Ferency

A' KIS SZÁMÍTÓ.

A' KIS

SZÁMÍTÓ.

Magyar Gyermek' Kézikönyve.

Írta

NAGY KÁROLY.

Második Nyomtatás.

BÉCS.

Rohrmann és Schweigerd.

Udvari könyvárosoknál. 269 szám.

1837.

A' KIS SZÁMÍTÓ első nyomtatása nincs kereskedésben, mert mint *szorgalomnak jutalomkönyvecske* a' vagyonotlan de örömmel tanuló gyermekek közt szétosztatik.

Közre bocsájtása, jelen második nyomtatása által azon kivánatból ered, hogy a' két magyar hazában, a' közhasznú ismeretek terjesztéséhez csekély ereink szerint járulhassunk.

A' Kiadók.

Mint növünk 's korosodunk, ujabb ujabb és több több tárgyak állnak előnkbe, 's elménk azokat felfogni 's megtartani igyekszik.

Igy nőnek korunkal 's a' tárgyakkal ismereteink, ha elmebeli tehetségeinket kifejteni iparkodunk. De minden növés, minden szaporodás és minden kifejlés mérhető, a' mérés pedig számítás. Igen természetes, hogy már gyenge korunkban számokkal kötjük öszve mindazt, mi ismereteinket neveli, mert a' tárgyakat számoktul elválosztani lehetlen. Ha később a' számok' és tulajdonaik' tudása nem megy lépten egyéb ismereteinkel, természetes útunk háborgatva, megzavarva van.

Ha a' szorgalmas kis tanuló a' számítást mindenre alkalmazza, mi csak őt körülveszi, 's a' kérdéseket 's példákat minden oldalrul tekintvén szaporítja 's szünetlenül változtatja, sokkal többet fog tanulni mint ezen kis könyvecskébe, 's ennél nagyobba férhet; mert itt csak az út van kijelölve, mellyen indulnia kell, és a' czél, mire törekedjék. Ismételve ajánlom tehát, hogy számtalan és különböző példákat szerkezzen, mert ezt ki ki önmaga leghelyesebben 's legnagyobb haszonnal teheti 's teszi. Ajánlom ezen felül, hogy tovább ne menjen addig a' könyvecskében, mig azt, mit olvasott, tökéletesen jól nem tudja.

Bécs. 1004 Karinti út.
1. Mártius 1837.

Nagy Károly.

A' KIS SZÁMÍTÓ.

Első beszélgetés.

1. K. Mi a' szám, és mire használjuk a' számokat?

F. Ha megakarjuk mondani, mennyi vagy hány van valamelly tárgyból, azt a' számok' segéde nélkül nem tehetjük. Valamikor tehát mennyiség jön kérdésbe, azt csak a' számokkal lehet kifejezni.

2. K. Eszerint tehát a' mennyiségeket a' számoktól nem lehetne elválasztani?

F. Nem, mert számoknélkül senki sem tudná, mi az a' mennyiség melly épen szóba jön. Sok, kevés, kicsi vagy nagy e'.

3. K. Nem lehetne mégis szóval megmondani, mi a' mennyiség?

F. Mennyiségnek mondhatunk minden tárgyat a' természetben, tekintsük azt' magában, akar részeiben, akar hasonlítva más tárgyakkal, vagy több hozzá hasonlóval.

4. K. Szeretnék erre némelly példákat!

F. Valamelly juhnyáj magában nagyobb vagy kisebb számú juhokból áll, 's annyival nagyobb mentül több juh van együtt. Ha tehát egy juhnyáját valamelly más juhnyájjal akarok hasonlítni, szükséges tudnom mellyik nagyobb vagy kisebb, vagyis tudnom hány juh van egyikben és a' másikban.

Ha egyik falut a' másikhoz vagy várost városhoz akarok hasonlítni, szükséges tudnom millyen nagyságúak vagy kiterjedésűek, mennyi ház van egyikben vagy másikban, de főkép mível a' házok is apróbbak vagy nagyobbak lehetnek tudnom kell hány lakosa van mindegyiknek.

Szinte ha tudni akarom, mennyi széna és szalma van a' kazalokban, mindegyik kazalt megkell mérnem hány öl, hogy a' két mennyiséget — a' szénáét és szalmáét — öszve hasonlíthassam.

És mindezen hasonlításra vagy becsülésre, szám kell.

5. K. A' mennyiséget eszerint a' szám fejezi kí. Vannak é a' számoknak különös nevei és különös jegyei?

F. Szóval szinte mint írással könnyen megmondhatjuk a' mennyiségek' minden tulajdonit, és változásait.

6. K. Mit érthetünk a' mennyiségek tulajdoni és változásai alatt?

F. A' mennyiségek, nagyobbíthatók és kisebbíthetők, az az a' tárgyakból sokat vagy keveset lehet tekintetbe venni. A' mennyiségek változnak, a' mint azokat egészen vagy csak részeikben tekintjük.

7. K. Példákat szeretnék a' mondottra?

F. Ha valaki töllem a' lakosok számát kérdené, nem tudnék neki felelni, mert nem mondá meg nyilván az egész föld lakosi számát kívánja é, vagy egyvilág részének, egy országnak, egy városnak, falunak vagy csak háznak. Ha az egész emberi nemzetet, mennyiségnek tekintem, természetes hogy a' szám míndég kisebb kisebb lessz, mentül kisebb azon hely mellyben emberek laknak, 'síg az emberek száma nagyítható vagy kisebbíthető a' mint azon tért tekintjük mellyben laknak. Szinte így lehet egy raktár teli gabonával, emeletekbe osztva, minden emeletben több gabona rakás, minden rakásban sok mérő vagy véka, minden vékában sok számtalan gabona szem; mint tehát a' raktárt magát, osztályait, rakásait, a' mérők számát, vagy a' szemek számát tekintem, ugy változnak a' mennyiség 'számai is.

8. K. Miként fejezzük kí számmal a' mennyiségeket?

F. A' számlálás által, mint egyenként a' tárgyakat öszvevesszük.

9. K. Igy tehát tudni kell mi az egy, és ezen egyenként?

F. Minden tárgy magában és különvéve egynek tekintetik, és csakugyan legyen az akarmi, ország, ember, ház, állat, könyv, bármelly apró mag vagy porszem, ha az egyedül magában van, egyes számmal az *egyel* jelöltetik, mondjuk egyház egykönyv, egy csepp viz 's a' t: és ezen legelső kezdő és alapszámot *egységnek* nevezzük.

10. K. Miként jutunk a' többi számokra?

F. Minden egyéb szám bármely nagy legyen, ezen egységből van öszvetéve, 's mentül több illyen *egy* van együtt annál nagyobb szám kerül ki.

11. K. Miként történik ezen öszvetevés, és micsoda számok következnek az egy után?

F. Ha valamelly magában álló egyes tárgyhoz egy másik illy hasonló járul, ezek öszvesen *kettőnek* neveztetnek, ha a' kettőhöz egy másik egyes jön, az öszvesnek neve *három*, ha a' háromhoz jön egy, az öszves' neve *négy*, 's így válik a' négyből hozzá tevén egyet *öt*, az ötből *hat* a' hatból *hét*, a' *hétből nyolcz* és a' nyolczból *kilencz*, és ha ezen kilenczhez is még egy járul, leszaz öszvesnek neve *tíz*.

12. K. Hogy lehetne az itt mondottat szembetűnővé tenni?

F. Ha lenne nállam egy kosárban több alma, tojás, dió, borsó vagy akarmelly tárgy, ezeket kiraknám és külön tevén egyet, kettőt, hármat 's a' t: nyilván megmutatnám, hogy a' hány számot ki mondok annyi egyes tárgynak kell a' rakásban lennie, de mivel illyen tárgyam nincs felirom pontokkal a' mennyiségeket és egyszermind neveiket is tízig.

o	oo	ooo	oooo	ooooo	ooo ooo	oooo ooo
egy	kettő	három	négy	öt	hat	hét

oooo oooo	ooooo oooo	ooooo ooooo
nyolcz	kilencz	tiz.

13. K. Emlitének hogy a' betük helyett a' számoknak különös jegyei vannak, hány van illyen jegy, és miként iratnak?

F. Illyen számjegy nincs több tíznél, és sorjában ezek.

1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 és 0.

14. K. A' kilencz első tudom azt jelenti, egy, kettő, három, négy, öt, hat, hét, nyolcz és kilencz egyes, de mit jelent a' tizedik jegy, nemde tizet é?

A' kilencz első jegy csakugyan annyi egyest foglal magában mennyi a' neve, és ezért hivatik *jelentő* jegynek, de a' tizedik jegy semmit sem jelent magában, hanem csak akkor, ha valamellyik jelentő jegygyel van öszvetéve. Ezen jegyet mi üresnek nevezzük azért, mert a' hol áll csak a' jelentő jegynek helyét foglalja, és tüstént szükségünk van reá akkor, ha tizet akarunk írni, mert a' tiznek többé különös jegye nincs, és ha az egyes jegyéhez hozzá ragasztjuk, ekkor tizet jelent mint 10.

15. K. Hogy megyünk feljebb a' 10nél nagyobb számokra 's hogy irjuk azokat?

F. A' mint a' tizhez sorjában ismét egyet kettöt hármat 'sat teszünk az utánna következő kilencz számnak következő neve van, tizenegy, tizenkettö, tizenhárom, tizennégy:

tizenöt,
tizenhat,
tizenhét,
tizennyolcz és
tizenkilencz,

és itt mindenkor csak 'a szót *tizen* mondottuk ki 's hozzá ragasztottuk az egyes számokat egytöl kilenczig sorban. Az írás még könnyebb mert ha 10 ben az üres helyett sorjában a' kilencz jelentő jegyet irjuk, a' kimondott számokat mind megtaláljuk, 's ezek lesznek:

11 tizenegy,
12 tizenkettö,
13 tizenhárom,
14 tizennégy,
15 tizenöt,
16 tizenhat,
17 tizenhét,
18 tizennyolcz,
19 tizenkilencz.

16. K. Nyilván látom ebböl, hogy szinte mint az egyhez sorjában mindég egyel egyel több egyest adván, kilenczhez jutottunk, ugy értük el a' tizenkilenczet is, mindég egyet egyet adván a' tízhez, de azt is látom hogy a' 10töl kezdve már több jegyre van szükségünk egynél, miért van ez?

F. Minthogy tiz számjegynél több nincs, szükséges hogy ezen tiz jegy által bármelly nagy számot is ki tudjunk fejezni. Azon számokhoz mellyek a' 9en felül vannak egy jegynél több kell, és csakugyan a' tizesekhez kétjegy kivántatik, hol az első helyen jobbra az egyesek állanak, balra pedig a' tizesszám.

17. K. Hát ezen tizesszám különös neme a' mennyiségnek?

F. Ha a' tizest mint tiz egyesből álló mennyiséget, magában tekintjük, ismét egy különös neme lesz a' mennyiségeknek, és ha több illy tizeseink vannak, azokat is úgy adhatjuk egybe mint az egyeseket 's mondhatjuk egy, két, három, négy vagy több tizes, 's ezen tekintetben a' tizes is egység magában véve. Ezt is mondhatjuk, mivel hogy az egyesek egy jegygyel, a' tizesek pedig két jeggyel iratnak, a' tizesek külön rendhez tartoznak 's neveztessenek, másodrendü egyeseknek.

18. K. Észevehető hogy az, ki tizig tud számlálni, tizenkilenczig is elér, ha a' tizeshez sorban a' többi egyeseket számolja; de tudna é innen tovább menni tizenkilenczen felül? Ha p. o.: valakinek ki csak tizig tud számlálni egy kosár diót adnék, megtudná e' mondani mennyi van benne?

F. Igen könnyen. Ha a' kosárban sokkal is több dió van 19nél, csak olly rakásokat szedne öszve mellyekben tiz tiz dió foglaltatik, ezt pedig megteheti, ha minden diót kiszedett a' kosárból, a' rakások vagy valamennyin tiz tiz dióból állnak, vagy egy rakásban kevesebb lesz tiznél. Ha mind teli tizesek a' rakások, ezeket könnyü megszámlálni, 's a' hány a' rakás annyi tiz dió van: fel teszem legyen illyen rakás 19 és ekkor azt mondom 19 rakás dióm van mindegyik rakásban 10 's ha még ezen felül van egy olly rakás mellyben csak p. o.: 7 dió maradt, lesz öszvesen a' diók száma 19 tizes és 7 egyes dió.

19. K. Ebből én csak azt tudom hogy a' tizesek tiz tiz egyesből álló rakások, de nem tudom hogy több illy rakás együtt véve hány egyest foglal. Nincs é ezen öszves rakásoknak külön neve?

F. Van, és csak ugyan ha egy tizesnek neve 10.

két tizesnek	neve	husz	felirva	20.
háromnak	—	harmincz	—	30.
négynek	—	negyven	—	40.
ötnek	—	ötven	—	50.
hatnak	—	hatvan	—	60.
hétnek	—	hetven	—	70.
nyolcznak	—	nyolczvan	—	80.
kilencznek	—	kilenczven	—	90.

hol látni csak az egyes számokhoz sorjában üreset ragasztottam.

20. K. Ebből látom hogy p. o. 3 tizes harmincz egyest és igy 9 tizes is kilenczven egyest foglal magában, de nem tudom hogy jöttünk a' 19 röl húszra, húszról harminczra, harminczról negyvenre 's igy továb kilenczvenre, az egyesek segéde nélkül?

F. Valamint a' 9 egyeshez még egy kellett hogy egy tizes legyen belöle, ugy kell egy tizeshez és kilencz egyeshez még egy hogy két tizes legyen együtt: ha tehát 19 hez még 1 járul tüstént husz lesz a' következő szám.

Huszból pedig harminczig minden következő számot megtalálok ha az üres helyibe 20 ban, egytől fogva kilenczig a' számsort irom 's ez lesz irva.

21, 22, 23, 24, 25, 26, 27, 28, 29, következik a' harmincz mellyben az üres helyett szinte igy írom sorban a' jegyeket, elérvén a' negyvent, folytatom az irást még 99 jön elő.

21. K. Van é a' számoknak különös neve a' húszon felül?

F. Níncsen, csak a' mint kimondjuk a' húsz harmincz, negyven, ötven, sat: hozzá adjuk a' második jegyet kimondván értékét: p. o. huszon egy, huszonkettő, 's a' t. harminczegy, harmincz kettö 's a' t. negyvenhárom, negyvennégy 's a' t. kilenczvenkilenczig.

22. K. Ird fel nekem sorjában ezen kilenczvenkilencz számot kimondásával együtt?

F. 0 üres.	10 tiz.	20 húsz.
1 egy.	11 tizen*egy*.	21 huszon*egy*.
2 kettö.	12 tizen*kettö*.	22 huszon*kettö*.
3 három.	13 tizen*három*.	23 huszon*három*.
4 négy.	14 tizen*négy*,	24 huszon*négy*.
5 öt.	15 tizen*öt*.	25 huszon*öt*.
6 hat.	16 tizen*hat*.	26 huszon*hat*.
7 hét.	17 tizen*hét*.	27 huszon*hét*.
8 nyolcz.	18 tizen*nyolcz*.	28 huszon*nyolcz*.
9 kilencz.	19 tizen*kilencz*.	29 huszon*kilencz*.

30 harmincz.	35 harminczöt.
31 — egy.	36 — hat.
32 — kettö.	37 — hét.
33 — három.	38 — nyolcz.
34 — négy.	39 — kilencz.

40	negyven.	45	negyvenöt.
41	— egy.	46	— hat.
42	— kettö.	47	— hét.
43	— három.	48	— nyolcz.
44	— négy.	49	— kilencz.
50	ötven.	60	hatvan.
51	— egy.	61	— egy.
52	— kettö.	62	— kettö.
53	— három.	63	— három.
54	— négy.	64	— négy.
55	— öt.	65	— öt.
56	— hat.	66	— hat.
57	— hét.	67	— hét.
58	— nyolcz.	68	— nyolcz.
59	— kilencz.	69	— kilencz.
70	hetven.	80	nyolczvan.
71	— egy.	81	— egy.
72	— kettö.	82	— kettö.
73	— három.	83	— három.
74	— négy.	84	— négy.
75	— öt.	85	— öt.
76	— hat.	86	— hat.
77	— hét.	87	— hét.
78	— nyolcz.	88	— nyolcz.
79	— kilencz.	89	— kilencz.
90	kilenczven.	95	— öt.
91	— egy.	96	— hat.
92	— kettö.	97	— hét.
93	— három.	98	— nyolcz.
94	— négy.	99	— kilencz.

23. K. A' két jeggyel irt számok kimondása eszerint könyű; a' kimondott számok felirása sem lesz tehát nehéz?

F. Ha p. o. felvan irva 76, reá pillantván azonnal tudjuk hogy az első szám 7 tizes és neve hetven, a' másik pedig 6 egyes és neve hat, mindkettő tehát öszvevéve hetvenhat. Szinte ha mondjuk p. o. nyolczvan kilencz, azonnal felirhatjuk a' két jegyet, 's csakugyan azon rendben mint kimondatott, először a' nyolczat 's utánna a' kilenczet. Látjuk is egyszersmind hogy a' jegyek kétféle értéket vesznek fel. Egyik értékök az, mellyet a' 10 jegy maga mutat

1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 0;

másik pedig a' helyükkel van egybekötve; itt a' kétjegyel irt számokban az első helyen az egyesek a' másodikon balra a' tizesek lévén, 33ban p. o. az egyik hármas, három egyest, a' másik pedig három tizest jelent, noha mindegyik megtartja jelentő jegyét a' hármast.

24. K. Melly szám következik 99 után és miként iratik?

F. Ha 99 hez egyet adunk lesz belöle száz, minthogy pedig 99, kilencz tizes és kilencz egyes, ha ehez még egyet veszünk lesz öszvesen 10 tizes; egyszáz tehát tíz tizesből és száz egyesből áll. Két jeggyel nem lehet 99 nél nagyobb számot írni, szükségekéspen tehát három jegy kell ha százat akarunk írni. Ha három jegy kell a' százhoz, ezen szám bizonyosan ismét más rendhez tartozik és csakugyan felsöbb rendhez mint az egyes és tizes. Irása száznak nem lehet másként mint egyhez két üresnek ragasztása által és ez 100, mert *először*, a' harmadik rendü egyet csak így lehet írni, *másodszor* ha a' százas harmadik helyen áll és egyszersmind csak *egy* százas, az üres hellyett más jegy nem állhat, mert a' szám akkor százon felül lenne, *harmadszor* pedig tudjuk hogy a' száz 10 tizes, és hogy 10 tizest nem irhatunk másként mintha 10 hez még egy üreset ragasztunk, valamint 10 egyest nem irhatánk másként minthogy az egységhez üreset tettünk. Ha az egyes helyett a' két üres mellé a' többi jegyet irjuk, annyi százast irunk mennyit a' jegy jelentő értéke mutat 's lesz a' kilencz külön százas

100, 200, 300, 400, 500, 600, 700, 800 és 900; és ezen százasok magukban tekintetvén ismét különös nemei az egyesnek, és csakugyan harmad rendü egyesek. Áll tehát

egy százas 100 egyből és 10 tizesből,
két százas 200 egyből és 2 szer 10 tizesből,
három százas 300 egyből és 3 szor 10 tizesből
's igy tovább.

25. K. Micsoda számok állanak 100 és 200 között?

F. Ha százig számláltunk és tovább akarunk menni, szükséges hogy egynél kezdjük előlrül ismét a' számlálást hozzá mondván mindenkor a' *százat*, s' csakugyan száz egy, száz kettö, száz három, száz négy 's igy tovább, mig ismét száz kilenczven kilenczig jutunk és ha száz kilenczven kilenczhez még egyet számlálunk, lesz *kétszáz*.

A' felírása ezen számoknak igen könnyü; otthagyjuk az egyes százat és az üresek helyibe irjuk mindazon 99 számot, melly 1től fogva száz ig következik egymásután a' sorban; természetes hogy a' második üres, melly a' tizesek helyén áll' mindaddig ott marad mig tizes jön helyibe, az az: a' kilencz egyes szám után jön csak helyibe jelentő jegy.

26. K. Kétszázan felül milly számok következnek?

F. Mit itt mondék akarmellyik százasra alkalmazható egyesszázastól a' kilenczszázasig, mert 900 ban is a' két üres helyibe ugyanazon 99 számot írom, mig 999 re, a' legnagyobb számra jutok mellyet három jeggyel írni lehet. Azért nemlehet pedig 999 nél nagyobb számot írni három jeggyel, mert a' kilencznél nagyobb jelentő jegy nincs, és ha akarhány kilenczeshez még egy *egyes* járul, azonnal egy jegyel több kívántatik, az írásra.

27. K. Hogy kell tehát a' három jeggyel írt számokat kimondani és felírni?

F. Ha három jegyböl álló szám van előttem, p. o. 739, azonnal látom hogy első helyen balra, melly első helyet, akarhány jeggyel legyen a' szám írva, a' legfelsőbb rendünek nevezem, egy hetes áll és hogy ezen hetes harmad rendü szám vagyis százas, értéke tehát hétszáz, a' második számjegy a' hármas tudom hogy harmincz, az utolsó pedig magában is kilencz egyes, az egész szám tehát hétszáz harmincz kilencz, sorjában kimondva mint a' jegyek írva vannak. Ha pedig kilenczszáz hatvannégyet kellene felírnom, szinte így írnám oda sorjában a' kimondott három jegyet: kilencz, hat és négy, egymásmellé, mint: 964.

28. K. Hát ha az utolsó két jelentő jegy helyett üres áll, vagy kell?

F. Valahányszor az egyesek vagy tizesek helyin nincs jelentő jegy, oda mindenkor üreset kell tenni; ha pedig valamellyik helyen üres áll, ezt kimondani nem szűkséges. A' mint tehát 300 csak háromszáz, és mellette sem tizes vagy tizesek, sem egyes vagy egyesek nincsenek, nem is mondatnak ki; szinte igy lesz 807 kimondva nyolczszáz és hét, mert a' tizesek helyén semmi jelentő jegy nem áll; hasonlóképen 760 hétszáz hatvan, mert az egyesek helyén üres áll.

29. K. Irjunk fel néhány példát kimondásával három jeggyel?

F. Ha a' százasokat sorba veszem, lesz néhány példa:

136 egyszáz harmincz hat, vagy csak: száz harmincz hat.
207 kétszáz hét.
392 háromszáz kilenczven kettő.
460 négyszáz hatvan.
599 ötszáz kilenczven kilencz.
601 hatszáz egy.

783 hétszáz nyolczvan három.

810 nyolczszáz tíz.

998 kilenczszáz kilenczven nyolcz.

30. K. Milly részekre lehet osztani ezen utolsó számunkat a' 998 at?

F. Tudjuk elöször, hogy annyi egyet foglal magába, melly számmal írva van, az az: 998 at. Külön rendje pedig a' jegyek száma szerint három, vagy is: áll' egyesekből, tizesekből és százasokból, és csakugyan 8 egyesből, 9 tizesből és 9 százasból.

De minthogy mindegyik százas 10 tizesből áll, azt is mondhatom, hogy a' szám 998, 99 tizesből és 8 egyesből áll.

31. K. Most már könnyü lesz tudni hány dió volt az elött a' kosárban, midön 19 rakásra találtunk, minden rakásba 10 diót vevén 's ezen felül még megmaradván 7 dió?

F. Természetesen könnyü, mert tudom hogy 19 tizes nem egyéb mint egyszázas és 9 tizes, vagyis: 190; hozzá írván az egyesek helyére a' hetet, lesz öszvesen 197, vagy: száz kilenczven hét dió.

32. K. Ha a' számok tekintetében tovább megyünk és 999 hez egyet adunk, *ezer* lesz belöle. Milly tulajdonokat mutat ezen ezres?

F. Ezret nem lehet négynél kevesebb számjeggyel írni. Irjuk pedig az egyes ezret az egységgel, ehez ragasztván három üreset, mint 1000. Az ezres tehát negyedik rendje a' számoknak, mert a' negyedik helyen áll balra. Szét lehet pedig az ezrest szedni következő osztályokba:

1.) 1000 annyi mint ezer egyesnek öszvese.
2.) Foglal magában 100 tizest, vagy.
3.) 10 százast.

Az egyes ezer helyett állhat bármellyik számjegy, az üresek helyibe pedig a' 999 szám közzül akarmellyik állhat.

33. K. Itt már előre tudom, hogy ha 1000 ben a' három üres helyibe sorjában a' 999 számot teszem, minden számot meglelem, melly 1000 és 2000 közt áll, és ha 1999 hez egyet adok, 2000 két ezer lesz belőlle, szinte így tehetem a' 999 számot a' 2000 három ürese helyibe 's jutok a' 3000 három ezerre 's igy tovább míg 9999re érek, melly a' legnagyobb négyjegyű szám. Micsoda osztályok következnek ezután?

F. Azáltal mit eddig tudunk, könnyen reáismerünk azon törvényre, melly szerint a' felsőbb számok következnek. Valamint hogy az egy, két, három és négy jeggyel írt számokat első, második, harmadik és negyedik rendűeknek neveztük, úgy lesznek minden más akarhány jeggyel írt számok ollyan rendűek, hány jeggyel írattak. A' negyedik rend után következik azötödik, ez után a' hatodik, hetedik, nyolczadik 's a' t. és ezek: öt, hat, hét, nyolcz 's a' t. jeggyel íratnak.

34. K. Melly nevűek ezen, az ezernél felsőbb rendek és miként íratnak, ha csak az egyet ves-

szük a' hozzá tartozó üresekkel, mint felsőbb rendű egységet?

F. Az ötödik rendű egység négy üreset, a' hatodik rendű 5 üreset, a' hetedik rendű 6 üreset a' nyolczadik rendű hét üreset 's a' t. vesznek fel és iratnak nevükkel együtt:

10000 tizezer, vagy tizszer ezer.
100000 százezer, vagy százszor ezer.
1000000 millio, vagy ezerszer ezer, egyes millio.
10000000 tizmillio, vagy tizes millio.
100000000 százmillio, vagy százas millio.
1000000000 ezermillio, vagy egy ezres millio.
10000000000 tizezermillio, vagy tizes ezer millio.
100000000000 százezermillio, vagy százas ezer millio.
1000000000000 billio, vagy ezerszer ezer millio, ezerszer egyes ezer millio.

's ha ezt tovább akarom folytatni, jön ismét: tizes, százas, ezres, tizezres, százezres billio, és a' következő millios-billionak neve *Trillio*, melly ismét egyeseken, tizeseken, százasokon, ezreseken 's a' t. megy keresztül.

35. K. Elég világos ezekből, hogy a' számok' alkotmánya tizes alkotmány, mert mindegyik balra következő hely tiz^{et} foglal magában a' jobbra előtte álló rendből. Tudjuk tehát, hogy ha valamelyik rendből tiz van együtt, ezen tiz egyes a' következő felsőbb rend' egyesét adja. Szeretném

még felírva látni, miként következnek ezen rendek egymásután, hány jeggyel íratnak és miként mondatnak ki?

F. Vegyük öszve sorjában mindazt mit eddig tekintetbe vettünk, 's írjuk fel előre a' jegyek' számát, nem tekintvén egyebet a' rendeknél, tudván hogy akarmelly számjegy állhat az egyes vagy az üresek helyén; tudjuk hogy:

1	jegy	1től	9ig	egyeseket jelent.
2	»	10től	99ig	egyeseket és tizeseket.
3	»	100tól	999ig	egyeseket, tizeseket és százasokat.
4	»	1000től	9999ig	egyes, tizes, százas és ezreseket.
5	»	10000től	99999ig	egyes, tizes, százas, ezres és tizesreseket.

's így tovább; lesznek pedig az egyesnek rendjei sorban:

1	jegy,	egyes		10	jegy,	egyes	
2	»	tizes		11	»	tizes	ezer millió.
3	»	százas		12	»	százas	
4	»	egyes		13	»	egyes	
5	»	tizes	ezer.	14	»	tizes	billió.
6	»	százas		15	»	százas	
7	»	egyes		16	»	egyes	
8	»	tizes	millió.	17	»	tizes	ezer billió.
9	»	százas		18	»	százas	

19 jegy egyes Trillio 's igy tovább.

Ha ezen felirást figyelemmel tekintjük, észrevesszük, hogy a' számok' alkotmányát különböző osztályokba vehetjük. *Először*, minden más más helyen álló jegynek, az egyestől fogva balra, különös értéke az az rendje van, és hogy éppen annyi rendet foglal a' szám magában, hány jeggyel írva van. *Másodszor*, eloszlanak a' számok három három jegyet foglaló osztályokba, és ezen három jegynek neve jobbról balra változatlan *egyes*, *tizes* és *százas*, és ismét *egyes*, *tizes* és *százas*. Ha a' számokat illy három jegyet foglaló osztályokba vesszük, az első osztályhoz semmi szó nem ragasztatik, de

a' második osztályhoz mondatik: ezer.
a' harmadikhoz » » millió.
a' negyedikhez » » ezer millió.
a' ötödikhez » » billió.
a' hatodikhoz » » ezer billió.
a' hetedikhez » » trillió.
a' nyolczadikhoz » » ezer trillió.
a' kilenczedikhez » » quadrillió és
igy tovább.

Hármadszor, még nagyobb osztályokba vehetjük a' számokat és csak ugyan hat-hat jegyet foglaló osztályokba. Ezen hat jegynek neve mint tudjuk sorjában:

egyes, tizes, százas, ezres, tizezres és százezres, és mindegyik osztálynak 6 jegye igy mondatik ki, csupán csak azon különbséggel, hogy az első osztályhoz semmit nem mondunk, de tudjuk hogy ezen

első osztály egyeseket, a'
másodok „ milliókat.
harmadik „ billiókat.
negyedik „ trilliókat.
ötödik „ quadrilliókat 's a' t. jelent.

Ezen osztás szerint, hat jeggyel csak egyeseket írhatunk, de milliót nem, és mivel a' legnagyobb szám melly hat jeggyel írható: 999999 és hat kilenczesből áll, szükségesképen hét jegyre van szükségünk ha milliót akarunk írni. Kezdődnek tehát a' milliók a' hetedik helyen, és ha ezen milliókat is úgy tekintjük mint az egyeseknek valamelly különös rendjét, ismét csak hat jeggyel írhatjuk legnagyobb számát, és 999999 lesz a' milliók' köre. Tizenkét jeggyel pedig nem lehet nagyobb számot írni mint milliót, ha a' tizenkét jegy csupa kilenczes is, de a' tizenharmadik jegy már a' billiók' egyese 's így tovább. Ha a' mondottat röviden akarjuk kifejezni, lesznek

a' hat első jegy' értekei: egyesek.
a' 7diktől 13ig milliók és egyesek.
a' 13diktól 19ig billiók, milliók és egyesek.
a' 19diktől 25ig trilliók, billiók, milliók és egyesek.

36. K. Ezen tekintetből következik, hogy, ki három jeggyel írt számot ki tud mondani, bármelly sok jeggyel írtat is könnyen kimond, ha figyelemmel van azon szavakra, mellyeket minden hármas jegyből álló osztály után kimondani kell. Irjunk fel néhány példát, béosztván mindeniket

három - három jegybe és mondjuk ki azokat szóval?

F. Elkezdem a' példákat három jeggyel és folytatom többel, sorjában mondván ki a jegyeket hely - értékeikkel:

892 nyolczszáz kilenczven kettő.

7,504 hétezer, ötszáz négy (tizes nincs).

63,450 hatvan háromezer, négyszáz ötven (egyes nincs).

502,900 ötszáz kétezer, kilenczszáz (tizezer, tizes és egyes nincs).

7,600,172 hét millió, hatszáz ezer, száz hetven kettő.

58,753,209.

58 millió, 753 ezer 209.

370,506,931.

370 millió, 506 ezer 931.

4,600,790,175.

4 ezer, 600 millió, 790 ezer 175.

570″213,809′536,024.

570 billió, 213 ezer 809 millió, 536 ezer 024.

710‴567,853″007,819′587,321.

710 trillió, 567 ezer 853 billió, 7 ezer 819 millió, 587 ezer 321.

A' két utolsó példában hármas és hatos osztályokat jelöltem; felül egy vonal milliót, két vonal billiot, három vonal trilliót jelent, mindegyik alsó vonal pedig ezret.

37 K. Semmi kétségem nincs többé, miként vannak a' számok alkotva, de szeretném tudni, hogy lehetne ezt ollyan gyermeknek érthetőleg megmagyarázni, ki a' számokat felírni nem tudná, de unalmasnak találná tiznél tovább számlálni?

F. Ha megtanítanám tizig számlálni p. o. golyókkal, hogy nyilván látná, mint kell tiz egyes golyó, hogy a' szám 10 kerüljön ki, több ládikákat vagy kosarkákat venněk elé 's megjelőlném a' kosarkákat sorjában:

1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 's a' t.

sámmal és az elsőre írnám egyes, a' másodikra tizes, a' harmadikra százas 's igy tovább ezres, tizezres, százezres, millió 's a' t.

Elrendelvén igy a' kosarakat, mindegyikbe 9 golyót tenněk, mondván, hogy a' második kosárban mindegyik golyó annyi, mint tiz egyes golyó az első kosárban; mindegyik golyó a' harmadik kosárban annyi, mint tíz a' másodikban 's igy tovább mindegyik következő kosár' egy golyója annyit ér, mint tíz az elöttő valóban. Nevök és helyük száma úgy is a' kosarkákra lévén írva, bizonyosan akarmelly számotis kimondana e' szerint, p. o. legyenek az osztályok vagy kosarak:

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
egyes.	tizes.	százas.	ezres.	10 ezres.	100 ezres.	millió.	10 millió.	100 millió.	ezer millió.

's a' t. hol a' rendet megfordíthatjuk, mindegyikbe 9 golyót tévén.

14	13	12	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1
000	000	000	000	000	000	000	000	000	000	000	000	000	000
000	000	000	000	000	000	000	000	000	000	000	000	000	000
000	000	000	000	000	000	000	000	000	000	000	000	000	000

Itt azért vettem mindegyik osztályba kilencz golyót, mert csak kilencz jelentő szám van, és csak ugyan, ha több vagy kevesebb golyó van egy kosárban a' szám nagyobb vagy kisebb és akkora, hány golyó van benne; ha pedig valamellyik osztályból valamenyi golyót kiveszem, természetes hogy ott semmi nem marad.

Ha mindegyik osztályban benn hagyom a' 9 golyót, a' szám lesz annyi kilenczessel írva, hány a' kosár.

Ha csak két, három, vagy négy kosarat veszek együvé, két, három vagy négy jegyből álló számot fejezek ki.

Elkezdem neki megmutatni 3 kosárral a' a' számokat és hagyok p. o. az elsőben 7, a' másodikban 5, a' harmadikban 2 golyót, 's lesz:

3	2	1
00	000 00	0000 000
százas.	tizes.	egyes.

és ő bizonyosan kimondja: kétszázas, öt tizes és hét egyes, vagy is: kétszáz ötven hetet 257.

Veszek ezután 4 kosarat:

4	3	2	1
0000 0	0	0000 0000	000 000
ezres.			

és ő rendbe fogja írni 5186, ötezer egyszáz nyolczvan hatot.

Szinte 5 kosárból:

5	4	3	2	1
000 000 00	0000		000 000 000	00 000

tizezer

itt észre fogja venni, hogy a' harmadik kosárban semmi nincs, azaz: hogy a' százasok hibáznak, tehát azokat nem is mondja ki és a' felírásban helyükbe üreset ír, és 84096, nyolczvan négy ezer kilenczven hat. 'S igy lassan lassan a' legnagyobb számokat is felírná és kimondaná, tudván, hogy p. o: 75064923

három egyes,
két tizes, ez pedig husz egyes,
kilencz százas, vagy kilenczven tizes,
négy ezres, vagy negyven százas,
hat tizezres, vagy hatvan ezres,
semmi száz ezres, vagy semmi,
öt millió, vagy ötven százezres,
hét tiz millió, vagy hetven millió;

és megfordítva: hetven millió és öt millió: 75 millió,
hatvan ezer és négy ezer: 64 ezer,
kilencz száz huszon három: 923 egyes.

Második Beszélgetés.

---

1. K. A' számok' alkotmányát ismerjük, és tudjuk hogy a' sor 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20, 21, 22, 23, 24, 25, 26, 27, 28 's a' t. természetesen foly, úgy hogy mindegyik következő szám egyel nagyobb mint az előtte álló, és ezért természetes számsornak is neveztetik. Mire használjuk mi főképen ezen rendes sort?

F. A' számlálásra. Mindenkor ha valamely tárgyból több van, és meg akarjuk tudni hány vagy melly számú, ezen sor' segédje által számláljuk öszve. Akarmit számlálunk pedig, mindég egyen, az elsőn kezdjük a' számlálást, 's lesz a' második: kettő, a' harmadik: három, a' negyedik: négy 's így tovább, mig valamenyin keresztül mentünk.

2. K. Miként számlálunk meg valamit, p. o: hogy tudjuk meg, hány gyermek van' együtt valamely oskolában?

F. Vagy sorba állítjuk valamenyit, vagy egyenkint állítjuk őket egy helyről a' másikra 's mindegyiket a' természetes számsor jegyével nevezzük egymásután; a' mellyik szám jön az utolsóra, annyi tanuló van együtt.

3. K. Ebből azt látom hogy az öszveszámlálás egyszersmind öszveadás is, hol az egyesek lassan lassan öszvetétetnek, mi ennek az oka?

F. A' mint a' természetes számokkal jelöljük meg sorjában az egyes és magános tárgyakat, szintugy számláljuk egyenként öszve valamennyit, mint a' számsorban mindegyik következő számhoz egyet adtunk. Ha p. o: a' számlálás közben a' nyolczadik tanulóra értünk, ez nem azt teszi, hogy ez a' tanuló több egynél és hogy nyolcz (ez nem lehet, mert egy tanuló nem több egynél), hanem azt, hogy előtte már hét volt és ezen hetet hozzá számlálván, ő a' nyolczadik lesz a' sorban 's ha utánna több nem következne, a' tanulók' száma nem is lenne nyolcznál több. Szinte ha valamelly faluban vagy városban a' házakra számokat írunk, elkezdvén az elsőnél, mellyre az 1 számot írjuk, mindegyik következő házra egyel nagyobb jegyet írunk, mint azok a' természetes számsorban egymásután következnek, 's a' legutolsó ház azt mutatja, hogy hányadik a' faluban vagy városban, de egyszersmind azt is mutatja, hány ház van mindöszve.

A' természetes számsortól e' szerint az öszveadás el nem válosztható és mindegyik szám magában foglalja az őt megelőző egyeseket és tulajdon egyesét.

Akarmi legyen az mit megszámlálunk, helyibe egyeseket írhatunk 's ha 'előbbi példánk szerint tizenhat tanuló lenne a' szobában, ezeket igy tehetnénk egymásmellé:

1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1,

ha számokkal jelölnénk meg, hányadik valamellyik a' sorban, lennének:

1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16,

de minthogy egyenként számláljuk öket, fognak következni:

1	1.	111111111	9.
11	2.	1111111111	10.
111	3.	11111111111	11.
1111	4.	111111111111	12.
11111	5.	1111111111111	13.
111111	6.	11111111111111	14.
1111111	7.	111111111111111	15.
11111111	8.	1111111111111111	16.

4. K. Veszem észre, hogy legfőbb oka, miért foglalják a' számjegyek az egyeseket magukba az, hogy illy egyesek, ha sokan állnak, egymásmellett sok helyet foglalnak el, és ezen felül igen nagy könnyűséget nyujtanak a' számjegyek az által, hogy egy tekintetre megmutatják, hány egyes van bennők együttvéve, mi nem olly könnyű, ha csupa egyesek vagy vonalak állanak egymásmellett. Én legalább nem gondolom, hogy valaki megtudná egy tekintetre mondani, hány illy vonal van egymás mellé téve, ha számok csak a' huszat is felülmulja; de azt sem hiszem, hogy valaki megtudná egy tekintetre mondani, hogy az illy egymásmellé írt vonalak' száma p. o: 45 vagy 46 é, még azt bajjal meg nem számlálta.

De mindemellet, hogy ezen számsor szerint az öszveszámlálás könnyű, még is alkalmatlan, ha sok egyesből álló mennyiséget kell megszámlálni, mert elöször a' kimondás is hosszas, mint p. o: ha százon felül számlálunk és mondjuk egymásután: száz kilenczven három, száz kilenczven négy, száz kilenczven öt 's a' t., de másodszor tévedni is könnyű a' sok beszéd által, ez pedig bajt okoz, mert minden hiba után elöl kell kezdeni a' számlálást. Hogy kell tehát ezen alkalmatlanságon segíteni?

F. Mind a' bajt, mind a' hibákat elkerüljük, ha a' számlálandó egyeseket rakásokba, csoportokba vagy osztályokba vesszük, mit az is tesz, ki p. o: bizonyos számon túl számlálni sem tud. Mi, kik a' számok' rendszerét ismerjük, ollyan osztályokat fogunk választani, míllyeket legalkalmassabbaknak tartunk. Ha p. o: nem akarnók tíznél tovább menni, tiz-tíz egyesből álló csoportokat állítanók öszve; ha az egyesek' száma nagy, száz-száz egyest foglaló osztályokat vennők, 's ekkor a' tizeseket vagy százasokat sebesen megszámlálnók.

5. K. Igen helyes, hogy a' számok' alkotmánya szerint az osztályok' tulajdonit vesszük segédül, de ez által az unalmas számlálást még nem kerüljük el, mert ha p. o: egyik 'sebemben 8 garas, a' másikban 6 garas van és tudni akarnám, hány garas van öszvesen mindkét 'sebemben, megvallom nem szeretném egyenként, a' hat garast

a' nyolczhoz számlálni, mint p. o: 8, 1, 1, 1, 1, 1, 1, vagy: 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, vagy mondani: 8, 9, 10 és a' tizhez még a' megmaradott 1111 vagy négyet adni hogy 14 legyen. Miként lehetne rövidebb úton az illy öszveszámláláshoz jutni?

F. Csupán csak az által, ha elménkben tartjuk az egyes számjegyeknek öszvesét, bármelly kettő legyen eggyütt. Szükséges ehez, hogy mindegyik számjegyet öszvetegyük valamennyivel és öszves számukat jól megtartsuk elménkben. E' nélkül soha nem fogunk sebesen és jól számítani. Gondolkoztam pedig, miként lehessen egy oly táblácskát felírni, mellyből akarmelly két egyes szám öszvese látható legyen és következő úton jutottam hozzá:

ha a' kilencz jelentő jegyet egymásmellé leírom, mint itt:

1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9

és alájok először czupa egyest 's a' két sort öszveszámlálom, olly sorra jutok, mellynek mindegyik száma egyel több 's a' sor:

2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10,

csak hamar általláttam, hogy ezt az egész sort elhagyhatom, mert a' nélkül is tudjuk, hogy bármelly számhoz még egyet adunk, a' számsorban utánna álló számot találjuk és hogy egységet számlálni más számhoz tábla nélkül is tudunk. Következett a' sor csupa kettőst írván alá 's a' harmadik sorba írtam a' két egymás felett álló jegy' öszvesét; ez:

	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.	9.
	2.	2.	2.	2.	2.	2.	2.	2.
öszves:	4.	5.	6.	7.	8.	9.	10.	11.

's itt látom hogy ismét a' természetes számsor jön elé, csak hogy mindegyik alsó szám kettővel nagyobb mint a' legfelső;
következett a' három:

	3.	4.	5.	6.	7.	8.	9.
	3.	3.	3.	3.	3.	3.	3.
öszves:	6.	7.	8.	9.	10.	11.	12.

Ebből a' legfelsőbb sorból azért hagytam ki a' kettőst, mert a' három a' kettőssel már fellyebb együtt volt és 2 meg 3 csak annyi mint 3 meg 2.

4.	5.	6.	7.	8.	9.
4.	4.	4.	4.	4.	4.
8.	9.	10.	11.	12.	13.

5.	6.	7.	8.	9.
5.	5.	5.	5.	5.
10.	11.	12.	13.	14.

6.	7.	8.	9.
6.	6.	6.	6.
12.	13.	14.	15.

7.	8.	9.
7.	7.	7.
14.	15.	16.

8.	9.
8.	8.
16.	17.

9.
9.
18.

Igy minden számjegyet öszvetettem valamennyivel és egy sem maradt ki.

Ha ezeket más sorba írom és szóval is jelölöm, következő táblám lesz:

2 és 2 négy.	3 és 3 hat.
2 » 3 öt.	3 » 4 hét.
2 » 4 hat.	3 » 5 nyolcz.
2 » 5 hét.	3 » 6 kilencz.
2 » 6 nyolcz.	3 » 7 tíz.
2 » 7 kilencz.	3 » 8 tizenegy.
2 » 8 tíz.	3 » 9 tizenkettő.
2 » 9 tizenegy.	

4 és 4 nyolcz.	5 és 5 tíz.
4 » 5 kilencz.	5 » 6 tizenegy.
4 » 6 tíz.	5 » 7 tizenkettő.
4 » 7 tizenegy.	5 » 8 tizenhárom.
4 » 8 tizenkettő.	5 » 9 tizennégy.
4 » 9 tizenhárom.	

6 és 6 tizenkettő.	7 és 7 tizennégy.
6 » 7 tizenhárom.	7 » 8 tizenöt.
6 » 8 tizennégy.	7 » 9 tizenhat.
6 » 9 tizenöt.	

8 és 8 tizenhat.	9 és 9 tizennyolcz.
8 » 9 tizenhét.	

Észrevehető ezen öszvesekben, hogy többféle két jegynek ugyan azon öszvese van, mint p. o: 2 és 8 annyi mint 3 és 7, mint 4 és 6 és mint

5 és 5, az az: mindegyik párnak öszvese 10; szinte igy 2 és 7, 3 és 6, 4 és 5 egyenlően 9 et tesznek. Észrevehető továbbá, hogy lehető legnagyobb öszvest két kilencz ád, és ez: 9 és 9 tizennyolcz; 18on felül tehát nagyobb öszvest két jegy nem adhat. Legkissebb öszvese két jegynek a' 2. mi 1 és 1, és a' következő legkissebb 1 és 2, az az: 3; de mivel az egyeseket elhagytuk, öszveseink csak a' 4en kezdődnek és mennek sorjában 18ig. Ha tehát a' számokat egy sorba írjuk 4től 18ig, melléjök pedig mindazon kettős jegyeket, mellyekből ezen első sorban álló öszvesek kerültek, táblácskánk készen lesz.

Ezen táblácska segédjével könnyű lesz akarmely két jegy öszvesét az első sorban megtalálni. A' két-két egybeadandó jegyet egy kis keresztel kötöttem öszve jeléül, hogy egyiket a' másikhoz kell adni; akarmikor én ezen kis keresztet (+) írom, azt fogom vele mondani, hogy az utánna álló szám, az előtte állóhoz adandó.

Öszveadási táblácska.

4	2+2			
5	2+3			
6	2+4	3+3		
7	2+5	3+4		
8	2+6	3+5	4+4	
9	2+7	3+6	4+5	
10	2+8	3+7	4+6	5+5
11	2+9	3+8	4+7	5+6
12	3+9	4+8	5+7	6+6
13	4+9	5+8	6+7	
14	5+9	6+8	7+7	
15	6+9	7+8		
16	7+9	8+8		
17	8+9			
18	9+9			

Ha két egyes jegy' öszvesét jól emlékünkbe vettük, ne felejtsük el a' jegyeket megfordítani és figyelemmel lenni arra, hogy 8+5 annyi mint 5+8, vagy is szóval: nyolcz és öt szintannyi mint öt és nyolcz és mindenkor 13, mert nincsenek a' számok olly sorban írva, hogy elől vagy a' nagyobbik vagy a' kissebbik álljon mindenkor, de egyszer egyike, másszor másika áll' elébb vagy hátrább.

6. K. Eléggé gyakoroltakká tesz e' bennünket ezen táblácska' ismérete a' sebes és hibátlan öszveadásra?

F. Azt állítani nem merném és azért is ajánlom, hogy szünetlen gyakoroljuk magunkat az öszveadásban és írjunk egymásmellé mindég több több számot mentül elébb mentünk. Megjegyzem azt is, hogy táblácskánkban csak 12 olyan eset van, mellyben két jegy' öszvese egyes számjegy, a' többi mind kétjegyű, az az: tizest is adott az egyeseken felül; ez többnyire megtörténik, de ha több egyes jegyeket adunk öszve, húsz, harmincz, negyven felül is megyünk; ez azonban semmi nehézséget nem mutat, mert mindenkor csak az egyeseket adjuk öszve, 's csak akkor, ha öszvesek tizest ád, adjuk ezen tizest külön a' tizesekhez. Erre példákat adok:

tudjuk hogy 8+9 tizenhét, adjunk még hatot hozzá, lesz 17 és 6 huszonhárom, az az $8+9+6=23$, hol a' kettős fekvő vonal = azt teszi, hogy az egyik felin lévő mennyiség egyenlő azzal, melly a' másik felin van. A' mint itt 17hez még hatot adtam, elmémben ezen hatot nem a' 17 hez, hanem csak a' hét egyeshez adtam, mondván: 7 és 6 tizenhárom 's ugyan ezen tizest, melly a' 13ban volt, a' 17ben lévő tizeshez adtam és lett 17+6 =23 az az: 3 és két tizes. Ha ezen őt számot írom fel: 6+5+7+3+9, azokat sorban adom öszve, előre a' két elsőt, ennek öszveséhez a' harmadikat, a' három első öszveséhez a' negyediket 's a' négynek öszveséhez végre az ötödiket, ha mind egybe vannak véve, a' talált számot leírom, következőképen:

tudom 6+5=11 az az: 6 és 5 tizenegy, most a' 11hez adom a' hetet 's írom 11+7=18, vagy is: egy és 7 nyolcz, az ott álló tizessel pedig 18; továbbá 18+3=21, nyolcz és három 11, ezen 11 és az ott álló 10 öszvesen 21; továbbá 21+9=30, vagy 1 és 9 a' tiz, tiz és husz =30. Vége lévén az öszveadásnak felírhatom: 6+5+7+3+9=30, 's természetes hogy bármelly rendben írjam is az 5 számot, öszvese mindég csak 30, mert értékek itt a' helyükkel nem változik és megfordítva is 9+3+7+5+6=30.

Megjegyzem itt, hogy mindegy akar igy írjuk fekvő sorba az öszveadandó számokat, akar pedig egymásalá függő sorba; közönségesen függő sorba íratnak a' számok, mert a' szokás mintegy szükséggé válik. Adok egy példát illy függő sorban 's oda írom, hogy adatnak öszve egymásután a' jegyek:

5			5
+7	öt és hét 12		7
+9	12 és kilencz 21		9
+3	21 és három 24		3
+8	24 és nyolcz 32	(tehát)	8
+2	32 és kettő 34		2
+4	34 és négy 38		4
		öszves	38.

előre ugy írtam fel ezen példát hogy lássék miként kell mindegyik számot melly előtt + áll' öszveadni, azután pedig ugy, mint az közönségesen szokásban van; egymásalá íratnak tudniillik az öszveadandó számok 's ha mind felírattak, alájok egy vonal tétetik, ezen vonal alá íratik az öszves. Mindegy mint említénk, akar felfelül lefelé, akar alól kezdve felfelé adjuk öszve a' jegyeket, az öszves mindegyik esetben ugyan az.

7. K. Ha a' számokat öszveadni tudjuk, bármelly tárgyakat is öszve tudunk adni. Én hat nap útazván, az első nap 3 garast költöttem, de minden következő napon egy garassal többet, kérdés mennyit költöttem öszvesen?

F. Az első napon 3, másodikon 4, harmadikon 5, negyediken 6, ötódiken 7 és a' hatodik napon 8 garast 's igy a' 6 szám:

$$3+4+5+6+7+8 \text{ öszvese} = 33$$

költöttél öszvesen 33 garast.

8. K. Mennyit tesz a' 9 jelentő szám' öszvese, vagy is: mennyi öszveadva a' 9 első szám a' természetes számsorban?

F. Az első 9 szám:

$$1+2+3+4+5+6+7+8+9=45.$$

9. K. Tegnap különfélét vásároltam; adtam egy könyvért 8 garast, írótollért 2 garast, papirosért 7 garast 's egyéb aprolékért 9 garast, mennyit költöttem öszvesen?

F. 8+2+7+9=26, öszvesen 26 garast.

Felírok ide néhány példát gyakorlásul, illyeket mindegyikünk írhat maga is:

7	6	7	2	9	5	8
5	1	9	5	8	6	8
1	2	8	2	9	7	8
3	3	7	3	7	5	6
4	6	7	1	9	6	6
8	7	5	4	8	7	6
9	8	6	7	9	5	9
9	8	9	3	7	6	9
5	4	4	2	9	7	9
=51	=45	=62	=29	=75	=54	=69

10. K. Hogy lehetne megtudni, vallyon nem ejtettünk é valamelly hibát az öszveadásnál?

F. Erre nem tudnék semmi különös és bizonyos szabájt adni, de nem lehet eléggé ajánlani, hogy akarki, ha még olly gyakorlott is az őszveadásban, el ne múlassza az öszveadást legalább kétszer, de ha lehet többször is megtenni, és igen helyesen tesz, másodszor felülről kezdvén a' számítást, ha először alulról indult meg; 's csak akkor lehet nyugodtan, ha mindég ugyan azon öszvesre talált.

11. K. Eddig csak egy jeggyel írt számokat adtunk öszve, tán nehéz olly számokat öszveadni, mellyek több mint egy jeggyel vannak írva?

F. Koránt sem; oka, miért vettünk egyjegyű számokat az, hogy akarhány jeggyel legyenek írva az öszveadandó számok, mi mindenkor csak az egyes jegyeket adjuk öszve, akarmi legyen azoknak helyértékek vagy rendjek. Valóban ezen egyes jelek alatt mi kedvünk szerint akarmelly rendű egyeseket gondolhatunk, egyesektől fogva tizeseken, százasokon 's a' t. keresztül milliókat is. Ha p. o: feljebbi hét egymásmellett álló példánkat egyetlen egy példának akarnánk venni, tehetnénk azokat sorban ugyan annyi felsőbb rendű egységnek, mint állanak 's lenne, p. o: jobbról kezdve az első példa az egyesek' sora, a' második a' tizeseké, a' harmadik a' százosoké, a' negyedik lenne ezres, az ötödik tízezres, a' hatodik százezres és végre a' hetedik millió; az egyes öszvesek pedíg lennének sorjában mint ottan:

69 egyes	vagy	6 tizes	és	9 egyes.
54 tizes	»	5 százas	»	4 tizes.
75 százas	»	7 ezres	»	5 százas.
29 ezres	»	2 tízezres	»	9 ezres.

