WOLFGANGI BOLYAI DE BOLYA

TENTAMEN

IUVENTUTEM STUDIOSAM IN ELEMENTA MATHESEOS PURÆ ELEMENTARIS AC SUBLIMIORIS METHODO INTUITIVA EVIDENTIAQUE HUIC PROPRIA INTRODUCENDI, CUM APPENDICE TRIPLICI.

EDITIO SECUNDA.

TOMUS II.

ELEMENTA GEOMETRIÆ ET APPENDICES.

MANDATO ACADEMIÆ SCIENTIARUM HUNGARICÆ SUIS ADNOTATIONIBUS ADIECTIS EDIDERUNT

IOSEPHUS KÜRSCHÁK, MAURITIUS RÉTHY,
BÉLA TŐTÖSSY DE ZEPETHNEK
ACADEMIÆ SCIENTIARUM HUNGARICÆ SODALES.

PARS PRIMA. TEXTUS.

BUDAPESTINI.
SUMPTIBUS ACADEMIÆ SCIENTIARUM HUNGARICÆ.
MCMIV.

PRAEFATIO EDITORUM.

Cum infra scripti, quibus renuntiante Julio König, Academia Scientiarum Hungarica Tomum II. Tentaminis edendum mandavit, eum in publicum prodimus, facere non possumus, quin mærentes in memoriam revocemus luctum, quo Academia nostra anno post editum Tomum I. mortuo Henrico Finály de Kend, eruditissimo doctissimoque viro et sodali, afflicta est. Amissi viri, peritissimi Latinitatis classicæ antistitis, cuius opera etiam conatus nostri prospere promovebantur, vicem supplere filius defuncti, Gabriel Finály de Kend summo studio enisus est. Quod grato animo accepimus.

Omnibus, quæ ad arithmeticam spectant, in Tomo I. editis, in secundo continentur ea, quæ ad geometriam pertinent, ita etiam »Appendix« Ioannis Bolyai. Huic Tomo inseruimus etiam paginam »Recensio per auctorem ipsum facta« inscriptam, de qua in Præfatione Editionis II. Tomi I. mentio facta est. Paginas ad Tomum I. Editionis I. alligatas, quæ inscribuntur »Egy kis toldalék a deák I. kötethez« (»Additamenta quædam ad Tomum I. Latinum« — hoc est non ad opus Hungaricum ARITHMETICA ELEJE = Initia Arithmeticæ, quod anno 1830 editum est) huic quoque Tomo subiecimus. Quia autem res, quæ in iis tractantur, potissimum linguæ Hungaricæ peritorum legere interest, integras eas in Latinum convertere alienum putavimus, argumenta tamen in Adnotationibus huius Tomi breviter exposuimus.

Rationes, in edendo Tomo I. constitutas, in secundo edendo sine ulla mutatione conservavimus. Signa insolita in hoc Tomo neque ipse WOLFGANGUS BOLYAI adhibuit, sed signa diversarum æqualitatum et diversorum parallelismorum re ipsa adhibenda fuerunt: quæ, ut prorsus signa omnia auctorum retinuimus, excepto signo perpendicularitatis Bolyaiano $\llcorner$, in cuius locum signo solito $\perp$ usi sumus.

At figuræ haud leviter immutatæ sunt. Ex figuris stereometricis WOLF-

GANGI BOLYAI charta plicata compositis eas solum retinuimus, quæ ad »Conspectum generalem geometriæ» pertinent: his enim ad discendum utiliter illustrantur, quæ iis illustranda sunt. Pro ceteris figuris charta formatis figuras quæ dicuntur axonometricas adhiberi, cum intuentibus ad perspiciendum, tum præcipue typographis ad persequendum melius putavimus. Nonnullas etiam ex reliquis figuris correximus. Sed naturam figurarum ad geometriam absolutam pertinentium sine ulla mutatione retinendam esse censuimus. Quod nonnullas figuras, exempli gratia 14-tam Appendicis, ex integro composuimus sectione conica absoluta Cayleyana adhibita, earum naturam minime adulteratam esse putavimus, quia hoc modo imago rectæ lineæ æque recta est ac in figuris Bolyaianis.

De mutationibus, quæ in contextu operis evitari non potuerunt, ratio redditur in adnotationibus, quo etiam animadversiones nonnullas ad rem spectantes reiecimus.

Opere tandem perfuncti libenti animo commemorare debemus munificientiam Academiæ Scientiarum Hungaricæ, quod ad diem natalem centesimum IOANNIS BOLYAI concelebrandum Appendicem eius æternitate dignam in usum eorum, qui se studiis literarum dedidere, separatim ediderat.

Cum diligentissime enisi essemus, ut opus quam emendatissimum prodiret, menda typographica, quæ in contextu nihilominus invenientur, nobis lector benevolus ignoscet.

Budapestini 1904

Kürschák, Réthy, Tötössy.

HOC TOMO CONTINENTUR:

SIGNA

A BOLYAI INVENTA, QUAE IN TOMO PRIMO NON REPERIUNTUR IPSIS AUCTORIS VERBIS EXPLICATA.

$\overline{\mathfrak{ab}}$ denotatur linea $\mathfrak{ab}$ utrinque infinita.
$\mathfrak{a}\bar{\mathfrak{b}}$ « ex $\mathfrak{a}$ incipiendo infinita in plaga illa, in qua $\mathfrak{b}$ est.
$\bar{\mathfrak{a}}\mathfrak{b}$ « e $\mathfrak{b}$ incipiendo in plaga illa, in qua $\mathfrak{a}$ est, infinita.
$\overline{P}$ « P (ex. gr. planum) totum infinitum (iuxta definitionem pag. 8).

ARBOR

ARITHMETICAE GEOMETRIAEQUE

corradicata coronisque confluentibus.

E repræsentationibus externis internisque, via abstractionis pervenitur ad loca primaria omnium, quæ in mundo externo sunt, et quæ in externo internoque fiunt: SPATIUM et TEMPUS; quæ partim seorsim, partim coniunctim considerantur: abstrahendo nimirum e mundo externo corpus omne, e loco, quem occupare videtur, et quærendo quid reliquum, quidve ultra sit, oritur *intuitus spatii puri*, atque ex eodem in diversis locis, vel diversis in eodem loco, aut diversis repræsentationibus in eodem repræsentante, nascitur *intuitus temporis*. (Tom. II. pag. 2.)

Ex A et tali Non A quod ex A est, fit conceptus *partis*; et *continui*, si quid partes commune habeant. A comparando cum B oritur *aequalitas (absoluta* et *respectiva)*. Ex æqualitate et parte *quantitas (absoluta* et *respectiva)*. (Tom. I. pagg. 22—25.)

Quantitas cum quantitate parit *homogeneitatem* et *maioritatem minoritatemque*. Et hinc reflectendo ad tempus atque spatium (quum in priore quantitatis maioris excessus illico pateat, in spatio vero sæpe aliter se res habeat), de omnibus *quantitatibus ad formam simplicem prioris reducendis cogitatur*. (Tom. I. pag. 27.)

Atque talis *quantitas*, nempe ad *formam* TEMPORIS *reducta*, OBIECTUM ARITHMETICAE est. (Tom. I. pag. 27.)

I. *Quantitas cum qualitate* (nempe *certa determinatione*) parit positivum et negativum (mox imaginaria quoque). (pagg. 28, 121.)

II. Quantitatum P et Q certa cum determinatione positarum *resultatum certa sub conditione acceptum* parit *summam* S; et ex S et P quærendo *socium* ipsius P, oritur *differentia ipsius* P *ab* S. (pag. 30—31.)

III. *Differentia eadem* ipsius S ab S', atque porro ipsius S' ab S'' et ita porro, parit S, S', S'', S''' . . . *seriem arithmeticam*. (pag. 32. et 152.)

Atque si series eiusmodi U a o incipiat, et differentia cuiusvis termini a sequente sit $= u$, oritur *numerus* quoad u; et serie tali V item a o incipiente, cuius termini cuiusvis a sequente diffe-

His præmissis SPATIUM *purum* OBIECTUM GEOMETRIAE est, applicatis, ubi necesse est, veritatibus in Arithmetica deductis: ut arbor utraque fraterna corradicata, altera alteri opem ferente, coronis inter lucidas Spatii Temporisque connubii æterni orbitas in abysso cœlorum confluat. (Tom. II. pag. 1.)

I. E *spatio puro*: nascitur prius *superficies*, *linea*, *punctum*, *forma*, et *sectio*. (pag. 2.)

II. *Reditu in mundum externum*, cum reflexione ad corpus idem in diversis locis: oritur *Axioma congruentiae*, et *constructio mobilis geometrici*, *motusque geometricus* (coniunctio, in idea non in concreto, spatii et temporis). (pag. 3.)

III. *Reditus in spatium purum cum mobili geometrico. Motus sine quiete (Operatio motus prima)*; *Motus cum quiete*; *cum quiete unius puncti* (*Operatio motus secunda*); *cum quiete duorum punctorum* (*Operatio motus tertia*). (pagg. 5, 6, 7.)

rentia $= v$ sit, si o ipsius V cum o ipsius U simul ponatur, ac quilibet terminus sive in U sive in V sequens simul ponatur cum eo, qui in altera sequitur: oritur *nomen numericum* idem terminorum simultaneorum, in U *quoad u*, *in V quoad v*. (pag. 32.)

IV. *Quaestiones* hinc variæ exortæ: ex. gr. præter alias, num B numerus sit quoad A? si non; num tale u detur, quoad quod tam A quam B numeri sint? et si detur, cuiusnam nominis numerus sit A, et cuius sit B? Hinc *mensuratio* ipsius B per A, ubi A *mensura*, et B *mensum* ipsius A dicitur; atque hic oritur etiam idea *incommensurabilitatis* (adhucdum subiective tantum possibilis); atque hinc u semper minus cogitando, *limitis* idea. Venientibus talibus a et b autem, ut ad quæstionem, qualenam mensum sit b ipsius a, eadem responsio sit, quam ad eam, qualenam mensum sit B ipsius A; oritur *proportio*. Tum mensurando quoad A non solum B sed C quoque, oritur *fractio*; atque hinc passus fit omnes quantitates homogeneas quoad idem A mensurare; A *unitatem* appellando;

IV. Spatii filia primogenita *punctum* est, dein *sphaera* quasi media inter duo extrema (inextensum et quaquaversum infinitum). Sphæræ per operationem tertiam filia circulus est; et ex his, adhibitis reliquis operationibus quoque, generatur *recta*, atque e recta et circulo *planum*. (pagg. 8, 13, 26) qua minus *fractio vera* dicitur, et numerus quoad *A integer* audit. (pagg. 33—37, 41.)

V. Hinc reflectendo ad IV, si ibidem *A* unitas sit, quærere *b* ex *a* et *B*, dicitur *multiplicare a* per *B*, et *b factum quoad unitatem A e factoribus a* et *B* audit. (pag. 40.)

Hinc ex *b* tanquam facto supposito, et uno e factoribus *a* et *B*, quærere factorem socium eius, dicitur *dividere b* per illum, cuius socius quæritur, et hic *quotus* audit. (pag. 41.)

Atque prouti unitas (in IV.) $\dashv\vdash$ vel $\vdash\dashv$ accipitur; oriuntur *realia quoad* $+1$, et *realia quoad* -1. (pag. 42.)

V. *Rectis ex eodem puncto* 𝔭 *ad omnia puncta cuiuspiam F*,

1. Omnibus *per idem* (sive 1 sive aliud, dummodo non o sit) *multiplicatis*: *complexus extremitatum* parit *similitudinem*, et *homologa*; atque *contrarie aequalia*, et conceptum generalem *aequalitatis geometricae*. (pagg. 10 &c.)

2. *Rectarum* dictarum *ipsarum* autem *complexus* fit (sensu generali) *pyramis*; et forma ad 𝔭 apicata parit conceptum *anguli* generalem. (pagg. 10, 15.)

3. Hinc forma *excluso angulo* fit *fluens*; et hæc *exclusis recta planoque* fit *curva*, *admissis* vero *recta planoque* parit conceptum generalem *tangentis*, et *perpendicularitatis*. (pagg. 16, 17.)

4. Remoto (in V) 𝔭 in infinitum, oritur *angulus* o, *vel prima non sectio*; et e *rectarum dictarum*, si finitæ et æquales reddantur, *complexu* fit *prisma* (sensu generali, et tum adhuc generaliore). Et si *F* recta sit, et rectæ dictæ æquales ad angulum æqualem ponantur in plano; exinde oritur

VI. Si *factores aequales* esse contigerit, *multiplicatio cum divisione* parit *potentiam*, *radicem*, *logarithmum*, *(elementares)*. (pag. 50.)

Atque *quantitas* item *cum certa determinatione* (uti in I.), realitate eius, multiplicationi quoad —1 innixa, parit *imaginarium*, et conceptum multiplicationis latiorem. (pag. 121.)

Imo potentia logarithmusque *(elementares)* per binomii elevationem ad tales series deducunt, quæ conceptum *potentiae logarithmi* altiorem pariunt, ubi et *imaginaria in exponentem* ascendunt. (pagg. 192—193.)

parallelismi conceptus generalis. (pagg. 17—20.)

VI. *Motus geometricus simplex*, id est ut in quovis tempore una tantum trium operationum (in III dictarum), et quævis numero certo, etsi non eodem, eveniat: recta planoque heic iam ex IV suppositis. (pagg. 20, 21.)

Cum duabus prioribus operationibus, et semper certo præterea rectarum numero adhibito, *descendendo in planum* (omnibus eo restrictis) fit *Planimetria*: ubi prius *de lineis* (neglecta area), earumque *sectione* (o aut aliqua); tum *de areis* agitur. *Constructionis geometricae sensu stricto ambitus.*

Admissa operatione tertia quoque, nec restringendo ad planum, redeundo in spatium universum fit *Solidometria*, *constructione geometrica sensu lato accepta.* (pag. 22.)

Notandum autem, in motu dicto simplici operationem quamvis seorsim peragi, nec ulla alia lege restringi, nisi quod mobile e dato loco in datum perveniat. Unde duæ priores operationes, sola restrictione ad planum accedente, reducuntur: Primo ad *motum* *puncti* $\mathfrak{a}$ *rectam* $\mathfrak{ab}$ *secum ferentis, usquequo* $\mathfrak{a}$ *in* $\mathfrak{p}$ perveniat. Secundo ad *rectae* $\mathfrak{ab}$ *motum circa* $\mathfrak{a}$ *in plano, donec in certam rectam datam, cuius una extremitas* $\mathfrak{a}$ *est, perveniat.*

VII. Ex omnibus his quasi in oceanum confluentibus, oritur, per quarumvis quantitatum quibusvis operationibus affectarum qualemvis compositionem, conceptus ita dictæ FUNCTIONIS. Ubi item (ut in IV) variæ oriuntur quæstiones: e quibus CORONA *arboris Arithmeticae* exsurgit. (pag. 204.) Nempe

𝔄) *Pro certa functionis conditione (qualitateve)*, certa functionem constituentia *quae, quanta, qualiave* sint, quærere.

VII. MOTUS GEOMETRICUS COMPOSITUS: nempe ubi plures operationes (trium dictarum primitivarum coniunguntur) in eodem tempore; lege quoque, qua durante motu viæ simultaneæ per singulas operationes factæ a se invicem dependeant, data; e quo CORONA *arboris Geometriae* excrescit. Suntque hæ operationes coniunctæ. (pagg. 22 &)

𝔄) *Aut numero finito*; et quidem:

1. Aut duæ tantum; ex. gr. si recta $\mathfrak{ab}$ in plano P circa $\mathfrak{a}$ mota, interea punctum $\mathfrak{p}$ ita moveatur in $\overline{\mathfrak{ab}}$, ut via y eius sit $=f(u)$ (denotante u viam puncti $\mathfrak{b}$); et quæratur via puncti $\mathfrak{p}$. (pag. 23.)

Aut $\overline{\mathfrak{ab}}$ quiescat, et $\mathfrak{p}$ in $\overline{\mathfrak{ab}}$ motum perpendicularem B ad $\mathfrak{ab}$ secum ferat, atque interea ita moveatur punctum $\mathfrak{p}'$ in B, ut via y eius sit $=F(x)$ (denotante x viam puncti $\mathfrak{p}$); et quæratur via puncti $\mathfrak{p}'$. Prodeunt hoc modo talia quoque, quorum etsi non omne, quodvis punctum tamen (nempe pro dato quovis x simultaneum y) geometrice (sensu stricto) construi potest.

2. Aut tribus coniunctis: ex. gr. si punctum 𝔭 describat in plani P recta $\overline{ab}$ viam x, secum ferendo planum p perpendiculare ad P e recta B perpendiculari ad ab, atque interea 𝔭′ in B motum rectam C ex 𝔭 ad B perpendicularem, in p secum ferat; et punctum 𝔭″ in C viam z describat; sitque puncti 𝔭 in B via $y=a(x)$, et $z=b(y)$; et quæratur via puncti 𝔭′ in spatio.

Aut planum P circa rectam fixam A plani P moveatur, via certi eius puncti u dicta; atque interea 𝔭 describat in A viam x, secum ferens in P perpendicularem B ad A, atque simul describat 𝔭′ in B viam y; sitque $x=k(u)$, et $y=h(x)$; et quæratur via puncti 𝔭′. (pag. 23).

Ita plures quoque operationes (numero certo) coniungi possunt.

𝔅) Aut *innumerabiles* eiusmodi operationes coniunguntur: ex. gr. si recta A in plano P sit, et recta B perpendiculare ad A, atque planum Q secet planum P in B, et rectam A in 𝔟; ac mo-

𝔅) Pro *certa* certorum *functionem constituentium conditione (qualitateve)* quæri qualitas functionis valoresque possunt; (imo etiam simul certa functionis conditio poni potest).

Ex. gr. Ex 𝔄) Si conditio ea sit, ut functionis valor o sit: quæri *valor variabilium* potest *(problema aequationum)*, aut *valor coefficientium*; potest etiam conditio esse, ut functionis valor *maximus* vel *minimus* sit, et pro hoc variabilis quæri. (pagg. 205, 345, 372.)

Ita aliæ conditiones esse possunt; imo variabilis vicem genus certarum functionum subire potest, (ut in *calculo variationum* dicto). (pagg. 206, 360.)

Potest vero conditio ea quoque esse, ut quantitates certæ, quarum genus dicatur x, nulla alia operatione affectæ, nonnisi sub certa conditione ordinentur: et resultata quærantur. *(Analysis combinatoria)*. (pagg. 159, 205, 556.)

In 𝔅) quoque variæ conditiones esse possunt: ex. gr. ut variabili nonnisi integer substituatur; imo ut etiam functio certa qualitate gaudeat (ut in *theoria numerorum*) (pag. 206), ubi tamen sive functionem constituentia, sive functionis qualitas quantitasve quæri possunt.

Si ipsi x substituatur $x+i$, oritur *Problema Taylorianum*. (pag. 208, 321.)

veatur 𝔟 in A, planum Q secum ferens; atque interea certa lege, a via puncti 𝔟 dependente, moveantur certa puncta generaliter 𝔭 dicta (innumerabilia quoque, prouti per legem determinantur) in perpendicularibus ad rectam B in Q erectis: et quæratur complexus ipsorum 𝔭 in omnibus temporis punctis expertibus usque ad motus finem. (pagg. 24, 25.)

Si vero ipsi x substituatur $m\dot{x}$ (pro $\dot{x}$ denotante $\frac{x}{n}$), atque ipsi m substituantur integri ab 1 incipiendo; et valores functionis exorti post se invicem ponantur: oriuntur *series* (ipso x imo ipso n quoque sive 1 sive aliud denotante); estque pro certo valore ipsius x (ex. gr. $x = 1$), aut n quoque constans, et ipsi m numeri omnes ab 1 incipiendo etiam ultra n substituuntur; aut n (quamvis semper finitum determinatum, sed post quamvis seriem productam novum valorem accipiens) $\frown \infty$, atque ipsi m semper numeri ab 1 usque ad n substituuntur. (pagg. 208 &, 472).

Si in casu posteriore terminus quilibet cum sequente comparetur: prodit *series incrementorum*; et si duarum functionum F et f eiusdem x, unius F valor notus sit; atque termini generales T et t, serierum incrementorum ex utraque functione deductarum æquipolleant $\left(\text{id est } \frac{t}{T} \frown 1, \text{ si } n \frown \infty\right)$: prodit et alterius functionis f valor. Reperire t (in forma simplicissima) docet *calculus differentialis*, et ex t functionem f quærit *calculus integralis*. (pagg. 209, &, 301 &, 371.)

¶ Denique quælibet horum sub qualivis conditione componi: et sub aliqua conditione resultatum, aut pro resultato illa, per quæ id fieri queat, quæri possunt. Et de n-tupla via sub eodem tempore, conceptum n-tuplæ caussæ formando; oritur *Mechanica pura.*

INDEX

RERUM IN TOMO PRIMO ED. I. CONTENTARUM.

Notandum autem est:

1. quod dum tale aliquod, quod in omni tempore est, dicitur *possibile*; ex. gr. dum dicitur quartam proportionalem, aut potentiam expo-

Ed. II.
Tom. pag.

nentis q, aut formam aliquam in spatio, *possibilia* esse: ea *reipsa dari* intelligendum sit. Aliud est, si de eventu, qui in aliquo tantum tempore est, dicatur: e complexu enim omnium, quæ sunt, unicum in quovis temporis puncto experte resultatum est. At si ex a, b, . . . reipsa existentibus, (certo modo tali suppositis, ut abstrahendo a reliquis, nulla contradictio sit), eveniat B; tum B *respective* quoad a, b, . . . *possibile* dici potest; etsi e complexu omnium, quæ sunt (ita uti sunt), nunquam prodeat. *Absolute possibile*, id est si a, b, . . . complexum omnium quæ sunt, eo modo quo sunt, denotet; *reipsa etiam fit aliquando.*

2. Dum (pag. 62) *possibilitas mensurationis* per A ipsius B asseritur: I 71
demonstratur quidem *(ibidem)* dari talia u, u', . . . et n, n', . . ., m, m', . . .; ut pro $\frac{A}{n}=u$, $\frac{A}{n'}=u'$ &, et $n'=2n$, $n''=2n'$ & (nempe $u'=\frac{u}{2}$, $u''=\frac{u'}{2}$ &); in casu commensurabilitatis (substituendo ipsi n integros ab 1 se invicem excipientes) prodeat aliquando tale n, ut $A=nu$, $B=mu$ sit; secus autem pro dictis n, n', . . . sit $A=nu$, $B=mu+\omega$ $(\omega<u)$, et $A=n'u'$, $B=m'u'+\omega'$ $(\omega'<u')$ & . . .; at si reipsa exhibenda u, u', . . . et numeranda in B fuerint; supponi divisio ipsius A per quemvis integrum n debet; quod, si A quantitas ad rectam reducta sit, Geometria sine tentatione præstat, uti et quartam proportionalem exacte exhibet, posteaquam Arithmetica pro quantitatibus, etsi nonnisi in concreto expositæ essent, dari hæc demonstret, quamvis non semper exhibere valeat. Aliud est, si quantitates iam mensuratæ supponantur, atque ita expressæ proponantur: et aliud, si nonnisi in concreto datis lineis, ex. gr. linea b per lineam a dividenda esset (pag. 33), et quæratur B *tale mensum* unitatis, I 40
quale mensum b ipsius a est; aut b dividendum per lineam B esset, quærendo a, nempe cuius tale mensum est b, quam B est datæ unitatis; Arithmetica dari in hoc quoque casu resultatum probat, sed illud nonnisi peracta antea mensuratione exhibere potest, exacte in casu commensurabilitatis, secus vero cum errore dato quovis minore.

SPECIALITER vero *continentur in tomo primo* sequentia.

IN INTRODUCTIONE.

1. *Prospectus cognitionum* humanarum. *Propositio*, eiusque *formae*, *definitio*, *theorema*, *axioma*, *demonstratio*, *vocabula et veritates ultimae*, *scientia*, *systema*.

IN CONSPECTU ARITHMETICAE GENERALE.

I. RADIX *e fundamento communi.*

Ed. II.
Tom. pag.

3. Si $x \rightharpoonup a$, et $y \rightharpoonup b$: tum $x \pm y \rightharpoonup a \pm b$; et summa quotvis quantitatum ad limitem ***tendentium tendit ad summam limitum.***

4. Si $x - y \rightharpoonup 0$, et $x \rightharpoonup a$, $y \rightharpoonup b$: tunc $a = b$.

5. Si $p > x > q$, et $p - q \rightharpoonup 0$: tum etiam $p - x \rightharpoonup 0$, et $x - q \rightharpoonup 0$.

6. Si $n \rightharpoonup \infty$: tum $\frac{n \pm 1}{n} \rightharpoonup 1$. Ita

7. $\frac{n}{n \pm 1} \rightharpoonup 1$.

8. Si a constans sit, et $s \rightharpoonup \infty$, atque $\frac{r+1}{s} a > x > \frac{ra}{s}$: tum $x - \frac{ra}{s} \rightharpoonup 0$.

De ***resultato multiplicationis (atque certo sensu divisionis) unico*** (a pag. 70 usque 75). I 82—87

9. *Ordo factorum (etsi* omnes *incommensurabiles fuerint, utcunque discerpta factorum imagine) non mutat factum.*

10. *Factor b cum nullo factore $a + c$ (pro c non 0) factum illi, quod cum a efficit, aequale producit.*

11. Si $x \rightharpoonup a$, et $y \rightharpoonup b$: tum $xy \rightharpoonup ab$; et ***limes facti e quotvis eiusmodi factoribus est factum limitum.***

12. ***A divisum per B dat quotum unicum q***; et $\frac{A}{q} = B$, atque $A = Bq$, et $\frac{A}{B} B = A$, item $\frac{A}{q} = A \frac{1}{q}$.

13. Si $mu =$ vel $\rightharpoonup B$, et $nu = A$, atque $mv =$ vel $\rightharpoonup D$, et $nv = C$: tum $A : B = C : D$, adeoque *proportio ita designari potest.* Atque si $B : A = Q$ sit: B per AQ, et D per CQ exprimi poterit. ***Conversim quoque***, si $A : B = C : D$, aut $B = AQ$ et $D = CQ$: ***proportio est*** (pagg. 75, 76). 87

14. Si $x \rightharpoonup a$, $y \rightharpoonup b$, et nec y nec $b = 0$: tum quodvis ipsorum $\frac{x}{y}$, $\frac{x}{b}$, $\frac{a}{y} \rightharpoonup \frac{a}{b}$ (pag. 77). 89

* In præc. 0 e valoribus divisoris excludebatur: quidsi divisor $\rightharpoonup 0$? (pag. 79). 91

* *Quidsi tam dividendus quam divisor* $\rightharpoonup 0$? quædam ***de quoto simul variatorum praevie*** (a pag. 80 usque 82). 92—94

1. Si $\frac{u}{u'} \rightharpoonup 1$: tum pro utvis magno N datur $u - u' < \frac{u'}{N}$.

2. Si $\frac{u}{u'} \rightharpoonup 1$: tum etiam $\frac{u'}{u} \rightharpoonup 1$.

3. Si ω' pro dato quovis N potest $< \frac{u}{N}$ fieri, ac $\frac{u}{u'} \rightharpoonup 1$: tunc etiam $\frac{u + \omega'}{u'} \rightharpoonup 1$.

Ed. II.
Tom. pag.

4. Imo etiam $\frac{u'}{u+\omega'} \frown 1$, et $\frac{u'+\lambda}{u+\omega'} \frown 1$, si $\lambda \lessdot \frac{u'}{N}$ fieri potest.

5. Si $\frac{u}{u'} \frown 1$, ac $\frac{v}{v'} \frown 1$: etiam $\frac{u+v}{u'+v'} \frown 1$.

6. Si $\frac{u}{u'} \frown 1$, ac $\frac{v}{v'} \frown 1$: etiam $\frac{uv}{u'v'} \frown 1$.

7. Si $\frac{u}{u'} \frown 1$, ac $\frac{u'}{v} \frown 1$: etiam $\frac{u}{v} \frown 1$.

Quotus formæ $\frac{\alpha\beta\gamma \ldots}{abc \ldots}$ utcunque discerpi valore incolumi potest (pagg. 82, 83). I 94—96

De potentiis et operationibus earum primariis (a pag. 84 usque 94); 96—109
additis (pagg. 105 . . . 107, 121—124,
et 128, 129). 147—149

Quod *potentia possibilis* sit, *sive commensurabilis sit exponens q sive non, et sive* $\vdash\!\!+\!\!\dashv$ sive $\vdash\!\!\dashv$ fuerit:

1. Si q *integer* $\vdash\!\!+\!\!\dashv$ et >1 sit.

2. Si $q=1$.

3. Si $q=0$.

4. Si q integer $\vdash\!\!\dashv$; deinde *non integer*, prius $\vdash\!\!+\!\!\dashv$, tum $\vdash\!\!\dashv$, *sed quantitas commensurabilis* fuerit (pagg. 84, 85). 96—98

5. Sed quæritur (ad præc.) *num detur* tale A, ut $aa = AAA$? (pag. 85). 98

6. *Maius ad idem elevatum, et idem ad maius elevatum fit maius* (pagg. 86, 87); et pro *exponentis valore eodem, potentia eadem est*; unde 99, 100
potentiae ad exponentes denominatoris communis reduci possunt (pag. 87). 100

7. Si q *incommensurabilis*, et prius tam q quam a $\vdash\!\!+\!\!\dashv$ fuerit (pag. 87). 101
Casus, si $a=1$; si $a<1$ (pag. 88). Si q $\vdash\!\!\dashv$ fuerit (pagg. 88 et 89); unde 101, 102
potentia e divisore in dividendum poni, exponente in oppositum mutato potest (pag. 89). 102

8. Quodvis N sive $>$ sive <1 fuerit: $\sqrt[m]{N} \frown 1$, si $m \frown \infty$ (pag. 89). 102

9. $a^q\, a^Q = a^{q+Q}$ (pag. 89). Et $a^q : a^Q = a^{q-Q}$ (pag. 90). 103, 104

10. Si $a^n = B^m$: non solum $a^{\frac{n}{m}} = B$, sed etiam $B^{\frac{m}{n}} = a = B^{\frac{1}{q}}$ (pro $q = \frac{n}{m}$). Et si $\frac{n}{m} \frown q$, et $a^q = B$, est etiam $B^{\frac{1}{q}} = a$, atque si $B^{\frac{1}{q}} = a$, est etiam $a^q = B$; et sive $\sqrt[q]{B}$, sive $B^{\frac{1}{q}}$ scribatur, perinde est (pag. 90). 104, 105

11. $(\sqrt[m]{B})^n = \sqrt[m]{B^n}$; et

12. $\left(\frac{b}{c}\right)^q = \frac{b^q}{c^q}$ (pag. 91). 105

13. $(a^q)^p = a^{pq}$ (pagg. 91 et 92). 106, 107

Ed. II. Tom. pag.

summa integralium terminorum singulorum, integrale totius derivatæ, et pariter series convergens erit.

Literæ puncto insignitæ, eadem sine puncto signo $\mathfrak{d}$ præposito, imo et quodvis aliud, quoad quamvis variabilium expressum, ei æquipollens, substitui potest; quo pacto derivatæ sæpe *purae (salvo integrali)* reddi possunt (pag. 200), nempe si $\dot{z} = v\dot{u}$, est $\int p$ (quoad z) $= \int pv$ (quoad u). I 228, 229

Eadem pag. 200 [VII.], *derivata areae* in plano, derivata *lineae in plano, soliditatis per revolutionem lineae* dictæ generatæ, referuntur. 229
Derivata lineæ in genere est (pag. 268). 300

Pag. 201. *Derivata distantiae centri gravitatis* a certo plano quoad 229
abscissam x; atque pag. eadem, et 216 ... (etiam pag. 226) referuntur 230, 247, 258
differentialia motum rectilineum concernentia, denotationibus pag. 193 220
adhibitis.

Pag. 203. VIII. 1. $\int \dot{v}$ sive $\int 1$ (quoad v) $= v$. 232, *a)*

2. Casus differentialis negativi, atque ubi valor ipsius $A(x)$ plane pro $x = 0$ quæritur. *b)*

3. De casu, ubi $A(0) = \infty$. *c)*

4. De casu, ubi differentiale (nempe terminus seriei generalis) pro $x = a$, id est terminus seriei μ-tus, 0 vel ∞ fit (puncta discreta inferius pagg. 269, ...). *d)* 301, ...

Pag. 205. IX. 1. Si ordinata $y = ax^p$; area $= \int y \,(\text{quoad}\, x) = \frac{ax^{p+1}}{p+1}$ (nisi $p = -1$). 235, *a)*

2. Area inter hyperbolam æquilateram et q (pag. 103), atque ordinatam y et asymptotam. Soliditas per revolutionem circa asymptotam orta $= \pi$. Exemplum pro diversis functionibus summatricibus eidem differentiali respondentibus, quæ tamen cum constantibus concernentibus eadem integralia præbent (pagg. 205 et 206). *b)* 118, 235—237

* Pag. 207 usque 209. Areæ dictæ hyperbolicæ sunt logarithmi na- 237—239
turales abscissarum e centro acceptarum: ubi (pag. 207, 4) demonstra- 238, *d)*
tur, derivatam (quoad z) ipsius log. nat. z esse $\frac{1}{z}$, (imo pag. 210, etsi 241
z non ipsa variabilis absoluta, sed qualisvis eius functio fuerit). Modus constantem in simili casu quærendi. De logarithmis abscissarum negativarum (pagg. 209 et 210). 240, 241

Pag. 211, 5. Soliditas paraboloidis, ellipsoidis, hyperboloidis. 242, *e)*

6. Si u et v derivatæ quoad eandem variabilem sint, et $\frac{u}{v} = k$, est $\int u = k \int v$. Applicatio. *f)*

Pag. 212. 7. E derivata arcus circuli quoad tangentem (pag. 309 de- 243, *g)*, 338
ducta) series Leibnitiana peripheriam exprimens (vide etiam pag. 303). 334

e^*

Ed. II. Tom. pag.

summa angulorum e puncto utrique communi in eadem plani plaga sit $=2$ rectis; sunt quoque hinc omnes formæ anguli recti æquales. Descripto (apice angulorum pro centro accepto) circulo, in omnibus dictis, nisi ita esset, pars $=$ toti fieret.

Pag. 482. *Planum est quantitas* (nempe absoluta). II 38

Ibidem usque 486. *Sectiones rectarum planorumque* inter se, atque *planorum cum sphaera.* Recta cum recta (aut plano) nonnisi punctum, planum vero cum plano aut nihil, aut rectam commune habet. Recta per planum transit in spatii plagam alteram. Si planum P cum plano Q punctum commune habeat: sectio recta est; transitque P *per* Q in plagam alteram. *Ad rectam planumve datur e quovis puncto eorum ad ea perpendicularis; et e quovis puncto etiam extra illa datur ad ea perpendicularis. Si recta ad duas plani rectas perpendicularis fuerit, erit ad omnes in eodem plano per punctum sectionis ductas, adeoque ad planum ipsum perpendicularis* (pag. 483). 38—42 39

Planum p est perpendiculare ad planum P, si perpendicularis ad P in p cadat (pag. 484). Anguli verticales tam rectarum, quam planorum æquales sunt (ibidem); idem tamen et modo communi evidens est, si formarum angularium æqualitas pro arcubus æqualibus demonstretur (482). 40 38

Pag. 485. *Circulus maximus in sphaera; angulus circulorum maximorum fit quantitas respectiva. Arcus circulorum maximorum, ad arcum* ab *circuli maximi perpendiculares, in extremitate quadrantum (polo dicta) concurrunt.* 41

Si plana P et Q se invicem ad angulum rectum secent in recta ab: *e quovis puncto* p *ipsius P ad* ab *demissa perpendicularis, est perpendicularis ad Q*; atque *e quovis puncto ipsius* ab *erecta ad Q perpendicularis, in P cadit.*

Pag. 486. *Si duo plana P et p se invicem secantia, sint ad tertium Q perpendicularia: sectio priorum est perpendicalaris ad Q.* 42

Angulus rectae cum plano fit quantitas respectiva (pag. 480); atque *est minimus omnium* (nisi rectus sit), *quos recta eadem cum recta* quacunque plani per punctum sectionis ducta facit.

Ibidem usque ad finem, de *planis rectisque se invicem non secantibus. Axioma Euclideum tria complectitur,* quorum quodvis sufficit (pagg. 487 et 488). 43—44

Pagg. 488 usque 490. *Brevis disquisitio de theoria parallelarum*: et *Appendicis idea.* 44—46

Pag. 490 usque ad finem *tentamina eam demonstrandi olim facta.* 46—56

APPENDIX, Geometriam ab ea independentem absolutam exhibens. 359—394

INDEX

RERUM IN TOMO SECUNDO ED. I. CONTENTARUM.

	Ed. II.	
	Tom.	pag.
Proportionalis media (pag. 27); et conversim rectam, quæ hypotenusam ita dividit, ad hanc perpendicularem esse patet. *Theorema Pythagoricum* (ibidem).	II	75
E lateribus dignoscere angulum, num obtusus vel acutus aut rectus sit; et *conversa Pythagorici*. Multiplicatio lineæ per lineam, et divisio (pagg. 28 et 50 ...). Similia plurium laterum (pagg. 29, ...).		76 77, 99, 78
Rectae cum circulo sectio minima punctum, maxima duorum punctorum est. *Chordae arcusque meditullia et centrum sunt in perpendiculari e centro ad chordam*. Hinc *arcus cuiusvis*, uti circuli per data tria puncta non in recta sita, *centrum* reperitur. Chorda intra circulum cadit. *Recta ad radium perpendicularis* est *tangens*, et *tangens est ad radium perpendicularis*, nec ulla recta inter tangentem et arcum datur (pagg. 31, 33).		80, 81
Recta circulum in 3 punctis secare nequit. Quomodo tangens ex p ducatur e Fig. 42* patet (per pag. 20).		Fig. 79*, 68
Plures rectae secantes circulum: prius duæ. *Anguli tangentis cum chorda quantitas* (pagg. 33). *Angulus ad peripheriam*: angulus in semicirculo; ubi ex eadem Fig. 45. conversa patet, nempe angulus interior est $>$ exterior $< R$, itaque *si rectus fuerit, in semicirculo est.* Chordæ parallelæ absecant arcus æquales. Chordæ ex eodem peripheriæ puncto, a diametro porro decrescunt, et arcui maiori maior chorda, maiorique chordæ maior arcus respondet.		82 Fig. 82
Duarum rectarum, se invicem intra peripheriam secantium, facta segmentorum sunt æqualia; *quantitas anguli.* Plures rectæ ex eodem puncto intra peripheriam (pagg. 34, 35) ab imo crescunt a diametro usque ad eandem.		83, 84
Duarum rectarum e puncto extra peripheriam anguli quantitas. Plures e puncto extra peripheriam a diametro decrescunt, partes exteriores crescunt, usque ad tangentem (pag. 35).		84, 85
Hinc si anguli unius crura cruribus alterius æqualia fuerint: lateri subtendenti maiori opponitur angulus maior; patet vertice in centrum posito, et uno latere unius cum latere alterius coincidente.		
Rectilineorum inscriptio circulo et *circumscriptio* (pagg. 36, 37). *Polygonum reg.* e circulo, et conversim *apices polygoni reg. in peripheriam cadunt.* Latus hexagoni. *Angulus polygoni*, et productis lateribus summa omnium externorum (pag. 38).		85—87 88
Duo circuli se invicem in tribus punctis non secant; possunt tangere se invicem, extus, intus; et *centra cum tactus puncto in recta sunt* (pag. 39).		89
Formae per sectiones trium (tum plurium) *circulorum triangula ex arcubus, eius species, angulorum quantitas*; *aequalitas triangulorum* eiusmodi (pagg. 40 usque ad 46, et 65, 66).		90—95, 114, 115

MOTUS COMPOSITUS.

REDITUS E PLANO IN SPATIUM.

Ed. II.
Tom. pag.

rectæ inter P et Q sunt æquales et parallelæ; atque hinc quævis duæ rectæ eidem tertiæ parallelæ sunt inter se parallelæ (pagg. 170, 171). II 219—221

Angulus duorum planorum. Datur e quovis puncto plani P planum perpendiculare ad P.

Quodvis planum Q, in quod perpendicularis ad planum P cadit, est perpendiculare ad P; et si sectio planorum P et Q sit $\mathfrak{ab}$, perpendicularis ad P e quovis puncto rectæ $\mathfrak{ab}$ in Q cadit; item quævis perpendicularis ad $\mathfrak{ab}$ in Q cadens, est perpendicularis ad P.

Si plana Q et q ad P perpendicularia secent se invicem: sectio planorum Q et q erit recta ad P perpendicularis.

Anguli verticales planorum quoque æquales sunt (pag. 172). 222

Angulus solidus: numerus laterum minimus est 3; et summa quorumvis binorum est $>$ tertio (quod etiam ad trianguli sphærici latera applicatur). Determinatur per tria latera, et hinc pariter triangulum sphæricum (pagg. 172 usque 175). 222—224

Planum** R **plana parallela** P, Q **secans angulos alternos et externum interno oppositum aequales atque summam duorum internorum duobus rectis æqualem facit.

Sectiones planorum R, S (se mutuo secantium), cum planis parallelis P, Q factæ, non solum sibi invicem parallelæ sunt, sed etiam angulos æquales faciunt (pag. 175). 225

Cum planis parallelis** P, Q non solum tertium secans, sed **et recta cum alterutro ipsorum** P, Q **aliquid commune habens, in neutrum incidens, angulos alternos aequales, pariterque externum interno opposito æqualem, et summam duorum internorum duobus rectis æqualem facit.

Anguli, quos rectæ parallelæ cum plano P faciunt, sunt æquales; et rectæ e punctis sectionum, ad puncta plani P illa, in quæ perpendiculares e rectis dictis parallelis ad P demissæ cadunt, sunt parallelæ.

Si in plano Q sit $\mathfrak{AB} \parallel \mathfrak{A'B'}$, et $\mathfrak{AC} \parallel \mathfrak{A'C'}$, atque supra Q sint talia puncta $\mathfrak{a}$ et $\mathfrak{a}'$, ut $\mathfrak{Aa}$ cum $\mathfrak{AB}$, ita $\mathfrak{A'a'}$ cum $\mathfrak{A'B'}$ faciant angulum v, et $\mathfrak{Aa}$ cum $\mathfrak{AC}$ ita $\mathfrak{A'a'}$ cum $\mathfrak{A'C'}$ faciant angulum q: erit $\mathfrak{Aa} \parallel \mathfrak{A'a'}$.

Si plana parallela P et Q per rectas parallelas $\mathfrak{pq}$, $\mathfrak{p'q'}$ secentur, et $\mathfrak{p}$, $\mathfrak{p}'$ in P, atque $\mathfrak{q}$, $\mathfrak{q}'$ in Q fuerint: erit $\mathfrak{pq} = \mathfrak{p'q'}$.

Si plana parallela P, Q per planum R secentur, et sectio planorum P, R sit $\mathfrak{pi}$, planorum Q, R sit $\mathfrak{qr}$; quodcunque planum p ponatur per $\mathfrak{p}$ ad Q parallele: sectio planorum p, R eadem cum $\mathfrak{pi}$ erit (pagg. 176 usque 179). 226—228

Constructio prismatis rectilinei. Prismatis conceptus generalior. Rec-

APPENDIX [TRIPLEX].

PRIMÆ LINEÆ PERSPECTIVÆ, GNOMONICÆ ET CHRONOLOGIÆ.

ADDITAMENTA.

Tom. I. concernentia.

TENTAMEN

JUVENTUTEM STUDIOSAM

IN ELEMENTA MATHESEOS PURAE, ELEMENTARIS AC SUBLIMIORIS, METHODO INTUITIVA, EVIDENTIAQUE HUIC PROPRIA, INTRODUCENDI.

CUM APPENDICE TRIPLICI.

Auctore Professore Matheseos et Physices Chemiaeque Publ. Ordinario.

Tomus Secundus.

Maros Vásárhelyini. 1833.
Typis Collegii Reformatorum per JOSEPHUM, et SIMEONEM KALI de felső Vist.

Imprimatur.

M. Vásárhelyini Die
12 Octobris 1829.

Paulus Horváth m.p.
Abbas, Parochus et Censor
Librorum.

LECTORI SALUTEM!

Quum tam prior tomus quum hic, vita variis distracta, sine otio, et inter difficultates impressionis insuperabiles (quapropter nec antea rem aggredi animus fuit) editus, erroribus scateat: neque opus, spe quoque exstincta, vel expensas unquam refusum iri, ut par erat, extendi potuerit: defectus saltem (in quantum fieri potuit) suppleturus; non solum errata tomi primi, quos postea animadverti, sed et conceptus quosdam in tomo *primo traditos, pro Tyronibus meis dilucidandos, et eosdem quidem sed* simplicius præcisiusque exprimendos esse docendo expertus, id ad finem tomi huius adieci.* Quo præter alia quædam, et proportionis potentiæque generalior conceptus, atque imaginaria etiamsi in exponentem ascendant, pertinent.

Quum autem meris imaginibus nonnisi proprio nutu sensum dare tentaverim: verebar, ne derisui forem; donec *summi Viri Göttingae* (mea laude longe maioris) *primae lineae imaginariorum* (in *Gött. Gel. Anz.*), simul cum querela de eorum pertractatione, iam olim edita, mihi innotuissent. Magno hoc mihi solatio fuit; et nonnisi eousque, donec theoria illa prodierit, meam (quæ iam qualem concipere poteram impressa erat) pro discipulis meis dilucidare debui: si vero illa prodierit; persuasus eam operibus ceteris, quæ solidum penetransque (et fere infallibile) ingenium, sigillo veri simplici distinguunt, parem fore; contentus ero idem saltem cum tanto genio voluisse.

Denique etiamsi opus hoc utcunque imperfectum fuerit: fore tales Lectores Benevolos spero, qui ut Magnus *Leibnitzius*, se in quovis libro

* In hac Editione vide Sectionem quartam Tomi I.

aliquid reperire confessus est, nec in hoc omne reiicient: et quum hoc solum, nec alibi quidquam arrogaverim, neque pollicitus magna sim: benignam errorum emendationem veniamque exoro; eo magis, quod fera mortale cor fata fregerint.

Verum quis adeo demens sit, ut ante extremum halitum, beatum se dicere ausit? Omnis fortuna humana, ut bulla inanis, dum variis spei iridibus ridet, in luridam guttam collabitur. Serius ocius quisque in sua *cruce exspirat: quæ tamen arbor vitæ fit; dum immeritorum vulnerum* rubore ad noctis terrestris oras, aurora brevibus lacrymis æterno soli renidentibus oritur.

ELEMENTA GEOMETRIAE.

SUBDIVISIONES GEOMETRIAE.

Capitum aliarumve subdivisionum, imagines e numeris sive e literis modo sequente compositæ (quibus et plantæ aliaque exprimi possent) *vicem subire queunt*: ex. gr. ·*dgb* vel ·472 denotet secundam in prima subdivisione illius, quæ septisima est in prima subdivisione quartæ in omnium prima subdivisione; nempe plura in eodem subdivisionis gradu per primam, secundam & distingui possunt; et numerus primus ad lævam denotat numerum subdivisionis, quota sit in gradu primo, et quivis numerus n (si > 9 fuerit, parenthesi clausus) denotet n-tam in gradu primo subdivisionis numeri ad lævam præcedentis. Possunt quidem eiusmodi subdivisiones vocabulis exprimi; ex. gr. usque ad sextum subdivisionis gradum, *liber*, *pars*, *caput*, *sectio*, *articulus*, *paragraphus* inservire possunt; possuntque ubique plura concernentia numeris Romanis Arabicisque aliisve signis adiungi. Atque si necessaria adhuc defuerint, ubi imago quæpiam numerica superius dicta advenit; liceat simulac requisita cursus advexerit, filum titulo *supplementi numeri* dicti interrumpere postmodum continuandum.

Imaginibus eiusmodi numericis sequentibus exprimentur *Geometriae subdivisiones*.

·1. *E primario* SPATII *intuitu* superficies, linea, punctum, forma sphæra, tres primitivi motus simplices; recta, planum, circulus; aliique ex his oriundi conceptus, veritatesque primariæ fundamentales: (pagg. 1—56. contenta). Sphæræ limes certo sensu planum est.

·2. DESCENSUS IN PLANUM; *planimetria*.

·21. *Numero rectarum, duarumque* primitivarum motus *operationum finito*: constructio geometrica sensu stricto.

·211. Formæ, per sectionem aliquam aut nullam, resultatorum constructionis dictæ magis obviorum, oriundæ.

·2111. *Non considerata area.*

·21111. *Sectio nulla formarum* dictarum.

·211111. Duarum rectarum; ·211112 plurium; ·211113 rectæ et circuli, ·211114 duorum circulorum.

·21112. *Sectio aliqua* formarum dictarum.

·211121. *Sectio cum angulo.*

·2111211. *Nonnisi rectarum* aut e rectis compositorum.

·21112111. *Duarum rectarum*: angulus rectus, obtusus, acutus.

·21112112. *Trium rectarum*: quarum aut

·211121121. Nonnisi unum par est, se mutuo (continuatione sufficiente) non secantium, aut

·211121122. Nullum tale par est: unde ***trianguli*** rectilinei species variæ.

·2111211221. Triangulorum rectilineorum ***aequalitatis conditiones***, ac certæ proprietates primariæ.

·2111211222. Laterum angulorumque oppositorum dependentia mutua: unde in supplemento numeri huius, e datis triangulum rectilineum determinantibus, sive angulum quemvis, sive latus quodvis ignotum ope calculi reperire docet *Trigonometria plana.*

·21112113. *Quatuor rectarum*: quarum aut

·211121131. Nullum par est, se invicem (continuatione sufficiente) non secantium; aut

·211121132. Datur par se mutuo non secantium; atque tum aut

·2111211321. Alterum par quoque tale est, adeoque quum sectio detur, hoc par ab altero pari secatur, oriturque ***parallelogrammum***; aut

·2111211322. Nonnisi unum par tale est, adeoque hoc ab altero pari secatur; fundamentum similitudinis triangulorum, eiusque conditiones; et multiplicatio divisioque ac radicis extractio.

·21112114. *Plurium rectarum* numero quovis; unde

·211121141. Linea simplex e rectis composita; quæ parit

·2111211411. Cum linea alia per duarum rectarum parallelismum composita, ***parallelismum generalem.***

·2111211412. Figuras rectilineas.

·211121142. Rectæ ex eodem puncto ad apices angulorum omnes lineæ rectilineæ; unde

·2111211421. Figuræ rectilineæ subdivisio in triangula.

·2111211422. Cuiusvis rectæ, ex eodem puncto communi dimidium, vel duas tertias & accipiendo, oritur ***similitudinis conceptus generalis.***

·2111212. Rectæ cum circulis.

·21112121. Rectæ cum circulo sectio ***minima*** punctum est, ***maxima*** e duobus punctis constat.

·21112122. Plures rectæ circulum secantes.

·211121221. Se invicem quoque secantes.

·2111212211. In eodem puncto; ·21112122111 in peripheria, ·21112122112 intra peripheriam, ·21112122113 extra eam.

·2111212212. Rectæ se mutuo non in eodem puncto secantes, sed lineam simplicem redeuntem formantes.

·21112122121. Si quævis earum, uti est ab initio ad finem usque, chorda sit: subdivisiones iuxta numerum earum sunt; horumque subdivisiones novæ sunt, prouti rectæ æquales aut inæquales fuerint.

·21112122122. Si quævis rectarum tangens sit: subdivisiones sunt eædem, quæ numeri præcedentis.

·211121222. Rectæ circulum secantes, nec productæ secantes se invicem.

·2111213. Circuli se invicem secantes: minima sectio unum punctum est, maxima e duobus punctis constat.

·211122. *Sectio sine angulo*: cuius subdivisiones sunt lineæ e rectis et arcubus, aut nonnisi ex arcubus, vel ex arcubus et rectis compositæ.

·2112. *Areae* figurarum generatarum: quæ subdividuntur in rectilineas, circulum, figuras ex arcubus, aut ex arcubus et rectis compositas.

·212. Formæ, quarum in prima subdivisione nonnisi possibilitas innotescere saltem in quæstionem venire potuit, num geometrice construi possint, quæritur.

·22. *Rectae operationesve* duæ primitivæ priores *innumerae*; *motus compositus duplex*, applicata Arithmetica.

·222. Ea, quorum non omnia sed quodvis punctum construi geometrice sensu stricto potest.

·223. Ea quorum nec quodvis punctum geometrice construi potest.

·3. REDITUS E PLANO IN ABYSSUM SPATII.

·31. *Numero rectarum operationumque trium* primitivarum *finito* (constructio geometrica sensu lato); nimirum duabus accedit tertia, nempe *motus circa axem*.

·311. Motus circa axem linearum planorumque, absque figurarum respectu.

·3111. *Linearum motus circa axem*, figuras haud efficientium.

·31111. Rectilineorum figuras haud constituentium motus circa axem.

·311111. *Unus motus circa axem*.

·3111111. Complexus duarum rectarum se mutuo in plano P secantium motus circa unam earundem: parit si angulus rectus fuerit, *planum*, secus autem *conos verticales*.

·3111112. E punctis $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$, ... rectæ A in plano P sint perpendiculares B, C, ..., moveaturque schema circa A; viæ rectarum B, C, ... erunt *plana parallela*.

·311112. *Plures motus circa axem*; sint in plano P ad rectas A, B se mutuo in $\mathfrak{p}$ secantes, rectæ α, β, ex $\mathfrak{p}$ perpendiculares; vertaturque α circa A, et β circa B; via prioris secare viam posterioris debet, atque ibidem est perpendicularis ad P.

·3112. *Motus planorum circa axem.*

·31121. *Motus unus*: planum, circa rectam quamvis in eo sitam motum, producit angulum duorum planorum.

·31122. *Plures motus plani circa axem.*

·311221. Cuiusvis motus axi punctum idem $\mathfrak{p}$ commune: nempe intelligantur omnia in eadem spatii e plano P plaga (ex. gr. superiore), sitque motus plani cuiusvis angulus $< 2R$, denotante R rectum; moveaturque sub hac conditione planum P circa rectam $\mathfrak{pa}$ in eo sitam; atque e quovis loco unde libuerit, moveatur item circa aliquam rectam ipsiusdem per $\mathfrak{p}$ euntem, continuando donec libuerit; orietur ***angulus solidus rectilineus.*** Poterit ea quoque determinatio accedere, ut P semper versus faciem illam moveatur, quæ inferior erat.

·311222. Plures motus circa axem, absque puncto axium communi;

·3112221. Nonnisi planorum.

·31122211. Moto planorum (in ·3111112) parallelorum P, Q, uno circa quamvis rectam in eo sitam, donec ad alterum perveniat: novo hoc plani loco, R dicto, ***anguli*** ab R cum P et Q facti ***alterni*** comparantur.

·31122212. Moto R circa rectam quamvis α per P et Q euntem; novo plani loco, S dicto, quæruntur sectiones cum P et Q formæ ex R et S constantis.

·31122213. Moto S quoque circa quamvis rectam β per P et Q euntem: novo plani loco T dicto, quæruntur sectiones cum P et Q formæ ex R, S, T compositæ; tam pro casu si $\alpha \parallel \beta$, quam si non.

·3112222. Planorum cum rectis.

·31122221. Rectæ, quæ e quovis plani P puncto est ad quodvis punctum plani Q ad P paralleli, anguli alterni &, quos cum P et Q facit, comparantur.

·31122222. Si in plano P fuerit figura rectilinea $\mathfrak{ABC}\ldots$, et quodvis punctum $\mathfrak{a}$ fuerit supra planum (omnibus supra planum acceptis); vertatur P circa $\mathfrak{AB}$ donec recta $\mathfrak{Aa}$ incidat, fiatque $\mathfrak{Bb} \parallel$ et $= \mathfrak{Aa}$, et tum vertatur planum item prius P circa $\mathfrak{BC}$ donec recta $\mathfrak{Bb}$ incidat, fiatque $\mathfrak{Cc} \parallel$ et $= \mathfrak{Bb}$: atque hoc continuetur usque ad ultimum latus; ac demum moveatur planum $\mathfrak{abAB}$ circa $\mathfrak{ab}$, donec $\mathfrak{c}$ incidat: nascetur ***parallelepipedum***, si $\mathfrak{ABCD}$ parallelogrammum fuerit, in genere vero ***prisma rectilineum.***

·31122223. Si (in præcedentibus) e cuiusvis anguli vertice ad quodvis punctum $\mathfrak{a}$ ibidem dictum recta cogitetur; vertaturque planum P circa latus quodvis, donec $\mathfrak{a}$ incidat: nascitur ***pyramis rectilinea.***

·312. *Motus figurarum circa axem.*

·31121. Quadrilateri rectanguli revolutio circa latus parit ***cylindrum rectangularem.***

·3122. Trianguli rectanguli revolutio circa cathetum parit *conum rectangularem.*

·3123. Revolutio semicirculi circa diametrum parit *sphaeram.*

·3124. Sectionum coni cum plano statim sequentium revolutiones pariunt *paraboloidem*, *ellipsoidem* et *hyperboloidem.*

·313. Motus plani circa axem, punctum aliquod formæ cuiuspiam earum quæ prodierunt, complectentem.

·3131. Si coni verticales fuerint, oriuntur *sectiones conicae.*

·3132. Forma secta etiam Cylinder aut

·3133. Pyramis vel

·3134. Prisma esse potest.

·31135. Si forma hæc *sphaera* fuerit, et

·31351. Plana per centrum eant: oritur in superficie sphæræ *triangulum sphaericum*; quæ e datis sufficientibus computare docet *Trigonometria sphaerica.*

·31352. Si planum quodvis tangat sphæram, aut aliter secet, atque plana omnia simul efficiant superficiem simplicem portionem spatii claudentem: inter hæc oriuntur etiam corpora aut *perfecte* aut *certo respectu regularia.*

·32. Formæ quæ rectarum operationumque primitivarum numero certo generari nequeunt: ex. gr. si figuræ, quæ ita generari nequit, omnibus punctis rectæ ad idem punctum, vel ad eandem rectam parallelæ, cogitentur; et tanto magis si sectio formæ cuiuspiam cum complexu rectarum dictarum quæratur, quod etiam *Perspectivae* problema est, si figuræ vicem qualisvis forma subeat. Verbo omnes formæ, quæ motu e tribus aut pluribus composito, sive modo in arbore exposito per tres rectas perpendiculares, sive motu in quavis forma certa lege facto, generantur, una cum omnibus iis, quæ e compositione horum oriuntur, huc pertinent.

ELEMENTA GEOMETRIAE.

SECTIO I.

CONSPECTUS GEOMETRIAE GENERALIS.

E mundo externo, abstrahendo pervenitur ad conceptum *spatii puri*: nempe corpus experientia externa omnino simul cum loco eius datum cogitatione tollendo, manet locus, quem occupasse videtur, finisque intra quos erat; atque tum quærendo quid ultra fines illos sit, tollendo totum mundum experientia datum, et semper porro quærendo pervenitur ad noctem sanctam, quæ myriadibus lucernarum accensis Maiestatis Summæ præsentiam annunciat. In hac volvuntur innumeri orbes, expansis erga se invicem fraternis brachiis, et suspiriis undique tam gratorum, quam afflictorum pectorum, Patrem communem quærentibus — in hac fert mater tellus sub florido sinu dormientes gnatos ad auroram æternitatis — et in hac servatur omnis materia, nascunturque e germinibus mundi, vi mirifica vitali producti, crescunt, vivuntque, motum avitum nisi alio pellantur sequentes; atque intereunt, ut meteora fragoribus tempestatum in oceanum recidentes, novis initium daturi. At interno Geometræ oculo intuente, omnis quæ apparet mundi discordia, cuius magnum problema in concordiam resolvere mortis *aequatio* est, bellumque omnium quod videtur in omnes, cum stridore omni clamoreque orbium disparet, — ac iactatum e minacibus procellarum fluctibus, pacatus excipit noctis tranquillæ portus, luce Veritatis alma collustratus.

§. 1.

Primus intuitus ostendit sequentia: spatium est *quantitas*, est *continuum*, *infinitum quaquaversum*, *aeternum*, *praesentibus semper partibus omnibus*, præterea *unum solum* est, et *immutabile*, tam in se quam quoad quamvis partem, nisi quod alia in eo permutare partes eius nempe loca possint. Tempus quoque *quantitas*, *continuum* et *unum solum*, atque *infinitum*, sed nonnisi *utrinque* e quavis parte, quæ nonnisi *expers* adest, atque semper *alia* atque *alia* venit.

§. 2.

Intuitus ostendit porro sequentia: Spatii portionis cuiusvis finis tale continuum est, cuius dantur eiusmodi duo portiones, ut id, quod utriusque finibus commune est, continuum sit, et quidem tale, ut huius item dentur eiusmodi duo portiones, quarum finibus commune expers est.

Hinc

1. Pars eiusmodi expers spatii vocatur *punctum spatiale*, distinctum omnino a *puncto temporis*.

In quavis spatii parte dari punctum, et omnia spatii puncta æqualia esse item intuitu patet.

2. E continui prius orti portione et tum e continui posterius orti portione construuntur conceptus sequentes, combinatis eiusmodi portionibus:

I. Si continuum ex A, B, . . . , F constet, et quodvis horum portio finis alicuius portionis spatii sit, dicitur *superficies*.

II. Si vero continuum ex a, b, . . . , k constet, et quodvis horum portio finis alicuius superficiei sit, dicitur *linea*.

III. Atque si continuum ex α, β, . . . , λ constet, et horum quodvis aut superficies aut linea sit, dicitur *forma* sensu proprio.

IV. Si vero continua qualiavis P et Q fuerint e spatio, atque aliquid commune habuerint, tum si I complexus omnis eius, quod utrique commune est, pars utriusque indivellibilis sit (Tom. I. pag. 23), dicitur *I sectio ipsorum P et Q se mutuo secantium.*

3. Interim superficies etiam eiusmodi continua pars indivellibilis spatii dici potest, cuius nulla portio linea est. Imo statim definito stabilitoque motu geometrico, linea etiam via puncti dici potest, et lineæ via quoque superficies est, sed non quævis superficies via lineæ est.

§. 3.

Redeundo e spatio in mundum externum unde segregatum erat, corpus idem in alio quoque loco videnti quæstio succurrit, *num loca eiusdem diversa aequalia sint?* Intuitus ostendit æqualia esse.

I. Hinc quum in quavis spatii portione cogitari corpus queat, *construitur* sine ulla virium consideratione pro quavis portione spatii *mobile* tale, quod cum ea coincidens ab ea diversum cogitatione quaquaversum libuerit in spatio ferri queat, nihil aliud e corporis externi qualitate retinens, nisi quod idem sub eodem tempore diversa loca occupare nequeat.

II. Cum ita constructo mobili iterum reditur in spatium, formaturque *axioma congruentiae.* Nempe si posito mobili tali, idem diversis temporibus posset cum A et B coincidere, tum $A \doteq B$ esse intuitus ostendit.

At non cum quibusvis A et B *geometrice aequalibus* (de quo inferius) mobile idem coincidere potest: Ex. gr. si A et B cochleæ una ad dextram altera ad lævam, etsi alioquin æquales, sint; et innumeros casus tales dari patebit. At per Tom. I. pag. 12. Ax. V. certa cum determinatione talia A et a generabuntur, ut mobile idem diversis temporibus cum a et B coincidere queat.

Quando quidvis P moveri dicetur, semper tale mobile continuum intelligi debet, in quod incidit totum P, etiamsi complexus punctorum sit.

Si vero scribatur

$$A * B * C * \ldots \doteq a * b * c * \ldots,$$

intelligatur mobile in quod cadunt A, B, C, ... ita poni posse, ut A cum a, B cum b, C cum c, ... simul coincidant.

Vivit magis, facilior evidentiorque fit Geometria motu dicto admisso, usique eo sunt *Archimedes Graecus* et *Britannus*; atque simulac triangulum unum superimponitur alteri, uti in Euclide, idem ubique admittendum sensu dicto est; reipsa enim spatii pars nulla locum sed rem eam tantum, quam sub certo temporis puncto capit, mutare potest. Prolixius tamen eadem sine motu quoque tradi possunt.

§. 4.

Interim post dicta ultro subvenit in determinationem conceptuum motum respicientium inquirere.

1. *Locus* ipsius A dicitur in spatio complexus omnis eius, cum quo aliquid ex A sub eodem puncto temporis coincidit.

2. Quod sub quovis puncto temporis T est, dicitur *semper esse sub T.*

3. Prodeunte quasi formula, quod *M habeat locum L sub T*, aut *sub T locus L est ipsius M*, succurrit quærere, quidnam sit, si per omnes combinationes transeundo substituatur ipsi *M aliquid ex M*, *omne ex M*, *non omne ex M*, *nullum ex M*, aut *aliquid exclusive*; ipsi T vero substituatur *aliqua puncta temporis*, *omnia*, *nulla* vel *aliqua exclusive*; atque ipsi L substituatur *idem*, *non idem*. Item quævis horum variis determinationibus afficiantur, atque casus constructi vario modo combinentur; at brevitatis gratia quædam tantum magis necessaria referenda sunt; notando ad sensum combinationum attendendum esse. Ex. gr. omni locus non idem, et non omni locus idem, haud æquivalent; nempe prius denotare potest, quod omni sit non idem locus, id est nulli sit locus idem.

4. *Omni ex M*, id est omni quod ex M est, *locus idem* in spatio semper sub tempore continuo T, *quies ipsius M sub T* dicitur.

5. *Alicuius ex M locus non idem* sub aliquibus punctis ipsius T, est *motus ipsius M.*

6. Motus sub quavis portione ipsius T eveniens, est *motus sub T.*

7. Alicuius autem exclusive locus idem semper, est vel *motus in loco*, ex. gr. sphæræ, si aliquod illud ipsum M sit, vel *compositio qui-*

etis et motus, nempe si aliquid quiescat moto M; imo sphæra in loco sui moveri potest, quiescente centro tantum vel etiam diametro.

8. Si quid Q ex M moto hoc quiescat, dicitur *M circa Q moveri.*

9. Porro aliqua puncta ipsius T possunt certo modo determinata duo puncta quoque denotare.

a) Omni ex M locus idem duntaxat sub primo et ultimo puncto temporis alicuius, est *reditus perfectus.*

b) Ipsi M locus non idem sub certis punctis a et b ipsius T, parit conceptum sequentem: Si locus non idem sit, aut habet prior cum posteriore commune aut non; si nec quidquam aut utriusque indivellibile sit commune, dicitur *M totaliter emotum.*

c) Si pro quovis puncto a ipsius T sit talis pars continua eius ipsum a complectens, ut sub nullis duobus punctis huius sit locus idem ipsius M, aut portionis ullius eius, tum *M porro moveri* dicitur.

§. 5.

Prima operatio motus intuitiva.

Variæ hinc exoriuntur quæstiones:

I. Potestne punctum $\mathfrak{p}$ undevis moveri usquequo in quodvis datum spatii punctum M perveniat, et quidem ita, ut quidvis in quod cadit secum ferat? et $\mathfrak{p}$ qualem viam describit?

Intuitus ostendit $\mathfrak{p}$, quidvis in quod cadit secum ferendo, via quacunque $\mathfrak{p}$ cum M connectente, (imo innumerabilibus viis) moveri posse usque in M, et viam quamvis eius esse lineam.

Et hæc est *prima operatio motus intuitiva.*

Linea si e nullo eius puncto duabus plures puncti viæ in ea dentur, dicitur *simplex*; et *superficies*, cuius nullarum trium portionum quarumvis binarum sectio eadem linea simplex datur, dicitur *simplex.*

Linea simplex dicitur *in se rediens*, si punctum in ea motum in locum primum ita redire queat, ut antea in nullo loco iam habito fuerit.

Operatio secunda motus intuitiva.

II. Quæstio fit: num moto mobili aliquid ex eo quiescere possit? Num possit unum punctum quiescere, et duntaxat unum? num duo aut plura? et tum complexus omnis sub motu quiescentis qualisnam sit? qualis esse nequeat?

Quoad primum intuitus ostendit quodvis M, in quod $\mathfrak{p}$ cadit, innumerabilibus viis posse circa $\mathfrak{p}$ moveri, ita etiam, ut quodvis punctum $\mathfrak{a}$ in M cadens (a $\mathfrak{p}$ diversum) redeat.

Hinc passus ad omne parit superficiem sphæræ, nempe complexum omnis eiusmodi puncti $\mathfrak{b}$, ut $\mathfrak{p} * \mathfrak{a} \doteqdot \mathfrak{p} * \mathfrak{b}$.

Intuitus ostendit:

1. Complexum hunc esse superficiem, per quam spatium in duas portiones dispescitur, unam cum puncto $\mathfrak{p}$ interno undique clausam, et alteram circumcirca in infinitum exclusam, ipsam vero esse finem utriusque communem.

2. Nullum punctum posse ex una portione in aliam venire, nisi per finem communem transeat: quod deinde *extenditur ad quasvis duas portiones continui alicuius finem communem habentibus, si punctum in eodem continuo moveri oporteat.*

Potest sphæra dicta dici *sphaera puncti* $\mathfrak{a}$, centro $\mathfrak{p}$; atque puncta superficiei a centro *aequaliter distantia* dici possunt, distantia puncti $\mathfrak{p}$ ab $\mathfrak{a}$ per $\mathfrak{a} * \mathfrak{p}$ expressa (sensu pag. 3.)

Complexum punctorum omnium a centro æqualiter distantium superficiem esse, si non ipsum pro axiomate adsumatur, probari quoque potest: nempe si quid portionis spatii complectatur, id circumcirca adesse debet, et quidem sine ulla prominentia, quum id item ubique circumcirca fieri deberet; itaque duæ superficies essent exterior interiorque, centrum undique punctis omnibus æquidistantibus claudentes; quas diversas esse non posse item intuitu patet.

Operatio tertia motus intuitiva.

III. Sed sphæram consideranti ostendit porro intuitus, quod si puncta $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{p}$ in M cadant, atque ipsius $\mathfrak{b}$ via detur circumcirca quoad $\mathfrak{a} * \mathfrak{p}$ æqualiter determinata: tum M ita moveri circa $\mathfrak{a} * \mathfrak{p}$ potest, ut viam dictam describat.

IV. At *vero quæstio oritur:*

1. Quomodo punctum eiusmodi $\mathfrak{b}$ ostendi possit, cuius circumcirca $\mathfrak{a} * \mathfrak{p}$ via detur?

2. Num id quoque fieri possit, ut pro $\mathfrak{b}$ nonnisi unum tale $\mathfrak{d}$ detur ut $\mathfrak{a} * \mathfrak{p} * \mathfrak{b} \div \mathfrak{a} * \mathfrak{p} * \mathfrak{d}$? et

3. Quidsi id quoque fieri possit, ut nullum tale $\mathfrak{d}$ detur, ut $\mathfrak{a} * \mathfrak{p} * \mathfrak{b} \div \mathfrak{a} * \mathfrak{p} * \mathfrak{d}$?

Atque hinc ipsi $\mathfrak{a} * \mathfrak{p}$ quidvis A substituendo, conceptus sequens oritur. Si non detur tale C diversum a B, ut $A * B \div A * C$, et quidem ut quovis puncto ipsius A in loco primo manente, C in locum non eundem cum B cadat, dicitur B *unicum ipsius* A. Si vero nec ullum punctum ipsius B aliorsum cadere queat, dicitur B ipsius A *prorsus unicum.*

Facile animadvertitur A secum coincidere posse, etsi puncta non omnia loco priore maneant; ex. gr. si pro $\mathfrak{p}$ centro sphæræ et $\mathfrak{a}$ puncto superficiei, denotetur $\mathfrak{a} * \mathfrak{p}$ per A, erit etiamsi $\mathfrak{p}$ in $\mathfrak{a}$ et $\mathfrak{a}$ in $\mathfrak{p}$ cadat, sphæra duplex unica ipsius A; et nomen speciale huic casui quoque dari potest.

Interim quæstio etiam oritur, num $\mathfrak{a} * \mathfrak{p} \div \mathfrak{p} * \mathfrak{a}$? Intuitu ita esse patet.

Exempla.

Si $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$ vertices trianguli sint, quidvis e spatio ipsius $\mathfrak{a} * \mathfrak{b} * \mathfrak{c}$ prorsus unicum est; superficies quæ revolutione lineæ cuiusdam circa duo puncta fit, horum unica, sed non prorsus unica est.

Si vero $\mathfrak{ab} = \mathfrak{ac}$, tum poterit $\mathfrak{a} * \mathfrak{b} * \mathfrak{c}$ secum etiam ita coincidere, ut $\mathfrak{a}$ in se, $\mathfrak{b}$ in $\mathfrak{c}$ et $\mathfrak{c}$ in $\mathfrak{b}$ cadant, et si plani in quo triangulum est, una plaga α altera β dicatur, facies trianguli quæ ipsi α obversa erat, ipsi β obvertetur, et ipsi α quæ ipsi β obvertebatur; atque si punctum $\mathfrak{p}$ in plagam α cadat, et triangulum circa perpendicularem ex $\mathfrak{a}$ ad $\mathfrak{bc}$ simul cum α verti concipiatur, dum α in β cadet, $\mathfrak{p}$ quoque in β erit, et si in $\mathfrak{p}'$ cadat, erit $\mathfrak{a} * \mathfrak{b} * \mathfrak{c} * \mathfrak{p} \doteqdot \mathfrak{a} * \mathfrak{c} * \mathfrak{b} * \mathfrak{p}'$. Idem patet etsi $\mathfrak{p}$ in planum idem extra perpendicularem dictam cadat; atque in omni casu unum adhuc dabitur punctum $\mathfrak{p}'$ tale ut dictum est, nisi $\mathfrak{p}$ in perpendicularem dictam cadat: tum vero erit etiam $\mathfrak{a} * \mathfrak{b} * \mathfrak{c} * \mathfrak{p} \doteqdot \mathfrak{a} * \mathfrak{c} * \mathfrak{b} * \mathfrak{p}$.

§. 6.

Hinc passus ad omne fit: nempe complexum omnis puncti quod unicum punctorum $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$ est, nempe rectam; quod item latius extensum, parit conceptum sequentem.

Illud e spatio, quod quorumvis duorum punctorum sui quodvis unicum punctum spatiale complectitur: dicitur *recta* si *linea* sit, *planum* si *superficies* sit; patebitque esse *spatium* quaquaversum infinitum, si *portionem spatii* complectatur; imo et recta planumque per hanc definitionem infinita exhibentur; at vero num dentur talia, quæstio fit. Inferius ostendetur, rectam per quævis duo puncta, planum per quævis tria puncta dari.

Cum definitio ista simul affinitatem plani cum recta exprimat, plures exactas quidem supprimere licet; aliqua tamen huius generis adferre fas est.

Forma certorum duorum punctorum unica, cuius pro omnibus punctis datur tale idem punctum $\mathfrak{p}$, ut pro quibusvis duobus punctis $\mathfrak{a}$ et $\mathfrak{b}$ formæ dictæ sit $\mathfrak{p} * \mathfrak{a} \doteqdot \mathfrak{p} * \mathfrak{b}$, est si linea sit *circulus*, si superficies sit *sphaera*.

Linea simplex certorum duorum punctorum unica est, si rediens sit, *circulus*, si non, *recta*.

Forma alicuius puncti unica est *sphaera*.

Elegans est plani definitio, quam Ioannes Bolyai Auctor Appendicis dedit, complexum omnis eiusmodi puncti $\mathfrak{p}$, ut pro certis duobus punctis $\mathfrak{a}$ et $\mathfrak{b}$, iisdem pro omnibus $\mathfrak{p}$, sit $\mathfrak{p} * \mathfrak{a} \doteqdot \mathfrak{p} * \mathfrak{b}$, dicendo *planum*, sectionem duorum planorum vero *rectam*.

§. 7.

Prodeunte plano, in quod cadit a quovis puncto ad quodvis eiusdem ducta recta, campus simplicior clariorque aperitur, circumcirca expansus in infinitum, spatium in duo dimidia æqualia dividens, quamvis (ut inferius ostendetur) congruere manentibus omnibus dividentis punctis in suis locis nequeant. Huc idcirco mens e spatio quaquaversum infinito descensura, antea tamen in rectæ planique combinationes generaliter disquirit.

Quævis A et B, quorum quodvis aut rectam aut planum denotet, aut secant se, aut non: quæritur, num possint secare, et possint non secare? et si possint, quando id fiat? et sectio qualis sit?

Demonstrabitur pro dato quovis plano P et puncto $\mathfrak{p}$ dari tam planum quam rectam ipsum $\mathfrak{p}$ complectentia, ipsum P non secantia, etsi singula simul infinita accipiantur; ita pro data recta A et quovis puncto $\mathfrak{p}$ dari rectam B patebit ipsum $\mathfrak{p}$ complectentem, quæ ipsam A non secet, etsi utraque infinita concipiatur; et quidem tam in illo plano, in quo A et $\mathfrak{p}$ sunt, quam extra illud. Patebit porro per idem punctum innumera plana dari, et quorumvis planorum P et Q infinitorum punctum commune habentium sectionem rectam utrinque infinitam esse; ita per quodvis punctum rectas innumeras dari, et quarumvis duarum rectarum aliquid commune habentium sectionem unum punctum esse.

At quæstio subvenit, num per $\mathfrak{p}$ unum solum aut plura quoque plana diversa dentur planum P non secantia? Si nonnisi unum sit, tum et sectio plani illius solius P' atque plani P, per planum tertium Q (per rectam ex aliquo puncto ipsius P ad aliquod ipsius P' ductam positum) facta, eiusmodi par rectarum producet, quæ in planum Q cadentes se invicem non secant, sed quævis alia per punctum $\mathfrak{p}$ in eodem plano Q posita secat rectam ipsis P et Q communem; nam si non secaret, facile demonstratur et planum per rectam illam ex $\mathfrak{p}$ positum dari, quod planum P non secaret. Atque tum Axioma XI. Euclidis constaret: sed de hoc plura inferius.

§. 8.

Hic prius plures rectas ex eodem puncto euntes combinando oritur conceptus sequens.

I. Si rectæ e puncto eodem $\mathfrak{p}$ exeuntes in forma quadam f (sive pars plani sit sive non) desinant: complexus rectarum omnium, quæ a $\mathfrak{p}$ ad puncta formæ f sunt, dicitur *pyramis* sensu lato *basi f insistens*; quo etiam triangulum pertinet, si forma f recta sit.

Hinc porro, rectarum istarum quidem cuiusvis sua magnitudo determinata est: at rectis his quasi ex $\mathfrak{p}$ acceptis, et complexu extremitatum earum pro obiecto considerationis posito, facile succurit quærere, quidsi omnes ex. gr. bis vel ter & longiores brevioresve essent? verbo ut quævis fiat $\frac{n}{m}$-ta prioris? Atque hinc oritur conceptus sequens: notando quod per *plagam k* ipsius A intelligatur illa portio α continui A portionibus α et β constantis, in qua k est, posset si de α, excluso c quod ipsi α, β commune est, sermo sit, *regio k ex c* dici. Per *internum* continui vero intelligitur id quod ex eo est, nihil cum fine illius commune habens.

1. Si quidvis Q fuerit e spatio, cuius punctum quodvis generaliter $\mathfrak{Q}$ dicatur, et sit pro omnibus $\mathfrak{Q}$ idem punctum $\mathfrak{p}$ et eadem quantitas β, atque accipiatur in omni quavis recta, a $\mathfrak{p}$ per aliquod $\mathfrak{Q}$ eunte, recta $\mathfrak{pq}=\beta.\mathfrak{p}\mathfrak{Q}$, omni quovis $\mathfrak{q}$ in ea rectæ $\mathfrak{p}\mathfrak{Q}$ plaga in qua $\mathfrak{Q}$ est accepto; tum complexus P omnis $\mathfrak{q}$ dicitur *simile* ipsi Q; atque complexus quorumvis $\mathfrak{q}$ complexui ipsorum $\mathfrak{Q}$ illi $\mathfrak{q}$ respondentium *homologum* audit. Hoc sensu igitur dari quoque similia patet.

Possunt etiam P et Q *similia* dici, si cuivis puncto cuiusvis ipsorum P et Q respondeat certum alterius punctum, et cuivis alii aliud, atque detur quantitas β eadem pro omnibus talis, ut quævis puncta $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$ fuerint ipsius P, iisque respondeant $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$ ex Q, sit $\mathfrak{AB}=\beta.\mathfrak{ab}$. Dari talia, si Axioma XI. Euclidis constiterit, per triangula ad $\mathfrak{p}$ verticalia patet.

Aut: si quævis tria puncta $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$ accipiantur in P, iisque ut dictum est respondeant $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$ ex Q, atque anguli (de quibus inferius) $\mathfrak{ABC} = \mathfrak{abc}$, $\mathfrak{BAC} = \mathfrak{bac}$, et $\mathfrak{BCA} = \mathfrak{bca}$; tum pariter P et Q *similia* dici possunt, posito Axiomate XI. Euclidis.

Elegans est conceptus *similium*, quem Ioannes Bolyai *Appendicis Auctor* dedit. Si e puncto eodem quocunque $\mathfrak{p}$ concipiantur rectæ ad omne punctum ipsius Q: complexum extimarum omnium ex omnibus illis rectis, quæ a $\mathfrak{p}$ ad punctum aliquod ipsius Q sunt, in infinitum productarum, *formam relativam* ipsius Q appellando, *similia* dixit P et Q, si cuivis formæ relativæ ipsius P detur forma aliqua relativa ipsius Q æqualis.

Quodvis autem horum per quodvis eorundem poni demonstrari potest, si Axioma XI. Euclidis constiterit.

2. Sed e prima definitione facile quæstio oritur: quidsi omnia $\mathfrak{q}$ in altera plaga (non ubi respondens $\mathfrak{Q}$ est) accipiantur? Hoc pacto quoque formas certo respectu similes prodire patet, si conceptum ita extendere libuerit; at etiam pro $\beta = 1$ formæ tales verticales prodeunt, quæ alioquin certo respectu statim dicendo æquales, nunquam tamen congruere queunt, atque etiam compræsentes discerni præter locum quoque possunt. Ex. gr. Sit Q manus dextra; generabitur in plaga altera post $\mathfrak{p}$ forma manui sinistræ congruens; si nimirum forma generata ita invertatur, ut quod supra erat infrorsum, et quod infra erat sursum veniat, prodibit imago quasi in speculo S per $\mathfrak{p}$ posito facta, versione dicta circa perpendicularem ex $\mathfrak{p}$ ad speculum S usque ad duos rectos facta. Intelligitur autem hic per imaginem ipsius Q complexus punctorum omnium, quæ perpendiculares ex omnibus punctis ipsius Q ad planum S missas, in altera spatii plaga æqualiter continuatas terminant. Facile patet, versione dicta perpendiculares e punctis respondentibus quibusvis $\mathfrak{A}$ et $\mathfrak{a}$ ad S missas antea æquales, nunc in puncto eodem ipsius S terminari. Sit nempe (Fig. 1.) in plano speculi recta ad planum tabulæ perpendicularis ex $\mathfrak{p}$, sitque ipsius $\mathfrak{DABC}$ punctum $\mathfrak{D}$ supra tabulam, $\mathfrak{ABC}$ in plano tabulæ, fiantque $\mathfrak{ap} = \mathfrak{Ap}$, $\mathfrak{bp} = \mathfrak{Bp}$, $\mathfrak{cp} = \mathfrak{Cp}$, et $\mathfrak{dp} = \mathfrak{Dp}$: erit manifesto $\mathfrak{d}$ infra tabulam, et propter triangula verticalia æqualia erunt perpendiculares e literis nominis eiusdem ad planum speculi missæ æqua-

les: atque si schema literarum minorum circa $\mathfrak{P}\mathfrak{p}$ perpendicularem ad $\mathfrak{p}\mathfrak{k}$ per duorum rectorum intervallum vertatur, cadet $\mathfrak{m}$ in $\mathfrak{M}$ &, et $\mathfrak{d}$ quoque supra tabulam e regione ipsi $\mathfrak{D}$ erit.

Rem adhuc illustrat, si duarum cochlearum alioquin æqualium, una dextrorsum altera sinistrorsum torta sit, atque illa ad latus speculi, hæc coram teneatur; sinistræ imago erit cochlea dextra, quæ illi quæ ad latus tenetur, congruere poterit; ita imago manus dextræ manui sinistræ congruere poterit; sed manicæ manui dextræ congruentis superficies interior extrorsum vertenda est, ut sinistræ congruat.

3. Unde etiam conceptus sequens oritur. Si A non omnia puncta in eodem plano habeat, neque complexus sit eiusmodi partium a et b, ut a et imago ipsius b compræsentes nonnisi per locum discerni queant: tum A et quodvis tale B, ut B et imago ipsius A compræsentes nonnisi per locum discerni queant, dicuntur *formae contrarie aequales.* Nempe hæ sunt, quæ congruere nequeunt; quamvis per perpendiculares ex eiusdem plani iisdem punctis in utraque plaga æquales, resultata (per Ax. V. pag. 12, Tom. I.) operationum æqualium sint, præterquam quod unum in una, alterum in altera plaga generetur.

4. Unde item novus conceptus nascitur: nempe *geometrice aequalia* dici possunt A et B, si aliquod C possit cuivis aut ipsi aut imagini eius congruere.

5. Notandum autem est, et ad facies, quibus congruibilia congruere queunt, attendendum esse. Ex. gr. trianguli non æquicruri imago cum ipso nonnisi faciebus e regione stantibus, aut faciebus aversis tegentibus se invicem congruere possunt. Dicantur ob conceptum faciliorem facies obversæ eiusdem coloris ex. gr. albi, aversæ nigri; facies alba albam, aut nigra nigram tegat necesse est, ut congruant: si vero parallelogrammi una facies alba altera nigra sit, tum triangula per diagonalem facta generaliter nonnisi ita congruunt, ut facies alba trianguli unius nigram alterius tegat. Circuli vero aut trianguli æquicruri imago, circa rectam bifariam dividentem ad duorum rectorum intervallum mota, nigram faciem albæ obvertens quoque congruere poterit.

Sed prius dicta illustrantur adhuc per sequentia. Si e trianguli puncto quovis fiant ad planum trianguli perpendiculares in utraque plaga æquales: tum formæ ipsius F dantur partes tales ut supra dictum est, nempe forma e triangulo et perpendiculari quæ in una plaga est constans, item forma ex eodem triangulo et perpendiculari altera constans tales sunt, ut complexus earum F sit, et una imagini alterius absolute æqualis sit; atque F cum imagine sua congruere quoque potest.

At si in una tantum plaga sit perpendicularis, nisi e perpendiculari triangulum æquicrurum bifariam dividente erecta sit, hæc forma talibus duabus partibus ut dictum est, non gaudet; neque potest cum imagine sua congruere.

Sit item (Fig. 2.) ianua $\mathfrak{ABCD}$; ad $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{D}$ sint cardines, $\mathfrak{EFGH}$ sit sera prominens, quæ cum prominentia ipsius $\mathfrak{E}$ ianuam claudit; sit imago huius $\mathfrak{abcd}$, et facies e regione stantes sint albæ, manifesto sera et imago eius prominens erga se invicem porrecta sunt, atque faciebus albis et $\mathfrak{AB}$ ac $\mathfrak{ab}$ congruentibus, sera et imago eius in plagas contrarias cadent; sed si ad $\mathfrak{FE}$ et $\mathfrak{GH}$ (supra et infra) omnia æqualia essent, adeoque darentur duæ partes ut dictum est: tum verso ipso $\mathfrak{abcd}$ circa $\mathfrak{if}$ usque ad duos rectos, ut facies nigra imaginis faciei albæ obiecti obvertatur, prodibit $\mathfrak{dcba}$, cuius (simul cum sera, iuxta schema) facies nigra congruit albæ faciei ipsius $\mathfrak{ABCD}$. At si ad $\mathfrak{E}$ sit aliquid ut supra, quod ad $\mathfrak{H}$ non est, congruentia impossibilis est.

Cuiusvis animalis forma externa, in qua montrositas nulla est, ita a natura comparata est, ut gaudeat duabus eiusmodi partibus, ut supra dictum est; imo talibus ut una imago alterius esse possit, quasi ex uno plano in utraque plaga modo supra dicto æqualiter generata, geometrice sensu dicto æqualia essent.

Notandum autem est, inter omnes superficies solum planum esse, cuius quælibet facies alteri obversa hanc tegere queat; atque in systemate Euclideo planum solum cum sphæra in eo convenire, quod utrumque circa quodvis sui punctum in se moveri queat (inferius, ·31351, §. 8) et solum discrimen esse, quod sphæræ quodvis punctum ab eodem certo æquidistet.

II. Rectis porro pluribus, imo innumerabilibus, punctum $\mathfrak{p}$ commune habentibus, in sectione præcedente ob oculos habitis, facile cogitatur rectam $\mathfrak{p}\mathfrak{P}$ circa $\mathfrak{p}$ moveri, et formam viæ eius considerare: inter vias eius possibiles occurit etiam via rectæ $\mathfrak{p}\mathfrak{P}$ circa $\mathfrak{p}$ porro ita motæ ut redeat. Via talis aut erit in plano eodem tota, aut non.

1. Si prius: tum via cuiusvis puncti præter $\mathfrak{p}$ vocatur *circulus*, et pars quævis continua eius, perimetrum intelligendo, dicitur *arcus*, recta vero quæ a $\mathfrak{p}$ usque ad punctum est, de cuius via sermo est, *radius*, $\mathfrak{p}$ *centrum*, et recta ab uno perimetri puncto ad aliud *chorda*, et si hæc per centrum eat *diameter*, pars plani inter arcum et chordam eius comprehensa *segmentum*, illa vero quæ inter arcum et radios per extremitates arcus ductos est, *sector* dicuntur.

Si vero (Fig. 3.) punctum ab $\mathfrak{a}$ incipiendo in peripheria semper porro moveatur usque ad quodvis punctum $\mathfrak{f}$, et via v eius accipiatur positiva, si via supra *diametrum* $\mathfrak{a}\mathfrak{b}$ (quæ *primaria* dicatur) incipiat, et negativa, si via infra $\mathfrak{a}\mathfrak{b}$ incipiat; atque partes diametri dictæ e centro versus $\mathfrak{a}$ positive versus $\mathfrak{b}$ negative, et perpendiculares ad $\mathfrak{a}\mathfrak{b}$ supra $\mathfrak{a}\mathfrak{b}$ positive infra $\mathfrak{a}\mathfrak{b}$ negative accipiantur: dicitur distantia $\mathfrak{f}\mathfrak{m}$ puncti $\mathfrak{f}$ ab $\mathfrak{a}\mathfrak{b}$ (id est perpendicularis ex $\mathfrak{f}$ ad diametrum primariam) *sinus viae dictae* v ab $\mathfrak{a}$ usque ad $\mathfrak{f}$, sive positive sive negative facta fuerit via, imo etsi punctum dictum semper porro motum quotiesvis iterum in $\mathfrak{a}$ pervenerit, dummodo demum in $\mathfrak{f}$ subsistat. Distantia $\mathfrak{c}\mathfrak{m}$ centri vero a sinu vocatur *cosinus* ipsius v, distantia $\mathfrak{a}\mathfrak{m}$ initii $\mathfrak{a}$ autem ab eodem sinu *sinusversus ipsius* v audit; $\frac{\sin. v}{\cos. v}$ autem pro radio $=1$ dicitur *tangens* ipsius v, et $\frac{1}{\cos. v}$ *secans* audit. *Complementum* ipsius v dicitur talis arcus α, ut $\alpha + v =$ quadranti q, si ex. gr. $v = 3q$, erit $\alpha = \vdash\!\!\dashv 2q$. Insignitur autem sin. α, tang. α, sin. vers. α, sec. α nomine eodem relato ad v, nonnisi syllaba *co* præposita, nempe dicitur *cosinus* v, *cotangens* v, *cosinus versus* v &c, quasi diceretur *complementi sinus* &c; ut facile patebit et cosinus definitionem priorem cum hac convenire, uti et sinum versum dici potuisse $1 - \cos.$; atque suo loco omnes has *functiones trigonometricas* dictas geometrice exhiberi. Nomen sinus inde exortum est, quod semissis chordæ arcus dupli per *s. ins.* (idest *semissis inscriptae*) scribebatur.

2. Si non sit via rectæ prius dicta in eodem plano: tum facile cogi-

tatur, rectam motam saltem in plaga a plano certo per $\mathfrak{p}$ posito eadem semper manere, donec porro mota redeat; dicatur via eiusmodi $\bigvee$ *forma ad* $\mathfrak{p}$ *apicata*, quum forma eiusmodi manifesto singularitate aliqua ad $\mathfrak{p}$ gaudeat, quod vulgo sub nomine *apicis* venit.

3. Tum facile succurit lineam aliquam simplicem considerare, cuius nonnisi punctum unum, et quidem internum, in $\bigvee$ et plane in $\mathfrak{p}$ cadit, omnia alia puncta vero in plagam spatii ex $\bigvee$ ab ea in qua planum est diversam cadant; et lineam illam in superficie aliqua, et demum in plano sitam considerare, et hinc conceptum sequentem generaliorem construere.

4. Si k aut punctum internum lineæ talis l, quæ portio formæ F est, aut linea talis sit, cuius punctum quodvis internum p, internum etiam est lineæ alicuius L in plano sitæ, et simul non in illo plano sitæ portioni alicui formæ F communis; atque in casu priore linea l puncto k in $\mathfrak{p}$ cadente, in posteriore vero linea L puncto p in $\mathfrak{p}$ cadente, in plagam respectu formæ alicuius ad $\mathfrak{p}$ apicatæ interiorem cadat: tum dicitur *F ad k angulum habere*, nempe forma illa, qua F ex k incipit, *angulus* vocatur.

Facile videtur, angulos esse posse in lineis, in superficiebus, necnon in continuo e linea et superficie composito.

5. Quæstio autem fit: num recta A e puncto interno i rectæ B ducta angulos faciat? et quot angulos efficiat recta A continuata per i? num aliqui eorum sint æquales, et qui sint ii? Facile patebit verticales dictos esse semper æquales; si vero singuli quatuor qui efficientur sint inter se æquales, aut recta A per i non continuata efficiat duos angulos æquales, vocatur quilibet eorum *rectus*. Fit vero *angulus* per duas rectas factus, *rectilineus* dictus, *quantitas respectiva* (Tom. I. pag. 25) divisione arcus, ex anguli apice tanquam centro, radio quovis ab una duarum rectarum usque ad alteram ducti, per peripheriam totam radii eiusdem; si quoti hi sint pro duobus angulis æquales, et formas angulares congruentes incipere demonstrabitur; si vero quotus q sit pro angulo α, et Q pro angulo β, atque $q=\mu Q$, tum α dicitur angulus μ-tuplus anguli β (Tom. I, pag. 48). Duorum planorum angulus autem fit

quantitas respectiva, arcu illo per suam peripheriam diviso, qui uno eorum circa sectionem usque in alterum moto per quodvis punctum describitur; eundem quotum prodire patebit.

Angulus rectæ $\mathfrak{ab}$ cum plano vero fit quantitas respectiva dividendo arcum illum per suam peripheriam, quo in superficie sphæræ centri $\mathfrak{a}$, in quo sectio est, et radii $\mathfrak{ab}$, ex $\mathfrak{b}$ usque ad planum, cum radio $\mathfrak{ab}$ nullus minor datur. Denotatur angulus per $\wedge$.

6. Passus hinc est cogitare, quid si forma aliqua ad nullum sui punctum angulo gaudeat? dicatur *forma* eiusmodi *fluens*; quæ item facile cum quantitate combinatur; oriturque conceptus formæ, quæ et fluens et quantitas est; et dici *forma* eiusmodi *uniformis* potest. Ex. gr. recta, circulus, helix, planum, superficies sphæræ, cylindri.

7. Ita facile conceptus formæ fluentis etiam cum exclusione rectæ planique componitur: oriturque forma fluens, cuius nulla portio recta aut planum est, et dicitur *forma* eiusmodi *curva*.

8. Porro ad compositionem *curvae* cum recta planove itur, quærendo num continuum e forma curva et recta planove forma fluens esse queat? oriturque conceptus *tangentis*.

Nempe *formam curvam F in puncto* $\mathfrak{p}$ *tangere* dicitur tam una recta eiusmodi, quam complexus omnium talium rectarum, ut cuiusvis earum detur tale punctum internum $\mathfrak{p}$ in F cadens, ut aliqua portio ex $\mathfrak{p}$ incipiens cum linea aliqua in F sita ex $\mathfrak{p}$ incipiente forma fluens sit. Complexus omnium talium rectarum, sive una tantum sive plures sint, dicitur *tangens totalis*.

Ex. gr. Sphæram potest tangere recta, sed tangens totalis planum est, uti circuli recta.

Hinc facile in discrimen tangentium totalium in diversis formæ eiusdem F punctis quæritur: atque si tale k detur in F, ut tangentium totalium, quæ ad omnia puncta ipsius k sunt, complexus ipsa tangens totalis ad $\mathfrak{p}$ sit, tum tangens eadem dicitur formam F non in $\mathfrak{p}$ solum, sed etiam *in k tangere*. Ex. gr. planum idem tangere cylindrum in recta et quovis puncto huius potest.

Imo hinc extenditur conceptus, dicendo etiam *formas fluentes quas-*

vis F et f tangere se invicem in k, si in quovis puncto ipsius k tangente totali tam F quam f eadem gaudeant.

, Hinc etiam oriuntur conceptus supra (Tom. I. pag. 290) dicti.

9. Porro conceptus tangentis totalis facile cum conceptu anguli recti paulo antea dicti combinatur, oriturque *conceptus generalis perpendicularitatis.*

Nempe si T tangens totalis formæ F in puncto $\mathfrak{p}$ sit, atque recta r in $\mathfrak{p}$ terminata, cum quavis recta in T sita ac in $\mathfrak{p}$ terminata, angulum rectum faciat: dicitur r etiam utvis continuata tam *ad* T quam *ad* F *in* vel *ex* $\mathfrak{p}$ *perpendicularis*, si recta eiusmodi utrinque infinita, in quam talis r cadit, sola tantum sit etiam pro tali superficie formam F complectente, cuius tangens totalis ad $\mathfrak{p}$ planum est. Denotatur autem perpendicularis A ad B per $A \perp B$.

Extenditur idem generalius quoque ad k, sive punctum sive linea sit: nempe si e quovis puncto ipsius k detur eiusmodi perpendicularis ut dictum est, complexus omnium eiusmodi perpendicularium ad F ex omnibus punctis ipsius k, dicitur *perpendicularis ad* F *in* vel *ex* k.

III. Demum rectis ex eodem puncto $\mathfrak{p}$ ad omnia puncta formæ cuiuspiam f consideratis, facile succurrit unius earum plagam in qua $\mathfrak{p}$ est continuare in infinitum, atque punctum $\mathfrak{p}$ semper porro movere, apice pyramidis abeunte in infinitum; atque tum quærere, num angulus ad apicem rectæ alicuius decrescat? et si decrescant omnes, num omnes tendant ad o? Patebit ita esse, darique pro quavis rectarum dictarum rectam in qua, recta cuius una extremitas $\mathfrak{p}$ altera $\mathfrak{q}$ in f est circa $\mathfrak{q}$ per rectam dictam porro mota, hanc prima vice deserat; imo omnes eas rectas punctum $\mathfrak{p}$ commune habentes eo modo rectam eandem omnes simul prima vice deserere posse, fierique omnes simul infinitas.

1. Tum ultro venit omnes finitas magnitudinis eiusdem reddere, et complexui earum nomen dare. Dici potest hoc *prisma* sensu generali. Complexu extremitatum, in quibus rectæ æquales initium in f habentes terminantur, F dicto: patet cuivis puncto cuiusvis ipsorum F et f alterius certum punctum, nempe extremitatem rectæ alteram, respondere; et cuivis alii aliud.

Ex. gr. Si forma f recta r sit, orietur figura in plano sita (ut infra patebit) duabus rectis extimis, recta r, et complexu c punctorum, in quibus terminantur rectæ ex omnibus punctis ipsius r rectam dictam eandem prima vice non secantes, clausa: at quæritur, c qualenam sit? et anguli, quos rectæ dictæ æquales cum r versus eandem plagam faciunt, sintne æquales?

Unde item passus est cogitare, quid si æquales essent? et patet, quod si recta r moveatur in se rectam extimam in eodem plano secum ferendo, donec initium ipsius r in finem perveniat, extremitatis rectæ extimæ via gaudebit qualitate, quæ de F dicta est, præterquam quod non constet rectas dictas omnes se invicem modo priore prima vice non secantes esse. Atque hinc conceptus sequens oritur: si formarum F et f cuiusvis, puncto cuivis respondeat certum punctum alterius, et cuivis alii respondeat aliud, atque rectæ inter puncta correspondentia æquales, et quævis binæ in eodem plano sint, neque etsi infinitæ sint secent se invicem: dicitur complexus rectarum illarum omnium *prisma* generalius.

