	Név	Színe
4	Tetraedron	1·7320508
6	Hexaedron	6·0000000
8	Octaedron	3·4641016
12	Dodecaedron	20·6457788
20	Icosaedron	8·6602540

melly táblácskában ismét feltéve van, hogy egyik sikoldalnak vonal oldala $=1$.

Ha ezen táblácska segédével számítjuk a' rendes merők' színét, tudjuk szükséges hogy, az itt levő számokat az adott vonal-oldal' számbeli kifejezésének négyszögével sokszorozzuk.

1. Ha a' Tetraedron oldalvonala p. o. 10 hüvely,
Színe $= 10^2 \times 1{\cdot}7320508 = 100$ szor $1{\cdot}7320508 =$
$= 173{\cdot}20508$ □ hüvely.

2. Ha az adott Hexaedron oldalvonala 8 hüvely,
Színe $= 8 \times 8 \times 6 = 384$ □ hüvely.

3. Ha az Octaedron oldalvonala 16 láb
Színe $= 16 \times 16 \times 3{\cdot}4641016 = 886{\cdot}81$ □ láb.

4. Ha a' Dodecaedron oldalvonala 12 öl
Színe $144 \times 20{\cdot}6457788 = 2972{\cdot}992$ □ öl.

5. Ha végre az Icosaedron' oldalvonala 15 hüvely.
Színe $= 1948{\cdot}55715$ □ hüvely.

[67] IV. *A' henger' színe megtaláltatik, ha talpának körülete magosságával (hosszával vagy tengelyével) sokszoroztatik, és a' származathoz két talpának térszíne adatik.*

Ez magában is nyilván, mert ha talpa' körületét a' tengelyen fel vagy lefelé mozdulni képzeljük, a' henger' külső színe származik, 's ezen tekintet a' hengernek más, de elébbivel egyenlő származását is mutatja; valóban a' henger' külső görbült oldala nem egyéb mint annyi körből álló sík, hány tengelyének pontja, ha tehát a' kört, melly vastasgságát jelöli, a' tengely' nagyságával sokszorozzuk, természetes hogy a' henger köroldalát találjuk, de talpai nélkül; ezek pedig sikkörök és térszínöket ismerjük.

Ha a' henger' átmérője vagy sugára van kérdésben, tudjuk alattok mindenkor talpának átmérőjét vagy sugárát értjük, szinte a' henger' körülete, talpának körülete.

1. Legyen a' henger' hossza 16 láb, talpának átmérője 27 hüvely,

Színe talpai nélkül $=3{\cdot}1416 \times 2{\cdot}25 \times 16 = 113{\cdot}0976 \square$ láb.

2. Legyen magossága 13 láb, körülete 57 hüvely, Színe $= 65{\cdot}3409347 \square$ láb talpaival együtt.

A' számítás következő:

oldalok színe $= 13 \times 4{\cdot}75 = 61.75$

egy talpa $= 2{\cdot}375 \times 0{\cdot}75598598$ [47]

$= (2{\cdot}375)^2 \times 0{\cdot}318309886$

$= 1{\cdot}795476 \square$ láb *)

a' két talp

$= 3{\cdot}590934$, és $61{\cdot}75 + 3{\cdot}590934 = 65{\cdot}340934$ mint eléb.

3. Magossága 12 láb, talpának sugára 23 hüvely. Színe egészen $= 24133{\cdot}7664 \square$ hüvely.

4. Tengelye 15 láb, átmérője 33 hüvely, görbült színe talpak nélkül $= 129{\cdot}591 \square$ láb.

[68] V. A' *kup' színe megtaláltatik, ha oldalának hossza talpának félkörületivel és sugárjával sokszoroztatik.* Valamint a' kört végtelen sokoldalunak tekintettük, ugy tekinthetjük a' kupot végtelen sokoldalú pyramisnak. De a' pyramisok öszszes háromszögoldalainak térszíne egyenlő, az oldalmagossága és ezeknek fél talpai közti származattal, tehát kupunk' szine is egyenlő lesz oldala magossága és talpa félkörülete közti származattal.

A' kupoknak is, valamint a' pyramisoknak, *nem tengelyük vétetik magosságnak* a' szín számitásánal, de *hajló oldalok' hossza*, vagy is: *azon vonal, melly csucsából talpának szélire húzatik.*

Ha tehát ezen magosság a' talp' félkörületével sokszoroztatik, a' kup' külső színét találjuk talpa nélkül; de mivel a' talp' térszíne egyenlő a' félkörülete és sugára közti származattal, megleljük a' henger' egész színét, ha oldala hosszával talpának félkörületét és sugárát sokszo-

*) Ha a' körület $4{\cdot}75$, a' fél körület $= 2{\cdot}375$, az átmérő $= 1{\cdot}51197196$, a' sugár pedig $= 0{\cdot}75598598$ [43].

rozzuk. Más szóval pedig: ha talpának fél térszínét az oldal' hosszával sokszorozzuk.

1. Legyen oldala' hossza 14 láb, talpának körülete 92 hüvely,

síka 7·5 × 7 × 1·111315, hol 1·111315

talpának sugára; vagy:

15 × 3·5 × 1·111315 = 58·3440553 □ láb.

2. Legyen oldala' hossza 10 láb, talpának sugára 2 láb 5 hüvely,

színe = 94·2698 □ láb.

3. Oldala' hossza 18 láb, talpának átméróje 42 hüvely,

színe = 108·58155 □ láb.

4. Oldala' hossza 9 láb, talpának átmérője 36 hüvely,

színe = 49·11302 □ láb.

[69] VI. *A' gömb* (golyó, sphaera) *színét megtaláljuk, ha átmérőjét* (tengelyét) *valamellyik nagy körületével sokszorozzuk.*

Nagy köre valamelly gömbnek tudjuk mind ollyan, melly azt, tengelye két végsőpontján körösztülmenvén, körülveszi.

Eszerint a' gömb' színe egyenlő azon henger színével, mellynek magossága és átmérője egyenlők a' gömb' átmerőjével, a' henger' görbített színét vevén talpai nélkül. A' gömböt ugy tekintjük, mintha számtalan apró pyramis vagy kupból volna összetéve, mellyeknek csucsai valamennyien a' gömb' középpontjában egyesülnek, talpaik pedig a' gömb' színét alkotják. *A' gömb színe* eszerint *egyenlő olly kup' színével*; *mellynek talpa a' gömb' nagy köre*, *magossága pedig négyszeres sugára*, mert az egész gömb egyenlő azon kuppal, mellynek talpa a' gömb egész színe, magossága pedig a' gömb sugára. Ebből ismét következik hogy, a' gömb színe két akkora, mekkora olly kupé, mellynek talpa-átmérője és magossága egyenlő a' gömb' átmérőjével; ezt különbféleként bizonyithatni.

K. A' tekintetek, noha egyszerűek, nem adnak elég meggyőzódést, 's mivel a' tárgy olly szép és fontos, szigorú bizonyítását szeretném?

F. Eddigi vizsgálatainkat elménkben tartván, könnyen érthetjük a' következőt.

Ha a' gömb körül hengert alkotunk, ennek magossága és átmérője egyenlő lesz a' gömb' átmérőjével. 47 Idomunkban látható olly egy henger mellyben gömb van; természetes hogy a' gömb csak négy pontban érintheti a' hengert: ha gondoljuk hogy a' hengernek nincsenek talpai, két illy érintő pont *e* és *f*, a' másik kettő pedig *ef* átmérőn függőleg áll; tudjuk hogy $ab = cd = ef$, vagy is, hogy a' henger magossága a' talpának átmérője *ef* egyenlők a'. gömb *cd* átmérőjével.

Ezt előre bocsájtván, legyen 48 I. szerint *ab* vonal valamelly félkör' átmérője, *ad* ennek fele vagy a' kör sugára függőleg *ab* átmérőn *abcd* négyszögöt írom és *ab* aldalához egyiránylag *OM* sugárt *O* középpontból *d* ponthoz *Od* vonalat, *ad* vonalhoz egyenieránylag *ef* és *gh* vonalokat, 's végre *K* és *N* pontokból *KI* és *NL* függőket. Képzeljük most, hogy az ide rajzolt egész alakzat egyet fordul *ab* tengelyén, származtatnak a' külön részek sorjában, *abcd* négyszög *hengert*, *aMb* félkör *gömböt*, *aOd* háromszög *kupot*, végre *eNgL* vonalok valamínt *KNIL* kis négyszög is henger darabokat.

Könnyü lesz most megbizonyítani hogy mindegyik a' gömb'ben levő hengerdarab (míllyen *KINL*) együttvéve a' kup'ban levő hengerdarabbal (millyen *eKgI*), egyenlő a' nekik megfelelő *adOM* által származtatott hengerdarabbal.

Tudjuk hogy

[49] $ae \times eb = (eN)^2$ és $(eK)^2 = (eO)^2$ mert $eK = eO$.

Ebből következik,

$$(eN)^2 + (eK)^2 = (aO)^2 = (ef)^2$$

tehát a' két kisebb *eKIg* és *eNgK* négyszögök által származott henger darabok' összese egyenlő az egész kis négyszög *efgh* által származott hengerdarabbal.

Mi egyik részről bizonyos, valamennyiről meg áll, és a' henger darabokat sokasítván, azon következésre jutunk, hogy a' kup és gömb együttvéve egyenlők a' hengerrel, melly körültük van írva; a' kup egyharmadrésze lévén a' hengernek, a' gömb kétharmada lesz, vagy is, kétszer akkora mint a' kup.

A' henger' görbített színe egyenlő, a' magossága és körülete közti származattal, és szinte ezt mondánk a' gömb' színeről. A' henger két síkkör talpa eszerint egyenlő a' kup színével 's igy a' kup színe, talpának térszine kétszer véve, mi nem egyébb mint a' gömb két nagy körének térszíne. Mivel tehát a' gömb' színe egyenlő két kup' színével, következik hogy egyenlő nagy körének 4szeres térszinével, valamint a' körülírt henger görbült szine is egyenlő talpa' térszínével ezt négyszer véve, talpaival együtt pedig 6 nagy kör térszínével.

Miként mutatjuk meg az itt mondottat betűkkel és számokkal?

F. Szem előtt tartván hogy, az itt kérdésben forgó gömb és kup a' hengerben van, hogy átmérőjök és magosságok mind ugyanazon számokat képviselik, emlékezünk hogy, ha r alatt sugárt és π alatt az ismert félkörületet (3·14159····· számot) értjük, ha $r=1$, a' kör' térszíne ki van fejezve $r\pi$ által.

Ha a' vizsgálatunk alatt lévő henger, gömb és kup színeiré alkalmazzuk ezen kifejezést a' gömb körül írt henger színe:

talpai nélkül $= 4r\pi$, valamint a' gömb színe is,

és talpával $= 6r\pi$; a' kup színe végre $2r\pi$.

Említők hogy, a' gömb' színe egyenlő nagykörével, sokszorozván ezt átmérőjével. Nagyköre tudjuk $2r\pi$, 's ha ezt $2r$ által sokszorozzuk, $4r^2\pi$ lesz közönséges kifejezése bármelly gömb' színének, ha r sugára adva van.

Különös esetünkben, hol a' körülírt henger' magossága egyenlő a' gömb tengelyével $4r\pi = 4r^2\pi$ vagy is, $r=1$ és gömbünk színe:

$$4\pi = 4 \times 3{\cdot}14159 \cdots = 12{\cdot}5663706143$$

a' kup' színe mint ennek fele $= 6{\cdot}2831853071$
's a' hengeré talpaival öszszesen $= 18{\cdot}849559214$,
és ezen számok természetes kifejezései a' három merőnek, ha sugárok $r = 1$.

Ha a' tengely $= t$ és sugár $r = 1$, a' gömb színe $= t^2\pi$.

Számbeli példára alkalmazván ezt, tegyük fel hogy, valamelly sugár 7·5 hüvely, láb, öl vagy mérföld mindegy, a' számok nem változnak, egy szóval, legyen $r = 7{\cdot}5$ és keressük a' henger színét valamint a' bele írt gömb és kup színeit.

A' gömb színe

$$4(7{\cdot}5)^2 \times 3{\cdot}14159265 = 4r^2\pi$$
$$= 4 \times 7{\cdot}5 \times 7{\cdot}5 \times 3{\cdot}14159275|$$

ha a' számokat sokszorozzuk a' származat

$$= 706{\cdot}8583470555.$$

Ezen számnak egyenlőnek kell lennie a' nagykör' négyszeres térszínével $4r\pi$, ha $r = 1$, de mivel $r = 7{\cdot}5$, a' hozzátartozó félkörület $= 3{\cdot}14159 \cdots \times 7{\cdot}5$ melly még a' sugár által sokszoroztatván, 4-szer vétetik és előbbi számunkat adja.

A' henger színe egyenlő a' körülete és magossága közti származattal, hozzá adván két talpa' térszínét.

Ha magossága $2r = 15$, és körülete,

$$15 \times 3{\cdot}1441592 \cdots = 47{\cdot}1238898037.$$

Színe mint a' gömbé

$$15 \times 47{\cdot}1238898037 = 706{\cdot}8583470555,$$

ha talpát hozzáadjuk, mindegyike

$$r^2\pi = (7{\cdot}5)^2 \times 3{\cdot}14159265,$$

hol a' félkörület:

$$7{\cdot}5 \times 3{\cdot}14159265 = 23{\cdot}5619449018,$$

térszíne egy talpnak $= 176{\cdot}7145867635$
's ennek duplája $= 353{\cdot}429173527$,
mi épen fele a' gömb színének.

Említők végre hogy, a' béírt kupnak színe egyenlő a' gömb félszínével vagy a' henger két talpa' térszínével, vagy is ezen utóbbi számmal. Említők azt is hogy, a' gömb színe egyenlő azon kup színével, mellynek talpa a' gömb nagyköre, magossága pedig a' gömb négyszeres sugára, kifejezésünk tehát mindenkor $4r^2\pi$ marad, 's ha $r=1$, 4π, csak hogy a' sokszorozandó számok változnak a' nélkül hogy származatuk változnék. Ezen kup talpa, ha a' sugár 7·5, ismét $7{\cdot}5 \times \pi = 23{\cdot}5619449$ és sokszorozandó $4r=30$ által. Említők továbbá hogy, a' béírt kup színe egyenlő a' körülírt henger színének egyharmadával. Minthogy a' gömb színe megtaláltatik, ha magossága talpának félkörülete és sugára által sokszoroztatik, természetes hogy előbbi számunkra akadunk, melly $2r^2\pi$, és

$$2 \times (7{\cdot}5)^2\pi = 2 \times 56{\cdot}25 \times 3{\cdot}1459265 = 353{\cdot}429173527.$$

A' gömbök' síkai' meglelésére tehát a' sugárnál vagy tengelynél egyéb adat szükségtelen, mert π számot ismervén, könnyen számitunk, és színének kifejezése változatlanul $4r^2\pi$.

1) Legyen a' sugár 81·6 láb; a' gömb színe $4 \times (81{\cdot}6)^2 \times \pi$.
$= 4 \times 81{\cdot}6 \times 81{\cdot}6 \times 3{\cdot}14159 \ldots$ négyszöglábban.

2) Legyen tengelye 65·25öl; színe $4 \times (65{\cdot}25)^2\pi = 4 \times 65{\cdot}25 \times 65{\cdot}25 \times 3{\cdot}14159 \ldots = 4 \times 13375\ 5270 \,\square$ öl.

3) Legyen tengelye 125 öl;
Színe $= 4 \times 125 \times 125 \times 3{\cdot}14159265 = 196349{\cdot}540625 \,\square$ öl.

K. Ha a' gömb' színét ismerjük, bizonyosan megtaláljuk annak felét, harmadát, negyedét 's a' t. 's egy szóval bármelly bizonyos részét, vagy gömb-levágás' görbült színét?

[70] *F.* Természetesen, mert valamint a' félgömbhöz félátmérő, a' fertály gömbhöz fertály átmérő 's a' t. tartozik, ugy áll mindegyik gömbdarab színe arányban a' hozzá tartozó átmérő darabbal. Tudjuk pedig hogy

bármelly vágás függőleg áll a' tengelyen, 's egyszersmind ennek egy darabját is levágja, ezen tengely-darab a' gömbdarab' magossága, 's ha adva van, természetesen következik belőle a' gömbdarab görbült színe, ha vele a' gömbhöz tartozó nagykört sokszorozzuk.

Legyen p. o. a' gömbdarab magossága 13·05 öl és a' gömb' tengelye 65·25 öl, a' nagykör tehát

$$65{\cdot}25\pi = 204{\cdot}98892043$$

és a' gömbdarab színe

$$= 204{\cdot}98892043 \times 13{\cdot}05 = 2765{\cdot}10541164 \ \square \ \text{öl}.$$

Ezen szám ötödrésze annak, mellyet 2) példánkban találtunk, mert $13{\cdot}05 = 65{\cdot}25 : 5$, vagy is, az ottani tengelynek egy ötödrészét vágtuk le a' gömbdarabból.

Az előadásból 's ezen példánkból elég világos hogy mindegy, akar az átmérővel 's ennek részeivel, akar a' sugárral 's ennek részeivel számítunk. Gyakorta egyszerűbb a' tengelyt venni a' sugár helyett, már azon okból is, hogy valamelly átmérőhöz tartozó nagykörületet azonnal megtaláljuk, ha az adott átmérőt π számmal sokszorozzuk, és ekkor a' gömb' színe $t^2\pi$, ha t a' tengelyt vagy öszszes átmérőt jelöli, a' körület pedig $t\pi$.

Ha a' henger színét akarjuk t által kifejezni, lesz színe talpaival együtt.

$$t^2\pi + \tfrac{1}{2}t^2\pi = \tfrac{3}{2}t^2\pi$$

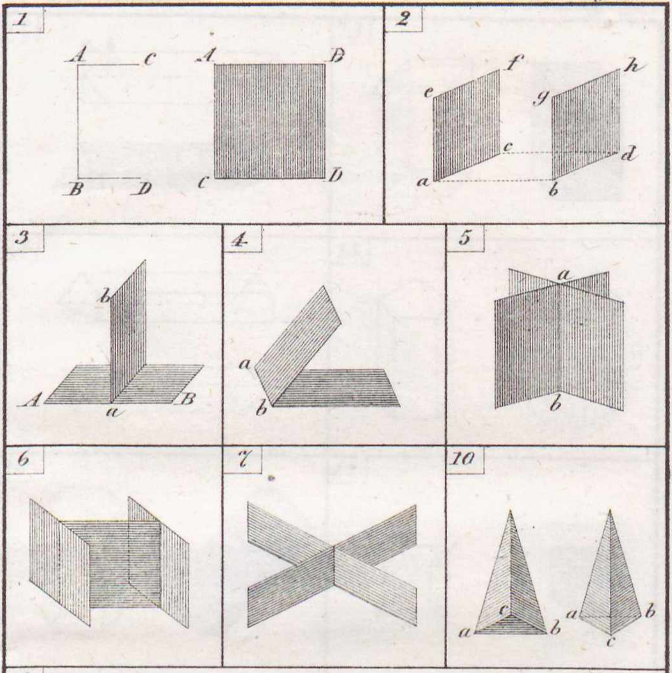
$$\text{és a' kupé} = \tfrac{1}{2}t^2\pi$$

