ÉRTEKEZÉSEK

A

MATHEMATIKAI TUDOMÁNYOK KÖRÉBŐL.

KIADJA

A MAGYAR TUDOMÁNYOS AKADÉMIA.

HATODIK KÖTET. 187⁷/8.

A III. OSZTÁLY RENDELETÉBŐL

SZERKESZTI

SZABÓ JÓZSEF,

OSZTÁLYTITKÁR.

BUDAPEST, 1879.

A M. T. AKADÉMIA KÖNYVKIADÓ-HIVATALA.

(Az Akadémia épületében.)

Budapest, 1879. Az Athenaeum r. társ. könyvnyomdája.

PONCELET JEAN VICTOR

EMLÉKE.

HUNYADY JENŐ

LEV. TAGTÓL.

(Felolvasta az összes ülésen 1877. október 29.)

BUDAPEST, 1878.

A M. TUD. AKADÉMIA KÖNYVKIADÓ-HIVATALA.

(Az Akadémia épületében.)

Budapest, 1878. Az Athenaeum r. társ. könyvnyomdája.

Poncelet Jean Victor emléke.

HUNYADY JENŐ lev. tagtól.

(Felolvasta az összes ülésen 1877. október 29.)

Poncelet Jean Victor élete más tudósoké mellett főleg viharos körülményei és sokoldalú hivatalos elfoglaltatása által tűnik ki. Mint tudós kiváltkép a geometriai téren vívta ki kortársai között a legelőbbkelő rangot: ő alapitá meg a projectiv geometriát és ezzel ő tűzte ki a modern geometriai buvárlat irányát.

Poncelet a »Traité des propriétés projectives des figures« czímü korszakot alkotó munkája 1822-ben jelent meg először, tehát e század azon korszakába esik, midőn a mathematikai tudományokat kevés kivétellel — mondhatni majdnem kizárólag csak a francziák művelték. Ez időben a mathematika Németországban, Gauss kivételével, ki azokat a legfényesebben képviselé, alig talált méltó erőre, holott Francziaország a mathematikai buvárkodás terén számos brilláns névvel dicsekedhetett, kik között Poncelet a geometriában e munkája által egyszerre az első rangot foglalta el.

Poncelet most nevezett epochális munkája nem mulaszthatta el a mathematikai buvárkodás érdekét azokra a disciplinákra átterelni, melyek Newton és Leibnitz nagyszerü felfedezése óta egészen Monge idejéig még Francziaországban is — a Viéte-k, Descartes-ok, Fermat-ok, Desargues-ok és Pascal-ok hazájában egy — teljes századnál tovább parlagon hevertek.

Poncelet-vel egyidejüleg Francziaországban a mathematikusok nagy serege veti magát a geometriai buvárkodás terére, közülök csak a legelőbbkelőt, a még maig is élő Chasles-t akarjuk felemlíteni. Németországban a mathematikai buvárkodásban, a Crelle-féle mathematikai Journal megalapítása által korszakot képező 1826. óta Plücker, Steiner és Möbius művelék a geometriát, s hozzájok később méltóan csatlakoztak Hesse és Staudt. A geometriának jelenleg felsorolt nagy buvárait Poncelet követőiképen kell tekíntenünk.

Mielőtt a nagy geometra életfolyamának ecsetelésére áttérnénk, nem mellőzhetjük hallgatással a nagy érdekeltséget, melyet Poncelet vizsgálatai Jacobi-ban, a nagy analystában keltettek. Jacobi két izben választá Poncelet vizsgálatait saját mély buvárlatai kiinduló pontjául.

Poncelet Jean Victor 1847. óta akadémiánk mathematikai osztályának külső levelező tagja, 1788 julius 1-jén Metzben született, hol atyja Claude Poncelet, mint ügyvéd működött. Az atyai háztól még ifjú korában eltávozott és elég későn tizenhat éves korában lépett a metzi lyceumba. Meg levén késve, a lyceumot gyorsan iparkodott bevégezni, a mi három év mulva sikerült is neki. Már a lyceumon is adá kiváló mathematikai tehetségének jeleit.