2. Interim via extremitatis lineæ extimæ plane dictæ novum conceptum parit: nempe pro angulo quem ea cum r facit, facile rectus ponitur; et manifesto si (Fig. 4.) $\mathfrak{dc} \perp \mathfrak{ab}$, et $\mathfrak{ac} = \mathfrak{cb}$, sive ad dextram sive ad lævam moveatur $\mathfrak{dcab}$, recta $\mathfrak{ab}$ in se et $\mathfrak{dc}$ in eodem plano manente, ob generationes utrinque et undevis æquales (Tom. I. pag. 12. V) describet $\mathfrak{d}$ lineam uniformem, angulos utrinque et ubique æquales cum $\mathfrak{dc}$ facientem; (angulum esse infra patebit). Dicatur via hæc ipsius $\mathfrak{d}$, *sive continuata sit in infinitum, sive pars quævis continua eius accipiatur, aequifluens ipsius* $\mathfrak{ab}$ *ad distantiam* $\mathfrak{cd}$. Est vero linea hæc recta, si Axioma XI. Euclidis constet, et constat hoc, si illa recta sit; de quo infra.

3. Hinc facile cogitatur rectam $\mathfrak{ab}$ alicubi terminari, ibique aliam incipere, sive in eodem plano priore, sive in alio; et ubi hæc terminatur, item aliam incipere, atque cuique harum æquifluentem ad distantiam eandem $\mathfrak{cd}$ dare, continuando idem donec libuerit. Denotentur rectæ dictæ per literas maiores, et earum æquifluentes per minores nominis

eiusdem; nempe sit linea ABCD ... e rectis AB, BC, CD, ... composita, et ab, bc sint rectarum AB, BC æquifluentes in b secantes se invicem &c.

Quæstio oritur num B *et* b *in plagam plani* ABab *respectu rectæ* Aa eandem cadant? atque si generaliter ponatur, quod si quævis litera magna H et parva h fuerit, HJ et Ji in plagam plani HJhi respectu rectæ Hh eandem cadant; dicuntur linea ABCD ... e rectis composita, et linea abcd ..., *lineae primario aequesitae.*

4. Unde iterum generalior conceptus oritur: nempe quæcunque lineæ simplices L et l dicuntur *generaliter aequesitae*, si pro utvis parva recta k dentur lineæ L' et l' primario æquesitæ tales, ut cuiusvis ipsarum L et L' punctum quodvis aut in alteram cadat, aut detur ab illo ad aliquod punctum lineæ alterius recta $< k$; ita cuiusvis linearum l et l' punctum quodvis aut in alteram cadat, aut detur ab illo ad punctum aliquod lineæ alterius recta $< k$.

5. Atque hinc demum oritur generalis conceptus *parallelismi* formarum F et f; si e cuiusvis formarum F et f ex. gr. ipsius F quovis puncto P ductis in F quibusvis et quotvis lineis simplicibus nihil præter P commune habentibus, e certo puncto p ipsius f iis æquesitæ reperiantur eodem ordine se invicem excipientes, nihil præter p commune habentes.

Aut brevius: si cuivis lineæ simplici in quamvis ipsorum F et f cadenti detur æquesita in altero, dicuntur F et f *parallela.*

Sensu latissimo dicitur etiam quævis pars continua ipsius f *parallela* ipsi F, si f et F parallela fuerint. Denotatur parallelismus ipsorum F et f per $F \parallel f$.

Num vero recta alteram primo non secans (pag. 17) huic parallela sit, aut num detur recta rectæ parallela, a decisione Axiomatis Euclidei undecimi pendet; de quo inferius.

Notandum autem etiam alium parallelismum distingui posse: si nempe in definitione æquesitorum, pro quævis litera magna H et parva h, recta HJ et eius æquifluens in diversas plani dicti plagas cadant, quo in casu lineæ ABCD ... et abcd ... *inverse aequesitae*, atque inde *parallelae inversae* dici possunt, prioribus *directis* dictis; et tum conceptus *aequesitorum* quam *parallelorum* extendi generalius potest, si æquesita dicantur, dum quævis $\mathfrak{HJ}$ et $\mathfrak{hi}$ aut simul in eandem plagam plani dicti aut quævis simul in diversas eiusdem plagas cadant.

(Fig. 5.) exhibet exemplum simplicissimum, unde conceptus nascitur pro linea $\mathfrak{ABCD}$ . . . in plano sita, ita (Fig. 6.) parallelismi inversi; patet etiam formas parallelas tales dari, quæ se invicem secant.

§. 9.

Post hæc, cum disquisitiones istæ, quæ mentem in planum descendentem retinebant, ipsæ indigitent plura adhuc subsidia desiderari, ut penitius intelligantur: ea in simplicioribus quærens descendit in planum. Ubi

1. Obviam venit, puncti vias in campo infinito innumerabiles dari, occurritque præter rectam aliaque, etiam linea simplex in se rediens; quæ in quacunque superficie simplici fuerit, *figura* dicitur; et in plano quoque curva varii generis, quo pertinet etiam circulus per operationem motus intuitivam secundam via ad planum restricta, aut mere e rectis composita aut mixta esse potest. Si e tribus rectis componatur, *triangulum*, si e quatuor rectis constet in plano, *quadrilaterum* audit; ita si ex n rectis composita sit, *n latera figura rectilinea plana* dicitur; si vero latera æqualia sint, *aequilatera*, si anguli æquales *aequiangula*; si et latera et anguli æqualia sint, *regularis* dicitur, et figura quatuor laterum dicitur *quadratum*, si plura fuerint latera, *polygonum regulare* tot laterum dicitur quot latera habet.

2. At vero etsi constaret inter quævis duo puncta dari rectam, eamque totam in idem planum cadere, atque e quovis puncto plani radio quovis dari circulum in planum idem cadentem totum; quæ tamen et ipsa adhuc inferius demonstranda erunt: quæstio ultro suboritur, num dentur in præcedentibus dicta? et num rectarum circulorumque certo numero ea adesse demonstrari queat?

Id quod certo rectarum circulorumque numero determinatur, dicitur *geometrice construi posse.*

Per *geometrica constructione perficere aliquid*, quod in ita dicto *problemate* enunciatur, intelligi solet: id numerabilibus eiusmodi operationibus peragere, quarum quævis est rectam ducere aut circulum describere; quod omnino tam rectam ducendo, quam circulum describendo, motum sapit, in ipso Euclide quoque; quamvis exemplar constructionis geometricæ exhibeat, absque eo, ut eam ullibi definiat (ut linguam vivam bene loquentes regulas Grammaticæ subticent); at tanto magis commentator eius statim apud secundam propositionem (ubi puncto $\mathfrak{p}$ et recta r positione datis, recta in eodem plano ex $\mathfrak{p}$ ipsi r æqualis determinanda est) constructionis geometricæ ideam dare debet, ut genius Euclidis percipiatur. Requiritur nempe ad hoc perficiendum numerus 7. Omnibus immotis fit hoc, et quamvis facile possit extremitas ipsius r ipsam r in plano secum ferendo (per operationem motus primam intuitivam ad planum restrictam) usque in $\mathfrak{p}$ moveri, aliquid valde pulchri habet propter fidelem ideæ constructionis geometricæ, quam sibi Euclides proposuit, executionem.

Interim in numerum finitum dictum admitti etiam dicta operatio motus prima potest; ut si quid suppositis rectis, quas inter quævis duo puncta adesse demonstrabitur inferius, fiat numero finito operationum, quarum quævis aut prima aut secunda operatio motus intuitiva est, via et generatis ad planum restrictis, nec plures operationes coniungantur, id est in M moto interea aliud quid haud moveatur: id *geometrice construi* dicatur, et quidem *sensu stricto*; si vero non restringatur ad planum, admissa operatione tertia quoque, *constructio geometrica sensu lato* dicatur.

3. Quamquam autem et veritates æqua dignitate polleant (ut in natura sol, orbium dies, et noctilucæ exigua luminis in vasta nocte sphæra, eadem sapientia infinita radiant): *Geometria* quæ *elementaris* dicitur, *sensu lato* in iis, quæ sensu lato geometrice construi possunt, et *sensu stricto* in iis, quæ sensu stricto geometrice construi possunt, terminari potest iis, quæ nonnisi operationibus coniunctis fieri possunt, ditioni, quæ *Geometria sublimior* dici solet, assignatis; uti inferius pluribus exemplis ostendetur.

§. 10.

Post descensum e spatio quaquaversum infinito in campum circumcirca in plano infinitum apertum: disquiritur ibidem in qualitates formarum, prius quarum omnia puncta, tum earum quarum non omnia quidem sed quodvis geometrice sensu stricto construi possunt, et demum illarum, quarum quodvis punctum ope formarum priorum construi potest. Considerantur autem prius omnimodæ combinationes rectarum et circulorum, prouti arbor inferius ostendet. Denique applicata Arithmetica e datis quantitates ignotæ quæruntur, quo etiam *Trigonometria plana* pertinet, docens e quibusvis triangulum rectilineum determinantibus quantitates per idem triangulum determinatas ope calculi computare.

Datur quidem (in paragrapho sequente) etiam *Trigonometria sphaerica*: nempe triangula quæ in superficie sphæræ per tria plana per centrum posita generantur, suo loco etiam computantur. Estque planum quasi limes geometricus, cuius idea facile determinatur, superficiei sphæricæ, centro remoto in infinitum, posita Axiomatis XI. Euclidis veritate; secus autem alia quædam superficies uniformis circumcirca infinita est limes geometricus dictus, in qua Axioma XI. Euclidis, simul cum tota Planimetria Euclidea, demonstratur in Appendice; Trigonometria sphærica autem a veritate Axiomatis XI. Euclidis independenter absolute vera stabilita ibidem est.

§. 11.

Dein reditur in abyssum spatii, unde in planum descensum erat: atque ibi formarum omnium quæ in plano prodierunt, combinationes iuxta arborem exponendam omnimodæ considerantur, construunturque ea, quæ sensu lato geometrice construi possunt, atque applicata Arithmetica computantur.

§. 12.

Denique coniunctio operationum, cuius superius mentio facta est, sequitur coronam arboris constituens; omniaque spatii puncta, et quorumvis complexus hoc pacto ad unum aliquod certum spatii punctum fixum revocantur.

Ex. gr.

1. Moveatur recta A circa punctum suum aliquod $\mathfrak{a}$ in plano P semper porro, ita ut punctum $\mathfrak{b}$ ipsius A percurrat peripheriam radii $\mathfrak{ab}$ toties quoties libuerit; dicaturque nomine generali u longitudo viæ puncti $\mathfrak{b}$: interea autem moveatur punctum aliquod $\mathfrak{c}$ e certo puncto ipsius A in ipsa eadem recta mota A certa lege, ut nempe y dicta via puncti $\mathfrak{c}$ in A, sit $y=f(u)$; quæritur dato $f(u)$ via ipsius $\mathfrak{c}$ in plano?

2. Ita si recta $\mathfrak{pa}$ moveatur in recta eadem continuata, circulum centri $\mathfrak{p}$ radii $\mathfrak{pa}$ secum ferendo in eodem plano, ita ut interea punctum certum peripheriæ in ipsa peripheria certa lege moveatur, ut sit nimirum via eius $=F(x)$ pro x denotante viam puncti $\mathfrak{p}$ in recta dicta. Ex. gr. si $F(x)=x$, describi cyclois (ut Tom. I. pag. 356) poterit, si punctum motum $\mathfrak{b}$ fuerit.

3. Ita potest $\mathfrak{p}$, centrum circuli C, in peripheria circuli alicuius moveri, circulum C circa centrum interea certa lege motum in eodem plano secum ferendo; et via puncti certi peripheriæ ipsius C quæri. Imo etiam circulus, in cuius peripheria $\mathfrak{p}$ est, interea lege certa moveri potest.

4. Aut si planum P circa rectam certam A in P cadentem moveatur semper porro: viæ, quam certum aliquod punctum $\mathfrak{p}$ ipsius P describit, longitudine generaliter u dicta; et moveatur interea certa lege punctum $\mathfrak{b}$ ipsius A in A, perpendicularem B ad A in P secum ferens, distantia ipsius $\mathfrak{b}$ a certo puncto determinato $\mathfrak{a}$ in A (eodem pro omnibus $\mathfrak{b}$) generaliter x dicta; atque moveatur interea punctum $\mathfrak{c}$ ipsius B certa lege in B, recta $\mathfrak{cb}$ (quocunque perveniat $\mathfrak{c}$) generaliter y dicta; nempe ut sit

$$x=a(u) \quad \text{et} \quad y=b(x);$$

quæritur via puncti $\mathfrak{c}$ in spatio?

Manifesto per u, x, y quodvis spatii punctum p determinari potest: demissa enim ex p ad A perpendiculari, hæc erit y aut in $\mathfrak{a}$ aut in plagam inde aliquam cadens, et verso circa A plano P donec ad p perveniat, eousque p certam viam u describere potest.

5. Ita si certum punctum $\mathfrak{a}$ rectæ A in P immobile cadentis fixum sit; atque e certo puncto $\mathfrak{b}$ ipsius A sit B perpendicularis ad A in eodem plano P, et e certo puncto $\mathfrak{c}$ ipsius B sit C perpendicularis ad planum P; atque dum punctum $\mathfrak{b}$ movetur porro in A, perpendicularem B ad A in plano P secum ferens, interea moveatur certa lege punctum $\mathfrak{c}$ in B, rectam C ad planum P semper perpendicularem secum ferens; atque interea in hac ipsa C quoque moveatur punctum $\mathfrak{d}$ lege certa: quæritur pro datis huius compositionis motus (non virium) legibus, via puncti $\mathfrak{d}$ in spatio? Si ex. gr. $\mathfrak{ab}$ generaliter x, $\mathfrak{bc}$ generaliter y, et $\mathfrak{cd}$ generaliter z dicantur, atque x, y, z semper ut coordinatas simultaneas intelligendo y sit $=\alpha(x)$, et $z=\beta(y)$; manifesto quodvis spatii punctum p per x, y, z determinatur; nempe ex p ad P missa perpendicularis z dici potest, et e puncto illo ipsius P, in quod perpendicularis dicta cadit, ad A missa perpendicularis y, et recta inde usque ad $\mathfrak{a}$ dici x potest. Possuntque præterea tam x quam y et z et positive et negative accipi; nempe x ab $\mathfrak{a}$ incipiendo in una plaga rectæ A positive, in altera negative, ita ordinatæ y ex A incipiendo in una plani P plaga positive et negative in altera, atque ordinatæ z ad planum P perpendiculares e P incipiendo in una spatii plaga positive et negative in altera accipi possunt. Nimirum ex tomo I. pag. 28 determinationes, quibus rectæ in recta aliqua (pro certo puncto eius fixo, atque certa conditione C accipiendi resultati) positivæ a negativis distinguuntur, patent: ita perpendiculares ad rectam A fiunt positivæ aliæ, aliæ negativæ, si pro extremo ibidem dicto rectæ cuiusvis ad A perpendicularis, accipiatur parallela per id ad A in P ducta, atque in hanc ponatur initium priorem excipientis; et pro resultato accipiatur distantia ab A extremi rectæ ad A perpendicularis postremo positæ. Ita perpendiculares ad P aliæ positivæ aliæ negativæ fiunt, si per cuiusvis extremum ad P superficies parallela (pag. 19) ducatur, in qua recta priorem excipiens incipiat, et pro resultato distantia a P extremi rectæ ad P perpendicularis postremo positæ accipiatur.

6. Potest etiam punctum $\mathfrak{b}$ in recta A motum planum aliquod Q ad A perpendiculare secum ferre, ita ut interea in Q motus sequens concipiatur; sit s sectio plani Q cum certo plano fixo P, in quod recta A cadit, et *moveantur certa puncta in certis perpendicularibus ad* s *in* Q cadentibus, prouti omnia per x, nempe distantiam a puncto fixo $\mathfrak{a}$ ipsius A puncti $\mathfrak{b}$ in recta A moti, lege certa determinantur: atque data hac lege, complexus locorum, in quibus puncta in perpendicularibus dictis mota ab initio motus sub punctis temporis expertibus omnibus sunt, qualisnam sit, quæri potest. Patet hoc pacto non lineam tantum, sed superficiem quoque prodire, quum hæc complexus sectionum plani moti Q cum ea esse queat.

Imo possunt motus plures quoque vario modo componi, atque campus disquisitionum protendi.

§. 13.

Notandum autem est, formas omnes, qualesvis prodierint lineæ aut superficies, dum arithmetice considerantur, in quantitates respectivas et quidem ad formam temporis reductas (Tom. I. pag 27) mutandas esse modo sequente.

Pro quavis linea simplici L, cuius nulla pars recta est, intelligatur recta r; si quavis linea simplici e rectis composita, cuius extrema in extrema ipsius L, et puncta quævis ad quæ angulum habet, in L cadunt, l dicta: quævis l sit $< r$, sed pro quovis ω detur tale l, ut $r - l < \omega$ sit.

Ita pro quavis superficie simplici S, cuius nulla pars planum est, intelligatur illud rectangulum (Tom. I. pag. 288), quod limes talis superficiei simplicis e planis rectilineis, ex. gr. triangulis, compositæ est, apicem cuiusvis anguli in S habentis: ut superficiei eiusmodi ut dictum est, limes alius eo maior non detur.

Hoc pacto omnes lineæ ad formam rectæ, ita omnes superficies ad formam rectanguli altitudinis eiusdem reductæ (Tom. I. pag. 27) comparari arithmetice poterunt.

§. 14.

Recta cum omnibus eius proprietatibus primariis simul cum plano axiomatice supponi solent; at quæritur, num ea pro axiomatibus adsumi possint? Conceptus temporis quidem ad spatium translatus rectam peperisse videri potest; attamen tropicam istam rei tam diversæ translationem, externam adiuvisse experientiam indigitant tam definitiones, qualis Platonis est a lumine petita, *rectam* dicentis lineam cuius punctum primum reliqua obumbrat, quam quæ a puncto e certo loco alium petente est, observato tempore fatigioque minimo: nihil tamen magis ad rectam perduxit, quam reflexio ad omne id, quod e corpore quiescentibus duobus punctis eiusdem moto quiescit. Si quid pro axiomate adsumi nequeat, illud e quo deduci potest, id implicite continere debet. Adsumere itaque ea, ut fieri solet, aut sequente modo deducere, ius fasque cuique est. Spatii quaquaversum infiniti filia primogenita est *punctum*, dein *sphaera*, media quasi inter duo extrema. Sphæræ autem linea primogenita *circulus* est, dein recta; atque demum *circulus* cum *recta* parit *planum*.

1. Pro fundamento lineæ uniformis simplicis in se redeuntis, quam circulum esse patebit, positum est (pag. 7); pro rectæ construendæ fundamento ponitur sequens. Si M portio spatii circa duo sui puncta revolvatur (pag. 7): idem M circa eadem duo puncta undevis æqualiter moveri, atque uno solo quoad viam cuiusvis sui puncti modo revolvi potest.

2. Hinc quiescentibus punctis $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, omnia talia puncta ipsius M, quorum quodvis circa $\mathfrak{a} * \mathfrak{b}$ moveri (iuxta pag. 7) potest, movebuntur etiam simul circa $\mathfrak{a} * \mathfrak{b}$, si quod eorum moveatur: et quidem omnia viis iisdem movebuntur porro usque ad reditum, quas singula percurrerent.

Atque hinc etiam nullum punctum ipsius M ex ullo loco $\mathfrak{p}$ duabus viis, una qua ex $\mathfrak{p}$ moveri incipit, altera qua redit, plures habet, quibus motum circa $\mathfrak{a} * \mathfrak{b}$ incipere potest. Nam sint ex eodem puncto tres rami α, β, γ, in quorum quovis punctum ex $\mathfrak{p}$ moveri quiescente $\mathfrak{a} * \mathfrak{b}$ possit, moveaturque in uno casu punctum ex $\mathfrak{p}$ in ramo α incipiendo et per β

redeundo: ramus γ tum haud potuit percurri, nam incipiendo per α aut redeundo per β, punctum idem simul lineam qua ramus γ ex $\mathfrak{p}$ incipit describere nequit; nec antea percurri γ potuit, nam tum punctum porro motum iam antea rediisset. *Cogitetur iam schema totum ita poni, ut* punctum quod antea in $\mathfrak{p}$ erat, extra lineam simplicem redeuntem priorem in γ cadat, simul $\mathfrak{a}$ in $\mathfrak{a}$ et $\mathfrak{b}$ in $\mathfrak{b}$ cadentibus: manifesto motus idem circa $\mathfrak{a} * \mathfrak{b}$ locum haberet (per 1), sed idem punctum annulum a priore diversum describeret (contra 1).

3. Sit iam (Fig. 7.) sphæra S centro $\mathfrak{C}$ cum puncto $\mathfrak{c}$, dicaturque superficies eius S', et fiat sphæra s e centro $\mathfrak{c}$ cum puncto $\mathfrak{C}$, huius superficie s' dicta: facile patet, nec totam sphæram s in S, nec totam S in s cadere; nam si ex. gr. tota S in s caderet, centrum $\mathfrak{C}$ in superficie s' nudum haud inclusum maneret. Habet igitur tam s' aliquid extra S, quam S' aliquid extra s. Hinc autem necessario ipsis S' et s' aliquid commune est; nam punctum e quovis puncto eius quod ex s extra S cadit, usque in $\mathfrak{C}$ veniens per S' transire debet (pag. 6). Ita si punctum e quovis puncto ipsius S' extra s cadente in ipso S' usque in $\mathfrak{c}$ veniat, nisi $\mathfrak{c}$ circumcirca in S' ininterrupte cingatur, punctum dictum e loco extra sphæram s ad centrum eius absque transitu per s' venire posset.

Exit igitur s' ex S' circumcirca $\mathfrak{c}$, idque manifesto generatione circumcirca æquali: adeo ut (pag. 7) quodvis exitus punctum $\mathfrak{p}$, sphæra S circa $\mathfrak{c} * \mathfrak{C}$ mota, viam simplicem in se redeuntem uniformem describere possit.

Idem de quavis sphæra centri eiusdem $\mathfrak{c}$ tali, quæ priori interior est, patet; etsi cogitentur sphæræ omnes interiores usque ad centrum commune $\mathfrak{c}$, et annuli in S' se invicem semper interius usque ad $\mathfrak{c}$ eundo excipiant. Dicantur eiusmodi lineæ uniformes simplices in se redeuntes, quos circulos esse nondum constat, *annuli*, et nomen eorum generale sit A.

Imo idem de quavis sphæra centri eiusdem $\mathfrak{c}$ cum puncto quovis $\mathfrak{i}$ intra superficiem S' cadente facta patet. Nam tum superficies S' tota in sphæram novam cadere nequit; namque $\mathfrak{i}$ intra S' cadens in superficie sphæræ novæ esse non posset. Unde reliqua fluunt.

4. Atque hinc manifesto punctum e cuiusvis A puncto quovis $\mathfrak{d}$ intra annulum eundem A usque in $\mathfrak{c}$ in superficie S' ita moveri cogitari potest, ut semper in superficiem sphæricam centri $\mathfrak{c}$ interiorem veniat, et in nulla uno plura puncta habeat, atque mota sphæra circa $\mathfrak{c}*\mathfrak{C}$, annulis descriptis linea dicta l circa $\mathfrak{c}$ in S' porro moveatur, donec redeat. Nempe punctum dictum in quovis loco ubi sphæra centri $\mathfrak{c}$, sive ipsa s sive interior, ex S' exit, annulo circa $\mathfrak{c}*\mathfrak{C}$ gaudet per præcedentia; adeoque omnia quoque simul moveri quiescente $\mathfrak{c}*\mathfrak{C}$ possunt.

5. Atque hinc, propter generationem superficiei sphæricæ circumcirca æqualem, e quovis puncto $\mathfrak{f}$ ipsius S' datur linea l' priori l æqualis; atque l' circa $\mathfrak{f}$ in S' moveri potest donec redeat, annulos concentricos prioribus æquales describendo.

Imo quum de sphæris S et s demonstrata de quavis alia quoque valeant: pro cuiusvis sphæræ superficie datur linea, quæ circa quodvis punctum superficiei dictæ in ea moveri potest, donec redeat, annulos concentricos undevis æqualiter describendo.

6. Dari dimidia annuli eiusmodi ut dictum est, lineæ simplicis in se redeuntis, duo puncta communia habentia, uti cuiusvis partis continuæ eius duo dimidia punctum commune habentia dari patet sic. Concipiantur ex annuli puncto quovis duo puncta moveri in eo porro usque ad reditum, temporibus quibusvis æqualibus vias æquales describendo, easque ex eodem puncto diversas sed simul incipiendo: utrumque per alterum transire debet; atque ubi hoc fit, viæ utriusque æquales erunt; ita ex arcus cuiusvis extremitatibus æqualiter motis punctis, priusquam quodvis in alteram extremitatem perveniat, occurret puncto alteri, et ibi dimidium arcus erit (Tom. I. pag. 12. V. et Tom. II. pag. 6).

7. Accipiatur iam ex 4. (Fig. 7.) punctum quodvis $\mathfrak{f}$ in primo annulo A (Fig. 8.) punctum $\mathfrak{c}$ cingente pro centro; et linea prior $l=\mathfrak{f}\mathfrak{c}$, cuius una extremitas in $\mathfrak{c}$ altera in $\mathfrak{f}$ sit, moveatur circa $\mathfrak{f}$ in S' donec redeat: manifesto pars viæ cuiusvis puncti ipsius l cadet ab annulo in unam ipsius S' plagam, altera in alteram; nam ut centrum $\mathfrak{f}$ claudatur ab annulo per punctum quodvis $\mathfrak{o}$ descripto, necesse est punctum eius aliquod $\mathfrak{p}$ extra segmentum ipsius S' illud, in quo $\mathfrak{c}$ est, cadere; atque hinc via

usque in $\mathfrak{o}$ per A transire debet, et quidem in duobus saltem punctis a $\mathfrak{f}$ ad extremitates arcuum utrinque æqualium; nam annulus dictus cum annulo A unum solum punctum commune habere nequit; nam tum ex hoc puncto usque ad $\mathfrak{f}$ aut linea simplex esset, aut non; et in neutro casu esset annulus dictus linea simplex rediens. Erunt igitur annuli huius transitus per annulum A ipsi $\mathfrak{f}$ proximi duo supra dicti.

Accipiantur porro quorumvis arcuum ab A in plagam non $\mathfrak{c}$ (id est illam in quam non cadit $\mathfrak{c}$), meditullia (per 6); atque tum fiat idem centro in meditullium arcus illius posito, qui ab annulo (centro $\mathfrak{f}$ per extremitatem lineæ $\mathfrak{fc}$ in S' descripto) e duobus punctis ipsius A ipsi $\mathfrak{f}$ proximis in plagam non $\mathfrak{c}$ ipsius S' cadit; atque idem continuetur in infinitum; nempe casus idem redit semper, nisi quod centrum in primo A ubivis eligere liceat, postea vero in quovis novissimo A arcus extimi meditullium pro centro accipiatur, et idem repetatur in infinitum.

Complexus omnium eiusmodi meditulliorum continuum, imo linea simplex est, ut statim patebit. Insistit autem linea hæc primo annulo utrinque æqualiter; atque e quovis puncto annuli eiusdem, lineæ eiusmodi per generationes æquales circumcirca et utrinque æqualiter determinatæ promanant. Unde etiam patet, quod si e quibusvis duobus punctis annuli primi promanantes eiusmodi lineæ secent se invicem, crura semet secantia, ob generationes utrinque æquales, æqualia erunt. Patet etiam partem quovis novo A generatam parti sequente A generatæ, item ob generationes æquales, æqualem esse.

Complexum punctorum dictum continuum esse vel ita patet. Accipiatur complexus α punctorum innumerabilium, quæ per quodvis aliquod A, centro in eo posito, generantur usque ad arcum aliquem k inclusive, et inde complexus β punctorum item innumerabilium usque ad arcum extimum generatorum: puncta ipsius β in arcus post k se invicem continuo excipientes cadunt, qui simul sine k cogitari nequeunt, uti complexus priorum ipsum α constituentium; itaque et β gaudet puncto in arcu k, quod quum solum sit, tam ipsi α quam ipsi β commune est.

Sed præterea quoque e cuiusvis A arcus superioris meditullio punctum per omnes arcus concentricos superiores, id est supra præcedens A cadentes, usque in centrum moveri potest; et quidem ita ut per cuiusvis arcuum illorum punctum quodvis datum transeat: intuitu patet, idem simplicissime per meditullia arcuum fieri posse.

Est etiam linea simplex: nam e nullius arcus meditullio tertius ramus dari potest; quia is per arcus præcedentes aut sequentes ire deberet, in quorum quovis nonnisi unum punctum ramis duobus commune datur.

8. Dicantur L lineæ eiusmodi, quæ ex omnibus punctis annuli primi utrinque æqualiter insistentes, et semper porro utrinque æqualiter, atque omnes circumcirca quoque per generationes æquales æqualiter determinatæ sunt.

Aut dantur duæ tales L, quæ punctum commune habeant, aut nullæ duæ dantur, quæ punctum commune habeant. Posterius fieri nequit: nam tum portio illa ipsius S', quæ supra quodvis A usque ad arcum superiorem novi A est, imo totum A, innumerabilibus vicibus repeteretur in ipso S'; adeoque S' non esset quantitas finita (Tom. I. pag. 35), de quo plura inferius.

Nempe tum (per pag. 26) sphæra S' circa $c * \mathfrak{C}$ mota, movetur tota L, omnibus punctis annulos se invicem excipientes describentibus. Quod annulus puncti cuiusvis in linea L ulterius generati ulterius situs sit, patet inde, quod si ab aliquo annulo sequentes aliquamdiu regrederentur, id aut statim post annulum centri alicuius A iuxta generationem dictam fieret, aut post meditullium arcus alicuius supra A generati; prius fieri nequit, nam tum punctum aliquod ipsius L ob generationes utrinque æquales intra, non extra præcedens A caderet; nec posterius fieri quit, tunc enim e centro prius dicto sphærica superficies exterior cum aliqua interiore aliquid commune haberet.

Atque per hoc adhuc simplicius patet superficiem sphæricam, si nullæ lineæ L secarent se invicem, quantitatem finitam non esse. Potest enim e centro cuiusvis A in S' describi talis annulus interior ipso A, qui (iuxta Fig. 9.) nec cum ibidem præcedente nec cum sequente quidquam commune habeat. Quod cum per generationes æquales semper porro locum habeat: annulus dictus innumerabilibus vicibus repetetur.

Si igitur superficies sphærica quantitas finita sit: necesse est duas lineas L se invicem secantes dari. At si duæ dentur, omnes se invicem in eodem puncto secabunt. Nam sit (Fig. 10.) $\mathfrak{ab}$ arcus is primi annuli, e cuius extremitatibus promanantes lineæ L concurrunt; linea L e meditullio $\mathfrak{q}$ arcus $\mathfrak{ab}$ erecta quoque per $\mathfrak{p}$ transibit: nam sit $\mathfrak{bq}=\mathfrak{br}$, adeoque $\mathfrak{ab}=\mathfrak{qr}$, et $\mathfrak{br}=\mathfrak{rt}$, adeoque $\mathfrak{bt}=\mathfrak{ba}$, (posito $\mathfrak{ab}$ esse dimidio primi annuli minus, quum si $\mathfrak{ab}$ dimidium annuli sit, res pariter facile pateat); lineæ L ex $\mathfrak{r}$ et $\mathfrak{q}$, ita ex $\mathfrak{b}$ et $\mathfrak{t}$ erectæ concurrent, eruntque singulæ æquales propter generationes æquales. Hinc autem linea L ex $\mathfrak{t}$ erecta necessario in $\mathfrak{p}$ cadit; atque ut lineæ L ex $\mathfrak{r}$ et $\mathfrak{q}$ erectæ occurrere possint, aut prior vel posterior transibit per $\mathfrak{bp}$, aut prior per $\mathfrak{pt}$, vel L ex $\mathfrak{q}$ erecta per $\mathfrak{ap}$ transibit: quodvis horum fiet, si punctum transitus $\mathfrak{p}$ sit; sed inter $\mathfrak{p}$ et $\mathfrak{t}$, aut inter $\mathfrak{p}$ et $\mathfrak{a}$ transitus fieri nequit; nam si ex. gr. L ex $\mathfrak{r}$ erecta inter $\mathfrak{p}$ et $\mathfrak{t}$ transiret, idem transitus punctum etiam ipsi $\mathfrak{bp}$ commune esset; si vero L ex $\mathfrak{r}$ per $\mathfrak{bp}$ inter $\mathfrak{b}$ et $\mathfrak{p}$ transiret, punctum idem et lineæ ex $\mathfrak{q}$ erectæ commune esset: et lineæ L ex $\mathfrak{r}$ et $\mathfrak{q}$ erectæ usque ad punctum concursus essent ipsa $\mathfrak{bp}$ minores. Necessario igitur in eodem $\mathfrak{p}$ concurrent.

Atque hinc colligitur, bisecando arcus in infinitum, atque circumcirca transferendo: ex omnibus annuli primi punctis omni dabili propioribus erectas lineas L omnes in eodem $\mathfrak{p}$ concurrere.

Unde si sphæra S moveatur circa $\mathfrak{c}*\mathfrak{C}$, puncto in annulo primo porro moto, simul cum toto linearum L e punctis bisectionum erectarum schemate: nullum tempus erit, quo punctum $\mathfrak{p}$ viam describat; nam ab initio motus quodvis temporis punctum cogitetur, iam antea punctum in annulo motum per innumera puncta transiit, pro quibus schema linearum L dictum in $\mathfrak{p}$ fuit.

Consequenter sphæra S circa $\mathfrak{c}*\mathfrak{C}$ ita moveri potest, ut $\mathfrak{p}$ quiescat. Atque hinc (per pag. 26), si S circa $\mathfrak{c}*\mathfrak{C}$ moveatur, $\mathfrak{p}$ quiescere debet.

Omnia dicta autem ad quemvis annulum superficiei cuiusvis applicari manifestum est, si puncto quovis eius pro centro accepto, cum linea quadam interna annuli fiant annuli concentrici tales, quales e quovis sphæræ illius superficiei puncto æqualiter dari dictum est.

9. Atque hinc superius (pag. 27) segmentis omnium s' in S cadentibus generaliter s'' dictis, cogitetur in omni s'' punctum illud, in quo lineæ L, ex annulo ipsi S' et illi s' communi, in illo s'' generatæ concurrunt: complexus omnium eiusmodi punctorum simul cum c et $\mathfrak{C}$ lineam simplicem esse ut supra (pag 29) patet. Sed manifesto etiam sphæra S circa $c * \mathfrak{C}$ mota, cuiusvis s'' punctum quodvis præter punctum dictum in ea (pag. 7) movebitur; atque hinc omnia s'' (pag. 26) movebuntur, et tota linea dicta quiescet mota sphæra S circa $c * \mathfrak{C}$.

10. At vero in S quoque ex annulo egressus extimo antea generatum $\mathfrak{p}$ quiescebat mota S circa $c * \mathfrak{C}$; atque si pro centro $\mathfrak{p}$ eadem fiant, quæ ab altera parte centro c facta sunt, prodibit linea $c\mathfrak{C}\mathfrak{p}$ quiescens mota sphæra circa $c * \mathfrak{C}$.

Imo quævis alia duo puncta lineæ dictæ accipiantur, motus dictus sphæræ S quiescentibus iis peragebatur: itaque (pag. 26) circa quævis duo puncta dicta motus idem est.

Sed nec ullum punctum sphæræ S extra lineam dictam cadens quiescit: nam illud aut intra segmenta extima ex c et $\mathfrak{p}$ generata, aut inter illa cadit; atque tale circumcirca æqualiter determinatum gaudet annulo (per pag. 7). Si vero in aliquo motu circa duo puncta annulo gaudeat, circa eadem duo puncta (per pag. 26) semper eundem annulum describet.

11. Patet porro inter quævis duo spatii puncta dari lineam eiusmodi: nempe accipiatur unum pro centro, fiatque sphæra cum puncto altero; atque applicentur de sphæris S et s dicta. Atque hinc etiam patet rectam e quavis portione spatii finita egredi e quovis puncto eius, quum possit generari sphæra ex eo puncto, totam portionem includens.

12. At quæritur, num e centris sphærarum quarumvis inæqualium generatæ, centris coincidentibus, congruere possint usque ad superficiem sphæræ minoris? Omnino; nam (Fig. 11.) feratur minor in alteram centro in centrum $\mathfrak{C}$ maioris posito; sitque linea $\mathfrak{K}\mathfrak{C}\mathfrak{K}'$ in sphæra maiori hac circa $\mathfrak{K} * \mathfrak{K}'$ mota quiescens; transeat hæc per superficiem minoris in $c * c'$. Mota sphæra maiore circa $\mathfrak{K} * \mathfrak{C}$, omne præter lineam $\mathfrak{K}\mathfrak{K}'$ movebitur, perageturque motus quiescentibus c, $\mathfrak{C}$; itaque tum et sphæra

interior circa $c*\mathfrak{C}$ movebitur; adeoque (per pag. 26) idem inter c et $\mathfrak{C}$ quiescet quod antea.

13. Hinc etiam linea talis continuari e quavis sphæra in aliam quamvis maiorem utrinque potest; neque intra ullius sphæræ superficiem detinetur.

14. Si porro cuiusvis lineæ eiusmodi unius extrema $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$ et alterius $\mathfrak{a}'$, $\mathfrak{b}'$ sint, atque $\mathfrak{a}$ in $\mathfrak{a}'$ et $\mathfrak{b}$ in $\mathfrak{b}'$ simul cadere queant; congruentibus extremis et lineæ ipsæ coincidunt.

Nam feratur ad $\mathfrak{C}$ linea $\mathfrak{ab}$ simul cum sphæra illa, in qua generata est, sive in centrum eius cadat $\mathfrak{a}$ aut $\mathfrak{b}$ sive non, atque ponatur $\mathfrak{a}$ in $\mathfrak{C}$; fiatque sphæra centro $\mathfrak{C}$ sphæram allatam includens, et eodem centro $\mathfrak{a}$ fiat sphæra puncti $\mathfrak{b}$. Manifesto linea eiusmodi ut dictum est, quæ dicatur λ, in sphæra reliquas duas includente e centro $\mathfrak{C}$ generata, per superficiem sphæræ puncti $\mathfrak{b}$ e centro eodem $\mathfrak{C}$ generatæ transit in aliquo puncto $\mathfrak{k}$; moveatur λ circa $\mathfrak{C}$ simul cum sphæra maiore, donec $\mathfrak{k}$ in $\mathfrak{b}$ cadat; atque tum moveatur sphæra eadem maior quiescentibus punctis $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{a}$; movebitur etiam sphæra allata inclusa, quiescentibus iisdem $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{a}$; adeoque inter $\mathfrak{b}$ et $\mathfrak{a}$ linea eadem quiescet, quæ motu solius sphæræ allatæ quiescentibus iisdem punctis quiesceret. Itaque linea allata $\mathfrak{ab}$ coincidit cum linea sphæræ maioris inter $\mathfrak{a}$ et $\mathfrak{b}$ quiescente. Pariter adferri linea $\mathfrak{a}'\,\mathfrak{b}'$ simul cum sphæra illa, in qua generata est, potest $\mathfrak{a}'$ in $\mathfrak{C}$ posito: atque manifesto et $\mathfrak{a}'\mathfrak{b}'$ eidem congruet, cui $\mathfrak{ab}$ congruebat.

15. Hinc etiam patet lineam eiusmodi redire non posse: nam tum puncto uno, unde duo puncta diversis viis profecta porro moverentur, et altero, ubi prima vice sibi mutuo occurrerent, communibus, uterque ramus inter eadem duo puncta coincideret.

16. Sed linearum priorum (in 14) continuationes quoque, nempe continuatio e centro sphæræ allatæ et continuatio e centro $\mathfrak{C}$, coincidunt. Nam si prioris punctum $\mathfrak{p}$ extra lineam ex $\mathfrak{C}$ prodeuntem utrinque in infinitum continuatam caderet, sphæra puncti $\mathfrak{p}$ e centro $\mathfrak{C}$ habeat punctum $\mathfrak{p}'$ cum linea posteriore commune: fiatque sphæra tam sphæram hanc quam allatam includens; mota hac quiescentibus $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, et $\mathfrak{p}'$ quiescet, $\mathfrak{p}$ autem movebitur; quod fieri non posset, si $\mathfrak{p}$ in continuationem primam caderet; tunc enim quiescentibus $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, et $\mathfrak{p}$ quiesceret.

17. Denique *linea dicta* (per pag. 8) *recta est.* Nam (Fig. 12., 13.) quævis duo puncta $\mathfrak{q}$ et $\mathfrak{r}$ fuerint illius (utrinque continuatæ in infinitum), omnia spatii puncta eorundem unica complectetur. Etenim quodvis punctum lineæ dictæ ipsius $\mathfrak{q} * \mathfrak{r}$ unicum est, nec ullum aliud spatii punctum eiusdem $\mathfrak{q} * \mathfrak{r}$ unicum est.

Namque sit quodvis punctum $\mathfrak{p}$ lineæ dictæ: nullum punctum $\mathfrak{t}$ a $\mathfrak{p}$ diversum tale datur, ut

$$\mathfrak{q} * \mathfrak{r} * \mathfrak{p} \doteqdot \mathfrak{q} * \mathfrak{r} * \mathfrak{t}.$$

Esset enim $\mathfrak{t}$ aut in linea ipsa aut extra eam: neutrum fieri potest. Nam si $\mathfrak{t}$ in lineam cadat, aut in aliquod ipsorum $\mathfrak{q}$ et $\mathfrak{r}$ caderet, aut inter ea, aut extra ea: atque etiam $\mathfrak{p}$ pariter cadere potest.

Si $\mathfrak{p}$ in $\mathfrak{r}$ (aut $\mathfrak{q}$) cadat, patet nullum $\mathfrak{t}$ a $\mathfrak{p}$ (aut $\mathfrak{q}$) diversum dari: itaque tantum casus alii considerantur. Sit prius $\mathfrak{p}$ inter $\mathfrak{q}$ et $\mathfrak{r}$; tum $\mathfrak{t}$ aut etiam inter $\mathfrak{q}$ et $\mathfrak{r}$ in $\mathfrak{t}'$ aut $\mathfrak{t}''$, aut extus cadet, ex. gr. in $\mathfrak{t}'''$. Si in $\mathfrak{t}'$ caderet, tum ut

$$\mathfrak{q} * \mathfrak{r} * \mathfrak{p} \doteqdot \mathfrak{q} * \mathfrak{r} * \mathfrak{t}'$$

sit,

$$\mathfrak{q}\mathfrak{t}' \doteq \mathfrak{q}\mathfrak{p}$$

esset (pars toti); pariter si $\mathfrak{t}$ in $\mathfrak{t}''$ caderet, tum

$$\mathfrak{q}\mathfrak{t}'' \doteq \mathfrak{q}\mathfrak{p}$$

esset. Si vero $\mathfrak{t}$ in $\mathfrak{t}'''$ caderet, tum

$$\mathfrak{q}\mathfrak{t}''' \doteq \mathfrak{q}\mathfrak{p}$$

esset (pariter pars toti). Nempe per dicta e quovis puncto linea talis æqualiter incipiens æqualiter quoque continuatur.

Si vero $\mathfrak{p}$ extra $\mathfrak{q}\mathfrak{r}$, ex. gr. in $\mathfrak{p}'$, cadat (Fig. 13.): tum $\mathfrak{t}$ aut in $\mathfrak{t}'$ aut in $\mathfrak{t}''$ aut in $\mathfrak{t}'''$ aut in $\mathfrak{t}''''$ cadere deberet, quum manifesto in ipsorum $\mathfrak{p}'$, $\mathfrak{q}$, $\mathfrak{r}$ nullum cadere queat. In $\mathfrak{t}'$ cadere nequit, quia tum

$$\mathfrak{q}\mathfrak{p}' \doteq \mathfrak{q}\mathfrak{t}'$$

esset; neque in $\mathfrak{t}''$, quia tum

esset; nec in $\mathfrak{f}'''$ cadit, quia
$$\mathfrak{q}\mathfrak{p}' \doteq \mathfrak{q}\mathfrak{f}''$$
$$\mathfrak{r}\mathfrak{f}''' \doteq \mathfrak{r}\mathfrak{p}'$$
(pars æqualis toti) esset; neque in $\mathfrak{f}''''$ cadit, quia tum esset
$$\mathfrak{r}\mathfrak{f}'''' \doteq \mathfrak{r}\mathfrak{p}' = \mathfrak{r}\mathfrak{q} + \mathfrak{q}\mathfrak{p}',$$
et
$$\mathfrak{q}\mathfrak{p}' \doteq \mathfrak{q}\mathfrak{f}'''' = \mathfrak{r}\mathfrak{q} + \mathfrak{r}\mathfrak{f}'''',$$
et hunc valorem substituendo ipsi $\mathfrak{q}\mathfrak{p}'$ in æquatione priore, esset
$$\mathfrak{r}\mathfrak{f}'''' = \mathfrak{r}\mathfrak{q} + \mathfrak{r}\mathfrak{q} + \mathfrak{r}\mathfrak{f}''''.$$

Sed neque extra lineam dictam datur tale $\mathfrak{f}$, ut
$$\mathfrak{q} * \mathfrak{r} * \mathfrak{p} \doteq \mathfrak{q} * \mathfrak{r} * \mathfrak{f}.$$
Nam fiat e centro sphæræ, in qua linea dicta generari cœpit, sphæra punctum $\mathfrak{f}$ includens; quiescentibus $\mathfrak{r}$, $\mathfrak{q}$, $\mathfrak{p}$ mota sphæra hac, movebitur $\mathfrak{f}$ (pag. 32); si vero $\mathfrak{q}$ in $\mathfrak{q}$ et $\mathfrak{r}$ in $\mathfrak{r}$ cadentibus $\mathfrak{p}$ in $\mathfrak{f}$ cadet, $\mathfrak{p}$ cum $\mathfrak{f}$ circa $\mathfrak{r} * \mathfrak{q}$ moveri poterit, quod antea quievit (contra pag. 26).

Sed nec ullum spatii punctum $\mathfrak{f}$ extra lineam dictam cadens ipsius $\mathfrak{q} * \mathfrak{r}$ unicum est; quum sphæra plane dicta circa $\mathfrak{q} * \mathfrak{r}$ mota, et illud moveatur, adeoque in alia æque posita puncta veniat.

Est igitur linea dicta plane complexus omnis puncti, quod quorumvis duorum punctorum eius unicum est.

Si non recta e rectis aut aliis lineis constet, facile patet non quorumvis duorum punctorum adesse quodvis punctum unicum.

18. *Recta* etiam *quantitas est.* Nam quævis partes continuæ eius accipiantur; et ponatur una extremitas unius in unam alterius; fiantque sphæræ centro in eam posito cum extremitatibus alteris: prodibunt duæ partes in sphæræ interioris, nisi utraque eadem sit, superficie terminatæ, quarum extrema, adeoque et ipsæ, congruere possunt.

19. *Recta potest in se porro moveri.* Nam e quovis puncto $\mathfrak{p}$, per dicta, æqualiter continuatur in infinitum.

20. *Planum* quoque hinc facile construitur modo sequente. Patet generatione circumcirca æquali, per quodvis punctum circa duo puncta

usque ad reditum porro motum, describi lineam simplicem in se redeuntem talem, quæ et ipsa, ut recta et superficies sphærica erat, quantitas est, atque etiam e quovis puncto sive antrorsum sive retrorsum æqualiter determinatur.

Accipiatur quævis talium annulorum (Fig. 14.); sitque (per pag. 28) in punctis $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$ bifariam divisus, et dimidietas $\mathfrak{adb}$ sit in $\mathfrak{d}$ bifariam divisa; atque sit rectæ $\mathfrak{ab}$ meditullium in $\mathfrak{c}$: erit, ob generationes utrinque æquales, forma e rectis $\mathfrak{cd}$ et $\mathfrak{ca}$ composita formæ e rectis $\mathfrak{cd}$ et $\mathfrak{cb}$ compositæ æqualis, adeoque recta $\mathfrak{dc}$ est perpendicularis ad $\mathfrak{ab}$ in $\mathfrak{c}$ (pag. 15); et quodvis rectæ $\mathfrak{cd}$ punctum extra rectam $\mathfrak{ab}$ utrinque infinitam cadit. Fiat sphæra e centro $\mathfrak{c}$ totum schema includens, et moveatur circa $\mathfrak{a} * \mathfrak{b}$ sive rectam $\mathfrak{ab}$ utrinque infinitam: quodvis punctum rectæ $\mathfrak{cd}$ describet annulum, qui propter generationes utrinque æquales utraque facie sibi congruere potest, (quod de antea dictis nondum constat). Cogitetur iam recta $\mathfrak{cd}$ in quovis loco suæ viæ continuata per $\mathfrak{d}$ in infinitum; erit complexus omnium earum superficies circumcirca infinita et circumcirca et utrinque æqualiter generata, ut circa $\mathfrak{c}$ in se moveri, facieque utraque sibi congruere queat, atque spatium in duas plagas æquales dividat.

Est autem superficies ista *planum*. Nam quævis duo puncta $\mathfrak{A}$ et $\mathfrak{B}$ sint eius, quodvis punctum $\mathfrak{C}$ ipsius $\mathfrak{A} * \mathfrak{B}$ unicum in rectam $\mathfrak{AB}$ utrinque in infinitum continuatam cadit. Recta $\mathfrak{AB}$ vero necessario in superficiem dictam cadit: cogitetur enim in generatione huius, recta $\mathfrak{cd}$ versus $\mathfrak{d}$ infinita, ex $\mathfrak{A}$ versus $\mathfrak{B}$ usque in $\mathfrak{B}$ per annulum plane dictum mota; nisi per $\mathfrak{AB}$ transeat, aut cadet ab una aut ab altera parte; neutrum vero fieri potest; nam si quod fieret, et alterum fieri deberet. Et idem de continuata $\mathfrak{AB}$ patet: accipiatur nempe sphæra e centro $\mathfrak{c}$ radii maioris quam recta quævis, quæ a $\mathfrak{c}$ ad $\mathfrak{AB}$ est; exibit ex hac sphæra utrinque tam recta $\mathfrak{AB}$ quam $\mathfrak{cd}$ versus $\mathfrak{d}$ infinita; unde reliqua patent. Posset etiam brevius dici, quod si ex uno puncto superficiei ad aliud ducta recta in unam plagam caderet, in altera quoque esset, et inter duo puncta duæ rectæ fierent.

22. Unde etiam patet rectam $\mathfrak{AB}$ etiam utrinque infinitam in planum cadere, si puncta $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$ in eo sint.

23. Sed quæritur, num *per quaevis tria puncta* $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$, *etsi non in recta sint, planum detur?* Omnino: nam $\mathfrak{A} * \mathfrak{B}$ (ex Fig. 15.) in planum dictum poni potest, $\mathfrak{A}$ in $\mathfrak{c}$ (Fig. 14.) posito, acceptaque ex $\mathfrak{c}$ versus $\mathfrak{b}$ recta rectæ $\mathfrak{AB}$ æquali. Si iam $\mathfrak{C}$ non in eo plano esset: fiat e centro $\mathfrak{c}$ cum puncto $\mathfrak{C}$ sphæra, sitque ex. gr. recta

$$\mathfrak{c}\mathfrak{C} = \mathfrak{c}\mathfrak{b} = \mathfrak{c}\mathfrak{a};$$

manifesto sphæra radii $\mathfrak{c}\mathfrak{C}$ e centro $\mathfrak{c}$, per planum in unum dimidium superius alterum inferius dividetur; atque mota sphæra circa $\mathfrak{ab}$, quodvis superficiei sphæricæ punctum præter $\mathfrak{a}$ et $\mathfrak{b}$, dimidium annulum superius et alterum inferius describet; atque ubi punctum $\mathfrak{C}$ transit, habetur petitum.

24. Imo etiam per eadem tria puncta $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$ non in recta sita nullum aliud planum poni potest. Nam in præcedentibus $\mathfrak{A}$ in $\mathfrak{c}$ et $\mathfrak{B}$ in $\mathfrak{b}$ positis atque $\mathfrak{C}$ in planum ibidem generatum cadente, ponatur quodvis aliud planum (imo eiusdem plani pars alia) per $\mathfrak{A} * \mathfrak{B} * \mathfrak{C}$; nullum punctum $\mathfrak{p}$ (Fig. 15.) unius extra aliud cadere poterit. Nam rectæ $\mathfrak{AB}$, $\mathfrak{BC}$ et $\mathfrak{AC}$, extremitatibus earum in utrumque cadentibus, et ipsæ in utrumque cadent totæ. Sit iam $\mathfrak{p}$ in uno eorum, cadet aut supra lineam compositam ex $\mathfrak{AC}$, $\mathfrak{CB}$ et continuationibus rectæ $\mathfrak{AB}$ ex $\mathfrak{A}$ ad lævam et ex $\mathfrak{B}$ ad dextram, aut infra eam. Si supra eam cadat, tum recta $\mathfrak{pq}$ transit per lineam compositam dictam; si per continuationem alterutram rectæ $\mathfrak{AB}$ iret, tum et transitus et $\mathfrak{q}$, adeoque et $\mathfrak{p}$, in $\mathfrak{AB}$ infinitam caderet; si per $\mathfrak{AC}$ vel $\mathfrak{CB}$ eat, fiat id in $\mathfrak{k}$; tum recta $\mathfrak{kq}$ utrique plano communis, et continuata punctum $\mathfrak{p}$ complectens in utramque incidet. Si vero infra cadat in $\mathfrak{p}'$ vel $\mathfrak{p}''$, recta e quovis horum usque ad $\mathfrak{p}$, iam utrique commune, transit per lineam compositam dictam ex una plaga in alteram; et item duo puncta, adeoque recta per ea, utrique plano communia erunt.

25. Manifesto etiam (in Fig. 14.) $\mathfrak{dc}$ ex $\mathfrak{c}$ continuata in planum (pag. 36) primo generatum cadit; atque planum, ob generationes utrinque æquales, in duas plagas æquales dividit: atque quum quævis plani P recta in $\mathfrak{cd}$ simul cum plano P ita poni possit, ut P cum plano primo

generato coincidat: planum quodvis per quamvis rectam in ea sitam in duas plagas, inter se omnes prioribus æquales, dividi patet. Imo evidens est, quovis plani puncto in idem dictum $\mathfrak{c}$ posito, et congruentibus planis, circulos quosvis radiorum æqualium æquales esse; atque etiam punctum in plano motum, ipsum planum in eodem plano secum ferre posse.

26. Ita formas duarum rectarum angulares congruere, si arcus e verticibus radiis æqualibus inter crura descripti æquales sint, circulo facto patet; necnon omnes rectorum angulorum formas æquales esse; ita ex uno puncto rectæ in plano unam solum perpendicularem dari; et summam angulorum in una plaga ad rectam circa punctum $\mathfrak{c}$ positorum esse $= 2R$; atque conversim duas rectas, $\mathfrak{c}$ commune habentes, in una recta esse, si summa angulorum in una plaga sit $= 2R$, per R rectúm intelligendo.

27. Patet etiam planum quantitatem esse: nam quæcunque duæ portiones eius accipiantur, ponatur utriusque punctum aliquod internum in dictum $\mathfrak{c}$, ita ut portiones ipsæ in planum primo generatum incidant: circuli, recta illa qua e $\mathfrak{c}$ usque ad perimetrum nulla minor est pro radio accepta, congruent; et (Tom. I. pag. 25) locum habet.

§. 15.

1. *Si recta cum recta aut plano aliquid commune habeat, id nonnisi punctum est*: nam si duo puncta communia sint, recta in alteram continuatam in infinitum, et pariter in planum incidit.

2. *Planum vero cum plano*, si utraque infinita concipiantur, *aut nihil commune, aut rectam infinitam communem habent: et tam recta quam planum, sive rectam sive planum secantia, transeunt in plagam alteram.* Nam (Fig. 16.) secet recta $\mathfrak{ab}$ rectam $\mathfrak{bq}$; nisi transeat in plani per $\mathfrak{abq}$ determinati plagam alteram, necessario aliquorsum in $\mathfrak{bf}$ cadet; cum $\mathfrak{qp}$ enim nullum punctum præter $\mathfrak{b}$ commune habet, quia tum tota incideret. Itaque $\mathfrak{abf}$ recta esset; atque tam β quam $\alpha+\beta+\gamma$ dimidia peripheria radii $\mathfrak{bf}$ esset.

Hinc ab per planum etiam transit, si b cum eo (nec quidquam aliud) commune habeat: si enim in eadem plaga maneat, manifesto pro quovis puncto q plani in b secti casus præcedens erit.

Hinc etiam si duo plana P et p punctum b commune habeant: fiat e quovis puncto a ipsius p tali, quod ipsi P commune non est, recta ab; transibit ista per P per præcedentia; fiat tum semicirculus in plano p radio ba centro b; transibit is per P; atque recta per punctum hoc et punctum b tam in P quam in p incidet; nec ullum punctum præterea commune utrique est, nam tum utraque coinciderent. Patet simul planum p quoque transire in alteram plagam.

3. *Ad rectam e quovis eius puncto perpendicularem dari* patet (ex Fig. 14. pag. 36); uti etiam *e quovis plani puncto dari rectam ad planum perpendicularem*; quum quodvis planum, puncto quovis in c posito, primo ibidem generato congruere queat.

Sed quamvis e quovis puncto tam ad rectam quam ad planum dari perpendicularem, inferius demonstretur: duas ex eodem puncto perpendiculares ad eandem rectam, aut idem planum, diversas non dari facile patet; nam tum duæ illæ rectæ cum recta duo illa puncta in quæ perpendiculares caderent connectente, tale triangulum efficerent, cuius ad basim uterque angulus rectus esset. Hoc autem fieri nequit; quia si duæ rectæ in eodem plano ad eandem rectam in eadem plaga concurrerent, idem ob generationes utrinque æquales et in altera fieret; adeoque recta utraque propter duo puncta communia coincideret.

4. Interim *si recta ad* dc *et* fc *(Fig. 17.) duas plani rectas perpendicularis fuerit, erit ad omnes adeoque ad planum per* fcd *determinatum ipsum P perpendicularis.* Nam sit $cp \perp cf$, et $cq \perp cd$; moveatur fcp circa fc porro donec redeat, ita dcq circa dc; via ipsius cp erit (per pag. 36) planum K complectens omnes perpendiculares, quæ ex c ad fc fieri possunt; ita via ipsius cq erit planum Q complectens omnes perpendiculares ex c ad dc. Datur autem ex c perpendicularis ad planum P; atque ea tam ad fc quam ad dc est perpendicularis. Sed eiusmodi recta, quæ ad fc et dc simul perpendicularis sit, nonnisi una datur, nempe sectio planorum K et Q; adesse enim perpendicularis ex c ad fc in K,

et perpendicularis ex c ad $\mathfrak{dc}$ in Q debet; adeoque illa quæ tam ad $\mathfrak{fc}$ quam ad $\mathfrak{dc}$ perpendicularis est, tam in K quam in Q adesse, id est utrique communis esse debet. Consequenter recta ad $\mathfrak{fc}$ et $\mathfrak{dc}$ simul perpendicularis, est ipsa ad P perpendicularis.

5. *Est etiam planum quodvis p, in quod perpendicularis ad P cadit, ad P perpendiculare.* Nempe angulus duorum planorum generatur modo sequente: sint (Fig. 18.) ad rectam $\mathfrak{ab}$ perpendiculares æquales $\mathfrak{dc}$, $\mathfrak{fe}$ in eodem plano P, atque $\mathfrak{ac} = \mathfrak{be}$; et moveatur plaga plani superior circa $\mathfrak{a} * \mathfrak{b}$ porro donec redeat; describent puncta $\mathfrak{d}$, $\mathfrak{f}$ simultaneos arcus æquales circulorum radii æqualis, propter generationes omnino æquales. Ita si $\mathfrak{gh} \perp \mathfrak{gb}$, atque accipiatur $\mathfrak{pg} = \mathfrak{eq}$, erunt moto schemate circa $\mathfrak{p} * \mathfrak{q}$ viæ punctorum $\mathfrak{h}$ et $\mathfrak{f}$ simultaneæ æquales, ob generationes æquales: sed $\mathfrak{f}$ eodem modo movetur, sive $\mathfrak{a} * \mathfrak{b}$ sive $\mathfrak{p} * \mathfrak{q}$ quiescant, quum omnia simul quiescere debeant. Consequenter omnium perpendicularium æqualium extremitates arcus simultaneos æquales describent. Est autem (pag. 15) quantitas anguli planorum via eiusmodi; quæ si quadrans sit, erit (pag. 17) planum ad P perpendiculare. Patet hinc quantitatem anguli planorum esse quantitati anguli perpendicularium e quovis puncto sectionis eorum æqualem.

6. Oritur autem *anguli cuiusvis* tam duarum rectarum, quam duorum planorum, per transitum cuiusvis in alteram plagam *suus verticalis*: quos pro lineis rectis æquales esse vel ita patet. Sint anguli hi verticales u et v (Fig. 19.): si hi, moto β circa c donec extremitas arcum δ describat, non sint æquales, erit unus ex. gr. $u >$ altero v, nempe $\gamma > \delta$ pro radiis α et β æqualibus. Fiat $z = \delta$; erit per generationes æquales, si α moveatur (in eodem plano intelligendo) circa c, donec arcum $z = \delta$ describat; erit z quoque $<$ arcu quem extremitas ipsius β interea descripsit. Est vero manifesto arcus hic $< \delta$, propter transitum rectæ per rectas β, ε in plagam alteram. Consequenter esset z, quod $= \delta$ est, minor arcu ipso δ minore. Pariter patet, si $v > u$ esset; et pariter de altero verticalium pari.

Atque rectis productis, quorum angulus respectu quantitatis angulo planorum æqualis est: manifesto etiam anguli planorum verticales æquales sunt.

7. Plani per centrum sphæræ positi sectionem cum superficie sphærica circulum radii radio sphæræ æqualis, *circulum maximum* dictum, esse (ex pag. 36) patet; quævis duo plana autem per centrum c posita se invicem in recta e centro eunte secare, cuius punctum p in superficiem sphæræ cadens circulis maximis e centro in utroque plano descriptis commune est; et patet rectam eandem, utriusque plani sectionem, continuatam alterum quoque eorundem circulorum punctum commune præbere.

8. Angulus vero circulorum maximorum sphæræ quantitas respectiva fit per arcum, quo quantitas anguli planorum, in quæ circuli illi cadunt, exprimitur. Si igitur (Fig. 20.) a puncto p supra tabulam sito in duobus circulis maximis quadrantes accipiantur, pa in uno et pb in altero: circuli maximi arcus ab exprimet angulum eorum; nam pc sectio plani pca cum plano pcb est, et propter quadrantes pa, pb anguli pca, pcb recti sunt.

9. Hinc etiam *arcus circuli maximi ad arcum* ab *perpendiculares in extremitate quadrantum concurrent, in* ita dicto *polo circuli* cuius ab arcus est. Nam pc est ad ac et bc simul perpendicularis; adeoque ad totum planum abc perpendicularis est; itaque (pag. 40) et plana acp, bcp sunt ad planum abc perpendicularia, adeoque angulus quadrantis utriusque cum arcu ab rectus est. Consequenter arcus ex a et b ad ab perpendiculares in p concurrunt. Patet autem schemate circa pc moto arcum quemvis per a describi posse, et perpendicularem circulum e quovis arcus ab puncto unum solum generari.

10. *Si* vero *plana P et Q se invicem ad angulum rectum secent in recta* ab: *e quovis puncto* p *ipsius P ad* ab *demissa perpendicularis est perpendicularis ad Q, atque e quovis puncto ipsius* ab *erecta ad Q perpendicularis in P cadet.* Nam sit pb $\perp$ ab; ducatur in plano Q ad ab perpendicularis bf; erit angulus pbf rectus, quia $P \perp Q$; adeoque pb ad duas plani Q rectas nempe ab et bf perpendicularis, consequenter etiam ad Q perpendicularis est.

Quæcunque perpendicularis autem fuerit ex a ad planum Q, illa in planum P cadit; nam si extus caderet, ex eodem puncto a duæ essent, quia per præcedentia perpendicularis ex $\mathfrak{a}$ ad $\mathfrak{ab}$ in P cadens est ad Q perpendicularis.

11. Denique *si duo plana P et p secent se invicem, et utrumque perpendiculare sit ad planum Q, sectio priorum ad Q est perpendicularis.* Nam si $P \perp Q$ et simul $p \perp Q$, sit A sectio planorum P et Q, et a sectio planorum p et Q; secabunt A et a in Q cadentes se invicem; quia nisi secarent, nec plana ex A et a ad Q perpendicularia secare se invicem facile patet. Sit sectio rectarum A et a in $\mathfrak{a}$, perpendicularis ex $\mathfrak{a}$ ad Q cadit per præcedentia tam in P quam in p, adeoque in sectionem solam planorum P et p, cui $\mathfrak{a}$ commune est.

12. Quoad angulum quem recta $\mathfrak{ac}$ facit cum plano P, in quo centro $\mathfrak{c}$ sit descriptus circulus radio $\mathfrak{bc}$, supposito (sed inferius demonstrando) hypotenusam esse catheto maiorem, et rectis crescentibus e quovis puncto eodem extra peripheriam ad eam ductis, angulum ad centrum crescere: facile patet, nisi $\mathfrak{ac} \perp P$ sit, esse angulum $\mathfrak{acb}$ minimum (pag. 16). Nempe sit $\mathfrak{b}$ punctum, in quod perpendicularis ex $\mathfrak{a}$ ad P cadit; erit cathetus $\mathfrak{bc} <$ hypotenusa $\mathfrak{ac}$; tum radio $\mathfrak{bc}$ descripto in P circulo, erit quivis angulus $\mathfrak{dca} > \mathfrak{bca}$; nam concipiatur $\mathfrak{a}$ omnino supra planum $\mathfrak{dbc}$; erit in triangulo rectilineo $\mathfrak{abd}$ angulus ad $\mathfrak{b}$ rectus, quia $\mathfrak{ab} \perp P$; atque hinc hypotenusa $\mathfrak{ad} > \mathfrak{ab}$. Concipiantur iam duo triangula nempe $\mathfrak{abc}$ et $\mathfrak{adc}$, et ponatur $\mathfrak{c}$ in $\mathfrak{c}$ et $\mathfrak{a}$ in $\mathfrak{a}$, atque vertatur triangulum utrumque (Fig. 21.) in eandem a recta $\mathfrak{ca}$ plagam in P; patetque per supposita, esse angulum $\mathfrak{acb} < \mathfrak{acd}$.

§. 16.

Sed dicendum etiam (pag. 9) de planis et rectis se invicem, etiamsi in infinitum producta sint, non secantibus est. Si (Fig. 22.) rectæ $\mathfrak{ac}$ et $\mathfrak{bd}$ ad rectam $\mathfrak{ab}$, sive in eodem plano sive non, perpendiculares fuerint, nullum punctum commune habent (pag. 39); pariter si $\mathfrak{cabd}$ circa $\mathfrak{ab}$ usque ad reditum moveatur, plana per rectas $\mathfrak{ac}$ et $\mathfrak{bd}$, etsi infinitæ concipiantur, descripta nullum punctum commune habent; nam ibi aliqua recta $\mathfrak{ac}$ et aliqua $\mathfrak{bd}$ productæ secarent se invicem.

Patet etiam, quod si duo hæc plana per tertium secentur, rectæ illæ, in quibus hoc priora secat, in idem planum tertium cadant, nec se invicem secent; quia tum duo priora punctum illud, in quo hæ se invicem secarent, commune haberent.

I. At quæritur, num per punctum $\mathfrak{a}$ solum planum prius detur, quod planum inferius nempe viam rectæ $\mathfrak{bd}$ antea dictam haud secet? Atque hæc *quæstio eo redit, num per* $\mathfrak{a}$ *sola recta* $\overline{\mathfrak{ac}}$ *detur in eodem plano* rectam $\overline{\mathfrak{bd}}$ non secans?

Aut solam rectam solumque planum in aliquo casu, aut innumera in omni casu dari patebit.

II. Moveatur $\overline{\mathfrak{ab}}$ (efficiens cum recta $\mathfrak{bd}$ angulum v, qui sit ex. gr. $=R$, denotante R rectum) circa $\mathfrak{a}$ (Fig. 22.) per quadrantem usque in $\mathfrak{ac}$; aliquamdiu secabit $\overline{\mathfrak{ab}}$ tam quadrantem quam rectam $\overline{\mathfrak{bd}}$ semper porro, in $\mathfrak{ac}$ perveniendo autem non secat; dari igitur punctum aliquod ultimum $\mathfrak{p}$ quadrantis debet (per Tom. I. pag. 20), per quod recta ex $\mathfrak{a}$ ducta *talis est, ut quævis alia interior secet rectam* $\overline{\mathfrak{bd}}$; *illa autem ipsam non* secat, quia id in puncto aliquo rectæ $\overline{\mathfrak{bd}}$ esset, et recta $\overline{\mathfrak{bd}}$ e recta secante in plagam superiorem transiens, innumera puncta haberet, in quibus a recta circa $\mathfrak{a}$ ulterius mota secari posset; adeoque recta $\overline{\mathfrak{ap}}$ non esset ultima earum, intra quas quævis secat rectam $\overline{\mathfrak{bd}}$. Itaque $\overline{\mathfrak{ap}}$ est primo non secans. Sed quæritur quantitas anguli u, nempe arcus $\mathfrak{bp}$?

Axiomatis Euclidei undecimi sensus est, quod si ad *quantaevis rectae* $\mathfrak{ab}$ *extrema,* in eandem plagam, rectæ $\overline{\mathfrak{ac}}$ et $\overline{\mathfrak{bd}}$ ponantur, *quantavis fuerit summa angulorum internorum* u et v duobus rectis minor, et utvis *partita*: rectæ $\overline{\mathfrak{ac}}$ et $\overline{\mathfrak{bd}}$ se mutuo secant.

Tria igitur hoc continet, quorum quodvis solum ad reliqua duo demonstranda ex asse sufficeret; nempe

1. si pro uno solo $\mathfrak{ab}$ non sit $u<R$, pro quantovis $\mathfrak{ab}$ summa duorum internorum u et v pro quibusvis rectis se invicem primo non secantibus erit $=2R$.

2. Si constaret summam internorum u et v dictorum omni dabili minorem fieri non posse, etsi recta, ad cuius extrema in eandem plagam positi sunt, quovis dabili maior fiat, tum quoque certum esset in omni

casu esse $u+v=2R$. Si nempe pro angulo utvis parvo u (Fig. 23.) posset $\mathfrak{ap}$ ita removeri, ut recta ex $\mathfrak{a}$ ad angulum u posita primo non secans ipsius $\mathfrak{bd}$ sit, ultra $\mathfrak{bd}$ quoque ad distantiam $\mathfrak{a'b}$, $\mathfrak{ab}$ æqualem, angulo u posito, erit rectarum ex $\mathfrak{a}$ et $\mathfrak{a}'$ se invicem (ut facile patet) primo non secantium angulus uterque $=u$, et summa internorum $=2u$, quod $\backsim 0$. Eritque (ut patebit) aut semper quodvis $u=R$, aut $u \backsim 0$, si $\mathfrak{ab} \backsim \infty$.

3. Si constaret, quod si pro certis u et v e finibus certæ rectæ secent rectæ se invicem, etiam ad angulos $u+z$ et $v-z$ ad fines rectæ eiusdem positæ secent se invicem (nempe pro eadem internorum summa utvis partita): tum quoque facillime constarent omnia.

Vix concipi posset tantum Geometram tale axioma ponere potuisse: at in manuscriptis antiquis inter postulata positum repertum est. Nimirum tota Geometria Euclidis quasi una propositio considerari potest, si dicatur, *Posito A poni G*, (per A axioma XI, per G geometriam intelligendo). At plane hoc, quod poni debeat, atque et contrarium æque poni possit; nempe quum omnia reliqua axiomata, tam cum eo si (Fig. 22.) u rectus sit, quam cum eo si eo minor sit (imo quantusvis sit ab R inclusive usque ad 0 exclusive), æque subsistant: duo systemata oriuntur, prouti $u=$ vel $<R$ ponitur, utraque vera, unum sub conditione quod si $u=R$ sit, alterum posito $u<R$: quamvis contraria respectu eorum prodeant, quæ a quantitate dicta ipsius u dependent. Imo prouti quantitas ipsius $u<R$ pro certa recta $\mathfrak{ab}$ supponitur, eo respectu innumera systemata oriuntur; quæ tamen certo respectu consentiunt, et omnia sub systemate generali, quod suppositioni $u<R$ innititur, continentur; ex. gr. (Fig. 23.) summa internorum pro rectis se invicem primo non secantibus in omnibus $\backsim 0$, si distantia $\backsim \infty$; ita summa angulorum trianguli rectilinei $\backsim 0$, dum latus quodvis $\backsim \infty$ &c.

Si igitur utrumque systema elaboratum sit, etsi per reliqua axiomata indecisum maneat, quodnam reipsa locum habeat: dabitur Geometria eo sensu, quod non solum quodvis dictorum systematum suppositive, sed etiam inconditionate verum sit, duorum aliquod reipsa esse; ea tamen cum restrictione, quod etsi constaret systema pro $u<R$ reipsa locum

habere, eorum quantitas, quæ plane a quantitate ipsius u recto minoris determinata dependent, eatenus indecisa maneret.

Aliud est, si res non a priori, sed quoad praxim consideretur; et (Fig. 22.) pro data $\mathfrak{ab}$, rectæ $\mathfrak{ac}$, donec adhuc secet rectam $\mathfrak{bd}$, angulus a posteriori mensuretur; nempe tum saltem a posteriori constabit u a recto, pro tantis lineis quas nobis tentare licet, haud multum differre. Sed quidsi $\mathfrak{ab}$ usque ad Sirium protenderetur, aut ulterius? Utcunque sit; tempus ab æterno connata spatii soror, ei auxilio venit; et quum motus corporum cœlestium calculis $u=R$ posito innixis conveniant, pro omni mensurationum nostrarum sphæra in praxi eidem suppositioni tuto conquiescere monet.

III. Omnia systemata nobis, si præter axiomata reliqua nullum ponatur, subiective possibilia, id est e quibus unum tantum est, sed quodnam absolute verum sit, decidere haud valemus, generaliter comprehendens, *Appendicis Auctor* rem acumine singulari aggressus Geometriam pro omni casu absolute veram posuit; quamvis e magna mole tantum summe necessaria in Appendice huius tomi exhibuerit, multis, ut tetraëdri resolutione generali pluribusque aliis disquisitionibus elegantibus, brevitatis studio omissis.

Pro data quavis recta $\mathfrak{ab}$ angulum u (Fig. 22.) geometrice construere docetur in Appendice dicta: de quantitate ipsius u tamen, quamvis in concreto quasi ante oculos stet, a priori decidi nihil potest, nisi quod non 0 et non $>R$ sit.

Ibidem porro in spatii scientia distinguuntur ea, quæ a quantitate dicta ipsius u non dependent; id est æque vera sunt, sive $u=R$, sive quævis alia quantitas eius inter 0 et R ponatur: atque Trigonometria sphærica, et quædam alia, ut talia, demonstrantur.

Illa vero quæ absolute a quantitate dicta ipsius u dependent, per eiusmodi functiones determinatas ipsius u exprimuntur, quæ pro quovis valore ipsius u, id est quicunque valor ipsius u reipsa fuerit, eo in expressione substituto ipsi u, quantitatem quæsitam exhibent. Si ex. gr. quantitas certa $x=f(u)$ in spatio absolute a quantitate ipsius u dependeat, et sit $f(u)$ talis expressio, quæ nonnisi ipsum u et quantitates datas complectitur: concipiatur abscissa a o usque ad R crescens, omnes valores cogitabiles ipsius u (a o exclusive usque ad rectum inclusive) exhibens; et erigatur a fine cuiusvis abscissæ, ordinata $f(u)$ pro illo valore ipsius u, atque pro $u = R$ fiat ordinata valori illi æqualis, quem expressio pro $u = R$ capit.

Quum autem omnes istæ expressiones quantitatum, in toto spatio a quantitate ipsius u dependentium, cum reliquis axiomatibus æque subsistant, quicunque innumerabilium valorum dictorum substituantur ipsi u: ex iisdem axiomatibus quantitas ipsius u determinari nequit.

IV. Nihilominus tamen quæstio suboritur: quidsi novum axioma detur, per quod determinetur u? tentamina idcirco quæ olim feceram, breviter exponenda veniunt, ne saltem alius quis operam eandem perdat.

Distinxeram ea, e quibus Axioma undecimum Euclidis demonstrari, adeoque theoria parallelarum Euclidea stabiliri posset, in axiomata *situs*, in *quantitativa*, et *intervalli*, atque *similitudinis*.

I. Axiomata situs.

1. Summa duorum internorum, quas rectæ in plani eiusdem plaga eadem ad rectam positæ faciunt, utcunque hæc crescat, nequit continuo decrescendo omni dabili minor fieri, nisi eæ se invicem secent.

2. Si (Fig. 24.) a z non capitur y, neque a $z+v$ capitur $y+v$. Hæc est axiomatis Euclidei tertia pars, nempe eadem summa ad fines eiusdem rectæ aliter partita.

3. (Fig. 23.) Si C ante finem temporis t dabilem quamvis portionem spatii universi utvis infinitam (dummodo nullum punctum rectæ quæ post a ad dextram est incidat) complectatur, et ad finem temporis t fiat C ipsum spatium universum: id, quod e spatio præter C est, ante finem temporis t, semper illi C, quod tunc est, absolute æquale complecti nequit. Duo spatia hoc pacto quaquaversum infinita, nullo puncto præter dimidiam rectam excluso, prodire videntur; nisi XI axioma Euclidis verum sit (ut infra videbitur).

II. Quantitativa.

1. Si A habeat dimidia absolute æqualia: innumerabilia dimidia a se invicem prorsus distincta, prioribus absolute æqualia habere nequit.

2. Nullum A habet partes innumerabiles a se invicem prorsus distinctas, quarum quævis ipsi A absolute æqualis sit.

3. Nullum A tale est, ut (pro $n \to \infty$) $\frac{A}{n}$ queat ipsum A (uti est) continere, nonnisi $\frac{A}{n}$ deficiente.

III. Intervalli.

Si duarum linearum simplicium uniformium utrinque infinitarum, in plano se invicem secantium, apertura (id est angulus ad punctum sectionis) maneat utrinque constante quodam earundem linearum angulo semper maior ante temporis t finem: in puncto experte temporis ipsum t terminante una alteram transiliisse nequit.

IV. Similitudinis.

Sphæra nulla per ullam qualitatem, præter magnitudinem locumque ab ulla alia discerni potest.

Aut idem de *quibusvis duobus punctis in spatio* dici potest.

Quovis horum posito, XI axioma omnino cum rigore demonstratur: et aut aliquod horum vel alicui æquivalens adsumendum est, aut nulla alia Geometria absoluta datur, nisi quæ in *Appendice* stabilita est; et quæ in omnem casum absolute vera, magni imo eo maioris pretii est, quod nullum axiomatum propositorum simplicitate ceterorum Geometriæ axiomatum gaudeat. Si igitur nullum propositorum inter axiomata referatur, dabitur quidem Geometria, sed quantitas ipsius u semper indecisa manebit: fons purus veritatis in æternitate est, eoque nos per noctem sepulcrorum in lucem allicit; quum mortalibus labiis inde haurire haud liceat.

Interim quantitativum aliquod axioma in Geometria adsumere necesse est: nempe quod sub iis axiomatibus, quibus relatio totius ad partes exprimi solet, latet (Tom. I. pag. 52). Et hoc est sequens:

Quaevis portio spatii undique terminata, tam ipsa quantitas finita est quam superficies eius, si quantitas sit. Inde sequitur *etiam quantitates respectivas eiusmodi finitas esse.*

Hoc quasi introitum aperire videtur alicui axiomatum quantitativorum: utcunque sit; quomodo ope cuiusvis dictorum demonstretur $u = R$ esse, breviter referre, paucis primariis ab hoc independentibus suppositis liceat.

a) Ex (Ax. 1, 2) facile sequeretur modo sequente: (Fig. 24.) si nempe $u + v < 2R$, ad punctum $\mathfrak{d}$ deinceps positis, residuum dicatur y; ductaque e quovis puncto $\mathfrak{k}$ cruris anguli y recta ad $\mathfrak{c}$, angulus quem $\mathfrak{kc}$ cum $\mathfrak{cd}$ facit, dicatur z; ponaturque ad $\mathfrak{c}$ supra z angulus v. Manifesto y a z non capitur, adeoque (per Ax.) neque $y + v$ capitur a $z + v$. Consequenter pro internis u et $v + z$ sectio est; idque tanto fortius, si pro $v + z$ angulus minor v ponatur.

b) Quoad reliqua: consideretur (Fig. 25.) via extremitatis rectæ $\mathfrak{Aa}$ perpendicularis ad $\mathfrak{AB}$ in eodem plano; accipianturque inde ab $\mathfrak{a}$ incipiendo sive ad dextram sive ad lævam partes huius viæ, quæ L dicatur, se invicem excipientes $\mathfrak{ab}$, $\mathfrak{bc}$, $\mathfrak{cd}$ &c omnes inter se æquales; ducanturque rectæ $\mathfrak{ab}$, $\mathfrak{bc}$, $\mathfrak{cd}$ &c. Angulos omnes x propter generationes æquales patet æquales esse. At quum puncta $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$, $\mathfrak{d}$, . . . in recta esse neutiquam constet, quæritur num x rectus vel obtusus aut acutus sit?

1. Si x rectus esset: tum (Fig. 26.) punctum lineæ L e meditullio $\mathfrak{C}$ ipsius $\mathfrak{AB}$ generatum quoque in rectæ $\mathfrak{ab}$ meditullium $\mathfrak{c}$ cadit. Nam recta meditullia $\mathfrak{C}$, $\mathfrak{c}$ connectens per generationes utrinque æquales tam ad $\mathfrak{C}$ quam ad $\mathfrak{c}$ angulos utrinque æquales adeoque rectos facit. Si iam punctum lineæ L per perpendicularem ipsi α æqualem ex $\mathfrak{C}$ erectam in $\mathfrak{p}$ aut $\mathfrak{q}$ caderet: in casu primo fieret $a = b + k + h$, adeoque $a > R$, quia $x = k + h = R$ erat; at idem $a < R$ esset, quia $p = R$ externus interno a maior est, uti suo loco independenter demonstratur; in altero casu autem fieret $i = h$, adeoque $i < R$, quamvis externus i sit $> p = R$. Unde etiam $\mathfrak{aA} = \mathfrak{Cc}$ esset.

Atque eodem modo punctum lineæ L e meditullio rectæ $\mathfrak{AC}$ pariter in meditullium rectæ $\mathfrak{ac}$ caderet; atque hoc per dimidiationes cuiusvis dimidii in infinitum continuari patet. Tum vero nulla pars continua lineæ L ex $\mathfrak{a}$ supra aut infra rectam $\mathfrak{ab}$ cadere poterit; nam inter $\mathfrak{aA}$ et perpendicularem e puncto quovis lineæ dictæ ex $\mathfrak{a}$ incipientis (et omne punctum præter $\mathfrak{a}$ extra rectam $\mathfrak{ab}$ habentis) ad $\mathfrak{AB}$ demissam innumera lineæ eiusdem puncta per dimidiationem dictam generata dantur in rectam $\mathfrak{ab}$ cadentia. Essetque hoc pacto linea L eadem cum recta $\mathfrak{abcd}$ . . . (Fig. 25.); unde per inferiora omnia facile patent.

2. Si vero x acutus vel obtusus esset: tum $\mathfrak{abcd}$ . . . talis linea e rectis composita esset, cuius latera $\mathfrak{ab}$, $\mathfrak{bc}$, $\mathfrak{cd}$, . . . utrinque in infinitum essent æqualia, et anguli quoque lateris cuiusvis cum præcedente latere et sequente in eadem plaga æquales essent. Si $x<R$, tum angulus rectarum $\mathfrak{ab}$ et $\mathfrak{bc}$ inferior est $<2R$; si $x>R$ esset, tum ubique superior esset $<2R$; potest quidem demonstrari $x>R$ non esse; quia tum per diagonalem $\mathfrak{aB}$ duo triangula fierent, quorum summa angulorum $>4R$, adeoque triangulum daretur, cuius angulorum summa $>2R$, (quia >4 in duas partes dispesci ita nequit, ne aliqua >2 sit); hoc autem fieri non posse, item independenter pluribus modis demonstrari potest. Sed sufficit nunc linea dicta $\mathfrak{abcd}$ . . ., cuius per quemvis angulum duobus rectis minor intelligatur: dicatur hæc linea λ.

3. Manifesto vero lineæ λ nullum latus ex. gr. $\mathfrak{cd}$ ad dextram continuatum, partem ipsius λ per perpendiculares ad $\overline{\mathfrak{AB}}$ a puncto $\mathfrak{C}$ ad lævam cadentes generatam, ita nec ullam perpendicularium porro ad lævam cadentium secare potest: nam tam omnes perpendiculares dictæ, quam omnia quæ inter tales perpendiculares sunt, in plagam plani illam cadunt, quæ a $\mathfrak{Cc}$ ad lævam est; itaque ut sectio dicta fiat, recta $\mathfrak{c}\overline{\mathfrak{d}}$ per rectam $\overline{\mathfrak{C}}\mathfrak{c}$ alicubi præter $\mathfrak{c}$ transire deberet, et tum $\mathfrak{cd}$ in $\overline{\mathfrak{cC}}$ caderet.

4. Ita perpendicularis quævis $\overline{\mathfrak{C}}\mathfrak{c}$ per verticem anguli ipsius λ ex $\mathfrak{c}$ ad $\overline{\mathfrak{AB}}$ missa, angulum ipsum omnino bisecans, nullum præter $\mathfrak{c}$ punctum cum λ (aut cum L) commune habet: nam si quod punctum $\mathfrak{p}$ ipsius λ adhuc cum $\overline{\mathfrak{C}}\mathfrak{c}$ commune esset, hoc $\mathfrak{p}$ in perpendicularem e puncto

rectæ $\mathfrak{AB}$ a $\mathfrak{C}$ diverso erectam caderet; et si $\mathfrak{p}$ etiam in $\mathfrak{Cc}$ caderet, duæ rectæ ad eandem rectam perpendiculares concurrerent.

5. (Fig. 27.) Rectæ $\mathfrak{ab}$, $\mathfrak{ac}$, $\mathfrak{ad}$ &c ex eodem $\mathfrak{a}$ ad extrema laterum lineæ λ ductæ vocentur Q, Q', Q'', ... et nomine generali dicantur Q; atque sit $\mathfrak{Q}$ angulum lineæ λ quæ ad $\mathfrak{a}$ est bifariam secans, adeoque perpendicularis ad $\mathfrak{AB}$ per $\mathfrak{a}$: angulus $\mathfrak{abc}$ est $= \mathfrak{bcd} = \mathfrak{cde}$ &c; sed quæritur, quo cadat respectu alicuius Q latus sequens lineæ λ? Primo statim $\mathfrak{bc}$ infra $\mathfrak{ab}$ cadit, quia (pag. 49) angulus duobus rectis minor accipitur; porro $\mathfrak{cd}$ infra Q' cadit; secus enim aut in Q' aut supra Q' caderet. In Q' non cadit; quia id aut intra $\mathfrak{c}$, aut ultra $\mathfrak{c}$ ex. gr. in $\mathfrak{f}$ esset; et in casu posteriore angulus $\mathfrak{bcf} > 2R$ esset, in altero vero per $\mathfrak{cd}$ secaretur pars ipsius λ ante generata (contra pag. 49). Idem fieret, si $\mathfrak{cd}$ supra Q' caderet, fieri enim hoc inter Q' et $\mathfrak{cb}$ deberet; nam si extra $\mathfrak{cb}$ caderet, angulus $> 2R$ esset.

Demonstratione eadem semper ulterius applicata, patet quodvis latus sequens infra rectam ex $\mathfrak{a}$ ad initium eius ductam cadere.

6. Hinc si Q circa $\mathfrak{a}$ moveatur per $\mathfrak{bcde}$ ..., usquequo in $\mathfrak{Aa}$ perveniat: omnino semper in ulterius punctum lineæ λ veniet, adeoque eam secabit aliquamdiu, ipsum $\mathfrak{Aa}$ vero nullum latus lineæ λ secabit (pag. 49); itaque ut supra (pag. 43) datur aliqua recta $\mathfrak{Q}'$ lineam λ primo non secans, intra quam quodvis Q angulum utvis parvum z cum $\mathfrak{Q}'$ efficiens secat lineam λ.

Sed tum etiam nullum latus lineæ λ (ex. gr. $\mathfrak{cd}$) ad dextram utvis continuatum secat rectam $\mathfrak{Q}'$ ullibi (ex. gr. in $\mathfrak{i}$). Nam perpendicularis e quovis puncto ulteriore (ad dextram) lateris cuiusvis utvis continuati quoque semper ulterius cadit: namque $\mathfrak{e}$ a perpendiculari $\mathfrak{Dd}$ ad dextram cadit; ita continuatio rectæ $\mathfrak{de}$ per perpendicularem $\mathfrak{eE}$ transit ad dextram, et perpendicularis e quovis puncto rectæ huius, quæ ab $\mathfrak{eE}$ ad dextram cadit, pariter ad dextram cadit; uti etiam perpendicularis e quovis puncto rectæ, quæ per novam perpendicularem ad dextram transit.

Itaque si sectio $\mathfrak{i}$ fieret: tota $\mathfrak{def}$ ... excepto puncto $\mathfrak{d}$ intra triangulum $\mathfrak{adi}$, adeoque inter perpendiculares $\mathfrak{aA}$ et $\mathfrak{iJ}$ contineretur quodvis punctum, et quævis perpendicularis generans ex eo ad $\mathfrak{A}\mathfrak{J}$ missa, et ultra $\mathfrak{J}$ nulla perpendicularis generans daretur. Idem valet quocunque cadat i, atque etiam si $\mathfrak{abcdef}$ . . . versus $\widetilde{\mathfrak{AB}}$ convexa esset (quod ut dictum est, fieri non posse facile ostendi potest).

7. Manifesto autem hinc pro z utvis parvo, ex. gr. $z < \frac{q}{n}$ pro n integro utvis magno, crura alicuius anguli constantis q, producta in infinitum etiam, inter crura anguli z continentur. Atque hinc si q e vertice in n partes æquales dividatur, inter cuiusvis eiusmodi n-tæ partis crura quoque continebitur unum q cum cruribus infinitis, et omnes hi anguli q a se invicem prorsus distincti erunt, si in quovis $\frac{q}{n}$ ita accipiatur $z < \frac{q}{n}$, ut crura ipsius z e vertice anguli q intra crura anguli $\frac{q}{n}$ cadant.

Unde cum axiomate (II, 2) proposito, anguli u (pag. 43) quantitas $>$ aut $< R$ consistere nequit. Consequenter u rectus est.

8. Hinc (Fig. 28.) si (ex Fig. 25.) $\mathfrak{a}\mathfrak{A} = \mathfrak{b}\mathfrak{B}$, et anguli ad $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{b}$ recti sint, erunt anguli $\alpha + \gamma$ et $\alpha' + \gamma'$ ac β, β' (*alterni* dicti) æquales, uti *externus* ex. gr. β'' *interno opposito* β' æqualis, et quæcunque recta $\mathfrak{a}\mathfrak{B}$ secet ipsam $\widetilde{\mathfrak{AB}}$ et $\widetilde{\mathfrak{ab}}$, summa internorum est duobus rectis æqualis. Nam triangula rectangula $\mathfrak{A}\mathfrak{a}\mathfrak{B}$ et $\mathfrak{b}\mathfrak{B}\mathfrak{a}$ propter hypotenusam communem et cathetum $\mathfrak{a}\mathfrak{A}$ catheto $\mathfrak{b}\mathfrak{B}$ æqualem sunt (per inferiora ab his independenter) æqualia; adeoque

$$\alpha = \alpha' \quad \text{et} \quad \beta = \beta';$$

et hinc quia $\beta = \beta''$ nempe suo verticali, est etiam $\beta'' = \beta'$. Atque hinc, quum

$$\beta'' + \gamma + \alpha = 2R,$$

erit etiam

$$\beta' + \gamma + \alpha = 2R.$$

9. Hinc item quodvis triangulum fuerit, (Fig. 29.) per verticem tali linea ut in præcedentibus generata, erit

$$\gamma = \gamma', \quad \text{et} \quad \beta = \beta';$$

adeoque

$$\alpha + \beta + \gamma = \alpha + \beta' + \gamma' = 2R.$$

10. Atque hinc

$$\delta+\gamma=\beta+\alpha+\gamma=2R;$$

et

$$\delta=\alpha+\beta;$$

nempe producto latere quovis trianguli, angulus externus est summæ internorum oppositorum æqualis.

11. Et hinc iam facile sequitur, quod si (Fig. 30.) summa internorum $<2R$, tum rectæ secent se invicem. Nam si

$$u+p+\omega+q=2R,$$

et $\overline{\mathfrak{B}\mathfrak{b}}$ ipsam $\mathfrak{A}\tilde{\mathfrak{a}}$ primo non secans sit, erit tum recta e quovis puncto $\mathfrak{a}$ ipsius $\mathfrak{A}\tilde{\mathfrak{a}}$ ad $\mathfrak{B}$ ducta, angulus ad $\mathfrak{a}$ trianguli $\mathfrak{A}\mathfrak{a}\mathfrak{B}$ (per 9) æqualis

$$2R-u-p=u+p+\omega+q-u-p=\omega+q,$$

essetque semper $>q$; quod falsum esse patet (ex Fig. 31.): nam si $\alpha'=\alpha$, ita $\beta'=\beta$, et ita porro cuivis novo lateri ex $\mathfrak{b}$ ducto, e fine eius in $\mathfrak{A}\tilde{\mathfrak{a}}$ æquale accipiatur: orientur triangula æquicrura se in infinitum excipientia; in quibus

$$z=2z', \quad z'=2z'', \ldots$$

itaque angulis $z, z', z'' \ldots$ generaliter z dictis, $z \frown 0$. Nempe trianguli æquicruri angulos ad basim esse æquales infra ab hoc independenter demonstrabitur.

12. Superius generatam L (per definitionem pag. 19) parallelam ad $\mathfrak{A}\mathfrak{B}$ esse patet; et iam hic posito axiomate dicto, manifesto recta $\overline{\mathfrak{a}\mathfrak{b}}$ non secat rectam $\overline{\mathfrak{A}\mathfrak{B}}$, quævis alia per $\mathfrak{a}$ ducta autem, quum ab aliqua parte summa internorum $<2R$ fiat, secat rectam $\overline{\mathfrak{A}\mathfrak{B}}$; et manifesto datur eodem modo parallela ad rectam quamvis per punctum quodvis, eaque una sola est.

13. Atque hinc (Fig. 32.) si rectæ A, B secent se invicem in $\mathfrak{p}$, ubicunque sit A' ad A parallela, etiam A' secatur a B. Sit enim ex $\mathfrak{p}$ recta ad quodvis aliquod punctum $\mathfrak{q}$ rectæ A'; erit

$$z + v + u = 2R;$$

itaque

$$v + u < 2R;$$

consequenter B ultra p, et A' ultra q continuatæ concurrent.

14. Pariter patet, quocunque moveatur B sibi parallele (ex. gr. in B'), rectas A' et B' quoque secare se invicem, et angulos z et k in sectione prima esse angulis z et k sectionis posterioris æquales.

15. E superius dictis autem sequitur etiam inter crura anguli utvis parvi v continuata in infinitum, angulum quatuor rectis quantovis minorem, simul cum cruribus continuatis in infinitum, imponi posse, nisi $u = R$ sit (pag. 43).

Nempe inter crura anguli utvis parvi v (pag. 51) angulus certus $b = \frac{R}{n}$, pro R rectum et n integrum denotante, imponi potest, adeoque etsi $v = \frac{1}{2}b$ fuerit; fiat id ad distantiam d a vertice anguli $v = \frac{1}{2}b$. Atque hinc fiat (Fig. 33.) linea polygonalis abcd . . ., cuius latus quodvis $= d$, et angulus quivis (duobus rectis minorem intelligendo) sit

$$= 2R - \frac{1}{2}b.$$

Dicaturque α continuatio lateris ab efficiens angulum $\frac{1}{2}b$ cum bc, et fiat ex b recta bb', ex c recta cc', ex d recta dd' &, singulæ angulum $\frac{1}{2}b$ cum lateribus e punctis b, c, d, . . . incipientibus efficientes, ut inter crura cuiusvis $\frac{1}{2}b$ ad distantiam d sit $\frac{1}{2}b + \frac{1}{2}b = b$ positum; quævis litera græca autem fuerit ad initium lateris alicuius, efficiens cum eo in plaga dextra angulum aliquem p: recta ad finem lateris eius, cum continuatione eiusdem efficiens angulum externum $= p$, insigniatur litera græca sequente; ex. gr. β efficiet cum continuatione lateris bc angulum $\frac{1}{2}b$, ita γ efficiet cum continuatione lateris cd angulum $2 \cdot \frac{1}{2}b$, ita δ cum continuatione lateris de angulum $3 \cdot \frac{1}{2}b$ et ita porro, donec litera græca prodeat, quæ cum continuatione lateris præcedentis efficiat angulum $(4n - 1) \cdot \frac{1}{2}b$, adeoque cum latere sequente faciat angulum $4n \cdot \frac{1}{2}b = 2R$.

Manifesto $\tilde{\beta}$ in plano supra $\tilde{\alpha}$, et $\tilde{\gamma}$ supra $\tilde{\beta}$, ac $\tilde{\delta}$ supra $\tilde{\gamma}$ &, ac quævis sequens supra omnes præcedentes cadit: imo si omnium rectarum literis græcis denotatarum tantum pars a linea $\mathfrak{bcde}$ . . . in plagam dextram cadens consideretur: quævis supra omnes præcedentes cadet; nec illa, quæ cum latere sequente $2R$ facit, adeoque in recta erit, secat ipsam $\bar{\alpha}$. Erit igitur tota hæc recta utrinque infinita inter crura ipsius $v = \frac{1}{2} b$; nempe $\mathfrak{b}\bar{\mathfrak{b}}'$ est intra $\mathfrak{a}\bar{\mathfrak{a}}'$, $\mathfrak{c}\bar{\mathfrak{c}}'$ intra $\mathfrak{b}\bar{\mathfrak{b}}'$, $\mathfrak{d}\bar{\mathfrak{d}}'$ intra $\mathfrak{c}\bar{\mathfrak{c}}'$ &c.

Unde etiam (Fig. 34.) ad rectarum A, B angulum utvis parvum v efficientium, latus quodvis A potest talis perpendicularis poni, quæ utvis producta latus alterum B utvis productum secare nequeat. Sit enim C recta talis, quæ per præcedentia etiam utrinque infinita inter crura anguli v ab ea parte in infinitum producta maneat: demittaturque e quovis puncto $\mathfrak{p}$ ipsius C perpendicularis $\mathfrak{pq}$ ad A; cadet hæc in plagam eandem cum C, quia si in alteram caderet, fieret triangulum cuius unus angulus rectus esset, alter autem obtusus, nempe ipsi v acuto deinceps positus; continuatio ipsius $\mathfrak{pq}$ vero transit per C in alteram plagam, quæ pariter tota inter crura anguli v continetur.

Atque hinc (Fig. 35.) inter crura anguli $2v$ (quod ~ 0 si $v \sim 0$) non solum totam perpendicularem $\bar{\mathfrak{c}}\mathfrak{c}'$, sed $\mathfrak{a}'\mathfrak{c} = \mathfrak{ac}$ facta, etiam angulum $\mathfrak{b}'\mathfrak{a}'\mathfrak{f}$ æqualem $4R - v$ simul cum cruribus infinitis imponi posse patet.

Si igitur $\mathfrak{ba}$ circa $\mathfrak{a}$ moveatur versus $\mathfrak{ac}$ usquequo in $\mathfrak{ac}$ perveniat, atque priusquam $\mathfrak{ab}$ in $\mathfrak{ac}$ perveniat, accipiatur semper tale $\mathfrak{a}'$, et tale $\mathfrak{a}'\mathfrak{b}'$ ad angulum ei quem $\mathfrak{ab}$ cum $\mathfrak{ac}$ facit æqualem, ut $\mathfrak{a}'\bar{\mathfrak{b}}'$ et $\mathfrak{a}\bar{\mathfrak{b}}$ se invicem haud secent; atque cogitetur semper spatium quod, si schema circa $\mathfrak{aa}'$ revolveretur, maneret a via ipsius $\mathfrak{ab}$ ad lævam, et id quod a via ipsius $\mathfrak{a}'\mathfrak{b}'$ ad dextram esset. Hoc pacto quævis spatii portio s nihil cum recta $\mathfrak{a}\bar{\mathfrak{a}}'$ (saltem præter punctum $\mathfrak{a}$) commune habens, manifesto alicui spatio ad lævam generato includetur pro v minore, quam angulus quivis, quem recta ex $\mathfrak{a}$ ad aliquod punctum ipsius s ducta cum $\mathfrak{aa}'$ facit; atque $\mathfrak{a}'$ sufficienter remoto, ad angulum v alteri v æqualem, aderit alterum s quoque cum priore nihil commune habens. Unde applicatio Axiomatis propositi (I, 3) patet; non tamen duo spatia prodibunt, nam dum $\mathfrak{ab}$ in $\mathfrak{ac}$ pervenit, nascitur quidem totum spatium, sed $\mathfrak{a}'$ in infinito disparens nullibi amplius in temporis puncto experte ultimo reperitur; et antea quidem quodvis punctum in spatium ad lævam inclusum est, sed omne nunquam ante finem.

