Johan Bolyai

Anmerkung.

Die Verfasser des Schulbuchs könnten es doch offenbar nie seyn, wenn allenfalls ein Urtheil hierüber bloß deshalb schief und geringschätzend ausfiele, weil der betreffende Lehrer nicht gehörig Meister der Sache geworden ist.

Zur Erleichterung der Beurtheilung und Vorbereitung, wird es gut seyn, wenn mit dem Wesen der Sache noch nicht Vertraute das vom k. k. Oberstlieutenante Herrn Baron von Vega am Ende des 2. Bandes seiner hochschätzbaren Vorlesungen über die Mathematik angeführte im Druck unter dem Titel: „Kritik der Parallel-Theorie, von Jos. Jos. Joh. Hoffmann. Jena, 1807." fleissig lesen, indem selbst sonst berühmte Mathematiker hinsichtlich dieses Gegenstandes nicht nur ~~[illegible]~~ im Dunkeln, sondern Beweise # geben, die unvermöglich und ungültig sind — die sich jedoch ~~einmal [illegible] Falle~~ nun einmal zur Wahrheit der Grundsätze wohl müssen bekennen müssen.

---

beweisen und

Handschrif von Johan Bolyai

Appendix,
Scientiam Spatii

absolute veram exhibens;
a veritate aut falsitate Axiomatis XI. Euclidei (a priori haud unquam decidenda) independentem; adjecta ad casum falsitatis quadratura circuli geometrica.

Auctore
Johanne Bolyai de Eadem
Geometrarum in Exercitu
Caesareo Regio Austriaco
Castrensium Capitaneo.

Agropoli sive Maros-Vásárhelyini
1832.
Typis Collegii Reformatorum per
Josephum et Simeonem Kali de Felső-Vis.

354 Bolyai János: Appendix. (A nyomtatott munka B. J. sajátkezű bejegyzéseivel.) 27 levél. Bolyai A. 3. Tud. Akadémia.

Appendix Prima

Scientia Spatii absolute vera; nulli quovad parallelas supposito Axiomati (Euclideo vel alii simili) innixa.

Auctore Johanne Bolyai de eadem, Geometrarum in Exercitu Caesareo Regio Austriaco Castrensium Lo., cumtenente Primario.

Auctoris Filio.

Handschrift Wolfgang Bolyai

Fr. Schmidt

EXPLICATIO SIGNORUM.

$\widetilde{ab}$ denotet	complexum *omnium* punctorum cum punctis a, b in recta sitorum.
$a\tilde{b}$ - - -	rectae $\widetilde{ab}$ in a bifariam sectae dimidium illud, quod punctum b complectitur.
$\widetilde{abc}$ - - -	complexum *omnium* punctorum, quae cum punctis a, b, c (non in eadem recta sitis) in eodem plano sunt.
$ab\tilde{c}$ - - -	plani $\widetilde{abc}$ per $\widetilde{ab}$ bifariam secti dimidium, punctum c complectens.
abc - - -	portionum, in quas $\widetilde{abc}$ per complexum rectarum $b\tilde{a}, b\tilde{c}$ dividitur, *minorem*; sive *angulum*, cuius $b\tilde{a}, b\tilde{c}$ crura sunt.
$abcd$ - - -	(si d in abc sit et $b\tilde{a}$, $c\tilde{d}$ se invicem non secent) portionem ipsius abc inter $b\tilde{a}$, bc, $c\tilde{d}$ comprehensam; $bacd$ vero portionem plani $\widetilde{abc}$ inter $\widetilde{ab}$, $\widetilde{cd}$ sitam.
$\perp$ - - -	perpendiculare.
$\wedge$ - - -	angulum.
R - - -	angulum rectum.
$ab \triangleq cd$ -	$cab = acd$.
$\equiv$ - - -	congruens *).
$x \frown a$ -	x tendere ad limitem a.
$\bigcirc r$ - -	peripheriam circuli radii r.
$\odot r$ - -	aream circuli radii r.

*) Sit fas, signo hocce, quo summus Geometra *GAVSS* *numeros congruos* insignivit; congruentiam geometricam quoque denotare: nulla ambiguitate exinde metuenda.

§ 1. (Fig. 1.) Si rectam $\widetilde{am}$ non secet plani ejusdem recta $\widetilde{bn}$, at secet quaevis $\widetilde{bp}$ (in abn): designetur hoc per $bn|||am$. *Dari* talem $\widetilde{bn}$, et quidem *unicam*, e quovis puncto b (extra $\widetilde{am}$), atque bam †abn non $>$ $2R$ esse patet; nam bc circa b mota, donec bam †$abc = 2R$ fiat, $\widetilde{bc}$ ex $\widetilde{am}$ aliquando *primum* exit, estque tunc $bc|||am$. Nec non patet esse $bn|||em$, ubivis sit e in $\widetilde{am}$ (supponendo in omnibus talibus casibus esse $am > ae$). Et si, puncto c in $\widetilde{am}$ abeunte in infinitum, semper sit $cd = cb$: erit semper $cdb = (cbd < nbc)$; ast $nbc \frown o$; adeoque et $adb \frown o$.

§ 2. (Fig. 2). Si $bn|||am$; est quoque $cn|||am$. Nam sit d ubicunque in $macn$. Si c in $\widetilde{bn}$ sit; $\widetilde{bd}$ secat $\widetilde{am}$ (propter $bn|||am$), adeoque et $\widetilde{cd}$ secat $\widetilde{am}$; si vero c in $\widetilde{bp}$ fuerit; sit $bq|||cd$: cadit $\widetilde{bq}$ in abn (§ 1), secatque $\widetilde{am}$, adeoque et $\widetilde{cd}$ secat $\widetilde{am}$. Quaevis $\widetilde{cd}$ igitur (in acn) secat in utroque casu $\widetilde{am}$ absque eo, ut $\widetilde{cn}$ ipsam $\widetilde{am}$ secet. Est ergo semper $cn|||am$.

§ 3. (Fig. 2). Si tam br quam cs sit $|||am$, et c non sit in $\widetilde{br}$; tum $\widetilde{br}$, $\widetilde{cs}$ se invicem haud secant. Si enim $\widetilde{br}$, $\widetilde{cs}$ punctum d commune haberent; (per §. 2.) essent dr et ds simul $|||am$, caderetque (§. 1.) $\widetilde{ds}$ in $\widetilde{dr}$ et c in $\widetilde{br}$ (contra hyp).

§ 4. (Fig. 3). Si $man > mab$; pro quovis puncto b ipsius $\widetilde{ab}$ *datur* tale c in $\widetilde{am}$, ut sit $bcm = nam$. Nam datur per (§. 1.) $bdm > nam$, adeoque $mdp = man$, caditque b in $nadp$. Si igitur nam juxta $\widetilde{am}$ f-ratur, usquequo $\widetilde{an}$ in $\widetilde{dp}$ veniat; aliquando $\widetilde{an}$ per b transiisse, et aliquod $bcm = ncm$ esse oportet

§ 5. (Fig. 1). Si $bn \mathbin{|||} am$, *datur* tale punctum f in $\widetilde{am}$, ut sit $fm \simeq bn$. Nam per §. 1. datur $bcm > cbn$; et si $ce = cb$, adeoque $ec \simeq bc$; patet esse $bem < ebn$. Feratur p per ec, ∧lo bpm semper u, et ∧lo pbn semper v dicto; patet u esse prius ei simultaneo v minus, posterius vero esse majus. Crescit vero u a bem usque bcm *continuo*; cum (per §. 4.) *nullus* ∧lus $> bem$ et $< bcm$ detur, cui u aliquando $=$ non fiat; pariter decrescit v ab ebn usque cbn continuo: datur itaque in ec tale f, ut $bfm = fbn$ sit.

6. Si $bn \mathbin{|||} am$, atque ubivis sit e in $\widetilde{am}$, et g in $\widetilde{bn}$: tum $gn \mathbin{|||} em$ et $em \mathbin{|||} gn$. Nam (per §. 1.) est $bn \mathbin{|||} em$, et hinc (per §. 2.) $gn \mathbin{|||} em$. Si porro $fm \simeq bn$ (§. 5.); tum $mfbn \equiv nbfm$, adeoque (cum $bn \mathbin{|||} fm$ sit) etiam $fm \mathbin{|||} bn$, et (per praec.) $em \mathbin{|||} gn$.

§ 7. (Fig. 4). Si tam bn quam cp sit $\mathbin{|||} am$, et c non sit in $\widetilde{bn}$: est etiam $bn \mathbin{|||} cp$. Nam $\widetilde{bn}$, $\widetilde{cp}$ se invicem non secant (§. 3); sunt vero am, bn, cp aut in plano, aut non; atque in casu primo am aut in $bncp$ est, aut non. Si am, bn, cp in plano sint, et $\widetilde{am}$ in $bncp$ cadat; tum quaevis $\widetilde{bq}$ (in nbc) secat $\widetilde{am}$ in aliquo puncto d (quia $bn \mathbin{|||} am$); porro cum $dm \mathbin{|||} cp$ sit (§. 6.), patet $\widetilde{dq}$ secare $\widetilde{cp}$, adeoque esse $bn \mathbin{|||} cp$. Si vero bn, cp in eadem plaga ipsius am sint; tum aliqua earum ex. gr. $\widetilde{cp}$, *intra* duas reliquas $\widetilde{bn}$, $\widetilde{am}$ cadit; quaevis $\widetilde{bq}$ (in nba) autem secat $\widetilde{am}$, adeoque et ipsam $\widetilde{cp}$. Est itaque $bn \mathbin{|||} cp$.