Az école polytechnique-ba 1807-ben mint nyolczadik lépett be, a hol betegeskedés miatt két év helyett három évet kellett töltenie. Tanulmányait a metzi école d'applicationon fejezé be (1810—1812-ben).

Mint az école polytechnique tanitványa, jelét adta kiváló hajlamának a geometriai tudományok iránt, már ez időben jegyzeteket szerkesztett, a melyek a Correspondence de l'école polytechnique-ban jelentek meg.

Amint az école d'applicationból kilépett, mindjárt Hollandiában és Francziaországban véghez viendő erődítési munkálatoknál alkalmaztatott. 1812. junius 17-én az état major général du Genie mellé rendeltetve parancsot kapott az Oroszországban lévő csapatokhoz csatlakozni.

Oroszországban Ney tábornok hadserege mellé rendeltetve 1812. november 18-kán Miloradovitch orosz herczeg csapatjától Krasnoinál elfogatott, és onnét Saratoffba vitetett, a hová csak a jövő év márczius havában érkezett meg.

Ezen majdnem másfél évig tartó hadfogságban a legkomolyabb mathematikai tanulmányokkal foglalta el magát. A metzi lyceum és az école polytechnique reminiscenciáira szorítkozva, mely utóbbi intézetben Monge, Carnot és Brianchon munkáit különös előszeretettel tanulmányozta, könnyen felfogható okoknál fogva a legújabban megjelent értekezéseket csakis visszatérte után méltathatta kellő figyelemre. Mindennemű segédeszköztől megfosztva, épen csak az iskolából fenmaradt reminiscenciáira támaszkodva, kényszeritve volt ezeknek füzetek elkészitése által maradandóbb alakot adni, melyeknek, a mennyiben egyátalán lehetséges, későbbi eredeti vizsgálatainál a könyvtárt kellett pótolniok. Az elébe gördülő nehézségek teljes legyőzése után foghatott csak önálló kutatásokhoz, melyek előtanulmányokul szolgáltak az általa későbben publicált »Traité des propriétés projectives des figures« czimű munkájához.

Ezen előtanulmányok képezik a hadfogságban lévő Poncelet dolgozatait, melyek az »application d'analyse et de geométrie« czimű munkájának első kötetében jelentek meg, mely munkát az agg búvár egy fél század után, a midőn halhatatlan munkái már a tudomány történetében kitünő helyet foglaltak el, rendezhetett csak sajtó alá.

Az általános békekötés után 1814-ben egészen váratlanul kellett elhagynia Saratoffot; Poncelet maga irja le »Application d'analyse et de géométrie« czimü munkája második kötetének előszavában: Bármily örvendetes vala is reá nézve közelgő visszatérte hazájába övéinek, valamint barátainak közeli viszontlátása, mégis csak a legélénkebb aggodalom érzelmével merte magától kérdeni, vajon hivatalos teendői a számüzetés csendében és magányában megkezdett tanulmányainak folytatását ezután is meg fogják-e engedni, azon tanulmányok, melyek fájdalmát enyhíték és éppen ez által oly becsesekké váltak előtte.

Poncelet 1814. szeptember havában mint másodkapitány tért vissza hazájába, hol Metzbe lőn áthelyezve. Itt számos teendői miatt tudományos dolgozatainak folytatásával egyelőre nem foglalkozhatott, csak 1815-től 1820-ig szentelhette ezeknek a téli hónapokat, vizsgálatai gyümölcseit a már többször emlitett Traité-ben (1822) adá át a világnak. Ehhez csatlakozik több igen jelentékeny értekezése, melyek e munkájának folytatását képezik. Ezen értekezések közzététele után a geometriai buvárkodást, melyet oly gazdagon kimivelt, elhagyva, a mathematikai speculatio más nemére tért át és csak tevékeny életének utolsó éveiben fordította ismét tudományos tevékenységének egész erejét az általa ez előtt nagy gonddal ápolt kedvencz gyermekére, a mennyiben az »Application d'analyse et de géométrie« czimű munkáját, és a »Traité des propriétés projectives des figures« második kiadását rendezte sajtó alá.

A metzi akademia, melynek Poncelet kezdettől fogva tagja volt, az 1823—24. évekre elnökének választá.

