

BIBLIOGRAPHIC RECORD TARGET

Graduate Library
University of Michigan

Preservation Office

Storage Number: _____

ACA7848

UL FMT B RT a BL m T/C DT 09/12/88 R/DT 09/12/88 CC STAT mm E/L 1

010: : |a 04022899

035/1: : |a (RLIN)MIUG86-B110898

035/2: : |a (CaOTULAS)160330429

040: : |c MiU |d MiU

050/1:0 : |a QA685 |b .B68

100:1 : |a Bolyai, János, |d 1802-1860.

245:00: |a Ioannis Bolyai de Bolya Appendix scientiam spatii absolute veram
exhibens: |b a veritate aut falsitate axiomatis XI. euclidei, a prior haud
unquam decidenda, independentem: adiecta ad casum falsitatis quadratura circuli
geometrica.

250: : |a Editio nova oblata ab Academia scientiarum hungarica ad diem natalem
centesimum auctoris concelebrandum. |b Editerunt Iosephus Kürschák, Mauritius
Réthy, Béla Totössy de Zepethnek.

260: : |a Budapestini, |b sumptibus Academiae scientiarum hungaricae, |c 1903.

300/1: : |a 4 p. L., 40 p. |b diagrs. on 7 fold. pl. |c 29 x 23 cm.

504/1: : |a "Wolfgangi Bolyai additamentum ad Appendicem": p. [35]-38.

650/1: 0: |a Geometry, Non-Euclidean

700/1:1 : |a Kürschák, József, |d 1864-1933. |e ed.

700/2:1 : |a Réthy, Móricz, |d 1846-1925. |e ed.

Scanned by Imagenes Digitales
Nogales, AZ

On behalf of
Preservation Division
The University of Michigan Libraries

Date work Began: _____

Camera Operator: _____

IOANNIS BOLYAI DE BOLYA

APPENDIX

SCIENTIAM SPATII ABSOLUTE VERAM EXHIBENS.

IOANNIS BOLYAI DE BOLYA

APPENDIX

SCIENTIAM SPATII ABSOLUTE VERAM EXHIBENS: A VERITATE AUT FALSITATE
AXIOMATIS XI. EUCLIDEI, A PRIORI HAUD UNQUAM DECIDENDA, INDEPENDENTEM :
ADIECTA AD CASUM FALSITATIS QUADRATURA CIRCULI GEOMETRICA.

EDITIO NOVA

OBLATA AB ACADEMIA SCIENTIARUM HUNGARICA
AD DIEM NATALEM CENTESIMUM AUCTORIS CONCELEBRANDUM.

EDIDERUNT

IOSEPHUS KÜRSCHÁK MAURITIUS RÉTHY

BÉLA TÓTÖSSY DE ZEPETHNEK

ACADEMIÆ SCIENTIARUM HUNGARICÆ SODALES.

BUDAPESTINI.

SUMPTIBUS ACADEMIÆ SCIENTIARUM HUNGARICÆ.

MDCCCII.

TYPIS SOCIETATIS FRANKLINIANÆ.

INDEX TABULARUM

ET PAGINARUM, QUIBUS FIGURÆ TABULARUM TRACTANTUR.

Tab.	Fig.	Pag.	Tab.	Fig.	Pag.	Tab.	Fig.	Pag.
I.	1	3	III.	8	8	V.	14	15
	1	4		9	11		14	24
	2	3		9	22		14	29
	2	4		10	13		14	33
	3	4		10	23		15	16
	4	5		10	28		15	32
II.	5	5	IV.	11	13		15	33
	5	9		12	14	VI.	16	18
	5	10		12	21		17	20
	6	6		12	24		18	27
	6	11		12	27	VII.	19	29
	7	6		13	15		20	30
	7	9					21	31
	7	10					22	31
	7	28					23	34

A P P E N D I X.

SCIENTIAM SPATII *absolute veram* exhibens :

*a veritate aut falsitate Axiomatis XI Euclidei
(a priori haud unquam decidenda) in-
dependentem; adjecta ad casum fal-
situdinis, quadratura circuli
geometrica.*



**Auctore JOHANNE BOLYAI de eadem, Geometrarum
in Exercitu Caesareo Regio Austriaco Ca-
strensium Capitaneo.**



EXPLICATIO SIGNORUM.

- \overline{ab} denotet complexum *omnium* punctorum cum punctis a, b in recta
sitorum.
- \overline{ab} « rectæ \overline{ab} in a bifariam sectæ dimidium illud, quod punc-
tum b complectitur.
- \overline{abc} « complexum *omnium* punctorum, quæ cum punctis a, b, c
(non in eadem recta sitis) in eodem plano sunt.
- abc « plani \overline{abc} per \overline{ab} bifariam secti dimidium, punctum c com-
plectens.
- abc « portionum, in quas \overline{abc} per complexum rectarum $b\bar{a}, b\bar{c}$
dividitur, *minorem*; sive *angulum*, cuius $b\bar{a}, b\bar{c}$ crura
sunt.
- $abcd$ « (si d in abc sit et $\bar{b}a, \bar{c}d$ se invicem non secant) porti-
onem ipsius abc inter $b\bar{a}, bc, c\bar{d}$ comprehensam; $bac\bar{d}$
vero portionem plani \overline{abc} inter $\overline{ab}, \bar{c}d$ sitam.
- R « angulum rectum.
- $ab \triangleq cd$ « $cab = acd$.
- \equiv « congruens.*
- $x \rightsquigarrow a$ « x tendere ad limitem a .
- $\bigcirc r$ « peripheriam circuli radii r .
- $\odot r$ « aream circuli radii r .

* Sit fas, signo hocce, quo summus Geometra GAUSS *numeros congruos* insignivit, congruentiam geometricam quoque denotare: nulla ambiguitate exinde metuenda.

§. 1.

Si rectam $a\bar{m}$ non secet plani eiusdem recta $b\bar{n}$, at secet quævis $b\bar{p}$ Fig. 1.
(in abn): designetur hoc per

$$bn \parallel am.$$

Dari talem $b\bar{n}$, et quidem *unicam*, e quovis puncto b (extra \bar{am}),
atque

$$bam + abn \text{ non } > 2R$$

esse patet; nam bc circa b mota, donec

$$bam + abc = 2R$$

fiat, $b\bar{c}$ aliquando *primo* non secat $a\bar{m}$, estque tunc $bc \parallel am$.

Nec non patet esse $bn \parallel em$, ubivis sit e in \bar{am} (supponendo in omnibus talibus casibus esse $am > ae$).

Et si, puncto c in $a\bar{m}$ abeunte in infinitum, semper sit $c\bar{d} = c\bar{b}$: erit semper

$$c\bar{d}b \equiv (c\bar{b}d < nbc);$$

ast $nbc \rightarrow 0$; adeoque et $adb \rightarrow 0$.

§. 2.

Si $bn \parallel am$; *est quoque* $cn \parallel am$.

Fig. 2.

Nam sit δ ubicunque in $macn$. Si c in $b\bar{n}$ sit; $b\bar{\delta}$ secat $a\bar{m}$ (propter $bn \parallel am$), adeoque et $c\bar{\delta}$ secat $a\bar{m}$; si vero c in $b\bar{p}$ fuerit; sit $b\bar{q} \parallel c\bar{d}$: cadit $b\bar{q}$ in abn (§. 1.) secatque $a\bar{m}$, adeoque et $c\bar{d}$ secat $a\bar{m}$. Quævis $c\bar{d}$ igitur (in acn) secat in utroque casu $a\bar{m}$ absque eo, ut $c\bar{n}$ ipsam $a\bar{m}$ secet. Est ergo semper $cn \parallel am$.

§. 3.

Fig. 2. *Si tam br quam cs sit $\parallel am$, et c non sit in \overline{br} ; tum $b\overline{r}$, $c\overline{s}$ se invicem haud secant.*

Si enim $b\overline{r}$, $c\overline{s}$ punctum d commune haberent; (per §. 2.) essent $d\overline{r}$ et $d\overline{s}$ simul $\parallel am$, caderetque (§. 1.) $d\overline{s}$ in $d\overline{r}$ et c in \overline{br} (contra hyp.).

§. 4.

Fig. 3. *Si $man > mab$; pro quovis puncto b ipsius $a\overline{b}$ datur tale c in $a\overline{m}$, ut sit $bcm = nam$.*

Nam datur (per §. 1.) $bdm > nam$, adeoque $mdp = man$, caditque b in $nadp$. Si igitur nam iuxta am feratur, usquequo $a\overline{n}$ in $d\overline{p}$ veniat; aliquando $a\overline{n}$ per b transiisse, et aliquod $bcm = nam$ esse oportet.

§. 5.

Fig. 1. *Si $bn \parallel am$, datur tale punctum f in $a\overline{m}$, ut sit $f\overline{m} \triangleq bn$.*

Nam (per §. 1.) datur $bcm > cbn$; et si $ce = cb$, adeoque $ec \triangleq bc$; patet esse $bem < ebn$. Feratur p per ec , angulo bpn semper u , et angulo pbn semper v dicto; patet u esse prius ei simultaneo v minus, posterius vero esse maius. Crescit vero u a bem usque bcm continuo; cum (per §. 4.) nullus angulus $> bem$ et $< bcm$ detur, cui u aliquando = non fiat; pariter decrescit v ab ebn usque cbn continuo: datur itaque in ec tale f , ut $b\overline{fm} = f\overline{bn}$ sit.

§. 6.

Si $bn \parallel am$, atque ubivis sit e in $a\overline{m}$ et g in \overline{bn} : tum $gn \parallel em$ et $em \parallel gn$.

Nam (per §. 1.) est $bn \parallel em$, et hinc (per §. 2.) $gn \parallel em$.

Si porro $f\overline{m} \triangleq bn$ (§. 5.); tum $m\overline{f}bn = n\overline{b}fm$, adeoque (cum $bn \parallel f\overline{m}$ sit) etiam $f\overline{m} \parallel bn$, et (per præc.) $em \parallel gn$.

§. 7.

Si tam bn quam cp sit $\parallel am$, et c non sit in \overline{bn} : est etiam $bn \parallel cp$. Fig. 4.

Nam $b\overline{n}$, $c\overline{p}$ se invicem non secant (§. 3.); sunt vero am , bn , cp aut in plano, aut non; atque in casu primo am aut in $bncp$ est, aut non.

Si am , bn , cp in plano sint, et am in $bncp$ cadat; tum quævis $b\overline{q}$ (in nbc) secat \overline{am} in aliquo puncto d (quia $bn \parallel am$); porro cum $dm \parallel cp$ sit (§. 6.), patet $d\overline{q}$ secare $c\overline{p}$, adeoque esse $bn \parallel cp$.

Si vero bn , cp in eadem plaga ipsius am sint; tum aliqua earum ex. gr. cp intra duas reliquas \overline{bn} , \overline{am} cadit; quævis $b\overline{q}$ (in nba) autem secat \overline{am} , adeoque et ipsam $c\overline{p}$. Est itaque $bn \parallel cp$.

Si mab , mac angulum efficiant: tum cbn cum abn nonnisi $b\overline{n}$, $a\overline{m}$ vero (in abn) cum $b\overline{n}$, adeoque nbc quoque cum $a\overline{m}$, nihil commune habent. Per quamvis $b\overline{d}$ (in nba) autem positum $bc\overline{d}$ secat $a\overline{m}$, quia (propter $bn \parallel am$) $b\overline{d}$ secat $a\overline{m}$. Moto itaque $bc\overline{d}$ circa bc , donec ipsam $a\overline{m}$ *prima vice* deserat, postremo cadet $bc\overline{d}$ in $bc\overline{n}$. Eadem ratione cadet idem in $bc\overline{p}$; cadit igitur bn in bcp . Porro si $br \parallel cp$; tum (quia etiam $am \parallel cp$) pari ratione cadit br in bam ; nec non (propter $br \parallel cp$) in bcp . Itaque $b\overline{r}$ ipsis mab , pcb commune, nempe ipsum $b\overline{n}$ est, atque hinc $bn \parallel cp$.

Si igitur $cp \parallel am$, et b extra \overline{cam} sit: tum sectio ipsorum bam , bcp , nempe $b\overline{n}$ est \parallel tam ad am , quam ad cp .*

§. 8.

Si $bn \parallel$ et $\simeq cp$ (vel brevius $bn \parallel \simeq cp$), atque am (in $nbcp$) rectam bc perpendiculariter bisecet; tum $bn \parallel am$. Fig. 5.