Si mab, mac, ∧*lum* efficiant; tum cbn cum abn nonnisi $\widetilde{bn}$, $\widetilde{am}$ vero (in abn) cum $\widetilde{bn}$, adeoque nbc quoque cum $\widetilde{am}$, nihil commune habent. Per quamvis $\widetilde{bd}$ (in nba) autem positum $\widetilde{bcd}$ secat $\widetilde{am}$, quia (propter $bn \mathbin{|||} am$) $\widetilde{ba}$ secat $\widetilde{am}$. Moto itaque $\widetilde{bcd}$ cir-

ca bc, donec ipsam $\widetilde{am}$ *prima vice* deserat, postremo cadet $\widetilde{bcd}$ in $\widetilde{bcn}$. Eadem ratione cadet idem in $\widetilde{bcp}$; cadit igitur bn in bcp. Porro si $br \mathbin{|||} cp$; tum (quia etiam $am \mathbin{|||} cp$) pari ratione cadit br in bam; nec non (propter $br \mathbin{|||} cp$) in bcp. Itaque $\widetilde{br}$ ipsis mab, pcb commune, nempe ipsum $\widetilde{bn}$ est, atque hinc $bn \mathbin{|||} cp$.

Si igitur $cp \mathbin{|||} am$, et b extra $\widetilde{cam}$ sit: tum sectio ipsorum bam, bcp, nempe $\widetilde{bn}$ est $\mathbin{|||}$ tam ad am, quam ad cp.

§ 8. (Fig. 5). Si $bn \mathbin{|||}$ et $\simeq cp$ (vel brevius $bn \mathbin{|||}\!\simeq cp$), atque am (in $nbcp$) rectam bc ∟riter bissecet; tum $bn \mathbin{|||} am$. Si enim $\widetilde{bn}$ secaret $\widetilde{am}$, etiam $\widetilde{cp}$ secaret $\widetilde{am}$ in eodem puncto (cum $mabn \equiv macp$), quod et ipsis $\widetilde{bn}$, $\widetilde{cp}$ commune esset, quamvis $bn \mathbin{|||} cp$ sit. Quaevis $\widetilde{bq}$ (in cbn) vero secat $\widetilde{cp}$; adeoque secat $\widetilde{bq}$ etiam $\widetilde{am}$. Consequenter $bn \mathbin{|||} am$.

§ 9. (Fig. 6). Si $bn \mathbin{|||} am$, map ∟ mab, atque ∧, quem nbd cum nba (in ea plaga ipsius $mabn$, ubi map est) facit, sit $< R$: tum map et nbd se invicem secant. Nam sit $bam = R$, ac ∟ $\widetilde{bn}$ (sive in b cadat c, sive non) et ce ∟ bn (in nbd); erit (per hyp.) $ace < R$, et af (∟ ce) in ace cadet. Sit $\widetilde{ap}$ sectio (punctum a commune habentium) abf et amp; erit $bap = bam = R$ (cum sit bam ∟ map). Si denique $\widetilde{abf}$ in $\widetilde{abm}$ ponatur (a et b manentibus); cadet $\widetilde{ap}$ in $\widetilde{am}$; atque cum ac ∟ bn et af ∟ ac sit, patet af *intra* $\widetilde{bn}$ terminari, adeoque bf in abn cadere. Secat autem $\widetilde{bf}$ ipsam $\widetilde{ap}$ in *hoc* situ (quia $bn \mathbin{|||} am$), adeoque etiam in situ *primo*, $\widetilde{ap}$ et $\widetilde{bf}$ se invicem secant; estque punctum sectionis ipsis $\widetilde{map}$ et $\widetilde{nbd}$ commune: secant itaque $\widetilde{map}$ et $\widetilde{nbd}$ se invicem. Facile exhinc sequitur $\widetilde{map}$ et $\widetilde{nbd}$ se mutuo secare, si summa internorum, quos cum $mabn$ efficiunt, $< 2R$ sit.

§ 10. (Fig.7). Si tam bn quam cp sit $|||\bumpeq am$: est etiam $bn\,|||\bumpeq cp$. Nam mab et mac aut $\wedge$lum efficiunt, aut in plano sunt.

Si prius; bissecet $\widetilde{qdf}$ rectam ab $\perp$*riter*; erit $dq \perp ab$, adeoque $dq\,|||\,am$ (§.8.); pariter si $\widetilde{ers}$ bissecet rectam ac $\perp$*riter*, est $er\,|||\,am$; unde $dq\,|||\,er$ (§. 7.). Facile hinc (per §. 9.) consequitur, $\widetilde{qdf}$ et $\widetilde{ers}$ se mutuo secare, et sectionem $\widetilde{fs}$ esse $|||\,dq$ (§. 7.), atque (propter $bn\,|||\,dq$) esse etiam $fs\,|||\,bn$. Est porro (pro quovis puncto ipsius $\widetilde{fs}$) $fb = fa = fc$, caditque $\widetilde{fs}$ in planum tgf, rectam bc $\perp$*riter* bissecans. Est vero (per §. 7.) (cum sit $fs\,|||\,bn$) etiam $gt\,|||\,bn$. Pari modo demonstratur $gt\,|||\,cp$ esse. Interim gt bissecat rectam bc $\perp$*riter*; adeoque $tbgn \equiv tgcp$ (§.1.) et $bn\,|||\bumpeq cp$.

Si bn, am, cp in plano sint; sit (*extra* hoc planum cadens) $fs\,|||\bumpeq am$; tum (per praec.) $fs\,|||\bumpeq$ tam ad bn quam ad cp, adeoque et $bn\,|||\bumpeq cp$.

§ 11. Complexus puncti a, atque *omnium* punctorum, quorum quodvis b tale est, ut si $bn\,|||\,am$ sit, sit etiam $bn \bumpeq am$; dicatur F: sectio vero ipsius F cum quovis plano rectam am complectente nominetur L. In quavis recta, quae $|||\,am$ est, F gaudet puncto, et nonnisi uno; atque patet L per am dividi in duas partes congruentes; dicatur $\widetilde{am}$ *axis* ipsius L; patet etiam, in quovis plano rectam am complectente, pro *axe* $\widetilde{am}$ unicum L dari. Quodvis eiusmodi L, dicatur L *ipsius* $\widetilde{am}$ (in plano, de quo agitur, intelligendo). Patet per L circa am revolutum, F describi, cuius $\widetilde{am}$ axis vocetur, et vicissim F *axi* $\widetilde{am}$ *attribuatur.*

§ 12. Si b ubivis in L ipsius $\widetilde{am}$ fuerit, et $bn\,|||\bumpeq am$ (§.11); tum L ipsius $\widetilde{am}$ et L ipsius $\widetilde{bn}$ *coincidunt.* Nam dicatur L ipsius $\widetilde{bn}$ distinctionis ergo l; sitque c ubivis in l, et $cp\,|||\bumpeq bn$ (§. 11.); erit (cum et $bn\,|||\bumpeq am$ sit) $cp\,|||\bumpeq am$ (§. 10), adeoque c etiam in L cadet. Et si c ubivis in L sit, et $cp\,|||\bumpeq am$; tum $cp\,|||\bumpeq bn$ (§. 10.); caditque c etiam in l (§. 11). Itaque L et l sunt eadem; ac quaevis $\widetilde{bn}$ est etiam axis ipsius L, et inter omnes axes ipsius L, $\bumpeq$ est. Idem de F eodem modo patet.

§. 13. (Fig.8). Si $bn\,|||\,am$, $cp\,|||\,dq$, et $bam + abn = 2R$ sit; tum etiam $dcp + cdq = 2R$. Sit enim $ea = eb$ et $efm = dcp$ (§.4.); erit (cum $bam + abn = 2R = abn + abg$ sit) $ebg = eaf$; adeoque si etiam $bg = af$ sit, $\triangle ebg \equiv \triangle eaf$, $beg = aef$, cadetque g in $\widetilde{fe}$. Est porro $gfm + fgn = 2R$ (quia $egb = efa$). Est etiam $gn\,|||\,fm$ (§. 6.); itaque si $mfrs \equiv pcdq$, tum $rs\,|||\,gn$ (§.7.), et r in vel extra fg cadit (si cd non $= fg$, ubi res jam patet).

I. In casu primo est frs non $> (2R - rfm = fgn)$, quia $rs\,|||\,fm$; ast cum $rs\,|||\,gn$ sit, est etiam frs non $< fgn$; adeoque $frs = fgn$, et $rfm + frs = gfm + fgn = 2R$. Itaque et $dcp + cdq = 2R$.

II. Si r extra fg cadat; tunc $ngr = mfr$, sitque $mfgn \equiv nghl \equiv lhko$ et ita porro, usquequo $fk =$ vel prima vice $> fr$ fiat. Est heic $ko\,|||\,hl\,|||\,fm$ (§.7.). Si k in r cadat; tum ko in rs cadit (§.1.); adeoque $rfm + frs = kfm + fko = kfm + fgn = 2R$; si vero r in hk cadat, tum (per I.) est $rhl + krs = 2R = rfm + frs = dcp + cdq$.

§ 14. Si $bn\,|||\,am$, $cp\,|||\,dq$, et $bam + abn < 2R$ sit; tum etiam $dcp + cdq < 2R$. Si enim $dcp + cdq$ non esset $<$, adeoque (per §. 1.) esset $= 2R$; tum (per §.13.) etiam $bam + abn = 2R$ esset (contra hyp).

§ 15. Perpensis §§.13. et 14. *Systema Geometriae, hypothesi veritatis Axiomatis Euclidei XI. insistens dicatur Σ; et hypothesi contrariae super-*

structum sit S. Omnia, quae expresse non dicentur, *in* Σ vel *in S esse*; *absolute enuntiari*, i. e. *illa*, *sive* Σ *sive S reipsa sit*, *vera asseri intelligatur*.

§ 16. (Fig.5). Si *am* sit axis alicujus *L*; tum *L* in Σ recta ⊥ *am* est. Nam sit e quovis puncto *b* ipsius *L* axis *bn*; erit in Σ $bam + abn = 2bam = 2R$, adeoque $bam = R$. Et si *c* quodvis punctum in $\widetilde{ab}$ sit, atque $cp \parallel am$; est (per §. 13.) $cp \simeq am$, adeoque *c* in *L* (§. 11.)

In *S* vero *nulla* 3 puncta *a*, *b*, *c* ipsius *L* vel *F* in recta sunt. Nam aliquis axium *am*, *bn*, *cp* (ex.gr. *am*) intra duos reliquos cadit; et tunc (per §. 14.) tam *bam* quam *cam* < *R*.