Katonai állásánál fogva a mérnöki tudományokkal kellett foglalkoznia, melyek közől a Mécanique Industrielre fordítá főfigyelmét. Egy ezen szakba vágó értekezésével a párisi académie des sciences Montyon díját nyerte 1824-ben. Ugyanez évben a metzi école d'applicationon a mechanika tanárának neveztetett ki.

A párisi académie des'sciences-nál szokásos, hogy azok, kik tagoknak megválasztatni óhajtanak, felkérik az akadémiát, hogy az üresedésben lévő hely candidánsai sorába felvétessenek. Poncelet-et már 1822-ben Charles Dupin, azután pedig 1831-ben Arago a legkitünőbb mathematikusok nevében felszólította e lépés megtevésére, a nélkül, hogy a szerény tudós az őt kitüntető felszólításnak helyet adott volna és csak 1834-ben teljesítette tudós barátainak kérelmét, mely évben Hachette helyébe majdnem egyhangulag, egyetlen egy szavazat kivételével, választatott meg.

A közoktatási miniszter 1838-ban Poncelet számára a párizsi Faculté des sciences-on a physikai és kisérleti mechanika tanszékét szervezte.

Arago, ki 1848-ban hadügyminiszter volt, Poncelet-t Général de brigadenak, ezután pedig tiz nap mulva az école politechnique parancsnokának nevezé ki.

Az őt ért kitüntetések közül kiemeljük pedig, hogy 1815., 1837., 1841. és 1844. években a légion d'honneur lovagjának, tisztjének, commandeurjének és nagytisztjének lett kinevezve.

Szülővárosának municipiális tanácsa, melynek Poncelet tagja volt, a kitünő tudósnak 1867. decz. 22-én bekövetkezett halála után, kit az egész tudományos világ a legmélyebben meggyászolt, kifejezést adandó azon kegyeletnek, melylyel a nagy halott iránt viseltetett, az utczát, melyben az école d'application volt, Poncelet után nevezé el.

Tudományos pályáján aratott babérjait nem élvezhette minden kisebb nagyobb bántalom nélkül; azok közől csak ama vitát említem fel, melybe Georgonnenal az »Annales de mathématiques« szerkesztőjével kellett bocsátkoznia. További kellemetlenségeiről és tapasztalásairól nem érzem magam hivatva ez alkalommal bővebben szólani.

Ezek lennének bizonyára csak nagyon hézagosan jellemzett élményei Ponceletnek.

Mielőtt a nagy geometra tudományos munkásságának méltatására áttérnék, ki kell jelentenem, hogy pusztán személyes okoknál fogva csak geometriai munkásságára szorítkozom, és e tekintetben is e nagytekintetű akadémia jóakaró elnézését kell kikérnem, mely engem e megbizással megtisztelt.

Miután a következő jellemzés természeténél fogva Poncelet munkáiban előforduló részletekbe mélyebben nem bocsátkozhatunk, csak is a benne előforduló főgondolatokra lehetünk tekíntettel, melyek mindannyian a következő két munkában:

»Application d'analyse et de géométrie, qui ont servi de principal fondement au traité des propriétés projectives des figures par J. V. Poncelet. Avec additions par M. M. Manheim et Moutard II. Vols. Paris 1862—64.«

»Traité des propriétés projectives des figures, ouvrage utile a ceux, qui s'occupent des applications de la géométrie descriptive et d'opérations géometriques sur le terrain par J. V. Poncelet, Deuxiéme édition II. Vols. Paris 1862—66.« több vagy kevesebb ismétléssel foglaltatnak.

A mathematikusok általánosan beismerik, hogy Poncelet-t illeti az a vitathatlan érdem, melynél fogva ő volt az, ki az első lépést tette a geométriai disciplinák ama nagy reformatiójához, mely századunk utolsó 50—60 évében véghezvitetett. Teljes joggal elmondhatjuk kutatásairól azt, a mit Steiner tíz évvel utána saját vizsgálatairól »Systematische Entwicklungen der Abhängigkeit geometrischer Gestalten von einander« czimű munkájának előszavában a következő lélekemelő szavakban kifejezett:

»Wenn jemand alle bis jetzt bekannt gewordenen Sätze und Aufgaben der Geometrie nach den bisher üblichen Vorschriften zu beweisen und zu lösen sich vornehmen wollte, so wäre dazu viel Zeit und Mühe erforderlich, und am Ende hätte man doch nur eine Sammlung von auseinander liegenden wenn auch sehr scharfsinnigen, Kunststücken, aber kein organisches zusammenhängendes Ganze zu Stande gebracht. Gegenwärtige Schrift hat es versucht, den Organismus aufzudecken, durch welchen die verschiedenartigsten Erscheinungen in der Raumwelt mit einander verbunden sind.« Es giebt eine geringe Zahl von ganz einfachen Fundamentalbeziehungen, worin sich der Schematismus ausspricht, nach welchem sich die übrige Masse von Sätzen folgegerecht und ohne alle Schwierigkeit entwickelt. Durch gehörige Aneignung der wenigen Grund-Beziehungen macht man sich zum Herrn des ganzen Gegenstandes; es tritt Ordnung in das Chaos ein, und man sieht, wie alle Theile naturgemäss in einander greifen, in schönster Ordnung sich in Reihen stellen, und verwandte zu wohlbegrenzten Gruppen sich vereinigen. Man gelangt auf diese Weise gleichsam in den Besitz der Elemente, von welchen die Natur ausgeht, um mit möglichster Sparsamkeit und auf die einfachste Weise den Figuren unzählig viele Eigenschaften verleihen zu können.«

A módszer, melylyel Poncelet a mértani alakoknak gyakran látszólag egymástól nagyon eltérő tulajdonságainak fundamentális összefüggését kipuhatolni igyekezett, a centrális vagy kúpos projectio volt.

Vizsgálatainak vezérlő főgondolatát azon teljesen átgondolt megfontolás képezé, hogy a mértani alakoknak megfelelő tulajdonságoknak nagy része az alakok centrálir projectióira is érvényes. A mértani alakok e tulajdonságait, melyekhez első sorban pusztán csak a helyzettől függők tartoznak, de nem-különben tisztán metrikusok is, az alakok projectiv tulajdonságainak nevezé. Ezek képezik nagy munkáinak dús tartalmát.

Ezen uralkodó elven kivül, a mely nem csak a síkban elhelyezett idomok projectiv tulajdonságainak kipuhatolására szolgál, hanem egyszersmind a térbeni idomok projectiv tulajdonságainak kutatására is alkalmazható, munkáiban még egyebek is tünnek ki, melyek közől itt legközelebb a homolog idomokra vonatkozó elvet említjük fel.

Ha két különböző síkban fekvő idomot, melyek közől az egyik a másiknak centrális vetülete egy bizonyos projectio-centrumra nézve az egyik idomot síkjával együtt a két sík átmetszeti vonala körül mindaddig forgatjuk, míg a másik síkba jő, és végre a projectiv centrumot is ugyane tengely körül forgatjuk, mig szintén az utóbb nevezett síkba jő, úgy egy és ugyanazon síkban két idomot nyerünk, melyeket Poncelet homologoknak és homolog helyzetben lévő idomoknak nevez. A két sík átmetszeti vonala a homologia tengelyének, a projectio centrum pedig a homologia középpontjának neveztetik.

A homolog idomok pontjai bizonyos értelemben egymásnak megfelelnek; a két egymásnak megfelelő pontot öszszekötő egyenes keresztülmegy a homologia középpontján, a két egymásnak megfelelő egyenes pedig egymást a homologia tengelyén metszik.

Itt egyelőre az a kérdés támad, hogy két homolog idom miként szerkeszthető. Az eredmény az, hogy a két idom közől az egyik, továbbá pedig a homologia középpontja és tengelye, és végre a két idomnak egy egymásnak megfelelő pontpára adva van, úgy az első idomnak megfelelő idom is tökéletesen meg van határozva. Ha továbbá az egyik idom három pontjához a másikban a megfelelő pontokat ismerjük, úgy ezen adatok által is a második homolog idom meg van határozva. Innét magyarázható, hogy a homolog idomok elméletében a homolog háromszögek alapvető szerepet játszanak. Ha két homolog háromszögre nézve a szerkesztését végrehajtjuk, úgy ez által a Desargues-tól eredő tételt nyerjük, mely mint a homolog idomok általános elméletéből keletkező speciális tétel, a projectiv geometriában kiváló szerepet játszik. Igy csak példaképen említjük meg, hogy e tétel a Hesse által adott elegáns kitágításával együtt (Crelle Journal 41. köt.) elégséges, hogy azzal a Steiner által bővített tételeket a hexagrammum mysticumról bebizonyítsuk. E tételeket a mértan az utolsó ötven évben első sorban Steiner, azután pedig Plücker Hesse, Cayley, Kirkmann, Salmon és Bauer vizsgálatainak köszönheti.