Si enim $b\overline{n}$ secaret $a\overline{m}$, etiam $c\overline{p}$ secaret $a\overline{m}$ in eodem puncto (cum $mabn \simeq macp$), quod et ipsis $b\overline{n}$, $c\overline{p}$ commune esset, quamvis $bn \parallel cp$ sit. Quævis $b\overline{q}$ (in cbn) vero secat $c\overline{p}$; adeoque secat $b\overline{q}$ etiam $a\overline{m}$. Consequenter $bn \parallel am$.

* Casu tertio *praemisso* duo priores, adinstar casus secundi §. 10. brevius ac elegantius simul absolvi possunt. (Ed. I. Tom. I. Errata Appendicis).

§. 9.

Fig. 6. Si $bn \parallel am$, $map \perp mab$, atque *angulus, quem* nbd cum nba (in ea plaga ipsius $mabn$, ubi map est) *facit, sit* $< R$: tum map et nbd se *invicem secant*.

Nam sit

$$bam = R, \text{ ac } \perp bn$$

(sive in b cadat c , sive non), et

$$ce \perp bn \text{ (in } nbd);$$

erit (per hyp.) $ace < R$, et $af (\perp ce)$ in ace cadet. Sit $a\tilde{p}$ sectio (punctum a commune habentium) $ab\tilde{f}$ et $am\tilde{p}$; erit

$$bap = bam = R$$

(cum sit $bam \perp map$). Si denique $ab\tilde{f}$ in abn ponatur (a et b manentibus); cadet $a\tilde{p}$ in $a\tilde{m}$; atque cum

$$ac \perp bn \text{ et } af < ac$$

sit, patet af *intra* $b\tilde{n}$ terminari, adeoque $b\tilde{f}$ in abn cadere. Secat autem $b\tilde{f}$ ipsam $a\tilde{p}$ in *hoc* situ (quia $bn \parallel am$, adeoque etiam in situ *primo* $a\tilde{p}$ et $b\tilde{f}$ se invicem secant; estque punctum sectionis ipsis map et nbd commune: secant itaque map et nbd se invicem.

Facile exhinc sequitur map et nbd se mutuo secare, si summa inter-
norum, quos cum $mabn$ efficiunt, $< 2R$ sit.

§. 10.

Fig. 7. Si tam bn quam cp sit $\parallel \simeq am$; est etiam $bn \parallel \simeq cp$.

Nam mab et mac aut *angulum* efficiunt, aut in plano sunt.

Si prius; bisecet $\overline{qd\tilde{f}}$ rectam ab perpendiculariter; erit $dq \perp ab$, adeoque $dq \parallel am$ (§. 8.); pariter si $\overline{er\tilde{s}}$ bisecet rectam ac perpendiculariter, est $er \parallel am$; unde $dq \parallel er$ (§. 7.). Facile hinc (per §. 9.) consequitur, $\overline{qd\tilde{f}}$

et $\overline{ar\bar{s}}$ se mutuo secare, et sectionem $\overline{f\bar{s}}$ esse $\parallel \delta q$ (§. 7.), atque (propter $bn \parallel \delta q$) esse etiam

$$f\bar{s} \parallel bn.$$

Est porro (pro quovis puncto ipsius $\overline{f\bar{s}}$)

$$fb = fa = fc,$$

caditque $\overline{f\bar{s}}$ in planum $\overline{tg\bar{f}}$, rectam bc perpendiculariter bisecans. Est vero (per §. 7.) (cum sit $f\bar{s} \parallel bn$) etiam

$$gt \parallel bn.$$

Pari modo demonstratur $gt \parallel cp$ esse. Interim gt bisecat rectam bc perpendiculariter; adeoque $tgbn \equiv tgcp$ (§. 1.) et

$$bn \parallel \simeq cp.$$

Si bn , am , cp in plano sint; sit (*extra hoc planum cadens*) $f\bar{s} \parallel \simeq am$; tum (per præc.) $f\bar{s} \parallel \simeq$ tam ad bn quam ad cp , adeoque et $bn \parallel \simeq cp$.

§. 11.

Complexus puncti a , atque *omnium* punctorum, quorum quodvis b tale est, ut si $bn \parallel am$ sit, sit etiam $bn \simeq am$; dicatur F : sectio vero ipsius F cum quovis plano rectam am complectente nominetur L .

In quavis recta, quæ $\parallel am$ est, F gaudet puncto, et nonnisi uno; atque patet L per am dividi in duas partes congruentes; dicatur am *axis* ipsius L ; patet etiam, in quovis plano rectam am complectente, pro *axe* am unicum L dari. Quodvis eiusmodi L , dicatur L *ipsius* am (in plano, de quo agitur, intelligendo). Patet per L circa am revolutum, F describi, cuius am *axis* vocetur, et vicissim F *axi* am *attribuatur*.

§. 12.

Si b ubivis in L ipsius am fuerit, et bn $\parallel \simeq am$ (§. 11.); tum L ipsius am et L ipsius bñ coincidunt.

Nam dicatur L ipsius $b\bar{n}$ distinctionis ergo l ; sitque c ubivis in l , et $cp \parallel \simeq bn$ (§. 11.); erit (cum et $bn \parallel \simeq am$ sit) $cp \parallel \simeq am$ (§. 10.), adeoque c etiam in L cadet. Et si c ubivis in L sit, et $cp \parallel \simeq am$; tum $cp \parallel \simeq bn$ (§. 10.); caditque c etiam in l (§. 11.). Itaque L et l sunt eadem; ac quævis $b\bar{n}$ est etiam axis ipsius L , et inter omnes axes ipsius L , \simeq est. Idem de F eodem modo patet.

§. 13.

Fig. 8. Si $bn \parallel am$, $cp \parallel dq$, et $bam + abn = 2R$ sit; tum etiam $dcp + cdq = 2R$. Sit enim $ea = eb$ et $efm = dcp$ (§. 4.); erit (cum

$$\begin{aligned} bam + abn &= 2R = abn + abg \\ \text{sit) } \end{aligned}$$

$$ebg = eaf;$$

adeoque si etiam $bg = af$ sit,

$$\triangle ebg = \triangle eaf, \quad beg = aef,$$

cadetque g in $f\bar{e}$. Est porro $gfm + fgn = 2R$ (quia $egb = efa$). Est etiam $gn \parallel fm$ (§. 6.); itaque si $m\bar{f}rs = pc\bar{d}q$, tum $rs \parallel gn$ (§. 7.), et r in vel extra $f\bar{g}$ cadit (si $c\bar{d}$ non $= f\bar{g}$, ubi res iam patet).

I. In casu primo est $f\bar{r}s$ non $> (2R - r\bar{f}m = f\bar{g}n)$, quia $rs \parallel fm$; ast cum $rs \parallel gn$ sit, est etiam $f\bar{r}s$ non $< f\bar{g}n$; adeoque $f\bar{r}s = f\bar{g}n$, et

$$r\bar{f}m + f\bar{r}s = g\bar{f}m + f\bar{g}n = 2R.$$

Itaque et $dcp + cdq = 2R$.

II. Si r extra $f\bar{g}$ cadat; tunc $n\bar{g}r = m\bar{f}r$, sitque $m\bar{f}gn = n\bar{g}hl = l\bar{h}fo$ et ita porro, usquequo $f\bar{f} =$ vel prima vice $> f\bar{r}$ fiat. Est heic $fo \parallel hl \parallel fm$ (§. 7.). Si f in r cadat; tum fo in rs cadit (§. 1.); adeoque

$$r\bar{f}m + f\bar{r}s = f\bar{f}m + f\bar{f}o = f\bar{f}m + f\bar{g}n = 2R;$$

si vero r in $h\bar{f}$ cadat, tum (per I.) est

$$r\bar{h}l + h\bar{r}s = 2R = r\bar{f}m + f\bar{r}s = dcp + cdq.$$

§. 14.

Si $b\bar{n} \parallel a\bar{m}$, $c\bar{p} \parallel d\bar{q}$, *et* $b\bar{a}m + a\bar{b}n < 2R$ *sit*; *tum etiam* $d\bar{c}p + c\bar{d}q < 2R$.

Si enim $d\bar{c}p + c\bar{d}q$ *non esset* $<$, *adeoque* (per §. 1.) *esset* $= 2R$; *tum* (per §. 13.) *etiam* $b\bar{a}m + a\bar{b}n = 2R$ *esset* (contra hyp.).

§. 15.

Perpensis §§. 13. et 14. *Systema Geometriae hypotesi veritatis Axiomatis Euclidei XI. insistens dicatur* Σ ; *et hypotesi contrariae superstructum sit* S . *Omnia, quae expresse non dicentur, in* Σ *vel in* S *esse; absolute enuntiari, i. e. illa, sive* Σ *sive* S *reipsa sit, vera asseri intelligatur.*

§. 16.

Si $a\bar{m}$ *sit axis alicuius* L ; *tum* L *in* Σ *recta* $\perp a\bar{m}$ *est.*

Fig. 5.

Nam sit e quovis puncto b *ipsius* L *axis* $b\bar{n}$; *erit in* Σ

$$b\bar{a}m + a\bar{b}n = 2b\bar{a}m = 2R,$$

adeoque $b\bar{a}m = R$. *Et si* c *quodvis punctum in* $\bar{a}\bar{b}$ *sit, atque* $c\bar{p} \parallel a\bar{m}$; *est* (per §. 13.) $c\bar{p} \perp a\bar{m}$, *adeoque* c *in* L (§. 11.).

In S *vero nulla 3 puncta* a, b, c *ipsius* L *vel* F *in recta sunt.*

Nam aliquis axium $a\bar{m}, b\bar{n}, c\bar{p}$ (ex. gr. $a\bar{m}$) *intra duos reliquos cadit; et tunc* (per §. 14.) *tam* $b\bar{a}m$ *quam* $c\bar{a}m < R$.

§. 17.

L est etiam in S *linea, et* F *superficies.*

Fig. 7.

Nam (per §. 11.) *quodvis planum ad axem* $a\bar{m}$ (per punctum aliquod ipsius F) *perpendiculare secat ipsum* F *in peripheria circuli, cuius planum* (per §. 14.) *ad nullum alium axem* $b\bar{n}$ *perpendiculare est. Revolvatur* F *circa* $b\bar{n}$; *manebit* (per §. 12.) *quodvis punctum ipsius* F *in* F , *et sectio ipsius* F *cum plano ad* $b\bar{n}$ *non perpendiculari describet super-*

ficiem: atqui F (per §. 12.), quæcunque puncta a , b fuerint in eo, ita sibi congruere poterit, ut a in b cadat; est igitur F superficies uniformis.

Patet hinc (per §§. 11. et 12.) L esse lineam uniformem.*

§. 18.

Fig. 7. Cuiusvis plani, per punctum a ipsius F ad axem am oblique positi, sectio cum F in S peripheria circuli est.

Nam sint a , b , c 3 puncta huius sectionis, et bn , cp axes; facient $ambn$, $amcp$ angulum; nam secus planum (ex §. 16.) per a , b , c determinatum ipsam am complecteretur (contra hyp.). Plana igitur, rectas ab , ac perpendiculariter bisecantia se mutuo secant (§. 10.) in aliquo axe $f\bar{s}$ (ipsius F), atque $fb = fa = fc$. Sit $ah \perp f\bar{s}$, et revolvatur fah circa $f\bar{s}$; describet a peripheriam radii ha , per b et c euntem, et simul in F et \overline{abc} sitam; nec F et \overline{abc} præter $\circ ha$ quidquam commune habent (§. 16.).

Patet etiam extremitate portiois fa lineæ L (tanquam radio) in F circa f mota ipsam $\circ ha$ describi.

§. 19.

Fig. 5. Perpendicularis bt ad axem bn ipsius L (in planum ipsius L cadens) est in S tangens ipsius L .

Nam L in $b\tilde{t}$ præter b nullo puncto gaudet (§. 14.), si vero bq in tbn cadat, tum centrum sectionis plani per bq ad tbn perpendicularis cum F ipsius $b\tilde{n}$ (§. 18.) manifesto in $b\bar{q}$ locatur, et si bq diameter sit, patet $b\bar{q}$ lineam L ipsius $b\tilde{n}$ in q secare.

§. 20.

Per quævis duo puncta in F linea L determinatur (§§. 11. et 18.); atque (cum ex §§. 16. et 19. L perpendicularis ad omnes suos axes sit)

* Demonstrationem ad S restringere haud necesse est; quum facile ita proponatur, ut absolute (pro S et Σ) valeat. (Ed. I. Tom. I. Errata Appendicis).

quivis angulus L lineus in F angulo planorum ad F per crura perpendiculariarum aequalis est.