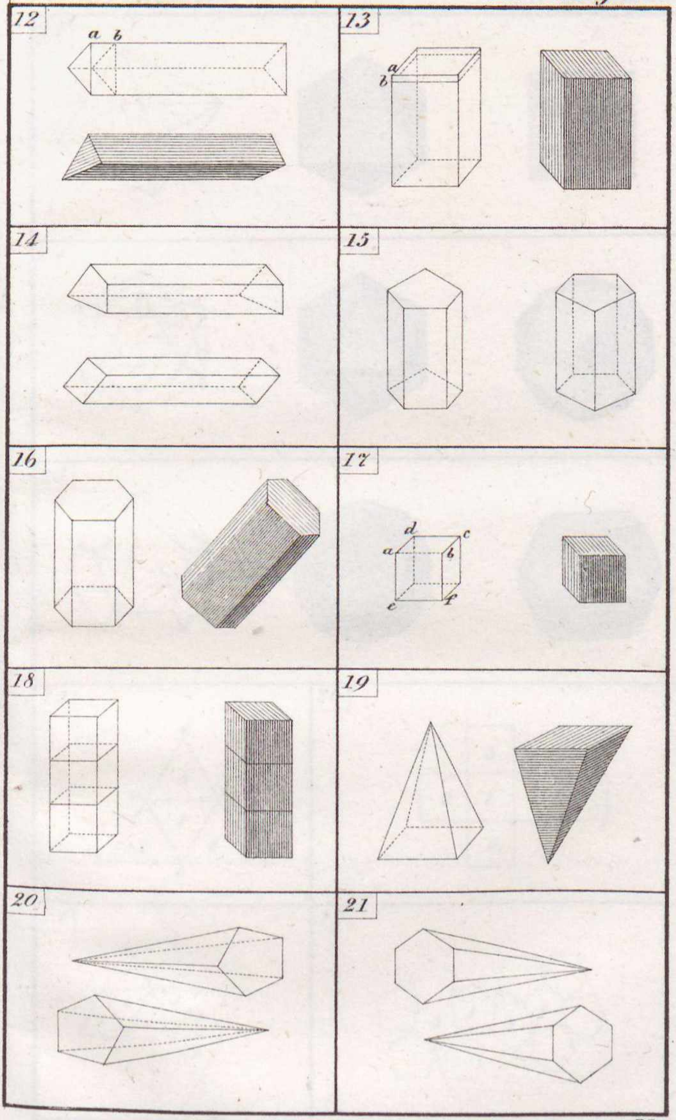
ha ismét $r = 1$, lesz $t = 2$ és kifejezésünk:

$$\text{a' henger színére} = 6\pi$$

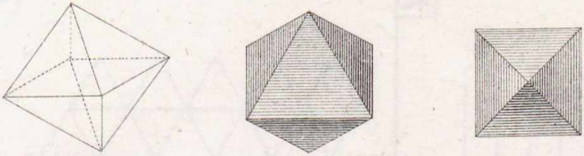
$$\text{a' gömbére} = 4\pi$$

$$\text{a' kupéra} = 2\pi.$$

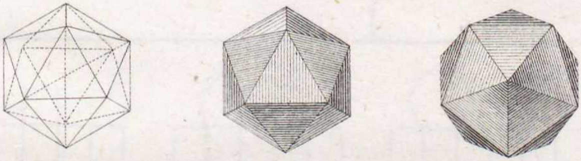

1
A C B D
A D C D
2
e f g h
a c b d
3
b
A a B
4
a b
5
a b
6
7
10
c a b
a b c
8
9
11
d c b a


12
a b
13
a
b
14
15
16
17
d c
a b
e f
18
19
20
21

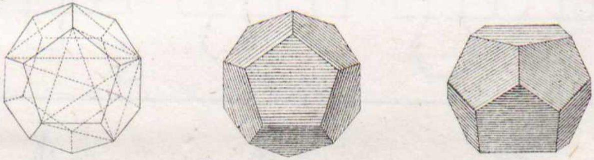
22



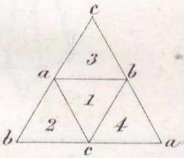
24



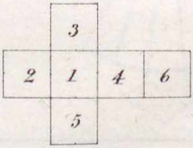
23



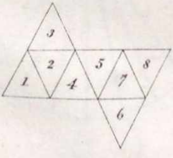
25



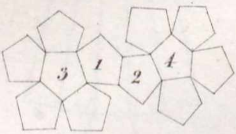
26



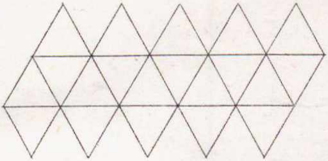
27



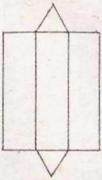
28



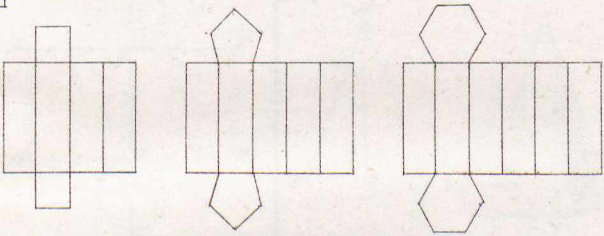
29



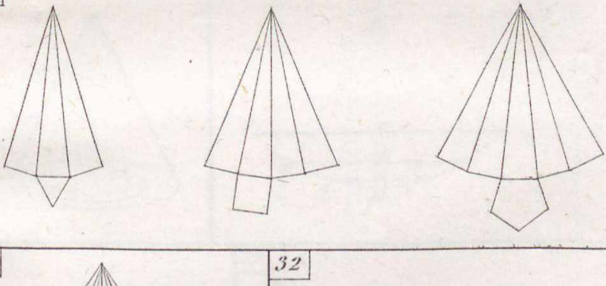
30



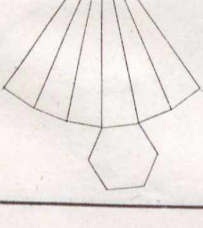
30



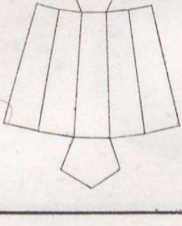
31



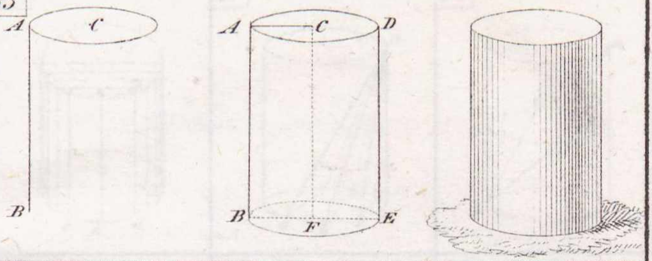
31



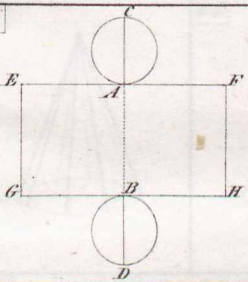
32



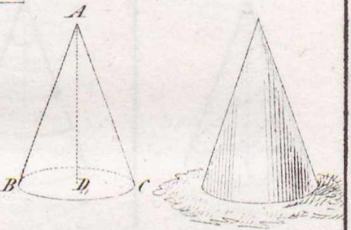
33



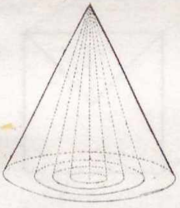
34



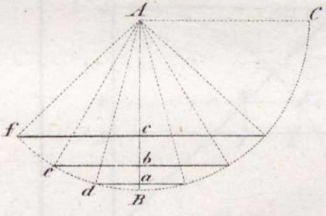
35



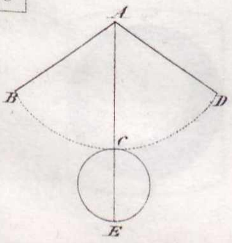
36



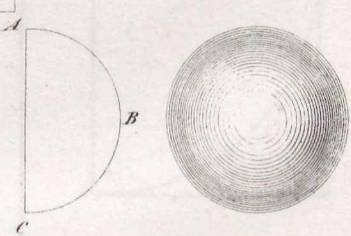
37



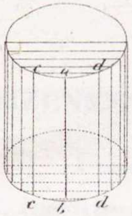
38



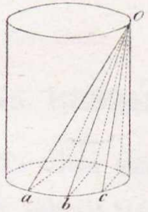
39



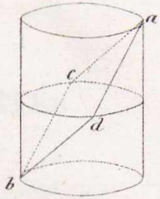
40



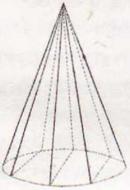
41



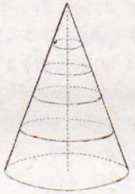
42



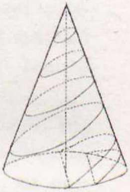
43



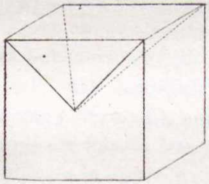
44



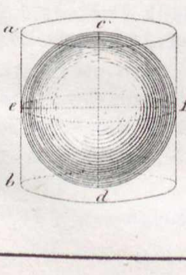
45



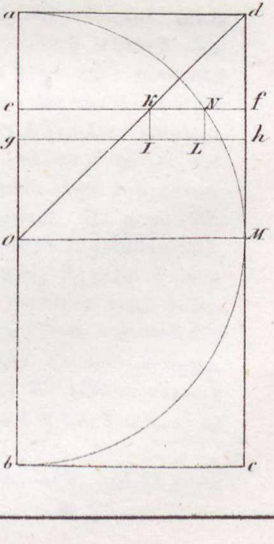
46



47



48



TIZENKETTEDIK BESZÉLGETÉS.

Üregmérés. Tartalom mérés.

K. Ismervén a' merők külsejét vagy színét, nemde következik tömegeik' mérése?

F. Válóban csak ez maradt hátra 's vele beszélgetéseinket bézárhatjuk. Ki azt, mit eddig tekintének emléké ben híven megtartja, bátran foghat a' tudomány' tanulásához, és előmenete kétséges nem lehet.

K. Tudom hogy a' tartalom vagy üregmérésnél három irány jön tekintetbe. A' tért négyszög mérőkkel mértük, természetesen következik tehát, hogy, az üregeket háromirányú mérőkkel, a' köbökkel kell mérnünk. Miként mutathatni meg ezt szembetűnőleg?

F. Ha valamelly test vagy merő tartalmát keressük, a' hossz, szél és mély három irányt kell mérnünk, tehát ezen három mennyiséget kifejező számok lesznek egymásközt sokszorozandók. Ha három szám sokszorozandó egymással, azt mondjuk hogy, a' származat három irányú, vagy harmadik emelés, vagy köbszám; valóban, ha az említett három irány egyenlő, ekkor a' három azt kifejező szám is egyenlő, és ugyanazon szám sokszoroztatik kétszer egymásután maga mágával Ha p. o. valamelly testnek széle, hossza és mélysége egyenlően $=2$, tartalma $2\times2\times2=8$ által van kifejezve; de ezen 8 szám nem egyéb mint a' 2nek harmadik emelése vagy köbe, mert a' szám háromszor áll mínt factor (tevő, sokszorozó) és írhatni 2^3, valamint 3^3, 4^3, 5^3 's a' t. azt jelölik hogy, a' számok harmadik emeléseiken vagy köbeikben vannak és hogy $3^3=3\times3\times3=27$, $4^3=4\times4\times4=64$, és $5^3=5\times5\times5=125$.

A' merő négyszögben (Hexaedron, köb) tudjuk ezen három irány egyenlő, és ha mindegyik p. o. ab vonal által van jelölve, tartalma $ab \times ab \times ab = (ab)^3$, ha ezen vonal $= 1$, ugy a' köb tartalma is $= 1$, mert az egységet bárhányszor sokszorozhatjuk maga magával, örökké $= 1$ marad.

Ezen tekintetből vétetett a' köb alapmérőnek az üregmérésnél. A' mint tehát a' köbnek valamelly vonal oldala hüvely, láb, öl vagy mérföld, vagy ezeknek része, ugy származnak három írány által a' köbhüvely, köbláb köb-öl vagy köbmérföld 's ezeknek részeik. Hogy a' legkisebb köböt is számtalan részekbe lehet osztani 's legkisebb részét is a' tizedes számok által kifejezni, tudjuk. Változatlanul megáll tehát a' tan hogy: *ha valamelly, test három irányát kifejező számok egymással sokszoroztatnak, a' talált származat képviseli a' merő tartalmát, bármelly alap hosszmérőt jelöljenek a' számok.*

Igy lesz p. o. valamelly 6 oldalú alaknak tartalma, ha magossága M, széle S és hossza H, $T = MSH$. 1ső. Idomunkba írtunk illyen hosszított 6 oldalt, mellynek oldalai látjuk szintugy oszlanak négyszögökbe, valamint oszlottak a' síkok a' térmérésnél; de mivel ezen vonalok itt ugyszólván a' testet is vagdalják mint egymáson keresztülmennek, a' nagy merőből csupa apró alapmérő köbök támadnak, és ezek mostani vizsgálatunk' tárgyai. Ha p. o. ezen paralellopiped' vagy oszlop' három iránya sorjában kevetkező:

Talpa vagy széle $EF = AB = DC$, 4 egyenlő részre oszlik, magossága $AE = BF = CG$ 6-ra, mélye pedig vagy hossza $AD = BC = FG$ 8-ra, lesz tartalmának kifejezése·

$AB \times AE \times AD$, vagy számokban: $4 \times 6 \times 8 = 192$; és valóban, bármelly alapmérőt képviseljen egy kis köb vagy az oldalokon levő kis négyszög vagy ezeknek egy oldala, a' származat minden esetre köb; $ABEF$ négyszög p. o. $4 \times 6 = 24$ egyenlő részre oszlott, $BCFG$ pedig $6 \times 8 = 48$ részre, de a' 24 első részeket még 8 részre kell osztanunk, valamint a' második 48 részt 4re 's igy lesz minden esetben $48 \times 4 = 24 \times 8 = 192$.

Ha p. o. ezen alakunkat olly szeletekre vagy táblákra osztjuk, mellyeknek hossza *AD*, széle *AB* és magossága egy rész, *BHCF* táblánk lesz, 's ha a' vágásokat folytatjuk, *AD* irányában 6 egyenlő illy táblát találunk, de mindegyik egyes tábla (2 I.) 4 oszlopba oszlik, millyen a' 3 I., és mindegyik oszlop végre 8 egyenlő alapköbbe. Természetes hogy, vágásainkat háromféleként irányozhatjuk, ha most *AD* irányban kezdénk, kezdhetjük *AE* 's ezután *BC* irányban *BF* vonalhoz iránylag lefelé vagdalván; de természetes hogy az osztási következés egyenlő és csak a' számok változnak, 's minden esetben lesz 8 *ABEF*, 6 *ABCD* és 4 *BCFG* tábla, 's a' háromféle vagdalás által csak a' számok' helyei változnak 's lesz mindhárom esetben $8 \times 6 \times 4 = 6 \times 8 \times 4 = 4 \times 6 \times 8 = 192$, és ha alapköbünk egy köbhüvely, vagy (3 I.) *ab* vonal egy hosszhüvely, nagy oszlopunk' tartalma = 192 köbhüvely.

Ha p. o. 4 I. bani rendes hatoldalt tekintem, hol az oldaloknak mindegyik *AB* vonalát két egyenlő félbe vágtam, tartalma $2 \times 2 \times 2 = 8$ szám által van kifejezve, ha mindegyik vonalat 3 részre osztok 3^3, ha négyre 4^3 's a' t. fogja a' tartalmat kifejezni, 's innen nyilván látni a' geometri alakok' egybefüggését, mert valamint a' vonalok növésével a' tér négyszögben nőtt, ugy fog a' vonalok egyszerű növésével a' test köbben nőni. A' tartalmak kifejezése tehát mint láttuk mindenkor három számnak származata, legyenek ezek egyenlők vagy különbözők.

Ha kis alap köbökből nagyobb köböket akarunk összerakás által alkotni, szinte ezen következésre jutunk, és a' következő nagyobb köbhöz 8 kis köb kívántatik. 5 I. ban láthatni, miként származott összerakás által *abcd* kis köbünkből 2, 4, 6 's végre 8 kis köb, melly utolsó *ABCD* ismét egy magában tekinthető rendes 6 oldal.

A' következő nagyobbik köbhöz 27 alap köb, 's az utánna következőhöz 64 's a' t. kívántatik, melly számok tudjuk a' természetes számsorban egymásután következő számok' köbei, és 1^3, 2^3, 3^3, 4^3 's a' t. által vannak kifejezve.

K. Látom miként mérjük a' négyszögű síkok által alkotott merők' tértartalmait köbök által; de hasonlóan következtetem a' térméresből hogy, bármelly oldalú, egyenes vagy görbült színű test' tartalmát is szinte köbökkel mérjük, mert akar legyenek ezek tökéletes mérők, akar nem, általok a' valódi tartalom kívánt közelítéssel kifejezhető?

F. Valóban méltán várhatjuk egymástól hogy tapasztalásaink' és ismereteink' növésével magunk is megleljük további vizsgálataink' utját, és a' környülményes magyarázatok feleslegesek lesznek. Egyfelől a' gyakorlat, másfelől elménk megszokott léte bizonyosan elég segédeink, hogy ha gondolkodásunknak szabad tért engedünk, a' valódi utat csakugyan megleljük 's örömünk annál nagyobb, ha elömenetünk tulajdon erönkbül származik.

K. Csakugyan senkinek sem jut eszébe közüllünk kérdezni, miként rakjuk ez vagy amaz rendetlen merőt rendes köbökkel teli, vagy hányszor találjuk meg ezeket abban, ha szétvagdaljuk. Ha legfeljebb valamellyikünk nehéznek találná a' köbszámokkali számítást, egy kis gyakorlás által könnyen megszokja. Miként oszlanak a' felsőbb rendű köbmérők kisebb vagy alsóbb rendűekbe?

F. Erre kérdés által felelek. Miként származtak hosszmérőkből térmérők? Nemde azon számot maga magával sokszoroztuk, melly kifejezte: mennyi illy apróbb részekre oszlik valamelly nagyobb mérő? Itt kétt irány volt tekintetben, nemde a' harmadik irány' hozzájárultával a' térmérőből köbmérő származik, ha a' térmérőt hosszmérővel sokszorozzuk?

K. Megvallom hogy egy kis gondolkodás után magam is reá jöttem volna a' következésre, hogy a' kisebb osztájokat az azokat kifejező számok' köbei vagy harmadik emelései adják, mi eddigi tekinteteinkből a' nélkül is következik. Egy négyszögölben p. o. $6 \times 6 = 36$ négyszögláb van; a' négyszöglábból köbláb lesz ha azt a' vonal hosszával 6al sokszorozom 's ez $36 \times 6 = 216$'s igy egy köb-ölben $6^3 = 6 \times 6 \times 6 = 216$ köbláb van. A' köb-öl tehát olly merő, mellynek széle, hossza és magossága egyenlőképen 6 láb 's igy három iránya egymással sokszoroztatván $6^3 = 216$ köbláb tartalmát adja?

F. Ezen az úton könnyen megleljük tehát a' többi osztájokat is, mert egy köblábban $12^3 = 12 \times 12 \times 12 = 144 \times 12 = 1728$ köb hüvely van, egy köb-ölben tehát $216 \times 1728 = 373248$ köbhüvely.

Egy köbhüvelyben van szinte $12^3 = 1728$ köbvonal, 's igy egy köblábban $1728 \times 1728 = 1728^2 = 2985984$ köbvonal, 's végre egy köb-ölben $1728^2 \times 216 = 644972544$ köbvonal.

Itt már sok számjegyre találtunk; mert a' számok, harmadik emeléseikkel sebesen nőnek, és ezen okból helyes valamelly mérőt nagyobb osztájának részeiben venni.

Természetes hogy, ha alsóbb osztályt felsőbbe kell átváltoztatni, ezt elosztás által eszközöljük és megfordítva lesz köbvonalból köbhüvely, és köbhüvelyből köbláb 12^3 általi, köblábból pedig köb-öl 6^3 általi osztással.

Ha kérdezzük, hány köb-öl van egy mérföldben, a' felelet 4000^3, vagy $4000 \times 4000 \times 4000 = 64000000000$, ez 11 jegyű szám és tíz ezres millio. Ha köbmérföldet apróbb mérőkbe kell változtatni, temérdek számokra találunk 's p. o. egy köbmérföld köbvonalokba változtatva:

$$4000^3 \times 6^3 \times 12^3 \times 12^3 \text{ 's ez}$$

$$64000000000 \times 216 \times 2985984 = 41278\,242\,816\,000\,000\,000.$$

41 trillio 's a' hozzáragasztott szám; öszszesen 20 számjegy.

K. Tekintsük sorjában azon merők' tartalmait, mellyeket vizsgáltunk?

[71] *F.* I. A' köb' tartalmát ismerjük, melly egyik oldalvonalát kifejező számnak köbe. Ismerjük a' négyoldalú oszlopok' tartalmát is, mert ez *talpának térszíne sokszoroztatván az oszlop' magosságával.*

Bárhány oldalú legyen az oszlop vagy ennek talpa, a' kimondott változatlan megmarad, 's ha a' talpnak tértartalmát megleltük, csak az oldal magossággal kell sokszoroznunk 's a' származat adja a' keresett köbtartalmat.

1) Valamelly háromoldalú oszlop' magossága 9 láb, talpának egy oldala 34 hüvely, kívántatik köbtartalma?

A' háromszögtalp' térét megleljük táblácskánkból, melly $0·4330127 \times 34^2$ négyszöghüvelyben; ha ezt 12^2 által elosztjuk, lesz belőle köbláb, tehát oszlopunk tartalma $0·4330127 \times 32^2 \times 9 : 12^2 = 31·2851676$ köbláb.

2) Négysíkú oszlop' hossza 3 láb 2 hüvely, széle 2 láb 8 hüvely, 's végre magossága vagy mélysége 2 láb 6 hüvely; tartalma a' három számközti származat, hol szükséges hogy vagy lábokba vagy hüvelyekbe változtassanak, 's mindegyik esetben

$$38 \times 32 \times 30 = 36480 \text{ köbhüvely}$$

$$3·1666 \times 2·666 \times 2·5 = 21·0043 \text{ köbláb}$$

vagy $$36480 : 12^3 = 21·0043.$$

3) Hétoldalú oszlop van adva, hossza 21 láb, talpának egy oldala 43 hüvely, az oldalok egyenlők.