§ 17. *L est etiam in S linea, et F superficies.* Nam (per §. 11.) quodvis planum ad axem $\widetilde{am}$ (per punctum aliquod ipsius *F*) ⊥re, secat ipsum *F* in peripheria circuli, cuius planum (per §. 14.) ad nullum alium axem $\widetilde{bn}$ ⊥re est. Revolvatur *F* circa *bn*; manebit (per §. 12.) quodvis punctum ipsius *F* in *F*, et sectio ipsius *F* cum plano ad $\widetilde{bn}$ non ⊥ri, describet superficiem: atqui *F* (per §.12), quaecunque puncta *a*, *b* fuerint in eo, ita *sibi congruere* poterit, ut *a* in *b* cadat; est igitur *F superficies uniformis*. Patet hinc (per §. 11. et 12) *L* esse *lineam uniformem*.

§18.(Fig.7). *Cujusvis plani*, per punctum *a* ipsius *F* ad axem *am* oblique positi, *sectio* cum *F* in *S peripheria circuli* est. Nam sint *a*, *b*, *c*, 3 puncta hujus sectionis, et *bn*, *cp* axes; facient *ambn*, *amcp* ∧lum; nam secus planum (ex §. 16.) per *a*, *b*, *c* determinatum ipsam *am* complecteretur (contra hyp). Plana igitur, rectas *ab*, *ac* ⊥riter bissecantia se mutuo secant (§. 10.) in aliquo *axe fs* (ipsius *F*), atque $fb = fa = fc$. Sit *ah* ⊥ *fs*, et revolvatur *fah* circa *fs*; describet *a* peripheriam radii *ha*, per *b* et *c* euntem, et *simul* in *F* et $\widetilde{abc}$ sitam

nec F et $\widetilde{abc}$ praeter ○ *ha* quidquam commune habent (§. 16.). Patet etiam portione *fa* lineae L (tanquam radio) in F circa *f* mota ipsam ○ $\widetilde{hb}$ describi.

§ 19. (Fig.5). ⊥ris *bt* ad axem *bn* ipsius L (in planum ipsius L cadens) est in S *tangens* ipsius L. Nam L in $\widetilde{bt}$ praeter *b* nullo puncto gaudet (§.14.), si vero *bq* in *tbn* cadat, tum centrum sectionis plani per *bq* ad *tbn* ⊥ris cum F ipsius $\widetilde{bn}$ (§.18.) manifesto in $\widetilde{bq}$ locatur, et si *bc* diameter sit, patet $\widetilde{bq}$ lineam L ipsius $\widetilde{bn}$ in *c* secare.

§. 20. Per quaevis 2 puncta in F linea *L* determinatur (§. 11. et 18); atque (cum ex §§. 16. et 19. L ⊥ ad omnes suos axes sit) quivis ∧ L lineus in F, ∧lo planorum ad F per *crura* ⊥rium, = est.

§ 21. (Fig. 6). Duae lineae Lformes $\widetilde{ap}$, $\widetilde{bd}$ in eodem F, cum tertia Lformi *ab* summam internorum < 2R efficientes, se mutuo secant (per $\widetilde{ap}$ in F intelligendo *L* per *a*, *p* ductum, per $\widetilde{ap}$ vero dimidium illud eius ex *a* incipiens, in quod *p* cadit). Nam si *am*, *bn* axes ipsius F sint; tum $\widetilde{amp}$, $\widetilde{bnd}$ secant se invicem (§.9.); atque F secat eorundem sectionem (per §§.7. et 11.); adeoque et $\widetilde{ap}$, $\widetilde{bd}$ se mutuo secant.

Patet exhinc Axioma XI. et omnia, quae in Geometria Trigonometriaque (plana) asseruntur, *absolute* constare in *F*, rectarum vices lineis *L* subeuntibus: idcirco functiones trigonometricae abhinc eodem sensu accipientur, quo in Σ veniunt; et peripheria circuli, cuius radius Lformis $= r$ in *F*, est $= 2\pi r$, et pariter ⊙ r (in *F*) $= \pi r^2$ (per π intelligendo $\frac{1}{2}$ ○1 in *F*, sive notum 3,1415926...)

§ 22. (Fig.9. Si $\widetilde{ab}$ fuerit *L* ipsius $\widetilde{am}$, et *c* in $\widetilde{am}$; atque ∧ *cab* (e recta $\widetilde{am}$ et *Lformi* linea

$\widetilde{ab}$ compositus) feratur prius juxta $\widetilde{ab}$, tum juxta $\widetilde{ba}$ semper porro in infinitum: erit via $\widetilde{cd}$ ipsius *c* linea L ipsius *cm*. Nam (posteriori *l* dicta) sit punctum quodvis *d* in $\widetilde{cd}$, *dn*|||*cm*, et *b* punctum ipsius L in $\widetilde{dn}$ cadens; erit *bn* ≏ *am*, et *ac* = *bd*, adeoque *dn* ≏ *cm*, consequ. *d* in *l*. Si vero *d* in *l* et *dn*|||*cm*, atque *b* punctum ipsius L ipsi $\widetilde{dn}$ commune sit; erit *am* ≏ *bn* et *cm* ≏ *dn*, unde manifesto *bd* = *ac*, cadetque *d* in viam puncti *c*, et sunt *l* et $\widetilde{cd}$ eadem. Designetur tale *l* per *l*||L.

§. 23. (Fig.9) Si linea Lformis *cdf* || *abe* (§.22.), et *ab* = *be*, atque $\widetilde{am}, \widetilde{bn}, \widetilde{ep}$ sint axes; erit manifesto *cd* = *df*; et si quaelibet 3 puncta *a*,*b*,*e* fuerint ipsius $\widetilde{ab}$, ac *ab* = *n.cd*. erit quoque *ae* = *n. cf*; adeoque (manifesto etiam pro *ab*, *ae*, *dc* incommensurabilibus) *ab* : *cd* = *ae* : *cf*, estque *ab* : *cd* ab *ab* *independens*, et per *ac prorsus determinatum*. Denotetur quotus iste, nempe *ab* : *cd* litera majori ejusdem nominis (puta per X), quo *ac* litera minuscula (ex.gr. x) insignitur.

24. Quaecunque *x* et *y* fuerint; est $Y = X^{\frac{y}{x}}$ (§.23) Nam aut erit alterum (ipsorum *x*, *y*) multiplum alterius (ex.gr. *y* ipsius *x*), aut non.

Si $y = nx$; sit $x = ac = cg = gh$ &, usque quo $ah = y$ fiat; sit porro *cd* || *gk* || *hl*; erit (§.23.) $X = ab : cd = cd : gk = gk : hl$; adeoque $\frac{ab}{hl} = (\frac{ab}{cd})^n$, sive $Y = X^n = X^{\frac{y}{x}}$. Si *x*, *y* multipla ipsius *i* sint, puta $x = mi$, et $y = ni$; est (per praec.) $X = I^m$, $Y = I^n$, consequ. $Y = X^{\frac{n}{m}} = X^{\frac{y}{x}}$. Idem ad casum incommensurabilitatis ipsorum *x*, *y* facile extenditur. Si vero fuerit $q = y - x$; erit manifesto $Q = Y : X$.

Nec non manifestum est, in Σ pro quovis *x* es-

se $X = 1$, in *S* vero $X > 1$ esse, atque pro *quibusvis ab*, *abe* dari tale *cdf* || *abe*, ut sit *cdf* = *ab*, unde *ambn* = *amep* erit, etsi hoc illius qualevis multiplum sit; quod singulare quidem est, sed absurditatem ipsius *S* evidenter non probat.

§.25. (Fig.10) *In quovis rectilineo △lo sunt peripheriae radiorum lateribus aequalium, uti sinus ∧lorum oppositorum.*

Sit enim *abc* = *R*, et *am* ⊥ *bac*, atque sint *bn*, *cp*|||*am*; erit *cab* ⊥ *ambn*, adeoque (cum *cb* ⊥ *ba* sit) *cb* ⊥ *ambn*, consequ. *cpbn* ⊥ *ambn*. Secet *F* ipsius $\widetilde{cp}$, rectas $\widetilde{bn}, \widetilde{am}$ (respective) in *d*, *e*, et fascias *cpbn*, *cpam*, *bnam* in lineis *L*formibus *cd*, *ce*, *de*; erit (§. 20.) *cde* = ∧lo ipsorum *ndc*, *nde*, adeoque = *R*; atque pari ratione est *ced* = *cab*, Est autem (per §.21.) in *L*lineo △ *ced* (heic radio semper = 1 posito) *ec* : *dc* = 1 : sin *dec* = 1 : sin *cab*. Est quoque (per §.21.) *ec* : *dc* = ○*ec* : ○*dc* (in *F*) = ○*ac* : ○*bc* (§. 18.); adeoque est etiam ○*ac* : ○*bc* = 1 : sin *cab*; unde assertum pro quovis △lo liquet.

§. 26. *In quovis sphaerico △lo sunt sinus laterum, uti sinus ∧lorum iisdem oppositorum.*

Fig. 11. Nam sit *abc* = *R*, et *ced* ⊥ ad sphaerae radium *oa*; erit *ced* ⊥ *aob*, et (cum etiam *boc* ⊥ *boa* sit) *cd* ⊥ *ob*. In △△ *ceo*, *cdo* vero est (per §. 25.) ○*ec* : ○*oc* : ○*dc* = sin *coe* : 1 : sin *cod* = sin *ac* : 1 : sin *bc*; interim (§.25.) etiam ○*ec* : ○*dc* = sin *cde* : sin *ced*; Itaque sin *ac* : sin *bc* = sin *cde* : sin *ced*; est vero *cde* = *R* = *cba*, atque *ced* = *cab*. Consequenter sin *ac* : sin *bc* = 1 : sin *a*. *E quo promanans Trigonometria sphaerica, ab Axiomate* XI *independenter stabilita est.*

§. 27. (Fig. 12.) Si *ac*, *bd* sint ⊥ *ab*, et feratur *cab* juxta $\widetilde{ab}$; erit (via puncti *c* dicta heic *cd*) : *ab* = sin *u* : sin *v*. Nam sit *de* ⊥ *ca*; est in △△ *ade*, *adb* (per §25.) ○*ed* : ○*ad* : ○*ab* = sin *u* : 1 : sin *v*. Revoluto *bacd* circa *ac*, describetur ○*ab* per *b*, ○*ed* per *d*; et via dictae *cd* denotetur heic per ○*dc*.