§. 21.

Duae lineae L formes $a\bar{p}$, $b\bar{d}$ in eodem F , cum tertia L formi ab Fig. 6.
summam internorum $< 2R$ efficientes, se mutuo secant (per $a\bar{p}$ in F intelligendo L per a , p ductum, per $a\bar{p}$ vero dimidium illud eius ex a incipiens, in quod p cadit).

Nam si am , bn axes ipsius F sint; tum $am\bar{p}$, $bn\bar{d}$ secant se invicem (§. 9.); atque F secat eorundem sectionem (per §§. 7. et 11.); adeoque et $a\bar{p}$, $b\bar{d}$ se mutuo secant.

Patet exhinc Axioma XI. et omnia, quæ in Geometria Trigonometricaque (plana) asseruntur, absolute constare in F , rectarum vices lineis L subeuntibus: idcirco functiones trigonometricæ abhinc eodem sensu accipientur, quo in Σ' veniunt; et periphæria circuli, cuius radius L formis $= r$ in F , est $= 2\pi r$, et pariter $\odot r$ (in F) $= \pi r^2$ (per π intelligendo $\frac{1}{2} \odot 1$ in F , sive notum 3.1415926 . . .).

§. 22.

Si $a\bar{b}$ fuerit L ipsius $a\bar{m}$, et c in $a\bar{m}$; atque angulus cab (e recta $a\bar{m}$ et L formi linea $a\bar{b}$ compositus) feratur prius iuxta $a\bar{b}$, tum iuxta $b\bar{a}$ semper porro in infinitum: erit via $c\bar{d}$ ipsius c linea L ipsius $c\bar{m}$. Fig. 9.

Nam (posteriore l dicta) sit punctum quodvis d in $c\bar{d}$, $dn \parallel cm$, et b punctum ipsius L in \bar{dn} cadens; erit $bn \triangleq am$, et $ac = bd$, adeoque $dn \triangleq cm$, consequ. d in l . Si vero d in l et $dn \parallel cm$, atque b punctum ipsius L ipsi \bar{dn} commune sit; erit $am \triangleq bn$ et $cm \triangleq dn$, unde manifesto $bd = ac$, cadetque d in viam puncti c , et sunt l et $c\bar{d}$ eadem. Designetur tale l per $l \parallel L$.

§. 23.

Si linea L formis $c\bar{d}\bar{f} \parallel a\bar{b}\bar{e}$ (§. 22.), et $ab = be$, atque $a\bar{m}$, $b\bar{n}$, $e\bar{p}$ sint Fig. 9.
axes; erit manifesto $c\bar{d} = d\bar{f}$; et si quælibet 3 puncta a , b , e fuerint ipsius

\overline{ab} , ac $ab = n \cdot cd$: erit quoque $ae = n \cdot cf$; adeoque (manifesto etiam pro ab , ae , dc incommensurabilibus)

$$ab : cd = ae : cf,$$

estque $ab : cd$ ab ab *independens* et per ac *prorsus determinatum*. Denotetur quotus iste, nempe $ab : cd$ litera maiore eiusdem nominis (puta per X), quo ac litera minuscula (ex. gr. x) insignitur.

§. 24.

Quaecunque x et y fuerint; est $Y = X^{\frac{y}{x}}$ (§. 23.).

Nam aut erit alterum (ipsorum x , y) multipulum alterius (ex. gr. y ipsius x), aut non.

Si $y = nx$; sit $x = ac = cg = gh$ \mathcal{E} , usquequo $ah = y$ fiat; sit porro $cd \parallel gf \parallel hl$; erit (§. 23.)

$$X = ab : cd = cd : gf = gf : hl;$$

adeoque

$$\frac{ab}{hl} = \left(\frac{ab}{cd}\right)^n,$$

sive

$$Y = X^n = X^{\frac{y}{x}}.$$

Si x , y multipla ipsius i sint, puta

$$x = mi \quad \text{et} \quad y = ni;$$

est (per præc.)

$$X = I^m, \quad Y = I^n,$$

consequ.

$$Y = X^{\frac{n}{m}} = X^{\frac{y}{x}}.$$

Idem ad casum incommensurabilitatis ipsorum x , y facile extenditur. Si vero fuerit $q = y - x$; erit manifesto $Q = Y : X$.

Nec non manifestum est, in Σ pro quovis x esse $X = 1$, in S vero $X > 1$ esse, atque pro *quibusvis* ab , abe dari tale $cdf \parallel abe$, ut sit $cdf = ab$,

unde $ambn \equiv amep$ erit, etsi hoc illius qualevis multipulum sit; quod singulare quidem est, sed absurditatem ipsius S evidenter non probat.

§. 25.

In quovis rectilineo triangulo sunt periphæriæ radiorum lateribus aequalium, uti sinus angulorum oppositorum. Fig. 10.

Sit enim $abc = R$, et $am \perp bac$, atque sint $bn, cp \parallel am$; erit $cab \perp ambn$, adeoque (cum $cb \perp ba$ sit) $cb \perp ambn$, consequ. $cpbn \perp ambn$. Secet F ipsius cp rectas $\overline{bn}, \overline{am}$ (respective) in d, e , et fascias $cpbn, cpam, bnam$ in lineis L formibus cd, ce, de ; erit (§. 20.) $cd \angle =$ angulo ipsorum ndc, nde , adeoque $= R$; atque pari ratione est $ced = cab$.

Est autem (per §. 21.) in L lineo triangulo ced (heic radio semper $= 1$ posito)

$$ec : dc = 1 : \sin. dec = 1 : \sin. cab.$$

Est quoque (per §. 21.)

$$\begin{aligned} ec : dc &= \circ ec : \circ dc \text{ (in } F) \\ &= \circ ac : \circ bc \text{ (§. 18.);} \end{aligned}$$

adeoque est etiam

$$\circ ac : \circ bc = 1 : \sin. cab;$$

unde assertum pro quovis triangulo liquet.

§. 26.

In quovis sphaerico triangulo sunt sinus laterum, uti sinus angulorum iisdem oppositorum. Fig. 11.

Nam sit $abc = R$, et ced perpendiculare ad sphæræ radius oa ; erit $ced \perp aob$, et (cum etiam $hoc \perp boa$ sit) $cd \perp ob$. In triangulis ceo, cdo vero est (per §. 25.)

$$\begin{aligned} \circ ec : \circ oc : \circ dc &= \sin. coe : 1 : \sin. cod \\ &= \sin. ac : 1 : \sin. bc; \end{aligned}$$

interim (§. 25.) etiam

itaque $\circ ec : \circ dc = \sin. cde : \sin. ced ;$
 $\sin. ac : \sin. bc = \sin. cde : \sin. ced ;$
 est vero $cde = R = cba$, atque $ced = cab$. Consequenter
 $\sin. ac : \sin. bc = 1 : \sin. a$.

E quo promanans Trigonometria sphaerica ab Axiomate XI. independenter stabilita est.

§. 27.

Fig. 12. Si ac, bd sint $\perp ab$, et feratur cab iuxta \overline{ab} ; erit (via puncti c dicta heic cd)

$$cd : ab = \sin. u : \sin. v.$$

Nam sit $de \perp ca$; est in triangulis ade, adb (per §. 25.)

$$\circ ed : \circ ad : \circ ab = \sin. u : 1 : \sin. v.$$

Revoluto $bacd$ circa ac , describetur $\circ ab$ per b , $\circ ed$ per d ; et via dictæ cd denotetur heic per $\odot cd$. Sit porro polygonum quodvis $bfg \dots$ ipsi $\odot ab$ inscriptum; nascetur per plana ex omnibus lateribus $bf, fg \&$, ad $\odot ab$ perpendicularia, in $\odot cd$ quoque figura polygonalis totidem laterum; et demonstrari (ad instar §. 23.) potest, esse

$$cd : ab = dh : bf = hf : fg = \dots,$$

adeoque

$$dh + hf + \dots : bf + fg + \dots = cd : ab$$

Quovis laterum bf, fg, \dots ad limitem o tendente, manifesto

$$bf + fg + \dots \curvearrowright \circ ab \quad \text{et} \quad dh + hf + \dots \curvearrowright \circ ed.$$

Itaque etiam

$$\circ ed : \circ ab = cd : ab.$$

Erat vero

$$\circ ed : \circ ab = \sin. u : \sin. v.$$

Consequ.

$$cd : ab = \sin. u : \sin. v.$$

Remoto ac a bd in infinitum, manet

$$\begin{aligned} & cd : ab \\ \text{adeoque etiam} & \\ & \sin. u : \sin. v \end{aligned}$$

constans; u vero $\sphericalangle R$ (§. 1.), et si $dm \parallel bn$ sit, $v \sphericalangle z$; unde fit

$$cd : ab = 1 : \sin. z.$$

Via dicta cd denotabitur per $cd \parallel ab$.

§. 28.

Si $bn \parallel \sphericalangle am$, et c in am , atque $ac = x$ sit: erit X (§. 23.)

Fig. 13.

$$= \sin. u : \sin. v.$$

Nam si cd et ae sint $\perp bn$ et $bf \perp am$; erit (ad instar §. 27.)

$$\circ bf : \circ cd = \sin. u : \sin. v.$$

Est autem evidenter $bf = ae$: quamobrem

$$\circ ea : \circ dc = \sin. u : \sin. v.$$

In superficiebus vero F formibus ipsorum am et cm (ipsum $ambn$ in ab et cg secantibus) est (per §. 21.)

$$\circ ea : \circ dc = ab : cg = X.$$

Est itaque etiam

$$X = \sin. u : \sin. v.$$

§. 29.

Si $bam = R$, $ab = y$, et $bn \parallel am$ sit; erit in S

Fig. 14.

$$Y = \cot. \frac{1}{2} u.$$

Nam si fuerit $ab=ac$, et $cp \parallel am$ (adeoque $bn \parallel \simeq cp$), atque $pcd=qcd$; datur (§. 19.) $ds \perp c\tilde{d}$, ut $ds \parallel cp$, adeoque (§. 1.) $dt \parallel cq$ sit. Si porro $be \perp d\tilde{s}$; erit (§. 7.) $ds \parallel bn$, adeoque (§. 6.) $bn \parallel es$, et (cum $dt \parallel cq$ sit) $bq \parallel et$; consequ. (§. 1.) $ebn = ebq$.

Repræsententur, bcf ex L ipsius bn , et fg , dh , cf et el ex L formibus lineis ipsorum ft , dt , cq et et ; erit evidenter (§. 22.)

$$hg = df = d\tilde{f} = hc;$$

itaque

$$cg = 2ch = 2v.$$

Pariter patet

$$bg = 2bl = 2z$$

esse. Est vero

$$bc = bg - cg;$$

quapropter

$$y = z - v,$$

adeoque (§. 24.)

$$Y = Z:V.$$

Est demum (§. 28.)

$$Z = 1 : \sin. \frac{1}{2}u \quad \text{et} \quad V = 1 : \sin. \left(R - \frac{1}{2}u \right),$$

consequ.

$$Y = \cot. \frac{1}{2}u.$$

§. 30.

Fig. 15. Verumtamen facile (ex §. 25.) patet, resolutionem problematis *Trigonometriæ planæ* in S , peripheriæ per radium expressæ indigere; hoc vero rectificatione ipsius L obtineri potest.