62 tízezres vagy 6 százezres és 2 tízezres.
45 százezres » 4 millió » 5 százezres.
51 millió » 5 tizmillió » 1 millió.
ezeket pedig sorjába írni mindegyikünk tudja.

Ha tehát valaki azt gondolná, hogy a' több jeggyel írt számok' öszveadása nehéz, csak azért is a' legnagyobb példával mutatnám meg neki az ellenkezőt.

12. K. Jól tudom, hogy mindegy, akar egyeseket, tizeseket, százasokat 's a' t. adjunk öszve; de szeretném a' mivelet' folyamatját olly egyszerűen megmutatni, hogy azt akarki is könnyen és világosan felfogja?

F. Példákkal én ezt megtehetem.

A' mint több egyesek öszveadása által felsőbb rendre, a' tizesekre értünk, szintugy jutunk akarmelly rendű jegyek' öszveadása által mindenkor a' következő felsőbb rendre, ha a' jegyek' öszvese 9et felülmúl, és valamint 8+7 egyes: 15 egyes vagy is, egy tizes és 5 egyes, szintugy lesz 8+7 tizes: 15 tizes, vagy egy százas és 5 tizes, 's igy 8+7 ezres is 15 ezres, 1 tizesezres és 5 ezres 's a' t.

Ha egyjegyű számokat adtunk öszve, az öszvegyült tizeseket csak aláírtuk az egyesek mellé; de ha vagy egyik vagy mindkét, vagy több öszveadandó szám két vagy több jegyű, akkor az öszvegyült tizeseket, mint a' többi felsöbbrendű egységet, a' következő vele egyenlő rendhez kell adnunk, mint p. o: azt tesszük, ha 18+8 öszvese kerestetik; itt már azt mondanók. 8+8=16 és az egyesek' helyibe 6ot írunk; de a' 18nál is van egy tizes és a' 16nál is, ezen két tizest a' hat mellé írjuk 's lesz: 18+8=26.

Szinte igy teszünk, ha kêt kétjegyű számot adunk öszve és:

$$28+36=64$$

mi annyi, mint 8+6 egyes és 2+3 tizes, az egyesek' száma 14, a' tizeseké 5, de minthogy az egyesek mellett is áll egy tizes, lesz öszvesen 6 tizes és 4 egyes, mi=64.

A' közönséges mivelet ekép van: egymásalá írjuk az öszveadandó számokat 's vonalt tevén alájuk, az öszveadást az egyeseken kezdjük; ha felsőbb rend, az az tizes támad, ezt a' következő tizesekhez adjuk, az egyeseket pedig leírjuk, a' tizesek' öszvesét is leírjuk, akar támadott belőlök százas akar nem; haílly százas van és az öszveadandó számok háromjegyűek, ezen harmadik jegyekhez adandó.

1.)	27	2.)	36	3.)	41
	35		93		163
	=62		=129		=204

Második példánkban már egy százas, harmadikban 2 százas támadott.

67	151	165	460
73	68	49	107
54	7	292	265
=194	=226	=506	=832

Ha nagyobb példákat veszünk, szinte csak így adjuk öszve a' számokat; szorosan megtartandó az, hogy a' rendek egymásalá írassanak, az az: az egyesek az egyesek alá, tizesek a' tizesek alá, százasok a' százasok alá 's mindegyik együvé tartozó felsőbb rendű egység; igy a' helyes és rendes írás által nagyon könyítjük az öszveadást.

Egy nagyobb példát szóval adok öszve: legyenek öszveadandók a' számok: 756 + 15 + 9601 + 78905 + 4 + 680096 + 7306792 + 601. Felírom ezeket rendesen egymásalá és a' vonal alá öszveseket is, kiki láthatja jól számláltam é.

$$
\begin{array}{r}
756 \\
15 \\
9601 \\
78905 \\
4 \\
680096 \\
7306792 \\
601 \\
\hline
=8'076,770
\end{array}
$$

Első tekintetre is látható, hogy ezen számokat tán olly rendbe lehetett volna írni, hogy állások a' szemnek kedvesebb lenne; 's mivel hogy a' sor, mellyben íratnak, nem változtat semmit az öszvesben, csak ugyan kedvünk szerint írhatjuk azokat oda, csak hogy a' rendek helyesen álljanak egymás alatt. Ide írom a' példát még háromféleként 's az utolsóban vonalakkal osztom el a' rendeket:

4	7306792	4
15	680096	15
601	78905	601
756	9601	756
9601	756	9601
78905	601	78905
680096	15	680096
7306792	4	7306792
=8076770	=8076770	=8076770

Látható, hogy kiki írhatja a' számokat, mint azt legalkalmasabbnak tartja; szükséges megszokni a' rendes, függőleg és egyenes sorba írást. Most szóval mondom meg, hogy végzettem az öszveadást. Elkezdém az egyeseknél sorjában menvén a' felsőbb rendekre. Vegyük például az utolsó felírást:

Alul kezdvén az öszveadást, jönnek az egyesek egymásután, 2 és 6 nyolcz, 8 és 5 tizenhárom, 13 és 1 tizennégy, 14 és 6 husz, 20 és 1 huszonegy, 21 és 5 huszonhat, 26 és 4 harmincz. Keresztül menvén igy az egyeseken, öszvesek 30, az az: 3 tizes, egyes pedig semmi; tehát helyükbe üres iratik, a' három tizes pedig természetesen a' tizesekhez számítatik, mellyek most következnek, és csakugyan először is ezen három tizest adom az alól álló legelső tizeshez a' 9hez és mondom: 3+9=12 's tovább igy: 12+9=21, az üreseken átugrok mert azok nem nevelik a' számokat 's jön 5, az az: 21+5=26 és végre: 26+1=27 tizes; a' hét egyes-tizest leírom, a' két tizes-tizest pedig, melly tudom százas, a' százasokhoz adom 's lesz: 2+7+9+6+7+6=37 százas, mi 3 ezres és 7 százas; leírván 7 százast, a' 3 ezrest az ezresekhez adom 's jön: 3+6+8+9=26 ezres, leírván a' 6 ot, a' felsőbb rendű kettős tizezres azokhoz adatik; jön 2+8+7=17, egy százezres és 7 leírandó tizezres; következik 1+3+6=10 százezres, mi tudjuk egy millió; egyes százezres helyibe üres lévén, üres íratik, az egy millió pedig végre a' példában következő 7 millióhoz adatik 's ád 8 milliót 's igy az öszves szám: 8 millió 76 ezer 770.

Annak pedig, ki a' miveletet mintegy kézzel foghatván akarná látni, ismét kosarkákat adnék, mellyekben számok helyett golyók vannak, 's csakugyan ha 6 jeggyel írt számokat akarnék vele öszveadatni négy sorban, hat rendű golyót foglaló négy-négy egyenlő kosarkákat vagy fiókokat tennék eleibe, p. o:

100 ezres.	10000.	1000.	100.	10.	1.	szám.
o o o o o	o o o o o o o o	o o o		o o o o	o o o o o o	583046
o o o o o o o o	o o o	o o o o o o o o o	o o o o o o	o o o	o o o o	839634
o o o o o o		o o o o o	o o o o o o o o		o o o o o o o	605807
o o o	o o o o o o o	o o o o o o o	o o o o o	o o o o o o o o o		377590

Az osztályokat ismeri, hány golyó van mindegyikben megtudja számlálni, az egyes jegyeket pedig felírni tudja, tehát a' jegyeket sorjában, a' legelső osztálytól kezdve odaírhatja 's megleli a' hozzájok tartozó 6 jeggyel írt számokat.

Mit fog ezután tenni ha azt mondom neki, hogy az egyes rendeket öszve kell adni és számlálni? Bizonyosan a' négy-négy egymásalatt lévő kosarakat öszvetőlti, ugy hogy csak egy sor kosara lesz, de mindegyik ugyan azon rendet foglalja öszvesen, melly eddig négy különös kosárban volt. Ezután a' különös rendeket megszámlálja 's lesz hat kosarának tartalma sorjában:

22	18	24	19	16	17

De tudja, hogy a' kosarakban csak egyféle rendnek kell lenni, a' felsőbbeket tehát a' következő kosárba rakja, kezdvén az egyesek mellett lévő tizesen 's lesz első rendelése:

22	18	24	19	17	7

második:

22	18	24	20	7	7

harmadik:

22	18	26	0	7	7

negyedik:

22	20	6	0	7	7

ötödik:

24	0	6	0	7	7

's végre egy más és hetedik osztályt talált 's ezt külön kosárba teszi, mellynek felírása millió 's lesz:

2	4	0	6	0	7	7

az adott négy szám' 583046
839634
605807
377590

öszvese =2406077

Ha a' mi felvett szokásunkat követí, az öszveadásnál előre csak a' négy első egyeseket foglaló kosarat tölti öszve 's az itt talált egy tizest a' tizesek' kosarába veti, ezután a' négy tizeseket tartó kosarat tölti egybe 's a' százast a' százas' kosárba veti, igy folytatván egymásután sorjában a' kűlönözést, mig végre az egyes jegyekre talál.

13. K. Én ezen példát igen helyesnek találom, mert a' mellett, hogy nyilvánan megmutatja, miként történik az öszveadás, egyszersmind arra is figyelmeztet, hogy mindegy, akarmelyik sorban, adjuk öszve a' rendeket, mert p. o: miért ne

tölcsem először az ezreseket foglaló kosarakat öszve; nem mindegy e' akarmelly rendű kosárnál kezdjem az öszvetöltést, ha a' kosarakat őszve nem keverem 's csak azokat veszem együvé, mellyeknek egyenlő felírásuk van, vagy mi mindegy, egyenlő rendű golyókat foglalnak?

F. Ez valóban mindegy, és a' számoknál is igy tehetünk, akar a' legfőbb renden, akar a' legkissebben, akar a' középsőn, egyszóval, akarmellyik renden kezdjük az öszveadást, csak hogy rendbe tudjuk ezután hozni az öszvetartozó jegyeket. Adok én erre példát is; vegyük a' 3 négyjegyű számnak 4605+9760 és 8072 öszvesét, lesz írva.

$$\begin{array}{r} 4605 \\ 9760 \\ 8072 \\ \hline =22437. \end{array}$$

Itten van:	5+2= 7	egyes	és ez	7
	6+7=13	tizes	» »	130
	6+7=13	százas	» »	1300
	4+9+8=21	ezres	» »	21000

tudom pedig, hogy ezen utolsó négy számot akarmelly rendbe írhatom, öszvese mindenkor ugyanaz és hogy:

$$\begin{array}{r} 130 \\ 7 \\ 1300 \\ 21000 \\ \hline 22437 \end{array} \quad \begin{array}{r} 7 \\ 1300 \\ 130 \\ 21000 \\ \hline 22437 \end{array} \quad \begin{array}{r} 21000 \\ 7 \\ 1300 \\ 130 \\ \hline 22437 \end{array} \quad \begin{array}{r} 1300 \\ 130 \\ 7 \\ 21000 \\ \hline 22437 \end{array} \quad \begin{array}{r} 130 \\ 1300 \\ 21000 \\ 7 \\ \hline 22437 \end{array}$$

mind egyenlők.

Kezdhetem tehát az öszveadást akármellyik renden, csak hogy a' hozzájok tartozó üreseket oda kell írni, vagy ha nem írni is, legalább gondolni; ha példámat előveszem, mondhatom a' százasokon kezdve:

6+7	százas	1300,	az egyesekre menvén:
5+2	egyes	7,	vegyük az ezreseket:
8+9+4	ezres	21000,	és végre a' tizesek:
5+7	tizes	130.	
	öszvesen	22437.	

Az üresek' írását pedig ugy kímélhetem meg, ha csak két sorba írom le az egyes rendek' öszvesét, p. o:

4605
9760
8072

ha a' legfőbb rendel, az ezressel kezdem az öszveadást, aláírhatom az egyes-ezreket az egyes-ezresek alá, jóltudván, hogy az ezres a' negyedik helyet foglalja az alkotmányban, a' tizezreket pedig balra egy helyel tovább írom, mert a' tízezresek helye az ötödik 's lesz legelső írásom.

4605
9760
8072
21

szintigy adván öszve a' százasokat, lesz második írásom:

$$\begin{array}{r} 4605 \\ 9760 \\ 8072 \\ \hline 13 \end{array}$$

következvén a' tizesek sora, lesz harmadik írásom:

$$\begin{array}{r} 4605 \\ 9760 \\ 8072 \\ \hline 13 \end{array}$$

's végre az utolsó, az egyesek öszvese:

$$\begin{array}{r} 4605 \\ 9760 \\ 8072 \\ \hline 7 \end{array}$$

Hogy csak könnyebb tekintet kedviért írtam a' számokat illy sorban, szembetűnő, de most öszveveszem a' 4 írást egybe 's lesz öszvesem:

$$\begin{array}{r} 21{,}13{,}7 \\ 1\,3 \\ \hline 2\,2\,4\,3\,7 \end{array}$$'s az egész példa:

$$\begin{array}{r} 4605 \\ 9760 \\ 8072 \\ \hline 21137 \\ 13 \\ \hline \text{öszves } = 22437 \end{array}$$

14. K. A' számokat tehát, legyenek azok aprók vagy bármelly nagyok, könnyűséggel öszveadni tudjuk; de kérdés, igy adunk é öszve más egyéb tárgyat is, és hasznukat vehetjük é a' puszta számoknak minden mennyiségekre nézve?

F. Bizonyosan mindenre lehet alkalmazni a' számokat, akarmelly legyen azon tárgy, mellyet számbeli tekintetbe veszünk, és ha többféle és külön mennyiségeket kifejezni vagy öszvevenni akarunk, azt számok nélkül, mint tudjuk, nem tehetjük.

Ha p. o: tudni akarnám, mennyit költöttem egy hét, egy hónap, vagy egész esztendő alatt, szükség hogy naponként egy kis könyvecskébe beírjam mit költöttem; ha hét nap van együtt és ezt öszveadom, tudom mennyit adtam ki egy hét alatt; ha négy hét lefolyt, tudom mennyi volt költségem egy hónap alatt, ha a' 4 heti kölcségemet öszveadom, 's ha végre 12 külön hónapi kiadásaimat öszveadom, az egész évi kölcségem öszvesét találom. Ha több istállóban juhok vannak és tudom mindegyik külön istállóban hány juh van; az egyes istállókban lévő juhok' számát öszvevevén, valamennyi juhnak megtudom öszves számát.

Ha akarom tudni, hány ember lakik egy faluban, minden háznak lakosai számát külön írom fel, 's ha valamennyi háznak lakosait öszveírtam, a' falú népessége' számát is tudom. Ha pedig az egész Megye' lakosai' számát keresem, a' külön városok, faluk és helységek lakosinak számát egyenként felírom 's öszveseket veszem.

Ha akarom tudni, mennyi gabona, bor, vagy más egyéb termény volt az idén a' környékben vagy a' határban, szükséges, hogy az egyes szántó földek, szőlők vagy bírtokok termését tudjam, 's ekkor valamennyit öszveadom.

15. K. Hát ha valaki azt kérdezné: 26 tojás és 35 alma hány alma? mit felelnél?

F. Különbféle tárgyakat egybeadni nemlehet és míndenkor csak egyneműeket; a' számok csak mindég számok és ha 26+35=61, ezen 61 sem nem tojás, sem nem alma; szintigy nem számlálhatom a' juhokat az ökrökkel vagy a' lovakkal öszve, nem a' gabonának többféle nemeit; de mindazáltal tudok a' kérdésre felelni, mert azt mondom, hogy: 26 egyes darab más 35 egyes darabbal 61 et teszen; és p. o: 360 juh, 75 ökör és 42 ló együtt véve 477 darab marha; és 39 véka búza, 63 véka árpa, 116 véka zab, 42 véka tengeri és 93 véka kolompér, öszvesen 352 véka eleséget teszen.

16. K. Valamelly mezei gazda vásárra járván, következő termesztményeit adta el egy hónap alatt:

1só nap	15 mázsa szénát	18	forintért,
	26 mérő árpát	32	forintért.
2dik nap	10 mázsa szalmát	5	forintért,
	32 mérő búzát	96	forintért.
3dik nap	12 mázsa szénát	16	forintért,
	20 mérő zabot	25	forintért.

4^{dik} nap 16 mázsa szalmát 9 forintért,
8 mérő búzát 24 forintért.
kérdés, mit adott el mindent és mennyit vett be?

F. Itt látom, többféle termesztmény van, és csak ugyan széna, szalma, búza, árpa és zab, ezeket külön kell öszveadnom; szinte látom hogy kétféle mérték van: mázsa és mérő, ezeket öszveadni nemlehet: da a' bévett pénz mind csupa forint, és ezeket öszvevehetem együtt 's lesz öszvesen 225 forint, de mivel mindegyik terménynek árra külön kivántatik, igy adom öszve azokat:

15+12	mázsa széna	27 mázsa
10+16	mázsa szalma	26 mázsa
32+ 8	mérő búza	40 mérő
26	mérő árpa	26 mérő
20	mérő zab	20 mérő
öszves:	53 mázsa széna és szalma,	86 mérő gabona

18+16= 34 forint.
5+ 9= 14 »
96+24=120 »
= 32 »
= 25 »

öszves: =225 forint.

Harmadik Beszélgetés.

1. K. Nekem egy rakás mogyoróm volt, de a' többi gyermek sokat elhordott belőle, szeretném tudni mennyit vittek el?

F. Ha ezt tudni akarod, szükséges tudnod előre mennyi volt, különben hijában töröd fejedet. Ha pedig ezt tudod, bizonyosan azt is fogod tudni, mennyi hibáz; mert az mi megmaradt, azzal mi elvitetett, az eleinteni öszvest teszi. Ha p. o: eleinten 8 diód vagy bármelly tárgyad volt, 's ebből vagy te vagy más néhányat elvesz, bizonyosan megtudod mennyi hibáz, ha tudod mennyi maradt meg. Felteszem hogy csak 3 maradt, ekkor az a' 3, avval mi elvétetett 8at tesz öszvesen; azon számot kell tehát keresned, melly háromhoz téve 8at ád, ez a' szám pedig 5, mert $3+5=8$, és ötnél egyéb szám háromhoz adva nem tesz 8at; következésképen 5 dió vitetett el a' 8ból, mert hogy 8ból csak 3 maradjon, ötöt kell elvenni.

2. K. Valamelly mennyiségből többet vagy kevesebbet elvenni, tehát anyit tesz, mint ezen mennyiséget kissebíteni. Ha számokból más számokat veszünk el, azokat is kissebítjük, és ezen

kissebítést *levonásnak* hivjuk. Magyarázd meg nekem, mi ez a' levonás és mikéňt történik számokkal?

F. Ha több egyest írok egymásmellé p. o: tizet, és ezen sorból egymásután míndég egyet-egyet elveszek, természetes hogy az ott maradott egyesek' száma mindég egyel-egyel kissebb lesz és csakugyan ha tizből:

1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1,

egyet elveszek, marad 9

1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1,

ebből ismét egyet, marad 8

1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1,

's igy tovább találok 7, 6, 5, 4, 3, 2, 1 egyest, és ha ezen egyest is elveszem, semmi nem marad.

De itt azt veszem észre, hogy a' természetes számsort megfordítottam, az az, írtam: 10, 9, 8, 7, 6, 5, 4, 3, 2, 1 és 0; ebből azt látom, hogy a' mint a' sorban, akármellyik számtól fogva, visszafélé mondjuk ki a' számokat, egyszersmind egyet-egyet mindegyik előbbeniből elveszünk vagy levonunk, valamint felfelé számlálván, egyet-egyet mindenkor hozzáadtunk a' kimondott számhoz; 's igy ki lefelé számlál, szintugy tudja az egységet levonni, mint ki felfelé számlál, az egységet a' számokhoz tudja adni.

De azt is látom feljebbi példámból, hogy ha:

10 ből	elveszek egyet,	marad	9
	ha kettőt	»	8
	ha hármat	»	7
	ha négyet	»	6
	ha ötöt	»	5
	ha hatot	»	4
	ha hetet	»	3
	ha nyolczat	»	2
	ha kilenczet	»	1

és ha végre 10et 10ből elveszek, semmi nem marad; mi igen természetes, mert bármelly mennyiséget egészen elveszünk, helyén semmi nem marad.

Itt én mindjárt 10ből vettem el egyenként az egységeket, de tudjuk, hogy bármelly rendű legyen valamelly szám, jegye nagyobb a' 9esnél nem lehet; ha tehát 9ből a' többi jegyet sebesen levonni tudjuk, minden példát igen könnyen feloldunk.

3. K. Veszem észre, hogy azon számnak, mellyet egy másikból levonunk, szükségesképen kissebbnek kell lenni mint annak, mellyből ezt elvesszük, vagy legfeljebb ugyan akkorának, 's ekkor mind levontuk; de hogy nagyobb soha nem lehet, mert valahonnan többet elvenni mint van, képtelen dolog. Látom azt is, hogy az egyes számokkal a' levonás nagyon könnyű, de miként történik ez a' több jegyű számokkal?

F. Akarhány jeggyel legyen a' kissebítendő és a' levonandó szám írva, a' levonás mindég könnyű, és szintugy mint az öszveadásnál a' rendek szerint történik. Szükséges tehát a' rendeket helyesen egymásalá írni, 's levonjuk az egyeseket az egyesekből, a' tizeseket a' tizesekből, százasokat a' százasakból 's igy tovább.

Megmutatom ezt példákkal:
felírom mínt szokás elöször azon számot, mellyből a' másikat levonni kell, 's nevezem *kissebbítendőnek*, aláírom azonnal a' másik számot, mellyet belőle lekell vonni 's nevezem ezt: *levonandónak*, a' kettő alá vonalat huzok és sorjában, az egyeseknél kezdve, az alsó jegyet a' felsőből elveszem, 's a' mi a' felsőben még megmaradt, leírom a' vonal alá; ha az alsó éppen akkora, mekkora a' felső, természetes hogy semmi nem marad és ekkor üreset írok alá.

Legyen az első példa ollyan, mellyben a' felső sor' jegyei mind nagyobbak az alsó sor' jegyeinél:

$$\begin{array}{r} 8357962 \\ 7123640 \\ \hline =1234322 \end{array}$$

itt látjuk, könnyen lehetett az alsó számokat a' felsőbbekből levonni; egy kissebb példán megmutatom, hogy mondottuk a' miveletet.

Adva van a' kissebítendő szám: 896, levonassék ebből 582; ezen utolsót az előbbi alá írom 's mondom:

$$\begin{array}{r} 896 \\ 582 \\ \hline 314 \end{array}$$

kettőt a' hatból elvévén, marad négy, a' 4et leírom,
nyolczat a' kilenczből marad egy 's az 1et leírom,
ötöt a' nyolczból marad három és a' 3at leírom,
's a' levonásnak vége.

Ez az eset igen ritka, 's többnyire egyik vagy másik alsó jegy nagyobb mint a' felette álló; ekkor természetes, hogy a' levonandó jegye ugyan azon rendből több egységet foglal mint a' kissebítendő, nincs tehát mit egyebet tenni, mint a' kissebítendő jegyéhez a' mellette álló felsőbb rend' egységét adni, 's ezután vonni le az alsó számot.

Ha 15 ből 8 at kell elvenni, csakugyan nem mondjuk hogy: nyolczat az ötből, mert első tekintetre is látjuk, hogy 8 egyes nagyobb 5 egyesnél, itt tehát a' felsőbb rendet a' tizest is az 5höz veszszük 's mondjuk: 8 at 15 ből elvévén, marad 7, mert $7+8=15$.

Ha 25 ből veszünk el 8 at, már egy tizes még ottmarad a' kissebbítendőben, mert itt is csak azt kérdezhetjük: 8 at a' 15 ből, marad 7, de a' 25 mellett maradott még egy tizest a' hét mellé lehozzuk, és:

$$\begin{array}{r} 25 \\ -\ 8 \\ \hline =17 \end{array}$$

Igen alkalmasnak tartom a' levonandó szám' eleibe *vonalat* tenni jeléül, hogy az előtte lévő számból a' kissebbítendőből, az utánna álló levonatik; azt a' számot pedig, melly a' történt levonás után megmarad, *különbségnek* nevezem és írom: 25—8=17, hol 17 a' különbség; csak ugyan 25 és 8 közt 17 a' különbség, mert: 17+8=25.

4. K. Abból, mit eddig említél, a' levonás' mivelete elég tisztán látszik. Tudom eszerint, hogy ha egy jegyet más vagy két jegyből levonni tudunk, akarmely példára is megfelelünk, mert ezen jegyek alatt bármely rendet gondolhatunk vagy tehetünk, és ha 8—5=3, bizonyosan 800—500=300, vagy szóval: 8 százból 5 százat levonván, marad 3száz, szinte 8 millióból, 5 milliót levonván, marad 3 millió és igy tovább. Azt is tudom, hogy egyik számot a' másikból levonni annyi, mint ezen két szám közt a' különbséget keresni; és megvallom, ezen utóbbi magyarázatot inkáb szeretem, mert ha azt mondom: *le kell vonni egyik számot a' másikból*, itt még nem fejezem ki hogy mit keresek, az az: azt, mi megmarad, nem is említem, holott ha ezt mondom: *keressük a' kétszám közti különbséget*, azonnal tudom, hogy fő ezélom csak ugyan ezen különbség, az az: akarom tudni, mennyi marad, vagy is: mennyivel nagyobb vagy kissebb egyik szám a' másiknál. Mivel pedig a' gyakorlás teszi főkép a' jó számvevöt, kívánatos, hogy többféle felvilágosító példákat adjunk?

F. Veszek előre valamelly felsőbb rendű egyest 's levonok belőle egy más számot.

Keressük 1000 és 863 közt a' különbséget:

Első mivelet.

$$\begin{array}{r} 1000 \\ -\ 863 \\ \hline =137 \end{array}$$

Itt mondom: hármat tizből (mert az egyesek helyén üres áll) marad 7. Kérdezhetné valaki, hogy vehettem onnan el egy tizest, hol nincs? Ezt megmagyarázom: Vegyük elé 4 osztályú kosarainkat 's tegyünk az ezresbe egyet, a' százasba, tizesbe és egyesbe pedig semmit. Tegyünk három más kosárba ezek alá: a' százasba 8at, a' tizesbe 6ot az egyesbe 3at, 's lesz;

1000.	100.	10.	1.
1			
	8	6	3

a' feladás az, hogy mindegyik rendű felső kosárból annyit vegyünk el, mennyi az alsó kosarakban van, de felül sem százas, sem tizes, sem egyes nincs; tudom azonban, hogy 1000 nagyobb mint 863, és hogy ezen számot belőle el is lehet venni. Elosztom tehát az ezret alsóbb rendű egyesekbe 's írom p. o: 10 százas, és az ezres kosarában semmi nem marad, hanem lesz a' többi három:

100.	10.	1.
10		

Ebből csak azt látom, hogy 8 százas a' tiz százasból könnyen elvehető, de még itt sincs sem tizes, sem egyes. Elveszek tehát a' 10százasból egyet 's bele teszem a' tizes kosárba, hol eszerint 10 tizes lesz, a' százas kosárban pedig marad 9 százas, mint:

100.	10.	1.
9	10	

itt egyes még nincs, de azt is szerezhetek az-által, ha egy tizest általviszek, marad tehát a' tizes kosárban 9 tizes, az egyesben pedig lesz 10 egyes:

100.	10.	1.
9	9	10

most már ugyébár könyű lesz az alsó kosárban lévő számokat levonni a' felsőkből, mert mínde-gyik:

9	9	10
8	5	

felső jegy nagyobb az alsónál és marad 137.

Ha tehát első felírásom szerint

$$\begin{array}{r} 1000 \\ 863 \\ \hline \end{array}$$

hármat a' 10ből vontam le, a' következő tizes jegy 9 marad, mert azt is ugy veszem, mintha a' százasokból adnék hozzá egyet, 's mondom: 6ot a' 9ből marad 3; szinte igy veszem a' százasok' jegyét 9nek, mert az ezres egyesét, 10 százassal változtattam, de belőle a' tizesekhez már egyet adtam 's igy lesz utolsó jegyem' levonása: 8at a' 9ből marad 1.

Második mivelet. Nemde helyesebb é kérdezni, mennyit kell 863 hoz adni, hogy ezer legyen belőle?

Ha erre felelni akarunk, azon számokat keressük, mellyek 8 százaz, 6 tizes és 3 egyeshez adatván, 1000 et egészítenek; 's itt igy mondom: 3 hoz kell 7 hogy 10 legyen; de ha az egyesek helyébe 10 et vagy is 1 tizest vettünk, a' tizesek' helyén csak 9 állhat, 's itt azt kérdem: hány tizes kell 6 hoz, hogy 9 tizes legyen? a' felelet: 3; a' százasok' száma 10, de belöllök egyet a' tizesekhez adtam 's maradt 9; az utolsó kérdés tehát: hány kell 8 százashoz; hogy 9 százaz legyen? 's a' felelet: 1; 's valóban 863+137=1000.

5. K. Valyon mindegy, 's akarmelly rendű egyessel igy történik a' levonás?

F. Mindegyikkel, és jó előre hozzá kell szoknunk megtartani elménkben, valahányszor a' felsőbb rendből egyet elvettünk az alsóbb' hijja-potlására; ezen pótlást *kölcsönözésnek* is szokás nevezni. Ne felejtsük el, hogy akarmelly felsőbb rendű egyest alsóbb rendű számokba vehetünk, és hogy ekkor a' szám egyjeggyel kevesebb, de az egységgel több is, mellykülön áll. Jól emlékezünk, hogy ha akarhány kilenczes legyen egymásmellett, ezekhez csak az egység kell, hogy felsőbb rendű egyesre jussunk, hogy p. o: 999999hez csak 1 kell 's azonnal egy millió lesz belőlle, vagy is; hogy:

$$999999+1=1{,}000{,}000.$$

Itt látjuk, az egyesek' száma $9+1=10$, és minden következő felsőbb rendnek jegye kilenczes. Ha tehát valamelly felsőbb rendű egyesből kell számot levonni, ezen felsőbb rendű egyest mindig igy írhatjuk, hogy egy rendel alsóbb csupa kilenczes legyen, az egyesek' száma pedig tíz. Példánkban is igy tettünk. Tudjuk pedig, hogy a' kilenczesnél nagyobb szám nem lèvén, belölle akármellyiket is elvehetjük.

Vonjuk le egy millióból 865073 at, lesz eszerint:

$$\begin{array}{r} 999999+1 \\ -865073 \\ \hline =134927 \end{array}$$

hol a' három egyest a' 10ből ventuk le, minden következő jegyet pedig a' felette álló kilencsesből.

Ezen elváltoztatás a' közönséges levonásnál nem szükséges, mert könnyű elménkben tartani ha potlásul vettünk valamelly felsőbb rendű egyest, 's példánk lehet:

$$\begin{array}{r} 1000000 \\ -\ 865073 \\ \hline =134927 \end{array}$$

Felírok néhàny példát gyakorlásul:

$$\begin{array}{r} 867807 \\ -858999 \\ \hline =\ 8808 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 6534201 \\ -\ 999999 \\ \hline =5534202 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 87007193 \\ -65028340 \\ \hline =21978853. \end{array}$$

6. K. Mint keressük, mennyivel nagyobb egyik szám a' másiknál, vagy mi a' két számközti külöbnség, azt látjuk, hogy a' kisebb szám és a' maradék vagy különbség, együttvéve természetesen ismét a' nagyobbik számot adják, mint eddigi példáinkból nyilván; 's valamint:

$$8-5=3 \text{ és } 5+3=8.$$

bármelly számok jőjjenek' kérdésbe, a' levonandó szám és a' különbségnek öszvese mindenkor egyenlő a' kissebbítendővel, az az: a' nagyobbik számmal. Mire használhatjuk ezen tulajdont?

F. Megtudni általa, hogy hibátlan miveltünk é. Ha a' maradékot vagy különbséget a' kissebbik számhoz adjuk, szükségesképpen a' nagyobbiknak kell ismét elöjönnie. De még jobb hasznát vesszük a' miveletnél magánál, mert ezen tulajdon által a' levonást egyenes öszveadásba fordíthatom, 's igy a' probát is megteszem egyszersmind a' levonással.

7. K. Miként lehet ezteszközleni?

F. Mint már említém, nem azt kérdem hogy: mennyi marad ha a' kissebb számot a' nagyobból levonom, hanem azt, hogy: mennyit kell a' kissebb számhoz adni, hogy a' nagyobbik jöjjön elé. Adok reá példát.

Vonjunkle 36 ból 24 et, azt teszi: adjunk 24 hez annyit, hogy 36 legyen:

$$\begin{array}{r} 36 \\ -24 \\ \hline =12 \end{array} \quad \text{vagy:} \quad \begin{array}{r} 24 \\ +12 \\ \hline =36 \end{array}$$

itt azt mondom: 4 és 2 az 6, nem pedig 6ból 4et elvenni, 's kérdésem: hány kell 4 hez hogy 6 legyen? bizonyosan 2. Én ezen kettőst azonnal leírom a' vonal alá; jön a' tizes és itt is kérdvén: hány kell kettőhöz hogy 3 legyen? a' szükséges egyet leírom.

Eszerint a' potlást vagy kőlcsönözést is elkerűlöm, p. o:

245ből vonjunk le 94et, lesz:

$$\begin{array}{r} 245 \\ -\ 94 \\ \hline =151 \end{array}$$

4hez 1kell 5ig; jön a' kilencz tizes, és itt már nem lehet kérdezni: mennyi kell 9hez hogy 4 legyen? hanem azt hogy: mennyi kell 9hez hogy 14 legyen? 's a' felelet 5, melly oda íratik; a' kölcsönre itt számot nem tartok, de minthogy 14 hez kellett keresni az öszvest, a' fennmaradott felsőbb rendet, az egy százast veszem 's mondom: egy százhoz kell még egy, hogy 2 legyen.

Közönségesen, akarmikor legyen az alsó számjegy nagyobb a' felsőnél, a' helyett, hogy a' felső sor' magassabb rendjéből vennénk el potlásul egyet, inkáb az alsóhoz adok illy felsőbb rendű egyest, mi végre csak ugyan mindegy, de a' miveletet könnyíti.

Egy más példában:

$$\begin{array}{r} 2344 \\ -\ 986 \\ \hline =1358 \end{array}$$

igy szollok: 6 és 8=14, a' 8 ast leírom,

a' 14nek egyes tizesét a' következő 8 tizeshez adom 's mondom: 9 és 5=14, az ötöst leírom; a' felsőbb rendű egyest ismét a' 9hez adván mondom: 10 és 3=13 's a' hármat leírom; a' 13 egyes felsőbb rendéhez adván egyet, lesz 1+1=2 's az egyest odaírom.

Még egy példán ezen miveletet megmutatom 's reménylem, bármellyikünk is könnyen írhat magának több példát is. Vegyünk százezret 's keressük közte és 87564 közt a' különbséget:

$$\begin{array}{r} 100000 \\ -\ 87564 \\ \hline =\ 12436 \end{array}$$

Mint azon jegyeket kimondom, mellyek a' potláshoz szükségesek, azonnal le is írom 's jön:

4 és 6=10, 7+3=10, 6+4=10, 8+2=10 és végre 9+1=10 's lesznek alól a' számok sorjában jobbról balra: 6, 3, 4, 2 és 1; és: 87564+12436 =100000.

8. K. A' levonás' mivelete látom olly közhasznú 's olly gyakori, mint az öszveadásé és evvel igen hasonló; valamint az öszveadás által több tárgyat vagy számot öszveszámláltunk, ugy keressük itt a' tárgyak' vagy számok' különbségét, kérdezvén: mellyik szám vagy mennyiség nagyobb vagy kisebb és hogy mennyivel nagyobb vagy kisebb. Szeretnék némelly levonási peldákat a' mindennapi életre alkalmazva?

F. Erre mindenütt találunk alkalmat, hol két vagy több mennyiséget hasonlítunk.

1.) *Példa*: Julius hónapban, midön legnagyobb hévség volt, a' melegmérő 26 fokig ment fel; November felé csak 8 at mutatott; a' meleg' különbsége tehát Julius és November közt 26—8=16 fok.

2.) *Példa*: Juniusban vannak nálunk a' leghosszabb napok, 's csak ugyan ezen hónap közepében a' nap 4 órakor reggel felkel és 8 órakor estve lemegy; a' legrövidebb napok pedig December végén vannak, midőn a' nap közel 8 órakor kel fel 's már 4 órakor lemegy; kérdés, hány óra különbség van a' leghosszabb és legrövidebb nap közt?

Délben, midőn az óra 12öt mutat, a' nap fele útját megtette, tehát dél-előtt is annyi ideig világít, mint délután; 's csak ugyan Juniusban a' nap

4 órától fogva 12ig 8 órát töltött az égen, 12után pedig 8ig szinte 8at, mert: 12—4=8 és 0+8=8, hol semmit írok 12 óra helyett, mert innen kezdjük ismét az órák' számát; a' két félnapi idö tehát 16 óra. Szinte igy December végén 8tól 12ig az órák' száma 4, mert: 12—8=4, és a' délutánni orák' száma is: 0+4=4, 's a' két öszves: 4+4=8 óra. A' leghosszabb nap tehát 16, a' legrövidebb 8 óra, 16 és 8 közt pedig a' különbség 8; tehát a' legrövidebb nap 8 órával kissebb a' leghosszabbnál, vagy más szóval: a' leghosszabb nap mégegyszer akkora, mint a' legrövidebb.

3.) *Példa*: Négy munkásnak kellett bérét fizetnem; az elsőnek adtam 26 forintot, a' másodiknak 32öt, a' harmadiknak 54et, a' negyediknek végre 17 forintot, kérdés mennyi pénzem maradt meg 160 forintomból?

Én ezen 4 féle fizetést vagy egyenként vonhatom le a' 160ból, vagy mind négyet előre öszveadom 's az öszvest vonom le egyszerre a' 160ból.

Az első feltétel szerint lesz egymásutan:

$$160-26=134,$$

az első fizetés után, megmaradott 134 forintból a' második fizetést vonom le:

$$134-32=102,$$

a' 102ből a' harmadik fizetést:

$$102-54=48,$$

's végre a' 48ból az utolsó fizetést:

$$48-17=31,$$

és 31 forint lesz megmaradott pénzem.

Ha pedig a' 4 külön fizetést öszveadom, lesz:

$$26+32+54+17=129,$$

és ezen 129 öszvest levonván 160ból, lesz:

$$160-129=31$$

forint mint elébb és:

$$31+129=160.$$

4.) *Példa*: Minden fertályévben bévettem bizonyos somma pénzt, és csak ugyan az elsőben 256 forintot, a' másodikban 342 forintot, a' harmadikban 410 forintot, 's a' negyedikben 163 forintot. Kölcségeimet béírtam az igaz a' könyvbe, de nem akarván öszveszámítni, csak a' megmaradott pénzemet számláltam meg minden fertály évben 's találtam az elsőben 79, a' másodikban 112, a' harmadikban 96 és az utolsó fertályban 3 forintot. Kérdes mennyi pénzem volt öszvesen az egész évben, mennyi maradt az év' végivel, mennyit adtam ki minden fertályban 's mennyit öszvesen az egész év alatt?

Ha a' 4 fertályi bévételt öszveadom, megtudom mennyi volt pénzem az év alatt 's ez:

$$256+342+410+163=1171 \text{ forint.}$$

Megmaradt pedig öszvesen az év' végével:

$$79+112+96+3=290.$$

Levonván a' megmaradott pénz' öszvesét az egész évi bévételből, a' kiadások' öszvesét tatálom meg 's ez:

1171—290=881 forint,

a' fertályévi kiadások pedig természetesen következnek, mint az egyes fertály bévételek' és maradvánnyok' különbségei, 's lesznek sorjában:

1.)	256— 79=177	első	fertályévi	kiadás.
2.)	342—112=230	második	»	»
3.)	310— 96=314	harmadik	»	»
4.)	163— 3=160	negyedik	»	»
Öszvesen	1171—290=881.			

's itt a' három öszves számban az egész bévétel, az egész maradván es az egész kiadás látható.

5.) *Példa*: Debreczen Pesttől husz mérföld, Posontól 45, Bécstől pedig 55 mérföld. Mennyire van Pest Bécstől, mennyire Posontól, és mennyire van Posony Bécstől?

Ha Debreczen Bécstől 55 mérföld, Pesttől pedig 20.

Pest Bécstől bizonyosan:	55—20=35	mérföld.
Szinte igy Posonytól:	45—20=25	»
és végre Posony Bécstől.	54—45=10	»

6.) *Példa*: Az egyik istállóban 1254 juh van, a' másikban 469, a' harmadikban 53al kevesebb mint a' másikban, 's végre a' negyedikben annyi, hogy a' második a' harmadikkal öszvevéve, éppen az első istállóban lévő juhok' számát, a' 1254et adja. Kérdés, mennyi juh volt a' harmadik és negyedik istállóban?

A' harmadik istállóban tudom: 469—53= 416 juh van, ha 469 és 419 ot öszveadom, a' második és harmadik istállóban lévő juhok száma' öszvesét találom, ez: 469+416=885. A' kérdés szerint a' három utóbbi istállóban annyi juhnak kell lenni, mint az elsőben, az az: 1254nek, lesz tehát a' negyedik istállónak megfelelő jnhokszáma, az első és a' két következő istállóban lévő juhokszámának különbsége, vagy is: ha 1254ből 885öt levonok, meglelem a' negyedik istálló' juhai számát; mi nem egyéb, mint azon számot keresni, mennyi hibáz 885ből, hogy 1254 legyen, 's ez:

1254–885=369, az utolsó istálló' juhai száma, a' három utolsóé tehát öszvesen:

469+416+369=1254, mint az elsőé.

Negyedik Beszélgetés.

---

1. K. Ha valamelly ugyan azon számot többször kell öszveadni, vagy öszvesen venni, az öszveadás miveletét én hosszasnak találom, nem lehetne é ezen öszveadást valahogy rövidíteni?

F. Én gondolkodtam efelől 's eddig csak mindenkor öszveadtam a' számokat annyiszor egymásután, hányszor azok kívántattak és megvallom, én is unalmasnak találom ezt a' sok öszveszámlálást. A' minap azt kérdezte tőlem atyám, hogy hány dió hat pár, 's mivel tudtam hogy égypár: kettő, hatszor adtam a' kettőt öszve 's írtam:

$$2+2+2+2+2+2=12,$$

mig felelni tudtam, hogy hatpár: 12.

Ha kérdem, hány könyvünk van négyünknek öszvesen, ha mindegyikünknek 5 könyve van, leírom az ötöt négyszer és látom hogy:

$$5+5+5+5=20.$$

Ha három szekeren gabona van, mindegyiken 32 mérő, és tudni akarom, hány mérő van öszvesen, háromszor kell odaírnom a' 32öt és lesz öszvesen:

$$32+32+32=96,$$

's minden illyen kérdésnél mindég csak öszveadás. De leginkább érezhető ez a' baj, ha p. o: több mínt százszor kellene valamelly mennyiséget venni, ekkor olly sokat kellene írni, hogy sem időnk, sem helyünk nem lenne elég.

2. K. Többször vagy sokszor venni öszve valamelly mennyiséget annyi mint azt *sokszorozni*, és ha mi ezen sokszorozásra valamelly könnyű és rövid úton juthatnók, magam is szeretném! Vallyon nem lehetne é az egyes jegyek' sokasait épen ugy megtanulni és elménkben tartani, valamint a' kilencz jelentő jegy' öszvesét tanultuk meg?

F. Ezen gondolat igen helyes, és megvagyok győződve, hogy ha a' kilencz jegyek közt, minden előfordulható sokast ismerjük, bizonyosan akarmelly sokasát is vehetjük bármelly nagy számnak, mert ekkor csak a' felsőbb rendekre kell figyelmeznünk, mint az öszveadásnál.

3. K. Hogy kellene tehát ezen különbféle sokasokat előre megismerni és azután megtanulni?

F. Megvisgálni az öszveadás által, mennyit tesznek ezen különös sokasok, és ha lehet, azokat ollyan táblácskába tenni, milyenbe az öszveadandó jegyeket tettük.

4. K. Az egyesnek sokasait ísmerjük, mert hányszor azt vesszük, annyiszor lesz egy, de egyel sokszorozni ugy sem lehet, mert egy csak egy és nem több, 's ha akarmelly mennyiséget egyszer veszek, egyszer teszek, vagy egyszer írok, a' mindenkor változatlan marad magában. Az egység

tehát nem sokszoroz, és valamint: egyszer 6 csak 6, szinte ugy: egyszer millió csak egy millió, és így bármelly szám is; hagyjuk el tehát az egyet és kezdjük a' kettőssel, melly tudjuk kétszer egy?

F. Öszveadom tehát a' 8 többi jegyet 's csakugyan mindegyiket kétszer maga magához, 's lesznek a' kettő' sokasai vagy többesei:

$$
\begin{aligned}
2+2&=4\\
3+3&=6\\
4+4&=8\\
5+5&=10\\
6+6&=12\\
7+7&=14\\
8+8&=16\\
9+9&=18
\end{aligned}
$$

's ezen öszvesekből, mellyek nem egyebek mint a' 8 számjegyek' duplái vagy kettősei, tüstént következtetem, hogy:

2	szer	2=	4
2	„	3=	6
2	„	4=	8
2	„	5=	10
2	„	6=	12
2	„	7=	14
2	„	8=	16
2	„	9=	18

's igy a' kettővel sokszorozni tudunk, ha ezen kis táblát megtanultuk.

Most háromszor veszem öszve ugyan ezen 8 jegyet 's lesznek öszveseim:

$$2+2+2= 6$$
$$3+3+3= 9$$
$$4+4+4=12$$
$$5+5+5=15$$
$$6+6+6=18$$
$$7+7+7=21$$
$$8+8+8=24$$
$$9+9+9=27$$

melly öszvesek a' 8 jegynek hármosai, vagy sokasai hárommal; lesz pedig kís táblám a' hárommali sokszorozásra:

3 szor 2= 6
3 » 3= 9
3 » 4=12
3 » 5=15
3 » 6=18
3 » 7=21
3 » 8=24
3 » 9=27

Következik a' számok' négyese 's ez:

$$2+2+2+2= 8$$
$$3+3+3+3=12$$
$$4+4+4+4=16$$
$$5+5+5+5=20$$
$$6+6+6+6=24$$

7+7=7+7=28
8+8+8+8=32
9+9+9+9=36

és a' négyes sokasok' vagy négyszeresek' táblácskája:

4 szer 2= 8
4 » 3=12
4 » 4=16
4 » 5=20
4 » 6=24
4 » 7=28
4 » 8=32
4 » 9=36

Ötször vevén mindegyik jegyet öszve, lesz:

2+2+2+2+2=10
3+3+3+3+3=15
4+4+4+4+4=20
5+5+5+5+5=25
6+6+6+6+6=30
7+7+7+7+7=35
8+8+8+8+8=40
9+9+9+9+9=45

és az 5 szörösök' vagy 5ös sokasok' táblácskája:

5 ször 2=10
5 » 3=15
5 » 4=20
5 » 5=25

5 ször 6=30
5 „ 7=35
5 „ 8=40
5 „ 9=45

Hatszor' vévén a' jegyeket:

2+2+2+2+2+2=12
3+3+3+3+3+3=18
4+4+4+4+4+4=24
5+5+5+5+5+5=30
6+6+6+6+6+6=36
7+7+7+7+7+7=42
8+8+8+8+8+8=48
9+9+9+9+9+9=54

és a' hatszorosok' vagy hatos sokasok' táblácskája:

6 szor 2=12
6 „ 3=18
6 „ 4=24
6 „ 5=30
6 „ 6=36
6 „ 7=42
6 „ 8=48
6 „ 9=54

Hétszer vévén a' jegyeket öszve, lesz:

2+2+2+2+2+2+2=14
3+3+3+3+3+3+3=21
4+4+4+4+4+4+4=28
5+5+5+5+5+5+5=35

6+6+6+6+6+6+6=42
7+7+7+7+7+7+7=49
8+8+8+8+8+8+8=56
9+9+9+9+9+9+9=63

és a' hétszeresek' vagy hetes sokasok táblácskája:

7 szer 2=14
7 » 3=21
7 » 4=28
7 » 5=35
7 » 6=42
7 » 7=49
7 » 8=56
7 » 9=63

A' számjegyeket 8szor vévén öszve lesznek az öszvesek:

2+2+2+2+2+2+2+2=16
3+3+3+3+3+3+3+3=24
4+4+4+4+4+4+4+4=32
5+5+5+5+5+5+5+5=40
6+6+6+6+6+6+6+6=48
7+7+7+7+7+7+7+7=56
8+8+8+8+8+8+8+8=64
9+9+9+9+9+9+9+9=72

és a' nyolczszorosok kis táblája:

8 szor 2=16
8 » 3=24

8 szor 4=32
8 » 5=40
8 » 6=48
8 » 7=56
8 » 8=64
8 » 9=72

's végre kilenczszer véve öszve a' jegyeket:

2+2+2+2+2+2+2+2+2=18
3+3+3+3+3+3+3+3+3=27
4+4+4+4+4+4+4+4+4=36
5+5+5+5+5+5+5+5+5=45
6+6+6+6+6+6+6+6+6=54
7+7+7+7+7+7+7+7+7=63
8+8+8+8+8+8+8+8+8=72
9+9+9+9+9+9+9+9+9=81

's a' sokszorozó kis táblácska 9el:

9 szer 2=18
9 » 3=27
9 » 4=36
9 » 5=45
9 » 6=54
9 » 7=63
9 » 8=72
9 » 9=81.

5. K. Ha ezen sokasokat elmènkben tartjuk bizonyos, hogy minden előfordulható esetben könnyen sokszorozunk; de azt veszem itt észre, hogy több sokas többször ide van írva, és sok

helyet meglehetett volna kimélni, igy p. o: 2szer 3, és 3szor 2 mindegy, szinte 3szor 4 és 4szer 3, 5ször 3, 5ször 4, 6szor 5, 7szer 5 's a' t., nem egyéb mint megforditva: 3szor 5, 4szor 5, 5ször 6, 5ször 7 's több illy egészen egyenlő sokasokat elhagyhattunk volna minden hiba nélkül, valamint az egyenlő őszveseket az öszveadási táblából elhagytuk?

F. Bizonyos, itt helyet nem kiméltünk, de csupán azért hagytam én azokat ott, hogy jó előre lássuk, miként lehet egyik vagy másik számot sokszorozónak venni felváltva, mert ha p. o: 8 a' sokszorozandó és 9 a' sokszorozó, mindegy akar azt mondom: 8 szor 9, vagy azt: 9szer 8, mindegyik esetben 72 a' szám, melly a' sokszorozás által származik, és ezért is hivom ezen 72t, 9 és 8 közti *származatnak*.

Ha a' többféle egyes jegyekközti származatokat öszveveszem egy kis táblába, csak ugyan kihagyom az egyenlőket, ugy hogy mindegyik csak egyszer jőjjön elő; a' tanuló pedig könnyen találhatja meg mindegyiket. Lesz táblám:

2 szer 2= 4	3 szor 3= 9	4 szer 4=16
» 3= 6	» 4=12	» 5=20
» 4= 8	» 5=15	» 6=24
» 5=10	» 6=18	» 7=28
» 6=12	» 7=21	» 8=32
» 7=14	» 8=24	» 9=36
» 8=16	» 9=27	
» 9=18		

5 ször 5=25	6 szor 6=36	7 szer 7=49
» 6=30	» 7=42	» 8=56
» 7=35	» 8=48	» 9=63
» 8=40	» 9=54	
» 9=45		

8 szor 8=64	9 szer 9=81.
» 9=72	

Ha még egyszerűbb alakba akarom hozni ezen kis táblát, felírom a' 8 jegyet fekvő sorba egymásmellé és ugyan ezen 8 jegyet függő sorba megfordítva egymás alá; ez meglévén, vonalakat huzok, fekvőket és függőket; a' kis négyszegekbe pedig béírom azon származatokat, mellyek olly két jegyből kerülnek, mellynek egyike a' fekvő, másika pedig a függő sorban áll, és mindkettő a' négyszegnél egybeüt.

	2	3	4	5	6	7	8	9
9	18	27	36	45	54	63	72	81
8	16	24	32	40	48	56	64	
7	14	21	28	35	42	49		
6	12	18	24	30	36			
5	10	15	20	25				
4	8	12	16					
3	6	9						
2	4							

A' táblácska visgálatát és haszonvétét tanuló tár-saimra hagyom.

6. K. Elménkben tartván ezen táblácska' számait, látom akarmelly számot is tudunk egy-jegyü számmal sokszorozni, mert valamint p. o: 6szor 8 negyvennyolcz, szintugy lesz: 6szor 8 tizes = 48 tizes, 6szor 8 százas = 48 százas, 6szor 8 ezres = 48 ezres 's igy feljebb bármelly rendű jegy' sokszórosa egyenlő, ha a' jegyek egyen-lők, csak hogy rendjeiket megtartják.

Adjunk néhány példát az egyes jegyekkeli sokszorozásra!

F. Vegyünk előre két jegyet sokszorozván egyel; és sokszorozzuk 32őt 3al.

Az illyen sokszorozási példákat mindenkor ugy írom, hogy az egyik szám után fekvő keresztet teszek (×) 's ez azt jelöli, hogy az előtte álló szám sokszorozandó, a' fekvő kereszt után pedig azon számot írom, mellyel sokszoroznunk kell; igy írom tehát a' példát: 32×3.

A' szerint mint említénk, az egyeseket külön és a' tizeseketis külön kell sokszorozni hárommal, lesz tehát első sokasom: 2×3=6 egyes; másik pedig: 3 tizes × 3=9 tizes, mert: 30 × 3 = 90. Az öszves tehát 6 egyes és 9 tizes, mi tudjuk: 90+6=96, példánk pedig írva:

$$32\times3=96, \text{ vagy: } \begin{array}{r} 32 \\ \times\ 3 \\ \hline =96 \end{array} \quad \text{vagy: } \begin{array}{r} 32\times3 \\ \hline =96 \end{array}$$

akarmellyik felírást választhatjuk.