A homolog idomok elve a térbeli idomokra szintén érvényes, a melyekre alkalmazva relief-perspectívának is nevezhető. A homolog pontokat összekötő egyenesek ekkor is egy állandó pontban találkoznak, mely a homologia középpontját képezi; a két homolog idom megfelelő egyenesei pedig ez esetben egy állandó sík pontjaiban találkoznak, mely sík a homologia síkjának neveztetik.

A jelen esetben négy homolog pontpár a homologia centrumával együtt meghatározza valamely adott idomnak megfelelő homolog idomát.

Desargues tételét ez esetben egy másik tétel pótolja, mely Poncelet-től ered és a következő:

»Két tetraédernek, melyeknek egy homologiai középpontjuk van, szintén egy homologiai síkjuk is van, és megfordítva.«

Ezen elv számos alkalmazásai közől a kúpszeletek és másodrendű felületek elméletében csak azon tételeket említjük itt meg, melyek kimondják, hogy a négy pont által meghatározott kúpszelet - seregnek egy közös, önnön magának conjugált háromszög felel meg; a másodrendű felület seregnek pedig egy közös, önnön magának conjugált tetraéder felel meg, mely eredményt Ponceletnél találjuk először kimondva.

Fel kell tovabbá említenünk az általa elnevezett »Principe de continuité«-t is, a mely a szigorú mértani megalapítás nélkülözése mellett, az elemző mértanból vétetett ugyan, de azért mégis tagadhatlan, hogy az a tiszta geometriai buvárkodásra nagy befolyással volt, a mennyiben az a mértant a különös helyzetek tekintetbe vételétől megszabadítva, annak általánosabb és merészebb nézpontokat helyezett kilátásba.

A Poncelet által kifejtett és gyakran alkalmazott nagy elvek sorába tartozik szintén a reciprok polárisok elve, a mely nála a kúpszeletek és másodrendű felületek pólusainak és polárisainak, vagy poláris síkjainak elméletében veszi eredetét.

Ő volt az, ki ezt először teljes és legáltalánosabb jelentőségében felismeré.

Az utóbb nevezett elv a projectiv geometriába tartozó tételek végtelen nagy seregét két táborba osztja, melyek a reciprok polárisok rokonsága által összekötve egymással szembe állanak.

Csak ezen elvből tünik ki az egyenes és a pont egyenjogosultsága, mint nemző elem. E gondolat kellő megfontolásának okvetlen a dualitás általános elvére kellett vezetni és innét tovább a nemző elempárok egymás mellé rendeltetésére.

Bárki meg fogja engedni, hogy a reciprocitás elve a geometrián még akkép is lendített, hogy Steiner a nagy német geometra a síkbeli idomok projectiv tulajdonságaira vonatkozó vizsgálataiban a tért elhagyhatta és pusztán csak a síkra szoritkozhatott. Ezen, a mint említettük, először is Steiner által bevezetett haladásnak köszönjük a kúpszeletek előállitását projectiv pont- és sugársorok által, mely lépés Steinernek Schrőter által sajtó alá rendezett előadásában jutott legteljesebben érvényre.