Sint ab , cm , $c'm' \perp a\tilde{c}$, atque b ubivis in $a\tilde{b}$; erit (§. 25.)

$$\sin. u : \sin. v = \circ p : \circ y$$

et

$$\sin. u' : \sin. v' = \circ p : \circ y';$$

adeoque

$$\frac{\sin. u}{\sin. v} \circ = \frac{\sin. u'}{\sin. v'} \circ y'.$$

Est vero (per §. 27.)

$$\sin. v : \sin. v' = \cos. u : \cos. u';$$

consequ.

$$\frac{\sin. u}{\cos. u} \circ y = \frac{\sin. u'}{\cos. u'} \circ y',$$

seu

$$\circ y : \circ y' = \text{tang. } u' : \text{tang. } u = \text{tang. } w : \text{tang. } w'.$$

Sint porro $cn \parallel ab$, $c'n' \parallel ab$ et cd , $c'd'$ lineæ L formes ad \overline{ab} perpendiculares; erit (§. 21.) etiam

$$\circ y : \circ y' = r : r',$$

adeoque

$$r : r' = \text{tang. } w : \text{tang. } w'.$$

Crescat iam p ab a incipiendo in infinitum; tum $w \rightsquigarrow z$ et $w' \rightsquigarrow z'$; quapropter etiam

$$r : r' = \text{tang. } z : \text{tang. } z'.$$

Constans $r : \text{tang. } z$ (ab r independens) dicatur i ; dum $y \rightsquigarrow 0$, est

$$\left(\frac{r}{y} = \frac{i \text{ tang. } z}{y} \right) \rightsquigarrow 1,$$

adeoque

$$\frac{y}{\text{tang. } z} \rightsquigarrow i.$$

Ex §. 29. fit

$$\text{tang. } z = \frac{1}{2} (Y - Y^{-1});$$

itaque

$$\frac{2y}{Y - Y^{-1}} \rightsquigarrow i,$$

seu (§. 24.)

$$\frac{2y I^{\frac{y}{i}}}{I^{\frac{2y}{i}} - 1} \rightsquigarrow i.$$

Notum autem est, expressionis istius (dum $y \rightsquigarrow 0$) limitem esse $\frac{i}{\log. \text{nat. } I}$; est ergo

$$\frac{i}{\log. \text{nat. } I} = i \quad \text{et} \quad I = e = 2.7182818 \dots,$$

quæ quantitas insignis hic quoque elucet. Si nempe abhinc i illam rectam denotet, cuius $I=e$ sit, erit $r=i \text{ tang. } z$. Erat autem (§. 21.) $\bigcirc y = 2\pi r$; est igitur

$$\begin{aligned}\bigcirc y &= 2\pi i \text{ tang. } z = \pi i (Y - Y^{-1}) = \\ &= \pi i (e^{\frac{y}{i}} - e^{-\frac{y}{i}}) = \frac{\pi y}{\log. \text{ nat. } Y} (Y - Y^{-1})\end{aligned}$$

(per §. 24.).

§. 31.

Fig. 16. Ad resolutionem omnium triangulorum rectangulorum rectilineorum trigonometricam (e qua omnium triangulorum resolutio in promptu est) in S_3 æquationes sufficiunt: nempe (a, b cathetos, c hypotenusam, et α, β angulos cathetis oppositos denotantibus) æquatio relationem exprimens *primo* inter a, c, α , *secundo* inter a, α, β , *tertio* inter a, b, c ; nimirum ex his *reliquae* 3 per eliminationem prodeunt.

I. Ex §§. 25. et 30. est

$$1 : \sin. \alpha = (C - C^{-1}) : (A - A^{-1}) = (e^{\frac{c}{i}} - e^{-\frac{c}{i}}) : (e^{\frac{a}{i}} - e^{-\frac{a}{i}});$$

(æquatio pro α, c, a).

II. Ex §. 27. sequitur (si $\beta m \parallel \gamma n$ sit)

$$\cos. \alpha : \sin. \beta = 1 : \sin. u;$$

ex §. 29. autem fit

$$1 : \sin. u = \frac{1}{2} (A + A^{-1});$$

itaque

$$\cos. \alpha : \sin. \beta = \frac{1}{2} (A + A^{-1}) = \frac{1}{2} (e^{\frac{a}{i}} + e^{-\frac{a}{i}});$$

(æquatio pro α, β, a).

III. Si $\alpha\alpha' \perp \beta\alpha\gamma$, atque $\beta\beta'$ et $\gamma\gamma'$ fuerint $\parallel \alpha\alpha'$, (§. 27.), atque $\beta'\alpha'\gamma' \perp \alpha\alpha'$; erit manifesto (uti in §. 27.)

$$\begin{aligned}\frac{\beta\beta'}{\gamma\gamma'} &= \frac{1}{\sin. u} = \frac{1}{2} (A + A^{-1}), \\ \frac{\gamma\gamma'}{\alpha\alpha'} &= \frac{1}{2} (B + B^{-1}),\end{aligned}$$

ac

$$\frac{\beta\beta'}{\alpha\alpha'} = \frac{1}{2}(C + C^{-1});$$

consequ.

$$\frac{1}{2}(C + C^{-1}) = \frac{1}{2}(A + A^{-1}) \frac{1}{2}(B + B^{-1}),$$

sive

$$e^{\frac{c}{i}} + e^{-\frac{c}{i}} = \frac{1}{2}(e^{\frac{a}{i}} + e^{-\frac{a}{i}})(e^{\frac{b}{i}} + e^{-\frac{b}{i}});$$

(æquatio pro a, b, c).Si $\gamma\alpha\delta = R$, et $\beta\delta \perp \alpha\delta$ sit; erit

$$\bigcirc c : \bigcirc a = 1 : \sin. \alpha,$$

et

$$\bigcirc c : \bigcirc (d = \beta\delta) = 1 : \cos. \alpha,$$

adeoque ($\bigcirc x^2$ pro quovis x factum $\bigcirc x$, $\bigcirc x$ denotante) manifesto

$$\bigcirc a^2 + \bigcirc d^2 = \bigcirc c^2.$$

Est vero (per §. 27. et II.)

$$\bigcirc d = \bigcirc b \cdot \frac{1}{2}(A + A^{-1}),$$

consequ.

$$(e^{\frac{c}{i}} - e^{-\frac{c}{i}})^2 = \frac{1}{4}(e^{\frac{a}{i}} + e^{-\frac{a}{i}})^2(e^{\frac{b}{i}} - e^{-\frac{b}{i}})^2 + (e^{\frac{a}{i}} - e^{-\frac{a}{i}})^2;$$

alia æquatio pro a, b, c (cuius membrum *secundum* facile ad formam *symmetricam* seu *invariabilem* reducitur).

Denique ex

$$\frac{\cos. \alpha}{\sin. \beta} = \frac{1}{2}(A + A^{-1})$$

atque

$$\frac{\cos. \beta}{\sin. \alpha} = \frac{1}{2}(B + B^{-1})$$

fit (per III.)

$$\cot. \alpha \cot. \beta = \frac{1}{2}(e^{\frac{c}{i}} + e^{-\frac{c}{i}});$$

(æquatio pro α, β, c).

§. 32.

Restat adhuc modum *problemata* in S resolvendi breviter ostendere, quo (per exempla magis obvia) peracto, demum quid theoria hæcce præstet, candide dicetur.

Fig. 17. I. Sit \widetilde{ab} linea in plano, et $y=f(x)$ æquatio eius (pro coordinatis perpendicularibus), et quodvis incrementum ipsius z dicatur dz , atque incrementa ipsorum x , y , et areæ u , eidem dz respondentia, respective per dx , dy , du denotentur; sitque $bh \parallel cf$, et exprimatür (ex §§. 31. et 27.) $\frac{bh}{dx}$ per y , ac quæratür ipsius $\frac{dy}{dx}$ *limes* tendente dx ad litem 0 , (quod, ubi eiusmodi limes quæritür, subintelligatur): innotescet exinde etiam limes ipsius $\frac{dy}{bh}$, adeoque $tg. hbg$; eritque, (cum hbc manifesto nec $>$ nec $<$ adeoque $= R$ sit), *tangens* in b ipsius bg per y determinata.

II. Demonstrari potest, esse

$$\frac{dz^2}{dy^2 + bh^2} \sim I.$$

Hinc *limes* ipsius $\frac{dz}{dx}$, et inde z integratione (per x expressum) reperitur.

Et potest lineæ cuiusvis *in concreto datae* æquatio in S inveniri, ex. gr. ipsius L .

Si enim am axis ipsius L sit; tum quævis cb ex am secat L (cum per §. 19 quævis recta ex a præter am ipsum L secet); est vero (si $bñ$ axis sit)

$$X = 1 : \sin. cbn \quad (\S. 28.),$$

atque

$$Y = \cot. \frac{1}{2} cbn \quad (\S. 29.),$$

unde fit

$$Y = X + \sqrt{X^2 - 1}$$

seu

$$e^y = e^x + \sqrt{e^x - 1}$$

æquatio quæsitæ. Erit hinc

$$\frac{dy}{dx} \sim X(X^2-1)^{-\frac{1}{2}};$$

atqui

$$\frac{bh}{dx} = 1: \sin. cbn = X;$$

adeoque

$$\frac{dy}{bh} \sim (X^2-1)^{-\frac{1}{2}};$$

$$1 + \frac{dy^2}{bh^2} \sim X^2(X^2-1)^{-1},$$

$$\frac{dz^2}{bh^2} \sim X^2(X^2-1)^{-1},$$

$$\frac{dz}{bh} \sim X(X^2-1)^{-\frac{1}{2}}$$

atque

$$\frac{dz}{dx} \sim X^2(X^2-1)^{-\frac{1}{2}};$$

unde per integrationem invenitur

$$z = i(X^2-1)^{\frac{1}{2}} = i \cot. cbn$$

(uti §. 30.).

III. Manifesto

$$\frac{du}{dx} \sim \frac{hfcbh}{dx},$$

quod (nonnisi ab y dependens) iam primum per y exprimendum est; unde u integrando prodit.

Si $ab = p$, $ac = q$, et $cd = r$, atque $cabdc = s$ sit; poterit (uti in II.) Fig. 12. ostendi esse

$$\frac{ds}{dq} \sim r,$$

quod

$$= \frac{1}{2} p (e^{\frac{q}{i}} + e^{-\frac{q}{i}}),$$

atque integrando

$$s = \frac{1}{2} pi (e^{\frac{q}{i}} - e^{-\frac{q}{i}}).$$

Potest hoc absque integratione quoque deduci.

Aequatione e. g. circuli (ex §. 31, III.), rectæ (ex §. 31, II.), sectionis conii (per præc.) expressis; poterunt areæ quoque his lineis clausæ exprimi.

Palam est, superficiem t ad figuram planam p (in distantia q) \parallel lam esse ad p in ratione potentiarum secundarum linearum homologarum, sive uti

$$\frac{1}{4} (e^{\frac{q}{i}} + e^{-\frac{q}{i}})^2 : 1.$$

Porro computum soliditatis pari modo tractatum, facile patet duas integrationes requirere (cum et differentiale ipsum hic nonnisi per integrationem determinetur); et ante omnia solidum a p et t ac complexu omnium reclarum ad p perpendicularium, fines ipsorum p , t connectentium, clausum quærendum esse. Reperitur solidum istud (tam per integrationem quam sine ea)

$$= \frac{1}{8} pi (e^{\frac{2q}{i}} - e^{-\frac{2q}{i}}) + \frac{1}{2} pq.$$

Superficies quoque corporum in S determinari possunt, nec non *curvaturæ, evolutæ, evolventesque* linearum qualiumvis \mathcal{C} . Quod curvaturam attinet; ea in S aut ipsius L est, aut per radium circuli, aut *distantiam* curvæ ad rectam \parallel læ ab hac recta, determinatur; cum e præcedentibus facile ostendi possit, præter L , lineas circulares, ac rectæ \parallel las, nullas in plano alias lineas uniformes dari.

IV. Pro circulo est (uti in III.)

$$\frac{d \odot x}{dx} \sim \odot x,$$

unde (per §. 30.) integrando fit

$$\odot x = \pi i^2 (e^{\frac{x}{i}} - 2 + e^{-\frac{x}{i}}).$$

Fig. 9. V. Pro area $cabd c = u$ (linea L formi $ab = r$, huic \parallel la $cd = y$, ac rectis ac , $bd = x$ clausa) est

atque (§. 24.)

$$\frac{du}{dx} \sim y,$$

adeoque (integrando)

$$y = re^{-\frac{x}{i}};$$

$$u = ri(1 - e^{-\frac{x}{i}}).$$

Crescente x in infinitum, fiet in S $e^{-\frac{x}{i}} \sim 0$, adeoque $u \sim ri$. Per *quantitatem* ipsius $mabn$ in posterum limes iste intelligetur.

Simili modo invenitur, quod si p sit figura in F ; spatium a p et complexu axium e terminis ipsius p ductorum clausum $= \frac{1}{2}pi$ sit.