Itt tán valaki előtt ismeretlennek látszik a' kifejezés: 30×3=90, mert ez is már kétjegyű szám' sokszorozása 3 által, noha 3 tizes = 30 és 3 tizes×3=9 tizes, 9 tizes pedig 90, ugy látszik külön magyarázatot kíván; megjegyzem tehát, hogy ott, hol üres áll, a' származatban is üres marad mert, akarmelly legyen a' sokszorozó, az üres nem adhat számot, mert valódi semmit jelent; itt tehát háromszor semmi csakugyan semmi, valamint milliószor semmi is csak semmi, azért írjuk le az üreset a' egyesek helyibe, a' tizesek' helyibe pedig: $3\times3=9$ jön.

Szinte igy: $100\times8=800$, és $1000\times7=7000$, mellyből azt látjuk, hogy az üresek nem sokszoroztatnak, hanem odaíratnak, annyian, mennyien vannak, és csak a' jelentő jegyek sokszoroztatnak egymással.

2.) *Példa:*

$$34\times3=102.$$

Ezen példában az egyesek' száma 4 lévén, a' hárommali sokszorozás által kétjegyű származatra akadtunk, mert: $4\times3=12$, tudván az öszveadásból hogy, a' felsőbb rendeket a' velük egyenlő felsőbb rendekhez kell adnunk, ugy fogunk itt is tenni és a' 14 nél álló 1 tizest a' tizeshez adni; mint a' tizeseket sokszorozzuk 3 által, lesz mint első példánkban: $3\times3=9$ tizes, de ehez adván a' megmaradott 1 tizest, lesz 10 tizes és 2 egyes, a' származat pedig: 102.

Gyakorlatul írok ide néhány példát:

65×8	70×5	57×9	88×8
$=520$	$=350$	$=513$	$=704$
99×9	51×4	68×7	34×6
$=891$	$=204$	$=476$	$=204$

Vegyünk egyik számnak három jegyet:

3.) *Példa:*

$$465 \times 5 = 2325$$

szóval megmondom miként miveltem:

Sokszorozván az 5 egyest 5el; mondom: 5 ször 5 = huszonöt; a' 25 ötegyesét leírom, de a' két tizest fenntartván mondom: marad 2; következik a' 6 tizes' sokszorozása 5 által 's mondom: $6 \times 5 = 30$ és a' megmaradott 2vel: 32; leírom a' két egyes tizest, a' 3 százast pedig fenntartom hogy a' százasokhoz adhassam; érkezvén a' harmadik jegyre: $4 \times 5 = 20$ százas és a' megmaradott 3 százat hozzá, leírom a' 23at, vége lévén a' sokszorozásnak.

Ha ezen egyes származatokat másként írom, igen szembetűnőleg megbizonyítom a' mivelet' helyes létét.

Megtartom példámat és sokszorozom 465öt 5el:

Előre ád	5ször 5 egyes	.	25 egyest =	25
ezután	6szor 5 tizes	.	30 tizest =	300
és végre	4szer 5 százas	.	20 százast =	2000

ez a' három származat pedig öszvesen 2325.

Szinte igy:

$$865 \times 7 = 6055, \text{ és } 907 \times 8 = 7256.$$

Ezen utóbbi példánkban 8szor 7=56 után a' tizesek helyén üres lévén, nem is találunk tizeseket, 's azért az egyesekből származott 5 tizest helyére írtam.

Könnyű általlátni, hogy bárhány jeggyel legyen írva a' sokszorozandó szám, csak igy folytatjuk a' miveletet.

Írok fel némelly példát gyakorlatul:

8705×6	39021×7	801072×9
$=52230$	$=273147$	$=7209648$

7. K. Hát ha a' sokszorozó is több mint egy jegyből áll, miként mívelünk?

F. Mindég egyes jeggyel sokszorozunk, bárhány jeggyel legyen írva a' sokszorozó, csak hogy mindegyikkel sokszorozzuk az egész számot és a' származó rendekre figyelmezzünk.

8. K. Miként származnak a' felsőbb rendek alsókból?

F. Tudjuk, a' tizes alkotmány szerint mindegyik balra eső 's következő helyen, tizannyi értéke van minden egyesnek, mint az előtte lévő helyen, és hogy ezen helyérték, mellyet jól ismerünk, teszi azt, mit rendeknek nevezünk. Ebből én azonnal' következtetem, hogy ha valamelly jelentő jegyet egy hellyel tovább teszek balra, azt én tizszerte nagyobbítottam, vagy is 10el sokszoroztam.

Ha p. o: hat üres helyet gondolok, mint: 000000, és jobbról kezdve balra az üres helyibe sorjában egyet írok, ezen egynek értéke mindegyik következő helyen 10szer annyi lesz, mint az előbbeniben volt, p. o:

000001	az	első helyen egy egyes
000010	a'	másodikon tiz egyes, vagy 10szer 1
000100	a'	harmadikon tizszer tiz
001000	a'	negyediken 10szer száz
010000	az	ötödiken 10szer ezer, és végre
100000	a'	hatodikon 10szer tizezer,

's innen következík:

10 szer 10 =100
10 „ 100 =1000
10 „ 1000 =10000
10 „ 10000=100000 's igy tovább.

Ha ezen sokasokat megvisgálom, azt veszem észre 1ször, hogy: 10 által sokszoroztatik valamelly szám akkor, ha a' sokszorozandó számhoz egy üres ragasztatik, 's hogy p. o:

$8\times10=80$, $76\times10=760$, $965\times10=9650$
$8701\times10=87010$ és $18900\times10=189000$.

De azt is látom, hogy ha különböző vagy felsőbb rendek sokszoroztatnak együtt, ezek olly rendet származtatnak, mellyet mindkét rend' öszvese fejez ki; ezt én megmagyarázom.

Láttuk, hogy ha az első rendel sokszorozunk akarmelly más rendet, vagy megfordítva, akarmelly rendel sokszorozzuk az első rendű számokat csak akkor jutunk egyel felsőbb rendre, ha a' két egyes jegy' származata kétjegyű, különben pedig csak a' főbb rend' számait találjuk; p. o:

3 szor 3000=9000, mert a' 3×3=9, csak egyes jegyű származat, a' 9es tehát ezres, milly volt a' sokszorozott legfőbb rend; de ha a' 3 helyett 4et írunk: 4szer 3000=12ezer, 's már egy rendel feljebb való számra találtunk. Tudjuk azonban, hogy 9nél nagyobb jegy nincs 's ha mind a' sokszorozót, mind a' sokszorozandót ezen jeggyel írjuk, a' legnagyobb lehető származatra érünk, így:

9×9=81 a' legnagyobb származat két egyes jegy közt és két jegyel van írva;

9×99=891, legnagyobb lehető származat egy két és egy egyjegyű szám közt 's három jegyel van irva;

9×999=8991, legnagyobb származat egy háromjegyű és egy egyjegyű szám közt 's 4 jeggyel van írva. He ezen tekintetet továb nem fojtatom is, eléggé látom, hogy ugyaz ez lesz az eset, bárhány jegy legyen a' sokszorozóban és a' sokszorozandóban; ebből pedig azonnal következtetem, hogy 1szőr soha nem lehet a' származat több jeggyel írva, mint a' két sokszorozandó számnak öszvesen jegyei vannak, és hogy: 2szor ezen eset csak akkor van, ha a' két legfőbbrendű jegynek származata kétjegyű.

Menjünk vissza a' felsőbbrendű egyesek' sokszorozására.

Tudjuk, hogy: 10szer 1000 = tizezer
és 10szer 10ezer = százezer
de 10szer ezer nemegyébb, mint 10szer 10száz,

valamint százezer: 10szer 10ezer; de minthogy 10szer 10 maga is 100, tehát:

$$100 \times 100 = 100,00$$
$$\text{és } 1000 \times 100 = 1000,00$$

valamint 100szor millió=százmillió=1,000,000,00.

Innen látom, hogy 100 al sokszorozunk valamelly számot, ha ahoz jobbra két üreset ragasztunk 's valóban:

$$8 \times 100 = 8,00. \quad 96 \times 100 = 96,00.$$
$$870 \times 100 = 870,00.$$

Szükségtelennek is látom tovább mennem a' visgálatban 's bátran mondhatom, hogy: akármelly rendű egyes legyen a' sokszorozó, a' mivelet az által történik meg, ha a' sokszorozandó számhoz annyi üreset ragasztok, hányat hord magával a' sokszorozó felsöbbrendű 1. Ha tehát 10el sokszorozunk, a' sokszorozandó számhoz ragasztunk egy üreset, ha 100 al sokszorozunk: két üreset, ha ezerrel, három üreset, ha 10ezerrel: 4üreset 's igy tovább; millióval sokszorozunk pedig, vagy milliószor veszünk valamelly mennyiséget, ha hozza' hat üreset ragasztunk.

Igy:

$$86 \times 1000 = 86000. \quad 752 \times 100000 = 75200000.$$

Azt is látom továbbá, hogy ha felsőbbrendű egyesek sekszoroztatnak egymásközt, a' származzatban annyi üres áll, mennyi volt öszvesen mind két sokszorozandó számban; ha p. o. három ürest tartó egyes, 5 ürest tartóval sokszoroztatik, a' származatban 3+5=8 üres lesz, és csak ugyan: 1000×100000=100000000, 's bármely példában igy. De ha a' jegyeket számlálom öszve, látom hogy a' két sokszorozandó szám' öszves jegye itt 4+6=10, a' származatban pedig csak 9 jegy van; ez onnan jön, hogy: 1szer 1csak egy, az az: hogy a' két jelentő jegy' származata csak egyjegyű szám; ebből következtetem hogy, ha a' két legfőbbrendű jegynek származata egyjegyű szám, akkor az egész származat egy jeggyel kevesebbel lesz írva, mint a' két sokszorozandó szám jegyeinek öszvese; és hogy ha két akarhány jegyel írt számot sokszorozunk, a' származatnak soha nem lehet kevesebb jegye, mint a' két sokszorozandó szám jegyének egyel kisebbitett öszvese: vagy is, ha p. o: a' sokszorozandó 5 jegyű, a' sokszorozó 3, melly öszvesen 8, a' származat' jegyei száma soha nem lehet 7nél kevesebb; de mint elébb láttuk, 8nál több sem lehet.

Ez mit itt említőnk, arra szolgálhat, hogy előre megtudhassuk, hány jegyből fog állani származatunk, ha két szám adatott sokszorozás végett.

9. K. Mire használhatjuk ezenkivül eddigi tekinteteinket?

F. Főképpen arra, hogy az egyes származatok' felírásánál hibát ne kövessünk, tudván melly uj rendek támadnak a' különbféle rendek' sokszorozása által. Ajánlom kinek kinek hogy egy kis táblát készítsen, mellyből egyszerre meglátja, melly rendet származtat két különböző febsőbb rend' sokszorozása. Erre segélni is fogom, mondván p. o: hogy:

100 as százassal 10 ezrest
100 as ezressel 100 ezrest
1000 es 1000rel milliót
1000 es 100000rel 100 as milliót 's a' t. ád, sorjában veheti eszerint a' többit is.

10. K. Adjunk tehát egy példát kétjegyű sokszorozóra, 's legyen 857 sokszorozandó 65el?

F. Itt előre megjegyzem, hogy a' sokszorozandó 3 jegyű, a' sokszorozó pedig 2 jegyű lévén, a' származatnak jegye: $3+2=5$ nél több nem lehet, de szükségesképen legalább 4nek kell lennie; mivel pedig a' két legfőbbrendű jegy' sokasa a' 6szor $8=48$, (hol a' 8 a' sokszorozandónak százasa, a' 6 pedig a' sokszorozó' legfőbbrendű jegye) két jegyű, a' származatnak annyi jegye lesz, mennyi van a' két sokszorozóban öszvesen, az az: 5.

Azt jegyzem meg továbbá, hogy a' származat' legfőbb jegye, már azon okból is, hogy az ötödik helyet foglalja el, 10 ezres lesz; de azt is tudom, hogy százas tizessel sokszoroztatván ezrest ád; de minthogy 8 százas 6 tizessel sokszoroztatik, a' 48 ezresnél 4 tizezres áll, melly a' legfőbb rendje lesz a' származatnak.

Ezt előre bocsájtván elkezdem a' sokszorozást 's mondom kezdvén az egyesekkel sokszorozni:

5ször 7=35, leírom az 5öt fenntartván 3at

5 „ 5=25, hozzáadván a' 3at lesz 28, leírom a' nyolczat;

5ször 8=40 hozzáadván 2öt, leírom 42 's igy az 5el ugy sokszoroztam mintha egyedül lenne.

Ha ezen ötteli sokszorozás magában állna, igy írnám:

$$857 \times 5 = 4285, \text{ vagy: } \frac{857 \times 5}{= 4285}$$

hátra van a' 6tali sokszorozás, 's ha ezt is egyes számnak veszem, lesz:

$$857 \times 6 = 5142.$$

De ezen 6os: tizes, vagy 60, tehát az 5142 után üreset kell tennem 's lesz:

$$857 \times 60 = 51420$$

's ha a' két származatot őszveteszem, lesz:

$$\begin{array}{r} 857 \times 65 \\ \hline 4285 \\ 51420 \\ \hline = 55705. \end{array}$$

Itt üreset tettem az egyesek alá azért, hogy nyilván lássék, hogy a' tizesek egyessel sokszoroztatván, nem adhatnak egyeseket, 's ha mondom: [6 szor 7=42 's a' kettőst leírom, ez a' kettős is, valamint az egész 42 csupa tizes, mert a' sokszorozó 6 is tizes; a' közönséges miveletnél tehát egyébre nem kell figyelmeznünk mint arra, melly rendet ád valamellyik sokszorozó jegy, és melly helyet foglal ez a' rend; tudom pedig, hogy a' tizesek a' második helyet kívánják, 's azért a' kettőst egy helyel tovább írom balra az egyeseknél.

Megmutatom ezen példán, hogy mindegy, akarmellyik jeggyel kezdjem a' sokszorozást.

Kérdem mi ez a' sokszorozó 65? bizonyosan 60+5; kell tehát vennem a' 857 et 60 szor és 5 ször; ha 65 el tudnék egyszerre sokszorozni, bizonyosan nem sokszoroznám a' számot először egyik jeggyel azután a' másikkal, de mivel ezt nem tudom, kétféle sokasát veszem a' 857nek 's csakugyan mint kívántatík hatvanszor és ötször. Olly számmal azonban sokszorozni igen könnyű, melly után egy vagy több üres áll, mert ezen üresre nem figyelek, hanem csak a' jelentő jeggyel sokszorozok, 's mint elébb tettem, a' származathoz írom az üreset. Ha tehát 60 al sokszorozom először a' 857et, lesz származatom mint elébb:

$$\begin{array}{rr} & 857\times60=51420 \\ \text{öt által pedig:} & \underline{857\times\ 5=\ \ 4285} \\ \text{és} & 857\times65=55705. \end{array}$$

A' közönséges mivelet szerint példánk, ha a' hatossal sokszorozunk előre, igy áll:

$$\begin{array}{r} 857\times65 \\ \hline 5142 \\ 4285 \\ \hline =55705 \end{array}$$

's ekkor az egyeseket írtuk egy hellyel tovább jobbra.

A' számokkali sokszorozás tehát azt kívánja, hogy a' sokszorozónak mindegyik jegye, a' sokszorozandónak mindegyik jegyével sokszoroztassék külön külön, egyet sem hagyván el, az öszves származatok pedig öszveadassanak.

Mi, példánk sokszorozandóját a' 857t is szétoszthatjuk, mint a' 65töt szétszedtük 's csakugyan:

nyolczszáz ötvenhét = 800 + 50 + 7.

Példánk tehát azt kívánja, hogy ez a' 3 szám: 800, 50, és 7, a' két számmal: 60 és 5 tel külön külön sokszoroztassék, az egyes származatok pedig adassanak öszve. Ezt bármellyíkünk is könnyen tudja eszközleni, de írjuk fel mi is az egyes származatokat sorjában, elkezdvén a' 60 nali sokszorozást.

800×60=48000, az az: 6szor 8=48 hozzáírván annyi ürest, mennyi mindkét szám mellett van, az az: hármat; leírom tehát még egyszer ezen származatot, hogy a' többi rendesen jöjjön egymásalá:

$$
\begin{array}{rl}
800\times60= & 48000 \\
50\times60= & 3000 \\
7\times60= & 420 \\
800\times\ 5= & 4000 \\
50\times\ 5= & 250 \\
7\times\ 5= & 35 \\
\hline
\text{és az öszves:}\quad & =55705.
\end{array}
$$

Noha ezen bizonyításnál több írás kellett, haszna tudom van, mert azt is észrevesszük, hogy a' közönséges mivelet szerint írást is kimélünk. Például adok némely sokszorozást:

$$
\begin{array}{r}
576\times93 \\
\hline
5184 \\
1728 \\
\hline
=53568
\end{array}
\qquad
\begin{array}{r}
6034\times86 \\
\hline
48272 \\
36204 \\
\hline
=518924
\end{array}
\qquad
\begin{array}{r}
798052\times79 \\
\hline
5586364 \\
7182468 \\
\hline
=63046108.
\end{array}
$$

11. K. Mít lehetne megjegyezni, ha a' sokszorozó több mint kétjegyű?

F. Semmit mi különös lenne; változatlan marad mit említettem, hogy figyelmeznünk kell, mellyik helyre esik mellyik rend, 's hogy az írás rendesen történjék. Ha sorjában sokszorozunk az egyesektől kezdve, vagy visszafelé a' legfőbb renden kezdve, mindegyik következő származat' legkissebb rendje egy hellyel balra vagy jobbra esik; ha pedig minden sor nélkül összevissza sokszorozunk a' jegyekkel, csak a' helyértékekre kell figyelmeznünk.

12. K. Vegyünk például két számot 's mindegyik 4 jegyű legyen, alkalmaztassuk ezen példára minden eddigi észrevételinket.

Legyen a' két szám 8593 és 7462?

F. Bármellyik számot tegyem a' kettő közzül sokszorozandónak vagy sokszorozónak, mindegy, mert valamint: $5 \times 6 = 6 \times 5 = 30$, szintigy lesz az adott két szám' származata változatlan ugyan az. Csupán azon kérdés jön itt tekintetbe, találok e' könnyűséget, ha egyiket vagy másikat választom sokszorozónak; erre azt mondom, hogy csakugyan mindegy, bármellyiket választom; időt sem nyerek, mert mindegyik számmal érintésbe kell hoznom valamennyit; legfeljebb tehát helyet kimélnék meg akkor, ha p. o: egyik szám sokkal több jeggyel lenne írva mint a' másik, és csakugyan, ha egyik 6 jegyű, a' másik 3 jegyű lenne, azért válosztanám a' 3jegyűt sokszorozónak, mert igy csak 3 öszveadni való sort találnék, 6ot ellenben, ha a' hatjegyű számot válosztanám sokszorozónak; példánkban, hol mindkét szám egyenlően 4jegyű, ezen tekintet is elesik; de bizonyítványul egyszer egyiket, másszor másikat válosztom sokszorozónak.

Mindegyik számban a' legfőbb rend: ezres. Az egyiknek legfőbb jegye 8as, a' másiknak 7es. A' legfőbb származati rend tehát ezres ezer, 's csakugyan: $8000 \times 7000 = 56$ millió, hol az ötös 10 millios; származatom tehát 8 jegyű.

Első felírás:

8593×7462

60151
34372
51558
17186

=64120966 származat

hol a' hetessel kezdődött a' sokszorozás, lefelé menvén sorban az egyesekig.

Második felírás:

8593×7462

17186
51558
34372
60151

=64120966 származat

itt megfordított rendben sokszoroztatott.

Ha a' két számot felváltom, lesz az ehez két hasonló írás:

7462×8593	és	7462×8593
59696		22386
37310		27158
67158		37310
22386		59696
=64120966		=64120966 származat,

's itt látszik, hogy ugyanazon részes származatok csak más állásba jöttek, a' nélkül hogy helyértéküket változtatnák.

Említém, hogy összevissza is lehet sokszorozni a' jegyekkel, ezt megmutatom:

Ha megtartom 7462tőt sokszorozónak 's p. o: 6al kezdem a' sokszorozást, mindegy akar hova írom részes származatát, csak arra figyelmezek elöször, hogy legkisebb rendje 10ez, és hogy az utánna következő jegy származata helyesen írassék oda, hova tartozik; ha p. o: a' 6 után a 7test választom, ennek legkisebb rendje ezres, szükséges tehát, hogy első sokasát, a' legkisebbiket, az ezresek alá tegyem, vagyis, a' negyedik helyre, melly negyedik hely éppen két hellyel áll tovább az elébbi 6tos első jegyénél a' 10zeseknél, 's igy tovább.

Veszem először tehát ezen sorban a' sokszorozó 4 jegyét:

1.) 6, 7, 2, 4.
2.) 4, 2, 7, 6.
3.) 4, 7, 2, 6 és végre:
4.) 7, 6, 4, 2.

melly négy példa feltételünkre elég lehet, noha sokkal többféleképp is változtathatnók a' 4 jegyet.

1.)	8593×7462	2.)	8593×7462
	51558		34372
	60151		17186
	17186		60151
	34372		51558
	=64120966		=64120966.

3.) 8593×7462	4.) 8593×7462
34372..	60151..
60151...	51558
17186	34372..
51558	17186
=64120966	=64120966

's az utolsó két írásban pontokkal vannak az üres helyek bétöltve.

Mindezen írásoknak helyes létét nyilván bizonyítja a' következő tekintet:

Válosszuk el a' sokszorozót rendjeibe, tudván hogy:

$$7462 = 7000 + 400 + 60 + 2$$

's vegyük a' külön származatokat 8593 al; lesznek ezek, valamint mindegyik felírásunkban:

$$\begin{aligned} 8593 \times 7000 &= 60151000 \\ 8593 \times 400 &= 3437200 \\ 8593 \times 60 &= 515580 \\ 8593 \times 2 &= 17186 \end{aligned}$$

és öszvesen: 64120966.

Ezen négy különös származat szintugy áll egy egy hellyel jobbra bellyebb, mint legelső felírási példánkban; tudjuk az öszveadásból, hogy az öszves nem változik, akarmellyik számot írjuk első, középső vagy legalsónak, tehát itt is bármelly sorba írhatjuk azokat.

13. K. Ha a' sokszorozó jegyek közt üres áll, hogy kell itt mivelni?

F. A' semmi, bármelly mennyiséggel sokszoroztatván, tudjuk mindég semmit ád, tehát helyibe ismét üreset kell tenni, vagy egészen kihagyni a' tekintetből; természetes, hogy azon rend, melly helyett áll, nem fog előfordulni az egyes származatok közt, a' következő pedig még egy hellyel áll tovább.

P. o: adjunk példánk 4 számjegye közzé üreset 's lesz a' sokszorozóból 5 jegyű szám, legyen az üres a' százasok helyén és a' szám: 74062.

Ezen elrendelés által a' 4 es, melly elébb 100 as volt, most ezres, a' 7 pedig ezresből tizezres lett.

Az egyes származatok nem változnak jegyeikre nézve; de két felsőbb rendűvé válnak, a' 6 és 2 származatai pedig megmaradnak 's lesz:

```
1.) 8593×74062,    vagy:  2.) 8593×74062
    ------                    ------
    60151                     17186
     34372                   51558
       51558               34372
         17186            60151
    ---------            ---------
   =636414766           =636414766
```

's mindkét példában az üres helye pontal van jelölve.

Gyakorlásul írok fel néhány példát:

805214×65021 =52355819494.
689003×70634 =48667037902.
7890871×827061=6519231660131.
9070609×705208=6396666031672.
7560321×909760=6878077632960.

a' tanuló utánna számíthatja, jól történt e' a' sokszorozás.

Ötödik Beszélgetés.

1. K. A' sokszorozásnak haszonvéte igen gyakori, jó lesz némelly példákkal kijelölni, mikor van a' közönséges életben legnagyobb szükségünk reá.

F. 1.) *Példa*: Nyolcz kazal szénánk van, mindegyik kazalban van 12öl, mindegyik ölben 21 mázsa. Kérdés, hány öl és hány mázsa szénánk van öszvesen?

Az ölek' száma 8szor 12=96, a' mázsák' száma pedig:

$$96 \times 21 = 2016.$$

2.) *Példa*: Valamelly oskolában 13 pad van, mindegyik sorban ül 14 tanuló, mindegyik tanulónak van 2 írótolla és 3 könyve. Kérdés hány a' tanuló, hány a' toll és hány a' könyv az egész oskolában?

A' tanulók' száma: $13 \times 14 = 182$,
az írótollaké: $182 \times 2 = 364$,
a' könyveké pedig: $182 \times 3 = 546$.

3.) *Példa*: 28 szántóföldön kolompély, 39en buza, 43on rozs, 54en árpa, és 47en zab termett, adott pedig egyik egyik szántóföld: 36 mérő kolompélyt, 28 mérő buzát, 31 mérő rozsot, 29 mérő árpát és 25 mérő zabot. Kérdés, mennyi volt a' szántóföldek öszvese, mennyi mindegyik külön termés és hány mérő eleség öszvesen?

A' szántóföldek' száma:

28+29+43+54+47, csakugyan:

28 szántóföld' mindegyike 36 mérő kolompélyt:	28×36=1008 K.
29 szántóföld' mindegyike 28 mérő buzát:	29×28=1092 B.
43 szántóföld' mindegyike 31 mérő rozsot:	43×31=1333 R.
54 szántóföld' mindegyike 29 mérő árpát:	54×29=1566 A.
47 szántóföld' mindegyike 25 mérő zabot:	47×25=1175 Z.
212 szántóföld adott termést: mérőt öszvesen:	6174.

4.) *Példa*: Egy forintban van 20 garas, hány garas 63 forint?

63szor 20, vagy: 1260 garas.

Egy garasban van 3 krajczár, hány krajczár 63 forint?

1260 szor 3=3780 krajczár

's igy egy forintban van 60 kr. és 63 forintban 63×60=3780 kr.

11 forint és 13 garas hány krajczár?

A' 11et 60nal, a' 13at pedig hárommal sokszorozom 's a' két rész származatot öszveadom:

11 60szor =660
13 3 » = 39

11fl. 13garas=699 krajczár.

5.) *Példa*: Egy mérő gabona 6 forint 7 kr., mennyit kell fizetni 8 mérőért?

Bizonyosan 8szor 6 forint 7 krt.

Először a' forintokat, azután a' krajczárokat vevén 8 szor, lesz:

8szor 6=48 forint és 8szor 7=56 kr.
8 mérő gabonáért tehát 48 f. 56 kr. kell fizetni.

6.) *Példa:* Ruháimra 9 rőf posztó kell, mindegyik rőf 13 forint, mennyibe kerül a' 9 rőf?

13szor 9, vagy 9szer 13 forintba 's ez: 117 forint.

Ha egy rőf materia, vagy bármelly szövet 5 forint, mi lesz árra egy végnek, mellyben 132 rőf van?

5ször 132=660 forint.

Itt sem rőföket forintokkal, sem forintokat rőfökkel nem sokszoroztunk, hanem csak, mint világos, a' rőfök' és forintok' *számait*; de a' következés mutatja meg, hogy a' származat alatt forintokat kell értenünk.

Ha kérdem, hány rőf posztója van valamelly kereskedőnek, kinek boltjában 96 vég posztó van 's mindegyik végben 42 rőf, ekkor a' 96×42=

4032 a' kérdés szerint rőföt jelent, noha az egyik szám, a' 96, egész végeket jelöl.

7.) *Példa*: Egy mázsa sullymérték 100 fontból áll, hány font 57 mázsa?

Százszor 57=5700 font.

Egy font mértékben van 32 lat; hány lat van egy mázsában?

32szer 100, vagy 100szor 32=3200 lat.

Hány lat lesz tehát 57 mázsában?

57szer 3200=182400.

Egy latban 4 nehézék van, hány nehézék van 1 fontban?

4szer 32, vagy 128 nehézék.

Egy nehézékben van 60 grán, hány grán van egy latban?

60szor 4, vagy 4szer 60=240.

Hány grán van egy fontban?

32szer 240=7680.

Hány grán van egy mázsában?

Százszor annyi, vagy: $100 \times 7680 = 768000$.

8.) *Példa*: 8 mázsa 18 font, hány font?

800+18=818 font.

5 mázsa 9 font, hány lat?

5 mázsa = 500 font, hozzáadván 9 fontot, lesz öszvesen 509 fontom, ezt 32szer véve a' latok' számát találom és:

$509 \times 32 = 16288$ lat.

1 mázsa, 53 font, 17 lat, 3 nehézék, hány grán?

Ezen példában lassan lassan mindég alsóbb rendre menvén, a' mázsából fontokat, latokat, a' latok' öszveséből nehézékeket, ezekből végre gránokat származtatok.

A' fontok' száma = 153, ezt 32vel sokszorozom 's lesz a' latok' száma:

$$153 \times 32 = 4896$$

a' nehézékek száma: $4896 \times 4 = 19584$,

de még 17 latot a' latokhoz kelladnom, valamint 3 nehézéket a' nehézékekhez, tehát a' 4896 lathoz még 17et adván, lesz ezek száma:

$$4896 + 17 = 4913,$$

a' nehézékeké pedig: $4913 \times 4 + 3 = 19655$.

Ezen számot 60nal sokszorozván, a' gránok jönnek, és:

$$19655 \times 60 = 1179300 \text{ grán.}$$

9.) *Példa*:

65 mázsa, 29 font, 3 nehézék, 47 gránból vonassék le:

	53 »	18 »	2 »	35 grán.
marad:	12 »	11 »	1 »	12 »

Ha egyik vagy másik alsóbb rend nagyobb mint az, mellyből ez levonandó, szintúgy pótoljuk azokat, mint a' számoknál tettünk.

38 mázsa, 17 font, 8 lat, 1 nehézék, 37 gránból levonandó:

28 » 98 » 27 » 3 » 59 grán.

Ezen példában, vagy lassan lassan veszek el a' felsőbb rendekből potlásul egyet, vagy mindjárt egy mázsát veszek el 's ugy osztom azt fel, hogy mindegyik rend felül nagyobb legyen, mint alól a' levonandónak rendje. 38 mázsa helyett írok 37et, de egyet, az az: 100 fontot a' fontokhoz adok 's lesz első írásom:

37 M. 117 F. 8 L. 1 N. 37 G.

a' fontokból elvévén egyet, mi: 32 lat, ezt a' latokhoz adom; lesz írásom:

37 M. 116 F. 40 L. 1 N. 37 G.

a' latokból egyet a' nehézékhez adok 's ez: 4 nehézék:

37 M. 116 F. 39 L. 5 N. 37 G.

elveszek végre egy nehézéket 's 60 gránt adok a' 37 hez; lesz utolsó írásom:

37 M. 116 F. 39 L. 4 N. 97 G.

's most mindegyik rend nagyobb mint a' levonandóé, 's a' levonást könnyen eszközlöm, marad pedig:

37—28 M., 116—98 F., 39—27 L., 4—3 N.,
= 9 M. 18 F. 12 L. 1 N.,

és 97—59 G.
= 38 G.

10.) *Példa.* Egy mérföldben van: 4000 öl, vagy: 10000 (tizezer) középszerű lépés. Ha minden órában 1 mérföldet megtudunk tenni, hány lépést teszünk, ha délelőtt 7, délután pedig 4 órát gyalogolunk?

Gyalogolunk 7+4=11 órát 's ugyan annyi mérföldet, tehát:

11 szer 10000=110,000 lépést, vagy:
11×4000=44000 ölet.

11.) *Példa*: Könyvemben 285 lap van, mindegyik lapon 30 sor nyomtatás, mindegyik sorban általjában 42 betű. Hány betű van az egész könyvben?

285 ször 30 sor = 8550 sor.

8550 sorban, 42 betű mindegyikben, tehát 42 szer 8550 betű, 's ez:

8550×42=359100 betű a' könyvben.

12.) *Példa*. Egy évben van 365 nap, de minden 4dik év, szökőév 's egy nappal több van benne. Egy nap és egy éj öszvevéve tesznek illy egy napot, 's van benne 24 óra. Kérdés, hány órából áll egy közönséges, hányból egy szökő év?

A' közönséges év: 365×24=8760 óra
a' szökő pedig 24 órával több=8760+24=366×24=8784.

Minden órában van 60 percz, hány percz egy év?

A' közönséges év: 8760×60=525600
a' szökő: 8784×60=527040 percz.

Minden perczben van 60 másodpercz, hány másodpercz van egy órában és hány egy napban?

Egy orában 60 percz, mindegyik perczben 60 másodpercz, 's igy: 60 szor 60 másodpercz egy órában és $60 \times 60 = 3600$, 24 orában pedig:

$3600 \times 24 = 86400$ másodpercz.

13.) *Példa*: Földünk 24 óra alatt fordul meg tengelyén, mert mindennap délben ugyan azon helyre áll; ha minden órában 15 fokkal megy eléb fordultában, kérdés, hány illy fok van kerekségén?

24 szer $15 = 360$

és minden kör 360 fokba osztatik.

Ha minden illyen fokban 15 mérföld van, hány mérföld foldünk' kerülete?

360 szor $15 = 5400$ mérföld.

Mennyi útat tesz tehát földünk' valamelly pontja 1 óra alatt forgásában?

15 ször $15 = 225$ mérföldet,

egy nap pedig: $225 \times 24 = 5400$ mérföldet, mint elébb.

14.) *Példa*: Egy szántóföldet 13 ember egy nap alatt learat, de 84 szántóföld van, kérdés, hány ember kell hozzá, ha egy napalatt mind le akarjuk arattatni?

84 szer 13, vagy: $84 \times 13 = 1092$ ember.

15.) *Példa*: Útnak indulok külső országba; kint maradok különbféle városokban 5 hónap és 18 nap, 's költök minden nap általánosan 4 forintot, de az úton kocsibérrel együtt minden nap

9 forintot, úton vagyok pedig öszvesen 27 nap: kérdés, mennyire megy öszves költségem?

Tudom, hogy egyik hónapban 30, a' másikban 31 nap van, de Februariusban p. o: 28, minden szökőévben pedig 29 nap van; mivel tehát a' hónapok és az év' neve nincs megadva a' kérdésben, mindegyik hónapnak 30 napot adhatok, de hogy közelebb legyek a' valósághoz, 3 hónapot 30, kettőt pedig 31 naposnak veszek, 's igy lesz a' városokban töltött idő:

$3 \times 30 + 2 \times 31 + 18$ nap,

az az: 3 hónap	30 napjával		90
2 »	31	»	62
a' felül lévő	18 nap		18
		öszvesen	170 nap;

az úton töltetett 27 nap,

az egész útazási idő tehát: $170 + 27 = 197$ nap

a' költség pedig a' városokban: $170 \times 4 = 680$ forint

az úton: $27 \times 9 = 243$ »

és őszvesen 923 forint.

16.) *Példa*: Ha csak az oskolában tanulunk 's minden nap 3 oráig vagyunk benn, hány oránk van egy évben a' tanulásra, ha az ünnepeket 's szűnnapokat nem számláljuk?

Vegyünk egy 365 napos közönséges évet; egy évben van 54 hét, mindegyikben egy vasárnap, 's ezen kivül közel 24 más ünnepnap; van továbbá nagy és kis szünidő (vacatio), őszvesen közel 80 nap, tehát:

$54+24+80=158$ napot a' 365 ből levonván, marad:

$365-158=207$ nap a' tanulásra, ezt háromszor véve:

$207\times3=621$ óra egész évi tanulás.

A' szorgalmas tanuló az oskolán kivül legalább 2 orát tanul minden nap akar van ünnep, vagy vacatio, akar nincs; kérdés, hány órával tanul ez többet, mint az kí csak az oskolában tanul?

365 ször 2 órával, vagy is: 730 órával, tehát többet mint még egyszer annyit tanul 's következéskép kétszer annyit fog tudni mint a' másik.

17.) *Példa.* Ha két ember 14 nap dolgozik 's kérdem, mellyik dolgozott többet, mit lehet erre felelni?

Ebből csak azt mondhatom, mindkettő egyenlően 14 nap dolgozott. De nem tudom mit végzett egyik vagy másik, nem tudom hány órát dolgozott egyik egyik 's nem tudom végre, egyenlő szorgalommal vagy sikerrel dolgoztak e'.

Ha a' napok és munkaórák' száma, mint a' szorgalom is egyenlők, akkor a' következések is egyenlők, az az: mind két munkás egyenlő munkát tett.

Ha az egyik 8 órát dolgoz minden nap, a' másik pedig 10et, és tett munkájok egyenlő; ekkor az egyiknek 10 órája annyit ér, mint a' másiknak 8 órája; és: $8\times14=112$ óra annyit következtet, mennyit: $10\times14=140$; ebből látjuk, hogy a' másik 28 órát hijjában dolgozott.

Ha pedig egyik 8 órát 's a' másik 10 órát dolgozik egyenlő sikerrel, akkor ezen utóbbi 28 órával dolgoz többet 14 nap alatt, s' következésképen többet is végez.

18.) *Példa*: Öt körmöczi arany 1 latot nyom. Hány arany tesz egy mázsát?

Ha 5 arany egy lat, lesz egy fontban 32×5=160; egy mázsában pedig százszor ennyi, vagy is: egy mázsába megy:

160×100=16000 arany.

19.) *Példa*: Van 7 hordóm, mindegyike 24 akós, három közűle üres, van 8teli 12 akós, 13 van 6 akós, 5 közűle üres, és van végre 9 kétakós mind üres, és 3 teli egyakós. Kérdés, mennyi borom van 's mennyi férne pinczémbe, ha hordóim mind teli lennének?

7 szer 24 akó hordó	= 168 akó,	teli van:	4×24=96 akó
8 szor 12 »	»	= 98 »	» »	=96 »
13 szor 6 »	»	= 78 »	» »	8×6=48 »
9 szer 2 »	»	= 18 »	üres »	— — —
3 szor 1 »	»	= 3 »	teli »	— —=3 »

Öszves akó hordó = 363 Őszves bor; akó = 243

férne tehát még pinczémbe és hordaimba:

363—243=120 akó.

20.) *Példa*: Most csak 6 könyvnek vagyok birtokosa, mennyi könyvem lesz 5 év mulva, ha minden évben számát megduplázom?

Az első év mulva lesz :	2 szer	6=	12
második év után :	2 „	12=	24
harmadik után :	2 „	24=	48
negyedik után :	2 „	48=	96
's végre öt év mulva :	2 „	96=	192 könyvem lesz.

Hatodik Beszélgetés.

1. K. Ha megakarnók tudni, hányszor találjuk meg p. o: a' 6ot 24ben, miként mivelnénk?

F. Ha a' sokszorozásból nem tudnám, hogy: 4szer 6=24, az az: hogy a' 6 négyszer van meg 24ben, mert 4 hatosból áll, azt keresném: hányszor lehet hatot 24 ből levonni, 's csakugyan, a' hányszor a' levonást eszközölhetem, annyiszor lesz meg 6 a' 24ben;

's találnám először: 24—6=18
ezután: 18—6=12
és: 12—6= 6
végre pedig: 6—6= 0 's igy csakugyan négyszer vontam le 24ből a' hatot, tehát mondom: 24ben a' 6 négyszer találtatik meg.

2. K. Hát ha p. o: 252ben kellene keresni, hányszor van 6, vagy még nagyobb számban?

F. Ekkor is csak levonnám a' hatot a' hányszor lehet, de előre is látom, hogy igen sokszor kellene egymásután firkálnom 's végre öszveszámlálnom, hányszor tettem levonást; ezért is szeretném, ha olly rövid úton tehetnénk meg ezen ismételt levonást, valamint rövidítettük sokszorozás által az ismételt öszveadást.

3. K. Illyen mivelet a' számvetésben van, 's az ismételt levonást, hol azt keressük: hányszor foglaltatik egyik szám a' másikban, *elosztásnak* nevezzük, mert csakugyan, a' kissebbikkel a' nagyobbikat elosztjuk keresvén, hány illy kisebb szám kell, hogy belőle a' nagyobbik váljék.

Itt is három szám jön tekintetbe; a' nagyobbik számot, mellyben a' kissebbiket keressük: *osztandónak* nevezzük; a' kissebbiket, melyről tudni akarjuk: hányszor találtatik a' nagyobbikban: *osztónak*; azt a' számot végre, melly megmutatja: hányszor van a' kisebbik a' nagyobbikban: *részesnek* nevezzük.

Példánkban, hol a' 24ben 6ot 4szer találjuk: 24 az osztandó, 6 az osztó és 4 a' részes.

Jeléül, hogy valamelly számot más számmal elosztani kell, az osztandó után két egymás felett álló pontot (:) írunk, ezután az osztót; az osztó után pedig az egyenlőség' (=) jegyét, melly után a' részes következik.

24 : 6=4 ben p. o:

a' kettős pont azt teszi hogy, 24 osztassék el 6 által; az egyenlőség' vonala pedig azt, hogy 24 elosztva 6 által egyenlő 4el.

4. K. Miként osztunk el egy vagy kétjegyű számot egyjegyűvel?

F. Két különös eset említendő az elosztásnál:

1. Ha megtaláltatik a' kisebbik szám a' nagyobbikban, az elosztás tökéletes, p. o: 24et 6 tökéletesen megosztja 's 4 szer találtatik benne; következésképen: $4\times6=24$, az az: *ha az osztás tökélletes, az osztó és részes közti származat egyenlő az osztandóval.*

2. Ha a' kisebbik szám nem osztja el tökélletesen a' nagyobbikat, szükségesképen fennmarad valamelly szám, és ekkor az osztás csak részszerénti, de nem tökélletes.

Tudjuk, hogy: $4\times6=24$ és $5\times6=30$.

24 és 30 közt nincs olly szám, mellyet 6 tökélletesen megosztana, mert:

$$30 : 6=5,\ \text{és}\ 24 : 6=4$$

négy és öt közt pedig nem áll olly szám, mellyet eddig ismernénk.

Ha tehát 25, 26, 27, 28 és 29 közzül akármellyik számot osztjuk el hattal, az osztás tökélletlen lesz, mert:

$$25=4\times6+1,\ \ 26=4\times6+2,\ \ 27=4\times6+3,$$
$$28=4\times6+4\ \text{és}\ 29=4\times6+5,$$

's ha 25öt 6al elosztjuk, megtaláljuk benne 4szer, de marad egy, mellyben többé a' 6 nem lehet meg;

26ot	osztván	6tal	marad	2 's a' részes	4,	
27et	»	6tal	»	3 »	4,	
28at	»	6tal	»	4 »	4,	végre:
29et	»	6tal	»	5 »	4,	

Ezen számokat, mellyek az osztás után fennmaradnak 's mellyekben az osztó többé nem találtatik: *maradékoknak* vagy; *osztási maradványnak* hívjuk.

A' második esetben az osztandó nem kerül többé elé, ha az osztó sokszoroztatik a' részessel, mert p. o: 25 : 6=4 és egy maradvány, hol 25 nem egyenlő 4szer 6tal, melly csak 24; szükséges tehát hogy: ha az osztás nem tökélletes, az osztó és részes közti szármozathoz mindenkor hozzáadjuk az osztási maradványt, mellyet figyelemmel feljegyezünk; s' lesz p. o: $5=4\times6+1$, mint feljebb. Leghelyesebben teszünk, ha a' maradványt felírjuk, vonalat tévén alá 's ez alá írjuk az osztót jeléül, hogy az osztás nem tökélletes és maradt valami, mit még továbbá osztani kellenék.

p. o: 28 : 6=4 és négy maradvány, mit igy írok:

$28 : 6=4+\frac{4}{6}$'s tudom, hogy a' 4 maradványt még 6tal kellenék a' kérdés szerint tovább osztani.

Az igaz, hogy minden osztási példát illyen vonallal jelölhetek, akar végződik az osztás, akar nem, és:

$$24 : 6=4 \text{ helyett írhatom: } \frac{24}{6}=4.$$

$$27 : 6=4+\frac{3}{6} \text{ » » } \frac{27}{6}=4+\frac{3}{6}$$

Ezt előre bocsájtván a' számok' osztásához megyek.

Ha az osztó egyjegyű és az osztandó is egyjegyű, első pillanattal is tudjuk, lesz é részes és mekkora, tökélletes é az osztás, vagy marad valami; p. o:

$$\frac{8}{4}=2,\quad \frac{6}{3}=2,\quad \frac{7}{3}=2+\frac{1}{3},\quad \frac{9}{4}=2+\frac{1}{4}$$

's igy bármelly példában.

Ha az osztandó kétjegyű, akkor is tudjuk szint illy könnyűséggel a' részest:

$$\frac{81}{9}=9,\quad \text{mert: } 9\times 9=81.$$
$$\frac{56}{7}=8,\quad \text{mert: } 7\times 8=56.$$
$$\frac{48}{8}=6,\quad \text{mert: } 6\times 8=48.$$
$$\frac{20}{2}=10,\quad \text{mert: } 2\times 10=20.$$
$$\frac{30}{3}=10,\quad \text{mert: } 3\times 10=30.$$
$$\frac{68}{2}=34,\quad \text{mert: } 2\times 34=68.$$
$$\frac{68}{4}=17,\quad \text{mert: } 4\times 17=68.$$

Utóbbi példánkban már tizeseket osztottunk egyesek által; de tudjuk, hogy a' tizesekben az egyesek 10szer foglaltatnak 's igy a' részes is tizes lesz; legutolsó példánkban: $\frac{68}{4}=17$, a' 4, előre a' 6 tizesben kerestetett 's megtaláltatott egyszer, az az: egy tizszer, mert $\frac{6}{4}=1+\frac{2}{4}$; de mivel ezen két maradvány tizes, az ott álló 8 egyeshez adatott 's lett: 28 egyes; a' 4 most ezen 28ban kerestetvén, ád 7 egyest.

Szinte igy: $\frac{96}{4}=24$, hol mondjuk:

négy a' kilenczben van kétszer, a' kettőst odaírjuk, de 2szer 4=8 's ezt a' 9ből elvevén, maradott egy tizes, melly a' 6 egyeshez tétetvén, ád 16 egyest; 16 ban pedig a' 4 továbbá 4szer találtatik 's leirjuk a' 4 et.

Ha közönségesen mivelünk, az osztót a' legfőbb jegyben keressük 's hányszor benne azt megleljük, a' számot leírjuk; ezután sokszorozzuk a' talált részessel az osztót 's a' származatot az első jegyből levonjuk; ha semmi nem marad, a' következő jegyet osztjuk; ha pedig marad valami, ezt a' következő jegyhez adjuk, az öszvesen folytatván az osztást, p. o:

96 : 4=24, igy szóllok.

Négy megy a' kilenczben kétszer, a' kettőt leírom, ezután mondom:

2szer 4=8, 's a' nyolczat a' kilencz alá írván, ebből levonom, 's lesz írásom először:

$$\begin{array}{l} 96 : 4=2 \\ \underline{-8} \\ 1 \end{array}$$

ezen egyeshez hozom le a' 6 ost, 's írom:

$$\begin{array}{r} 96 : 4=2 \\ -8 \\ \hline 16 \end{array}$$

és a' 16 ban a' 4 et megtalálván négyszer, mondom:

4szer 4=16, a' tizenhatot a' 16ból levonván semmi nem marad 's az osztás tökélletes:

$$\begin{array}{r} 96 : 4=24 \\ -8 \\ \hline 16 \\ -16 \\ \hline - - \end{array}$$

Vegyünk a' 96 helyett 99 et osztván 4el, marad bizonyosan 3, mert 99 hárommal nagyobb 96nál, 's lesz példánk:

$$\begin{array}{r} 99 : 4=24 \\ -8 \\ \hline 19 \\ -16 \\ \hline 3 \end{array}$$

's ha ezen maradványt a' 24 után irjuk, lesz:

$$99 : 4=24+\frac{3.}{4.}$$

5. K. Ha az osztandó bármelly szám, az osztó pedig egyjegyű marad, van é a' miveletre valamely különös észrevétel?

F. Semmi, osszuk el p. o: 783 at 8 által; mondom: 8 a' 7ben nemtaláltatik, de a' 78 ban megvan 9szer, $9\times8=72$, ezt a' 78ból levonván, marad 6, és 63ban kerestetik 8, megvan pedig 7szer és $7\times8=56$, végre $63-56=7$ maradék, a' részes pedig 97, példánk:

$$783 : 8=97+\frac{7}{8}$$

Látjuk, hogy ha az osztandó itt egyel nagyobb, részesünk 97 helyett 98 lenne, melly esetben a' maradék $\frac{8}{8}=1$ hozzá adatnék a' 97 részeshez.

Osztassék 3114, 9 által:

9 a' 31 ben megy 3 szor, a' 3 leíratik, $3\times9=27$ és $31-27=4$, marad 4, keressük most a' 9et 41 ben, megy 4szer, és $4\times9=36$, $41-36=5$; kerestetik a' 9, 54ben 's megvan 6szor:

$$6\times9=54 \text{ és } 54-54=0$$

a' részes' három jegye sorjában 346 és

$$3114:9=346, \text{ tökélletes osztás.}$$

Akarhány jegye legyen tehát az osztandónak, a' mivelet mindenkor egyszerű, ha az osztó egyjegyű, és a' levonást kicsi gyakorlással is elménkben végezhetjük, a' nélkül hogy a' származatokat odaírnók; a' példában:

$$3789025:5=757805$$

a' levonás egyszersmind történt; de itt az üres helyibe ismét üres íratott, mert a' kettősben az öt nemtaláltatott; ez mindenkor ugy van, ha valamelly egyes jegyben az osztó nem találtatik; ekkor a' részesbe egy üres tétetik, p. o:

$$4012 : 2 = 2006$$
$$604101 : 3 = 201367$$
és $$5643216 : 8 = 705402.$$

6. K. Mi észrevételt tehetünk az osztandó' felsőbb rendjeire nézve?

F. Ha egyik szám a' másikat elosztja, annak sokasát is elosztja, és ekkor a' részes ugyan annyiszor akkora, mennyiszer nagyobb az osztandó; ez igen természetes, mert ha az osztandó p. o: hatszor akkora lett, szükségesképen a' részesnek is hatszor akkorának kell lenni; ha például vesszük:

$$12 : 4 = 3$$

azt mondom, hogy ha az osztandót 4el sokszorozom, a' részes négyakkora lesz, és csakugyan:

$$48 : 4 = 12, \text{ vagy}: \frac{12 \times 4}{4} = 3 \times 4.$$

Szinte igy, ha:

$$10 : 2 = 5, \text{ ugy } 20 : 2 = 10,\ 30 : 2 = 15,\ 40 : 2 = 20,\ 50 : 2 = 25 \text{ 's a' t.}$$

és ha a' 10est 10szer nagyobbra veszem, a' részes is tízszerte nagyobb lesz, az az: 100 : 2=50.

Ebből következtetem; ha valamelly szám egy más által osztható, akarhány üreset ragasztok hozzá, mindenkor osztható marad, csak hogy-mennyi üreset tettem az osztandóhoz, annyival feljebbvaló rendű lesz a' részes, p. o:

8 : 4=2
80 : 4=20
800 : 4=200
8000 : 4=2000
80000 : 4=20000 's a' t.

Ezen észrevétel segéllni fog bennünket, az osztás' miveletibe méljebben tekinthetni.

Azt mondom hogy: az elosztásnál ugy keressük a' felsőbb rendekben levő részeseket egyenként lefelé, mínt kerestük a' sokszorozásnál ugyan ezen rendeket. Bizonyításul szolgáljon a' példa:

2695 : 7=385.

Az osztás látjuk maradéknélküli, tehát tökélletes.

Elválaszthatjuk a' számot: 2695 mind olly részekbe, mellyek sokszorosai 7nek, és csakugyan miveletünk szerint:

azt mondjuk hogy: a' 7, az osztandó' legfőbb jegyében a' 2tőben nem találtatik, de van a' 26ban 3szor és marad 5. Kérdés, melly szám ez a' 26 és a' marodott 5? Mondjuk továbbá: 59ben van a' 7 nyolczszor és ismét marad 3; ezután megy 35ben a' 7 ötször 's az osztásnak vége.

A' 26 itt =2600 és levontunk belőle
2100 at
megmaradt 500.

Az 59 itt 590, belőlle levontunk
560t 's
maradt 30 ehez adván az 5 egyest, lett belőlle 35, melly adta a' részes' utolsó jegyét;

eloszlik tehát 2695, következő sokasaiba 7nek:

$$\begin{array}{r@{=}l} 2100 & 300\times7 \\ 560 & 80\times7 \\ 35 & 5\times7 \\ \hline 2695 & 385\times7 \end{array} \quad \text{és} \frac{2695}{7}=385.$$

Osztási példák egy jeggyel:

$$789021 : 4=197255+\frac{1}{4}$$
$$8756075 : 5=1751215$$
$$7900128 : 6=1316688$$
$$50271123 : 7=7181589$$
$$902875250 : 8=112859406+\frac{2}{8}$$
$$753802191 : 9=83755799.$$

7. K. Ha az osztó is többjegyű, változik az osztási mivelet?

F. Nem változik; de mivel a' nagyobb számokkali irás és számvetés mindenkor több figyelmet kíván, szükséges, hogy eddigi ismereteinket haszonba venni tudjuk. Közönségesen következő szabályokat lehet adni.

1.) Ha az osztó többjegyű, annak sokasait nem tudjuk elménkből 's olly könnyen megmondani, mint az egyes jegyek' többeseit és szükséges, hogy írással pótoljuk és segéljük elménket.

Ha p. o: keresnők: hányszor találtatik 43, 344ben; látjuk, hogy a' két első jegyben, a' 34 ben 43 nincs meg, és mindhárom jegyében kell keresnünk az osztandónak. Ha 43 nak többeseit 2től 9esig ismernénk, azonnal látnánk, hányszor találtatik meg az adott osztandóban, de mivel csak sokszorozás által mondhatjuk meg ezeket, csakugyan eltalálnunk kell a' részest.

A' számvetésbeli tapasztalás és gyakorlottság igen segéllik az illy visgálatokat, 's a' jártos szem azonnal elismerheti, hogy 43, 344ben, hat vagy hétszer és többször megvan, ezt pedig következő tekintet szerint találjuk meg.

2.) Az osztónak először mindenkor csak egy és legfőbb rendűjegyét keressük az osztandó' legfőbb jegyében, 's ha ebben nem találtatnék, a' két legfőbb jegyében, igy bizonyosan mindég legközelebb vagyunk a' valóhoz. Ha példánkban a' 43 osztó helyett, csak főbb jegyét a' 4 tizest vesszük osztóul, és ezt a' 34ben keressük, látjuk, hogy: 4 a' 34ben csak 8szor vanmeg, de többször nincs.

Ezen igy közelítve megtalált részessel tesszük meg az osztó' sokszorozását, 's ha a' származat nem nagyobb az osztandónál, ekkor a' részes jól vétetett.