16. Ita facile demonstrantur sequentia:

1. Lineam uniformem L (pag. 50) nisi recta sit, extra lineam $\mathfrak{abcd}$ ... fluere, cum hac (Fig. 27.) nonnisi puncta $\mathfrak{abcd}$ ... communia habentem: atque hinc applicatio (Ax. III.) patet; nempe angulus quem continuatio inferior ipsorum Q cum L extus facit, infrorsum $\sim a$, superius ad $2R'-a$, (si per R' intelligatur angulus quem continuatio rectæ $\mathfrak{a}\mathfrak{A}$ cum L facit), et uterque est semper $> \alpha$; inferior crescit continuo, superior decrescit, et manifesto sunt anguli ad utramque continuationem cuiusvis Q æquales.

2. $\mathfrak{A}\overline{\mathfrak{B}}$ circa $\mathfrak{A}$ sursum motum illico secat lineam L, uti etiam quævis perpendicularis ad $\mathfrak{a}\mathfrak{A}$ inter $\mathfrak{a}$ et $\mathfrak{A}$; et statim post $\mathfrak{A}$, ad dextram lævamque secat ipsum L ad angulos utrinque æquales, a limite dicto a decrescentes, et dato constante aliquamdiu semper maiores.

3. *Manente $\mathfrak{a}$ et remoto $\mathfrak{A}$ in $\mathfrak{a}\overline{\mathfrak{A}}$ semper porro deorsum in infinitum* simul cum perpendiculari $\mathfrak{A}\overline{\mathfrak{B}}$, ac generatis super quavis $\mathfrak{A}\mathfrak{B}$ cum perpendiculari $\mathfrak{a}\mathfrak{A}$ lineis L, et angulo, quem recta ipsam L primo non secans cum $\mathfrak{a}\mathfrak{A}$ facit, generaliter u dicto, atque etiam quovis centro $\mathfrak{A}$ radio $\mathfrak{a}\mathfrak{A}$ descriptis circulis: angulus $u \sim 0$; alioquin recta pro certo angulo perpendicularem utvis remotam secaret (contra pag. 54); porro lineæ L solum punctum $\mathfrak{a}$ commune habebunt, et descendent; circuli vero idem punctum $\mathfrak{a}$ solum commune habebunt, sed ascendent continuo, gaudebuntque limite geometrico certo eodem: quem existere, uti et superficiem per revolutionem huius lineæ circa $\mathfrak{a}\mathfrak{A}$, atque utramque formam uniformem esse constat; estque si XI Axioma Euclidis verum sit, linea dicta *recta*, et superficies *planum*; in omni tamen casu tam linea hæc, quam superficies, *sola* determinatur in *spatio*.

Describi vero linea dicta motu puncti continuo potest modo sequente. Sit prius (Fig. 36.) $u = R$, et moveatur $\mathfrak{ab}$ circa $\mathfrak{a}$ usque in $\mathfrak{ac}$; simulac $\mathfrak{b}$ in arcu α viam aliquam describet, illico dabitur aliquod $\mathfrak{c}$, unde erecta perpendicularis primo non secans rectæ $\mathfrak{a}\overline{\mathfrak{b}}$ est, et pro $\mathfrak{ca}' = \mathfrak{ca}$ erit $\mathfrak{a}'\overline{\mathfrak{b}}'$ primo non secans ipsius $\mathfrak{a}\overline{\mathfrak{b}}$. Puncto $\mathfrak{b}$ in arcu α porro moto vero punctum $\mathfrak{c}$ ab $\mathfrak{a}$ incipiendo semper porro movetur: nam pro quovis puncto interiore ipsius α datur $\mathfrak{c}$, et quidem semper ulterius; nec ullum punctum ultra quodvis $\mathfrak{c}$ ab $\mathfrak{a}$ incipiendo est, cui aliquod punctum ipsius α non respondeat, et cuivis ulteriori puncto interius punctum ipsius α respondet. Nam si $\overline{\mathfrak{ab}}$ primo non secans ipsius $\overline{\mathfrak{cp}}$ sit, interius ducta recta secabit ipsam $\overline{\mathfrak{cp}}$, adeoque illa perpendicularis, quam non secat, ulterius esse debet; si vero aliquod $\mathfrak{c}$ esset, cui non responderet punctum aliquod interius ipsius α, tum perpendicularis ex $\mathfrak{a}$ esset primo non secans ipsius $\overline{\mathfrak{cp}}$: atque tum pro recta $\mathfrak{ac}$ verum esset Axioma XI; et tum de omnibus facile demonstraretur. Potest igitur $\mathfrak{c}$ ex $\mathfrak{a}$ incipiendo ita moveri porro, ut mota $\mathfrak{ab}$ circa $\mathfrak{a}$, adeoque mota $\mathfrak{b}$ in α, donec u (prius $= R$) fiat $= 0$, $\mathfrak{cp}$ semper tale sit, ut $\overline{\mathfrak{ab}}$ primo non secans illius sit: atque hinc eadem ad $\mathfrak{a}'$ applicando, poterit $\mathfrak{a}'$ ex $\mathfrak{a}$ ita porro moveri, ut $\overline{\mathfrak{ab}}$ et $\overline{\mathfrak{a}'\mathfrak{b}'}$ quævis alterius primo non secans sit.

Atque iam moveatur (Fig. 37.) $\overline{\mathfrak{ab}}$ circa $\mathfrak{a}$ versus $\mathfrak{a}\mathfrak{A}$ in eodem plano, donec u (prius $= R$) fiat $= 0$, atque interea in $\overline{\mathfrak{ab}}$ moveatur punctum $\mathfrak{b}'$ semper porro, ita ut $\mathfrak{b}'$ in moto $\overline{\mathfrak{ab}}$ semper in loco dicto ipsi u respondente sit: erit via ipsius $\mathfrak{b}'$ per motum hunc compositum *linea dicta.* Reliqua autem ultro patent; uti et ea quæ reliquorum axiomatum propositorum quovis posito, rem deciderent: nec operæ pretium est plura referre; quum res tota ex altiori contemplationis puncto, in ima penetranti oculo tractetur in *Appendice*, a quovis fideli veritatis puræ alumno digna legi.

ELEMENTA GEOMETRIAE.

SECTIO II.

PLANIMETRIAE PARS PRIMA.

·211111.

Sectio nulla est duarum rectarum, si recta ab uno puncto unius ad aliquod punctum alterius ducta, summa internorum in plaga eadem sit duobus rectis æqualis.

Sectio nulla rectae et circuli est, si perpendicularis e centro ad rectam radio sit maior.

Sectio nulla duorum circulorum est, si recta a centro ad centrum summa radiorum maior sit.*

Sed de his heic ordinis gratia allatis, sub ·21112121 (pag. 58) et in *supplemento* post ·2111211222 (pag. 66) dicetur; atque nunc sequitur:

·2111211.

Si duæ rectæ punctum commune habeant, formam angularem oriri e *Conspectu Geometriae generali* facile patet. Dictum etiam ibidem est angulum esse quantitatem respectivam quoad arcum α circuli e puncto sectionis radio certo r (eodem pro omnibus) descripti inter crura comprehensum; scilicet si peripheria tota sit p, anguli quantitas dicitur $\frac{\alpha}{p}$, ut nempe angulus rectus, ut quantitas, sit $= \frac{1}{4}$.

Patet vero pro duabus formis angularibus, quæ congruere queunt, arcum etiam congruentem describi, adeoque quotum eundem prodire.

* Quoad sectionem nullam aut quamvis duorum circulorum vide Fig. 240. (Ex Erratis Ed. I Tom. II, pag. 375).

Ita conversim si arcus $ab = pq$ (Fig. 38.) centro radioque eodem, formæ angulares acb, pcq congruent. Nempe si forma pcq superimponatur ipsi acb, ita ut c in se maneat, et p in a cadat, atque arcus in eandem plagam cadant: *arcus pq ob generationes æquales simul cum arcu ab incipit* continuaturque, nec prius aut serius desinere potest, quia tum pars æqualis toti esset, quum circulus linea simplex sit. Consequenter c in c, p in a et q in b cadentibus, et rectæ ac, bc cum pc, qc congruunt. Patet etiam pariter q in a' poni potuisse, quum circuli generatio ad lævam dextramque prorsus æqualis sit.

Est etiam manifesto (Fig. 39.) omnium angulorum u, v, z, p, q, quotvis fuerint, summa $= 1$, nempe arcuum omnium summa est peripheria, quæ per se divisa quotum 1 dat. Ita quotvis u, v, z fuerint supra rectam ab, summa est $\frac{1}{2}$; pariter infra ab. Si e meditulliis dimidiarum peripheriarum supra et infra ab ad c rectæ ducantur, angulorum tam superius quam inferius æqualis summa prodibit; adeoque et quatuor rectorum summa est $= 1$, et duorum rectorum summa $= \frac{1}{2}$. Consequenter summa prior etiam quatuor rectis, et posterior duobus rectis æqualis dici potest.

Hinc anguli verticales sunt æquales; nempe (Fig. 40.) $u = v$ et $z = p$; nam $u + p = 2R = v + p$, et hinc $u = v$; ita $z + v = v + p$. Nempe (Fig. 41.) etiam recta $\mathfrak{d}\bar{\mathfrak{c}}$ per rectam ab in alteram plagam transit: nam in $\overline{ab}$ nullum aliud punctum præter c habet; itaque nisi transiret, in eandem plagam e qua venit redire deberet; tum vero esset tam $k+u+v$ quam $u = \frac{1}{2}$, adeoque pars peripheriæ dimidiæ esset ipsi peripheriæ dimidiæ æqualis.

·2111212I.

De tribus rectis, quarum nonnisi unum par est se mutuo (continuatione sufficiente) non secantium.

§. 1.

Si angulus externus u aequalis sit interno opposito v, sive alterni u, v fuerint aequales, sive $v + z = 2R$, quorum quodvis manifesto ponit reliqua duo: *tum rectae $\overline{ab}$ et $\overline{\mathfrak{AB}}$ se invicem non secant* (Fig. 42.).

Si enim $\mathfrak{D}\overline{\mathfrak{B}}$ et $\mathfrak{d}\overline{\mathfrak{b}}$ secarent se mutuo, idem et in plaga altera fieret; nam formæ $\mathfrak{dbDB}$ et $\mathfrak{DAda}$ congruunt recta $\mathfrak{dD}$ ita posita, ut $\mathfrak{d}$ formæ prioris in $\mathfrak{D}$ posterioris et $\mathfrak{D}$ prioris in $\mathfrak{d}$ posterioris cadat, atque vertatur forma prior, donec in plagam plani lævam cadat; namque tum $\mathfrak{d}\overline{\mathfrak{b}}$ propter alternos z æquales in $\mathfrak{D}\overline{\mathfrak{A}}$, et $\mathfrak{D}\overline{\mathfrak{B}}$ in $\mathfrak{d}\overline{\mathfrak{a}}$ cadet. Tunc vero punctum ipsis $\mathfrak{D}\overline{\mathfrak{B}}$ et $\mathfrak{d}\overline{\mathfrak{b}}$ commune erit etiam ipsis $\mathfrak{d}\overline{\mathfrak{a}}$ et $\mathfrak{D}\overline{\mathfrak{A}}$ commune. Consequenter $\overline{\mathfrak{ab}}$ et $\overline{\mathfrak{AB}}$ duo puncta haberent communia.

Hinc si $\wedge\, \mathfrak{adD} = \mathfrak{BDd}$ construatur (pag. 61), $\mathfrak{ab}$ ipsi $\mathfrak{AB}$ per $\mathfrak{d}$ fiet *parallela.*

§. 2.

(Fig. 43.). Etsi externus minor, nempe $v = u > u'$ fiat: $\mathfrak{d}\overline{\mathfrak{e}}$ ipsam $\overline{\mathfrak{AB}}$ secare nequit. Nam per $\overline{\mathfrak{ab}}$ prius transire deberet alicubi præter $\mathfrak{d}$, atque item duo puncta haberent $\overline{\mathfrak{ab}}$ et $\mathfrak{d}\overline{\mathfrak{e}}$ communia.

§. 3.

Hinc *si duae rectae* $\mathfrak{d}\overline{\mathfrak{b}}$ *et* $\mathfrak{D}\overline{\mathfrak{B}}$ *secent se mutuo: oportet externum maiorem interno opposito v esse*; nam si externus æqualis aut minor esset, nulla sectio daretur (per §. 1 et 2). Pariter patet (Fig. 44.) externi u verticalem eadem ratione esse altero p duorum internorum oppositorum maiorem; nempe si æquales essent, tum $\overline{\mathfrak{E}\mathfrak{d}}$ et $\overline{\mathfrak{AB}}$ non secarent se invicem &c.

Itaque trianguli *latere quovis producto, externus quovis internorum oppositorum est maior.*

§. 4.

Unde etiam *summa quorumvis duorum angulorum trianguli est* $< 2R$.

Nam (Fig. 44.)

$$u + z = 2R;$$

sed

$$v < u,$$

consequenter

$$v+z<2R.$$

Conversa huius, nempe quod rectæ se invicem secent, si summa duorum internorum duobus rectis minor fuerit, Axioma XI Euclidis est; de quo iam in sectione prima actum est, atque in sequentibus ubique supponetur.

§. 5.

Hinc perpendicularis acuto angulo obiecta cadit; secus enim triangulum fieret, cuius unus angulus rectus et alter obtusus esset. Atque hinc etiam patet ex eodem puncto duas perpendiculares ad rectam eandem non dari; nam triangulum fieret cum angulis rectis duobus.

'211121122.

Si *trium rectarum nullum par sit se mutuo* (continuatione sufficiente) *non secantium*: oritur *triangulum*, quod si angulo recto gaudeat, *rectangulum*, si obtuso *obtusangulum*, secus *acutangulum* audit; et quodvis horum, si duobus lateribus æqualibus gaudeat, *aequicrurum*, atque triangulum cuius omnia latera æqualia sunt, *aequilaterum* audit. Trianguli rectilinei latera angulum rectum intercipientia *catheti*, latus angulo recto oppositum vero *hypotenusa* dicuntur. Quomodo geometrice construi queant, mox dicetur.

'2111211221.

§. 1.

Aequalitatem duorum triangulorum, et quidem ita ut lateribus æqualibus anguli æquales, et angulis æqualibus latera æqualia respondeant, generaliter *ponit* quodvis sequentium:

1. *duo latera cum angulo intercepto*,

2. *unum latus et duo anguli, si unus adiacens adiacenti, et alter aut adiacens adiacenti aut non adiacens non adiacenti aequalis sit,*

3. *tria latera tribus aequalia.*

Casus 1. (Fig. 45.). Si $\mathfrak{AC}=\mathfrak{ac}$, atque $\mathfrak{AB}=\mathfrak{ab}$ et simul $\wedge\mathfrak{CAB}=\mathfrak{cab}$: superimponatur triangulum $\mathfrak{cab}$ ipsi $\mathfrak{CAB}$, ita ut $\mathfrak{a}$ in $\mathfrak{A}$ et $\mathfrak{b}$ in $\mathfrak{B}$ cadat, et vertatur in eandem plagam; $\mathfrak{ac}$ nec supra nec infra $\mathfrak{AC}$ cadet, quia anguli ad $\mathfrak{a}$ et $\mathfrak{A}$ sunt æquales; cadetque etiam $\mathfrak{c}$ in $\mathfrak{C}$ propter $\mathfrak{AC}=\mathfrak{ac}$. Consequenter etiam recta $\mathfrak{bc}$ congruet cum $\mathfrak{BC}$, quum duo extrema congruant.

Casus 2. (Fig. 46.). Si $\mathfrak{AB}=\mathfrak{ab}$, atque anguli ad $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$ angulis ad $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$ æquales sint: superimponatur triangulum $\mathfrak{abc}$ ipsi $\mathfrak{ABC}$, ita ut $\mathfrak{a}$ in $\mathfrak{A}$ et $\mathfrak{b}$ in $\mathfrak{B}$ cadat, vertaturque in eandem plagam; cadet $\mathfrak{a}\overline{\mathfrak{c}}$ in $\mathfrak{A}\overline{\mathfrak{C}}$ et $\mathfrak{b}\overline{\mathfrak{c}}$ in $\mathfrak{B}\overline{\mathfrak{C}}$ propter angulos dictos æquales. Consequenter $\mathfrak{c}$ extra $\mathfrak{C}$ cadere nequit, secus enim duæ rectæ duo puncta haberent communia.

Ita (Fig. 47.) si $\mathfrak{AB}=\mathfrak{ab}$, atque $\wedge u$ ad $\mathfrak{a}=\wedge u$ ad $\mathfrak{A}$, et $\wedge\mathfrak{acb}=\wedge\mathfrak{ACB}$; superimposito triangulo $\mathfrak{abc}$ ipsi $\mathfrak{ABC}$, ita ut $\mathfrak{a}$ in $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{b}$ in $\mathfrak{B}$, et $\mathfrak{a}\overline{\mathfrak{c}}$ in $\mathfrak{A}\overline{\mathfrak{C}}$ cadat; $\mathfrak{c}$ nonnisi in $\mathfrak{C}$ cadere potest; nam $r>z>t$ (pag. 59).

Casus 3. (Fig. 48.). Si $\mathfrak{ab}=\mathfrak{AB}$, $\mathfrak{ac}=\mathfrak{AC}$, $\mathfrak{bc}=\mathfrak{BC}$: superimponatur triangulum $\mathfrak{abc}$ ipsi $\mathfrak{ABC}$, ita ut $\mathfrak{a}$ in $\mathfrak{A}$, et $\mathfrak{b}$ in $\mathfrak{B}$ cadat, vertaturque in eandem plagam; et describantur centro $\mathfrak{a}$ radio $\mathfrak{ac}$ et centro $\mathfrak{b}$ radio $\mathfrak{bc}$ circuli: nisi $\mathfrak{c}$ in $\mathfrak{C}$ cadat, aderunt circulorum dictorum in plaga superiori duo puncta communia; itaque manifesto iisdem peripheriis et inferius duo puncta communia parient sectionem peripheriarum duarum ad minimum quatuor punctorum; quod fieri nequit, quum maximam earum sectionem nonnisi duorum punctorum esse iuxta ordinem in ·21112121 (pag. 81) demonstretur, quod hic quoque statim perlegere licet.

Hinc *si* (Fig. 38.) *e* $\mathfrak{q}$ *radio* $\mathfrak{ba}$ *secetur arcus* $\mathfrak{qp}$ *in* $\mathfrak{p}$, *fiet angulo* $\mathfrak{qcp}$ *angulus* $\mathfrak{bca}$ *aequalis.*

§. 2.

Triangula dicta, nempe *aequicrurum*, *aequilaterum*, *rectangulum*, *obtusangulum*, *acutangulum construi geometrice* possunt; nempe:

1. Si (Fig. 49.) centro $\mathfrak{a}$ et radio r dimidium rectæ $\mathfrak{ab}$ excedente, ac centro $\mathfrak{b}$ item radio r fiant circuli, hi secabunt se alicubi; nam sit $\mathfrak{ac}=\mathfrak{cb}$, et $r=\mathfrak{af}=\mathfrak{be}=\mathfrak{be}'$; erit $\mathfrak{e}$ punctum peripheriæ centri $\mathfrak{b}$, et $\mathfrak{f}$ punctum peripheriæ centri $\mathfrak{a}$; atque $\mathfrak{e}$ punctum internum peripheriæ centri $\mathfrak{a}$, quia $\mathfrak{ae}<\mathfrak{af}$; dum igitur centro $\mathfrak{b}$ radio $\mathfrak{be}$ scribitur circulus, punctum $\mathfrak{e}$ ut in $\mathfrak{e}'$ venire queat, e circulo priore egredi debet, nam $\mathfrak{e}'$ extra illum cadit, quia $\mathfrak{ae}'>r$. Transitus iste autem in recta $\mathfrak{ab}$ fieri nequit, quia partes ex $\mathfrak{a}$ et $\mathfrak{b}$ nonnisi in $\mathfrak{c}$ æquales radii esse possunt. Si igitur $\mathfrak{d}$ sit sectionis punctum, patet $\mathfrak{ad}=\mathfrak{db}=r$ esse.

Ita si $r=\mathfrak{ab}$ accipiatur, latera omnia manifesto æqualia sunt. Et si $r>\mathfrak{ab}$ accipiatur quoque, manifesto sectio fit, et triangulum *aequicrurum* in omni casu.

2. Rectangulum triangulum construi posse patet, si perpendicularis construatur. Hoc vero fit sive e puncto $\mathfrak{c}$ quopiam rectæ *erigendo*, sive e puncto $\mathfrak{d}$ extra eam *demittendo perpendicularem.*

Prius fit (Fig. 50.), si centro $\mathfrak{c}$ radio quovis sit circulus, et $\mathfrak{ca}=\mathfrak{cb}$; atque radiis eidem r æqualibus (ut antea) centris $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$ fiat circulorum sectio in $\mathfrak{d}$: erit enim triangulum $\mathfrak{adc}=\mathfrak{bdc}$, quia $\mathfrak{ac}=\mathfrak{bc}$, $\mathfrak{dc}=\mathfrak{dc}$ et $\mathfrak{ad}=\mathfrak{db}=r$; consequenter angulus $\mathfrak{acd}=\mathfrak{bcd}$.

Alterum vero fit (Fig. 51.), si ex $\mathfrak{d}$ puncto supra $\mathfrak{AB}$ fiat recta ad quodvis punctum $\mathfrak{p}$ infra $\mathfrak{AB}$ situm, fiatque circulus centro $\mathfrak{d}$ radio $\mathfrak{dp}$; manifesto transibit $\mathfrak{p}$ per rectam $\overline{\mathfrak{AB}}$ tam ad lævam quam ad dextram eundo usque in $\mathfrak{p}'$ pro $\mathfrak{dp}=\mathfrak{dp}'$. Fiat hoc in $\mathfrak{a}$ et $\mathfrak{b}$; fiatque centris $\mathfrak{a}$ et $\mathfrak{b}$ radio eodem r (ut antea) intersectio sive in $\mathfrak{e}$ sive in $\mathfrak{f}$: recta per $\mathfrak{d}$ et intersectionem erit perpendicularis ad $\mathfrak{AB}$. Nam $\mathfrak{ae}=\mathfrak{be}$, $\mathfrak{ad}=\mathfrak{bd}$, $\mathfrak{ed}=\mathfrak{ed}$; itaque triangulum $\mathfrak{ade}=\mathfrak{bde}$, et quidem ita, ut $\mathfrak{d}$ in se et $\mathfrak{e}$ in se manentibus, triangulum $\mathfrak{ade}$ verti possit, usquequo $\mathfrak{a}$ in $\mathfrak{b}$ cadat; tum vero et quodvis aliud punctum rectæ $\widetilde{\mathfrak{de}}$ adeoque et $\mathfrak{q}$ loco suo priore manet; consequenter $\mathfrak{d}$ in $\mathfrak{d}$, $\mathfrak{q}$ in $\mathfrak{q}$, et $\mathfrak{a}$ in $\mathfrak{b}$ cadentibus, anguli ad $\mathfrak{q}$ manifesto æquales sunt. Pariter sunt triangula $\mathfrak{adf}$ et $\mathfrak{bdf}$ æqualia, et manentibus $\mathfrak{d}$ et $\mathfrak{f}$ (adeoque et $\mathfrak{q}$) superimponendo, $\mathfrak{d}$ in $\mathfrak{d}$, $\mathfrak{q}$ in $\mathfrak{q}$, et $\mathfrak{a}$ in $\mathfrak{b}$ cadere potest. Rectam $\widetilde{\mathfrak{de}}$ per $\mathfrak{ab}$ transire inde patet, quod recta *e figurae cuiusvis puncto interno utrinque egredi, duoque ad minimum puncta communia cum figura habere debeat.* Etenim si centro $\mathfrak{f}$ radio quamvis rectarum, quæ a f ad punctum aliquod figuræ est, excedente circulus fiat, recta ex f dicta in aliquam diametrorum cadet, quæ utrinque e circulo exit; adeoque radius e puncto figuræ interno f ad punctum extra figuram situm transit alicubi; pariter radius alter diametri eiusdem; in eodem figuræ puncto vero radius uterque transire nequit, quia tum recta rediret. Itaque et recta e puncto interno trianguli abd transit in duobus punctis; sed unum d est, alterum vero nec in da nec in db esse potest, quia tum duæ rectæ duo puncta haberent communia.

Patet etiam per df *angulum* adb, uti per ef *rectam* ab *bisecari*.

3. E quovis puncto f (Fig. 52.) sit recta fd: triangulum fad obtusangulum est; nam $z > R$ (pag. 59).

Acutangulum autem præbet etiam æquilaterum, quum statim probetur etiam angulos esse æquales, adeoque quemvis recto minorem. Sed inferius etiam nota rectarum e quibus triangulum construi potest relata, mox etiam nota e quibus dignosci queat, num triangulum rectangulum, obtusangulum vel acutangulum sit, exponetur.

§. 3.

Trianguli æquicruri et rectanguli primariæ quædam proprietates referendæ veniunt.

1. *Trianguli aequicruri anguli ad basim sunt aequales, et si anguli ad basim fuerint aequales, crura sunt aequalia, ac recta e vertice ad meditullium baseos ad hanc perpendicularis est.*

Prius patet (Fig. 53.): nam si $ac = bc$, congruet triangulum bca triangulo acb ad lævam, propter $ac = bc$, $cb = ca$, atque tertium latus tertio æquale (pag. 61). Consequenter c in c, b in a, a in b cadente, u' congruet cum u.

Alterum quoque patet (Fig. 54.) triangulo bda ipsi acb ita superimposito, ut b in a et a in b cadat; cadet enim propter adiacentes æquales (pag. 61) d in c, adeoque db in ca. Sed eodem modo potest triangulum

adb ipsi acb superponi, ita ut a in a et b in b cadat; atque tum erit $ad = ac$. Consequenter $ac = bd = ad$.

Tertium quoque ex (Fig. 55.) patet; nam si $ad = db$, $ac = bc$, et $dc = dc$, est triangulum $adc = bdc$.

2. *In triangulo rectangulo hypotenusa* ac *est maior catheto*; *imo et hypotenusa quaevis ulterior est maior* (Fig. 56.).

Est enimvero c extra circulum centro a radio ab scriptum, ita d extra circulum centro a radio ac factum cadit. Nam si c non extus caderet, esset aut in peripheria puncti b, aut intra eam; prius fieri nequit, nam tum pro $bc' = bc$, et c' in peripheriam eandem caderet, in qua adhuc duo puncta nempe b, c sunt (contra pag. 81); sed neque intra peripheriam cadere c potest, nam tum (pag. 62) e circulo in duobus saltem locis egrederetur, adeoque recta $b\bar{c}$ præter b adhuc haberet punctum commune, atque punctum rectæ $\widetilde{bc}$ ad eandem distantiam ad lævam pariter in peripheria radii ab esset, et recta circulum item in pluribus quam duobus punctis secaret.

Pariter patet d extra circulum centro a radio ac factum cadere: quum secus rectæ $\widetilde{bc}$ præter punctum c adhuc aliquod punctum rectæ $c\tilde{d}$ supra ac, et ad lævam tertium ad distantiam a b eandem commune cum peripheria puncti c esset.

Hinc item *triangulorum rectangulorum aequalitas per catheti hypotenusaeque aequalitatem ponitur.* Si enim cathetus ipsi ab et hypotenusa ipsi ac æquales fuerint, superimponendo patet ex a hypotenusam in c cadere; omnes aliæ enim maiores minoresve sunt.

§. 4.

Hinc *summa laterum trianguli quorumvis duorum a et b est maior tertio.*

Nam aut anguli ad latus tertium ambo acuti erunt, aut alteruter rectus vel obtusus est. Si ambo acuti fuerint (Fig. 57.), perpendicularis d ad latus tertium e vertice opposito inter a et b cadit; atque tum $a > c$ et $b > c'$ (per præcedentia); itaque $a + b > c + c'$.

Si vero (Fig. 58.) $a' \perp c$, tum b solum quoque est $> c + c'$; tanto fortius $a' + b > c + c'$.

Item pro z obtuso u acutus est, cui perpendicularis e vertice obiecta cadit; adeoque b solum etiam maius latere tertio c' est, quia $b > c + c'$; et tanto fortius est $a + b > c'$.

Unde manifesto *triangulum nonnisi e talibus rectis construi potest*, quarum binarum quarumvis summa tertia recta maior est: atque ex omnibus talibus a, b, c construi potest, si ex una extremitate ipsius a radio b, et ex altera extremitate radio c circuli fiant; fiet enim (iuxta pag. 62) intersectio, e qua ad extrema ipsius a ductis rectis, triangulum petitum factum erit.

Sed patet etiam (Fig. 59.) e puncto trianguli interno rectis ad extrema baseos B ductis, *laterum extimorum summam esse summa internorum maiorem.*

Nam

$$a + d > b + c,$$

et

$$c + e > f;$$

adeoque

$$a + d + c + e > b + c + f;$$

unde

$$a + d + e > b + f.$$

At $U > u$, $V > v$; adeoque $U + V > u + v$.

§. 5.

Si hic (pag. 51) dictum legatur, erit in posterum semper summa omnium angulorum trianguli cuiusvis duobus rectis æqualis; atque producto latere quovis angulus externus summæ internorum oppositorum æqualis.

·2111211222.

Laterum angulorumque oppositorum dependentia mutua primario illa se offert, quod *lateri maiori angulus maior, et angulo maiori latus maius opponatur.*

Duorum laterum alterutrum aut recto vel obtuso opponitur, aut non. Quoad casum primum, si (Fig. 60.) latera sint hypotenusa a et cathetus c: est $a > c$, estque angulus ipsi a oppositus rectus R, adeoque maior quovis alio. Si obtusus sit, uti z: est quovis reliquorum maior, atque etiam $b > a'$, et $b > c + c'$ adeoque $b > c'$.

Quoad casum secundum autem demittatur e sectione duorum illorum laterum perpendicularis p ad tertium; cadet hæc utrique acuto u et v obiecta; sit $b > a$, cadet pro recta ad dextram ipsi c ad lævam æquali, b ulterius ad dextram; nam $a' = a$, et hypotenusarum ad dextram nonnisi ultra a' cadens ea maior est. Itaque fit $u > v$, nempe externus maior interno; sed huic u æqualis est alter ad lævam; adeoque uti $b > a$, est etiam $u > v$.

Conversa quoque patet: nam qualiavis fuerint u et v, si $u > v$, necessario et $b > a$; quia secus esset aut $b = a$ aut $a > b$, atque in casu priore esset $u = v$, in posteriore $v > u$.

Quæstio hinc suboritur, num duplo lateri duplus angulus obiiciatur &: facile patet dependentiam non talem quidem esse; sed ultro subvenit quærere, qualiter tamen angulus latusque oppositum a se mutuo dependeant; atque ista disquisitio originem *Trigonometriae* planæ dedit.

Supplementum numeri 21111.

Recta cum circulo nil commune habet, si perpendicularis e centro ad eam radio maior sit: nam quævis alia recta ad dictam e centro ducta est hypotenusa catheto maior (pag. 64).

Nec circulus cum circulo quidquam commune habet, si centrorum $\mathfrak{C}$, $\mathfrak{c}$ distantia summam radiorum excedat: nam si punctum $\mathfrak{p}$ commune esset, hoc aut in recta $\overline{\mathfrak{C}\mathfrak{c}}$, aut extra eam esset; prius fieri nequit, nam

$\mathfrak{C}\mathfrak{c} >$ se ipso esset; nec posterius fieri potest, quia in triangulo $\mathfrak{C}\mathfrak{p}\mathfrak{c}$ $\mathfrak{C}\mathfrak{p} + \mathfrak{p}\mathfrak{c} > \mathfrak{C}\mathfrak{c}$ (contra hypothesim).

'21112113.

Sequuntur *quatuor rectae*: quarum si nullum par sit parallelum, quadrilaterum *trapezoides* dictum oritur.

Si duo paria parallela fuerint, quum sectio supposita sit, aliqua recta α paris unius secabit aliquam β paris alterius; atque tum parallela ad α quoque secabit tam ipsam β, quam eam quæ $\parallel \beta$ est; secus enim facile patet, rectam utrinque infinitam duarum rectarum se mutuo secantium utrique parallelam esse, atque tum summam internorum in parallelismo dari minorem duobus rectis. Oritur autem hoc pacto *parallelogrammum*, cuius species referuntur (in Tomo I. pag. 14).

§. 1.

Quodvis parallelogrammum per diagonalem in duo triangula aequalia dispescitur.

Nam (Fig. 61.) diagonalis latus commune est, et propter alternos v, v et u, u æquales, anguli adiacentes in uno triangulo adiacentibus in altero æquales sunt.

§. 2.

Utcunque fuerint ductae $\mathfrak{ae}$, $\mathfrak{bd}$ (Fig. 62.), *si centro* $\mathfrak{c}$ *radio* $\mathfrak{ca}$ *abscentur* $\mathfrak{ca}$, $\mathfrak{cd}$, $\mathfrak{ce}$, $\mathfrak{cb}$ *aequalia*: $\mathfrak{abed}$ *est rectangulum.*

Nam quodvis par triangulorum verticalium est æquale per angulum inter latera æqualia interceptum verticalem; hinc $\mathfrak{ad} \parallel \mathfrak{be}$, $\mathfrak{ab} \parallel \mathfrak{de}$, nam alterni sunt æquales; itaque $4u + 4v = 4R$, quia quadrilateri omnium angulorum summa est summa angulorum omnium triangulorum, in quæ per diagonalem dispescitur, nempe $= 2.2R$. Itaque $u + v = R$, et omnes anguli $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{e}$, $\mathfrak{d}$ sunt æquales. Si angulus $\mathfrak{acd} = R$ tum $v + v = R$, $v = \frac{1}{2}R = u$, hinc $\mathfrak{ad} = \mathfrak{ab}$, nam triangulum $\mathfrak{bad}$ æquicrurum fit; est igitur $\mathfrak{abed}$ *quadratum.*

Patet autem, punctum $\mathfrak{a}$ ubivis in dimidia peripheria radii $\mathfrak{ac}$ fuerit, ductis rectis prioribus $\mathfrak{ace}$, $\mathfrak{ad}$ &, esse $u+v$ ad $\mathfrak{a}$ item rectum; adeoque *angulus in semicirculo*, ut dici solet, nempe cuius vertex in peripheria est et crura per extremitates diametri eunt, *rectus est.*

Si vero $\mathfrak{acd}$ rectus fuerit, atque $\mathfrak{cd}=\mathfrak{cb}$, et $\mathfrak{ca}$ quoque $=\mathfrak{ce}$, sed $\mathfrak{ac}$ non $=\mathfrak{cd}$, tum oritur *rhombus*; si $\mathfrak{acd}$ non sit rectus, tum sub conditione dicta fiet *rhomboides*. Quadrati rhombique alia constructio e (Fig. 91*a*, *b*, *c*, *d*) patet.

§. 3.

Si $\mathfrak{ab} \parallel$ *et* $=\mathfrak{cd}$, *etiam* (Fig. 61.) $\mathfrak{ac} \parallel$ *et* $=\mathfrak{bd}$.

Nam triangulum $\mathfrak{abc}=\mathfrak{dcb}$, per duo latera cum angulo intercepto æqualia; itaque et alterni v et v sunt æquales, et $\mathfrak{ac} \parallel$ et $=\mathfrak{bd}$.

§. 4.

Intersectio $\mathfrak{c}$ *duarum diagonalium* (Fig. 63.) *quamvis rectam per* $\mathfrak{c}$ *ductam bisecat.*

Nam triangulum $\mathfrak{fcd}=\mathfrak{gcb}$; nam anguli ad $\mathfrak{d}$ et $\mathfrak{b}$ sunt alterni, ita ad $\mathfrak{f}$ et $\mathfrak{g}$; $\mathfrak{cd}$ vero $=\mathfrak{cb}$, quia triangulum $\mathfrak{dce}=\mathfrak{bca}$. Est etiam manifesto $\mathfrak{afgb}=\mathfrak{egfd}$.

·2111211322.

Si unum par parallelum per alterum non parallelum secetur, præter *trapezium* fiunt sequentia.

§. 1.

Sit (Fig. 64.) par parallelum c et C, par non parallelum A et B; posteriores se invicem secabunt, et formabuntur duo triangula abc et ABC sibi invicem æquiangula; nam angulus unus communis est, et angulus ac externus interno angulo AC opponitur, ita angulus bc ipsi angulo BC. Sit pro n, m integris, $a=nu$ et $A=mu+\omega$ pro $\omega=0$ vel $<u$,

atque fiat a vertice incipiendo usque ad finem m-ti u, ab extremitate cuiusvis u, una parallela ad B et altera ad C. Facile patet ad a numero n, ad A numero m oriri hoc pacto triangula, quæ inter se æqualia sunt: nam unum latus u est in quovis, atque anguli adiacentes sunt æquales, nempe in quovis triangulo unus est internus externo oppositus, et alter externus interno oppositus. Patet quoque, quod si trianguli ad verticem latus ad dextram sit v et basis sit v', esse $a = nu$, $b = nv$, $c = nv'$, et $A = mu$ pro $\omega = 0$, atque $B = mv$, $C = mv'$, per parallelogrammorum ibidem exortorum latera opposita æqualia.

Quum vero

$$\omega < \frac{a}{n}, \quad \lambda < \frac{b}{n} \quad \text{ac} \quad v' = \frac{c}{n};$$

crescenteque n in infinitum, manifesto $\omega \curvearrowright 0$, $\lambda \curvearrowright 0$, $v' \curvearrowright 0$; sed etiam $\varkappa \curvearrowright 0$, quia e fine ipsius $\varkappa$ ducta ad A parallela patet v' secari, adeoque $\varkappa < v'$. Consequenter typum proportionis applicari patet, essetque

$$A : a = B : b = C : c.$$

§. 2.

Hinc *si in duobus triangulis duo anguli sint duobus angulis aequales, latera prouti aequalibus angulis opponuntur sunt proportionalia.* Id est *per aequalitatem angulorum ponitur laterum proportio,* uti conversim *per laterum proportionem ponitur aequiangulitas triangulorum.* Sed ponitur præterea generaliter in triangulis laterum proportio simul cum angulorum illis oppositorum æqualitate, quod per *similitudinem* exprimi solet, *per duo latera* in iis *duobus proportionalia cum angulo intercepto aequali*; et pariter si latera unius sint a, b, c, et alterius A, B, C, ac singula utrinque in infinitum producta concipiantur, atque sive $a \parallel A$, $b \parallel B$, $c \parallel C$, sive a ad A, b ad B, c ad C perpendicularia sint, erunt

$$\wedge ab = \wedge AB, \quad \wedge ac = \wedge AC, \quad \text{et} \quad \wedge bc = \wedge BC;$$

adeoque triangula *similia. Quinque igitur hae conditiones similitudinis triangulorum,* nempe quarum quævis sufficit, exponendæ veniunt.

I. Nam quoad *primum*, sit (Fig. 65.)

$$\wedge AB = \wedge ab, \ \wedge AC = \wedge ac;$$

tum etiam tertius æqualis tertio.

Sit $a < A$; nam si $a = A$, patet, secus autem alterutrum est minus altero. Ponatur a super A, et angulus ab super angulum AB, sit y in fine ipsius a parallelum ad C; orietur $\triangle axy = \triangle abc$; nam angulus ad finem ipsius a erit externus interno angulo AC oppositus, qui est $= \wedge ac$ *per hypothesim*; adeoque latus a cum duobus adiacentibus angulis in utroque triangulo sunt æqualia.

Itaque cum trianguli axy latera sint proportionalia lateribus maioris trianguli, sunt etiam trianguli abc latera iisdem proportionalia.

II. *Altera similitudinis* triangulorum *conditio generalis, nempe conversa prioris* est, si

$$A : a = B : b = C : c.$$

Fiet enim, parallela ad C ex fine ipsius a ducta,

$$A : a = B : x = C : y;$$

adeoque

$$x = \frac{aB}{A}$$

uti b; et

$$y = \frac{aC}{A}$$

uti c; itaque $x = b$, et $y = c$, atque $\triangle axy = \triangle abc$; est ergo et hoc uti illud eidem triangulo ABC æquiangulum.

III. *Tertia conditio similitudinis generalis* est, si (Fig. 65.)

$$A : a = B : b, \quad \text{ac} \quad \wedge AB = \wedge ab.$$

Ponatur nempe triangulum abc ita super ABC, ut a in A et angulus ab super angulum AB cadat, sitque $y \parallel C$; erit $A : a = B : x$.

Consequenter et hic ut in præcedentibus erit $x = b$; adeoque

$\Delta axy = \Delta abc$; et hoc quoque æquiangulum ipsi triangulo ABC, uti triangulo axy est.

Hinc autem *modus* oritur $\frac{n}{m}$-tum *rectae cuiusvis C geometrice exhibendi*, adeoque C per $\frac{n}{m}$ *geometrice multiplicandi*, aut per $\frac{m}{n}$ *dividendi*. Sit ex. gr. (Fig. 64.*) $n = 2$, $m = 5$; ponatur ad initium ipsius C ad quemlibet angulum recta indefinita; item ab initio ipsius C ponantur in rectam dictam rectæ u qualesvis æquales se invicem excipientes numero m, atque inde, ubi desinunt, ponantur retrorsum numero n; erit parallela ad C e fine n-tæ partis, usque ad rectam e fine m-tæ partis (antrorsum) per extremitatem alteram ipsius C ductam, recta quæsita. Ex. gr. si $A = mu$, et $a = nu$, erit et $C = mv$, et $c = nv$, adeoque c recta quæsita est. Patet autem parallelam pro $n > m$ infra C cadere, et pro $n = 1$ esse $c = \frac{C}{m}$.

IV. *Quarta conditio generalis similitudinis* triangulorum. Sit (Fig. 67.) $\mathfrak{C}c$ ipsi C parallela; erunt anguli partim ob verticalitatem partim ob parallelismum illi, qui adscripti sunt; et erit in illo puncto sectionis rectarum commune germen quasi omnium triangulorum, quorum latus unum ipsi A, alterum ipsi B, tertium ipsi C parallelum est.

Nam $\mathfrak{C}c$ motu parallelo in quamvis rectam ipsi C parallelam pervenire potest, adeoque in c quoque; $\mathfrak{B}b$ in quamvis ipsi B parallelam, adeoque in b quoque; $\mathfrak{A}a$ in quamvis ipsi A parallelam, adeoque in a quoque. Si duæ rectæ sint duabus parallelæ, illarum angulus est æqualis angulo harum (pag. 53); itaque

$$\wedge ab = \wedge AB, \ \wedge ac = \wedge AC, \text{ et } \wedge bc = \wedge BC.$$

Sed A cum B facit angulum z et alterum deinceps $u + v$; A cum C facit u et alterum $v + z$; B cum C facit v et alterum $z + u$. Dicatur Z deinceps ipsius z, et V deinceps ipsius v, ac U deinceps ipsius u; certum est in triangulo abc esse angulum ab aut $= z$ aut $= Z$, ita angulum ac esse aut u aut U, et angulum bc esse aut v aut V; itaque sunt sex literæ, tres minusculæ tres maiusculæ nominis eiusdem

$$z,\ Z = u + v$$
$$v,\ V = z + u$$
$$u,\ U = z + v.$$

In triangulo duo deinceps esse nequeunt, adeoque litera parva et magna simul non accipiuntur: erunt itaque combinationes sequentes, z, v, u; Z, V, U; z, v, U; z, u, V; v, u, Z; Z, V, u; Z, U, v; V, U, z; quarum præter primam et illas, in quibus una tantum maior litera est, quævis summam angulorum trium dat duobus rectis maiorem; nam in triangulo ABC est $u+v+z=2R$, et substituto valore cuiusvis literæ maioris ex. gr. $Z+V+u=u+v+z+u+u$ patet excedi $u+v+z$, adeoque duos rectos; sed si una tantum maior litera sit, ex. gr. $Z+u+v=u+v+u+v=2u+2v$, hoc potest esse $=2R$, si $u+v=R=z$, adeoque z et Z duo deinceps æquales.

Itaque in triangulo abc angulus ab nonnisi $=z$, angulus ac nonnisi $=u$, et angulus bc nonnisi $=v$ esse potest.

V. *Quinta conditio similitudinis* triangulorum sequitur. (Fig. 68.). Sit

$$\mathfrak{ab}=a,\ \mathfrak{bc}=b,\ \mathfrak{ca}=c.$$

Quum in triangulo dentur duo acuti, sit u ad $\mathfrak{b}$ acutus; fiatque e lateris $\mathfrak{cb}$ puncto $\mathfrak{k}$ interno perpendicularis $\mathfrak{kh}$ ad $\mathfrak{ab}$, fiatque e puncto huius interno $\mathfrak{A}$ perpendicularis $\mathfrak{Al}$ ad $\mathfrak{ac}$, et $\mathfrak{Ar} \perp \mathfrak{cb}$; atque productis $\mathfrak{Ar}$, $\mathfrak{Al}$, $\mathfrak{cb}$, $\mathfrak{kh}$, moveatur perpendicularis $\mathfrak{Ar}$ super $\mathfrak{b}\tilde{\mathfrak{c}}$. In triangulo $\mathfrak{khb}$ est angulus $q<R$, gaudetque suo verticali q, adeoque propter summam internorum $<2R$ fit triangulum $\mathfrak{eBk}$, in quo est $u'+q=R$, at in triangulo $\mathfrak{khb}$ quoque est $q+u=R$; itaque $u'=u$.

Est porro $v'+x=2R$, sed in quadrilatero $\mathfrak{lahA}$ est $v+x=2R$; adeoque $v'+x=v+x$, et hinc $v'=v$. Est igitur $v'+u'<2R$, quia $v+u<2R$ est. Consequenter fit triangulum $\mathfrak{ABC}$, et in hoc tertius angulus $z'=$ tertio nempe z in triangulo $\mathfrak{abc}$.

Consideratis autem trianguli $\mathfrak{ABC}$ et $\mathfrak{abc}$ lateribus angulisque dictis, patet cuivis angulo unius ex. gr. a lateribus A, B facto esse illum alterius trianguli æqualem, qui a talibus lateribus a, b efficitur, ut $a \perp A$, et $b \perp B$ sit pro $\mathfrak{AB} = A$, $\mathfrak{BC} = B$.

Applicetur iam præcedens: est (Fig. 69.) $\mathfrak{Ar} \parallel \mathfrak{BC}$, quia e figura præcedente sunt $\mathfrak{Ar}$ et $\mathfrak{Ce}$ ad idem $\mathfrak{be}$ perpendiculares; unde per angulos alternos verticalesque patet germen trianguli cuiusvis $a'b'c'$, cuius latus $a' \parallel A$, $b' \parallel B$, $c' \parallel C$, esse ad $\mathfrak{A}$, ut antea; adeoque omnia ibi dicta locum habere, quum quodvis A, quod perpendiculare ad $a = \mathfrak{ab}$ est, parallelum ad $\mathfrak{AB}$ sit, et quodvis B, quod perpendiculare ad $b = \mathfrak{bc}$ est, parallelum ad $\mathfrak{Aa}$ sit, ac quodvis C, quod perpendiculare ad $c = \mathfrak{ca}$ est, parallelum ad $\mathfrak{CA}$ sit.

§. 3.

Ex

$$A : a = B : b$$

autem (in §. 1. pag. 69) sequitur etiam

$$a : A - a = b : B - b;$$

nempe *segmenta crurum per rectam basi parallelam facta in proportione esse.*

Conversa quoque huius valet: nempe *si segmenta sint in proportione, recta secans parallela fit.*

Nam (Fig. 66.) si

$$a' : a = b' : b,$$

nec tamen $c \parallel C$, fiat parallela alia k supra vel infra c, et sit pro k ex. gr. segmentum x; erit

$$a' : a = b' + \omega : x,$$

et hinc

$$x = \frac{a}{a'}(b' + \omega);$$

sed ex

$$a' : a = b' : b$$

est

$$b = \frac{a}{a'} \cdot b';$$

unde $x > b$, nempe pars $>$ toto. Pariter patet, si parallela infra c cadat. Estque manifesto (Fig. 70.) ubivis accipiantur $\mathfrak{k}$, $\mathfrak{i}$, quum $\alpha : \alpha = \beta : \beta$ sit, $\mathfrak{cm}$ recta per $\mathfrak{c}$ ad $\mathfrak{ab}$ *parallela.*

§. 4.

(Fig. 66.). *Si $A:a=C:c$, et una extremitas rectae c ad C parallelae sit in A ad extremitatem ipsius a: altera in B erit.*

Nam parallela c producta secat rectam B; fiat $c\pm\omega$ ex c; erit $A:a=C:c\pm\omega$, atque hinc $c\pm\omega=\frac{aC}{A}$; sed etiam $c=\frac{aC}{A}$ (per $A:a=C:c$ suppositum). Est ergo $c\pm\omega=c$, adeoque $\omega=0$.

§. 5.

Si $A:a=B:b$, est etiam $A:B=a:b$; adeoque si $A=nu$ atque $B=mu$ pro n, m integris: est etiam $a=nv$ et $b=mv$. Hinc si A contineat n milliaria, atque B contineat m milliaria: et a continet n milliaria minuta, atque b continet m milliaria minuta, si nempe pars n-ta ipsius a dicatur *milliare minutum.*

Atque etiam si in triangulis ABC, abc, $A=n$ milliaribus, $B=m$ milliaribus, et $C=\mu$ milliaribus, atque $a=n$ pollicibus, $b=m$ pollicibus, $c=\mu$ pollicibus: patet esse

$$A:B=a:b, \text{ et } A:C=a:c;$$

adeoque

$$A:a=B:b, \text{ et } A:a=C:c;$$

consequenter tria latera tribus esse proportionalia; atque triangula ABC, abc esse similia.

Imo etiam si in triangulis ABC, abc fuerit

$$A:a=u:v,$$

(seu brevius unum latus uni proportionale, nempe uti u ad v), et angulus ipsi B oppositus æqualis erit angulo ipsi b opposito, atque angulus ipsi C oppositus æqualis angulo ipsi c opposito: tum etiam

$$B:b=u:v \quad \text{et} \quad C:c=u:v.$$

Nam tum est

$$A:a=B:b=C:c,$$

adeoque quia

$$A:a=u:v,$$

est etiam

$$B:b=u:v=C:c.$$

§. 6.

Si (Fig. 71.) e vertice trianguli rectanguli demittatur ad hypotenusam perpendicularis, orientur duo triangula α, β toti triangulo, adeoque sibi invicem similia; atque hinc *perpendicularis* dicta *est proportionalis media inter segmenta hypotenusae*, atque *cathetus quivis est proportionalis media inter hypotenusam et segmentum adiacens.*

Namque in toto triangulo et in triangulo α est u angulus communis, et $R = v' + u'$, itaque tertius æqualis tertio, nempe $v' = v$; pariter in β et toto triangulo est v communis, atque $R = v' + u'$, adeoque et $u' = u$. In triangulis α, β et toto ergo sunt in quovis anguli R, u, v; adeoque in quibusvis binis triangulis latera sunt, prouti angulis æqualibus opponuntur, proportionalia.

Nempe adsumantur prius anguli v, u in α, item v, u in β, tum v, R in α, et v, R in toto; fiet e priore

$$i : y = y : l,$$

atque e posteriore fit

$$i : K = K : h;$$

unde

$$y^2 = il \quad \text{et} \quad K^2 = ih,$$

consequenter

$$y = \sqrt{il} \quad \text{et} \quad K = \sqrt{ih}.$$

Si igitur ex. gr. i unitas rectarum ponatur, et iungatur l in directum; atque e meditullio ipsius $i + l$ radio $\frac{i+l}{2}$ semicirculus fiat, et e puncto rectarum i et l communi erigatur perpendicularis usque ad peripheriam: erit ductis inde ad diametri extremitates rectis angulus in semicirculo rectus (pag. 68), atque perpendicularis erecta radix quadrata ex l. Pariter patet, et si non $i = 1$, sed radix e facto ex i et l extrahenda fuerit, eam $= y$ esse. Idem etiam per cathetum fieri posse patet.

Unde etiam quum

$$K^2 = hi,$$

et

$$k^2 = hl = h(h-i) = h^2 - hi,$$

fit addendo

$$K^2 + k^2 = h^2;$$

atque hinc $k^2 = h^2 - K^2$, et

$$k = \sqrt{h^2 - K^2};$$

adeoque *quaecunque bina e cathetis hypotenusaque data fuerint, tertium innotescit.*

De secundis potentiis adhuc tantum sermo est, de areis quadratorum inferius dicetur.

Si vero (Fig. 72.) u *obtusus* fuerit, demissa perpendiculari d, erit

$$h^2 = d^2 + (K+x)^2 = d^2 + K^2 + 2Kx + x^2;$$

sed $k^2 = d^2 + x^2$; adeoque

$$h^2 = k^2 + K^2 + 2Kx.$$

Atque si u *acutus* fuerit: tum aut et v acutus erit, aut v rectus vel obtusus erit; si v acutus sit (Fig. 73.), tum perpendicularis y intus cadet, fietque

$$y^2 = k^2 - x^2,$$

item

$$y^2 = h^2 - (K-x)^2,$$

atque hinc

$$k^2 = h^2 - K^2 + 2Kx,$$

adeoque

$$h^2 = k^2 + K^2 - 2Kx.$$

Si vero v obtusus esset: tum per præcedentia esset (Fig. 74.) $k^2 = h^2 + K^2 + 2Kz$, adeoque $h^2 = k^2 - K^2 - 2Kz$. Pro v recto fit $z = 0$.

E quo manifestum est:

a) quod si $h^2 = k^2 + K^2$, *angulum ipsi h oppositum nec obtusum nec acutum, sed rectum esse.*

b) e lateribus dignosci, num triangulum rectangulum, acutangulum vel obtusangulum fuerit, et cuivis lateri qualis angulus opponatur.

c) (Fig. 73.). Ex $k^2 = h^2 - K^2 + 2Kx$ prodit

$$x = \frac{k^2 + K^2 - h^2}{2K},$$

ubi k et K intercipiunt angulum u, h vero ei opponitur, atque recta ab extremitate ipsius x ad apicem est perpendicularis ad K.

§. 7.

Sed etiam si $A = 1$ fuerit, (Fig. 75.) eiusque extremitas cum extremitate factoris dati B, in alterum crus positi, recta iungatur; atque huic rectæ per finem factoris alterius quoque dati a, in crus ubi A est, ab apice positi, parallela fiat: erit b *factum e factoribus* B et a; quia

$$A : a = B : b, \quad \text{seu} \quad A : B = a : b.$$

Si vero facto dato b et alterutro factore B, huius socius quæratur: unitatis A et factoris dati B extremitatibus recta iunctis, ab extremitate ipsius b, ex apice ad crus in quo B est translati, huic rectæ parallela fiat: erit recta in crure, in quo A est, ab apice usque ad parallelam factor socius, nempe *quotus* a ex b diviso per B.

Patet autem tam in multiplicatione quam in divisione angulum rectarum A, B arbitrarium esse.

Idem pluribus quoque modis fieri posse e dictis liquet.

·21112114.

Plures rectae numero quovis.

De *parallelismo generali* præter in pag. 19 dicta plura referre, uti et subdivisioni figuræ rectilineæ in triangula immorari brevitas necessaria vetat: quamvis non solum partem plani a figura quavis rectilinea, sed etiam a duabus figuris rectilineis, ex. gr. a duobus polygonis, clausam in triangula dispesci posse demonstrari debeat, possitque.

·21112211422.

Si quævis figura rectilinea $\mathfrak{ABC}$ . . . (Fig. 76.) fuerit in triangula subdivisa; atque e puncto $\mathfrak{k}$ extra eam sito, quamvis proprie ubivis in spatio accipi queat, ad omnes angulorum apices rectæ cogitentur; et quavis harum per quantitatem eandem α multiplicata, factum in eadem recta e puncto $\mathfrak{k}$ incipiendo accipiatur; nempe $\alpha . \mathfrak{k}\mathfrak{A} = \mathfrak{k}\mathfrak{a}$ in $\overline{\mathfrak{k}\mathfrak{A}}$, $\alpha . \mathfrak{k}\mathfrak{B} = \mathfrak{k}\mathfrak{b}$ in $\overline{\mathfrak{k}\mathfrak{B}}$ &; atque fiant rectæ $\mathfrak{a}\mathfrak{b}$, $\mathfrak{b}\mathfrak{c}$ . . .; imo si a litera magna ad aliam fuerit recta in $\mathfrak{A}\mathfrak{B}\mathfrak{C}$ . . ., fiat et inter literas minores nominis eiusdem: erit $\mathfrak{a}\mathfrak{b}\mathfrak{c}$ . . . *figura* ipsi $\mathfrak{A}\mathfrak{B}\mathfrak{C}$ . . . *similis per definitionem* (pag. 10), uti singula triangula sibi invicem respondentia; et simul latera duarum figurarum, uti se invicem excipiunt, in eadem proportione, angulique laterum correspondentium æquales erunt; imo quævis puncta $\mathfrak{P}$, $\mathfrak{Q}$ fuerint, recta $\mathfrak{p}\mathfrak{q} = \alpha . \mathfrak{P}\mathfrak{Q}$ erit.

Et *conversim* figura quævis $\mathfrak{a}\mathfrak{b}\mathfrak{c}$ . . ., cuius latera, uti se invicem excipiunt, proportionalia lateribus ipsius $\mathfrak{A}\mathfrak{B}\mathfrak{C}$ . . ., angulique æquales eo ordine sunt, hoc pacto generari potest; imo si $\mathfrak{a}\mathfrak{b} = \alpha . \mathfrak{A}\mathfrak{B}$, *quaevis figura, cuius latera modo dicto proportionalia angulique aequales sunt, dictae* $\mathfrak{a}\mathfrak{b}\mathfrak{c}$ *congruit.*

Nam

I. Etsi ad omnia puncta figuræ *iuxta definitionem* rectæ concipiantur, idem prodibit. Quodvis punctum $\mathfrak{P}$ enim concipiatur ex. gr. in recta $\mathfrak{A}\mathfrak{B}$, punctum illi homologum $\mathfrak{p}$ prodibit in recta $\mathfrak{a}\mathfrak{b}$; est enim tum

$$\alpha . \mathfrak{k}\mathfrak{A} = \mathfrak{k}\mathfrak{a}, \quad \alpha . \mathfrak{k}\mathfrak{B} = \mathfrak{k}\mathfrak{b}, \quad \alpha . \mathfrak{k}\mathfrak{P} = \mathfrak{k}\mathfrak{p};$$

itaque

$$\mathfrak{k}\mathfrak{A} : \mathfrak{k}\mathfrak{a} = 1 : \alpha = \mathfrak{k}\mathfrak{B} : \mathfrak{k}\mathfrak{b} = \mathfrak{k}\mathfrak{P} : \mathfrak{k}\mathfrak{p};$$

sunt igitur crura $\mathfrak{k}\mathfrak{a}$, $\mathfrak{k}\mathfrak{b}$, $\mathfrak{k}\mathfrak{p}$ ipsi $\mathfrak{k}\mathfrak{A}$, $\mathfrak{k}\mathfrak{B}$, $\mathfrak{k}\mathfrak{P}$ proportionalia cum angulis interceptis communibus; est ergo et $\mathfrak{a}\mathfrak{b}$ ipsi $\mathfrak{A}\mathfrak{B}$, ita $\mathfrak{a}\mathfrak{p}$ ipsi $\mathfrak{A}\mathfrak{P}$ proportionale; adeoque $\mathfrak{a}\mathfrak{b} \parallel \mathfrak{A}\mathfrak{B}$ et $\mathfrak{a}\mathfrak{p} \parallel \mathfrak{A}\mathfrak{P}$; per $\mathfrak{a}$ autem ipsi $\mathfrak{A}\mathfrak{B}$ unica parallela datur; itaque $\mathfrak{p}$ punctum rectæ $\mathfrak{a}\mathfrak{b}$ est.

II. Quodvis latus $\mathfrak{A}\mathfrak{E}$ ipsi $\mathfrak{a}\mathfrak{e}$ homologum in eadem proportione est uti $\mathfrak{A}\mathfrak{B}$ ad $\mathfrak{a}\mathfrak{b}$: nam

$$\mathfrak{k}\mathfrak{E} : \mathfrak{k}\mathfrak{e} = 1 : \alpha = \mathfrak{k}\mathfrak{A} : \mathfrak{k}\mathfrak{a};$$

est vero angulus inter crura $\mathfrak{k}\mathfrak{A}$, $\mathfrak{k}\mathfrak{E}$ cruribus $\mathfrak{k}\mathfrak{a}$, $\mathfrak{k}\mathfrak{e}$ proportionalia communis; quapropter et $\mathfrak{A}\mathfrak{E}$ ipsi $\mathfrak{a}\mathfrak{e}$ proportionale est.

Sed anguli etiam homologi æquales sunt: nempe ex. gr. quivis anguli $\mathfrak{AED}$ et $\mathfrak{aed}$ considerentur, concipiantur triangula $\mathfrak{ADE}$ et $\mathfrak{ade}$; est

$$\mathfrak{AD} : \mathfrak{ad} = \mathfrak{AE} : \mathfrak{ae} = \mathfrak{DE} : \mathfrak{de};$$

itaque et anguli respondentes æquales (pag. 70), adeoque

$$\wedge \mathfrak{AED} = \mathfrak{aed},$$

atque si angulus convexus sit, et convexus convexo æqualis est. Pariter de angulis $\mathfrak{ABC}$ et $\mathfrak{abc}$ patet.

III. Sint etiam quibusvis punctis $\mathfrak{P}$ et $\mathfrak{Q}$ homologa $\mathfrak{p}$ et $\mathfrak{q}$; erit recta $\mathfrak{PQ}$ ipsi $\mathfrak{pq}$ homologa, eique proportionalis. Nam

$$\mathfrak{kP} : \mathfrak{kp} = \mathfrak{kQ} : \mathfrak{kq} = \mathfrak{AB} : \mathfrak{ab},$$

atque quodvis punctum rectæ $\mathfrak{PQ}$ fuerit, illi homologum, ut antea, in $\mathfrak{pq}$ cadit.

IV. Quævis figura rectilinea $\mathfrak{abc}$ ... fuerit talis, ut latera, uti se invicem excipiunt, proportionalia angulique æquales sint: illa modo dicto generari potest. Sit enim $\mathfrak{ab} = \alpha . \mathfrak{AB}$ &; talem prodire patet. Et quævis alia $\mathfrak{a}' \mathfrak{b}' \mathfrak{c}'$ ... fuerit, cuius latera ad latera literis maioribus denotata sint uti α ad 1, angulique inter crura proportionalia æquales: figuræ dictæ congruere potest. Nam posito $\mathfrak{a}' \mathfrak{b}'$ in $\mathfrak{ab}$, ita ut $\mathfrak{a}'$ in $\mathfrak{a}$ et $\mathfrak{b}'$ in $\mathfrak{b}$ cadat, vertendo in eandem plagam, propter angulos ad $\mathfrak{a}'$ et $\mathfrak{a}$ ac $\mathfrak{b}'$ et $\mathfrak{b}$ æquales et latera æqualia & ..., manifesto congruent.

Patet vero superius α etiam negative accipi posse, ut omnia facta ultra $\mathfrak{k}$ in altera plaga accipiantur.

Scholion. Notandum autem est, hic iam ut theorema demonstrari posse elegantem *Wolfii* observationem, quam pro definitione rectæ haberi voluit: quod nempe omnium formarum sola recta utrinque finita sit, cui quævis pars continua similis sit; sed huic quoque brevitas necessaria supersedere iubet.

2111212.

Rectae cum circulo minima sectio punctum est, maxima e duobus punctis constat.

§. 1.

(Fig. 77.). Sit ab recta inter duo puncta peripheriæ, et m sit medium arcus ab, ac c sit centrum; superponatur forma ex arcu am et rectis ac, cm composita ipsi mcb; patet rectæ mc quodvis punctum in suo loco manere, et dictas formas congruere, adeoque oa super ob cadente, angulos ad o esse æquales, adeoque rectos.

Hinc perpendicularis *e medio chordae per centrum transit, atque medium arcus medium chordae et centrum sunt in recta eadem ad chordam e centro perpendiculari.*

§. 2.

(Fig. 78.). Modus hinc se offert, datis quibusvis tribus punctis a, b, d non in recta sitis, centrum c reperire, e quo radio ca scripti circuli peripheria per a, b, d eat. Nempe si ab, bd modo (pag. 63) bisecentur, perpendicularis e meditullio f rectæ ab perpendicularem e meditullio i rectæ bd secabit: nam recta fi cum quavis perpendicularium dictarum efficiet angulum $< R$, adeoque summa internorum est $< 2R$. Sit c sectio perpendicularium; erit

$$\triangle afc = bfc, \quad \text{adeoque} \quad ac = bc,$$

ita

$$\triangle bic = dic, \quad \text{adeoque} \quad bc = dc;$$

consequenter

$$ac = bc = cd.$$

Unde etiam pari modo arcus cuiusvis, quum in eo tria puncta quævis accipere liceat, neque in recta sint, centrum reperire licet. Nempe

§. 3.

Recta circulum in tribus punctis secare nequit. Nam tum duæ chordæ essent eiusdem rectæ partes, et centrum circuli esset in perpendiculari ex utriusque medio erecta; adeoque duæ perpendiculares de eadem recta secarent se.

§. 4.

(Fig. 77.). Patet etiam chordam totam præter extrema intra circulum cadere. Nam pars arcus nequit intra cadere, pars extra; quia tum haberet recta $\overset{\frown}{ab}$ cum circulo adhuc punctum commune, ubi ex a motum in peripheria punctum ex una plaga in alteram transiret eundo usque ad b; neque in eandem plagam cadere queunt duo arcus; nam tum esset $cf=ca$ (contra pag. 64).

§. 5.

(Fig. 79.). *Sectio minima rectae cum circulo est punctum.* Nam si bf faciat cum radio bc rectum, b erit punctum contactus rectæ et circuli centro c scripti, nec ullum aliud punctum recta bf quamvis infinita in eodem circulo habet. Nam si haberet ad dextram, item ad lævam esset; itaque duobus punctis fieret sectio maior. Vocatur bf tangens.

Est vero etiam conversim tangens ad radium perpendicularis; nam nisi id sit, sit bd alia tangens, hæc faciet ab aliqua parte angulum acutum cum radio; perpendicularis co ex c ad bd acuto angulo obiecta cadit, adeoque hypotenusa bc semper decrescit usque ad o; itaque quævis recta inter b et o ad c ducta est radio minor; adeoque bo intra peripheriam cadit, et quum continuata egrediatur, tangens non est.

Quamvis autem e quovis puncto arcus bd possit ad tangentem bf demitti perpendicularis, nulla tamen recta ex b inter arcum bd et tangentem bf duci potest. Nam quævis recta bd ducatur inter bc et bf, angulus rectus illico decrescet, et demonstratione præcedente applicata, patet punctum ex b in recta illa viam infra peripheriam incipere, ut per arcum obiectum transeat.

*21112122.

Plures rectae circulum secantes;

*211121221.

Se invicem quoque secantes;

*21112211.

In eodem puncto;

*21112122111.

In peripheria.

I. Considerentur prius *duae tantum.*

§. 1.

Si prius *alterutra* duarum *tangens* circuli sit: *est anguli v, quem tangens cum chorda facit, quantitas dimidio arcus a chorda subtensi aequalis.*

Nam (Fig. 80.) si chorda per centrum transit, tum v est rectus, et arcus tunc subtensi dimidium est quadrans. Alioquin autem fiat per centrum chorda parallela; perpendicularis e medio chordæ datæ per centrum transit: eritque $u+v$ ad centrum $=R$; sed alterni u et u sunt æquales, atque $u+v$ angulus tangentis cum radio est $=R$; itaque angulus v ad centrum $=v$ illi, quem tangens cum chorda facit; prioris v quantitas $=$ dimidio arcus subtensi; adeoque etiam posterioris v quantitas eadem est.

Idem patet de angulo deinceps $u+R$; nempe $v+u+R$ est totius circuli dimidium; itaque subtracto v, et dimidio arcus a chorda subtensi, manebit $u+R=$ arcus a chorda ab altera parte subtensi dimidio.

§. 2.

Hinc si *duae chordae a, b* se invicem in peripheriæ puncto $\mathfrak{k}$ secent (Fig. 81.), orietur *u angulus ad peripheriam*. Fiat tangens ad punctum $\mathfrak{k}$.

Est $u+v+z=$ totius peripheriæ dimidio, $v+z=$ dimidiæ summæ arcuum subtensorum; manet itaque pro *u dimidium arcus illius cui insistit.*

Et hinc patet (uti pag. 68) angulum v (Fig. 82.) *in semicirculo esse rectum*; et quadrilateri $\mathfrak{abcd}$ circulo inscripti angulos oppositos simul duos rectos efficere; nempe $p+q$, ita $v+x=$ dimidio peripheriæ totius.

Sunt etiam arcus α, β per chordas parallelas absecti æquales propter alternos u et u, simul angulos ad peripheriam, æquales. Ita si tangens chordæ parallela fuerit, sunt alterni z et z æquales; quorum unius quantitas $\frac{\gamma}{2}$ est, alter autem (pag. 82) $=\frac{\delta}{2}$ est.

II. Si *plures* rectæ secuerint se invicem in eodem peripheriæ puncto (Fig. 83.): est

$$r+r>b+b';$$

id est diameter est chordarum maxima. Porro

$$a+b'>r \text{ et } r=a+a',$$

atque hinc

$$b'>a';$$

sed

$$a'+b>c;$$

itaque

$$b'+b>c.$$

Decrescente igitur arcu infra semicirculum, chorda quoque decrescit, ac maiori arcui chorda maior, maiorique chordae arcus maior respondet.

*2111212211 2.

De sectione intra peripheriam in eodem puncto.

I. *Prius duarum rectarum* (Fig. 84.).

1. *Quantitas anguli u aequalis est* $\frac{1}{2}(\alpha+\beta)$.

Nam ducta parallela, fit $u'=u$; est vero

$$u'=\frac{1}{2}(\alpha'+\beta), \text{ atque } \alpha=\alpha'.$$

Consequenter

$$u = \frac{1}{2}(\alpha + \beta).$$

2. Triangula ibidem verticalia sunt similia, quia anguli ad peripheriam iisdem arcubus insistunt. Hinc $a : b = b' : a'$, atque

$$aa' = bb';$$

nempe *facta segmentorum sunt aequalia.*

II. *Si duabus rectis plures secuerint se invicem intra peripheriam* (Fig. 85.), sitque sectio extra centrum c: rectarum inde usque ad peripheriam *minima* p, *maxima* $s+r$ est; atque rectæ dictæ a p crescunt semper porro usque ad $s+r$.

Nam

$$s + a > k + k' \text{ et } k + k' = s + p;$$

hinc

$$a > p.$$

Porro

$$b + k' > a;$$

sed

$$b' + k > r, \quad r = k + k';$$

hinc

$$b' > k';$$

itaque in $b + k' > a$ substituendo b' ipsi k', fiet

$$b + b' > a.$$

Item

$$s + r > b + b'.$$

'2111212213.

De sectione extra peripheriam.

I. *Duarum rectarum* (Fig. 86.).

1. Est, parallela ducta, externus $u' = u$ interno opposito; adeoque etiam anguli quantitas eadem est, nempe $\frac{\beta - \alpha'}{2}$; sed $\alpha = \alpha'$ (pag. 83);

itaque

$$u=\frac{\beta-\alpha}{2}.$$

2. *Est*

$$A:B=b:a.$$

Nam $x+y=2R$, sed $y+v$ quoque $=2R$, nam sunt duo anguli ad peripheriam, ambo toti insistentes circulo: adeoque $x=v$; u vero est communis duobus triangulis; itaque proportione instituta patet esse etiam

$$Aa=Bb.$$

II. Si *duabus plures* secuerint se invicem (Fig. 87.): $\mathfrak{ag}$ minima, $\mathfrak{af}$ maxima est; illa crescit usque ad tangentem $\mathfrak{ab}$, hæc decrescit eousque.

Nam

$$\mathfrak{ac}+\mathfrak{ce}=\mathfrak{af}>\mathfrak{ae};$$

$$\mathfrak{ck}+\mathfrak{ke}>\mathfrak{ce}=\mathfrak{ck}+\mathfrak{kd},$$

hinc

$$\mathfrak{ke}>\mathfrak{kd};$$

sed

$$\mathfrak{dk}+\mathfrak{ka}>\mathfrak{da},$$

itaque

$$\mathfrak{ek}+\mathfrak{ka}>\mathfrak{da}.$$

Idem pro tangente, si $\mathfrak{k}'$ pro $\mathfrak{k}$ et $\mathfrak{b}$ pro $\mathfrak{d}$ ponatur, applicari patet.

Demum

$$\mathfrak{ah}+\mathfrak{hc}<\mathfrak{ai}+\mathfrak{ic}$$

(pag. 65), sed

$$\mathfrak{ic}=\mathfrak{hc};$$

itaque

$$\mathfrak{ah}<\mathfrak{ai}.$$

Ita

$$\mathfrak{ag}+\mathfrak{gc}<\mathfrak{ah}+\mathfrak{hc},$$

adeoque

$$\mathfrak{ag}<\mathfrak{ah}.$$

2111212212.

In ·2111212212 usque ad ·211121222 (numerum posteriorem, ipsum iam pag. 82 relatum, excludendo) figuræ rectilineæ continentur, quarum aut apices omnes in peripheria sunt, aut latera omnia eam tangunt. In casu priore *rectilineum* circulo *inscriptum*, *circulus* autem *rectilineo circumscriptus*; in posteriore autem *circulus rectilineo inscriptus*, et *rectilineum circulo circumscriptum* dicuntur.

De quovis rectilineo P itaque quatuor quæstiones oriuntur:

1) circa P circulum scribere,

2) circulo ipsi P æquiangulum inscribere,

3) ipsi P circulum inscribere,

4) circulo ipsi P æquiangulum circumscribere.

§. 1.

Sit prius exemplo triangulum. Circa triangulum quodvis scribi circulus (pag. 80) potest; atque si radii per apices producantur, quivis circulus centri eiusdem in tribus punctis secabitur, quæ si rectis iungantur, orietur triangulum priori æquiangulum; sunt enim latera lateribus parallela, quia crura e centro sunt ut radius ad radium.

Si trianguli $\mathfrak{abc}$ (Fig. 88.) anguli u, v bifariam divisi sint: patet summam internorum $u'+v'$ sectionem parere, e qua ad latera missæ perpendiculares sunt æquales. Formantur enim triangula $\alpha=\alpha'$, $\beta=\beta'$ per latus unum commune, et angulos u' et R in α et α', ac v' et R in β et β'. Si circulus centro $\mathfrak{p}$ radio $\mathfrak{pq}$ fiat: erit quodvis latus tangens; atque *triangulo dato circulus inscriptus*.

Si vero perpendiculares producantur: per puncta peripheriæ cuiusvis, cuius centrum $\mathfrak{p}$ est, in quibus perpendiculares priores eam secant, tangentes ductæ efformabunt $\triangle\mathfrak{ABC}$ ipsi $\mathfrak{abc}$ æquiangulum (pag. 71); atque hoc pacto *dato circulo* triangulum dato triangulo *aequiangulum circumscriptum erit*.

§. 2.

Si arcus α sit $=\frac{p}{n}$, denotante p peripheriam, n integrum; atque ducatur chorda cuiusvis arcus α, uti se invicem in p excipiunt: oritur *polygonum regulare n* laterum; erunt nempe latera chordæ arcuum æqualium, et anguli quoque æquales, utpote quivis est angulus ad peripheriam arcui $p - 2\alpha$ insistens.

Sunt etiam manifesto æqualia quævis triangula per radios ad cuiusvis lateris extrema ductos generata, per tria latera tribus æqualia; suntque triangula eiusmodi tot, quot latera, et quum duo latera sint in quovis æqualia, quodvis æquicrurum est, et angulus quilibet ad basim est dimidio anguli polygoni æqualis.

§. 3.

Conversim quoque *si figurae rectilineae* $\mathfrak{abcde}$ *latera aequalia, angulique aequales fuerint: apices omnes in eadem peripheria sunt.*

Nam (Fig. 89.) perpendiculares e meditulliis $\mathfrak{f}$, $\mathfrak{g}$ laterum $\mathfrak{ab}$ et $\mathfrak{bc}$ secant se invicem, quia ad rectam $\mathfrak{fg}$ summa internorum est $< 2R$; fiat in $\mathfrak{p}$. Erunt triangula $\mathfrak{afp}$ et $\mathfrak{bfp}$ æqualia, propter duo latera cum recto intercepto æqualia; adeoque in triangulo $\mathfrak{apb}$ anguli u ad basim sunt æquales. Est quoque $\triangle \mathfrak{pfb} = \mathfrak{pgb}$, propter hypotenusam cathetosque æqualia (pag. 64); adeoque et angulus $\mathfrak{pbg} = u =$ dimidio anguli polygoni; $\triangle\, \mathfrak{pbg}$ vero $= \mathfrak{pcg}$, ita uti $\triangle\, \mathfrak{afp} = \mathfrak{bfp}$ erat. Erit igitur angulus $\mathfrak{pcd} = u$; demissaque perpendiculari $\mathfrak{ph}$, est $\triangle\, \mathfrak{pgc} = \mathfrak{pch}$, per $\mathfrak{pc}$ commune et angulos æquales; atque hinc

$$\mathfrak{ch} = \mathfrak{cg} = \mathfrak{hd};$$

est igitur $\triangle\, \mathfrak{pch} = \mathfrak{pdh}$, per $\mathfrak{ph}$ commune, $\mathfrak{ch} = \mathfrak{hd}$, et rectum interceptum. Quod continuando patet esse

$$\mathfrak{ap} = \mathfrak{bp} = \mathfrak{cp} = \mathfrak{dp} \ \ \&c.$$

§. 4.

Sunt etiam e præcedentibus perpendiculares $\mathfrak{pf}$, $\mathfrak{pg}$, . . . æquales; adeoque centro $\mathfrak{p}$ radio $\mathfrak{pf}$ circulus polygono inscriptus erit, uti prior circumscriptus.

Si vero ut supra de triangulo dictum est, tam perpendiculares quam radii ad apices producantur: quivis circulus centri p fuerit, ubi a perpendicularibus secabitur peripheria, tangentibus ductis, polygonum regulare totidem laterum circumscriptum erit; et si radiorum sectiones iungantur, circulo inscriptum erit; nempe quævis duæ rectæ duabus parallelæ angulos æquales facient, omniaque circumcirca æqualiter generantur.

§. 5.

Si arcus lateris sexta pars peripheriæ sit, chorda erit = radio, nam tum angulus ad centrum est $\frac{360^\circ}{6} = 60^\circ$, adeoque duo anguli ad basim trianguli æquicruri sunt $180^\circ - 60^\circ = 120^\circ$, adeoque unus $= 60^\circ$, et triangulum æquilaterum est.

§. 6.

Angulus polygoni n laterum aequalis est $\frac{(2n-4)R}{n}$.

Nam e centro ductis ad apices angulorum rectis triangula numero n prodibunt, quorum omnium angulorum summa $= 2nR$; unde subtracta summa angulorum ad centrum, residuum est $(2n-4)R$, quod cum n anguli sint, dividi per n debet.

Patet etiam quemvis externum, latere in eandem plagam respectu antecedentis producto, esse eidem q æqualem. Itaque quum hoc pacto q numero n prodeat, et quodvis q sit $= 2R-$ angulo polygoni

$$= 2R - \frac{(2n-4)R}{n},$$

erit

$$nq = 2nR - \frac{n(2n-4)R}{n} = 2nR - 2nR + 4R = 4R.$$

'211121222.

De rectis circulum secantibus parallelis dictum (pag. 83) *est.*

'2111213.

De circulis se invicem secantibus.

I. 1. *Prius de sectione duorum circulorum*: sectio minima est punctum, maxima duo punctorum est. Duos circulos in tribus punctis secare se invicem non posse vel inde patet, quod tum duæ chordæ essent utrique circulo communes, e quarum mediis erectæ perpendiculares centrum utriusque idem determinarent; adeoque aut toti coinciderent, aut nullum punctum haberent peripheriæ utrique commune.

2. Si circuli unum tantum punctum habeant commune, dicuntur *tangere* se invicem, et quidem is *intus tangere*, qui præter punctum tactus totus intra alterum est, et circulus alterum tangens, qui non intra hunc cadit, *extus tangere* dicitur; adeoque duo circuli possunt se invicem *extus* aut *intus tangere*: nempe

Centris $\mathfrak{C}$, $\mathfrak{c}$, $\mathfrak{c}'$ in perpendiculari ad $\mathfrak{ab}$ (Fig. 90.) acceptis, radiorum extremitate altera $\mathfrak{a}$ scriptos circulos se ita tangere patet: quia si præter punctum $\mathfrak{a}$ adhuc haberent commune, ex. gr. ad lævam respectu $\mathfrak{Cc}$, id etiam ad dextram fieret; adeoque duo circuli duobus punctis plura haberent communia.

3. *Sunt* vero *centra circulorum se contingentium et punctum tactus in recta eadem.*

Nam si circulus ab altero intus tangatur: eadem in puncto $\mathfrak{a}$ utriusque tangens erit. Nam sit $\mathfrak{ab}$ tangens interioris; nisi eadem esset etiam exterioris, sit $\mathfrak{ap}$; hæc secabit interiorem adeoque tum etiam exteriorem: itaque tangens huius esse nequit. Si vero $\mathfrak{ab}$ tangens communis est, tum perpendicularis ex $\mathfrak{a}$ per $\mathfrak{c}$ et $\mathfrak{c}'$ transiens unica est.

Si duo circuli se invicem extus tangant (Fig. 90.), tum nisi $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{C}$, $\mathfrak{c}$ in recta sint, sit $\mathfrak{cdC}$ recta: erit $\mathfrak{Ca}+\mathfrak{ca}>\mathfrak{cdC}$; nempe summa duorum radiorum addita aliqua recta esset summa duorum radiorum minor. Unde patet, a duobus ad tres, inde ad quatuor &c progrediendo, omnium quotquot fuerint, se invicem in eodem puncto (sive extus sive intus) contingentes: centra cum puncto tactus in recta eadem esse.

4. Forma per sectionem minimam generata est duplex, prouti intus aut extus se tangunt: sed (Fig. 91.) forma per maximam sectionem generata constat e duabus lunulis et intermedia fenestra, ad quarum communem chordam e meditullio huius erecta perpendicularis per centra amborum circulorum transit.

Aequalitatem per unum angulum in qualibet duorum circulorum sectione determinatam esse patet. Nam tunc ex utroque congruit portio, et tria puncta determinant circulum.

II. *Si circulus A duos circulos B et C secet*: aut tanget utrumque, aut unum B solum tanget, aut neutrum.

In casu primo (Fig. 92., 93., 94., . . .) aut intus aut extus cadet uterque ab A tactus; aut unus extus alter intus. In quolibet horum casuum aut habebunt hi duo aliquid commune, aut non: si ita, id aut punctum erit, aut duo; si punctum solum fuerit, hoc aut in A cadet, quo pacto sectio omnibus commune punctum erit, aut non in A cadet. Si B extus, C intus cadat, tum casus unus tantum est, ut C et B aliquid commune habeant, nempe sectio unius puncti. In casu secundo ubi A nonnisi ipsum B tangit, habet tamen cum C aliquid commune, secabit ipsum C in duobus punctis; tum vero B et C aut habebunt aliquid commune, aut non; si ita, erit id aut punctum, aut duo.

In casu tertio A neutrum ipsorum B, C tangens habere cum quovis ipsorum B et C communia duo puncta debet; et B et C aut habebunt aliquid commune aut non; si ita, id erit aut unum aut duo puncta; et hæc aut ambo erunt eadem cum iis, quæ A cum B et C habet communia, aut unum tantum, aut neutrum.

Facile patet omnes hos casus, quorum aliquot conincidunt, pervestigando, sectionem esse minimam 1 puncti, 6 punctorum maximam, et dari sectiones 1, 2, 3, 4, 5, 6 punctorum, atque formas varias, et angulos infra in duas species distinguendos generari.

Ob facilitatem immorari cum necesse non sit, exempli caussa casum unum casus primi attulisse sufficiat; nempe casum sectionis trium punctorum, in quo quilibet bini ipsorum A, B, C tangent se invicem, at non in eodem puncto.

Fieri hoc nonnisi B et C utroque extus aut utroque intus A cadente patet.

§. 1.

Si C et B extus cadant (Fig. 93.), sit a radius ipsius A, et in continuatione eius accipiatur punctum illud, ubi (quantavis fuerint b, c) rectæ $a+b$ et $b+c$ circa extrema rectæ $a+c$ motæ occurrunt; quod fieri patet, cum quorumvis duorum laterum summa excedat tertium.

Tum si e tribus verticibus trianguli tanquam centris circuli fiant radiis a, b, c, nempe radiis circulorum A, B, C: patet e quantislibet a, b, c triangulum tale generari, quale oritur in schemate e tribus arcubus, cuius vertices sunt puncta tactus externi.

§. 2.

Si B et C intus cadant (Fig. 94.), sit $\mathfrak{a}$ centrum ipsius A, et $\mathfrak{b}$ centrum ipsius B, et $\mathfrak{c}$ centrum ipsius C. Sit r radius ipsius C, ac radius ipsius A sit $r+u$; et radius ipsius B sit β; pro quovis β, dummodo $<u$ sit, reperietur $\mathfrak{b}$ ibi, ubi $r+\beta$ circa $\mathfrak{c}$, et $u+r-\beta$ circa $\mathfrak{a}$ mota occurrent.

Si occurrant, res patet. Nam tum

$$\mathfrak{bi}=\beta,$$

quia

$$\mathfrak{ai}=r+u \quad \text{et} \quad \mathfrak{ba}=u+r-\beta;$$

itaque $\mathfrak{i}$ est punctum tactus ipsorum B et A, quia $\mathfrak{i}$ in recta per amborum centra est; ita recta $\beta+r$ ex $\mathfrak{b}$ ad $\mathfrak{c}$ transit per $\mathfrak{c}$ et tactum ipsorum B et C.

Datur vero $\mathfrak{b}$ pro quolibet β quod $<u$.

Nam tum latera $\beta+r$ et u ac $u+r-\beta$ talia sunt, ut quorumlibet binorum summa tertio maior sit; de reliquis patet pro quovis β; at postremorum summa priore tunc tantum est maior, si $\beta<u$ sit. Nam summa hæc est $2u+r-\beta$, quod debet esse $>\beta+r$; subtracto utrinque r, manet $2u-\beta>\beta$; adeoque pro $\beta=u\pm\omega$, est

$$2u-(u\pm\omega)=2u-\beta=u\mp\omega;$$

et manifesto $u-\omega$ est $<u+\omega$, et $u+\omega>u-\omega$.

§. 3.

(Fig. 95.). Sit quantusvis angulus bac, et ba = ac; et sit chordæ bc meditullium d, fiantque centro b radio bd = bg, centro c radio cd, et centro a radio ag = ah circuli; fiet triangulum ghd, ubi arcus gd, utvis mutetur angulus a, manet = dh; nimirum in triangulo æquicruro abc sunt ad basim.

Porro arcus gd -— R, si ∧a -— o; et gd -— o, si ∧a -— 2R; arcus Ed vero -— R in casu primo, et in altero -— 2R. Radius ga autem in casu primo -— ba, b ipsi f quam proxime eunte; in altero vero ga -— o, b ipsi ſ, et d ipsi a quam proxime euntibus.

§. 4.

Plurium circulorum sectionibus prætermissis unum tantum attigisse sufficiat (Fig. 96.).

Si bc sit latus figuræ regularis, cuius vertices sunt in peripheria radii ab: patet per dicta generari e verticibus tanquam centris, dimidio latere pro radio accepto, circulos æquales coronam claudentes, quorum quivis quemlibet inter quos est tangit, uti in schemate.

De formis etiam in casibus dictis notasse sufficiat:

1. Figuras ibidem oriri, quæ duobus lateribus concavis, aut duobus lateribus convexis spatium claudunt.

2. Oriri triangula *circularia*, de quibus statim dicetur.

3. *Angulum*, sub quo occurrere arcus arcui potest, in duas species distingui posse: nempe in *convexum*, scilicet cuius crura possunt circa verticem in talem situm moveri, ut recta quædam per verticem ducta sit chorda utriusque, arcubus in diversas plagas cadentibus: alioquin angulus *concavus* vocetur. Ex. gr. (Fig. 95.) dgh, et (Fig. 97.) gah convexi sunt, gaf concavus est.

4. Triangulum eiusmodi combinari posse e tribus convexis angulis, e 2 concavis et 1 convexo; at non posse e 3 concavis, aut ex 1 concavo et 2 convexis, patet.

§. 5.

Quantitas anguli esse eadem potest, quæ anguli est, quem tangentes crurum ad verticem faciunt; at illa tangentis dimidietas intelligatur, cum qua arcus non formam fluentem facit (pag. 16). Hoc pacto $u = 0 = v$, (Fig. 92.), et (Fig. 95.) trianguli $\mathfrak{gdh}$ angulorum summa $= 0$; at (Fig. 98.) trianguli $\mathfrak{adbfcea}$ summa angulorum $= 12R$; maior summa trium angulorum esse nequit.

Nempe (Fig. 99.) sit $\mathfrak{abc}$ triangulum æquilaterum, et $\mathfrak{q}$, $\mathfrak{r}$, $\mathfrak{s}$ meditullia laterum, angulique u æquales, atque e punctis $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$ erectis ad crura ipsorum u perpendicularibus, intersectiones $\mathfrak{p}$, $\mathfrak{w}$, $\mathfrak{i}$ fiant centra radiis $\mathfrak{pa}$, $\mathfrak{ib}$, $\mathfrak{wc}$ æqualibus: patet angulum $\mathfrak{dae}$ convexum accipi, et dabili quovis minus sumi posse.

Datur triangulum, cuius angulorum summa dabili quovis minor esse potest.

Sint nempe (Fig. 97.) duo arcus $\mathfrak{akd}$ et $\mathfrak{ahd}$ ad angulos convexos $\mathfrak{a}$ et $\mathfrak{d}$ se invicem secantes, (et angulus concavus dato quovis minor fieri potest); et sint tangentes in $\mathfrak{a}$ rectæ $\mathfrak{ab}$ et $\mathfrak{af}$; moveatur arcus $\mathfrak{akd}$ circa $\mathfrak{a}$ per arcum $\mathfrak{ahd}$, tangentem suam $\mathfrak{ab}$ secum ferens; poterit $\mathfrak{ab}$ ire quam proxime ipsi $\mathfrak{af}$; itaque angulus ad $\mathfrak{a}$ fiet omni dabili minor; sed is solus erit summa trium angulorum trianguli, qui e meditullio $\mathfrak{o}$ chordæ $\mathfrak{a}\mathfrak{E}$ radio $\mathfrak{og}$ ad chordam perpendiculari scripto semicirculo $\mathfrak{ghm}$ clauditur.

Interim haud sufficit quantitas duorum angulorum dicta ad angulorum æqualitatem geometricam: necesse est et anguli species easdem, radiosque unius radiis alterius æquales esse; poterit autem inferius, ubi de areis tractabitur, angulus quivis eiusmodi etiam per areas certo modo determinatas exprimi.

§. 6.

Aequalitas triangulorum circularium determinatur modo sequente:

1. *Duo latera cum angulo intercepto non sufficiunt*; nam latus tertium esse potest radiorum variorum.

2. *At tria latera sufficiunt, nisi sit aliquod convexum et illi respondens concavum.*

3. *Ita duo anguli et unum latus adiacens.*

4. *Imo tres anguli quoque ponunt triangulorum horum aequalitatem, sed duo non.*

Cum casus reliqui sint faciliores, ultimum tantum referre libet.

At sequens prius demonstrandum est (Fig. 100.). Peripheria centri $\mathfrak{a}$ radii $\mathfrak{pa}$ dicatur a, peripheria centri $\mathfrak{h}$ radii $\mathfrak{ha}$ vero A, peripheria radii $\mathfrak{hp}$ autem dicatur H.

Utcunque secet a ipsum H ad angulum z, omne punctum peripheriae A tale est, ut circulus ex eo tanquam centro scriptus cum radio $\mathfrak{ap}$, plane ad angulum z secet ipsum H; nullum vero extra peripheriam A tale punctum $\mathfrak{q}$ datur, ut arcus radii $\mathfrak{ap}$ peripheriam H ad angulum z secet.

Prius (Tom. I. pag. 12. V.) patet; sed nec ullum tale punctum $\mathfrak{q}$ est. Nam sive intra A sive extra sit, recta $\overline{\mathfrak{qh}}$ transit per A; fiat in $\mathfrak{c}$, et sit $\mathfrak{q}$ extra A; radius pro centro utroque $\mathfrak{c}$ et $\mathfrak{q}$ sit $=\mathfrak{ap}$, terminabitur uterque in $\mathfrak{hq}$ in duobus diversis punctis $\mathfrak{m}$ et $\mathfrak{r}$.

Fiant centro $\mathfrak{c}$ radio $\mathfrak{cm}$ et centro $\mathfrak{q}$ radio $\mathfrak{qr}$ circuli; neuter horum potest tangere ipsum H, quia si unus tanget (extus aut intus), ex. gr. extus, et alter extus tangeret, si ex $\mathfrak{q}$ et $\mathfrak{c}$ descripti circuli circulum H ad angulum ipsi z æqualem secarent; tum vero quia tactus punctum in $\mathfrak{hq}$ esse debet, radii inæquales fierent æquales.

Itaque secaret ipsum H uterque in duobus punctis, unus in $\mathfrak{kl}$, alter in $\mathfrak{vi}$; et quidem ita ut si $\mathfrak{k}$ ultra $\mathfrak{v}$ cadat, et $\mathfrak{l}$ plane ita ultra $\mathfrak{i}$ cadere, et si $\mathfrak{k}$ in $\mathfrak{v}$ cadit, $\mathfrak{l}$ in $\mathfrak{i}$ cadere debeat.

Neutrum vero fieri potest. Nam quum hoc pacto esset angulus $\mathfrak{mko}=\mathfrak{rvo}$, et per angulum unum ponatur æqualitas figuræ e duobus arcubus compositæ (pag. 90), esset $\mathfrak{kmovk}=\mathfrak{vrov}$; adeoque $\mathfrak{k}$ et $\mathfrak{l}$ non possunt non in $\mathfrak{v}$ et $\mathfrak{i}$ cadere: at neque in $\mathfrak{v}$ et $\mathfrak{i}$ possunt, quia tum $\mathfrak{m}$ cum $\mathfrak{r}$ coincideret, quia per angulum $\mathfrak{k}=\mathfrak{v}$ non posset $\mathfrak{m}$ e peripheria $\mathfrak{vri}$ egredi.

Si $\mathfrak{q}$ intus A cadat demonstratio eadem est. Itaque assertum patet.

Liquet hinc quamvis triangulorum circularium speciem per tres angulos determinari, ponique æqualitatem per tres angulos æquales (Fig. 101.).

Nam sit unus arcus trianguli circularis e peripheria H cuius centrum $\mathfrak{h}$, alter e peripheria I cuius centrum $\mathfrak{i}$, tertius ex K cuius centrum $\mathfrak{q}$ est; adeoque sit triangulum $\mathfrak{abc}$.

Tum manente angulo $\mathfrak{c}$, omne centrum, e quo angulus $=\mathfrak{a}$ cum H produci potest, est in peripheria A, et omne centrum, e quo cum I angulus $=\mathfrak{b}$ produci potest, est in peripheria B per præcedentia; describitur vero arcus $\mathfrak{ab}$ latus angulo $\mathfrak{c}$ oppositum, ex uno centro; adeoque centrum hoc adsumi debet, ubi A et B se invicem secant; adeoque ad summum duo puncta esse possunt uti $\mathfrak{p}$ et $\mathfrak{q}$, nimirum plura puncta A et B communia habere nequeunt, unde angulus $=\mathfrak{a}$ cum H, et angulus $=\mathfrak{b}$ cum I produci possit; scilicet $z=\mathfrak{a}$, et $v=\mathfrak{b}$.

At z patet (cadentibus $\mathfrak{p}$ et $\mathfrak{q}$ in diversas plagas) vertere convexam partem ipsi $\mathfrak{c}$, si $\mathfrak{a}$ concavam ostendit, ita ut z semper aliter sit versus $\mathfrak{c}$ versus quam $\mathfrak{a}$.

Itaque unicum adhuc triangulum construi potest, ut $\mathfrak{c}=\mathfrak{k}$ sit, $\mathfrak{b}=v$, et $z=\mathfrak{a}$; hæc vero sunt æqualia. Ita $\triangle\,\mathfrak{acn}=z\mathfrak{km}$; sed z est concavus, et illius deinceps positus est convexus, ita in altero triangulo. Nempe triangulo $zv\mathfrak{k}$ considerato, si $z=\mathfrak{a}$ angulus concavus sit, angulus deinceps positus dicti anguli convexus est.

'211122.

De sectione sine angulo, quae itaque formam fluentem parit.

I. *Recta cum recta*: si circa punctum sectionis moveantur, donec fiat angulus $=2R$, id est nullus angulus sit, forma fluens evadet.

Recta cum circulo:

1. Cum *uno*; tangens dimidia cum dimidia altera peripheria forma fluens est. Ex. gr. $\mathfrak{dak}$ (Fig. 102.).

2. *Cum duobus circulis* dupliciter fieri potest; scilicet tangente recta $\mathfrak{on}$ duos circulos in duobus sui extremis, aut in eadem plaga aut in diversa; uti est $\mathfrak{ponr}$ et $\mathfrak{ponm}$.

3. *Cum tribus circulis* fieri nequit; quia si ad finem rectæ ponatur tertius: is cum priore circulo faciet angulum, si ita ponatur, ut cum recta non faciat; in puncto intermedio quovis vero angulum fieri clarum est.

II. *Circulus cum circulo*:

1. *Cum uno*; nempe duo arcus qualiumvis radiorum eadem tangente gaudentes, in plagas respectu rectæ centrorum diversas, et aut in eandem respectu tangentis plagam aut diversas cadentes, sine angulo secant se invicem: talis forma fluens est lks. (Fig. 103.).

2. *Circulus cum duobus circulis*: si arcus cuiuspiam ambo extrema modo plane dicto cum aliquo arcu iungantur, uti abcd aut kmnv aut kmnl. (Fig. 104.).

§. 1.

Formæ fluentes sunt quasi rivi, quibus naturæ viventis vena fluit, rarius iter frangens, ut in dulciorem cursum refluat, demum in mortis regni angulatis terminis hærens.

Lineamenta quævis describi quam proxime possent, ad cuiusvis arcus finem, certi radii arcu certæ quantitatis in eandem aut alteram respectu tangentis plagam posito.

§. 2.

Figuram duo arcus non eiusdem circuli, sine duobus angulis claudere nequeunt. Tres arcus requirunt ad minimum unum angulum; quatuor possunt sine angulo figuram claudere.

Prius manifestum est. Alterum quoque (pro Fig. 105.) patet. Nam sint tres illi arcus A, B, C, centra a, b, c; punctum tactus ipsorum A et B sit $\mathfrak{A}$, punctum tactus ipsorum B et C sit d, et punctum tactus ipsorum A et C sit p; patet p, a, c in recta, atque etiam d, b, c in recta esse debere, itaque c eo cadere oportere, ubi rectæ pa et db se intersecant: nam p et d in arcu ex uno centro c scripto esse oportet; ibi vero oreretur triangulum abc, essetque radius cp = cd; porro quia

$$\mathfrak{bd} = \mathfrak{ab} + \mathfrak{a}\mathfrak{A} = \mathfrak{ab} + \mathfrak{ap},$$

atque

$$\mathfrak{ac} + \mathfrak{ap} = \mathfrak{cd} = \mathfrak{cb} + \mathfrak{bd},$$

esset

$$\mathfrak{ac} + \mathfrak{ap} = \mathfrak{cb} + \mathfrak{ap} + \mathfrak{ab};$$

atque hinc esset

$$\mathfrak{ac} = \mathfrak{cb} + \mathfrak{ab};$$

quamvis duo trianguli latera nequeant æqualia esse tertio.

Idem facile patet pro casu, si trium arcuum aliquis contrarie flexus sit.

§. 3.

At nec e tribus lineis, quarum quælibet recta aut circulus est, figura sine angulo claudi potest. Nam si quævis sit recta, aut duæ rectæ et unus arcus, patet.

Si vero una sit recta et aliæ duæ arcus sint, patet modo sequente. (Fig. 106.)

Sit $\mathfrak{vw}$ tangens arcus $\mathfrak{mq}$; tum ut tertia linea figuram claudens arcus sit, necesse est dari tale $\mathfrak{p}$, ut $\mathfrak{pv}$ ad $\mathfrak{vm}$ perpendicularis sit $= \mathfrak{pq}$, rectæ per arcus $\mathfrak{mq}$ centrum $\mathfrak{c}$ ductæ, quia tunc tantum petitum præstari per arcum a $\mathfrak{q}$ usque ad $\mathfrak{v}$ centro $\mathfrak{p}$ radio $\mathfrak{pv}$ scriptum posset.

