APPENDIX TRIPLEX.

I. DE PERSPECTIVA.

Si quid A, punctum vel linea aut aliud quidpiam e spatio fuerit, atque superficies certa T positione detur; sitque punctum $\mathfrak{O}$ item positione datum tale, ut recta quævis ex A usque ad $\mathfrak{O}$ ducta cum T aliquid commune habeat: quæri potest

1. Complexus omnis eius, quod recta quæpiam ex $\mathfrak{O}$ ad aliquod punctum ipsius A ducta cum T commune habet; diciturque complexus iste *imago* obiecti A in *tabula* T *pro oculo* $\mathfrak{O}$, et data singulorum positione erga se invicem.

2. Potestque etiam supponi, ut punctum $\mathfrak{O}$ in recta certa $\mathfrak{O}t$ a T dabili quovis ulterius recedat, atque limes geometricus imaginis ipsius A in tabula T quæri; et si ex. gr. T planum sit, potest recta dicta perpendicularis ad tabulam, item tabula *horizontalis*, aut *verticalis* esse; aut potest recta dicta cum tabula dimidium rectum facere, aut alium quemvis.

3. Quum tria sint, nempe *oculus*, *obiectum* et *imago*; e quibusvis duobus tertium quæri potest: adeoque e dato obiecto eiusque imagine etiam locus oculi quæri potest; imo etiam e data imagine in tabula, et loco oculi, quæri obiectum A potest. Quo etiam *Gnomonica* pertinet; ubi nempe sol puncti $\mathfrak{O}$ vicem subit, stilus ut imago in tabula T spectari potest, quæ si ex umbra illius in datam superficiem proiecta rectæ ad $\mathfrak{O}$ ducerentur, in T describeretur; atque hic umbra hæc tanquam obiectum e stilo tanquam imagine, pro dato loco puncti $\mathfrak{O}$ quæritur.

§. 1.

Problemata hæc resolvere obiectum *Perspectivae* est. Casus simplicissimus est, si *tabula T planum* sit, et quidem aut *horizontale* aut *verticale*.

Si tabula T horizonti parallela sit, et $\mathfrak{O}\mathfrak{t} \perp T$ atque $\mathfrak{O}$ dato quovis ulterius recedat (seu ut dici solet, oculus in zenith in infinito sit): limes imaginis geometricus talis est, ut *quaevis recta $\mathfrak{A}\mathfrak{B}$ horizonti parallela imagini suae* $\mathfrak{a}\mathfrak{b}$ *aequalis sit.* Nam tum $\mathfrak{A}\mathfrak{a}$ et $\mathfrak{B}\mathfrak{b}$ ad T perpendiculares sunt; adeoque parallelæ, per duo plana parallela sectæ, efficiunt parallelogrammum $\mathfrak{A}\mathfrak{B}\mathfrak{b}\mathfrak{a}$. Hunc in finem delineantur sectiones per planum ad superficiem terræ horizontale ædificiorum exstruendorum, Grundriß dictæ. Manifesto etiam quævis linea in planum ad tabulam parallelum cadens imagine sibi æquali gaudet.

Rectae ad tabulam perpendicularis autem imago punctum est, et quaevis recta $\mathfrak{P}\mathfrak{Q}$ ad tabulam nec parallela nec perpendicularis imagine sua maior est. Si enim $\mathfrak{P}$ superius situm fuerit, quam $\mathfrak{Q}$; sit ad tabulam perpendicularis $\mathfrak{P}\mathfrak{p}$ ex $\mathfrak{P}$, et perpendicularis $\mathfrak{Q}\mathfrak{q}$ ex $\mathfrak{Q}$; erit $\mathfrak{p}\mathfrak{q}$ imago rectæ $\mathfrak{P}\mathfrak{Q}$; atque ex $\mathfrak{P}$ parallela $\mathfrak{P}\mathfrak{P}'$ ad $\mathfrak{p}\mathfrak{q}$ (usquequo rectam $\overline{\mathfrak{Q}\mathfrak{q}}$ secat) erit $=\mathfrak{p}\mathfrak{q}$, et in triangulo $\mathfrak{P}\mathfrak{P}'\mathfrak{Q}$ erit hypotenusa $\mathfrak{P}\mathfrak{Q} >$ catheto $\mathfrak{P}\mathfrak{P}'$. (Fig. 258.)

Ita si ad polum concipiatur planum T tangens: erit hoc ibidem horizontale, æquatori parallelum; et si ab æquatore incipiendo, ex omnibus hemisphærii punctis demittantur ad T perpendiculares, prodibit superficiei hemisphærii terræ talis imago. Et manifesto pro quovis circulo æquatori parallelo, cuius radius est *cosinus latitudinis* (id est arcus quo ab æquatore in quadrante usque ad polum ducto distat), seu sinus distantiæ a polo; prodibit in imagine quoque circulus æqualis; sed pro distantia duorum circulorum parallelorum, nempe arcu illo α (quadrantis ab æquatore usque ad polum ducti), qui ab uno circulo usque ad alterum est, erit imago sin. vers. γ — sin. vers. $(\gamma - \alpha)$ (Fig. 259.).

Si tabula T verticalis, et recta $\mathfrak{O}\mathfrak{t} \perp T$, atque $\mathfrak{O}$ in $\overline{\mathfrak{O}\mathfrak{t}}$ removeatur in infinitum, adinstar orientis solis: pariter quævis linea in planum ad tabulam parallelum cadens imagine sibi æquali gaudet, rectæ ad tabulam perpendicularis autem imago punctum est, et quævis recta ad tabulam nec parallela nec perpendicularis imagine sua maior est. Aedificiorum facies ita delineatur.

Si tabula T item verticalis, at $\mathfrak{O}t$ cum T et simul cum horizonte efficiat $45°$, atque sensu dicto removeatur oculus in infinitum: vocatur eiusmodi perspectiva Vogelperspektive; quum aves in altum sæpe ad talem angulum sublatæ, hoc visu gaudeant. Multa hoc modo videri possunt, quæ in prioribus celantur. Suntque heic tam *horizontalium linearum quam verticalium imagines aequales*. Sit enim (Fig. 260.) $\mathfrak{P}\mathfrak{Q}$ horizontalis, $\mathfrak{P}\mathfrak{S}$ verticalis; erunt triangula $\mathfrak{P}\mathfrak{k}\mathfrak{p}$ et $\mathfrak{Q}\mathfrak{k}\mathfrak{q}$ æquicrura propter angulum 45 graduum; itaque $\mathfrak{Q}\mathfrak{k}=\mathfrak{q}\mathfrak{k}$, et $\mathfrak{P}\mathfrak{k}=\mathfrak{p}\mathfrak{k}$; consequenter $\mathfrak{P}\mathfrak{Q}=\mathfrak{p}\mathfrak{q}$. Est etiam $\mathfrak{P}\mathfrak{S}\mathfrak{p}\mathfrak{s}$ parallelogrammum, adeoque $\mathfrak{P}\mathfrak{S}=\mathfrak{p}\mathfrak{s}$.

Scholion 1. Possunt autem omnes istæ imagines dictæ maiores minoresve similes construi, quasi maiorum minorumve similium imagines essent.

Scholion 2. Si cuiusvis puncti imago eo colore lucisque gradu in tabula posita fuerit, ut inde radii ita in oculum veniant, quasi ex obiecto venirent: retina ab imagine ita afficietur ut ab obiecto; at hinc sequitur oculum hunc in finem eo locandum esse, unde obiecti imago per tabulam excepta fuit. Et sequitur etiam tales imagines construi posse, ut radii ita veniant, quasi ex. gr. in Londini plateam sub stellifero cœlo inspiceretur; quod tamen fit imaginibus exactis, debite illuminatis intra focum lentium convexarum ita sitis, ut ad debitam distantiam removeantur imagines magnitudine naturali, unde radii ita veniant, quasi ab obiectis ipsis venirent.

§. 2.

(Fig. 261.) *Distantia puncti a plano* dicitur omnino perpendicularis e puncto ad planum. Sit D distantia oculi $\mathfrak{O}$ a tabula T, et d distantia a T puncti $\mathfrak{P}$ (tanquam obiecti ultra tabulam siti); quodvis *planum* P horizontale pro lubito acceptum *fundamentale* dicitur, et sectio huius cum tabula *linea fundamentalis* vocatur; perpendicularis $\mathfrak{P}\mathfrak{P}'$ ex $\mathfrak{P}$ ad

P vero *altitudo* obiecti $\mathfrak{P}$ dicitur, et si perpendicularis ex $\mathfrak{P}'$ ad tabulam adeoque lineam fundamentalem in $\mathfrak{P}''$ cadat, dicitur $\mathfrak{P}''$ *punctum obiecti* $\mathfrak{P}$, uti $\mathfrak{O}'$, si perpendicularis ex oculo ad tabulam in $\mathfrak{O}'$ cadat, *punctum oculi* vocatur. Patet $\mathfrak{P}'\mathfrak{P}''$ esse distantiæ obiecti $\mathfrak{P}$ æqualem. *Linea* horizontalis per punctum oculi in tabula vocatur *linea oculi*. Recta $\mathfrak{O}'\mathfrak{P}''$ (nempe punctum oculi cum puncto obiecti connectens) dicitur *linea punctorum*; et si in lineam oculi ex $\mathfrak{O}'$ puncto oculi translata distantia D oculi in $\mathfrak{D}$ terminetur, et in lineam fundamentalem translata ex $\mathfrak{P}''$ puncto obiecti in alteram respectu $\mathfrak{O}'\mathfrak{P}''$ (lineæ punctorum) plagam distantia d obiecti $\mathfrak{P}$ in $\mathfrak{d}$ terminetur: recta $\mathfrak{D}\mathfrak{d}$ *linea distantiarum* dicitur; atque si recta ex $\mathfrak{P}''$ ad lineam fundamentalem in tabula perpendiculariter altitudini obiecti æqualis erecta in $\mathfrak{A}$ terminetur: recta $\mathfrak{O}'\mathfrak{A}$ *linea altitudinis* audit.

His denominationibus positis, *imago obiecti* $\mathfrak{P}$ *in tabula* T *erit, ubi verticalis ex intersectione lineae punctorum et lineae distantiarum erecta lineam altitudinis secat*; si nempe sectio rectarum $\mathfrak{O}'\mathfrak{P}''$ et $\mathfrak{D}\mathfrak{d}$ sit $\mathfrak{q}$, et verticalis ex $\mathfrak{q}$ secet rectam $\mathfrak{O}'\mathfrak{A}$ in $\mathfrak{p}$, erit $\mathfrak{p}$ imago puncti $\mathfrak{P}$.

Etenim

I. (Fig. 262.) quodcunque punctum $\mathfrak{k}$ tabulæ fuerit, si recta ex oculo $\mathfrak{O}$ ad rectam $\mathfrak{k}\mathfrak{P}$ parallela tabulam in $\mathfrak{K}$ secet: imago $\mathfrak{p}$ puncti $\mathfrak{P}$ in recta $\mathfrak{K}\mathfrak{k}$ inter $\mathfrak{K}$ et $\mathfrak{k}$ erit. Nam tum rectæ $\mathfrak{O}\mathfrak{K}$ et $\mathfrak{k}\mathfrak{P}$ parallelæ in plano sunt, et rectæ $\mathfrak{k}\mathfrak{K}$ et $\mathfrak{O}\mathfrak{P}$ se invicem secando in idem planum cadunt.

Hinc autem (Fig. 261.) quum punctum $\mathfrak{P}'$ in planum fundamentale cadat, imago eius in $\mathfrak{O}'\mathfrak{P}''$ cadit; quia $\mathfrak{O}\mathfrak{O}'$ et $\mathfrak{P}'\mathfrak{P}''$ sunt parallelæ, nempe ad tabulam perpendiculares sunt.

II. Si igitur imago ipsius $\mathfrak{P}'$ dicatur $\mathfrak{i}$, id est recta $\mathfrak{O}\mathfrak{P}'$ tabulam in $\mathfrak{i}$ secuerit: $\mathfrak{i}$ in $\mathfrak{O}\mathfrak{P}'$ inter $\mathfrak{O}'$ et $\mathfrak{P}''$ cadet; eruntque triangula $\mathfrak{O}\mathfrak{O}'\mathfrak{i}$ et $\mathfrak{P}'\mathfrak{P}''\mathfrak{i}$ similia, quia $\mathfrak{O}\mathfrak{O}' \parallel \mathfrak{P}''\mathfrak{P}'$, et anguli ad $\mathfrak{i}$ verticales sunt. Itaque

$$\mathfrak{O}\mathfrak{O}' : \mathfrak{P}''\mathfrak{P}' = \mathfrak{O}'\mathfrak{i} : \mathfrak{i}\mathfrak{P}'',$$

seu (si $\mathfrak{O}'\mathfrak{i}$ dicatur x, et $\mathfrak{O}'\mathfrak{P}''$ dicatur a) est

$$D : d = x : a - x;$$

atque hinc $Da - Dx = dx$, adeoque

$$x = \frac{Da}{D+d}.$$

Sed in triangulis $\mathfrak{O}'\mathfrak{D}\mathfrak{q}$ et $\mathfrak{P}''\mathfrak{d}\mathfrak{q}$ est

$$D : d = \mathfrak{O}'\mathfrak{q} : \mathfrak{q}\mathfrak{P}''$$

seu (si $\mathfrak{O}'\mathfrak{q}$ dicatur y) est $D : d = y : a - y$, adeoque

$$y = \frac{Da}{D+d} = x.$$

III. Imago ipsius $\mathfrak{P}$ omnino in rectam ex $\mathfrak{q}$ verticalem cadit, fiat id in $\mathfrak{p}'$; erunt triangula $\mathfrak{O}\mathfrak{q}\mathfrak{p}'$ et $\mathfrak{O}\mathfrak{P}'\mathfrak{P}$ similia, quum plani verticalis $\mathfrak{O}\mathfrak{P}\mathfrak{P}'$ sectio cum tabula, verticalis $\parallel \mathfrak{P}\mathfrak{P}'$ sit; suntque et triangula $\mathfrak{O}\mathfrak{O}'\mathfrak{q}$, $\mathfrak{P}'\mathfrak{P}''\mathfrak{q}$, necnon triangula $\mathfrak{O}'\mathfrak{q}\mathfrak{p}$, $\mathfrak{O}'\mathfrak{P}''\mathfrak{A}$ similia. Hinc

$$\mathfrak{O}\mathfrak{P}' : \mathfrak{O}\mathfrak{q} = \mathfrak{P}\mathfrak{P}' : \mathfrak{q}\mathfrak{p}',$$

et

$$\mathfrak{O}\mathfrak{q} : \mathfrak{q}\mathfrak{P}' = \mathfrak{O}'\mathfrak{q} : \mathfrak{q}\mathfrak{P}''$$

adeoque

$$\mathfrak{O}\mathfrak{P}' : \mathfrak{O}\mathfrak{q} = \mathfrak{O}'\mathfrak{P}'' : \mathfrak{O}'\mathfrak{q},$$

et hinc

$$\mathfrak{O}'\mathfrak{P}'' : \mathfrak{O}'\mathfrak{q} = \mathfrak{P}\mathfrak{P}' : \mathfrak{q}\mathfrak{p}'.$$

Estque e similitudine postrema

$$\mathfrak{O}'\mathfrak{P}'' : \mathfrak{O}'\mathfrak{q} = \mathfrak{A}\mathfrak{P}'' : \mathfrak{q}\mathfrak{p}.$$

Consequenter

$$\mathfrak{P}\mathfrak{P}' : \mathfrak{q}\mathfrak{p}' = \mathfrak{A}\mathfrak{P}'' : \mathfrak{q}\mathfrak{p}.$$

Itaque quum $\mathfrak{P}\mathfrak{P}' = \mathfrak{A}\mathfrak{P}''$ sit, est etiam $\mathfrak{q}\mathfrak{p}' = \mathfrak{q}\mathfrak{p}$.

Si vero $\mathfrak{P}$ infra planum fundamentale fuerit: erit altitudo (quasi negativa) in perpendicularem ex $\mathfrak{P}''$ infra lineam fundamentalem transferenda. Et quotvis punctorum obiecti numerabilium imagines reperiri poterunt: at si trianguli $\mathfrak{a}\mathfrak{b}\mathfrak{c}$ imago quæratur, nonnisi punctorum $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$ imagines quærere necesse erit: si enim punctorum $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$ imagines $\mathfrak{a}'$, $\mathfrak{b}'$ fuerint, rectæ $\mathfrak{a}\mathfrak{b}$ imago recta $\mathfrak{a}'\mathfrak{b}'$ erit; nam in plano $\mathfrak{O}\mathfrak{a}\mathfrak{b}$ rectæ $\mathfrak{O}\mathfrak{a}$

circa $\mathfrak{O}$ usque in $\mathfrak{O}\mathfrak{b}$ mota, simul per $\mathfrak{a}'\mathfrak{b}'$ ab $\mathfrak{a}'$ usque in $\mathfrak{b}'$ movebitur, et cuivis puncto cuiusvis rectarum $\mathfrak{a}\mathfrak{b}$ et $\mathfrak{a}'\mathfrak{b}'$ punctum alterius respondebit.

§. 3.

Si vero data recta $\mathfrak{P}\mathfrak{P}'$ tanquam obiecto, et data imagine $\mathfrak{p}\mathfrak{q}$ eius, *quaeratur situs oculi* $\mathfrak{O}$: ubi $\mathfrak{A}\bar{\mathfrak{p}}$ et $\mathfrak{P}''\bar{\mathfrak{q}}$ se invicem secabunt, ibi erit $\mathfrak{O}'$; et $\mathfrak{D}$ erit, ubi $\mathfrak{d}\bar{\mathfrak{q}}$ lineam per $\mathfrak{O}'$ horizontalem secabit; et perpendicularis ad tabulam ex $\mathfrak{O}'$ erectæ, ipsi $\mathfrak{O}'\mathfrak{D}$ æqualis, extremitas erit situs oculi $\mathfrak{O}$; nam pro dato hoc oculi et obiecti situ, imago (per præcedentia) $\mathfrak{p}\mathfrak{q}$ erit.

Si vero (Fig. 263.) recta $\mathfrak{P}\mathfrak{Q}$, eiusque imago $\mathfrak{p}\mathfrak{q}$ data fuerint: situs oculi innotescit modo sequente. Fiant ex $\mathfrak{P}$ et $\mathfrak{Q}$ ad planum fundamentale perpendiculares $\mathfrak{P}\mathfrak{P}'$ et $\mathfrak{Q}\mathfrak{Q}'$, atque ex $\mathfrak{P}'$ et $\mathfrak{Q}'$ fiant ad lineam fundamentalem perpendiculares $\mathfrak{P}'\mathfrak{P}''$ et $\mathfrak{Q}'\mathfrak{Q}''$, et altitudines $\mathfrak{P}''\mathfrak{A}$, $\mathfrak{Q}''\mathfrak{A}'$ punctorum $\mathfrak{P}$, $\mathfrak{Q}$; ducanturque rectæ $\mathfrak{A}\mathfrak{p}$ et $\mathfrak{A}'\mathfrak{q}$: ubi hæ se invicem secabunt, ibi erit $\mathfrak{O}'$; et in tabula per hoc punctum $\mathfrak{O}'$ linea horizontali ducta, et translata ex $\mathfrak{P}''$ distantia $d=\mathfrak{P}''\mathfrak{P}'$, secet $\mathfrak{d}\bar{\mathfrak{p}}'$ lineam horizontalem per $\mathfrak{O}'$ ductam in $\mathfrak{D}$; erit perpendicularis ad tabulam ex $\mathfrak{O}'$ erectæ ipsi $\mathfrak{O}'\mathfrak{D}$ æqualis, extremitas locus $\mathfrak{O}$ oculi. Nempe posito hoc, ipsius $\mathfrak{P}\mathfrak{Q}$ imago $\mathfrak{p}\mathfrak{q}$ erit; imago vero unica est.

§. 4.

Pro oculo $\mathfrak{O}$ et imagine $\mathfrak{p}$ autem locus puncti $\mathfrak{P}$ ubique esse in recta $\mathfrak{O}\bar{\mathfrak{p}}$ potest; uti oculus $\mathfrak{O}$, pro puncto $\mathfrak{P}$ et imagine $\mathfrak{p}$ ubique in recta $\mathfrak{p}\overline{\mathfrak{O}}$ esse potest. At etiam qualevis obiectum A fuerit ultra tabulam, ductis ad omnia eius puncta rectis, et omnes rectas per tale α multiplicando, ut quævis rectarum per α multiplicata ultra tabulam terminetur (iuxta pag. 10); omnium hoc pacto generatorum similium imago eadem erit.

Potest imagini certæ obiectum in certa superficie pro dato oculi situ quæri: et hoc respectu potest *Gnomonica* considerari, si ut dictum (pag. 308) est, sol oculi, axis terræ imaginis, et umbra in superficie data obiecti quæsiti vices subeant. Et brevitati consulendo, ceteris prætermissis, transitus fit ad Gnomonicam.

II. DE GNOMONICA.

Fundamento inservit id, quod (pag. 304) dictum est: et sensu ibidem exposito, sphæra pellucida axe adiaphano axi terræ parallelo, ubique horologii vicem subire potest; atque (per ibidem dicta) in plano etiam quovis, quod axi terræ parallelum non est, ad superficiem terræ quoque ubivis horologium construi potest.

Non aliud igitur quoad horologia in plano exstruenda restat, nisi referre:

1. quomodo in planis axi terræ parallelis horologia construi queant;
2. quomodo horologium idem diversis locis inservire queat,
3. quomodo horologium etiam locum solis in ecliptica tempusque ortus et occasus eius (quovis die sive certis dierum intervallis) indicare queat.

Planum verticale ubivis ad planum meridiani perpendiculare dicitur *meridionale* loci illius; et quum per lineam verticalem innumera plana verticalia dentur, dicitur planum *verticale primarium*. Planum æquatori parallelum ubivis ad terram dicitur *aequinoctiale*. Planum per axem terræ et cardines orientis occidentisque dicitur *polare*, planum verticale per polum autem dicitur *planum meridiani*, et huius sectio cum horizonte vocatur *meridiana horizontalis*, atque sectio eius cum quavis superficie *meridiana superficiei illius* dicitur. Horologia in iis describenda (*primaria* dicta) nomina a planis iis sortiuntur; et (præter horizontalia) dicuntur *aequinoctialia*, *polaria*, *meridionalia*, *meridiana*; sed postremum duplex est, prouti superficies orientem vel occidentem respicit, atque eatenus dicitur horologium *orientale* vel *occidentale*; ita *meridionale* duplex est, nempe *septemtrionale* et *australe*, prouti superficies septemtrioni vel austro obversa est; et *aequinoctiale* duplex est, *superius* versus boream, et *inferius* versus austrum; ita *polare* quoque, *superius* et *inferius* est. Et præterea si planum horizontale circa meridianam, aut meridionale circa verticalem vertatur, vocatur horologium *declinans*, si æquinoctiale aut meridionale circa cardines orientis occidentisque vertatur, vocatur *inclinans*. Si vero declinans ex. gr. meridionale circa sectionem eius cum horizonte factam vertatur, *deinclinans* dicitur propter duplicem inclinationem &c.

Patet autem planum polare ad æquatorem horizontale esse, nec non planum meridiani ad distantiam 90 graduum in æquatore esse horizontale; et æquinoctiale ad polum horizontale esse; axemque esse in hoc ad planum horologii perpendicularem; uti in horologiis, tam in plano polari, quam in meridiano, axem (seu stilum umbram monstrantem) plano horologii parallelum esse.

§. 1.

Superius (pag. 305) fuit

$$\text{tang.}\, B = \sin. A\ \text{tang.}\, b,$$

ubi A altitudinem poli, b angulum horarium ad polum (a plano meridiani incipiendo), et B latus angulo b in triangulo sphærico rectangulo oppositum denotat; atque A altitudo poli et B angulus a meridiana incipiendo in plano dato, ad centrum terræ horarius, *catheti* sunt.

Si $A = 90°$ fuerit, uti in plano æquinoctiali, fiet

$$\text{tang.}\, B = \sin. A\ \text{tang.}\, b = 1 . \text{tang.}\, b;$$

atque $B = b$; fietque nB ex B, dum nb fit ex b. Itaque in plano æquinoctiali circulus a meridiano incipiendo per 24 æqualiter dividitur.

Pro $A = 0$ autem, uti ad æquatorem pro plano horizonti æquatoris parallelo est, fit $\text{tang.}\, B = 0$, nam $\sin. A = 0$; nec iuxta ibidem dicta pro hoc casu, nempe dum axis terræ in planum cadit, triangulum sphæricum dictum datur.

At quodcunque planum Q fuerit, in quod axis terræ incidit: bisecabit hoc æquatorem ex. gr. in $\mathfrak{D}$ et $\mathfrak{E}$, et planum superficiem terræ in illo æquatoris puncto $\mathfrak{K}$ tangens, quod a $\mathfrak{D}$ et $\mathfrak{E}$ quadrante distat, ipsi Q parallelum erit; dicatur planum illud q.

Sit recta $\mathfrak{AB}$ (Fig. 264.) æquatorem in puncto $\mathfrak{K}$ tangens: et dividatur æquator ex $\mathfrak{K}$ incipiendo in 24 partes æquales; atque ducantur ad tangentem dictam e $\mathfrak{k}$ centro æquatoris, per puncta divisionis, rectæ $\mathfrak{ka}$, $\mathfrak{kb}$, $\mathfrak{kc}$, ... $\mathfrak{ka}'$, $\mathfrak{kb}'$, $\mathfrak{kc}'$, ... Erunt $\mathfrak{Ka}$, $\mathfrak{Kb}$, $\mathfrak{Kc}$, ... uti $\mathfrak{Ka}'$, $\mathfrak{Kb}'$, $\mathfrak{Kc}'$, ... tangentes angulorum $15°$, $30°$, $45°$, ... pro radio $\mathfrak{kK}$; nempe anguli ex $\mathfrak{kK}$ incipiendo 15 gradibus crescunt, quia $\frac{360}{24} = 15$.

Sit $\mathfrak{Pp}$ axis terræ, cuius meditullium $\mathfrak{k}$ centrum terræ est, et planum æquatoris dicatur a, planum vero per axem $\mathfrak{Pkp}$ et $\mathfrak{K}$ punctum æquatoris determinatum dicatur p; axis ad æquatorem perpendicularis est, adeoque et $p \perp a$; item $\mathfrak{kK}$ ad q (nempe planum in $\mathfrak{K}$ tangens) perpendicularis est; adeoque quum $\mathfrak{kK}$ in a sit, est $a \perp q$; itaque duo plana p et q fiunt ad tertium a perpendicularia, punctoque $\mathfrak{K}$ communi gaudent. Consequenter sectio eorum $\mathfrak{KK}'$ est ad a perpendicularis, adeoque cum perpendiculari ad $\mathfrak{AB}$ ex $\mathfrak{K}$ in q erecta coincidet.

Cadetque umbra axeos, sole in plano p supra planum q existente, in planum q proiecta in rectam $\mathfrak{KK}'$. Si vero inde porro in æquatore ex. gr. arcum $15°$ describat ad lævam; erit umbra centri manifesto in $\mathfrak{a}'$, et in $\mathfrak{b}'$, si sol $2 . 15°$ descripserit &. At umbra axeos in q, erit semper perpendicularis in q e puncto rectæ $\mathfrak{AB}$ illo erecta, in quod umbra centri cadit. Nam ex. gr. dum umbra centri in $\mathfrak{a}'$ est, axis et $\mathfrak{a}'$ determinant planum, in quod umbra axeos cadit; est nempe hæc sectio plani huius cum q (propter punctum $\mathfrak{a}'$ utrique commune) facta. Est autem recta $\mathfrak{a}'\mathfrak{a}''$, in qua sectio ista fit, axi parallela; quia in eodem plano est, nec tamen secat axem, quia q parallelum axi cum hoc nil commune habet. Sed axis rectæ $\mathfrak{KK}'$ parallelus est; itaque quum eidem rectæ tam $\mathfrak{KK}'$ quam $\mathfrak{a}'\mathfrak{a}''$ parallela sint, est quoque $\mathfrak{a}'\mathfrak{a}'' \parallel \mathfrak{KK}'$; consequenter et $\mathfrak{a}'\mathfrak{a}''$ ad $\mathfrak{AB}$ ex $\mathfrak{a}'$ perpendicularis est.

Manifesto autem, etsi sol non in æquatore sed in circulo ei parallelo versetur, in cuiusvis circuli horarii plano, nempe in quocunque planorum horariorum fuerit, umbra axeos in sectionem plani huius cum plano q factam cadet. Consequenter umbra in easdem perpendiculares ad $\mathfrak{AB}$ ex $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$, ... $\mathfrak{a}'$, $\mathfrak{b}'$, $\mathfrak{c}'$, ... (utrinque continuatas) cadet.

Et (per superius dicta) si sphæra eiusmodi pellucida s (parva respectu terræ) ad superficiem terræ ponatur, axe opaco axi terræ parallelo, simul cum plano q' ad q parallelo, sphæram s tangente in $\mathfrak{j}$ puncto æquatoris ipsius s; et diviso hoc æquatore in 24 partes æquales, ducantur ex $\mathfrak{f}'$ centro ipsius s ad rectam, quæ æquatorem in $\mathfrak{j}$ tangit, per divisionis puncta rectæ, atque e sectionibus tangentis erigantur ad tangentem perpendiculares: erunt hæ lineæ horariæ cursum solis ad horæ intervalla monstrantes.

Patetque stilum esse plano q' (nempe plano huius horologii) parallelum per centrum $\mathfrak{f}'$ sphæræ s ductum, et simul perpendiculari ex $\mathfrak{j}$ ad tangentem æquatoris sphæræ s, in plano q' erectæ, parallele positum esse. Unde intelligitur, quomodo in horologio in plano q' constructo *stili situs* reperiatur: nempe ex $\mathfrak{j}$ erecta ad planum q' perpendiculari recta $\mathfrak{j}\mathfrak{f}'$, *ponatur per* $\mathfrak{f}'$ *recta axi terræ parallela* $\mathfrak{f}'\mathfrak{f}''$; *quomodo hoc practice fieri possit, inferius patebit.*

Posito autem $\mathfrak{f}'\mathfrak{f}''$ stilo axi terræ parallelo: (Fig. 265.) demittantur ex $\mathfrak{f}'$ et $\mathfrak{f}''$ ad planum q' perpendiculares $\mathfrak{f}'\mathfrak{h}$, $\mathfrak{f}''\mathfrak{h}'$, et fiat in q' (plano horologii) perpendicularis $\overline{\mathfrak{J}\mathfrak{h}}$ ad $\mathfrak{h}\mathfrak{h}'$, et ex $\mathfrak{J}\mathfrak{h}$ planum K perpendiculare ad q'; atque fiat in plano K, centro $\mathfrak{f}'$ radio $\mathfrak{f}'\mathfrak{h}$ circulus, et hic dividatur ex $\mathfrak{h}$ incipiendo per 24, ducanturque per puncta divisionis rectæ, et ex illis punctis, ubi hæ rectam $\overline{\mathfrak{J}\mathfrak{h}}$ (quæ tangens circuli ad $\mathfrak{h}$ est) secabunt, ducantur ad $\mathfrak{J}\mathfrak{h}$ in plano q' perpendiculares.

Erunt hæ manifesto lineæ umbrarum horariarum in plano q', per stilum $\mathfrak{f}'\mathfrak{f}''$ proiectarum; et quidem dum umbra in $\mathfrak{h}\mathfrak{h}'$ cadet, erit in loco, cuius planum horizontale ipsi q' parallelum est, hora XII. Unde per differentiam meridianorum loci illius et loci, in quo q' est, innotescet, qualisnam numerus ad $\mathfrak{h}$ et quales ad sectiones tangentis ceteras scribendi sint.

Si vero differentia meridianorum non numerum horarum integrum efficiat, sed ex. gr. locus is, ubi q' planum horizonti parallelum est, a meridiano loci $\mathfrak{h}$ distet orientem versus $\frac{n}{m}\cdot\frac{360}{24}$ gradibus (pro n, m integris), et superficies horologii quoque orientem respiciat: accipiatur ad dextram huic e regione stantis, in circulo, ex $\mathfrak{h}$ incipiendo pars $\left(\frac{360°}{24}:m\right)$ numero n, et inde accipiatur semper $\frac{360°}{24}$ e quovis divisionis puncto in eodem circulo porro eundo; adscribaturque ad dextram eo, ubi pars prius accepta terminatur, XII; ad finem sequentis ad dextram autem I, et tum II, et ita porro, ad lævam autem ad finem partis ante XII terminatæ scribatur XI, ante hoc X &c. Ducanturque ex $\mathfrak{f}'$ (centro circuli) per extremitates partium dictarum rectæ; atque eo, ubi hæ tangentem $\overline{\mathfrak{J}\mathfrak{H}}$ secabunt, numeri iidem adscribantur: et manifesto rectæ e sectionibus his ad $\overline{\mathfrak{J}\mathfrak{H}}$ perpendiculares erunt lineæ horariæ in plano q'. Nempe dum sol umbram in $\mathfrak{H}\mathfrak{H}'$ proiicit, postea ad lævam moveri per $\frac{n}{m}$ horas debet, ut meridies in loco $\mathfrak{H}$ sit; adeoque umbra dextrorsum ibit; antea vero per ascendentem solem umbra versus $\mathfrak{H}\mathfrak{H}'$ pariter dextrorsum ibit.

In superficie altera occidentem respiciente pariter lineæ horariæ eædem manebunt, et ibi quoque umbra (stili $\mathfrak{f}'\mathfrak{f}''$ circa $\mathfrak{H}\mathfrak{H}'$ ad duorum rectorum intervallum moti) ad dextram e regione stantis ibit sole descendente; adeoque a linea horaria, cui in priore superficie XII adscripta est, ad dextram I, II, . . . adscribi debent.

Si differentia meridianorum sex horas efficiat, *horologium meridianum* erit: et in superficie orientali quadrans $\mathfrak{H}$q, qui ad dextram est, infrorsum erit, per cuius finem e centro $\mathfrak{f}'$ recta ducta omnino tangenti parallela erit; atque tempore meridiei in loco $\mathfrak{H}$ umbra stili haud proiicietur in planum horologii, sed XI, X, . . . sursum determinabuntur, uti in superficie occidentali ipsi XI respondebit I, et II ipsi X et ita porro.

In *polari*, tempore meridiei umbra manifesto in $\mathfrak{H}\mathfrak{H}'$ erit, quum $\mathfrak{H}\mathfrak{H}'$ sectio plani polaris cum meridiano sit; et reliqua patent.

Scholion I. (Fig. 266.) Tyronibus primo obtutu videretur, horologium pro quovis indice (etiam axi terræ non parallelo) construi posse, si umbræ eius iuxta diei alicuius horas notentur: at sit stilus is recta $\mathfrak{f}\mathfrak{Q}$, et $\mathfrak{f}$ centrum terræ, atque axis sit $\mathfrak{f}\mathfrak{P}$; manifesto $\mathfrak{f}\mathfrak{Q}$ nonnisi in unum planum horarium cadet; nam si in duo cadet, in sectione eorum erit, adeoque cum axe coincidet. Si $\mathfrak{f}\mathfrak{Q}$ in aliquod planum horarium cadat, sole in illo versante horam rite monstrabit; in alio autem sit pro sole in puncto $\mathfrak{s}$ plani horarii existente umbra puncti $\mathfrak{Q}$ designata q; crescente vel decrescente solis declinatione, ascendet vel descendet sol in eodem circulo horario C; veniat in $\mathfrak{s}'$; umbra puncti $\mathfrak{Q}$ non erit $\mathfrak{q}$, nam recta $\mathfrak{q}\mathfrak{Q}$ peripheriam C in $\mathfrak{s}$ secabit; sit umbra $\mathfrak{q}'$. Manifesto tam $\mathfrak{q}$ quam $\mathfrak{q}'$ adeoque et recta $\mathfrak{q}\mathfrak{q}'$ in planum ipsius C cadunt; adeoque quum stili prior umbra fuerit $\mathfrak{k}\mathfrak{q}$, posterior $\mathfrak{k}\mathfrak{q}'$, essent (si umbra designata et nunc valeret) $\mathfrak{k}\mathfrak{q}$ et $\mathfrak{k}\mathfrak{q}'$ in recta eadem, et quidem illa, in qua planum horologii per planum horarium C secatur; nam $\mathfrak{k}$, $\mathfrak{q}$, et $\mathfrak{Q}$ in planum $\mathfrak{k}\mathfrak{q}\mathfrak{s}$, et $\mathfrak{k}$, $\mathfrak{q}'$, et $\mathfrak{Q}$ in planum $\mathfrak{k}\mathfrak{s}'\mathfrak{q}'$ cadunt; per $\mathfrak{k}$, $\mathfrak{q}$ et $\mathfrak{Q}$ vero planum determinatur, et quidem illud, quod per $\mathfrak{k}$, $\mathfrak{q}'$ et $\mathfrak{Q}$ determinatur; itaque $\mathfrak{s}$, et $\mathfrak{s}'$ quoque in illud cadit simul cum centro $\mathfrak{k}$; est vero hoc planum horarium; adeoque $\mathfrak{k}\mathfrak{Q}$ in hoc quoque planum horarium caderet (contra hypothesim).

Scholion 2. Axis autem non ipse solum, sed et punctum quodvis eius, index esse potest; si nempe stilus cuiusvis formæ (sive centro fixus, sive fulcris insistens, sive perpendicularis) in eo terminetur, atque nonnisi extremitas umbræ ad lineam horariam appellens spectetur. Ex. gr. si axis centro $\mathfrak{k}$ fixus sit $\mathfrak{k}\mathfrak{Z}$, et ex $\mathfrak{Z}$ demittatur ad planum horologii perpendicularis $\mathfrak{Z}\mathfrak{i}$; dum umbra ipsius $\mathfrak{k}\mathfrak{Z}$ lineam horariam teget, manifesto etsi nonnisi punctum opacum $\mathfrak{Z}$ relinquatur, umbra huius quoque in eadem linea erit.

Atque hinc si nonnisi hoc punctum opacum $\mathfrak{Z}$ cogitetur, disparente terra opaca: quemvis circulum parallelum C descripserit sol tempore 24 horarum; orientur coni ad apicem $\mathfrak{Z}$ verticales, quorum superior circulo C insistet, latera radiis solis præbentibus, inferior autem fit per radiorum ad $\mathfrak{Z}$ lucentium continuationem umbrosam. Si vero sol infra æquatorem in circulo ad eandem declinationem versetur: fiet conus superior umbrosus, et inferior luminosus. Itaque si per planum P horologii per centrum $\mathfrak{k}$ positum secetur conus umbrosus dictus: sectio conica erit; atque umbræ extremitas in sectione lineæ horariæ cum sectione conica dicta erit, pro hora lineæ horariæ respondente; nam umbra puncti in superficie coni est, adeoque quum pro illa hora etiam in linea horaria sit: erit ibi, ubi linea horaria conum secat; nempe quum linea in plano conum secante sit, erit in puncto sectionis coni cum linea horaria communi. Itaque quum pro quavis alia declinatione solis alius conus generetur: si saltem pro quavis declinatione solis, dum in signum aliquod eclipticæ ingreditur, sectio coni dicta construatur, cuivis sectionum conicarum istarum adscribi signum illud poterit; indicabitque extremitas umbræ ad quampiam earum appellens solem in signo adscripto versari.