Ha példánkban a' részest 43at 8 al sokszorozzuk, lesz:

$$43\times8=344,$$

az adott osztandó, és 8 a' keresett tökélletes részes.

Említém, hogy ha 43nak sokasait tudnánk, azonnal reá ismernénk, hányszor van meg az adott osztandóban, itt p. o: hol látjuk, hogy 43 legalább is 7szer megvan 344ben, vegyük sorban 43 nak hetesét, nyolczasát is kilenczesét 's lesz:

$$43\times7=301$$
$$43\times8=344$$
$$43\times9=387$$

's a' számok' öszvehasonlításából látjuk, hogy az osztandónak a' 8 részes felel meg.

Ha példánkban az osztandót (344), néhány egységgel kissebbnek vesszük, vagy a' számot (344) megtartván a' 43 osztó helyett 44et veszünk, az eset' másik részére jutunk, ekkor:

$$344 : 44=7+\frac{36}{44}$$

Itt is az osztónak legfőbb jegyét keresvén az osztandó legfőbb jegyében vagy jegyeiben, 4 a' 34 ben csakugyan 8szor megy, de 8szor 44=352, és nagyobb az osztandónál; ebből következik, hogy a' részes 8 nagy, és a' következő kisebbet kell venni a' 7 et, melly ád:

$$44\times7=308, \text{ és } 344-308=36$$

maradványt.

Ebből látni, hogy azílly keresésnél az előre vett részes mindég a' legnagyobb, de hogy közel vagyunk általa az igazi részeshez, alább menvén egyel mindannyiszor, mig a' valódit megleltük.

Hogy második esetünkben az osztónak két jegye nem találtatott meg annyiszor, mennyiszer volt legfőbb jegye, az osztandónak két főbb jegyében, onnan jön, hogy az egyesek sokszorozása által felsőbb rend támadott, melly az egész származatot nevelte. Helyesen teszünk tehát:

3.) ha az osztó' második jegye nagy szám, mint p. o: 7, 8 vagy 9es, az első jegyhez egyet adni, vagy azt egy egységgel nevelni; ha p. o: 37, 38 vagy 39el kellene osztanunk, vegyünk a' legföbb jegy helyett, melly itt 3, inkáb egyel nagyobbat, az az: 4et. Ekkor látjuk, részesünk a' legkisebb lesz, mert az osztót nagyobbnak vettük, 's ha nem találtuk meg egyszerre a' valódi részest, ez bizonyosan egyel nagyobb lesz az elsőnél; p. o:

$$504 : 59 = 8 + \frac{32}{59}$$

ha itt az 5töt keressük az 5ben, ezt megtaláljuk egyszer és szintugy 5öt az 50ben 10 szer; de 59 sokkal közelebb áll 60hoz mint 50hez, igy az 5 helyett 6ot veszek első osztónak; a' 6 pedig 50 ben csak 8szor van meg; ha példám:

$$531 : 59$$

és ismét 6ot veszek osztónak, mondom: 6 megvan az 53ban 8szor, mert: $6 \times 9 = 54$ és 54 nagyobb mint 53; sokszorozván 59et 8al, lesz: $59 \times 8 =$

472 's ha ezt a' származatot levonom az osztandóból, lesz 531—472=59 és példám:

$$531 : 59=8+\frac{59}{59}$$

de 59 a' maradványban még egyszer megvan 's látom hogy a' 8 részes kicsi 's egyel nagyobbnak kell lennie; csakugyan:

$$531 : 59=9, \text{ mert: } 59\times9=531.$$

4.) A' közönséges mivelet abban áll, hogy a' részesjegyek és az osztó közti származatok, levonatnak az osztandó' jegyeiből, és a' maradványhoz hozatik vagy íratik le a' következendő jegy:

Mindenkor, valahányszor illyen jegy lehozatott, változatlan csak igy kerestetik az osztó legfőbb jegye a' lennálló osztandónak legfőbb jegyében vagy jegyeiben.

5.) Ha a' lentálló jegyekben az osztó nem találtatik, és egy jegy az osztandóból lehozatott, a' részeshez egy üreset kell adni mindenkor, ha illy lehozott jegy után nem találjuk meg az osztót; ha ezen lehozott jegy az utolsó, akkor mindazon szám, melly alul áll, maradvány; ha nem utolsó, egy másik jegy hozatik le mellé, 's ekkor az osztás tovább folytatik.

1.) *Példa*: 1421 : 49.

Mivelet. Keresem a' 4es helyett az 5töst 14 ben, megvan pedig: 5 a' 14ben 2szer, mondom:

$$2\times49=98,$$

levonom a' 98at 142 ből 's lesz írásom:

$$\begin{array}{r} 1421 : 49 = 2 \\ -\ 98 \\ \hline 44 \end{array}$$

a' megmaradott 44 eshez lehozom az egyet, 's lesz alól: 441, mint:

$$\begin{array}{r} 1421 : 49 = 2 \\ -\ 98 \\ \hline 441 \end{array}$$

44 ben az 5 megvan 8szor; de $8 \times 49 = 392$, és $441 - 392 = 49$, tehát a' 441 ben 49, 9szer van, 's igy: $49 \times 9 = 441$, és utolsó írásom:

$$\begin{array}{r} 1421 : 49 = 29 \\ -\ 98 \\ \hline 441 \\ -\ 441 \\ \hline --- \end{array}$$

2.) *Példa*: 2338 : 58.

Mivelet. Az 58, 23 ban nincs meg, keressük 223 ban az 58at, vagy rövidebben: 23 ban a' 6ot, nagyobbítván egyel az osztó' főjegyét az 5 öt. Megvan pedig 6 a' 23 ban 3 szor, mert: $3 \times 6 = 18$.

Sokszorozván 58 at a' 3al, lesz a' származat:

$$58 \times 3 = 174,$$

első felírásom:

$$\begin{array}{r} 2338 : 58 = 3 \\ -174 \\ \hline 59 \end{array}$$

a' maradék 59 egyel nagyobb az osztónál, bizonyos tehát, hogy a' részes 3 helyett 4, 's azt is veszem: $4 \times 58 = 232$, és javított írásom:

$$\begin{array}{l} 2338 : 58 = 4 \\ -232 \\ \hline --1 \end{array}$$

az egy maradványhoz lehozom a' felül álló 8ast 's lesz alól 18, tizennyolczban 58 nincs meg, tehát a' részesbe üreset teszek 's lesz írásom:

$$\begin{array}{l} 2338 : 58 = 40 \\ 232 \\ \hline --18 \end{array}$$

és ezen 18 a' maradvány, 's csakugyan:

$$2338 : 58 = 40 + \frac{18}{58}$$

3.) *Példa*: 8632 : 83.

Mivelet. 83 a' 86ban van egyszer, első írás:

$$\begin{array}{l} 8632 : 83 = 1 \\ -83 \\ \hline 3 \end{array}$$

lehozom a' 3 maradványhoz a' felülálló következő hármast, lesz alól: 33; de 33ban a' 83 nincs meg, 's ezért üreset teszek a' részesbe, második írásom:

$$\begin{array}{l} 8632 : 83 = 10 \\ -83 \\ \hline 33 \end{array}$$

lehozom az utolsó jegyet a' kettőst és vagy egyenesen a' 332 ben keresem a' 83at, vagy a' 33ban a' 8at, 's látom, hogy mindegyik csak 4 szer találtatik az osztandóban; leírok 4 et a' részeshez, sokszorozván 83 at 4 el, lesz: $83 \times 4 = 332$, melly szám éppen az alsó, 's az osztás végbe ment; írásom:

$$\begin{array}{r} 8632 : 83 = 104 \\ -83 \\ \hline 332 \\ 332 \\ \hline \text{- - -} \end{array}$$

4.) *Példa*: 22849 : 76.

Mivelet. 76 a' 228 ban megvan 3szor; ha 7 est veszünk, e' 7 megvan 22 ben 3 szor, ha 8ast vennénk, ez csak kétszer lenne 22 ben; a' hetes itt kérdésünknek megfelel: 3szor 76=228 és

$$\begin{array}{r} 22849 : 76 = 3 \\ -228 \\ \hline \text{- - -} \end{array}$$

lehozzuk a' 4 est, de benne a' 76 nincs meg, tehát üreset ragasztunk a' részes 3 mosához; lehozzuk az utolsó jegyet is, a' 9 et, de 49 ben sincs meg a' 76, 's igy még egy üreset kell írnunk a' részesbe, tehát:

$$\begin{array}{r} 22849 : 76 = 300 + \frac{49}{76} \\ -228 \phantom{49 : 76 = 300 + \frac{49}{76}} \\ \hline \text{- - -}49 \phantom{: 76 = 300 + \frac{49}{76}} \end{array}$$

A' példák magokba foglalják a' legnevezetesb eseteket 's szeréntök a' tanuló tökéletesen érteni fogja, miként történt p. o: a' következő elosztás:

$$
\begin{array}{l}
5969{,}5{,}9{,}2{,}5 : 85 = 702305. \\
\underline{-595} \\
\quad 195 \\
\quad \underline{-170} \\
\qquad 259 \\
\qquad \underline{-255} \\
\qquad\quad 425 \\
\qquad\quad \underline{-425} \\
\qquad\quad ---
\end{array}
$$

és maga is fog szerkeztetni gyakorlásul bárhány példát.

Ha p. o: hogy tökélletes részese legyen 5020, osztója pedig 93;

$$5020 \times 93 = 466860,$$

lesz osztandó száma; ha valamelly maradványt kívánna, az osztandóhoz akarmelly 93nál kisebb számot teheti.

Igy szerkeztetek néhány példát különbféle részessel:

1.) 63063063 : 63=1001001
2.) 19595940 : 97= 202020
3.) 1036980 : 84= 12345
4.) 34258975 : 75= 456789
5.) 26222196 : 59= 444444
6.) 47999952 : 48= 999999

$$7.)\quad 62516809 : 83 = 753214 + \frac{47}{83}$$

$$8.)\quad 9010468 : 29 = 310705 + \frac{23}{29}$$

$$9.)\quad 299977602 : 37 = 8107502 + \frac{28}{37}$$

$$10.)\quad 7138462657 : 99 = 72105683 + \frac{40}{99}$$

Írjuk végre utóbbi példánkat az osztandó' sokasaiba változtatva, hol:

59695925 : 85=702305,

és egyes származataink: 595, 170, 255 és 425; ha ezeknek helyértéküket megadjuk, lesznek a' példát.

sokasai 85.nek.		*részesnek.*
7 szer 85 =	59500000	700000
2 „ 85 =	170000	2000
3 szor 85 =	25500	300
5 szor 85 =	425	5
osztandó=	59695925	részes= 702305

's ebből látszik, miként hoztuk le egymásután a' következő kisebbrendű jegyeket.

8. K. Látom, hogy az osztási mivelet, ha az osztók' jegyei száma a' kettőt is felülmulja, semmi egyéb nehézséget nem mutat mint: a' sokszorozást levonást és írást hoszabbá teszi; nem is kétlem, hogy bármellyikünk is könnyen eloszt minden számot a' másikkal, ha azt, mit eddig tekintettünk,

elméjében tartja. Adjunk azonban néhány nagyobb példákat ís miveletükkel?

F. Legyen az osztó háromjegyű. Itt is csak az osztó' legfőbb jegyét, az osztandó' legfőbb jegyében vagy jegyeiben keressük, sokszorozzuk a' talált részessel az osztót, levonjuk az osztandó jegyeiből a' származatot, ehez uj jegyet hozunk le, 's ebben keressük a' részes' következő jegyét 's igy tovább mig több jegy nem marad felül midőn az osztás végét éri; 's az mit itt mondok mindenkor változatlan marad, bárhány jegyű legyen az osztó.

1.) *Példa*: $693 : 545 = 1 + \frac{148}{545}$

$$\begin{array}{r} -545 \\ \hline 148 \end{array}$$

2.) *Példa*: $693 : 346 = 2 + \frac{1}{346}$

$$\begin{array}{r} -692 \\ \hline 1 \end{array}$$

3.) *Példa*: $8794 : 254 = 34 + \frac{158}{254}$

$$\begin{array}{r} -762 \\ \hline 1174 \\ -1016 \\ \hline 158. \end{array}$$

Vegyünk 4 jegyet osztónak:

1.) *Példa*: 6823 : 2174=2
—4348
―――――
2475

a' részes kicsinek vétetett, mert háromnak kell lennie.

2.) *Példa*: $8754 : 3650 = 2 + \frac{1454}{3650}$
—7300
―――――
1454

3.) *Példa*: 41103 : 4567=9
—41103
―――――
- - - - -

4.) *Példa*: 267000 : 5340=5.

5.) *Példa*: 132741 : 2107=63.

6.) *Példa*: 1082844 : 8594=126.

Vegyünk 5 jegyet:

$653875{,}9{,}3 : 70564 = 926 + \frac{46129}{70564}$
—635068
―――――
188079
—141128
―――――
469513
—423384
―――――
46129.

és: 583908037815 : 8650105=67503.

Megjegyzem, hogy ha az osztandót a' részessel osztjuk el, az osztónak kell mint uj részesnek előjönni, mert ha, p. o:

8 : 2=4, bizonyosan: 8 : 4=2.

Tudván ezt, 's hogy a' részes és osztóközti származat egyenlő az osztandóval, kétfélekép tudhatjuk meg, vallyon jól miveltünk é, az az: nem követtünk hibát. Vagy sokszorozzuk tehát az osztót a' részessel, vagy ismét elosztjuk a' részessel az osztandót.

Az első esetben az osztandót, a' másodikban az osztót kell tökéletesen megtalálnunk.

Ha maradvány van, ezt az első esetben hozzá kell adni a' származathoz, a' másikban levonni a' részesből.

Valamint a' sokszorozásnál előre tudjuk, hány jegyből kell a' származatnak állani, az elosztásnál is előre megmondhatjuk,hány jegye lesz a' részesnek.

Erre csak azt kell tudnunk, mellyik jegy azon első, mellyben az osztó megtaláltatik; vagy más szóval: melly rendű, a' részes első jegye ugyan ezen rendű lesz; következéskép annyi jeggyel írva, hány jegy szükséges ezen rendhez. Más szóval igy mondhatom: azon jegy mellyben az osztót megtaláltam, a' részesnek első jegyét adja 's mindegyik utánna álló jegye az osztandónak, ád egy jegyet a' részesbe; p. o:

893 : 6.

Az osztó már az első jegyben megvan 's ád jegyet a' részesbe, neve pedig százas, tehát a' részes három jegyből áll. Az első jegy a' 8 as már ád egy jegyet a' részesbe, 's minden következő szinte egyet egyet, a' három tehát öszvesen 3at.

1654 : 7.

Részes jegyet az osztandó' első jegye nem ád és csak a' másodikkal együtt; az első jegy tehát 100as lesz a' részesben, utánna pedig természetesen következik a' tizes és egyes hely.

Hány jegyből fog 17895 : 97 nek részese állani 's mellyik lesz legfőbb rendje?

97 sem egyben sem 17ben nincs meg 's kell hozzá 3 jegyet venni az osztandóból, a' 178at; a' három jegy' utolsója, a' 8 as: százas, 's igy a' részesben 3 jegy lesz, legfőbb rendje pedig 100 as.

Hány jegyű lesz: 58736542 : 7589 részese?

Ha a' négyjegyű osztóra az osztandóból 4 jegyet elvágok, az 5873 ban, mivel ez kisebb, nem találom, kell tehát még egy jegyet, a' 6 ost hozzáadnom ekkor lesz részesem' első jegye; 's mivel a' 6, ezres helyen áll, részesem legfőbb rendje is ezres lesz, az az: 4 jegyű; vagy mivel a' 6os után, melly már egy jegyet ád, még 3 jegy következik, lesz öszvesen:

$$1+3=4 \text{ jegyem a' részesben.}$$

9. K. Miként történik az osztás valamelly felsőbb rendű egységgel?

F. Az osztás minden tekintetben ellenmivelete a' sokszorozásnak. A' sokszorozásnál többször vettünk öszve valamelly számot, az osztásnál többször vonunk le egyik számból valamelly másikat, vagy keressük, hány illy számból lehetne azt öszvetenni. Minden tekintetnek tehát, mellyet a' sokszorozás nyujt, az elosztásra nézve is hasznát vehetjük, csakhogy észrevételeinket meg kell fordítanunk.

Mint felsőbbrendű egyessel sokszoroztunk, annyi üres jegyet adtunk a' sokszorozandó számhoz, mennyi üres volt a' sokszorozó egység után; ha tehát felsőbbrendű egységgel osztunk, annyi jegyet kell az osztandóból elvágnunk, hány üreset hord magával a' felsőbb rendű egyes osztó.

Természetes az, hogy ha az osztandó' jegyei üresek, ezek azon számmal esnek el, mennyi az osztóban van; ha pedig jelentő jegyek, maradványok lesznek.

Példák: $40 : 10 = 4$

$$420 : 10 = 42$$

$$365 : 10 = 36\frac{5}{10}$$

$$4780 : 10 = 478$$

$$5693 : 10 = 569\frac{3}{10}$$'s a' t.

Ha tizzel osztunk el valamelly számot, annak utolsó jegyét, az egyeseket elvágjuk, 's mi elvágatott, az maradék, p. o:

$578 : 10 = 57{,}8$, hol 8 a' maradék.

Ha az utolsó jegy is üres, ezt egyszerűen elhagyjuk, és:

$$8600 : 10 = 860 = 860{,}0.$$

Ha százzal osztunk számot, a' két utolsó jegyet vágjuk el:

$$1000 : 100 = 10{,}00 = 10$$

$$1260 : 100 = 12{,}60 = 12\frac{60}{100}$$

$$2575 : 100 = 25{,}75 = 25\frac{75}{100}$$

és $6897504 : 100 = 68975{,}04 = 68975\frac{4}{100}.$

Ha 1000 rel osztunk, három jegyet vágunk el:

$$8975 : 1000 = 8{,}975 = 8\frac{975}{1000}$$

$$10000 : 1000 = 10{,}000 = 10$$

$$1000 : 1000 = 1{,}000 = 1$$

$$8765370 : 1000 = 8765{,}370 = 8765\frac{370}{1000}.$$

Ha millióval osztunk, 6 jegyet vágunk el, mert a' milliónál 6 üres van, 's igy bármelly felsőbb rendű egységgeli osztás egyszerű.

10. K. Hát ha az osztandó, szinte mint az osztó után is, egy vagy több üres áll hasonlóképen?

F. Ez esetben mind az osztóból, mint az osztandóból egyenlő mennyiségben elhagyhatjuk az üreseket, mert ha az osztandó és osztó egyenlőképen nőnek vagy kissebbednek, a' részes váltazatlan ugyanaz marad.

p. o: $12 : 4 = 3$

ha mind az osztandóhoz, mind az osztóhoz üreset adok, a' részes csak 3 marad és:

$$120 : 40 = 3$$

's bárhány üreset ragasszak mindkettőhöz, a' részes mindenkor csak 3, és:

$$1200 : 400 = 3$$
$$12000 : 4000 = 3$$
$$120000 : 40000 = 3$$

ebből látjuk tehát, hogy az üreseket egyenlő számmal elhagyhatjuk mind az osztandóból, mind az osztóból, és:

365800 : 75200 helyett irhatjuk a' példát:

3658 : 752

mi nem egyéb, mint íráskimélés és egyszerítés.

De ha csak az osztónak vannak üresei, még akkor is elhagyhatjuk azokat, de akkor az osztandóból hasonló számmal kell jegyeket elvágni, mennyi üreset az osztóból elhagytunk:

Példák: 83 : 20

ha mind két számból elvágok egy jegyet, lesz:

$$8{,}3 : 2{,}0$$

és csak 8at osztok 2 által, 's ekkor:

$$8{,}3 : 2{,}0 = 4 + \frac{3}{20}$$

's a' mint a' 3 maradékot odaírom, a' kettőhöz is oda kell írnom az üreset:

$$96 : 20 = 9{,}6 : 2{,}0 = 4 + \frac{16}{20}$$

$$542 : 30 = 54{,}2 : 3{,}0 = \frac{54}{3} + \frac{2}{30} = 18 + \frac{2}{30}$$

$$654 : 60 = 65{,}4 : 6{,}0 = \frac{65}{6} + \frac{4}{6} = 10 + \frac{54}{60}$$

$$654 : 600 = 6{,}54 : 6{,}00 = 1 + \frac{54}{600} \text{ és}$$

$$875456 : 75000 = 875{,}456 : 75{,}000 = \frac{875}{75} + \frac{456}{75000}$$

$$= 11 + \frac{50456}{75000}$$

Ha tehát az üreseket az osztóból, hasonló számmal pedig jegyeket az osztandóból elvágunk, a' megmaradott rövidebb osztóval osztjuk a' hasonlókép kisebbített osztandót, a' maradványokat pedig öszveadván felirjuk.

Gyakorlatot ajánlok a' tanulóknak.

Hetedik Beszélgetés.

---

1. K. Miként változtatjuk a' garasokat és krajczárokat forintokba?

F. A' garasokat 20al, a' krajczárokat pedig 60al osztjuk el, 's lesznek belőlök forintok.

Igy p. o: 240 kr. $= \frac{240}{60} = 4$ forint,

240 garas pedig: $\frac{240}{20} = 12$ forint.

Mindkét esetben az üreset elhagyván, lesz:

$\frac{24}{6} = 4$, és $\frac{24}{2} = 12$.

Szinte igy 63 garas $= \frac{6{,}3}{2{,}0} = 3$ forint 3 garas

és 752 kr. $= \frac{75{,}2}{6{,}0} = 12$ fl. 32 kr.

's a' mivelet:

$$\begin{array}{r l}
75{,}2 & : 6{,}0 = 12 \text{ fl. } 32 \text{ kr.} \\
-6 & \\
\hline
15 & \\
-12 & \\
\hline
-32 &
\end{array}$$

1.) *Példa*: Mindennapi kölcségem 1 fl. 16 kr., mennyit költöttem 53 nap alatt?

Itt 53 szor veszem a' forintokat, szintannyiszor a' kr. rokat, az utóbbiakat forintokba váltva találom meg a' feleletet 's ez:

$$53 \times 1 \text{ forint} + 53 \times 16 \text{ krajczár}$$

vagy: 54 forint 848 kr., mi ismét $\frac{848}{60}$ forint $=$ 14 fl. 8 kr. lévén, öszves kiadásom: 67 fl. 8 kr.

2.) *Példa*: Mennyit ér raktáromban lévő 376 posonyi mérő gabonám, ha mérőjét 5 fl. 18 kr. on eladom?

376 szor 5 fl. 18 krajczárt, ez pedig: 1880 fl. és 6768 kr., mi ismét:

1880 fl. + 112 fl. 48 kr., és öszves: 1992 fl. 48 kr.

3.) *Példa*: Valamelly munkás 13 napi bérét vette ki egyszerre 21 fl. 40 kr. al, kérdés, mennyi esik egynapi bérre?

Illyen kérdésekben legjobb a' forintokat is kra vinni és ezeket a' napok' számával elosztani:

$$\frac{21 \text{ fl. } 40 \text{ kr.}}{13} = \frac{1300}{13} = 100 \text{ kr., 's ez: } 1 \text{ fl. } 40 \text{ kr.}$$

4.) *Példa*: Nyolcz fiú és 5 leány dolgoztak 6 nap; a' fiúk mint erősebbek 36 krt., a' leányok csak 32 krt. kaptak napjában. Mennyi volt öszves fizetések?

Nyolcz fiú 6 nap 6 szor 8=48 szor 36 krt.=1728krt.
öt leány 6 » 5 ször 6=30 szor 32krt.= 960krt.

's igy öszvesen 2688 krt. kaptak fizetésül, ez pedig: 44 fl. 48 kr.

5.) *Példa*: 7 Munkás 25 nap dolgozván, egyszerre kiveszi pénzét, melly öszvesen: 204 fl. 10 kr. Kérdés, mennyi jut egyre' egyre 's mi a' napi bér, ha egyenlően részesülnek?

A' Munkás napok' száma $= 7 \times 25 = 175$.

A' forintokat az osztás végett krajczárokba tévén ki:

204 fl. 10 kr. = 12250 kr.

ha a' krajczárok' számát a' munkás napok' számával elosztom, megtalálom, mennyi egynapi bér, 's ez:

12250 : 175 = 70 kr. = 1 fl. 10 kr.

ha a' krajczárok' számát, a' munkások' számával osztom, meglelem, mennyit kapott egyik 25 napi munkájáért, 's ez:

$$\frac{12250}{7} = 1750 \text{ kr.} = 29 \text{ fl. } 10 \text{ kr.}$$

és csakugyan: 7 szer 29 fl. 10 kr. = 204 fl. 10 kr.

Az egyes részt a' napszámból is meglelem, ha azt 25 el sokszorozom, mert: 25 ször 1 fl. 10 kr. = 29 fl. 10 kr.

6.) *Példa*: Egy kereskedő 159 darab marháért 13833 forintot fizetett; bévett érettök a' vásosban: 15820 fl. 30 krt. Kérdés, mennyibe került neki egy darab, 's mennyit nyert mindegyiken?

Vett egy darab marhát: $\frac{13833}{159} = 87$ forintért, öszves nyeresége: 15820 fl. 30 — 13833 = 1987 fl.

30 kr. mellyből jön egyre: $\frac{1987 \text{ fl. } 30 \text{ kr.}}{159}$ = 12 fl. 30 kr.

7.) *Példa*: Egy más kereskedő 84 lovat vesz nyereségre 's fizet mindegyikért általjában 145 forintot. Mig valamennyit eladhatta, 3 ló megdöglött, kettő megsántult, 's ezen kettőért csak 62 forintot kapott öszvesen, kölcségei pedig, részszerint az úton, részszerint honn az idő alatt 1796 fl. 40 kra. rugtak. Bévett pedig öszvesen érettük: 15000 forintot kerek summát. Kérdés, mennyibe került neki a' 79 ép ló, mennyiért adott el egyet általjában 's mennyit nyert?

Vette a' 84 lovat 145 forintjával, az az: 145×84=12180 fl. hozzáadván kölcségeit, került neki öszvesen a' 84 ló:

12180+1796=13976 forintjába 's 40 krba.:

megdögölvén 3, marad 81 eladó; kerűl tehát mindegyik:

$\frac{13976 \text{ fl. } 40 \text{ kr.}}{81}$ = 172 fl. 34 krba, közel.

A' 15000 forintban van 62 forint a' két sántáért, 's ha ezt levonom, marad: 15000—62= 14938 fl. a' 79 ép ló, bévett árrára, 's ebből jön egyre:

$\frac{14938}{79}$ = 189 fl. 5 kr. közel

egész nyeresége: 15000 — 13976 fl. 40 kr. = 1023 fl. 20 kr. nyert tehát mindegyik lovon, ha a' vevéskori számot megtartjuk:

$$\frac{1023 \text{ fl. } 20 \text{ kr.}}{84} = 12 \text{ fl. } 11 \text{ krt. közel.}$$

8.) *Példa:* Egy harmadik kereskedő gabonát vesz és csakugyan 5670 posonyi mérőt; mig eladta, szállításért, raktárért 's egyebekért fizetett 5103 forintot. Eladta gabonájának mérőjét 6 fl. 42 krajczáron, 's öszveszámítván pénzét, látja, hogy 3591 forintot vesztett. Kérdés, hogy vette a' gabonát?

5670 mérő gabona 6 fl. 42 kr. jával = 37989 forint, ez a' bévett pénz, ha ehez veszteségét adjuk, öszves költségét megtaláljuk, ez:

$$37989 + 3591 = 41580.$$

Jött neki egy mérő gabona: $\frac{41580}{5670} = 7 \text{fl. } 2 \text{ kr.}$ba vesztett tehát mindegyik mérőnél: 7 fl. 20 kr. — 6 fl. 42 kr. = 20 krt.

Ha a' költségeket a' mérök' számával elosztjuk, megtaláljuk, mennyi jön belőlök egy mérőre; 's ez: $\frac{5103}{5670}$ forint, és krajczárokban:

$$306180 : 5670 = 54 \text{ kr.}$$

lesz a' vétel árra: 7 fl. 2 kr. — 54 = 6 fl. 8 kr. egy mérőre.

9.) *Példa:* Egy munkás béáll szolgálatba, 's a' gazda 260 forintot igér neki egy évre, ha maga tartja ki magát étellel; de a' dolgos inkább megelégszik 95 forintal, ha eledelt ád neki gazdája. Kérdés, mennyit ér ezen munkásnak mindennapi eledele?

a' 260 és 95 közti különbség = 165 forint, 's ezt elosztván 365 el, a' közönséges év' napjaival, megtalálom, krajczárokba változtatván a' forintokat:

$$\frac{9900}{365} = 27$$ krt. közel, mint mindennapi eledelmének értékét.

10.) *Példa*: Mennyit költhet az minden nap, kinek jövedelme 300 forint?

300 forint = 18000 krt., és: $\frac{18000}{365} = 49$ krt. közel, de nem egészen 50 krt. minden nap.

Itt mondom, hogy az, kinek csak 100 forint jövedelme van, nem költhet többet egy nap, mint 49 krajczárnak egyharmad részét, vagy: $\frac{49}{3} = 16$ krt. közel 's ha ezen 16 krajczárt sokszorozom, mindenféle évi jövedelemre kiszámíthatom, mennyi jön egy napra; szinte igy, ha az évi bért 12vel osztom, azt lelem meg, mennyi jön egy hónapra 's következő kis táblát szerkeztetem:

Egy év	Egy hónap		Egy nap	
florint	florint	kr.	florint	kr.
100	8	20	—	16
200	16	40	—	33
300	25	—	—	49
400	33	20	1	6
500	41	40	1	22
600	50	—	1	39
700	58	20	1	55
800	66	40	2	12
900	75	—	2	28
1000	83	20	2	44
2000	166	40	5	28
3000	250	—	8	12
4000	333	20	10	56
5000	416	40	13	42
6000	500	—	16	25
7000	583	20	19	9
8000	666	40	21	43
9000	750	—	24	39
10000	833	20	27	24

Ezen kis táblából öszveadás által az 1000 és 2000; a' 2000 és 3000, a' 3000 és 4000 's a' t. közt lévő százasokat, ha illyenek vannak, könnyű megtalálni; p. o: egy évi jövedelem 1600 fl. ád: 1000+600at;

egy hónapra: 83 fl. 20 kr. + 50 fl. = 133 fl. 20 kr.
egy napra: 2 fl. 44 kr. + 1 fl. 39 kr. = 4 fl. 23 kr.

Ha többszöröse kivántatik a' jövedelemnek, a' részeket is ezen számokkal kell sokszorozni; p. o:

50000 fl. évi jövedelem = 10 szer 5000 forint
és egy hónapra: 10 szer 416 fl. 40 kr. = 4166 fl. 40 kr.
egy napra: 10 szer 13 fl. 42 kr. = 137 fl.

11.) *Példa*: Valamelly portékának rőfe vagy fontja 1 fl. 12 kr.; hány rőföt vagy fontot lehet venni 453 forinton?

Az íllyen kérdésnél a' két számközti részes a' felelet, 's ekkor a' forintokat kr. okba változtatjuk 's lesz:

453 fl. = 27180 kr., az osztó pedig 72 kr.

$$\text{a' felelet: } \frac{27180}{72} = 377 \frac{36}{72}$$

és ezen szám a' rőfök' vagy fontok' száma.

247 rőfnek vagy fontnak árra valamelly portékából 1383 fl. 12 kr. Kérdés, mi *egy* rőfnek, vagy fontnak árra?

Az illy kérdésnél is a' számközti részes a' felelet; a' forintokat krajczárokra vivén, találunk:

82992 : 247 = 336 tot feleletül;

ezek kr. ok 's egy rőf' vagy font' árra = 5 fl. 36 kr.

2. K. Tudjuk, hogy ha valamelly dolog' egy napi munkával eszközlendő végrehajtására 4 ember kell, ugyan ezen munkát 2 ember 2 nap alatt végezheti, de 8 ember fél nap végbehajtja, egy embernek pedig 4 nap kell hozzá.

Ha a' dolog kétszer annyi, természetes, hogy kétszer annyi ember kell hozzá, ha az idő változatlan marad. Igy azt mondom, hogy: *a' munkások és idő ellenkezön állanak egymáshoz*, mert mennyivel több munkás, annyival kevesebb idő alatt végződik a' dolog; 's hogy ez bizonyos, azon senki nem kételkedik, mert ki ki tudja, hogy:

2 ember kétszer annyit végez mint 1,

4 ember 2szer annyit mint 2, és 4szer annyit mint 1,

8 ember 2szer annyit mint 4, 4szer annyit mint 2, és 8szor annyit mínt 1, és igy tovább; ha tehat: 8 ember 1 óra alatt végez el valamit,

4 embernek ezen munkához már 2 óra kell, 2 embernek 4 óra 's végre 1 embernek 8 óra. Ebből látjuk, hogy ha a' munkások' számát, vagy a' munkáló erőt valamelly számmal sokszorozzuk, a' munkára fordított időt ugyan ezen számmal osztanunk kell; és megfordítva; ha az időt növesztjük, az erőt kisebbitenünk kell. De ezen tekintetből az is következik, hogy: *az eszközlött munka vagy a' következés, egyenesen áll az idővel*, ha az erő vagy a' munkások' száma' ugyan az és nem változik; és ki ki tudja, hogy p. o: 4 munkás 2 nap alatt kétszer annyit végez, mint egy nap alatt, 8 nap alatt 8szor annyit 's a' t. Ebbéli észrevételünkből pedig azt is látjuk, hogy: *a' következés vagy a' végbe vitt munka egyenesen áll az erővel vagy a' munkások' számával*, vagy is: mindkettő egyenlően fogy vagy nő. Ha tehát a'

munkások' száma nevekedik, a' végzett munka is több. Ha ezen három jegyzést még egyszer tekintjük, mondjuk:

1szőr. Mennyivel több erő, annyiszor több következés. Tehát az erő' sokszorozója egyszersmind a' következés' sokszorozását következteti.

2szor. Mennyiszer több az idő, annyiszor több a' következés; 's azon szám, melly az időt sokszorozza, a' következést is sokszorozza.

3szor. Mennyiszer több az erő, egyenlő következés mellett annyiszor kevesebb az idő; 's melly szám az erőt sokszorozza, ugyan azon szám elosztja az időt. Ezután könnyű lesz minden idetartozó példákat feloldani.

F. 1.) *Példa:* Szántóföldjeimet learatja 120 ember 36 nap alatt, hány emberre van szükségem, ha azt fele idő alatt akarom elvégezni?

Két annyi emberre 240re $= 120 \times 2$.

Itt az időnek fele a' munkások' dupláját kívánja.

Ha hat nap alatt akarom elvégezni, hány ember kell?

$6 \times 6 = 36$, hattal osztván a' napok' számát: $\frac{36}{6} = 6$ hattal kell sokszoroznom az erőt, és: $120 \times 6 = 720$; 's igy 6 nap 720 emberre van szükségem.

A' munkát három nap akarom végezni:

$3 \times 12 = 36$, és $\frac{36}{12} = 3$; az időt 12 vel osztom, az erőt 12vel kell sokszoroznom; kell 3 napi munkára: 12szer $120 = 1440$ ember.

Hány arató kell, ha az egész munkát egy nap akarom végezni?

$\frac{36}{36} = 1$, tehát: 36 szor 120 ember = 4320.

Nem kaphatok többet 60 aratónál, mennyi idö kell a' munkára?

60 fele 120nak, 's igy még egyszer annyi idő kell, 's ez:

2szer 36 = 72nap.

Ha 30 aratónál több nincs; ez: $\frac{120}{30} = 4$, az időt négyszer akkorára kell venni, és lesz:

$4 \times 36 = 144$ nap.

Hogy illy hosszú ideig nem lehet a' termést kinn hagyni, tudjuk; szükséges tehát, hogy munkásokat keressünk, különben minden elvész.

2.) *Példa*: Hogy rétjeinkről, kertjeinkről és földeinkről a' vizet lecsapoljuk, árkolásokat kell tennűnk, 's van szükségünk öszvesen 3600 öl árokra. Tudom, hogy 10 ember egy nap 24 ölet megás; mennyi emberre van szükségem, ha a' munkát 10 nap alatt akarom végezni?

Ha az ölek' számát a' 10 ember egynapi munkájával elosztom, azt találom meg, mennyi ideig ásna 10 ember a' 3600 öl árkon.

3600 : 24 = 150, 's tiz embernek 150 nap kell.

Minthogy: $\frac{150}{10} = 15$, a' munkások' számát 15ször kell nagyobbítani, mint az időt 15ször kisebbítjük.

Kell tehát 150 ember, 's ez végez egy nap: $15 \times 24 = 360$, tiz nap pedig: 3600 ölet.

3.) *Példa*: Tőtést kell hányatnunk, mert a' helységet áradás fenyegeti. Nincs több munkásunk 250nél, de ezek csak 30 nap alatt végeznék el a' tőtést, mert egy nap csak 13 ölnyi tőtést készítnek.

Kérdés, hány ember kell, ha a' munkát 10 nap alatt akarjuk bévégezni, 's mennyi a' tőtésnek hossza?

A' dolgot egy harmadrész idő alatt, három annyi munkás végzi 's kell 10 napra: $\left(\text{mert} \frac{30}{10} = 3\right)$ 3szor $250 = 750$ ember. Ez egy nap három annyi ölet készít, mint 250, az az: 39 ölet, és:

$10 \times 39 = 390$ öl a' tőtés' hossza.

4.) *Példa*: Van 4 kaszálni való rétünk:

az elsőt lekaszálja	75	kaszás	5	nap	alatt
a' másodikat	80	»	7	»	»
a' harmadikat	125	»	4	»	»
's a negyediket	260	»	3	»	»

csak az elsőről tudom, hogy 1500 hold, a' többit nem ismerem. Kérdés, ha a' kaszások mind, és mindennap egyenlő iparral dolgoztak, mennyit kaszál mindegyik egy nap, és mekkora 3 utóbbi rét?

75 kaszás annyit dolgozik 5 nap, mint 5ször 75 kaszás egy nap,

az első rét' egynapi munkája tehát: $5 \times 75 = 375$
a' második rété szinte $7 \times 80 = 560$

a' harmadiké $4 \times 125 = 500$
a' negyedik végre $3 \times 260 = 780$

kaszált pedig mindegyik haszás egy nap: $\frac{1500}{375} = 4$

holdat, 's igy

a' második rétben van: $4 \times 560 = 2240$ hold
a' harmadikban $4 \times 500 = 2000$ »
a' negyedikben $4 \times 780 = 3120$ »

Ha ezen 4 rétet egyszerre 5 nap alatt leakarnám kaszáltatni, miként kellene a' munkásokat dologra állítani, az az: mennyi kaszást egyik 's másik rétre?

A' nagy rétben van öszvesen: $1500 + 2240 + 2000 + 3120 = 8860$ hold kaszálló. Egy ember kaszál egy nap 4 holdat, kell tehát egy napra $\frac{8860}{4} = 2215$ ember; 5 napra pedig $\frac{2215}{5} = 443$ kaszáló öszvesen.

Eszerint egy kaszás 5 nap alatt 20 holdat kaszál, és ha 20 által a' rétek' holdja számát elosztom, megtalálom, hány kaszást kell mindegyikre küldeni, 's lesz sorjában a' 4 réten:

1.)	1500 : 20 = 75	kaszás	
2.)	2240 : 20 = 112	»	
3.)	2000 : 20 = 100	»	
4.)	3120 : 20 = 156	»	
öszvesen:	8860 : 20 = 443	»	mint feljebb.

5.) *Példa:* Osszunk el valamelly mennyiséget ugy, hogy a' részek különbözők legyenek, de bizonyos törvény szerént álljanak egymásközt.

Ha p. o: 24 almát, diót vagy más gyümölcsöt ugy kellene felosztanom két gyermek közt, hogy egyik 3 annyit kapjon mint a' másik, vagy valahányszor egyik 1et kap, a' másik 3at kapjék; ekkor azt mondom hogy: a' részek olly arányban álljanak egymásközt, mellyben állanak a' számok 3 és 1, és a' két szám' öszvesével elosztom az adott mennyiséget, melly it 24.

Lesz e' szerint $\frac{24}{4} = 6$ azon részes, mellyet az egyik egyszer, a' másik pedig 3szor veszi, és csakugyan: az egyik kap hat almát, a' másik 18at, és: $1 \times 6 + 3 \times 6 = 6 + 18 = 24$.

Hármunk között kell a' 24et felosztani; az első 1et, a' másik 2őt, a' harmadik 3at kapjon egyenként, vagy is: álljanak részeink, mint a' számok 1, 2 és 3.

A' három rész' öszvese 6 és $\frac{24}{6} = 4$

az első kap 4 szer 1et, ez $= 4$

a' másik 4 » 2őt » $= 8$

a' harmadik 4 » 3at » $= 12$

és $4 + 8 + 12 = 24$.

Osszuk fel a' számot 875 olly 4 részekbe, mellyek állanak egymásközt mint a' számok: 4, 6, 7 és 8.

A' négy számnak öszvesét veszem 's ez:

$$4+6+7+8=25.$$

Elosztom az osztandó számot 875 öt 25 el, 's a' részes:

$$875:25=35.$$

Ha ezen 35el sokszorozom a' 4 számot egymás után, egyes részeseim előjönnek; 's ezek sorjában

1.) $4\times35=140$
2.) $6\times35=210$
3.) $7\times35=245$
4.) $8\times35=280$

öszves: $25\times35=875.$

Ezen kérdéshez igen sok hasonlót találhatunk.

6.) *Példa*: 5 munkás vette ki egyszerre bérét öszvesen 334 forintal. Napjaik' száma volt sorjában: 18, 25, 30, 41, 53. Mennyiben részesül mindegyik 's mi egynapi bér?

A' munkás napok' száma: $18+25+30+41+53=167$; ha evvel a' fizetést elosztom, meglelem a' napi bért, 's ez:

$$334:167=2 \text{ forint},$$

könnyű lesz most mindegyiknek napszámát kettővel sokszorozni, vagy duplázni, 's kapnak sorjában:

$$36+50+60+82+106=334 \text{ forintot öszvesen.}$$

7.) *Példa*: Szinte igy számítjuk, ha valamelly nyereséget vagy veszteséget kell bizonyos részek szerint felosztani. Ha mondom p. o: mi ketten nyertünk 10 forintot, de én 30 forintal kereskedtem, midön társam csak 20 at adott be, és eszerint kell nekem 3at nyernem, ha ő kettöt nyer; 's részeink: 6 és 4.

Ha hárman állattunk kereskedésbe: 40, 50 és 60 foríntal, 's pénzeinket megdupláztuk, bizonyosan: 80, 100 és 120 forintot veszünk ki sorjában; és bármelly legyen a' nyereség vagy veszteség, azt mindég azon arányban kell osztani, mellyben voltak a' bélépett társak' pénzei.

Négyen állattunk be: 240, 360, 480 és 600 forintal; 3 év mulva a' nyereséget, melly 1008 forint, el kell osztani mínt a' kererkedésben lévő pénzek vannak.

Itt azt jegyzem meg, hogy a' bétett summák' öszvese: 1680 forint, nagyobb a' nyereségnél, tehát a' nyereség' forintjait krajczárokba változtathatom; de látom, ezen példában arra szükségem nincs, mindegyik szám után üres állván 's ezeket elhagyhatom, mert azért az arány csakugyan változatlan marad 's p. o:

240 épen annyi 360ra nézve,
mennyi 24 a' 36ra nézve.

Mondom tehát, a' részek:

$$24+36+48+60=168,$$

's ha ezzel a' nyereséget elosztom, lesz: $\frac{1008}{168}=6$,

azon részes, mellyel a' társak' tőkéjét kell egymás után sokszorozni, 's részesülnek:

$$\begin{array}{ll} 1.) & 6\times24=144 \\ 2.) & 6\times36=216 \\ 3.) & 6\times48=288 \\ 4.) & 6\times60=360 \\ \hline \text{Öszves} & 1008 \text{ forint.} \end{array}$$

Bizonyos, hogy itt azt mondhattam volna: ezen 1008 forint nem nyereség, hanem veszteség 's ekkor a' veszteséget kellett volna igy felosztani.

8.) *Példa*: Ha pénzemet forintokba véve 48 al elosztom, lesz részesem: 93; kérdés mennyi pénzem van?

Bizonyosan: $48\times93=3464$ forint, mert az osztó és részes közti származat, az osztandót adja.

Ha pénzemet 9 szerte veszem és még 28 forintot hozzá adok, épen 1000 forint jön ki. Kérdés mennyi pénzem van?

Ha az ezerből ezen hozzáadott 28 forintot elveszem, és a' maradékot 9 el elosztom, ki kell jönni a' pénznek, 's ez:

$$\frac{1000-28}{9}=\frac{972}{9}=108,$$

és valóban: $108\times9+28=972+28=1000$.

Ha egyik zsebemben lévő forintjaim' számát, a' másik zsebemben lévő forintok számával sokszorozom 3600 forint jön ki. Kérdés, mennyi volt egyik és másik zsebemben?

Ezen kérdés nem bizonyos, mert 3600 temérdek sokféle számból származhatott, 's a' többek közt csak:

$$360\times10,\ 36\times100,\ 120\times30,\ 240\times15,\ 1800\times2,\ 900\times4 \text{ 's a' t.},$$

említem; ha tehát mig valamelly más feltételt nem ád mellé, a felelet is bizonytalan és önkényes, mert mindjárt azt mondhatnám p. o: hogy egyik zsebében 3600, a' másikban pedig 1 volt.

Ha p. o: azt teszem ide, hogy ha az egyik zsebemben lévő forintok' számához egyet adok a' 3600 ból 3672 lesz, 's ekkor azonnal tudom, hogy egyik zsebében 72 forint volt, mert mindegyik sokszorozó egység ennyi különbséget tesz. Elosztom tehát a' 3600 at 72vel 's ez:

$$3600 : 72=50,$$

melly szám a' másik zsebben lévő forintoknak felel meg, és:

$$50\times72=3600.$$

Ha pedig kérdezném: két zsebemben öszvesen 122 forint van, de egyik zsebemben 22 forintal van több mint a' másikban; mennyi van mindegyikben külön?

Itt vagy az egészből levonnám a' 22őt 's mi megmarad kettővel elosztanám 's ekkor:

$\frac{22-22}{2}=\frac{100}{2}=50$ mi a' másik zsebben van;

az egyikben pedig: $50+22=72$;

vagy pedig igy mondanám: ha mindegyik zsebben egyenlő summa lenne, 122 nek fele 61; de az egyikben 22 vel van több mint a' másikban, tehát ebből 11et elveszek 's ahoz teszem, lesz ezután a' kettő:

$$61-11 \text{ és } 61+11,$$

vagy: 50 és 72, $50+72=122$.

3. K. Egy koncz vagy könyv papirosban 24 ív van. Husz koncz papirost együtt egy rizmának, kötésnek nevezünk, 10 illyen rizma pedig egy bál. Hány ív papiros van egy bálban?

F. A' három szám származatja adja a' feleletet, 's:

$$24\times20\times10=480\times10=4800.$$

A' nyomtató papirosban egy ivvel van több minden konczban, az az: 25 ív egy koncz. Hány ív nyomtató papiros van egy bálban?

$$25\times20\times10= \quad 25\times200=5000.$$

1.) *Példa*: Ha valamelly könyv 12 nyomtatott ív, mennyi papiros kell, ha ezen könyvből 600 példányt akarunk nyomtatni?

$$12 \text{ szer } 600 \text{ ív} = 7200 \text{ ív},$$

és bálba kitéve: $1\frac{1200}{5000}$ bál

rizmába, mivel egy rizma $25\times20=500$ ív $\frac{7200}{500}=$ $14\frac{200}{500}$ rizma;

és konczba: $\frac{7200}{25}=288$ koncz.

A' könyveknek különbféle nagysága van. Azon könyveket, mellyek félívnyi nagyok: folióknak; azokat, mellyekhez egy ív papirost 4 részre veszünk: quartoknak (negyedrét); azokat, mellyek az ív' egynyolczad részére vannak nyomtatva: octavoknak 's a' t., hívjuk. Hogy egy ív papirost annyiszor hajthatunk öszve, mennyiszer akarjuk, természetes. Ha az ívet, mint az a' kereskedésben van, változatlan hagyjuk, egy ívnek csak két levele van, minden levélnek két oldala, vagy is: két lapja; egy illy ív papirosra tehát 4 lapot írhatunk.

Ha egyszer öszve hatjtuk az ívet, lesz 4 levele vagy 8 lapja. Ha ezt is öszve hajtjuk, lesz 8 levél vagy 16 lap, 's illyen legtöbbnyire a' nyomtatott könyvek' nagysága. Lehet azonban 12, 16, 24, 32 's még több levélbe is hajtogatni az ívet 's ekkor sorjában: 24, 32, 48 és 64 lap jön az írásra vagy nyomtatásra.

2.) *Példa*: Valamelly 8 ad rét nyomtatott könyvben 496 lap van. Kérdés, hány ívből áll?

$$\frac{496}{16}=31 \text{ ívből.}$$

Egy más quartó könyvben 560 lap van; hány ív?

$$\frac{560}{8}=70 \text{ ív.}$$

Ki sebesen ír, egy óra alatt teli írhat egy ív papirost. Kérdés mennyi idő alatt írna teli egy bál papirost?

Itt természetesen író papirosrul van a' szó, 's egy bálban tudjuk: 4800 ív van, 's éppen annyi óra alatt írná azt teli; e' pedig, 24 órát vevén egy napra és éjjre, ád 200 napot.

Igen de senki nem írhat szüntelen éjjel nappal, hanem csak bizonyos órát egy nap; mennyi idő kell tehát, ha p. o: csak 10 órát írhat a' 24 közt?

Itt azt mondom hogy, ha csak egy órát írna minden nap, 24szer 200 napra lenne szüksége, 's ez: 4800 nap; de mivel 10 orát ír egy nap, ennek tizedrészére, az az: 480 napra, vagy: egy évre és 115 napra.

3.) *Példa*: Ha minden percz alatt 300 betűt tud írni, hány betűt ír azon idő alatt, az az: hány betűt írt a' bál papirosra?

A' 4800 óra: 4800×60 percz $= 288000$'s ezt 300szor véve, lesz: 86,400,000 betű.

Mennyi idő kellene e' szerint egy millió betűre?

Egy órára jön: 300 szor $60 = 18000$ betű, tehát:

$$1000000 : 18000 = 85\frac{10000}{18000} \text{ óra},$$

5 és félnapi írás.

4.) *Példa*: Mint említők, a' közönséges kiterjedésű nyolczadrét könyvekben 420 lapot lehet általjában felvenni. Minden lapon 40 sort, minden sorban 42 betűt. Hány illy könyvet lehetne 1000 millió betűből szerkeztetni?

Kiszámítom, hány betű van egy illy kötet könyvben 's a' talált számmal osztom el az ezer milliót; részesem lesz a' felelet.

A' kötet' betűji pedig:

$$420 \times 40 \times 42 = 420 \times 1680 = 705600,$$

$$\text{és } 1,000,000,000 : 705600 = 1417 \frac{1648}{7056} \text{ kötet.}$$

5.) *Példa*: A' könyvek tudjuk nagyok és kicsinyek lehetnek, lehet olly folio-könyv is, mellyből 100 közönséges kötet kerülhetne, de lehetnek olly aprók is, hogy többet kellene öszvevenni hogy belőlök illyen középszerű nagyságú könyv legyen, mellyet itt tekintének.

Felveszem tehát, hogy ezen középszerű nagyságú könyv 36 ív papirosból legyen 8ad-rét, és a' sorok' és betük' száma egy lapon az említett maradjon.

Azt mondom továbbá, hogy olvasni sebesebben lehet mint írni; 's ha a' nyomtatás jó, a' betűk nem igen aprók, a' tárgy nem felette száraz, könnyen és jó kedvel olvasható, sokat gondolkozni az olvasott felett nem kell, ekkor két ív nyomtatást egy óra alatt elolvashatni, 's igy egy illy kötetet 18 óra alatt. Felteszem továbbá, hogy valaki rendesen minden nap 12 órát olvas és következésképen két könyvet három nap alatt; ezen kérdést teszem:

Mennyi idő alatt lehetne egy olly könyvtárt kiolvasni, mint p. o: a' bécsi, mellyben 400000 kötet könyv van, vagy mint a' párisi, mellyben még egyszer annyi könyv találtatik?

Erre, hogy kerekszámokkal számíthassak, 366 napot adok egy évnek, és években számítok, mondván: 3 könyvet 2 nap alatt annyi, mint 3szor $\frac{366}{2}$ könyvet egy év alatt, e pedig:

$$3 \times 183 = 549 \text{ könyv egy évre.}$$

Ha a' könyvek' számát 549el elosztom, az évek' számát találom meg: mennyi kívántatik azoknak elolvasására, 's ez a' bécsi könyvtárra:

$$400000 : 549 = 728 \frac{328}{549} \text{ év}$$

és a' Párisi könyvtárnak kétennyi, vagy;

$$1457 \frac{107}{549} \text{ év.}$$

De senki nem él 700 vagy 1400 évig 's ez annyi, hogy ember illy nagy számú könyvet elolvasni nem képes. Példánkat másként is számíthatjuk.

Ha p. o: azt mondjuk, egy hónap alatt az illy szorgalmas olvasó 40 könyvet olvas ki, a' könyvek' számát 20al elosztván, a' hónapokat találjuk, ezekből pedig éveket; ha 12vel elosztjuk, 's lesz az első:

$$\frac{400000}{40} = 10000 \text{ hónap} = \frac{10000}{12} = 835 \text{ év},$$

vagy ha egyszerre, a' könyvek' számát kettővel sokszorozzuk és 3al elosztjuk, a' napokat leljük és legbizonyosabban megtaláljuk feleletünket; az éveket pedig 365 teli osztás által megleljük.

Igy: $\frac{2 \times 400000}{3} = \frac{800000}{3} = 266666\frac{2}{3}$ nap,

ez pedig: $266666 : 365 = 730\ \frac{216}{365}$, vagy:

730 év $216\frac{2}{3}$nap.

6.) *Példa*: Hány kőnyvet olvashat el tehát egy tudományos ember, ki éltének legnagyobb ideit a' könyvek közt tölti?

Erre a' felelet igen bajos, mert az emberi élet' tartossága különböző, az embernek egéssége is változó; másfelől az ember nem mindég csak olvas, de különbféle foglalatosságai is vannak. Akarmint számítunk illyen kérdést, tekinteteink mindég csak önkényes feltételeket foglalnak, de valóságot soha sem.