Sit porro polygonum quodvis bfg - - - ipsi $\odot ab$ inscriptum; nascetur per plana ex omnibus lateribus bf, fg &, ad $\odot ab \perp ria$, in $\odot cd$ quoque figura polygonalis totidem laterum; et demonstrari ad instar §. 23 potest, esse $cd : ab = dh : bf = hk : fg$ &, adeoque $dh + hk$ & $: bf + fg$ & $= cd : ab$. Quovis laterum bf, fg - - - ad limitem o tendente, manifesto $bf + fg$ - - - $\frown \bigcirc ab$, et $dh + hk$ - - - $\frown \bigcirc ed$. Itaque etiam $\bigcirc ed : \bigcirc ab = cd : ab$. Erat vero $\bigcirc ed : \bigcirc ab = \sin u : \sin v$. Conseq. $cd : ab = \sin u : \sin v$.

Remoto ac a bd in infinitum, manet $cd : ab$; adeoque etiam $\sin u : \sin v$ *constans*; u vero $\frown R$ (§.1.), et si $dm ||| bn$ sit, $v \frown z$; unde fit $cd : ab = 1 : \sin z$. Via dicta cd denotabitur per $cd \parallel ab$.

§. 28. (Fig. 13.) Si $bn ||| \bumpeq am$, et c in $\widetilde{am}$, atque $ac = x$ sit: erit X (§.23.) $= \sin u : \sin v$. Nam si cd et ae sint $\perp bn$, et $bf \perp am$; erit (ad instar §. 27.) $\bigcirc bf : \bigcirc cd = \sin u : \sin v$. Est autem evidenter $bf = ae$; quamobrem $\bigcirc ea : \bigcirc dc = \sin u : \sin v$. In superficiebus vero Fformibus ipsorum am et cm (ipsum $ambn$ in ab et cg secantibus) est (per §.21.) $\bigcirc ea : \bigcirc dc = ab : cg = X$. Est itaque etiam $X = \sin u : \sin v$.

§.29. (Fig.14.) Si $bam = R$, $ab = y$, et $bn ||| am$ sit; erit in S, $Y = \cot \frac{1}{2} u$. Nam si fuerit $ab = ac$, et $cp ||| am$ (adeoque $bn ||| \bumpeq cp$), atque $pcd = qcd$; datur (§.19.) $ds \perp \widetilde{cd}$, ut $ds ||| cp$, adeoque (§. 1.) $dt ||| cq$ sit. Si porro $be \perp \widetilde{ds}$; erit (§. 7.) $ds ||| bn$, adeoque (§.6.) $bn ||| es$, et (cum $dt ||| cg$ sit) $bq ||| et$; consequ. (§. 1.) $ebn = ebq$. Repraesententur, bcf ex L ipsius bn, et fg, dh, ck et el ex Lformibus lineis ipsorum ft, dt, cq et et; erit evidenter (§.22.) $hg = df = dk = hc$; itaque $cg = 2ch = 2v$. Pariter patet, $bg = 2\,bl = 2z$ esse. Est vero $bc = bg - cg$; quapropter $y = z - v$, adeoque (§.24.) $Y = Z : V$. Est demum (§. 28.) $Z = 1 : \sin \frac{1}{2} u$, et $V = 1 : \sin (R - \frac{1}{2} u)$ consequ. $Y = \cot \frac{1}{2} u$.

§. 30. (Fig.15.) Verumtamen facile (ex §. 25) patet, resolutionem problematis *Trigonometriae planae* in S, peripheriae per radium expressae indigere; hoc vero rectificatione ipsius L obtineri potest. Sint ab, cm, $c'm' \perp \widetilde{ac}$, atque b ubivis in $\widetilde{ab}$; erit (§.25.) $\sin u : \sin v := \bigcirc p : \bigcirc y$, et $\sin u' : \sin v' = \bigcirc p : \bigcirc y'$; adeoque $\frac{\sin u}{\sin v} \cdot \bigcirc y = \frac{\sin u'}{\cos v'} \cdot \odot y'$. Est vero (per § 27) $\sin v : \sin v' = \cos u : \cos u'$; conseq. $\frac{\sin u}{\cos u} \bigcirc y = \frac{\sin u'}{\cos u'} \bigcirc y'$; seu $\bigcirc y : \bigcirc y' = \tan u' : \tan u = \tan w : \tan w'$ Sint porro cn, $c'n' ||| ab$, et cd, $c'd'$ lineae Lformes ad $\widetilde{ab} \perp res$; erit (§.21.) etiam $\bigcirc y : \bigcirc y' = r : r'$, adeoque $r : r' = \tan w : \tan w'$. Crescat iam p ab a incipiendo in infinitum; tum $w \frown z$, et $w' \frown z'$; quapropter etiam $r : r' = \tan z : \tan z'$. *Constans* $r : \tan z$ (ab r *independens*) dicatur i; dum $y \frown o$, est $\left(\frac{r}{y} = \frac{i \tan z}{y}\right) \frown 1$, adeoque $\frac{y}{\tan z} \frown i$. Ex §. 29 fit $\tan z = \frac{1}{2} (Y - Y^{-1})$; itaque $\frac{2y}{Y - Y^{-1}} \frown i$, seu (§.24.) $\frac{2yI^{\frac{y}{i}}}{I^{\frac{2y}{i}} - 1} \frown i$.

Notum autem est, expressionis istius (dum $y \frown o$) limitem esse $\frac{i}{\log\text{nat}\, I}$; est ergo $\frac{i}{\log\text{nat}\, I} = i$, et $I = e = 2{,}7182818$ - - -, quae quantitas insignis hic quoque elucet. Si nempe abhinc i illam rectam denotet, cuius $I = e$ sit, erit $r = i \tan z$. Erat autem (§.21.) $\bigcirc y = 2\pi r$; est igitur $\bigcirc y = 2\pi i \tan z = \pi i (Y - Y^{-1}) = \pi i \left(e^{\frac{y}{i}} - e^{\frac{-y}{i}}\right) = \frac{\pi y}{\log\text{nat}\, Y} (Y - Y^{-1})$ (per §.24.)

§. 31. (Fig.16.) Ad resolutionem omnium $\triangle$lorum rectangulorum rectilineorum trigonometricam (e qua omnium $\triangle$lorum resolutio in promtu est) in S, 3 aequationes sufficiunt: nempe (a, b cathetos, c hypotenusam, et α, β $\wedge$*los* cathetis oppositos denotantibus) aequatio relationem exprimens 1*mo* inter a, c, α; 2*do* inter a, α, β; 3*tio* inter a, b, c; nimirum ex his *reliquae* 3 per eliminationem prodeunt.

I. Ex §.25. et 30. est $1 : \sin\alpha = (C - C^{-1}) : (A - A^{-1}) = (e^{\frac{c}{i}} - e^{\frac{-c}{i}}) : (e^{\frac{a}{i}} - e^{\frac{-a}{i}})$ (aequatio pro α, c, a).

II. Ex §.27. sequitur (si $\beta m \| \gamma n$ sit) $\cos\alpha : \sin\beta = 1 : \sin u$; ex §. 29 autem fit $1 : \sin u = \frac{1}{2}(A + A^{-1})$; itaque $\cos\alpha : \sin\beta = \frac{1}{2}(A + A^{-1}) = \frac{1}{2}(e^{\frac{a}{i}} + e^{\frac{-a}{i}})$ (aequatio pro α, β, a).

III. Si $\alpha\alpha' \perp \beta\alpha\gamma$, atque $\beta\beta'$ et $\gamma\gamma'$ fuerint $\| \alpha\alpha'$, (§.27), atque $\beta'\alpha'\gamma' \perp \alpha\alpha'$; erit manifesto (uti in (§. 27) $\frac{\beta\beta'}{\gamma\gamma'} = \frac{1}{\sin u} = \frac{1}{2}(A + A^{-1})$; $\frac{\gamma\gamma'}{\alpha\alpha'} = \frac{1}{2}(B + B^{-1})$, ac $\frac{\beta\beta'}{\alpha\alpha'} = \frac{1}{2}(C + C^{-1})$; consequ. $\frac{1}{2}(C + C^{-1}) = \frac{1}{2}(A + A^{-1}) . \frac{1}{2}(B + B^{-1})$, sive $(e^{\frac{c}{i}} + e^{\frac{-c}{i}}) = \frac{1}{2}(e^{\frac{a}{i}} + e^{\frac{-a}{i}})(e^{\frac{b}{i}} + e^{\frac{-b}{i}})$ (aequatio pro a, b, c).

§.32. Si $\gamma\alpha\delta = R$, et $\beta\delta \perp \alpha\delta$ sit; erit $\bigcirc c : \bigcirc a = 1 : \sin\alpha$, et $\bigcirc c : \bigcirc(d = \beta\delta) = 1 : \cos\alpha$, adeoque ($\bigcirc x^2$ pro quovis x factum $\bigcirc x . \bigcirc x$ denotante) manifesto $\bigcirc a^2 + \bigcirc d^2 = \bigcirc c^2$. Est vero (per §.27. et II.) $\bigcirc d = \bigcirc b . \frac{1}{2}(A + A^{-1})$, consequ. $(e^{\frac{c}{i}} - e^{\frac{-c}{i}})^2 = \frac{1}{4}\left[e^{\frac{a}{i}} + e^{\frac{-a}{i}}\right]^2 . \left[e^{\frac{b}{i}} - e^{\frac{-b}{i}}\right]^2 + \left[e^{\frac{a}{i}} - e^{\frac{-a}{i}}\right]^2$, *alia* aequatio pro a, b, c, (cuius membrum 2*dum* facile ad formam *symmetricam* seu *invariabilem* reducitur.) Denique ex $\frac{\cos\alpha}{\sin\beta} = \frac{1}{2}(A + A^{-1})$, atque $\frac{\cos\beta}{\sin\alpha} = \frac{1}{2}(B + B^{-1})$, fit (per III.) $\cot\alpha . \cot\beta = \frac{1}{2}(e^{\frac{c}{i}} + e^{\frac{-c}{i}})$ (aequatio pro α, β, c).