Erit vero sectio ista parabola vel ellipsis aut hyperbola, prouti n (angulus coni) æqualis, minor vel maior ipso m fuerit (pagg. 265 &).

Sit ex. gr. (Fig. 267.) $\mathfrak{tQ}$ pars axeos, $\mathfrak{t}$ centrum terræ, et $\mathfrak{tq}$ meridiana in horologio horizontali, adeoque a altitudo poli, $\mathfrak{P}$ polus mundi, sitque $\mathfrak{PAb}$ meridianus, atque sol in $\mathfrak{A}$; erit $\mathfrak{Ac}$ declinatio, quæ dicatur d; eritque angulus coni nempe $n = 2(R-d)$; nempe quoad immanem solis distantiam, apex coni sive in $\mathfrak{Q}$ sive in $\mathfrak{t}$ accipiatur, nullum quoad sensus discrimen est; in triangulo $\mathfrak{tQq}$ autem ex a altitudine poli et angulo $\frac{1}{2} \cdot n$ atque latere $\mathfrak{tQ}$, innotescit $\mathfrak{Qq}$, quod (pagg. 266 &) c dicebatur; et pariter m innotescit, quum externus summæ internorum a et $\frac{1}{2} \cdot n$ æqualis sit; itaque sectio conica pro illa solis declinatione construi poterit; et pariter pro quavis declinatione alia. Patet vero angulum coni minimum pro maxima declinatione esse, atque redeunte sole ad æquatorem duobus rectis quam proxime ire, et conum ad æquatorem in planum huius mutari: atque numeris in calculum inductis facile patet, apud nos pro horologio horizontali, pro quavis declinatione solis (excepto dum ad æquatorem o fit) angulum $m < n$ esse, adeoque hyperbolam describi; itaque sole oriente ad dextram, et occidente ad sinistram, umbram quoad sensus ad asymptotos appellere, et tempus ortus occasusque tempore solis in illo signo versantis indicare.

Scholion 3. Si tamen nonnisi signa, in quibus sol versatur, ex umbra puncti $\mathfrak{Q}$ tempore meridiei cognoscere lubeat (quod *Analemma signiferum* dicitur): sit horologium horizontale, $\mathfrak{tQ}$ sit stilus, et $\mathfrak{tm}$ sit meridiana (Fig. 268.); sitque sole (dum in certo signo est) in meridianum appellente umbra puncti $\mathfrak{Q}$ in $\mathfrak{f}$, atque declinatio solis sit tum d; in triangulo $\mathfrak{tQf}$ latus $\mathfrak{tQ}$ datum est, $\wedge \mathfrak{ftQ}$ est altitudo poli, et alter angulus adiacens nempe $\mathfrak{tQf}$ est $= R-d$; namque angulus hic (ut in præcedentibus) insensibiliter differt ab eo, qui ad centrum $\mathfrak{t}$ est; huius autem quantitas est distantia solis a polo. Itaque $\mathfrak{tf}$ innotescit, sive per constructionem, sive per calculum. Ita pro quibusvis declinationibus solis eiusmodi puncta determinari, atque signa, in quibus sol tunc versatur, adscribi possunt. Et idem ad alias lineas horarias quoque applicari potest.

Scholion 4. Quum sol in ecliptica in ellipsi moveri videatur, at præterea iam acceleretur iam retardetur; adeoque recta ascensio eius (via ad æquatorem reducta) inæquabiliter crescat, decrescatque; et tempus ab una meridie ad proximam iam maior iam minor sit; et nonnisi tempus ab una culminatione stellæ fixæ ad proximam sit, propter uniformem terræ motum circa axem, semper idem; sol vero ab ea fixa, cum qua simul in meridiano erat, contra motum diurnum orientem versus recedens, adhuc tempore indigeat, donec in meridianum appellat, adeoque dies solaris sidereo longior sit, sed nec dies solares veri inter se æquales sint: solem aliquem medium fingere visum est, qui recta ascensione æquabiliter crescente, tempore cuiusvis anni, uti verus sol ad æquatorem reductus, totum circulum percurrat. Vocatur *tempus* sole hoc fictitio duce determinatum, *medium*, quod ad *tempus solare verum*, imo et ad *tempus sidereum*, sive quodvis horum ad aliud, reduci potest. Horologia vero solem medium sequuntur; itaque si quis suum, ex. gr. tempore meridiei, horologio solari convenienter dirigere voluerit, nosse debet, quænam sit pro illa die differentia inter meridiem solis medii et veri, quæ sæpe etiam ad quadrantem exsurgit. Computata hæc pro annis quibus vis in Ephemeridibus exstant; quamvis adhucdum periodus nota haud sit, a cuius fine idem ordo incipiat; nec duæ imagines dictæ (nempe so fictus et verus ad æquatorem reductus) quater per annum congruentes, semper plane tempore meridiei loci certi sibi invicem occurrant.

§. 2.

Pro horologio meridionali construendo fit (Fig. 269.) triangulum sphæricum $\mathfrak{p}\mathfrak{z}\mathfrak{q}$ ad zenith $\mathfrak{z}$ rectangulum ($\mathfrak{p}$ polum, $\mathfrak{t}$ centrum sphæræ, adeoque $\mathfrak{t}\mathfrak{z}$ verticalem, in qua planum meridianum $\mathfrak{p}\mathfrak{z}$ et planum meridionale se mutuo secant, $\mathfrak{p}\mathfrak{q}$ vero circulum horarium denotante). Eritque A complementum altitudinis poli, adeoque altitudini æquatoris æquale: itaque ex angulo horario b et catheto A reperitur cathetus B angulo b

oppositus, nempe angulus horarius in plano meridionali circulo horario $\mathfrak{p}\mathfrak{q}$ respondens; eritque (pag. 294)

$$\text{tang.}\, B = \text{sin.}\, A \ \text{tang.}\, b\,;$$

id est tangens arcus quæsiti erit sinus altitudinis æquatoris (seu cosinus altitudinis poli) per tangentem anguli horarii multiplicatus.

Si vero planum meridionale declinet, ex. gr. vertatur pars occidentalis versus austrum ad angulum d: fiet triangulum sphæricum pariter $\mathfrak{p}\mathfrak{z}\mathfrak{q}$, manente angulo horario b et latere A, sed angulus $\mathfrak{p}\mathfrak{z}\mathfrak{q}$ erit $= R + d$; unde e duobus angulis et latere, quibus adiacent datis, prodit B. Ad orientem quoque idem est, nam $\text{sin.}(R+d) = \text{sin.}(R-d)$; quia $R + d + R - d = 2R$.

Linea meridiana in plano meridionali autem est verticalis $\mathfrak{z}\mathfrak{t}$, et stilus ultra $\mathfrak{t}$ continuatus fit index superficiei australis; ubi lineæ horariæ pariter prodeunt, suntque manifesto continuationes priorum. Patet autem, apud nos in huius horologii facie boreali nonnisi horas matutinas vespertinasque, atque in australi facie reliquas circa meridiem ostendi; neque in facie boreali meridiem monstrari, nisi distantia puncti zenith loci ab æquatore minor sit maxima solis declinatione, idque nonnisi eousque, donec declinatio distantiæ dictæ æqualis fiat.

§. 3.

Si horizontale declinet (Fig. 270.), ex. gr. pars occidentalis vertatur circa meridianam ad angulum d, fiet triangulum sphæricum $\mathfrak{p}\mathfrak{p}''\mathfrak{q}'$, in quo $\mathfrak{p}\mathfrak{p}''$ altitudo poli, $\wedge \mathfrak{p}''\mathfrak{p}\mathfrak{q}' = b$ angulus horarius in sphæra, et $\mathfrak{p}''\mathfrak{q}'$ est arcus quantitatem anguli horarii in plano horologii exprimentis; itaque quum angulus $R + d$ sit, quem $\mathfrak{p}\mathfrak{p}''$ cum $\mathfrak{p}''\mathfrak{q}'$ facit, e duobus angulis b et $R + d$ cum latere adiacente datis prodit $\mathfrak{p}''\mathfrak{q}'$.

Manet vero et hic linea meridiana immota.

Si declinans etiam inclinet, nempe vertatur circa perpendicularem ad meridianam, versus austrum, quo in casu *reclinans* dicitur: sit angulus reclinationis d; moveatur prius planum horologii horizontale circa perpendicularem ad meridianam, movebitur linea meridiana in plano meridiani; veniat $\mathfrak{P}''$ in $\mathfrak{P}'''$; et postea horologium hoc quasi horizontale pro altitudine poli $\mathfrak{P}\mathfrak{P}'''$ constructum declinet (nempe circa sectionem plani meridiani cum plano horologii huius motum); prodibit (ut antea) angulus in plano horologii declinantis horarius quilibet posito b respondens.

Et pariter prodeunt lineæ horariæ in plano meridionali deinclinante; uti et in polari declinante aut deinclinante. In omnibus his autem meridiana horologii est sectio plani horologii per planum illud facta, in quod perpendiculares e duobus punctis stili ad planum horologii demissæ cadunt.

§. 4.

Methodus non solum generalis pro quovis plano exposita est (pag. 304), sed pro horizontali quoque (utpote quod per totam diem collustratum usui maxime idoneum est) formula simplex data est ibidem: attamen pro iis, qui tædium calculi fugiunt, et methodus constructionis exponenda est.

Fiat (Fig. 271.) $\triangle\, \mathfrak{ABC}$ ad $\mathfrak{C}$ rectangulum, angulo b ad $\mathfrak{B}$ altitudini poli æquali; erit angulus a ad $\mathfrak{A}$ altitudo æquatoris. Fiatque (Fig. 272.) centro $\mathfrak{C}$ radio $\mathfrak{CA}$ circulus, et huius tangens ad $\mathfrak{A}$; atque dividatur quadrans $\mathfrak{A}\mathfrak{q}$ in sex partes æquales, et ductis e centro $\mathfrak{C}$ per puncta divisionis rectis, quinque puncta $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$, $\mathfrak{d}$, $\mathfrak{e}$, in quibus tangens per rectas dictas secatur, notentur, atque ad distantiis punctorum $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, ... ab $\mathfrak{A}$ distantias æquales, ab $\mathfrak{A}$ dextram lævamque in $\mathfrak{DE}$ ad $\mathfrak{AB}$ perpendicularem transferantur (Fig. 272.), atque ducantur ex $\mathfrak{B}$ rectæ $\mathfrak{Ba}$, $\mathfrak{Bb}$, ... $\mathfrak{Ba}'$, $\mathfrak{Bb}'$, ...; erunt hæ lineæ horariæ, si $\mathfrak{BA}$ in meridiana fuerit, et $\triangle\, \mathfrak{ABC}$ elevetur ad planum horologii horizontale perpendiculariter. Erit nempe $\mathfrak{BC}$ axi terræ parallela, et reliqua præterquam quod (ex pag. 305) pateant, inde etiam perspiciuntur; quod si planum per $\mathfrak{CA}$ ponatur perpendiculariter ad planum $\mathfrak{ABC}$ (quod ad planum horologii perpendiculariter erigatur), erit illud plano æquatoris parallelum; itaque producto axe $\mathfrak{BC}$ (ad planum hoc perpendiculari), erunt puncta $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$, ..., 𝔞', 𝔟', 𝔠', . . . umbræ horariæ puncti ℭ, adeoque rectæ, e centro ad puncta hæc ductæ, lineæ horariæ erunt.

Patet vero axem 𝔅ℭ ita ponendum esse, ut ℭ septemtrionem respiciat; atque ad 𝔄 numerum XII, XI ad 𝔞, X ad 𝔟, . . ., I ad 𝔞', II ad 𝔟', . . . scribendum esse.

Scholion 1. Est autem hic a altitudo æquatoris; et producto axe 𝔅ℭ perpendiculari ad planum dictum ipsi 𝔄ℭ ad 𝔄ℭ𝔅 perpendiculariter impositum, fit in hoc plano horologium æquinoctiale, in quo anguli horarii omnes æquales sunt.

Atque si planum hoc circa 𝔅 pro quovis loco ad angulum a altitudini æquatoris æqualem elevetur: stilus ex ℭ ad planum hoc (tanquam planum æquatori parallelum) perpendicularis, erit axi terræ parallelus, et horas pro iisdem lineis horariis rite monstrabit. Si igitur plurium locorum altitudines æquatoris annotatæ fuerint, et ope arcus cuiuspiam elevatio ista plani horologii perfici, atque 𝔅𝔄 ope acus magneticæ adnexæ (data declinatione eius), in meridianum locari queat: erit horologium quoad loca annotata *aequinoctiale universale.*

Et pariter quoad loca quotvis horologium horizontale universale construi potest. Nempe ut dictum (pag. 319) est, si e puncto quovis axeos ex. gr. ex 𝔭 demittatur perpendicularis 𝔭𝔭' ad meridianam: stilus 𝔭𝔭' index esse poterit, si nonnisi extremitas umbræ eius ad lineam horariam appellens spectetur. Si igitur pro variis altitudinibus poli, puncta horaria umbræ puncti 𝔭 construantur, et puncta quævis eidem horæ numero respondentia lineis connectantur, adscriptis ad extremitates lineæ numeris horariis, atque etiam quævis puncta omnium diei horarum eidem altitudini poli respondentium lineis combinentur, adscripta altitudine poli iis respondente; et simul index ita adaptatus fuerit, ut ad quamvis illarum poli altitudinum, pro quibus puncta dicta constructa sunt, elevari possit; e dictis patet, horas rite monstrari.

Imo horologium solare etiam splendente luna inservire potest, si ætas lunæ nota fuerit: nempe dum luna in coniunctione est, si pro sole exstincto luna splendere posset, index horas sine errore sensibili monstraret; quum vero luna quovis die orientem versus progrediens circiter tribus horæ quadrantibus tardius in meridianum appellat, patet ætatem lunæ per hoc multiplicari debere; et tempus istud numero horæ per indicem splendente luna monstratæ addendum esse. Possunt hinc etiam lunaria horologia construi, quæ sine isto calculo horam ostendant; sed ætatem lunæ semper notam esse oportet.

Solent etiam annuli portatiles varii construi, in quibus non umbra puncti, sed lux per foraminulum inmissa monstrat horam: unum tantum commemorasse sufficiat, quum e dictis varia excogitare facile sit.

Sit $\mathfrak{Pp}$ axis (Fig. 273.), et annulus $\mathfrak{Pap}$ sit in meridiano, et $\mathfrak{aAP} = 90°$ (gradibus annotatis), atque annulus $\mathfrak{aqe}$ ita sit comparatus, ut dum hora quæritur, perpendicularis ad priorem fieri possit; si totum ex $\mathfrak{A}$ suspendatur (quod ope cursoris rite instituti, ad quotumvis gradum ab $\mathfrak{a}$ fieri potest): erit $\mathfrak{Af}$ in verticali, atque arcus $\mathfrak{aA}$, distantia puncti zenith ab æquatore $\mathfrak{aqe}$, altitudini poli æqualis. Si iam sol in æquatore versetur, et ex. gr. in $\mathfrak{a}$ sit, foramen per centrum $\mathfrak{f}$ (in axe $\mathfrak{Pp}$ circa extremitates $\mathfrak{P}$ et $\mathfrak{p}$ vertibilis) radium solis ad $\mathfrak{e}$ transmittet; et annulo æquatorem repræsentante in viginti quatuor partes æquales (a puncto meridiei incipiendo) diviso, horæ rite monstrabuntur; si vero sol ex. gr. in $\mathfrak{S}$ veniat, adeoque declinatio eius borealis fiat $\mathfrak{as}$, quærendum est illud axeos punctum $\mathfrak{i}$, ubi per foramen transmissus solis radius, in eodem circulo horario versantis, eodem ut prius, ex. gr. in $\mathfrak{e}$ cadat. Hoc autem facile fit, nam propter solis distantiam, rectæ $\mathfrak{fS}$ et $\mathfrak{eS}$ ad sensum parallelæ sunt, adeoque $\wedge \mathfrak{fei}$ æqualis angulo declinationis solis est; atque hinc $\mathfrak{fi}$ est tangens anguli declinationis solis pro radio $\mathfrak{fe}$, quia $\wedge \mathfrak{efi} = R$ est.

Ita puncta pro declinatione solis, cuivis signo, in quo versatur, respondente tale punctum reperiri, atque cuivis signa respondentia adscribi possunt; imo ope cursoris, in quo foramen est, in crena laminæ circa $\mathfrak{Pp}$ ad solem vertibilis, potest foramen ad puncta prius dicta duci, ut tempore solis in respondente signo existentis, radius per foramen transmissus in punctum æquatoris $\mathfrak{e}$ cadat; patetque pro sole in eodem circulo parallelo versante, adeoque declinatione plane eadem, æquatore in viginti quatuor partes æquales diviso, idem de reliquis horis valere;

nempe $\mathfrak{e}$ meridiem monstraret, si tam $\mathfrak{PAp}$ meridianum, quam $\mathfrak{aqe}$ æquatorem repræsentans pellucidi essent.

Scholion 2. Quamvis ad qualevis planum, sive parallelum axi fuerit sive non, dictum sit, quomodo horologium construi queat: attamen haud supervacuum est modum referre, quo ad qualemvis superficiem practice horologium construi queat. Axem ante omnia necesse est, in aliquo horologio, ex. gr. horizontali, figere, atque horologio isto (debito situ) admoto, per prolongationem axeos, situm stili in horologio construendo procurare. Atque tum sufficit quocunque die, iuxta aliquod horologium solare rite factum, umbras quavis hora notare: nempe hic stilus axis terræ est (non ut pag. 318), atque lineæ horariæ, sectiones plani per axem eundem et solem determinati, cum superficie horologii sunt.

Et pariter patet, quod si horologium rite paratum horologio construendo admoveatur, et axeos continuatio secet ex. gr. in $\mathfrak{q}$ planum horologii construendi, atque per lineas horarias prioris secetur hoc in $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, . . . : fiant horologii exstruendi lineæ horariæ $\mathfrak{qa}$, $\mathfrak{qb}$, . . .

III. DE CHRONOLOGIA.

Tractat hæc *de modo subdivisionis temporis in vita civili.* Inserviunt autem præcipue duo luminaria: nempe *sol*, quo tanquam indice monstrat manus æterni in circulo cœlestis horologii duodecim mensium signa adscripta; et *luna* noctu huius vices gerens.

Accipiatur vero tempus absolutum in anni circulo (quasi æternitatis annulo) post revolutiones quotvis semper versus futurum progrediens. *Locus relativus* temporis, sub quo aliquid evenit, autem in isto fluentis temporis alveo est distantia temporis a *certo puncto fixo*, (Fig. 274.) stellula insignito, sub quo phænomenon aliquod in cœlis aut terris contigit, a quo quasi principio (ob certas rationes) fluxum temporis considerare libet. Et si nonnisi locus relativus in alveo dicto consideretur, atque tota peripheria P dicatur, et lineæ versus futurum positive, retrorsum autem negative accipiantur: (pro n integro) prodit idem, sive $nP+s$ sive $s-nP$, et sive $-s-nP$ sive $-s+nP$ fuerit.

Subdividitur autem *tempus in vita* civili in *annos solares*, quorum centum efficiunt *seculum*; annusque dividitur in *menses* et *hebdomadas*: hebdomadæ in dies naturales, qui nomina ab Astrologia (gentilium) sortiuntur, quæ Astronomiam tanquam soror adulterina haud pridem deseruit; dicunturque lingua ecclesiastica *dies Dominica, feria prima, feria secunda &c.* Cuivis horæ nempe planetarum systematis Ptolemaici, uti se invicem in eo excipiunt, aliquam præsidere crediderunt; qui quum numero septem sint, per 24 horas ter decurrendo, horam diei sequentis primam quartus incipiebat; et totum diem ab hoc denominaverunt. *Ordo Ptolemaicus* vero hoc versu retinetur:

Post SIM SVM sequitur, pallida Luna subest;

nempe *SIM* denotat *Saturnum*, *Iovem* et *Martem*, *SVM* vero *Solem Venerem* et *Mercurium*. Idem ordo regit vulgi creduli annos. Notandum autem *feriam primam* magis *diem Dominicam* et *feriam septimam* diem *Sabbati* dici.

Dies dividuntur in horas, quæ vario modo a variis gentibus numerantur; imo et apud nos aliter in vita civili, et aliter ab Astronomis numerantur: nempe hi a meridie incipiendo viginti quatuor horas numerant usque ad meridiem proximam, et quidem ita ut prima duodecima primæ Ianuarii in vita civili sit Astronomis vicesima quarta tricesimæ primæ Decembris.

Dividuntur porro dies in *festos* et *communes*; festa item dividuntur in *fixa* seu *immobilia*, quæ semper in dies eorundem mensium eosdem (quoad numerum diei in mense) cadunt; uti ex. gr. *Festum Nativitatis Christi* vicesimæ quintæ Decembris, *Epiphania* sextæ Ianuarii &c affixa manent. *Festa mobilia* autem omnia a *Paschate* dependent; *Pentecoste* a Paschatis prima die (inclusive) quinquagesima die incipit, adeoque quia (ut dicetur) Pascha semper die Solis incipit, et primus dies Pentecostes in diem Solis cadit; post septimanam Pentecostes sequentem *Dominicae Trinitatis* numerantur, usque ad quatuor Dominicas *Adventus* Festum Nativitatis Christi præcedentes. Pascha autem præceditur sex *Septimanis*

Ieiuniorum, et antea dies Mercurii proximus *dies Cinerum* est; atque inde usque ad *Epiphaniam* (nempe sextam Ianuarii) *Bacchanalia* durant.

Distinguuntur præterea dies anni per literas; nempe cuiusvis mensis dies n-tus (pro quovis n) litera certa semper eadem insignitur (Fig. 275.); cuiusvis anni dies prima, adeoque prima Ianuarii litera A gaudet, secundæ litera B datur, et septem literæ A, B, C, D, E, F, G in circulum positæ, uti se invicem in gyrum porro eundo excipiunt, diebus se invicem excipientibus tribuuntur, ea cum restrictione: quod in anno bissextili (de quo paulo inferius) vicesima tertia et vicesima quarta Februarii litera eadem gaudeant, quasi unus dies esset; ut *litera mensis cuiusvis, diei quotaevis maneat.* Litera vero, quæ in anno quopiam diei *Dominicae* respondet, *litera Dominicalis* audit. Atque hinc methodus prodibit cuiusvis anni mensis cuiusvis quotamvis diem, qualisnam septimanæ dies fuerit, atque literam Dominicalem anni cuiusvis, tam Iulianam quam Gregorianam, cyclosque earum reperiendi.

Quum vero in vita civili nec anni principium, nec alii termini iuxta calculum astronomicum per minuta secunda applicari possit, *regula* est: ut *fractiones ubique neglectae, dum integrum effecerint, tunc addantur*; atque hoc modo, aliisque artificiis adhibitis, *omnia ita compensentur, ut in alveo fluentis temporis* (pag. 326) *dicto, tam punctum fixum* *, *quam alia necessaria in perpetuum maneant, ita ut quam minimum oscillando omnia locum tueantur.*

Determinatum vero pro puncto hoc fixo tempus illud est, quo *Concilium primum* statim dicendum celebratum est.

Itaque:

1. De anni quantitate, atque modo, quo *principium anni in puncto* * *fixum maneat.*

2. De characteribus dierum chronologicis; quomodo nempe septimanæ dies literas mutent, et quibus cyclis idem redeat.

3. Quum omnia *Festa mobilia* a *Paschate* dependeant, modus, quo *Pascha* tam *Iulianum* quam *Gregorianum* supputari in secula possit, imo etiam *cyclus Paschatum* exponetur.

Fundamentum supputationis Paschatis est *Decretum Concilii primi*

Nicaeae anno Christi 325 celebrati, cuius (etsi non verbis iisdem) sensus sequens est: *Paschatis dies prima celebretur die Dominica prima, post plenilunium* aut *in diem aequinoctii* aut *post eum proxime cadens.* At æquinoctium vernale tunc vicesima prima Martii fuit, et huic affixum putabatur. Res itaque eo redit, ut *Pascha celebretur Dominica prima, post plenilunium post vicesimam Martii primum.*

De modo plenilunia computandi etiam statutum est: de quo inferius.

Ratio autem huius Decreti est duplex: prima ut a Christianis tardius celebretur Pascha, quam a Iudæis in ipso plenilunio vernali celebrantibus, secundo quod tamen et Christianis plenilunio paschali, quod et lugubri *magnaque die* simul cum Paschate Iudæorum imminebat, proxima die Dominica celebrare Pascha conveniat. Prætereaque dum hominum summus amator, ab iis cruci affixus, inter cruentorum vulnerum dolores, *Patrem* suum rogando, ut irridentibus ob inscitiam eorum ignosceret, in extremas umbras mergebatur, conticentibus angelorum choris, in æternitatis quasi interruptæ silentio, nonnisi inferni undarum murmur erat: et quum *Sanctissimus* in cruce expalluit, mœsta cœli oculum caligo obduxit, lacryma paterna quasi delapsa. Neque eclipsis hæc solis astronomica fuit, quum luna prope ad oppositionem cum sole erat: et huius quoque memoriam conservare libuit.

§. 1.

Annus Romuleus erat decem mensium solarium, a *Martio* incipiens, tot diebus post Decembrem additis (teste *Macrobio*) donec cœlum terraque ad statum priorem redierit. Numa duodecim mensibus lunaribus (de quibus inferius) dies intercalandos Sacerdotibus commisit; qui partim propter solutiones certis terminis præstandas a fœneratoribus corrupti, partim ex ignorantia, sexaginta septem dies neglexerant: quos *Iulius Caesar* (a quo *Calendarium Iulianum* nomen gerit), suadente *Sosigene* Astronomo, anno suæ reformationis addidit, nempe quadragesimo quinto ante Christum, qui e 445 diebus compositus *magnus annus confusionis* dictus est. Statuitque præterea Cæsar suasu *Sosigenis*, annum sola-rem 365 dierum et sex horarum æstimantis, ut hæ sex horæ quovis quadriennio unum diem efficientes, (in tribus annis neglectæ), adderentur post vicesimam tertiam Februarii. Clarum est, quod posita illa anni solaris magnitudine, effluxo primo anno, sequentis prima Ianuarii sex horis citius dicatur, adeoque effluxis quatuor annis, quinti initium viginti quatuor horis maturius diceretur, nisi dies adhuc expectaretur. Potuisset quidem tum December triginta duos dies habere; sed ob sacra certa peragenda libuit diem hanc post vicesimam tertiam Februarii ponere, unde etiam *dies* hæc (e *Calendario Romano*) *bissextilis*, atque inde et *annus bissextilis* vocatur.

At quum *Sosigenes* annum undecim minutis (omissis secundis) iusto maiorem acceperit: quibusvis quatuor annis Iuliani 4.11 minutis iusto serius incipiunt annum, quod effluxis 131 annis circiter diem efficit; adeoque 131 anni toties decurrere possunt, ut Iuliani primam Ianuarii media æstate dicant, et demum prima Ianuarii Iuliana quoque ad punctum fixum * redeat.

Error iste ab anno 325 usque ad annum 1600 computatus a *Gregorio Pontifice* (suasu Astronomi *Aloysii Lilii*) ad decem dies (aliquot tantum horarum errore) exsurrexerat; adeoque tum prima Ianuarii, et etiam quarta Octobris (*dies reformationis Calendarii*) decem diebus iusto serius dicebatur; quapropter *Gregorius* quartam Octobris decimam quartam esse iussit, nempe ab anno 325 recte numerando, decima quarta fuisset; at iam æquinoctium vernale, quod anno 325 vicesima prima Martii erat, anno 1582 in undecimam cecidit.

Porro ne error iste rediret, cavit statuendo: ut post annum 1600, quibusvis quatuor seculis, anni priora tria secula terminantes, qui alioquin bissextiles essent, communes maneant, et nonnisi annus quartum seculum terminans bissextilis maneat, quosvis ceteros quartos annos bissextiles retinendo. Nimirum $400 . 11' = 3^d\, 1^h\, 20'$; et ex hoc tres dies, quibus posita anni Iuliani falsa quantitate nimis multum expectaretur ad incipiendum seculum quintum, omittuntur reformatione Gregoriana; una hora et viginti minuta vero, dum in diem excrescent, a posteris addentur.

Sunt autem hoc pacto 1700, 1800, 1900 communes, 2000 bissextilis:

atque quivis annus Christi n-tus Iulianus bissextilis est, si $\frac{n}{4}$ quotum integrum sine residuo det; nempe et reformatione Iuliana usque ad Christum (excluso reformationis anno) $44 = 4 \cdot 11$ defluxerunt, adeoque et is, ad cuius finem Christus natus est, bissextilis fuit; iuxta reformationem Gregorianam quoque pariter annus n dictus, bissextilis sub eadem conditione est, si non sit seculum tale m-tum terminans, ut m per 4 exacte dividi nequeat, id est, ut si n seculum m-tum terminet, m quoque uti n per 4 exacte dividi queat.

Numerus dierum, quo Iuliani serius incipiunt annum, vocatur *aequatio solis*, quæ dicatur s; estque (pro N denotante numerum seculorum ab Anno nativitatis Christi effluxorum, omisso quod supra integrum seculorum numerum est), $s = 1 + \frac{3(N-3)}{4}$ sine residuo.

Nam decem dies, quibus annus 1600 nimis sero dictus fuisset, ita impertiri inter priora secula possunt, ut seculo tertio attribuatur primus, et quorumvis sequentium quatuor seculorum tribus posterioribus tres dies dentur, nempe cuivis trium unus; ut respondeant

seculis	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
dies falsi	1	0	1	1	1	0	1	1	1	0	1	1	1	0

uti postea seculis	17.	18	19	20	21	22	23	24	...
dies falso additi	1	1	1	0	1	1	1	0	...

Si igitur numerus seculi sit N, erit summa dierum a Iulianis additorum 1 (seculo tertio competens), addito eo, quod seculis $N-3$ appertinet. Si $N-3$ per 4 exacte dividi queat, prodibit pro $N-3$ seculis $\frac{3(N-3)}{4}$; at si 1 maneat, prodit $\frac{3}{4}$ præter integrum, quod omittendum erit, quia tum seculum unum supra multiplum quatuor seculorum dictorum est, et huic inferius 0 adscriptum est, adeoque in hoc seculo s non augetur. Si 2 maneat, tum $\frac{3(N-3)}{4}$ dabit $\frac{6}{4} = 1 + \frac{1}{2}$, atque seculo postremo unus dies conveniet, fractione omissa. Si 3 manserit ex $\frac{N-3}{4}$, tum $\frac{3(N-3)}{4}$ $\left(\text{supra quotum integrum ex } \frac{N-3}{4}\right)$ dabit $\frac{9}{4}$, atque usque ad seculum tertium post seculorum quaternarium præcedentem duo dies accedent, quod per $\frac{9}{4}$ $\left(\text{omisso } \frac{1}{4}\right)$ exhibetur.

§. 2.

Quaelibet dies mensis cuiusvis quovis anno, tam in Calendario Iuliano quam Gregoriano, litera eadem perpetua gaudet; nec anno bissextili hoc mutatur, quia tum vicesimæ tertiæ et vicesimæ quartæ Februarii (nempe diei additæ) litera eadem relicta est. Atque hinc, quum (pag. 328) prima Ianuarii literam A habeat, atque septem literæ A, B, C, D, E, F, G in gyrum eundo usque ad finem anni cuiusvis semet excipiant: cuiusvis mensis quotævis diei litera reperitur. Ex. gr. si quæratur tertiæ Martii litera: addantur Ianuarii dies 31, Februarii dies 28 (ob rationem plane dictam non 29, etsi annus bissextilis fuerit), demum Martii dies 3; atque dividatur summa per 7, et si residuum m sit, erit ab A antrorsum numerando m-ta litera quæsita; nempe $31+28+3=62$, et $\frac{62}{7}$ dat residuum 6, atque litera ab A antrorsum in circulo est F litera tertiæ Martii. Nempe quoties in numero dierum a prima Ianuarii (inclusive) continetur 7, toties decurrunt literæ ab A usque ad G (inclusive), et residui dies item ab A incipiendo literas nanciscuntur.

Si vero quæratur anno Christi n-to certa dies ex. gr. tertia Martii, qualisnam dies septimanæ fuerit: facile respondetur, si litera Dominicalis illius anni nota sit; nempe si ex. gr. hæc G fuerit, F dies *Sabbati* erit.

At quæritur *regula literam Dominicalem* anni cuiusvis n-ti *reperiendi.*

§. 3.

Annus communis constat e 365 diebus, adeoque 52 septimanis et uno die. Hinc quocunque diei nomine incipiat annus communis, eodem desinet; nempe septem nomina quinquagies et bis decurrent, atque item primum nomen redibit die annum terminante; ex. gr. si prima Ianuarii dies *Iovis* sit, annus idem, si communis sit, die *Iovis* terminabitur; at si bissextilis fuerit, dies ultimus *Veneris* erit; nam tum annus ex $7 . 52 + 2$ diebus constat, atque die addito nonnisi literam præcedentis vicesimæ tertiæ Februarii retinente nomina dierum septimanæ nullo discrimine fluunt.

Hinc autem sequitur *literam Dominicalem post quemvis annum communem una litera recedere, post bissextilem autem duabus.* Nempe si *litera Dominicalis* in anno communi fuerit *G*, sit ex. gr. prima Ianuarii dies *Lunae*; hæc litera *A* gaudet, sequentis anni prima dies pariter *A*, sed dies *Martis* erit.

Si igitur duo circuli congruentes c et c' fuerint (Fig. 276.), et inferiori c adscribantur nomina dierum septimanæ, superiori c' vero literæ illis certo anno appertinentes, atque concipiatur inferior c moveri retrorsum sub superiore c': die *Lunae* uno regrediente, dies *Martis*, quæ sub *B* erat, veniet sub *A*, atque simul dies *Dominica* quoque in circulo sub literam retrorsum sequentem veniet.

Si vero annus bissextilis sit, terminabitur annus, si ex. gr. die *Lunae* inceperit, die *Martis*, et sequens die *Mercurii* incipiet: itaque circulo c retrorsum sub c' moto, dies *Mercurii*, qui sub *C* erat, veniet sub *A*, adeoque dies *Dominica* sub tertiam literam retrorsum movebitur, nempe duabus recedet.

Sed anno bissextili et post vicesimam tertiam Februarii litera retrorsum sequens fiet *Dominicalis*: nam vicesima tertia (et vicesima quarta quoque in anno bissextili) litera *E* gaudet; at si ex. gr. anno bissextili vicesima tertia Februarii fuerit dies *Veneris*, vicesima quarta pariter *E*, dies *Sabbati* erit; itaque pariter concipi circulus c retrorsum moveri potest, ut *Sabbatum* sub *E* veniat; adeoque *dies Dominica*, quæ ante vicesimam tertiam Februarii *G* erat, post vicesimam tertiam *F* fiet; competentque anno illi duæ Dominicales *FG*, quarum prior post vicesimam tertiam Februarii accipienda est.

§. 4.

Dies reformationis Gregorianae est anni 1582 quarta Octobris, quæ semper litera *D* gaudet; fuitque tum *litera Dominicalis G*; adeoque dies *Iovis* erat: at vero (ut dictum est) diem eandem decimam quartam Octobris esse iussit, atque ut quotavis mensis, cuiuscunque literam retineat, progrediendo a quarta ex *D* usque ad decimam quartam, quasi dies illi reipsa præteriissent, dies eadem literam *G* nacta est; uti hoc schema ostendit.

4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
D	*E*	*F*	*G*	*A*	*B*	*C*	*D*	*E*	*F*	*G*

adeoque *litera Dominicalis* in *C* mutata est; nempe dies Iovis literam *G* acquisivit; sed præterea et annis secularibus Gregorio non bissextilibus quoque mutationem induci dicetur.

§. 5.

Cyclus Solis Iulianus dicitur numerus annorum, quibus effluxis, literæ diei solis eodem plane ordine sequuntur. Quid *cyclus solis Gregorianus* sit, pariter patet.

Cyclus solis Iulianus est 28 annorum; atque primus cyclus 9 annis ante Christum incipere ponitur, adeoque anno bissextili; attribuuntur vero huic literæ Dominicales *FG*. Unde e dictis liquet, quovis quadriennio quinque literas decurrere retrorsum in circulo, nempe anno illo fuit *FG*, postea *E*, tum *D*, dein *C*, et quinto ante Christum item bissextili fuit *AB* &c. Hinc autem septem quadriennis $7 . 5$ literæ decurrent retrorsum; quod tantum est, ac si septem literæ quinquies decurrerent; sequetur itaque retrorsum plane ea quæ prius erat, nempe *G*, cui *F* addi debet, quia annus undetricesimus pariter bissextilis est, quum annus inter duodetriginta primus bissextilis fuerit et septem quadrienniis defluxis, cum anno undetricesimo quadriennium novum incipiat.

Cyclus solis Gregorianus autem est octo seculorum: namque anno reformationis 1582 facta est C litera Dominicalis, unde pro anno bissextili 1600 fit litera Dominicalis BA; atque hinc quovis quadriennio ab anno 1600 (inclusive) usque ad annum 2400 (exclusive) id est 2399 (inclusive), defluunt retrorsum eundo quinque literæ, exceptis quadrieniis ultimis seculorum 17, 18, 19, 21, 22, 23, ubi propter annum iuxta Gregorium haud bissextilem, annus seculi ultimus nonnisi una litera *Dominicali* gaudet: nempe per seculum 17 intelligendo tempus effluxum ab initio anni 1700 usque ad finem anni 1799 (inclusive), ita cetera intelligantur. Decurrent igitur ab anno 1600 (inclusive), usque ad annum 2399 (inclusive) 8.25 quadriennia, adeoque defluunt quinque literæ a B inclusive incipiendo; et semper retrorsum in circulo eundo, 8.25 vicibus, nonnisi sex literis propter sex secula dicta subtrahendis. Est vero

$$8.25.5-6=994=142.7,$$

itaque septem literæ 142-ies decurrent a B (inclusive) incipiendo, et retrorsum eundo in circulo; adeoque annus 2399 litera C gaudebit, et quidem sola, quum bissextilis non sit; itaque anni 2400 litera Dominicalis ante vicesimam tertiam Februarii B erit, postea vero quum hic annus bissextilis sit, litera Dominicalis A erit, itaque plane uti anno 1600. Et patet casum eundem redire, a 2400 (inclusive) usque ad 3200 (exclusive) et ita porro.

§. 6.

Litera Dominicalis Iuliana pro anno Christi n-to est

$$10-\text{res.}\,\frac{n+\frac{n}{4}\text{ sine res.}}{7}$$

in circulo ab A antrorsum numerando: id est n per quatuor diviso, tantum pars quoti integra accipitur, at post divisionem per septem nonnisi residuum accipiendum est.