Feltesszük tehát, hogy egy erős és jó egésségű ember 70 esztendős koráig szorgalmasan olvasott, régi és uj könyveket, ide számítván ifjúsági szorgalmát is, melly azonban csak 14 éves korában kezdett valóban kifejlődni; mit ez előtt olvasott és tanult, az említést itt nem igen érdemli. Marad tehát 56 év.

Ennyi időre lehetetlen 10, 12 órát adni egy napra csupa olvasásnak, ha felveszük is, hogy mindennap olvas; közelítsünk a' valóhoz mennyire lehet 's mondjuk, hogy általjában véve olvas 5 órát minden nap 56 év alatt; ez annyi, hogy alig lehet feltenni, élt é ember ki ezt tette. Számítsuk most e' szerint, hány kötetet olvashat, ha elébbi adatainkat megtartjuk.

365 napban van:	$365 \times 5 = 1825$ orája
56 évben	$1825 \times 56 = 102200$ orája

56 évben van 14 szökő év, tehát 14 napot még 5 orával, az az:

$$14 \times 5 = 70$$

órát hozzáadunk, 's lesz az orák öszvese olvasásra:

$$102270.$$

Elébbi felvétünk szerint egy 36 ives kötetet 18 óra alatt olvastattunk el, vegyük itt is ezen időt, 's ha az órák számát 18al elosztjuk, megtaláljuk a' kötetek' 'számát, és ez:

$$102270 : 18 = 5681 \frac{12}{18}$$

és ezen 5681 könyv valóban nem csekélység.

Ebből látni, hogy nagy szorgalommal sem lehet csak közelítni is ahoz, mit többen, vagy egész nemzetek miveltek, 's hogy az egyes ember tette 's munkája csekélység a' társasági szorgalomhoz hasonlítva.

Hány könyvet olvas ki tehát olly ember, ki tán csak minden hónapban egyet végez és 20 munkás évnél többet nem él? 240 könyvet. De ha ezeket elmésen válosztja, belőlök nagy hasznot húzhat. A' pedig, ki csak 3 téli hónapokban estvénként álmosan egy órát olvas unalomból, tehát egész éltében sem végez el 20 könyvet.

4. K. Hány font 64 lat?

F. Egy fontban 32 lat van, tehàt: 64 lat = $\frac{64}{32} = 2$ font.

786 grán hány lat?

Egy lat 240 grán, tehát: 786 grán $= \frac{786}{240}$ lat.

8705 grán hány font?

Egy font = $240 \times 32 = 7680$ grán, tehát:

8705 grán $= \frac{8705}{7680}$ font.

785 font hány mázsa?

Ennek század része, vagy: $\frac{785}{100} = 7\frac{85}{100}$ mázsa, mi 7 mázsa és 85 font.

1.) *Példa*: Adva van: 3785650 grán; kívántatnak fontok, latok, nehézékek és gránok rendesen belőle?

Én ezen gránokból előre nehézékeket osztok 60al, 's mi megmarad, gránoknak hagyom, 's igy:

$3785650 : 60 = 63094 + \frac{10}{60}$ nehézék. Marad 10 grán.

A' 63094 nehézékből 4 eli osztás által latok lesznek, 's ezek:

$63094 : 4 = 15773 + \frac{2}{4}$ lat. Marad 2 nehézék.

A' 15773 latból fontot számítok:

$15773 : 32 = 492\frac{29}{32}$ font. Marad 5 lat.

A' 492 font pedig: 4 mázsa 92 font 's igy: 3785650 grán annyi mint: 4 mázsa 92 font, 29 lat, 2 nehézék és 10 grán.

Hány grán hibáz az 5 mázsából?

Itt mindegyik alsóbb rendű nyomatot egészíteni kell felsőbb rendűre.

Látom, hogy 492 fonthoz 8 font kell hogy 5 mázsa legyen, a' kérdés tehát, mennyi kell.

29 lat 2 nehézék és 10 gránhoz, hogy 1 font legyen?

e' pedig: 2 lat 1 nehézék és 50 grán.

32 » » 's most mondom:

50 grán	=	50 grán.
1 nehézék	=	60 »
2 lat	=	120 »
7 font	=	53760
öszvesen:		53990 grán kell.

2.) *Példa*: Tudom, hogy padlásom 3500 mázsát megbír, de többet nem; kérdés, hány posonyi mérő buzát rakhatok fel, hogy be ne szakadjék, ha egy posonyi mérő buza 85 fontot nyom?

Ha a' mázsákat 100 al sokszorozom, fontok lesznek belőlök. Ha a' fontok' számát 85 el elosztom, a' posonyi mérők' számát találom, mennyit padlásom megbír 's ez:

$$350000 : 85 = 4117\frac{55}{85}$$

tehát közel 4118 posonyi mérőt tehetek fel.

3.) *Példa*: Szekerem 's 4 lovam megbírnak jó útban 32 mázsát.

Hány mérő árpát rakhatok fel, ha egy posonyi mérő árpa 64 font?

Elosztom 3200 fontot 64 el 's lesz:

$$3200 : 64 = 50.$$

Felelet: 50 mérőt tehetek szekeremre.

4.) *Példa*: A' buzából 's rozsból kenyér sül, s' tudom hogy egy személy annyi kenyeret eszik meg mindennap, mennyi 3 font illy életből kerül. Kérdés, hány posonyi mérő élet kell egész év alatt olly családnak, melly 7 személyből áll?

Háromszor 7 font minden nap, vagy 21 font.

365 ször 21 font pedig egy közönséges évben, az: 7665 font.

Vegyük fel, hogy a' hétszeres, vagy a' kétféle élet' posonyi mérője csak 80 font, kell egy évre:

$$7665 : 80 = 95\,\frac{65}{80}$$

közel 96 posonyi mérő 's minden hónapra 8 mérő.

5.) *Példa*: Valamelly helységhez tartozó földeken a' lakosoknak 48960 posonyi mérő elesége termett· Kérdés: mennyi ideig élhet ebből a' 13820 személyből álló népesség, ha az előbbi szükséget megtartjuk?

Kell öszvesen:

3szor 13820=41460 font egy napra.

Az eleség pedig:

48960×80=3916800 font,

ha ezen utóbbi számot az előbbivel elosztom, meglelem a' napok' számát, 's ez:

3916800:41460=90 és fél nap.

Ebből látjuk, hogy csak egy fertály évig lenne a' népnek mit ennie, és hogy 4szer annyi életre van szüksége egy évre, mint mennyi termett.

6.) *Példa*: Ha a' népesség 7650, a' termés pedig: 35000 mérő élet; hány font jön napjában mindegyik főre, ha egész év alatt ki kell jönni a' mennyiséggel?

A' termés:

35000×80=2800000 font.

A' napok' száma:

7650×365=2792250.

Ha a' fontok' számát a' napok' számával elosztom, megtalálom, mennyi jöhet mindegyik személyre; látom hogy egy fontnál több alig jön, ez pedig csakugyan nagy szükség.

7.) *Példa*: Valamelly gazdának családja 13 személyből áll; termése 756 mérő gabona. Kérdés: mennyi marad neki eladó, ha egész évi szükségét ellátni akarja?

13szor 3 font = 39 font egy napra szükséges egy évre pedig: $39 \times 365 = 14235$.

Ha ezen számot 80al elosztom, a' szükséges mérők' számát találom, 's ez:

$$14235 : 80 = 177 \frac{70}{80} \text{ mérő.}$$

Ezt levonván a' 756 ból, mi megmarad, eladó.

Nyolczadik Beszélgetés.

---

1. K. Mit tesz az szoros értelemben: elosztani egyik számot a' másikkal, mint p. o:

$$8 : 4 = 2.$$

F. Azt kell mondanom, hogy: a' mennyiszer van *egy* az osztóban, annyiszor kell az osztónak a' részesben foglaltatnia, és hogy a' részesnek mindegyik egyese, az osztó' valamennyi egyesét magában foglalja; ez nyilván, mert példánkban is a' 2 részes' mindegyik egyese, 4 egyesét foglalja magában az osztónak és igy egyszersmind az osztandó' öszvesét adja. Tudjuk hogy:

$$8 = 4 + 4, \quad \text{tehát:} \quad \frac{8}{4} = \frac{4}{4} + \frac{4}{4}$$

de tudjuk is, hogy mindegyik szám maga-magával elosztva, egyet ád részesnek, vagy hogy, mindegyik szám maga magában egyszer bizonyosan megtaláltatik, tehát:

$$\frac{8}{4} = \frac{4}{4} + \frac{4}{4} = 1 + 1 = 2.$$

Mit itt mondék, akarmelly nagy számra is alkalmazható, p. o:

$$144 : 36 = 4, \quad \text{mert:}$$

$$\frac{144}{36}=\frac{36+36+36+36,}{36} \text{ vagy is: } \frac{4\text{szer } 36}{36}$$

's ez nem egyéb mint:

$$\frac{36}{36}+\frac{36}{36}+\frac{36}{36}+\frac{36}{36}=1+1+1+1=4.$$

2. K. Ha az osztás el nem végződik, a' maradványt odaírjuk, 's alája tesszük az osztót, mit jelent ez a' maradvány?

F. Ha p. o: 9 et osztok el 4 által, lesz osztásom:

$$\frac{9}{4}=2+\frac{1}{4}.$$

Ez azt teszi, hogy az osztandót, a' 9 et olly részekbe osztom, mellyeknek mindegyike 4 egyest foglaljon (az osztónak 4 egyesét), akkor két illyen 4 egyesből álló részest találok 's még ezen felül egyet, 's hogy:

$$9=4+4+1.$$

Kilenczet pedig 4 által elosztani annyi, mint annak részeit elosztani 4 által, 's ez:

$$\frac{9}{4}=\frac{4}{4}+\frac{4}{4}+\frac{1}{4}=1+1+\frac{1}{4}=2+\frac{1}{4}.$$

Ez a' maradvány: $\frac{1}{4}$ tehát csak egy része az egésznek, és csakugyan egy negyed része, mert ha 9 helyett 10 et osztunk 4 által, a' maradvány két negyed része az egésznek, és:

$$\frac{10}{4}=\frac{4}{4}+\frac{4}{4}+\frac{2}{4}=2+\frac{2}{4},\text{ mert: } 10=2\times4+2$$

ha 11 et osztunk 4 által, a' maradvány 3.

$$\frac{11}{4}=\frac{4}{4}+\frac{4}{4}+\frac{3}{4},\text{ mert: } 11=2\times4+3$$

's ha még egyet adunk a' 11 hez, a' 12 már 4+4+4, és:

$$\frac{12}{4}=\frac{4}{4}+\frac{4}{4}+\frac{4}{4}=1+1+1=3,$$

's innen nyilván látjuk, hogy a' részes' egyeséhez, az osztandóból 4 egyes kivántatik.

És a' számok: $\frac{1}{4}$, $\frac{2}{4}$, $\frac{3}{4}$, szóval: egy negyedrész, két negyedrész és három negyedrész azt jelölik, hogy az egyest 4 részre kell osztani 's abból 1, 2, vagy 3 illyen negyedrészt venni.

3. K. Eszerint tehát az egyest is ellehet részekre osztani?

F. Bizonyosan, annyi részre mennyire akarjuk. Az osztó tudjuk akarmelly szám lehet, 's minden osztó az egységet képviseli.

Ha p. o: 8456 ot 2114 által kell osztanom, ez a' 2114 itt, az osztandóra nézve, nem egyéb az egységnél 2114 szer véve és ugyan 2114 el elosztva, az az: olly egységnél, mellyben az osztandónak 2114 egyese van, vagy is, a' részesnek egysége nem egyéb mint $\frac{2114}{2114}=1$.

Tudjuk, hogy 8456 : 2114=4, és hogy ha a' 4 et 2114 szer vesszük, vagy megfordítva 2114 et

4szer, az osztandóra találunk, 's ez is bizonyítványa, hogy az osztandóból 2114 kell a' részesnek egységéhez.

És mint tudjuk:

$$\frac{8456}{2114}=\frac{2114+2114+2114+2114}{2114}=4,$$

azt mondhatjuk tehát, hogy ezen esetben az egyest 2114 egyenlő részre osztottuk.

Irhatjuk tehát az egységet bármelly számmal vagy számokkal, illyen formán:

$$\frac{1}{1},\ \frac{2}{2},\ \frac{3}{3},\ \frac{4}{4},\ \frac{5}{5}\text{ 's a' t.}$$

$$\frac{16}{16},\ \frac{28}{28},\ \frac{39}{39},\ \frac{87}{87},\ \frac{95}{95}\text{ 's a' t.}$$

$$\frac{100}{100},\ \frac{1000}{1000},\ \frac{60000}{60000},\ \frac{78960}{78960}\text{ 's a' t.}$$

's mindegyik kifejezés = 1.

4. K. Az illyen alakba írt számokat, hol egy vonal két számot választ el egymástól, mint: $\frac{5}{4}$, $\frac{75}{32}$'s a' t., egyszersmind hogy osztást is jelentenek, *törtszámoknak* nevezzük közönségesen; de szeretném tudni, mit hívunk valódi törtszámnak?

F. Valódi törtszám mindegyik, mellyben a' felső szám kisebb az alsónál, mint ez az eset valamennyi osztási maradványnál, hol az egészeket a' részesbe felírtuk, a' maradvány alá pedig az osztót.

E' szerint sem $\frac{5}{4}$, sem $\frac{75}{32}$ valódi törtek, hanem csak *szinlettek*, mert:

$$\frac{5}{4}=1+\frac{1}{4}, \text{ és } \frac{75}{32}=2+\frac{11}{32},$$

hol az 1 és 2, egész számok, a' maradványok pedig valódi törtek; és ha egészek és törtek vannak együtt mint itt, ezeket *kevert számoknak* nevezzük.

5. K. Hogy kell a' valódi törteket kimondani, 's melly neve van a' kétféle számnak, mellyel írva vannak?

F. A' felső számot, melly azt mutatja: hány része van véve az egységnek, *számlálónak*; az alsót pedig, az osztót: *nevezőnek* hívjuk azért, mivel megmutatja, hány részre kell az egységet osztani.

Az egységet pedig, mint jól tudjuk, akarhány részre eloszthatjuk, 's ki efelől megakarna győződni, csak egy almát és kést vegyen kezibe 's 'azt annyi részre vagdalhatja, mennyire akarja, olly apró darabkákra osztván, hogy ezeket végre alig láthatja puszta szemmel.

Ha almáját kétfelé vágja, lesz egy darab, fél, 's ekkor azt kettővel osztotta, mindegyik fél tehát: $\frac{1}{2}$, és a' két félalma öszvesen:

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=\frac{2}{2}=1 \text{ egész.}$$

Ha almáját 3 egyenlő darabba vágta, lesz egy darab: $\frac{1}{3}$ és a' 3 darab öszvesen:

$$\frac{1+1+1}{3}=\frac{3}{3}=1.$$

Ha azt 4 felé vágta, lesz egy fertály: $\frac{1}{4}$, almáját 4 el elosztotta 's négy negyedrész tesz egyet.

Innen tüstént következtetheti, hogy ha a' felet ketté vágja, a' félből egy fertály lesz, tehát: félnek fele egy fertály.

Ha almáját 5 darabba vágja, lesz egyik: $\frac{1}{5}$, ha hatba, lesz egy rész: $\frac{1}{6}$'s igy tovább.

Ezen törtszámokat:

$$\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \frac{1}{6}, \frac{1}{7} \text{ 's a' t.,}$$

sorjában: *fél*, *harmad*, *negyed*, *ötöd*, *hatod*, és *heted résznek*, nevezzük.

Abból mit eddig mondék, könnyű látni, hogy a' nevezők azt jelölik: hány részre osztatott az egység vagy az egész; 's hogy ha a' számlálóban annyi rész foglaltatik, mennyit a' nevező mutat, az egész előjön.

Ha p. o: egy ötödrészhez még egy ötödrészt adunk, ez lesz:

$$\frac{1}{5} \ \frac{1}{5} = \frac{1+1}{5} = \frac{2}{5}, \text{ } \textit{két ötödrész},$$

's igy: $\frac{3}{5}$, *három ötödrész* és $\frac{4}{5}$ *négy ötödrész*, végre pedig:

$$\frac{5}{5} \text{ vagy } \frac{1+1+1+1+1}{5} = 1 \text{ egész.}$$

A' törtszám tehát közönségesen azt teszi: *osztassék el az egység vagy az egy egész, annyi részre, mennyit a' törtszám nevezője mutat, 's vétessék ezen részekből annyi, mennyit számlálója kijelől.*

Igy $\frac{3}{5}$ azt teszi: osszuk el az egyet 5 részre 's vegyünk ezen 5 közül hármat. Három ötödrész tehát, az egésznek 5 részéből hármat kíván, vagy az egynek három ötödrésze.

Ha valaki almámnak $\frac{7}{16}$ vagy, 7 tizenhatodrészét kívánná, elvágnám azt 16 egyenlő darabra 's illy darabot hetet adnék neki.

Igy mondom ki a' törteket: $\frac{5}{10}$ öt tized; $\frac{28}{100}$ 28 század; $\frac{37}{98}$ 37 kilenczven nyolczadrész 's a' t., bármelly számokkal legyen írva a' tört.

6. K. Látom, hogy a' valódi törtszámok mind kisebbek az egységnél, akarmelly nagy számokkal legyenek írva, mig a' számláló épen akkora mekkora a' nevező, 's ekkor a' tört nem tört többé, hanem $= 1$. Ha pedig a' számláló nagyobb mint a' nevező, a' színlett törtet kevert számba tudom

az által változtatni, hogy az egészet, vagy egészeket felülről kivévén, külön írom. De ha a' színlett törtből kevert számot tudok írni, bizonyosan kevert számból is lehet színlett törtet írni?

F. Minden osztási példából színlett törtet lehet írni, ha az osztandót az osztótól vonal által választom el. De ha az osztás már megtörtént, ekkor a' részest kell csak sokszoroznom az osztóval 's azonnal megvan az áltváltoztatás;

p. o: 85 : 27 igy írva: $\frac{85}{75}$ már magában is színlett tört, mert számlálója nagyobb nevezőjénél; de tudom $85 : 27 = 3\frac{4}{27}$, 's ha az osztandót kercsem, sokszorozom a' részessel az osztót 's a' maradványt a' származathoz adom és csakugyan:

$$85 = 27 \times 3 + 4 = 81 + 4, \text{ és:}$$
$$\frac{87}{27} = \frac{81+4}{27} = 3 + \frac{4}{27} \text{ mint elébb.}$$

Ha tehát kívántatatnék, hogy a' kevert számot $3 + \frac{4}{27}$ színlett törtbe változtassam, az egészeket, a' hármat a' törtszám' nevezőjével sokszorozom, a' származatot pedig számlálójához adom: mint:

$$3 + \frac{4}{27} = \frac{3 \times 27 + 4}{27} = \frac{81+4}{27} = \frac{85}{27}$$

's akarmellyik más példában is igy teszek.

Kívántatik a' kevert szám: $28+\frac{3}{8}$ színlett törtben.

Ez: $\frac{28\times8+3}{8}=\frac{224+3}{8}=\frac{227}{8}$

's igy néhány példa gyakorlásul:

$$7+\frac{3}{5}=\frac{35+3}{5}=\frac{38}{5}$$

$$32+\frac{29}{30}=\frac{32\times30+29}{30}=\frac{960+29}{30}=\frac{989}{30}$$

$$753+\frac{457}{500}=\frac{753\times500+457}{500}=\frac{376500+457}{500}=$$
$$=\frac{376957}{500}$$

Írjon a' tanuló példákat a' megfordított míveletre.

7. K. Miként lehetne a' törtszámokat öszveadni?

F. Mint egyszerűen az egyes részeket szoktuk öszveadni; ki 3+4+6ot öszve tudja adni, mi 13, ezen számokat bizonyosan akkor is öszve tudja számlálni, ha azok csak valamelly részei az egynek, p. o: 16od vagy század részei. Ha kérdem, mennyi öszvesen: 6, 17, 25 és 33 századrész, bizonyosan fog felelni:

6+17+25+33=81 századrész.

Mennyi 2 hatodrész és 3 hatodrész?

2+3=5 hatodrész, mí írva:

$$\frac{2}{6}+\frac{3}{6}=\frac{2+3}{6}, \text{ igy:}$$

$$\frac{2}{13}+\frac{3}{13}+\frac{7}{13}=\frac{2+3+7}{13}=\frac{12}{13}$$

$$\frac{51}{360}+\frac{72}{360}+\frac{25}{360}+\frac{200}{360}=\frac{51+72+25+200}{360}=$$

$$=\frac{348}{360}.$$

A' törtszámok tehát *öszveadatnak, ha a' számlálók adatnak öszve*, a' nevező pedig változatlan marad. Igy csak a' számlálók' öszvesét irjuk fel, alája pedig a' nevezőt.

Hogy ez helyes és természetes, almánk is mutatja. Elosztom almámat 16 részre vagy 16 darabra. Veszek ezen 16 darabból: 1et, 2tőt, 3at 4et és 5öt; hány részét vettem az almának?

1+2+3+4+5=15 tizenhatodrészét,

és valóban még $\frac{1}{16}$ rész megmaradt, és:

$$\frac{1}{16}+\frac{2}{16}+\frac{3}{16}+\frac{4}{16}+\frac{5}{16}=\frac{15}{16},$$

ha pedig $\frac{15}{16}$hez még utolsó $\frac{1}{16}$ részt hozzáadom,

lesz: $\frac{16}{16}=1$, egész almám együtt.

Ha a' számlálók' öszvese a' nevezőt felülmulja, az az: ennél nagyobb, kevert számra jutunk, mellyben tudjuk egész is van, p. o:

$$\frac{1}{4}+\frac{3}{4}+\frac{2}{4}+\frac{1}{4}+\frac{2}{4}=\frac{9}{4}=2+\frac{1}{4}, \text{ és}$$

$$\frac{14}{24}+\frac{13}{24}+\frac{8}{24}+\frac{19}{24}+\frac{11}{24}+\frac{6}{24}=\frac{71}{24}=2\,\frac{23}{24}$$

$$\frac{30}{60}+\frac{48}{60}+\frac{37}{60}+\frac{29}{60}+\frac{57}{60}=\frac{201}{60}=3\,\frac{21}{60}$$

$$\frac{57}{100}+\frac{98}{100}+\frac{27}{100}+\frac{87}{100}+\frac{65}{100}+\frac{10}{100}=\frac{344}{100}=$$

$$=3+\frac{44}{100}.$$

8. K. Azt veszem itt észre, hogy mindezen példákban az öszveadandó törteknek ugyan azon nevezőjök van 's következtetem, hogy a' levonás is szinte illyen könnyű *egynevű* törtekkel. Van e' a' levonásra valamelly észrevétel?

F. Semmi nincs, itt is csak a' számlálók vonatnak le a' számlálókból, p. o: $\frac{4}{7}$ ből vonassék le $\frac{2}{7}$,

ez: $\frac{4-2}{7}=\frac{2}{7}$ és ezt előre is megtudtam volna mondani, hogy: négyhetedrésznek fele 2 hetedrész.

Szinte: $\frac{367}{895} - \frac{289}{895} = \frac{367-289}{895} = \frac{78}{895}$

és: $\frac{8789}{10000} - \frac{7968}{10000} = \frac{8789-7968}{10000} = \frac{821}{10000}$.

Almámat elosztom 32 részre 's ennek felét veszem, lesz: $\frac{16}{32}$ részem, ha ebből ennek ismét felét elveszem, marad: $\frac{16-8}{32} = \frac{8}{32}$ rész; ennek fele ismét: $\frac{4}{32}$ ennek fele: $\frac{2}{32}$, és végre ennek is fele: $\frac{1}{32}$, 's ha valamenyit öszveadom, lesz:

$\frac{1}{32} + \frac{2}{32} + \frac{4}{32} + \frac{8}{32} + \frac{16}{32} = \frac{31}{32}$, mert $\frac{2}{32}$nek fele, az $\frac{1}{32}$ rész még ottmaradt.

9. K. Ha kevert számokat kell öszveadni, vagy kevert számból kevertet levonni, vagy egészekből törteket levonni, mit kell különösen figyelembe venni?

F. Ha kevert szám van öszveadandó, az egészeket külön lehet öszveadni és a' törteket is külön; ha a' törtekből ismét egész válik, ezt az egészekhez adjuk.

1.) *Példa:* Öszveadandók: $3\frac{1}{4}$, $7\frac{2}{4}$, és $4\frac{3}{4}$, a' számokat rendesen egymásalá írom:

$$\begin{array}{l} 3+\frac{1}{4} \\ 7+\frac{2}{4} \\ 4+\frac{3}{4} \\ \hline =14+\frac{6}{4}=14+1+\frac{2}{4}=15\frac{2}{4}. \end{array}$$

Ha egész számok mellé törteket írunk, a' $+$ jegyet hiba nélkül elhagyhatjuk.

2.) *Példa:*

$$\begin{array}{r} 47\,\frac{7}{60} \\ 53\,\frac{25}{60} \\ 17\,- \\ 25\,\frac{42}{60} \\ -\,\frac{33}{60} \\ \hline =142\frac{107}{60}=143\,\frac{47}{60} \end{array}$$

3.) *Példa:*

$$375\frac{27}{144}+24\frac{42}{144}+8\frac{105}{144}+19\frac{114}{144}=426\frac{288}{144}=428.$$

Vonassék le:

$$3\frac{27}{42}\text{ ből }1\frac{15}{42},\text{ ez: }3-1+\frac{27-15}{42}=2\frac{12}{42}$$

Vonassék le egyből: $\frac{3}{8}.$

Egy tudjuk $=\frac{8}{8}$, és $\frac{8}{8}-\frac{3}{8}=\frac{8-3}{8}=\frac{5}{8}$.

Vonassék le egyből: $\frac{375}{1000}$; ez: $\frac{1000-375}{1000}=\frac{625}{1000}$

Ha tehát az egységből kell valamelly törtet levonni, elég, a' számlálót a' nevezőből levonni és a' különbség lesz az uj tört' számlálója aláírva régi nevezőjét; ez természetes, mert a' tört' nevezője mutatja, hány részből áll az egység. A' kérdés nem is egyéb illyenkor, mint az: hány illy rész kell még a' tört' számlálójához, hogy 1 egész legyen?

p. o: $\frac{247}{250}$ hez mennyi kell hogy 1 legyen? 247 hez kell 3 hogy 250 legyen, és: $1-\frac{247}{250}=\frac{3}{250}$

mert: $\frac{250-247}{250}=\frac{3}{250}$.

Mennyi kell $\frac{8763}{10000}$ hez hogy 1 legyen?

$\frac{10000-8763}{10000}$, vagy: $\frac{1237}{10000}$

mert:

$\frac{8763+1237}{10000}=\frac{10000}{10000}=1$, és $1-\frac{8763}{10000}=\frac{1237}{10000}$.

Ha tehát egészek is vannak a' törtek mellett 's a' levonandó tört nagyobb mint a' kisebbítendő, ekkor az egészekből veszünk egyet a' törthöz, mi tudjuk könnyen történik az által, hogy egyet a' nevézővel sokszorozunk, p. o: adva van $3\frac{4}{9}$, vegyünk az egészekből egyet a' törthöz, hogy ott szinlett tört legyen, 's írjuk:

$$2+\frac{9+4}{9}=2\frac{13}{9}$$

ha p. o: $\frac{4}{9}$ből $\frac{8}{9}$et kellene elvennünk, ezt nemtehetnénk, mert $\frac{8}{9}$ nagyobb mint $\frac{4}{9}$; ha tehát a' $\frac{4}{9}$ mellett egész vagy egészek vannak, ezekből egyet törtalakra viszűnk 's ekkor a' levonást eszközöljük, igy lesz:

$$3\frac{4}{9}-\frac{8}{9}=2\frac{13}{9}-\frac{8}{9}=2\frac{5}{9}.$$

Az illy öszveadásra és levonásra a' tanuló számtalan példákat adhat maga magának vagy tanulótársának.

10. K. Miként lehet megtudnunk, mellyik törtszám nagyobb vagy kisebb kettő vagy több közt?

F. A' törtek közt:

$$\frac{1}{8},\ \frac{2}{8},\ \frac{3}{8},\ \frac{4}{8},\ \frac{5}{8},\ \frac{6}{8},$$

$$\frac{3}{12}, \frac{5}{12}, \frac{7}{12}, \frac{10}{12}, \frac{11}{12},$$

$$\frac{5}{60}, \frac{12}{60}, \frac{25}{60}, \frac{32}{60}, \frac{47}{60},$$

$$\frac{8}{120}, \frac{27}{120}, \frac{39}{120}, \frac{60}{120}, \frac{110}{120} \text{ 's a' t.}$$

igen könnyen megtudom mondani mindegyik sorban, mellyik a' nagyobbik, mert ha a' törtszámoknak nevezője egyenlő, akkor az lesz nagyobb, mellyiknek számlálója nagyobb, p. o: $\frac{4}{8}$ nagyobb mint $\frac{3}{8}$, mert 4 nagyobb mint 3, szinte igy: $\frac{60}{120}$, nagyobb mint $\frac{39}{120}$, mert 60 nagyobb 39 nél.

Ha a' számlálók egyenlők, a' nevezők pedig különbfélék, akkor az a' tört nagyobb, mellyiknek nevezője kisebb, és megfordítva: az kisebb, mellynek nevezője nagyobb, p. o:

$$\frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \frac{1}{6}, \frac{1}{7}, \frac{1}{8},$$

$$\frac{3}{12}, \frac{3}{15}, \frac{3}{20}, \frac{3}{40}, \frac{3}{60} \text{ 's a' t.}$$

a' két sorban a' számlálók egyenlők, de a' nevezők egymásután mindég nagyobbak, minden következő tört kisebb tehát az előtte állónál, 's ez ismét természetes, mert mentül nagyobb az osztó, annál kisebb a' részes, és mentül több részre osztunk el valamit, annál kisebbek az egyes részecskék.

Ha a' nevezők és a' számlálók is különböző jegyekkel vannak írva, ekkor nehezebb megmondani, mellyik nagyobb vagy kisebb, p. o: $\frac{4}{7}$ nagyobb é vagy kisebb $\frac{11}{16}$ résznél, a' csupa tekintetből alig megmondható. Van azonban sok eset, mellyben egy kis gondolkodással meglehet mondani, mellyik nagyobb vagy kisebb, 's illyen esetekhez tartozik az, hol a' nevező és számláló közti különbség az öszvehasonlítandó törteknél egyenlő, p. o:

kérdés mellyik tört nagyobb $\frac{875}{1250}$ és $\frac{7681}{8056}$ közt,

mellyik: $\frac{29}{36}$ és $\frac{84}{91}$ közt,

mellyik: $\frac{14}{27}$ és $\frac{63}{76}$ közt.

Ezekből csak egy párt veszek, a' többit a' tanuló keresheti.

29 a' 36 hoz éppen olly távol esik, mint 84 a' 91 hez, az az: $36-29=91-84=7$, a' nevező és számláló közti különbség, tehát mindkét törtben 7; most már könnyen látom mellyik tört nagyobb, $\frac{7}{36}$ é vagy $\frac{7}{91}$, 's bizonyos, hogy $\frac{7}{36}$ nagyobb

mert nevezője kisebb; tehát $\frac{29}{36}$ hoz nagyobb szám kell hogy 1 egész legyen, mint kell $\frac{84}{91}$ hez, az az:

$$\frac{29}{36}+\frac{7}{36}=4, \text{ és } \frac{84}{91}+\frac{7}{91}=1$$

s' ebből következtetem: mivel $\frac{84}{91}$ hez kisebb szám kell hogy egész legyen, tehát nagyobb mint $\frac{29}{36}$.

11. K. Hát a' következő számok közt mellyik nagyobb vagy kisebb?

$$\frac{1}{2}, \frac{2}{4}, \frac{3}{6}, \frac{4}{8}, \frac{5}{10}, \frac{6}{12}, \frac{20}{40}, \frac{70}{140}, \frac{500}{1000}.$$

F. Egy pillanattal is reá ismerek, hogy mind valamennyi egyenlő, és egyik sem több $\frac{1}{2}$ nél, mert mindegyiknek a' számlálója csak fele a' nevezőnek, az az: abban kétszer meg van; illyen példákat magam is írhatok, p. o:

$$\frac{1}{3}, \frac{3}{9}, \frac{4}{12}, \frac{5}{15}, \frac{6}{18}, \frac{20}{60}, \frac{30}{90}, \frac{100}{300} \text{'s a' t.}$$

valamennyi csak $\frac{1}{3}$, mert a' számlálok mind egy harmadai a' nevezőknek, és szintigy:

$$\frac{1}{5}, \frac{5}{25}, \frac{6}{30}, \frac{7}{35}, \frac{10}{50}, \frac{100}{500} \text{'s a' t.}$$

mind csak $\frac{1}{5}$ ugyan a' feljebbi okbul.

Ez pedig onnan jön, hogy valamint az egyet akarmelly számmal írhattuk törtalakba, igy változtathatjuk kedvünk szerint a' többi törteket is, ha azokat nagyobb számokkal akarjuk írni. De ekkor szükséges, hogy mind a' nevezőt, mind a' számlálót ugyan azon számmal sokszorozzuk.

12. K. Vallyon nem változtatja e' az illyen sokszorozás a' törtek' értékét 's mit nevezünk a' törtek legrövidebb kifejezésének?

F. Tudjuk az elosztásból, hogy ha az osztandót és az osztót akarmelly ugyanazon számmal sokszorozzuk, a' részes mindenkor változatlan marad; 's mivel a' törtek is csak kijelölt osztások, mert számlálójok az osztandó, nevezőjök pedig az osztó, értékük nem változhat, ha ugyanazon számmal sokszoroztatik számlálójok és nevezőjök egyszerre. Ha tehát a' felet vagy a' félnek két jegyét egyszersmind bármelly számmal sokszorozom, csak fél marad és:

$$\frac{1}{2}=\frac{50}{100}=\frac{1000}{2000}=\frac{6500}{13000} \text{ 's a' t.}$$

De mit tesz ez: valamelly tört' két jegyét sokszorozni, vagy mit tesz általjában, akarmelly számot ugyan azon számmal sokszorozni és egyszersmind el is osztani?

Valóban nem egyebet, hanem azt változatlan magában hagyni ugy mint volt, vagy is: egyel sokszorozni vagy egyszer venni. Az elosztás és sokszorozás, mint ellenmiveletek, a' nélkül is semmivéteszik egymást, p. o: 5öt 6szor venni és ismét 6al elosztani annyi, mintha nem vettük volna 6szor 's ekkor az elosztásra szintolly kevés szükségünk van, mint a' sokszorozásra, és: $\frac{5\times6}{6}=5$, 's igy bármelly számokkal ez az eset. De mivel gyakorta szükségünk van ugyan azon számot más jegyekkel is kifejezni, azért változtatjuk azoknak külsejét a' nélkül, hogy értékek szenvedne változást. Sokszorozzuk tehát a' törtek' két részét akarmelly számmal, a' tört nem változik csak más jegyekkel lesz írva. Emlékezünk hogy $\frac{2}{2}$, $\frac{3}{3}$, $\frac{8}{8}$, $\frac{1000}{1000}$, $\frac{866}{866}$, $\frac{7895}{7895}$'s bármelly szám igy írva kétszer egymásalá, csak egy; tehát mint említők, az illy sokszorozás és egyszersmind elosztás által a' mennyiségeket, tehát a' törtszámokat is egyel sokszoroztuk, az az, változatlan hagytuk mindamellett, hogy más jegyekkel lesznek írva, és igy:

$$\frac{3}{4}=\frac{3\times4}{4\times4}=\frac{3\times10}{4\times10}=\frac{3\times60}{4\times60}=\frac{3\times100}{4\times100}=\frac{3\times754}{4\times754}$$

mert:

$$\frac{4}{4}=\frac{10}{10}=\frac{60}{60}=\frac{754}{754}=1.$$

De ha ezen törtek: $\frac{3}{4}$, $\frac{12}{16}$, $\frac{30}{40}$, $\frac{180}{240}$, $\frac{300}{400}$, s a' t. mind egyenlők is egymással, nincsenek mind legegyszerűbb kifejezéseken azért, mert számlálójok és nevezőjök más számokkal vannak sokszorozva; itt csak egyedül a' $\frac{3}{4}$ van legegyszerübb kifejezésen, azért mert, a' hármat és négyet nem lehet többé semmi szám által elosztani. Ha tehát valamelly törtszámot legegyszerűbb 's egyszersmind legrövidebb és a' lehető legkisebb számokkal írt kifejezésére akarom vinni, azt kell keresnem hogy, van e' olly szám, melly mind a' számlálót, mind a' nevezőt egyenlőkép megosztja, 's mindaddig folytatom az osztást, mig ezen legkisebb és tovább nemosztható számokra jutok.

Látom p. o: hogy $\frac{180}{240}$ elöször is 10 által osztható mind két részében, az üreseket tehát ellehet hagynom, lesz egyszerűbben: $\frac{18}{24}$; látom továbbá, hogy a' két számot 2, 3, és 6 által ellehet osztani 's mindjárt a' legnagyobbikat választván:

$$\frac{18:6}{24:6}=\frac{3}{4}$$

kifejezésre jutok, melly a' legrövidebb és eredeti tört.

Ha a' számláló a' nevezőt elosztja, ekkor az uj számláló egyes lévén, a' tört bizonyosan legrövidebb kifejezésén van. Igy p. o:

$$\frac{6}{36},\ \frac{7}{84},\ \frac{9}{117},\ \frac{13}{65}$$

következő törtekbe változnak:

$$\frac{6:6}{36:6}=\frac{1}{6}, \quad \frac{7:7}{84:7}=\frac{1}{12}, \quad \frac{\quad :9}{117:9}=\frac{1}{13}$$

$$\text{és} \quad \frac{13:13}{65:13}=\frac{1}{5}.$$

Közönségesen, ha valamelly törtszámot legrövidebb kifejezésére akarunk vinni, addig osszuk mindkét részét ugyan azon számokkal, meddig lehet, 's ha nincs több olly szám, melly mindkettőt elosztaná, akkor egyszerűbben írni az illy törtet nemlehet.

13. K. Mire használhatjuk főkép a' törtszámok' ezen tulajdonit, hogy t. i: értékük változtatása nélkül két részüket bármelly számmal sokszorozhatjuk, és következésképen el is oszthatjuk?

F. Arra, hogy a' törtszámnak olly nevezőt adunk sokszorozás által, millyent akarunk 's millyenre a' kérdéshez képest szükségünk van.

Láttuk, hogy ha két törtet hasonlítunk, akkor mondhatjuk meg legkönyebben mellyik nagyobb, ha nevezőjök egyenlő. Két különböző nevezővel írt törtszámot pedig könnyű egyenlő nevezőre vinni, ha egyiket vagy másikat olly számmal sokszorozzuk, melly a' származatot egyenlővé teszi a' másik törtnek nevezőjével.

P. o: $\frac{1}{2}$ és $\frac{1}{4}$ egynevezőre vitessenek.

Látom, hogy ha a' $\frac{1}{2}$ et $\frac{2}{2}$ vel sokszorozom, mindjárt ezélt érek, tehát: $\frac{1\times2}{2\times2}=\frac{2}{4}$, és két törtem: $\frac{2}{4}$ és $\frac{1}{4}$ egyenlő nevezővel vannak.

2.) $\frac{1}{2}$ és $\frac{1}{3}$ egyenlő nevezőre viendők.

Ha itt az első törtet $\frac{3}{3}$ al, a' másikat $\frac{2}{2}$ vel sokszorozom, lesz:

$\frac{1\times3}{2\times3}=\frac{3}{6}$, és $\frac{1\times2}{3\times2}=\frac{2}{6}$, és a' két tört: $\frac{3}{6}$ és $\frac{2}{6}$.

3.) $\frac{2}{3}$ és $\frac{3}{5}$ egyenlő nevezőre vitessenek.

Az elsőt sokszorozom $\frac{5}{5}$ el, a' másikat $\frac{3}{3}$ al, 's lesz a' kettő: $\frac{10}{15}$ és $\frac{9}{15}$. Legyen ezen nevezőnek neve 60. Tudom hogy 4szer 15=60, sokszorozom tehát a' törteket $\frac{4}{4}$ el 's lesznek:

$$\frac{40}{60} \text{ és } \frac{36}{60}.$$

4.) Vitessen egynevezőre a' 2 tört: $\frac{3}{6}$ és $\frac{5}{8}$; az egyiket $\frac{4}{4}$ el, a' másikat $\frac{3}{3}$ al sokszorozván, lesz a' kettő:

$$\frac{3}{6}\times\frac{4}{4}=\frac{12}{24}, \text{ és } \frac{5}{8}\times\frac{3}{3}=\frac{15}{24}.$$

Azt mondom közönségesen, hogy ha két tört adatik; mellynek különböző nevezőjét egyenlőre kell vinni, a' ezélt bizonyosan és mindenkor elérjük, ha a' két nevezőt egymással sokszorozzuk először, 's ez lesz a' két törtnek egyenlőképeni uj nevezője; másodszor pedig, az egyik törtnek számlálóját a' másik törtnek nevezőjével sokszorozzuk, ez lesz az egyik tört' számlálója; és harmadszor, sokszorozzuk a' másik tört számlálóját az első tört' nevezőjével 's ez lesz a' másik tört uj számlálója; 2. és 3. példánk illyen, vegyünk egy más hasonlót, legyen a' két tört:

$$\frac{3}{7} \text{ és } \frac{5}{8} \text{ egy nevezőre viendő.}$$

Sokszorozzuk a' két különbféle nevezőt, és a' származat:

$7 \times 8 = 56$, lesz mindkét törtnek uj nevezője.

Sokszorozzuk az első tört' számlálóját a' másik tört' nevezőjével, 's a' származat lesz az első tört' nevezője, ez:

$$3 \times 8 = 24.$$

Sokszorozzuk végre a' második tört' számlálóját az elsőnek nevezőjével, 's a' származat lesz a' második tört' uj számlálója:

$$5 \times 7 = 35,$$

a' két egyenlő nevű tört pedig:

$$\frac{24}{56} \text{ és } \frac{35}{56}.$$

Itt mindegyikünk látja, hogy bőven magyaráztuk meg azt, mit egyszerűen tettünk az által, hogy az első törtet $\frac{8}{8}$, al a' másikat $\frac{7}{7}$ el sokszoroztuk és hogy a' 8 és 7 egyik és másik törtnek nevezője.

Közönséges beszéddel azt mondhatnók, hogy: a' két törtet egymással keresztül kell sokszorozni; ez a' keresztül vagy keresztben való sokszorozás:

$$\frac{3}{7} \times \frac{5}{8}$$

abban áll, hogy a' 3mat a' 8al, a' 7et pedig az 5el kell sokszorozni:

$$\frac{3}{7} \times \frac{5}{8}$$

az első származat, az első tört' számlálója:

$$3 \times 8 = 24$$

a' második a' másodiké:

$$7 \times 5 = 35$$

fennmarad még, hogy a' két nevezőt is kell sokszorozni, mi:

$$7 \times 8 = 56$$

's ezen harmadik származat az uj nevezője mindkét törtnek.

Ez a' mivelet mindenkor bizonyos, de nem mindég szükséges; mint p. o: 1. és 4. példánkban látjuk.

Ha p. o: $\frac{5}{6}$ és $\frac{7}{11}$ egy nevezőre viendők, és az elsőt $\frac{12}{12}$ vel a' másikat $\frac{6}{6}$al sokszoroznánk, a' két uj nevező bizonyosan egyenlő lenne, és a' két tört:

$$\frac{5\times12}{6\times12}=\frac{60}{72}, \quad \frac{7\times6}{12\times6}=\frac{41}{72};$$

de ez a' két tört rövidíthető, mert mindegyik tagjok osztható 6 által, 's az első $\frac{10}{12}$, a' másik pedig $\frac{7}{12}$'s mindegyiknek nevezője 12, tehát egyenlő. Ebből következtetem, hogy példánkban szükségtelen volt a' $\frac{7}{12}$ tőt $\frac{6}{6}$al sokszorozni, 's elég lett volna $\frac{5}{6}$t egyedül $\frac{2}{2}$ vel sokszorozni, és $\frac{10}{12}$ már a' kívánatnak megfelel, mert nevezője a' másik tört' nevezőjével egyenlő.

Illyenkor tehát, ha egyik tört' nevezője a' másikat megosztja, a' kisebbik törtet csak azon részessel kell sokszorozni két részíben, melly a' két nevező' osztása által támadott. Példánkban a' két nevezőközti részes: $\frac{12}{6}=2$, tehát a kisebb törtet $\frac{2}{2}$ vel sokszoroztuk.

Legyen még egy példa: $\frac{3}{12}$ és $\frac{4}{18}$ egy nevezőre viendők.

Itt a' 12 nem osztja a' 8at 's még sem szükség, hogy az uj nevező, a' két régiközti származat:

$$12 \times 18 = 216$$

legyen, és azért mivel: mind a' 12, mind a' 18 oszthatók 6 által, és lesz részesek:

$$\frac{12}{6} = 2 \text{ és } \frac{18}{6} = 3;$$

most itt azt állítom, hogy a' két tört egy nevezőn lesz, és egyszersmind a' legkisebb egynevezőn, ha az első törtet $\frac{3}{3}$ al, a' másikat pedig $\frac{2}{2}$vel sokszorozom; 's valóban:

$$\frac{3}{12} \times \frac{3}{3} = \frac{9}{36}, \text{ és: } \frac{4}{18} \times \frac{2}{2} = \frac{8}{36}.$$

Minden illyen esetben a' számvető könnyen fog magán segíteni tudni, hogy ügyes miveletei által időt nyerjen, rövidebb úton jutván következésre.

Ha három vagy több különböző törtet kellene egy nevezőre vinni, ekkor, vagy egyszerre sokszorozzuk az egyes törteket azon számmal, mellynek származata a' kívánt nevezőt adja, vagy előre két törtet viszünk egy nevezőre 's ezután a' harmadikat 's igy tovább.

1.) *Példa*: $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}$ és $\frac{1}{4}$

egy nevezőre viendők.

Azt mondhatom hogy: 2, 3 és 4 származatja 24 's az uj nevező 24 lesz; de minthogy 2 a' 4ben (az első tört' nevezője az utolsóban) megvan már 2szer, tehát a' 24et eloszthatom 2vel és az uj nevező 12. Az a' kérdés most, melly számokkal kell az egyes törteket sokszorozni, hogy nevezőjök 12 legyen; erre pedig a' feleletet már előre tudjuk, t. i: osszuk el a' 12őt a' régi nevezővel, és sokszorozzuk a' talált részessel a' tört' nevezőjét és számlálóját.

Lesznek pedig a' törtek sokszorozó számai egymásután:

$$\frac{12}{2},\ \frac{12}{3} \text{ és } \frac{12}{4},\ \text{az az}: 6,\ 4 \text{ és } 3;$$

a' nevezők pedig egyenlően 12. A' kívánt 3 tört:

$$\frac{6}{12},\ \frac{4}{12} \text{ és } \frac{3}{12}.$$

Ha, mint említők, először csak kettőt veszünk, találjuk mint elébb $\frac{1}{2}$ és $\frac{1}{3}$ lesz egyenlő nevezővel:

$$\frac{3}{6},\ \text{és}\ \frac{2}{6},$$

most a' harmadikat vehetjük ide:

$$\frac{3}{6},\ \frac{2}{6} \text{ és } \frac{1}{4}$$

egyenlő nevezőjét keresvén, 's itt mondjuk: a' 6 és 4 oszthatók 2 által, tehát a' két első törtet $\frac{2}{2}$ vel, a' harmadikat $\frac{3}{3}$al sokszorozzuk 's jön mint elébb:

$$\frac{6}{12},\ \frac{4}{12} \text{ és } \frac{3}{12}.$$

Ha több tört lenne egy nevezőre viendő, ez sem nehéz és adok két példát némely jegyzésekkel, melly szerint akarmelly esetet is mivelhetjük.

2.) *Példa*: A' törtek:

$$\frac{2}{3},\ \frac{3}{4},\ \frac{2}{5},\ \frac{4}{7},\ \frac{3}{8}\ \text{és}\ \frac{5}{9}$$

egy nevezőre vitessenek.

Keresztül nézem először, nincs e' köztök olly tört, melly még rövidebb kifejezést engedne, 's látom hogy itt ollyan nincs, mert ha p. o: $\frac{4}{8}$ lenne itt, ez $\frac{2}{4}$ el és $\frac{1}{2}$ el is egyenlő; tehát a' $\frac{3}{4}$ hez adhatodnék, ha $\frac{6}{9}$ lenne közöttök, ez nem egyéb $\frac{2}{3}$ nál, mi már ugyis ott áll, 's a' t.

Ezután azt visgálom meg, hogy nem találtatik é meg egyik vagy másik nevező más nálánál nagyobban, 's itt valóban látom, hogy 3 a' 9ben és 4 a' 8ban megvan.

Tudom pedig, hogy ha valamennyi nevezőt egymással sokszorozom, az uj nevező bizonyosan mindegyik törtre nézve ugyan az, de ekkor először mindegyik tört' számlálóját valamennyi tört' nevezőjével kell sokszoroznom, kivévén tulajdon magáét, és tudom másodszor, hogy ha egyik vagy másik nevező a' többiben már foglalva van, ném a' legegyszerűbb kifejezést találom, és az uj nevezővel biró törtek még rövidíthetők. Kihagyom tehát egészen sokszorozásomból ezen két nevezőt a' 3 és 4et, és csak a' többit sokszorozván együtt:

$$5 \times 7 \times 8 \times 9$$

származatja lesz valamennyi törtnek uj nevezője 's ez:

$$5 \times 7 = 35,\ 35 \times 8 = 280,\ \text{és}\ 280 \times 9 = 2520,$$

sorjában sokszorozván a' 4 számot.

Megtalálván az uj nevezőt, azt elosztom sorjában mindegyik tört' régi nevezőjével 's találom a' részeseket:

$$\begin{aligned} 2520 : 3 &= 840 \\ 2520 : 4 &= 630 \\ 2520 : 5 &= 504 \\ 2520 : 7 &= 360 \\ 2520 : 8 &= 315 \\ 2520 : 9 &= 280, \end{aligned}$$

's ezen részesek azok, mellyekkel sorban a' törtek' számlálóját sokszorozni kell; 's ha ezt megtesszük, jönnek a' számlálók illy rendben:

$$\begin{aligned} 2 \times 840 &= 1680 \\ 3 \times 630 &= 1890 \\ 2 \times 504 &= 1008 \\ 4 \times 360 &= 1440 \\ 3 \times 315 &= 945 \\ 5 \times 280 &= 1400, \end{aligned}$$

's tudván, hogy mindegyik törtnek nevezője 2520, a' régi nevezőkön a' sokszorozást megtenni szükségtelen.

Ha ezen 6 törtet össze kell adni, most azt könnyű eszközleni.

Látjuk hogy ha a' két első tört' nevezőjét a' 3 és 4et is sokszorozónak vesszük, uj nevezőnk $3\times4=12$szer nagyobb lenne szükségtelenül, az az:

$$2520\times12=30240;$$

de minthogy ekkor mindegyik számláló is sokszoroztatnék ezen 12vel, bizonyos, hogy valamennyi törtet rövidíteni lehetett volna, ugyan ezen 12vel osztván mindegyiknek nevezőjét és számlálóját.

Említém hogy, ha egyik tört' számlálóját és nevezőjét a' többi nevezőjével sorban sokszorozzuk, ugy is czélt érünk, de ezen mivelet sem nem rövid, sem nem a' legjobb; tegyük meg azonban például 's látni fogjuk, hogy igy valamennyi uj nevező 30240.

Az első tört $\frac{2}{3}$, sokszorozzuk tehát számlálóját és nevezőjét a' többi törtek nevezőjével, lesz értéke:

$$\frac{2}{3}\frac{\times4\times5\times7\times8\times9}{\times4\times5\times7\times8\times9}=\frac{20160}{30240}$$

előbb találtuk:

$$\frac{2}{3}=\frac{1680}{2520}, \text{ és ez } =\frac{20160\ :\ 12}{30240\ :\ 12}$$

a' második tört $\frac{3}{4}$ szintigy sokszoroztatik a' többinek nevezőjével, 's ez:

$$\frac{3}{4}=\frac{3}{4}\frac{\times3\times5\times7\times8\times9}{\times3\times5\times7\times8\times9}=\frac{22680}{30240}$$

's így rendben a' többi:

$$\frac{2}{5}=\frac{2}{5}\frac{\times3\times4\times7\times8\times9}{\times3\times4\times7\times8\times9}=\frac{12096}{30240}.$$

$$\frac{4}{7}=\frac{4}{7}\frac{\times3\times4\times5\times8\times9}{\times3\times4\times5\times8\times9}=\frac{17280}{30240}$$

$$\frac{3}{8}=\frac{3}{8}\frac{\times3\times4\times5\times7\times9}{\times3\times4\times5\times7\times9}=\frac{11340}{30240}$$

$$\frac{5}{9}=\frac{5}{9}\frac{\times3\times4\times5\times7\times8}{\times3\times4\times5\times7\times8}=\frac{16800}{30240}.$$

Ha mindezen törteket $\frac{12}{12}$ vel elosztjuk, megtaláljuk az elébbieket, 's ezek:

$$\frac{2}{3}=\frac{1680}{2520}$$

$$\frac{3}{4}=\frac{1890}{2520}$$

$$\frac{2}{5}=\frac{1008}{2520}$$

$$\frac{4}{7}=\frac{1440}{2520}$$

$$\frac{3}{8}=\frac{945}{2520}$$

$$\frac{5}{9}=\frac{1400}{2520}.$$

14. K. Ha tehát különböző törteket egyenlö nevezőre tudunk vinni, bizonyosan öszveadni és levonni is tudunk különböző nevezővel írt törteket?

F. Az öszveadás és levonás törtek közt megkívánják, hogy ezek ugyanazon nevezővel legyenek írva; minekelőtte tehát két vagy több különböző nevezővel írt törteket öszveadnánk, vagy egymásból levonnánk, szükséges azokat egyenlő nevezőre vinni.

1.) *Példa*: Öszveadandók $\frac{3}{4}$ és $\frac{2}{5}$.

Kisebb nevezője a' két törtnek $4\times5=20$nál nemlehet, ez:

$$\frac{3\times5}{4\times5}=\frac{15}{20} \text{ és } \frac{2\times4}{5\times4}=\frac{8}{20}$$

következéskép az öszves:

$$\frac{15+8}{20}=\frac{23}{20}=1+\frac{3}{10}$$

2.) *Példa*: Öszveadandók $\frac{1}{4}$. $\frac{2}{5}$ és $\frac{5}{12}$.