At

$$\mathfrak{vp} < \mathfrak{pq};$$

nam

$$\mathfrak{mc} = \mathfrak{vo} = \mathfrak{cq},$$

porro

$$\mathfrak{po} < \mathfrak{pc},$$

ergo

$$\mathfrak{vo} + \mathfrak{po} < \mathfrak{pc} + \mathfrak{cq}.$$

§. 4.

Fieri posse cum uno angulo figuram e tribus arcubus patet: si (Fig. 107.) centrum $\mathfrak{f}$ arcus $\mathfrak{aeb}$ in recta per eius extremum $\mathfrak{a}$ et centrum $\mathfrak{c}$ ipsius $\mathfrak{afd}$ ducta accipiatur, et centro $\mathfrak{i}$ radio $\mathfrak{di} = \mathfrak{bi}$ semicirculus describatur: generabitur hoc pacto figura $\mathfrak{afdgbea}$, nonnisi ad $\mathfrak{b}$ angulo gaudens.

Ita ex una recta et duobus arcubus datur figura cum uno angulo (Fig. 108.).

Nam arcus mo, cuius tangens est mn, centrum in c habet; itaque facile patet in oc producta posse centrum f arcus on accipi, et ad n angulum generari.

E duobus rectis et uno arcu quoque datur figura cum uno angulo. *Nempe si abcd quadratum sit (Fig. 108.*), et centro a radio ab fiat* arcus bec.

§. 5.

Figuram quatuor arcus possunt sine ullo angulo claudere; et 4 est minimus numerus, cum e paucioribus fieri non posse dictum sit.

Nimirum ab extremitatibus a et b arcus afb (Fig. 109.) ducantur rectæ per eius centrum C; et acceptis ca ex a et bf ex b æqualibus, scribantur radiis ca et fb centris c et f arcus æquales be et af, ducanturque rectæ fe, cf; et fiat ex intersectione f′ radio f′e arcus ef. Figuram fbefa quæsitam esse e præmissis facile patet. Talem etiam esse AbdeBfghA patet (Figg. 110. et 111.), centris in apicibus quadrilateri æquilateri ifcf′ acceptis, radiisque ih=ib=ce=cf e centris i, c, et radiis f′h=f′f=fb=fe e centris f′, f. Facile ex inspectione patet id quoque, quod si $u \frown R$, limes ipsius hAb et eBf semicirculus, et limes ipsius bde ita ipsius hgf rectæ sint, quamvis ipsa (Fig. 112.) nunquam attingatur. Si vero $u \frown o$, tum $bAh \frown o$ (in Fig. 110.), in Fig. 111. autem bAh peripheriæ toti quam proxima venit, et hf′ semper minus distantia puncti f′ ab ic esse debet, ih vero $\frown \frac{1}{2}$ ic.

Potest e duabus rectis et duobus arcubus quoque figura sine angulo fieri; talem esse patet defgab (Fig. 112.); ita ex una recta et tribus arcubus, qualis est (Fig. 113.) demba: ubi arcuum ad, em centra i, c sunt, et arcus abm centrum f est, ac remoto f in perpendiculari bf dato quovis ulterius, limes (Fig. 112.) erit.

E tribus rectis et uno arcu figura talis fieri nequit.

Quum omnia hæc aliaque huius generis e præmissis facile perspiciantur; brevitatique consulendum sit: pauca hæc, quo ordo ipse induxit, attulisse, nec plura adferre concessum sit. Aliquid tamen adhuc addetur inferius.

*2112.

De areis figurarum planarum rectilinearum circulariumque.

I. *De facto e rectis*; hinc *area rectanguli*, area *parallelogrammi* cuiusvis, area *trianguli*, area *quadrilateri* cuius dantur duo latera parallela, area *quadrilateri cuiusvis*, area *cuiusvis rectilinei*, per summationem triangulorum aut trapeziorum, e quibus constat; ita area *polygoni regularis*; hinc *area circuli*.

II. *Transmutatio arearum et reductio ad formam rectae* (Tom. I. pag. 27), nempe ad rectangulum datæ altitudinis; et mutatio plurium quadratorum in unum.

III. *Comparatio arearum* figurarum similium aliarumque. Inde lunula Hippocratis et id genus alia.

IV. *Additio, subtractio, divisio* figurarum sub certis conditionibus.

V. Si alicui figuræ aliæ sub certa conditione imponantur, impositarum summa limesque huius quæritur.

I.

§. 1.

Factum e quotvis rectis, recta est (pag. 77); *at si rectarum unitas sit α; et pro planorum unitate accipiatur tale quadratum, cuius latus α est; ita pro unitate omnium spatii portionum sit cubus, cuius latus α; tum si l, l', l'' rectae sint: 1. recta $l.l'$ mensurata per unitatem α plane eos numeros dat, quos area rectanguli ex l et l' compositi mensurata per arearum unitatem, nempe quadratum α; ita ut si ex. gr. recta $l.l'$, nempe factum lineare, sit $\frac{n}{m}$-tum ipsius α, et area rectanguli dicti sit $\frac{n}{m}$-ta quadrati α. 2. Ita factum $l.l'.l''$ si $\frac{n'}{m'}$-tum ipsius α sit, etiam parallelepipedum* (de quo infra) *ex l, l' et l'' est $\frac{n'}{m'}$-tum unitatis solidorum, nempe cubi cuius latus α est.*

Nam heic tantum de areis loquendo (Fig. 114.) sit l unitatis $\frac{p}{q}$-ta, l' vero $\frac{r}{s}$-ta; est

$$l.l' = \frac{pr}{qs} = \frac{ps}{qs} \cdot \frac{qr}{qs} = \frac{psqr}{qsqs}.$$

Dividatur $\alpha = 1$ in qs partes æquales, continebit l partes eiusmodi numero ps, l' vero numero rq, (patet $\frac{p}{q}$ et $\frac{r}{s}$ ad eandem denominationem reductis). Ductis vero parallelis e fine cuiusvis $\frac{\alpha}{qs}$, orientur in strato inferiore quadrata, quorum cuiusvis latus est $\frac{\alpha}{qs}$, numero rq; et quum l strata eiusmodi numero ps producat, erunt eiusmodi omnia quadrata numero $psrq$; itaque totum rectangulum ex l et l', erit $\frac{psrq}{qsqs}$-tum quadrati α; namque stratum inferius continet eiusmodi quadrata numero qs, et cum strata quoque numero qs dentur, constat quadratum α ex eiusmodi quadratis numero $qsqs$.

Patet itaque, uti factum lineare superius $\frac{psqr}{qsqs}$-tum unitatis linearis est, ita rectangulum, ex eiusmodi factoribus compositum, esse $\frac{psqr}{qsqs}$-tum unitatis arearum.

Si vero L et l sint incommensurabiles, tum id ex l, quod $< \frac{\alpha}{qs}$ est et remanet, sit λ, et id ex L, quod $< \frac{\alpha}{qs}$ remanet, sit ω; utrumque ~ 0, quia qs omni dabili maius accipere licet.

Sit rectangulum ex L et l æquale P, atque rectangulum ex L' et l' æquale P'; erit $P - P' =$ rectangulo ex L et λ, et rectangulo ex l' et ω; λ et ω aut sunt æqualia, aut alterutrum est maius altero, sit $\lambda > \omega$; erit $P - P' <$ rectangulo ex $(L + l)$ et λ; sed hoc quoque ~ 0; quia basis $L + l$ manet, et λ omni dabili minus fieri potest; adeoque non datur tam parva assignabilis recta k, ut quadrato eius non fiat rectangulum dictum minus; nam dividatur $L + l$ in tot partes n, ut una sit $< k$, deinde fiat λ tam parvum, ut sit $< \frac{k}{n}$, et si superstruantur rectangula p sibi invicem, $n\lambda$ non adæquet altitudinem k; patet oriri rectangulum, cuius tam basis quam altitudo est $< k$; adeoque $P - P'$ esse dato quadrato ipsius k minus; potest vero cuivis assignabili figuræ circulus, et huic quadratum includi; itaque P' quod $= L'.l'$ (id est $L'.l'$-to quadrati unitatis), nulla assignabili quantitate differt a P, et tendit ad limitem P; sed $L' \sim L$ et $l' \sim l$, adeoque (Tom. I. pag. 85) $L'.l' \sim L.l$, et cum $L'l' = P'$, P ab $L.l$ nulla assignabili quantitate differt.

Hinc rectanguli, cuius basis L altitudo l, area $= L.l$.

§. 2.

Parallelogramma (et triangula), basibus aequalibus et altitudinibus aequalibus gaudentia, sunt aequalitate quoad portiones terminata aequalia; per altitudinem intelligendo in parallelogrammo distantiam baseos a latere opposito parallelo, in triangulo autem perpendicularem e vertice ad basim.

Vide Tom. I. pag. 66. Fig. 17. c. ubi trianguli A latus lævum ad latera parallelogrammi $\mathfrak{a}'\mathfrak{e}'\mathfrak{E}\mathfrak{B}$ (nempe $\mathfrak{E}\mathfrak{e}'$, $\mathfrak{B}\mathfrak{a}'$), et latus dextrum ad parallelogrammi $\mathfrak{E}\mathfrak{B}\mathfrak{a}\mathfrak{e}$ latera $\mathfrak{E}\mathfrak{e}$, $\mathfrak{B}\mathfrak{a}$ translata sunt, donec aut nihil aut aliquid supersit: atque rectas, in quovis parallelogrammorum dictorum fines quotarumvis partium connectentes, basi parallelas esse, imo in utroque rectas tales, uti parallelas per $\mathfrak{g}$ et $\mathfrak{h}$, in eadem recta esse patet; nempe ad quotævis partis finem subsistere libeat, ex. gr. ad $\mathfrak{g}$ et $\mathfrak{h}$; triangulum $\mathfrak{d}\mathfrak{E}\mathfrak{C}$ desinens ad partium primarum fines erit triangulo $\mathfrak{g}\mathfrak{h}\mathfrak{E}$ simile, ob angulum interceptum communem et latera intercipientia proportionalia; adeoque latus tertium tertio parallelum est. Et manifesto si supra $\mathfrak{g}$ residuum manet, idem supra $\mathfrak{h}$ fieri debet; secus enim parallela $\mathfrak{e}\mathfrak{a}$ infra $\mathfrak{e}'\mathfrak{a}'$ caderet, si adhuc una pars daretur supra $\mathfrak{h}$, et supra $\mathfrak{e}'\mathfrak{a}'$ caderet, si in $\mathfrak{h}$ adeoque in $\mathfrak{e}'$ ultima pars terminaretur.

Est demum hinc

$$\triangle F = f' + f,$$

per unum latus tanquam distantiam parallelarum eandem, et angulos externos internos oppositos; atque etiam trapezia $E'+E$, et $e+e'$ æqualia esse patet.

In casu (Fig. 115.) autem est manifesto $A=C$, et $B=B$.

§. 3.

Quum igitur parallelogrammum quodvis, rectangulo baseos æqualis et altitudinis æqualis, sit æquale: erit parallelogrammum quodvis æquale facto ex altitudine in basim; triangulum autem utpote dimidium parallelogrammi, baseos æqualis et altitudinis æqualis, est manifesto æquale basi per altitudinem dimidiam multiplicatæ.

§. 4.

Quævis autem figuræ F et f fuerint inter duas parallelas p et q: si pro quacunque recta utrinque infinita inter p et q ipsis parallela, eo quod hæc cum F commune habet C dicto, et eo quod eadem cum f commune habet c dicto, pro quibuslibet C, c simultaneis sit $C=\alpha c$; (e Tom. I. pag. 210 &) liquet esse $F=\alpha f$, areas intelligendo, etsi æqualitas interminata esset.

§. 5.

Hinc si unius parallelogrammi basis b altitudo a sit, alterius basis B altitudo A sit: erit area prioris $=ab$, et area posterioris $=AB$; itaque, si $ab=AB$, est $a:A=B:b$, nempe altitudines parallelogrammorum areæ æqualis sunt in ratione inversa basium. Quum vero triangula sint dimidia parallelogrammorum altitudinis baseosque æqualis, idem de triangulis areæ æqualis valet. Si vero $a=A$, areæ sunt uti bases.

§. 6.

(Fig. 73.*). *Altitudo* y trianguli *solis lateribus datis innotescit*: nempe

$$y=\sqrt{a^2-x^2};$$

sed erat (pag. 76)

$$x=\frac{a^2+b^2-c^2}{2b};$$

atque hinc

$$a^2-x^2=\frac{2a^2c^2+2b^2c^2+2a^2b^2-a^4-b^4-c^4}{4b^2};$$

et hoc (ex Tom. I. pag. 146)

$$=\frac{(a+b+c)\,(a+b-c)\,(c+a-b)\,(c-a+b)}{4b^2};$$

e quo radix quadrata per $\frac{1}{2}b$ multiplicata fit

$$\frac{1}{4}\sqrt{(a+b+c)(a+b-c)(c+a-b)(c-a+b)}$$

$=$ *areae* trianguli *e solis lateribus* computatæ.

§. 7.

Trapezium (Fig. 116.) constat e parallelogrammo ex b et a, et triangulis $b'a$, $B'a$; estque

$$= ba + \frac{b'a+B'a}{2} = \frac{2ba+b'a+B'a}{2} = a\cdot\frac{b+b+b'+B'}{2} = a\cdot\frac{b+B}{2}.$$

Notandum b esse $<B$. Hinc si e medio ipsius l sit $\beta \parallel B$, patet esse

$$b'' = \frac{1}{2}b' \text{ et } B'' = \frac{1}{2}B',$$

adeoque

$$b + \frac{b'+B'}{2} = \beta$$

esse per a multiplicandum. Et idem generaliter de quadrilatero patet, si duobus lateribus parallelis gaudeat.

§. 8.

Quadrilateri cuiusvis $\mathfrak{abcd}$ *area est aequalis duplo parallelogrammi* $\mathfrak{a'b'c'd'}$, *quod oritur* (Fig. 117.) *latus quodvis bisecando.*

Nam

$$\mathfrak{aa'} = \frac{1}{2}\mathfrak{ab},\ \mathfrak{ad'} = \frac{1}{2}\mathfrak{ad},$$

atque in triangulis $\mathfrak{aa'd'}$ et $\mathfrak{abd}$ angulus $\mathfrak{a}$ communis est, hinc $\mathfrak{a'd'} \parallel \mathfrak{bd}$; ita $\mathfrak{b'c'} \parallel \mathfrak{bd}$, adeoque $\mathfrak{a'd'} \parallel \mathfrak{b'c'}$, atque ita $\mathfrak{a'b'} \parallel \mathfrak{d'c'}$. Sunt vero triangula similia, uti secundæ potentiæ laterum homologorum (vide pag. 111); itaque

$$\triangle\mathfrak{aa'd'} = \frac{1}{4}\mathfrak{abd}, \text{ et } \triangle\mathfrak{b'cc'} = \frac{1}{4}\mathfrak{bcd};$$

adeoque triangulorum $\mathfrak{a}\mathfrak{a}'\mathfrak{d}'$ et $\mathfrak{b}'\mathfrak{c}\mathfrak{c}'$ summa $= \frac{1}{4}\,\mathfrak{abcd}$. Sed eodem modo est triangulorum $\mathfrak{a}'\mathfrak{b}\mathfrak{b}'$ et $\mathfrak{d}'\mathfrak{d}\mathfrak{c}'$ summa $= \frac{1}{4}\,\mathfrak{abcd}$. Consequenter triangulorum $\mathfrak{a}\mathfrak{a}'\mathfrak{d}'$, $\mathfrak{a}'\mathfrak{b}\mathfrak{b}'$, $\mathfrak{b}'\mathfrak{c}\mathfrak{c}'$, $\mathfrak{c}'\mathfrak{d}\mathfrak{d}'$ summa $= \frac{1}{2}\,\mathfrak{abcd}$, et

$$\mathfrak{a}'\mathfrak{b}'\mathfrak{c}'\mathfrak{d}' = \frac{1}{2}\,\mathfrak{abcd}\,;$$

atque $\mathfrak{a}'\mathfrak{b}'\mathfrak{c}'\mathfrak{d}'$ parallelogrammum est.

§. 9.

Si vero quadrilaterum (Fig. 118.) in duo triangula dispescatur, et basis communis sit B, altitudoque unius sit A, alterius a; erit area

$$= \frac{BA}{2} + \frac{Ba}{2} = B\,\frac{A+a}{2}.$$

§. 10.

Porro *area cuiusvis figurae rectilineae* reperitur per summam arearum omnium triangulorum, e quibus illa constat; et polygonum regulare n laterum e totidem triangulis æqualibus constat, quorum quodvis æquale est lateri multiplicato per dimidium perpendicularis e centro ad illud demissæ; patetque factum hoc pro tota polygoni area n-ies sumendum esse. Adeoque si summa laterum p et altitudo r' fuerit, erit area $= \frac{pr'}{2}$.

§. 11.

Sit p summa laterum polygoni interni, areaque eius sit a, area circuli sit C, et summa rectangulorum circumcirca (Fig. 119.) *sit $\lambda = zp$; est*

$$a + \lambda = \frac{r'p}{2} + zp\,;$$

eritque

$$a + \lambda > C > a.$$

Duplicato semper n numero laterum polygoni, $\lambda \frown 0$, nempe

$z = r - r' \sim 0$, atque p limite gaudet: prius inde patet, quod e radio potest quam proxime ad punctum contactus eundo perpendicularis usque ad arcum erigi, quo arcu datur minor talis, qui in peripheria $n.2^m$-ies contineatur; sed etiam p habet limitem; semper enim crescit, sed r' quoque crescit, atque etsi r' non cresceret, si p in quantumvis magnum excrescere posset, a supra C cresceret. Sit limes P ipsius p; tum

$$\frac{pr'}{2} \sim \frac{Pr}{2},$$

quia $p \sim P$, et $r' \sim r$ (Tom. I. pag. 85).

At vero tum etiam $C = \frac{Pr}{2}$. Nam $a+\lambda$ erat $> C > a$, et $(a+\lambda) - a \sim 0$; itaque $C - a \sim 0$, id est

$$C - \frac{pr'}{2} \sim 0.$$

Consequenter

$$\frac{pr'}{2} \sim C \text{ et } \frac{pr'}{2} \sim \frac{Pr}{2},$$

adeoque

$$C = \frac{Pr}{2};$$

estque *area circuli areae trianguli, cuius basis P et radius r est, aequalis.*

Sit $a = \frac{xr}{2}$, quod $\frac{pr'}{2}$ erat; nempe si latus l polygoni prioris n laterum datum sit, (ex. gr. latus hexagoni æquatur radio); r' prodibit

$$= \sqrt{r^2 - \frac{1}{4} l^2},$$

quo subtracto ex r, manebit z, cathetus trianguli rectanguli, cuius alter cathetus $= \frac{1}{2} l$ est; e quibus prodit hypotenusa, nempe latus polygoni $2n$ laterum; quod continuari posse donec libuerit, manifestum est; uti et x crescere crescente a, quum r constans maneat.

Sitque $a + \lambda = \frac{p'r}{2}$; et hoc est

$$> C = \frac{Pr}{2} > \frac{xr}{2};$$

adeoque

$$p' > P > x;$$

si igitur computando (pro $\omega < 1$ et $k < 1$, atque integris μ, ν) prodierit

$$p' = \frac{\nu + \omega}{\mu} r \quad \text{et} \quad x = \frac{\nu + k}{\mu} \cdot r,$$

constabit P certo continere ν eiusmodi partes, quales radius r numero μ continet, sed numero $\nu + 1$ non continere. Ex. gr. pro diametro 1 fit

$$3,15 > p' > 3,14,$$

pariter

$$3,15 > x > 3,14;$$

adeoque P constat pro diametro 1, usque ad secundam notam decimalem inclusive rite prodiisse. Valor verus ipsius P pro diametro 1 dicitur π.

Computatum est π in prope 300 notis decimalibus, ita ut ubique abrumpatur, π parte ad lævam maior est, sed minor fit, si nota ultima ad dextram uno augeatur.

Si quis igitur talem ipsius π valorem se reperisse iactaverit, qui in fractionem decimalem conversus in aliqua a dictis nota aberrat, oleum operamque perdidit. Si aream proposuerit, ea per $\frac{1}{4}$ nempe dimidium radium divisa dabit factorem alterum cum fractione dicta decimali conferendum.

Ope fractionum continuarum fractionibus approximantibus valor ipsius π alternatim maior minorque terminis minimis exprimitur: talis expressio est $\frac{22}{7}$, quam Archimedes reperit a hexagono incipiendo, duplicandoque laterum numerum usque 96; estque $\frac{22}{7} > \pi$ quidem, sed ad vulgarem praxim sufficit.

$$\frac{3}{1} \; \frac{22}{7} \; \frac{333}{106} \; \frac{355}{113} \ldots$$

sunt hæ approximantes, quarum prima $< \pi$, secunda $> \pi$, tertia $< \pi$, quarta $> \pi$ &c, ultima tamen tam exacta est, ut in æquatoris peripheria quoque parum aberret.

§. 12.

Paucis exceptis, qui desperatam hanc caussam aggredi ausi sunt, nec id quod quærerent, satis intellexerunt; multique similes his mirantur mathematicos rem tam absurdam desiderare, nempe circulum quadratum; aut per polygona circulum consequi velle, cum nulla pars peripheriæ sit recta. Natura curvæ plane in eo consistit, ut nulla pars eius recta sit, plura spatia curvilinea tamen exacte quadrata sunt; nec quidquam aliud in problemate quadrationis circuli quæritur, nisi constructione geometrica sensu stricto (saltem sensu lato) exhibendum punctum illud, in quo P (pag. 105) terminari (Tom. I. pag. 20) tanquam limes ipsius p debet; atque punctum istud, uti inde et circulo cuivis quadratum æqualitate saltem interminata æquale, (pagg. 105, 109) certo datur: nemo vero adhucdum demonstravit huius impossibilitatem possibilitatemve; uti diametrum cum peripheria esse commensurabilem incommensurabilemve, aut circulum ulli quadrato esse æqualitate terminata æqualem. Quævis interim expressio terminorum numero finito, quo simplicior, eo magis laudanda erit. Series aliæque expressiones infinitæ dato quovis propius euntes permultæ sunt (uti Tom. I. pag. 442).

§. 13.

Si unius circuli sit diameter $=1$ alteriusque diameter $=2r$, atque construatur ex. gr. hexagonum in utroque, semperque simul duplicentur laterum numeri in utroque: erunt manifesto semper triangula per rectas e centris ad laterum extremitates ductas generata, in utroque similia, atque polygonum circulo diametri 1 inscriptum, erit ad polygonum circulo diametri $2r$ inscriptum, uti radius ad radium. Hinc etiam limes polygoni prioris ad limitem posterioris ita erit, uti $\frac{1}{2} : r$ seu $1 : 2r$. Quum igitur pro diametro 1 sit peripheria π, erit pro diametro $2r$ peripheria $2r\pi$. Eritque area

$$=2r\pi \cdot \frac{r}{2} = r^2\pi;$$

unde iterum ex area α reperitur radius; nempe si $\alpha = r^2\pi$, est $r = \sqrt{\frac{\alpha}{\pi}}$. Si vero peripheria P data sit, reperietur ex $P = 2r\pi$ radius $r = \frac{P}{2\pi}$.

§. 14.

Annulus A quoque (Fig. 120.) hinc facile prodit e maioris circuli radio R et minoris radio r; nempe

$$A = R^2\pi - r^2\pi = (R^2 - r^2)\,\pi.$$

Ita sector prodit pro arcu β in circulo radii r; nempe sectoris area erit ad totius circuli aream, uti arcus ad peripheriam, seu β ad $2r\pi$. Data chorda radioque etiam segmentum innotescit, si sectoris area nota fuerit, subtracto triangulo a chorda et duobus radiis facto, e sectore; nimirum area trianguli e tribus lateribus prodit (pag. 103).

II.

Transmutatio figurarum quoad areas; et hinc *reductio earum ad formam rectae* (Tom. I. pag. 27).

§. 1.

(Fig. 121.). *Si $a \,.\, A = b \,.\, B$, et angulus $aA =$ angulo bB: tum parallelogrammum ex a et A parallelogrammo ex b et B quoad contentum aequalitate terminata aequale est.*

Nam si e fine $\mathfrak{M}$ ipsius B, (quod in parallelogrammi $\mathfrak{GCEF}$ lateris $\mathfrak{EC}$ prolongationem ponatur), $\mathfrak{MJ} \parallel$ et $= \mathfrak{GC}$ fiat, $\mathfrak{JC}$ secabit ipsam $\mathfrak{FE}$, quia $\mathfrak{MJ} \parallel \mathfrak{FE}$; pariter ducta per $\mathfrak{D}$ parallela ad $\mathfrak{EM}$ secat ipsam $\mathfrak{JM}$. Oriuntur autem hoc pacto triangula $\mathfrak{CHD}$ et $\mathfrak{JMC}$ similia propter $\mathfrak{HD} \parallel B$, $\mathfrak{MJ} \parallel \mathfrak{HC}$; itaque prodit tale x, ut sit $a : x = B : A$, adeoque $aA = xB$; atque hinc manifesto $x = b$, quum per hypothesim sit $aA = bB$.

Est etiam $\mathfrak{GJ}$ in recta eadem cum $\mathfrak{GF}$, atque ipsi $\mathfrak{ME}$ parallela est; nam $\mathfrak{GF} \parallel \mathfrak{ME}$, atque $\mathfrak{MJ} \parallel$ et $= \mathfrak{GC}$.

Estque $\mathfrak{MCHK}$ parallelogrammum ex b et B cum angulo $bB=z$, uti $\mathfrak{GCEF}$ ex a et A cum angulo $aA=z$. Hæc duo parallelogramma autem æqualitate terminata esse æqualia patet: si ad latera posterioris ipsi A æqualia transferatur b, donec fieri potest, et ad latera prioris ipsi B æqualia transferatur a, donec fieri potest; nam parallelogramma orta sunt æqualia, uti $1=1$, ita si plura quotquot essent: porro $\triangle k=\triangle k$; si a in B exacte certo numero adesset, patet tum β non remanere, neque α adesse, et A etiam certo numero continere b, quia $a:B=b:A$, atque tum pro k quoque parallelogrammum reliquis æquale adesset. At si adsint α et β, tunc si in latere ipsi B opposito inferiore, ex ultimo a dematur β, et sit ab extremitate eius parallela ad A; erit hæc $=\alpha$, et tertium latus $=\gamma$; ita si ex ultimo b in $\mathfrak{EF}$ dematur α, et fiat ab extremitate eius parallela ad B; erit hæc $=\beta$, et triangula $\alpha\beta\gamma$ omnia erunt æqualia, per unum latus in quibusvis duobus æquale, et angulos per latera parallela æquales.

Hinc etiam quinquelaterum $\beta s\alpha a b$ = alteri $\beta s\alpha a b$; nam latera et anguli ordine quo semet excipiunt sunt æqualia; nam s remanet utrinque e diagonalibus æqualibus subtracto γ; patet etiam ex $a+\beta$ demto β remanere a, uti ex $b+\alpha$ demto α remanere b. Itaque parallelogrammum Aa ≍ parallelogrammo Bb æqualitate terminata est.

§. 2.

Hinc patet, quod cum cuique parallelogrammo detur aliud æquale angulo z gaudens, nempe inter parallelas easdem rectis ad angulum z ductis ab extremitatibus baseos parallelis: dari hoc modo cuivis parallelogrammo aliud ad datum latus et angulum æquale; ita cuivis triangulo, quia hoc parallelogrammo altitudinis æqualis baseos dimidiæ ≍ est.

Ita etiam plura quotvis parallelogramma summari possunt, omnia ad angulum z et latus datum reducendo; adeo ut, quum z etiam rectus esse possit, quævis area, quæ ad summam triangulorum reduci potest, in rectangulum eiusdem altitudinis summari, adeoque ad formam rectæ reduci queat. (Tom. I. pag. 27).

§. 3.

Si in præcedentibus $aA = B^2$, (uti pag. 75), prodit $b = B$; atque quadratum ipsi b superstructum rectangulo ex a et A æqualitate terminata $\asymp$ erit.

Hinc si (Fig. 122.) α, β catheti fuerint, et demissa e vertice anguli recti ad hypotenusam γ perpendiculari, quadratum hypotenusæ in rectangula p et q dividatur: erit (pag. 75) $\alpha^2 = a\gamma$, et $\beta^2 = b\gamma$. Consequenter e quadrato ipsius α exstrui modo in §. 1 relato poterit rectangulum p, uti rectangulum q e quadrato β; adeoque *quadratum hypotenusae exstruetur e quadratis cathetorum.*

Unde *duo quadrata in unum commutari possunt*, si priorum latera ad angulum rectum iungantur, et ducatur hypotenusa: huius quadratum enim summa priorum erit. Pari modo tertium quadratum, et tum quartum et ita porro in unum mutantur.

§. 4.

Si vero figuræ cuiusdam area a in figuram certæ speciei per x determinatam mutanda sit, sitque hæc $= f(x)$, tum x ex $a = f(x)$ eruitur. Ex. gr. si $f(x)$ circulum, cuius radius x est, denotet: erit

$$f(x) = x^2\pi = a,$$

et hinc

$$x = \sqrt{\frac{a}{\pi}}.$$

Ita si $f(x)$ hexagonum circulo radii x inscriptum denotet: erit area eius perimetro per perpendicularis y e centro ad latus missæ dimidium multiplicatæ æqualis, adeoque

$$6x \cdot \frac{y}{2} = 6x \cdot \frac{x\sqrt{3}}{4} = \frac{3}{2}x^2\sqrt{3};$$

nam latus hexagoni æquatur radio, et

$$y = \sqrt{x^2 - \frac{1}{4}x^2} = \sqrt{\frac{3}{4}x^2} = \frac{x}{2}\sqrt{3}.$$

Unde aream dictam hexagoni, pro radio x, ipsi a æqualem ponendo, prodit x.

Ita si $f(x)$ annulum circa circulum radii r per circulum radii x factum denotet, erit

$$f(x)=(x^2-r^2)\pi=a;$$

unde

$$x=\sqrt{\frac{a}{\pi}+r^2}.$$

E quibus ad alia applicatio patet.

III.

Comparatio figurarum similium quoad areas.

§. 1.

Si in duobus triangulis latera a, b et latera A, B angulos aequales intercipiant, uti (Fig. 123.)

$$\wedge ab=\wedge AB=v,$$

area trianguli abc est ad aream trianguli ABC uti ab ad AB.

Nam sint pro basibus b et B altitudines p et P; erunt triangula apq et APQ similia, itaque pro $a=np$ erit $A=nP$. Est autem

$$\triangle\, abc=\frac{pb}{2} \quad \text{et} \quad \triangle\, ABC=\frac{PB}{2},$$

atque

$$\frac{pb}{2}:\frac{PB}{2}=npb:nPB=ab:AB.$$

Idem de parallelogrammis patet, quum quævis parallelogramma uno angulo æquali gaudentia eiusmodi triangulorum dupla sint.

§. 2.

Sunt porro *areae triangulorum similium cbh et CBH* (Fig. 124.), *uti quadrata linearum homologarum.*

Sint enim latera quævis homologa b et B pro basibus accepta, sintque altitudines a et A: erunt propter angulos v et R triangula cqa et CQA similia; itaque si per hypothesim sit

$$B:b=C:c \quad \text{et} \quad B=nb,$$

adeoque

$$C=nc;$$

erit etiam

$$A=na,$$

propter

$$C:c=A:a.$$

Est vero area trianguli cbh

$$=\frac{ab}{2}$$

et area trianguli CBH

$$=\frac{AB}{2}=\frac{nanb}{2}.$$

Consequenter

$$\triangle\, cbh:\triangle\, CBH=\frac{ab}{2}:\frac{AB}{2}=ab:AB=ab:nanb=$$
$$=1:n^2=b^2:n^2b^2=b^2:B^2.$$

§. 3.

Hinc etiam *quarumvis figurarum rectilinearum similium areae sunt in ratione duplicata linearum homologarum.*

Nam sit unius figuræ latus quodvis ad latus illi ex altera figura homologum, uti 1 ad n: erit area trianguli cuiusvis ad homologum, uti 1 ad n^2, adeoque et summa triangulorum figuræ prioris ad summam triangulorum figuræ alterius ita erit, uti 1 ad n^2, areaque ad aream uti a^2 ad A^2, si a latus prioris, et latus posterioris ipsi a homologum $A=na$ sit.

§. 4.

Unde etiam patet *areas circulorum esse uti quadrata diametrorum.*

Nam si diameter unius sit d, alterius D, inscriptis polygonis utrique totidem laterum, erit area polygoni prioris ad aream posterioris, (quum manifesto sint polygona per triangula e centro propter angulos æquales similia), uti radiorum quadrata, nempe uti $\frac{d^2}{4}$ ad $\frac{D^2}{4}$, seu uti d^2 ad D^2. Erit vero ratio eadem semper, etsi numerus laterum simul duplicetur in infinitum, quo pacto id, quod in uno alterove supererit, $\frown 0$. Dicatur area polygoni prioris p, et posterioris P, area circuli prioris autem sit c, posterioris sit C, sitque $c = p + \omega$ et $C = P + \lambda$; erit

$$p : P = d^2 : D^2,$$

adeoque et

$$\frac{p+\omega}{P+\lambda} = \frac{d^2}{D^2},$$

quia $\omega \frown 0$, et $\lambda \frown 0$ (Tom. I. pag. 89).*

Idem ad alias figuras quoque extendi potest.

§. 5.

Hinc si (Fig. 125.) lateribus a, b, c trianguli rectanguli figuræ similes A, B, C superstruantur: erit C, *hypotenusae c superstructa, summae cathetis superstructarum aequalis*; nempe

$$C = A + B;$$

posito a, b, c latera figurarum A, B, C homologa esse.

Namque tum

$$A : B = a^2 : b^2, \quad \text{atque hinc} \quad A : a^2 = B : b^2;$$

itaque si

$$A = na^2,$$

erit

$$B = nb^2.$$

Porro

$$A : C = a^2 : c^2, \quad \text{et hinc} \quad A : a^2 = C : c^2,$$

adeoque

$$C = nc^2.$$

* §. 4. brevius sequitur ex pag. 107 §. 13. Erit enim pro diametris D et d area prioris $= D^2\pi : 4$, posteriorisque erit $d^2\pi : 4$. (Errata Ed. I. Tom. II. pag. 386).

Sed

$$c^2 = a^2 + b^2.$$

Consequenter

$$nc^2 = na^2 + nb^2,$$

seu

$$C = A + B.$$

§. 6.

Hinc (Fig. 126.) lunula Hippocratis æquatur triangulo rectilineo; nempe $\alpha' = t$, si $a = b$; atque $\alpha' + \beta' = t + t'$.

Nam

$$\alpha + t + t' + \beta = \alpha + \alpha' + \beta + \beta',$$

nempe summa dimidiorum circulorum super cathetis a, b tanquam diametris constructorum est semicirculo diametri c æqualis. Subducto igitur utrinque $\alpha + \beta$, manet

$$\alpha' + \beta' = t + t';$$

si vero $a = b$, est $\alpha' = \beta'$ et $t = t'$.

Quomodo Hippocrates ope suæ lunulæ quadraturam circuli tentaverit, referre haud operæ pretium est.

§. 7.

(Fig. 127.). Superius (pag. 93) mentio facta erat quantitatis anguli arcuum circularium per areas exprimendæ: si circuli A et B se invicem extus aut intus contingant, et $B < A$, saltem non $> A$ fuerit, atque B cum tangente angulum u, A vero angulum v faciat; quantitas anguli circuli A cum B exprimi per $U + V$ potest, si U aream denotet, quæ est inter dimidiam peripheriam ipsius B et quadrantem peripheriæ centro c diametro ipsius B tanquam radio descriptæ; atque ita V aream inter dimidiam peripheriam ipsius A et quadrantem peripheriæ centro c diametro ipsius A tanquam radio descriptæ denotet; atque si U et V in diversas respectu tangentis plagas cadant, U positive, si vero in eandem plagam cadant, negative addatur positivo V. Quoad congruentiam tamen geometricam, et seorsim angulorum æqualitas requiritur: idem etiam, si operæ pretium esset, ad angulos (pag. 93) circulares alios quoque applicari posset, qui ex angulo tangentium, et angulis arcuum cum suis tangentibus componuntur.

Pauca adhuc notasse sufficiat.

1. Si (Fig. 127.) circuli A diameter $=1$ sit: erit area eius $\frac{\pi}{4}$ (pag. 107), area circuli vero, cuius radius est diametro ipsius A æqualis, est $=\pi$; area igitur quadrantis circuli posterioris est $=\frac{\pi}{4}$, et area dimidii A est $=\frac{\pi}{8}$, quod si ex $\frac{\pi}{4}$ subtrahatur, manet

$$V=\frac{2\pi}{8}-\frac{\pi}{8}=\frac{\pi}{8}.$$

Est itaque $V=$ dimidio A, atque quadrantem cpqh dimidia peripheria cih ut diagonalis bifariam dividit.

2. Si vero diameter ipsius B sit d: erit

$$B=\frac{d^2}{4}\pi,$$

adeoque

$$\frac{1}{2}B=\frac{d^2\pi}{8},$$

et quadrantis radio ac descripti area

$$=\frac{d^2\pi}{4},$$

adeoque

$$U=\frac{d^2\pi}{8}.$$

Unde

$$U+V=\frac{\pi}{8}(d^2+1),$$

atque si $A=B$, area trianguli $\omega=\frac{\pi}{4}=A$.

Plura huius generis Tyrones ipsi reperire possunt.

IV.

Additio, subtractio, divisioque figurarum sub certis conditionibus.

§. 1.

Si (Fig. 128.) *fiat* (pag. 71)

$$\alpha : \beta = n : m,$$

atque e vertice trianguli AB ducatur recta ad finem ipsius α, *triangulum in ratione eadem divisum erit*; nam altitudo utriusque est eadem, adeoque areæ sunt uti bases (pag. 102).

§. 2.

Quodvis punctum p in A sit, area trianguli ax est ad aream trianguli AB, uti $a.x$ ad $A.B$ (pag. 111); itaque area prior erit ad posteriorem, uti n ad m, si fuerit

$$a.x : A.B = n : m,$$

adeoque

$$x = \frac{n.A.B}{ma};$$

et tum triangulum AB per punctum datum p in dicta ratione divisum erit.

§. 3.

Area figurarum similium sunt uti quadrata linearum homologarum. Hinc (Fig. 129.) si $b \parallel B$, est

$$A^2 : x^2 = \triangle AB : \triangle xb,$$

adeoque si

$$A^2 : x^2 = n : m;$$

erit

$$\triangle AB : \triangle xb = n : m,$$

et per parallelam hoc pacto triangulum in dicta ratione dividetur.

§. 4.

Si vero (Fig. eadem) fuerit trapezium Bb, e quo data area ipsi t æqualis sit subtrahenda, per $z \parallel B$ (inferius aut superius) absecta: concipiatur lateribus trapezii non parallelis productis expleri triangulum; erit

$$a+x : x = B : b;$$

adeoque

$$x = \frac{ab}{B-b},$$

et

$$A = a+x = \frac{aB}{B-b},$$

atque α nempe area trianguli, quod supra b est, erit

$$= \frac{pb^2}{2(B-b)};$$

nam

$$a : p = x : q,$$

et hinc

$$q = \frac{px}{a} = \frac{pb}{B-b},$$

adeoque

$$\alpha = \frac{1}{2} b \cdot \frac{pb}{B-b}.$$

Si iam t sit subtrahendum, et sit

$$\alpha + t : \alpha + t + t' = m : n;$$

erit

$$A^2 : (x+y)^2 = n : m;$$

adeoque

$$mA^2 = nx^2 + ny^2 + 2nxy;$$

et

$$y^2 + 2xy + x^2 - \frac{mA^2}{n} = 0;$$

unde cum x iam cognitum sit, prodit y. Patet quoque, si inferius sit t subtrahendum, etiam tum datum esse t, et tantum y esse reperiendum.

Si trapezium t' trapezio t addi debeat, reperto x datum erit $x+y$, fietque

$$(x+y)^2 : A^2 = \alpha + t : \alpha + t + t';$$

unde etiam A reperietur.

§. 5.

Hinc quævis figura rectilinea per lineas parallelas in data ratione dividi poterit. Nam si triangulum aut trapezium nimis magnum fuerit, potest ex eo trapezium subtrahi; si nimis parvum, e sequente trapezio subtrahi debet, addique parti priori, quod ita ad finem usque continuare licet.

§. 6.

Possunt etiam areæ per triangula addita, et ita posita, ut etsi lineæ dividentes parallelæ non sint, nec tamen ab una parte nimis lata, ab altera nimis angusta portio sit, quod tamen magis praxim spectat, in ratione data dividi: nempe portio exhibenda in duas partes α et α' (Fig. 130.) dividi potest; eritque

$$\alpha' = x\frac{b}{2} \quad \text{et} \quad x = \frac{2\alpha'}{b};$$

itaque e fine perpendicularis x ducta ad b parallela, triangulum α' efficiet cum α formam quæsitam; quod item continuare licet, ut prodeat portio altera $\beta + \beta'$ &c.

Scholion: Omnia hæc vero etiam geometrice perfici possunt, cum nonnisi additionem linearum, subtractionem, multiplicationem, divisionemve earundem, ad summum extractionem radicis quadratæ requirant. In praxi tamen, ne error multiplicibus constructionibus multiplicetur, satius est calculo repertas lineas ope scalæ accipere: quamvis omnia geometrice possint in rectangulum summari, et hoc in data ratione dividi, atque portioni cuivis e figura data æqualis exhiberi. Ex. gr. sit rectanguli illius altitudo a, potest α in rectangulum altitudinis a transmutari, et si e portione exhibenda remaneat rectangulum α', hoc potest in triangulum baseos b transmutari &; quibus amplius inhærere supervacuum est.

V.

Exempla quaedam ad certarum figurarum, cuipiam figurae sub certa conditione impositarum, summam, huiusque limitem.

§. I.

Sit triangulum æquilaterum (Fig. 131.) circulo radii r inscriptum, sitque $\mathfrak{e}$ lateris $\mathfrak{ab}$ meditullium; est tum $\mathfrak{ad}=\mathfrak{ac}=r$ latus hexagoni; et $\mathfrak{ce}$ est perpendicularis ad $\mathfrak{ab}$, ac triangula $\mathfrak{ace}$ at $\mathfrak{aed}$ sunt æqualia, quia $\mathfrak{ac}=\mathfrak{ad}$, et $\mathfrak{ae}=\mathfrak{ae}$; hinc

$$\mathfrak{ce}=\frac{1}{2}r,$$

estque radius circuli inscripti; nam si $\mathfrak{h}$ sit alterius lateris meditullium, triangula $\mathfrak{cah}$ et $\mathfrak{cae}$ sunt æqualia, quia $\mathfrak{ah}=\mathfrak{ae}$, et $\mathfrak{ca}=\mathfrak{ca}$, angulus ad $\mathfrak{h}$ meditullium chordæ vero est rectus. Hinc $\mathfrak{cf}$ etiam

$$=\frac{1}{2}r=\mathfrak{fg},$$

et

$$\mathfrak{ge}=\frac{3r}{2};$$

$\mathfrak{ae}$ vero

$$=\sqrt{r^2-\frac{r^2}{4}}=\frac{1}{2}r\sqrt{3};$$

et

$$\mathfrak{ab}=r\sqrt{3}.$$

Area A trianguli $\mathfrak{agb}$ est latus trianguli multiplicatum per dimidiam altitudinem; itaque est

$$=\frac{3r}{4}\cdot r\sqrt{3};$$

area A' circuli inscripti autem est

$$\left(\frac{1}{2}r\right)^2\pi=\frac{r^2\pi}{4};$$

et si trianguli æquilateri latus sit n-ies minus, est area α circuli huic triangulo inscripti

$$\frac{r^2\pi}{4n^2};$$

quia radius quoque per similitudinem est n-ies minor, nempe $\frac{r}{2n}$.

§. 2.

Si vero (Fig. 132.) trianguli æquilateri latera omnia per n dividantur et agantur e quovis divisionis puncto lateris cuiusvis ad duo reliqua latera parallelæ, atque inscribatur cuivis minorum triangulorum æquilaterorum hoc pacto ortorum circulus, imo etiam ponatur eiusmodi circulus quocunque, ubi is in triangulo æquilatero iuxta Figuram eandem locum habere potest; dicatur summa arearum omnium horum circulorum A''.

Patet heic triangula æquilatera oriri in strato inferiore numero $n+n-1=2n-1$, qui est numerus n-tus impar; ita in strato sequente est triangulorum numerus $(n-1)$-tus impar, et ita porro; ut summa omnium sit n^2. Itaque etiam numerus circulorum inscriptorum est n^2. Sed si per vertices horum triangulorum ducantur rectæ, nempe quorum bases aut coincidunt, aut sunt parallelæ: erunt hæ ad bases perpendiculares, et centrum circuli inscripti est in intersectione talium perpendicularium; remanet vero ultra peripheriam circuli inscripti, usque ad verticem recta æqualis radio inscripti; itaque eodem radio potest circulus centro in vertice sex triangulorum communi sumto describi, sex circulos triangulis inscriptos tangens; inscriptus circulus vero ad summum a tribus inscriptis, sed potest ab uno quoque aut duobus tangi; tangere se hos circulos patet, quum centra cum puncto communi in rectam cadant.

Hinc novorum circulorum centris stellulatis gaudentium a sex circulis tactorum numerus inter duo strata inferiora est $n-2$; tum $n-3$, dein $n-4$ . . . usque ad 1.

Itaque, ut A'' prodeat, circulis prioribus, qui numero n^2 erant, additis novis, fiet

$$A'' = \frac{r^2\pi}{4n^2}(n^2 + n - 2 + n - 3 + \cdots + 1)$$
$$= \frac{r^2\pi}{4n^2}\left(n^2 + \frac{(n-1)(n-2)}{2}\right)$$
$$= \frac{r^2\pi}{4} + \frac{r^2\pi}{2.4} + \frac{r^2\pi}{4n^2} - \frac{3r^2\pi}{2.4n}$$
$$= \frac{3r^2\pi}{2.4} + \frac{r^2\pi}{4n^2} - \frac{3r^2\pi}{2.4n}.$$

Quæratur valor summæ duorum posteriorum, (cum terminus primus sit pro quovis n idem), num crescat crescente n, aut decrescat. Est

$$\frac{r^2\pi}{4n^2} - \frac{3r^2\pi}{2.4n} = \frac{2r^2\pi - 3r^2\pi n}{2.4n^2} = \frac{r^2\pi}{2.4}\cdot\frac{(2-3n)}{n^2},$$

e quo, si $n+1$ substituatur ipsi n, fiet

$$\frac{r^2\pi}{2.4}\cdot\frac{[2-3(n+1)]}{(n+1)^2};$$

et tantum

$$\frac{2-3n}{n^2} \quad \text{et} \quad \frac{2-3(n+1)}{(n+1)^2}$$

consideranda veniunt; reducta ad denominationem eandem, erunt

$$\frac{2+n-4n^2-3n^3}{n^2(n+1)^2} \quad \text{et} \quad \frac{-n^2-3n^3}{n^2(n+1)^2},$$

ubi in priore plus negativi est; nam $2+n-3n^2$ nonnisi pro $n=1$ est $=0$, pro maiore n vero fit negativum; $-n^2-3n^3$ autem quod manet, est idem negativum quam $-n^2-3n^3$. Crescente igitur n in infinitum, decrescit quidem $A-A''$, nempe summa vacuitatum a circulis in triangulo relictarum: at datur limes ad quem tendit ista differentia, ita ut aliquanta pars trianguli hoc modo expleri haud unquam queat.

Est nempe

$$A - A'' = \frac{3r^2}{4}\cdot\sqrt{3} - \left(\frac{3r^2\pi}{2.4} + \frac{r^2\pi}{4n^2} - \frac{3r^2\pi}{2.4n}\right),$$

quod $\backsim \frac{3r^2}{2.4}\cdot(2\sqrt{3}-\pi)$; quia summa posteriorum fit crescente n in infinitum omni dabili minor; adeoque si summa vacuitatum dicatur v', et limes huius sit v; decrescet v' infra $\frac{A}{10}$, sed non decrescet usque $\frac{A}{11}$; nam $\frac{A}{v}$ est

$$= \frac{2 \cdot 3r^2 \sqrt{3}}{2 \cdot 4} : \frac{3r^2(2\sqrt{3} - \pi)}{2 \cdot 4} = \frac{2\sqrt{3}}{2\sqrt{3} - \pi};$$

est autem $\sqrt{3} = 1,732\ldots$; adeoque $2\sqrt{3} = 3,46\ldots$; π vero pro diametro 1 est $= 3,141\ldots$; itaque $2\sqrt{3} - \pi$ est $0,32\ldots$ quod per 11 multiplicatum est $3,52\ldots$, adeoque excedit $3,46\ldots$, sed decies acceptum infra hoc manet.

§. 3.

Si pro n, m integris rectanguli basis sit $= mu$, altitudo $= nu$; atque ducantur e fine cuiusvis u in basi ad altitudinem, in altitudine ad basim parallelæ: oriuntur quadrata lateris u numero nm, et totidem circuli radii $\frac{u}{2}$, si cuivis quadrato circuli inscribantur; eritque cuiusvis circuli area $= \frac{u^2\pi}{4}$, adeoque summa erit omnium $= nm\frac{u^2\pi}{4}$.

Dividatur quodvis u in partes numero μ; ductis ut prius parallelis, orientur quadrata lateris $\frac{u}{\mu}$ numero $nm\mu^2$, et totidem circuli his inscripti, quorum cuiusvis radius $= \frac{u}{2\mu}$, adeoque $= \frac{u^2\pi}{4\mu^2}$, eritque summa omnium

$$= nm\mu^2 \cdot \frac{u^2\pi}{4\mu^2} = \frac{nmu^2\pi}{4},$$

ut prius. Manet igitur summa vacuitatum semper eadem, nempe

$$nmu^2 - \frac{nmu^2\pi}{4} = \frac{nmu^2(4 - \pi)}{4}.$$

Quæstionibus tamen huius generis pluribus vacare non licet.

*212.

De quorundam, quorum e prioribus possibilitas innotuit, constructione geometrica.

§. 1.

Recta a extrema et media ratione secatur, ut olim dicebatur; si construatur triangulum rectangulum, cuius alter cathetus est $\frac{1}{2}a$: erit (Fig. 133.) x id quod quæritur; nempe

$$a : x = x : a - x.$$

Nam (pag. 76)

$$\left(\frac{1}{2}a + x\right)^2 = \frac{1}{4}a^2 + ax + x^2 = \frac{1}{4}a^2 + a^2.$$

Hinc

$$a^2 - ax = x^2 = a(a - x);$$

unde

$$a : x = x : a - x.$$

§. 2.

Hinc construitur decagonum in circulo radii r: nempe si r modo præcedente secetur, erit x latus decagoni (Fig. 134.).

Nam $r : x = x : r - x$; itaque triangula $\mathfrak{acb}$ et $\mathfrak{dab}$ sunt similia; quia angulus u est communis, et latera intercipientia r et x, atque x et $r-x$ sunt proportionalia; itaque anguli lateribus proportionalibus oppositi sunt æquales.

Nempe lateribus

$$r = \mathfrak{bc},\ x = \mathfrak{ab},\ x = \mathfrak{ab},\ r - x = \mathfrak{db}$$

opponuntur

$$y + v, \quad z, \quad p, \quad v,$$

adeoque

$$y + v = p \quad \text{et} \quad z = v;$$

sed $y + v = u$, quia $r = \mathfrak{ac}$, adeoque $p = u$, hinc $k = x$, et inde $z = y = v$; adeoque

$$y + v = 2z \quad \text{et} \quad z + y + v + u = 5z = 2R,$$

et

$$z=\frac{2R}{5}=\frac{4R}{10}.$$

Patet e decagono pentagonum quoque datum esse.

Peripheriæ divisio per constructionem geometricam sensu stricto in 2, 3, 5, 3.5, atque 2^μ, 3.2^μ et $3.5.2^\mu$ pro μ integro iam Euclidis temporibus nota fuit; omnesque Geometræ tanquam certum pronunciaverant per nullum alium integrum id fieri posse: quid summus recentioris ævi Geometra hac in re quoque præstiterit, vide Tom. I. pag. 384; de quo tamen amplius dicere locus heic non est; et pluribus aliis quoque brevitas necessaria supersedere iubet.

Supplementum numeri ·2111211222;

in quo

Origo ideaque Trigonometriae

exponitur: in triangulo angulorum laterumque illis oppositorum mutuam a se invicem dependentiam, atque huius ope modum e datis ignota computandi quærere, ea quoque necessitas impulit, quod pro magnis distantiis quæsita constructio exhibere nequeat.

§. 1.

Hic prius omnino de triangulis rectilineis in plano agetur; de sphæricis suo loco dicetur: nempe *sphaera*, eiusque (crescente radio in infinitum) limes geometricus, qui sub conditione pag. 55 exposita *planum* est, certo sensu infinite differentia, alio conveniunt, et in utroque e quovis puncto quaquaversum omnia æqualiter determinantur; atque in utroque lineæ figuræque considerandæ sunt, imo veritates unius plures certa mutatione et alteri conveniunt. Ex. gr. *fundamentale utriusque Trigonometriae tam planae quam sphaericae est, dependentia angu-*

lorum laterumque oppositorum mutua: in plana sunt sinus angulorum, uti latera opposita, in sphaerica uti sinus laterum oppositorum, nempe ibi et latera trianguli sunt arcus sinu gaudentes. Quid *sinus, cosinusque*, et aliæ lineæ auxiliares, nempe *sinus versus, tangens, secans, cosinus versus, cotangens, cosecans*, significent, dictum (pag. 14) est; quorum tamen proprie omnia reliqua e sinu promanare e loco citato liquet, quum *cosinus e sinu prodeat* per theorema Pythagoricum (Fig. 135.) e triangulo rectangulo, cuius hypotenusa radius et unus cathetus sinus anguli u, alter vero cosinus est; nempe

$$\cos.^2 u = r^2 - \sin.^2 u,$$

unde

$$\cos. u = \sqrt{r^2 - \sin.^2 u};$$

quod pro radio 1 fit

$$= \sqrt{1 - \sin.^2 u}.$$

Atque hinc omnes reliquas functiones trigonometricas, loco citato nominatas, per sinum solum exprimi pro radio 1 posse manifestum est; at sæpius expressio brevior clariorque et concinnior per nomina functionum trigonometricarum reliqua fit.

§. 2.

Sed priusquam dependentiæ angulorum et laterum mutua demonstraretur, quod nempe sinus sint uti latera opposita, atque inde omnes trianguli rectilinei resolutiones deducerentur: dependentia sinus ipsius cosinusque et reliquarum functionum trigonometricarum ab *angulo seu arcu anguli quantitatem* exprimentis consideratur; sinus nempe uti reliquæ functiones trigonometricæ tam angulo quam arcui illius quantitatem exprimenti æque tribuuntur.

I. Pro integro m positivo, et q quadrantem positivum denotante, quantusvis sit arcus α, sive ⊢+⊣ sive ⊢−⊣; $\mp$ vel $\pm 4mq \pm \alpha$ et $\pm \alpha$ sinu eodem gaudent; id est si arcus $\pm \alpha$ ita mutetur, ut ei addatur sive $4mq$ sive $-4mq$, nec sinus nec cosinus mutatur: nempe quotiescunque decurratur peripheria sive positive sive negative arcus $\pm\alpha$ ibi terminatur, ubi $\pm$ vel $\mp 4mq \pm \alpha$. Ita si $\alpha+\gamma=\pm 4mq$ fuerit, α et $-\gamma$ sinu cosinuque iisdem gaudent: nam $-\gamma=\mp 4mq+\alpha$.

II. Si α mutetur in $-\alpha$, sin. α et sin. $(-\alpha)$ sunt oppositi, alioquin æquales; cos. α et cos. $(-\alpha)$ autem est idem. Nam aliquod ipsorum α et $-\alpha$ terminabitur supra diametrum primariam, nisi plane in ipsa terminetur, et tum alterum infra terminabitur; atque tum manifesto extremitates arcuum α et $-\alpha$ a principio $*$, æqualibus arcubus distabunt, chordaque extremitates has connectens per diametrum primariam perpendiculariter bisecabitur: unde reliqua patent; quum distantia extremitatis unius sit positiva, altera negativa, alioquin æquales; distantia centri vero sit eadem. Si vero in diametro terminetur, fiet id aut in principio aut in fine: si prius, tum sinus est $0=\pm 0$, cosinus vero $=1$, pro radio 1; si posterius, sinus item $=0=\pm 0$; cosinus autem $=-1$, nempe distantia centri est -1 (pag. 14).

III. Si α mutetur in tale γ, ut sit

$$\alpha+\gamma=q;$$

adeoque γ complementum ad q ipsius α sit, tum

$$\sin.\gamma=\cos.\alpha \quad \text{et} \quad \sin.\alpha=\cos.\gamma.$$

Si vero

$$\alpha+\beta=2q,$$

tunc

$$\sin.\alpha=\sin.\beta, \quad \text{et} \quad \cos.\alpha=-\cos.\beta.$$

Nempe si tabula sequens, valores ipsius α, complementaque ipsius ad q, tum complementa ipsius α ad $2q$, et demum complementorum istorum ad $2q$ complementa ad q exhibens, percurratur, facile patet: sit k arcus positivus $<q$, aut sit 0.

Valores ipsius α	Compl. ad q	Compl. ad $2q$	Compl. complementorum ad $2q$
k	$q-k$	$2q-k$	$-\ q+k$
$q+k$	$-k$	$q-k$	$+k$
$2q+k$	$-q-k$	$-k$	$q+k$
$3q+k$	$-2q-k$	$-q-k$	$2q+k$
$-k$	$q+k$	$2q+k$	$-\ q-k$
$-q-k$	$2q+k$	$3q+k$	$-2q-k$
$-2q-k$	$3q+k$	$4q+k$	$-3q-k$
$-3q-k$	$4q+k$	$5q+k$	$-4q-k$
0	q	$2q$	$-\ q$

E quo casibus singulis percursis patet, quum in columna prima quotiesvis $4q$ addi valoribus positivis, et quotiesvis $-4q$ addi valoribus negativis possit, atque eatenus reliquæ columnæ mutari salva re (per I) possint.

IV. Si α a 0 crescat positive usque ad q, sinus a 0 crescet usque ad radium r, qui *sinus totus* vel *maximus* audit, quum nullus eo maior sit; crescente vero arcu porro ultra q decrescit, usque 0 pro arcu $=2q$; crescenteque porro arcu ultra $2q$, crescit sinus negative a 0 infra diametrum, donec pro arcu $3q$ fiat $-r$; et ultra $3q$ crescentis arcus sinus decrescit negative usquequo $=0$ fiat pro arcu $=4q$.

Cosinus autem arcus 0 aut $\pm 4mq$ est $=r$, nempe $\cos. 0 = \sin. q$; quia $q+0=q$, et sin. q pro radio r est r; et postea decrescit usquequo $\cos. q = 0$ fiat, decrescente nempe crescentis arcus complemento; at ultra q crescentis arcus cosinus, eousque ab r ad 0 decrescens, abinde negative crescit, donec pro arcu $2q$ fiat $=-r$; atque dein porro crescente arcu $2q$, item negative decrescit cosinus usquequo pro $3q$ fiat $=0$, et abinde denuo crescit positive usquequo pro $4q$ fiat $=r$.

Sinus versus ipsius α vero, omnia hic pro radio r intelligendo, exprimi per $r-\cos.\alpha$ potest: nam si sinus inter principium $*$ arcus atque centrum c cadat, tum $\cos.\alpha$ est positivus, et manifesto sin. vers. α est $=r-\cos.\alpha$; atque si sinus ultra centrum cadat, tum ut distantia principii

* a sinu prodeat, radio recta illa, quæ ultra centrum usque ad sinum est, positive addenda est; quod per $r - \cos.\alpha$ exprimitur, quia plane rectæ illius addendæ oppositum est $= \cos.\alpha$. Patet vero sinum versum crescere a o usquequo pro arcu $2q$ fiat $=$ diametro, et dein decrescere donec pro $4q$ fiat item $= 0$.

Tangens ipsius α autem dicitur $\frac{\sin.\alpha}{\cos.\alpha}$ pro radio 1, aut pro radio r generaliter $\frac{r\sin.\alpha}{\cos.\alpha}$; crescitque a o positive, usquequo pro q fiat ∞; deinde decrescit negative usque ad o pro arcu $= 2q$; et tum item positive crescit, donec pro $3q$ fiat ∞, atque demum negative decrescit, donec pro $4q$ fiat $= 0$. Nempe pro arcu crescente a o usque q, tam sinus quam cosinus positivus est, crescitque sinus a o usque ad radium, cosinus autem a radio decrescit usque o; abinde usque ad $2q$ sinus manet positivus, sed divisor negativus est, adeoque quotus fit negativus, atque dividendus a radio usque ad o decrescit, divisor autem a o crescit negative usque ad radium; postea vero usque ad $3q$ tam sinus quam cosinus negativus est, adeoque quotus fit positivus; crescit vero sinus a o usque ad radium positive, cosinus autem item positive decrescit usque ad o; et tum sinus decrescit usque ad o positive, cosinus autem crescit negative, usque ad radium; postea vero sinus crescit negative, et cosinus decrescit negative; atque demum usque ad $4q$ sinus decrescit negative usque ad o, cosinus autem positive crescit a o usque ad radium.

Secans ipsius α dicitur $\frac{1}{\cos.\alpha}$ *pro radio* 1, generaliter pro radio r (et cosinu α pro radio 1 accepto) autem $\frac{r}{\cos.\alpha}$ *secans ipsius α pro radio r* dicitur; crescitque crescente arcu a o usque ad q, positive a radio in ∞, et inde usque ad $2q$ decrescit ex ∞-to negative, donec pro $2q$ fiat $=$ radio; et tum item crescit negative, donec pro $3q$ item fiat $= \infty$, atque abinde decrescit positive, donec pro $4q$ item fiat $=$ radio. Nempe (ut statim patebit) pro radio r cosinus ipsius α fiet $r\cos.\alpha$, ($\sin.\alpha$, $\cos.\alpha$ & *semper, nisi aliud monitum fuerit, pro radio 1 intelligendo*): adeoque secans pro radio r fiet $\frac{r^2}{r\cos.\alpha} = \frac{r}{\cos.\alpha}$; fietque hoc pacto secans in primo et ultimo quadrante $+$ propter cosinum positivum, et $-$ in secundo et tertio, propter cosinum negativum; quamvis tangens per singulos quadrantes signum mutet, atque eadem linea secans geometrice statim exhibenda fiat pro quadrante ultimo positiva, et negativa pro secundo.

Cosinus versus, *cotangens*, *cosecans* quomodo crescente arcu a o usque ad $4q$ mutentur, quum pari modo facile pateat, præterire licet. Sufficiat heic prius commemorare, quomodo e signo functionis trigonometricæ ad arcum eius concludatur, tum tangentem, secantemque geometrice exhibere.

Quod prius attinet: manifesto sinu positivo (et non o) nonnisi arcus $4mq+p$, aut $-4mq-2q-p$ respondere, pro p positivo et $<2q$, potest; ita sinus positivus radio minor respondet tam angulo acuto, quam obtuso eum ad duos rectos complenti; atque ex aliis datis eruendum est, utrinam appertineat. Cosinus negativus et non $=0$ angulo obtuso respondet, positivus acuto; cosinus $=0$, uti sinus $=$ radio, angulum rectum indicat: arcus autem cosinui negativo et non o, respondet quivis sub formulam $4mq+q+p$, aut $-4mq-q-p$, pro p positivo et $<2q$. Reliquis, quum pari modo e dictis facile pateant, immorari supervacuum est.

Quoad alterum videatur (Fig. 135.): sinus arcus $\mathfrak{ad}$ est $\mathfrak{di}$, et tangens est $\mathfrak{ae}$, secans $\mathfrak{ec}$, sinus versus $\mathfrak{ai}$, arcus $\mathfrak{ag}$ item arcus $\mathfrak{adfbg}$ tangens est $\mathfrak{ah}$, secans $\mathfrak{ch}$; atque per similitudinem triangulorum $\mathfrak{dci}$ et $\mathfrak{eca}$ atque $\mathfrak{gic}$ et $\mathfrak{hac}$ proportiones sequentes valent, si α dicatur arcus $\mathfrak{ad}$ et r radius $\mathfrak{ac}$; nempe

$$\mathfrak{ic} : \mathfrak{id} = \mathfrak{ac} : \mathfrak{ae},$$

id est (heic cosinu, sinu et tangente pro radio præsenti r acceptis)

$$\cos.\alpha : \sin.\alpha = r : \text{tang.}\,\alpha;$$

ita

$$\mathfrak{ic} : \mathfrak{dc} = \mathfrak{ac} : \mathfrak{ec},$$

seu

$$\cos.\alpha : r = r : \sec.\alpha,$$

adeoque

$$\sec.\alpha = \frac{r^2}{\cos.\alpha},$$

si $\cos.\alpha$ pro radio r accipiatur. Pariter infra diametrum, et de reliquis, uti de functionibus trigonometricis complementorum omnia facile patent.

V. Si vero radius mutetur, ex. gr. ex I in r, functiones trigonometricæ omnes, quæ pro radio I cuipiam arcui competunt, per r multiplicari debent, ut eidem arcui pro radio I valeant; uti illæ, quæ pro radio r valent, per r dividendæ sunt ut pro radio I valeant. Nam sinus arcuum totidem graduum, atque pariter etiam cosinus ita sunt, uti radii, unde reliqua ultro sequuntur: nempe (Fig. 136.)

$$\mathfrak{ei} : \mathfrak{bd} = \mathfrak{ec} : \mathfrak{bc},$$

quia $\mathfrak{ei}$ et $\mathfrak{bd}$ sunt ad $\mathfrak{aa}$ perpendiculares; ita

$$\mathfrak{ic} : \mathfrak{dc} = \mathfrak{ec} : \mathfrak{bc};$$

nempe sinus ad sinum, et cosinus ad cosinum, uti radius ad radium.

Atque hinc, si ponatur $\mathfrak{ec} = 1$ et $\mathfrak{bc} = r$, *sinus* pro radio I per r multiplicari debet, ut sinus pro radio r prodeat, et pariter *cosinus* pro radio I per r multiplicatus dabit cosinum pro radio r. *Sinus versus* autem erat differentia cosinus a radio, adeoque pro radio r est $r - r\cos.\alpha$, pro radio I vero est $1 - \cos.\alpha$, adeoque posterior per r multiplicari debet ut prior prodeat. *Tangens* pro radio r est $\frac{r\sin.\alpha}{\cos.\alpha}$, pro radio I vero est $\frac{\sin.\alpha}{\cos.\alpha}$, adeoque posterior per r multiplicatus producit priorem. *Secans* pariter pro radio r est $\frac{r}{\cos.\alpha}$, pro radio I autem est $\frac{1}{\cos.\alpha}$, et pariter posterius per r multiplicandum est, ut prius prodeat. Unde etiam ad functiones complementorum reliquas conclusio ultro patet.

Notandum autem est, e similitudine triangulorum dictorum, $\frac{\sin.\alpha}{\cos.\alpha}$, etsi $\sin.\alpha$, $\cos.\alpha$ non pro radio I, ut dictum est, sed pro radio quovis r intelligantur, semper tangentem pro radio I esse.

VI. Si vero α in $\alpha \pm \beta$, adeoque $\sin.\alpha$ in $\sin.(\alpha \pm \beta)$, et $\cos.\alpha$ in $\cos.(\alpha \pm \beta)$ mutetur, fiet

$$\sin.(\alpha \pm \beta) = \sin.\alpha \cos.\beta \pm \cos.\alpha \sin.\beta,$$

et

$$\cos.(\alpha \pm \beta) = \cos.\alpha \cos.\beta \mp \sin.\alpha \sin.\beta;$$

quantumcunque arcum, et sive positivum sive negativum, denotent sive α sive β.

Ad hoc perspiciendum denotent a et b arcus quadrante q minores positivos; manifesto α pro n, m integris positivis poterit per $mq + a$ aut $-mq - a$, ita β per $nq + b$ aut $-nq - b$ exprimi; atque hinc orientur quatuor combinationes pro $\alpha + \beta$ et totidem pro $\alpha - \beta$, nempe quodvis posteriorum duorum cuivis duorum priorum addi, aut ex eo subtrahi potest.

Dicatur A terminus in α, qui certo quadrantum numero additur, et dicatur B terminus in β, qui quadrantum numero additur; atque omittatur tam ex α quam ex β, et tam ex $\alpha + \beta$ quam ex $\alpha - \beta$, quotiesvis adfuerit $\pm 4q$, cum quoad sinum cosinumve nil mutet; manifesto $\alpha + \beta$ sub formam $\pm \mu q + (A + B)$, et $\alpha - \beta$ sub formam $\pm \mu q + (A - B)$ veniet, ubi μ nonnisi 0 aut 1 vel 2 aut 3 erit. Ex. gr. sit

$$\alpha = -7q - a = -7q + A,$$

nempe tum est $A = -a$, sitque

$$\beta = -10q - b = -10q + B;$$

pro α poni potest $-3q + A$, et $-2q + B$ pro β, atque $-1q + (A + B)$ pro $\alpha + \beta = -17q - a - b$, et $3q + (A - B)$ sive $-1q + (A - B)$ pro $\alpha - \beta$; nempe sive ex $-7q$ subtrahatur $-10q$, sive e $-3q$ subtrahatur $-2q$, sinu cosinuque $-q$ et $3q$ eodem gaudent, quum propter $q + 3q = 4q$ extremitas arcuum eadem sit. Sit nimirum in α quadrantum numerus $4p + p'$, et in β sit $4k + k'$, sive positivum sive negativum denotet sive p sive k, at p', k' ipso 4 minora sint; dabit $4p + p' + 4k + k'$ sinum cosinumque eundem, quem $p' + k'$, ita sinum cosinumque eundem dabit $4p + p' - (4k + k') = 4p - 4k + p' - k'$, quam $p' - k'$ (per pag. 125).

Patet porro $A + B$ et $A - B$ semper ipso $2q$ minora esse; nempe etsi A et B aut A et $-B$ simul positiva aut simul negativa sint, nonnisi $a+b$ vel $-a-b$ (pro $a<q$ et $b<q$) prodire potest, in alio casu semper $<q$ prodit.

Sit ipsorum A, B, $(A+B)$, $(A-B)$ nomen generale C, ita ut quodvis dictorum, ipsi C in quavis linea horizontali tabellæ sequentis, ubique simul substituere liceat: fiet

Arcuum	*sinus*	*cosinus*
$\pm 1q+C$	$\pm\cos. C$	$\mp\sin. C$
$\pm 2q+C$	$-\sin. C$	$-\cos. C$
$\pm 3q+C$	$\mp\cos. C$	$\pm\sin. C$
$0q+C$	$\sin. C$	$\cos. C$

Percurrendo casus singulos, circulumque considerando, veritas tabellæ patebit: quæ pro quavis combinationum superius dictarum sinum cosinumque tam ipsius α per sinum cosinumve ipsius A, quam sinum cosinumve ipsius β exhibebit per sinum cosinumve ipsius B; et pariter ipsorum $\alpha+\beta$ et $\alpha-\beta$ sinum cosinumve exhibebit, prioris per sinum cosinumve ipsius $A+B$, posterioris per sinum cosinumve ipsius $A-B$.

Quum vero statim demonstretur esse

$$\sin.(A\pm B)=\sin. A\cos. B\pm\cos. A\sin. B,$$

et

$$\cos.(A\pm B)=\cos. A\cos. B\mp\sin. A\sin. B;$$

et si omnes combinationes superius dictæ inductione completa percenseantur: atque sinu cosinuque ipsorum α, β, $(\alpha+\beta)$, $(\alpha-\beta)$ e tabella dicta acceptis, reperiatur semper

$$\sin.(\alpha\pm\beta)=\sin.\alpha\cos.\beta\pm\cos.\alpha\sin.\beta,$$

et

$$\cos.(\alpha\pm\beta)=\cos.\alpha\cos.\beta\mp\sin.\alpha\sin.\beta:$$

patebit omnino formulæ veritas generaliter. Possent quidem casus plures etiam colligi, ne singuli plane percensendi sint; sed prolixioris operæ pretium non esset.

Exemplo illustrare dicta necesse est. Sit

$$\alpha = -3q - a = -3q + A,$$
$$\beta = -2q - b = -2q + B;$$
$$\sin.(\alpha+\beta) = \sin.(-1q - a - b) = \sin.(-1q + (A+B)),$$

quod e tabella est

$$= -\cos.(A+B) = -\cos. A \cos. B + \sin. A \sin. B$$

per formulam de $A+B$ statim demonstrandam; sed hoc est

$$= \sin.\alpha \cos.\beta + \cos.\alpha \sin.\beta;$$

nam e tabella est

$$\sin.\alpha = \sin.(-3q + A) = \cos. A,$$
$$\cos.\beta = \cos.(-2q + B) = -\cos. B;$$
$$\cos.\alpha = -\sin. A, \quad \sin.\beta = -\sin. B;$$

substituendo fit

$$\sin.\alpha \cos.\beta + \cos.\alpha \sin.\beta = -\cos. A \cos. B + \sin. A \sin. B.$$

Quum omnia reliqua eodem modo prodeant, nonnisi *de A et B demonstranda formula est*; quod fit modo sequente. Valores ipsius A sunt $+a$ vel $-a$, ita valores ipsius B sunt $+b$ vel $-b$; adeoque quemlibet valorum ipsius A cum quovis valorum ipsius B combinando, fient casus sequentes: $a+b$, $a-b$, $-a+b$, $-a-b$; $a+(-b)$, $-a+(-b)$; ubi ut supra tam a quam b positivum et $<q$ est. Consideretur prius $\sin.(a+b)$, et $\sin.(a-b)$, atque $\cos.(a+b)$ et $\cos.(a-b)$. In (Fig. 137.) $a+b$ sive $<q$ sive $=q$, sive $>q$ fuerit, semper infra $2q$ manet; at vero erit a aut $=b$, aut $<b$, aut $>b$. Sit prius a non $<b$, adeoque $a=b$ vel $a>b$. Transferatur b ex fine ipsius a retrorsum, atque ducta chorda a fine novi b ad finem prioris, ducatur radius e centro $\mathfrak{c}$ ad finem ipsius a; bisecabit hic manifesto chordam dictam perpendiculariter. Demittantur e finibus arcuum a, $a+b$ et $a-b$, (nisi $a-b=0$ fuerit), perpendiculares ad diametrum, ut prodeant $\mathfrak{ld} = \sin. a$, $\mathfrak{me} = \sin(a+b)$, $\mathfrak{nf} = \sin.(a-b)$; fiantque e chordæ meditullio perpendiculares I et h. Facile patet triangula dimidiis chordæ insistentia æqualia, et $p=h$ ac $k=i$ esse; atque hinc esse

$$\sin.(a \pm b) = I \pm i,$$

et

$$\cos.(a \pm b) = H \mp h.$$

Valores ipsorum I, i, H, h vero reperiuntur e proportionibus sequentibus pro radio 1

$$1 : \sin.\, a = \cos.\, b : I$$
$$1 : \cos.\, a = \sin.\, b : i$$
$$1 : \cos.\, a = \cos.\, b : H$$
$$1 : \sin.\, a = \sin.\, b : h.$$

Nam patet triangulum cuius latus unum est radius $\mathfrak{cd} = 1$, alterum $\mathfrak{ld} = \sin.\, a$, tertium $\mathfrak{cl} = \cos.\, a$, esse simile triangulo, cuius latera sunt $\mathfrak{cg} = \cos.\, b$, I et H; ita triangulum prius esse simile triangulo, cuius latera $\mathfrak{ge} = \sin.\, b$, h, i, (per pagg. 71, 72).

Hinc valoribus ipsorum I, i, H, h substitutis, est

$$\sin.(a \pm b) = \sin.\, a \cos.\, b \pm \cos.\, a \sin.\, b,$$

et

$$\cos.(a \pm b) = \cos.\, a \cos.\, b \mp \sin.\, a \sin.\, b.$$

Corollaria.

1. Atque hinc etiamsi $a < b$ sit, valet formula. Nam si tum scribatur $b \pm a$, formula valet per præcedentia; sed $\sin.(b+a) = \sin.(a+b)$ et reipsa et iuxta formulam; pariter $\cos.(b+a) = \cos.(a+b)$ et reipsa et iuxta formulam; $\sin.(b-a)$ autem est

$$= \sin.(-(a-b)) = -\sin.(a-b),$$

sed

$$\sin.(b-a) = \sin.\, b \cos.\, a - \cos.\, b \sin.\, a,$$

cuius oppositum est

$$\sin.\, a \cos.\, b - \cos.\, a \sin.\, b,$$

quod igitur est $= \sin.(a-b)$ pro casu etiam, si $a < b$ fuerit, et quidem formulæ convenienter.

Pariter

$$\cos.(a-b) = \cos.(-(b-a)) = \cos.(b-a) = \cos.\, b \cos.\, a + \sin.\, b \sin.\, a,$$

plane ita ut dum $a > b$ erat.

Ita

$$\begin{aligned}\sin.(-a+b) &= \sin.-(a-b) = -\sin.(a-b)\\ &= -(\sin.a\cos.b - \cos.a\sin.b)\\ &= \sin.(-a)\cos.b + \cos.(-a)\sin.b.\end{aligned}$$

Pariter

$$\begin{aligned}\sin.(-a-b) &= \sin-(a+b) = -\sin.(a+b)\\ &= -(\sin.a\cos.b + \cos.a\sin.b)\\ &= \sin.(-a)\cos.b - \cos.(-a)\sin.b\\ &= \sin.(-a)\cos.(-b) + \cos.(-a)\sin.(-b).\end{aligned}$$

2. Hinc si $b=a$ ponatur,

$$\sin.2a = 2\sin.a\cos.a,$$

qui erit sinus arcus dupli.

Porro

$$\cos.2a = \cos.^2 a - \sin.^2 a,$$

et substituendo ipsi $\sin.^2 a$ valorem $1-\cos.^2 a$, fit

$$\cos.2a = 2\cos.^2 a - 1;$$

seu si $2a$ vocetur c, est

$$\cos.c = 2\cos.^2\frac{c}{2} - 1,$$

et substituendo ipsi $\cos.^2$ valorem $1-\sin.^2$, est

$$1 - 2\sin.^2\frac{c}{2} = \cos.c;$$

hinc

$$\sin.\frac{1}{2}c = \sqrt{\frac{1-\cos.c}{2}}$$

et

$$\cos.\frac{1}{2}c = \sqrt{\frac{1+\cos.c}{2}}.$$

3. Sit hinc porro $\sin.a = p$ et $\cos.a = k$, eleveturque per theorema binomiale $(k+p)$ ad n; uti prodeunt termini, summa terminorum, quorum numerus loci par est, exprimit $\sin.na$; terminorum imparium vero summa est $\cos.na$; si in utraque expressione signum termini primi ponatur $+$,

et sequentis —, semperque mutetur alternando. Nam si verum est de n, verum de $n+1$ quoque est. Atqui e formulis facile prodit, verum de $n=2, 3, 4 \ldots$ esse ...; itaque verum de quovis numero erit. Maior probatur sic. (Tom. I. pag. 157).

Sit

$$\begin{aligned}
\sin. na &= Ik^{n-1}p - IIIk^{n-3}p^3 + Vk^{n-5}p^5 + \cdots \\
\cos. na &= k^n - IIk^{n-2}p^2 + IVk^{n-4}p^4 - \cdots \\
\sin. (na+a) &= \sin. na . \cos. a + \cos. na \sin. a = \\
&= k(Ik^{n-1}p - IIIk^{n-3}p^3 + \cdots) + p(k^n - IIk^{n-2}p^2 + \cdots) = \\
&= (Ik^n p - IIIk^{n-2}p^3 + \cdots) + (k^n p - IIk^{n-2}p^3 + \cdots) = \\
&= (I+1)k^n p - (II+III)k^{n-2}p^3 + \cdots;
\end{aligned}$$

quod præter signa in $(k+p)^{n+1}$ æquale est summæ terminorum numero locorum pari gaudentium.

Pariter de $\cos. (na+a)$ liquet.

VII. Sequitur iam laterum angulorumque illis oppositorum in triangulo rectilineo mutua dependentia, quod nempe *latera sint uti sinus angulorum illis oppositorum*; e quo resolutiones trianguli omnes ultro sequuntur; hoc autem facile patet, si circa triangulum ABC (Fig. 138.) circulus scribatur (per pag. 80); erunt nempe A, B, C chordæ, et a, b, c anguli ad peripheriam, quorum quantitates exprimentur per arcus a', b', c', nempe dimidia arcuum, quibus insistunt, per radios e centro per meditullia chordarum ductos divisorum; adeoque est

$$\frac{1}{2}A = \sin. a' = \sin. a,$$

et

$$\frac{1}{2}B = \sin. b' = \sin. b,$$

ac

$$\frac{1}{2}C = \sin. c' = \sin. c.$$

Unde quia

$$\frac{1}{2}A : \frac{1}{2}B = A : B,$$

est

$$A : B = \sin. a : \sin. b\,;$$

ita

$$A : C = \sin. a : \sin. c,$$

atque

$$B : C = \sin. b : \sin. c.$$

Ex hac proportione fundamentali autem reperiuntur e duobus lateribus et angulo alicui eorum opposito latus tertium, et anguli reliqui; ita e duobus angulis et latere uni eorum opposito latera reliqua; necnon e duobus lateribus et angulo intercepto latus tertium et anguli reliqui, et pariter e tribus lateribus angulus cuivis eorum oppositus.

1. E fundamentali propositione, nempe

$$A : B = \sin. a : \sin. b,$$

sequitur

$$A \sin. b = B \sin. a\,;$$

unde ex æquatione inter quatuor has quantitates, quæcunque tres earum datæ fuerint, prodit quarta; nempe

$$A = \frac{B \sin. a}{\sin. b}, \quad \sin. a = \frac{A \sin. b}{B}.$$

2. Ex A, B et c, (Fig. 139.) reperitur a modo sequente: sit

$$\frac{a+b}{2} = s\,; \quad \frac{a-b}{2} = d\,;$$

hinc (per Tom. I. pag. 414)

$$a = s + d, \quad b = s - d\,;$$

atque tantum d reperiatur, nempe *semidifferentia*, a illico datur, nam *semisumma* per subtractionem ipsius c ex $180°$ prodit.

Est vero

$$A : B = \sin. a : \sin. b = \sin. (s + d) : \sin. (s - d)$$
$$= \sin. s \cos. d + \cos. s \sin. d : \sin. s \cos. d - \cos. s \sin d\,;$$

et dividendo terminum proportionis tertium et quartum per $\cos. s \cos. d$, atque substituendo valori $\frac{\sin.}{\cos.}$ tangentem, erit

$$A : B = \text{tang.}\, s + \text{tang.}\, d : \text{tang.}\, s - \text{tang.}\, d\,;$$

hinc

$$A\, \text{tang.}\, s - A\, \text{tang.}\, d = B\, \text{tang.}\, s + B\, \text{tang.}\, d,$$

adeoque

$$(A - B)\, \text{tang.}\, s = (A + B)\, \text{tang.}\, d\,;$$

unde tangens semidifferentiæ, adeoque e tabulis ipsa semidifferentia, nempe arcus tangenti semidifferentiæ respondens, prodit.

Scholion. Sed tang. a etiam immediate reperitur: nempe

$$b = 180^\circ - (a + c),$$

adeoque

$$\sin.\, b = \sin.\, (c + a)\,;$$

atque hinc

$$B : A = \sin.(c + a) : \sin.\, a = \left(\frac{\sin.\, c\, .\, \cos.\, a}{\cos.\, a} + \frac{\cos.\, c\, \sin.\, a}{\cos.\, a}\right) : \frac{\sin.\, a}{\cos.\, a}$$

$$= (\sin.\, c + \cos.\, c\, \text{tang.}\, a) : \text{tang.}\, a\,;$$

hinc

$$B\, \text{tang.}\, a = A \cos c\, .\, \text{tang.}\, a + A \sin.\, c\,;$$

unde

$$\text{tang.}\, a = \frac{A \sin c}{B - A \cos.\, c}.$$

Unde per fundamentale etiam latus tertium innotescit.

3. (Fig. 140.). E tribus lateribus prodeunt anguli: (pag. 76) dictum est

$$x = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2b}\,;$$

porro

$$x : a = \cos.\, c' : 1\,;$$

hinc

$$x = a \cos.\, c' = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2b}\,;$$

unde

$$\cos.\, c' = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}\,;$$

adeoque angulus c' ex lateribus reperitur.

Scholion. Hinc etiam e duobus lateribus et angulo intercepto prodit latus tertium

$$c = \sqrt{a^2 + b^2 - 2ab\, .\, \cos.\, c'}.$$

Imo quia

$$c : a = \sin. c' : \sin. a',$$

est etiam

$$\sin. a' = \frac{a \sin. c'}{\sqrt{a^2 + b^2 - 2ab \cos. c'}}.$$

4. Quamvis omnia dicta de omnibus, adeoque et de rectangulis triangulis valeant, quædam tamen de his specialiter notanda sunt, quum si quævis duo præter angulum rectum data fuerint, reliqua innotescant.

1°. Si aut duo catheti, aut unus cathetus et hypotenusa data fuerint: e duobus cathetis hypotenusa, atque e hypotenusa et uno catheto alter prodit, per Theorema Pythagoricum (pag. 76).

2°. (Fig. 141.)

$$B : A = \sin. b : \sin. a;$$

et quia b complementum ipsius a est, fit

$$\sin. b = \cos. a;$$

itaque

$$B : A = \cos. a : \sin. a,$$

atque hinc

$$B : A = \frac{\cos. a}{\cos. a} : \frac{\sin. a}{\cos. a},$$

seu

$$B : A = 1 : \text{tang}. a$$

nempe quoad radium 1. Consequenter

$$B \,\text{tang}. a = A;$$

unde quæcunque duo data fuerint e cathetis et angulo alicui eorum opposito, tertium innotescit.

3°.

$$H : A = 1 : \sin. a,$$

omnino pro radio 1 intelligendo; unde

$$H \sin. a = A = H \cos. b,$$

(quia $\sin. a = \cos. b$); atque et hic tria sunt, hypotenusa, cathetus et angulus ei oppositus; e quorum quibusvis duobus prodit tertium.

Scholion 1. Omnia hæc autem ope logarithmorum (per Tom. I. pag. 109) facilius absolvi possunt. Ex. gr. (ex 2*) est

$$\text{tang.}\, a = \frac{A}{B},$$

adeoque

$$\log.\ \text{tang.}\, a = \log. A - \log. B.$$

At notandum est hoc pro radio 1 esse, et pro radio r esse

$$\text{tang.}\, a = \frac{rA}{B},$$

adeoque

$$\log.\ \text{tang.}\, a = \log. r + \log. A - \log. B = 10 + \log. A - \log. B,$$

si pro r radius tabularis (nempe 1 cum 10 cifris) accipiatur.

Scholion 2. Quævis expressio E fuerit, in qua functiones trigonometricæ pro radio 1 (non pro radio tabulari r) acceptæ sunt, atque sit $E = Q$, denotante Q sive functionem aliquam trigonometricam item pro radio 1, sive latus, aut quidvis aliud; omnia modo sequente ita mutari poterunt, ut quævis functio trigonometrica pro radio tabulari r accipi tractarique possit. Sit prius casus simplicior, dum in nullo ipsius E termino dividendus aut divisor quantitas complexa est, nec functio trigonometrica signo radicali subest. *Distinguatur quaevis functio trigonometrica pro radio 1 ab eadem per r multiplicata per id*, quod prior litera minuscula, posterior maiore incipiat, ita ut $\cos. \alpha$ sit *pro radio* 1, $\text{Cos.}\, \alpha$ vero sit $= r \cos. \alpha$, adeoque *cosinus tabularis* ipsius α.

In quovis termino ipsius E quælibet functio trigonometrica multiplicetur per illam potentiam ipsius r, ad quam ipsa ibidem elevata est, ex. gr. e $\cos.^2 \alpha$ fiat $r^2 \cos.^2 \alpha = \text{Cos.}^2 \alpha$; et quicunque terminus hoc pacto per r^{-m} esset multiplicatus pro m positivo et non 0, is per r^m multiplicetur; atque si tum in nullo ipsius E termino r^n ut factor accesserit pro n positivo et non 0, tota expressio multiplicetur per r, ut fiat eius valor $= rQ$. Si vero in termino ipsius E aliquo r^μ prodierit pro μ positivo et non 0, nec in ullo termino fuerit exponens ipsius r maior: quilibet terminus, in quo r^ν est, pro ν sive 0 sive positivo et non 0, multiplicetur per $r^{\mu-\nu}$; ut fiat expressio $= r^\mu Q$.

Atque tum exprimantur functiones trigonometricæ ubique quoad r; ex. gr. ubi $r^3 \cos^3 \alpha$ est, scribatur $\mathrm{Cos}^3 \alpha$ &c.

Si igitur Q functionem trigonometricam pro radio 1 denotet, erit in casu priore rQ functio eiusdem nominis pro radio r; in posteriore autem $r^\mu Q$ per $r^{\mu-1}$ divisum dabit functionem pro radio r. Si vero tantum ipsum Q quæratur, in casu primo rQ per r, in posteriore $r^\mu Q$ per r^μ dividendum erit.

Nempe si e termino quopiam $\frac{\gamma}{\delta}$ per operationem primam fiat

$$\frac{r^k \gamma}{r^p \delta} = r^{k-p} \cdot \frac{\gamma}{\delta},$$

erit $k-p$ aut $=0$, aut positivum aut negativum; si $k-p=0$, tum

$$r^{k-p} \cdot \frac{\gamma}{\delta} = \frac{\gamma}{\delta};$$

si positivum fuerit $k-p$, erit hæc aut summa potentia ipsius r exponentis μ in terminis omnibus ita tractatis, aut si $k-p$ dicatur ν, termino per $r^{\mu-\nu}$ multiplicato, prior per r^μ multiplicabitur. Unde reliqua facile patent.

Exempla.

Sit

$$a + \frac{b \sin^2 \alpha}{c \cos^2 \beta} = Q;$$

fiet *post operationem primam*

$$a + \frac{b r^2 \sin^2 \alpha}{c r^2 \cos^2 \beta},$$

atque hinc

$$ra + \frac{rb\, \mathrm{Sin}^2 \alpha}{c\, \mathrm{Cos}^2 \beta} = rQ.$$

Sit porro

$$a + \frac{b \sin^2 \alpha}{c \cos^3 \beta} - g \,\mathrm{tang.}\, u = Q;$$

fiet post operationem primam

$$a + \frac{b r^2 \sin^2 \alpha}{c r^3 \cos^3 \beta} - g r \,\mathrm{tang.}\, u,$$

dein per operationem secundam fiet

$$a+r^{2-3}.r^{3-2}.\frac{b\sin^2\alpha}{c\cos^3\beta}-gr\,\mathrm{tang.}\,u=a+\frac{b\sin^2\alpha}{c\cos^3\beta}-gr\,\mathrm{tang.}\,u,$$

quod simul est

$$=a+\frac{rb\,\mathrm{Sin}^2\alpha}{c\,\mathrm{Cos}^3\beta}-g\,\mathrm{Tang.}\,u.$$

Atque hinc per operationem tertiam, quum in $gr\,\mathrm{tang.}\,u$ sit $\mu=1$ et ν ubique sit o, ubique r^ν per $r^{\mu-\nu}$ multiplicando, ex

$$ar^0+\frac{r^0 b\sin^2\alpha}{c\cos^3\beta}-gr\,\mathrm{tang.}\,u$$

fiet

$$ar+\frac{rb\sin^2\alpha}{c\cos^3\beta}-gr\,\mathrm{tang.}\,u=ar+\frac{r^2 b\,\mathrm{Sin}^2\alpha}{c\,\mathrm{Cos}^3\beta}-g\,\mathrm{Tang.}\,u=rQ.$$

Idem ad eum casum etiam facile applicatur, ubi sive numerator N sive denominator D, sive uterque quantitas complexa fuerit: nempe tam cum numeratore quam denominatore peractis seorsim prius quæ dicta sunt, si ex N fiat $r^k N$, et $r^p.D$ ex D, eodem modo erit $\frac{N}{D}\cdot r^{k-p}$ per r^{p-k} multiplicandum ut supra, et singulis terminis ita tractatis, reliqua ita ut antea peraguntur.

Ex. gr. Sit

$$\frac{a+b\sin^2\alpha}{d+c\cos.\beta}+\mathrm{tang.}\,\gamma=Q;$$

ex $a+b\sin^2\alpha$ fiet $ar^2+br^2\sin^2\alpha$, $d+c\cos.\beta$ autem fiet $dr+cr\cos.\beta$, adeoque ex

$$\frac{a+b\sin^2\alpha}{d+c\cos.\beta}\quad\text{fiet}\quad\frac{r^2(a+b\sin^2\alpha)}{r(d+c\cos.\beta)};$$

et

$$r\cdot\frac{a+b\sin^2\alpha}{d+c\cos.\beta}+r\,\mathrm{tang.}\,\gamma=rQ.$$

atque idem simul

$$=\frac{ar^2+b\,\mathrm{Sin}^2\alpha}{dr+c\,\mathrm{Cos.}\,\beta}+\mathrm{Tang.}\,\gamma=rQ.$$

Quid faciendum sit, si quid in expressione signo radicali subfuerit, exemplum sequens ostendere potest. Sit

$$a + b\sqrt[3]{c - \cos^2 \alpha} = Q\,;$$

si modo dicto tractetur id, quod signo radicali subest, fiet $r^2 c - r^2 \cos^2 \alpha$, quod sit $= A$; erit

$$\sqrt[3]{rA} = \sqrt[3]{r^3 c - r^3 \cos^2 \alpha} = r\sqrt[3]{c - \cos^2 \alpha}$$

atque

$$ra + rb\sqrt[3]{c - \cos^2 \alpha} = rQ,$$

et idem

$$ra + b\sqrt[3]{r^3 c - r\,\mathrm{Cos}^2\,\alpha} = rQ.$$

Scholion 3. Pro tribus lateribus anguli prodeunt adhuc alia formula, calculo logarithmico aptiore.

Erat (pag. 135)

$$\cos. c' = 1 - 2\left(\sin. \frac{c'}{2}\right)^2$$

item

$$\cos. c' = 2\left(\cos. \frac{c'}{2}\right)^2 - 1.$$

Eratque (pag. 138)

$$\cos. c' = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}$$

atque hinc

$$\frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab} = 1 - 2\left(\sin. \frac{c'}{2}\right)^2,$$

et

$$\left(\sin. \frac{c'}{2}\right)^2 = \frac{c^2 - a^2 + 2ab - b^2}{4ab} = \frac{c^2 - (a-b)^2}{4ab} =$$

$$= \frac{1}{ab}\,\frac{c + a - b}{2}\,\frac{c - a + b}{2}$$

$$= \frac{1}{ab}\left(\frac{c + a + b}{2} - b\right)\left(\frac{c + a + b}{2} - a\right);$$

et si ponatur

$$P = \frac{a + b + c}{2},$$

est

$$\left(\sin. \frac{c'}{2}\right)^2 = \frac{1}{ab}(P - a)(P - b).$$

Hinc

$$\log. \sin. \frac{1}{2}c' = \frac{\log. (P - a) + \log. (P - b) - \log. a - \log. b}{2}.$$

Item

$$\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}=2\left(\cos.\frac{c'}{2}\right)^2-1\,;$$

ergo

$$\frac{a^2+b^2-c^2+2ab}{4ab}=\left(\cos.\frac{c'}{2}\right)^2;$$

et

$$\frac{(a+b)^2-c^2}{2.2ab}=\left(\cos.\frac{c'}{2}\right)^2=\frac{a+b+c}{2}\;\frac{a+b-c}{2}\;\frac{1}{ab}=\frac{1}{ab}\,P(P-c).$$

Scholion 4. E latere b cum angulis adiacentibus a', c' (Fig. 142.) reperitur area sic: est

$$x:y=1:\cot.c';$$

hinc

$$y=x\cot.c',\quad b-y=x\cot.a';$$

adeoque

$$b=x\cot.c'+x\cot.a'\,;$$

atque

$$x=\frac{b}{\cot.c'+\cot.a'}\,;$$

et area

$$=\frac{b^2}{2(\cot.a'+\cot.c')}.$$

Scholion 5. (Fig. 142.). E duobus lateribus a, b et intercepto c' reperitur area sic:

$$a:x=1:\sin.c';$$

hinc

$$x=a\sin.c';$$

et area

$$=\frac{1}{2}\,ab\sin.c'.$$

Scholion 6. (Fig. 143.). Data summa a duorum laterum x et y, atque altitudine b et basi c, reperitur angulus A sic:

$$x:b=1:\sin.A\,;$$

hinc

$$x=\frac{b}{\sin.A},$$

et

$$y=a-x=a-\frac{b}{\sin.A}.$$

Porro

$$z : b = 1 : \text{tang.}\, A\,;$$

hinc

$$z = \frac{b}{\text{tang.}\, A} = b \cot. A\,;$$

atque

$$b^2 = y^2 - (c - z)^2;$$

et substitutione facta, est

$$b^2 = a^2 - \frac{2ab}{\sin. A} + \frac{b^2}{\sin.^2 A} - c^2 + 2cb \cot. A - b^2 \cot.^2 A;$$

atque substituendo valorem cotangentis, et terminis omnibus membri dextri ad denominatorem $\sin.^2 A$ reductis, fiet

$$\frac{a^2 \sin.^2 A + b^2 - 2ab \sin. A - c^2 \sin.^2 A - b^2 \cos.^2 A + 2cb \sin. A \cos. A}{\sin.^2 A} = b^2\,;$$

et multiplicando utrinque per $\sin.^2 A$, erit membro dextro subtracto,

$$0 = a^2 \sin.^2 A - 2ab \sin. A - c^2 \sin.^2 A + 2cb \sin. A \cos. A\,;$$

nam

$$b^2 - (b^2 \cos.^2 A + b^2 \sin.^2 A) = 0,$$

quia

$$\sin.^2 + \cos.^2 = 1\,;$$

hinc utrinque per $\sin. A$ dividendo, est

$$a^2 \sin. A - 2ab - c^2 \sin. A + 2cb \cos. A = 0\,;$$

et hinc $2ab$ addendo, ac per $2cb$ utrinque dividendo, erit

$$\frac{a^2 - c^2}{2cb} \sin. A + \cos. A = \frac{a}{c}\,;$$

e quo, quum $\cos. A$ per $\sin. A$ exprimi queat, A reperitur.

Scholion 7. Occasio tamen per hoc se offert artem sequentem in casibus similibus expedientem ostendendi. Ponatur

$$\frac{a^2 - c^2}{2cb} = \text{tang.}\, q\,;$$

scilicet quæratur in rubrica tangentium quantitas $\frac{a^2-c^2}{2cb}$, cui respondens arcus sit q; erit

$$\frac{a}{c}=\frac{\sin.q\sin.A}{\cos.q}+\cos.A=\frac{\sin.q\sin.A+\cos.q\cos.A}{\cos.q}$$
$$=\frac{\cos.(A-q)}{\cos.q};$$

hinc

$$\frac{a}{c}\cos.q=\cos.(A-q),$$

et A est arcus ipsi $\frac{a}{c}\cos.q$ tanquam cosinui respondens addito arcu q; nempe arcus q quæratur cosinus, et multiplicetur per $\frac{a}{c}$, ac quæratur in rubrica cosinuum arcus huic tanquam cosinui respondens, arcus is erit $=A-q$; itaque, ut A prodeat, ei addatur q.

Scholion 8. (Fig. 144.). Sit polygoni laterum numerus n, basis b, radius a, altitudo c: est

$$a:\frac{1}{2}b=1:\sin.\frac{1}{2}v;$$

hinc

$$\frac{1}{2}b=a\sin.\frac{1}{2}v,$$

et perimeter

$$=2na\sin.\frac{1}{2}v;$$

porro

$$c:\frac{1}{2}b=1:\text{tang.}\frac{1}{2}v,$$

hinc

$$c=\frac{b}{2\,\text{tang.}\frac{1}{2}v};$$

adeoque area

$$A=nb\cdot\frac{c}{2}=nb\cdot\frac{b}{4\,\text{tang.}\frac{1}{2}v}=\frac{nb^2}{4\,\text{tang.}\frac{1}{2}v}$$

et simul

$$=\frac{bna\sin.\frac{1}{2}v}{2\,\text{tang.}\frac{1}{2}v};$$

hinc ex A et n etiam, quia tum datur v, reperitur b.

Est c etiam

$$=a \cos. \frac{1}{2} v,$$

et

$$\frac{1}{2} bc = \frac{1}{2} b \,.\, a \cos. \frac{1}{2} v$$

adeoque

$$= a \sin. \frac{1}{2} v \,.\, a \cos. \frac{1}{2} v = a^2 \sin. \frac{1}{2} v \cos. \frac{1}{2} v.$$

VIII. Sinus autem computati sunt, dum methodus facilior adhuc ignota esset, modo sequente:

1. Aliquot sinus noti erant, nempe sinus 30°, sinus 18°, sin. 45°: quum latus hexagoni sit = radio, adeoque $\frac{1}{2} r = \sin. 30°$, ita latus decagoni et quadrati circulo inscripti data fuerunt.