Nam cyclus solis incipit novem ante Christum natum annis, ita ut ab initio usque ad nativitatem Christi novem anni effluxerint; fuitque annus is in cyclo primus, bissextilis, literis *Dominicalibus FG* gaudens, adeoque et annus ultimus Veteris Testamenti bissextilis erat; et quadriennium novum cum nativitate Christi incepit, fuitque (Fig. 277.) anno Novi Testamenti primo *litera Dominicalis B*. Consideretur anno bissextili semper *litera Dominicalis* parti anni posteriori respondens (*quod et quoad formulam* tenendum est) et numeretur prius a B incipiendo (inclusive) in circulo retrorsum eundo (Fig. 278.) usque ad *literam Dominicalem* quæsitam (item inclusive), et si duæ fuerint in anno, posteriorem intelligendo. Erit anno postremo quadriennii primi a nativitate Christi incipiendo litera quæsita E, itaque $(1 \cdot 4 + 1)$-ta a B retrorsum; atque si anno m-ti quadriennii postremo sit litera Dominicalis $(m \cdot 4 + m)$-ta, erit quadriennii $(m+1)$-ti anno postremo *litera Dominicalis* item a B incipiendo retrorsum $(4m + m + 4 + 1)$-ta; id est $[(m+1)4 + m + 1]$-ta. Si igitur annus Christi $n = \mu \cdot 4 + \nu$ (pro μ, ν integris, et $\nu < 4$), erit *litera Dominicalis* anno n respondens $(4\mu + \nu + \mu)$-ta. Est autem

$$4\mu + \nu + \mu = n + \frac{n}{4} \text{ sine residuo,}$$

nam

$$n = 4\mu + \nu, \quad \text{et} \quad \mu = \frac{n - \nu}{4}.$$

Est vero quævis litera q-ta (Fig. 279.) a B retrorsum, $(10 - q)$-ta ab A antrorsum; nam sit $q = q' \cdot 7 + q''$; per quodvis multiplum ipsius 7 reditur ad literam C ante B, unde item a B incipiendo numeratis q'' literis, remanent adhuc $7 - q''$ literæ usque ad B (exclusive); itaque si ab A incipiendo antrorsum numeretur, erit litera, quæ a B incipiendo retrorsum q''-ta erat, nunc ab A incipiendo antrorsum $(7 - q'' + 3)$-ta, id est $10 - q'')$-ta, quia illis $7 - q''$ literis, quæ remanserant, nunc addi B et *litera Dominicalis* atque A debet. Sit ex. gr. *litera Dominicalis F*, erit hæc a B retrorsum quarta, manebunt literæ $7 - 4 = 3$, et eadem ab A antrorsum $(10 - 4)$-ta erit.

Quod vero divisione per septem facta, nonnisi residuum accipi debeat, inde patet, quod ab A incipiendo, quotiescunque defluant septem literæ, semper in G terminetur, atque item ex A porro antrorsum numeretur. Patet etiam hinc, formulam per

$$\text{res.}\ \frac{10 - \text{res.}\ \dfrac{n + \dfrac{n}{4}\ \text{sine res.}}{7}}{7}$$

exprimi posse, et si hoc residuum o sit, literam *Dominicalem* G esse.

Litera Dominicalis Gregoriana autem prodit ex Iuliana; est nempe

$$\text{res.}\ \frac{4 + \dfrac{3(N-3)}{4}\ \text{sine res.} - \text{res.}\ \dfrac{n + \dfrac{n}{4}\ \text{sine res.}}{7}}{7}$$

(denotante N seculi numerum omisso excessu, qui supra multiplum centenarii est). Namque anno 1582 *litera Dominicalis* ex G ad quartam nempe literam C (adeoque tribus) prosiliit; itaque nisi alia mutatio adveniret, a *litera Dominicali* Iuliana, semper tantum tres adhuc antrorsum numerari deberent. At vero quovis tali anno seculari, qui e bissextili communis fit, *litera Dominicalis* non duabus literis sed una tantum recedit; ex. gr. si BC esset, tantum C manebit, adeoque dum hoc primo evenit anno 1700, *litera Dominicalis Gregoriana* præterquam quod tribus literis prosilierat, adhuc una prosiliet, nempe *litera Dominicalis* partis anni posterioris non recedet in B, sed in C (adeoque una litera porro) manebit. Fietque hoc pro quovis tali anno; itaque ipsi

$$10 - \text{res.}\ \frac{n + \dfrac{n}{4}\ \text{sine res.}}{7},$$

addi debet 3, et præterea incrementum (pag. 331) ipsius s post annum 1600, nempe

$$1 + \frac{3(N-3)}{4}\ \text{sine res.} - 10$$

addendum erit. Est autem

$$10 - \text{res.}\,\frac{\dfrac{n + \dfrac{n}{4}\text{ sine res.}}{}}{7} + \left(1 + \frac{3(N-3)}{4}\text{ sine res.} - 10\right) + 3$$

$$= 4 + \frac{3(N-3)}{4}\text{ sine res.} - \text{res.}\,\frac{n + \dfrac{n}{4}\text{ sine res.}}{7}.$$

§. 7.

Superius (pag. 329) dictum est etiam regulam, qua *plenilunium*, quod in Decreto *Concilii Nicaeni Pascha* determinat, adeoque *Paschale* dicitur, computandum sit, determinatam esse. Nimirum nec æquinoctium vernale, nec plenilunium, quod in hoc aut postea proxime cadit, astronomice computatur: sed singulari sagacitate est certus *computus ecclesiasticus* stabilitus, quo iuxta regulam superiorem (pag. 328) fractionibus, quæ in usu civili incommodæ essent, neglectis (donec in integrum excrescant), variis compensationibus, certisque oscillationibus, (quæ aliquando etiam duos dies efficere possunt), ad ingentem tamen annorum seriem, tam novilunia quam plenilunia *Paschalia* exhibeantur.

Fundamento quidem et in Calendario Gregoriano computus Iulianus inservit: attamen erroribus huius certo modo dicendo correctis. Computatoque novilunio tam in Calendario Iuliano, quam in Gregoriano, in illo prodeunt *novilunia Iuliana*, in hoc *Gregoriana* per totum annum; atque in utroque accipitur plenilunium decima quarta die a novilunio (id est dum ætas lunæ quatuor decim dierum est); in illo *plenilunium Iulianum*, in hoc *Gregorianum*.

Intelligitur autem per *novilunium* tempus coniunctionis lunæ cum sole, et tempus ab una coniunctione ad proximam vocatur *mensis Synodicus*; estque hoc numero medio 29 dierum 12 horarum 44 minutorum. *Mensis illuminationis* autem est ab apparitione novilunii ad proximam. Plures Gentes nocturnam istam lampadem sequendo annos numerabant. Excessus 12 mensium solarium, id est anni solaris, super 12 menses synodicos lunares (numero medio) est 10 dierum 21 horarum 11 minutorum. Si igitur in initio primæ Ianuarii novilunium fuerit, erit ad finem anni lunæ ætas 10 dierum 21 horarum 11 minutorum. Dicitur ætas lunæ in anni cuiusdam initio *epacta anni* illius. Estque *epacta* 1. *astronomica*, eaque *vera* aut *media*, 2. *Iuliana* et *Gregoriana*; de quibus iam dicendum venit.

Si cursus lunæ numerum medium dictum sequeretur perpetuo, tum ex unico dato facile computarentur anni cuiusvis novilunia: at nullum corpus cœleste, quamvis vicinum exiguumque sit, Astronomos magis vexat: ratio huius est perturbatio virium attractivarum solis, planetarumque (maiorum, ex. gr. Iovis) propius venientium, adeo ut nullus adhucdum cyclus lunæ absolutus notus sit, nempe tempus, quo defluxo novilunia, plenilunia, eclipsesque, plane ita se invicem excipiant.

Cyclus 19 *annorum* quidem iam pridem adhibitus est: nam si ex. gr. prima Ianuarii novilunium fuerit, post 19 annos prima Ianuarii item novilunium erit, sed circiter $\frac{3}{2}$ horis maturius, si nimirum anni Iuliani accipiantur. Namque tempore 19 annorum eveniunt 235 lunationes; et si tempus dictum medium astronomicum mensis synodici per 235 multiplicetur, prodit 19 annis Iulianis minus.

Sunt tamen plures cycli maiores computati, quo maiores, eo exactiores.

Epacta Iuliana anni β est ætas lunæ in initio anni β. *Epacta Gregoriana* est ætas lunæ in principio anni Gregoriani.

Dicatur illa e (in sequentibus), hæc autem E.

Dantur præterea etiam *epactae menstruae*: nempe numerus dierum epactæ anni addendus, ut ætas lunæ in initio mensis M prodeat, dicitur *epacta mensis* M.

Si vero *epacta annua* (sive Iuliana sive Gregoriana) nomine generali $\mathfrak{E}$ dicatur; regula novilunii determinandi sequens posita est: ut si $\mathfrak{E}+m=30$ sit, novilunium primum in anno sit $(m+1)$-ta Ianuarii, et quidem Iulianum vel Gregorianum prouti $\mathfrak{E}$ est; abinde vero pro $e<28$, ita pro $E<25$, accipiantur 29 dies usque ad novilunium proximum, et postea quoque a novilunio ad novilunium usque ad finem anni semper hi numeri nempe 30 et 29 alternent, nempe errore circiter dimidii diei, dum pro una lunatione 30 dies accipiuntur, recompensato per id, quod proxima lunatio uno minor accipiatur; pro aliis casibus autem (nempe dum $e = 28$, aut $e = 0$ adeoque non < 28, aut E non < 25, adeoque ipsorum 0, 29, 28, 27, 26, 25 alicui æqualis est) a primo anni novilunio, in utroque Calendario, numeri 30 et 29 alternent, sed a 30, non a 29 incipiendo. Accipitur autem in hoc computo dierum Februarii numerus 28, anno bissextili quoque.

At vero hoc pacto epactæ Gregorianæ 25 et 24, novilunium in aliquot mensibus ad eandem diem indicant: ex. gr. si $E = 25$ sit, cadet novilunium primum in $(30 - 25 + 1)$-tam Ianuarii, atque pro lunatione sequente 30 diebus acceptis, a sexta Ianuarii inclusive, sequens dies novilunii, quinta Februarii est; si vero $E = 24$, cadet novilunium primum in $(30 - 24 + 1)$-tam id est septimam Ianuarii, et inde inclusive iam 29 dies pro lunatione accipiendo, dies sequens novilunii pariter quinta Februarii erit. Patebit autem inferius *epactarum Gregorianarum cyclum* decemnovennalem numeris aureis respondentium, iuxta secula certa lege variari: atque evenire, ut in *cyclo seculari*, (nempe cyclus per totum seculum manet), tam epacta Gregoriana 24, quam 25 adsit; tum vero ne illa inconvenientia fiat, ut novilunium ante finem cycli decemnovennalis in eandem mensis diem (imo pluribus vicibus) cadat: statutum est, ut in hoc casu pro $E = 25$, accipiatur 26, adeoque novilunium uno die maturius ponatur, quasi epacta 26 esset; neque enim fieri potest, ut tum etiam 26 in cyclo eodem adsit; nam quovis seculo, pro quovis numero aureo prodit E, addendo ipsi e quantitatem constantem α eandem per totum seculum (inferius determinandam); itaque ut 24, 25, 26 prodeant, tres epactas Iulianas dari oporteret, quarum quævis a sequente, unitate differat; non dari autem tales, percursis epactis Iulianis statim exponendis patet.

§. 8.

Epactae Iulianae in cyclo decemnovennali modo sequente computatæ sunt: epactæ cuiusvis anni additur 11; et si summa < 30 fuerit, ipsa accipiatur pro epacta anni sequentis; si summa dicta sit > 30, tum id quo 30 exceditur, si vero summa $= 30$, tum 0 accipitur: subtrahitur autem e summa dicta numerum 30 excedente 30, adeoque tempore lunationis maius, ideo, ut compensetur error propter 11 dies epactam mediam astronomicam superantes (pag. 339).

Numerus (propter insignem eius in determinatione *Paschatis* usum) *aureus* anni dictus est, qui indicat quotusnam cycli decemnovennalis sit annus is. Incipere ponitur cyclus decemnovennalis primo anno ante Christum natum, nempe regrediendo ab aliquo dato, eo deventum est; idem *de cyclo solis* anno ante Christum nono incipiendo notandum est (pag. 336).

Respondent autem iuxta regulam dictam

Numeris aureis	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Epactae Iulianae	8	19	0	11	22	3	14	25	6	17
Numeris aureis	11	12	13	14	15	16	17	18	19	
Epactae Iulianae	28	9	20	1	12	23	4	15	26	

Atque etiamsi epacta media astronomica, nempe 10 dies 21 horæ 11 minuta, per singulos annos huius cycli decemnovennalis, ab epacta primi incipiendo, semper porro addatur, et dum summa exæquat vel excedit tempus mensis synodici medium (nempe 29 dies 12 horas 44 minuta), residuum pro epacta accipiatur, quum interea una lunatio (calculo medio) defluat; atque hoc porro usque ad finem anni undevicesimi continuetur, ut in circulo progrediendo ad novum cyclum, epacta primi anni in cyclo sequente prodeat: fere idem prodibit, si ut in praxi in casibus analogis fieri solet, dum horarum numerus dimidium diem superat (saltem exæquat) pro integro accipiatur, et si dimidio die minor sit, eo anno negligatur, interea vero semper cuivis summæ, in quam epacta media astronomica excrevit, 10 dies 21 horæ 11 minuta addantur. Attamen quum cyclus hic decemnovennalis iam ad finem $312+\frac{1}{2}$ annorum die aberret, epactæ per Gregorium modo mox dicendo correctæ sunt.

Patet autem ex antea dictis, pro quovis numero aureo A post tertium, esse epactam Iulianam

$$e = \text{res.}\ \frac{(A-3)\,11}{30};$$

nam anno tertio est epacta 0, et postea quovis anno additur 11, et dum multiplum ipsius 11 numerum 30 superat, residuum accipitur; itaque si post tertium sit m-tus annus, et $m \cdot 11$ sit $= \mu \cdot 30 + \nu$, atque m-tus annus post tertium sit M-tus in cyclo: erit anni m-ti post tertium, id est $(M-3)$-ti in cyclo, epacta ν; namque sive simul eximatur multiplum ipsius 30 e multiplo ipsius 11, sive singillatim, residuum idem manet.

Pro numero aureo 3 quoque valet formula: nam tum

$$\text{res.}\,\frac{(A-3)\,11}{30} = 0,$$

nam $\frac{0}{30}$ dat quotum 0, et residuum 0. Pro numero aureo 1 autem fit

$$\text{res.}\,\frac{(A-3)\,11}{30} = \text{res.}\,\frac{-22}{30} = -22;$$

nam -22 per 30 divisum dat 0 pro quoto integro, et residuum -22; quod si ita intelligatur, ut novilunium 22 diebus intra anni initium cadat, hoc sensu epacta erit: atque ex eadem computari epacta sensu positivo quoque potest; si novilunium annum proxime præcedens, a priori 30 diebus distare ponatur, adeoque epacta positiva fiat $30-22=8$, uti in cyclo numero aureo 1 respondet epacta 8.

Idem de numero aureo 2 patet; nempe

$$\text{res.}\,\frac{(2-3)\,11}{30} \text{ fit } -11,$$

adeoque novilunium primum intra anni initium 11 diebus distat; atque epacta positive accepta est $30-11=19$.

Est igitur epactas negativas quoque admittendo

$$e = \text{res.}\,\frac{(A-3)\,11}{30},$$

atque hoc pro anno Christo n-to est equale

$$\text{res.}\,\frac{11\left(\text{res.}\,\frac{n+1}{19} - 3\right)}{30};$$

nam

$$A = \text{res.}\,\frac{n+1}{19}\;;$$

quia cyclus incipit anno primo ante Christum; itaque, si $n+1$ multiplum ipsius 19 sit, annus Christi n-tus erit undevicesimus in cyclo; si residuum ex. gr. m det, post certum cyclorum numerum agetur annus novi cycli m-tus.

§. 9.

Epacta Gregoriana E autem ex Iuliana e prodit; nempe litera s *aequationem solis* (pag. 331), et litera l *aequationem lunae* statim dicendam denotante, est

$$E = e + \text{res.}\,\frac{l-s}{30} = \text{res.}\,\frac{(e+l-s)}{30}\,,$$

si in expressione priore valor positivus ipsius e, in expressione posteriore vero sive positivus sive negativus accipiatur; at si valor ipsius E negative prodeat, addatur 30, et positiva fit; per residuum autem intelligatur id, quod manet supra quotum integrum. Formula ipsius s supra tradita est; l autem, si N sensu (pag. 331) sumatur, pro N non >18 est

$$\frac{8(N-6)}{25}\ \text{sine residuo,}$$

ea cum restrictione, ut si residuum >13 fuerit, quoto integro addatur 1; si vero $N>18$, tum $l = 4 + \frac{8(N-18)}{25}$ sine residuo, addito 1 hic quoque si residuum >17. Ratio huius est sequens.

I.

Quum quovis cyclo 19 annorum elapso novilunium tanto maturius eveniat, ut elapsis $312+\frac{1}{2}$ annis (numero medio) novilunium uno die maturius fiat, quam methodo Iuliana indicatur: error iste iuxta Gregorium ita corrigitur, ut tempus illud l, quo novilunium ante initium anni Iuliani per epactam datum reipsa maturius evenit, epactæ illius anni

Iuliani addatur, ut epacta Iuliana correcta prodeat, fiatque $e+l$ ex e. Hinc vero epacta Gregoriana E prodit sic: sit (Fig. 280.) $\mathfrak{G}$ initium anni Gregoriani, et $\mathfrak{J}$ initium anni Iuliani; si novilunium in $\mathfrak{N}$ fuerit, erit manifesto novilunium in $\mathfrak{N}$ ante $\mathfrak{G}$, et si $\mathfrak{NG}$ una lunatione fuerit minus, erit $\mathfrak{NG} = e+l-s$ epacta Gregoriana; si vero $\mathfrak{NG}$ una lunatione maius fuerit, dividitur $\mathfrak{NG}$ per 30, et residuum accipitur pro epacta; nempe in hoc computo etsi plures lunationes fierent interea, omnes 30 dierum accipiuntur, quamvis post immania tempora hoc quoque errorem inducat.

Si vero novilunium in $\mathfrak{N}'$ cadat (Fig. 281.), tum $\mathfrak{N}'\mathfrak{J}$ erit $e+l$, et $\mathfrak{N}'\mathfrak{J}-s$ negativum est, atque epacta Gregoriana negative prodit et erit $-\mathfrak{G}\mathfrak{N}'$, quod si <30 diebus fuerit (quod heic pro tempore unius lunationis sumitur), subtracto $\mathfrak{G}\mathfrak{N}'$ ex 30 diebus, manebit tempus, quo novilunium ante initium anni Gregoriani proximum evenit; sit ex. gr. $\mathfrak{G}\mathfrak{N}'+\mathfrak{G}\mathfrak{k}=30$ diebus, erit $\mathfrak{G}\mathfrak{k}$ epacta Gregoriana. Si vero sub $\mathfrak{G}\mathfrak{N}'$ plures lunationes evenerint, pariter dividendo per 30 dies, residuum accipietur, eritque hoc aut 0, aut negativum; in casu primo novilunium in $\mathfrak{G}$ cadet, eritque $E=0$, in postremo pariter novilunium ipsi $\mathfrak{G}$ proximum inter initia anni Gregoriani et Iuliani cadens indicabitur, et pariter ut prius, huic epactæ Gregorianæ negativæ adduntur 30 dies, ut epacta positiva prodeat.

II.

Formula superior ipsius l autem prodit sic. Anno 550 fuit $l=0$; si iam pro quibusvis $312+\frac{1}{2}$ annis l incrementum unius diei capiat, increscet l ad quatuor dies, elapsis $4\left(312+\frac{1}{2}\right)$ annis; quod efficit 1250 annos, quibus si addatur 550, prodit 1800; itaque usque ad annum Christi 1800 fiet $l=4$. Hoc autem ita distributum est, ut initio seculi octavi ponatur $l=1$, initio undecimi vero 2, et initio decimi quarti 3, atque initio duodevicesimi 4; adeoque prius quibusvis tribus seculis tribuatur unus dies, uti ultimo quatuor postremorum. Postea autem ab anno 1800 exclusive, quibusvis 25 seculis fit ipsius l incrementum æquale octo diebus; nempe

$$\left(312+\frac{1}{2}\right)8=2500.$$

Sunt autem octo hi dies ita distributi, ut quibusvis tribus seculis a duodevicesimo (exclusive) numerando dies unus tribuatur, usquequo quatuor postrema 25 seculorum veniant, et octavus dies seculo postremo attribuatur. Idemque continuatur.

Hinc autem si

$$N-18=\mu.25+(r<25)$$

et μ integer sit, atque

$$r=m.3+(2 \text{ vel } 1 \text{ aut } 0):$$

$\mu.25$ seculis conveniunt 8μ dies; $8(m.3+1 \text{ vel } 2)$ vero est

$$=24m+(8 \text{ vel } 16)=25m-m+(8 \text{ vel } 16);$$

et hoc per 25 divisum dat quotum integrum m cum residuo $(8 \text{ vel } 16)-m$; atque si ipsi m substituantur valores a 0 usque ad 8 inclusive (nempe $m>8$ esse nequit, quia $m.3>25$ fieret, et si $m=8$, tum præter 8.3 neque 1 esse potest, nam tum $8.3+1=25$ esset), patebit regulam in quovis casu valere; ex. gr. pro 16, et $m=7$, erit quoti pars concernens

$$7+\frac{16-7}{25}=7+\frac{9}{25};$$

adeoque quum residuum 9 non sit >17, per regulam ipsi 7 nihil additur. Ita pro ceteris valoribus ipsius m formulam regulæ convenire, et pariter de formula

$$\frac{8(N-6)}{25} \text{ sine res.}$$

patet.

III.

Quod autem (pro e sive positivo sive negativo), sive

$$e+\text{res.}\frac{l-s}{30}$$

sive

$$\text{res.}\,\frac{e+l-s}{30}$$

accipiatur, idem sit, patet sic: e præmissis apparet s celerius crescere quam l, quia s quibusvis quatuor seculis tres dies crescit, adeoque 24 seculis in octo dies excrescit, l autem 25 seculis crescit totidem (nempe 8) dies; et s iam seculo 7 fuit æquale quatuor, l vero (pagg. 331 et 344) nondum fuit unus; itaque si tam s quam l ad directionem sagittæ (uti omnia hic accipienda sunt) intelligantur, semper porro (ad instar pag. 14), etsi circulus quotiesvis decurratur: erit $l-s$ semper negativum. Sit

$$\text{res.}\,\frac{l-s}{30}=-r,$$

nempe

$$l-s=-m.30-r$$

(pro r, m positivis); erit (pro e sive positivo sive negativo)

$$e+\text{res.}\,\frac{l-s}{30}=e-r;$$

atque

$$\text{res.}\,\frac{e+l-s}{30}=\text{res.}\,\frac{e-m.30-r}{30}=e-r;$$

proditque in casu positivi e et $>r$, epacta Gregoriana $e-r$ positiva, in casu negativi e autem erit $e-r$ (propter $e<30$) aut $=-30$, aut erit $=-30-r'$ (pro r' positivo); si prius, tum utraque expressio epactam 0 dabit, si posterius, tum erit *epacta Gregoriana* negativa $-r'$, adeoque $30-r'$ erit epacta positiva in casu utroque.

§. 10.

Paschatis Iuliani pro anno Christi n-to *formula* est sequens: si a prima Martii (*stilo veteri* dicto) in anno Iuliano numeretur, ita ut per $(31+m)$-tam Martii intelligatur m-ta Aprilis; cadet Paschatis Iuliani dies prima (si e positive expressum sit) in

$$44 - e + \text{res.}\frac{\left(10 - \text{res.}\frac{n + \frac{n}{4}\text{ sine res.}}{7}\right)}{7} - \text{res.}\frac{\left(\text{res.}\frac{44-e}{7} + 3\right)}{7}$$

-tam Martii (stilo veteri); tenendo:

1. quod si $e > 23$ fuerit, $44 + 30 = 74$ pro 44 accipi debeat;

2. quod si parentheseos posterioris residuum sit aut æquale residuo parentheseos prioris, aut eo maior, valori totius formulæ addi debeat 7;

3. quod si alterutrius parenthesium dictarum, aut utriusque seorsim residuum 0 sit, pro 0 semper 7 accipiatur.

Pro $e > 23$ nimirum $74 - e$, pro e non > 23 autem $44 - e$, exprimit *plenilunii Paschalis Iuliani diem*. Namque Ecclesia cavendo, ne Pascha cum illud in ipso plenilunio vernali celebrantibus (pag. 329) coincidat, ita computum instituere conabatur, ut hoc serius prodeat; quapropter statutum est:

1. ut plenilunium accipiatur die decima quarta a die novilunii inclusive; sed

2. ut dum $e > 23$, adeoque novilunium Martii primum in $(30 - e + 1)$-tam, plenilunium autem in $(30 - e + 14)$-tam Martii cadens, non sit Paschale, nam semper ante vicesimam primam Martii cadat, cui affixum æquinoctium positum erat; etsi sequens lunatio 29 requireret, pro ea 30 accipiantur; manifesto enim in hoc casu ad novilunium sequens progrediendum est: atque hinc fit, quod pro $30 + 14$ accipiantur $30 + 14 + 30 = 74$

Pro $e = 23$ fit $44 - e = 21$, quod plenilunium Paschale est (pag. 329), at si $e > 23$ fuerit, $44 - e$ fit < 21. Ut vero primum Martii novilunium prodeat, epacta annua ex 30 subtrahenda est; nam patet facile ex (pag. 339), *epactam menstruam* Martii esse 0, adeoque ætatem lunæ in initio Martii eandem esse, quæ incipiente anno fuit.

Parentheseos prioris residuum, nempe

$$\text{res.}\frac{\left(10 - \text{res.}\frac{n + \frac{n}{4}\text{ sine res.}}{7}\right)}{7}$$

indicat, quota sit *litera Dominicalis* ab A antrorsum in anno n (pag. 335); parenthesis posterior autem indicat, quota sit litera diei plenilunii Paschalis item ab A antrorsum numerando; unde etiam patet dum residuum post divisionem per 7 fit 0, literam septimam G denotari, et 7 pro 0 accipiendum esse. Nam prima Martii litera D gaudet (pag. 332), adeoque litera plenilunii Paschalis prodibit, si ab A inclusive numeretur ultra literam diei plenilunii tribus antrorsum, nam D post A tribus literis porro est; itaque ut prodeat litera plenilunii Paschalis, tribus literis ultra numerum diei, in quem cadit, est numerandum ab A incipiendo, et ad literarum ordinem in circulo progrediendo. Atque hinc patet, quod si a prima Martii usque ad diem *plenilunii Paschalis* (inclusive) 7 dies semel aut pluribus vicibus defluxerint, residuum ex $44-e$ per 7 diviso indicet literæ plenilunii numerum a D incipiendo; atque si 3 addatur, numerus literæ eiusdem ab A incipiendo prodeat.

Si iam numerus n' *literae Dominicalis* maior fuerit numero m' *literae Plenilunii*, sitque excessus m, erit tum $m<7$, quia n' non >7, eritque $(44-e+m)$-ta Martii *dies Dominica* prima post plenilunium Paschale. Si vero

$$n'=m',$$

tum plenilunium in *diem Dominicam* cadit, adeoque 7 dies addi debent, uti si

$$m'>n'$$

fuerit; nam tum plenilunium ultra *diem Dominicam* cadit $m'-n'$ diebus; atque ad sequentem *literam Dominicalem* plenilunio proximam usque, in circulo erunt

$$7-(m'-n')=7+n'-m'$$

literæ. Hoc item eodem redit, etsi toti valori addatur 7.

§. 11.

Paschatis Gregoriani, pro epacta E positiva, formula est sequens: cadet Paschatis Gregoriani dies prima anno Christi n, in

$$44-E+\text{res.}\frac{\left(4+\frac{3(N-3)}{4}\text{ sine res.}-\text{res.}\frac{n+\frac{n}{4}\text{ sine res.}}{7}\right)}{7}-$$
$$-\text{res.}\frac{\left(\text{res.}\frac{44-E}{7}+3\right)}{7}$$

-tam Martii *stilo novo*; ea cum restrictione quod

1. si $E>23$, pro 44 accipi hic quoque $30+44=74$ debet; quia ut (in præcedentibus) iam $44-23=21$ plenilunium Paschale (iuxta dicta) primæ Martii proximum dat;

2. quod (per ea, quæ pag. 340 dicta sunt) pro $E=24$ semper 25 accipiatur, et dum in eodem cyclo seculari 24 et 25 adsunt, pro 25 accipiatur 26;

3. quod et hic si terminus tertius secundo æqualis aut eo maior fuerit, toti valori addendum 7 sit; atque dum residui parentheseos sive prioris sive posterioris valor 0 est, et hic, ut ibi 7 accipiatur pro 0.

Ratio e præcedentibus intelligitur: quia et hic terminus primus indicat, in quotam Martii *plenilunium Gregorianum* cadat in anno n (pag. 347); secundus terminus autem indicat, quotanam sit *litera Dominicalis Gregoriana* (pag. 338) ab A incipiendo; tertius autem indicat, quotanam litera ab A incipiendo sit litera plenilunii, semper antrorsum numerando. Unde, ut in præcedentibus, reliqua intelliguntur.

§. 12.

Formulae sunt pro utroque Paschate necessariae:

$$e=\text{res.}\frac{11\left(\text{res.}\frac{n+1}{19}-3\right)}{30},$$
$$E=e+\text{res.}\frac{l-s}{30},$$

atque

$$l=\frac{8(N-6)}{25}\text{ sine res.}\qquad\text{et}\qquad 4+\frac{8(N-18)}{25}\text{ sine residuo,}$$

observando, quod si residuum >13 (pro N non >18) vel >17 (pro $N>18$), tum quoto integro 1 addatur (pagg. 344—345). Est quoque (pag. 331)

$$s=1+\frac{3(N-3)}{4},$$

quod si addatur tempori Iuliano, *stilus vetus ad novum reducetur.* Quum vero ipsa e numero undeviginti sint, maneantque eadem, in quovis seculo, addendo $l-s$, computari cyclus Gregorianus secularis potest.

Pro seculo praesente (1800—1899) autem, in quo $l=4$ et $s=12$, adeoque $l-s=-8$, *dies prima Paschatis Gregoriani* fit

$$52-e+\text{res.}\frac{\left(15-\text{res.}\dfrac{n+\dfrac{n}{4}\text{ sine res.}}{7}\right)}{7}-\text{res.}\frac{\left(\text{res.}\dfrac{52-e}{7}+3\right)}{7}$$

-ta Martii (*stilo novo*); nempe formula superior, pro quovis seculo (computatis l et s) ad simpliciorem reduci potest. Notandum autem quoad formulam hanc seculi præsentis: quod si e sive 0 sive 1 sit, in formula pro 52 poni 22 debeat; ad valores infra 9 ipsius e, (pag. 349) applicando, uti pro $e>8$ adeoque $E<23$, manere secus 52 patet. In cyclo præsentis seculi 24 non adest, adeoque hoc respectu attentione non indiget. Pro quovis seculo autem cyclus decemnovennalis Gregorianus ex l et s facile computatur (pag. 343), ut videatur, num 24 imo simul etiam 25 adsit (pag. 349).

Exemplo etiam illustrare haud supervacuum est. Sit pro anno 1810 Pascha Iulianum computandum. *Litera Dominicalis Iuliana* prodit per formulam sic: addatur ipsius 1810 pars quarta sine residuo;

$$\begin{array}{r}1810\\ \underline{452}\\ 2262,\end{array}$$

quod divisum per 7 residuum 1 dat, et $10-1=9$, atque res. $\frac{9}{7}=2$, adeoque litera Iuliana est B, et *litera Gregoriana* est G.

Epacta Iuliana e prodit per formulam (pag. 342) sic; $1810+1$ per 19 divisum dat residuum 6, e quo subtracto 3, manet 3, et hoc per 11 multiplicatum et tum per 30 divisum dat residuum $3=e$; et $44-e=41$, residuum parentheseos primæ in formula Iuliana erat 2, residuum parentheseos secundæ etiam est 2, quia res. $\frac{41}{7}=6$, et $6+3=9$. Sed dictum est, si residuum posterius maius priore aut ei æquale sit, addendum 7 esse: fiet igitur *Pascha Iulianum* $(41+2-2+7)=$ quadragesima octava Martii adeoque decima septima Aprilis (*stilo veteri*) seu $(17+12)=$ undetricesima Aprilis (*stilo novo*).

Pascha Gregorianum autem prodit

$$52-3+\text{res.}\,\frac{(15-1)}{7}-\text{res.}\,\frac{\text{res.}\,\frac{52-3}{7}+3}{7}=49+0-3;$$

et pro 0 ponendo 7 (per regulam), fit $49+7-3$; adeoque Pascha Gregorianum stilo novo erit quinquagesima tertia Martii, id est vicesima secunda Aprilis.

Potest formula superior ad quemvis cuiusvis seculi annum modo eodem applicari.

§. 13.

Quamquam *aequinoctium* dictum haud astronomicum sit, et hoc quoque per intercalationem dictum aliquando a vicesima prima Martii usque ad undevicesimam et vicesimam tertiam removeatur, imo et dum *Plenilunium astronomicum* evenit alicubi diei *Sabbati* hora ultima, et alibi dies *Dominica* esse, adeoque Paschata octiduo differe possent: posita tamen lege, *in rebus sacris* determinata, de *Cyclo Paschatum* dicere fas est.

Erat (pag. 344) anno 1800 æquatio lunæ nempe $l=4$; quæ abinde quibusvis 25 seculis crescit, ut fiat $4+8$ anno 4300. Quibusvis 100 seculis æquatio solis nempe s crescit 3.25 dies, quia 4 in 100 continetur vicies quinquies, et quibusvis 4 seculis se invicem excipientibus a qualivis incipiendo, tres dies accedunt ipsi s. Item quum ab anno 1800 (exclusive) quibusvis 25.100 annis incrementum ipsius l sit 8 dierum, erit incrementum ipsius $l-s$ quibusvis 100 seculis elapsis $32-75=-43$.

Itaque ut res. $\frac{l-s}{30}$ (quod quovis seculo epactis Iulianis addi, ut Gregorianæ prodeant, dictum pag. 343 est) fiat æquale 0, ad minimum tot secula effluere necesse est, ut $l-s=-30.43$ fiat; itaque 30.100 id est 3000 secula requiruntur; atque tum erit res. $\frac{l-s}{30}$ plane idem quod prius erat, quum incrementum eius 0 sit.

Incipiet igitur cyclus ab anno 1800 (ipso anno 1800 excluso, dum $l=4$ factum est), et quidem ita, ut primum seculum abinde in anno 1900, secundum in 2000 &c... atque ter millesimum in anno 301800 (nempe $1800+300000$) terminetur; eritque novorum 3000 seculorum primum seculum in anno 301900 adeoque pariter in anno seculari ante bissextili terminatum, ut prius; quod qualivis multiplo ipsius 300000 addito ipsi 1800, redire patet.

Sed ut cyclus epactarum Gregorianarum prodeat, non sufficit res. $\frac{l-s}{30}$ eodem ordine defluere, namque $E=e+\text{res.}\frac{l-s}{30}$. Itaque necesse est, ut etiam epactæ Iulianæ simul incipiendo eodem ordine fluant: at vero hoc quibusvis 19 annis eodem redeundo fluit in perpetuum. Si igitur cyclus prior per 19 multiplicetur, idem e redibit, eodemque ordine epactæ Iulianæ se invicem excipient. Erit igitur cyclus epactarum Gregorianarum 19.3000 seculorum; quibus effluxis eodem ordine sequentur. Atque e dictis (pag. 349) patet etiam plenilunia Paschalia (Gregoriana) eodem ordine semet excipere: neque autem cyclus minor datur; quia 3000 seculorum numerus erat, nec 19 inter factores ipsius 3000 adest.

Interim hic tantum pleniluniorum (non Paschatum Gregorianorum) cyclus est: ut hoc fiat, oportet cyclum illum determinare, quo prima Ianuarii *Gregoriani* in seculo, eadem septimanæ die incipiat, seu quum prima Ianuarii semper A sit, *literae Dominicalis Gregorianae* cyclus quæritur. Est vero (pag. 335) hic 8 seculorum, quem igitur certies defluere oportet; nempe cyclum dictum 19.3000 seculorum per 8 multiplicare necesse esset; at quum 8 metiatur numerum 3000, manebunt pro *cyclo Paschatum Gregorianorum* ($19.3000=57000$) *secula*.

Cyclus Paschatum Iulianorum autem non quoad locum absolutum respectu puncti fixi in alveo fluentis temporis rotundo (pag. 326), sed tantum nominali valore, nonnisi ad initium anni Iuliani referendo: est

$28 \cdot 19 = 532$ annorum. Nam epactarum cyclus est 19, et cyclus solis 28 annorum est.

Si vero cyclus ab anno 1800 quæratur, quo ambo Paschata simul quoad *punctum* (pag. 326) *pro certo loco fixum*, semper eodem ordine sequantur: necesse est etiam s idem redire. Est vero anno 1800 (usque ad finem 1899) $s = 12$, crescitque usque ad 1900 (inclusive) uno die, et quibusvis quatuor seculis se invicem excipientibus crescit tres dies: distantiaque ab initio anni Iuliani decurrenda in circulo, qui nunc sit æqualis quantitati 365 dierum anni communis, donec s iterum idem sit, tot secula requirit, ut $365 - 12 = 353$ dies efficiat s. Requiruntur autem eo ad minimum 471 secula; nam $353 = 3 \cdot 117 + 2$; ad $3 \cdot 117$ vero requiruntur $4 \cdot 117 = 468$ secula, quod cum 18 efficit 486 secula: et quum 488 bissextile sit, ad duos dies adhuc tria secula requiruntur post 486; quia quaternarius seculorum cum 19 incipit.

Nempe seculum bissextile potest B dici, præcedens vero A, illud autem P quod post bissextile est, et illud M (quasi medium) quod inter post et ante bissextile est; atque si quaternarius seculorum in A incipiat, in M terminatur, si in B incipiat, in A terminatur; et si in P incipiat, in B terminatur, si in M incipiat, in P terminatur, cuius ratio habenda est: in casu allato post 1800 terminantur 468 secula (adeoque 48 600) in M; atque ut adhuc 2 dies accedant, A, B, P requiruntur, nam in B nihil accedit. Nempe series seculorum sequens est: $MABPMA$ $BPMABPM$ . . . Eritque annus quæsitus 48 900.

Itaque dum in certo puncto p (Fig. 282.) Gregorianis ultima *Decembris* 48 900 erit, Iulianis prima Ianuarii anni 48 900 iis bissextilis erit; atque post unum diem incipiet Gregorianis 48 901 (Gregorianis neuter bissextilis); itaque a p incipiendo post 366 dies terminabitur Gregorianis 48901, Iulianis vero annus 48 900.

Patet hinc cyclum desideratum prodire, si cyclus prior (nempe 57000 seculorum) per 471 multiplicetur; quum 471 non sit factor ipsius 57000.

§. 14.

Pascha Iulianum cum Gregoriano coincidere post tale seculum neutiquam potest (donec periodi statim referendæ adveniant), in quo s æquatio solis tanta est, ut et vicesima prima Martii Iuliani, si ad stilum novum reducatur, additis 7 ad summum ut proxima *Dominica* prodeat, ultra *Benedictum* (nempe vicesimam quintam Aprilis Gregoriani) cadat. Nimirum *Plenilunium Paschatis Iuliani* initio anni Gregoriani proximum in vicesimam primam Martii stilo veteri cadit, Pascha Gregorianum vero (iuxta regulam, quod *non praecedat Marcum*, in vicesimam primam Martii cadentem, *nec postcedat Benedictum*, nempe vicesimam quintam Aprilis) tunc distat ab anni initio maxime, dum $E = 24$, adeoque *plenilunium* Paschale $= 74 - 25$ (pag. 349) $= 49$, cui maximum est 7, quod additur. Quum igitur $s = 34$ fiet, nunquam amplius Paschata coincidere poterunt, usquequo periodi sequentes adveniant. Seculo præsente patet (per pag. 349) pro $e > 23$ coincidere non posse; quum formulæ Iulianæ addi $s = 12$ debeat, ut valor uterque æqualis sit, et pro $e > 23$ in formula Iuliana ex 44 fiat 74.