4 a' 12ben megvan, 's a' közős nevező $5\times12=60$ lesz, a' három tört:

$$\frac{1\times15}{4\times15}=\frac{15}{60}$$

$$\frac{2\times12}{5\times12}=\frac{24}{60}$$

$$\frac{5\times5}{12\times5}=\frac{25}{60}$$

és a' három tört' öszvese:

$$\frac{15+24+25}{60}=\frac{64}{60}=1+\frac{4}{60}=1+\frac{1}{15}.$$

3.) *Példa*: Öszveadandók $\frac{3}{5}$, $\frac{14}{60}$ és $\frac{25}{85}$.

Látom itt, hogy a' törtek nincsenek legrövidebb kifejezéseken, és hogy:

$$\frac{14}{60}=\frac{7}{30}, \text{ és } \frac{25}{85}=\frac{5}{17}$$

a' kurtított és eredeti törtek tehát:

$$\frac{3}{5}, \frac{5}{17}, \text{ és } \frac{7}{30}.$$

Az 5 itt a' 30ban foglaltatván: $17\times30=510$ a' közös uj nevező.

4.) *Példa*: Legyenek a' törtek:

$$\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{1}{4}, \frac{3}{5}, \frac{5}{6}, \frac{2}{8}, \frac{6}{9}, \frac{3}{10}, \frac{5}{12} \text{ és } \frac{6}{14}$$

öszveadandók.

Megvisgálván ezen törteket látom, hogy $\frac{2}{8}=\frac{1}{4}$, de egyfertály már áll a' sorban 's ezzel tesz $\frac{2}{4}=\frac{1}{2}$ t; de fél is van már itt, és $\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=1$, tehát mind a' $\frac{1}{2}$t, mind az $\frac{1}{4}$t, mind a' $\frac{2}{8}$ t elhagyom 's írom helyettük az 1 egészet, igy lett öszveadandó törteim száma egyszerre hárommal kisebb.

Látom továbbá, hogy $\frac{6}{9}=\frac{2}{3}$, és $\frac{2}{3}$ is soromban áll (mint második) $\frac{2}{3}+\frac{2}{3}$ pedig $=\frac{4}{3}=1+\frac{1}{3}$; ismét találtam egy egészet 's lesz már két egészem, a' törtek közt pedig marad $\frac{1}{3}$; az utolsó tört $\frac{6}{14}$ végre $=\frac{3}{7}$.

Lesz tehát valódi öszveadandó számom:

$$1+\frac{1}{3}+\frac{3}{5}+\frac{5}{6}+\frac{3}{7}+\frac{3}{10}+\frac{5}{12}.$$

Megvisgálván a' nevezőket, ezek sorjában:

3, 5, 6, 7, 10 és 12.

A' 3 a' 6ban megvan, valamint 6 a' 12ben és 5 a' 10ben, elhagyjuk tehát a' 3, 6 és 5öt, ott maradnak:

7, 10 és 12,

de 10 és 12ben még egyenlően megvan a' 2, tehát az egyikből azt elhagyhatjuk; marad végre: 7, 5 és 12 a' három egymással sokszorozandó szám, mint a' törtek' közös nevezője, 's ez:

$$7\times5\times12=420.$$

Ezen számot sorjában elosztjuk a' törtek régi nevezőjével, és a' talált részessel sokszorozzuk számlálójokat és nevezőjöket. Ezen utóbbit azonban illy példáinkban nem szükség sokszorozni, tudván a' nélkül is, hogy a' nevező közös és mindegyik törtben ugyan az; sokszorozzuk tehát, sorban az illő részesekkel a' számlálókat 's adjuk öszve valamennyit, az öszves alá írván egyszer a' közös nevezőt.

Nevezőink sorjában:

3, 5, 6, 7, 10 és 12.

Elosztjuk tehát ezek által sorjában 420at.

Azon részesekkel, mellyek itt támadnak, sokszorozzuk ismét sorjában a' számlálókat, ezek:

1, 3, 5, 3, 3, 5,

a' származatokat pedig egymásalá írván öszveadjuk, 's ezen öszves lesz a' törtek' kívánt öszvese alájok írván közös nevezőjöket a' 420at.

Osztó,	közösnevező,		részes,	sokszorozó,		uj számláló,
: 3,	420	=	140	(× 1	=	140
: 5,	420	=	84	(× 3	=	252
: 6,	420	=	70	(× 5	=	350
: 7,	420	=	60	(× 3	=	180
: 10,	420	=	42	(× 3	=	126
: 12,	420	=	35	(× 5	=	175
					Öszves	1223,

's igy a' hat tört' öszvese $= \frac{1223}{420} = 2 + \frac{383}{420}$

ehez adván a' már talált két egészet, lesz az adott tíz törtszámnak öszvese:

$$\frac{1}{2} + \frac{2}{3} + \frac{1}{4} + \frac{3}{5} + \frac{5}{6} + \frac{2}{8} + \frac{6}{9} + \frac{3}{10} +$$

$$+ \frac{5}{12} + \frac{6}{14} = 4 + \frac{383}{420}.$$

Levonandó $\frac{1}{3}$ részből $\frac{1}{4}$.

A' két tört:

$$\frac{4}{12} \text{ és } \frac{3}{12},$$

különbségük:

$$\frac{4-3}{12} = \frac{1}{12}.$$

Levonandó $\frac{3}{4}$ ből $\frac{27}{60}$.

A' két tört:

$$\frac{45}{60} \text{ és } \frac{27}{60},$$

különbségük:

$$\frac{45-27}{60} = \frac{18}{60} = \frac{3}{10}.$$

Levonandó $1 + \frac{3}{8}$ ből $\frac{29}{32}$.

Az első számból színlett törtet írván, lesz:

$$1+\frac{3}{8} = \frac{8+3}{8} = \frac{11}{8} = \frac{44}{32},$$

's a' különbség:

$$\frac{44-29}{32} = \frac{15}{32}.$$

15. K. Mit tesz az, törtszámot sokszorozni, és miként lehet azt eszközleni?

F. Figyelemmel legyünk két környülállásra főképpen.

Mint a' törtszámokat megismertük, meg kell ezeket különböztetnünk az egész számoktól, mert minden valódi törtszám kisebb az egységnél; a' törtszámok tehát nem egészek, de csak bizonyos részei annak, és annyival kisebbek, mennyivel nagyobb nevezőjök, nem tekintvén számlálójokat. Ha tehát számokrul van szó, szükséges tudnunk: egész számok értetnek e' vagy törtek? Igy a' természetes számsor egészszámokbul áll 's ott az egység a' legkisebb szám; de a' törtszámoknál nem mondhatjuk meg, mellyik legkisebb, mert nevezőjök határ nélkül nőhet. Másik környülállás az, hogy nefelejcsük mi a' sokszorozás, vagy is hogy: ismételt összeadás, vagy annyiszor vétele egy más számnak, mellyet felyez ki a' sokszorozó. Azt is elménkben tartsuk végre, hogy a' sokszorozásnál, a' két szám közül tetszésünk szerint vehetjük egyiket vagy a' másikat sokszorozónak, a' származat mindenkor változatlan.

Ezt előre bocsájtván kérdem: mit tesz egész számmal törtszámot sokszorozni? Vegyük példánl 3szor $\frac{1}{4}$ részt. Mondván: sokszoroztassék $\frac{1}{4}$ (egy fertály) hárommal, az teszi, vétessék $\frac{1}{4}$ háromszor, 's ez:

$$\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}=\frac{1+1+1}{4}=\frac{3}{4}.$$

Igy 5ször $\frac{1}{3}=\frac{1}{3}+\frac{1}{3}+\frac{1}{3}+\frac{1}{3}+\frac{1}{3}=\frac{5}{3}.$

$$6\text{szor}\ \frac{3}{7}=\frac{3}{7}+\frac{3}{7}+\frac{3}{7}+\frac{3}{7}+\frac{3}{7}+\frac{3}{7}=$$

$$=\frac{3\times 6}{7}=\frac{18}{7},$$

$$\text{tehat:}\quad 3\times\frac{1}{4}=\frac{3}{4}=\frac{3\times 1}{3}$$

$$\frac{1}{3}\times 5=\frac{5}{3}=\frac{1\times 5}{3}\ \text{és:}$$

$$\frac{3}{7}\times 6=\frac{18}{7}=\frac{3\times 6}{7}$$

mit szóval igy fejezünk ki: ha törtszámokat egész számokkal kell sokszorozni, a' törtszámok' számlálóját sokszorozzuk az egész számokkal, nevezőjök pedig változatlan ismét a' származat alá íratik.

Említém, hogy mindegy, akar az egész számmal sokszorozzuk a' törtet, akar a' törtel az egészszet, mert csak a' számláló és az egész szám jönnek kérdésbe, vagy is teszik a' származatot.

Kérdem most: mit tesz p. o: hármat egyfertályszor venni? Nem de azt, hogy háromnak egy negyedrésze kívántatik? Ez pedig $\frac{3}{4}$, az az: három néggyel elosztva. Kinek még e' sem lenne elég világos, attól azt kérném, hogy három almából adjon nekem mindegyikből egy fertályt, az az: mind három almájának egy negyedrészét; mennyit adna?

Egyikből $\frac{1}{4}$t, a' másikból $\frac{1}{4}$t és a' harmadikból is $\frac{1}{4}$t, 's lenne nekem öszvesen $\frac{1+1+1}{4}$ $= \frac{3}{4}$ almám; tehát mondom: egyfertályszor három = háromszor egy fertály $= \frac{3}{4} =$ háromfertály vagy három negyedrész.

P. o: Mennyi két harmadrésze 5nek, vagy 2 harmadszor 5, vagy 5ször, két harmad:

$$5 \times \frac{2}{3} \text{ vagy: } \frac{2}{3} \times 5?$$

Ez annyi mind 5nek mindegyik egyesét 3 részre vevén, mindegyik három részből kettőt venni. Van pedig 5ben 5ször 3 rész, vagy 15 illy rész; ha mindegyik 3ból kettőt veszünk, veszünk az 5ször 3ból 5ször kettőt = 10et, és mindezen 10 rész, harmad vagy $\frac{10}{3}$; csakugyan:

$$5 \times \frac{2}{3} = \frac{5 \times 2}{3} = \frac{10}{3}.$$

Továbbá, $8 \times \frac{3}{10}$ annyi, mint 8nak háromszor tized részét venni; 8nak tizedrésze tudjuk $\frac{8}{10}$, lesz tehát háromszor tizedrésze:

$$\frac{3 \times 8}{10} = \frac{24}{10}.$$

A' sokszorozásból tudjuk, mentül nagyobb a' sokszorozó, annál nagyobb a' származat; bizonyos tehát, hogy megfordítva: annál kisebb a' származat, mentül kisebb a' sokszorozó. A' törtszámok mind kisebbek az egynél, minden származat tehát egész szám és törtszám közt szükségesképen kisebb lesz, mint az adott egész szám volt; és csakugyan annyival kisebb, mentül kisebb a' törtszám. Ezt nyilván látjuk, ha olly törtszámokkal szokszorozunk valamelly számot, mellyek sorban mindég csak felei egymásnak, mert igy a' származat is szinte csak fele lesz az előbbinek.

Sokszorozzuk 32őt sorjában a' törtszámokkal;

$$\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \frac{1}{32}, \frac{1}{64}, \frac{1}{128}$$

megjegyezvén itt, hogy minden következő törtszám épen fele az előtte állónak, lesznek származataink sorjában:

$$32 \times \frac{1}{2} = \frac{32}{2} = 16$$

$$32 \times \frac{1}{4} = \frac{32}{4} = 8$$

$$32 \times \frac{1}{8} = \frac{32}{8} = 4$$

$$32 \times \frac{1}{16} = \frac{32}{16} = 2$$

$$32 \times \frac{1}{32} = \frac{32}{32} = 1$$

$$32 \times \frac{1}{64} = \frac{32}{64} = \frac{1}{2}$$

$$32 \times \frac{1}{128} = \frac{32}{128} = \frac{1}{4}$$

szembetűnő tehát, hogy mennyiszer a' sokszorozó kisebb, annyiszor kisebb a' származat is.

Ha p. o: $\frac{1}{32685}$ el kellene valamelly számot sokszorozni, ebből mindaddig nem válna egész, mig az, vagy nem 32685, vagy ennél nagyobb; 's mint láttuk, ha csak egyel is kisebb, a' származat: $\frac{32684}{32685}$, és hogy még $\frac{1}{32685}$ hibáz az egészből.

Ha $\frac{2}{32685}$ a' sokszorozó, már a' nevezőnek csak fele kívántatik sokszorozóul, hogy a' származat 1 egész legyen. Ha a' sokszorozó tört $\frac{5}{32685}$, a' másik szám 6537, a' kettöközti származat 1 egész 's a' t.

Most már tovább mehetek és mondhatom: törtszámmal egész számot sokszorozni annyi, mint ezen egész számot a' törtszám' nevezőjével elosztani, de a' részest annyiszor venni, mennyi a' törtszámnak számlálója.

P. o.: 360t sokszorozni $\frac{1}{8}$ al annyi, mint 360t elosztani 8al, a' részest pedig egyszer venni. Ezen utolsó magyarázat ott szükségtelen, hol a' számláló csak 1, mert magában is értetődik, hogy minden részes egyszer megvan.

Ha tehát olly törtszámmal kell valamelly egészszámot sokszorozni, mellynek számlálója 1, az adott sokszorozandó egészszámot a' tört' nevezőjével elosztjuk és a' részes lesz a' keresett származat,

példánkban: $360 \times \frac{1}{8} = \frac{360}{8} = 360 : 8 = 45$

szinte: $360 \times \frac{1}{16} = 360 : 16 = \frac{360}{16}$

és: $360 \times \frac{1}{36} = \frac{360}{36} = 10.$

Ha a' törtszámnak számlálója nagyobb az egynél, ekkor is csak elosztjuk az adott egészszámot a' tört nevezőjével, de a' származatot a' számlálóval sokszorozzuk; p. o: 360t sokszorozni $\frac{7}{36}$ al annyi, mint 360t elosztani 36 al, a' részest pedíg sokszorozni 7 el; vagy írva:

$$360 \times \frac{7}{36} = \frac{360}{36} \times 7 = 10 \times 7 = 70.$$

Ezen tekintetből azon hasznot huzzuk, hogy mint számvetésünknél alkalmasabbnak tartjuk, vagy az osztást végezzük elébb, vagy a' sokszorozást, mert mindkét miveletre szükségünk van.

Példánkat elővevén, mindegy, akar írjuk:

$$360\times\frac{7}{36}=\frac{360\times7}{36}=\frac{2520}{36}=70$$

akar: $360\times\frac{7}{36}=\frac{360}{36}\times7=10\times7=70$

de mint látjuk, miveletünk a' második esetben egyszerűbb.

Ha valamelly számot kevertszámmal kellsokszorozni, p. o: lenne 8 sokszorozandó $2\frac{3}{4}$el, mindegy akar külön sokszorozunk az egésszel és törtel, 's a' két részt öszveadjuk; akar színlett törtbe változtatjuk a' sokszorozót 's egyszerre végezzük a' miveletet, mint a' könyebbség kívánja.

1sö. Mivelet. Sokszorozzunk külön külön:

$$8\times2\frac{3}{4}=8\times2+8\times\frac{3}{4}=16+\frac{24}{4}=16+6=22.$$

2dik.

$$8\times2\frac{3}{4}=8\times\frac{11}{4}=\frac{88}{4}=22,$$

itt a' második rövidebbnek látszik.

Sokszoroztassék 247, $3\frac{17}{35}$el.

1.) $247\times3\frac{17}{35}=247\times3+247\times\frac{17}{35}=741+\frac{4199}{35}$

$=741+119\frac{34}{35}=860+\frac{34}{35}.$

2.) $247\times3\frac{17}{35}=247\times\frac{122}{35}=\frac{30134}{35}=860+\frac{34}{35}.$

Reménylem az adott példák és magyarázatok által mindegyikűnk felakadás nélkül fogja a' következő sokszorozási példákat valósítani.

1.) $384\times\frac{3}{8}=\frac{384\times3}{8}=\frac{384}{8}\times3=$

2.) $456\times\frac{7}{240}=\frac{456\times7}{240}=\frac{456}{240}\times7=$

3.) $7850\times\frac{15}{10000}=\frac{7850\times15}{10000}=\frac{7850}{10000}\times15=$

4.) $35\times8\frac{3}{11}=35\times8+35\times\frac{3}{11}=$

5.) $74\times13\frac{27}{38}=74\times13+74\frac{27}{38}=$

6.) $163\times24\frac{315}{850}=163\times24+163\times\frac{315}{850}=$

7.) $7421\times3\frac{1}{60}=7421\times3+7421\times\frac{1}{60}=$

8.) $8145\times1\frac{1}{750}=8145+\frac{8145}{750}=$

A' példákat kiszámítván, utánnok fogja írni a' származatokat.

16. K. Miként kell törtszámokat törtszámokkal sokszorozni?

F. Minekelőtte elhatároznám a' törtekközti sokszorozás' miveletét, szükséges, hogy a' kérdés természetét jól felfogjam. Kérdem tehát, mit tesz az: törtet törtel sokszorozni, részt részszel sokszorozni, részt részerint venni? Tudom a' sokszorozás' miveletét egészszámokkal, hol egyik számot annyiszor veszem, hány egység van a' másikban; tudom továbbá, hogy egész számot törtel sokszorozok, ha ennek azon részét 's annyiszor veszem, mellyet és mennyit mutatnak a' tört' nevezője és számlálója; következtetem tehát ezekből, hogy a' két törtszámközti sokszorozás sem lehet egyéb, mint egyik törtet annyiszor venni, nennyiszer a' másik tört mutatja.

Ha tehát a' kérdésnél: egyszer fél, kétszer fél, vagy háromszor fél, vagy megfordítva: egynek, kettőnek, vagy háromnak fele, tudom mennyi, és sorjában $\frac{1}{2}$, $\frac{2}{2}$, és $\frac{3}{2}$; azt visgálom: mennyi lehet p. o: félszer fél, egyharmadrésszer fél, negyedrésszer fél 's a' t.

Sokszorozandó p. o: fél, féllel; mi ez a' $\frac{1}{2} \times \frac{1}{2}$?

Nem egyéb mint felet félszer venni. Mi egy fél almának fele?

Bizonyosan $\frac{1}{4}$; tehát $\frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$.

Mit tészen: egy felet egy harmaddal sokszorozni?

Felet egyharmadszor venni, vagy félnek egyharmadrészét keresni. De mi lesz a' félnek egy része, ha azt három részbe osztom, mi p. o: fél almának harmadrésze? Kétségen kivül nem egyéb, mint az almának $\frac{1}{6}$ része, mert ha egyik felit 3 darabba vágom, a' másik is három illyen darabot ád 's az egész alma 6 darabból áll, mellynek mindegyike $\frac{1}{6}$ rész; a' félnek egyharmada tehát $\frac{1}{6}$, következőkép egyharmadrésszer fél, vagy:

$$\frac{1}{2}\times\frac{1}{3}=\frac{1}{6}.$$

Szinte igy a' fél egyfertályszor véve nem egyéb, mint félnek egynegyedrésze; félnek egynegyedrésze pedig az egésznek egynyolczadrésze, 's igy:

$$\frac{1}{2}\times\frac{1}{4}=\frac{1}{8}.$$

Egyharmadnak negyedrésze szinte ezen okból $\frac{1}{12}$, mert egyharmadrészt négyrészre venni p. o: almánknál, nem egyéb, mint az előbb 3 részre vágott almánk' egy részét ismét 4 részre vágni; ád pedig minden illy harmadrész 4et, az az: almám $3\times4=12$ darabból fog állani, mindegyik darab pedig az egésznek $\frac{1}{12}$ része,

$$\frac{1}{3}\times\frac{1}{4} \text{ tehát } = \frac{1}{12}.$$

Ha eddigi példáimat öszveírom lesznek:

$$\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{4}=\frac{1}{2\times2}$$

$$\frac{1}{2} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{6} = \frac{1}{2 \times 3}$$

$$\frac{1}{2} \times \frac{1}{4} = \frac{1}{8} = \frac{1}{2 \times 4}$$

$$\frac{1}{3} \times \frac{1}{4} = \frac{1}{12} = \frac{1}{3 \times 4}$$

'S ezekből észreveszem, hogy a' két sokszorozandó törtnek csak nevezőjöket sokszoroztam egymással 's a' származatot alája írtam. Valóban, ha olly törtszámok sokszorozandók egymással, mellyeknek számlálója 1, nem kell egyebet tennünk, mint a' két törtnek nevezőjét egymással sokszorozni, 's az uj nevezőjű tört lesz a' kívánt származat.

Igy: $\frac{1}{5} \times \frac{1}{4} = \frac{1}{5 \times 4} = \frac{1}{20}$

$$\frac{1}{6} \times \frac{1}{7} = \frac{1}{6 \times 7} \times \frac{1}{42}$$

$$\frac{1}{10} \times \frac{1}{100} = \frac{1}{10 \times 100} = \frac{1}{1000}$$

$$\frac{1}{50} \times \frac{1}{50} = \frac{1}{50 \times 50} = \frac{1}{2500} \text{ 's a' t.}$$

Ezt tudván, könnyen sokszorozhatunk olly törteket is egymásközt, mellyeknek számlálója nagyobb mint 1;

p. o: ha $\frac{1}{4}$ szer $\frac{1}{3}$ rész $= \frac{1}{12}$, mennyi lesz:

$\frac{2}{4}$ szer $\frac{1}{3}$ rész?

Bizonyosan 2 szer $\frac{1}{12}$, vagy:

$\frac{2}{3}$ szer $\frac{1}{4}$ rész, kétszer $\frac{1}{3} \times \frac{1}{4} = 2 \times \frac{1}{12} = \frac{2}{12}$.

Mennyi lesz két $\frac{1}{3}$ szer két $\frac{1}{4}$?

Bizonyosan négyszer $\frac{1}{3} \times \frac{1}{4}$ vagy: $4 \times \frac{1}{12}$ $= \frac{4}{12} = \frac{1}{3}$, 's ezen két példa elég világosságot ád. Alkalmaztassuk őket almánkra.

A' kérdés ez: mennyi $\frac{2}{3}$ szor $\frac{1}{4}$, vagy $\frac{1}{3}$ szor $\frac{2}{4}$? ha először $\frac{1}{4}$ nek harmadrésze $\frac{1}{12}$ volt, kétszer illyen $\frac{1}{4}$ nek harmadrésze 2 szer $\frac{1}{12}$ lesz, 's ez: $\frac{2}{12} = \frac{1}{6}$.

Másik esetben a' harmadrészt $\frac{2}{4}$ szer kell venni, de a' $\frac{2}{4} = \frac{1}{2}$, az az: fele a' harmadrésznek $\frac{1}{6}$.

Második példánkban: $\frac{2}{3} \times \frac{2}{4} = \frac{4}{12} = \frac{1}{3}$,

's itt az almának $\frac{2}{3}$ részét $\frac{2}{4}$ résszer vagy félszer

kell venni, de mi $\frac{2}{3}$ résznek fele? Kétharmad-
résznek fele csakugyan egyharmadrész, tehát:

$$\frac{2}{3} \times \frac{2}{4} = \frac{1}{3} = \frac{4}{12} = \frac{2\times2}{3\times4}.$$

Ha tehát félszer $\frac{1}{3}$ rész $\frac{1}{6}$,

egyszer $\frac{1}{3} = \frac{1}{3}$,

kétszer $\frac{1}{3} = \frac{2}{3}$, bizonyosan:

$\frac{2}{3}$szer $\frac{1}{2}$, kétszer $\frac{1}{6} = \frac{2}{6}$.

Ha magyarázatomat nem folytatom is tovább csak a' két példára tekintek melly:

$$\frac{1}{2} \times \frac{2}{3} = \frac{1\times2}{2\times3} = \frac{2}{6}$$

$$\text{és: } \frac{2}{3} \times \frac{2}{4} = \frac{2\times2}{3\times4} = \frac{4}{12}$$

már ebből is következtetem, hogy, ha két törtet kell egymással sokszorozni, *a' számlálót a' számlálóval, a' nevezőt a' nevezővel sokszorozzuk, és a' két származat lesz az uj tört' számlálója* *és nevezője, és ezen uj tört azon származat, melly a' két előbbinek sokszorozásából támadott.*

Igy: $\frac{3}{4} \times \frac{4}{5} = \frac{3\times4}{4\times5} = \frac{12}{20} = \frac{3}{5}$

$$\frac{5}{6} \times \frac{3}{7} = \frac{5\times3}{6\times7} = \frac{15}{42} = \frac{5}{14}$$

$$\frac{5}{15} \times \frac{7}{12} = \frac{5\times7}{12\times12} = \frac{35}{144}$$

$$\frac{3}{8} \times \frac{5}{8} = \frac{3\times5}{8\times8} = \frac{15}{64}.$$

Ha több törtek sokszorozandók egymással, a' mivelet változatlan ugyanaz, és valamennyi számláló együtt, valamennyi nevező is együtt sokszoroztatik, p. o:

$$\frac{2}{3} \times \frac{3}{4} \times \frac{2}{5} = \frac{2\times3\times2}{3\times4\times5} = \frac{12}{60} = \frac{1}{5}$$

$$\frac{3}{5} \times \frac{4}{6} \times \frac{7}{12} = \frac{3\times4\times7}{5\times6\times12} = \frac{84}{360} = \frac{7}{30}$$

$$\frac{4}{5} \times \frac{7}{8} \times \frac{8}{11} = \frac{35}{40} = \frac{4\times7\times8\times35}{5\times8\times11\times40} = \frac{49}{110}.$$

Hogy végre ezen mivelet helyes, az által is meggyőzödhetünk, ha valódi törtszámok helyett, képzelteket sokszorozunk egymással. Vegyük első például:

$$6 \times \frac{4}{7} = \frac{6\times4}{7} = \frac{24}{7} = 3 + \frac{3}{7},$$

's írjuk ezen hatot bármelly nevezővel törtszám alakban; tudjuk hogy:

$$6=\frac{12}{2}=\frac{18}{3}=\frac{24}{4}=\frac{42}{7}=\frac{60}{10}\text{ 's a' t.}$$

's hogy akarmellyiket választhatjuk; a' származat mindenkor ugyanaz marad, és csakugyan:

$$\frac{12}{2}\times\frac{4}{7}=\frac{12\times4}{2\times7}=\frac{48}{14}=\frac{24}{7}$$

$$\frac{18}{3}\times\frac{4}{7}=\frac{18\times4}{3\times7}=\frac{72}{21}=\frac{24}{7}$$

$$\frac{42}{7}\times\frac{4}{7}=\frac{42\times4}{7\times7}=\frac{168}{49}=\frac{24}{7}\text{ 's a' t.}$$

De ha két egészszámot sokszorozunk illy tört-alakban, a' származat ekkor is változatlan, p. o: $6\times7=42$:

$$6=\frac{66}{11}=\frac{90}{15}=\frac{600}{100}\text{ 's a' t.}$$

$$7=\frac{14}{2}=\frac{21}{3}=\frac{28}{4}=\frac{42}{6}=\frac{70}{10}=\frac{700}{100}\text{ 's a' t.}$$

vegyük a' 6 és 7 helyett akarmellyik kifejezését 's lesz p. o:

$$\frac{66}{11}\times\frac{28}{4}=\frac{66\times28}{11\times4}=\frac{1848}{44}=42$$

$$\frac{600}{100}\times\frac{70}{10}=\frac{42000}{1000}=42.$$

$$\frac{42}{7}\times\frac{42}{6}=\frac{42\times42}{7\times6}=42\text{ 's a' t.}$$

's minden tekintet bizonyítja miveletünk helyes létét.

17. K. Gyakorlottak lévén a' törtszámok' isméretiben és jól felfogván az elosztás' czélját, természetét és miveletét, nem hiszem, hogy a' törtekközti vagy kevert számokközti osztás nehézségeket mutatna?

F. Csakugyan nem is fogunk itt semmi nehézségre találni, elménkben tartván, hogy az osztásnál az forog kérdésben, mennyiszer találtatik meg egyik szám a' másikban.

Jol tudjuk pedig, hogy mentül nagyobb az osztó, annyival kisebb a' részes, természetesen mondjuk tehát megfordítva: mentül kisebb az osztó, annál nagyobb a' részes.

Ha p. o: valamelly számot sorjában fél fél akkorával osztunk, a' részes sorjában mindég duplája az előbbinek, vagyis, kétszer akkora.

Ha sorjában egyharmadával osztjuk, a' részesek háromszorta nagyobbak; 's igy tovább a' részes éppen annyiszorta nagyobb, mennyiszerte kisebb az osztó. Ezt példákkal megmutatom.

Elosztom a' számot 32 egymásután magával, felivel, negyedrészivel, nyolczadával 's a' t.; 's tudom hogy a' sorban:

32, 16, 8, 4, 2, 1 mindegyik következő szám fele az előtte állónak, részeseim lesznek:

$$32 : 32 = 1$$
$$32 : 16 = 2$$
$$32 : 8 = 4$$

$$32 : 4 = 8$$
$$32 : 2 = 16$$
$$32 : 1 = 32$$

Szintigy osztom 36ot olly számokkal sorjában, mellyek csak egyharmadai az előtte állónak, millyen a' sor: 36, 12, 4 és:

$$36 : 36 = 1$$
$$36 : 12 = 3$$
$$36 : 4 = 9,$$

és részeseim háromszor akkorák mint az előttök álló.

Ha előbbi példámban a' sort folytatom, következnek 1 után ennek fele a' $\frac{1}{2}$, ennek fele $\frac{1}{4}$'s a' t. 's a' sor: $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{8}$, $\frac{1}{16}$, $\frac{1}{32}$ tudjuk szinte felit felit adja mindegyik elébbi számnak; megtévén ezekkel az oztást, következnek a'részesek;

$$32 : 1 = 32$$
$$32 : \frac{1}{2} = 64$$
$$32 : \frac{1}{4} = 128$$
$$32 : \frac{1}{8} = 256$$
$$32 : \frac{1}{16} = 512$$
$$32 : \frac{1}{22} = 1024 \text{ 's a' t.}$$

hol a' részesek mint eléb ugyan azon törvény szerint duplái az előttök állónak.

Ezt előre bocsájtván, kérdezem:

Miként osztunk el valamelly törtet egész számmal?

Előre veszem almámat 's azt ketté vágom, lesz egy darab: $\frac{1}{2}$, tehát az egyet kettővel elosztottam.

Ketté vágom a' feleket, lesz az almának 4 darabja, 's egy illy darab $\frac{1}{4}$, osztottam a' felet kettő által.

Elosztom a' fertályt kettővel, vagy is: minden darabból kettőt vágok, lesz 8 darabban almám, 's igy egy illy darab $\frac{1}{8}$; $\frac{1}{4}$et kettővel osztani tehát annyi, mint ennek felét venni, ez pedig $\frac{1}{8}$. Igy mehetek tovább, és valahányszor a' darabokat ismét kettévágom, annyiszor duplázom a' darabok' számát, 's lesz egynek értéke sorjában:

$$\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \frac{1}{32}, \frac{1}{64} \text{ 's a' t.}$$

Szinte igy, ha egyet három felé osztok, lesz $\frac{1}{3}$, ezt háromfelé: $\frac{1}{9}$, $\frac{1}{27}$, $\frac{1}{81}$, $\frac{1}{243}$'s a' t.

Mennyi lesz egy fél, ha azt hárommal osztom?

Felet három részre osztani: annak egyharmadát venni, megvan a' 3 egy félben $\frac{1}{6}$szor; mert ha a' felet három részre osztom, egy illy rész az egésznek $\frac{1}{6}$da, és $\frac{1}{2} : 3 = \frac{1}{6}$.

Mennyi lesz egy harmadrész, ha azt 4el osztom?

Minden 3részt 4részbe osztani annyi, mint az egészet 12 részbe venni, ez illy rész pedig $\frac{1}{12}$, tehát: $\frac{1}{3} : 4 = \frac{1}{12}$.

Ha ezen példáimat öszveveszem, lesz:

$$\frac{1}{2} : 2 = \frac{1}{4}, \quad \frac{1}{4} : 2 = \frac{1}{8}, \quad \frac{1}{8} : 4 = \frac{1}{16}.$$

következésképen $\frac{1}{2} : 4 = \frac{1}{8}$, és $\frac{1}{2} : 8 = \frac{1}{16}$; szinte:

$$\frac{1}{2} : 3 = \frac{1}{6}, \text{ és } \frac{1}{3} : 4 = \frac{1}{12}.$$

$$\frac{1}{3} : 3 = \frac{1}{9}, \quad \frac{1}{9} : 3 = \frac{1}{27}, \text{ tehát: } \frac{1}{3} : 9 = \frac{1}{27}.$$

Ha ezen osztásokat figyelemmel tekintjük, látjuk, hogy *az osztókkal a' törtek' nevezője sokszoroztatott*, és:

$$\frac{1}{2} : 2 = \frac{1}{2 \times 2} = \frac{1}{4} \qquad \frac{1}{3} : 2 = \frac{1}{3 \times 2} = \frac{1}{6}$$

$$\frac{1}{2} : 3 = \frac{1}{2 \times 3} = \frac{1}{6} \qquad \frac{1}{2} : 4 = \frac{1}{2 \times 4} = \frac{1}{8}$$

$$\frac{1}{4} : 4 = \frac{1}{4 \times 4} = \frac{1}{16}.$$

$$\frac{1}{3} : 3 = \frac{1}{3 \times 3} = \frac{1}{9} \qquad \frac{1}{3} : 27 = \frac{1}{3 \times 27} = \frac{1}{81}$$

$$\frac{1}{3} : 9 = \frac{1}{3 \times 9} = \frac{1}{27} \qquad \frac{1}{3} : 81 = \frac{1}{3 \times 81} = \frac{1}{243}$$

Ha tehát: *törtszámok egészszámokkal osztatnak* szükséges és elég, hogy *nevezőjök sokszoroztassék az osztó számmal*;

p. o: $\frac{5}{7} : 7 = \frac{5}{49} = \frac{5}{7 \times 7}$

$$\frac{12}{5} : 8 = \frac{12}{5 \times 8} = \frac{12}{40} = \frac{3}{10}$$

$$\frac{11}{27} : 15 = \frac{11}{27 \times 15} = \frac{11}{405}$$

$$\frac{27}{36} : 10 = \frac{27}{36 \times 10} = \frac{27}{360}$$

$$\frac{39}{100} : 100 = \frac{39}{100 \times 100} = \frac{39}{10000}.$$

Ez magában is nyilván, mert az egész számoknál sem tettünk egyebet, minthogy az osztót az osztandó alá írtuk, ha az osztást végezni nem akartuk. A' törtszámoknál ritkán végezhetjük ezen osztást, és azért jelöljük csak többnyire.

Akármelly törtszám magában is már kijelölt osztás, de ha még valamelly számmal ezenkívül osztani kell, természetes, hogy annyiszorta kisebb lesz a' részes, mennyivel nagyobb az osztó. Ezt nyilván látjuk egész számokkal;

p. o: $\frac{16}{2}=8$, ha azt mondom, hogy ezen $\frac{16}{2}$őt négyel el kell osztani, ez bízonyosan annyi, mintha a' részest osztanám el 4 által, e pedig $\frac{8}{4}=2$; más szóval; az osztót 4szer akkorára vevén, a' részes négyszerte kísebb lesz 's példánkban:

$$\frac{16}{2}\text{őt 4el osztani}=\frac{16}{2\times4}=\frac{16}{8}=2.$$

Ha a' tanulónak többféle bizonyítván kellene arra, hogy miveletünk helyes, azt megtalálhatja eddigi ismeretelben.

18. K. A' törteket egész számokkal osztani tudjuk, igy történik é, ha az osztót megfordítjuk? vagy más szóval: miként osztunk egész számokat törtekkel?

F. Az eset tökélletesen ellenkező 's látni fogjuk, hogy itt a' törtszám' nevezőjét kell az egészszel sokszorozni mint elébb, de a' törtet felfordítani.

Kérdezzük: mit tesz törtszámmal egészet elosztani?

Keresni hányszor van meg a' törtszám az egészben; p. o: hányszor van meg a' $\frac{1}{2}$, egyben? bizonyosan; kétszer. Hányszor $\frac{1}{4}$ az egészben; bizonyosan 4szer. Hányszor tehát $\frac{1}{4}$ kettőben? kétszer annyiszor, az az: 8szor.

Hányszor $\frac{1}{3}$ az egyben? 3szor.

Hányszor $\frac{1}{3}$ négyben? 4szer 3szor = 12szer 's a' t.

Kérdem továbbá, hányszor van meg $\frac{2}{3}$ az egyben?

Bizonyosan 1szer és $\frac{1}{2}$szer, az az: $\frac{3}{2}$szer; mert mi az egy?

ez: $\frac{1}{3}+\frac{1}{3}+\frac{1}{3}$, vagy: $\frac{2}{3}+\frac{1}{3}$, tehát az a' kérdés: ha $\frac{2}{3}+\frac{1}{3}$ben kerestetik $\frac{2}{3}$, hányszor találtatik meg? A' $\frac{2}{3}$ben $\frac{2}{3}$ rész megvan egyszer, mint minden szám megvan maga magában; de $\frac{1}{3}$ csak fele $\frac{2}{3}$ résznek, tehát 1ben $\frac{2}{3}$ egyszer 's félszer, az az: $1+\frac{1}{2}=\frac{3}{2}$ van meg.

Szinte igy kérdezhetjük: hányszor van meg 1ben $\frac{3}{4}$ rész?

$1=\frac{3}{4}+\frac{1}{4}$'s ebben megvan $\frac{3}{4}$ egyszer és még $\frac{1}{3}$szer, mert $\frac{1}{4}$csak egyharmadrésze $\frac{3}{4}$nek, tehát:

$$1 : \frac{3}{4} = 1 + \frac{1}{3} = \frac{4}{3}.$$

Hányszor van meg kettőben $\frac{2}{5}$?

Felváltom a' két egészet $\frac{2}{5}$ökbe 's megvisgálván:

$$2 = \frac{2}{5} + \frac{2}{5} + \frac{2}{5} + \frac{2}{5} + \frac{2}{5}$$

látom, hogy 5ször találtatik benne, tehát:

$$2 : \frac{2}{5} = 5 = \frac{10}{2}.$$

Hányszor van 4ben $\frac{5}{6}$?

Egyben megvan 1szer és $\frac{1}{5}$ször, mert:

$$1 = \frac{5}{6} + \frac{1}{6};$$

megvan tehát 4ben négyszer ennyiszer, az az: 4szer és $\frac{4}{5}$ ször, vagy is:

$$4 : \frac{5}{6} = 4 + \frac{4}{5} = \frac{24}{5} = \frac{4 \times 5 \times 4}{5} = \frac{4 \times 6}{}.$$

Ezen példákból nyilván látszik, hogy: *ha egész számot kell törtel elosztani, ezen egészszámot a' tört' nevezőjével sokszorozzuk, de a' törtet ezután ugy fordítjuk meg, hogy mi eddig* *alul volt mint nevező, most felülfordul számlálónak.*].

P. o: Osztassék el 5, $\frac{4}{7}$ által, írva $5:\frac{4}{7}$.

Sokszorozom hetet az öttel 's lesz:

$$\frac{4}{5\times7}=\frac{4}{35};$$

de ez tudjuk, ha igy marad annyi, mintha a' törtszámot osztottuk volna 5 által, és:

$$\frac{4}{7}:5=\frac{4}{35};$$

de mivel megfordítva a' törtszámmal kell az egészet osztani, megfordítjuk a' számot 's lesz:

$$5:\frac{4}{7}=\frac{35}{4}.$$

Tudjuk: mentül nagyobb az osztó, annál kisebb a' részes. Ezt következő tekintetből is láthatjuk.

Osszunk el valamelly számot $\frac{1}{6}$ al, p. o: 4et.

$4:\frac{1}{6}=24$, mert mindegyik egyesben 6szor van $\frac{1}{6}$, és igy:

$$4:\frac{1}{6}=\frac{4\times6}{1}=\frac{24}{1}=24.$$

Ha ezen 4et egymásután nagyobb nagyobb törtel osztjuk, a' részes mindég kisebb lesz; a' törtek:

$$\frac{1}{6}, \frac{2}{6}, \frac{3}{6}, \frac{4}{6}, \frac{5}{6}, \frac{6}{6}$$

mind nagyobbak sorjában, 's ugyan kétszer, háromszor, négyszer, ötször és hatszor nagyobbak mint $\frac{1}{6}$, következésképen a' részesek, mellyeket az osztás által adnak, szinte 2szer, 3szor, 4szer, 5ször és 6szor kisebbek lesznek.

Osszuk el a' 4et sorjában a' törtekkel 's jönnek:

$$4 : \frac{1}{6} = \frac{24}{1} = 24$$

$$4 : \frac{2}{6} = \frac{24}{2} = 12$$

$$4 : \frac{3}{6} = \frac{24}{3} = 8$$

$$4 : \frac{4}{6} = \frac{24}{4} = 6$$

$$4 : \frac{5}{6} = \frac{24}{5} = 4 + \frac{4}{5}$$

$$4 : \frac{6}{6} = \frac{24}{6} = 4.$$

Ha ellenben a' törtszám kisebb, a' része bizonyosan nagyobb, 's rendre:

$$4 : \frac{1}{12} = \frac{12 \times 4}{1} = 48$$

$$4 : \frac{1}{24} = 24 \times 4 = 96$$

$$4 : \frac{1}{48} = 48 \times 4 = 192$$

$$4 : \frac{1}{96} = 96 \times 4 = 384 \text{'s a't.}$$

természetes tehát, hogy kis számok nagy részeseket adnak, mert p. o:

$$1 : \frac{1}{10000} = 10000,$$

$$\text{és} \quad 1 : \frac{1}{\text{millió}} = 1 \,\text{millió}.$$

Következő példák szolgáljanak útmutatásul, miként szerkezhet a' tanuló hasonlókat gyakorlatul.

$$3 : \frac{4}{5} = \frac{3 \times 5}{4} = \frac{15}{4}$$

$$5 : \frac{7}{8} = \frac{5 \times 8}{7} = \frac{40}{7}$$

$$12 : \frac{11}{24} = \frac{12 \times 24}{11} = \frac{288}{11}$$

$$15 : \frac{15}{32} = \frac{15 \times 32}{15} = 32$$

$$118 : \frac{27}{50} = \frac{118 \times 50}{27} = \frac{5900}{27}$$

$$257 : \frac{250}{7800} = \frac{257 \times 7800}{250} = \frac{2004600}{250}$$

$$126 : \frac{756}{101010} = \frac{126 \times 101010}{756} = 30303.$$

19. K. Hátra van még azon eset, mellyben törtszámot törtszámmal kell osztani; miként jutunk ezen mivelet' világos értelmére?

F. Mit eddig tanultunk, természetesen reá fog bennünket vezetni.

Ha az osztandó kisebb, a' részes is kisebb, megtartván az osztót változotlanul.

Vegyük ismét a' 4et és $\frac{1}{6}$ot, és kisebbítsük sorjában a' 4et mindég felét vevén, igy bizonyosan a' részesek is kisebbülnek 's mindegyik következő csak fele lesz az előtte állónak. Legyenek az osztások sorban:

$$4 : \frac{1}{6} = \frac{4 \times 6}{1} = 24$$

$$2 : \frac{1}{6} = \frac{2 \times 6}{1} = 12$$

$$1 : \frac{1}{6} = \frac{1 \times 6}{1} = 6$$

$$\frac{1}{2} : \frac{1}{6} = \frac{1 \times 6}{2} = 3$$

$$\frac{1}{4} : \frac{1}{6} = \frac{1 \times 6}{4} = 1\frac{1}{2} = \frac{3}{2}$$

$$\frac{1}{8} : \frac{1}{6} = \frac{1 \times 6}{8} = \frac{3}{4} = \frac{3}{2} : 2$$

$$\frac{1}{16} : \frac{1}{6} = \frac{1 \times 6}{16} = \frac{3}{8} = \frac{3}{2} : 4$$

's igy tovább.

Szóval folytatván visgálatinkat, azt kérdem, hányszor van p. o: fél a' félben; tudjuk egyszer, és

$$\frac{1}{2} : \frac{1}{2} = 1 = \frac{2}{2}.$$

Mennyiszer van $\frac{1}{3}$ a' félben, egyszer és egyfélszer,

$$\frac{1}{2} : \frac{1}{3} = \frac{3}{2}.$$

Mennyiszer van $\frac{2}{3}$ a' félben; bizonyosan csak félszer $\frac{3}{2}$ szer, az az:

$$\frac{3}{2} : 2\text{szer, vagy: } \frac{3}{4}\text{szer.}$$

Mennyiszer van $\frac{1}{5}$ rész $\frac{4}{5}$ben; bizonyosan 4szer, mert:

$$\frac{4}{5} = \frac{1}{5} + \frac{1}{5} + \frac{1}{5} + \frac{1}{5}, \text{ az az: } 4\text{szer } \frac{1}{5}.$$

Mennyiszer $\frac{2}{5}$ a' $\frac{4}{5}$ben; kétszer, mert:

$$\frac{4}{5} = 2 \times \frac{2}{5}.$$

Mennyiszer van $\frac{4}{5}$ a' $\frac{2}{5}$ részben; $\frac{1}{2}$ vagy félszer.

Ha ezen eseteket öszveírom, látom hogy.

$$\frac{1}{2} : \frac{1}{2} = \frac{2}{2} = 1$$

$$\frac{1}{2} : \frac{1}{3} = \frac{3}{2} = 1\frac{1}{2}$$

$$\frac{1}{2} : \frac{2}{3} = \frac{3}{2\times2} = \frac{3}{4}$$

$$\frac{4}{5} : \frac{1}{5} = \frac{4\times5}{5} = 4$$

$$\frac{4}{5} : \frac{2}{5} = \frac{4\times5}{2\times5} = 2$$

$$\frac{2}{5} : \frac{4}{5} = \frac{2\times5}{4\times5} = \frac{1}{2},$$

és ebből következtetem: *ha törtszámot törtszámmal kell elosztani, sokszorozom az osztónak nevezőjével az osztandó' számlálóját, 's a' származat lesz részesemnek számlálója; sokszorozom ezután az osztónak számlálójával az osztó' nevezőjét, 's ezen származat lesz a' részesnek nevezője.*

Ezen mivelet a' valódi keresztbe való sokszorozás.

P. o: $\frac{5}{6}$ osztandó $\frac{4}{5}$ által; írva: $\frac{5}{6} : \frac{4}{5}$

keresztbe sokszorozva: $\frac{5}{6} \times \frac{4}{5}$

5öt az 5el, 6ot a' 4el

a' két származat 25 és 24; kérdés, mellyik lesz a' számláló?

Azt mondánk, hogy az osztó' nevezőjével az osztandó' számlálóját sokszorozván, ez a' származat lesz a' számláló, tehát 5ször 5=25 a' számláló, 24 pedig a' nevező, és:

$$\frac{5}{6} : \frac{4}{5} = \frac{5\times5}{4\times6} = \frac{25}{24}$$

épen igy: $\frac{5}{7} : \frac{8}{9} = \frac{5\times9}{7\times8} = \frac{45}{56}.$

Vigyázni kell, hogy ezen származatokat fel ne cseréljük, mert jól tudjuk, hogy az elosztásnál az osztó más, és más az osztandó, 's nemlehet egyiket a' másik helyett venni, mint a' sokszorozásnál a' két számot.

Valóban tudjuk, hogy ha az osztandót felcseréljük az osztóval, a' részesnek értéke épen megfordított, p. o:

ha 48at 8al elosztjuk, a' részes 6

de ha 8at osztunk el 48al, a' részes $\frac{1}{6}$.

Megfordított értéknek hívjuk mindazon számot, mellyben az osztandóból osztó lesz, mert igy a' részes mindég osztója az egységnek. Igy $\frac{1}{8}$ megfordított értéke 8nak, $\frac{1}{100}$ száznak, $\frac{2}{1}$ a' $\frac{1}{2}$ nek 's a' t. mert minden számot írhatunk ugy, hogy törtalakba jőjön, ha csak egyet írunk is a' vonal alá mint osztót, mi tudjuk semmi számot elnem változtat; igy p. o:

$$8 = \frac{8}{1}, \quad 10 = \frac{10}{1}, \quad 865 = \frac{865}{1} \text{ és}$$

$$\frac{1000}{1} = 1000.$$

Mindezen számok' megfordított értéke a' megfordított törtalak, vagy:

$$\frac{1}{8}, \frac{1}{10}, \frac{1}{865}, \frac{1}{1000}.$$

Ha tehát törtszámokkali osztásunkban az osztót az osztandóval felcseréljük, a' részes bizonyosan megfordított értéke lesz az előbbeni részesnek.

P. o: osztandó $\frac{5}{6}$, $\frac{3}{4}$ által;

az írás: $\frac{5}{6} : \frac{3}{4}$ és $\frac{3}{4}$ az osztó,

a' részes pedig:

$$\frac{5\times4}{6\times3} = \frac{20}{18}$$

de ha az osztót felcseréljük, lesz:

$$\frac{3}{4} : \frac{5}{6} = \frac{3\times6}{4\times5} = \frac{18}{20}$$

's ez éppen megfordítva $\frac{20}{18}$, az az: megfordított értéke $\frac{18}{20}$ nak.

Alig hihető, hogy volna közöttünk valaki, ki előtt ezen mivelet helyes léte nem lenne elég világos; azért is adok némelly osztási példákat gyakorlatul.

1.) $\frac{7}{12} : \frac{5}{10} = \frac{7\times10}{5\times12} = \frac{70}{60} = \frac{7}{6} = 1 + \frac{1}{6}$.

2.) $\frac{25}{32} : \frac{16}{25} = \frac{25\times25}{32\times16} = \frac{625}{512} = 1 + \frac{113}{512}$

3.) $\frac{25}{16} : \frac{25}{32} = \frac{25\times32}{25\times16} = 2.$

4.) $\frac{74}{100} : \frac{37}{50} = \frac{74\times50}{100\times73} = 1.$

5.) $\frac{516}{1000} : \frac{516}{500} = \frac{516\times500}{516\times1000} = \frac{1}{2}.$

6.) $\frac{5832}{10000} : \frac{11664}{100000} = \frac{5832\times100000}{11664\times10000} = 5.$

7.) $\frac{23}{100} : \frac{8}{100000} = \frac{2300000}{800} = \frac{23000}{8} = 2625.$

8.) $\frac{3}{5} : \frac{3}{78500} = \frac{3\times78500}{3\times\ 5} = \frac{78500}{5} = 15700.$

20. K. A' sokszorozásból tudjuk, hogy ha a' származatot a' sokszorozóval elosztjuk, a' sokszorozandó előjön. Az elosztásból pedig azt, hogy ha a' részessel sokszorozzuk az osztót, az osztandóra találunk. Nem lehetne é ezen észrevéteket a' törtszámokra alkalmazni 's bennök keresni mintegy probáját és erős bizonyítványát annak, hogy helyesen miveltünk.

F. Elég alkalmunk volt gyakorta említenünk, hogy mi egyik számra alkalmazható, a' másikra és mindvalamennyire is az. Ha mívelünk, vagy bármelly mívelet által nagyobbítjuk vagy kisebbítjük a' számokat, miveletünk mindenkor helyes, akarmelly alakban legyen ez a' szám, vagy más szóval: akar egész, akar tört, akar kevert szám legyen az, mindenféle probát annak ki kell állnia. Vissza megyek tehát a' törtekkeli sokszorozásra, hol volt:

1.) Törtszámot egészszámmal sokszorozni.

Sokszoroztuk a' tört' számlálóját, 's ha p. o:

$$\frac{5}{6}\times 7=\frac{35}{6},$$

bizonyosan:

$$\frac{5}{6}:\frac{35}{6}=7, \quad \text{és:} \quad \frac{35}{6}:7=\frac{5}{6}$$

lássuk igy van é?

$$\frac{5}{6}:\frac{35}{6}=\frac{5\times6}{6\times35}=\frac{5}{35}=\frac{1}{7} \quad \text{és}$$

$$\frac{35}{6}:7=\frac{35}{6\times7}=\frac{35}{42}=\frac{5}{6}$$

tehát a' mivelet helyes.

2.) Egészszámot törtszámmal sokszorozni szintannyi, mint törtszámot egészszámmal sokszorozni. Az eset tehát nem uj.

3.) Törtszámot törtszámmal sokszorozni.

Sokszoroztuk a' számlálót számlálóval, a' nevezőt nevezővel, és a' két származat ismét számláló és nevező maradt.

Példa: $\frac{7}{8}\times\frac{5}{9}=\frac{5\times7}{8\times9}=\frac{35}{72}$

ha a' mivelet helyes, szükséges hogy:

$$\frac{35}{72}:\frac{5}{9}=\frac{7}{8}, \quad \text{és:}$$

$$\frac{35}{72}:\frac{7}{8}=\frac{5}{9} \quad \text{legyen:}$$

's csakugyan:

$$\frac{35}{72}:\frac{5}{9}=\frac{35\times9}{72\times5}=\frac{7\times1}{8\times1}=\frac{7}{8} \text{ és:}$$

$$\frac{35}{72}:\frac{7}{8}=\frac{35\times8}{72\times7}=\frac{280}{504}=\frac{5}{9}.$$

4.) **Törtszámot egész számmal osztani.**

Sokszoroztuk a' tört' nevezőjét az osztó egészszámmal.

P. o: $$\frac{7}{8}:5=\frac{7}{40},$$

tehát: $$5\times\frac{7}{40}=\frac{7}{8}, \text{ és: }\frac{5\times7}{40}=\frac{35}{40}=\frac{7}{8}.$$

5.) **Egészszámot törtszámmal osztani.**

Sokszoroztuk az egészszámot a' tört' nevezőjével, a' törtet pedig ezután felfordítottuk.

$$7:\frac{5}{8}=\frac{56}{5}$$

tehát: $$\frac{56}{5}\times\frac{5}{8}=7, \text{ és: }\frac{56\times5}{5\times8}=\frac{56}{8}=7.$$

6.) **Törtszámot törtszámmal osztani.**

Sokszoroztuk az osztó' nevezőjével az osztandó' számlálóját, ezután az osztó' számlálójával az osztandó nevezőjét: az első származat a' részes' számlálója, a' második ennek nevezője lett.