Tartalma 979·8693346 köbláb.

4) Ötoldalú vagy síkú oszlop' hossza 23 láb, talpának vonala 54 hüvely: tartalma

801·312349 köbláb.

5. Négysikú oszlop' magossága 19 láb, talpának négy vonala sorjában 43, 52, 62, és 38 hüvely, az első és második közti rézsvonal 70 hüvely.

Tartalma 306·04744 köbláb.

Ezen példában a' talp trapez, tehát két háromszög' térszínét kell keresni 's ennek öszszesével sokszorozni az oszlop magosságát.

[72] II. *A' henger' tartalma megtaláltatik, ha talpának tére a' henger' tengelyével sokszoroztatik.*

Hogy ezen szabályok természetesen következnek az alakok tulajdoniból, szembetűnő.

Ha p. o. hengerünket ugy származtatjuk, hogy talpát mozdítjuk tengelyének hosszában, nyilván hogy, minden pontjában egyenlő talpával; ezt tehát annyiszor vesszük, hány pont van a' tengelyben. Mint a' hengert egymásra rakott pénzdarabokból alkottuk, az ítt mondottat eszközlöttük, 's ha egy pénz darabot talpának veszünk, annyi lesz tartalma, hány illy talp fér el a' tengely hosszában, vagy is a' henger tartalma egyenlő a' pénz darabok' vagy talpak' összes tartalmával. Mit itt mondunk, az oszlopokra is alkalmazható.

1) Valamelly henger magossága 9 láb, körülete 6 láb, tartalma $0\cdot795775 \times 36 \times 9 = 257\cdot831$ köbláb.

2) Magossága 11 láb, átmérője talpának 38 hüvely, tartalma $0\cdot7854 \times 3^1/_6 \times 3^1/_6 \times 11 = 86\cdot63398$ köbláb.

3) Tengelye 24 láb, talpának átmérője 27·713 hüvely, tartalma 100·532253 köbláb.

[73] III. Minden háromszögű oszlop, három egyenlő háromszögű pyramisba oszlik; tehát a' háromoldalú pyramis' tartalma egyenlő azon oszlop tartalmának egyharmadával, mellynek vele egyenlő talpa és magossága van.

Megtaláltatik eszerint a' pyramis' tartalma, ha *talpának térszíne magosságának harmadával sokszoroztatik.* Természetes hogy, ha a' talp' tértartalmát a' pyramis egész magosságával sokszorozzuk, á' származatot oszthatjuk el három által, és különbséget nem találunk. Tudjuk hogy, a' pyramis' magossága itt a' tengelye, vagy is, csucsából talpára függőleg álló vonal.

1) Valamelly négyoldalú pyramis' magossága 14 láb, talpainak egy egy oldala 42 hüvely, tartalma $3\cdot5 \times 3\cdot5 \times 14 : 3 = 12\cdot25 \times 14 : 3 = 171\cdot5 : 3 = 57\cdot1666$ köbláb.

2) Ötszögű pyramis' magossága 12 láb, talpának mindegyik oldala 24 hüvely,

tartalma 27·5276384 köbláb.

3) Hatoldalú pyramis' tengelye 9 láb, talpának egy oldala 29 hüvely,

tartalma $2{\cdot}5980762 \times 29 \times 29 \times 9 \times \frac{1}{3} : 144 = 45{\cdot}52046$ köbláb.

4) Nyolczoldalú pyramis tengelye 13 láb talpának egy egy oldala 35 hüvely,

tartalma 177·9923684 köbláb.

5) Háromszögű pyramis' tengelye 22 láb, egy oldala talpának 39 hüvely,

tartalma 39·2354 köbláb.

[74] IV. A' kup tudjuk egyenlő a' pyramissal, ha talpok és magosságok egyenlő, a' kup tartalma is megtaláltatik tehát, ha *talpának térszíne egyharmadrész magosságával sokszoroztatik.* A' kup magossága, annak tengelye.

1) Ha a' kup függönye 14 láb, talpának átmérője 43 hüvely,

tartalma $10{\cdot}084754 \times 14 : 3 = 47{\cdot}062185$ köbláb, hol tudjuk 10·084754 talpának tértartalma □ lábban.

2) Ha tengelye 9 láb, talpának körülete 7 láb 10 hüvely,

tartalma 14·6488914 köbláb.

3) Ha oldalának magossága (fekvő rézs vonala) 15 láb, talpának sugára 19 hüvely, előre tengelye számítatik, melly 178·994413 hüvely 's ebből

tartalma 39·1591 köbláb.

4) Ha tengelye 18 láb, talpának átmérője 42 hüvely,

tartalma 57·7269 köbláb.

5) Ha talpának átmérője 12·7324 láb, függönye 107·923 láb,

tartalma 4580·40809 köbláb.

[75] V. *A' gömb tartalma megtaláltatik, ha színe, sugárjának egyharmadával sokszoroztatik.*

Ezen tétel' valólétét minden tekintet bizonyitja.

a) A' gömb kétharmadrésze a' körülte írt hengernek. Ha a' gömb' átmérője $= 1$, a' henger talpának, vagy a' gömb nagykörének tértartalma vagy is térszíne,

$$= {}^1\!/_4\pi = 0{\cdot}78539806\,,$$

és ekkor sugára $= {}^1\!/_2$, félkörülete $= 1{\cdot}57079632$, tehát ennek fele vagy: ${}^1\!/_2 \times 1{\cdot}57079632 = 0{\cdot}78539806$ és ezen szám fejezi ki a' henger tartalmát, ha tengelye $= 1$, mert evvel sokszoroztatván változatlan marad.

Ezen számnak kétharmada

$$= {}^2\!/_3 \times 0{\cdot}78539806 = 0{\cdot}52359877$$

fejezi ki tehát azon gömb tartalmát, mellynek tengelye $= 1$. Ha a' gömb' féltengelye vagy sugára $= r$, a' körülte írt henger talpának, vagy mi mindegy, a' gömb nagykörének térszíne $r^2\pi$, sokszorozván ezt a' tengellyel mint a' henger magosságával, $2r$ által, lesz

$$r^2\pi \times 2r = 2r^3\pi$$

a' körülírt henger tartalma. Ennek kétharmadrésze ${}^4\!/_3 r^3\pi$ fejezi ki a' gömb' tartalmát.

b) A' gömb szinének kifejezése tudjuk $4r^2\pi$ volt, vagy is, a' nagykör' térszíne négyszer véve; ha ezt harmádrész sugárával $\frac{r}{3}$ sokszorozzuk, lesz

$$4r^2\pi \times {}^1\!/_3 r = {}^4\!/_3 r^3\pi$$

mint elébb. Szóval ezen kifejezés azt teszi: ha valamelly gömb tartalmát keressük, vegyük sugárának köbét (r^3) és sokszorozzuk $\pi = 3{\cdot}14159\cdots$ és ${}^4\!/_3$ al, a' származat a' keresett tartalom.

Ha a' sugár helyett a' tengely van adva, r helyibe $\frac{t}{2}$ tehető, mert $t = 2r$ és ekkor elébbi kifejezésünkből lesz ${}^4\!/_3 \left(\frac{t}{2}\right)^3 \pi$, mi nem egyéb mint

$$ {}^4\!/_3 \times \frac{t^3}{8} \times \pi = {}^1\!/_6 t^3\pi,$$

vagy is, ha a' tengely köbét sokszorozzuk π vel, a' származatnak egyhatodrésze fejezi ki a' gömb tartalmát. Ha ismét itt $t = 1$, mint legelső tekintetünkben, természetes hogy t^3 is $= 1$, és kifejezésünk egyszerűen

$$\frac{\pi}{6} = 0{\cdot}52359877.$$

c) Ha a' gömböt ugy tekintjük, mint számtalan pyramis vagy kupból alkotott merőt, a' kupok talpai öszszesen bizonyosan a' gömb' színét képezik, magosságok pedig a' gömb sugárját képviselik, mert csucsaik valamennyien középpontjában egyesülnek.

A' kupok öszszes talpai tehát $4r^2\pi$ által vannak kifejezve, ha r a' gömb sugára; ha ezeket magosságok egyharmadával sokszorozzuk valamennyi kup öszszes tartalmát megleljük; magosságuk pedig r lévén, visszaállítjuk $\frac{r}{3} \times 4r^2\pi = {}^4\!/_3 r^3\pi$ kifejezésünket.

Könnyű lesz eszerint bármelly gömb tartalmát meglelni, ha sugára vagy átmérője van adva; egyszerűbben számítunk ${}^1\!/_6 t^3\pi$ kifejezés által, tudván hogy

$$\frac{\pi}{6} = 0{\cdot}52359877,$$

mert ez állandó szám lévén csak a' tengely' köbével sokszorozandó 's azonnal megleljük a' gömb tartalmát.

1) Ha a' gömb tengelye 16 hüvely, tartalma

$$16^3 \times \frac{\pi}{6} = 16 \times 16 \times 16 \times 0{\cdot}52359877 = 2144{\cdot}6656.$$

2) Ha tengelye 3 láb 6 hüvely tartalma $(3{,}5)^3 \times 0{\cdot}52359\cdots = 22{\cdot}4493$ köbláb.

3) Ha tengelye ¼ láb, tartalma $({}^1\!/_4)^3 \frac{\pi}{6}$ vagy

$${}^1\!/_4 \times {}^1\!/_4 \times {}^1\!/_4 \times 0{\cdot}52359\cdots = {}^1\!/_{64} \times 0{\cdot}52359 = {}^1\!/_{64} \times {}^1\!/_6 \times \pi$$
$$= {}^1\!/_{384}\pi = 0{\cdot}0081812308 \text{ köbláb},$$

vagy köbhűvelyben $0{\cdot}0081812308 \times 1728 = 14{\cdot}13716$ köbhüvely.

Itt könnyítünk a' számításon ha, a' helyett hogy $\frac{1}{4}$ részt 3szor sokszorozzuk, $\frac{\pi}{6}$ számot háromszor osztjuk el egymásután 4 által.

4) Tengelye 19 öl, tartalma 3591·3724 köb-öl.

5) A' hold' tartalma kívántatik, ha tengelye 454 mérföld?

$\frac{\pi}{6}$ számot háromszor sokszorozván 454 által, a' származat 48996626·17110328 és ennyi köbmérföld a' holdnak tartalma.

6) Ha a' földet tökéletes gömbnek vesszük, és tengelye 1718·8 mérföld, tartalma közel 2658731000 köbmérföld. A' tizedes jegyeket keresse a' tanuló.

[76] VI. Valamelly gömbszelet vagy gömbdarabnak tartalma következőleg találtatik meg.

a) *Ha a' tengely nagysága és ennek a' darabhoz tartozó része adva van.*

Hármas tengelyéből, dupla magossága levonatik, a' különbség pedig sokszoroztatik a' magosság' négyszögével és $\frac{\pi}{6}$ *által.*

Ha ezt betűk által akarjuk kifejezni, legyen a' gömb tengelye t, gömbdarabhoz tartozó része (mi a' darab' magosságát adja) m, tehát hármas tengelye $3t$, dupla magossága $2m$, a' köztük levő különbség pedig $3t - 2m$, szinte lesz a' tengelydarab, vagy magosság négyszöge m^2, és az egész kifejezés

$$(3t - 2m)\, m^2 \times 0{\cdot}52359\cdots$$

b) *Ha a' szelet' magossága és talpának sugára van adva.*

Sugárának hármas négyszögéhez magossága' négyszögét adjuk, ezen öszszest a' magossággal és $\frac{\pi}{6}$ *al sokszorozzuk.*

Betűkkel jelölvén a' mondottat

$$(3r^2 + m^2)m \times \frac{\pi}{6}.$$

Természetes hogy itt r nem a' gömb' sugárát jelöli, hanem a' gömbdarab talpának sugárát, melly tudjuk mindenkor tökéletes kör.

1) Levágunk valamelly 48 hüvely tengelyű gömbből egy 13 hüvely magosságú darabot, kívántatik tartalma?

Ez az elébbi szerint

$$(3 \times 48 - 2 \times 13)13^2 \times 0{\cdot}52359\cdots = 118 \times 13^2 \times 0{\cdot}52359\cdot$$
$$= 10441{\cdot}6312 \text{ köbhüvely.}$$

2) A' szelet magossága a' gömb tengelyének $^3/_8$ része.

Tartalma 0·16567 azon köbmérőben kifejezve mellyben a' tengely adatik.

3) A' szelet' magossága 13, talpának sugára 21 hüvely,
tartalma $(3 \times 21^2 + 13^2) \times 13 \times 0{\cdot}52359\cdots = 10155{\cdot}7456$ köbhüvely.

[77] VII. *Valamelly rendes geometri testnek tartalma megtaláltatik, ha színe a' beléirt gömb' sugárának egyharmadával sokszoroztatik.*

Tudjuk hogy, a' rendes merők annyi egyenlő pyramisokba oszlanak, hány az oldalok 's hogy ezen pyramisok csucsai középpontjokban összesülnek és hogy a' béirt gömb sugára nem egyéb mint ezen pyramisok' magossága, vagy is egyenesen: a' rendes merő' tulajdon sugára. Mivel pedig a' pyramisok magosságának is csak egy harmadát vettük talpaik térszíne sokszorozojául, szinte ugy vesszük a' rendes merők egyharmadrész sugárát sokszorozónak, ha szinét a' pyramisok talpa' öszszesének tekintjük.

Következő kis táblában ki van már számitva, mennyi valamellyik rendes merőnek tartalma, ha vonaloldala $= 1$, és az ott álló számok által könnyen számithatjuk tartalmokat, bármelly legyen egy oldal' kifejezése, mert ekkor az adott oldalnak köbe sokszoroztatik a' táblában levő neki megfelelő számmal, 's a' származat lesz a' merő' tartalma.

Tudjuk ezenfelül hogy, a' hasonló meröknek színei ugy állanak, mint állanak oldalaiknak négyszögei, természetes tehát hogy, tartalmai ugy állanak, mint oldalaiknak köbei.

A' rendes merök' tartalmai.

Oldal	Név	Tartalom
4	Tetraedron	0·1178511
6	Hexaedron	1·0000000
8	Octaedron	0·4714045
12	Dodecaedron	7 6631 189
20	Icosaedron	2·1816950

1) Ha az Octaedron vonaloldala 16 hüvely, tartalma $16^3 \times 0{\cdot}4714045 = 1930{\cdot}8728$ köb hüvely.
2) Ha a' dedocaedron' egy oldala 12 láb, tartalma $12^3 \times 7{\cdot}6631189 = 13241{\cdot}8694592$ köbláb.
3) Ha a' tetraedron' egy oldala 27 hüvely, tartalma 0·9428104 köbláb.
4) Ha a' hexaedron' oldala 27 hüvely, tartalma 19683 köbhüvely.
5) Ha végre az Icosaedron' egy oldala 15 hüvely, tartalma 7363·220625 köbhüvely.

Jegyzék. Ezen beszélgetésünkben többször éltünk a' *tértartalom* szóval, melly mindenkor *térszínt* jelentsen.

elkor az adott oldalnak köbét sokszorozzuk a' táblában levő neki megfelelő számmal, 's a' szorzat lesz a' mérő tartalma.

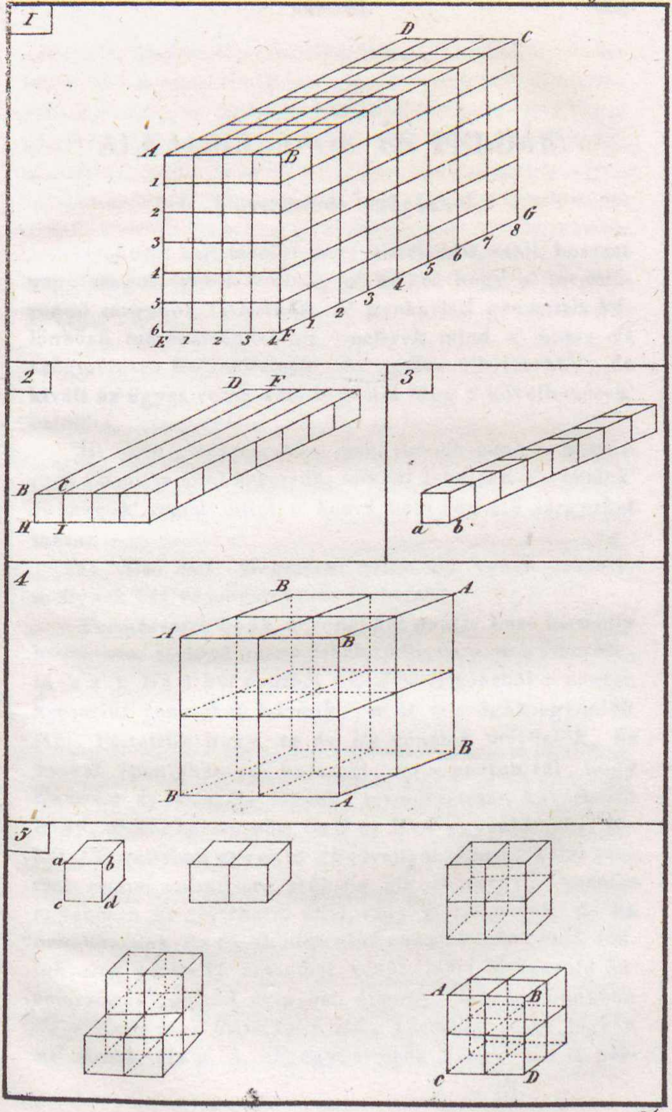
Tudjuk egyébiránt, hogy a' hasonló mérőknek területei úgy állanak, mint állanak oldalaiknak négyszögei, térmérőéreé tehát hogy tartalmai úgy állnak, mint oldalaiknak köbei.

A' rendes mérők' tartalmai.

Oldal' száma	Mérők' neve	Tartalom
4	Tetraedrum	0,1178511
6	Hexaedrum	1,0000000
8	Oktaedrum	0,4714045
12	Dodekaedrum	7,6631189
20	Ikosaedrum	2,1816950

1) Ha az Octaedrom' oldala 16 hüvely, tartalma $16^3 \times 0,4714045 = 1930,8728$ köb hüvely.
2) Ha a' dodekaedrum' egy oldala 12 láb, tartalma $12^3 \times 7,6631190 = 13241,869632$ köb láb.
3) Ha a' tetraedrum' egy oldala 27 hüvely, tartalma $0,1178511 \cdot 19683$.
4) Ha a' hexaedrum' oldala 27 hüvely, tartalma 19683 köbhüvely.
5) Ha végre az Ikosaedrum' egy oldala 43 hüvely, tartalma $79507 \cdot 2,1816950$ köbhüvely.

Jegyzet. Ezen [illegible] számok, melly [illegible].


1
D C
A B
1 2 3 4 5 6
E 1 2 3 4 F
1 2 3 4 5 6 7 8 G
2
D F
B C
H I
3
a b
4
B A
A B
B
B A
5
a b
c d
A B
C D

ALKALMAZÁSOK ÉS PÉLDÁK.

I. Hosszmérés szögökkel.

Gyakorta kell távolyt vagy kiterjedést, szélt, hosszat vagy magosságot mérnünk, a' nélkül hogy a' megmérendő tárgyhoz férhetnők. A' gyokorlati geometria különböző mérőszerekkel bír, mellyek mind a' hossz- és szögmérésre használtatnak, és pontos alkotásoktól, de kivált az ügyes velük való bánástól függ a' következések' valóléte.

Mi ezen mérőszerekkel nem mívelhetünk és csupán csak számítás által keressük, miként lehessen a' vonalok' és szögök' segéde által a' hozzá nem férhető tárgyakat mérni.

1) *Első eset.* Megmérni valamelly vonal' hosszát, mellynek *két* végsőpontjához férhetni?

Természetes hogy, a' vonal két pontja közt bármelly hozzá nem férhető tárgy lehet, millyen p. o. a' mocsár, tó 's a' t. Ha a' két pontból 1 I. A és B pontból x ponton keresztül vonalokat húzunk, m és n szögök egyenlők [12]. Feltettük hogy Ax és Bx vonalok mérhetők, ha azokat épen akkorára hosszabbítom x ponton túl, hogy $Bx = Cx$ és $Ax = Dx$ legyen, természetesen következik hogy, a' két háromszög CxD és BxA egyenlő [23], tehát CD vonalom egyenlő AB távollyal. Ezen alkotás szerint semmi számításra szükség nincs, mert CD vonalat egyenesen megmérhetni öllel vagy mérőlánczal; de ha nem akarnók Bx és Ax oldalokat annyira hosszítani, tudjuk elég bármelly részeiket venni, mert a' hasonló háromszögök' oldalai arányban állanak [23]. Idomunkban $xF : Ax = xC : Bx = CF : AB$, bármelly része legyen xF Axnek. Ha p. o. xF egyharmada Axnek, xE is harmada *Bx*nek, valamint *EF* harmada *AB*nek; 's ekkor számítás által könnyen megleljük *AB* távolyt.