§. 32. Restat adhuc modum *problemata* in S resolvendi breviter ostendere, quo (per exempla magis obvia) peracto, demum quid theoria haecce praestet, candide dicetur.

I. (Fig.17.) Sit $\widetilde{ab}$ linea in plano, et $y = f(x)$ aequatio eius (pro coordinatis $\perp$*ribus*), et quodvis incrementum ipsius z dicatur $\mathrm{d}z$, atque incrementa ipsorum x, y, et areae u, eidem $\mathrm{d}z$ respondentia, respective per $\mathrm{d}x$, $\mathrm{d}y$, $\mathrm{d}u$ denotentur; sitque $bh \| cf$, et exprimatur (ex §. 31.) $\frac{bh}{\mathrm{d}x}$ per y, ac quaeratur ipsius $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$ *limes* tendente $\mathrm{d}x$ ad limitem o, (quod ubi eiusmodi limes quaeritur, subintelligatur): innotescet exinde etiam limes ipsius $\frac{\mathrm{d}y}{bh}$, adeoque tang hbd; eritque (cum hbc manifesto nec $>$ nec $<$ adeoque $= R$ sit), *tangens* in b ipsius $\widetilde{bg}$ per y determinata.

II. Demonstrari potest, esse $\frac{\mathrm{d}z^2}{\mathrm{d}y^2 + bh^2} \sim 1$; Hinc *limes* ipsius $\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}$, et inde z integratione (per x expressum) reperitur. Et potest lineae cuiusvis *in concreto datae* aequatio in S inveniri, e. g. ipsius L. Si enim $\widetilde{am}$ axis ipsius L sit; tum quaevis $\widetilde{cb}$ ex $\widetilde{am}$ secat L (cum (per §.19.) quaevis recta ex a praeter $\widetilde{am}$ ipsum L secet); est vero (si bn axis sit), $X = 1 : \sin cbn$ (§. 28.), atque $Y = \cot\frac{1}{2} cbn$, (§.29) unde fit $Y = X + \sqrt{(X^2 - 1)}$, seu $e^{\frac{y}{i}} = e^{\frac{x}{i}} +$

$\surd(e^{\frac{2x}{i}}-1)$ aequatio quaesita. Erit hinc $\frac{dy}{dx} \frown X(X^2-1)^{-\frac{1}{2}}$; atqui $\frac{bh}{dx} = 1 : \sin cbn = X$; adeoque $\frac{dy}{bh} \frown (X^2-1)^{-\frac{1}{2}}$; $1+\frac{dy^2}{bh^2} \frown X^2(X^2-1)^{-1}$, $\frac{dz^2}{bh^2} \frown X^2(X^2-1)^{-1}$, atque $\frac{dz}{dz} \frown X(X^2-1)^{-1}$, $\frac{dz^2}{bh^2} \frown X^2(X^2-1)^{-1}$, atque $\frac{dz}{dx} \frown X^2(X^2-1)^{-\frac{1}{2}}$; unde per integrationem invenitur $z = i(X^2-1)^{\frac{1}{2}} = i \cot cbn$ (uti §. 30.).

III. Manifesto $\frac{du}{dx} \frown \frac{hfcbh}{dx}$, quod (nonnisi ab y dependens) iam primum per y exprimendum est; unde u integrando prodit.

Si (Fig. 12.) $ab = p$, $ac = q$, et $cd = r$, atque $cabdc = s$ sit; poterit (uti in II.) ostendi, esse $\frac{ds}{dq} \frown r$, quod $= \frac{1}{2} p (e^{\frac{q}{i}} + e^{\frac{-q}{i}})$ atque integrando $s = \frac{1}{2} pi (e^{\frac{q}{i}} - e^{\frac{-q}{i}})$. Potest hoc absque integratione quoque deduci. Aequatione e. g. circuli (ex §. 31, III), rectae (ex § 31, II), sectionis coni (per praec) expressis; poterunt areae quoque his lineis clausae exprimi.

Palam est, superficiem t ad figuram planam p (in distantia q) ||*lam*, esse ad p in ratione potentiarum 2*darum* linearum homologarum, sive uti $\frac{1}{4}(e^{\frac{q}{i}} + e^{\frac{-q}{i}})^2 : 1$. Porro computum soliditatis pari modo tractatum, facile patet duas integrationes requirere, (cum et differentiale ipsum hic nonnisi per integrationem determinetur); et ante omnia solidum a p et t ac complexu omnium rectarum ad p ⊥rium fines ipsorum p, t connectentium, clausum quaerendum esse. Reperitur solidum istud (tam per integrationem quam sine ea) $= \frac{1}{8} pi [e^{\frac{2q}{i}} - e^{\frac{-2q}{i}}] + \frac{1}{2} pq$. Superficies quoque corporum in S determinari possunt, nec non *curvaturae*, *evolutae*, *evolventesque* linearum qualiumvis &c. Quod curvaturam attinet; ea in S aut ipsius L est, aut per radium circuli, aut *distantiam* curvae ad rectam ||lae ab hac recta, determinatur; cum e praecedentibus facile ostendi possit, praeter L, lineas circulares, ac rectae ||las, nullas in plano alias lineas uniformes dari.

IV. Pro circulo est (uti in III.) $\frac{d\odot x}{dx} \frown \bigcirc x$, unde (per §. 29.) integrando fit $\odot x = \pi i^2 [e^{\frac{x}{i}} - 2 + e^{\frac{-x}{i}}]$.

V. Pro area $cabdc = u$ (Fig. 9.) (linea Lformi $ab = r$, huic ||la $cd = y$, ac rectis ac, $bd = x$ clausa) est $\frac{du}{dx} \frown y$; atque (§. 24.) $y = re^{\frac{-x}{i}}$; adeoque (integrando) $u = ri(1 - e^{\frac{-x}{i}})$. Crescente x in infinitum, fiet in S, $e^{\frac{-x}{i}} \frown o$, adeoque $u \frown ri$. Per *quantitatem* ipsius *mabn*, in posterum limes iste intelligetur. Simili modo invenitur, quod si p sit figura in F; spatium a p et complexu axium e terminis ipsius p ductorum clausum $= \frac{1}{2} pi$ sit.

VI. Si angulus ad centrum segmenti z (Fig. 10) sphaerae sit $2u$, peripheria circuli maximi sit p, et arcus fc (∧li u) $= x$; erit $1 : \sin u = p : \bigcirc bc$ (§. 25), et hinc $\bigcirc bc = p \sin u$. Interim est $x = \frac{pu}{2\pi}$, ac $dx = \frac{p\,du}{2\pi}$. Est porro $\frac{dz}{dx} \frown \bigcirc bc$, et hinc $\frac{dz}{du} \frown \frac{p^2}{2\pi} \sin u$, unde (integrando) $z = \frac{\text{sinv}\, u}{2\pi} p^2$. Cogitetur F in quod p (per meditullium f segmenti transiens) cadit; planis $\widetilde{fem}$, $\widetilde{cem}$ per af, ac ad F $\perp^{\text{riter}}$ positis, ipsumque in feg, ce secantibus; et considerentur L formis cd (ex c ad feg $\perp^{\text{ris}}$) nec non L formis cf; erit $cef = u$ (§.20.), et (§.21.) $\frac{fd}{p} = \frac{\text{sinv}\, u}{2\pi}$, adeoque $z = fd.p$. Ast (§. 21.) $p = \pi.fdg$; itaque $z = \pi.\, fd.fdg$. Est autem (§. 21.) $fd.fdg = fc.fc$; consequ $z = \pi.fc.fc = \odot fc$ in F. Sit iam (Fig.14.) $bj = cj = r$; erit $=$ (§. 29.) $2r = i\,(Y - Y^{-1})$, adeoque (§. 21.) $\odot 2r$ (in F) $= \pi i^2 (Y - Y^{-1})^2$. Est quoque (IV) $\odot 2y = \pi i^2 (Y^2 - 2 + Y^{-2})$; igitur $\odot 2r$ (in F) $= \odot 2y$, adeoque et $z = \odot 2y$, sive superficies z *segmenti sphaerici aequatur circulo, chorda fc tanquam radio descripto.* Hinc tota sphaerae superficies $= \odot fg = fdg.p = \frac{p^2}{\pi}$, *suntque superficies sphaerarum, uti* 2dae *potentiae peripheriarum earundem maximarum.*

VII. Soliditas sphaerae radii x in S reperitur simili modo $= \frac{1}{2}\pi i^3 (X^2 - X^{-2}) - 2\pi i^2 x$; superficies per revolutionem lineae cd (Fig.12.) circa ab orta $= \frac{1}{2}\pi i p\,(Q^2 - Q^{-2})$, et corpus per $cabdc$ descriptum $= \frac{1}{2}\pi i^2 p\,(Q^2 + Q^{-2})$. *Quomodo vero omnia a* (IV.) *hucusque tractata, etiam absque integratione perfici possint brevitatis studio supprimitur.*

Demonstrari potest, *omnis expressionis literam i continentis* (adeoque *hypothesi*, quod *detur i*, innixae) *limitem*, *crescente i in infinitum, exprimere quantitatem plane pro* Σ (adeoque pro hypothesi *nullius i*), *siquidem non eveniant aequationes identicae.* Cave vero intelligas putari, *systema ipsum variari* posse (quod omnino *in se et per se determinatum* est) sed tantum *hypothesin*, quod *successive* fieri potest, donec non ad absurdum perducti fuerimus. *Posito* igitur, quod in *tali* expressione litera i pro casu, si S esset re ipsa, *illam* quantitatem unicam designet, cuius $I = e$ sit; si vero *revera* Σ fuerit, *limes dictus* loco expressionis accipi *cogitetur*: manifesto *omnes* expressiones ex *hypothesi realitatis* ipsius S oriundae (hoc sensu) *absolute valent*, etsi *prorsus ignotum sit*, *num* Σ *sit*, *aut non sit.*

Ita e. g. ex expressione in §. 30. obtenta facile (et quidem *tam* differentiationis auxilio, quam *absque* eo) valor notus pro Σ prodit $\bigcirc x = 2\pi x$; ex I. (§. 31.) rite tractato, sequitur $1 : \sin \alpha = c : a$; ex II. vero $\frac{\cos \alpha}{\sin \beta} = 1$, adeoque $\alpha + \beta = R$; aequatio *prima* in III. fit indentica, adeoque *valet* pro Σ, quamvis nihil in eo *determinet*; ex *secunda* autem fluit $c^2 = a^2 + b^2$. *Aequationes notae fundamentales trigonometriae planae* in Σ. Porro inveniuntur (ex §. 32.) pro Σ area et corpus in IV, utrumque $= pq$; ex IV. $\odot x = \pi x^2$; (ex VII) sphaera radii $x = \frac{4}{3}\pi x^3$ &c. Sunt quoque theoremata ad finem (VI) enuntiata manifesto *inconditionate vera.*

§. 33. Superest adhuc quid theoria ista sibi velit, (in §. 32 promissum) exponere.