Nem szabad különben hallgatással mellőznünk, hogy az a gondolat, melynél fogva a kúpszeletet projectiv sugársorok által előállíthatjuk, első csiráiban Newtontól ered, a ki azokat »Philosophiae naturalis principia mathematica« czimű munkájában előállítá, mely előállítási módszernek, a mostan dívó terminologiával élve, a következő tételben adhatunk kifejezést:

»Ha két perspectiv helyzetben lévő projectiv sugársort középpontjaik körüli forgatás által hozunk ferde helyzetbe, úgy az egymásnak megfelelő sugarak metszéspontjai a kúpszeletet irják le.«

Majdnem felesleges kiemelnünk, hogy az előbbi megjegyzés alapját nem képezheti a dőre szándék, hogy a nagy hirű német geometrának a minden kétségen kivüli dicsőségét kicsinyleni akarnók, hanem épen ellenkezőleg a nagy felfedezésnek, Gauss a német Princeps mathematicorum következő szavainak idézése által hódoljunk:

. . . . »Mir ist dabei wieder in Erinnerung gekommen, dass ich vor $^1/_2$ Jahrhundert, als ich zuerst Newton's Principia las, mehreres unbefriedigend fand, namentlich auch seine an sich herrlichen Sätze die Kegelschnitte betreffend. Aber ich las immer mit dem gefühle, dass ich durch das Erlernte nicht Herr der Sache wurde; besonders quälte mich die gerade Linie mit deren Hülfe ein Kegelschnitt beschrieben werden kann.*) etc. etc.«

Általánosan el van ismerve ama mély befolyás, melyet az itt felsorolt elveknek a tiszta geometriai buvárkodás átalakítására és haladására gyakorlott, de nem csak ez, hanem egyszersmind annak analytikai iránya is e haladások által a legnagyobb előnyökben részesülének, és úgy vélem, hogy ez állításom igazolására a geometrák újabb vizsgálataira bátran utalhatunk.

A Poncelet munkáiban előforduló egyes problemák közől csak néhány különösen érdekesről óhajtunk megemlékezni. Ezek közől első sorban azon nézpontokat említjük fel, melyeket a homologiaelmélet segítségével a kúpszeletek gyujtópontjairól nyert.

Ha t. i. két kúpszeletnek egy közös gyujtópontja van, úgy az a két kúpszeletre nézve a homologia középpontja; innét következik, hogy ha egy kúpszelet egyik gyujtópontjában valamely körnek a középpontja van, úgy e gyujtópont lesz a homologia középpontja a kúpszeletre és a körre nézve. Továbbá pedig következik, hogy e gyujtó pontból vonható érintők a kúpszelethez és a kör asymptotái azonosak, azaz a kúpszelet gyújtó-pontjai a végtelenben fekvő képzetes körpontokon keresztülmenő kúpszelet-érintők metszési pontjai.

A gyujtó-pontok ezen új értelmezéséből indult ki Plücker, midőn azokat az algebrai görbék elméletébe bevezette.

Poncelet vizsgálatai nem csak a kúpszeletekre vonatkoznak, hanem egyszersmind magasabb görbékre és az algebrai görbék általános elméletére is kiterjednek. Ebbeli vizsgálatai közől először is azokat említjük fel, a melyek Carnot-nak a transversálokra vonatkozó általános tételében vevén erede-

*) Briefwechsel zwischen C. F. Gauss und H. C. Schumacher. Herausgegeben von C. A. F. Peters. 4. köt. 145. l.

töket, a következő tételekben tartalmazott következtetéseket a harmadrendű görbék elméletére foglalják magokban:

»A harmadrendü vonal asymptotái azt három pontban metszik, melyek egy egyenesben fekszenek.«

»A harmad rendü vonal három forduló-pontja egy egyenesben fekszik.«

E két tételt, melyek közől az utóbbi tulajdonképen Mac-Laurin-tól ered, választá Plücker kiinduló-pontul a harmadrendű vonalak elméletének megalapításánál. A Plücker által adott felosztása e vonalaknak 219 fajra, különösön az 1-ső tételen alapszik, a 2-dik tétel pedig, mely a harmadrendű vonalak forduló pontjaira vonatkozik, csak is Hesse mély kutatásaiban lelé végképeni befejezését, mely kutatások jelentősége különben messze túlmegy a geometria határain.