2. E sinibus duorum arcuum a et b $\sin. (a \pm b)$, et hinc arcus dimidii duplique sinus reperiebatur (pagg. 134 &).

3. Hinc etiam ad sinum arcus non quidem unius minuti sed eo minoris deventum est, in arcubus exiguis vero minutum haud excedentibus animadvertebant, quod demonstrari potest debetque, sinus esse uti arcus; scilicet pro denominatore, qui sumitur = 1 cum 10 cifris, error una eiusmodi parte minor est. Imo etiamsi (Fig. 145.) arcus α incrementum unius minuti dicatur α' et item eiusdem α incrementum $a < \alpha'$ sit; incrementa sinuum, nempe i' et i, sunt ut incrementa arcuum, quasi esset in triangulis similibus $i : i' = a : a'$, arcubus tam exiguis a chordis eorundem pro tanto denominatore sensu dicto haud differentibus.

4. Tum reperto sin. 1' per formulam sinus $(a + b)$ poterat sinus cuiusvis arcus $(A + 1')$ reperiri, si $\sin. A$ datus erat; ita per formulas $\sin. (a + b)$ et $\sin. (a - b)$ omnimode applicatas computati sunt omnes; et una via reperti inserviebant certitudini calculi comprobandæ, si valoribus alia via prodeuntibus æquales reperiebantur.

5. De his tamen, uti et de applicatione calculi per logarithmos alleviati (Tom. I. pag. 109), necnon de constructione tabularum logarithmicarum, tabularumque trigonometricarum speciali, additum est aliquid in Tom. I. pagg. 512—520, 569—581.

SECTIO III.

PLANIMETRIAE PARS SECUNDA.

·22.

Sequitur Motus Geometricus Compositus: nempe duæ priores operationes primitivæ (uti pag. 23 atque in Arbore dictum est) coniunguntur. Tractatur autem prius casus simplicior: nempe punctum e rectæ A certo puncto determinato $*$ moveatur in A semper porro versus dextram, et alterum ex eodem puncto $*$ ad lævam in infinitum, dicaturque *abscissa* (literarum postremarum aliqua ex. gr. x designata generaliter) via quævis puncti sive ad dextram sive ad lævam, eo cum discrimine, ut viæ ex. gr. ad dextram positivæ accipiantur, et negativæ ad lævam; atque simul punctum motum rectam B, quocunque angulo secuerit hæc rectam A in $*$, secum ferat, ita ut pars ima eius sit punctum motum, et ipsa ad dextram angulum semper priori æqualem faciat, ac si angulus BA moveretur in plano, ita ut A semper in $\widetilde{A}$ moveatur porro; et simul punctum p moveatur in B e certo loco certa lege generali, per quam puncti p in B moti locus ad finem cuiusvis x determinetur; atque dicatur pro quovis x recta, quæ a fine ipsius x in B usque ad locum dictum puncti p est, *ordinata ipsius* x; denotenturque *ordinatae* generaliter item per literarum postremarum aliquam, ex. gr. y; abscissa autem quævis eiusque ordinata *coordinatae* nominentur, et quidem *rectangulares*, si angulus AB rectus sit. Prætereaque si lex dicta sit $f(x) = y$, valores ipsius $f(x)$ omnes, si qui positivi fuerint, in plaga superiore, et negativi (si fuerint) in inferiore accipiantur; valor o autem ipsius $f(x)$, si esset pro certo valore o aut alio ipsius x, omnino in fine illius x accipiatur, quum ibidem $y=0$ sit. Dicitur punctum * *principium abscissarum*, et $\widetilde{A}$ *linea abscissarum* vel *axis.*

'221.

De iis, quorum quodvis punctum geometrice sensu stricto construi potest.

Scholion. Si $\alpha(x, y)=\beta(x, y)$ adeoque $\alpha(x, y)-\beta(x, y)=0$ fuerit, atque $\alpha(x, y)-\beta(x, y)$ nullo termino gaudeat, qui non sub formam $ax^p y^q$ cadat, a quantitatem constantem sive o sive aliam, ipsorum p, q autem quovis sive o sive alium exponentem integrum positivum denotantibus: dicitur complexus omnium extremitatum ipsorum y per æquationem dictam determinatarum *linea ordinis* m-ti, si $p+q$ in aliquo termino, in quo factor constans haud $=0$ est, sit $=m$, neque in ullo sit maior. Interim etiamsi p, q incommensurabilia fuerint, complexus dictus considerari potest.

Si omnes termini adfuerint, qui salvo ordinis numero m adesse possunt: *aequatio plena ordinis* m audit. Ex. gr. pro literis alphabeti prioribus constantes, inter quas etiam o esse potest, denotantibus, æquatio ordinis 1 est:

$$a+bx+cy=0,$$

ordinis 2 est:

$$a+bx+cy+dx^2+ey^2+fxy=0,$$

ordinis 3 est:

$$a+bx+cy+dx^2+ey^2+fxy+gx^3+hx^2y+ixy^2+ky^3=0,$$

. . .

In genere autem æquationem *plenam* ordinis n-ti e terminis numero $\frac{(n+1)(n+2)}{2}$ constare e theoria combinationum facile patet.

'22II.

Sed hic prius nonnisi de *lineis ordinis secundi* agetur, quæ omnes (Tom. I. pag. 116) pro coordinatis rectangulis sub formam

$$y^2 = x - \frac{x^2}{\pm a},$$

id est

$$y = \sqrt{x - \frac{x^2}{\pm a}}$$

venire possunt; omnesque, ut infra patebit, sunt plani cum cono factæ sectiones; uti conversim omnes plani sectiones cum cono sub formam dictam cadunt; atque etiam manifestum est,

$$y = \sqrt{x - \frac{x^2}{\pm a}}$$

pro quovis dato x geometrice (sensu stricto) construi posse; quum data vel posita unitate prodeat x^2, pariter $\frac{x^2}{\pm a}$ (pag. 77), et subtracto hoc ex x, radix quadrata e residuo (pag. 75) extrahi pro unitate priore queat.

Primariis autem, quæ sectiones conicas sive lineas secundi ordinis concernunt, traditis, quædam magis necessaria e theoria linearum cuiusvis ordinis generali referentur.

Scholion 1. Newton lineas secundi ordinis, adeoque sectiones conicas lineas ordinis primi dixit, rectam, quæ ordinis primi est, quasi ordinis o-ti et lineas sequentis ordinis curvas primi ordinis considerando: at prouti libuerit, ita accipi posse manifestum est. Quod vero recta quævis pro data abscissarum linea, principioque abscissarum posito, sub formam

$$a + bx + cy = 0$$

veniat, hinc patet.

Erit recta exprimenda $\mathfrak{CD}$ (Fig. 146.) respectu lineæ abscissarum $\mathfrak{AB}$ et principio * abscissarum aut $\parallel \mathfrak{AB}$, aut secabit hanc alicubi ex. gr. in $\mathfrak{c}$. Ex æquatione primi ordinis

$$a + bx + cy = 0$$

sequitur

$$y = -\frac{a}{c} - \frac{b}{c}x,$$

quod venit (pro p, q constantibus) sub formam

$$y = p + qx.$$

Si $\mathfrak{CD} \parallel \mathfrak{AB}$, tum ponatur $b=0$ in

$$a+bx+cy=0,$$

et fiet $-\frac{bx}{c}$ æquale o in $\frac{-a}{c}-\frac{bx}{c}=y$, adeoque

$$\frac{-a}{c}=y,$$

ubi $\frac{-a}{c}=p$ poni potest.

Si vero $\mathfrak{CD}$ secet lineam abscissarum in c, demissis perpendicularibus β, y, y', per triangulorum similitudinem erit

$$\alpha+\gamma:\beta=\gamma+x:y,$$

adeoque

$$y=\frac{(\gamma+x)\beta}{\alpha+\gamma}=\frac{\gamma\beta}{\alpha+\gamma}+\frac{x\beta}{\alpha+\gamma},$$

quod sub formam $y=p+qx$ venit, si $\frac{\gamma\beta}{\alpha+\gamma}$ quantitas omnino constans p dicatur, ita $\frac{\beta}{\alpha+\gamma}$ per q denotetur. Pariter pro x' (nempe negativo x) est

$$\alpha+\gamma:\beta=x'+\gamma:y';$$

atque hinc

$$y'=\beta\,\frac{x'+\gamma}{\alpha+\gamma}=\frac{\beta\gamma}{\alpha+\gamma}+\frac{\beta x'}{\alpha+\gamma};$$

nempe si x' ad lævam negative accipiatur, erit k negativum et $=\vdash x'+\gamma$, atque ita prodibit

$$\vdash y'=\frac{\beta\gamma}{\alpha+\gamma}+\frac{\beta(\vdash x')}{\alpha+\gamma};$$

et hic quoque

$$\frac{\beta\gamma}{\alpha+\gamma}=p \quad \text{et} \quad \frac{\beta}{\alpha+\gamma}=q$$

est, ut prius erat.

Pariter (Fig. 147.), ubi

$$\alpha-\gamma:\beta=x-\gamma:y,$$

ita si plane in • fiet sectio, patet.

Scholion 2. Lineæ secundi ordinis autem tractabuntur ordine sequente; tres sunt, nempe *parabola*, *ellipsis* et *hyperbola* (Tom. I, pagg. 116 &, ubi et primaria eas concernentia definita sunt).

I. Prius formæ ipsæ, quatenus e lege fluunt, atque *axes* in singulis, et simul *aliquid* de *insignibus*, quas *sectiones conicae* in coelis et terris *partes* agunt.

II. Linearum harum, tam speciei eiusdem quoad parametros diversas, quam diversæ speciei, comparatio.

III. Mutatio initii abscissarum pro ellipsi et hyperbola in centrum.

IV. *Focus* nempe distantia eius a vertice, ita *excentricitas*, *id est distantia foci a centro*, in singulis.

V. *Radii vectoris* quantitas pro singulis tribus.

VI. Atque hinc *modus* singulas *construendi*: prius quodvis punctum, *quamvis omne nunquam*, geometrice sensu stricto, tum *mechanice motu continuo*.

VII. *Tangens subtangensque*, *normalis subnormalisque* in singulis, nempe *pro data quavis abscissa*.

VIII. Hinc *applicationum quarundam explicatio*.

IX. *Diametri* omnes nempe lineæ, quæ omnes chordas certæ eidem rectæ parallelas bisecant, in singulis: ubi notandum, proprie sic dicta diametro nonnisi lineam secundi ordinis gaudere.

X. *Intersectiones linearum secundi ordinis*, atque inde resolutio certarum æquationum.

XI. Areæ per lineas istas et coordinatas clausæ, et longitudo arcuum.

I.

Determinantur modo sequente *formae linearum*, quarum pro coordinatis rectangulis (abscissa x et ordinata y) æquatio est

$$y=\sqrt{x-\frac{x^2}{\pm a}},$$

ubi (iuxta Tom. I. pag. 116) unitas ad extractionem radicis requisita *parameter* dicitur; nempe $x^2:a$ manet idem; pro quoto enim hic linea accipitur, et sive ex. gr. pro $x:a=2:3$ fit $x^2:a=2x:3$; sive, si $x^2=\alpha$ pro $u=1$, fiet $x^2=n\alpha$ pro $(u:n)=1$; adeoque si ex. gr. $\alpha:a=2$, erit $n\alpha:a=2n$, et prius quoad $u=1$, posterius quoad $(u:n)=1$ accipienda.

Sit $x=ka$ pro a constante positivo, k vero aut $=0$ aut positivo aut negativo, atque aut <1 aut $=1$ aut >1.

1. Pro $a=\infty$ fiet $x-\frac{x^2}{\pm a}=x$ pro quovis finito x; nam $\frac{x^2}{\pm a} \rightharpoondown 0$ pro quovis finito x, si $a \rightharpoondown \infty$; itaque (Tom. I. pag. 46) $\frac{x^2}{\pm a}$ pro quovis finito x, si $a=\infty$, fit $=0$. Tum vero $y=\sqrt{x}$ dat *parabolam*, ob rationem paulo inferius tradendam ita dictam; cuius formæ ductus ex æquatione ipsa modo sequente intelligitur.

Sit k positivum aut negativum, ab ipso 0 incipiendo crescens in ∞, et sit $x=ka$, atque sit prius x positivum, adeoque $+x$; erit pro $k=0$ etiam $x=ka=0$, adeoque et $y=\sqrt{x}=0$. Si k positive crescat inde a 0 in ∞,

$$y=\sqrt{x}=\sqrt{ka}$$

crescet inde a 0 in ∞, semperque duos valores habebit oppositos, alioquin æquales. Si k negative crescat inde a 0 in ∞, ordinatæ omnes imaginariæ erunt, quia tum $x=ka$ negativum, adeoque $y=\sqrt{x}$ radix quadrata e negativo erit.

2. Pro a finito et positivo

$$y=\sqrt{x-\frac{x^2}{a}}$$

dat *ellipsim*; et quidem ordinatam 0 pro $k=0$ adeoque $ka-\frac{k^2a^2}{a}=0$, pariter $y=0$ pro $k=1$ adeoque $x=a$, quia tum

$$ka-\frac{k^2a^2}{a}=ka-k^2a$$

fit $=a-a$. Si vero k positive crescat inde a 0 usque ad 1, erit $k<1$, adeoque $k>k^2$, consequenter $ka-k^2a$ semper positivum erit, crescetque

$$y=\sqrt{(k-k^2)a}$$

inde a 0, donec $k-k^2$ maximum fiat, (quod fit pro $k=\frac{1}{2}$ adeoque $x=\frac{1}{2}a$), et abinde decrescet usque ad 0; prodibuntque semper duæ ordinatæ oppositæ, alioquin æquales.

Si vero k positivum et >1 fuerit, fiet semper $k^2>k$, adeoque $(k-k^2)a$ erit negativum, atque ordinata, nempe radix e negativo, imaginaria fiet. Pariter pro k negativo; nam k^2 semper positivum est, adeoque $(k-k^2)a$ negativum erit.

Sunt etiam a meditullio ipsius a, adeoque centro, ad eandem distantiam u ad dextram lævamque ordinatæ æquales: nam pro

$$x=\frac{1}{2}a-u,$$

fit

$$x-\frac{x^2}{a}=\frac{1}{2}a-u-\frac{\frac{1}{4}a^2-au+u^2}{a}=\frac{a}{4}-\frac{u^2}{a},$$

et idem prodit pro

$$x=\frac{1}{2}a+u.$$

Quod autem $y=$ quantovis parvo ω prodire queat, sic patet: ex

$$\omega=\sqrt{ka-k^2a}$$

fit quadrando, æquatio quadratica

$$k^2-k+\frac{\omega^2}{a}=0,$$

et

$$k=\frac{1}{2}\pm\sqrt{\frac{1}{4}-\frac{\omega^2}{a}},$$

ubi quia tum k positivum <1 esse debet, oportet $\frac{1}{4}>\frac{\omega^2}{a}$ esse, ut radix realis addatur ipsi $\frac{1}{2}$, aut ex $\frac{1}{2}$ subtrahatur; fiet autem pro ω utvis parvo et quantovis, dummodo $\frac{\omega^2}{a}<\frac{1}{4}$ sit; patetque pro eodem ω duos ipsius k valores prodire, prouti radix positiva vel negativa accipitur; et quidem $k\sim 0$ vel 1, dum $\frac{\omega^2}{a}\sim 0$, atque

$$\sqrt{\frac{1}{4}-\frac{\omega^2}{a}}\sim\sqrt{\frac{1}{4}}=\pm\frac{1}{2},$$

adeoque

$$\frac{1}{2}-\sqrt{\frac{1}{4}-\frac{\omega^2}{a}}=k\sim 0;$$

ita

$$\frac{1}{2}+\sqrt{\frac{1}{4}-\frac{\omega^2}{a}}=k\sim 1.$$

Patet etiam ordinatas a centro ad dextram lævamque decrescere usque ad o: erat enim pro distantia u a centro

$$y = \sqrt{\frac{a}{4} - \frac{u^2}{a}};$$

quod si u crescat, adeoque distantia a *vertice*, nempe ubi $x = 0$, decrescat, manifesto decrescit.

3. Pro $-a$, item finito, dat

$$y = \sqrt{x - \frac{x^2}{-a}} = \sqrt{x + \frac{x^2}{a}}$$

hyperbolam; fitque $y = 0$ pro $x = 0$; at pro x positive crescente in infinitum gaudet y semper duobus valoribus oppositis, alioquin æqualibus, crescentibus in infinitum. Si vero x negativum sit $= ka$ pro a positivo et k negativo, fiet y imaginarium, donec $k = -1$ evadat; nam tum

$$x + \frac{x^2}{a} = ka + \frac{k^2a^2}{a} = a(k + k^2),$$

atque k negativum et < 1, adeoque $k > k^2$ est, itaque $k + k^2$ negativum adeoque radix e negativo imaginaria est. Pro $k = -1$ autem, fit negativum $x = -a$, atque

$$y = \sqrt{a - a} = 0;$$

at pro k negativo et > 1 fiet $k^2 > k$, itaque $k + k^2$ erit positivum, adeoque valores ipsius y erunt item bini oppositi quidem, sed alioquin æquales, crescente x cum k in infinitum, crescentes in infinitum. Itaque exorietur linea quatuor brachiorum e duobus verticibus, recta a (quæ respectu verticis primarii negativa est) distantibus, in infinitum extensorum.

Suntque duæ partes hyperbolæ, interruptæ quidem, æquales; quia ordinatas ab utroque vertice dicto æquidistantes æquales esse patet, si e meditullio rectæ $x = -a$, nempe *centro axeos hyperbolae*, omnino negativi, consideretur quantitas ordinatarum ad distantiam u tam ad dextram quam ad lævam: est nempe ad dextram

$$x = u - \frac{a}{2},$$

itaque

$$x + \frac{x^2}{a} = u - \frac{a}{2} + \frac{u^2 - au + \dfrac{a^2}{4}}{a} = \frac{u^2}{a} - \frac{a}{4};$$

atque idem ad lævam prodit ad distantiam u; nempe ibi x negativum inde a *vertice primario* est $= -\frac{1}{2}a - u$, itaque

$$x + \frac{x^2}{a} = -\frac{a}{2} - u + \frac{\dfrac{a^2}{4} + au + u^2}{a} = \frac{u^2}{a} - \frac{a}{4}.$$

4. Si vero (iuxta Tom. I. pag. 121) valores imaginarii accipiantur, quum hi æquo realitatis iure quoad -1 gaudeant, uti aliæ quoad $+1$: æquatio parabolæ plane talem parabolam, æquatio ellipseos ellipsim quoad $+1$ quidem exhibebit, et simul hyperbolam quoad -1 realem; et æquatio hyperbolæ simul ellipsim; æquatio hyperbolæ æquilateræ autem, ubi nempe $a = 1$, *valoribus* ordinatæ *imaginariis* exhibebit *circulum*, uti *circuli aequatio hyperbolam aequilateram*; attamen quoad $+1$, -1 realia diversis coloribus aut alio quopiam modo distinguere necesse est (ut Tom. I. pag. 202 dictum est).

5. *Axis maior* est $x = \pm a$; in parabola est ∞, in ellipsi autem est $x = \vdash\!\!+\!\!\dashv a$; in hyperbola vero $x = \vdash\!\!\!-\!\!\!\dashv a$; *centro* igitur *parabola nullo gaudet*, nempe rectæ a vertice in infinitum abeuntis non datur punctum, eam in duas partes æquales dividens; in ellipsi et hyperbola vero datur meditullium; si et $a = 1 =$ parametro, ellipsis fit circulus diametri 1, et *hyperbola* dicitur *aequilatera*. Parabola autem dici potest tam *ellipsis* quam *hyperbola* axi maiore infinito; nempe si $a \backsim \infty$, expressio $\backsim \sqrt{x}$.

Axis minor est duplum ordinatæ, quæ est e meditullio axeos maioris: in *parabola igitur nullus axis minor est. In ellipsi* vero est

$$2\sqrt{x - \frac{x^2}{a}} \quad \text{pro} \quad x = \frac{a}{2};$$

adeoque est

$$=2\sqrt{\frac{a}{2}-\frac{a^2}{4a}}=2\sqrt{\frac{2a^2-a^2}{4a}}=2\sqrt{\frac{a}{4}}=\sqrt{a}.$$

In hyperbola autem est

$$2\sqrt{x+\frac{x^2}{a}} \quad \text{pro} \quad x=-\frac{a}{2},$$

nempe

$$2\sqrt{-\frac{a}{2}+\frac{a^2}{4a}}=\sqrt{-a};$$

itaque *axis minor hyperbolae est imaginarius.* In circulo axis minor $=$ axi maiori $=1$, nempe $\sqrt{1}=1$; in hyperbola æquilatera est axis minor $=\sqrt{-1}$.

6. Nomina *parabola*, *ellipsis* et *hyperbola* autem inde exorta sunt, quod, si pro parametro singulis eadem vertex communis, lineaque abscissarum eadem fuerit, et ad dextram sit focus $\mathfrak{f}$ parabolæ, atque distantia ipsius $\mathfrak{f}$ a vertice ad lævam transferatur in linea abscissarum, et e fine huius erigatur perpendicularis D, a veteribus *directrix* dicta: cuiusvis puncti $\mathfrak{b}'$ parabolæ distantiæ ab $\mathfrak{f}$ et D *aequales* erunt, cuiusvis puncti ellipseos autem distantia ab $\mathfrak{f}$ *minor* est quam a D, et cuiusvis puncti hyperbolæ distantia ab $\mathfrak{f}$ *maior* quam a D est. Nempe (Fig. 148.) sit $\mathfrak{b}'\mathfrak{d}$ ordinata parabolæ; erit pro eodem x et parametro eadem, ordinata ellipseos minor

$$=\sqrt{x-\frac{x^2}{a}}=\mathfrak{b}\mathfrak{d},$$

et ordinata hyperbolæ fiet maior

$$=\sqrt{x+\frac{x^2}{a}}=\mathfrak{b}''\mathfrak{d};$$

estque

$$\mathfrak{d}\mathfrak{D}=\mathfrak{b}\mathfrak{c}=\mathfrak{b}'\mathfrak{c}'=\mathfrak{b}''\mathfrak{c}'';$$

sed

$$\mathfrak{f}\mathfrak{b}<\mathfrak{f}\mathfrak{b}'<\mathfrak{f}\mathfrak{b}''.$$

7. Potuissent quidem lineæ dictæ etiam sic definiri: si a et b aut

puncta denotent, sive diversa sive in unum coincidentia, aut si non utrumque punctum denotet, duntaxat a sit punctum et b rectam denotet; fueritque in plano talis linea L, cuius si puncti cuiuslibet p distantia ab a dicatur a', et distantia a b dicatur b': aut quodvis $a'+b'$ aut quodvis $a'-b'$ eidem constanti c, quæ etiam $=0$ esse potest, æqualis sit: erit L *parabola*, *recta*, *ellipsis* aut *circulus*, vel *hyperbola*, uti inferius patebit; quo pacto et parabola, recta, circulus, hyperbolaque eodem pertinent; nempe in singulis est $a'-b'=c$, in circulo et ellipsi autem est $a'+b'=c$. Recta excludi, aut cuiusvis certa revolutione circa axem generata includi possunt; et distinctio specialior facilis est.

Scholion. Sectiones conicæ insignes in cœlis et terra partes agunt: corpora cœlestia cursum earum sequuntur; nempe (Fig. 149.) quum attractio universalis sit in ratione composita ex inversa duplicata distantiarum et directa massarum trahentium: si in c ponatur vis attractiva, et concipiatur corpus ex a vi illa attractiva ipsius c, quæ ad a est, constanter eadem manente, motu uniformiter accelerato usque ad c decidere, fiatque ad c velocitas finalis v; atque iam relicta vi centripeta uti est, si corpus in a vi momentanea velocitatis ab proiiciatur: describetur, si ab $=v$, *parabola*, si ab $<v$, tum *ellipsis*, et *hyperbola*, si ab $>v$. Est autem c focus sectionis conicæ, quem corpus proiectum ad idemque punctum retractum prius crescente celeritate petit, postea segnior semper fit usque quo revertitur, in parabola hyperbolaque nunquam reversum, in aliorum solium abyssum mergitur. Similem cursum plurimæ summam illusionem producentes vires attractivæ terrestres tenent.

Proiectorum ad terram via ad sensum parabola est, si directio proiectionis verticalis non sit.

Focus quoque locus insignis est; nam præter iam dicta, in parabola radii omnes lucis, caloris, soni, e foco ad parabolam vel paraboloidem (de qua statim) cadentes, axi paralleli, et hi in focum reflectuntur; nam angulus, quem radius vector cum tangente facit, est æqualis ibidem illi, cuius verticalis est is, quem recta axi parallela item cum tangente eadem ad idem punctum facit. Hinc si *fornix domus parabolois* esset, lampas in *foco* ardens, (cuius fumus *ope canaliculi superius facti in caminum eve-*

heretur), lumine deiecto domum totam illuminaret, quamvis decrescente versus marginem lucis gradu, quod tamen in domo quavis etiam ope coni truncati aliquatenus obtineri potest; ut et aëris rivus facile regatur, et vaporibus noxiis evectis, lumen almum clarius tranquillumque pluribus studentibus inserviat. Notandum autem est:

1. Lychnii oleique quantitatem qualitatemque debitam requiri.

2. Conum ex alba subtili papyro *velin* dicta conficiendum esse; ne nimis opaca umbram proiiciat; duo enim quoad lucem vitanda sunt oculorum aciem servaturo; *gradus nimius* lucis sive in excessu sive in defectu, et *gradus nimis differentes* sive simul sive subito post se invicem.

3. In aliquo canaliculi loco diametrum eius vicissitudinibus tempestatis attemperare et facile et necesse est; rivus aëris enim adeo varius est, ut *fornacibus pro hieme exstructis, infirmiores vere autumnoque* (calorem quidem leniorem extrinsecus deposcentes), *aut algere cogantur, aut oculis pulmonibusque laborent.* Sit igitur, etsi non huius loci sit, *fornacem* qua utor *trium mutationum* suadere, qua ad nutum quasi fumus diversas longiores brevioresve vias capit, quarum omnino posteriores veri autumnoque conveniunt.

4. Potest etiam cono truncato minori tubus item papyraceus agglutinari, et simul cum candelabro portatilis fieri, idemque et ad unam candelam sebaceam applicari; dummodo candelabrum quam minimum umbræ proiiciat, lumenque eandem retineat altitudinem; quod facile obtinetur, quum hoc ipsum in tali scribatur lumine. Tubus lampadum *Argando* debetur.

Redeundo ad paraboloidem: lucerna noctu in focum eius posita, riteque obversa index horaque remota cerni possunt.

Vicissim radii e sole axi paralleli venientes urunt in foco: sed quo remotior focus, eo maior locus ustionis erit, et eo latiorem paraboloidem esse oportet.

Ita remotum susurrum auris in foco maioris paraboloidis percipiet; et vox e foco pronunciata remotius exaudietur; ita si duæ paraboloides sint e regione ad axem eundem positæ, ex unius foco missa vox lenis, nullibi in medio, sed in foco alterius quamvis remoto auditur: quod etiam loquentibus, qui, priusquam ad focum per secula remotum perventum fuerit, a nemine intelliguntur, evenit.

Fornaces quoque exstrui possunt, ut ignis in foco paraboloidis ardeat; eritque in foco alterius paraboloidis e regione positæ insignis sine igne calor; latiusque in hypocausto diffundetur.

Ita radii omnes e foco uno ellipseos in alterum reflectuntur; radii illi vero, qui quacunque causa ita venientes, ut (Fig. 150.) in dimidiæ hyperbolæ foco $\mathfrak{f}$ conveniant, a hyperboloidis H facie interiore excepti, in huius foco ſ convenient; et vicissim si hinc nempe ex ſ procedant, ita reflectuntur, ut retrorsum continuati in $\mathfrak{f}$ secarent se invicem, adeoque disperguntur &c.

II.

Comparatio sectionum conicarum, prius speciei eiusdem quoad parametros diversas, tum earum inter se pro parametro eadem.

1. Sit $y=\sqrt{x\pm\dfrac{x^2}{a}}=r$ pro $u=1$, atque pro $U=1=ku$ (denotante k quantitatem abstractam invariabilem Tom. I. pag. 111) sit $=R$; erit (Tom. I. pag. 114)

$$R=r.k^{\frac{1}{2}} \quad \text{et} \quad r=Rk^{-\frac{1}{2}}.$$

Itaque

$$R:r=\sqrt{k}:1,$$

id est ordinatæ pro abscissa quavis eadem erunt uti radices quadratæ parametrorum quoad unitatem eandem acceptæ.

2. Si duæ abscissæ X et x, atque ordinatæ earum Y et y considerentur, erit $Y^2=X$ in parabola, et $y^2=x$; itaque y est *proportionalis media inter* 1 (nempe *parametrum*) *et abscissam*; atque

$$Y^2:y^2=X:x,$$

nempe *quadrata ordinatarum sunt uti abscissae.*

Ita pro *ellipsi* et *hyperbola*

$$Y^2=X\mp\frac{X^2}{a}=\frac{aX\mp X^2}{a}=\frac{X(a\mp X)}{a};$$

et pariter

$$y^2 = \frac{x(a \mp x)}{a}$$

itaque

$$Y^2 : y^2 = X(a \mp X) : x(a \mp x).$$

3. Si e puncto quopiam eodem $\mathfrak{p}$ per omnia puncta sive parabolæ sive ellipseos sive hyperbolæ rectis conceptis, generetur (iuxta pag. 10) simile, pro quavis recta, quæ a $\mathfrak{p}$ ad punctum lineæ quodpiam $\mathfrak{f}$ est, accipiendo $k \, . \, \mathfrak{pf}$, denotante k quantitatem ut in 1.: recta inter quævis duo puncta lineæ novæ k-ies tanta erit, quam recta inter puncta lineæ prioris illis homologa (pag. 79); adeoque si abscissa quævis prioris x dicatur, et ordinata y, axis maior $\pm a$, parameter u, et X, Y, $\pm A$, U abscissam, ordinatam, axem maiorem et parametrum prioribus homologa denotent: erit

$$X = kx, \quad Y = ky, \quad U = ku;$$

atque hinc e parabola, in qua $y^2 = x$ erat, prodit nova, in qua

$$[Y^2]_{u=1} = kX \quad \text{et} \quad Y = [\sqrt{X}]_{U=ku=1}.$$

Nam

$$[\sqrt{X}]_{u=1} = [\sqrt{kx}]_{u=1} = y\sqrt{k},$$

et

$$[\sqrt{X}]_{U=ku=1} = \sqrt{k}\,[\sqrt{X}]_{u=1} = ky = Y.$$

Et hinc non solum linea nova parabola est, sed quum ipsum k, adeoque parametrum U utvis accipere liceat, sunt *omnes parabolae inter se similes. Non idem de ellipsi hyperbolaque valet*: nempe harum æquationes et altera constans a ingreditur; estque pro his, si similes fuerint, *parameter lineae* generatæ ad parametrum primitivæ, uti axis maior generatæ ad axem maiorem primitivæ, id est

$$u : U = a : A.$$

In *ellipsi* pro quovis Y est

$$[Y^2]_{U=ku=1} = X - \frac{X^2}{A}, \quad Y = \left[\sqrt{X - \frac{X^2}{A}}\right]_{U=ku=1}.$$

Nam

$$Y = ky, \quad y^2 = x - \frac{x^2}{a},$$

adeoque

$$[Y^2]_{u=1} = k^2x - \frac{k^2x^2}{a} = kX - \frac{X^2}{a} = kX - \frac{kX^2}{ka} = k\left(X - \frac{X^2}{A}\right),$$

et

$$[Y^2]_{U=ku=1} = X - \frac{X^2}{A}.$$

Ita si radix ex $X - \frac{X^2}{A}$ quoad $u = 1$ dicatur r, et R dicatur radix quoad $ku = 1$ accepta: erit ut ibidem

$$R = r\sqrt{k},$$

et quum radix ex $x - \frac{x^2}{a}$ quoad $u = 1$ accepta y sit, est

$$r = y\sqrt{k},$$

nam

$$X - \frac{X^2}{A} = kx - \frac{k^2x^2}{ka} = k\left(x - \frac{x^2}{a}\right).$$

Est igitur

$$R = y\sqrt{k}\,.\,\sqrt{k} = ky = Y.$$

Pariter de hyperbola patet.

4. Si inter se comparentur, præsertim *parabola cum hyperbola*, *verba* KEPLERI intelliguntur: *parabola non ut hyperbola extendit brachia, sed quasi contrahit a complexu infiniti, semper plus quidem complectens, sed eo minus appetens; cum hyperbola quo plus actu inter brachia complectitur, hoc plus etiam appetat.*

Considerentur prius incrementa ordinatarum pro incrementis abscissarum æqualibus: *in parabola* sunt incrementa ipsius y^2 æqualia, non ita in *ellipsi et hyperbola*; nempe sit abscissæ incrementum i, et ω incrementum ordinatæ, erit

$$(y + \omega)^2 - y^2 = x + i - x = i$$

pro quavis abscissa x. In hyperbola autem est

$$(y + \omega)^2 = x + i + \frac{(x + i)^2}{a} = \frac{ax + ai + x^2 + 2xi + i^2}{a},$$

e quo subtracto

$$y^2 = \frac{ax + x^2}{a},$$

manet

$$\frac{ai + 2xi + i^2}{a},$$

quod dum $x \backsim \infty$, manifesto $\backsim \infty$.

Fiat iam (Fig. 151.) e vertice a hyperbolæ (qui sit simul parabolæ vertex) perpendicularis ipsi $\frac{\sqrt{a}}{2}$ æqualis; atque ducatur per extremitatem huius e centro c hyperbolæ recta: in hyperbola $z - y \backsim 0$, in parabola vero $\backsim \infty$.

Nempe si distantia verticis a centro positive accipiatur, (quamvis axis maior $-a$ et axis minor hyperbolæ $\sqrt{-a}$ sit), erit

$$\frac{a}{2} : \frac{\sqrt{a}}{2} = \frac{a}{2} + x : z,$$

unde duos priores terminos per $\frac{\sqrt{a}}{2}$ dividendo est

$$\sqrt{a} : 1 = \frac{a}{2} + x : z,$$

atque

$$z = \frac{\frac{a}{2} + x}{\sqrt{a}};$$

est vero

$$y^2 = x + \frac{x^2}{a},$$

itaque $z^2 - y^2$ seu

$$(z + y)(z - y) = \frac{\frac{a^2}{4} + ax + x^2 - ax - x^2}{a} = \frac{a}{4};$$

consequenter

$$z - y = \frac{a}{4(z + y)};$$

quod manifesto nunquam fit 0, sed $\backsim 0$; adeoque *A asymptota* est (Tom. I. pag. 315).

In parabola vero $z - y'$ (si y' ordinatam parabolæ denotet) maius quovis β, quod $> \frac{\sqrt{a}}{4}$ est, fieri potest. Nempe

$$z - y' = \frac{\frac{a}{2} + x}{\sqrt{a}} - \sqrt{x}$$

pro constantibus γ, δ poni

$$= \gamma + \delta x - \sqrt{x} = \gamma + \delta\omega^2 - \omega$$

potest, quod $\backsim \infty$, si $\omega \backsim \infty$; nempe

$$\delta\omega^2 - \omega = \omega(\delta\omega - 1)$$

et

$$\frac{\delta\omega - 1}{\delta\omega} \backsim 1,$$

nam

$$\frac{\delta\omega - 1}{\delta\omega} - 1 = \frac{\delta\omega - 1 - \delta\omega}{\delta\omega} = -\frac{1}{\delta\omega} \backsim 0.$$

At præterea etiam posito

$$z - y' = \frac{\frac{a}{2} + x}{\sqrt{a}} - \sqrt{x} = \beta,$$

est

$$\frac{a}{2} + x - \sqrt{ax} = \beta\sqrt{a},$$

atque hinc

$$-\sqrt{ax} = \beta\sqrt{a} - \frac{a}{2} - x;$$

et quadrando fit

$$ax = \beta^2 a + \frac{a^2}{4} + x^2 - \beta a\sqrt{a} - 2\beta x\sqrt{a} + ax,$$

et hinc

$$0 = x^2 - 2\beta x\sqrt{a} + \frac{a^2}{4} + \beta^2 a - \beta a\sqrt{a},$$

atque hinc

$$x = \beta\sqrt{a} \pm \sqrt{\beta a\sqrt{a} - \frac{a^2}{4}},$$

ubi pro $\beta a\sqrt{a} > \frac{a^2}{4}$, idest pro $\beta > \frac{\sqrt{a}}{4}$ radix realis, et si $\beta > \sqrt{a}$, pro parabola positivi duo valores ipsius x dantur. Ex. gr. Sit $a=1$, et sit etiam $\beta=1$; erit

$$x = 1 \pm \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{2 \pm \sqrt{3}}{2},$$

et

$$z = \frac{1}{2} + x = \frac{3 \pm \sqrt{3}}{2},$$

$$y' = \sqrt{x} = \sqrt{\frac{2 \pm \sqrt{3}}{2}};$$

atque

$$z - y' = \frac{3 \pm \sqrt{3}}{2} - \sqrt{\frac{2 \pm \sqrt{3}}{2}} = 1$$

erit, quia

$$\left(\frac{1 \pm \sqrt{3}}{2}\right)^2 = \frac{1 + 3 \pm 2\sqrt{3}}{4} = \frac{2 \pm \sqrt{3}}{2}.$$

III.

Mutatio initii abscissarum in centrum ellipseos hyperbolæque, ut quædam expeditius tradantur.

Aequatio facile prodibit, substituendo ipsi x summam dimidii axis maioris et rectæ, quæ a centro usque ad finem ipsius x est; axis est $+a$ in ellipsi, $-a$ in hyperbola, posterius autem dicatur u. Singulis casibus percursis (Fig. 152.) patet esse $x = u + \frac{a}{2}$ in ellipsi, et $x = u - \frac{a}{2}$ in hyperbola; dummodo prouti x accipitur positive vel negative, ita et u accipiatur; ex. gr. si x ad dextram positive, et negative ad lævam accipiatur, et u e centro ad dextram positive, et negative ad lævam accipiatur.

Eritque hoc pacto *pro ellipsi*

$$y^2 = x - \frac{x^2}{a} = u + \frac{a}{2} - \frac{\left(u + \frac{a}{2}\right)^2}{a} =$$

$$= u + \frac{a}{2} - \frac{u^2}{a} - \frac{au}{a} - \frac{a^2}{4a} = \frac{a}{4} - \frac{u^2}{a}.$$

Pro hyperbola vero est

$$y^2 = x + \frac{x^2}{a} = u - \frac{a}{2} + \frac{\left(u - \frac{a}{2}\right)^2}{a} =$$

$$= u - \frac{a}{2} + \frac{u^2}{a} - \frac{au}{a} + \frac{a^2}{4a} = \frac{u^2}{a} - \frac{a}{4}.$$

IV.

Distantia focalis, id est distantia foci a vertice, nempe extremitatis illius abscissæ, cuius ordinatæ duplum $= 1$, prodit, si pro y ponatur $\frac{1}{2}$, adeoque $\frac{1}{4}$ pro y^2. Itaque *in parabola* ex $\frac{1}{4} = x$ patet distantiam focalem esse quartam partem parametri, et *unitatem* pro $y = \sqrt{x}$ esse *quadruplam distantiae focalis*: positis itaque vertice $\mathfrak{a}$ et foco $\mathfrak{f}$ quocunque libuerit, $y = \sqrt{x}$ (radice quoad $4\mathfrak{af} = 1$ accepta) determinabit parabolam, cuius parameter $= 4\mathfrak{af}$; et vicissim pro data parametro $4\mathfrak{af} = 1$ dabit $y = \sqrt{x}$ parabolam, cuius distantia focalis $\mathfrak{af}$ erit.

In ellipsi, si in

$$\frac{1}{4} = \frac{a}{4} - \frac{u^2}{a}$$

pro u ponatur distantia foci a centro, *eccentricitas* dicta, per E denotata: fiet

$$\frac{1}{4} + \frac{E^2}{a} = \frac{a}{4},$$

et

$$\frac{E^2}{a} = \frac{a-1}{4},$$

et hinc

$$E^2 = \frac{a^2 - a}{4},$$

atque

$$E = \frac{\sqrt{a^2 - a}}{2}.$$

In hyperbola distantia foci a centro, pariter *eccentricitas* dicta, designetur item per E; erit

$$\frac{1}{4}=\frac{E^2}{a}-\frac{a}{4},$$

et hinc

$$\frac{E^2}{a}=\frac{1+a}{4},$$

adeoque

$$E^2=\frac{a^2+a}{4},$$

et

$$E=\frac{\sqrt{a^2+a}}{2}.$$

Unde etiam tam in ellipsi quam in hyperbola *duas focos* a centro æquidistantes esse patet, nempe pro $u=\pm E$ fit $y^2=\frac{1}{4}$.

Ex E et a distantia foci a vertice quoque prodit, $\frac{a}{2}-E$ in ellipsi, et $E-\frac{a}{2}$ in hyperbola.

Sed parameter etiam, nempe unitas ad extractionem radicis requisita, ut

$$y=\sqrt{x-\frac{x^2}{\pm a}}$$

prodeat, innotescit: nam *pro ellipsi* erat

$$\frac{1}{4}=\frac{a}{4}-\frac{E^2}{a},$$

adeoque

$$1=a-\frac{4E^2}{a}=\frac{a^2-4E^2}{a};$$

in *hyperbola* vero erat

$$\frac{1}{4}=\frac{E^2}{a}-\frac{a}{4}$$

adeoque

$$1=\frac{4E^2}{a}-a=\frac{4E^2-a^2}{a}.$$

Atque manifesto a et E, aut a et unitatem, sive E et unitatem utcunque ponere licet, dummodo pro ellipsi $\frac{a}{2}>E$ et pro hyperbola $E>\frac{a}{2}$ sit; secus enim pro ellipsi $\frac{a^2-4E^2}{a}$ et pro hyperbola $\frac{4E^2-a^2}{a}$

(nempe unitas) positiva non erit: ex. gr. si pro ellipsi poneretur $E > \frac{a}{2}$, erit $4E^2 > 4\left(\frac{a}{2}\right)^2$, adeoque $> a^2$.

Si a et unitas ponatur: prodit in ellipsi

$$E = \frac{\sqrt{a^2 - a}}{2}$$

radice quoad unitatem positam accepta. Ita si E et unitas posita fuerint, prodit a; nam $4E^2 = a^2 - a$, et ex æquatione quadratica

$$a^2 - a - 4E^2 = 0,$$

fit

$$a = \frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} + 4E^2},$$

ubi signum superius accipi debet, nam

$$\sqrt{\frac{1}{4} + 4E^2} > \frac{1}{2}$$

est, nec aliud asseritur, nisi quod expressionis valor aliquis $= a$ sit (Tom. I. pag. 123).

In parabola, si (Fig. 153.) 𝔣 in peripheria centri 𝔓 radii 𝔓𝔣 ipsi 𝔣 omni dabili propius veniat, unitas (pag. 166) $\frown 0$; adeoque

$$y = \sqrt{x} \frown 0$$

pro quovis dato x, et limes geometricus parabolæ recta 𝔣𝔓 est, donec libuerit per 𝔓 continuata.

In ellipsi, si $E \frown 0$, tum

$$1 = \frac{a^2 - 4E^2}{a} \frown a,$$

et ex

$$y = \sqrt{x - \frac{x^2}{a}},$$

pro $E = 0$ fit

$$y = \sqrt{x - x^2},$$

æquatio circuli pro diametro 1. Ita si ponatur

$$\frac{a^2 - 4E^2}{a} = a,$$

fiet $a^2 - 4E^2 = a^2$, et hinc $4E^2 = 0$, adeoque $E = 0$.

Est porro in ellipsi $E < \frac{a}{2}$, at si

$$\frac{a}{2} - E = \omega \frown 0,$$

tum

$$1 = \frac{a^2 - 4E^2}{a} \frown 0;$$

nam

$$E = \frac{a}{2} - \omega,$$

et

$$4E^2 = 4\left(\frac{a^2}{4} - a\omega + \omega^2\right) = a^2 - 4a\omega + 4\omega^2,$$

quod $\frown a^2$. Si igitur aut manente E decrescat a, aut manente a crescat E, dummodo $\omega \frown 0$: fiet y tanquam radix quoad unitatem omni dabili minorem, pro quovis x (nempe quovis puncto ipsius a) dabili quovis minor, adeoque limes geometricus erit recta ipsa a; nempe tum

$$\sqrt{x - \frac{x^2}{a}} \frown 0,$$

et limes 0 est pro quovis y.

In hyperbola est $E > \frac{a}{2}$, et si $E - \frac{a}{2} \frown 0$, sit

$$E = \frac{a}{2} + \omega;$$

erit

$$4E^2 = a^2 + 4a\omega + 4\omega^2,$$

quod $\frown a^2$, adeoque

$$1 = \frac{4E^2 - a^2}{a} \frown 0.$$

Si igitur manente E crescat a, vel manente a decrescat E, dummodo $\omega \frown 0$: fiet y tanquam radix quoad $1 \frown 0$ omni dabili minor, nempe

$$\sqrt{x+\frac{x^2}{a}} \backsim 0;$$

et limes geometricus recta erit in linea abscissarum ab $\mathfrak{F}$ ad lævam et ab $\mathfrak{f}$ ad dextram. (Fig. 152.)

Si vero ponatur

$$1 = \frac{4E^2 - a^2}{a} = a,$$

erit

$$4E^2 - a^2 = a^2,$$

atque hinc

$$4E^2 = 2a^2,$$

et pro posito a erit

$$E^2 = \frac{a^2}{2} = \frac{1}{2} \quad \text{et} \quad E = \frac{1}{\sqrt{2}};$$

pro E posito autem erit

$$a^2 = 2E^2 = 1.$$

Patet etiam $E^2 = \frac{a^2}{2} = \frac{1}{2}$ (pro $a = 1$) dare

$$E > \frac{a}{2} = \frac{1}{2}.$$

Notandum autem est: quod tam in ellipsi summa radiorum vectorum e duobus focis ad idem punctum ductorum, quam in *hyperbola* differentia minoris a maiore sit $= a$; etiam dum limes geometricus recta est, inter $\mathfrak{F}$ et $\mathfrak{f}$ in ellipsi, et in hyperbola recta infinita per $\mathfrak{F}$ et $\mathfrak{f}$, excepta parte $\mathfrak{F}\mathfrak{f}$. De quo statim.

V.

Radii vectores.

In parabola (Fig. 154.) e triangulo rectangulo, cuius catheti sunt y et $\frac{1}{4} - x$ vel $x - \frac{1}{4}$, est radius vector r hypotenusa

$$= \sqrt{y^2 + \left(\pm\frac{1}{4} \mp x\right)^2} = \sqrt{x + \frac{1}{16} - \frac{x}{2} + x^2} =$$

$$= \sqrt{x^2 + \frac{x}{2} + \frac{1}{16}} = x + \frac{1}{4};$$

nempe si *quarta pars parametri addatur abscissae, prodit radius vector in parabola.*

In *ellipsi* et *hyperbola* (Fig. 152.) radii vectores R, r ad idem punctum p e duobus focis $\mathfrak{F}$, f sunt hypotenusæ triangulorum rectangulorum, quorum y ordinata puncti p cathetus communis, et alterutrius cathetus alter $E-u$ vel $u-E$, alterius $u+E$ est; patet hoc casibus percursis ordinata ipsius p sive intra focos, sive in aliquem, sive ad latus alterutrum ceciderit, dummodo E hic semper positive intelligatur, imo u quoque etsi negative situm fuerit, positive accipiatur; quod fieri potest, quum u præterea heic nonnisi in y^2, et quidem in potentia secunda, adeoque positive occurrat.

Itaque alteruter ipsorum R et r, tam in ellipsi quam in hyperbola, est

$$\sqrt{y^2+(u-E)^2},$$

nam $(u-E)^2=(E-u)^2$; alter autem est

$$\sqrt{y^2+(u+E)^2}.$$

Unde substituendo in ellipsi $\frac{a}{4}-\frac{u^2}{a}$ ipsi y^2, et $\frac{a^2-a}{4}$ ipsi E^2, atque in hyperbola $\frac{u^2}{a}-\frac{a}{4}$ ipsi y^2, et $\frac{a^2+a}{4}$ ipsi E^2, prodit uterque radius vector in utraque.

Nempe *in ellipsi*

$$r=\sqrt{\frac{a}{4}-\frac{u^2}{a}+u^2-2uE+E^2}$$

$$=\sqrt{\frac{a}{4}-\frac{u^2}{a}+u^2-2uE+\frac{a^2-a}{4}}$$

$$=\sqrt{\frac{a^2}{4}-\frac{u^2}{a}+u^2-2uE},$$

quod est

$$=\pm\frac{a}{2}\mp\frac{2uE}{a};$$

nam hoc per se multiplicatum fit

$$\frac{a^2}{4} + \frac{4u^2E^2}{a^2} - 2uE = \frac{a^2}{4} + \frac{4u^2a^2}{4a^2} - \frac{4u^2a}{4a^2} - 2uE$$
$$= \frac{a^2}{4} + u^2 - \frac{u^2}{a} - 2uE.$$

Ita

$$R = \sqrt{\frac{a}{4} - \frac{u^2}{a} + u^2 + 2uE + E^2},$$

quod eodem modo prodit

$$= \pm \frac{a}{2} \pm \frac{2uE}{a};$$

ubi in utroque casu signum superius accipi debet; nam si inferius signum accipiatur pro ipso r, $-\frac{a}{2} + \frac{2uE}{a}$ negativum esset, quia $2E < a$, adeoque $\frac{2Eu}{a} < u$, u vero non $> \frac{a}{2}$ est. Pro R item signa superiora accipi debent, nempe

$$R = \frac{a}{2} + \frac{2uE}{a};$$

quia $-\frac{a}{2} - \frac{2uE}{a}$ pariter negativum est, radii vectores autem positive accipiuntur.

Est igitur

$$R + r = \frac{a}{2} + \frac{2uE}{a} + \frac{a}{2} - \frac{2uE}{a} = a.$$

Pro hyperbola pariter

$$R = \frac{a}{2} + \frac{2uE}{a},$$

et

$$r = \frac{2uE}{a} - \frac{a}{2},$$

atque

$$R - r = a;$$

nam ibi pro r signum inferius accipiendum est, nempe e duabus radicibus, quum una certo valeat, reiecta quæ non valet, altera retinenda; nimirum $\frac{a}{2} - \frac{2uE}{a}$ esse nequit; quia tum in triangulo, cuius basis $2E$ est et reliqua latera R et r sunt, esset $R + r = a$, et summa duorum laterum esset tertio $2E$ minor, nam $2E$ in hyperbola est $> a$.

Corollarium. Hinc etiam in ellipsi radius vector ad extremitatem axeos minoris est $= \frac{a}{2}$, efficit enim cum altero radio vectore dimidium axis maioris, suntque hi radii vectores æquales, propter duo triangula rectangula, quorum axis minor cathetus communis, et alter cathetus E ad dextram lævamque est.

Hinc ab extremitate axeos minoris, tanquam centro, radio ipsi $\frac{a}{2}$ æquali foci in axe maiore determinantur.

VI.

Ex his sequitur *constructio sectionum conicarum*: prius *constructio geometrica* sensu stricto *puncti cuiusvis* (*omnium nunquam*); tum constructio mechanica motu continuo.

1. Nempe præterquam quod quodvis punctum lineæ per

$$y = \sqrt{x}$$

determinatæ a directrice et foco æqualiter distet; ac quodvis punctum $\mathfrak{p}$ lineæ per

$$y = \sqrt{x - \frac{x^2}{a}}$$

determinatæ tale sit, ut $\mathfrak{F}\mathfrak{p} + \mathfrak{f}\mathfrak{p} = a$ sit; necnon quodvis punctum $\mathfrak{p}$ lineæ per

$$y = \sqrt{x + \frac{x^2}{a}}$$

determinatæ tale sit, ut $\mathfrak{F}\mathfrak{p} - \mathfrak{f}\mathfrak{p} = a$ sit, $\mathfrak{F}$ et $\mathfrak{f}$ focos denotantibus, et foco, qui in eandem respectu perpendicularis e centro $\mathfrak{c}$ ad axem positæ plagam cum $\mathfrak{p}$ cadit, in hyperbola $\mathfrak{f}$ dicto: nec ullum aliud punctum tale est. Nempe quodvis punctum $\mathfrak{q}$ extra parabolam directrici propius quam foco est, et quodvis intra parabolam a directrice remotius quam a foco est; et quodvis punctum $\mathfrak{q}$ extra ellipsim tale est, ut $\mathfrak{F}\mathfrak{q} + \mathfrak{f}\mathfrak{q} > a$ sit, ac quodvis $\mathfrak{q}'$ intra ellipsim tale est, ut $\mathfrak{F}\mathfrak{q}' + \mathfrak{f}\mathfrak{q}' < a$ sit; atque quodvis punctum $\mathfrak{q}$ extra hyperbolam tale est, ut $\mathfrak{F}\mathfrak{q} - \mathfrak{f}\mathfrak{q} < a$ sit, et quodvis $\mathfrak{q}'$

intra hyperbolam tale est, ut $\mathfrak{F}\mathfrak{q}'-\mathfrak{f}\mathfrak{q}'>a$ sit, si $\mathfrak{q}$, $\mathfrak{q}'$ cum $\mathfrak{f}$ (ut supra de $\mathfrak{p}$ dictum est) in eandem plagam cadant, si vero $\mathfrak{q}$ in perpendicularem e centro cadat, tum $\mathfrak{F}\mathfrak{q}-\mathfrak{f}\mathfrak{q}=0$.

a) Nam *quoad parabolam* (Fig. 155.) sit $\mathfrak{q}\mathfrak{b}$ perpendicularis ad axem; cadet $\mathfrak{b}$ aut ab $\mathfrak{a}$ ad dextram aut ad lævam; si prius, tum in perpendiculari illa aliquod punctum $\mathfrak{k}$ parabolæ erit; atque manifesto distantia ipsius $\mathfrak{q}$ a directrice est

$$\mathfrak{b}\mathfrak{d}=\mathfrak{k}\mathfrak{f}<\mathfrak{q}\mathfrak{f}.$$

Si vero $\mathfrak{q}$ in $\mathfrak{q}''$ vel $\mathfrak{q}'''$ fuerit, distantia ipsius $\mathfrak{q}''$ a directrice est

$$\mathfrak{b}''\mathfrak{d}<\mathfrak{a}\mathfrak{f}<\mathfrak{b}''\mathfrak{f}<\mathfrak{q}''\mathfrak{f};$$

ita si $\mathfrak{q}$ in $\mathfrak{q}'''$ cadat, distantia ipsius $\mathfrak{q}'''$ a directrice est

$$\mathfrak{b}'''\mathfrak{d}<\mathfrak{b}'''\mathfrak{f}<\mathfrak{q}'''\mathfrak{f}.$$

Si vero $\mathfrak{q}'$ intra parabolam fuerit, in perpendiculari $\mathfrak{b}'\mathfrak{q}'$ gaudet parabola puncto $\mathfrak{k}'$, et distantia ipsius $\mathfrak{q}'$ a directrice est

$$\mathfrak{b}'\mathfrak{d}=\mathfrak{k}'\mathfrak{f}>\mathfrak{q}'\mathfrak{f}.$$

b) *Quoad ellipsim* (Fig. 156.): si $\mathfrak{q}$ extus cadat, est

$$R'+r'>R+r=a.$$

Si vero $\mathfrak{q}'$ intus cadat, tum

$$R+r>R'+r',$$

adeoque

$$a>R'+r'.$$

c) *Quoad hyperbolam* (Fig. 157.): Si $\mathfrak{q}$ extus sit, recta ex $\mathfrak{q}$ ad $\mathfrak{f}$ secat hyperbolam in $\mathfrak{p}$; adeoque

$$\mathfrak{F}\mathfrak{p}-\mathfrak{f}\mathfrak{p}=a.$$

Fiant centris $\mathfrak{q}$, $\mathfrak{p}$, radiis $\mathfrak{q}\mathfrak{f}$, $\mathfrak{p}\mathfrak{f}$ circuli; cadet peripheria radii $\mathfrak{q}\mathfrak{f}$ extra alteram; adeoque

$$\mathfrak{F}\mathfrak{k}<\mathfrak{F}\mathfrak{m}<\mathfrak{F}\mathfrak{n}=a;$$

est vero

$$\mathfrak{Ft} = \mathfrak{Fq} - \mathfrak{fq},$$

quod igitur $< a$ est. Si vero $\mathfrak{q}'$ intus cadat, gaudebit hyperbola in recta $\mathfrak{f}\bar{\mathfrak{q}}'$ puncto $\mathfrak{p}$; describantur centris $\mathfrak{p}$, $\mathfrak{q}'$, radiis $\mathfrak{pf}$, $\mathfrak{q'f}$ circuli; cadet manifesto peripheria centri $\mathfrak{p}$ infra alteram; eritque

$$\mathfrak{Fp} - \mathfrak{fp} = \mathfrak{Fm} = a < \mathfrak{Fg} < \mathfrak{Fi};$$

est vero

$$\mathfrak{Fi} = \mathfrak{Fq}' - \mathfrak{fq}',$$

quod ergo $> a$ est.

2. Sed etiam quodvis punctum $\mathfrak{p}$ a certa recta D et certo puncto $\mathfrak{f}$ æqualiter distans punctum parabolæ est, per directricem D et focum $\mathfrak{f}$ determinatæ; et quodvis tale punctum pro punctis $\mathfrak{F}$, $\mathfrak{f}$, ut sit $\mathfrak{pF} + \mathfrak{pf} = a$, nisi $\mathfrak{p}$, $\mathfrak{F}$, $\mathfrak{f}$ in recta sint, punctum ellipseos est per focos $\mathfrak{F}$, $\mathfrak{f}$ et axem maiorem a determinatæ; atque quodvis tale punctum $\mathfrak{p}$ pro punctis $\mathfrak{F}$, $\mathfrak{f}$, ut sit $\mathfrak{Fp} - \mathfrak{fp} = a$, punctum hyperbolæ est, per focos $\mathfrak{F}$, $\mathfrak{f}$ et axem maiorem a determinatæ.

Nam *quoad parabolam*: sint (Fig. 158.) $\mathfrak{p'p}$, $\mathfrak{fd}$ perpendiculares ad D, et $\mathfrak{pp}' = \mathfrak{pf}$; fiat $\mathfrak{fa} = \mathfrak{ad}$, atque parabola per æquationem $y = \sqrt{x}$ (radice quoad $4\mathfrak{fa} = 1 = 2\mathfrak{fd}$ accepta).

Quoad ellipsim hyperbolamque autem, datis punctis $\mathfrak{F}$, $\mathfrak{f}$ ut focis consideratis, ex a et $\frac{\mathfrak{Ff}}{2} = E$ (per pag. 167) reperitur unitas, quoad quam pro abscissis u e meditullio ipsius $\mathfrak{Ff}$ acceptis

$$y = \sqrt{\frac{a}{4} - \frac{u^2}{a}}$$

dabit *ellipsim*, et

$$y = \sqrt{\frac{u^2}{a} - \frac{a}{4}}$$

hyperbolam.

3. Ex his præter iam dicta constructiones sequentes intelliguntur. Sit (Fig. 158.) ad axem parabolæ ad distantiam $\frac{1}{4}$ ad lævam a vertice $\mathfrak{a}$ perpendicularis, *directrix* dicta; et erigatur e fine cuiusvis x ad axem perpendicularis P; si ista perpendicularis centro in foco $\mathfrak{f}$, ad distantiam $\frac{1}{4}$ e vertice ad dextram accepto, radio $x + \frac{1}{4}$ (utpote distantia perpen-

dicularis P a directrice) secetur: erit $\mathfrak{p}$ punctum sectionis punctum parabolæ, et omnia puncta ita generata eiusdem parabolæ erunt (per 1.). Patet (Fig. 153.), centro $\mathfrak{P}$ radio $\mathfrak{P}\mathfrak{f}$ scripto circulo, tangentem in quovis puncto $\mathfrak{t}$ talem directricem præbere, a qua $\mathfrak{P}$ tantum quam ab $\mathfrak{f}$ distet; sed si $\mathfrak{t}$ ipsi $\mathfrak{f}$ dabili quovis propius venit, perpendicularis ex $\mathfrak{f}$ ad tangentem per $\mathfrak{t}$ ductam, adeoque et unitas (nempe duplum perpendicularis dictæ) $\to 0$; atque in tali parabola $y = \sqrt{x}$ (radice quoad dictam unitatem accepta) fiet pro quovis certo x dato quovis minor.

Ita *pro ellipsi* (Fig. 159.) sit $\mathfrak{a}\mathfrak{F} = \mathfrak{f}\mathfrak{b}$, et moveatur punctum $\mathfrak{p}$ ex $\mathfrak{F}$ usque in $\mathfrak{f}$, dicaturque R recta ab $\mathfrak{a}$ usque in $\mathfrak{p}$, et r dicatur recta a $\mathfrak{p}$ usque in $\mathfrak{b}$; erit $\mathfrak{a}\mathfrak{p} + \mathfrak{p}\mathfrak{b} = a$; atque arcus centro $\mathfrak{F}$ radio R scriptus secabit arcum centro $\mathfrak{f}$ radio r scriptum; ac punctum sectionis punctum ellipseos erit, et omnia ita generata eiusdem ellipseos erunt (pag. 174).

Pro *hyperbola* autem (Fig. 160.) si $\mathfrak{F}\mathfrak{a} = \mathfrak{f}\mathfrak{b}$ fuerit, et moveatur punctum $\mathfrak{P}$ ex $\mathfrak{F}$ ad lævam, et $\mathfrak{p}$ ad dextram ex $\mathfrak{f}$, utrumque in axe, temporibus æqualibus vias æquales describendo; dicaturque R recta $\mathfrak{a}\mathfrak{P}$, et r recta $\mathfrak{a}\mathfrak{p}$, puncta $\mathfrak{P}$, $\mathfrak{p}$ simultanea intelligendo: erit

$$\mathfrak{a}\mathfrak{p} - \mathfrak{a}\mathfrak{P} = \mathfrak{a}\mathfrak{f} - \mathfrak{a}\mathfrak{F} = a;$$

itaque arcus e centro $\mathfrak{F}$ radio $\mathfrak{a}\mathfrak{P}$ scriptus secabitur per arcum centro $\mathfrak{f}$ radio $\mathfrak{a}\mathfrak{p}$ factum; eritque punctum sectionis, ubi $r - R = a$, punctum hyperbolæ, et omnia ita generata eiusdem hyperbolæ erunt (pag. 174).

4. Ex (pag. 163) adhuc alia constructio geometrica quotvis punctorum hyperbolæ (Fig. 161.) ex uno sequitur.

Nempe inter asymptotas per punctum hyperbolæ utcunque ducatur recta erit $\alpha = \alpha''$; et quodvis punctum novum item novum præbet. Ratio est sequens.

$$\alpha : \beta = \alpha + \alpha' : \gamma'$$

$$\alpha' + \alpha'' : \beta' = \alpha'' : \gamma.$$

Hinc

$$\alpha\alpha' + \alpha\alpha'' : \alpha\alpha'' + \alpha'\alpha'' = \beta\beta' : \gamma\gamma';$$

sed (pag. 163)

$$\beta\beta' = \gamma\gamma' = \frac{a}{4},$$

ubi γ ipsius $z-y$ et γ' ipsius $z+y$ vicem subit; itaque

$$\alpha\alpha'+\alpha\alpha''=\alpha\alpha''+\alpha'\alpha'';$$

adeoque

$$\alpha\alpha'=\alpha'\alpha'';$$

et hinc

$$\alpha=\alpha''.$$

Imo (Fig. 162.) alia hinc constructio punctorum quorumvis hyperbolæ sequitur, abscissis in asymptota e centro sumtis, et ordinatis asymptotæ alteri parallelis, cui etiam q ex vertice parallela est, quod potentia hyperbolæ vocari solet.

Per triangula æquicrura et parallelas est

$$\mathfrak{BD}=\mathfrak{DC} \quad \text{et} \quad q=\frac{1}{2}\,\mathfrak{CE}=\frac{1}{2}\,\mathfrak{CB}.$$

Sit porro e vertice ipsius y parallela $\mathfrak{ab}$ ad x; erit

$$\beta:y=\frac{\sqrt{a}}{2}:q$$

et

$$\beta':x'=\mathfrak{AB}:\mathfrak{AD} \quad \text{id est} \quad \beta':x'=\frac{\sqrt{a}}{2}:q;$$

hinc (quia propter angulos p æquales $x=\mathfrak{ab}=x'$) est

$$\beta\beta':xy=\frac{a}{4}:q^2;$$

et quia $\beta\beta'=\frac{a}{4}$ (pag. 163), est

$$xy=q^2, \quad \text{atque} \quad y=\frac{q^2}{x};$$

adeoque si alia abscissa fuerit X eiusque ordinata sit Y, est

$$y:Y=X:x,$$

idest ordinatæ sunt inverse uti abscissæ.

5. *Ex his ingeniosae sectionum conicarum constructiones mechanicae.*

Parabola dimidia describetur: si (Fig. 163.) norma $\mathfrak{ABC}$ feratur iuxta directricem, atque plumbago intra filum $\mathfrak{af}+\mathfrak{aA}$ utramque partem ad extremitates $\mathfrak{f}$ et $\mathfrak{A}$ fixam tendens normæ durante motu semper appressa sit. Erit $\mathfrak{a}$ vertex parabolæ, nam ab $\mathfrak{f}$ et a directrice æqualiter distat; atque et postea tantum accedet distantiæ priori plumbaginis a directrice, quantum e latere normæ denudabitur, et tantum etiam ipsi $\mathfrak{af}$ accedet.

Quodcunque fili punctum $\mathfrak{p}$ fuerit ultra $\mathfrak{a}$, sit $\mathfrak{pa}=\lambda$; erit filum ex $\mathfrak{p}$ usque $\mathfrak{f}$ tensum $=\frac{1}{4}+\lambda$; eritque hæc eadem pars lateris normæ nuda; et quum radius vector ab $\mathfrak{f}$ ad extremitatem ordinatæ cuivis x respondentis sit $\frac{1}{4}+x$: manifesto $x=\lambda$ inde a zero crescente, norma iuxta directricem promovetur. Pariter et alterum parabolæ dimidium describitur.

Ellipsis describitur (Fig. 164.). Sit filum recta $\mathfrak{Ff}$ longius, extremitatibus in $\mathfrak{F}$, $\mathfrak{f}$ fixum, et summæ rectarum $\mathfrak{aF}$ et $\mathfrak{af}$ æquale, dicaturque summa ista a; describetur *ellipsis* plumbagine prius in $\mathfrak{a}$ posita, si dein ad omnia fili puncta $\mathfrak{p}$ sequentia feratur, filumque e quovis loco ad puncta fixa $\mathfrak{F}$, $\mathfrak{f}$ tendatur, uti $\mathfrak{pF}+\mathfrak{pf}=a$ est. Quævis recta enim, quæ non $<\mathfrak{aF}$ nec $>\mathfrak{af}$, omnino in filo accipi, atque filum ex illo puncto $\mathfrak{p}$ ad puncta fixa $\mathfrak{F}$ et $\mathfrak{f}$ tensum, præbet $\mathfrak{pF}+\mathfrak{pf}=a$; itaque punctum ellipseos est, et quodvis ellipseos punctum per dicta tale $\mathfrak{p}$ est, nec ullum aliud datur.

Quoad *hyperbolam* sit filum (Fig. 165.) $\mathfrak{Fa}+\mathfrak{da}=k+\gamma$, extremitate una in $\mathfrak{F}$ fixum, et altera in puncto $\mathfrak{d}$ regulæ $\mathfrak{df}$ in $\mathfrak{f}$ fixæ, et ponatur plumbago ad punctum $\mathfrak{a}$ fili ex $\mathfrak{a}$ ad puncta $\mathfrak{F}$ et $\mathfrak{d}$ ita tensi, ut partes $\mathfrak{da}$, $\mathfrak{Fa}$ regulæ adiaceant; atque tum moveatur regula circa $\mathfrak{f}$, et interea plumbago regulæ appressa filum e quovis eiusdem puncto ad puncta $\mathfrak{d}$ et $\mathfrak{F}$ tendat: describet plumbago quadrantem hyperbolæ, in quantum regula omni dabili longior concipi potest; atque eadem constructione et quadrans inferior, et regula in $\mathfrak{F}$ fixa, filique extremitate in $\mathfrak{f}$ fixa, altera hyperbolæ pars quoque prodit. Est nempe distantiæ puncti $\mathfrak{a}$ ab $\mathfrak{F}$ differentia a distantia puncti $\mathfrak{f}$ ab eodem $\mathfrak{a}$

$$\mathfrak{af}-\mathfrak{aF}=\beta-\gamma,$$

quod sit a; postea vero mota regula circa $\mathfrak{f}$, si plumbago sit in $\mathfrak{p}$, atque

$\mathfrak{d}'\mathfrak{p}$ sit $=k-\omega$, erit

$$\mathfrak{F}\mathfrak{p}=\gamma+\omega \quad \text{et} \quad \mathfrak{p}\mathfrak{f}=\beta+\omega;$$

consequenter

$$\mathfrak{f}\mathfrak{p}-\mathfrak{p}\mathfrak{F}=\beta+\omega-\gamma-\omega=\beta-\gamma=a.$$

Itaque $\mathfrak{p}$ punctum hyperbolæ erit. Datur autem pro quovis ω talis angulus regulæ circa $\mathfrak{f}$ motæ, ut $\mathfrak{p}$ prodeat: nam $\gamma+\omega$ datur, regulam filumque enim utvis magna accipere licet, adeoque e filo ipsi γ adhuc ω addi potest; tum vero regulæ pars k longitudine eadem (nempe ω) denudabitur, adeoque fiet $\mathfrak{F}\mathfrak{p}=\gamma+\omega$, $\mathfrak{f}\mathfrak{p}$ vero $=\beta+\omega$; atque basis constans $\beta+\gamma$ et nova duo latera $\gamma+\omega$ et $\beta+\omega$ talia sunt, ut triangulum constituant, quum summa binorum quorumvis tertio maior sit. Facile etiam patet, crescente ω crescere angulum regulæ ad $\mathfrak{f}$.

VII.

Tangens, subtangens, normalisque et subnormalis in singulis.

Ad quodvis punctum $\mathfrak{p}$ sectionis conicæ cuiusvis, quam ad quodvis eius punctum curvam esse demonstrari potest, (qualis est parabola, ellipsis, hyperbola et circulus), non autem sectionis plani per apicem euntis, tangens datur (Tom. I. pag. 290); eaque est recta bisecans angulum radiorum vectorum; notando, quod in parabola alter radius vector, quasi e foco in axe in infinitum abeunte ad $\mathfrak{p}$ ductus, adeoque axi parallelus concipiatur, in ellipsi autem alteruter radiorum vectorum continuetur extra ellipsim ultra punctum eius, ad quod e focis uterque ducitur, atque angulus, quem continuatio ista cum altero radio vectore non continuato facit, bisectus tangentem in eo puncto præbeat. Atque et parabola ut ellipsis foci in axe in infinitum remoti consideretur.

Si vero tangens ad sectionem conicam ex aliquo puncto $\mathfrak{P}$ mittenda sit, tum circulus centro $\mathfrak{P}$, radio usque ad focum proximum extenso, secetur ex altero foco radio a in ellipsi et hyperbola, in parabola vero directrix, tanquam arcus radii vectoris infiniti, secetur per arcum priorem, atque tum e foco priore ducta ad punctum sectionis recta bisecetur: erit perpendicularis e puncto bisectionis erecta *tangens quaesita*.

Quoad parabolam (Fig. 166.) sit tangens ad punctum $\mathfrak{p}$ ducenda: radius vector pro foco $\mathfrak{f}$ est $\mathfrak{fp}$, et alter axi parallelus est $\overline{\mathfrak{pp}'}$, ac $\mathfrak{fp}=\mathfrak{pp}'$. Si iam angulus $\mathfrak{fpp}'$ bisecetur, fiatque $\mathfrak{p}'\mathfrak{pk}=\mathfrak{fpk}=v$: erit $\mathfrak{pk}\perp\mathfrak{fp}'$, et $\mathfrak{fk}=\mathfrak{kp}'$; ac quodvis punctum rectæ $\overline{\mathfrak{pk}}$ (ex. gr. $\mathfrak{q}$) a punctis $\mathfrak{p}'$ et $\mathfrak{f}$ æquidistat. Itaque $\mathfrak{qq}'$ perpendicularis ad directricem est $<\mathfrak{qp}'=\mathfrak{qf}$, quocunque cadat $\mathfrak{q}$: unde quodvis tale punctum $\mathfrak{q}$ extra parabolam cadit; nam si in lineam ipsam caderet, tum $\mathfrak{qq}'=\mathfrak{qf}$ esset; si vero intus caderet, tum $\mathfrak{qf}<\mathfrak{qq}'$ esset (pag. 174).

Si vero (Fig. 167.) ex $\mathfrak{P}$ puncto extra parabolam sit tangens ad eam mittenda: $\mathfrak{PP}'$ perpendicularis ad directricem est $<\mathfrak{Pf}$, (pag. 174); itaque e centro $\mathfrak{P}$ radio $\mathfrak{Pf}$ directrix certo secabitur in duobus punctis $\mathfrak{a}$ et $\mathfrak{a}'$ a perpendiculari $\mathfrak{PP}'$ utrinque æqualiter distantibus; fiat recta $\mathfrak{fa}$ (vel $\mathfrak{fa}'$); recta per meditullium $\mathfrak{k}$ huius et punctum datum $\mathfrak{P}$ ducta tangens erit. Nam $\mathfrak{Pa}=\mathfrak{Pf}$, itaque $\mathfrak{kP}$ est perpendicularis ad $\mathfrak{fa}$; consequenter quodvis punctum ipsius $\overline{\mathfrak{kP}}$ a punctis $\mathfrak{a}$ et $\mathfrak{f}$ æqualiter distat; et si perpendicularis ex $\mathfrak{a}$ ad directricem erecta secuerit alicubi in $\mathfrak{p}$ rectam $\overline{\mathfrak{kP}}$, $\mathfrak{p}$ punctum parabolæ erit, quia a directrice et foco æqualiter distabit. Secari autem rectam $\overline{\mathfrak{kP}}$ per perpendicularem ad directricem ex $\mathfrak{a}$ erectam necesse est: nam perpendicularis e puncto $\mathfrak{k}$ rectæ $\mathfrak{af}$ erecta infinita quamvis rectam per punctum $\mathfrak{a}$ rectæ $\mathfrak{af}$ ductam infinitam, præter eam, quæ ad $\mathfrak{af}$ perpendicularis est, secat, itaque et eam, quæ ex $\mathfrak{a}$ ad $\mathfrak{aP}'$ perpendicularis est, quia eadem ad $\mathfrak{af}$ perpendicularis non est.

Fiet igitur sectio, et punctum illud parabolæ erit; reliqua vero extra parabolam cadent.

Si $\mathfrak{P}$ plane in $\mathfrak{k}$ cadat, tum ex $\mathfrak{k}$ ad $\mathfrak{af}$ perpendicularis erigitur, quod etiam de ellipsi et hyperbola notandum est: uti id, quod inter tangentem et lineam tactam nulla recta e puncto tactus duci queat (per Tom. I. pag. 349), itaque ad nullum punctum angulo gaudeat (pagg. 15 &c), adeoque curva sit.

Subtangens s est $=\mathfrak{fg}-\mathfrak{fm}$ (Fig. 166.); sed

$$\mathfrak{fg}=\mathfrak{pp}',$$

quia $\triangle\,\mathfrak{kfg}=\triangle\,\mathfrak{kp}'\mathfrak{p}$; nam $\mathfrak{kf}=\mathfrak{kp}'$ et propter $\mathfrak{pp}'\parallel\mathfrak{fd}$ anguli alterni ad

$\mathfrak{p}'$ et $\mathfrak{f}$ et ad $\mathfrak{p}$ et $\mathfrak{g}$ sunt æquales. Consequenter (pag. 170)

$$\mathfrak{fg} = \text{ radio vectori } = x + \frac{1}{4}.$$

Est autem

$$\mathfrak{fm} = \frac{1}{4} - x;$$

itaque

$$s = x + \frac{1}{4} - \left(\frac{1}{4} - x\right) = 2x.$$

Si ordinata $\mathfrak{pm}$ ultra focum caderet: tum

$$\mathfrak{fm} = x - \frac{1}{4},$$

et

$$s = \mathfrak{fg} + \mathfrak{fm} = x + \frac{1}{4} + x - \frac{1}{4} = 2x.$$

Unde in parabola ad $\mathfrak{p}$ tangens $\mathfrak{pg}$ ducetur, si ad axem demittatur perpendicularis $\mathfrak{pm}$, et $\mathfrak{ag} = \mathfrak{am} = x$ fiat.

Normalis N, id est $\mathfrak{pn}$ nempe perpendicularis ex $\mathfrak{p}$ ad tangentem, si secuerit axem in $\mathfrak{n}$, dicitur $\mathfrak{mn}$ seu ν *subnormalis*; $\mathfrak{pg}$ autem pro *tangentis* quantitate accipitur; quod etiam cum quantitate tangentis arcus circularis trigonometrica convenire facile patet, si secans $\mathfrak{cd}$ pro linea abscissarum e centro $\mathfrak{c}$ accipiatur (Fig. 168.); et quidem quasi prius in $\mathfrak{k}$ fuisset abscissarum origo, et inde ad centrum translata fuisset: erit extremitati arcus $\mathfrak{ka}$ respondens ordinata $y = \mathfrak{ab}$, et subtangens puncto $\mathfrak{a}$ respondens erit $\mathfrak{bd}$, atque tangens $\mathfrak{ad}$ eadem, quæ sensu trigonometrico arcui $\mathfrak{ak} = \mathfrak{ka}$ respondet; et facile patet, quod si $\mathfrak{k}'$ pro $\mathfrak{k}$ ponatur, y' fiat $\mathfrak{ab}'$, et subtangens $\mathfrak{b}'\mathfrak{d}'$, atque tangens $\mathfrak{ad}'$ negativa, ut in trigonometria.

Est vero (Fig. 166.) triangulum $\mathfrak{pgn}$ ad $\mathfrak{p}$ rectangulum, atque $\mathfrak{pm} = y$ est perpendicularis ad $\mathfrak{gn}$; unde

$$\mathfrak{mn} : y = y : s,$$

adeoque

$$\nu = \frac{y^2}{s} = \frac{x}{2x} = \frac{1}{2};$$

consequenter *subnormalis in parabola est dimidiae parametro aequalis.*

Ex iisdem triangulis rectangulis prodit tangens normalisque: ex. gr. *tangens* (ad punctum $\mathfrak{p}$ et axem $\widetilde{\mathfrak{af}}$) nempe recta $\mathfrak{pg}$

$$= \sqrt{y^2+s^2} = \sqrt{x+4x^2} = \sqrt{4x\left(\frac{1}{4}+x\right)},$$

id est *tangens in parabola est radix quadrata e quadrupla abscissa per radium vectorem multiplicata.*

In ellipsi (Fig. 169.) erit $\mathfrak{tq}$ ad punctum $\mathfrak{p}$ *tangens*, si alteruter radiorum vectorum ex. gr. $\mathfrak{fp}$ continuetur, atque $\mathfrak{tq}$ angulum $\mathfrak{ap}\mathfrak{F}$ bisecet. Sit enim $\mathfrak{pa} = \mathfrak{p}\mathfrak{F}$, adeoque

$$\mathfrak{af} = a = \mathfrak{p}\mathfrak{F} + \mathfrak{pf};$$

sitque $\mathfrak{t}$ meditullium rectæ $\mathfrak{a}\mathfrak{F}$; erit recta $\mathfrak{pt}$ angulum $\mathfrak{ap}\mathfrak{F}$ bisecans perpendicularis ad $\mathfrak{a}\mathfrak{F}$; adeoque quodvis punctum $\mathfrak{q}$ ipsius $\widetilde{\mathfrak{pt}}$ a punctis $\mathfrak{a}$ et $\mathfrak{F}$ æqualiter distat. Hinc autem propter

$$\mathfrak{aq} = \mathfrak{q}\mathfrak{F} \quad \text{et} \quad \mathfrak{aq} + \mathfrak{qf} > \mathfrak{af} = a$$

est

$$\mathfrak{F}\mathfrak{q} + \mathfrak{qf} > a;$$

itaque quodvis $\mathfrak{q}$ extra ellipsim est (pag. 174).

Si (Fig. 170.) e puncto $\mathfrak{q}$ sit tangens mittenda: sit arcus centro $\mathfrak{q}$ radio $\mathfrak{q}\mathfrak{F}$ (pro $\mathfrak{q}\mathfrak{F}$ non $> \mathfrak{qf}$), et hic secetur in $\mathfrak{d}$ per arcum centro $\mathfrak{f}$ radio a, fiatque in $\mathfrak{t}$ meditullium rectæ $\mathfrak{d}\mathfrak{F}$; erit $\widetilde{\mathfrak{qt}}$ tangens, et punctum tactus erit, ubi $\mathfrak{df}$ secat ipsam $\mathfrak{qt}$; nam

$$\mathfrak{pd} = \mathfrak{p}\mathfrak{F} \quad \text{et} \quad \mathfrak{pd} + \mathfrak{pf} = a = \mathfrak{p}\mathfrak{F} + \mathfrak{pf};$$

est igitur $\mathfrak{p}$ punctum ellipseos (pag. 174); quodvis aliud punctum autem rectæ $\widetilde{\mathfrak{qt}}$ extra ellipsim cadit, ut antea. Sectionem fieri autem statim, ubi ad hyperbolam tangens mittetur, demonstrabitur.

Subnormalis (Fig. 169.) $\mathfrak{Pn}$ reperitur ita: rectæ $\mathfrak{F}\mathfrak{t}$ et normalis $\mathfrak{pn}$ sunt ad tangentem $\mathfrak{tq}$ perpendiculares; itaque trianguli $\mathfrak{fa}\mathfrak{F}$ crura $\mathfrak{fa}$, $\mathfrak{f}\mathfrak{F}$ secantur per $\mathfrak{pn}$ parallelam ad trianguli basim $\mathfrak{a}\mathfrak{F}$; atque hinc

$$\mathfrak{f}\mathfrak{F}:\mathfrak{fa}=\mathfrak{fn}:\mathfrak{fp}, \quad \text{id est} \quad 2E:a=\mathfrak{fn}:R$$

denotante E eccentricitatem et R radium vectorem ex $\mathfrak{f}$. Erat (pag. 172)

$$R=\frac{a}{2}+\frac{2uE}{a},$$

atque

$$E^2=\frac{a^2-a}{4};$$

atque hinc

$$\mathfrak{fn}=\frac{2ER}{a}=E+\frac{4E^2u}{a^2}=E+u-\frac{u}{a}.$$

Est porro subnormalis

$$\mathfrak{P}\mathfrak{n}=\mathfrak{P}\mathfrak{f}-\mathfrak{fn}=E+u-\mathfrak{fn}=E+u-\left(E+u-\frac{u}{a}\right)=\frac{u}{a}.$$

Si ab altera parte sit ordinata $\mathfrak{p}\mathfrak{P}$ ultra centrum in plaga positiva, tum pro $\mathfrak{f}$ ubique alter focus accipiatur.

Subtangens $\mathfrak{i}\mathfrak{P}$ autem hinc e triangulo $\mathfrak{ipn}$ ad $\mathfrak{p}$ rectangulo et ordinata $\mathfrak{p}\mathfrak{P}$ perpendiculari ad $\mathfrak{in}$ facile reperitur, quum si subnormalis ν et subtangens s dicatur, sit

$$s:y=y:\nu,$$

adeoque

$$s=\frac{y^2}{\nu}=\left(\frac{a}{4}-\frac{u^2}{a}\right):\frac{u}{a}=\frac{a^2}{4u}-u.$$

Unde etiam tangens normalisque facile prodeunt.

In hyperbola (Fig. 171.) recta $\overline{\mathfrak{pt}}$ angulum $\mathfrak{fp}\mathfrak{F}$ bisecans tangens ad $\mathfrak{p}$ erit. Nam

$$\mathfrak{F}\mathfrak{p}-\mathfrak{fp}=\mathfrak{F}\mathfrak{p}-\mathfrak{pd}=a$$

et pro $\wedge\mathfrak{dpt}=\mathfrak{fpt}$ est $\mathfrak{pt}\perp\mathfrak{df}$, ac quodvis punctum $\mathfrak{q}$ rectæ $\overline{\mathfrak{tp}}$ a punctis $\mathfrak{d}$ et $\mathfrak{f}$ æqualiter distat, atque manifesto $\mathfrak{F}\mathfrak{q}-\mathfrak{fq}<a$ est: nam centro $\mathfrak{q}$ radio $\mathfrak{qf}=\mathfrak{qd}$ scripto arcu $\mathfrak{fde}$, erit

$$\mathfrak{F}\mathfrak{e}=\mathfrak{F}\mathfrak{q}-\mathfrak{fq}<a;$$

quia si $\mathfrak{F}\mathfrak{e}=$ vel $>a$ esset, tum in triangulo $\mathfrak{F}\mathfrak{dq}$ esset $a+\mathfrak{dq}=$ vel $<$

latere tertio $\mathfrak{F}\mathfrak{q}$. Consequenter quodvis $\mathfrak{q}$ extus cadit (pag. 174); nec ullum $\mathfrak{q}$ ex. gr. $\mathfrak{q}'$ in curvam venit, nam in triangulo $\mathfrak{F}\mathfrak{q}'\mathfrak{d}$ foret $\mathfrak{F}\mathfrak{q}'-\mathfrak{q}'\mathfrak{d}$ vel $\mathfrak{q}'\mathfrak{d}-\mathfrak{F}\mathfrak{q}'=a$, adeoque

$$a+\mathfrak{q}'\mathfrak{d}=\mathfrak{F}\mathfrak{q}' \quad \text{vel} \quad a+\mathfrak{F}\mathfrak{q}'=\mathfrak{q}'\mathfrak{d},$$

nempe $\mathfrak{F}\mathfrak{d}=a$.

Porro et hic crura trianguli $\mathfrak{F}\mathfrak{p}\mathfrak{n}$ secantur per basi $\mathfrak{p}\mathfrak{n}$ parallelam $\mathfrak{d}\mathfrak{f}$, quia $\mathfrak{p}\mathfrak{n}$, $\mathfrak{k}\mathfrak{f}$ sunt perpendiculares ad $\mathfrak{k}\mathfrak{q}$; unde ut antea prodit

$$s=(4u^2-a^2):4u.$$

Si vero e puncto $\mathfrak{q}$ extra hyperbolam (et centrum) cadente tangens mittenda sit: fiat (Fig. 172.) centro $\mathfrak{q}$ radio $\mathfrak{q}\mathfrak{F}$ circulus, pro distantia ipsius $\mathfrak{q}$ a foco $\mathfrak{F}$ haud maiore quam ab altero $\mathfrak{f}$; seceturque is in $\mathfrak{d}$ per alterum centro $\mathfrak{f}$ radio a factum; et sit $\mathfrak{k}$ meditullium rectæ $\mathfrak{d}\mathfrak{F}$, secetque $\overline{\mathfrak{f}\mathfrak{d}}$ ipsam $\overline{\mathfrak{q}\mathfrak{k}}$ in $\mathfrak{p}$; erit $\mathfrak{p}$ punctum hyperbolæ, et $\overline{\mathfrak{q}\mathfrak{k}}$ tangens ad $\mathfrak{p}$ erit.

Enimvero sectiones dictæ tam pro ellipsi (pag. 182), quam pro hyperbola evenient: nempe circuli dicti secabunt se invicem in duobus punctis, atque $\overline{\mathfrak{f}\mathfrak{d}}$ et $\overline{\mathfrak{q}\mathfrak{k}}$ secabunt se in ellipsi inter $\mathfrak{d}$ et $\mathfrak{f}$, (Fig. 174.), in hyperbola aut in plaga eadem, in qua $\mathfrak{d}$ est, ultra $\mathfrak{d}$ fiet sectio $\mathfrak{p}$ (Fig. 175.), aut in altera plaga (Fig. 175*).

Quoad primum: Si (Fig. 173.) circulus centro $\mathfrak{q}$ radio $\mathfrak{q}\mathfrak{F}$ dicatur C, et centro $\mathfrak{f}$ radio a scriptus c dicatur, ac recta $\mathfrak{f}\mathfrak{q}$ continuetur, sintque $\mathfrak{g}$, $\mathfrak{i}$ extremitates diametri circuli C: tum si $\mathfrak{f}\mathfrak{i}<a$ et $a<\mathfrak{f}\mathfrak{g}$, extremitas radii a e centro $\mathfrak{f}$ in rectam $\mathfrak{i}\mathfrak{g}$ intra C cadet, adeoque c ex C in duobus punctis egredietur.

In ellipsi vero est $\mathfrak{f}\mathfrak{q}-\mathfrak{F}\mathfrak{q}=\mathfrak{i}\mathfrak{f}<a$, nam $\mathfrak{i}\mathfrak{f}<\mathfrak{F}\mathfrak{f}$ (pag. 85), et $\mathfrak{F}\mathfrak{f}<a$; imo si $\mathfrak{F}$ in $\mathfrak{h}$ caderet quoque, est $\mathfrak{i}\mathfrak{f}<\mathfrak{h}\mathfrak{f}$. Est porro $\mathfrak{g}\mathfrak{f}>a$, nam $\mathfrak{g}\mathfrak{f}=\mathfrak{q}\mathfrak{F}+\mathfrak{q}\mathfrak{f}$, quod in ellipsi pro $\mathfrak{q}$ extus cadente est $>a$ (pag. 174). *In hyperbola* pro $\mathfrak{q}$ extus cadente est $\mathfrak{f}\mathfrak{q}-\mathfrak{F}\mathfrak{q}<a$ (pag. 174), nempe $\mathfrak{i}\mathfrak{f}<a$; atque in triangulo $\mathfrak{F}\mathfrak{q}\mathfrak{f}$ est $\mathfrak{F}\mathfrak{q}+\mathfrak{q}\mathfrak{f}>\mathfrak{F}\mathfrak{f}>a$, adeoque $\mathfrak{g}\mathfrak{f}>a$. Si vero $\mathfrak{q}$ ab $\mathfrak{F}$ et $\mathfrak{f}$ æqualiter distet, sectionem unam superius, alteram inferius fieri patet.

Quoad alterum: In ellipsi (Fig. 174.) in triangulo $\mathfrak{f}\mathfrak{d}\mathfrak{F}$ est $a>\mathfrak{f}\mathfrak{F}$, adeoque $u<v$; si igitur $\mathfrak{f}\mathfrak{F}$ circa $\mathfrak{F}$ moveatur donec in $\mathfrak{p}\mathfrak{F}$ veniens an-

gulum cum $\mathfrak{F}\mathfrak{d}$ ipsi u æqualem faciat: $\mathfrak{p}\mathfrak{k} \perp \mathfrak{F}\mathfrak{d}$ erit. In hyperbola (Fig. 175.) $a < \mathfrak{f}\mathfrak{F}$, adeoque $u > v$; est autem u aut obtusus aut acutus, quia rectus esse nequit; esset enim angulus $\mathfrak{f}\mathfrak{d}\mathfrak{F}$ in semicirculo, adeoque $\mathfrak{q}$ in centro esset, et $\mathfrak{q}\mathfrak{k} \parallel \mathfrak{f}\mathfrak{d}$ esset, nec ullum $\mathfrak{p}$ nec tangens e centro datur. Si vero u obtusus est, tum z acutus est, adeoque $\mathfrak{p}$ supra $\mathfrak{d}\mathfrak{k}$ cadet. Si u acutus fuerit (Fig. 175*), moveatur $\mathfrak{F}\mathfrak{f}$ circa $\mathfrak{F}$ deorsum, donec $\mathfrak{p}\mathfrak{F}$ cum $\mathfrak{F}\mathfrak{d}$ angulum $= u$ faciat, nempe $v < u$; eritque $\mathfrak{F}\mathfrak{p} = \mathfrak{d}\mathfrak{p}$, et $\mathfrak{k}\mathfrak{p} \perp \mathfrak{d}\mathfrak{F}$.

Est autem (Fig. 174.)

$$\mathfrak{p}\mathfrak{d} = \mathfrak{p}\mathfrak{F} \quad \text{et} \quad \mathfrak{p}\mathfrak{f} + \mathfrak{p}\mathfrak{F} = a = \mathfrak{d}\mathfrak{f}.$$

In (Fig. 175.) est

$$\mathfrak{f}\mathfrak{p} - \mathfrak{p}\mathfrak{d} = a = \mathfrak{f}\mathfrak{p} - \mathfrak{p}\mathfrak{F};$$

quia $\mathfrak{p}\mathfrak{d} = \mathfrak{p}\mathfrak{F}$. In (Fig. 175*)

$$\mathfrak{p}\mathfrak{d} - \mathfrak{p}\mathfrak{f} = a = \mathfrak{p}\mathfrak{F} - \mathfrak{p}\mathfrak{f}.$$

VIII.

Quoad explicationem (pagg. 158 &) dictorum patet angulos v ad tangentem verticalesque æquales esse. Plura referre instituti ratio vetat.

IX.

Diametri sectionum conicarum.

Centrum lineæ L in plano dicitur $\mathfrak{c}$, si quodcunque punctum $\mathfrak{p}$ ipsius L fuerit, recta $\overline{\mathfrak{p}\mathfrak{c}}$ lineam L adhuc in uno tali puncto $\mathfrak{q}$ secet, ut $\mathfrak{p}\mathfrak{c} = \mathfrak{q}\mathfrak{c}$ sit.

Quæcunque recta autem bisecans omnes ipsius L chordas rectæ cuipiam r parallelas tales, ut nulla pars continua ipsius L sit, in qua chordarum dictarum aliqua haud terminetur: *diameter lineae* L dicitur *sensu latiore*; semperque, nisi aliud monitum fuerit, talis diameter intelligatur; diameter quippe etiam alio sensu venit.

At *sensu stricto diametro gaudere* dicitur L, si ut pro circulo et ellipsi, recta R circa centrum ubivis in eodem plano mota donec redeat, semper pro dicta r accipi queat, saltem nonnisi certus sit rectarum numerus, in quas R tales pervenit, quas pro r sumere non liceat; ex. gr. pro parabola nonnisi una recta (nempe axi parallela) excluditur, pro hyperbola asymptotis parallelæ itaque duæ excluduntur, nempe tam in parabola quam hyperbola limites tangentium ad puncta dabili quovis remotiora.

Centro gaudere linea potest absque eo, ut diametro sensu stricto gaudeat (uti Fig. 110.); et conversim parabola diametro sensu stricto pollens centro caret. Lineæ plures ordinis binario altioris quoque certo diametri numero gaudent, imo plures centrum habent.

In ellipsi et hyperbola, si recta e puncto quovis $\mathfrak{p}$ lineæ per $\mathfrak{c}$, meditullium axeos maioris, producatur usque in $\mathfrak{d}$, ut $\mathfrak{cd} = \mathfrak{cp}$ fiat: per æquationem e centro patet $\mathfrak{d}$ quoque punctum lineæ esse.

In parabola autem e quovis certo puncto $\mathfrak{p}$ parabolæ ad punctum in axe dabili quovis remotius ducta recta eo tendit, ut axi parallela fiat; si igitur hoc sensu accipiatur parabolæ centrum in axe omni dabili remotius, et pro recta per centrum eius ducta quævis axi parallela intelligatur: generaliter dici poterit, in quavis sectione conica L quamvis rectam per centrum ductam, præter asymptotos, diametrum esse; et pro quavis diametro δ chordas per eam bisectas, si δ ipsam L secet, esse tangenti ad illud punctum, in quo δ ipsam L secat, ductæ parallelas; aut δ tangenti alicui parallelam esse, chordasque rectæ e centro per punctum tactus ductæ esse parallelas.

Est autem pro abscissis x in diametro æquatio ellipseos e centro

$$y^2 = \frac{d^2}{4} - \frac{d^2x^2}{D^2};$$

æquatio hyperbolæ vero, si linea abscissarum secet hyperbolam, est

$$y^2 = \frac{d^2x^2}{D^2} - \frac{d^2}{4},$$

aut pro abscissa y item e centro et ordinata x est

$$x^2 = \frac{D^2}{4} + \frac{D^2 y^2}{d^2},$$

quod e priore sequitur; diciturque in duobus prioribus D *diameter primaria* respectu alterius, et d eius *coniugata*, in postremo autem d dicitur *primaria*, et D *coniugata*.

Ex. gr. abscissæ nunc x dictæ eædem sunt, quæ superius per u denotabuntur; atque ibi, pro abscissis u e centro in a acceptis, erat in ellipsi

$$y^2 = \frac{a}{4} - \frac{u^2}{a};$$

hoc autem est

$$= \frac{b^2}{4} - \frac{b^2 u^2}{a^2},$$

quia $b = \sqrt{a}$.

Est autem in ellipsi D æqualis lineæ abscissarum utrinque in ellipsi terminatæ, et d æqualis rectæ per centrum ad tangentem in puncto, ubi D ellipsim secat, parallelæ et utrinque in ellipsi terminatæ. Quoad hyperbolam quoque diametri utriusque, meditullio in centrum posito, primaria in lineam abscissarum continuetur, et coniugata ordinatis parallela sit; interim ipsorum D, d illud (ex. gr. D), quod per centrum eundo secat hyperbolam (ex. gr. in $\mathfrak{a}$), secabit eam in alio puncto $\mathfrak{b}$ quoque, atque tum pro D in calculo recta $\mathfrak{ab}$ intelligatur, pro d autem tangens hyperbolæ ad punctum $\mathfrak{a}$ (vel $\mathfrak{b}$) ab una asymptoto usque ad aliam; et eandem quantitatem retineat d in calculo, etsi ipsa fiat linea abscissarum, et D sit eius *coniugata*.

Notandum etiam est, quod proportionalis tertia ad diametrum et eius coniugatam parameter diametri prioris dici soleat. Nempe parameter ipsius a seu parameter principalis p prodit ex

$$a : b = b : \frac{b^2}{a},$$

seu quia $b = \sqrt{a}$ erat, est

$$a : \sqrt{a} = \sqrt{a} : 1.$$

Ita parameter P ipsius b, cuius coniugata a est, prodit ex

$$b : a = a : \frac{a^2}{b},$$

ubi $\frac{a^2}{b} = P$. Atque eodem modo exprimitur per parametrum et diametrum ordinatæ quadratum, abscissis e vertice acceptis. Ex. gr.

$$y^2 = px - \frac{px^2}{a} \quad \text{et} \quad Y^2 = u^2 = PX - \frac{PX^2}{b},$$

si X abscissam in b e vertice denotet; nempe pro abscissis x in a e vertice acceptis erat

$$y^2 = x - \frac{x^2}{a} = \frac{b^2 x}{a} - \frac{b^2 x^2}{a^2},$$

quia $b = \sqrt{a}$ et $b^2 = a$, adeoque $\frac{b^2}{a} = 1 =$ parametro principali. Sed

$$x = \frac{a}{2} + u,$$

itaque

$$y^2 = \frac{b^2}{a}\left(\frac{a}{2} + u\right) - \frac{b^2}{a^2}\left(\frac{a}{2} + u\right)^2 = \frac{b^2}{4} - \frac{b^2}{a^2} u^2;$$

et hoc propter $y = \frac{b}{2} - X$ est

$$= \frac{b^2}{4} - bX + X^2;$$

atque hinc u^2 seu

$$Y^2 = \frac{a^2 X}{b} - \frac{a^2 X^2}{b^2} = PX - \frac{PX^2}{b}.$$

Quod et ad reliquas diametros applicari patet.

§. 1.

In parabola quamvis rectam L axi parallelam diametrum esse, si ordinatæ tangenti ad illud punctum, ubi L parabolam secat, parallelæ accipiantur, neque aliam dari, nec hanc pro aliis ordinatis diametrum esse patet sic (Fig. 176.).

Sit abscissa t axi parallela, et tangens sit T, ac subtangens $s = 2\alpha$, ordinata superior u, inferior u'; nempe et inferius secari parabolam statim patebit.

Per latera trianguli 𝔅𝔄ℭ parallela lateribus reliquorum (in Fig. 176. &) triangulorum ponatur in omnibus casibus, prius tangens ad subtangentem (nempe T ad 2α), tum tangens ad ordinatam, (nempe T ad $\sqrt{\alpha}$).