Példa: $$\frac{7}{9}:\frac{8}{13}=\frac{13\times7}{8\times9}=\frac{91}{72}$$

tehát: $$\frac{91}{72}\times\frac{8}{13}=\frac{91\times8}{72\times13}=\frac{728}{936}=\frac{7}{9},$$

's a' miveletek' helyes léte minden esetre a' próbák által is megvan bizonyítva.

Kilenczedik Beszélgetés.

1. K. Ha valamelly számot felsőbbrendű egységgel osztunk, az osztandóból annyi jegyet vágunk el jobbra, hány üressel van írva az osztó, p. o:

$$75 : 10 = 7{,}5$$
$$530 : 100 = 5{,}30$$
$$7585 : 1000 = 7{,}585$$
$$85000 : 10000 = 8{,}5000 \text{ 's a' t.,}$$

tudjuk, hogy ezen elvágottjegyek osztási maradványok és csakugyan törtszámok, sorjában:

$$\frac{5}{10}, \frac{30}{100}, \frac{585}{1000} \text{ és } \frac{5000}{10000}.$$

Melly egybeköttetésben vannak ezen törtek számalkotmányunkal?

F. Én ezeket ugy tekintem, mint következő *alsóbb* rendjeit az egységnek, mert mindegyik helly jobbra egy tizede az előtte álló helynek; vagy ha balra mindegyik helyen tizszerte nagyobb számok állanak, szükségesképen, jobbra menvén, 10szerte kisebb számoknak kell állniok. Ebből következtetem, hogy ha balra a' rendek nőnek és minden hellyel felsőbbek támadnak, jobbra termé , szetesen a' rendek fogyni fognak a' helyekkel, az az: kisebbednek, 's igy az egységen tul is jobbra szintugy megmarad ezen törvény.

Adok erre egy példát, felírok akarhány jegyet, melly éppen tollamba jön:

750875324879

Ha ezen szám' első helyén jobbra (a' 9) egyesek vannak, tudjuk, hogy a' másodikon 10, a' harmadikon 100 's a' t. következnek; de kétfelé vágom a' jegyeket, mi annyi, mintha a' számot egy millióval osztanám 's lesz:

750875,324879.

Most az egyesek helyén az 5 áll, és az egész számok' legfőbb jegye a' 7, 100 ezres, ha most az 5 tösön kezdve jobbra megyek visgálatomban, bizonyos, hogy a' következő helyen, hol a' 3as áll, az egységnek egy tizedrésze, a' második helyen a' tizednek tizedrésze, vagy az egységnek egy századrésze, a' harmadik helyen a' századnak tizedrésze, vagy az egységnek ezredrésze 's a' t. következik, 's hogy az utolsó jegy, a' 9 a' milliomodok helyén áll.

Ha tehát az egyesek' helyét ugy tekintem, mint induló helyét a' rendeknek, jönnek balra a' főbb, jobbra pedig az alsóbb rendek, 's ha a' helyeket jelölöm számokkal, lesznek a' rendek az egyesnek két oldalán:

100000, 10000, 1000, 100, 10, (1),

$\frac{1}{10}$, $\frac{1}{100}$, $\frac{1}{1000}$, $\frac{1}{10000}$, $\frac{1}{100000}$, 's a' t.

Valamint tehát példánkban az 5 egyes után jönnek balra:

7 tizes
8 százas
0 ezres
5 tizezres
7 százezres.

ugy következnek jobbra a'

3 tizedes
2 század
4 ezred
8 tizezred
7 százezred
9 milliómod 's a' t.

Ezek a' számok pedig *tizedes törtek* és természetesen illenek számalkotmányunkhoz.

Kimondások igen könnyű, mert p. o: 0,7 hét tizedrész, 0,75 75 századrész, 0,756 756 ezred 's a' t., hol az egészek' helyibe üreset írtam.

Látni, hogy ezen tizedes törteknek tetemes haszna abban áll, hogy nevezőjöket szükségtelen alájok írni, mert azokat ismerjük, 's hány jeggyel van írva a' tizedes tört, annyi üreset hordózó egyest írunk alá nevezőnek.

Igy p. o:
$$0,501 = \frac{501}{1000}$$

$$0,7 = \frac{7}{10}$$

$$0,0001 = \frac{1}{10000}$$

$$0,50017 = \frac{50017}{100000}\text{, 's a' t.}$$

A' tört:	0,753 p. o:	7 tizedes, 5 százados és 3 ezredes,
	0,087	8 százados és 7 ezredes,
	0,0053	5 ezredes és 3 tizezredes,
	0,3	3 tizedes 's a' t.

2. K. Veszem észre, hogy ezen tizedes törtekkel bármelly miveletet is olly könnyen végezhetünk, mint az egészszámokkal, ha ezeket rendesen írjuk egymásalá; a' származatok' és részesek rendjeire figyelmezvén. Hogy történnek velük ezen miveletek?

F. 1.) Öszveadni őket igen könnyű, akar legyen mellettük egészszám, akar nem.

Példák. Öszveadandók:

$$\begin{array}{lr} & 85,702 \\ & 73,0053 \\ & 5,7 \\ & 63,05 \\ \hline \text{Ösrves} & 227,4573 \end{array}$$

jobbról kezdvén az öszveadást szintugy folytatjuk, mint az egészszámokét, minden figyelem nélkül, van vagy nincs egészeket és törteket elválasztó vonalka, és az öszveadásból eredett felsőbb rendekhez adjuk.

Öszveadandók:	0,7580
	0,52070
	0,078902
	0,187
	0,0004
	0,02
	0,000001
Öszves:	1,565003.

2.) A' levonás is szinte illy egyszerű:

$$\begin{array}{r} 5,07 \\ -4,68 \\ \hline =0,39 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 4,0075 \\ -1,80 \\ \hline =2,2075 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 0,803 \\ -0,0095 \\ \hline =0,7935 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 0,70 \\ -0,000078 \\ \hline =0,699922 \end{array}$$

hol üresek hibáznak, azokat oda lehet gondolni.

3.) A' sokszorozás szinte ugy történik, mint az egész számokkal:

$$0,8 \times 0,7 = 0,56$$
$$1,3 \times 4,5 = 13 \times 45 = 5,85$$
$$0,753 \times 0,87 = 0,65511$$
$$0,001 \times 0,3 = 0,0003$$
$$0,0004 \times 0,005 = 0,0000020$$

csupán arra kell figyelmezni, hogy a' származatban annyi jegynek kell' lenni az egész vagy ennek helye után, mennyi hely van mindkét számban együttvéve.

4.) Az osztás szinte: 0, 4 : 0,2=2
0, 84 : 0,7=1,2
0,625 : 0,125=5
0,625 : 0,0125=50
0, 88 : 11=0,08.

Ha mindezen példákban a' tanuló a' tizedes törteket törtalakra viszi 's ugy mivel, megfog győződni helyes létekről.

3.K. Hogy ezen tizedes törtek nagy könnyűséget nyujtanak a' számvetésben, nyílván látom, mert azt egyszerűbbé teszik és sok írást is megkimélnek. De nem mindenkor felsőbb rendű egyes lévén a' nevező, kérdés: lehet é minden törtet olly nevezőre vinni, hogy ez az egységnek valamelly felsőbb rendje legyen?

F. Valóban ha minden törtet, legyen annak nevezője akarmelly szám, tizedes törtekre tudnánk változtatni, akkor a' számításnál nagy könnyűségre találnánk.

Ha olly számot tudok találni, melly sokszorozás által az egység' valamelly rendét adja származatul, ha vele a' tört nevezőjét sokszorozom, czélomat elértem, mert ugyan ezen számmal a' számlálót is sokszorozom.

Ezt pedig mindazon nevezőkön megtehetem, mellyek a' kettősnek és 5nek sokosai, azért, mert a' 10, kettő és 5által oszható, p. o:

$\frac{1}{2}$ ből könnyen lesz 10edes tört, ha a' két részt 5el sokszorozom, és:

$$\frac{1}{2} = \frac{5}{10} = 0{,}5.$$

$$\frac{1}{4} = \frac{25}{100} = 0{,}25.$$

Szinte p. o:

$$\frac{3}{5} = \frac{3 \times 2}{5 \times 2} = \frac{6}{10} = 0{,}6,$$

$$\frac{1}{8} = \frac{125}{1000} = 0{,}125.$$

Igy; $\frac{6}{25} = \frac{6 \times 4}{25 \times 4} = \frac{24}{100} = 0{,}24$

es: $\frac{14}{125} = \frac{14 \times 8}{125 \times 8} = \frac{112}{1000} = 0{,}112$'s a't.

De ezt $\frac{1}{3}$ nél p. o: nem tehetem többé, mert nincs olly egész szám, mellyel 3at sokszorozván, az egyes valamelly felsőbb rendét adná; itt nincs más mód, mint $\frac{1}{3}$nak tizedes értékéhez annyira közelíteni, mennyire lehet.

Tudom, hogy ha 3at 3al sokszorozok, lesz belőle 9; hibáz még a' 10hez $\frac{1}{10}$.

$3 \times 33 = 99$; hibáz százból $\frac{1}{100}$.

$3 \times 333 = 999$; hibáz 1000 ből $\frac{1}{1000}$.

$$3 \times 3333 = 9999;\ \text{hibáz 10000 ből } \frac{1}{10000}.$$

$$3 \times 33333 = 99999;\ \text{hibáz 100000 ből } \frac{1}{100000}$$

de bárhány hármast vegyek sokszorozónak, soha nem érem el az egység' valamelly rendjét tőkéletesen; látom azonban, hogy a' különbség mindég kisebb, és hogy a' valodi ér ékhez míndinkáb közelítek, mentül több jegyet veszek; megállok tehát ott, hol gondolom hogy a' kérdésnek megfelelhetek a' közelítéssel.

Írhatom tehát:

$$\frac{1}{3} = 0,3 = \frac{3}{10}$$

$$\frac{1}{3} = 0,33 = \frac{33}{100}$$

$$\frac{1}{3} = 0,333 = \frac{333}{1000}$$

$$\frac{1}{3} = 0,3333 = \frac{3333}{10000}$$

$$\frac{1}{3} = 0,33333 = \frac{33333}{100000} \text{ 's a' t.}$$

vagy is: annyi jegyet veszek a' tizedesekből, mennyit akarok.

Ha p. o: ez a' harmadrész forint lenne, tudjuk hogy egyharmadrész forint = 20 kr.

's mondom először: $\frac{1}{3}$ forint = 0,3 forint = $\frac{3}{10}$ forint.

$\frac{3}{10}$ forint = 18 kr. mert egytizedrésze a' forintnak $\frac{60}{10}$ = 6 kr. hibázna tehát a' 20 kr. ból kettő.

Veszek két jegyet 's mondom:

$\frac{1}{3}=0{,}33$, vagy: 20 kr. $=\frac{33}{100}$ fl. $=\frac{1980}{100}$ kr. $=19{,}8$ kr. hibázik még a' 20 kr. ból $20-19{,}8$ $=0{,}2$ két tizedrész, vagy $\frac{1}{5}$ kr.

Ha veszek 4 jegyet, lesz:

$\frac{1}{3}=0{,}3333$, és 20 kr. $=\frac{3333\times60}{10000}=\frac{199980}{10000}$ $=19{,}998$ kr. hibázik még 20 kr. ból $20-19{,}998$ $=0{,}002$ kr. vagy $\frac{1}{500}$ rész kr. mi valóban semmi, és 19,998 krt. anyiban vehetek mint 20at.

Látom ebből, hogy a' tizedes számok' 4 jegye által minden kérdésnek könnyen eleget lehet tenni.

4. K. A' sokszorozás által látom, ha nem érjük is el mindég tökélletesen a' törtszám' valódi értékét, annyira közelíthetünk, mennyire kívántatik; de az is észrevehető, hogy azon számot nem ismerjük, mellyikkel kell a' nevezőt sokszorozni, hogy az egység' valamelly felsőbb rendjébe változzék. Miként lehet ezt meglelni?

F. Miért nem ismernénk ezen számot? Nemde tudjuk, hogy ha a' származatot egyik sokszorozóval elosztjuk, a' másikat megtaláljuk? Hol lenne itt a' nehézség? Kérdem, mellyik azon szám, melly p. o: 32őt sokszorozván 100000et ád származatul?

$$\text{Nemde } \frac{100000}{32} \text{ e' ez a' szám?}$$

$$100000 : 32 \text{ pedig} = 3125, \text{ következésképen:}$$
$$32 \times 3125 = 100000$$

's ez minden esetben ugyan az.

Ebből következtetem, hogy akarmelly nevezővel írt törtszámot tizedes törtbe lehet változtatni az által, ha számlálójához annyi üreset adok, mennyi kívántatik és a' nevezővel osztok, annyi jegyet írván a' részesbe, mennyi ismét kívántatik; ez a' részes lesz a' tizedes törtbe változtatott közönséges tört.

P. o: mint $\frac{1}{5}$ részt tizedes törtbe változtatunk, az 1 számlálóhoz üreset teszünk 's lesz 10, ezt osztjuk 5el, lesz a' részes 2, de két tizedrész = 0,2.

Előre is tudjuk, hogy: kétszer $\frac{1}{5} = 0,$

háromszor $\frac{1}{5} = 0,6$

négyszer $\frac{1}{5} = 0,8$'s a' t.

s' csakugyan: $\frac{2}{5} = \frac{2,0}{5} = 0,4$

$$\frac{3}{5} = \frac{3,0}{5} = 0,6$$

$$\frac{4}{5} = \frac{4,0}{5} = 0,8 \text{ 's a' t.}$$

miből nyilván, hogy csak a' számlálót kell osztani a' nevezővel, hozzáadván ahoz annyi üreset, mennyi szükséges, vagy kívántatik, 's addig folytatni az osztást, mig az véget ér, vagy hány jegy kívántatik:

$$\text{Igy: } \frac{1}{4} = 1,00 : 4 = 0,25$$

$$\frac{2}{4} = 2,00 : 4 = 0,50$$

$$\frac{3}{4} = 3,00 : 4 = 0,75 \text{ 's a' t.}$$

$$\frac{1}{3} = 1,00000 : 3 = 0,33333$$

$$\frac{2}{3} = 2,00000 : 3 = 0,66666$$

$$\frac{1}{9} = 1,00000 : 9 = 0,11111 \text{ 's a' t.}$$

annyi jegyét találván a' részesnek, hány üres ragasztatott a' számlálóhoz.

Megjegyzendő itt az, hogy mivel a' nevező nagyobb mint a' számláló, egészszám a' részesbe semmi esetre nem jöhet, helyibe tehát üres íratik, és ezen üres után, melly vonalka által vágatik el, jönnek sorjában a' tizedes jegyek.

$$\frac{3}{25} = 3{,}00 : 25 = 0{,}12$$

háromban a' 25 nincs meg, tehát az egészek' helyibe üres jön; megvan 26 a' 30ban egy tizedszer; 's oda íratik az 1. 's a' t.

$$\frac{3}{125} = 3{,}000 : 125 = 0{,}024.$$

Ezen példában 125 a' 3ban nincs meg, tehát az egészek' helyire 0 jön; de 30ban sincs meg, tehát a' tizedesek helyére is üreset kell írni, jőn a' másik üres 30 hoz, 's lesz 300ban a' 124 kétszer, 's ezen kettő százados, s' a' t.

$$\frac{1}{11} \text{ szinte} = 1{,}000000 : 11 = 0{,}090909$$

$$\frac{1}{37}, = 1{,}000000 : 37 = 0{,}027027.$$

Kívántatik $\frac{1}{74}$ tizedes törtekben, és csakugyan a' részesbe 8 jegy.

74, 1ben nincs, tétetik	0,
74 10ben nincs, tétetik még egy üres	0,0
74 100ban van egyszer	0,01
100—74=26, ide uj üreset:	
260ban 74, háromszor	0,013
—222	
38 ide üreset	
380ban 74, 5ször, részes	0,0135
—370	
10 marad, hozzá üreset	

100ban 74 egyszer, részes 0,01351
-74

260ban 74 háromszor 0,013513
-222

380ban 74, ötször 0,0135135
-370

100ban 74 egyszer 0,01351351

's a' kívánt 8 jegy meglévén a' részesben, az osztást tovább nem szükség folytatni.

Igy gyakorolja magát a' tanuló különbféle tört' változtatásában.

$$\frac{1}{4585} = 1{,}00000000 : 4585 = 0{,}00021810 \text{ 's a' t.}$$

ezen példában a' 4585höz 5jegy hívántatott, vagy is: 4 üres az osztandó' egyeséhez, azért kellett a' részes' első jelentőjegyét a' negyedik helyre tenni.

$$\frac{1}{12} = 0{,}0833333.$$

$$\frac{2}{12} = 0{,}1666666$$

$$\frac{3}{12} = 0{,}2499999\text{, de } \frac{3}{12} = \frac{1}{4} = 0{,}25$$

$$\frac{1}{27} = 0{,}037037037.$$

$$\frac{1}{37} = 0{,}027027027.$$

$$\frac{9}{13} = 0{,}692307692307.$$

$$\frac{13}{4} = 0{,}9285714285714 \text{ 's a' t.}$$

5. K. A' tizedes törteknek nagy hasznokat vesszük akkor, ha alsóbb rendű számokat felsőbb rendűk által akarunk kifejezni. Hogy írnánk p. o: a' krajczárokat vagy garasokat forintokban?

F. Ha egy forint = 60 kr., egy krajczár 60nak megfordított értéke forintban kifejezve, és egy krajczár $= \frac{1}{60}$ forint, vagy is a' forintnak egyhatvanad része. Ezt tizedes törtbe változtatván, lesz:

1 kr. = 0,0166666 forint

2 kr. $\frac{1}{30}$ forint = 0,033333 forint

3 kr. $\frac{1}{20}$ » = 0,05 »

4 kr. $\frac{1}{15}$ » = 0,066666 »

5 kr. $\frac{1}{12}$ » = 0,083333 »

6 kr. $\frac{1}{10}$ » = 0,1 »

's igy 60ig minden kifejezését megleljük a' krajczároknak.

P. o. 54 kr. hány forint: $\frac{54}{60} = \frac{9}{10} = 0{,}9$ forint

$$57 \text{ kr.} = \frac{57}{60} = \frac{19}{20} = 0{,}95$$

$$47 \text{ kr.} = \frac{47}{60} = 0{,}78333 \text{ s' a' t.}$$

Megjegyezvén azt, hogy ha az osztás véget nem ér, a' tizedesekből 4 jegy mindég elég a' haszonvétre.

$$\text{Szinte igy egy garas} = \frac{1}{20} \text{ forint} = 0{,}25 \text{ forint}$$

$$8 \text{ garas} = \frac{8}{20} = \frac{2}{5} \text{forint} = 0{,}4 \text{ forint}$$

's a' t.

Ha tehát a' kérdésben: ha egy rőf szövet 3 fl. 42 kr. mi lesz árra 39 rőfnek; a' helyett, hogy a' forintokat kr. ba változtatnánk és a' sokszorozás után a' krajczárokból ismét forintokat osztanánk, vagy a' helyett, hogy a' forintokat és krajczárokat külön külön sokszoroznánk 39 el, sok időt és írást kímélünk, ha a' krajczárokból forintokat változtatunk, mert ekkor a' sokszorozás által a' származatban egyenesen forintokra találunk; igy példánkban:

$$3 \text{ fl. } 42 \text{ kr.} = 3,\ 7 \text{ forint}$$

$$\text{és } 3,7 \times 39 = 144{,}3 \text{ forint} = 144\tfrac{3}{10}\text{fl.} = 144 \text{ fl.} 18 \text{kr.}$$

Egy font portéka 8 fl. 47 kr. hogy lesz 93 font?

8 fl. 47 kr. = 8, 7833 fl. és 8, 7833 × 93 = 816,8469 forint. Négy tizedes lévén a' sokszorozóban, 4et vágtunk el a' származatban. Az illy

tizedes forintokat könnyű ismét kr. okba változtatni 60nali sokszorozás által, és:

0,8469 forint = 0, 8469×60=50, 8140 kr.

tehát: 0, 8469 forint = 50, 8140 kr.

Illyen esetben, ha a' tizedes krajczárok felülmulják az 5öt, kevés hibát ejtünk, ha az egész krajczárokhoz még egy egészet adunk: itt a' $\frac{8}{10}$kr. $\frac{4}{5}$ rész krajczár lévén, vagy törtalakban hagyjuk azt az egész krajczárok mellett, vagy az 50 krajczárokhoz még egyet adunk 's mondjuk: 51 kr.

Egy font portéka 7 fl. 13 kr., hány fontot lehet venni 789 forinton?

Ha itt a' 7 fl. 13 krt. forintra viszem, egyenesen eloszthatom a' 789et, 's a' részes lesz feleletem:

7 fl. 13 kr. = 7,2166, és: 789 : 7,2166 = 109,33 font.

6. K. A' nyomatok' alsóbb rendjeiből felsőbbeket miként alkotunk, tizedes számokba kifejezve?

F. Mentül több rendje van valamelly tárgynak, annál nagyobb hasznát vesszük a' tizedes törteknek.

Lesznek gránokból nehézékek 60nali osztás által, nehézékekből latok 4eli osztás, ezekből fontok 32teli, 's végre fontokból mázsa 100ali osztás által; megjegyezvén, hogy a' fontok magok is már tizedes részei a' mázsának és p. o: 856 font = 8, 56 mázsa, az az: 8 mázsa, 5 tized mázsa és 6 század mázsa.

1.) *Példa:* 8 mázsa, 75 font, 18 lat, 3 nehézék, 54 grán hány mázsa?

Először a' gránokból nehézékeket váltok és mondom:

$$54 \text{ grán} = \frac{54}{60} = 0{,}9 \text{ nehézék; ehez adom a' 3 nehézéket, lesz öszvesen 3,9 nehézékem,}$$

ebből lesz:

$$\frac{3{,}9}{4} \text{ lat} = 0{,}975 \text{ lat; hozzáadván 18 latot,}$$

lesz öszvesen: 18,975 lat.

$$18{,}975 \text{ lat} = \frac{18{,}975}{32} \text{ font} = 0{,}5929 \text{ font, ehez a' 75 fontot,}$$

lesz a' felelet:

$$8{,}755929 \text{ mázsa} = 875{,}5929 \text{ font.}$$

hogy ezekből az alsóbb rendeket sokszorozás által könnyen megtaláljuk, magában is világos.

2.) *Példa:* 57856 grán hány mázsa?

Egy mázsában van 768000 grán, tehát:

$$57856 \text{ gran} = \frac{57856}{768000} \text{ mázsa} = 0{,}07403 \text{ mázsa,}$$

vagy: 7,403 font.

3.) *Példa:* 142 lat hány mázsa?

Egy másza 3200 lat; tehát: $142 \text{ lat} = \frac{142}{3200} \text{ másza}$

$$= 0{,}044375 \text{ mázsa} = 4{,}4375 \text{ font. 's a' t.}$$

4.) *Példa:* Egy mázsa portéka 178 forínt 54 kr., kérdés: mi lesz árra 17 font 24 latnak?

178 forint 54 kr. = 178,9 forint
17 font 24 lat = 0,1775 mázsa,

tehát: 17 font 24 lat portéka $178,9 \times 0,1775$ forint = 31,75475 forint, elvágván annyi jegyet tizedesekre, mennyi volt a' két számban őszvesen (5) ez pedig 31 fl. 45 kr.

7. K. Az öllel hosszaságot mérünk; van pedig egy ölben 6 láb, mindegyik lábban 12 hüvely, mindegyík hüvelyben 12 vonal. Miként számítjuk ezen rendeket?

F. Ha egy hüvelyben van 12 vonal, a' vonalakból hüvely lesz, ha azokat 12 által elosztom, valamint a' hüvelyekből vonal kerül, ha azokat 12vel sokszorozom. Szinte 12 által változtatom a' hüvelyeket lábokba s' megfordítva; a' lábokból végre öl lesz, ha azokat 6tal elosztom, lábok pedig ölből, ha ezeket 6al sokszorozom. Van pedig egy hüvelyben 12 vonal, tehát egy lábban: $12 \times 12 = 144$ vonal.

Az ölben pedig: $6 \times 144 = 864$ vonal
$6 \times 12 = 72$ hüvely.

1.) *Példa:* Egy lécz két öl hosszú, ha 7 darabba vágom, hány hüvely vagy vonal lesz egy darab?

2 öl = 12 láb = 144 hüvely

egy darab lécz tehát $\frac{12}{7} = 1,71428$ - - - - láb, vagy:

$\frac{144}{7} = 20,5714$ - - - hüvely.

2.) *Példa*: Egy lécz 2 öl, 1 láb és 5 hüvely hosszú, beakarom keriteni földemet, kerülete $268\frac{1}{2}$ öl, kérdés: hány illy lécz darabra lesz szükségem?

2 ölet, 1 lábot és 5 hüvelyt ölre viszem 's lesz:

$$\frac{5}{12} = 0{,}42666 \text{ láb}$$

1,42666 láb pedig: $\frac{1{,}42666}{6} = 0{,}27111$ öl,

és öszvesen: 2,27111 öl.

Ezzel most könyen elosztom a' $268\frac{1}{2}$ ölet 's lesz:

$$\frac{368{,}5}{2{,}27111} = 116{,}4$$

kell tehát 116 darab lécz 's nem egészen még egy fél.

3.) *Példa*: Egy gombolyag zsineg 132 láb, kérdés: hány illy gombolyag kell, ha egy mérföldet akarok vele mérni?

Egy mérföld 4000 öl, vagy: $6 \times 4000 = 24000$ láb, kell tehát

$$\frac{24000}{132} = \frac{12000}{66} = \frac{6000}{33} = \frac{2000}{11} = 181{,}8,$$ nem egészen 182 gombolyag.

4.) *Példa*: Ha 5 közönséges emberilépés két öl, mennyi egy lépés? Két öl = 12 láb = 144 hüvely = 1728 vonal, 's akarmellyik mérőben kifejezhetem a' lépés' nagyságát, ha azt 5el elosztom, 's lesz:

1.) $\frac{12}{5} = 2,4$ láb, vagy: $\frac{2}{5} = 0,4$öl.

2.) $\frac{144}{5} = 28,8$ hüvely

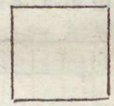
3.) $\frac{1728}{5} = 347$ vonal.

5.) *Példa*: Árkolásom 87 öl 4 láb; fizettem az egész munkáért 68 fl. 52 krt.; mennyiben került egy öl?

87 öl 4 láb = 87,3333 öl, és 68 fl. 52 kr. = 68,8666 fl.

egy öl került: $\frac{68,8666}{87,3333} = 0,8$ forintba, az az: 48 kr. ba.

8. K. A' tért, négyszeg mérővel mérjük, 's az illyen négyszegü mérő olly alak, mellynek 4 oldala egyenlő hosszaságú; p. o:



mind a' 4 vonal, melly ezen 4szeget békeríti, egyenlő hosszaságú.

Ha ezen vonalak mind egy vonal hosszaságúak (olly vonalat értek itt, mellyből 12 megy egy hüvelyre) akkor azon tért, melly belől foglaltatik, egy *négyszegvonalnak* nevezzük.

Ha ezen vonalok' hossza egy hüvely, akkor az általok bézárt tér egy *négyszeghüvely*.

Ha a' vonalok' hossza egy egy láb, akkor a' köztök lévő tér egy *négyszegláb*. Ha a' vonalok egy öl hosszak, a' tér *négyszegöl*.

Ha végre egy egy vonal egy mérföld, akkor a' tér egy *négyszegmérföld.*

F. Egy négyszeg lábnak tehát széle és hossza egyenlőképen egy láb.

Egy négyszeg lábban pedig van 144 négyszeghüvely; egy négyszegölben van 36 négyszegláb. Tehát egy négyszegölben van:

$$144 \times 36 = 5184 \text{ négyszeghüvely.}$$

Ezt megmutatom alakban is:

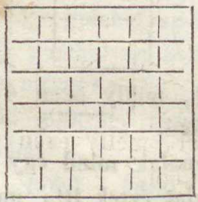
Felírok egy illy négyszeget 's mondom: mindegyik oldala egy öl. Bizonyosan hat részre kell tehát osztanom mindegyik oldalát, 's a' benn lévő négyszegek mind négyszeglábok lesznek.

Egy vonal p. o: legyen öl |——————|

Ezt hat egyenlő részre osztom, lesznek lábok:

—|—|—|—|—|—

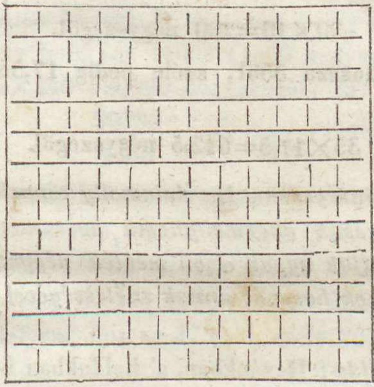
Szinte igy osztom el a' 4szeget is 's lesz:



's itt csakugyan 36 kis négyszeg van, mellyiknek 4 oldala egyenlőképen egy egy láb.

Van tehát 1 négyszegölben 36 négyszegláb, az az: 6szor 6 = 36.

Szintigy mutatom meg, hogy 1 négyszeglábban 144, az az: 12 szer 12 négyszeghüvely van, ha a' négyszeglábot 12 részre osztom, 's lesz:

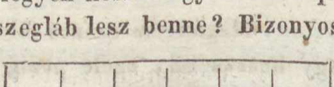


és a' négyszegláb térben csakugyan 12szer 12 négyszeghüvely van.

1.) *Példa*: Földjeinket négyszegöllel mérjük, és mondjuk hogy: egy hold szántóföldben vagy kaszállóban 1600 négyszegöl van. Az illyen holdnak tehát mindegyik oldala 40 öl hosszú, mert: $40 \times 40 = 1600$.

2.) *Példa:* Nem elmulhatlan szükséges azonban, hogy a' föld' alakja tökélletes négyszeg legyen, vagy az azt' bekerítő vonalok mind egyenlőek legyenek. Elég ha tudjuk hosszát és szélét.

P. o: legyen hossza egy öl széle pedig 1 láb, hány négyszegláb lesz benne? Bizonyosan 6.



ha két láb széles 12 négyszegláb 's a' t.

Éppen igy, ha hossza 20öl, széle pedig 10, lesz benne:

$$20 \times 10 = 200 \text{ négyszegöl.}$$

Ha hossza 35öl, széle pedig 17,5öl, lesz tére:

$$35 \times 17{,}5 = 612{,}5 \text{ négyszegöl.}$$

Közönségesen: *Ha valamelly térnek tartalmát keressük akarmellynemű hosszmértékben, ezt megleljük ugyan azon mérték' négyszegében, ha a' térnek hosszát annak szélességével sokzsorozzuk.*

2.) *Példa*: Hazánkban, a' holdakban foglaltató négyszegölek' száma különbféle, tehát a' holdak' nagysága is különböző egy és más Megyében. Van 1500 négyszegölet foglaló hold. Van 1400, 1300, 1200 és 1100 négyszegölet foglaló is. Az olly holdban, melly 1500 négyszegölet foglal, a' 4 oldal nem lehet tökélletesen egyenlő, de ha kerekszámát vesszük, mondhatjuk p. o: hogy: hossza 50, széle pedig 30öl, és: $50 \times 30 = 1500$ négyszegöl.

Igy lehet a' 1200as hold' hossza 40, széle pedig 30, mert:

$$40 \times 30 = 1200 \text{ 's a' t.}$$

3.) *Példa*: Megmérem szántó földemet 's találom, hogy hossza 83, széle pedig 37öl, kérdés: hány négyszeg öl tartalma?

$$83 \times 37 = 3071 \text{ négyszegöl.}$$

Egy másiknak hossza 165öl, széle 13,4öl; tartalma:

$$165\times13{,}4=2211 \text{ négyszegöl.}$$

Kertem' hossza 375öl, széle pedig 240. Kérdés: hány hold van benne (1500 négyszegöles)?

$375\times240=90000$ négyszegöl, és:

$$\frac{90000}{1500}=60 \text{ hold.}$$

4.) *Példa*: Szántóföldjeim egy darabban lévén, hosszak 780, szélek pedig 635 öl.

Kaszálló réteim' hossza 960 öl, széle 345 öl.

Legelőm' hossza 1280 öl, széle 986 öl.

Erdelyem' hossza 3750 öl, széle 2574 öl.

Kérdés: hány hold van a' 4 féle bírtokban, ha a' szántóföldek' holdjában 1600, a' kaszállokban 1500, a' legelőben 1100, az erdőkben pedig 1400 négyszegöles holdakat számítok.

Szántóföld: $780\times635=$

$$495300 \text{ négyszegöl}=\frac{495300}{1600}=309{,}5625 \text{ hold.}$$

Kaszálló: $960\times345=$

$$331200 \text{ négyszegöl}=\frac{331200}{1500}=220{,}8 \quad \text{»}$$

Legelő: $1280\times986=$

$$1262080 \text{ négyszegöl}=\frac{1262080}{1100}=1147{,}3454 \quad \text{»}$$

Erdő: $3750\times2574=$

$$9652500 \text{ négyszegöl}=\frac{9652500}{1400}=6894{,}6428 \quad \text{»}$$

Öszvesen: $=8572{,}3507$ hold.

9. K. Az italokat akóval mérjük. Van egy akóban 64 icze, két icze egy pint, az iczének fele messzely, a' messzelynek fele fertály icze vagy félmesszely. Van tehát egy akóban:

256 félmesszely
128 messzely
64 icze és:
32 pint.

Miként számítunk ezen mértékkel?

F. Akar az akókat alsóbb rendű mérőre, akar az alsóbbakat felsőbbre vivén, p. o:

57 icze hány akó?

$$\frac{57}{64} = 0{,}8906 \text{ akó.}$$

Egy icze bor 24 kr. hány akót lehet venni 96 forinton?

Egy akó: $64 \times 0{,}4 = 25{,}6$ fl., tehát:

$$\frac{96}{25{,}6} = 3{,}75 \text{ akót, 's ez: 3 akó 48 icze.}$$

Vettem 29 akó bort 362 fl. 30 kr. on, kérdés. hogy kell iczéjit mérni, ha minden akón 5 fl. 30 krt. akarok nyerni?

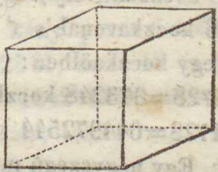
29 akó' árra 362,5 fl. és igy egy akóé $\frac{362{,}5}{29}$ $= 12{,}5$ az az: 12 fl. 30 kr., ehez adván 5 fl. 20 krt. nyereséget, kell akóját adnom 17 fl. 50 kr. on vagy iczéjét:

$$\frac{17{,}83333}{64} \text{ forinton} = 0{,}2786 \text{ fl.} = 16{,}6 \text{ kr. on,}$$

vagy közel 17 kr. on iczéjét.

10. K. Az üreg tartalmát miként lehetne megmérni?

F. Az üreget koczka által mérjük. A' koczkát mindegyikünk ismeri 's tudja, hogy hat egyenlő négyszeg által van békerítve. Mint p. o:



Az üreg mérőnek e' szerint 3 iránya van, 's ezek: *hossz*, *szél* és *magasság* vagy; *méllység*.

Már ezen tekintet is bizonyítja, hogy három szám jön öszve sokszorozandó, ha valamelly üregnek tartalmát akarjuk kifejezni.

A' mint ezen koczka, *vonal*, *hüvely*, *láb*, *öl* vagy *mérföld*, hosszasága vonalokkal van körülfoglalva, a' szerint fog: koczkavonal, koczkahüvely, koczkaláb, koczkaöl vagy koczka mérföld lenni.

A' térmérőknél láttuk, két irány jött csak tekintetbe, a' hossz és szél, 's a' két mennyiségnek származatja lett a' tér' tartalma. Az üregmérőknél a' három mennyiség: a' hossz, szél és magosság fogják származatokkal adni a' tartalmat.

Ha tehát egy négyszegöl térmérőben 36=6 ×6 négyszegláb van, lesz bizonyosan az üregmérő koczkaölben: 36×6=6×6×6=216 koczkaláb; mert: széle 6 láb, hossza hat láb és magassága is 6 láb egy koczkaölnek, 's bele csakugyan 216 koczka fér, mellynek oldalai egy egy láb hosszak, szélesek és magasak.

Szinte igy van egy koczkalábban: $12 \times 12 = 144 \times 12 = 1728$ koczkahüvely; egy koczkahüvelyben szinte 1728 koczkavonal 's a' t.

Van tehát egy koczkaölben:

$216 \times 1728 = 373248$ koczkahüvely, és

$273248 + 1728 = 644972544$ koczkavonal.

1.) *Példa*: Egy négyszegű mérőm van, mindegyik oldala 3 és $\frac{1}{4}$ hüvely, mennyi tartalma, koczka hüvelyben és koczkalábban kifejezve?

$3\frac{1}{4} = 3{,}25$, tehát tartalma: $3{,}25 \times 3{,}25 \times 3{,}25 = 34{,}328$ koczkahüvely; ha ezt 1728al elosztom, koczkalábban lesz adva mérőm' tartalma.

2.) *Példa*: Egy ládámnak hossza $3\frac{1}{2}$ láb, széle $2\frac{1}{4}$, mélysége pedig 3 láb, kérdés: mennyi üregtartalma?

$3{,}5 \times 2{,}25 \times 3 = 23{,}625$ koczkaláb.

3.) *Példa*: Szobámnak hossza 3 öl 4 láb, széle 2 öl 3 láb, magassága pedig 3 öl. Mennyi üregtartalma?

$3{,}6666 + 2{,}5 \times 3 = 27{,}5$ koczkaöl.

4.) *Példa*: A' magyar iczében van 43,18 koczkahüvely és igy egy akóban:

$64 \times 43{,}18 = 2763{,}52$ koczkahüvely.

Ha a' posonyi mérőben 72 icze van, lesz tartalma:

$$72 \times 43{,}18 = 3108{,}96 \text{ koczkahüvely, vagy:}$$

$$\frac{3108{,}96}{1728} = 1{,}798 \text{ koczkaláb.}$$

5.) *Példa:* Ha raktáromat gabonával teli akarnám hordani, hány posonyi mérő férne bele, ha annak hossza 23 öl, széle 18 és magassága 3 öl?

Tartalma: 1242 koczkaöl $= 1242 \times 216 =$ 268272 koczkaláb; tehát:

$$\frac{268272}{1{,}8} = 149040 \text{ posonyi mérő fér belé.}$$

6.) *Példa:* Hajómba éppen 4000 posonyi mérő gabonát rakhatok; mennyi üregtartalma?

$$4000 \times 1{,}8 = 7200 \text{ koczkaláb, vagy:}$$

$$\frac{7200}{216} = 33\,\frac{1}{3} \text{ koczkaöl.}$$

Tizedik Beszélgetés.

a) Kamatok.

1. K. Ha valakinek pénzt adunk kölcsön azon feltétel alatt, hogy akkor, mikor azt visszafizeti, vagy bizonyos időkben az alatt is, mig a' pénz nálla van, haszonbér fejibe valamelly summát fizessen; ezen haszonbért *kamatnak* nevezzük. Mit lehet megjegyezni a' kamatok' nagy, vagy kicsiny létéről?

F. A' kamatok bizonyos időre fizettetnek, 's lehet ezen idő: 1 vagy több nap, 1, 3 vagy 6 hónap, egy vagy több év, a' szerint, meddig adatik a' pénz kölcsön; és a' kölcsönadott pénz ezen esetben: *tőkének* neveztetik.

Valamint az idő különbféle, ugy lehet a' kamat is különbféle, mint a' megegyezés történt a' kölcsönöző és kölcsönvevő közt. A' kölcsönözőt: *hitelezőnek*, a' kölcsönvevőt pedig: *adósnak* is nevezzük.

Közönségesen a' számításban 100 forint vétetik fel mint kölcsönadott tőke egy évre kiadva, 's hány forint fizettetik haszonbérül, annyi forintos kamatnak mondjuk ezt.

Ha tehát kamatról van szó, p. o: 3, 4, 5, 6, 7 's a' t. forintos kamatról, itt mindenkor felteszszük, hogy ez a' 3, 4, 5, 6 vagy több forint *egyszáz forinttól jár és egy évre számíttatott.*

Mint a' szükség és körülmények hozzák magukkal, a' kamatok egyszáztól számos forintokra is rughatnak. Honnunkban a' törvények azt rendelik, hogy egyszáz forintnak egy évi kamatja 6 forinton felül ne menjen; alatta akarmelly summa lehet évikamatja a' száznak. A' legközönségesebb kamatok 5öt száztól fizetvén 's majdnem egész Europában kamatiránynak van véve; honnunkban gyakoribb a' 6 forint száztól. A' 4 forintos kamat is gyakori, kivált kereskedési viszonyokban.

2. K. E' szerint, ha tudjuk, mennyi fizettetik egyszáz forintért, bizonyosan akarmelly summára eső kamatot is könnyen kiszámítunk?

F. Ugy van, és nincs egyebet tenni, mint a' kamatot sokszorozni.

1.) Mennyi 1000 fl. $5\frac{o}{o}$ *) kamatja?

1 száz forinté 5 forint, tehát tizszer 100 forinté: 10szer 5=50.

2.) Mennyi 1600 fl. $5\frac{o}{o}$ kamatja?

16szor 5 = 80 forint.

*) A' helyett, hogy mindég odaírnám 5őt 100tól, vagy diákul; pro cento, a' jegyet $\frac{o}{o}$ választom.

3.) Mennyi 2500 fl. $5\frac{0}{0}$ kamatja? $25\times5=$ 125 fl.

4.) Mennyi 24500 fl. $5\frac{0}{0}$ kamatja? $245\times5=$ 1225 fl.

5.) Mennyi 274200 fl. $5\frac{0}{0}$ kamatja? $2740\times5=$ 13700 fl.

6.) Mennyi 80 fl. $5\frac{0}{0}$ kamatja? $0,8\times5=4$ fl.

7.) Mennyi 73 fl. $5\frac{0}{0}$ kamatja? $0,73\times5=$ $3,65=$ 3 fl. 39 kr.

8.) Mennyi 11 fl. $5\frac{0}{0}$ kamatja? $0,11\times5=$ $0,55=$ 33 kr.

9.) Mennyi 1 forintnak kamatja? $0,01\times5=$ $0,05=$ 3 kr.

's ez: $\frac{5}{100}$ forint, vagy $\frac{300}{100}=3$ kr.

Ha ezt tudjuk, könyen készítünk olly kís táblát, mellyben különbféle tőke van egyik sorban, utánna pedig az érette járó évi kamat, ötöt száztol véve. De számítsunk még néhány példát $5\frac{0}{0}$ ra.

7890 fl. ád: $78,9\times5=394,5$ forintot.

87654·6 fl. » $876,545\times5=4382,725=4382$ fl. 43,5 krt.

975873 25 fl. » $=48793,6625=48793$ fl. $39\frac{4}{5}$ krt.

Itt az, ki könyebben tud kettővel osztani, nkább váloszthatja, mint az 5teli sokszorozást, mert $5 = \frac{10}{2}$, és mivel mi két jegyet vágunk el a' tőke' számából, azért, hogy csak egyszáztól jár 5 forint, annak, ki kettővel oszt, csak egy jegyet kell elvágni azon okból is, hogy $\frac{5}{100} = \frac{1}{20}$; 's igy mi is valóban 5tel sokszorozván és 100 al elosztván, azt tettük, mit tennénk a' tőkét $\frac{1}{20}$ al sokszorozván.

p. o: mi 8758 forintnak kamatja?

Elvágunk egy jegyet 's kettővel elosztjuk az egészet:

875,8 : 2=437,9=437 fl. 54 kr.

Szinte:

756875,6 az az: 756875 fl. 36 kr. nak kamatja:

75687,56 : 2=37843,78=37843 fl. 46, 8 kr.

3.) K. Eddig valamennyi kamatunk egy évre szóll, miként számítunk különböző időre?

F. Ha az évek' száma kerek, bizonyosan azokkal sokszorozzuk az egy évi kamatot, mert hány évre van kinn a' tőke, annyiszor kell az egy évet venni.

P. o: ha egy évi kamat 5 fl., lesz két évi: 2szer 5=10; háromévi: 3szor 5=15; 4évi: 4szer 5=20 fl. és 15 évi kamat:

15ször 5 =75 forint 's a' t.

Mindegy lesz tehát, akar az 5 forintot veszszük annyiszor, mennyi az évek száma 's ezen számmal sokszorozzuk a' százzal osztott tőkét, akar egy évre keressük a' tőke' kamatjait 's ezeket sokszorozzuk az évek' számával.

P. o: 1.) 87575 forintnak mennyi a' kamatja 7 évre?

$$\text{Egy évre: } \frac{8757,5}{2} = 4378,75$$

tehát 7 évre 7 szer 4378,75 = 30651,25 fl.
vagy 7 évre 100 forint kamatja: $5 \times 7 = 35$ fl.

$$\text{tehát: 87575 forinté: } \frac{87575 \times 35}{100} = 30651 \text{ fl. } 15 \text{kr.}$$

2.) 853 forint' kamatja 4 évre?
egyszáz forint' kamatja 4 évre = 20 fl. tehát:

$$853 \times \frac{20}{100} = 853 \; \frac{2}{10} = 170{,}6 = 170 \text{ fl. } 36 \text{ kr.}$$

Ha tizedes számmal akarunk sokszorozni, akkor míveletünk még egyszerűbb, 's kérdezzük: ha 100 forínt' évi kamatja 5 fl. mennyi egy forintnak kamatja? Bizonyosan (mint láttuk is már) $\frac{5}{100} = \frac{1}{20} = 0{,}05$.

Mit igy is mondhatunk: 100 fl. kamatja 5 fl. 1,00 forinté 0,05 mindkét felől két jegyet elvágván; ha a' tőkét ezen 0,05el sokszorozzuk, semmi egyéb osztásra szükségünk nincs, csak a' kívánt tizedes helyet kell megtartani.

Igy lesz 2 évre egy forint' kamatja: 0,1 forint

3	»	»	»	»	0,15	»
4	»	»	»	»	0,2	»
5	»	»	»	»	0,25	»
6	»	»	»	»	0,3	» 's a' t.

Mennyi tehát 78531 forint' kamatja 4 évre?
$78531 \times 0,2 = 15706,2$ fl. $=$ 15706 fl. 12 kr.

Mennyi 6 évre?
$78531 \times 0,3 = 23559,3$ fl. $=$ 23559 fl. 18 kr.

Ha az idő csak valamelly része az évnek, természetes, hogy akkor a' kamatokat is csak az év' ezen részével kell sokszorozni. Itt, látjuk igen helyes, ha a' hónapokat és napokat az év' részeiben fejezzük ki.

Igy: fél év $= \frac{1}{2}$ év $= 0,5$ év $= 6$ hónap

három hónap $= \frac{1}{4}$ év $= 0,125$ év

2 hónap $= \frac{1}{6}$ év $= 16666$ év

1 hónap $= \frac{1}{12}$ év $= 0,083333$ év

's igy a' hónapok' számát könnyen megtaláljuk, években adva.

1.) *Példa*: Mennyi 800 fl. kamatja 6 hónapra?
1 évre 5 fl. tehát félévre: 2 fl. 30 kr. $= 2,5$
az az: $8 \times 2,5 = 20$ fl.

Mennyi 1 hónapra? Egy hónapra 100 fl. 25 krt. ád, tehát 800 ád:

8szor 25=200 kr. = 3 fl. 20 krt.

Mennyi 850 forint' kamatja 264 napra?

Itt vagy a' napokat évre viszem: $\frac{264}{365}$ év = 0,7233, és evvel sokszorozom a' 850t 's lesz:

$5\times0{,}7233\times85=30{,}74=30$ fl. 44,4 kr.

vagy azt keresem: mennyi 100 forint' kamatja 1 napra, 's ez:

$\frac{5}{365}$ fl. vagy: $\frac{300}{365}$ kr. = 0,822 kr.

és 264 napra lesz: $273\times0{,}822=213$ kr.

és: $217\times8{,}5=18445$ kr. = 30 fl. $44\frac{1}{2}$ kr.

hogy az elébbi mívelet rövidebb, látni való.

2.) *Példa*: Mennyi 8756 finak $5\frac{0}{0}$ kamatja 3 évre, 4 hónapra és 25 napra?

25 nap $=\frac{25}{365}=0{,}0685$ év

4 hónap $=\frac{1}{3}=0{,}3333$ év, öszvesen tehát: 3,4018 év, és a' kamat: $8756\times0{,}05\times3{,}4018=$

$8756\times0{,}17009=1489$ fl. $18\frac{1}{2}$ kr.

3.) *Példa*: Mennyi 73756,5 forint' kamatja 1 évre és 274 napra?

274 nap $=0{,}7507$ év, tehát a' kamat:

$73756{,}5\times0{,}05\times1{,}7507=6458$ fl. $1\frac{1}{2}$ kr.

4. K. A' $4\frac{o}{o}$ra számítandó kamatokra van é valamelly észrevét?

F. A' mívelet nem változik, bármennyi legyen az évi kamat, csupán csak arra figyelmezzen a' számító, hogy a' könyítéseket, mellyek előadhatják magukat a' számvetés közte, használni is tudja.

$4\frac{o}{o}$ra a' sokszorozó $\frac{4}{100}=\frac{1}{25}=0{,}04.$

100 forintnak kamatja egy évre 4 forínt = 240 kr.

1 » » » » $\frac{240}{100}$ forint = 2,4 kr.

egy hónapra $\frac{2{,}4}{12}$ forint = 0,2 k. $=\frac{1}{5}$kr.

Példa:

1800 f. $4\frac{o}{o}$ kamatja 1 évre = 72 f.
3 évre = 216 f.
8 évre = 576 f. 's a't.
Fél évre = 36 f.
$\frac{1}{4}$ évre = 18 f.
1 hónapra = 6 f.
1 napra = — 12 kr.

5. K A $6\frac{o}{o}$ kamat is igy számítatik kétségkivül?

F. Itt is csak szinte igy mívelünk, és:

100	forintnak	kamatja	egy	évre 6 f.	=	360kr.
1	»	»	»	»	=	3,6 kr.
1	»	»		egy hónapra	=	0,3 kr.
100	»	»	»	»	=	30 kr.
»	»	»	»	napra	=	1 kr.

Ha 100 forínt ád 360 krt. egy évre, nem adhat többet szorosan véve egy napra $\frac{360}{365} = 0,998$ krnál, de a' számitás könyűsége' kedviért mintegy halgatólag megegyezünk abban, hogy a' $6\frac{0}{0}$ kamatokra nézve legyen az évnek 360 napja, 's igy jön minden száz forintól minden nap $6\frac{0}{0}$ kamatba 1 kr., mi csakugyan nagy könyüséget nyujt a' számításnál.

P. o: 6000 forint mennyit kamatoz egy napra?
Ha 100 forint 1 krt. ád, 60szor 100 forint ád 60×1 kr. = 1 forintot.

Mennyit: 7600 f. egy napra?

78,00 = 78 kr. = 1 f. 18 kr.

Mennyit: 5750 f. egy napra?

$$57,50 = 57\frac{1}{2}\text{ kr.}$$

Mennyit: 4654 f. egy napra?

$$46,54 = 46\frac{1}{2}\text{ kr.}$$

hol csak 100al osztottam el a' tőkét 's azonnal krajczárokat találtam kamatul egy napra.

Ha a' napok' száma advavan, a' tőkét azokkal sokszorozom, 's a' származatból két jegyet elvágván, elosztom 60al és forint lesz kamatom: p. o: 8700 f. kamatja 35 napra:

$=87 \times 35 = 3045$ kr. $=$ 50 f. 45 kr.

vagy: $8700 \times 35 = 304500 = 3045$ kr.

78534 f. kamatja 82 napra

$=785{,}34 \times 82 = 64397{,}88$ kr. $=$ 1073 f. 17,88 kr.

A' kamatok gyakorta fél évre számítatnak 's ekkor a' számítás igen egyszerű, p. o: 57895,6 f. $4\frac{o}{o}$ ra fél évre:

$578{,}956 \times 2 = 1157{,}912 = 1157$ f. $54\frac{3}{5}$ kr.

Ugyan ezen tőke $5\frac{o}{o}$ ra fél évre:

$\frac{5789{,}56}{4} = 1447{,}4125 = 1447$ f. $24\frac{4}{5}$ kr.

itt tehát egy jegyet elvágván, 4el osztottuk a' tőkét.

Ugyan ezen tőke $6\frac{o}{o}$ ra fél évre:

$578{,}956 \times 3 = 1736{,}868 = 1736$ f. 52 kr.

Következő táblácska $6\frac{o}{o}$ ra mutatja különbféle tőke' kamatjait, segédje által minden tőkére és időre meglehet találni a' kamatot egyszerű öszveadás által.

Az első sorban állanak a' tőkék, utánnok a' kamatok egy évre, egy hónapra és egy napra.

Ha nagyobb tőke lenne adva mint az, melly a' táblácskában van, a' kamatokat annyiszorta kell venni, mennyiszerte nagyobb a' tőke.

$6\frac{o}{o}$ Kamatok' táblája.

Tőke.	Kamat					
	egy évre.		egy hónapra.		egy napra.	
forint.	f.	kr.	f.	kr.	f.	kr.
1	—	3,6	—	0,3	—	0,01
2	—	7,2	—	0,6	—	0,02
3	—	10,8	—	0,9	—	0,03
4	—	14,4	—	1,2	—	0,04
5	—	18,0	—	1,5	—	0,05
6	—	21,6	—	1,8	—	0,06
7	—	25,2	—	2,1	—	0,07
8	—	28,8	—	2,4	—	0,08
9	—	32,4	—	2,7	—	0,09
10	—	36,0	—	3,0	—	0,1
20	1	12,	—	6,	—	0,2
30	1	48,	—	9,	—	0,3
40	2	24,	—	12,	—	0,4
50	3	—	—	15,	—	0,5
60	3	36,	—	18,	—	0,6
70	4	12,	—	21,	—	0,7
80	4	48,	—	24,	—	0,8
90	5	20,	—	27,	—	0,9
100	6	—	—	30,	—	1,
200	12	—	1	—	—	2,
300	18	—	1	30,	—	3,
400	24	—	2	—	—	4,
500	30	—	2	30,	—	5,
600	36	—	3	—	—	6,
700	42	—	3	30,	—	7,
800	48	—	4	—	—	8,
900	54	—	4	30,	—	9,
1000	60	—	5	—	—	10,
10000	600	—	50	—	1	40,

1.) *Példa:*

8000 f. egy évre 8szor 48 f.
17000 f. » » 60+42=102 f.
2565 f. » » 120+30+3 f. 36 kr. +18 kr.=
153 f. 54 kr.