§. 15.

Si res. $\frac{l-s}{30} = 0$ fiat, et annus Iulianus cum Gregoriano simul incipiant, in illo seculo per formulas patet Paschata omnia coincidere; nam tum $E = e$, et prima Martii eadem utrique est. Quæstio exoritur, quandonam hoc fiat?

Fiet (in §. præcedente) $s = 0$, in quantum anni Gregoriani et Iuliani simul incipient, uti si abinde s crescat $q \cdot 365$ dies, atque pro $s=0$, etiam res. $\frac{l}{30} = 0$, ut res. $\frac{l-s}{30} = 0$ esse queat. Itaque quum anno 1800 sit $l - s = -8$; erit (ipsius l incremento l' dicto)

$$\text{res.} \frac{l' - 8 - 353 - q \cdot 365}{30} = 0;$$

atque hinc

$$\text{res.} \frac{l' - 1 - q \cdot 5}{30} = 0.$$

Si prius $q=0$ accipiatur, erit (e præcedentibus) pro 471 seculis, diebus 353 respondentibus, $l'=151$ diebus; quia $471=18.25+21$, atque $8.18=144$, cui si addantur 8 dies, seculis 21 competentes prodit 151. Fit igitur pro hoc casu formula

$$\text{res.}\frac{151-1}{30}=0;$$

atque tum coincident prima vice Paschata per totum seculum. Si vero post tempus istud, dictis 353 diebus respondens, accedat tempus $q.365$ diebus respondens, et respondens incrementum æquationis lunæ l'' dicatur: expressio prior fiet $\text{res.}\frac{l''-q.5}{30}$; et quæritur, quandonam hoc $=0$ fiat.

Incipiet post primum $s=0$, tempus T ad incrementum 365 dierum ipsius s requisitum in M, desinet in A; abinde secundum incipiet in B, et desinet in M, et abinde incipiens in A in P desinet, atque item in M incipiens in A desinet, idemque ordo porro erit: nempe incipient in MBA MBA, desinent in AMP AMP, requiretque primum 486, secundum et tertium 487; et item 486, 487, 487 sequuntur semper porro. Eritque quum quodvis T in seculo A vel M aut P, adeoque Gregorianis communi Iulianis bissextili desinat, $s=0$. Itaque id tantum quæritur, quandonam $\text{res.}\frac{l''-q.5}{30}=0$ fiat; tunc enim Paschata per totum seculum coincident.

Ad finem primi T, 486 dat $l''=155$ (excedentibus 2 seculis), itaque

$$\text{res.}\frac{l''-1.5}{30}=\text{res.}\frac{150}{30}=0;$$

at pro $2T$, $486+487$ dabit $l''=311$ (excedentibus 2 seculis); itaque

$$\text{res.}\frac{l''-2.5}{30}=\text{res.}\frac{301}{30}=1;$$

nec petito satisfiet.

Interim etsi nec æquatio lunæ, nec solis $=0$; sed illa -29, hæc -1, aut illa -1 hæc $+1$ sit: coincident Paschata per totum seculum, (excepto uno casu in quovis cyclo decemnovenali). Nempe dum $e=23$, in casu priore fit $E=23-29=-6$, adeoque E positive accepta erit $30-6=24$. Erit igitur (pag. 349) plenilunium Paschale *Gregorianum* $74-25=49$, plenilunium *Iulianum* autem $44-23=21$, quod ad stilum novum reducetur addito $s=-1$, fietque $=20$. In altero casu autem pro $e=25$ fiet plenilunium *Iulianum* $74-25=49$, et E erit $=25-1=24$, adeoque plenilunium *Gregorianum* erit pariter $74-25=49$, sed priori addi $s=1$ debet, ut ad stilum novum reducatur; itaque fieri potest, ut Paschata haud coincidant. In omnibus aliis casibus autem coincident. Cogitetur enim pro casu priori addi 30 ipsi $e-29$, ut prodeat E positive; erit $e-29+30=E=e+1$; quo pacto cuivis e infra 23 addita unitate, in neutra plenilunii Paschalis expressione mutabitur 44 in 74; itaque fiet plenilunium *Iulianum* ad stilum novum reductum $44-e-1$, plenilunium *Gregorianum* autem $44-(e+1)$. Pariter si e supra 23 fuerit, in utroque erit 74 pro 44.

In altero casu autem, si e infra 25 fuerit, per subtractionem unitatis, in utroque manebit 44: nempe e infra 25 sequens est 23. Idem de minoribus epactis Iulianis valet; et pariter si $e>25$ fuerit, $74-e+1$ erit plenilunium *Iulianum* ad stilum novum reductum, et $74-(e-1)$ erit plenilunium *Gregorianum*, quia E erit $=e-1$, et tum $e-1>23$.

Potest autem facile computari, quantumnam fieri q oporteat, ut res. $\frac{l-s}{30}=0$ sit. Seculorum nempe numeri 486, 487, 487 se invicem perpetuo excipiunt (positis iis, quæ dicta sunt), et numeri quibus multiplum ipsius 25 excedunt, sunt numeri 11, 12, 12 perpetuo; et nonnisi valores ipsius q tales quærendi sunt, ut incrementum ipsius l ex his excessibus exsurgens multiplum ipsius 30 sit, adeoque $l-s$ per 30 divisum residuum 0 det.

Seculo præsente (1800--1899) *Paschata* pro *numero aureo* 3, 8, 11, 14, 19 non coincidunt; nec quod pro 13 anno 1817 coinciderint, ad 1836 concluditur. *Marci* dies (pag. 354) includi videtur, sed *tabulis* excluditur; facile vero regula adaptaretur. Quæri conversim pro dictis et annus potest.

RECENSIO PER AUCTOREM IPSUM FACTA.

Horatii versus inverti posse videtur; nempe *Ubi pauca nitent, pluribus offendar maculis*: at quum has hucusque nonnisi auctor ostenderit, ius obtrectandi quoque adhucdum ei soli competit, in posterum cuique manens, qui novas detexerit. Itaque etsi, sententia mere, dictatoria reprobantes, ruinis altiores utcunque despexerint; conscia mens recti, non nitere sed tyronum evidentiam desiderantium vim tempusque ad ea quæ niteant servare studens, haud probrose erubescat, imo quacunque macula, quam detergere licebit, nova luce gaudeat: recensens novas monstraturus, facere non potest, quin indignetur, auctoremque reprehendat.

1. Cur tam diu versaverit, quid valeant humeri; donec quod iam pridem valuissent, demum ferre recusarint.

2. Cur unicam vitam brevem fere per omnem musarum numerum (quasi polygamia) diviserit.

3. Cur si defuerit otium, languens iam variisque tamen distractus, adversis omnibus quæ tale opus desiderat, ita ediderit: ut sæpe quasi per raptus, non amnis constantis naves ferentis, sed rivi, nunc falci viridem præbentis fundum, mox de cœlo exundantis instar, latus esse videatur.

Multa, donec virens vitæ arbor resonat, spes musarum floret: sed fructus aut nullos relinquit, aut boreas carpit immaturos, ni terra cœlumque faverint, desinenteque philomela in oliva cava vigilet ales Palladi sacra. Cum vero silvæ calvæ mutæque frigorum crysatillis efflorescunt, atque album in desertis sopitæ naturæ tegmen agitantes venti planctum incipiunt: non aliud restat, quam brevi post tinnitum cedere scena, campanisque comitantibus domum redire.

Denique tamen eo quæstio redit: num ita etiam uti est, edidisse, aut prorsus omisisse præstiterit? Recensens (ni fallatur) rem approbat: sed forma haud contentus, postulat, ut idem (præsertim in T. I.) per capita (iuxta radicem, truncum coronamque, pag. 1. T. I.* subdivisionibus etiam clare) distinctum, eaque de quibus postea agendum est, locis reservando propriis, correctius prodeat; quod iam utcunque edito hoc, ingenium conveniens otioque gaudens facilius præstare poterit; multa rigorem claritatemque sectans, ex his quoque amplexurus, etsi insuetorum signorum uti Tom. II.* in expl. sign. auctor ipse monet, non omnia retinuerit.

* Ed. I:

APPENDIX.

SCIENTIAM SPATII *absolute veram* exhibens:

a veritate aut falsitate Axiomatis XI *Euclidei* (*a priori haud unquam decidenda*) *independentem*; adjecta ad casum falsitatis, quadratura circuli geometrica.

Auctore JOHANNE BOLYAI de eadem, Geometrarum in Exercitu Caesareo Regio Austriaco Castrensium Capitaneo.

EXPLICATIO SIGNORUM.

$\overline{\mathfrak{ab}}$ denotet complexum *omnium* punctorum cum punctis $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$ in recta sitorum.

$\mathfrak{a}\bar{\mathfrak{b}}$ » rectæ $\overline{\mathfrak{ab}}$ in $\mathfrak{a}$ bifariam sectæ dimidium illud, quod punctum $\mathfrak{b}$ complectitur.

$\overline{\mathfrak{abc}}$ » complexum *omnium* punctorum, quæ cum punctis $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$ (non in eadem recta sitis) in eodem plano sunt.

$\mathfrak{ab}\bar{\mathfrak{c}}$ » plani $\overline{\mathfrak{abc}}$ per $\overline{\mathfrak{ab}}$ bifariam secti dimidium, punctum $\mathfrak{c}$ complectens.

$\mathfrak{abc}$ » portionum, in quas $\overline{\mathfrak{abc}}$ per complexum rectarum $\mathfrak{b}\bar{\mathfrak{a}}$, $\mathfrak{b}\bar{\mathfrak{c}}$ dividitur, *minorem*; sive *angulum*, cuius $\mathfrak{b}\bar{\mathfrak{a}}$, $\mathfrak{b}\bar{\mathfrak{c}}$ crura sunt.

$\mathfrak{abcd}$ » (si $\mathfrak{d}$ in $\mathfrak{abc}$ sit et $\overline{\mathfrak{ba}}$, $\overline{\mathfrak{cd}}$ se invicem non secent) portionem ipsius $\mathfrak{abc}$ inter $\mathfrak{b}\bar{\mathfrak{a}}$, $\mathfrak{bc}$, $\mathfrak{c}\bar{\mathfrak{d}}$ comprehensam; $\mathfrak{bacd}$ vero portionem plani $\overline{\mathfrak{abc}}$ inter $\mathfrak{a}\bar{\mathfrak{b}}$, $\mathfrak{c}\bar{\mathfrak{d}}$ sitam.

R » angulum rectum.

$\mathfrak{ab} \triangleq \mathfrak{cd}$ » $\mathfrak{cab} = \mathfrak{acd}$.

$\equiv$ » congruens.*

$x \frown a$ » x tendere ad limitem a.

$\bigcirc r$ » peripheriam circuli radii r.

$\odot r$ » aream circuli radii r.

* Sit fas, signo hocce, quo summus Geometra *GAUSS* *numeros congruos* insignivit, congruentiam geometricam quoque denotare: nulla ambiguitate exinde metuenda.

§. 1.

Si rectam $\mathfrak{a}\bar{\mathfrak{m}}$ non secet plani eiusdem recta $\mathfrak{b}\bar{\mathfrak{n}}$, at secet quævis $\mathfrak{b}\bar{\mathfrak{p}}$ (in $\mathfrak{abn}$): designetur hoc per Fig. 1.

$$\mathfrak{bn} \parallel \mathfrak{am}.$$

Dari talem $\mathfrak{b}\bar{\mathfrak{n}}$, et quidem *unicam*, e quovis puncto $\mathfrak{b}$ (extra $\overline{\mathfrak{am}}$), atque

$$\mathfrak{bam} + \mathfrak{abn} \text{ non } > 2R$$

esse patet; nam $\mathfrak{bc}$ circa $\mathfrak{b}$ mota, donec

$$\mathfrak{bam} + \mathfrak{abc} = 2R$$

fiat, $\mathfrak{b}\bar{\mathfrak{c}}$ aliquando *primo* non secat $\mathfrak{a}\bar{\mathfrak{m}}$, estque tunc $\mathfrak{bc} \parallel \mathfrak{am}$.

Nec non patet esse $\mathfrak{bn} \parallel \mathfrak{em}$, ubivis sit $\mathfrak{e}$ in $\overline{\mathfrak{am}}$ (supponendo in omnibus talibus casibus esse $\mathfrak{am} > \mathfrak{ae}$).

Et si, puncto $\mathfrak{c}$ in $\mathfrak{a}\bar{\mathfrak{m}}$ abeunte in infinitum, semper sit $\mathfrak{cd} = \mathfrak{cb}$: erit semper

$$\mathfrak{cdb} = (\mathfrak{cbd} < \mathfrak{nbc});$$

ast $\mathfrak{nbc} \sim 0$; adeoque et $\mathfrak{adb} \sim 0$.

§. 2.

Si $\mathfrak{bn} \parallel \mathfrak{am}$; *est quoque* $\mathfrak{cn} \parallel \mathfrak{am}$. Fig. 2.

Nam sit $\mathfrak{d}$ ubicunque in $\mathfrak{macn}$. Si $\mathfrak{c}$ in $\mathfrak{b}\bar{\mathfrak{n}}$ sit; $\mathfrak{b}\bar{\mathfrak{d}}$ secat $\mathfrak{a}\bar{\mathfrak{m}}$ (propter $\mathfrak{bn} \parallel \mathfrak{am}$), adeoque et $\mathfrak{c}\bar{\mathfrak{d}}$ secat $\mathfrak{a}\bar{\mathfrak{m}}$; si vero $\mathfrak{c}$ in $\mathfrak{b}\bar{\mathfrak{p}}$ fuerit; sit $\mathfrak{bq} \parallel \mathfrak{cd}$: cadit $\mathfrak{b}\bar{\mathfrak{q}}$ in $\mathfrak{abn}$ (§. 1.) secatque $\mathfrak{a}\bar{\mathfrak{m}}$, adeoque et $\mathfrak{c}\bar{\mathfrak{d}}$ secat $\mathfrak{a}\bar{\mathfrak{m}}$. Quævis $\mathfrak{c}\bar{\mathfrak{d}}$ igitur (in $\mathfrak{acn}$) secat in utroque casu $\mathfrak{a}\bar{\mathfrak{m}}$ absque eo, ut $\mathfrak{c}\bar{\mathfrak{n}}$ ipsam $\mathfrak{a}\bar{\mathfrak{m}}$ secet. Est ergo semper $\mathfrak{cn} \parallel \mathfrak{am}$.

§. 3.

Fig. 2. *Si tam* br *quam* cs *sit* ||| am, *et* c *non sit in* $\overline{\text{br}}$; *tum* br, cs *se invicem haud secant.*

Si enim br, cs punctum d commune haberent; (per §. 2.) essent dr et ds simul ||| am, caderetque (§. 1.) ds in dr et c in $\overline{\text{br}}$ (contra hyp.).

§. 4.

Fig. 3. *Si* man > mab; *pro quovis puncto* b *ipsius* $\overline{\text{ab}}$ *datur tale* c *in* $\overline{\text{am}}$, *ut sit* bcm = nam.

Nam datur (per §. 1.) bdm > nam, adeoque mdp = man, caditque b in nadp. Si igitur nam iuxta am feratur, usquequo an in $\overline{\text{dp}}$ veniat; aliquando an per b transiisse, et aliquod bcm = nam esse oportet.

§. 5.

Fig. 1. *Si* bn ||| am, *datur tale punctum* f *in* $\overline{\text{am}}$, *ut sit* fm ≏ bn.

Nam (per §. 1.) datur bcm > cbn; et si ce = cb, adeoque ec ≏ bc; patet esse bem < ebn. Feratur p per ec, angulo bpm semper *u*, et angulo pbn semper *v* dicto; patet *u* esse prius ei simultaneo *v* minus, posterius vero esse maius. Crescit vero *u* a bem usque bcm *continuo*; cum (per §. 4.) *nullus* angulus > bem et < bcm detur, cui *u* aliquando = non fiat; pariter decrescit *v* ab ebn usque cbn continuo: datur itaque in ec tale f, ut bfm = fbn sit.

§. 6.

Si bn ||| am, *atque ubivis sit* e *in* $\overline{\text{am}}$ *et* g *in* $\overline{\text{bn}}$: *tum* gn ||| em *et* em ||| gn.

Nam (per §. 1.) est bn ||| em, et hinc (per §. 2.) gn ||| em.

Si porro fm ≏ bn (§. 5.); tum mfbn = nbfm, adeoque (cum bn ||| fm sit) etiam fm ||| bn, et (per præc.) em ||| gn.

§. 7.

Si tam bn *quam* cp *sit* ⫴ am, *et* c *non sit in* $\overline{bn}$: *est etiam* bn ⫴ cp. Fig. 4.

Nam $\overline{bn}$, $\overline{cp}$ se invicem non secant (§. 3.); sunt vero am, bn, cp aut in plano, aut non; atque in casu primo am aut in bncp est, aut non.

Si am, bn, cp in plano sint, et am in bncp cadat; tum quævis $\overline{bq}$ (in nbc) secat $\overline{am}$ in aliquo puncto d (quia bn ⫴ am); porro cum dm ⫴ cp sit (§. 6.), patet $\overline{dq}$ secare $\overline{cp}$, adeoque esse bn ⫴ cp.

Si vero bn, cp in eadem plaga ipsius am sint; tum aliqua earum ex. gr. cp *intra* duas reliquas $\overline{bn}$, $\overline{am}$ cadit; quævis $\overline{bq}$ (in nba) autem secat $\overline{am}$, adeoque et ipsam $\overline{cp}$. Est itaque bn ⫴ cp.

Si mab, mac *angulum* efficiant: tum cbn cum abn nonnisi $\overline{bn}$, $\overline{am}$ vero (in abn) cum $\overline{bn}$, adeoque nbc quoque cum $\overline{am}$, nihil commune habent. Per quamvis $\overline{bd}$ (in nba) autem positum $\overline{bcd}$ secat $\overline{am}$, quia (propter bn ⫴ am) $\overline{bd}$ secat $\overline{am}$. Moto itaque $\overline{bcd}$ circa bc, donec ipsam $\overline{am}$ *prima vice* deserat, postremo cadet $\overline{bcd}$ in $\overline{bcn}$. Eadem ratione cadet idem in $\overline{bcp}$; cadit igitur bn in bcp. Porro si br ⫴ cp; tum (quia etiam am ⫴ cp) pari ratione cadit br in bam; nec non (propter br ⫴ cp) in bcp. Itaque $\overline{br}$ ipsis mab, pcb commune, nempe ipsum $\overline{bn}$ est, atque hinc bn ⫴ cp.

Si igitur cp ⫴ am, et b extra $\overline{cam}$ sit: tum sectio ipsorum bam, bcp, nempe $\overline{bn}$ est ⫴ tam ad am, quam ad cp.*

§. 8.

Si bn ⫴ et ≏ cp (vel brevius bn ⫴ ≏ cp), *atque* am (*in* nbcp) *rectam* bc *perpendiculariter bisecet*; *tum* bn ⫴ am. Fig. 5.

Si enim $\overline{bn}$ secaret $\overline{am}$, etiam $\overline{cp}$ secaret $\overline{am}$ in eodem puncto (cum mabn ≡ macp), quod et ipsis $\overline{bn}$, $\overline{cp}$ commune esset, quamvis bn ⫴ cp sit. Quævis $\overline{bq}$ (in cbn) vero secat $\overline{cp}$; adeoque secat $\overline{bq}$ etiam $\overline{am}$. Consequenter bn ⫴ am.

* Casu tertio *praemisso* duo priores, adinstar casus secundi §. 10. brevius ac elegantius simul absolvi possunt. (Ed. I. Tom. I. Errata Appendicis).

§. 9.

Fig. 6 *Si* $\mathfrak{bn} \,|||\, \mathfrak{am}$, $\mathfrak{map} \perp \mathfrak{mab}$, *atque angulus, quem* $\mathfrak{nbd}$ cum $\mathfrak{nba}$ (in ea plaga ipsius $\mathfrak{mabn}$, ubi $\mathfrak{map}$ est) *facit, sit* $< R$: *tum* $\mathfrak{map}$ et $\mathfrak{nbd}$ *se invicem secant.*

Nam sit

$$\mathfrak{bam} = R,\ \mathfrak{ac} \perp \mathfrak{bn}$$

(sive in $\mathfrak{b}$ cadat $\mathfrak{c}$, sive non), et

$$\mathfrak{ce} \perp \mathfrak{bn}\ (\text{in } \mathfrak{nb\bar{d}});$$

erit (per hyp.) $\mathfrak{ace} < R$, et $\mathfrak{af}\,(\perp \mathfrak{ce})$ in $\mathfrak{ace}$ cadet. Sit $\mathfrak{a\bar{p}}$ sectio (punctum $\mathfrak{a}$ commune habentium) $\mathfrak{ab\bar{f}}$ et $\mathfrak{am\bar{p}}$; erit

$$\mathfrak{bap} = \mathfrak{bam} = R$$

(cum sit $\mathfrak{bam} \perp \mathfrak{map}$). Si denique $\mathfrak{ab\bar{f}}$ in $\mathfrak{ab\bar{m}}$ ponatur ($\mathfrak{a}$ et $\mathfrak{b}$ manentibus); cadet $\mathfrak{a\bar{p}}$ in $\mathfrak{a\bar{m}}$; atque cum

$$\mathfrak{ac} \perp \mathfrak{bn} \quad \text{et} \quad \mathfrak{af} < \mathfrak{ac}$$

sit, patet $\mathfrak{af}$ *intra* $\mathfrak{b\bar{n}}$ terminari, adeoque $\mathfrak{bf}$ in $\mathfrak{abn}$ cadere. Secat autem $\mathfrak{b\bar{f}}$ ipsam $\mathfrak{a\bar{p}}$ in *hoc* situ (quia $\mathfrak{bn} \,|||\, \mathfrak{am}$), adeoque etiam in situ *primo* $\mathfrak{a\bar{p}}$ et $\mathfrak{b\bar{f}}$ se invicem secant; estque punctum sectionis ipsis $\mathfrak{ma\bar{p}}$ et $\mathfrak{nb\bar{d}}$ commune: secant itaque $\mathfrak{ma\bar{p}}$ et $\mathfrak{nb\bar{d}}$ se invicem.

Facile exhinc sequitur $\mathfrak{ma\bar{p}}$ et $\mathfrak{nb\bar{d}}$ se mutuo secare, si summa internorum, quos cum $\mathfrak{mabn}$ efficiunt, $< 2R$ sit.

§. 10.

Fig. 7. *Si tam* $\mathfrak{bn}$ *quam* $\mathfrak{cp}$ *sit* $|||\, \simeq \mathfrak{am}$; *est etiam* $\mathfrak{bn} \,|||\, \simeq \mathfrak{cp}$.

Nam $\mathfrak{mab}$ et $\mathfrak{mac}$ aut *angulum* efficiunt, aut in plano sunt.

Si prius; bisecet $\overline{\mathfrak{qdf}}$ rectam $\mathfrak{ab}$ perpendiculariter; erit $\mathfrak{dq} \perp \mathfrak{ab}$, adeoque $\mathfrak{dq} \,|||\, \mathfrak{am}$ (§. 8.); pariter si $\overline{\mathfrak{ers}}$ bisecet rectam $\mathfrak{ac}$ perpendiculariter, est $\mathfrak{er} \,|||\, \mathfrak{am}$; unde $\mathfrak{dq} \,|||\, \mathfrak{er}$ (§. 7.). Facile hinc (per §. 9.) consequitur, $\overline{\mathfrak{qdf}}$

et $\overline{\mathfrak{ers}}$ se mutuo secare, et sectionem $\overline{\mathfrak{fs}}$ esse $\parallel \mathfrak{dq}$ (§. 7.), atque (propter $\mathfrak{bn} \parallel \mathfrak{dq}$) esse etiam

$$\mathfrak{fs} \parallel \mathfrak{bn}.$$

Est porro (pro quovis puncto ipsius $\overline{\mathfrak{fs}}$)

$$\mathfrak{fb} = \mathfrak{fa} = \mathfrak{fc},$$

caditque $\overline{\mathfrak{fs}}$ in planum $\overline{\mathfrak{tgf}}$, rectam $\mathfrak{bc}$ perpendiculariter bisecans. Est vero (per §. 7.) (cum sit $\mathfrak{fs} \parallel \mathfrak{bn}$) etiam

$$\mathfrak{gt} \parallel \mathfrak{bn}.$$

Pari modo demonstratur $\mathfrak{gt} \parallel \mathfrak{cp}$ esse. Interim $\mathfrak{gt}$ bisecat rectam $\mathfrak{bc}$ perpendiculariter; adeoque $\mathfrak{tgbn} \equiv \mathfrak{tgcp}$ (§. 1.) et

$$\mathfrak{bn} \parallel \simeq \mathfrak{cp}.$$

Si $\mathfrak{bn}$, $\mathfrak{am}$, $\mathfrak{cp}$ in plano sint; sit (*extra* hoc planum cadens) $\mathfrak{fs} \parallel \simeq \mathfrak{am}$; tum (per præc.) $\mathfrak{fs} \parallel \simeq$ tam ad $\mathfrak{bn}$ quam ad $\mathfrak{cp}$, adeoque et $\mathfrak{bn} \parallel \simeq \mathfrak{cp}$.

§. 11.

Complexus puncti $\mathfrak{a}$, atque *omnium* punctorum, quorum quodvis $\mathfrak{b}$ tale est, ut si $\mathfrak{bn} \parallel \mathfrak{am}$ sit, sit etiam $\mathfrak{bn} \simeq \mathfrak{am}$; dicatur F: sectio vero ipsius F cum quovis plano rectam $\mathfrak{am}$ complectente nominetur L.

In quavis recta, quæ $\parallel \mathfrak{am}$ est, F gaudet puncto, et nonnisi uno; atque patet L per $\mathfrak{am}$ dividi in duas partes congruentes; dicatur $\overline{\mathfrak{am}}$ *axis* ipsius L; patet etiam, in quovis plano rectam $\mathfrak{am}$ complectente, pro *axe* $\overline{\mathfrak{am}}$ unicum L dari. Quodvis eiusmodi L, dicatur L *ipsius* $\overline{\mathfrak{am}}$ (in plano, de quo agitur, intelligendo). Patet per L circa $\mathfrak{am}$ revolutum, F describi, cuius $\overline{\mathfrak{am}}$ *axis* vocetur, et vicissim F *axi* $\overline{\mathfrak{am}}$ *attribuatur*.

§. 12.

Si $\mathfrak{b}$ *ubivis in* L *ipsius* $\overline{\mathfrak{am}}$ *fuerit, et* $\mathfrak{bn} \parallel \simeq \mathfrak{am}$ (§. 11.); *tum* L *ipsius* $\overline{\mathfrak{am}}$ *et* L *ipsius* $\overline{\mathfrak{bn}}$ *coincidunt.*

Nam dicatur L ipsius $\mathfrak{b}\tilde{\mathfrak{n}}$ distinctionis ergo l; sitque $\mathfrak{c}$ ubivis in l, et $\mathfrak{cp} ||| \bumpeq \mathfrak{bn}$ (§. 11.); erit (cum et $\mathfrak{bn} ||| \bumpeq \mathfrak{am}$ sit) $\mathfrak{cp} ||| \bumpeq \mathfrak{am}$ (§. 10.), adeoque $\mathfrak{c}$ etiam in L cadet. Et si $\mathfrak{c}$ ubivis in L sit, et $\mathfrak{cp} ||| \bumpeq \mathfrak{am}$; tum $\mathfrak{cp} ||| \bumpeq \mathfrak{bn}$ (§. 10.); caditque $\mathfrak{c}$ etiam in l (§. 11.). Itaque L et l sunt eadem; ac quævis $\mathfrak{b}\tilde{\mathfrak{n}}$ est etiam axis ipsius L, et inter omnes axes ipsius L, $\bumpeq$ est.

Idem de F eodem modo patet.

§. 13.

Fig. 8. *Si* $\mathfrak{bn} \parallel \mathfrak{am}$, $\mathfrak{cp} \parallel \mathfrak{dq}$, *et* $\mathfrak{bam}+\mathfrak{abn}=2R$ *sit*; *tum etiam* $\mathfrak{dcp}+\mathfrak{cdq}=2R$.

Sit enim $\mathfrak{ea}=\mathfrak{eb}$ et $\mathfrak{efm}=\mathfrak{dcp}$ (§. 4.); erit (cum

$$\mathfrak{bam}+\mathfrak{abn}=2R=\mathfrak{abn}+\mathfrak{abg}$$

sit)

$$\mathfrak{ebg}=\mathfrak{eaf};$$

adeoque si etiam $\mathfrak{bg}=\mathfrak{af}$ sit,

$$\triangle\,\mathfrak{ebg}\equiv\triangle\,\mathfrak{eaf},\ \ \mathfrak{beg}=\mathfrak{aef},$$

cadetque $\mathfrak{g}$ in $\mathfrak{f}\tilde{\mathfrak{e}}$. Est porro $\mathfrak{gfm}+\mathfrak{fgn}=2R$ (quia $\mathfrak{egb}=\mathfrak{efa}$). Est etiam $\mathfrak{gn}\parallel\mathfrak{fm}$ (§. 6.); itaque si $\mathfrak{mfrs}\equiv\mathfrak{pcdq}$, tum $\mathfrak{rs}\parallel\mathfrak{gn}$ (§. 7.), et $\mathfrak{r}$ in vel extra $\mathfrak{fg}$ cadit (si $\mathfrak{cd}$ non $=\mathfrak{fg}$, ubi res iam patet).

I. In casu primo est $\mathfrak{frs}$ non $>(2R-\mathfrak{rfm}=\mathfrak{fgn})$, quia $\mathfrak{rs}\parallel\mathfrak{fm}$; ast cum $\mathfrak{rs} ||| \mathfrak{gn}$ sit, est etiam $\mathfrak{frs}$ non $<\mathfrak{fgn}$; adeoque $\mathfrak{frs}=\mathfrak{fgn}$, et

$$\mathfrak{rfm}+\mathfrak{frs}=\mathfrak{gfm}+\mathfrak{fgn}=2R.$$

Itaque et $\mathfrak{dcp}+\mathfrak{cdq}=2R$.

II. Si $\mathfrak{r}$ extra $\mathfrak{fg}$ cadat; tunc $\mathfrak{ngr}=\mathfrak{mfr}$, sitque $\mathfrak{mfgn}\equiv\mathfrak{nghl}\equiv\mathfrak{lhko}$ et ita porro, usquequo $\mathfrak{fk}=$ vel prima vice $>\mathfrak{fr}$ fiat. Est heic $\mathfrak{ko} ||| \mathfrak{hl} ||| \mathfrak{fm}$ (§. 7.). Si $\mathfrak{k}$ in $\mathfrak{r}$ cadat; tum $\mathfrak{ko}$ in $\mathfrak{rs}$ cadit (§. 1.); adeoque

$$\mathfrak{rfm}+\mathfrak{frs}=\mathfrak{kfm}+\mathfrak{fko}=\mathfrak{kfm}+\mathfrak{fgn}=2R;$$

si vero $\mathfrak{r}$ in $\mathfrak{hk}$ cadat, tum (per I.) est

$$\mathfrak{rhl}+\mathfrak{hrs}=2R=\mathfrak{rfm}+\mathfrak{frs}=\mathfrak{dcp}+\mathfrak{cdq}.$$

§. 14.

Si $\mathfrak{bn} \parallel\!| \mathfrak{am}$, $\mathfrak{cp} \parallel\!| \mathfrak{dq}$, *et* $\mathfrak{bam}+\mathfrak{abn}<2R$ *sit; tum etiam* $\mathfrak{dcp}+\mathfrak{cdq}<2R$.

Si enim $\mathfrak{dcp}+\mathfrak{cdq}$ non esset $<$, adeoque (per §. 1.) esset $=2R$; tum (per §. 13.) etiam $\mathfrak{bam}+\mathfrak{abn}=2R$ esset (contra hyp.).

§. 15.

Perpensis §§. 13. et 14. *Systema Geometriae hypothesi veritatis Axiomatis Euclidei XI. insistens dicatur* Σ; *et hypothesi contrariae superstructum sit S. Omnia, quae expresse non dicentur, in* Σ *vel in S esse; absolute enuntiari*, i. e. *illa, sive* Σ *sive S reipsa sit, vera asseri intelligatur.*

§. 16.

Si $\mathfrak{am}$ *sit axis alicuius L; tum L in* Σ *recta* $\perp \mathfrak{am}$ *est.* Fig. 5.

Nam sit e quovis puncto $\mathfrak{b}$ ipsius L axis $\mathfrak{bn}$; erit in Σ

$$\mathfrak{bam}+\mathfrak{abn}=2\mathfrak{bam}=2R,$$

adeoque $\mathfrak{bam}=R$. Et si $\mathfrak{c}$ quodvis punctum in $\widetilde{\mathfrak{ab}}$ sit, atque $\mathfrak{cp} \parallel\!| \mathfrak{am}$; est (per §. 13.) $\mathfrak{cp} \triangleq \mathfrak{am}$, adeoque $\mathfrak{c}$ in L (§. 11.).

In S vero nulla 3 puncta $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$ *ipsius L vel F in recta sunt.*

Nam aliquis axium $\mathfrak{am}$, $\mathfrak{bn}$, $\mathfrak{cp}$ (ex. gr. $\mathfrak{am}$) intra duos reliquos cadit; et tunc (per §. 14.) tam $\mathfrak{bam}$ quam $\mathfrak{cam}<R$.

§. 17.

L est etiam in S linea, et F superficies. Fig. 7.

Nam (per §. 11.) quodvis planum ad axem $\mathfrak{a\tilde{m}}$ (per punctum aliquod ipsius F) perpendiculare secat ipsum F in peripheria circuli, cuius planum (per §. 14.) ad nullum alium axem $\mathfrak{b\tilde{n}}$ perpendiculare est. Revolvatur F circa $\mathfrak{bn}$; manebit (per §. 12.) quodvis punctum ipsius F in F, et sectio ipsius F cum plano ad $\mathfrak{b\tilde{n}}$ non perpendiculari describet superficiem: atqui F (per §. 12.), quæcunque puncta $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$ fuerint in eo, ita *sibi* congruere poterit, ut $\mathfrak{a}$ in $\mathfrak{b}$ cadat; est igitur F ***superficies uniformis***.

Patet hinc (per §§. 11. et 12.) L esse ***lineam uniformem***.*

§. 18.

Fig. 7. *Cuiusvis plani, per punctum* $\mathfrak{a}$ *ipsius* F *ad axem* $\mathfrak{am}$ *oblique positi, sectio cum* F *in* S *peripheria circuli est.*

Nam sint $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$ 3 puncta huius sectionis, et $\mathfrak{bn}$, $\mathfrak{cp}$ axes; facient $\mathfrak{ambn}$, $\mathfrak{amcp}$ angulum; nam secus planum (ex §. 16.) per $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$ determinatum ipsam $\mathfrak{am}$ complecteretur (contra hyp.). Plana igitur, rectas $\mathfrak{ab}$, $\mathfrak{ac}$ perpendiculariter bisecantia se mutuo secant (§. 10.) in aliquo axe $\mathfrak{fs}$ (ipsius F), atque $\mathfrak{fb} = \mathfrak{fa} = \mathfrak{fc}$. Sit $\mathfrak{ah} \perp \mathfrak{fs}$, et revolvatur $\mathfrak{fah}$ circa $\mathfrak{fs}$; describet $\mathfrak{a}$ peripheriam radii $\mathfrak{ha}$, per $\mathfrak{b}$ et $\mathfrak{c}$ euntem, et *simul* in F et $\widehat{\mathfrak{abc}}$ sitam; nec F et $\widehat{\mathfrak{abc}}$ præter $\bigcirc\,\mathfrak{ha}$ quidquam commune habent (§. 16.).

Patet etiam extremitate portionis $\mathfrak{fa}$ lineæ L (tanquam radio) in F circa $\mathfrak{f}$ mota ipsam $\bigcirc\,\mathfrak{ha}$ describi.

§. 19.

Fig. 5. *Perpendicularis* $\mathfrak{bt}$ *ad axem* $\mathfrak{bn}$ *ipsius* L (in planum ipsius L cadens) *est in* S *tangens ipsius* L.

Nam L in $\overline{\mathfrak{bt}}$ præter $\mathfrak{b}$ nullo puncto gaudet (§. 14.), si vero $\mathfrak{bq}$ in $\mathfrak{tbn}$ cadat, tum centrum sectionis plani per $\mathfrak{bq}$ ad $\mathfrak{tbn}$ perpendicularis cum F ipsius $\overline{\mathfrak{bn}}$ (§. 18.) manifesto in $\overline{\mathfrak{bq}}$ locatur, et si $\mathfrak{bq}$ diameter sit, patet $\overline{\mathfrak{bq}}$ lineam L ipsius $\overline{\mathfrak{bn}}$ in $\mathfrak{q}$ secare.

§. 20.

Per quaevis duo puncta in F *linea* L *determinatur* (§§. 11. et 18.); atque (cum ex §§. 16. et 19. L perpendicularis ad omnes suos axes sit)

* Demonstrationem ad S restringere haud necesse est; quum facile ita proponatur, ut absolute (pro S et Σ) valeat. (Ed. I. Tom. I. Errata Appendicis).

quivis angulus Llineus in F angulo planorum ad F per crura perpendicularium aequalis est.

§. 21.

Duae lineae Lformes $a\bar{p}$, $b\bar{d}$ *in eodem F, cum tertia Lformi* ab *summam internorum* $< 2R$ *efficientes, se mutuo secant* (per $\overline{ap}$ in F intelligendo L per a, p ductum, per $a\bar{p}$ vero dimidium illud eius ex a incipiens, in quod p cadit). Fig. 6.

Nam si am, bn axes ipsius F sint; tum $am\bar{p}$, $bn\bar{d}$ secant se invicem (§. 9.); atque F secat eorundem sectionem (per §§. 7. et 11.); adeoque et $a\bar{p}$, $b\bar{d}$ se mutuo secant.

Patet exhinc Axioma XI. et omnia, quæ in Geometria Trigonometriaque (plana) asseruntur, *absolute* constare in F, rectarum vices lineis L subeuntibus: idcirco functiones trigonometricæ abhinc eodem sensu accipientur, quo in Σ veniunt; et peripheria circuli, cuius radius Lformis $= r$ in F, est $= 2\pi r$, et pariter $\odot r$ (in F) $= \pi r^2$ (per π intelligendo $\frac{1}{2} \bigcirc 1$ in F, sive notum $3{\cdot}1415926\ldots$).

§. 22.

Si $a\bar{b}$ *fuerit L ipsius* $a\bar{m}$, *et* c *in* $a\bar{m}$; *atque angulus* cab (e recta $a\bar{m}$ et Lformi linea $a\bar{b}$ compositus) *feratur prius iuxta* $a\bar{b}$, *tum iuxta* $b\bar{a}$ *semper porro in infinitum: erit via* $\overset{\frown}{cd}$ *ipsius* c *linea L ipsius* $c\bar{m}$. Fig. 9.