Terminatur u aut infra axem, aut in axe, aut supra axem; et quidem in casu prostremo aut a perpendiculari ex ℭ ad t erecta ad dextram, aut ad lævam. Est (Fig. 176.)

$$T : 2\alpha = u : k \quad \text{et} \quad T : \sqrt{\alpha} = u : y + \sqrt{\alpha},$$

itaque

$$k = \frac{2\alpha u}{T} \quad \text{et} \quad y = \frac{u\sqrt{\alpha} - T\sqrt{\alpha}}{T} = \frac{(u-T)\sqrt{\alpha}}{T}.$$

Est autem

$$x = t - k + \alpha \quad \text{et} \quad y^2 = x;$$

itaque substituendo valores ipsius k in x, et ipsius y in y^2, erit

$$y^2 = \frac{u^2\alpha - 2uT\alpha + T^2\alpha}{T^2}$$

et

$$x = t - \frac{2\alpha u}{T} + \alpha = \frac{tT^2 - 2\alpha uT + T^2\alpha}{T^2};$$

consequenter

$$u^2\alpha - 2uT\alpha + T^2\alpha = tT^2 - 2\alpha uT + T^2\alpha,$$

id est $u^2\alpha = tT^2$, adeoque

$$u^2 = \frac{tT^2}{\alpha}.$$

Ita si u' sit continuatio ipsius u usque ad parabolam: est

$$l = Y - \sqrt{\alpha} \quad \text{et} \quad Y^2 = X = t + k' + \alpha;$$

atque

$$T : 2\alpha = u' : k' \quad \text{et} \quad T : \sqrt{\alpha} = u' : Y - \sqrt{\alpha},$$

et hinc

$$k' = \frac{2\alpha u'}{T} \quad \text{et} \quad Y = \frac{(u' + T)}{T}\sqrt{\alpha};$$

consequenter

$$Y^2 = \frac{u'^2\alpha + 2u'T\alpha + \alpha T^2}{T^2} =$$

$$X = t + \frac{2\alpha u'}{T} + \alpha = \frac{tT^2 + 2\alpha u'T + \alpha T^2}{T^2};$$

adeoque

$$u'^2 = \frac{tT^2}{\alpha},$$

uti u erat, et si duorum valorum ipsius $u = \sqrt{\frac{tT^2}{\alpha}}$ alter negative accipiatur, u' quoque exhibebitur.

Ita (Fig. 177.) est

$$T : 2\alpha = q : k \quad \text{et} \quad T : \sqrt{\alpha} = q : y;$$

et hinc

$$k = \frac{2\alpha q}{T} = \frac{2\alpha(u-T)}{T}$$

(quia $q = u - T$), et

$$y = \frac{q\sqrt{\alpha}}{T} = \frac{(u-T)\sqrt{\alpha}}{T}.$$

Est porro

$$x = t - \alpha - k$$

et

$$y^2 = \frac{u^2\alpha - 2uT\alpha + T^2\alpha}{T^2} =$$

$$x = t - \alpha - \frac{2\alpha(u-T)}{T} = \frac{tT^2 - 2\alpha uT + \alpha T^2}{T^2};$$

atque hinc pariter

$$u^2 = \frac{tT^2}{\alpha}.$$

Ita

$$u'^2 = \frac{tT^2}{\alpha}.$$

Nam

$$T : 2\alpha = u' : i \quad \text{et} \quad T : \sqrt{\alpha} = u' : l = u' : (Y - \sqrt{\alpha});$$

est vero $X = t + i + \alpha$; atque $Y^2 = X$; et valoribus ipsorum i et Y, ut antea, substitutis prodit.

In (Fig. 178.) est

$$T : 2\alpha = q : h, \quad \text{et} \quad T : \sqrt{\alpha} = q : y,$$

et hinc

$$h = \frac{2\alpha q}{T} = \frac{2\alpha(T-u)}{T},$$

(quia $q = T - u$); estque

$$y = \frac{q\sqrt{\alpha}}{T} = \frac{(T-u)\sqrt{\alpha}}{T}.$$

Est vero

$$x = t + h - \alpha \quad \text{et} \quad y^2 = x;$$

itaque substituendo est

$$x = t + \frac{2\alpha(T-u)}{T} - \alpha = \frac{tT^2 + \alpha T^2 - 2\alpha u T}{T^2} =$$

$$y^2 = \frac{T^2\alpha - 2Tu\alpha + u^2\alpha}{T^2};$$

unde

$$u^2\alpha = tT^2 \quad \text{et} \quad u^2 = \frac{tT^2}{\alpha}.$$

Ita

$$u'^2 = \frac{tT^2}{\alpha}.$$

Nam

$$X = t + i + \alpha,$$

et ex

$$T : 2\alpha = u' : i \quad \text{et} \quad T : \sqrt{\alpha} = u' : l = u' : (Y - \sqrt{\alpha})$$

atque

$$Y^2 = X$$

prodit ut supra

$$\frac{u'^2\alpha + T^2\alpha + 2u'\alpha T}{T^2} = \frac{tT^2 + 2\alpha u' T + \alpha T^2}{T^2}.$$

Unde

$$u'^2 = \frac{tT^2}{\alpha}.$$

Erat vero $T^2 = 4xr$, (per r radium vectorem intelligendo); si igitur pro x ponatur α, erit $\frac{T^2}{\alpha} = 4r$, atque

$$u'^2 = u^2 = 4rt;$$

ubi $4r$ parameter huius diametri dici solet.

Quod autem nulla alia diameter sit, nec hæc sit pro aliis ordinatis, patet sic.

Quævis recta, præter axem et ei parallelam, secat præter axem etiam parabolam in duobus punctis; nam (Fig. 179.) quæratur valor talis ipsius x, ut y sit ordinata communis rectæ axem secantis et simul parabolæ: erit

$$b : k = x : y,$$

adeoque

$$y = \frac{xk}{b} = x\beta,$$

si $\frac{k}{b}$ dicatur β; ordinata parabolæ autem est $\sqrt{\alpha + x}$; eruntque æquales, si

$$\alpha + x = \beta^2 x^2,$$

adeoque

$$x = \frac{1}{2\beta^2} \pm \sqrt{\frac{1}{4\beta^4} + \frac{\alpha}{\beta^2}}.$$

Quæcunque igitur alia diameter esset, illa per $\mathfrak{kh}$ (Fig. 180.) repræsentari potest, atque ordinatæ quoque aut axi parallelæ essent, aut secarent axem. Si parallelæ axi essent, superiores finitæ, inferiores infinitæ essent. Si vero axem secent, consideretur ordinata e puncto $\mathfrak{c}$; erit hæc aut perpendicularis ad $\mathfrak{Ai}$ axem primarium, aut supra vel infra perpendicularem cadet. Si prius, ordinatæ sequentes, eidem abscissæ appertinentes, inæquales erunt. Si ordinata $\mathfrak{ec}$ fuerit, erit $\mathfrak{ec} > \mathfrak{cb}$, quia triangula $\mathfrak{ecg}$ et $\mathfrak{bcm}$ similia sunt et $\mathfrak{eg} > \mathfrak{bm}$. Pariter si ordinata $\mathfrak{pc}$ fuerit, erit $\mathfrak{pc} < \mathfrak{cq}$; quia per triangula similia $\mathfrak{pcn}$, $\mathfrak{qci}$ atque $\mathfrak{pn} < \mathfrak{qi}$ est $\mathfrak{pc} < \mathfrak{cq}$.

Pro eadem diametro pariter ordinatas in quavis coni sectione ab ordinatis prioribus diversas inæquales esse inferius facile patebit.

§. 2.

Quoad ellipsim (Fig. 181.) sit $\mathfrak{pq} = y$ et $\mathfrak{pk} = \lambda$; $\mathfrak{Ac}$ est $= \frac{D}{2}$. Erat (pag. 183)

$$s = \frac{a^2 - 4u^2}{4u} \quad \text{et} \quad k^2 = \frac{a}{4} - \frac{u^2}{a},$$

atque e triangulorum 𝔄𝔊ℭ, 𝔞𝔤𝔠 similitudine est

$$t:s=\frac{d}{2}:U \quad \text{et} \quad s:k=U:K;$$

atque singulos terminos quadrando, fit

$$t^2=\frac{s^2d^2}{4U^2} \quad \text{et} \quad U^2=\frac{K^2s^2}{k^2};$$

unde prius U^2 reperitur, et tum t^2.

Est nempe

$$U^2=\frac{s^2K^2}{k^2}=\left(\frac{a^2-4u^2}{4u}\right)^2\left(\frac{a}{4}-\frac{U^2}{a}\right):\left(\frac{a}{4}-\frac{u^2}{a}\right)=$$

$$=\frac{(a^2-4u^2)^2}{4\cdot 4u^2}\,\frac{a^2-4U^2}{4a}\,\frac{4a}{a^2-4u^2}=\frac{(a^2-4u^2)(a^2-4U^2)}{4\cdot 4u^2};$$

et hinc

$$a^4-4a^2U^2-4a^2u^2+4\cdot 4u^2U^2=4\cdot 4u^2U^2,$$

seu

$$a^4-4a^2u=4a^2U^2;$$

et hinc

$$U^2=\frac{a^2}{4}-u^2.$$

Atque hinc t^2, quod erat $=\frac{s^2d^2}{4U^2}$, est

$$=\frac{(a^2-4u^2)^2}{4\cdot 4u^2}\,\frac{d^2}{4}:\frac{a^2-4u^2}{4}=\frac{a^2-4u^2}{4\cdot 4u^2}\,d^2.$$

Assumantur porro duo paria triangulorum similium, nempe tsk, 𝔭𝔣𝔮 et xhi, 𝔄𝔠𝔊, atque valores v, λ, i, h quærantur. Erit

$$t:k=y:v,\ t:s=y:\lambda,\ \frac{D}{2}:x=k:i,\ \frac{D}{2}:x=u:h,$$

atque hinc

$$v=\frac{ky}{t},\ \lambda=\frac{ys}{t},\ i=\frac{2kx}{D},\ h=\frac{2ux}{D}.$$

Est autem $V=i-v$, et simul

$$V^2 = \frac{a}{4} - \frac{(u+z)^2}{a} = \frac{a}{4} - \frac{(h+\lambda)^2}{a},$$

quia $u + z = h + \mathrm{pl}$.

Substitutis in

$$V^2 = (i-v)^2 = \frac{a}{4} - \frac{(h+\lambda)^2}{a}$$

seu

$$a\,(i-v)^2 = \frac{a^2}{4} - (h+\lambda)^2$$

valoribus i, v, h, λ, k, t, s, fiet

$$a\left(\frac{2kx}{D} - \frac{ky}{t}\right)^2 = \frac{a^2}{4} - \left(\frac{2ux}{D} + \frac{ys}{t}\right)^2;$$

et hinc

$$\frac{y^2}{t^2}(ak^2 + s^2) + \frac{4xy}{Dt}(us - ak^2) + \frac{4x^2}{D^2}(ak^2 + u^2) = \frac{a^2}{4};$$

ubi terminus primus $= \frac{y^2a^2}{d^2}$, secundus $= 0$, tertius $= \frac{x^2a^2}{D^2}$, adeoque

$$\frac{y^2a^2}{d^2} + \frac{x^2a^2}{D^2} = \frac{a^2}{4},$$

seu

$$\frac{y^2}{d^2} + \frac{x^2}{D^2} = \frac{1}{4},$$

consequenter

$$y^2 = \frac{d^2}{4} - \frac{x^2d^2}{D^2}.$$

Quod autem termini primi, secundi et tertii valores dicti sint, patet sic. In termino primo est

$$\frac{y^2}{t^2} = y^2 : \frac{(a^2 - 4u^2)\,d^2}{4 \cdot 4u^2} = \frac{4 \cdot 4u^2y^2}{(a^2 - 4u^2)\,d^2}$$

atque

$$ak^2 + s^2 = \frac{a^2 - 4u^2}{4} + \frac{(a^2 - 4u^2)^2}{4 \cdot 4u^2} = \frac{a^2\,(a^2 - 4u^2)}{4 \cdot 4u^2}.$$

Consequenter

$$\frac{y^2}{t^2}(ak^2 + s^2) = y^2 \cdot \frac{a^2}{d^2}.$$

In termino secundo nempe $\frac{4xy}{Dt}(us - ak^2)$ est

$$us - ak^2 = \frac{u(a^2 - 4u^2)}{4u} - \frac{a^2 - 4u^2}{4} = 0.$$

Tertius terminus est $\frac{4x^2}{D^2}(ak^2 + u^2)$; est autem

$$ak^2 + u^2 = \frac{a^2 - 4u^2}{4} + u^2 = \frac{a^2}{4};$$

adeoque terminus tertius $= \frac{4x^2}{D^2} \cdot \frac{a^2}{4} = \frac{x^2 a^2}{D^2}$.

Prodibit autem pariter et $y' = \mathfrak{pr} = y$, si pro y, λ, v, et ordinata $V = i - v$ et abscissa $\lambda + h$ ponatur y', λ', v', ordinata $V' = i + v'$ et abscissa $\lambda' - h$; quod, uti si y in fine axis vel infra eum terminetur, exercitio Tyronum relinquitur.

§. 3.

Sit D recta per centrum $\mathfrak{c}$ hyperbolæ (Fig. 182.) ducta, utrinque in ea terminata, sitque tangens $t + t'$ ad punctum $\mathfrak{p}$, in quo hyperbolam secat D; tum si ordinata e fine $\mathfrak{q}$ ipsius x, abscissæ e centro in recta D continuata acceptæ, ad tangentem parallela y dicatur, erit

$$y^2 = \frac{d^2 x^2}{D^2} - \frac{d^2}{4}.$$

Nam $t' = t$; quia hyperbola inter asymptotos e recta utrinque æquales partes resecat (pag. 176); et si recta tangenti parallele moveatur usquequo in punctum tactus veniat, partium resectarum eousque semper æqualium limites quoque nempe t et t' æquales erunt.

Hinc si $y \parallel t$, et α, γ ad axem primarium perpendicularia sint: erit

$$\frac{D}{2} : t = \mathfrak{cq} : y' + \beta' = x : y' + \beta',$$

nam $\mathfrak{cq} = x$; est vero hinc

$$\gamma' + \beta' = tx : \frac{D}{2} = \frac{dx}{2} : \frac{D}{2} = \frac{dx}{D};$$

nam $t = t'$, et $t + t'$ tanquam coniugata ipsius D dicitur d.

Est porro (per parallelas)

$$\beta' : \gamma' = t : \alpha = \frac{d}{2} : \alpha$$

atque

$$\beta + 2y : \gamma = t' : \alpha' = \frac{d}{2} : \alpha';$$

nempe $y = y'$, nam in triangulo, cuius vertex c est, $(y + y')$ est parallela $(t + t')$, atque $t = t'$, adeoque $y' + \beta' = y + \beta$, sed $\beta = \beta'$, (pag. 176) itaque $y = y'$.

E proximis duabus proportionibus autem fit

$$\beta'(\beta + 2y) : \gamma\gamma' = \frac{d^2}{4} : \alpha\alpha';$$

sed (pag. 163)

$$\gamma\gamma' = \frac{a}{4} = \alpha\alpha';$$

itaque

$$\beta'(\beta + 2y) = \frac{d^2}{4} = (\beta + y - y)(\beta + y + y).$$

Erat autem superius $\beta + y = \frac{dx}{D}$. Consequenter

$$\frac{d^2}{4} = \left(\frac{dx}{D} - y\right)\left(\frac{dx}{D} + y\right),$$

atque hinc

$$\frac{d^2}{4} = \frac{d^2x^2}{D^2} - y^2,$$

et hinc

$$y^2 = \frac{d^2x^2}{D^2} - \frac{d^2}{4}.$$

At vero et quævis alia recta $\mathfrak{AK}$ per centrum ducta (præter asymptotum) diameter est.

Accipiantur nempe pro abscissis X ordinatæ Y parallelæ ad rectam e centro per tactum tangentis ipsi $\mathfrak{AK}$ parallelæ: erit abscissa y, et x ordinata, atque

$$x^2 = \frac{D^2y^2}{d^2} + \frac{D^2}{4}.$$

Scholion 1.

Quaevis recta per centrum sectionis conicae (praeter asymptotum) diameter est; nec ulla alia est, nec eadem pro chordis rectae aliae parallelis diameter est, et cuivis rectae praeter asymptotos (et axi parallelam in parabola) dantur chordae parallelae diametro unica gaudentes.

Dicatur v angulus, quem tangens cum subtangente s facit; in triangulo rectangulo, cuius catheti s et y sunt, est (pag. 139)

$$\frac{y}{s} = \text{tang.}\, v;$$

est etiam (Tom. I. pag. 306)

$$\text{tang.}\, v = \partial y.$$

In parabola est

$$y = \sqrt{x} \quad \text{et} \quad s = 2x$$

(pag. 181), adeoque

$$\text{tang.}\, v = \frac{y}{s} = \frac{1}{2\sqrt{x}},$$

et pro quovis v datur x, nempe

$$2\sqrt{x} = \frac{1}{\text{tang.}\, v} \quad \text{et} \quad x = \frac{1}{4\,\text{tang.}^2\, v};$$

pro $v =$ recto fit tangens infinita, et $x = 0$; pro $x \sim \infty$ fit tang. $v \sim 0$. Patet etiam pro quovis ulterius ad dextram terminato x subtangentem quoque crescere ad lævam, angulum v autem decrescere, quum crescente x quotus $\frac{1}{2\sqrt{x}} = \text{tang.}\, v$ decrescat.

In ellipsi est

$$\frac{y}{s} = \sqrt{\frac{a^2 - 4u^2}{4a}} : \frac{a^2 - 4u^2}{4u} = \frac{2u}{\sqrt{a}\sqrt{a^2 - 4u^2}} = \text{tang.}\, v;$$

et hinc
$$4u^2 = a(a^2 - 4u^2)\,\text{tang.}^2 v,$$
atque hinc
$$u^2(4 + 4a\,\text{tang.}^2 v) = a^3\,\text{tang.}^2 v,$$
et
$$u = \sqrt{\frac{a^3\,\text{tang.}^2 v}{4 + 4a\,\text{tang.}^2 v}};$$

itaque quum tam numerator quam denominator adeoque et quotus positivus sit, pro quovis v datur u; fit autem pro $u = 0$ angulus $v = 0$, et pro $u = \frac{a}{2}$ fit v rectus, nempe valor tang. v pro $u = 0$ fit $\frac{0}{a}$, pro $u = \frac{a}{2}$ autem fit $\infty = \frac{2u}{0}$ (Tom. I. pag. 46). Decrescit vero subtangens ex infinito usque ad 0 crescente u usque ad $\frac{a}{2}$, crescitque v a 0 usque ad rectum, ita ut pro quovis maiore u subtangens intra priorem terminetur, et v maior fiat. Nempe $\frac{a^2}{4u} - u = s$ fit crescente u minus; fiat enim $u+\omega$ ex u, erit subtangens
$$s' = \frac{a^2}{4(u+\omega)} - (u+\omega) < \frac{a^2}{4u} - u;$$

quia $4(u+\omega) > 4u$, adeoque e quoto (propter divisorem maiorem) minore maius subtrahitur, pro subtangente abscissæ maiori respondente. Ita tang. v fit maior; nempe
$$\frac{2(u+\omega)}{\sqrt{a}\ \sqrt{a^2 - 4(u+\omega)^2}} > \frac{2u}{\sqrt{a}\ \sqrt{a^2 - 4u^2}},$$

quia numerator prior est maior, denominator autem minor est, nam ex a^2 maius subtrahitur.

In hyperbola tangens anguli α, quem asymptotus cum axe facit, est $= \frac{1}{\sqrt{a}}$; nam (pag. 163)
$$\frac{a}{2} : \frac{\sqrt{a}}{2} = 1 : \text{tang.}\ \alpha.$$

Crescente u, prima ordinata est 0 pro $u = \frac{a}{2}$, et tum tang. v est infinita, adeoque v est rectus, et subtangens 0; postmodum crescente u in infinitum, crescit subtangens usque ad limitem $= \frac{a}{2} + x$, semper ulterius versus centrum terminata, et decrescit v usque ad α, ita ut centrum per subtangentem et α per decrescentem v haud attingatur; estque pro quovis maiore u ultra verticem subtangens propior centro, et v minor.

Nam

1. Subtangens $\frac{4u^2-a^2}{4u}$ pro $u=\frac{a}{2}$ fit $=0$, et

$$\text{tang.}\, v = \frac{2u}{\sqrt{a}\ \sqrt{4u^2-a^2}}$$

fit $\frac{2u}{0}=\infty$ (Tom. I. pag. 46).

2. Si ex u fiat $u+\omega$ (pro ω positivo), subtangens s pro u est $u-\frac{a^2}{4u}$, et s' pro $u+\omega$ est $u+\omega-\frac{a^2}{4(u+\omega)}$; et subtrahendo priorem e posteriore manet

$$\frac{a^2}{4u}+\omega-\frac{a^2}{4(u+\omega)}=\omega+\frac{a^2(u+\omega)-a^2u}{4u(u+\omega)};$$

atque ut extremitas subtangentis s' versus centrum prodeat, adhuc ω subtracto quoque positivum manebit, nempe $\frac{a^2\omega}{4u(u+\omega)}$.

3. Est autem v pro $u+\omega$ minus quam pro u; nam tang. v pro $u+\omega$ est

$$\frac{2(u+\omega)}{\sqrt{a}\ \sqrt{4(u+\omega)^2-a^2}},$$

pro u est

$$\frac{2u}{\sqrt{a}\ \sqrt{4u^2-a^2}};$$

quorum utrumnam sit maius, nonnisi

$$\frac{u+\omega}{\sqrt{4(u+\omega)^2-a^2}} \quad \text{et} \quad \frac{u}{\sqrt{4u^2-a^2}}$$

adeoque

$$\frac{(u+\omega)^2}{4(u+\omega)^2-a^2} \quad \text{et} \quad \frac{u^2}{4u^2-a^2}$$

comparanda veniunt. Reducendo ad denominationem eandem, erunt numeratores

$$4u^2(u+\omega)^2-a^2(u+\omega)^2 \quad \text{et} \quad 4u^2(u+\omega)^2-a^2u^2,$$

quorum priorem subtrabendo e posteriore manet

$$a^2(u+\omega)^2 - a^2u^2 = a^2[(u+\omega)^2 - u^2],$$

quod manifesto positivum est.

4. Nunquam vero $v = \alpha$ fieri potest, sed $v \sim \alpha$. Nam pro $v = \alpha$ fieret

$$\text{tang.}\, v = \frac{1}{\sqrt{a}} = \frac{2u}{\sqrt{a}\sqrt{4u^2 - a^2}},$$

adeoque $4u^2 = 4u^2 - a^2$, et $0 = -a^2$. Pro quovis positivo ω autem datur tale u, ut tang. v sit $= \frac{1}{\sqrt{a}} + \omega$, at pro nullo positivo ω datur tale u, ut tang. $v = \frac{1}{\sqrt{a}} - \omega$ sit.

In casu primo enim esset

$$\text{tang.}\, v = \frac{1 + \omega\sqrt{a}}{\sqrt{a}} = \frac{2u}{\sqrt{a}\sqrt{4u^2 - a^2}},$$

et hinc

$$(1 + \omega\sqrt{a})^2 = \frac{4u^2}{4u^2 - a^2} = 1 + 2\omega\sqrt{a} + \omega^2 a,$$

quod dicatur k. Erit

$$4u^2 = 4u^2k - a^2k,$$

et hinc

$$u = \frac{a}{2}\sqrt{\frac{k}{k-1}},$$

quod, quia pro ω positivo fit $k > 1$, reale est.

Pro $-\omega$ vero erit

$$k = 1 - 2\omega\sqrt{a} + \omega^2 a;$$

sed ut tang. $v = \frac{1}{\sqrt{a}} - \omega$ sit, manifesto hic $\omega < \frac{1}{\sqrt{a}}$ esse debet, ut tangens positiva sit; si igitur $\omega = \frac{1}{\beta\sqrt{a}}$ ponatur (pro β positivo et > 1): erit, si nunc $1 - 2\omega\sqrt{a} + \omega^2 a$ dicatur k, radix ex $\frac{k}{k-1}$ imaginaria, quia tum k positivum et < 1 erit; nam

$$-2\omega\sqrt{a} + \omega^2 a = \frac{1}{\beta^2} - \frac{2}{\beta} = \frac{\beta - 2\beta^2}{\beta^3},$$

quod (pro β positivo et > 1) negativum est.

5. *In hyperbola asymptoto nulla chorda parallela est.* Sit enim (Fig. 183.) prius parallela ad distantiam ω a centro, tum sit ad distantiam $\frac{a}{2}+b$.

Erit
$$\frac{a}{2}:\frac{\sqrt{a}}{2}=\frac{a}{2}+x-\omega:Y,\quad Y=\frac{\frac{a}{2}+x-\omega}{\sqrt{a}};$$
est vero
$$y=\sqrt{x+\frac{x^2}{a}};$$

adeoque si $Y=y$ esse possit, erit
$$\left(\frac{a}{2}+x-\omega\right)^2=ax+x^2,$$

et hinc $0=\frac{a^2}{4}+\omega^2-\omega a-2\omega x$, atque hinc
$$x=\frac{a^2}{2.4\omega}+\frac{\omega}{2}-\frac{a}{2},$$

quod si $\omega=\frac{a}{n}$ ponatur (pro $n>2$) valorem positivum ipsius x sed unicum dat.

Ita pro casu altero est (Fig. 184.)
$$\sqrt{a}:1=x-b:Y,\quad Y=\frac{x-b}{\sqrt{a}},$$

quod si $=y$ esse queat, erit
$$(x-b)^2=ax+x^2,$$
et hinc $ax+2bx=b^2$, et
$$x=\frac{b^2}{a+2b};$$

valor ipsius x pariter unicus, pro quo hyperbola infra axem secatur. Nam $(x-b)^2=(b-x)^2$; atque si
$$\frac{b^2}{a+2b}=b+\omega$$
ponatur, erit
$$\omega=\frac{b^2-ab-2b^2}{a+2b}=-\frac{ab+b^2}{a+2b},$$

quod negativum est. Asymptoto eadem inferius continuata, idem pro parte hyperbolæ ad lævam patet.

6. *Cuivis alii rectae autem per centrum ductae* (in eodem plano) *respondent chordae parallelae, et his diameter per centrum transiens.*

Fiat enim e c centro hyperbolæ semicirculus supra axem, et sit cf perpendicularis ad axem; concipiaturque cuivis tangentium (ad hyperbolam supra axem ad dextram a cf) parallela per c, dicaturque l hæc parallela, et recta e c per punctum tactus dicatur L, atque l et L sibi respondere dicantur. Quicunque angulus fuerit ab α (angulo asymptoti cum axe) incipiendo usque ad rectum ipsum et o (solum α excludendo): manifestum e dictis est, quemvis radium in quadrante dicto (præter asymptotum) esse ipsarum L et l aliquam, et cuivis hyperbolæ puncto aliam l, et cuivis l aliam L respondere, et quamvis ipsarum L et l ab asymptoto diversam esse. Idem nempe ad lævam patet.

Erat autem quævis L diameter pro chordis ipsi l parallelis, et quævis l diameter pro chordis ipsi L parallelis. Quævis recta igitur (præter asymptotos) per centrum hyperbolæ ducta diameter est. *Asymptotus autem diameter non* est; quia recta per c illa, ad quam parallelæ chordæ per asymptotum bisecarentur, aut asymptotus altera aut aliqua ipsarum L et l esset; asymptoto nulla chorda parallela est, et cuivis ipsarum L et l fuerint chordæ parallelæ, illi ipsarum altera respondet tanquam diameter, et quævis L aut l diversa ab asymptoto est, nec meditullia chordarum earundem in rectis diversis iacere queunt.

In ellipsi pariter tangenti cuivis parallela per centrum ducta l, et recta e centro per punctum tactus ducta L, atque l et L sibi invicem respondere dici possunt; angulus v autem heic a o usque ad rectum, a centro ad dextram lævamque eundo, quantusvis esse potest, et cuivis puncto dimidiæ ellipseos supra axem alia l, et cuivis alii l alia L respondet; unde reliqua fluunt.

Consequenter quaevis recta per centrum sectionis conicae (præter asymptotos) diameter est; et asymptotis atque axe parabolæ exceptis, chordarum ad quamvis rectam parallelarum meditullia in recta per centrum eunte iacent.

Quod vero nulla alia diameter sit, nec ulla pro aliis chordis sit, patet sic: pro parabola demonstratum (pag. 192) est; in ellipsi et hyperbola autem quæcunque alia diameter esset, chordæ per eam bisectæ alicui ipsarum L et l parallelæ essent; his autem certa diameter, nec alia recta ab hac diversa per meditullia chordarum earundem duci potest. Si vero eadem diameter et chordas alii ipsarum L et l parallelas bisecaret: et his chordis respondet certa diameter, et quidem alia a priore diversa; nempe cuivis L alia l respondet (pag. 202).

Scholion 2.

Centro et plures lineae ordinis altioris gaudent; et num linea quædam centro gaudeat, modo sequente inquiritur. (Fig. 185.)

Sit linea abscissarum $\mathfrak{AB}$, et origo in $\mathfrak{A}$, sitque $F(x)=y$; feratur linea abscissarum in rectam priori per $\mathfrak{c}$ parallelam, et ponatur origo abscissarum in $\mathfrak{c}$. Dicantur abscissæ novæ t, et ordinatæ u; facile patet, dari tales constantes α, β, ut sit $x=t+\alpha$, et $y=u+\beta$, adeoque $F(t+\alpha)=u+\beta$ (pro angulo coordinatarum eodem, qui prius erat, abscissis t et ordinatis u). Si igitur $\mathfrak{c}$ centrum fuerit, et accipiantur abscissæ e centro ad dextram lævamque æquales, erit ordinata positiva negativæ æqualis; adeoque t et u sive simul positiva sive simul negativa ponantur, æquatio $F(t+\alpha)-(u+\beta)=0$ pro quovis t manet.

Hinc autem sequitur, quod si æquatio ista ordinis n fuerit, nec ordine inferiore exprimi queat (de quo inferius): termini cuiusvis, in quo variabilium t, u numerus sub formam $n-2m+1$ venit (pro m integro et non 0), coefficiens 0 esse debet, siquidem linea centro gaudeat; atque si dentur talia α, β, ut quivis dictorum coefficientium $=0$ sit, linea centro gaudebit, secus autem illo carebit.

Nam n aut par aut impar erit. Si n par fuerit, quilibet terminorum dictorum numerum variabilium imparem habebit. Si itaque summa terminorum, in quibus numerus variabilium par est, S dicatur, et summa terminorum, in quibus variabilium numerus impar est, s dicatur; atque $S+s=0$ sit: S non mutabitur etsi pro $+t$ et $+u$ simul ponatur $-t$

et $-u$, at s in $-s$ mutabitur; itaque nisi $s=0$ sit, $S+s$ et $S-s$ utrumque $=0$ esse nequit. Si vero $s=0$ sit, linea centro gaudet; adeoque si singulis coefficientibus dictis $=0$ positis, valores ipsorum α, β reperiantur, petito satisfiet. At si s non fuerit $=0$, centrum deerit.

Nempe tam $S=0$ quam $s=0$ esse debet; hoc autem fieri nequit, nisi singuli coefficientes dicti in s fuerint $=0$. Nam radices numero n æquationis $S=0$ manifesto a t dependent; exprimantur per $f(t)$; substituto quovis $f(t)$ ipsi u in s, oportet $s=0$ fieri; alioquin $S+s=0$ non esset. Sed hoc pacto $s=0$ omnes valores ipsius u exhiberet, quos $S-s=0$ præbet, neque $s=0$ plures radices habere potest, quum ad summum æquatio ordinis $(n-1)$-ti sit; itaque æquatio dicta gradu minore exprimeretur (contra hypothesin).

Si n impar sit, quilibet terminorum dictorum numero variabilium pari gaudet; atque S nec pro hoc casu mutatur, etsi pro t, u positivis negativa accipiantur; et s pariter $=0$ esse oportet; nam $s+S=0=-s+S$ esse aliter nequit, nisi tam S quam $s=0$ sit; si enim tantum $S=0$ esset, $s=-s$ esse nequit, nisi $s=0$ sit; si vero tantum $s=0$ esset, $S+s$ non esset $=0$, nisi et $S=0$ sit. Reliqua modo antea dicto patent.

Ex. gr. Sit $y^2-px=0$ (æquatio parabolæ pro parametro p); ponatur $t+\alpha$ pro x, et $u+\beta$ pro y; fiet $(u+\beta)^2-p(t+\alpha)=0=u^2+2\beta u+\beta^2-pt-p\alpha$; et si ponantur coefficientes superius dicti singuli $=0$, fiet $2\beta=0, p=0$, adeoque $\beta=0$, $p=0$, et parabola centro caret; quia pro $p=0$ esset quodvis $y=0$.

At parabolam ordinis $(2n+1)$-ti, cuius æquatio est $y^{2n+1}=px$, (nempe $y^\mu=px$ parabola ordinis μ-ti dicitur), centro gaudere vel inde patet, quod et abscissis manentibus, ac pro $\alpha=\beta=0$ mutatis tam x quam y e positivis in negativa, æquatio manet. At parabola ordinis $2n$-ti, nempe cuius æquatio est $y^{2n}-px=0$, centro carere modo antea dicto patet, ponendo $(u+\beta)^{2n}-p(t+\alpha)=0$, et singulos coefficientes dictos $=0$ ponendo; nimirum non solum $\beta=0$ prodibit, sed etiam p (nempe coefficiens ipsius t) $=0$ erit, adeoque manebit $u^{2n}=0$, id est $u=0$.

Scholion 3.

Linea secundi ordinis est aut parabola aut ellipsis, quo etiam circulus pro eccentricitate $=0$ pertinet, *aut hyperbola*, (*praeter $y^2=cx^2$, quo sectio plani cum cono per verticem exprimitur*; si una recta fuerit sectio, pro abscissis in hac sumtis, sit $c=0$; si vero duæ rectæ efficiant sectionem, tum abscissæ in recta angulos verticales bisecante e vertice accipiantur utrinque; et si sectio solum punctum ad verticem fuerit, c negativum accipi potest).

Nam lineam secundi ordinis prius diametro gaudere demonstratur; et tum pro abscissis in diametro acceptis, res patebit. (Fig. 186.)

Est æquatio generalis lineæ secundi ordinis

$$ay^2+(bx+c)y+(dx^2+ex+f)y^0=0;$$

ubi a non est $=0$, quia y habet duos valores pro abscissa per punctum internum chordæ ducta.

Dividatur æquatio per a; et pro $x=\mathfrak{AP}$ dicatur coefficiens posterior β, et prior α; erit $y^2+\alpha y+\beta=0$; adeoque fit

$$\mathfrak{PN}=-\frac{\alpha}{2}\pm\sqrt{\frac{\alpha^2}{4}-\beta},$$

$$\mathfrak{PM}=-\frac{\alpha}{2}\mp\sqrt{\frac{\alpha^2}{4}-\beta}.$$

Itaque

$$\mathfrak{PN}-\mathfrak{PM}=\mathfrak{MN}=\pm 2\sqrt{\frac{\alpha^2}{4}-\beta}:$$

et si $\mathfrak{C}$ huius meditullium sit, erit

$$\mathfrak{MC}=\pm\sqrt{\frac{\alpha^2}{4}-\beta},$$

$$\mathfrak{PC}=\mathfrak{PM}+\mathfrak{MC}=-\frac{\alpha}{2}=-\frac{bx+c}{2a}=-\frac{c}{2a}-\frac{bx}{2a};$$

atque pro quovis x et chordæ priori parallelæ medio, illi x respondente, idem prodit; nempe ordinata e fine ipsius x usque ad chordæ meditullium est $=-\frac{c}{2a}-\frac{bx}{2a}$; quæ manifesto æquatio rectæ est.

Itaque quum quarumvis trium chordarum parallelarum respectu ita duci possit abscissarum linea, ut chordæ illæ totæ in eandem plagam cadant: patet quarumvis trium chordarum parallelarum meditullia et consequenter omnia meditullia in eadem recta esse.

Si iam abscissæ in recta hac accipiantur, quævis æquatio lineæ secundi ordinis ad formam $y^2=a+bx+cx^2$ reducetur. Nam in expressione priore coefficiens primus ipsius y evanescit, quia summa radicum binarum æqualium sed sibi invicem oppositarum est $=0$ (Tom. I. pag. 399).

Tum vero aut $c=0$ est, aut non: in casu primo fit $y^2=a+bx$, æquatio parabolæ pro parametro b; mutetur nempe abscissarum t initium, ut sit $x=t-\frac{a}{b}$, fiet

$$y^2=a+b\left(t-\frac{a}{b}\right)=a+bt-a=bt.$$

Si c non $=0$, mutetur abscissarum t initium, ut sit $t=x+\frac{b}{2c}$, adeoque $x=t-\frac{b}{2c}$; fiet

$$y^2=a+bx+cx^2=a+b\left(t-\frac{b}{2c}\right)+c\left(t-\frac{b}{2c}\right)^2$$
$$=a+bt-\frac{b^2}{2c}+ct^2-tb+\frac{b^2}{4c},$$

quod (pro A, B constantibus) sub formam $y^2=A+Bt^2$ venit; ubi tam A quam B simul negativa esse nequeunt, quia tum valores ipsius y omnes imaginarii essent. Casus itaque sequentes sunt: $\vdash\!\!\!+\!\!\!\dashv A$ et $\vdash\!\!\dashv B$, $\vdash\!\!\dashv A$ et $\vdash\!\!\!+\!\!\!\dashv B$, $\vdash\!\!\!+\!\!\!\dashv A \vdash\!\!\!+\!\!\!\dashv B$.

Pro casu primo, dum $y^2=\vdash\!\!\!+\!\!\!\dashv A \vdash\!\!\dashv Bt^2$, ponatur

$$A=\frac{d^2}{4} \quad \text{et} \quad \vdash\!\!\dashv B=-\frac{d^2}{D^2};$$

adeoque $d=2\sqrt{A}$ et $D=2\sqrt{(-A:B)}=2\sqrt{-(A:B)}$, ubi propter A positivum et B negativum, $-(A:B)$ et $-B$ positiva sunt, eritque $A+Bt^2$ id est $\vdash\!\!\!+\!\!\!\dashv A \vdash\!\!\dashv Bt^2$

$$=\frac{d^2}{4}-\frac{d^2t^2}{D^2},$$

æquatio ellipseos e centro pro diametro D et eius coniugata d. Ponatur ex. gr. ipsorum D et d maius pro axe maiore, et alterum pro minore; si $D = d$, circulus est.

Casus secundus, dum $y^2 = \vdash\!\!-\!\!\dashv A \vdash\!\!+\!\!\dashv Bt^2$; ponatur

$$\vdash\!\!-\!\!\dashv A = -\frac{d^2}{4} \quad \text{et} \quad \vdash\!\!+\!\!\dashv B = \frac{d^2}{D^2};$$

et erit $A + Bt^2$ id est $\vdash\!\!-\!\!\dashv A \vdash\!\!+\!\!\dashv Bt^2$

$$= \frac{d^2 t^2}{D^2} - \frac{d^2}{4},$$

æquatio hyperbolæ e centro pro diametro $D = 2\sqrt{(-A:B)}$, et coniugata eius $d = 2\sqrt{-A}$, ubi $-A$ pro A negativo positivum est.

Casus tertius, si tam A quam B positivum sit, sitque $y^2 = A + Bt^2$. In hyperbola pro abscissis x e centro in diametro D per punctum tactus eunte coniugataque d et ordinata y erat (pag. 196)

$$y^2 = \frac{d^2 x^2}{D^2} - \frac{d^2}{4};$$

atque hinc, si abscissæ item e centro in $\overline{d}$, quæ antea coniugata erat, accipiantur, et D fiat coniugata ipsius d, atque ordinatæ prioribus abscissis parallelæ æqualesque sint, adeoque x ordinatæ, y abscissæ vicem subeant: erat

$$x^2 = \frac{D^2 y^2}{d^2} + \frac{D^2}{4}.$$

Si igitur $\frac{D^2}{4} = A$ adeoque $D = 2\sqrt{A}$ ponatur, et $\frac{D^2}{d^2} = B$ itaque $d = 2\sqrt{\frac{A}{B}}$, et in $y^2 = A + Bt^2$ ordinata y dicatur x, atque abscissa t dicatur y, æquatio proxima hyperbolæ e centro pro abscissis in diametro d tangenti parallela, et coniugata eius per punctum tactus eunte prodibit.

X.

Intersectiones linearum secundi ordinis, atque inde certarum aequationum resolutio.

Si duarum linearum L et l ordinatæ fuerint $Y = F(x)$ et $y = f(x)$, pro iisdem abscissis x (in eadem abscissarum linea ex eodem puncto incipientibus) et eodem ordinatarum angulo; atque pro quapiam abscissa x' fiant ordinatæ Y' ipsius L, et y' ipsius l æquales: erit $Y' - y' = 0$ seu $F(x') - f(x') = 0$, et lineæ L et l in extremitate communi ordinatarum Y' et y' se invicem secabunt; atque ubi se invicem secabunt L et l, pro abscissa puncto illi respondente erit $Y - y$ seu $F(x) - f(x) = 0$.

Si igitur $F(x) - f(x)$ ad formam

$$x^{\mu} + \alpha x^{\mu-1} + \beta x^{\mu-2} + \cdots + \varkappa x^{0} = 0$$

reduci queat, sitque æquatio resolvenda

$$x^{\mu} + A x^{\mu-1} + B x^{\mu-2} + \cdots + K = 0,$$

(denotantibus $A, B, \ldots$ constantes cognitas, μ numerum integrum, $\alpha, \beta, \ldots$ vero constantes indeterminatas); atque in duabus his æquationibus coefficientes eiusdem potentiæ æquentur: orientur æquationes $\alpha = A$, $\beta = B, \ldots$ $\varkappa = K$; e quibus si constantes $a, b, c, \ldots$ ad linearum L et l constructionem (pro eadem abscissarum linea eodemque initio, et eodem coordinatarum angulo) requisitæ reperiantur, atque L et l construantur: ubicunque secuerint hæ se invicem, abscissa respondens radix æquationis erit.

Vocatur autem modus iste radices æquationis reperiendi *constructio aequationum.*

Notandum tamen est: ex eo, quod pro certo valore ipsius x æquatio $Y - y = 0$ fiat, intersectionem haud sequi; potest enim tam Y quam y imaginarium esse, sectio autem reales ordinatas requirit; fierique potest, ut æquatio nulla radice reali gaudeat.

Exempla. Pro aequatione gradus tertii: Sit parabolæ B (Fig. 187.) ordinata u pro abscissa t, et $u^2 = bt$, adeoque $t = \frac{u^2}{b}$; et ordinata pro quovis puncto p ipsius B ad abscissam x ex eodem abscissarum initio 𝔄 reducta dicatur Y; erit $x=u$, et $Y=t$, adeoque $Y=\frac{x^2}{b}$. Sitque parabolæ A pro abscissa x et initio eodem 𝔄 ordinata y, et $y^2=ax$; ponaturque $Y-y=0$, id est $\frac{x^2}{b}-\sqrt{ax}=0$; erit $\frac{x^4}{b^2}=ax$; atque hinc $x^3-ab^2=0$, et $x=\sqrt[3]{ab^2}$. Et hoc pacto radix cubica exhiberi poterit, sed minime constructione geometrica sensu stricto, quum parabolæ quodvis punctum, sed non omnia puncta ita construi queant. Potest $b^2=1$ poni, et quævis quantitas Q pro a accipi, ut sit $x=\sqrt[3]{Q}$; ex. gr. si $Q=2$ sit, erit $x=\sqrt[3]{2}$, adeoque $x^3=2$, et

$$1:x=x:x^2=x^2:2;$$

nempe erunt duæ proportionales mediæ x et x^2 inter 1 et 2; eritque (per inferiora) simul x latus dupli cubi illius, cuius latus 1 est; quod pro Apollinis ara geometrice construendum frustra postulaverat Oraculum peste *Athenis* furente interrogatum: nempe ex $Y-y=0$ sive duæ rectæ, sive recta et circulus, sive duo circuli fuerint generalitate summa expressæ, æquatio formæ $x^3-Q=0$ haud prodibit; uti calculo inito patet.

Pro æquatione $x^3+Ax^2+Bx+C=0$ construenda autem mutetur (Fig. 188.) caput abscissarum in p, et abscissæ accipiantur in recta, in qua x est: erit

$$y=y'-a=\frac{(b+x)^2}{p}-a,$$

si $(b+x)^2=py'$; hinc vero est

$$y=\frac{b^2+2bx+x^2-ap}{p}=\frac{2bx+x^2}{p},$$

quia $b^2=ap$. Si vero $p=1$ ponatur, et $y=\frac{2bx}{p}+\frac{x^2}{p}$, fiet æquatio parabolæ ad formam $Y=\alpha x+x^2$ reducta; nempe dicatur ordinata eius Y, et ordinata circuli radio r et centro c (Fig. 189.) scripti, pro eodem x et eodem abscissarum principio p, dicatur y. Erit circuli ordinata

$$y=c+\sqrt{r^2-(x-e)^2};$$

atque si ponatur

$$Y-y=0=\alpha x+x^2-c-\sqrt{r^2-(x-e)^2},$$

erit

$$x^4+2\alpha x^3+x^2(\alpha^2+1-2c)-x(2e+2\alpha c)+e^2-r^2+c^2=0;$$

et si $e^2-r^2+c^2=0$ sit, reducetur æquatio ad formam

$$x^4+\beta x^3+\gamma x^2+\delta x=0;$$

e quo per x dividendo fit

$$x+\beta x^2+\gamma x+\delta=0;$$

hinc si æquatio cubica construenda fuerit

$$x^3+Ax^2+Bx+C=0,$$

eruantur constantes requisitæ ex æquationibus

$$A=\beta,\quad B=\gamma,\quad C=\delta,$$

(substituendo literis græcis valores superiores); et tum r ex $e^2-r^2+c^2=0$ prodit.

Pariter *aequatio biquadratica*

$$x^4+Ax^3+Bx^2+Cx+K=0$$

construetur (positis supra dictis) ex æquatione priore

$$x^4+\beta x^3+\gamma x^2+\delta x+\varkappa=0,$$

si $(e^2-r^2+c^2)$ breviter $\varkappa$ dicatur.

Scholion. Altioris gradus æquatio $Y-y=0$ pro duabus sectionibus conicis haud prodit. At lineæ cuiusvis, cuius ordinata

$$y=\alpha+\beta x+\gamma x^2+\cdots+x^n,$$

(literis græcis constantes denotantibus), æquatio ordinis n-ti est; atque quodvis punctum eius construi geometrice sensu stricto potest, quum nonnisi multiplicationis additionisque certus numerus requiratur.

Si autem linea eiusmodi constructa sit: ubicunque fuerit $y=0$, abscissa x radix æquationis

$$x^n + \varkappa x^{n-1} + \cdots + \beta x + \alpha = 0$$

erit, secabiturque linea abscissarum in tot punctis, quot radices reales æquatio habet, quarum numerus integrum n superare nequit (Tom. I. pag. 397); fieri autem potest, ut omnes imaginariæ sint, nec ullibi secetur linea abscissarum a linea dicta. Itaque pro resolvenda quavis æquatione nonnisi construenda linea eiusmodi esset; quod tamen innumerabiles operationes propter puncta innumerabilia requirit.

XI.

Quoad areas ceteraque numerum hunc concernentia instituti ratio ad ea, quæ (Tom. I. pagg. 229 &) dicta sunt, relegare iubet.

*222.

Linearum, quarum non omnia puncta quidem, sed aut quodvis, aut inter quaevis duo quotvis intermedia geometrice sensu stricto construere licet.

Exemplo sint sequentia.

1. Lineæ cuiusvis, cuius æquatio est

$$y \text{ vel } y^2 = \frac{ax^0 + bx^1 + cx^2 + \cdots + gx^n}{Ax^0 + Bx^1 + Cx^2 + \cdots + Hx^m},$$

quodvis punctum construi geometrice potest: certies requirens multiplicationem, additionem, divisionem et radicem quadraticam. Potest autem constantium $a, b, \ldots, A, B, \ldots$ quævis 0 esse, dummodo aliquis coefficiens, potentiæ alicuius non 0 ipsius x, haud 0 sit. Si y^2 sit, tum y erit radix e membro ad dextram, et chordæ per lineam abscissarum bisecantur. Talis est etiam *Cissois Dioclis*, linea ordinis tertii, cuius æquatio est

$$Ay^2 - xy^2 - x^3 = 0 \quad \text{seu} \quad y^2 = \frac{x^3}{A-x},$$

pro quo est $n=3$, $m=1$, et quilibet coefficientium est 0, præter $A=A$ et $g=1$ atque $H=-1$.

2. Si quivis circulus fuerit, (Fig. 190.) et quævis puncta $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$ fuerint, dicaturque quodvis peripheriæ punctum generaliter $\mathfrak{p}$, atque ducatur ex $\mathfrak{A}$ ad quodvis $\mathfrak{p}$ recta, et accipiatur in quavis recta $\overline{\mathfrak{A}\mathfrak{p}}$ ex $\mathfrak{p}$ utrinque recta æqualis rectæ $\mathfrak{p}\mathfrak{B}$, dicaturque cuiusvis rectæ ex $\mathfrak{p}$ acceptæ extremitas a $\mathfrak{p}$ diversa $\mathfrak{q}$: complexus omnium $\mathfrak{q}$ lineas variæ formæ producet; qualem (Fig. 191.) pro $\mathfrak{B}$ in peripheria, $\mathfrak{A}$ extra peripheriam, et $\mathfrak{A}\mathfrak{B}$ per $\mathfrak{c}$ centrum circuli eunte acceptis exhibet.

3. Si (Fig. 192.) peripheria A volvatur extus per peripheriam B, ita ut arcus $\mathfrak{b}\mathfrak{d}$ ipsius A sit æqualis arcui $\mathfrak{a}\mathfrak{b}$ ipsius B; aut intus volvatur circulus C, ut arcus $\mathfrak{b}\mathfrak{d}'$ sit æqualis arcui $\mathfrak{a}\mathfrak{b}$: via puncti $\mathfrak{a}$ ipsius A, *epicyclois* in casu primo, in postremo *hypocyclois* dicta, (si motus continuetur donec libuerit), talis erit, ut punctum quodvis eius construi geometrice possit, si radius circuli A vel C sit r, et radius R circuli B sit nr pro n integro. Nam si radiis R et r describantur circuli concentrici (Fig. 193.), pro quovis arcu $\mathfrak{a}\mathfrak{b}$ reperitur $\mathfrak{b}\mathfrak{d}$ et $\mathfrak{b}\mathfrak{d}'$, si e puncto $\mathfrak{a}'$ arcus $\mathfrak{a}'\mathfrak{b}'$ n-ies accipiatur.

Si motus extus fiat et $n=1$ sit, tum linea redibit in $\mathfrak{a}$; et pro $n=$ alii numero, ex. gr. 5, totidem arcus describentur æquales in peripheria B terminati.

Si motus intus fiat et $r=\frac{R}{2}$, erit via diameter deorsum pro prima circumvolutione, tum eadem sursum erit, et idem semper repetetur. Nam (Fig. 192*.) sit $\mathfrak{b}\mathfrak{d}'=\mathfrak{b}\mathfrak{a}$, erit $\mathfrak{d}'$ in diametro $\mathfrak{a}\mathfrak{f}$; nam anguli $\mathfrak{b}\mathfrak{c}\mathfrak{d}'$ (tanquam anguli ad peripheriam in circulo minore) quantitas est dimidium arcus $\mathfrak{b}\mathfrak{d}'$, et simul (ut anguli ad centrum in B) est arcus $\mathfrak{b}\mathfrak{a}$, qui item est $=\mathfrak{b}\mathfrak{d}'$ arcui duplo quoad gradus, quum radius bis minor sit.

4. Si via puncti $\mathfrak{p}$, in peripheria centri $\mathfrak{c}$ ex $\mathfrak{a}$ incipiendo semper porro moti, u dicatur, sitque certa recta α, ac cuiusvis u fine $\mathfrak{q}$ dicto, in quavis recta ipsi α per $\mathfrak{q}$ parallela, accipiatur y ex $\mathfrak{q}$ incipiendo, ita ut quævis duo y in plaga eadem ex. gr. superius terminentur; aut in

quavis recta e centro c per q ducta accipiatur y' vel y'' ex c incipiendo; atque sit $y=f(u)$, et $y'=F(u)$, ex. gr. sit $y=au$, et $y'=a:u$ vel au; aut $y''=a^u$ & . . . (a rectam denotante): extremitatum omnium y, uti extremitatum omnium y', sive omnium y'', complexus linea certa erit.

Pro singulis, si unitas arcu peripheriæ dictæ exhibeatur (ponaturve), extremitas cuiusvis ordinatæ y vel y' aut y'' geometrice exhiberi pro quovis $u=\frac{m}{2^n}$ poterit, si m, n integros denotent; nempe $\frac{m}{2^n}=m\frac{1}{2^n}$, et arcus $=1$ per 2^n dividi geometrice, atque partes eiusmodi numero m accipi possunt, et pro y et y' rectæ a potest $\frac{m}{2^n}$-tum accipi, ita pro y'' quoque potest a ad m elevari, et inde radix 2^n-ti gradus geometrice exhiberi. Sed si u nequeat per fractionem numeratoris integri, nec per denominatorem arcus geometrice dividi queat, (si ex. gr. $u=\frac{1}{7}$), nullum ipsorum y, y', y'' exhiberi geometrice poterit; nempe pro y et y' nullo modo constabit, quodnam u sit $=\frac{1}{7}$, pro y'' autem radix 7 gradus ex a geometrice extrahenda esset. Si vero recta ponatur pro unitate, y'' nonnisi pro $u=0$ et $a^0=1$ geometrice exhibebitur, nullum aliud u enim per rectam, tanto minus fractione formæ dictæ, exprimi poterit.

Plura quoque huius generis Tyrones ipsi cogitare possunt.

*223.

De lineis ordinis cuiusvis in genere quaedam scitu magis necessaria (pag. 149).

1. Si abscissarum initium in eadem abscissarum linea mutetur ex $\mathfrak{A}$ in $\mathfrak{a}$ vel in $\mathfrak{a}'$ (Fig. 194.), et abscissæ dicantur x pro $\mathfrak{A}$, et t pro $\mathfrak{a}$, atque t' pro $\mathfrak{a}'$; sitque $y=f(x)$: erit $x=t+\alpha=t'-\alpha$; consequenter $y=f(t+\alpha)$ $=f(t'-\alpha)$ erit æquatio lineæ pro abscissis novis, nempe prior pro t, posterior pro t'.

2. Si linea abscissarum mutetur in $\mathfrak{A}'\mathfrak{B}'$ priori $\mathfrak{A}\mathfrak{B}$ parallelam, (Fig. 195.) et $\mathfrak{A}'$ fiat novarum abscissarum origo, nempe ubi nova abscissarum linea per rectam ex $\mathfrak{A}$ priore abscissarum origine ductam ad ordinatas priores parallelam secatur: erit (manente angulo coordinatarum) ordinata nova $Y=y+\beta$, itaque $Y=f(x)+\beta$; si $\mathfrak{A}'\mathfrak{B}'$ supra $\mathfrak{A}\mathfrak{B}$ duca-

tur, β negativum erit; aut si positive sumatur, subtrahendum ex $f(x)$ erit; itaque in casu isto erit $y = Y - \beta$, in altero autem $y = Y + \beta$.

3. Si vero, manente angulo coordinatarum, tam origo abscissarum mutetur in $\mathfrak{A}\mathfrak{B}$, quam linea abscissarum mutetur in $\mathfrak{A}'\mathfrak{B}'$, ut fiat ex. gr. $t + \alpha$ ex x, $Y + \beta$ ex y: fiet pro novis abscissis t in $\mathfrak{A}'\mathfrak{B}'$ e novo abscissarum initio et novis ordinatis Y æquatio $Y + \beta = f(t + \alpha)$, substituendo nempe $Y + \beta$ ipsi y, et $t + \alpha$ ipsi x. Si $Y - \beta$ ex y, aut $t' - \alpha$ ex x factum fuerit, id substituendum esse patet. Neque vero hac mutatione æquationis ordo mutatur, quum cuivis x, etsi pluries ut factor occurrat, t plane toties substituatur; idemque de y patet. In genere si æquatio lineæ sit $F(x, y) = 0$ pro coordinatis x, y: erit lineæ eiusdem pro eodem coordinatarum angulo, sed abscissis t et ordinatis u, æquatio $F\big(a(t), b(u)\big) = 0$, si $x = a(t)$ et $y = b(u)$.

4. Si angulus coordinatarum mutetur, sive obliquus q in rectum sive rectus in obliquum q, prodibit æquatio lineæ modo sequente.

Sit prius q in rectum mutandus: fiat (Fig. 196.) ex $\mathfrak{A}$ origine abscissarum ad ordinatas perpendicularis, sitque abscissa nova z, et ordinata eius sit u, nempe ordinata y abscissæ prioris x usquequo novam abscissarum lineam secat. Erit

$$x : z = 1 : \sin. q \quad \text{et} \quad k : z = 1 : \text{tang.}\, q;$$

atque hinc

$$x = \frac{z}{\sin. q} \quad \text{et} \quad k = \frac{z}{\text{tang.}\, q};$$

ac

$$y = u - k = u - \frac{z}{\text{tang.}\, q} = u - z \cot. q;$$

quibus valoribus in æquatione lineæ ipsis x et y substitutis, prodibit æquatio lineæ eiusdem quæsita; nec ordo lineæ ob rationem antea dictam mutabitur.

Rectangularium coordinatarum x, y angulus rectus in obliquum q pariter mutabitur modo sequente: sit (Fig. 197.) abscissa t priori parallela et ordinata u; erit

$$y + b : u = \sin. q : 1 \quad \text{et} \quad u : k = 1 : \cos. q;$$

hinc

$$y = u \sin. q - b \quad \text{et} \quad k = u \cos. q,$$

estque $t = x - a + k$, adeoque

$$x = t + a - k;$$

quibus valoribus substitutis in æquatione lineæ pro coordinatis x, y, prodibit æquatio quæsita pariter ordinis eiusdem.

5. Si abscissis x (Fig. 198.) in $\mathfrak{AB}$ ex $\mathfrak{A}$ acceptis respondeant ordinatæ perpendiculares y, atque origo abscissarum in $\mathfrak{A}'$ ponatur, et abscissæ t in $\mathfrak{A}'\mathfrak{K}$ accipientur (rectam $\mathfrak{A}'\mathfrak{B}'$ lineæ abscissarum priori parallelam ad angulum q secante): æquatio lineæ pro abscissis t et ordinatis u reperitur modo sequente. Sit ex $\mathfrak{A}'$ ad lineam abscissarum priorem perpendicularis b, atque ex $\mathfrak{B}'$ fiant perpendiculares $\mathfrak{B}'\mathfrak{N}$ et $\mathfrak{B}'\mathfrak{K}$ ad u et $\mathfrak{A}'\mathfrak{K}$.

Erit propter triangula rectangula verticalia angulus ad $\mathfrak{M}$ angulo q ad $\mathfrak{A}'$ æqualis; et $\mathfrak{A}'\mathfrak{B}' = x + a$, $k = \mathfrak{NB}'$.

Estque

$$x + a : t + k = 1 : \cos. q,$$

et hinc

$$\mathfrak{A}'\mathfrak{K} = t + k = (x + a) \cos. q \quad \text{et} \quad \mathfrak{A}'\mathfrak{B}' = x + a = \frac{t + k}{\cos. q};$$

est porro

$$x + a : l = 1 : \sin. q,$$

unde

$$\mathfrak{B}'\mathfrak{K} = l = (x + a) \sin. q;$$

est etiam

$$(y + b) : k = 1 : \sin. q,$$

et hinc

$$\mathfrak{NB}' = k = (y + b) \sin. q;$$

porro

$$(y + b) : (u - l) = 1 : \cos. q,$$

unde

$$\mathfrak{MN} = u - l = (y + b) \cos. q;$$

atque hinc

$$t = \mathfrak{A}'\mathfrak{K} - k = (x + a) \cos. q - (y + b) \sin. q$$

et

$$u = \mathfrak{MN} + l = (x + a) \sin. q + (y + b) \cos. q,$$

et hinc

$$x + a = \frac{u - (y + b) \cos. q}{\sin. q} = \frac{t + (y + b) \sin. q}{\cos. q}.$$

Unde valores in æquatione ipsis x et y substituendi sic reperiuntur: Si brevitatis caussa sin. q dicatur q', et cos. q dicatur q'', erit

$$x+a=\frac{t+(y+b)q'}{q''}=\frac{u-(y+b)q''}{q'};$$

et hinc

$$tq'+(y+b)q'^2=uq''-(y+b)q''^2;$$

atque hinc

$$(y+b)(q'^2+q''^2)=q''u-q't;$$

et (quia omnia pro radio I computata sunt, adeoque $q'^2+q''^2=1$), erit $y+b=q''u-q't$; consequenter

$$y=q''u-q't-b.$$

Eodem modo prodit

$$x=q'u+q''t-a;$$

quibus valoribus in æquatione lineæ ipsis x et y substitutis, prodit æquatio lineæ quæsita.

Quod vero omnibus his substitutionibus ordo lineæ maneat, sic patet: si pro coordinatis x et y linea n-ti ordinis fuerit, numerus variabilium x, y tanquam factorum in aliquo termino plane n est, et in nullo ipsum n superat. Consideretur terminus quivis, in quo x ut factor m-ies, y vero $(n-m)$-ies occurrit; substituantur valores novi ipsis x et y; neglectis factoribus constantibus, quæ ad lineæ ordinem nihil conferunt, mutabitur terminus in $[(u+t)-a]^m[(u-t)-b]^{n-m}$, ubi item quoad ordinem lineæ nonnisi variabiles respiciendo, $[(u+t)^m+(u+t)^{m-1}+\cdots]$ per $[(u-t)^{n-m}+(u-t)^{n-m-1}+\cdots]$ multiplicatum considerandum venit. In binomio ad μ elevato summa exponentium in quovis termino idem μ est; si igitur terminus quicunque ipsius $(u+t)^m$ per terminum quemcunque ipsius $(u-t)^{n-m}$ multiplicetur, summa literarum variabilium (ut factorum) in facto erit $m+n-m=n$; in facto autem e quolibet termino item ipsius $(u+t)^m$ per quemlibet terminum ipsius $(u-t)^{n-m-1}$, numerus variabilium erit $m+n-m-1=n-1$; et patet in nullo facto, nisi quod ex $(u+t)^m(u-t)^{n-m}$ oritur, numerum variabilium ad n exsurgere; quodvis enim ex $(u+t)^{m-m'}$ per $(u-t)^{n-m-n'}$ multiplicato oritur, (denotantibus m', n' integros positivos, et $m'<m$, $n'<n-m$); fiet igitur summa literarum variabilium

$$m-m'+n-m-n'=n-m'-n'=n-(m'+n')$$

quod $<n$ est; est nempe $m'+n'<n$, quia $n=n-m+m$, et $n'<n-m$ atque $m'<m$.

Consequenter *utcunque mutetur abscissarum linea et origo abscissarum angulusque ordinatarum, ordo lineae manet.*

Notandum autem per multiplicationem terminorum dictorum omnium prodire omnes terminos, tam qui nonnisi aliquam variabilium t et u continent, quam qui quocunque numero ν ipsum n haud superante continet quamvis aliquam ipsarum t et u, et alteram ν'-ies continet (pro $\nu+\nu'$ haud $>n$); nempe ut (Tom. I. pag. 562) dictum est, omnes *uniones, biniones* &c prodire ex t et u, usque ad n-iones (inclusive) *admissa repetitione literae eiusdem, haud numerata diversa earundem literarum permutatione.* Facile hoc patet, quum ex $(t+u)^{\nu}$ prodeat omnis possibilis ν-io, uti ex $(t-u)^{\nu'}$ omnis possibilis ν'-io, adeoque ex $(t+u)^{\nu}(t-u)^{\nu'}$ omnis possibilis $(\nu+\nu')$-io.

6. *Linea ordinis* n-ti *a nulla recta in pluribus quam* n *punctis secari potest.*

Nam etsi recta quævis pro linea abscissarum accipiatur, gradus æquationis haud augetur. Erit autem ubicunque secuerit linea rectam abscissarum t, ordinata $u=0$; adeoque pro $u=0$ omnes termini æquationis ipsam u ut factorem continentes disparent, et pars reliqua æquationis, quæ nonnisi variabilem t nec eam ad ipso n altiorem gradum elevatam continet, erit $=0$ pro $u=0$; quamobrem plures quam numero n valores illi ipsius t, pro quibus $u=0$, dari nequeunt.

7. *Linea* n-ti *ordinis per* $\frac{(n+1)(n+2)}{2}-1$ *puncta determinatur,* et quidem ita, ut quanquam non ad quamvis tot puncta requirantur, per tot puncta nulla linea ordinis n-ti alia duci possit; et per quævis data $\frac{(n+1)(n+2)}{2}-1$ puncta linea aliqua ordinis n-ti duci possit, dummodo eorum plura quam n puncta in recta haud sint, quia linea ordinis n-ti in pluribus quam n punctis rectam non secat.

In æquatione generali lineæ ordinis n-ti sunt (pag. 149) termini numero $\frac{(n+1)(n+2)}{2}$, quorum primus constans sine ulla variabili est.

Sint (Fig. 199.) puncta data $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$, ...; ducatur linea abscissarum quæcunque $\mathfrak{KH}$, et sit $*$ origo abscissarum, demittantur ex $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$, ... perpendiculares A, B, C, ... tanquam ordinatæ respondentes abscissis a, b, c, ...; substituatur prius in æquatione generali ubicunque a abscissæ t et A ordinatæ u, dein in eadem priore æquatione generali substituatur ubique b abscissæ t et B ordinatæ u, tum substituatur item in æquatione generali c abscissæ t et C ordinatæ u, et ita porro; donec tot æquationes gradus primi prodeant, quot puncta data et quot constantes quærendæ sunt; itaque constantes ex iis determinantur; et linea pro constantibus repertis in æquationem positis, erit gradus n-ti per data puncta transiens.

Potest etiam constans variabili destituta $= 1$ poni, et reliquæ constantes quoad eam exprimi.

Neque autem ulla alia linea n-ti ordinis per eadem puncta transit. Nam si alia linea L esset per eadem puncta transiens: reducta ad lineam abscissarum priorem et idem abscissarum initium, quod prius erat, modo dicto æquatio generalis easdem æquationes pro constantibus reperiendis, easdemque constantes, adeoque eandem lineæ L æquationem præbebit.

8. Si lineæ n-ti ordinis æquatio sit $F(x, y) = 0$ pro abscissa x et ordinata y, atque pro iisdem abscissis et ordinata u sit lineæ m-ti ordinis æquatio $f(x, u) = 0$: pro omni casu, ubi lineæ hæ se invicem secant, $u = y$ esse oportet; adeoque pro illo x debet $F(x, y) = 0 = f(x, u)$ esse.

Probari autem potest, eliminato y æquationem nonnisi ad gradum mn assurgere; adeoque haud dari posse plures eiusmodi valores ipsius x, pro quibus $u = y$ fiat, adeoque lineæ dictæ se invicem secent; quanquam non dicatur in tot punctis secare posse. Sed instituti ratio transire ad numerum 3 iubet.

ELEMENTA GEOMETRIAE.

SECTIO IV.

REDITUS E PLANO IN ABYSSUM SPATII.

·3.

Ambitus constructionis geometricae sensu lato; numero rectarum operationumque trium primitivarum finito, nempe præter duas, quæ in constructione geometrica sensu stricto adhibebantur, etiam tertia admittitur, exclusa tamen hic quoque operationum coniunctione.

Ordo (in calce) præscriptus plura satis declarat, et primaria quoque (pagg. 38 &) dicta repetere supervacuum est: ex. gr. quod *recta cum plano* aut punctum, aut totam se, aut nihil *commune* habeat; *planum cum plano* aut rectam, aut nihil commune habeat; porro quod recta per planum, pariter planum per planum in alteram plagam transeat; &. Nempe

·3. REDITUS E PLANO IN ABYSSUM SPATII.

·31. *Numero* rectarum operationumque trium primitivarum *finito* (constructio geometrica sensu lato): nimirum duabus accedit tertia, nempe *motus circa axem*.

·311. Motus circa axem linearum planorumque, absque figurarum respectu.

·3111. *Linearum motus circa axem*, figuras haud efficientium.

·31111. Rectilineorum figuras haud constituentium motus circa axem.

·311111. *Unus motus circa axem.*

·3111111. Complexus duarum rectarum se mutuo in plano P secantium motus circa unam earundem: parit, si angulus rectus fuerit, *planum*, secus autem *conos verticales*.

·3111112.

Plana parallela describuntur (pag. 42).

·311112.

Recta e puncto extra planum P, ad duas rectas in P sitas perpendicularis, est ad planum P perpendicularis (pag. 39); patetque planum per α descriptum (in ·311112) et planum per β descriptum punctum p commune habere, et se invicem in recta secare; *darique* igitur e *quovis plani P puncto* p *perpendicularem ad P*; esseque unicam ex p ad P (pag. 39).

Patet etiam *quamvis rectam, quae ad planorum parallelorum P et Q* (in ·3111112) *aliquod perpendicularis est, esse ad alterum eorundem quoque perpendicularem*; atque *quasvis duas eiusmodi rectas esse aequales et parallelas*; et hinc etiam *quasvis duas rectas eidem tertiae parallelas inter se quoque parallelas esse.*

1. Nempe quoad primum (Fig. 200.): si bb′ = cc′, erit bcc′b′ rectangulum, atque in motu circa bc describent b′ et c′ circulos radiis æqualibus bb′ et cc′ (in planis P et Q); atque tangentes circulorum horum in plana P et Q cadent, et recta b′c′ ad tangentem in b′ circuli radio bb′ in P scripti, et pariter ad tangentem in c′ radio cc′ in Q scripti perpendicularis est: nam bcc′b′ sive antrorsum sive retrorsum moveatur circa bc, generationes æquales sunt (Tom. I. pag. 12); est igitur b′c′ tam in P quam in Q ad duas rectas perpendicularis, consequenter tam ad P quam ad Q perpendicularis.

·3111112. E punctis b, c, . . . rectæ A in plano aliquo sint perpendiculares B, C, . . ., moveaturque schema circa A; viæ rectarum B, C, . . . erunt ***plana parallela*** P, Q, . . .

·311112. *Plures motus circa axem*: sint in plano P ad rectas A, B, se mutuo in p secantes, rectæ α, β, ex p perpendiculares; vertaturque α circa A, et β circa B; via prioris secare viam posterioris debet, atque ibidem est perpendicularis ad P.

Potest vero quævis recta ad planum P vel Q perpendicularis per $\mathfrak{bc}$ aut $\mathfrak{b'c'}$ repræsentari: nam quodvis punctum alterutrius (ex. gr. plani P) aliquod punctum rectæ $\overline{\mathfrak{bb'}}$ est, itaque per $\mathfrak{b'}$ repræsentari potest; ex $\mathfrak{b'}$ autem ad P nonnisi unica perpendicularis ad P datur; eratque hæc $\mathfrak{b'c'}$, atque eadem ad planum Q perpendicularis est.

2. Quoad secundum. Si duæ eiusmodi rectæ $\mathfrak{b'c'}$ et $\mathfrak{b''c''}$ in planis parallelis P et Q terminatæ ad utrumque perpendiculares fuerint: erit (pro $\mathfrak{b'}$ et $\mathfrak{b''}$ in P, et $\mathfrak{c'}$ et $\mathfrak{c''}$ in Q sitis) tam recta $\mathfrak{b'c'}$ quam $\mathfrak{b''c''}$ perpendicularis tam ad rectam $\mathfrak{b'b''}$ quam ad rectam $\mathfrak{c'c''}$; consequenter quadrilaterum rectilineum $\mathfrak{b'b''c''c'}$ erit rectangulum, adeoque $\mathfrak{b'c'} \parallel$ et $= \mathfrak{b''c''}$.

3. Unde etiam sequitur, quod si (Fig. 201.) rectæ E, F eidem rectæ A parallelæ fuerint, inter se quoque parallelæ erunt. Nam sint e punctis $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$ ipsius A ad rectas E, F perpendiculares $\mathfrak{bb'}$, $\mathfrak{cc'}$ et $\mathfrak{bb''}$, $\mathfrak{cc''}$; erit $\mathfrak{b'c'} = \mathfrak{bc} = \mathfrak{b''c''}$; moveatur circa A schema ut prius: manifesto erunt rectæ $\mathfrak{b'c'}$, $\mathfrak{b''c''}$ ad plana parallela per rectas $\mathfrak{bb'}$, $\mathfrak{cc'}$ descripta perpendiculares; adeoque (per præcedentia) erunt E et F parallelæ.

Atque hinc etiam patet *e quovis puncto* $\mathfrak{p}$ *extra planum* P *sito dari rectam ad* P *perpendicularem*. Nam sit (Fig. 202.) e quovis puncto $\mathfrak{a}$ plani P recta α ad P perpendicularis, sitque $\mathfrak{pf}$ ad α e puncto $\mathfrak{f}$ ipsius α perpendicularis, atque in plano $\mathfrak{afp}$, quod propter punctum $\mathfrak{a}$ commune secat planum P in recta $\mathfrak{ab}$, accipiatur in hac sectione utriusque plani recta $\mathfrak{ab} = \mathfrak{fp}$; et concipiatur moveri $\mathfrak{pfab}$ circa $\mathfrak{af}$: fient duo plana parallela, et recta $\mathfrak{pb}$ perpendicularis ad P.

·31121.

De angulo duorum planorum quoque dictum (pag. 40) est: unde etiam ibidem patet dari e quavis recta imo e quovis puncto plani P planum perpendiculare ad P.

·3112. *Motus planorum circa axem.*

·31121. *Motus unus*: planum, circa rectam quamvis in eo sitam motum producit angulum duorum planorum.

Sed demonstrantur ibidem sequentia: *Quodvis planum Q, in quod recta perpendicularis ad planum P cadit, est perpendiculare ad P; et si sectio planorum P et Q sit* $\overline{\mathfrak{ab}}$, *perpendicularis ad P e quolibet puncto rectae* $\mathfrak{ab}$ *in Q cadit; item quaevis perpendicularis ad* $\overline{\mathfrak{ab}}$ in *Q cadens est perpendicularis ad planum P* (pagg. 40 &c).

Si vero *praeter planum Q etiam planum q sit perpendiculare ad P, atque Q et q secent se invicem, sectio planorum Q et q erit recta ad planum P perpendicularis* (pag. 42).

Quod *anguli planorum se invicem secantium verticales aequales sint* &c, vide (pagg. 40 &c).

·311221.

Sit (Fig. 203.) $\mathfrak{c}$ punctum commune, concipiaturque facies plani $\mathfrak{abcde}$ superior alba, inferior nigra; moveaturque prius planum $\mathfrak{bcde}$ circa $\mathfrak{bc}$, ita ut facies alba ipsius $\mathfrak{cbde}$ faciei albæ ipsius $\mathfrak{acb}$ obvertatur, et tum moveatur planum $\mathfrak{cde}$ circa $\mathfrak{cd}$, ita ut si prius alba facies albæ obvertebatur, et nunc alba ipsius $\mathfrak{cde}$ facies albae ipsius $\mathfrak{cdb}$ faciei obvertatur: si per planum altera vice motum secetur $\mathfrak{abc}$ (cadente ex. gr. $\mathfrak{ce}$ in $\mathfrak{ca}$), orietur *angulus solidus rectilineus* per tria latera nempe sectores $\mathfrak{acb}$, $\mathfrak{cbd}$, $\mathfrak{cde}$ ad apicem communem clausus, quorum summa manifesto est minor quatuor rectis.

Patet etiam $\mathfrak{cfe}$ circa $\mathfrak{cf}$ moveri, motumque quoties libuerit continuari posse: ut angulus solidus numero laterum quolibet claudatur. Poterit conditio esse, ut facies nigra nigræ obviam semper eat, aut hæc conditio tolli.

·31122. *Plures motus plani circa axem.*

·311221. Cuiusvis motus axi punctum idem $\mathfrak{p}$ commune: nempe intelligantur omnia in eadem spatii e plano P plaga (ex. gr. superiore), sitque motus plani cuiusvis angulus $< 2R$, denotante R rectum; moveaturque sub hac conditione planum P circa rectam $\mathfrak{pa}$ in eo sitam; atque e quovis loco, unde libuerit, moveatur item circa aliquam rectam ipsiusdem per $\mathfrak{p}$ euntem, continuando donec libuerit; orietur *angulus solidus rectilineus.* Poterit ea quoque determinatio accedere, ut P semper versus faciem illam moveatur, quæ inferior erat.

Notandum autem est *numerum laterum anguli solidi rectilinei ad apicem communem clausi minimum esse tres*, et latera talia esse, ut *summa quorumvis binorum* (ut in triangulo) *maior tertio sit.* Nam si (Fig. 204.) arcus $\mathfrak{ba}=\mathfrak{ba}'$ et $\mathfrak{da}'=\mathfrak{de}$: moveatur $\mathfrak{abc}$ circa $\mathfrak{bc}$, donec $\mathfrak{ca}$ in $\mathfrak{ca}'$ cadat, et moveatur $\mathfrak{dce}$ circa $\mathfrak{cd}$, donec $\mathfrak{ce}$ in $\mathfrak{ca}'$ cadat; atque tum moveatur retrorsum $\mathfrak{abc}$ circa $\mathfrak{cb}$, et $\mathfrak{dce}$ circa $\mathfrak{cd}$; describent puncta $\mathfrak{a}$ et $\mathfrak{e}$ circulos in superficie sphæræ; sit enim $\mathfrak{a}\mathfrak{A}\perp\mathfrak{cb}$, et manifesto describet in motu dicto $\mathfrak{Aa}$ planum et $\mathfrak{a}$ circulum, qui omnino in superficie sphæræ erit, manente nempe centro $\mathfrak{c}$ et radio $\mathfrak{ca}$. Duo hi circuli autem si præter punctum $\mathfrak{a}$ adhuc aliquid commune haberent supra planum $\mathfrak{cbd}$, fieret id etiam inferius; adeoque duo circuli se invicem in pluribus quam duobus punctis secarent. Hoc autem fieri nequit, etsi circuli non in idem planum cadant: sint enim puncta $\mathfrak{p}$, $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{q}$ circulo utrique C et c communia; ea non in recta sunt, adeoque planum idem circuli utriusque determinant; ibi vero duo circuli tria puncta communia habere nequeunt.

Atque manifesto si summa arcuum $\mathfrak{ab}$ et $\mathfrak{de}$ sit arcu $\mathfrak{bd}$ minor, ex. gr. sit arcus $\mathfrak{ab}=\mathfrak{ba}'$ et arcus $\mathfrak{de}=\mathfrak{de}'$, et sint ex $\mathfrak{e}$ ad $\mathfrak{cd}$, et ex $\mathfrak{a}$ ad $\mathfrak{cb}$ perpendiculares $\mathfrak{e}\mathfrak{E}$ et $\mathfrak{a}\mathfrak{A}$: circuli centrorum $\mathfrak{A}$ et $\mathfrak{E}$ radiis $\mathfrak{Aa}$ et $\mathfrak{Ee}$ secare se invicem prorsus nequeunt. Nam si circuli priores se invicem nonnisi in $\mathfrak{a}'$ secabant, circulus centri $\mathfrak{E}$ radii $\mathfrak{e}\mathfrak{E}$ nihil cum circulo centri $\mathfrak{A}$ radii $\mathfrak{Aa}'$ commune habebit; namque circulus in superficie sphæræ circa centrum $\mathfrak{d}$ per punctum $\mathfrak{e}$ scriptus, totus intra circulum centri eiusdem per punctum $\mathfrak{a}'$ scriptum manet.

Quod nempe via talis in superficie sphæræ circulus sit, patet e prius dictis, ubi $\mathfrak{a}\mathfrak{A}$ perpendicularis ad $\mathfrak{cb}$ mota planum, et $\mathfrak{a}$ circulum plano sphæræque communem generat.

Sunt igitur in angulo solido rectilineo trilatero quævis bina latera simul sumta tertio maiora. Atque hinc patet etiam, *quodvis triangulum sphaericum*, nempe figuram in superficie sphæræ e tribus arcubus circuli maximi compositam, *talem esse, ut summa quorumvis binorum laterum tertio maior sit*: secus enim anguli solidi dicti bina quædam latera tertio maiora non essent. Unde et via minima inter duo puncta superficiei sphæricæ in circulo maximo est.

Est quoque angulus solidus rectilineus dictus *per tria latera forma absolute determinata*, uti triangulum rectilineum per tria latera; et *idem de triangulo sphaerico* patet. Nam si (Fig. 205.) c in centrum sphæræ ponatur, et c in c manente, e in a cadat, trianguli apex d cadet aut supra aut infra planum acb, neque vero ullum aliud tale punctum d' in eadem plaga (ex. gr. supra planum) datur; quia tum duo circuli extremitate d perpendicularium ex d ad $\widetilde{ac}$ et $\widetilde{bc}$ missarum, circa has motarum, descripti se invicem supra planum in duobus, adeoque et infra illud in duobus secarent.

Manifesto quoque forma determinata generatur, etiamsi novus angulus solidus rectilineus trium laterum, ad eundem apicem, priori ita iungatur, ut nonnisi unum latus (nempe unus sector) utrique commune sit; idemque compositione plurium eiusmodi angulorum continuari posse patet, eodemque ordine iuxta se invicem positis eiusmodi angulis, formam determinatam, eidem semper æqualem, generari.

·31122211.

Planum R, plana parallela P, Q secans, alternos angulos et externum interno oppositum aequales, atque summam duorum internorum duobus rectis aequalem facit (Fig. 206.).

Fiat enim e puncto quopiam p plani P perpendicularis pp' ad planum R, perpendicularis pq ad planum Q, atque ponatur per pqp' pla-

·311222. Plures motus circa axem, absque puncto axium communi;

·3112221. Nonnisi planorum.

·31122211. Moto planorum (in ·3111112) parallelorum P, Q, uno circa quamvis rectam in eo sitam, donec ad alterum perveniat: novo hoc plani loco R dicto, *anguli* ab R cum P et Q facti *alterni* comparantur.

·31122212. Moto R circa rectam quamvis α per P et Q euntem: novo plani loco S dicto, quæruntur sectiones cum P et Q formæ ex R et S constantis.

·31122213. Moto S quoque circa quamvis rectam β per P et Q euntem: novo plani loco T dicto, quæruntur sectiones cum P et Q formæ ex R, S, T compositæ; tam pro casu si $\alpha \parallel \beta$, quam si non.

·3112222. Planorum cum rectis.

num A; erit A tam ad P quam ad Q imo et ad R perpendiculare; nam $\mathfrak{pq}$ est tam ad P quam ad Q perpendicularis, adeoque planum per $\mathfrak{pq}$ positum est perpendiculare ad P et Q (pag. 222), ita planum per $\mathfrak{pp}'$ positum est perpendiculare ad R.

Sint porro sectiones plani A cum planis P, Q, R rectæ $\mathfrak{pi}'$, $\mathfrak{qr}'$, $\mathfrak{ip}'\mathfrak{r}$; erunt anguli $\mathfrak{i}'\mathfrak{pq}$ et $\mathfrak{r}'\mathfrak{qp}$ recti, atque parallelæ $\mathfrak{pi}'$, $\mathfrak{qr}'$ (in quibus secat planum A plana parallela P, Q) cum recta per $\mathfrak{p}'$ planis A et R communi in eodem plano A sunt. Est autem summa internorum, quos rectæ $\mathfrak{p}'\mathfrak{i}$ et $\mathfrak{pi}'$ ad $\mathfrak{pp}'$ faciunt, ita summa internorum, quos rectæ $\mathfrak{p}'\mathfrak{r}$ et $\mathfrak{qr}$ ad rectam $\mathfrak{p}'\mathfrak{q}$ faciunt, duobus rectis minor. Consequenter $\mathfrak{pi}'$ et $\mathfrak{qr}'$ per $\mathfrak{ir}$ secantur; fiat hoc in $\mathfrak{i}''$ et $\mathfrak{r}''$. Unde assertum patet, quum angulorum, qui planorum parallelorum P et Q per tertium facta sectione generantur, quantitates eædem sint, quæ rectarum $\mathfrak{pi}'$ $\mathfrak{qr}'$ parallelarum per tertiam sectarum. Idem vero eodem modo patet, si $\mathfrak{p}'$ supra vel infra plana P et Q cadat.

'31122212.

Sectiones planorum R et S cum planis parallelis P et Q non solum sibi invicem parallelae sunt, sed etiam angulos aequales faciunt. (Fig. 207.). Sint enim planorum R et S cum P sectiones $\mathfrak{ab}$, $\mathfrak{ac}$ adeoque sit $\triangle\, \mathfrak{bac}$, et cum plano Q sectiones $\mathfrak{AB}$, $\mathfrak{AC}$ adeoque sit $\triangle\, \mathfrak{ABC}$; fiantque $\mathfrak{ab}$, $\mathfrak{ac}$, $\mathfrak{AB}$, $\mathfrak{AC}$ æquales; erunt $\mathfrak{ab} \parallel \mathfrak{AB}$, $\mathfrak{ac} \parallel \mathfrak{AC}$, atque $\mathfrak{AabB}$ et $\mathfrak{AacC}$ parallelogramma (pag. 68); itaque $\mathfrak{cC}$ et $\mathfrak{bB}$, eidem $\mathfrak{aA}$ parallelæ et æquales, erunt inter se quoque parallelæ et æquales. Consequenter $\mathfrak{cbBC}$ erit parallelogrammum (pag. 68); adeoque $\mathfrak{cb} = \mathfrak{CB}$; et per consequens $\triangle\, \mathfrak{cab} = \triangle\, \mathfrak{CAB}$ (per tria latera); itaque et $\wedge \mathfrak{cab} = \wedge \mathfrak{CAB}$, et anguli ad basim $\mathfrak{cb}$ angulis ad basim $\mathfrak{CB}$ æquales sunt.

Atque hoc continuari posse patet, si ut in numero

'31122213

etiam planum T, imo plura quotvis accedant. Si vero ibidem $\alpha \parallel \beta$ fuerit, sectio in P sectioni in Q æqualis erit; nempe non solum anguli sibi invicem respondentes æquales, (quod etiamsi α non $\parallel \beta$, semper est), sed et latera sibi invicem respondentia æqualia erunt: considerentur enimvero duæ ejusmodi parallelæ uti α et β sunt; sit $\mathfrak{a}$ extremitas in P cadens ipsius α, et extremitas in Q sit $\mathfrak{a}'$, extremitas in P ipsius β sit $\mathfrak{b}$, et $\mathfrak{b}'$ in Q; erit recta $\mathfrak{ab}$ in plano P rectæ $\mathfrak{a}'\mathfrak{b}'$ in Q parallela; quia in planum parallelarum α et β cadunt, et sectiones per hoc factæ planorum parallelorum P et Q sunt; itaque latera sibi invicem respondentia quoque nempe latera opposita parallelogrammi sunt æqualia.

·31122221.

Cum planis parallelis P, Q non solum planum tertium secans, sed et recta cum alterutro ipsorum P, Q aliquid commune habens, in neutrum incidens, angulos alternos aequales, pariterque externum interno opposito aequalem, et summam duorum internorum duobus rectis aequalem facit.

Si enim (Fig. 208.) ex puncto $\mathfrak{p}$ ipsius P ad quodvis punctum $\mathfrak{q}$ vel $\mathfrak{q}'$ recta concipiatur, fiant e punctis $\mathfrak{p}$, $\mathfrak{q}$ (vel $\mathfrak{q}'$) perpendiculares $\mathfrak{p}\mathfrak{P}$, $\mathfrak{q}\mathfrak{Q}$ (vel $\mathfrak{q}'\mathfrak{Q}$) ad Q; erunt hæ etiam ad P perpendiculares, atque $\mathfrak{p}\mathfrak{P}\mathfrak{Q}\mathfrak{r}$ rectangulum erit; unde propter summam duorum internorum, (quos ad $\mathfrak{p}\mathfrak{P}$ faciunt $\mathfrak{P}\mathfrak{Q}$ et $\mathfrak{pq}$, vel $\mathfrak{P}\mathfrak{Q}$ et $\mathfrak{q}'\mathfrak{p}$ producta), duobus rectis minorem, secabitur recta $\widetilde{\mathfrak{P}\mathfrak{Q}}$, adeoque planum Q; transibitque recta $\mathfrak{pq}$ (vel $\mathfrak{pq}'$) per utraque plana parallela P et Q.

Fiant hi transitus in $\mathfrak{p}$ et $\mathfrak{k}$ (Fig. 209.), fiatque e puncto $\mathfrak{d}$ rectæ $\overline{\mathfrak{kp}}$ perpendicularis $\mathfrak{de}$ ad Q; erit hæc perpendicularis ad planum P quoque, necnon ad sectiones $\mathfrak{ip}$, $\mathfrak{ek}$ planorum parallelorum P, Q per planum $\mathfrak{dek}$ factas; suntque $\mathfrak{ip}$, $\mathfrak{ek}$ parallelæ per $\mathfrak{dk}$ sectæ, atque anguli $\mathfrak{ipd}$, $\mathfrak{ekd}$ plane anguli rectæ $\mathfrak{dk}$, quos cum planis P et Q efficit.

Scholion 1. Sunt autem etiam *anguli, quos rectae parallelae* $\mathfrak{ac}$, $\mathfrak{bk}$ *per planum P sectae* (in $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$) *cum plano eodem faciunt, aequales.*

·31122221. Rectæ, quæ e quovis plani P puncto est ad quodvis punctum plani Q ad P paralleli, anguli alterni &c, quos cum P et Q facit, comparantur.

Sint enim (Fig. 210.) rectæ parallelæ $\mathfrak{ac}$ et $\mathfrak{bf}$ in plano tabulæ, quod dicatur Q: erit recta $\mathfrak{ab}$ planis P et Q communis, utcunque vertatur P circa $\mathfrak{ab}$. Erigantur ex $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$ perpendiculares $\mathfrak{ac}'$, $\mathfrak{bf}'$ ad $\mathfrak{ab}$ in Q, et ex iisdem punctis $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$ ad eandem rectam $\mathfrak{ab}$ perpendiculares $\mathfrak{aa}'$, $\mathfrak{bb}'$ in P, et perpendiculares $\mathfrak{aa}''$, $\mathfrak{bb}''$ ad P. Angulus rectæ $\mathfrak{ac}$ cum plano P est is, quem $\mathfrak{ac}$ cum sectione plani illius p facit, in quod $\mathfrak{ac}$ et perpendicularis ex $\mathfrak{c}$ ad planum P cadunt; atque hoc planum idem cum eo est, in quod $\mathfrak{ac}$ cum perpendiculari ex $\mathfrak{a}$ ad planum P erecta cadit; nam duæ hæ perpendiculares ad idem planum P, sunt parallelæ, in quarum alteram cadit $\mathfrak{a}$, et $\mathfrak{c}$ in alteram.

Si Q circa $\mathfrak{ab}$ moveatur, donec $\wedge \mathfrak{c}'\mathfrak{aa}'$ (consequenter etiam $\mathfrak{f}'\mathfrak{bb}'$) rectus sit, $\mathfrak{ac}'$ cum $\mathfrak{aa}''$, et $\mathfrak{bf}'$ cum $\mathfrak{bb}''$ coincidet; secat autem planum per $\mathfrak{aa}''$ et $\mathfrak{ac}$, cum plano P punctum $\mathfrak{a}$ commune habens, ipsum P in recta quapiam $\mathfrak{aa}'''$ per $\mathfrak{a}$ eunte; atque angulus, quem recta ista ad verticem $\mathfrak{a}$ cum recta $\mathfrak{ac}$ facit, est quantitas anguli rectæ $\mathfrak{ac}$ cum plano P.

Evidens autem est, totum schema in se moveri posse, recta $\overline{\mathfrak{ab}}$ in se, P in se, Q in se manentibus, donec $\mathfrak{a}$ in $\mathfrak{b}$ veniat; atque tum $\mathfrak{ac}'$ in $\mathfrak{bf}'$, $\mathfrak{ac}$ in $\mathfrak{bf}$ venire; et propter generationes æquales angulum rectæ $\mathfrak{bf}$ cum plano P æqualem priori produci.

Scholion 2. Manifesto quoque $\mathfrak{aa}'''$ cum $\mathfrak{ab}$ in plano P angulum α illi æqualem facit, quem $\mathfrak{bb}'''$ cum recta $\mathfrak{ab}$ ultra $\mathfrak{b}$ continuata facit: consequenter $\mathfrak{aa}''' \parallel \mathfrak{bb}'''$; nempe *rectae ex* $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, *in quibus parallelae* $\mathfrak{ac}$, $\mathfrak{bf}$ *planum P secant, ad puncta, in quae perpendiculares ad P ex* $\mathfrak{c}$ *et* $\mathfrak{f}$ *cadunt, ductae sunt parallelae.*

Scholion 3. *Si* (Fig. 211.) *in plano Q sit* $\mathfrak{AB} \parallel \mathfrak{A}'\mathfrak{B}'$ *et* $\mathfrak{AC} \parallel \mathfrak{A}'\mathfrak{C}'$, *atque supra Q sint talia puncta* $\mathfrak{a}$ *et* $\mathfrak{a}'$, *ut* $\mathfrak{Aa}$ *cum* $\mathfrak{AB}$ *ita* $\mathfrak{A}'\mathfrak{a}'$ *cum* $\mathfrak{A}'\mathfrak{B}'$ *faciant angulum v, et* $\mathfrak{Aa}$ *cum* $\mathfrak{AC}$ *ita* $\mathfrak{A}'\mathfrak{a}'$ *cum* $\mathfrak{A}'\mathfrak{C}'$ *faciant angulum q* (quovis seorsim intellecto): *erit tum* $\mathfrak{Aa}$ *ipsi* $\mathfrak{A}'\mathfrak{a}'$ *parallela.*

Nam orientur hoc pacto anguli solidi ad apices $\mathfrak{A}$ et $\mathfrak{A}'$ triangulares, qui $\mathfrak{A}'$ in $\mathfrak{A}$, et $\mathfrak{A}'\mathfrak{C}'$ in $\mathfrak{AC}$ atque $\mathfrak{A}'\mathfrak{B}'$ in $\mathfrak{AB}$ cadentibus super Q congruunt, angulo $\mathfrak{C}'\mathfrak{A}'\mathfrak{a}'$ in $\mathfrak{CAa}$, et angulo $\mathfrak{B}'\mathfrak{A}'\mathfrak{a}'$ in $\mathfrak{BAa}$ cadentibus. Demissis igitur ex $\mathfrak{a}$ et $\mathfrak{a}'$ ad planum Q, in quod bases $\mathfrak{ABC}$, $\mathfrak{A}'\mathfrak{B}'\mathfrak{C}'$ angulorum cadunt, perpendicularibus $\mathfrak{aK}$, $\mathfrak{a}'\mathfrak{K}'$: manifesto erunt anguli $\mathfrak{CAK}$

et $\mathfrak{C}'\mathfrak{A}'\mathfrak{K}'$, atque $\mathfrak{a}\mathfrak{A}\mathfrak{K}$ et $\mathfrak{a}'\mathfrak{A}'\mathfrak{K}'$ æquales; adeoque propter $\mathfrak{A}\mathfrak{C} \parallel \mathfrak{A}'\mathfrak{C}'$ erit quoque $\mathfrak{A}\mathfrak{K} \parallel \mathfrak{A}'\mathfrak{K}'$.

Plana $\mathfrak{A}\mathfrak{a}\mathfrak{K}$ et $\mathfrak{A}'\mathfrak{a}'\mathfrak{K}'$ (perpendiculares ad planum Q complectentia) autem sunt ad Q perpendicularia, et præterea de parallelis $\mathfrak{A}\mathfrak{K}$, $\mathfrak{A}'\mathfrak{K}'$ erecta; adeoque parallela sunt, secanturque per plana Q (nempe $\mathfrak{K}\mathfrak{A}\mathfrak{A}'\mathfrak{K}'$) et $\mathfrak{a}\mathfrak{A}\mathfrak{A}'$ se invicem in $\mathfrak{A}\mathfrak{A}'$ secantia: et erunt sectiones angulares æquales, nempe sectio per planum $\mathfrak{a}\mathfrak{A}\mathfrak{A}'$ in plano $\mathfrak{a}'\mathfrak{A}'\mathfrak{K}'$ facta cum $\mathfrak{A}'\mathfrak{K}'$ angulum ipsi $\mathfrak{a}\mathfrak{A}\mathfrak{K}$ æqualem efficit, sectio autem alia præter $\mathfrak{A}'\mathfrak{a}'$ esse nequit. Consequenter $\mathfrak{A}\mathfrak{a}$ et $\mathfrak{A}'\mathfrak{a}'$ in idem planum cadunt, suntque sectiones eiusdem cum duobus planis parallelis, adeoque parallelæ.

Scholion 4. (Fig. 212.). *Si plana parallela P et Q per rectas parallelas* $\mathfrak{p}\mathfrak{q}$, $\mathfrak{p}'\mathfrak{q}'$ *secentur, et* $\mathfrak{p}$, $\mathfrak{p}'$ *in P atque* $\mathfrak{q}$, $\mathfrak{q}'$ *in Q fuerint: erit* $\mathfrak{p}\mathfrak{q} = \mathfrak{p}'\mathfrak{q}'$. Nam ex $\mathfrak{p}$, $\mathfrak{p}'$ fiant $\mathfrak{p}\mathfrak{b}$, $\mathfrak{p}'\mathfrak{b}'$ perpendiculares ad Q, orientur (nisi $\mathfrak{p}\mathfrak{q}$ adeoque $\mathfrak{p}'\mathfrak{q}'$ perpendiculares sint) triangula $\mathfrak{p}\mathfrak{q}\mathfrak{b}$ et $\mathfrak{p}'\mathfrak{q}'\mathfrak{b}'$ æqualia; quia $\mathfrak{p}\mathfrak{b} = \mathfrak{p}'\mathfrak{b}'$, anguli $\mathfrak{p}\mathfrak{q}\mathfrak{b}$, $\mathfrak{p}'\mathfrak{q}'\mathfrak{b}'$ sunt rectarum $\mathfrak{p}\mathfrak{q}$, $\mathfrak{p}'\mathfrak{q}'$ anguli cum plano Q, adeoque æquales, atque et rectus æqualis recto. Manifesto etiam fit $\mathfrak{p}\mathfrak{q}\mathfrak{q}'\mathfrak{p}'$ parallelogrammum, quum $\mathfrak{p}\mathfrak{q} \parallel$ et $= \mathfrak{p}'\mathfrak{q}'$.

Scholion 5. *Si plana parallela P et Q per planum R secentur, et sectio planorum P et R sit recta* $\mathfrak{p}\mathfrak{i}$, *planorum Q et R autem sectio sit* $\mathfrak{q}\mathfrak{r}$: *quodcunque planum p ponatur per* $\mathfrak{p}$ *ad Q parallele, sectio planorum p et R eadem cum* $\mathfrak{p}\mathfrak{i}$ *erit.* Nam per $\mathfrak{p}$ nonnisi unum planum ad Q parallelum datur; sed inde quoque patet, quod si sectio $\mathfrak{p}\mathfrak{f}$ planorum p et R diversa a $\mathfrak{p}\mathfrak{i}$ esset, in plano R per punctum $\mathfrak{p}$ ad rectam $\mathfrak{q}\mathfrak{r}$ duæ diversæ parallelæ darentur.

·31122222.

Hoc numero in calce expositæ constructionis resultatum, ibidem *prisma rectilineum* dicitur; quod si pro $\mathfrak{A}\mathfrak{B}\mathfrak{C}\ldots$ nonnisi $\mathfrak{A}\mathfrak{B}\mathfrak{C}$ fuerit,

·31122222. Si in plano P fuerit figura rectilinea $\mathfrak{A}\mathfrak{B}\mathfrak{C}\ldots$, et quodvis punctum $\mathfrak{a}$ fuerit supra planum (omnibus supra planum acceptis); vertatur P circa $\mathfrak{A}\mathfrak{B}$ donec recta $\mathfrak{A}\mathfrak{a}$ incidat, fiatque $\mathfrak{B}\mathfrak{b} \parallel$ et $= \mathfrak{A}\mathfrak{a}$, et tum vertatur planum item prius P circa $\mathfrak{B}\mathfrak{C}$ donec recta $\mathfrak{B}\mathfrak{b}$ incidat, fiatque $\mathfrak{C}\mathfrak{c} \parallel$ et $= \mathfrak{B}\mathfrak{b}$: atque hoc *triangulare*, si 𝔄𝔅ℭ𝔇 parallelogrammum sit, *parallelepipedum* & audit. Dicitur vero *prisma rectum*, si 𝔄𝔞 ad basim 𝔄𝔅ℭ . . . perpendicularis sit, secus *obliquum* audit.

Scholion. Datur autem (pag. 17 &) conceptus prismatis generalior; et si ex omnibus punctis cuiusvis continuæ portionis plani rectæ concipiantur (in eadem plaga) eidem cuipiam rectæ parallelæ et æquales: complexus omnium illarum rectarum *prisma* est. Interim hic de prismate tali, quod geometrice (sensu lato) construi potest et sub numerum ˙31122222 cadit, prius sermo est, inferius sub numero ˙3121 cylinder pariter (sensu lato) geometrice constructum prisma erit.

§. 1.

1. In constructione prismatis rectilinei, cuius portio plani a figura rectilinea 𝔄𝔅ℭ . . . clausa *basis* dicitur, oriuntur præter 𝔄𝔅ℭ . . . et 𝔞𝔟𝔠 . . . tot latera, quot latera ipsius 𝔄𝔅ℭ . . . sunt: nempe ex. gr. ipsius 𝔄𝔅ℭ𝔇𝔄 latera 𝔄𝔅, 𝔅ℭ, ℭ𝔇, 𝔇𝔄 producent parallelogramma 𝔄𝔅𝔟𝔞, 𝔅ℭ𝔠𝔟, ℭ𝔇𝔡𝔠, 𝔇𝔄𝔞𝔡. Præterea vero 𝔞𝔟𝔠 . . . erit in plano per 𝔞 ad planum, in quo 𝔄𝔅ℭ . . . est, parallelo, eritque ipsi 𝔄𝔅ℭ . . . congruenter æqualis.