Ha p. o. valamelly mocsár', gödör' vagy tónak hosszát (nagy átmérőjét) vagy szélességét (kis átmérőjét) akarom megmérni és $Bx = 75{\cdot}5$, Ax pedig 62 öl hosszaságú 's nem akarom Bx vonalat többel mint 8 öllel hosszabbítani x ponton túl, tudom hogy a' két darabközti viszony $\frac{8}{75{\cdot}5} = 0{\cdot}105955\ldots$'s hogy ez minden egymásnak megfelelő oldalra nézve fennáll; ezen számmal kell tehát *EF* vonalomat *elosztani*, ha *AB* vonal hosszát keresem. Természetes hogy, megfordítva is számíthatunk, ha *EF* vonalunkat egyenesen $\frac{75{\cdot}5}{8}$ által *sokszorozzuk*, hol ismét mindegy, akar a' közönséges törtel számítunk, akar tizedes törtekbe változtatjuk 's azután sokszorozunk vele; a' kérdés tulajdona mutatja, mellyik mód rövidebb vagy könnyebb.

Esetünkben bizonyos hogy, *EF* vonalunk $\frac{8}{75{\cdot}5}$ része lesz *AB* vonalnak, valamint Ax vonalnak $\frac{8}{75{\cdot}5}$ része xF vonal; de mivel $Ax = 62$, lesz $xF = \frac{62 \times 8}{75{\cdot}5} = 62 \times 0{\cdot}105955 = 6{\cdot}5992$. ExF háromszögünk egyik oldala xE tehát $= 8$, xF pedig $6{\cdot}5992$ vagy közel $6{\cdot}6$ öl, mellyekből természetesen következik a' harmadik oldal *EF*; megmérvén ezt, talált nagysága $\frac{75{\cdot}5}{8}$ által sokszoroztatik 's a' származat lesz *AB* nagysága.

Tegyük fel hogy $EF = 6{\cdot}5$ öl, ekkor $AB = \frac{7{\cdot}55 \times 6{\cdot}5}{8} = 6{\cdot}5 \times 9{\cdot}4379 = 61{\cdot}347$.

2) *Második eset.* Ha a' megmérendő vonalnak csak *egy pontjához* férhetni.

Itt az egyenszögű háromszögök tulajdonihoz fordulunk. Ha p. o. (2 I.) *AB* vonalnak csak *B* pontjához férhetni, *BC* vonal függőleg vonatik *AB*re, ha most *B* ből *A* pontra 's azután *C* pontra egyenes szögöt irányozunk, mi mindenkor eszközölhető, *BC* vonal mérhető; 's bármelly pontjában emelünk *ED* függőt reá, mellyen *D* pontban *CA* vonal keresztülmegy, két háromszögeink *ACB* és *DCE* hasónló létéből *BC* és *CE* közti, 's következésképen *AB* és *DE* közti viszony megtaláltatik. Ez pedig:

$$BC : EC = AB : DE, \text{ tehát:}$$

$$AB = \frac{BC \times DE}{CE} \quad [37].$$

3) Ha p. o. valamelly torony' magosságát akarjuk ezen uton keresni (3 I.), valamelly bizonyos hosszaságú léczet szúrunk a' földbe *függőleg*, feltévén hogy, a' torony is függőleg áll a' földszínén, *AE* távol tudjuk bármelly lehet, valamint léczünk *DE* magossága. Ha most a' lécz végső *D* pontján keresztül a' torony csucsára nézünk ugy, hogy *C* álláspontunk, a' lécz *D* pontja és a' torony' *B* csúcsa egy vonalba essenek, bizonyos hogy a' két háromszög egyenesszögű és hasonló, az az:

$$AC : CE = AB : BE, \text{ és ismét}$$

$$AB = \frac{DE \times AC}{CE.}$$

Ha p. o. *CE* egynegyedrésze *AC* vonalnak, *DE* is egynegyedrésze a' torony magosságának; 's feltévén hogy $AC = 60$ öl, $CE = 10$ öl, a' viszony $= 6$; léczünk' hossza *DE* pedig 8öl volt, lesz a' torony' magossága $6 \times 8 = 48$öl.

4) Ha valamelly hegynek magossága kívántatik ezen úton, talpának azon pontjához nem férhetni mellyre a' magosságát jelölő függővonal esik; 's itt két háromszögre van szükségünk. Kétszer nézünk tehát 4 I. szerint két különböző álláspontból a' hegy csucsára ugyanazon léczdarabon keresztül, és két egyenesszögű háromszögünk *CED* és *HGF* hasonlósága adja *AB* vonal hosszát követ-

S.*

kezőleg. Megmérjük *CH* vonalat (két nézőpontunk távolát) és a' két szöggel *C* és *H* val, valamelly kis hasonló háromszögöt alkotunk *ACH* hoz, mellynek *ch* oldala bizonyos része legyen a' nagynak, p. o. ha ez ölekben van kifejezve, legyen kis talpunk hüvelyben mérve; ha most kis háromszögünk' *ch* oldalát meghosszabbítjuk, mig *ab* vonal rajta függőleg áll, *ACB* hez hasonló lesz kis *acb* háromszögünk és a' kettőben

$$CH : AB = ch : ab,$$

az az: bármelly arányban álljon *CH* vonal a' hegy' *AB* magosságához, bizonyosan ugyanazon arányban fog lenni kis háromszögünk' *ch* darabja *ab* oldalához. Kis *acb* háromszögünk' *ab* oldalát pedig könnyen megmérhetjük, és hány hüvely nagyságú, annyi öl magosságú lesz a' hegy. Természetes hogy, ezen példa szerint a' hüvelyek helyett vonalokat, vagy ha még kisebb mérő szükséges, p. o. egy ezred részét vesszük az ölnek 's eszerint alkotjuk kis háromszögünket.

5) Csaknem ezen az úton találhatjuk meg közelítve a' holdnak földtőli távolyát. Tegyük fel hogy (5 I.) *A* és *B* földünknek valamelly két pontja; p. o. két városnak égvizsgáló intézete (observatoriuma) 's melly két pont' vagy hely' távolát egész tökéletességgel ismerjük.

Ha *A* pontból valamelly néző csövet a' holdra irányozunk, ez bizonyos *a* szögöt fog a' fekvő vonallal képezni, melly fekvő vonal legyen esetünkben *egyenes vonal* a' két vizsgáló pont között és Idomunkban *AB* által képviselve. Tudjuk azonban hogy, földünk közel gömb és színére alig lehetne tetemes nagyságú egyenes vonalat húzni, de a' hold távolára nézve ezen két pont távolát csakugyan hiba nélkül tehetjük egyenes vonalnak; az *a* szögöt szigorúan meglehet határozni, valamint a' másik vizsgáló pontnak *b* szögét is. Ha most egy kis hasonló háromszögöt alkotunk a' talált két szöggel és *ab* talpát, *AB* távolyát kifejező mérföldek' bizonyos részében veszszük (p. o. tíz mérföldet egy hüvelynek), könnyen megleljük *AC* hosszát (hol feltesszük hogy a' hold *C* pontban van) ha kis *ac* oldalunk' mindegyik hüvelyére tíz mérföldet veszünk.

6) Ha tudjuk mennyire van a' hold földünktől, a' nap' távolát is hasonlóként találjuk meg.

Ehez szükséges olly háromszög, mellynek három csucsában legyenek a' föld, hold és nap; a' vizsgálat leghelyesebben történik akkor, ha a' hold féltöltét vagy második fertályát elérte, mert ekkor a' hold épen fertály útját tette körének a' nap körül, tehát vele egyenes szögöt képez. 6dik Idomunkban van illy egyenesszögű *FNH* háromszög és sorjában *F* pontban a' föld, *N*ben a' nap és *H*ban a' hold legyen.

Ha a' vizsgáló *F* pontban van és egyszer a' holdra, másszor a' napra irányozza nézőcsőjét, *a* szögöt szigorúan meghatározhatja; tudván hogy, a' hold és napközti szög egyenes, könnyen alkothat egy kis hasonló háromszögöt, mellynek *hf* talpa a' hold' földtőli távolyát képviseli, és ennek bizonyos részében van kifejezve. Természetes hogy, a' két háromszög' oldalai arányban vannak, és ha *FN* a' napnak földtőli távolát jelöli, a' kis háromszög *fn* oldala adja mennyiségét, valamint *hn* oldal a' holdnak naptóli távolát.

Ha p. o. a' holdnak földtőli távola közel 52000 mérföld és kis háromszögünk' *hf* talpát csak egy hüvelynek vesszük, *fn* oldala már 397·5 hüvely hosszaságú lenne, de ez 5·52 öl, vagy hatodfél ölnél hosszab, 's ha a' kis talpat csak egy vonalnak vesszük, mi valóban a' szögök' alkotására alkalmatlan lesz, még is 2·76 láb *fn* vonalnak hossza. A' nap távola pedig a' földtől 20666800 mérföld.

II. Térszin-mérés.

Két vonal egymással sokszorozva tért jelöl.

Két vonal' sokszorozása két irányt jelent, a' két irány, térszín.

Két vonal nem sokszorozható, de a' hosszaságukat kifejező számok; jegyeiket azonban elfogadjuk, mert mindenkor kífejezhetők számok által.

Ha a' négyszögöknek talpa és magossága, vagy két egymáson álló oldala ismeretes, a' két számközti származat lesz térszínek.

a) Ha mind négy oldal egyenlő és egymáson függőleg áll, a' négyszög rendes és kifejezése $(AB)^2$, ha egy oldala AB.

b) Ha az oldalok függőleg állanak, de különbözők; párosával szükségesképen egyenlők.

Ha a' hosszú oldal h a' rövid r, térszíne T

$T = h \times r$ vagy $= h \times m$ ha m

által magossága van kifejezve.

c) Ha a' négyszögök rézsszögűek és vagy mind négy oldalok, vagy párosan egyenlők, $T = t \times m$, hol a' kis t talpat jelöl. A' magosság mindenkor a' talpra emelt függő, és az átelleniben levő oldalon is függőleg áll.

d) Ha a' négyszög' mindegyik oldala különböző, két háromszögbe oszlik és térszíne egyenlő a' két háromszög' öszszes térszínével.

e) Ha a' háromszög' talpa t, magossága m, térszíne

$$T = \frac{t \times m}{2} = \tfrac{1}{2} t \times m = \tfrac{1}{2} m \times t.$$

f) A' rendes alakok' térszíne egyenlő félkörületeik és sugáraik közti származattal.

A' félkörület k oldalaik' öszszes hosszának fele, a' sugár s pedig középpontjokból egy oldalra vezetett függő, vagy mi mindegy, az alakba írt körnek sugára. Közönségesen lesz eszerint

$$T = \tfrac{1}{2} k \times s = \tfrac{1}{2} s \times k = \frac{s \times k}{2}.$$

g) A' rendetlen alakok' térszíne egyenlő azon háromszögök' öszszes térszínével mellyekbe oszlanak. Ha a' háromszög H és ezeknek száma n a' sokszög' térszíne.

$$T = n H.$$

h) A' kör' térszíne egyenlő a' félkörülete és sugára közti származattal, ha sugára r (radius), félkörülete π az ismeretes szám 3·14159. . .

$$T = r^2\pi = r^2 \times 3\cdot14159. . .$$

hol ha $r = 1$, a' kör' térszíne $= 3\cdot14159. . . .$

1) Kertem egyik oldala 54öl, másik 16; alakja egyenesszögű háromszög; és az egyenes szög ezen két oldal közt van.

Mivel a' háromszög talpa $= 54$, magossága $= 16$

$$T = \tfrac{1}{2}54 \times 16 = 27 \times 16 = 432$$

és csakugyan négyszögölekben kifejezve [43].

2) Szobám egyenes négyszög, széle 16, hossza 22 láb.

$$T = 16 \times 22 = 192 \,\square\, \text{láb [41]}.$$

Természetes hogy ezen tér padolatját illeti.

3) Ha szobámban két ajtó és két ablak van, az ajtók' magossága 7, az ablakoké 6 láb mindegyiknek szélessége 4 láb, kívántatik szobám hat síkjának térszíne, ha az elébbi terjedségeket megtartjuk és a' falnak magossága $11\tfrac{1}{2}$ láb?

A' fal' magosságát sokszorozván a' padolat egyik irányával, lesz a' két két egymás elleniben álló fal' térszíne

egyik pár falé $2(11\tfrac{1}{2} \times 16) = 368$
másik pár falé $2(11\tfrac{1}{2} \times 22) = 506$
a' 4 falé öszszesen $= 874$ □öl

2 ajtó térszíne $= 2(4 \times 7) = 56$
2 ablaké $= 2(4 \times 6) = 48$
Öszszesük $= 104$ □öl,

levonván ezt 874ből, marad a' puszta falakra 770 □öl
ehez adván padolatomat kétszer 384 »
lesz 6 síkomnak térszíne . . . . 1154 □öl.

4) Ha a' közönséges írópapiros ív' széle 20, hossza 24 hüvely, hány ív papirosra lesz szükségem, ha elébbi szobám négy falát bévonni akarom?

Egy ív papirosban $24 \times 20 = 480$ □ hüvely tér van, egy négyszöglábban van 144 négyszöghüvely, mert $12 \times 12 = 12^2 = 144$, és igy van szükségem

$$770 \times 144 : 480 = 770 : 3\tfrac{1}{3} = 231$$

ívre, 's mivel egy koncban 24ív van, közel 10 konczra.

5) Pitvaromat kövezni akarom. Hossza 8öl 5 láb és 8 hüvely, széle 5 öl 4 láb 4 hüvely. Hány darab kőre lesz szükségem, ha ezek rendes négyszögök és egy oldaluk 8 hüvely?

Az udvar' térszíne, ha az öleket és lábokat hüvelyekre viszem

$$714 \times 412 = 294168 \,\square\, \text{hüvely}$$

egy kőnek térszíne $8^2 = 64$ □ hüvely, kell tehát a' kövezésre $294168 : 64 = 4596{\cdot}4$ kődarab.

Ha a' pitvar hosszát osztom 8 által, lesz $714 : 8 = 89{\cdot}25$
ha szélét . . . . » » » » $412 : 8 = 51{\cdot}5$
tehát hosszában 89 és $\frac{1}{4}$ sor kő lesz, mindegyik sorban $51\frac{1}{2}$ kő, vagy széliben $51\frac{1}{2}$sor kő, mindegyik sorban $89\frac{1}{4}$kő, és öszszesen $89\frac{1}{4} \times 51\frac{1}{4} = 89{\cdot}25 \times 51{\cdot}5 = 4596{\cdot}4$ darab kő mint előb.

6) Asztalom rendes 8szög és egyik oldala 18 hüvely. Tudom a' kis táblából (X. Beszélg) hogy a' rendes 8szög' sugára közel $= 1{\cdot}207$, ha egy oldal $= 1$, ha tehát az oldal 18, ezen függő is 18szor $1{\cdot}207 = 21{\cdot}726$.

Nyolczszögöm' félkörülete 4 oldalának öszszese 's ez $4 \times 18 = 72$; asztalom' térszíne $=$

$$= 72 \times 21{\cdot}726 = 1564\tfrac{1}{4} \,\square\, \text{hüvely közel [46].}$$

7) Lovag oskolám kerek és átmérője 120 lépés. Mennyi térszine, ha 5 lépés 2 öl?

$120 : \frac{5}{2} = 48$ öl átmérője, és sugára $= 24$ öl, térszíne $24 \times 24 \times 3{\cdot}14159 \cdot\cdot = 1812$ □ öl közel.

Tudjuk hogy, a' szám $\pi = 3{\cdot}14159\ldots$ azon kör' félkörülete, mellynek sugára $= 1$, sugárunk $= 24$, tehát körünk' félkörülete is $24 \times 3{\cdot}14159\ldots = 75\frac{2}{5}$ közel, ezt pedig sugárjával 24 el sokszorozván, lesz különös esetünkben

$$r^2\pi = 24 \times 24 \times \pi = 24 \times 75\tfrac{2}{5} = 1812 \,\square\, \text{öl.}$$

8. Asztalom rendes négyszög, egyik oldala $2^1/_2$ láb. Hány tallért, forintost, huszast és aranyot rakhatok reá sorjában, ha a' két forintos tallér' átmérője 18

az egy forintosé 14

a' huszasé 12

és egy körmöczi aranyé 9 vonal?

A' kérdés hasonló az 5 kel. Az asztal' oldala

$$2\cdot5 \times 12^2 = 2\cdot5 \times 144 = 360 \text{ vonal}.$$

Ha 360t sorjában a' pénznemek' átmérőjével elosztom, a' részes mutatja hány pénzdarab jön egy egy sorba; mivel pedig a' sorok' száma szintannyi lesz, hány darab van a' sorban (mert széle és hossza az asztalnak egyenlő) természetes hogy, a' részesnek négyszöge fejezi ki az asztalra rakható pénzdarab' mennyiségét, lesz pedig sorjában:

$360 : 18=20$ és megfér az asztalon $20^2 = 400$ tallér

$360 : 14=25\cdot714$ » » » $(25\cdot714)^2= 662$ forintos

$360 : 12=30$ » » » $30^2 =900$ huszas és

$360 : 9=40$ » » » $40^2 =1600$ arany.

Itt csak egyenes vonalokkal számítottunk, és az egyes pénzdarabok térszíneit számba nem vettük, mert átmérőjök egyenesen megméri az asztal' hosszát és szélét.

Ha pedig az egyes darabok térszíneit keressük, és ezeket annyiszor vesszük hány fért az asztalra, bizonyosan azon hézagokra találunk, mellyek 4, 4 darab közt maradtak.

A' 2 forintos' fél körülete $9 \times \pi = 28\cdot2743$,

térszíne $9 \times 28\cdot2743 = 254\cdot4608$

A' forintos' fél körülete $7 \times \pi = 21\cdot9911$

térszíne $7 \times 21\cdot9911 = 153\cdot9377$

A' huszas' fél körülete $6 \times \pi = 18\cdot8495$

térszíne $6 \times 18\cdot8495 = 113\cdot0970$

Az arany' fél körülete $4\cdot5 \times \pi = 14\cdot1371$

térszíne $4\cdot5 \times 14\cdot1371 = 63\cdot6152$ □h.

négyszöghüvelyben adva.

Tudjuk hogy, a' körök térszínei azon arányban állanak, mellyben állanak átmérőjök vagy sugárjok' négyszögei [54], ha tehát egyik pénznemnek térszínét meg_leltük, a' másikét aránylat által is megtaláljuk és lesznek sorjában, ha a' tallér' térszíne 254·4608

$$9^2 : 7^2 = 254{\cdot}4608 : x$$

a' forintos' térszíne $49 \times 254{\cdot}4608 : 81 = 153{\cdot}9377$

$$9^2 : 6^2 = 254{\cdot}4608 : x, \text{ vagy a' forintosból}$$

$$7^2 : 6^2 = 153{\cdot}9377 : x$$

a' huszas térszíne $36 \times 153{\cdot}9377 : 49 = 113{\cdot}0970$ szinte igy lesz az aranyok térszínére három egyenlő aránylatunk

$$9^2 : (4{\cdot}5)^2 = 254{\cdot}4608 : x$$

$$7^2 : (4{\cdot}5)^2 = 153{\cdot}9377 : x$$

$$6^2 : (4{\cdot}5)^2 = 113{\cdot}0970 : x$$

és minden esetben $20{\cdot}25 \times 113{\cdot}0970 : 36 =$

$$= 254{\cdot}4608 : 4 = 63{\cdot}6152,$$

hogy itt a' sugár helyett az átmérőt tévén a' következések nem változnak természetes, igy lesz p. o. a' tallérok aránylatából az aranyok térszíne

$$18^2 : 9^2 = 254{\cdot}4608 : x$$

melly aránylat, hol $18^2 = 4 \times 9^2 = 2^2 \times 9^2$ következőbe változik

$$4 : 1 = 254{\cdot}4608 : x$$

és $x = 254{\cdot}4608 : 4 = 63{\cdot}6152$ mint éleb,

sokszorozván az egyes térszíneket annyival mennyi fért el asztalunkon mindegyik pénznemből, a' számok mind egyenlők 's csak a' tizedes-törtjegyek miatt támadnak csekély különbségek és:

a' tallérok térszíne $400 \times 254{\cdot}4608 = 101784{\cdot}3$ □ vonal
a' forintosoké $661\frac{1}{5} \times 153{\cdot}9377 = 101783{\cdot}8$
a' huszasoké $900 \times 113{\cdot}0970 = 101787{\cdot}3$
az aranyoké $1600 \times 63{\cdot}6152 = 101784{\cdot}3$ négyszögvonal.

Asztalunk térszíne

$$360^2 = 360 \times 360 = 129600 \; \square \text{ vonal,}$$

's ha ebből bármellyik pénznem' öszszes térszínét levonjuk, az asztalon maradt hézagok' öszszese

$$= 129600 - 101784{\cdot}3 = 27815{\cdot}7$$

vagy közel $27815\frac{1}{2}$ négyszög vonal.