I. Num Σ aut S aliquod *reipsa* sit, indecisum manet.

II. Omnia ex hypothesi *falsitatis* Ax. XI. deducta (semper *sensu* §. 32. intelligendo) *absolute valent*, adeoque *hoc sensu nulli hypothesi innituntur.* Habetur idcirco *trigonometria plana a priori* in qua *solum systema ipsum ignotum* adeoque solummodo *absolutae* magnitudines expresionum incognitae manent, per *unicum* vero casum notum, manifesto totum systema figeretur. Trigonometria sphaerica autem in §. 26. absolute stabilitur (Habeturque Geometria, Geometriae planae in Σ prorsus analoga in F).

III. Si *constaret*, Σ esse, nihil hoc respectu amplius incognitum esset; si vero *constaret non esse* Σ, tunc (§. 31.) (e.g.) e lateribus x, y et $\wedge$lo rectilineo ab iis intercepto, in *concreto datis* manifesto in se et per se impossibile esset $\triangle$lum absolute resolvere (i, e.) a priori determinare $\wedge$los ceteros et *rationem lateris tertii* ad duo data; nisi X, Y determinentur, ad quod *in concreto* habere aliquod a oporteret, cuius A notum esset; atque tum i *unitas naturalis longitudinum* esset, (sicuti e est basis logarithmorum naturalium). Si existentia hujus i constiterit; quomodo ad usum saltem quam exactissime construi possit, ostendetur.

IV. Sensu in I et II exposito patet, omnia in spatio methodo recentiorum Analytica (intra justos fines valde laudanda) absolvi posse.

V. Denique lectoribus benevolis haud ingratum futurum est; pro casu illo quodsi non Σ sed S re ipsa esset, circulo aequale rectilineum construi.

§. 34. (Fig.12.) Ex d ducitur $dm \parallel\!| an$ modo sequenti. Fiat ex d, $db \perp an$; erigatur e puncto quovis aliquo a rectae $\widetilde{ab}$, $ac \perp an$ (in dba), et demittatur $de \perp ac$; erit $\odot ed : \odot ab = 1 : \sin z$ (§. 27) siquidem fuerit $dm \parallel\!| bn$. Est vero $\sin z$ non > 1, adeoque ab non $> de$. Descriptus igitur quadrans radio ipsi de aequali, ex a in bac, gaudebit puncto aliquo b vel o cum $\widetilde{bd}$ communi. Priori in casu manifesto $z = R$; in posteriori vero erit (§. 25.) $(\odot ao = \odot ed) : \odot ab = 1 : \sin aob$, adeoque $z = aob$. Si itaque fiat $z = aob$; erit $dm \parallel\!| bn$.

§. 35. (Fig.18.) Si fuerit S reipsa; ducetur recta ad $\wedge$li acuti crus unum. $\perp$ris, quae ad alterum $\parallel\!|$ sit, hoc modo. Sit $am \perp bc$, et accipiatur $ab = ac$ tam parvum (per §.19.), ut si ducatur $bn \parallel\!| am$ (§. 34.), sit $abn > \wedge$lo dato. Ducatur porro $cp \parallel\!| am$ (§. 34.), fiantque nbq, pcd utrumque $= \wedge$lo dato; et $\widetilde{bq}$, $\widetilde{cd}$ se mutuo secabunt. Secet enim $\widetilde{bq}$ (quod *per constr.* in nbc cadit) ipsam $\widetilde{cp}$ in e; erit (propter $bn \simeq cp$) $ebc < ecb$, adeoque $ec < eb$. Sint $ef = ec$, $efr = ecd$; et $fs \parallel\!| ep$; cadet fs in bfr. Nam cum $bn \parallel\!| cp$, adeoque $bn \parallel\!| ep$, atque $bn \parallel\!| fs$ sit; erit (§. 14.) $fbn + bfs < (2R = fbn + bfr)$; itaque $bfs < bfr$. Quamobrem $\widetilde{fr}$ secat $\widetilde{ep}$, adeoque $\widetilde{cd}$ quoque ipsam $\widetilde{eq}$ in puncto aliquo d. Sit iam $dg = dc$, atque $dgt = dcp = gbn$; erit (cum $cd \simeq gd$ sit) $bn \simeq gt \simeq cp$. Si fuerit lineae L formis ipsius bn, punctum in $\widetilde{bq}$ cadens k (§. 19.), et axis kl; erit $bn \simeq kl$, adeoque $bkl = bgt = dcp$; sed etiam $kl \simeq cp$: cadit ergo k manifesto in g, estque $gt \parallel\!| bn$. Si vero ho ipsum bg $\perp$riter bissecet; erit $ho \parallel\!| bn$ constructum.

§.36. (Fig.10.) Si fuerint data recta $\widetilde{cp}$ et planum $\widetilde{mab}$, atque fiat $cb \perp \widetilde{mab}$, bn (in $\widetilde{bcp}$) $\perp bc$, et $cq \parallel\!| bn$ (§. 34.); sectio ipsius $\widetilde{cp}$ (si haec in bcq cadat) cum $\widetilde{bn}$ (in $\widetilde{cbn}$), adeoque cum $\widetilde{mab}$ reperitur. Et si fuerint data duo plana $\widetilde{pcq}$, $\widetilde{mab}$, et sit $cb \perp \widetilde{mab}$, $cr \perp \widetilde{pcq}$, atque (in bcr) $bn \perp bc$, $cs \perp cr$; cadent $\widetilde{bn}$ in $\widetilde{mab}$, et $\widetilde{cs}$ in $\widetilde{pcq}$; et sectione ipsarum $\widetilde{bn}$, $\widetilde{cs}$ (si detur) reperta, erit $\perp$ris in $\widetilde{pcq}$ per eandem ad $\widetilde{cs}$ ducta, manifesto sectio ipsorum $\widetilde{mab}$, $\widetilde{pcq}$.

§. 37. (Fig.7.) In $\widetilde{am} \parallel\!| bn$ reperitur tale a, ut sit

$am \simeq bn$; si (per §. 34.) construatur extra $\widetilde{nbm}$, $gt \,|||\, bn$, et fiant $bg \perp gt$, $gc = gb$, atque $cp \,|||\, gt$; ponaturque $\widetilde{tgd}$ ita, ut efficiat cum $\widetilde{tgb}$ $\wedge$lum illi aequalem, quem $\widetilde{pca}$ cum $\widetilde{pcb}$ facit; atque quaeratur (per §. 36.) sectio $\widetilde{dq}$ ipsorum $\widetilde{tgd}$, $\widetilde{nba}$; fiatque $ba \perp dq$. Erit enimvero ob $\triangle$lorum L lineorum in F ipsius bn exortorum similitudinem (§.21.) manifesto $db = da$, et $am \simeq bn$.

Facile hinc patet (L lineis per *solos terminos* datis) reperiri posse etiam *terminos* proportionis 4tum ac medium, atque omnes constructiones geometricas, quae in Σ in plano fiunt, hoc modo in F *absque* XI. *Axiomate* perfici posse. Ita e. g. $4R$ in quotvis partes aequales geometrice dividi potest, si sectionem istam in Σ perficere licet.

§. 38. (Fig.14.) Si construatur (per §. 37.) e. g. $nbq = \frac{1}{3} R$, et fiat (per §. 35) in S ad $\widetilde{bq}$ $\perp$ris $am \,|||\, bn$, atque determinetur (per §. 37.) $jm \simeq bn$; erit, si $ja = x$ sit, (§. 28.) $X = 1 : \sin \frac{1}{3} R = 2$, atque x *geometrice* constructum. Et potest nbq ita computari, ut ja ab i quovis dato minus discrepet, cum nonnisi sin $nbq = \frac{1}{e}$ esse debeat.

§. 39. (Fig 19.) Si fuerint (in plano) pq et st, || rectae mn (§. 27.), et ab, cd sint $\perp$res ad mn aequales; manifesto est $\triangle dec \cong \triangle bea$, adeoque $\wedge$li (forsan mixtilinei) ecp, eat congruent, atque $ec = ea$. Si porro $cf = ag$, erit $\triangle acf \cong \triangle cag$, et utrumque *quadrilateri fagc* dimidium est. Si *fagc*, *hagk* duo eiusmodi quadrilatera fuerint ad ag, inter pq et st; aequalitas eorum (uti apud *Euclidem*), nec non $\triangle$lorum agc, agh eidem ag insistentium, verticesque in $\widetilde{pq}$ habentium aequalitas patet. Est porro $acf = cag$, $gcq = cga$, atque $acf + acg + gcq = 2R$

(§. 32.), adeoque etiam $cag + acg + cga = 2R$; itaque in quovis eiusmodi $\triangle$lo acg summa 3 $\wedge$lorum $= 2R$. Sive in ag (quae || mn) ceciderit autem *recta ag*, sive non; $\triangle$lorum *rectilineorum agc*, *agh*, *tam ipsorum*, *quam summarum* $\wedge$lorum *ipsorundem*, *aequalitas* in aperto est.