2. Si planum q ex Q ipsi Q parallele moveatur in illa plaga, in qua prisma est, ubicunque sectio eius cum prismate ipsi 𝔄𝔅ℭ . . . congruenter æqualis erit, et prisma prius in duo prismata dividit.

3. Si punctum quodvis 𝔓 ipsius 𝔄𝔅ℭ . . . (sive in perimetrum sive intus cadat) et punctum 𝔭, in quo planum 𝔞𝔟𝔠 . . . per parallelam ex 𝔓 ad 𝔄𝔞 erectam secatur, *sibi invicem respondentia* dicantur: erunt hæc plane ea, quæ 𝔄 in 𝔞, 𝔅 in 𝔟, ℭ in 𝔠 & cadentibus congruent, et quæcunque portio continua b plani perimetro 𝔄𝔅ℭ . . . clausi fuerit, complexus rectarum ex omnibus portionis illius punctis usque ad puncta illis respondentia *prisma* basi b insistens erit, atque in prius cadet; et quæ-

continuetur usque ad ultimum latus; ac demum moveatur planum 𝔞𝔟𝔄𝔅 circa 𝔞𝔟, donec 𝔠 incidat: nascetur *parallelepipedum*, si 𝔄𝔅ℭ𝔇 parallelogrammum fuerit, in genere vero *prisma rectilineum*.

cunque figuræ planæ $\mathfrak{ABC}\ldots$ et $\mathfrak{A'B'C'}\ldots$ fuerint in plano tales, ut recta $\mathfrak{AB}$ sit $\parallel \mathfrak{A'B'}$, et puncto $\mathfrak{A}'$ in recta $\mathfrak{AA}'$ usque in $\mathfrak{A}$ moto, rectam $\mathfrak{A'B'}$ ad $\mathfrak{AB}$ parallele ferendo (simul cum figura $\mathfrak{A'B'C'}\ldots$), $\mathfrak{A}'$ in $\mathfrak{A}$ veniente congruant: prismata per complexum rectarum ex omnibus figuræ $\mathfrak{ABC}\ldots$, item ex omnibus figuræ $\mathfrak{A'B'C'}\ldots$ punctis eidem rectæ $\mathfrak{Aa}$ parallelarum et æqualium, generata congruibilia sunt. Generale hoc tamen, hic ad figuras rectilineas restringitur.

I. Quod primum attinet: ponatur per $\mathfrak{a}$ planum p ad planum Q, in quo $\mathfrak{ABC}\ldots$ est, parallelum, seceturque hoc per planum $\mathfrak{abBA}$ in recta $\mathfrak{ab}'$; erit $\mathfrak{b}'$ et $\mathfrak{b}$ idem. Nam $\mathfrak{ab} \parallel$ et $= \mathfrak{AB}$, quia $\mathfrak{Aa} \parallel$ et $= \mathfrak{Bb}$; itaque $\overline{\mathfrak{ab}'}$ et $\overline{\mathfrak{ab}}$ coincidunt, quia per $\mathfrak{a}$ ipsi $\mathfrak{AB}$ nonnisi una parallela datur. Est vero $\mathfrak{abBA}$ parallelogrammum, quod pariter de $\mathfrak{bcCB}$, et porro de omnibus patet; sed quum de $\mathfrak{b}$ idem quod de $\mathfrak{a}$ dictum est valeat, cadet etiam $\mathfrak{bc}$ in planum p; atque eadem ad $\mathfrak{c}$, $\mathfrak{d}$, ... applicando, $\mathfrak{abc}\ldots$ in planum p per punctum $\mathfrak{a}$ ad planum Q parallelum cadet.

II. Quod alterum attinet: sit plani q cum plano $\mathfrak{ABba}$ sectio $\mathfrak{a'b'}$, ita $\mathfrak{b'c'}$ sectio item plani q cum $\mathfrak{BCcb}$, et ita porro; dari has sectiones patet, si q per rectam $\mathfrak{Aa}$ feratur; secabit enim quamvis ipsi $\mathfrak{Aa}$ parallelam; eritque $\mathfrak{a'b'} \parallel$ et $= \mathfrak{AB}$, $\mathfrak{b'c'} \parallel$ et $= \mathfrak{BC}$ &, item $\wedge \mathfrak{a'b'c'} = \wedge \mathfrak{ABC}$, $\wedge \mathfrak{b'c'd'} = \mathfrak{BCD}$ & (pag. 225). Itaque figura $\mathfrak{a'b'c'}\ldots$ congruere ipsi $\mathfrak{ABC}\ldots$ poterit.

III. Tertium sic patet: quodcunque punctum $\mathfrak{H}'$ fuerit (Fig. 213.), sive in perimetro ipsius $\mathfrak{ABC}\ldots$ sive intus, illi respondens $\mathfrak{h}'$ plane illud erit, in quod caderet $\mathfrak{H}'$ congruentibus $\mathfrak{ABC}\ldots$ et $\mathfrak{abc}\ldots$, cadentibus $\mathfrak{A}$ in $\mathfrak{a}$, et $\mathfrak{B}$ in $\mathfrak{b}$, atque $\mathfrak{C}$ in $\mathfrak{c}$ &. Nam etsi non in perimetrum adeoque intus caderet $\mathfrak{H}'$, poterit recta $\mathfrak{AH}'$ duci et continuari, donec perimeter in $\mathfrak{H}''$ secetur; sit $\mathfrak{H}''$ in perimetri latere $\mathfrak{HJ}$, accipiatur in perimetri $\mathfrak{abc}\ldots$ latere $\mathfrak{hi}$ recta $\mathfrak{hh}'' = \mathfrak{HH}''$. Erit $\mathfrak{HJih}$ parallelogrammum, adeoque et $\mathfrak{HH''h''h}$; quia tum $\mathfrak{HH}'' \parallel$ et $= \mathfrak{hh}''$. Eritque $\mathfrak{H''h''}$ et $\mathfrak{Aa}$ eidem $\mathfrak{Hh} =$ et $\parallel$; itaque $\mathfrak{H''h''} =$ et $\parallel \mathfrak{Aa}$; atque hinc $\mathfrak{Aah''H''}$ parallelogrammum est, atque $\mathfrak{ah}'' \parallel$ et $= \mathfrak{AH}''$. Consequenter si in $\mathfrak{ah}''$ accipiatur $\mathfrak{h''h'} = \mathfrak{H''H'}$, erit $\mathfrak{H''H'h'h''}$ parallelogrammum, atque et $\mathfrak{H'h'}$ ipsi $\mathfrak{Aa}$ parallela; quæ sola ex $\mathfrak{h}'$ ad $\mathfrak{Aa}$ est, nempe e puncto illo ipsius $\mathfrak{abc}\ldots$, quod in $\mathfrak{H}'$ cadit, congruentibus $\mathfrak{ABC}\ldots$ et $\mathfrak{abc}\ldots$, cadentibusque $\mathfrak{A}$ in $\mathfrak{a}$, et $\mathfrak{B}$ in $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{C}$ in $\mathfrak{c}$ &.

Si igitur sive toto $\mathfrak{ABC}\ldots$, sive e quavis figura (nunc rectilinea) $\mathfrak{KLM}\ldots$ in $\mathfrak{ABC}\ldots$ existente, concipiantur rectæ e quovis puncto ad punctum ei respondens, complexus earum erit prisma *inter eadem plana parallela, basi* $\mathfrak{KLM}\ldots$ *iuxta rectam* $\mathfrak{Aa}$ *superstructum*; et quidem si $\mathfrak{KLM}\ldots$ idem cum $\mathfrak{ABC}\ldots$ fuerit, fiet idem cum prismate priore, secus vero pars huius erit. Nam si puncta ipsis $\mathfrak{K}$, $\mathfrak{L}$, $\mathfrak{M}$, ... respondentia $\mathfrak{k}$, $\mathfrak{l}$, $\mathfrak{m}$, ... dicantur: erit $\mathfrak{Kk} \parallel$ et $= \mathfrak{Aa}$, et $\mathfrak{Ll} \parallel$ et $= \mathfrak{Aa}$ &, atque $\mathfrak{KklL}$, $\mathfrak{LlmM}$ & parallelogramma erunt, et antea dicta applicari poterunt.

Evidens etiam est, prisma basi $\mathfrak{ABC}\ldots$ iuxta rectam $\mathfrak{Aa}$ superstructum rectarum e quovis puncto ipsius $\mathfrak{ABC}\ldots$ ad $\mathfrak{Aa}$ parallelarum et æqualium complexum esse: nam recta e quovis puncto ipsius $\mathfrak{ABC}\ldots$ ad $\mathfrak{Aa}$ parallela et eidem æqualis in dictum prisma cadit, nec ullum in dicto prismate punctum $\mathfrak{f}'$ est, quod non in parallelam ad $\mathfrak{Aa}$ ex aliquo ipsius $\mathfrak{ABC}$ puncto in eadem cum reliquis plaga cadat; quia si planum per $\mathfrak{f}'$ ipsi $\mathfrak{ABC}$ parallelum ponatur, sectio plani positi cum prismate erit congruenter æqualis ipsi $\mathfrak{ABC}\ldots$, et $\mathfrak{f}'$ in hac sectione erit, quia in prisma cadit; atque paulo antea dictis applicatis, patet rectam per $\mathfrak{f}'$ ad $\mathfrak{Aa}$ parallelam tam per $\mathfrak{ABC}\ldots$ quam per $\mathfrak{abc}\ldots$ ire.

Quod autem congruentiam prismatum super basibus $\mathfrak{ABC}\ldots$ et $\mathfrak{A'B'C'}\ldots$ congruenter æqualibus (in eodem plano sitis) sub conditione (pag. 230) dicta iuxta eandem rectam $\mathfrak{Aa}$ in eadem plaga exstructis attinet: sint ambo prismata in plaga superiore, et facies ipsius $\mathfrak{ABC}\ldots$ (ac pariter facies ipsius $\mathfrak{A'B'C'}\ldots$) superior dicatur *alba*, inferior *nigra*; facies nigra ipsius $\mathfrak{A'B'C'}\ldots$ faciei albæ in omni casu superimponi poterit, et tum $\mathfrak{A'a'}$ cum $\mathfrak{Aa}$, $\mathfrak{B'b'}$ cum $\mathfrak{Bb}$, & coincident, (extremitates parallelarum ex $\mathfrak{A}'$, $\mathfrak{B}'\ldots$ ad $\mathfrak{Aa}$ ductarum literis accento insignitis denotando); nam $\mathfrak{A'a'}$, facie nigra ipsius $\mathfrak{A'B'C'}$ faciei albæ ipsius $\mathfrak{ABC}\ldots$ superimposita, in plagam eandem cum $\mathfrak{Aa}$ cadit, neque aliorsum cadere potest: quia $\mathfrak{Aa} \parallel \mathfrak{A'a'}$, adeoque cum plano eodem angulos æquales faciunt; atque idem de $\mathfrak{B'b'}$ et reliquis patet. Et facile perspici potest, et inferius prisma super eadem basi iuxta eandem rectam $\mathfrak{Aa}$ generatum priori congruere, si basis inferior sursum moveatur sibi parallele, donec ipsi $\mathfrak{ABC}$ . . . congruat.

§. 2.

At vero superficies prismatis basi $\mathfrak{ABC}$ . . . superstructi, rete e parallelogrammis supra dictis, (quorum unum latus in omnibus æquale est, alterum vero in primo est $\mathfrak{AB}$, in secundo vero $\mathfrak{BC}$ &, atque anguli pro dato angulo rectæ $\mathfrak{Aa}$ cum plano $\mathfrak{ABC}$ computari possunt), adiectis duabus basibus, compositum ultro præbet; e quo si facies superior alba sit in plaga superiore, nonnisi una eadem forma compingi potest; atque idem rete, prouti facies alba aut nigra extrorsum vertetur, formas dare potest, quæ congruere nequeunt, alioquin æquales.

Nimirum si latera anguli solidi sint A, B, . . ., ordine eorum eodem, forma unico modo determinatur, atque idem e fine lateris cuiusvis ulterius progrediendo patet; nec maius vel minus prodire potest, si rete invertatur, ut facies nigra claudatur, et alba extrorsum versa sit; quum nullum aliud duarum generationum per se resultato unico gaudentium discrimen sit, nisi quod altera in altera plaga faciem baseos nigram respiciente suscepta sit.

Possunt tamen hoc pacto formæ tales prodire, quæ congruere nequeunt. Ex. gr. sit (Fig. 214.) prismatis basis $\mathfrak{ABC}$ in plano Q, et sit e $\mathfrak{D}$ meditullio rectæ $\mathfrak{AB}$ ad $\mathfrak{AC}$ parallela $\mathfrak{DD}'$, atque $\mathfrak{CD}'$ sit $\parallel \mathfrak{AB}$, concipiaturque prisma iuxta rectam $\mathfrak{Aa}$ (ut in præcedentibus) plano tabulæ superius insistens; nec sit $\mathfrak{Aa}$, adeoque $\mathfrak{Bb}$ perpendicularis ad $\mathfrak{ABC}$, sed sit ex. gr. $\mathfrak{Bb}$ ad lævam versus $\mathfrak{BD}$ inclinata; evidens post dicta est, quod si prisma rectum esset, atque $\triangle\,\mathfrak{DEB}$ cum prismate super eo exstructo superponeretur triangulo $\mathfrak{D'EC}$, ($\mathfrak{E}$ in se, $\mathfrak{D}$ in $\mathfrak{D}'$ et $\mathfrak{B}$ in $\mathfrak{C}$ cadentibus): oreretur parallelepipedum rectum super basi $\mathfrak{ACD'D}$ exstructum; at si $\mathfrak{Bb}$ inclinet (ex. gr. ad lævam, ut dictum est), et superimponatur $\triangle\,\mathfrak{DBE}$ triangulo $\mathfrak{D'CE}$ (nempe si superior facies alba dicatur, inferior nigra), facies trianguli $\mathfrak{DEB}$ nigra faciei albæ trianguli $\mathfrak{D'EC}$ superponetur; et recta $\mathfrak{Bb}$ in prismate basi $\mathfrak{CED}'$ superposito, ad dextram versus $\mathfrak{CD}'$ inclinata erit; concipiatur nimirum $\mathfrak{DB}$ sursum sibi parallele moveri (triangulum $\mathfrak{DEB}$ ante se ferendo) donec $\mathfrak{D}$ in $\mathfrak{C}$, et $\mathfrak{B}$ in $\mathfrak{D}'$ veniat; cadet recta $\mathfrak{DB}$ in $\mathfrak{CD}'$, sed $\mathfrak{D}$ in $\mathfrak{C}$, et $\mathfrak{B}$ in $\mathfrak{D}'$, atque $\mathfrak{E}$ supra $\mathfrak{CD}'$ erit; at si vertatur $\mathfrak{DB}$ e hoc loco circa meditullium, donec extremitas dimidium circulum describat: cadet $\mathfrak{B}$ in $\mathfrak{C}$, $\mathfrak{D}$ in $\mathfrak{D}'$, $\mathfrak{E}$ in $\mathfrak{E}$, sed $\mathfrak{Bb}$ ad dextram, nempe ad $\mathfrak{CD}'$ inclinabitur; adeoque si triangula dicta nonnisi ista superimpositione congruere queant, prismata super iis tanquam basibus iuxta eandem rectam $\mathfrak{Aa}$ exstructa congruere non poterunt. At vero si rete invertatur, adeoque generetur prisma super basi $\mathfrak{CD'E}$ in plaga inferiore, ut facies alba baseos $\mathfrak{CED}'$ extus maneat superius; sitque recta $\mathfrak{Cc}'$ sectio parallelogrammorum rectis $\mathfrak{CD}'$, $\mathfrak{CE}$ in plaga inferiore insistentium: erit prisma dictum in plaga inferiore, ad basim $\mathfrak{CED}'$ iuxta rectam $\mathfrak{Cc}'$ exstructum, atque $\mathfrak{Cc}'$ cum $\mathfrak{CD}'$ angulum æqualem illi faciet, quem $\mathfrak{Bb}$ cum $\mathfrak{BD}$ faciebat, et angulus ipsius $\mathfrak{Cc}'$ cum $\mathfrak{CE}$ etiam fit æqualis angulo, quem $\mathfrak{Bb}$ cum $\mathfrak{BE}$ faciebat; atque si continuatio rectæ $\mathfrak{Cc}'$ in plaga superiore $\mathfrak{Cc}''$ sit, faciet $\mathfrak{Cc}''$ cum $\mathfrak{CK}$ angulum æqualem illi, quem $\mathfrak{Bb}$ cum $\mathfrak{BD}$ faciebat, et eadem recta $\mathfrak{Cc}''$ faciet cum $\mathfrak{CH}$ angulum æqualem ei, quem $\mathfrak{Bb}$ cum $\mathfrak{BE}$ faciebat; atque hinc (per pag. 227) fiet $\overline{\mathfrak{C}}\mathfrak{c}'' \parallel \mathfrak{Bb}$ et per consequentiam $\overline{\mathfrak{C}}\mathfrak{c}''$ parallela $\mathfrak{Aa}$ est.

Poterit igitur prismatis inferioris basis inferior iuxta rectam $\mathfrak{c}'\mathfrak{C}$ sursum sibi parallele moveri, usquequo in basim superiorem perveniat: atque tum manifesto prisma totum super plano Q erit, triangulo $\mathfrak{CED}'$ iuxta rectam $\mathfrak{Aa}$ superstructum; atque hoc, simul cum prismate basi trapezio $\mathfrak{ADEC}$ superstructo, efficiet parallelepipedum basi $\mathfrak{ADD'C}$ iuxta rectam $\mathfrak{Aa}$ superstructum.

Unde quum rete etiamsi invertatur, corpora æqualia (etsi non semper congruentia) producantur: quodvis prisma triangulare erit parallelepipedo tali æquale, cuius *altitudo* (nempe perpendicularis *e basi superiore ad planum baseos inferioris* superiori parallelum) est eadem, basis vero est parallelogrammum, in quod basis triangularis modo dicto mutata est; inferius patebit idem valere, etsi triangulum in aliud parallelogrammum mutetur.

Scholion. Eodem tantum modo per retis inversionem fiunt et duo illa prismata triangularia æqualia, in quæ parallelepipedum obliquum dispescitur, si basi per diagonalem in duas partes æquales divisa in altera basi diagonalis respondens accipiatur. Erunt nempe duæ diagonales in plano; et plane (in Fig. 214.) tale parallelogrammum $\mathfrak{EFCD}'$ cum diagonali $\mathfrak{CE}$ exhibetur, si $\triangle\,\mathfrak{DEB}$ ad ductum rectæ $\mathfrak{BC}$ feratur, donec $\mathfrak{E}$ in $\mathfrak{C}$, et $\mathfrak{B}$ in $\mathfrak{E}$, atque $\mathfrak{BD}$ in $\mathfrak{EF}$ veniat; quo pacto, si fiat super basi $\mathfrak{EFCD}'$ prisma iuxta rectam prius dictam $\mathfrak{Aa}$, e dictis patet prisma ipsius $\mathfrak{EFC}$ prismati ipsius $\mathfrak{ED}'\mathfrak{C}$ nonnisi per retis inversionem congruere posse.

§. 3.

Parallelepipeda super basi eadem $\mathfrak{EBCD}$ (in plano Q sita) in plaga eadem exstructa basibus superioribus in plano q ad Q parallelo terminata, si parallelogramma $\mathfrak{EBae}$ et $\mathfrak{EBa'e'}$ tanquam latera prismatum ipsi $\mathfrak{EB}$ insistentium in eodem plano fuerint: aequalitate terminata aequalia erunt.

Si enim (in Tom. I. Fig. 17c) prius concipiatur schema circa $\mathfrak{EB}$ elevatum plano tabulæ insistens, item in tabulæ plano concipiatur $\mathfrak{CD} \parallel$ et $=\mathfrak{EB}$, ut fiat pro basi parallelogrammum $\mathfrak{EBDC}$; atque claudantur prismata: erunt manifesto et parallelogramma ipsi $\mathfrak{CD}$ insistentia in eodem plano, atque alterum alteri congruenter æquale respondebit. Evidens etiam est, etiam parallelogramma $\mathfrak{EBae}$ et $\mathfrak{EBa'e'}$ pro basibus prismatum eorundem iuxta rectam $\mathfrak{EC}$ exstructorum accipi posse; concipiantur idcirco novæ hæ eorundem prismatum bases $\mathfrak{EBae}$, $\mathfrak{EBa'e'}$, ita uti in tabula sunt; cadent prismata et basis prior $\mathfrak{ECDB}$ in plagam inferiorem; atque si (pag. 230) lineis, quæ partes parallelogrammorum æqualitate terminata æquales distinguunt, in basibus novis inferioribus respondentes accipiantur, orientur totidem prismata sibi invicem respondentia æqualia; nempe ut prismatum horum partialium bases congruant, quævis solo motu rectarum (tanquam laterum) sine versione pervenire potest.

Scholion. Atque hinc etiam sequitur: 1. quodvis parallelepipedum obliquum etiam, si latere (nempe parallelogrammo) ad basim perpendiculari gaudeat, recto æquale esse terminata æqualitate, adeoque etiam tali, cuius basis rectangulum est; nam prisma rectum ad quamvis basim, priori basi æqualitate terminata æqualem, reduci posse patet. 2. Atque etiam (Fig. 121.) applicari posse in aperto est; nempe si parallelepipedum quodpiam ad rectum reductum sit, adeoque angulus z rectus sit, reperietur parallelogrammum æqualitate terminata æquale inter eadem plana parallela; nempe reperitur x pro datis A, a, B.

§. 4.

Parallelepipeda P et p super basi $\mathfrak{ABCD}$ in plano Q sita, superioribus basibus in plano q ad Q parallelo terminata, etsi nulli parallelogrammi $\mathfrak{ABCD}$ lateri insistentia ipsorum P et p latera (nempe parallelogramma) in eodem plano fuerint: sunt aequalitate terminata aequalia.

Dicantur enimvero (Fig. 215.) A et A' plana laterum ipsius P parallelorum, lateribus baseos parallelis $\mathfrak{AB}$, $\mathfrak{CD}$ insistentium, et dicantur a et a' plana laterum ipsius p parallelorum ipsis $\mathfrak{AD}$, $\mathfrak{BC}$ insistentium; sitque in A latus ipsius P parallelogrammum $\mathfrak{ABba}$, in A' vero sit $\mathfrak{CDdc}$, latus ipsius p autem sit $\mathfrak{ADd'a'}$ in a, et in a' sit $\mathfrak{BCc'b'}$.

Plana parallela A et A' manifesto secantur per plana a et a', nam a cum A punctum $\mathfrak{A}$ et cum A' punctum $\mathfrak{D}$ commune habet, ita a' cum A punctum $\mathfrak{B}$ et cum A' punctum $\mathfrak{C}$ commune habet. Sint hæ sectiones (a plano Q usque ad planum q) $\mathfrak{Aa''}$, $\mathfrak{Bb''}$, $\mathfrak{Cc''}$, $\mathfrak{Dd''}$; orietur hoc pacto super eadem basi tertium parallelepipedum, quod dicatur k; nempe $\mathfrak{Aa''}$ est $\|$ et $=\mathfrak{Dd''}$, quia sectiones planorum parallelorum A, A' per planum a factæ inter plana parallela sunt (pagg. 225, 228), ita $\mathfrak{Bb''}\ \|$ et $=\mathfrak{Cc''}$; atque etiam $\mathfrak{Aa''}\ \|$ et $=\mathfrak{Bb''}$, quia planorum parallelorum sectiones per A inter plana parallela Q et q sunt.

Evidens quoque est parallelepipeda p, k inter plana parallela a et a', atque P et k inter plana parallela A et A' contineri. Consequenter tam P quam p eidem k (per præcedentia), atque adeo (Tom. I. pag. 64) et P ipsi p æqualitate terminata æqualia sunt.

Scholion. (Fig. 216.). Itaque qualevis parallelepipedum in *rectum* æqualitate terminata exstrui potest, et basis in rectangulum, atque hoc in quadratum mutari, imo et quotvis et qualiavis parallelepipeda ad bases quadratas reduci, et hæc in unum quadratum summari (pagg. 109, 110), atque (pag. 108) dicta applicari possunt. Sint nimirum parallelepipedi iam ad rectum reducti dimensiones A, B, C, nempe pro basi rectangula laterum A et B sit altitudo C; mutetur basis hæc in rectangulum, cuius latus α sit, prodeat latus alterum β, et fiat e prismate priore novum huic rectangulo altitudine C insistens; erit idem parallelepipedum rectum etiam pro basi rectangula laterum C et β, et altitudine α; mutata iam ista basi in rectangulum, cuius latus α sit, prodeat alterum $=\gamma$, reducaturque parallelepipedum ad hanc basim; manebit omnino altitudo α, et baseos latus unum erit pariter α; consequenter latus unum parallelepipedi quadratum lateris α, altitudo vero γ erit.

§. 5.

Parallelepipedi P soliditas est, sensu statim dicendo, basi per altitudinem multiplicatae aequalis: per altitudinem in omnibus prismatibus (etsi non rectilinea fuerint) distantiam duarum basium, nempe perpendicularem e qualibet ad alteram, intelligendo.

Sint enim baseos rectangulæ latera A et B, atque altitudo sit C (Fig. 217.); sintque prius A, B, C commensurabilia; ac pro unitate determinata, et m, a, b, c numeros integros denotantibus, sit

$$A=\frac{a}{m},\ B=\frac{b}{m},\ C=\frac{c}{m}\ \text{ et }\ u=\frac{1}{m}.$$

Fiant ab extremitatibus ipsorum u in A parallelæ ad B, et ab extremitatibus ipsorum u in B parallelæ ad A; eriganturque ex omnibus his rectis rectangula altitudinis C ad basim perpendicularia, atque ab extremitatibus ipsorum u in C fiant plana ad basim parallela: fient manifesto in strato inferiore tot cubi, quot quadrata in basi generata sunt, nempe numero ab tales cubi, quorum latus lineare $u=\frac{1}{m}$ est; itaque in toto parallelepipedo erunt abc tales cubi. Est vero rectarum A, B, C *factum* nempe ABC

$$=\frac{a}{m}\cdot\frac{b}{m}\cdot\frac{c}{m}=abc\cdot\frac{1}{m^3},$$

atque cubus quadrato, cuius latus $=1$ est, insistens, qui pro unitate solidorum ponitur, continet numero m^3 cubum quadrato, cuius latus $u=\frac{1}{m}$ est, insistentem: itaque factum lineare ABC est unitatis linearis abc/m^3-tum, uti parallelepipedum unitatis solidorum. Itaque *hoc sensu* exprimet *basis* nempe AB (pag. 99) *multiplicata per altitudinem* C *soliditatem parallelepipedi*.

Si vero aliquod ipsorum A, B, C, aut certa duo, vel singula cum unitate incommensurabilia fuerint: sit

$$A=a\frac{1}{m}+\omega,\quad \omega<\frac{1}{m},$$

id est A contineat a-ies ipsum u, et supersit $\omega<u$, sitque

$$B=\frac{b}{m}+\varkappa,\quad \varkappa<\frac{1}{m},$$

$$C=\frac{c}{m}+\lambda,\quad \lambda<\frac{1}{m},$$

(si quod ipsorum ω, $\varkappa$, λ non $<u$ sed $=0$ esset, ibi $=0$ pro $<\frac{1}{m}$ scribi debet).

Erit

$$\frac{(a+1)(b+1)(c+1)}{m^3}>P>\frac{abc}{m^3};$$

dicatur trium harum quantitatum prior P', et posterior p; fiet $P'-p\backsim 0$, si $m\backsim\infty$, adeoque $P-\frac{abc}{m^3}\backsim 0$, (quum $P-p<P'-p$ sit); consequenter $\frac{abc}{m^3}\backsim P$, nempe limes ipsius $\frac{abc}{m^3}$ est ipsi P æqualis; limes iste autem ABC erit (Tom. I. pag. 86); nam $\frac{a}{m}\backsim A$, $\frac{b}{m}\backsim B$ et $\frac{c}{m}\backsim C$. Id igitur tantum demonstrandum venit, quod $P'-p\backsim 0$; quod facile sic patet.

Est

$$P'-p=\frac{bc+ac+c+ab+b+a+1}{m^3}$$

$$=\left(\frac{b}{m}\,\frac{c}{m}+\frac{a}{m}\,\frac{c}{m}+\frac{a}{m}\,\frac{b}{m}+\frac{a+b+c+1}{m^2}\right):m;$$

et hoc est

$$< \frac{BC}{m} + \frac{AC}{m} + \frac{AB}{m} + \frac{A+B+C}{m^2} + \frac{1}{m^3}$$

atque hoc quoque $\frown 0$ (Tom. I. pag. 80).

§. 6.

Est autem qualevis parallelepipedum α aequale tali parallelepipedo recto β, cuius altitudo altitudini prioris, et basis rectangula basi prioris (qualevis parallelogrammum fuerit) aequalis est. Nempe quævis parallelepipeda α et γ, quorum altitudines æquales sunt, si bases congruenter æquales sint, ita poni possunt, ut basibus congruentibus, bases oppositæ in eodem plano ad basim priorem parallelo sint; atque tum (pag. 234) dicta valent, etsi γ prisma rectum fuerit; tum vero basi ipsius γ in rectangulum mutata, γ in β mutari poterit.

Atque hinc manifesto *soliditas* non solum parallelepipedi cuiusvis sed et *prismatis cuiusvis*, adhucdum saltem *rectilinei*, *basi per altitudinem multiplicata prodit.* Quodvis prisma triangulare enim æquatur (pag. 233) parallelepipedo, cuius altitudo altitudini illius, et basis basi illius (nempe parallelogrammum triangulo) æquales sunt; atque quodvis prisma rectilineum, basi rectilinea in triangula divisa, in totidem prismata triangularia dispescitur, adeoque totum æquatur summae triangulorum, in quæ basis divisa est, per altitudinem eandem multiplicata.

*31122223.

Forma sub hoc numero (in calce) generata cum complexu rectarum ex omnibus figuræ planæ rectilineæ punctis ad idem punctum a ductarum manifesto coincidit: *forma pyramidalis* (sensu generaliore) exponitur pag. 10, quo etiam conus (de quo plura inferius) aliaque pertinent.

*31122223. Si in 31122222 e cuiusvis anguli vertice ad quodvis punctum a ibidem dictum recta cogitetur; vertaturque planum P circa latus quodvis, donec a incidat: nascitur *pyramis rectilinea.*

§. 1.

Si *pyramis triangularis* (Fig. 218.), nempe triangulo $\mathfrak{ABC}$ superstructa, plano ad basim $\mathfrak{ABC}$ per $\mathfrak{a}$ parallelo secta fuerit, latus $\mathfrak{AkC}$ secabitur in $\mathfrak{ac} \parallel \mathfrak{AC}$, latus $\mathfrak{AkB}$ secabitur in $\mathfrak{ab} \parallel \mathfrak{AB}$, atque latus tertium nempe $\mathfrak{CkB}$ secabitur in $\mathfrak{cb} \parallel \mathfrak{CB}$; fientque anguli ad apices triangulorum $\mathfrak{abc}$, $\mathfrak{ABC}$ litera nominis eiusdem designatos æquales; consequenter triangula dicta erunt similia; quod et inde patet, quod propter $\mathfrak{ac} \parallel \mathfrak{AC}$ et $\mathfrak{ab} \parallel \mathfrak{AB}$, atque $\mathfrak{bc} \parallel \mathfrak{BC}$, triangula $\mathfrak{akc}$ et $\mathfrak{AkC}$, $\mathfrak{akb}$ et $\mathfrak{AkB}$, $\mathfrak{bkc}$ et $\mathfrak{BkC}$ similia sint, adeoque

$$\mathfrak{ac} : \mathfrak{AC} = \mathfrak{ka} : \mathfrak{kA} = \mathfrak{ab} : \mathfrak{AB} = \mathfrak{kb} : \mathfrak{kB} = \mathfrak{bc} : \mathfrak{BC};$$

unde triangula per latera proportionalia similia sunt.

§. 2.

Pyramidis rectilineae soliditas est aequalis basi multiplicatae per tertiam partem altitudinis (id est rectæ perpendicularis ex apice $\mathfrak{a}$ ad planum baseos demissæ).

Nam si pyramidis triangularis (nempe cuius basis triangulum est) soliditas basi per tertiam partem altitudinis multiplicatæ æqualis sit, quævis pyramis rectilinea, si basis in triangula dispescatur, erit summæ horum triangulorum (nempe basi totius pyramidis) per altitudinis totius (nempe perpendicularis ex eodem apice $\mathfrak{a}$ ad idem planum demissæ) tertiam partem multiplicatæ æqualis.

Quamobrem id tantum demonstrandum est, quod pyramidis triangularis soliditas sit tertia pars facti e basi in altitudinem, adeoque parallelepipedi, cuius basis basi pyramidis, altitudo altitudini æqualis est: quod fit modo sequente. (Fig. 219.)

Basis $\mathfrak{ABC}$ dicatur B', altitudo A', sintque latera linearia ad verticem A, B, C, sintque

$$\frac{A}{3} = a, \quad \frac{B}{3} = b, \quad \frac{C}{3} = c,$$

atque fiant per puncta divisionis rectarum A, B, C plana: erunt hæ (per præcedentia) ad basim B' parallela; fientque tria strata, quorum infimum cum medio triangulum $\mathfrak{abc}$, uti medium cum supremo triangulum $\mathfrak{a'b'c'}$ commune habebit. Ducantur ex apicibus $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$ trianguli $\mathfrak{abc}$, (quod strato infimo medioque commune est), parallelæ $\mathfrak{ab''}$, $\mathfrak{ac''}$ ex $\mathfrak{a}$ ad B et C, et ex $\mathfrak{b}$ ad A et C parallelæ $\mathfrak{ba''}$, $\mathfrak{bc'''}$; orientur in strato infimo quatuor corpora, nempe prisma super basi $\mathfrak{c''c'''C}$ iuxta rectam $\mathfrak{Cc} = c$ exstructum, pyramis e basi $\mathfrak{Ab''c''}$ ad apicem $\mathfrak{a}$, et pyramis e basi $\mathfrak{Ba''c'''}$ ad apicem $\mathfrak{b}$, et corpus quinque laterum, quorum retia (Fig. 219*, 1, 2, 3, 4) exhibent; nimirum basis $\mathfrak{ABC}$ dispescitur in triangula $\mathfrak{Ab''c''}$, $\mathfrak{Ba''c'''}$, trapezium $\mathfrak{b''a''c'''c''}$, et triangulum $\mathfrak{c''c'''C}$ basim prismatis.

Pyramides dictæ sunt singulæ pyramidi, quæ stratum supremum constituit, æquales, uti rete (Fig. 219*, 5) demonstrat, nempe in triangulo $\mathfrak{ACf}$ est

$$\mathfrak{Ac''} : \mathfrak{AC} = \mathfrak{Aa} : \mathfrak{Af};$$

itaque si $\mathfrak{AC} = 3\alpha$, erit $\mathfrak{Ac''} = \alpha$; ita $\mathfrak{Ab''} = \gamma = \mathfrak{Ba''}$, et si $\mathfrak{BC} = 3\beta$, est $\mathfrak{Bc'''} = \beta$; adeoque dum $\mathfrak{c''}$ baseos cum $\mathfrak{c''}$ lateris $\mathfrak{AfC}$ coincidit, $\mathfrak{c''b''}$ fit $= \beta$, etiam $\mathfrak{b''}$ in se manente &. Prismatis dicti autem soliditas est $= \frac{4A'B'}{27}$; nam basis est

$$\triangle\, \mathfrak{c''Cc'''} = \mathfrak{abc} = \left(\frac{2}{3}\right)^2 B',$$

quia areæ similium sunt, uti quadrata laterum homologorum, $\mathfrak{ab}$ vero $\frac{2}{3}$-tum ipsius $\mathfrak{AB}$ est; altitudo autem prismatis dicti est $= \frac{A'}{3}$, quia si perpendicularis demittatur ex $\mathfrak{f}$ ad $\mathfrak{ABC}$, erit hæc et ad $\mathfrak{abc}$ perpendicularis, sit hoc in punctis $\mathfrak{P}$ et $\mathfrak{p}$: erunt triangula $\mathfrak{fPA}$ et $\mathfrak{fpa}$ similia, adeoque

$$\mathfrak{fp} : \mathfrak{fP} = \mathfrak{fa} : \mathfrak{fA}.$$

Stratum medium vero erit pyramis truncata, cuius si uti tota pyramis compacta est, in planis laterum $\mathfrak{aa'c'c}$ et $\mathfrak{bb'c'c}$ ad rectam $\mathfrak{cc'}$ ex $\mathfrak{a}$ et $\mathfrak{b}$ rectæ parallelæ æqualesque ducantur: orietur manifesto prisma, completa pyramide truncata dicta per corpus quinque laterum, cuius rete est plane illud, quod (Fig. 219*, 4) in strato inferiore exponitur; quamvis inverti debeat, ut complementum dictum prodeat; erit nempe superius trapezium, cuius latus unum $\mathfrak{a}'\mathfrak{b}'=\gamma$ et ei parallelum 2γ est, latus ex $\mathfrak{a}'$ est $=\alpha$ et latus ex $\mathfrak{b}'$ est $=\beta$ (per parallelogrammorum latera opposita); secundum latus corporis huius, pyramidem dictam truncatam ad prisma complentis, est parallelogrammum ex $\mathfrak{ab}=2\gamma$ et c, tertium est trapezium $\mathfrak{a}'\mathfrak{b}'\mathfrak{ba}$, quartum et quintum sunt ad A et B triangula laterum a, c, α et laterum b, c, β.

Tota pyramis igitur est $=\frac{8A'B'}{27}+3p$ (si pyramis stratum superius constituens p dicatur), nempe duo strata inferiora simul duo prismata æqualia et duo p efficiunt. Est autem ipsius p basis $=\frac{B'}{9}$ (pag. 111), altitudo $\frac{A'}{3}$; et si cum p eadem operatio suscipiatur, dicaturque p' pyramis stratum superius constituens: erit $p=\frac{8A'B'}{27^2}+3p'$, quum pro A' nunc $\frac{A'}{3}$ et $\frac{B'}{9}$ pro B' sit; adeoque $3p$ erit $=\frac{3.8A'B'}{27^2}+3^2p'$; atque si eodem modo tractetur quodvis p', et quævis pyramis stratum superius efficiens uno accento plures nanciscatur: manifesto prisma totum erit

$$=8A'B'\left(\frac{1}{27}+\frac{3}{27^2}+\frac{3^2}{27^3}+\frac{3^3}{27^4}+\cdots+\frac{3^{n-1}}{27^n}\right)+$$
$$+\,3^n \text{ eiusmodi pyramidibus, quarum basis } \frac{B'}{9^n},\text{ altitudo } \frac{A'}{3^n} \text{ est.}$$

Est autem summa s harum pyramidum minor, quam si pro eadem basi et altitudine in prismata mutarentur; esset vero prismatum horum summa $3^n.\frac{B'}{9^n}\cdot\frac{A'}{3^n}$, adeoque $s<\frac{A'B'}{9^n}$, consequenter $s \sim 0$ si $n \sim \infty$.

Summa S progressionis geometricæ intra parenthesim (quum exponens $\frac{3}{27}<1$ sit) autem $\sim \frac{1}{27}:\left(1-\frac{3}{27}\right)=\frac{1}{24}$; quod per $8A'B'$ multiplicatum $\sim\frac{A'B'}{3}$. Consequenter $S\sim\frac{A'B'}{3}$, et si tota pyramis P dicatur, S semper $<P$ manet, sed $P-S=s\sim 0$; itaque $S\sim P$; et per consequentiam $P=\frac{A'B'}{3}$.

Scholion 1. *Pyramidem triangularem quamvis in genere aequalitate terminata ad prisma reduci posse vel non posse (adhucdum) haud liquet.*

Scholion 2. Potest etiam quodvis corpus planis rectilineis clausum in pyramides rectilineas (uti figura rectilinea in triangula) dispesci; et *summa pyramidum erit soliditas totius.*

Scholion 3. *Superficies pyramidis* rectilineæ manifesto est summa triangulorum latera pyramidis constituentium, basi addita.

Sed quæstiones oriuntur:

1. quomodo perpendicularis ex apice demissæ quantitate locoque atque basi $\mathfrak{ABC}$ pyramidis triangularis, cuius apex $\mathfrak{p}$ est, datis, latera innotescant, ut etiam rete construi queat.

2. Si nonnisi basis $\mathfrak{ABC}$, recta $\mathfrak{Ap}$ et angulus solidus ad $\mathfrak{A}$ detur: inde altitudinem et latera reperire.

I. Quoad primum: sit (Fig. 220.) $\mathfrak{p}$ apex pyramidis, cuius basis $\mathfrak{ABC}$ est, et perpendicularis ex $\mathfrak{p}$ ad planum baseos sit $\mathfrak{pP}$; erit $\mathfrak{pP}$ perpendicularis ad $\mathfrak{PA}$, $\mathfrak{PB}$, $\mathfrak{PC}$; atque in triangulis rectangulis $\mathfrak{APp}$, $\mathfrak{CPp}$, $\mathfrak{BPp}$ e cathetis hypotenusae innotescunt, nempe ex $\mathfrak{AP}$, $\mathfrak{Pp}$ prodit hypotenusa $\mathfrak{Ap}$, ex $\mathfrak{BP}$ et $\mathfrak{Pp}$ prodit $\mathfrak{Bp}$, et ex $\mathfrak{CP}$ et $\mathfrak{Pp}$ prodit $\mathfrak{Cp}$. E trianguli $\mathfrak{APC}$ lateribus autem innotescit γ, atque e triangulo $\mathfrak{APq}$ ad $\mathfrak{q}$ rectangulo prodit $\mathfrak{Pq}$, et in triangulo $\mathfrak{pPq}$ ad $\mathfrak{P}$ rectangulo prodit etiam angulus, quem $\mathfrak{pq}$ cum $\mathfrak{qP}$, id est planum $\mathfrak{pAC}$ cum plano $\mathfrak{ABC}$, facit.

II. Quoad secundum (Fig. 220.) si præter basim $\mathfrak{ABC}$ nonnisi $\mathfrak{Ap}$ et angulus solidus ad $\mathfrak{A}$ detur, nempe $\wedge\mathfrak{pAC} = v$, et $\wedge\mathfrak{CAB}$ sit β, atque $\wedge\mathfrak{BAp}$ sit α: dicatur u angulus, quem planum $\mathfrak{ApC}$ cum basi facit. Concipiatur angulus solidus ad $\mathfrak{A}$ in centrum sphæræ poni; per angulos v, β, α, ad verticem $\mathfrak{A}$ datos, latera trianguli sphærici omnia data erunt, unde prodit u (per inferius dicenda).

Demissa tum ex $\mathfrak{p}$ in plano $\mathfrak{ACp}$ perpendiculari $\mathfrak{pq}$ ad $\mathfrak{AC}$, in triangulo $\mathfrak{Apq}$ ad $\mathfrak{q}$ rectangulo ex $\mathfrak{Ap}$ et v prodit $\mathfrak{pq}$ (imo etiam $\mathfrak{Aq}$); atque hinc in triangulo ad $\mathfrak{P}$ rectangulo $\mathfrak{pqP}$, ex $\mathfrak{pq}$ et angulo u planorum $\mathfrak{ApC}$ et $\mathfrak{ABC}$, prodit cathetus nempe perpendicularis quæsita $\mathfrak{pP}$, et prodit etiam $\mathfrak{Pq}$.

Latus $\mathfrak{pB}$ trianguli $\mathfrak{ApB}$ autem prodit ita: ex $\mathfrak{Aq}$ et $\mathfrak{Pq}$, quæ antea prodierant, in triangulo rectangulo $\mathfrak{AqP}$ prodit γ et $\mathfrak{AP}$; atque in triangulo $\mathfrak{PAB}$ ex angulo $\gamma+\beta$ et lateribus $\mathfrak{AP}$ et $\mathfrak{AB}$ prodit $\mathfrak{PB}$; atque hinc in triangulo ad $\mathfrak{P}$ rectangulo $\mathfrak{PpB}$ e cathetis $\mathfrak{Pp}$, $\mathfrak{PB}$ prodit $\mathfrak{pB}$.

Scholion 4. Superficies prismatis rectilinei est summa parallelogrammorum lateribus baseos insistentium, additis duabus basibus æqualibus. Hic quoque prisma triangulare considerare sufficit. *Latera linearia* hic omnia sunt æqualia; nempe si (pagg. 228 &) basis sit $\mathfrak{ABC}$, et latera prismatis sint parallelogramma $\mathfrak{AB}\mathfrak{ba}$, $\mathfrak{AC}\mathfrak{ca}$, $\mathfrak{BC}\mathfrak{cb}$: erit prisma iuxta rectam $\mathfrak{A}\mathfrak{a}$ constructum, et $\mathfrak{A}\mathfrak{a} = \mathfrak{B}\mathfrak{b} = \mathfrak{C}\mathfrak{c}$, atque $\mathfrak{A}\mathfrak{a}$, $\mathfrak{B}\mathfrak{b}$, $\mathfrak{C}\mathfrak{c}$ *latera linearia* dici possunt.

Quæstiones heic prioribus analogæ exoriuntur.

1. Data basi $\mathfrak{ABC}$, (Fig. 221.) et puncto $\mathfrak{a}'$, quo perpendicularis ex $\mathfrak{a}$ ad planum baseos demissa cadit, si latus lineare $\mathfrak{A}\mathfrak{a}$ detur, e triangulo rectangulo $\mathfrak{a}\mathfrak{a}'\mathfrak{A}$ innotescit cathetus $\mathfrak{a}\mathfrak{a}'$ ex hypotenusa $\mathfrak{A}\mathfrak{a}$ et catheto $\mathfrak{a}'\mathfrak{A}$. Si vero præter punctum $\mathfrak{a}'$ et prismatis altitudo $\mathfrak{a}\mathfrak{a}'$ data fuerit, innotescit latus lineare $\mathfrak{A}\mathfrak{a}$, ex eodem triangulo ad $\mathfrak{a}'$ rectangulo, e cathetis $\mathfrak{a}\mathfrak{a}'$ et $\mathfrak{A}\mathfrak{a}'$.

Ex $\mathfrak{A}\mathfrak{a}'$, $\mathfrak{AC}$, $\mathfrak{a}'\mathfrak{C}$ vero innotescit angulus γ; atque ex $\mathfrak{A}\mathfrak{a}'$ et γ prodit $\mathfrak{a}'\mathfrak{q}$ perpendicularis ad $\mathfrak{AC}$, et prodit etiam $\mathfrak{A}\mathfrak{q}$; atque e triangulo rectangulo $\mathfrak{a}\mathfrak{a}'\mathfrak{q}$, ex $\mathfrak{a}\mathfrak{a}'$ et $\mathfrak{a}'\mathfrak{q}$ prodit angulus plani $\mathfrak{A}\mathfrak{a}\mathfrak{C}$ cum plano baseos.

2. Si vero præter basim $\mathfrak{ABC}$ et latus lineare $\mathfrak{A}\mathfrak{a}$ nonnisi angulus solidus ad $\mathfrak{A}$, ex $v = \mathfrak{a}\mathfrak{AC}$, $\beta = \mathfrak{CAB}$ et $\alpha = \mathfrak{a}\mathfrak{AB}$, detur: tum (ut antea in pyramide, e triangulo sphærico) prodibunt anguli u, u', quos prismatis latera $\mathfrak{A}\mathfrak{a}\mathfrak{c}\mathfrak{C}$, $\mathfrak{A}\mathfrak{a}\mathfrak{b}\mathfrak{B}$ cum basi faciunt. E triangulo ad $\mathfrak{q}$ rectangulo $\mathfrak{a}\mathfrak{q}\mathfrak{A}$ vero ex $\mathfrak{A}\mathfrak{a}$ et v prodibunt $\mathfrak{a}\mathfrak{q}$ et $\mathfrak{A}\mathfrak{q}$; atque hinc e triangulo ad $\mathfrak{a}'$ rectangulo $\mathfrak{a}\mathfrak{a}'\mathfrak{q}$, ex $\mathfrak{a}\mathfrak{q}$ et angulo lateris $\mathfrak{a}\mathfrak{AC}$ cum basi prodit altitudo $\mathfrak{a}\mathfrak{a}'$.

Atque etiam lateris ipsi $\mathfrak{BC}$ insistentis angulus $\mathfrak{b}\mathfrak{BC}$ parallelogrammi $\mathfrak{BC}\mathfrak{cb}$ innotescit modo sequente: $\mathfrak{b}\mathfrak{B}$ est $= \mathfrak{a}\mathfrak{A}$, et si ex $\mathfrak{B}$ parallela $\mathfrak{B}\mathfrak{b}'$ ducatur ipsi $\mathfrak{A}\mathfrak{a}'$, eidem æqualis, erit $\mathfrak{b}\mathfrak{b}'$ perpendicularis ex $\mathfrak{b}$ ad basim; et ex $\mathfrak{b}'$ perpendiculari $\mathfrak{b}'\mathfrak{q}'$ ad $\mathfrak{BC}$ missa exhibebitur $\mathfrak{B}\mathfrak{q}'$, eritque $\mathfrak{b}\mathfrak{q}'$ perpendicularis ad $\mathfrak{B}\mathfrak{q}'$; adeoque in triangulo ad $\mathfrak{q}'$ rectangulo $\mathfrak{B}\mathfrak{q}'\mathfrak{b}$ innotescit angulus ad $\mathfrak{B}$ parallelogrammi ipsi $\mathfrak{BC}$ insistentis. Aut ponatur anguli solidi ad $\mathfrak{B}$ apex in centrum sphæræ; erit in triangulo sphærico latus unum per parallelogrammi $\mathfrak{A}\mathfrak{a}\mathfrak{b}\mathfrak{B}$ angulum $\mathfrak{AB}\mathfrak{b} = 2R - \alpha$ datum (nempe summa duorum internorum $= 2R$), alterum quoque datur, quum sit $=\wedge\mathfrak{ABC}$, et angulus u' antea innotuerat. Unde latus tertium prodit, parallelogrammi lateris $\mathfrak{BC}$ insistentis angulum ad $\mathfrak{B}$ exprimens; adeoque latera prismatis singula innotescunt. Si parallelepipedum sit, tum parallelogrammis, quæ ipsis $\mathfrak{AC}$ et $\mathfrak{AB}$ insistunt, opposita æqualia sunt.

·312.

Motus figurarum circa axem.

·3121.

Quadrilaterum rectangulum circa latus aliquod revolutum parit *cylindrum rectum* circulo tanquam basi insistentem, e cuius centro erecta ad basim perpendicularis *axis cylindri* audit. Estque manifesto cylinder prisma rectum, quum recta axi parallela, donec redeat, ubique eadem et tam ad tangentem circuli quam ad radium perpendicularis, adeoque ad planum ipsum perpendicularis sit.

Est vero, sive circulus sive quævis figura in plano (sive curva, sive e curva et recta utcunque mixta) pro basi accipiatur, iuxta quamvis rectam, plano sive perpendiculariter sive oblique insistentem, constructum fuerit prisma: *soliditas eius, basi per altitudinem multiplicatae aequalis.*

Nam consideretur prius cylinder (sive rectus sive obliquus) circulo insistens: erat (ex pag. 104) polygoni inscripti area a, atque $a+\lambda > C > a$. Si igitur cylindri altitudo A sit, et concipiantur ad eandem altitudinem A prismata rectilinea basibus $a+\lambda$ et a insistentia, dicaturque prius Q, posterius q, atque cylinder dicatur C': erit manifesto $Q > C' > q$ (nempe $(a+\lambda)\ A > C' > aA$); atque $Q-q \backsim 0$. Consequenter $C'-q \backsim 0$, adeoque $q \backsim C'$. Sed $q \backsim \frac{PrA}{2}$, (si radius r sit, et $p \backsim P$); itaque C' æqualis est areæ circuli per altitudinem multiplicatæ.

·312. *Motus figurarum circa axem.*
·3121. Quadrilateri rectanguli revolutio circa latus parit *cylindrum rectangularem.*
·3122. Trianguli rectanguli revolutio circa cathetum parit *conum rectangularem.*
·3123. Revolutio semicirculi circa diametrum parit *sphaeram.*

Potest autem quævis basis, (sive una linea curva claudatur, sive perimetri tantum pars una vel plures curvæ sint), ita dividi, ut summa prismatum his baseos partibus insistentium prismati toti æqualis sit; possuntque pro quavis α harum baseos partium, cuius perimeter parte curva gaudet, talia rectilinea L, l generari, ut $L>\alpha>l$, atque $L-l \rightharpoondown 0$, adeoque $\alpha-l \rightharpoondown 0$, et consequenter $\alpha A - Al \rightharpoondown 0$, atque $Al \rightharpoondown \alpha A$, id est αA sit ipsius Al limes, æqualis prismati basi α altitudine A insistenti.

3122.

Trianguli rectanguli revolutio circa cathetum parit *conum rectum*, et cathetus dictus *axis*, *hypotenusa vero coni latus* audit. Patet autem iuxta (pag. 10) pyramidem sensu latiore esse non hunc conum solum, sed et obliquum, nempe complexum omnium rectarum, quæ e circulo ad idem aliquod tale punctum $\mathfrak{p}$ sunt, etsi recta ex $\mathfrak{p}$ ad centrum circuli non sit perpendicularis ad planum circuli; imo et complexum rectarum e cuiusvis figuræ planæ punctis omnibus ad idem punctum $\mathfrak{p}$ extra planum situm; atque etiam iis, quæ (in præcedentibus) de cylindro dicta sunt, applicatis, cuiusvis coni soliditatem esse basi per tertiam partem altitudinis multiplicatæ æqualem.

§. 1.

Superficies cylindri recti (præter bases) *est $A\pi D$, si A altitudinem cylindri, D diametrum baseos circularis, et π quantitatem peripheriae pro diametro 1 denotet.* Si nimirum basi inferiori inscribatur polygonum, et in basi superiore puncta inferioribus respondentia accipiantur, atque parallelogramma, per latera parallela polygonorum in basibus parallelis sibi invicem respondentia efformata, concipiantur: limes summæ horum parallelogrammorum est summæ laterum polygoni limes per constantem A multiplicatus; atque per superficiem cylindri, dum cum plano comparatur, hoc intelligitur; fit nempe tum quantitas respectiva, quamvis et per se etiam quantitas sit, et quævis eius portiones quidem inter se (quoad maioritatem minoritatemve) comparari queant; interim et duæ superficies cylindricæ, si circulis radiorum inæqualium insistant, respectu dicto nonnisi ut quantitates respectivæ comparantur.

Idem ad conum, aliasque quasvis superficies curvas applicatur; demonstrari nempe potest triangulis se invicem excipientibus inscriptis, ut nempe apices omnes eorum in superficiem curvam cadant: summam eorum ad limitem certum tendere, si cuiusvis eorum singuli tres apices sibi invicem dato quovis propius veniant; limitemque eum, utcunque inscribantur triangula, eundem esse.

In cono recto circulo insistente patet, triangulorum ex apice ad latera polygoni basi inscripti generatorum summam ad $\pi D\alpha$ tendere, si D diametrum baseos et α dimidium lateris coni denotet.

Scholion. Atque hinc *rete cylindri recti* erit (præter bases) rectangulum altitudinis eiusdem, quæ cylindri est, rectæ perimetrum baseos cylindri exæquanti superstructum; basis autem si circulus fuerit, sive recta dicta computatur e diametro, sive si e recta data quæratur diameter, facile construitur. Si vero alia linea sit perimeter baseos, eius longitudo computanda est, ut rectanguli basis prodeat.

Rete coni recti autem sector est, cuius centrum apicem, latus radium, et arcus perimetrum baseos circularis præbet. Sunt enim, si basis circulus et recta e centro ad apicem ducta ad basim perpendicularis fuerit, latera coni omnia æqualia, quum sint hypotenusæ triangulorum rectangulorum æqualium: quod ex. gr. si pro circulo ellipsis esset centro eodem gaudens, minime locum haberet. Basis circularis ex arcus longitudine, quæ e ratione arcus ad peripheriam atque radio innotescit, prodit; longitudo arcus enim per π divisa diametrum baseos præbet. Est vero angulus ad apicem eo acutior, quo minor angulus sectoris ad centrum est, et eo magis obtusus, quo propius ad quatuor rectos angulus dictus accedit.

Potest quoque e dato angulo ad apicem arcus sectoris, uti ex arcu sectoris angulus ad apicem reperiri. Sit nempe (Fig. 222.) latus coni l, axis a, et radius baseos sit r; dato angulo u et axe a, reperitur tam l quam r; eritque perimeter baseos $2r\pi$ arcui sectoris radio l scripti æqualis; tota peripheria esset $2l\pi$; sit x quantitas quæsita talis, ut sit; erit

$$2l\pi x = 2r\pi$$

$$lx = r \quad \text{et} \quad x = \frac{r}{l}.$$

Si vero l et x data fuerint, erit $r = lx$, atque ex l et r prodit u.

Potest etiam rete pro cylindro basi qualivis datæ ad quemvis angulum insistente, saltem per puncta utvis propinqua construi; et idem de cono valet; neque proprie sensu geometrico præcisum sensum sive recta in curvam, sive planum in superficiem curvam flexa habent, nisi id per motum circa puncta illius, vel rectas huius ad intervalla fiat, atque resultatorum limites geometrici accipiantur.

Ex. gr. Sit basi circulari superstruendus cylinder aut conus talis, ut cum basi inferiore, in cylindro recta basium centra iungens, et in cono recta e centro baseos ad apicem, faciant certum angulum datum; aut in utroque sit basis ellipsis, cuius centrum c sit, atque angulus, quem in cylindro recta per centra baseos, in cono recta ex apice ad centrum, cum basi facit, dato angulo æqualis sit.

Potest cuivis curvæ, (qualiscunque fuerit), linea polygonalis inscribi, atque sive prisma sive pyramis fuerit, potest in triangularia dividi, quorum bases latera lineæ polygonalis dictæ sint; atque applicatis iis, quæ (pag. 242) dicta sunt, rete quantolibet exactius construi; imo etiam limes geometricus baseos in plano quæri, tam in prismate, si parallelogramma laterum basi insistentium æqualium, uti se invicem excipiunt, iungantur, quam in pyramide triangula, uti se invicem apice communi excipiunt, iungantur. Parallelepipedi recti rete (exclusis basibus) constabit e quatuor rectangulis eidem rectæ insistentibus; quia latera parallelogrammorum coincidentia cum basibus angulos rectos adeoque tales angulos deinceps positos efficiunt, qui simul duos rectos exæquant. Ubi vero hoc neque per limitem locum habet, parallelogramma in prismate, triangula in pyramide ita poni debent, uti se invicem excipiendo prodeunt; et ubi locum habet, limes geometricus quærendus est.

Est quoque, ut inferius patebit, cylinder obliquus circulo insistens nonnisi cylinder rectus ellipsi insistens, ad certum angulum oblique sectus;

et pariter conus circulo oblique insistens nonnisi conus rectus ellipsi insistens oblique sectus est: unde retia tam cylindri quam coni obliqui, sive circulo sive ellipsi ad datum angulum insistentium, reperiuntur.

Nempe cylindri recti circulo, imo et ellipsi insistentis rete construitur (pag. 245). Coni recti ellipsi insistentis quoque rete construi potest. Nam (Fig. 223.) sit ellipseos centrum $\mathfrak{c}$, sitque $\mathfrak{cd}$ dimidium axis minoris, et $\mathfrak{Ac}$ dimidium axis maioris; sitque $\mathfrak{cc}' \perp \mathfrak{Ac}$, et $\mathfrak{c}'$ apex coni; moveatur $\mathfrak{cd}$ usque in $\mathfrak{Ac}$, fiet ubique triangulum ad $\mathfrak{c}$ rectangulum, cuius cathetus e $\mathfrak{c}$ usque ad ellipsin crescet usque ad $\mathfrak{Ac}$, et ubique determinari poterit, alter cathetus vero $\mathfrak{cc}'$ erit; unde hypotenusa, nempe latus coni in illo loco, reperitur; adeoque etiam triangula se invicem excipientia, quorum bases chordæ et latera hypotenusæ dictæ sunt, adeoque rete cum errore quantovis minore construi poterit.

Si vero conus (vel cylinder) rectus constructus fuerit: sit (Fig. 224.) basis $\mathfrak{ABCDE}$ in plano tabulæ, atque $\mathfrak{AF}'$ sit tangens ad punctum $\mathfrak{A}$, circa quam planum e basi elevetur ad certum angulum u, atque planum baseos sit P, et planum elevatum dicatur p.

Quamvis res summa generalitate exponi posset, simpliciora proferre sufficiat.

Sit prius cylinder vel conus rectus ellipsi insistens, cuius axis minor $\mathfrak{AD} = b$, et axis maior $\mathfrak{EC}$, centrum $\mathfrak{f}$, et perpendicularis ad basim ex $\mathfrak{f}$ usque ad basim cylindri superiorem (aut apicem coni) sit $\mathfrak{pf}$; secetque planum p perpendicularem dictam $\mathfrak{fp}$ in $\mathfrak{f}'$. Innotescet $\mathfrak{ff}'$ in triangulo ad $\mathfrak{f}$ rectangulo $\mathfrak{Aff}'$ ex angulo u et catheto $\mathfrak{Af}$.

Sit iam e fine $\mathfrak{B}$ arcus $\mathfrak{AB}$ ad P erecta perpendicularis usque ad p; cadet hæc manifesto in superficiem cylindri; sit $\mathfrak{b}'$ punctum eius cum p commune.

Patet quod si cylindri rete rectangulare sit (Fig. 225.), cuius basis $\mathfrak{A}'\mathfrak{Q}$ = perimetro baseos, atque pro arcu $\mathfrak{AB}$ = rectæ $\mathfrak{A}'\mathfrak{B}'$ construatur ad $\mathfrak{A}'\mathfrak{B}'$ perpendicularis $\mathfrak{B}'\mathfrak{b}'' = \mathfrak{Bb}'$; et quum hoc cum punctis perimetri baseos quam proximis suscipi queat: rete cum errore quantovis minore construi possit, si ex $\mathfrak{A}'$ incipiendo usque ad $\mathfrak{Q}$ rectæ ducantur ab $\mathfrak{A}'$ ad $\mathfrak{b}''$ et a $\mathfrak{b}''$ ad $\mathfrak{c}''$ &c, atque pars infra hanc lineam cadens resecetur.

Itaque quæstio eo redit, ut (in præcedentibus) $\mathfrak{B}\mathfrak{b}'$ determinetur, quod modo sequente fieri potest: perpendicularis ex $\mathfrak{B}$ ad $\mathfrak{A}\mathfrak{H}'$ demissa cadat in $\mathfrak{B}''$, erit

$$\wedge\, \mathfrak{b}'\mathfrak{B}''\mathfrak{B} = \wedge\, \mathfrak{k}'\mathfrak{A}\mathfrak{k} = u;$$

itaque triangula rectangula $\mathfrak{b}'\mathfrak{B}''\mathfrak{B}$ et $\mathfrak{k}'\mathfrak{A}\mathfrak{k}$ erunt similia; adeoque erit

$$\mathfrak{A}\mathfrak{k} : \mathfrak{k}\mathfrak{k}' = \mathfrak{B}''\mathfrak{B} : \mathfrak{B}\mathfrak{b}' \quad \text{seu} \quad \mathfrak{B}\mathfrak{b}' = \alpha . \mathfrak{B}\mathfrak{B}'',$$

si $\frac{\mathfrak{k}\mathfrak{k}'}{\mathfrak{A}\mathfrak{k}}$ dicatur α. Est autem

$$\mathfrak{B}''\mathfrak{B} = \frac{b}{2} + y,$$

si y infra $\mathfrak{E}\mathfrak{C}$ negative et superius positive accipiatur.

Si vero cylinder circulo insistat, adeoque b diameter sit: manifesto $\mathfrak{B}''\mathfrak{B}$ sinus versus arcus $\mathfrak{A}\mathfrak{B}$ erit; adeoque si polygonum regulare inscribatur, et $\mathfrak{A}\mathfrak{B}$ sit arcus chordæ primæ ex $\mathfrak{A}$ incipientis, dicaturque β, erunt in rete transferendæ perpendiculares sequentes: α sin. vers. β, α sin. vers. 2β, α sin. vers. 3β &, nempe ad distantias β, 2β, 3β & ex $\mathfrak{A}'$ acceptas.

Sit iam conus rectus basi eidem superimpositus; in reti coni punctum plano p superficiei conicæ commune, reperto $\mathfrak{B}\mathfrak{b}'$, facile innotescit: (Fig. 226.) $\mathfrak{p}\mathfrak{k}$ et $\mathfrak{b}'\mathfrak{B}$ ad planum P perpendiculares in plano sunt, at in hoc idem cadit coni latus $\mathfrak{p}\mathfrak{B}$, et in idem cadit recta $\mathfrak{k}'\mathfrak{b}'$, (quia puncta $\mathfrak{p}$, $\mathfrak{k}'$, $\mathfrak{b}'$, $\mathfrak{B}$ in idem cadunt, adeoque et recta inter quævis bina eorum); manifesto autem secatur $\mathfrak{p}\mathfrak{B}$ per $\mathfrak{k}'\mathfrak{b}'$, et sectio ista in p est, quia puncta $\mathfrak{k}'$, $\mathfrak{b}'$ in p sunt, adeoque quodvis punctum rectæ $\mathfrak{k}'\mathfrak{b}'$ in p est. Sit sectio ista $\mathfrak{q}$; recta $\mathfrak{B}\mathfrak{q}$ in rete ad latus $\mathfrak{p}\mathfrak{B}'$ ex $\mathfrak{B}'$ transferenda facile prodit, (sive per constructionem, sive calculum), quum $\triangle\, \mathfrak{k}\mathfrak{p}\mathfrak{B}$ ad $\mathfrak{k}$ rectangulum, simul cum $\mathfrak{k}\mathfrak{k}'$ et $\mathfrak{B}\mathfrak{b}'$ data sint.

Si vero (Fig. 227.) planum P circa $\mathfrak{A}'\mathfrak{H}''$ ipsi $\mathfrak{A}\mathfrak{H}'$ parallelam elevetur, et planum elevatum in loco novo dicatur p: tum nonnisi β subtrahendum ex $\mathfrak{B}\mathfrak{B}''$ erit, ut remaneat $\mathfrak{B}\mathfrak{B}'''$; et si perpendicularis ex $\mathfrak{D}$ usque ad planum p erecta k dicatur, hæc ex γ et angulo u ipsis p cum P innotescit; et si perpendicularis ex $\mathfrak{B}$ ad P sit $\mathfrak{B}\mathfrak{b}'''$, erit

$$\gamma : k = \mathfrak{B}\mathfrak{B}''' : \mathfrak{B}\mathfrak{b}''';$$

et huic $\mathfrak{B}\mathfrak{b}'''$ æqualis erit pro hoc casu in reti perpendicularis ad basim ad distantiam ab $\mathfrak{A}'$ ipsi $\mathfrak{A}\mathfrak{B}$ æqualem pro puncto $\mathfrak{B}$ construenda.

In cono recto autem (Fig. 227.), si $\mathfrak{k}\mathfrak{p}$ per p non secetur, adeoque planum secans p ad P planum baseos perpendiculare sit, erit $u = R$, nempe angulus planorum p et P se invicem (Fig. 228.) in $\mathfrak{P}\mathfrak{Q}$ secantium rectus erit; prodibitque pro puncto $\mathfrak{M}$ recta $\mathfrak{M}\mathfrak{m}'$ e latere $\mathfrak{p}\mathfrak{M}$ ex $\mathfrak{M}$ incipiendo in reti resecanda modo sequente: fiat e centro $\mathfrak{k}$ recta ad $\mathfrak{M}$, secetque hæc rectam $\mathfrak{P}\mathfrak{Q}$ in $\mathfrak{c}'$; secabunt se invicem plana $\mathfrak{k}\mathfrak{M}\mathfrak{p}$ et p, ad P perpendicularia et punctum $\mathfrak{c}'$ commune habentia, in recta aliqua per $\mathfrak{c}'$ eunte; erit igitur hæc perpendicularis ad P adeoque ad $\mathfrak{k}\mathfrak{M}$, secabitque hæc rectam $\mathfrak{p}\mathfrak{M}$; fiat id in $\mathfrak{m}'$; erunt triangula rectangula $\mathfrak{p}\mathfrak{k}\mathfrak{M}$ et $\mathfrak{m}'\mathfrak{c}'\mathfrak{M}$ similia; consequenter

$$\mathfrak{k}\mathfrak{M} : \mathfrak{p}\mathfrak{M} = \mathfrak{c}'\mathfrak{M} : \mathfrak{M}\mathfrak{m}'.$$

§. 2.

Corporum similium soliditates sunt, ut cubi linearum homologarum, superficies autem sunt, ut quadrata linearum homologarum.

Etenim quodvis corpus C, cuius superficies sit S, in pyramides triangulares (saltem e puncto interno uno aut pluribus) dispesci potest; et aut summa basium superficies corporis erit, aut apicibus basium triangularium dato quovis propius acceptis summa pyramidum $\frown C$, summa basium vero $\frown S$.

Sint corpora similia A et B; applicatis iis, quæ (pagg. 77—78, 111 et 239) dicta sunt: quævis linea in A erit eidem homologæ in B per constantem α (eandem pro omnibus) multiplicatæ æqualis; et si bases triangulares in utroque semper simultaneo homologæ accipiantur, erit in A quodvis triangulum t ei in B homologo t' per α^2 multiplicato æquale; pyramidis p autem basi t insistentis altitudo erit altitudini pyramidis p' basi t' insistentis homologa, adeoque si altitudo ipsius p sit $a = \alpha a'$, erit

$$p=\frac{ta}{3}=\frac{\alpha^2t'\alpha a'}{3} \quad \text{et} \quad p'=\frac{t'a'}{3},$$

consequenter

$$p:p'=\frac{\alpha^3t'a'}{3}:\frac{t'a'}{3}=\alpha^3:1,$$

sive uti tertiæ potentiæ linearum homologarum.

Hinc etiam, si summa omnium pyramidum $p \frown P$, et summa omnium pyramidum $p' \frown P'$, erit

$$P:P'=\alpha^3:1.$$

Ita si summa omnium triangulorum $t \frown s$, et summa omnium triangulorum $t' \frown s'$, erit

$$s:s'=t:t'=\alpha^2:1.$$

Scholion. In pyramidibus similibus, quæ rectilineis insistunt, divisio in pyramides triangulares ex apice in utraque fieri potest. In sphæra fit e centro via limitis: atque hinc, (quum sphæræ similes sint), soliditates sunt uti tertiæ, superficies autem uti secundæ potentiæ radiorum. S sphæræ, cuius radius 1 est, superficies β, soliditas γ dicatur: erit sphæræ, cuius radius n est, superficies $n^2\beta$, soliditas $n^3\gamma$.

Prismata vero quævis, etsi modo dicto per divisionem e puncto interno in pyramides triangulares tractari queant: quum tamen factis ex altitudine in basim æqualia sint: si similia fuerint, sufficit bases altitudinesque quoad soliditatem considerare; nempe si alterutrius altitudo a sit, et basis b, alterius autem altitudo sit na: erit huius basis n^2b, et soliditas $n^2bna=n^3ab$, prioris autem est ab.

·3123.

Revolutio semicirculi circa diametrum parit sphaeram: cuius soliditas et superficies quærendæ veniunt. (Fig. 229.)

Sit quadratum 𝔄𝔅ℭ𝔇, et diagonalis 𝔇𝔅, ac quadrans 𝔄ℭ centro 𝔅 radio 𝔅𝔄, atque parallela quævis 𝔡𝔠 ad 𝔄𝔅: erit manifesto v (ubicunque scriptum est) $=\frac{1}{2}R$, adeoque trianguli 𝔣𝔠𝔅 crura 𝔣𝔠 et 𝔠𝔅 æqualia erunt. Dividatur porro 𝔅ℭ per n, et sit ex 𝔅 incipiendo versus ℭ recta 𝔣𝔠 pars eiusmodi; fiatque per $\mathfrak{f}$ parallela $\mathfrak{ef}$ ad $\mathfrak{AB}$, atque erigatur ex $\mathfrak{s}$ perpendicularis $\mathfrak{st}$ ad $\mathfrak{dc}$, et demittatur e puncto $\mathfrak{r}$, in quo $\mathfrak{ef}$ quadrantem secat, perpendicularis $\mathfrak{rg}$ ad $\mathfrak{ef}$, atque fiant perpendiculares $\mathfrak{hi}$ et $\mathfrak{kl}$. Revolvatur schema totum circa $\mathfrak{BC}$; describet quadrans $\mathfrak{AC}$ hemisphærium, quadratum $\mathfrak{ABCD}$ cylindrum, et $\triangle\mathfrak{DBC}$ ad $\mathfrak{C}$ rectangulum describet conum, eritque tam coni quam cylindri basis circulus, cuius radius æqualis radio r hemisphærii est, altitudo vero radius; per rectangula $\mathfrak{edcf}$, $\mathfrak{tscf}$, $\mathfrak{rgcf}$ et $\mathfrak{hicf}$, $\mathfrak{lkcf}$ autem describentur cylindri, quorum altitudo $\mathfrak{cf} = \frac{r}{n}$, bases vero sunt circuli radiorum r, $\mathfrak{sc}$, $\mathfrak{gc}$, $\mathfrak{ic}$, $\mathfrak{kc}$. ARCHIMEDES movendo planum e circulo per $\mathfrak{AB}$ descripto huic parallele, donec in $\mathfrak{DC}$ perveniat, sectiones simultaneas in cylindro, hemisphærio, conoque comparat, et reperiendo, quod (quasvis sectiones simultaneas intelligendo) sectio C in cylindro facta sit æqualis summæ sectionis c in cono factæ et sectionis s in hemisphærio factæ: concludit (omnes sectiones simultaneas accipiendo) cylindrum esse summæ coni et hemisphærii æqualem. Et hoc rite intelligendo, ut (Tom. I. pagg. 209 &) dictum est, germen calculi sublimioris continet.

Explicatio sequens est.

Soliditas cylindri dicatur A, soliditas sphæræ sit B, et soliditas coni sit K; dicaturque cylinder qui per $\mathfrak{edcf}$ describitur a, per $\mathfrak{tscf}$ descriptus sit s', per $\mathfrak{rgcf}$ scriptus sit s'', et per $\mathfrak{hicf}$ scriptus sit c'', ac per $\mathfrak{lkcf}$ scriptus dicatur c'; atque per $\mathfrak{rscf}$ scriptum (per $\mathfrak{rs}$ arcum intelligendo) sit b, et per $\mathfrak{hkcf}$ scriptum sit k.

In triangulo rectangulo $\mathfrak{scB}$ est

$$\mathfrak{sB}^2 = \mathfrak{sc}^2 + \mathfrak{cB}^2 = \mathfrak{sc}^2 + \mathfrak{ck}^2,$$

quia $\mathfrak{kc} = \mathfrak{cB}$. Atque hinc circulus radio $\mathfrak{Bs}$ scriptus est summæ circulorum radiis $\mathfrak{sc}$, $\mathfrak{kc}$ scriptorum æqualis, id est (quia $\mathfrak{sB} = \mathfrak{cd}$) erit $C = s + c$; et hinc $a = s' + c'$.

Dicatur B' summa omnium s', et summa omnium s'' sit B''; atque summa omnium c' sit K', et summa omnium c'' sit K''; summa pro quovis n omnium a est A, omnium b est B, omnium k est K; atque quum tam cylindri a, quam cylindri s' et c' numero eodem prodeant, et pro quibusvis simultaneis sit $a = s' + c'$, manifesto erit $A = B' + K'$.

Sed

$$B'+K''>B+K>B''+K';$$

quia

$$s'>b>s'' \quad \text{et} \quad c''>k>c'$$

adeoque, quum hoc de omnibus simultaneis valeat, est

$$B'>B>B'' \quad \text{et} \quad K''>K>K'.$$

Atque si $n \sim \infty$, fit

$$B'+K''-(B''+K') \sim 0,$$

quia $\frac{s'}{s''} \sim 1$, et $\frac{c'}{c''} \sim 1$; adeoque et

$$B+K-(B''+K') \sim 0,$$

id est

$$B''+K' \sim B+K.$$

Sed et $B' \sim B$, et $K' \sim K$; nam ex $\frac{s'}{s''}$ et $\frac{c'}{c''} \sim 1$, et $s'>b>s''$, atque $c''>k>c'$, fit etiam $\frac{s'}{b} \sim 1$, et $\frac{c'}{k} \sim 1$ (Tom I. pagg. 93 et 209 &). Consequenter

$$B'+K' \sim B+K=A.$$

Est autem $K=\frac{A}{3}$; nempe conus et cylinder eidem circulo maximo insistunt, et altitudo utriusque radius est: consequenter

$$B=A-K=\frac{2}{3}A;$$

atque tota sphæra diametri d fit $=\frac{d^3\pi}{6}$; nempe area circuli maximi est $\frac{d^2\pi}{4}$, et hemisphærium est

$$\frac{2}{3}\,\frac{d^2\pi}{4}\,\frac{d}{2}=\frac{d^3\pi}{3\cdot4},$$

et huius duplum est

$$\frac{d^3\pi}{6}=\frac{4r^3\pi}{3}.$$

Hinc item ARCHIMEDES reperit *superficiem S sphaerae quadruplo areae circuli maximi aequalem.*

Accipiantur nempe tria puncta in S, et iungantur rectis, ut fiat triangulum, et quodvis latus fiat trianguli novi basis cum apice novo in S, atque hoc semper porro continuetur, ita ut per triangula omnia demum superficies simplex e planis composita apicibus angulorum solidorum in S cadentibus exsurgat. Dicatur summa horum triangulorum S', fiantque hæ pyramidum apice communi in centro gaudentium bases, sitque pyramidum istarum summa p. Si cuiusvis harum pyramidum latera triangularia producantur, poterunt hæc per planum priori basi parallelum et ipsum S tangens tale secari, ut pyramis baseos novæ priore maior sit, et si pro quavis priorum pyramidum eiusmodi pyramis fiat, dicatur omnium novarum pyramidum summa P. Facile patet, quod $P-p \backsim 0$, si cuiusvis trianguli apices dato quovis propius accipiantur; est vero (sphæra B dicta),

$$P>B>p,$$

adeoque $B-p \backsim 0$; consequenter $p \backsim B$. Sed radio r dicto, poni potest

$$p=S'\frac{r-\omega}{3},$$

nam quamvis S' summa diversorum triangulorum esse possit, altitudo semper est radio minor; atque ex. gr.

$$\alpha(r-\lambda)+\beta(r-\varkappa)=(\alpha+\beta)(r-\omega)$$

poni potest, quia inde valor ipsius ω prodit.

Patet autem, quod $\omega \backsim 0$, adeoque si tum $S' \backsim S''$, ipsum $p \backsim S''\frac{r}{3}$; atque hinc, quum soliditas sphæræ antea fuerit $=\frac{(2r)^3\pi}{6}$, erit

$$\frac{4r^3\pi}{3}=S''\frac{r}{3};$$

et hinc

$$S''=4r^2\pi;$$

id est (per superficiem sphæræ limitem laterum planorum corporis inscripti intelligendo) erit superficies sphæræ quadruplo areæ circuli maximi æqualis. Aliquid tamen hanc eandem materiam concernens paulo inferius addetur.

Scholion 1. *Rete sphaerae* quidem e planis neutiquam construi potest, ut statim patebit; sed exhiberi quam proxime potest: nempe concipiatur (Fig. 230.) quadrans $\mathfrak{arq}$ in partes numero m dividi; sit centrum $\mathfrak{c}$, et revolvatur $\mathfrak{arq}$ circa $\mathfrak{qc}$; describet $\mathfrak{a}$ circulum maximum, basim coni recti apicem in polo $\mathfrak{q}$ habente; $\mathfrak{r}$ vero describet circulum priori parallelum, basim coni recti apicem in eodem $\mathfrak{q}$ habente; atque via chordæ $\mathfrak{ar}$ conus truncatus erit. Si iam tam huius coni truncati rete, quam uti se invicem chordæ m-tarum partium quadrantis usque ad polum excipiunt, retia conorum truncatorum per vias chordarum dictarum descriptorum construantur, atque ita uti se invicem excipiunt compingantur, manifesto quo maius m accipitur, eo minore errore sphæra exhibebitur.

Coni truncati per chordam $\mathfrak{ar}$ descripti rete prodit modo sequente: secet continuatio rectæ $\mathfrak{ar}$ continuationem rectæ $\mathfrak{cq}$ in $\mathfrak{p}$; fiatque centro $\mathfrak{p}$ radio $\mathfrak{pa}$ arcus $\mathfrak{ab}=2r\pi$, et eodem centro $\mathfrak{p}$ radio $\mathfrak{pr}$ fiat arcus $\mathfrak{rd}=2r'\pi$: erit $\mathfrak{rabd}$ rete coni truncati; nempe notandum est, quod basis coni, cuius apex $\mathfrak{q}$ et latus $\mathfrak{qa}$ erat, et basis coni, cuius apex $\mathfrak{p}$ et latus $\mathfrak{pa}$ est, congruant, quum utrumque circulus sit, peripheria longitudinis eiusdem gaudens.

Innotescit autem tam $\mathfrak{ap}$ quam r', sive per constructionem, sive per calculum, quum

$$\mathfrak{rr}' = \sin.\mathfrak{qr} = \cos.\mathfrak{ar}$$

sit, et anguli, quos latera polygoni ex $\mathfrak{a}$ incipientis cum perpendicularibus ad $\mathfrak{qc}$ missis faciunt, facile computentur. Idem vero de quovis latere ad sequens continuari posse patet: ex. gr. conus truncatus lateris $\mathfrak{rt}$ generatur per arcum $=2\pi.\mathfrak{tt}'$, centro $\mathfrak{p}'$ radio $\mathfrak{p}'\mathfrak{t}$ scriptum, et arcum $=2\pi.\mathfrak{rr}'$ centro $\mathfrak{p}'$ radio $\mathfrak{p}'\mathfrak{r}$ scriptum. Constructi autem hi coni truncati, uti se invicem excipiunt, conglutinari et omnia intra bases quadamtenus expleri quoad praxim possunt.

Aut circulus maximus dividitur in quo plures partes æquales, et segmenta a quavis parte ad polos exstruuntur æqualia; si plana per axem et puncta divisionis ponantur: manifesto conorum truncatorum bases omnes in totidem partes divisæ, segmenta appropinquantia præbebunt.

Plures huius modos ad praxim magis pertinentes vulgaresque referre non huius loci est.

Quod reipsa autem e plano segmentum tale construi nequeat, sic patet: sit recta $\mathfrak{a}'\mathfrak{q}'$ in quadrantem $\mathfrak{aq}$ flexa, ita ut $\mathfrak{q}'$ in polum $\mathfrak{q}$ et $\mathfrak{a}'$ in $\mathfrak{a}$ cadat; planum $\mathfrak{q}'\mathfrak{de}$ quoque simul incurvabitur; atque etiam $\mathfrak{de}$ per se circa coni latus $\mathfrak{qa}$ incurvari posset, ut in circulum maximum C, cuius polus $\mathfrak{q}$ est, cadat; pariter seorsim quivis arcus $\mathfrak{fg}$ posset in arcum circuli paralleli per ei respondens $\mathfrak{r}$ euntis incurvari; at si hoc simul fieri debeat, in motu flexus $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{r}$, $\mathfrak{q}$ simul quiescere deberent, quamvis non in recta sint.

Pariter patet, si prius $\mathfrak{de}$ incurvetur, ut in C cadat; fiet enim tum figura plana $\mathfrak{q}'\mathfrak{de}$ pars superficiei cylindricæ aut conicæ; atque tum novam incurvationem, ut $\mathfrak{a}'\mathfrak{q}'$ in $\mathfrak{aq}$ cadat, fieri non posse pariter patet; quia primus motus circa $\mathfrak{de}$ fiet, et nulla portio plani ex $\mathfrak{de}$ incipientis manente arcu $\mathfrak{de}$ moveri poterit, quum $\mathfrak{de}$ non sit recta, adeoque axis motus esse nequeat.

Generaliter nulla flexio superficiei esse potest, nisi rectæ se invicem continuo excipiant, atque motus circa illas fiat, uti se invicem continuo excipiunt.

Scholion 2. Solet in praxi hexapeda in 6 pedes, pes in 12 pollices, pollex in 12 lineas primas, linea μ-ta in 12 lineas $\mu+1$-tas dividi; ita ut $25^\circ\, 5'\, 7''$ denotet 25 hexapedas 5 pedes 7 pollices; at eandem subdivisionem tam in areis quam in soliditatibus retinere (ob numeros minores) visum est: nempe ubi de areis sermo est, *pes quadratus* significat sextam partem quadrati, cuius latus hexapeda est, et huius pars duodecima dicitur *pollex quadratus* &c, ita ut pes quadratus sit rectangulum, cuius altitudo unus pes est, pollex rectangulum altitudinis unius pollicis &c sit, semper hexapedam pro basi accipiendo; ita cubi, cuius latus hexapeda est, sexta pars *pes cubicus*, et huius duodecima pars *pollex cubicus* &c audit; adeoque pes cubicus est parallelepipedum, cuius altitudo pes, et pollex cubicus parallelepipedum, cuius altitudo pollex &c est, pro basi semper quadratum, cuius latus hexapeda est, intelligendo.

Variæ hinc tam areas quam soliditates computandi methodi sunt, quibus computata sensu dicto exhibeantur. Simplicissima videtur sequens.

Sit unitas duobus hexapedis æqualis, *pertica* dicta; erunt in pertica pedes 12, in pede pollices 12 et ita porro; atque quum computatio areæ per factum e duobus factoribus, soliditas vero e tribus prodeat, res ad multiplicationem redit: quæ si pro 10 et 11 signa darentur, *numeratione duodecadica* facile peragi, et factum ad linguam communem dictam transferri posset, modo sequente. Scribantur factores ita, ut numerus hexapedarum numero perticarum exprimatur; ex. gr. pro $101^{\circ}\ 5'\ 10''$ scribatur $50,\ 11'\ 10''$; nempe absque eo, ut pro 10 et 11 signa pecularia ponerentur, possunt pedes, pollices & imo et perticæ, intervallis distincta, decadice designari, ut in exemplo allato 50 unitates, 11 duodecimæ, et unius duodecimæ 10 duodecimæ denotentur; imo factum quodvis partiale e termino in terminum decadice quæri scribique potest.

Ita scriptis binis areæ factoribus, multiplicatio in numeratione duodecadice peragenda est, ita ut in decadica, dummodo heic 12 ipsius 10 vicem subeat; notando, quod in productorum partialium postea addendorum linea suprema prius tot loca notarum duodecimalium signanda sint, quot notæ duodecimales in factore utroque simul sunt, atque his anteponendum comma sit, ante quod ad lævam numerus unitatum sequitur; atque numeri duodecadum additio ad lævam nonnisi usque ad locum commate insignitum fiat continueturve. Demum vero factum post comma per 2, ante comma autem per 4 multiplicetur, ea cum restrictione, ut a dextra incipiendo usque ad terminum, qui post comma est, translatio duodecadum fiat, in termino post comma ad dextram autem numerus senariorum addatur termino, qui e multiplicatione per 4 termini ante comma prodit. Si vero soliditas quæratur: factum, quod e duobus factoribus prodit, ante multiplicationem per 4 ante comma et post comma per 2, per tertium factorem eodem modo ut dictum est, (iuxta systema duodecadicum) multiplicetur; et factum plane ut antea tractetur, eo tantum discrimine, quod termini post comma per 4, et terminus ante comma per 8 multiplicentur.

Nempe una pertica quadrata continet 4 hexapedes quadratas, et una pertica cubica 8 hexapedas cubicas continet: atque hinc pars duodecima perticæ quadratæ est æqualis tertiæ parti hexapedæ quadratæ, adeoque 2 pedibus sensu dicto; ita duodecimæ duodecima 2 pollices facit, quod porro continuari patet; quivis igitur terminus facti e duobus factoribus prodeuntis post comma per 2 ante comma per 4 multiplicandus est; at quum 6 pedes sensu dicto hexapedam quadratam faciant, numerus senariorum termino ante comma per 4 multiplicato additur. Duodecima scilicet perticæ quadratæ

$$= \frac{4^\circ}{12} = \frac{1^\circ}{3} = \frac{6'}{3} = 2',$$

et huius duodecima

$$= \frac{2'}{12} = \frac{2 \cdot 12''}{12} = 2'' \text{ \&c.}$$

Et perticæ cubicæ duodecima

$$= \frac{8^\circ}{12} = \frac{4^\circ}{6} = 4 \cdot \frac{1^\circ}{6} \cdot$$

Exemplis tamen sequentibus etiam illustrare haud supervacuum erit; notando, quod non solum ut dictum est, termini singuli, etsi novenarium excedant, decadice scribantur, et termini quivis decadice multiplicentur, sed etiam divisio per 12 decadice peragatur; quod omnino facile fit, quum duplum, triplum, ... usque ad nontuplum ipsius 12 memoria facile retineatur.

Sint areæ alicuius dimensiones per se invicem multiplicandæ $6^\circ\, 2'\, 7''$ et $8^\circ\, 1'\, 8''$, et sint soliditatis dimensiones $6^\circ\, 2'$, $8^\circ\, 5'$ et $4^\circ\, 2'$; fiet

$$\begin{array}{rrrrr}
 & & 3, & 2 & 7 \\
 & & 4, & 1 & 8 \\
\hline
0, & 2 & 1 & 8 & 8 \\
0, & 3 & 2 & 7 & \\
12, & 10 & 4 & & \\
\hline
13, & 3 & 8 & 3 & 8 \\
4 & & & & 2 \\
\hline
53^\circ & 1' & 4'' & 7''' & 4''''
\end{array}
\qquad\qquad
\begin{array}{rrrr}
 & 3, & 2 & \\
 & 4, & 5 & \\
\hline
 & 1, & 3 & 10 \\
 & 12, & 8 & \\
\hline
 & 13, & 11 & 10 \\
 & 2, & 2 & \\
\hline
 & 2, & 3\ 11 & 8 \\
 & 27, & 11 & 8 \\
\hline
 & 30, & 3\ 7 & 8 \\
 & 8 & & 4 \\
\hline
 & 242^\circ & 2'\ 6'' & 8'''
\end{array}$$

Sit etiam exemplum pro divisione per 12, nonnisi usque ad locum commatis extendenda. Sit una dimensio $303^\circ\ 5'$, altera $3^\circ\ 4'$

$$\begin{array}{rrr}
151, & 11 & \\
1, & 10 & \\
\hline
126, & 7 & 2 \\
151, & 11 & \\
\hline
278, & 6 & 2 \\
4 & & 2 \\
\hline
1114^\circ & 0' & 4''
\end{array}$$

Scholion 3. Si duo prismata P et p fuerint, et prioris altitudo A basis B, posterioris altitudo a basis b fuerit: erit

$$P = AB \quad \text{et} \quad p = ab;$$

adeoque

$$P : p = AB : ab,$$

atque si $P = p$, erit

$$A : a = b : B,$$

et si $A = a$, erit

$$P : p = B : b,$$

et si $B = b$, erit

$$P : p = A : a.$$

Eritque, si $A = a$ et bases similes atque L et l lineæ homologæ sint,

$$P : p = L^2 : l^2.$$

Idem ad pyramidem applicari evidens est.

Scholion 4. Transmutari quoque corpus quodpiam in aliud potest; si ex. gr. sphæra diametri d in pyramidem altitudinis a baseos x mutanda sit: erit

$$\frac{d^3\pi}{6} = \frac{xa}{3};$$

atque hinc

$$x = \frac{d^3\pi}{2a}.$$

Atque basis x computata, item sive in circulum sive in aliam figuram converti potest. Nec his amplius immorari necesse est; quum perspectis iis, quæ dicta sunt, Tyrones ipsi omissa reperire queant.

·3124.

De hoc in Tomo primo dicta sufficiant.

·313.

Si planum cum superficierum relatarum aliqua punctum commune habeat: oriuntur *sectiones coni*, *cylindri*, *sphaerae* &.

§. 1.

Si planum quamvis infinitum apicem solum cum superficie coni commune habeat, sectio punctum est; si adhuc unum commune habeat, sectionem aut duæ rectæ se invicem in apice coni secantes efficient, aut sectio latus coni erit. Si planum secans basi parallelum fuerit, erit sectio figura basi similis, orieturque *conus truncatus rectus circularis*, si conus rectus et basis circulus fuerit: quæ omnia facile patent.

Si (Fig. 231.) cylinder rectus basi B parallele secetur, sectio $b=B$ erit; atque si per planum ad angulum u secetur, erit $F=G$ (tam quoad superficiem quam quoad soliditatem); adeoque etiam $E+F$ innotescit, quum F sit $=\frac{F+G}{2}$, adeoque

$$E+F=B\alpha+B\frac{\beta}{2}=\frac{2B\alpha+B\beta}{2}=B\frac{A+\alpha}{2};$$

·3124. Sectionum coni cum plano statim sequentium revolutiones pariunt *paraboloidem*, *ellipsoidem* et *hyperboloidem*.

·313. Motus plani circa axem, punctum aliquod formæ cuiuspiam earum, quæ prodierunt, complectentem.

·3131. Si coni verticales fuerint, oriuntur *sectiones conicae*.

·3132. Forma secta etiam Cylinder aut

·3133. Pyramis vel

·3134. Prisma esse potest.

·3135. Si forma hæc *sphaera* fuerit, et

·31351. Plana per centrum eant: oritur in superficie sphæræ *triangulum sphaericum*; quæ e datis sufficientibus computare docet *Trigonometrica sphaerica*.

ubi si de soliditate sermo fuerit, area ipsius B, si superficies quæratur, peripheria accipienda est.

§. 2.

Coni truncati, nempe partis coni recti inter basim et planum basi parallelum, *superficies* exclusis basibus est *lateri per peripheriam illam multiplicatae* æqualis, *quae cum perpendiculari e medio lateris ad axem missa tanquam radio describitur.* Sit nempe (Fig. 232.) rete coni truncati $\mathfrak{abed}$, et coni totius sit $\mathfrak{pde}$, atque latus coni truncati sit $\mathfrak{ad}$, et eius medium $\mathfrak{c}$; erit radiis r et r' descriptis circulis, area annuli (pag. 108)

$$= (r^2 - r'^2)\pi = (r + r')(r - r')\pi =$$
$$= (r - r')\left(\frac{r + r'}{2}\right)2\pi = (r - r').\left(r' + \frac{r - r'}{2}\right)2\pi.$$

Est vero $r - r'$ latus coni truncati, $r' + \frac{r - r'}{2}$ vero est $\mathfrak{pc}$, quod per 2π multiplicatum dat peripheriam radii $\mathfrak{pc}$.

Hinc idem de sectore patet; si nempe is n-ta pars totius fuerit, erit et pars annuli in sectore pars n-ta annuli totius. Unde res in aperto est.

§. 3.

Soliditas coni per planum basi parallelum *truncati* e basibus et altitudine prodit sic. Sit (Fig. 233.) data *basis inferior B, superior b*; atque *a altitudo coni truncati.* Sit coni superius absecti altitudo x. Erit

$$B : b = (a + x)^2 : x^2.$$

Hinc autem est

$$Bx^2 = b\,(a + x)^2,$$

et hinc

$$x^2 - \frac{2abx}{B-b} - \frac{a^2b}{B-b} = 0,$$

adeoque

$$x = \frac{ab}{B-b} + \sqrt{\frac{a^2b^2}{(B-b)^2} + \frac{a^2b}{B-b}} =$$
$$= \frac{ab + a\sqrt{b^2 + b(B-b)}}{B-b} = \frac{a(b + \sqrt{Bb})}{B-b}.$$

Itaque

$$a+x=\frac{Ba-ba+ab+a\sqrt{Bb}}{B-b}=\frac{a(B+\sqrt{Bb})}{B-b}.$$

Est vero conus truncatus æqualis residuo coni totius, subtracto superiore, adeoque fit

$$=\frac{B(a+x)}{3}-\frac{bx}{3}=\frac{a(B+\sqrt{Bb})B-a(b+\sqrt{Bb})b}{3(B-b)}=$$

$$=\frac{a(B^2-b^2+\sqrt{Bb}(B-b))}{3(B-b)}=\frac{a(B+b+\sqrt{Bb})}{3}.$$

Et posterius ad conum obliquum etiam, imo et pyramidem quamvis etiam obliquam, dummodo sectio per planum basi parallelum fiat, applicari, atque de quavis pyramide valere evidens est.

Scholion 1. Si vero l latus lineare pyramidis modo dicto truncatæ (Fig. 234.), atque β et β' sectiones basium cum plano per apicem factæ data fuerint: reperietur L latus pyramidis completæ ex

$$\beta:\beta'=l+x:x;$$

est enim

$$\beta x=\beta' l+\beta' x,$$

et hinc

$$x=\frac{\beta' l}{\beta-\beta'},$$

adeoque

$$L=l+x=\frac{\beta l}{\beta-\beta'},$$

quod et de cono valet.

Scholion 2. Notandum etiam est, quod

1. pyramidis truncatæ, si basis figura regularis, et recta per centra basium ad eas perpendicularis fuerit, superficies (præter bases) sit summa trapeziorum æqualium; adeoque unus factor altitudo trapezii, alter autem sit perimeter sectionis plani ad basim per lateris linearis meditullium paralleli.

2. In prismate vero qualecunque fuerit, perimeter sectionis plani ad latus lineare perpendicularis multiplicatur per latus lineare, ut super-

ficies (præter bases) prodeat: nam si prisma iuxta rectam $\mathfrak{A}\mathfrak{a}$ exstructum sit, in quovis parallelogrammo latus lineare $= \mathfrak{A}\mathfrak{a}$ pro basi accipi potest, et altitudo erit sectio parallelogrammi cum plano ad $\mathfrak{A}\mathfrak{a}$ perpendiculari. Idem de cylindro obliquo etiam valere patet.

Scholion 3. Si omnia dolia similia conficerentur, tum nonnisi certa dimensio dolii certæ quantitatis nota esse deberet, ut cuiusvis alius dolii dimensione homologa cum priore comparata, vasis posterioris quantitas innotescat: si ex. gr. prioris dolii quantitas q, dimensio certa d, et posterioris quantitas Q, dimensio D esset, fieret

$$d^3 : D^3 = q : Q.$$

Manifesto autem et alia dimensio tentanda est, ut eo certius fiat idem pluribus modis comprobatum.

Quum vero hoc non sit: potest dolium ordinatis e linea per supremum eius punctum horizontali demissis, in conos truncatos quantumvis proxime dividi; et sive constructione sive calculo, tam plenum quam usque ad planum certum horizontale repletum, computari; ratione etiam crassitudinis ligni habita, quæ si non eadem ubique sit, errorem aliquem inducit. (Fig. 235.)

Coni truncati, cuius bases segmenta sunt, in casu si dolia plena non fuerint, soliditates (per pag. 261) innotescunt; nempe bases per plana verticalia liquidum secantia efformantur; et fiunt pyramides truncatæ, e basibus earumque distantia eodem modo computandæ.

Scholion 4. Sit (Fig. 236.) $\mathfrak{ab}$ latus polygoni regularis n laterum ex $\mathfrak{q}$ incipientis, radius r quadrantis $\mathfrak{qac}$, et $\mathfrak{dD}$ sit perpendicularis e chordæ $\mathfrak{ab}$ meditullio ad radium $\mathfrak{q}\mathfrak{C}$, et $\mathfrak{a}\mathfrak{A}$, $\mathfrak{b}\mathfrak{B}$ pariter sint ad radium $\mathfrak{q}\mathfrak{C}$ perpendiculares, et $\mathfrak{ap}$ perpendicularis ad $\mathfrak{b}\mathfrak{B}$. Fient triangula $\mathfrak{C}\mathfrak{D}\mathfrak{d}$ et $\mathfrak{abp}$ (pag. 69) similia (propter latera reciproce perpendicularia), adeoque $u' = u$; itaque

$$\mathfrak{C}\mathfrak{d} : \mathfrak{d}\mathfrak{D} = \mathfrak{ab} : \mathfrak{ap},$$

et hinc

$$\mathfrak{C}\mathfrak{d} . \mathfrak{ap} = \mathfrak{d}\mathfrak{D} . \mathfrak{ab} \quad \text{et} \quad 2\pi\mathfrak{C}\mathfrak{d} . \mathfrak{A}\mathfrak{B} = 2\pi\mathfrak{d}\mathfrak{D} . \mathfrak{ab}.$$

Sed revoluto schemate circa $\mathfrak{A}\mathfrak{C}$, posterius est superficies coni truncati (exclusis basibus), cuius latus $\mathfrak{ab}$ et altitudo $\mathfrak{ap} = \mathfrak{AB}$ est; prius autem nempe $2\pi\mathfrak{Cd}.\mathfrak{AB}$ est superficies cylindri (exclusis basibus), cuius altitudo $\mathfrak{AB}$, radius peripheriæ baseos autem $\mathfrak{Cd}$ est. Atque pro quovis alio polygoni latere pariter superficies coni truncati, per chordam descripti, erit superficiei cylindri eius æqualis, cuius altitudo est pars radii $\mathfrak{qC}$ inter perpendiculares ad eum ab extremitatibus lateris missas, basis vero est æqualis circulo, cuius radius æqualis perpendiculari e centro ad chordam missa, nempe $\mathfrak{Cd} \perp \mathfrak{ab}$, quia $\mathfrak{d}$ meditullium chordæ est. Dicatur hæc nomine generali r'; est nempe perpendicularis e centro ad quodvis latus polygoni regularis eiusdem æqualis.