Ezen következés azt bizonyítja hogy, valamint a' körök arányban állanak, a' közöttük támadó hézagok is arányban állanak, és mentül nagyobbak a' körök, annál nagyobbak a' hézagok is, de számok annál kevesebb, mennél nagyobb a' kör átmérője, 's hogy végre bármelly számmal legyenek a' különböző körök, a' köztük maradó hézagok öszszese mindenkor egyenlő.

Erről meggyőződhetünk, ha a' négy pénzdarab-közti hézagot számítjuk, melly 7-dik Idomunk által legyen képviselve, hol *a*, *b*, *c* és *d* pontok a' pénz' középpontjai, *ae* és *af* a' pénz' (kör) sugára, következésképen $ac = ab$ két sugára vagy is átmérője, a' keresendőhézag $= x$.

A' négy fertály pénz, mellyet idomunkban látunk összesen az *x* üreggel, *abcd* négyszögünk térszíne, ha tehát pénzeink' átmérője ismeretes, bizonyosan megleljük a' hézag térszínét, ha idomunk szerint a' négyszög térszínéből a' pénz' térszínét levonjuk. Számítsuk ezen hézagokat mindegyik pénznemünkre: lesz pedig

4 tallér-közti hézag $= 18^2 - 254{\cdot}4608 = 69{\cdot}54$ □ vonal.
4 forintos-közti „ $= 14^2 - 153{\cdot}9377 = 42{\cdot}06$ □ vonal.
4 huszas-közti „ $= 12^2 - 113{\cdot}0970 = 30{\cdot}905$ □ vonal.
4 arany-közti „ $= 9^2 - 63{\cdot}6152 = 17{\cdot}385$ □ vonal.

és csakugyan mindegyik pénzdarabra ennyi, mert valamint ha ezen számokat a' nekik megfelelő pénznemek számával sokszorozzuk, a' származatok egyenlően = 27186 közel, ugy részeseink előjönnek, ha 27186 ot a' pénznemek' számával elosztjuk. Ezen egybehangzása tekinteteinknek különös nem lehet előttünk, mert csak azt bizonyítja, hogy a' körök átmérőji arányban vannak átmérőjök négyszögeivel; ha tehát asztalomra egyetlen egy kört írok, a' négy szegletén maradott hézag is csak ennyi lesz. Ekkor tudjuk, a' kör' 's körülteírt rendes négyszög' térszínének különbségét keressük.

Ha köröm' átmérője, tehát asztalomnak egy oldala, $= 360$ vonal, sugára $= 180$, félkörülete $180 \times 3{\cdot}14159\ldots$ $= 565{\cdot}486668$ □ vonal, és térszíne $= 565{\cdot}4867 \times 180 =$ $101787{\cdot}6$ valamint volt mindegyik pénznemnek öszszes térszíne és szinte:

$129600 - 101787{\cdot}6 = 27812{\cdot}4$ □ vonal a' hézag térszíne.

Ha végre az átmérő $= 1$, a' kör' térszíne $= r^2\pi =$ $(\frac{1}{2})^2\pi = \frac{1}{4}\pi = \frac{\pi}{4} = 0{\cdot}785398163397\ldots$, a' körülírt négyszögé pedig $= 1$, tehát a' hézag állandóan $1 - 0{\cdot}785398$ $= 0{\cdot}214602$, bármelly legyen a' kör átmérője, ezen számot kell négyszögével sokszorozni és a' különös esetre megleljük a' hézagot kifejező számot. Esetünkben az átmérő (asztalunk oldala) $= 360$ vonal, és $360^2 = 129600$, a' hézagok térszíne eszerint

$$129600 \times 0{\cdot}214602 = 27812{\cdot}4 \text{ mint feljebb.}$$

9. Öt darab anya juhra egy négyszögöl kívántatik. Ha juhaimat négy sorba állítom, melly terjedségei lesznek az istállonak? feltévén hogy az illy épületeknek legalkalmasb szélessége 5öl, és juhaim száma 1000.

Szükségem van $1000 : 5 = 200$ négyszögöl térre.

Ha tehát az istállónak széle 5öl, lesz hossza $200 : 5$ $= 40$ öl, minden sorban áll $1000 : 4 = 250$ darab marha, mindegyike $4 : 25 = 0{\cdot}16$ öl $= 0{\cdot}16 \times 6 = 0{\cdot}96$ közel egy lábnyi tért foglal el az istálló hosszából. Ebből látni hogy a' juhok példátlanul összeszorulnak és szükséges hogy 5 sorban álljanak; ekkor 200 juh lesz egy egy sorban 's mindegyikre jut a' hosszvonalból $4 : 20 = 0{\cdot}2$ öl $= 1{\cdot}2$ láb.

Ha 1200 juhra kell istállót építenünk elébbi adataink szerint, a' terjedségeket aránylat által találjuk meg [37].

Ha 6 sorba állítom az 1200 juhot, jön mindegyik sorba 200, és istállóm' hossza az elébbeni $200 \times 0{\cdot}2 = 40$ öl, de széle 6 öl lesz és térszíne 240 négyszögöl.

10. Lássuk miként változnak a' terjedségek, ha az alakok változnak.

a) Hosszított négyszög alakú istállónknak hossza 40, széle pedig 6 öl, kell tehát hozzá $2\times40+2\times6=80+12=92$ ölnyi hosszaságú falazat.

b) Ha alakja rendes négyszög, 240nek gyökere közel 15·4919 lévén, mindegyik oldala 15·492 öl közel 's a' négy öszszesen 61·967 öl, nem egészen 62 öl, 's a' különbség már $92-62=30$ öl.

c) Ha alakja rendes hatszög. Táblámban a' hatszög térszíne = 2·59807 . . . ha oldala = 1. Ezen számmal elosztván 240t, a' szám 92·377nek gyökere keresett hatszögöm' oldala 's közel 9·61 's igy alakom körülete = $9{\cdot}61\times6=57{\cdot}66$ öl.

Tudjuk hogy ezen rendes hatszög 6 egyenlő háromszögre oszlik 's mindegyiknek térszíne $240:6=40\square$ öl, és ebből is megleljük egy oldal hosszát.

d) Ha alakunk rendes 8szög, mindegyik háromszögében $240:8=30\square$ öl tér lesz.

Ezenfelül a' 8szög térszíne 4·8284 . . . ha oldala = 1, tehát esetünkben $240:4{\cdot}8284=49{\cdot}3$nak gyökere, közel 7 öl lesz egy oldalnak hossza és 8nak öszszesen $7\times8=56$ öl közel.

e) Ha végre alakunk kör. $240:3{\cdot}1415=76{\cdot}395$ szám' gyökere közel 8·74 körünk sugára, körülete tehát $8{\cdot}74\times6{\cdot}2832=54{\cdot}915$ öl közel.

Szembetűnő mennyi anyag kíméltetnék, ha épületeink alakja kör lenne vagy ehez közelitene; igy p. o közel 55 lábnyi falazattal szintazon tért foglaltunk, mennyit első esetünk' 92 öle zárt bé.

Ha most kérdésünket megfordítjuk kérdezvén: mennyi tért zárnak bé ezen különböző alakok, ha falaik körülete változatlan 92 öl, következő számokra találunk:

b) A' rendes négyszög' egy oldala lesz $92:4=23$ öl, és térszíne $23^2=23\times23=529\square$ öl.

c) A' rendes hatszög' oldala 92 : 6 = 15·333 öl, térszíne $(15{\cdot}333)^2 \times 2{\cdot}59807 = 610{\cdot}83$ □ öl.

d) A' rendes 8szög' oldala 92 : 8 = 11·5 öl, térszíne $(11{\cdot}5)^2$ vagy $132{\cdot}25 \times 4{\cdot}8284272 = 638{\cdot}56$ □ öl.

e) A' kör' sugára 46 : 3·14159 . . . = 14·642 . . . térszíne $46 \times 14{\cdot}642 = 673{\cdot}532$ □ öl.

Ha ezen számokat egymáshoz hasonlítjuk; a' kör p. o. $673{\cdot}5 - 240 = 433{\cdot}5$ □ öl térrel foglal be többet mint eredeti hosszított négyszögünk, 's ha ezen kerek istállóba ugy raknók el a' juhokat, hogy minden 5 juhra egy négyszögöl jusson, béférne $673{\cdot}5 \times 5 = 3367$, vagy majd három annyi, mennyi befért 6öl széles és 40 öl hosszú istállónkba.

Oka miért nem alkottatnak olly épületek nagyobb számmal, mellyek polygonok vagy a' körhöz közelítnek, csak a' tetők nehéz és költséges alkotása; ha itt ujabb és czélirányosabb találmányok tétetnek, bizonyosan szaporodni fog a' rendes alakú építmények száma.

11. A' mérőket helyes egynevűekre vinni, ha térszíneiket keressük; a' hosszmérők béosztását ismervén, ezeknek négyszögei jelölik a' tért, igy lesz:

1 négyszögmérföld $= (4000)^2$ négyszögöl
$= (4000)^2 \times 6^2$ négyszögláb
$= (4000)^2 \times 6^2 \times 12^2$ négyszöghüvely, és
$= (4000)^2 \times 6^2 \times 12^2 \times 12^2$ négyszög vonal.

Minden feljebb való mérőből alsóbb válik eszerint, ha azt osztási részeinek négyszögével sokszorozzuk. Megfordítva lesz pedig minden alsóbb rendű mérőből felsőbb rendű, ha osztási részeinek négyszögével elosztatik; igy feljebbi sorunk megfordul 's lesz:

□ vonalból	12^2	elosztása	által	□ hüvely,
□ hüvelyből	12^2	»	»	□ láb
□ lábból	6^2	»	»	□ öl és végre
□ ölből	4000^2	»	»	□ mérföld.

A' földeket (birtokokat, erdőket, mívelt földet 's a' t.) holdal szokás mérni 's abban kifejezni, és csakugyan van 1100, 1200, 1500 és 1600 négyszögölet foglaló hold. Ha ezen számokkal osztjuk egymásután 16 milliót, mennyi a' négyszögmérföldben levő négyszög-ölek' száma, sorjában találjuk hogy:

1 □ mérföldben	14545·45	1100 □ öles hold	
	13333·33	1200 □ » »	
	10666·66	1500 □ » »	és
	10000	1600 □ öles hold van.	

12. A' föld bélapult gömb, bélapulása sarkainál van, legnagyobb körülete az egyenlítő; ezért két különböző tengelye, a' kisebbik 1713·2 a' két sarkot kötvén egybe, a' nagyobbik' az egyenlítői 1718·8 mérföld. Ezen számokat π vel sokszorozván, lesz kis köre 5380·2, a' nagy pedig 5399·8 mérföld; ezért vétetik a' föld' körülete kerekszámban 5400 mérföldre.

Minden kör 360 fokra oszlik 's így van földünkön a körület' minden fokában 540 : 36 = 15 mérföld.

Ha a' földet egyenlítőjén kettévágnók, nagy köréneк térszíne vagy síkja

$$2700 \times 859{\cdot}4 = 2320380 \; \square \text{ mérföld lenne.}$$

13. Az országok' térszínei is négyszögmérföldekben fejeztetnek ki; de mérésök bajos, mert a' határ-vonalok nem egyenesek és számtalan sok háromszögök' térszíneit kell megmérni; ha ezen háromszögök nincsenek a' legnagyobb szigorúsággal megmérve és össze nem ütnek tökéletesen, a' mérés és számítás telvek hibákkal. Gyakorta csak széle és hossza vétetik valamelly országnak közelítőleg és ezen két számnak származata által adatik térszíne; de ezen mód semmi megnyugtatást nem adhat és nevetséges, mert mint, kivált Europában, az országok helyezve vannak, nincs közöttük négyszög alakú.

Ha hazánk' térszíne helyesen van adva 66914 olly négyszög-mérföldben, mellyből 60 megy az egyenlítő' egy fokára, (melly mérföld gyakorta használtatik a' geographok által), közönséges geographiai mérföldre visszük azokat, ha $16 = 4^2$ által elosztjuk 's lesz 66914 : 16 =

4182·1 □ mérföld olly mérföldekben, mellyekből 15 jut az egyenlítő egy fokára. Tudjuk hogy a' térszínek ugy állanak, mint a' vonaloknak négyszögei; 15 épen egynegyedrésze 60nak, egynegyednek pedig négyszöge $\frac{1}{4} \times \frac{1}{4} = (\frac{1}{4})^2 = \frac{1}{16}$ [44].

Szinte igy lesz térszíne kifejezve 41821000 hold által, mellyben 1600 □ öl van és 66914·16 míllió négyszög-öl által.

14 Ha földünk népessége 750 millió, mennyi téren férne el valamennyi lakosa földünknek ha felvesszük, hogy 9 személy könnyen állhat egy négyszög-öl téren, 16 pedig szorultan?

Ha a' népesség számát 9 és 16 által elosztom, két részesem 83333333 és 46875000 a' négyszög-ölek' számát adja, elosztván végre ezeket 4000^2 által, az első esetben 5·2083, a' másodikban 2·9296 négyszög mérföldet találunk.

Honunk' népessége volt 1833ban hiteles kútfők szerint 11,223587 személy; jön tehát mindegyik négyszögmérföldre 11223587 : 4182·1 = 2684 személy és mindegyik lakosra 16,000000 : 2684 = 5961·2 □ öl közel, vagy mi mindegy

41821000 : 11223587 = 3·726 hold (1600 □ öles).

Ha feltesszük hogy honunk térszínének $\frac{4}{5}$ része mivelhető és csakugyan mivelés alá jön, és hogy mivelése a' lehetőségig tökéletes, ekkor mint Angliában 1850 □ öl föld elég lesz mindegyik személyre; lakhatja tehát:

66913600000 : 1850 = 36170000

személy közel.

15. Az útak nem csekély tért foglalnak valamelly országban 's azért kell ügyelni, hogy szélességük szükségtelen nagy ne legyen. A' tapasztalás tanítja, hogy 5 ölnyi szélességű útak minden kívánatot kielégítnek. Angliában, hol a' közösülés kétségen kivül legnagyobb a' föld minden országai között, 30 lábnyinál szélesebb út nincs, az angoly láb pedig valamivel kisebb a' nálunk

haszonban lévő bécsi lábnál. Az igaz hogy, kivált az ujabb útak mellett, mindenütt egy öl szélességű gyalogút nyúlikel a' szekérút mellett 's imitt amott a' nagy városok közeliben mindkét felin.

Több országokban, hol a' népesség még nem érte el a' kiterjedésnek megfelelő tömöttségét, igen széles útakat láthatni. A' mellett hogy a' széles útakat jó karban tartani igen költséges és csaknem lehetetlen az ide 's tova keringelése miatt a' szekereknek; a' földbeli veszteség sem csekélység. Honunkban imitt amott nem csak példátlan szélességű utakra találunk, 's nem ritka a' 8, 10 és 12 öl szélességű ut is, de ezen felül a' földeken, réteken, kaszálókon szokás keresztül kasul hajtani. Tudjuk hogy a' tér a' vonal' növésével négyszögben nő 's hogy minden szükségtelen öl a' szélességben tetemes veszteglést következtet. Angliában az útak hossza 5000 mérföldet felülhalad, ezen mennyiségnél minden felesleges öl szélesség már 20 millió négyszög - ölet, vagy $1^1/_4$ □ mérföldet vesztegetne, melly földarabon ezt mivelve 3949·4 ember talál táplálatot.

Ha p. o. honunkban jelenleg az útak hossza 3000 mérföld, 5 ölnyi szélességgel csak

$$3000 \times 4000 \times 5 = 60000000 \,\square\, \text{öl}$$

földet vennének számba, holott ha átaljában 8 öl szélesek, már 36 millió □ öl elveszve van és ez $2^1/_4$ □ mérföld, 's rajta közel 24498 ember élhetne az ángol népességi arány szerint, a' magyar hon' mostani népessége aránya szerint pedig 6039.

III. A' mérők' kifejezései tizedes törtekben.

Ritka példánk volt eddig, mellyet a' tizedes törtek' segéde nélkül kiszámitani lehetett volna; tekintsük melly viszonyban állanak ezen tizedes törtek az általuk kifejezett mérőkhöz, és hogy hány jegyet kell belőlök vennünk a' kérdés természetéhez képest?

Első tekintetre is bizonyos hogy, ha a' mérők' kis osztályaiban számítunk p. o. hüvelyben vagy vonalban, egy vagy legfeljebb két tizedes hely tökéletesen elég, mert a' vonalok' törtrészeit is számbavettük; de ha lábokban vagy ölekben számítunk, megtörténhető, hogy kivántatnak a' hüvelyek és vonalok is, és ekkor annyi tizedes jegyre van szükségünk, mennyiből a' legkisebb mérő is kikerülhessen.

Ha az adott terjedségek különböző mérő osztályokban vannak kifejezve, mindenkor elég lesz egy tizedes jegyet venni a' következésben, ha valamennyi mérőt a' legkisebb nevezetre visszük; de mivel ekkor nagy számokkal mívelünk, helyesebb a' mérőket a' legnagyobbikra változtatnunk, és ekkor több tizedes hely fog kívántatni a' végkifejezésben.

A' hüvely és vonal-közti viszony $= 1 : 12 = 0{\cdot}083333\dot{3}$, hol a' hármas jegy ismételő és a' tizedes tört végtelenségig közelítő. Ha tehát $0{\cdot}08\dot{3}$ egy tizenkettedrésze a' hüvelynek, egy vonal értéke is hüvelyekben kifejezve.

Ha két tizedes hellyel megelégszünk $0{\cdot}08 \times 12 = 0{\cdot}96$ és $1 - 96 = 0{\cdot}04$, $0{\cdot}04$ hüvely pedig $= 0{\cdot}04 \times 12 = 0{\cdot}48$ vonal, hijánzik tehát még közel egy fél vonal valódi értékéből hüvelyünknek. Ha nagyobb szigorúság kívántatik, három tizedesjegy ád $0{\cdot}083 \times 12 = 0{\cdot}996$, 's itt a' különbség csak $0{\cdot}004$ hüvely $= 0{\cdot}048$ vonal; közel egy 50 ed része a' vonalnak.

Ha a' számot $0{\cdot}083$ sorjában 2, 3, 4, 5····, 12 szer vesszük, szintannyi vonalnak kifejezését találjuk hüvelyekben.

A' láb és hüvely közti viszony szinte ez, mert a' lábban is 12 hüvely van, 's igy lesz p. o. hét hüvely' értéke lábokban kifejezve $7 \times 0{\cdot}083\dot{3} = 0{\cdot}583\dot{3}$.

Az öl és lábközti viszony $= 1 : 6 = 0{\cdot}16\dot{6}$, hol a' hatos ismétel, 's igy lesz p. o.

$$3 \text{ láb} = 0{\cdot}16\dot{6} \times 3 = 0{\cdot}499 = 0{\cdot}5 \text{ öl közel.}$$

Ha most a' vonalokat lábokban akarjuk kifejezni, lesz 1 vonal

$$0{\cdot}083\dot{3} : 12 = 0\ 0069\dot{4} \text{ láb},$$ hol a' 4es ismétel,

ha hüvelyt ölben, lesz:

$$0{\cdot}08\dot{3} : 6 = 0{\cdot}0138\dot{8} \text{ öl},$$ hol a' 8as ismétel,

's végre á' vonalok ölben kifejezve:

$$0{\cdot}0069\dot{4} : 6 = 0{\cdot}0011574074 0 \text{ 's a' t.}$$

hol a' 3 jegy 740 ismétel.

Természetes hogy ezen kifejezéseket közönséges törtekkel is adhatjuk, mert 1 vonal $= {}^{1}/_{12}$ hüvely $= {}^{1}/_{144}$ láb és ${}^{1}/_{864}$ öl; de a' tizedes- jegyekkel könnyebb számítani, mert mind egynevűek és ezenfelül az osztás sokszorozásba fordul.

Az ölön tul egész a' mérföldig nincs hosszmérőnk (a' holdak térmérők) és a' különbség vagy viszony 1:4000 temérdek. Elevenen érezhető az ezen két hosszmérő közti hiány és valóban helyes lenne, vagy egész mérő alkotmányunkat a' számok' tizes rendszeréhez alkalmazni ugy, hogy minden feljebbvaló mérő tizakkora lenne, mekkora az előtte álló kisebb, vagy pedig a' mostanival megegyezőleg az öl és mérföld közzé néhany az ölnél nagyobb, de a' mérföldnél kisebb osztályi mérőket béiktatni.