Nam (posteriore l dicta) sit punctum quodvis d in $\overset{\frown}{cd}$, $dn \parallel cm$, et b punctum ipsius L in $\overline{dn}$ cadens; erit $bn \simeq am$, et $ac = bd$, adeoque $dn \simeq cm$, consequ. d in l. Si vero d in l et $dn \parallel cm$, atque b punctum ipsius L ipsi $\overline{dn}$ commune sit; erit $am \simeq bn$ et $cm \simeq dn$, unde manifesto $bd = ac$, cadetque d in viam puncti c, et sunt l et $\overset{\frown}{cd}$ eadem. Designetur tale l per $l \parallel L$.

§. 23.

Si linea Lformis $cdf \parallel abe$ (§. 22.), et $ab = be$, atque $a\bar{m}$, $b\bar{n}$, $e\bar{p}$ sint axes; erit manifesto $cd = df$; et si quælibet 3 puncta a, b, e fuerint ipsius Fig. 9.

$\widetilde{\mathfrak{ab}}$, ac $\mathfrak{ab} = n \,.\, \mathfrak{cd}$: erit quoque $\mathfrak{ae} = n \,.\, \mathfrak{cf}$; adeoque (manifesto etiam pro $\mathfrak{ab}$, $\mathfrak{ae}$, $\mathfrak{dc}$ incommensurabilibus)

$$\mathfrak{ab} : \mathfrak{cd} = \mathfrak{ae} : \mathfrak{cf},$$

estque $\mathfrak{ab} : \mathfrak{cd}$ ab $\mathfrak{ab}$ *independens* et per $\mathfrak{ac}$ *prorsus determinatum.* Denotetur quotus iste, nempe $\mathfrak{ab} : \mathfrak{cd}$ litera maiore eiusdem nominis (puta per X), quo $\mathfrak{ac}$ litera minuscula (ex. gr. x) insignitur.

§. 24.

Quaecunque x et y fuerint; *est* $Y = X^{\frac{y}{x}}$ (§. 23.).

Nam aut erit alterum (ipsorum x, y) multiplum alterius (ex. gr. y ipsius x), aut non.

Si $y = nx$; sit $x = \mathfrak{ac} = \mathfrak{cg} = \mathfrak{gh}$ &c, usquequo $\mathfrak{ah} = y$ fiat; sit porro $\mathfrak{cd} \parallel \mathfrak{gk} \parallel \mathfrak{hl}$; erit (§. 23.)

$$X = \mathfrak{ab} : \mathfrak{cd} = \mathfrak{cd} : \mathfrak{gk} = \mathfrak{gk} : \mathfrak{hl};$$

adeoque

$$\frac{\mathfrak{ab}}{\mathfrak{hl}} = \left(\frac{\mathfrak{ab}}{\mathfrak{cd}}\right)^n,$$

sive

$$Y = X^n = X^{\frac{y}{x}}.$$

Si x, y mulipla ipsius i sint, puta

$$x = mi \quad \text{et} \quad y = ni;$$

est (per præc.)

$$X = I^m, \; Y = I^n,$$

consequ.

$$Y = X^{\frac{n}{m}} = X^{\frac{y}{x}}.$$

Idem ad casum incommensurabilitais ipsorum x, y facile extenditur. Si vero fuerit $q = y - x$; erit manifesto $Q = Y : X$.

Nec non manifestum est, in Σ pro quovis x esse $X = 1$, in S vero $X > 1$ esse, atque pro *quibusvis* $\mathfrak{ab}$, $\mathfrak{abe}$ dari tale $\mathfrak{cdf} \parallel \mathfrak{abe}$, ut sit $\mathfrak{cdf} = \mathfrak{ab}$, unde $\mathfrak{ambn} = \mathfrak{amep}$ erit, etsi hoc illius qualevis multiplum sit; quod singulare quidem est, sed absurditatem ipsius S evidenter non probat.

§. 25.

In quovis rectilineo triangulo sunt peripheriae radiorum lateribus aequalium, uti sinus angulorum oppositorum. Fig. 10.

Sit enim $\mathfrak{abc} = R$, et $\mathfrak{am} \perp \mathfrak{bac}$, atque sint $\mathfrak{bn}$, $\mathfrak{cp} \parallel \mathfrak{am}$; erit $\mathfrak{cab} \perp \mathfrak{ambn}$, adeoque (cum $\mathfrak{cb} \perp \mathfrak{ba}$ sit) $\mathfrak{cb} \perp \mathfrak{ambn}$, consequ. $\mathfrak{cpbn} \perp \mathfrak{ambn}$. Secet F *ipsius* $\overline{\mathfrak{cp}}$ rectas $\overline{\mathfrak{bn}}$, $\overline{\mathfrak{am}}$ (respective) in $\mathfrak{d}$, $\mathfrak{e}$, et fascias $\mathfrak{cpbn}$, $\mathfrak{cpam}$, $\mathfrak{bnam}$ in lineis Lformibus $\mathfrak{cd}$, $\mathfrak{ce}$, $\mathfrak{de}$; erit (§. 20.) $\mathfrak{cde}$ = angulo ipsorum $\mathfrak{ndc}$, $\mathfrak{nde}$, adeoque $= R$; atque pari ratione est $\mathfrak{ced} = \mathfrak{cab}$.

Est autem (per §. 21.) in Llineo triangulo $\mathfrak{ced}$ (heic radio semper $=1$ posito)

$$\mathfrak{ec} : \mathfrak{dc} = 1 : \sin.\mathfrak{dec} = 1 : \sin.\mathfrak{cab}.$$

Est quoque (per §. 21.)

$$\begin{aligned} \mathfrak{ec} : \mathfrak{dc} &= \bigcirc\mathfrak{ec} : \bigcirc\mathfrak{dc} \ (\text{in } F) \\ &= \bigcirc\mathfrak{ac} : \bigcirc\mathfrak{bc} \ (\text{§. 18.}); \end{aligned}$$

adeoque est etiam

$$\bigcirc\mathfrak{ac} : \bigcirc\mathfrak{bc} = 1 : \sin.\mathfrak{cab};$$

unde assertum pro quovis triangulo liquet.

§. 26.

In quovis sphaerico triangulo sunt sinus laterum, uti sinus angulorum iisdem oppositorum. Fig. 11.

Nam sit $\mathfrak{abc} = R$, et $\mathfrak{ced}$ perpendiculare ad sphæræ radium $\mathfrak{oa}$; erit $\mathfrak{ced} \perp \mathfrak{aob}$, et (cum etiam $\mathfrak{boc} \perp \mathfrak{boa}$ sit) $\mathfrak{cd} \perp \mathfrak{ob}$. In triangulis $\mathfrak{ceo}$, $\mathfrak{cdo}$ vero est (per §. 25.)

$$\begin{aligned} \bigcirc\mathfrak{ec} : \bigcirc\mathfrak{oc} : \bigcirc\mathfrak{dc} &= \sin.\mathfrak{coe} : 1 : \sin.\mathfrak{cod} \\ &= \sin.\mathfrak{ac} : 1 : \sin.\mathfrak{bc}; \end{aligned}$$

interim (§. 25.) etiam

$$\bigcirc \mathfrak{ec} : \bigcirc \mathfrak{dc} = \sin. \mathfrak{cde} : \sin. \mathfrak{ced};$$

itaque

$$\sin. \mathfrak{ac} : \sin. \mathfrak{bc} = \sin. \mathfrak{cde} : \sin. \mathfrak{ced};$$

est vero $\mathfrak{cde} = R = \mathfrak{cba}$, atque $\mathfrak{ced} = \mathfrak{cab}$. Consequenter

$$\sin. \mathfrak{ac} : \sin. \mathfrak{bc} = 1 : \sin. \mathfrak{a}.$$

E quo promanans Trigonometria sphaerica ab Axiomate XI. independenter stabilita est.

§. 27.

Fig. 12. *Si* $\mathfrak{ac}$, $\mathfrak{bd}$ *sint* $\perp \mathfrak{ab}$, *et feratur* $\mathfrak{cab}$ *iuxta* $\overline{\mathfrak{ab}}$; *erit (via puncti* $\mathfrak{c}$ *dicta heic* $\mathfrak{cd}$)

$$\mathfrak{cd} : \mathfrak{ab} = \sin. u : \sin. v.$$

Nam sit $\mathfrak{de} \perp \mathfrak{ca}$; est in triangulis $\mathfrak{ade}$, $\mathfrak{adb}$ (per §. 25.)

$$\bigcirc \mathfrak{ed} : \bigcirc \mathfrak{ad} : \bigcirc \mathfrak{ab} = \sin. u : 1 : \sin. v.$$

Revoluto $\mathfrak{bacd}$ circa $\mathfrak{ac}$, describetur $\bigcirc \mathfrak{ab}$ per $\mathfrak{b}$, $\bigcirc \mathfrak{ed}$ per $\mathfrak{d}$; et via dictæ $\mathfrak{cd}$ denotetur heic per $\odot \mathfrak{cd}$. Sit porro polygonum quodvis $\mathfrak{bfg} \ldots$ ipsi $\odot \mathfrak{ab}$ inscriptum; nascetur per plana ex omnibus lateribus $\mathfrak{bf}$, $\mathfrak{fg}$ &, ad $\odot \mathfrak{ab}$ perpendicularia, in $\odot \mathfrak{cd}$ quoque figura polygonalis totidem laterum; et demonstrari (ad instar §. 23.) potest, esse

$$\mathfrak{cd} : \mathfrak{ab} = \mathfrak{dh} : \mathfrak{bf} = \mathfrak{hk} : \mathfrak{fg} = \cdots,$$

adeoque

$$\mathfrak{dh} + \mathfrak{hk} + \cdots : \mathfrak{bf} + \mathfrak{fg} + \cdots = \mathfrak{cd} : \mathfrak{ab}$$

Quovis laterum $\mathfrak{bf}$, $\mathfrak{fg}$, ... ad limitem o tendente, manifesto

$$\mathfrak{bf} + \mathfrak{fg} + \cdots \frown \bigcirc \mathfrak{ab} \quad \text{et} \quad \mathfrak{dh} + \mathfrak{hk} + \cdots \frown \bigcirc \mathfrak{ed}.$$

Itaque etiam

$$\bigcirc \mathfrak{ed} : \bigcirc \mathfrak{ab} = \mathfrak{cd} : \mathfrak{ab}.$$

Erat vero

$$\bigcirc \mathfrak{ed} : \bigcirc \mathfrak{ab} = \sin. u : \sin. v.$$

Consequ.

$$\mathfrak{cd} : \mathfrak{ab} = \sin. u : \sin. v.$$

Remoto $\mathfrak{ac}$ a $\mathfrak{bd}$ in infinitum, manet

$$\mathfrak{cd}:\mathfrak{ab}$$

adeoque etiam

$$\sin. u : \sin. v$$

constans; u vero $\frown R$ (§. 1.), et si $\mathfrak{dm} \parallel \mathfrak{bn}$ sit, $v \frown z$; unde fit

$$\mathfrak{cd} : \mathfrak{ab} = 1 : \sin. z.$$

Via dicta $\mathfrak{cd}$ denotabitur per $\mathfrak{cd} \parallel \mathfrak{ab}$.

§. 28.

Si $\mathfrak{bn} \parallel \triangleq \mathfrak{am}$, *et* $\mathfrak{c}$ *in* $\mathfrak{a\overline{m}}$, *atque* $\mathfrak{ac} = x$ *sit: erit* X (§. 23.) Fig. 13.

$$= \sin. u : \sin. v.$$

Nam si $\mathfrak{cd}$ et $\mathfrak{ae}$ sint $\perp \mathfrak{bn}$ et $\mathfrak{bf} \perp \mathfrak{am}$; erit (ad instar §. 27.)

$$\bigcirc \mathfrak{bf} : \bigcirc \mathfrak{cd} = \sin. u : \sin. v.$$

Est autem evidenter $\mathfrak{bf} = \mathfrak{ae}$: quamobrem

$$\bigcirc \mathfrak{ea} : \bigcirc \mathfrak{dc} = \sin. u : \sin. v.$$

In superficiebus vero F formibus ipsorum $\mathfrak{am}$ et $\mathfrak{cm}$ (ipsum $\mathfrak{ambn}$ in $\mathfrak{ab}$ et $\mathfrak{cg}$ secantibus) est (per §. 21.)

$$\bigcirc \mathfrak{ea} : \bigcirc \mathfrak{dc} = \mathfrak{ab} : \mathfrak{cg} = X.$$

Est itaque etiam

$$X = \sin. u : \sin. v.$$

§. 29.

Si $\mathfrak{bam} = R$, $\mathfrak{ab} = y$, *et* $\mathfrak{bn} \parallel \mathfrak{am}$ *sit; erit in* S Fig. 14.

$$Y = \cot. \frac{1}{2} u.$$

Nam si fuerit $\mathfrak{ab}=\mathfrak{ac}$, et $\mathfrak{cp} ||| \mathfrak{am}$ (adeoque $\mathfrak{bn} ||| \bumpeq \mathfrak{cp}$), atque $\mathfrak{pcd}=\mathfrak{qcd}$; datur (§. 19.) $\mathfrak{ds} \perp \overline{\mathfrak{cd}}$, ut $\mathfrak{ds} ||| \mathfrak{cp}$, adeoque (§. 1.) $\mathfrak{dt} ||| \mathfrak{cq}$ sit. Si porro $\mathfrak{be} \perp \overline{\mathfrak{ds}}$; erit (§. 7.) $\mathfrak{ds} ||| \mathfrak{bn}$, adeoque (§. 6.) $\mathfrak{bn} ||| \mathfrak{es}$, et (cum $\mathfrak{dt} ||| \mathfrak{cq}$ sit) $\mathfrak{bq} ||| \mathfrak{et}$; consequ. (§. 1.) $\mathfrak{ebn}=\mathfrak{ebq}$.

Repræsententur, $\mathfrak{bcf}$ ex L ipsius $\mathfrak{bn}$, et $\mathfrak{fg}$, $\mathfrak{dh}$, $\mathfrak{ck}$ et $\mathfrak{el}$ ex L formibus lineis ipsorum $\mathfrak{ft}$, $\mathfrak{dt}$, $\mathfrak{cq}$ et $\mathfrak{et}$; erit evidenter (§. 22.)

$$\mathfrak{hg}=\mathfrak{df}=\mathfrak{dk}=\mathfrak{hc};$$

itaque

$$\mathfrak{cg}=2\mathfrak{ch}'=2v.$$

Pariter patet

$$\mathfrak{bg}=2\mathfrak{bl}=2z$$

esse. Est vero

$$\mathfrak{bc}=\mathfrak{bg}-\mathfrak{cg};$$

quapropter

$$y=z-v,$$

adeoque (§. 24.)

$$Y=Z:V.$$

Est demum (§. 28.)

$$Z=1:\sin.\frac{1}{2}u \quad \text{et} \quad V=1:\sin.\left(R-\frac{1}{2}u\right),$$

consequ.

$$Y=\cot.\frac{1}{2}u.$$

§. 30.

Fig. 15. Verumtamen facile (ex §. 25.) patet, resolutionem problematis *Trigonometriae planae* in S, peripheriæ per radium expressæ indigere; hoc vero rectificatione ipsius L obtineri potest.

Sint $\mathfrak{ab}$, $\mathfrak{cm}$, $\mathfrak{c'm'} \perp \overline{\mathfrak{ac}}$, atque $\mathfrak{b}$ ubivis in $\overline{\mathfrak{ab}}$; erit (§. 25.)

$$\sin.u:\sin.v=\bigcirc p:\bigcirc y$$

et

$$\sin.u':\sin.v'=\bigcirc p:\bigcirc y';$$

adeoque

$$\frac{\sin.u}{\sin.v}\bigcirc \quad =\frac{\sin.u'}{\sin.v'}\bigcirc y'.$$

Est vero (per §. 27.)

$$\sin. v : \sin. v' = \cos. u : \cos. u';$$

consequ.

$$\frac{\sin. u}{\cos. u} \bigcirc y = \frac{\sin. u'}{\cos. u'} \bigcirc y',$$

seu

$$\bigcirc y : \bigcirc y' = \text{tang.}\, u' : \text{tang.}\, u = \text{tang.}\, w : \text{tang.}\, w'.$$

Sint porro $\mathfrak{cn} \parallel\!| \mathfrak{ab}$, $\mathfrak{c'n'} \parallel\!| \mathfrak{ab}$ et $\mathfrak{cd}$, $\mathfrak{c'd'}$ lineæ Lformes ad $\widetilde{\mathfrak{ab}}$ perpendiculares; erit (§. 21.) etiam

$$\bigcirc y : \bigcirc y' = r : r',$$

adeoque

$$r : r' = \text{tang.}\, w : \text{tang.}\, w'.$$

Crescat iam p ab $\mathfrak{a}$ incipiendo in infinitum; tum $w \frown z$ et $w' \frown z'$; quapropter etiam

$$r : r' = \text{tang.}\, z : \text{tang.}\, z'.$$

Constans r : tang. z (ab r *independens*) dicatur i; dum $y \frown 0$, est

$$\left(\frac{r}{y} = \frac{i\, \text{tang.}\, z}{y}\right) \frown 1,$$

adeoque

$$\frac{y}{\text{tang.}\, z} \frown i.$$

Ex §. 29. fit

$$\text{tang.}\, z = \frac{1}{2}(Y - Y^{-1});$$

itaque

$$\frac{2y}{Y - Y^{-1}} \frown i,$$

seu (§. 24.)

$$\frac{2yI^{\frac{y}{i}}}{I^{\frac{2y}{i}} - 1} \frown i.$$

Notum autem est, expressionis istius (dum $y \frown 0$) limitem esse $\frac{i}{\text{log. nat.}\, I}$; est ergo

$$\frac{i}{\text{log. nat.}\, I} = i \quad \text{et} \quad I = e = 2{\cdot}7182818\ldots,$$

quæ quantitas insignis hic quoque elucet. Si nempe abhinc i illam rectam denotet, cuius $I=e$ sit, erit $r=i\,\text{tang.}\,z$. Erat autem (§. 21.) $\bigcirc y=2\pi r$; est igitur

$$\bigcirc y=2\pi i\,\text{tang.}\,z=\pi i\,(Y-Y^{-1})=$$
$$=\pi i\,(e^{\frac{y}{i}}-e^{-\frac{y}{i}})=\frac{\pi y}{\text{log. nat. } Y}\,(Y-Y^{-1})$$

(per §. 24.).

§. 31.

Fig. 16. Ad resolutionem omnium triangulorum rectangulorum rectilineorum trigonometricam (e qua omnium triangulorum resolutio in promtu est) in S 3 æquationes sufficiunt: nempe (a, b cathetos, c hypotenusam, et α, β angulos cathetis oppositos denotantibus) æquatio relationem exprimens *primo* inter a, c, α, *secundo* inter a, α, β, *tertio* inter a, b, c; nimirum ex his *reliquae* 3 per eliminationem prodeunt.

I. Ex §§. 25. et 30. est

$$1:\sin.\alpha=(C-C^{-1}):(A-A^{-1})=(e^{\frac{c}{i}}-e^{-\frac{c}{i}}):(e^{\frac{a}{i}}-e^{-\frac{a}{i}});$$

(æquatio pro α, c, a).

II. Ex §. 27. sequitur (si $\beta\mathfrak{m}\parallel\gamma\mathfrak{n}$ sit)

$$\cos.\alpha:\sin.\beta=1:\sin.u;$$

ex §. 29. autem fit

$$1:\sin.u=\frac{1}{2}(A+A^{-1});$$

itaque

$$\cos.\alpha:\sin.\beta=\frac{1}{2}(A+A^{-1})=\frac{1}{2}(e^{\frac{a}{i}}+e^{-\frac{a}{i}});$$

(æquatio pro α, β, a).

III. Si $\alpha\alpha'\perp\beta\alpha\gamma$, atque $\beta\beta'$ et $\gamma\gamma'$ fuerint $\parallel\alpha\alpha'$, (§. 27.), atque $\beta'\alpha'\gamma'\perp\alpha\alpha'$; erit manifesto (uti in §. 27.)

$$\frac{\beta\beta'}{\gamma\gamma'}=\frac{1}{\sin.u}=\frac{1}{2}(A+A^{-1}),$$
$$\frac{\gamma\gamma'}{\alpha\alpha'}=\frac{1}{2}(B+B^{-1}),$$

ac

$$\frac{\beta\beta'}{\alpha\alpha'} = \frac{1}{2}(C + C^{-1});$$

consequ.

$$\frac{1}{2}(C + C^{-1}) = \frac{1}{2}(A + A^{-1})\frac{1}{2}(B + B^{-1}),$$

sive

$$e^{\frac{c}{i}} + e^{-\frac{c}{i}} = \frac{1}{2}\left(e^{\frac{a}{i}} + e^{-\frac{a}{i}}\right)\left(e^{\frac{b}{i}} + e^{-\frac{b}{i}}\right);$$

(æquatio pro a, b, c).

Si $\gamma\alpha\delta = R$, et $\beta\delta \perp \alpha\delta$ sit; erit

$$\bigcirc c : \bigcirc a = 1 : \sin.\alpha,$$

et

$$\bigcirc c : \bigcirc (d = \beta\delta) = 1 : \cos.\alpha,$$

adeoque ($\bigcirc x^2$ pro quovis x factum $\bigcirc x . \bigcirc x$ denotante) manifesto

$$\bigcirc a^2 + \bigcirc d^2 = \bigcirc c^2.$$

Est vero (per §. 27. et II.)

$$\bigcirc d = \bigcirc b . \frac{1}{2}(A + A^{-1}),$$

consequ.

$$\left(e^{\frac{c}{i}} - e^{-\frac{c}{i}}\right)^2 = \frac{1}{4}\left(e^{\frac{a}{i}} + e^{-\frac{a}{i}}\right)^2\left(e^{\frac{b}{i}} - e^{-\frac{b}{i}}\right)^2 + \left(e^{\frac{a}{i}} - e^{-\frac{a}{i}}\right)^2;$$

alia æquatio pro a, b, c (cuius membrum *secundum* facile ad formam *symmetricam* seu *invariabilem* reducitur).

Denique ex

$$\frac{\cos.\alpha}{\sin.\beta} = \frac{1}{2}(A + A^{-1})$$

atque

$$\frac{\cos.\beta}{\sin.\alpha} = \frac{1}{2}(B + B^{-1})$$

fit (per III.)

$$\cot.\alpha \cot.\beta = \frac{1}{2}\left(e^{\frac{c}{i}} + e^{-\frac{c}{i}}\right);$$

(æquatio pro α, β, c).

§. 32.

Restat adhuc modum *problemata* in S resolvendi breviter ostendere, quo (per exempla magis obvia) peracto, demum quid theoria hæcce præstet, candide dicetur.

Fig. 17. I. Sit $\overline{\mathfrak{ab}}$ linea in plano, et $y=f(x)$ æquatio eius (pro coordinatis perpendicularibus), et quodvis incrementum ipsius z dicatur dz, atque incrementa ipsorum x, y, et areæ u, eidem dz respondentia, respective per dx, dy, du denotentur; sitque $\mathfrak{bh} \parallel \mathfrak{cf}$, et exprimatur (ex §§. 31. et 27.) $\frac{\mathfrak{bh}}{dx}$ per y, ac quæratur ipsius $\frac{dy}{dx}$ *limes* tendente dx ad limitem o, (quod, ubi eiusmodi limes quæritur, subintelligatur): innotescet exinde etiam limes ipsius $\frac{dy}{\mathfrak{bh}}$, adeoque tg. $\mathfrak{hbg}$; eritque, (cum $\mathfrak{hbc}$ manifesto nec $>$ nec $<$ adeoque $= R$ sit), *tangens* in $\mathfrak{b}$ ipsius $\mathfrak{bg}$ per y determinata.

II. Demonstrari potest, esse

$$\frac{dz^2}{dy^2+\mathfrak{bh}^2} \sim 1.$$

Hinc *limes* ipsius $\frac{dz}{dx}$, et inde z integratione (per x expressum) reperitur.

Et potest lineæ cuiusvis *in concreto datae* æquatio in S inveniri, ex. gr. ipsius L

Si enim $\mathfrak{am}$ axis ipsius L sit; tum quævis $\overline{\mathfrak{cb}}$ ex $\mathfrak{am}$ secat L (cum per §. 19 quævis recta ex $\mathfrak{a}$ præter $\overline{\mathfrak{am}}$ ipsum L secet); est vero (si $\mathfrak{bn}$ axis sit)

$$X = 1 : \sin. \mathfrak{cbn} \quad (\S.\ 28.),$$

atque

$$Y = \cot. \tfrac{1}{2}\, \mathfrak{cbn} \quad (\S.\ 29.),$$

unde fit

$$Y = X + \sqrt{X^2 - 1}$$

seu

$$e^{\frac{y}{i}} = e^{\frac{x}{i}} + \sqrt{e^{\frac{2x}{i}} - 1}$$

æquatio quæsita. Erit hinc

$$\frac{dy}{dx} \backsim X(X^2-1)^{-\frac{1}{2}};$$

atqui

$$\frac{\mathfrak{bh}}{dx} = 1 : \sin.\mathfrak{cbn} = X;$$

adeoque

$$\frac{dy}{\mathfrak{bh}} \backsim (X^2-1)^{-\frac{1}{2}};$$

$$1+\frac{dy^2}{\mathfrak{bh}^2} \backsim X^2(X^2-1)^{-1},$$

$$\frac{dz^2}{\mathfrak{bh}^2} \backsim X^2(X^2-1)^{-1},$$

$$\frac{dz}{\mathfrak{bh}} \backsim X(X^2-1)^{-\frac{1}{2}}$$

atque

$$\frac{dz}{dx} \backsim X^2(X^2-1)^{-\frac{1}{2}};$$

unde per integrationem invenitur

$$z = i(X^2-1)^{\frac{1}{2}} = i \cot.\mathfrak{cbn}$$

(uti §. 30.).

III. Manifesto

$$\frac{du}{dx} \backsim \frac{\mathfrak{hfcbh}}{dx},$$

quod (nonnisi ab y dependens) iam primum per y exprimendum est; unde u integrando prodit.

Si $ab=p$, $ac=q$, et $\mathfrak{cd}=r$, atque $\mathfrak{cabdc}=s$ sit; poterit (uti in II.) ostendi esse Fig. 12.

$$\frac{ds}{dq} \backsim r,$$

quod

$$= \frac{1}{2}\, p\left(e^{\frac{q}{i}} + e^{-\frac{q}{i}}\right),$$

atque integrando

$$s = \frac{1}{2}\, pi\left(e^{\frac{q}{i}} - e^{-\frac{q}{i}}\right).$$

Potest hoc absque integratione quoque deduci.

Aequatione e. g. circuli (ex §. 31, III.), rectæ (ex §. 31, II.), sectionis coni (per præc.) expressis; poterunt areæ quoque his lineis clausæ exprimi.

Palam est, superficiem t ad figuram planam p (in distantia q) || lam esse ad p in ratione potentiarum secundarum linearum homologarum, sive uti

$$\frac{1}{4}\left(e^{\frac{q}{i}}+e^{-\frac{q}{i}}\right)^2 : 1.$$

Porro computum soliditatis pari modo tractatum, facile patet duas integrationes requirere (cum et differentiale ipsum hic nonnisi per integrationem determinetur); et ante omnia solidum a p et t ac complexu omnium rectarum ad p perpendicularium, fines ipsorum p, t connectentium, clausum quærendum esse. Reperitur solidum istud (tam per integrationem quam sine ea)

$$=\frac{1}{8}pi\left(e^{\frac{2q}{i}}-e^{-\frac{2q}{i}}\right)+\frac{1}{2}pq.$$

Superficies quoque corporum is S determinari possunt, nec non *curvaturae*, *evolutae*, *evolventesque* linearum qualiumvis &. Quod curvaturam attinet; ea in S aut ipsius L est, aut per radium circuli, aut *distantiam* curvæ ad rectam || læ ab hac recta, determinatur; cum e præcedentibus facile ostendi possit, præter L, lineas circulares, ac rectæ || las, nullas in plano alias lineas uniformes dari.

IV. Pro circulo est (uti in III.)

$$\frac{d\odot x}{dx} \sim \bigcirc x,$$

unde (per §. 30.) integrando fit

$$\odot x=\pi i^2\left(e^{\frac{x}{i}}-2+e^{-\frac{x}{i}}\right).$$

Fig. 9. V. Pro area $\mathfrak{cabdc}=u$ (linea L formi $\mathfrak{ab}=r$, huic || la $\mathfrak{cd}=y$, ac rectis $\mathfrak{ac}$, $\mathfrak{bd}=x$ clausa) est

$$\frac{du}{dx} \backsim y,$$

atque (§. 24.)

$$y = re^{-\frac{x}{i}};$$

adeoque (integrando)

$$u = ri\left(1 - e^{-\frac{x}{i}}\right).$$

Crescente x in infinitum, fiet in S $e^{-\frac{x}{i}} \backsim 0$, adeoque $u \backsim ri$. Per *quantitatem* ipsius mabn in posterum limes iste intelligetur.

Simili modo invenitur, quod si p sit figura in F; spatium a p et complexu axium e terminis ipsius p ductorum clausum $= \frac{1}{2}pi$ sit.

VI. Si angulus ad centrum segmenti z sphæræ sit $2u$, peripheria circuli maximi sit p, et arcus fc (anguli u) $= x$; erit (§. 25.) Fig. 10.

$$1 : \sin. u = p : \bigcirc \mathrm{bc},$$

et hinc

$$\bigcirc \mathrm{bc} = p \sin. u.$$

Interim est

$$x = \frac{pu}{2\pi}, \quad \text{ac} \quad dx = \frac{pdu}{2\pi}.$$

Est porro

$$\frac{dz}{dx} \backsim \bigcirc \mathrm{bc},$$

et hinc

$$\frac{dz}{du} \backsim \frac{p^2}{2\pi} \sin. u,$$

unde (integrando)

$$z = \frac{\sin. \text{vers. } u}{2\pi} p^2.$$

Cogitetur F in quod p (per meditullium f segmenti transiens) cadit; planis $\overline{\mathrm{fem}}$, $\overline{\mathrm{cem}}$ per af, ac ad F perpendiculariter positis, ipsumque in feg, ce secantibus; et considerentur L formis cd (ex c ad feg perpendicularis) nec non L formis cf; erit (§. 20.)

$$\mathrm{cef} = u,$$

et (§. 21.)

$$\frac{\mathrm{fd}}{p} = \frac{\sin. \text{vers. } u}{2\pi},$$

adeoque

$$z = \mathfrak{fd}.p.$$

Ast (§. 21.)

$$p = \pi.\mathfrak{fdg},$$

itaque

$$z = \pi.\mathfrak{fd}.\mathfrak{fdg}.$$

Est autem (§. 21.)

$$\mathfrak{fd}.\mathfrak{fdg} = \mathfrak{fc}.\mathfrak{fc};$$

consequ.

$$z = \pi.\mathfrak{fc}.\mathfrak{fc} = \odot\,\mathfrak{fc} \text{ in } F.$$

Fig. 14. Sit iam $b\mathfrak{j} = c\mathfrak{j} = r$; erit (§. 30.)

$$2r = i\,(Y - Y^{-1}),$$

adeoque (§. 21.)

$$\odot\,2r \text{ (in } F) = \pi i^2\,(Y - Y^{-1})^2.$$

Est quoque (IV.)

$$\odot\,2y = \pi i^2\,(Y^2 - 2 + Y^{-2});$$

igitur $\odot\,2r$ (in F) $= \odot\,2y$, adeoque *et superficies z segmenti sphaerici aequatur circulo, chorda* $\mathfrak{fc}$ *tanquam radio descripto.*

Hinc tota sphæræ superficies

$$= \odot\,\mathfrak{fg} = \mathfrak{fdg}.p = \frac{p^2}{\pi},$$

suntque superficies sphaerarum, uti secundae potentiae peripheriarum earundem maximarum.

VII. Soliditas sphæræ radii x in S reperitur simili modo

$$= \frac{1}{2}\pi i^3\,(X^2 - X^{-2}) - 2\pi i^2 x;$$

Fig. 12. superficies per revolutionem lineæ $\mathfrak{cd}$ circa $\mathfrak{ab}$ orta

$$= \frac{1}{2}\pi i p\,(Q^2 - Q^{-2}),$$

et corpus per $\mathfrak{cabdc}$ descriptum

$$= \frac{1}{4}\pi i^2 p\,(Q - Q^{-1})^2.$$

Quomodo vero omnia a (IV.) hucusque tractata etiam absque integratione perfici possint, brevitatis studio supprimitur.

Demonstrari potest, *omnis expressionis literam i continentis* (adeoque *hypothesi*, quod *detur i*, innixæ) *limitem, crescente i in infinitum, exprimere quantitatem plane pro Σ* (adeoque pro hypothesi *nullius i*), *siquidem non eveniant aequationes identicae.* Cave vero intelligas putari, *systema ipsum variari* posse (quod omnino *in se et per se determinatum* est) sed tantum *hypothesin*, quod *successive* fieri potest, donec non ad absurdum perducti fuerimus. *Posito* igitur, quod in *tali* expressione litera i pro casu, si S esset reipsa, *illam* quantitatem unicam designet, cuius $I=e$ sit; si vero *revera* Σ fuerit, *limes dictus* loco expressionis accipi *cogitetur*: manifesto *omnes* expressiones ex *hypothesi realitatis* ipsius S oriundæ (hoc sensu) *absolute valent*, etsi *prorsus ignotum sit, num Σ sit, aut non sit.*

Ita e. g. ex expressione in §. 30. obtenta facile (et quidem *tam* differentiationis auxilio, quam *absque* eo) valor notus pro Σ prodit

$$\bigcirc x = 2\pi x;$$

ex I. (§. 31.) rite tractato, sequitur

$$1 : \sin.\alpha = c : a;$$

ex II. vero

$$\frac{\cos.\alpha}{\sin.\beta} = 1, \text{ adeoque } \alpha + \beta = R;$$

æquatio *prima* in III. fit identica, adeoque *valet* pro Σ, quamvis nihil in eo *determinet*; ex *secunda* autem fluit

$$c^2 = a^2 + b^2.$$

Aequationes notae fundamentales trigonometriae planae in Σ.

Porro inveniuntur (ex §. 32.) pro Σ area et corpus in III., utrumque

$$= pq;$$

ex IV.

$$\odot x = \pi x^2;$$

ex VII. sphæra radii x

$$=\frac{4}{3}\pi x^3$$

&c.

Sunt quoque theoremata ad finem (VI.) enuntiata manifesto *inconditionate vera.*

§. 33.

Superest adhuc, quid theoria ista sibi velit, (in §. 32. promissum) exponere.

I. Num Σ aut S aliquod *reipsa* sit, indecisum manet.

II. Omnia ex hypothesi *falsitatis* Ax. XI. deducta (semper *sensu* §. 32. intelligendo) *absolute* valent, adeoque *hoc sensu nulli hypothesi innituntur.* Habetur idcirco *trigonometria plana a priori*, in qua *solum* systema *verum ignotum* adeoque solummodo *absolutae* magnitudines expressionum incognitæ manent, per *unicum* vero casum notum, manifesto totum systema figeretur. Trigonometria sphærica autem in §. 26. absolute stabilitur. (Habeturque Geometria, Geometriæ planæ in Σ prorsus analoga in F).

III. Si *constaret* Σ esse, nihil hoc respectu amplius incognitum esset; si vero *constaret non esse* Σ, tunc (§. 31.) (e. g.) e lateribus x, y et angulo rectilineo ab iis intercepto, in *concreto datis* manifesto in se et per se impossibile esset triangulum absolute resolvere (i. e.) a priori determinare angulos ceteros et *rationem lateris tertii* ad duo data; nisi X, Y determinentur, ad quod *in concreto* haberi aliquod a oporteret, cuius A notum esset; atque tum i *unitas naturalis longitudinum* esset, (sicuti e est basis logarithmorum naturalium). Si existentia huius i constiterit; quomodo ad usum saltem quam exactissime construi possit, ostendetur.

IV. Sensu in I. et II. exposito patet, omnia in spatio methodo recentiorum Analytica (intra iustos fines valde laudanda) absolvi posse.

V. Denique lectoribus benevolis haud ingratum futurum est; pro casu illo, quodsi non Σ sed S reipsa esset, circulo æquale rectilineum construi.

§. 34.

Ex $\mathfrak{d}$ *ducitur* $\mathfrak{dm} \,|||\, \mathfrak{an}$ *modo sequente.* Fig. 12.

Fiat ex $\mathfrak{d}$

$$\mathfrak{db} \perp \mathfrak{an};$$

erigatur e puncto quovis aliquo $\mathfrak{a}$ rectæ $\overline{\mathfrak{ab}}$

$$\mathfrak{ac} \perp \mathfrak{an} \text{ (in } \mathfrak{dba}\text{)},$$

et demittatur

$$\mathfrak{de} \perp \mathfrak{ac};$$

erit (§. 27.)

$$\bigcirc\, \mathfrak{ed} : \bigcirc\, \mathfrak{ab} = 1 : \sin. z,$$

siquidem *fuerit* $\mathfrak{dm} \,|||\, \mathfrak{bn}$.

Est vero $\sin. z$ non > 1, adeoque $\mathfrak{ab}$ non $> \mathfrak{de}$. Descriptus igitur quadrans radio ipsi $\mathfrak{de}$ æquali ex $\mathfrak{a}$ in $\mathfrak{bac}$, gaudebit puncto aliquo $\mathfrak{b}$ vel $\mathfrak{o}$ cum $\mathfrak{b}\bar{\mathfrak{d}}$ communi. Priore in casu manifesto $z = R$; in posteriore vero erit (§. 25.)

$$(\bigcirc\, \mathfrak{ao} = \bigcirc\, \mathfrak{ed}) : \bigcirc\, \mathfrak{ab} = 1 : \sin. \mathfrak{aob},$$

adeoque

$$z = \mathfrak{aob}.$$

Si itaque fiat $z = \mathfrak{aob}$, erit $\mathfrak{dm} \,|||\, \mathfrak{bn}$.

§. 35.

Si fuerit S reipsa; *ducetur recta ad anguli acuti crus unum perpendicularis, quae ad alterum* $|||$ *sit, hoc modo.* Fig. 18.

Sit $\mathfrak{am} \perp \mathfrak{bc}$, et accipiatur $\mathfrak{ab} = \mathfrak{ac}$ tam parvum (per §. 19.), ut si ducatur $\mathfrak{bn} \,|||\, \mathfrak{am}$ (§. 34.), sit $\mathfrak{abn} >$ angulo dato. Ducatur porro $\mathfrak{cp} \,|||\, \mathfrak{am}$ (§. 34.), fiantque $\mathfrak{nbq}$, $\mathfrak{pcd}$ utrumque æquale angulo dato; et $\mathfrak{b}\bar{\mathfrak{q}}$, $\mathfrak{c}\bar{\mathfrak{d}}$ se mutuo secabunt. Secet enim $\mathfrak{b}\bar{\mathfrak{q}}$, (quod *per constr.* in $\mathfrak{nbc}$ cadit) ipsam $\mathfrak{c}\bar{\mathfrak{p}}$ in $\mathfrak{e}$; erit (propter $\mathfrak{bn} \,\underline{\triangle}\, \mathfrak{cp}$) $\mathfrak{ebc} < \mathfrak{ecb}$, adeoque $\mathfrak{ec} < \mathfrak{eb}$. Sint

$$\mathfrak{ef} = \mathfrak{ec}, \quad \mathfrak{eft} = \mathfrak{ecd}, \quad \text{et} \quad \mathfrak{fs} \,|||\, \mathfrak{ep};$$

cadet $\mathfrak{fs}$ in $\mathfrak{bft}$. Nam cum $\mathfrak{bn} \,|||\, \mathfrak{cp}$, adeoque $\mathfrak{bn} \,|||\, \mathfrak{ep}$, atque $\mathfrak{bn} \,|||\, \mathfrak{fs}$ sit;

erit (§. 14.)
$$\mathfrak{fbn} + \mathfrak{bfs} < 2R = \mathfrak{fbn} + \mathfrak{bfr};$$

itaque $\mathfrak{bfs} < \mathfrak{bfr}$. Quamobrem $\mathfrak{f\bar{r}}$ secat $\mathfrak{e\bar{p}}$, adeoque $\mathfrak{c\bar{d}}$ quoque ipsam $\mathfrak{e\bar{q}}$ in puncto aliquo $\mathfrak{d}$.