Egy a kúpszeletek elméletében előforduló ismeretes tételnek általánosítása által a térre, mely általánosítás két irányban lehetséges, Chasles ur jutott első sorban a térbeli harmad rendü vonalakra vonatkozó tételek egész sorához. E térbeli harmadrendű vonalak előállítását szintén Poncelet is megkisérlette, de egy elkövetett kisebb elnézés miatt eredményei helytelenek valának, úgy hogy Chasles ur tűnik ki, mint a térbeli harmadrendű vonalak elméletének megalapítója, ki az ide vonatkozó terjedelmes vizsgálatait részint »Apercu historique etc. etc.« czimü munkájában, részint pedig a párisi akadémia comptes-rendusiben tette közzé. Az előbb említett planimetriai tételt Hesse más irányban általánosította, a mely általánosításból indult ki, midőn a síkbeli negyed rendű vonalak kettős érintőinek elméletét megállapítá. Az itten megállapított tételek, melyek különösen a kettős érintők viszonylagos helyzetére vonatkoznak, Hesse egyik legnagyobb becsű értekezésének tárgyát képezik, mely egyidejüleg Steinernek egy ugyan-e tárgynak szentelt értekezésével a »Crelle Journal für Mathematik« 49. kötetében jelent meg.

Az n-ned rendű vonalnak megfelelő poláris görbéje fokszámának sülyedéséből következteté Poncelet, hogy ennek eredete az n-ned rendű vonal forduló pontjaiban és kettős érintőiben rejlik. Amint a fordulópontok száma Plücker által meg vala határozva, úgy bizonyos volt, hogy az n-ned rendű vonalak kettős érintőinek száma általában:

$$\frac{1}{2} n (n-2) (n^2-9).$$

Hogy e tételnek a reciprok poláris görbék elméletétől függetlenül bebizonyíthatónak kell lenni, — úgy okoskodott Jacobi, midőn Poncelet megfontolásaiból kiindulva a kettős érintők számát direct módon meghatározta (Crelle Journal 40. köt.)

E vizsgálatok által korunk legnagyobb geometráinak buvárkodásai nagy teret nyertek.

A két nagy buvár neve azonban még más irányban is füződik egymáshoz.

Poncelet t. i. szép tételeivel, melyek két körnek, vagy két kúpszeletnek egyidejüleg be- és körül-irt sokszögekre vonatkoznak, az e-nemű problémákról, melyek különös esetekben már Eulertől és Fuss-tól tárgyaltattak, egészen új nézpontokat nyert, mely problémák tárgyalására azután azon különös esetben, a midőn a két kúpszelet két körbe megy át, elliptikai függvények segítségével Jacobi tanított bennünket. Jacobinak e tárgyaló módszerei ismét kiinduló pontul szolgálának Richelot, Cayley és még egyebeknek, midőn hasonló problémákkal foglalkoztak.

Az ebbeli problémáknak Poncelet megindította tiszta geometriai tárgyalása, később Steinert vezeté a harmadrendű vonalaknál előforduló általa hiressé tett »Schliessungs Probleme« megoldásához, melyek analytikai tárgyalásukat Mac-Laurin, Poncelet s egyebektől eredő más problémákkal és tételekkel együtt Clebschtől az elliptikai függvények segítségével nyerék.

Ha meggondoljuk, hogy Clebsch utóbb említett dolgozatai első csíráit képezik azon vizsgálatoknak, melyeket később az Abel-féle függvények alkalmazására vonatkozó dolgozataiban a Crelle-Borchardt-féle Journal-ban közzétett, úgy világos előttünk az összefüggés, a mely egy részt Poncelet vizsgálatai, más részt pedig Clebsch ama dolgozatai között létezik, melyekért, és különösen ezekért, a párisi académie des sci-en ces által a Poncelet-díjjal lőn kitüntetve.

Poncelet geometriai buvárkodásának e rövid jellemzése bizonyára csak egy nagyon is elmosódott képét adhatja azon nagy szobornak, melyet a nagy geometra önnönmagának emelt. E szoborra a felejthetlen férjnek nemeslelkü özvegye tevé az első koszorút a párisi akadémiának adott nagylelkü ajándéka által, melyhez a kedves felejthetlen collegának a párizsi académie des sciences nevében egy másodikat Liouville, Serret, Chasles, Bertrand és Combes urak sietének fűzni, midőn első ízben a Poncelet-díjat Clebschnek itélék oda, Clebschnek, kinek dolgozatain félreismerhetlenül meglátszik ama hatalmas befolyás, melyet Poncelet vizsgálatai az összes geometriai buvárlat ujabb irányára gyakoroltak.