Az első rendszer szerint p. o. lenne egy hüvelyben 10 vonal, egy lábban 10 hüvely, egy ölben 10 láb, 10 ölnek valamelly helyes nevet adván, ebből ismét 10 a' következő helyes nevű mérőre, 's ezután következhetne a' kis mérföld 's utánna végre a' nagy mérföld. Itt 8 különböző osztályt vettünk fel 10, 10 alsóbb osztályi részekkel, 's lenne például a' nagy mérföld' kifejezése 10,000,000 vonal és 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, vagy megfordítva 8, 7, 6, 5, 4, 3, 2, 1, sorban egymásután vonal, hüvely, láb öl, tizes öl, százas öl, mérföld és tizes vagy nagy mérföld.

Ezen rendszer a' mostaninak tökéletes változtatását következtetné de a' köztük levő viszony könnyen meglelhető; mostani geographiai nagy mérföldünk p. o.

$$4000 \times 6 \times 12 \times 12 = 4000 \times 864 = 3456000 \text{ vonal},$$

és elébbi jelölésünk és béosztásunk szerint állana 3 kis mérföldből, 4 százas-ölből, 5-tizes ölből, és 6 egyes ölből, egy öl pedig 1000 vonalból, holott most egy öl $= 6 \times 12 \times 12 = 864$ vonal.

Ha a' béiktatást válosztanók az öl után, lehetne következtetni 10 és 100 öles mérőt és ezután 1000 öleset, és lenne p. o. 1000 öl a' kis mérföld, melly csakugyan az olasz, franczia, angoly 's a' t. geographiai mérföldel egyenlő, mellyből 60 jut az egyenlítő' egy fokára, a' 4000 öles mérföldet pedig *nagy* mérföldnek nevezhetnők.

Ha most az apróbb mérőket a' mérföld' részeiben fejezzük ki, sok tizedes helyre lesz szükségünk, mert

$$1 \text{ öl} = 1:4000 = 0{\cdot}00025 \text{ mérföld}$$
$$1 \text{ láb} = 0{\cdot}000041\dot{6}$$
$$1 \text{ hüvely} = 0{\cdot}00000347\dot{2} \text{ és végre}$$
$$1 \text{ vonal} = 0{\cdot}000000289351\dot{8}51\dot{8} \text{ mérföld, melly}$$

számokban a' 6, 2 és 518 ismételők.

Ha számainkat öszeírjuk, ki lesznek fejezve sorjában a' kisebb nevezetűek nagyobb nevezetűekben következőként:

$$\begin{aligned} 1 \text{ vonal} &= 0{\cdot}08\dot{3} \text{ hüvely} \\ &= 0{\cdot}0069\dot{4} \text{ láb} \\ &= 0{\cdot}00115\overset{\frown}{740} \text{ öl és} \\ &= 0{\cdot}0000002893\overset{\frown}{518} \text{ mérföld} \end{aligned}$$

1 hüvely $= 0{\cdot}08\dot{3}$ láb

$= 0{\cdot}013\dot{8}$ öl, és

$= 0\ 00000347\dot{2}$ mérföld

1 láb $= 0\ 16\dot{6}$ öl

$= 0{\cdot}000041\dot{6}$ mérföld és végre

1 öl $= 0{\cdot}00025$ mérföld.

Figyelemmel tekintvén ezen számokra látjuk hogy, ha hüvelyekben számítunk, a' harmadik tizedes jegy a' mérők' legkisebb osztályát kielégítő közelítéssel adja. Ha lábokban számítunk, a' három tizedes jegy ismét jól adja a' hüvelyeket, de a' vonalokhoz már legalább 4, és ha szígorúan számítunk 5 tizedes jegy kívántatik. Ha ölben számítunk, az ölek' három tizedes jegye a' lábokat helyesen, 5 a' hüvelyeket, a' vonalokat pedig csak 6 jegy adja. Ritka azonban, hogy a' következésben az alsóbb osztályok is kerestetnek és közönségesen elégtétetik a' feládásnak, ha azon mérőnek egy tizedes jegye adatik, mellyben számítatott; de ha csakugyan adnunk kellene az alsóbb osztályokat, könnyen tehetjük ezt viszonyaink általi sokszorozás által.

P. o. 1) 8756 láb hány mérföld?

8756 : 6 : 4000, vagy 24 ezredrésze 8756nak,

és tizedes törtekben $= 0{\cdot}3648\dot{3}$ mérföld.

2) 3548 öl hány mérföld?

3548 : 4000 = 0·887 mérföld 's a' t.

A' négyszög-mérőkkel szinte igy számolunk, tudván hogy

1 □ mérföld = 16000000 □ öl

= 376000000 □ láb

= '54144000000 □ hüvely és

= 7796736000000 □ vonal,

lesz tehát megfordítva

$$1\ \square\ \text{vonal} = {}^1/_{144} = 0{\cdot}0069\dot{4}\ \square\ \text{hüvely}$$

$$= \frac{1}{(144)^2} = 0{\cdot}0000482253\ \square\ \text{láb}$$

$$= \frac{1}{(144)^2 \times 6^2} = 0{\cdot}0000013427\ \square\ \text{öl és}$$

$$= \frac{1}{(144)^2 \times 6^2 \times (4000)^2} = 0{\cdot}0000000000000837245$$

$\square$ mérföld.

Szinte igy 1 $\square$ hüvely $= 0{\cdot}0069\dot{4}$ $\square$ láb
1 $\square$ láb $= 0{\cdot}02\dot{7}$ $\square$ öl 's a' t.

Ezen adatok szerint helyes lesz olly táblácskákat alkotni, mellyből a' mérők' sokasait számítás nélkül már készen kivehetjük. A' hosszmérők' táblácskáját íde írjuk, a' tanuló szorgalmára hagyván a' térmérőkre is alkalmazni ezen módot.

Az első függő vonalban vannak a' vonalok' egyes részei, és a' következőkben kifejezve hüvely láb és öl tizedes részeikben 7 tizedes jeggyel, mennyi minden esetre elég. Szinte igy van a' másik tábla részben a' hüvely, lábokban és ölekben, valamint a' láb ölben kifejezve.

A' kis táblák kiterjedést nyerhetnek, ha az osztályok *tizedes* részeit is ki akarjuk fejezni felsőbbrendű mérők által.

A' táblácska haszonvéte nyilván.

Ha p. o. kérdeznők, 9 láb 8 hüvely és 7 vonal hány öl? a' táblácskából kivesszük sorjában:

9 láb = 1 5 öl
8 hüvely = 0·1111111 és
7 vonal = 0·0080918

Összszesen = 1·6192029 öl

's ha ezen összest mérföldbe kell változtatni

1·6192029 : 4000 = 0·000404800725 mérföld.

Vonal	hüvelyben	lábban	ölben
1	0·0833333	0·0069444	0·0011574
2	0·1666666	0·0138888	0·0023148
3	0·2800000	0·0208333	0·0034722
4	0·3333333	0·0277777	0·0046296
5	0·4166666	0·0347222	0·0057870
6	0·5000000	0 0416666	0·0069444
7	0·5833333	0·0486111	0.0080918
8	0·6666666	0·0555555	0·0092592
9	0·7500000	0·0624999	0·0104166
10	0·8333333	0·0694444	0 0115740
11	0·9166666	0·0763888	0·0127314
12	1·0000000	0·0833333	0·0138888

Hüv.	lábban	ölben
1	0·0833333	0·0138888
2	0·1666666	0·0277777
3	0 2800000	0·0416666
4	0·3333333	0·0555555
5	0·4166666	0·0694444
6	0·5000000	0·0833333
7	0·5833333	0·0972222
8	0·6666666	0·1111111
9	0·7500000	0·1249999
10	0·8333333	0·1388888
11	0·9166666	0·1527777
12	1·0000000	0·1666666

Láb	ölben
1	0·1666666
2	0·3333333
3	0·5000000
4	0·6666666
5	0·8333333
6	1·0000000

Megfordítva változtatjuk a' nagyobb mérőket apróbbakba mint láttuk osztályaik száma' sokszorozása által. P. o.

0·8431 öl hány láb? $0·8431 \times 6 = 5·0586$ láb, és hüvelyben

$$0·8431 \times 6 \times 12 = 5·0586 \times 12 = 60·7032 \text{ hüvely,}$$

és vonalokban

$$60·7032 \times 12 = 728·4384 \text{ vonal.}$$

Akar egymásután sokszorozunk az osztályi számokkal, akar egyszerre azoknak származatával mindegy és p. o. ölekből vonal lesz

$$6 \times 12 \times 12 = 72 \times 12 = 144 \times 6 = 864$$

általi sokszorozással.

Adva van 0·75405625 mérföld, kívántatik kifejezése minden alsóbb osztályban?

1) $0·75405625 \times 4000 = 3016·22500$ öl
2) $3016·22500 \times 6 = 18097·350$ láb
3) $18097·35 \times 12 = 217168·2$ hüvely
4) $217168·2 \times 12 = 2606018·4$ vonal.

Ha pedig kívántatik hogy, a' mérföld ölekben, lábokban 's a' t. legyen kifejezve egyszerre, lesz:

$$0·225 \times 6 = 1·350 \text{ láb}$$
$$0·350 \times 12 = 4·2 \text{ hüvely és}$$
$$0·2 \times 12 = 2·4 \text{ vonal, és öszszesen}$$

$3016^0\ 1'\ 4''\ 2·4''' = 0·75405625$ mérföld, ha a' (c) ölet, a' kis vonalok pedig sorjában lábot, hüvelyet és vonalt jelentenek.

Hasonlóan lesz 0·00428793 mérföld

$$= 17^0\ 10''\ 11·08608'''.$$

16) Megmérünk valamelly tért 's alakját rendes hatszögre vagy egyenlő 6 háromszögre vivén, mellynek egy oldala 2400 öl, kérdés mennyi a' tér?
2400 öl $= 0·6$ mérföld, ennek négyszöge $0·6 \times 0·6 = 0·36$ sokszorozván ezt táblánk számával (X. Beszélgetés) a' tér lesz

$$0·36 \times 2·5950762 = 0·935307432 \square \text{ mérföld.}$$

Ha a' függönnyel számítunk, a' hatszög' félkörülete $3 \times 0{\cdot}6 = 1{\cdot}8$ mérföld, térszíne $1{\cdot}8 \times 0{\cdot}6 \times 0{\cdot}8660254 = 0{\cdot}935307432$ □ mérföld mint eléb.

Ha ölekben számítunk, a' tér $2400^2 \times 2{\cdot}5980762 = 2400 \times 2400 \times 2{\cdot}5980762 = 14964918{\cdot}912$ □ öl, és ezen számot 16000000 val elosztván, jön ismét 0·935307432.

IV. Színmérés.

Ha előadási tanainkat ismételjük és könnyebb tekintet kedviért összevesszük, következnek sorjában a' merők' színei.

a) Az oszlop és henger egybehangzó merők, mindegyiknek talpa' körülete sokszoroztatik magosságával és a' származat lesz színök, mellyhez még a' talpak térszínei adandók.

Az oszlopok talpai' körülete, a' talpokat alkotó egyenes vonalok, mellyeknek hosszaságai ismeretesek, a' henger talpai tökéletes körök és térszíneiket sugárjok vagy átmérőjök adja. Magossága mind kétféle alaknak egyszersmind tengelye, vagy egyik talpról a' másikra vezetett függő.

Ha a' magosságot m betűvel jelöljük, a' talpat pedig b vel (basis-tól), a' talp' körületét k val, minden oszlop' és henger' szine $S = mk + 2b$, hol b ismét mint tudjuk $\frac{1}{2}k \times p$, ha p azon számot jelöli, melly vagy sugára a' talpnak, vagy függője valamellyik oldalnak a' talp középpontjából.

Az első kifejezés a' rendetlen talpú oszlopokra is alkalmazható, csak hogy a' talpakat háromszögökbe osztván, különösen kell számítani, és $\frac{1}{2}k \times p$ csak a' rendes alakú talpakra illik; hogy végre b alatt a' talp' térszíne értetik, nyilván.

b) A' pyramisok és kupok egybehangzó alakok és színek egyharmada a' velük egyenlő talpú és magosságú oszlopnak vagy hengernek, hozzájuk adván a' talpat egyszer.

Ha feljebbi kifezésünket megtartjuk, lesz a' kup és pyramisra $S = \frac{1}{3}mk + b$, hol tudjuk m oldal hosszaságot, nem pedig függőmagosságot jelöl.

c) A' gömb' színe tudjuk, 4-szer nagyköre' térszínével egyenlő 's ha ez πr^2; $S = 4r^2\pi$.

d) A' gömbdarab' színe végre, ha nagy körének átmérője $= a$ és a' darab' magossága m,

$$S = \frac{1}{2} a \pi m,$$

1) Vegyünk például valamelly színt kifejezve négyszöglábban és keressük: melly terjedségűek lesznek az alakok egyes részei egyenlő körülettel.

Legyen az adott szín 360 négyszögláb, a' talpak' körülete 12 láb; keressük a' többi viszonyokat különböző alakokra.

A' három oldalú oszlop' talpának egy oldala = 4 láb, félkörülete 6 láb, 2 talpának térszíne

$$2 \times 4^2 \times 0{\cdot}4330127 = 13{\cdot}8564064 \;\square\; \text{láb}$$

marad a' három oldalra

$$360 - 13{\cdot}856 = 346{\cdot}144 \;\square\; \text{láb},$$

és egy oldalra ennek harmada 115·381 □ láb,
az oldal magosság tehát 115·381 : 4 = 28·845 láb hosszú.

A' négy oldalú oszlop' egy talpának vonala 3 láb, térszíne 9, és mindkét talpa = 18 □ láb.

Marad a' 4 oldalra 342, és egyre 85·5 □ láb.

Magossága eszerint 85·5 : 3 = 28·5 □ láb.

Az öt oldalú oszlop' egy talp oldala $\frac{12}{5} = 2{\cdot}4$
a' két talp' térszíne $2(2{\cdot}4)^2 \times 1{\cdot}7204774 = 19{\cdot}81989965$,
marad 5 oldalra 340·18 □ láb és egyre 68·036 □ láb.

Magossága 68·036 : 2·4 = 28·34 □ láb.

A' henger' körülete 12 lévén, sugára

$$= 6 : 3{\cdot}14159\ldots\ldots = 1{\cdot}9098$$

és térszíne $(1{\cdot}9098)^2 \times 3{\cdot}14159\cdots\cdots = 11{\cdot}460$.

's mindkét talpa $= 22{\cdot}92$ □ láb,

színére marad $337{\cdot}08$ □ láb,

és magosságára $337\ 08 : 12 = 28{\cdot}1$ □ láb közel.

Már ezen közelítő számításokból észrevehető hogy, a' színek arányban vannak a' talpokkal és magosságokkal, és hogy a' tan helyes hogy: egyenlő talpú és egyenlő magosságú oszlopok és hengerek egyenlők.

Ha tehát a' kérdést megfordítjuk mondván hogy: ha a' talpok és magosságok egyenlők, mennyi tért foglal az alakok' színe? Szinte egyenlő következésekre jutunk.

A' magosság tehát egyenlő talpal ugy változik, mint változnak a' színek, és megfordítva, egyenlő magossággal a' talpak a' színekkel egyenlő arányban változnak.

2) Mennyi anyag kell, négyszög mérőben kifejezve, valamelly hengerhez, ha talpának átmérője 1 láb? Tudjuk hogy az anyag lehet papiros, fa, vas, réz vagy más pléh, kerestetik azon darab' nagysága, mellyből illyen henger kerül, két talpával együtt vagy ezeken kivül.

Ha a' henger magossága adva nincs, a' kérdés bizontalan. Tegyük fel hogy magossága vagy tengelye egyenlő legyen talpának átmérőjével.

Ekkor kerülete $= \pi = 3{\cdot}14159\cdots$, a' talpak' térszíne $\frac{1}{2}\pi$ ennek fele, és

$$3{\cdot}14159\cdots + 1{\cdot}57079 = 4{\cdot}7124 \ \square \text{ láb.}$$

A' kivágott három sík darab tehát $4{\cdot}7124$ □ láb térszínt foglal, de tudjuk hogy a' köröket csak egy egy négyszöglábnyi darabból vághatni ki, midőn a' henger görbült oldala egyenszögű négyszög, mellynek magossága 1 láb és hossza $3{\cdot}14159\ldots$; kell eszerint $2 + 3{\cdot}14159 = 5{\cdot}14159$ □ láb anyag, mellyből a' kivágás után $0{\cdot}4292$ □ láb elesík. (Lásd. 8. Példa).

3) Mekkora azon gömb' átmérője, mellynek színe 6☐ láb?

A' gömb' színe tudjuk $S=4r^2\pi$ az az, négyszer nagykörének térszíne, egy nagykör' térszíne esetünkben 1·5 ☐ láb, tehát:

$$r^2\pi=1{\cdot}5$$

ebből megleljük r^2 vagy a' sugár négyszögét, ha 1·5 öt elosztjuk $\pi=3{\cdot}14159\ldots$ által, és a' részes számnak gyökerét vesszük

$$r^2=1{\cdot}5:\pi=0{\cdot}47747\ldots \text{ és } \sqrt{0{\cdot}47747}=0{\cdot}691\ldots=r$$

vagy $r=\sqrt{1{\cdot}5:\pi}=0{\cdot}691$ a' gömb' sugára: ebből lesz körülete $=4{\cdot}341668$'s ennek fele $=2{\cdot}170834$, 's igy

a' nagy kör $r^2\pi=2{\cdot}170834\times0{\cdot}691=1{\cdot}5$

a' gömb' színe $4r^2\pi=4\times1{\cdot}5=6$ ☐ láb.

Igen könnyen meglelhetjük tehát a' gömbnek minden terjedségeit és részeit, ha tulajdon szine, nagy körének térszíne, nagy köre vagy körülete, átmérője (tengelye) vagy sugára advan van; egy adatnál több nem kell, és ha színe van adva:

$S=4r^2\pi$, mindegyik része következik belőle, mert

$$r^2=\frac{S}{4\pi} \text{ és } r=\sqrt{S:4\pi}$$

a' körület tudjuk $r\pi$ és a' nagykör' térszíne $r^2\pi$, ha r a' sugárt jelöli.

Ha a' tengellyel számítunk $t=2r$, vagy $r=\frac{t}{2}$ és

$$S=t^2\pi \text{ és } t=\sqrt{S:\pi}$$

a' nagy kör' térszíne $\frac{1}{4}t^2\pi$ és a' körület $\frac{1}{2}t\pi$, hol π változatlan az ismert szám 3·14159 . . .

4) Rakjunk egymásba alakokat; egy köbbe tegyünk hengert, a' hengerbe gömböt és kupot, a' gömbbe végre tetraedront és dodecaedront 's számítsuk mindegyik alak szinét, ha a' köb' egy vonaloldala 4 öl?

Természetes hogy, a' béírásnak az előttünk ismert törvények szerint kell történni. 10. Idomban a' köb és henger *abcd*, a' kup *ced* betűkkel van jelölve, a' tetraedron legyen *efg*, a' dodecaedron pedig a' rajzból kimaradt.

Következő adatok változatlanok.

A' köb, henger és kup magosságai egyenlők a' henger és gömb' átmérőjével és valamennyien $=4$ öl hosszak.

A' köb egy oldalának térszíne $=4^2$, színe tehát

$$6\times 4^2 = 6\times 16 = 96 \,\square\, \text{öl}.$$

A' henger' körülete, valamint a' gömb' nagy köre $=$ $=4\times 3{\cdot}14159.. = 12{\cdot}56636$ öl, ennek fele $=6{\cdot}28318$ öl, tehát térszíne egy talpnak, valamint a' gömb nagykörének és a' kup talpának $= 2\times 6{\cdot}28318 = 12{\cdot}56636 \,\square$ öl, mert $r^2=4$ és $r^2\pi = 12{\cdot}56636 \,\square$ öl $=$ egy talp térszíne:

a' henger görbült szine $= 4\times 12{\cdot}56636 = 50{\cdot}26544 \,\square$ öl,

ehez adván két talpát

$= 2\times 12{\cdot}56636 = 25{\cdot}13272 \,\square$ öl,

a' henger' szine . . . = ... $=75{\cdot}39816 \,\square$ öl,

a' gömb' színe . . . . $4\times 12{\cdot}56636 = 50{\cdot}26544 \,\square$ öl,

a' kupé . . . . $= 6{\cdot}28318\times 2\times m$,

hol m a' kup oldalának magossága és $=2{\cdot}125$ . . .

's igy színe $= 25{\cdot}13272 \,\square$ öl.

A' merő háromszög' egy sík oldal-vonala, a' körbe írt rendes háromszögnek egy oldala $= {}^3/_4\times 4 = 3$, tehát színe (a' kis táblából) $9\times 1{\cdot}7320508 = 15{\cdot}588457 \,\square$ öl.

A' dodecaedron egyik oldala végre $1{\cdot}5$ öl és színe (szinte a' kis táblából) $(1{\cdot}5)^2\times 20{\cdot}64578 = 40{\cdot}4657 \,\square$ öl közel.