Sit iam $\mathfrak{dg} = \mathfrak{dc}$, atque $\mathfrak{dgt} = \mathfrak{dcp} = \mathfrak{gbn}$; erit (cum $\mathfrak{cd} \simeq \mathfrak{gd}$ sit)
$$\mathfrak{bn} \simeq \mathfrak{gt} \simeq \mathfrak{cp}.$$

Si fuerit lineæ L formis ipsius $\mathfrak{bn}$, punctum in $\mathfrak{b\bar{q}}$ cadens $\mathfrak{k}$ (§. 19.), et axis $\mathfrak{kl}$; erit
$$\mathfrak{bn} \simeq \mathfrak{kl},$$
adeoque
$$\mathfrak{bkl} = \mathfrak{bgt} = \mathfrak{dcp};$$
sed etiam
$$\mathfrak{kl} \simeq \mathfrak{cp}:$$

cadit ergo $\mathfrak{k}$ manifesto in $\mathfrak{g}$, estque $\mathfrak{gt} \parallel\!| \mathfrak{bn}$. Si vero $\mathfrak{ho}$ ipsum $\mathfrak{bg}$ perpendiculariter bisecet; erit $\mathfrak{ho} \parallel\!| \mathfrak{bn}$ constructum.

§. 36.

Fig. 10. Si fuerint data recta $\mathfrak{c\bar{p}}$ et planum $\widehat{\mathfrak{mab}}$, atque fiat $\mathfrak{cb} \perp \widehat{\mathfrak{mab}}$, (in $\widehat{\mathfrak{bcp}}$) $\mathfrak{bn} \perp \mathfrak{bc}$, et $\mathfrak{cq} \parallel\!| \mathfrak{bn}$ (§. 34.); *sectio ipsius* $\mathfrak{c\bar{p}}$ (si hæc in $\mathfrak{bcq}$ cadat) *cum* $\mathfrak{b\bar{n}}$ (in $\widehat{\mathfrak{cbn}}$), adeoque *cum* $\widehat{\mathfrak{mab}}$ reperitur. Et si fuerint data duo plana $\widehat{\mathfrak{pcq}}$, $\widehat{\mathfrak{mab}}$, et sit $\mathfrak{cb} \perp \widehat{\mathfrak{mab}}$, $\mathfrak{cr} \perp \widehat{\mathfrak{pcq}}$, atque (in $\widehat{\mathfrak{bcr}}$) $\mathfrak{bn} \perp \mathfrak{bc}$, $\mathfrak{cs} \perp \mathfrak{cr}$; cadent $\mathfrak{bn}$ in $\widehat{\mathfrak{mab}}$, et $\mathfrak{cs}$ in $\widehat{\mathfrak{pcq}}$; et sectione ipsarum $\mathfrak{b\bar{n}}$, $\mathfrak{c\bar{s}}$ (si detur) reperta, erit perpendicularis in $\mathfrak{pcq}$ per eandem ad $\mathfrak{c\bar{s}}$ ducta manifesto *sectio ipsorum* $\widehat{\mathfrak{mab}}$, $\widehat{\mathfrak{pcq}}$.

§. 37.

Fig. 7. *In* $\mathfrak{\bar{a}\bar{m}} \parallel\!| \mathfrak{bn}$ reperitur *tale* $\mathfrak{a}$, *ut sit* $\mathfrak{am} \simeq \mathfrak{bn}$; si (per §. 34.) construatur extra $\widehat{\mathfrak{nbm}}$ $\mathfrak{gt} \parallel\!| \mathfrak{bn}$, et fiant $\mathfrak{bg} \perp \mathfrak{gt}$, $\mathfrak{gc} = \mathfrak{gb}$, atque $\mathfrak{cp} \parallel\!| \mathfrak{gt}$; ponaturque $\mathfrak{tg\bar{d}}$ ita, ut efficiat cum $\mathfrak{tg\bar{b}}$ angulum illi æqualem, quem $\mathfrak{pc\bar{a}}$ cum $\mathfrak{pc\bar{b}}$ facit; atque quæratur (per §. 36.) sectio $\mathfrak{\bar{d}q}$ ipsorum $\mathfrak{tg\bar{d}}$, $\mathfrak{nb\bar{a}}$; fiatque

$\mathfrak{ba} \perp \mathfrak{dq}$. Erit enimvero ob triangulorum L lineorum in F ipsius $\mathfrak{bn}$ exortorum similitudinem (§. 21.) manifesto $\mathfrak{db} = \mathfrak{da}$, et $\mathfrak{am} \simeq \mathfrak{bn}$.

Facile hinc patet (L lineis per *solos terminos* datis) reperiri posse etiam *terminos* proportionis quartum ac medium, atque omnes constructiones geometricas, quæ in Σ in plano fiunt, hoc modo in F *absque XI. Axiomate* perfici posse. Ita e. g. $4R$ in quotvis partes æquales geometrice dividi potest, si sectionem istam in Σ perficere licet.

§. 38.

Si construatur (per §. 37.) e. g. $\mathfrak{nbq} = \frac{1}{3} R$, et fiat (per §. 35.) in S ad $\mathfrak{b\bar{q}}$ perpendicularis $\mathfrak{am} \parallel \mathfrak{bn}$, atque determinetur (per §. 37.) $\mathfrak{jm} \simeq \mathfrak{bn}$; erit, si $\mathfrak{ja} = x$ sit, (§. 28.) Fig. 14.

$$X = 1 : \sin. \frac{1}{3} R = 2,$$

atque x *geometrice* constructum.

Et potest $\mathfrak{nbq}$ ita computari, ut $\mathfrak{ja}$ ab i quovis dato minus discrepet, çum nonnisi $\sin. \mathfrak{nbq} = \frac{1}{e}$ esse debeat.

§. 39.

Si fuerint (in plano) $\mathfrak{pq}$ et $\mathfrak{st}$, $\parallel$ rectæ $\mathfrak{mn}$ (§. 27.), et $\mathfrak{ab}$, $\mathfrak{cd}$ sint perpendiculares ad $\mathfrak{mn}$ æquales; manifesto est Fig. 19.

$$\triangle \mathfrak{dec} \equiv \triangle \mathfrak{bea},$$

adeoque anguli (forsan mixtilinei) $\mathfrak{ecp}$, $\mathfrak{eat}$ congruent, atque

$$\mathfrak{ec} = \mathfrak{ea}.$$

Si porro $\mathfrak{cf} = \mathfrak{ag}$, erit

$$\triangle \mathfrak{acf} \equiv \triangle \mathfrak{cag},$$

et utrumque *quadrilateri* $\mathfrak{fagc}$ dimidium est. Si $\mathfrak{fagc}$, $\mathfrak{hagk}$ duo eiusmodi quadrilatera fuerint ad $\mathfrak{ag}$, inter $\mathfrak{pq}$ et $\mathfrak{st}$; æqualitas eorum (uti apud EUCLIDEM), nec non triangulorum $\mathfrak{agc}$, $\mathfrak{agh}$ eidem $\mathfrak{ag}$ insistentium, verticesque in $\overline{\mathfrak{pq}}$ habentium, æqualitas patet. Est porro

$$\mathfrak{acf} = \mathfrak{cag}, \quad \mathfrak{gcq} = \mathfrak{cga},$$

atque

$$\mathfrak{acf} + \mathfrak{acg} + \mathfrak{gcq} = 2R$$

(§. 32.), adeoque etiam

$$\mathfrak{cag} + \mathfrak{acg} + \mathfrak{cga} = 2R;$$

itaque in quovis eiusmodi triangulo $\mathfrak{acg}$ summa trium angulorum $= 2R$.

Sive in $\mathfrak{ag}$ (quæ $\|$ $\mathfrak{mn}$) ceciderit autem *recta* $\mathfrak{ag}$, sive non; triangulorum *rectilineorum* $\mathfrak{agc}$, $\mathfrak{agh}$ *tam ipsorum, quam summarum angulorum ipsorumdem, aequalitas* in aperto est.

§. 40.

Fig. 20. *Aequalia triangula* $\mathfrak{abc}$, $\mathfrak{abd}$ *(abhinc rectilinea) uno latere aequali gaudentia, summas angulorum aequales habent.*

Nam dividat $\mathfrak{mn}$ bifariam tam $\mathfrak{ac}$ quam $\mathfrak{bc}$, et sit $\mathfrak{pq}$ (per $\mathfrak{c}$) $\|$ $\mathfrak{mn}$; cadet $\mathfrak{d}$ in $\overline{\mathfrak{pq}}$. Nam si $\overline{\mathfrak{bd}}$ ipsum $\overline{\mathfrak{mn}}$ in puncto $\mathfrak{e}$, adeoque (§. 39.) ipsum $\overline{\mathfrak{pq}}$ ad distantiam $\mathfrak{ef} = \mathfrak{eb}$ secet; erit

$$\triangle\, \mathfrak{abc} = \triangle\, \mathfrak{abf},$$

adeoque et

$$\triangle\, \mathfrak{abd} = \triangle\, \mathfrak{abf},$$

unde $\mathfrak{d}$ in $\mathfrak{f}$ cadit: si vero $\overline{\mathfrak{bd}}$ ipsum $\overline{\mathfrak{mn}}$ non secuerit, sit $\mathfrak{c}$ punctum, ubi perpendicularis rectam $\mathfrak{ab}$ bisecans ipsum $\overline{\mathfrak{pq}}$ secat, atque $\mathfrak{gs} = \mathfrak{ht}$ ita, ut $\overline{\mathfrak{st}}$ *productam* $\overline{\mathfrak{bd}}$ in puncto aliquo $\mathfrak{k}$ secet (quod fieri posse modo simili patet, ut §. 4.); sint porro $\mathfrak{sl} = \mathfrak{sa}$, $\mathfrak{lo}$ $\|$ $\mathfrak{st}$, atque $\mathfrak{o}$ sectio ipsorum $\overline{\mathfrak{bk}}$ et $\overline{\mathfrak{lo}}$; esset tum (§. 39.)

$$\triangle\, \mathfrak{abl} = \triangle\, \mathfrak{abo},$$

adeoque

$$\triangle\, \mathfrak{abc} > \triangle\, \mathfrak{abd}$$

(contra hyp.).

§. 41.

Aequalia triangula abc, def *aequalibus angulorum summis gaudent.* Fig. 21.

Nam secet mn tam ac quam bc, ita pq tam df quam fe bifariam, et sit rs ∥ mn, atque to ∥ pq; erit perpendicularis ag ad rs aut æqualis perpendiculari dh ad to, aut altera e. g. dh erit maior: in quovis casu ○ df e centro a cum gs punctum aliquod k commune habet, eritque (§. 39.)

$$\triangle \mathrm{abk} = \triangle \mathrm{abc} = \triangle \mathrm{def}.$$

Est vero △ akb (per §. 40.) triangulo dfe, ac (per §. 39.) triangulo abc *aequiangulum*. Sunt igitur etiam triangula abc, def æquiangula.

In *S converti* quoque theorema potest. Sint enim triangula abc, def reciproce æquiangula, atque △ bal = △ def; erit (per præc.) alterum alteri, adeoque etiam △ abc triangulo abl æquiangulum, et hinc manifesto

$$\mathrm{bcl} + \mathrm{blc} + \mathrm{cbl} = 2R.$$

Atqui (ex §. 31.) cuiusvis trianguli angulorum summa in S est $< 2R$: cadit igitur l in c.

§. 42.

Si fuerit complementum summae angulorum trianguli abc *ad* $2R$ Fig. 22.

$$u,$$

trianguli def *vero*

$$v;$$

est

$$\triangle \mathrm{abc} : \triangle \mathrm{def} = u : v.$$

Nam si quodvis triangulorum acg, gch, hcb, dfk, kfe sit $= p$, atque

$$\triangle \mathrm{abc} = mp, \quad \triangle \mathrm{def} = np;$$

sitque s summa angulorum cuiusvis trianguli, quod $= p$ est: erit manifesto

$$2R - u = ms - (m-1)2R = 2R - m(2R - s),$$

et

$$u = m(2R - s),$$

et pariter

$$v = n(2R - s).$$

Est igitur

$$\triangle\, \mathfrak{abc} : \triangle\, \mathfrak{def} = m : n = u : v.$$

Ad casum incommensurabilitatis triangulorum $\mathfrak{abc}$, $\mathfrak{def}$ quoque extendi facile patet.

Eodem modo demonstratur triangula in superficie sphærica esse uti *excessus* summarum angulorum eorundem supra $2R$. Si duo anguli trianguli sphærici recti fuerint, tertius z erit excessus dictus; est autem triangulum istud (peripheria maxima p dicta) manifesto

$$= \frac{z}{2\pi} \, \frac{p^2}{2\pi} \quad (\text{§. 32. VI.});$$

consequenter quodvis triangulum, cuius angulorum excessus $= z$, est

$$= \frac{zp^2}{4\pi^2}.$$

§. 43.

Fig. 15. Iam *area* trianguli rectilinei in S per summam angulorum exprimetur.

Si $\mathfrak{ab}$ crescat in infinitum; erit (§. 42.)

$$\triangle\, \mathfrak{abc} : (R - u - v)$$

constans. Est vero

$$\triangle\, \mathfrak{abc} \rightharpoonup \mathfrak{bacn} \quad (\text{§. 32. V.})$$

et

$$R - u - v \rightharpoonup z \quad (\text{§. 1.});$$

adeoque

$$\mathfrak{bacn} : z = \triangle\, \mathfrak{abc} : (R - u - v) = \mathfrak{bac'n'} : z'.$$

Est porro manifesto

$$\mathfrak{bdcn} : \mathfrak{bd'c'n'} = r : r' = \text{tang.}\, z : \text{tang.}\, z' \quad (\text{§. 30.}).$$

Pro $y' \frown 0$ autem est

$$\frac{\mathfrak{bd'c'n'}}{\mathfrak{bac'n'}} \frown 1,$$

nec non

$$\frac{\text{tang.}\, z'}{z'} \frown 1;$$

consequ.

$$\mathfrak{bdcn} : \mathfrak{bacn} = \text{tang.}\, z : z.$$

Erat vero (§. 32.)

$$\mathfrak{bdcn} = ri = i^2 \,\text{tang.}\, z;$$

est igitur

$$\mathfrak{bacn} = zi^2.$$

Quovis triangulo, cuius angulorum summæ complementum ad $2R$ z est, in posterum breviter $\triangle$ dicto, erit idcirco

$$\triangle = zi^2.$$

Facile hinc liquet, quod si Fig. 14.

$$\mathfrak{or} \parallel\!| \mathfrak{am} \quad \text{et} \quad \mathfrak{ro} \parallel\!| \mathfrak{ab}$$

fuerint; *area* inter $\widetilde{\mathfrak{or}}$, $\widetilde{\mathfrak{st}}$, $\widetilde{\mathfrak{bc}}$ comprehensa (quæ manifesto limes absolutus est areæ triangulorum rectilineorum sine fine crescentium, seu ipsius $\triangle$ pro $z \frown 2R$), sit

$$= \pi i^2 = \odot i \text{ in } F.$$

Limite isto per $\square$ denotato, erit porro (per §. 30.) Fig. 15.

$$\begin{aligned} \pi r^2 &= \text{tang.}\, z^2 \square = \odot r \text{ in } F \text{ (§. 21.)} \\ &= \odot s \text{ (per §. 32. VI.)}, \end{aligned}$$

si chorda $\mathfrak{dc}$ s dicatur. Si iam radio dato s, circuli in plano (sive radio L formi circuli in F) perpendiculariter bisecto, construatur (per §. 34.) $\mathfrak{db} \parallel\!| \simeq \mathfrak{cn}$; demissa perpendiculari $\mathfrak{ca}$ ad $\mathfrak{db}$, et erecta perpendiculari $\mathfrak{cm}$ ad $\mathfrak{ca}$; habebitur z; unde (per §. 37.) tang. z^2, radio L formi ad lubitum pro unitate assumto, *geometrice determinari potest per duas lineas uniformes eiusdem curvaturae* (quæ solis terminis datis, constructis axibus, manifesto tanquam rectæ commensurari, atque hoc respectu rectis æquivalentes spectari possunt).

Fig. 23. Porro construitur quadrilaterum ex. gr. regulare $=\square$, ut sequitur. Sit

$$\mathfrak{abc}=R,\ \mathfrak{bac}=\frac{1}{2}R,\ \mathfrak{acb}=\frac{1}{4}R,\ \text{et}\ \mathfrak{bc}=x;$$

poterit X (ex §. 31. II.) per meras radices quadraticas exprimi, et (per §. 37.) construi: habitoque X, (per §. 38., sive etiam 29. et 35.) x ipsum determinari potest. Estque octuplum $\triangle\,\mathfrak{abc}$ manifesto $=\square$, atque *per hoc, circulus planus radii s, per figuram rectilineam, et lineas uniformes eiusdem generis (rectis, quoad comparationem inter se, aequivalentes) geometrice quadratus*; *circulus F formis vero eodem modo complanatus*: *habeturque aut Axioma XI. Euclidis verum, aut quadratura circuli geometrica*; etsi hucusque indecisum manserit, quodnam ex his duobus revera locum habeat. Quoties tang. z^2 *vel* numerus integer *vel* fractio rationalis fuerit, cuius (ad simplicissimam formam reductæ) denominator *aut* numerus primus formæ 2^m+1 (cuius est etiam $2=2^0+1$) *aut* productum fuerit e quotcunque primis huius formæ, quorum (ipsum 2, qui solus quotvis vicibus occurrere potest, excipiendo) quivis *semel* ut factor occurrit: per theoriam polygonorum ill. *GAUSS* (præclarum nostri imo omnis ævi inventum), etiam ipsi tang. $z^2\,\square=\odot\,s$ (et nonnisi pro talibus valoribus ipsius z) figuram rectilineam æqualem constituere licet. Nam *divisio* ipsius $\square$ (theoremate §. 42. facile ad quælibet polygona extenso) manifesto *sectionem* ipsius $2R$ requirit, quam (ut ostendi potest) unice sub dicta conditione geometrice perficere licet. In omnibus autem talibus casibus præcedentia facile ad scopum perducent. Et potest quævis figura rectilinea in polygonum regulare n laterum geometrice converti, siquidem n sub formam *GAUSSianam* cadat.

Superesset denique, (ut res omni numero absolvatur), impossibilitatem (absque suppositione aliqua) decidendi, num Σ aut aliquod (et quodnam) S sit, demonstrare: quod tamen occasioni magis idoneæ reservatur.

WOLFGANGI BOLYAI
ADDITAMENTUM AD APPENDICEM.

Denique *aliquid Auctori Appendicis proprium, coronidis instar*, addere fas sit: qui tamen ignoscat, si quid non acu eius tetigerim.

Res breviter in eo consistit: *formulae trigonometriae sphaericae*, in Appendice dicta ab axiomate XI. Eucl. independenter demonstratæ, *cum formulis trigonometriae planae conveniunt, si* (modo statim dicendo) *latera trianguli sphaerici realia, rectilinei vero imaginaria accipiantur*; adeo ut quoad formulas trigonometricas planum ut sphæra imaginaria considerari possit, si pro reali illa accipiatur, in qua sin. $R=1$.

Pro casu, si axioma Eucl. verum non fuerit, demonstratur (Appendix §. 30.) dari certum i, pro quo ibidem dictum I est $= e$ (basi logarithmorum naturalium), atque pro hoc casu formulæ trigonometriæ planæ quoque demonstrantur (ibidem §. 31.); et quidem ita, ut (iuxta §. 32., post VII., ibidem) formulæ et pro casu veritatis axiomatis dicti valeant; nempe si supponendo, quod $i \rightharpoondown \infty$, limites valorum accipiantur; nimirum systema Euclideum est quasi limes systematis antieuclidei (pro $i \rightharpoondown \infty$). Ponatur, pro casu existentis i, unitas $= i$, atque conceptus *sinus cosinusque* extendatur et ad arcus imaginarios; ita ut arcum sive realem sive imaginarium denotet p, dicatur

$$\frac{1}{2}\left(e^{p\sqrt{-1}} + e^{-p\sqrt{-1}}\right)$$

cosinus ipsius p, et

$$\frac{1}{2\sqrt{-1}}\left(e^{p\sqrt{-1}} - e^{-p\sqrt{-1}}\right)$$

dicatur sinus ipsius p.

Erit hinc pro q reali

$$\frac{1}{2\sqrt{-1}}(e^q - e^{-q}) = \frac{1}{2\sqrt{-1}}(e^{-q\sqrt{-1}\sqrt{-1}} - e^{q\sqrt{-1}\sqrt{-1}}) =$$
$$= \sin.(-q\sqrt{-1}) = -\sin.q\sqrt{-1}$$

Ita

$$\frac{1}{2}(e^q + e^{-q}) = \frac{1}{2}(e^{-q\sqrt{-1}\sqrt{-1}} + e^{q\sqrt{-1}\sqrt{-1}}) =$$
$$= \cos.(-q\sqrt{-1}) = \cos.q\sqrt{-1};$$

si nempe et in circulo imaginario sinus negativi arcus sinui arcus positivi alioquin priori æqualis sit, præterquam quod negativus sit, atque cosinus arcus positivi et negativi (si alioquin æquales fuerint), sit idem.

In Appendice dicta §. 25. demonstratur absolute, id est ab axiomate dicto independenter; quod in quovis triangulo rectilineo *sinus angulorum sint, uti peripheriae radiorum lateribus oppositis aequalium;* demonstraturque porro, pro casu existentis i, peripheriam radii y esse

$$= \pi i (e^{\frac{y}{i}} - e^{-\frac{y}{i}}),$$

quod pro $i=1$ fit

$$\pi(e^y - e^{-y}).$$

Itaque (§. 31. ibidem) pro triangulo rectilineo rectangulo, cuius catheti sunt a et b, hypotenusa c, et anguli lateribus a, b, c oppositi sunt α, β, π; est (pro ($i=1$)

in I.

$$1 : \sin.\alpha = \pi(e^c - e^{-c}) : \pi(e^a - e^{-a});$$

adeoque

$$1 : \sin.\alpha = \frac{1}{2\sqrt{-1}}(e^c - e^{-c}) : \frac{1}{2\sqrt{-1}}(e^a - e^{-a}).$$

Unde

$$1 : \sin.\alpha = -\sin.c\sqrt{-1} : -\sin.a\sqrt{-1}.$$

Et hinc

$$1 : \sin.\alpha = \sin.c\sqrt{-1} : \sin.a\sqrt{-1}.$$

In II. fit

$$\cos.\alpha : \sin.\beta = \cos.a\sqrt{-1} : 1.$$

In III. fit

$$\cos.c\sqrt{-1} = \cos.a\sqrt{-1}\cos.b\sqrt{-1}.$$

Quæ prouti omnes exinde promanantes formulæ trigonometriæ planæ, cum formulis trigonometriæ sphæricæ prorsus conveniunt; nisi quod si ex. gr. trianguli sphærici rectanguli quoque catheti angulique iis oppositi, hypotenusaque nomina eadem sortiantur, latera trianguli rectilinei per $\sqrt{-1}$ dividenda sint, ut formulæ pro sphæricis prodeant.

Nempe ex I. fiet

$$1 : \sin.\alpha = \sin.c : \sin.a,$$

ex II. fiet

$$1 : \cos.a = \sin.\beta : \cos.\alpha,$$

ex III. fiet

$$\cos.c = \cos.a\cos.b.$$

Quum ceteris supersedere liceat, et lectorem deduction (App. §. 32. post VII.) omissa offendi impedirique expertus sim: haud abs re erit ostendere, quomodo ex. gr. ex

$$e^{\frac{c}{i}} + e^{-\frac{c}{i}} = \frac{1}{2}\left(e^{\frac{a}{i}} + e^{-\frac{a}{i}}\right)\left(e^{\frac{b}{i}} + e^{-\frac{b}{i}}\right)$$

sequatur

$$c^2 = a^2 + b^2$$

(theorema Pythagoreum pro systemate Euclideo); verosimiliter Auctor quoque ita deduxit, et ceteræ quoque eodem modo sequuntur.

Est nempe potentiis ipsius e per series expressis

$$e^{\frac{k}{i}} = 1 + \frac{k}{i} + \frac{k^2}{2i^2} + \frac{k^3}{2.3i^3} + \frac{k^4}{2.3.4i^4} + \cdots$$

$$e^{-\frac{k}{i}} = 1 - \frac{k}{i} + \frac{k^2}{2i^2} - \frac{k^3}{2.3i^3} + \frac{k^4}{2.3.4i^4} - \cdots;$$

adeoque

$$e^{\frac{k}{i}} + e^{-\frac{k}{i}} = 2 + \frac{k^2}{i^2} + \frac{k^4}{3.4i^4} + \cdots$$

$$= 2 + \frac{k^2 + u}{i^2},$$

(si omnium terminorum post $\frac{k^2}{i^2}$ summa $\frac{u}{i^2}$ dicatur); estque $u \frown 0$, dum $i \frown \infty$. Nam multiplicentur omnes termini post $\frac{k^2}{i^2}$ per i^2; erit terminus primus $\frac{k^4}{3 \cdot 4 i^2}$, et quivis exponens $< \frac{k^2}{i^2}$; essetque etsi exponens ubique hic maneret, summa

$$\frac{k^4}{3 \cdot 4 i^2} : \left(1 - \frac{k^2}{i^2}\right) = \frac{k^4}{3 \cdot 4 (i^2 - k^2)},$$

quod manifesto $\frown 0$, dum $i \frown \infty$.

Atque ex

$$e^{\frac{c}{i}} + e^{-\frac{c}{i}} = \frac{1}{2}\left(e^{\frac{a+b}{i}} + e^{-\frac{a+b}{i}} + e^{\frac{a-b}{i}} + e^{-\frac{a-b}{i}}\right)$$

sequitur (pro ω, v, λ adinstar u acceptis)

$$2 + \frac{c^2 + \omega}{i^2} = 1 + \frac{(a+b)^2 + v}{2 i^2} + 1 + \frac{(a-b)^2 + \lambda}{2 i^2}.$$

Atque hinc

$$c^2 = \frac{1}{2}(a^2 + 2ab + b^2 + a^2 - 2ab + b^2 + v + \lambda - 2\omega),$$

quod

$$\frown a^2 + b^2.$$

Scholion. Sphæræ illius, in qua sinus totus est $1 = i$, radius est ordinata y lineæ L formis ipsi $i = 1$ æqualis, ad axem per unam extremitatem ex altera perpendiculariter missa. Nempe *in superficie* (App. §. 21.) *F dicta, tota Geometria Euclidea valet, lineis L vicem rectarum subeuntibus*: atque pro radio L formi $= 1$, qui sinus totus in F erit, peripheriæ eiusdem radius in plano erit plane dictum y; quod ad sphæram imaginariam, ad quam planum (in systemate antieuclideo) revocatur, facile applicatur.

EGY KIS TOLDALÉK

ÉS

JELENTÉS.

EGY KIS TOLDALÉK A' DÉÁK ELSŐ KÖTETHEZ.

(ADDITAMENTA QUAEDAM AD TOMUM I. LATINUM.) *

A' kik ezen két darabból álló Deák munkára előre fizettek, 2. Rhf. 30 xrt. ezüstben; *neveik itt következnek*: a' *tsak felirtak közül is azok, nem különben mások is*, a' kik netalám ezután fizetni fognak, a' második darabba fognak ki nyomtattatni.

*

T.	T. Antal János Professor és Gen. Notarius	1	példány
T.	Artz Károly Professor Szebenben	1	«
M.	Angustinovits Pál Gub. Cons.	1	«
	Áts Sándor N. Enyedi Tog.	1	«
M.	Balási Jó'sef K. Tábla Biró	1	«
T.	Barabás Miklós Képiró	1	«
M.	Barcsai János Gub. Cons.	1	«
	Bárdi István Theol. Candidat.	1	«
	Bartha Dániel N. Enyedi Tog.	1	«
T.	Benedek István Nevelő	1	«
T.	Benkő Ferencz Ügyvéd	1	«
G.	Bethlen Ádám	16	«
G.	Bethlen Ferentz	3	«
	Birthler Friedrik	1	«
G.	Bethlen Gergely	2	«
G.	Bethlen László R. T. Cancell.	1	«
G.	Bethlen János	1	«
G.	Bethlen János R. T. Cancell.	1	«
T.	Bod Péter Jurium Insp.	1	«
	Borsos Márton Med. Candidat.	1	«
	Borsos Márton N. Enyedi Tog.	1	«
T.	Brassai Sámuel Nevelő	1	«
	Bugyul Elek N. Enyedi Tog.	1	«
G.	Degenfeld Pál	1	«
	Dobai Pál N. Enyedi Tog	1	«

* De hac re vide pagg. 436–437.

M.	Filep Jó'sef Vice Director	1	példány
	Fülöp Elek N. Enyedi Tog.	1	«
M.	Gál László Ország Directora	1	«
T.	Gyergyai Ferentz	1	«
T.	Gazda János Inspector	1	«
M.	Katona Miklós	1	«
B.	Kemény Domokos Fő Biró	1	«
B.	Kemény Pál Kollégyom Curátora	3	«
G.	Kemény Sámuel	1	«
G.	Kornis Mihály Thes. Cons.	1	«
	Mihályi Károly N. Enyedi Tog.	1	«
T.	Moos István Ügyvéd	1	«
T.	Nagy János Ügyvéd	1	«
M.	Pávai Elek K. Tábla Biró	1	«
T.	Pávai Jó'sef Inspector	1	«
T.	Pető Jó'sef R. T. Cancell.	1	«
T.	T. Pétzeli Jó'sef Professor Debretzenben	1	«
	Posoni Gergely N. Enyedi Tog.	1	«
T.	Raff Mihály Ügyvéd	1	«
G.	Rhédei Ádám Fő Ispány és Koll. Fő Curátora	1	«
T.	Salánki Lajos Prédikátor	1	«
T.	Siko István K. Tábla Archivariussa	1	«
T.	Szász Károly Professor N. Enyeden	1	«
N.	M. Székely Mihály K. Tábla Præsesse	2	«
	Szentpáli 'Sigmond N. Enyedi Tog.	1	«
T.	Szabó György R. T. Cancell.	1	«
T.	Szilágyi Jó'sef Ügyvéd	3	«
T.	Szonnyi Pál Debretzenben	1	«
T.	Szöts Mihály	1	«
T.	Szöllösi Pál Gub. Cancell.	1	«
G.	Teleki Domokos	26	«
G.	Teleki Imre	1	«
T.	Tétsi Ferentz Nevelő	1	«
G.	Toldalagi Ferentz	1	«
G.	Toldalagi 'Sigmond Koll. Fő Curatora	2	«
	Toth Ferentz N. Enyedi Tog.	1	«
T.	Török Pál Debretzenben	1	«
M.	Zeyk Dániel Gub. Cons. és Koll. Fő Curátora	10	«
M.	Zeyk János	1	«
M.	Zeyk Jó'sef	1	«
M.	Zeyk Miklos	1	«

T. Zoványi Sámuel R. Tab. Cancell.	1	példány
T. Jakab György	1	«
T. Vállyi Károly Posta Mester	1	«
T. Vajda Dániel Nevelő	1	«

*

Ezeken kivűl fő inditója és segitője ezen munka kiadásának elfelejthetlen kedves baráttá lett tanítványom *Med. D. Bögözi Jakab Lajos* vólt; ki is jobb kezemet kérve előre, hogy kérését telyesítem, öt száz Váltó Rhftot adott által, azt mondván, hogy a' *Haznak adja*. Mekkora kár az ő elvesztése, azok tudják, a' kik őt' esmerték: az emberiségért buzgó szíve, elméjének tsendes tiszta világa, könnyű felfogása, 's alapos mély nézése, 's minden fitogatástól 's füsttől idegen egyszerű szép lelke, igazmondó egyenességgel, 's szava' pontosságával — megannyi vonásai az igaz tálentomnak; mellyel minden itt tanittatott tudományokban, 's azok között különösen a' *Mathesisiekben* kitündökölvén, a' mind ezekkel külföldön 6 év alatt szerzett kints, a' hazai partoknál süllyedett el — miképpen az ellenség a' vezérre tör, a' halál is azokat számítván, kiket ő egy hosszu élet alatt tartott vólna meg, egynek személyében mind ezeket is ejtette el.

Nem hallgathatom még el több kedves hív Tanítványim közűl Ilentzfalvi *Szász Pált*; ki midőn az oskolai pálya' végéről a' földi élet' viszontagságokkal telyes útjára lépett vólna, annak sárján 's napfényét szünetlen szaggató borulatjain fölűl emeltetett, az örökkévalóság további pályája folytatására. — Egy ártatlan romlatlan ifjuban, egy emberséges ember, és maga helyén egy pontos természetvizsgáló, 's tsillagász veszett el. Az új mathesisi jegyekből, a' mi jó, neki köszönöm: ő kapta ki a' nyomtató műhelyben fél század óta hevert betű-öntő-szer használását, 's jóllehet soha se mettzett az előtt, ő mettzette a' jól kijött jegyeket, 's öntötte, 's mutatta ki öntéseket. — Ez is többet tsinált, mint szollott, 's kevesebbet mutatott mint vólt; holott minden kitsi messzire szokott kiáltani.

Egyátaljában (kevés különös kivétellel) azon köz panasz ellen vagyok; hogy *Shakespeare*ként a' tanitványok hasonlók a' tsemetékhez, melyek zöld leveleikkel kizárják az őket eléhozott napot; — sőt vissza mosolyognak. — A' kit meghűt az, valamint egyáltaljában a' ki háládatosságra számit; nem méltó reá, szintúgy mint a' háládatlan a' nemes lelkek sorába.

Tulajdonképpen nem is olly' rosszak az emberek, mint a' köz panasz kiáltja: egy nap se lehet kimenni az útszára is, hogy sokat ne lásson az ember, a' kinek ne köszönhessen valamit; legalább azt, hogy vagy éppen nem, vagy erősebben nem bántotta meg — vagy idejét nem vette el, legalább többet nem vett el abból, a' minek betse nálunk oly' tsekély, hogy tsak a' napszámosnál van árra, 's különben nem tsak egymástól büntelen ragadozzuk el, sőt ezen pillantatnyi örökségnek számtalan fattyú osztozót keresünk, az igazi örökösök' kárára.

KÖTELESSÉGEM MÉG A' TISZTELT KÖZÖNSÉGNEK, JELENTENI:

1-ben. Elpirulok ezen munkátskának oly késő kijötén, hogy könnyen eszibe juthat valakinek, *Mons parturiebat*... de nálunk minden efféle, ha kitsi is, nehéz; — sok ideig kelle várnom, míg tsak ennyi előfizetés is gyűlt, úgy hogy a' lemondásról kezdek vala gondolkodni; a' midőn végre ott láttam magamat, a' honnan már vissza nem, 's elé is tsak romlás' veszedelmével léphettem — azután is pedig sok fátumok 's betegség mellett, hol egy hol más hibázott; a' jegyekkel, figurákkal 's több effélékkel is sok késleltető baj vólt, 's egyetlen sajtó, kevés tsak most szaporodott betűkkel, sok egyéb munkákkal vólt elfoglalva — 's még most is a' mintegy fél esztendőtől fogva kijött első darab, a' figurákra vár.

2-szor. A' 2-dik darabot magyarul akartam kiadni; egyfelől azért, mivel az első darab (az *Arithmetika' Elejiben* vallott kárommal együtt) szinte minden költséget el nyelvén, nem láttam más módját a' 2-diknak, hanem hogy megrövidítve oltsobb papirosra tsak 300-at nyomtattassak (nem 500-at mint az elsőből), mathesisből ennyi is felesleg lévén nálunk; — másfelől igy Hazámnak egy közhasznú könyvet adni reménylettem, melyhez az első darabot is ugyan magyarúl hozzá alkalmaztam vólna: de az előfizetők közűl többen, a' kiknek tanátsokat meg nem vethettem, azt kivánták, hogy ha az első déák, a' második is úgy légyen.

3-szor. A' tiszta Mathesisi műszókra nézve is, mellyeknek egy részével az *Arithmetika' Elejiben M. Vásárhelyt* 1830 éltem, 's a' többit az említett 2-dik darabban mutattam vólna ki; következőket jelenteni hazafiui kötelességem.

I. Azoknak formálásában ezen három fő régulám vólt:

a) hogy a' mennyiben lehet rövidek, a' nyelv' természetéből folyók, legalább azzal nem ellenkezők, könnyen megszokhatók, 's tudványba való igaz bélátással a' dolog természetére mutatók legyenek.

b) hogy azonegy szó ne tegyen külömbözőket; 's hogy egyebet jelentsen, egy kis helyes változtatás engedtessék meg.

c) hogy a' mellyeket okvetlen szükséges megkülömböztetni, azoknak külön (ha lehet más atyafiasból formált) név adattassék.

A' mi az elsőt illeti: világos, hogy a' kezdő annál nehezebben érti a' dolgot meg, minél külömbözőbb a' szónak tulajdon értelme a' tudványitól, 's annál könnyebben érti meg, minél inkább magára a' dologra mutat. A' kurtitás pedig túl mehet a' határon, de azon belől könnyit; hogy lenne képes egy felsőbb mathesisi dolog' eléadása azon nemzetnél, mely a' 3-at *Polertarirorunkurák*nak nevezte? 's az Analysisi rövid 's okos jegyek melly igen megkönnnyitik a' különben áthatlan dolgokat — melly rövid 's mathesisi lehet a' felső lények nyelve!

Azért tsak móddal legyen, sok a' szokatlanság miatt elébb visszataszító, azután megértve szokottá lesz — mennyi példa nints erre az újabb időkben: melly szokatlan vala elébb ***át***, ***gyönyör*** . . ., ***kellemes*** kellemetes hellyett, ***közvetlen*** közvetetlen hellyett 's a' t. Igy jövény, nyugalom, türelem, győzelem, veszelem etc.: az efféle ujitás könnyü lévén, mihelyt szabad, omlik mindenfelől — kár, hogy *Erbschaft* nem bár örökmény, 's ***örökség Ewigkeit*** helyett oly hosszú szóval élünk, mintha azzal akarnok kifejezni. —

A' 2-dikra nézve, bajt tsinálván a' ***szeg*** Nagel, melly szint is teszen, mivel szeglet, zugoly (Winkel) igen hosszak az összetételben: maradna *Dugonits* szerint Winkel ***szög-nek***, 's mikor ***szeg*** szint teszen, hagyatnék el az *s*; vagy ***szög*** tenné a' szint, 's ***zeg*** vagy ***zög*** lenne Winkel; még ***mons*** és apex is lehetne ***hegy*** és ***högy***.