2.) *Példa:*

3000 f. egy hónapra 15 f. = 3×5 f.
2500 f. » » 2×5+2=12 f.
1768 f. » » 5 f. + 3 f. 30 kr. + 18 kr. +
2,4 kr. =.8 f. 50,4 kr.

3.) *Példa:*

9000 f. egy napra 10× 9=90=1 f. 30 kr.
4500 f. » » 4×10+5=45 kr.
3747 f. » » 3×10 + 7 + 0,4 + 0,07 =
37,47 kr.

Magában is értetődik, hogy az évek' hónapok' és napok' számával a' kamatok sokszoroztatnak. Egy példa erre elég legyen:

87965 f. kamatja kivántatik 3 évre, 5 hónapra és 19 napra.

Előre is látszik, hogy táblánk ezen példánál nem nagy segétséget nyujt, és sokkal sebesebben jutnánk egyenes számítás által a' következésre; azonban tegyük öszve általa:

forint,	egy évre,	egy hónapra,	egy napra,
80000	4800	400	13. 20
7000	420	35	1. 10
900	54	4. 30	9
60	3. 36	18	0,6
5	18	1,5	0,05.
87965 f.	5277 f. 54 k.	439 f. 49,5 k.	14 f. 39,65 kr.

's igy: 87965 f. 3 évre	=15833 f.	42	kr.
5 hónapra=	2199	7,5	
10 napra =	278	33,33	
Öszves kamat	=18311 f.	22,83	kr.

Kisebb és kerekszámokkal írt példákban és rövidebb időkre számítandó kamatoknál azonban a' táblácska elég hasznos lehet.

6. K. Ha csupa kamat van adva 's kérdeztetik; melly tökéből származott, miként tudjuk ezt meg?

F. Itt szükséges tudni, mennyi időre szóll ez a' kamat és mennyi fizettetik száztól, p. o:

1.) 340 forint 2 évi kamat $6\frac{0}{0}$ ra, mennyi a' tőke?

1 évre 170 f.; mindegyik 6 forint, 100 forint tőkét ád, tehat:

$$\frac{170}{6} = 28{,}333 \text{ száz forint, vagy: } 2833 \text{ f. } 20 \text{ kr.}$$

itt a' 340t 2×6tal elosztván és 100al sokszorozván, megtaláljuk a' tőkét, 's ez:

$$\frac{35000}{12} = 2833 \text{ f. } 20 \text{ kr.}$$

2.) 1150 f. 3és fél évi kamat $5\frac{0}{0}$ ra, mi a' tőke?

$$3\frac{1}{2} \times 5 = 3{,}5 \times 5 = 17{,}5$$

a' tőke tehát vagy: $\frac{1150 \times 100}{17,5}$, vagy 1150 × 0,175, mindegyik esetben = 6571 f. 25 kr.

3.) 1489 f. $18\frac{1}{2}$kr. $5\frac{o}{o}$ kamat 3 évre, 4 hónapra és 25 napra, melly a' tőke?

Az évek' száma 3,4018, tehát:

$$\frac{1489 \text{ f. } 18\frac{1}{2}\text{kr.} \times 100}{3,4018 \times 5} = \frac{148930,8}{17,009} \text{ 8756 f.}$$

7. K. Hát ha azt kell keresni, hányot kamatoz száztól valamelly tőke, miként mívelünk?

F. Ekkor a' tőkét, kamatot és az időt kell tudnunk, 's ezekből megtaláljuk hány forint jár száztól, p. o:

7500 f. kamatja 3 évre 900 f. mennyi a' procento?

Egy évre ád 7500 f. 300 forintot, tehát:

$$100 \text{ f.} \frac{300}{75} = 4 \text{ forintot; a' procento 4.}$$

Tehát a' tőke' századrészét az idővel sokszorozván a' kamatokat ezen származattal elosztjuk, a' részes a' keresett precento.

P. o: 9780 forint' kamatja 3, 4 évre 2037,12 f., mennyi a' procento?

$$\frac{2037,12}{97,80 \times 3,4} = \frac{2037,12}{339,52} = 6\frac{o}{o}.$$

A' tanuló szerkeztessen reá példákat.

Kamat 755 f. a' $\frac{o}{o}$ = 4, kerestetik a' tőke:

Szükséges még az idő, melly: 3,75 év,

$$\text{tehát a' tőke} = \frac{755 \times 110}{4 \times 3{,}75}.$$

Vagy ha közönségesen azon részeket, mellyek ezen kérdésben előjönnek, betükkel jelőljük, lesz:

a' Tőke T.

a' Kamat K.

a' Procento P.

és az Idő I, a' miveletek következők.

Adva van a' tőke, az idő és a' procento, lesz

$$\text{a' kamat} = \frac{\text{Tőke} \times \text{Idő} \times \text{Procento}}{100.}$$

$$\text{az az: } K = \frac{T \times I \times P}{100.} \qquad (1)$$

Kerestetik a' Tőke, a' kamatból, az időből és a' procentóból:

$$\text{Tőke} = \frac{\text{Kamat} \times 100}{\text{Procento} \times \text{Idő}}$$

$$T = \frac{K \times 100}{K + I.} \qquad (2)$$

Kerestetik a' Procento. Adva van a' tőke, kamat és idő:

$$\text{Procento} = \frac{\text{Kamat} \times 100}{\text{Tőke} \times \text{Idő}}$$

$$P = \frac{K \times 100}{T \times I.} \qquad (3)$$

's végre ha az Időt keressük; a' tőke, a' kamat és a' procento adva lévén:

$$\text{Idő} = \frac{\text{Kamat} \times 100}{\text{Tőke} \times \text{Procento}}$$

$$\text{I} = \frac{\text{K} \times 100}{\text{T} \times \text{P.}} \quad (4)$$

P. o: A' tőke 600 f. a' kamat 120 f. a' procento 5, mennyi az idő?

$$\frac{160 \times 100}{600 \times 5} = \frac{12000}{3000} = 4$$

az idő 4 év.

Ha azt, mit itt a' kamatokról mondottam, rövideden öszvevesszük, következő észrevételeket adhatom.

I. Minden tőke és kamat kérdésben, négy mennyiség jön tekintetbe, melly közül szükségesképen hármat ismernünk kell; a' negyediket ezekből könnyen megtaláljuk.

Ezen négy mennyiség: *a*) a' tőke, *b*) az idő melly alatt a' tőke kiadva van, *c*) a' procento vagy hány száztól, mindenkor egy egész évre vevén azt, 's végre *d*) a' kamat' mennyisége.

II. Ha a' tőke forintokban és krajczárokban van adva, helyes és szükséges a' krajczárokat tizedrész forintokba váltani.

III. Ha az idő években, hónapokban és napokban van adva, helyes és szükséges ezeket az év' tizedes részeiben adni, 's ekkor évekkel számítunk. Természetes hogy, ha napokkal vagy hónapokkal számítunk, a' következést az első esetben 365el; a' másodikban 12vel elosztanunk.

IV. Ha a' procentót egész számnak vesszük, mint p. o: 6, 5 és 4 procentóban, 6, 5 és 4 egész számokkal sokszorozunk, akkor a' származatot 100al elosztanunk kell; mert p. o: 5 procento nem egyéb mint $\frac{5}{100}$, vagy is: 0,05; ha pedig ezen utolsó két számot $\frac{1}{20}$ vagy 0,05 öt vesszük sokszorozónak, a' százzali elosztást megkíméljük. Szinte igy: 6 procento 0,06, és 4 procento 0,04.

a) Leggyakrabban kell a' kamatokat keresnünk, 's ekkor a' tőke, ennek procentója és kamatozó ideje adva vannak, és első kifejezésünk:

$K = \frac{T \times I \times P}{100}$, szóval mondva: *sokszoroztassék a' tőke az idővel és a' procentoval, a' származatnak századrésze lesz a' keresett kamat.*

Mint említők, itt az idő I években van kifejezve, a' procento pedig egész szám. Adjunk némely példát csupán kijelölve, a' tanuló kiszámíthatja belőlök az értékeket.

1.) A' tőke 4560 forint és kamatoz 4procentora 5 évig; mennyi a' kamat?

Felírás: $K = \frac{4560 \times 4 \times 5}{100}$.

Ha itt a' 4 procento egész szám helyett: 0,04et írunk, természetes, hogy már százzal osztottuk is, midőn a' 4nek csak egy századrészével sokszoroztunk: a' kifejezés nevezője, a' 100, tehát ekkor elmaradhat, 's írom:

$K = 4560 \times 5 \times 0{,}04$.

2.) 7586 f. 42 kr. 5 procentóra 13 év alatt mennyit kamatoz?

Felírás: $K = \frac{7586{,}7 \times 5 \times 13}{100} = 7586{,}7 \times 13 \times$ 0,05, mert itt a' 42 kr. = 0,7 forint.

3.) 8975 f. 57 kr. 6 procentora $8\frac{1}{2}$ év alatt mennyit kamatoz?

57 kr. = 0,96 f., $8\frac{1}{2}$ év = 8,5 év, és $6\frac{o}{o}$ = 0,06.

Felírás: $K = 8975{,}9 \times 58{,}5 \times 0{,}06$.

4.) 16508 f. 39 kr. $5\frac{3}{4}$ procentóra 7 év, 4 hónap és 28 nap alatt mennyit kamatoz?

39 kr. = 0,65 forint, $5\frac{3}{4}\ \frac{o}{o}$ = 5,75 procento, vagy = 0,0575, 4 hónap $= \frac{1}{3} =$ 0,3333 év, és 28 nap = 0,0756 év; tehát: 7 év, 5 hónap és 28 nap =7,41 év.

Felírás: $K = 16508{,}65 \times 7{,}41 \times 0{,}0575$.

5.) 65 f. 45 kr. $11\frac{1}{5}$ procentóra 23 év és 342 nap alatt mennyit kamatoz?

65 f. 45 kr. = 65,75 f. $11\frac{1}{5}\ \frac{o}{o} = 11{,}2\frac{o}{o} =$ 0,112, és: 23 év, 342 nap = 23,9369 év, tehát a' kamat:

$$K = 65{,}75 \times 0{,}112 \times 23{,}9369,$$

's a' származatból, mint tudjuk: $2+3+4=9$ tízedes a' sokszorózás után elvágatik.

b) Ha a' tőkét nem tudjuk, a' procento, kamat és idő adva lévén, ezekből megtaláljuk. Alakunk pedig:

$$T = \frac{K \times 100}{P \times I.}, \text{ szóval.}$$

Ha a' százszoros kamat, a' procentó' és idő 'származatával elosztatik, a' tőke lesz a' részes. Itt is szint azon megjegyzés van a' procentóra nézve, mellyet már feljebb tettem. Ha alól az osztóban P egész szám, akkor felül a' 100 megmaradhat mint K nak sokszorozója; de ha alól P csak századrésziben van adva, felül a' 100 nem szükséges. Egy példán nyilvánabb lesz az itt kimondott.

1.) A' kamat 180 f. a' procentó 6, az idő 5 év, tehát:

K=180, P=6 és I=5; lesz alakunk a' tőkére nézve:

$$T = \frac{180 \times 100}{6 \times 5} = \frac{18000}{30} = 600.$$

Ha a' $6\frac{0}{0}$ helyett 0,06 ot veszünk osztónak, ez annyi mintha 100szor akkorára vesszük a' részest 's ekkor, mint említők, a' kamatot szükségtelen 100al sokszorozni, és marad:

$$T = \frac{180}{0{,}06 \times 5} = \frac{180}{0{,}3} = 600.$$

2.) A' kamat 758 f. a' $\frac{o}{o}$ $4\frac{1}{2}$, az idő $8\frac{1}{4}$ év, mennyi a' tőke?

$$T=\frac{758\times 100}{4,5\times 8,25}=\frac{758}{0,045\times 8,25}.$$

3.) A' kamat 4142,8651, az idő 8,6 év, 's a' $\frac{o}{o}$ 5, 5, kerestetik a' tőke?

$$T=\frac{414286,51}{8,6\times 5,5}=\frac{4142,8651}{8,6\times 0,055}=8758,5 \text{ forint.}$$

c) Ha a' procento ismeretlen, vagy keresendő, akkor a' tőke, kamatja, 's azon idő, melly alatt ezen kamat támadott, advavannak, és kifejezésünk:

$$P=\frac{K\times 100}{T\times I.},$$ szóval azt teszi:

osztassék el a' százszorta vett kamat a' tőke és időközti származattal, a' részes lesz a' keresett procentó. Ez igen természetes, mert: miként származott első esetünkben a' kamat a' tőkéből, időből és procentóbul, szintugy származik a' procentó a' kamatból, ha elosztjuk a' tőkével és idővel. Itt ha csakugyan 100al sokszorozzuk a' kamatot, a' procentónak egész számát találjuk, de a' százat elhagyjuk és p. o. írjuk: $P=\frac{K}{T\times I}$, akkor P, vagy a' procentó százszorta kisebb lesz, vagy is: csak százados törtalakban fog előjönni.

Legyen például:

1.) A' tőke 600 f., a' kamat 180 f., az idő pedig 5 év, mennyi a' procentó?

Első felírásunk szerint:

$$P=\frac{1800\times100}{600\times5}=\frac{18000}{3000}=6,$$

mert itt K=180, T=600 és I=5, és csakugyan a' $\frac{o}{o}$ 6.

De ha a' 100at a' számlálóból elhagyjuk, lesz:

$$P=\frac{180}{600\times5}=\frac{180}{3000}=0{,}06$$

's mint említők, az előbbeni értéknek egyszázadrésze.

2.) A' tőke 7500 f., a' kamat 1500, az évek száma 4; kerestetik a' $\frac{o}{o}$.

$$P=\frac{1500}{7500\times4}=\frac{15}{300}=0{,}05\text{, vagy } 5\frac{o}{o}.$$

3.) A' tőke 8758,7 f., a' kamat 4142,8651 f., az idő 8,6 év; mennyi a' procentó?

$$P=\frac{4142{,}8651\times100}{8758{,}7\times8{,}6}=\frac{414286{,}51}{75324{,}82}=5{,}5=5\frac{1}{2}.$$

d) Ha az időt nem ismerjük, ezt a' tőkéből, kamatjaiból 's a' procentóbul megtalálhatjuk, mert;

$$I=\frac{K\times100}{T\times P}\text{, szóval:}$$

A' százszoros kamat osztassék el a' tőke és procento közti származattal, a' részes adja a' keresett időt.

A' procentóra nézve elébbi észrevételeink ide is alkalmazhatók.

1.) A' tőke 600 f., a' kamat 180 f., a' $\frac{0}{0}$ 6, mennyi az idő?

T=600, K=180 és P=6; tehát: vagy

$$I = \frac{180\times100}{600\times\ 6},\ \text{vagy:}\ \frac{180}{600\times0{,}06} = \frac{18000}{3600} = \frac{180}{36} = 5.$$

2.) A' tőke 7580 f., a' kamat 2053 f., a' procentó 5; kerestetik az idő.

$$I = \frac{2653\times100}{7580\times\ 5} = \frac{2653}{7580\times0{,}05} = \frac{2653}{379} = 7\ \text{év}.$$

3.) A' tőke 8758,7 f., a' kamat 4142,8651, a' procentó 5.5, kívántatik az idő.

$$I = \frac{4142{,}8651}{8758{,}7\times0{,}055} = \frac{4142{,}8651}{481{,}7285} = 8{,}6\ \text{év}.$$

---

b) Közép szám.

1. K. Ha két számhoz egy harmadikat keressünk, melly éppen annyival nagyobb a' kisebbiknél, mennyivel kisebb a' nagyobbiknál, ezen számot *középszámnak* hivjuk azért, mert éppen a' kettenek közepén van. Melly hasznát vesszük ezen középszámnak?

F. Ha p. o. mondom: tőllem egyik helység 5, egy másik 3 mérföldnyire van, 's kérdem hol a' két távolnak közepe, vagy fele útja, tehát 5 és 3 közt a' középszámot keresem.

Ez a' középszám: $\frac{5+3}{2} = \frac{8}{2} = 4$,

és a' két helységnek fele útja 4 mértföld. Igy 5 és 3 közt a' középszám 4, mert annyira áll 3tól mint 5től.

Mi a' középszám 15 és 7 közt?

$$\frac{15+7}{2} = \frac{22}{2} = 11.$$

Mi $13\frac{1}{2}$ és $4\frac{1}{2}$ közt? $\frac{18}{2} = 9$.

Mi 65,5 és 72,25 közt?

$$\frac{137,75}{2} = 68,875 \text{ 's a' t.}$$

2. K. Tehát az adott két számot öszveadván 's kettővel elosztván, a' középszámot megtaláljuk; ez röviden mondva: *vegyük a' két szám öszvesének felit 's ez lesz a' középszám.* Ha több szám közt kell ezen középszámot keresni, miként mívelünk?

F. Ha három szám van adva, annak öszvesét 3al, ha négy szám, ennek öszvesét 4el 's a' t. osztjuk el, és közönségesen: *akarhány legyen az adott szám, annak öszvesét vesszük, az az: mindvalamennyit öszveadjuk, 's az öszvest azon számmal osztjuk el, hány szám adatott öszve.*

1.) *Példa*: Első héten bévettem 41 f. 24 kr.

másodikban	»	36 »	36 »
harmadikban	»	52 »	42 »

Kérdés: mennyit vettem be általjában egy héten, ha mind három hetet egyenlővé akarom tenni?

A' három bévétel' öszvese 130 f. 42 kr.
és ennek harmadrésze 43 „ 34 „
's a' három számközti közép: 43 f. 34 kr.

2.) *Példa*: Négy egymásutánni hétivásárban volt a' búza árra:

1ső nap	6 f. 54 kr.
2dik „	7 „ 6 „
3dik „	6 „ 40 „
4dik „	6 „ 36 „

Kérdés: mi volt azon hónapban a' búzának középárra?

A' négy számnak öszvese: 27 f. 16 kr.

$$\text{Ennek } \frac{1}{4} \text{ része} = \frac{27\text{ f. } 16\text{ kr.}}{4} = 6\text{ f, } 49\text{ kr.}$$

tehát a' búzának középárra volt azon hónapban 6 f. 49 kr.

Illyen kérdéseknél tekintetbe szokott jönni a' piaczi árrnak legfelsőbbe és legkisebbike, mondván hogy: legnagyobb árra volt 7 f. 6 kr. legkisebb pedig 6 f. 36 kr,, és ha csak ezen két végső szám közt kívántatna a' középszám, ez lenne: $\frac{13\text{ f. } 42\text{ kr.}}{2}$ $=6$ f. 31 kr.; 2 krral nagyobb mint az elébbi.

Ott, hol rendes hétivásárok tartatnak, mindennémü gabonának és termésnek piaczi árra felíratik vagy nyomtatásba is tétetik. Ha p. o: tudni akarnók, mi volt egy vagy más terménynek középárra egész év alatt, meglelnénk azt a' jegyzékekből őszveadván az 54 heti árrokat, és az öszvest 54 el elosztván.

Ha pedig már minden hónapban a' középárr megtaláltatott, csak a' 12 hónap' középárrát adnók öszve 's öszvesét 12vel elosztanók.

3.) *Példa*: A' kézimunka' árra kisebb vagy nagyobb a' szerint, mentül kevesebb vagy több a' dolog, vagy mentül több vagy kevesebb a' munka kereső. Ha a' különbféle részeiben az évnek dolgosokra van szükségem, ezeket különböző napszámmal fizetvén, tudni akarom mi volt az évben általjában egy napi munka' bére, szintigy találommeg középértékét:

Februariusban fizettem napszámért		—	f.	48	kr.
Aprilisban	»	»	1	» 6	»
Majusban	»	»	1	» 12	»
Junius és Juliusban	»	»	1	» 30	»
Augustusban	»	»	1	» 18	»
September és Octoberben		»	1	» 3	»
November és Decemberben		»	—	» 57	»

Kérdés: mennyibe jött átaljában egész év alatt egy napszám?

A' hétféle érték' öszvese = 7 f. 54 kr.
ennek hetedrésze a' kívánt középszám = 1 f. 7,7 kr.

Szinte idetartoznak azon kérdések: mennyit költöttünk átaljában egy egy nap, ha költségeink változók és külömböznek egymástól.

4.) *Példa*: Ki a' meleg' változását visgálja, egy könyvecskét tart, mellybe mindennap beírja, mennyit mutat melegmérője p. o: délben, reggel vagy estve. Ha könyvét pontossággal viszi, háromszor írjabe ezt minden nap, mint említém:

reggel, mindenkor ugyan azon órában, délben és estve. Ha egy hónap lefolyt, a' 30 vagy 31 napok' számait öszveadja, 's azt 30 vagy 31el elosztja 's igy találja meg a' közép melegséget azon hónapra. Meglévén igy minden hónapja, külön külön veheti p. o: a' tél', a' tavasz', a' nyár' és ősz' három három hónapjából a' közép melegséget. Ha a' reggeli, déli és estveli állást adja öszve, ebből egy napnak találja meg közép melegségét, azt hárommal elosztván; 's a' t.

5.) *Példa:* A' gyalog ember, futó, vagy útazó, szinte igy a' kocsizó vagy lovagló, külömböző sebességgel halad p. o: egy napi útjában, mi magában is természetes. Ha a' különböző sebessége ismerem, abból könyen megtalálom a' közép sebességet. Hat óra alatt nyargalt be valaki a' városba:

Első orában megtett		$2\frac{1}{2}$	mérföldet
másodikban	»	$2\frac{2}{3}$	»
harmadikban	»	3 —	»
negyedikben	»	$2\frac{2}{5}$	»
ötödikben	»	$2\frac{1}{6}$	»
hatodikban	»	$1\frac{17}{30}$	»

Kérdés: mennyire van a' város, és mi volt közép sebessége?

Először mondhatom hogy: legnagyobb sebessége a' harmadik órában volt, legkisebb pedig a' hatodikban.

A' mérföldek' öszvese $= 14\frac{9}{30}$ mérföld,

jön pedig általjában egy órára: $\frac{14\frac{3}{10}}{6} = 2{,}3833$ mérföld, ez: 9533,2 öl, 's jön egy perczre: $\frac{9533{,}2}{60} = 158{,}9$ öl sebesség.

6.) *Példa*: A' termések, a' jobb vagy roszabb időjárás által, jobbak vagy roszabbak, nagyobbak vagy kisebbek. Ha szántóföldeimet minden évben egyénlő szorgalommal munkálom 's bé is vetem, termésem mindazáltal különbféle. Elvetettem pedig minden évben rendesen 240 p. mérő gabonát, 's volt termésem 8 egymást követő évben:

1.)	2640	p. mérő
2.)	3172	»
3.)	2565	»
4.)	6805	»
5.)	1702	»
6.)	2374	»
7.)	2001	»
8.)	3540	»

Kérdés: mi volt közép termésem, 's hány mag termett egy után?

Legjobb termésem a' 4dik, legroszabb 5dik évben volt.

Öszvese a' 8 évi termésnek = 24799 p. mérő, ezt 8al elosztván, jön középtermés egy évre:

$$\frac{24799}{8} = 3097\frac{5}{8} \text{ p. mérő,}$$

és egy posonyi mérő adott: $\frac{3097\frac{5}{8}}{240} = \frac{3097,625}{240} =$ $= 12,9$, vagy, közel 13 mérőt, és szinte mindegyik szem is 13 szemet.

7.) *Példa*: Valamelly városban 65600 ember lakik. Az elmult 6 év alatt sok betegség érte a' nép ᶜᵗ's a' halottak' száma következő volt:

1ső	évben	1968
2	»	2497
3	»	2157
4	»	2624
5	»	1845
6	»	1389

Kérdés: hány holt jön egy évre általjában, és hány 100 lakosra?

Öszvesszám 6évre = 12480; egy évre $\frac{1}{6}$ = 2080. 65600 ból meghal egy év alatt 2080, tehát minden százból:

$$\frac{2080}{656} = 3{,}17$$

kevéssel több háromnál.

c) Némelly testek' nehézsége vagy súllya.

K. Tudjuk hogy a' testek különbféle nehézségűek; hogy p. o: az arany nehezebb mint a' réz, a' réz nehezebb mint a' kő, a' kő nehezebb mint a' fa, a' fa nehezebb mint az olaj 's a' t. Miként hasonlítjuk mi ezeket a' testeket öszve?

F. Hogy egyenlő értelme legyen a' nehézségeknek, szükséges, hogy minden test' nehézségét ugyan azon egy testnek nehézségéhez hasonlítsuk. Ez pedig a' víz; 's ha mondjuk p. o: hogy a' vasnak nehézsége 7, azt értjük alatta, hogy 7szer olly nehéz mint a' víz.

K. Miként jutunk ezen öszvehasonlításhoz?

F. Veszünk bármelly kis koczkamérőt, p. o: egy koczkahüvelyt, 's ha ezt telitöltjük tiszta vízzel, nevezzük nehézségét, bármennyi legyen az, 1nek. Ha ugyan ezen koczkahüvelyt valamelly érczel teliöntjük 's megmérjük, nehézségét a' viz' nehézségével elosztván, megtaláljuk mennyiszer nehezebb a' víznél, p. o:

Ha a' víz, melly a' koczkába fér: $2\frac{1}{2}$ lat, és a' koczkát ónnal öntöm teli, melly megméretvén $28\frac{1}{2}$ latot nyom; ha pedig arannyal öntöm teli 's ez 45 latot nyom, következtetem, hogy az ón $\frac{28,5}{2,5} = 11,4$ szerte; az arany pedig: $\frac{45}{2,5} = 18$ szorta nehezebb mint a' víz.

K. Igen, de nem lehet minden testet olvasztani vagy a' koczkába tölteni; miként tudjuk meg azoknak súllyát, mellyek nem olvaszthatók, mint a' kövek, fák 's a' t.?

F. Erre következő tapasztalás vezetett.

Minden test, ha vízbe mártatik, és abban függvén méretik meg, éppen annyit veszt el sullyából, *mennyit az általa félreháritott víz nyom*; az az: *éppen annyit veszt, mennyit azon víz nyom, mellynek helyit foglalja.* Ha elébbi példánkat megtartjuk, ezt így magyarázom meg: A' koczka hüvely víz nyomjon mint elébb: $2\frac{1}{2}$ latot, koczka nélkül (az edeny nélkül), ha én aranyból éppen ekkora koczkát alkotok, melly az edénykébe fér, 's ezt megmérem, nyomni fog 45 latot; ha most én ezen arany darabot a' vízben mérem meg (t. i: ha egyik serpenyőm helyett az arany egy fonalon a' vízben lógg), azt találom, hogy nem nyom többé 45 latot, de éppen $2\frac{1}{2}$ lattal kevesebbet, az az: $42\frac{1}{2}$ latot; annyit vesztett tehát sullyából, mennyit nyom a' hozzá hasonló nagyságú vagy terjedségű víztömeg.

Mit itt mondok, minden testre alkalmazható.

Ha tehát megakarom tudni, melly sullya van valamelly testnek, vagy is: mennyiszerte nehezebb a' víznél, következőkép fogok bánni:

Bármelly formában legyen a' test, azt előre megmérem pontosan; és sullyát feljegyzem. Ezután egy pohár vízbe (vagy ha nagyobb tér kell, nagyobb-edénybe) mártom azt, meghagyván serpenyömben valamennyi nyomatot. Legelső következése a' bémártásnak az, hogy a' nyomatok serpenyője lejebb esik. Most annyi nyomatot veszek ki a' serpenyőből, mennyi szükséges, hogy egyne sully állítassék elé; vagy ha a' serpenyőből nem akarok nyomatokat kivenni, a' mérték' másik karját terhelem más nyomatokkal mind addig, míg az egyenlőséget elértem. Megjegyezvén ezeket a' nyomatokat, számokkal elosztom az előbbenit 's részesem a' test' sullyát adja.

Példánkban arany darabom nyomott a' légben 45 latot, a' vízben pedig csak $45 - 2\frac{1}{2} = 42\frac{1}{2}$ latot, vagy is: a' mérő' másik szárnyára $2\frac{1}{2}$ latot kellett raknom, hogy az egyensúlly előjőjjön; azért osztom a' 45öt 2 és $\frac{1}{2}$ el, 's lesz az arany' súllya $\frac{45}{2\cdot5} = 18$.

Igy tudjuk következő érczeknek súllyát:

Platina	olvasztott	20,8
»	vert	21,3
Arany	olvasztott	19,2
»	vert	19,3
»	természeti	18,0
Kényeső	folyó	13,5
»	fagyott	15,0
Ón		11,4
Ezüst	olvasztott	10,4
»	vert	10,6
Réz	olvasztott	8,7
»	vert	9,0
Vas	öntött	7,2
»	vert	7,78
Aczél		7,7
Czin		7,8

1.) *Példa*: Ha az érczek' sullyát ismerjük, könnyen meggyőződhetünk a' felől, hogy p. o: réz é vagy arany, ezüst é vagy más ércz valamelly pénzdarab, vagy ékesség; mert csak a' légben és vízben mérjük meg egymásután 's mindjárt tudjuk.

Pénzt találván egy ásó, senki nem tudta megmondani, vallyon arany é vagy nem, mit talált; de megmérve $4\frac{1}{2}$ lat nehéz volt, a' vizben pedig csak 4 lat; kérdés, arany volt é a' pénz?

$$\text{Sullya: } \frac{4,5}{0,5} = 9$$

melly csak a' réznek felel meg.

2.) *Példa:* Egy kis poharkát vevén, azt arany gyanánt fizettem, de honn ötlött eszembe, hogy tán nem arany. Megmérem, 's nyom $7\frac{1}{4}$ latot; megmérem a' vízben is, és kell a' mérő' másik szárnyára 198 grán; kérdés: arany volt é a' pohár?

$$7\frac{1}{4}\text{ lat} = 240 \times 7,23 = 1740 \text{ grán},$$

$$\text{az ércz' sullya: } \frac{1749}{198} = 8,9, \text{ közel } 9,$$

nem egyébb tehát poharam, mint aranyozott réz, mert ezüst sem lehet, minek sullya 10et felülmul.

3.) *Példa*: Ha ez a' 100 fontos vas nyomat arany lenne, hány fontot nyomna? kérdé a' tanító minap egyikünktől.

Megkeresem, mennyiszer nehezebb az arany az öntött vasnál, miből készitik a' nyomatokat, s' találom elosztván a' vas' sullyával az arany sullyát, mi: $\frac{19,2}{7,2} = 2,6666$, sokszorozván ezt 100 al, nyomna az arany mázsamérő 266,66 fontot.

Hát ha ezüstből lenne?

$$\frac{\text{Ezüst: } 10,4}{\text{Vas: } 7,2} = 1,4444; \text{ nyomna } 144,44 \text{ fontot.}$$

4.) *Példa*: Egy zsacskó rézpénzel teli 87 és $\frac{1}{2}$ font, mit eltudok vinni; mennyit nyomna ez a' zsacskó, ha réz pénz helyett platina pénzel lenne teli?

$$\frac{\text{Platina: } 21,3}{\text{réz: } 9} = 2,36666$$

nyomna a' zsacskó: $87,5 \times 2,36666 = 207,08$ fontot.

5.) *Példa*: A'barométer (mellyet hibásan időmérőnek nevezünk, de mi nem egyébb, mint a' lég nyomásának mérője) kényesővel van megtöltve, és közép állásában oszlopa nálunk $28\frac{1}{2}$ hűvely magos. Ezen oszlop tudjuk, egyensullyban áll a' földünket mindenfelől kőrülvévő léggel. Kérdés: millyen magosnak kellene olly barometer oszlopának lenni, mellyben kényeső helyett víz van?

A' kényeső 13,5 szörte nehezebb a' víznél, oszlopa a' vízi barometernek tehát:

$$28,5 \times 13,5 = 364,75 \text{ hüvely},$$

$$\text{vagy: } \frac{364,75}{12} = 30 \text{ láb } 4,75 \text{ hüvely magos.}$$

Némely köveknek következő súllya van:

Saphir	4,8
Rubin	3,9
Granat	3,8
Gyémánt	3,6

A' bazalt, Jaspis, Granít, Carniol, Smaragd, Alabastrom és a' márványok 2,7 legfelyebb 2,8 sullyuak.

Az olajok könnyebbek a' víznél, s' csakugyan:

Lenolaj	0,94
Dió olaj	0,94
Mák olaj	0,92
Repcze olaj	0,92
Fa olaj	0,91
Terpentin olaj	0,75
Hegy olaj	0,75

A' legerősebb pálinka borszesz	0,79
Sör	1,03
Bor	1,02
Tej	1,04
Méz	1,45

d) Földünk nagysága.

1. K. Tudjuk, hogy földünk legnagyobb kerülete az egyenlítőn 5400 mérföld. Mindegyik kör illy nagy, melly a' golyot körülveszi?

F. Természetes, hogy minden kör, melly a' föld' két sarkán keresztül megy, egyenlő nagyságú 's csak azért kisebb valamivel 5400 mérföldnél mert a' föld, két tengelyinél bévan lapulva, az az:

formája ollyan, mint az almájé vagy a' narancsé. De ha az egyenlítővel egy irányban gondolunk köröket, ezek annyival kisebbek, mentül közelebb érünk a' tengelyhez, míg végre ott hol ezek vannak csupa pontra érünk és a' földnek semmi kerülete nincs. Erről ki ki meggyőződhetik, vagy a' föld' golyója, vagy bármelly más golyó által, ha azt figyelemmel tekinti.

2. K. Ha mondom, hogy a' föld' valamelly pontja 5400 mérföldet tesz 24 óra alatt, mig a' föld egyet fordul tengelyén; ez tehát csak az egyenlitőkörnek pontjairól értetődik?

F. Ugy van, mert p. o: olly körpontja, melly csak 4800 mérföld, nem tehet 24 óra alatt nagyobb útat 4800 mérföldnél, a' tengelyek pedig nem is látszanak mozdulni.

Ezen körök, mint említénk, mentül közelebb jönnek a' tengelyhez, annál kisebbek, tehát különböző tengelyi távoluk szerint változnak, melly távolt: *tengely magosságnak* vagy a' föld valamelly pontja' szélességének nevezünk. Ha p. o: azon kört vesszük, melly a' földgolyón Pesten keresztül vonatik, de mellynek minden pontja egyenlő távolyságban van az egyenlítőtől, ezen kör már természetesen kisebb 5400 's nem több 3600 mérföldnél.

Igy tehát az egyenlítő valamelly pontja, 1óra alatt 225 mérföldet tesz meg; a' Pesten keresztül menő kör' pontja, vagy Pest, ha ezen várost vesszük illy pontnak, nem tesz több mérföldet $\frac{3600}{24} = 150$ nél.

3. K. Földünk' kerekségét és tengelyét ismerjük, 's ez által számittatott az egész golyó' kerülete vagy térszine 9278960 négyszeg mérföldnek; hogy kell ezt a' térszínt érteni?

F. Nem egyébként, mint azon feltétel alatt, hogy az egész föld' színe, és hegyek, völgyek, vizek, mind egyenlően síknak vétetnek. Valódi igaz is az, hogy a' föld' nagyságához képest a' legnagyobb hegyek is elenyésznek, mert már jókora nagy golyon is alig érezhetnénk a' legnagyobb hegyet is, ha ezt természeti aránya szerint a' golyóra tennénk; 's legfelyebb ollyan lenne földünk kis formája hegyeivel együtt, mint a' narancs, és az ezen gyümölcs héjján érezhető göröngyök képviselhetnék legmagasb hegyeinket.

4. K. Tudjuk, hogy földünk' nagyobb részit víz borítja; melly részit foglalják el a' tengerek?

F. Ha a' föld' egész tértszínét egynek nevezzük, jön ebből

a' szározra:	0,2752
a' vizre pedig:	0,7248
öszves:	1,0000

következésképp a' száraz: $9278960 \times 0,2752$
a' víz pedig: $9278960 \times 0,7248$.

vagy, a' száraz:	2542661	négyszeg mérföld
a' víz pedíp:	6736299	» »
Öszvesen:	9278960	» »

's e' szerint a' víz majd háromszor annyi helyet foglal el földünkön mint a' száraz.

5. K. Miként oszlik el a' száraz föld mennyisége, az 5 földrésze közt.

F. Minden földresz közt legkisebb Europa, utánna következik Ujhollandia a' sok apró szigettel 's ezeket mind öszvevén *Oceániának* nevezzük, ezutánjön Afrika, utánna Amerika, 's a' legnagyobb földrész Asia. A' térszin pedig következőképen oszlik fel köztök.

Europa térszíne:		197540	négyszeg	mérföld.
Asia	»	818652	»	»
Afrika	»	528652	»	»
Amérika	»	792237	»	»
Oceánia	»	205580	»	»
Öszvesen:		2542661	mint elébb.	

6. K. A' föld' üregtartalmát miként lehetne megtudni?

F. Tudjuk, hogy a' földgolyó' nagyobbik tengelye vagy egyenlítői átmérője 1722 mérföld, a' kisebbik pedig, mellyen mindennapi forgását végzi 1716, 4 mérföld. Sokszorozván ezen számokat együtt, és a' golyó kerületivel, kí jön üregtartalma: 2657804585 koczka mérföldre.

Annak, ki számítani akarná: hány mázsát nyom az egész földgolyó', mondom, hogy nehézsége vagy sullya 6, 8szor akkora mint a' vízé, és hogy egy koczka láb víz 56 fontot nyom.

7. K. Földünk legnagyobb távola a' naptól 20755943 mérföld; soha nincs pedig a' naphoz közelebb 20577649 mérföldnél. Mekkora lehet a' föld' útja mérföldekbe számítva?

F. Közép távolát a' naptól ismervén, azon kör, mellyben napkörülti útját megteszi, hosszított és 129958221 mérföldet tesz. Ezen kört megfutja földünk egy év alatt, melly 365 nap, 5 óra, 4 percz és $51\frac{1}{3}$ másodpercz, vagy napokban fejezve ki: 365,256383 nap.

Teszen e' szerint minden nap:

	355800	mérföldet	
egy ora alatt:	14800	»	
egy percz alatt:	246	»	=984000 ölet

és egy másodpercz alatt: 4,1 mérföldet, vagy: 98400 lábot.

---

e) *Különböző sebességek.*

1. K. A' föld e' szerint iszonyú sebességgel mozog évi útjában: ez előttünk valóban megfoghatatlan sebesség, mert ha felveszem; hogy jófutó ló két mérföldet tesz egy óra alatt, a' föld addig 14800 mérföldet haladott, tehát: 7400 szorta sebesebben ment; 's igy kellene a' lónak szünetlen $308\frac{1}{2}$ nap futnia, mig a' föld' egyórai útját megtenné. Van e' ennél nagyobb sebesség a' természetben?

F. Némelly plánéták, de kivált a' kométák még sebesebben haladnak a' nap körül; de mind valamennyi sebességet felülmulja a' világ' vagy a' súgár' sebessége. Tudjuk pedig számos visgálatból, hogy a' nap sugárja földünkre 496 másodpercz alatt ér, 's ez: 8′ 16″; tesz tehát 1 másodpercz alatt 41750 mérföldet, melly sebesség 10180 szorta nagyobb, mint földünké napkörülti útjában. Ennél nagyobb sebességet a' természetben nem ismerünk.

2. K. Ha tehát többféle sebességet ismerünk, hasonlításuk által példákat adhatunk.

F. Számos tapasztalások által különbféle sebességeket ismerünk, mellyek közül a' legnevezetesbeket itt feljegyzem.

Itt minden sebesség legnagyobb erejében van véve és csakugyan egy másodperczre számítva.

P. o: Az ágyú golyó' sebessége mint kilövetik, csakugyan 2300 láb egy másodperczre, de ha a' golyó útját folytatná, ezen sebesség mindég kisebb kisebb, mi a' lég' ellentállásából következik; azért is veszik több írók az ágyúgolyónak közép sebességét, ha ezzel nagy útat számítnak, 600 lábra egy másodperczben. Igy halad a' gőzszekér vasúton legnagobb sebességében egy ángol mérföldet egy percz alatt, mi egy másodperczre 87 lábot ád, mert egy ángol mérföld 869,44 öl; de ezen sebesség csak addig tart, mig a' gőz legnagyobb erejében van, és a' gőzkocsik közép sebessége 70nél alig több.

a) A' folyóvizek sebessége 3 és 4 láb közt változik. A' Dunáé 5 től 6 ig is megy; az Amazoné 7, 3; és a' legsebesebbek 12 őt felül nem múlják.

b) A' szél' sebessége különböző.

Középszerü és legközönségesebb .	10	láb.
Szélvész	50	»
Legerősebb Orkán, zivatar . . .	120	»
c) Hang a' légen keresztül . .	1023	»
Az üregbe zuhanó lég	1210	»
Puska lövés (golyó)	1520	»
Ágyú golyó 24 fontos	2330	»
Szélpuska golyó, 100 szorta összenyomott léggel	650	»
d) Sebesen haladó hajok a' tengeren	14	»
Gőzhajók' legnagyobb sebessége .	21	»
Közönséges posta kocsi	12	»
Angol útazó kocsik	15	»
Angol futó lovak	43,3	»
Tevékkeli utazás	6,5	»
Kutyákkali sibériában	3—4	»
Iramszarvas szán előtt	25	»

e) A' sebesen gyalogló ember minden másodperczben két lépést tesz; ha mindegyik lepése $2\frac{2}{3}$ lábnyi, sebessége 5,3 's ekkor egy mérföldet $1\frac{1}{4}$ óránál kevesebb időben gyalogol.

A' sasról mondatik, hogy egy óra alatt 15 mérföldet repül, ekkor sebessége . . 100 láb.

A' posta galamb, mint mondatik .	140	»
Emberi kar, hajtja a' követ . . .	50	»
A' légballon' sebessége változik 20tól	50	»
Czethal	13	»
Agár, nyul után	79	»
Kesejű	71	»
Légy, 600 szárnyütéssel 1 másodpercz alatt	5	»
Csiga	0,005	»

Ebből furcsa kérdéseket is lehet tenni; p. o: mennyi idő alatt másznά körűl földünket a' csiga?

5400 mérföld = 21600000 öl = 12600000 láb

és: $\frac{129600000}{0,005}$ = 25920000000 másodpercz = 7200000 óra = 300000 nap = 274 év alatt közel, melly útat a' földpontja 24 óra alatt, a' sugár pedig $\frac{1}{7}$ rész másodpercz alatt megtesz.

Pótlék.

Sokszorozási példák.

1.) Egy seregben van 103 batallió gyalogság és 31 osztály lovasság. Mindegyik gyalog batallióban 1360, mindegyik lovasban 200 ember. Kérdés: hány katonából áll a' sereg. Mennyi a' gyalogok, lovasok és lovak száma?

2.) Hányat üt valamelly óra' 365 napból álló év alatt, ha egyszerűen üti az órákat, vagy nem ismétel? Hányat üt az ismételő óra, melly minden fertályban az orákat ismételi?

3.) Hány búza szem van egy posonyi mérőben, ha egy icze 15360 szemet foglal és egy mérő 72 iczét?

4.) Valamelly szántóföld hossza 540 öl 's levan vetve buzával; szélességében a' földnek van 465 sor vetés, egy ölnyi sorban van 108 kalász, minden kalászban 21 szem. Kérdés: hány búza szem termett a' szántóföldön.

5.) 15 halász csonak 35 nap halász, kihuzza mindegyik 14szer napjában hálóját, 's általjában véve mindenkor 17 halat fog. Kérdés: mennyi hal fogatott öszvesen?

6.) 23756 emberből álló katona sereg tartására általjában minden személyre számitván, kell egy hétre 5 f. 30 kr. Kérdés: mennyi pénzre van szükség minden fertály évben ($\frac{1}{4}$ év 13 hét lévén)?

7.) Ha ezen seregben mindegyik katonának 17 lat puskapora és 4 font 14 lat ón golyója van, mennyi puskaport és ónt visz magával?

8.) Hány magot ád valamelly 15 szárú plánta, mindegyik szárán 13 virág 's mindegyik virágban 49 mag lévén?

9.) Mig a' nagy kerék egyet fordul, a' malomkő forog 28 szor; ha a' nagy kerék 4szer fordul egy percz alatt, hány fordulást tesz a' kő egy óra alatt?

10.) Valamelly ostromlott várban 184 ágyú van; ha minden ágyúból napjában 56 lövés tétetik, hány golyó lövetett ki, ha a' harcz 43 nap tartott?

11.) Egy nagy ángol szövő gyárban 322 takács szék van, mindegyik sző egy nap 26 rőföt. Kérdés: hány rőf szövet készül egy közönséges év alatt ezen gyárban, ha az ünnepekre és szünnapokra 63 napot elhagyunk?

12.) Melly hosszaságú árkot ás 7 ember 28 nap alatt, ha egy ember 2öl és 4 lábnyit végez egy nap.

13.) Ha valamelly országnak területe 5189 négyszegmérföld, és mindegyik mérföldön általjában 4325 ember lakik, mennyi azon országnak népessége?

14.) Ha a' kőmíves valamelly falból 5 öl, 2 láb és 5 hüvely hosszaságút rak, mennyit végez egy fertály év alatt?

15.) Valamelly falu lakosinak minden héten 1876 font lísztre van szüksége. Kérdés: mennyit emésztnek egy év alatt?

16.) 4560 részvény adatik el 65 forintjával. Mennyi a' tőke.

17.) Mennyi annak évi költsége, ki minden héten 18 fl. 42 kr. költ?

18.) Egy Compániában (században) 180 katona lévén, ha minden napra egy egy 13 krt. kap; mennyi öszves fizetése 11 Companiának 3 hétre?

19.) Ki másfél messzely bort iszik minden nap; mennyit emészt egy év alatt? Mennyit, ki $2\frac{1}{2}$ iczét iszik?

20.) Egy nagy ebédnél 116 személy űlt, mindegyik étele, itala 8 fl. 36 krba. került. Mennyibe jött az ebéd?

21.) Valaki 1 fl. 24 krt. költ minden nap, de minden héten 13 forintot félre tesz. Mennyi, évi jövedelme?

22.) Ha az angol nemzeti-adosság kamatja minden perczben 12 f. 42 kr. Mennyi ezen kamat egy év alatt?

23.) Valakinek egy évi jövedelme 2450 forint; a' mult év alatt minden héten 49 forintot adott ki. Kérdés: mennyit költhet a' folyó évben, ha tavali adósságát ki akarja fizetni 's ezen felül 100 forintot félre tenni?

24.) Ha egy cséplő minden nap 16 kévét csépel, minden kéve $\frac{1}{4}$ mérő és 20 fontot nyom. Hány posonyi mérőt fog 27 ember 16 nap alatt csépelni 's mennyit fog a' búza nyomni?

25.) Mennyi gabona terem 41560 hold szántóföldön, ha minden holdon általjában $17\frac{1}{2}$ posonyi mérő terem, 's mennyit nyom ezen gabona, ha egy posonyi mérő általjában 71 font?

26.) Ha egy lövés puskapor $\frac{3}{4}$ lat, a' golyó pedig 2 lat 's minden katona 60 lövést visz a' háborúba; kérdés: mennyi ónat és mennyi puskaport kellett öszvesen 83740 ember közt felosztani?

27.) Ki minden nap 2450 lépést tesz, hány mérföldet gyalogolna egy év alatt, ha egy mérföld 10000 lépés?

28.) Ha egy messzely víz 1152 csepp, hány csepp megy egy tíz akos hordóba? Egy akó 64 icze lévén.

29.) Ha a' Dunában minden percz alatt közönséges vízállással 3740 akó folyik le; hány akó folyik egy nap, egy év alatt, és hány csepp?

30.) Egy négyszegöl térre középszerű jó eső által 1 óra alatt másfél akó víz esik; kérdés: mennyi víz esik valamelly 84500 holdat foglaló térre (minden holdra 1500 négyszeg ölet vevén), ha az eső 40 nap tart?

Osztási példák.

1.) Ha valamelly utazó 4670 mérföldet útaz egész év alatt; hány mérföldet tesz 1 hónap, 1 hét, 1 nap alatt?

2.) 44800 öl fonal 25 csomóban van; hány öl van mindegyik csomóban?

3.) Hány üng kerül ki 3460 rőf gyolcsból, ha mindegyikre $5\frac{1}{2}$ rőf kívántatik? (Egy pár üngre 11 rőf.)

4.) A' szobának tére 900 négyszegláb, széle 45 láb, mennyi a' hossza?

5.) Ha 1440 katonát ugy állítunk, hogy egy sorban 96 álljon; hány illy sor kerül ki?

6.) Mennyi ideig kell hajókázni Fiumétől Gibráltárig, ha a' távol 1280 mérföld, a' hajó pedig egy óra alatt 7 mérföldet halad?

7.) London városa 102 kerületbe van osztva; ha lakosai' száma 1,638000; mennyi jön mindegyik kerűletre?

8.) Magyarország' területe 4182 geografiai négyszegmérföld, lakosi' száma 1833ra 11,223587. Erdélyé 1006 négyszegmérföld, lakosai' száma 1,930259.

A' katonai őrző határoké 714 négyszegmérföld, lakosok' száma 1,041975. Kérdes: hány lakos jön mindegyik részből egy egy négyszegmérföldre? Öszvevévén a' 3 terjedséget és lakosok számát, kívántatik, hány lakos jön általjában 1 négyszeg mérföldre?

9.) Van valamelly ostromlott várban 375 hordó liszt, kell minden nap belőlle $8\frac{1}{2}$ hordó; mennyi ideig fog tartani az egész?

10.) Van 6720 mázsa szénánk; hány fontot lehet adni egy egy ökörnek, hogy 322 darabot 45 nap kitarthassunk?

11.) Ha minden juhomnak egy nap másfél font szénát adok, 84 nap kitarthatom 8500 darabból álló nyájamat. Mennyit adhatok ebből a' szénából, ha juhaim száma 11000?

12.) Valamelly községnek 36000 darab szarvas marhája van, ezen szám az év folytában egyharmadával szaporodott; az egésznek egy nyolczadrésze levágatott, és a' maradék' ötödrésze eldöglött. Kérdés: mennyi maradt?

13.) Pestből Debreczenbe vasút állítatik, 's kell reá 1,650000 forint. Ha egy részvény 300, 400, vagy 500 forint; hány részvényre válik az egész tőke mindegyik esetben?

Ha a' részvények' száma 1650, 1980, 2310, vagy 3300; mi lesz értéke egy egy részvénynek mindegyik esetben?

14.) Hány 12 akós hordó kell 3900 akó bornak?

15.) Hány aranyot lehet verni egy mázsából, ha 5 arany 1 lat?

16.) Ha 3750 forintot ugy osztunk el kétfelé, hogy az egyik 480 forintal többet kapjon mint a' másik. Kérdés: mennyi egyik egyik' része?

17.) Négy ember öszves jövedelme 5760 forint. Mennyit költhet egyik egyik minden nap?

18.) 450 zsák gabona eladatott 7875 forintért; mennyi volt minden zsákban, ha egy mérő' árra 5 forint?

19.) 1260 forint ugy osztassék el három személy közt, hogy a' második három annyit vegyen ki mint az első, ez pedig két annyit mint az utolsó. Mennyi egyik egyik' része?

20.) Valamelly szökő kútból minden percz alatt $\frac{1}{2}$ akó víz foly, és 3600 családot ellát (minden családban 8 személy lévén), kérdés: mennyi víz jut egy napra mindegyik családra?

21.) Mercúr planéta 35 év, 242 nap és 20 óra alatt 148 szor fordul a' nap körül; mennyi idő kell egy fordulására?

22.) Ha egy hold szántóföldön 18 pozsonyi mérő búza terem, minden mérő 80 font kenyeret ád; mennyi földre lesz szükség 4800 család' egész évi eltartására, ha egy család 12 font kenyeret emészt egy nap?

23.) Mennyi tér, vagy szántóföld kell búzának hazánkban, ha a' két haza' öszves népesége 14,195521, 's mindegyik személy általjában $1\frac{1}{2}$ font kenyeret emészt napjában ; feltévén, hogy csak búzából készül a' kenyér és az egész évi szükséget számítjuk?

Ha ezer hold egy négyszegmérföld; hány négyszegmérföld, hány hold, 's hány négyszegöl lesz a' szükséges szántóföld?

24.) Ha valamelly tűzi fegyver vagy ágyú sütetik el a' távolyban, előre a' tüzet látjuk 's csak későbben halljuk a' lövést, 's csakugyan annál későbben, mentül távolabb van a' fegyver; ez attól jön, hogy a' világ' és hangnak sebessége különböző, mellyek tudjuk: a' világé egy másodpercz alatt 41750 láb, a' hangé csak 1023 láb. Ha a' világot látjuk 's a' hang csak fél percz mulva üti meg fülünket p. o: melly a' fegyver' távola?

25.) A' villám után a' dörgés csak 10 másodpercz mulva hallatik; mennyire van a' felhő, mellyből eredett?

26.) Ha a' gyalogló 108 lépést tesz egy percz alatt 's minden lépése 2,4 láb (vagy is: 5 lépése 2 öl); mennyi idő alatt ér Pestről Posonba, ha a' távol 24 mérföld? (egy mérföld 4000 öl.)

27.) Hány illy lépést kell annak tenni, egy percz alatt, ki minden órában $1\frac{1}{4}$ mérföldet akar meg tenni?

28.) Mennyi idő alatt ér valamelly szekér 38 mérföldnyi távolyra, ha kerekének kerülete $18\frac{1}{2}$ láb és a' kerék egy percz alatt 36 szor fordul?

29.) Mennyi idő alatt számlálna meg valaki egy billió aranyot, ha minden perczben 120 at számlál éjjel nappal szünetlenül?

30.) Ha minden másodpercz alatt 6ot számlálunk, 's 12 óráig 24 közt szünetlen számlálunk, mennyi idő alatt érjük el a' billiót?

31.) Ki minden másodpercz alatt 5 betűt tud írni 's minden nap 16 órát ír szünetlen; mennyi idő alatt írna egy billió betűt?

'S ha egy mérsékelt nagyságú 8 adrét könyvben 450 lapon, 40 sor, minden sorban 52 betű áll; hány illy 8 adrét kötet kerülne ki a' billió betűből?

Foglalat.

Első Beszélgetés.

Második Beszélgetés.

Harmadik Beszélgetés.

Negyedik Beszélgetés.

Ötödik Beszélgetés.

Hatodik Beszélgetés.

Hetedik Beszélgetés.

Nyolczadik Beszélgetés.

Kilenczedik Beszélgetés.

Tizedik Beszélgetés.

Pótlék.

Nyomtatta Sollinger J. P. Bécsben.

SZORGALOMNAK

1837.

Jutalom Könyvecske.