VI. Si angulus ad centrum segmenti z sphæræ sit $2u$, periphæria Fig. 10. circuli maximi sit p , et arcus fc (anguli u) $= x$; erit (§. 25.)

et hinc

$$1 : \sin. u = p : \textcircled{bc},$$

Interim est

$$\textcircled{bc} = p \sin. u.$$

Est porro

$$x = \frac{pu}{2\pi}, \quad \text{ac} \quad dx = \frac{pdu}{2\pi}.$$

et hinc

$$\frac{dz}{dx} \sim \textcircled{bc},$$

unde (integrando)

$$\frac{dz}{du} \sim \frac{p^2}{2\pi} \sin. u,$$

$$z = \frac{\sin. \text{vers. } u}{2\pi} p^2.$$

Cogitetur F in quod p (per meditullium f segmenti transiens) cadit; planis \overline{fem} , \overline{cem} per af , ac ad F perpendiculariter positis, ipsumque in \overline{feg} , ce secantibus; et considerentur L formis cd (ex c ad \overline{feg} perpendicularis) nec non L formis cf ; erit (§. 20.)

et (§. 21.)

$$cef = u,$$

$$\frac{fd}{p} = \frac{\sin. \text{vers. } u}{2\pi},$$

adeoque

$$z = \text{fd} \cdot p.$$

Ast (§. 21.)

$$p = \pi \cdot \text{fdg},$$

itaque

$$z = \pi \cdot \text{fd} \cdot \text{fdg}.$$

Est autem (§. 21.)

$$\text{fd} \cdot \text{fdg} = \text{fc} \cdot \text{fc};$$

consequ.

$$z = \pi \cdot \text{fc} \cdot \text{fc} = \odot \text{fc in } F.$$

Fig. 14. Sit iam $\text{bj} = \text{cj} = r$; erit (§. 30.)

$$2r = i(Y - Y^{-1}),$$

adeoque (§. 21.)

$$\odot 2r \text{ (in } F) = \pi i^2 (Y - Y^{-1})^2.$$

Est quoque (IV.)

$$\odot 2y = \pi i^2 (Y^2 - 2 + Y^{-2});$$

igitur $\odot 2r \text{ (in } F) = \odot 2y$, adeoque *et superficies z segmenti sphaerici aequatur circulo, chorda fc tanquam radio descripto.*

Hinc tota sphaeræ superficies

$$= \odot \text{fg} = \text{fdg} \cdot p = \frac{p^2}{\pi},$$

suntque superficies sphaerarum, uti secundae potentiae peripheriarum earundem maximarum.

VII. Soliditas sphaeræ radii x in S reperitur simili modo

$$= \frac{1}{2} \pi i^3 (X^2 - X^{-2}) - 2\pi i^2 x;$$

Fig. 12. superficies per revolutionem lineæ $c\delta$ circa ab orta

$$= \frac{1}{2} \pi i p (Q^2 - Q^{-2}),$$

et corpus per $cabdc$ descriptum

$$= \frac{1}{4} \pi i^2 p (Q - Q^{-1})^2.$$

Quomodo vero omnia a (IV.) hucusque tractata etiam absque integratione perfici possint, brevitatis studio supprimitur.

Demonstrari potest, *omnis expressionis literam i continentis* (adeoque *hypothesi*, quod *detur i*, innixæ) *limitem, crescente i in infinitum, exprimere quantitatem plane pro Σ* (adeoque pro *hypothesi nullius i*, *siquidem non eveniant aequationes identicae*. Cave vero intelligas putari, *systema ipsum variari* posse (quod omnino *in se et per se determinatum* est) sed tantum *hypothesein*, quod *successive* fieri potest, donec non ad absurdum perducti fuerimus. *Posito* igitur, quod in *tali* expressione litera *i* pro casu, si *S* esset reipsa, *illam* quantitatem unicam designet, cuius $I=e$ sit; si vero *revera Σ* fuerit, *limes dictus* loco expressionis accipi *cogitetur*: manifesto *omnes* expressiones ex *hypothesei realitatis* ipsius *S* oriundæ (hoc sensu) *absolute valent*, etsi *prorsus ignotum sit, num Σ' sit, aut non sit*.

Ita e. g. ex expressione in §. 30. obtenta facile (et quidem *tam* differentiationis auxilio, quam *absque* eo) valor notus pro Σ' prodit

$$\bigcirc x = 2\pi x;$$

ex I. (§. 31.) rite tractato, sequitur

$$1: \sin. \alpha = c: a;$$

ex II. vero

$$\frac{\cos. \alpha}{\sin. \beta} = 1, \text{ adeoque } \alpha + \beta = R;$$

æquatio *prima* in III. fit *identica*, adeoque *valet* pro Σ' ; quamvis nihil in eo *determinet*; ex *secunda* autem fluit

$$c^2 = a^2 + b^2.$$

Aequationes notae fundamentales trigonometriae planae in Σ' .

Porro *inveniuntur* (ex §. 32.) pro Σ' *area et corpus* in III., utrumque

$$= pq;$$

ex IV.

$$\bigodot x = \pi x^2;$$

ex VII. sphæra radii x

$$= \frac{4}{3} \pi x^3$$

§.

Sunt quoque theoremata ad finem (VI.) enuntiata manifesto *inconditionate vera*.

§. 33.

Superest adhuc, quid theoria ista sibi velit, (in §. 32. promissum) exponere.

I. Num Σ' aut S aliquod *reipsa* sit, indecisum manet.

II. Omnia ex hypothesi *falsitatis* Ax. XI. deducta (semper sensu §. 32. intelligendo) *absolute* valent, adeoque *hoc sensu nulli hypothesi innituntur*. Habetur idcirco *trigonometria plana a priori*, in qua *solum* systema *verum ignotum* adeoque solummodo *absolutae* magnitudines expressionum incognitæ manent, per *unicum* vero casum notum, manifesto totum systema figeretur. Trigonometria sphærica autem in §. 26. absolute stabilitur. (Habeturque Geometria, Geometriæ planæ in Σ' prorsus analoga in F).

III. Si *constaret* Σ' esse, nihil hoc respectu amplius incognitum esset; si vero *constaret non esse* Σ' , tunc (§. 31.) (e. g.) e lateribus x , y et angulo rectilineo ab iis intercepto, in *concreto datis* manifesto in se et per se impossibile esset triangulum absolute resolvere (i. e.) a priori determinare angulos ceteros et *rationem lateris tertii* ad duo data; nisi X , Y determinantur, ad quod *in concreto* haberi aliquod *a* oporteret, cuius A notum esset; atque tum *i unitas naturalis longitudinum* esset, (sicuti e est basis logarithmorum naturalium). Si existentia huius i constiterit; quomodo ad usum saltem quam exactissime construi possit, ostendetur.

IV. Sensu in I. et II. exposito patet, omnia in spatio methodo recentiorum Analytica (intra iustos fines valde laudanda) absolvi posse.

V. Denique lectoribus benevolis haud ingratum futurum est; pro casu illo, quodsi non Σ' sed S *reipsa* esset, circulo æquale rectilineum construi.

§. 34.

Ex δ ducitur $dm \parallel an$ modo sequente.

Fig. 12.

Fiat ex δ

$$\delta b \perp an;$$

erigatur e puncto quovis aliquo a rectæ \widetilde{ab}

$$ac \perp an \text{ (in } \delta ba),$$

et demittatur

$$\delta e \perp ac;$$

erit (§. 27.)

$$\odot ed : \odot ab = 1 : \sin. z,$$

siquidem fuerit $dm \parallel bn$.

Est vero $\sin. z$ non > 1 , adeoque ab non $> \delta e$. Descriptus igitur quadrans radio ipsi δe æquali ex a in bac , gaudebit puncto aliquo b vel o cum $b\delta$ communi. Priore in casu manifesto $z = R$; in posteriore vero erit (§. 25.)

$$(\odot ao = \odot ed) : \odot ab = 1 : \sin. aob,$$

adeoque

$$z = aob.$$

Si itaque fiat $z = aob$, erit $dm \parallel bn$.

§. 35.

Si fuerit S reipsa; ducetur recta ad anguli acuti crus unum perpendicularis, quæ ad alterum \parallel sit, hoc modo. Fig. 18.

Sit $am \perp bc$, et accipiatur $ab = ac$ tam parvum (per §. 19.), ut si ducatur $bn \parallel am$ (§. 34.), sit $abn >$ angulo dato. Ducatur porro $cp \parallel am$ (§. 34.), fiantque nbq , pcd utrumque æquale angulo dato; et bq , cd se mutuo secabunt. Secet enim bq , (quod *per constr.* in nbc cadit) ipsam cp in e ; erit (propter $bn = cp$) $ebc < ecb$, adeoque $ec < eb$. Sint

$$ef = ec, \text{ efr} = ecd, \text{ et } fs \parallel ep;$$

cadet fs in bfr . Nam cum $bn \parallel cp$, adeoque $bn \parallel ep$, atque $bn \parallel fs$ sit;

erit (§. 14.)

$$\text{fbu} + \text{bfs} < 2R = \text{fbn} + \text{bfr};$$

itaque $\text{bfs} < \text{bfr}$. Quamobrem fr secat ep , adeoque cd quoque ipsam eq in puncto aliquo δ .

Sit iam $\text{dg} = \text{dc}$, atque $\text{dgt} = \text{dcp} = \text{gbu}$; erit (cum $\text{cd} \hat{=} \text{gd}$ sit)

$$\text{bn} \hat{=} \text{gt} \hat{=} \text{cp}.$$

Si fuerit lineæ L formis ipsius bu , punctum in bq cadens f (§. 19.), et axis fl ; erit

$$\text{bn} \hat{=} \text{fl},$$

adeoque

$$\text{bfl} = \text{bgt} = \text{dcp};$$

sed etiam

$$\text{fl} \hat{=} \text{cp}:$$

cadit ergo f manifesto in g , estque $\text{gt} \parallel \text{bn}$. Si vero ho ipsum bg perpendiculariter bisecet; erit $\text{ho} \parallel \text{bn}$ constructum.

§. 36.

Fig. 10. Si fuerint data recta cp et planum $\overline{\text{mab}}$, atque fiat $\text{cb} \perp \overline{\text{mab}}$, (in $\overline{\text{bcp}}$) $\text{bn} \perp \text{bc}$, et $\text{cq} \parallel \text{bn}$ (§. 34.); *sectio ipsius* cp (si hæc in bcq cadat) *cum* bn (in $\overline{\text{cfn}}$), adeoque *cum* $\overline{\text{mab}}$ reperitur. Et si fuerint data duo plana $\overline{\text{pcq}}$, $\overline{\text{mab}}$, et sit $\text{cb} \perp \overline{\text{mab}}$, $\text{cr} \perp \overline{\text{pcq}}$, atque (in $\overline{\text{bcr}}$) $\text{bn} \perp \text{bc}$, $\text{cs} \perp \text{cr}$; cadent bn in $\overline{\text{mab}}$, et cs in $\overline{\text{pcq}}$; et sectione ipsarum $\overline{\text{bn}}$, $\overline{\text{cs}}$ (si detur) reperta, erit perpendicularis in $\overline{\text{pcq}}$ per eandem ad $\overline{\text{cs}}$ ducta manifesto *sectio ipsorum* $\overline{\text{mab}}$, $\overline{\text{pcq}}$.

§. 37.

Fig. 7. In $\overline{\text{am}} \parallel \text{bn}$ reperitur *tale* a , ut sit $\text{am} \hat{=} \text{bn}$; si (per §. 34.) construatur extra $\overline{\text{nbm}}$ $\text{gt} \parallel \text{bn}$, et fiant $\text{bg} \perp \text{gt}$, $\text{gc} = \text{gb}$, atque $\text{cp} \parallel \text{gt}$; ponaturque tg ita, ut efficiat cum tg angulum illi æqualem, quem pc cum pc facit; atque quærat (per §. 36.) *sectio* $\overline{\text{dq}}$ ipsorum tg , nb ; fiatque

$ba \perp \delta q$. Erit enimvero ob triangulorum L lineorum in F ipsius bn exortorum similitudinem (§. 21.) manifesto $\delta b = \delta a$, et $am \simeq bn$.

Facile hinc patet (L lineis per *solos terminos* datis) reperiri posse etiam *terminos* proportionis quartum ac medium, atque omnes constructiones geometricas, quæ in Σ in plano fiunt, hoc modo in F absque *XI. Axiomate* perfici posse. Ita e. g. $4R$ in quotvis partes æquales geometricè dividi potest, si sectionem istam in Σ perficere licet.

§. 38.

Si construatur (per §. 37.) e. g. $nbq = \frac{1}{3} R$, et fiat (per §. 35.) in S ad $b\bar{q}$ perpendicularis $am \parallel bn$, atque determinetur (per §. 37.) $jm \simeq bn$; erit, si $ja = x$ sit, (§. 28.)

$$X = 1 : \sin. \frac{1}{3} R = 2,$$

atque x *geometricè* constructum.