A' 2-dikra 's 3-dikra nézve, legyen szabad például hozni elé: *Id* Zeit, *idő* Wetter, ***Vil*** (az honnan villám) Licht, *Világ* Welt; ***han*** (mintegy ha! n!) Schall, ***hang*** tonus vagy megfordítva; Nap Sonne, viradtól estig *Napp* (lehetne *Vily*); dies soláris ***napi kétdélköz*** (röviden az illy dies ***délköz***). Densitas ***töm***, ***tömeg*** (Fogarasi szerint) massa.

Az 1-sőre 's 2-dikra nézve, legyen szabad a' hol ***egyenlőt*** mondani hosszas vólna, ***eggyel*** jelenteni ki, 2 ***gy***vel, hogy ***egy***től unum megkülömböztessék (p. o.) ***eggyoldalú háromszög*** nem 1 oldalú, hanem ***egyenlő oldalú háromszöget*** tegyen.

II. A' ***Dugonits*** 's ***Pete*** műszavain kivül másokat nem láttam; 's egyátaljában még a' kezdeten vagyunk: — de ha egyfelől elpirulunk, midőn a' Mathesisben más nemzeteknek tanitói éppen nem, tanitvánnyi is (annyira a' mennyire is) kevesen vagyunk; másfelől hogy valaha tanitói is lehessünk, ***éljünk legalább most míg ideje vagyon, éppen ezen elmaradásunkból származott*** óllyan ***jussunkal***, a mellyet más nemzetek már elvesztettek; a' midőn már régen a' Mathesis' böltsői nyelvét fordítván le, sok ollyan szók gyökereztek a' századokba, mellyek a' tanuló' elméjét a' tudványi értelemtől félre vonják. Béfolyása van ennek a' nemzeti kimivelődésre. —

III. Engedtessék azért meg, Hazánk 's Nemzetünk nevében! az a' kérés: hogy a' mathesisi műszók adásában, egyik fő tzél légyen, hogy azok a' mennyire lehet tudványi bélátással, a' kifejezendő dolgokra mutassanak.

Bátorkodom a' főbbekre nézve következő probát ide tenni; minden jobbnak elfogadására való készséggel.

Az említett ***Arithmetika (Id-mennyiség tudvány) Elejiben***, a' többek közt következő nevek adattak, az holott is a' kivánt okok is (valamint ezen első déák darabban is) megtaláltatnak.

Spatium *Űr*, az honnan üres, az az a' miben (oda értve *csak*) űr van. Tempus ***id***, tempestas ***idő***, quidditas ***miség***, quantitas (***midség*** mintegy azon kérdésre eredve ***mi id***?), ugyantsak maradhat ***mennyiség***, qualitas ***millység***; pars ***rész***, portio ***darab***, continuum ***szakadatlan***, ***tekinteti*** (darabi) ***egyenlőség***, ***tekinteti mennyiség***; ***positiv***, ***negativ*** (mathesisi értelemben) $\vdash\!+\!\dashv$ (***kereszt***), $\vdash\!-\!\dashv$ (***vonás***) ***mennyiség***; azaz a' midség bizonyos millységgel (melly $\vdash\!+\!\dashv$, $\vdash\!-\!\dashv$ jeggyel jelentetik ki, hogy az eszet egyébre ne vigye), szüli ezt, (pag. 22)*; vagy amaz, bizonyos $\vdash\!+\!\dashv$ ***határozatu***, ez ***ellenes határozatu***; — ***a***, ***vontja a***-nak, vagy ***ellenesse*** (oppositum).

* Ed. II. Tom. I. pag. 28.

Summa meghagyatik; ugyantsak lehetne ***öszvet*** is.

Addere ***summázni***; subtrahere ***pótlékazni (pótlotársazni)***; subtrahendus ***pótlandó***, minuendus ***tett summa***, differentia ***pótlék*** (vagy ***pótlótárs***), differentia ipsius P ab S, ***P-nek pótléka S-re***, $a - b + c$, *a 's vontja b*-nek ***meg*** *c*.

Series ***sor***, (arithm. ***eggypótléki***, geom. ***eggyméreti***); mensurare B quoad A, ***mérni*** B-t A-val, mensura ***mérték***, *B* ***mértje a' mértéknek***, fractio ***méret***, Unitas ***főmérték***, numerus integer ***egész szám***, fractio vera ***tört egy***, proportio geom. ***eggyméret***; A ita est ad B, uti a ad b, *A annyidja B*-nek mint *a b*-nek. Multiplicare a per B, ***eggymértezni*** a-t B-vel (röviden ***mértezni***), az-az olyan mértet adni *a* nak, a' ***millyen mért*** *B* (azaz ***a' millyen mértje*** *B* a' főmértéknek), multiplicator *B* ***fömért*** (vagy ***mértező***), *a* multiplicandus ***tett mérték*** (vagy ***mértezendő***), factum ***eggymért***, factores ***mérők***.

Ugyantsak ha ***szerzeni*** helyett egyszer se mondattatnék ***szerezni***, még ezzel is inkább lehetne a' rosszul nevezett ***sokszorozás*** helyett élni; factum ***szerezet*** lenne 's a' t.

Dividere b per a, *b*-re ***párazni*** (vagy mérőtársazni, röviden ***mértársazni***) *a*-t: dividendus ***tett eggymért***, divisor ***főmérő*** (vagy ***párazandó***), quotus ***mérőtárs*** (röviden ***mértárs***); b divisum per a, *b*-re ***párja*** *a*-nak. Kár hogy $2 . 3 = 24 : 4$ helyett nem más jegyeket vettek, (p. o.) $2 \cdot 3 = 24 \diagdown 4$, (az irásbeli 1 's 2 pontra nézve).

Elevare a ad potentiam exponentis q, ***eggymérőzni*** *a*-t *q* ***ranggal*** (röviden *q*-val); 's ha B ezen potentia, B az *a*-nak *q* ***rangu eggymérőzetje***, 's *B*-nek *a*, *q* ***rangu alapmérője***, radix exponentis q ipsius B; ***alapmérőzni*** *B*-t *q* ranggal (röviden *q*-val), radicem exponentis q extrahere ex B.

Logarithmus ***rangjel***, basis communis ***közalapmérő***, vagy ***köztalp***.

Vagy következő nevek is lehetnek: *a*-t *q*-val ***rangozni***, *a*-nak *q* ***rangja*** *B*, *B*-nek *a*, *q* ***alrangja***, *B*-t ***lerangozni*** *q*-val.

Vagy: *a*-t *q*-ra ***emelni***, *B a*-nak *q* rangu ***emeletje***, *a B*-nek *q* ***rangu emeltje***, *B*-t *q* ***ranggal*** (röviden *q*-val) ***emeltezni***. Radix quadrata ***félrang*** 's a' t.

Quantitas imaginaria ***vonás eggyi midség***, (Tom. I. pag. 105.)*

Proportionalis geom. media, ***eggyméreti közép***. Terminus ***íz***, polynomium ***több-ízet***, binomium ***két-ízet***, terminus seriei ***sor-íz***, terminus generalis ***íz-kép***, coefficiens ***íz-főmért***.

Functio ***köz kép***, series incrementorum ***növet-sor***, differentiale ***növet-sor-íz kép*** (röviden ***növet-ízkép***), coefficiens differentialis ***növet-íz főmért***, integrale ***summázat***. Calculus variationum ***közképes közkép vi'sgálat***.

Aequatio ***egyenlet***; limes ***véghatár***, comma ***vonat***; incommensurabile ***összemérhetlen***; decimales notæ ***tizedes helyek***; expressio ***kifejezet***.

Analysis combinatoria, ***szedet 's rakat vi'sgálat***, permutatio ***elrendelet*** (röviden ***rendelet***), variatio ***ismétlet***; ambo, terno etc. ***kettős szedet, hármas szedet*** . . . vagy ***kettőzet, hármazat*** . . .; ***kétszeretje, háromszoratja*** . . . valaminek, dupluma, tripluma . . .

Superficies ***terj, lep*** (az honnan lepedő, lepel), néha kület, corpus geometricum ***Űr-test***; ***féret***, area ha superficiesről van szó, soliditas ha corpusról van szó (ez lehet

* Ed. II. Tom. I. pag. 121.

tely is). Planum *lap*, (horizontale *tér*, vagy *vizirányu* lap). Verticale *függős* vagy *függény*; *linea*, *forma* meghagyatnak; figura *kerítéк*, sectio *vágat*, recta *egyen*, arcus *iv*, chorda *húr*, radius *sugár*, centrum *középpont*, sphæra *gömb*. Cylinder *henger*, Cubus *kőb*, angulus *szög*, triangulum *háromszög*, polygonum *többszög* (regulare *rendes*); circulus *kör*. A' *gömben* kezdve eddig *Dugonits*-ból vétettek. Angulus rectus *negyed szög* (t. i. a' szög tekinteti mennyiség, a' szárai közt lévő ívben), így 60 grad *hatod szög*, 45 *nyolczad szög* (mind az egész karimára értve)... Apex anguli *szöghegy*, anguli verticales *tövi szögek*; anguli alterni *átellenni szögek*, vagy *z* forma szögek; szögnek (vagy conusnak) verticalissa, az ő *tövi társa*. Perpendicularis *rá álló* (vagy röviden *álló*). Diagonalis *átló*, diameter *kettelő* (vagy *kettéző*).

Parallelum *eggyközű* (Dugonits), (tágasabb értelemben *eggyközűi*); parallelogrammum *lap-eggyközény*, prisma *űr-eggyközény*; Rhomboides, Rhombus *dűlt eggyközény*; (röviden *dűlény*); Rhombus *eggyoldalu dűlény*, rhomboides *nemeggyoldalu dűlény*, vagy röviden amaz *dűlény*, ez *eggyoldalány* (oda értve, hogy *csak* az oldalai egyenlők), quadratum *rendes négy szög* (röviden *négyeg*). Rectangulum oblongum *hosszukó állány* (röviden *állány*); rectilinea figura *egyeni keríték*: figura plana *lapi keríték*, figura sphærica *gömbi keríték*.

Focus *tüz pont*, tangens *érintő*, asymptota *szinte érő*. Abscissæ *fő útak*, ordinatæ *al-útak* (nem ál útak; Lásd az *Arbort* ezen darabban). Az alútak lehetnek 1-ső 's 2-dik *rendűek*... Cathetusok *béfogók*, hypotenusa *átfogó*. Sinus *végtáv* (az ív' vége távja a' *fő kettézőtől* p. 456)*; cosinus *középpont táv* (röviden *központ táv*); sinus versus *kezdet táv* (az ív kezdete távját értve, 's mind a' két utóbbit a' *sinustól* értve), secans *vágó*, complementum *pótlék-ív*, cosinus *pótlék végtáv* (röviden *pótvégtáv*) 's a' többi. Pyramis *tetény*, conus *tsúp* (az honnan tsupa), vagy *körtetény*; így *három-szög tetény*, *három-szög űreggyközény*; Parallelepipedum *űrlap-eggyközény*, ha rectangulare *űr-állány*, (vagy Dugonittsal *téglány*) Pyramis truncata *elszelt tetény*, (vagy *szelt tetény*), így *szelt tsúp*. Conicæ sectiones *tsúp vágatok*: parabola *eggytávú* (mindenik pontját azon egy ponttól, a' *tűzponttól*, *'s azonegy egyentől* értve); ellypsis *kissebb távu*, hyperbola *nagyobb távu*, (a' ponttól mint az egyentől értve). Vagy az első, *közepetlen tsúp vágat*, a' második *vissza térő*, a' harmadik, középpontos *vissza nem térő*. Vagy az első, 2 *karu*, a' 2-dik *vissza térő*, a' 3-dik 4 *karú*, (a' tsúpat az ő tövi társával együtt, vagy p. 101** szerint véve). Eccentricitas *tüz 's középpont táv*; radius vector *tűzpont-sugár*, parameter *tűzpont húr*.

Pes quadratus, cubicus, *terj-láb*, *tely-láb* (a' Pallérok számítása szerint, Arithmet. Eleje p. 128). Simile *hasonló*, homologum *eggyfekvésű*, (néha *megfelelő*).

Propositio *mondatvány*, (sőt röviden *mondat*), *tétel*, *tét*, theorema *okvdró tét*, problema *feladat*, *feladó tét*, resolutio *megfejtés*, *végbe vitel*, demonstratio *okmutatás*. Intuitus *ön-látvány*, axioma *ön-igazság*, alap igazság, *önlátványi tét*. Lemma *segéd-tét* 's a' t.

Scientia *tudvány*, *oktudvány* vagy *tanvány*, *okadalom* vagy *okalom*, scientificus *okász*,

* Ed. II. Tom. II. pag. 14.
** Ed. II. Tom. I. pag. 116.

a' honnan *okdszat* is lehet, mint vadász, vadászat, fényész, fényészet, ditsész, ditsészet 's a' t.

4-*dszer*. A' *Caputak* etc. helyett, akármellyik osztályt lehetne *betü* vagy *számképpel* fejezni ki, (nem külömben a' *plántát* 's sok egyebet is); tsak a' felosztásnak ugyanazon gráditsfogán lévő osztályok, 1-ső, 2-dik . . . , külömben azonegy osztály-névvel külömböztessenek meg: balról az első szám tegye az annyiadik legelső osztályt, 's akármellyik szám tegye az előttevalónak felosztása' első fogán lévő annyiadik osztályt, a' mekkora azon szám; (ha a' szám 9-et meghaladná, a' kétfelől bézártat egy számnak véve). Igy ˙34112. vagy ˙34112-dik rész lenne az 3-dik főrész 4-dik alrész 1-ső főosztálya első alosztályának 2-dik főszakassza, 's viszont ez úgy iródnék le. Ugyanis ezen osztályokat a' 12-dikig le így lehet nevezni: *főrész*, *alrész*, *főosztály*, *alosztály*, *főszakasz*, *alszakasz*, *főszak*, *alszak*, *főtzikkely*, *altzikkely*, *főtsikk*, *altzikk*; mellyet még tovább is lehet folytatni iz, izetske 's több nevekkel; noha római számokkal 's közönségesekkel, 's más jegyekkel is lehet az alább oda tartozókat megkülömböztetni. Elől is lehetnek még *könyv*, *darab*, sőt *fődarab*, *aldarab* nevek is. A' melly számnak eléadására, a' szükségesek még azon a' helyen nintsenek meg; a' hol már megvannak, kipótlását oda lehet tenni, eleibe irva, mellyik *számnak kipótlása*.

Légyen ezen osztás módjára példáúl az *Űr tudvány*.

˙1. *ELSŐ FORÉSZ*: az Ürnek alap-szemlélése: *lep*, (ollykor *kület*) *linea*, *pont*, *forma*, *gömb*; 3 *egyes főmozgás*; *egyen*, *lap*, *kör*, 's egyéb *alap-képzetek* (vagy *képezetek*), és *alap-igazságok*; mellyek ezen első darabnak végén pag. 442-tőn * kezdve találtatnak.

˙2. *MÁSODIK FŐ-RÉSZ*: leszállás a' lapra; *lap-tudvány* (planimetria).

˙21. *Első alrész*: véges számu, egyenekkel 's két első fömivvel, (*constructio geom. sensu stricto*).

˙211. *Első főosztály*: azon formák, mellyek ennek elsőben szembeötlő származatjainak egymást vágása vagy nem vágása által erednek.

˙2111. *Első alosztály*: a' féret vizsgálása nélkül.

˙21111. *Első főszakasz*: nem vágása.

Alszakaszok: (1-ső, 2-dik, 3-dik); két egyennek 's többnek, két körnek; egyennek 's körnek.

˙21112. *Második főszakasz*: vágás.

˙211121. *Első alszakasz*: szöggel való vágás.

˙2111211. *Első főszak*: tsupa egyenek egymással.

˙21112111. *Első alszak*: két egyen; (4-ed szög, tompa szög, hegyes szög).

˙21112112. *Második alszak*: 3 egyen.

˙211121121. *Első főtzikkely*: tsak egyik pár nem vágja egymást, kinyujtva is.

* Ed. II. Tom. II. pag. 1.

·211121122. *Második főtzikkely*: mindenik vágja egymást; innen a' ***háromszögek.***

·2111211221. *Első altzikkely*: a' háromszögek' egyenlőségének feltételei.

·2111211222. *Második altzikkely*: A' háromszög oldalainak 's szembelévő szögeknek költsönös függése: az honnan a' háromszöget meghatározó adatokból, a' meg nem adottakat felszámitni tanit a' *Trig. plana* az ezen számot illető kipótlásban.

·21112113. *Harmadik alszak*: 4 egyen.

·211121131. *Első főtzikkely*: ha nincs olly kettő, melly kinyujtva egymást ne vágja.

·211121132. *Második főtzikkely*: ha van olly kettő, melly egymást ne vágja.

·2111211321. *Első altzikkely*: ha a' más kettő is illyen; tehát mivel vágás van, ezen pártól a' másik vágatik, (*parallelogrammum*).

·2111211322. *Második altzikkely*: ha tsak egyik pár ollyan; tehát ez vágatik a' másik nem ollyantól, (a' ***hasonlatosság alapja***); innen a' háromszögek' hasonlatossága feltételei.

·21112114. *Negyedik alszak*: több akárhány egyenek.

·211121141. *Első főtzikkely*: egyenekből álló (röviden ***egyeni***) egyes linea (p. 461).*

·2111211411. *Első altzikkely*: más illyennel való összetételből egy pár egyennek eggyközűségéből származó közönséges képzete az ***eggyközűségnek.***

·2111211412. *Második altzikkely*: több oldalú egyeni kerité̇k.

·211121142. *Második főtzikkely*: valamelly egyeni lineának minden szöghegyeire egyenek azonegy pontból.

2111211421. *Első altzikkely*: az egyeni keritéknek háromszögekre való felosztása.

·2111211422. *Második altzikkely*: mindenik egyennek a' központtól azonegy annyidját véve; a' ***hasonlatosság közönséges képzete' magva.***

·2111212. *Második fószak*: egyen a' körrel.

·21112121. *Első alszak*: egy egyen a' kört, csak egy pontban, vagy kettőben vágja.

·21112122. *Második alszak*: több a' kört vágó egyenek.

·211121221. *Első főtzikkely*: azon egyenek vágva egymást.

·2111212211. *Első altzikkely*: azonegy pontban.

A' főtzikkek, (1-ső, 2-dik, 3-dik): azon pont a' karimában, a' karimán belől, vagy kívűl.

·2111212212. *Második altzikkely*: ha azon egyenek nem azonegy pontban vágva egymást, egyes visszatérő egyeni lineát formálnak.

·21112122121. *Első főtzikk*: mindenik egyen (úgy a' mint van a' kezdetitől a' végeig) húrja a' karimának; ennek altzikkjei, 3 egyen, 4 's a' többi; sőt ezeknek alsóbb osztályai, ha az egyenek egyenlők vagy nem.

·21112122122. *Második főtzikk*: mindenik egyen érintője a' karimának; mellynek ugyan az imintiek az alsóbb osztályai.

·211121222. *Második főtzikkely*: ha azon egyenek nem vágják egymást.

* Ed. II. Tom. II. pag. 18.

·2111213. *Harmadik fószak*: körek egymással.

Első főtzikk: érintési vágat; 2-dik az érintés nélkül való.

·211122. *Második alszakasz*: *a' szögetlen vágás*; melynek alsóbb osztályai, az egyenekből 's körivekből, vagy tsupa körivekből való, 3 's több oldalu formák.

·2112. *Második alosztály*: *férete* az eléhozott keritékeknek; mellynek alsóbb osztályai, az egyeni keritékek, kör, vagy tsupa körívekből, avagy körívekből 's egyenekből valók.

·212. *Második főosztály*: azon formáknak, mellyeknek az első főosztályban tsak magában való lehetsége ötlik szembe (vagy kérdésbe jöhet); véges számu két fő mívvel való lehetsége vagy lehetlensége vi'sgálása.

·22. *Második alrész*: számtalan két fő mívvel (*kettős egyesült mozgása*, az *Idmennyiség tudvány* segitségével).

·221. *Első főosztály*: a' mellyeknek ha nem is minden, de mindenik pontja megadatik véges számú 2 fő mívvel.

·222. *Második főosztály*: a' mellyeknek mindenik pontja sem.

·3. *HARMADIK FŐRÉSZ*: vissza menetel a' lapról az űr mélységébe.

·31. *Első alrész*: a' véges számu egyenekkel 's három fő mívvel származhatók' vi'sgálata (*constructio geom. sensu lato*). Tudniillik az elébbi két fő munkához járul a' tengelyi fordulás.

·311. *Első főszakasz*: *tengelyi fordulása* keritéket nem formáló lineáknak, és lapoknak.

·3111. *Első alszakasz*: lineák' tengelyi fordulása.

·31111. *Első főszak*: keritéket nem formáló egyeni lineák' fordulása.

·311111. *Első alszak*: *egy fordulás*.

·3111111. *Első főtzikkely*: két egymást P lapban vágó egyen megfordul az egyik körül; a' mozgó egyen útja lap, ha a' szög negyed szög, 's tövi tsúpak (azaz tsúp az ő tövi társával), ha a' szög kissebb negyedszögnél.

·3111112. *Második főtzikkely*: Ugyan P-ben A egyennek $b, c, \ldots$ pontjairól legyenek $B, C, \ldots$ egyenek A-ra ráállok, 's $ABC\ldots$ linea forduljon meg A körül; az egyenek útjai *eggyközű lapok*.

·311112. *Második alszak*: *több fordulás*; legyenek P lapban A, B egymást p pontban vágó egyenekre α és β rá állók p-ből, 's forduljon meg A körül α, 's B körül β; a' két út' vágatja a' ráálló p-ből P-re.

·3112. *Második alszakasz*: *lapok fordulása*.

·31121. *Első főszak*: *egy fordulás*; fordúlva P lap, valamely egyenje körül, szüli a' *két lap' szögét*.

·31122. *Második főszak*: *több fordulás*.

·311221. *Első alszak*: mindenik fordulás tengelyének azonegy p közös pontja: úgymint értettessék minden, P lapra nézve, azonegy felől, (p. o. fölül), 's minden fordulás $<2R$ legyen, (R negyed szöget tévén). Ezen feltétellel forduljon P lap $\mathfrak{pa}$ egyenje körül, 's mindenkor újra, a' hová jött, forduljon onnan, valamely $\mathfrak{p}$ pontról vont egyenje körül hajolva, folytatva a' míg tetszik; ered az ***angulus solidus*** (tely-szög); lehet még azon határozást is tenni, hogy P mindég azon szine felé hajoljon, a' melly elébb alól volt.

·311222. *Második alszak*: *több fordulás*, mindenik fordulás' tengelyje' központja nélkül.

·3112221. *Első fötzikkely*: *tsupán lapok.*

·31122211. *Első altzikkely*: a' fölül két eggyközü lap P és Q közül egyik forduljon akármelly egyenje körül, míg a' másik lapnak valamelly pontját éri; neveztessék ezen új lap R-nek; vi'sgáltatnak az R-töl tsinált átelleni szögek 's a' t.

·31122212. *Második altzikkely*: az elébbi R forduljon akármelly az P és Q lapokon átmenö α egyenje körül; 's légyen az új lap S; vizsgáltatnak P-vel és Q-val lévő vágatjai az R és S lapokból álló formának.

·31122213. *Harmadik altzikkely*: forduljon S is akármelly, P és Q lapokon átmenő β egyenje körül; vi'sgáltatnak az R, S, T lapokból álló formának P-vel és Q-val lévő vágatjai; mindazon esetben, ha $\alpha \parallel \beta$, mind akkor, ha nem.

.3112222. *Második fötzikkely*: *lapok egyenekkel.*

·31122221. *Első altzikkely*: a' fölebbi P és Q eggyközü lapok közül egyiknek akármelly pontjából a' másiknak akármelly pontjára egyen gondoltassék; vi'sgáltatik az *egyennek lappal való szöge*, az *átellent szögek* 's a t.

·31122222. *Második altzikkely*: P lapban légyen $\mathfrak{ABC}$ . . . egyeni keriték, 's akármelly a' lapon fölül lévő $\mathfrak{a}$ pont legyen, forduljon (mindent egyfelöl, p. o. P lapon fölül értve) P lap $\mathfrak{AB}$ egyen körül, míg $\mathfrak{Aa}$ egyen belé esik; és legyen $\mathfrak{Bb} \parallel$ és $=\mathfrak{Aa}$; azután forduljon ugyanaz első P lap $\mathfrak{BC}$ egyen körül, míg $\mathfrak{Bb}$ belé esik. 's legyen $\mathfrak{Cc} \parallel$ és $=\mathfrak{Bb}$, 's így tovább az utolsó oldalig; és ekkor forduljon $\mathfrak{abAB}$ lap $\mathfrak{ab}$ körül, míg $\mathfrak{c}$ pont belé esik Születik az *egyeni ür-eggyközény*, melly ***parallelepipedum***, ha $\mathfrak{ABCD}$ ***parallelogrammum.***

·31122223. *Harmadik altzikkely*: ha P lapban lévő $\mathfrak{ABC}$ . . . egyeni keritéknek, minden szöghegyeiröl azonegy $\mathfrak{p}$ pontra egyenek gondoltatnak, 's P fordul mindenik oldala körül az említett keritéknek, mig $\mathfrak{p}$ belé esik; születik az *egyeni tetény*, (a' mennyiben a kör-tetény az-az kör talpu tetény 's akármelly más talpu mind tetény).

·312. *Második fószakasz*: *tengelyi fordulása lapi keritékeknek.*

·3121. *Első alszakasz*: negyedszöges háromszögnek megfordulása az egyik *béfogó* körül; (*negyed szögü tsup*).

·3122. *Második alszakasz*: lap-állány megfordulása valamelly oldal körül; (*negyedszögü henger*).

·3123. *Harmadik alszakasz*: félkör megfordulása a' kettéző körül, (*gömb*).

·3124. *Negyedik alszakasz*: a' mindjárt származandó tsupi vágatok megfordulásával eredő formák.

·313. *Harmadik főszakasz*: tengelyi fordulása a' lapnak az eddig származottaknak valamelly pontja körül.

·3131. *Első alszakasz*: a' tsuppal (*tsupi vágatok*); Ellipsis sőt parabola talpu tsup, (*szelt tsup*).

·3132. *Második alszakasz*: a' hengerrel.

·3133. *Harmadik alszakasz*: az egyeni teténnyel.

·3134. *Negyedik alszakasz*: az egyeni űr eggyközénnyel.

·3135. *Ötödik alszakasz*: a' gömbbel.

·31351. *Első főszak*: ha a' közép ponton mennek által a' lapok; erednek 3 lapból a' gömb' szinén a' *gömbi háromszögek*; mellyeket a' meghatározó darabokból felszámitni tanit a' *Trigonometria sphaerica (gömbi háromszög számitás)*.

·31352. *Második főszak*: ha mind érintik a' lapok a' gömbet, vagy mind vágják, 's űr darabot záró egyes formát tsinálnak; ezek közt erednek a' egészen vagy részszerint *rendes űr-testek*.

·32. *Második alrész*: azon formák, a' mellyek véges számu egyenekkel 's három fő mívvel nem származhatnak; (p. o.) ha valamelly úgy elé nem állitható formának minden pontjairól azonegy pontra egyenek, vagy azonegy egyenhez eggyközűek gondoltatnak; 's annyival inkább, ha azon egyenek' foglalatjának bizonyos formával való vágatja kerestetik 's a' t. Egyáltaljában mindenféle formák, akármelly (akár az *Arborban* három egymásra rá álló egyennel, akár valamelly formában bizonyos törvény szerint lévő) hármas avagy többes egyesült mozgás által származhatnak, mind azokkal egyetemben, a' mellyek ezeknek egybetételével lesznek, ide tartoznak.

5-szer. A' fenn emlitett *Arithm. Elejében* XVIII. lapon javaltatott *egy irás-mód*; mellyben nem tsak összetett betű ne legyen, hanem egy betű se iródjék kétszer egymásután, sőt egy betű felett is, se pont, sem ékezet ne légyen, még is minden hangzónak, még pedig a' rövidnek a' hosszútól megkülömböztetett jele légyen, a' nélkül hogy új betű vétessék fel; ott a' hosszak szintúgy mint a' kétszer irandók, fölül vagy alól (a' mint az irás' folyása kivánja) nyujtott egyenes vonással jelentetnek ki; a' többi egy a' folyó irásra (némelly betűnél vizirányulag vive másnál fölülről szállitva) alkalmas jeggyel tétetik ki: ma is valami illyen formát kivánnék, hogy nyelvünk kimondása meghatározott, 's legalább irásunk' módja, első lenne; de a' *gy* kijelentésére inkább lehetne *d* mint *g* betűt az emlitett jeggyel venni, mivel *adjon* könnyen változik *aggyon*-ra, de vágjon helyett nem mond senki *vággyont*; — 's vagyon még kettő mellynek jegy kell; ezen szókból megtetszik *edzeni*, *findzsia*, (az utolsót egy 6 éves gyermek mondotta, hogy egyikkel se lehet le irni, az a' mint *giorno* mondatik): *zs* vólna *z* azon jeggyel, *edzeni* iródnék ugyan *z*-vel, de azon jegy megkettöztetnék a' közepén, ez úgy is ritkán jön elé; valamint a' *giorno* hang, mellyet *g* eleibe tett jeggyel lehetne kitenni.

6-odszor. Egyébaránt ezen lapokon az irás sokban külömbözik az említett könyvetskebelitől; ugyan is itt a' Pesthen 1832-ben nyomtattatott *Magyar Helyesirás főbb szabályai*-haz kivántam' magam alkalmazni; mivel a' midőn a' hányan vagyunk annyiképpen irunk, onnan lehet egyedül várni, hogy valahára megállitódjék; 's noha kicsit tartóztathatom avagy segithetem elé, egy pihével sem akarom terhelni a' hazai kimivelődés' kincséért szerencsés széllel feszülő vitorlákkal evező hajót. — Sok van, a' mellyre nézve kissebb az, miként, mint az hogy eldöjtve legyen; 's megegyezve, valahára azon a' nyelven tanuljunk, a' mellyet Anyáinktól tanultunk; ekkor indulhatunk meg a' mély völgyekből fenn az Alpeseken az ég felé emelkedő Nemzetek után.

Ha Őseink deákul akartak tanúltatni, a' leányokat kellett vólna inkább a' Deák oskolákba jártatni, hogy ők tudjanak elébb, 's az anyai téjjel szopva a' magyarral együtt a' deákot, a' *fábóba* való megvénülés helyett, belé születtünk vólna — a' hólt nyelvet is az asszonyi eleven nyelv feltámasztotta vólna — 's tsak két nyelvet meg is lehet bírni, (legalább inkább, mint annyit, a' hányat most tanúlni kéntelenek vagyunk), 's a' tudomány nyelve is akkor a' Deák vólt.

Vajha a' tudós Társaságok abban egyeznének meg, hogy a' tudományok óriási nővésével, 'a midőn az emberi erő 's idő nem nő, a' mostani sok 's mind több-több helyett egy mathesisi 's musikai lélekkel alkotott vég nélkül tökélyesíthető nyelven nyomtassanak mindent (a' szükségest is le fordítva): nagy részét rövid életünknek, melyben mind a' koltsat keresve, alig lépünk bé a' tudományok' templomába 's a' nap le menyenebben tölthetnők. — Ugyan is a' tudományhoz idő és munka nélkűl jútni, (a' természetet megtsalni) nem lehet: hiába várja valaki a' külömben sok szép felű társalkodástól, hogy a' *Leucipp*' atomjaiból (mint a' tántz-házakbeli találkozásokból) származó világ' módjára, abból tudós legyen; a' gondolatok tántzoló 's párosodó szálája is inkább a' magányban van, 's a' fülemile sem a' seregben énekel. — Lehetne mindazáltal a' társalkodást a' sok rosszat szülő kártya 's egyéb idő-pazérlás helyett, éppen nagy idő nyereségre használni; a' midőn annyi ollyas jön ki mindenfelől, a' mit megkellene olvasni, ha elég idő 's szem vólna reá: sok egynapi olvasást ellehet fél-óra alatt lelkesen mondani; 's tsak 12 ollyan találkozzék össze, felosztva egymást között, mindeniknek tsak egy napba 's hat órába kerűlne, a' mi 12 napba kerűlt vólna mindeniknek — sőt egy nemes rúgója is vólna kinek kinek a' magára vállalt rész' telyesitése, több halgatók' életök' hosszabbítására, 's lelkeik kimivelésére. — Ugyanis a' tanulást is lehet ollyan rúgóval ébreszteni, melly rosszabb a' tudatlanságnál: illyen a' fölül-vágy' világ-égése országokon átfúvó szelekkel; ezzel serkenteni, annyi, mint egy pokoli kiólthatlan (a' testtel elmaradó vétkeket is fölül élhető) tüzet vetni az emberi nem' mejjébe; — mitsoda gonosztévő tenné meg, ha tehetné is, hogy fájdalmat támasszon a' fűbe, hogy nem rozsa bokor, 's ebben hogy nem tölgyfa . . . hogy az egész szép természet munkás álmu csendjéből jajra serkenjen fel. Azt kell fejteni a' mi van, csak föld napfény 's esső kell a' magnak — 's úgy kell nevelni mindent, hogy kiki azzal a' mire teremtetett, 's rendeltetett, megelégedve éljen.

De az említett nyelvre térve vissza; az nem rekeszti a' nemzeti nyelvet ki; minden Magyar meg van azon kedves hangoktól vará'solva, mellyekkel Édes Hazánk' Anyái altatták Nemzetünk' hajdoni hőseit, a' kiknek majd kardvillámjaikkal ropogó mennydörgéseikre vérzápor omlott a' ditsősség' mezején — ha szintén az akkori kardok tollukká, 's a' karok is inkább ezekhez mint az ősi fegyverekhez valókká lettenek is, 's a' ditsősség' mezején is a' hajdoni kőszikla-mejjekből fakasztott vérforrások helyett, fejekből szivárgó tenta patakok kigyóznak mindenfelé.

A' köz nyelv mellett, minden nemzetnek ekkor is mivelni kellene a' magáét; 's két nyelvet megis tanúlhatna mind a' két nem; 's minden nemzet egy nyelven tudván szollani, az egymás' megértése millyen egybefoglaló kötél lenne, (a' melly Hazánkban is olly kivánatos volna); 's melly közelítés lenne ez az emberi nem egyességére.

De mikor hozza fel a' szeretet bús angyala az ezeredek' elpiruló reggelén azt a' napot, mellyen le olvadnak a' csak ön sebét érző kevélység' jégvárai; 's feltámadván kiki, mint megannyi senyvedő halott, külön kriptájából, a' setétben egymás ellen hadazott testvéri karok, megesmérvén egymást köz ölelésre ragadtatnak; 's a' köz Templom kiderülő bóltja alatt minden szívből kivettetvén az Én-bálvány, mindenik egy véghetlen Atyával 's egy világgal telvén meg, egy nyelven zendűl meg a' főldről az első *Mi Atyánk*! égi boldogsággal mosolyog vissza a' végetlenség, az örökkévalóság' szeretetgyürüje rogyog a' föld körűl — a' belső teremtés' első hajnalát öröm könnyek gyöngyözik — 's az angyalok oda fenn ditséretet énekelnek.

Ekkor lesznek egybegyűlve az örökösök az Uj Testamentom telyesítésére — arra az osztályra, a' hol tsak mindennek juthat minden — a' köz szeretet' mennyei kintse az.

De mikor értjük meg, hogy mindnyájon elesünk ezen tulajdon magunk ellen dühösködő háboruban? 's mikor záródik bé *Janus*-nak az első *Kain*-tól fogva mind nyilva álló ajtaja? Egymást szaggató fenevadok' ordító pusztája az, mellynek az Égre az Isten' képeivel kellene vissza rogyogni; elszakadt az odakötő szeretet szent lántza, 's az elsetétűlt tsillag számkivetve bujdosik — azon kevesen a' kik keresik egymást, sem találhatják fel — 's a' legmelegebb szivek is magánoson vernek a' mindenfelől kizáró jégfalak közt — egy zivataros éjjben fut kiki külön lámpásoknál haza, félve mindentől, leginkább egymástól — mikor lessz az a' mennyei *szó*, melyre a' magát emésztő rivó zürzavar' sötétségében *világosság légyen*? ha nem csak szájjal, hanem egymáshoz közeledő szívvel kérnők, eljőne az Isten' Országa — 's e' kősziklás szigeten való útunkat, a' helyett hogy nehezítsük egymásnak megkönnyitve, vigan érkeznénk a' tengerhez további útunkra. — Akármely kitsi is ez élet, nem megvetni való; mikor felsőbb kötelesség kéri is, nagy árrára mútat, a' mellyért eladó is; nem végtzél ugyan, de a' mint eszköz egyfelől a' továbbira, tzél másfelől magában is. — 'S oh! a' mit most úgy megrútitunk, melly széppé tehetnők: hogy nemcsak a' jelen nyerődnék meg, hanem szebben nevekednék a' belső ember is, 's a' halált is úgy néznők, mint egy még szebb világ' bábáját — midőn ez a' főld alól a' napra útat nyitván, a' megnőtt szárnyu új angyalt leszállott kedvessei repitik a' menyre ki — 's a' felsőbb Természet mint egy anya a' fájdalom után mosolyog az újan szülöttnek. — Csak új életre mútat az új domb is, mellyel az anyaföld méhébe fogadván, virágokkal szött zöld leplét reményszivárványok alatt kapja vissza. — Sőt mikor a' sohajtások a' szemekre fellegezvén, a' sirhalmok' nefelejtseit könnyekkel öntözik, a' sirattak a' menny' tornáttziból néznek alá — 's mikor elalutt képeik felett a' pá'sint hánykodik a' nyögő szélben — mulandóság 's örökké-valóság' tenger habjai — honvágy — (semmi emberi szó ki nem mondhatja, 's a' mu'sika is csak inkább sebesiti az édes fájdalomtól sajgó szívet —), azt súgják lelkeinkbe: *Ne szomorkodjatok! ah! hogy nem mondhatjuk meg, melly idvesség az Istenhez közelebb — türjetek békével, 's higgyetek! — a' végetlenség mennyei mágnesse, a' mi a' nemes lelkeket vonja, itt van.*

MEGIGÉRT JELENTÉS.

(NUNTIUM PROMISSUM.)

Háládatos köszönettel jegyzem ide azoknak neveiket, a kik az első darabban fel irttakon kivül előfizetvén, ezen munka kiadására segitségül vóltanak, még pedig kéretlenül.

G. Bethlen Ádám	8	példányra
T. Ertsei János, Sz. Udvarhelyi professor	1	«
T. Intze Ferentz, Nevelő	1	«
B. Kemény Diénes	4	«
B. Kemény Domokos	4	«
B. Kemény István	4	«
B. Kemény György	4	«
Krassai András R. Tab. Cancellista	1	«
Locodi György Fiscalis Procurator	1	«

Ezen kivül Bolyai János P. J. Kapitány az Első darab' Appendixének, mint tulajdon munkájának kinyomattatására, részint példányokra, adott *száz négy* váltó rft. 's 54 xrt.

Az üresen maradott hely az igéreteké.

ADNOTATIONES EDITORUM.