V. Tartalom mérés. Tömeg mérés.

A' tartalom kifejezést a' testek' három tériránya származatára alkalmazzuk, mit a' latin *Volumen* szóval jelöl; több munkákban ezen tartalom *soliditas* (solidité, solidity) vagy merő név által is jelöltetik. Szoros értelemben tehát a' tartalom azon térnek kifejezése, mellyet valamelly test az üregben (ismét a' három irányú tért vévén) elfoglal különböző terjedségei szerint. Megkülönböztetjük mi itt a' tömeget a' tartalomtól azért, mert mint említők a' tömeg értelméhez a' testek tömöttségének vagy tulajdon sujjainak értelme járul.

Emlékezünk hogy, a' három irányú tér adja a' merők' tartalmát 's hogy három vonal származata, vagy egy vonal és négyszögtér származata fejezi ki a' köb' tartalmát; 's eszerint két féleként számítunk:

1) vagy a' három irány' vonalhosszaságát sokszorozzuk egymással, vagy

2) már négyszög számban kifejezett tért sokszorozunk vonalhosszaságot kifejező sámmal, mint az oszlopok, pyramisok, hengerek és kupoknál.

a) Ha az alakok' hosszát, magosságát és szélességét h, m és S betűkkel jelöljük, lesz a' tartalom T mindenkor:

$$T = h \times m \times S.$$

A' közönséges életben mindenkor a' három irány' kifejezése sokszoroztatik egymással és ezen tekintetből keressük a' megmérendő testeket vagy tárgyakat olly rakásokba vagy alakokba venni (millyen a' köb vagy parallepiped), mellyeknél a' három különös irány könnyen megmérhető.

b) Ha az oszlopok' és hengerek' talpa $= B$, hol B alatt itt a' talp' térszínét értjük, és m az alak' tengelymagossága, tartalmok

$$T = m \times B.$$

c) Ha a' pyramisok' és kupok' talpa szinte B, négyszög térmérőben kifejezve, és magosságok m, tartalmok változatlanul

$$T = 1/3(m \times B).$$

d) A' rendes merők' tartalmait tábláeskánkból ismerjük, ha egy vonal-oldalok adva van.

A' gömb' tartalma tudjuk $T = 4/3 r^3 \pi$,

hol r a' sugár és $= 1/6 t^3 \pi$, ha t a' tengely, valtozatlanul maradván $\pi = 3{\cdot}14159 \ldots$

1) Az épületek falai köbmérőben fejeztetnek ki és a' kőmíves eszerint fizettetik. Ha ezen köbtartalom ismeretes, melly mindenkor az, mert hossza, magossága és vastagsága adva vannak, könnyen számithatni, mennyí építési anyag kívántatik valamelly bizonyos nagyságú falazatra. Egy közönséges tégla 1 láb hosszú $1/2$ láb széles és $1/4$ láb magos, 's igy tartalma $1 \times 1/2 \times 1/4 = 1/8$ köblab, szükséges tehát egy köbláb falazathoz 8 tégla, szélibe kettő és magosságába 4 's igy mindegyik iránya 1 láb = 12 hüvely lesz; egy köb-ölben $6^3 = 216$ köbláb van, szükséges tehát egy köb-öl falazathoz $8 \times 216 = 1728$ darab tégla. A' jól kiégetett tégla 12 és 13 font közt nehéz, 's így a' falak' sullyát is számíthatni.

Megjegyzendő itt, hogy mivel a' téglákat összekötő anyag mész és homok, és csakugyan egy köb-ölhöz 7 köbláb mész és 52 köbláb homok kívántatik, közönségesen 1600 tégla számítandó egy köb-öl falazatra.

2) A' közönséges öl fa csak fele a' köb-ölnek, mert magossága és hossza egy-egy öl lévén, széle csak a' fa daraknak hossza és ez 24, 30, 32 és 36 hüvely közt áll.

Ha széle 30 hüvely, a' fa' öl tartalma $6 \times 6 \times 2{\cdot}5 =$ 90 köbláb.

ha 24 „ $T = 36 \times 2 = 72$,

ha 36 „ $T = 36 \times 3 = 108$ köbláb.

Mindegyik fa darab közt vannak azonban hézagok 's annál többek, mentül aprobb darabokra van a' fa vagdalva. Az üres helyeket az öl egyharmadának lehet venni, 's ha ezek három láb hosszak, a' valódi fatömeg csak $108 - 36 = 72$ köbláb.

Mint a' fa az erdőben daraboltatik, előre valóságos hengerek vágatnak, mellyeknek hossza vagy tengelye 3 láb, talpok' körülete pedig a' fa' vastagságától függ, 's ha két talpa nem egyenlő, pyramis darab. Mindkét esetben számítani tudjuk tartalmát. Feltesszük hogy, fadarabjaink rendes hengerek 's illy henger talpának átmérője 2 láb, 's ha 45 illy darabunk van, kérdés, hány öl fa kerül ki belőlök hasábokba hasíttatván?

A' henger' tartalma $r^2\pi m$ és esetünkben $\frac{1}{4}t^2m$
$T = 3{\cdot}14159 \times 3 = \frac{1}{4}4 \times 3{\cdot}14159 \times 3 = 9{\cdot}42477$ köbláb, ezt 45ször véve, lesz öszszesen

$$45 \times 9{\cdot}42477 = 424{\cdot}11465 \text{ köbláb},$$

és kerül belőle

$$424{\cdot}115 : 72 = 5{\cdot}89$$

vagy közel 6 közönséges öl.

Hasonlóan számítja az ügyes erdész valamelly fának tartalmát, és hogy hány ölet adhat.

3) A' különféle földmunkák vagy földásásoknál szükséges előre kiszámítani a' kiemelt föld' mennyiségét, ebből pedig a' munkához megkívántató erőt és időt 's végre a' költséget.

Bármelly legyen a' megmérendő tömeg' alakja, azon útakon keressük három térirányát, mellyek a' tudomány szerint legrövidebbek és czélirányosabbak. A' rendetlen alakzatokat visszavinni keressük rendesekre 's alkalmazzuk reájok szabályainkat.

A' földmunkáknál mindenkor ismerjük a' három térirányt 's ezeknek számbeli származata fejezi ki a' föld mennyiségét köbmértékben. Ha p. o. valamelly kertnek egyik része magosabb mint a' másik és egyiknek feleslegsége a' másik' híjánját pótolja, könnyen megleljük az egyik részből kiemelendő földmennyiséget a' másik rész híjánjából. Ha árkot kell ásni, ennek széle, hossza és mélysége előre ismeretes; szinte ha töltéseket alkotunk, adva van a' töltés' hossza, széle és magossága. Ha valamelly anyagot rakásokba kell rakni, ezeknek majd mindenkor rendes alakot adunk, és előre kijelöljuk talpát és magosságát: igy alkotjuk a' széna és más termény kazalt, igy rakjuk a' téglát, köveket, fát 's a' t. rendes 8 oldalú alakokba. Ha valamellyik alak' oldalai különbözők, mint ez az eset a' széna kazalnál, az árkoknál, mellyek mélységükkel *alább alább* keskenyednek, a' töltéseknél, mellyek *fel-*

felé keskenyülnek 's a' t. mindenkor könnyen kiszámítható azon oldalának térszíne, mellyet alakzatjaikban talpnak neveztünk, a' széna-kazalnál és töltéseknél ezen talp a' keskeny, vagy szélességi oldal, mellyet valamelly a' hosszra függőleg ejtett vágás tisztán előhoz: ha ezen sikot megmérjük négyszög vagy térszín mértékben, ezzel sokszoroztatik egyszerűen a' hosszaság 's az alak' tartalma tökéletesen kifejezve van.

a) Mennyi földmennyiség kerül ki, ha 48 öl hosszú és 5 öl szélességű földet 8 hüvelynyi mélységre kiemelünk? Természetesen a' három térirány' származata adja a' feleletet azon köbmérőben, mellyben számítottunk.

b) Valamelly árok 128 öl, szélessége 8 láb, mélye $4\frac{1}{2}$ láb, mennyi föld emeltetik ki?

Bizonyosan $768 \times 8 \times 4{\cdot}5 = 37648$ köbláb.

Ha az árok' alakja rendetlen oszlop, vagy is, csak két hosszú oldala egyenlő, a' másik kettő (az árok nyílása vagy szélessége, felül, és azon oldala, mellyet fenekének nevezünk) különböző, talpát mindenkor ismerjük tudván hogy, p. o. felül az árok szélessége 5, alól $3\frac{1}{2}$, mélysége pedig 4 láb, ekkor trapezunknak térszínét számítván, vele sokszorozzuk az árok' hosszát.

c) Hasonlóan számítjuk a' töltések' tömegét, ismervén magosságát, hosszát és szélét, vagy egész talpát térszinmérőben kifejezve. Ha valamelly töltés' magossága 7 láb, alsó szélessége 2 öl, felső pedig csak 1 öl, talpa, vagy mit eléb keresztülvágásnak neveztünk, trapez, mellynek talpa 2 öl, ennek átelleniben levő oldala pedig 1 öl és magossága 7 láb. Természetesen eloszlik ezen trapez két egyenlő magosságú háromszögbe, 's egyiknek talpa 2 öl, másiké 1 öl, és magosságuk 7 láb lesz. Igy találjuk meg a' keresztülvágás térszínét, melly esetünkben, lábokban számítva $12 \times 7 + 6 \times 7 = 84 + 42 = 126$ négyszögláb [43]; ha ezen számmal sokszorozzuk a' töltés hosszát, megleljük a' föld' mennyiségét köblábokban.

d) Ha az ásás kereken történik, mint a' kútaknál, a' gödör' átmérője adva van 's igy a' hozzátartozó körület is: kiszámítván a' kör' térszínét, melly tudjuk $r^2\pi$, ha r félátmérő, ezen térszínnel sokszorozzuk az ásás' (kút') mélységét.

Kutat ásatunk p. o. és mivel sokkal több földet kell kivenni, kivált ha a' föld homokos, hogy a' kút bé ne szakadjék a' munka közt, elkezdjük az ásást 3öl atmérővel, és mentül mélyebb megyünk, annál keskenyebbre ásatunk aránylag, míg végre 13 öl mélységben átmérőnk csak $\frac{1}{2}$ öl. A' kiásott alak természetesen kup levágás, mellynek talpa-átmérője 3, magossága 13, felső talpa, vagy tetője (itt kútunknak alsó része) $\frac{1}{2}$ öl. Ezen kupdarabot vagy külön számítjuk, vagy a' kiegészített kupot 's ennek csúcsát belőle levonjuk.

Valamelly pyramis vagy kupdarab' tartalmának meglelésére egy különös szabályunk van, melly szerint a' két talp térszíne kerestetik, ezen két térszín származatának gyökere vétetik és a' két térszín öszszeséhez adatik, a' három öszszes szám sokszoroztatik végre a' magosság' egyharmadával. Közönségesen kifejezzük a' mondottat, ha a' nagyobbik talp' térszíne T, a' kissebbiké t, magosság m, a' pyramis vagy kupdarab tartalma $A = (T + t + \sqrt{T \times t}) \times \frac{1}{3} m$.

Példánkban a' kupdarab felső talpának térszíne $T = (1\cdot5) \times 3\cdot14159\ldots = 22\cdot5 \times 3\cdot1415926 = 70\cdot6857$ □ öl, az alsóé $t = (0\cdot25)^2 \times 3\cdot14159\ldots = 0\cdot125 \times 3\cdot1415926\ldots = \frac{1}{8} \times 3\cdot1415926 = 0\cdot3927$ □ öl.

A' két talp térszínének származata $= 70\cdot6857 \times 0\cdot3927 = 27\cdot7583$, ezen származatnak gyökere, vagy

$$\sqrt{27\cdot7583} = 5\cdot2686$$

lesz eszerint $T + t + \sqrt{Tt} = 70\cdot6857 + 0\cdot3927 + 5\cdot2686 = 76\cdot347$ □ öl, sokszorozván ezt egyharmadrész magossággal, esetünkben 13 öl mélység' egyharmadával $= 4\cdot333\dot{3}$ al, lesz a' kiemelt földtömeg $= 76\cdot347 \times 4\cdot33\dot{3} = 330\cdot84$ köb-öl.

Ha a' munka rendesen folyik egyenlő átmérővel, a' kiásott tömeg henger, és könnyen számítható.

e) Mennyi víztömeg van p. o. valamelly 4 láb átmérőjű kútban, ha a' vízállás' magossága 9 láb?

A' víztömeg' alakja eszerint henger, mellynek átmérője $= 4$ és magossága $= 9$; és a' víz' mennyisége természetesen $4\pi \times 9 = 4 \times 9 \times 3{\cdot}14159 \ldots = 113{\cdot}097$ köbláb.

Ha kérdeztetik, hány taliga vagy szekér föld kerül ki egyik vagy másik földrakásból, szükséges hogy a' hordó eszköz' üregtartalmát ismerjük. Közönséges apró taligáinkba alig fér el egy köbláb, apró szekereinkre alig 14 vagy 16 köbláb. Ha ezen eszközeinket ugy alkotnók, hogy p. o. a' taligába épen egy köbláb, a' szekérre pedig (mellynek könnyen adhatunk rendes oldalú négyszög alakot) $1/_{12}$ köb-öl, vagy 18 köbláb férjen, számításaink mindenkor egyszerűbbek lennének.

f) Hány taliga föld kerül ki egy olly földrakásból, mellynek alakja egyenlő 4oldalú pyramis, talpának egy oldalvonala 25 láb, az alak' magossága 2 öl, a' taligába pedig $7/_8$ rész köbláb fér?

A' pyramis talpának térszíne $25^2 = 625$ □ láb, sokszorozván ezt a' magosság harmadával $= 12 : 3 = 4$ lábbal, lesz tömege $625 \times 4 = 2500$ köbláb, és megrakhatni vele $2500 : 7/_8 = 20000 : 7 = 2857$ taligát.

g) Ha földrakásunk paralellopiped, mellynek 3 tériránya sorjában p. o. hossza 7, széle 2·5 öl és magossága 14 láb; hány szekér föld kerül ki belőle, ha egy szekérre 16 köbláb fér?

A' három szám lábba változtatva sokszoroztatik és származatjuk adja a' földtömeg' tartalmát köblábban; ez $42 \times 15 \times 14 = 8820$, a' szükséges szekér száma pedig $8820 : 16 = 551{\cdot}25$.

Ha az időt számítjuk, melly alatt illy ásási, töltési vagy elhordási munka végeztetik, szükséges tudnunk, mennyi idő alatt rakatik-meg egyik vagy másik vivő eszköz, mennyi idő alatt történik a' lerakás, menés és visszajövet, melly utolsó adat a' lerakóhely' távolától függ.

Ha a' szükséges munkások' számát akarjuk tudni, ismernünk kell, mit végezhet egy egy napszámos vagy munkás a' napnak bizonyos része alatt, és hogy végre mennyi idő alatt kell szükségesképen az egész munkát bévégezni.

h) Utat töltünk. A' felvígyázatunk és javítás alatt levő út $2^3/_4$ mérföld (melly mérföldben 4000 öl van), az út' szélessége $5^1/_2$ öl; apróra tört kövekkel ugy megrakjuk, hogy 8 hüvelynyi vastagsággal legyenek egyenlően az útra terítve. Hány köbláb és hány köb-öl tört kőre lesz szükségünk?

$$4000 \times 2^3/_4 \times 5^1/_2 \times \frac{8}{12 \times 6} = 11000 \times 5{\cdot}5 \times 0{\cdot}111111 =$$

6722·2 köbláb.

Hány szekér és hány taliga telik meg külön külön, ha a' szekérbe 15, a' taligába $^8/_9$ köbláb fér?

Szekér kell 6722·2 : 15 = 448·15, taliga pedig $6722{\cdot}2 \times {}^9/_8 = 7562{\cdot}5$.

Mennyi idő alatt hordatik az útra, ha minden nap 10 órai munka alatt a' szekér 25ször, egy taliga pedig csak 13 szor fordulhat meg?

A' szekerekre 6722·2 : 15 : 12 = 17·92 közel 18 nap,
a' taligákra 6722·2 : $\times {}^9/_8$: 13 = 581·73.

Egy napi dologgal tehát 18 szekér elvégzi a' munkát, holott ugyan egy nap alatti végzéshez 582 taliga kell.

Természetes hogy, ha a' távolságok változnak, az idő, és következésképen a' tett munka' mennyisége is változni fog. A' számítónak mindezen környülállásokra figyelmeznie kell.

Fejezzük be tekinteteinket egy kérdés által.

i) Kertemet kiegyenlítem, mert színe girbe gurba, de egyszersmind jobb földet is vitetek belé. Van 2400 ölnyi távolságban két rakás mesterséggel készített jó földem, egyik rakás rendes kup, és talpának átmérője

$5\frac{1}{2}$ öl, magossága pedig 3 öl; a' másik rakás köb és egyik oldalvonala 37 láb Van hat szekerem, mindegyikbe épen $\frac{1}{10}$ köb-öl föld fér és minden nap 9 oráig van munkában, megtesznek lovaim ezen munka alatt mindegyik első perczben 45 öl utat; a' fel és lerakásra szükséges idő mindenkor, összevéve 32 percz, ha tizenkét ember dolgozik ásóval; kertem' hossza 94 öl, széle pedig 68. 7 napszámost fizetek egy pengő huszassal 's mindegyike be-tud fedni és egyenlíteni 13 négyszögölet naponként. Kérdések:

1) Mennyi földet hordattam kertembe?

2) Hány szekér került ki?

3) Mennyi idő alatt hordatott be a' föld?

4) Mennyi ideig dolgozott a' 7 napszámos a' kertben és a' 12 napszámos a' rakodásnál?

5) Mennyit fizettem a' 19 napszámosnak, ha a' földrakodásnál levők is egy huszast szolgáltak meg?

6) Melly vastagsággal nőtt egész kertem, ha a' föld mennyiségét egyenlően gondolom színére elterítve?

A' kérdésekre következnek a' feleletek sorjában.

1) A' rendes kup' tartalma köblábokban számítva.

$$(16\cdot5)^2 \times 3\cdot14159 \times 6 = 5131\cdot8 \text{ köbláb.}$$

A' köb-rakás' tartalma $37^3 = 50653$ köbláb.

2) Ha a' szekér minden perczben 45 ölet halad, a' távolyt $2400 : 45 = 53$ percz alatt teszi meg közel 's így menet és jövetre 106, a' fel és lerakásra 32 percz 's igy egy szekér földre 138 percz idő szükséges; 9 orában $9 \times 60 = 540$ percz van 's igy egy szekér nem járhat többször napjában mint $540 : 138 = 4$ szer.

Szükséges pedig az egész mennyiségre $55784\cdot8 : 21\cdot6$ (mert egy köb-ölben 216 köbláb léven, ennek tizedrésze $21\cdot6$) $= 2582\cdot6$ szekér rakodás 's igy

3) minden nap 24 szekérrel vitetvén, az egész munkára $2582\cdot6 : 24 = 108$ napszám kell.

4) A' kertnek térszíne $94 \times 68 = 6392$ □ öl. Ha egy ember egy nap 13 négyszög-ölet eligazít, 7 ember 7×13

$=91\,\square$ ölet végez, 's kell az egészre

6392 : 91 = 70·2 vagy közel 70 nap.

5) A' fizetések következnek egyszerűen $70 \times 7 = 490$ huszas a' kertben dolgozó 7 napszámosnak, és $108 \times 12 = 1296$ huszas a' szekérnél dolgozóknak; összesen pedig $1296 + 490 = 1786$ huszas = 595·33 forint pengőben.

6) Ha 55784·8 köbláb föld terítetett 6392 $\square$ ölre, jön mindegyik $\square$ ölre 55784·8 : 6392 = 8·7?71 köbláb; 's ha végre keressük, melly vastagsága van azon táblának, mellynek hossza és széle egy egy öl és tartalma 8·7271 köbláb, megleljük ezt, ha 8·7271 et 36 vagy 6^2 al elosztjuk (a' négyszög-ölet négyszöglábba változtatván) és 87271 : 36 = 0·24242 láb hosszmérőben, mi ismét egyenlő $0{\cdot}24242 \times 12 = 2{\cdot}90904$ hüvellyel, mit ugy is meglelünk, ha az egész földtömeget a' kert' térszínével elosztjuk, ez utóbbit $\square$ lábokban fejezve ki. Igy a' három térirány, a' kert' hossza, széle és a' beléhordott földrét' vastagsága, vagy is:

$$94 \times 68 \times 8{\cdot}7271 = 564 \times 408 \times 0{\cdot}24242 = 55784{\cdot}8 \text{ köbláb.}$$

Két föld-alakunkban eszerint 55784·8 köbláb föld volt és azt 6 szekér 12 munkással $^3/_5$ mérföldre elhordotta 108 nap alatt közel, és 7 más napszámos 6392 $\square$ öles, vagy is közel 4 holdnyi kertemet (1600 $\square$ ölet számítván egy holdra) 70 nap alatt a' földdel, egyenlő vastagságban béborították; összses kiadásom 19 napszámosra 595 forint 20 kr. volt kész pengő pénzben, nem számítván lovaimra tett költségeimet 's végre kertem magossága közel három hüvelynyivel nőtt a' mint ezen vastagságú termékeny földet hordattam reá.