Et potest nbq ita computari, ut ja ab i quovis dato minus discrepet, cum nonnisi $\sin. nbq = \frac{1}{e}$ esse debeat.

§. 39.

Si fuerint (in plano) pq et st , \parallel rectæ mn (§. 27.), et ab , cd sint perpendiculares ad mn æquales; manifesto est

$$\triangle dec \simeq \triangle bea,$$

adeoque anguli (forsan mixtilinei) ecp , eat congruent, atque

$$ec = ea.$$

Si porro $cf = ag$, erit

$$\triangle acf \simeq \triangle caq,$$

et utrumque *quadrilateri* $faqc$ dimidium est. Si $faqc$, $haqf$ duo eiusmodi quadrilatera fuerint ad aq , inter pq et st ; æqualitas eorum (uti apud EUCLIDEM), nec non triangulorum aqc , aqh eidem aq insistentium,

verticesque in \overline{pq} habentium, æqualitas patet. Est porro

$$\begin{aligned} \text{atque} \quad & \text{acf} = \text{caq}, \quad \text{gcq} = \text{cqa}, \\ (\S. 32.), \text{ adeoque etiam} \quad & \text{acf} + \text{acq} + \text{gcq} = 2R \\ & \text{caq} + \text{acq} + \text{cqa} = 2R; \end{aligned}$$

itaque in quovis eiusmodi triangulo acq summa trium angulorum $= 2R$.

Sive in aq (quæ $\parallel \text{mn}$) ceciderit autem *recta* aq , sive non; triangulorum *rectilineorum* aqc , agh *tam ipsorum, quam summarum angulorum ipsorumdem, æqualitas* in aperto est.

§. 40.

Fig. 20. *Aequalia triangula abc , abd (abhinc rectilinea) uno latere aequali gaudentia, summas angulorum aequales habent.*

Nam dividat mn bifariam tam ac quam bc , et sit \overline{pq} (per c $\parallel \text{mn}$); cadet δ in \overline{pq} . Nam si \overline{bd} ipsum \overline{mn} in puncto e , adeoque (§. 39.) ipsum \overline{pq} ad distantiam $\overline{ef} = \overline{eb}$ secet; erit

$$\triangle \text{abc} = \triangle \text{abf},$$

adeoque et

$$\triangle \text{abd} = \triangle \text{abf},$$

unde δ in f cadit: si vero \overline{bd} ipsum \overline{mn} non secuerit, sit c punctum, ubi perpendicularis rectam ab bisecans ipsum \overline{pq} secat, atque $\overline{qs} = \overline{ht}$ ita, ut \overline{st} *productam* \overline{bd} in puncto aliquo f secet (quod fieri posse modo simili patet, ut §. 4.); sint porro $\overline{sl} = \overline{sa}$, $\text{lo} \parallel \text{st}$, atque o sectio ipsorum \overline{bf} et \overline{lo} ; esset tum (§. 39.)

$$\triangle \text{abl} = \triangle \text{abo},$$

adeoque

$$\triangle \text{abc} > \triangle \text{abd}$$

(contra hyp.).

§. 41.

Aequalia triangula abc, def aequalibus angulorum summis gaudent. Fig. 21.

Nam secet mn tam ac quam bc , ita pq tam df quam fe bifariam, et sit $rs \parallel mn$, atque $to \parallel pq$; erit perpendicularis ag ad rs aut æqualis perpendiculari dh ad to , aut altera e. g. dh erit maior: in quovis casu $\odot df$ e centro a cum g punctum aliquod f commune habet, eritque (§. 39.)

$$\triangle abf = \triangle abc = \triangle def.$$

Est vero $\triangle afb$ (per §. 40.) triangulo dfe , ac (per §. 39.) triangulo abc *aequiangulum*. Sunt igitur etiam triangula abc , def æquiangula.

In S *converti* quoque theorema potest. Sint enim triangula abc , def reciproce æquiangula, atque $\triangle bal = \triangle def$; erit (per præc.) alterum alteri, adeoque etiam $\triangle abc$ triangulo abl æquiangulum, et hinc manifesto

$$bcl + bfc + cbl = 2R.$$

Atqui (ex §. 31.) cuiusvis trianguli angulorum summa in S est $< 2R$: cadit igitur l in c .

§. 42.

Si fuerit complementum summae angulorum trianguli abc ad 2R Fig. 22.

*trianguli def vero
est*

$$\begin{aligned} &u, \\ &v; \\ \triangle abc : \triangle def &= u : v. \end{aligned}$$

Nam si quodvis triangulorum acg , gch , hcb , dff , ffe sit $= p$, atque

$$\triangle abc = mp, \quad \triangle def = np;$$

sitque s summa angulorum cuiusvis trianguli, quod $= p$ est: erit manifesto

$$2R - u = ms - (m - 1)2R = 2R - m(2R - s),$$

et

$$u = m(2R - s),$$

et pariter

$$v = n(2R - s).$$

Est igitur

$$\triangle abc : \triangle def = m : n = u : v.$$

Ad casum incommensurabilitatis triangulorum abc , def quoque extendi facile patet.

Eodem modo demonstratur triangula in superficie sphaerica esse uti *excessus* summarum angulorum eorundem supra $2R$. Si duo anguli trianguli sphaerici recti fuerint, tertius z erit excessus dictus; est autem triangulum istud (peripheria maxima ρ dicta) manifesto

$$= \frac{z}{2\pi} \frac{\rho^2}{2\pi} \quad (\S. 32. VI.);$$

consequenter quodvis triangulum, cuius angulorum excessus $= z$, est

$$= \frac{z\rho^2}{4\pi^2}.$$

§. 43.

Fig. 15. Iam *area* trianguli rectilinei in S per summam angulorum exprimetur.

Si ab crescat in infinitum; erit (§. 42.)

$$\triangle abc : (R - u - v)$$

constans. Est vero

$$\triangle abc \sim bacn \quad (\S. 32. V.)$$

et

$$R - u - v \sim z \quad (\S. I.);$$

adeoque

$$bacn : z = \triangle abc : (R - u - v) = bac'n' : z'.$$

Est porro manifesto

$$bdcn : bd'c'n' = r : r' = \text{tang. } z : \text{tang. } z' \quad (\S. 30.).$$

Pro $y' \sim 0$ autem est

$$\frac{bd'c'n'}{bac'n'} \sim 1,$$

nec non

$$\frac{\text{tang. } z'}{z'} \sim 1;$$

consequ.

$$bdcn : bacn = \text{tang. } z : z.$$

Erat vero (§. 32.)

$$bdcn = ri = i^2 \text{ tang. } z;$$

est igitur

$$bacn = zi^2.$$

Quovis triangulo, cuius angulorum summæ complementum ad $2R$ z est, in posterum breviter Δ dicto, erit idcirco

$$\Delta = zi^2.$$

Facile hinc liquet, quod si

Fig. 14.

$$or \parallel am \quad \text{et} \quad ro \parallel ab$$

fuerint; *area* inter \overline{or} , \overline{st} , \overline{bc} comprehensa (quæ manifesto limes absolutus est *areae* triangulorum rectilinearum sine fine crescentium, seu ipsius Δ pro $z \sim 2R$), sit

$$= \pi i^2 = \odot i \text{ in } F.$$

Limite isto per \square denotato, erit porro (per §. 30.)

Fig. 15.

$$\begin{aligned} \pi r^2 &= \text{tang. } z^2 \square = \odot r \text{ in } F \text{ (§. 21.)} \\ &= \odot s \text{ (per §. 32. VI.),} \end{aligned}$$

si chorda dc s dicatur. Si iam radio dato s , circuli in plano (sive radio L formi circuli in F) perpendiculariter bisecto, construatur (per §. 34.) $db \parallel \simeq cn$; demissa perpendiculari ca ad db , et erecta perpendiculari cm ad ca ; habebitur z ; unde (per §. 37.) $\text{tang. } z^2$, radio L formi ad libitum pro unitate assumpto, *geometricè determinari potest per duas lineas uniformes eiusdem curvaturæ* (quæ solis terminis datis, constructis axibus, manifesto tanquam rectæ commensurari, atque hoc respectu rectis æquivalentes spectari possunt).

Fig. 23 Porro construitur quadrilaterum ex. gr. regulare $=\square$, ut sequitur. Sit

$$abc = R, bac = \frac{1}{2} R, acb = \frac{1}{4} R, \text{ et } bc = x;$$

poterit X (ex §. 31. II.) per meras radices quadraticas exprimi, et (per §. 37.) construi: habitoque X , (per §. 38., sive etiam 29. et 35.) x ipsum determinari potest. Estque octuplum $\triangle abc$ manifesto $=\square$, atque *per hoc, circulus planus radii s , per figuram rectilineam, et lineas uniformes eiusdem generis (rectis, quoad comparationem inter se, æquivalentes) geometrice quadratus; circulus F formis vero eodem modo complanatus: habeturque aut Axioma XI. Euclidis verum, aut quadratura circuli geometrica*; etsi hucusque indecisum manserit, quodnam ex his duobus revera locum habeat. Quoties $\text{tang. } z^2$ *vel* numerus integer *vel* fractio rationalis fuerit, cuius (ad simplicissimam formam reductæ) denominator *aut* numerus primus formæ $2^m + 1$ (cuius est etiam $2 = 2^0 + 1$) *aut* productum fuerit e quotcunque primis huius formæ, quorum (ipsum 2, qui solus quotvis vicibus occurrere potest, excipiendo) quivis *semel* ut factor occurrit: per theoriam polygonorum ill. *GAUSS* (præclarum nostri imo omnis ævi inventum), etiam ipsi $\text{tang. } z^2 \square = \odot s$ (et nonnisi pro talibus valoribus ipsius z) figuram rectilineam æqualem constituere licet. Nam *divisio* ipsius \square (theoremate §. 42. facile ad quælibet polygona extenso) manifesto *sectionem* ipsius $2R$ requirit, quam (ut ostendi potest) unice sub dicta conditione geometrice perficere licet. In omnibus autem talibus casibus præcedentia facile ad scopum perducent. Et potest quævis figura rectilinea in polygonum regulare n laterum geometrice converti, siquidem n sub formam *GAUSSianam* cadat.

Superesset denique, (ut res omni numero absolvatur), impossibilitatem (absque suppositione aliqua) decidendi, num Σ aut aliquod (et quodnam) S sit, demonstrare: quod tamen occasione magis idoneæ reservatur.

WOLFGANGI BOLYAI
ADDITAMENTUM AD APPENDICEM.

Denique *aliquid Auctori Appendicis proprium, coronidis instar*, addere fas sit: qui tamen ignoscat, si quid non acu eius tetigerim.

Res breviter in eo consistit: *formulae trigonometriae sphaericae*, in Appendice dicta ab axioma XI. Eucl. independenter demonstratæ, *cum formulis trigonometriae planae conveniunt, si* (modo statim dicendo) *latera trianguli sphaerici realia, rectilinei vero imaginaria accipiantur*; adeo ut quoad formulas trigonometricas planum ut sphaera imaginaria considerari possit, si pro reali illa accipiatur, in qua $\sin. R=1$.

Pro casu, si axioma Eucl. verum non fuerit, demonstratur (Appendix §. 30.) dari certum i , pro quo ibidem dictum I est $= e$ (basi logarithmorum naturalium), atque pro hoc casu formulæ trigonometriæ planæ quoque demonstrantur (ibidem §. 31.); et quidem ita, ut (iuxta §. 32., post VII., ibidem) formulæ et pro casu veritatis axiomatis dicti valeant; nempe si supponendo, quod $i \rightarrow \infty$, limites valorum accipiantur; nimirum systema Euclideum est quasi limes systematis antieuclidei (pro $i \rightarrow \infty$). Ponatur, pro casu existentis i , unitas $= i$, atque conceptus *sinus cosinusque* extendatur et ad arcus imaginarios; ita ut arcum sive realem sive imaginarium denotet ρ , dicatur

$$\frac{1}{2}(e^{\rho\sqrt{-1}} + e^{-\rho\sqrt{-1}})$$

cosinus ipsius ρ , et

$$\frac{1}{2\sqrt{-1}}(e^{\rho\sqrt{-1}} - e^{-\rho\sqrt{-1}})$$

dicatur sinus ipsius ρ .