Pag. XI. Arbor hic in Ed. I. chartæ maximæ initio Tomi I. agglutinatæ in folio ut dicitur typis impressus est.

Pag. XVIII. ẏ. 4—7 a calce ad laevam. Verba »ubi tamen sive functionem constituentia, sive functionis qualitas quantitasve quæri possunt.» inseruimus ex Erratis Tomi I. pag. XXXVI.

Pag. XXI. Hunc »indicem rerum» parvis solum momentis correctum recepimus, tamen in margine ascripsimus numeros paginarum Editionis II. Quæ vero Bolyai animadvertit, ut Errata emendatiora fierent, penitus omisimus.

Pag. XXIII—XXXVI. In Ed. I. asterisco * apposito designati sunt loci, quos Bolyai Tyronibus in lectione secunda discendos commendavit.

Pag. XXIX. ẏ. 15 a calce. Quæ uncis [ ] inclusa sunt, nos inseruimus. Eadem repetita recurrunt posterius in indice rerum hac ipsa significatione.

Pag. XXXIV. ẏ. 8 a calce »variabilis» scriptum est pro »logarithmus».

Pag. XLIII. ẏ. 4 a calce. »Si unum parallelum per alterum non parallelum secetur» scripsimus. In Ed. I. errore quodam hæc leguntur: »Si duo paria fuerint parallela» . . .

Pag. 1, ẏ. 3. »Conspectus Geometriæ Generalis» posuimus pro »Generalis Conspectus Geometriæ» restituto verborum ordine, quo Bolyai in Conspectu Arithmeticæ generali usus est.

Pag. 3, ℣. *4* «via lineæ» subintelligitur *rigidae.*

Ibidem ℣. *12—7 a calce.* Cf. pag. 12, sub 3.

Pag. 4, ℣. *5 a calce* loco *T* in Ed. I. errore typographi *M* legitur.

Pag. 5, ℣. *5—4 a calce* verba «*quarumvis binarum*» et «*eadem*» in Ed. I. non leguntur. Hunc locum ipse Bolyai in Erratis Tomi I. pag. LIII, ℣. 5 a calce emendandum designat his verbis: «post *sectio* adde *singulis tribus communis*». Item in iisdem Erratis pag. XC: «sectio *quarumvis binarum eadem* intelligatur». Ex emendatione auctoris posteriore varietatem lectionis a nobis constructam evidentissimam æstimantes in textum inseruimus.

Post hanc emendationem ibidem pag. XC Bolyai sic orditur: «*Superficies* est, in qua punctum undevis innumeras vias habet, nec portio spatii inest: hicque talis supponitur, cuius nulla portio cum reliquo punctum solum commune habet; quæ *planum* fit, si in ea quævis *linea rediens* sphæræ communis portionem se facie utraque tegentem claudat.»

Pag. 7, ℣. *11 a calce* post «sphæra» verbum «duplex» inseri voluit Bolyai in «Recensione per auctorem ipsum facta».

Ibidem ℣. *6 a calce* verba «quæ revolutione» in Ed. I. ordine inverso leguntur.

Pag. 8, ℣. *12 punctum spatiale* in Ed. I. *punctum spatii* legitur. De hoc loco ipse Bolyai in «Recensione per auctorem ipsum facta» scripsit «pro *puncti spatii* lege *puncti spatialis*». Cum ipse pro *punctum* errore quodam *puncti* scripsisset, recte nominativum restituimus.

Pag. 10 distinctio §. 8. in Ed. I. deest.

Ibidem ℣. *4* post «quadam» inseruimus literam *f*.

Ibidem ℣. *6* «formæ *f*», in Ed. I. legitur «formæ alicuius».

Ibidem ℣. *8* post verba «Hinc porro», in Ed. I. versui præcedenti ascripta, alinea nova sic incipit: «1. Rectarum istarum . . .», quam alineam sustulimus, ne numerus 1. in alinea $\dot{\mathrm{v}}$. 18 recurrens lectorem turbaret.

Pag. 12, $\dot{\mathrm{v}}$. *7—6 a calce.* In Erratis Tomi I. pag. LIII Bolyai hanc emendationem præcipit: «post *parallelogrammi* adde: *nisi quadratum fuerit*». Cum præter quadratum etiam alia parallelogramma inveniri queant, quæ excipienda sunt, melius putavimus $\dot{\mathrm{v}}$. sequenti verbum «generaliter» inserere.

Pag. 13. $\dot{\mathrm{v}}$. *7 usque 2 a calce* alineam ex Erratis Tomi II. pag. 373 (sive Tomi I. pag. LIII) inseruimus.

Pag. 14, $\dot{\mathrm{v}}$. *11 a calce.* Definitionem «tang. *v* et sec. *v pro radio r*» vide pag. 128.

Pag. 15, $\dot{\mathrm{v}}$. *13.* Verba «non in illo plano sitæ» inseruimus ex Erratis lucubratiunculæ «Recensio per auctorem ipsum facta». Aliter emendare voluit Bolyai hunc locum in Erratis Tomi I. pag. XC: «nil aliud cum plano illo utvis producto commune habenti». Nos autem emendationem tempore posteriorem Recensionis, cum etiam brevior esset, inserere melius putavimus.

Pag. 17, $\dot{\mathrm{v}}$. *13.* Bolyai *perpendicularem* signo «$\llcorner$» significat: nos melius putavimus signo usitatiore «$\perp$» uti, quamquam signum Bolyaianum naturæ anguli recti a semirectis inclusi nempe casui perpendicularium simplicissimo magis conveniat.

Pag. 20, $\dot{\mathrm{v}}$. *5—7.* Partes Figg. 5. et 6. literis *a* et *b* distinctæ, nec non pars *c* Fig. 5. in Ed. I. hanc inscriptionem habent: «Aut si non ponatur distantia eadem».

Pag. 21, $\dot{\mathrm{v}}$. *10 a calce* «admissa operatione tertia quoque» inseruimus ex Erratis Tomi I. pag. XXX.

Ibidem ℣. *3 a calce* «potest iis, quæ» in Ed. I. sic legitur: «potest; iis vero quæ».

Pag. 22. ℣. *8.* «Arbor inferius» de quo hic agitur paginis 408—412 continetur, atque idem est, qui legitur pagg. LIX—LXIII.

Pag. 23, ℣. *14—15* «si punctum motum $\mathfrak{b}$ fuerit» inseruimus ex Erratis Tomi I. pag. XXXVI.

Pag. 27, ℣. *18* «ininterrupte» pro «in interruptæ» Editionis I.

Pag. 28, ℣. *7 a calce.* In Erratis pag. XC leguntur hæc: «Annulus e centro $\mathfrak{f}$ aliter determinandus: moveatur nempe superficies sphærica S' in se circa $\mathfrak{f}$: punctum aliquod ipsum $\mathfrak{f}$ includens, lineam uniformem redeuntem describet». Et: «Notandum autem, rectam planumque brevius quoque deduci posse».
Ibidem ℣. *2 a calce* literam «$\mathfrak{o}$» nos inseruimus.

Pag. 29, ℣. *1* pro litera «$\mathfrak{o}$» in Ed. I. «$\mathfrak{c}$» legitur.

Pag. 31, ℣. *12 a calce* «$\mathfrak{c} * \mathfrak{C}$» correximus ex «$\mathfrak{c} * \mathfrak{p}$», errore manifesto calami in Ed. I. scripto.
Ibidem ℣. *2 a calce* «annuli concentrici» scripsimus pro «circuli concentrici», cum nondum demonstratum esset lineam circulum esse.

Pag. 36, ℣. *12 a calce* post «huius» indicationem paginæ 26, quam Bolyai uncinis inclusam ibi apposuit, omisimus.

Pag. 37, ℣. *3.* «(Fig. 14.)» a nobis insertum est.
Ibidem ultimo versu «$\mathfrak{cd}$» posuimus pro «$\mathfrak{ab}$» Editionis I.

Pag. 41 ultimo versu. Post «essent» indicationem Bolyaianam paginæ 39, ut minus accuratam, omittendam censuimus.

Pag. 42, ℣. *13* «crescentibus» et ℣. *2 a calce* «descripta» inseruimus ex Erratis pag. LIV.

Pag. 44, ℣. *3*. «$\mathfrak{a}'\mathfrak{b}$, $\mathfrak{a}\mathfrak{b}$ æqualem» scripsimus pro «$\mathfrak{a}'$ a $\mathfrak{b}$ æqualem».
Ibidem ℣. *3 a calce* «suppositive» pro «supposititie».

Pag. 56, ℣. *penultimo* post «in *Appendice*» in Ed. I. «sequente» legitur.

Pag. 58, ℣. *5 a calce* et *pag. 60*, '211121122 ℣. *1 et 2* pro «sufficiente» melius esset «quantalibet».

Pag. 59. §. *2*. ℣. *1*. «$v = u > u'$» positum est pro «$u = u'$», item «$\overline{\mathfrak{A}\mathfrak{B}}$» pro «$\mathfrak{A}\overline{\mathfrak{B}}$» ex Erratis Tomi II. pag. 375.

Pag. 60, ℣. *5*. «sectione prima» scripsimus pro «tomo primo».
Ibidem §. *1*. Nulla mentio facta est casus illius, duo triangula æqualia esse, cum duo latera et angulus maiori oppositus æqualia sint.

Pag. 61. ℣. *12*. «$\mathfrak{a}\check{\mathfrak{c}}$ in $\mathfrak{A}\overline{\mathfrak{C}}$» scripsimus pro «$\mathfrak{a}\bar{\mathfrak{b}}$ in $\mathfrak{A}\overline{\mathfrak{B}}$».
Ibidem ante ℣. *6 a calce* in Ed. I. distinctio «§. 2.» legitur, quam delevimus, cum duo versus ita distincti simpliciter ex Casu tertio sequerentur.
Ibidem ℣. *4 a calce* «§. 2.» positum est pro «§. 3.»

Pag. 63, ℣. *1*. «quamvis» scripsimus pro «quarumvis», secundum Errata Tomi II. pag. 375.
Ibidem ℣. *2 a calce* «adiacentes æquales» scripsimus pro «interceptum æqualem», ut loco laudato Bolyai præcepit.

Pag. 64, ℣. *2*. De hac re Bolyai pag. 375 Tomi II. Ed. I. hæc annotavit: «*Interim eaedem trianguli aequicruri proprietates, e statim postea ab hoc independenter demonstrato, quod angulo maiori latus maius,* *et lateri maiori angulus maior opponatur, manifesto immediate sequuntur*». Demonstratio, cuius hic mentio facta est, pag. 66 huius Tomi et in annotatione ad illum locum exposita est.

Pag. 65, $\dot{\mathrm{v}}$. 16 «maiorem» in Ed. I. «minorem».

Pag. 66, $\dot{\mathrm{v}}$. 16. Ad hunc locum in Erratis Tomi II. pag. 385 nota sequens legitur:

> «P. 18. non error quidem proprie est, verum si in triangulo æquicruro angulorum ad basim et crurum æqualitatem se mutuo ponere, non iuxta p. 16. 1[1], sed e laterum angulorumque mutua dependentia demonstrare libeat, ut p. 375[2]. dictum est: tum conversa ad finem paginæ 18[3] aliter demonstranda erit; nempe si $u > v$, erit u aut rectus vel obtusus, aut non; prius e parte priore patet; in casu posteriore autem erit u et v uterque acutus; nam si v rectus vel obtusus, et simul $u > v$ esset, summa duorum angulorum trianguli 2 rectos excederet.
>
> Pro acutis u et v et $u > v$ autem demissa (uti Fig. 23[4]) perpendiculari, patet angulos u ad dextram lævamque æquales, et v ulterius ad dextram cadere; quia nec tegere angulum u, nec interius ad lævam cadere potest, nam in casu priore $u = v$, in posteriore $v > u$ esset. Tum vero $b > (a' = a)$ est.
>
> Hinc si $u = v$, erit $a = b$, quia pro $a > b$ esset $v > u$, et pro $a < b$ esset $v < u$. Ita si $a = b$, est etiam $u = v$; quia pro $u > v$ esset $b > a$, et pro $u < v$ esset $b < a$.
>
> Sed idem et alioquin ex ipsa Fig. 23[4] facile liquet; imo etiam alio modo patet; nempe *pro cruribus aequalibus*

[1] In hac ed. pag. 63, 1.
[2] » » pag. 424, al. 1.
[3] » » pag. 66.
[4] » » *Fig.* 60.

recta ex apice ad meditullium baseos ducta, fient triangula æqualia (per tria latera), ***si angula ad basim fuerint aequales***, perpendicularis e meditullio baseos, formas utrinque æquales faciet, exibitque e triangulo, quod nisi per apicem fiat, fiet triangulum æquale non triangulo.»

Pag. *67*, ***in fine*** ỷ. *2* delevimus hæc: «Atque post hoc numero».

Ibidem ỷ. *4—5* ***a calce*** pauca correximus, ut Bolyai in Erratis Tomi II. pag. 375 corrigenda voluit.

Pag. *68*, ỷ. *7—8*. «Quadrati, rhombique alia constructio e (Fig. 91 *a*, *b*, *c*, *d*) patet» ex Erratis Tomi II. pag. 375 insertum est.

Pag. *69*, ỷ. *12* «λ» scriptum est pro «v».

Ibidem *§. 2*. Inter conditiones similitudinis triangulorum omissus est casus, si in duobus triangulis duorum laterum proportio angulique horum maioribus oppositi æquales sint.

Pag. *77*, ỷ. *14* «in» ante «divisione» in Ed. I. deest.

Pag. *79*. ỷ. *5—2 a calce*. Locus, quem Bolyai hic designat, Editionis libri Christiani Wolfii, qui inscribitur «Elementa matheseos universæ» Genevæ anno 1793 in publicum datæ Pagina 98. sic legitur:

Definitio VII. 17. *Linea recta AB* est, cuius pars quæcunque est toti similis.

Definitio similitudinis ibidem pag. 18 hæc est:

Definitio XII. 24. *Similia* sunt, in quibus ea eadem sunt, per quæ a se invicem discerni debebant. *Dissimilia* sunt, in quibus ea diversa sunt, per quæ a se invicem discerni debent. Atque adeo *Similitudo* est identitas; *Dissimilitudo* diversitas eorum, per quæ res a se invicem discerni debent.

Pag. *81*, *§. 5*. Figuræ 79*, in qua demonstratur constructio ***tangentis ex y***, solum in indice rerum mentio facta est.

Pag. 82. Distinctio «§. 1.» in Ed. I. deest.

Pag. 83. ỷ. 4. In Fig. 82. pro literis c, d, e in Ed. I. hæc inæqualitates scripti sunt: $c<a$, $d>a$, $e>b$.

Ibidem ỷ. 11. Pro «$\frac{\gamma}{2}$», «$\frac{\delta}{2}$» in Ed. I. legitur «γ», «δ», errore manifesto calami.

Pag. 85, ỷ. 3. Vocabulum «Est» a nobis insertum est.

Pag. 86. §. 1. De Fig. 88. in Erratis Tomi II. pag. 386 leguntur hæc:

> «Notandum etiam centrum circuli inscripti cum centro circumscripti, in Fig. ob triangulum æquilaterum coincidere: secus perpendiculares e duorum laterum trianguli meditulliis, et rectæ duos angulos bisecantes diversas sectiones præbent.»

Ibidem ỷ. 3 a calce. In Ed. I. «$\frac{p}{m}$» legitur pro «$\frac{p}{n}$», errore typothetæ.

Pag. 87, §. 3., ỷ. 7—8. «propter hypotenusam cathetosque æqualia (pag. 64)». In Ed. I. sic: «(propter $\mathfrak{pb}$ commune et angulos adiacentes æquales)». Correximus ex Erratis Tomi II. pag. 386. Ubi etiam hæc leguntur:

> «Fig. 52.* etiam u nonnisi extremitatibus rectæ $\mathfrak{ab}$ adscribi debuisset, quum initium a perpendicularibus e laterum $\mathfrak{ab}$ et $\mathfrak{bc}$ meditulliis fiat. Potuissent quidem ad eundem finem duo anguli ad $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$ bisecari, et e rectarum bisecantium sectione $\mathfrak{p}$ rectæ ad apices omnes duci: etenim totidem triangula, quot latera polygoni, patet per duo latera et angulum interceptum æqualia esse; nempe tum $\mathfrak{pb}=\mathfrak{pc}$, et $\triangle\,\mathfrak{pbc}=\mathfrak{pba}$, itaque angulus ad $\mathfrak{a}$ pariter bisecatur, idemque porro continuatur; et manifesto perpendiculares

* In hac ed. Fig. 89.

etiam ex $\mathfrak{p}$ apice triangulorum æquicrurorum æqualium communi æquales erunt, centrumque circuli circumscripti inscriptique in figura regulari idem erit.»

Pag. 88. Pro «§. 5.» et «§. 6.» in Ed. I. erronee «§. 4.» et «§. 5.» scriptum est. Quantitatem anguli Bolyai in §. 5. gradibus exprimit, quamquam divisionem circuli in gradus nondum pertractavit. Denotationem tamen reapse retinendam putavimus.

Pag. 89, ỳ. 4 a calce. In Ed. I. Fig. nostra 91. deest, sed inveniuntur quatuor Figuræ, quæ potius ad pag. 68 pertinent. Infra duas earum, quas nos literis *a* et *b* denotavimus, «Rhombus», infra tertiam, litera *c* denotatam «Rhombus vel quadratum», infra quartam, litera *d* denotatam «Quadratum» scriptum est.

Pag. 93, ỳ. 1 in Ed. I. sic incipit: «Quantitas anguli quam esse eadem potest, anguli quem . . .» Correximus iussu Erratorum Tomi II. pag. 375.

Pag. 94, ỳ. 13 «$\mathfrak{ap}$» correximus ex «$\mathfrak{aq}$» Editionis I.
Ibidem ỳ. 14 a calce «*H*» scripsimus pro «*A*» Ed. I.

Pag. 97 pro «§. 4.» et *Pag. 98* «§. 5.» in Ed. I. erronee «§. 3.» et «§. 4.» scriptæ sunt.

Pag. 98, ỳ. 13 a calce «$\mathfrak{e}\mathfrak{B}\mathfrak{f}$» scriptum est pro «$\mathfrak{ebf}$» Editionis I.
Ibidem ỳ. 3 a calce «talis» insertum ex Erratis Tom. II. pag. 375.

Pag. 101. Ante «§. 2.» numerus «I.» in Ed. I. iterum inscriptus est. Delevimus.
Ibidem ỳ. 14 «$\mathfrak{d}\mathfrak{E}\mathfrak{C}$» scriptum est pro «$\mathfrak{d}\mathfrak{E}\mathfrak{f}$». Litera $\mathfrak{d}$ significatur punctum rectæ $\mathfrak{Eg}$, pro quo $\mathfrak{Ed}=\mathfrak{BC}$.

Ibidem ỷ. *6—7 a calce.* In figura allata Tomi I. Ed. I. demonstratio etiam æqualitatis triangulorum quoad portiones terminatæ indicata est. Confer etiam pag. 109.

Pag. 103. Ad §. 7. Bolyai «in gratiam Tyronum» hæc addidit (Tomi II. pag. 377):

> «Pro imperitis asserentibus, trapezii aream æqualem esse facto ex β et semisumma laterum non parallelorum (nempe l et lateris ei oppositi), imo quadrilateri cuiusvis aream prodire, si semisumma laterum oppositorum per semisummam reliquorum multiplicetur: sit l æquale lateri opposito, et construatur rectangulum pro basi β et altitudine l: atque ponderentur trapezium rectangulumque in bilance.»

Pag. 110. «§. 3.» in Ed. I. inscripta est «§. 2.», distinctio «§. 3.» vero ante alineam tertiam huius paragraphi scripta est, quam nos hic omittere debebamus.

Pag. 112, §. 3. ỷ. *1.* insertum est «similium».

Pag. 116. Pro numero «IV.» in Ed. I. «V.» legitur.

Pag. 125, ỷ. *2.* «laterum» scripsimus pro «angulorum» iussu auctoris in Erratis Ed. I. Tomi II. pag. 376.

Ibidem pro linea 10 in Ed. I. hæc leguntur: «$\cos u^2 = r^2 - \sin u^2$ (per $\cos u^2$, 2-dam potentiam non arcus u, sed ipsius $\cos u$, ita per $\sin u^2$, 2-dam potentiam sinus u intelligendo)». Ubi nos, ut et in locis similibus ratione scribendi consueta $\cos^2 u$, $\sin^2 u$, scripsimus.

Pag. 128, ỷ. *3 a calce* «monitum» scriptum est pro «motum».

Pag. 129, ỷ. *6 a calce.* Post «tang. α» in Ed. I. scriptum est «pro radio r», quod nos omisimus, insertis verbis «et tangente» ỷ. antecedenti.

Pag. 133. Lineis Figuræ Editionis I., quam nos numero 137. denotavimus, inscriptæ sunt denominationes functionum trigonometricarum. Nos omissis inscriptionibus literas punctis Figuræ apposuimus, easque textui inseruimus.

Pag. 146. «Scholion 8.» in Ed. I. numero «6.» erronee denotatum est.

Pag. 147, ℣. 2 a calce «additum est aliquid in Tomi I. pagg. 512—520, 569—581.» In Ed. I. legitur «addetur aliquid inferius. Atque nunc sequitur» (nempe ·22). Verbum «sequitur» ad initium ·22 transtulimus.

Pag. 148. In Ed. I. finis sectionis II. et initium sectionis III. sic coniuncta sunt: «Atque nunc sequitur

·22 MOTUS GEOMETRICUS COMPOSITUS: nempe ...»

Ibidem ·22 *℣. 2.* De «Arbore» confer adnotationem ad Pag. 22.

Pag. 149, ℣. 3. In Erratis Tomi II. Pag. 401 vel LXXV adnotata sunt hæc:

> «Si punctum ex A linea abscissarum in B sursum moveatur, via accipiatur positiva, si deorsum, negativa; atque hic conditio C esse potest, ut quæratur resultatum, quod fieret, si motus puncti deorsum e fine viæ sursum factæ poneretur.»

Ibidem ℣. 7—8. In Ed. I. $(\alpha)x$ et $(\beta)y$ scriptum est pro $\alpha(x, y)$ et $\beta(x, y)$.

Ibidem ℣. 4 a calce. Post «constare» in Ed. I. legitur «inferius», pro «patet» vero «patebit».

Pag. 151, ℣. 7 a calce. In Ed. I. legitur y pro y'.

Ibidem ℣. 5 a calce. In Ed. I. æquationi alteri præscriptum est $\mapsto$.

Pag. 152, ℣. 18. «bisecant» in Ed. I. erronee «bisecat» scriptum est.

Pag. 156, $\dot{\mathrm{v}}$. *11 a calce.* Alinea in Ed. I. errore typographi numero 6. denotata est.

Pag. 157, $\dot{\mathrm{v}}$. *13 a calce* »distantiæ ab f et *D* ***aequales*** erunt» in Ed. I. sic legitur: »distantia ab f et *D* ***aequalis*** erit».

Pag. 161, $\dot{\mathrm{v}}$. *14 a calce.* De designatione hic applicata vide Tom. I. Pagg. 113 et 628.

Pag. 164, ultimo versu et Pag. 165, $\dot{\mathrm{v}}$. *1.* Ipsa res declarat restrictionem »si $\beta > \sqrt{a}$» præter necessitatem esse, sed duo valores ipsius x, dum reales sint, simul $\geqq 0$ fieri. Ex duobus radicibus x, si $\beta > \frac{\sqrt{a}}{2}$, uni solum y' positivum ita convenit ut $z - y' = \beta$ sit. In exemplo Bolyaiano etiam pro $x = \frac{2-\sqrt{3}}{2}$ est $y' = \frac{1-\sqrt{3}}{2} < 0$.

Pag. 175, $\dot{\mathrm{v}}$. *3.* In Ed. I. post »cadat» errore quodam hæc leguntur: »demittatur ex q′ perpendicularis ad axem; gaudebit hyperbola in hac puncto p».

Ibidem $\dot{\mathrm{v}}$. *5—4 a calce.* »Sit (Fig. 158.) ad axem parabolæ» scripsimus pro »Si (Fig. 120) ad axem parabolæ sit» Editionis I.

Pag. 179. $\dot{\mathrm{v}}$. *8—7 a calce.* »Atque et parabola ut ellipsis foci in axe in infinitum remoti consideretur.» Inseruimus ex Erratis Tom. II. Pag. 387.

Ibidem $\dot{\mathrm{v}}$. 2. *a calce.* Verbum »priore» Auctor ipse scribi voluit in Erratis Tom. II. Pag. 387 pro »ipso» Editionis I.

Pag. 185, $\dot{\mathrm{v}}$. *2—4.* Punctum q tunc solum in centro hyperbolæ erit, si pro punctis duobus d ei respondentibus utrisque $u = R$ est. Si pro uno d solum $u = R$ est, punctum q in asymptoto qf erit.

Pag. 192, $\dot{\mathrm{v}}$. *3—4.* Bolyai hic solum de rectis parabolam secantibus tractat.

Pag. 204. in fine ℣. *11 a calce* »$\beta^2 + p\alpha = 0$« ut mendosum delevimus.

Ibidem ℣. *10 a calce* post »$p = 0$« æquationem »$\alpha = 0$« ut mendosam delevimus.

Pag. 205, ℣. *3—8.* Quæ uncinis inclusimus, ex Erratis Tom. II. Pag. 376 sumpta sunt. Ex lineis secundi ordinis tamen oblivione quadam excidit æquatio duarum rectarum parallelarum, $y^2 = c$.

Ibidem ℣. *15.* Rectius demonstrandum fuisset aptiore coordinatarum systemate adhibito casum $a = 0$ evitari posse.

Pag. 206, ℣. *10.* Oblivione quadam omissus est casus $b = c = 0$.

Pag. 209, ℣. *14—17* non sufficiunt ad demonstrandum problema Delium insolubile esse.

Pag. 210, ℣. *12* »et tum &« inseruimus ex Erratis Tom. II. Pag. 387.

Pag. 211. In Erratis Tom. II. Pag. 387 legitur annotatio Auctoris: »Linea ima autem iuxta pag. 5* sub numerum '222 nonnisi ea venire debuissent, ***quorum nec quodvis punctum construi geometrice sensu stricto potest***«.

Pag. 212, ℣. *9—10.* Fig. 191. casum $\mathfrak{A}c = 2c\mathfrak{B}$ illustrat.

Pag. 217, ℣. *6—4 a calce.* De hoc theoremate positio singularis punctorum exceptionis causa esse potest iam in casu, si $n = 3$.

Pag. 218, ℣. *5 a calce* post »æquationem« delevimus »$(F)\,(x, y) = (f)\,(x, y)$«.

* In hac ed. pag. LXI.

Pag. 219—307. Subdivisio Sectionis IV. in calce repetita novum est editorum ac præsertim optabile, cum in subdivisione contextus huius sectionis essentialiter expleatur; definitiones nonnullæ vero in ea solum reperiuntur.

Pag. 219. In fine ℣. 8 in Ed. I. affertur Index rerum Tomi I. Delevimus.

Ibidem ℣. 9 «(in calce)» scripsimus. In Ed. I. legitur «pag. 3».

Pag. 220, ℣. 5 a calce «P, Q, . . .» addiderunt editores.

Pag. 223, ℣. 1 post «est» delevimus «1-mo».

Ibidem ℣. 2—1 a calce. Sententiam postremam addidimus ex Erratis Tom. II. Pag. 401.

Pag. 225, ℣. 6—7. Ordinem vocabulorum immutavimus; in Ed. I. enim «parallelæ» ℣. 6 post vocabula inclusa legitur.

Pag. 228, ℣. 6 a calce «in calce» scripsimus pro «(p. 7)».

Pag. 230, ℣. 10 a calce «𝔈'» nos inseruimus.

Pag. 231, ℣. 12 a calce «sub conditione (pag. 230) dicta» inseruimus ex Erratis Tom. II. Pag. 376.

Pag. 234, ℣. 7. Pro «𝔈𝔇'ℭ» in Ed. I. legitur «𝔈𝔇ℭ».

Pag. 239, §. 2 ℣. 2. Vocabulum «perpendicularis» insertum est ex Erratis Tom. II. Pag. 376.

Pag. 243, ℣. 13—14. In Ed. I. propositio vitiose terminatur sic: «e catheto 𝔞𝔞' et hypotenusa 𝔄𝔞'».

Ibidem ℣. 16 «etiam 𝔄𝔮» in Ed. I. legitur «𝔄𝔮 et 𝔞'𝔮».

Pag. 248, ỷ. 14 &. In Fig. 224. etiam in originali circulus pro ellipsi delineatus est, probabiliter quia pars contextus ad hunc casum limitalem spectat.

Pag. 258, ỷ. contextus ultimo «$4^\circ\, 4'$» correximus in «$4^\circ\, 2'$».

Pag. 265, ỷ. 4. Post «Appendicis» delevimus «in tomo primo», ante «in» vero delevimus «ibidem».

Ibidem ỷ. 8—9. Diametri hic intelligantur *L* formes. Theorema hoc casus specialis est formulæ, quæ ad ***segmentum Z sphaerae*** attinet (Pag. 384), nempe $Z = \pi . \mathfrak{fc} . \mathfrak{fc}$.

Ibidem ỷ. 13. «*P*» legitur pro «*p*» Editionis I. ex Erratis (Tom. II. pag. 387).

Ibidem ỷ. 16. In Erratis (Tom. II. Pag. 387) legitur de Fig. 237.: «Notandumque est, quod P circa $\mathfrak{AP}$ motum quoque $\parallel \mathfrak{fB}$ maneat, atque tum ordinata in semicirculo ad angulum obliquum reducenda sit (pag. 165*)»

Pag. 283. ỷ. 15. In Ed. I. Figuræ 240. suprascripta sunt hæc: «Sectio nulla, si $r < \pm(R-d)$ vel $> R+d$. Sectio in puncto, si $r = \pm(R-d)$ vel $R+d$. Sectio in 2 punctis, si $r < R+d$, sed non $<$ nec $= \pm(R-d)$».

Pag. 284, ỷ. 13 a calce «§. 5.» in Ed. I. «§. 4.» inscripta est.

Pag. 288, ỷ. 1. «§. 6.» in Ed. I. «§. 5.» inscripta est.

Pag. 291 sqq. Significationes Figurarum 252—254. commutavimus, ut partes triangulorum oppositæ similibus literis denotentur.

Pag. 303, ỷ. 9—10. Literæ $\mathfrak{afd}$, $\mathfrak{mfj}$ et $\mathfrak{mabP}$ hic additæ sunt, ne in Figuris nomina circulorum adscribi debeant, ut in Ed. I. Puncta duo horizontis, australe et boreale in Ed. I. literis insignita non sunt.

* In hac editione pag. 214.

Pag. 309, ỷ. 14—16 et *Pag. 309, a ỷ. ultimo usque ad Pag. 310, ỷ. 3* correximus ex Erratis Tom. II. Pag. 387.

Pag. 310. ỷ. 5 a calce. In Ed. I. Figuræ 261. nomina singulorum punctorum, linearum etc. ascripta sunt.
Ibidem ỷ. 6 a calce «§. 2.» in Ed. I. «§. 3.» inscripta est.

Pag. 311, ỷ. 13 a calce post «fuerit» delevimus «puncti $\mathfrak{P}$».

Pag. 312, ante ỷ. 6 a calce delevimus «§. 2.»

Pag. 313, ỷ. 14 «et altitudines $\mathfrak{P}''\mathfrak{A}$, $\mathfrak{Q}''\mathfrak{A}'$ punctorum $\mathfrak{P}$, $\mathfrak{Q}$;» ex Erratis Tom II. Pag. 376 insertum est.

Pag. 326. ỷ. 3. Post «Scholion» in Ed. I. deest «2.»

Pag. 328, ỷ. 6. Literas dies denotantes Bolyai ubique parvos (*abc*...) scribit.

Pag. 331, ỷ. 7—8 correximus ex Erratis Tom. II. Pagg. 387—8.

Pag. 333, ỷ. 10. Duo circuli Figuræ 276 in Ed. I. literis magnis (C, C') insigniti sunt. Ibidem circulus superior Figuræ charta separata fictus et in centro filo tabulæ affixus est.

Pag. 335, ỷ. 1—6. Cyclus solis Gregorianus quatuor tantum sæculorum vere est. — Errores in chronologia alii etiam inveniuntur sed minimi momenti, ut neque emendatione neque mentione in annotationibus egeant.

Pag. 343, ỷ. 9 et 11 a calce et *Pag. 350, ỷ. 1* correximus ex Erratis Ed. I. Tom. I. Pag. XC: «Pro N non >18, dum residuum >13, tunc est addendum 1». In contextu Ed. I. legitur «pro $N<18$», «residuum >17», «addatur 1».

Pag. 344, ℣. *11* «et erit» scriptum est pro «$=$».

Pagg. 357—358. Post Recensionem per auctorem ipsum factam in Ed. I. Errata et Supplementa Tomorum I. et II. leguntur. Nos, postquam hæc omnia in opere edendo adhibueramus et in adnotationibus ad locos emendatos attuleramus, cuncta ordine repetere noluimus.

Pag. 361. In Ed. I. Appendicis literæ singulares puncta denotantes literis quæ dicuntur *cursivis* impressæ sunt, sed in libellis nobis relictis manu Ioannis Bolyai scriptis puncta literis qu. d. *fractur* denotantur, quibus etiam pater eius usus est.

Ibidem post ℣. *15.* in Ed. I. legitur:

$\llcorner$ denotet perpendiculare
$\wedge$ « angulum.

Nos hæc delevimus, quia pro signo $\llcorner$ usitatiore $\perp$ utimur, vocabulum «angulum» autem ubique integrum scribimus.

Pag. 368. ℣. *ultimo* «$\mathfrak{krs}$» correximus in «$\underset{\cdot}{\mathfrak{h}}\mathfrak{rs}$», ut et ipse auctor correxit in libello manu scripto, quo Appendicem lingua Germanica denuo pertractavit.

Pag. 370. ℣. *ultimo §. 18.* «$\bigcirc\, \underset{\cdot}{\mathfrak{h}}\mathfrak{a}$» emendavimus ex «$\bigcirc\, \underset{\cdot}{\mathfrak{h}}\mathfrak{t}$».

Pag. 374. extremae §. 26. auctor ascripsit exemplari in bibliotheca Academiæ Hungaricæ asservato «cos. quoque necessarium». Videtur in editione quadam altera propositionem de cosinu demonstraturus fuisse, quamquam nihil hic maioris momenti vere desideratur. Revera considerationes, quibus in «Supplemento numeri '31351» Tom. II. Tentaminis ex

$$\sin. H : \sin. A = 1 : \sin. a$$

trigonometria sphærica integra deducitur, et in geometria absoluta valent.

Pag. 376. ỷ. 3. Ex libello Germanico auctoris manu scripto »cq« scripsimus pro vitioso »cg« Editionis I.

Pag. 377. ỷ. 6. »cn ∥ ab, c′n′ ∥ ab« scripsimus pro »cn, c′n′ ∥ ab« Ed. I.

Pag. 380. ỷ. 8. Ioannes Bolyai ad hunc versum »et 27« ascripsit in exemplari Academiæ Hungaricæ.

Pag. 382. ỷ. 4. a calce »§. 30.«. scripsimus pro »§. 29.«. Ed. I.

Pag. 394. ỷ. 5—4. a calce. Hæc per errorem animadvertuntur. Aream limite superiore certo minorem esse constat. Porro angulus z generaliter dividi in n partes constructione geometrica nequit, etiam si n sub formam GAUSSianam cadat.

Pag. 395. In hoc Additamento, quod pagg. 380—383 Tom. II. Ed. I. Tentaminis continetur, delevimus mentionem de paginis huius operis factam, in quibus solum theoremata omnibus nota continentur. Articulum vero secundum in hunc locum reiecimus:

> »Pro v positivo radicem positivam ipsius $-v^2$ per $+v$ denotat, et negativam per $-v$, sed ob defectum signorum (quum vix hæc duo quadamtenus prodierunt), radix positiva ipsius -1 per $\sqrt{-1}$ et negativa per $-\sqrt{-1}$ denotabitur«.

Ibidem ỷ. 3. Post »Appendicis« delevimus »in tomo primo«.

Ibidem ỷ. 11. Initium articuli huius in Ed. I. sic legitur:

> »Nimirum de axiomate Euclideo dictum in tomo primo satis superque est: pro casu, si verum non fuerit &«.

Pag. 388. ỷ. 2. »multiplicentur« scripsimus pro erroneo »dividantur«.

Ibidem ỷ. 8. Latus sinistrum formulæ in Ed. I. deest.

Pag. 401. sqq. In his »Additamentis quibusdam ad Tomum I. Latinum« Wolfgangus Bolyai enumerat nomina eorum, qui usque ad hoc tempus nomina ad librum emendum subsignaverunt, posteriores in Tomo II. enumeraturum sese pollicetur. Tradit posteritati memoriam duorum discipulorum insignium immatura morte sibi ereptorum, quorum unus, Ludovicus JAKAB de Bögöz medicinæ doctor 500 florenos Rhenenses cambiales ad sumptus editionis subsistendos dedit, alter vero, Paulus SZÁSZ de Ilenczfalva formas signorum mathematicorum sculpsit, fusit et fundendas curavit.

Excusat se, quod opus tanta mora interposita foras datur. Exponit porro quædam, quæ ad vocabula mathematica Hungarica, ad Subdivisiones Geometriæ, ad orthographiam Hungaricam spectant, et linguam quæ dicitur universalis ingenio quodam artis mathematicæ et musicæ perito concipiendam et ad perfectionem exædificandam esse.

Nomina eorum, qui posterius nomina subsignaverunt, in Tomo II. leguntur, in pagina, quæ inscribitur Megigért jelentés (quasi Nuntium promissum), quam nos pag. 416 iterum typis imprimi curavimus. Ibidem legimus etiam Ioannem Bolyai centum quatuor florenos Rhenenses cambiales et 54 crucigeros dedisse partim ad sumptus edendæ Appendicis, partim pro exemplaribus integri operis.

Ut in Additamentis legitur, primum 128, deinde 28 exemplaria subsignata erant, et summa, quæ pro duobus Tomis solvebatur, 2 fl. Rh. argenteorum et 30 crucigerorum erat.

ERRATA.

Tom. I. Pag. 449 ṽ. ultimo lege $\sqrt[m]{a\sqrt[m]{a\sqrt[m]{a\ldots}}}$ pro $\sqrt{a\sqrt[m]{a\sqrt[m]{a\ldots}}}$

Pag. 628. ṽ. 4 a calce. Pro 112 lege 114.

Ibidem. ṽ. 2 a calce. Pro $n\frac{U}{nv}=U$ lege $nv\frac{U}{nv}=U.$

Tom. I. Fig. 17. c. Litera $\mathfrak{d}$ significandum est punctum rectæ $\mathfrak{Eg}$, pro quo $\mathfrak{Ed}=\mathfrak{BC}$.

Tom. II. Pars I. Pag. 19. ṽ. 6. Pro «$\mathfrak{Ji}$» lege «$\mathfrak{hi}$».

Tom. II. Pars II. Tab. IX. Fig. 41. Ad peripheriam circuli scribe «e» pro «c».

Tab. XXII. Fig. 99. Ad punctum, ubi rectæ «cſ» et «bq» se invicem secant, scribe «a».

Appendix Tab. V. Fig. 14. Rectam ad lævam signa literis «or» pro «cr».