(4) Minden nemű üregmérőink hengerek, csak a' hordók vannak talpuk felé bégörbítve azért, hogy ezen alakban legnagyobb ellentállást nyújtanak a' nyomó hígnak. Sajnálhatni hogy üregmérőink, millyen a' véka, köböl icze, fertályakó 's a' t. nagyobb pontossággal nem ké-

szülnek; de inkább sajnálhatni hogy tartalmaik semmi bizonyos és természetes alakkal nem egyenlők hanem önkényesek. Szükséges lenne hogy üregmérőink, legalább a' hossz és térmérőkkel egybehangzásban lennének, 's p. o. a' véka vagy a' gabona mérő' egysége lenne olly henger, mellynek átmérője és tengelye egyenlően egy láb 's a' t.

Mostani pozsonyi mérőnk 72 iczét tart, melly icze ismét = 45·593222 köb-hüvely. 1715 diki Ország gyűlés' 63dik czikkelye szerint a' pozsonyi mérő 75 illy icze volt, de 1807 diki Ország gyűlés 22 czikkelye szerint 64 iczére tétetett, jelenleg 72 iczére számítatik.

A' gabona-mérő tartalma eszerint honunkban

72 × 45·5932 = 3282·7104 köbhüvely vagy:

3282·704·1728 = 1·8997 köbláb.

Ha eléb a' pozsonyi mérő 75 × 45·5932 = 3419·48 köb-hüvely volt, ez sokkal közelebb állott 3456 köbhüvelyhez vagy két köblábhoz, 's ha még 36 köbhüvely, vagy közel másfél messzely adódnék a' 75 iczéhez, pozsonyi mérőnk tökéletesen megegyezne két köblábbal, következésképp hosszmérőnkel.

Alkotása a' hengereknek nem olly könnyű mint pintéreink gondolják, kik a' hüvelyek vagy vonalok tizedes részeit nem igen szokták számbavenni, 's alig lehetne honunkban két pozsonyi mérőre akadni, melly egyenlő lenne egymással; az egyenlő szót azon értelemben vevén, mellyben a' tudomány kívánja. Ki p. o. valamelly törvényes alapmérőt késziteni akar, annak több tudományos ismeretekre van szüksége, mellyek nélkül czélt soha érni nem fog.

Tudjuk hogy a' henger talpa valamint körülete nincsen mérhető viszonyban magosságával 's így az ezeket kifejező számok nem egész számok, de végtelenül közelítők; ha tehát henger pozsonyi mérőnk 3282·7104 köbhüvely tért foglal (belől, mert a' fának vagy vasnak vastagsága van 's többé nem geometri sík) és feltesszük hogy átmérője magosságával egyenlő, esetünkben

$$3282{\cdot}7104 = r^2\pi m$$

's mivel $m=2r$, legyen $=2r^3\pi$, vagy ha t az átmérő $3282{\cdot}7104 = {}^1\!/_4 t^3\pi$, és ezekből következik

$$r^3 = \sqrt[3]{3282{\cdot}7104 : 2\pi} \text{ és } t^3 = \sqrt[3]{3282{\cdot}71{\cdot}04 : \frac{\pi}{4}}$$

a' gyökér jegyek alatti számok

$$3282{\cdot}7104 : 2\pi = 3282{\cdot}7104 : 6{\cdot}28328 = 522{\cdot}468$$

$$\text{és} \quad 3282{\cdot}7104 : \frac{\pi}{4} = 3282{\cdot}7104 : 0{\cdot}7853981 = 4179{\cdot}69$$

a' sugár tehát 522·468nak a' tengely pedig 4179·69nek harmadik gyökere és $r = 8{\cdot}059$, $t = 16{\cdot}118$ hüvely,

$$\text{és } (16{\cdot}118)^3 \times {}^1\!/_4\pi = (8{\cdot}059)^3 \times 2\pi = 3282{\cdot}7104.$$

Lenne eszerint pozsonyi mérőnk 16·118 hüvely magos és talpa vagy fenekének átmérője is 16·118.

Tudjuk hogy a' talpak' átmérőji a' magosság szerint változnak és megfordítva, 's mondjuk hogy, a' talp átmérője és a' henger magossága egymástól függők, adhatunk eszerint a' talpnak bármelly átmérőt, a' magosság hozzáképen fog változni.

Ha olly mérőt kellene késziteni, mellynek talpa átmérője épen másfél láb = 18 hüvely legyen, jön

$$r^2\pi = 9 \times 9 \times 3{\cdot}14159 = 254{\cdot}44$$

$$\text{és } m = 3282{\cdot}7104 : 254{\cdot}44 = 12{\cdot}90$$

hüvely a' magosságra.

Bármelly legyen a' talp és magosság közti viszony, egyik vagy másiknak számbeli kifejezése okvetlenül törtrészekre vezet, a' kézimívestől pedig alig kívánható, hogy geometri pontossággal alkossa mérőjét. Ezen nehézség elkerülésére szokás nyomatokkal megmérni, hány font víz fér a' mérőbe 's eszerint alkalmaztatik s javitatik. De bajunk még itt sem végződik, mert üregmérőnkbe víz sem fér bizonyos és változatlanul határozott egész számokban kifejezhető mennyiséggel. Tekintsük miként miveltek a' francziák. Hosszmérőjök egysége vagy alapja a' *Metre* és ez egy tízmilliomod része földünk kis köre negyedének.

Ha földünk' kis körét egyik példánkban jól számítottuk 5380·2 mérföldre, negyede = 1345·05 mérföld, ennek 10milliomod része, ha lábokba változtatjuk a' mérföldeket 24000 általi sokszorozással, lesz egy metre,

Metre = 32281200 : 10000000 = 3·22812 láb. A' metre azonban bécsi lábokban kifejezve csak 3·164, és felvett körünk csakugyan nagy.

Ezen metre tizedrészét (tehát 3·7968 hüvelyt) vevén a' rendes köb' egy vonalául, azon víz, melly 4 fok meleggel Reaumur hévmérője szerint, midőn a' víznek jégbőli olvadása után legnagyobb tömöttsége van beléfér, a' nyomatok' alapját vagy egységét a' *Kylogrammot* adja. Ezen kylogramme a' mi nyomataink szerint 1·786 bécsi font.

Ezen a' föld' nagyságából egyenesen kölcsönözött természetes kis köb' neve *Littre*, tartalma eszerint $(3·7968)^3$ = 54·7335 köbhüvely. Van tehát pozsonyi mérőnkben, ha csakugyan 3282·7104 köbhüvely a' tartalma

3282·7104 : 54·7335 = 59·976

littre és nyom a' beleférő viz legnagyobb tömöttségében

59·976 × 1·786 = 107·0074 fontot.

A' magyar iczébe számos és pontos mérések szerint, mellyek Bécsben hivatalosan tétteték 1·51932 font víz fér, tehát 72 icze vagy is egy pozsonyi mérő mennyiségű víz = 109·39 font. A' két számközti különbség az igaz csak 2·38 font, de három messzelynél több 's igy vagy egyik vagy másik feltét hibás.

Ha a' franczia mérő szerint számítjuk egy köbláb víznek sullyát, ez 56·386 font, de közönségesen 54 fontra tétetik. A' következések különbözősége nem egyedül attól függ, melly hévállásnál történtek a' mérések; (a' párisi láttuk 4 fok, a' bécsi 15 fok meleségnél eszközöltetett), de valóságos számítási hibák.

Ha a' két talált számot összeadjuk és összeseket kettővel elosztjuk keresvén köztük a' középszámot

$$(107{\cdot}0074 + 109{\cdot}39) : 2 = \frac{216{\cdot}3974}{2} = 108{\cdot}1987$$

és ennek ismét fele 54·0993 font.

Ezen tekintet azt bizonyítja, hogy pozsonyi mérőnk valódi tartalma két köbláb, ha 72 icze fér belé és hogy mérésénél egy köbláb víz 54 fontra vétetett Reaumur hévmérőjének 15 fokánál.

Innen következtetjük végre, hogy alap gabona mérőnk 's igy mint hígmérőnk az akó is 2 köbláb = 3456 köbhüvely 's ha 72 iczébe oszlik, mindegyik icze = 3456 : 72 = 48 köbhüvely és ekkor 15^0 hévségnél egy icze víz tökéletesen 1·5 az az másfél fontot nyom, ha egy köbláb víz 54 font. Igy lesz a' pozsonyi mérő természetes egybeköttetésben hosszmérőnkel és nyomatunkal egyszersmind.

5) A' plánéták' atmérőjök következők:

Hold átmérője	454.
Mercur	671.
Mars	892.
Venus	1694.
Föld	1716 közép a' két teng. közt,
Uranus	7466.
Saturnus	15507.
Jupiter	19294.
Nap	192296 mérföld.

Következik mindegyiknek tartalma $^1/_6 t^3 \pi$ szerint:

Hold	48996626·2	köbmérföld
Mercur	158185190·0	»
Mars	371455770·5	»
Venus	2545300000	»
Föld	2650686000	»
Uranus	217902650000	»
Saturnus	1952459000000	»
Jupiter	3760672000000	»
Nap	3723141000000000	»

A' planéták' tartalmai' öszszese a' napén kivül

5936808273586·7 köbmérföld.

A' négy kis planeta Vesta, Juno, Ceres és Pallas, valamint a' többiek' holdjaik, ezekhez képest csekélyek; a' nap tömegéből eszerint még 627szer kerülne ki valamennyinek öszszes tömege.

A' nap' átmérője majd 4szerte akkora, mekkora a' hold' távola a' földtől, az az 192296 : 52000 = 3·697 szerte nagyobb; a' napból tehát csak közel egy negyedrészt kivésvén, mint 11 I. félgömbben tettünk, ha földünk középpontjában van, a' hold kényelmesen megteheti útját az üregben.

Ha a' föld' tömöttsége 4·71 szerte nagyobb mint a vízé, egy köb-öl földtömeg

$$216 \times 4{\cdot}71 \times 54 = 54937{\cdot}44$$

fontot nyom, 's ha a' föld' köbmérföld tartalmát 64000 millióval és 54937·44 el sokszorozzuk, megtaláljuk hány fontot nyom az egész teke.

6) A' gömbdarabokat és szeleteket tudjuk miként mérni, 's ha p. o. 8, 9 és 12 I. szerint héjoknak vastagsága is van, belső és külső átmérőjök szerint számítjuk egyik 's másik gömb tartalmát; a' kettőközti különbség lesz a' héjnak tartalma.

A' különféle csővek' és hengerek' számítása szinte ugy történik. Vastagságok vagy erősségek, átmérőjöktől függ, mint kisebb vagy nagyobb ellentállas kívántatik a' víz vagy más bennük folyó hígra nézve.

Ha valamelly gömb kivágásának színe kívántatik, ez tudjuk arányban áll az egész gömb színével, és ha a' vágás bizonyos irány szerint történt, színe könnyen megtaláltatik. Ha feltesszük p. o. hogy 8 Idomunkban a' gömbnek épen egyötödrésze vágatott ki, bizonyosan a' kivágás szine is egy ötödrésze lesz az egész gömb színének.

Ha a' vágások a' tengellyel egyenіránylag történnek és csakugyan két végső pontjában végződnek, mint 12

I. ban (a' dinnyét is igy szoktuk vagdalni), a' kivágás szinte arányban van az egész gömbbel, 's ha nagykörének kivágott részét ismerjük, a' darab' színe is ismeretes. Ha p. o. 12 Idomunkban kívágása 24 foka a' nagykörnek, vagy a' gömb átmérőjének, szine bizonyosan $^{24}/_{360}$ része lesz az egész gömbszinének, mert mindegyik fokra az egész színnek egy 360 nadik része jön. 8, 9 és 12 Idomokban észrevesszük, hogy noha a' gömbök üresek, vastagságok azért van; ezen vastagságot is szinte könnyen megmérhetjük, ha a' külső átmérőből a' belsőt levonjuk: igy számítjuk p. o. a' héjnak tömegét, ha az egész gömb' tartalmából az üres térnek tartalmát levonjuk, mi megmarad, a' héjnak tartalma. Szinte ha a' 13-dik I.ban képviselt csővek' vastagsága ismeretes, azon anyag' tömege is ismeretes, mellyből a' csővek alkotottak. Legkiterjedettebb haszonvétben vannak az öntött vas csővek, rendeltetések szerint átmérőjök különböző nagyságúak, és a' csővek' vastagsága arányban szokott lenni átmérőjökkel, az az: mentül tágosabbak a' csővek annál vastagabbak is. Ha a' csővek' vastagságát ismerjük, könnyen megleljük a' vas mennyiségét is köbmértékben kifejezve; ebből pedig következik az anyag' sullya.

Számítsuk néhány csővek' tartalmát, tudván hogy a' csővek' hengerek.

Ha valamelly csőnek külső átmérője 3 hüvely, a' belső pedig $2\frac{1}{2}$, természetes hogy vastagsága $(3-2\frac{1}{2}) : 2 = \frac{1}{4}$ hüvely, 's igy bármelly cső legyen adva, vastagságát könnyen megleljük. Legyen egy illy csőnek hossza egy láb, mennyi a' benne levő vas tömeg?

Az egész csőnek tartalma

$$(1{\cdot}5)^2 \times 3{\cdot}14159\cdots \times 12 = 84{\cdot}823$$

a' belső üres részének tartalma

$$(1{\cdot}25)^2 \times 3{\cdot}14159\cdots \times 12 = 58\ 905$$

köbhüvely, 's így van az egy láb hosszú csőben vastömeg 25·918 köbhüvely *).

Tudjuk pedig hogy, egy köbláb víz 56 fontot nyom, 's ha az öntött vas' közép nehézsége 7·207, vagy is hétszer és 0·207 szer nehezebb a' víznél, lesz egy köbláb öntött vas sullya $56 \times 7{\cdot}207 = 403{\cdot}592$ font, és ebből egy köb hüvely $= 403{\cdot}592 : 1728 = 0{\cdot}23356$ font $= 7.474$ lat, vagy közel $7^1/_2$ lat: következik eszerint csővünk nehézsége $25{\cdot}918 \times 0{\cdot}23356 = 6{\cdot}053$ font.

Bármelly csőnek sullyát megleljük hasonlóan, és ha különböző átmérőjű és vastagságú csővek' (egy láb hosszát vevén) nehézségét kiszámítjuk és a' következéseket egy kis táblába írjuk, minden különös esetre megleljük az adott csővek mennyiségének sullyát.

Víz vezető csővekre van szükségem 's csakugyan 198 ölre, átmérője a' csőveknek $4^1/_2$ hüvely, vastagságok $^3/_4$ hüvely; kérdés: melly sullyok lesz és mennyibe kerülnek, ha egy mázsáért 6 forint 40. xtr kell fizetnem.

Ha csak egy lábnyi csővet számítok, ennek sullyát $198 \times 6 = 1188$ számmal sokszorozom 's meglelem az egész mennyiséget.

A' külső sugár eszerint $2^1/_4$, a' belső $1^1/_2$, a' magosság 12 hüvely

egész henger $(2{\cdot}25)^2 \times 3{\cdot}14159 \cdots \times 12 = 190{\cdot}851$

a' belső (üreg) $(1{\cdot}5)^2 \times 3{\cdot}14159 \cdots \times 12 = 84{\cdot}823$

jön egy láb csőre vastömeg 106·028 köbhüvely

az egész mennyiségre $1188 \times 106{\cdot}028 = 226073{\cdot}2$ köbhüvely vagy 131·21 köbláb, ebből pedig az egész mennyiségnek sullya

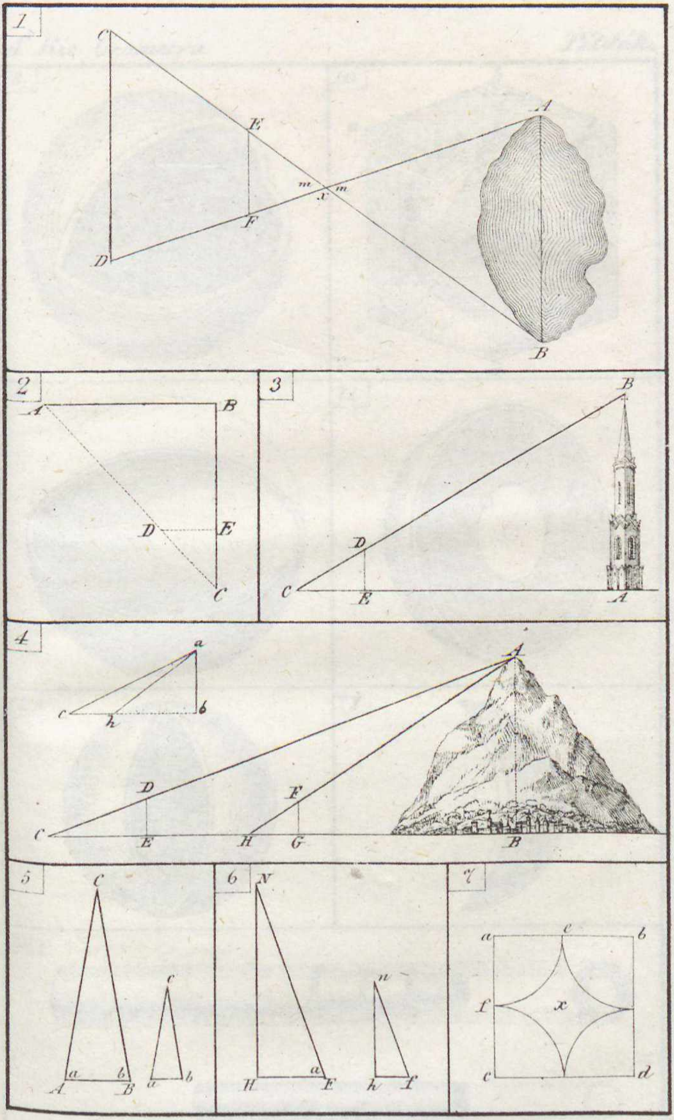
$131{\cdot}21 \times 403{\cdot}592 = 52955{\cdot}5$ font, mi $= 529{\cdot}555$ mázsa

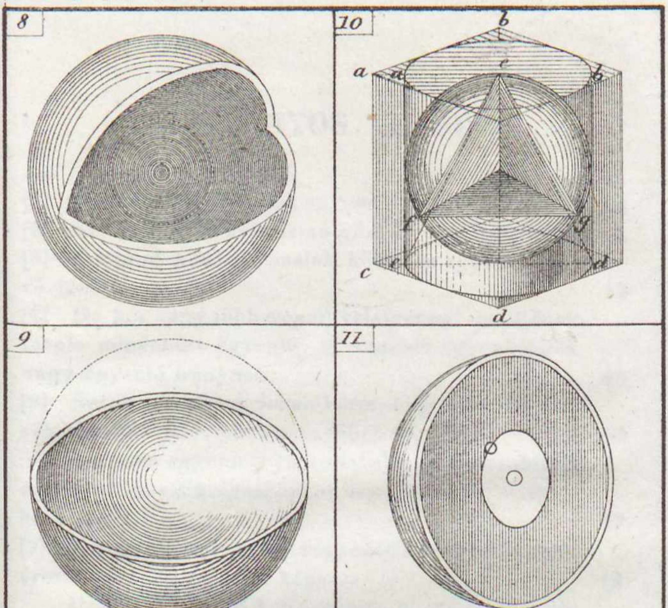
's következésképen árra

$$529{\cdot}555 \times 6{\cdot}6666 = 3530{\cdot}3 \text{ forint.}$$

---

*) 249 Lapon 54re tettük.


1
C
E
A
m
x
m
F
D
B
2
A
B
D
E
C
3
B
D
C
E
A
4
a
c
h
b
A
D
F
C
E
H
G
B
5
C
c
a
b
A
B
a
b
6
N
n
a
H
F
h
f
7
a
e
b
f
x
c
d


8
10
a
b
e
c
f
g
d
9
11
12
12
13

TUDOMÁNYOS TÉTELEK.

FOGLALAT.

Első Beszélgetés.

Y *

Második Beszélgetés.

Harmadik Beszélgetés.

Negyedik Beszélgetés.

Ötödik Beszélgetés.

Hatodik Beszélgetés.

Hetedik Beszélgetés.

Alkotás.

Nyolczadik Beszélgetés.

Aránylat.

Kilenczedik Beszélgetés.

Térszinmérés. Négyszögités.

Z

Tizedik Beszélgetés.

Tizenegyedik Beszélgetés.

Tizenkettedik Beszélgetés.

Alkalmazások és Példák.

I. Hosszmérés szöggökkel.

II. Térszín mérés.

Lap.

V. Tartalom vagy tömegmérés.

Sollinger J. P. sajtóji alól.