Erit hinc pro q reali

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\sqrt{-1}}(e^q - e^{-q}) &= \frac{1}{2\sqrt{-1}}(e^{-q\sqrt{-1}\sqrt{-1}} - e^{q\sqrt{-1}\sqrt{-1}}) = \\ &= \sin.(-q\sqrt{-1}) = -\sin. q\sqrt{-1} \end{aligned}$$

Ita

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}(e^q + e^{-q}) &= \frac{1}{2}(e^{-q\sqrt{-1}\sqrt{-1}} + e^{q\sqrt{-1}\sqrt{-1}}) = \\ &= \cos.(-q\sqrt{-1}) = \cos. q\sqrt{-1}; \end{aligned}$$

si nempe et in circulo imaginario sinus negativi arcus sinui arcus positivi alioquin priori æqualis sit, præterquam quod negativus sit, atque cosinus arcus positivi et negativi (si alioquin æquales fuerint), sit idem.

In Appendice dicta §. 25. demonstratur absolute, id est ab axiomatico dicto independenter; quod in quovis triangulo rectilineo *sinus angulorum sint, uti peripheriae radiorum lateribus oppositis æqualium*; demonstraturque porro, pro casu existentis i , peripheriam radii y esse

$$= \pi i (e^{\frac{y}{i}} - e^{-\frac{y}{i}}),$$

quod pro $i=1$ fit

$$\pi(e^y - e^{-y}).$$

Itaque (§. 31. ibidem) pro triangulo rectilineo rectangulo, cuius catheti sunt a et b , hypotenusa c , et anguli lateribus a , b , c oppositi sunt α , β , π ; est (pro $i=1$)

in I.

$$1 : \sin. \alpha = \pi(e^c - e^{-c}) : \pi(e^a - e^{-a});$$

adeoque

$$1 : \sin. \alpha = \frac{1}{2\sqrt{-1}}(e^c - e^{-c}) : \frac{1}{2\sqrt{-1}}(e^a - e^{-a}).$$

Unde

$$1 : \sin. \alpha = -\sin. c\sqrt{-1} : -\sin. a\sqrt{-1}.$$

Et hinc

$$1 : \sin. \alpha = \sin. c\sqrt{-1} : \sin. a\sqrt{-1}.$$

In II. fit

$$\cos. \alpha : \sin. \beta = \cos. a \sqrt{-1} : 1.$$

In III. fit

$$\cos. c \sqrt{-1} = \cos. a \sqrt{-1} \cos. b \sqrt{-1}.$$

Quæ prouti omnes exinde promanantes formulæ trigonometriæ planæ, cum formulis trigonometriæ sphæricæ prorsus conveniunt; nisi quod si ex. gr. trianguli sphærici rectanguli quoque catheti angulique iis oppositi, hypotenusaque nomina eadem sortiantur, latera trianguli rectilinei per $\sqrt{-1}$ dividenda sint, ut formulæ pro sphæricis prodeant.

Nempe ex I. fiet

$$1 : \sin. \alpha = \sin. c : \sin. a,$$

ex II. fiet

$$1 : \cos. a = \sin. \beta : \cos. \alpha,$$

ex III. fiet

$$\cos. c = \cos. a \cos. b.$$

Quum ceteris supersedere liceat, et lectorem deductione (App. §. 32. post VII.) ommissa offendi impediri que expertus sim: haud abs re erit ostendere, quomodo ex. gr. ex

$$e^{\frac{c}{i}} + e^{-\frac{c}{i}} = \frac{1}{2} (e^{\frac{a}{i}} + e^{-\frac{a}{i}}) (e^{\frac{b}{i}} + e^{-\frac{b}{i}})$$

sequatur

$$c^2 = a^2 + b^2$$

(theorema Pythagoreum pro systemate Euclideo); verosimiliter Auctor quoque ita deduxit, et ceteræ quoque eodem modo sequuntur.

Est nempe potentiis ipsius e per series expressis

$$\begin{aligned} e^{\frac{k}{i}} &= 1 + \frac{k}{i} + \frac{k^2}{2i^2} + \frac{k^3}{2 \cdot 3i^3} + \frac{k^4}{2 \cdot 3 \cdot 4i^4} + \dots \\ e^{-\frac{k}{i}} &= 1 - \frac{k}{i} + \frac{k^2}{2i^2} - \frac{k^3}{2 \cdot 3i^3} + \frac{k^4}{2 \cdot 3 \cdot 4i^4} - \dots; \end{aligned}$$

adeoque

$$\begin{aligned} e^{\frac{k}{i}} + e^{-\frac{k}{i}} &= 2 + \frac{k^2}{i^2} + \frac{k^4}{3 \cdot 4i^4} + \dots \\ &= 2 + \frac{k^2 + u}{i^2}, \end{aligned}$$

(si omnium terminorum post $\frac{k^2}{i^2}$ summa $\frac{u}{i^2}$ dicatur); estque $u \sim 0$, dum $i \sim \infty$. Nam multiplicentur omnes termini post $\frac{k^2}{i^2}$ per i^2 ; erit terminus primus $\frac{k^4}{3 \cdot 4i^2}$, et quivis exponens $< \frac{k^2}{i^2}$; essetque etsi exponens ubique hic maneret, summa

$$\frac{k^4}{3 \cdot 4i^2} : \left(1 - \frac{k^2}{i^2}\right) = \frac{k^4}{3 \cdot 4(i^2 - k^2)},$$

quod manifesto ~ 0 , dum $i \sim \infty$.

Atque ex

$$e^{\frac{c}{i}} + e^{-\frac{c}{i}} = \frac{1}{2} \left(e^{\frac{a+b}{i}} + e^{-\frac{a+b}{i}} + e^{\frac{a-b}{i}} + e^{-\frac{a-b}{i}} \right)$$

sequitur (pro ω, v, λ adinstar u acceptis)

$$2 + \frac{c^2 + \omega}{i^2} = 1 + \frac{(a+b)^2 + v}{2i^2} + 1 + \frac{(a-b)^2 + \lambda}{2i^2}.$$

Atque hinc

$$c^2 = \frac{1}{2} (a^2 + 2ab + b^2 + a^2 - 2ab + b^2 + v + \lambda - 2\omega),$$

quod

$$\sim a^2 + b^2.$$

Scholion. Sphæræ illius, in qua sinus totus est $1=i$, radius est ordinata y lineæ L formis ipsi $i=1$ æqualis, ad axem per unam extremitatem ex altera perpendiculariter missa. Nempe *in superficie* (App. §. 21.) *F dicta, tota Geometria Euclidea valet, lineis L vicem rectarum subeuntibus*: atque pro radio L formi $=1$, qui sinus totus in F erit, peripheriæ eiusdem radius in plano erit plane dictum y ; quod ad sphæram imaginariam, ad quam planum (in systemate antieucledeo) revocatur, facile applicatur.

ADNOTATIONES EDITORUM.

In Ed. I. Appendicis literæ singulares puncta denotantes literis quæ dicuntur *cursivis* impressæ sunt, sed in libellis nobis relictis manu Ioannis Bolyai scriptis puncta literis qu. d. *fraktur* denotantur, quibus etiam pater eius usus est.

Pag. 1. post §. 15. in Ed. I. legitur :

└ denotet perpendiculare
∧ « angulum.

Nos hæc delevimus, quia pro signo └ usitatioe ⊥ utimur, vocabulum «angulum» autem ubique integrum scribimus.

Pag. 8. §. ultimo «frs» correximus in «hrs», ut et ipse auctor correxit in libello manu scripto, quo Appendicem lingua Germanica denuo pertractavit.

Pag. 10. §. ultimo §. 18. «○ħa» emendavimus ex «○ħf».

Pag. 14. extremæ §. 26. auctor ascripsit exemplari in bibliotheca Academiae Hungaricæ asservato «cos. quoque necessarium». Videtur in editione quadam altera propositionem de cosinu demonstraturus fuisse, quamquam nihil hic maioris momenti vere desideratur. Revera considerationes, quibus in «Supplemento numeri 31351» Tom. II. Tentaminis ex

$$\sin. H : \sin. A = 1 : \sin. a$$

trigonometria sphaerica integra deducitur, et in geometria absoluta valent.

Pag. 16. §. 3. Ex libello Germanico auctoris manu scripto «cq» scripsimus pro vitioso «cg» Editionis I.

Pag. 17. §. 5. «cn || ab, c'n' || ab» scripsimus pro «cn, c'n' || ab» Ed. I.

Pag. 20. §. 8. «et 27» Ioannes Bolyai ipse ascripsit in exemplari Academiae.

Pag. 22. §. 4. a calce «§. 30.» scripsimus pro «§. 29.» Ed. I.

Pag. 35. In hoc Additamento, quod pagg. 380—383 Tom. II. Ed. I. Tentaminis continetur, delevimus mentionem de paginis huius operis factam, in quibus solum theoremata omnibus nota continentur. Articulum vero secundum in hunc locum reiecimus:

«Pro v positivo radicem positivam ipsius $-v^2$ per $+v$ denotat, et negativam per $-v$, sed ob defectum signorum (quum vix hæc duo quadamtenus prodierunt), radix positiva ipsius -1 per $\sqrt{-1}$ et negativa per $-\sqrt{-1}$ denotabitur».

Ibidem §. 3. Post «Appendicis» delevimus «in tomo primo».

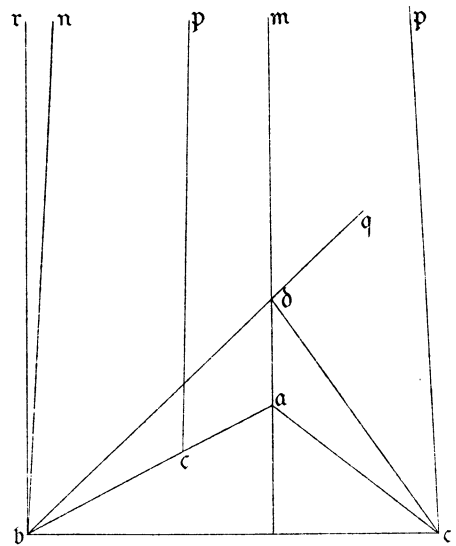
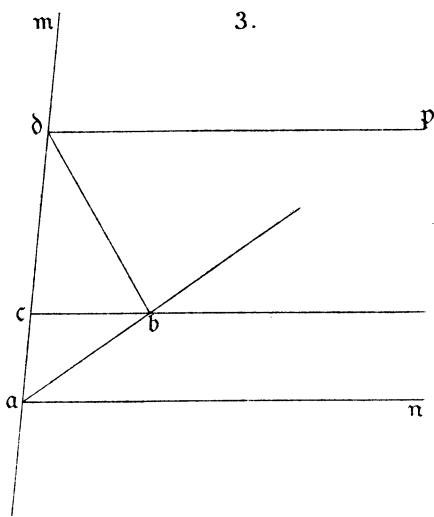
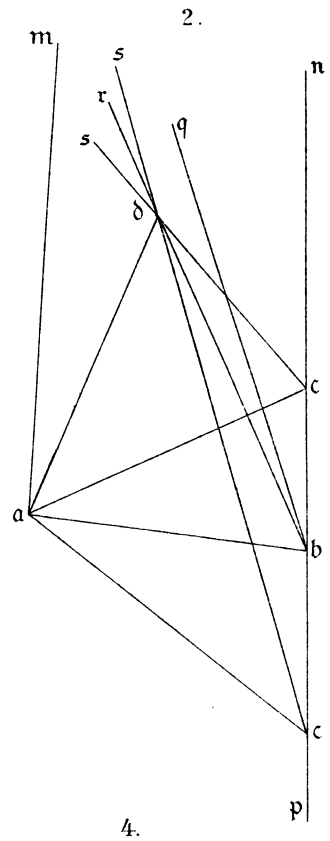
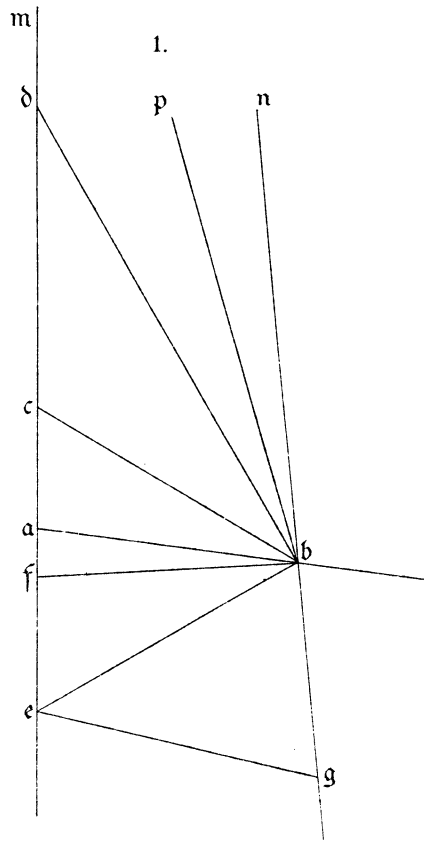
Ibidem §. 11. Initium articuli huius in Ed. I. sic legitur:

«Nimirum de axiome Euclideo dictum in tomo primo satis superque est: pro casu, si verum non fuerit ☞».