Summa superficierum conorum truncatorum dicatur s'. Si n semper duplicetur, atque uti chordæ se invicem a $\mathfrak{b}$ usque ad $\mathfrak{a}$ excipiunt, coni truncati per revolutionem schematis generati accipiantur: erit $s' = 2\pi r'.\mathfrak{AB}$; quod manifesto $\frown 2\pi r.\mathfrak{AB}$, quia $r' \frown r$. Consequenter *superficies zonae aequatur peripheriae circuli maximi per altitudinem zonae multiplicatae.*

Et si hoc ad totum quadrantem extendatur, fiet superficies hemisphærii peripheriæ circuli maximi per radium multiplicatæ æqualis: scilicet erit $= 2\pi r.r$, et totius sphæræ superficies $= 4r^2\pi$ (ut antea).

Scholion 5. Per latus ultimum ad $\mathfrak{q}$ quidem non conus truncatus, sed conus apice ad $\mathfrak{q}$ gaudens describitur; at coni recti quoque superficies (exclusa basi) æquatur lateri per peripheriam illam multiplicato, quæ per perpendicularem e meditullio lateris ad axem missam describitur; sit enim latus coni adeoque radius sectoris rete superficiei præbentis r, et arcus ad imum radii sit a; erit e medio ipsius r arcus $= \frac{a}{2}$, et area sectoris

$$= \frac{r}{2} \cdot a = \frac{a}{2} \cdot r.$$

Unde patet et segmentum sphæræ e $\mathfrak{q}$ incipiendo esse peripheriæ circuli maximi per altitudinem multiplicatæ æquale.

Scholion 6. Et superficies coni truncati limes trapeziorum est, quæ, a certo latere coni incipiendo basibus inscribendo polygona regularia totidem laterum, oriuntur, et quodvis trapeziorum horum in duo triangula apices in superficie habentia dispesci potest; atque limitem summæ triangulorum per superficiem curvam intelligi dictum est, sicubi cum plano ut *quantitas respectiva* comparatur (Tom. I. pag. 299).

Scholion 7. Appendicis Auctor (*Geometra acutissimus*), in opusculo singulari attentione digno (nec ratione voluminis æstimando), non solum independentem ab axiomate XI Euclideo Geometriam sagacitate summa docuit primus, sed ab eodem independenter Trigonometriam sphæricam stabilivit, imo etiam superficies sphæricas esse ut secundæ diametrorum potentiæ; atque superficiei sphæræ quantitatem deduxit.

§. 4.

Sectiones coni autem (ut pag. 152 dictum est) *lineas secundi ordinis esse*, et quidem si planum secans P lateri coni parallelum fuerit, *parabolam*, si P e situ parallelo versus latus dictum moveatur, *ellipsim*, si retrorsum moveatur, *hyperbolam in cono verticali utroque*, et quidem e duabus curvis æqualibus (in duobus conis verticalibus) constantem, esse sic patet. Sit (Fig. 237.) planum tabulæ T planum per axem conorum verticalium, quorum anguli verticales n sint; sitque planum P prius parallelum coni lateri $\mathfrak{f}\mathfrak{B}$, et perpendiculare ad planum tabulæ, sitque $\mathfrak{A}\mathfrak{P}$ cum hoc sectio ipsius P; fiatque planum p perpendiculare ad axem per $\mathfrak{P}$, sitque sectio $\mathfrak{B}\mathfrak{C}$ ipsius p cum plano tabulæ; erit sectio ipsius p cum superficie coni supra planum tabulæ semicirculus, in quo perpendicularis ex $\mathfrak{P}$ ad $\mathfrak{B}\mathfrak{C}$ dicatur y, cui correspondens $\mathfrak{A}\mathfrak{P}$ dicatur x; nempe in recta $\mathfrak{A}\mathfrak{P}$ poterit $\mathfrak{P}$ ubivis sumi, et dicenda ubique valebunt; erit manifesto y perpendicularis ad planum tabulæ adeoque ad x. Sit circuli radius r; $\triangle\mathfrak{f}\mathfrak{B}\mathfrak{C}$ æquicrurum est, adeoque anguli v ad basim sunt æquales, et

$$v = \frac{2R - n}{2} = R - \frac{1}{2}n,$$

et hinc

$$\sin. v = \cos. \frac{1}{2}n.$$

Porro in triangulo $\mathfrak{A}\mathfrak{P}\mathfrak{C}$ est

$$x : 2r - z = \sin. v : \sin. n = \cos. \frac{1}{2} n : \sin. n.$$

Et hinc

$$2r - z = \frac{x \sin. n}{\cos. \frac{1}{2} n}.$$

Et si ex $\mathfrak{A}$ ipsi $\mathfrak{BC}$ parallela $\mathfrak{A}\mathfrak{b}'$ fiat, erit

$$c : z = \sin. v : \sin. n = \cos. \frac{1}{2} n : \sin. n ;$$

adeoque

$$z = \frac{c \sin. n}{\cos. \frac{1}{2} n}.$$

Est autem in semicirculo

$$y^2 = (2r - z) z ;$$

consequenter substitutis valoribus ipsorum $2r - z$ et z, erit

$$y^2 = \frac{x \sin. n}{\cos. \frac{1}{2} n} \cdot \frac{c \sin. n}{\cos. \frac{1}{2} n} = \frac{cx \sin.^2 n}{\cos.^2 \frac{1}{2} n}.$$

Et hæc æquatio parabolæ pro parametro

$$\frac{c \sin.^2 n}{\cos.^2 \frac{1}{2} n}$$

est; atque parabola cuiusvis parametri q prodit, si

$$c = \frac{q \cos.^2 \frac{1}{2} n}{\sin.^2 n}$$

accipiatur; nempe is valor ipsius c accipi potest, proditque ex

$$q = \frac{c \sin.^2 n}{\cos.^2 \frac{1}{2} n}$$

posito.

Sit (Fig. 237*.) $\wedge m > n$, et sit $\mathfrak{A}'\mathfrak{P}$ nunc abscissa x ex $\mathfrak{A}'$ incipiens (ut prius ex $\mathfrak{A}$ erat). Erit tum

$$z = z + k - k;$$

est vero

$$z + k = \frac{c \sin. n}{\cos. \frac{1}{2} n} \quad \text{et} \quad k = \frac{x \sin. (m-n)}{\cos. \frac{1}{2} n};$$

nam in triangulo $\mathfrak{A}\mathfrak{P}\mathfrak{A}'$ externus

$$m = n + m - n,$$

et in triangulo $\mathfrak{A}'a\mathfrak{P}$ est

$$x : k = \sin. u : \sin. (m-n) = \sin. v : \sin. (m-n),$$

(quia angulus deinceps ipsius u est $= v$). Unde

$$k = \frac{x \sin. (m-n)}{\sin. v} = \frac{x \sin. (m-n)}{\cos. \frac{1}{2} n}.$$

Atque hinc substitutis valoribus ipsorum $z + k$ et k, erit

$$z = z + k - k = \frac{c \sin. n - x \sin. (m-n)}{\cos. \frac{1}{2} n}.$$

Porro in triangulo $\mathfrak{A}'\mathfrak{P}\mathfrak{C}$ est

$$2r - z : x = \sin. m : \sin. v = \sin. m : \cos. \frac{1}{2} n,$$

adeoque

$$2r - z = \frac{x \sin. m}{\cos. \frac{1}{2} n}.$$

Atque hinc

$$y^2 = z(2r - z) = \frac{c \sin. n - x \sin. (m-n)}{\cos. \frac{1}{2} n} \cdot \frac{x \sin. m}{\cos. \frac{1}{2} n}$$

$$= \frac{xc \sin. n \sin. m}{\cos.^2 \frac{1}{2} n} - \frac{x^2 \sin. (m-n) \sin. m}{\cos.^2 \frac{1}{2} n};$$

quæ pro axe maiore

$$a=\frac{c\sin. n}{\sin.(m-n)}$$

et parametro

$$\beta=\frac{c\sin. n\sin. m}{\cos.^2\frac{1}{2}n}$$

aequatio ellipseos est.

Nempe ex

$$\frac{\beta}{a}=\frac{c\sin. n\sin. m}{a\cos.^2\frac{1}{2}n}=\frac{\sin.(m-n)\sin. m}{\cos.^2\frac{1}{2}n}$$

sequitur

$$a=\frac{c\sin. n}{\sin.(m-n)}\quad\text{atque}\quad c=\frac{a\sin.(m-n)}{\sin. n}.$$

Si $\mathfrak{a}'\mathfrak{q}\parallel\mathfrak{f}\mathfrak{b}$, et $\mathfrak{a}'\mathfrak{b}'\parallel\mathfrak{b}\mathfrak{c}$, atque $\mathfrak{a}'\mathfrak{p}$ sit x, et $m<n$ sit (Fig. 237**. supra $\mathfrak{f}$), et planum p antea ad T in $\mathfrak{BC}$ perpendiculariter insistens nunc ipsi T in $\mathfrak{b}\mathfrak{c}$ insistat perpendiculariter: erit tum

$$z=h+k\quad\text{atque}\quad c:h=\sin. v:\sin. n,$$

adeoque

$$h=\frac{c\sin. n}{\sin. v}=\frac{c\sin. n}{\cos.\frac{1}{2}n};$$

porro in triangulo $\mathfrak{a}'\mathfrak{p}\mathfrak{q}$ est $\wedge\mathfrak{p}\mathfrak{a}'\mathfrak{q}=n-m$, quia $\wedge\mathfrak{c}\mathfrak{a}'\mathfrak{q}=n$ (propter $\mathfrak{a}'\mathfrak{q}\parallel\mathfrak{f}\mathfrak{b}$); atque est

$$x:k=\sin. v:\sin.(n-m);$$

adeoque

$$k=\frac{x\sin.(n-m)}{\sin. v}=\frac{x\sin.(n-m)}{\cos.\frac{1}{2}n}.$$

Porro in triangulo $\mathfrak{a}'\mathfrak{p}\mathfrak{c}$ est

$$2r-z:x=\sin. m:\sin. v,$$

atque hinc

$$2r-z=\frac{x\sin. m}{\sin. v}=\frac{x\sin. m}{\cos.\frac{1}{2}n}.$$

Consequenter (ut antea)

$$y^2 = z(2r - z) = (h + k)(2r - z)$$
$$= \left(\frac{c \sin. n}{\cos. \frac{1}{2} n} + \frac{x \sin. (n - m)}{\cos. \frac{1}{2} n}\right) \frac{x \sin. m}{\cos. \frac{1}{2} n} =$$
$$= \frac{c \sin. n \sin. m}{\cos.^2 \frac{1}{2} n} x + \frac{\sin. (n - m) \sin. m}{\cos.^2 \frac{1}{2} n} x^2;$$

quæ *aequatio hyperbolae* est pro parametro

$$\gamma = \frac{c \sin. n \sin. m}{\cos.^2 \frac{1}{2} n},$$

et axe primo

$$a = \frac{c \sin. n}{\sin. (n - m)}.$$

Nempe ex

$$\gamma = \frac{c \sin. n \sin. m}{\cos.^2 \frac{1}{2} n},$$

simul coefficientem ipsius x ipsi $\frac{\gamma}{a}$ ponendo æqualem, erit

$$\frac{\sin. (n - m) \sin. m}{\cos.^2 \frac{1}{2} n} = \frac{c \sin. n \sin. m}{a \cos.^2 \frac{1}{2} n};$$

atque hinc

$$\sin. (n - m) = \frac{c \sin. n}{a},$$

et

$$c = \frac{a \sin. (n - m)}{\sin. n} \quad \text{et} \quad a = \frac{c \sin. n}{\sin. (n - m)}.$$

§. 5.

Estque sectio in cono verticali facta priori æqualis.

Denotentur enim (abhinc usque ad pag. 273) sinus angulorum per nomina angulorum accento insignita; ex. gr. $\sin. n$ denotetur per n', et $(n - m)'$ denotet sinum anguli $(n - m)$, ita v' erit $= \sin. v = \cos. \frac{1}{2} n$.

Si iam (Fig. 238.) in cono superiore sectio per $\mathfrak{dp}$, in inferiore autem continuatio eius per $\mathfrak{DP}$ fuerit, dicanturque M anguli verticales ad $\mathfrak{D}$: erit

$$c : C = M' : m' = (n-m)' : m',$$

(nempe $M = n - m$); itaque

$$C = \frac{cm'}{(n-m)'}.$$

Est vero (ut in præcedentibus)

$$y^2 = \frac{Cn'M'x + (n-M)'M'x^2}{v'^2},$$

quia $n > M$, (nempe externus interno opposito maior). Substituendo autem valores ipsorum C et M, fit

$$y^2 = \frac{cm'.n'.(n-m)'x}{(n-m)'v'^2} + \frac{m'(n-m)'x^2}{v'^2} = \frac{cm'n'x}{v'^2} + \frac{m'(n-m)'x^2}{v'^2},$$

uti in §. 4.

Scholion 1. Sit (Fig. 239. I.) cuiusvis rectæ datæ $\mathfrak{DB}$ meditullium $\mathfrak{C}$, sitque ad angulum quemvis u recto minorem recta $\mathfrak{Cf}$; ducanturque e quovis rectæ $\mathfrak{Cf}$ puncto $\mathfrak{f}$ rectæ $\mathfrak{fD}$, $\mathfrak{fB}$; in triangulis $\mathfrak{DCf}$ et $\mathfrak{BCf}$ est latus $\mathfrak{fC} = \mathfrak{fC}$, latus $\mathfrak{CD} = \mathfrak{CB}$, angulus interceptus u autem est altero intercepto deinceps posito minor, quia u (per hypothesim) acutus est; itaque $\mathfrak{fB} < \mathfrak{fD}$ est. Fiat $\mathfrak{fE} = \mathfrak{fD}$, et $\mathfrak{DE}$ dicatur A; atque translato schemate (in Fig. 239. II.), et tabulæ plano C dicto, erigatur ex A planum B ad C perpendiculare, fiatque in B ad axem A pro parametro $Q = \frac{Av'^2}{m'\omega'}$ ellipsis; erit recta e meditullio ipsius A ad $\mathfrak{f}$ ducta perpendicularis ad B, et simul axis coni recti per complexum rectarum ex omnibus ellipseos punctis ad apicem $\mathfrak{f}$ ductis efformati; eritque sectio huius coni, per planum P (ex $D = \mathfrak{DB}$) ad C perpendiculare facta, circulus diametri D; atque coni ex apice $\mathfrak{f}$ huic circulo insistentis axis (nempe recta ex apice $\mathfrak{f}$ ad $\mathfrak{C}$ centrum circuli) efficiet cum plano circuli tanquam basi angulum u; est enim basis hæc in plano P, et C planum tabulæ, in quod axis dictus cadit, ad P perpendiculariter positum est, quia P ad C (per hypothesim) perpendiculare est.

Nam moveatur planum ex B sursum ipsi A parallele; quocunque venerit, ex. gr. in planum b ad C ex $\mathfrak{de}$ perpendiculare, sectio eius cum cono erit ellipsis inferiori similis. Ellipseos huius axis (per $\mathfrak{de}$ repraesentatus) dicatur generaliter a, et parameter eius dicatur q, sitque $\mathfrak{Bp}$ abscissa x; et quæratur y nempe sectio plani P cum ellipsi, in qua planum b conum secat; est y tam ad D quam ad a nempe ad $\mathfrak{de}$ perpendicularis, quia sectio duorum planorum P et b ad tertium C perpendicularium est.

Eritque $A:a=Q:q$ (pag. 161), adeoque

$$q=\frac{aQ}{A}.$$

Estque

$$a=z+a-z=\frac{cn'-x\omega'+xm'}{v'};$$

quia et hic (ut pag. 267)

$$z=\frac{cn'-x\omega'}{v'} \quad \text{et} \quad a-z=\frac{xm'}{v'},$$

nimirum

$$v'=\cos.\frac{1}{2}n \quad \text{et} \quad \omega'=(m-n)'.$$

Est igitur

$$q=\frac{cn'-x\omega'+xm'}{v'}\cdot\frac{Q}{A} \quad \text{et} \quad y^2=qz-\frac{qz^2}{a};$$

et hoc (substituendo valores ipsorum z et q) fiet

$$=\frac{cn'-x\omega'}{v'}\cdot\frac{cn'-x\omega'+xm'}{v'}\cdot\frac{Q}{A}-\left(\frac{cn'-x\omega'}{v'}\right)^2\cdot\frac{Q}{A}=$$
$$=\frac{Qcm'n'x}{Av'^2}-\frac{Q\omega'm'x^2}{Av'^2},$$

(nempe $\frac{Q}{A}=\frac{q}{a}$). Substituendo autem valorem supra dictum ipsius Q, fit

$$y^2=\frac{Av'^2cm'n'x}{m'\omega'Av'^2}-\frac{Av'^2\omega'm'x^2}{m'\omega'Av'^2}=\frac{cn'}{\omega'}x-x^2=Dx-x^2=x(D-x);$$

nam

$$D=\frac{cn'}{\omega'},$$

quia in triangulo $\mathfrak{kDB}$ est

$$D:c = n':\omega'.$$

Scholion 2. Sit pariter (Fig. 239. III.) in plano C rectangulum $\mathfrak{ACED}$, et ducatur recta $\mathfrak{DB}$ ad quemvis angulum acutum u; fiantque (ut antea) planum B ex $\mathfrak{DE}$, et planum b ex $\mathfrak{de}$, et planum P ex $\mathfrak{DB}$, ad C perpendicularia; fiatque in B ad axem a pro parametro $q = \frac{D}{u'}$ ellipsis, et fiat ad hanc ellipsim tanquam basim cylinder rectus; erit sectio per planum b facta ellipsis basi æqualis, manentque q et a eadem. Eritque $z:x = u':1$, adeoque $z = xu'$, et $D:a = 1:u'$, adeoque $a = Du'$; atque (per y sectionem planorum P et b in cylindri superficie terminatam intelligendo) fit

$$y^2 = qz - \frac{qz^2}{a} = \frac{Dxu'}{u'} - \left(\frac{D}{u'} : Du'\right) x^2 u'^2 =$$

$$= Dx - \frac{Dx^2u'^2}{u'Du'} = Dx - x^2 = x(D - x);$$

itaque cylinder superior circulo diametri D ad datum angulum u insistet.

Scholion 3. Sit (Fig. 239. IV.) $\mathfrak{DE}$ diameter baseos circularis coni obliqui, sitque $\mathfrak{kE}$ latus brevissimum, adeoque $u < v$. Ponantur (ut antea) ad C perpendiculariter planum P ex $\mathfrak{BD}$, et planum b per $\mathfrak{de}$ ad basim parallelum; erit sectio coni per b circulus diametri $\mathfrak{de} = \delta$; et

$$z + k : c = n' : u',$$

atque

$$k : x = (m - n)' : u' = \lambda' : u',$$

adeoque

$$z + k - k = \frac{cn' - x\lambda'}{u'} = z;$$

et

$$\delta - z = \frac{xm'}{v'},$$

quia

$$\mathfrak{pe} : \mathfrak{pB} = m' : v'.$$

Atque hinc

$$y^2 = z(\delta - z) = \frac{cn' - x\lambda'}{u'} \cdot \frac{xm'}{v'} = \frac{cn'm'x}{u'v'} - \frac{\lambda' m' x^2}{u'v'}.$$

Pro circulo

$$\frac{cn'm'}{u'v'} = D = \frac{cn'}{\lambda'} \quad \text{et} \quad \frac{m'\lambda'}{u'v'} = 1,$$

(nempe $c:D=\lambda':n'$), adeoque $m'\lambda'=u'v'$ esset. Sed hoc fieri nequit: quia tum esset

$$m':v'=u':\lambda',$$

atque quum in triangulo p𝔅e sit

$$m':v'=\text{pe}:\text{p}\mathfrak{B}$$

et in triangulo 𝔇p𝔡

$$u':\lambda'=\mathfrak{D}\text{p}:\mathfrak{d}\text{p}$$

quia $u'=\omega'$), esset

$$\text{pe}:\text{p}\mathfrak{B}=\mathfrak{D}\text{p}:\mathfrak{d}\text{p},$$

et triangula 𝔅pe et 𝔡p𝔇 (per duo latera cum angulo intercepto æquali proportionalia) similia fierent, et $\lambda=v$ ac $\omega=m$. Sed u (externus) $>\lambda$; consequenter $u>v$ esset, quamvis $u<v$ sit.

At (Fig. 239. V.) pro $\wedge$𝔣𝔎𝔊 $=v$, circulus fit; nam

$$y^2=\frac{cm'n'x}{u'v'}-\frac{\lambda'm'x^2}{u'v'} \quad \text{et} \quad D=\frac{cn'}{\lambda'},$$

sed

$$m'=v',\ u=2R-v-n=\lambda, \quad \frac{cn'm'}{u'v'}=\frac{cn'}{\lambda'}=D, \quad \frac{\lambda'm'}{u'v'}=1.$$

Scholion 4. Pariter prodit cylindri circulo oblique insistentis sectio (Fig. 239. VI.): nempe fit

$$y^2=\frac{a\omega'x}{v'}-\frac{\omega'^2x^2}{v'^2};$$

ubi ut $\frac{a\omega'}{v'}=D, \left(\text{quod } =\frac{av'}{\omega'}\right)$, et $\frac{\omega'^2}{v'^2}=1$ fiat, $v'=\omega'$ esse deberet; sed $u+v=2R$, hinc $v+\omega<2R$, et v, ω non gaudent sinu eodem.

In omnibus his autem pro K et k positivis fiet

$$y^2=kx-Kx^2,$$

quæ æquatio ellipseos erit; nempe ex $K=\frac{k}{a}$ erit $a=\frac{k}{K}$, atque

$$y^2=kx-\frac{k}{a}x^2.$$

ubi k parameter et $\frac{k}{K}$ axis maior est. Unde reliqui casus etiam (tam pro $m = n$, quam pro $m < n$) sectionis coni (et pariter cylindri) obliqui patent; omissisque aliis huius generis, sequitur in numero

·3135.

§. 1.

Sphaerae cum plano sectio aut *punctum*, aut *circulus* est, qui si per centrum transierit, *maximus* audit, quum omnes alii minores sint; pars sphæræ per planum absecta *segmentum*, et pars sphæræ inter duo plana parallela *zona* dicitur.

Nempe quodcunque planum secuerit sphæram, perpendicularis e centro ad illud missa aut in superficiem sphæræ cadet, aut intra eam; extus enim cadere nequit, quia quævis alia recta e centro ad planum idem dicta perpendiculari adeoque et radio maior est; itaque nullum plani punctum cum sphæra commune esset. Si vero extremitas perpendicularis dictæ in superficiem cadat, nullum aliud punctum erit plano sphæræque commune, quia quævis alia recta e centro ad planum excedit radium. Atque si perpendicularis intra sphæram terminetur, erit hæc ad omnes rectas ex eo puncto in plano secante perpendicularis, quæ singulæ exibunt per sphæram, efformabuntque omnia triangula rectangula æqualia; quia cathetus e centro omnibus communis, et hypotenusa radius est; atque manifesto sectio erit via catheti alterius, moto triangulo rectangulo circa cathetum priorem. Neque præter circulum hunc planum cum sphæra quidquam commune habet; superficies sphæræ enim via semicirculi circa diametrum est, et si in motu trianguli rectanguli plane dicto semicirculus moveatur, perpendicularis e quovis semicirculi puncto ad axem motus aliud planum describet, eruntque quævis plana parallela, adeoque nihil commune habentia.

§. 2.

Est quoque manifesto centrum sphæræ in perpendiculari e centro circuli in superficie sphæræ siti, ad planum huius erecta; atque *duarum talium perpendicularium sectio centrum est.*

§. 3.

Et facile de sphæris quoque patet, (uti de circulis in eodem plano, si sectionis sphærarum circularis, sectio duorum punctorum in circulis, vicem subeat), quod si sphærarum S et s centra sint $\mathfrak{C}$ et $\mathfrak{c}$, radii R et r, atque distantia centrorum d sit: pro casu si $\mathfrak{c}$ extra S cadat, sphæræ nil commune habeant, si $d > R + r$; si vero $d = R + r$, punctum solum commune utrique sit; et si $d < R + r$ fuerit, sectio circulus sit; pro $\mathfrak{c}$ in superficiem sphæræ S aut intus cadente autem sectio nulla sit, si $r > R + d$ aut $r < R - d$, sectio punctum sit, si $r = R \pm d$, et sectio circulus sit, si $r < R + d$, et r non = nec $< R - d$ fuerit. Percurrendo singulos casus Tyrones ipsi e sola (Fig. 240.) inspectione rem in plano quoad circulos facile perspicere possunt.

Et tum quoad sphæras S et s quoque concludi potest, plano per centra $\mathfrak{C}$ et $\mathfrak{c}$ adeoque rectam $\overline{\mathfrak{C}\mathfrak{c}}$, in quam diameter utriusque cadit, posito, atque in hoc tam centro $\mathfrak{C}$ radio R quam centro $\mathfrak{c}$ radio r circulis descriptis. Sint nimirum circuli hi C et c; atque revolvatur schema e circulis C et c compositum circa $\mathfrak{C}\mathfrak{c}$; generabuntur manifesto sphæræ S et s; quæ, si C et c nihil commune habuerint, pariter nihil commune habebunt, si autem C et c tetigerint se invicem, et sphæræ tangent se invicem, tangenturque a plano per viam rectæ ad diametrum e puncto tactus perpendicularis descriptum; si vero C et c in duobus punctis $\mathfrak{P}$ et $\mathfrak{p}$ secuerint se invicem, orientur duo triangula æquicrura $\mathfrak{C}\mathfrak{P}\mathfrak{p}$ et $\mathfrak{c}\mathfrak{P}\mathfrak{p}$, adeoque si meditullium rectæ $\mathfrak{P}\mathfrak{p}$ sit $\mathfrak{m}$, erit tam $\mathfrak{C}\mathfrak{m}$ quam $\mathfrak{c}\mathfrak{m}$ perpendicularis ad $\mathfrak{P}\mathfrak{p}$, itaque $\mathfrak{m}$ in $\mathfrak{C}\mathfrak{c}$ erit, et in motu dicto per rectam $\mathfrak{P}\mathfrak{m}$ ad $\mathfrak{C}\mathfrak{c}$ perpendicularem describetur planum, et per punctum circulus in plano eodem sphæræ utrique communis.

·31351.

§. 1.

Si planum P per centrum eat, fit *circulus, quem maximum* esse inde patet, quod si e centro huius circuli C dicti, ad planum P perpendicularis L erigatur, et planum tale ponatur, in quod perpendicularis dicta incidit: secet hoc sphæram in circulo C'; huius revolutio circa L eandem sphæram parit; patetque, quod si radius circuli C' sit r', circuli per quodvis aliud peripheriæ C' punctum descripti radius versus polum propiorem semper descrescat; nempe circuli cuiusvis in hoc motu descripti radius est sinus arcus a polo usque ad punctum peripheriam describens. Quicunque autem circulus c in superficie sphæræ sit, alicui per puncta ipsius C' descriptorum æqualis est; nam c in plano est, et si e centro sphæræ perpendicularis ad planum hoc demittatur, hæc in centrum circuli c cadet; unde antea dictis applicatis patet.

§. 2.

Quilibet duo circuli maximi secant se invicem in duobus punctis, et quidem bisecant (pag. 41); atque duo illa sectionis puncta cum centro in eadem recta sunt.

§. 3.

Quomodo autem fiat angulus duorum circulorum maximorum quantitas respectiva, quæ in comparatione arithmetica semper intelligi debet, dictum (pag. 41) est: nempe angulus planorum, in quæ circuli illi cadunt, intelligitur, atque huius quantitas est arcus circuli maximi inter extremitates quadrantum e sectione circulorum illorum, de quorum angulo sermo est, acceptorum.

§. 4.

Demonstratum etiam est:

1. Circuli maximi a et b ad tertium c perpendiculares in fine quadrantum communi secant se invicem, fine hoc *polo* ipsius c dicto. Unde extremitas quadrantis ad c perpendicularis polus ipsius c est.

2. Si $\mathfrak{pa}$, $\mathfrak{pb}$ quadrantes fuerint, anguli arcuum $\mathfrak{pa}$ et $\mathfrak{pb}$ quantitas arcus $\mathfrak{ab}$ est.

§. 5.

Patet etiam:

1. e quovis superficiei sphæræ puncto $\mathfrak{p}$ ad quemvis circulum maximum C dari circulum maximum perpendicularem. Nam tum $\mathfrak{p}$ in hemisphærio est, cuius æquator C est, et polus $\mathfrak{q}$ sit; adeoque circulus maximus per $\mathfrak{q}$ et $\mathfrak{p}$ secat circulum maximum C, et arcus ex $\mathfrak{q}$ usque ad C quadrans ad C perpendicularis est.

2. Si $\mathfrak{p}$, $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$ talia superficiei sphæræ puncta fuerint, ut $\mathfrak{p}$ tam ab $\mathfrak{a}$ quam a $\mathfrak{b}$ quadrante distet, $\mathfrak{p}$ polus arcus $\mathfrak{ab}$ erit. Sit enim $\mathfrak{c}$ centrum, erunt rectæ $\mathfrak{ca}$, $\mathfrak{cb}$ perpendiculares ad $\mathfrak{cp}$; adeoque $\mathfrak{cp}$ perpendicularis ad planum $\mathfrak{acb}$, et plana $\mathfrak{pca}$, $\mathfrak{pcb}$ perpendicularia ad planum $\mathfrak{acb}$ sunt.

§. 6.

Oriuntur quidem et in sphæra ut in plano triangula plurium generum, sed inprimis triangula sphærica tractare necesse est: figura quævis in superficie sphæræ tribus eiusmodi arcubus circulorum maximorum clausa, ut quivis bini arcus se invicem nonnisi in puncto secent, et diversorum circulorum maximorum arcus sint, sensu lato *triangulum sphaericum* est; et manifesto ab extremitatibus chordarum radiis ductis, pyramis triangularis orietur, cuius basis triangulum e chordis componitur, et lateris cuiusvis angulus rectilineus ad apicem est duobus rectis minor; at si latera plana huius pyramidis (inter crura angulorum rectilineorum dictorum) producantur, sectio illa, quæ cum superficie sphæræ fiet, dicitur strictius *triangulum sphaericum*; nempe etsi pro arcu aliquo trium illorum, in quibus pyramis sphæræ superficiem secat, arcus alter eiusdem circuli maximi earundem extremitatum accipiatur, pariter triangulum sphæricum manebit sensu lato, sed chorda eadem erit, eademque pyramis generabitur.

§. 7.

Summæ angulorum latera pyramidis triangularis constituentium, idest laterum trianguli sphærici, limites sunt o et $4R$; ita summæ angulorum, quos latera pyramidis dictæ faciunt, (adeoque angulorum trianguli sphærici), limites sunt $2R$ et $6R$, nempe summa est $> 2R$ et $< 6R$.

Nam *quoad latera*: sint A, B, C latera pyramidis triangularis; est omnino quodvis $< 2R$; cadant A et B supra planum C et apex pyramidis in centrum sphæræ, seceturque sphæra per C in arcu $\mathfrak{ba}$, hemisphærium supra C autem secetur per A, B in $\mathfrak{bc}$, $\mathfrak{ca}$; poterit $\mathfrak{bc} = 2R - \omega$ et $\mathfrak{ca} = 2R - \lambda$, et $\mathfrak{ba} = 2R - \varkappa$ poni (Fig. 241.). Continuetur arcus $\mathfrak{cb}$ ultra $\mathfrak{b}$, donec ex $\mathfrak{c}$ incipiendo semicirculus fiat, patet ipsi $\mathfrak{cb}$ additum ω infra planum C cadere; pariter si arcui $\mathfrak{ca}$ addatur λ, semicirculus fiet, cum priore simul incipiens supra planum C, et simul desinens infra C; nam duo circuli maximi se in duobus punctis bisecant, eruntque semicirculorum dictorum initium et finis extremitates diametri; atque et infra C efformabitur nova pyramis et novum triangulum sphæricum, cuius laterum ω et λ summa est tertio maior; adeoque $\omega + \lambda - h = C$ poni potest, eritque

$$A + B + C = 2R - \omega + 2R - \lambda + \omega + \lambda - h = 4R - h.$$

Quoad angulos: laterum pyramidis triangularis quoque, evidens est, quemvis trium angulorum duobus rectis minorem, adeoque et summam sex rectis minorem esse.

Sed summam hanc duobus rectis maiorem, et sex rectis ita minorem esse, ut dato quovis minus ab utroque limite differre queat, sic patet. Construatur triangulum modo sequente: (In Fig. 242.) descriptis in superficie sphæræ ex apicibus trianguli sphærici $\mathfrak{abc}$ (in quo pyramis triangularis eam secat), tanquam centris, quadrantis intervallo circulis maximis, erunt centra dicta poli circulorum descriptorum, et horum quilibet bini secabunt se invicem in duobus punctis et orietur trilaterum $\mathfrak{a}'\mathfrak{b}'\mathfrak{c}'$, sectione illa $\mathfrak{a}'$ accepta pro A (ex extremitatibus $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$ eius facta), quæ respectu plani ipsius A in eandem plagam cum $\mathfrak{a}$ cadit, ita sectione illa $\mathfrak{b}'$ accepta pro B, quæ respectu plani ipsius B in eandem plagam cum $\mathfrak{b}$ cadit, atque sectione illa $\mathfrak{c}'$ ipsius C accepta, quæ respectu plani ipsius C in eandem plagam cum $\mathfrak{c}$ cadit; fieri nimirum posse hoc patet, quum trianguli $\mathfrak{abc}$ latus quodvis $< 2R$ sit, adeoque quadrantes circa extremitates motæ se invicem in hemisphærio illo quoque secant, ubi apex oppositus trianguli est.

Erit vero $\triangle\mathfrak{abc}$ et $\mathfrak{a}'\mathfrak{b}'\mathfrak{c}'$ eiusmodi, ut cuiusvis eorum anguli cuiusvis, latus alterius ei oppositum, complementum ad $2R$ sit.

Nempe $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$ poli arcuum A', B', C', et $\mathfrak{a}'$, $\mathfrak{b}'$, $\mathfrak{c}'$ poli arcuum A, B, C sunt; in quovis enim duo puncta ab eodem puncto quadrante distant (pag. 277). Itaque ex. gr.

$$b = u,$$

et

$$z + u = R = u + v, \qquad \text{adeoque} \qquad z = v;$$

et

$$z + u + v + u = 2R = B' + u = B' + b.$$

Quod pariter de reliquis patet; idemque applicare ad casus, si quod ipsorum A, B, C, aut duo eorundem, sive singula quadrantem excedant, Tyronibus relinquitur.

Atque hinc

$$A + B + C + a' + b' + c' = 6R = A' + B' + C' + a + b + c;$$

itaque tam $a' + b' + c'$ quam $a + b + c < 6R$, et quodvis ipsorum a', b', c', a, b, c, et A', B', C' est $< 2R$, nam ex. gr.

$$A' + a \text{ est } = 2R.$$

Efficiunt autem etiam A', B', C' pyramidem triangularem. Nam $\mathfrak{a}'$, $\mathfrak{b}'$, $\mathfrak{c}'$ non in eodem circulo maximo sunt, quia per $\mathfrak{b}'$, $\mathfrak{c}'$ unicus maximus circulus datur, cuius polus $\mathfrak{a}$ est, ita per $\mathfrak{c}'$, $\mathfrak{a}'$ et $\mathfrak{b}'$, $\mathfrak{a}'$; adeoque trium eiusdem circuli maximi arcuum tres diversi poli nempe $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$ essent. Cadit igitur $\mathfrak{c}'$ (adeoque $\mathfrak{c}'\mathfrak{b}'$ et $\mathfrak{c}'\mathfrak{a}'$ etiam) extra planum C', adeoque in hemisphærium supra vel infra illud cadere debet, suntque A', B', C' et a', b', c' singula duobus rectis minora.

Erit itaque et

$$A'+B'+C'<4R;$$

atque hinc et

$$a+b+c>2R;$$

nam

$$a+b+c+A'+B'+C'=6R,$$

et si ex utroque ipso $4R$ minus subtrahatur, utrinque $>2R$ manebit.

Potest autem $\Delta\,\mathfrak{abc}$ tale construi, ut $A+B+C$ quantovis α minus a o aut a $4R$ differat. Sit enim $\alpha=2\omega$, et fiant e puncto superficiei sphæricæ duo arcus circuli maximi ipsi $\frac{\omega}{2}$ æquales, atque ducatur arcus circuli maximi per extrema eorum; erit summa priorum $=\omega$ tertio latere maior, adeoque summa trium $<2\omega$.

Ita triangulum æquilaterum in sphæra describi potest pro basi $<\frac{4R}{3}$; nempe si basis $=\frac{4R}{3}$, arcus in eodem baseos circulo conveniunt; si vero quantovis minor accipiatur basis, in hemisphærio pariter intersectio fiet ut in plano.

Atque hinc $A+B+C$ potest ad limitem o tendere, adeoque $a'+b'+c'\frown 6R$; ita dum $A+B+C\frown 4R$ manens tamen $<4R$, manifesto $a'+b'+c'\frown 2R$, manens tamen $>2R$.

Notandum vero est dari triangulum sphæricum *sensu lato*, cuius laterum summa $>4R$. Ex. gr. accipiatur in circulo maximo arcus $=3R$, et ducantur ex eius polo quadrantes ad extremitates eiusdem arcus, erit summa laterum $=5R$.

§. 8.

Posset quidem trigonometria sphærica e pyramidis triangularis analysi quoque deduci: at quum sphæra planum præcedat, certo tamen respectu eadem qualitate gaudens, et præterea quoque trigonometria sphærica, ut (pag. 265) dictum est, ab Axiomate XI Euclideo independenter vera sit; tam ob dignitatem sphæræ æque tribuendam, quam ob rationem posterius dictam, pyramidum theoriam e trigonometria sphærica, in quantum a trigonometria dependet, deducere libet.

Manifesto autem in superficie sphæræ quoque plures operationibus in plano analogæ suscipi possunt: ex. gr. triangulum æquicrurum, æquilaterum &c construi, perpendicularis erigi, demitti &c possunt.

§. 9.

Circuli maximi A, B, C dividunt (Fig. 243.) sphæram in octo triangula, nempe t, a, b, c, a', b', c', et $\mathfrak{abc}$ sphæram inferius claudens, ipsi t æquale; estque $a=a'$, $b=b'$, $c=c'$; nimirum bisecent se invicem plana circulorum B et C, A et C, A et B in diametris $\mathfrak{Aa}$, $\mathfrak{Bb}$, $\mathfrak{Cc}$; centrum $\mathfrak{k}$ his commune est, et anguli verticales $\mathfrak{AkB}$ et $\mathfrak{akb}$, $\mathfrak{AkC}$ et $\mathfrak{akc}$, $\mathfrak{BkC}$ et $\mathfrak{bkc}$ æquales sunt; et pariter in ceteris ita est; unde (per pag. 224) patet. Præterea et pro latere trianguli ex. gr. $\mathfrak{ABC}$, potest pro latere quovis ex. gr. $\mathfrak{ApB}$ accipi $\mathfrak{AiB}$, ut sensu latiore aliud triangulum prodeat; quamvis (ut dictum est) pyramidem per chordas eandem præbeat.

* At priusquam in supplemento numerum hunc respiciente Trigonometria sphærica tractaretur, dicendum aliquid est de numero

*31352.

Corpora regularia numerus hic respicit. Dicuntur autem hæc *sensu stricto* ea, quæ figuris planis regularibus ita clauduntur, ut nullus angulus convexus sit (sive omnes anguli æquales sint); possentque etiam e superficie sphæræ deduci; nempe operationibus analogis ut in plano, figuræ regulares, arcus circulorum maximorum pro lateribus accipiendo, construi tales possunt, ut se invicem excipientes eam exhauriant.

*31352. Si planum quodvis tangat sphæram, aut aliter secet, atque plana omnia simul efficiant superficiem simplicem portionem spatii claudentem: inter hæc oriuntur etiam corpora aut *perfecte* aut *certo respectu regularia*.

§. 1.

Sed satis omnium constat, quomodo e retibus quinque corpora regularia componantur: nempe e triangulo æquilatero tria prodeunt, e quadrato unum, et unum e pentagono. Nec plura prodire posse sic patet. E tribus triangulis ad apicem anguli solidi fit *tetraedron*, e quatuor fit *octaedron*, et *icosaedron* ex quinque; at si sex triangula æquilatera componantur, fiet summa angulorum ad apicem $= 360° = 6 . 60°$; adeoque in planum cadent. Tres anguli recti efficiunt *cubum*, quatuor autem item in planum deciderent, quum $4 . 90° = 360°$. Pentagoni angulus est $= 108°$, quorum tres pariunt *dodecaedrum*; sed $4 . 108°$ transit in plagam alteram.

Si vero polygoni regularis laterum numerus n sit > 5: erit angulus polygoni (pag. 88)

$$= \frac{2nR - 4R}{n} = \frac{(n-2)\,2R}{n},$$

adeoque quum ad angulum solidum ad minimum tres anguli requirantur, esset summa eorum $6R\frac{(n-2)}{n}$, quod pro $n > 5$ excedit quatuor rectos; nam sit $n = 5 + m$ (pro m integro positivo); erit

$$\frac{6R(n-2)}{n} = \frac{6R(m+3)}{5+m},$$

quod si $m = 1$ fuerit, $= 4R$ erit; si vero m crescat, erit

$$\frac{6(m+1)+18}{5+m+1} > \frac{6m+18}{5+m},$$

ad eundem denominatorem reducendo patet.

§. 2.

Quod apices corporis regularis omnes in superficiem sphæræ cadant, sic patet. Demittantur (Fig. 244.) e duarum figurarum regularium latere ineari $\mathfrak{ab}$ communi gaudentium centris $\mathfrak{f}$ et $\mathfrak{f}'$ perpendiculares $\mathfrak{fq}$ et $\mathfrak{f'q}$; cadent illæ manifesto in punctum idem $\mathfrak{q}$; erigantur ex $\mathfrak{f}$ et $\mathfrak{f}'$ perpendiculares $\mathfrak{fr}$ et $\mathfrak{f'r'}$ ad plana figurarum regularium dictarum, ducaturque recta $\mathfrak{ff'}$; erit summa angulorum, quos perpendiculares $\mathfrak{fr}$, $\mathfrak{f'r'}$ cum $\mathfrak{ff'}$ faciunt, duobus rectis minor, adeoque concurrent; fiat hoc in $\mathfrak{p}$. Nempe e meditullio $\mathfrak{q}$ lateris communis duarum figurarum regularium æqualium (tanquam chordæ duorum circulorum communi) erectæ perpendiculares in planis earundem figurarum, per centra earum ducuntur; et angulus perpendicularium harum angulus planorum est, atque planum, in quod hæ perpendiculares cadunt, est ad utrumque perpendiculare; perpendiculares $\mathfrak{fr}$ et $\mathfrak{f'r'}$ autem, ex iis centris ad plana figurarum centris appertinentium erectæ, in planum dictum ad utrumque perpendiculare cadunt.

Continuentur dicta a quavis figura regulari ad sequentem: manifesto concursus omnium in $\mathfrak{p}$ erit; si enim anguli rectilinei quotvis æquales ad angulum solidum convexum compingantur, anguli laterum planorum omnes æquales, et omnia circumcirca æqualiter determinata erunt.

Erit igitur recta, quæ a centro figuræ cuiusvis regularis usque ad idem $\mathfrak{p}$ est, ad planum figuræ perpendicularis, et pro quavis figura eidem rectæ æqualis; adeoque erit radius sphæræ illius, quæ figuras omnes tangit.

Si vero in quavis figurarum e centro $\mathfrak{f}$ ad apicem recta ducatur, ex. gr. ex $\mathfrak{f}$ ad apicem $\mathfrak{a}$: erit $\triangle\mathfrak{fpa}$ ad $\mathfrak{f}$ rectangulum, in quo hypotenusa, pro quavis figurarum æqualis, radius sphæræ circumscriptæ erit.

§. 3.

Si reperiatur u angulus duorum laterum planorum corporis regularis: dabitur $\wedge\mathfrak{pqf} = \frac{1}{2}u$ ($\mathfrak{p}$, $\mathfrak{q}$, $\mathfrak{f}$ iuxta præcedentia intellectis); $\mathfrak{fq}$ e figura data notum est, adeoque e triangulo $\mathfrak{pqf}$ ad $\mathfrak{f}$ rectangulo innotescit $\mathfrak{pf}$; et hinc in triangulo $\mathfrak{afp}$ ad $\mathfrak{f}$ rectangulo ex $\mathfrak{af}$ et $\mathfrak{pf}$ innotescit radius sphæræ circumscriptæ.

§. 4.

Angulus u autem, e data figura regulari et numero angulorum angulum solidum ad apicem constituentium, prodit sic. In *tetraedro* tres anguli sunt ad apicem, in *cubo* et *dodecaedro* pariter; in *octaedro* quatuor triangulorum ad apicem concurrentium bases efficiunt quadratum, cuius latus $l=$ lateri triangulorum; unde (Fig. 245.) diagonalis d quadrati dicti innotescit, et efformabitur angulus solidus ad apicem priorem e tribus angulis compositus, quorum duo sunt anguli triangulorum æquilaterorum, tertius est ipsi d oppositus in triangulo, cuius duo latera $=l$ sunt, et tertium latus d est. Itaque angulus u per trigonometriam sphæricam in pyramide triangulari e lateribus datis prodit.

In *icosaedro* angulus ad apicem pariter ad pyramidem triangularem reduci potest modo sequente: quinque triangulorum ad apicem positorum bases pentagonum efficiunt, cuius latus $l=$ lateri triangulorum est; adeoque (Fig. 246.) k e latere utroque $=l$, et angulo intercepto 108° innotescit. Itaque et hic angulus solidus fiet, cuius duo latera anguli trianguli æquilateri erunt, et tertium erit angulus ipsi k oppositus in triangulo, cuius duo latera ipsi l æqualia et tertium latus k est.

Prodeunte hinc u, e triangulo $\mathfrak{k}\mathfrak{p}\mathfrak{q}$ ad $\mathfrak{k}$ rectangulo prodit etiam altitudo $\mathfrak{k}\mathfrak{p}$, per cuius tertiam partem multiplicanda superficies corporis est, ut soliditas prodeat.

§. 5.

Quævis pyramis, cuius basis figura regularis n laterum est, si quævis atera pyramidis linearia eidem b æqualia fuerint, soliditas facile computatur. Nam ex. gr. (Fig. 247.) ex figura ipsa prodit z, distantia centri baseos ab apice eiusdem quovis; atque in triangulo ad centrum rectangulo, e hypotenusa b et catheto z, prodit pyramidis altitudo $y=$ catheto alteri.

Ita *in tetraedro*, ubi basis triangulum æquilaterum est, cuius area $=\frac{1}{4}b^2\sqrt{3}\left(\text{pag. } 119, \text{ ubi radius est } =z=\frac{b}{\sqrt{3}}\right)$, erit

$$y^2=b^2-\frac{b^2}{3}=\frac{2b^2}{3},$$

itaque

$$y=b\sqrt{\frac{2}{3}};$$

adeoque soliditas

$$= \frac{1}{4} b^2 \sqrt{3} \cdot \frac{b}{3} \sqrt{\frac{2}{3}} = \frac{b^3 \sqrt{2}}{12}.$$

Octaedrum e duabus eiusmodi pyramidibus constat, quarum bases sunt quadrata lateris b, quod etiam latus triangulorum lateralium est. Est autem hic z, quadrati diagonalis dimidium,

$$= \sqrt{\frac{b^2}{2}} = \frac{b}{\sqrt{2}};$$

adeoque

$$y = \sqrt{b^2 - z^2} = \sqrt{b^2 - \frac{b^2}{2}} = \frac{b}{\sqrt{2}};$$

adeoque soliditas octaedri

$$= 2 \,.\, b^2 . \frac{b}{3\sqrt{2}} = \frac{2b^3}{3\sqrt{2}} = \frac{b^3\sqrt{2}}{3}.$$

Si vero radius r sphæræ quæratur, cui corpus regulare inscriptum est: sit x perpendicularis e centro ad latus quodvis corporis demissa; erit hæc recta e centro sphæræ ad centrum lateris; adeoque si n fuerit laterum numerus, et β sit area lateris, erit soliditas corporis $= \frac{n\beta x}{3}$; atque ex x et z prodit hypotenusa r. Imo et anguli ad centrum *in triangulis æquicruris, quæ latera pyramidum constituunt, innotescunt*; quum duo latera ipsi r sint æqualia, tertium vero b sit.

Potestque etiam arcus u circuli maximi, cuius chorda b est, reperiri: nempe

$$b = 2 \sin. \frac{1}{2} u,$$

adeoque

$$\sin. \frac{1}{2} u = \frac{b}{2},$$

et arcus ipsi $\frac{b}{2}$ tanquam sinui respondentis duplum erit arcus circuli maximi, quo tanquam latere in superficie sphæræ, figuræ regulares (concernentes) eam claudentes describi possunt. Potest autem b per r exprimi; adeoque etiam sinus pro dato radio r quæri.

Quod si ad *tetraedrum* applicetur: fiet soliditas

$$\frac{x}{3}4\cdot\frac{b^2}{4}\sqrt{3}=\frac{x}{\sqrt{3}}b^2=\frac{b^3\sqrt{2}}{12},$$

atque hinc

$$x=\frac{b\sqrt{6}}{12}.$$

Est autem

$$r^2=x^2+z^2 \quad \text{et} \quad z=\frac{b}{\sqrt{3}},$$

adeoque

$$r=\sqrt{\frac{6b^2}{144}+\frac{b^2}{3}}=b\sqrt{\frac{3}{8}};$$

atque etiam b ex r dato prodit, nempe

$$b=r:\frac{\sqrt{3}}{8}=r\sqrt{\frac{8}{3}}.$$

Atque si quæratur u arcus chordæ b, erit

$$\sin.\frac{1}{2}u=\frac{1}{2}r\sqrt{\frac{8}{3}}.$$

Idem ad reliqua applicatur. *Dodecaedri* et *icosaedri* soliditates subsidio trigonometriæ prodeunt: nempe pro latere lineari b est *dodecaedri soliditas*

$$=\frac{b^3}{4}(15+7\sqrt{5}),$$

et *icosaedrum*

$$=\frac{5b^3}{12}(3+\sqrt{5}).$$

Unde x et r & modo dicto reperiuntur, ex. gr. *pro icosaedro* erat $z=\frac{b}{\sqrt{3}}$, et basis cuiusvis pyramidum, quæ heic ad centrum numero 20 fient, est $\frac{b^2\sqrt{3}}{4}$; itaque ex

$$\frac{5b^3}{12}(3+\sqrt{5})=20\,.\,\frac{x}{3}\cdot\frac{b^2\sqrt{3}}{4}=\frac{5b^2x}{\sqrt{3}}$$

prodit x, et tum r.

Quod cubum attinet, pro latere lineari b eius erit area lateris plani b^2, et soliditas b^3, z vero erit $\frac{b}{\sqrt{2}}$ (Fig. 247.); atque hinc

$$b^3 = \frac{x \,.\, 6b^2}{3};$$

unde

$$x = \frac{b}{2}.$$

Itaque quum sit

$$r^2 = x^2 + z^2,$$

erit

$$r^2 = \frac{b^2}{4} + \frac{b^2}{2} = \frac{3b^2}{4},$$

adeoque

$$r = \frac{b\sqrt{3}}{2} \quad \text{et} \quad b = \frac{2r}{\sqrt{3}}.$$

Hinc si arcus u chordæ b quæratur, erit

$$\sin. \frac{1}{2} u = \frac{1}{2} b = \frac{r}{\sqrt{3}};$$

itaque arcus ipsi $\frac{r}{\sqrt{3}}$ tanquam sinui respondentis duplum erit arcus quæsitus u.

Quod ad reliqua etiam applicari evidens est.

Scholion. Notandum autem est, quod si circulus maximus C per n dividatur, atque e divisionis punctis ad utrumque polum quadrantes ducantur, et e quovis divisionis puncto in quadrantibus inde ductis ubique æquales arcus v absecentur; atque in quovis hemisphærio arcuum abscectorum proximorum fines, item eorundem fines in quovis semicirculo rectis iungantur: oriantur corpora certa e duabus figuris regularibus n laterum et n rectangulis, quæ quadrata esse possunt; et si ab extremitatibus arcuum ad divisionis ipsius C puncta rectæ ducantur, trapezia numero $2n$ æqualia et duo polygona n laterum æqualia erunt sphæræ inscripta.

§. 6.

Erant autem (§. 2) dicta corpora regularia sensu stricto; at dantur etiam alia, quæ figuris regularibus quidem, sed diversæ speciei clauduntur; et dantur præterea talia, quæ per figuras rectilineas non regulares, sed omnes inter se æquales clauduntur; imo et hoc per figuras diversæ speciei quoque fieri potest, quarum quævis eiusdem speciei inter se æquales sunt, atque certo ordine continuo se invicem excipiunt; imo possunt etiam figuræ nonnisi quoad aream æquales esse; possuntque hæc *corpora regularia ordinis primi, secundi, &* dici.

Recensere autem hæc, computareque et retia exhibere, quamvis disquisitionem haud inelegantem præbeat, longius esset, quam heic locum habere queat. Aliquid tamen annotare liceat.

Quæri potest: superficies sphæræ in quot qualesve figuras æquales, quarum latera arcus circulorum maximorum sint, dividi queat? et quarum sint laterum chordæ in plano, quarum non? atque in casu priore quales figuras planas præbeant?

Ex. gr. Dividitur superficies sphæræ in n triangula pro quovis numero pari n, si circulus maximus per $\frac{n}{2}$ dividatur, atque ad puncta divisionis a polis quadrantes ducantur; imo quivis numerus n etiamsi impar fuerit, circulo maximo per n diviso, semicirculis a polo ad polum per divisionis puncta ductis, partes æquales numero n prodibunt; at aliter superficies sphæræ (adeoque spatium per formas pyramidales, apice communi in centro gaudentes) nonnisi per numerum parem dividi potest. Dividitur autem superficies sphæræ, ope quinque corporum regularium, (iuxta Fig. 248.) modis sequentibus:

1. e cuiusvis lateris plani centro ducantur rectæ ad apices figuræ;

2. e quovis apice per centrum usque ad perimetrum figuræ;

3. in quovis triangulo æquicruro, (in 1.) generato, ducatur e centro perpendicularis ad basim;

4. e cuiusvis figuræ centro mittatur perpendicularis ad quodvis figuræ latus;

5. in cubo præterea etiam ducatur ad duo tantum latera quadrati parallela;

atque producantur, usque ad superficiem sphæræ, rectæ omnes e centro sphæræ per extrema rectilineorum hoc pacto generatorum; et ponantur per puncta sectionis arcus circulorum maximorum, lateribus figurarum rectilinearum respondentes. Manifesto dividetur in quovis casuum dictorum superficies sphæræ in figuras æquales.

Sed et, paucis exceptis, chordæ laterum cuiusvis figuræ sphæricæ novum corpus regulare sensu latiore præbent. Ex. gr. (Fig. 249.) dat trapezium, et hoc pacto duodecim trapeziis æqualibus clausum corpus e cubo prodit. Sed (Fig. 250.) nullum dat, quia chordæ non sunt in plano. Sit enim (Fig. 249.) quadratum $\mathfrak{ABCD}$ latus cubi, cuius centrum $\mathfrak{k}$ sit, sintque $\mathfrak{E}$, $\mathfrak{F}$, $\mathfrak{G}$, $\mathfrak{K}$ meditullia rectarum $\mathfrak{AD}$, $\mathfrak{BC}$, $\mathfrak{AB}$, $\mathfrak{EF}$, et sit $\mathfrak{k}''$ centrum illius lateris cubi, quod cum $\mathfrak{ABCD}$ rectam $\mathfrak{AB}$ communem habet: erunt $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$, $\mathfrak{D}$ in superficie sphæræ, cuius centrum $\mathfrak{k}$ et radius $\mathfrak{kA}$ est; atque planum $\mathfrak{kEF}$ secabit sphæram in circulo maximo C, ad quem recta $\mathfrak{kk}''$ perpendicularis erit; et polus $\mathfrak{p}$ ipsius C in hanc cadet; eruntque $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{E}$, $\mathfrak{k}$, $\mathfrak{p}$ in plano, uti $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{F}$, $\mathfrak{k}$, $\mathfrak{p}$; nam $\mathfrak{AE} \parallel \mathfrak{GK} \parallel \mathfrak{kk}''$. Secent $\mathfrak{kE}$, $\mathfrak{kF}$, $\mathfrak{kK}$, $\mathfrak{kG}$ productæ superficiem sphæræ in $\mathfrak{e}$, $\mathfrak{f}$, $\mathfrak{k}'$, $\mathfrak{g}$; efficient $\mathfrak{eEkp}$ et $\mathfrak{fFkp}$ cum arcubus claudentibus $\mathfrak{eAp}$ et $\mathfrak{fBp}$ quadrantes ad C perpendiculares, quorum partes $\mathfrak{eA}$ et $\mathfrak{fB}$ æquales sunt. Estque recta $\mathfrak{ef}$ in plano $\mathfrak{EkF}$, et parallela ad $\mathfrak{EF}$, atque hac maior, sed $\mathfrak{EF} =$ et $\parallel \mathfrak{AB}$; itaque et $\mathfrak{ef} \parallel \mathfrak{AB}$, adeoque $\mathfrak{efAB}$ in plano est, et quum $\mathfrak{ef} > \mathfrak{EF} = \mathfrak{AB}$ sit, trapezium est.

Sed (Fig. 250.) si planum c per $\mathfrak{AB}$ ad $\mathfrak{kk}''$ perpendiculare concipiatur, nempe cubi latus illud, cuius centrum $\mathfrak{k}''$ erat: erit hoc parallelum ipsi C, et sectio eius cum sphæra circulus parallelus; sit huius sectio $\mathfrak{q}$ cum quadrante $\mathfrak{pk}'$; erit arcus $\mathfrak{qk}' = \mathfrak{eA}$, et $\mathfrak{e}$, $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{q}$, $\mathfrak{k}'$ in plano erunt; sed recta $\mathfrak{kG}$ transit per planum c, adeoque $\mathfrak{g}$ ultra $\mathfrak{q}$ cadit, et arcus $\mathfrak{gk}' > \mathfrak{eA}$ est. Erant autem $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{q}$, $\mathfrak{e}$, $\mathfrak{k}'$ in plano, itaque $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{g}$, $\mathfrak{e}$, $\mathfrak{k}'$ non sunt in plano; quia si essent, etiam $\mathfrak{g}$ in eodem plano illo esset, quod per $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{e}$, $\mathfrak{k}'$ determinatur; adeoque et $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{e}$ caderent in planum per circuli tria puncta $\mathfrak{g}$, $\mathfrak{q}$, $\mathfrak{k}'$ determinatum; quod fieri nequit, quia arcus $\mathfrak{Ae}$

et $\mathfrak{gf}'$ partes quadrantum diversorum ad C perpendicularium sunt, quorum plana nonnisi rectam per polos communem habent; neque $\mathfrak{A}$ neque $\mathfrak{e}$ autem in rectam $\overline{\mathfrak{ff}''}$ per polos euntem cadit. Itaque casus posterior sphæram quidem (spatiumque) dividit, sed corpus regulare novum haud præbet.

Sed his amplius vacare instituti ratio prohibens, transire iubet ad

Supplementum numeri ·31351.

Ut in Trigonometria plana, et hic mutuam laterum ab angulis oppositis dependentiam quærere (præter plura iam dicta et veritatis ipsius desiderium) plurimæ mensurationes in cœlis terraque necessariæ induxerunt; quum inde triangulum sphæricum ·quoque e tribus datis illud determinantibus computare liceat. *Determinatur triangulum sphaericum* in eadem sphæra:

1. *per duo latera et angulum interceptum,*
2. *per duos angulos et latus interceptum,*
3. *per tria latera,*
4. *per tres angulos.*

Pagina sequens formulas primarias exhibet, e quibus reliqua fluunt; ex. gr. ex IV., dato latere B cum angulis adiacentibus a, c, reperitur $\wedge b$; nempe

$$\cos. b = \cos. B \sin. a \sin. c - \cos. a \cos. c;$$

atque tum ex B, b, a latus A ipsi a oppositum quoque prodit per I.

§. 1.

Dependentia laterum ab angulis oppositis mutua vero a dependentia in triangulo rectilineo in eo differt, quod *ibi latera, hic vero sinus laterum sint ut sinus angulorum oppositorum.*

Sit nempe triangulum sphæricum (Fig. 251.) $\mathfrak{abc}$, et

$$\mathfrak{bc} = A,\ \mathfrak{ca} = B,\ \mathfrak{ab} = C,$$

et anguli oppositi sint

$$a,\ b,\ c;$$

est:

I. $$\sin. A : \sin. B = \sin. a : \sin. b;$$

unde e datis ipsorum A, B, a, b tribus prodit quartum; et ex hoc promanant formulæ pro Trigonometria sphærica primariæ sequentes.

II. $$\cot. a = \frac{\sin. C \cot. A - \cos. b \cos. C}{\sin. b}$$

(e datis A, C et intercepto angulo b angulus a).

III. $$\cos. b = \frac{\cos. B - \cos. C \cos. A}{\sin. C \sin. A}$$

(e datis tribus lateribus angulus b).

IV. $$\cos. B = \frac{\cos. b + \cos. a \cos. c}{\sin. a \sin. c}$$

(e datis tribus angulis latus B).

Demonstrantur autem hæc in sequentibus; relatis etiam formulis triangula rectangula specialiter concernentibus.

§. 2.

Sinus laterum quorumvis esse ut sinus angulorum illis oppositorum, prius pro triangulo rectangulo demonstratur; unde generaliter liquet.

Sit (Fig. 252.) $\mathfrak{C}$ centrum sphæræ, et A, B sint catheti, atque H hypotenusa: erit angulus plani A cum plano B rectus, sit a angulus plani H cum plano B, et b angulus plani H cum plano A; hypotenusæ H rectus, et ipsis A, B opponentur a, b, compactoque triangulo, $\mathfrak{b}$ et $\mathfrak{b}'$ coincident. Demittatur ex $\mathfrak{b}$ ad $\mathfrak{C}\mathfrak{h}$ perpendicularis $\mathfrak{b}\mathfrak{d}$; erit hæc perpendicularis ad planum B, quia planum $A \perp B$, et $\mathfrak{C}\mathfrak{h}$ eorum sectio est (pag. 222), neque alia ex $\mathfrak{b}$ omnino cum $\mathfrak{b}'$ (in triangulo sphærico compacto) coincidente datur. Sit $\mathfrak{b}'\mathfrak{f} \perp \mathfrak{C}\mathfrak{a}$, et in B sit $\mathfrak{f}\mathfrak{i}$ perpendicularis ex $\mathfrak{k}$ ad $\mathfrak{Ca}$ erecta; erit $\wedge \mathfrak{b}'\mathfrak{ki}$ angulus ipsorum H et B; eritque $\mathfrak{Ck}$ perpendicularis ad planum $\mathfrak{b}'\mathfrak{ki}$, quod dicatur Q; quia $\mathfrak{Ck}$ perpendicularis ad $\mathfrak{kb}'$ et $\mathfrak{ki}$ est; et hinc etiam $\mathfrak{Ck}$ planis H et B communis, utrumque ad Q perpendiculare reddit, atque sectio planorum B et Q est recta $\mathfrak{ki}$. Hinc autem ex $\mathfrak{b}'$ (quod cum $\mathfrak{b}$ coincidens in plano Q ad B perpendiculari est) demissa ad B perpendicularis, necessario in $\overline{\mathfrak{ki}}$ cadit: quamobrem, quum perpendicularem hanc in $\mathfrak{d}$ cadere dictum sit, $\mathfrak{d}$ in $\overline{\mathfrak{ki}}$ et simul in $\mathfrak{Ch}$ cadit. Efformatur itaque triangulum $\mathfrak{bkd}$, in quo $\wedge \mathfrak{kdb}$ rectus, adeoque $= \wedge AB$ (id est angulo ipsorum A et B), $\wedge \mathfrak{dkb}$ vero $= \wedge HB = a$, atque latus $\mathfrak{b}'\mathfrak{k} = \sin. H$, et latus $\mathfrak{bd} = \sin. A$.

In triangulo rectilineo $\mathfrak{bkd}$ vero est

$$\mathfrak{bk} : \mathfrak{bd} = \sin. \text{tot.} : \sin. a,$$

id est

$$\sin. H : \sin. A = 1 : \sin. a$$

(*pro radio 1 computando omnia*), atque hinc

$$\sin. H = \frac{\sin. A}{\sin. a}.$$

Pariter (e Fig. 252*.) patet, esse

$$\sin. H : \sin. B = 1 : \sin. b,$$

atque hinc

$$\sin. H = \frac{\sin. B}{\sin. b}.$$

Consequenter

$$\frac{\sin. A}{\sin. a} = \frac{\sin. B}{\sin. b},$$

seu

$$\sin. A : \sin. B = \sin. a : \sin. b.$$

Hinc *in quovis triangulo sphaerico, quaecunque duo latera* A, B *accipiantur, erunt sinus laterum uti sinus angulorum oppositorum.*

Nam e vertice trianguli lateri C opposito, arcus circuli maximi perpendicularis D ad C demitti potest (pag. 277); cadetque hæc aut intra fines ipsius C, aut extra C, aut ad finem. In casu primo (Fig. 253. *a.*) est

$$\sin. A : \sin. D = 1 : \sin. b$$

et

$$\sin. B : \sin. D = 1 : \sin. a ;$$

nempe A, B hypotenusæ sunt, et D cathetus; et hinc

$$\sin. D = \sin. A \sin. b = \sin. B \sin. a ;$$

atque hinc

$$\sin. A : \sin. B = \sin. a : \sin. b.$$

In casu secundo (Fig. 253*b*.) autem est

$$\sin. A : \sin. D = 1 : \sin. b$$

et

$$\sin. B : \sin. D = 1 : \sin. a';$$

sed

$$a + a' = 2R,$$

itaque

$$\sin. a' = \sin. a ;$$

adeoque idem quod prius erat, pariter sequitur.

In casu tertio erit triangulum rectangulum, de quo (in præcedentibus) demonstratum est.

§. 3.

In triangulo rectangulo præter angulum rectum duo sunt data: aut *duo latera*, aut *duo anguli*, aut *unum latus et unus angulus*; duo latera sunt aut *catheti*, aut *hypotenusa et cathetus*; *duo anguli* sunt nonnisi illi, qui *hypotenusae adiacent*; *unum latus et unus angulus* autem sunt angulus *hypotenusae adiacens* et *cathetus* aut *adiacens angulo, aut ei oppositus*. Omnium horum autem resolutio sequitur (e præcedentibus) modo sequente. (Fig. 254.)

Trianguli rectanguli $\mathfrak{ABH}$ hypotenusa H et catheti A, B (si necesse fuerit) continuentur, donec per circulum maximum ex $\mathfrak{B}$ quadrantis intervallo in superficie sphæræ descriptum, secentur in $\mathfrak{h}$, $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$. Casus plures dantur: nempe A est aut $>$ aut $<$ aut $= R$; atque in quolibet casuum priorum sectio circuli, ex 𝔅 (tanquam polo) quadrantis intervallo descripti, cum B continuato aut cadet in H, aut inter H et A, aut ultra H.

Consideretur prius casus, ubi tam A, B quam $H < R$ (Fig. 254*a.*): manifesto ad 𝔞 angulus rectus est, adeoque 𝔥𝔟, 𝔞𝔟 quadrantes (pag. 277), atque 𝔅, 𝔟 poli arcuum 𝔞𝔥, 𝔞𝔥 sunt, adeoque $\mathfrak{ah} = \wedge b$, $\mathfrak{ha} =$ angulo ad polum 𝔟; præterea patet, A', B', b', H' complementa ipsorum A, B, b, H esse. In $\triangle$ 𝔟𝔄𝔥 (ubi verticales a sunt æquales), est

$$\text{I.} \qquad 1 : \sin. a = \sin. B' : \sin. b' = \cos. B : \cos. b;$$

et in $\triangle$ 𝔄𝔅𝔥 *sinus totus ad sinum anguli, uti cosinus catheti adiacen tis ad cosinum anguli oppositi*; atque hinc

$$\sin. a = \frac{\cos. b}{\cos. B},$$

quo valore substituto in proportione, quæ in $\triangle$ 𝔄𝔅𝔥 est, nempe in

$$\sin. a : \sin. b = \sin. A : \sin. B,$$

fit

$$\frac{\cos. b}{\cos. B} : \sin. b = \sin. A : \sin. B,$$

et hinc

$$\sin. b \sin. A = \frac{\cos. b \,.\, \sin. B}{\cos. B} = \cos. b \operatorname{tang}. B;$$

et

$$\operatorname{tang}. B = \frac{\sin. b \sin. A}{\cos. b} = \sin. A \operatorname{tang}. b,$$

seu

$$\text{II.} \qquad 1 : \sin. A = \operatorname{tang}. b : \operatorname{tang}. B,$$

id est: *sinus totus ad sinum catheti, uti tangens anguli adiacentis ad tangentem lateris oppositi*; et hinc

$$\sin. A = \frac{\operatorname{tang}. B}{\operatorname{tang}. b} = \cot. b \operatorname{tang}. B,$$

et

$$\operatorname{tang}. B = \sin. A \operatorname{tang}. b.$$

III. In eodem triangulo 𝔟𝔄𝔥 est

$$\sin. B' : \sin. H' = 1 : \sin. A',$$

seu

$$\cos. B : \cos. H = 1 : \cos. A\,;$$

unde *e quibusvis duobus lateribus tertium prodit*, et

$$\cos. H = \cos. A \cos. B.$$

IV. In eodem triangulo (per II.) est

$$1 : \sin. b' = \operatorname{tang.} A' : \operatorname{tang.} H',$$

seu

$$1 : \cos. b = \cot. A : \cot. H = \operatorname{tang.} H : \operatorname{tang.} A\,;$$

quia

$$\frac{\cos. A}{\sin. A} : \frac{\cos. H}{\sin. H} = \frac{\sin. H}{\cos. H} : \frac{\sin. A}{\cos. A}$$

(per factum extremorum mediorumque $=1$).

Id est *sinus totus ad cosinum anguli, uti tangens hypotenusae ad tangentem catheti angulo adiacentis.*

V. Item (per II.) in eodem triangulo est

$$1 : \sin. H' = \operatorname{tang.} a : \operatorname{tang.} b',$$

seu

$$1 : \cos. H = \operatorname{tang.} a : \cot. b,$$

id est *sinus totus ad cosinum hypotenusae, uti tangens anguli adiacentis ad cotangentem alterius.*

E quibus resolutiones quæsitæ patent. Sequitur etiam ex II., ubi $\operatorname{tang.} B = \sin. A \operatorname{tang.} b$ erat, quod si cathetus $>$ vel $=$ aut $<R$, et angulus ei oppositus $> =$ aut $<R$ sit; nam $\sin. A$ positivus est, itaque $\operatorname{tang.} B$ et $\operatorname{tang.} b$ (nisi $B = R = b$) simul positivæ aut simul negativæ esse debent, ut æqualitas locum habeat; tangens enim anguli obtusi negativa est, et recti infinita est, $\sin. A$ vero finitum est.

Ex III. autem, ubi $\cos. H = \cos. A \cos. B$, sequitur, quod si $H > R$, alteruter cathetorum tantum $>R$; et si $H < R$, tum uterque $>$ vel $<R$ est; si vero $H = R$, tum alterutrum saltem cathetorum item rectum esse oportet. Nam cosinus anguli obtusi negativus est, et $\cos. R = 0$;

itaque si $H = R$, fiet $0 = \cos. A \cos. B$; adeoque sive $\cos. A$ sive $\cos. B$ vel utrumque 0 est, quod, nisi A vel $B = R$ sit, fieri nequit. Ita si $\cos. H$ negativus fuerit, sive $\cos. A$ sive $\cos. B$ negativus erit; at si $\cos. H$ positivus fuerit, tam $\cos. A$ quam $\cos. B$ simul positivus vel simul negativus esse debet.

Ut tamen dicta generaliter valeant, casus omnes supra dicti percensendi sunt, quos (Fig. 254.) exhibet: demonstratio autem eadem in quovis casu erit, dummodo complementum arcus rite sumatur (nempe complementum 100 graduum -10° est), et angulorum se invicem ad $2R$ complentium sinus idem accipiatur, atque complementa literis iisdem accento insigniantur; reflectaturque polum esse in sectione duarum perpendicularium, et anguli ad polum quantitatem esse arcum circuli maximi ad quadrantis distantiam interceptum. Si $A = R$, tum etiam (pag. 295) $a = R = A$, adeoque $B = b$; atque $1 : \sin. a = \cos. B : \cos. b$ (ex I.) fit $1 : 1 = 1 : 1$. Casus reliquos singulos percensere Tyronum exercitio relinquitur.*

§. 4.

Si e vertice quovis trianguli sphærici ad latus oppositum C perpendicularis D demittatur (pag. 277), tres casus sunt: cadet nempe D aut intra fines ipsius C, aut ad finem, aut extra fines. Eritque (Fig. 253.

I. (e præcedente II.)

* Applicando (Tom. I. pagg. 531—532) dicta Tyronibus relicta facile sequent. Nempe (Fig. 254. b. dum $H = R$ et $A < R$, est b polus arcus A (propter R et R); itaque et

$$b = B = R \quad \text{et} \quad a = A;$$

atque iuxta (pag. 294) in I fit

$$1 : \sin. a = 0 : 0;$$

in II. fit

$$1 : \sin. A = \infty : \infty,$$

nempe

$$\text{tang. } b = \text{tang. } B = \infty;$$

in III. fit

$$0 : 0 = 1 : \cos. A,$$

in quo casu ex H et B cathetus alter A haud innotescit; in IV. fit

$$1 : 0 = \infty : \text{tang. } A$$

et in V. fit

$$1 : 0 = \text{tang. } a : 0.$$

(Errata Ed. I. Tom. II. pag. 371).

$$1 : \sin M = \text{tang.}\, b : \text{tang.}\, D \qquad \text{et} \qquad 1 : \sin.\, N = \text{tang.}\, a : \text{tang.}\, D$$

atque hinc

$$\sin.\, M : \sin.\, N = \text{tang.}\, a : \text{tang.}\, b\,;$$

II. (e præcedente III.)

$$1 : \cos.\, M = \cos.\, D : \cos.\, A \qquad \text{et} \qquad 1 : \cos.\, N = \cos.\, D : \cos.\, B$$

atque hinc

$$\cos.\, M : \cos.\, N = \cos.\, A : \cos.\, B.$$

Notandum autem: quod si D extus cadat, a obtusus sit, adeoque angulus deinceps positus a' acutus erit; adeoque in linea secunda tang. a negativa sit $= -$ tang. a'; itaque N in hoc casu negative accipiendum est, ut proportio valeat (Tom. I. pag. 42); valebit enim hoc pacto; nam tum sin. N erit negativus, et tang. a quoque negativa, atque D erit $< R$, quum angulus oppositus $a' < R$ sit, adeoque tang. D positiva erit; itaque ordo signorum erit $+ - - +$.*

§. 5.

Atque hinc (ex §. 3. IV.) est

$$1 : \cos.\, b = \text{tang.}\, A : \text{tang.}\, M,$$

adeoque

$$\text{tang.}\, M = \cos.\, b\ \text{tang.}\, A.$$

Estque (e §. 4. I.)

$$\sin.\, M : \sin.\, N = \text{tang.}\, a : \text{tang.}\, b,$$

et hinc (quia $N = C - M$) fit

$$\sin.\, M : (\sin.\, C \cos.\, M - \cos.\, C \sin.\, M) = \text{tang.}\, a : \text{tang.}\, b;$$

* Si (Fig. 253. $a-c$.) hypotenusa $A = R$ fuerit, in singulis tribus casibus $M = R$ (nisi $b = R$, adeoque triangulum ABC rectangulum sit); quia tum (pag. 295) alterutrum cathetorum $= R$ esse oportet, si vero D esset R, tum b quoque R esset. *Erit igitur* 𝔅 *polus ipsius* D, et $m = R$, atque $D = b$ in duobus casibus prioribus, in tertio vero D æquale deinceps posito ipsius b. Unde formulæ applicatæ patent.

et dividendo per $\cos. M$, fit

$$\operatorname{tang}. M : (\sin. C - \cos. C \operatorname{tang}. M) = \operatorname{tang}. a : \operatorname{tang}. b;$$

atque hinc

$$\frac{\sin. C \operatorname{tang}. a}{\operatorname{tang}. b + \cos. C \operatorname{tang}. a} = \operatorname{tang}. M,$$

quod $= \cos. b . \operatorname{tang}. A$ erat. Atque hinc

$$\sin. C \operatorname{tang}. a = \cos. b \operatorname{tang}. A \operatorname{tang}. b + \cos. C \operatorname{tang}. a \cos. b \operatorname{tang}. A;$$

et per $\operatorname{tang}. a \operatorname{tang}. A$ dividendo, et ipsi $\operatorname{tang}. b$ substituendo $\frac{\sin. b}{\cos. b}$, fit

$$\sin. C \cot. A = \sin. b \cot. a + \cos. b \cos. C;$$

e quo, si *latera A et C cum angulo intercepto b* data fuerint, *reperitur angulus a*.

Ita (in §. 5) ex

$$\operatorname{tang}. M = \cos. b \operatorname{tang}. A,$$

fiet

$$\infty = \cos. b . \infty.$$

Eritque in triangulo rectangulo, cuius catheti N et D, hypotenusa B est, in casu primo

$$N = C - M,$$

in secundo $-(C - M)$, in tertio $C + M$; adeoque in primo est

$$\sin. N = -\cos. C$$

(pag. 131), in secundo et tertio est $\cos. C$; atque angulus adiacens est a in primo et tertio, in secundo $2R - a$. Atque (pag. 294, II.) in primo est

$$1 : \sin. N = \operatorname{tang}. a : \operatorname{tang}. D$$

seu

$$1 : -\cos. C = \operatorname{tang}. a : \operatorname{tang}. b,$$

in secundo

$$1 : \sin. N = \operatorname{tang}. (2R - a) : \operatorname{tang}. D$$

seu

$$1 : \cos. C = -\operatorname{tang}. a : \operatorname{tang}. b,$$

in tertio

$$1 : \sin. N = \operatorname{tang}. a : \operatorname{tang}. D$$

seu

$$1 : \cos. C = \operatorname{tang}. a : -\operatorname{tang}. b.$$

Itaque

$$\operatorname{tang}. a = -\frac{\operatorname{tang}. b}{\cos. C};$$

atque hinc et pro $A = R$ valet formula (pagg. 291, 298); nempe ibidem

$$\cot. a = \frac{\sin. C . \cot. A - \cos. b . \cos. C}{\sin. b};$$

quod pro $A = R$ fit

$$= -\frac{\cos. b . \cos. C}{\sin. b};$$

§. 6.

Erat porro (§. 4. II.)

$$\cos. M : \cos. N = \cos. A : \cos. B,$$

et (quia $N = C - M$) fit

$$\cos. M : (\cos. C \cos. M + \sin. C \sin. M) = \cos. A : \cos. B;$$

hinc

$$\frac{\cos. M}{\cos. M} : \left(\frac{\cos. C \cos. M}{\cos. M} + \frac{\sin. C \sin. M}{\cos. M}\right) = \cos. A : \cos. B,$$

seu

$$1 : (\cos. C + \sin. C \operatorname{tang}. M) = \cos. A : \cos. B;$$

et (§. 5.)

$$\frac{\cos. B - \cos. C \cos. A}{\sin. C \cos. A} = \operatorname{tang}. M = \cos. b \operatorname{tang}. A.$$

Atque hinc

$$\cos. b = \frac{\cos. B - \cos. C \cos. A}{\sin. C \cos. A \operatorname{tang}. A}$$

quod item

$$= \frac{\cos. B - \cos. C \cos. A}{\sin. C \sin. A},$$

quia $\operatorname{tang}. A = \frac{\sin. A}{\cos. A}$.

Datis igitur tribus lateribus, reperitur angulus lateri cuivis B oppositus.

§. 7.

Ex hoc etiam sequitur modus e datis tribus angulis latus cuivis oppositum reperiendi.

nempe

$$\frac{1}{\operatorname{tang}. a} = \cot. a,$$

$$1 : -\frac{\operatorname{tang}. b}{\cos. C} = -\frac{\cos. C}{\operatorname{tang}. b};$$

atque hinc

$$\cot. a = -\frac{\cos. C \,.\, \cos. b}{\sin. b} \text{ (seu } -\cot. b \,.\, \cos. C).$$

Si et $D = R$, tunc etiam $B = R$, et triangulum rectangulum est; atque tunc

$$a = R = b, \qquad \text{et} \qquad \cot. a = -\cot. b \cos. C = 0.$$

(Errata Ed. I. Tom. II. pagg. 371—372).

Sit enim (Fig. 255.) $\triangle\, \mathfrak{abc}$, et verticibus pro polis acceptis, descriptisque quadrantis intervallo arcubus, orietur triangulum novum $\alpha\beta\gamma$, cuius angulus quivis latus prioris trianguli illi angulo oppositum ad $2R$ complet (pag. 279).

Erit (per præcedentia)

$$\cos.\omega = \frac{\cos.\beta - \cos.\alpha \cos.\gamma}{\sin.\alpha \sin.\gamma}.$$

Sed arcus se invicem ad $2R$ complentes sinu eodem gaudent, imo et cosinus nonnisi in eo differunt, quod arcus quadrante minoris positivus sit, et eum ad $2R$ complentis negativus sit: itaque

$$\cos.\omega = -\cos.B, \quad \cos.\beta = -\cos.b, \quad \cos.\alpha = -\cos.a,$$

et

$$\cos.\gamma = -\cos.c; \quad \sin.\alpha = \sin.a, \quad \sin.\gamma = \sin.c.$$

Consequenter

$$-\cos.B = \frac{-\cos.b - (-\cos.a)(-\cos.c)}{\sin.a \sin.c};$$

adeoque

$$\cos.B = \frac{\cos.b + \cos.a \cos.c}{\sin.a \sin.c}.$$

Unde etiam, quum per angulos a, b, c singula latera, nempe A, B, C, determinentur, atque per trium laterum æqualitatem in duobus triangulis, in eadem sphæra ponatur æqualitas triangulorum (pag. 224): manifesto in eadem sphæra per solam angulorum æqualitatem in duobus triangulis ponitur triangulorum æqualitas.

§. 8.

Trianguli sphærici $\mathfrak{ABC}$ (Fig. 243.) autem area t e radio r et angulis α, β, γ prodit modo sequente. Erat (pag. 281) S superficies sphæræ $= 2t + 2a + 2b + 2c$; sed

$$t + a = \frac{r^2 \pi \alpha}{R},$$

nam segmentum hoc a polo $\mathfrak{A}$ ad alterum $\mathfrak{a}$ toties minor ipso S est.

quoties minor $\wedge\alpha$ ipso $4R$ est; adeoque fit

$$4R:\alpha = 4r^2\pi : t+a.$$

Pariter est

$$t+b=\frac{r^2\pi\beta}{R} \qquad t+c=\frac{r^2\pi\gamma}{R};$$

adeoque

$$t+a+t+b+t+c=\frac{r^2\pi}{R}(\alpha+\beta+\gamma);$$

et

$$\frac{2r^2\pi}{R}(\alpha+\beta+\gamma)=2(t+a+t+b+t+c)=2t+2a+2b+2c+4t=S+4t;$$

et hinc

$$t=\frac{2r^2\pi}{4R}(\alpha+\beta+\gamma)-\frac{S}{4}=\frac{r^2\pi}{2R}(\alpha+\beta+\gamma)-r^2\pi=\frac{r^2\pi(\alpha+\beta+\gamma-2R)}{2R}.$$

Scholion 1. Formulæ ad casus quosvis calculo logarithmico adaptatæ reperiuntur in tabellis, tabulis trigonometricis plerumque adnexis.

Ex. gr. In §. 6. (pag. 299) erat

$$\cos. b=\frac{\cos. B-\cos. C\cos. A}{\sin. C\sin. A}.$$

Sed erat (pag. 135) $\cos. b = 1-2\sin.^2\frac{1}{2}b$; et hinc

$$1-2\sin.^2\frac{1}{2}b=\frac{\cos. B-\cos. C\cos. A}{\sin. C\sin. A};$$

atque hinc

$$\cos. B-\cos. C\cos. A=\sin. C\sin. A-2\sin.^2\frac{1}{2}b\sin. C\sin. A,$$

et

$$\sin.^2\frac{1}{2}b=\frac{\cos. B-\cos. C\cos. A-\sin. C\sin. A}{-2\sin. C\sin. A}=\frac{\cos.(C-A)-\cos. B}{2\sin. C\sin. A}$$

Ponatur

$$C-A=x-y=d, \qquad B=x+y=s;$$

erit

$$x=\frac{B+C-A}{2}, \qquad y=\frac{B-C+A}{2};$$

nempe

$$\frac{s+d}{2}=x, \qquad \frac{s-d}{2}=y;$$

eritque

$$\cos.s=\cos.(x+y)=\cos.\frac{s+d}{2}\cos.\frac{s-d}{2}-\sin.\frac{s+d}{2}\sin.\frac{s-d}{2}$$

et

$$\cos.d=\cos.(x-y)=\cos.\frac{s+d}{2}\cos.\frac{s-d}{2}+\sin.\frac{s+d}{2}\sin.\frac{s-d}{2};$$

adeoque

$$\cos.d-\cos.s=2\sin.\frac{s+d}{2}\sin.\frac{s-d}{2}=$$

$$=\cos.(C-A)-\cos.B=2\sin.\frac{B+C-A}{2}\sin.\frac{B-C+A}{2};$$

quod item, si $\frac{A+B+C}{2}$ dicatur S, erit

$$=2\sin.(S-A)\sin.(S-C).$$

Consequenter

$$\sin.^2\frac{1}{2}b=\frac{\sin.(S-A)\sin.(S-C)}{\sin.A\sin.C},$$

et

$$\log.\sin.\frac{1}{2}b=\frac{\log.\sin.(S-A)+\log.\sin.(S-C)-\log.\sin.A-\log.\sin.C}{2}.$$

Quæ formula ab ea, quæ (pag. 143) in trigonometria plana pro angulo e tribus lateribus relata est, nonnisi in eo differt, quod in membro æquationis ad dextram sinus deleatur.

Pariter $\cos.\frac{1}{2}b$ reperitur; nempe sinus sæpe ambiguum esse potest, quum acuto obtusoque eum ad $2R$ complenti sinus idem respondeat; cosinus autem negative prodiens angulum recto maiorem indicet, uti tangens et cotangens. Est (pag. 135) $2\cos.^2\frac{1}{2}b-1=\cos.b$; atque hinc

$$\frac{\cos.B-\cos.(C+A)}{2\sin.C.\sin.A}=\cos.^2\frac{1}{2}b;$$

atque si B ponatur d, et $C+A$ ponatur s, fiet

$$\cos.B-\cos(C+A)=2\sin.\frac{A+B+C}{2}\sin.\frac{C+A-B}{2}$$

et

$$\cos.^2\frac{1}{2}b=\frac{\sin.S\sin.(S-B)}{\sin.A\sin.C}.$$

Scholion 2. Applicationes etiam quasdam trigonometriæ sphæricæ adferre in Tyronum gratiam supervacuum haud erit.

1. Satis omnium constat, dum sol in æquatore est, ubivis terrarum æquinoctium esse, exceptis polis ipsis: nam æquator et horizon duo circuli maximi bisecant se ubique, nisi coincidant, quod nonnisi pro polis fit; itaque ubivis præter polos, semicirculus est supra et infra horizontem; pro polis autem tunc totus circulus per 24 horas in horizonte percurritur; refractio (per se quoque variabilis) nunc haud consideratur.

Dicitur (Fig. 256.) sectio $\mathfrak{f}$ æquatoris $\mathfrak{afd}$ cum horizonte $\mathfrak{mfj}$, a meridiano $\mathfrak{mahP}$ versus orientem, *cardo orientis*; et si sol supra vel infra æquatorem sit, describatque apparenter circulum C æquatori parallelum: arcus horizontis a cardine orientis usque ad sectionem $\mathfrak{p}$ circuli C cum horizonte (a meridiano versus orientem) dicitur *amplitudo ortiva*; quæ post æquinoctium vernale in hemisphærium boreale, post æquinoctium autumnale autem in australe cadit. Itaque arcus $\mathfrak{fp}$ cadit æstate supra æquatorem, hieme infra.

Si a polo nostro $\mathfrak{P}$ ad alterum ducatur per $\mathfrak{p}$ (amplitudinis ortivæ a cardine orientis incipiendo finem) semicirculus, hic æquatorem secabit, fiat hoc in $\mathfrak{d}$; secet C meridianum supra horizontem in $\mathfrak{h}$, et æquator secet meridianum in $\mathfrak{a}$; erit $\mathfrak{ph}$ arcus solis ab ortu ad meridiem usque decurrendus, atque æquatoris arcus $\mathfrak{da}$ totidem graduum erit. Est vero motus terræ circa axem uniformis, et circuli paralleli cum æquatore revolutionem tempore 24 horarum simul absolvunt, et $\mathfrak{fa}$ quadrans a $\mathfrak{f}$ usque in meridianum 6 horas habet. Si igitur $\mathfrak{d}$ ultra $\mathfrak{f}$ sit, arcus $\mathfrak{fd}$ in tempus converti, et hoc tempus addi 6 horis debet (uti æstate fit); si vero $\mathfrak{d}$ inter meridianum et $\mathfrak{f}$ fuerit (ut hieme), tum $\mathfrak{fd}$ in tempus conversum e 6 horis subtrahendum est, ut tempus ab ortu ad meridiem prodeat; cuius duplum, diem totum supra horizontem, et differentia huius a 24 horis noctem exhibet.

In triangulo sphærico $\mathfrak{fpd}$ ad $\mathfrak{d}$ rectangulo, dato angulo b ad $\mathfrak{f}$, qui (nempe angulus plani æquatoris cum horizonte) *altitudo aequatoris* audit, datoque arcu $\mathfrak{dp}$ (latere B ipsi b opposito), qui est *declinationi* solis æqualis, reperitur arcus $\mathfrak{fd}$ (id est A) per (pag. 294); est nempe

$$\sin. A = \frac{\text{tang.} B}{\text{tang.} b} \quad \text{et} \quad \log. \sin. A = \log. \text{tang.} B - \log. \text{tang.} b,$$

pro radio 1 (pag. 140).

Dicitur nempe *declinatio* stellæ cuiusvis arcus circuli maximi a stella ad æquatorem perpendicularis; adeoque dum sol in 𝔭 oritur, eius declinatio 𝔭𝔡 est. Dicitur etiam 𝔣𝔡 *differentia ascensionalis* solis: nempe *recta ascensio* stellæ est arcus æquatoris ad orientem, e puncto æquinoctii vernalis usque ad arcum declinationis; et *obliqua ascensio* stellæ dicitur arcus æquatoris, ab eodem puncto vernali usque ad 𝔣 cardinem orientis, tanquam punctum æquatoris illud, quod cum stella simul in horizonte est, adeoque simul oritur; uti hic punctum 𝔣 æquatoris et sol in 𝔭 existens simul oriuntur. Patet itaque 𝔣𝔡 differentiam ascensionalem esse, eamque, dum sol in æquatore est, $= 0$ fieri; nam tum 𝔭 et 𝔣 coincidunt.

Si vero quæratur: pro declinatione B solis, quantanam altitudo b æquatoris esse debeat, ut dies ex. gr. 22 horarum fiat? Dimidium huius erit 11, unde subtracto 6, residuum 5 in gradus conversum erit $= A$; atque in triangulo sphærico ad 𝔡 rectangulo ex B et A reperietur b (per pag. 294), ubi $\text{tang.} B = \sin. A \, \text{tang.} b$.

Si quæstio eadem pro 24 horis fuerit: tum e dimidio ipsius 24 subtracto 6, manet 6; et hoc in arcum conversum æquale quadranti erit, itaque 𝔣 polus ipsius B erit; adeoque $B = b$; nempe declinatio solis æqualis altitudini æquatoris.

2. *Gnomonica* etiam, certo sensu ad *unicum problema reductum*, ope trigonometriæ sphæricæ facile resolvitur.

Concipiatur nempe terra quasi globus transparens vacuus superficie vitrea, solo axe opaco; et concipiatur sol sive in æquatore, sive ei parallele circulum describere, radio ad axem terræ perpendiculari, haud considerato eo motu solis annuo, quo apparenti diurno contrarie movetur quotidie.

Concipiatur porro planum quodvis P per centrum 𝔣 sphæræ (Fig. 257.) eam in circulo maximo C secans (sed extra polum, de quo inferius dicetur); et perpendicularis ad P e centro 𝔣 erecta secet superficiem in 𝔪, sintque poli 𝔓 et 𝔭; erit P loci 𝔪 *planum horizontale*, et recta 𝔪𝔣 *linea verticalis*, atque planum $\mathfrak{p}\mathfrak{m}\mathfrak{f}$ *planum meridiani* illius loci est; ac si demittatur ex $\mathfrak{p}$ (polo supra horizontem) perpendicularis $\mathfrak{p}\mathfrak{p}'$ ad P, $\wedge \mathfrak{p}\mathfrak{f}\mathfrak{p}'$ *altitudo poli* loci $\mathfrak{m}$ dicitur. Secet recta $\mathfrak{f}\mathfrak{p}'$ superficiem sphæræ in $\mathfrak{p}''$, erit arcus $\mathfrak{p}\mathfrak{p}''$ æqualis altitudini poli; et secet meridianus æquatorem in $\mathfrak{m}'$.

Dividatur æquator in partes æquales 24 (aut 2.24, 4.24 &) ab $\mathfrak{m}'$ incipiendo, fiantque per divisionis puncta circuli maximi ad polum: manifesto centrum et uterque polus, adeoque axis omnibus communis erit; dicuntur autem omnes hi *circuli horarii*, et anguli, quos cum quadrante $\mathfrak{p}\mathfrak{m}\mathfrak{m}'$ faciunt ad $\mathfrak{p}$, *anguli horarii* dicuntur.

Si iam sol in æquatore aut circulo ei parallelo, e meridiano $\mathfrak{p}\mathfrak{m}\mathfrak{m}'$ uniformiter motus, describat arcum quempiam α, erit α quoad gradus quantitas anguli, quem planum meridiani cum plano p per axem et solem posito facit; eruntque anguli verticales planorum horum æquales. Manifesto autem umbra axeos in planum p, et ad planum P infra axem cadit, (si non in hemisphærio boreali, fiet in australi); atque nonnisi punctum illud $\mathfrak{q}$ quæritur, in quo peripheria C per planum p secatur; tum enim recta $\mathfrak{f}\mathfrak{q}$, e centro $\mathfrak{f}$ ad $\mathfrak{q}$, linea horaria in plano P erit; id est si ex. gr. $\alpha = \frac{n \cdot 360°}{24}$ sit versus occidentem, dum umbra axeos tanquam stili in $\mathfrak{f}\mathfrak{q}$ cadet: erit tempus ante meridiem, ab ea n horis distans.

Innotescit autem $\mathfrak{f}\mathfrak{q}$ (Fig. 257*.) per angulum, quo a $\mathfrak{f}\mathfrak{p}''$ (nempe recta, in qua planum meridianum secat planum P) distat, e triangulo sphærico $\mathfrak{p}\mathfrak{p}''\mathfrak{q}$ ad $\mathfrak{p}''$ rectangulo; si enim detur A altitudo poli $=$ arcui $\mathfrak{p}\mathfrak{p}''$, et angulus horarius $b = \wedge \mathfrak{q}\mathfrak{p}\mathfrak{p}''$: prodit arcus $\mathfrak{q}\mathfrak{p}''$, nempe in triangulo sphærico ad $\mathfrak{p}''$ rectangulo latus B angulo b oppositum; scilicet (pag. 294) tang. $B =$ sin. A tang. b.

Atque ita lineæ pro quavis hora in P determinari poterunt; et quum sensu physico idem sit, sive per centrum sit P, sive P' ei parallelum per $\mathfrak{m}$ ad superficiem terræ positum fuerit, si et stilus umbram proiiciens axi terræ parallele ponatur; id est error sensibus perceptibilis inde, nec propter *refractionem* radiorum, nec *parallaxim* (id est angulum, quem rectæ e centro et superficie terræ ad solem faciunt) exsurgat: monstrabuntur per umbram stili horæ, si in P' e centro $\mathfrak{m}$ ducatur meridiana, id est sectio plani meridiani cum F', et eo scribatur XII; atque ad angulos repertos ductis lineis horariis, adscribantur numeri horarum, recedendo a XII per numeros XI, X, . . ., dum sol versus orientem est, et progrediendo per I, II, . . . sole ad occasum vergente. Et hoc præbet loco m *horologium horizontale.*

Sed eidem plano P parallelum quocunque ad superficiem terræ latum, simul cum omnibus lineis in eo designatis et axe, ita ut omnes lineæ locis prioribus parallelæ maneant, ubique idem monstrabunt, nempe horas pro loco m. Consequenter, si meridiani loci huius M differentia a meridiano loci m in arcu æquatoris data fuerit, hac in tempus conversa, nonnisi horarum numeros aliter scribere necesse erit; nempe si m ab M distet $\frac{360°}{24}$ versus orientem, ibi XII una hora citius eveniet, ita reliqua; adeoque XII pro I et XI pro XII & scribere oportet.

Quodvis planum P' autem in loco M fuerit, illud pro aliquo loco m horizontale erit; adeoque nonnisi illius loci *altitudo poli* et *distantia meridianorum* locorum m et M quærenda est: quod (quum res tota praxim respiciat) facile fit, erigendo e puncto p plani P' perpendicularem L, quæ punctum *zenith* loci m respicit, ponendoque per idem punctum p planum meridiani loci M, et ex eodem puncto ponendo rectam β axi terræ parallelam; angulus enim huius rectæ cum plano est æqualis altitudini poli in m, et angulus, quem planum per β ad P' perpendiculariter positum cum plano meridiani loci M (in quo β adest) facit, differentia meridianorum locorum m et M est; nimirum si β tanquam axis terræ spectetur, omnibus meridianis communis erit. Mensuratis itaque his duobus angulis, numeris per dicta mutatis, horologium pro M inserviet.

Scholion 3. Quum sphæra (ut dictum est) sola cum plano id commune habeat, ut circa quodvis sui punctum in se moveri queat: in hac arcus circuli maximi rectæ vicem subire, imo alii circuli quoque describi, et motus componi possunt. Ita si *per arcum* arcus circuli maximi, per *distantiam puncti* p a *puncto* b autem arcus pb, per *distantiam puncti* p *ab arcu C* arcus pp' ad C perpendicularis intelligatur, et p' *locus* puncti p ad *C reductus* dicatur, definitiones dictæ fient breviores: nempe stellæ distantia ab æquatore est *declinatio*, ab ecliptica *latitudo*, a horizonte *altitudo* (uti *poli altitudo*); distantia a puncto vernali (orientem versus) stellæ ad æquatorem reductæ *recta ascensio*, illius æquatoris puncti, quod sub cardine orientis stella oriente est, *obliqua ascensio*, ad eclipticam reductæ *longitudo*, et distantia a *cardine australi* stellæ ad horizontem reductæ *azimuth* dicuntur. Dividit nempe *meridianus* cum *meridionali* item verticali, (sive cum æquatore, quum utrumque ad meridianum perpendiculare sit) horizontem in quatuor quadrantes, fiuntque quatuor *cardines*, quorum duo meridiani et duo meridionalis *poli* fiunt, uti *zenith* in medio meridiani *polus* horizontis est.

'32.

Campum ampliorem peragrare, huius opusculi (si Deus valetudini *et alioquin* benignius faverit) supplemento reservaturus, in *Appendice* ea pars Matheseos applicatæ sequitur, quæ e Matheseos anno ad cursus physici annum relinqui haud potest: nempe *primae lineae Perspectivae*, *Gnomonicae*, et *Chronologiae*.

'32. Formæ quæ rectarum operationumque primitivarum numero certo generari nequeunt: ex. gr. si figuræ, quæ ita generari nequit, omnibus punctis rectæ ad idem punctum, vel ad eandem rectam parallelæ, cogitentur; et tanto magis si sectio formæ cuiuspiam cum complexu rectarum dictarum quæratur, quod etiam *Perspectivae* problema est, si figuræ vicem qualisvis forma subeat. Verbo omnes formæ, quæ motu e tribus aut pluribus composito, sive modo in arbore exposito per tres rectas perpendiculares, sive motu in quavis forma certa lege facto, generantur, una cum omnibus iis, quæ e compositione horum oriuntur, huc pertinent.