§. 40. (Fig. 20.) *Aequalia* $\triangle$la *abc*, *abd* (*abhinc rectilinea*) *uno latere aequali gaudentia*, *summas* $\wedge$lorum *aequales habent*. Nam dividat mn bifariam tam ac quam bc, et sit pq (per c) || mn; cadet d in $\widetilde{pq}$. Nam si $\widetilde{bd}$ ipsum $\widetilde{mn}$ in puncto e, adeoque (§. 39.) ipsum $\widetilde{pq}$ ad distantiam $ef = eb$ secet; erit $\triangle abc = \triangle abf$, adeoque et $\triangle abd = \triangle abf$, unde d in f cadit: si vero $\widetilde{bd}$ ipsum $\widetilde{mn}$ non secuerit, sit c punctum, ubi $\perp$ris rectam ab bissecans ipsum $\widetilde{pq}$ secat, atque $gs = ht$ ita, ut $\widetilde{st}$ *productam* $\widetilde{bd}$ in puncto aliquo k secet (quod fieri posse modo simili patet, ut §. 4.); sint porro $sl = sa$, lo || st, atque o sectio ipsorum $\widetilde{bk}$ et $\widetilde{lo}$: esset tum $\triangle abl = \triangle abo$ (§.39.), adeoque $\triangle abc > \triangle abd$ (contra hyp).

§. 41. (Fig.21.) *Aequalia* $\triangle\triangle$ *abc*, *def*, *aequalibus* $\wedge$lorum *summis gaudent*. Nam secet mn tam ac, quam bc, ita pq tam df quam fe bifariam, et sit rs || mn, atque to || pq; erit $\perp$ris ag ad rs aut $=$ $\perp$ri dh ad to, aut altera e. g. dh erit maior: in quovis casu $\bigcirc df$ e centro a cum $\widetilde{gs}$ punctum aliquod k commune habet, eritque (§. 39.) $\triangle abk = \triangle abc = \triangle def$. Est vero $\triangle akb$ (per §. 40.) $\triangle$lo dfe, ac (per §. 39.) $\triangle$lo *abc aequiangulum*. Sunt igitur etiam $\triangle\triangle$ *abc*, *def* aequiangula.

In S *converti* quoque theorema potest. Sint enim $\triangle\triangle$ *abc*, *def* reciproce aequiangula, atque $\triangle bal = \triangle def$; erit (per praec.) alterum alteri, adeoque etiam $\triangle abc$ $\triangle$lo abl aequiangulum, et hinc manifesto $bcl + blc + cbl = 2R$. Atqui (ex §. 31.) cuiusvis

△li ∧lorum summa in *S*, est $<2R$: cadit igitur *l* in *c*.

§. 42. (Fig.22.) Si fuerit *complementum* summae ∧lorum △li *abc* ad $2R$, *u*, △li *def* vero *v*; est △abc : △$def = u : v$. Nam si quodvis △lorum *acg*, *gch*, *hcb*, *dfk*, *kfe* sit$=p$, atque △$abc=mp$, △$def=np$; sitque *s* summa ∧lorum cuiusvis △li quod $=p$ est; erit manifesto $2R-u=ms-(m-1)\,2R=2R-m\,(2R-s)$, et $u=m\,(2R-s)$, et pariter $v=n\,(2R-s)$. Est igitur △abc : △$def=m:n=u:v$. Ad casum incommensurabilitatis △lorum *abc*, *def* quoque extendi facile patet.

Eodem modo demonstratur △la in superficie sphaerica esse uti *excessus* summarum ∧lorum eorundem supra $2R$. Si 2 ∧li △li sphaerici recti fuerint, tertius *z* erit excessus dictus; est autem △ istud (peripheria maxima *p* dicta) manifesto$=\frac{z}{2\pi}\cdot\frac{p^2}{2\pi}$ (§. 32. VI.); consequ quodvis △, cuius ∧lorum excessus$=e$, est$=\frac{zp^2}{4\pi^2}$.

§. 43. (Fig.15.) Jam *area* △li rectilinei in *S* per summam ∧lorum exprimetur. Si *ab* crescat in infinitum: erit (§. 42) △$abc:(R-u-v)$ constans. Est vero △$abc \frown bacn$ (§. 32. V.), et $R-u-v \frown z$ (§. 1.); adeoque $bacn:z=$ △$abc:(R-u-v)=bac'n':z'$. Est porro manifesto $bdcn:bd'c'n'=r:r'=\text{tang}\,z:\text{tang}\,z'$ (§. 30.). Pro $y' \frown o$ autem est $\frac{bd'c'n'}{bac'n'} \frown 1$, nec non $\frac{\text{tang}\,z'}{z'} \frown 1$; consequ. $bdcn:bacn=\text{tang}\,z:z$. Erat vero (§. 32) $bdcn=ri=i^2\,\text{tang}\,z$; est igitur $bacn=zi^2$. Quovis △lo cuius ∧lorum summae complementum ad $2R$, *z* est, in posterum breviter △ dicto, erit idcirco △$=zi^2$. Facile hinc liquet, quod si (Fig.14.) *or*|||*am* et *ro*|||*ab* fuerint; *area* inter $\widetilde{or}$, $\widetilde{st}$, $\widetilde{bc}$, compre-

hensa (quae manifesto limes absolutus est areae triangulorum rectilineorum sine fine crescentium, seu ipsius △ pro $z \frown 2R$), sit$=\pi i^2=$⊙i, in F. Limite isto per □ denotato, erit porro (Fig. 15) (per §. 30.) $\pi r^2=\text{tang}\,z^2$ □ $=$⊙r in F (§ 21)$=$⊙*s* (per § 32. VI.), si chorda *dc*, *s* dicatur. Si jam radio dato *s*, circuli in plano (sive radio L formi circuli in F) ⊥riter bisecto, construatur (per § 34) *db* |||≏ *cn*; demissa ⊥ri *ca* ad *db*, et erecta ⊥ri *cm* ad *ca*; habebitur *z*; unde (per § 37) $\text{tang}\,z^2$, radio L formi ad lubitum pro unitate assumto, *geometrice determinari potest, per duas lineas uniformes ejusdem curvaturae* (quae solis terminis datis, constructis axibus, manifesto tanquam rectae commensurari, atque hoc respectu rectis aequivalentes spectari possunt).

Porro (Fig. 23) construitur quadrilaterum ex gr. regulare$=$□, ut sequitur. Sit $abc=R$, $bac=\frac{1}{2}R$, $acb=\frac{1}{4}R$, et $bc=x$; poterit X (ex § 31.II) per meras radices quadraticas exprimi, et (per §.37) construi: habitoque X, (per § 38, sive etiam 29 et 35) *x* ipsum determinari potest. Estque octuplum △ *abc* manifesto $=$□, atque *per hoc, circulus planus radii s, per figuram rectilineam, et lineas uniformes ejusdem generis* (*rectis*, *quoad comparationem inter se*, *aequivalentes*) *geometrice quadratus; circulus F formis vero eodem modo complanatus: habeturque aut Axioma XI Euclidis verum, aut quadratura circuli geometrica;* etsi hucusque indecisum manserit, quodnam ex his duobus revera locum habeat. Quoties $\text{tang}\,z^2$ *vel* numerus integer *vel* fractio rationalis fuerit, cujus (ad simplicissimam formam reductae) denominator *aut* numerus primus formae 2^m+1 (cujus est etiam $2=2^0+1$) *aut* productum fuerit e quotcunque primis hujus formae, quorum (ipsum 2, qui solus quotvis vicibus occurrere potest, excipiendo) quivis *semel* ut factor occurrit: per theoriam potyponorum *ill.* ***GAVSS*** (praeclarum nostri imo omnis aevi inventum), etiam ipsi $\mathrm{tang}\, z^2 \square = \odot s$ (et nonnisi pro talibus valoribus ipsius z) figuram rectilineam aequalem constituere licet. Nam *divisio* ipsius $\square$ (theoremate § 42 facile ad quaelibet polygona extenso) manifesto *sectionem* ipsius 2R requirit, quam (ut ostendi potest) unice sub dicta conditione geometrice perficere licet. In omnibus autem talibus casibus praecedentia facile ad scopum perducent. Et potest quaevis figura rectilinea in polygonum regulare n laterum geometrice converti, siquidem n sub formam *GAVSSianam* cadat.

Superesset denique, (ut res omni numero absolvatur), impossibilitatem, (absque suppositione aliqua) decidendi, num Σ, aut aliquod (et quodnam) S sit, demonstrare: quod tamen occasioni magis idoneae reservatur.

---

omnes, Ax XI Eucl. demonstrandi necessario irritos fuisse): at muneris ratio huic amplius vacare haud permittens, alii occasioni reservare jubet.

ERRATA.

§. 1. *l.* 6. pro ex $a\widetilde{m}$ primum exit, lege, primo non secat $a\widetilde{m}$.

§. 4. linea 2 pro $\widetilde{ab}$ lege $a\widetilde{b}$; *l.* 3. lege (per §. 1.), ultima *l.* lege *nam*;

Pag. 4. pro 6 lege § 6; *l.* ult. pro $b\widetilde{a}$ lege $b\widetilde{d}$. Pro bissecare, lege ubique bisecare.

Pag. 5. *l.* 5. a calce, lege $af < ac$; penultima et ult. *l.* lege $\widetilde{ap}$ et $\widetilde{bf}$.

§. 7. Casu 3tio *praemisso* duo priores, adinstar casus 2di §. 10. brevius ac elegantius simul absolvi possunt.

§. 10. a calce, *l.* 4. lege *tgbn.*

§. 11. *l.* 7. et in calce, lege $a\widetilde{m}$;

Pag. 9. *l.* 2, pro prortione, lege, extremitate portionis.

§. 17. Demonstrationem ad S restringere haud necesse est; quum facile ita proponatur, ut absolute (pro S et Σ) valeat.

§. 19. penultima *l.* et ult. pro *c* lege *q*.

§. 20. *l.* 2 post 19 claudatur, linea penult. lege, L lineus.

§. 21. *l.* 1. deleatur comma post: in; et *l.* penult. lege $\frac{1}{2}$ ○ 1.

§. 22. post Fig. 9. claudatur.