Pag. 38. §. 2. «multiplicentur» scripsimus pro erroneo «dividuntur».

Ibidem §. 8. Latus sinistrum formulæ in Ed. I. deest.

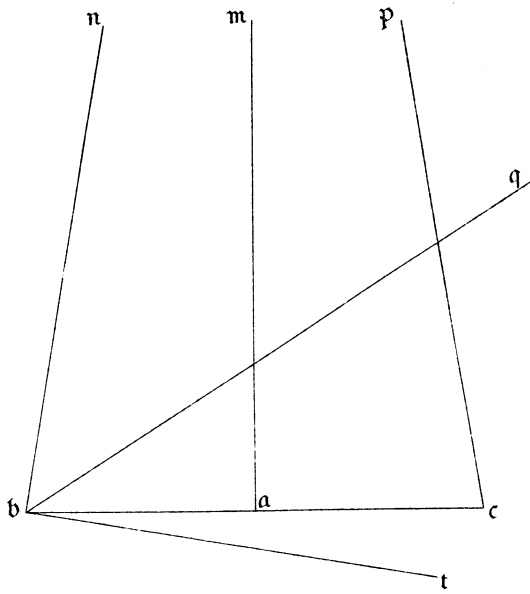
Tab. I. Fig. 1-4.



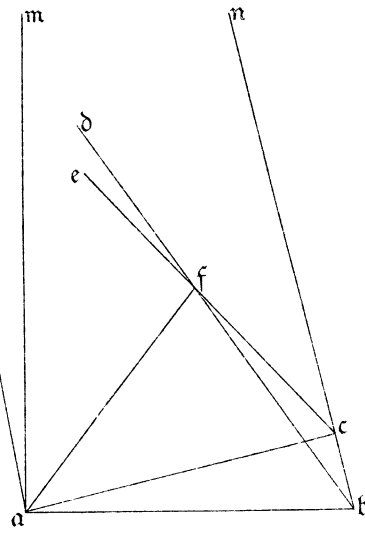
Del. TÖTÖSSY B.

Lith. GRUND V. utódaí.

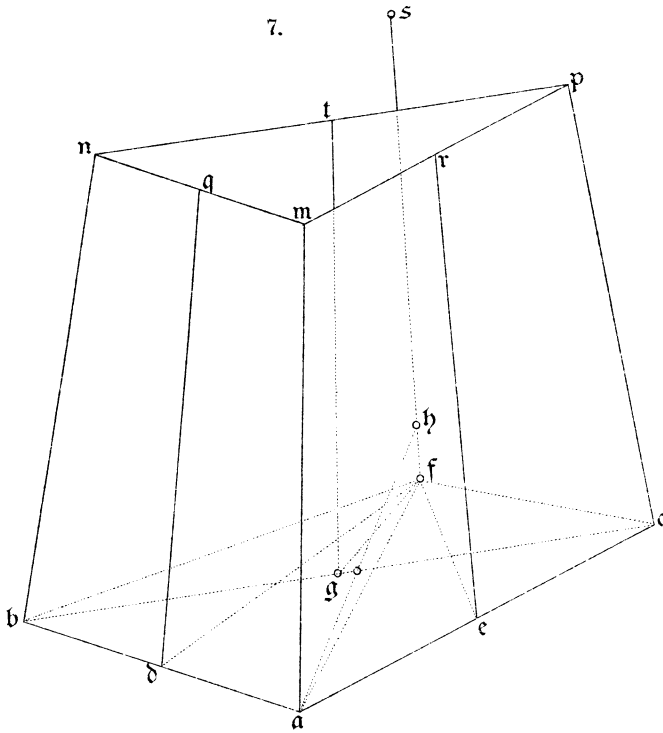
5.



6.

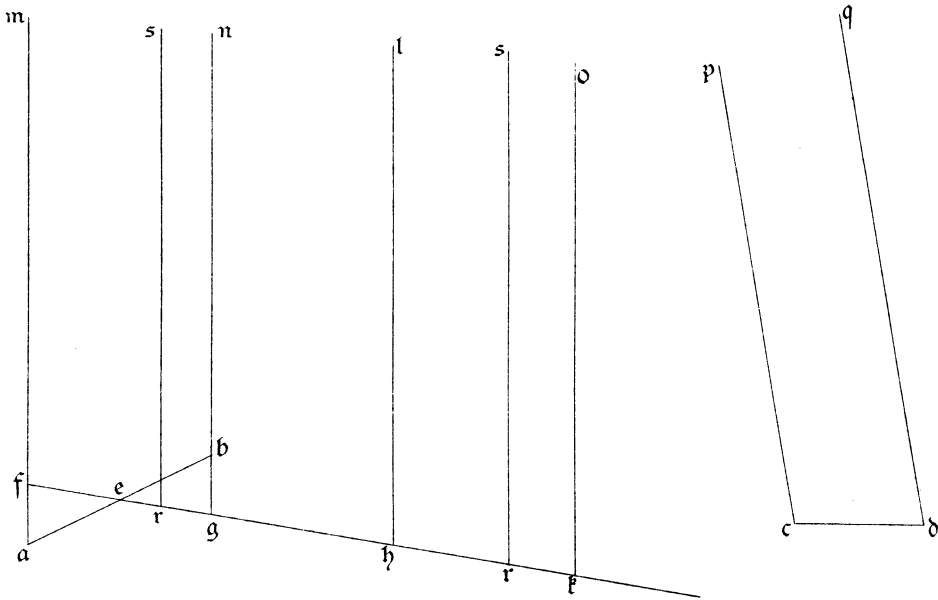


7.

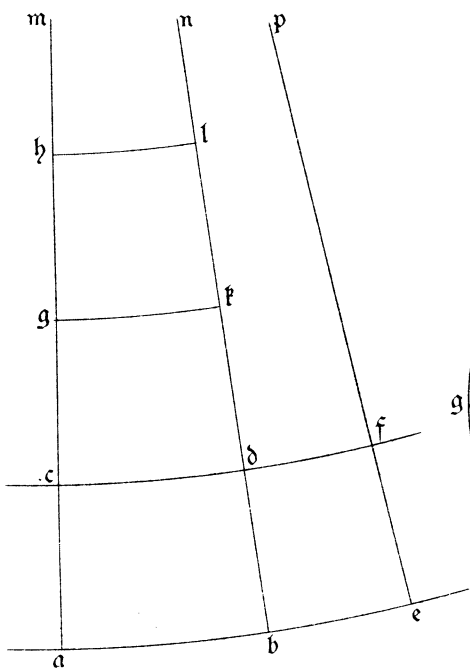


Tab. II. Fig. 5-7.

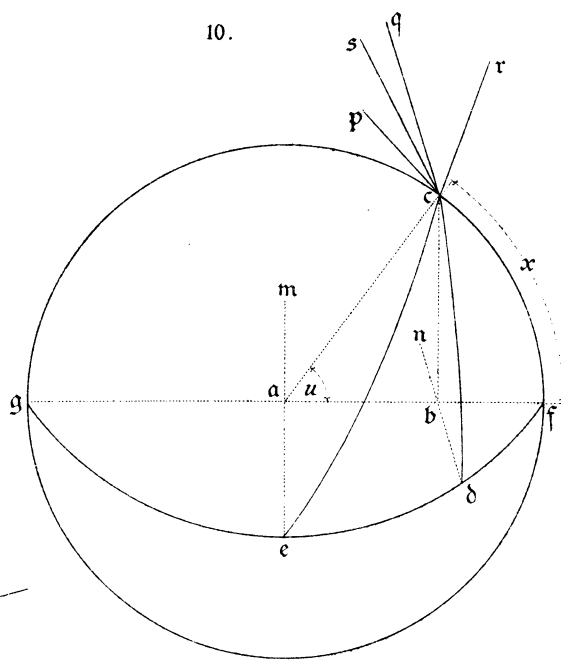
8.



9.



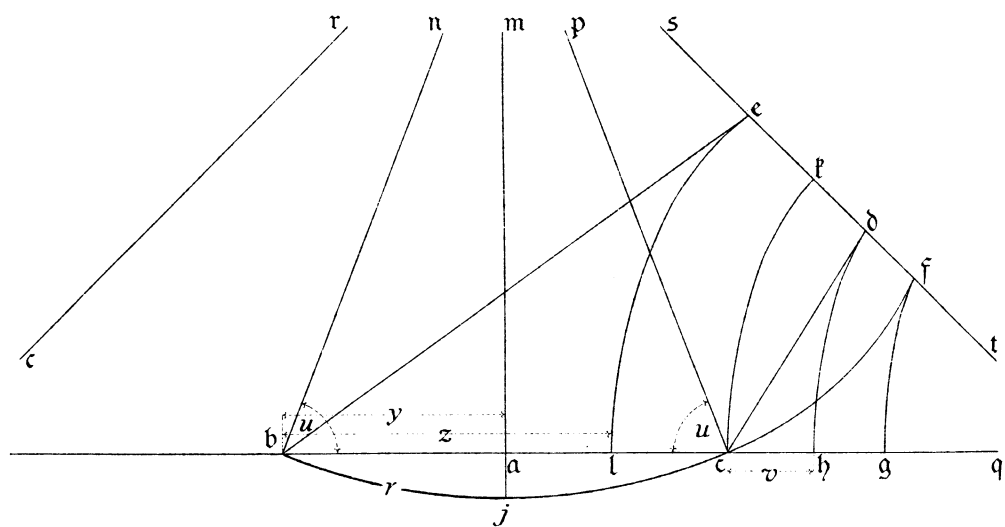
10.



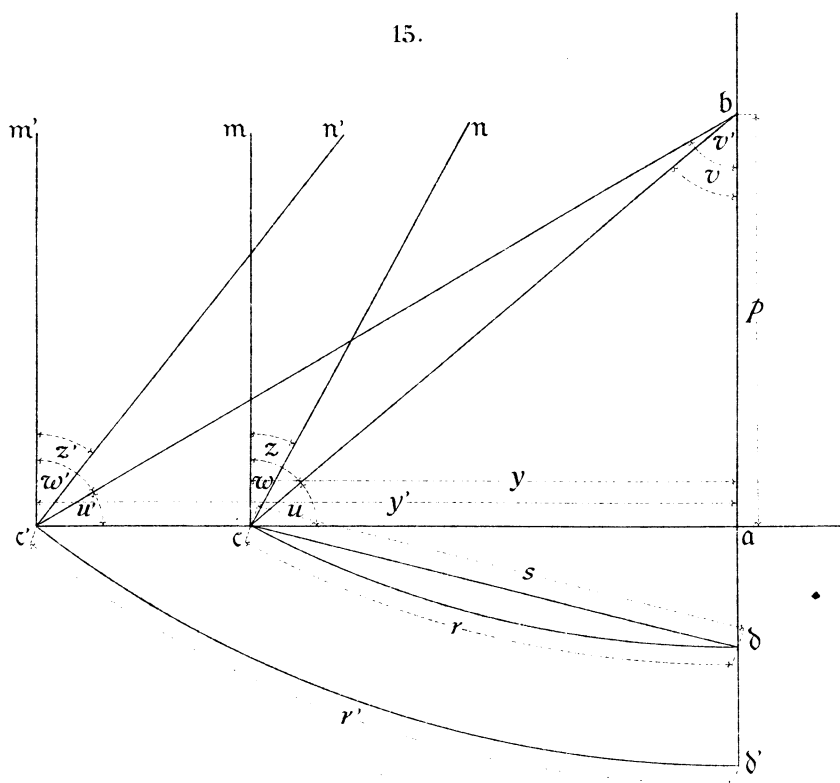
Tab. III. Fig. 8-10.

Tab. IV. Fig. 11-13.

14.



15.



Tab. V. Fig. 14-15.

Tab. VI. Fig. 16-18.

Tab. VII. Fig. 19.-23.