§. 23. *l.* 4. lege, $ab = n.cd$.

§. 24. *l.* 1. lege $Y = X^{\frac{\gamma}{x}}$

Pag. 11. in calce lege ⊙ *cd*, *l.* penult. lege ○ *ed.*

Pag. 13. *l.* 7. et 8 lege $\frac{\sin}{\sin}\frac{u'}{v}$, . ○ y'

Pag. 14. *l.* 4. lege *a*, *c*, α; linea 7 lege, pro α.

III. *l.* 3. lege $\frac{\gamma\gamma'}{\alpha\alpha'}$, linea penult. post $e^{\frac{-b}{i}}$ claudatur; §. 32. deleatur.

Pag. 15. ante §. 32. *l.* penult. duae priores quantitates parenthesibus inclusae quadrari debent, et primus terminus 3tiae exponentem positivum habere. *l.* ult. lege α, β, *c*

§. 32. I. *l.* 3. a calce, pro *hba*, lege *hbg*.

Pag. 16. *l.* 3. lege $\frac{dy}{bh}$, linea 4 lege, atque $\frac{dz}{bh}$; linea 5 lege $X(X^2-1)^{\frac{-1}{2}}$, et dele quod inter duo commata est. III. *l.* 1. lege $\frac{du}{dx}$; *l.* 5. lege $\frac{ds}{dg}$, *l.* 4. a calce, quantitas inclusa quadretur.

Pa. 17. VI. *l.* 1. post segmenti, insere, *z*;

Pa. 18. linea 12. pro = (§ 29). lege (§ 30); linea 6. ante VII. dele $z = \odot 2y$, sive; et VII linea 5, lege $\frac{1}{4}\pi i^2 p(Q - Q^{-1})^2$.

Pag. 19. *l.* 10. lege $= e$; linea 16. lege §. 30; linea 13. a calce, lege, III. et in calce, pro ipsum lege, verum.

Pag. 20. *l.* 15. lege *beri* pro *bere*; linea 3. a calce, lege (§. 25.); linea 2. lege $= aob$;

Pag. 21. *l.* 2. post *unum*, dele punctum; et *l.* 3. a. calce pro sesctio, lege sectio.

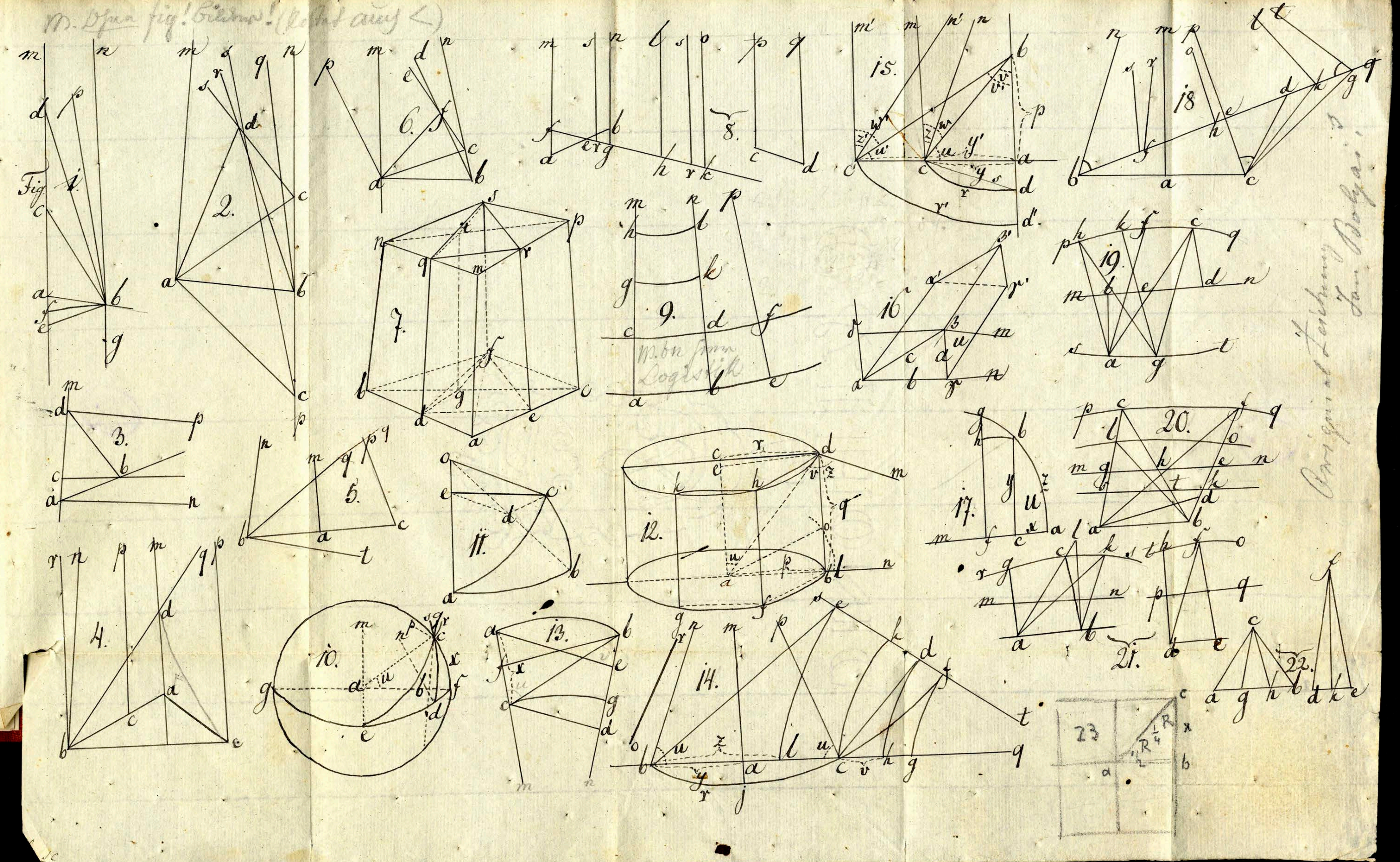
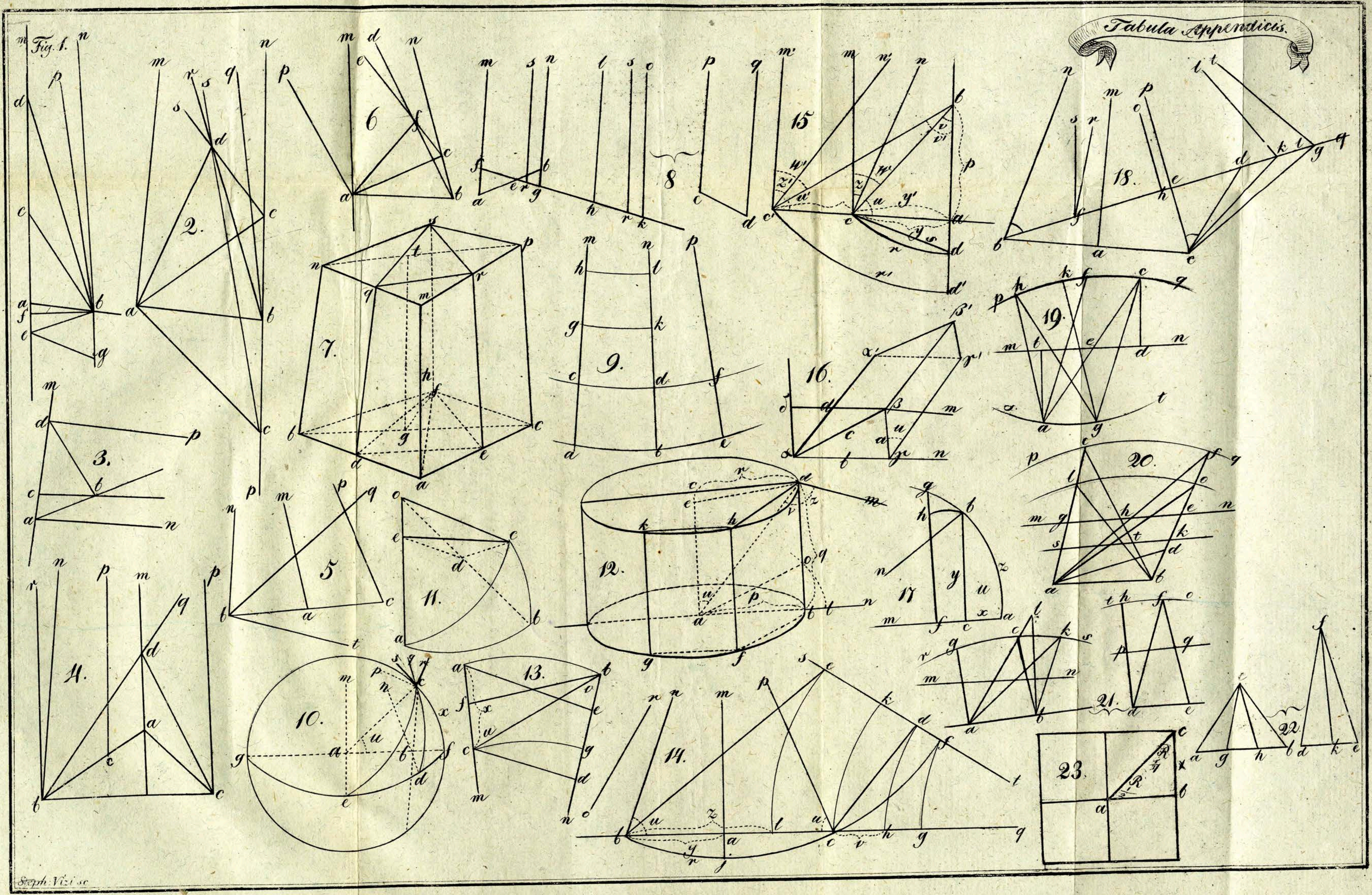


Fig. 1.
2.
3.
4.
5.
6.
7.
8.
9.
10.
11.
12.
13.
14.
15.
16
17.
18
19.
20.
21.
22.
23


Tabula Appendicis.
Fig. 1.
Steph. Vizi sc.